

Integración

1 Teorema Fundamental del Cálculo

Ejercicio 1. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

- a) $F(x) = \int_a^x \operatorname{sen}^3(t) dt,$
- b) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)} dt,$
- c) $F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)} dt.$

Solución 1.

- a) $F'(x) = \operatorname{sen}^3(x)$
- b) $F'(x) = -\frac{1}{1+x^2+\operatorname{sen}^2(x)}$
- c) $F'(x) = \int_a^b \frac{dt}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)}$

Ejercicio 2. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

- a) $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\log(1+t)) dt,$
- b) $F(x) = \int_{x^2}^1 \operatorname{sen}^3(t) dt,$
- c) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos^3(t) dt.$

Solución 2.

- a) $F'(x) = \operatorname{sen}(\log(1+x^2)) 2x,$
- b) $F'(x) = -\operatorname{sen}^3(x^2) 2x,$
- c) $F'(x) = \cos^3(x^3) 3x^2 - \cos^3(x^2) 2x.$

E **Ejercicio 3.** Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2} dt.$$

Como consecuencia, estudiar los extremos relativos de dicha función.

Solución 3. La función f es derivable con $f'(x) = e^{-(x^3-x^2)^2}(3x^2-2x)$. Por tanto, los únicos puntos críticos son $x=0$ y $x=\frac{2}{3}$. Pero como el dominio es \mathbb{R}^+ , sólo nos quedamos con el punto

$x = \frac{2}{3}$. Como $f'(\frac{1}{3}) < 0$ y $f'(2) > 0$, f es estrictamente decreciente en $]0, \frac{2}{3}]$ y estrictamente creciente en $[\frac{2}{3}, +\infty[$. En consecuencia f alcanza su mínimo relativo (y absoluto) en $x = \frac{2}{3}$.

E Ejercicio 4. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^2+x}^{\sin(x)} e^{-t^2} dt}{\sin^2(x)}.$$

Solución 4. Se trata de un límite que presenta una indeterminación del tipo “ $\frac{0}{0}$ ” ya que el denominador es claro que tiende a cero cuando $x \rightarrow 0$, así como el numerador, ya que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \int_{x^2+x}^{\sin(x)} e^{-t^2} dt = \int_0^0 e^{-t^2} dt = 0$$

Además, tanto el numerador como el denominador son funciones derivables. El primero es derivable gracias al teorema fundamental del Cálculo y el segundo, por ser la función seno elevada al cuadrado. Entonces, haciendo uso de la siguiente regla de derivación (consecuencia del teorema fundamental del Cálculo y de la regla de la cadena):

$$\left(\int_{g(x)}^{h(x)} f(t) dt \right)' (x) = f(h(x)) h'(x) - f(g(x)) g'(x)$$

y de la primera regla de L'Hôpital, el límite que tenemos que estudiar es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\sin(x)^2} \cos(x) - e^{-(x^2+x)^2} (2x+1)}{2 \sin(x) \cos(x)}$$

Este límite vuelve a presentar en el cero la misma indeterminación que teníamos al principio, así que vamos a volver a aplicar la regla de L'Hôpital. Pero antes separamos el límite en dos factores: el primero no va a darnos ningún problema, mientras que el segundo va a ser en el que vamos a aplicar dicha regla. Esto es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\sin(x)^2} \cos(x) - e^{-(x^2+x)^2} (2x+1)}{2 \sin(x) \cos(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos(x)} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\sin(x)^2} \cos(x) - e^{-(x^2+x)^2} (2x+1)}{\sin(x)}$$

Nos ocupamos entonces del segundo factor:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-2 \sin(x) \cos(x)^2 e^{-\sin(x)^2} - \sin(x) e^{-\sin(x)^2} 2(x^2+x)(2x+1)^2 e^{-(x^2+x)^2} - 2e^{-(x^2+x)^2}}{\cos(x)} = \frac{-2}{1} = -2.$$

Por tanto, como $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2 \cos(x)} = 1/2$, el límite que nos piden es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^2+x}^{\sin(x)} e^{-t^2} dt}{\sin^2(x)} = -2/2 = -1.$$

E Ejercicio 5. Calcula el máximo absoluto de la función $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{x-1} (e^{-t^2} - e^{-2t}) dt.$$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} - 1)$, calcula el mínimo absoluto de f .

Solución 5.

a) Estudiamos la monotonía de la función f . Para ello veamos el signo de la derivada:

$$f'(x) = e^{-(x-1)^2} - e^{-2(x-1)} = 0 \iff (x-1)^2 = 2(x-1) \iff x = 1, 3.$$

Por tanto, f es estrictamente monótona en $[1, 3]$ y en $[3, +\infty]$. Como $f'(2) > 0$ y $f'(4) < 0$, se tiene que f es estrictamente creciente en $[1, 3]$ y estrictamente decreciente en $[3, +\infty]$. En particular, la función alcanza su máximo absoluto en 3.

b) Dado que $f(1) = 0 < \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$, f alcanza su mínimo absoluto en 1.

Ejercicio 6. Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{2x} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t)) dt}{x^2}.$$

Solución 6. Tenemos un cociente de funciones derivables, ambas con límite cero en el origen y la derivada del denominador no se anula (salvo en el origen). Estamos en condiciones de aplicar la primera regla de L'Hôpital para resolver dicho límite. Nos queda el siguiente cociente

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(2x)) - \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(x))}{2x},$$

que sigue presentando una indeterminación de la forma " $\frac{0}{0}$ ". Aplicando de nuevo la regla de L'Hôpital, obtenemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4 \cos(\operatorname{sen}(2x)) \cos(2x) - \cos(\operatorname{sen}(x)) \cos(x)}{2} = \frac{3}{2}. \quad (1)$$

Ejercicio 7. Se considera la función $f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2} dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Encuentra los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f en \mathbb{R} .

b) Calcula los extremos relativos de f .

c) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x^3 - x^2)}$.

Solución 7.

a) La función integral f es una integral indefinida cuyo integrando es e^{-t^2} . En concreto, se puede escribir como:

$$f(x) = \int_0^{g(x)} e^{-t^2} dt$$

donde $g(x) = x^3 - x^2$ es un polinomio y, por tanto, derivable. Al ser el integrando una función continua y, aplicando el teorema fundamental del cálculo, tenemos que la función f es derivable, y además su derivada vale

$$f'(x) = e^{-g(x)^2} g'(x) = e^{-(x^3-x^2)^2} (3x^2 - 2x), \forall x \in \mathbb{R}.$$

Para encontrar los intervalos de monotonía de f tendremos que analizar el signo de la derivada. Para ello factorizamos la función derivada:

$$f'(x) = e^{-(x^3-x^2)^2} x(3x-2).$$

Como la función exponencial es siempre positiva, la función derivada se anulará siempre y cuando $x = 0$ o $x = 2/3$; concretamente:

$$f'(x) = e^{-(x^3-x^2)^2} x(3x-2) = 0 \iff x(3x-2) = 0 \iff x = 0 \text{ o } x = \frac{2}{3}.$$

Tenemos entonces que f tiene dos puntos críticos que nos van a permitir descomponer el dominio de f de la forma siguiente:

- i) Si $x < 0$, entonces $f'(x) > 0$ (se puede evaluar f' en un punto cualquiera negativo) y, por tanto, f es estrictamente creciente en $] -\infty, 0[$.
 - ii) Si $0 < x < 2/3$, entonces $f'(x) < 0$ y, por tanto, f es estrictamente decreciente en $]0, 2/3[$.
 - iii) Si $x > 2/3$, $f'(x) > 0$ y, por tanto, f es estrictamente creciente en $]2/3, +\infty[$.
- b) Con la información que tenemos del apartado anterior podemos concluir que f alcanza un máximo relativo en 0 (la función pasa de ser creciente a decreciente) y un mínimo relativo en $2/3$ (pasa de ser decreciente a creciente).
- c) El límite planteado presenta una indeterminación del tipo “ $\frac{0}{0}$ ” y, como es posible aplicar la regla de L'Hôpital, tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{\cos(x^3 - x^3)(3x^2 - 2x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-(x^3-x^2)^2} (3x^2 - 2x)}{\cos(x^3 - x^3)(3x^2 - 2x)}$$

Simplificamos el cociente:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-(x^3-x^2)^2}}{\cos(x^3 - x^2)} = \frac{1}{1} = 1 \implies \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\sin(x^3 - x^2)} = 1$$

donde hemos tenido en cuenta que $\lim_{x \rightarrow 0} e^x = e^0 = 1$ y que $\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(0) = 1$.

2 Cálculo de primitivas

2.1 Integrales inmediatas y cambio de variable

Ejercicio 8. Calcula las siguientes primitivas

- | | | |
|---------------------------|----------------------------------------------------|--------------------------------|
| a) $\int 5x^6 dx$ | d) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}}$ | f) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$ |
| b) $\int x(x+1)(x-2) dx$ | e) $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx$ | |
| c) $\int (2 + 3x^3)^2 dx$ | | |

Solución 8.

- a) $\int 5x^6 dx = \frac{5}{7}x^7$
- b) $\int x(x+1)(x-2) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - x^2$

$$c) \int (2 + 3x^3)^2 dx = 4x + 3x^4 + \frac{9}{7}x^7$$

$$d) \int \frac{dx}{\sqrt[n]{x}} = \frac{x^{1-\frac{1}{n}}}{1-\frac{1}{n}}$$

$$e) \int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx = a^2 x - \frac{9}{5} a^{4/3} x^{5/3} + \frac{9}{7} a^{2/3} x^{7/3} - \frac{x^3}{3}$$

$$f) \int \frac{x^2+1}{x-1} dx = x + \frac{x^2}{2} + 2 \log(-1+x)$$

Ejercicio 9. Calcula las siguientes primitivas

$$a) \int \frac{\sqrt[3]{1+\log(x)}}{x} dx$$

$$b) \int \frac{dx}{e^x+1}$$

$$c) \int x(2x+5)^{10} dx$$

Solución 9.

a) Hacemos el cambio de variable $1 + \log(x) = y$,

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\log(x)}}{x} dx = \int y^{1/3} dy = \frac{3}{4} (1 + \log(x))^{4/3}$$

b) Sumamos y restamos e^x ,

$$\int \frac{dx}{e^x+1} = \int \left(\frac{1+e^x}{1+e^x} - \frac{e^x}{1+e^x} \right) dx = x - \log(1+e^x).$$

También se puede resolver usando el cambio de variable $y = e^x$.

c) Hacemos el cambio de variable $2x + 5 = y$,

$$\begin{aligned} \int x(2x+5)^{10} dx &= \left[2x+5 = y \implies x = \frac{1}{2}(y-5) \right] = \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} (y-5) y^{10} dy \\ &= \frac{1}{4} \int y^{11} - 5y^{10} dy = \frac{1}{4} \left(\frac{y^{12}}{12} - \frac{5y^{11}}{11} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{(2x+5)^{12}}{12} - \frac{5(2x+5)^{11}}{11} \right). \end{aligned}$$

2.2 Integración por partes

Ejercicio 10. Calcula las siguientes primitivas

$$a) \int \log(x) dx$$

$$d) \int x \sen(x) dx$$

$$g) \int x \sen(x) \cos(x) dx$$

$$b) \int \arctan(x) dx$$

$$e) \int x e^{-x} dx$$

$$c) \int \arcsen(x) dx$$

$$f) \int x^2 e^{3x} dx$$

Solución 10.

a) Integrando por partes

$$\int \log(x) dx = \left[\begin{array}{l} u = \log(x) \implies du = \frac{1}{x} dx \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] = x \log(x) - \int dx = x \log(x) - x.$$

b) Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int \arctan(x) dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arctan(x) \implies du = \frac{dx}{1+x^2} \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] \\ &= x \arctan(x) - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan(x) - \frac{1}{2} \log(1+x^2).\end{aligned}$$

c) Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int \arcsen(x) dx &= \left[\begin{array}{l} u = \arcsen(x) \implies du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ dv = dx \implies v = x \end{array} \right] \\ &= x \arcsen(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \arcsen(x) + \sqrt{1-x^2}.\end{aligned}$$

d) Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int x \sen(x) dx &= \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = \sen(x) dx \implies v = -\cos(x) \end{array} \right] \\ &= -x \cos(x) + \int \cos(x) dx = -x \cos(x) + \sen(x).\end{aligned}$$

e) Integrando por partes

$$\int x e^{-x} dx = \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = e^{-x} dx \implies v = -e^{-x} \end{array} \right] = -x e^{-x} + \int e^{-x} dx = -e^{-x}(1+x).$$

f) Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int x^2 e^{3x} dx &= \left[\begin{array}{l} u = x^2 \implies du = 2x dx \\ dv = e^{3x} dx \implies v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right] = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \int x e^{3x} dx \\ &= \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = e^{3x} dx \implies v = \frac{1}{3} e^{3x} \end{array} \right] = \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{3} \left(\frac{x}{3} e^{3x} - \int \frac{1}{3} e^{3x} dx \right) \\ &= \frac{1}{3} x^2 e^{3x} - \frac{2}{9} x e^{3x} + \frac{2}{27} e^{3x}.\end{aligned}$$

g) Integrando por partes

$$\begin{aligned}\int x \sen(x) \cos(x) dx &= \frac{1}{2} \int x \sen(2x) dx = \left[\begin{array}{l} u = x \implies du = dx \\ dv = \sen(2x) dx \implies v = -\frac{\cos(2x)}{2} \end{array} \right] \\ &= \frac{1}{2} \left(-\frac{x \cos(2x)}{2} + \frac{1}{2} \int \cos(2x) dx \right) = -\frac{x \cos(2x)}{4} + \frac{1}{8} \sen(2x).\end{aligned}$$

2.3 Integración de funciones racionales

Ejercicio 11. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$

b) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$

c) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

d) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$

e) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

Solución 11.

a) Puesto que numerador y denominador tienen el mismo grado, comenzamos dividiendo

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx &= \int 1 + \frac{3}{x^2 - 5x + 6} dx \\ &= x + 3 \int \frac{dx}{x^2 - 5x + 6}\end{aligned}$$

descomponemos en fracciones simples y usamos el apartado anterior,

$$\begin{aligned}&= x + 3 \int \frac{dx}{(x-2)(x-3)} \\ &= x + 3 \int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2} \right) dx \\ &= x + 3 \log |-3 + x| - 3 \log |-2 + x|.\end{aligned}$$

b) Dividimos y descomponemos en fracciones simples,

$$\begin{aligned}\int \frac{5x^3 + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} dx &= \int \left(5 + \frac{25x^2 - 20x + 2}{x^3 - 5x^2 + 4x} \right) dx \\ \Gamma &= \int \left(5 + \frac{1}{2x} - \frac{7}{3(x-1)} + \frac{161}{6(x-4)} \right) dx \\ &= 5x + \frac{161}{6} \log(-4 + x) - \frac{7}{3} \log |-1 + x| + \frac{\log |x|}{2}.\end{aligned}$$

c) Descomponemos en fracciones simples e integramos:

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x(x+1)^2} &= \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{(x+1)^2} \right) dx \\ &= \frac{1}{1+x} + \log |x| - \log |1+x|.\end{aligned}$$

d) Descomponemos en fracciones simples y resolvemos,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 3)(x^2 + 4x + 5)} &= \int \left(\frac{4x + 15}{130(x^2 + 4x + 5)} - \frac{1}{20(x-1)} + \frac{1}{52(x-3)} \right) dx \\ &= \frac{7}{130} \arctan(2+x) + \frac{1}{52} \log |-3+x| - \frac{1}{20} \log |-1+x| \\ &\quad + \frac{1}{65} \log |5+4x+x^2|.\end{aligned}$$

e) Descomponemos en fracciones simples, $\frac{1}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{(b-a)(x+a)} + \frac{1}{(a-b)(x+b)}$ y sustituimos

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \int \frac{1}{(b-a)(x+a)} dx + \int \frac{1}{(a-b)(x+b)} dx = \frac{\log |a+x|}{-a+b} + \frac{\log |b+x|}{a-b}.$$

Ejercicio 12. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{dx}{x^3+1}$ c) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$
 b) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$

Solución 12.

a) Descomponemos en fracciones simples e integramos,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{x^3+1} &= \int \left(\frac{1}{3(x+1)} - \frac{1}{3} \frac{x-2}{x^2-x+1} \right) dx \\ &= \frac{\arctan\left(\frac{-1+2x}{\sqrt{3}}\right)}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} \log|1+x| - \frac{1}{6} \log|1-x+x^2|.\end{aligned}$$

b) Utilizando la descomposición

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \int \left(\frac{b_0}{x+1} + \frac{b_1 + b_2x}{x^2+1} \right) dx$$

se demuestra que

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2} = -\frac{1}{4(1+x)} + \frac{1}{4(1+x^2)} + \frac{\arctan(x)}{4} + \frac{1}{2} \log|1+x| - \frac{1}{4} \log(1+x^2).$$

c) Como $(x^4-1)^2 = (x-1)^2(x+1)^2(x^2+1)^2$, tenemos la descomposición

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3}{(x-1)(x+1)(x^2+1)} + \int \left(\frac{b_0}{x+1} + \frac{b_1}{x-1} + \frac{b_2 + b_3x}{x^2+1} \right) dx.$$

Derivando y calculando los coeficientes se obtiene que

$$\int \frac{dx}{(x^4-1)^2} = -\frac{x}{4(-1+x^4)} + \frac{3 \arctan(x)}{8} - \frac{3}{16} \log|-1+x| + \frac{3}{16} \log|1+x|.$$

2.4 Integración de funciones trigonométricas

Ejercicio 13. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \cos^3(x) dx$ e) $\int \cos^6(3x) dx$
 b) $\int \sin^5(x) dx$ f) $\int \frac{\cos^5(x)}{\sin^3(x)} dx$
 c) $\int \sin^2(x) \cos^3(x) dx$
 d) $\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx$

Solución 13.

a) Utilizando el cambio de variable $\sin(x) = t$ la integral queda

$$\int \cos^3(x) dx = \int (1-t^2) dt = t - \frac{t^3}{3} = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3}.$$

b) Utilizando el cambio de variable $\cos(x) = t$, la integral es

$$\begin{aligned}\int \sin^5(x) dx &= - \int (1 - t^2)^2 dt = - \int t^4 - 2t^2 + 1 dt = -\frac{t^5}{5} + \frac{2t^3}{3} - t \\ &= -\frac{\cos^5(x)}{5} + \frac{2\cos^3(x)}{3} - \cos(x).\end{aligned}$$

c) Utilizamos el cambio de variable $\sin(x) = t$,

$$\int \sin^2(x) \cos^3(x) dx = \int t^2 (1 - t^2) dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\sin^3(x)}{3} - \frac{\sin^5(x)}{5}.$$

d) Utilizando que $2 \sin(x) \cos(x) = \sin(2x)$,

$$\int \sin^2(x) \cos^2(x) dx = \int \frac{1}{4} \sin^2(2x) dx = \frac{1}{4} \int \frac{1 - \cos(4x)}{2} dx = \frac{1}{32} (4x - \sin(4x)).$$

e) Utilizando repetidamente que $2 \cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$ y el cambio de variable $3x = t$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int \cos^6(3x) dx &= \frac{1}{3} \int \cos^6(t) dt = \frac{1}{3} \int \left(\frac{1 + \cos(2t)}{2} \right)^3 dt \\ &= \frac{1}{24} \int (1 + 3 \cos(2t) + 3 \cos^2(2t) + \cos^3(2t)) dt \\ &= \frac{t}{24} + \frac{\sin(2t)}{16} + \frac{1}{8} \int \cos^2(2t) dt + \frac{1}{24} \int \cos^3(2t) dt.\end{aligned}$$

Resolvemos por separado. En primer lugar,

$$\int \cos^2(2t) dt = \int \frac{1 + \cos(4t)}{2} dt = \frac{t}{2} + \frac{\sin(4t)}{8}.$$

En segundo lugar, haciendo el cambio de variable $y = \sin(2t)$,

$$\int \cos^3(2t) dt = \frac{1}{2} \int (1 - y^2) dy = \frac{1}{2} \left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{6} \right) = \frac{\sin(2t)}{4} + \frac{\sin^3(2t)}{12}.$$

f) Utilizamos el cambio de variable $\sin(x) = t$ y obtenemos que

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos^5(x)}{\sin^3(x)} dx &= \int \frac{(1 - t^2)^2}{t^3} dt = \int t^{-3} + t - 2t^{-1} dt = -\frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{2}t^2 - 2 \log |t| \\ &= -\frac{1}{2} \operatorname{cosec}^2(x) + \frac{1}{2} \sin^2(x) - 2 \log |\sin(x)|.\end{aligned}$$

Ejercicio 14. Calcula las siguientes primitivas

- a) $\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx$
 b) $\int \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)} dx$
 c) $\int \frac{dx}{1+\cos^2(3x)}$

- d) $\int \frac{dx}{3 \sin^2(x) + 5 \cos^2(x)}$
 e) $\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)} dx$

Solución 14.

a) Hacemos el cambio $y = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\int \frac{\cos(x)}{1 + \cos(x)} dx &= \int \frac{1 - y^2}{1 + y^2} dy \\ &= \int \left(\frac{2}{1 + y^2} - 1 \right) dy = 2 \arctan(y) - y \\ &= x - \tan\left(\frac{x}{2}\right).\end{aligned}$$

b) Como la función es par en seno y coseno, utilizamos el cambio $\tan(x) = t$,

$$\begin{aligned}\int \frac{1 + \tan(x)}{1 - \tan(x)} dx &= \int \frac{1 + t}{(1 - t)(1 + t^2)} dt \\ &= \int \left(\frac{t}{t^2 + 1} - \frac{1}{t - 1} \right) dx \\ &= \frac{1}{2} \log(\tan^2(x) + 1) - \log(\tan(x) - 1) .\end{aligned}$$

c) El integrando es par pero antes de hacer el cambio $y = \tan(x)$ lo “arreglamos” un poco.

$$\int \frac{dx}{1 + \cos^2(3x)} = [3x = t] = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{1 + \cos^2(t)} = [\tan(t) = y] = \frac{1}{3} \int \frac{dy}{2 + y^2}$$

eliminamos el 2 del denominador buscando un arcotangente,

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{3} \int \frac{dy}{2 \left(1 + \left(\frac{y}{\sqrt{2}} \right)^2 \right)} = [y = \sqrt{2}z] \\ &= \frac{1}{3\sqrt{2}} \int \frac{dz}{1 + z^2} = \frac{1}{3\sqrt{2}} \arctan\left(\frac{\tan(3x)}{\sqrt{2}}\right)\end{aligned}$$

d) Aprovechamos que el integrando es una función par en seno y coseno para realizar el cambio de variable $\tan(x) = t$,

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{3 \sin^2(x) + 5 \cos^2(x)} &= \int \frac{\frac{1}{\cos^2(x)} dx}{5 + 3 \tan^2(x)} = [\tan(x) = t] \\ &= \int \frac{dt}{5 + 3t^2} = \int \frac{dt}{5 \left(1 + \frac{3}{5}t^2 \right)} = \left[y = \sqrt{\frac{3}{5}}t \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{15}} \int \frac{dy}{1 + y^2} = \frac{1}{\sqrt{15}} \arctan\left(\sqrt{\frac{3}{5}} \tan(x)\right)\end{aligned}$$

e) Utilizamos las fórmula del ángulo doble, y hacemos el cambio de variable $y = \sin^2(x)$,

$$\int \frac{\sin(2x)}{1 + \sin^2(x)} dx = \int \frac{2 \sin(x) \cos(x)}{1 + \sin^2(x)} dx = \int \frac{dy}{1 + y} = \log |1 + y| = \log(1 + \sin^2(x)).$$