Examen Final de Cálculo
Curso 2016/2017

1. **(1.5 puntos)** Calcula la imagen de la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = e^{-x^2+x}\,(1-2x)\ .$$

Solución.

La función es continua y derivable en todo $\mathbb{R}$, así que la imagen debe ser un intervalo (por ser continua y estar definida en un intervalo). Para calcular la imagen, vamos a calcular los puntos críticos, decidir si en ellos se alcanza algún extremo relativo y, estudiando el comportamiento en $-\infty$ y $+\infty$, calcular los extremos absolutos, si los tuviera.

La derivada de la función vale

$$\begin{aligned} f'(x) &= e^{-x^2+x}\,(1-2x)^2 + e^{-x^2+x}\,(-2) = e^{-x^2+x}\,\big((1-2x)^2-2\big) \\ &= e^{-x^2+x}\,(4x^2-4x-1). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que la función exponencial nunca vale 0, tenemos que

$$f'(x) = 0 \iff 4x^2-4x-1=0 \iff x = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Vamos a llamar $x_0 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $x_1 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Para estudiar si en estos puntos se alcanza algún extremo relativo, vamos a estudiar el signo de la segunda derivada en dichos puntos. La segunda derivada vale

$$f''(x) = e^{-x^2+x}\,(1-2x)\,(4x^2-4x-1) + e^{-x^2+x}\,(8x-4)\ .$$

Teniendo en cuenta que los puntos x_0 y x_1 son las soluciones de $4x^2-4x-1=0$, el primer sumando de la expresión de $f''(x)$ vale 0 en ambos puntos con lo que tenemos que

$$f''(x_0) = e^{-x_0^2+x_0}\,(8x_0-4) = e^{-x_0^2+x_0}\ = -4\sqrt{2} < 0,$$

con lo que en x_0 se alcanza un máximo relativo y

$$f''(x_1) = e^{-x_1^2+x_1}\,(8x_1-4) = e^{-x_1^2+x_1}\ = 4\sqrt{2} > 0$$

y en x_1 se alcanza un mínimo relativo.

El valor de la función en el punto x_0, donde se alcanza el máximo relativo, vale

$$f(x_0) = e^{-x_0^2+x_0}\,(1-2x_0) = \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{4}}$$

y el valor de f en el punto x_1, donde se alcanza el mínimo relativo, vale

$$f(x_1) = e^{-x_1^2+x_1}\,(1-2x_1) = -\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{4}}\,.$$

Finalmente, vamos a estudiar el comportamiento de la función tanto en $-\infty$ como en $+\infty$. El tratamiento es similar así que haremos los dos casos a la vez. Tanto en $-\infty$ como en $+\infty$ se presenta una indeterminación de la forma $0 \cdot \infty$. Si la manipulamos para poder aplicar la segunda regla de L'Hôpital tendremos que

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} e^{-x^2+x}(1-2x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{1-2x}{e^{x^2-x}},$$

que es una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$. Aplicando la segunda regla de L'Hôpital obtenemos

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{-2}{e^{x^2-x}(2x-1)} = 0.$$

Entonces la imagen quedaría el intervalo $\left[-\sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{4}}, \sqrt{2}\,e^{-\frac{1}{4}}\right]$.

2. Calcula los siguientes límites:

a) **(1.25 puntos)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\log(\operatorname{sen}(2x))}{\log(\operatorname{sen}(x))}$

Solución.

Como $\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(2x) = \lim_{x\to 0^+} \operatorname{sen}(x) = 0$ y función logaritmo neperiano diverge negativamente en 0, entonces estamos ante una indeterminación de la forma $\frac{\infty}{\infty}$ y podemos aplicar la segunda regla de L'Hôpital. Entonces nos queda

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos(2x)\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(2x)\cos(x)} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\cos(2x)}{\cos(x)} \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(2x)} = 2 \lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(2x)}\ .$$

Si ahora aplicamos la primera regla de L'Hôpital al $\lim_{x\to 0^+} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\operatorname{sen}(2x)}$ obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x)}{2\cos(2x)} = \frac{1}{2},$$

y el límite buscado vale 1.

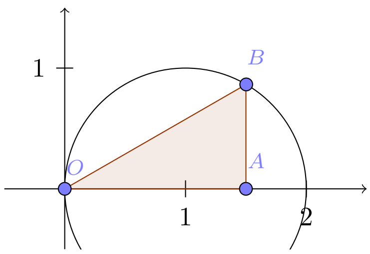
b) **(1.5 puntos)** $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \frac{\displaystyle\int_x^{\sqrt{x}} \log(1+t^2)\,\mathrm{d}t}{\sqrt{x}}\ .$

Solución.

La función $f\colon \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_x^{\sqrt{x}} \log(1+t^2)\,\mathrm{d}t$, aplicando el teorema fundamental del cálculo, es continua en $\mathbb{R}_0^+$ y derivable en $\mathbb{R}^+$ y además $f(0) = \int_0^0 \log(1+t^2)\,\mathrm{d}t = 0$. En la misma situación (continua en $\mathbb{R}_0^+$ y derivable en $\mathbb{R}^+$) está la función $\sqrt{x}$ del denominador, que también vale 0 en 0. Estamos entonces ante una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ y estamos en condiciones de aplicar la primera regla de L'Hôpital para intentar conocer el comportamiento del cociente de las funciones en 0 y obtenemos

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{\log(1+x)}{2\sqrt{x}} - \log(1+x^2)}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0^+} \left(\log(1+x) - 2\sqrt{x}\log\left(1+x^2\right)\right) = 0\ .$$

3. **(1.5 puntos)** Un triángulo rectángulo OAB, inscrito en la circunferencia de ecuación $(x-1)^2+y^2=1$, tiene un vértice en la origen, otro A en el eje horizontal y el tercero B en dicha circunferencia. Si uno de los catetos es horizontal, calcula B de forma que el triángulo OAB tenga área máxima.



Solución.

Si llamamos x a la primera coordenada del punto $A=(x,0)$, entonces $B=(x,y)$, por estar en la circunferencia, tiene que verificar $(x-1)^2+y^2=1$. Despejando,

$$(x-1)^2+y^2=1 \iff y^2=1-(x-1)^2=2x-x^2 \iff y=\sqrt{2x-x^2}.$$

Observa que hemos elegido la solución positiva al despejar. El área del triángulo es la mitad de la base por la altura:

$$f\colon [0,2]\to\mathbb{R}, \quad f(x)=\frac{x\sqrt{2x-x^2}}{2}.$$

Su derivada, salvo en los extremos es,

$$f'(x)=\frac{\sqrt{2x-x^2}}{2}+\frac{(2-2x)\,x}{4\sqrt{2x-x^2}}=-\frac{2x^2-3x}{2\sqrt{2x-x^2}}$$

que se anula si, y sólo si,

$$2x^2-3x=0 \iff x(2x-3)=0 \iff x=0 \ \text{ o } \ x=\frac{3}{2}.$$

Podemos justificar que el máximo se alcanza en $3/2$ de varias formas:

a) podríamos calcular la segunda derivada y comprobar que es negativa con lo que tendríamos un único máximo relativo que será el máximo absoluto;

b) podríamos estudiar la monotonía de f estudiando el signo de la derivada: como $f'(1)>0$ y $f'(1.75)<0$, la función pasa de crecer a decrecer y, por tanto, tiene un máximo en $3/2$;

c) por último, quizá la forma más sencilla, se puede usar que una función continua en un intervalo cerrado y acotado alcanza su máximo y su mínimo absoluto. Dichos extremos se tienen que alcanzar en 0, $3/2$ o 2. Como $f(0)=f(2)=0$ y $f(3/2)>0$, la función alcanza su mínimo en los extremos y su máximo en $3/2$.

Por tanto, el punto pedido B sería el punto $(3/2,\sqrt{3-(3/2)^2})=(3/2,\sqrt{3}/2)$.

4. **(1.5 puntos)** Calcula $\displaystyle\int (\log(x))^2 \, \mathrm{d}x$.

Solución.

Si uno aplica el método de integración por partes, con $u = (\log(x))^2$ y $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$ (entonces $\mathrm{d}u = 2\log(x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ y $v = x$), se tiene que

$$\int (\log(x))^2 \, \mathrm{d}x = x\,(\log(x))^2 - \int 2x\log(x)\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = x\,(\log(x))^2 - 2\int \log(x)\,\mathrm{d}x.$$

Por lo tanto, basta emplear de nuevo dicha fórmula, con $u = \log(x)$ y $\mathrm{d}v = \mathrm{d}x$, para calcular

$$\int \log(x)\,\mathrm{d}x = x\log(x) - \int 1\,\mathrm{d}x.$$

Combinando las dos expresiones anteriores, se llega a

$$\int (\log(x))^2 \, \mathrm{d}x = x\,(\log(x))^2 - 2x\log(x) + 2x + C.$$

5. Estudia la convergencia de las series:

   (a) **(1.5 puntos)** $\displaystyle\sum \left(\frac{2(n+1)}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$.

Solución.

Sea $x_n = \left(\frac{2(n+1)}{e}\right)^n \frac{1}{n!}$ estrictamente positiva, se puede aplicar el criterio del cociente. Notando que

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(\frac{2(n+2)}{e}\right)^{(n+1)} \frac{1}{(n+1)!}}{\left(\frac{2(n+1)}{e}\right)^n \frac{1}{n!}} = \frac{2}{e}\frac{(n+2)^{n+1}}{(n+1)^n}\frac{1}{n+1} = \frac{2}{e}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1},$$

el objetivo del ejercicio propuesto se centra en calcular

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} = e.$$

Este último límite también se puede obtener por medio de la *regla del número e*. Por tanto, se obtiene que

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2}{e}\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = 2 > 1,$$

con lo cual la serie diverge positivamente.

(b) **(1.25 puntos)** $\sum \left(\dfrac{1 \cdot 4 \cdots (3n-2)}{4 \cdot 8 \cdots (4n)} \right)^2.$

Solución.

Sea $x_n = \left(\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{4\cdot 8\cdots(4n)} \right)^2$ estrictamente positiva, se puede proceder como en el ejercicio anterior. Se calcula

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{\left(\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)(3(n+1)-2)}{4\cdot 8\cdots(4n)(4(n+1))} \right)^2}{\left(\frac{1\cdot 4\cdots(3n-2)}{4\cdot 8\cdots(4n)} \right)^2} = \left(\frac{3n+1}{4n+4} \right)^2.$$

Por tanto, como

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n+1}{4n+4} = \frac{3}{4},$$

se tiene que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{3}{4} \right)^2 = \frac{9}{16} < 1.$$

De esta forma, el criterio del cociente implica la convergencia de la serie dada.

Granada, 2 de febrero de 2017