Chiusura di un insieme di attributi

Index

Cosa vogliamo ottenere

Quando si decompone uno schema di relazione R su cui è definito un insieme di dipendenze funzionali F, oltre ad ottenere schemi in 3NF occorre

1. **preservare le dipendenze**
2. poter **ricostruire tramite join** tutta e sola l'informazione originaria
   Le dipendenze funzionali che si vogliono preservare sono tutte quelle che sono soddisfatte da ogni istanza legale di R, cioè le dipendenze funzionali in F^+

Quindi si è interessati a calcolare F^+ e sappiamo farlo, ma calcolare F^+ richiede tempo esponenziale in $\mid R \mid$

> **Ricordiamo**
>
> Se $X \to Y \in F^+$, per le regole della decomposizione e dell'unione, si ha che $X \to Z \in F^+$, per ogni $Z \subseteq Y$; pertanto il calcolo di $\mid F^+ \mid$ è esponenziale in $\mid R \mid$

Fortunatamente per i nostri scopi è sufficiente avere un modo per decidere se una dipendenza funzionale $X \to Y$ appartiene ad F^+ (cioè alla chiusura di un insieme di dipendenze).

Ciò puà essere fatto calcolando X^+ e verificando se $Y \subseteq X^+$. Infatti ricordiamo il lemma: $X \to Y \in F^A$ se e solo se $Y \subseteq X^+$ e il teorema che dimostra che $F^A = F^+$

Utilità della chiusura X^+

Vedremo che il calcolo di X^+ è utile in diversi casi:

- verificare le condizioni perché un insieme di attributi sia chiave di uno schema
- verificare se una decomposizione preserva le dipendenze funzionali dello schema originario
- altro ancora…

Come si calcola X^+

Per il calcolo della chiusura dell'insieme di attributi X, denotata con X^+, possiamo usare il seguente algoritmo

Input → uno schema di relazione R, e un insieme F di dipendenze funzionali su R, un sottoinsieme X di R
Output → la chiusura di X rispetto ad F (restituita nella variabile `Z`)

$$
\begin{array}{l}
\text{begin} \\
Z := X \\
S := \{A \mid Y \rightarrow V \in F,\ A \in V,\ Y \subseteq Z\} \\
\text{while } S \not\subset Z \\
\qquad \text{do} \\
\qquad \text{begin} \\
\qquad\qquad Z := Z \cup S \\
\qquad\qquad S := \{A \mid Y \rightarrow V \in F,\ A \in V,\ Y \subseteq Z\} \\
\qquad \text{end} \\
\text{end}
\end{array}
$$

Si inseriscono in S i singoli attributi che compongono le parti destre di dipendenze in F la cui parte destra è contenuta in Z (in pratica decomponendo le parti destre). All'inizio Z è proprio X, quindi inseriamo gli attributi che sono determinati funzionalmente da X; una volta che questi sono entrati in Z, da questi ne aggiungiamo altri (per transitività). Possiamo "numerare" gli insiemi Z successivi ($Z^{(i)}$ è l'insieme ottenuto dopo la i-esima iterazione del while)

All'iterazione $i+1$ aggiungiamo in S i songoli attribut che compongono le parti destre di dipendenze in F la cui parte sinistra è contenuta in $Z^{(i)}$ cioè $S := \{A \mid Y \rightarrow V \in F,\ A \in V,\ Y \subseteq Z\}$. Alla fine di ogni iterazione aggiungiamo qualcosa a Z, ma non eliminiamo mai nessun attributo

L’algoritmo si ferma quando il nuovo insieme S che otteniamo è (già) contenuto nell’insieme Z, cioè quando non possiamo aggiungere nuovi attributi alla chiusura transitiva di X

Example

$$F = \{AB \to C, B \to D, AD \to E, CE \to H\}$$

$$R = A, B, C, D, E, H, L$$

Vogliamo calcolare la chiusura di AB
$Z = A, B$
$S = \{C, D\}$
inseirco c perché $AB \to C \in F$, per inserire D ho
$AB \to B\ (\text{riflessiva}) + B \to D (\in F) = AB \to D\ (\text{transitiva})$

S ha qualcosa in più?
$Z = \{A, B, C, D\}$
$S = \{C, D, E\}$ per inserire E ho
$AB \to B + B \to D + AB \to AD + AD \to E = AB \to E$

S ha qualcosa in più?
$Z = \{A, B, C, D, E\}$
$S = \{C, D, E, H\}$ per inserire H ho
$AB \to C + AB \to AD + AD \to E + AB \to E + AB \to E + AB \to CE + CE$
S ha qualcosa in più?
$Z = \{A, B, C, D, E, H\}$
$S = \{C, D, E, H\}$

S ha qualcosa in più?
STOP

L’algoritmo è corretto (teorema)

L’algoritmo per il calcolo di X^+ calcola correttamente la chiusura di un insieme di attributi X rispetto ad un insieme F di dipendenze funzionali.

Dimostrazione

Indichiamo con $Z^{(0)}$ il valore iniziale di Z $(Z^{(0)} = X)$ e con $Z^{(i)}$ ed $S^{(i)}$ con $i \geq 1$, i valori di Z ed S dopo l’i-esima esecuzione del corpo del ciclo.

E' facile vedere che $Z^{(i)} \subseteq Z^{(i+1)}$, per ogni i

> **Ricordiamo**
>
> In $Z^{(i)}$ ci sono attributi aggiunti a Z fino all'i-esmia iterazione.
>
> Alla fine di ogni iterazione aggiungiamo qualcosa a Z, ma non eliminiamo mai alcun attributo

Sia j tale che $S(j) \subseteq Z(j)$ (cioè $Z(j)$ è il valore di Z quando l'algoritmo termina); proveremo che: $\mathbf{A} \in \mathbf{Z^{(j)}} \Leftrightarrow \mathbf{A} \in \mathbf{X^+}$

Parte $\Rightarrow$

Mostreremo per induzione su i che $Z^{(i)} \subseteq X^+$, per ogni i (e quindi, in particolare $Z^{(j)} \subseteq X^+$)

- Base dell'induzione ($i = 0$): poiché $Z^{(0)} = X$ e $X \subseteq X^+$, si ha $Z^{(0)} \subseteq X^+$
- Ipotesi induttiva ($i > 0$): $Z^{(i-1)} \subseteq X^+ \overset{\text{Lemma 1}}{\Longrightarrow} X \to Z^{(i-1)} \in F^A$
- Passo induttivo: $Z^{(i)}$

Sia A un attributo in $Z^{(i)} - Z^{(i-1)}$ allora deve esistere una dipendenza $Y \to V \in F$ tale che $Y \subseteq Z^{(i-1)}$ e $A \in V$.

Poiché $Y \subseteq Z^{(i-1)}$, per l'ipotesi induttiva si ha che $Y \subseteq X^+ \Rightarrow X \to Y \in F^A$

$$
\begin{aligned}
X \to Y \in F^A &\overset{\text{trans}}{\Longrightarrow} X \to V \in F^A \Longrightarrow \\
&\overset{A \in V}{\Longrightarrow} X \to A \in F^A \Longrightarrow A \in X^+
\end{aligned}
$$

Parte $\Leftarrow$

Devo quindi dimostrare che $A \in X^+ \Rightarrow A \in Z^{(j)}$

Poiché $A \in X^+$, si ha $X \to A \in F^A = F^+$; pertanto $X \to A$ deve essere soddisfatta per ogni istanza legale di R. Si consideri la seguente istanza r di R

	$Z^{(j)}$				$R- Z^{(j)}$			
r	1	1	...	1	1	1	...	1
	1	1	...	1	0	0	...	0

Dobbiamo quindi dimostrare che:

1. r è un'istanza legale di R
2. $A \in X^+ \Rightarrow A \in Z^{(j)}$

r è un'istanza legale di R

Supponiamo per assurdo che la dipendenza $V \to W \in F$ non è soddisfatta.
Avremmo quindi $t_1[V] = t_2[V] \wedge t_1[W] \neq t_2[W]$; il che vuol dire che $V \subseteq Z^{(j)}$ e $W \cap (R - Z^j) \neq \varnothing$

Ma ciò non è possibile in quanto non sarebbe l'ultima iterazione ($Z^{(j)}$) in quanto manca W che invece ci dovrebbe essere in quanto $V \to W \in F$. Se non li ho ancora aggiunti $Z^{(j)}$ non è la versione finale ma questo è in contraddizione con la nostra costruzione dell'istanza

Quindi $W \subseteq Z^{(j)} \Rightarrow t_1[W] = t_2[W]$ terminando così la dimostrazione che questa istanza è legale

$A \in X^+ \Rightarrow A \in Z^{(j)}$

Come detto precedentemente $X \to A \in F^+$ ed essendo questa un'istanza legale di R anche qui deve essere soddisfatta.
Sapendo che $X = Z^{(0)} \subseteq Z^{(j)}$ allora le due tuple devono essere anche uguali su A, quindi $A \in Z^{(j)}$

■

Proprietà dell'insieme vuoto

> ⚠ **Warning**
>
> Prima di tutto va sottolineato che la notazione $\{\varnothing\}$ indica l'insieme che contiene l'insieme vuoto (insieme di insiemi) e non va pertanto confusa con il semplice insieme vuoto $\varnothing$

- L'insieme vuoto è un **sottoinsieme** di ogni insieme A
  $\forall A : \varnothing \subseteq A$
- L'**unione** di un qualunque insieme A con l'insieme vuoto è A
  $\forall A : A \cup \varnothing = A$

- L'**intersezione** di un qualunque insieme A con l'insieme vuoto è l'insieme vuoto
  $\forall A : A \cap \varnothing = \varnothing$
- Il **prodotto cartesiano** di un qualunque insieme A con l'insieme vuoto è l'insieme vuoto
  $\forall A : A \times \varnothing = \varnothing$
- L'unico sottoinsieme dell'insieme vuoto è l'insieme vuoto stesso
- Il numero di elementi dell'insieme vuoto (vale a dire la sua **cardinalità**) è **zero**; l'insieme vuoto è quindi finito: $\mid \varnothing \mid = 0$

Esercizi

Esercizio 1

$$R = (A, B, C, D, E, H)$$

$$F = \{AB \rightarrow CD, EH \rightarrow D, D \rightarrow H\}$$

Calcolare le chiusure degli insiemi A, D e AB

$A^+ = \{A\}$
$D^+ = \{D, H\}$
$AB^+ = \{A, B, C, D, H\}$

Esercizio 2

$$R = (A, B, C, D, E, H, I)$$

$$F = \{A \rightarrow E, AB \rightarrow CD, EH \rightarrow I, D \rightarrow H\}$$

Calcolare la chiusura dell'insieme AB

$AB^+ = \{A, B, C, D, H, E, I\}$