Obligatorisk oppgave 1, MAT1110, Vår 2021

Cory Alexander Balaton

Oppgave 1

a)

$$\mathbf{r}(t) = \left(a \cdot arcsinh\left(\frac{t}{a}\right), \sqrt{t^2 + a^2}\right) \tag{1}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{t}{a})^2}}, \frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}}\right) \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
||\mathbf{r}'(t)|| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{t}{a})^2}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{t^2}{a^2}} + \frac{t^2}{t^2 + a^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + t^2} + \frac{t^2}{t^2 + a^2}} \\
&= \sqrt{\frac{a^2 + t^2}{a^2 + t^2}} \\
&= \sqrt{1} \\
&= \underline{\underline{1}}
\end{aligned} \tag{3}$$

b) For å vise at buelengden blir $2b$, så må man ta $\int_{-b}^{b} ||\mathbf{r}'(t)||dt$

$$\begin{aligned}
l &= \int_{-b}^{b} ||\mathbf{r}'(t)||dt \\
&= \int_{-b}^{b} 1dt \\
&= [t + C]_{-b}^{b} \\
&= b - (-b) \\
&= \underline{\underline{2b}}
\end{aligned} \tag{4}$$

c) Vi kan bruke det faktumet at $tan\theta = \frac{S \cdot sin\theta}{S \cdot cos\theta}$ og gjøre noen substitusjoner til å få:

$$
\begin{aligned}
Tan\theta &= \frac{S \cdot sin\theta}{S \cdot cos\theta} \\
&= \frac{\frac{S_0 \cdot s}{a}}{S_0} \\
&= \underline{\underline{\frac{s}{a}}}
\end{aligned} \tag{5}
$$

Siden $tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, så kan man lage likningen:

$$
\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}}}} \\
&= \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}}{\frac{a}{\sqrt{t^2+a^2}}} \\
&= \underline{\underline{\frac{t}{a}}}
\end{aligned} \tag{6}
$$

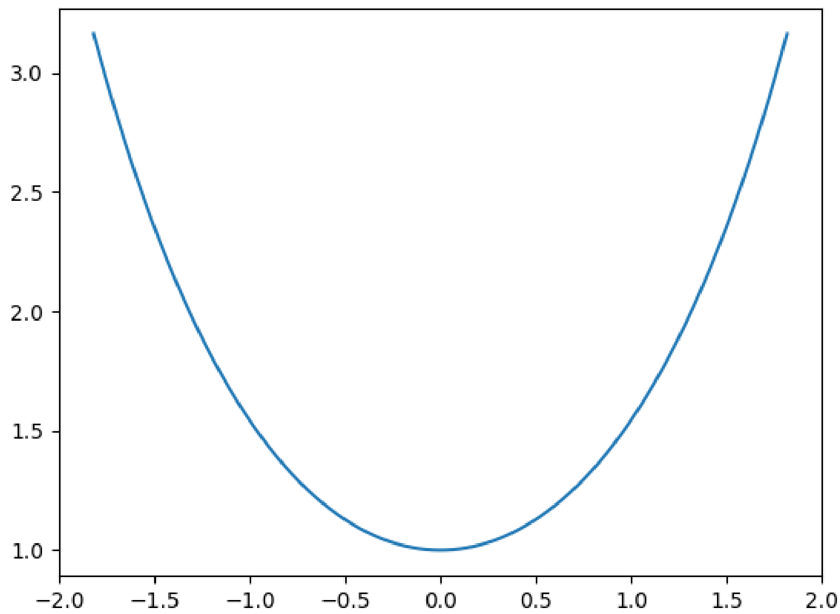
deretter setter man svaret fra likning 5 lik svaret fra likning 6 og får:

$$
\begin{aligned}
\frac{s}{a} &= \frac{t}{a} \\
s &= t
\end{aligned} \tag{7}
$$

d)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Used a and b values from the task
a = 1
b = 3

# Created a linspace that goes from the bounds defined by the
    task
t = np.linspace(-b, b, 1001)

# Defined r(t) as a lambda function taht returns a tuple
r = lambda t: (a*np.arcsinh(t/a), np.sqrt(a**2 + t**2))

# plot r(t)
plt.plot(r(t)[0], r(t)[1])
plt.savefig("./images/1d.png")
```

Programmet over produserer grafen under:



Oppgave 2

a) For at to vektorfelt skal stå normalt på hverandre, så må prikkproduktet av dem være lik 0. Derfor kan man lett sjekke om $\mathbf{F}$ står normalt på $\mathbf{F}^{\perp}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{\perp} &= (ax+by, cx+dy) \cdot (-cx-dy, ax+by) \\ &= -(ax+by)(cx+dy) + (ax+by)(cx+dy) \\ &= \underline{\underline{0}} \end{aligned} \tag{8}$$

b) For at $\mathbf{F}^{\perp}$ skal være et konservativt felt, så må $\frac{\partial \mathbf{F}_2^{\perp}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}_1^{\perp}}{\partial y}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{F}_2^{\perp}}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{F}_1^{\perp}}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial x} ax + by &= \frac{\partial}{\partial x} - cx - dy \\ a &= -d \\ d &= -a \end{aligned} \tag{9}$$

For at $\mathbf{F}^{\perp}$ skal være konservativt, så må $\underline{\underline{d = -a}}$

c) Vi har likningen $\phi(\mathbf{r}(t)) = K$ der $\mathbf{r}(t)$ er en kurve på nivåkurven K, og $\mathbf{r}'(t)$ tangerer på ethvert punkt på $\mathbf{r}(t)$. Vi kan dermed bruke kjerneregelen på $\phi(\mathbf{r}(t)) = K$, og man får:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t)) &= \frac{d}{dt}K \\ \nabla\phi(\mathbf{r}(t)) \cdot \mathbf{r}'(t) &= 0 \end{aligned} \tag{10}$$

Siden $\mathbf{r}'(t)$ tangerer nivåkurven overalt, og prikkproduktet er lik 0, så må $\nabla\phi(\mathbf{r}(t))$ være normal på nivåkurven.

d) Hvis $\nabla\phi(x,y) = k \cdot \mathbf{F}^{\perp}(x,y)$, så betyr det at de er parallelle, og siden $\mathbf{F}(x,y)$ står normalt på $\mathbf{F}^{\perp}(x,y)$, så vil $\mathbf{F}$ også være normal på $\nabla\phi(x,y)$, som betyr at $\mathbf{F}(x,y)$ vil være parallell med nivåkurvene.

$$\mathbf{F}^{\perp}(x,y) = (-cx+ay, ax+by) \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \phi(x,y) &= cx^2 - 2axy - by^2 \\ \nabla\phi(x,y) &= (2cx - 2ay, -2by - 2ax) \\ \nabla\phi(x,y) &= -2(-cx+ay, ax+by) \\ \nabla\phi(x,y) &= -2 \cdot \mathbf{F}^{\perp}(x,y) \end{aligned} \tag{12}$$

siden vi har vist at $\nabla\phi(x,y)||\mathbf{F}^{\perp}(x,y)$, så vil $\mathbf{F}$ være parallell med nivåkurvene.

e) For å avgjøre hva for slags nivåkurver vi får ved ulike verdier av a, b, og c, så må vi ta determinanten av den kvadratiske matrisen $\begin{bmatrix} c & -a \\ -a & -b \end{bmatrix}$.

$$det \begin{vmatrix} c & -a \\ -a & -b \end{vmatrix} = -cb - a^2 = -(cb + a^2) \tag{13}$$

Dette betyr at hvis $-(cb + a^2) < 0 \Rightarrow cb + a^2 > 0$ så er nivåkurvene hyperbler, og hvis $-(cb + a^2) > 0 \Rightarrow cb + a^2 < 0$, så er kurvene ellipser.

f) Ved å skrive et lite program:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Function that plots a figure with different a,b,c values
    and output a png file
def plot(a, b, c, name):
    plt.clf()
    plt.contour(x, y, c*x**2 - 2*a*x*y - b*y**2, 32)
    plt.axis('equal')
    plt.title(f"a={a}, b={b}, c={c}")
    plt.savefig(f"./images/{name}.png")

# Make a linspace to be used for the meshgrid
I = np.linspace(-30, 30, 1001)

# Create a meshgrid that spans from -30 to 30 in both the x
    and y directions
x, y = np.meshgrid(I, I)

# Plot different contour graphs where a,b and c are chosen so
     that -(a^2 + bc) > 0 and -(a^2 + bc) < 0
plot(2,-2, 3, "ellipse")
plot(2,2, 3, "hyperbolic")
```

får vi ut to grafer: