

Resolución de recurrencias asintóticas

Introducción

En general, todos los problemas en los que alguna de sus variables solo puede tomar valores discretos dan lugar a modelos que involucran ecuaciones recurrentes. Este es el caso en el terreno económico (problemas de renta, ahorro, consumo, ...), en el sociológico (encuestas electorales, hábitos, etc.), en el biológico (migraciones, equilibrios poblacionales, ...) y, como no en el informático. En efecto, hemos visto que la última etapa indispensable para analizar un algoritmo recursivo frecuentemente consiste en resolver una ecuación recurrente, puesto que su tiempo de ejecución suele quedar definido por una ecuación de ese tipo.

Surge así la importancia de conocer métodos de resolución de ecuaciones recurrentes que nos ayuden en nuestra tarea de análisis. En algunos casos, como vimos en el anterior tema, esas ecuaciones pueden resolverse mediante una expansión de la recurrencia, pero esta posibilidad no es muy habitual en el contexto en el que nos movemos. Entonces, si no podemos encontrar una solución por ese método hay que trabajar con otros enfoques. Nos centraremos en dos de ellos: el de la función característica, que describiremos más adelante, y el de inducción constructiva.

Inducción Constructiva

A menudo, con un poco de experiencia e intuición las recurrencias que aquí nos interesan pueden resolverse procediendo de acuerdo con las siguientes cuatro etapas: Calcular unos cuantos primeros valores de la recurrencia, observar la regularidad, intentar una forma general apropiada, y finalmente probar por Inducción Matemática que esta forma es correcta. Mas concretamente, para esta última fase, aquí desarrollaremos una técnica un poco mas especial que se conoce con el nombre de Inducción Constructiva.

La inducción constructiva se apoya en el método de la Inducción Matemática. Básicamente la Inducción Matemática se usa como una técnica de demostración, y frecuentemente se usa para probar proposiciones asociadas a algún conjunto de índices (en nuestro caso, el tamaño de los casos). Mientras la veracidad de estas proposiciones se establece mediante ese método de inducción, en muchas ocasiones el origen de las mismas permanece oscuro. Sin embargo, la inducción matemática es

una herramienta lo suficientemente poderosa como para permitirnos descubrir, no solo la demostración de un teorema, sino también su enunciado exacto.

Sea $P(n)$ una proposición en la que aparezca el número entero, y positivo, n . Haciendo n igual a 1, 2, 3,..., obtenemos las proposiciones $P(1)$, $P(2)$, $P(3)$, etc., cada una de las cuales puede ser verdadera o falsa. Así, por ejemplo, si nuestra proposición fuera

$$P(n) \equiv n^2 \text{ es menor que } 5$$

$P(1)$ y $P(2)$ serían ciertos, pero $P(3)$ y los sucesivos serían falsos.

En general, para demostrar por inducción matemática que una proposición $P(n)$ se verifica para todos los valores enteros positivos n , basta demostrar (1) que la proposición $P(1)$ es verdadera, y (2) que para cualquier valor entero positivo k , si se verifica $P(k)$, entonces también se verifica $P(k+1)$.

El primer paso, pues, consiste en comprobar la veracidad de la proposición $P(n)$ cuando $n = 1$, y el segundo en demostrar que la veracidad o bondad de una proposición se basa en la bondad de la proposición que la antecede. Ambos pasos conjuntamente prueban por inducción que $P(n)$ es válida para cualquier número entero positivo (es como si para demostrar que podemos llegar a cualquier peldaño de una escalera de mano infinitamente alta demostramos que podemos alcanzar el primer escalón y que, una vez en un peldaño, podemos alcanzar el siguiente).

Por ejemplo demostremos que

$$P(n): \text{ la suma de los } n \text{ primeros números enteros positivos es } n(n+1)/2$$

es decir, que $1 + 2 + 3 + \dots = n(n+1)/2$ se verifica para todos los valores de n , demostrando que:

- 1) la igualdad $P(1)$ es válida, puesto que $1 = [1(1+1)]/2$, lo cual es cierto.
- 2) Supondremos que $P(k)$ se cumple y demostraremos que $P(k+1)$ se cumple también. Como suponemos que $P(k)$ es válida, tendremos que

$$P(k): 1 + 2 + 3 + \dots + k = k(k+1)/2$$

Si a esa igualdad le añadimos $k + 1$ en ambos miembros, la igualdad se seguirá verificando. Luego,

$$1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = k(k+1)/2 + k + 1 = (k+1)(k/2 + 1) = (k+1)(k+2)/2$$

Pero ese último valor es, precisamente, $P(k+1)$. De aquí que $P(k+1)$ es consecuencia de $P(k)$, con lo que se completa la demostración.

Pero aplicando esta técnica convenientemente, también podemos probar simultáneamente la veracidad de un enunciado parcialmente especificado y descubrir las especificaciones perdidas mediante las cuales el enunciado es correcto. Entonces la Inducción Matemática se llama Inducción Constructiva. Como veremos más adelante, esta técnica de inducción constructiva es especialmente útil para resolver algunas recurrencias que se dan en el contexto del análisis de algoritmos, y su explicación la hacemos mediante el siguiente ejemplo.

Sea la función $f: \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$ definida por la siguiente recurrencia,

$$\begin{array}{ll} f(n) = 0 & \text{si } n = 0 \\ n + f(n-1) & \text{en otro caso} \end{array}$$

esta claro que $f(n) = \sum_{i=0..n} i$. Olvidando el ejemplo anterior, supongamos por un momento que no sabemos que $f(n)$ vale $n(n+1)/2$, pero que estamos buscando una formula como esa. Obviamente,

$$f(n) = \sum_{i=0..n} i \leq \sum_{i=0..n} n = n^2$$

y por tanto $f(n)$ es $O(n^2)$. Esto sugiere que formulemos la hipótesis de que $f(n)$ podría ser un polinomio cuadrático. Por tanto ensayaremos la hipótesis de inducción parcialmente especificada $PI(n)$ de acuerdo con la cual $f(n) = an^2 + bn + c$. Esta hipótesis es parcial en el sentido de que a , b , y c no son aun conocidos. La inducción constructiva consiste en ensayar la demostración de esta hipótesis incompleta por inducción matemática. A través del camino, esperamos recoger suficiente información sobre las constantes como para determinar sus valores. En efecto, supongamos que $PI(n-1)$ es cierta para algún valor de $n > 1$, sabemos que,

$$f(n) = n + f(n-1) = n + a(n-1)^2 + b(n-1) + c = an^2 + (1+b-2a)n + (a-b+c)$$

Entonces, si queremos concluir $PI(n)$, deberá verificarse que $f(n) = an^2 + bn + c$. Igualando los coeficientes de cada potencia de n , obtenemos dos ecuaciones no triviales para las tres incógnitas:

$$\begin{aligned} 1 + b - 2a &= b \\ a - b + c &= c \end{aligned}$$

A partir de aquí se sigue que $a = b = 1/2$, estando aun el valor de c no restringido. Ahora tenemos por tanto una hipótesis mas completa, que continuamos llamando $PI(n)$: $f(n) = n^2/2 + n/2 + c$.

Acabamos de demostrar que si $PI(n-1)$ es cierta para algún $n > 1$, entonces también lo es $PI(n)$. Queda por establecer la veracidad de $PI(0)$ para concluir por inducción matemática que $PI(n)$ es cierta para cualquier entero n . Pero precisamente esta hipótesis $PI(0)$ dice que $f(0) = a0+b0+c = c$. Sabiendo que $f(0) = 0$, obtenemos $c = 0$, y por tanto que $f(n) = n^2/2 + n/2$ es cierto para cualquier entero n .

Algunas recurrencias son mas difíciles de resolver que la mostrada en el ejemplo anterior. Incluso las técnicas que veremos mas adelante se demostraran insuficientes ocasionalmente. Sin embargo, como comentamos con anterioridad, en el contexto de la notación asintótica, es generalmente innecesaria una solución exacta de las ecuaciones de recurrencia, ya que solo estamos interesados en establecer una cota superior de la variable que nos interese (la eficiencia). En este sentido la inducción constructiva puede ser mas que interesante de cara a obtener la información que nos interesa: la eficiencia de algún algoritmo..

Método de la función característica

Afortunadamente no siempre tendremos que emplear la inducción constructiva, ya que existe una técnica que puede usarse para resolver ciertas clases de recurrencias casi automáticamente y que en lo que sigue exponemos. El método de la función característica se aplica sobre recurrencias lineales, homogéneas o no homogéneas.

Recurrencias homogéneas. Nuestro punto de partida es la resolución de recurrencias lineales homogéneas con coeficientes constantes, es decir, recurrencias de la forma,

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \dots + a_k t_{n-k} = 0 \quad (1)$$

donde,

- i. Los t_i son los valores que buscamos. La recurrencia es lineal porque no contiene términos de la forma $t_i t_{i+1}$, t_i^2 , etc.
- ii. Los coeficientes a_i son constantes, y
- iii. La recurrencia es homogénea porque la combinación lineal de los t_i es igual a cero.

La simple intuición nos puede sugerir intentar una solución de la forma $t_n = x^n$, donde x^n es una constante aun desconocida. Si ensayamos esta solución en la expresión (1), obtenemos,

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \dots + a_k x^{n-k} = 0$$

Esta ecuación se satisface si $x = 0$, una solución trivial sin interés, o en caso contrario si

$$a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \dots + a_k = 0$$

Esta ecuación de grado k en x es la que se llama la ecuación característica de la recurrencia (1).

Supongamos por ahora que las k raíces de esta ecuación, r_1, \dots, r_k , son todas distintas (podrían ser números complejos). Entonces, es fácil verificar que cualquier combinación lineal

$$t_n = \sum_{i=1..n} c_i r_i^n$$

de términos r_i^n es una solución de la recurrencia (1), donde las k constantes c_i se determinan mediante condiciones iniciales. (Necesitamos exactamente k condiciones iniciales para determinar los valores de esas k constantes, si estamos interesados en conocer la solución exacta de la recurrencia). El hecho destacable, que no probaremos aquí, es que (1) solo tiene soluciones de esta forma.

Por ejemplo, consideremos la recurrencia,

$$t_n - 3 t_{n-1} - 4 t_{n-2} = 0$$

con condiciones iniciales $t_0 = 0$, $t_1 = 1$.

La ecuación característica de la recurrencia es,

$$x^2 - 3x - 4 = 0$$

cuyas raíces son -1 y 4 . Por tanto, la solución general tiene la forma,

$$t_n = c_1 (-1)^n + c_2 4^n$$

El uso de las condiciones iniciales produce,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \quad n = 0 \\ -c_1 + 4c_2 &= 1, \quad n = 1 \end{aligned}$$

de donde $c_1 = -1/5$ y $c_2 = 1/5$, obteniendo finalmente,

$$t_n = (1/5)[4^n - (-1)^n]$$

Supongamos ahora la recurrencia que nos da el término general de la conocida Sucesión de Fibonacci

$$t_n = t_{n-1} + t_{n-2} \quad n \geq 2$$

con $t_0 = 0$ y $t_1 = 1$.

Esta recurrencia puede escribirse como

$$t_n - t_{n-1} - t_{n-2} = 0$$

con lo que la ecuación característica es,

$$x^2 - x - 1 = 0$$

de donde puede obtenerse que,

$$t_n = (1/\sqrt{5})(r_1^n - r_2^n)$$

Para demostrar que este es el mismo resultado que el obtenido por De Moivre, con su formula para calcular números de la sucesión de Fibonacci, solo necesitamos notar que en esa expresión los valores de las raíces son $r_1 = \phi$ y $r_2 = -\phi^{-1}$, donde $\phi = (1 + \sqrt{5})/2$.

Supongamos ahora, a diferencia de antes, que las raíces de la ecuación característica no fueran todas distintas. Sea,

$$p(x) = a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k$$

el polinomio de la ecuación característica, y sea r una raíz múltiple. Vamos a comprobar que si la raíz es doble, también anula a la derivada de la ecuación característica, con lo que obtendremos una pista para saber como configurar las soluciones en este caso.

Para cualquier valor $n \geq k$, consideremos el polinomio de grado n definido por,

$$h(x) = x[x^n - kp(x)]' = a_0nx^n + a_1(n-1)x^{n-1} + \dots + a_k(n-k)x^{n-k}$$

Sea ahora $q(x)$ el polinomio definido por $p(x) = (x-r)^2q(x)$.

Tenemos que,

$$h(x) = x[(x-r)^2x^n - kq(x)]' = x[2(x-r)x^n - kq(x) + (x-r)^2[x^n - kq(x)]']$$

En particular $h(r) = 0$. Esto demuestra que,

$$a_0nr^n + a_1(n-1)r^{n-1} + \dots + a_k(n-k)r^{n-k}$$

es decir, $t = nr^n$ es también una solución de (1).

Mas generalmente, si m es la multiplicidad de la raíz r , entonces todas las posibles soluciones de la ecuación recurrente original (1) son $t_1 = r$, $t_2 = nr^n$, $t_3 = n^2r^n$, ..., $t_m = n^{m-1}r^n$. La solución general es una combinación lineal de estos términos y de los términos contribuidos por otras raíces de la ecuación característica. Así, de nuevo hay k constantes a determinar por las condiciones iniciales.

Ilustremos esto con la recurrencia

$$t_n = 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3}, \quad n \geq 3$$

con condiciones iniciales $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ y $t_2 = 2$

48 1 La eficiencia de los algoritmos

Para su resolución, la podemos escribir como,

$$t_n - 5 t_{n-1} + 8 t_{n-2} - 4 t_{n-3} = 0$$

con lo que la ecuación característica es,

$$x^3 - 5x^2 + 8x - 4 = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x-2)^2 = 0$$

cuyas raíces son 1 (simple) y 2 (doble), por tanto su solución general es

$$t_n = c_1 1^n + c_2 2^n + c_3 n 2^n$$

Por otro lado, las condiciones iniciales dan,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, n = 0 \\ c_1 + 2c_2 + 2c_3 &= 1, n = 1 \\ c_1 + 4c_2 + 8c_3 &= 2, n = 2 \end{aligned}$$

a partir de donde encontramos que $c_1 = -2$, $c_2 = 2$, $c_3 = -(1/2)$ y por tanto,

$$t_n = 2^{n+1} - n2^{n-1} - 2.$$

Recurrencias no homogéneas. Consideremos ahora recurrencias de una forma un poco más general,

$$a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \dots + a_k t_{n-k} = b^n p(n) \quad (2)$$

El primer miembro es lo mismo que el de (1), pero en el segundo tenemos $b^n p(n)$, donde

- i. b es una constante, y
- ii. $p(n)$ es un polinomio en n de grado d .

Por ejemplo, la recurrencia podría ser,

$$t_n - 2t_{n-1} = 3^n$$

en cuyo caso $b = 3$ y $p(n) = 1$ es un polinomio de grado cero. Una pequeña manipulación nos permite reducir este ejemplo a la forma (1). Para verlo, primero multiplicamos la recurrencia por 3, obteniendo

$$3t_n - 6t_{n-1} = 3^{n+1}$$

Si reemplazamos n por $n+1$ en la recurrencia original, tenemos

$$t_{n+1} - 2t_n = 3^{n+1}$$

Finalmente restando estas dos ecuaciones,

$$t_{n+1} - 5t_n + 6t_{n-1} = 0$$

que puede resolverse por los métodos anteriores.

La ecuación característica es

$$x^2 - 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

Intuitivamente podemos ver que el factor $(x-2)$ corresponde al primer miembro de la recurrencia original, mientras que el factor $(x-3)$ ha aparecido como resultado de nuestra manipulación para deshacernos del segundo miembro.

Veamos un segundo ejemplo,

$$t_n - 2t_{n-1} = (n+5) 3^n$$

La manipulación que hay que realizar aquí es un poco mas complicada ya que debemos a) Multiplicar la recurrencia por 9, b) Reemplazar en ella n por n+2, y c) Reemplazar n por n+1 y multiplicarla por -6.

Así se obtiene,

$$\begin{aligned} 9t_n - 18t_{n-1} &= (n+5) 3^{n+2} \\ t_{n+2} - 2t_{n+1} &= (n+7) 3^{n+2} \\ -6t_{n+1} + 12t_n &= -6(n+6) 3^{n+1} \end{aligned}$$

sumando ahora estas tres ecuaciones,

$$t_{n+2} - 8t_{n+1} + 21t_n - 18t_{n-1} = 0$$

La ecuación característica de esta nueva recurrencia es,

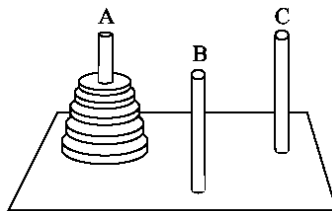
$$x^3 - 8x^2 + 21x - 18 = 0 \Leftrightarrow (x-2)(x-3) = 0$$

De nuevo, podemos ver que el factor (x-2) proviene del primer miembro de la recurrencia original, mientras que el segundo (x-3) es el resultado de nuestra manipulación.

Generalizando este enfoque, podemos ver como para resolver (2) es suficiente tomar la siguiente ecuación característica,

$$(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k)(x-b)^{d+1} = 0$$

Cuando se ha obtenido esta ecuación puede procederse como en el caso homogéneo. Analicemos por ejemplo el conocido problema de las Torres de Hanoi. Supongamos que tenemos tres barras: A, B y C. En la A hay n anillos, y ninguno en las otras dos. Los anillos están colocados en A por orden de tamaño, con el mayor en la parte inferior y el menor en la parte superior. Queremos trasladar todos estos anillos a la barra C, estando permitido trasladar un solo anillo de una barra a otra de modo que nunca se coloque un anillo encima de otro que sea menor.



Puede comprobarse fácilmente que el numero de movimientos de un aro que se requieren en el problema de las torres de Hanoi esta dado por,

$$t_n = 2t_{n-1} + 1, n \geq 1$$

con $t_0 = 0$.

La recurrencia puede escribirse $t_n - 2t_{n-1} = 1$, que es de la anterior forma (2) con $b = 1$ y $p(n) = 1$, un polinomio de grado 0. Por tanto, la ecuación característica es,

50 1 La eficiencia de los algoritmos

$$(x-2)(x-1) = 0$$

donde el factor $(x-2)$ proviene del miembro de la izquierda y el $(x-1)$ del segundo miembro. Las raíces de esta ecuación son 1 y 2, de modo que la solución general de la recurrencia es,

$$t_n = c_1 1^n + c_2 2^n$$

Necesitamos dos condiciones iniciales. Sabemos ya que $t_0 = 0$; para encontrar una segunda condición inicial usamos la recurrencia en si misma para calcular,

$$t_1 = 2t_0 + 1 = 1$$

y finalmente tenemos,

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 0, \quad n = 0 \\ c_1 + 2c_2 &= 1, \quad n = 1 \end{aligned}$$

de donde obtenemos la solución $t_n = 2^{n+1} - 1$.

Como se ha apuntado con anterioridad, si todo lo que queremos es el orden de t_n , no hay necesidad de calcular las constantes en la solución general. En el ejemplo previo, cuando sabemos que

$$t_n = c_1 1^n + c_2 2^n$$

ya podemos concluir que t_n es $O(2^n)$. Para ello basta notar que t_n , el numero requerido de movimientos de un aro, no es ni un numero negativo ni una constante, ya que claramente $t_n \geq n$. Por tanto $c_2 > 0$, y definitivamente t_n es $O(2^n)$. Pero podemos obtener algo más. Sustituyendo la solución general en la recurrencia original, tenemos

$$1 = t_n - 2t_{n-1} = c_1 + c_2 2^n - 2(c_1 + c_2 2^{n-1}) = -c_1$$

Así que independientemente de la condición inicial, siempre c_1 es igual a -1.

Sea ahora la recurrencia

$$t_n = 2t_{n-1} + n$$

Dicha recurrencia puede describirse como $t_n - 2t_{n-1} = n$, que es de la anterior forma (2) con $b = 1$ y $p(n) = n$ un polinomio de grado 1. Por tanto, la ecuación característica es,

$$(x-2)(x-1)^2 = 0$$

de raíces 2 (con multiplicidad 1) y 1 (con multiplicidad 2). La solución general es,

$$t_n = c_1 2^n + c_2 1^n + c_3 n 1^n$$

En el problema que nos interesa, como siempre, buscamos una solución para la que $t_n \geq 0$ para cualquier n . Si esto es así podemos concluir inmediatamente que t_n debe ser $O(2^n)$.

Una generalización posterior del mismo tipo de argumentos nos permite finalmente resolver recurrencias de la forma,

$$(3) \quad a_0 t_n + a_1 t_{n-1} + \dots + a_k t_{n-k} = b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \dots$$

donde las b_i son constantes distintas y los $p_i(n)$ son polinomios en n de grado d_i respectivamente. Basta escribir la ecuación característica,

$$(a_0x^k + a_1x^{k-1} + \dots + a_k)(x-b_1)^{d_1+1}(x-b_2)^{d_2+1} = 0$$

que contiene un factor correspondiente al primer miembro y otro correspondiente a cada término del segundo, y entonces resolver el problema como antes.

Por ejemplo resolvamos la recurrencia $t_n = 2t_{n-1} + n + 2$, $n \geq 1$, con $t_0 = 0$. Como antes, puede escribirse $t_n - 2t_{n-1} = n + 2$, que es de la forma (3) con $b_1 = 1$, $p_1(n) = n$, $b_2 = 2$, $p_2(n) = 1$. El grado de $p_1(n)$ es 1 y el de $p_2(n)$ es 0. Entonces la ecuación característica es

$$(x-2)(x-1)^2(x-2) = 0$$

que tiene de raíces a 1 y 2, ambas con multiplicidad 2. Por tanto, la solución general es,

$$t_n = c_1 1^n + c_2 n 1^n + c_3 2^n + c_4 n 2^n$$

Usando la recurrencia podemos calcular $t_1 = 3$, $t_2 = 12$ y $t_3 = 35$. Ahora podemos determinar las constantes a partir del siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} c_1 + c_3 &= 0, n=0 \\ c_1 + c_2 + 2c_3 + 2c_4 &= 3, n=1 \\ c_1 + 2c_2 + 4c_3 + 8c_4 &= 12, n=2 \\ c_1 + 3c_2 + 8c_3 + 24c_4 &= 35, n=3 \end{aligned}$$

llegando finalmente a que $t_n = -2 - n + 2^n + n2^n$. Obviamente podríamos haber concluido que $t_n \in O(n2^n)$ sin tener que calcular las constantes.

Cambio de variable. A veces es posible resolver recurrencias más complicadas haciendo un cambio de variable. En los siguientes ejemplos escribimos $T(n)$ como el término de la recurrencia general, y t_k como el término de la nueva recurrencia obtenida por el cambio de variable.

Por ejemplo veamos como podemos calcular el orden de $T(n)$ si n es potencia de 2, y

$$T(n) = 4T(n/2) + n, n > 1$$

Reemplazamos n por 2^k (de modo que $k = \lg n$) para obtener $T(2^k) = 4T(2^{k-1}) + 2^k$. Esto puede escribirse,

$$t_k = 4t_{k-1} + 2^k$$

si $t_k = T(2^k) = T(n)$.

Sabemos como resolver esta nueva recurrencia: La ecuación característica es,

$$(x-4)(x-2) = 0$$

y entonces $t_k = c_1 4^k + c_2 2^k$.

Poniendo n en lugar de k , tenemos

$$T(n) = c_1 n^2 + c_2 n$$

y $T(n)$ esta por tanto en $O(n^2)$ / n es una potencia de 2, es decir $O(n^2)$

Veamos ahora como encontrar el orden de $T(n)$ si n es una potencia de 2 y si

52 1 La eficiencia de los algoritmos

$$T(n) = 4T(n/2) + n^2, n > 1$$

Procediendo en la misma forma, obtenemos sucesivamente

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 4T(2^{k-1}) + 4^k \\ t_k &= 4t_{k-1} + 4^k \end{aligned}$$

La ecuación característica es $(x-4)^2 = 0$, y así

$$\begin{aligned} t_k &= c_1 4^k + c_2 k 4^k \\ T(n) &= c_1 n^2 + c_2 n^2 \lg n \end{aligned}$$

y así $T(n)$ es $O(n^2 \log n)$ / n es potencia de 2), y por tanto $O(n^2 \log n)$

Consideremos ahora como encontrar el orden de $T(n)$ si n es una potencia de 2 y

$$T(n) = 2T(n/2) + \lg n, n > 1$$

Como antes, obtenemos

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 2T(2^{k-1}) + k 2^k \\ t_k &= 2t_{k-1} + k 2^k \end{aligned}$$

La ecuación característica es $(x-2)^3 = 0$, y así,

$$\begin{aligned} t_k &= c_1 2^k + c_2 k 2^k + c_3 k^2 2^k \\ T(n) &= c_1 n + c_2 n \lg n + c_3 n \lg^2 n \end{aligned}$$

De aquí que $T(n)$ sea $O(n \log^2 n)$ / n es potencia de 2), es decir, $O(n \log^2 n)$

Encontremos finalmente el orden de $T(n)$ si n es una potencia de 2 y si $T(n) = 3T(n/2) + cn$ (c es constante, $n \geq 1$). Obtenemos sucesivamente,

$$\begin{aligned} T(2^k) &= 3T(2^{k-1}) + c 2^k \\ t_k &= 3t_{k-1} + c 2^k \end{aligned}$$

La ecuación característica es $(x-3)(x-2) = 0$, y así,

$$\begin{aligned} t_k &= c_1 3^k + c_2 2^k \\ T(n) &= c_1 3^{\lg n} + c_2 n \end{aligned}$$

y de aquí, como $a^{\lg b} = b^{\lg a}$,

$$T(n) = c_1 n^{\lg 3} + c_2 n$$

y finalmente $T(n)$ es $O(n^{\lg 3})$ / n es potencia de 2), o equivalentemente $O(n^{\lg 3})$.

Transformaciones del Rango. Cuando hacemos un cambio de variable, transformamos el dominio de la recurrencia. A veces es útil transformar el rango para obtener algo en la forma (3). Daremos un ejemplo de este enfoque. Queremos resolver,

$$T(n) = nT^2(n/2), n > 1$$

sujeto a $T(1) = 6$ para el caso en que n sea una potencia de 2. La primera etapa es cambiar la variable: ponemos $t_k = T(2^k)$, de donde

$$t_k = 2^k t_{k-1}, k > 0$$

sujeto a $t_0 = 6$.

A primera vista, ninguna de las técnicas que hemos visto se aplica a esta recurrencia ya que no es lineal, y además, uno de los coeficientes no es constante. Para transformar el rango, creamos una nueva recurrencia tomando $V_k = \lg t_k$, lo que da,

$$V_k = k + 2 V_{k-1}, k > 0$$

sujeto a $V_0 = \lg 6$.

La ecuación característica es $(x-2)(x-1)^2 = 0$ y así,

$$V_k = c_1 2^k + c_2 1^k + c_3 k 1^k$$

A partir de $V_0 = 1 + \lg 3$, $V_1 = 3 + 2 \lg 3$ y $V_2 = 8 + 4 \lg 3$ obtenemos $c_1 = 3 + \lg 3$, $c_2 = -2$ y $c_3 = -1$, y de aquí

$$V_k = (3 + \lg 3)2^k - k - 2$$

De donde por ultimo puede obtenerse la solución final,

$$T(n) = (2^{(3n-2)}3^n)/n$$

Algunos ejemplos de este tipo de transformaciones son los siguientes

$$T(n) = 2T(\sqrt{n}) + \log n$$

Haciendo $n = 2^k \Rightarrow T(2^k) = 2T(2^{k/2}) + k$

Si $T(2^k) = t_k$ entonces

$$t_k = 2 t_{k/2} + k$$

Si $k = 2^l$ entonces

$$t_{2^l} = 2 t_{2^{l-1}} + 2^l$$

Ahora, si $t_{2^l} = v_l$

$$v_l - 2v_{l-1} = 2^l$$

cuya ecuación característica es,

$$(x-2)(x-2) = 0$$

luego

$$v_l = A2^l + B l 2^l$$

y deshaciendo los cambios

$$t_k = Ak + Bk \log k$$

y, finalmente

$$T(n) = A \log n + B (\log n)(\log^2 n)$$

Consideremos ahora la recurrencia

$$T(n) = T(n/2) \cdot T^2(n/4)$$

Si $n = 2^k$ entonces,

54 1 La eficiencia de los algoritmos

$$T(2^k) = T(2^{k-1}) \cdot T^2(2^{k-2})$$

Tomando logaritmos,

$$\log T(2^k) = \log T(2^{k-1}) + 2 \log T(2^{k-2})$$

Notando ahora,

$$v_k = \log T(2^k) = \log T(n)$$

nos queda

$$v_k = v_{k-1} + 2 v_{k-2}$$

cuya ecuación característica es

$$x^2 - x - 2 = 0$$

de raíces 2 y -1, de donde la solución que se obtiene es

$$v_k = c_1 2^k + c_2 (-1)^k$$

luego,

$$\log T(n) = c_1 n + c_2 (-1)^{\log n}$$

y quitando los logaritmos,

$$T(n) = \exp(c_1 n) \cdot \exp[c_2 (-1)^{\log n}] = \exp(c_1 n + c_2 (-1)^{\log n})$$

Finalmente, sea

$$T(n) = \sqrt{n} \cdot T(\sqrt{n}) + n$$

Para resolverla, dividamos primero por n,

$$T(n)/n = T(\sqrt{n})/\sqrt{n} + 1$$

Sea $f(n) = T(n)/n$, entonces

$$f(n) = f(\sqrt{n}) + 1$$

Tomando $n = 2^k$ nos queda

$$f(2^k) = f(2^{k/2}) + 1$$

y notando $t_k = f(2^k)$ obtenemos la ecuación,

$$t_k = t_{k/2} + 1$$

Haciendo ahora el cambio $k = 2^u$ nos queda

$$v_u = v_{u-1} + 1$$

cuya ecuación característica es $(x-1)^2 = 0$, de donde deshaciendo cambios se llega a la solución que nos interesa.