TIPE : assistants de preuves – Fondations

Julien Marquet

5 janvier 2020

Résumé

Ce document constitue les fondations théoriques de mon TIPE.

On y construit un système formel dérivé de la déduction naturelle permettant de raisonner sur une extension du second ordre du calcul propositionnel : on s'autorise à quantifier universellement les propriétés. Une particularité de ce système est qu'il permet de ne pas vérifier que les remplacements sont sains : ils le sont par construction. On montre d'abord la validité des formules dérivées, puis on montre qu'il est complet, ce qui fait l'objet du "petit théorème de complétude".

Table des matières

1 Syntaxe

1.1 Arbres et induction

On souhaite pouvoir définir des ensembles particuliers d'arbres et pouvoir raisonner par induction dessus. Pour cela, on crée un ensemble générique d'*arbres étiquetés* duquel on extraira les sous-ensembles qui nous seront utiles.

1.1.1 Arbres étiquetés

On se donne un ensemble d'étiquettes $\mathcal{E}$, que l'on prend aussi grand que l'on veut (i.e. suffisamment grand pour permettre de construire tous les arbres que nous utiliserons dans la suite).
On construit une suite d'arbres par récurrence :
— $A_0 \triangleq \{(x; ())/x \in \mathcal{E}\}$.
— Si A_n est construit, on pose :

$$A_{n+1} \triangleq \{(x; (y_1; ...; y_k))/x \in \mathcal{E} \text{ et } y_1; ...; y_n \in A_n\}$$

Alors, lorsque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est construite, on pose $\mathcal{A} \triangleq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
$\mathcal{A}$ est *l'ensemble des arbres étiquetés.*

1.1.2 Familles inductives

On se donne les outils qui vont nous permettre de construire les familles d'arbres étiquetés qui nous seront utiles. On crée pour cela la notion de *famille inductive.*

Familles inductives. On se donne un ensemble F de couples $(f; n)$ où $f : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ est une fonction d'arité $n \in \mathbb{N}$.
On pose alors $\langle F \rangle$ le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{A}$ stable par toutes le fonction contenues dans F, et on le nommera simplement l'ensemble d'arbres engendré par F.
Formellement, on pose l'opérateur $\hat{F}$ défini par :

$$\begin{aligned} &\mathcal{P}(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(\mathcal{A}) \\ &\quad X \mapsto \{f(x_1; ...; x_n)/(f; n) \in F \text{ et } x_1; ...; x_n \in X\} \end{aligned}$$

et on considère le plus petit point fixe de $\hat{F}$.

Démonstration. On montre que ce point fixe existe.
On pose $X_0 \triangleq \varnothing$; et, si X_n est construit, $X_{n+1} \triangleq \hat{F}(X_n)$. On pose enfin $X \triangleq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} X_n$.

X est un point fixe de $\hat{F}$. Soit $n \in \mathbb{N}$.
— Si $n = 0$, alors $X_0 = \varnothing \subset \hat{F}(X)$.
— Si $n = m + 1$ où $m \in \mathbb{N}$, alors

$$X_m \subset X \Rightarrow \hat{F}(X_m) \subset \hat{F}(X)$$

en utilisant la croissance de $\hat{F}$ dans $\mathcal{P}(\mathcal{A})$, qui découle de sa définition.
Donc $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \subset \hat{F}(X)$, donc $X \subset \hat{F}(X)$.
Pour la réciproque, on montre d'abord par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \subset X_{n+1}$:
— Pour $n = 0$, $X_0 = \varnothing \subset X_1$.
— Si la propriété est vraie au rang n, alors :

$$\begin{gathered} X_n \subset X_{n+1} \Rightarrow \hat{F}(X_n) \subset \hat{F}(X_{n+1}) \\ \text{i.e. } F_{n+1} \subset F_{n+2} \end{gathered}$$

toujours par croissance de $\hat{F}$.
On montre ensuite que $\hat{F}(X) \subset X$:

Soit $f(x_1; ...; x_n) \in \hat{F}(X)$.
Par croissance de $(X_n)_n$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $x_1; ...; x_n \in X_N$.
Alors $f(x_1; ...; x_n) \in X_{N+1} \subset X$.

Par double inclusion, on a alors $\hat{F}(X) = X$.

C'est le plus petit point fixe de $\hat{F}$. Soit Y un point fixe de $\hat{F}$.
On montre par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \subset Y$.

— Pour $n = 0$, on a $X_0 = \varnothing \subset Y$.
— Si la propriété est vraie pour n :

$$X_n \subset Y \Rightarrow \hat{F}(X_n) \subset \hat{F}(Y)$$
$$\text{i.e. } X_{n+1} \subset Y$$

par définition de X_{n+1} et car Y est un point fixe de $\hat{F}$.

Donc X est inclus dans tout point fixe de $\hat{F}$ et est en ce sens minimal.

D'où l'existence de $\langle F \rangle$. □

Remarque. Les couples $(f; 0) \in F$ correspondent à des constantes, au sens où on aurait aussi pu décider de se donner un ensemble A d'arbres, et $F \subset \mathcal{F}(\mathcal{A}) \times \mathbb{N}^*$, et de considérer le plus petit ensemble contenant A et stable par les fonctions de F. Ici, les $(f; 0)$ jouent le rôle des arbres de A.

Induction structurelle. Soit $F \subset \mathcal{F}(\mathcal{A}) \times \mathbb{N}$ et P une proposition sur $\langle F \rangle$, alors :

$$[\forall (f; n) \in F, (\forall a_1; ...; a_n \in \langle F \rangle, P(a_1); ...; P(a_n)) \Rightarrow P(f(a_1; ...; f(a_n)))] \Rightarrow \forall a \in \langle F \rangle, P(a)$$

Démonstration. On pose $A \triangleq \{a \in \langle F \rangle / P(a)\}$. Alors $A \subset \langle F \rangle$.
Par ailleurs, on remarque que A est un point fixe de $\hat{F}$.
Donc, par minimalité de $\langle F \rangle$, on a $\langle F \rangle \subset A$.
Donc $A = \langle F \rangle$, i.e. $\forall a \in \langle F \rangle, P(a)$. □

1.2 Séquents ; dérivation

1.2.1 Notations

$\mathcal{F}$ — *Ensemble des formules.*
Si A est un ensemble de variables, on définit $\mathrm{F}(A)$ comme le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{A}$ contenant $\{\bot; \top\} \sqcup A$ et stable par :

(A)	$\mapsto$	$(\neg; (P))$	notée	$(\neg P)$
$(P; Q)$	$\mapsto$	$(\wedge, (P; Q))$	notée	$(P \wedge Q)$
$(P; Q)$	$\mapsto$	$(\vee, (P; Q))$	notée	$(P \vee Q)$
$(P; Q)$	$\mapsto$	$(\Rightarrow, (P; Q))$	notée	$(P \Rightarrow Q)$

On pose pour le reste de ce texte :

$$\mathcal{F} \triangleq \mathrm{F}(A)$$

avec A un ensemble infini de variables (que l'on peut prendre aussi grand que l'on veut).

H — *Ensemble des hypothèses*
On pose H le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{A}$ stable par :

$()$	$\mapsto$	$(F; ())$	$(F \in \mathcal{F})$	noté	F
$()$	$\mapsto$	$(P : \mathit{prop.}; ())$	$(P \in \mathcal{F})$	noté	$P : \mathit{prop.}$
(Γ)	$\mapsto$	$(F; (\Gamma))$	$(F \in \mathcal{F})$	noté	Γ, F
(Γ)	$\mapsto$	$(P : \mathit{prop.}; (\Gamma))$	$(P \in \mathcal{F})$	noté	$\Gamma, P : \mathit{prop.}$

Les éléments de H sont alors apparentés à des listes.

Var — *Variables d'un séquent*
On définit Var par induction sur les hypothèses :

$\mathrm{Var}(\varnothing)$	$=$	$\mathcal{C}^{stes}$
$\mathrm{Var}(\Gamma, F)$	$=$	$\mathrm{Var}(\Gamma)$
$\mathrm{Var}(\Gamma, P : \mathit{prop.})$	$=$	$\mathrm{Var}(\Gamma) \sqcup \{P\}$

$\mathcal{F}(\Gamma)$ — *Formules pour des hypothèses données*
On notera, si Γ est une liste d'hypothèses, $\mathcal{F}(\Gamma)$ l'enseùble des formules dont les variables sont dans $\mathrm{Var}(\Gamma)$.

Seq — *Séquents*
On définit l'ensemble Seq des séquents comme :

$$\mathrm{Seq} \triangleq \{(\Gamma; F)/\Gamma \in \mathrm{H} \text{ et } F \in \mathcal{F}\} \sqcup \{(\Gamma; P : \mathit{prop.})/\Gamma \in \mathrm{H} \text{ et } P \in \mathcal{F}\}$$

On notera plutôt :

$$\begin{array}{lll} & \Gamma \vdash F & \text{pour } (\Gamma; F) \\ \text{et} & \Gamma \vdash P : \mathit{prop.} & \text{pour } (\Gamma; P : \mathit{prop.}) \end{array}$$

Pour l'instant, les séquents dans Seq n'ont aucune raison d'être "vrais" (on définira d'ailleurs cette notion plus tard), on peut seulement considérer qu'ils sont "syntaxiquement corrects [1]".

Δ_0 — *Dérivations, premier épisode*
On définit Δ_0 comme le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{A}$ stable par :

$$\begin{array}{rcll} () & \mapsto & (s; ()) & (s \in \mathrm{Seq}) \\ (d_1) & \mapsto & (s; (d_1)) & (s \in \mathrm{Seq}) \\ & \vdots & & \\ (d_1; ...; d_n) & \mapsto & (s; (d_1; ...; d_n)) & (s \in \mathrm{Seq}) \\ & \vdots & & \end{array}$$

Si $(s; X)$ est une dérivation, on la notera plutôt (X/s), ou, si $X = (x_1; ...; x_n)$:

$$\frac{x_1 \quad \dots \quad x_n}{y}$$

De même que pour les séquents de Seq, les dérivation de Δ_0 sont seulement "syntaxiquement correctes".

1.2.2 Règles de dérivation

On définit ici la notion de *conséquence syntaxique*, qui nous donnera à terme un moyen de dire si certaines formules sont effectivement justes ou non.

Règles de dérivation. Les règles expriment les déduction syntaxiquement valides. Par exemple, pour la règle d'introduction du symbole $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \wedge Q}$$

cette règle signifie que si des hypothèses Γ on peut déduire d'une part P et d'autre part Q, alors on peut déduire $P \wedge Q$. On donne la liste des règles plus bas.

On se donne alors un ensemble R d'*instances de règles* qui expriment les déduction valides. Formellement, $\mathrm{R} \subset \mathrm{Seq}^{(\mathbb{N})} \times \mathrm{Seq}$ (où $\mathrm{Seq}^{(\mathbb{N})}$ désigne les n-uplets d'éléments de Seq), et on instancie chaque règle dans R. En reprenant l'exemple de l'introduction du symbole $\wedge$:

$$\frac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \wedge Q}$$

pour tout $\Gamma \in \mathrm{H}$ et $P; Q \in \mathrm{Prop}$, on ajoute $(((\Gamma \vdash P); (\Gamma \vdash Q)); (\Gamma \vdash (P \wedge Q)))$ à R.

1. Cette dénomination est un peu maladroite, car ici "syntaxiquement correct" ne signifie pas "conséquence syntaxique" !

Liste des règles de dérivation. Voici la liste des règles de dérivation. On ne s'attarde pour l'instant pas sur leur justification dont nous nous occuperons plus tard.

	Partage de conclusion.	
construction	$\dfrac{\Gamma \vdash P : \mathit{prop.}}{\Gamma, \Delta \vdash P : \mathit{prop.}}$	
logique	$\dfrac{\Gamma \vdash P}{\Gamma, \Delta \vdash P}$	

	Règles de construction.
vrai	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top : \mathit{prop.}}$
faux	$\dfrac{}{\Gamma \vdash \bot : \mathit{prop.}}$
introduction d'une variable	$\dfrac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, P : \mathit{prop.} \vdash P : \mathit{prop.}}$ où P est une nouvelle variable
et	$\dfrac{\Gamma \vdash P : \mathit{prop.} \qquad \Gamma \vdash Q : \mathit{prop.}}{\Gamma \vdash (P \wedge Q) : \mathit{prop.}}$
ou	$\dfrac{\Gamma \vdash P : \mathit{prop.} \qquad \Gamma \vdash Q : \mathit{prop.}}{\Gamma \vdash (P \vee Q) : \mathit{prop.}}$
implique	$\dfrac{\Gamma \vdash P : \mathit{prop.} \qquad \Gamma \vdash Q : \mathit{prop.}}{\Gamma \vdash (P \Rightarrow Q) : \mathit{prop.}}$
non	$\dfrac{\Gamma \vdash P : \mathit{prop.}}{\Gamma \vdash (\neg P) : \mathit{prop.}}$

	Règles logiques. introdution	élimination
introduction d'une hypothèse	$\dfrac{\Gamma \vdash F \qquad \Gamma \vdash P : \mathit{prop.}}{\Gamma, P \vdash F}$	
et	$\dfrac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \wedge Q}$	$\dfrac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash P}$ $\dfrac{\Gamma \vdash P \wedge Q}{\Gamma \vdash Q}$
ou	$\dfrac{\Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash P \vee Q}$ $\dfrac{\Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \vee Q}$	$\dfrac{\Gamma, P \vdash R \qquad \Gamma, Q \vdash R \qquad \Gamma \vdash P \vee Q}{\Gamma \vdash R}$
implique	$\dfrac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q}$	$\dfrac{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q \qquad \Gamma \vdash P}{\Gamma \vdash Q}$
faux	$\dfrac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma \vdash \neg P}{\Gamma \vdash \bot}$	$\dfrac{\Gamma \vdash \bot \qquad \Gamma \vdash P : \mathit{prop.}}{\Gamma \vdash P}$
quantification universelle	$\dfrac{\Gamma, P : \mathit{prop.} \vdash Q}{\Gamma \vdash \forall R, Q[R/P]}$ où R est une nouvelle variable	$\dfrac{\Gamma \vdash R : \mathit{prop.} \qquad \Gamma \vdash \forall P, Q}{\Gamma \vdash Q[R/P]}$

1.2.3 Conséquences syntaxiques

Dérivation d'un séquent. On définit la relation $\Vdash$ entre Δ_0 et Seq :

$$\begin{array}{rclll} (X/s) \Vdash s' & \Leftrightarrow & s = s' & \text{et} & \text{il existe } s_1; ...; s_n \in \mathrm{Seq} \text{ tq } ((s_1; ...; s_n); s) \in \mathrm{R} \\ & & & \text{et} & X = (d_1; ...; d_n) \\ & & & \text{où} & \forall i \in [\![1; n]\!], d_i \Vdash s_i \end{array}$$

La relation $\Vdash$ est bien définie.

Démonstration. Par induction sur Δ_0.[2] □

Dérivations, deuxième épisode ; conséquences syntaxiques. On peut maintenant définir l'ensemble $\mathrm{S_y}$ des séquents qui sont des *conséquences syntaxiques*, et l'ensemble Δ des dérivations qui permettent de les obtenir.
On pose :

$$\begin{array}{rcl} \Delta & \triangleq & \{(X/s) \in \Delta_0/(X/s) \Vdash s\} \\ \mathrm{S_y} & \triangleq & \{s/\exists X \in \mathrm{Seq}^{(\mathbb{N})}, (X/s) \in \Delta\} \end{array}$$

($\mathrm{Seq}^{(\mathbb{N})}$ désigne les n-uplets d'éléments de Seq.)

Remarque. On désignera à partir de maintenant par "dérivation" les dérivations qui sont dans Δ, et non plus celles de Δ_0, car ces dernières ne nous seront plus utiles.

Induction sur les dérivations. On peut exposer une variante du principe d'induction structurelle sur Δ. Si P est une propriété sur Δ, alors :

$$[\forall((d_1; ...; d_n)/s) \in \Delta, (\forall i \in [\![1; n]\!], P(d_i)) \Rightarrow P(((d_1; ...; d_n)/s))] \Rightarrow \forall d \in \Delta, P(d)$$

On nommera dans la suite ce principe le *principe d'induction sur les dérivation.*

Démonstration. On montre par induction structurelle (au sens des familles inductives, cf. 1.1.2) sur Δ que :

$$\forall((d_1; ...; d_n)/s) \in \Delta, \forall i \in [\![1; n]\!], d_i \in \Delta$$

Alors si P vérifie $\forall((d_1; ...; d_n)/s) \in \Delta, (\forall i \in [\![1; n]\!], P(d_i)) \Rightarrow P(((d_1; ...; d_n)/s))$:

Soit $((d_1; ...; d_n)/s) \in \Delta$ tq $\forall i \in [\![1; n]\!], d_i \in \Delta \Rightarrow P(d_i)$.
Soit $i \in [\![1; n]\!]$.
D'après ce qui vient d'être montré, on a $d_i \in \Delta$, donc $P(d_i)$.
Et ce quel que soit $i \in [\![1; n]\!]$, donc $P(((d_1; ...; d_n)/s))$.
Donc $\forall((d_1; ...; d_n)/s) \in \Delta, (\forall i \in [\![1; n]\!], d_i \in \Delta \Rightarrow P(d_i)) \Rightarrow P(((d_1; ...; d_n)/s))$.

P vérifie donc les hypothèses du principe d'induction sur les familles inductives, donc $\forall d \in \Delta, P(d)$. □

1.2.4 Induction par les règles

On montre (enfin !) le lien entre les séquents qui sont des conséquences syntaxiques et les règles de dérivation.

2. Induction qui reste à détailler...

Les conséquences syntaxiques en tant que point fixe. On pose l'opérateur $\hat{\mathrm{R}}$:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}(\mathrm{R}) &\to \mathcal{P}(\mathrm{R})\\ A &\mapsto \{y / \exists X \in A^{(\mathbb{N})}, (X/y) \in \mathrm{R}\}\end{aligned}$$

$\hat{\mathrm{R}}$ admet un plus petit point fixe que l'on note $\mathrm{fix}(\hat{\mathrm{R}})$, et on a : $\mathrm{S_y} = \mathrm{fix}(\hat{\mathrm{R}})$.

Démonstration. On montre ces deux points.

Il existe un plus petit point fixe. En adaptant 1.1.2, on obtient que :

$$\mathrm{fix}(\hat{\mathrm{R}}) = \bigcup_{n=0}^{+\infty} \hat{\mathrm{R}}^n(\varnothing)$$

C'est l'ensemble des conséquences syntaxiques. Il découle de la définition de $\mathrm{S_y}$ que c'est un point fixe de $\hat{\mathrm{R}}$.
Reste à montrer que c'est le plus petit, i.e. que $\forall A$ point fixe de $\hat{\mathrm{R}}, \forall (X/s) \in \Delta, s \in A$.
On raisonne par induction sur Δ.
On pose la propriété $P((X/s)) : s \in A$.

Soit $d = ((d_1; ...; d_n)/s) \in \Delta$ tq $\forall i \in [\![1; n]\!], P(d_i)$.
$d \in \Delta$, donc $d \Vdash s$, donc :

$$\begin{array}{ll} & \text{il existe } s_1; ...; s_n \in \mathrm{Seq} \text{ tq } ((s_1; ...; s_n); s) \in \mathrm{R}\\ \text{et} & X = (d_1; ...; d_n)\\ \text{où} & \forall i \in [\![1; n]\!], d_i \Vdash s_i\end{array}$$

Si $i \in [\![1; n]\!]$, alors il existe X_i tel que $d_i = (X_i/s_i)$ (car $d_i \Vdash s_i$).
Alors $\forall i \in [\![1; n]\!], s_i \in A$ par hypothèse d'induction.
Or A est un point fixe de $\hat{\mathrm{R}}$, et $((s_1; ...; s_n); s) \in \mathrm{R}$, donc $s \in A$.

Alors, selon le principe d'induction sur les dérivations, $\forall (X/d) \in \Delta, d \in A$.
Or $\mathrm{S_y} = \{s / \exists X \in \mathrm{Seq}^{(\mathbb{N})}, (X/s) \in \Delta\}$.
On obtient alors la minimalité de $\mathrm{S_y}$ pour $\subset$. □

Principe d'induction par les règles. On peut alors énoncer le *principe d'induction par les règles.* Si P est une propriété sur $\mathrm{S_y}$:

$$\begin{array}{lll}\text{si} & \forall s_1; ...; s_n \in \mathrm{S_y} & \text{tq } \forall i \in [\![1; n]\!], P(s_i),\\ & & \forall s \in \mathrm{Seq}, ((s_1; ...; s_n)/s) \in \mathrm{R} \Rightarrow s \in P(s)\\ \text{alors} & \forall s \in \mathrm{S_y}, P(s) & \end{array}$$

Démonstration. Soit P telle que :

$$\begin{array}{ll}\forall s_1; ...; s_n \in \mathrm{S_y} & \text{tq } \forall i \in [\![1; n]\!], P(s_i),\\ & \forall s \in \mathrm{Seq}, ((s_1; ...; s_n)/s) \in \mathrm{R} \Rightarrow s \in P(s)\end{array}$$

On pose $A \triangleq \{s \in \mathrm{S_y} / P(s)\}$.
Alors $A \subset \mathrm{S_y}$; et, par hypothèse sur P, A est un point fixe de $\hat{\mathrm{R}}$, donc $\mathrm{S_y} \subset A$.
Donc $A = \mathrm{S_y}$.
Donc $\forall s \in \mathrm{S_y}, P(s)$. □

2 Sémantique

2.1 Notations

δ — *Distribution de valeurs de vérité.*
Si A est un ensemble de formules atomiques, toute fonction $\delta : \mathrm{A} \to \{0;1\}$ est une distribution de valeurs de vérité.

$\overline{\delta}$ — *Prolongement aux propositions.*
Soit $\delta : \mathrm{Var}(\Gamma) \to \{0;1\}$.
On prolonge δ en $\overline{\delta} : \mathcal{F}(\Gamma) \to \{0;1\}$ par induction sur $\mathcal{F}(\Gamma)$:
Si $C \in \mathrm{Var}(\Gamma)$, alors $\overline{\delta}(C) = \delta(C)$. Sinon :

$$\begin{aligned}
\overline{\delta}(\top) &= 1 \\
\overline{\delta}(\bot) &= 0 \\
\overline{\delta}(P \wedge Q) = 1 &\Leftrightarrow \overline{\delta}(P) = 1 \text{ et } \overline{\delta}(Q) = 1 \\
\overline{\delta}(P \vee Q) = 1 &\Leftrightarrow \overline{\delta}(P) = 1 \text{ ou } \overline{\delta}(Q) = 1 \\
\overline{\delta}(P \wedge Q) = 1 &\Leftrightarrow (\overline{\delta}(P) = 1 \text{ et } \overline{\delta}(Q) = 1) \text{ ou } \delta(P) = 0 \\
\overline{\delta}(\forall A, F) &\Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{F}(\Gamma), \overline{\delta}(F[B/A]) = 1
\end{aligned}$$

$\overline{\overline{\Gamma \vdash F}}$ et $\overline{\overline{\Gamma \vdash P : prop.}}$ — *Conséquences sémantiques.*
Pour un séquent s, on définit $\overline{\overline{s}}$ selon la forme de s :

$s = \Gamma \vdash F$	$\to$	$\forall \delta : \mathcal{F}(\Gamma) \to \{0;1\}, \overline{\delta}(F) = 1$
$s = \Gamma \vdash P : prop.$	$\to$	$P \in \mathcal{F}(\Gamma)$

Si $\overline{\overline{s}}$, on dit que s est une conséquence sémantique (ce qui correspond à la notion de tautologie).

Satisfaction. On dit que δ satisfait une liste d'hypothèses Γ si, pour toute hypothèse P dans Γ, $\overline{\delta}(P) = 1$.

2.2 Validité

La validité des théorèmes de ce système tient en partie à la gestion des variables. En effet, on ne s'autorise pas à utiliser deux fois la même variable dans deux formules différentes (d'où les fréquents "où [...] est une nouvelle variable"), ce qui permet de ne jamais vérifier que les remplacements sont sains (i.e. qu'on n'a pas de collision entre variables libres et liées lors d'un remplacement), car une variable libre dans une formule ne peut pas être liée dans une autre.

Théorème. Les conséquences syntaxiques sont des conséquences sémantiques, i.e. si $d = (X/(\Gamma \vdash P))$ est une dérivation, alors $\overline{\overline{\Gamma \vdash P}}$.

Démonstration. On procède par induction par les règles.
Soit s un séquent tel qu'il existe $s_1; ...; s_n$ tels que $((s_1; ...; s_n)/s) \in \mathrm{R}$.

Règles de construction.

Introduction de $\top$.

$\dfrac{}{\Gamma \vdash \top : prop.}$ On a bien toujours, par définition de $\mathcal{F}$, $\top \in \mathcal{F}(\Gamma)$.

Introduction de $\wedge$.

$$\frac{\Gamma \vdash P : \mathit{prop}. \qquad \Gamma \vdash Q : \mathit{prop}.}{\Gamma \vdash (P \wedge Q) : \mathit{prop}.}$$

Par hypothèse d'induction, $\overline{\overline{\Gamma \vdash P : \mathit{prop}.}}$ et $\overline{\overline{\Gamma \vdash Q : \mathit{prop}.}}$
donc $P \in \mathcal{F}(\Gamma)$ et $Q \in \mathcal{F}(\Gamma)$
donc $(P \wedge Q) \in \mathcal{F}(\Gamma)$ ($\mathcal{F}(\Gamma)$ est stable par $(A, B) \to (A \wedge B)$).
Donc $\overline{\overline{\Gamma \vdash (P \wedge Q) : \mathit{prop}.}}$

Le raisonnement est le même pour l'introduction de $\vee$ et de $\neg$.

Introduction d'une nouvelle variable.

$$\frac{\Gamma \vdash F}{\Gamma, A : \mathit{prop}. \vdash A : \mathit{prop}.}$$

On a bien $A \in \mathcal{F}(\Gamma, A : \mathit{prop}.)$.

Partage de conclusion.

$$\frac{\Gamma \vdash F : \mathit{prop}. \qquad \Gamma, \Delta \vdash G : \mathit{prop}.}{\Gamma, \Delta \vdash F : \mathit{prop}.}$$

Par hypothèse d'induction, on a $F \in \mathcal{F}(\Gamma)$;
et par ailleurs on a $\mathcal{F}(\Gamma) \subset \mathcal{F}(\Gamma, \Delta)$.
Donc $F \in \mathcal{F}(\Gamma, \Delta)$, i.e. $\overline{\overline{\Gamma, \Delta \vdash F : \mathit{prop}.}}$

Règles logiques du premier ordre

Introduction de $\top$.

$$\frac{}{\Gamma \vdash \top}$$

Soit $\delta : \mathrm{Var}(\Gamma) \to \{0; 1\}$ satisfaisant Γ.
Par définition, $\overline{\delta}(\top) = 1$, et ce quelle que soit
$\delta : \mathrm{Var}(\Gamma) \to \{0; 1\}$ satisfaisant Γ.
Donc $\overline{\overline{\Gamma, A : \mathit{prop}. \vdash F}}$.

Partage de conclusion.

$$\frac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma, \Delta \vdash Q}{\Gamma, \Delta \vdash P}$$

Soit $\delta : \mathrm{Var}(\Gamma, \Delta) \to \{0; 1\}$ satisfaisant Γ, Δ.
δ satisfait Γ, Δ donc elle satisfait Γ, donc $\overline{\delta}(P) = 1$.
Donc $\overline{\overline{\Gamma, \Delta \vdash P}}$.

Introduction du symbole $\wedge$.

$$\frac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma \vdash Q}{\Gamma \vdash P \wedge Q}$$

Soit $\delta : \mathrm{Var}(\Gamma) \to \{0; 1\}$ satisfaisant Γ.
Par hypthèse d'induction : $\overline{\overline{\Gamma \vdash P}}$ et $\overline{\overline{\Gamma \vdash Q}}$,
donc : $\overline{\delta}(P) = 1$ et $\overline{\delta}(Q) = 1$
d'où $\overline{\delta}(P \wedge Q)$.
Donc $\overline{\overline{\Gamma \vdash P}}$.

De même, on montre que les règles elim$-\wedge$, intro$-\vee$ et elim$-\vee$ sont valides.

Introduction du symbole $\Rightarrow$.

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q}{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q}$$

Soit $\delta : \mathcal{F}(\Gamma) \to \{0; 1\}$ satisfaisant Γ.
— Si $\overline{\delta}(P) = 0$: alors $\overline{\delta}(P \Rightarrow Q) = 1$.
— Si $\overline{\delta}(P) = 1$: alors δ satisfait Γ, P.
Or, par hypothèse d'induction, $\overline{\overline{\Gamma, P \vdash Q}}$.
Donc $\overline{\delta}(Q) = 1$, et $\overline{\delta}(P \Rightarrow Q) = 1$.
Donc $\overline{\overline{\Gamma \vdash P \Rightarrow Q}}$.

Elimination du symbole $\Rightarrow$.

$$\frac{\Gamma, P \vdash Q \qquad \Gamma, P}{\Gamma \vdash Q}$$

Soit $\delta : \mathcal{F}(\Gamma) \to \{0;1\}$ satisfaisant Γ.
Par hypothèse d'induction, $\overline{\overline{\Gamma, P \vdash Q}}$ $\quad \overline{\overline{\Gamma \vdash P}}$;
donc $\overline{\delta}(P) = 1 \Rightarrow \overline{\delta}(Q) = 1 \quad \overline{\delta}(P) = 1$,
donc $\overline{\delta}(Q) = 1$. Donc $\overline{\overline{\Gamma \vdash Q}}$.

Règles de $\perp$.

Introduction de $\perp$.

$$\frac{\Gamma \vdash P \qquad \Gamma \vdash \neg P}{\Gamma \vdash \perp}$$

Soit $\delta : \mathcal{F}(\Gamma) \to \{0;1\}$ satisfaisant Γ.
Par hypothèse d'induction, $\overline{\overline{\Gamma \vdash P}}$ et $\overline{\overline{\Gamma \vdash \neg P}}$
donc $\overline{\delta}(P) = 1$ et $\overline{\delta}(P) = 0$ $\lightning$
Donc $\{\delta : \mathcal{F}(\Gamma) \to \{0;1\} / \delta \text{ satisfait } \Gamma\} = \varnothing$.
Donc $\forall \delta : \mathcal{F}(\Gamma) \to \{0;1\}$ satisfaisant $\Gamma, \overline{\delta}(\perp) = 1$.
C'est exactement : $\overline{\overline{\Gamma \vdash \perp}}$.

Elimination de $\perp$.

$$\frac{\Gamma \vdash \perp \qquad \Gamma \vdash P : prop.}{\Gamma \vdash P}$$

Ici encore, $\{\delta : \mathcal{F}(\Gamma) \to \{0;1\} / \delta \text{ satisfait } \Gamma\} = \varnothing$.
Donc $\forall \delta : \mathcal{F}(\Gamma) \to \{0;1\}$ satisfaisant $\Gamma, \overline{\delta}(P) = 1$.

Raisonnement par l'absurde.

$$\frac{\Gamma, \neg P \vdash \perp}{\Gamma \vdash P}$$

Soit $\delta : \mathcal{F}(\Gamma) \to \{0;1\}$ satisfaisant Γ.
Deux cas :
— Si $\overline{\delta}(P) = 1$, alors il n'y a rien de plus à montrer.
— Si $\overline{\delta}(P) = 0$, alors $\overline{\delta}(\neg P) = 1$, donc δ satisfait $\Gamma, \neg P$.
Or $\overline{\overline{\Gamma, \neg P \vdash \perp}}$, donc $\overline{\delta}(\perp) = 1$ $\lightning$.
Donc on a nécessairement $\overline{\delta}(P) = 1$.

Règles de quantification.

Introduction du symbole $\forall$.

$$\frac{\Gamma, A : prop. \vdash F}{\Gamma \vdash \forall B, F[B/A]}$$

où B est une nouvelle variable

Par hypothèse d'induction, $\overline{\overline{\Gamma, A : prop. \vdash F}}$;
or $\mathrm{Var}(\Gamma, A : prop.) = \mathrm{Var}(\Gamma) \sqcup \{A\}$;
donc $\forall \delta : \mathrm{Var}(\Gamma) \sqcup \{A\} \to \{0;1\}, \delta$ satisfaisant $\Gamma \Rightarrow \overline{\delta}(F) = 1$.

Soit $\delta : \mathrm{Var}(\Gamma) \to \{0;1\}$ satisfaisant Γ.

Soit $B \in \mathcal{F}(\Gamma)$.
On pose $\delta_0 : \mathrm{Var}(\Gamma) \cup \{A\} \to \{0;1\}$ définie par :

$$\delta_0(C) = \begin{cases} \delta(B) & \text{si } C = A \\ \delta(C) & \text{sinon} \end{cases}$$

On remarque alors que :
— $\overline{\delta_0}(F) = \overline{\delta_0}(F[B/A])$ par définition de δ_0 ;
— $\overline{\delta_0}|_{\mathcal{F}(\Gamma)} = \overline{\delta}$;
— et A n'apparaît pas dans $F[B/A]$, donc $F[B/A] \in \mathcal{F}(\Gamma)$
Or $\overline{\delta_0}(F) = 1$, donc $\overline{\delta}(F[B/A]) = 1$.
Donc :

$$\forall B \in \mathcal{F}(\Gamma), \overline{\delta}(F[B/A]) = 1$$

Donc $\overline{\overline{\Gamma \vdash \forall B, F[B/A]}}$.

Elimination du symbole ∀.

$$\frac{\Gamma \vdash \forall A, F \qquad \Gamma \vdash B : prop.}{\Gamma \vdash F[B/A]}$$

Soit $\delta : \mathrm{Var}(\Gamma) \to \{0;1\}$ satisfaisant Γ.
Par hypothèse d'induction, $\overline{\overline{\Gamma \vdash \forall A, F}}$, donc $\overline{\delta}(\forall A, F) = 1$.
En revenant à la définition :

$$\overline{\delta}(\forall A, F) \Leftrightarrow \forall B \in \mathcal{F}(\Gamma), \overline{\delta}(F[B/A]) = 1$$

Or $\overline{\overline{\Gamma \vdash B : prop.}}$, i.e. $B \in \mathcal{F}(\Gamma)$, donc $\overline{\delta}(F[B/A])$.
Donc $\overline{\overline{\Gamma \vdash F[B/A]}}$.

□

2.3 Petit théorème de complétude

Nous allons montrer la réciproque du théorème précédent : toute conséquence sémantique est conséquence syntaxique.

2.3.1 Avatars

On se donne d'abord un moyen de créer, à partir d'une formule, une formule qui lui est équivalente mais qui n'utilise aucun quantificateur. On peut le faire car il n'existe essentiellement que deux propositions : celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.

Avatar d'une formule. On définit les avatars par induction sur les formules.

$$\begin{array}{rcl}
\alpha(\top) & \triangleq & \top \\
\alpha(\bot) & \triangleq & \bot \\
\alpha(P \wedge Q) & \triangleq & \alpha(P) \wedge \alpha(Q) \\
\alpha(P \vee Q) & \triangleq & \alpha(P) \vee \alpha(Q) \\
\alpha(P \Rightarrow Q) & \triangleq & \alpha(P) \Rightarrow \alpha(Q) \\
\alpha(\neg P) & \triangleq & \neg\alpha(P) \\
\alpha(\forall A, F) & \triangleq & \alpha(F[\top/A]) \wedge \alpha(F[\bot/A])
\end{array}$$

Equivalence d'une formule et de son avatar. Toute formule est alors équivalente à son avatar.

Démonstration. Par induction structurelle sur les formules.
Soit F une formule obtenue à partir de formules $F_1; ...; F_n$ équivalentes à leurs avatars.
On distingue les cas selon la forme de F.

— $\top$; $\bot$: ces deux formules sont d'autant plus équivalentes à leurs avatars qu'elles sont leurs propres avatars.
— $P \wedge Q$:
Par hypothèse d'induction, $P \Leftrightarrow \alpha(P)$ et $Q \Leftrightarrow \alpha(Q)$.
Alors $P \wedge Q \Leftrightarrow \alpha(P) \wedge \alpha(Q)$.
— $P \vee Q$; $P \Leftrightarrow Q$: même raisonnement.
— $\neg P$: là encore, l'équivalence $P \Leftrightarrow \alpha(P)$ permet de conclure.
— $\forall A, F$:
On a :

$$\frac{\dfrac{\vdash \forall A, F}{\vdash F[\top/A]} \qquad \dfrac{\vdash \forall A, F}{\vdash F[\bot/A]}}{\vdash F[\top/a] \wedge F[\bot/a]}$$

donc $\forall A, F \Rightarrow \alpha(\forall A, F)$.
C'est pour la réciproque qu'intervient la remarque faite plus haut : il n'y a que deux types de propositions, celles qui sont vraies et celles qui sont fausses.
Si $F[\top/a] \wedge F[\bot/a]$, alors si P est une autre propriété, on a deux cas :
— $P \Leftrightarrow \top$: alors $F[P/A] \Leftrightarrow F[\top/A]$.
— $P \Leftrightarrow \bot$: alors $F[P/A] \Leftrightarrow F[\bot/A]$.
donc dans tous les cas on a $F[P/A]$.
Donc $\forall A, F$.
On conclut par induction. □

Un premier résultat de complétude. Soit T une théorie, i.e. un ensemble de formules. On dit que T est *contradictoire* si on peut, à partir des formules de T, dériver $\bot$. On montre que si T est finie et non contradictoire (on dit aussi *cohérente*), alors il existe une distribution de valeurs de vérités δ telle que $\overline{\delta}(T) = \{1\}$, i.e. T est *satisfaisable.*

$$[T \text{ non contradictoire} \wedge T \text{ finie}] \Rightarrow T \text{ satisfaisable}$$

Démonstration. Soit T non contadictoire et finie.
On pose $F_0 \triangleq \bigwedge_{F \in T} F$.
F_0 est bien définie car T est finie, et, pour toute distribution de valeurs de vérités δ, on a :

$$\overline{\delta}(T) = \{1\} \Leftrightarrow \overline{\delta}(F_0)$$

i.e. T est équivalente à F_0.

On est alors ramené à la satisfaction de la seule formule F_0 qui ne contient par construction aucun quantificateur.
On sait résoudre ce problème : on considère C l'ensemble des variables qui apparaîssent dans F_0, qui est fini par finitude de F_0, et on teste simplement chacune des $2^{\#\mathrm{C}}$ distributions de valeurs de vérité possibles sur C.
— Si l'une d'entre elles vérifie $\overline{\delta}(F_0) = 1$, alors on a fini.
— Sinon, cela veut dire que $\neg F_0$ est une tautologie. On peut alors la dériver, la dérivation étant simplement une grosse disjonction de cas. On peut donc toujours dériver $\neg F_0$; alors si on suppose F_0, on peut dériver $\bot$, ce qui montre qu'on peut dériver $\bot$ à partir des formules de T, i.e. que T n'est pas cohérente. $\lightning$
Il existe donc δ telle que $\overline{\delta}(T) = \{1\}$. □

2.3.2 Compacité

Le théorème de compacité du calcul propositionnel dit que pour tout ensemble de formules T, T est satisfaisable si et seulement si toute partie finie de T est satisfaisable. Nous allons montrer ce théorème dans le cas où T est dénombrable, car la démonstration a le mérite d'être accessible avec des outils de prépa (ou presque). [3]

On travaile ici sur l'ensemble $\mathcal{F}_0$ des formules sans quantificateurs universels, i.e. le plus petit sous-ensemble de $\mathcal{A}$ contenant $\top$; $\bot$ et A un ensemble de variables fixé et contenant $P \wedge Q$; $P \vee Q$; $P \Rightarrow Q$ et $\neg P$ pour tout $P; Q \in \mathcal{F}_0$.

Lien avec la compacité. Ce théorème est un résultat de compacité au sens topologique du terme. Il repose sur la compacité de $\{0;1\}^{\mathcal{F}_0}$ pour la topologie produit, i.e. la topologie engendrée la base d'ouverts :

$$\{\{\overline{\delta} \in \mathrm{E}_0 / \forall i \in [\![1;n]\!], \overline{\delta}(x_i) = \epsilon_i\} / n \in \mathbb{N} \text{ et } (x_i)_i \in \mathcal{F}^{[\![1;n]\!]} \text{ et } (\epsilon_i)_i \in \{0;1\}^{[\![1;n]\!]}\}$$

3. Le théorème est en fait vrai quel que soit le cardinal de l'ensemble des formules, mais les démonstrations de ce fait que j'ai lues reposent soit sur le lemme de Zorn, soit sur le théorème de Tychonov, qui m'auraient à mon avis emmené bien trop loin du sujet de ce texte.

avec $\mathrm{E}_0 \triangleq \{0;1\}^{\mathcal{F}_0}$.

On suppose pour l'instant que l'on a montré que E_0 est compact, i.e. que pour toute intersection $\bigcap_{i\in I} F_i$ de fermés de E_0 telle que $\bigcap_{i\in I} F_i = \varnothing$, il existe $J \subset I$ fini tel que $\bigcap_{i\in J} F_i = \varnothing$.

Lemme. On pose $\mathrm{E} \subset \mathrm{E}_0$ l'ensemble des prolongements de distributions de valeurs de vérité, i.e. $\mathrm{E} = \{\overline{\delta}/\delta \text{ d.v.v.}\}$. Montrons d'abord que E est fermé dans E_0, ce qui montrera qu'il est compact (car fermé dans un compact).

Démonstration. Pour $P;Q \in \mathcal{F}_0$, on pose $\Omega_{P;Q}$ l'ensemble :

$$\begin{array}{rcl} \Omega_{P;Q} & \triangleq & \{\overline{\delta} \in \mathrm{E}_0/\overline{\delta}(P \wedge Q) = 1 \text{ ssi } \overline{\delta}(P) = 1 \text{ et } \overline{\delta}(Q) = 1\} \\ & \cap & \{\overline{\delta} \in \mathrm{E}_0/\overline{\delta}(P \vee Q) = 1 \text{ ssi } \overline{\delta}(P) = 1 \text{ ou } \overline{\delta}(Q) = 1\} \\ & \cap & \{\overline{\delta} \in \mathrm{E}_0/\overline{\delta}(P \Rightarrow Q) = 1 \text{ ssi } \overline{\delta}(P) = 0 \text{ ou } (\overline{\delta}(P) = 1 \text{ et } \overline{\delta}(Q) = 1)\} \end{array}$$

et $\Omega_0 \triangleq \{\overline{\delta} \in \mathrm{E}_0/\overline{\delta}(\top) = 1 \wedge \overline{\delta}(\bot) = 0\}$. On a :

— $\Omega_0 = \Pi_\top^{-1}(\{1\}) \cap \Pi_\bot^{-1}(\{0\})$ où Π_P est la fonction qui à $\overline{\delta}$ associe $\overline{\delta}(P)$. Or Π_P est toujours continue pour la topologie produit, car l'image réciproque d'un ouvert de $\{0;1\}$ par Π_P est toujours un ouvert élémentaire de E_0 (en se référant à leur définition).
  Alors $\Pi_\top^{-1}(\{1\})$ est ouvert-fermé car $\{1\}$ est ouvert-fermé dans $\{0;1\}$ et par continuité de $\Pi_\top$; de même $\Pi_\bot^{-1}(\{0\})$ est ouvert-fermé, donc Ω_0 est ouvert-fermé.

— $\{\overline{\delta} \in \mathrm{E}_0/\overline{\delta}(P \wedge Q) = 1 \text{ ssi } \overline{\delta}(P) = 1 \text{ et } \overline{\delta}(Q) = 1\}$ s'écrit aussi

$$[\Pi_{P\wedge Q}^{-1}(\{1\}) \cap \Pi_P^{-1}(\{1\}) \cap \Pi_Q^{-1}(\{1\})] \cup [\Pi_{P\wedge Q}^{-1}(\{0\}) \cap (\Pi_P^{-1}(\{0\}) \cup \Pi_Q^{-1}(\{0\}))]$$

  et est donc ouvert-fermé.

— On montre de même que les autres ensembles qui interviennent dans la définition de $\Omega_{P;Q}$ sont ouverts-fermés, donc $\Omega_{P;Q}$ est ouvert-fermé.
  E est l'ensemble des $\overline{\delta} \in \mathrm{E}_0$ respectant la définition donnée en 2.1, c'est à dire que :

$$\mathrm{E} = \Omega_0 \cap \bigcap_{P;Q\in \mathrm{F}_0} \Omega_{P;Q}$$

donc E est fermé en tant qu'intersection de fermés. ☐

Le théorème de compacité. On sait maintenant que E est compact, montrons alors le théorème de compacité : une théorie T est satisfaisable ssi toute partie finie de T est satisfaisable.

Démonstration. Si T est satisfaisable, alors clairement toute partie fine de T l'est aussi. On montre la réciproque.

On suppose que T n'est pas satisfaisable.
Soit $A \subset T$ (fini ou non). On pose $S_A \triangleq \{\overline{\delta} \in \mathrm{E}/\forall F \in A, \overline{\delta}(F) = 1\}$.
On remarque que si $A;B \subset T$, alors $S_{A\cup B} = S_A \cap S_B$, et que ceci reste valide pour une union infinie de sous-ensembles de T.
Or $T = \cup_{A\subset T;A \text{ finie}} A$, donc :

$$S_T = \bigcap_{A\subset T;A \text{ finie}} S_A$$

et si T n'est pas satisfaisable, alors $S_T = \varnothing$, donc, par compacité de E, il existe $A_1;...;A_n$ tels que $\bigcap_{i=1}^{n} S_{A_i} = \varnothing$, i.e. $S_{A_1\cup...\cup A_n} = \varnothing$, or $A_1 \cup ... \cup A_n$ est fini par finitude de A_i, donc il existe une partie finie de T qui n'est pas satisfaisable.
On conclut par contraposition. ☐

Compacité du produit, cas dénombrable. On montre que $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ est compact pour la topologie produit. F_0 étant dénombrable (on peut l'écrire comme une union dénombrable d'ensembles au plus dénombrables), cela montrera la compacité de E.

Démonstration. On va montrer que la topologie de $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ est métrisable, puis on utilisera la caractérisation séquentielle de la compacité dans les espaces métriques.

On pose[4] :

$$\begin{array}{rccc} f: & \{0;1\}^{\mathbb{N}} & \to & \mathbb{N} \\ & (u_n)_n & \mapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n} \end{array}$$

f est injective par unicité du développement en base 3.

Cette fonction est un homéomorphisme sur son image. Soit $U \in \{0;1\}^{\mathbb{N}}$. Soit $V \in v(f(U))$. Il existe $\epsilon > 0$ tel que $B_o(f(U);\epsilon) \subset V$.
$\sum_{n\in\mathbb{N}} 3^{-n}$ converge absolument, donc il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $\sum_{n=N}^{+\infty} |\frac{1}{3^n}| < \frac{\epsilon}{2}$.

Soit $(v_n)_n \in \{0;1\}^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n < N, v_n = u_n$. On écrit $U = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
Alors :

$$\begin{aligned} |f((u_n)_n) - f((v_n)_n)| &= \left|\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{v_n}{3^n}\right| \\ &= \left|\sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{3^n} \cdot \underbrace{(u_n - v_n)}_{=0\ (n<N)} + \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n} - \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{v_n}{3^n}\right| \\ &= \left|\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n} - \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{v_n}{3^n}\right| \\ &\leq \left|\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{u_n}{3^n}\right| + \left|\sum_{n=N}^{+\infty} \frac{v_n}{3^n}\right| \\ &\leq 2 \cdot \frac{\epsilon}{2} \leq \epsilon \end{aligned}$$

donc $f((v_n)_n) \in V$.
En posant $W \triangleq \{(n_n)_n \in \{0;1\}^{\mathbb{N}} / \forall n < N, v_n = u_n\}$, on a montré que $f(W) \subset V$.
Par ailleurs, $(u_n)_n \in W$, et W est un ouvert de $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ pour la topologie produit, donc $W \in v((u_n)_n)$.
En généralisant sur V, on obtient la continuité de f en U ; et en généralisant sur U, on obtient la continuité de f.
f est bijective de $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ dans $f(\{0;1\}^{\mathbb{N}})$ car elle est injective, et f^{-1} est continue en adaptant ce qui précède (en utilisant essentiellement que les ouverts élémentaires de la topologie produit fixent les valeurs des fonctions qu'ils contiennent seulement en un nombre fini de points). f est alors un homéomorphisme sur son image.

On en déduit une distance. On pose :

$$\begin{array}{rccc} d: & (\{0;1\}^{\mathbb{N}})^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (U;V) & \mapsto & |f(U) - f(V)| \end{array}$$

4. Je suis surpris d'avoir, à peu de choses près, trouvé un lien assez naturel entre un problème de logique formelle et la compacité de l'ensemble de Cantor !

c'est bien une distance sur $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$, et, comme f est un homéomorphisme, la topologie induite par d est la topologie produit.

Montrons maintenant que $(\{0;1\}^{\mathbb{N}};d)$ est compact. C'est un espace métrique, donc, d'après Borel-Lebesgue, il suffit de montrer que toute suite admet une valeur d'adhérence.

Soit $(U_m)_m = ((u_{m;n})_n)_m \in (\{0;1\}^{\mathbb{N}})^{\mathbb{N}}$.

— L'un des deux ensembles $\{m \in \mathbb{N}/u_{m;0} = 0\}$ et $\{m \in \mathbb{N}/u_{m;0} = 1\}$ est infini ; on pose alors $\epsilon_0 = [0 \text{ ou } 1]$ selon le quel des deux l'est.
  On pose $A_0 \triangleq \{(U_m)_0/u_{m;n} = \epsilon_0\}$.

— Si ϵ_n et A_n sont construits, alors l'un des deux ensembles $\{m \in \mathbb{N}/U_m \in A_n$ et $u_{m;n+1} = 0\}$ et $\{m \in \mathbb{N}/U_m \in A_n$ et $u_{m;n+1} = 1\}$ est infini ; on pose alors $\epsilon_{n+1} = [0 \text{ ou } 1]$ selon le quel des deux l'est.
  On pose $A_{n+1} \triangleq A_n \cap \{(U_m)/u_{m;n} = \epsilon_{n+1}\}$.

On construit ainsi par récurrence $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \forall ((u_{m;n})_n)_m \in A_N, \forall n \leq N, u_{m;n} = \epsilon_n$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on prend alors $V_n \in A_n$, en faisant en sorte que $(V_n)_n$ soit une suite extraite de $(U_n)_n$ (on peut le faire car chaque ensemble A_n est infini). On a alors par construction :

$$V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{CVS}} (\epsilon_n)_n$$

et, comme la topologie produit (qui est la topologie de la convergence simple) et la topologie de d sont égales, on a :

$$V_n \xrightarrow[n\to+\infty]{d} (\epsilon_n)_n$$

donc $(U_n)_n$ admet $(\epsilon_n)_n$ comme valeur d'adhérence.

Alors toute suite adment une valeur d'adhérence, donc $\{0;1\}^{\mathbb{N}}$ est compact. □

2.3.3 Complétude

On a déjà montré le théorème de complétude dans le cas fini. Montrons le dans le cas dénombrable.

Théorème de complétude. Soit T une théorie (un ensemble de formules de $\mathcal{F}$) au plus dénombrable. Alors T est satisfaisable ssi T est cohérente.

Démonstration. Sens direct. Si T n'est pas cohérente, alors $\perp$ est conséquence syntaxique de T, donc $\overline{\overline{\vdash \perp}}$, i.e. si δ est une distribution de valeurs de vérité telle que $\forall F \in T, \overline{\delta}(F) = 1$, alors $\overline{\delta}(\perp) = 1$, ce qui contredit la définition de $\overline{\delta}$.
Donc T n'est pas satisfaisable.

Sens réciproque. Soit T cohérente et dénombrable. On pose :

$$T_\alpha \triangleq \{\alpha(F)/F \in T\}$$

Par équivalence des formules et de leur avatar, pour toute distribution de valeurs de vérité δ, δ satisfait T ssi δ satisfait T_α.
Toujours avec cette équivalence, T étant cohérente, on obtient que T_α l'est aussi ; et T_α est dénombrable (c'est l'image ensembliste de T par la fonction α).

T_α est cohérente, alors tout sous-ensemble fini de T_α est cohérent, donc satisfaisable d'après le cas fini du théorème de complétude que nous avons déjà montré.

Tout sous-ensemble fini de T_α est satisfaisable ; et T_α est dénombrable, *et T_α est incluse dans $\mathcal{F}_0$*, donc, d'après le théorème de compacité dans le cas dénombrable, T_α est satisfaisable.
Dont T est satisfaisable. □