Obligatorisk oppgave 1, MAT1110, Vår 2021

Cory Alexander Balaton

17. februar 2021

Oppgave 1

a)

$$\mathbf{r}(t) = \left(a \cdot arcsinh\left(\frac{t}{a}\right), \sqrt{t^2 + a^2}\right) \tag{1}$$

$$\mathbf{r}'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{t}{a})^2}}, \frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}}\right) \tag{2}$$

$$\begin{aligned} ||\mathbf{r}'(t)|| &= \sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\frac{t}{a})^2}}\right)^2 + \left(\frac{t}{\sqrt{t^2 + a^2}}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{t^2}{a^2}} + \frac{t^2}{t^2 + a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + t^2} + \frac{t^2}{t^2 + a^2}} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + t^2}{a^2 + t^2}} \\ &= \sqrt{1} \\ &= \underline{\underline{1}} \end{aligned} \tag{3}$$

b) For å vise at buelengden blir $2b$, så må man ta $\int_{-b}^{b} ||\mathbf{r}'(t)||dt$

$$\begin{aligned} l &= \int_{-b}^{b} ||\mathbf{r}'(t)||dt \\ &= \int_{-b}^{b} 1dt \\ &= [t + C]_{-b}^{b} \\ &= b - (-b) \\ &= \underline{\underline{2b}} \end{aligned} \tag{4}$$

c) Vi kan bruke det faktumet at $tan\theta = \frac{S \cdot sin\theta}{S \cdot cos\theta}$ og gjøre noen substitusjoner til å få:

$$\begin{aligned} Tan\theta &= \frac{S \cdot sin\theta}{S \cdot cos\theta} \\ &= \frac{\frac{S_0 \cdot s}{a}}{S_0} \\ &= \underline{\underline{\frac{s}{a}}} \end{aligned} \tag{5}$$

Siden $tan\theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$, så kan man lage likningen:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}}{\frac{1}{\sqrt{1+\frac{t^2}{a^2}}}} \\ &= \frac{\frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}}}{\frac{a}{\sqrt{t^2+a^2}}} \\ &= \underline{\underline{\frac{t}{a}}} \end{aligned} \tag{6}$$

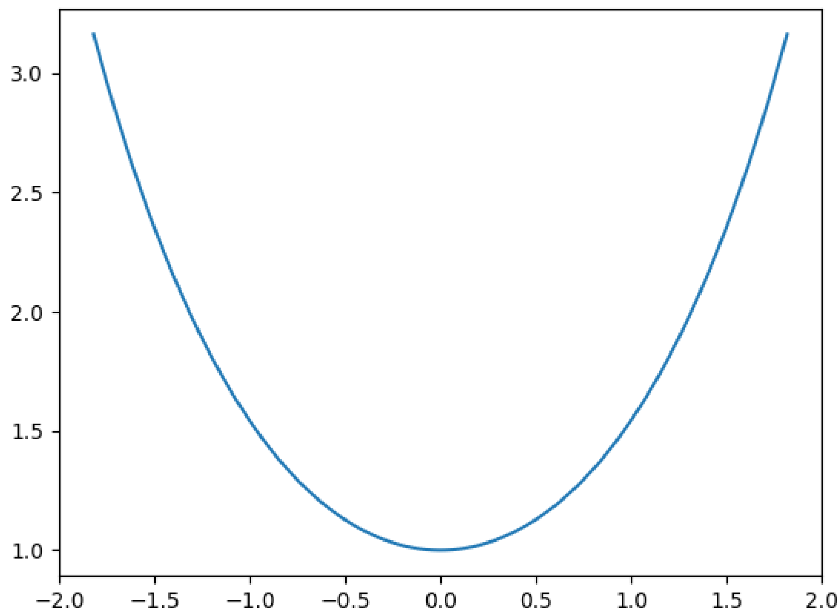
deretter setter man svaret fra likning 5 lik svaret fra likning 6 og får:

$$\begin{aligned} \frac{s}{a} &= \frac{t}{a} \\ s &= t \end{aligned} \tag{7}$$

d)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Used a and b values from the task
a = 1
b = 3

# Created a linspace that goes from the bounds defined by the
  task
t = np.linspace(-b, b, 1001)

# Defined r(t) as a lambda function that returns a tuple
r = lambda t: (a*np.arcsinh(t/a), np.sqrt(a**2 + t**2))

# plot r(t)
plt.plot(r(t)[0], r(t)[1])
# Saves figure using the absolute path of my linux machine
plt.savefig("/home/cory/Documents/UiO/MAT1110/Oblig1/images/1
d.png")
```

Programmet over produserer grafen under:



e)

$$p(t,\theta) = \left(a \cdot arcsinh\left(\frac{t}{a}\right), \sqrt{t^2+a^2} \cdot cos\theta, \sqrt{t^2+a^2} \cdot sin\theta\right) \tag{8}$$

$$\begin{aligned} p_t(t,\theta) &= \frac{\partial p}{\partial t} p(t,\theta) \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{t^2+a^2}}, \frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}} \cdot cos\theta, \frac{t}{\sqrt{t^2+a^2}} \cdot sin\theta\right) \end{aligned} \tag{9}$$

$$\begin{aligned} p_\theta(t,\theta) &= \frac{\partial p}{\partial \theta} p(t,\theta) \\ &= \left(0, -\sqrt{t^2+a^2} \cdot sin\theta, \sqrt{t^2+a^2} \cdot cos\theta\right) \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} p_t \times p_\theta &= \left(t \cdot cos^2\theta + t \cdot sin^2\theta, a \cdot cos\theta, -a \cdot sin\theta\right) \\ &= (t, a \cdot cos\theta, -a \cdot sin\theta) \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} ||p_t \times p_\theta|| &= \sqrt{t^2 + (a \cdot cos\theta)^2 + (-a \cdot sin\theta)^2} \\ &= \sqrt{t^2 + a^2 \cdot cos^2\theta + a^2 \cdot sin^2\theta} \\ &= \sqrt{t^2+a^2} \end{aligned} \tag{12}$$

Oppgave 2

a) For at to vektorfelt skal stå normalt på hverandre, så må prikkproduktet av dem være lik 0. Derfor kan man lett sjekke om $\mathbf{F}$ står normalt på $\mathbf{F}^{\perp}$:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}\cdot\mathbf{F}^{\perp} &= (ax+by, cx+dy)\cdot(-cx-dy, ax+by)\\ &= -(ax+by)(cx+dy)+(ax+by)(cx+dy)\\ &= \underline{\underline{0}}\end{aligned} \tag{13}$$

b) For at $\mathbf{F}^{\perp}$ skal være et konservativt felt, så må $\frac{\partial \mathbf{F}_2^{\perp}}{\partial x} = \frac{\partial \mathbf{F}_1^{\perp}}{\partial y}$.

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{F}_2^{\perp}}{\partial x} &= \frac{\partial \mathbf{F}_1^{\perp}}{\partial y}\\ \frac{\partial}{\partial x}ax+by &= \frac{\partial}{\partial x}-cx-dy\\ a &= -d\\ d &= -a\end{aligned} \tag{14}$$

For at $\mathbf{F}^{\perp}$ skal være konservativt, så må $\underline{\underline{d=-a}}$

c) Vi har likningen $\phi(\mathbf{r}(t)) = K$ der $\mathbf{r}(t)$ er en kurve på nivåkurven K, og $\mathbf{r}'(t)$ tangerer på ethvert punkt på $\mathbf{r}(t)$. Vi kan dermed bruke kjerneregelen på $\phi(\mathbf{r}(t)) = K$, og man får:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\phi(\mathbf{r}(t)) &= \frac{d}{dt}K\\ \nabla\phi(\mathbf{r}(t))\cdot\mathbf{r}'(t) &= 0\end{aligned} \tag{15}$$

Siden $\mathbf{r}'(t)$ tangerer nivåkurven overalt, og prikkproduktet er lik 0, så må $\nabla\phi(\mathbf{r}(t))$ være normal på nivåkurven.

d) Hvis $\nabla\phi(x,y) = k \cdot \mathbf{F}^{\perp}(x,y)$, så betyr det at de er parallelle, og siden $\mathbf{F}(x,y)$ står normalt på $\mathbf{F}^{\perp}(x,y)$, så vil $\mathbf{F}$ også være normal på $\nabla\phi(x,y)$, som betyr at $\mathbf{F}(x,y)$ vil være parallell med nivåkurvene.

$$\mathbf{F}^{\perp}(x,y) = (-cx + ay, ax + by) \tag{16}$$

$$\begin{aligned}
\phi(x,y) &= cx^2 - 2axy - by^2 \\
\nabla\phi(x,y) &= (2cx - 2ay, -2by - 2ax) \\
\nabla\phi(x,y) &= -2(-cx + ay, ax + by) \\
\nabla\phi(x,y) &= -2 \cdot \mathbf{F}^{\perp}(x,y)
\end{aligned} \tag{17}$$

siden vi har vist at $\nabla\phi(x,y)||\mathbf{F}^{\perp}(x,y)$, så vil $\mathbf{F}$ være parallell med nivåkurvene.

e) For å avgjøre hva for slags nivåkurver vi får ved ulike verdier av a, b, og c, så må vi ta determinanten av den kvadratiske matrisen $\begin{bmatrix} c & -a \\ -a & -b \end{bmatrix}$.

$$det \begin{vmatrix} c & -a \\ -a & -b \end{vmatrix} = -cb - a^2 = -(cb + a^2) \tag{18}$$

Dette betyr at hvis $-(cb + a^2) < 0 \Rightarrow cb + a^2 > 0$ så er nivåkurvene hyperbler, og hvis $-(cb + a^2) > 0 \Rightarrow cb + a^2 < 0$, så er kurvene ellipser.

f) Ved å skrive et lite program:

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

# Function that plots a figure with different a,b,c values
    and output a png file
def plot(a, b, c, name, density):
    plt.clf()

    skip=(slice(None,None,density),slice(None,None,density))

    plt.quiver(x[skip], y[skip], (a*x + b*y)[skip], (c*x - a*
    y)[skip])
    plt.contour(x, y, c*x**2 - 2*a*x*y - b*y**2, 32)
    plt.axis('equal')
    plt.title(f"a={a}, b={b}, c={c}")
    plt.savefig(f"/home/cory/Documents/UiO/MAT1110/Oblig1/
    images/{name}.png")

# Make a linspace to be used for the meshgrid
I = np.linspace(-30, 30, 1001)

# Create a meshgrid that spans from -30 to 30 in both the x
    and y directions
x, y = np.meshgrid(I, I)

# Plot different contour graphs where a,b and c are chosen so
     that -(a^2 + bc) > 0 and -(a^2 + bc) < 0
plot(2,-2, 3, "ellipse", 50)
plot(2,2, 3, "hyperbolic", 50)
```

får vi ut to grafer: