

Extension de `mtest` aux simulation d'essais de tube sous pression en grandes transformations

**T. Helfer
Février 2016**

RÉSUMÉ

SOMMAIRE

1	PRÉSENTATION	3
1.1	TYPE D'ESSAIS	3
1.1.1	<i>Chargements dans la direction radiale</i>	3
1.1.2	<i>Chargements axiaux</i>	3
2	ÉLÉMENTS DE THÉORIE	3
2.1	CAS GÉNÉRAL	3
2.2	APPLICATION AUX TUBES MODÉLISÉS EN 1D	5
2.2.1	<i>Cinématique</i>	5
2.2.2	<i>Conditions aux limites radiales</i>	6
2.3	ÉQUILIBRE AXIAL POUR UN TUBE FERMÉ	6
3	VÉRIFICATION ET QUALIFICATION	7
3.1	TESTS ÉLÉMENTAIRES PETITES DÉFORMATIONS	7
3.1.1	<i>Validation de l'implantation des éléments linéaires</i>	7
3.1.2	<i>Validation de l'implantation des éléments quadratiques</i>	8
3.1.3	<i>Tests de fluage en force axiale imposée</i>	14
3.2	DESCRIPTION DÉTAILLÉE D'UN TEST EN PRESSION INTERNE	14
3.2.1	<i>Premier cas : modélisation sans pression suivieuse</i>	16
3.2.2	<i>Second cas : modélisation avec pression suivieuse</i>	16
ANNEXE A	RÉSOLUTION	16
ANNEXE A.1	FORMULATION FAIBLE	16
ANNEXE A.2	DISCRÉTISATION À L'AIDE D'ÉLÉMENTS FINIS LINÉAIRE	18
A.2.1	<i>Forces externes</i>	18
A.2.2	<i>Forces internes</i>	18
ANNEXE A.3	SYSTÈME DISCRÉTISÉ	19
ANNEXE A.4	CRITÈRES DE CONVERGENCE	20

1 PRÉSENTATION

1.1 TYPE D'ESSAIS

Par défaut, on modélise un tube fermé dont on impose la pression interne et externe au cours du temps.

1.1.1 Chargements dans la direction radiale

Concernant la face externe du tube, l'utilisateur peut imposer l'évolution d'une pression externe P_e au cours du temps.

Concernant la face interne du tube, l'utilisateur a le choix entre plusieurs options (qui s'exclut mutuellement) :

- il est possible d'imposer une pression interne P_i évoluant dans le temps ;
- il est possible d'imposer l'évolution du rayon externe évoluant dans le temps. Dans ce cas, la pression interne est ajustée pour obtenir l'évolution souhaitée.
- il est possible de modéliser un tube étanche contenant une quantité fixe de gaz donnée par une pression P_0 et une température T_0 de remplissage. Dans ce cas, on suppose que :
 - le tube est fermé, c'est à dire que l'on modélise nécessairement l'effet de fond (voir les options concernant le chargement axial) ;
 - que le comportement du gaz suit la loi des gaz parfaits, ce qui permet d'exprimer la pression interne à un instant donné via l'équation d'état :

$$P_i = P_0 \frac{T}{T_0} \frac{V_0}{V}$$

où T est la température actuelle en paroi interne du tube, V le volume actuel et V_0 le volume initial (après remplissage).

1.1.2 Chargements axiaux

Dans la direction axiale, il est possible d'imposer :

- l'effet de fond dans le cas d'un tube fermé (effets des pressions internes et externes sur les extrémités du tube). Cette modélisation est obligatoire si l'on choisit de modéliser un tube étanche ;
- l'évolution de la force axiale s'appliquant sur le tube ;
- l'évolution de la déformation axiale.

Il est également possible de ne rien imposer, ce qui est équivalent à imposer une force axiale nulle.

2 ÉLÉMENTS DE THÉORIE

2.1 CAS GÉNÉRAL

Soit Ω_0 le volume occupé par la structure étudiée à l'instant initial. Ω_0 est également appelé la configuration initiale de la structure.

Prendre en compte les grandes transformations revient à tenir compte du fait que la configuration actuelle, notée Ω_t , est différente de Ω_0 dans l'expression de l'équilibre mécanique et dans la définition des conditions aux limites.

Gradient de la transformation Soit $\vec{\Phi}(t, \vec{X})$ la transformation associant à un point de coordonnées initiales \vec{X} sa position \vec{x} à l'instant t :

$$\begin{aligned}\vec{\Phi} : \Omega_0 &\Rightarrow \Omega_t \\ \vec{X} &\Rightarrow \vec{x}\end{aligned}$$

$\vec{\Phi}$ est relié au champ de déplacement \vec{u} par :

$$\vec{\Phi} = \vec{X} + \vec{u}$$

Le gradient de la transformation est un tenseur non symétrique noté $\underline{\mathbf{F}}$. Il est défini par :

$$\underline{\mathbf{F}} = \frac{\partial \vec{\Phi}}{\partial \vec{X}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}} = \underline{\mathbf{I}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}}$$

Les théories de premier gradient supposent que la connaissance de $\underline{\mathbf{F}}$ suffit à décrire la sollicitation locale du matériau. C'est l'hypothèse que nous ferons également.

L'unique décomposition polaire de $\underline{\mathbf{F}}$ montre que cette sollicitation se décompose en deux termes :

$$(1) \quad \underline{\mathbf{F}} = \underline{\omega} \cdot \underline{\mathbf{U}}$$

$\underline{\omega}$ est une matrice de rotation et $\underline{\mathbf{U}}$ est le tenseur d'élongation décrivant le changement de volume du matériau.

Équilibre mécanique L'équilibre mécanique de la structure s'écrit généralement sur la configuration déformée Ω_t . Plus précisément, le tenseur des contraintes de Cauchy, noté $\underline{\sigma}$ vérifie :

$$\text{div} \underline{\sigma} = \vec{0}$$

où div est l'opérateur sur la configuration déformée, qui est une des inconnues du problème.

Nous verrons que dans le cas des tubes, il est plus avantageux d'écrire l'équilibre mécanique sur Ω_0 . Celui-ci s'écrit alors :

$$(2) \quad \text{Div} \underline{\mathbf{\Pi}} = \vec{0}$$

où : — $\underline{\mathbf{\Pi}}$ est le premier tenseur de Piola-Kirchhoff. Il s'agit d'un tenseur non symétrique ;
— Div est l'opérateur divergence dans la configuration initiale Ω_0 .

Le prix à payer est que le lien entre les forces appliquées à la structure, qui se traduisent directement avec la contrainte de Cauchy, est assez complexe. En fait, la non-linéarité géométrique du problème est portée par les conditions aux limites que vérifie $\underline{\mathbf{\Pi}}$.

Nous verrons que dans le cas particulier des tubes modélisés en $1D$, ceci peut être pris en compte simplement, ce qui justifiera *a posteriori* le choix de résoudre l'équilibre sur la configuration initiale.

Conditions aux limites Soit $d\vec{f}$ une force élémentaire appliquée à la structure sur un élément de surface $d\vec{s}$ de la configuration déformée orienté par la normale extérieure.

Soit $d\vec{S}_0$ l'élément de surface correspondant à $d\vec{s}$ dans la configuration initiale.

Le tenseur $\underline{\mathbf{\Pi}}$ a la propriété suivante :

$$d\vec{f} = \underline{\mathbf{\Pi}} : d\vec{S}_0$$

Considérons le cas des forces de pression. Nous avons :

$$d\vec{f} = -P d\vec{s}$$

La condition aux limites vérifiées par $\underline{\Pi}$ est donc :

$$(3) \quad \underline{\Pi} : d\vec{S}_0 = -P d\vec{s}$$

Dans le cas général, on conçoit que cette relation soit difficile à manipuler.

2.2 APPLICATION AUX TUBES MODÉLISÉS EN 1D



FIGURE 1 : Schéma d'un tube axisymétrique et définition des axes du repère cylindrique associé.

Dans la suite, on considère un tube (fermé ou non), soumis à une pression interne P^i et une pression externe P^e .

2.2.1 Cinématique

Nous allons maintenant appliqué les éléments présentés dans la section précédente aux tubes sous pression.

Nous faisons les hypothèses cinématiques suivantes :

- le tube reste axisymétrique ;
- axialement, le tube est autorisé à se déformer de manière uniforme, sans rotation.

Il s'agit de l'hypothèse de déformations planes généralisées en axisymétrie (sans rotation du plan généralisé).

Il découle de cette hypothèse que la rotation locale du matériau est nulle. Ainsi, d'après l'équation (1), nous avons :

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{I}} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \vec{X}}$$

Aucun cisaillement n'étant autorisé, il n'y a pas de différence entre les tenseurs symétriques et non symétriques. Le gradient de la transformation est alors directement relié à la déformation linéarisée $\underline{\epsilon}^{to}$ (c'est à dire la partie symétrique du gradient de déplacement) par la relation :

$$\underline{\mathbf{F}} = \underline{\mathbf{I}} + \underline{\epsilon}^{to}$$

Suivant ces hypothèses, le gradient de la transformation en tout point du tube prend la forme classique :

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} 1 + \frac{du_r}{dR} & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \frac{u_r}{R} & 0 \\ 0 & 0 & F_{zz} \end{pmatrix}$$

où R est le rayon initial.

2.2.2 Conditions aux limites radiales

Les hypothèses cinématiques précédentes permettent de simplifier l'expression des conditions aux limites du problème. En effet, les normales extérieures à la structure restent constantes dans le temps. Plus précisément, en tout point de la structure, les vecteurs $d\vec{S}_0$ et $d\vec{s}$ restent colinéaires et orientés suivant la direction \vec{e}_r .

Pour la peau interne du tube, la relation (3) s'écrit alors :

$$\Pi_{rr}^i = -P^i \frac{S}{S_0} = -P^i \frac{h}{H_0} \frac{r^i}{R_0^i} = -P^i F_{zz} \left(1 + \frac{u_r^i}{R_0^i} \right)$$

Une équation similaire peut être établie pour la surface externe :

$$\Pi_{rr}^e = -P^e \frac{S}{S_0} = -P^e \frac{h}{H_0} \frac{r^e}{R_0^e} = -P^e F_{zz} \left(1 + \frac{u_r^e}{R_0^e} \right)$$

2.3 ÉQUILIBRE AXIAL POUR UN TUBE FERMÉ

Dans la modélisation proposée, l'équation (2) ne suffit pas pour déterminer Π car nous devons ajouter l'équation permettant de déterminer F_{zz} . Pour cela, nous caractérisons l'équilibre axial F_z^a par une résultante que doit équilibrer la structure.

Pour un tube fermé, la force axiale est donnée par :

$$F_z^a = P^i S^i - P^e S^e$$

où : — S^i est la surface actuelle de la section considérée, égale à $2\pi r^i{}^2 = 2\pi (R^i + u_r^i)^2$.
— S^e est la surface externe actuelle de la section considérée, égale à : $2\pi (R^e + u_r^e)^2$.

Cette force axiale est répartie sur la coupe du tube :

$$F_z^a = \int_{R^i}^{R^e} df_z$$

En vertu de l'équation (3), nous pouvons écrire :

$$F_z^a = \int_{R^i}^{R^e} \Pi_{zz} 2\pi R dR$$

3 VÉRIFICATION ET QUALIFICATION

Caractéristiques géométriques	
Rayon interne	4,2 mm
Rayon externe	4,7 mm
Discrétisation	
Nombre d'éléments finis	10
Propriétés élastiques	
Module d'YOUNG	150 GPa
Coefficient de POISSON	0,3
Pressions imposées	
Pression interne	1.5 MPa
Pression externe	10 MPa

TABLEAU 1 : Caractéristiques utilisées.

3.1 TESTS ÉLÉMENTAIRES PETITES DÉFORMATIONS

3.1.1 Validation de l'implantation des éléments linéaires

Pour ce premier test, nous modélisons un tube élastique isotrope en petites déformations. Les caractéristiques géométriques et les propriétés élastiques, et les pressions imposées choisies sont résumées au tableau 1.

Le tube est supposé ouvert : aucune force axiale n'est considérée et l'équilibre est caractérisée par :

$$\int_{\Omega_0} \Pi_{zz} 2\pi r dr = 0$$

Pour ce test, la solution analytique est connue et s'écrit :

$$\begin{cases} \Pi_{rr} = K_1 + \frac{K_2}{r^2} \\ \Pi_{\theta\theta} = K_1 - \frac{K_2}{r^2} \\ \Pi_{zz} = 0 \end{cases}$$

où K_1 et K_2 sont des coefficients ne dépendant que des propriétés géométriques et des pressions imposées :

$$\begin{cases} K_1 = -P_i - \frac{(R_0^e)^2}{(R_0^e)^2 - (R_0^i)^2} (P_e - P_i) \\ K_2 = \frac{(R_0^i R_0^e)^2}{(R_0^e)^2 - (R_0^i)^2} (P_e - P_i) \end{cases}$$

Pour valider l'implantation des éléments finis linéaires, nous pouvons comparer les profils des contraintes aux points de GAUSS calculés par `mtest` à la solution analytique ainsi qu'aux profils obtenus par `Cast3M`.

Pour la solution de référence obtenue avec `Cast3M`, nous avons utilisé directement l'opérateur `RESOUD` puis avons calculé les contraintes à partir des déplacements l'aide de l'opérateur `SIGMA`. Les positions des points de GAUSS sont obtenus par interpolation de la position des nœuds.

Les résultats obtenus sont reportés sur les figures 2, 3 et 4 qui présentent successivement les profils de contrainte radiale, orthoradiale et axiale. Dans tous les cas, les valeurs aux points de GAUSS obtenus par `mtest` et `Cast3M` sont strictement identiques. Nous avons relié les points de la solution `mtest` pour visualiser plus nettement les oscillations des contraintes autour de la solution analytique : de telles oscillations sont caractéristiques d'éléments linéaires.

Le lecteur habitué des éléments finis aura remarqué que les contraintes ne sont pas constantes par éléments. En effet, si le gradient radial du déplacement est constant sur l'élément, les déformations ne le sont pas : ceci est dû au terme $\epsilon_{\theta\theta}$ qui fait intervenir la valeur du déplacement et de la position au point de Gauss.

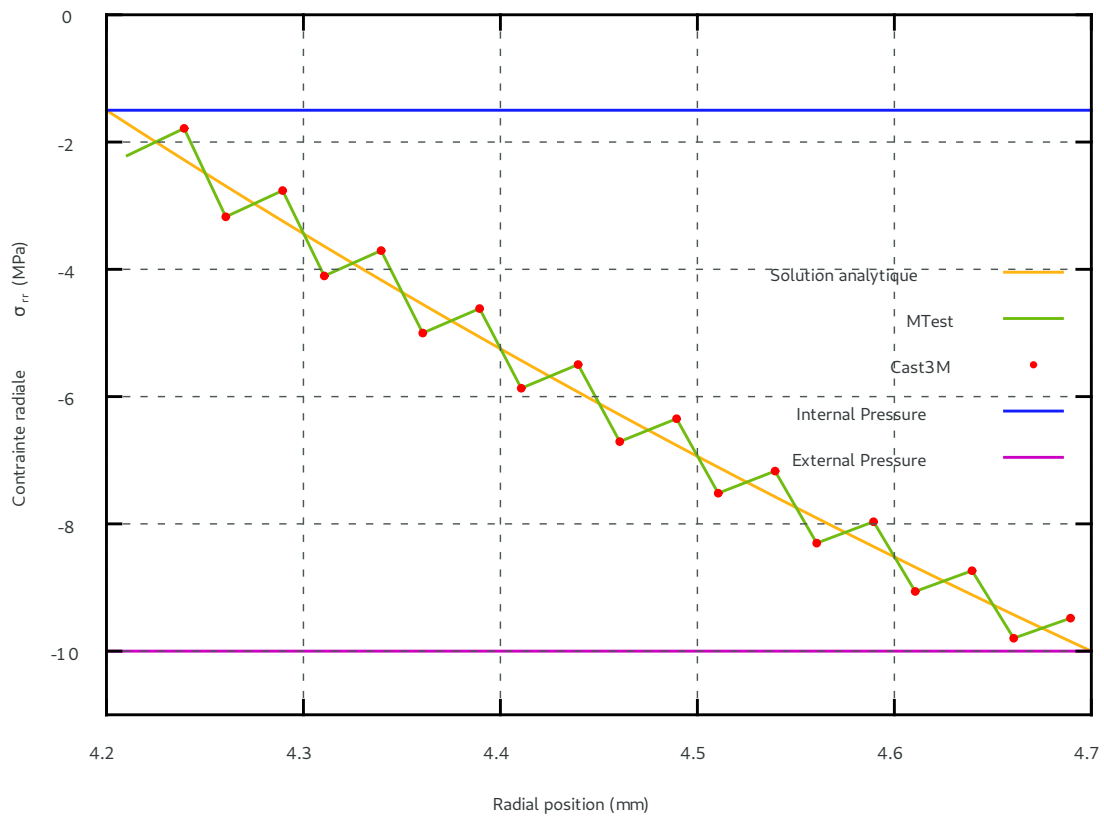


FIGURE 2 : Profil de la contrainte radiale aux points de Gauss obtenue avec des éléments linéaires : comparaison à la solution analytique et à un calcul *Cast3M*

Le calcul étant linéaire, seules deux itérations sont nécessaires pour obtenir un résidu nul à la précision machine : la première trouve la solution tandis que la seconde confirme que la solution obtenue est la bonne¹. Ceci confirme que la matrice de raideur est calculée exactement. Ceci a également été confirmé par comparaison à une évaluation numérique de la matrice de raideur par différences finies centrées.

Ce test a été repris en prenant en compte l'effet de fond : les conclusions sont identiques.

3.1.2 Validation de l'implantation des éléments quadratiques

Pour valider l'implantation des éléments quadratiques, nous avons réitéré le test précédent. Les résultats obtenus sont illustrés par les figures 5, 6 et 7. Dans le cas considéré, les profils obtenus à l'aide de *Cast3M* et *mtest* ne peuvent être distingués des solutions analytiques.

Ce test a été repris en prenant en compte l'effet de fond : les conclusions sont identiques.

¹. *mtest* a été prévu pour les calculs non linéaires et ne fait pas du cas élastique un cas particulier, ce qui explique la nécessité de faire au moins deux itérations par résolution.

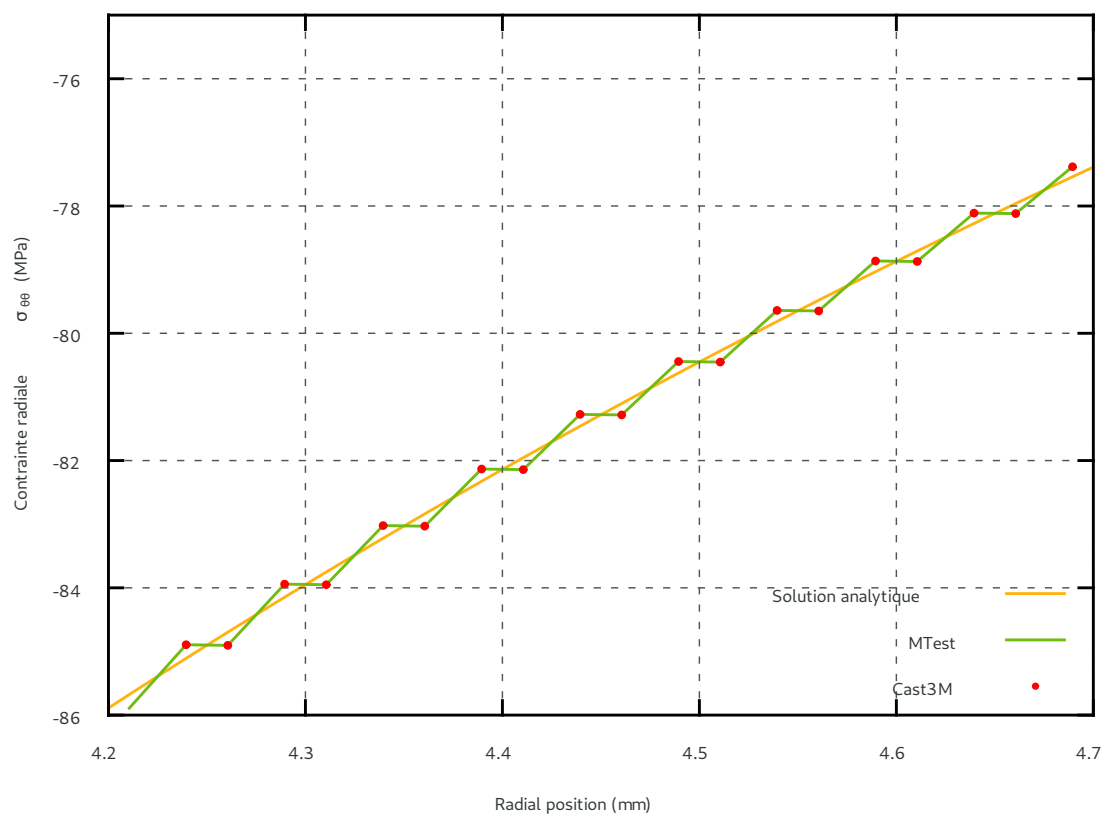


FIGURE 3 : Profil de la contrainte orthoradiale aux points de Gauss obtenue avec des éléments linéaires : comparaison à la solution analytique et à un calcul *Cast3M*

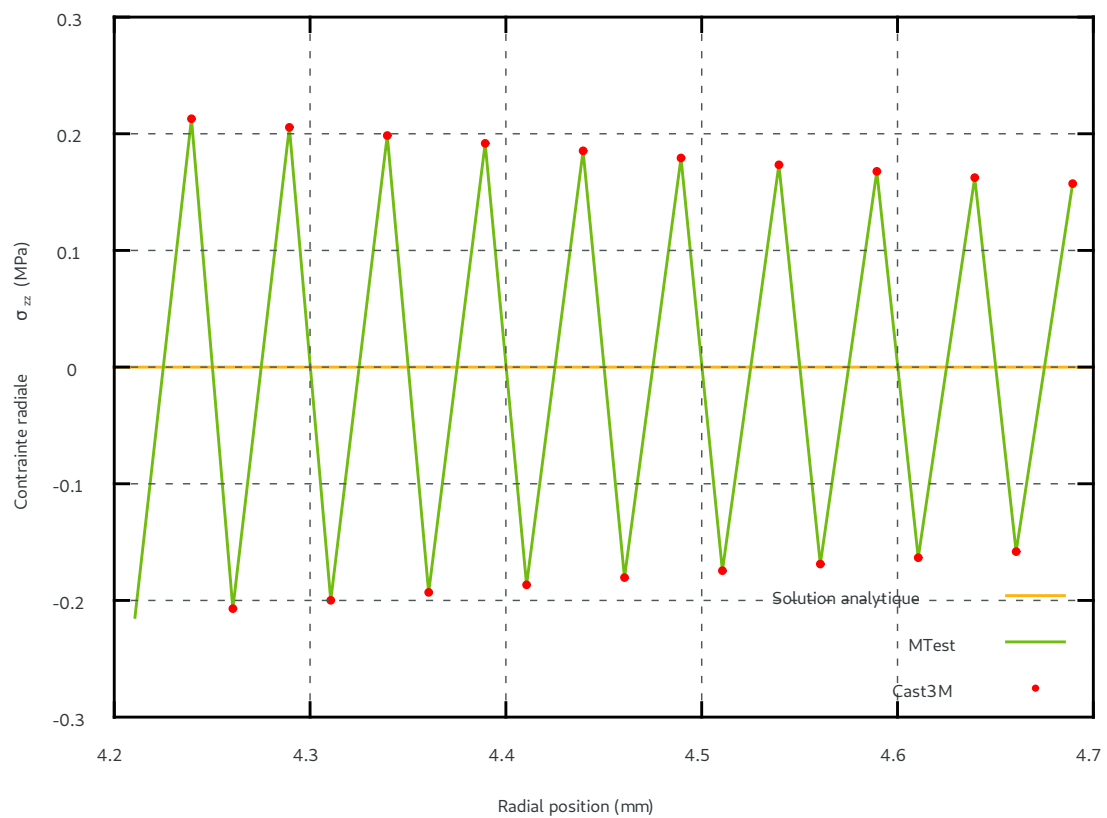


FIGURE 4 : Profil de la contrainte axiale aux points de Gauss obtenue avec des éléments linéaires : comparaison à la solution analytique et à un calcul *Cast3M*

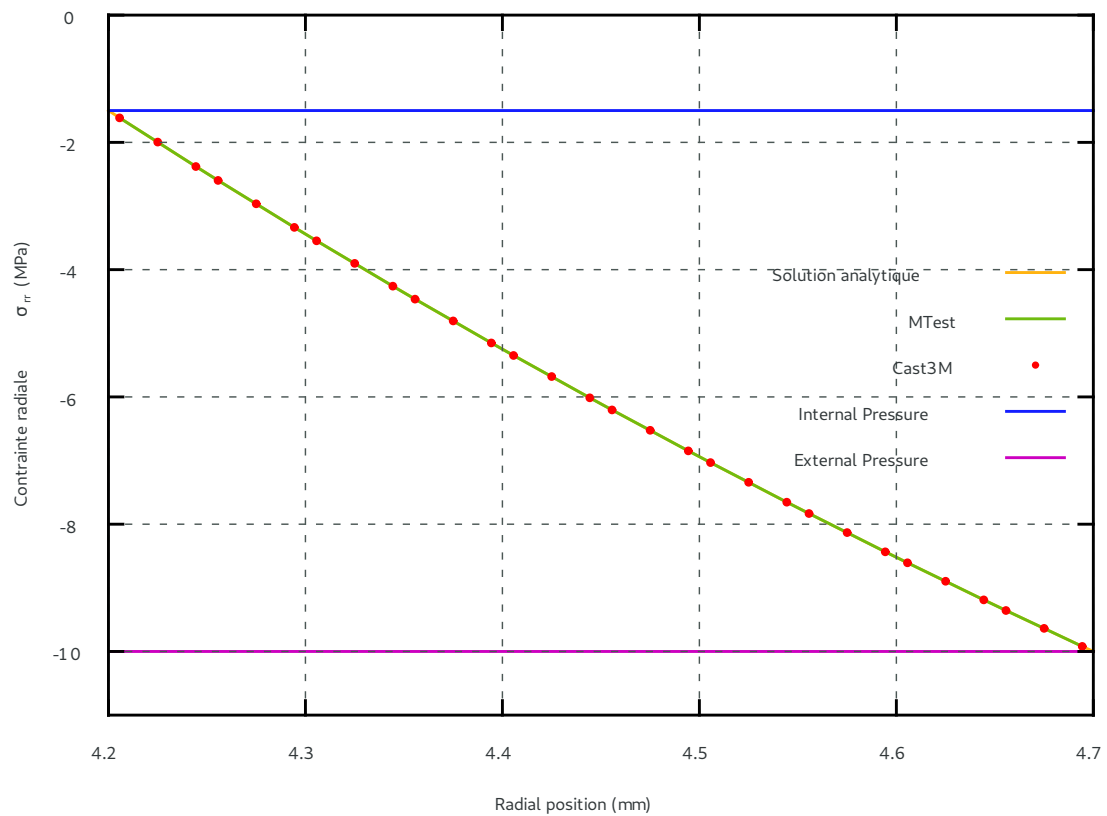


FIGURE 5 : Profil de la contrainte radiale aux points de Gauss obtenue avec des éléments quadratiques : comparaison à la solution analytique et à un calcul Cast3M

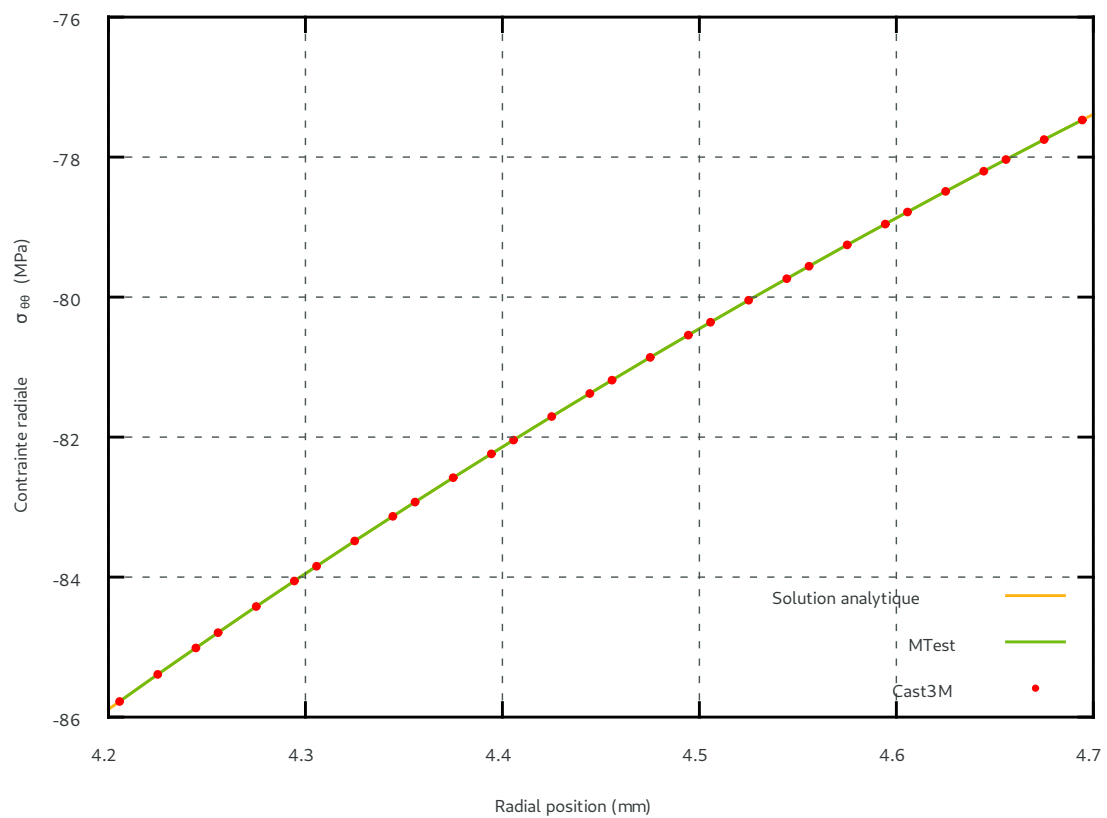


FIGURE 6 : Profil de la contrainte orthoradiale aux points de Gauss obtenue avec des éléments quadratiques : comparaison à la solution analytique et à un calcul *Cast3M*

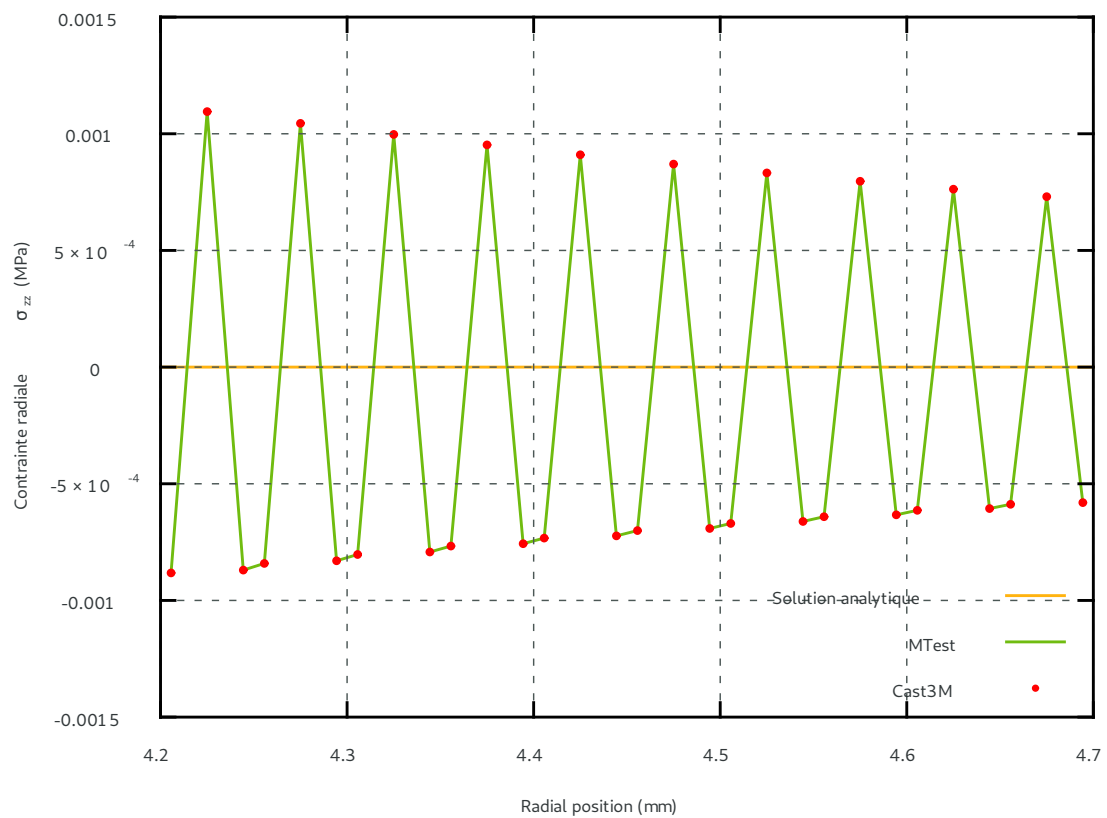


FIGURE 7 : Profil de la contrainte axiale aux points de Gauss obtenue avec des éléments quadratiques : comparaison à la solution analytique et à un calcul *Cast3M*

Notes L'utilisation des éléments quadratiques offrent une qualité de discrétisation très supérieure aux éléments linéaires pour un coût qu'il convient d'analyser avec précaution. Si l'utilisation d'éléments quadratiques augmente le nombre d'inconnues nodales et le nombre de points d'intégrations, il est possible, dans le cas étudié, de restreindre fortement le nombre d'élément tout en gardant une qualité élevée : ici deux éléments suffiraient, ce qui correspond à 6 points de GAUSS et 5 nœuds. En comparaison, l'utilisation des 10 éléments linéaires nécessite 20 points de GAUSS et 11 nœuds.

Nous pouvons également considérer l'utilisation d'éléments d'ordre plus élevés.

Nous pensons qu'un développement intéressant pour `alcyone` serait de passer en éléments quadratique dans la gaine.

Dans le cas $1D$ ce n'est qu'un problème de maillage.

Pour les schémas multi-dimensionnels, il y a essentiellement deux problèmes pour modéliser le combustible avec des éléments linéaires et la gaine avec des éléments quadratiques :

- gérer le transfert thermique, une relation nœud à nœud ne peut plus être utilisée ;
-

Nous avons montré dans `licos`, avec l'aide du `SEMT`, qu'il était possible de résoudre ces deux difficultés par une gestion spécifique du transfert thermique et du contact. Cependant, cela conduit à introduire plusieurs multiplicateurs de LAGRANGE supplémentaires ce qui peut augmenter notablement le coût du calcul. Par ailleurs, nous avons noté que :

- ces techniques peuvent rendre le calcul moins robuste ;
- la gestion des multiplicateurs évolue d'une version de `Cast3M` à une autre, ce qui peut conduire à des problèmes de portabilité.

Pour le combustible, le caractère fragile de la loi de comportement ne permet pas d'envisager de passer en éléments quadratiques tant que l'on restera à une description locale de l'endommagement. Un modèle d'endommagement non local permettrait de lever cette restriction et permettrait d'avoir une description précise des contraintes, ce qui éviterait les opérations de lissage des contraintes (notamment pour la pression hydrostatique) aujourd'hui utilisées.

3.1.3 Tests de fluage en force axiale imposée

Pour tester l'imposition d'une force axiale, nous avons simulé un essai de fluage en petites déformations. Sur un cylindre de $4,18\text{ mm}$, nous imposons une force axiale correspondant à une pression σ de 20 MPa . Le cylindre est supposé isotrope et obéir une loi de Norton de coefficient A et d'exposant E .

La solution analytique donnant l'évolution de la déformation axiale est donnée par :

$$\epsilon(t) = \frac{\sigma}{E} + A \sigma^n t$$

La figure 9 compare la solution obtenue à la solution analytique : les solutions sont confondues.

3.2 DESCRIPTION DÉTAILLÉE D'UN TEST EN PRESSION INTERNE

Nous considérons maintenant un test en pression interne avec effet de fond.

Le tube est modélisé par une loi de comportement de type NORTON en déformation logarithmiques. Les caractéristiques du test sont résumés au tableau 2. Les caractéristiques de la loi de NORTON n'ont pas de réalité physique : elles ont été choisies pour conduire à des déformations très importantes (de l'ordre de 500 % en quelques secondes).

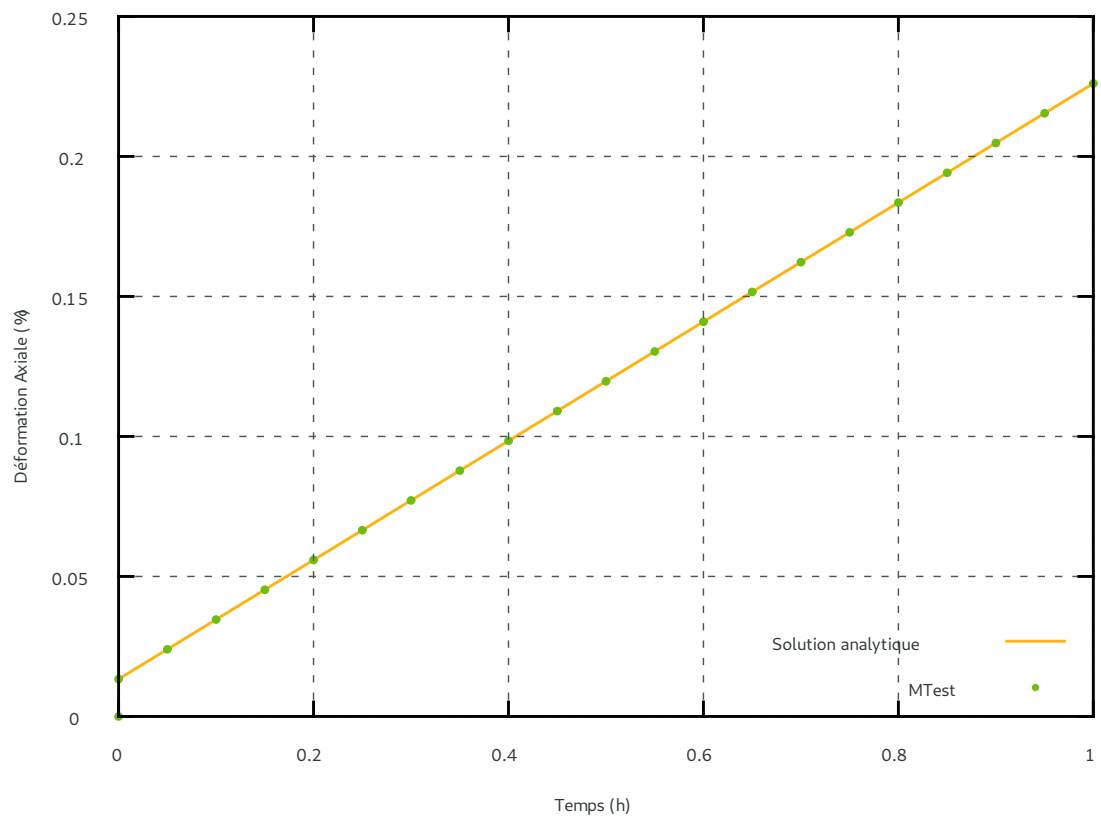


FIGURE 8 : Évolution de la déformation axiale lors d'un test de fluage : comparaison de la solution `mtest` à la solution analytique.

Caractéristiques géométriques	
Rayon interne	4,18 mm
Épaisseur	0,57 mm
Discrétisation	
Nombre d'éléments finis	1
Propriétés mécaniques	
Module d'YOUNG	70 GPa
Coefficient de POISSON	0,3
Coefficient de NORTON	$5 \cdot 10^{-10}$
Exposant de NORTON	1
Pressions imposées	
Pression interne	30 MPa

TABLEAU 2 : Caractéristiques utilisées.

3.2.1 Premier cas : modélisation sans pression suiveuse

Pour le premier cas test, nous ne tiendrons pas compte de l'actualisation des efforts avec la géométrie (pas de pression suiveuse).

Nous comparons notre simulation à une simulation effectuée avec le code `Cast3M` : les deux solutions sont identiques. En petites déformations, la loi de NORTON conduirait à une évolution linéaire du rayon en fonction du temps. L'utilisation des déformations logarithmiques conduit à l'accélération de la déformation au cours du temps.

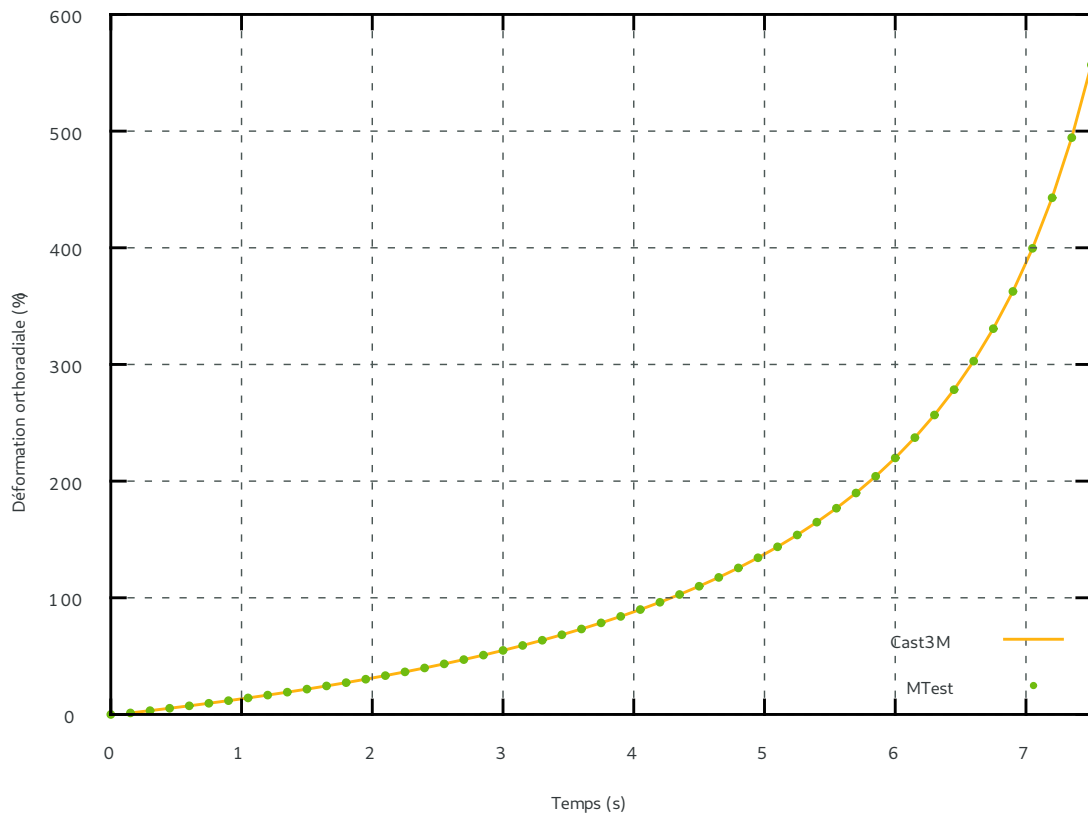


FIGURE 9 : Évolution de la déformation axiale lors d'un test en pression interne : comparaison de la solution `mtest` à la solution obtenue via `Cast3M`.

3.2.2 Second cas : modélisation avec pression suiveuse

ANNEXE A RÉOLUTION

ANNEXE A.1 FORMULATION FAIBLE

Soit \vec{v} un champ de vitesses cinématiquement admissible, nous avons :

$$\int_{\Omega_0} (\text{Div} \underline{\underline{\Pi}}) \cdot \vec{v} \, dV = 0$$

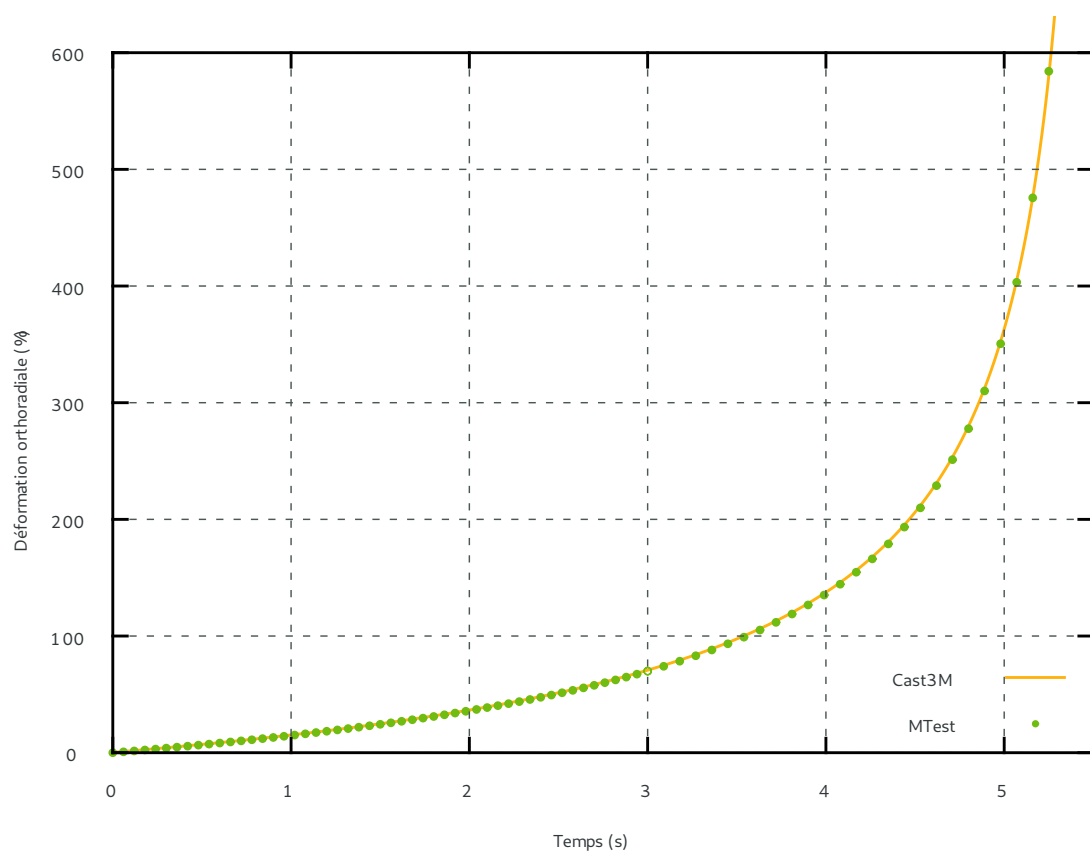


FIGURE 10 : Évolution de la déformation axiale lors d'un test en pression interne : comparaison de la solution *mtest* à la solution obtenue via *Cast3M*.

La formule de GREEN permet de transformer l'intégrale ainsi :

$$\int_{\Omega_0} (\text{Div} \underline{\Pi}) \cdot \vec{v} \, dV = \int_{\Omega_0} \underline{\Pi} : \frac{d\vec{v}}{d\vec{X}} \, dV - \int_{\Omega_0} (\underline{\Pi} : \vec{n}) \cdot \vec{v} \, dS$$

Nous obtenons ainsi la formulation faible recherchée :

$$(4) \quad 2\pi \int_{R_0^i}^{R_0^e} \left[\Pi_{rr} \frac{dv_r}{dR} R + \Pi_{\theta\theta} v_r \right] dR = -2\pi F_{zz} \left[P^e \left(1 + \frac{u_r^e}{R_0^e} \right) (R_0^e)^2 v_r^e + P^i \left(1 + \frac{u_r^i}{R_0^i} \right) (R_0^i)^2 v_r^i \right]$$

ANNEXE A.2 DISCRÉTISATION À L'AIDE D'ÉLÉMENTS FINIS LINÉAIRE

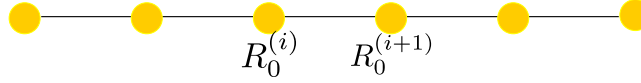


FIGURE 11 : Exemple de maillage 1D

Par calculer le premier terme de l'intégrale, nous discrétisons maintenant le tube par des éléments linéaires : celui-ci est découpé en $N - 1$ segments sur lesquels la variation du déplacement radial est supposé linéaire. Les sommets des segments forment les nœuds du maillage et ils sont numérotés de manière croissante de gauche à droite. Cette discrétisation est schématisée sur la figure 11.

Dans cette discrétisation, la position du i^e nœud, dans la configuration initiale est notée $R_0^{(i)}$.

Les fonctions de l'espace de discrétisation sont donc caractérisées par leurs valeurs aux nœuds. Une fonction v de cet espace est donc équivalente à un vecteur \vec{V} dont la valeur au i^e nœud est $V^{(i)}$.

Le problème est alors de déterminer les valeurs nodales du déplacement radial. Sa valeur au i^e nœud est notée $v_r^{(i)}$.

A.2.1 Forces externes

Le terme de droite de l'équation (4) décrit les forces externes imposées au tube (à l'exception de l'effet de fond qui sera décrit plus loin).

Ce terme peut s'écrire :

$$-2\pi F_{zz} \left[P^e \left(1 + \frac{u_r^e}{R_0^e} \right) (R_0^e)^2 v_r^e + P^i \left(1 + \frac{u_r^i}{R_0^i} \right) (R_0^i)^2 v_r^i \right] = \vec{F}_e \cdot \vec{V}$$

où le vecteur \vec{F}_e n'a pour composantes non nulles que celles correspondant au premier et dernier nœuds de la structure.

Nous avons :

$$\begin{cases} \mathbb{F}_e^0 = -2\pi F_{zz} P^i (R_0^i + u_r^i) R_0^i \\ \mathbb{F}_e^{N-1} = -2\pi F_{zz} P^e (R_0^e + u_r^e) R_0^e \end{cases}$$

A.2.2 Forces internes

Par linéarité, l'intégrale à calculer est alors :

$$\int_{R_0^i}^{R_0^e} \left[\Pi_{rr} \frac{dv_r}{dR} R + \Pi_{\theta\theta} v_r \right] dR = \sum_{i=1}^{N-1} \int_{R_0^{(i)}}^{R_0^{(i+1)}} \left[\Pi_{rr} \frac{dv_r}{dR} R + \Pi_{\theta\theta} v_r \right] dR$$

où $R_0^{(i)}$ est la coordonnée du i^{e} nœud dans la configuration initiale.

Pour simplifier, nous allons considérer un élément fini linéaire iso-paramétrique. L'intégrale sur le i^{e} élément est calculé par une formule à deux points d'intégration :

$$\int_{R_0^{(i)}}^{R_0^{(i+1)}} \left[\Pi_{rr} \frac{dv_r}{dR} R + \Pi_{\theta\theta} v_r \right] dR \approx \sum_{g=1}^2 \left[\Pi_{rr} (R_0^g) \frac{dv_r}{dR} (R_0^g) R_0^g + \Pi_{\theta\theta} (R_0^g) v_r (R_0^g) \right] w_g J_g$$

où : — R_0^g est le rayon du point de Gauss considéré dans la configuration initiale ;
— w_g est son poids ;
— J_g est le déterminant du jacobien permettant de passer de l'élément de référence (le segment $[-1 : 1]$) à l'élément considéré (le segment $[R_0^{(i)} : R_0^{(i+1)}]$) ;

Les deux points de Gauss étant équivalents, les poids de chacun sont égaux à 1. J_g est quand à lui égal à :

$$J_g = \frac{R_0^{(i+1)} - R_0^{(i)}}{2}$$

La position des points de Gauss est donnée par :

$$R_0^g = \frac{1}{2} \left((1 - p_g) R_0^{(i)} + (1 + p_g) R_0^{(i+1)} \right) = R_0^{(i)} + \frac{(1 + p_g)}{2} (R_0^{(i+1)} - R_0^{(i)})$$

avec : — $p_g = -\frac{1}{\sqrt{3}}$ pour le premier point de Gauss ;
— $p_g = \frac{1}{\sqrt{3}}$ pour le second point de Gauss.

Sur chaque segment, délimité par deux nœuds situés en $R_0^{(i)}$ et $R_0^{(i+1)}$ nous avons :

$$\begin{cases} v(R) = \mathbb{V}^{(i)} + (R - R_0^{(i)}) \frac{\mathbb{V}^{(i+1)} - \mathbb{V}^{(i)}}{R_0^{(i+1)} - R_0^{(i)}} \\ \frac{\partial v}{\partial R} = \frac{\mathbb{V}^{(i+1)} - \mathbb{V}^{(i)}}{R_0^{(i+1)} - R_0^{(i)}} \end{cases}$$

Évaluée en un des deux points de GAUSS, la formule précédente s'écrit :

$$\begin{cases} v(R_g) = \mathbb{V}^{(i)} + \frac{1 + p_g}{2} (\mathbb{V}^{(i+1)} - \mathbb{V}^{(i)}) \\ \frac{\partial v}{\partial R} = \frac{\mathbb{V}^{(i+1)} - \mathbb{V}^{(i)}}{R_0^{(i+1)} - R_0^{(i)}} \end{cases}$$

Approximée ainsi, l'intégrale est linéaire en $\mathbb{V}^{(i)}$ et $\mathbb{V}^{(i+1)}$. On peut donc écrire cette intégrale sous la forme :

$$\int_{R_0^{(i)}}^{R_0^{(i+1)}} \left[\Pi_{rr} \frac{dv_r}{dR} R + \Pi_{\theta\theta} v_r \right] dR \approx \mathbb{F}_{ie}^{(i)} \mathbb{V}^{(i)} + \mathbb{F}_{ie}^{(i+1)} \mathbb{V}^{(i+1)}$$

Le terme $\mathbb{F}_{ie}^{(i)}$ est la contribution de l'élément considéré à la force nodale associée au nœud (i) .

ANNEXE A.3 SYSTÈME DISCRÉTISÉ

Finalement, la forme faible discrétisée s'écrit :

$$\vec{\mathbb{F}}_i \cdot \vec{\mathbb{V}} = \vec{\mathbb{F}}_e \cdot \vec{\mathbb{V}}$$

Cette expression étant vraie pour toute valeur de $\vec{\nabla}$, l'équilibre mécanique discrétisé est simplement :

$$\vec{\mathbb{F}}_i = \vec{\mathbb{F}}_e$$

Dans ce qui précède, nous n'avons pas précisé la dépendance du $\underline{\Pi}$ et le gradient de déformation. Explicité cette dépendance permet de montrer que le système à résoudre est :

$$\vec{\mathbb{R}}(\Delta \vec{\mathbb{U}}) = \vec{\mathbb{F}}_i(\Delta \vec{\mathbb{U}}) - \vec{\mathbb{F}}_e(\Delta \vec{\mathbb{U}}) = \vec{0}$$

où : — $\Delta \vec{\mathbb{U}}$ est l'incrément de déplacement ;
— $\vec{\mathbb{R}}$ est le vecteur des résidus.

Ce système non linéaire est résolu de manière itérative. Différents algorithmes sont disponibles, notamment :

- la méthode de Newton-Raphson standard qui fait intervenir la matrice tangente cohérente. Des variantes basées sur d'autres opérateurs tangents sont possibles.
- la méthode de point-fixe éventuellement accélérée qui se base sur la matrice d'élasticité initiale.

ANNEXE A.4 CRITÈRES DE CONVERGENCE

Deux critères de convergence sont utilisés :

- un critère sur le résidu $\vec{\mathbb{R}}$, normalisé pour être de l'ordre de grandeur d'une contrainte :

$$\left\| \vec{\mathbb{R}} \right\|_{\infty} < \sigma_{\varepsilon} 2 \pi R_0^e$$

La valeur par défaut de σ_{ε} est égale à 10^{-3} 2.

- un critère de stationnarité des déplacements :

$$\left\| \delta \Delta \vec{\mathbb{U}} \right\|_{\infty} < \varepsilon_{\varepsilon} R_0^e$$

où $\delta \Delta \vec{\mathbb{U}}$ est la dernière correction faite au champ de déplacement. La valeur par défaut de $\varepsilon_{\varepsilon}$ est de 10^{-11} .

2. L'unité de σ_{ε} dépend du système choisi par l'utilisateur pour exprimer les pression, les rayons, etc...