Funciones elementales

1 Números reales

Ejercicio 1. Calcula para qué valores de x se verifica que $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$.

Solución 1. Para quitar denominadores tenemos que multiplicar por $x + 2$.

a) Si $x > -2$, entonces $x + 2 > 0$ y $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \iff 6x - 9 < x + 2 \iff x < \frac{11}{5}$.
b) Si $x < -2$, entonces $x + 2 < 0$ y $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \iff 6x - 9 > x + 2 \iff x > \frac{11}{5}$, que no se verifica.

Resumiendo $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3} \iff -2 < x < \frac{11}{5}$.

Ejercicio 2. Encuentra aquellos valores de x que verifican que:

a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$,
b) $x^2 - 5x + 9 > x$,
c) $x^3(x-2)(x+3)^2 < 0$,
d) $x^2 \leqslant x$,
e) $x^3 \leqslant x$,
f) $x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x$.

Solución 2.

a) $0 < \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} = \frac{1}{x(1-x)} \iff 0 < x(1-x) \iff 0 < x < 1$.
b) $x^2 - 5x + 9 > x \iff x^2 - 6x + 9 > 0 \iff (x-3)^2 > 0 \iff x \neq 3$.
c) $x^3(x-2)(x+3)^2 < 0 \iff x^3(x-2) < 0 \iff 0 < x < 2$.
d) $x^2 \leq x \iff x^2 - x \leq 0 \iff x(x-1) \leq 0 \iff x \in [0,1]$.
e) $x^3 \leq x \iff x(x-1)(x+1) \leq 0 \iff]-\infty,-1] \cup [0,1]$.
f) Operando obtenemos que

$$x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x \iff x^2 - x - 12 < 0 \iff (x-4)(x+3) < 0,$$

con lo que la desigualdad se cumple cuando los dos factores tienen signos distintos, esto es, cuando $x \in]-3,4[$.

Ejercicio 3. Discute para qué valores de x se verifica que:

a) $|x-1|\,|x+2| = 3$,
b) $|x^2 - x| > 1$,
c) $|x-1| + |x+1| < 1$,
d) $|x+1| < |x+3|$.

Solución 3.

a) $3 = |x-1|\,|x+2| = |\,(x-1)(x+2)\,| \iff (x-1)(x+2) = \pm 3 \iff x = \frac{1}{2}\left(-1 \pm \sqrt{21}\right)$.
b) Vamos a discutir dos casos por separado,
   i) Si $x \in [0,1]$, $1 < \left| x^2 - x \right| = x - x^2 \iff x^2 - x + 1 < 0$ lo que no ocurre nunca.
   ii) Si $x \notin [0,1]$, $1 < \left| x^2 - x \right| = x^2 - x \iff x^2 - x - 1 > 0 \iff x \notin \left[\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right]$.
c) Nunca se verifica la desigualdad.
d) Vamos a usar que, *para números positivos*, $0 < x < y \iff x^2 < y^2$.

$$\begin{aligned} |x+1| < |x+3| &\iff |x+1|^2 < |x+3|^2 \iff (x+1)^2 < (x+3)^2 \\ &\iff x^2+2x+1 < x^2+6x+9 \iff -2 < x. \end{aligned}$$

Ejercicio 4. ¿Para qué valores de x se cumple la desigualdad $x^2-(a+b)x+ab<0$?

Solución 4. $0 > x^2-(a+b)x+ab = (x-a)(x-b) \iff x \in]\min\{a,b\}, \max\{a,b\}[$.

2 Funciones elementales

Ejercicio 5. Calcula el dominio de las siguientes las funciones:

a) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$
b) $y = \log\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}\right)$
c) $y = \sqrt{\frac{x}{1-|x|}}$
d) $y = \tan\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$
e) $y = \log(\operatorname{sen}(x))$
f) $y = \sqrt{\log(\operatorname{sen}(x))}$

Solución 5.

a) El dominio es $]-\infty,-2[\cup[2,+\infty[$.

b) El dominio es $\mathbb{R}\setminus[2,3]$.

c) El dominio es $]-\infty,-1[\cup[0,1[$.

d) El dominio es $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{4}+k\pi\colon k\in\mathbb{Z}\right\}$

e) El dominio es $\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi,(2k+1)\pi[$.

f) El dominio es $\left\{\frac{\pi}{2}+2k\pi\colon k\in\mathbb{Z}\right\}$.

Ejercicio 6. Si $f(x)=1/x$ y $g(x)=1/\sqrt{x}$, ¿cuáles son los dominios naturales de f, g, $f+g$, $f\cdot g$ y de las composiciones $f\circ g$ y $g\circ f$?

Solución 6.

a) El dominio de f es $\mathbb{R}^*$.

b) El dominio de g es $\mathbb{R}^+$.

c) El dominio de $f+g$ es $\mathbb{R}^+$.

d) El dominio de $f\circ g$ es $\mathbb{R}^+$.

e) El dominio de $g\circ f$ es $\mathbb{R}^+$.

Ejercicio 7. Estudia si son pares o impares las siguientes funciones:

a) $f(x)=|x+1|-|x-1|$
b) $f(x)=\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$
c) $f(x)=e^x+e^{-x}$
d) $f(x)=e^x-e^{-x}$
e) $f(x)=\operatorname{sen}(|x|)$
f) $f(x)=\cos(x^3)$

Solución 7.

a) $f(x) = |x+1| - |x-1|$ es impar.

b) $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ es impar.

c) $f(x) = e^x + e^{-x}$ es par.

d) $f(x) = e^x - e^{-x}$ es impar.

e) $f(x) = \operatorname{sen}(x^2)$ es par.

f) $f(x) = \cos(x^3)$ es par.

Ejercicio 8. ¿Para qué números reales es cierta la desigualdad $e^{3x+8}(x+7) > 0$?

Solución 8. La desigualdad es cierta si $x > -7$.

Ejercicio 9. Comprueba que la igualdad $a^{\log(b)} = b^{\log(a)}$ es cierta para cualquier par de números positivos a y b.

Solución 9. Tomando logaritmos en la primera parte de la expresión:

$$\log\left(a^{\log(b)}\right) = \log(b)\,\log(a)$$

y, haciendo lo mismo en la segunda parte:

$$\log\left(b^{\log(a)}\right) = \log(a)\,\log(b).$$

Por tanto, por la inyectividad de la función logaritmo, tendríamos que ambas expresiones coinciden; es decir:

$$\log\left(a^{\log(b)}\right) = \log\left(b^{\log(a)}\right) \implies a^{\log(b)} = b^{\log(a)}$$

Ejercicio 10. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)}.$$

Solución 10. Aplicando la definición de la función logaritmo con otra base distinta del número e, tenemos que:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\frac{\log(a)}{\log(x)}} = \frac{1}{\frac{\log(a)}{\log b}} + \frac{1}{\frac{\log(a)}{\log(c)}} + \frac{1}{\frac{\log(a)}{\log(d)}}.$$

Por tanto

$$\frac{\log(x)}{\log(a)} = \frac{\log(b)}{\log(a)} + \frac{\log(c)}{\log(a)} + \frac{\log(d)}{\log(a)} = \frac{\log(bcd)}{\log(a)}$$

Entonces, igualando numeradores y utilizando la inyectividad de la función logaritmo nuevamente:

$$\log(x) = \log(bcd) \implies x = bcd.$$

Ejercicio 11. ¿Para qué valores de x se cumple que $\log(x-1)(x-2) = \log(x-1) + \log(x-2)$?

Solución 11. En primer lugar, para que el primer miembro de esta identidad tenga sentido, ha de verificarse que $(x-1)(x-2) > 0$, es decir, que $x < 1$ o que $x > 2$. Entonces, partiendo de esa premisa, descomponemos el estudio en dos casos:

a) Si $x < 1$, entonces:

$$\log(x-1)(x-2) = \log|\,(x-1)(x-2)\,| = \log|x-1| + \log|x-2| = \log(1-x) + \log(2-x)$$

b) Si $x > 2$, entonces la fórmula planteada sí es correcta, puesto que las expresiones $x-1$ y $x-2$ son ambas positivas.

Si pretendemos una igualdad que sea correcta en cualquier caso (siempre que $x \neq 1$ y $x \neq 2$) habría que escribirla así:

$$\log|\,(x-1)(x-2)\,| = \log|x-1| + \log|x-2|$$

Ejercicio 12. Prueba que $\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) = 0$.

Solución 12. Aplicando las propiedades del logaritmo tenemos que:

$$\begin{aligned}\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) + \log\left(\sqrt{1+x^2}-x\right) &= \log\left(\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\left(\sqrt{1+x^2}-x\right)\right)\\ &= \log\left(1+x^2-x^2\right) = \log(1) = 0.\end{aligned}$$

Ejercicio 13. Resuelve la ecuación $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Solución 13. Tomamos logaritmos en ambos miembros de la ecuación:

$$\begin{aligned}x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x &\iff \log\left(x^{\sqrt{x}}\right) = \log\left(\sqrt{x}^x\right) \iff \sqrt{x}\log(x) = x\log(\sqrt{x})\\ &\iff \sqrt{x}\log(x) = \frac{x}{2}\log(x) \iff \log(x)\left(\sqrt{x}-\frac{x}{2}\right) = 0.\end{aligned}$$

Para que el producto valga cero, alguno de los dos factores tiene que ser cero. La primera solución que tenemos es $x = 1$, obtenida de resolver $\log(x) = 0$. Por otra parte, tenemos que resolver la ecuación:

$$\sqrt{x} - \frac{x}{2} = 0 \implies 2\sqrt{x} = x \implies 4x = x^2 \implies x(x-4) = 0$$

Por tanto, y como $x \neq 0$, tendremos que $x = 4$. En resumen, la ecuación planteada tiene dos soluciones: $x = 1$ y $x = 4$.

Ejercicio 14. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $a^{\log(\log a)/\log a}$,

b) $\log_a\left(\log_a(a^{a^x})\right)$.

Solución 14.

a) Tomamos logaritmos y nos queda:

$$\log\left(a^{\log(\log a)/\log a}\right) = \frac{\log(\log(a))}{\log(a)}\log(a) = \log(\log(a))$$

Por tanto, por la inyectividad de la función logaritmo:

$$a^{\log(\log a)/\log a} = \log(a)$$

b) Utilizamos la definición de logaritmo en base a:

$$\log_a\left(\log_a(a^{a^x})\right) = \frac{\log\left(\frac{\log(a^{a^x})}{\log(a)}\right)}{\log(a)} = \frac{\log\left(a^x\,\frac{\log(a)}{\log(a)}\right)}{\log(a)} = \frac{\log(a^x)}{\log(a)} = x\,\frac{\log(a)}{\log(a)} = x$$

Ejercicio 15. Comprueba que si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, entonces $f \circ f \circ f(x) = x$.

Solución 15.

$$(f \circ f \circ f)(x) = (f \circ f)\left(\frac{1}{1-x}\right) = f\left(\frac{1}{1-\frac{1}{1-x}}\right) = f\left(\frac{x-1}{x}\right) = \frac{1}{1-\frac{x-1}{x}} = x.$$

Ejercicio 16. Calcula la inversa de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$
b) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

Solución 16.

a)

$$\begin{aligned} y = \frac{e^x}{1+e^x} &\iff (1+e^x)y = e^x \\ &\iff y = e^x(1-y) \\ &\iff e^x = \frac{y}{1-y} \\ &\iff x = \log\left(\frac{y}{1-y}\right) = \log(y) - \log(1-y). \end{aligned}$$

Por tanto, $f^{-1}(y) = \log(y) - \log(1-y)$.

b) $y = \sqrt[3]{1-x^3} \iff 1 - x^3 = y^3 \iff 1 - y^3 = x^3 \iff x = \sqrt[3]{1-y^3}$. Por tanto $f = f^{-1}$.

Ejercicio 17. ¿Hay algún valor de x e y para los que se cumpla que $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$?

Solución 17. Dado que estamos con números mayores o iguales que cero, elevamos al cuadrado

$$\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y} \iff x + y = x + y + 2\sqrt{x}\sqrt{y} \iff 2\sqrt{xy} = 0,$$

lo que ocurre si, y sólo si, x o y son cero.

Ejercicio 18. ¿Hay algún valor de x e y para los que se cumpla que $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?

Solución 18. En primer lugar, obsérvese que x e y tienen que ser distintos de cero. Desarrollemos la identidad

$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \iff \frac{1}{x+y} = \frac{x+y}{xy} \iff (x+y)^2 = xy$$

(observa que x e y tienen el mismo signo al ser su producto un número positivo)

$$\iff x^2 + y^2 + 2xy = xy \iff x^2 + y^2 = -xy,$$

lo que no puede ocurrir nunca: $x^2 + y^2$ es positivo y $-xy$, como acabamos de decir, es negativo. En consecuencia, la igualdad del ejercicio no se cumple *nunca*.

Ejercicio 19. Estudia si son periódicas y cuál es el periodo de las siguientes funciones:

a) $2\cos(3x)$,
b) $4\,\mathrm{sen}(\pi x)$,
c) $3\,\mathrm{sen}(5x/8)$,
d) $|\,\mathrm{sen}(x)\,| + |\cos(x)\,|$.

Solución 19.

a) La función $f(x) = 2\cos(3x)$ es $2\pi/3$-periódica:

$$f\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\cos\left(3\left(x + \frac{2\pi}{3}\right)\right) = 2\cos\left(3x + 2\pi\right) = 2\cos(3x) = f(x).$$

b) La función $f(x) = 4\,\mathrm{sen}(\pi x)$ es 2-periódica.

c) La función $f(x) = 3\,\mathrm{sen}(5x/8)$ es $16\pi/5$-periódica.

d) La función $f(x) = |\,\mathrm{sen}(x)\,| + |\cos(x)\,|$ es $\pi/2$-periódica:

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \left|\,\mathrm{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |-\mathrm{sen}(x)\,| + |\cos(x)\,| = f(x).$$

Ejercicio 20. Calcula el valor de $\mathrm{sen}(7\pi/12)$ y $\cos(\pi/12)$.

Solución 20. Es fácil comprobar que

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} + \frac{3\pi}{12} = \frac{7\pi}{12}$$

y que

$$\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} = \frac{4\pi}{12} - \frac{3\pi}{12} = \frac{\pi}{12}.$$

Aplicamos ahora las formulas de adición:

$$\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Análogamente,

$$\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + \mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

Resumiendo, $\mathrm{sen}(7\pi/12) = \cos(\pi/12) \approx 0.96592$.

Ejercicio 21. Discute si son ciertas las siguientes identidades:

a) $\arccos(\cos(\pi/4)) = \pi/4$,
b) $\mathrm{arcsen}(\mathrm{sen}(10)) = 10$,
c) $\arctan(\tan(3\pi/2)) = 3\pi/2$,
d) $\arccos(\cos(x)) = x$.

Solución 21.

a) Verdadera.

b) Falsa.

c) Falsa.

d) Es cierta únicamente para $x \in [0, \pi]$.

.

Ejercicio 22. Usa las fórmulas de adición para expresar $\tan(x+y)$ en términos de $\tan(x)$ y $\tan(y)$.

Solución 22.

$$\begin{aligned}\tan(x+y) &= \frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)} = \frac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)+\operatorname{sen}(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)-\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)}\\ &= \frac{\frac{\operatorname{sen}(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)}+\frac{\operatorname{sen}(y)\cos(x)}{\cos(x)\cos(y)}}{\frac{\cos(x)\cos(y)}{\cos(x)\cos(y)}-\frac{\operatorname{sen}(x)\operatorname{sen}(y)}{\cos(x)\cos(y)}} = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}.\end{aligned}$$

Ejercicio 23. Comprueba que

$$(\operatorname{sen}(x)+\cos(x))^4 = 1+\operatorname{sen}(2x)+\operatorname{sen}^2(2x).$$

Solución 23. FALTA