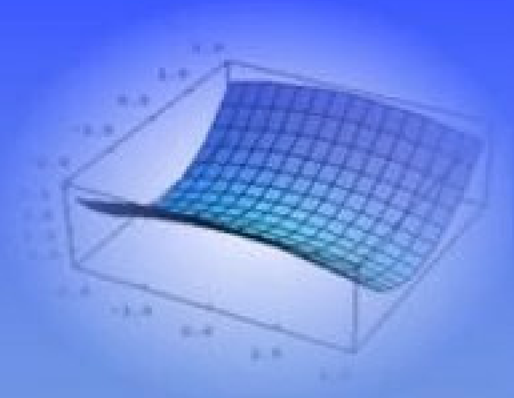
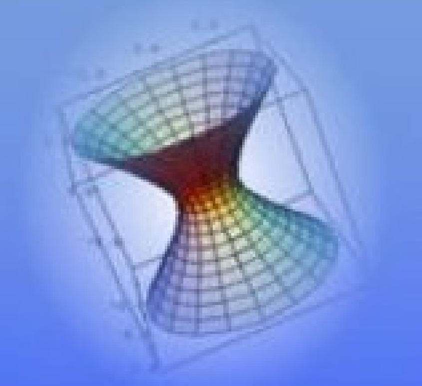
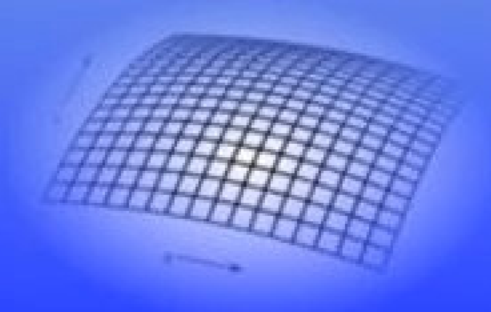
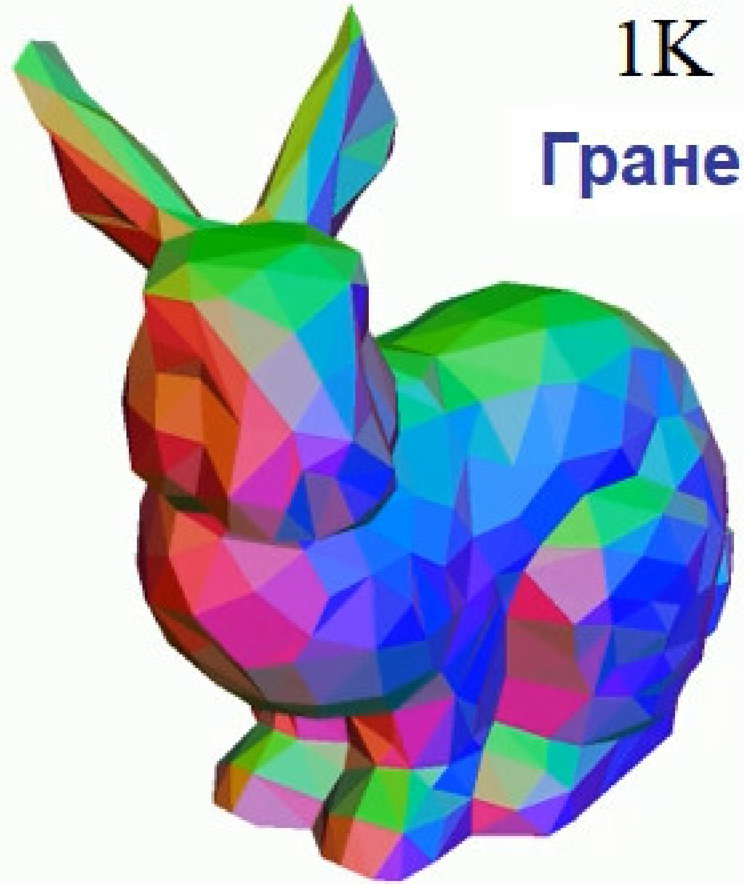
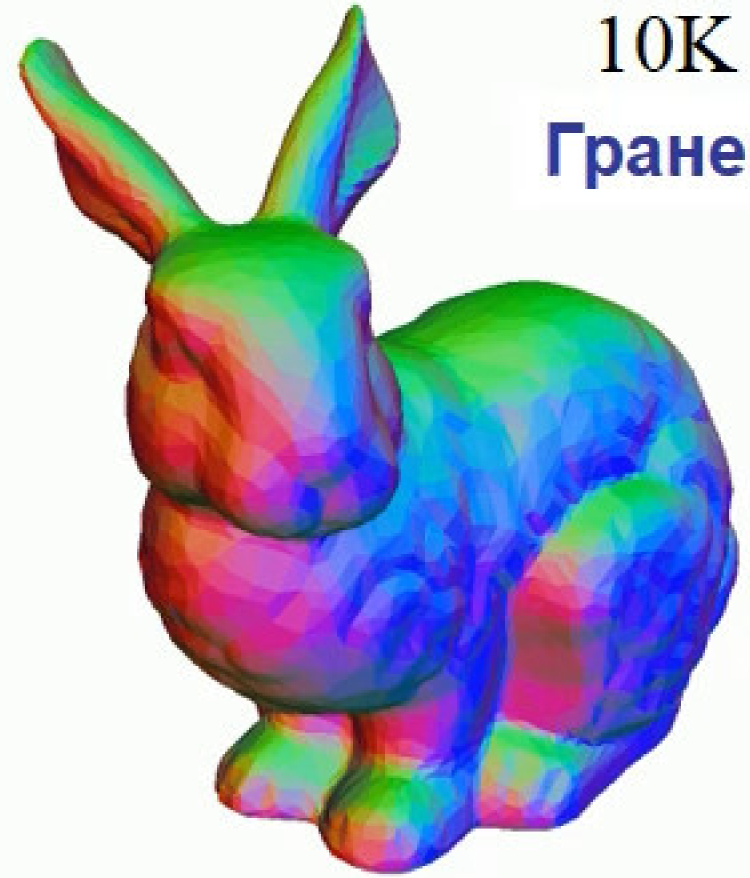


Кривые и поверхности

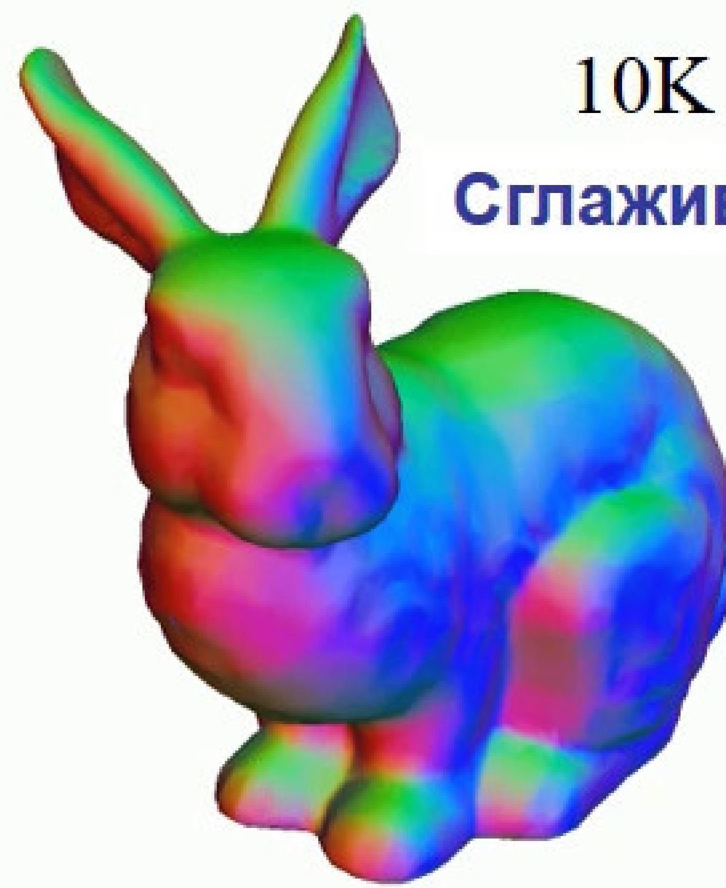




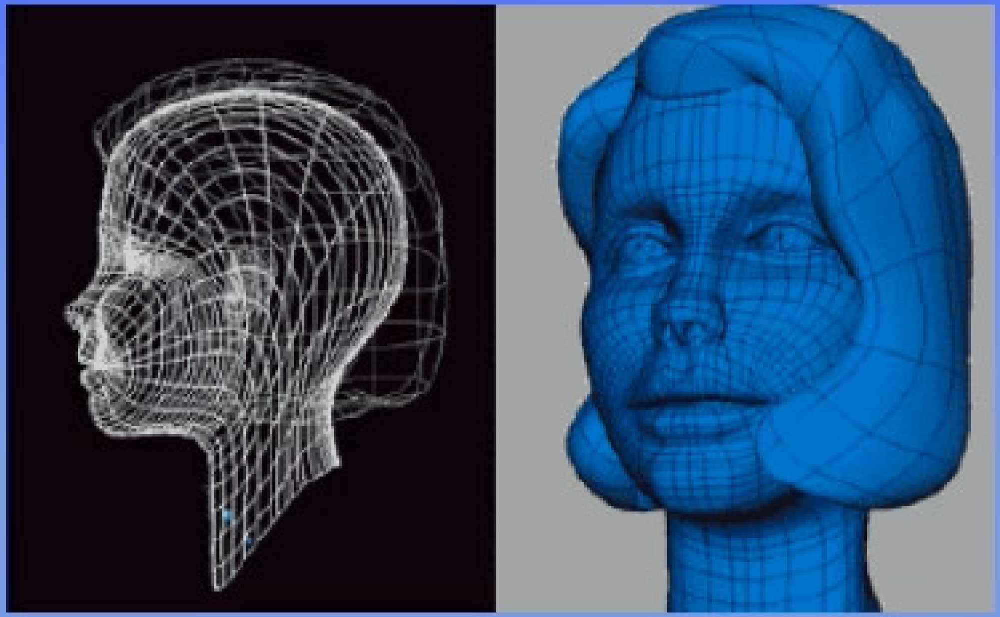

1K
Граней

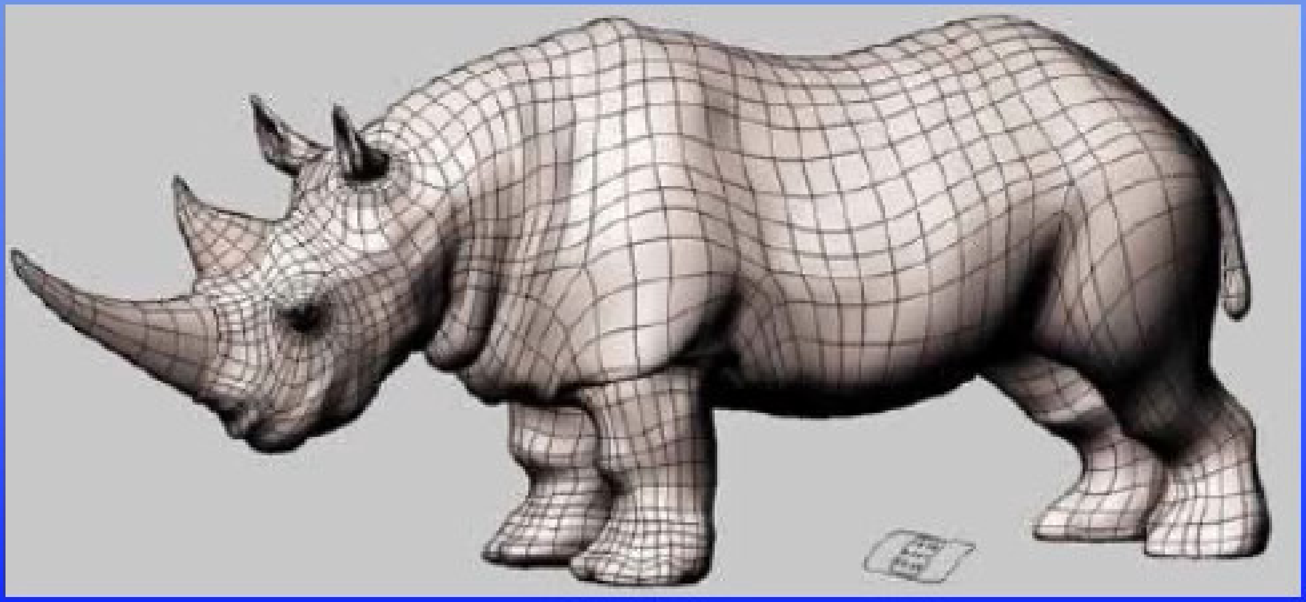

10K
Граней


1K
Сглаживание

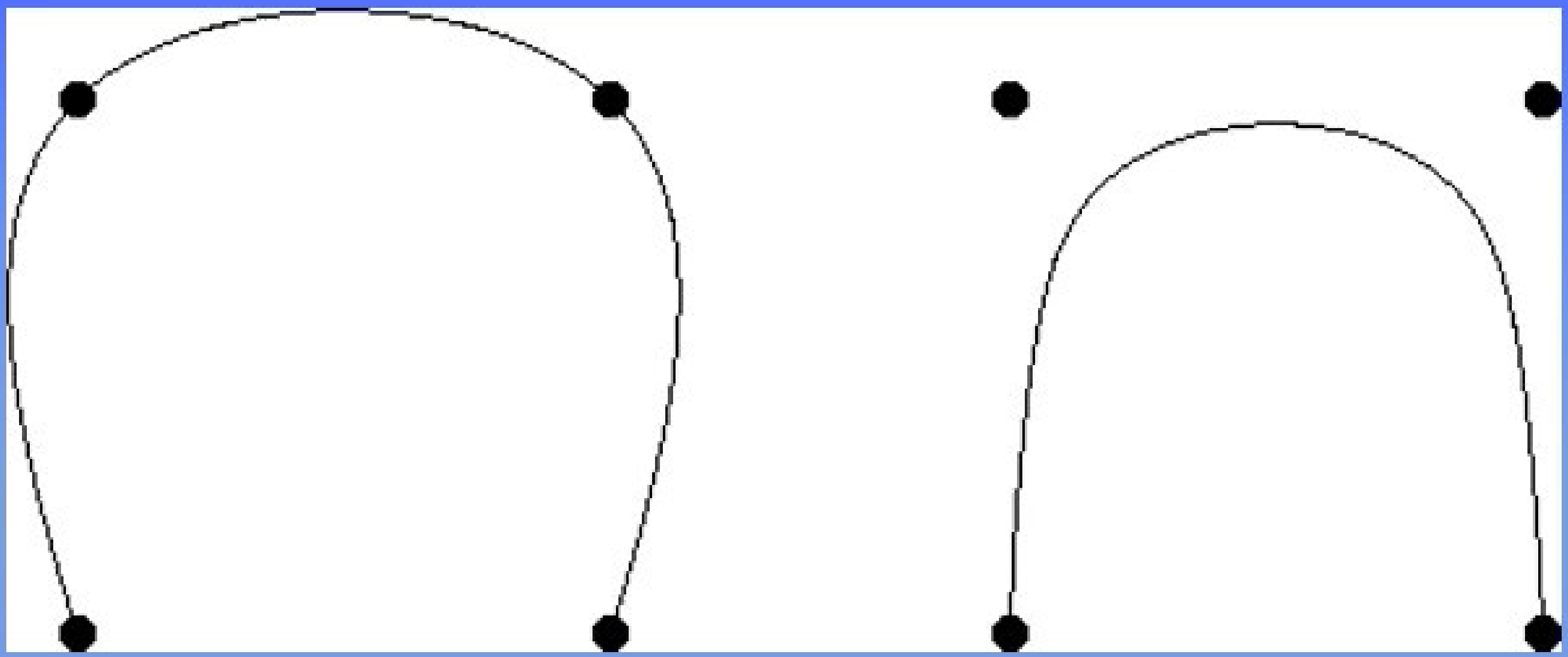

10K
Сглаживание

Параметрические кривые, мотивация





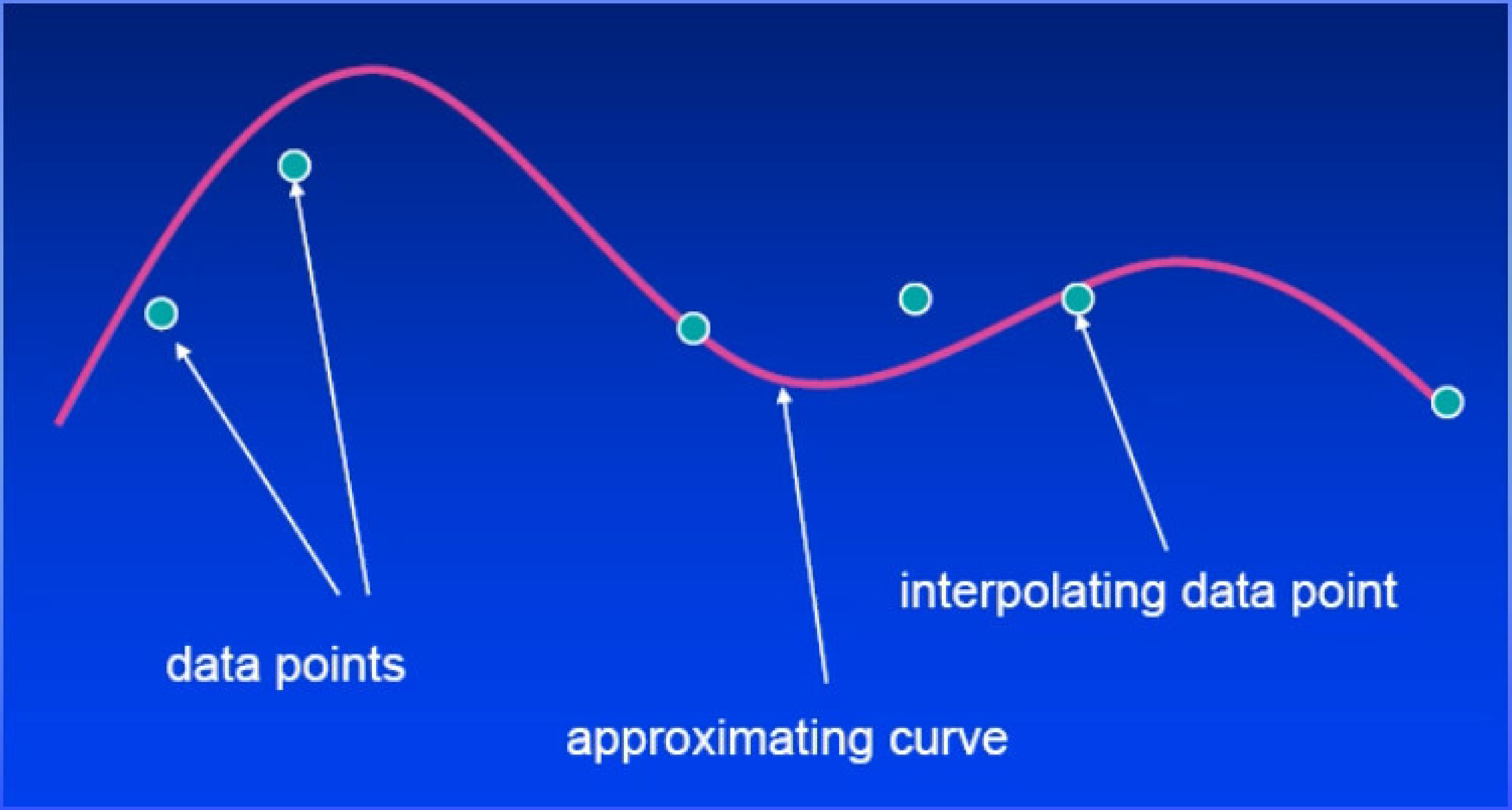
Интерполяция и аппроксимация кривых



Интерполяция
кривая должна проходить через контрольные точки

Аппроксимация
кривая формируется под влиянием контрольных точек

Интерполяция и аппроксимация кривых



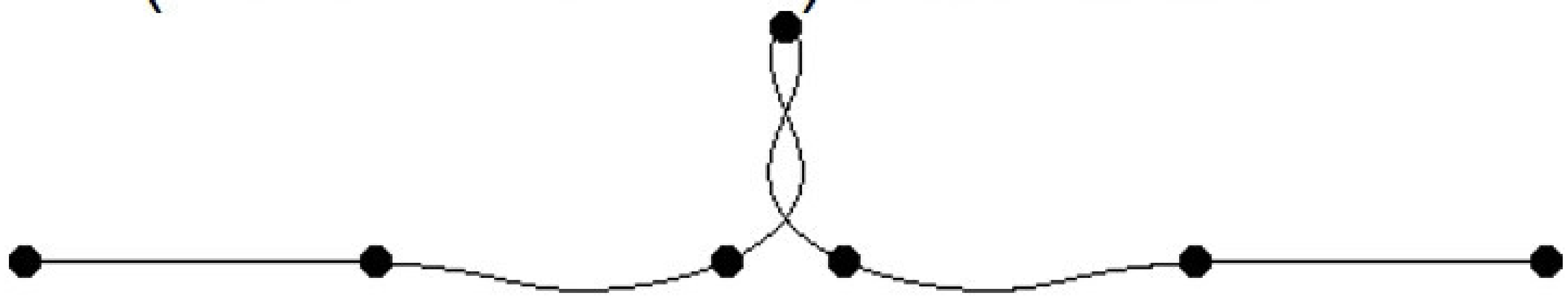
Задача **аппроксимации** возникает при замене кривой, заданной уравнениями функций сложной природы (например, с точки зрения скорости расчета ее значений и производных, интегрирования, дифференцирования), другой кривой, близкой к заданной, уравнения которой более простые.

Кривую возможно построить путем:

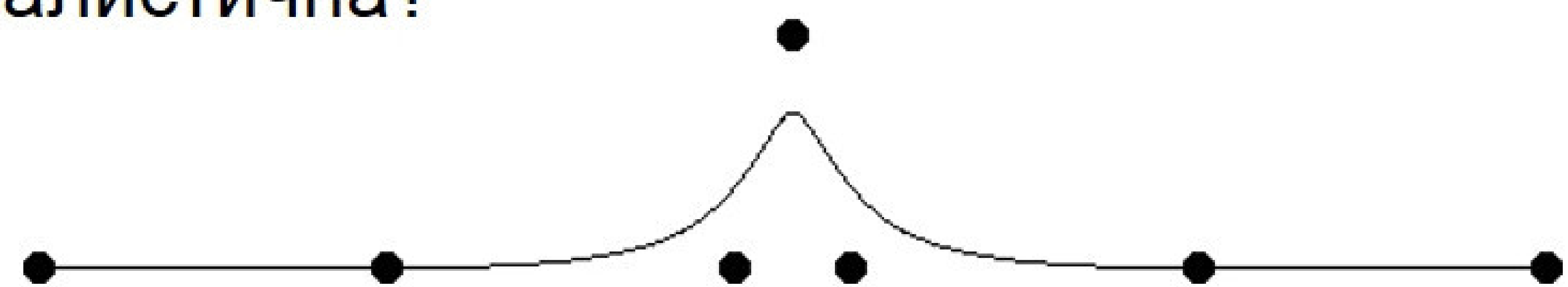
- интерполированием или аппроксимацией по точкам;
- деформацией кривой (перемещение точки, изменение полинома);
- вычислением эквидистанты к заданной кривой;
- формированием разомкнутого или замкнутого контура из отрезков или дуг кругов на плоскости;
- вычислением конических сечений (эллипс, парабола и т.д.);
- вычислением сечения поверхностей;
- соединением кривых.

Интерполяция и аппроксимация кривых

- Интерполяция кривой – по принуждению → много (нежелательных?) колебаний



- Аппроксимированная кривая – более реалистична?



Интерполяция и аппроксимация кривых

- Требуется аппроксимировать некоторую заданную функцию f(t) конечной суммой

$$g(t)=\sum_{i-1}^{n} C_i \varphi(i)\,, где\ \varphi(i)$$

- более простых функций так, чтобы выполнилось множество ограничений, наложеных на g(t). Поскольку надо определить n независимых констант C_1, $C_2 \ldots C_n$, на g(t) нужно наложить по меньшей мере n ограничений.
- Обычно ограничения на g(t) выбираются такими, чтобы g(t) была «хорошим» приближением функции f(t).
- Что такое «хорошее» приближение?

Интерполяционные ограничения

В теории аппроксимации часто встречаются следующие ограничения:

- 1) <u>интерполяционные ограничения</u>

$$g(t_i) = f(t_i) \ \text{где}\ i \in [1.....n]$$

Эти функции должны иметь одинаковые значения в выделеных точках.

- 2) <u>смесь интерполяционных ограничений и ограничений гладкости</u>

а) $g(t_i) = f(t_i)$

б) $g'(t_i) = f'(t_i) \quad (i = 1, i = k)$

в) $g(t) \in C^2$

т.е. g(t) дважды непрерывно дифференцируема

3) <u>условия ортогональности</u>

$$(f - g, \varphi_i) = \int_a^b [f(t) - g(t)]\varphi_i(t)dt = 0$$

В машинной графике нас интересует не качество аппроксимации, измеряемое, например, оценкой ошибки аппроксимации, а свойство, выражаемое через внешний вид кривой или поверхности. Еще это назвают свойством формы.

Формы представления кривых и поверхностей

- *Явная форма* - это уравнение вида $y = f(x)$, некоторые функции f имеют обратную g, позволяющие изменить соотношение переменных в уравнении.

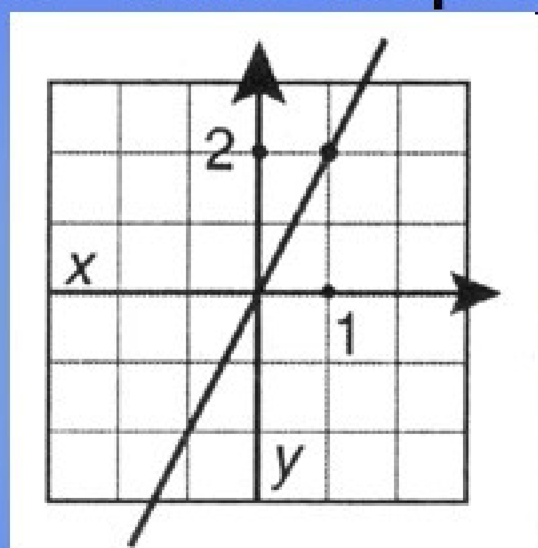


График функции y = 2x

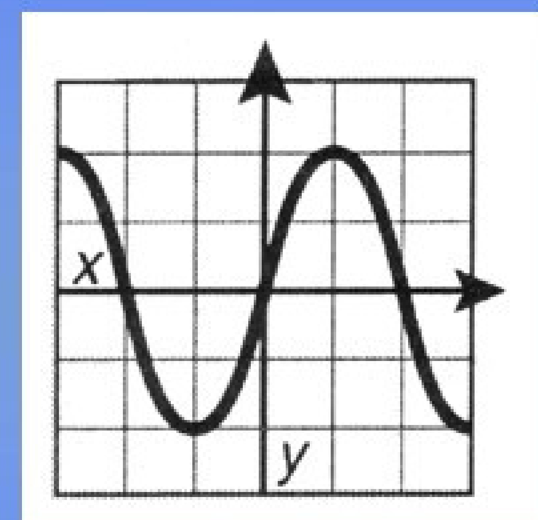


График функции y = sinx

- Нет гарантии, что для определенного графического объекта (например, линии) существует явное уравнение в том или ином виде (*y* от *x* или *x* от *y*).

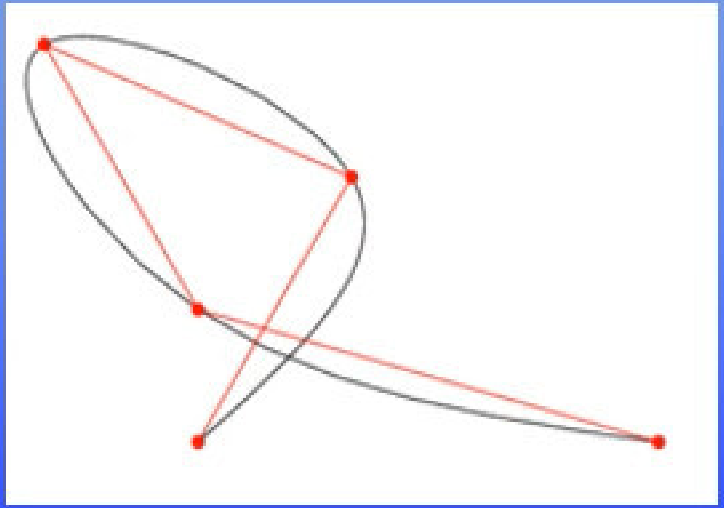
Для описания поверхности потребуется использовать две назависимые переменные и уравнение поверхности в явном виде будет выглядеть ***z = f (x, y).***

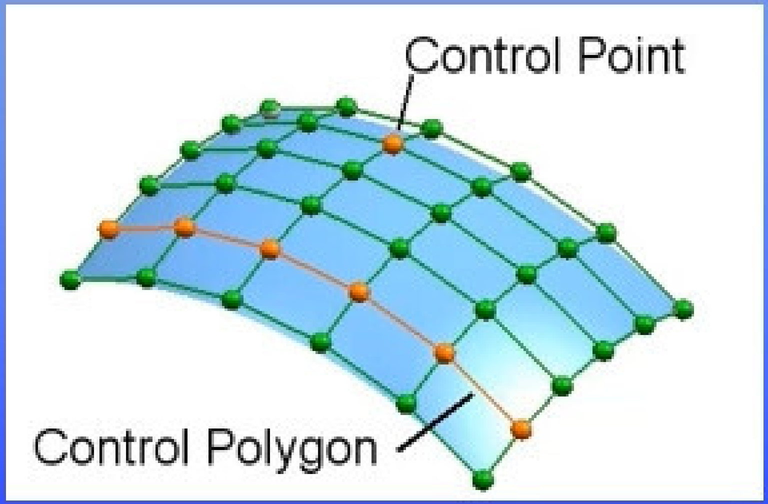
Формы представления кривых и поверхностей

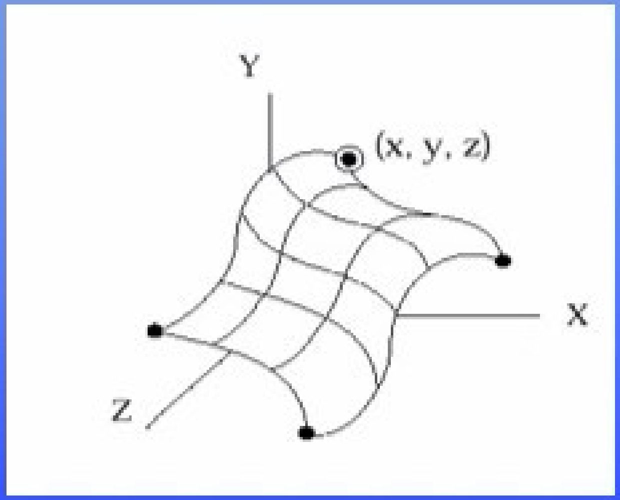
- *Невная форма*. Большинство кривых и поверхностей, с которыми приходится работать на практике, можно описать с помощью уравнений в неявной форме

  Неявная форма для прямой и окружности с центром в начале координат:

$$\begin{cases} ax + by + c = 0 \\ x^2 + y^2 - R^2 = 0 \end{cases}$$







Параметрические кривые

- В параметрической форме каждая координата точки, принадлежащая кривой представляется функцией независимой переменной u, которая называется параметром этой кривой.

Параметрическое представление для линии:

$$x = x_0 t + (1-t)x_1$$
$$y = y_0 t + (1-t)y_1$$
$$z = z_0 t + (1-t)z_1$$

- В трехмерном пространстве кривая описывается системой из трех параметрических уравнений x = x(u),y = y(u),z = z(u)

Рассмотрим уравнения кривой в виде

$$\mathbf{p}(u) = \begin{bmatrix} x(u) \\ y(u) \\ z(u) \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{p}(u) = \sum_{k=0}^{n} u^k \mathbf{c}_k ,$$

где

$$\mathbf{c}_k = \begin{bmatrix} c_{xk} \\ c_{yk} \\ c_{zk} \end{bmatrix}.$$

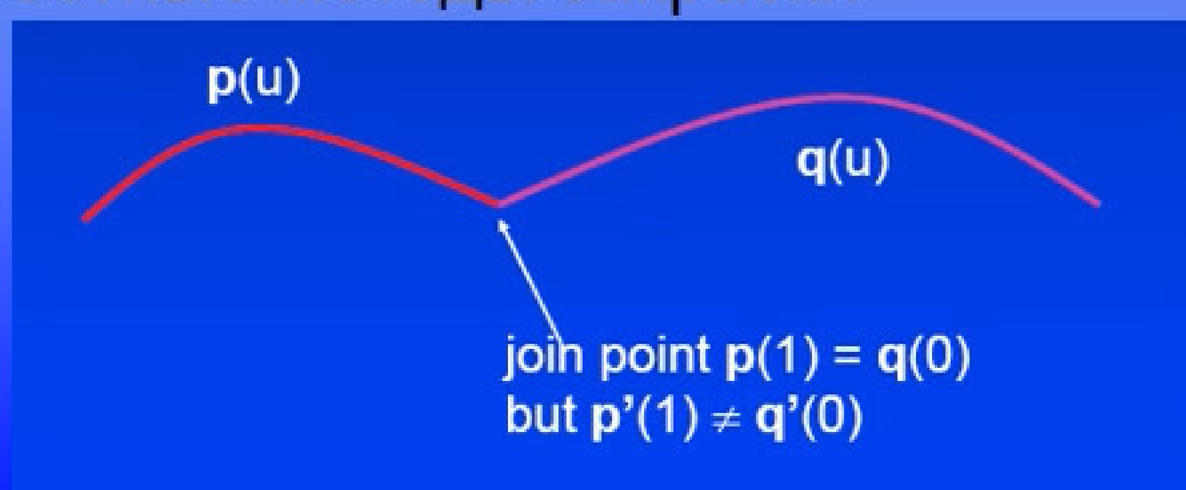
Полиномиальная параметрическая кривая степени n имеет вид

Почему параметрические кривые?

Остановимся на полиномиальной форме, то есть все функции параметра u при описании кривых и параметров u и v при описании поверхностей являются полиномами.

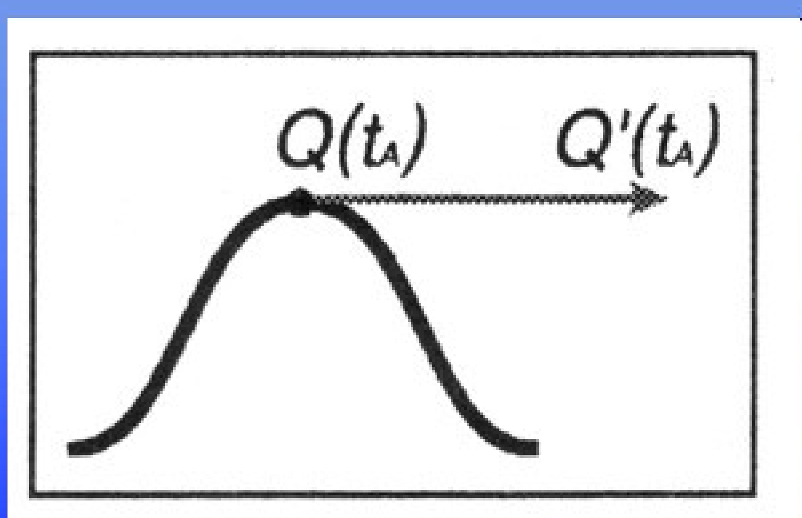
Основные доводы в пользу использования параметрического полиномиального представления

- Возможность локального контроля формы
- Гладкость и непрерывност в математическом смысле
- возможность математического вычисления производных
- Устойчивость к малым воздействиям (возмущениям)
- Возможность использовать простые и значительно высокоскоростные методы закраски

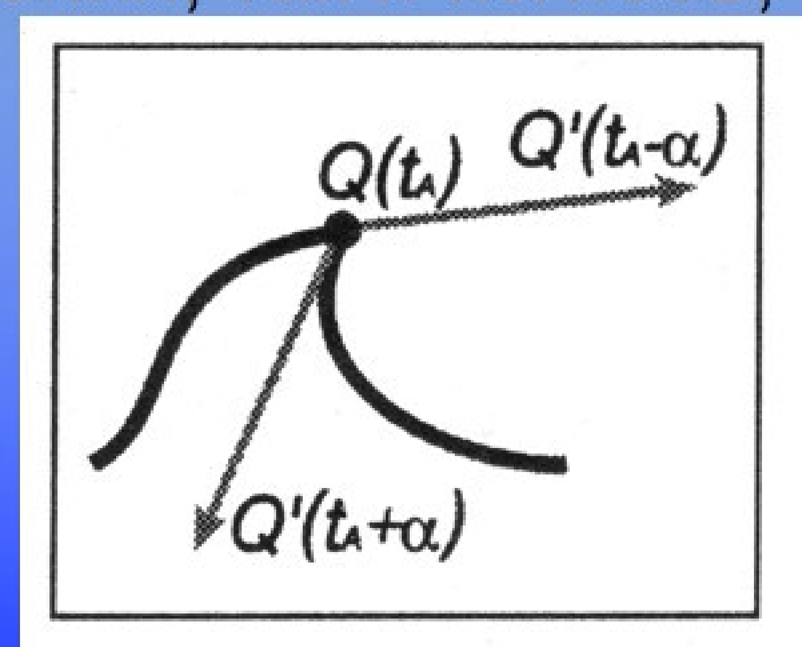


Почему параметрические кривые?

- Одной из самых важных причин выбора в качестве средств векторной графики кривых является управляемая гладкость.
- Гладкость означает, что при моделировании на кривой не образуется петель и резких преломлений (тем более разрывов). Но при этом, не исключена возможность создания как гладкого сопряжения, так и изгибов, например острых углов.



Касательная на гладкой кривой



Касательная на кривой с изломом

Определение кривых

Контрольные точки:

- Набор точек, которые влияют на форму кривой.

Узлы:

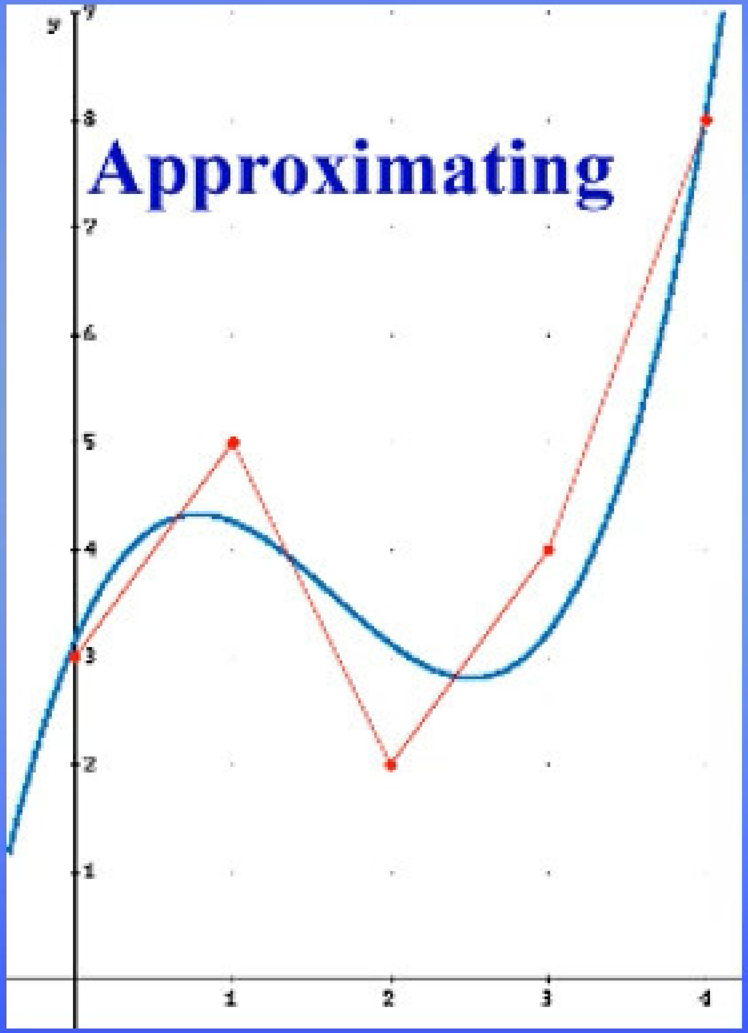
- Контрольные точки, которые лежат на кривой.

Интерполяция сплайна:

- Кривая проходит через контрольные точки.

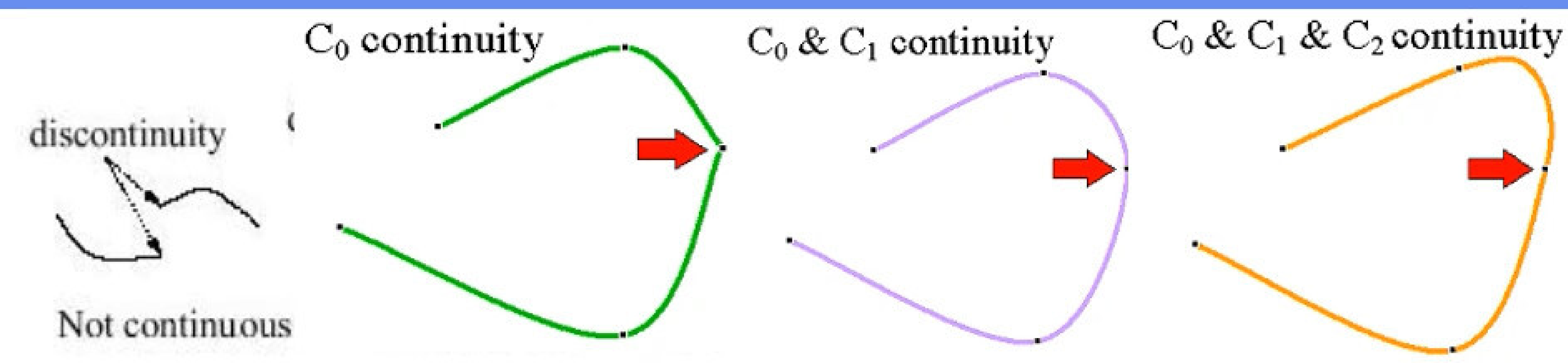
Апроксимация сплайна:

- Контрольные точки просто влияют на форму.



Геометрическая непрерывность

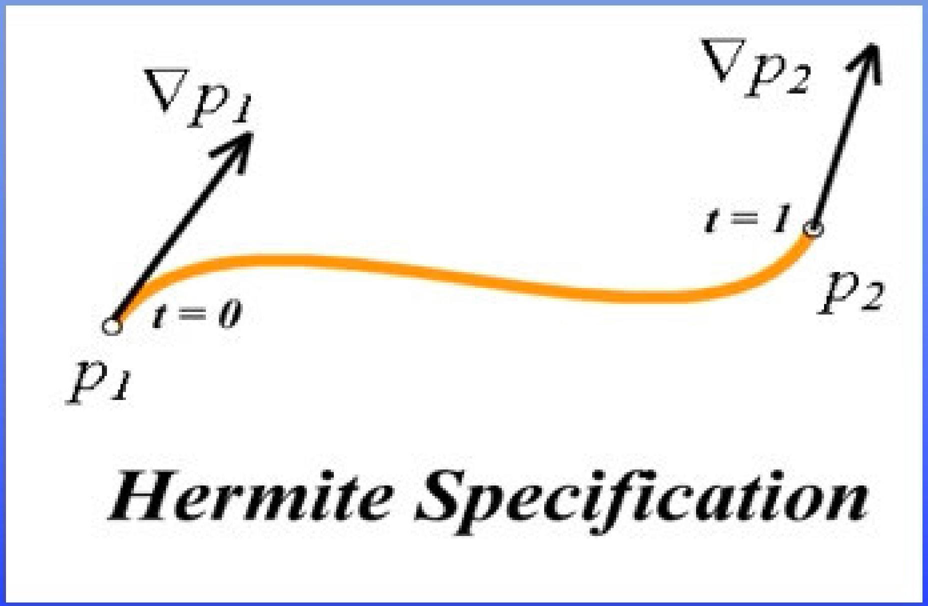
- Непрерывность G^0
  - у кривой/поверхности нет никаких разрывов/промежутков/ отверстий
  - При стыковке по уровню G^0 - непрерывность по координатам
- Непрерывность G^1
  - 1-ая производная кривой/поверхности непрерывна
  - "кажется гладкой, никакие фасеток"
- Непрерывность G^2
  - кривые/поверхности 2-ая производная непрерывна Фактически важно для затенения



Пример

- Вся история параметрических сплайнов связана с получением их коэффициентов.
- Как мы это делаем, удовлетворяя ограничения, установленные узлами и условиями непрерывности, - то, что классифицирует систему сплайна и отличает различные системы.
- Пример:

Кубические Сплайны Эрмита (Hermite)



Параметрические Полиномиальные Кривые

$$x(u) = \sum_{i=0}^{N} c_{xi} u^i \qquad y(u) = \sum_{j=0}^{M} c_{yj} u^j \qquad z(u) = \sum_{k=0}^{L} c_{zk} u^k$$

- Если N=M=L, нам нужно определить 3(N+1) коэффициентов
- Чтобы получить непрерывность C^2, функции должны иметь по крайней мере степень 3. Это - также самая низкая степень для описания неплоской кривой.
- Кубическая кривая имеет 4 степени свободы и может управлять 4 параметрами.
- Полиномиалы использования: x (u) степени k - функция от u. - y (u) и z (u) подобны, и каждый управляется независимо (вот почему с параметрической формой легче обращаться чем неявной формой). Это:

$$\mathrm{p}(u) = \sum_{k=0}^{3} c_k u^k$$

- Сегодня в компьютерной графике параметрические и кубические кривые третьего порядка называют **сплайнами.**
  В тоже время сплайн можно разделить на два класса:
- 1. кривые, имеющие непрерывные значения функции и ее первой производной;
- 2. кривые для которых непрерывна сама функция и ее первая и вторая производные.

  В первую группу относятся функции, которые проходят через заданные точки (заданные пользователем).

  Для второго класса функция проходит рядом с управляющими (контрольными) точками.

- Примеры: К первому классу относятся функции заданные формой Безье, Эрмита, Кейтмула-Рома; Ко второму классу относятся В-сплайны.

Сплайны

- *сплайн* - параметрическая кривая, определенная *контрольными точками*
  - термин "сплайн" идет от инженерного рисования, где сплайн был частью гибкого прута, используемого, чтобы нарисовать гладкие кривые
  - контрольные точки настраиваются пользователем, чтобы управлять формой кривой

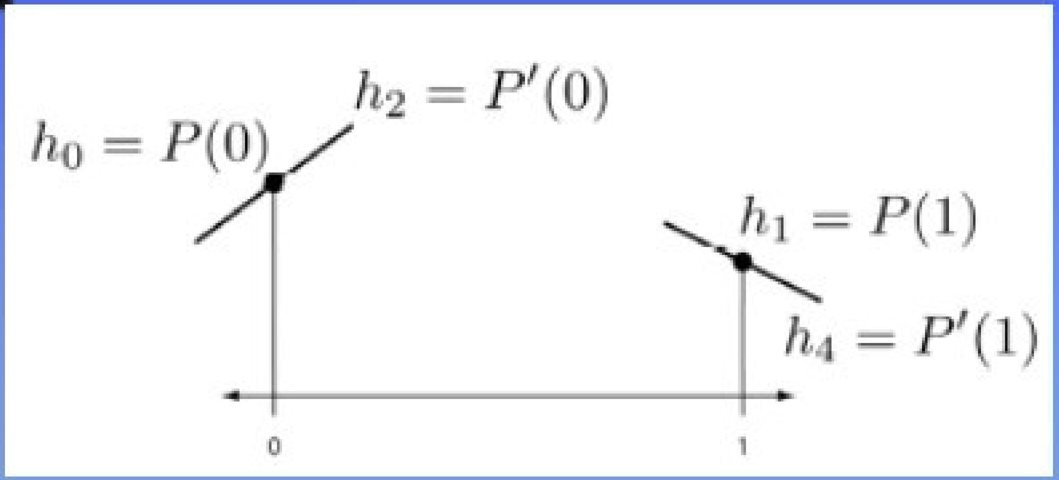
Сплайны

- чертежник использовал 'уток (ducks) ' и гибкие полосы (*spline* - упругая рейка), чтобы вытянуть кривые
- деревянные сплайны имеют непрерывность второго заказа, проходят через контрольные точки

a duck (weight)

ducks trace out curve

Кривая Эрмита



- Кривая Эрмита - кривая, для которой пользователь обеспечивает :
  - конечные точки кривой
  - параметрические производные кривой в конечных точках
    - параметрические производные - dx/dt, dy/dt, dz/dt
  - больше производных требовалось бы для кривых более высоких степеней

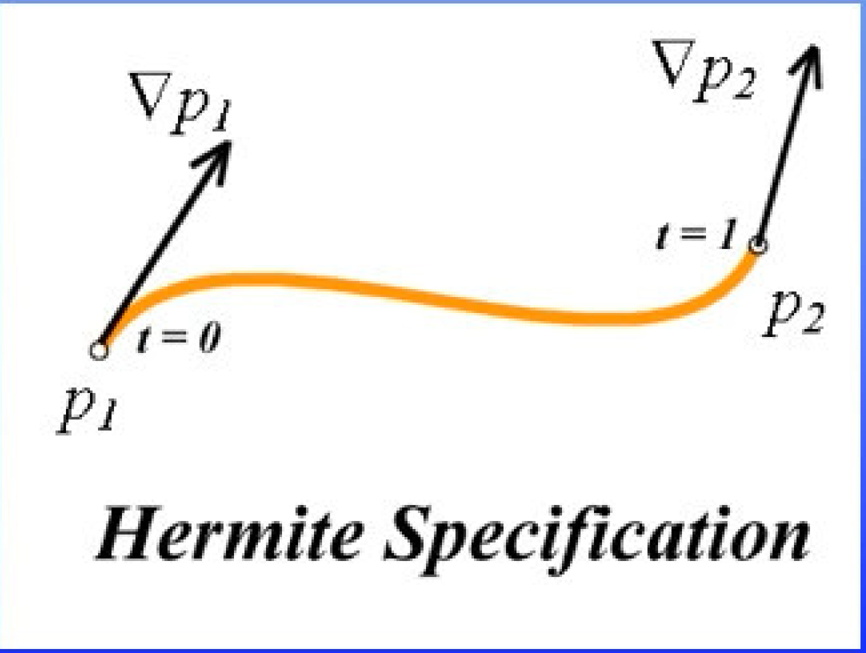
Кривая Эрмита(2)

- 4 степени свободы, 2 в каждом конце, чтобы управлять C^0 и непрерывностью C^1 в каждом конце.
- Полиномиал может быть определен положением, и производной в каждой конечной точке кривой.
- Определим: p = P (t) в термина P(t) и P/ (t)

$$P(t) = a\,t^3 + b\,t^2 + c\,t + d$$
$$P'(t) = 3a\,t^2 + 2b\,t + c$$

Определим коэффициенты

$$P(0) = h_0 = d$$
$$P(1) = h_1 = a + b + c + d$$
$$P'(0) = h_2 = c$$
$$P'(1) = h_3 = 3a + 2b + c$$



Кривая Эрмита(3)

Для кривой Эрмита должны существовать некоторые константы a_3, a_2, a_1, a_0

И они могут быть вычислены из контрольных точек, но как?

- Мы имеем утверждения:
  - Кривая должна проходить через x_0 когда $t=0$
  - производная должна быть x'_0 когда $t=0$
  - Кривая должна проходить через x_1 когда $t=1$
  - производная должна быть x'_1 когда $t=1$

Матрица Эрмита - M_H

$$h_0 = d$$

$$h_1 = a + b + c + d$$

$$h_2 = c$$

$$h_3 = 3a + 2b + c$$

$$\begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$$

$X(t) = t^T M_H q$ (q – геометрический вектор контроля)

Матрица Эрмита - M_H

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0 \\ h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{bmatrix}$$

$X(t) = t^T M_H q$ (q – геометрический вектор контроля)

Матрица Эрмита - M_H

$$P(t) = \begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$X(t) = t^T M_H q$ (q – геометрический вектор контроля)

Матрица Эрмита - M_H

$$\begin{bmatrix} a & b & c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_0 & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ H_2(t) \\ H_3(t) \end{bmatrix}$$

$$P(t) = \sum_{i=0}^{3} h_i H_i(t)$$

$X(t) = t^T M_H q$ (q – геометрический вектор контроля)

Матрица Эрмита - M_H

$$\begin{bmatrix} H_0(t) \\ H_1(t) \\ H_2(t) \\ H_3(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t^3 \\ t^2 \\ t \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$H_0(t) = 2t^3 - 3t^2 + 1$$

$$H_1(t) = -2t^3 + 3t^2$$

$$H_2(t) = t^3 - 2t^2 + t$$

$$H_3(t) = t^3 - t^2$$

$$\mathbf{M_H} = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$X(t) = t^T M_H q$ (q – геометрический вектор контроля)

Матрица Эрмита - M_H

Проистекающий полиномиал может быть выражен в матричной форме:

$X(t) = t^T M_H q$ (q – геометрический вектор контроля)

Матрица Эрмита - M_H

Проистекающий полиномиал может быть выражен в матричной форме:

$X(t) = t^T M_H q$ (q – геометрический вектор контроля)

$$X(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ -3 & -2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_0' \\ x_1 \\ x_1' \end{bmatrix}$$

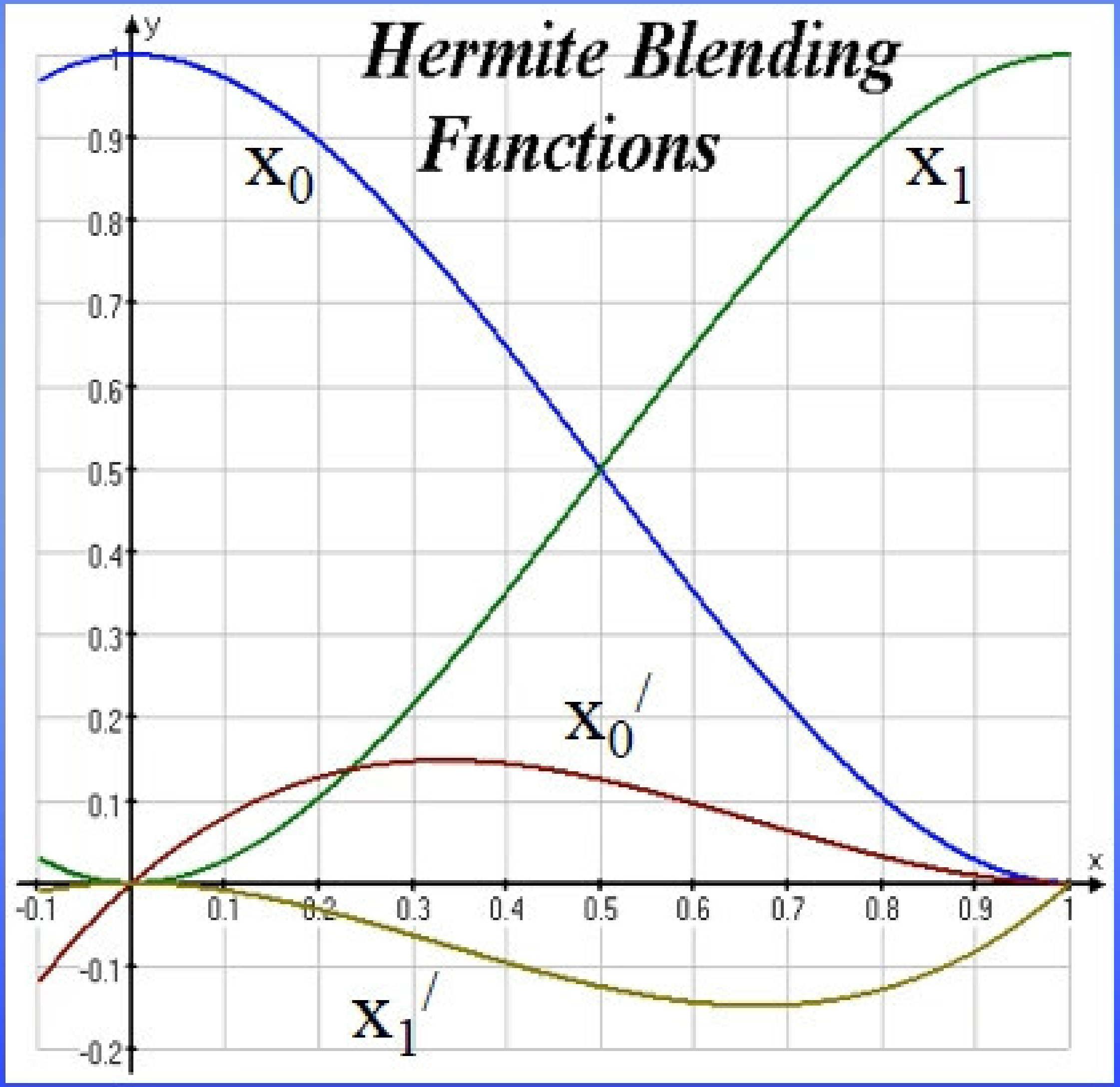
Мы можем теперь определить параметрический полиномиал для каждой координаты, независимо, то есть, X(t), Y(t) и Z(t)

Базис Эрмита (стыковочные функции)

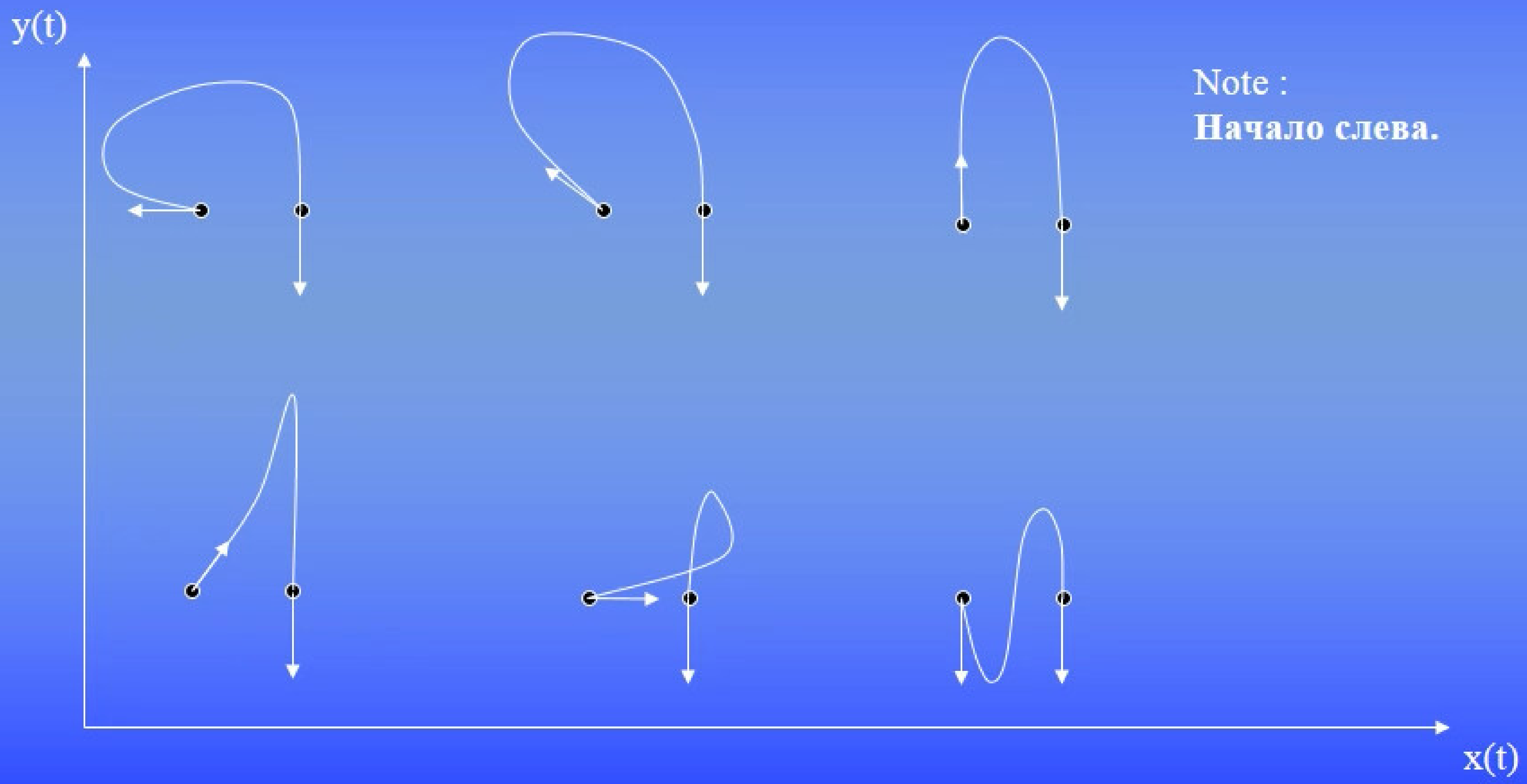
График показывает форму четырех базисных функций – часто назваемых *стыковочными функциями.*

Они маркированы элементами вектора контроля, который они нагружают.

Отметьте, что в каждом конце только положение является отличным от нуля, таким образом кривая должна коснуться конечных точек



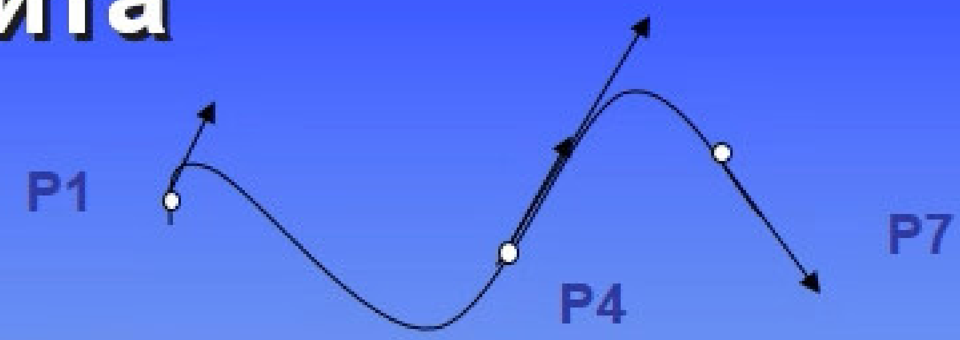
Кривые Эрмита



Note :
Начало слева.

Кривые Эрмита

- Две эрмитовых кубические кривые, соединенные в точке P4. Их касательные векторы имеют одинаковое направление, но различаются по величине.



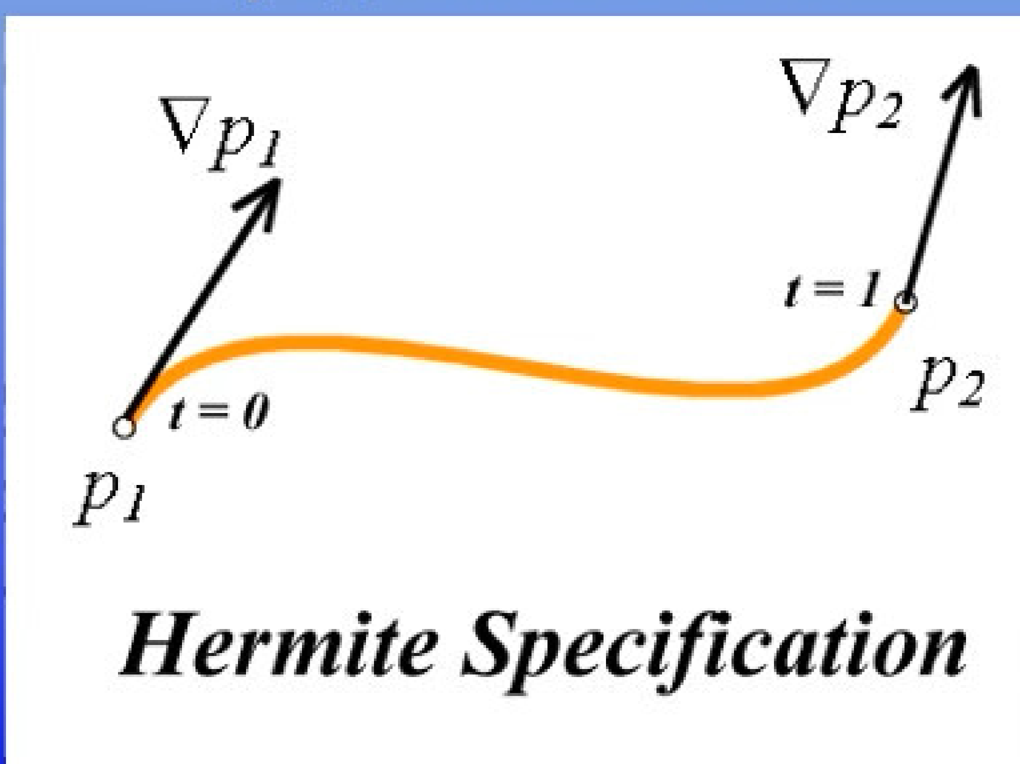
Свойства

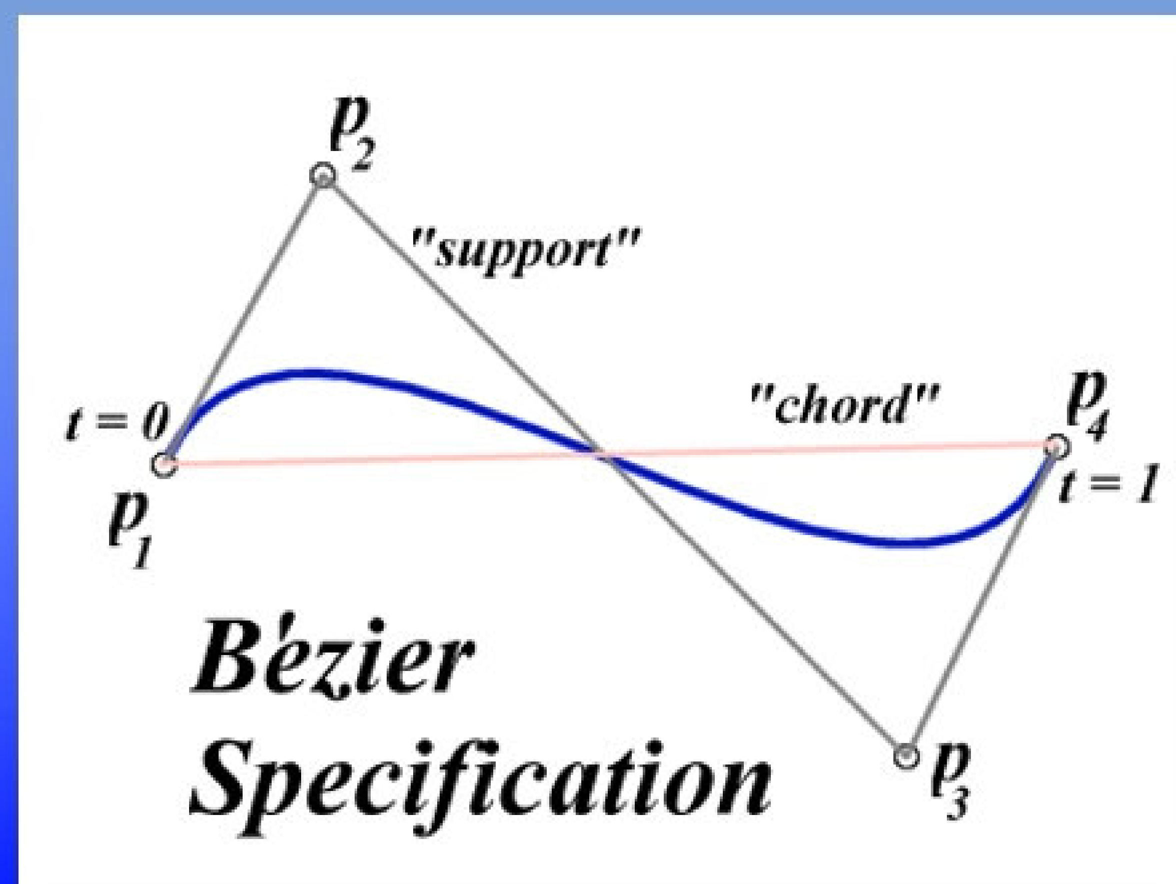
- 1) гладкая кривая
- 2) проходит через вершины
- 3) касательный вектор однозначно определяется через массив вершин
- 4) Не лежит в выпуклой оболочке порожденной матрицей образованной вершинами P
- 5) Аффинно – инвариантна
- 6) При добавлении хотя бы 1 точки вершины возникает необходимость полного пересчета всех параметрических уравнений.
- 7) Изменение хотя бы 1-й вершины | касательной вектора в концевых точках приводит к изменению формы кривой .

Кривые Безье и Эрмита

Кубические кривые Эрмита являются трудными для моделирования – должны быть определены точки и производные.

- Более интуитивным является только определение точек.
- Pierre Bézier (Безье) определил 2 конечных точки и 2 дополнительные контрольные точки, чтобы определить производные в конечных точках.
- Может быть получен из матрицы Эрмита:
  - **Две контрольные точки определяют тангенс**





Кривые Безье

Метод Безье, который использует аппроксимацию многочленами Бернштейна. Пусть задана совокупность из $(n+1)$ точек $\overline{P}_0, \ldots, \overline{P}_n$, которую будем называть *ломаной Безье*. *Кривая Безье*, соответствующая этой ломаной, описывается в виде функции параметра t следующим полиномом:

$$\overline{p}(t) = \sum_{i=0}^{n} \overline{P}_i J_{ni}(t)$$

где $\overline{P}_0, \ldots, \overline{P}_n$ - радиус-вектор точек на кривой, а $J_{ni}(t)$ - аппроксимирующие многочлены Бернштейна, равные

$$J_{ni}(t) = \frac{n!}{i!(n-i)!} t^i (1-t)^{n-i}$$

- Здесь $0 \le t \le 1$ и, кроме того, предполагается, что $t_i=1$ при $i=0$ и $t=0$.
- Ломаная Безье однозначно определяет форму кривой Безье. Изменяя положения вершин ломаной, можно управлять формой соответствующей кривой Безье

Матрица Безье

- Кубическая форма является самой популярной

  $X(t) = t^T M^B q$ (M^B – матрица Безье)

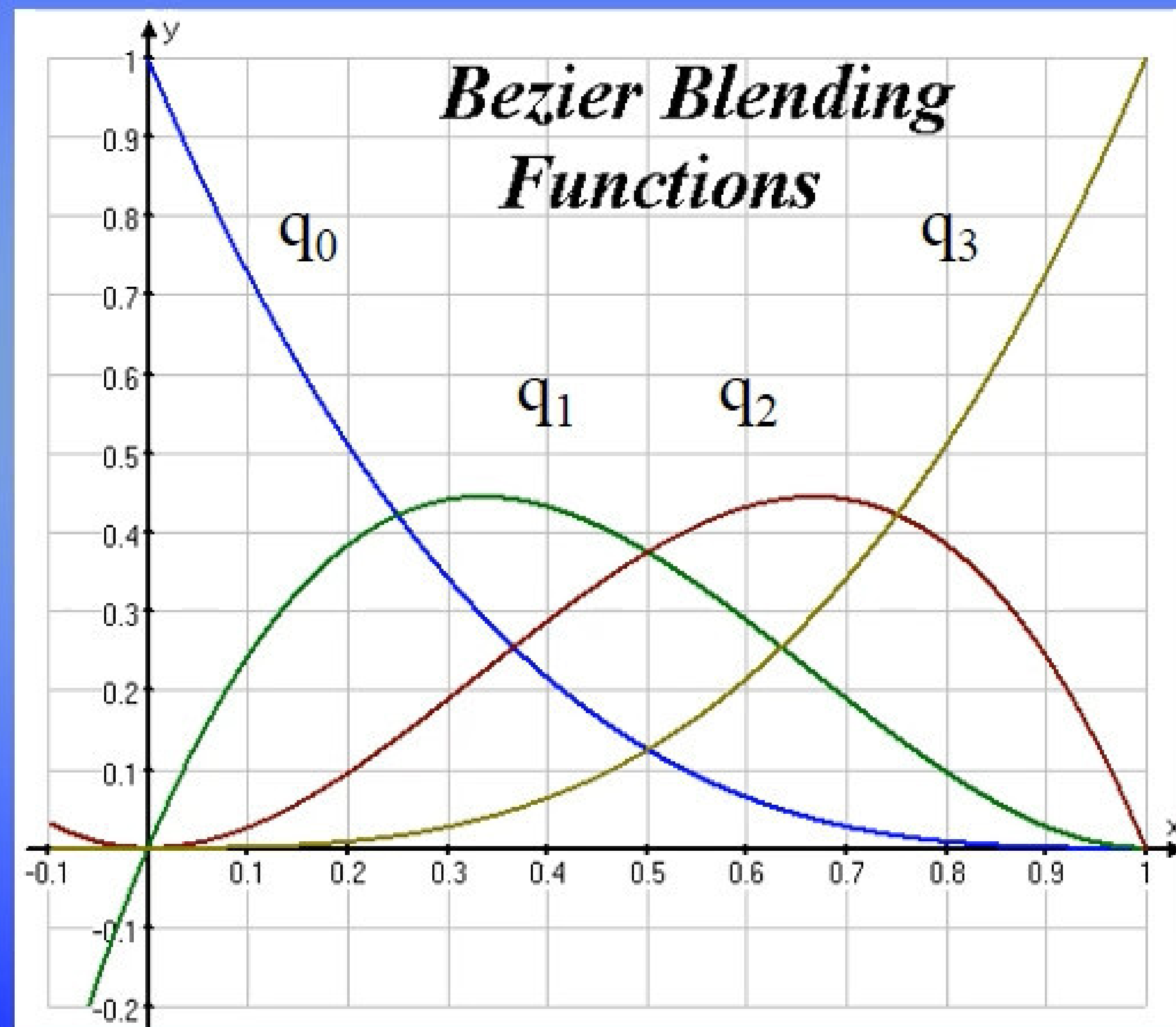
- При *n=4* и *r=0,1,2,3 мы получаем:*

$$X(t) = \begin{bmatrix} t^3 & t^2 & t & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_0 \\ q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{bmatrix}$$

- Аналогично для Y(t) и Z(t)

Стыковочные функции Безье

- каждая точка на кривой - линейная комбинация контрольных точек
- веса комбинации все положительны
- сумма весов 1
- поэтому, кривая - выпуклая комбинация контрольных точек

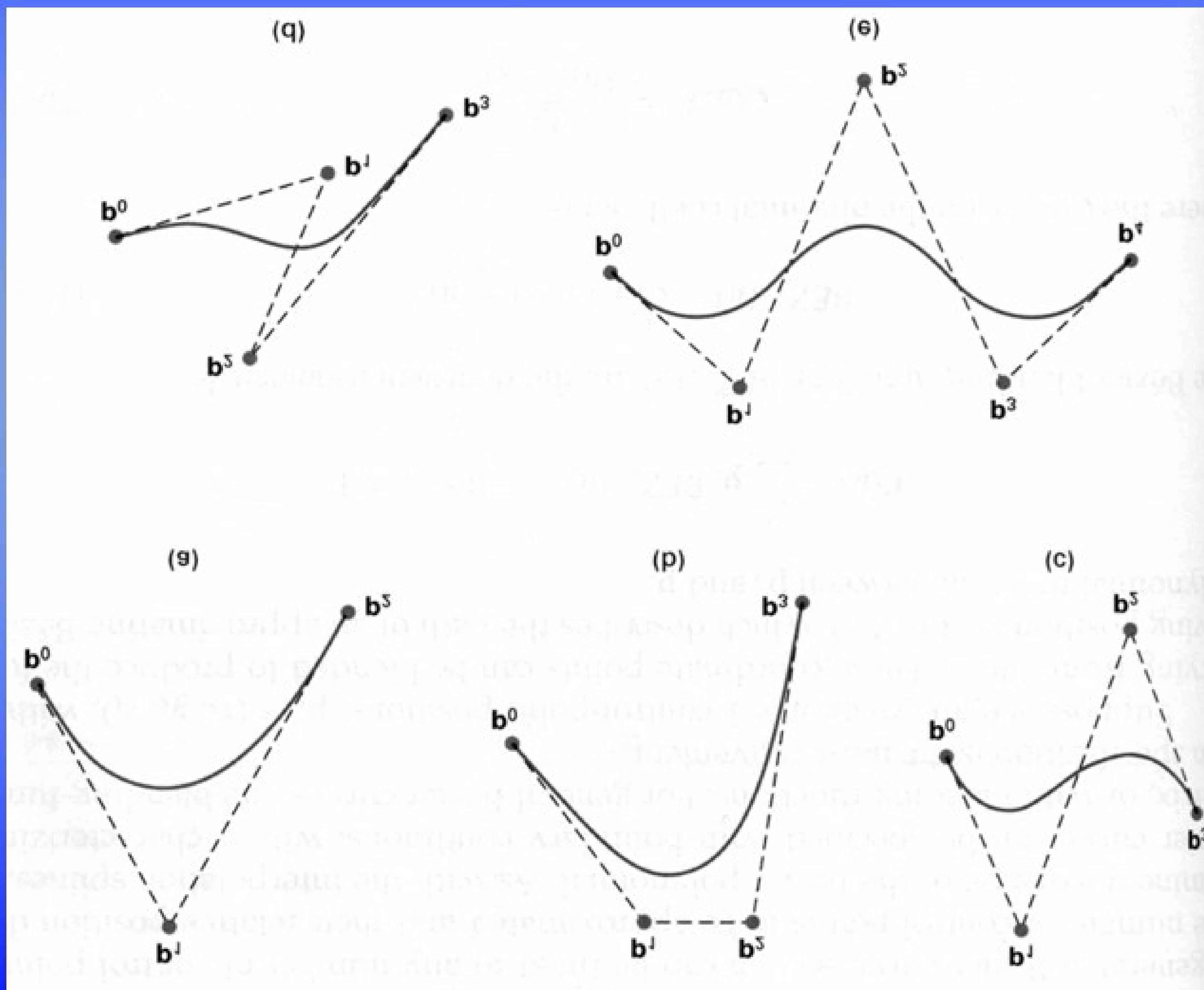


- Если необходима более гибкая кривая Безье, увеличивается количество пределяющих точек и степень полинома. Для каждой точки на кривой Безье с n определяющими вершинами многоугольника B_0,... , B_n та же самая точка на новой кривой Безье с n + 1 определяющими вершинами B_0*, ... ,B_{n+1}* задается в виде

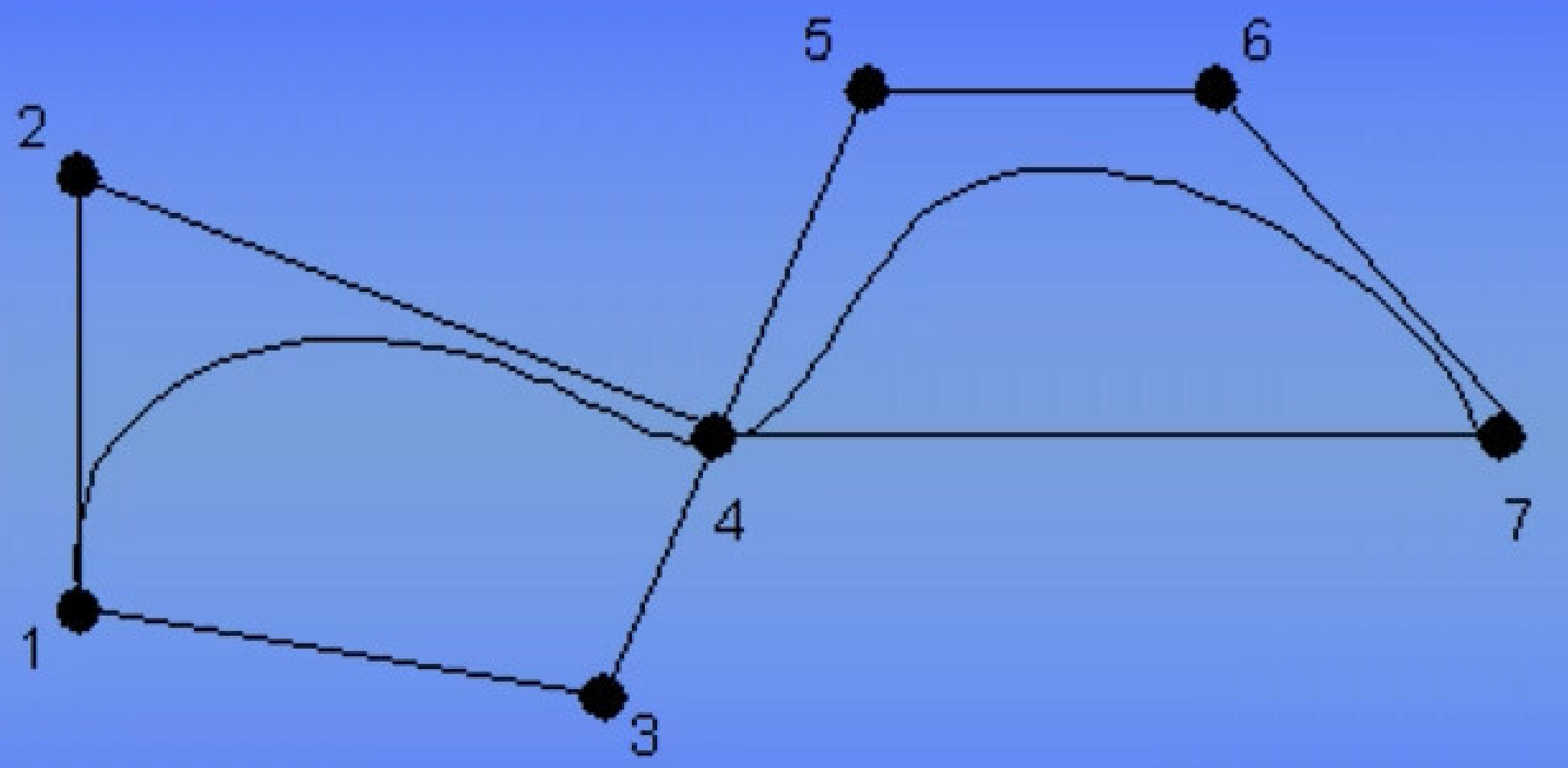
$$P(t) = \sum_{i=0}^{n} B_i J_{n,i}(t) = \sum_{i=0}^{n+1} B_i^* J_{n+1,i}(t),$$

Кубическая кривая Безье для n=4 задается в виде
$P(t) = (1- t)^3 B_0 + 3t(l - t)^2 B_1 + 3*t^2 (1- t)B_2 + t^3 B_3$, $0<t<l$.
с определяющими вершинами B_0,B_1,B_2, B_3

Пример кривых Безье

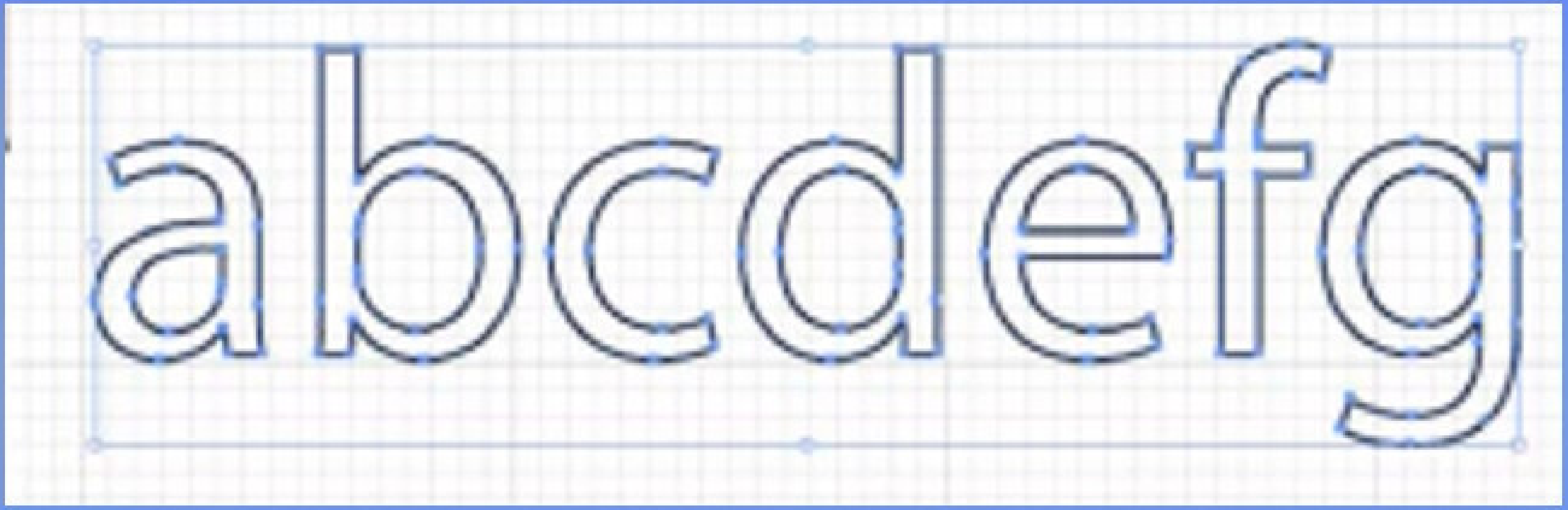


Пример кривых Безье

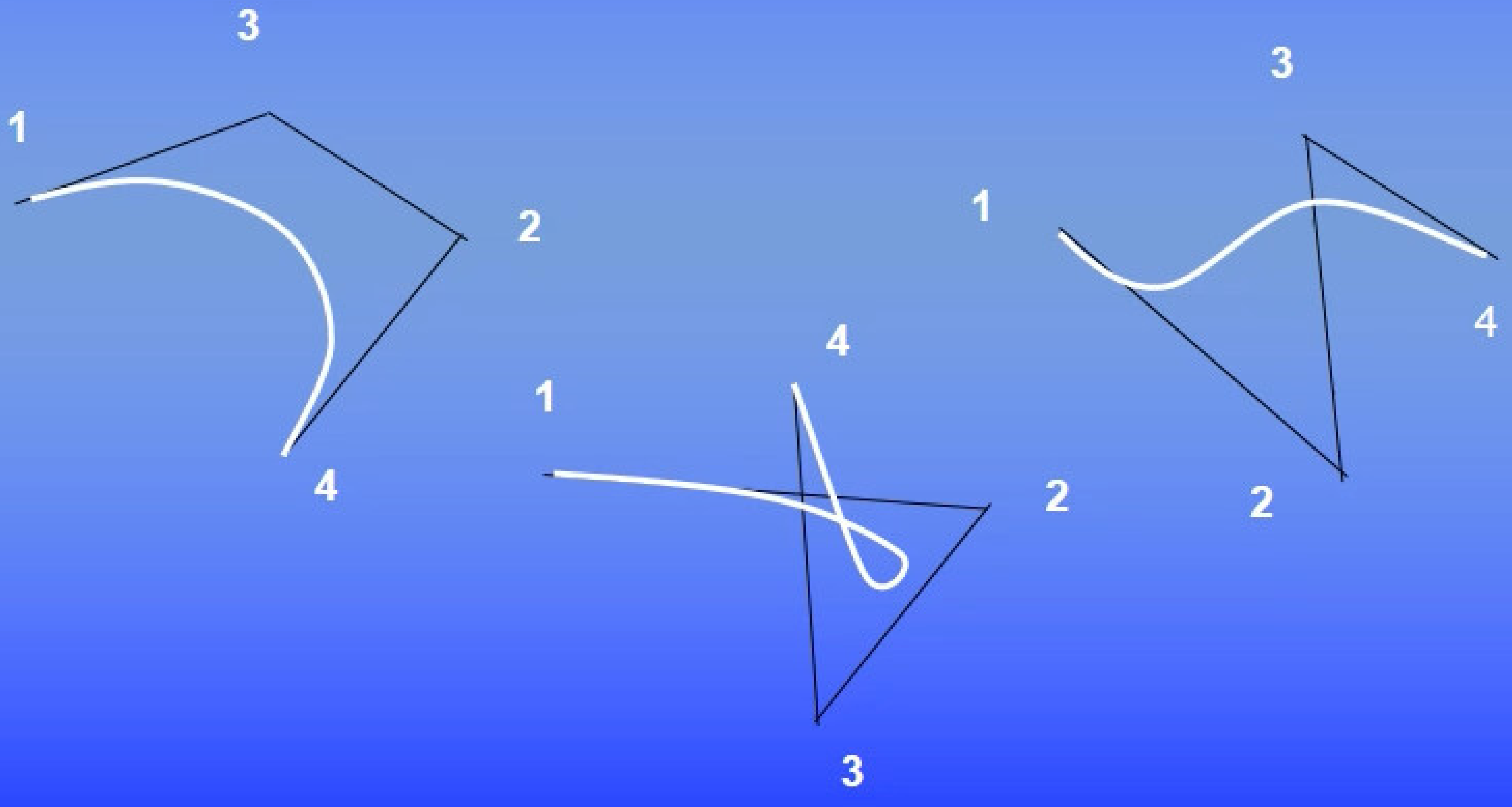


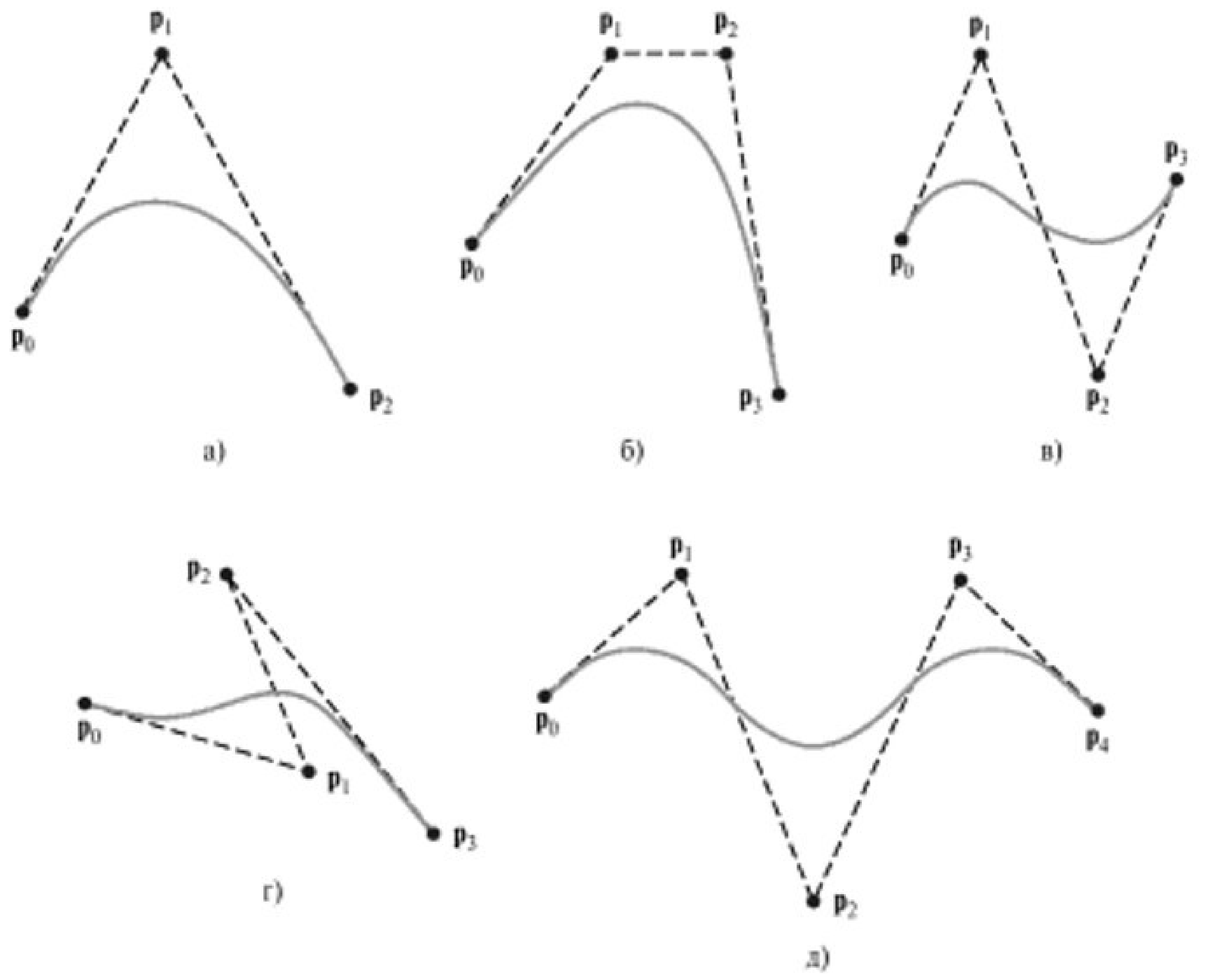
- Когда мы имеем несколько кусочков кривой Безье, то для стыковки надо соблюсти следующее условие: т.е точки 3 и 5 должны лежать на одной прямой (для данного случая). Это обеспечивает одинаковую касательную в точке стыковки.

Пример кривых Безье



- Элементарные кубические кривые Безье, порожденные набором из четырех точек, которые различаются нумерацией

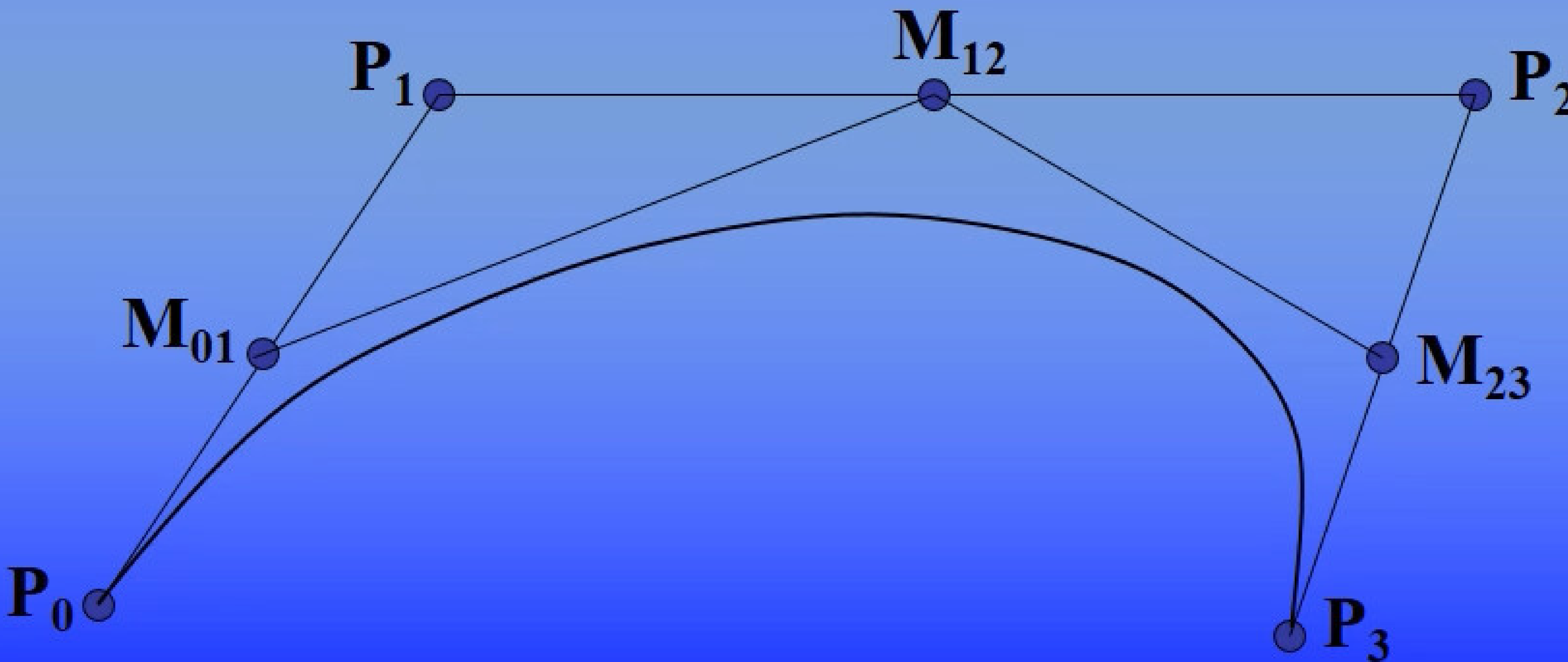


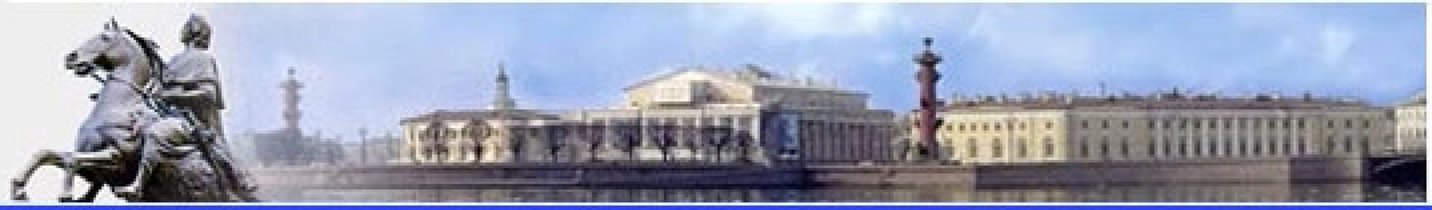


Примеры двухмерных кривых Безье, сгенерированных по трем, четырем и пяти контрольным точкам. Пунктирные линии соединяют положения контрольных точек

Построение кривой Bezier

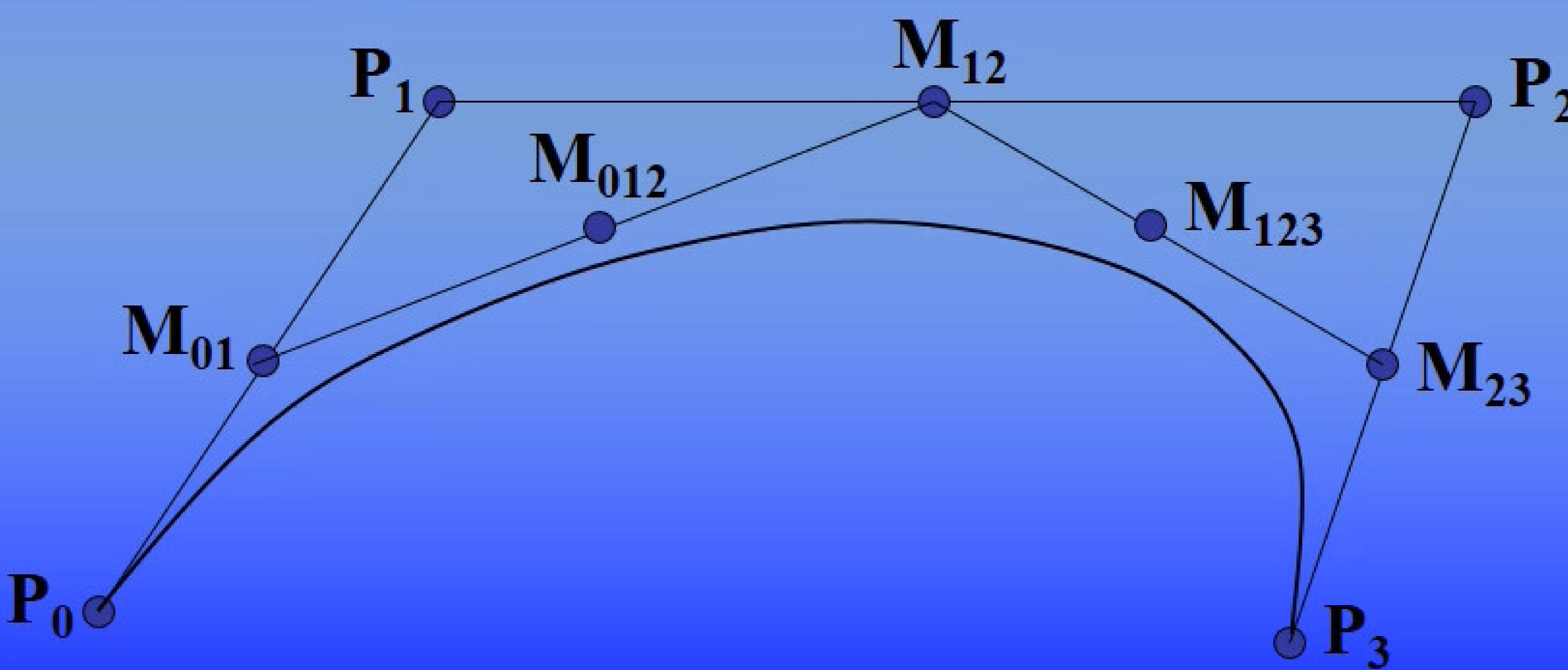
- шаг 1: найдите середины линий, присоединяющихся к контрольным вершинам. назовите их M_{01}, M_{12}, M_{23}





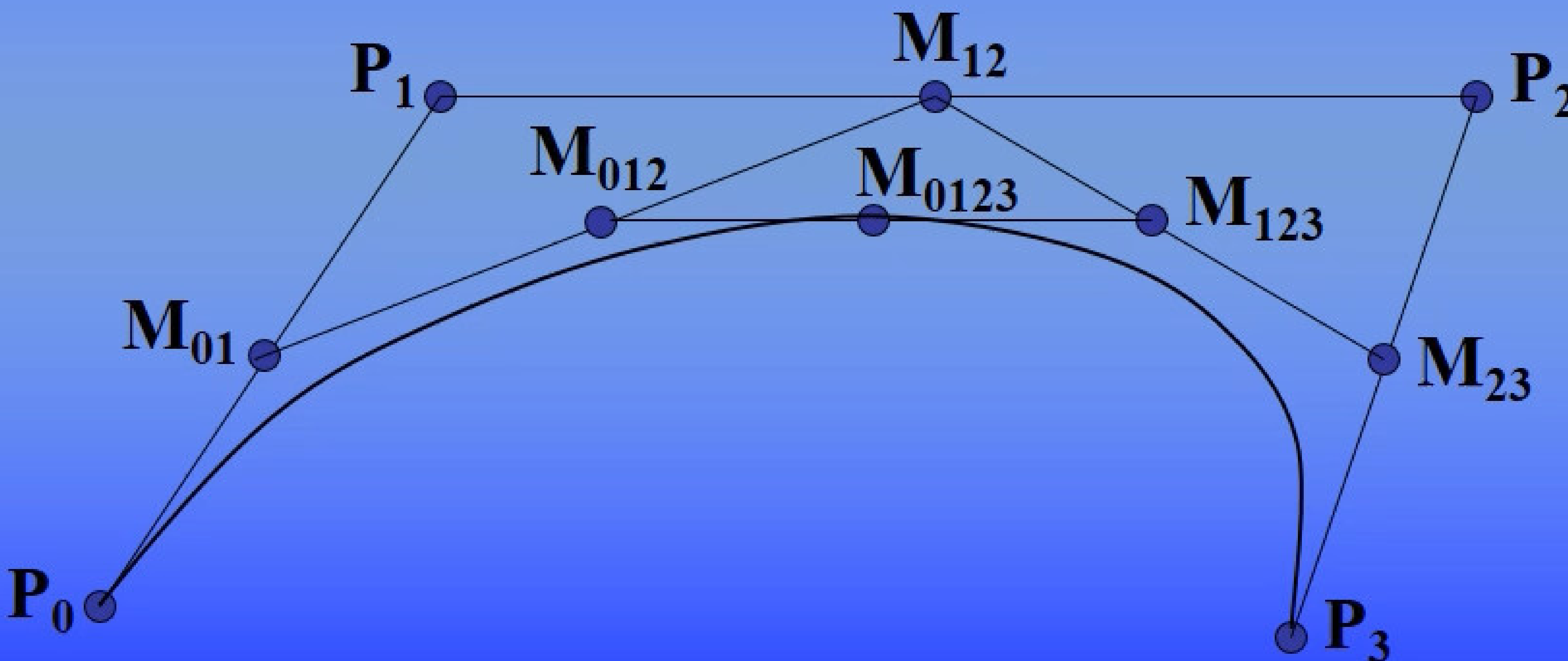
Построение кривой Bezier

- Шаг 2: найдите середины линий, соединяющие вершины M_{01}, M_{12} и M_{12}, M_{23}. Назовите их M_{012}, M_{123}



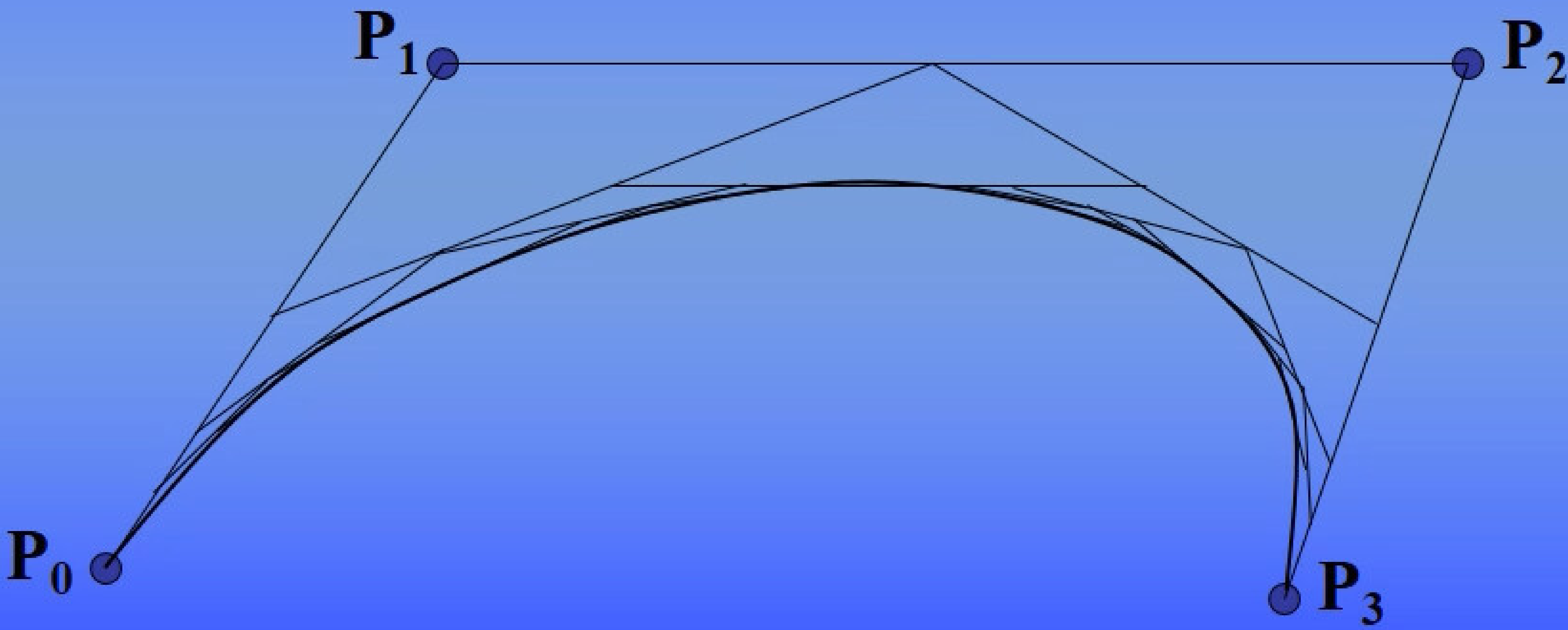
Построение кривой Bezier

- Шаг 3: найдите середину линии, соединяющие вершины M_{012}, M_{123}. Назовите ее M_{0123}

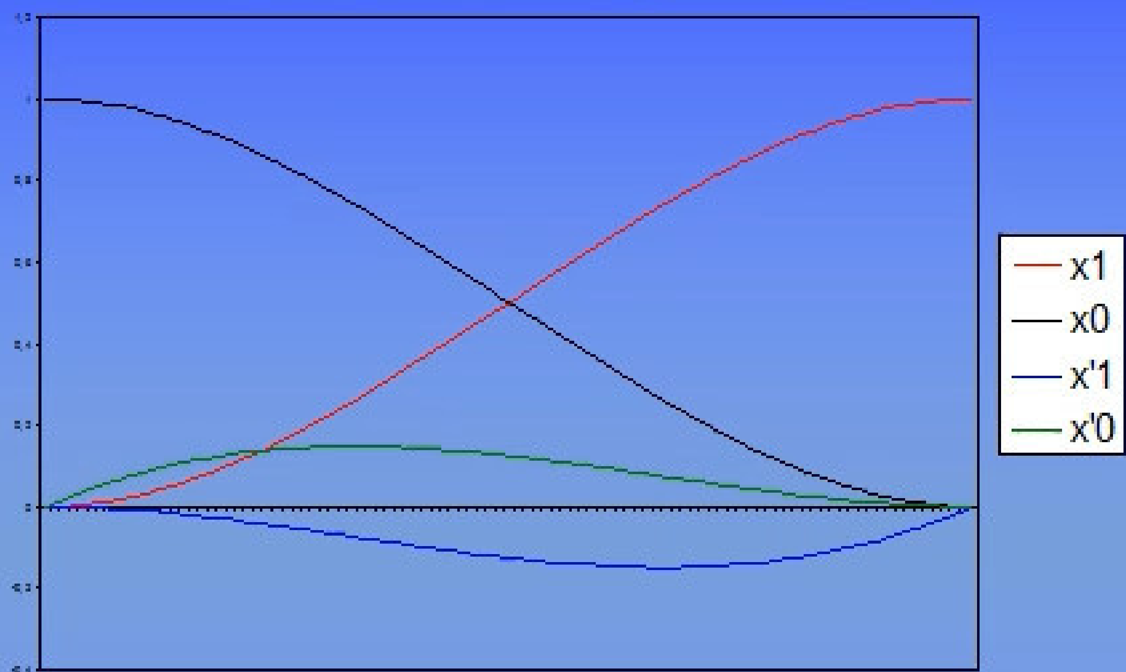


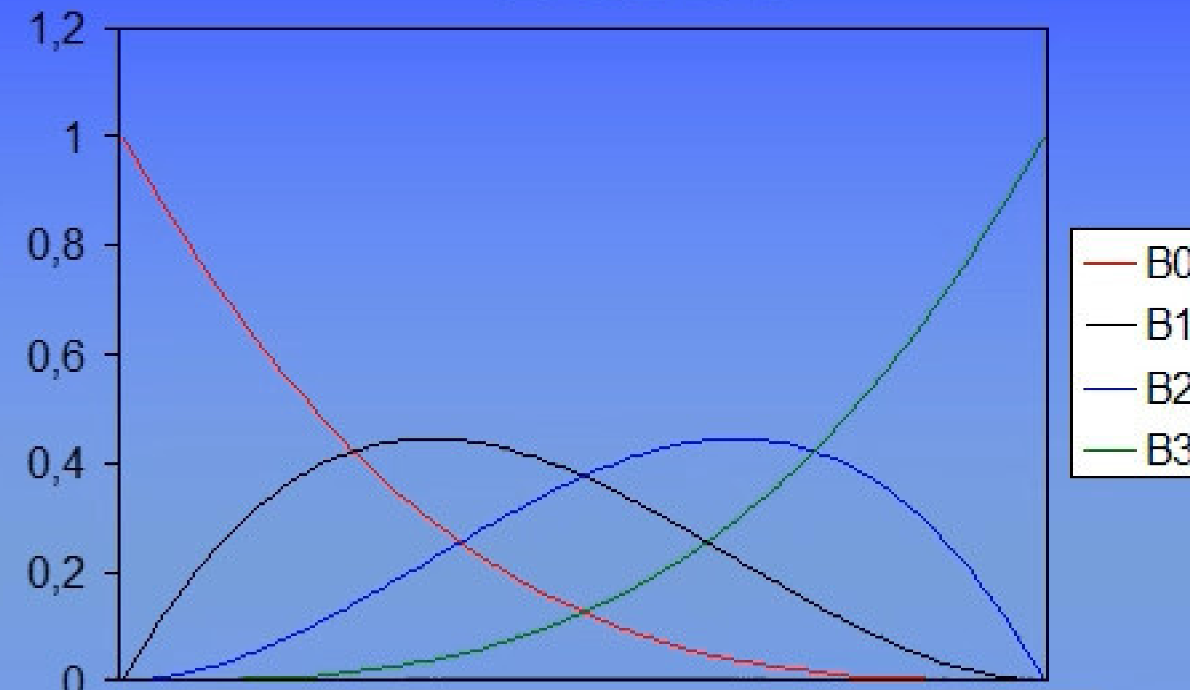
Построение кривой Bezier

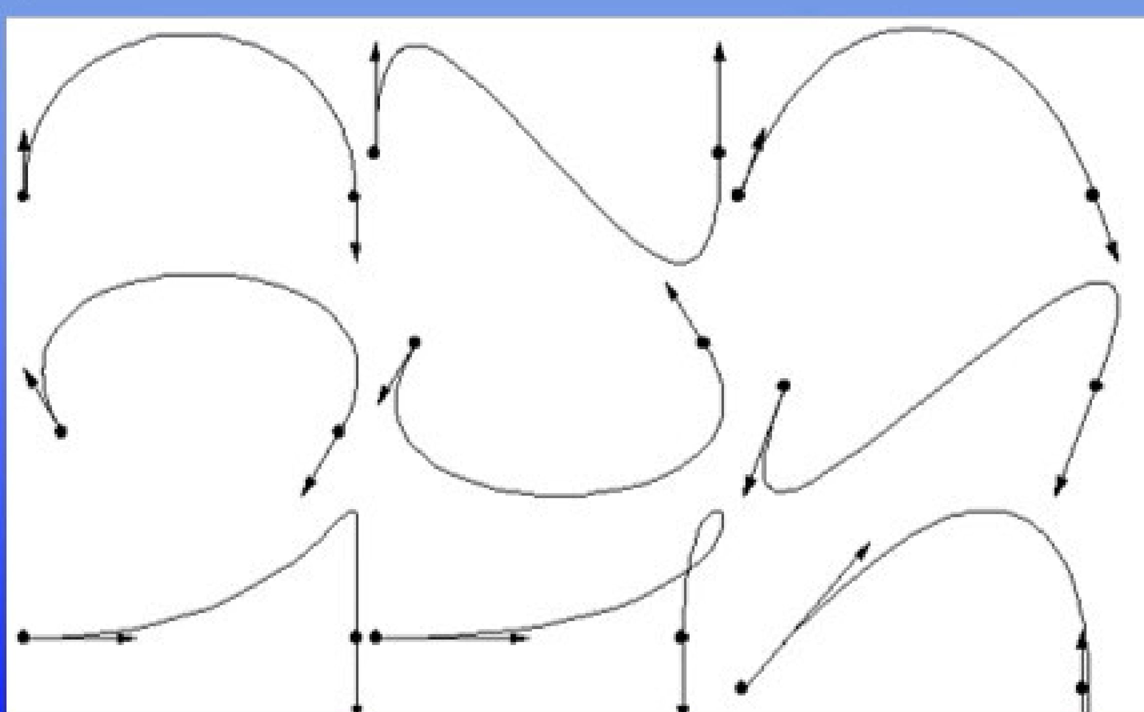
- Продолжите процесс до построения гладкой кривой

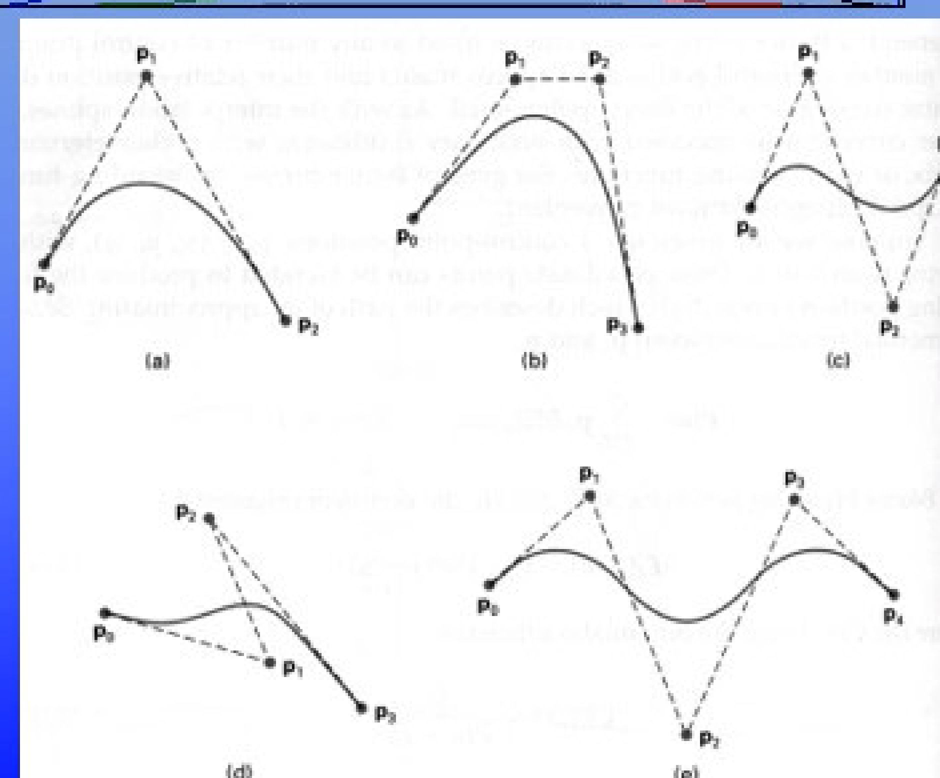


Сравнение - Эрмит Безье







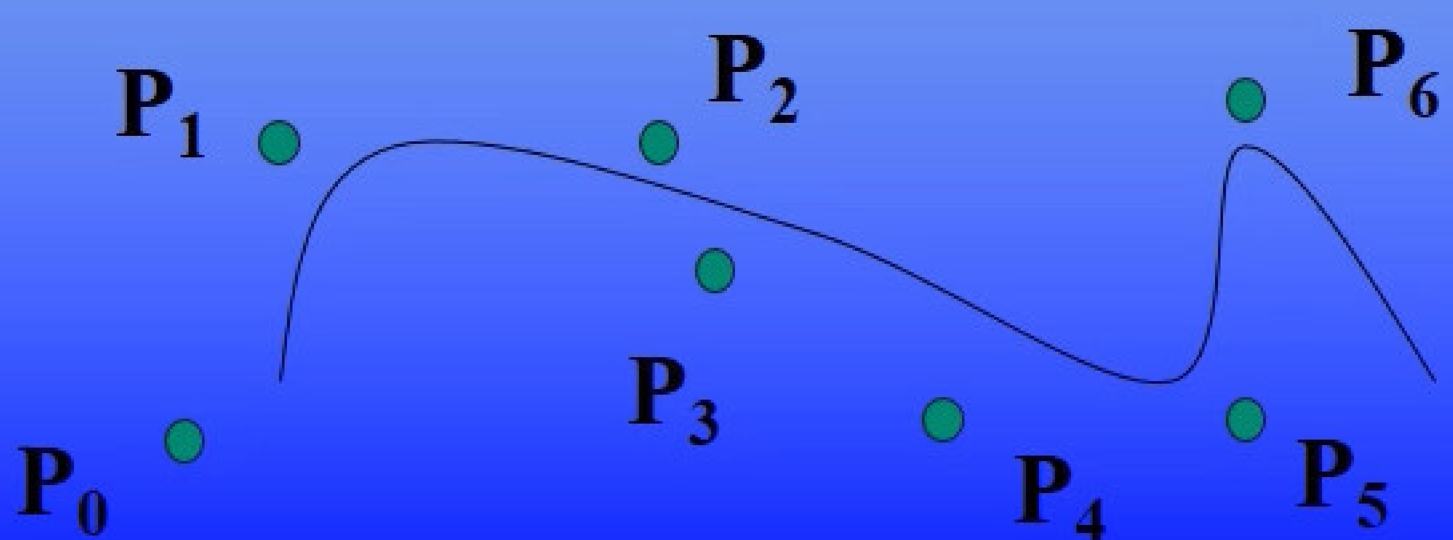


Свойства кривых Безье

1. Гладкая кривая
2. Лежит в выпуклой оболочке
3. Ассиметрично сохраняет форму при перемене порядка вершин в массиве вершин.
4. Аффинно – инвариантна
5. Повторяет опорную ломаную
6. Если точки лежат на одной прямой (горизонтальной| вертикальной), то кривая совпадает с ломаной.
7. Степень функционального многочлена напрямую связана с количеством вершин (на 1 больше) и растет при его увеличении
8. При добавлении хотя бы одной вершины возникает необходимость пересчета параметрического уравнения кривой.
9. Изменение 1й вершины приводит к заметному изменению кривой Безье.
10. Т.к. поведение кривой Безье определяется нетолько набором вершин, но и параметрическими коэфициентами, их называют весовыми коэффициентами (параметры формы)
11. Формой кривой Безье можно управлять изменяя весовые коэффициэнты| параметрические формы.

Кривая B-Spline

- начните с последовательности контрольных точек
- выберите четыре из середины последовательности
  (p_{i-2}, p_{i-1}, p_i, p_{i+1})
    (Bezier и Hermite проходят между p_{i-2} and p_{i+1})
- B-Spline не интерполирует (трогает) любую из них, но аппроксимирует прохождение между p_{i-1} и p_i



Матрица B-сплайна

$$X(t) = t^T M Q^{(i)} \qquad for \quad t_i \le t \le t_{i+1}$$

$$where: \qquad Q^{(i)} = (x_{i-3}, \ldots, x_i)$$

$$for \quad k = 4:$$

$$M = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

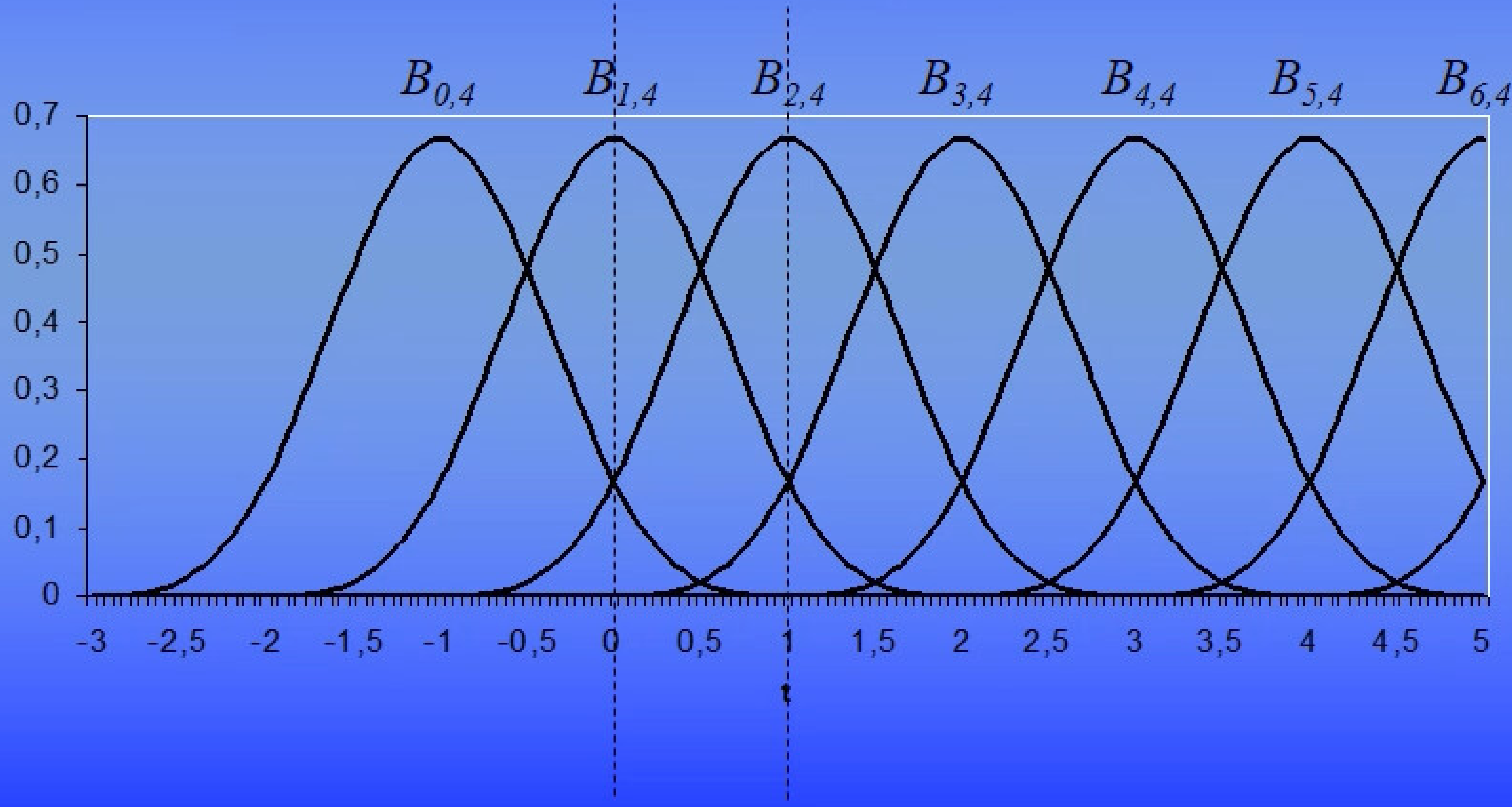
Кривая B-Spline

- Кривая: $$X(t) = \sum_{k=0}^{n} P_k B_{k,d}(t)$$

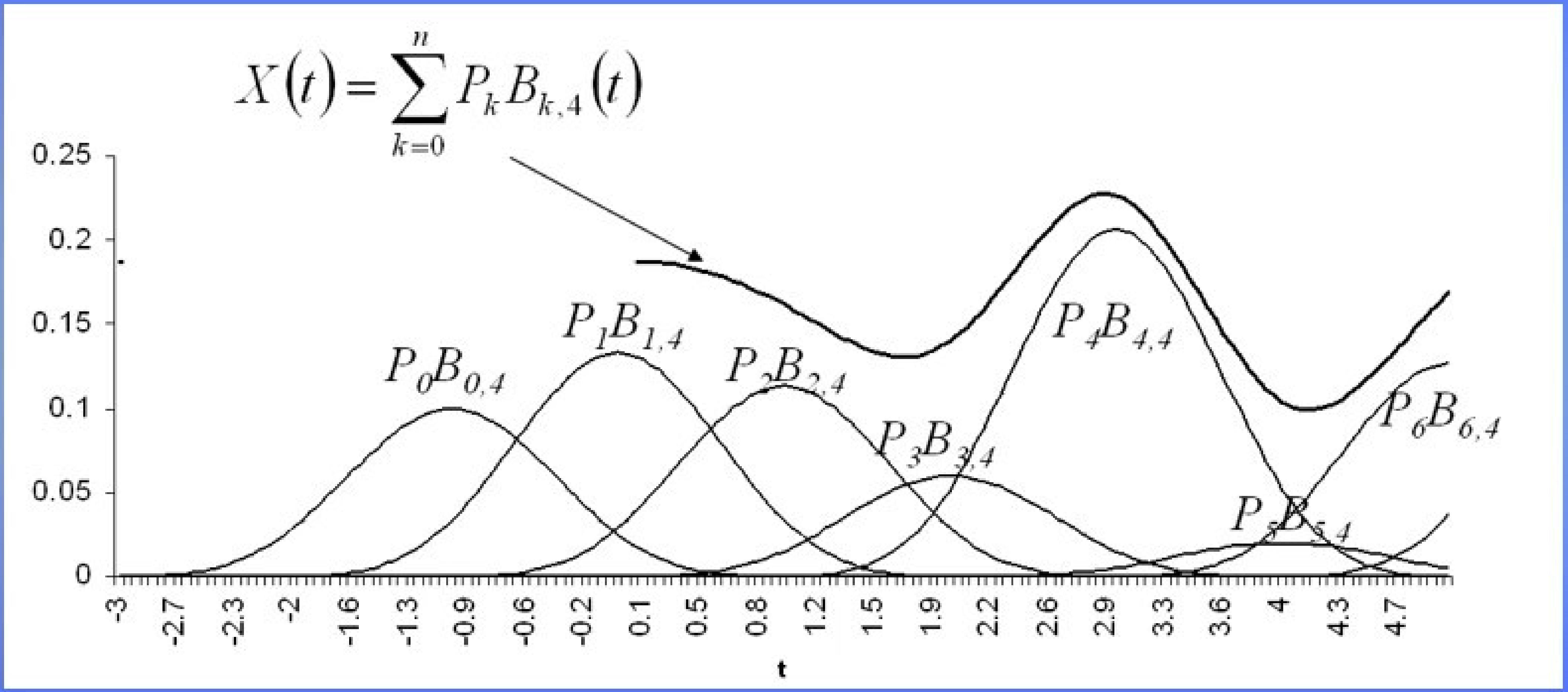
- n - общее количество контрольных точек
- d - порядок кривых, $2 \le d \le n+1$
- $B_{k,d}$ - однородные стыковочные функции B-сплайна степени d-1
- P_k - контрольные точки
- Каждая $B_{k,d}$ только отличны от нуля для маленького диапазона значений t, таким образом кривая имеет локальный контроль

Кривая B-Spline

Однородные стыковочные функции B-сплайна степени d-1



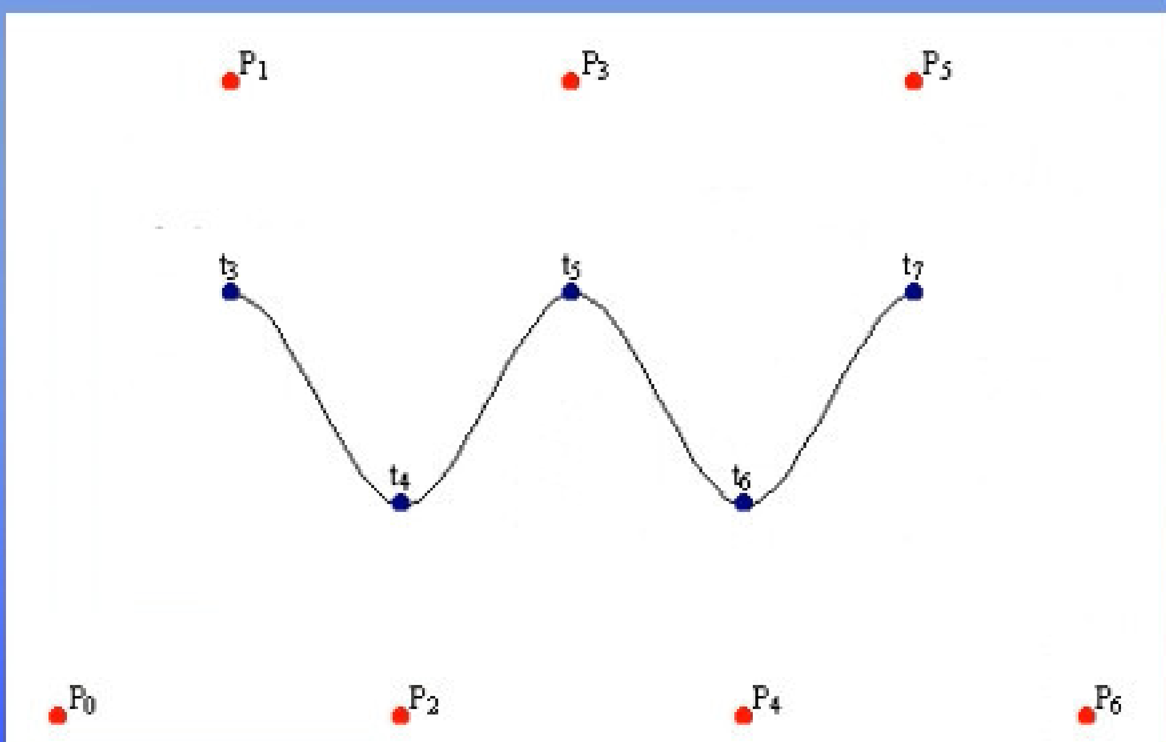
Кривая B-Spline

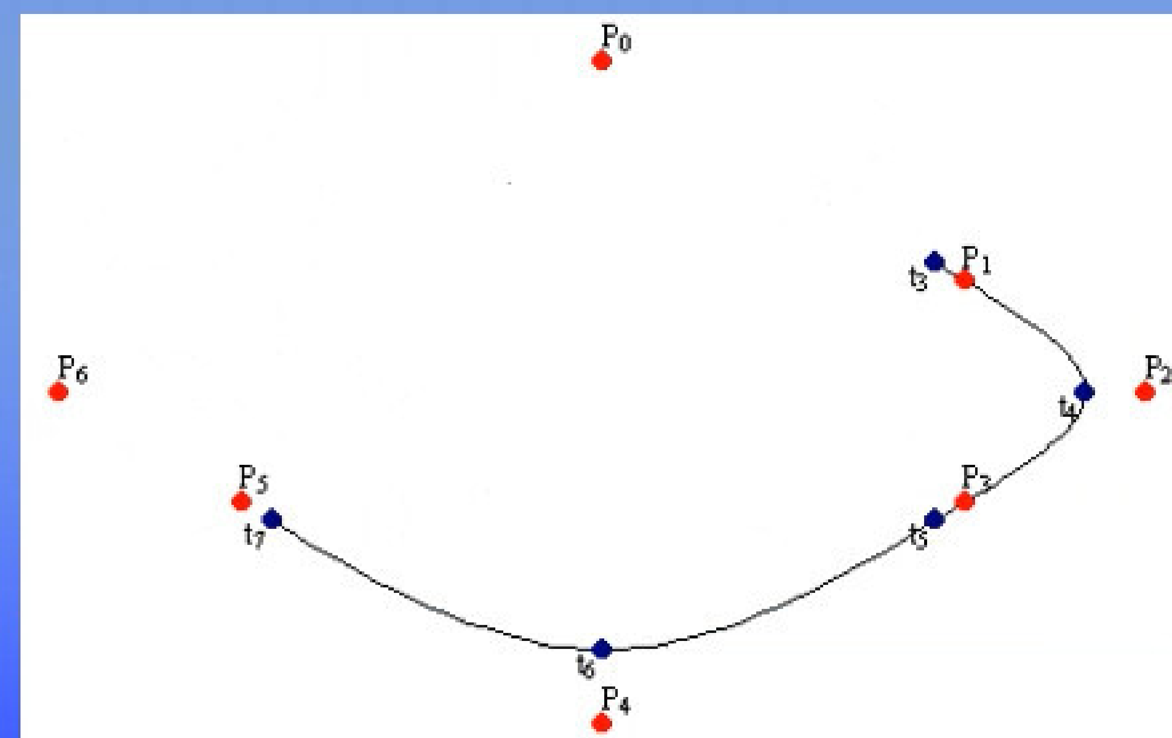


Кривая не может начаться, пока нет 4 активных базисных функций

B-Spline

- безусловно самый популярный используемый сплайн
- C0, C1, и C2 непрерывность





Непрерывность

- **Параметрическая непрерывность (C):**
  – Непрерывность координационных функций
- **Геометрическая непрерывность (G):**
  – Непрерывность кривой непосредственно
- Никакая форма непрерывности не гарантирует другой:

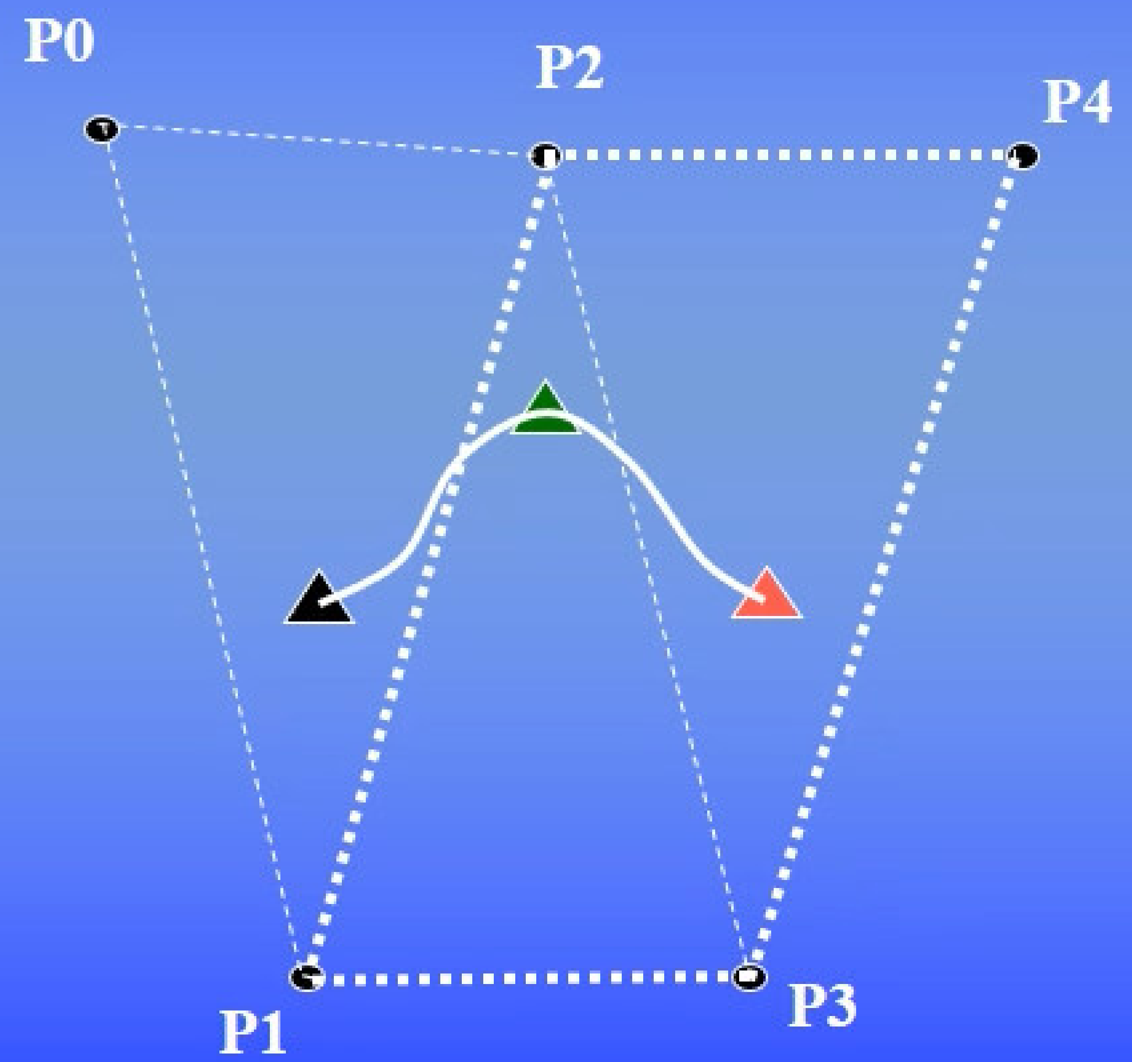
– Может быть C^1, но не G^1, когда p (t) приходит в остановку

– Может быть G^1, но не C^1, когда вектор тангенса изменяет резко длину

- **Пример непрерывности B-сплайна**

Первый узел, показанный с 4 контрольными точками, и их выпуклой оболочкой.

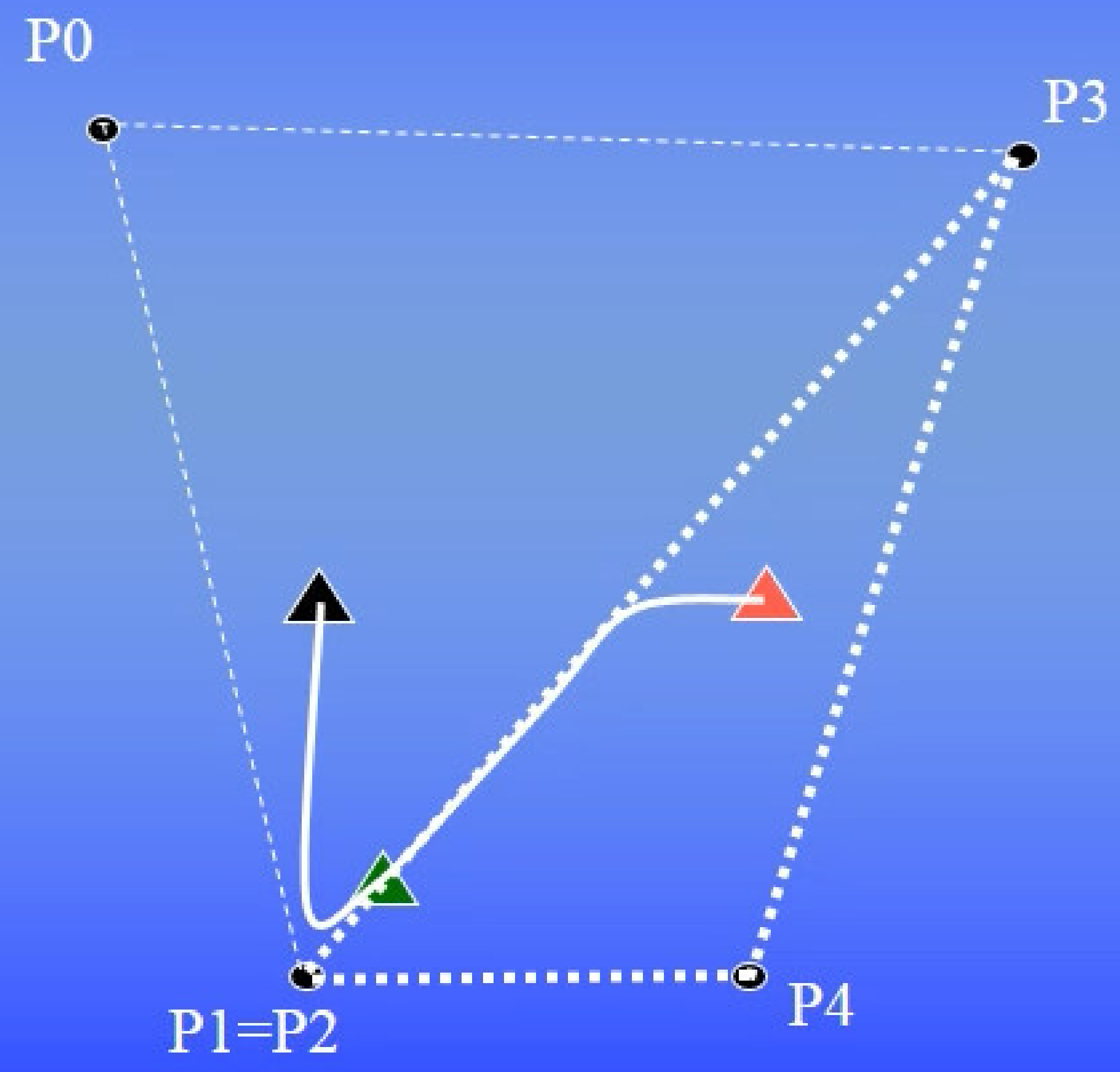
Пример непрерывности B-сплайна



Два первых сегмента кривой показанны с их соответствующими выпуклыми оболочками.

Центральный узел должен лежать на пересечении 2 выпуклых оболочек.

Повторение контрольной точки.

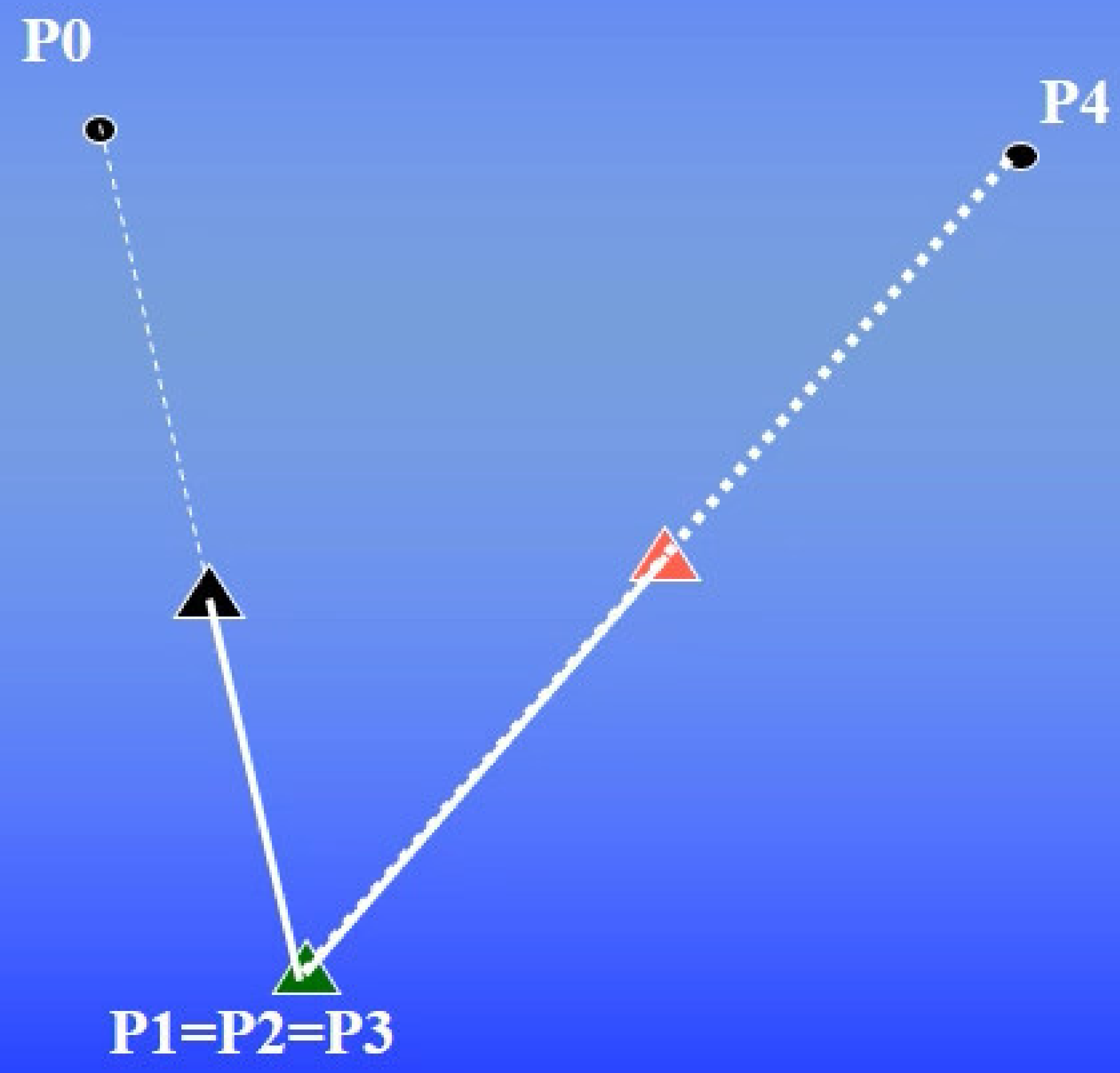


Сначала два сегмента кривой, показанны с их соответствующими выпуклыми оболочками.

Узел вынужден лечь на линии, которая присоединяется к 2 выпуклым оболочкам.

Кривая - только C^1 непрерывна

Строенная контрольная точка



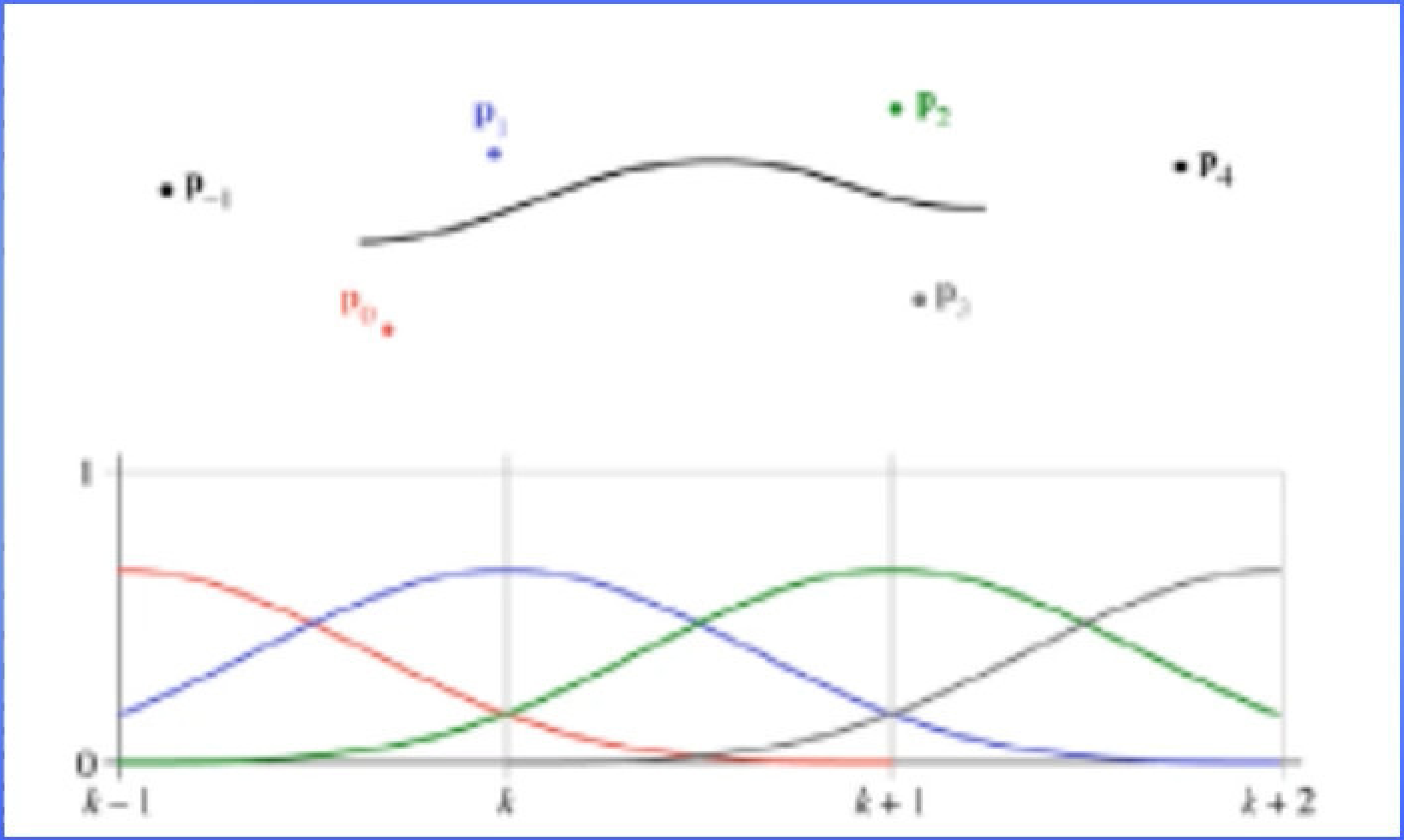
Сначала два сегмента кривой, показанны с их соответствующими выпуклыми оболочками.

Обе выпуклые оболочки преобразуются к прямым линиям – вся кривая должен лечь на этих линиях.

Кривая - только C^0 непрерывна

(Любопытно это - фактически непрерывность C^2, потому что векторная величина тангенса падает к нолю в точке соединении).

Cubic B-spline basis

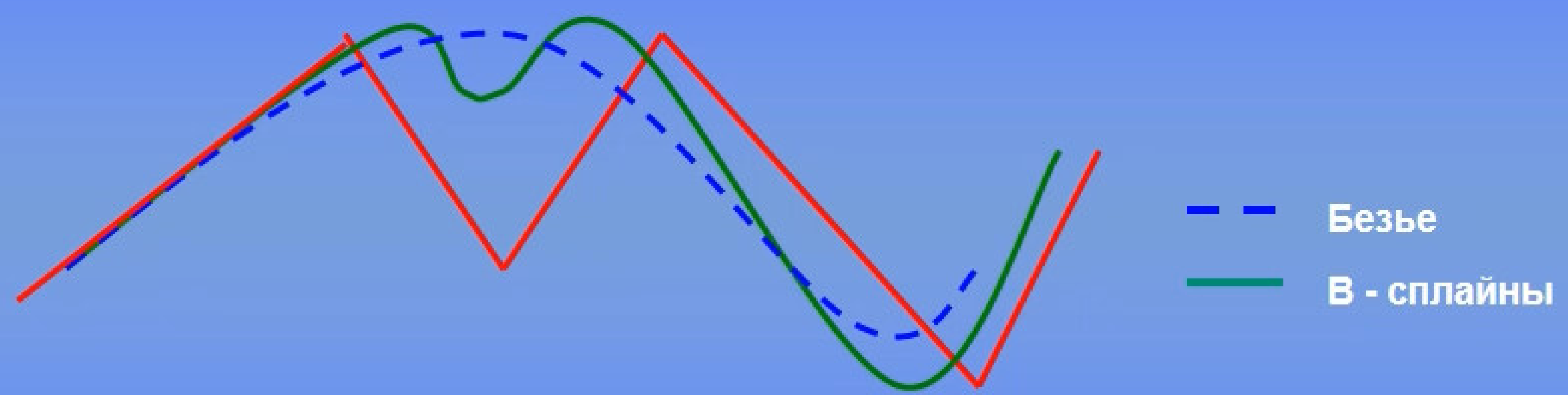


Переход от В-сплайна к Безье кривых

$$M_{B-spline \to Bezier} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} P_{0,Bezier} \\ P_{1,Bezier} \\ P_{2,Bezier} \\ P_{3,Bezier} \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} P_{0,B-spline} \\ P_{1,B-spline} \\ P_{2,B-spline} \\ P_{3,B-spline} \end{bmatrix}$$

Пример В-сплайна и Безье кривых



Свойства B-сплайна

1) гладкая
2) не проходит ни через 1 точку массива
3) лежит в выпуклой оболочке порождаемой этим массивом
4) повторяет опорную ломаную
5) если опорные точки находятся на прямой, то B – сплайн лежит на этой прямой.
6) если опорные точки лежат в одной плоскости (компланарные), то составная (B- сплайновая) кривая лежит в этой плоскости.
7) изменение одной из вершин приводит только к изменению части кривой
8) При добавлении 1 вершины возникает необходимость пересчета 1-х элементов кривых (параметрическое уравнение)
9) Аффинно - инвариантна
10) проективно инвариантна (проективные преобразования не влияют на форму нашей кривой)
11) существуют весовые коэффициенты

Выводы

- Каждое из этих представлений оказывается полезным в разных ситуациях. Форма Эрмита пригодна при аппроксимации уже имеющихся поверхностей, когда необходимо добиться как соответствия точек, так и соответствия касательных векторов, в то время как представление в виде В-сплайнов удобно для аппроксимации точек и достижения С(2) – непрерывности.
- Формы Безье и В-сплайнов пригодна для работы в интерактивном режиме, так как их геометрические векторы состоят только из точек. Обе эти формы обладают свойством выпуклости оболочки, которое оказывается полезным при изображении кривых. Кривую, первоначально заданную в одной форме, можно преобразовать в другую форму, если записать геометрический вектор первой формы в терминах второй