
Integración

1 Teorema Fundamental del Cálculo

Ejercicio 1. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_a^x \operatorname{sen}^3(t) dt,$

b) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)} dt,$

c) $F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2(t)} dt.$

Ejercicio 2. Halla las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_0^{x^2} \operatorname{sen}(\log(1+t)) dt,$

b) $F(x) = \int_{x^2}^1 \operatorname{sen}^3(t) dt,$

c) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos^3(t) dt.$

E Ejercicio 3. Estudia el crecimiento y decrecimiento de la función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2} dt.$$

Como consecuencia, estudiar los extremos relativos de dicha función.

E Ejercicio 4. Calcula el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_{x^2+x}^{\operatorname{sen}(x)} e^{-t^2} dt}{\operatorname{sen}^2(x)}.$$

E Ejercicio 5. Calcula el máximo absoluto de la función $f : [1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{x-1} (e^{-t^2} - e^{-2t}) dt.$$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} - 1)$, calcula el mínimo absoluto de f .

Ejercicio 6. Calcula el siguiente límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{2x} \operatorname{sen}(\operatorname{sen}(t)) dt}{x^2}.$$

Ejercicio 7. Se considera la función $f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2} dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

a) Encuentra los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de la función f en \mathbb{R} .

b) Calcula los extremos relativos de f .

c) Calcula $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{\operatorname{sen}(x^3 - x^2)}$.

2 Cálculo de primitivas

2.1 Integrales inmediatas y cambio de variable

Ejercicio 8. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int 5x^6 dx$

d) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}$

f) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$

b) $\int x(x+1)(x-2) dx$

e) $\int (a^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{2}{3}})^3 dx$

c) $\int (2+3x^3)^2 dx$

Ejercicio 9. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\log(x)}}{x} dx$

b) $\int \frac{dx}{e^x+1}$

c) $\int x(2x+5)^{10} dx$

2.2 Integración por partes

Ejercicio 10. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \log(x) dx$

d) $\int x \operatorname{sen}(x) dx$

g) $\int x \operatorname{sen}(x) \cos(x) dx$

b) $\int \arctan(x) dx$

e) $\int x e^{-x} dx$

c) $\int \operatorname{arcsen}(x) dx$

f) $\int x^2 e^{3x} dx$

2.3 Integración de funciones racionales

Ejercicio 11. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$

c) $\int \frac{dx}{x(x+1)^2}$

e) $\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)}$

b) $\int \frac{5x^3+2}{x^3-5x^2+4x} dx$

d) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$

Ejercicio 12. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{dx}{x^3+1}$
 b) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(x^2+1)^2}$

c) $\int \frac{dx}{(x^4-1)^2}$

2.4 Integración de funciones trigonométricas

Ejercicio 13. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \cos^3(x)dx$

e) $\int \cos^6(3x)dx$

b) $\int \sin^5(x)dx$

f) $\int \frac{\cos^5(x)}{\sin^3(x)}dx$

c) $\int \sin^2(x) \cos^3(x)dx$

d) $\int \sin^2(x) \cos^2(x)dx$

Ejercicio 14. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)}dx$

d) $\int \frac{dx}{3 \sin^2(x) + 5 \cos^2(x)}$

b) $\int \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)}dx$

e) $\int \frac{\sin(2x)}{1+\sin^2(x)}dx$

c) $\int \frac{dx}{1+\cos^2(3x)}$

