CÁLCULO. GRADO EN INGENIERÍA INFORMÁTICA
EXAMEN FINAL

1. *a*) Demuestra que $\arctan(x) < x$ se cumple para todo $x \in \mathbb{R}^+$.

   b) Demuestra que la sucesión definida por $x_1 = 1$ y

   $$x_{n+1} := \arctan(x_n)$$

   es decreciente y converge hacia 0.

Solución: (Primera versión)

a) Para resolver el apartado *a*), definimos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \arctan(x)$. Lo que tenemos que demostrar es que $f(x) < x$ se cumple para cada $x \in \mathbb{R}^+$, lo cual probaremos haciendo uso del teorema del valor medio. Fijamos $x \in \mathbb{R}^+$. Entonces, el teorema del valor medio nos asegura la existencia de $c \in]0, x[$ de manera que

$$f(x) - f(0) = f'(c)x.$$

Como $f(0) = 0$, el término de izquierda no es más que $f(x)$. Por otra parte, $f'(c) = \frac{1}{1+c^2} < 1$ puesto que $c > 0$. Por otro lado, como $x > 0$, se deduce que $f'(c)\,x < x$. Juntando todo esto junto con la igualdad obtenida al aplicar el teorema del valor medio tenemos que

$$\arctan(x) = f'(c)x < x,$$

y el apartado *a*) se sigue de la arbitrariedad de $x \in \mathbb{R}^+$.

b) Para resolver el apartado *b*) pretendemos hacer uso del primer apartado. Para ello comenzaremos demostrando $x_n > 0$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$ con el objetivo de obtener de aquí junto con el apartado *a*) que la sucesión es decreciente. Lo veremos más adelante. De momento nos centramos en demostrar por inducción que $x_n > 0$ se cumple para todo $n \in \mathbb{N}$. Para ello, vemos que para $n = 1$ la desigualdad es cierta. Supongamos ahora por hipótesis de inducción que $x_n > 0$ para un cierto $n \in \mathbb{N}$, y demostremos que $x_{n+1} > 0$. Por la definición recursiva de la sucesión tenemos que $x_{n+1} = \arctan(x_n)$. Por hipótesis de inducción, $x_n > 0$, de donde $\arctan(x_n) > 0$ por las propiedades de la función arcotangente. Esto implica, por definición, que $x_{n+1} > 0$, lo cual demuestra por inducción que $x_n > 0$ se cumple para cada $n \in \mathbb{N}$.

Una vez que hemos probado esto veamos que $\{x_n\}$ es decreciente, lo que equivale a demostrar que $x_{n+1} \leq x_n$ se cumple para cada $n \in \mathbb{N}$. Podríamos proceder por inducción en n pero, en este caso, el apartado *a*) nos brinda una demostración mucho más corta. Dado $n \in \mathbb{N}$ arbitrario, hemos probado que $x_n > 0$, de donde el apartado *a* nos dice que

$$\arctan(x_n) < x_n.$$

Ahora, el hecho de que $x_{n+1} \leq x_n$ se sigue de la propia definición de la sucesión que dice que $x_{n+1} = \arctan(x_n)$. Como $n \in \mathbb{N}$ era arbitrario deducimos que $\{x_n\}$ es decreciente.

En consecuencia, tenemos que $\{x_n\}$ es una sucesión decreciente y minorada (por 0). Un teorema de clase nos dice entonces que $\{x_n\}$ es convergente. Para tratar de averiguar su límite, supongamos que $\{x_n\} \to L$. Entonces la sucesión $\{x_{n+1}\} \to L$ de forma clara. Sin embargo, usando la definición recursiva de la sucesión tenemos que

$$\{x_{n+1}\} = \{\arctan(x_n)\} \to \arctan(L),$$

donde se ha usado que la función arcotangente es continua y la relación entre la continuidad y las sucesiones convergentes. De la unicidad de límite para una sucesión, deducimos que $L = \arctan(L)$. Obviamente, al ser $\{x_n\}$ una sucesión de números positivos necesariamente $L \geq 0$. De aquí, junto con el apartado *a*) se sigue que la única posibilidad es que $L = 0$, de donde se sigue que $\{x_n\} \to 0$, como queríamos. $\square$

Solución: (Segunda versión)

a) Para ver la que desigualdad es cierta, vamos a calcular la imagen de la función $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ por $f(x) = x - \arctan(x)$. Su derivada es

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} > 0,$$

por lo que f es estrictamente creciente y, por tanto, su imagen es

$$f\left(\mathbb{R}^+\right) = \left(\lim_{x\to 0} f(x), \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0, +\infty).$$

En particular, la función es positiva como queríamos.

b) i) Si la sucesión fuera convergente a, digamos L, dicho valor debe cumplir la ecuación $L = \arctan(L)$. Dicha ecuación se cumple para $L = 0$ y, por el primer ítem, en ningún otro punto. En consecuencia, el límite, caso de existir, tiene que ser 0.

ii) Vamos a demostrar por inducción que la sucesión es decreciente.

- Para $n = 1$, $x_1 = 1 > x_2 = \arctan(1)$, por el primer apartado o usando que $\arctan(1) = \pi/4$.
- Hipótesis de inducción: supongamos que $x_n > x_{n+1}$. Usando que la función arcotangente es creciente se cumple que

$$x_{n+2} = \arctan(x_{n+1}) > \arctan(x_n) = x_{n+1}.$$

Por tanto, $\{x_n\}$ es decreciente.

iii) Vamos a demostrar por inducción que $\{x_n\}$ está acotada inferiormente por cero.

- Para $n = 1$, $x_1 = 1 \geq 0$.
- Hipótesis de inducción: supongamos que $x_n \geq 0$, entonces, por las propiedades de la arcotangente, $x_{n+1} = \arctan(x_n) \geq 0$.

En resumen, la sucesión es monótona y acotada y, por tanto, convergente en este caso a 0. □

2. Calcula razonadamente el siguiente límite:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^{(x+1)e^x} \log(t)\arctan(t)\,dt}{x^2 e^x}.$$

Solución: Notemos que tenemos un cociente de funciones, donde el denominador es derivable y tiene límite $+\infty$ en $+\infty$. Por tanto, podemos pensar en la segunda regla de L'Hôpital, para cual cual tenemos que demostrar que la función del numerador es derivable. Para ello, consideramos la función $F\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$F(x) := \int_1^{(x+1)e^x} \log(t)\arctan(t)\,dt.$$

Para demostrar que F es derivable (y calcular su derivada), vemos que F es una composición de dos funciones, a saber, $F = g \circ f$, donde $f, g\colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ vienen definidas por

$$f(x) := (x+1)e^x,$$
$$g(x) := \int_1^x \log(t)\arctan(t)\,dt.$$

En otras palabras, el hecho de que $F = g \circ f$ lo que nos da es el siguiente diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^+ \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "F"'] & \mathbb{R}^+ \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Ahora, f es derivable por las reglas usuales de derivación, mientras que g es derivable en virtud del teorema fundamental del cálculo. En vista de que $F = g \circ f$ deducimos que F es derivable por la regla de la cadena. Además, dado $x \in \mathbb{R}^+$, la regla de la cadena nos dice que

$$F'(x) = g'(f(x))f'(x) = \log((x+1)e^x)\arctan((x+1)e^x)e^x(x+2),$$

donde en la segunda igualdad se ha calculado la derivada de g a través del teorema fundamental del cálculo.

Ya que tenemos derivada la función F estudiamos, con objeto de aplicar la segunda regla de L'Hôpital, el siguiente límite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log((x+1)e^x)\arctan((x+1)e^x)\, e^x(x+2)}{e^x(x^2+2x)}.$$

Arreglamos un poco el límite anterior sacando factor común en el denominador $x^2 + 2x = x(x+2)$. Entonces, el límite anterior queda

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{\log((x+1)e^x)\arctan((x+1)e^x)e^x(x+2)}{e^x(x^2+2x)} &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log((x+1)e^x)\arctan((x+1)e^x)}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(1+x)+\log(e^x)}{x}\arctan((x+1)e^x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \frac{\log(x+1)+x}{x}\arctan((x+1)e^x) \\ &= \lim_{x\to+\infty} \left(1 + \frac{\log(1+x)}{x}\right)\arctan((x+1)e^x). \end{aligned}$$

Ahora, en el límite anterior, el miembro $1 + \frac{\log(1+x)}{x}$ tiene límite 1 en ∞ invocando la escala de infinitos. Por otro lado, $\arctan((x+1)e^x)$ tiene límite $\frac{\pi}{2}$ en infinito de acuerdo con las propiedades de la función arcotangente. Entonces, el álgebra de límites implica que el siguiente límite existe

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\log((x+1)e^x)\arctan((x+1)e^x)e^x(x+2)}{e^x(x^2+2x)} = \frac{\pi}{2}.$$

En consecuencia, la (segunda) regla de L'Hôpital implica que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_1^{(x+1)e^x} \log(t)\arctan(t)\,dt}{x^2e^x} = \frac{\pi}{2},$$

lo que concluye el ejercicio. □

3. *a*) Estudia la posible convergencia de la siguiente serie $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{(2n)^n}$.

   b) Calcula razonadamente la suma de la siguiente serie $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}+3^n}{5^{n+3}}$.

Solución:

a) Para resolver el apartado *a*), en vista de la forma del término general intentaremos aplicar el criterio del cociente. Para ello, estudiamos la convergencia de la siguiente sucesión

$$\left\{ \frac{\frac{(n+1)!}{(2(n+1))^{n+1}}}{\frac{n!}{(2n)^n}} \right\} = \left\{ \frac{(n+1)!(2n)^n}{n!(2n+2)^{n+1}} \right\}.$$

En vista de que $(n+1)! = (n+1)n!$ y de que $(2n+2)^{n+1} = (2n+2)(2n+2)^n$, expresamos el término general de la sucesión de la siguiente forma:

$$\frac{(n+1)!(2n)^n}{n!(2n+2)^{n+1}} = \frac{n+1}{2n+2} \left(\frac{2n}{2n+2} \right)^n. \tag{1}$$

Ahora, analicemos por separado los dos factores que intervienen en la sucesión anterior.

- $\left\{ \frac{n+1}{2n+2} \right\}$. Como es habitual, si dividimos por n numerador y denominador, tenemos que

$$\frac{n+1}{2n+2} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n}} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$$

  en vista de que $\{\frac{1}{n}\} \to 0$ y del álgebra de límites.
- $\left\{ \left(\frac{2n}{2n+2} \right)^n \right\}$. Como la base tiende a 1, podemos aplicar la regla del número e, y estudiar

$$n\left(\frac{2n}{2n+2} - 1 \right) = \frac{-2n}{2n+2} \xrightarrow{n\to\infty} -1,$$

  con lo que $\lim \left\{ \left(\frac{2n}{2n+2} \right)^n \right\} = e^{-1} = \frac{1}{e}$.

Juntando toda la información concluimos que la sucesión dada en (1) cumple que

$$\left\{ \frac{n+1}{2n+2} \left(\frac{2n}{2n+2} \right)^n \right\} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2e}.$$

Como $\frac{1}{2e} < 1$, el criterio del cociente implica que la serie de término general

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{n!}{(2n)^n}$$

es convergente, lo que concluye el apartado *a*).

b) Para resolver el apartado *b*), arreglamos un poco el término general de la serie

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^{n+1}+3^n}{5^{n+3}} = \sum_{n\geq 0} \frac{(-1)}{5^3}\left(\frac{-1}{5} \right)^n + \frac{1}{5^3}\left(\frac{3}{5} \right)^n.$$

La expresión anterior nos conduce a buscar la suma de la serie original sumando dos series geométricas y aplicando el álgebra de límites para calcular la suma de la serie original. Por un lado la serie $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)}{5^3}\left(\frac{-1}{5} \right)^n$ es convergente por el álgebra de límites y, por dicho resultado, su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)}{5^3}\left(\frac{-1}{5} \right)^n = \frac{-1}{5^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{5} \right)^n = \frac{-1}{5^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{-1}{5}} = \frac{-1}{5^3} \cdot \frac{5}{6} = \frac{-1}{6\cdot 5^2}.$$

Por un argumento similar, la serie de término general $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{5^3}\left(\frac{3}{5}\right)^n$ es convergente y su suma es por el álgebra de límites igual a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{5^3}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{5^3}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{3}{5}\right)^n = \frac{1}{5^3}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{5}} = \frac{1}{5^3}\cdot\frac{5}{2} = \frac{1}{2\cdot 5^2}.$$

Por el álgebra de límites, la serie $\sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^{n+1}+3^n}{5^{n+3}}$ es convergente y su suma es

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}+3^n}{5^{n+3}} = \frac{-1}{6\cdot 5^2}+\frac{1}{2\cdot 5^2} = \frac{1}{5^2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right) = \frac{2}{6\cdot 5^2} = \frac{1}{3\cdot 5^2},$$

lo que concluye el ejercicio. □

4. Calcula razonadamente la siguiente integral

$$\int \frac{1}{1+4\operatorname{sen}^2(x)}\,dx.$$

Solución: Esta integral la identificamos como un cociente de funciones racionales en sen y cos, por tanto el cambio $t = \tan(\frac{x}{2})$ nos la transformará en una integral racional por teoría. Sin embargo, observemos que tanto el numerador como el denominador son polinomios pares en sen y cos, con lo cual el cambio $\tan(x) = t$ también la transformará en una integral racional. Nos decantamos por este último cambio, ya que esperamos que la función racional resultante tenga grado menor que si hacemos el primero de los cambios. Por tanto, hacemos $\tan(x) = t$. Despejando

$$x = \phi(t) = \arctan(t) \Rightarrow \phi'(t) = \frac{1}{1+t^2}.$$

Para aplicar el teorema del cambio de variable, necesitamos expresar $\operatorname{sen}^2(x)$ en términos de $t = \tan(x)$. Para ello, la teoría nos dice que usemos la siguiente identidad

$$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1+\tan^2(x) \overset{\tan(x)=t}{=} 1+t^2.$$

Despejando y usando la identidad fundamental de la trigonometría tenemos que

$$1-\operatorname{sen}^2(x) = \cos^2(x) = \frac{1}{1+t^2} \Rightarrow \operatorname{sen}^2(x) = \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Ya estamos en disposición de aplicar el teorema del cambio de variable para asegurar que

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{1+4\operatorname{sen}^2(x)}\,dx &= \int \frac{1}{1+\frac{4t^2}{1+t^2}}\frac{1}{1+t^2}\,dt = \int\frac{1}{1+t^2+4t^2}\,dt\\ &= \int \frac{1}{1+5t^2}\,dt.\end{aligned}$$

Identificamos claramente una integral de tipo “arcotangente". Para ello, arreglamos un poco el denominador y tenemos que

$$\begin{aligned}\int\frac{1}{1+5t^2}\,dt &= \int\frac{1}{1+\left(\sqrt{5}t\right)^2}\,dt = \frac{1}{\sqrt{5}}\int\frac{\sqrt{5}}{1+\left(\sqrt{5}t\right)^2}\,dt\\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}\arctan\left(\sqrt{5}t\right)+K,\end{aligned}$$

donde K es la constante de integración. Ya lo único que resta es deshacer el cambio de variable $\tan(x) = t$ para asegurar que

$$\int \frac{1}{1 + 4\operatorname{sen}^2(x)}\, dx = \frac{1}{\sqrt{5}} \arctan\left(\sqrt{5}\tan(x)\right) + K.$$

$\square$

5. Se considera $f \colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) := \int_1^{x^2} \left(e^{\sqrt{t}} - 1\right)\, dt.$$

Se pide:

a) Calcular razonadamente el polinomio de Taylor de f de orden 2 centrado en 1.

b) Demostrar que el error cometido al aproximar $f(5/4)$ por la evaluación del polinomio de Taylor anterior en $5/4$ es menor que $\frac{3}{16}$.

Solución: Definimos $g \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = x^2$ y $h \colon \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ por medio de la ecuación

$$h(x) := \int_1^x e^{\sqrt{t}} - 1\, dt.$$

Notemos que $f = h \circ g$, en otras palabras, tenemos la siguiente situación:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & \mathbb{R}^+ \arrow[d, "h"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Tenemos que g es claramente derivable, es un polinomio, mientras que h es derivable por el teorema fundamental del cálculo. Como consecuencia de la regla de la cadena deducimos que f es derivable y que, dado $x \in \mathbb{R}$, se tiene que

$$f'(x) = 2(e^x - 1)x,$$

donde en el cálculo de la derivada ha vuelto a emplearse la regla de la cadena y el teorema fundamental del cálculo. La fórmula anterior dice que f' sigue siendo derivable (de hecho, con la expresión anterior, podemos derivarla tantas veces como queramos). En consecuencia, podremos construir el polinomio de Taylor que se nos pide. Calcularemos derivadas hasta orden 3, puesto que necesitaremos hasta orden 2 para construir el polinomio de Taylor que se nos pide y la derivada de tercer orden para estimar el error haciendo uso del teorema del resto de Taylor. Dado $x \in \mathbb{R}$, de la expresión de f' calculada anteriormente y de las reglas habituales de derivación concluimos que

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2(xe^x + e^x - 1), \\ f'''(x) &= 2e^x(x + 2). \end{aligned}$$

Como nos piden que centremos el polinomio en 1 necesitamos calcular f, f' y f'' en 1. Pero esto ya es una evaluación rutinaria, a saber,

$$f(1) = 0,\ f'(1) = 2(e - 1),\ f''(1) = 2(2e - 1).$$

Ahora, el polinomio de Taylor de orden 2 y centrado en 1 de f, que denotaremos por P_2, es

$$\begin{aligned} P_2(x) &= f(1) + f'(1)(x - 1) + \frac{f''(1)}{2}(x - 1)^2 \\ &= 2(e - 1)(x - 1) + (2e - 1)(x - 1)^2, \end{aligned}$$

lo que concluye el apartado *a*).

Finalmente, para resolver el apartado *b*), haremos uso del teorema del resto de Taylor. Para ello, dicho teorema nos dice que existe $c \in]1, \frac{5}{4}[$ de manera que

$$f\left(\frac{5}{4}\right) - P_2\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{f'''(c)}{3!}\left(\frac{5}{4} - 1\right)^3$$

Sustituyendo $f'''(c)$ por su expresión y desarrollando el término del interior de la potencia cúbica tenemos que

$$f\left(\frac{5}{4}\right) - P_2\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{2e^c(c+2)}{3!} \cdot \frac{1}{4^3}.$$

Ahora estimamos el error usando que $c < \frac{5}{4} < 2$ y que $e < 3$. Tomando valores absolutos (para calcular el error) y notando que el miembro de la derecha anterior es positivo concluimos que

$$\begin{aligned}
\left| f\left(\frac{5}{4}\right) - P_2\left(\frac{5}{4}\right) \right| &= \frac{2e^c(c+2)}{3!} \cdot \frac{1}{4^3} && \\
&< \frac{2e^2 4}{3!} \cdot \frac{1}{4^3} && \textit{usamos que } c < 2 \\
&= \frac{2e^2}{3!} \cdot \frac{1}{4^2} && \\
&< \frac{2 \cdot 3^2}{2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{4^2} && \textit{usamos que } e < 3 \\
&= \frac{3}{4^2} = \frac{3}{16},
\end{aligned}$$

de donde se obtiene la cota pedida y se termina el ejercicio. □

Granada, 11 de enero de 2019.