ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

«ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ»

Выполнил

Святослав Артюшкевич, 3 группа, 2 курс

Условие задачи

Найти $\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \sin(x^2)\, dx$ с весовой функцией $\rho = \sqrt{1 - x^2}$

- Используя базовую квадратурную формулу трапеций построить составную
- Применяя полученную составную формулу вычислить интеграл с точностью$\varepsilon = 10^{-4}, \varepsilon = 10^{-6}, \varepsilon = 10^{-8}$. Для оценки погрешности воспользоваться правилом Рунге
- Используя систему компьютерной алгебры произвести вычисление указанного в варианте интеграла и сравнить с полученным
- Построить квадратурную формулу НАСТ с 7 узлами
- Произвести вычисление интеграла из варианта используя полученную формулу

Теоретические сведения

Составная квадратурная формула трапеций:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{2}\left(f(a) + 2\sum_{k=1}^{N-1} f(a+kh) + f(b)\right)$$

Правило Рунге для квадратурной формулы трапеций

$$\Delta_{2n} \approx \Theta|I_{2n} - I_n|, \Theta = \frac{1}{3}$$

Интеграл последовательно вычисляется для $N = n_0, 2n_0, 4n_0, \ldots$,пока не станет верно, что

$\Delta_{2n} < \varepsilon$, где эпсилон заданная точность

Построение квадратурной формулы Гаусса:

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx \approx \sum_{i=0}^{n} A_i f(x_i)$$

$$\varphi_i = x^i \quad \psi_0 = 1$$

$$\psi_i = \varphi_i - \sum_{j=0}^{i-1} \frac{< \varphi_i, \psi_j >}{< \psi_j, \psi_j >} \psi_j$$

$$< f(x), g(x) >= \int_a^b f(x)g(x)\rho(x)dx$$

Корни ψ_n являются узлами квадратурной формулы

$$A_i = \int_a^b \rho(x) \prod_{j \neq i} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} dx$$

Результаты

$$x = [-0.92388, -0.707107, -0.382683, 0, 0.382683, 0.707107, 0.92388]$$

$$A = [0.0575092, 0.19635, 0.335189, 0.392699, 0.335189, 0.19635, 0.0575091]$$

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} \sin(x^2) \sqrt{1 - x^2} dx = 0.235606$$

Тип квадратурной формулы	Требуемая точность используемая в правиле Рунге	Достигнутая точность	Количество вычислений подынтегральной функции
Составная трапеций	10^{-4}	0.0002383373759059504	9
Составная трапеций	10^{-6}	2.2630524022793086e-06	16
Составная трапеция	10^{-8}	4.0590436548026965e-07	22
НАСТ	…	2.856259445627174e-07	7

Код программы

```
import math


def function(x):
    return (math.e ** (-(x ** 2))) * math.sin(x ** 2)


def weight(x):
    return math.sqrt(1 - x ** 2)


def quad_formula(a, b, n):
    ans = function(a)
    h = (b - a) / (n - 1)
    for i in range(1, n):
        ans += 2 * function(a + i * h) * weight(a + i * h)
    ans += function(b)
    ans *= h / 2
    return ans


wolfram_precount = 0.235606
precision = 8
left = -1
right = 1
TETA = 1 / 3
EPSILON = 10 ** -precision
n0 = 10
cur = quad_formula(left, right, n0)
double = quad_formula(left, right, 2 * n0)
counts = 2
while TETA * math.fabs(cur - double) >= EPSILON:
    n0 *= 2
    cur = double
    double = quad_formula(left, right, 2 * n0)
    counts += 1
A = [0.0575092, 0.19635, 0.335189, 0.392699, 0.335189, 0.19635, 0.0575091]
gauss_roots = [-0.92388, -0.707107, -0.382683, 0, 0.382683, 0.707107, 0.92388]
gauss = 0.0
for i in range(7):
    gauss += A[i] * function(gauss_roots[i])
print("Integrate with trapeze =", double, sep=" ")
print("Reached precision =", math.fabs(wolfram_precount - double), sep=" ")
print("Iterations =", counts, sep=" ")
print("Gauss formula =", gauss, sep=" ")
print("Reached gauss precision =", math.fabs(wolfram_precount - gauss), sep=" ")
```

Вольфрам

gauss_formula.nb - Wolfram Mathematica 10.0

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

$$N\left[\int_{-1}^{1} e^{-x^2} * \mathrm{Sin}[x^2] * \sqrt{1-x^2}\, dx\right]$$

0.235606

$$\mathrm{norm}[lhs\_, rhs\_] := \int_{-1}^{1} lhs * rhs * \sqrt{1-x^2}\, dx$$

$$\mathrm{Orthogonalize}[\{1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6, x^7\}, \mathrm{norm}]$$

$$\Big\{\sqrt{\tfrac{2}{\pi}},\ 2\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\,x,\ 4\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(-\tfrac{1}{4}+x^2\right),\ 8\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(-\tfrac{x}{2}+x^3\right),\ 16\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(-\tfrac{1}{8}+x^4-\tfrac{3}{4}\left(-\tfrac{1}{4}+x^2\right)\right),$$
$$32\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(\tfrac{3x}{16}-x^3+x^5\right),\ 64\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(-\tfrac{5}{64}+x^6-\tfrac{9}{16}\left(-\tfrac{1}{4}+x^2\right)-\tfrac{5}{4}\left(-\tfrac{1}{8}+x^4-\tfrac{3}{4}\left(-\tfrac{1}{4}+x^2\right)\right)\right),$$
$$128\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(-\tfrac{7x}{32}+x^7-\tfrac{7}{8}\left(-\tfrac{x}{2}+x^3\right)-\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3x}{16}-x^3+x^5\right)\right)\Big\}$$

$$\mathrm{NSolve}\left[128\sqrt{\tfrac{2}{\pi}}\left(-\tfrac{7x}{32}+x^7-\tfrac{7}{8}\left(-\tfrac{x}{2}+x^3\right)-\tfrac{3}{2}\left(\tfrac{3x}{16}-x^3+x^5\right)\right)\right]$$

{{x → -0.92388}, {x → -0.707107}, {x → -0.382683},
{x → 0.}, {x → 0.382683}, {x → 0.707107}, {x → 0.92388}}

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} * \mathrm{Product}[(x-i)/(-0.92388-i),$$
$$\{i, \{-0.707107, -0.382683, 0., 0.382683, 0.7071070, 0.92388\}\}]\, dx$$

0.0575092

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} * \mathrm{Product}[(x-i)/(-0.707107-i),$$
$$\{i, \{-0.92388, -0.382683, 0., 0.382683, 0.7071070, 0.92388\}\}]\, dx$$

0.19635

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} * \mathrm{Product}[(x-i)/(-0.382683-i),$$
$$\{i, \{-0.92388, -0.707107, 0., 0.382683, 0.7071070, 0.92388\}\}]\, dx$$

100%

gauss_formula.nb - Wolfram Mathematica 10.0

File Edit Insert Format Cell Graphics Evaluation Palettes Window Help

{i, {-0.92388, -0.382683, 0., 0.382683, 0.7071070, 0.92388}}] dx

0.19635

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} * \text{Product}[(x-i)/(-0.382683-i), \{i, \{-0.92388, -0.707107, 0., 0.382683, 0.7071070, 0.92388\}\}]\, dx$$

0.335189

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} * \text{Product}[(x-i)/(0.-i), \{i, \{-0.92388, -0.707107, -0.382683, 0.382683, 0.7071070, 0.92388\}\}]\, dx$$

0.392699

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} * \text{Product}[(x-i)/(0.382683-i), \{i, \{-0.92388, -0.707107, -0.382683, 0., 0.7071070, 0.92388\}\}]\, dx$$

0.335189

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} * \text{Product}[(x-i)/(0.7071070-i), \{i, \{-0.92388, -0.707107, -0.382683, 0., 0.382683, 0.92388\}\}]\, dx$$

0.19635

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2} * \text{Product}[(x-i)/(0.92388-i), \{i, \{-0.92388, -0.707107, -0.382683, 0., 0.382683, 0.7071070\}\}]\, dx$$

0.0575091

100%