Cálculo
1º Grado en Ingeniería Informática
Examen Final
Curso 2017/2018

1. **(1.5 puntos)** Se considera la función definida como $f(x) = \arctan\left(\frac{\log(x)+1}{\log(x)}\right)$.

   a) Determina su dominio natural.

   b) Calcula el conjunto imagen de f.

Solución:

a) Para que la función f esté bien definida, es preciso que x sea positiva y, además, que $\log(x) \neq 0$. Es decir, $x \neq 1$. Por tanto, el dominio natural de f es $\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.

b) La función f es una función continua y derivable (es composición de funciones continuas y derivables. Como el dominio no es un intervalo, para calcular la imagen hacemos la siguiente descomposición:

$$f\left(\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right) = f\left(]0,1[\right) \cup f\left(]1,+\infty[\right).$$

En cada uno de los intervalos en los que hemos descompuesto el dominio, vamos a utilizar las técnicas de cálculo diferencial para determinar monotonía y extremos de la función. Comenzamos calculando la derivada de f:

$$f'(x) = \frac{\frac{\frac{1}{x}\log(x) - \frac{1}{x}(\log(x)+1)}{\log(x)^2}}{1+\left(\frac{\log(x)+1}{\log(x)}\right)^2} = \frac{-1}{x\log(x)^2\left(1+\left(\frac{\log(x)+1}{\log(x)}\right)^2\right)}.$$

Es claro que la derivada de f es siempre negativa, por lo que f es una función decreciente en cada uno de los dos intervalos en los que está definida. Por tanto, el conjunto imagen es:

$$f\left(\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right) = f\left(]0,1[\right) \cup f\left(]1,+\infty[\right) = \left]\lim_{x\to 1_-} f(x), \lim_{x\to 0} f(x)\right[\cup \left]\lim_{x\to +\infty} f(x), \lim_{x\to 1_+} f(x)\right[.$$

Nos ocupamos, entonces, de calcular estos límites:

$$x \to 1_- \Rightarrow \frac{\log(x)+1}{\log(x)} \to -\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1_-} f(x) = -\frac{\pi}{2};$$

$$x \to 0 \Rightarrow \frac{\log(x)+1}{\log(x)} \to 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \frac{\pi}{4};$$

$$x \to +\infty \Rightarrow \frac{\log(x)+1}{\log(x)} \to 1 \Rightarrow \lim_{x\to +\infty} f(x) = \frac{\pi}{4};$$

$$x \to 1_+ \Rightarrow \frac{\log(x)+1}{\log(x)} \to +\infty \Rightarrow \lim_{x\to 1_+} f(x) = \frac{\pi}{2}.$$

Concluimos que:

$$f\left(\mathbb{R}^+ \setminus \{1\}\right) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[.$$

2. **(2.5 puntos)** Calcula:

a) $\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{sen}(x)+e^{-x}\right)^{\frac{\cos(x)}{x^2}}$,

b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt}{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\operatorname{sen}(t)\,dt}$.

Solución:

a) En primer lugar, como el límite de la función que aparece en la base es 1, y el exponente tiende a infinito, se presenta una indeterminación del tipo "1^∞".

Aplicamos la regla del número e. Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{sen}(x)+e^{-x}\right)^{\frac{\cos(x)}{x^2}} = e^L \iff \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x^2}\left(\operatorname{sen}(x)+e^{-x}-1\right) = L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{x^2}\left(\operatorname{sen}(x)+e^{-x}-1\right) = \lim_{x\to 0}\cos(x)\,\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}(x)+e^{-x}-1}{x^2}$$

El primer factor no presenta ninguna indeterminación (vale 1); pero el segundo factor es un límite que presenta una indeterminación del tipo "$0/0$", por lo que aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces consecutivas. Nos queda entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-e^{-x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{-\operatorname{sen}(x)+e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x\to 0} \left(\operatorname{sen}(x)+e^{-x}\right)^{\frac{\cos(x)}{x^2}} = e^{1/2} = \sqrt{e}\ .$$

b) Utilizando el Teorema Fundamental del Cálculo sabemos que, tanto la función $(f(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt)$ es continua y derivable ya que el integrando, e^{t^2}, es una función continua, como la función $(g(x) = \int_0^x e^{t^2}\operatorname{sen}(t)\,dt)$ es continua y derivable ya que el integrando, $e^{t^2}\operatorname{sen}(t)$, es una función continua. Además, gracias también al Teorema Fundamental del Cálculo, podemos calcular la derivada de f y la de g :

$$f'(x) = e^{x^2}$$
$$g'(x) = e^{x^2}\operatorname{sen}(x).$$

Si calculamos el límite en cero del numerador:

$$\lim_{x\to 0} x\,f(x) = 0\cdot\int_0^0 e^{t^2}\,dt = 0$$

Y si calculamos el límite de denominador:

$$\lim_{x\to 0} g(x) = \int_0^0 e^{t^2}\operatorname{sen}(t)\,dt = 0$$

Estamos entonces ante una indeterminación del tipo "$0/0$". Por tanto, aplicando la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+x\,f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}+x\,e^{x^2}}{e^{x^2}\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{e^{x^2}}\,\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x e^{t^2}+x\,e^{x^2}}{\operatorname{sen}(x)}$$

El primer factor no presenta ninguna indeterminación (vale 1); pero el segundo factor es un límite que presenta una indeterminación del tipo "0/0", por lo que aplicamos la regla de L'Hôpital dos veces consecutivas. Nos queda entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\int_0^x e^{t^2} + x\,e^{x^2}}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + e^{x^2} + 2x^2\,e^{x^2}}{\cos(x)} = 2$$

Concluimos entonces que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x \displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,dt}{\displaystyle\int_0^x e^{t^2}\,\operatorname{sen}(t)\,dt} = 2$$

3. **(1.5 puntos)** Calcula, utilizando el polinomio de Taylor, el valor aproximado de $\frac{1}{e}$ con un error menor que 10^{-2}.

   Solución: Consideramos la función $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Lo que se nos pide es el valor aproximado de $f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e}$ con un error menor que 10^{-2}.

   En este caso vamos a calcular el polinomio de Taylor de la función f de orden n y con centro en cero que es :

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

   El valor aproximado que vamos buscando será el obtenido cuando evaluemos en $x = -1$.

   Utilizando la fórmula de Taylor sabemos que existe un valor $c \in]-1,0[$ verificando

$$f(-1) = 1 + (-1) + \frac{1}{2!} + \frac{(-1)}{3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!} + R_n(-1)$$

   donde $R_n(x)$ representa el resto de Taylor de la función exponencial de orden n, y por tanto

$$R_n(-1) = \frac{e^c\,(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \;\Rightarrow\; \text{error} = |R_n(-1)| = \left|\frac{e^c\,(-1)^{n+1}}{(n+1)!}\right| = \frac{e^c}{(n+1)!}.$$

   Entonces, sólo nos queda encontrar el n suficiente para que $|R_n(-1)|$ sea menor que 10^{-2} . Como $c < 0$, entonces $e^c < 1$. Luego, si encontramos el natural suficiente para que

$$\frac{1}{(n+1)!} < 10^{-2} \iff (n+1)! > 100$$

   y para ello basta que $n \geq 4$.

   El valor aproximado que se nos pide es: $\frac{1}{e} \approx 1 - 1 + \frac{1}{2} + \frac{-1}{6} + \frac{1}{24} = 0{,}375$.

4. **(2 puntos)** Calcula:

   a) $\displaystyle\int \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^6(x)}\,dx$,

   b) $\displaystyle\int \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\,dx$.

   Solución:

a) Para calcular la integral dada vamos a calcular, en primer lugar, una primitiva del integrando. Se trata de una primitiva de tipo trigonométrico, donde el integrando es una función racional en $\operatorname{sen}(x)$ y $\cos(x)$, y además, es par en ambas funciones. Por tanto, aplicamos el cambio de variable adecuado a este tipo de integrandos. Esto es, $t = \tan(x)$:

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^2(x)}{\operatorname{sen}^6(x)}\,dx &= \begin{bmatrix} t = \tan(x) \Rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2} \\ \cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \\ \operatorname{sen}(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \end{bmatrix} \\
&= \int \frac{\frac{1}{1+t^2}}{\frac{t^6}{(1+t^2)^3}} \frac{1}{1+t^2}\,dt = \int \frac{1+t^2}{t^6}\,dt = \int \frac{1}{t^6}\,dt + \int \frac{1}{t^4}\,dt \\
&= -\frac{1}{5t^5} - \frac{1}{3t^3} + C = -\frac{1}{5\tan(x)^5} - \frac{1}{3\tan(x)^3} + C.
\end{aligned}$$

b) Aplicamos el método de integración por partes:

$$\begin{aligned}
&\int \log\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) dx = \\
&\begin{bmatrix} u = \log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) dx \Rightarrow du = \frac{1+\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{\frac{x+\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}}}{x+\sqrt{1+x^2}}\,dx = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\ dv = dx \Rightarrow v = x \end{bmatrix} \\
&= x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \\
&= x\log(x+\sqrt{1+x^2}) - \sqrt{1+x^2} + C
\end{aligned}$$

Hay que notar que la integral que nos ha quedado es de tipo inmediato.

5. **(1.25 puntos)** Estudia la convergencia y, en su caso, el límite de la sucesión definida por recurrencia de la siguiente forma:

$$x_1 = -1/3,\ x_{n+1} = \frac{-1}{x_n+2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Solución:

a) Si la sucesión fuera convergente a x entonces

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x, \quad \text{y} \quad \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x;$$

por tanto

$$x = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{-1}{x_n+2} = \frac{-1}{x+2}.$$

Así que si la sucesión tiene límite, éste tiene que verificar la ecuación $x = \frac{-1}{x+2}$. Resolvemos la ecuación:

$$x = \frac{-1}{x+2} \Rightarrow x^2+2x = -1 \Rightarrow x^2+2x+1 = 0 \Rightarrow (x+1)^2 = 0 \Rightarrow x = -1\ .$$

Resumiendo, si existe el límite, este debe ser -1.

b) Empezamos estudiando la monotonía de la sucesión. Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \frac{-1}{-1/3+2} = \frac{-3}{5} \leq \frac{-1}{3} = x_1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona decreciente, comprobamos por inducción que $x_n \geq x_{n+1}$,$\forall n \in \mathbb{N}$:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 \geq x_2$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \geq x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \geq x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$\begin{aligned} x_n \geq x_{n+1} &\Rightarrow\ 2+x_n \geq 2+x_{n+1} \text{ (es cierto ya que sumamos 2 a ambos miembros)} \\ &\Rightarrow\ \frac{1}{2+x_n} \leq \frac{1}{2+x_{n+1}} \text{ (es cierto ya que invertimos ambos miembros)} \\ &\Rightarrow\ \frac{-1}{2+x_n} \geq \frac{-1}{2+x_{n+1}} \text{ (es cierto ya que cambiamos el signo a ambos miembros)} \\ &\Rightarrow\ x_{n+1} \geq x_{n+2}\ . \end{aligned}$$

Por tanto, la sucesión es monótona decreciente.

c) Al ser decreciente, ya sabemos que la sucesión está acotada superiormente por el $x_1 = -1/3$. Veamos ahora que la sucesión está minorada por -1. Lo vamos a hacer por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = -1/3 \geq -1$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n \geq -1$.
- Comprobamos que $x_{n+1} \geq -1$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n \geq -1 \Rightarrow 2+x_n \geq 1 \Rightarrow \frac{1}{x_n+2} \leq 1 \Rightarrow \frac{-1}{x_n+2} \geq -1 \Rightarrow x_{n+1} \geq -1.$$

Concluimos entonces afirmando que, en efecto, está minorada por -1.

En resumen, hemos demostrado que la sucesión es monótona y acotada y, por tanto, convergente. El posible límite que habíamos calculado ($x = -1$) es, de hecho, el límite de la sucesión.

6. **(1.25 punto)** Estudia la convergencia de la serie $\sum \left(1 + \frac{1}{\log(n^2)}\right)^{n\log(n)}$.

Solución: Aplicamos el criterio de la raíz.

$$\sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{\log(n^2)}\right)^{n\log(n)}} = \left(1+\frac{1}{\log(n^2)}\right)^{\frac{n\log(n)}{n}} = \left(1+\frac{1}{\log(n^2)}\right)^{\log(n)}$$

Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo "1^∞"; por tanto, aplicamos la regla del número e:

$$\begin{aligned} (\log(n))\left[1+\frac{1}{\log(n^2)}-1\right] &= (\log(n))\left[\frac{1}{\log(n^2)}\right] \\ &= \frac{\log(n)}{\log(n^2)} = \frac{\log(n)}{2\log(n)} = \frac{1}{2} \xrightarrow{n\to\infty} 1/2 \end{aligned}$$

Con lo que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(1+\frac{1}{\log(n^2)}\right)^{n\log(n)}} = \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{\log(n^2)}\right)^{\log(n)} = e^{1/2} > 1,$$

de lo que se deduce que la serie dada es divergente.

Granada, a 17 de enero de 2018