Cálculo. Grado en Ingeniería Informática
Examen Final Extraordinario

1. Se define $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ donde $f(x) = \log(x^2) - x^2 + 2$. Determina el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 0$. **(1 punto)**

   Solución. Comenzamos observando que f es claramente derivable por su expresión. Dado que el dominio **no** es un intervalo, nos restringiremos primero a trabajar en $\mathbb{R}^+$, donde el teorema de Rolle sí que se cumple. Comencemos con $\mathbb{R}^+$. Sabemos que el teorema de Rolle implica que entre dos ceros de f hay un cero de f'. Por ello, nos proponemos estudiar la ecuación $f'(x) = 0$. Teniendo en cuenta que

$$f(x) = \log(x^2) - x^2 + 2 = 2\log(x) - x^2 + 2$$

   se cumple para cada $x \in \mathbb{R}^+$, entonces tenemos una sencilla expresión para f', a saber,

$$f'(x) = \frac{2}{x} - 2x = 2\left(\frac{1}{x} - x\right) = 2\left(\frac{1-x^2}{x}\right).$$

   Ahora, dado $x \in \mathbb{R}^+$ se tiene que

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = 1$$

   dado que $x > 0$ por hipótesis. Dado que la ecuación $f'(x) = 0$ tiene una única solución en $\mathbb{R}^+$, el teorema de Rolle implica que f tiene, a lo sumo, dos ceros en $\mathbb{R}^+$ y que, si tuviera dos, uno estaría en $]0,1[$ y el otro en $]1,\infty[$. Por tanto, veremos si en cada uno de estos subintervalos podemos encontrar algún cero invocando el teorema de Bolzano. Para ello, comenzamos observando que $f(1) = 1 > 0$. Ahora, buscaremos puntos $a \in]0,1[$ y $b \in]1,\infty[$ de manera que $f(a) < 0$ y $f(b) < 0$. Para el intervalo $]0,1[$ comenzamos observando que

$$\lim_{x\to 0} f(x) = -\infty$$

   de manera clara. La definición de límite nos garantiza la existencia de un $k_1 \in]0,1[$ de manera que $f(k_1) < 0$. Ahora, tenemos que f es una función continua que experimenta un cambio de signo en el intervalo $[k_1, 1]$. El teorema de Bolzano implica que $\exists\, a \in]k_1, 1[\subseteq]0,1[$ de manera que $f(a) = 0$. Para el intervalo $]1,\infty[$, notemos que dado $x \in \mathbb{R}^+$ se tiene que

$$f(x) = x\left(\frac{2\log(x)}{x} - x + \frac{2}{x}\right),$$

   de donde el álgebra de límites y la escala de infinitos dictan que

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty.$$

   Por la definición de límite, existirá un $k_2 > 1$ de manera que $f(k_2) < 0$. Ahora, la función continua f experimenta un cambio de signo en $[1, k_2]$, de donde se sigue por el teorema de Bolzano que $\exists\, b \in]1, k_2[\subseteq]1,\infty[$ de manera que

$$f(b) = 0.$$

   Obviamente, las condiciones de que $a \in]0,1[$ y $b \in]1,\infty[$ hacen que $a \neq b$. Por tanto, hemos demostrado que existen dos soluciones a la ecuación $f(x) = 0$ en $\mathbb{R}^+$. Por lo anterior, deducimos que la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente dos soluciones en $\mathbb{R}^+$.

Ahora, para trabajar en $\mathbb{R}^-$, puede procederse de forma análoga a como hemos hecho en $\mathbb{R}^+$ y deducir que la ecuación $f(x) = 0$ tiene dos soluciones en $\mathbb{R}^-$. Sin embargo, un simple vistazo a la función nos dice que tal cosa no es necesaria, puesto que es evidente dado $x \in \mathbb{R}^-$, se tiene que

$$f(-x) = \log\big((-x)^2\big) - (-x)^2 + 2 = \log\big(x^2\big) - x^2 + 2 = f(x),$$

de donde automáticamente se sigue que la ecuación $f(x) = 0$ tiene en $\mathbb{R}^-$ **exactamente** el mismo número de soluciones que en $\mathbb{R}^+$, que hemos probado que es 2. Por tanto, la ecuación $f(x) = 0$ tiene exactamente 4 soluciones en $\mathbb{R}^*$, lo que concluye el ejercicio. $\square$

2. Calcula razonadamente los siguientes límites:

a) $\displaystyle\lim_{x\to\pi/2} \left(\frac{2-2\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}\right)^{\tan(x)}$, **(1.5 puntos)**

b) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x\displaystyle\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{\operatorname{sen}^2(x)}$ **(1.5 puntos)**

Solución. a) Notemos que el valor absoluto del exponente diverge, con lo cual podemos pensar en aplicar la regla del número e. Sin embargo, para ello **hay que demostrar** que la base tiene límite 1. Por tanto, en un estudio previo, comenzamos analizando

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2-2\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)^2}.$$

Lo anterior conduce a una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$". Para tratar de aplicar la (primera) regla de L'Hôpital, estudiamos el siguiente límite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2\cos(x)}{-2\cos(x)\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\operatorname{sen}(x)} = 1.$$

Ahora, la regla de L'Hôpital implica que

$$\exists \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2-2\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} = 1.$$

Todo esto demuestra que nos encontramos bajo las hipótesis de la regla del número e. En consecuencia, estudiamos el siguiente límite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x)\left(\frac{2-2\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} - 1\right) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{2-2\operatorname{sen}(x)-\cos^2(x)}{\cos^2(x)}$$

$$= \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \operatorname{sen}(x) \cdot \frac{2-2\operatorname{sen}(x)-\cos^2(x)}{\cos^3(x)}.$$

Notemos que la parte en $\operatorname{sen}(x)$ no presenta problemas al tener límite (que vale 1, de acuerdo con las propiedades de la función seno). Por otro lado, el cociente $\frac{2-2\operatorname{sen}(x)-\cos^2(x)}{\cos^3(x)}$ nos conduce hacia una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$". Para tratar de resolverla, pensando en aplicar la (primera) regla de L'Hôpital, estudiamos el siguiente límite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2\cos(x)+2\cos(x)\operatorname{sen}(x)}{-3\cos^2(x)\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{-2+2\operatorname{sen}(x)}{-3\cos(x)\operatorname{sen}(x)}.$$

De nuevo volvemos a encontrarnos con una indeterminación del tipo "$\frac{0}{0}$". Para tratar de aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital, estudiamos el siguiente límite

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2\cos(x)}{-3\big(-\operatorname{sen}^2(x)+\cos^2(x)\big)}.$$

El numerador tiende hacia cero, mientras que el denominador tiene límite distinto de 0 (igual a 3, por las propiedades de la función seno). En consecuencia, el límite anterior existe y vale 0. Ahora, dos aplicaciones de la regla de L'Hôpital implican que

$$\exists \lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{2-2\operatorname{sen}(x)-\cos^2(x)}{\cos^3(x)} = 0.$$

En consecuencia, el álgebra de límites implica que

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x)\left(\frac{2-2\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}-1\right) = 0,$$

y por la regla del número e,

$$\lim_{x\to\pi/2} \left(\frac{2-2\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)}\right)^{\tan(x)} = 1,$$

lo que termina el apartado a).

Para resolver el apartado b), haremos una sencilla observación

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{\operatorname{sen}^2(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x}{\operatorname{sen}(x)} \cdot \frac{\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Ahora el cociente de la izquierda tiene límite 1 (puede justificarse rápidamente invocando la regla de L'Hôpital). Por tanto, nos centraremos en analizar

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt}{\operatorname{sen}(x)}.$$

Esto nos motiva una aplicación de la regla de L'Hôpital, aunque **todavía** no sabemos que el numerador tenga límite cero. Para justificarlo, interpretemos el numerador. Si llamamos $g(x) := \int_0^x e^{-t^2}\,dt$, entonces la función del numerador es la composición $g \circ \operatorname{sen}$. Efectivamente

$$(g\circ \operatorname{sen}(x)) = g(\operatorname{sen}(x)) = \int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\,dt.$$

Ahora, como la función sen es derivable y g es derivable en virtud del Teorema Fundamental del Cálculo, la regla de la cadena nos dice que $g\circ\operatorname{sen}$ es derivable (en particular continua, lo cual ahora sí justifica que el numerador tenga límite cero). Además, la regla de la cadena nos dice que

$$(g\circ\operatorname{sen})'(x) = g'(\operatorname{sen}(x))\cos(x) = e^{-\operatorname{sen}^2(x)}\cos(x)$$

para todo $x \in \mathbb{R}$, donde la última igualdad es válida gracias al Teorema Fundamental del Cálculo. Como ya sí estamos en condiciones de tratar de aplicar la (primera) regla de L'Hôpital, estudiamos el siguiente límite

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^{-\operatorname{sen}^2(x)} \cos(x)}{\cos(x)} = \lim_{x \to 0} e^{-\operatorname{sen}^2(x)} = e^0 = 1,$$

donde se ha hecho uso de la relación entre la continuidad y el cálculo de límites. La (primera) regla de L'Hôpital ahora implica que

$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{\int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\, dt}{\operatorname{sen}(x)} = 1.$$

Por el álgebra de límites deducimos que

$$\exists \lim_{x \to 0} \frac{x \int_0^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2}\, dt}{\operatorname{sen}^2(x)} = 1,$$

lo que concluye el ejercicio. □

3. Se considera $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 e^{-x}$.

   a) Calcula una primitiva, F, de f. **(1 punto)**

   b) Calcula, si existen, los puntos donde la pendiente de la recta tangente de F es mínima y donde es máxima. **(1.5 puntos)**

Solución. a) Calculamos

$$\int x^2 e^{-x}\, dx.$$

A la vista de la forma de la función, dado que la parte en e^{-x} sabemos integrarla (y volverá a dar una función del mismo tipo) y el resto es un polinomio, es obvio que la técnica de integración por partes nos ayudará a resolverla. Para ello, consideramos

$$\begin{array}{ll} u = x^2 & u' = 2x, \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x}. \end{array}$$

Por la fórmula de integración por partes

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x}\, dx. \tag{1}$$

Ahora trataremos de resolver por separado $\int x e^{-x}\, dx$, para lo cual volvemos a pensar en la fórmula de integración por partes. Para ello, sugerimos

$$\begin{array}{ll} u = x & u' = 1, \\ v' = e^{-x} & v = -e^{-x}. \end{array}$$

Por la fórmula de integración por partes

$$\int x e^{-x}\, dx = -x e^{-x} + \int e^{-x}\, dx = -(x e^{-x} + e^{-x}).$$

Juntando la expresión anterior con lo de (1) tenemos que

$$\int x^2 e^{-x}\, dx = -e^{-x}(x^2+2x+2) + K,$$

luego una primitiva de f es $F(x) = -e^{-x}(x^2+2x+2)$ para $x \in \mathbb{R}$.

b) Por teoría, dado un punto $x \in \mathbb{R}$, la pendiente de la recta tangente a $F(x)$ se define como $F'(x) = f(x)$. Por tanto, exigir los puntos de pendiente máxima y mínima (si existen) no es más que buscar los puntos de máximo y mínimo absoluto de f, caso de que existan. Por tanto, pretendemos optimizar $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 e^{-x}$. Ahora, presentemos dos formas de resolver el ejercicio:

a) Forma rápida: A la vista de la forma de la función, $\exists \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, de donde obviamente f no está mayorada y, por tanto, no existe ningún punto de pendiente máxima. Además, $f(x) \geq 0$ por ser un producto de funciones positivas, y

$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 e^{-x} = 0 \Leftrightarrow x = 0.$$

Por tanto f alcanza su mínimo absoluto en $x = 0$.

b) Si lo anterior pasa desapercibido, podemos proceder como en cualquier problema de optimización. Buscando los posibles extremos absolutos, estudiamos la ecuación $f'(x) = 0$. Para ello, calculamos f'. Dado $x \in \mathbb{R}$,

$$f'(x) = 2xe^{-x} - x^2e^{-x} = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x}(2-x)x.$$

De lo anterior se deduce que $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ o $x = 2$. Además, los intervalos de monotonía salen de forma trivial:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow (2-x)x > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

Por tanto f es decreciente en los intervalos $]-\infty, 0[$ y $]2, \infty[$ y creciente en $]0, 2[$. Este hecho nos debe conducir a estudiar $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ (para determinar $f(]-\infty, 0[)$), y de ahí se concluye como antes que f no está mayorada. Ahora, por los intervalos de monotonía, f alcanza en 0 (respectivamente en 2) un mínimo relativo (respectivamente máximo relativo). Además, sabemos que el tipo de máximo que se alcanza en $x = 2$ no puede ser absoluto, pero el tipo de mínimo alcanzado en $x = 0$ pudiera ser absoluto. Para determinarlo, es obvio que $f(0) = 0$. Además, como f decrece en $]2, \infty[$, consideramos

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0.$$

Como f es estrictamente decreciente tenemos que $f(x) > 0$ para todo $x > 2$. Esto junto con la monotonía de la función nos permite concluir que f alcanza en $x = 0$ el mínimo absoluto, llegando a la misma conclusión que por la vía a). □

4. Estudia la posible convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{2^n\,(n+1)}{n!\,3^n}$. **(1 punto)**

b) $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2+1}$. **(1 punto)**

Solución. a) Por la forma de la serie, parece sensato tratar de aplicar el criterio del cociente. Para ello, estudiamos la siguiente sucesión

$$\left\{\frac{\frac{2^{n+1}(n+2)}{(n+1)!3^{n+1}}}{\frac{2^n(n+1)}{n!3^n}}\right\} = \left\{\frac{2^{n+1}(n+2)n!3^n}{2^n(n+1)(n+1)!3^{n+1}}\right\}.$$

Simplificamos con un poco de paciencia. Dado $n \in \mathbb{N}$:

- $\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$.
- $\frac{n!}{(n+1)!} = \frac{n!}{(n+1)n!} = \frac{1}{n+1}$.
- $\frac{n+2}{n+1} = \frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}$.
- $\frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$.

De todo esto, nuestra sucesión queda:

$$\left\{\frac{2}{3}\underbrace{\left(\frac{1+\frac{2}{n}}{1+\frac{1}{n}}\right)}_{A}\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{B}\right\}.$$

Ahora, A tiende a 1 claramente, mientras que B converge hacia 0. Entonces el álgebra de límites implica que

$$\left\{\frac{\frac{2^{n+1}(n+2)}{(n+1)!3^{n+1}}}{\frac{2^n(n+1)}{n!3^n}}\right\} \longrightarrow 0 < 1.$$

El criterio del cociente finalmente implica que la serie $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n\,(n+1)}{n!\,3^n}$ es convergente, lo que concluye el apartado a).

Para resolver el apartado b), pensamos en aplicar el criterio de la raíz. Para ello, estudiamos

$$\left\{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\right\}.$$

Nos encontramos ante una indeterminación del tipo "1^∞". En efecto, el comportamiento de la base es el siguiente:

$$\frac{n+1}{n+2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{2}{n}} \longrightarrow 1.$$

Por otro lado, el comportamiento del exponente es el que sigue

$$\frac{n^2+1}{n} = n + \frac{1}{n} \longrightarrow \infty.$$

Pensando en aplicar la regla del número e, estudiamos el siguiente límite:

$$\begin{aligned}\lim \frac{n^2+1}{n}\left(\frac{n+1}{n+2}-1\right) &= \lim\left(\frac{n^2+1}{n}\right)\left(\frac{-1}{n+2}\right) = \lim -\frac{n^2+1}{n^2+2n}\\ &= \lim -\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{2}{n}} = -1\end{aligned}$$

Por la regla del número e deducimos que

$$\left\{\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{\frac{n^2+1}{n}}\right\} \to \frac{1}{e} < 1,$$

de donde el criterio de la raíz implica que la serie $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n^2+1}$ converge, lo que finaliza el ejercicio. □

5. El polinomio de Taylor de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de orden 2 centrado en $a = 0$ es:

$$P_2(x) = 1 + x - 3x^2.$$

Calcula el polinomio de Taylor de igual orden y centro de la función $g(x) = \cos(f(x))$. **(1.5 puntos)**

Solución. Notemos que por definición del polinomio de Taylor, la forma de P_2 implica que

$$\left.\begin{array}{r} f(0) = 1, \\ f'(0) = 1 \\ \frac{f''(0)}{2} = -3 \end{array}\right\} \to \begin{array}{r} f(0) = 1, \\ f'(0) = 1, \\ f''(0) = -6. \end{array} \tag{2}$$

Ahora, teniendo en cuenta que $g(x) = \cos(f(x))$, calcularemos g' y g'' haciendo uso de la regla de la cadena y de la regla de derivación para un producto de funciones derivables. Así, dado $x \in \mathbb{R}$,

$$g'(x) = -\operatorname{sen}(f(x))f'(x),$$

mientras que

$$g''(x) = -\cos(f(x))f'(x)^2 - \operatorname{sen}(f(x))f''(x).$$

Como necesitamos los valores $g(0), g'(0), g''(0)$, usando las expresiones anteriores y usando los valores de $f(0), f'(0)$ y $f''(0)$ obtenidos en (2) tenemos que

$$\left.\begin{array}{r} g(0) = \cos(1), \\ g'(0) = -\operatorname{sen}(1), \\ g''(0) = 6\operatorname{sen}(1) - \cos(1). \end{array}\right\}$$

Si denotamos por $Q(x)$ al polinomio pedido, entonces por teoría se tiene que

$$Q(x) = \cos(1) - \operatorname{sen}(1)x + \frac{6\operatorname{sen}(1) - \cos(1)}{2}x^2,$$

terminando el ejercicio. □

Granada, 31 de enero de 2019.