Cálculo
1ºD Grado en Ingenieríaa Informáica
Primer Parcial
Curso 2019/2020

1. *a*) **(1 punto)** Determina el número de soluciones de la ecuación

$$\log(x^2+1) = 5 - x^2.$$

b) **(1 punto)** Calcula los números reales que satisfacen la siguiente inecuación:

$$\left|x^2 - 2x - 8\right| < |x-4| \ .$$

Solución:

a) Para determinar el número de soluciones de la ecuación, consideramos la función

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = \log(x^2+1) - 5 + x^2 \ .$$

De esta forma, determinar el número de soluciones de la ecuación es equivalente a determinar el número de ceros de f.

Se trata de una función derivable, además de par, así que vamos a calcular sus puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{2x}{x^2+1} + 2x = \frac{2x + 2x(x^2+1)}{(x+1)^2} = \frac{2x(x^2+2)}{(1+x^2)^2}$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Gracias al teorema de Rolle, podemos afirmar que f tendrá, a lo sumo, dos ceros.

Analizamos los intervalos de monotonía de la función:

- Si $x < 0 \ \Rightarrow \ f'(x) < 0$, por lo que f es estrictamente decreciente.
- Si $x > 0 \ \Rightarrow \ f'(x) > 0$, por lo que f es estrictamente creciente.

En el punto cero se presenta un mínimo relativo de la función, y también, el mínimo absoluto de la misma. Además, este valor de mínimo absoluto es $f(0) = -5$.

Estudiamos también el comportamiento de la función en los extremos del dominio:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \ ,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

Obsérvese que, gracias a la simetría par de f, ambos límites son iguales. Por tanto, la función pasa de ser positiva, cuando la variable tiende a $-\infty$, a negativa en el cero, y usando el teorema de Bolzano en $(-\infty, 0)$ concluimos que hay un cero de f en dicho intervalo. Por la simetría par de f deducimos lo mismo en $(0, +\infty)$, por lo que, en total, la función f tiene dos ceros. O, lo que es lo mismo, el número de soluciones de la ecuación planteada es dos.

b) Factorizamos la expresión que está dentro del valor absoluto:

$$\left|x^2 - 2x - 8\right| < |x-4| \iff |(x+2)(x-4)| < |x-4|$$

(simplificamos $|x-4|$, siempre que $x \neq 4$)

$$\iff |x+2| < 1 \iff -1 < x+2 < 1 \iff -3 < x < -1$$

Por tanto, los números reales que satisfacen la inecuación son los que pertenecen al conjunto $(-3, -1)$.

2. *a*) **(2 puntos)** Sea $f\colon \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = \frac{e^{|x|}}{x}$. Calcula su imagen.

b) **(1 punto)** Comprueba que $e^{|x|-1} \geq |x|$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Solución:

a) La función dada se puede escribir como una función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & \text{si } x \geq 0 \\ \frac{e^{-x}}{x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se trata de una función continua y derivable en $\mathbb{R}^*$. Además, es impar, ya que $f(-x) = -f(x)$.

Comenzamos con la derivada de f:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}, & \text{si } x > 0 \\ \frac{-e^{-x}x - e^{-x}}{x^2} = \frac{-e^{-x}(x+1)}{x^2}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Vamos ahora a analizar si la función tiene puntos críticos:

- Si $x < 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = -1$, y por ser impar,
- Si $x > 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \iff x = 1$.

Analizamos los intervalos de monotonía de la función sólamente en $\mathbb{R}^+$, y por simetría los tendremos en los negativos:

- Si $0 < x < 1 \Rightarrow f'(x) < 0$, por lo que f es estrictamente decreciente.
- Si $x > 1 \Rightarrow f'(x) > 0$, por lo que f es estrictamente creciente.

Por la simetría impar:

- Si $x < -1 \Rightarrow f'(x) > 0$, por lo que f es estrictamente creciente.
- Si $-1 < x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, por lo que f es estrictamente decreciente.

Entonces, en el punto $x = -1$ la función alcanza un máximo relativo ($f(-1) = -e$). Y en el punto $x = 1$ la función alcanza un mínimo relativo ($f(1) = e$). Además, el comportamiento en $+\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty \text{ (por la escala de infinitos).}$$

Y en $-\infty$, por la simetría impar:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty \,.$$

También nos hará falta estudiar el comportamiento en cero de la función:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x}{x} = +\infty \,.$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{e^{-x}}{x} = -\infty \,.$$

Por tanto, el conjunto imagen es: $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_0^-) \cup f(\mathbb{R}_0^+) = (-\infty, -e] \cup [e, +\infty)$.

b) Con los resultados del apartado anterior (en el punto 1 se alcanza el mínimo en los positivos, y en el punto -1 el máximo en los negativos) tenemos que:

$$f(x) \geq f(1) = e \ , \forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$f(x) \leq f(-1) = -e \ , \forall x \in \mathbb{R}^-$$

Si utlizamos el valor absoluto, podemos unir las dos desigualdades anteriores; esto es :

$$|f(x)| \geq f(1) = e \ , \forall x \in \mathbb{R}^* \iff \frac{e^{|x|}}{|x|} \geq e \ , \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Por tanto:

$$\frac{e^{|x|}}{e} \geq |x| \ , \forall x \in \mathbb{R}^* \iff e^{|x|-1} \geq |x| \ , \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Por último, sólo hay que comprobar que para $x = 0$ la desigualdad es cierta: $e^{-1} = \frac{1}{e} \geq 0$; por lo que se deduce:

$$e^{|x|-1} \geq |x| \ , \ \forall x \in \mathbb{R} \ .$$

3. Calcula los límites siguientes:

a) **(1 punto)** $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x - \operatorname{sen}(x)}{x + \cos(x)}$;

b) **(2 puntos)** $\lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{e^x - 1}{\operatorname{sen}(x)} \right)^{1/x}$.

Solución:

a) Se presenta una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$", por lo que aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x + \cos(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \cos(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)}$$

Pero nos encontramos con un límite que no existe, y, por tanto, no podemos decir nada sobre el límite inicial. En cambio, si volvemos al límite inicial, y dividimos numerador y denominador por x, se resuelve fácilmente:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x - \operatorname{sen}(x)}{x + \cos(x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{1 - \frac{\operatorname{sen}(x)}{x}}{1 + \frac{\cos(x)}{x}} = 1$$

ya que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\cos(x)}{x} = 0$, aplicando que el producto de una función acotada (seno y coseno) por una que tiende a cero ($\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$), también tiende a cero. (El ejercicio 20-(c) de la relación de Derivadas es similar).

b) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión ya que presenta una indeterminación del tipo "$0/0$". Parta resolver dicha indeterminación, aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x \to 0} \frac{e^x}{\cos(x)} = 1,$$

y como, $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = \infty$, el límite pedido presenta una indeterminación del tipo "1^∞".
Aplicamos ahora la regla del número e. Esto es:

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{\operatorname{sen}(x)}\right)^{1/x} = e^L \iff \lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{e^x-1}{\operatorname{sen}(x)} - 1\right) = L\ .$$

Simplificamos la expresión y aplicamos la regla de L'Hôpital, ya que presenta una indeterminación del tipo "$0/0$". Nos queda entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(\frac{e^x-1}{\operatorname{sen}(x)} - 1\right) = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-1-\operatorname{sen}(x)}{x\operatorname{sen}(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x-\cos(x)}{\operatorname{sen}(x)+x\cos(x)}$$

Volvemos a aplicar la regla de L'Hôpital, ya que sigue habiendo indeterminación:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x+\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)+\cos(x)-x\operatorname{sen}(x)} = \frac{1}{2}\ .$$

Por tanto, $\lim_{x\to 0} \left(\frac{e^x-1}{\operatorname{sen}(x)}\right)^{1/x} = e^{1/2} = \sqrt{e}\ .$

4. El polinomio de Taylor de una función f de orden 2 y de centro 0 es:

$$P(x) = 1 - x^2\ .$$

   a) **(1.5 puntos)** Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de $g(x) = 1 + f(x)^2$.

   b) **(0.5 puntos)** ¿Tiene f un extremo relativo en 0? ¿Y la función g?

Solución:

a) El polinomio dado es el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de la función f; es decir:

$$1 - x^2 = P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

Igualando coeficiente a coeficiente obtenemos:

$$f(0) = 1$$
$$f'(0) = 0$$
$$\frac{f''(0)}{2!} = -1 \Rightarrow f''(0) = -2$$

Para calcular el polinomio de Taylor de la función g en $a = 0$ y de orden 2 tenemos que calcular las derivadas sucesivas de g en el cero, hasta la de orden 2. Es decir,

$$g(x) = 1 + f(x)^2 \Rightarrow g(0) = 2$$
$$g'(x) = 2f(x)f'(x) \Rightarrow g'(0) = 0$$
$$g''(x) = 2f'(x)f'(x) + 2f(x)f''(x) \Rightarrow g''(0) = -4$$

Entonces, el polinomio de Taylor pedido es:

$$T_2(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 = 2 - 2x^2$$

b) La función f tiene un máximo relativo en el cero, ya que $f'(0) = 0$ y $f''(0) = -2 < 0$; así como la función g, ya que $g'(0) = 0$ y $g''(0) = -4 < 0$.

Granada, 22 de noviembre de 2019