

Funciones elementales

1 Números reales

Ejercicio 1. Calcula para qué valores de x se verifica que $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$.

Ejercicio 2. Encuentra aquellos valores de x que verifican que:

- | | |
|--|-------------------------------|
| a) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$, | d) $x^2 \leq x$, |
| b) $x^2 - 5x + 9 > x$, | e) $x^3 \leq x$, |
| c) $x^3(x-2)(x+3)^2 < 0$, | f) $x^2 - 3x - 2 < 10 - 2x$. |

Ejercicio 3. Discute para qué valores de x se verifica que:

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| a) $ x-1 x+2 = 3$, | c) $ x-1 + x+1 < 1$, |
| b) $ x^2 - x > 1$, | d) $ x+1 < x+3 $. |

Ejercicio 4.

- Calcula para qué valores de x se verifica que $x^4 - 2x^2 > x^2 - 2$.
- Calcula para qué valores de x se verifica que $\frac{x^2-4x-2}{x^3+1} > 0$.
- Calcula para qué valores de x se verifica la desigualdad $\frac{1-2x}{x^2-4} > \frac{1}{2}$.
- Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $|x-6| (1+|x-3|) \geq 1$.
- Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\frac{3-x}{x+4} < \frac{x+2}{2x-3}$.
- Calcula para qué valores de $x \in \mathbb{R}$ se verifica que $\left| \frac{x^3-5}{x^2-2x-3} \right| \leq 1$.

Ejercicio 5. ¿Para qué valores de x se cumple la desigualdad $x^2 - (a+b)x + ab < 0$?

2 Funciones elementales

Ejercicio 6. Calcula el dominio de las siguientes las funciones:

- | | |
|---|---|
| a) $y = \sqrt{\frac{x-2}{x+2}}$ | d) $y = \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ |
| b) $y = \log\left(\frac{x^2-5x+6}{x^2+4x+6}\right)$ | e) $y = \log(\sin(x))$ |
| c) $y = \sqrt{\frac{x}{1- x }}$ | f) $y = \sqrt{\log(\sin(x))}$ |

Ejercicio 7. Si $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/\sqrt{x}$, ¿cuáles son los dominios naturales de f , g , $f+g$, $f \cdot g$ y de las composiciones $f \circ g$ y $g \circ f$?

Ejercicio 8. Estudia si son pares o impares las siguientes funciones:

- | | |
|--|--------------------------|
| a) $f(x) = x+1 - x-1 $ | d) $f(x) = e^x - e^{-x}$ |
| b) $f(x) = \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ | e) $f(x) = \sin(x)$ |
| c) $f(x) = e^x + e^{-x}$ | f) $f(x) = \cos(x^3)$ |

Ejercicio 9. ¿Para qué números reales es cierta la desigualdad $e^{3x+8}(x+7) > 0$?

Ejercicio 10. Comprueba que la igualdad $a^{\log(b)} = b^{\log(a)}$ es cierta para cualquier par de números positivos a y b .

Ejercicio 11. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)}.$$

Ejercicio 12. ¿Para qué valores de x se cumple que $\log(x-1)(x-2) = \log(x-1) + \log(x-2)$?

Ejercicio 13. Prueba que $\log(x + \sqrt{1+x^2}) + \log(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$.

Ejercicio 14. Resuelve la ecuación $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.

Ejercicio 15. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $a^{\log(\log a) / \log a},$

b) $\log_a(\log_a(a^{a^x})).$

Ejercicio 16. Comprueba que si $f(x) = \frac{1}{1-x}$, entonces $f \circ f \circ f(x) = x$.

Ejercicio 17. Calcula la inversa de las siguientes funciones

a) $f(x) = \sqrt[3]{1-x^3}$

b) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$

Ejercicio 18. ¿Hay algún valor de x e y para los que se cumpla que $\sqrt{x+y} = \sqrt{x} + \sqrt{y}$?

Ejercicio 19. ¿Hay algún valor de x e y para los que se cumpla que $\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$?

Ejercicio 20. Estudia si son periódicas y cuál es el periodo de las siguientes funciones:

a) $2 \cos(3x),$

c) $3 \sin(5x/8),$

b) $4 \sin(\pi x),$

d) $|\sin(x)| + |\cos(x)|.$

Ejercicio 21. Calcula el valor de $\sin(7\pi/12)$ y $\cos(\pi/12)$.

Ejercicio 22. Discute si son ciertas las siguientes identidades:

a) $\arccos(\cos(\pi/4)) = \pi/4,$

c) $\arctan(\tan(3\pi/2)) = 3\pi/2,$

b) $\arcsen(\sin(10)) = 10,$

d) $\arccos(\cos(x)) = x.$

Ejercicio 23. Usa las fórmulas de adición para expresar $\tan(x+y)$ en términos de $\tan(x)$ y $\tan(y)$.

Ejercicio 24. Comprueba que

$$(\sin(x) + \cos(x))^4 = 1 + 2 \sin(2x) + \sin^2(2x).$$