Cálculo
1º Grado en Ingeniería Informática
Examen de Febrero
Curso 2017/2018

1. **(2.5 puntos)** Calcula:

   a) $\lim_{x\to+\infty} x^2 \big(\log(2x^2+1) - \log(2x^2-3)\big)$.

   b) $\lim_{x\to 0} \left(\dfrac{\int_0^x 3\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt}{x^3} \right)^{1/x^4}$.

   Solución:

   a) En primer lugar, como el límite de la función que aparece entre corchetes presenta una indeterminación de "$\infty - \infty$", utilizando las propiedades del logaritmo, escribimos la función protagonista de la siguiente forma:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \big(\log(2x^2+1) - \log(2x^2-3)\big) = \lim_{x\to+\infty} x^2 \log\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3}\right)^{x^2}\right).$$

   De esta forma, dentro de la función logaritmo, se presenta una indeterminación del tipo "1^∞". Aplicamos la regla del número e, esto es, tenemos la siguiente equivalencia:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3}\right)^{x^2} = e^L \iff \lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3} - 1\right) = L.$$

   Desarrollamos y resolvemos el límite

$$\lim_{x\to+\infty} x^2\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3} - 1\right) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2(2x^2+1-2x^2+3)}{2x^2-3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{4x^2}{2x^2-3} = 2.$$

   De lo anterior se deduce que:

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3}\right)^{x^2} = e^2.$$

   Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 \big(\log(2x^2+1) - \log(2x^2-3)\big) = \lim_{x\to+\infty} \log\left(\left(\frac{2x^2+1}{2x^2-3}\right)^{x^2}\right) = \log(e^2) = 2\,.$$

   b) 1) Calculamos en primer lugar el límite de la base.
   Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que la función ($f(x) = \int_0^x 3\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt$) es continua y derivable ya que el integrando, $3\,\mathrm{sen}(t^2)$, es una función

continua. Además, gracias también al Teorema Fundamental del Cálculo, podemos calcular la derivada de f:

$$f'(x) = 3\,\mathrm{sen}(x^2).$$

Si calculamos el límite en cero del numerador de la base de la función a estudiar:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \int_0^0 3\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt = 0$$

Con lo que en la base ya se nos presenta una indeterminación del tipo "$0/0$".
Por tanto aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x 3\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt}{x^3} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\,\mathrm{sen}(x^2)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x^2)}{x^2} = 1\ ,$$

donde hemos utilizado que, usando de nuevo la regla de L'Hôpital, $\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{sen}(x^2)}{x^2} = 1$.

2) Por tanto, en el límite que nos piden, tenemos una indeterminación del tipo "1^∞". Aplicamos la regla del número e. Esto es, tenemos la siguiente equivalencia:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{\int_0^x 3\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt}{x^3} \right)^{1/x^4} = e^L \iff \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \left(\frac{\int_0^x 3\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt}{x^3} - 1 \right) = L.$$

Para resolver el límite aplicamos la regla de L'Hôpital (varias veces):

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^4} \left(\frac{\int_0^x 3\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt}{x^3} - 1 \right) &= \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x 3\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt - x^3}{x^7} \\
&\overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{3\,\mathrm{sen}(x^2) - 3x^2}{7x^6} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{6x\cos(x^2) - 6x}{42x^5} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x^2) - 1}{7x^4} \overset{\text{L'H}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-2x\,\mathrm{sen}(x^2)}{28x^3} \\
&= \lim_{x\to 0} \frac{-\mathrm{sen}(x^2)}{14x^2} = -\frac{1}{14}.
\end{aligned}$$

Concluimos entonces que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x 3\,\mathrm{sen}(t^2)\,dt}{x^3} = e^{-\frac{1}{14}}.$$

2. **(1.25 puntos)** Determina, y justifica, el número de soluciones de la siguiente ecuación en $[-1, 1]$:

$$\arccos(x) = 3/2 - x.$$

Solución: Consideremos la función $f\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \arccos(x) - 3/2 + x.$$

Se trata de una función continua en $[-1,1]$, y derivable en el abierto $]-1,1[$. Para determinar el número de soluciones de la ecuación planteada, vamos a calcular el número de ceros de la función f. Para ello, calculamos su derivada:

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + 1.$$

Calculamos los puntos críticos de f:

$$f'(x) = 0 \iff \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 \iff \sqrt{1-x^2} = 1 \iff x^2 = 0 \iff x = 0.$$

Vamos ahora a determinar si este punto crítico es un extremo relativo, determinando los intervalos de monotonía de la función. Aunque al verificarse lo siguiente:

$$0 < |x| < 1 \iff 0 < x^2 < 1 \iff 0 < 1 - x^2 < 1 \iff \sqrt{1-x^2} < 1$$
$$\iff 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \iff f'(x) < 0.$$

la función f es estrictamente decreciente en todo el intervalo. También podemos ver que la función es estrictamente decreciente evaluando la derivada en un par de puntos; por ejemplo $f(1/2) < 0$ y $f(-1/2) < 0$.

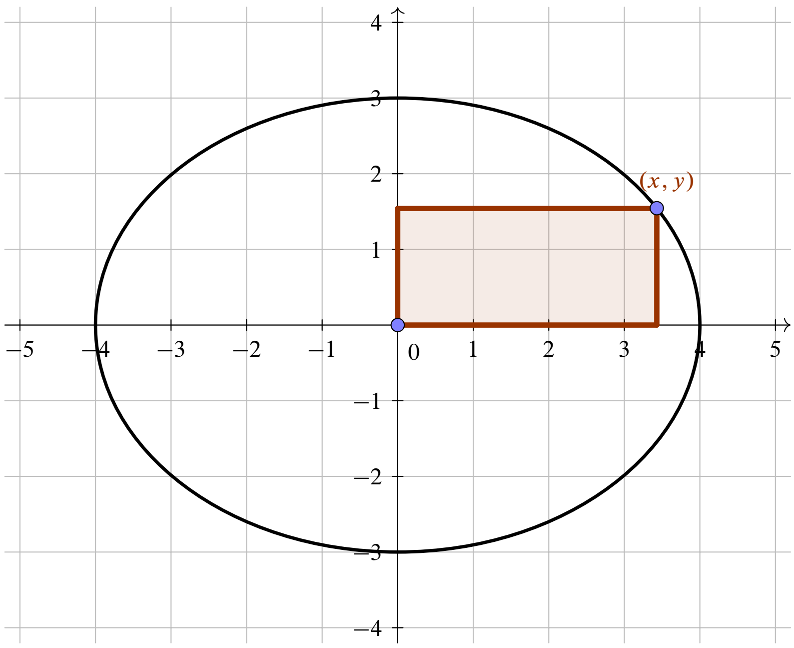
Como la función f cambia de signo en los extremos:

$$f(-1) = \pi - \tfrac{5}{2} > 0 \ \text{ y } \ f(1) = -\tfrac{3}{2} < 0.$$

el teorema de Bolzano nos dice que tiene un cero entre -1 y 1. Dicho cero es único ya que es estrictamente decreciente, y, por tanto, inyectiva.

3. **(1.25 puntos)** De todos los rectángulos que tienen un vértice en $(0,0)$ y el opuesto en un punto de la elipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, encuentra el que tiene perímetro máximo.

   Solución: Apoyándonos en la simetría de la elipse respecto a los ejes de coordenadas, podemos suponer que el vértice (x, y), opuesto al origen y que se encuentra en la elipse dada, se encuentra en el primer cuadrante. Esto es, $x \in [0,4]$ e $y \in [0,3]$. Los rectángulos construidos siguiendo estas instrucciones, tienen de perímetro: $2(\text{base}+\text{altura}) = 2(x + y)$.



Además, de la ecuación de la elipse, $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{9} = 1$, obtenemos la ligadura entre ambas variables; de hecho:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1 \iff y^2 = \frac{9}{16}\left(16 - x^2\right) \iff y = \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}.$$

Por tanto, la función que hay que maximizar es $f(x) = 2\left(x + \frac{3}{4}\sqrt{16 - x^2}\right)$, para cualquier $x \in [0, 4]$. Se trata de una función continua en el intervalo compacto $[0, 4]$, y derivable en el intervalo abierto $]0, 4[$. Calculemos los puntos críticos en dicho intervalo abierto, $]0, 4[$.

$$f'(x) = 2\left(1 - \frac{3x}{4\sqrt{16 - x^2}}\right) = \frac{4\sqrt{16 - x^2} - 3x}{2\sqrt{16 - x^2}}.$$

Por tanto,

$$f'(x) = 0 \iff 4\sqrt{16 - x^2} = 3x \iff x^2 = \frac{16^2}{25} \iff x = \frac{16}{5} \in]0, 4[.$$

Para determinar en qué punto alcanza f su máximo absoluto en el intervalo compacto $[0, 4]$, sólo nos queda evaluar la función en los extremos del dominio, así como en el punto crítico obtenido:

$$f(0) = 6,\ f(4) = 8,\ f(\tfrac{16}{5}) = 10.$$

Por tanto, el rectángulo de máxima área es el de vértice $\left(\frac{16}{5}, \frac{9}{5}\right)$.

4. **(1.25 puntos)** Calcula $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)}\, dx$.

Solución: Aplicamos el método de integración por partes para calcular una primitiva de $\frac{x}{\cos^2(x)}$:

$$\begin{aligned}\int \frac{x}{\cos^2(x)}\, dx &= \begin{bmatrix} u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = \frac{1}{\cos^2(x)}\, dx \Rightarrow v = \tan(x)\end{bmatrix} \\ &= x\tan(x) - \int \tan(x)\, dx = x\ \tan(x) - \int \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}\, dx \\ &= x\tan(x) + \log\left(\cos(x)\right) + C.\end{aligned}$$

Para resolver la integral, sólo nos queda aplicar la regla de Barrow:

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2(x)}\, dx = \left[x\tan(x) + \log\left(\cos(x)\right)\right[_0^{\pi/4} = \frac{\pi}{4} + \log\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\log(2).$$

5. **(1.25 puntos)** Se considera la sucesión definida como:

$$x_1 = 1/2, \quad x_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - x_n},\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Estudia la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$. Calcula su límite, si existe.

Solución:

a) Si la sucesión fuera convergente a x entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x;$$

por tanto,

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} 1 - \sqrt{1 - x_n} = 1 - \sqrt{1 - x}.$$

Así que si la sucesión tiene límite, éste tiene que verificar la ecuación $x = 1 - \sqrt{1-x}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = 1 - \sqrt{1-x} \Rightarrow 1 - x = \sqrt{1-x} \Rightarrow (1-x)^2 = \left(\sqrt{1-x}\right)^2$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 = 1 - x \Rightarrow x^2 - x = 0 \Rightarrow x = 0, 1.$$

Resumiendo, si existe el límite, este debe ser 0 ó 1. Veremos, a continuación, por cuál de los dos nos decantamos.

b) Empezamos estudiando la monotonía de la sucesión. Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \sqrt{\frac{1}{2}} \leq \frac{1}{2} = x_1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona decreciente, comprobamos por inducción que $x_n \geq x_{n+1}$, $\forall n \in \mathbb{N}$:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 \geq x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \geq x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \geq x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned}
x_n \geq x_{n+1} &\Rightarrow -x_n \leq -x_{n+1} && \text{(multiplicamos por } -1)\\
&\Rightarrow 1 - x_n \leq 1 - x_{n+1} && \text{(sumamos 1 a ambos miembros)}\\
&\Rightarrow \sqrt{1-x_n} \leq \sqrt{1-x_{n+1}} && \text{(tomamos raíz cuadrada)}\\
&\Rightarrow -\sqrt{1-x_n} \geq -\sqrt{1-x_{n+1}}\\
&\Rightarrow 1-\sqrt{1-x_n} \geq 1-\sqrt{1-x_{n+1}}\\
&\Rightarrow x_{n+1} \geq x_{n+2}\ .
\end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión es monótona decreciente.

c) Al ser decreciente, ya sabemos que la sucesión está acotada superiormente por $x_1 = 1/2$. Veamos ahora que la sucesión está minorada por 0. Lo vamos a hacer por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 1/2 \geq 0$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \geq 0$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \geq 0$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \geq 0 \Rightarrow -x_n \leq 0 \Rightarrow 1 - x_n \leq 1 \leq 1$$
$$\Rightarrow \sqrt{1-x_n} \leq 1 \Rightarrow 1 - \sqrt{1-x_n} \geq 0 \Rightarrow x_{n+1} \geq 0.$$

Concluimos entonces afirmando que, en efecto, está minorada por 0.

En resumen, hemos demostrado que la sucesión es monótona y acotada y, por tanto, convergente. De los posibles límites que habíamos calculado ($x = 1$ ó $x = 0$), nos quedamos con el que tiene sentido, esto es, el límite de la sucesión es 0.

6. **(2.5 puntos)** Estudia la convergencia de las series:

a) $\displaystyle\sum \left(\frac{5n^2+1}{5n^2+n}\right)^{-n^2}.$

b) $\displaystyle\sum \frac{n!}{2\cdot 5\cdot 8\cdots(3n+2)}.$

Solución:

a) Aplicamos el criterio de la raíz.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n^2+1}{5n^2+n}\right)^{-n^2}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2+1}{5n^2+n}\right)^{\frac{-n^2}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{5n^2+1}{5n^2+n}\right)^{-n}.$$

Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo "1^∞"; por tanto, aplicamos la regla del número e y estudiamos

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} (-n)\left(\frac{5n^2+1}{5n^2+n} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} (-n)\left(\frac{5n^2+1-5n^2-n}{5n^2+n}\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n^2-n}{5n^2+n} = \frac{1}{5},\end{aligned}$$

con lo que

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{5n^2+1}{5n^2+n}\right)^{-n^2}} = e^{1/5} > 1,$$

de lo que se deduce que la serie dada es divergente.

b) Aplicamos el criterio del cociente. Así, si llamamos $a_n = \frac{n!}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n+2)}$ tenemos que estudiar el límite

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{2\cdot5\cdot8\cdots(3n+2)\cdot(3n+5)} \cdot \frac{2\cdot5\cdot8\cdots(3n+2)}{(n)!} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{3n+5} = \frac{1}{3} < 1,\end{aligned}$$

de lo que se deduce que la serie es convergente.

Granada, a 8 de febrero de 2018