ECOLE NORMALE SUPERIEURE
UNIVERSITÉ HASSAN II DE CASABLANCA

Cours

Algèbre 1

Licence en éducation,
Filière : Mathématiques
Niveau : S1

Prof. Hicham Yamoul

Département de Mathématiques et informatique
Ecole Normale Supérieure
Université Hassan II de Casablanca

2023/2024

Chapitre 2

Ensembles

La notion d'**ensemble** (*"Set"* en anglais, *"Menge"* en allemand) est une notion primitive, non susceptible de définition. Elle est issue du terme usuel de collection, de rassemblement d'objets. Les termes primitifs de la théorie des ensembles sont ceux d'**éléments**, d'**ensemble** et de **relation d'appartenance.**

2.1 Généralités

Définition 2.1.1 *Un ensemble est une collection d'objets; ces objets s'appelletn les éléments de l'ensemble.*

Exemple 2.1.1 • *L'ensemble* $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ *des entiers naturels*

• *L'ensemble* $\mathbb{Z} = \{..., -3, -2, -1, 0, 1, 2, ...\}$ *des entiers relatifs.*

• *La collection des lettres grecs* $\{\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta, \theta, \lambda, \mu, \nu, \xi, \pi, \rho, \sigma, \varphi, \psi, \omega\}$ *est un ensemble de lettres grecs.*

• *Le cercle est un ensemble de tous les points équidistants à un point donné.*

etc...

Notation. Les ensemble sont en général, désignés par des lettres majuscules : E, F, G, X, Y, A, B, C, etc.

Les élément d'un ensemble sont désignés par des lettres miniscules, a, b, x, y, etc...

Définition 2.1.2 *Si* a *est un élément d'un ensemble* E*, on écrit :* $a \in E$ *et on lit :* a *appartient à* E.

Dans le cas contraire, on dit que a *n'appartient pas à* E *et on écrit :* $a \notin E$.

Notation d'un ensemble

1. Si l'ensemble peut être défini par énumération de ses éléments, on écrit ceux-ci entre deux accolades (*définition en extension*).

Exemple 2.1.2 $E = \{a, e, i, o, u, y\}$; $E = \{1, 3, 5\}$; $E = \{0\}$

Il importe de remarquer que l'ordre dans lequel les éléments sont écrits n'intervient pas.

2. Si l'ensemble est celui des éléments x qui possèdent une certaine propriété P, on écrit (*définition en compréhension*)

$$E = \{x \mid P(x) \text{ est vraie}\}.$$

En particulier, si $P(x)$ est une propriété concernant un élément x d'un ensemble F, l'ensemble de ces éléments x pour lesquels $P(x)$ est vraie se note $\{x \in F \mid P(x) \text{ est vraie}\}$

Exemple 2.1.3 *Q désignant l'ensemble des points d'un plan et A, B deux points fixes de ce plan, l'ensemble des points M de l'ensemble Q équidistants de A et B se notera $\{M \mid M \in Q \text{ et } MA = MB\}$.*

Exercice 2.1.1 *Déterminer l'ensemble $E = \{x^2 + x - 1;\ x \in \mathbb{R}\}$.*

2.2 Axiomes sur les ensembles

2.2.1 A1- Égalité

Si E et F sont deux ensembles : $E = F \Leftrightarrow \forall x\,(x \in E \Leftrightarrow x \in F)$.

Cet axiome traduit en termes mathématiques la perception intuitive de l'égalité : deux ensembles sont égaux si, et seulement si, ils ont les mêmes éléments.

2.2.2 A2- Axiome de la paire

Si a et b sont deux objets, il existe un unique ensemble, noté $\{a, b\}$, tel que : $\forall x\,(x \in \{a, b\} \Leftrightarrow x = a \text{ ou } x = b)$.

Premier axiome de "fabrication" d'un ensemble; noter que, si $a = b$, $\{a, b\} = \{a, a\} = \{a\}$ est nommé singleton. Pour évident qu'il soit, cet axiome permettra de définir correctement la notion de couple.

2.2.3 A3- Axiome de réunion et de sélection

Soit $\mathcal{R}(x, y)$ une propriété des objets x et y telle que : pour tout y, il existe un ensemble X vérifiant $\forall x\,(\mathcal{R}(x, y) \Rightarrow x \in X)$; alors, si Y est un ensemble, il existe un unique ensemble E tel que : $\forall x\,(x \in E \Leftrightarrow y \in Y \text{ et } \mathcal{R}(x, y))$.

Cet axiome, très technique quant à sa forme, est l'un des plus importants de la théorie des ensembles car il autorise la définition d'un ensemble en compréhension, et celle de la réunion ensembliste.

2.2.4 A4- Axiome de l'ensemble des parties

Si E est un ensemble, il existe un unique ensemble, noté $\mathcal{P}(E)$, tel que :

$$\forall X\,(X \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow X \subset E)(\Leftrightarrow \forall x(x \in X \Rightarrow x \in E)).$$

Cet axiome affirme l'existence d'un ensemble dont les éléments sont les sous-ensembles d'un ensemble donné ; ainsi, la distinction élément-ensemble est purement formelle puisque tout ensemble est élément de l'ensemble de ses parties (déjà $E \in \{E\}$...).

2.2.5 A5- Axiome de l'ensemble vide

Il existe un unique ensemble, noté $\varnothing$, tel que $\forall x,\ (x \notin \varnothing)$.

Ce n'est pas le moindre des paradoxes de la théorie des ensembles : le premier ensemble dont on affirme l'existence est précisément celui qui ne contient aucun élément ! De plus cet ensemble est "générateur" des autres ensembles, notamment de $\mathbb{N}$.

2.2.6 A6- Axiome de l'infini

Il existe un ensemble $\mathbb{N}$.

Naturellement, $\mathbb{N}$ est l'ensemble bien connu peut être construit de la manière suivante $0 = \varnothing,\ 1 = \{\varnothing\},\ 2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\},\ 3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$...

Plus généralement, $n + 1 = n \cup \{n\}$.

2.2.7 A7- Axiome de fondation

Si E est un ensemble, $E \notin E$; plus généralement, si $E_1,\ E_2, ...,\ E_n$ désignent n ensembles, ($E_1 \in E_2$ et $E_2 \in E_3$, et $E_{n-1} \in E_n$ et $E_n \in E_1$) est une proposition fausse.

Il est clair qu'un ensemble ne peut être élément de lui-même et qu'il est exclu que l'on puisse écrire une "boucle" avec la relation $\in$.

2.2.8 A8- Axiome du choix

Si E est un ensemble, il existe une application $f : \mathcal{P}(E) - \{\varnothing\} \to E$, telle que $\forall X \in \mathcal{P}(E) - \{\varnothing\}, f(X) \in X$.

(c'est-à-dire : $\forall X\ (X \in \mathcal{P}(E) - \{\varnothing\} \Rightarrow f(X) \in X)$)

L'application f est appelée fonction du choix dans E.

Cet axiome indique que, dans tout sous-ensemble non vide de l'ensemble E, on peut "choisir" un élément de manière "unique" afin que le choix global corresponde à une application mathématique. Très controversé, ce postulat est admis par l'ensemble des mathématiciens, et la formulation proposée n'est pas exclusive; elle présente l'vantage de la clareté, et de s'appliquer immédiatement aux situations les plus courantes.

2.3 Notions fondamentales

2.3.1 Inclusion

Définition 2.3.1 *On dit qu'un ensemble E est inclus dans un ensemble F et on note $E \subseteq F$ si tout élément de E appartient à F.*

Autrement dit, pour tout x on a : $x \in E \Rightarrow x \in F$.

On dit aussi que E est une partie de F, ou encore E est un sous-ensemble de F.

Si E n'est pas inclus dans F on note, $E \nsubseteq F$, ce qui est équivalent à $\exists x \in E$ et $x \notin F$.

Exemple 2.3.1 *Soit E un ensemble. On a :*
i) $\varnothing \subseteq E$ *et* $E \subseteq E$,
ii) $x \in E \Leftrightarrow \{x\} \subseteq E \Leftrightarrow \{x\} \in \mathcal{P}(E)$.
iii) $\{x, y\} \nsubseteq E \Leftrightarrow x \notin E$ *ou* $y \notin E$

Remarque 2.3.1 *Si $E \subseteq F$ et $E \neq F$, on note $E \subset F$ ou $E \subsetneq F$.*

Soient E et F deux ensembles, alors on a : $E = F \Leftrightarrow E \subseteq F$ et $F \subseteq E$.
Soient $E,\ F$ et G trois ensembles, alors on a : $E \subseteq F$ et $F \subseteq G \Rightarrow E \subseteq G$.

2.3.2 Complémentaire d'une partie d'un ensemble

Définition 2.3.2 *Soit A une partie de E (E étant un ensemble non vide). Le complémentaire de A dans E est l'ensemble des éléments x de E tels que $x \notin A$ et On le note C_E^A ou A^c ou encore $\bar{A}$.*

$$A^c = \{x \in E \mid x \notin A\}.$$

Exemple 2.3.2 $C_{\mathbb{R}}^{[0,1]} =]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$,
$C_E^{\varnothing} = E,\ C_E^E,\ C_E^{C_E^A} = \bar{\bar{A}} = A, \ldots$

Proposition 2.3.1 *Soient $A,\ B$ et C des parties de E, on a : i)* $A \subset B \Rightarrow B^c \subset A^c$
ii) $(A^c)^c = A$, *iii)* $C_A^A = \varnothing$

Preuve : En exercice.

2.3.3 Réunion

Définition 2.3.3 *Si $\mathcal{F}$ est un ensemble d'ensembles, il existe un unique ensemble, noté $\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X$, et nommé réunion des ensembles de F, tel que :*

$$\forall x\, (x \in \bigcup_{X \in \mathcal{F}} X \Leftrightarrow \exists X\, (X \in \mathcal{F} \text{ et } x \in X))(\Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{F},\, x \in X).$$

La propriété de la définition découle directement de l'axiome de sélection et de réunion; en effet, soit $\mathcal{R}(x, X)$ la relation $x \in X$; pour chaque X, il existe un ensemble T tel que $\forall x\, (\mathcal{R}(x, X) \Rightarrow x \in T)$: on choisit $T = X$; dès lors, si $Y = \mathcal{F}$, il existe un unique ensemble E tel que : $\forall x\, (x \in E \Leftrightarrow \exists X \in \mathcal{F},\, x \in X)$.

Les conséquences sont multiples; si $\mathcal{F} = \{A, B\}$, $\bigcup_{X \in \mathcal{F}} X = A \cup B$, et si $a_1,\ a_2, \ldots, a_n$ sont n objets quelconques, on peut, par récurrence, définir l'ensemble $\{a_1,\ a_2, \ldots, a_n\}$ à l'aide de l'égalité : $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = (\ldots((\{a_1\} \cup \{a_2\}) \cup \{a_3\}) \cup \ldots) \cup \{a_n\}$

Un tel ensemble est dit exprimé en extension car on "visualise" chacun de ses éléments.

Définition 2.3.4 *On appelle réunion de deux ensembles E et F, et on la note $E \cup F$, l'ensemble des éléments x tel que $x \in E$ ou $x \in F$.*

On écrit; $E \cup F = \{x : \ x \in E \text{ ou } x \in F\}$

$E \cup F$ se lit "E union F".

Proposition 2.3.2 *Soient A, B et C des parties d'un ensemble E*

$$A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \text{ et } B \subseteq C$$

Proposition 2.3.3 *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E et $X \subseteq E$, on a*

$$\bigcup_{i \in I} X_i \subseteq X \Leftrightarrow \forall i \in I, \ X_i \subseteq X$$

Proposition 2.3.4 *Soient A, B et C des parties d'un ensemble E; on a :*

i) $A \cup B = B \cup A$,

ii) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$,

iii) $A \cup \varnothing = \varnothing \cup A = A, \ A \cup E = E \cup A = E, \ A \cup A = A$,

iv) $A \subseteq A \cup B$

v) $A \cup B = A \Leftrightarrow B \subseteq A$

Exercice 2.3.1 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n =]1, n[$. Montrer que $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} F_n =]1, +\infty[$*

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $]1, n[\subseteq]1, +\infty[$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]1, n[\subseteq]1, +\infty[$.

Réciproquement, soit $x \in]1, +\infty[$. Prenons $n = [x] + 1$, alors on a $x \in]1, n[$ et par suite $x \in \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]1, n[$, d'où $\bigcup_{n \in \mathbb{N}^*}]1, n[=]1, +\infty[$. ∎

2.3.4 Intersection

Définition 2.3.5 *Si $\mathcal{F}$ une famille non vide d'ensembles, il existe un unique ensemble, noté $\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X$, et nommé intersection des ensembles de $\mathcal{F}$, tel que :*

$$\forall x \, (x \in \bigcap_{X \in \mathcal{F}} X \Leftrightarrow \forall X \, (X \in \mathcal{F} \Rightarrow x \in X))(\Leftrightarrow \forall X \in \mathcal{F}, \, x \in X).$$

Cette propriété découle de la notation en compréhension d'un ensemble car, si X_0 est un ensemble de $\mathcal{F}$, $\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X$ est défini en compréhension, dans X_0, par $P(x) : \ \forall X \in \mathcal{F}, \, x \in X$.

Attention : Si $\mathcal{F} = \varnothing$, $\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X$ n'est pas défini car tout objet x vérifie : $\forall X \, (X \in \varnothing \Rightarrow x \in X)$, puisque $X \in \varnothing$ étant fausse, $X \in \varnothing \Rightarrow x \in X$ est vraie. Or il n'existe aucun ensemble qui contient tous les objets, sinon cet ensemble serait élément de lui-même !

Enfin, si $\mathcal{F} = \{A, B\}$, $\bigcap_{X \in \mathcal{F}} X = A \cap B$.

En pratique, on adopte la définition suivante pour l'intersection de deux ensembles;

Définition 2.3.6 *On appelle intersection de deux ensembles E et F, et on note $E \cap F$, l'ensemble des éléments x tels que $x \in E$ et $x \in F$, on a*

$$E \cap F = \{x : x \in E \text{ et } x \in F\}$$

$E \cap F$ se lit "E inter F"
Si $E \cap F = \varnothing$, on dit que E et F sont disjoints.

Proposition 2.3.5 *Soient A, B et C des parties d'un ensemble E, on alors :*

$$C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \subseteq A \text{ et } C \subseteq B$$

Remarque 2.3.2 *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E. L'intersection des X_i est noté $\bigcap\limits_{i \in I} X_i$.*

$$\bigcap_{i \in I} X_i = \{x \in E : \forall i \in I, \, x \in X_i\}$$

Proposition 2.3.6 *Soit $(X_i)_{i \in I}$ une famille de parties d'un ensemble E et $X \subseteq E$. On a*

$$X \subseteq \bigcap_{i \in I} X_i \Leftrightarrow \forall i \in I, \, X \subseteq X_i$$

Proposition 2.3.7 *Soient A, B et C des parties d'un ensemble E, on a :*
i) $A \cap B = B \cap A$,
ii) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$,
iii) $A \cap \varnothing = \varnothing \cap A = \varnothing, \; A \cap E = E \cap A = A, \; A \cap A = A$,
iv) $A \cap B \subseteq A$,
v) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \subseteq B$.

Exercice 2.3.2 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n =]1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}[$*
Montrer que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = [1, 2]$.

Solution. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $[1, 2] \subseteq]1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}[$, donc $[1, 2] \subseteq \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} I_n$.

Réciproquement, soit $x \in \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*}]1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}[$, on a $\forall n \in \mathbb{N}^*, \; 1 - \frac{1}{n} < x < 2 + \frac{1}{n}$, montrons que $1 \leq x \leq 2$;

Supposons que $1 > x$, alors $1 - x > 0$, et d'après la propriété d'Archimède, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < 1 - x$, ceci est absurde donc $1 \leq x$.

De même, supposons que $x > 2$, alors $x - 2 > 0$, il existe donc $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{1}{n} < x - 2$, ceci est absurde, donc $x \leq 2$. D'où, l'égalité $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} I_n = [1, 2]$.

2.3.5 Ensemble des parties d'un ensemble

D'après l'axiome A4, pour tout ensemble E, il existe un ensemble appelé ensemble des parties de E, noté $\mathcal{P}(E)$.

$$A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow A \subset E.$$

Exemple 2.3.3 $E = \{a, b, c\}$,
$\mathcal{P}(E) = \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, E\}$

Proposition 2.3.8 *Soient* $A, B \in \mathcal{P}(E)$, *on a;*
i) $A \subset B \Rightarrow \mathcal{P}(A) \subset \mathcal{P}(B)$,
ii) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,
iii) $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$, *(égalité si, et seulement si,* $A \cap B = \varnothing$*)*

Exercice 2.3.3 *Déterminer* $\mathcal{P}(\varnothing), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)), \mathcal{P}(\mathcal{P}(\mathcal{P}(\varnothing)))$.

Opérations sur $\mathcal{P}(E)$

Proposition 2.3.9 *Soient* A, B *et* C *des parties d'un ensemble* E.
i) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$,
ii) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$,
iii) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$,
iv) Lois de Morgan $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$; $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

Remarque 2.3.3 *On peut généraliser ces propriétés pour une famille quelconque de parties de* E.
$(\bigcap_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcup_{i=1}^{n} A_i^c$; $(\bigcup_{i=1}^{n} A_i)^c = \bigcap_{i=1}^{n} A_i^c$.

2.3.6 Le produit cartésien

Soient E et F deux ensembles. Et soient $x \in E$ et $y \in F$, on peut former un nouvel objet (x, y) appelé couple.

Soient (x, y) et (z, t) deux éléments de $E \times F$. On a l'équivalence :

$$(x, y) = (z, t) \Leftrightarrow (x = z \text{ et } y = t)$$

Ce qui est équivalent à $(x, y) \neq (z, t) \Leftrightarrow (x \neq z \text{ ou } y \neq t)$

Définition 2.3.7 *Soient* E *et* F *deux ensembles.*

Le produit cartésien de E *et* F, *noté* $E \times F$ *est l'ensemble des couples* (x, y) *tel que* $x \in E$ *et* $y \in F$.

On a

$$E \times F = \{(x, y) \mid x \in E \text{ et } y \in F\}$$

$E \times F$ *se lit "E croix F"*

Remarque 2.3.4 *D'après l'axiome du choix* $(E \times F = \varnothing \Leftrightarrow E = \varnothing$ *ou* $F = \varnothing)$.

Exemple 2.3.4 $E = \{0, 1\}$, $F = \{0, 1, 2\}$, *alors* $E \times F = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (1, 2)\}$

Remarque 2.3.5 *Généralement* $E \times F \neq F \times E$.
Si $A \subseteq E$ *et* $B \subseteq F$ *alors* $A \times B \subseteq E \times F$.

On a-t-il $\mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F) = \mathcal{P}(E \times F)$?

Proposition 2.3.10 $A \in \mathcal{P}(E)$, $B \in \mathcal{P}(F)$.
i) $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$,
ii) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Remarque 2.3.6 $(E \times F) \cup (G \times H) \neq (E \cup G) \times (F \cup H)$.

Exercice 2.3.4 *On considère l'ensemble* $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$. *Montrer qu'il n'existe deux parties* I *et* J *de* $\mathbb{R}$ *tels que :* $D = I \times J$.

Solution. Supposons qu'il existe I et J deux parties de $\mathbb{R}$ telles que $D = I \times J$. Alors $(0, 1) \in D$, $(1, 0) \in D$, $1 \in I$ et $1 \in J$ donc $(1, 1) \in I \times J$ c-à-d $(1, 1) \in D$ mais $1^2 + 1^2 = 2$, absurde.

Exercice 2.3.5 *Soient* E *et* F *deux ensembles ayant chacun au moins deux éléments. Montrer qu'il existe une partie* $X \subseteq E \times F$ *telle que* X *n'est pas de la forme* $A \times B$ *avec* $A \subseteq E$ *et* $B \subseteq F$.

Solution. Soit $a \neq b \in E$ et $a' \neq b' \in F$
Posons $X = \{(a, a'), (b, b')\}$. Supposons par l'absurde que $X = A \times B$ avec $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$. On a alors $a \in A$ car $(a, a') \in X = A \times B$, de même $b' \in B$, il s'ensuit que $(a, b') \in A \times B = X$, ceci est absurde.

2.3.7 La différence

Définition 2.3.8 *Soient* E *et* F *deux ensembles.*
La différence $E \setminus F$ *est l'ensemble des éléments* x *tels que* $x \in E$ *et* $x \notin F$.

$$E \setminus F = \{x;\ x \in E \text{ et } x \notin F\}$$

$E \setminus F$ *se lit "E moins F"*

Exemple 2.3.5 *i)* $E = [0, 1[$, $F = [-1, 1/2]$, *on a* $E \setminus F =]1/2, 1[$,
ii) $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]k, k + 1[$.

Remarque 2.3.7 $E \setminus F = E \cap F^c$,
$E \setminus F \neq F \setminus E$.

Proposition 2.3.11 *i)* $A \setminus \varnothing = A$,
ii) $\varnothing \setminus A = \varnothing$,
iii) $A \setminus B = \varnothing \Leftrightarrow A \subseteq B$.

2.3.8 La différence symétrique

Définition 2.3.9 *Soient E et F deux ensembles.*

La différence symétrique de E et F, notée $E\triangle F$ est l'ensemble des éléments x tels que $x \in E\cup F$ et $x \notin E\cap F$.

On a

$$E\triangle F = (E\cup F)\setminus(E\cap F) = (E\setminus F)\cup(F\setminus E).$$

$E\triangle F$ se lit "E delta F"

Exemple 2.3.6 *Si $E=\{1,2,3,4\},\ F=\{3,4,5\}$ alors $E\triangle F=\{1,2,5\}$.*

Si $E=[2,4],\ F=]3,5[$ alors $E\triangle F=[2,3]\cup]4,5[$

Proposition 2.3.12 *Soient $A,\ B$ et C des parties d'un ensemble E.*

i) $A\triangle B = B\triangle A$, (commutativité de la différence symétrique)

ii) $(A\triangle B)\triangle C = A\triangle(B\triangle C)$, (associativité de la différence symétrique)

iii) $A\triangle\varnothing = \varnothing\triangle A = A$,

iv) $A\triangle A=\varnothing$,

v) $A\triangle B=\varnothing \Leftrightarrow A=B$,

vi) $A\cap(B\triangle C) = (A\cap B)\triangle(A\cap C)$.

2.3.9 Ensembles finis

Définition 2.3.10 *Un ensemble fini est un ensemble qui contient un nombre fini d'éléments, c-à-d qu'il est possible de compter ses éléments, le résultat étant un nombre entier appelé cardinal de l'ensemble.*

$card(E)\in\mathbb{N}$ est le nombre des éléments de l'ensemble A.

Convention : $card\varnothing = 0$

$card\mathbb{N}=+\infty$.

Proposition 2.3.13 *$cardE\cup F = cardE + cardF - cardE\cap F$,*

Si $E\subseteq F \Rightarrow cardE \leq cardF$,

$card(E\times F) = cardE.cardF$.

Proposition 2.3.14 *Soient E un ensemble fini non vide et $n = cardE$, $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.*

On a

$$card\mathcal{P}(E) = 2^n.$$

Preuve. Par récurrence sur n.

Pour $n=0$, on a $E=\varnothing,\ \mathcal{P}(\varnothing)=\{\varnothing\}$ donc $\mathcal{P}(\varnothing)=1=2^0$.

Supposons que $card\mathcal{P}(E) = 2^n$. Soit $E' = E\cup\{x_0\}$ avec $x_0 \notin E$, alors $cardE' = n+1$.

Chaque partie A de E' est telle que $x_0\in A$ ou $x_0\notin A$. Le nombre des parties de E' ne contenant pas x_0 est égal au nombre des parties de E' contenant x_0.

Or $card(E'-\{x_0\}) = n$ donc $card\mathcal{P}(E') = 2^n+2^n = 2^{n+1}$. D'où, $card\mathcal{P}(E) = 2^n$. ■

2.4 Partition d'un ensemble- Fonction caractéristique

2.4.1 Partition d'un ensemble

Soit E un ensemble non vide. D'après l'axiome de partition d'un ensemble, on obtient la définition suivante;

Définition 2.4.1 *On appelle partition de E tout ensemble* $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(E)$ *tel que;*
i) $\forall F \in \mathcal{F},\ F \neq \varnothing$,
ii) $\forall F, G \in \mathcal{F}; F \neq G \Rightarrow F \cap G = \varnothing$,
iii) $\bigcup\limits_{F\in\mathcal{F}} = E$.

La définition reste valable pour un ensemble E non vide quelconque.

Exemple 2.4.1 *i)* $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\mathcal{F} = \{\{0, 1\}, \{2, 3, 5\}, \{4, 6, 9\}, \{7, 8\}\}$ *est une partition de* E.
ii) Soit E un ensemble non vide. $\mathcal{F} = \{\{x\} : x \in E\}$ *est une partition de* E.
$\mathcal{F} = \{E\}$.
iii) Pour $k \in \mathbb{Z}$, *on pose* $F_k = [k, k + 1[$. *La famille* $(F_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ *est une partition de* $\mathbb{R}$.

Cas d'ensemble fini Soit E un ensemble fini et $\{A_i\}_{i\in I}$ une partition de E, alors $cardE = \sum\limits_{i\in I} A_i$.

2.4.2 Fonction caractéristique

Définition 2.4.2 *Soit* E *un ensemble non vide, et soit* A *une partie de* E. *On appelle "fonction caractéristique de* A*" la fonction* f *dont l'ensemble de départ est* E, *l'ensemble d'arrivée est* $\{0, 1\}$ *et qui est définie par*
$f(x) = 1$ *si* $x \in A$, $f(x) = 0$ *si* $x \notin A$. *Cette fonction est notée* $\mathbf{1}_A$ *ou encore* χ_A.

Lintérêt de ces fonctions caractéristiques est de rendre certaines démonstrations de théorie des ensembles automatiques une fois établis les liens entre les fonctions caractéristique et les opérations vues ci-dessus.

Proposition 2.4.1 *Si* $A, B \in \mathcal{P}(E)$, *alors;*
i) $A \subseteq B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A \leq \mathbf{1}_B$,
ii) $A = B \Leftrightarrow \mathbf{1}_A = \mathbf{1}_B$,
iii) $\mathbf{1}_{A^c} = 1 - \mathbf{1}_A$,
iv) $\mathbf{1}_{A\cap B} = min(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B$,
v) $\mathbf{1}_{A\cup B} = max(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B) = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B$,
vi) $\mathbf{1}_{A\triangle B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - 2\mathbf{1}_A.\mathbf{1}_B$.

Exemple 2.4.2 $E = \mathbb{R},\ A = \mathbb{Q}$

$$\mathbb{1}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{R} \to \{0,1\}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 1; & si\ x \in \mathbb{Q}; \\ 0; & si\ x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Cette fonction s'appelle "Fonction de Dirichlet," elle est très importante en analyse, notamment en Intégration (elle est l'exemple d'une fonction qui n'est continue en aucun point).

2.5 Exercices

Exercice 2.5.1 *Trois ensembles, A, B et C, tels que l'on ait*
(i) $A \cap B \subset A \cap C$ et (ii) $A \cup B \subset A \cup C$. Quelle relation y a-t-il entre B et C ?

Que peut-on dire des ensembles B et C si l'on a
(i') $A \cap B = A \cap C$ et (ii') $A \cup B = A \cup C$. ?

Exercice 2.5.2 *Soient A, B et C des parties de l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e\}$ telles que :*
$A \cap B = \{b, d\}$ $A \cup B = \{b, c, d, e\}$; $A \cap C = \{b, c\}$ *et* $A \cup C = \{a, b, c, d\}$
Déterminer les ensembles A et B et C.

Exercice 2.5.3 *On considère l'ensemble $E = \{a, b, c, d, e, f\}$ et soient A et B deux parties de E telles que :*
$A = \{a, b\}$ *et* $B = \{a, b, e, f\}$. *$\mathcal{P}(E)$ désigne l'ensemble des parties de E.*

1. *Déterminer les solution de l'équation : (I) $A \cup X = B$; $X \in \mathcal{P}(E)$.*
2. *Déterminer les solutions de l'équation : (II) $B \cap X = A$; $X \in \mathcal{P}(E)$.*

Exercice 2.5.4 *On considère l'ensemble suivant : $A = \{\frac{1}{x} + \frac{1}{y} - \frac{1}{xy};\ (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*\}$*

1. *Montrer que $0 \notin A$ et que $\frac{1}{2} \in A$.*
2. *Montrer que $A \subset]0, 1]$.*

Exercice 2.5.5 *Soient A et B deux ensembles définis par :*
$A = \{(x, 1 + \sqrt{x-1});\ x \in [1, +\infty[\}$ *et* $B = \{(x^2 - 2x + 2, x);\ x \in [1, +\infty[\}$
Montrer que $A = B$.

Exercice 2.5.6 *Dans l'ensemble $\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, des parties de l'ensemble $\mathbb{N}^*$ résoudre et discuter l'équation suivante :*

(I) $\{1, 2, ..., p\} \cup X = \{1, 2, ..., n\}$.

Exercice 2.5.7 *Soit $A \in \mathcal{P}(E)$ et $B \in \mathcal{P}(E)$ deux parties non vides d'un ensemble E et X une partie inconnue*
de E. Résoudre et discuter l'équation :
(I) $A \cup X = B$

Exercice 2.5.8 *Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $F_n =]1 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n}[$ et $G_n =]1, n[$*
Montrer que $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}^*} F_n = [1, 2]$ et que $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}^*} G_n =]1, +\infty[$

Exercice 2.5.9 *Soient A et B deux parties d'un ensemble non vide E. Montrer que :*

$$E \times E - A \times B = ((E - A) \times E) - (E \times (E - B))$$

Exercice 2.5.10 *Soit A, B et C trois sous-ensembles finis d'un même ensemble E.*

1. *Démontrer que l'on a*
   (I) $Card(A \cup B) = Card A + Card B - Card(A \cap B)$.
2. *En utilisant la relation précédente démontrer que l'on a*
   (II) $Card(A \cup B \cup C) = Card A + Card B + Card C - Card(A \cap B) - Card(B \cap C) -$
   $Card(A \cap C) + Card(A \cap B \cap C)$.
3. *Généraliser pour n sous-ensembles finis de E.*

Exercice 2.5.11 *Soit A, B, C et D des parties d'un ensembles E. Montrer que :*

1. $(A \times C) \cap (B \times D) = (A \cap B) \times (C \cap D)$.
2. $(A \times C) \cup (B \times D) \subseteq (A \cup B) \times (C \cup D)$.

Exercice 2.5.12 *Soit $n \geq 2$ et $A_1, ..., A_n$ des parties d'un ensemble non vide E. Soit x un élément de E. Montrer par récurrence sur n que :*
$x \in \triangle_{i=1}^{n} A_i$ *si et seulement si le nombre des parties A_i contenant x est impair.*

Exercice 2.5.13 *Soient A et B deux ensembles tels que $A \nsubseteq B$, $B \nsubseteq A$ et $A \cap B \neq \emptyset$.*
Montrer que $\{A \setminus B, B \setminus A, A \cap B\}$ est une partition de $A \cup B$.

Exercice 2.5.14 *Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $A_k = \{\frac{k(k+1)}{2}, ..., \frac{(k+1)(k+2)}{2} - 1\}$*

1. *Déterminer $\bigcup\limits_{0 \leq k \leq m} A_k$*
2. *Montrer que $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est une partition de $\mathbb{N}$.*
3. *Soit $n \in \mathbb{N}$.*
   a) Montrer quil existe un unique couple (x, k) d'entiers naturels tel que $0 \leq x \leq k$ et

   $n = x + \frac{k(k+1)}{2}$.
   b) En déduire qu'il existe un unique couple (x, y) d'entiers naturels tel que $n = x + \frac{(x+y)(x+y+1)}{2}$.

Exercice 2.5.15 *On définit la fonction caractéristique d'une partie A d'un ensemble non vide E*

par :

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

1. *Soient A et B deux partie d'un ensemble E. Pour chacune des fonctions sivantes, dire si elle est la fonction caractéristique d'une partie de E, et si oui, préciser laquelle :*
   a) $\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B$, *b)* $\mathbb{I}_A\mathbb{I}_B$; *c)* $\mathbb{I}_A + \mathbb{I}_B - \mathbb{I}_A\mathbb{I}_B$, *d)* $\mid \mathbb{I}_A - \mathbb{I}_B \mid$, *e)* $\max(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B)$ *f)* $\min(\mathbb{I}_A, \mathbb{I}_B)$.

2. *Soit* $A_1, A_2, ..., A_n$ *des parties d'un ensemble non vide* E.

   a) Montrer que $\mathbb{I}_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = 1 - \prod\limits_{i=1}^{n}(1 - \mathbb{I}_{A_i})$.

   b) En déduire que : $\mathbb{I}_{\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i} = \sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^k \sum\limits_{\{i_1,...,i_k\}\subset\{1,...,n\}} \mathbb{I}_{A_{i_1}\cap...\cap A_{i_k}}$.