

Grado en Ingeniería Informática

Relaciones de Estructuras de Datos.

Eficiencia

J. Fdez-Valdivia

*Departamento de Ciencias de la Computación e I.A. ETS Ingeniería Informática
Universidad de Granada. 18071 Granada. Spain.
Email: jfv@decsai.ugr.es*

Resumen

En este documento se presenta relación de problemas de análisis de eficiencia que se propone para la asignatura de estructura de datos de segundo curso del Grado en *Ingeniería en Informática*.

1. Análisis de la eficiencia

Problema 1.1 Probar que las siguientes sentencias son verdad:

- 17 es $O(1)$
- $\frac{n(n-1)}{2}$ es $O(n^2)$ y $\Omega(n^2)$ (es decir, $\Theta(n^2)$).
- $\max(n^3, 10n^2)$ es $O(n^3)$
- $\log_2 n$ es $\Theta(\log_3 n)$

Problema 1.2 Encontrar el entero k más pequeño tal que $f(n)$ es $O(n^k)$ en los siguientes casos:

1. $f(n) = 13n^2 + 4n - 73$
2. $f(n) = 1/(n+1)$
3. $f(n) = 1/(n-1)$
4. $f(n) = (n-1)^3$
5. $f(n) = (n^3 + 2n - 1)/(n+1)$
6. $f(n) = \sqrt{n^2 - 1}$

Problema 1.3 Ordenar de menor a mayor los siguientes órdenes de eficiencia:

n , \sqrt{n} , $n^3 + 1$, n^2 , $n \log_2(n^2)$, $n \log_2 \log_2(n^2)$, $3^{\log_2(n)}$, 3^n , 2^n , $2^n + 3^{n-1}$, 20000, $n + 100$, $n2^n$

Problema 1.4 Supongamos que $T_1(n) \in O(f(n))$ y $T_2(n) \in O(f(n))$. Razonar la verdad o falsedad de las siguientes afirmaciones:

- a.- $T_1(n) + T_2(n) \in O(f(n))$
- b.- $T_1(n) \in O(f^2(n))$
- c.- $T_1(n)/T_2(n) \in O(1)$

Problema 1.5 Considerar las siguientes funciones de n :

$$f_1(n) = n^2$$

$$f_2(n) = n^2 + 1000n$$

$$f_3(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \text{ es impar} \\ n^3 & \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

$$f_4(n) = \begin{cases} n & \text{si } n \leq 100 \\ n^3 & \text{si } n > 100 \end{cases}$$

Indicar para cada par distinto i y j si $f_i(n)$ es $O(f_j(n))$ y si $f_i(n)$ es $\Omega(f_j(n))$.

Problema 1.6 Demostrar que si $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(h(n))$ entonces $f(n) \in O(h(n))$

Problema 1.7 Demostrar que $O(f(n)) \in O(g(n))$ sii $f(n) \in O(g(n))$ y $g(n) \in O(f(n))$.

Problema 1.8 Demostrar la siguiente jerarquía de órdenes de complejidad:

$$O(1) \subset O(\log(n)) \subset O(n) \subset O(n^2) \subset O(2^n) \subset O(n!)$$

Problema 1.9 Obtener usando la notación O -mayúscula la eficiencia del siguiente trozo de código:

```
for (i=0; i<n; i++)
  for (j=0; j<n; j++) {
    C[i][j] = 0;
    for (k=0; k<n; k++)
      C[i][j] += A[i][k] * B[k][j];
  }
```

Problema 1.10 Obtener usando la notación O -mayúscula la eficiencia de la siguiente función:

```
void ejemplo(int n)
{
  int i, j, k;

  for (i = 1; i < n; i++)
    for (j = i+1; j <= n; j++)
      for (k = 1; k <= j; k++)
        Global += k*i;
}
```

Problema 1.11 Obtener usando la notación O -mayúscula la eficiencia del siguiente trozo de código:

```
for (i=0; i<n; i++)
  if (i%2) {
    for (j=i; j<n; j++)
      x* = i;
    for (j=1; j<i; j++)
      y* = j;
  }
```

Problema 1.12 Suponer que el parámetro n en la siguiente función es una potencia positiva de 2, es decir, $n = 2, 4, 8, 16, \dots$. Dar la fórmula que expresa el valor de la variable *cont* en

términos del valor de n cuando la función termina.

```
void ejemplo(int n)
{
    int x, cont;

    cont = 0;
    x = 2;
    while (x < n)
    {
        x = 2*x;
        cont++;
    };
    printf(" %d\n", cont);
}
```

Problema 1.13 Estimar el peor caso de tiempo de ejecución para la siguiente función. Emplear la notación O-mayúscula

```
int recursiva(int n)
{
    if (n <= 1)
        return 1;
    else
        return (recursiva(n - 1) + recursiva(n - 1));
}
```

Problema 1.14 Dada la siguiente función:

```
int E(int n)
{
    if (n == 1)
        return n;
    else
        return (E(n/2) + 1);
}
```

1. ¿Cuál es el valor que devuelve la función?
2. Obtener una expresión para el peor caso de tiempo de ejecución de la función.

Problema 1.15 Resolver la recurrencia siguiente en función de k y s :

$$T(n) = k \times T(n-1) + s^2 \quad n > 1 \quad k, s > 1 \quad T(1) = 1$$

Problema 1.16 Considerando que el máximo de un vector es el máximo de dos valores:

1. El máximo de la primera mitad.
2. El máximo de la segunda mitad.

Implementar una función recursiva para calcular el máximo de un vector y estudiar su eficiencia.

Problema 1.17 Resolver la recurrencia:

$$T(n) = \begin{cases} T(\frac{n}{2}) + n & n \geq 2 \\ 1 & n = 1 \end{cases}$$

Problema 1.18 Implementar una función recursiva que resuelva el problema de las *Torres de Hanoi* y estudiar la eficiencia en función de la altura de la torre.

Problema 1.19 Suponiendo que la función *rectangle* tiene un tiempo de ejecución constante, calcular la eficiencia de la siguiente función fractal en función de "n", es decir, del número de niveles de profundidad.

```
/**
 * @brief Dibuja un fractal usando la función rectangle
 * @param n Número de niveles del fractal
 * @param cx Coordenada x del centro del rectángulo
 * @param cy Corrdenada y del centro del rectángulo
 * @param t Longitud del lado del cuadrado
 */
void fractal (int n, int cx, int cy, int t)
{
    if (n>0) {
        rectangle(cx-t/2,cy-t/2,cx+t/2,cy+t/2);
        fractal (n-1,cx-t/2,cy-t/2,t/4);
        fractal (n-1,cx+t/2,cy+t/2,t/4);
        fractal (n-1,cx-t/2,cy+t/2,t/4);
        fractal (n-1,cx+t/2,cy-t/2,t/4);
    }
}
```