

Obligatorisk oppgave 1, STK1100, Vår 2021

Cory Alexander Balaton

Oppgave 1

a) Begivenheten av at hver av de 5 personene går av heisen i hver sin etasje tilsvarer et ordnet utvalg av 5 etasjer av 11.

$$\begin{aligned} N(a) &= 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \\ &= 55440 \end{aligned} \tag{1}$$

For å finne sannsynligheten for at de 5 personene går av heisen i hver sin etasje, så må vi ta $N(A)$ og dele det med antall gunstige måter for 5 personer å velge en etasje å gå av på.

$$\begin{aligned} N &= 11^5 \\ &= 161051 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{N(A)}{N} \\ &= \frac{55440}{161051} \\ &\approx 0.3442 \end{aligned} \tag{3}$$

b) Begivenheten minst 2 personer går av i samme etasje er komplementærbegivenheten til at hver person går av i hver sin etasje, og kan derfor uttrykkes slik:

$$\begin{aligned} P(A)' &= 1 - P(A) \\ &\approx 1 - 0.3442 \\ &\approx 0.6558 \end{aligned} \tag{4}$$

c) For å finne ut av hvor mange grupper på 3 man kan lage av 5 personer, så bruker man binomialkoeffisienten (Jeg antar at rekkefølgen av personene ikke spiller rolle).

$$\begin{aligned}\binom{5}{3} &= \frac{5!}{3!(5-3)!} \\ &= \frac{5 \cdot 4}{2} \\ &= 10\end{aligned}\tag{5}$$

d) For å finne sannsynligheten til at alarmsystemet fungerer, så må vi først finne ut sannsynligheten for at subsystemene fungerer. Kommer til å bruke at $P(S)$ = sannsynligheten for at hele systemet fungerer, $P_1(S)$ = sannsynligheten for at komponent 1 fungerer, og $P_{12}(S)$ = sannsynligheten for at komponent 1 og 2 fungerer osv.

$$\begin{aligned}P_{12}(S) &= P_{34}(S) = 1 - (P_1(S)' \cdot P_2(S)') \\ &= 1 - (0.1 \cdot 0.1) \\ &= 1 - 0.01 \\ &= 0.99\end{aligned}\tag{6}$$

$$\begin{aligned}P_{345}(S) &= P_{34}(S) \cdot P_5(S) \\ &= 0.99 \cdot 0.9 \\ &= 0.891\end{aligned}\tag{7}$$

$$\begin{aligned}P(S) &= 1 - (P_{345}(S)' \cdot P_{12}(S)') \\ &= 1 - (0.109 \cdot 0.01) \\ &= 1 - 0.00109 \\ &= 0.99891\end{aligned}\tag{8}$$

Oppgave 2

Begynner med å sette navn på informasjonen som er gitt.

Sannsynligheten for at gutten glemmer å mate gullfiskenfisken: $P(A') = 0.25$

Sannsynligheten for at gullfisken er død gitt at gutten har matet den: $P(B|A) = 0.9$

Sannsynligheten for at gullfisken er død gitt at gutten har ikke matet den: $P(B|A') = 0.5$

Sannsynligheten for at gutten ikke har matet gullfisken gitt at den er død: $P(A'|B')$

$$P(A'|B') = \frac{p(A' \cap B')}{P(B')} \quad (9)$$

For å finne $P(B')$, så kan man bruke regelen $P(B) = P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$, der alle A_n er disjunkte. Siden vi har $P(B|A)$ og $P(B|A')$, så må vi først finne $P(B)$ og deretter ta komplementet.

$$\begin{aligned} P(B') &= 1 - (P(B|A) \cdot P(A) + P(B|A') \cdot P(A')) \\ &= 1 - (0.9 \cdot 0.75 + 0.5 \cdot 0.25) \\ &= 1 - \left(\frac{27}{40} + \frac{1}{8}\right) \\ &= 1 - \frac{4}{5} \\ &= \frac{1}{5} \end{aligned} \quad (10)$$

Nå vil man finne $P(A' \cap B')$, og man kan gjøre det ved å ta komplementet til $P(A \cup B)$.

Vi vet også at $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Vi har $P(A)$ og $P(B)$, og vi trenger nå bare å finne $P(A \cap B)$, og vi kan gjøre det ved å bruke produktregelen.

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P(A) \cdot P(B|A) \\ &= \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{10} \\ &= \frac{27}{40} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned}
P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\
&= \frac{3}{4} + \frac{4}{5} - \frac{27}{40} \\
&= \frac{30}{40} + \frac{32}{40} - \frac{27}{40} \\
&= \frac{35}{40} \\
&= \frac{7}{8}
\end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned}
P(A' \cap B') &= 1 - P(A \cup B) \\
&= 1 - \frac{7}{8} \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned} \tag{13}$$

Nå har vi funnet det vi trenger for å løse $P(A'|B')$.

$$\begin{aligned}
P(A'|B') &= \frac{p(A' \cap B')}{P(B')} \\
&= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}} \\
&= \frac{5}{8}
\end{aligned} \tag{14}$$

Sannsynligheten for at gutten har glemt er da $\frac{5}{8}$
PS.

I etterkant innså jeg at $P(B'|A')$ er komplementet til $P(B|A')$, og dermed kunne jeg brukt Bayes teorem til å finne $P(A'|B')$, som er mye enklere enn det jeg først gjorde.

$$\begin{aligned}
P(A'|B') &= \frac{P(B'|A') \cdot P(A')}{P(B')} \\
&= \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}}{\frac{1}{5}} \\
&= \frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{5}} \\
&= \frac{5}{8}
\end{aligned} \tag{15}$$

Oppgave 3

a) Vi vil finne $P(X \leq x)$, og for å finne denne kumulative sannsynligheten, så er det enklere å finne overlevelsessannsynligheten først, og deretter ta komplementet til den sannsynligheten.

Siden mannen er 35 år gammel og vi vil regne ut kumulative sannsynligheten for tiden han har igjen. Da kan overlevelsessannsynligheten skrives som $S(x) = P(X > x) = P(X > 35) \cdot P(X > 36|X \geq 36) \cdot \dots \cdot P(X > x|X \geq x)$. q_x beskriver sannsynligheten for at en x år gammel person kommer til å dø innen et år, og kan uttrykkes som $P(X = x|X \geq x)$, og siden vi har data for q_x , så kan vi skrive om overlevelsessannsynligheten:

$$\begin{aligned} P(X > x) &= P(X > 35) \cdot P(X > 36|X \geq 36) \cdot \dots \cdot P(X > x|X \geq x) \\ &= (1 - P(X = 35)) \cdot (1 - P(X = 35|X \geq 35)) \cdot \dots \cdot (1 - P(X = x|X \geq x)) \\ &= (1 - q_{35}) \cdot (1 - q_{36} \cdot \dots \cdot (1 - q_x)) \\ &= \prod_{y=0}^x (1 - q_{35+y}) \end{aligned} \tag{16}$$

Vi ser nå at $P(X > x)$ og $P(X \leq x)$ er komplementære hendelser til hverandre, og får derfor:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= 1 - P(X > x) \\ &= 1 - \prod_{y=0}^x (1 - q_{35+y}) \end{aligned} \tag{17}$$

b) En kumulativ sannsynlighet kan beskrives ved likningen $P(X \leq x) = P(0) + P(1) + \dots + P(x-1) + P(x)$, og ved å forandre på uttrykket, så får man:

$$\begin{aligned} P(X \leq x) &= p(0) + p(1) + \dots + p(x-1) + p(x) \\ p(x) &= P(X \leq x) - (p(0) + p(1) + \dots + p(x-1)) \\ &= P(X \leq x) - P(X \leq x-1) \end{aligned} \tag{18}$$