ECOLE NORMALE SUPERIEURE
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Cours :

Structures, polynômes et fractions rationnelles

Licence : Mathématiques,

Semestre I

Prof. Hicham Yamoul

Table des matières

Chapitre 1

Lois de composition interne

1.1 Définitions et propriétés

Soit E un ensemble.

Une loi de composition interne (l.c.i.) sur E est une application de $E \times E$ dans E, noté généralement $*$, $\perp$, ... l'image de (x, y) par cette application est notée $x * y$. On a ainsi,

$$\begin{aligned} E \times E &\to E \\ (x, y) &\mapsto x * y \end{aligned}$$

Exemple 1.1.1 • $(\mathbb{N}, +)$; $(\mathbb{R}, \times)$; $(\mathbb{C}, +)$; $(\mathbb{C}, .)$ *les ensembles des nombres munis des opérations usuelles* $+$ *et* $\times$ *sont des ensembles munis des l.c.i.*

• *Si on note* F^E *l'ensemble des applications de* E *dans* F, *alors*

$$\begin{aligned} E^E \times E^E &\to E^E \\ (f, g) &\mapsto f \circ g \end{aligned}$$

La composition des applications est une l.c.i.

• $\cap$ *et* $\cup$ *sont des lois de composition internes sur* $\mathcal{P}(E)$.

Définition 1.1.1 *On dit qu'une l.c.i. est commutative si* $\forall (x, y) \in E^2;\ x * y = y * x$.

Définition 1.1.2 *On dit qu'une l.c.i. est associative si* $\forall (x, y, z) \in E^3;\ (x * y) * z = x * (y * z) = x * y * z$.

Définition 1.1.3 *Soit* $e \in E$, *on dit que* e *est un élément neutre pour* $*$ *lorsque* $\forall x \in E,\ x * e = e * x = x$

Les deux égalités $x * e = x$ *et* $e * x = x$ *doivent être vérifiées lorsque* $*$ *n'est pas commutative.*

Proposition 1.1.1 *Si une l.c.i.* $*$ *admet un élément neutre* e *dans* E, *alors il est unique.*

En effet, si e et e' sont deux éléments neutres, alors $e' = e * e' = e$ (La première égalité vient du fait que e est neutre, la seconde du fait que e' est neutre)

Définition 1.1.4 *Si* $*$ *est une l.c.i. est associative sur E et s'il y a dans E un élément neutre pour* $*$ *on dit que* $(E, *)$ *est un monoïde.*

Si de plus $*$ *est commutative, on dit que* $(E, *)$ *est un monoïde commutatif.*

Exemple 1.1.2 $(\mathbb{N}, +)$ *est un monoïde commutatif.*

Définition 1.1.5 *Soit* E *un ensemble muni d'une l.c.i. possédant un élément neutre* e.

Soient x *et* x' *deux éléments de* E. *On dit que* x' *est symétrique de* x *(pour la loi* $*$*) lorsque;*

$x * x' = x' * x = e.$

Proposition 1.1.2 *Si* $*$ *est associatif, et si un élément* x *de* E *admet un élément symétrique pour* $*$, *alors il est unique.*

Preuve : En effet, si x' et x'' sont deux éléments symétriques de x, alors : $x'' = e * x'' = (x' * x) * x'' = x' * (x * x'') = x' * e = x'$. ■

Si un élément x de E admet un élément symétrique pour $*$, alors on dit que x est symétrisable.

Définition 1.1.6 *Soit* E *un ensemble muni d'une l.c.i.* $*$. *Un élément* a *de* E *est dit régulier à gauche (resp. à droite) si*

$$\forall x, y \in E,\ a * x = a * y \Rightarrow x = y$$

$$(\textit{resp.}\ )\forall x, y \in E,\ x * a = y * a \Rightarrow x = y$$

Lorsque la loi $*$ *est commutative, on dit simplement que* a *est régulier.*

Exemple 1.1.3 *Dans* $(\mathbb{Z}, .)$, *tout élément non nul est régulier.*

Définition 1.1.7 *On suppose que* E *est muni de deux lois de composition internes* $*$ *et* $\top$. *On dit que* $*$ *est distributive sur* $\top$ *si*

$\forall x,\ y\ z \in E;\ x * (y \top z) = (x * y) \top (x * z)$ *et*

$(y \top z) * x = (y * x) \top (z * x)$

Exemple 1.1.4 *Dans* $(\mathbb{Z}, +, .)$ *La loi . est distributive sur* $+$.

1.2 Stabilité

$(E, *)$ désigne toujours un ensemble muni d'une l.c.i. $*$.

Définition 1.2.1 *Soit F une partie non vide de E. On dit que F est stable par $*$ si*

$$\forall (x, y) \in F^2,\ x * y \in F.$$

Proposition 1.2.1 *Soit $(E, *)$ un monoide ($*$ est associative). Alors l'ensemble S des éléments symétrisables de E est stable par $*$.*

Preuve : Si x admet un élément symétrique x', et si y admet un élément symétrique y'. Alors $x * y$ admet un élément symétrique appartenant à S, en effet, soient $x,\ y$ deux éléments de S. On note x et y leurs symétriques resp.

Soit e l'élément neutre de E.

On a $(x * y) * (y' * x') = x * (y * y') * x' = e$.

$(x' * y') * (y * x) = x' * (y' * y) * x = x' * x = e$.

Donc $x * y \in F$ et l'élément symétrique de $x * y$ est $y' * x'$. ■

Soit A un ensemble et soit E un ensemble muni d'une l.c.i. On définit sur $E^A = \mathcal{F}(A, E)$ une loi $\hat{*}$ de la façon suivante :

Pour tous $f,\ g$ de $\mathcal{F}(A, E),\ f \hat{*} g$ est l'application de A dans E qui à tout x de A associe $f(x) * g(x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f \hat{*} g : A &\to E \\ x &\mapsto f(x) * g(x) \end{aligned}$$

1.3 Exercices

Exercice 1.3.1 *Pour tout $x, y \in I =]1, +\infty[$, on pose $x * y = xy - x - y + 2$.*

Montrer que $*$ est une l.c.i. dans I

Exercice 1.3.2 *On considère la l.c.i. $\top$ définie sur $\mathbb{Z}^2$ par :*

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2;\ x \top y = xy - 3x - 3y + 12$$

1. Etudier la commutativité et l'associativité de $\top$.

2. Montrer que $(\mathbb{Z}, \top)$ admet un élément neutre à déterminer.

3. Déterminer l'ensemble des éléments symétrisables et le symétrique de chaque élément de cet ensemble.

4. Déterminer l'ensemble des éléments réguliers.

Exercice 1.3.3 *Soit* $(E, *)$ *tel que :*
i) $(\forall x \in E);\ x * x = x,$
ii) $\forall (x, y, z) \in E^3;\ (x * y) * z = (y * z) * x$
Montrer que $*$ *est commutative.*

Exercice 1.3.4 *Soit* $(E, *)$
(*) $\forall (x, y, z, w) \in E^4,\ (w * x) * (y * z) = w * z$
1. Montrer que $\forall a,\ b,\ c \in E$, *on a* $c = a * b \Rightarrow c * c = c,$
2. En déduire que $a,\ b\, x$ *de* E

$$(a * b) * x = a * x.$$

Exercice 1.3.5 *Soit* E *un ensemble non vide muni d'une loi* $\cdot$ *qui est associative et qui vérifie :*

$$\forall\, a,\ b,\ c,\ d \in E,\ ab = cd \Rightarrow a = c \text{ ou } b = d.$$

Démontrer que

$$\forall\, a,\ b \in S,\ ab = a \text{ ou } ab = b$$

Exercice 1.3.6 *Soit* E *un ensemble non vide muni de deux lois* $*$ *et* $\circ$ *telles que :*

$$\forall\, x,\ y,\ z,\ t \in E,\ (x * y) \circ (z * t) = (x \circ y) * (z \circ t);$$

il existe $e \in E$ *tel que* $\forall x \in E,\ x * e = x, ;$
il existe $\varepsilon \in E$ *tel que* $\forall x \in E,\ \varepsilon \circ x = x \circ \varepsilon = x.$
Montrer que

$$\varepsilon = e \text{ et } \circ = *.$$

Exercice 1.3.7 *Dans* $\mathbb{R}$, *on définit la loi de composition interne* $*$ *par :*

$$\forall\, x,\ y \in \mathbb{R},\ x * y = ax + by.$$

Trouver des conditions sur a *et* b *pour que* $*$
- *soit commutative,*
- *soit associative,*
- *possède un élément neutre.*