1. Los números reales

1.1 Definicion

El conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$, verifica la siguientes propiedades.

Suma

1) Propiedad asociativa:

$$(a+b)+c = a+(b+c), \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}.$$

2) Existe elemento neutro, 0:

$$a+0 = 0+a = a, \quad \forall a \in \mathbb{R}.$$

3) Todo elemento tiene opuesto: dado $a \in \mathbb{R}$, existe un único $b \in \mathbb{R}$ tal que $a+b=0$. Usaremos la notación usual $b = -a$.

4) Propiedad conmutativa:

$$a+b = b+a, \quad \forall a,b \in \mathbb{R}.$$

Producto

5) Propiedad asociativa:

$$(ab)c = a(bc), \quad \forall a,b,c \in \mathbb{R}.$$

6) Existe elemento neutro, 1: $a1 = 1a = a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

7) Todo elemento no nulo tiene inverso: dado $a \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, existe un único $b \in \mathbb{R}$ tal que $ab = ba = 1$. Usaremos la notación habitual $b = \frac{1}{b} = b^{-1}$.

8) Propiedad conmutativa:

$$ab = ba, \quad \forall a, b \in \mathbb{R}.$$

9) Propiedad distributiva:

$$a(b + c) = ab + ac, \quad \forall a, b, c \in \mathbb{R}.$$

Orden

10) Reflexiva: $a \leq a$, $\forall a \in \mathbb{R}$.

11) Antisimétrica

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq a \end{array}\right\} \Rightarrow a = b.$$

12) Transitiva

$$\left.\begin{array}{l} a \leq b \\ b \leq c \end{array}\right\} \Rightarrow a \leq c.$$

13) Relación con la suma:

$$a \leq b \Rightarrow a + c \leq b + c, \quad \forall c.$$

14) Relación con el producto

$$a \leq b \Rightarrow ac \leq bc, \quad \forall c \geq 0.$$

15) Todos los elementos son comparables: dados $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple que $a \leq b$ o que $b \leq a$.

16) Dados $A, B \subset \mathbb{R}$ verificando que $a \leq b$ para cualquier $a \in A$, $b \in B$, existe $c \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq c \leq b$, $\forall a \in A$, $\forall b \in B$.

■ **Ejemplo 1.1** Podemos usar estas propiedades para describir conjuntos sencillos. Por ejemplo, ¿qué números verifican la desigualdad $x^3 - 2x^2 - x + 2 \geq 0$?

Usando que las raíces del polinomio son ± 1 y 2,

$$x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x + 1)(x - 1)(x - 2)$$

tenemos cuatro intervalos en los que podemos dividir para discutir el signo de dicho polinomio.

- Si $x \leq -1$, $\underbrace{(x+1)}_{-}\underbrace{(x-1)}_{-}\underbrace{(x-2)}_{-} \leq 0$
- Si $-1 \leq x \leq 1$, $\underbrace{(x+1)}_{+}\underbrace{(x-1)}_{-}\underbrace{(x-2)}_{-} \geq 0$
- Si $1 \leq x \leq 2$, $\underbrace{(x+1)}_{+}\underbrace{(x-1)}_{+}\underbrace{(x-2)}_{-} \leq 0$
- Si $2 \leq x$, $\underbrace{(x+1)}_{+}\underbrace{(x-1)}_{+}\underbrace{(x-2)}_{+} \geq 0$

1.1.1 Subconjuntos destacados

Números naturales, enteros y racionales

- El conjunto de los *números naturales,* $\mathbb{N} = \{1, 2, \dots\}$, es el menor conjunto que verifica las dos siguientes propiedades:

  1) $1 \in \mathbb{N}$, y

  2) si $n \in \mathbb{N}$, entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$.

  Es sólo una convención el incluir o no el cero entre los elementos del conjunto de los números naturales. Por comodidad, nosotros no lo vamos a incluir.

- El conjunto de los números enteros $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
- Los números racionales $\mathbb{Q} = \left\{\frac{p}{q} \,:\, p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\right\}$
- Los números que no son racionales, los irracionales, $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Intervalos

Los intervalos van a ser los conjuntos más usados a lo largo de estas notas. Es más sencillo enumerar todos los tipos posibles de intervalos que definir qué es un intervalo. De todas formas, incluimos la definición posteriormente.

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x \leq b\} \qquad [a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x \leq b\} \qquad (a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a \leq x < b\} \qquad (-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, a < x < b\} \qquad (-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \,:\, x < b\}$$

Definición 1.1.1 Un conjunto $A \subset \mathbb{R}$ es un intervalo si dados x e $y \in A$, se cumple que $(x, y) \subset A$.

R Utilizaremos la notación (a, b) o $]a, b[$ indistintamente para denotar un intervalo abierto.

1.2 Desigualdades

1.2.1

Definición 1.2.1 Un conjunto A de números reales está acotado superiormente si existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $a \leq M$, para cualquier $a \in A$. En ese caso, diremos que M es una cota superior de A.

R Si M es una cota superior de A, cualquier número mayor o igual también es una cota superior. Por tanto, si un conjunto está acotado superiormente, el conjunto de las cotas es infinito.

Definición 1.2.2 Sea $A \subset \mathbb{R}$. Diremos que $a_0 \in A$ es el máximo de A si $a \leq a_0$, para todo $a \in A$.

R El máximo, si es que existe, es una cota superior, la única que pertenece al conjunto y la más pequeña de todas.

■ **Ejemplo 1.2**

1) El conjunto de los números naturales está acotado inferiormente; de hecho, tiene mínimo: $1 \leq n$ para cualquier número natural n. En cambio, no está acotado superiormente y, en particular, no tiene máximo.

2) Ni el conjunto de los números enteros, ni el conjunto de los números racionales están acotados.

3) Los intervalos tienen máximo si, y sólo si, el extremo superior pertenece al intervalo.

$$\nexists \max(0, 1), \quad \max(1, 3] = 3.$$

Sí que están acotados los dos intervalos anteriores, tanto superior como inferiormente.

1.2.2 Valor absoluto

El valor absoluto de un número real x es su distancia al cero. Algebraicamente es una función a trozos.

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0, \\ -x, & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

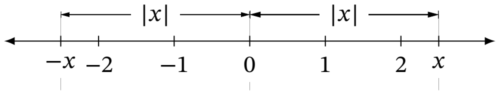


Figura 1.1: Interpretación geométrica del valor absoluto

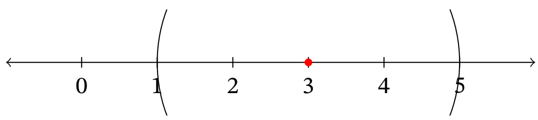
Sus propiedades se deducen de forma sencilla de la definición, como que $|x| = |-x| \geq 0$.

Proposición 1.2.1 — Propiedades del valor absoluto. Sean $x, y \in \mathbb{R}$.

1) $|x| \geq 0$,
2) $|x| = 0 \iff x = 0$,
3) $|x| \leq y \iff -y \leq x \leq y$,
4) $|x + y| \leq |x| + |y|$,
5) $||x| - |y|| \leq |x - y|$
6) $|xy| = |x| \cdot |y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$.

■ **Ejemplo 1.3** La ecuación $|x - 3| = 2$ podemos resolverla utilizando varios enfoques.

1) Geométricamente, la ecuación $|x - 3| = 2$ representa a los puntos x cuya distancia a 3 vale 2. Las posibles soluciones se obtienen trazando la circunferencia de centro 3 y radio 2



con lo que las soluciones de la ecuación son $x = 1, 5$.

2) Usando la definición,

$$|x - 3| = 2 \iff x - 3 = 2 \quad \text{o} \quad x - 3 = -2.$$

Resolviendo ambas ecuaciones obtenemos las mismas soluciones, $x = 1, 5$.

3) Usando que el cuadrado de un número siempre es positivo, se cumple que $|a|^2 = a^2$. Por tanto,

$$|x - 3| = 2 \iff |x - 3|^2 = 2^2 \iff (x-3)^2 = 4 \iff x^2 - 6x + 5 = 0 \iff x = 1, 5.$$

Utiliza alguno de estos métodos para resolver la ecuación $|x - 1| = |x + 3|$.

■ **Ejemplo 1.4** En general, una ecuación con valores absolutos, se puede escribir como varias ecuaciones sin valores absolutos. Por ejemplo,

$$\left||2x-3|-1\right| = 5 \iff \begin{cases} |2x-3|-1=5 \\ |2x-3|-1=-5 \end{cases} \iff \begin{cases} |2x-3|=6 \\ |2x-3|=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} 2x-3=\pm 6 \\ 2x-3=\pm 4 \end{cases}$$

Con lo que nos quedan las soluciones $x = 9/2, -3/2, 7/2, -1/2$.

■ **Ejemplo 1.5** Si es necesario para conocer el valor absoluto, podemos distinguir casos. Por ejemplo, para resolver la ecuación $|x-1| + 2|x-3| = 7$, necesitaríamos saber si $x-1$ es positivo o no y lo mismo con $x-3$. Para esto, nos hace falta saber si x es mayor o menor que 1 y si es mayor o menor que 3. Tenemos, por tanto tres posibilidades.

1) Si $x \leq 1$, entonces $|x-1| = 1-x$ y $|x-3| = 3-x$, con lo que la ecuación que tenemos que resolver es

$$1 - x + 2(3-x) = 7 \iff x = 0$$

2) Si $1 \leq x \leq 3$, entonces $|x-1| = x-1$ y $|x-3| = 3-x$. La ecuación a resolver es $x-1+2(3-x) = 7$, pero su solución, $x = -2$, no está en este intervalo por lo que no es válida.

3) Si $x \geq 3$, la ecuación que tenemos que resolver es

$$(x-1) + 2(x-3) = 7 \iff x = \frac{14}{3}.$$

Por tanto, $|x-1| + 2|x-3| = 7$ si, y sólo si, $x = 0, 14/3$.

■ **Ejemplo 1.6** ¿Qué valores verifican que $||x+1| - |x-1|| \leq 1/2$?

2. Números complejos

2.1 Definicion

Un número complejo está definido como $z = a + b \cdot i$, donde a y b son números reales, y donde i es la *unidad imaginaria*, que se define con la propiedad de verificar que $i^2 = -1$. Los números reales a y b se llaman *parte real* ($\mathrm{Re}(z) = a$) de z y *parte imaginaria* ($\mathrm{Im}(z) = b$) de z, respectivamente.

El conjunto de todos los números complejos se representa por $\mathbb{C}$. Es obvio que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. De hecho, un número complejo es real si, y solamente si, su parte imaginaria es cero. Es decir, si $z \in \mathbb{C}$, entonces:

$$z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0\,.$$

2.1.1 Conjugado

El conjugado de un número complejo $z = a + ib$ se define como $\bar{z} = a - ib$.

Los números $a + bi$ y $a - bi$ son conjugados uno respecto del otro.

2.2 Operaciones elementales

Las operaciones con números complejos son una extensión de las correspondientes operaciones en $\mathbb{R}$.

1) Suma: $(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$.

2) Producto: $(a + ib)(c + id) = (ac - bd) + i(ad + bc)$

■ **Ejemplo 2.1** Teniendo en cuenta que $z\,\bar{z} = (a+bi)\,\overline{(a+bi)} = (a+bi)(a-bi) = a^2+b^2$, con el siguiente ejemplo vamos a ver cómo se dividen dos números complejos:

$$\frac{2-3i}{4+i} = \frac{(2-3i)(4-i)}{(4+i)(4-i)} = \frac{8-12i-2i-3}{16+1} = \frac{5-14i}{17}$$

Hemos multiplicado el numerador y el denominador por el conjugado del denominador, y de esta forma hacer desaparecer la unidad imaginaria del denominador.

2.3 El plano de los números complejos

Al igual que los números reales ($\mathbb{R}$) se representan sobre una recta (la recta real), los números complejos ($\mathbb{C}$) se representan en el plano (el *plano complejo*). De esta forma, el número complejo $z = a + ib$ se puede identificar con el par (a, b); y así, el eje de abscisas en este plano se llama *eje real* y el eje de ordenadas, *eje imaginario*.

2.3.1 Forma polar: Módulo y argumento

Según hemos definido más arriba, el conjugado de un número complejo $z = a + ib$ es $\bar{z} = a - ib$; entonces:

Definición 2.3.1 El *módulo* de un número complejo $z = a + ib$ se define como

$$|z| = \sqrt{z\,\bar{z}} = \sqrt{a^2+b^2}$$

El módulo de un número complejo representa la distancia al origen del vector de posición del par $z = (a, b)$ en el plano.

Destacamos las siguientes identidades, que van a ser útiles en el cálculo con números complejos:

1) $|z|^2 = z\bar{z}$,

2) $|zw| = |z|\,|w|$,

3) $|z+w| \leq |z| + |w|$ (Desigualdad triangular) .

Hay otras formas de representar los números complejos. Una de ellas es la *forma polar*. Supongamos que tenemos un número complejo $z = a + ib \neq 0$. Este complejo se corresponde con la pareja de números reales (a, b) que podemos representar en el plano.

El número z (o el par (a, b), al fin y al cabo para nosotros son la misma cosa) queda totalmente determinado por dos magnitudes: la longitud del vector (o módulo $|z|$) y su dirección. ¿Cómo medimos la dirección? Si normalizamos el número complejo z

$$z = |z|\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right).$$

Como $\left(\frac{a}{|z|} + i\frac{b}{|z|}\right)$ es un vector de módulo uno (pertenece a la circunferencia centrada en el origen y de radio uno), se tiene que poder escribir de la forma

$$\left(\frac{a}{|z|}, \frac{b}{|z|}\right) = (\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$$

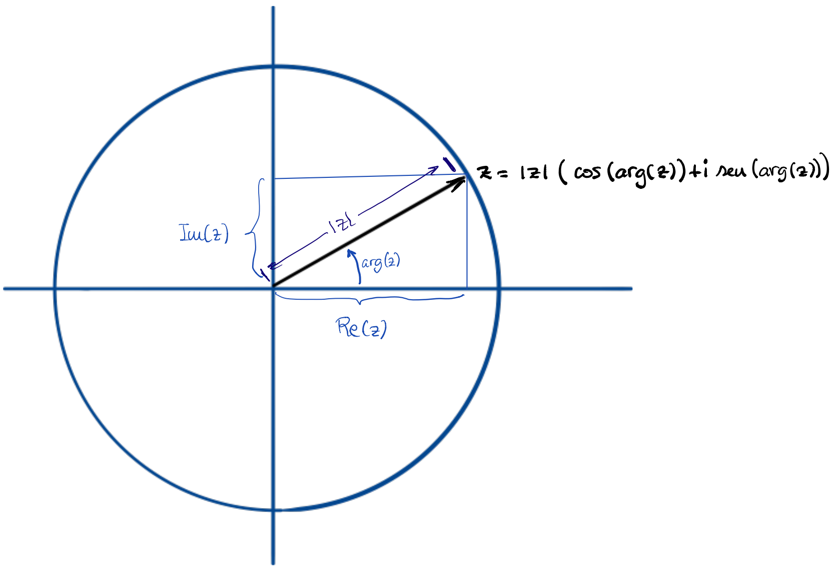
para conveniente $\theta \in \mathbb{R}$.

Definición 2.3.2 Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$, hay infinitos números $t \in \mathbb{R}$ que verifican la igualdad $z = |z|\,(\cos(t) + i\operatorname{sen}(t))$ y cualquiera de ellos recibe el nombre de *argumento* de z. De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ hay un único argumento que se encuentra en el intervalo $]-\pi, \pi]$. A dicho argumento se le llama *Argumento principal* de z y se representa por $\arg(z)$.

Por tanto, la forma de representar un número complejo de forma polar, haciendo uso de su módulo $|z|$ y su argumento principal $\arg(z)$ es:

$$z = |z|\,[\cos(\arg(z)) + i\operatorname{sen}(\arg(z))] = |z|\,e^{i\,\arg(z)}$$

siendo e^z la función exponencial compleja.



■ **Ejemplo 2.2** Consideremos el número complejo $z = 1 + i$, dado en forma binómica. Para representarlo en forma polar:

$$|z| = \sqrt{2}$$
$$\arg(z) = \frac{\pi}{4}$$

y, por tanto, $z = \sqrt{2}\,e^{\frac{\pi}{4}i}$.

2.3.2 Operaciones en forma polar

1) Multiplicación: $z\,w = |z|\,|w|\,\left[\cos(\arg(z) + \arg(w)) + i\,\mathrm{sen}(\arg(z) + \arg(w))\right]$

2) Cociente: $\frac{z}{w} = \frac{|z|}{|w|}\left[\cos(\arg(z) - \arg(w)) + i\,\mathrm{sen}(\arg(z) - \arg(w))\right]$

3) Potencia n-sima (Fórmula de Moivre): Si $n \in \mathbb{N}$, se verifica

$$z^n = |z|^n\,\left[\cos(n\arg(z)) + i\,\mathrm{sen}(n\arg(z))\right]$$

3. Funciones elementales

3.1 Definiciones

3.1.1 Dominio, rango e imagen

Todos conocemos lo que es una función y sus conceptos asociados como dominio o codominio. Recordemos algunos de ellos que usaremos más habitualmente.

Definición 3.1.1 Sea $f : A \to B$ una función. La *imagen* o *rango* de f es el conjunto

$$f(A) = \{f(x) : x \in A\}.$$

La *gráfica* de la función es el conjunto

$$\operatorname{Gr}(f) = \{(a,b) \in A \times B : f(a) = b\} = \{(x, f(x)) : x \in A\}.$$

La definición de función incluye tres cosas: el dominio, el codominio, y la regla que a cada elemento del dominio le asocia uno del codominio. En ocasiones abusaremos del lenguaje y hablaremos, por ejemplo, de la función $f(x) = \sqrt{x}$ o la función x^3. En este caso, su *dominio* natural es el conjunto donde la definición tiene sentido: $[0, \infty)$ en el primer caso y $\mathbb{R}$ en el segundo.

■ **Ejemplo 3.1** Consideremos la función $f : [0, 3\pi] \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \cos(x)$.

1) Su dominio es el intervalo $[0, 3\pi]$.

2) Su codominio es todo el conjunto de los números reales aunque podríamos haber puesto cualquier conjunto que contenga al intervalo $[-1, 1]$ (su imagen).

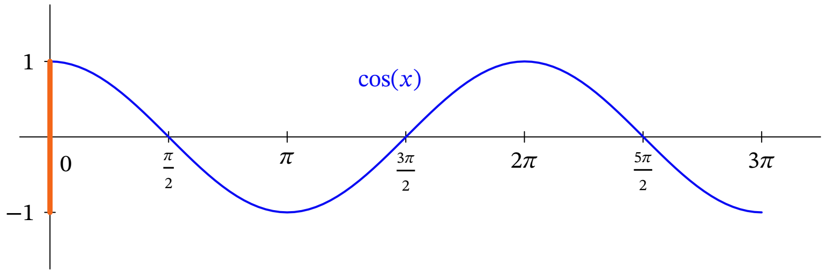


Figura 3.1: Gráfica e imagen de la función coseno

3) En la figura 3.1 hemos representado en azul la gráfica de la función, esto es, el siguiente subconjunto del plano

$$\{(x, \cos(x)) \,:\, x \in [0, 3\pi]\}.$$

4) La imagen de la función son los valores que toma. En este caso, la función coseno toma todos los valores entre -1 y 1 (en rojo en la figura anterior).

5) La preimagen de un valor puede ser única, pueden ser varios elementos o vacía. En nuestro caso la preimagen no es única. Por ejemplo,

$$f^{-1}(1) = \{x \in [0, 3\pi] \,:\, \cos(x) = 1\} = \{0, 2\pi\},$$

en cambio, $f^{-1}(2) = \emptyset$, ya que la función coseno nunca vale 2.

6) ¿Cuándo es la función positiva? Por definición, cuando el valor de la función es mayor estrictamente que cero:

$$f^{-1}\left(]0, +\infty[\right) = \{x \in [0, 3\pi] \,:\, \cos(x) > 0\} = \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\cup \left]\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}\right[.$$

Observa que en este caso $f^{-1}\left(]0, +\infty[\right) = f^{-1}\left(]0, 1]\right)$.

3.1.2

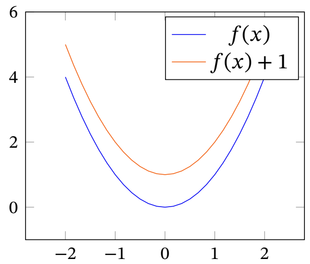
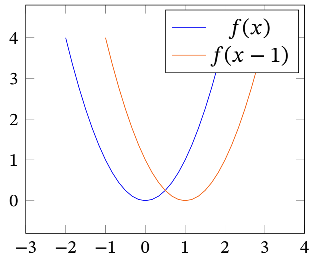
Definición 3.1.2 1) Una función $f : A \to B$ es *inyectiva* si se cumple que no hay dos elementos distintos con la misma imagen, esto es, si $x \neq y$ entonces $f(x) \neq f(y)$.

Es decir, una función es inyectiva si siempre que tengamos dos elementos x e y en el dominio de f con la misma imagen, $f(x) = f(y)$, entonces $x = y$.

2) Una función $f : A \to B$ es *sobreyectiva* si todo elemento tiene una preimagen, esto es, dado $b \in B$ existe $a \in A$ tal que $f(a) = b$.

3) Una función $f : A \to B$ es *biyectiva* si es inyectiva y sobreyectiva.

A la vista de las definiciones anteriores está claro que el hecho de que una función sea

$f(x) + a$ desplaza la gráfica de la función hacia arriba o hacia abajo, dependiendo del signo de a	
$f(x - a)$ desplaza hacia la derecha, si a es positivo, o hacia la izquierda, si a es negativo, la gráfica de f	

Cuadro 3.1: ¿Cómo cambia la gráfica de una función?

inyectiva o sobreyectiva no depende únicamente de la fórmula de la función sino también del dominio y codominio que tenga.

■ **Ejemplo 3.2** 1) La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^2$ no es inyectiva ni sobreyectiva. Su imagen es $\mathbb{R}_0^+$. Por tanto, la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_0^+$, $f(x) = x^2$ sí es sobreyectiva. Ninguna de las dos versiones es inyectiva: $f(x) = f(-x)$. Sin embargo, si restringimos el dominio a los positivos, o a los negativos, entonces sí resulta una función inyectiva. Por ejemplo, $f : \mathbb{R}^- \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ sí es inyectiva.

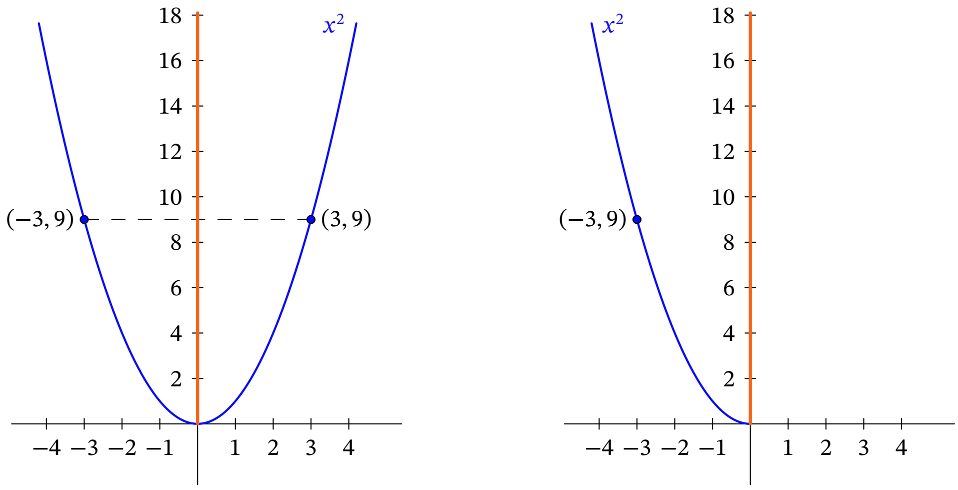


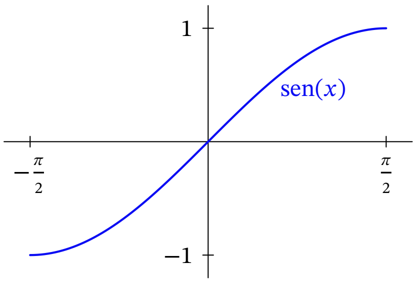
Figura 3.2: ¿La función x^2 es inyectiva?

2) Las funciones periódicas no son inyectivas: el valor de la función se repite cuando avanzamos el periodo, más concretamente, si la función es T-periódica, entonces $f(x) = f(x + T)$.

3) La función $\operatorname{sen} : \left[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$ es biyectiva. En este caso aunque la función seno

es una función periódica cuando la consideramos definida en toda la recta real, como hemos elegido un dominio suficientemente pequeño, la función es inyectiva.

Sin embargo, si consideramos $\operatorname{sen}: [0,\pi] \to [-1,1]$, entonces pierde la inyectividad ya que, por ejemplo, $\operatorname{sen}(0) = \operatorname{sen}(\pi) = 0$.



4) La función exponencial y el logaritmo son inyectivas.

3.1.3 Función inversa

Si $f: A \to B$ es una función inyectiva, la función inversa de f, a la que denotaremos f^{-1}, es la función $f^{-1}: f(A) \to A$ definida por $f^{-1}(f(a)) = a$. En otras palabras, si la función f envía a en $f(a)$, su inversa deshace el camino y envía $f(a)$ de nuevo a a.

Conocemos muchas funciones inyectivas y, para algunas de ellas, también conocemos su inversa. Por ejemplo, sabemos que la función exponencial y el logaritmo neperiano son inversas una de la otra. ¿Qué quiere decir esto? Simplemente que se cumplen las dos siguientes igualdades:

$$\begin{aligned} \log(e^a) &= a, \quad \forall\, a \in \mathbb{R}, \text{ y} \\ e^{\log(b)} &= b, \quad \forall\, b \in \mathbb{R}^+. \end{aligned}$$

Esto tiene una consecuencia en las gráficas de las funciones. Mira la figura 3.3. Las gráficas de una función y su inversa son simétricas respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

¿Cómo calculamos la inversa de una función? En teoría es sencillo: si $y = f(x)$ es la función, sólo tenemos que cambiar los papeles de x e y. Tenemos que despejar x como función de y. Esto es la teoría. Dependiendo de la función podemos estar ante un problema fácil o uno imposible. Veamos un ejemplo.

■ **Ejemplo 3.3** Consideremos la función $f(x) = x^2 + x + 1$, ¿cuál es su inversa? Como hemos dicho, tenemos que resolver la ecuación

$$y = x^2 + x + 1$$

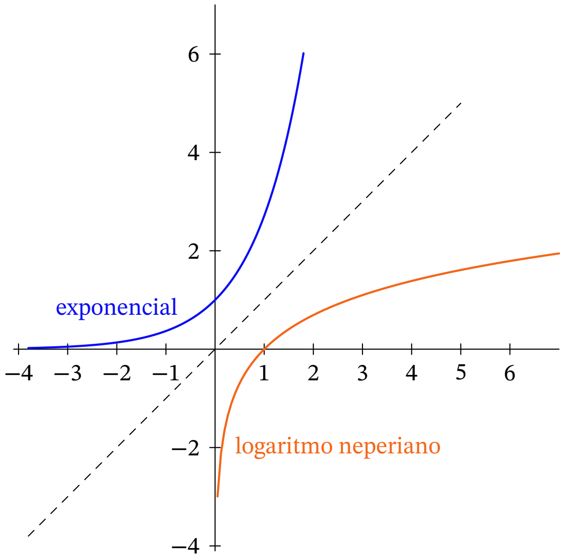


Figura 3.3: La función exponencial y el logaritmo son inversas

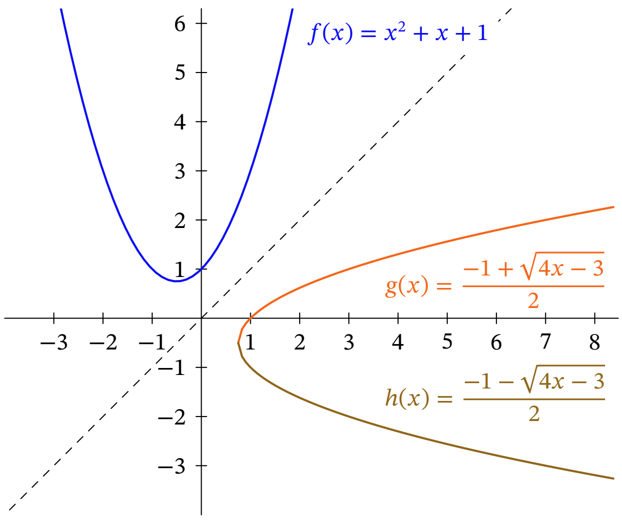


Figura 3.4: La función $x^2 + x + 1$ y sus inversas

considerando como incógnita x. Las soluciones del polinomio $x^2 + x + 1 - y = 0$ son

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4(1-y)}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{4y-3}}{2}.$$

Las dos soluciones provienen del hecho de que la función $y = x^2 + x + 1$ no es inyectiva. Sí es inyectiva en cualquiera de los intervalos $]-\infty, -\frac{1}{2}]$ y $[-\frac{1}{2}, +\infty[$. En la figura 3.4 tienes las gráficas de la función y su inversa en cada uno de dichos intervalos.

3.1.4 Funciones pares e impares

Sea A un subconjunto simétrico respecto al origen de $\mathbb{R}$.

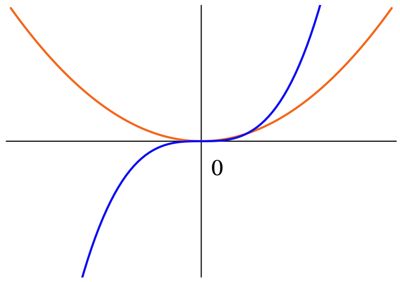


Figura 3.5: Funciones pares e impares

Definición 3.1.3 1) Una función $f : A \to B$ es *par* si $f(x) = f(-x)$, para cualquier $x \in A$.

2) Una función $f : A \to B$ es *impar* $f(x) = -f(-x)$, para cualquier $x \in A$.

Es claro que para comprobar si una función es par, impar o ninguna de las dos definiciones anteriores, el dominio tiene que ser un conjunto simétrico respecto a 0.

Las funciones pares son aquellas cuya gráfica es simétrica respecto del eje OY. En otras palabras, si dibujamos la gráfica en una hoja y la doblamos por el eje vertical, ambos mitades coinciden. Para conseguir el mismo efecto con una función impar tienes que doblar primero por el eje vertical y, en segundo lugar, por el eje horizontal.

Las funciones pares no pueden ser inyectivas, ya que, si tenemos un número $x \neq 0$ en el dominio de una función par f, entonces $f(x) = f(-x)$ mientras que $x \neq -x$.

■ **Ejemplo 3.4** 1) Las funciones $f(x) = x^2$ o $f(x) = \cos(x)$, para $x \in \mathbb{R}$, son pares.

2) Las funciones $f(x) = x^3$ o $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, $x \in \mathbb{R}$, son impares.

3.1.5 Funciones periódicas

Comencemos recordando lo que es una función periódica

Definición 3.1.4 Una función $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *periódica* si existe algún número positivo T tal que, si $x \in A$, entonces $x + T \in A$ y $f(x) = f(x + T)$. A cualquiera de esos valores T se le llama un *periodo* de la función. Cuando una función es periódica se define el *periodo fundamental*, ω, como el menor de todos ellos, o sea,

$$\omega = \min\{T : f(x) = f(x + T),\ \forall x \in A\}$$

■ **Ejemplo 3.5** Las funciones seno y coseno son periódicas con periodo 2π (o cualquier múltiplo entero de 2π). Como la función tangente es el cociente de seno entre coseno también es periódica de periodo 2π. Sin embargo, en este caso, el periodo fundamental de la tangente es π. El caso trivial son las funciones constantes: son periódicas con cualquier periodo.

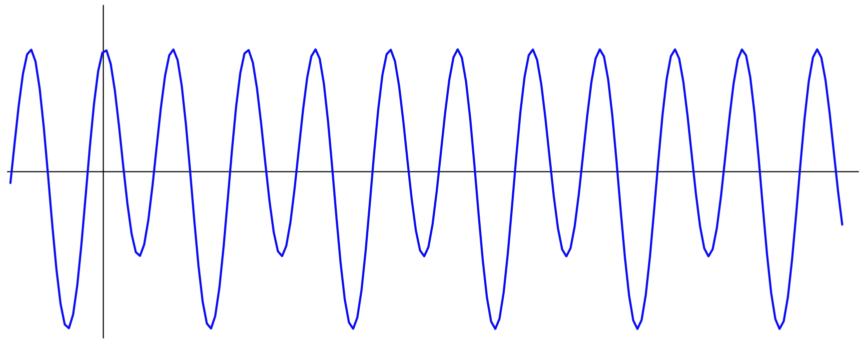


Figura 3.6: Función periódica

3.1.6 Acotación

Dada una función con valores reales, podemos hablar de cuándo los valores que toma dicha función se encuentran en un rango determinado, son mayores o son menores que una cierta cantidad. En otras palabras, podemos aplicar las nociones de acotación de conjuntos a la imagen de la función. Así surgen las nociones de función acotada y funciones acotadas superior o inferiormente.

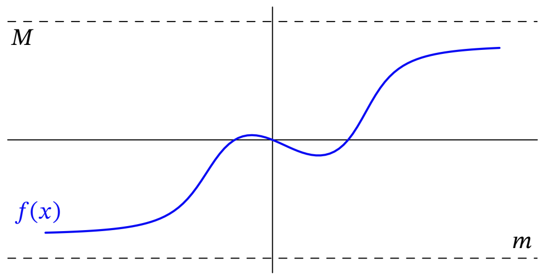


Figura 3.7: Función acotada

Definición 3.1.5 Sea $f : A \to \mathbb{R}$ una función.

1) Diremos que la función f está *acotada superiormente* si su imagen, $f(A)$, lo está. En otras palabras, f está acotada superiormente si existe un número M tal que $f(a) \leq M$ para cualquier elemento a de A. Otra expresión que también se usa para este concepto es el de función mayorada.

2) Diremos que la función f está *acotada inferiormente* (o minorada) si su imagen, $f(A)$, lo está. En otras palabras, f está acotada inferiormente si existe un número m tal que $f(a) \geq m$ para cualquier elemento a de A.

3) Diremos que la función está *acotada* si lo está superior e inferiormente.

■ **Ejemplo 3.6** Las funciones seno o coseno están acotadas. En cambio ningún polinomio, salvo los constantes, es una función acotada en $\mathbb{R}$, aunque los polinomios de grado par están mayorados o minorados (dependiendo del signo del coeficiente líder).

Una vez que tenemos un conjunto acotado, podemos hablar de máximo y supremo.

Definición 3.1.6 Sea $f: A \to \mathbb{R}$ una función.

1) Diremos que la función f tiene *máximo* si su imagen, $f(A)$ lo tiene. Diremos que f alcanza su máximo en $a_0 \in A$ si $f(a) \leq f(a_0)$ para cualquier $a \in A$.

2) Diremos que la función f tiene *mínimo* si su imagen, $f(A)$ lo tiene. Diremos que f alcanza su mínimo en $a_0 \in A$ si $f(a) \geq f(a_0)$ para cualquier $a \in A$.

■ **Ejemplo 3.7** Hemos visto antes que, por ejemplo, la función $f(x) = \operatorname{sen}(x)$, definida en los números reales, está acotada. En este caso además tiene máximo y mínimo. El máximo es 1 y el mínimo es -1. No hay que confundir el máximo con el punto en el que se alcanza. De hecho el máximo, en caso de existir, es único, mientras que el punto dónde se alcanza puede ser único o no serlo. En el caso de la función seno, al ser periódica, no es único. De hecho el máximo, 1, se alcanza en todos los puntos del conjunto

$$f^{-1}(1) = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen}(x) = 1\} = \{(4k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z}\}.$$

R Ya sabemos que un conjunto acotado superiormente tiene supremo. No podemos decir lo mismo con respecto al máximo. Hay conjuntos que tienen supremo pero este no se alcanza. Piensa, por ejemplo, en los intervalos abiertos. La misma situación se puede dar con funciones. Por ejemplo, la función $f:]0,1[\to]0,1[$, $f(x) = x$ está acotada, pero no tiene máximo ni mínimo.

3.1.7 **Definición 3.1.7** 1) Una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *creciente* (resp. *decreciente*) si siempre que $x, y \in A$ con

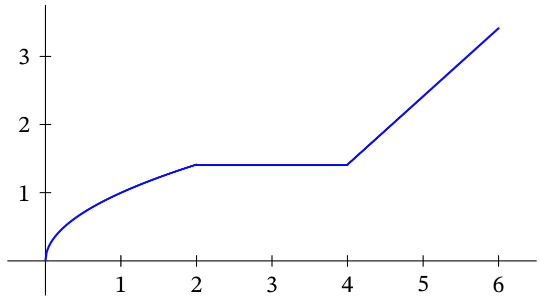
$$x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y) \quad (\text{resp.} f(x) \geq f(y)).$$

2) Una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es *estrictamente creciente* (resp. *estrictamente decreciente*) si iempre que $x, y \in A$ con

$$x < y \Rightarrow f(x) < f(y) \quad (\text{resp.} f(x) > f(y))$$

En general, diremos que una función es *monótona* si es creciente o decreciente y diremos que es *estrictamente monótona* si es estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

R Hay veces que los nombres nos pueden inducir a error y éste es uno de esos casos. La idea intuitiva que tenemos todos es que una función creciente es aquella que tiene una gráfica ascendente. En realidad eso es una función estrictamente creciente. Una función constante es creciente (y decreciente). La expresión correcta debería ser que una función creciente es aquella cuya gráfica no desciende.



Monotonía e inyectividad

Se deduce directamente de la definición de función estrictamente monótona que puntos del dominio distintos tienen imágenes distintas. En particular, *las funciones estrictamente monótonas son inyectivas.* ¿Es cierto el recíproco? Es fácil encontrar ejemplos de que no es cierto en general. Por ejemplo, la función $f : [0, 3] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ 5 - x, & \text{si } 2 \leq x \leq 3, \end{cases}$$

no es creciente ni decreciente. La función f no es continua y podría pensarse que este fenómeno no se presentaría en funciones continuas, pero no es difícil conseguir un ejemplo con funciones continuas. ¿Dónde presenta problemas de continuidad la función f? Pues eliminemos esos puntos. Considera la función $g : [0, 1] \cup [2, 3] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \begin{cases} x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 5 - x, & \text{si } 2 \leq x \leq 3. \end{cases}$$

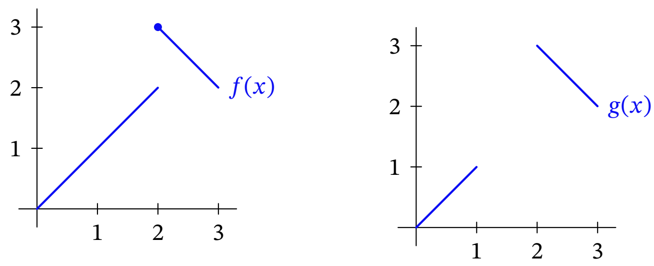


Figura 3.8: Monotonía e inyectividad

La función g es continua y sin embargo no es monótona.

Hemos comprobado que la inyectividad no es una condición suficiente para probar monotonía, si consideramos funciones que no sean continuas o que no estén definidas en intervalos. Sí es cierto que una función continua e inyectiva definida en un intervalo es estrictamente monótona.

3.2 Funciones potenciales, exponenciales y logaritmos

3.2.1 Funciones potenciales

La función potencial $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = x^b$ tiene sentido para cualquier exponente b real. En el caso particular de potencias naturales, se puede extender la definición a toda la recta real y en este caso particular tenemos una clase especial de polinomios, que ya hemos estudiado antes. También se puede extender el dominio a todo $\mathbb{R}$ en algunos otros casos, como cuando el exponente b es el inverso de un número impar.

1) Si $b \neq 0$ entonces f es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ y derivable con $f'(x) = bx^{b-1}$.

2) $(xy)^b = x^b y^b$.

3) Si $b > 0$, f es estrictamente creciente y verifica que

$$\lim_{x\to 0} x^b = 0 \text{ y } \lim_{x\to +\infty} x^b = +\infty.$$

4) Si $b < 0$, f es estrictamente decreciente y verifica que

$$\lim_{x\to 0} x^b = +\infty \text{ y } \lim_{x\to +\infty} x^b = 0.$$

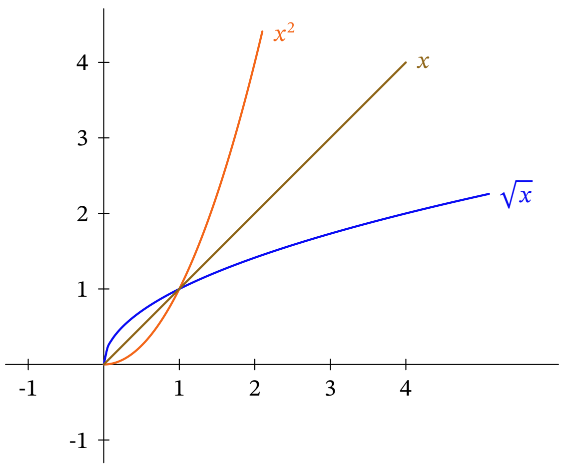


Figura 3.9: Función potencial

Tanto el el caso de que $b > 0$ como cuando $b < 0$ la función potencial de exponente b es una biyección de $\mathbb{R}^+$ en sí mismo. En las siguientes ejemplos de funciones elementales cuando una función sea biyectiva estudiaremos las propiedades de su inversa. En el caso de la función potencial de exponente b no le prestaremos mucha atención ya que la inversa de la función potencial de exponente b es otra función potencial; en este caso de exponente $1/b$.

3.2.2 Funciones exponenciales

La función exponencial, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida como $f(x) = e^x$. A veces usaremos la notación $\exp(x)$ para indicar e^x. En este caso el número e es la base de la función exponencial.

La función exponencial tiene las siguientes propiedades

1) f cumple que $f(x+y) = f(x)f(y)$ para x e y en $\mathbb{R}$, es decir, $e^{x+y} = e^x e^y$.

2) f es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ y estrictamente creciente, con límites

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0 \text{ y } \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty.$$

3) f es continua y derivable en $\mathbb{R}$ con $f'(x) = e^x$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

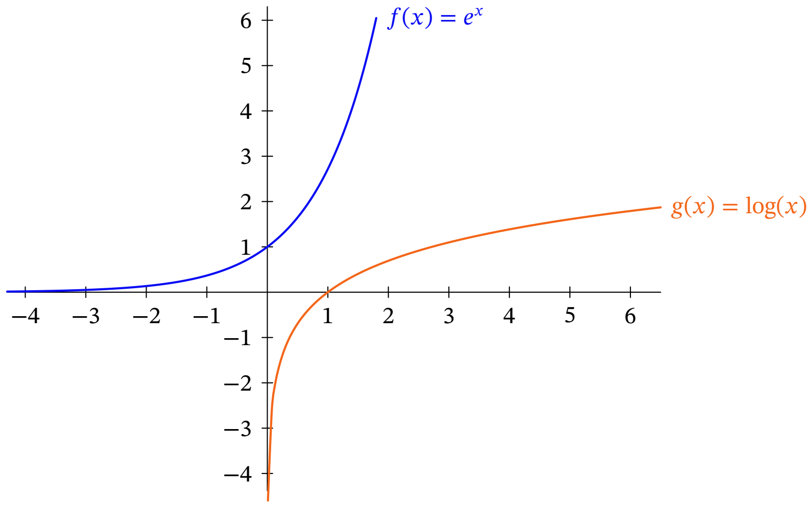


Figura 3.10: Funciones exponencial y logaritmo neperiano

3.2.3 Función logaritmo neperiano

La función logaritmo neperiano[1], $g(x) = \log(x)$ para x positivo, es la inversa de la función exponencial. Verifica las siguientes propiedades.

1) $\log(xy) = \log(x) + \log(y), \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$.

2) $\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log(x) - \log(y), \forall\, x, y \in \mathbb{R}^+$.

3) $\log(x^y) = y\log(x), \forall\, x \in \mathbb{R}^+, y \in \mathbb{R}$.

4) $\log(1) = 0, \log(e) = 1$.

5) g es continua y derivable y $g'(x) = \frac{1}{x}$.

6) g es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ y estrictamente creciente con

$$\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty \text{ y } \lim_{x\to+\infty} \log(x) = +\infty.$$

Las propiedades de las funciones exponencial y logaritmo neperiano justifican la siguiente

[1]Usaremos indistintamente las notaciones $\ln(x)$ y $\log(x)$ para indicar el logaritmo neperiano

expresión.

$$a^x = e^{\log(a^x)} = e^{x\log(a)}, \quad \forall a \in \mathbb{R}^+,\ x \in \mathbb{R}.$$

Esta fórmula nos ayuda a comprender las propiedades del resto de funciones exponenciales y logarítmicas (de base distinta de e).

3.2.4 Función exponencial de base $a \neq 1$

Si a es un número positivo distinto de 1, la función exponencial de base a es la función

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = a^x,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

1) $a^{x+y} = a^x a^y$ para x, e $y \in \mathbb{R}$.

2) f es biyectiva de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$.

3) Si $a > 1$, f es estrictamente creciente y verifica

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = 0 \ \text{ y } \lim_{x\to+\infty} a^x = +\infty.$$

4) Si $a < 1$, f es estrictamente decreciente y verifica

$$\lim_{x\to-\infty} a^x = +\infty \ \text{ y } \lim_{x\to+\infty} a^x = 0.$$

5) f es continua y derivable y $f'(x) = a^x \log(a)$.

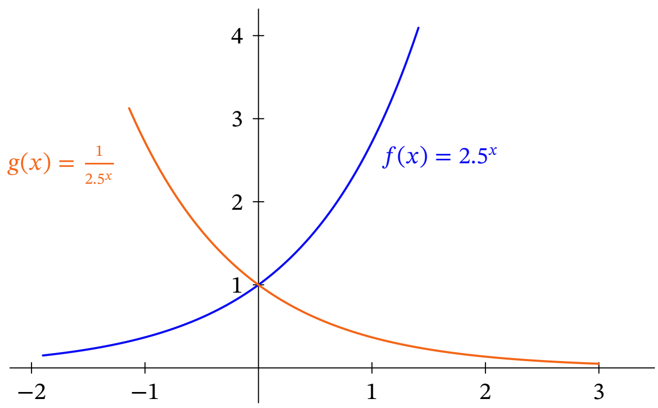


Figura 3.11: Función exponencial

3.2.5 Funciones logarítmicas de base $a \neq 1$

Sea $a > 0$ y distinto de 1. La inversa de la función exponencial de base a es la función logaritmo de base a. Haciendo uso de las propiedades de las exponenciales y del logaritmo neperiano se obtiene la siguiente fórmula que relacina la función logarítmica de base a con la función logaritmo neperiano.

$$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \log_a(x) = \frac{\log(x)}{\log(a)} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$$

Así el comportamiento del logaritmo en base a depende de si a es mayor o menor que uno.

1) g es biyectiva de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$ y continua. Verifica también que

$$\begin{aligned} \log_a(xy) &= \log_a(x) + \log_a(y), \\ \log_a\left(\frac{x}{y}\right) &= \log_a(x) - \log_a(y), \\ \log_a(x^z) &= z\log_a(x) \end{aligned}$$

para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^+$, $z \in \mathbb{R}$.

2) Si $a > 1$, g es estrictamente creciente y

$$\lim_{x\to 0} \log_a(x) = -\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = +\infty.$$

3) Si $a < 1$, g es estrictamente decreciente y

$$\lim_{x\to 0} \log_a(x) = +\infty, \quad \text{y} \quad \lim_{x\to+\infty} \log_a(x) = -\infty.$$

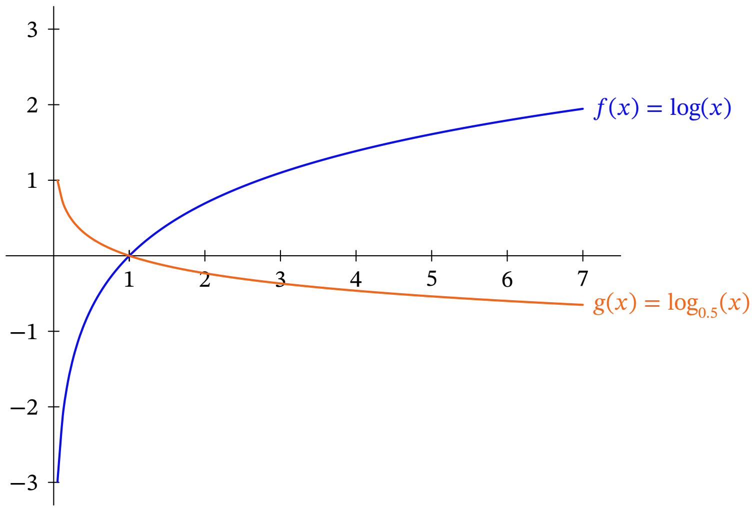


Figura 3.12: Función logaritmo

3.3 Funciones trigonométricas

Las funciones trigonométricas son más o menos conocidas por la mayoría de los estudiantes en este nivel. No vamos a dar ninguna definición rigurosa de ellas sino que nos centraremos en las propiedades que disfrutan. Evidentemente tienen una interpretación geométrica que no debemos perder de vista. Una puntualización antes de comenzar. Aunque algunos textos vinculan el seno y el coseno (y con ello el resto de las funciones trigonométricas) a la medida en grados sexagesimales de los ángulos aquí tanto seno como coseno van a ser funciones reales de variable real. Si alguien quiere vincularlas a medidas de ángulos, que piense en radianes.

3.3.1 Las funciones seno y coseno

1) Son continuas y derivables en todo $\mathbb{R}$ y $(\operatorname{sen}(x))' = \cos(x)$, $(\cos(x))' = -\operatorname{sen}(x)$.

2) Son funciones periódicas con periodo fundamental 2π

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen}(x), \ \cos(x + 2\pi) = \cos(x).$$

   Las tres siguientes propiedades son las igualdades más importantes de la trigonometría. Comenzamos con la igualdad fundamental de la trigonometría.

3) $\operatorname{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1, \forall\, x \in \mathbb{R}$.

Las dos siguientes son las *reglas de adición.*

4) $\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen}(x)\cos(y) + \cos(x)\operatorname{sen}(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

5) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$.

A partir de estas igualdades se obtienen la mayoría de las igualdades referentes a funciones trigonométricas, como veremos más adelante.

6) La imagen, tanto de la función seno como de la función coseno, es el intervalo $[-1, 1]$.

7) $\cos\colon [0, \pi] \to [-1, 1]$ es una biyección estrictamente decreciente con $\cos(0) = 1$, $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $\cos(\pi) = -1$. biyección estrictamente creciente con $\operatorname{sen}\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$, $\operatorname{sen}(0) = 0$, $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.

8) La función coseno es par: $\cos(-x) = \cos(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

9) La función seno es impar: $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen}(x), \ \forall\, x \in \mathbb{R}$.

10) Las funciones seno y coseno, al ser periódicas y no constantes, no tienen límite en $+\infty$ ni en $-\infty$.

3.3.2 Algunos valores destacados de seno y coseno

Calcular el seno y el coseno de un número cualquiera no se puede hacer por métodos directos. Sin embargo vamos a ver que las fórmulas de adición y el conocimiento de el seno y el coseno de algunos números nos permite conocer el de otros tantos. Como son funciones 2π-periódicas nos vamos a restringir al intervalo $[0, 2\pi]$ Sí es verdad que muchas veces lo que nos interesa son las razones trigonométricas de números que son divisores de π. Sabemos que

Radianes	**Coseno**	**Seno**	**Tangente**
0	1	0	0
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\sqrt{3}$
$\frac{\pi}{2}$	0	1	-

Cuadro 3.2: Valores de las funciones seno, coseno y tangente en el primer cuadrante

$\cos(\pi) = -1$ y, por tanto, $\operatorname{sen}(\pi) = 0$. Aplicando las fórmulas de adición tenemos que

$$\cos(x + \pi) = -\cos(x), \quad \operatorname{sen}(x + \pi) = -\operatorname{sen}(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Esta relación permite centrar nuestra atención en valores del intervalo $[0, \pi]$.

Además, como $\operatorname{sen}(\pi/2) = 1$, tenemos que $\cos(\pi/2) = 0$ y, otra vez usando las fórmulas de adición, obtenemos

$$\cos(x + \pi/2) = -\operatorname{sen}(x), \quad \operatorname{sen}(x + \pi/2) = \cos(x), \quad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

lo que nos permite restringir nuestra atención al intervalo $[0, \pi/2]$.

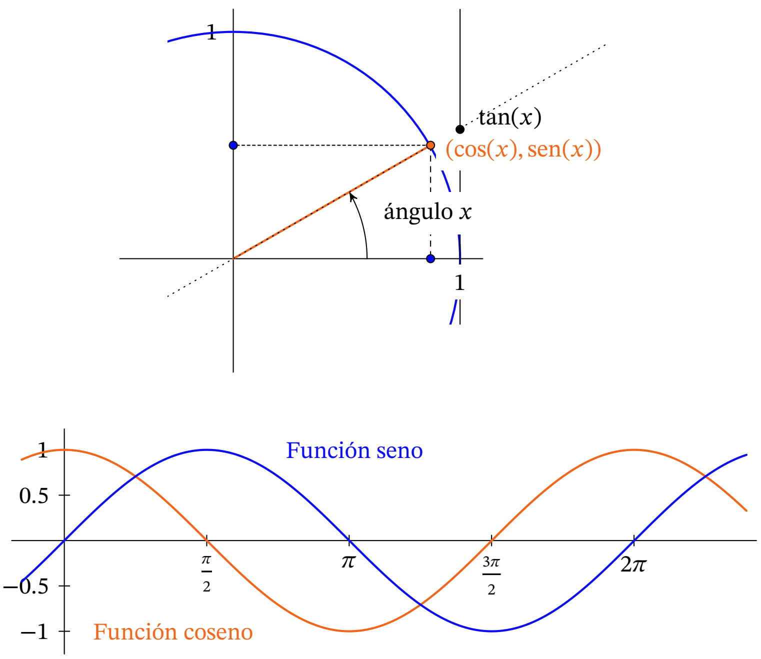


Figura 3.13: Las funciones seno y coseno

3.3.3 La función tangente

Como se verifica que $\cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, podemos considerar el conjunto $A = \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\right\}$ y definir la función tangente

$$\tan : A \to \mathbb{R}, \quad \tan(x) = \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)}$$

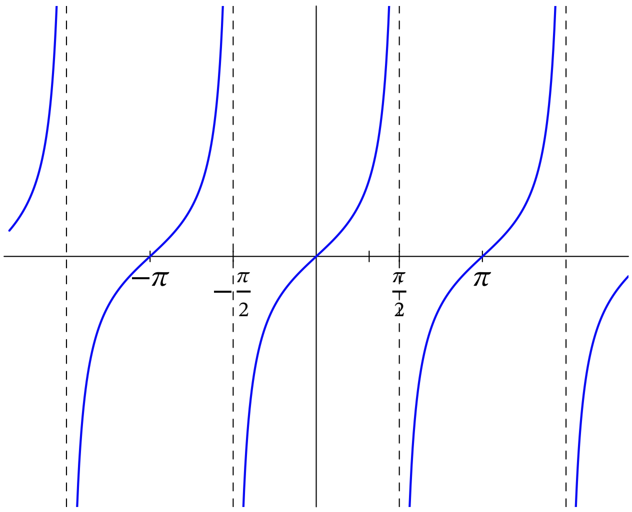


Figura 3.14: La función tangente

1) Al ser seno y coseno funciones 2π-periódicas, la función tangente también lo será, pero en este caso en periodo fundamental no es 2π sino π, es decir, $\tan(x+\pi) = \tan(x)$, $\forall\, x \in A$.

2) Así su comportamiento basta con estudiarlo en el intervalo $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Ahí se verifica que $\tan : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ es una biyección continua y estrictamente creciente por lo que verifica que $\lim_{x\to -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan(x) = +\infty$.

3) La función tangente es derivable y

$$(\tan(x))' = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

3.3.4 Secante, cosecante, cotangente

Siempre que los respectivos denominadores no se anulen, se pueden definir las funciones secante, cosecante y cotangente. Consideremos los conjuntos $A = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, donde se anula la función coseno, y $B = \mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, donde se anula la función seno. Entonces la definiciones de las funciones será

$$\begin{aligned}
\operatorname{cosec}: B \to \mathbb{R}, \operatorname{cosec}(x) &= \frac{1}{\operatorname{sen}(x)}, \quad \forall x \in B,\\
\sec: A \to \mathbb{R}, \sec(x) &= \frac{1}{\cos(x)}, \quad \forall x \in A,\\
\operatorname{cotan}: B \to \mathbb{R}, \operatorname{cotan}(x) &= \frac{\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)}, \quad \forall x \in B.
\end{aligned}$$

Dichas funciones son continuas y derivables en su correspondiente dominio. Su derivada se obtiene fácilmente mediante las reglas de derivación usuales.

$$\begin{aligned}
(\sec(x))' &= \tan(x)\sec(x),\\
(\operatorname{cosec}(x))' &= -\operatorname{cotan}(x)\operatorname{cosec}(x),\\
(\operatorname{cotan}(x))' &= \frac{-1}{\operatorname{sen}^2(x)} = -\operatorname{cosec}^2(x) = -\left(1 + \operatorname{cotan}^2(x)\right).
\end{aligned}$$

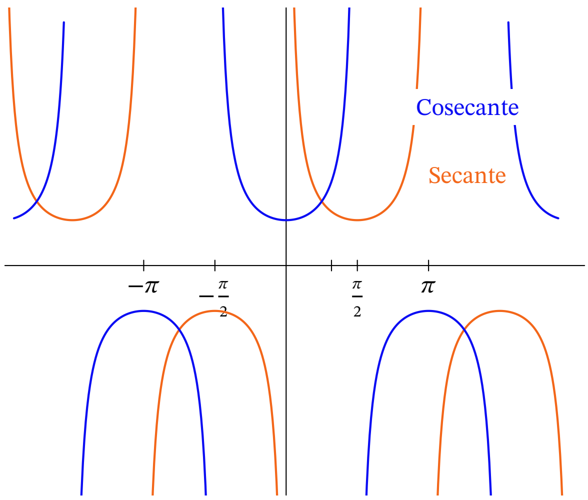


Figura 3.15: Funciones secante y cosecante

3.3.5 Inversas de funciones trigonométricas

Función arcoseno

Antes hemos visto que la función seno, restringida al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, es biyectiva sobre el intervalo $[-1, 1]$. La función arcoseno es la inversa de esta biyección; es decir, $\operatorname{arc\,sen}: [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ verifica que $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen}(x)) = x, \forall x \in [-1, 1]$ y $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen}(x)) = x, \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$.

- La función arcoseno es una función biyectiva, continua y estrictamente creciente con

$$\operatorname{arc\,sen}(-1) = -\frac{\pi}{2}, \quad \operatorname{arc\,sen}(0) = 0, \quad \operatorname{arc\,sen}(1) = \frac{\pi}{2}.$$

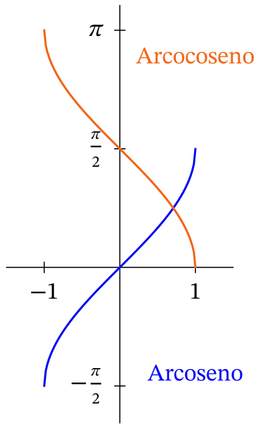


Figura 3.16: Arcoseno y arcocoseno

- Por último, es derivable en el intervalo abierto $]-1,1[$ con derivada

$$(\operatorname{arc\,sen}(x))' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Función arcocoseno

De igual forma la función arcocoseno es la función inversa de la restricción de la función coseno al intervalo $[0,\pi]$, y por tanto verifica que $\cos(\arccos(x)) = x$, $\forall x \in [-1,1]$ y $\arccos(\cos(x)) = x$, $\forall x \in [0,\pi]$.

- La función arcocoseno es función biyectiva, continua y estrictamente decreciente con

$$\arccos(-1) = \pi, \quad \arccos(0) = \frac{\pi}{2}, \ \arccos(1) = 0$$

- Es derivable en el intervalo abierto $]-1,1[$ con derivada

$$(\arccos(x))' = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Función arcotangente

Es la inversa de la restricción de la función tangente al intervalo $\left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$ y, por tanto,

$$\arctan : \mathbb{R} \to \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$$

verifica que $\tan(\arctan(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$ y que $\arctan(\tan(x)) = x$, $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right[$.

1) Esta función es una biyección estrictamente creciente con

$$\lim_{x\to-\infty} \arctan(x) = -\frac{\pi}{2}, \ \arctan(0) = 0, \ \lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}.$$

2) Es continua y derivable en $\mathbb{R}$ y $(\arctan(x))' = \frac{1}{1+x^2}$ para $x \in \mathbb{R}$.

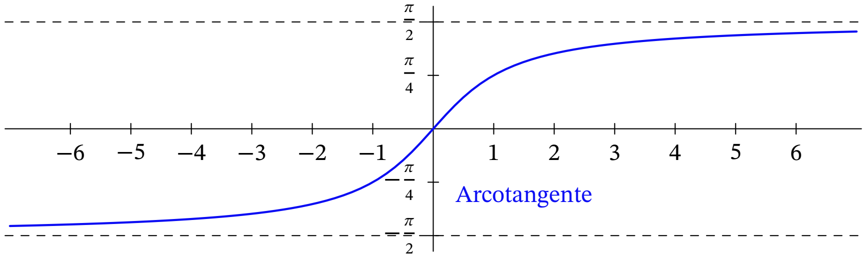


Figura 3.17: La función arcotangente

3.3.6 Identidades trigonométricas

Ya hemos visto las tres principales identidades trigonométricas. La igualdad fundamental,

1) Igualdad fundamental

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

y las fórmulas para el coseno y el seno de la suma y diferencia de números,

2) Suma y diferencia de números

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}(x \pm y) &= \operatorname{sen}(x)\cos(y) \pm \cos(x)\operatorname{sen}(y), \\ \cos(x \pm y) &= \cos(x)\cos(y) \mp \operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y). \end{aligned}$$

De estas fórmulas se deducen el resto de igualdades trigonométricas.

3) Dividiendo la igualdad fundamental por $\cos^2(x)$ y por $\operatorname{sen}^2(x)$, en los puntos donde esto es posible, respectivamente, se obtienen las igualdades

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2(x) &= \sec^2(x), \\ 1 + \operatorname{cotan}^2(x) &= \operatorname{cosec}^2(x). \end{aligned}$$

4) Dividiendo también las correspondientes fórmulas de adición de seno entre coseno se obtiene la fórmula de adición para la tangente.

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)},$$

que tendrán sentido siempre que x, y, y $x \pm y$ no sean múltiplos impares de $\pi/2$.

5) De las fórmulas de adición, se obtienen el seno y coseno del ángulo doble y del ángulo

mitad.

Ángulo doble

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(2x) &= 2\operatorname{sen}(x)\cos(x),\\
\cos(2x) &= \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\operatorname{sen}^2(x),\\
\tan(2x) &= \frac{\tan^2(x)}{1-\tan^2(x)}.
\end{aligned}$$

Ángulo mitad

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2}\big(1-\cos(x)\big),\\
\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1}{2}\big(1+\cos(x)\big),\\
\tan\left(\frac{x}{2}\right) &= \frac{1-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)} = \frac{\operatorname{sen}(x)}{1+\cos(x)},
\end{aligned}$$

donde tiene sentido la función tangente.

6) También se obtienen fórmulas para el producto de senos y cosenos:

$$\begin{aligned}
\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y) &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) - \cos(x+y)\big),\\
\cos(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}\big(\cos(x-y) + \cos(x+y)\big),\\
\operatorname{sen}(x)\cos(y) &= \frac{1}{2}\big(\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y)\big).
\end{aligned}$$

3.4 Funciones hiperbólicas

Las funciones hiperbólicas están definidas como:

$$\operatorname{senh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh(x) = \frac{\operatorname{senh}(x)}{\cosh(x)}.$$

Por analogía con las funciones trigonométricas hablaremos también de tangente, secante, cosecante y cotangente hiperbólica.

- La función seno hiperbólico, $\operatorname{senh}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es impar y no está acotada, diverge positivamente en $+\infty$ y negativamente en $-\infty$. De hecho es estrictamente creciente.

- La función coseno hiperbólico, $\cosh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es par, diverge positivamente tanto en $+\infty$ como en $-\infty$. Su imagen es el intervalo $[1, +\infty[$. Es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_0^+$.

- La función tangente hiperbólica, $\tanh: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es impar, estrictamente creciente y $\lim_{x\to-\infty} \tanh(x) = -1$ con lo que $\lim_{x\to+\infty} \tanh(x) = 1$. Su imagen es, por tanto, el intervalo $]-1, 1[$.

Los nombres de las funciones hiperbólicas (seno, coseno,...) recuerdan irremediablemente a las funciones trigonométricas y es que hay una analogía entre ellas. Para observar esta analogía hay que recurrir a la interpretación geométrica de ambas.

Vamos a empezar por las funciones trigonométricas. Si tenemos un número $\alpha \in [0, \pi]$ sabemos que el significado geométrico del coseno y del seno de α son, respectivamente, el valor la abscisa y la ordenada del punto de la circunferencia unidad $x^2 + y^2 = 1$ que forma un ángulo de medida α radianes con el eje de abscisas. La ordenada del punto de corte con la recta $x = 1$ de la prolongación de la recta que pasa por el origen y el punto $(\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$ es el valor de la tangente de α.

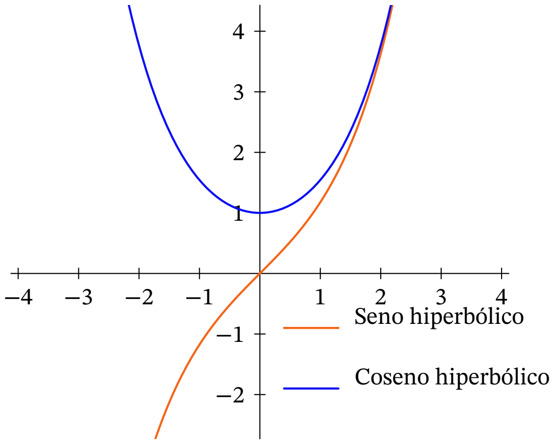


Figura 3.18: Funciones hiperbólicas

Pero otra forma de verlo es relacionar el seno y el coseno de α, no directamente con el ángulo α, sino con el sector circular (dentro de la circunferencia de radio 1, $x^2 + y^2 = 1$) que tiene área α. En la siguiente figura el coseno y el seno de α se interpretan como la coordenadas del punto que delimita un sector circular de área α.

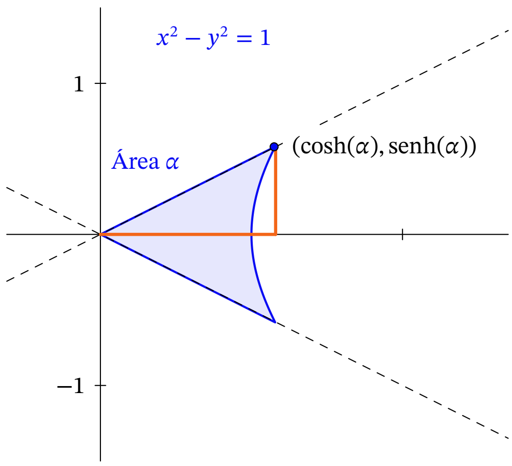


Figura 3.19: Seno y coseno hiperbólicos

Pues bien, el seno y el coseno hiperbólicos pueden relacionarse también con un área que vendrá delimitada, no por la circunferencia unidad, sino por la hipérbola equilátera. Así que ahora lo que consideramos es la hipérbola equilátera $x^2 - y^2 = 1$ (de considerar la hipérbola viene el nombre de funciones hiperbólicas). Si nos fijamos solamente en la parte de la derecha de la hipérbola (tampoco es nada tan restrictivo, en las funciones trigonométricas nos hemos fijado solamente en números en el intervalo $[0, \pi]$ y, para ver la similitud, será suficiente) y consideramos un punto en dicha hipérbola de coordenadas (x, y) se tiene que $x = \cosh(\alpha)$ e $y = \operatorname{senh}(\alpha)$ en función del área α que en la figura 3.19 queda en sombra.

3.4.1 Identidades hiperbólicas

1) Al igual que en las funciones trigonométricas también en las funciones hiperbólicas existen varias identidades que pueden resultar útiles. La primera es la igualdad fundamental,

$$\cosh^2(x) - \operatorname{senh}^2(x) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Dividiendo en la fórmula anterior por $\cosh^2(x)$ o por $\operatorname{senh}^2(x)$ se obtienen las dos siguientes.

$$\begin{aligned} \tanh^2(x) + \operatorname{sech}^2(x) &= 1 \\ \coth^2(x) - \operatorname{cosech}^2(x) &= 1 \end{aligned}$$

También existen fórmulas para las razones hiperbólicas de la suma y diferencia de números.

2) Sumas y diferencias de números.

$$\begin{aligned} \operatorname{senh}(x+y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) + \cosh(x)\operatorname{senh}(y), \\ \operatorname{senh}(x-y) &= \operatorname{senh}(x)\cosh(y) - \cosh(x)\operatorname{senh}(y), \\ \cosh(x+y) &= \cosh(x)\cosh(y) + \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y), \\ \operatorname{senh}(x-y) &= \cosh(x)\cosh(y) - \operatorname{senh}(x)\operatorname{senh}(y). \end{aligned}$$

3) Otras fórmulas relacionan las razones hiperbólicas de un número x y de $2x$.

$$\operatorname{senh}^2(x) = \frac{-1 + \cosh(2x)}{2}, \qquad \cosh^2(x) = \frac{1 + \cosh(2x)}{2}.$$