

WUOLAH



juanka1995

www.wuolah.com/student/juanka1995



4285

soluciones-parcial-noviembr-2.pdf

Exámenes 14-15



1º Cálculo



Grado en Ingeniería Informática



Escuela Técnica Superior de Ingenierías Informática y de Telecomunicación
UGR - Universidad de Granada

Como aún estás en la portada, es momento de redes sociales. Cotilléanos y luego a estudiar.



Wuolah



Wuolah



Wuolah_apuntes

WUOLAH

Cálculo
1ºA Grado en Ingeniería Informática
Primer Parcial (Tipo II)
Curso 2014/2015

1. (2.5 puntos) Se considera la función $f:]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \log\left(\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right)$.
- a) ¿Existe algún $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ para el que la gráfica tenga recta tangente horizontal?
- b) ¿Es estrictamente monótona la función f ?

Solución:

- a) Se trata de una función derivable en todo el dominio. Para que la recta tangente a la gráfica de f en un punto sea horizontal, la derivada en dicho punto tendrá que ser cero. Por tanto, calculamos la derivada de f .

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}} \frac{\cos(x)(1-\operatorname{sen}(x)) + \cos(x)(1+\operatorname{sen}(x))}{(1-\operatorname{sen}(x))^2} \\ &= \frac{2\cos(x)}{\left(\frac{1+\operatorname{sen}(x)}{1-\operatorname{sen}(x)}\right)(1-\operatorname{sen}(x))^2} = \frac{2\cos(x)}{(1+\operatorname{sen}(x))(1-\operatorname{sen}(x))} \\ &= \frac{2\cos(x)}{1-\operatorname{sen}^2(x)} = \frac{2\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{2}{\cos(x)} \end{aligned}$$

Obsérvese que hemos usado la fórmula fundamental de trigonometría para simplificar la expresión:

$$\cos^2(x) + \operatorname{sen}^2(x) = 1 \Rightarrow 1 - \operatorname{sen}^2(x) = \cos^2(x)$$

De la expresión de la derivada se deduce que nunca se anula en el dominio dado ; es decir, $f'(x) \neq 0, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. Por tanto la respuesta es que no hay ningún punto donde la recta tangente sea horizontal.

- b) El apartado anterior nos da la información de que la derivada no se anula nunca en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, con lo deducimos que f es estrictamente monótona. Como además $f'(x) > 0, \forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ (todos sus factores son positivos), tenemos que f es estrictamente creciente.

Nota: Haciendo uso de las propiedades del logaritmo, podríamos haber simplificado la función f del siguiente modo:

$$f(x) = \log\left(\frac{1 + \operatorname{sen}(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)}\right) = \log(1 + \operatorname{sen}(x)) - \log(1 - \operatorname{sen}(x))$$

Y de esta forma la derivada se simplifica bastante. De hecho:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\cos(x)}{1 + \operatorname{sen}(x)} - \frac{-\cos(x)}{1 - \operatorname{sen}(x)} = \frac{\cos(x)(1 - \operatorname{sen}(x)) + \cos(x)(1 + \operatorname{sen}(x))}{1 - \operatorname{sen}^2(x)} \\ &= \frac{2\cos(x) - \cos(x)\operatorname{sen}(x) + \cos(x)\operatorname{sen}(x)}{\cos^2(x)} = \frac{2\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{2}{\cos(x)}. \end{aligned}$$

2. (3 puntos) Calcula:

a) Calcula el polinomio de Taylor de la función $f(x) = \cos(x)$ en el punto $a = 0$ y de orden 4.

b) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \operatorname{sen}(x) - x}{x} \right)^{1/x}.$

Solución:

a) Para calcular el polinomio de Taylor de la función coseno en $a = 0$ de orden 4 tenemos que calcular las derivadas sucesivas en el cero hasta la de orden 4. Es decir,

$$\begin{aligned} f(x) &= \cos(x) \Rightarrow f(0) = 1 \\ f'(x) &= -\operatorname{sen}(x) \Rightarrow f'(0) = 0 \\ f''(x) &= -\cos(x) \Rightarrow f''(0) = -1 \\ f'''(x) &= \operatorname{sen}(x) \Rightarrow f'''(0) = 0 \\ f^{(iv)}(x) &= \cos(x) \Rightarrow f^{(iv)}(0) = 1 \end{aligned}$$

Entonces, el polinomio de Taylor pedido es:

$$P_4(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \frac{f^{(iv)}(0)}{4!}x^4 = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$$

b) En primer lugar, vamos a analizar el límite de la función que aparece en la base de la expresión que presenta una indeterminación del tipo “0/0”. Para resolver dicha indeterminación aplicamos la regla de L'Hôpital.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \operatorname{sen}(x) - x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) - 1}{1} = \lim_{x \rightarrow 0} (2 \cos(x) - 1) = 1,$$

con lo que el límite pedido presenta una indeterminación del tipo “1[∞]”.

Aplicamos ahora la regla del número e . Esto es, estudiamos el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \operatorname{sen}(x) - x}{x} \right)^{1/x} = e^L \iff \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{2 \operatorname{sen}(x) - x}{x} - 1 \right) = L.$$

Para resolver el límite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left(\frac{2 \operatorname{sen}(x) - x}{x} - 1 \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \operatorname{sen}(x) - 2x}{x^2} \right)$$

aplicamos la regla de L'Hôpital, ya que que presenta una indeterminación del tipo "0/0". Nos queda entonces:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos(x) - 2}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\operatorname{sen}(x)}{1} = 0$$

Obsérvese que hemos aplicado la regla de L'Hôpital dos veces consecutivas.

Por tanto, el límite que nos pedían es:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{2 \operatorname{sen}(x) - x}{x} \right)^{1/x} = e^0 = 1.$$

3. **(2 puntos)** Entre todos los rectángulos de perímetro 12, halla las dimensiones de aquél cuya diagonal sea menor.

Solución: Llamemos x e y a los lados del rectángulo. Sabemos entonces que su perímetro (la suma de sus lados) es:

$$2x + 2y = 12 \iff x + y = 6.$$

La función que hay que maximizar es la diagonal; esto es, la hipotenusa del triángulo rectángulo que divide a dicho rectángulo por la mitad, es decir: $\sqrt{x^2 + y^2}$. Si despejamos y en función de x : $y = 6 - x$, la función a estudiar es $\sqrt{x^2 + (6 - x)^2}$. Es decir:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + (6 - x)^2} = \sqrt{x^2 + 36 - 12x + x^2} = \sqrt{2x^2 - 12x + 36}$$

Esta función (un polinomio de grado 2) se podría definir en todo \mathbb{R} ; pero si las variables x e y indican dimensiones, podemos considerar que el dominio es $[0, 6]$.

Buscamos posibles puntos de extremos en $]0, 6[$. Para ello, calculamos puntos críticos:

$$f'(x) = \frac{4x - 12}{2\sqrt{2x^2 - 12x + 36}} = 0 \iff x = 3$$

Para calcular el mínimo absoluto, al ser el dominio un intervalo compacto, sólo nos queda evaluar la función:

$$f(0) = 6 = f(6) > f(3) = \sqrt{18}.$$

Por tanto las dimensiones que hacen que la diagonal del rectángulo dado sea mínima son los lados iguales a 3.

4. (2.5 puntos) Se considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x) = xe^{-x^2}, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Calcula la imagen de f .

Solución: La función dada es continua y derivable en todo \mathbb{R} . Para calcular su imagen, vamos a buscar posibles extremos relativos calculando sus puntos críticos. Para ello, derivamos f .

$$f'(x) = e^{-x^2} + x(-2x)e^{-x^2} = e^{-x^2}(1 - 2x^2) = \frac{1}{2}e^{-x^2} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - x \right) \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + x \right).$$

Por tanto, $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. Observemos la simetría en los puntos obtenidos. Este hecho se debe a que la función f es impar.

Calculemos los intervalos de monotonía para decidir si los puntos críticos obtenidos son de extremo relativo o no:

Si $x < -\frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente

Si $-\frac{1}{\sqrt{2}} < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} + x > 0 \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f$ es estrictamente creciente

Si $0 < x < \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - x > 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente

Si $x > \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} - x < 0 \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f$ es estrictamente decreciente

Se deduce entonces que en el punto $x = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ se alcanza un mínimo relativo y en el punto $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ se alcanza un máximo relativo. En el punto $x = 0$ no se alcanza extremo.

Calculamos la imagen de f :

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= f\left(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \cup f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty\right) \\ &= \left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)\right] \cup \left[f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \cup \left[\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right] \end{aligned}$$

Obsérvese que hemos empleado la continuidad y la monotonía de f en cada intervalo para calcular su imagen. Calculamos los límites en los extremos del dominio:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0 \text{ (utilizando la Regla de L'Hôpital) ,}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{-x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^{x^2}} = 0 \text{ (utilizando la Regla de L'Hôpital) ,}$$

$$f\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} ,$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} .$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} f(\mathbb{R}) &= \left] -\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}, 0 \right] \cup \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} \right] \cup \left[0, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} \right] \\ &= \left[-\frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2}, \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-1/2} \right] = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}e}, \frac{1}{\sqrt{2}e} \right] \end{aligned}$$

Obsérvese la simetría impar que presenta la imagen de f .

Granada, 27 de noviembre de 2014