# Sucesiones y series de números reales

## 1 Sucesiones

**Ejercicio 1.** Prueba que si |x| < 1, entonces  $\lim_{n \to \infty} \left(1 + x + x^2 + \dots + x^n\right) = \frac{1}{1-x}$ .

**Solución 1.** Sabemos que  $1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$  (es la suma de una progresión geométrica) y, usando que, si  $x \in ]-1, 1[$ ,  $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$ , se obtiene lo pedido.

**Ejercicio 2.** Demuestra que la sucesión  $x_1 = 1$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{3x_n}$ ,  $\forall n \ge 1$  es convergente y calcular su límite.

#### Solución 2.

a) Veamos por inducción que la sucesión es creciente. Es inmediato comprobar que  $x_1 < x_2$ . Si  $x_n < x_{n+1}$  tenemos que comprobar que  $x_{n+1} < x_{n+2}$ :

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n} < \sqrt{3x_{n+1}} = x_{n+2}.$$

b) Además es una sucesión acotada, ya que por inducción otra vez tenemos que  $x_n \le 3$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ . Para n = 1 es inmediato, y si  $x_n \le 3$ , comprobémoslo para  $x_{n+1}$ . En efecto,

$$x_{n+1} = \sqrt{3x_n} \le \sqrt{3\cdot 3} = 3.$$

Por tanto, la sucesión es creciente y mayorada, luego existe su límite x, que estará comprendido entre  $1 \le x \le 3$ . Para calcular su valor vamos a tomar límites en la fórmula de recurrencia, esto es  $x_{n+1}^2 = 3 \ x_n \implies x^2 = 3x \implies x(x-3) = 0$  de lo que se deduce que  $\lim_{n\to\infty} x_n = x = 3$ .

**Ejercicio 3.** Se considera la sucesión definida por recurrencia por  $a_1 = 1$  y  $a_{n+1} = \sqrt{2a_n + 3}$  para  $n \in \mathbb{N}$ . Estudia si es convergente y, en caso de que lo sea, calcula el límite.

**Solución 3.** Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que  $a_2 = \sqrt{5} > a_1 = 1$ . Para comprobar que la sucesión dada es monótona creciente, lo vemos por inducción:

- a) Para n = 1, acabamos de ver que  $a_1 \le a_2$ .
- b) Hipótesis de inducción: suponemos que  $a_n \le a_{n+1}$ .
- c) Comprobamos que  $a_{n+1} \le a_{n+2}$ . En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$a_n \le a_{n+1} \Rightarrow 2a_n \le 2a_{n+1} \Rightarrow 2a_n + 3 \le 2a_{n+1} + 3 \Rightarrow \sqrt{2a_n + 3} \le \sqrt{2a_{n+1} + 3} \Rightarrow a_{n+1} \le a_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona creciente.

Al ser creciente, ya sabemos que la sucesión está acotada inferiormente por  $a_1 = 1$ . Veamos que está acotada superiormente por 3. Esto es, que  $a_n \le 3 \forall n \in \mathbb{N}$ . Otra vez lo hacemos por inducción:

a) Para n = 1, es evidente que  $a_1 1 \le 3$ .

- b) Hipótesis de inducción: Suponemos que  $a_n \le 3$ .
- c) Comprobamos que  $a_{n+1} \le 3$ . En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$a_n \le 3 \implies 2a_n \le 6 \implies 2a_n + 3 \le 9 \implies \sqrt{2a_n + 3} \le \sqrt{9} = 3 \implies a_{n+1} \le 3$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente. Para calcular el límite de  $\{a_n\}$  partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que  $\lim \{a_n\} = x$  y nos queda que  $x = \sqrt{2x + 3}$ . Resolvemos la ecuación:

$$x = \sqrt{2x + 3} \Rightarrow x^2 = 2x + 3 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1 \text{ 6 } x = 3$$

Pero como el límite ha de ser mayor que 1, tenemos que  $\lim a_n = 3$ .

- **E Ejercicio 4.** Sea  $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  la sucesión definida por recurrencia como  $x_1 = \frac{1}{2}$  y  $x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25}$ .
  - a) Demuestra que  $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$  para cualquier natural n.
  - b) Demuestra que  $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$  es decreciente.
  - c) Calcula su límite.

### Solución 4.

a) Lo demostramos por inducción. Es claro que  $\frac{1}{5} < x_1 = \frac{1}{2} < \frac{4}{5}$ . Supongamos que  $\frac{1}{5} < x_n < \frac{4}{5}$ , entonces

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25} > \left(\frac{1}{5}\right)^2 + \frac{4}{25} = \frac{1}{5},$$
 y

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25} < \left(\frac{4}{5}\right)^2 + \frac{4}{25} = \frac{4}{5}.$$

b) De nuevo comprobamos que la sucesión es decreciente por inducción. En primer lugar, es evidente que  $x_1 = \frac{1}{2} \ge \frac{41}{100} = x_2$ . Supongamos ahora que  $x_n \ge x_{n+1}$ , entonces

$$x_{n+1} = x_n^2 + \frac{4}{25} \ge x_{n+1}^2 + \frac{4}{25} = x_{n+2},$$

ya que la función "elevar al cuadrado" conserva el orden en los positivos.

c) De los dos apartados anteriores se deduce que la sucesión es monótona y acotada y, por tanto, convergente. Si *L* es su límite, debe verificar que

$$L = L^2 + \frac{4}{25} \iff L = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - \frac{16}{25}}}{2} = \frac{1}{5}, \text{ o } \frac{4}{5}.$$

Puesto que la sucesión es decreciente, el límite no puede ser  $\frac{4}{5}$  y, se tiene que  $L = \frac{1}{5}$ .

**Ejercicio 5.** Sea  $a \in \mathbb{R}$ , a > 1. Estudiar el comportamiento de la sucesión  $x_1 = a$ ,  $x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + a}{2}}$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

**Solución 5.** En primer lugar, probamos que la sucesión es decreciente. Se tiene que  $x_2$  =  $\sqrt{\frac{a^2+a}{2}} < a = x_1$  ( $\iff a > 1$ ). Si suponemos que  $x_{n+1} < x_n$  veamos que también  $x_{n+2} < x_{n+1}$ . En efecto, como  $x_{n+1}^2 < x_n^2$ , entonces

$$x_{n+2} = \sqrt{\frac{x_{n+1}^2 + a}{2}} < x_{n+1} = \sqrt{\frac{x_n^2 + a}{2}}.$$

Además la sucesión está acotada, ya que  $1 < x_n \le a$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$  (¡pruébese por inducción!), por tanto la sucesión tiene límite x que verifica la ecuación siguiente:

$$x^2 = \frac{x^2 + a}{2} \implies x^2 = a \implies x = \sqrt{a}.$$

# 2 Convergencia de series numéricas

Ejercicio 6. Aplicar el criterio de la raíz para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) 
$$\sum \left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n$$
  
b)  $\sum \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}$ 

c) 
$$\sum \frac{n^n}{(2n+1)^n}$$

d) 
$$\sum \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}$$

### Solución 6.

- a) Aplicamos el criterio de la raíz  $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n-1} = \frac{1}{3} < 1$ . Por tanto, la serie es convergente.
- b) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n}{3n-2}\right)^{2n-1}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{n}{3n-2}\right)^{\frac{2n-1}{n}} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio de la raíz,

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{(2n+1)^n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2}.$$

En consecuencia, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} < 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

Ejercicio 7. Aplicar el criterio del cociente para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) 
$$\sum \frac{1}{n2^n}$$

c) 
$$\sum \frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}$$
  
d)  $\sum \frac{2^n n!}{n!}$ 

a) 
$$\sum \frac{1}{n2^n}$$
  
b)  $\sum \frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ 

d) 
$$\sum \frac{2^n n!}{n^n}$$

## Solución 7.

a) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)2^{n+1}}}{\frac{1}{n^{2n}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{2(n+1)} = \frac{1}{2} < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n+1} \left(\frac{2}{5}\right)^{n+1}}{\frac{1}{n} \left(\frac{2}{5}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n}{n+1} \frac{2}{5} = \frac{2}{5} < 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)(3n+2)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)(4n+1)}}{\frac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdots (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{3n+2}{4n+1} = \frac{3}{4} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio del cociente:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{2^n n!} = \lim_{n \to \infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1$$

de lo que se deduce la convergencia de la serie.

Ejercicio 8. Aplicar el criterio de comparación para estudiar la posible convergencia de las siguientes series:

a) 
$$\sum \frac{\log(n)}{n}$$

c) 
$$\sum \frac{1}{2n-1}$$

e) 
$$\sum \frac{1}{(2n-1)2n}$$
  
f)  $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ 

a) 
$$\sum \frac{\log(n)}{n}$$
  
b)  $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$ 

c) 
$$\sum \frac{1}{2n-1}$$
  
d)  $\sum \frac{1}{2^n-n}$ 

f) 
$$\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$$

## Solución 8.

- a) Comparamos con la serie  $\sum \frac{1}{n}$  que no es convergente. Como  $\frac{\log(n)}{n} \ge \frac{1}{n}$ , la serie no es conver-
- b) Comparamos con la serie armónica  $\sum \frac{1}{n}$ :

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n(n+1)}}{n} = \lim_{n \to \infty} \sqrt{\frac{n(n+1)}{n^2}} = 1.$$

Por tanto, las dos series tienen el mismo carácter y, en consecuencia, la serie  $\sum \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$  no es convergente.

- c) No es convergente. La serie se comporta igual que la serie armónica  $\sum \frac{1}{n}$ .
- d) Comparamos con la serie convergente  $\sum \frac{1}{2^n}$ .

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^n - n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^n - n}{2^n} = 1.$$

Por tanto, la serie es convergente.

e) Comparamos con la serie convergente  $\sum \frac{1}{n^2}$ 

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(2n-1)2n}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(2n-1)2n}{n^2} = 4.$$

Por tanto, las dos series tienen el mismo carácter y, en consecuencia, la serie es convergente.

f) No es convergente porque  $\frac{1}{\sqrt{n}} \ge \frac{1}{n}$ .

Ejercicio 9. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) 
$$\sum \frac{2^n}{n}$$

d) 
$$\sum \frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}$$

b) 
$$\sum \frac{n+1}{2n+1}$$

a) 
$$\sum \frac{2^n}{n}$$
  
b)  $\sum \frac{n+1}{2n+1}$   
c)  $\sum \frac{1}{n^2 \log(n)}$ 

### Solución 9.

- a) No es convergente porque  $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^n}{n} = +\infty$ .
- b) No es convergente porque el término general no tiende a cero:  $\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+1} = \frac{1}{2}$ .
- c) Como  $\log(n) \ge 1$  para  $n \ge 3$ , se tiene que  $\frac{1}{n^2 \log(n)} \le \frac{1}{n^2}$ , para cualquier  $n \ge 3$ . La serie  $\sum \frac{1}{n^2}$  es convergente y, el criterio de comparación nos dice que  $\sum \frac{1}{n^2 \log(n)}$  también lo es.
- d) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{3(n+1)-1}{(\sqrt{2})^{n+1}}}{\frac{3n-1}{(\sqrt{2})^n}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{3n+2}{3n-1}\right) \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

Ejercicio 10. Discutir la convergencia de las siguientes series de números reales:

a) 
$$\sum \frac{1}{n!}$$

d)  $\sum \frac{n^2}{4^{(n-1)}}$ 

a) 
$$\sum \frac{1}{n!}$$
  
b)  $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$   
c)  $\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$ 

c) 
$$\sum \frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}$$

## Solución 10.

a) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

b) Comparamos con la serie  $\sum \frac{1}{n^2}$ 

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{(3n-2)(3n+1)}{n^2} = 9$$

y, por tanto la serie es convergente.

c) Comparamos con la serie  $\sum \frac{1}{n^3}$ ,

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2n+1}{(n+1)^2(n+2)^2}}{\frac{1}{n^3}} = 2.$$

En consecuencia, las dos series tienen el mismo carácter de convergencia. Puesto que la serie  $\sum \frac{1}{n^3}$  es convergente, ambas lo son.

d) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\frac{n^2}{4^{(n-1)}}} = \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt[n]{n^2}}{4^{\frac{n-1}{n}}} = \frac{1}{4} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

Ejercicio 11. Estudiar la convergencia de las series

a) 
$$\sum \frac{n^3}{e^n}$$

c) 
$$\sum \frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}$$
  
d)  $\sum \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$ 

b) 
$$\sum \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}$$

d) 
$$\sum \left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n$$

### Solución 11.

- a) Aplicamos el criterio de la raíz  $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n^3}{e^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n^3}}{\sqrt[n]{e^n}} = \frac{1}{e} < 1$  y, en consecuencia, la serie es convergente.
- b) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{n}{2}}} = \lim_{n \to \infty} \left(\frac{2n+1}{3n+1}\right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

c) Aplicamos el criterio del cociente

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\frac{2^{n+1}}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)(2n+3)}}{\frac{2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}} = \lim_{n \to \infty} \frac{2^{n+1}}{2^n} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)(2n+3)} = \lim_{n \to \infty} \frac{2}{2n+3} = 0 < 1$$

y, en consecuencia, la serie es convergente.

d) Aplicamos el criterio de la raíz

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{n+1}{n^2}\right)^n} = \lim_{n \to \infty} \frac{n+1}{n^2} = 0 < 1$$

y, por tanto, la serie es convergente.

(E) Ejercicio 12. Estudia el carácter de las siguientes series:

- a)  $\sum \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$ .
- b)  $\sum \frac{1+\log(n)}{n^n}$ .

Solución 12.

a) Aplicamos el criterio de la raíz, considerando como  $a_n = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}$ . Tendremos entonces que estudiar el límite de  $\{\sqrt[n]{a_n}\}$  y compararlo con 1; esto es

$$\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2}} = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^{n^2/n} = \left(\frac{2n+1}{2n+5}\right)^n$$

sucesión que presenta una indeterminación del tipo " $1^{\infty}$ " por lo que aplicamos la regla del número e:

$$\lim n \left( \frac{2n+1}{2n+5} - 1 \right) = \lim \frac{-4n}{2n+5} = -2 \implies \lim \sqrt[n]{a_n} = e^{-2} < 1$$

Por tanto la serie dada es convergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente, considerando como  $a_n = \frac{1 + \log(n)}{n^n}$ ; de esta forma, habrá que estudiar el límite de la siguiente sucesión y compararlo con el valor1:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1 + \log(n+1)}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{1 + \log(n)} = \frac{1 + \log(n+1)}{1 + \log(n)} \frac{n^n}{(n+1)^n (n+1)}$$
$$= \frac{1 + \log(n+1)}{1 + \log(n)} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \frac{1}{n+1}$$

Finalmente, si calculamos el límite de cada uno de los tres factores que tenemos, el primer factor es claro que converge a 1 (no hay más que dividir el numerador y denominador por log(n + 1)),

el segundo factor converge a  $e^{-1}$  (basta aplicar la regla del número e) y el tercero converge a cero. Por tanto:

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 0 < 1 \implies \sum a_n \text{ es convergente.}$$

- **Ejercicio 13.** Estudiar, según los valores de a > 0 la convergencia de las siguientes series:
  - a)  $\sum \frac{a^n}{n^a}$
  - b)  $\sum a^n n^a$

#### Solución 13.

- a) Sólo tenemos en cuenta 0 < a < 1 puesto que en para a = 1 es la serie armónica que no converge, y para a > 1 el término general no converge a cero. Entonces, para 0 < a < 1 aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos que la serie es convergente.
- b) Sólo tenemos en cuenta 0 < a < 1 puesto que para  $a \ge 1$  el término general no converge a cero. Entonces, para 0 < a < 1 aplicamos el criterio de la raíz y obtenemos que la serie es convergente.

## 3 Suma de series

Ejercicio 14. Suma, si es posible, las siguientes series

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n(n+1)}$$

b) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)}$$

## Solución 14.

- a) La suma es  $\frac{1}{2}$  puesto que la serie es la mitad de la del Ejemplo ??.
- b) Calculamos las sumas parciales usando la descomposición en fracciones simples del término general:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+3)(n+4)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) + \left( \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) + \dots + \left( \frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+4} \right)$$

$$= \lim_{n \to \infty} \frac{1}{3} - \frac{1}{n+4} = \frac{1}{3}.$$

Ejercicio 15. Suma, si es posible, las siguientes series

a) 
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n}$$

b) 
$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n}$$

c) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}}$$

d) 
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n}$$

Solución 15.

a) Usando la suma de una progresión geométrica

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{15}{10^n} = 15 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^n} = 15 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{150}{9}.$$

b) De nuevo utilizamos la suma de una progresión geométrica

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^n} - \sum_{n=0}^{1} \frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1 - \left(-\frac{1}{3}\right)} - 1 + \frac{1}{3} = \frac{1}{12}.$$

c) Aprovechamos que estamos sumando una progresión geométrica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+3}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+4}} = \frac{1}{16} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{16} \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{8}.$$

d) Dividimos en dos progresiones geométricas y sumamos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 3^n}{5^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{5^n} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{5^n} = \frac{13}{6}.$$