ECOLE NORMALE SUPERIEURE
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Cours

Algèbre 1

Licence en éducation,
Filière : Mathématiques
Niveau : S1

Prof. Hicham Yamoul

Département de Mathématiques et informatique
Ecole Normale Supérieure
Université Hassan II de Casablanca

2023/2024

Chapitre 3

Relations et Applications

3.1 Relations

3.1.1 Généralités

Définition 3.1.1 *Pour deux éléments x, y d'un ensemble non vide E, on appelle couple (x, y) l'ensemble $\{\{x\}, \{x, y\}\}$.*

La nécessité de cette écriture et la considération de l'ordre des éléments x et y dans le couple. $((x, y) \neq (y, x))$.

Proposition 3.1.1 *Pour tout éléments x, y, x', y', on a :*

$$(x, y) = (x', y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x'; \\ y = y' \end{cases}$$

Preuve. • $\Leftarrow$ évident.

• $\Rightarrow$ Supposons $(x, y) = (x', y')$ c-à-d. $\{\{x\}, \{x, y\}\} = \{\{x'\}, \{x', y'\}\}$

Supposons que $x \neq x'$. Alors $\{x\} \neq \{x'\}$, donc $\{x\} = \{x', y'\}$ et $\{x'\} = \{x, y\}$, d'où $x = y'$ et $x' = y$. Mais alors $\{x\}, \{x, x'\} = \{x'\}, \{x', x\}$, d'où $\{x\} = \{x'\}$, i.e. $x = x'$ contradiction. On a donc $x = x'$, puis $\{x, y\}, \{x', y'\}$, et donc, $y = y'$. ■

Définition 3.1.2 *Soient E et Fndeux ensembles.*

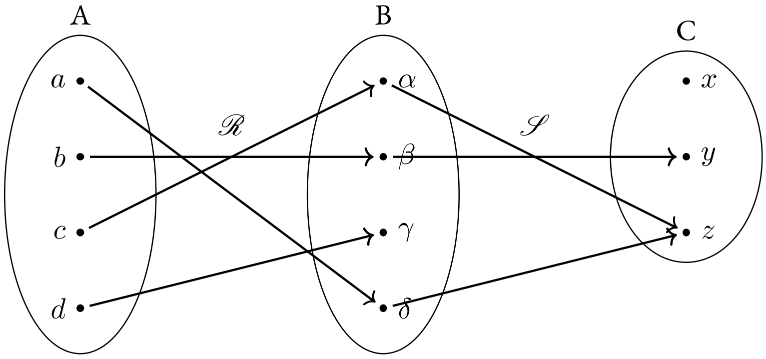
On appelle relation (ou correspondance) de E vers F tout triplet (E, Γ, F) où Γ est une partie de $E \times F$. On note $x\mathscr{R}y$ au lieu de $(x, y) \in \Gamma$.

E s'appelle l'ensemble de départ de $\mathscr{R}$,

F s'appelle l'ensemble d'arrivée de $\mathscr{R}$,

Γ s'appelle le graphe de $\mathscr{R}$,

On peut représenter une relation par un diagramme dans lequel une flèche va de x vers y si, et seulement si $x\mathscr{R}y$.



Deux relations $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ sont égales si, et seulement si
i) $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ ont le même ensemble de départ, noté E,
ii) $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ ont le même ensemble d'arrivée, noté F,
iii) $\forall(x,y) \in E \times F, x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x\mathscr{S}y$.

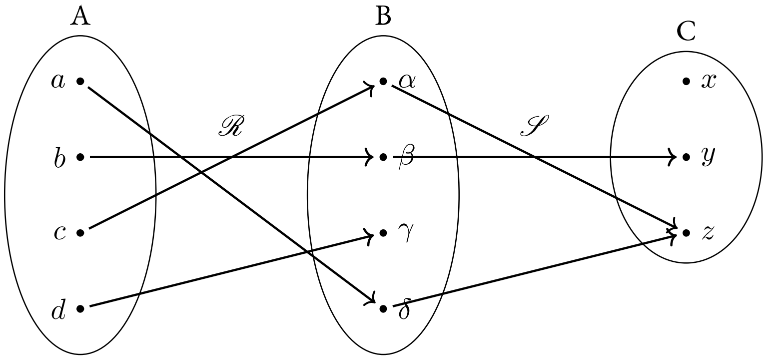
Si $\mathscr{R}$ est une relation de E vers F, on note $\bar{\mathscr{R}}$ (ou "non$\mathscr{R}$") la relation de E vers F définie par :

$$\forall(x,y) \in E \times F,\ (x\bar{\mathscr{R}}y \Leftrightarrow \text{non}\,(x\mathscr{R}y))$$

Définition 3.1.3 *Soient E, F, G trois ensembles, $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{S}$) une relation de E vers F (resp. de F vers G). On définit la relation composée de $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$, notée $\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$, de E vers G par :*

$$\forall(x,z) \in E \times G,\ x\mathscr{S} \circ \mathscr{R}z \Leftrightarrow \exists y \in F;\ x\mathscr{R}y \ \text{ et } \ y\mathscr{S}z$$

Par exemple, le diagramme suivant montre la composée de deux relations;



Exemple 3.1.1 *$E = F = G$ est l'ensemble des droites d'un plan affine euclidien.*

$\mathscr{R} = \mathscr{S} = \perp$ orthogonalité, alors $\mathscr{S} \circ \mathscr{R} = //$ parallélisme car toute droites D, D'' de E

$$D//D'' \Leftrightarrow (\exists D' \in E;\ D \perp D' \text{ et } D' \perp D'') \Leftrightarrow \perp \circ \perp = //.$$

Proposition 3.1.2 *(Associativité de la composition des relations)*

Soient E, F, G et H des ensembles, $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{S}$, resp. $\mathscr{T}$) une relation de E vers F (resp. de F vers G, resp. de G vers H). On a alors :

$$(\mathscr{T} \circ \mathscr{S}) \circ \mathscr{R} = \mathscr{T} \circ (\mathscr{S} \circ \mathscr{R}).$$

Preuve. D'abord $(\mathscr{T} \circ \mathscr{S}) \circ \mathscr{R}$ et $\mathscr{T} \circ (\mathscr{S} \circ \mathscr{R}$ ont le même ensemble de départ E et même ensemble d'arrivée H.

Soit $(x,t) \in E \times H$, on a : $x(\mathscr{T} \circ \mathscr{S}) \circ \mathscr{R}t \Leftrightarrow \exists y \in F;\ x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{T} \circ \mathscr{S}t \Leftrightarrow (\exists y \in F, \exists z \in G;\ x\mathscr{R}y,\ y\mathscr{S}z$ et $z\mathscr{T}t) \Leftrightarrow \exists z \in G,\ x\mathscr{S} \circ \mathscr{R}z,\ z\mathscr{T}t \Leftrightarrow x\mathscr{T} \circ (\mathscr{S} \circ \mathscr{R})t$. ■

Définition 3.1.4 *Soient E et F deux ensembles, et $\mathscr{R}$ une relation de E vers F. On définit la relation réciproque de $\mathscr{R}$, notée $\mathscr{R}^{-1}$, de F vers E, par :*

$$\forall (x,y) \in E \times F,\ (y\mathscr{R}^{-1}x \Leftrightarrow x\mathscr{R}y)$$

Exemple 3.1.2 *La relation réciproque de $\leq$ dans $\mathbb{N}$ est $\geq$.*

Proposition 3.1.3 *i) Pour toute relation $\mathscr{R}$; $(\mathscr{R}^{-1})^{-1} = \mathscr{R}$.*

ii) Soient E, F G des ensembles, $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{R}$) une relation de E vers F (resp. de F vers G). On a :

$$(\mathscr{S} \circ \mathscr{R})^{-1} = (\mathscr{R}^{-1}) \circ (\mathscr{S}^{-1}).$$

Preuve. i) Immédiat.

ii) Pour tout $(x,z) \in E \times G$:

$z(\mathscr{S} \circ \mathscr{R})^{-1}x \Leftrightarrow x\mathscr{S} \circ \mathscr{R}z \Leftrightarrow (\exists y \in F;\ x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{S}z) \Leftrightarrow (\exists y \in F,\ z\mathscr{S}^{-1}y$ et $y\mathscr{R}^{-1}x) \Leftrightarrow z\mathscr{R}^{-1} \circ \mathscr{S}^{-1}x$. ■

Définition 3.1.5 ***(Relation binaire)***

Une relation $\mathscr{R}$ de E vers F est appelée relation binaire si, et seulement si $E = F$. On dit alors que $\mathscr{R}$ est une relation binaire dans E.

Exemple 3.1.3 *i) Soit $E = \mathbb{R}$, on considère la relation binaire définie par : $x\mathscr{R}y$ si, et seulement si $x \leq y$.*

ii) La relation définie sur $E = \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ par : $(x,x')\mathscr{R}(y,y')$ si, et seulement si $x+y' = y+x'$.

Définition 3.1.6 *Soient E un ensemble, $\mathscr{R}$ une relation binaire dans E, et $A \in \mathcal{P}(E)$. La relation binaire dans A, notée, $\mathscr{R}_A$, définie par :*

$$\forall (x,y) \in A^2,\ (x\mathscr{R}_A y \Leftrightarrow x\mathscr{R}y)$$

est appelée relation induite par $\mathscr{R}$ sur (ou dans) A.

Définition 3.1.7 *Une relation binaire $\mathscr{R}$ dans un ensemble E est dite :*

- ***Réfléxive :*** *si, et seulement si,* $\forall x \in E;\ x\mathscr{R}x$,
- ***Symétrique :*** *Si, et seulement si,* $\forall (x,y) \in E^2,\ (x\mathscr{R}y \Leftrightarrow y\mathscr{R}x)$,
- ***Antisymétrique :*** *Si, et seulement si,* $\forall (x,y) \in E^2,\ (\begin{cases} x\mathscr{R}y \\ y\mathscr{R}x \end{cases} \Rightarrow x = y)$
- ***Transitive :*** *Si, et seulement si,* $\forall (x,y,z) \in E^3,\ (\begin{cases} x\mathscr{R}y \\ y\mathscr{R}z \end{cases} \Rightarrow x\mathscr{R}z)$

Exemple 3.1.4 *1) La relation $\leq$ dans $\mathbb{N}$ est refléxive, non symétrique, antisymétrique, transitive.*

2) La relation $\perp$ dans l'ensemble des droites du plan affine euclidien est symétrique, mais n'est ni refléxive, ni antisymétrique, ni transitive.

3.1.2 Relation d'équivalence

Définition 3.1.8 *Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire dans un ensemble E. On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence si, et seulement si, $\mathscr{R}$ est refléxive, symétrique et transitive.*

Exemple 3.1.5 *1) Dans l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites affines d'un plan affine P, la relation de parallélisme est une relation d'équivalence.*

2) La relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbb{R}$ par : $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x-y \in \mathbb{Z}$, est une relation d'équivalence. (À vérifier !)

Définition 3.1.9 *Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence dans un ensemble E. Pour tout x de E, on appelle classe d'équivalence de x (modulo $\mathscr{R}$) l'ensemble, noté $cl_{\mathscr{R}}(x)$ (ou $\bar{x}$, ou $\dot{x}$, etc) défini par :*

$$cl_{\mathscr{R}}(x) = \{y \in E;\ x\mathscr{R}y\}$$

Tout élément de $cl_{\mathscr{R}}(x)$ est appelé un représentant de $cl_{\mathscr{R}}(x)$.

Définition 3.1.10 *On appelle ensemble quotient de E par $\mathscr{R}$ (ou modulo $\mathscr{R}$), et on note $E/\mathscr{R}$, l'ensemble des classes d'équivalence modulo $\mathscr{R}$, c-à-d.*

$$E/\mathscr{R} = \{cl_{\mathscr{R}}(x);\ x \in E\}$$

Exemple 3.1.6 *1) Le relation d'égalité dans un ensemble quelconque E est une relation d'équivalence. Pour tout $x \in E$, on a $cl_{=}(x) = \{x\}$ et $E/(=) = \{\{x\},\ x \in E\}$.*

2) Dans un ensemble E, la relation $\mathscr{R}$ définie par : $\forall (x, y) \in E^2$, $x\mathscr{R}y$ est une relation d'équivalence. Pour tout x de E, on a $cl_{\mathscr{R}}(x) = E,\ E/\mathscr{R} = \{E\}$.

3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation "congru à..modulo n", définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{Z}^2,\ (x \equiv y\,[n] \Leftrightarrow n \mid x - y)$$

est une rlation d'équivalence. (Vérifier !)

Pour tout x de $\mathbb{Z}$, la classe de x est appelée classe de x modulo n et notée $\bar{x}$ (ou $\dot{x}$) et,

$$\bar{x} = \{x + kn,\ n \in \mathbb{Z}\}$$

4) Pour tout D de $\mathcal{D}$, la classe de D modulo le parallélisme est appelée la direction de $\mathcal{D}$.

Proposition 3.1.4 *Soit E un ensemble.*

1) Pour toute relation d'équivalence $\mathscr{R}$ dans E, l'ensemble quotient $E/\mathscr{R}$ est une partition de E.

2) Pour toute partition $\mathscr{P}$ de E, la relation $\mathscr{R}$ définie dans E par :

$$\forall(x,y)\in E^2,\ (x\mathscr{R}y \Leftrightarrow (\exists P\in\mathscr{P},\ \begin{cases} x\in P\\ y\in P\end{cases}))$$

est une relation d'équivalence dans E, et $\mathscr{P} = E/\mathscr{R}$.

Preuve. 1) Soit $\mathscr{R}$ une relation d'équivalence dans E.

• $(\forall x\in E)$, $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(x)\neq\varnothing$, car $x\in\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(x)$.

• Soit $(x,y)\in E^2$ tel que $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(x)\cap\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(y)\neq\varnothing$, il existe donc $z\in\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(x)$. On a alors $x\mathscr{R}z$ et $y\mathscr{R}z$, d'où (par symétrie et transitivité) $x\mathscr{R}y$. On en déduit $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(x)\subset\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(y)$. En effet, soit $t\in\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(x)$, on a $x\mathscr{R}t$ et $x\mathscr{R}y$, d'où $y\mathscr{R}t$, c-à-d. $t\in\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(y)$. Puis x et y jouent des rôles symétriques : $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(x)\cap\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(y)$.

• Comme $(\forall x\in E,\ x\in\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(x))$, la réunion des éléments de $E/\mathscr{R}$ est E;

2) Réciproquement, soient $\mathscr{P}$ une partition de E et $\mathscr{R}$ la relation définie dans E par :

$$\forall(x,y)\in E^2,\ (x\mathscr{R}y \Leftrightarrow (\exists P\in\mathscr{P},\ \begin{cases} x\in P\\ y\in P\end{cases}))$$

a) • Comme $(\forall x\in E,\ \exists P\in\mathscr{P};\ x\in P)$, on a : $\forall x\in E,\ x\mathscr{R}x$, et donc $\mathscr{R}$ est réfléxive.

• Pour tout $(x,y)\in E^2$,

$x\mathscr{R}y\Leftrightarrow(\exists P\in\mathscr{P},\ \begin{cases} x\in P\\ y\in P\end{cases}))\Leftrightarrow(\exists P\in\mathscr{P},\ \begin{cases} y\in P\\ x\in P\end{cases}))\Leftrightarrow y\mathscr{R}x$, donc $\mathscr{R}$ est symétrique.

• Soit $(x,y,z)\in E^3$ tel que $x\mathscr{R}y$ et $y\mathscr{R}z$. Il existe $P,Q\in\mathscr{P}$ tels que $\begin{cases} x\in P\\ y\in P\end{cases}$ et $\begin{cases} y\in Q\\ z\in Q\end{cases}$

Comme $P\cap Q\neq\varnothing$ et que $\mathscr{P}$ est une partition, on a $P=Q$ et donc $\begin{cases} x\in P\\ z\in P\end{cases}$, d'où $x\mathscr{R}z$.

Ainsi, $\mathscr{R}$ est transitive.

b) i) Soit $x\in E$. Il existe $P\in\mathscr{P}$ tel que $x\in P$, et on a alors $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(x)=P$. En effet :

• Pour tout y de P, $\begin{cases} x\in P\\ y\in P\end{cases}$ donc $x\mathscr{R}y$,

• Pour tout $y\in\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(x)$, il existe $Q\in\mathscr{P}$, tel que : $\begin{cases} x\in Q\\ y\in Q\end{cases}$, puis $Q=P$ (car $P\in\mathscr{P},\ Q\in\mathscr{P},\ P\cap Q\neq\varnothing$), ceci prouve que $E/\mathscr{R}\subset\mathscr{P}$.

ii) Réciproquement, soit $P\in\mathscr{P}$. Il existe $x\in P$ et on a alors $\mathrm{cl}_{\mathscr{R}}(x)=P$, d'après i), ceci montre que $\mathscr{P}\subset E/\mathscr{R}$. ■

Remarque 3.1.1 *Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence dans E, alors, pour tout $(x, y) \in E^2$,*

$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow cl_{\mathscr{R}}(x) = cl_{\mathscr{R}}(y) \Leftrightarrow x \in cl_{\mathscr{R}}(y) \Leftrightarrow y \in cl_{\mathscr{R}}(x)$.

Les classes d'équivalence étant des parties de E sont des éléments de $\mathscr{P}(E)$, $E/\mathscr{R}$ est donc une partie de $\mathscr{P}(E)$, donc un élément de $\mathscr{P}(\mathscr{P}(E))$:

$$x \in \bar{x};\ \bar{x} \subset E;\ \bar{x} \in \mathscr{P}(E)$$

$$\bar{x} \in E/\mathscr{R};\ E/\mathscr{R} \subset \mathscr{P}(E);\ E/\mathscr{R} \in \mathscr{P}(\mathscr{P}(E)).$$

Exercice 3.1.1 *Soient E un ensemble, $\mathscr{R}$ une relation réfléxive dans E telle que $\forall(x, y, z) \in E^3$, $\begin{cases} x\mathscr{R}y \\ y\mathscr{R}z \end{cases} \Rightarrow z\mathscr{R}x$*

Vérifier que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 3.1.2 *Soient dans E, une relation $\mathscr{R}$, réfléxive et transitive, $\mathscr{S}$ la relation définie par :*

$$\forall(x, y) \in E^2,\ x\mathscr{S}y \Leftrightarrow (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x)$$

1. *Montrer que $\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence dans E.*
2. *On choisit $E = \mathbb{R}$ et on pose $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow (x \geqslant y \text{ ou } y < 0)$*
   i) Montrer que $\mathscr{R}$ est réfléxive et transitive. Est-elle-symétrique ?
   ii) Préciser la relation $x\mathscr{S}y$, puis les classes d'équivalence, et exprimer $E/\mathscr{S}$.

Compatibilité d'une relation avec une relation d'équivalence

a) Une relation d'équivalence sur E est d'autant plus intéressante qu'elle conserve pour x' équivalent à x, modulo $\mathscr{R}$, certaines des propriétés de x, d'où les définitions suivantes :

1. Une prorpiété P définie sur E est **compatible** avec une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie sur E si :

$$(\forall(x, x') \in E^2),\ [\mathrm{P}(x) \text{ et } x\mathscr{R}x'] \Rightarrow \mathrm{P}(x').$$

2. Une relation binaire $\mathscr{S}$ définie sur E est compatible par rapport à x (resp. à y) avec une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie sur E si :

$$(\forall(x, x', y) \in E^3),\ [x\mathscr{S}y \text{ et } x\mathscr{R}x'] \Rightarrow x'\mathscr{S}y$$

respectivement :

$$(\forall(x, y, y') \in E^3),\ [x\mathscr{S}y \text{ et } y\mathscr{R}y'] \Rightarrow x\mathscr{S}y'$$

3. Une relation binaire $\mathscr{S}$ définie sur E est compatible avec une relation d'équivalence $\mathscr{R}$ définie sur E si :

$$(\forall(x, x', y, y') \in E^4),\ [x\mathscr{S}y \text{ et } x\mathscr{R}x' \text{ et } y\mathscr{R}y'] \Rightarrow x'\mathscr{S}y'$$

3.1.3 Relations d'ordre

Définition 3.1.11 *Soit $\mathscr{R}$ une relation binaire dans un ensemble E. On dit que $\mathscr{R}$ est une relation d'ordre si, et seulement si ; $\mathscr{R}$ est réfléxive, antisymétrique et transitive.*

Un ensemble ordonné est un couple $(E, \preceq)$ où $\preceq$ est un ordre sur E.

Définition 3.1.12 *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.*

1) Deux éléments x, y de E sont dits comparables (pour $\preceq$) si, et seulement si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

2) On dit que $\preceq$ est une relation d'ordre totale (ou un ordre total) si, et seulement si les éléments de E sont tous comparables deux à deux, c-à-d :

$$\forall (x, y) \in E^2,\ (x \preceq y \textit{ ou } y \preceq x)$$

Exemple 3.1.7 *1) $\leq$ usuel dans $\mathbb{R}$ est un ordre total.*

2) Si $E,\ cardE \geq 2$, $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$, est un ensemble non totalement ordonné.

La relation $\subseteq$ n'est pas une ordre totale dans $\mathcal{P}(\mathbb{R})$, car :

$$\{1, 2\} \nsubseteq \{0, 2\} \textit{ et } \{0, 2\} \nsubseteq \{1, 2\}$$

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné. On définit dans E une relation, notée, $\prec$, appelée ordre strict associée à $\preceq$, défini par :

$$\forall (x, y) \in E^2;\ (x \prec y \Leftrightarrow \begin{cases} x \preceq y \\ x \neq y \end{cases})$$

Si $E \neq \varnothing$, $\prec$ n'est pas une relation d'ordre, puisqu'elle n'est pas réfléxive.

La relation réciproque d'un ordre $\preceq$, puisqu'elle n'est pas réfléxive.

La relation réciproque d'un ordre $\preceq$ dans E est un ordre, noté $\succeq$:

$$\forall (x, y) \in E^2;\ (x \succeq y \Leftrightarrow y \preceq x)$$

Éléments remarquables d'un ensemble ordonné

Définition 3.1.13 *Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné.*

1) Soient $A \in \mathcal{P}(E)$, $x \in E$. On dit que x est un majorant (resp. minorant) de A dans E si, et seulement si :

$$\forall a \in A,\ a \preceq x \quad (\textit{resp. } \forall a \in A,\ x \preceq a)$$

2) Soit $A \in \mathcal{P}(E)$. On dit que A est majorée (resp. minorée) dans E si, et seulement si A admet au moins un majorant (resp. minorant) dans E, c-à-d :

$$\exists x \in E, \forall a \in A,\ a \preceq x \quad (\textit{resp. } \exists x \in E, \forall a \in A,\ x \preceq a)$$

3) Soient $A \in \mathcal{P}(E)$, $\alpha \in E$. On dit que α est un plus grand (resp. petit) élément de A si, et seulement si,

$$\begin{cases} \alpha \in A \\ \forall a \in A,\ a \preceq \alpha \end{cases} \qquad (\textit{resp } \begin{cases} \alpha \in A \\ \forall a \in A,\ \alpha \preceq a \end{cases})$$

4) Soient $A \in \mathcal{P}(E)$, $x \in A$. On dit que x est un élément maximal (resp. minimal) de A si, et seulement si;

$$\forall a \in A,\ (x \preceq a \Rightarrow x = a) \quad (resp.(\forall a \in A,\ (a \preceq x \Rightarrow x = a))$$

On peut noter $Maj_E(A)$ (resp. $Min_E(A)$) l'ensemble des majorants (resp. minorants) de A dans E.

Remarque 3.1.2 *1) Une partie A de E peut avoir ou ne pas avoir de plus grand élément. Dans $(\mathbb{R}, \leq)$, $\mathbb{R}_-$ admet un plus grand élément, 0, mais $\mathbb{R}_+$ n'a pas de plus grand élément.*

2) Soit A une partie non vide de $(E, \leq)$

i) Les majorants de A n'appartiennent pas toujours à A.

ii) Si A est majorée par un élément x, $(x \in A)$ alors x est le plus grand élément de A. (de même pour le min).

Remarque 3.1.3 *Le plus grand élément est un élément maximal, mais la réciproque peut être fausse lorsque l'ordre est partiel (lorsque l'ordre est total, les deux définitions sont équivalentes); par exemple, si on ordonne $\{2,\ 4,\ 8,\ 7\}$ avec la division, 8 et 7 sont des éléments maximaux mais il n'y a pas de plus grand élément. Par contre, s'il y a un plus grand élément, alors il n'existe qu'un seul élément maximal qui est précisément cet élément maximal.*

D'autre part, les éléments maximal et minimal sont valables seulement lorsque l'ordre n'est pas total. Donc quand il est partiel, cela figure dans l'exemples suivant :

$E = \{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10,\ 15,\ 30\}$, Relation =divise (ce sont des diviseurs de 30)

Si $P = \{2,\ 3,\ 5,\ 10\}$, on a comme élément maximal 10 et 3 éléments minimaux $\{2,\ 3,\ 5\}$ On a pas de plus grand élément ni de plus petit élément

Si $P = \{2,\ 5,\ 10\}$, on a 10 comme élément maximal et $\{2,\ 5\}$ comme élément minimal On a 10 comme plus grand élément et aucun plus petit élément.

Exemple 3.1.8 *On considère la relation d'ordre définie sur $\mathbb{N}^*$ par $x \preceq y \Leftrightarrow x \mid y$*

$A = \{2, 3, 4\}$

i) A est majorée par 24,

ii) A est majorée aussi par 36,

iii) A admet deux éléments maximaux qui sont 3 et 4.

iii) A possède un seul minorant c'est 1,

iv) A n'a pas de plus grand ni de plus petit élément.

2. La partie $F = \{2, 3, 6\}$ admet un plus grand élément. C'est 6.

Exemple 3.1.9 *Dans $(\mathbb{R}, \leq)$ un ensemble ordonné, $A = \{\frac{1}{n+1},\ n \in \mathbb{N}\}$.*

Définition 3.1.14 *Soient $(E, \leq)$ un ensemble ordonné, $A \in \mathcal{P}(E)$. 1) Si l'ensemble $Maj_E(A)$ des majorants de A dans E admet un plus petit élément M, M est appelé la borne supérieure de A (dans E) et est noté $\sup_E(A)$ ou $\sup(A)$.*

2) Si l'ensemble $Min_E(A)$ des minorants de A dans E admet un plus grand élément m, m est appelé la borne inférieure de A (dans E) et est appelé la borne inférieure de A (dans E) et est noté, $\inf_E(A)$, ou $\inf(A)$.

Notation. Si $A = (x_i)_{i\in I}$ on note $\sup\limits_{i\in I} x_i,\ \inf\limits_{i\in I} x_i$.

Exemple 3.1.10 *1)* $E = \mathbb{R},\ \leq$ *usuel,* $A = [0, 1[$

On a • $Maj_E(A) = [1, +\infty[$, *donc* $\sup_E(A)$ *existe et* $\inf_E(A) = 0$

• $Min_E(A) =]-\infty, 0]$, *donc* $\inf_E(A)$ *existe et* $\inf_E(A) = 0$.

2) $E = \mathbb{R},\ \leq$ *usuel,* $A = \{x \in \mathbb{Q}_+;\ x^2 < 2\}$

On a $Maj_E(A) = \{x \in \mathbb{Q}_+;\ x^2 \geq 2\} = \{x \in \mathbb{Q}_+;\ x^2 > 2\} =$ *qui n'a pas de plus petit élément (cela revient à :* $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$*); donc A n'admet pas de borne supérieure dans* E.

3) $E = \mathcal{P}(F),\ F$ *ensemble donné,* $\subset$ *est l'inclusion,* $\forall (X, Y) \in E^2$, *on a* $\sup_E(X, Y) = X \cup Y$ *et* $\inf_E(X, Y) = X \cap Y$.

Ensemble inductif. Lemme de Zorn

Définition 3.1.15 *Soit* $(E, \preceq)$ *un ensemble ordonné. On dit que* $(E, \preceq)$ *est inductif si toute partie non vide totalement ordonnée est majorée.*

Lemme 3.1.1 *(de Zorn) Tout ensemble inductif* $(E, \preceq)$ *admet un élément maximal.*

3.2 Applications

3.2.1 Généralités

Définition 3.2.1 *Soient* $E,\ F$ *deux ensembles. On appelle fonction de E vers F toute relation f de E vers F telle que :*

$$\forall (x, y, y') \in E \times F \times F, (\begin{cases} xfy \\ xfy' \end{cases} \Rightarrow y = y')$$

On note alors plutôt $y = f(x)$ *que* xfy;

On appelle ensemble (ou domaine) de définition de la fonction f, *et on note* $D_f = \{x \in E;\ \exists y \in F$ *tel que* $y = f(x)\}$.

Pour tout x *de* E, *l'élément* y *de* F *tel que* $y = f(x)$ *(si il existe!) est appelé un antécédent de* y *par* f.

Ainsi, une relation est une fonction si, et seulemtn si tout élément du départ est en relation avec au plus un élément de l'arrivée.

Proposition 3.2.1 *Si* f *est une fonction de* E *vers* F *et* g *une fonction de* F *vers* G, *alors la relation* $g \circ f$ *est une fonction de* E *vers* G.

Preuve.

Soit $(x, z, z') \in E \times G \times G$ tel que : $\begin{cases} x(g\circ f)z \\ x(g\circ f)z' \end{cases}$. Il existe $(y, y') \in F^2$ tel que $\begin{cases} xfy \text{ et } ygz \\ xfy' \text{ et } y'gz' \end{cases}$. Comme $\begin{cases} xfy \\ xfy' \end{cases}$ et que g est une fonction, on conclut $z = z'$.
■

Définition 3.2.2 *Une fonction f de E vers F est appelée "application" si, et seulement si $D_f = E$. L'ensemble des application de E dans F est noté F^E.*

Une application f de E vers F est notée :

$$f : E \to F$$
$$x \mapsto f(x)$$

où la lettre x est muette.

Exemple 3.2.1 *1)* $E = \{a, b, c, d\},\ F = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$f : E \to F,\ a \mapsto 1,\ b \mapsto 1,\ c \mapsto 5,\ d \mapsto 2$

2)

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$$
$$n \mapsto \begin{cases} n/2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ (3n+1)/2 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

3) $E = F = \mathbb{Q}$,

À tout nombre rationnel $x = \frac{p}{q}$ *on associe* $f(x) = \frac{p+1}{q},\ \frac{1}{2} \mapsto \frac{1+1}{2} = 1$

Mais $\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \mapsto \frac{2+1}{4} = \frac{3}{4}$ *Dans ce cas f n'est pas une application définie.*

4) Pour montrer qu'une application est bien définie, on montre habituellement que $x = x' \Rightarrow f(x) = f(x')$.

Par exemple, $x = \frac{p}{q} \mapsto f(x) = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$

Supposons $\frac{p}{q} = \frac{p'}{q'}$*, on a alors* $f(\frac{p}{q}) = \frac{p^2-q^2}{p^2+q^2} = \frac{\frac{p^2}{q^2}-1}{\frac{p^2}{q^2}+1}$ *et* $f(\frac{p'}{q'}) = \frac{\frac{p'^2}{q'^2}-1}{\frac{p'^2}{q'^2}+1}$*, d'où* $f(\frac{p}{q}) = f(\frac{p'}{q'})$

3.2.2 Propiétés des applications

i) Egalité de deux applications

Définition 3.2.3 *Soient f une application de E dans F, et g une application de G dans H.*

Les applications f et g sont égales si, et seulement si

i) $E = G$ *et* $F = H$,

ii) $\forall x \in E,\ f(x) = g(x)$.

On écrit dans ce cas $f = g$.

Remarque 3.2.1 *Si $f, g : E \to F$, alors* $f \neq g \Leftrightarrow \exists x \in E;\ f(x) \neq g(x)$

Exemple 3.2.2

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}; \qquad g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$$
$$(x, y) \mapsto |x + y| \qquad (x, y) \mapsto |x| + |y|$$

On a $f \neq g$.

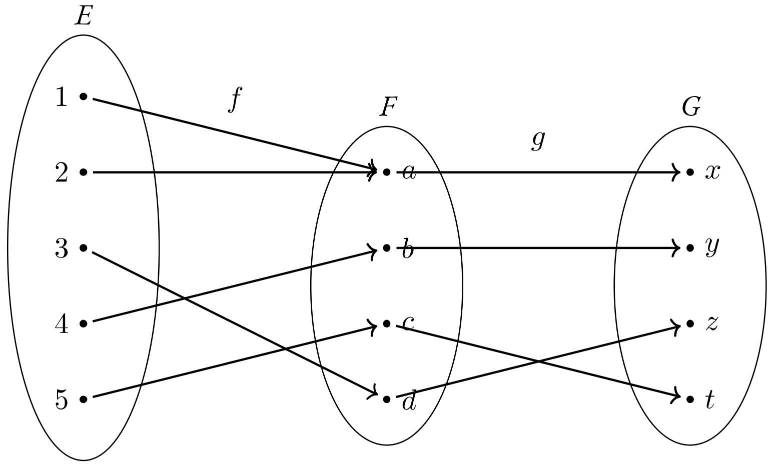
ii) Composition des applications Soient $E,\ F$ et G trois ensembles.

Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications, on peut définir une application, notée $g \circ f$, de $E \to G$ de la façon suivante :

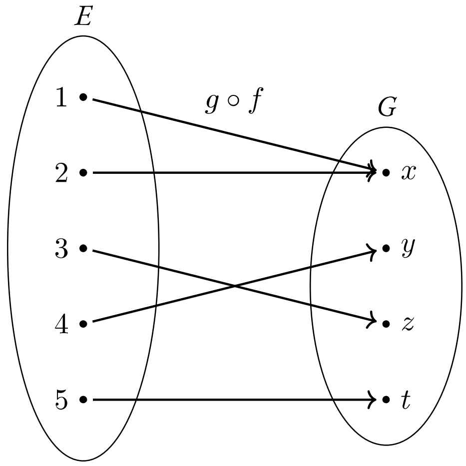
$$\begin{aligned} g \circ f : E &\to G \\ x &\mapsto g \circ f(x) = g(f(x)) \end{aligned}$$

$g \circ f$ s'appelle l'application composée de f et de g, $g \circ f$ se lit "g rond f".

Exemple 3.2.3 *Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $F = \{a, b, c, d\}$, $G = \{x, y, z, t\}$ et considérons les applications définies par le diagramme suivant :*



on a alors,



Remarque 3.2.2 *Soit E un ensemble, si $f, g : E \to E$ on peut toujours définir des applications $f \circ g$ et $g \circ f$, ces deux applications ne sont pas égales en général.*

Par exemple

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}; \\ (x, y) &\mapsto \sin x \end{aligned} \qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto |x| \end{aligned}$$

On a $g \circ f(x) = |\sin x|$ *et* $f \circ g(x) = \sin|x|$, *pour* $x = \frac{3\pi}{2}$, *on a* $g \circ f(x) \neq f \circ g(x)$ *donc* $g \circ f \neq f \circ g$.

Proposition 3.2.2 *Soient* $f : E \to F$, $g : F \to G$ *et* $h : G \to H$ *trois applications, on a alors l'égalité :* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$, *on peut ainsi écrire* $(h \circ g) \circ f = h \circ g \circ f$. *La composée des applications* $f_i : E \to E$, $i = 1, 2, ...$ *est associative.*

Si $f : E \to E$, *on peut définir* $f \circ f$, $f \circ f \circ f, ...$

Exercice 3.2.1 *Considérons l'application*

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$$
$$n \mapsto \begin{cases} n/2 \text{ si } n \text{ est pair} \\ (3n+1)/2 \text{ si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

calculer $f(5)$, $f^2(5)$, $f^3(5)$, $f^4(5)$.

Conjecture. (de Collatz) Collatz a conjecturé le fait suivant : Pour tout $n \geq 1$, il existe un entier k tel que $f^k(n) = 1$. (f de l'exercice 3.2.1)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $E_1, E_2, ..., E_n$ des ensembles. Pour chaque i de $\{1, ..., n\}$, on définit la i-ième projection canonique, notée p_i par :

$$p_i : E_1 \times ... \times E_i \to E_i$$
$$(x_1, ..., x_n) \mapsto x_i$$

Exemple 3.2.4 *Pour* $n = 2$,

$$p_1 : E_1 \times E_2 \to E_1; \qquad p_2 : E_1 \times E_2 \to E_2$$
$$(x_1, x_2) \mapsto x_1 \qquad (x_1, x_2) \mapsto x_2$$

Remarque 3.2.3 *Pour toute application* $f : E \to F$, *on a :* $f \circ Id_E = f$ *et* $Id_F \circ f = f$

iii) Restriction d'une application

Définition 3.2.4 *Soit* f *une application d'un ensemble* E *dans un ensemble* F *et* A *une partie de* E.

La restriction de f *à* A *est l'application* $f_{|A}$ *définie par :*

$$f_{|A} : A \to F$$
$$x \mapsto f_{|A}(x) = f(x)$$

Exercice 3.2.2 *Soit* f *l'application :*

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \sin(2\pi x)$$

Déterminer la restriction de f *à* $\mathbb{Z}$.

iv) Prolongement d'une application

Soient E et F deux ensembles et A une partie de E.

Considérons une application de A dans F.

Nous souhaitons définir une application, notée $\tilde{f}$ telle que $\tilde{f} : E \to F$ qui prolonge f à E tout entier. Pour cela, il faut choisir pour chaque élément de $E \setminus A$ une image dans F.

Définition 3.2.5 *Soient E et F deux ensembles et A une partie de E. Considérons une application de A dans F. On appelle prolongement de F à l'ensemble E, toute application $\tilde{f} : E \to F$ telle que :*

$$\forall x \in A,\ f(x) = \tilde{f}(x)$$

Exemple 3.2.5

Remarque 3.2.4 *Le prolongement d'une application n'est pas toujours unique.*

v) Image directe et image réciproque d'une partie par une application

Image directe d'une partie par une application

Définition 3.2.6 *Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application.*

Si A est une partie de E alors l'image directe de A par f est :

$$f(A) = \{f(x);\ x \in A\}$$

Autrement dit, $f(A)$ est constituée par les images de tous les éléments de A.

Exemple 3.2.6

Remarque 3.2.5 *Soient E et F deux ensembles, $f : E \to F$ une application*

i) On a toujours $f(\emptyset) = \emptyset$,

ii) Soit A une partie de E, on a alors $f(A) \subseteq F$

Soit $y \in F$. On a :

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A;\ f(x) = y$$

iii) Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On a : $g \circ f(A) = g(f(A))$

Proposition 3.2.3 *Soient $f : E \to F$ une application, et A, A' deux parties de E. On a :*

i) $A \subseteq A' \Rightarrow f(A) \subseteq f(A')$,

ii) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$,

iii) $f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$

Preuve. i) Supposons que $A \subseteq A'$, et montrons que $f(A) \subseteq f(A')$. Soit $y \in f(A)$, alors il existe $x \in A$ tel que $y = f(x)$, or $A \subseteq A'$, donc $x \in A'$, par conséquent $y = f(x) \in f(A')$. D'où $f(A) \subseteq f(A')$.

ii) On a $f(A) \subseteq f(A \cup A')$, car $A \subseteq A \cup A'$, de même $f(A') \subseteq f(A \cup A')$ car $A' \subseteq A \cup A'$, donc $f(A) \cup f(A') \subseteq f(A \cup A')$.

Réciproquement, soit $y \in f(A \cup A')$, alors il existe $x \in A \cup A'$ tel que $y = f(x)$.
$\star$ Si $x \in A$ alors $f(x) \in f(A)$, par suite, $y = f(x) \in f(A) \cup f(A')$.
$\star$ Si $x \in A'$ alors $f(x) \in f(A')$, par suite, $y = f(x) \in f(A) \cup f(A')$.
Conclusion, $y \in f(A) \cup f(A')$.

iii) On a $f(A \cap A') \subseteq f(A)$, et $f(A \cap A') \subseteq f(A')$, donc
$f(A \cap A') \subseteq f(A) \cap f(A')$. ■

Remarque 3.2.6 *On n'a pas toujours* $f(A \cap A') = f(A) \cap f(A')$

v) Image réciproque d'une partie par une application

Définition 3.2.7 *Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application. Si B est une partie de F alors l'image réciproque de B par f est*

$$f^{-1}(B) = \{x \in E;\ f(x) \in B\}$$

Autrement dit, $f^{-1}(B)$ est constituée par les antécédents de tous les éléments de B.

Remarque 3.2.7 *Soit $x \in E$*
On a : $x \in f^{-1}(B) \Leftrightarrow f(x) \in B$.

Exemple 3.2.7 *Considérons* $E = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ F = \{a, b, c, d, u, v\}$

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ 1 &\mapsto a \\ 2 &\mapsto a \\ 3 &\mapsto d \\ 4 &\mapsto c \\ 5 &\mapsto b \end{aligned}$$

Pour $B = \{a, d, u\}$ *on a* $f^{-1}(B) = \{1, 2, 3\}$
Pour $B = \{a, d\}$ *on a* $f^{-1}(B) = \{1, 2, 3\}$
Pour $B = \{u, v\}$ *on a* $f^{-1}(B) = \varnothing$

Remarque 3.2.8 *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On a toujours $f^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ et $f^{-1}(F) = E$.*
Soit B une partie de F, on a alors $f^{-1}(B) \subseteq E$,
Si $f^{-1}(B) = \varnothing$, on n'a pas toujours $B = \varnothing$.

Proposition 3.2.4 *Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application. Soient $B,\ B'$ deux parties de F, alors :*
i) $B \subseteq B' \Rightarrow f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$,
ii) $f^{-1}(B \cap B') = f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B')$,
iii) $f^{-1}(B \cup B') = f^{-1}(B) \cup f^{-1}(B')$,
iv) $f^{-1}(F \setminus B) = E \setminus f^{-1}(B)$

Preuve.

i) Supposons que $B \subseteq B'$, soit $x \in f^{-1}(B)$, alors $f(x) \in B$, donc $f(x) \in B'$ car $B \subseteq B'$, par conséquent, $x \in f^{-1}(B')$, d'où $f^{-1}(B) \subseteq f^{-1}(B')$.

ii) Soit $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(B \cap B') &\iff f(x) \in B \cap B' \\ \text{‘} &\iff f(x) \in B \text{ et } f(x) \in B' \\ &\iff x \in f^{-1}(B) \text{ et } f^{-1}(B') \\ &\iff x \in f^{-1}(B) \cap f^{-1}(B') \end{aligned}$$

iii) Même preuve que ii)

iv) Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus B) &\iff f(x) \in F \setminus B \\ &\iff f(x) \notin B \\ &\iff x \notin f^{-1}(B) \\ &\iff x \in E \setminus f^{-1}(B) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

iii) Même preuve que ii)

iv) Soit $x \in E$, alors

$$\begin{aligned} x \in f^{-1}(F \setminus B) &\iff f(x) \in F \setminus B \\ &\iff f(x) \notin B \\ &\iff x \notin f^{-1}(B) \\ &\iff x \in E \setminus f^{-1}(B) \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Proposition 3.2.5 *Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application.*
Si A est une partie de E alors $A \subseteq f^{-1}(f(A))$,
Si B est une partie de F alors $f(f^{-1}(B)) \subseteq B$.

Preuve. En exercice.

Exercice 3.2.3 *Soit*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 + x + 1 \end{aligned}$$

$P = \{x \in \mathbb{R};\ x^3 + x + 1 \geq 0\}$
Déterminer une partie Q de $\mathbb{R}$ telle que $P = f^{-1}(Q)$.

3.3 Injection, Surjection, Bijection

3.3.1 Injection

Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $F = \{a, b, c, d, u, v\}$
Considérons l'application :

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ 1 &\mapsto a \\ 2 &\mapsto a \\ 3 &\mapsto d \\ 4 &\mapsto c \\ 5 &\mapsto b \end{aligned}$$

Dans cet exemple, les deux éléments $x = 1$ et $y = 2$ ont la même image $f(x) = f(y) = a$.

Si on veut éviter cette situation, il faut que deux éléments de E distincts aient des images distinctes, c'est-à-dire,

$$\forall x, y \in E,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y),$$

ce qui est équivalent à $\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$

Définition 3.3.1 *Soient E et F deux ensembles, et $f : E \to F$ une application.*

On dit que f est application injective ou une injection si $\forall x, y \in E,\ f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$.

Remarque 3.3.1 *Une application est non injective si $\exists x,\ y \in E,\ f(x) = f(y)$ et $x \neq y$.*

Remarque 3.3.2 *Une application f est injective si, et seulement si pour tout y de F, l'équation $f(x) = y$ admet au plus une solution c-à-d elle admet soit 0 soit 1 solution*

Exercice 3.3.1

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - x + 1 \end{aligned}$$

est-elle injective ?

Exercice 3.3.2 *Soit l'application*

$$\begin{aligned} g :]0, 1[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{2x}{1 + x^2} \end{aligned}$$

Montrer que g est injective.

Proposition 3.3.1 *Soient E et F deux parties de $\mathbb{R}$ et $f : E \to F$ une application. Si f est strictement monotone alors f injective.*

Preuve.

Supposons par exemple que f est strictement croissante. Soit $x \neq y \in E$, alors on a soit $x < y$ ou $y < x$.

Si $x < y$ alors $f(x) < f(y)$ et par suite $f(x) \neq f(y)$,

Si $y < x$ alors $f(y) < f(x)$ et par suite $f(x) \neq f(y)$.

D'où $\forall x, y \in E,\ x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

Par conséquent f est injective. ■

Proposition 3.3.2 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.*

i) Si f et g sont injectives alors $g \circ f$ est injective.

ii) Si $g \circ f$ est injective alors f est injective.

Preuve.

i) Supposons que f et g sont injective, montrons que $g \circ f$ est injective, montrons que $g \circ f$ est injetive. Soit $x, y \in E$, on a alors

$$\begin{aligned} g \circ f(x) = g \circ f(y) &\Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\Rightarrow f(x) = f(y) \text{ car } g \text{ est injective} \\ &\Rightarrow x = y \text{ car } f \text{ est injective} \end{aligned}$$

d'où $g \circ f$ est injective.

ii) Supposons que $g \circ f$ est injective.

Montrons que alors f est injective, $x,\ y \in E$.

On a alors

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\Rightarrow g \circ f(x) = g \circ f(y) \\ &\Rightarrow x = y \text{ car } g \circ f \text{ est injective} \end{aligned}$$

d'où f est injective. ■

3.3.2 Surjection

Soient $E = \{1, 2, 3, 4, 5\},\ F = \{a, b, c, d, u, v\}$

Considérons l'application :

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ 1 &\mapsto a \\ 2 &\mapsto a \\ 3 &\mapsto d \\ 4 &\mapsto c \\ 5 &\mapsto b \end{aligned}$$

u n'a pas d'antécédents par f.

Définition 3.3.2 *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.*
On dit que f est application surjective ou une surjection si

$$\forall y \in F, \exists x \in E \Rightarrow f(x) = y$$

En d'autres termes pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ possède au moins une solution dans E.

Remarque 3.3.3 *Une application $f : E \to F$ est non surjective si*

$$\exists y \in F, \forall x \in E, \ f(x) \neq y$$

Autrement dit, il existe dans F un élément y tel que l'équation $f(x) = y$ n'a pas de solution dans E.

Exercice 3.3.3 *L'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 - x - 3 \end{aligned}$$

est-elle injective ?

Proposition 3.3.3 *Soient E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application.*
On a alors

$$f \text{ est surjective } \iff f(E) = F$$

Exercice 3.3.4 *Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, montrer que f n'est pas surjective.*

Solution. Il suffit de construire une partie A de $\mathbb{N}$ qui n'a pas d'antécédent par f, c'est-à-dire distincts de toutes les parties $f(n)$.

Prenons $A = \{n \in \mathbb{N};\ n \notin f(n)\}$. Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N},\ f(n) \neq A$. Soit $n \in \mathbb{N}$, nous distinguons deux cas :

$\star$ Si $n \notin f(n)$ alors $n \in A$, dans ce cas $f(n) \neq A$.

$\star$ Si $n \in f(n)$, alors $n \notin A$, dans ce cas, on a aussi $f(n) \neq A$. ■

Proposition 3.3.4 *Soient $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.*
i) Si f et g sont surjectives alors $g \circ f$ est surjective.
ii) Si $g \circ f$ est surjective alors g est surjective.

Preuve.

i) Supposons que f et g sont surjectives, montrons que $g \circ f(E) = G$. En effet, on a $g \circ f(E) = g(f(E))$. Or, f est surjective, $f(E) = F$, il en résulte que $g(f(E)) = g(F)$ car f est surjective, de même, comme g est surjective, on a $g(F) = G$. D'où $g \circ f(E) = G$, par conséquent, $g \circ f$ est surjective.

ii) En exercice. ■

3.3.3 Bijection

Définition 3.3.3 *Une application f est bijective si, elle est à la fois injective et surjective.*

Soit $f : E \to F$ une application. f est bijective si, et seulement si l'équation $f(x) = y$ admet une seule solution.

Exemple 3.3.1 *L'application :*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+^* &\to]1, +\infty[\\ x &\mapsto x^2 + 1 \end{aligned}$$

est bijective.

3.3.4 Bijection réciproque

Soit $f : E \to F$ une application bijective.

Nous avons vu que tout élément y de F admet un unique antécédent x par f. Ceci nous permet de définir une nouvelle application $f^{-1} : F \to E$ en associant à y de F son unique antécédent par f. On a :

$$(\forall x \in E)(\forall y \in F)\ f^{-1}(y) = x \Longleftrightarrow f(x) = y.$$

Proposition 3.3.5 *Si $f : E \to F$ est une application bijective, alors f^{-1} est bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.*

De plus, $f^{-1} \circ f = Id_E$ et $f \circ f^{-1} = Id_F$.

L'application f^{-1} s'appelle la bijection réciproque de f.

Exemple 3.3.2 *Soient $E = \{1, 2, 3, 4\}$ et $F = \{a, b, c, d\}$. Considérons l'appplication f définie de E dans F par :*

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ 1 &\mapsto a \\ 2 &\mapsto d \\ 3 &\mapsto b \\ 4 &\mapsto c \end{aligned}$$

Cette application est bijective.

De plus f^{-1} est définie de F dans E par :

$$\begin{aligned} f^{-1} : F &\to E \\ a &\mapsto 1 \\ b &\mapsto 3 \\ c &\mapsto 4 \\ d &\mapsto 2 \end{aligned}$$

Proposition 3.3.6 *Soient E et F deux ensembles finis, si card(E) =card(F), alors il existe une bijection f de E sur F.*

Proposition 3.3.7 *Soit $f : E \to F$ une application, si il existe une application $g : F \to E$ telle que*

$$g \circ f = Id_E \text{ et } f \circ g = Id_F$$

alors f est bijective et $f^{-1} = g$.

Preuve. Supposons qu'il exsite une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = Id_E \text{ et } f \circ g = Id_F$$

On a alors $g \circ f = Id_E$ est injective, donc f est injective. Par ailleurs $f \circ g = Id_F$ est surjective, donc f est surjective. D'où f est bijective.

Soit alors $x \in E$, on a $f(f^{-1}(x)) = x$, et $f(g(x)) = x$, donc $f^{-1}(x) = x$. ■

Proposition 3.3.8 *Si $f : E \to F$ et $g : F \to G$ sont deux applications bijectives, alors l'application composée $g \circ f$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$*

Définition 3.3.4 *Soient E un ensemble, et f une application de E dans E. On dit que f est involutive ou une involution de E si, $f \circ f = Id_E$.*

D'après la proposition précedente une involution f est bijective et $f^{-1} = f$

Exemple 3.3.3 *L'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} x \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ -x \text{ si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

est une involution, donc bijective.

Noter que cette application n'est pas strictement monotone.

Définition 3.3.5 *Deux ensembles E et F sont dits équipotents si il existe une bijection entre E et F.*

Théorème 3.3.1 *(Cantor-Bernstein) Soient E et F deux ensembles. Si il existe une injection de E dans F et une injection de F dans E alors E et F sont équipotents.*

La preuve de ce théorème se base sur le lemme de Zorn (lemme 3.1.1.)

Définition 3.3.6 *Un ensemble E est dénombrable s'il est équipotent à $\mathbb{N}$.*

Exemple 3.3.4 *L'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{N}^* &\to \mathbb{N} \\ n &\mapsto n - 1 \end{aligned}$$

est bijective donc $\mathbb{N}^*$ est dénombrable.

L'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ n'est pas dénombrable car il n'existe aucune surjection de $\mathbb{N}$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

3.3.5 Décomposition canonique d'une application

Définition 3.3.7 *Si $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence définie sur un ensemble non vide E. Notons $\bar{x}$ la classe d'équivalence modulo $\mathscr{R}$.*

L'application

$$\begin{aligned} s : E &\to E/\mathscr{R} \\ x &\mapsto \bar{x} \end{aligned}$$

est surjective, appelée la surjection canonique.

Définition 3.3.8 *Soient E et F deux ensembles non vides et f une application de E dans F.*

La relation d'équivalence définie sur E par :

$$x\mathscr{R}y \iff f(x) = f(y)$$

est appelée la relation associée à l'application f.

Associons à chaque $\bar{x} \in E/\mathscr{R}$ l'élément $f(x) \in f(E)$, montrons que :

$$\begin{aligned} \tilde{f} : E/\mathscr{R} &\to f(E) \\ \bar{x} &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

est bien définie. Soit $\bar{x}, \bar{y} \in E/\mathscr{R}$ tels que $\bar{x} = \bar{y}$, alors $x\mathscr{R}y$. Donc d'après la définition de $\mathscr{R}$, on a $f(x) = f(y)$, par suite $\tilde{f}(\bar{x}) = \tilde{f}(\bar{y})$.

Proposition 3.3.9 *L'application :*

$$\begin{aligned} \tilde{f} : E/\mathscr{R} &\to f(E) \\ \bar{x} &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

est bijective.

Preuve. Montrons que $\tilde{f}$ est bijective. Montrons d'abord qu'elle est injective. Soient $\bar{x}, \bar{y} \in E/\mathscr{R}$ tels que $\tilde{f}(\bar{x}) = \tilde{f}(\bar{y})$, alors $f(x) = f(y)$. Donc, d'après la définition de $\mathscr{R}$, on aura $x\mathscr{R}y$, par suite $\bar{x} = \bar{y}$, d'où, $\tilde{f}$ est injective.

Montrons que $\tilde{f}$ est surjective;

soit $y \in f(E)$. Posons $y = f(x)$ avec $x \in E$, on a alors $\tilde{f}(\bar{x}) = f(x) = y$, donc $\bar{x}$ est un antécedent de y. D'où, $\tilde{f}$ est surjective. ■

Proposition 3.3.10 *Soit f une application de E dans F et $\mathscr{R}$ la relation d'équivalence définie par : $x\mathscr{R}y \iff f(x) = f(y)$.*

Considérons les applications;

$$\begin{aligned} s : E &\to E/\mathscr{R}; \\ x &\mapsto \bar{x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \tilde{f} : E/\mathscr{R} &\to f(E); \\ \bar{x} &\mapsto f(x); \end{aligned} \qquad \begin{aligned} i : f(E) &\to F \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

On a alors

$$f = i \circ \tilde{f} \circ s$$

Preuve. En effet, les application f et $i \circ \tilde{f} \circ s$ sont définies de E dans F.

Soit $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} i \circ \tilde{f} \circ s(x) &= i \circ \tilde{f}(\bar{x}) \\ &= i(f(x)) \\ &= f(x) \end{aligned}$$

on en déduit que $f = i \circ \tilde{f} \circ s$. ■

Application. Voir (Cours d'Algèbre 2).

Remarque 3.3.4 *Reprenons les notations précédentes, si l'application f est surjective, alors $f = \tilde{f} \circ s$.*

3.4 Exercices

3.4.1 Relations-Relations binaires

Exercice 3.4.1 *Dire si les relations suivantes sont réflexives, symétriques, antisymétriques, transitives :*

1. $E = \mathbb{Z}$; et $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow x = -y$,

2. $E = \mathbb{R}$ et $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow \cos^2 x + \sin^2 y = 1$,

3. $E = \mathbb{N}$ et $x\mathscr{R}y \Leftrightarrow \exists p,\ q \geq 1,\ y = px^q$ (p et q sont des entiers).

Quelles sont parmi les exemples précédents les relations d'ordre et les relations d'équivalence ?

Exercice 3.4.2 *Sur $\mathbb{R}^2$, on définit la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ par :*

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \Leftrightarrow x = x'$$

Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence, puis déterminer la classe d'équivalence d'un élément $(x_0, y_0 \in \mathbb{R}^2)$

Exercice 3.4.3 *On définit sur $\mathbb{R}$ la relation $x\mathscr{R}y$ si et seulement si $x^2 - y^2 = x - y$.*

1. Montrer que $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Calculer la classe d'équivalence d'un élément x de $\mathbb{R}$. Combien y-a-t-il d'éléments dans cette classe ?

Exercice 3.4.4 *On munit l'ensemble $E = \mathbb{R}^2$ de la relation $\mathscr{R}$ définie par*

$$(x, y)\mathscr{R}(x', y') \Leftrightarrow \exists a > 0,\ \exists b > 0 \mid x' = ax \text{ et } y' = by.$$

1. Montrer que $\mathbb{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Donner la classe d'équivalence des éléments $A = (1, 0)$, $B = (0, -1)$, $C = (1, 1)$.

3. Déterminer les classes d'équivalence de $\mathscr{R}$.

Exercice 3.4.5 *Soit E un ensemble. On définit sur $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E, la relation suivante :*

$$A\mathscr{R}B \text{ si } A = B \text{ et } A = \overline{B},$$

où $\overline{B}$ est le complémentaire de B dans E. Démontrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 3.4.6 *Soit E un ensemble et $A \in \mathcal{P}(E)$. Deux parties B et C de E sont en relation, noté $B\mathscr{R}C$, si $B \triangle C \subset A$.*

1. Montrer que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

2. Soit $B \in \mathcal{P}(E)$. Montrer que la classe de B est $\{(B \setminus A) \cup K;\ K \in \mathcal{P}(A)\}$.

Exercice 3.4.7 *Soit E un ensemble non vide et $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ non-vide vérifiant la propriété suivante :*

$$\forall X, Y \in \mathcal{A}, \exists Z \in \mathcal{A};\ Z \subseteq X \cap Y.$$

On définit sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\sim$ par $A \sim B \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{A};\ X \cap A = X \cap B$. Prouver que ceci définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{P}(E)$. Quelles sont les classes d'équivalence $\varnothing$ et de E ?

Exercice 3.4.8 *Soient E un ensemble, $\mathscr{R}$ une relation refléxive dans E telle que :*

$$\forall (x, y, z) \in E^3;\ \left(\left\{ \begin{array}{l} x\mathscr{R}y \\ y\mathscr{R}z \end{array} \right. \Rightarrow z\mathscr{R}x \right).$$

Vérifier que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 3.4.9 *Soient E un ensemble, $\mathscr{R}$ une relation réflexive et transitive dans E, $\mathscr{S}$ la relation définie par :*

$$x\mathscr{S}y \Leftrightarrow (x\mathscr{R}y \text{ et } y\mathscr{R}x).$$

Vérifier que $\mathscr{S}$ est une relation d'équivalence.

Exercice 3.4.10 *Soit $\mathscr{R}$ la relation définie dans $\mathbb{R}$ par :*

$$(x^3 + 2)(y^2 + 1) = (y^3 + 2)(x^2 + 1)$$

1. *Vérifier que $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.*
2. *Pour tout x de $\mathbb{R}$, préciser le nombre d'éléments de $cl_{\mathscr{R}}(x)$.*

Exercice 3.4.11 *Soient E un ensemble et $\mathscr{R}$ l'ensemble des relations binaires entre éléments de E. Soit $R \in \mathscr{R}$ et $R' \in \mathscr{R}$; on dit que R est contenue dans R' et on note $R \subset R'$ si :*

$$(\forall (x, y) \in E \times E)\ [xRy \Rightarrow xR'y].$$

1. *Montrer que la relation d'inclusion $\subset$ est une relation d'ordre dans $\mathscr{R}$.*

2. *Soit* R *un élément de* $\mathscr{R}$. *On désigne par* $\overline{R}$ *la relation binaire sur* E *définie par :* $\forall (a,b) \in E \times E$; $a\overline{R}b$ *si et seulement s'il existe un entier* n *et une suite finie* $a_0, a_1, ..., a_{2n}$ *d'éléments de* E, *tels que :* $a_0 = a$, $a_{2n} = b$, ($a_{2i}Ra_{2i+1}$ *ou* $a_{2i} = a_{2i+1}$) *et* ($a_{2i+2}Ra_{2i+1}$ *ou* $a_{2i+2} = a_{2i+1}$) *si* $i = 0, 1, ..., n-1$.
   a) Montrer que $\overline{R}$ *est une relation d'équivalence et que* $R \subset \overline{R}$.
   b) Montrer que si R' *est une relation d'équivalence telle que* $R \subset R'$, *alors* $\overline{R} \subset R'$.
   c) En déduire que R *est une relation d'équivalence, si et seulement si* $R = \overline{R}$.

Exercice 3.4.12 *Etant donné les points* (x, y) *du plan réel* $\mathbb{R}^2$, *on définit* $(x,y)\mathscr{E}(x',y')$ *comme signifiant que* $x - x'$ *et* $y - y'$ *sont des entiers. Montrer que* $\mathscr{E}$ *est une relation d'équivalence et que le quotient* $\mathbb{R}^2/\mathscr{E}$ *peut être défini comme l'ensemble des points d'un tore.*

Exercice 3.4.13 *On définit dans* $\mathbb{R}$ *la relation*

$$x\mathscr{R}y \Leftrightarrow \cos(x) = \cos(y)$$

Montrer que $\mathscr{R}$ *est une relation d'équivalence,*
Déterminer la classe d'un élément x *de* $\mathbb{R}$.

Exercice 3.4.14 *Construire tous les ensembles-quotients de l'ensemble* $\mathbf{3} = \{1, 2, 3\}$.

Exercice 3.4.15 *On définit sur* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}^*$ *la relation* $\mathscr{R}$ *définie par :*

$$(x,y)\mathscr{R}(z,t) \Leftrightarrow xt = yz$$

Montrer que $\mathscr{R}$ *est une relation d'équivalence. Quel est l'ensemble des classes d'équivalence de* $\mathscr{R}$.

Exercice 3.4.16 *Soit* E *un ensemble non vide, et* $\mathscr{F}$, $\mathscr{F} \subset \mathscr{P}(E)$, $\mathscr{F} \neq \varnothing$. *On convient de ce que, pour*
$\mathscr{G} \subset \mathscr{P}(E)$, $\bigcap\limits_{X \in \mathscr{G}} X = E$ *si* $\mathscr{G} = \varnothing$. *On définit, dans* E, *la relation* $\mathscr{R}$ *telle que :*

$$a\mathscr{R}b \Leftrightarrow \forall X \in \mathscr{F},\ \{a,b\} \subset X \text{ ou } \{a,b\} \subset \overline{X}.$$

1. *Montrer que* $\mathscr{R}$ *est une relation d'équivalence. Quelle est cette relation si* $\mathscr{F} = \mathscr{P}(E)$ *?*
2. *On suppose que* $\mathscr{F} = \{A, B\}$ *et que* $\mathscr{F}$ *est une partition. Décrire les classes d'équivalence.*
3. *Soit* $a \in E$. *On pose* $\mathscr{G}_a = \{X \in \mathscr{F} | a \in X\}$. *Montrer que* $cl(a) = (\bigcap\limits_{X \in \mathscr{G}_a} X) \bigcap (\bigcap\limits_{X \in \mathscr{F} \setminus \mathscr{G}_a} \overline{X})$.
4. *Décrire* $E/\mathscr{R}$ *lorsque* $E = \mathbb{R}$ *et* $\mathscr{F} = \{]-\infty, 0], [-1, 2], [1, +\infty[\}$.

Exercice 3.4.17 *On considère la relation* $\preceq$ *définie sur* $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ *par :*

$$(x,y) \preceq (z,t) \Leftrightarrow (x \leq z \text{ et } y \leq t)$$

1. *Montrer que* $\preceq$ *est une relation d'ordre.*
2. *L'ordre* $\preceq$ *est-il total ?*
3. *On considère la partie* $A = \{(1,4),(2,3),(3,3),(2,5)\}$
   Déterminer les majorants et les minorants de A.
   Montrer que A *admet une borne supérieure et une borne inférieure que l'on déterminera.*

Exercice 3.4.18 *(Ordre lexicographique)*
Soient $(E,\preceq)$ *et* $(F,\preceq)$ *deux ensembles ordonnés,* $\mathcal{L}$ *la relation d'ordre défini dans* $E \times F$ *par :*

$$(x,y)\mathcal{L}(x',y') \Leftrightarrow x \preceq x' \text{ ou } (x = x' \text{ et } y \preceq y')$$

1. *Montrer que* $\mathcal{L}$ *est un ordre sur* $E \times F$, *appelé ordre lexicographique (des ordres de* E *et* F*).*
2. *Montrer que si* $\preceq$ *sont totaux, alors* $\mathcal{L}$ *est total.*
3. *On prend ici* $E = F = \mathbb{R}$, *muni de son ordre usuel.*
   a) Préciser, pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, *l'ensemble des majorants de* (x,y) *dans* $\mathbb{R}^2$ *pour* $\mathcal{L}$.
   b) Est ce que $\mathbb{R}_-^* \times \mathbb{R}$ *admet une borne supérieure dans* $\mathbb{R}^2$ *pour* $\mathcal{L}$, *et si oui, quelle est elle ?*

Exercice 3.4.19 *Soit* $(E,\preceq)$ *un ensemble ordonné.*

1. *Montrer que si* $(E,\preceq)$ *possède un plus grand élément* m, *alors* m *est l'unique élément maximal de* $(E,\preceq)$.
2. *On suppose dans cette question que* E *est fini et soit* $a \in E$
   a) Montrer qu'il existe un élément maximal M *de* $(E,\preceq)$ *tel que* $a \preceq M$
   b) En déduire que si $(E,\preceq)$ *admet un unique élément maximal* M *alors* M *est le plus grand élément de* $(E,\preceq)$.

Exercice 3.4.20 *Soient* A *et* B *deux ensembles, et* f *une application de* A *dans* B. *Démontrer que les propositions suivantes sont équivalentes :*
(i) pour toute partie X *de* A, $f^{-1}(f(X)) = X$;

(ii) f *est injective.*
Mêmes questions pour les propositions :
(i) pour toute partie Y *de* B, $f(f^{-1}(Y)) = Y$;

(ii) f *est surjective.*

Exercice 3.4.21 *Soient* A, B, C, D *des ensembles,* f *une application de* A *dans* B, g *une application de* B *dans* C, *et* h *une application de* C *dans* D. *Montrer que les applications* $g \circ f$ *et* $h \circ g$ *sont bijectives si et seulement si* f, g *et* h *le sont.*

Exercice 3.4.22 *Soient E et F deux ensembles non vides, muni respectivement des relations d'équivalence $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$. On désigne par u l'application canonique de E sur $E/\mathscr{R}$ et par v l'application canonique de F sur $F/\mathscr{S}$.*

On dit qu'une application f de E dans F est compatible avec $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$ si l'application $v \circ f$ est compatible avec $\mathscr{R}$ (c'est-à-dire que $[x, x' \in E$ et $x \equiv x' \quad (mod.\mathscr{R}) \Rightarrow v(f(x)) = v(f(x'))]$)

Montrer que dans ce cas :

1. *Si x, x' sont deux éléments de E,*

$$[x \equiv x' \quad mod.\mathscr{R}] \Rightarrow [v(f(x)) \equiv v(f(x')) \quad mod.\mathscr{S}]$$

2. *Il existe une application h de $E/\mathscr{R}$ dans $F/\mathscr{S}$ telle que $v \circ f = h \circ u$.*
   Etudier la réciproque.

Exercice 3.4.23 *On considère les deux applications définies de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ par :*

$$f : x \mapsto \begin{cases} 0 & |x| \leq 1 \\ -1 & |x| > 1 \end{cases} \qquad et \qquad g : x \mapsto \begin{cases} x^2 - 2 & |x| \leq 2 \\ -1 & |x| > 2 \end{cases}$$

Déterminer $(\forall x \in \mathbb{R})$; $f \circ g(x)$.

Exercice 3.4.24
1. *Soient E, E' deux ensembles, $f : E \to E'$ une application surjective. Montrer que, pour toute partition $(A'_i)_{i\in I}$ de E', la famille $(f^{-1}(A'_i))_{i\in I}$ est une partition de E.*
2. *Donner un exemple d'ensembles E, E' et d'application $f : E \to E'$ surjective, et de partition $(A_i)_{i\in I}$ telle que $(f(A_i))_{i\in I}$ ne soit pas une partition de E'.*

Exercice 3.4.25 *On pose $I =]0, +\infty[$, on considère l'application f définie de $I \times I$ vers $I \times I$ par : $f(x, y) = (xy, \frac{x}{y})$*
1. Montrer que f est une application injective et surjective.
2. Déterminer l'application réciproque f^{-1} de la bijection f.

Exercice 3.4.26 *Soit E un ensemble non vide, on considère l'application : $f_A : \mathscr{P}(E) \to \mathscr{P}(E),\ X \mapsto A\Delta X$; telle que A une partie fixée non vide de E.*

1. *Calculer $f_A(A),\ f_A(\overline{A}),\ f_A(E),\ f_A(\varnothing)$*
2. *a) Montrer que : $A\Delta(A\Delta X) = X,\ \forall X \in \mathscr{P}(E)$.*
   b) Déterminer l'application $f_A \circ f_A$.
   c) En déduire que l'application f_A est une bijection, trouver f_A^{-1}.
   d) En déduire que : $\forall B, C \in \mathscr{P}(E)$, $A\Delta B = A\Delta C \Rightarrow B = C$.

Exercice 3.4.27 *Soit E, F deux ensembles et $f : E \to F$. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$. Démontrer l'équivalence : $f(A) \cap B = \varnothing \Leftrightarrow A \cap f^{-1}(B) = \varnothing$.*

Exercice 3.4.28
1. *Soit $f : \mathbb{R} \to]-1, 1[,\ x \mapsto \frac{x}{|x|+1}$. Montrer que f est une application, puis que f est bijective. Exprimer $f^{-1}(x)$.*

2. *Soit* $f :]-1,1[\to \mathbb{R},\ x \mapsto \frac{2x}{1-x^2}$. *Montrer que* f *est une bijection et exprimer* $f^{-1}(x)$.
3. *Soit* $f : \mathbb{Z}\times[0,1[\to \mathbb{R},\ (k,x)\mapsto k+x$. *Montrer que* f *est bijective et exprimer* $f^{-1}(x)$.
4. *Soit* E *un ensemble et* $\{A,B\}$ *une partition de* E. φ *est l'application de* $\mathscr{P}(E)$ *dans* $\mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B)$ *telle que :* $\forall X\in\mathscr{P}(E),\ \varphi(A)=(X\cap A, X\cap B)$.
   Montrer que φ *est injective, puis bijective, et exprimer* $\varphi^{-1}(X',Y');\ (X',Y')\in\mathscr{P}(A)\times\mathscr{P}(B)$.

Exercice 3.4.29 *I. Soit* $\varphi:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ *telle que* $\forall(x,y)\in\mathbb{N}^2,\ \varphi((x,y))=2^x(2y+1)-1$.

1. *Montrer que* φ *est une application de* $\mathbb{N}^2$ *dans* $\mathbb{N}$, *puis que* φ *est injective.*
2. *Montrer que* φ *est bijective (si* $n\in\mathbb{N}$, *on introduira* $A_n=\{x\in\mathbb{N};\ 2^x|n+1\}$*) et exprimer* $\varphi^{-1}(n)$ *en utilisant le symbole* $\max$.

II. Soit $\psi:\mathbb{N}^2\to\mathbb{N}$ *telle que* $\forall(x,y)\in\mathbb{N}^2,\ \psi((x,y))=\frac{(x+y)(x+y+1)}{2}+x$.

1. *Montrer que* ψ *est une application de* $\mathbb{N}^2$ *dans* $\mathbb{N}$, *puis que* ψ *est injective (distinguer deux cas :* $x+y=x'+y'$ *et* $x+y\neq x'+y'$*).*
2. *Montrer que* $\forall(x,y)\in\mathbb{N}^2,\ \sum\limits_{i=0}^{x+y} i\le\psi((x,y))\le\sum\limits_{i=0}^{x+y+1} i$. *(Utiliser cette relation pour montrer que* ψ *est bijective et exprimer* $\psi^{-1}(n)$ *à l'aide de* $\sqrt{.}$ *et* $[.]$.*)*

Exercice 3.4.30 *Le but de cet exercice est de démontrer un célèbre théorème de Cantor et Bernstein : si* E *et* F *sont des ensembles tels qu'il existe une injection de* E *dans* F *et une injection de* F *dans* E, *alors il existe une bijection de* E *sur* F. *On se donne donc deux ensembles* E *et* F *et deux applications injectives* $i:E\to F$ *et* $j:F\to E$. *On note par ailleurs*

$$A_0=E\setminus j(F),\ A_1=(j\circ i)(A_0),...,A_{n+1}=(j\circ i)(A_n)$$

et

$$B=\bigcup_{n\geq1}A_n,\ C=E\setminus B.$$

1. *Construction de l'application.*
   1.1. Démontrer que pour tout $x\in C$, *il existe un unique* $z\in F$ *tel que* $x=j(z)$. *On notera cet élément* $\phi(x)$.
   1.2. Pour $x\in B$, *on note* $\phi(x)=i(x)$. *Démontrer que l'on a ainsi bien défini une application* $\phi:E\to F$.
2. *Injectivité de* ϕ.
   2.1. Démontrer que les restrictions de ϕ *à* B *et à* C *sont injectives.*
   2.2. Considérons maintenant $x\in C$ *et* $y\in B$ *tels que* $\phi(x)=\phi(y)$. *Démontrer que* $x=(j\circ i)(y)$.
   2.3. En déduire que ϕ *est injective.*

3. *Surjectivité de ϕ. Démontrer que ϕ est surjective.*
4. *Un exemple. Pour $E = \mathbb{N}, F = \{2, 3, \ldots, \}$, $i : E \to F$, $n \mapsto n + 4$, $j : F \to E$, $n \mapsto n$, déterminer les ensembles A_n, B, C et l'application ϕ.*

Exercice 3.4.31 *Soit n un entier au moins égal à 2, et E un ensemble à n éléments. Soit $f : E \to \mathscr{P}(E)$. On suppose que pour tout x de E, on a $x \in f(x)$, et que pour tout $x, y \in E$, on a l'implication $x \in f(y) \Rightarrow y \in f(x)$.*

1. *Montrer que pour tout $x \in E$, on a $Card(f(x)) \geq 1$.*
2. *On suppose qu'il existe $a \in E$ tel que $Card(f(a)) = n$. Montrer que pour tout x de E, on a $Card(f(x)) \geq 2$.*
3. *Montrer qu'il existe des éléments $x, y \in E$ différents tels que $Card(f(x)) = Card(f(y))$.*

Exercice 3.4.32 *Soient E et F deux ensembles, $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{S}$) une relation d'équivalence dans E (resp. dans F,) $f : E \to F$ une application. On dir que f est compatible avec $\mathscr{R}$ (resp. $\mathscr{S}$), si et seulement si :*

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad (x\mathscr{R}x' \Rightarrow f(x)\mathscr{S}f(x')).$$

1. *On considère l'application $p : E \to E/\mathscr{R}$, (resp. $q : F \to F/\mathscr{S}$) la surjection canonique. Montrer qu'il existe une unique application $\widetilde{f} : E/\mathscr{R} \to F/\mathscr{S}$ telle que le diagramme ci-après soit commutatif, i.e. $\widetilde{f} \circ p = q \circ f$ si et seulement si f est compatible avec $\mathscr{R}$ et $\mathscr{S}$.*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & F \arrow[d, "q"] \\ E/\mathscr{R} \arrow[r, "\widetilde{f}"] & F/\mathscr{S} \end{tikzcd}$$

2. *2.1. Soient G un ensemble, $\mathscr{T}$ une relation d'équivalence dans G, et $g : F \to G$ une application compatible avec $\mathscr{S}$ et $\mathscr{T}$. Montrer que $g \circ f : E \to G$ est une application compatible avec $\mathscr{R}$ et $\mathscr{T}$, et que $\widetilde{g \circ f} = \widetilde{g} \circ \widetilde{f}$.*
   2.2. Vérifier que Id_E est compatible avec $\mathscr{R}$, et que $\widetilde{Id_E} = Id_{E/\mathscr{R}}$.