ECOLE NORMALE SUPERIEURE
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Cours

Algèbre I

Licence en éducation,
Filière : Mathématiques
Niveau : S1

Prof. Hicham Yamoul

Département de Mathématiques et informatique
Ecole Normale Supérieure
Université Hassan II de Casablanca

2023/2024

Table des matières

Chapitre 1

Éléments de Logique

1.1 Notion de Proposition

Définition 1.1.1 *Une "Proposition" est un énoncé mathématique portant un sens et qui est soit Vrai ou Faux.*

On note généralement une proposition par P ou p.

Exemple 1.1.1 *"La somme de deux entiers successifs est un entier impair"*

"Si n est un entier alors c'est un carré complet.

Remarque 1.1.1 *Un proposition ne peut être à la fois vraie et fausse (ou ni vraie ni fausse)*

"La somme des angles de tout triangle dans le plan est $180°$"

Si une proposition est P est vraie alors on lui attribue la valeur 1 (ou V)

Si une proposition est fausse on lui attribue la valeur 0 (ou F)

On représente ceci par une table appelée table de vérité et on écrit

P
1
0

ou

P
V
F

Définition 1.1.2 *Une fonction propositionnelle est un énoncé mathématique qui contient une variable x (ou plusieurs variables) appartenant à un ensemble donné E telle que la valeur de vérité de la proposition varie en fonction de x.*

Exemple 1.1.2 $Q(x)$: "$x \in \mathbb{R},\ x^2 \leq 1$" *est vraie pour* $-1 \leq x \leq 1$ *est et elle est fausse sinon.*

$P(a,b)$: "$(a,b) \in \mathbb{R}^2$" *et* "$a^2 + b^2 = 4$" *est une fonction propositionnelle,* $P(0,1)$ *est fausse et* $P(-2,0)$ *est vraie.*

Définition 1.1.3 *Si une proposition est vraie mais on ne peut la prouver, on l'appelle "axiome".*

Exemple : Axiome du choix.

1.2 Quantificateurs-Propositions quantifiées

Définition 1.2.1 *Soit $P(x)$ une fonction propositionnelle de la variable x, d'un ensemble non vide E. À partir de l'énoncé : $(x \in E)$: $P(x)$ on définit les deux propositions suivantes :*

• $(\exists x \in E)$: $P(x)$ qui est vraie si, et seulement si il existe au moins un élément x de E vérifiant $P(x)$. (On "dit il existe au moins"), le symbole $\exists$ s'appelle quantificateur existentiel.

• $(\forall x \in E)$: $P(x)$ qui est vraie si, et seulement si tout élément x de E vérifiant $P(x)$. (On "quelque soit x de E")ou encore "pour tout x de E", le symbole $\exists$ s'appelle quantificateur universel.

Exemple 1.2.1 *1.* (P_1) : $(\forall x \in \mathbb{R})\, 2x + 1 = 0$ *est fausse.*

2. (P_2) : $(\exists x \in \mathbb{Z})\, 2x + 1 = 0$ *est fausse.*

3. (P_3) : $(\forall a \in \mathbb{R}_+^*)$, $a + \frac{1}{a} \geq 2$ *est vraie.*

Vérifier si les propositions suivantes sont vraies ou fausses

$Q_1 : (x \in \mathbb{R})\, x^2 + x + 1 = 0$; $\quad Q_2 : (\forall x \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})\, x \leq y$

$Q_3 : (\exists x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})\, x \leq y$.

Remarque 1.2.1 *• Si une proposition quantifiée contient plusieurs quantificateurs contient plusieurs quantificateurs de même nature, le sens ne changera pas si on change l'ordre de ces quantificateurs.*

• Si les natures des quantificateurs sont différentes, alors le sens de la proposition change.

1.3 Opérations sur les propositions

1.3.1 Négation d'une proposition

Définition 1.3.1 *La négation d'une proposition P est une proposition qu'on note $\neg P$ (ou $\bar{P}$) et qui est vraie si P est fausse, et est fausse si P est vraie.*

On représente ceci par la table de vérité suivante :

P	$\neg P$
V	F
F	V

i) Négation d'une proposition quantifiée

On considère la proposition P : "$(\forall x \in E)\, p(x)$", la négation de P est $\neg P$: "$(\exists x \in E)\, \neg p(x)$"

On considère la proposition Q : "$(\exists x \in E)\, p(x)$", la négation de Q est $\neg Q$: "$(\forall x \in E)\, \neg p(x)$"

On considère la proposition R : "$(\forall x \in E)(\exists y \in F)\, p(x, y)$", la négation de R est $\neg R$: "$(\exists x \in E)(\forall y \in F)\, \neg p(x, y)$".

ii) Preuve par contre-exemple

Pour prouver la proposition "$(\forall x \in E),\ p(x)$" est fausse, on montre que "$(\exists x \in E),\ \neg p(x)$" est vraie.

Exemple 1.3.1 Q : "$\forall (m,n) \in \mathbb{N}^{*2};\ \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + ... + \frac{1}{n+m} \in \mathbb{N}$" *est fausse.*

$\forall x \in]0,1[,\ \frac{2x}{x^2(1-x^2)} < 1$ est fausse.

1.3.2 Disjonction des propositions

Définition 1.3.2 *La disjonction de deux propositions p et q est une proposition qu'on la note "p ou q" ou "$p \vee q$" et qui fausse seulement dans le cas où p et q sont fausses.*

Table de vérité de disjonction

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Proposition 1.3.1 *i)* $(p \vee q)$ *et* $(q \vee p)$ *ont le même sens. (La disjonction est commutative).*
ii) $[(p \vee q) \vee r]$ *et* $[p \vee (q \vee r)]$ *ont le même sens. La disjonction est associative.*

1.3.3 Conjonction des proposition

Définition 1.3.3 *La conjonction des proposition p et q est la proposition qu'on la note "p et q" ou encore $p \wedge q$ et qui est vraie seulement dans le cas où p et q sont vraies.*

Table de vérité de conjonction

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Proposition 1.3.2 *i)* $(p \wedge q)$ *et* $(q \wedge p)$ *ont le même sens. (La conjonction est commutative).*
ii) $[(p \wedge q) \wedge r]$ *et* $[p \wedge (q \wedge r)]$ *ont le même sens. La conjonction est associative.*

1.3.4 Implication

Définition 1.3.4 *À partir des deux propositions p et q, on obtient la proposition "$\neg P \vee Q$" qui est fausse seulement si P est vraie et Q est fausse.*

La proposition "$\neg P \vee Q$" s'appelle implication des propositions P et Q et on écrit $P \Rightarrow Q$, on dit P implique Q.

Table de vérité de l'implication $p \Rightarrow q$;

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Remarque 1.3.1 *i) Les propositions* $(p \Rightarrow q)$ *et* $(q \Rightarrow p)$ *n'ont pas le même sens.*
ii) $q \Rightarrow p$ *s'appelle l'implication réciproque de* $p \Rightarrow q$

Condition nécessaire-condition suffisante
Dans l'implication $p \Rightarrow q$, on dit que :
• p est une condition suffisante (pour q).
• q est une condition nécessaire (pour p).

Exemple 1.3.2 *Soient* m *et* n *deux entiers.*
L'implication "$x + y$ *est impair* $\Rightarrow$ x *est impair ou* y *est impair" est vraie.*
Donc une condition nécessaire pour que $x + y$ *soit impair est que "*x *est impair ou* y *est impair"*

Soient p et q deux propositions :
Si $p \Rightarrow q$ est vraie, on dit que :
Pour que p soit vraie, *il faut que* que q soit vraie.
Pour que q soit vraie, il suffit que p soit vraie.

Exercice 1.3.1 *Soient* a *et* b *deux nombres réels donnés, montrer que*
$|a| < 1$ *et* $|b| < 1 \Rightarrow |a + b| < |1 + ab|$.

Proposition 1.3.3 *Les propositions suivantes sont vraies :*
$[(\forall x \in E) : A(x) \Rightarrow B(x)] \Rightarrow [(\forall x \in E) : A(x) \Rightarrow (\forall x \in E) : B(x)]$
$[(\exists x \in E)(\forall y \in F) : A(x, y)] \Rightarrow [(\forall y \in F)(\exists x \in E) : A(x, y)]$

Remarque 1.3.2 $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ *et* $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ *n'ont pas toujours le même sens.*

Remarque 1.3.3 $[(\forall x \in E) : A(x) \Rightarrow (\forall x \in E) : B(x)] \Rightarrow [(\forall x \in E) : A(x) \Rightarrow B(x)]$ *peut être fausse.*
$(\forall y \in F)(\exists x \in E) : A(x, y) \Rightarrow (\exists x \in E)(\forall y \in F) : A(x, y)$ *peut être fausse.*

Exemple 1.3.3 $(\forall x \in \mathbb{R})(\exists n \in \mathbb{N}) : x < n$ *est vraie, mais*
$(\exists n \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R}) : x < n$ *est fausse.*

1.3.5 Équivalence de deux propositions

Définition 1.3.5 *À partir de deux propositions p et q on obtient "*$p \Rightarrow q$*"* $\wedge$ *"*$q \Rightarrow p$*" et est vraie si, et seulement si p et q ont la même valeur de vérité.*
"$p \Rightarrow q$*"* $\wedge$ *"*$q \Rightarrow p$*" s'appelle équivalence de p et q et on écrit p* $\Leftrightarrow q$.

Table de vérité de l'équivalence $p \Leftrightarrow q$;

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Exemple 1.3.4 *i)* 2 *impair* $\Leftrightarrow (\exists \alpha \in \mathbb{Z}); 2\alpha - 1 = 0$ *est vraie.*
ii) $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q} \Leftrightarrow (\exists x \in \mathbb{R});\ x^2 + 1 = 0$ *est fausse.*

Exercice 1.3.2 *i)* $x, y \in \mathbb{R}$, *montrer que*

$$\sqrt{x-1} + 2\sqrt{y-4} = \frac{x+y}{2} \Leftrightarrow x = 2 \text{ et } y = 8.$$

ii) $a, b \in \mathbb{R}$, *montrer que* $|a+b| < |1+ab| \Leftrightarrow (a^2-1)(b^2-1) > 0$

Proposition 1.3.4 *i)* $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow p)$ *commutativité,*
ii) $[p \Leftrightarrow (q \Leftrightarrow r)] \Leftrightarrow [(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow r]$ *associativité,*
iii) $(p \Leftrightarrow q) \wedge (q \Leftrightarrow r) \Rightarrow (p \Leftrightarrow r)$

Proposition 1.3.5 *Soient* $p(x)$ *et* $q(x)$ *deux propositions,* $x \in E$. *Les propositions suivantes sont vraies;*
i) $[(\forall x \in E) : p(x) \wedge q(x)] \Leftrightarrow [(\forall x \in E) : p(x) \wedge (\forall x \in E) : q(x)]$
ii) $[(\exists x \in E) : p(x) \vee q(x)] \Leftrightarrow [(\exists x \in E) : p(x) \vee (\exists x \in E) : q(x)]$

Exercice 1.3.3 *Considérons la proposition*
$P :$ "$(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) :\ x^2 + xy + y^2 = 0$"
i) Donner $\neg P$.
ii) Montrer que P *est fausse.*

Proposition 1.3.6 *Distributivité*
i) $p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
ii) $p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \wedge r)$

Preuve : En exercice.

Exercice 1.3.4 *Montrer que :*
i) $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \Leftrightarrow \neg q)$
ii) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$

On a l'équivalence suivante :

$$[(\exists ! x \in E);\ p(x)] \Leftrightarrow [(\exists x \in E);\ p(x)] \wedge [(\forall y \in E);\ p(y)] \Rightarrow x = y.$$

1.4 Lois logiques

1.4.1 Définition et exemples

Définition 1.4.1 *Soit* P *une proposition composée de plusieurs propositions* $Q_1,\ Q_2, ..., Q_n$ *liées entre elles par des connecteurs (et, ou).*

On dit que P *est une loi logique si* P *est vraie quelque soit la valeur de vérité des propositions* $Q_1,\ ..., Q_n$.

Exemple 1.4.1 *(À vérifier à l'aide de table de vérité)*

1. $(p \wedge q) \Leftrightarrow (q \wedge p)$ *6.* $(p \wedge q) \Rightarrow p$
2. $(p \vee q) \Leftrightarrow (q \vee p)$ *7.* $[p \Rightarrow (q \vee r)] \Leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \Rightarrow r]$
3. $(p \wedge (q \wedge r)) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \wedge r)$ *8.* $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
4. $(p \vee (q \vee r)) \Leftrightarrow ((p \vee q)) \vee r$
5. $(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$

Exercice 1.4.1 *Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :*
i) $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$,
ii) $A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$

1.4.2 Lois de Morgan

Proposition 1.4.1 *Soient p et q deux propositions.*
Les propositions suivantes sont des lois logiques appelées Lois de Morgan
i) $\neg(p \vee q) \Leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$
ii) $\neg(p \wedge q) \Leftrightarrow \neg p \vee \neg q$

Exemple 1.4.2 $[\neg(p \Rightarrow q)] \Leftrightarrow p \wedge \neg q$

1.4.3 Lois de contraposée

Proposition 1.4.2 *Soient p et q deux propositions,*
la proposition $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$ *est une loi logique appelée loi de contraposée.*

Preuve : Table de vérité !

Exemple 1.4.3 $(\forall x \in \mathbb{R});\ x^2 \neq 3 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{1+x^2}} \neq 1$

Exercice 1.4.2 *Montrer que* $2^n - 1$ *premier* $\Rightarrow$ n *est premier.*

1.4.4 Raisonnement par l'absurde

Proposition 1.4.3 *Soient p et q deux propositions. La proposition suivante est une loi logique;*

$$[(\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)] \Rightarrow p$$

Preuve : Posons R : $(\neg p \Rightarrow q) \wedge (\neg p \Rightarrow \neg q)$
Supposons que R est vraie.

$$\begin{aligned} R &\Leftrightarrow (\neg(\neg p) \vee q) \wedge (\neg(\neg p) \vee \neg q) \\ &\Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee \neg q) \\ &\Leftrightarrow (p \wedge p) \vee (p \wedge \neg q) \vee (q \wedge p) \vee (q \wedge \neg p) \end{aligned}$$

d'où $(p \wedge q) \vee (p \wedge \neg q) \vee p$ est vraie, c'est-à-dire $p \vee (p \wedge (q \vee \neg q))$ est vraie, donc p est vraie.■

Exemple 1.4.4 $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 1.4.3 *Soient a et b deux réels tels que* $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+^*;\ |a-b| < \varepsilon$. *Montrer que* $a = b$.

1.4.5 Raisonnement par disjonction des cas

Définition 1.4.2 *Soient p, q et r des propositions.*

$$[(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)] \Rightarrow [(p \vee q) \Rightarrow r]$$

est une loi logique.

Exemple 1.4.5 *Soit k un entier relatif. Montrer que* $k(k^2-1) \equiv 0[3]$.

Exercice 1.4.4 *Montrer que* $(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(\forall \alpha > 0)(|x| < \alpha$ *et* $|y| < \alpha \Rightarrow \left|\frac{x+y}{2}\right| + \left|\frac{x-y}{2}\right| < \alpha)$

1.4.6 Raisonnement par récurrence

Proposition 1.4.4 *Soit $P(n)$ une fonction propositionnelle d'une variable n ($n \in \mathbb{N}$). Si*

i) Il existe un élément n_0 de $\mathbb{N}$ tel que $P(n_0)$,

ii) Pour tout $n \geqslant n_0,\ P(n) \Rightarrow P(n+1)$ est vraie,

Alors $(\forall n \geqslant n_0)$: $P(n)$ est vraie.

Preuve : Posons $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \geqslant n_0 \text{ et } P(n) \text{ vraie}\}$

On a $A \neq \varnothing$ et $A \subset \mathbb{N}$.

Montrons que $A = \{n_0,\ n_0+1,\ n_0+2, ...\}$

Par l'absurde, supposons qu'il existe $n \geqslant n_0$ tel que $P(n)$ est fausse. Posons $N = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \text{ est fausse}\},\ N \geqslant n_0$.

On a $P(N-1)$ est vraie et $P(N-1) \Rightarrow P(N)$ donc $P(N)$ est vraie, ce qui est absurde!■

1.5 Exercices

Exercice 1.5.1 *Donner la négation des propositions suivantes :*

- $(\forall n \in \mathbb{N})(\exists m \in \mathbb{N}) :\ n < m$
- $(\forall \alpha > 0)(\exists x \in]0,1[)(\exists y \in]0,1[) :\ x^2 + y^2 < \alpha$

Exercice 1.5.2 *Soient a et b deux nombres réels. On considère les deux propositions suivantes :*

P : "$a^3 + b^3 < 1 < a + b$" *et* Q : "$0 < a < 1$ *et* $0 < b < 1$"

Montrer que $P \Rightarrow Q$.

Exercice 1.5.3 *Montrer que les propositions suivantes sont des lois logiques :*

• $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow \neg[(A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge B)]$

• $(A \Leftrightarrow B) \Leftrightarrow (\neg A \Leftrightarrow \neg B)$

• $[A \Rightarrow (B \vee \neg C)] \Leftrightarrow [B \vee (A \Rightarrow \neg C)]$

Exercice 1.5.4 *Donner la négation de la proposition*

$$(\exists ! x \in E);\ P(x)$$

Exercice 1.5.5

1. *Résoudre dans* $\mathbb{R}^2$ *les deux systèmes suivants :*

$$\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 0 \\ (x-2)(y-6) = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \mid 2x - y + 3 \mid = 6 \\ \mid x \mid + y - 1 = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x(x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ y(x + y + 1) = 0 \end{cases}$$

2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* $\sqrt{x^2 - 5x + 6} > x + 4$

Exercice 1.5.6 *Soient* x *et* y *deux nombres réels, on considère les deux proposition :*
$"p : (x + \sqrt{x^2+1})(y + \sqrt{y^2+1}) = 1"$ *et* q : $"x + y = 0"$
Montrer que $p \Leftrightarrow q$

Exercice 1.5.7 *Soit* n *un entier naturel.*

1. *Determiner les restes de la division euclidienne de* n^2 *par* 5,

   en déduire que $(\forall n \in \mathbb{N});\quad \sqrt{5n+7} \notin \mathbb{N}$.

2. *Montrer que* $(\forall n \in \mathbb{N}^*);\quad \sqrt{\frac{n}{1+n}} \notin \mathbb{Q}$.

Exercice 1.5.8 *Montrer qu'il n'existe aucune fonction* f *définie de* $\mathbb{N}$ *dans* $\mathbb{N}$ *vérifiant :*
$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2;\quad f(m)^{f(n)} = n^m$.

Exercice 1.5.9 *Soient* $a_1, a_2, ...a_n$ *des nombres réels de l'intervalle* $[0, 1]$ *tels que* $a_1 \leq a_2 \leq ... \leq a_n$.
Montrer qu'il existe $i \in \{2, ..., n\}$ *tel que* $a_i - a_{i-1} \leq \frac{1}{n-1}$.

Exercice 1.5.10 *Soit* f *la fonction numérique de la variable réelle* x *définie par*

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} + 2x$$

1. *Déterminer la valeur de vérité de chacune de s propositions suivantes :*
   p : $"(\forall y \in \mathbb{R})(\exists x \in \mathbb{R}) :\ y = f(x)"$
   q : $"(\forall y \in \mathbb{R})(\exists ! x \in \mathbb{R}) :\ y = f(x)"$
2. *Résoudre dans* $\mathbb{R}$ *l'inéquation :* $f(x) > 1$.

Exercice 1.5.11 *Montrer qu'il n'existe aucune fonction f définie de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant :*

1. $(\forall x \in \mathbb{R}) \quad f(x^2) - (f(x))^2 \geq \frac{1}{4}$.
2. $(\forall (x, x') \in \mathbb{R}^2) \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$.

Exercice 1.5.12 *Montrer que tout entier $n \geq 2$ est divisible par un nombre premier.*

Exercice 1.5.13 *Montrer par récurrence que pour tout n de $\mathbb{N}^*$:*

1. $1^2 + 2^2 + ... + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (\frac{n(n+1)}{2})^2$