Cállculo

1ºA y 1ºD Grado en Ingeniería Informá¡tica

Segundo Parcial

Curso 2019/2020

1. **(2.5 puntos)** Se considera la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \int_0^{\log(x^2+1)} \arctan(e^t)\, dt$$

   a) Determina los intervalos de monotonía y posibles extremos relativos de f.

   b) Calcula $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\log(x^2+1)}$.

   c) Determina $f(\mathbb{R})$ como consecuencia del apartado anterior.

Solución:

a) La función f es derivable gracias al teorema fundamental del cálculo (es composición de funciones derivables en el dominio dado). Y su derivada es:

$$f'(x) = \arctan(e^{\log(x^2+1)})\, \frac{2x}{x^2+1} = \arctan(x^2+1)\, \frac{2x}{x^2+1}$$

Esta función sólo se anula en $x = 0$, por lo que f puede presentar dos intervalos de monotonía. De hecho:

- Si $x < 0$, se tiene que $f'(x) < 0$, por lo que f es estrictamente decreciente en $\mathbb{R}^-$.
- Si $x > 0$, se tiene que $f'(x) > 0$, por lo que f es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$.

Con todo lo anterior, se deduce que f tiene un mínimo relativo en 0 que, al ser el único punto crítico de la función, es además su mínimo absoluto.

b) El límite propuesto se puede resolver aplicando la Segunda Regla de L'Hôpital, ya que tenemos un cociente de funciones cuyo límite del numerador es desconocido, pero el denominador tiende a infinito. Por tanto, aplicamos dicha regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{\frac{2x}{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\arctan(x^2+1)\,\frac{2x}{x^2+1}}{\frac{2x}{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \arctan(x^2+1) = \frac{\pi}{2}$$

Por tanto, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\log(x^2+1)} = \frac{\pi}{2}$.

c) El límite anterior nos da la siguiente información:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\log(x^2+1)} \log(x^2+1) = +\infty \, .$$

Además, la función f es par, por lo que para calcular la imagen de f nos reducimos a la imagen de $\mathbb{R}_0^+$. El apartado (a) nos asegura la monotonía estricta de la función en los positivos, y de ahí deducimos que:

$$f(\mathbb{R}) = f\left(\mathbb{R}_0^+\right) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)) \, ;$$

y como $f(0) = \int_0^{\log(1)} \arctan(e^t)\, dt = \int_0^0 \arctan(e^t)\, dt = 0$, obtenemos que:

$$f(\mathbb{R}) = f\left(\mathbb{R}_0^+\right) = [f(0), \lim_{x\to+\infty} f(x)) = [0, +\infty) \, .$$

2. **(3 puntos)**

a) Calcula $\int x^2 \arctan(x) \; dx$.

b) Estudia el carácter de la serie $\sum \left(\frac{n^3+n}{(n+1)^3}\right)^{-n^2}$.

c) Estudia el carácter de la serie $\sum \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n-1)}$.

Solución:

a) Aplicamos el método de integración por partes:

$$\begin{aligned}\int x^2 \arctan(x)\, dx &= \begin{bmatrix} u = \arctan(x) \Rightarrow du = \frac{1}{1+x^2}\, dx \\ dv = x^2\, dx \Rightarrow v = \frac{x^3}{3} \end{bmatrix} \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx \, .\end{aligned}$$

La integral que nos queda es de tipo racional. Comenzamos por escribir el integrando haciendo uso del algoritmo de división de polinomios:

$$\frac{x^3}{x^2+1} = x - \frac{x}{x^2+1}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int x^2 \arctan(x)\, dx &= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{1}{3} \int \left(x - \frac{x}{x^2+1}\right) dx \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \int \frac{2x}{x^2+1}\, dx \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan(x) - \frac{x^2}{6} + \frac{1}{6} \log(x^2+1) + C \, .\end{aligned}$$

b) Aplicamos el criterio del cociente. Así, si llamamos $a_n = \dfrac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n-1)}$ tenemos que estudiar el límite del cociente siguiente:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)(2n+2)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n-1)(3n+2)}\,\frac{2\cdot 5\cdot 8\cdot 11\cdots(3n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)} = \frac{2n+2}{3n+2}$$

Y como $\lim\left\{\dfrac{2n+2}{3n+2}\right\} = \dfrac{2}{3} < 1$, se deduce que la serie dada es convergente.

c) Aplicamos el criterio de la raíz:

$$\sqrt[n]{\left(\frac{n^3+n}{(n+1)^3}\right)^{-n^2}} = \left(\frac{n^3+n}{(n+1)^3}\right)^{-n}$$

Esta sucesión presenta una indeterminación del tipo "1^∞"; por tanto, aplicamos la regla del número *e*:

$$\begin{aligned}(-n)\left[\frac{n^3+n}{(n+1)^3}-1\right] &= (-n)\left[\frac{n^3+n-(n+1)^3}{(n+1)^3}\right]\\ &= (-n)\left[\frac{n^3+n-(n^3+3n^2+3n+1)}{(n+1)^3}\right] = \frac{3n^3+2n^2+n}{(n+1)^3} \to 3\end{aligned}$$

Con lo que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n^3+n}{(n+1)^3}\right)^{-n^2}} = e^3 > 1\ ,$$

de lo que se deduce que la serie dada es divergente.

3. **(2.5 puntos)** Se define la sucesión $\{x_n\}$ por recurrencia como:

$$\begin{aligned} x_1 &= 1\\ x_{n+1} &= \sqrt{1+x_n}-1\ ,\ \ \forall n\in\mathbb{N}\end{aligned}$$

a) Comprobar que $\{x_n\}$ es una sucesión monótona.

b) Comprobar que $x_n > 0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$.

c) Calcular, si existe, el límite de $\{x_n\}$.

Solución:

a) Aplicando la fórmula de recurrencia, comprobamos que $x_2 = \sqrt{2}-1 < x_1 = 1$. Para comprobar que la sucesión dada es monótona decreciente, lo vemos por inducción:

- Para $n = 1$, acabamos de ver que $x_1 > x_2$.

- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n > x_{n+1}$.
- Comprobamos que $x_{n+1} > x_{n+2}$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n > x_{n+1} \Rightarrow 1+x_n > 1+x_{n+1} \Rightarrow \sqrt{1+x_n} > \sqrt{1+x_{n+1}}$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+x_n}-1 > \sqrt{1+x_{n+1}}-1 \Rightarrow x_{n+1} > x_{n+2}$$

Por tanto, la sucesión es monótona decreciente.

b) Al ser decreciente, ya sabemos que la sucesión está acotada superiormente por el término x_1. Veamos que está acotada inferiormente por cero. Esto es, que $x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Otra vez lo hacemos por inducción:

- Para $n = 1$, es evidente que $x_1 = 1 > 0$.
- Hipótesis de inducción: Suponemos que $x_n > 0$.
- Comprobamos que $x_{n+1} > 0$. En efecto, si partimos de la hipótesis de inducción:

$$x_n > 0 \Rightarrow 1+x_n > 1 \Rightarrow \sqrt{1+x_n} > 1$$
$$\Rightarrow \sqrt{1+x_n}-1 > 1-1 \Rightarrow x_{n+1} > 0$$

Por tanto, la sucesión dada es monótona y acotada, por lo que entonces es convergente.

c) Para calcular el límite de $\{x_n\}$ partimos de la fórmula de recurrencia y tomamos límite. Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$ y nos queda que $x = \sqrt{1+x}-1$. Resolvemos la ecuación:

$$x+1 = \sqrt{1+x} \Rightarrow (x+1)^2 = 1+x \Rightarrow x^2+x = 0 \Rightarrow x(x+1) = 0$$

Obtenemos dos soluciones: $x = 0$ y $x = -1$, pero descartamos la segunda solución, ya que el límite ha de ser mayor o igual que cero. El motivo es que $1 \geq x_n > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto, $\lim\{x_n\} = 0$.

4. **(2 puntos)** Estudia la convergencia de la siguiente serie y calcula su suma si es convergente:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+2}+4^{n-1}}{7^{n+1}}$$

Solución: La serie planteada es suma de dos series geométricas:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+2}+4^{n-1}}{7^{n+1}} = \frac{1}{7}\left(\sum_{n\geq 1}\left(\frac{-1}{7}\right)^n + \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{4}{7}\right)^n\right) = \frac{1}{7}\left(\sum_{n\geq 1}\left(\frac{-1}{7}\right)^n + \frac{1}{4}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{4}{7}\right)^n\right)$$

Como las razones de cada una de las series geométricas que aparecen verifican que son menores en valor absoluto que 1 ($|\frac{-1}{7}| < 1$ y $|\frac{4}{7}| < 1$), ambas series son convergentes; por tanto, la serie inicial es convergente por ser el producto de una constante $(1/7)$ por una combinación lineal de dos series convergentes. Y para calcular su suma aplicamos la propiedad de la suma de dos series convergentes. Aplicando entonces la fórmula de la suma de una serie geométrica convergente $\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}\right)$, nos queda:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+2}+4^{n-1}}{7^{n+1}} &= \frac{1}{7}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{7}\right)^n + \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n\right] \\
&= \frac{1}{7}\left[\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{7}\right)^n - 1\right) + \frac{1}{4}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{4}{7}\right)^n - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{7}\left[\left(\frac{1}{1+\frac{1}{7}} - 1\right) + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1-\frac{4}{7}} - 1\right)\right] \\
&= \frac{1}{7}\left[\frac{7}{8} - 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{7}{3} - 1\right)\right] = \frac{1}{7}\left[\frac{7}{8} - 1 + \frac{1}{3}\right] = \frac{1}{7}\frac{5}{24} = \frac{5}{168}
\end{aligned}
$$

Granada, 20 de diciembre de 2019