Cálculo
1ºA Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial
Curso 2019/2020

1. *a*) **(1 punto)** Calcula los números reales que satisfacen la siguiente inecuación:

$$\left|\frac{x^2+x-2}{x+2}\right| \leq 8 \ ,$$

   b) **(2 puntos)** Comprueba que $\frac{x}{x+1} \leq \log(x+1)$, $\forall x > -1$.

Solución:

a) Factorizamos la expresión que está dentro del valor absoluto:

$$\left|\frac{x^2+x-2}{x+2}\right| \leq 8 \iff \left|\frac{(x+2)(x-1)}{x+2}\right| \leq 8$$

$$\iff |x-1| \leq 8 \iff -8 \leq x-1 \leq 8 \iff -7 \leq x \leq 9$$

Pero hay que tener en cuenta que la solución $x=-2$ hay que descartarla; por tanto, los números reales que satisfacen la inecuación son los que pertenecen al conjunto

$$[-7,9] \setminus \{-2\} \ .$$

b) Para comprobar la desigualdad, consideramos la función

$$f\colon (-1,+\infty) \to \mathbb{R} \ , \ f(x) = \log(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

De esta forma, comprobar la desigualdad es equivalente a comprobar que $f(x) \geq 0$,$\forall x \in (-1,+\infty)$.

Se trata de una función derivable, así que vamos a calcular sus puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1+x-1}{(1+x^2)^2} = \frac{x}{(x+1)^2}$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \iff x = 0$. Analizamos los intervalos de monotonía de la función:

- Si $x \in (-1,0) \Rightarrow f'(x) < 0$, por lo que f es estrictamente decreciente.
- Si $x \in (0,+\infty) \Rightarrow f'(x) > 0$, por lo que f es estrictamente creciente.

En el punto cero se presenta un mínimo relativo de la función, y también, el mínimo absoluto de la misma. Se tiene, entonces, que:

$$f(x) \geq f(0) = 0 \ ,\forall x \in (-1,+\infty).$$

y la desigualdad planteada es cierta.

2. **(2 puntos)**

   a) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida como $f(x) = x^2 e^{|x|}$. Calcula su imagen.

   b) Determina el número de soluciones de la ecuación $f(x) = 7$.

Solución:

a) La función dada se puede escribir como una función a trozos:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 e^x, & \text{si } x \geq 0 \\ x^2 e^{-x}, & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Se trata de una función continua y derivable en $\mathbb{R}^*$, en principio. Comenzamos con la derivada de f en los puntos distintos de cero:.

$$f'(x) = \begin{cases} 2xe^x + x^2 e^x = xe^x(2+x), & \text{si } x > 0 \\ 2xe^{-x} - x^2 e^{-x} = xe^{-x}(2-x), & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Vamos ahora a analizar si la función es derivable en cero. Para ello, calculamos los límites laterales de la derivada:

$$\lim_{x \to 0^+} f'(x) = 0 = \lim_{x \to 0^-} f'(x) \Rightarrow \exists f'(0) = 0$$

Sólo hay un punto crítico ($x = 0$), ya que la derivada no se anula ni en los negativos, ni en los positivos.

Analizamos los intervalos de monotonía de la función:

- Si $x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0$, por lo que f es estrictamente decreciente.
- Si $x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$, por lo que f es estrictamente creciente.

Entonces, en el punto $x = 0$ la función alcanza un mínimo relativo. Pero al ser el único punto crítico de la función, es su mínimo absoluto. Además, $f(0) = 0$ y, como se trata de una función par ($f(-x) = f(x)$), para calcular la imagen, solo nos queda estudiar el comportamiento de la función en $+\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^2 e^x = +\infty \, .$$

Por tanto, el conjunto imagen es: $f(\mathbb{R}) = f(\mathbb{R}_0^+) = [0, +\infty[$.

b) Para determinar el número de soluciones de $f(x) = 7$, repetimos el estudio, pero ahora para la función $g(x) = f(x) - 7$, y vamos a calcular el número de ceros de g. Esta nueva función tiene la misma derivada de f y su mismo mínimo absoluto en 0. Además:

$$g(0) = f(0) - 7 = -7 < 0$$

El único cero la derivada de g nos asegura, gracias al teorema de Rolle, que la función g tendrá, como mucho, dos ceros.

Por otra parte, el comportamiento en $-\infty$ y en $+\infty$ es análogo al de f (tiende a $+\infty$ en los dos casos). Por tanto, la función pasa de tomar valores positivos, cuando la variable tiende a $-\infty$, a valer $-7 < 0$ en el mínimo. Por el teorema de Bolzano, sabemos que hay un cero antes de $x = 0$. Por otra parte, la función pasa de ser negativa en $x = 0$ a tomar valores positivos cuando x tiende a $+\infty$. Nuevamente, por el teorema de Bolzano, sabemos que g tendrá otro cero después de $x = 0$. Y como sabíamos que, como mucho, podía tener dos ceros, la ecuación dada tiene dos soluciones.

3. Calcula los límites siguientes:

a) **(2 puntos)** $\lim_{x\to 0}\left(\dfrac{3x-3\arctan(x)}{x^3}\right)^{1/x^2}$.

b) **(1 punto)** $\lim_{x\to +\infty}(5^x+x)^{1/x}$

Solución:

a) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión ya que presenta una indeterminación del tipo "0/0". Parta resolver dicha indeterminación, aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x-3\arctan(x)}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{3-\dfrac{3}{1+x^2}}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3+3x^2-3}{1+x^2}}{3x^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x^2}=1,$$

y como, $\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$, el límite pedido presenta una indeterminación del tipo "1^∞". Aplicamos ahora la regla del número e. Esto es:

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{3x-3\arctan(x)}{x^3}\right)^{1/x^2}=e^L \iff \lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{3x-3\arctan(x)}{x^3}-1\right)=L.$$

Para resolver el límite dado, simplificamos la expresión. Por tanto,

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{3x-3\arctan(x)}{x^3}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3x-3\arctan(x)-x^3}{x^5}$$

Y aplicamos la regla de L'Hôpital, ya que presenta una indeterminación del tipo "0/0". Nos queda entonces:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3-\dfrac{3}{1+x^2}-3x^2}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3+3x^2-3-3x^2(1+x^2)}{1+x^2}}{5x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{-3x^4}{5(1+x^2)x^4}=$$

(simplificamos x^4)

$$\lim_{x\to 0}\frac{-3}{5(1+x^2)}=\frac{-3}{5}$$

Por tanto, $\left(\dfrac{3x-3\arctan(x)}{x^3}\right)^{1/x^2}=e^{-3/5}$

b) Se presenta una indeterminación del tipo "∞^0", por lo que aplicamos la fórmula del número e; esto es:

$$(5^x+x)^{1/x}=e^{\frac{1}{x}\log(5^x+x)}$$

Nos dedicamos entonces a calcular $\lim_{x\to +\infty}\dfrac{1}{x}\log(5^x+x)=\lim_{x\to +\infty}\dfrac{\log(5^x+x)}{x}$.
Se presenta ahora una indeterminación del tipo "$\frac{\infty}{\infty}$" y aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log(5^x+x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{5^x\log(5)+1}{5^x+x}$$

(dividimos numerador y denominador por 5^x)

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(5)+1/5^x}{1+x/5^x} = \log(5)$$

donde hemos utilizado la escala de infinitos.

Si volvemos hacia atrás, nos queda:

$$\lim_{x\to+\infty} (5^x+x)^{1/x} = e^{\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\log(5^x+x)} = e^{\log(5)} = 5$$

4. **(2 puntos)** Sea $f(x) = \sqrt{x+1}$.

   a) Calcula el polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de f.

   b) Acota el error que se comete cuando aproximamos el valor $\sqrt{2}$ usando el polinomio de Taylor calculado en el apartado anterior.

Solución:

a) El polinomio de Taylor de orden 2 centrado en el origen de la función f es:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2$$

Calculemos los coeficientes:

$$f(x) = \sqrt{x+1} \;\Rightarrow\; f(0) = 1$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x+1}} = \frac{1}{2}(x+1)^{-1/2} \;\Rightarrow\; f'(0) = \frac{1}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{4}(x+1)^{-3/2} = -\frac{1}{4}\frac{1}{\sqrt{(x+1)^3}} \;\Rightarrow\; f''(0) = -\frac{1}{4}$$

(calculamos f''' porque la usaremos después)

$$f'''(x) = \frac{3}{8}(x+1)^{-5/2} = \frac{3}{8}\frac{1}{\sqrt{(x+1)^5}}$$

Por tanto, el polinomio de Taylor que nos piden es:

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8}$$

b) Sabiendo que la fórmula del resto de Lagrange es:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}$$

para un cierto c entre a y x, siendo a el centro de desarrollo, y x el punto donde se pretende aproximar la función, el error que se comete cuando aproximamos $\sqrt{2}$, es decir, $f(1)$, con el polinomio de Taylor calculado es:

$$\text{error} = |f(1) - P_2(1)| = |R_2(1)| = \left| \frac{f'''(c)}{3!} 1^3 \right| = \frac{3}{8 \cdot 6} \frac{1}{\sqrt{(c+1)^5}} \ ,$$

siendo c un punto que se encuentra en $(0,1)$. Por tanto:

$$0 < c < 1 \ \Rightarrow \ 1 < c+1 < 2 \ \Rightarrow \ 1 < (c+1)^{5/2} < 2 \ \Rightarrow \ \frac{1}{2} < \frac{1}{\sqrt{(c+1)^5}} < 1$$

y de aquí:

$$\text{error} = \frac{3}{8 \cdot 6} \frac{1}{(c+1)^{5/2}} < \frac{3}{8 \cdot 6} = \frac{1}{16} \ ,$$

Granada, 14 de noviembre de 2019