

Obligatorisk oppgave 1, MAT1110, Vår 2021

Cory Alexander Balaton

Oppgave 1

a)

$$\mathbf{r}(t) = \left(a \cdot \operatorname{arcsinh} \left(\frac{t}{a} \right), \sqrt{t^2 + a^2} \right) \quad (1)$$

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{t}{a} \right)^2}}, \frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right) \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}'(t)\| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{t}{a} \right)^2}} \right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}} \right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{t^2}{a^2}} + \frac{t^2}{t^2 + a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + t^2} + \frac{t^2}{t^2 + a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + t^2}{a^2 + t^2}} \\ &= \sqrt{1} \\ &= \underline{\underline{1}} \end{aligned} \quad (3)$$

b) For å vise at buelengden blir $2b$, så må man ta $\int_{-b}^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt$

$$\begin{aligned} l &= \int_{-b}^b \|\mathbf{r}'(t)\| dt \\ &= \int_{-b}^b 1 dt \\ &= [t + C]_{-b}^b \\ &= b - (-b) \\ &= \underline{\underline{2b}} \end{aligned} \quad (4)$$

c) Vi kan bruke det faktumet at $\tan\theta = \frac{S \cdot \sin\theta}{S \cdot \cos\theta}$ og gjøre noen substitusjoner til å få:

$$\begin{aligned} \tan\theta &= \frac{S \cdot \sin\theta}{S \cdot \cos\theta} \\ &= \frac{S_0 \cdot s}{S_0} \\ &= \frac{s}{a} \end{aligned} \tag{5}$$

Siden $\tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, så kan man lage likningen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}}}} \\ &= \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}}{\frac{a}{\sqrt{t^2+a^2}}} \\ &= \frac{t}{a} \end{aligned} \tag{6}$$

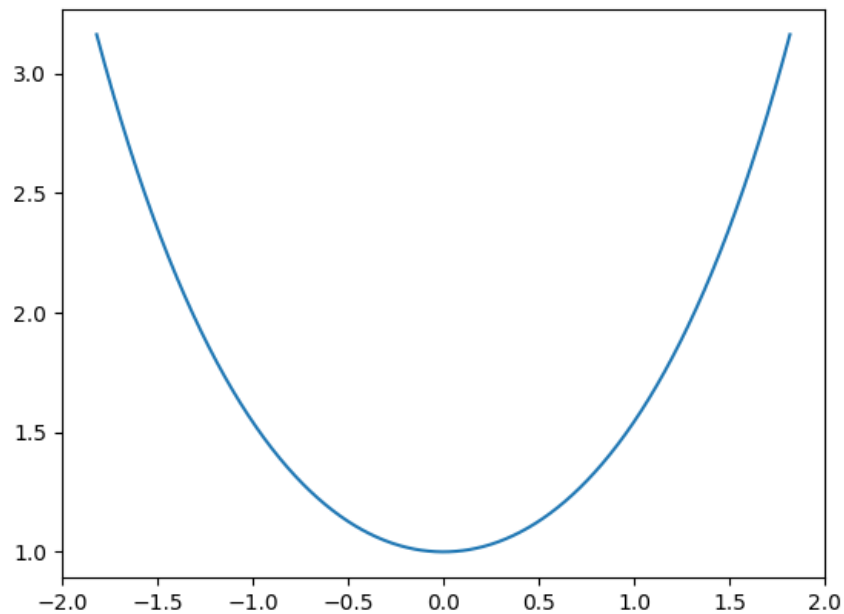
deretter setter man svaret fra likning 5 lik svaret fra likning 6 og får:

$$\begin{aligned} \frac{s}{a} &= \frac{t}{a} \\ s &= t \end{aligned} \tag{7}$$

d)

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Used a and b values from the task
5 a = 1
6 b = 3
7
8 # Created a linspace that goes from the bounds defined by the
  task
9 t = np.linspace(-b, b, 1001)
10
11 # Defined r(t) as a lambda function that returns a tuple
12 r = lambda t: (a*np.arcsinh(t/a), np.sqrt(a**2 + t**2))
13
14 # plot r(t)
15 plt.plot(r(t)[0], r(t)[1])
16 # Saves figure using the absolute path of my linux machine
17 plt.savefig("/home/cory/Documents/UiO/MAT1110/Oblig1/images/1
  d.png")
```

Programmet over produserer grafen under:



e)

$$p(t, \theta) = \left(a \cdot \operatorname{arcsinh} \left(\frac{t}{a} \right), \sqrt{t^2 + a^2} \cdot \cos \theta, \sqrt{t^2 + a^2} \cdot \sin \theta \right) \quad (8)$$

$$\begin{aligned} p_t(t, \theta) &= \frac{\partial p}{\partial t} p(t, \theta) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{t^2 + a^2}}, \frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}} \cdot \cos \theta, \frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}} \cdot \sin \theta \right) \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} p_\theta(t, \theta) &= \frac{\partial p}{\partial \theta} p(t, \theta) \\ &= \left(0, -\sqrt{t^2 + a^2} \cdot \sin \theta, \sqrt{t^2 + a^2} \cdot \cos \theta \right) \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} p_t \times p_\theta &= (t \cdot \cos^2 \theta + t \cdot \sin^2 \theta, a \cdot \cos \theta, -a \cdot \sin \theta) \\ &= (t, a \cdot \cos \theta, -a \cdot \sin \theta) \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \|p_t \times p_\theta\| &= \sqrt{t^2 + (a \cdot \cos \theta)^2 + (-a \cdot \sin \theta)^2} \\ &= \sqrt{t^2 + a^2 \cdot \cos^2 \theta + a^2 \cdot \sin^2 \theta} \\ &= \sqrt{t^2 + a^2} \end{aligned} \quad (12)$$

Oppgave 2

a) For at to vektorfelt skal stå normalt på hverandre, så må prikkproduktet av dem være lik 0. Derfor kan man lett sjekke om \mathbf{F} står normalt på \mathbf{F}^\perp :

$$\begin{aligned}\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^\perp &= (ax + by, cx + dy) \cdot (-cx - dy, ax + by) \\ &= -(ax + by)(cx + dy) + (ax + by)(cx + dy) \\ &= \underline{\underline{0}}\end{aligned}\tag{13}$$

b) For at \mathbf{F}^\perp skal være et konservativt felt, så må $\frac{\partial \mathbf{F}_2^\perp}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}_1^\perp}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{F}_2^\perp}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{F}_1^\perp}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} ax + by &= \frac{\partial}{\partial y} -cx - dy \\ a &= -d \\ d &= -a\end{aligned}\tag{14}$$

For at \mathbf{F}^\perp skal være konservativt, så må $d = -a$

c) Vi har likningen $\phi(\mathbf{r}(t)) = K$ der $\mathbf{r}(t)$ er en kurve på nivåkurven K , og $\mathbf{r}'(t)$ tangerer på ethvert punkt på $\mathbf{r}(t)$. Vi kan dermed bruke kjerneregelen på $\phi(\mathbf{r}(t)) = K$, og man får:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t)) &= \frac{d}{dt}K \\ \nabla\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) &= 0\end{aligned}\tag{15}$$

Siden $\mathbf{r}'(t)$ tangerer nivåkurven overalt, og prikkproduktet er lik 0, så må $\nabla\phi(\mathbf{r}(t))$ være normal på nivåkurven.

d) Hvis $\nabla\phi(x, y) = k \cdot \mathbf{F}^\perp(x, y)$, så betyr det at de er parallelle, og siden $\mathbf{F}(x, y)$ står normalt på $\mathbf{F}^\perp(x, y)$, så vil \mathbf{F} også være normal på $\nabla\phi(x, y)$, som betyr at $\mathbf{F}(x, y)$ vil være parallell med nivåkurvene.

$$\mathbf{F}^\perp(x, y) = (-cx + ay, ax + by) \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= cx^2 - 2axy - by^2 \\ \nabla\phi(x, y) &= (2cx - 2ay, -2by - 2ax) \\ \nabla\phi(x, y) &= -2(-cx + ay, ax + by) \\ \nabla\phi(x, y) &= -2 \cdot \mathbf{F}^\perp(x, y) \end{aligned} \quad (17)$$

siden vi har vist at $\nabla\phi(x, y) \parallel \mathbf{F}^\perp(x, y)$, så vil \mathbf{F} være parallell med nivåkurvene.

e) For å avgjøre hva for slags nivåkurver vi får ved ulike verdier av a, b, og c, så må vi ta determinanten av den kvadratiske matrisen $\begin{bmatrix} c & -a \\ -a & -b \end{bmatrix}$.

$$\det \begin{vmatrix} c & -a \\ -a & -b \end{vmatrix} = -cb - a^2 = -(cb + a^2) \quad (18)$$

Dette betyr at hvis $-(cb + a^2) < 0 \Rightarrow cb + a^2 > 0$ så er nivåkurvene hyperbler, og hvis $-(cb + a^2) > 0 \Rightarrow cb + a^2 < 0$, så er kurvene ellipser.

f) Ved å skrive et lite program:

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 # Function that plots a figure with different a,b,c values
  and output a png file
5 def plot(a, b, c, name, density):
6     plt.clf()
7
8     skip=(slice(None,None,density),slice(None,None,density))
9
10    plt.quiver(x[skip], y[skip], (a*x + b*y)[skip], (c*x - a*
11    y)[skip])
12    plt.contour(x, y, c*x**2 - 2*a*x*y - b*y**2, 32)
13    plt.axis('equal')
14    plt.title(f"a={a}, b={b}, c={c}")
15    plt.savefig(f"/home/cory/Documents/UiO/MAT1110/Oblig1/
16    images/{name}.png")
17
18 # Make a linspace to be used for the meshgrid
19 I = np.linspace(-30, 30, 1001)
20
21 # Create a meshgrid that spans from -30 to 30 in both the x
  and y directions
22 x, y = np.meshgrid(I, I)
23
24 # Plot different contour graphs where a,b and c are chosen so
  that  $-(a^2 + bc) > 0$  and  $-(a^2 + bc) < 0$ 
25 plot(2,-2, 3, "ellipse", 50)
26 plot(2,2, 3, "hyperbolic", 50)
```

far vi ut to grafer:

