



Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

Факультет вычислительной математики и кибернетики

Кафедра математической статистики

Гончаров Борис Алексеевич

**Оценки качества обслуживания для  
неоднородного трафика**

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

**Научный руководитель:**

д.ф.-м.н., профессор

Ю.С. Хохлов

Москва, 2020

# Содержание

Обозначения	3
Предисловие	4
Устойчивые процессы и распределения	6
Самоподобные процессы	9
Постановка задачи	10
Описание модели	11
Вероятность переполнения	13
Заключение	21
Список литературы	22

## Обозначения

с.в. - Случайная величина

н.о.р.с.в. - Независимые и одинаково распределённые случайные величины

$P(X = m)$  - Вероятность

$E(X)$  - Математическое ожидание

$D(X)$  - Дисперсия

$\varphi_X$  - Производящая функция случайной величины  $X$

$X = (X_1, \dots, X_d)$  -  $d$ -мерный вектор

$cov(X_k, X_l)$  - Ковариация

## Предисловие

Оценка качества обслуживания (англ. Quality of Service, QoS) является одной из наиболее известных понятий анализа производительности оборудования и телекоммуникационных сред с большим входным потоком. На протяжении многих лет такие модели основывались на Марковских процессах, которые во многих случаях предоставляли явное решение для заданных измерений производительности. Однако в начале 90-х исследователи из лаборатории Белла выяснили, что трафик современных компьютеров имеет абсолютно другие свойства, и это было подтверждено эмпирически.

Было обнаружено, что трафик имеет 3 главные особенности: *самоподобие* (self-similarity) при большом объёме измерений, *долговременную зависимость* (long-range dependence LRD) и *распределение с тяжёлыми хвостами* (heavy-tailed distribution) у суммарной нагрузки на систему. Более того, было выявлено, что при игнорировании этих свойств, конечный результат оценки оказывался ошибочным. Открытие этих особенностей дало скачок в исследовании в области трафика.

Самые известные модели представляют из себя совокупность *дробного Броуновского движения* (fractional Brownian motion) и *устойчивого движения Леви* (stable Levy motion). Оказалось, что эти модели тесно связаны с распределениями с тяжёлыми хвостами и зависят от скорости передачи данных. В частности, быстрое соединение характеризует Броуновское движение, в то время как, медленное соединение характеризует устойчивое движение Леви.

Недавние опыты показали, что трафик содержит оба компонента (Броуновское движение и движение Леви). Однако, в целом нет общего явного вывода параметра оценки качества обслуживания. В данной работе будет применена модификация, разработанная чтобы получить нижнюю границу вероятности переполнения буфера, где входной поток будет состоять из двух компонент. Ранее [2] были рассмотрены случаи, когда где эти компоненты имели общий *параметр Хёрста* (Hurst parameter), а также когда параметр Хёрста был у обоих компонент разный [10]. В данной работе будет рассмотрен более общий случай,

когда у нас траффик содержит несколько компонент Броуновского движения и движения Леви, причем с различными параметрами Хёрста.

## Устойчивые процессы и распределения

В этом разделе будет дана краткая информация об устойчивых процессах и их распределениях. Для начала начнем с процесса Леви.

**Определение 1.** *Случайный процесс  $Y = (Y(t), t \geq 0)$  называется процессом Леви, если выполняются следующие условия:*

1.  $Y(0) = 0$  п.в.,
2.  $Y$  имеет независимые приращения,
3.  $Y$  имеет стационарные приращения.

Также потребуем, чтобы все траектории были непрерывны справа и имели конечные пределы слева.

Распределение процесса  $Y$  определено однозначно функцией распределения случайной величины  $Y(1)$ , которая является бесконечно делимой.

Самый известный пример процесса Леви - это процесс Броуновского движения (Винеровский процесс).

**Определение 2.** *Процесс Леви  $B = (B(t), t \geq 0)$  называется процессом Броуновского движения (Brownian Motion), если для любых  $t \geq 0, h \geq 0$  приращения  $B(t+h) - B(t)$  имеют распределение Гаусса с нулевым м.о. и дисперсией  $\sigma^2 \cdot h$*

Если  $\sigma^2 = 1$  то мы имеем стандартное Броуновское движение (standard Brownian Motion).

**Утверждение 1.**  $K(t, s) = \text{cov}(B(t), B(s)) = \sigma^2 \min(t, s)$

*Доказательство.* Пусть  $s \leq t$ , тогда

$$B_t = B_s + (B_t - B_s)$$

$$B_s B_t = B_s^2 + B_s(B_t - B_s)$$

$$\text{cov}(B_s, B_t) = E[B_s B_t], \text{ т.к. } (E(B_i) = 0)$$

Таким образом  $cov(B_s, B_t) = E[B_s^2] + E[B_s(B_t - B_s)]$  Так как все приращения независимы, то имеем  $E[B_s]E[B_t - B_s] = 0 \cdot 0 = 0$  Теперь  $cov(B_s, B_t) = E(B_s^2) = Var(B_s) = \sigma^2 s$  Аналогично при  $t \leq s$ . Таким образом получаем:  $cov(B(t), B(s)) = \sigma^2 \min(t, s)$ .  $\square$

**Определение 3.** Случайная величина  $Y$  имеет  $\alpha$ -устойчивое распределение, если её характеристическая функция имеет вид:

$$\phi(\omega) = E[e^{j\omega X}] = \exp\{j\mu\omega - \sigma|\omega|^\alpha[1 - j\beta \operatorname{sgn}(\omega)\theta(\omega, \alpha)]\}$$

где  $0 < \alpha \leq 2, \sigma \geq 0, -1 \leq \beta \leq 1, \mu \in R^1$ , и

$$\theta(\omega, \alpha) = \begin{cases} \tan(\frac{\alpha\pi}{2}), \alpha \neq 1, \\ -\frac{2}{\pi} \ln|\omega|, \alpha = 1, \end{cases} \quad (1)$$

Параметр  $\alpha$  называется **характеристикой экспоненты** и определяет уровень неравномерности (burstiness) трафика. Параметры  $\sigma$  и  $\mu$  называются параметрами **масштаба** и **сдвига** соответственно. Параметр  $\beta$  называется **параметром асимметрии**. Если  $\beta = 0$  тогда с.в.  $X$  симметрично распределена вокруг  $\mu$ . Если  $0 < \alpha < 1, \mu = 0$  и  $\beta = 1$  тогда с.в.  $X$  имеет положительные значения с вероятностью 1. В дальнейшем будем говорить, что с.в.  $Y$  имеет **стандартное  $\alpha$ -устойчивое распределение**, если  $\mu = 0$  и  $\sigma = 1$ .

Устойчивые распределения являются абсолютно непрерывными, но, в общем случае у их плотностей нет явного аналитического выражения за исключением трех специальных случаев:  $\alpha = 2$  (гауссовское распределение),  $\alpha = 1$  (распределение Коши),  $\alpha = 0.5, \beta = 1$  (распределение Леви).

Индекс устойчивости  $\alpha$  определяет скорость убывания хвоста распределения. Когда  $\alpha < 2$  дисперсия распределения бесконечна и хвост ведет себя асимптотически как в случае распределения Парето

$$P(\xi > x) \sim C_\alpha \cdot (1 + \beta) \cdot \sigma^\alpha \cdot x^{-\alpha}, \quad x \rightarrow \infty, \quad (2)$$

где

$$C_\alpha = \frac{\Gamma(\alpha)}{\pi} \cdot \sin\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right). \quad (3)$$

Обозначим через  $S(\alpha, \beta)$  класс  $\alpha$ -устойчивых распределений с параметром  $\beta$  (другие параметры не играют важной роли).

$\alpha$ -устойчивое распределение является безгранично делимым. Оно порождает некоторый процесс Леви.

**Определение 4.** *Случайный процесс  $L_\alpha = (L_\alpha(t), t \geq 0)$  называется  $\alpha$ -устойчивым движением Леви, если процесс Леви  $L_\alpha(1)$  имеет  $\alpha$ -устойчивое распределение.*

Распределение  $L_\alpha(1)$  имеет положительный параметр асимметрии ( $0 < \alpha < 1, \beta = 1$ ), таким образом все траектории процесса  $L_\alpha$  являются неубывающими и неотрицательными. Такой процесс называется  $\alpha$ -устойчивым субординатором ( $\alpha$ -stable subordinator).

Если  $\alpha = 2, \mu = 0$ , то мы имеем Броуновское движение  $B$ .

Далее приведем несколько вспомогательных теорем.

**Теорема 1.** *Если  $(L_{\alpha_1}(t), t \geq 0), 0 < \alpha_1 \leq 2$ , является  $\alpha$ -устойчивым движением Леви с симметричным распределением,  $(L_{\alpha_2}(t), t \geq 0), 0 < \alpha_2 < 1$ , является  $\alpha$ -устойчивым субординатором, тогда случайный процесс  $Y = (Y(t) = L_{\alpha_1}(L_{\alpha_2}(t)), t \geq 0)$  является  $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ -устойчивым движением Леви с симметричным распределением.*

Следующая теорема является следствием из работы В.М. Золотарева ([8], теорема 3.3.1)

**Теорема 2.** *Если  $Y_1$  имеет симметричное  $\alpha_1$ -устойчивое распределение,  $0 < \alpha_1 \leq 2$ ,  $Y_2$  имеет одностороннее  $\alpha_2$ -устойчивое распределение,  $0 < \alpha_2 < 1$ , тогда случайная величина  $Y = Y_1 \cdot Y_2^{\frac{1}{\alpha_1}}$  имеет симметричное  $\alpha_1 \cdot \alpha_2$ -устойчивое распределение.*

В частности для  $\alpha_1 = 2$  и  $0 < \alpha_2 = \alpha/2 < 1$  мы имеем следующее.

**Теорема 3.** *Если  $B = (B(t), t \geq 0)$  - Броуновское движение,  $L_{\frac{\alpha}{2}} = (L_{\frac{\alpha}{2}}(t), t \geq 0)$  является  $\frac{\alpha}{2}$ -устойчивым субординатором, тогда  $L_\alpha = (L_\alpha(t) = B(L_{\frac{\alpha}{2}}(t)), t \geq 0), 0 < \alpha < 2$  является  $\alpha$ -устойчивым движением Леви с симметричным распределением.*



## Самоподобные процессы

Исследования интернет трафика показали, что если  $Z_n, n \geq 0$  - количество информации во временном интервале  $n$  (длиной в 10 микросекунд), тогда сгруппированный процесс

$$Z_n(T) = \frac{Z_{nT} + \dots + Z_{(n+1)T-1}}{T^H}, n \geq 0,$$

является подобным себе, независимо от временных промежутков  $T > 0$  и при разных масштабах  $T = 1, \dots, 10000$ . Здесь *параметр Хёрста*  $H \in (1/2, 1)$ . Эти выводы приводит нас к понятию *самоподобия*.

Определим процесс  $Z(T) = Z_0 + \dots + Z_{T-1}, T \geq 1$ . Предыдущие исследования показали, что трафик ведет себя следующим образом:

$$T^{-H} Z(T) \stackrel{d}{=} Z_0$$

или в более общем виде:

$$T^{-H} Z(nT) \stackrel{d}{=} Z_0 + \dots + Z_{n-1}$$

При замене целочисленных параметров  $n, T$  на их непрерывные аналоги  $n, T > 0$ , мы получаем для  $\forall n, T > 0$

$$\{T^{-H} Z(tT), t \geq 0\} \stackrel{d}{=} \{Z(t), t \geq 0\}.$$

Это свойство составляет основу для следующего определения.

**Определение 5.** Процесс  $Z = (Z(t), t \geq 0)$  называется **самоподобным**, с параметром Хёрста  $H > 0$ , если он удовлетворяет условию

$$Z(t) \stackrel{d}{=} c^{-H} Z(ct), \forall t \geq 0, \forall c > 0.$$

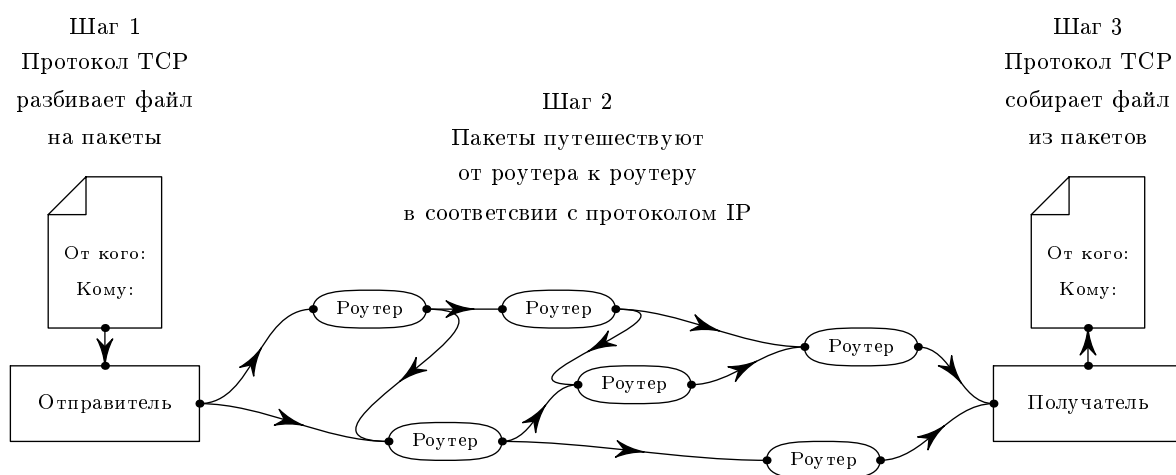
Два самых известных примера самоподобных процессов - это процессы дробного Броуновского движения и  $\alpha$ -устойчивое движение Леви.

**Определение 6.** Дробное Броуновское движение с параметром Хёрста  $H$  является Гауссовским процессом  $(B_H(t), t \geq 0)$  с нулевым средним и корреляционной функцией

$$K_H(t, s) = \frac{1}{2} [|t|^{2H} + |s|^{2H} - |t - s|^{2H}]$$

## Постановка задачи

Для начала рассмотрим, как путешествует файл от одного компьютера к другому с помощью протокола TCP/IP. В начале файл разбивается на пакеты, которые содержат некоторые данные необходимые для сборки и информацию об отправителе и получателе. Эти пакеты проходят по определенному маршруту, переходя от одного роутера к другому до тех пор, пока они не достигнут пункта назначения.



Нас же интересует, какой должен быть размер буфера. Ясно, что он должен быть не слишком маленьким, так как при переполнении буфера приходящие пакеты будут отбрасываться и качество передачи файлов по интернету будет падать. В то же время буфер не должен быть слишком большим, чтобы не переплачивать за оборудование. Поэтому наша задача сводится к подсчету вероятности переполнения буфера, чтобы люди, занимающиеся трафиком, смогли подобрать оборудование с оптимальным размером буфера.

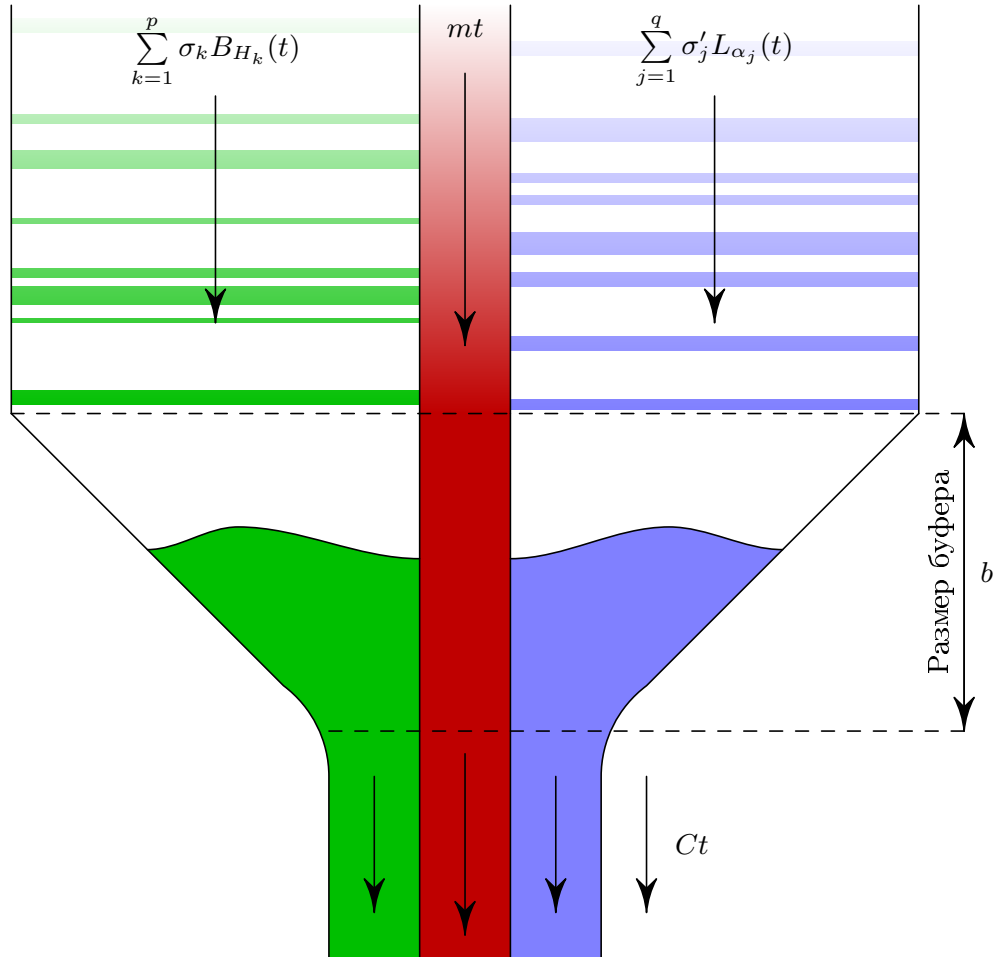
## Описание модели

Давайте рассмотрим следующий входной процесс:

$$A(t) = mt + \sum_{k=1}^p \sigma_k B_{H_k}(t) + \sum_{j=1}^q \sigma'_j L_{\alpha_j}(t), \quad (4)$$

где  $m > 0$  - средний входящий поток;  $B_{H_k} = (B_{H_k}(t), t \in \mathbb{R})$ ,  $k = \overline{1, p}$  - процессы дробного Броуновского движения,  $L_{\alpha_j} = (L_{\alpha_j}(t), t \in \mathbb{R})$ ,  $j = \overline{1, q}$  - симметричные  $\alpha$ -стабильные процессы Леви. Оба типа процессов являются самоподобными с параметрами Хёрста  $H_k$ ,  $k = \overline{1, p}$  и  $H'_j = 1/\alpha_j$ ,  $j = \overline{1, q}$  соответственно.

В качестве примера, можно представить бутылочное горлышко, куда поступают потоки информации, и при переполнения буфера, лишняя информация отбрасывается.



Процесс  $A(t)$  описывает количество информации, поступившей в промежуток времени  $[0, t]$ . Ранее был рассмотрен частный случай, когда было по одному процессу дробного Броуновского движения и  $\alpha$ -стабильного процессы Леви с разными параметрами Хёрста  $H_1$  и  $H_2$  соответственно. Моя задача заключается в рассмотрении более общего случая, когда этих процессов может быть несколько, причем у каждого компонента будет свой параметр Хёрста.

## Вероятность переполнения

Предположим, что буфер, куда поступает вся информация, имеет скорость обработки  $C$ . Обозначим

$$r = C - m \quad (5)$$

- *интенсивность трафика*.

Пусть  $Q(t)$  - нагрузка буфера в момент времени  $t$ . Если  $Q(0) = 0$ , тогда нагрузка  $Q(t)$  удовлетворяет следующему уравнению:

$$Q(t) \stackrel{d}{=} \sup_{0 \leq s \leq t} (A(t) - A(s) - C(t - s)) \quad (6)$$

Более того, при  $r > 0$  система будет стабильна и нагрузочный процесс будет иметь вид:

$$Q(t) \stackrel{d}{=} \sup_{t \geq 0} (A(t) - Ct) \quad (7)$$

Мы заинтересованы в рассмотрении *вероятности переполнения буфера*, то есть вероятности при которой количество информации из входного потока превосходит некоторое пороговое значение  $b$  - *размер буфера*:

$$\varepsilon(b) = P[Q > b] \quad (8)$$

Далее приведем некоторые преобразования:

$$\begin{aligned} \varepsilon(b) &:= P[Q > b] = P \left[ \sup_{t \geq 0} (A(t) - Ct) > b \right] \geq \\ &\geq \sup_{t \geq 0} P[(A(t) - Ct) > b] = \\ &= \sup_{t \geq 0} P \left[ mt + \sum_{k=1}^p \sigma_k B_{H_k}(t) + \sum_{j=1}^q \sigma'_j L_{\alpha_j}(t) - Ct > b \right] = \\ &= \sup_{t \geq 0} P \left[ \sum_{k=1}^p \sigma_k B_{H_k}(t) + \sum_{j=1}^q \sigma'_j L_{\alpha_j}(t) > b + rt \right] = \\ &= \sup_{t \geq 0} P \left[ \sum_{k=1}^p \sigma_k t^{H_k} B_{H_k}(1) + \sum_{j=1}^q \sigma'_j t^{1/L_{\alpha_j}} L_{\alpha_j}(1) > b + rt \right] = \\ &= \{H'_j = 1/\alpha_j, j = \overline{1, q}\} = \end{aligned}$$

$$= \sup_{t \geq 0} P \left[ \sum_{k=1}^p \sigma_k t^{H_k} B_{H_k}(1) + \sum_{j=1}^q \sigma'_j t^{H'_j} L_{\alpha_j}(1) > b + rt \right]$$

Обозначим  $Z_k := B_{H_k}(1)$ ,  $Y_j := L_{\alpha_j}(1)$ . В книге Золотарева В.М. [8] показано, что

$$Y_j \stackrel{d}{=} Y_{1j} \sqrt{Y_{2j}},$$

где с.в.  $Y_{1j}$  имеет стандартное нормальное распределение, а с.в.  $Y_{2j}$  имеет одно-стороннее  $\alpha_j/2$ -устойчивое распределение.

Имеем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(b) &\geq \sup_{t \geq 0} P \left[ \sum_{k=1}^p \sigma_k t^{H_k} B_{H_k}(1) + \sum_{j=1}^q \sigma'_j t^{H'_j} L_{\alpha_j}(1) > b + rt \right] = \\ &= \sup_{t \geq 0} P \left[ \sum_{k=1}^p \sigma_k t^{H_k} Z_k + \sum_{j=1}^q \sigma'_j t^{H'_j} Y_{1j} \cdot \sqrt{Y_{2j}} > b + rt \right] \end{aligned}$$

Пусть  $U$  имеет стандартное нормальное распределение независимое от  $Y_{2j}, j = \overline{1, q}$ , тогда

$$\begin{aligned} \varepsilon(b) &\geq \sup_{t \geq 0} P \left[ \sum_{k=1}^p \sigma_k t^{H_k} Z_k + \sum_{j=1}^q \sigma'_j t^{H'_j} Y_{1j} \cdot \sqrt{Y_{2j}} > b + rt \right] = \\ &= \sup_{t \geq 0} E_{Y_{21}, \dots, Y_{2q}} \left( P \left[ \sum_{k=1}^p \sigma_k t^{H_k} Z_k + \sum_{j=1}^q \sigma'_j t^{H'_j} Y_{1j} \cdot \sqrt{Y_{2j}} > b + rt \mid Y_{21}, \dots, Y_{2q} \right] \right) = \\ &= \sup_{t \geq 0} E_{Y_{21}, \dots, Y_{2q}} \left( P \left[ \sqrt{\sum_{k=1}^p \sigma_k^2 t^{2H_k} + \sum_{j=1}^q (\sigma'_j)^2 t^{2H'_j} Y_{2j}} \cdot U > b + rt \mid Y_{21}, \dots, Y_{2q} \right] \right) = \\ &= \sup_{t \geq 0} P \left[ \sqrt{\sum_{k=1}^p \sigma_k^2 t^{2H_k} + \sum_{j=1}^q (\sigma'_j)^2 t^{2H'_j} Y_{2j}} \cdot U > b + rt \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sup_{t \geq 0} P \left[ \sqrt{\sum_{k=1}^p \sigma_k^2 t^{2H_k} + \sum_{j=1}^q (\sigma'_j)^2 t^{2H'_j} Y_{2j}} \cdot |U| > b + rt \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sup_{t \geq 0} P \left[ \left( \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 t^{2H_k} + \sum_{j=1}^q (\sigma'_j)^2 t^{2H'_j} Y_{2j} \right) \cdot |U|^2 > (b + rt)^2 \right] \end{aligned}$$

Без ограничения общности можно предположить, что показатели Хёрста упорядочены следующим образом:

$$\frac{1}{2} < H_1 < \dots < H_p < 1, \frac{1}{2} < H'_1 < \dots < H'_q < 1.$$

Далее мы рассматриваем отдельно два случая :  $H_p \geq H'_q$  и  $H'_q > H_p$ . Стоит добавить, что размер буфера  $b$  - достаточно большое число, при котором правая часть последующих неравенств будет больше 1.

1. Рассмотрим сначала промежуток:  $0 \leq t \leq 1$  и  $H_p \geq H'_q$

Разделим обе части на  $t^{2H_p}$ , тогда:

$$2(H_k - H_p) \leq 0, 2(H'_j - H_p) \leq 0 \text{ и } t^{2(H_k - H_p)} \geq 1, t^{2(H'_j - H_p)} \geq 1$$

Отсюда мы получаем

$$\begin{aligned} \sup_{0 \leq t \leq 1} P \left[ \left( \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 t^{2(H_k - H_p)} + \sum_{j=1}^q (\sigma'_j)^2 t^{2(H'_j - H_p)} Y_{2j} \right) \cdot |U|^2 > \left( \frac{b + rt}{t^{H_p}} \right)^2 \right] > \\ > \sup_{0 \leq t \leq 1} P \left[ (\sigma_p^2 + (\sigma'_q)^2 Y_{q2}) \cdot |U|^2 > \left( \frac{b + rt}{t^{H_p}} \right)^2 = (\tau_1(t))^2 \right] \end{aligned}$$

$$\tau_1(t) = \frac{b + rt}{t^{H_p}} \quad (9)$$

Левая часть неравенства не зависит от  $t$ . Осталось найти минимум правой части  $\tau_1(t)$ . Так как у нас справа стоит квадрат от положительной функции на данном промежутке, то можно взять производную не от квадрата, а от самой этой функции.

$$\begin{aligned} \left( \frac{b + rt}{t^{H_p}} \right)' &= \\ &= \frac{rt^{H_p} - (b + rt)H_p t^{H-1}}{t^{2H_p}} = \\ &= \frac{rt^{H_p}(1 - H_p) - bH_p t^{H_p-1}}{t^{2H_p}} = \\ &= \frac{t^{H_p-1}(r(1 - H_p)t - bH_p)}{t^{2H_p}} = \\ &= \frac{r(1 - H_p)t - bH_p}{t^{H_p+1}} = 0 \end{aligned}$$

Отсюда  $t = \frac{bH_p}{r(1-H_p)}$ , причем слева производная имеет отрицательный знак, а справа - положительный, откуда делаем вывод, что это точка минимума.

Стоит сказать, что при достаточно большом размере буфера  $b$ ,  $\frac{bH_p}{r(1-H_p)} > 1$ , поэтому на промежутке  $[0, 1]$  максимум по вероятности будет достигаться при  $t_1 = 1$ .

Тогда последняя вероятность допускает следующую оценку снизу:

$$P [(\sigma_p^2 + (\sigma'_q)^2 Y_{q2}) \cdot |U|^2 > (b + r)^2] \quad (10)$$

2. Рассмотрим теперь  $t > 1$  и  $H_p \geq H'_q$

Разделим обе части на  $t^{2H'_q}$ , тогда:

$2(H_p - H'_q) > 0$  - наибольшая степень и  $t^{2(H_p - H'_q)} > 1$ . Остальные степени вообще говоря могут быть не только положительными, но и отрицательными. Поэтому мы получаем:

$$\begin{aligned} \sup_{t>1} P \left[ \left( \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 t^{2(H_k - H'_q)} + \sum_{j=1}^q (\sigma'_j)^2 t^{2(H'_j - H'_q)} Y_{2j} \right) \cdot |U|^2 > \left( \frac{b + rt}{t^{H'_q}} \right)^2 \right] > \\ > \sup_{t>1} P \left[ \left( \sigma_p^2 t^{2(H_p - H'_q)} + (\sigma'_q)^2 Y_{2q} \right) \cdot |U|^2 > \left( \frac{b + rt}{t^{H'_q}} \right)^2 = (\tau_2(t))^2 \right] \end{aligned}$$

$$\tau_2(t) = \frac{b + rt}{t^{H'_q}} \quad (11)$$

Аналогично минимум правой части достигается при  $t_2 = \frac{bH'_q}{r(1-H'_q)} > 1$ .

Так как левые и правые части при  $t = 1$  совпадают, а минимум правой части при  $t > 1$  достигается при  $t_2$ , то и максимум по вероятности при  $H_p \geq H'_q$  достигается при  $t_2$ .

3. На промежутке:  $0 \leq t \leq 1$  и  $H'_q \geq H_p$

Разделим обе части на  $t^{2H'_q}$ , тогда:

$$2(H_k - H'_q) \leq 0, 2(H_j - H'_q) \leq 0 \text{ и } t^{2(H_k - H'_q)} \geq 1, t^{2(H'_j - H_p)} \geq 1$$

Отсюда мы получаем

$$\sup_{0 \leq t \leq 1} P \left[ \left( \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 t^{2(H_k - H'_q)} + \sum_{j=1}^q (\sigma'_j)^2 t^{2(H'_j - H'_q)} Y_{2j} \right) \cdot |U|^2 > \left( \frac{b + rt}{t^{H'_q}} \right)^2 \right] >$$



$$\sup_{0 \leq t \leq 1} P \left[ (\sigma_p^2 + (\sigma'_q)^2 Y_{q2}) \cdot |U|^2 > \left( \frac{b+rt}{t^{H'_q}} \right)^2 = (\tau_3(t))^2 \right]$$

$$\tau_3(t) = \frac{b+rt}{t^{H'_q}} \quad (12)$$

Аналогично предыдущим случаям берем производную по левой части и получаем  $t = \frac{bH'_q}{r(1-H'_q)}$ , причем эта величина при достаточно большом  $b$  больше 1. Поэтому минимум достигается при  $t_3 = 1$ .

Тогда последняя вероятность допускает следующую оценку снизу:

$$P [(\sigma_p^2 + (\sigma'_q)^2 Y_{q2}) \cdot |U|^2 > (b+r)^2]$$

4. Рассмотрим теперь  $t > 1$  и  $H'_q \geq H_p$

Разделим обе части на  $t^{2H_p}$ , тогда:

$2(H'_q - H_p) > 0$  - наибольшая степень и  $t^{2(H'_q - H_p)} > 1$ . Остальные степени вообще говоря могут быть не только положительными, но и отрицательными. Поэтому мы получаем:

$$\begin{aligned} \sup_{t>1} P \left[ \left( \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 t^{2(H_k - H_p)} + \sum_{j=1}^q (\sigma'_j)^2 t^{2(H'_j - H_p)} Y_{2j} \right) \cdot |U|^2 > \left( \frac{b+rt}{t^{H_p}} \right)^2 \right] > \\ > \sup_{t>1} P \left[ \left( \sigma_k^2 + (\sigma'_j)^2 t^{2(H'_q - H_p)} Y_{2j} \right) \cdot |U|^2 > \left( \frac{b+rt}{t^{H_p}} \right)^2 = (\tau_4(t))^2 \right] \end{aligned}$$

$$\tau_4(t) = \frac{b+rt}{t^{H_p}} \quad (13)$$

Аналогично минимум правой части достигается при  $t_4 = \frac{bH_p}{r(1-H_p)} > 1$ .

Так как левые и правые части при  $t = 1$  совпадают, а минимум правой части при  $t > 1$  достигается при  $t_2$ , то и максимум по вероятности при  $H'_q \geq H_p$  достигается при  $t_4$ .

Подведя некий итог, имеем, что максимум по вероятности достигается при:

$$T = \begin{cases} t_1 = 1, 0 \leq t \leq 1, H_p \geq H'_q \\ t_2 = \frac{bH'_q}{r(1-H'_q)}, t > 1, H_p \geq H'_q \\ t_3 = 1, 0 \leq t \leq 1, H'_q \geq H_p \\ t_4 = \frac{bH_p}{r(1-H_p)}, t > 1, H'_q \geq H_p \end{cases} = \frac{b \min(H'_q, H_p)}{r(1 - \min(H'_q, H_p))} \quad (14)$$

Для достаточно больших  $t$ .

Продолжим преобразования:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sup_{t \geq 0} P \left[ \left( \sum_{k=1}^p \sigma_k^2 t^{2H_k} + \sum_{j=1}^q (\sigma'_j)^2 t^{2H'_j} Y_{2j} \right) \cdot |U|^2 > (b + rt)^2 \right] > \\ & > \frac{1}{2} \sup_{t \geq 0} P \left[ \left( \sigma_p^2 t^{2H_p} + (\sigma'_q)^2 t^{2H'_q} Y_{2q} \right) \cdot |U|^2 > (b + rt)^2 \right] = \end{aligned}$$

Найдем оценку при  $H_p \geq H'_q$ , для случая  $H'_q \geq H_p$  она будет доказываться аналогично

$$\begin{aligned} & = \frac{1}{2} \sup_{t \geq 0} P \left[ \left( \sigma_p^2 t^{2(H_p - H'_q)} + (\sigma'_q)^2 Y_{2q} \right) \cdot |U|^2 > \left( \frac{b + rt}{t^{H'_q}} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{1}{2} P \left[ \left( \sigma_p^2 T^{2(H_p - H'_q)} + (\sigma'_q)^2 Y_{2q} \right) \cdot |U|^2 > \left( \frac{b + rT}{T^{H'_q}} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{1}{2} P \left[ \left( \left( \frac{\sigma_p}{\sigma'_q} \right)^2 T^{2(H_p - H'_q)} + Y_{2q} \right) \cdot |U|^2 > \left( \frac{b + rT}{\sigma'_q T^{H'_q}} \right)^2 \right] = \\ & = \frac{1}{2} P \left[ (a_1 + Y_{2q}) \cdot |U|^2 > b_1 \right] = \end{aligned}$$

Где

$$a_1 = \left( \frac{\sigma_p}{\sigma'_q} \right)^2 T^{2(H_p - H'_q)} \quad (15)$$

$$b_1 = \left( \frac{b + rT}{\sigma'_q T^{H'_q}} \right)^2 \quad (16)$$

Сформулируем вспомогательную теорему для произведения неотрицательных случайных величин [9]:

**Теорема 4.** (Бреймана) Пусть имеются две независимые и неотрицательные случайные величины  $X$  и  $Y$ , такие что

$$\bar{F}(x) = P(X > x) = x^{-\alpha} \cdot L(x), \quad x \rightarrow \infty,$$

где  $\alpha > 0$ ,  $L$  - медленно меняющаяся функция (slowly varying function),  $E(Y^{\alpha+\epsilon}) < \infty$  для некоторого  $\epsilon > 0$ .

Тогда при  $x \rightarrow \infty$

$$\bar{H}(x) = P(XY > x) \sim E(Y^\alpha) \bar{F}(x)$$

Мы применяем этот результат к с.в.  $X = a_1 + Y_{2q}$  и  $Y = |U|^2$ . Т.к. с.в.  $Y_{2q}$  имеет одностороннее  $\alpha_q/2$ -устойчивое распределение, то для больших  $x > 0$

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= P((a_1 + Y_{2q}) > x) = P(Y_{2q} > x - a_1) \sim P(Y_{2q} > x) \sim \\ &\sim C_1(\alpha_q/2) \cdot x^{-\alpha_q/2} \end{aligned}$$

где

$$C_1(\alpha) = \frac{\sin(\pi\alpha)}{\pi} \Gamma(\alpha) \quad (17)$$

Окончательно мы получаем:

$$\begin{aligned} \varepsilon(b) &\geq \frac{1}{2} P[(a_1 + Y_{2q}) \cdot |U|^2 > b_1] \sim \\ &\sim \frac{1}{2} E(|U|^{\alpha_q}) \cdot \bar{F}(b_1) \sim E(|U|^{\alpha_q}) \cdot C_1(\alpha_q/2) \cdot b_1^{-\alpha_q/2} = \\ &= \left\{ b_1 = \left( \frac{b + rT}{\sigma'_q T^{H'_q}} \right)^2, T = \frac{bH'_q}{r(1 - H'_q)} \right\} = \\ &= C_2(r, \sigma_p, \sigma'_q, H_p, H'_q) \cdot b^{-(1-H'_q)\alpha_q} \end{aligned} \quad (18)$$

Если  $H'_q > H_p$ , то мы можем доказать аналогично, что для больших  $b$

$$\varepsilon(b) \geq C_3(r, \sigma_p, \sigma'_q, H_p, H'_q) \cdot b^{-(1-H_p)\alpha_q} \quad (19)$$

Обозначим  $H = \min(H_p, H'_q)$ . Тогда окончательный результат имеет вид:

$$\varepsilon(b) \geq C_4(r, \sigma_p, \sigma'_q, H_p, H'_q) \cdot b^{-(1-H)\alpha_q} \quad (20)$$

$$C_4(r, \sigma_p, \sigma'_q, H_p, H'_q) = \begin{cases} C_2(r, \sigma_p, \sigma'_q, H_p, H'_q), & H_p \geq H'_q \\ C_3(r, \sigma_p, \sigma'_q, H_p, H'_q), & H_p < H'_q \end{cases} \quad (21)$$

## Заключение

В ранее рассмотренных моделях неоднородного трафика [2] при всего двух процессах с равными параметрами Хёрста  $H_1 = H_2 = H$  было получено, что нижняя оценка вероятности переполнения

$$\sup_{t \geq 0} P \left( t^{H_1} B_H(1) + t^{H_2} L_\alpha(1) > \frac{b + rt}{\sigma} \right)$$

достигает своего максимума при  $\tau = \frac{bH}{r(1-H)}$ .

Затем этот случай был расширен разными параметрами Хёрста  $H_1 \neq H_2$  [10], откуда была получена новая оценка и сделан важный вывод, что максимум по вероятности достигается при минимальном параметре Хёрста.

В моей работе был рассмотрен поток с произвольным количеством процессов Броуновского движения и движения Леви. Причём у каждой из компонент также был свой параметр Хёрста. Вывод оказался похожим: максимум по вероятности достигается при минимальном параметре Хёрста, который является наибольшим среди компонент одного типа:

$$\varepsilon(b) \geq C_4(r, \sigma_p, \sigma'_q, H_p, H'_q) \cdot b^{-(1-H)\alpha_q}$$

где  $H = \min(H_p, H'_q)$ ,

$$\frac{1}{2} < H_1 < \dots < H_p < 1, \frac{1}{2} < H'_1 < \dots < H'_q < 1.$$

## Список литературы

- [1] I. Norros., A Storage Model with Self-similar Input. *Queuing Systems*, 1994, vol. 16, p. 387
- [2] Khohlov Y.S., Lukashenko O.V., Morozov E.V., On a Lower Asymptotic Bound of the Overflow Probability in a Fluid Queue with Heterogeneous Input., 2016
- [3] I.A. Ibragimov, Yu.V. Linnik., Independent and Stationary Sequences of Random Variables, 1971, Wolters-Nordho, Gronengen
- [4] Patrice Abry, Richard Baraniukm, Patrik Flandrin, Rudolf Riedi, Darry Veitch., Multiscale Nature of Network Traffic., 2002
- [5] I. Norros., Recent Trends in Teletraffic Theory., 1994
- [6] Walter Willinger, Vern Paxson., Where Mathematics Meets the Internet., 1998
- [7] М. Пагано, В. Рыков, Ю. Хохлов., Модели Телетрафика., 2017
- [8] V. M. Zolotarev. One-Dimensional Stable Distributions, 1986, Translations of Mathematical Monographs, vol. 65, AMS.
- [9] Breiman L. On some limit theorems similar to the arc-sin law. *Theory Probab. Appl.* 10, p. 323-331.
- [10] Хохлов Ю.С., Гончаров Б.А. Оценка качества обслуживания в неоднородных моделях трафика. – Тихоновские чтения, МГУ им. М. В. Ломоносова, Научная конференция: Тезисы докладов, 29 октября-2 ноября 2018, с. 76.
- [11] Гончаров Б.А., Сидорова О.И., Хохлов Ю.С. Оценка качества обслуживания в неоднородных моделях трафика. // Вестник ТвГУ. Серия: Прикладная математика. 2018. № 4. С. 50-63.