

Universidade Estadual Paulista Julio de Mesquita Filho - UNESP  
Instituto de Biociências  
Departamento de Biodiversidade e Bioestatística  
Programa de Pós-Graduação em Biometria  
Otimização Linear & Não Linear

# Trabalho Computacional II - Implementação dos Métodos de Pontos Interiores

Aluno: Richard Castro Júnior

Professora: Daniela Renata Cantane

Botucatu-SP  
2024

# 1 Introdução

Os algoritmos exatos garantem a obtenção da solução ótima para problemas combinatórios. Esses algoritmos geralmente utilizam estratégias iterativas que resolvem subproblemas derivados de relaxações do problema original, restringindo o espaço de busca a cada iteração até que a solução ótima seja identificada (1, 2).

Os métodos exatos são especialmente adequados para resolver problemas de otimização quando o espaço de busca é pequeno, as restrições são simples, os recursos computacionais disponíveis são suficientes, a precisão é essencial e a comprovação da otimalidade é necessária.

Esses métodos costumam ser eficientes na resolução de problemas que podem ser solucionados em tempo polinomial, ou seja, o tempo de processamento do algoritmo é estimado por uma função que depende do tamanho da entrada. Um exemplo notável de métodos eficientes para problemas de otimização linear e contínua são os métodos de pontos interiores, que apresentam um aumento no tempo de processamento de forma polinomial em relação ao tamanho do problema (1, 2).

Os principais métodos exatos incluem o Método Simplex, desenvolvido por George Dantzig em 1947 para resolver problemas de programação linear, e o Método de Pontos Interiores, proposto por Narendra Karmarkar em 1984. Em comparação, o Método Simplex se opõe ao Método de Pontos Interiores, uma vez que o primeiro percorre os limites da região factível até encontrar a solução ótima, enquanto o segundo navega por pontos interiores dessa mesma região (3).

De fato, Karmarkar (4) apresentou formalmente um novo algoritmo para resolver problemas de programação linear, cuja filosofia divergia radicalmente do consagrado método simplex (5). O grande atrativo teórico do método de Karmarkar foi sua complexidade polinomial, que, sob análise de pior caso, se mostrava inferior à do método dos elipsóides (6), o primeiro método polinomial para programação linear, mas que se revelou insatisfatório em termos computacionais.

Karmarkar alegou que uma implementação sigilosa de seu algoritmo havia demonstrado uma eficiência até 50 vezes superior à do método simplex em problemas de grande porte. Essa afirmação gerou controvérsias, pois o autor não forneceu detalhes sobre a implementação, citando impedimentos contratuais. O método deixou muitos pontos em aberto, e implementações realizadas por grupos independentes não resultaram imediatamente em conclusões definitivas sobre sua suposta superioridade (4).

Enquanto o método simplex busca soluções ótimas através de deslocamentos entre os vértices da região de factibilidade, o algoritmo de Karmarkar fundamenta-se em pontos interiores e em

sucessivas transformações projetivas que promovem um comportamento eficiente no processo. A partir dessa teoria de passos interiores e transformações, é possível desenvolver uma ampla gama de algoritmos diferenciados, variando em tipo de transformação (projetiva, afim, etc.), no tratamento das restrições e nas direções de busca (7, 8). Isso explica a diversidade nas implementações e resultados de métodos baseados nas ideias de Karmarkar.

As primeiras experiências computacionais, apresentadas por Gill *et al.* (9), indicaram que a nova abordagem poderia levar a algoritmos tão eficientes quanto o método simplex. Logo após, Adler, Karmarkar, Resende e Veiga (10) divulgaram o algoritmo dual afim, uma respeitada implementação do simplex, em vários problemas clássicos. O método dual afim teve melhor desempenho na maioria dos problemas testados, confirmando a competitividade dos métodos de pontos interiores.

Atualmente, os métodos primais-duais são amplamente utilizados (11), apresentando desempenho em problemas quadráticos convexos com variáveis separáveis semelhante ao dos problemas lineares (12). Em particular, o esforço por iteração é praticamente equivalente entre essas abordagens.

O método de pontos interiores primal-dual pode ser desenvolvido pela aplicação do método de Newton às condições de otimalidade, desconsiderando as restrições de não-negatividade e incluindo uma perturbação nas condições de complementaridade. Esse método inicia a partir de um ponto estritamente positivo, garantindo que as variáveis não se tornem negativas durante o processo de otimização.

## 2 Objetivos

Implementar algoritmos para os métodos de otimização primal-dual afim-escala, clássico, preditor-corretor, barreira logarítmica e barreira logarítmica preditor-corretor, utilizando problemas da biblioteca Netlib. Identificar as características de cada método e comparar a convergência dos métodos implementados e analisar os resultados obtidos no problema escolhido.

## 3 Procedimento

A implementação dos métodos de pontos interiores foi realizada na linguagem de programação MATLAB®. Trata-se de uma linguagem de programação que expressa diretamente matrizes e arranjos matemáticos, combinando um ambiente de *desktop* ajustado para análise iterativa e

processos de design com uma linguagem de programação.

Inicialmente, foi selecionado um problema da Netlib, que contém uma variedade de matrizes esparsas e funções de teste para otimização. Esse problema foi importado e formatado adequadamente para uso nos métodos de otimização. A função *mmread* foi utilizada para a leitura da matriz do problema *bcsstk08*, garantindo que os dados estejam prontos para análise.

A implementação incluiu a definição de parâmetros essenciais, como a tolerância de convergência e as condições de parada. Foi fixada uma tolerância de convergência de  $\epsilon = 10^{-4}$  e tempo computacional máximo de 4 horas (o que equivale a 14400 segundos), com o objetivo de avaliar a precisão dos resultados obtidos.

Para cada método, a taxa de convergência foi analisada em relação a como os critérios de factibilidade primal e dual e o *gap* relativo se aproximam da tolerância estabelecida. O desempenho foi medido pelo número de iterações necessárias para atingir a tolerância especificada e tempo computacional. Gráficos foram gerados para ilustrar a evolução do valor da função objetivo em função das iterações, permitindo uma visualização clara da velocidade de convergência de cada método.

Comparações detalhadas foram apresentadas para identificar quais métodos são mais eficazes em diferentes cenários, destacando suas vantagens e limitações. Para todos os casos, foi definido também um tempo computacional máximo de 4 horas (isto é, 14400 segundos) e, caso, os valores das funções objetivo sejam não definidos em qualquer iteração.

As seguintes subseções apresentam os algoritmos de cada método analisado.

### 3.1 Primal-dual afim-escala

Dados  $(x^0, y^0, z^0)$  interior e  $\tau \in (0, 1)$

Para  $k=0, 1, \dots$ , faça

$$\begin{aligned}
 r_p^k &= b - Ax^k \\
 r_d^k &= c - A^t y^k - z^k \\
 r_a^k &= -X^k Z^k e \\
 dy^k &= \left[ A (D^k)^{-1} A^t \right]^{-1} \left[ r_p^k + A (D^k)^{-1} r_d^k - A (D^k)^{-1} (X^k)^{-1} r_a^k \right] \\
 dx^k &= (D^k)^{-1} \left[ A^t dy^k - r_d^k + (X^k)^{-1} r_a^k \right] \\
 dz^k &= (X^k)^{-1} \left[ r_a^k - Z^k dx^k \right] \\
 \rho_p &= \min_{dx_i < 0} \left\{ -\frac{x_i}{dx_i} \right\} \quad \rho_d = \min_{dz_i < 0} \left\{ -\frac{z_i}{dz_i} \right\} \\
 \alpha_p^k &= \min \{1, \tau \rho_p\}, \quad \alpha_d^k = \min \{1, \tau \rho_d\} \\
 x^{k+1} &= x^k + \alpha_p^k dx^k \quad (\alpha_p^k \text{ é tal que } x^{k+1} > 0) \\
 y^{k+1} &= y^k + \alpha_d^k dy^k \\
 z^{k+1} &= z^k + \alpha_d^k dz^k \quad (\alpha_d^k \text{ é tal que } z^{k+1} > 0)
 \end{aligned}$$

Até convergir.

Dados  $x^0$  e  $z^0$  interiores, o tamanho do passo  $\alpha$  é calculado de forma que  $x^{k+1}$  e  $z^{k+1}$  permaneçam interiores (  $y$  é livre). Este método não necessita de um ponto inicial factível.

- Critério de Convergência:

(i) Factibilidade primal:  $\frac{\|b - Ax\|}{\|b\| + 1} \leq \epsilon;$

(ii) Factibilidade dual:  $\frac{\|c - A^t y - z\|}{\|c\| + 1} \leq \epsilon;$

(iii) Otimalidade - Gap relativo:  $\frac{|c^t x - b^t y|}{1 + c^t x + b^t y} \leq \epsilon$  ou  $\left| \frac{x^t z}{1 + c^t x + b^t y} \right| \leq \epsilon$

- Ponto Inicial: para o problema primal, temos

$$\tilde{x} = A^t (AA^t)^{-1} b \Rightarrow A\tilde{x} = b$$

$$x_i^0 = \max \{ \tilde{x}_i, \epsilon_1 \}$$

$$\epsilon_1 = \max \left\{ -\min \tilde{x}_i, \epsilon_2, \frac{\|b\|_1}{\epsilon_2 \|A\|_1} \right\}$$

$$\epsilon_2 = 100$$

- Para o problema dual:

$$y^0 = 0$$

$$z_i^0 = \begin{cases} c_i + \epsilon_3 & \text{se } c_i \geq 0 \\ -c_i & \text{se } c_i \leq -\epsilon_3 \\ \epsilon_3 & \text{se } -\epsilon_3 \leq c_i \leq 0 \end{cases}$$

em que  $\epsilon_3 = 1 + \|c\|_1$ .

### 3.2 Primal-dual clássico

Dados  $\tau, \sigma \in (0, 1)$  e  $(x^0, y^0, z^0)$  interior ou  $(x^0, z^0) > 0$ . Para  $k = 0, 1, \dots$ , faça

$$\begin{aligned}
\mu^k &= \sigma \frac{\gamma^k}{n} \\
r_p^k &= b - Ax^k \\
r_d^k &= c - A^t y^k - z^k \\
r_c^k &= \mu^k e - X^k Z^k e \\
dy^k &= \left[ A (D^k)^{-1} A^t \right]^{-1} \left[ r_p^k + A (D^k)^{-1} r_d^k - A (Z^k)^{-1} r_c^k \right] \\
dx^k &= (D^k)^{-1} [A^t dy^k - r_d^k + X^{-1} r_c^k] \\
dz^k &= (X^k)^{-1} [r_c^k - Z^k dx^k] \\
\rho_p &= \min_{dx_i^k < 0} \left\{ -\frac{x_i^k}{dx_i^k} \right\}, \quad \rho_d = \min_{dz_i^k < 0} \left\{ -\frac{z_i^k}{dz_i^k} \right\} \\
\alpha_p^k &= \min \{1, \tau \rho_p^k\}, \quad \alpha_d^k = \min \{1, \tau \rho_d^k\} \\
x^{k+1} &= x^k + \alpha_p^k dx^k \\
y^{k+1} &= y^k + \alpha_d^k dy^k \\
z^{k+1} &= z^k + \alpha_d^k dz^k
\end{aligned}$$

Até convergir.

Se tomarmos  $\mu^k = 0$  temos o método afim-escala. Considere  $\sigma = \frac{1}{\sqrt{n}}$  e  $\tau = 0,99995$ . Temos que  $\gamma$  se reduz a cada iteração, portanto  $\mu$  se reduz a cada iteração. Assim, quando  $k \rightarrow \infty, \mu \rightarrow 0$ .

Dependendo da escolha de  $\tau$  e  $\sigma$  obtemos resultados teóricos e práticos com respeito à eficiência do método. Uma variação importante ocorre quando  $\gamma^k < 1$ . Neste caso utiliza-se  $\mu^k = \sigma \frac{(\gamma^k)^2}{n}$ .

### 3.3 Preditor-corretor

Dados  $(x^0, y^0, z^0)$  interior e  $\tau \in (0, 1)$

Para  $k = 0, 1, \dots$ , faça

$$r_p^k = b - Ax^k$$

$$r_d^k = c - A^t y^k - z^k$$

$$r_a^k = -X^k Z^k e$$

$$d\tilde{y}^k = \left[ A (D^k)^{-1} A^t \right]^{-1} \left[ r_p^k + A (D^k)^{-1} r_d^k - A (Z^k)^{-1} r_a^k \right]$$

$$d\tilde{x}^k = (D^k)^{-1} \left[ A^t d\tilde{y}^k - r_d^k + X^{-1} r_a^k \right]$$

$$d\tilde{z}^k = (X^k)^{-1} \left[ r_a^k - Z^k d\tilde{x}^k \right]$$

$$\tilde{\rho}_p^k = \min_{d\tilde{x}_i^k < 0} \left\{ -\frac{x_i^k}{d\tilde{x}_i^k} \right\}$$

$$\tilde{\rho}_d^k = \min_{d\tilde{z}_i^k < 0} \left\{ -\frac{z_i^k}{d\tilde{z}_i^k} \right\}$$

$$\tilde{\alpha}_p^k = \min \{1, \tau \tilde{\rho}_p^k\}$$

$$\tilde{\alpha}_d^k = \min \{1, \tau \tilde{\rho}_d^k\}$$

$$\tilde{\gamma}^k = (x + \tilde{\alpha}_p d\tilde{x})^t (z + \tilde{\alpha}_d d\tilde{z})$$

$$\sigma^k = \begin{cases} \left( \frac{\tilde{\gamma}^k}{\gamma^k} \right)^3, & \text{se } \gamma^k > 1; \\ \left( \frac{\gamma^k}{\sqrt{n}} \right), & \text{caso contrário} \end{cases}$$

$$\mu^k = \sigma^k \left( \frac{\gamma^k}{n} \right)$$

$$r_s^k = r_a^k + \mu^k e - D^k \tilde{x} D^k \tilde{z} e$$

$$dy^k = \left[ A (D^k)^{-1} A^t \right]^{-1} \left[ r_p^k + A (D^k)^{-1} r_d^k - A (Z^k)^{-1} r_s^k \right]$$

$$dx^k = (D^k)^{-1} \left[ A^t dy^k - r_d^k + X^{-1} r_s^k \right]$$

$$dz^k = (X^k)^{-1} \left[ r_s^k - Z^k dx^k \right]$$

$$\rho_p^k = \min_{dx_i^k < 0} \left\{ -\frac{x_i^k}{dx_i^k} \right\}, \quad \rho_d^k = \min_{dz_i^k < 0} \left\{ -\frac{z_i^k}{dz_i^k} \right\}$$

$$\alpha_p^k = \min \{1, \tau \rho_p^k\}, \quad \alpha_d^k = \min \{1, \tau \rho_d^k\}$$

$$x^{k+1} = x^k + \alpha_p^k dx^k$$

$$y^{k+1} = y^k + \alpha_d^k dy^k$$

$$z^{k+1} = z^k + \alpha_d^k dz^k$$

Até convergir.



### 3.4 Barreira logarítmica

Dados  $x$  interior,  $(s, \pi) > 0, \lambda, \mu$  e  $\beta > 1$ .

Para  $k = 0, 1, \dots$ , faça

$$\text{Calcule o vetor gradiente da Lagrangiana } \underbrace{\nabla L}_{=J(x,\pi,\lambda,s)} = \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \pi^t \nabla g(x) + \lambda^t \nabla h(x) \\ g(x) + s \\ h(x) \\ S\pi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mu e \end{bmatrix},$$

em que  $S$  é a matriz diagonal cujos elementos diagonais são os elementos de  $s$ .

Calcule a matriz Hessiana e resolva o sistema a seguir.

$$\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) + \pi^t \nabla^2 g(x) + \lambda^t \nabla^2 h(x) & \nabla g(x) & \nabla h(x) & 0 \\ \nabla g(x) & 0 & 0 & I \\ \nabla h(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & \pi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} dx \\ d\pi \\ d\lambda \\ ds \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \pi^t \nabla g(x) + \lambda^t \nabla h(x) \\ g(x) + s \\ h(x) \\ -\mu e + S\pi \end{bmatrix}$$

Calcule o passo  $\alpha$  dado por  $\alpha = \min \{1, \tau \rho_p, \tau \rho_d\}$ , em que  $\rho_p = \min_{ds_i < 0} \left\{ -\frac{s_i}{ds_i} \right\}$  e  $\rho_d = \min_{d\pi_i < 0} \left\{ -\frac{\pi_i}{d\pi_i} \right\}$ .

Atualize as variáveis  $(x, s, \pi, \lambda)$  e o parâmetro barreira  $\mu$  dados por

$$x^{k+1} = x^k + \alpha dx$$

$$s^{k+1} = s^k + \alpha ds,$$

$$\pi^{k+1} = \pi^k + \alpha d\pi$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha d\lambda$$

e  $\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{\beta}$ , onde  $\beta > 1$ .

Até convergir.

Critério de Convergência:  $\|\nabla L\| < \epsilon$ .

### 3.5 Barreira logarítmica preditor-corretor

Dados  $x$  interior,  $(s, \pi) > 0, \lambda, \beta > 1$ .

Para  $k = 0, 1, \dots$ , faça

Resolva o sistema a seguir.

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) + \pi^t \nabla^2 g(x) + \lambda^t \nabla^2 h(x) & \nabla g(x) & \nabla h(x) & 0 \\ \nabla g(x) & 0 & 0 & I \\ \nabla h(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & \pi \end{bmatrix}}_W \begin{bmatrix} \bar{dx} \\ \bar{d\pi} \\ \bar{d\lambda} \\ \bar{ds} \end{bmatrix}$$

Entre com o parâmetro barreira  $\mu$  e as correções não lineares.

Resolva o sistema a seguir

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \nabla^2 f(x) + \pi^t \nabla^2 g(x) + \lambda^t \nabla^2 h(x) & \nabla g(x) & \nabla h(x) & 0 \\ \nabla g(x) & 0 & 0 & I \\ \nabla h(x) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & S & 0 & \pi \end{bmatrix}}_W \begin{bmatrix} dx \\ d\pi \\ d\lambda \\ ds \end{bmatrix} =$$

$$= - \begin{bmatrix} \nabla f(x) + \pi^t \nabla g(x) + \lambda^t \nabla h(x) \\ g(x) + s \\ h(x) \\ -\mu e + S\pi + \bar{d}S\bar{d}\Pi e \end{bmatrix}$$

Calcule o passo  $\alpha$  dado por  $\alpha = \min \{1, \tau \rho_p, \tau \rho_d\}$ , em que  $\rho_p = \min_{ds_i < 0} \left\{ -\frac{s_i}{ds_i} \right\}$  e  $\rho_d = \min_{d\pi_i < 0} \left\{ -\frac{\pi_i}{d\pi_i} \right\}$ .  
Atualize as variáveis  $(x, s, \pi, \lambda)$  e o parâmetro barreira  $\mu$  dados por

$$x^{k+1} = x^k + \alpha dx$$

$$s^{k+1} = s^k + \alpha ds,$$

$$\pi^{k+1} = \pi^k + \alpha d\pi$$

$$\lambda^{k+1} = \lambda^k + \alpha d\lambda$$

e  $\mu^{k+1} = \frac{\mu^k}{\beta}$ , onde  $\beta > 1$ .

Até convergir.

O critério de convergência e a inicialização são equivalentes aos apresentados para o método barreira logarítmica.

## 4 Resultados e discussão

Os resultados indicam que o método Primal-Dual Afim-Escala apresentou dificuldades em convergir em ambas as configurações de  $\tau$  testadas. O número de iterações foi extremamente elevado (acima de 145 mil), alcançando o limite de tempo computacional em ambos os casos (14400 segundos). A alta quantidade de iterações e os valores elevados de factibilidade primal e dual indicam que o método está tendo problemas em encontrar uma solução viável e ótima.

Apesar de algumas melhorias nas métricas de factibilidade primal e dual para  $\tau = 1,000000 \times 10^{-4}$  (Figura 1), os valores ainda permanecem altos, indicando que o método não conseguiu reduzir suficientemente o erro. O gap relativo elevado, especialmente para  $\tau = 9,999995 \times 10^{-1}$  (Figura 2), reforça a dificuldade de aproximação entre as soluções primal e dual e que a solução encontrada, caso existisse, estaria longe da solução ótima. É possível que o problema escolhido seja particularmente desafiador para este método. Isso evidencia a ineficiência do método para o problema analisado, possivelmente devido ao condicionamento do problema.

O método clássico, por outro lado, convergiu para todas as configurações de  $\tau$  e apresentou resultados consistentes, indicando que o método clássico é mais robusto e eficiente para o problema em questão. O número de iterações foi relativamente baixo e constante (187), indicando estabilidade no comportamento do método. O tempo computacional foi consideravelmente menor em comparação com os outros métodos.

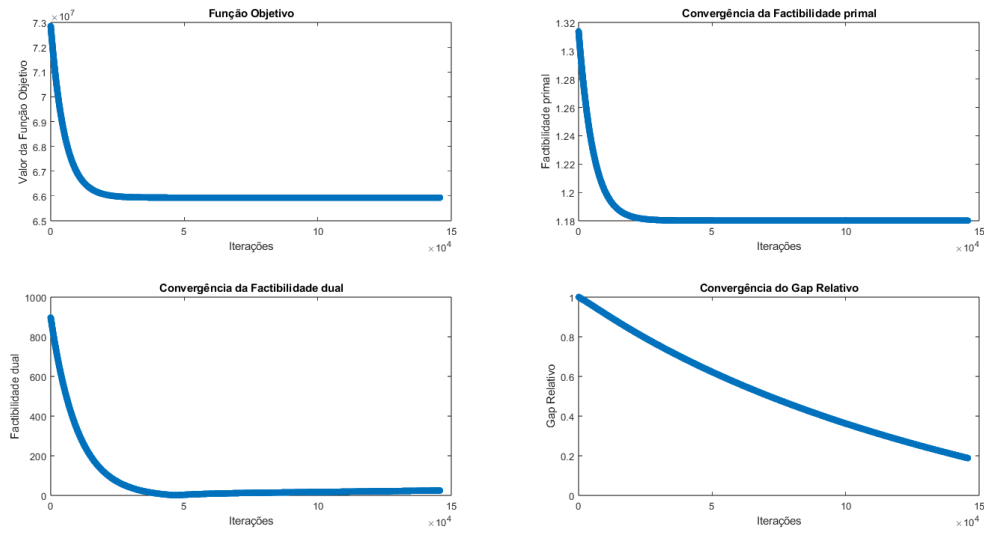


Figura 1: Teste de convergência do Método Primal-dual afim-escala, com  $\tau = 0,0001000$

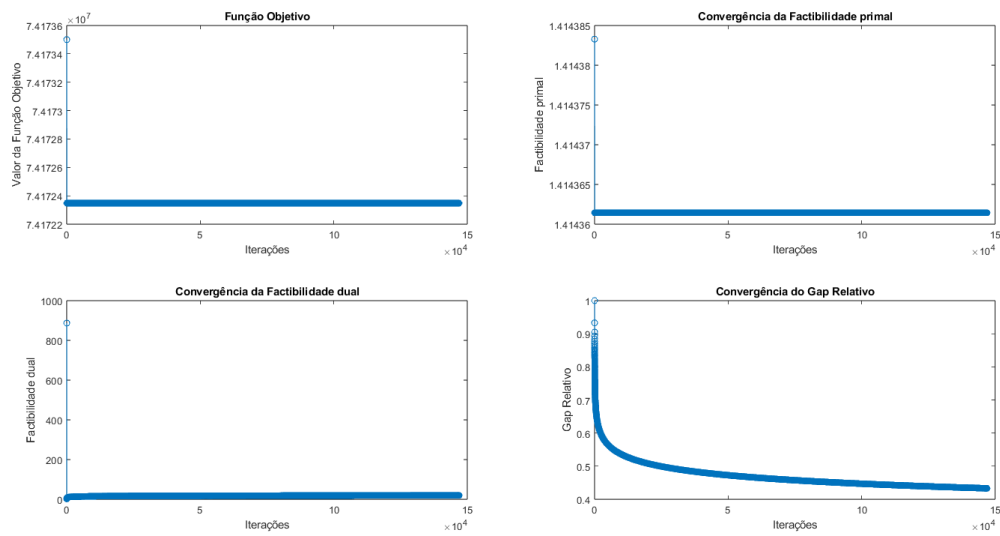


Figura 2: Teste de convergência do Método Primal-dual afim-escala, com  $\tau = 0,9999995$

A função objetivo obtida também apresentou valores mais razoáveis e variou com os valores de  $\tau$ , com melhores resultados para valores intermediários,  $\tau = 0,1000000$  (Figura 5) e  $\tau = 0,500000$  (Figura 6). A baixa magnitude de  $\mu$  (ordem de  $10^{-13}$ ) sugere uma boa aproximação do ponto ótimo, e o método mostrou-se robusto e eficaz para o problema estudado.

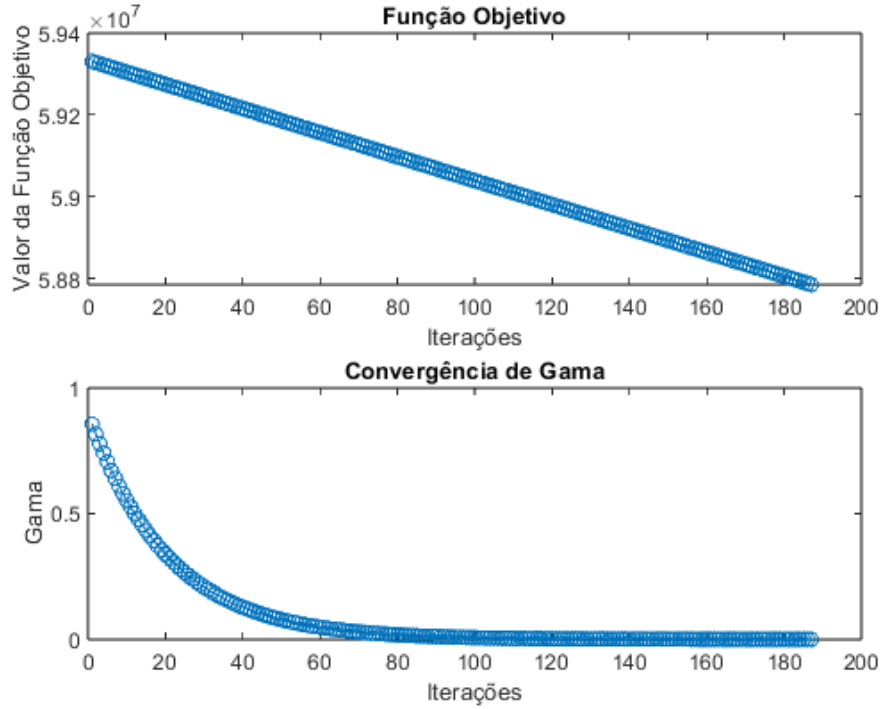


Figura 3: Teste de convergência do Método Primal-Dual Clássico, com  $\tau = 0,0001000$

O Método Preditor-Corretor apresentou desempenho variado e também apresentou dificuldades de convergência para a maioria das configurações de  $\tau$ . Os valores de função objetivo, factibilidade e valores de  $\gamma$  foram bastante elevados, sugerindo que esses métodos não são adequados para o problema em questão.

Para  $\tau = 5,000000 \times 10^{-1}$  (Figura 9) e  $\tau = 9,999995 \times 10^{-1}$  (Figura 10), o método não convergiu, resultando em valores de função objetivo inconsistentes ou não definidos. O tempo computacional para essas configurações atingiu o limite de 14400 segundos. Para  $\tau = 1,000000 \times 10^{-4}$  (Figura 8), o método executou 84106 iterações e obteve uma função objetivo de  $2,664381 \times 10^{37}$ , porém com um valor extremamente alto para  $\gamma$  ( $7,372295 \times 10^{39}$ ). Esses resultados sugerem que o método é altamente sensível à escolha de  $\tau$ , e sua implementação pode necessitar de melhorias para lidar com problemas mal condicionados.

O método de Barreira Logarítmica não convergiu em nenhuma das configurações de  $\tau$ . Os

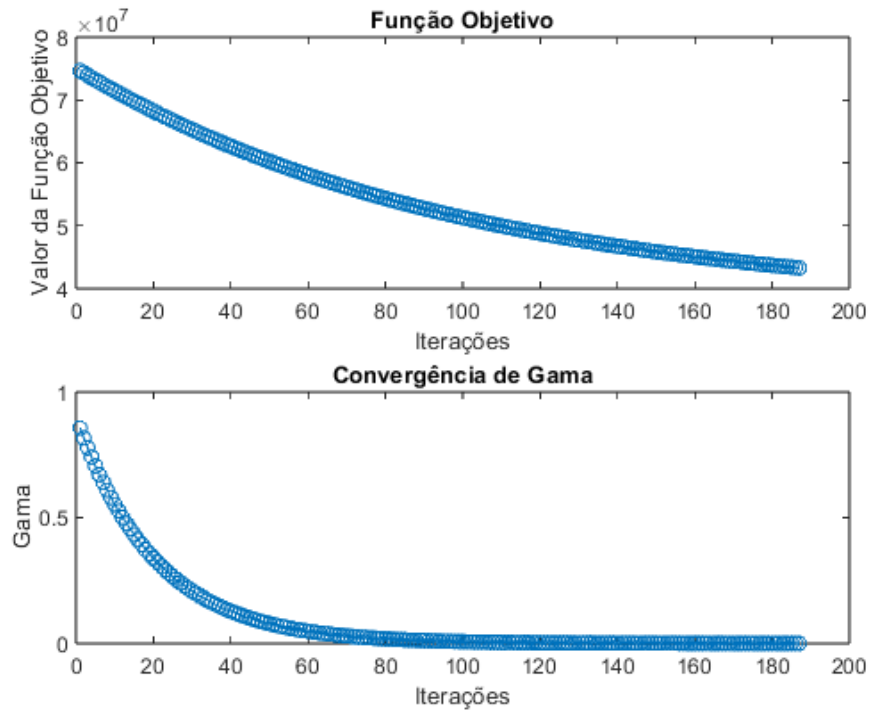


Figura 4: Teste de convergência do Método Primal-Dual Clássico, com  $\tau = 0,0100000$

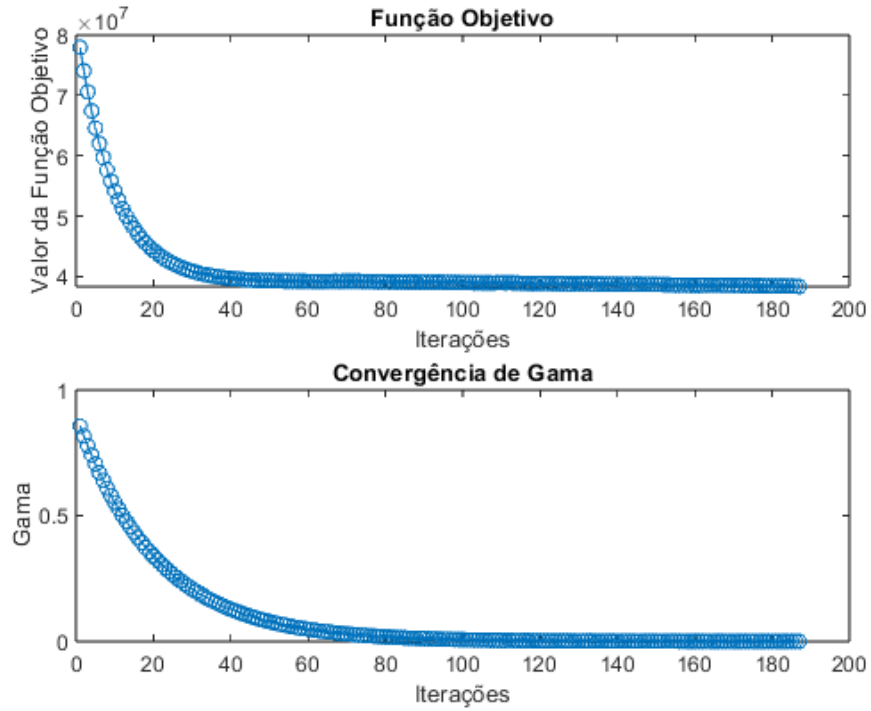


Figura 5: Teste de convergência do Método Primal-Dual Clássico, com  $\tau = 0,1000000$

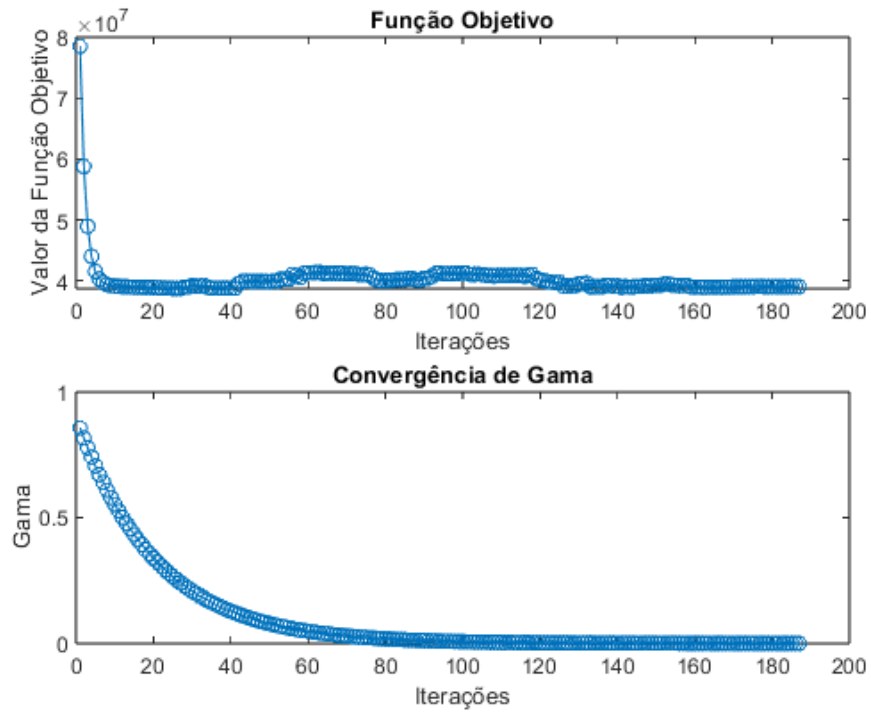


Figura 6: Teste de convergência do Método Primal-Dual Clássico, com  $\tau = 0,500000$

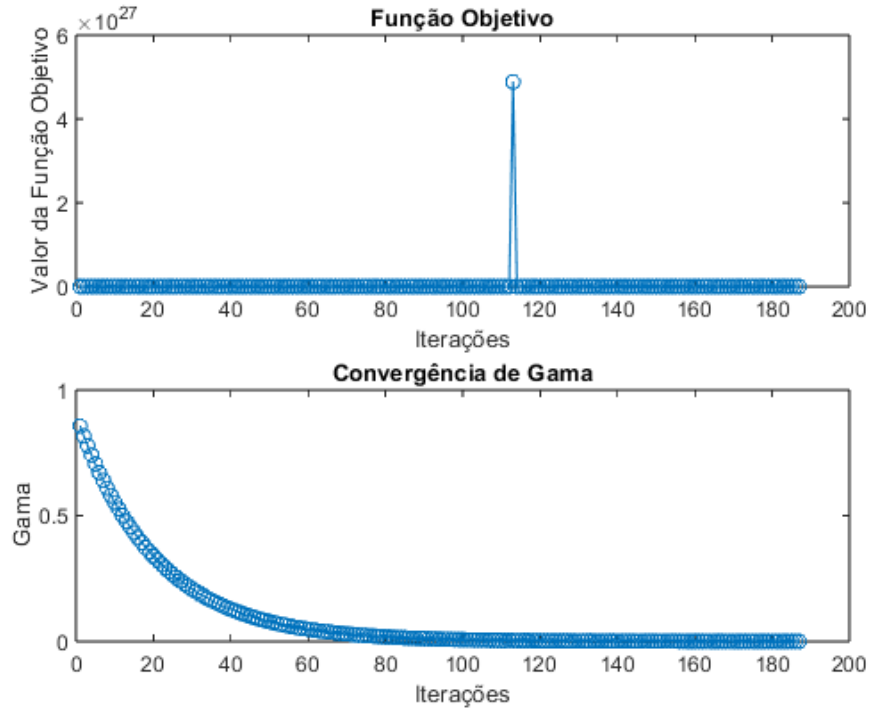


Figura 7: Teste de convergência do Método Primal-Dual Clássico, com  $\tau = 0,9999995$

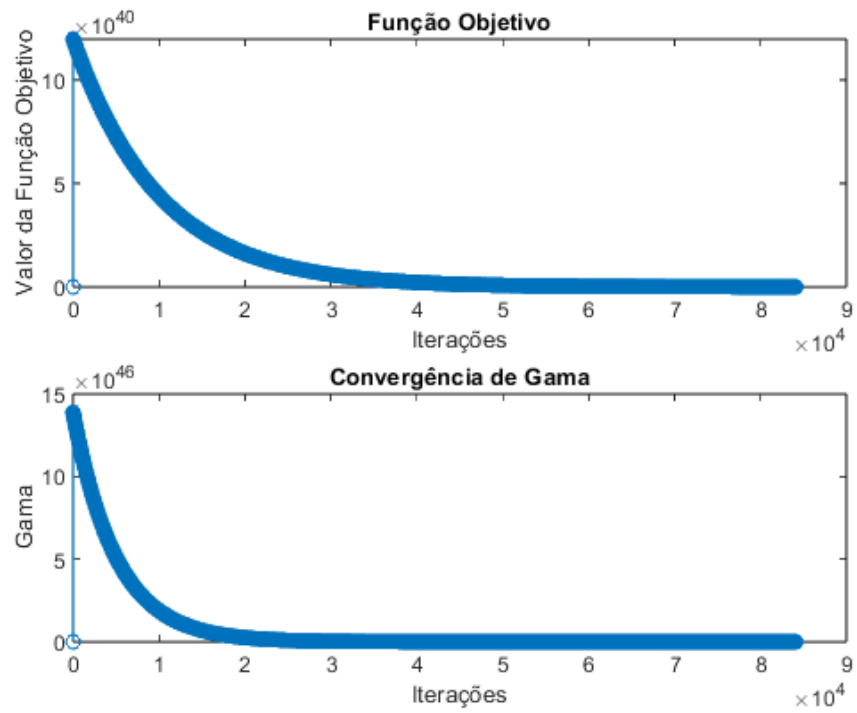


Figura 8: Teste de convergência do Método Preditor-corretor, com  $\tau = 0,0001000$

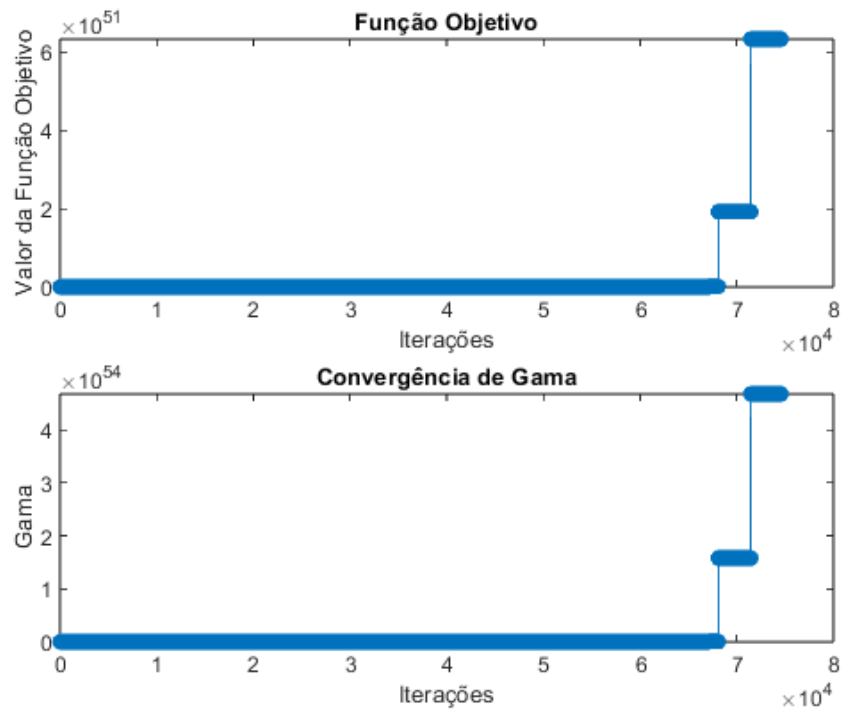


Figura 9: Teste de convergência do Método Preditor-corretor, com  $\tau = 0,500000$



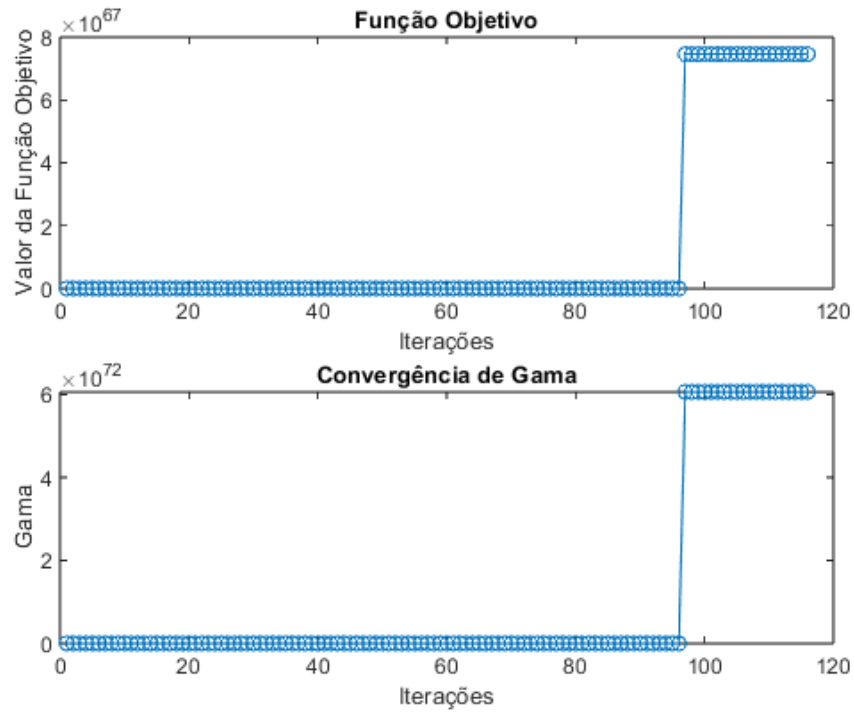


Figura 10: Teste de convergência do Método Preditor-corretor, com  $\tau = 0,9999995$

valores de função objetivo, factibilidade e gap relativo foram bastante elevados, sugerindo que esses métodos não são adequados para o problema em questão.

O número de iterações foi baixo (máximo de 76), indicando que o método pode ter interrompido a execução devido à ausência de progressos. Os valores da função objetivo foram inconsistentes e, em alguns casos, muito altos ( $1,251301 \times 10^9$  para  $\tau = 5,000000 \times 10^{-1}$  - Figura 13), reforçando a ideia de dificuldades na aproximação ao ponto ótimo. O tempo computacional permaneceu baixo em todas as execuções, mas a falta de convergência indica que o método pode não ser adequado para o problema analisado.

O método de Barreira Logarítmica Preditor-Corretor apresentou resultados variados, porém todos apresentaram dificuldades de convergência. Para  $\tau = 9,999995 \times 10^{-1}$  (Figura 17, o número de iterações foi moderado (971), mas a função objetivo e  $\Delta L$  resultaram em valores não definidos. Para  $\tau = 1.000000 \times 10^{-4}$  15, o método não convergiu após 80660 iterações, com um valor elevado de  $\Delta L$  ( $2,478208 \times 10^{18}$ ), indicando dificuldades numéricas significativas.

Já para  $\tau = 5.000000 \times 10^{-1}$  (Figura 16, o número de iterações foi mais baixo (1655), mas novamente os valores da função objetivo e  $\Delta L$  foram inconsistentes ou não definidos. Apesar de ter um desempenho computacional intermediário, a falta de convergência em várias configurações

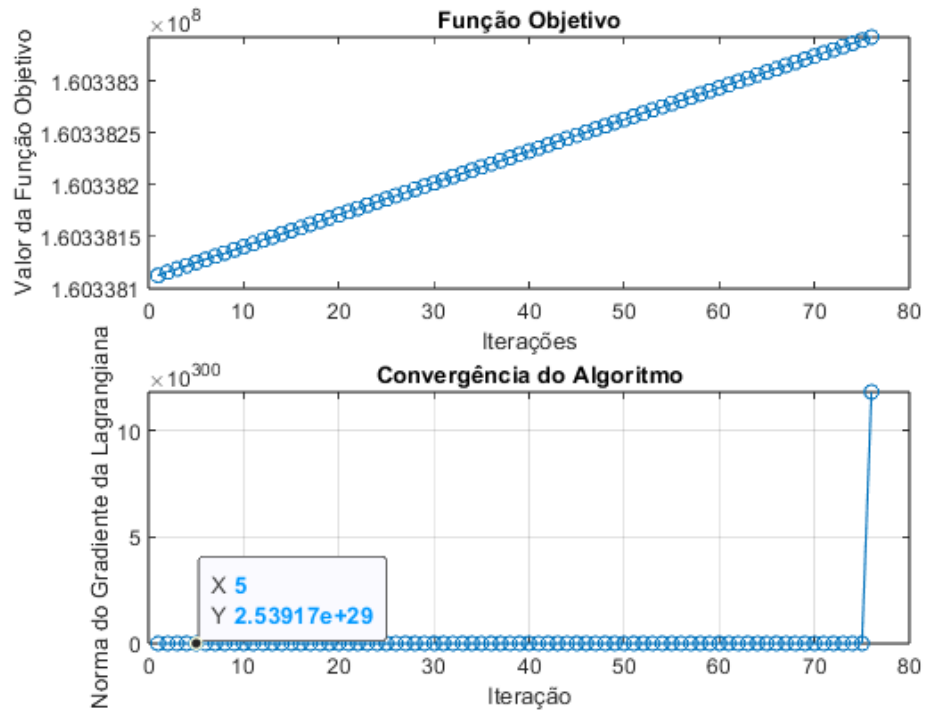


Figura 11: Teste de convergência do Método Barreira Logarítmica, com  $\tau = 0,0001000$

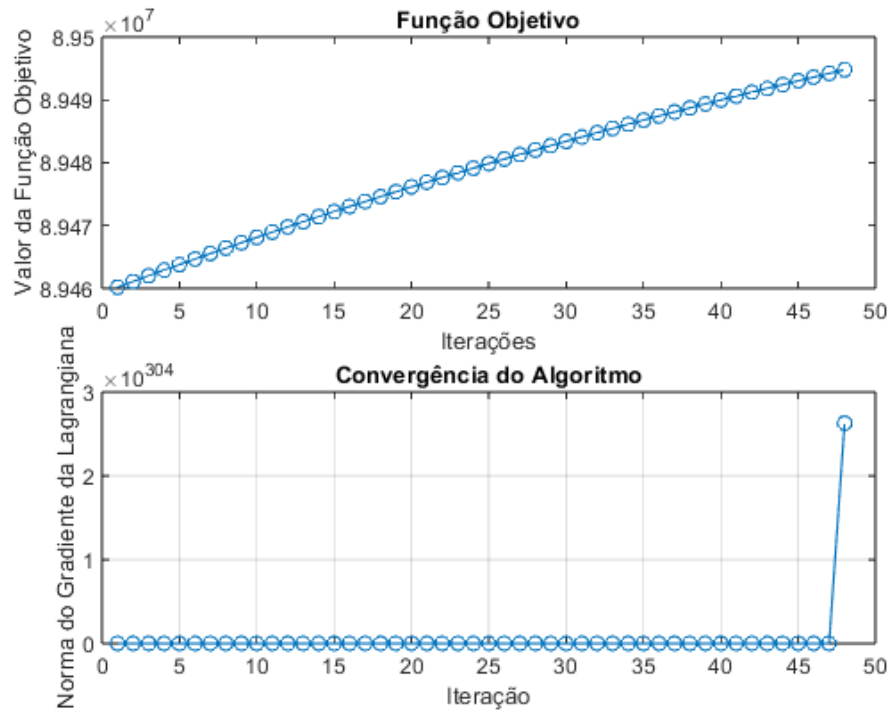


Figura 12: Teste de convergência do Método Barreira Logarítmica, com  $\tau = 0,0100000$

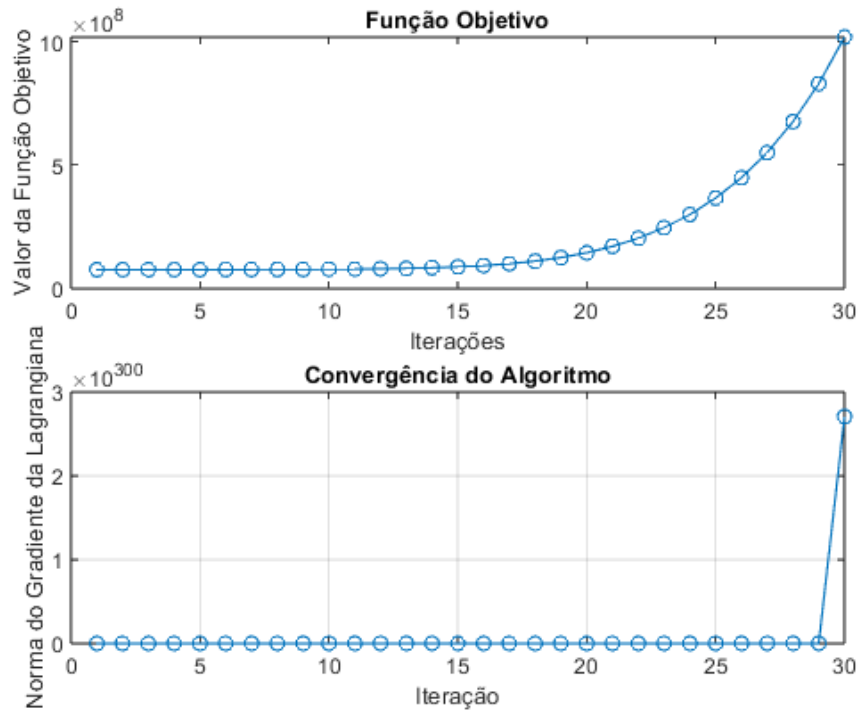


Figura 13: Teste de convergência do Método Barreira Logarítmica, com  $\tau = 0,500000$

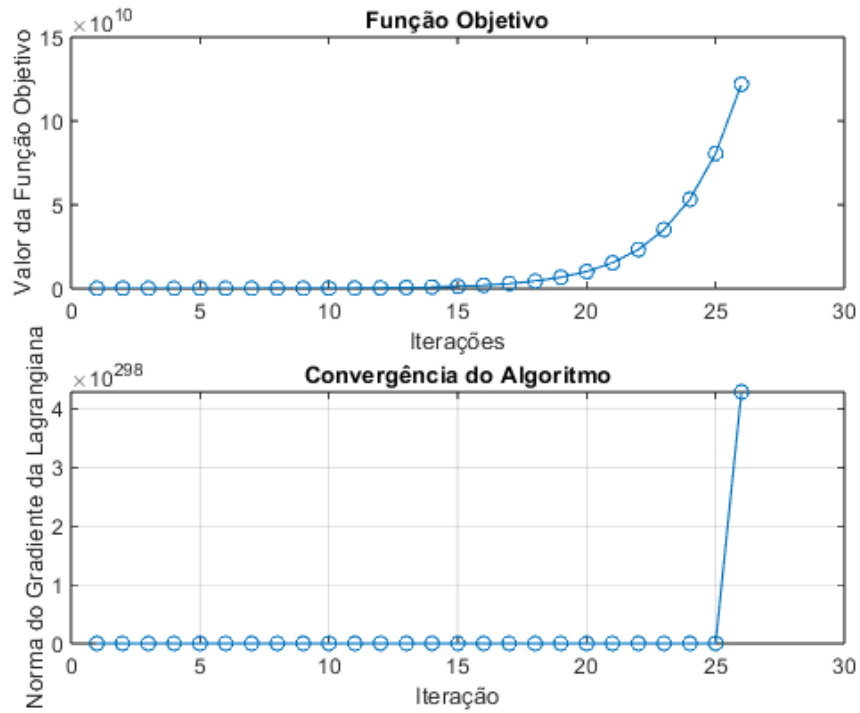


Figura 14: Teste de convergência do Método Barreira Logarítmica, com  $\tau = 0,9999995$

de  $\tau$  sugere que o método pode ser inadequado para o problema estudado.

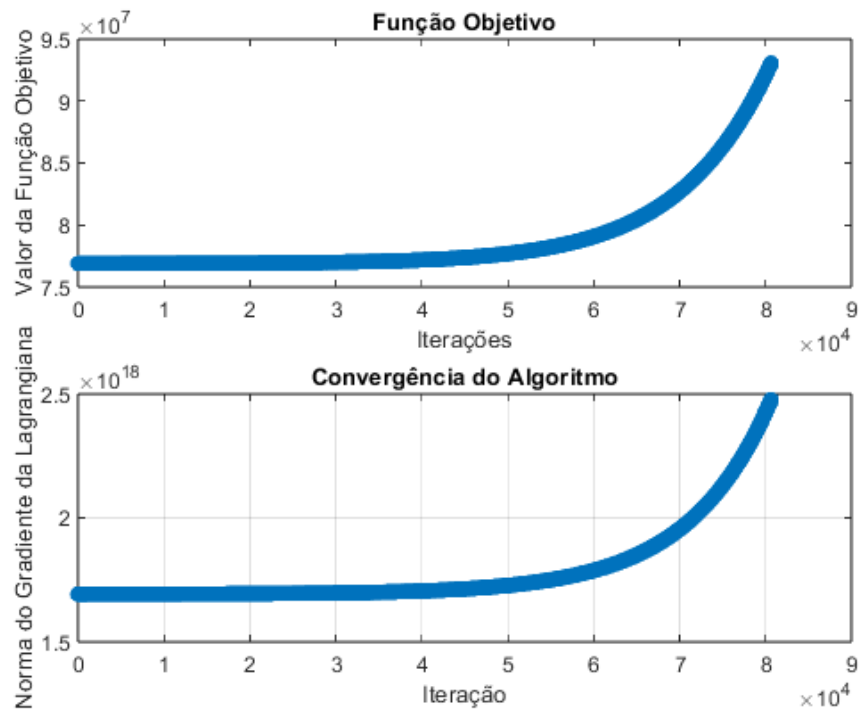


Figura 15: Teste de convergência do Método Barreira Logarítmica Predictor-Corretor, com  $\tau = 0,0001000$

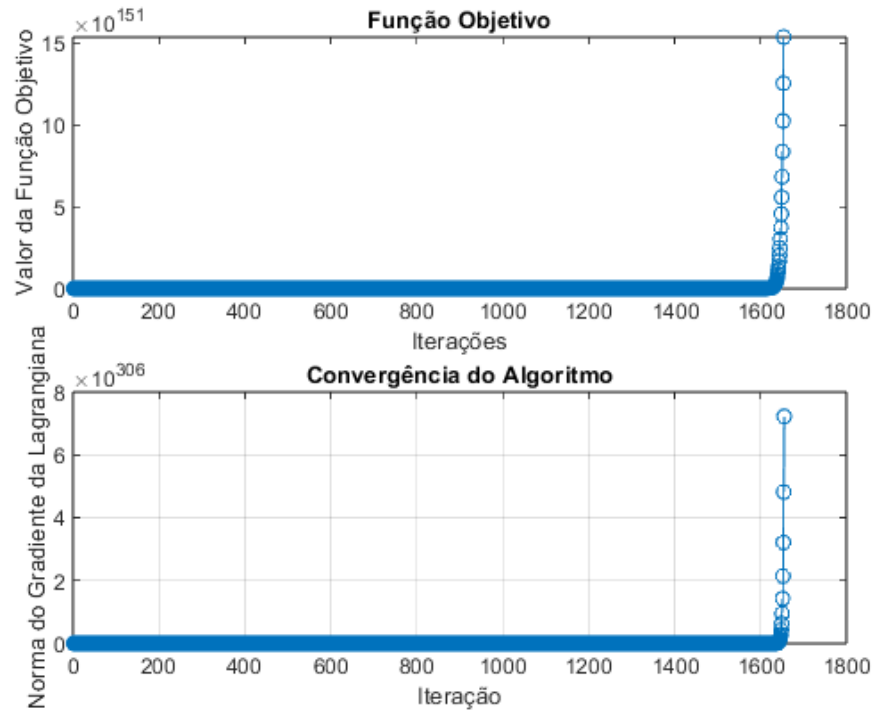


Figura 16: Teste de convergência do Método Barreira Logarítmica Preditor-Corretor, com  $\tau = 0,500000$

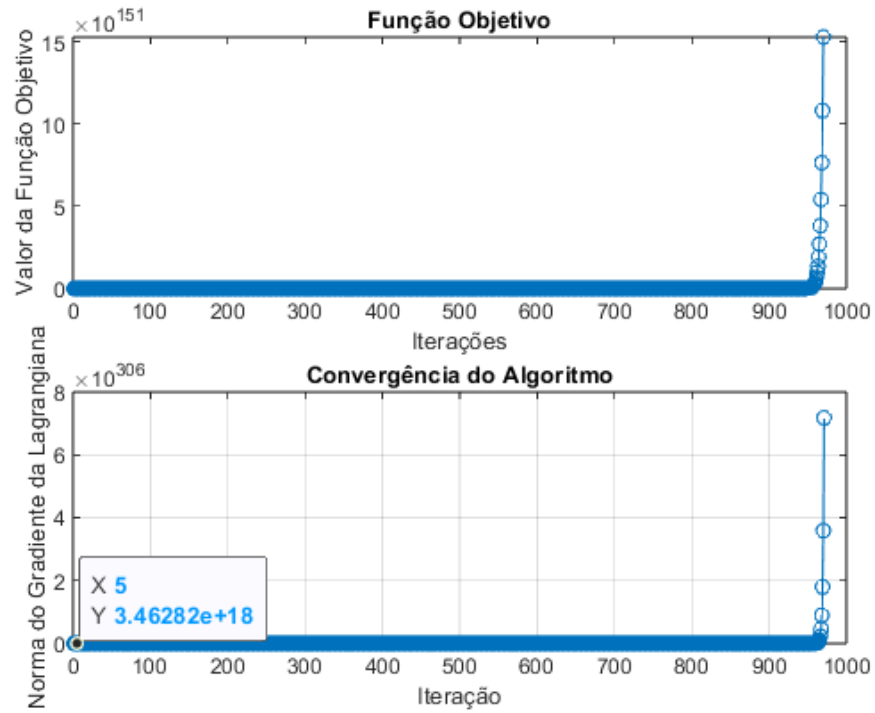


Figura 17: Teste de convergência do Método Barreira Logarítmica Preditor-Corretor, com  $\tau = 0,9999995$

## 5 Conclusão

Os resultados evidenciam comportamentos distintos entre os métodos analisados. O Primal-Dual Clássico destacou-se pela convergência consistente e tempos computacionais baixos, mostrando-se adequado ao problema escolhido. Em contrapartida, os métodos Primal-Dual Afim-Escala e Preditor-Corretor enfrentaram sérias dificuldades de convergência, com sensibilidade elevada aos valores de  $\tau$ . Já os métodos baseados em barreira logarítmica apresentaram desempenho insatisfatório, com falta de convergência e problemas numéricos significativos. A escolha do método mais adequado depende de fatores como a estabilidade, o tempo computacional e a robustez frente ao problema estudado.

## Referências

- 1 BAZARAA, M. S.; JARVIS, J. J.; SHERALI, H. D. *Linear Programming and Network Flows*. 4. ed. Hoboken: John Wiley Sons, Inc., 2010.
- 2 LUENBERGER, D. G.; YE, Y. *Linear and Nonlinear Programming: Third Edition*. 3. ed. Nova York: Springer, 2010.
- 3 OLIVEIRA, A. R. L.; LYRA, C. Implementação de um método de pontos interiores para programação linear. *SBA: Controle & Automação*, v. 3, n. 2, p. 370–382, 1991.
- 4 KARMARKAR, N. A new polynomial-time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, v. 4, n. 4, p. 373–395, 1984.
- 5 DANTZIG, G. B. *Linear Programming and Extensions*. [S.l.: s.n.], 1963.
- 6 KACHIYAN, L. G. Polynomial algorithms in linear programming. *Soviet Mathematics Doklady*, v. 20, p. 191–194, 1979.
- 7 GONZAGA, C. C. A dual affine scaling algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, v. 39, p. 247–258, 1987.
- 8 OLIVEIRA, A. R. L. An interior point algorithm for linear programming. *SIAM Journal on Optimization*, v. 1, p. 60–73, 1989.
- 9 GILL, P. E. e. a. Computational experience with a primal-dual interior point method. *Mathematical Programming*, v. 36, p. 211–229, 1986.
- 10 ADLER, I.; RESENDE, M. G. C.; VEIGA, G. An implementation of karmarkar’s algorithm for linear programming. *Mathematical Programming*, v. 44, p. 297–335, 1989.
- 11 WRIGHT, S. J. *Primal–Dual Interior–Point Methods*. [S.l.]: SIAM Publications, 1996.
- 12 SOARES, S.; SALMAZO, C. T. Minimum loss predispach model for hydroelectric systems. *IEEE Transactions on Power Systems*, v. 12, p. 1220–1228, 1997.