1. **(2 puntos)** Se considera la función $g(x) = \log(x^2 - 2x + e^2 + 1)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$.

   a) Calcula la imagen de g.

   b) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{2\,g(x)}{x^2+1}$.

   c) Comprueba que la ecuación $\frac{2}{x^2+1}\, g(x) = 1$ tiene, al menos, una solución positiva.

Solución. En primer lugar, se puede ver que el polinomio $x^2 - 2x + e^2 + 1 = (x-1)^2 + e^2$ no tiene raíces. En particular, $x^2 - 2x + e^2 + 1 > 0$, por tanto la función g está bien definida en $\mathbb{R}$ y, además, es continua.

Para hallar la imagen de g, estudiamos la monotonía de g. Hallamos la derivada de g

$$g'(x) = \frac{2x-2}{x^2 - 2x + e^2 + 1}.$$

Teniendo en cuenta que $x^2 - 2x + e^2 + 1 > 0$, el signo de $g'(x)$ es el mismo que $2x-2$. Ahora, podemos decir que g es estrictamente decreciente en $]-\infty, 1[$, estrictamente creciente en $]1, +\infty[$ y tiene un mínimo en $x = 1$. Por otro lado, es fácil comprobar que

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} g(x) = +\infty.$$

Así pues, como consecuencia del Teorema del Valor Intermedio, se sabe que

$$f(\mathbb{R}) = \left[g(1), \lim_{x\to-\infty} g(x)\right[\cup \left[g(1), \lim_{x\to+\infty} g(x)\right[= [2, +\infty[.$$

Es claro que, mediante la escala de infinitos,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2+1} \log\left(x^2 - 2x + e^2 + 1\right) = 0.$$

Por último, introducimos la función

$$h(x) = \frac{2}{x^2+1} \log\left(x^2 - 2x + e^2 + 1\right) - 1,$$

función que esta bien definida en $\mathbb{R}$.

Aprovechando lo visto en los apartados anteriores se sabe que

$$h(1) = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{x^2+1} \log\left(x^2 - 2x + e^2 + 1\right) - 1 = -1,$$

por tanto se puede aplicar tranquilamente el Teorema de Bolzano para asegurar que existe un $c \in [1, +\infty[$ tal que $h(c) = 0$. Esto garantiza que existe, al menos, una solución a la ecuación dada.

2. **(1.5 puntos)** Calcula $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \int_0^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))\,dt}{x}$.

Solución. La función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_0^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))\,dt$, aplicando el teorema fundamental del cálculo, es continua y derivable en $\mathbb{R}^+$ y además

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \int_0^0 \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))\,dt = 0.$$

En la misma situación (continua y derivable en $\mathbb{R}^+$) está la función x del denominador, que también vale 0 en 0. Estamos entonces ante una indeterminación de la forma $\frac{0}{0}$ y estamos en condiciones de aplicar la primera regla de L'Hôpital para intentar conocer el comportamiento del cociente de las funciones en 0. Para ello, utilizaremos el teorema fundamental del Cálculo, ya que:

$$f'(x) = \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2\sqrt{x}))\,\frac{1}{\sqrt{x}}$$

Aplicando ya la regla de L'Hôpital obtenemos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - f'(x)}{1} = \lim_{x\to 0} \left(1 - \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2\sqrt{x}))\,\frac{1}{\sqrt{x}}\right) .$$

Nos ocupamos entonces del segundo sumando:

$$\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2\sqrt{x}))\,\frac{1}{\sqrt{x}}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2\sqrt{x}))}{\sqrt{x}}$$

Volvemos a aplicar la primera regla de L'Hôpital,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(\operatorname{sen}(2\sqrt{x}))\ \cos(2\sqrt{x})\,\frac{1}{\sqrt{x}}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = \lim_{x\to 0} 2\ \cos(\operatorname{sen}(2\sqrt{x}))\ \cos((2\sqrt{x}) = 2$$

Por tanto,

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \int_0^{2\sqrt{x}} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t))\,dt}{x} = 1 - 2 = -1.$$

3. **(2 puntos)**

   a) Calcula el polinomio de Taylor, P_2, centrado en $a = 1$ de orden 2 de la función $f(x) = \frac{\log(x)}{x}$.

   b) Acota el error que se comete cuando aproximamos $f(3/2)$ por el valor de $P_2(3/2)$.

Solución.

a) Calculamos, en primer lugar las derivadas de la función $f(x) = \log(x)/x$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1 - \log(x)}{x^2},\\
f''(x) &= \frac{-\frac{1}{x}x^2 - 2x(1 - \log(x))}{x^4} = \frac{2\log(x) - 3}{x^3},\\
f'''(x) &= \frac{11 - 6\log(x)}{x^4}.
\end{aligned}$$

Para calcular el polinomio, evaluamos en 1:

$$f(1) = 0, \quad f'(1) = 1, \quad f''(1) = -3,$$

con lo que

$$P_2(x) = (x-1) - \frac{3}{2!}(x-1)^2$$

b) El error cometido es

$$R_2(3/2) = \frac{f'''(c)}{3!}\,(3/2-1)^3\,,$$

donde $c \in [1, 3/2]$. Por tanto,

$$|R_2(3/2)| = \left| \frac{11 - 6\log(c)}{c^4\,3!} \cdot \frac{1}{2^3} \right| \leq \left| \frac{11 - 6\log(1)}{3!\,2^3} \right| = \frac{11}{48},$$

donde hemos acotado la fracción de la siguiente forma:

1) $11 - \log(x)$ es decreciente y su valor más grande en $[1, 3/2]$ se alcanza en 1, y
2) $\frac{1}{x^4}$ es decreciente y su valor mayor de nuevo se alcanza en 1.

4. **(1.5 puntos)** Calcula $\displaystyle\int_0^1 3x^2 \arctan(x)\,dx$.

Solución. Primero calculamos una primitiva usando el método de integración por partes y luego calcularemos la integral usando la regla de Barrow.

$$\begin{aligned}
\int 3x^2 \arctan(x)\,dx &= \begin{bmatrix} u = \arctan(x) \implies du = \frac{1}{1+x^2} \\ dv = 3x^2 \implies v = x^3 \end{bmatrix} \\
&= x^3 \arctan(x) - \int \frac{x^3}{1+x^2}\,dx \qquad\qquad \text{(dividimos)} \\
&= x^3 \arctan(x) - \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx \\
&= x^3 \arctan(x) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right).
\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 3x^2 \arctan(x)\,dx &= x^3 \arctan(x) - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\log\left(1+x^2\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log(2) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1 + \log(2)\right).
\end{aligned}$$

5. **(1.5 puntos)** Estudia la convergencia de la serie: $\displaystyle\sum \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^3+n}$.

Solución. Aplicamos el criterio de la raíz.

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^3+n}} = \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{\frac{n^3+n}{n}} = \left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2+1}$$

Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo "1^∞"; por tanto, aplicamos la regla del número e:

$$(n^2+1)\left[\frac{n^2+1}{n^2+n+1}-1\right]=(n^2+1)\left[\frac{n^2+1-n^2-n-1}{n^2+n+1}\right]$$
$$=(n^2+1)\frac{-n}{n^2+n+1}=\frac{-n^3-n}{n^2+n+1}\to-\infty$$

Con lo que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^3+n}}=0<1$$

de lo que se deduce que la serie dada es convergente.

6. **(1.5 puntos)** Calcula la suma $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^n+7^{n+2}}{8^{n+1}}$.

Solución. La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n\geq 2}\frac{(-2)^n+7^{n+2}}{8^{n+1}}=\frac{1}{8}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{-2}{8}\right)^n+\frac{7^2}{8}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{7}{8}\right)^n=\frac{1}{8}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{-1}{4}\right)^n+\frac{49}{8}\sum_{n\geq 2}\left(\frac{7}{8}\right)^n$$

Como las razones de cada una de estas series verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{4}|<1$ y $|\frac{7}{8}|<1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente por ser la suma de dos series convergentes (cada sumando es convergente por ser el producto de una constante por una serie geométrica convergente).

Para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^n=\frac{1}{1-x}\right)$, nos queda:

$$\begin{aligned}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-2)^n+7^{n+2}}{8^{n+1}}&=\frac{1}{8}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n+\frac{49}{8}\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n\\&=\frac{1}{8}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{4}\right)^n-\left(1-\frac{1}{4}\right)\right]+\frac{49}{8}\left[\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^n-\left(1+\frac{7}{8}\right)\right]\\&=\frac{1}{8}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{4}}-1+\frac{1}{4}\right]+\frac{49}{8}\left[\frac{1}{1-\frac{7}{8}}-1-\frac{7}{8}\right]\\&=\frac{1}{8}\left[\frac{4}{5}-1+\frac{1}{4}\right]+\frac{49}{8}\left[8-1-\frac{7}{8}\right]=\frac{1}{160}+\frac{49^2}{64}=\frac{12007}{320}\ .\end{aligned}$$

Granada, 18 de julio de 2017