ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

«ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ»

Выполнил

Святослав Артюшкевич, 3 группа, 2 курс

Условие задачи

Найти $\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\sin(x^2)\,dx$ с весовой функцией $\rho = \sqrt{1-x^2}$

- Используя базовую квадратурную формулу трапеций построить составную
- Применяя полученную составную формулу вычислить интеграл с точностью$\varepsilon = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-6}, \varepsilon = 10^{-8}$. Для оценки погрешности воспользоваться правилом Рунге
- Используя систему компьютерной алгебры произвести вычисление указанного в варианте интеграла и сравнить с полученным
- Построить квадратурную формулу НАСТ с 7 узлами
- Произвести вычисление интеграла из варианта используя полученную формулу

Теоретические сведения

Составная квадратурная формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a+kh) + f(b)\right)$$

Правило Рунге для квадратурной формулы трапеций

$$\Delta_{2n} \approx \Theta|I_{2n} - I_n|, \Theta = \frac{1}{3}$$

Интеграл последовательно вычисляется для $N = n_0, 2n_0, 4n_0, \ldots$,пока не станет верно, что

$\Delta_{2n} < \varepsilon$, где эпсилон заданная точность

Построение квадратурной формулы Гаусса:

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

$$\varphi_i = x^i \quad \psi_0 = 1$$

$$\psi_i = \varphi_i - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{<\varphi_i, \psi_j>}{<\psi_j, \psi_j>}\psi_j$$

$$<f(x), g(x)> = \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

Корни ψ_n являются узлами квадратурной формулы

$$A_i = \int_a^b \rho(x)\prod_{j\neq i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j}dx$$

Результаты

$$x = [-0.92388, -0.707107, -0.382683, 0, 0.382683, 0.707107, 0.92388]$$

$$A = [0.0575092, 0.19635, 0.335189, 0.392699, 0.335189, 0.19635, 0.0575091]$$

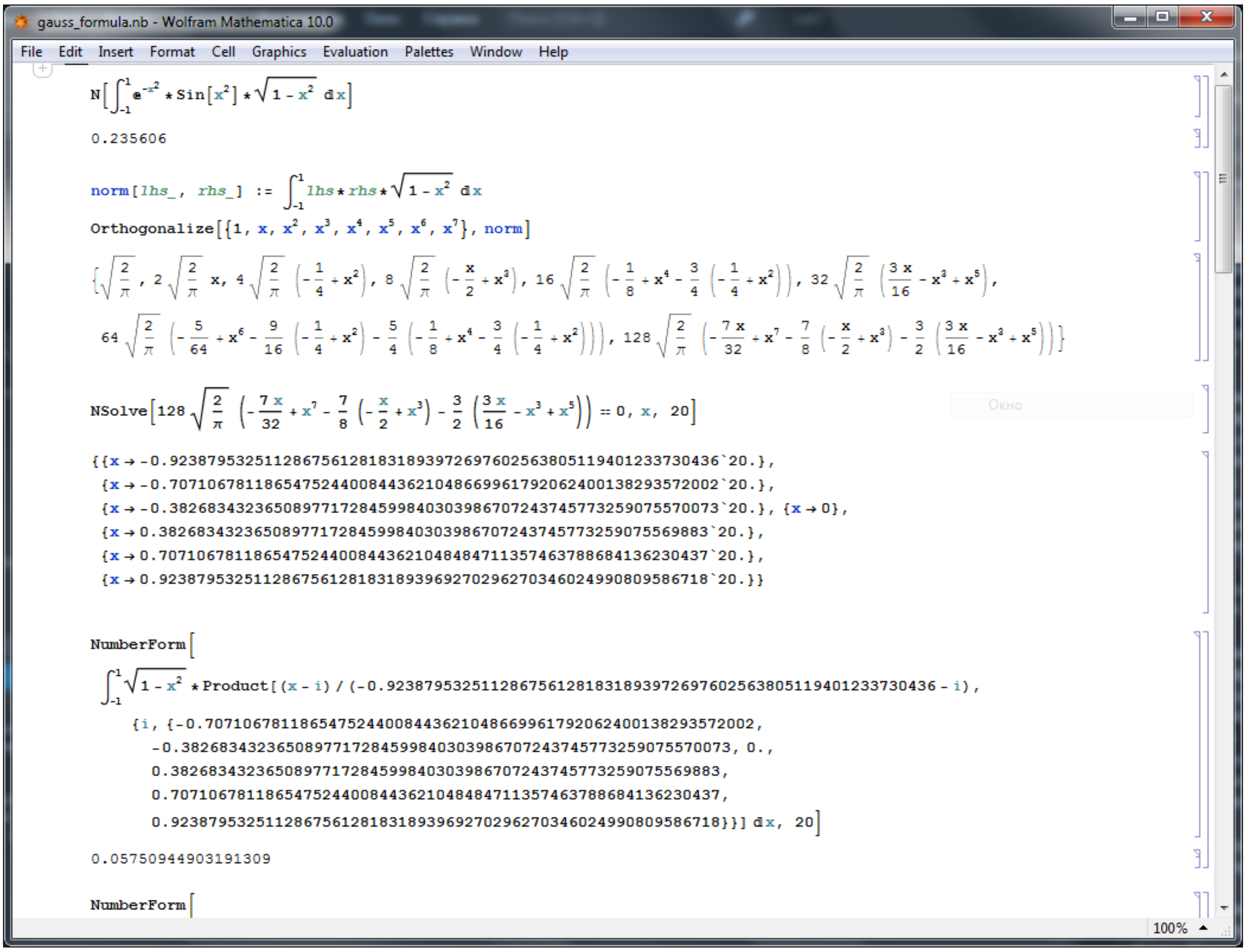
$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \sin(x^2) \sqrt{1-x^2} dx = 0.235606$$

Тип квадратурной формулы	Требуемая точность используемая в правиле Рунге	Достигнутая точность	Количество вычислений подынтегральной функции
Составная трапеций	10^{-4}	0.0002383373759059504	9
Составная трапеций	10^{-6}	2.2630524022793086e-06	16
Составная трапеция	10^{-8}	4.0590436548026965e-07	22
НАСТ	…	5.063786925607605e-07	7

Код программы

```
import math


def function(x):
    return (math.e ** (-(x ** 2))) * math.sin(x ** 2)


def weight(x):
    return math.sqrt(1 - x ** 2)


def quad_formula(a, b, n):
    ans = function(a)
    h = (b - a) / (n - 1)
    for i in range(1, n):
        ans += 2 * function(a + i * h) * weight(a + i * h)
    ans += function(b)
    ans *= h / 2
    return ans


wolfram_precount = 0.235606
precision = 6
left = -1
right = 1
TETA = 1 / 3
EPSILON = 10 ** -precision
n0 = 10
cur = quad_formula(left, right, n0)
double = quad_formula(left, right, 2 * n0)
counts = 2
while TETA * math.fabs(cur - double) >= EPSILON:
    n0 *= 2
    cur = double
    double = quad_formula(left, right, 2 * n0)
    counts += 1
A = [0.05750944903191309, 0.1963495408493621, 0.3351896326668111, 0.3926990816987241,
0.3351896326668105,
     0.196349540849362, 0.05750944903191318]
gauss_roots = [-0.92387953251128675612818318939726976025638051194012337304 36,
               -0.70710678118654752440084436210486699617920624001382935720 02,
               -0.38268343236508977172845998403039867072437457732590755700 73, 0.,
               0.38268343236508977172845998403039867072437457732590755698 83,
               0.70710678118654752440084436210484847113574637886841362304 37,
               0.92387953251128675612818318939692702962703460249908095867 18]
gauss = 0.0
for i in range(7):
    gauss += A[i] * function(gauss_roots[i])
print("Integrate with trapeze =", double, sep=" ")
print("Reached precision =", math.fabs(wolfram_precount - double), sep=" ")
print("Iterations =", counts, sep=" ")
print("Gauss formula =", gauss, sep=" ")
print("Reached gauss precision =", math.fabs(wolfram_precount - gauss), sep=" ")
```

Вольфрам


gauss_formula.nb - Wolfram Mathematica 10.0
File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help
N[∫_{-1}^{1} e^{-x^2} * Sin[x^2] * √(1 - x^2) dx]
0.235606
norm[lhs_, rhs_] := ∫_{-1}^{1} lhs * rhs * √(1 - x^2) dx
Orthogonalize[{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7}, norm]
{√(2/π), 2 √(2/π) x, 4 √(2/π) (-1/4 + x^2), 8 √(2/π) (-x/2 + x^3), 16 √(2/π) (-1/8 + x^4 - 3/4 (-1/4 + x^2)), 32 √(2/π) (3 x/16 - x^3 + x^5),
64 √(2/π) (-5/64 + x^6 - 9/16 (-1/4 + x^2) - 5/4 (-1/8 + x^4 - 3/4 (-1/4 + x^2))), 128 √(2/π) (-7 x/32 + x^7 - 7/8 (-x/2 + x^3) - 3/2 (3 x/16 - x^3 + x^5))}
NSolve[128 √(2/π) (-7 x/32 + x^7 - 7/8 (-x/2 + x^3) - 3/2 (3 x/16 - x^3 + x^5)) == 0, x, 20]
{{x → -0.92387953251128675612818318939726976025638051194012337304 36`20.},
{x → -0.70710678118654752440084436210486699617920624001382935720 02`20.},
{x → -0.38268343236508977172845998403039867072437457732590755700 73`20.}, {x → 0},
{x → 0.38268343236508977172845998403039867072437457732590755698 83`20.},
{x → 0.70710678118654752440084436210484847113574637886841362304 37`20.},
{x → 0.92387953251128675612818318939692702962703460249908095867 18`20.}}
NumberForm[
∫_{-1}^{1} √(1 - x^2) * Product[(x - i) / (-0.9238795325112867561281831893972697602563805119401233730436 - i),
{i, {-0.7071067811865475244008443621048669961792062400138293572002,
-0.3826834323650897717284599840303986707243745773259075570073, 0.,
0.3826834323650897717284599840303986707243745773259075569883,
0.7071067811865475244008443621048484711357463788684136230437,
0.9238795325112867561281831893969270296270346024990809586718}}] dx, 20]
0.05750944903191309
NumberForm[
100%

gauss_formula.nb - Wolfram Mathematica 10.0

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}$ `* Product[(x - i) / (-0.70710678118654752440084436210486699617920624001382935720002 - i),`

```
{i, {-0.92387953251128675612818318939726976025638051194012337304360,
  -0.38268343236508977172845998403039867072437457732590755700730, 0.,
  0.38268343236508977172845998403039867072437457732590755698830,
  0.70710678118654752440084436210484847113574637886841362304370,
  0.92387953251128675612818318939692702962703460249908095867180}}] dx, 20]
```

`0.1963495408493621`

`NumberForm[`

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}$ `* Product[(x - i) / (-0.38268343236508977172845998403039867072437457732590755700730 - i),`

```
{i, {-0.92387953251128675612818318939726976025638051194012337304360,
  -0.70710678118654752440084436210486699617920624001382935720002, 0.,
  0.38268343236508977172845998403039867072437457732590755698830,
  0.70710678118654752440084436210484847113574637886841362304370,
  0.92387953251128675612818318939692702962703460249908095867180}}] dx, 20]
```

`0.3351896326668111`

`NumberForm[`

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}$ `* Product[(x - i) / (0. - i),`

```
{i, {-0.92387953251128675612818318939726976025638051194012337304360,
  -0.70710678118654752440084436210486699617920624001382935720002,
  -0.38268343236508977172845998403039867072437457732590755700730,
  0.38268343236508977172845998403039867072437457732590755698830,
  0.70710678118654752440084436210484847113574637886841362304370,
  0.92387953251128675612818318939692702962703460249908095867180}}] dx, 20]
```

`0.3926990816987241`

`NumberForm[`

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}$ `* Product[(x - i) / (0.38268343236508977172845998403039867072437457732590755698830 - i),`

100%

gauss_formula.nb - Wolfram Mathematica 10.0

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

```
NumberForm[
 ∫_-1^1 √(1 - x^2) * Product[(x - i) / (0.38268343236508977172845998403039867072437457773259075569883 - i),
   {i, {-0.92387953251128675612818318939726976025638051194012337304356,
     -0.70710678118654752440084436210486699617920624001382935720002,
     -0.38268343236508977172845998403039867072437457773259075570073, 0.,
     0.70710678118654752440084436210484847113574637886841362304337,
     0.92387953251128675612818318939692702962703460249908095867118}}] dx, 20]

0.3351896326668105

NumberForm[
 ∫_-1^1 √(1 - x^2) * Product[(x - i) / (0.70710678118654752440084436210484847113574637886841362304337 - i),
   {i, {-0.92387953251128675612818318939726976025638051194012337304356,
     -0.70710678118654752440084436210486699617920624001382935720002,
     -0.38268343236508977172845998403039867072437457773259075570073, 0.,
     0.38268343236508977172845998403039867072437457773259075569883,
     0.92387953251128675612818318939692702962703460249908095867118}}] dx, 20]

0.196349540849362

NumberForm[
 ∫_-1^1 √(1 - x^2) * Product[(x - i) / (0.92387953251128675612818318939692702962703460249908095867118 - i),
   {i, {-0.92387953251128675612818318939726976025638051194012337304356,
     -0.70710678118654752440084436210486699617920624001382935720002,
     -0.38268343236508977172845998403039867072437457773259075570073, 0.,
     0.38268343236508977172845998403039867072437457773259075569883,
     0.70710678118654752440084436210484847113574637886841362304337}}] dx, 20]

0.05750944903191318
```

100%