

Calcolabilità

Macchina di Turing

29/10

Abbiamo visto diversi modelli di calcolo, principalmente DFA/NFA e PDA. Sappiamo anche che ci sono linguaggi non riconoscibili da questi automi.

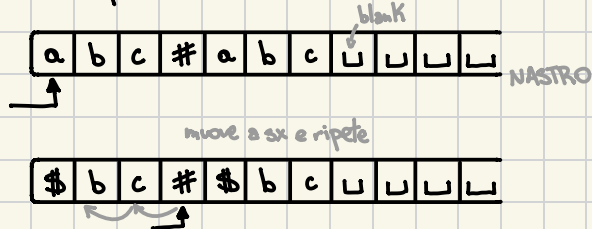
Le TM sono state introdotte da Turing nel 1936 e corrispondono al modello astratto di computer attuale. Vedremo che ci sono problemi intrinsecamente non risolvibili dai computer indipendentemente dalle risorse.

A livello intuitivo, una TM ha un **nastro** di lunghezza infinita; questo nastro contiene gli input. La TM può leggere/scrivere sul nastro e muovere la testina a sinistra e destra.

È inoltre presente uno stato di accettazione/rifiuto con effetto immediato.

es

Una TM per $L = \{w\#w : w \in \{0,1\}^*\}$ non riconoscibile da nessun automa

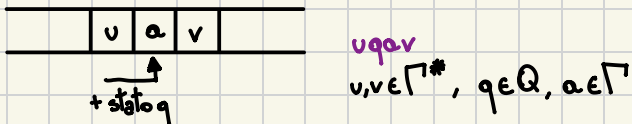


DEF Turing Machine

Una TM è una tupla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_{\text{start}}, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}})$ dove:

- $Q \rightarrow$ insieme finito di stati
- $\Sigma \rightarrow$ insieme finito di input ($L \in \Sigma$)
- $\Gamma \rightarrow$ insieme finito di simboli del nastro ($L \in \Gamma, \Sigma \subseteq \Gamma$)
- $\delta: Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, R\}$
- $q_{\text{start}}, q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}} \in Q \rightarrow$ stato iniziale, di accettazione e di rifiuto ($q_{\text{rej}} \neq q_{\text{acc}}$)

Le possibili **configurazioni** di una TM (stato, contenuto nastro, posizione testina) vengono rappresentate per convenzione tramite la seguente notazione



La configurazione iniziale è rappresentata da $q_{\text{start}}w$ dove w è l'input, mentre la configurazione di accettazione/rifiuto è rappresentata da $q \in \{q_{\text{acc}}, q_{\text{rej}}\}$

Possiamo dunque dire che

$$u a q_i b v \vdash_H u q_j a c v \quad \text{sse} \quad \delta(q_i, b) = (q_j, c, L)$$

$$\text{e similmente } u a q_i b v \vdash_H u a c q_j v \quad \text{sse} \quad \delta(q_i, b) = (q_j, c, R)$$

Abbiamo inoltre che M accetta $w \in \Sigma^*$ sse $c_{\text{start}} = q_{\text{start}}w$ è t.c. $c_{\text{start}} \vdash_H^* c_{\text{acc}}$ dove c_{acc} è una qualsiasi configurazione di accettazione.

DEF Linguaggi Turing riconoscibili

Un linguaggio è turing riconoscibile se \exists TM M che lo riconosce, ovvero $\forall w \in L$ abbiamo che M accetta w

oss Se $w \in L$ $M(w)$ può rifiutare o andare in loop, una **decisione** non va mai in loop $w \in L \Rightarrow M$ accetta w
 $w \notin L \Rightarrow M$ rifiuta w

DEF Decidibilità

L è turing decidibile se \exists TM M che lo decide (non va in loop)