

Linguaggi di programmazione

Numeri naturali

In base a chi lo si chiede si avranno risposte diverse sul dare una definizione di numeri naturali

es

$3 = \{\{3\}, \{\{3\}\}, \{\{\{3\}\}\}, \{\{\{\{3\}\}\}\}\}$ Von Neumann → definizione insiemistica

$3 = \lambda xy.x(x(y))$ Alonzo Church → definizione ricorsiva

Immaginiamo di parlare con un marziano e cerchiamogli di dare una definizione di successore nei numeri naturali (lui tenterà di smontarla, quindi bisogna fare attenzione) secondo gli assiomi di Peano

1. $0 \in \mathbb{N}$

2. $n \in \mathbb{N} \rightarrow \text{succ}(n) \in \mathbb{N}$

3. $\nexists n \text{ t.c. } 0 = \text{succ}(n)$

4. $\forall n, m \text{ succ}(n) = \text{succ}(m) \Rightarrow n = m$

5. $\forall S \subseteq \mathbb{N} \exists 0 \in S \quad \Rightarrow S = \mathbb{N}$

$\{n \in S \Rightarrow \text{succ}(n) \in S\}$

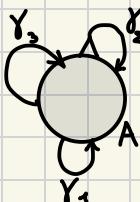
una proprietà e il sottoinsieme corrispondente sono in biezione (dal sottoinsieme posso ricavare la proprietà originale)

induzione

$$\begin{array}{c} \forall P \quad P(0) \quad P(n) \rightarrow P(n+1) \\ \hline \forall n \quad P(n) \end{array}$$

Definire un'algebra

(A, Γ) dove $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \dots\}$



Ma posso anche definire operazioni che prendono elementi dall'esterno

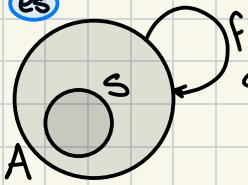
Chiusura di un'algebra

Sia $f: A^n \times K \rightarrow A$ una operazione su A con parametri esterni in $K = K_1 \times \dots \times K_m$.

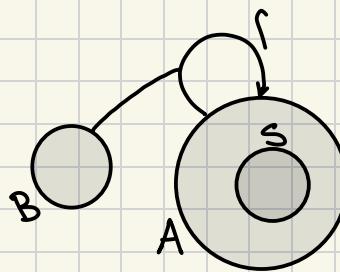
Un insieme $S \subseteq A$ si dice **chiuso** rispetto a f quando $a_1, \dots, a_n \in S \rightarrow f(a_1, \dots, a_n, K_1, \dots, K_m) \in S$

Ovvero è chiuso se per ogni input possibile che pesco da A e che proviene da S , questo rimane in f (quelli che provengono da $A \setminus S$ o dall'esterno non ci interessano)

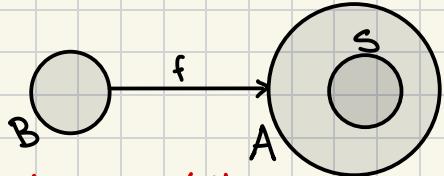
es



S è chiuso rispetto a f se
 $\forall x \in S \rightarrow f(x) \in S$



S è chiuso rispetto a f se
 $\forall x \in B, y \in A \rightarrow f(x, y) \in S$



S è chiuso rispetto a f se
 $\forall x \in B \rightarrow f(x) \in S$

Applicando la def vedremo che, visto che possiamo usare qualsiasi elemento di S , la seconda parte dell'implicazione (visto che prende input solo da B) è vera se per qualsiasi input di f finisce in S

Algebra induttiva

Un'algebra (A, Γ) si dice **induttiva** quando:

- tutte le γ_i sono iniettive

un elemento non può essere immagine

- tutte le γ_i sono disgiunte

di due funzioni differenti

- $\forall S \subseteq A$ se S è chiuso rispetto a tutte le γ_i allora $S = A$ → principio di induzione

es IN

in \mathbb{N} però abbiamo parlato dell'elemento 0 (ora non contemplato), definiamo quindi la seguente algebrā

$(\mathbb{N}, \{\emptyset, \text{succ}\})$ dove $\text{I} \xrightarrow{\emptyset} \mathbb{N}$, $\mathbb{N} \xrightarrow{\text{succ}} \mathbb{N}$

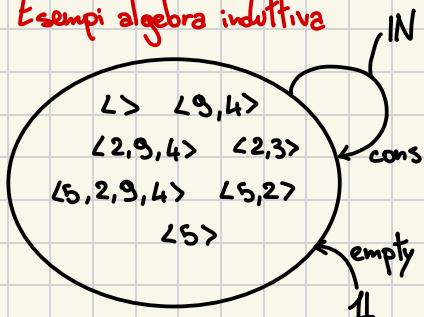
funzione che associa un insieme di un solo elemento all'elemento \emptyset in \mathbb{N}

Notiamo quindi che:

- tutte le γ_i sono iniettive
- tutte le immagini di γ_i sono disgiunte (\emptyset punta a \emptyset , mentre succ a tutti gli altri)
- \mathbb{N} è chiuso rispetto a succ
- \mathbb{N} è chiuso rispetto a \emptyset

Il costruire un'algebra induttiva mi garantisce che non esistono sottosalgabre in essa contenute. Inoltre tutte le algebre induttive sono **isomorfismi**

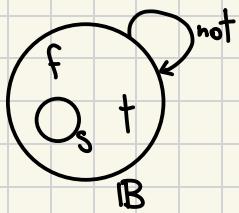
Esempio algebra induttiva



$\text{cons}(2, \langle 3, 4 \rangle) = \langle 2, 3, 4 \rangle \leftarrow$ con append non sarebbe stata induttiva, non disgiunta

L'insieme che contiene le liste finite è induttivo, mentre quello che contiene quelle finite e infinite poiché contiene l'algebra delle liste finite

esistono algebre induttive senza operazioni nullarie? exp.



L'insieme $S = \emptyset$ è chiuso poiché non ci sono elementi in S su cui poter applicare la funzione, la prima parte dell'implicazione della def. di chiusura è falsa, rimane solo da vedere se l'output è

X X X

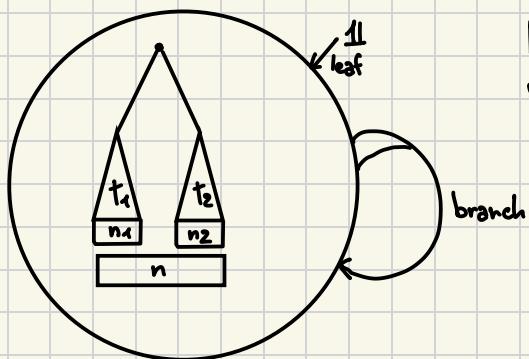
chiuso rispetto a not

con un costruttore che pesca solo da fuori
non lo era

TEOREMA

Un albero binario con n foglie ha $2n-1$ nodi
dim

Per dimostrarlo dovranno usare l'induzione strutturale



Nell'induzione strutturale assumiamo che la proprietà sia valida per t_1 e t_2

$$\begin{aligned} n &= n_1 + n_2 \\ (2n_1 - 1) + (2n_2 - 1) + 1 &= 2(n_1 + n_2) - 1 \end{aligned}$$

radice

\downarrow

n

Espresione link

Definiamo un linguaggio L come insieme di stringhe. Per descrivere la sintassi di linguaggi formali, usiamo la seguente sintassi:

$\langle \text{simbolo} \rangle ::= \langle \text{espressione} \rangle$

es

$M, N ::= s \mid ? \mid M+N \mid M*N$

$\underline{\quad} \quad \underline{\quad} \quad \underline{\quad}$ assegnazione "secca"

dove se M e N sono espressioni è possibile costruire un'altra espressione unendoli tramite "+" o "*"

Definiamo quindi una funzione $\text{eval}: \text{Exp} \rightarrow \text{IN}$

es elemento di Exp

$\text{eval}(s) = s$ elemento di IN

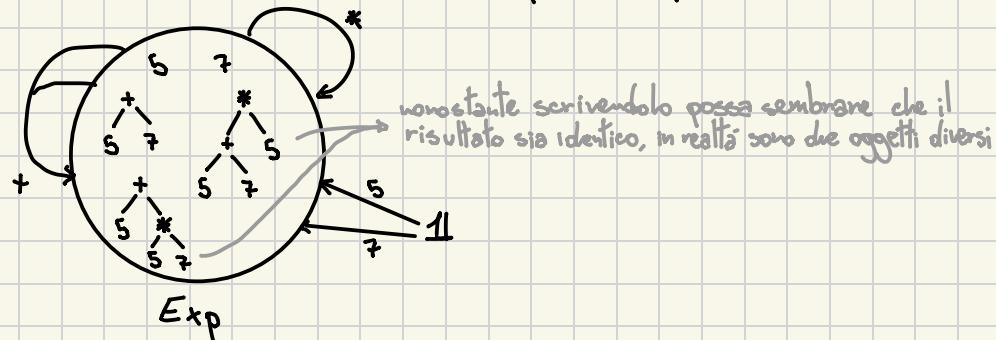
$\text{eval}(?) = ?$

$\text{eval}(M+N) = \text{eval}(M) + \text{eval}(N)$

$\text{eval}(M*N) = \text{eval}(M) * \text{eval}(N)$

$\text{eval}(\boxed{s+?*s}) = ?$

infatti in base a come considero l'espressione posso avere risultati diversi, dobbiamo quindi **disambiguare**



nonostante scrivendolo possa sembrare che il risultato sia identico, in realtà sono due oggetti diversi

sicuramente non si tratta di una grammatica induttiva, ma ho usato l'induzione per definirla

Equazione ricorsive di domini

es

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= 1\mathbb{N} + \mathbb{N} \\ L &= \mathbb{N} \cup (\mathbb{N} \times L) \end{aligned}$$

isomorfismo
list

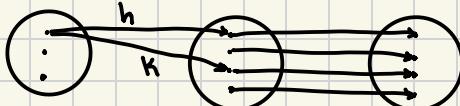
Brief sulla teoria delle categorie

Nella teoria delle categorie non si può usare la parola "elemento"

Come faccio quindi a descrivere un morfismo (funzione) f iniettivo (monomorfismo) non potendo parlare di elementi?

RIS $h \circ f = k \circ f \Rightarrow h = k$

$$A \xrightarrow{h} B \xrightarrow{k} C$$



essendo f iniettiva ad ogni elemento viene associato un elemento diverso del codominio, dunque nella composizione $h \circ f$ e $k \circ f$ risulta che gli elementi di destinazione sono esattamente gli stessi allora $h = k$

Segnatura di un'algebra

Due algebre (A, Γ_A) , (B, Γ_B) hanno la stessa segnatura se $\forall \gamma_A \in \Gamma_A \exists \gamma_B \in \Gamma_B$ con stessa aritmetà e se, sostituendo tutte le B in γ_B con A ottengo γ_A

es

algebra di D

$$\begin{aligned} f_D: A \times D &\rightarrow D \\ g_D: 1\mathbb{N} &\rightarrow D \\ h_D: A \times B \times D &\rightarrow D \end{aligned}$$

algebra di C

$$\begin{aligned} f_C: A \times C &\rightarrow C \\ g_C: 1\mathbb{N} &\rightarrow C \\ h_C: A \times B \times C &\rightarrow C \end{aligned}$$

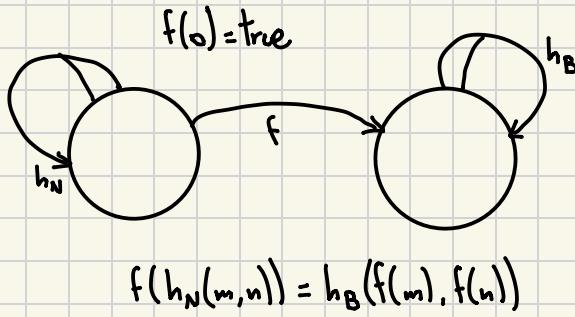
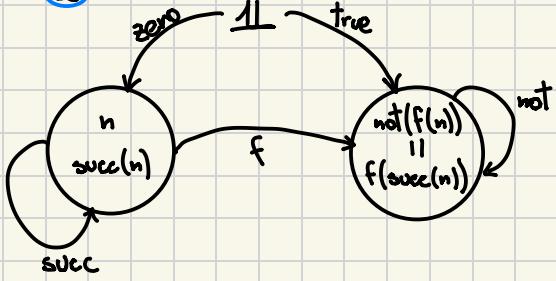
D e C hanno la stessa segnatura

Omomorfismo

Due algebre con la stessa segnatura (A, Γ) e $(B, \Delta = \{\delta_1, \dots, \delta_K\})$, un omomorfismo è una funzione $A \rightarrow B$ tale che:

$$\forall i: f(\gamma_i(a_1, \dots, a_n)) = \delta_i(f(a_1), \dots, f(a_n)) \quad \text{rispetta le operazioni}$$

es



Se applico l'operazione da una parte o dall'altra il risultato non cambia, e lo devo fare per tutte le operazioni dell'algebra

TEOREMA

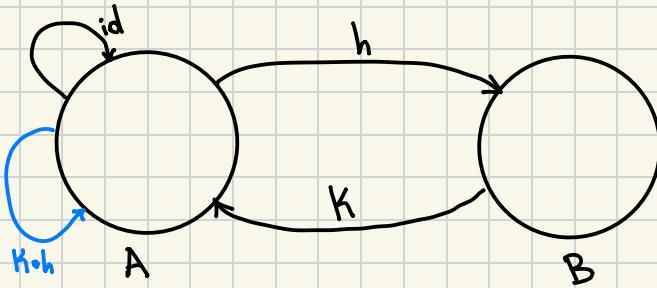
Prese due algebre induttive che hanno la stessa segnatura allora esiste un unico omomorfismo

DEF Isomorfismo

Un isomorfismo è un omomorfismo in cui la funzione è una biezione

LEMMA di Lambek

Avendo due algebre induttive esistono due omomorfismi (nelle due direzioni) e componendoli otteniamo un ulteriore omomorfismo



componendo h e K otteniamo dunque, per quanto detto, un ulteriore omomorfismo, ma in A già esiste un omomorfismo ovvero l'identità. Per il teorema precedente però può esistere un solo omomorfismo dunque $id = K \circ h$

da ciò si deduce che K e h sono inversi per cui la loro composizione è chiaramente biettiva, il che ci fa concludere che $K \circ h$ è un isomorfismo

Lingaggio Exp link

es

$M, N, L ::= K | x | M + N | let x = M in N$ ↗ ML Standard

dove:

- $K \rightarrow$ costante

- $x \rightarrow$ variabile $\in Var$

- $let x = M in N \rightarrow$ assegna a x il valore M all'interno di N

Vediamo alcuni esempi di uso:

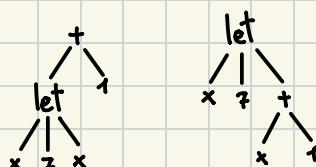
$let x = 3 in x + x + 2 \Rightarrow 8$

$let x = 1 + 2 in 4 \Rightarrow 4$

$let x = let y = 3 in y + 1 in x + y \Rightarrow 7$

$let x = 7 in x + 1 \Rightarrow ??$

quest'ultima espressione può creare ambiguità
dato che può essere doppiamente interpretata



DEF Variabili libere e legate

Una variabile x si dice **libera** se data un'exp $let x = M in N$, x non compare in N

Si dice invece **legata** se invece compare in N

es

$let x = 5 in x + x$ ↗ legata
libera

DEF free

Definiamo la funzione free: $Exp \rightarrow \wp(Var)$ che restituisce l'insieme delle variabili libere di un'espressione

es

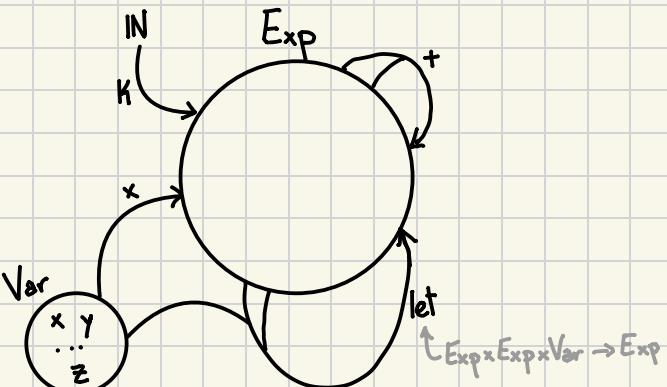
$free(let x = 7 in x + y) = \{y\}$

$free(K) = \emptyset$

$free(x) = \{x\}$

$free(M + N) = free(N) \cup free(M)$

$free(let x = M in N) = free(M) \cup (free(N) - x) \leftarrow free(let x = x in x) = x$



Semantica operazionale

La semantica operazionale permette di rispondere alla domanda quanto fa, permettendoci di eliminare le ambiguità viste finora

Definisco quindi un'operazione per calcolare il valore, ma dipende anche dall'**ambiente** che si sta considerando

$$M \in \text{Exp} \times \text{Env} \rightsquigarrow \text{Val}$$

dove $\rightsquigarrow \subseteq \text{Exp} \times \text{Exp} \times \text{Val}$

↑
associazione tra
variabile e valore

↑
ambiente in cui
valutare Exp

Poiché ci sono casi in cui non viene restituito alcun risultato, si tratta quindi di una **relazione** e non di una funzione

Mi sto quindi chiedendo se $(M, E, v) \in \rightsquigarrow$

questa
espressione
ha questo
valore

es

$$(\text{let } x=3 \text{ in } x+1, [x \mapsto 7], 10) \in \rightsquigarrow$$

$$(s, [E], 7) \notin \rightsquigarrow$$

Passiamo ora a una notazione più snella

deduzione

$$\boxed{E \vdash M \rightsquigarrow v}$$

↓ sequenze

che si legge "M deduce E con valore v"

deduzione:

$$A, A \rightarrow B \vdash B$$

pioggia → se pioggia porta l'ombrelllo

deduco che
f ha l'ombrelllo

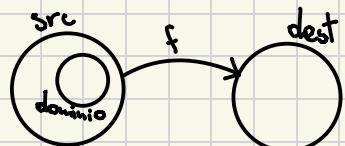
conseguenza logica ≠ deduzione

Ambiente

L'ambiente è una funzione parziale a dominio finito da variabile a valore

dominio finito

$$E: \text{Var} \xrightarrow{\text{fin}} \text{Val}$$



$$f: \text{src} \longrightarrow \text{dest}$$

$$(E_1, E_2)(x) = \begin{cases} E_2(x) & \text{se } x \in \text{dom}(E_2) \\ E_1(x) & \text{altrimenti} \end{cases}$$

es

$$E_1 = \{(z, 3), (y, 9)\}$$

$$E_2 = \{(z, 4)\}$$

$$(E_1, E_2)(y) = 9$$

$$(E_1, E_2)(z) = 4$$

Regola di inferenza eager

- ① $E \vdash K \rightsquigarrow K$ const
 ② $E \vdash x \rightsquigarrow E(x)$ x non esiste non esiste nessuna triple var
 ↗ quando fa x
 nell'ambiente E ?

- $$\textcircled{3} \quad \begin{array}{c} E \vdash M \rightsquigarrow v_1 & E \vdash N \rightsquigarrow v_2 \\ \hline E \vdash M + N \rightsquigarrow v \end{array} \quad (\text{dove } v = v_1 + v_2) \quad \begin{array}{l} \text{condizioni laterali} \\ \text{plus} \end{array}$$

conclusione

- $$\begin{array}{c} \textcircled{4} \\ \text{valuta M con E} \\ \text{e mettilo in } v \\ \text{E} \vdash M \rightsquigarrow v \\ \hline \text{E} \vdash \text{let } x = M \text{ in } N \rightsquigarrow v' \end{array} \quad \begin{array}{c} \text{valuta N con E insieme a} \\ (x, v) \text{ e mettilo in } v' \\ \text{E} \{ (x, v) \} \vdash N \rightsquigarrow v' \\ \text{let} \end{array}$$

- es** $\emptyset \vdash \text{let } x = 3 \text{ in } ((\text{let } x = (\text{let } y = 2 \text{ in } x+y) \text{ in } x+7) + x)$

adesso applichiamo le regole di inferenza dall'esterno all'interno

per prima uso quella del
let, spostando la parentesi
se rebbe stata quella del +

$$\begin{array}{c}
 \frac{(x,3)(y,2) \vdash x \rightsquigarrow 3 \quad (x,3)(y,2) \vdash y \rightsquigarrow 2}{(x,3) \vdash 2 \rightsquigarrow 2} \text{ plus} \\
 \frac{(x,3) \vdash 2 \rightsquigarrow 2 \quad (x,3)(y,2) \vdash x+y \rightsquigarrow 5}{(x,3) \vdash \text{let } y = 2 \text{ in } x+y \rightsquigarrow 5} \text{ let} \\
 \frac{(x,3) \vdash \text{let } y = 2 \text{ in } x+y \rightsquigarrow 5 \quad (x,3)(x,5) \vdash x+7 \rightsquigarrow 12}{(x,3) \vdash \text{let } x = (\text{let } y = 2 \text{ in } x+y) \text{ in } x+7 \rightsquigarrow 12} \text{ let} \\
 \frac{(x,3) \vdash \text{let } x = (\text{let } y = 2 \text{ in } x+y) \text{ in } x+7 \rightsquigarrow 12 \quad (x,3) \vdash x \rightsquigarrow 3}{\emptyset \vdash 3 \rightsquigarrow 3} \text{ plus} \\
 \frac{\emptyset \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad \{(x,3)\} \vdash (\text{let } x = (\text{let } y = 2 \text{ in } x+y) \text{ in } x+7) + x \rightsquigarrow 15}{\emptyset \vdash \text{let } x = 3 \text{ in } ((\text{let } x = (\text{let } y = 2 \text{ in } x+y) \text{ in } x+7) + x) \rightsquigarrow 15} \text{ let}
 \end{array}$$

L'approccio eager però ha uno svantaggio, infatti in un caso del tipo `let x = f() in f` viene valutato prima il "mostro" nonostante in questo caso non sia assolutamente necessario.

Semantica lazy-dinamica

Rispetto alle regole di inferenza eager cambiano quella del let e quella della variabile

- $$\textcircled{1} \quad \frac{E \vdash M \rightsquigarrow v}{E \vdash x \rightsquigarrow v} (\text{se } E x = M) \quad \text{var}$$

- oss $\emptyset \vdash \text{let } x = y \text{ in let } y = 7 \text{ in } x$ in lazy dinamico
f2 7 ma dovrebbe essere non definito

- $$\textcircled{2} \quad \frac{E(x,M) \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash \text{let } x = M \text{ in } N \rightsquigarrow v} \text{ let}$$

- (es) let $x=2$ in let $y=x+1$ in let $x=7$ in y

eager

$$\frac{(x,2) \vdash x \rightsquigarrow 2 \quad (x,2) \vdash 1 \rightsquigarrow 1}{(x,2) \vdash x+1 \rightsquigarrow 3} \quad \frac{(x,2)(y,3) \vdash ? \rightsquigarrow ? \quad (x,2)(y,3)(x,?) \vdash y \rightsquigarrow 3}{(x,2)(y,3) \vdash \text{let } x=? \text{ in } y \rightsquigarrow 3}$$

- $\emptyset \vdash 2 \rightsquigarrow 2$ $(x, 2) \vdash \text{let } y = x + 1 \text{ in let } x = 7 \text{ in } y \rightsquigarrow 3$

- $\emptyset \vdash \text{let } x = 2 \text{ in let } y = x + 1 \text{ in let } x = 7 \text{ in } y \rightarrow 3$

lazy-dinamico

$$\begin{array}{l}
 \frac{(x, z)(y, x+1)(x, z) \vdash x \rightsquigarrow z}{(x, z)(y, x+1)(x, z) \vdash x+1 \rightsquigarrow z} \quad \frac{(x, z)(y, x+1)(x, z) \vdash x \rightsquigarrow z}{(x, z)(y, x+1)(x, z) \vdash x+1 \rightsquigarrow z} \\
 \frac{(x, z)(y, x+1)(x, z) \vdash x+1 \rightsquigarrow z}{(x, z)(y, x+1)(x, z) \vdash y \rightsquigarrow z} \\
 \frac{(x, z)(y, x+1)(x, z) \vdash y \rightsquigarrow z}{(x, z)(y, x+1) \vdash \text{let } x = z \text{ in } y \rightsquigarrow z} \\
 \frac{\emptyset (x, z) \vdash \text{let } y = x+1 \text{ in let } x = z \text{ in } y \rightsquigarrow z}{\emptyset (x, z) \vdash \text{let } y = x+1 \text{ in let } x = z \text{ in } y \rightsquigarrow z}
 \end{array}$$

diverso

Introducendo il lazy ci siamo esposti al problema dello scoping (in questo caso è dinamico). La semantica lazy-dinamica è considerata "sbagliata" poiché ci dà un risultato diverso dalle altre 3 combinazioni di metodologie.

Semantica lazy-statica

Rispetto alle regole di inferenza eager cambiano quella del let e quella della variabile.

①

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow v}{E' \vdash x \rightsquigarrow v} \quad (\text{se } E'(x) = (M, E)) \quad \text{var}$$

②

$$\frac{E(x, M, E) \vdash N \rightsquigarrow v}{E \vdash \text{let } x = M \text{ in } N \rightsquigarrow v} \quad \text{let} \quad E : \text{Var} \xrightarrow{\text{fin}} \text{Exp} \times \text{Env}$$

OSS in questo caso let $x = \dots$ in $x+x+x+x+x$ la semantica lazy è molto lenta (devo ricalcolare ogni volta x)

es

$$\begin{array}{c} \frac{\emptyset \vdash 2 \rightsquigarrow 2}{(x, 2, \emptyset) \vdash x \rightsquigarrow 2} \quad \frac{}{(x, 2, \emptyset) \vdash 1 \rightsquigarrow 1} \\ \frac{(x, 2, \emptyset) \vdash x+1 \rightsquigarrow 3}{E(x, 7, E) \vdash y \rightsquigarrow 3} \\ \hline E \leftarrow \frac{(x, 2, \emptyset)(y, x+1, (x, 2, \emptyset)) \text{ let } x=7 \text{ in } y \rightsquigarrow 3}{(x, 2, \emptyset) \vdash \text{let } y=x+1 \text{ in let } x=7 \text{ in } y \rightsquigarrow 3} \\ \hline \emptyset \vdash \text{let } x=2 \text{ in let } y=x+1 \text{ in let } x=7 \text{ in } y \rightsquigarrow 3 \end{array}$$

TEOREMA

Semantica eager e lazy-statica sono equivalenti.

	statico	dinamico
lazy	○	✗
eager	○	○

il linguaggio Exp è troppo semplice per poter cogliere la differenza tra eager statico e dinamico

Linguaggio Fun
 $M, N ::= S \mid x \mid M+N \mid \text{let } x = M \text{ in } N \mid f_n \ x \Rightarrow M \mid MN$

es

$$(f_n \ x \Rightarrow x+1) \ S \rightsquigarrow 6$$

M N

↳ funzione M applicata a argomento N

$$(f_n \ x \Rightarrow x+1)(f_n \ z \Rightarrow z)$$

restituisce la funzione alla quale
se passo in input una funzione
restituisce una funzione

$$[(f_n \ x \Rightarrow [f_n \ y \Rightarrow y(x+1)]) \ S_2] (f_n \ z \Rightarrow z+1) \rightsquigarrow S_4$$

z \Rightarrow z+1 S_2

si possono non solo avere valori in output ma anche intere funzioni
 $(f_n \ z \Rightarrow z)(f_n \ x \Rightarrow x+1) \rightsquigarrow f_n \ x \Rightarrow x+1$

oss esistono termini che non hanno una semantica (leggibili da scrivere ma che non danno alcun risultato)
come ad esempio $S(f_n \ x \Rightarrow x+1)$

oss Fun non è né commutativo né associativo

Semantica eager dinamica

Inoltre a differenza di Exp, Env: var $\xrightarrow{\text{fun}}$ val dove val = {5, 42, ...} \cup (var \times Fun)

$$E \vdash f_n \ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M)$$

chiatura

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, M') \quad E \vdash N \rightsquigarrow v \quad E(x, v) \vdash M' \rightsquigarrow v'}{E \vdash MN \rightsquigarrow v'}$$

$$f_n \ x \Rightarrow x+1 \rightarrow \overbrace{(x, x+1)}^{\text{chiusura}}$$

es

$$\frac{\begin{array}{c} E' \vdash y \rightsquigarrow (z, 3) \quad E' \vdash s \rightsquigarrow E'(z, 5) \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \\ E \vdash f_n \ y \Rightarrow y \ S \rightsquigarrow (y, y5) \quad E \vdash f_n \ z \Rightarrow 3 \rightsquigarrow (z, 3) \quad E' \vdash (y, (z, 3)) \vdash y5 \rightsquigarrow 3 \quad E(x, 3) \vdash x \rightsquigarrow 3 \quad E(x, 3) \vdash x+1 \rightsquigarrow 4 \\ (z, (x, x+1)) \vdash z \rightsquigarrow (x, x+2) \quad E' \vdash (z, (x, x+1)) \vdash (f_n \ y \Rightarrow y5)(f_n \ z \Rightarrow 3) \rightsquigarrow 3 \quad (z, (x, x+1)) \vdash z \vdash [(f_n \ y \Rightarrow y5)(f_n \ z \Rightarrow 3)] \rightsquigarrow 4 \end{array}}{\emptyset \vdash f_n \ x \Rightarrow x+1 \rightsquigarrow (x, x+2)}$$

$\emptyset \vdash \text{let } z = (f_n \ x \Rightarrow x+1) \text{ in } z[(f_n \ y \Rightarrow y5)(f_n \ z \Rightarrow 3)] \rightsquigarrow 4$

$$\frac{\begin{array}{c} E' \vdash y \rightsquigarrow (z, 3) \quad E' \vdash s \rightsquigarrow E'(z, 5) \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \\ E \vdash f_n \ y \Rightarrow y \ S \rightsquigarrow (y, y5) \quad E \vdash f_n \ z \Rightarrow 3 \rightsquigarrow (z, 3) \quad E' \vdash (y, (z, 3)) \vdash y5 \rightsquigarrow 12 \\ (x, 3) \vdash f_n \ z \Rightarrow z+x \rightsquigarrow (z, z+x) \quad E' \vdash (x, 3)(y, (z, z+x)) \vdash \text{let } x=7 \text{ in } y5 \rightsquigarrow 12 \\ \emptyset \vdash 3 \rightsquigarrow 3 \quad (x, 3) \vdash \text{let } y = (f_n \ z \Rightarrow z+x) \text{ in let } x=7 \text{ in } y5 \rightsquigarrow 12 \\ \emptyset \vdash \text{let } x=3 \text{ in let } y = (f_n \ z \Rightarrow z+x) \text{ in let } x=7 \text{ in } y5 \rightsquigarrow 12 \end{array}}{\emptyset \vdash \text{let } x=3 \text{ in let } y = (f_n \ z \Rightarrow z+x) \text{ in let } x=7 \text{ in } y5 \rightsquigarrow 12}$$

Semantica eager statica

$$E \vdash f_n \ x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x, M, E)$$

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x, M', E) \quad E \vdash N \rightsquigarrow v \quad E'(x, v) \vdash M' \rightsquigarrow v'}{E \vdash MN \rightsquigarrow v'}$$

es

$$\frac{\frac{\frac{(x,3)(z,5) \vdash z \rightsquigarrow 5 \quad (x,3)(z,7) \vdash x \rightsquigarrow 3}{(x,3)(z,5) \vdash z+x \rightsquigarrow 8} \quad E' \vdash y \rightsquigarrow (z, z+x, (x,3)) \quad E' \vdash 5 \rightsquigarrow 5}{(x,3) \vdash f_{\lambda z. z+x} \rightsquigarrow (z, z+x, (x,3))} \quad E \vdash z \rightsquigarrow 7 \quad E(x,7) \vdash y \rightsquigarrow 8}{\frac{(x,3) \vdash f_{\lambda z. z+x} \rightsquigarrow (z, z+x, (x,3)) \quad E(x,3)(y, (z, z+x), (x,3)) \vdash \text{let } x=7 \text{ in } y \rightsquigarrow 8}{\emptyset \vdash \text{let } x=3 \text{ in let } y=(f_{\lambda z. z+x}) \text{ in let } x=7 \text{ in } y \rightsquigarrow 8}}$$

non serve che ricevano
tanto è lo stesso ambiente

Espressione w

L'espressione w è una espressione non valutabile in alcuna semantica del linguaggio Fun

$$\frac{\emptyset \vdash f_n x \Rightarrow xx \rightsquigarrow (x,xx) \quad \emptyset \vdash f_n x \Rightarrow xx \rightsquigarrow (x,xx) \quad (x,(x,xx)) \vdash x \rightsquigarrow (x,xx) \quad (x,(x,xx)) \vdash xx \rightsquigarrow w}{\emptyset \vdash (f_n x \Rightarrow xx)(f_n x \Rightarrow xx) \rightsquigarrow w}$$

Non è valutabile poiché, come possiamo vedere, va in loop. Poco espressioni del tipo `let x=w in z` possono essere valutabili tramite una semantica lazy (in eager dovrei interagire con w e mi porterebbe in loop)
L'omega permette di introdurre la ricorsione, che rende il linguaggio Fun **Turing completo**

Semantica lazy statica

$$E \vdash f_n x \Rightarrow M \rightsquigarrow (x,M,E)$$

$$\frac{E \vdash M \rightsquigarrow (x,M',E') \quad E(x,(N,E)) \vdash M' \rightsquigarrow v}{E \vdash MN \rightsquigarrow v}$$

Curryificazione

La curryificazione consente nel trasformare una funzione che prende più argomenti in una sequenza di funzioni, ognuna delle quali prende un solo argomento

$$A \times B \rightarrow C \Rightarrow A \rightarrow (B \rightarrow C)$$

es 5+7

$$P \equiv f_n x \Rightarrow [f_n y \Rightarrow (x,y)]$$

↳ da implementare

Grazie a questo strumento è possibile semplificare il linguaggio Fun rimuovendo `let x=M in N`, infatti:
`let x=M in N` $\equiv (f_n x \Rightarrow N)M$

Numeri di Church

Nel λ -calcolo i numeri possono essere rappresentati come funzioni. In generale in numero n:

$$n \equiv \lambda f. \lambda x. f^n(x)$$

↳ applica f a x n volte

es SML

$$2 \equiv f_n x \Rightarrow f_n y \Rightarrow x(xy)$$

↳ DUE

adesso dobbiamo costruire una funzione eval per poterlo valutare

$$\text{eval} = (f_n z \Rightarrow z (f_n x \Rightarrow x+1) 0)$$

verifichiamo

$$\text{eval } 2 = (f_n z \Rightarrow z (f_n x \Rightarrow x+1) 0) \text{ DUE} =$$

$$= \text{DUE } (f_n x \Rightarrow x+1) 0 =$$

$$= (f_n x \Rightarrow f_n y \Rightarrow x(xy)) (f_n x \Rightarrow x+1) 0 = (f_n y \Rightarrow (f_n x \Rightarrow x+1)) ((f_n x \Rightarrow x+1) y) 0 =$$

$$= (f_n x \Rightarrow x+1) ((f_n x \Rightarrow x+1) 0) = (f_n x \Rightarrow x+1) 1 = 2$$

EAGER STATIC

vediamo ora la funzione per trovare il successore di un numero di Church
`succ = f_n z \Rightarrow f_n x \Rightarrow f_n y \Rightarrow x(z \times y)`

applichiamola

succ due =

$$\begin{aligned} &= (\text{fn } z \Rightarrow \text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow x(z \times y)) \text{ due} = \\ &= \text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow x(\text{due} \times y) = \\ &= \text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow x((\text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow x(xy)) \times y) = \\ &\quad \xrightarrow{(\text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow x(xy)) \times y = \text{fn } y \Rightarrow x(xy), y = x(xy)} \\ &= \text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow x(xy) = 3 \end{aligned}$$

altre operazioni

$$\text{false} \equiv \text{zero} \equiv \text{fn } x \Rightarrow \text{fn } y \Rightarrow y \quad \text{oppure fun zero } xy = y$$

$$\text{plus} \equiv \text{fn } v \Rightarrow \text{fn } v \Rightarrow (v \text{ succ } v) \quad \text{applico succ } v, v \text{ volte}$$

$$\text{allo stesso modo fun plus } uvxy = v \underset{v \text{ volte}}{\underset{\text{succ}}{\times}} (uxy)$$

$$\text{val times} = \text{fn } u \Rightarrow \text{fn } v \Rightarrow (u \underset{u \text{ volte}}{\underset{\text{addiziona}}{\times}} (f \underset{f \text{ zero}}{\underset{\text{valore iniziale}}{\text{fn } z \Rightarrow (\text{plus } z v)}})) \text{ zero})$$

Linguaggio Imp

$K ::= \text{ol} \mid \text{t} \mid \text{f} \mid \text{false}$

$M, N ::= K \mid M + N \mid M \cdot N$

$p, q ::= \text{skip} \mid p; q \mid \text{if } M \text{ then } p \text{ else } q \mid x := M \mid \text{var } x = M \text{ in } p \mid \text{while } M \text{ do } p$

per proseguire è importante capire la differenza tra **call by reference** e **call by value**. La differenza è che quando passo un argomento in input a una funzione tramite call by value, viene creata una copia del valore passato (non viene modificata la variabile fuori dal contesto della funzione). Mentre nel call by reference, viene passato in input l'indirizzo di memoria della variabile (modificando la variabile dentro il contesto della funzione viene modificato anche fuori).

aggiungiamo adesso il concetto di locazione per prepararci al linguaggio All

$$E \in \text{Env} = \text{Var} \xrightarrow{\text{fin}} \text{Loc}$$

$$S \in \text{Store} = \text{Loc} \xrightarrow{\text{fin}} \text{Val}$$

Ci servono quindi due funzioni di valutazione della semantica in base a se sto valutando $M \in \text{Exp}$ o no:

$$1. \xrightarrow{M} \subseteq \text{Env} \times \text{Exp} \times \text{Store} \times \text{Val}$$

$$E \vdash M, S \xrightarrow{M} v$$

↳ è necessario lo store, altrimenti $E \vdash M$ darebbe una locazione (e non un valore)

$$2. \xrightarrow{M} \subseteq \text{Env}(x)$$

$E \vdash p, S \xrightarrow{M} S'$ → cambia quello che è memorizzato nello store

regole di inferenza

$$E \vdash K, S \xrightarrow{M} K$$

$$E \vdash x, S \xrightarrow{M} v \quad (\text{se } E(x) = l \text{ e } S(l) = v)$$

$$\begin{array}{c} E \vdash M, S \xrightarrow{M} v_1 \quad E \vdash N, S \xrightarrow{M} v_2 \\ E \vdash M + N, S \xrightarrow{M} v \end{array} \quad (\text{se } v_1 + v_2 = v)$$

$$\begin{array}{c} E \vdash M, S \xrightarrow{M} v_1 \quad E \vdash N, S \xrightarrow{M} v_2 \\ E \vdash M \cdot N, S \xrightarrow{M} \text{true} \end{array} \quad (\text{se } v_1 \cdot v_2 = v)$$

$$\begin{array}{c} E \vdash M, S \xrightarrow{M} v_1 \quad E \vdash N, S \xrightarrow{M} v_2 \\ E \vdash M \cdot N, S \xrightarrow{M} \text{false} \end{array} \quad (\text{se } v_1 \neq v_2)$$

$$E \vdash \text{skip}, S \xrightarrow{M} S$$

$$\begin{array}{c} E \vdash p, S \xrightarrow{M} S' \\ E \vdash q, S \xrightarrow{M} S'' \\ E \vdash p; q \xrightarrow{M} S'' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E \vdash M, S \xrightarrow{M} \text{true} \\ E \vdash \text{if } M \text{ then } p \text{ else } q, S \xrightarrow{M} S' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E \vdash M, S \xrightarrow{M} \text{true} \\ E \vdash p, S \xrightarrow{M} S' \\ E \vdash \text{if } M \text{ then } p \text{ else } q, S \xrightarrow{M} S' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E \vdash M, S \xrightarrow{M} \text{false} \\ E \vdash \text{while } M \text{ do } p, S \xrightarrow{M} S \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E \vdash M, S \xrightarrow{M} \text{true} \\ E \vdash p, S \xrightarrow{M} S' \\ E \vdash \text{while } M \text{ do } p, S \xrightarrow{M} S' \end{array}$$

$$\begin{array}{c} E \vdash M, S \xrightarrow{M} v \\ E(x, l) \vdash p, S(l, v) \xrightarrow{M} S' \\ E \vdash \text{var } x = M \text{ in } p, S \xrightarrow{M} S' \end{array} \quad (\text{dove } l \text{ è "nuova"})$$

↑
definizione di una
nuova variabile

es. $(\text{var } x = M \text{ in } p); q$

cambia l'ambiente in cui sto valutando, ma solo localmente (fino a $;$); quando valuto q l'ambiente non cambia ma la locazione rimane nello store (non ci sta garbage collection)

$$\frac{E \vdash M, S \stackrel{H}{\rightsquigarrow} v}{E \vdash x := M, S \stackrel{\rho}{\rightsquigarrow} S(l, v)} \quad (\text{se } E(x) = l)$$

↑ riassegnamento a
variabile esistente

Linguaggio All

ampliamo Imp introducendo le **procedure** e gli **array**
 $\text{proc } y(x) \text{ is } p \text{ in } q \mid \text{call } y(M)$

parametro
di y ↑
cosa da
fare

il linguaggio All è statico o dinamico?

$\text{var } x := r \text{ in proc } y(z) \text{ is } w := x \text{ in var } x := z \text{ in call } y(z)$

- se dinamico $x = z$ (ultimo valore visto)
- se statico $x = r$ (primo valore visto)

specifiche di All: L-Exp e R-Exp

Una L-Exp è un'espressione che non si valuta a un semplice valore, ma a una locazione di memoria dove è memorizzato il valore (possono vivere alla sinistra di un simbolo di assegnamento, le R-Exp il contrario).

es

$x := s \rightarrow x$ è la L-Exp e s la R-Exp

viene quindi introdotta la L-Exp $V ::= x | x[M]$ e sono di conseguenza cambiate le regole di Imp

R-Exp

$M, N ::= K | V | M + N | M < N$

$p, q ::= \text{skip} | p; q | \text{if } M \text{ then } p \text{ else } q | V := M | \text{var } V = M \text{ in } p | \text{while } M \text{ do } p \text{ arr } x = [M_0, M_1, \dots, M_n] \text{ in } p | \text{proc } y(x) \text{ is } q \text{ in } p | \text{call } y(M)$

regole di inferenza

$$\frac{\forall v \in \text{Env} \times L\text{-exp} \times \text{Store} \times \text{Loc}}{M \in \text{Env} \times R\text{-exp} \times \text{Store} \times \text{Val}}$$

$$\frac{\forall v \in \text{Env} \times \text{All} \times \text{Store} \times \text{Store}}{M \in \text{Env} \times \text{All} \times \text{Store} \times \text{Loc}}$$

$$E \vdash x, S \rightsquigarrow l \quad (\text{se } E(x) = l)$$

$$\frac{\begin{array}{l} E \vdash M, S \rightsquigarrow m \\ E \vdash x[M], S \rightsquigarrow l_m \end{array}}{E \vdash x, S \rightsquigarrow l_m} \quad (\text{se } E(x) = \langle l_0, l_1, \dots, l_n \rangle \wedge m \leq n)$$

non serve $m > 0$ tanto non abbiamo i negativi

$$\frac{E \vdash V, S \rightsquigarrow l}{E \vdash V, S \rightsquigarrow v} \quad (\text{se } S(l) = v)$$

$$\frac{\begin{array}{l} E \vdash M, S \rightsquigarrow v \\ E \vdash V := M, S \rightsquigarrow S(l, v) \end{array}}{E \vdash V := M, S \rightsquigarrow S(l, v)} \quad \begin{array}{l} \text{se esiste } l \text{ viene} \\ \text{sostituito} \end{array}$$

$$\frac{\begin{array}{l} E \vdash M_i, S \rightsquigarrow v_i \\ E \vdash M, S \rightsquigarrow S(l_0, \dots, l_n) \end{array}}{E \vdash M, S \rightsquigarrow S(l_0, \dots, l_n, v_i)} \quad \begin{array}{l} \text{per tutti gli } M \\ \text{dove } l_0, \dots, l_n \end{array}$$

$$E \vdash \text{arr } x = [M_0, \dots, M_n] \text{ in } p, S \rightsquigarrow S'$$

$$\frac{E(y, (x, p, E)) \vdash q, S \rightsquigarrow S'}{E \vdash \text{proc } y(x) \text{ is } p \text{ in } q, S \rightsquigarrow S'}$$

call-by-value

$$\frac{\begin{array}{l} E \vdash M, S \rightsquigarrow v \\ E'(x, l) \vdash p, S(l, v) \rightsquigarrow S' \quad (\text{se } E(y) = (x, p, E')) \end{array}}{E \vdash \text{call } y(M), S \rightsquigarrow S'}$$

call-by-reference

$$\frac{\begin{array}{l} E \vdash V, S \rightsquigarrow l \\ E'(x, l) \vdash p, S \rightsquigarrow S' \quad (\text{se } E(y) = (x, p, E')) \end{array}}{E \vdash y(V), S \rightsquigarrow S'}$$

es) distinzione tra call-by reference e call-by value

$$\frac{E \vdash z, (l, 3) \rightsquigarrow_3 (z, l)(x, l') \vdash x := 2, (l, 3)(l', 3) \rightsquigarrow (l, 3)(l', 2)}{(z, l)(y, (x, x := 2, (z, l))) \vdash \text{call } y(z), (l, 3) \rightsquigarrow (l, 3)(l', 2)} E(y) = (x, x := 2, (z, l)) \quad \text{CBV}$$

$(z, l) \vdash \text{proc } y(x) \text{ is } x := 2 \text{ in call } y(z), (l, 3) \rightsquigarrow (l, 3)(l', 2)$

$$\frac{E \vdash z, (l, 3) \rightsquigarrow_3 (z, l)(x, l) \vdash x := 2, (l, 3) \rightsquigarrow (l, 2)}{(z, l)(y, (x, x := 2, (z, l))) \vdash \text{call } y(z), (l, 3) \rightsquigarrow (l, 2)} E(y) = (x, x := 2, (z, l)) \quad \text{CBR}$$

$(z, l) \vdash \text{proc } y(x) \text{ is } x := 2 \text{ in call } y(z), (l, 3) \rightsquigarrow (l, 2)$

call-by name (versione lazy di cbr)

$$E'(x, (V, E)) \vdash p, S \rightsquigarrow S'$$

$$E \vdash \text{call } y(V), S \rightsquigarrow S'$$

dove di conseguenza modificare Env

$$\text{Env: Var} \xrightarrow{\text{fin}} \text{Loc}^+ + (\text{Var} \times \text{All} \times \text{Env}) + (\text{All} \times \text{Env})$$

pezzo di sintassi
non validata (es. V)

dove inoltre aggiungere la seguente regola

$$E' \vdash V, S \rightsquigarrow b \quad (\text{se } E(x) = (V, E'))$$

$$E \vdash x, S \rightsquigarrow b$$

variable di riferimento
di una procedura

Cerchiamo adesso di capire come distinguere tra call-by name (lazy statico) e call-by reference (eager statico)

var $x=1$ in arr $z=[5, 6, 7]$ in proc $y(w)$ is $(x := 2; u := w)$ in call $y(z[x])$

$$L_{z[x]}, E'$$

$$U=6$$

$$U=7$$

statico: preserva gli ambienti
ma non gli store

Moltiplicazione egiziana

$138 \times$	<u>multiplico per 2</u>	<u>138</u>	<u>divido per 2</u>
<u>45 =</u>		90	69
690		180	47
<u>552 -</u>		360	17
6210		<u>720</u>	8
		1440	4
		<u>2880</u>	2
		5760	1
		6210	

Per decidere se un programma è corretto o meno devo stabilirlo non a tempo di esecuzione, ma guardando il programma

trasformiamolo in codice

```
public class Egypt {
    public static void main() {
        int a = 45;
        int b = 138;
        int x = a, y = b, res = 0;
        while (y >= 1) {
            if (y % 2 == 0) {
                x = x * 2;
                y = y / 2;
            } else {
                res = res + x;
                y = y - 1;
            }
        }
    }
}
```

abbiamo quindi che $a \cdot b = x \cdot y + res \wedge y \geq 0$

se entro nell'if so che l'invariante vale ancora (res non cambia, e $y/2$ sarà > 0 se lo era anche prima)

anche se entro nell'else rimane vero, infatti se $y=1$ (caso peggiore) rimane ≥ 0 e per quanto riguarda la moltiplicazione, è vero che moltiplico y una volta in meno ma allo stesso tempo incremento res di x

supponiamo ora che siamo usciti dal while, allora $y < 1$. Ma se $y < 1 \wedge y \geq 0 \Rightarrow y=0$, quindi $a \cdot b = x \cdot 0 + res = res$

Hoare logic

Vogliamo ora un linguaggio che ci permetta di dimostrare la correttezza dei programmi imperativi in modo più diretto.

$$M, N ::= K \mid M + N$$

$$A, B ::= \text{true} \mid \text{false} \mid A \rightarrow B \mid M, N \mid M = N$$

$$p, q ::= \text{skip} \mid p, q \mid x := M \mid \text{if } B \text{ then } p \text{ else } q \mid \text{while } B \text{ do } p$$

↑ non servirà
la dichiarazione

le altre regole
possono essere
derivate

$$\neg A \equiv A \rightarrow \text{false}$$

$$A \wedge B \equiv \neg(A \rightarrow \neg B)$$

$$A \vee B \equiv \neg A \rightarrow B$$

DEF Tripla di Hoare

Dato la logica di Hoare, siano A e B due espressioni booleane e sia p un programma. Se mi trovo in uno stato S che soddisfa A , allora l'esecuzione di p in S (cioè a partire dallo stato S) o va in loop, oppure termina in uno stato S' che soddisfa B .

Si scrive:

$$\{A\} p \{B\}$$

↑ precondizione ↑ postcondizione

Vediamo ora le **regole di inferenza**.

$$\{A\} p \{\text{true}\}$$
 in che modo la tripla interagisce con true

$$\{\text{false}\} p \{B\}$$
 in che modo la tripla interagisce con false
(non parte mai)

$$\frac{\text{strengthening}}{A \rightarrow B \quad \{B\} p \{C\}} \qquad \frac{\text{weakening}}{\{A\} p \{B\} \quad B \rightarrow C} \quad \{A\} p \{C\}$$

$$\frac{\{A\} p \{B_1\} \quad \{A\} p \{B_2\} \quad \dots \quad \{A\} p \{B_n\}}{\{A\} p \{B_1 \wedge B_2 \wedge \dots \wedge B_n\}}$$

soddisfa contemporaneamente
tutte le B

$$\frac{\{A_1\} p \{B\} \quad \{A_2\} p \{B\} \quad \dots \quad \{A_n\} p \{B\}}{\{A_1 \vee A_2 \vee \dots \vee A_n\} p \{B\}}$$

tutte le A_i vanno bene per avere
 B come postcondizione

$$\{A\} \text{skip} \{B\}$$

$$\frac{\{A \wedge B\} p \{C\} \quad \{A \wedge \neg B\} q \{C\}}{\{A\} \text{if } B \text{ then } p \text{ else } q \{C\}}$$

$$\frac{\{A\} p \{C\} \quad \{A\} q \{C\}}{\{A\} \text{if } B \text{ then } p \text{ else } q \{C\}}$$

è debole (nonostante sia giusta)
infatti non tiene conto della
verità di B

$$\frac{\{A \wedge B\} p \{A\}}{\{A\} \text{while } B \text{ do } p \{A \wedge B\}}$$

incorerettezza parziale se p termina la postcondizione è vera
(non garantisce che il ciclo finisce)

$$\frac{\{A\} p \{C\} \quad \{C\} q \{B\}}{\{A\} p; q \{B\}}$$

$$\{[M/x] A\} x := M \{A\}$$

↪ sostituzione di x con M

Si parla di **weakest precondition** quando la precondizione è minima affinché si possa avere la postcondizione.
Invece la **strongest precondition** è false (sto escludendo tutto)

es

$$\{A\} x := x + 1 \{x > 5\}$$
 la weakest precondition è $A = x > 4$

Dimostriamo la correttezza della divisione euclidea

20/11

$$\begin{array}{r} \text{b}'\text{ resto} \\ \text{b}:=x; \\ \hline y \end{array}$$

~~a:=0;~~

~~while (b>y) do~~
~~(b:=b-y;~~
~~a:=a+1;)~~