

WUOLAH



juanka1995

www.wuolah.com/student/juanka1995



4118

soluciones_primer_parcial_1E_I_1516.pdf

Exámenes 15-16



1º Cálculo



Grado en Ingeniería Informática



Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
UGR - Universidad de Granada

Como aún estás en la portada, es momento de redes sociales. Cotilléanos y luego a estudiar.



Wuolah



Wuolah



Wuolah_apuntes

WUOLAH

Cálculo
1ºE Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial (Tipo I)
Curso 2015/2016

1. (3 puntos) Calcula:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 2\cos(x)}{x^2} \right)^{\frac{1}{x^2}},$

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)^{e^{-x}}.$

Solución:

a) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Para resolver dicha indeterminación aplicamos la regla de L’Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

donde, en este último límite, hemos aplicado un resultado ya presentado en clase. Por lo tanto, el límite pedido presenta una indeterminación del tipo “1[∞]”.

Aplicamos ahora la regla del número e . Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 2\cos(x)}{x^2} \right)^{1/x^2} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[\frac{2 - 2\cos(x)}{x^2} - 1 \right] = L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \left[\frac{2 - 2\cos(x)}{x^2} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2\cos(x) - x^2}{x^4}$$

aplicamos la regla de L’Hôpital, ya que que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Nos queda entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin(x) - 2x}{4x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x) - x}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{6x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin(x)}{12x} = -\frac{1}{12}$$

Obsérvese que hemos aplicado la regla de L’Hôpital tres veces consecutivas.

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 - 2\cos(x)}{x^2} \right)^{\frac{1}{x^2}} = e^{-1/12}.$$

- b) En este límite se presenta una indeterminación del tipo “ ∞^0 ”. Aplicamos la fórmula del número e para resolverlo; esto es:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)^{e^{-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \log(\sqrt{x^2 + 1})}.$$

Escribimos el límite del exponente como el límite de un cociente de la forma siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \log(\sqrt{x^2 + 1}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(\sqrt{x^2 + 1})}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\log(x^2 + 1)}{e^x}$$

Este último límite presenta una indeterminación del tipo “ $\frac{\infty}{\infty}$ ”, por lo que aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces consecutivas:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \frac{\frac{2x}{x^2 + 1}}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x}{2(x^2 + 1)e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{(x^2 + 1)e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2xe^x + (x^2 + 1)e^x} = 0$$

Por tanto, el límite original es:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\sqrt{x^2 + 1} \right)^{e^{-x}} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \log(\sqrt{x^2 + 1})} = e^0 = 1.$$

2. (2 puntos) Demuestra que la desigualdad siguiente es cierta en $]0, 1[$:

$$\arcsen(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Solución: Para probar la desigualdad planteada, establecemos esta otra que es equivalente a ella; es decir,

$$\arcsen(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}, \forall x \in]0, 1[\iff \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsen(x) > 0, \forall x \in]0, 1[.$$

Consideramos entonces la función $f:]0, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsen(x)$.

Tenemos que probar que $f(x) > 0, \forall x \in]0, 1[$.

Se trata de una función derivable en todo el dominio dado. Vamos a estudiar sus extremos, calculando los puntos críticos.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\sqrt{1-x^2} - \frac{-2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}}{(\sqrt{1-x^2})^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\sqrt{1-x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{(1-x^2) + x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \frac{1 - (1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} = \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}(1-x^2)} \end{aligned}$$

Observamos que la derivada nunca se anula en $]0, 1[$, ya que el único punto que anula a la derivada es $x = 0$ que queda descartado al no ser un punto interior al dominio. Por tanto, sabemos, como consecuencia del teorema del valor medio, que la función es estrictamente monótona. En concreto, como $f'(x) > 0$, $\forall x \in]0, 1[$, la función f es estrictamente creciente. Sólo nos queda estudiar el comportamiento de f en el cero:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - \arcsen(x) = 0.$$

Al ser f estrictamente creciente y en el cero tender a cero, concluimos que $f(x) > 0$, $\forall x \in]0, 1[$, como se quería demostrar.

3. (2 puntos) Determina el número de soluciones de la ecuación:

$$e^{|x|} = x + 7.$$

Solución: Para determinar el número de soluciones de la ecuación dada, vamos a buscar el número de ceros de la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = e^{|x|} - x - 7 = \begin{cases} e^x - x - 7 & , \text{ si } x > 0 \\ -6 & , \text{ si } x = 0 \\ e^{-x} - x - 7 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Esta función es continua en todo \mathbb{R} , pero, es derivable en \mathbb{R}^* . Y al escribirla a trozos, nos va a ser más fácil calcular la derivada de f .

En primer lugar, vamos a ver el comportamiento de f en los extremos del dominio:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} - x - 7 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - x - 7 = +\infty \end{aligned}$$

Por ahora, no podemos aplicar el teorema de Bolzano por lo que aún no tenemos garantizado que haya algún cero.

Comenzamos el estudio de la derivada:

$$f'(x) = \begin{cases} e^x - 1 & , \text{ si } x > 0 \\ -e^{-x} - 1 & , \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

Para $x < 0$, la derivada es siempre negativa, por lo que en el intervalo $]-\infty, 0[$ podemos ya asegurar que la función es estrictamente decreciente. Sin embargo, para $x > 0$, tenemos que

$$f'(x) = 0 \iff e^x - 1 = 0 \iff x = 0,$$

con lo que obtenemos un punto crítico que descartamos al no estar en $]0, +\infty[$. Por tanto, la función es también estrictamente monótona en los positivos y como $f'(x) > 0$ en ese tramo, deducimos que f es estrictamente creciente en $]0, +\infty[$. Concluimos, entonces, que, aunque en el punto cero no hay derivabilidad, como la función pasa de ser decreciente a creciente, f alcanza un mínimo relativo en $x = 0$, que, además, es el punto de mínimo absoluto. Como además, $f(0) = -6$, la función tiene dos ceros: uno en los negativos y otro en los positivos (hemos aplicado el teorema de Bolzano en \mathbb{R}^- y en \mathbb{R}^+).

4. (1 punto) Determina el rectángulo paralelo a los ejes inscrito en el triángulo rectángulo de vértices $(0,0)$, $(2,2)$ y $(2,0)$ y de área máxima.

Solución: Llamemos (x,y) al vértice del rectángulo inscrito en el triángulo dado que se apoya en la hipotenusa. Observemos que dicha hipotenusa es el segmento de la recta $y = x$ que empieza en $(0,0)$ y acaba en $(2,2)$. Sabemos entonces que $y = x$ y que las dimensiones del rectángulo inscrito y cuya área hay que maximizar son, altura = $y = x$, y base = $2 - x$. Por tanto, la función a maximizar es: $f: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = (2 - x)x = 2x - x^2.$$

Esta función (un polinomio de grado 2) es derivable. Buscamos posibles puntos de extremos en $]0, 2[$. Para ello, calculamos puntos críticos:

$$f'(x) = 2 - 2x = 0 \iff x = 1$$

Para calcular el máximo absoluto, al ser el dominio un intervalo compacto, sólo nos queda evaluar la función:

$$f(0) = 0 = f(2) < f(1) = 1$$

Por tanto el rectángulo inscrito que tiene área máxima 1 es el definido por los vértices $(1, 1)$, $(2, 1)$, $(2, 0)$ y $(1, 0)$.

5. (2 puntos) El polinomio de Taylor de orden 3 centrado en el origen de una función dada f es:

$$2 - 3x + x^2 - \frac{x^3}{3}$$

Calcula el polinomio de Taylor del mismo orden y centro de la función $g(x) = (f(x) + 1)^2$.

Solución: El enunciado del problema nos permite asegurar que:

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 = 2 - 3x + x^2 - \frac{x^3}{3}$$

Igualando coeficientes deducimos que:

$$f(0) = 2, f'(0) = -3, f''(0) = 2, f'''(0) = -2$$

Para calcular el polinomio de Taylor de la función g en $a = 0$ de orden 3 tenemos que calcular las derivadas sucesivas en el cero hasta la de orden 3. Es decir,

$$g(x) = (f(x) + 1)^2 \Rightarrow g(0) = (2 + 1)^2 = 9$$

$$g'(x) = 2(f(x) + 1)f'(x) \Rightarrow g'(0) = -18$$

$$g''(x) = 2f'(x)^2 + 2(f(x) + 1)f''(x) \Rightarrow g''(0) = 18 + 12 = 30$$

$$g'''(x) = 4f'(x)f''(x) + 2f'(x)f''(x) + 2(f(x) + 1)f'''(x) \Rightarrow g'''(0) = -24 - 12 - 12 = -48$$

Entonces, el polinomio de Taylor pedido es:

$$P_3(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 = 9 - 18x + 15x^2 - 8x^3$$

Granada, 30 de noviembre de 2015