

DE LA RECHERCHE À L'INDUSTRIE



[www.cea.fr](http://www.cea.fr)

# Lois de comportement mécanique en grandes transfor- mations avec mfront



— T. HELFER

**Introduction**

**Quelques exemples**

**Notions préliminaires**

**Que propose Cast3M ?**

**Que propose mfront ?**

**Approches lagrangiennes**

**Approches eulériennes**

**Conclusions**







- la structure est caractérisée par sa forme  $\mathcal{C}_t$  (souvent appelée *configuration*) à l'instant  $t$  ;
- le mouvement est décrit par une famille de transformation  $\phi_t$  qui associe à un point  $\vec{X}$  de  $\mathcal{C}_0$  sa position  $\vec{x}$  :

$$\vec{x} = \phi_t(\vec{X}) = \vec{X} + \vec{u}_t(\vec{X})$$

où  $\vec{u}_t$  est le champ de déplacement.

- localement, on caractérise la transformation par le gradient  $\tilde{\mathbf{F}}$  de  $\phi$  :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \frac{\partial \vec{x}}{\partial \vec{X}}$$

- le changement de volume est le déterminant de  $\tilde{\mathbf{F}}$  :

$$\frac{d v}{d V} = J = \det \tilde{\mathbf{F}}$$

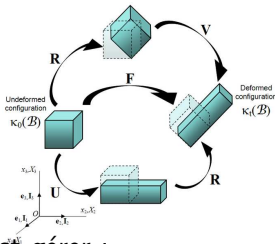
# Décomposition polaire de $\tilde{\mathbf{F}}$

- décomposition polaire de  $\tilde{\mathbf{F}}$  :

$$\tilde{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{R}} \cdot \underline{\mathbf{U}} = \underline{\mathbf{V}} \cdot \tilde{\mathbf{R}}$$

où  $\tilde{\mathbf{R}}$  est une rotation et où  $\underline{\mathbf{U}}$  et  $\underline{\mathbf{V}}$  représentent la dilatation de la matière ;

- Grossièrement, les grandes transformations, c'est gérer :
  - le fait que le matériau a tourné localement ;
  - le fait que le matériau a subi une dilatation  $\underline{\mathbf{U}}$  ou  $\underline{\mathbf{V}}$  qui peut être très grande (limite HPP entre 5 et 10 %) ;
- la rotation est la plus problématique, elle nécessite d'assurer l'objectivité des lois de comportement mécanique :
  - il y a autant de solution que d'auteurs (que d'article !)
- mais peu de solutions sont applicables à nos calculs :
  - formalisme HPP, anisotropie, dilatation libre, hyperélasticité, calculs anisothermes, etc..



- les tenseurs suivant sont symétriques définis positifs et ne contiennent pas d'information relative à la rotation :

- $\underline{\mathbf{U}}$  (langragien) et  $\underline{\mathbf{V}}$  (eulérien) ;
- tenseur de CAUCHY-GREEN droit  $\underline{\mathbf{C}}$  (langragien) :

$$\underline{\mathbf{C}} = \underline{\mathbf{U}}^2 = \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}}$$

- tenseur de GREEN-LAGRANGE (langragien) :

$$\underline{\varepsilon}_{GL}^{to} = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{C}} - \underline{\mathbf{I}}) = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{U}}^2 - \underline{\mathbf{I}}) = \frac{1}{2} (\underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{F}} - \underline{\mathbf{I}})$$

- tenseur de HENCKY (langragien) :

$$\underline{\varepsilon}_{\ln} = \frac{1}{2} \ln(\underline{\mathbf{C}}) = \ln(\underline{\mathbf{U}})$$



- la contrainte CAUCHY permet le calcul des forces sur la configuration déformée ;
- la puissance mécanique est (sur la configuration initiale) :

$$\mathcal{P} = \det(J) \sigma : \underline{\underline{\mathbf{d}}}$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{d}}}$  est le taux de déformation eulérien

- beaucoup d'autres tenseurs de contraintes par dualité :

$$\mathcal{P} = \det(J) \sigma : \underline{\underline{\mathbf{d}}} = \frac{1}{2} \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}} = \underline{\underline{\mathbf{S}}} : \underline{\underline{\dot{\mathbf{C}}}}_{GL}^{to} = \underline{\underline{\mathbf{I}}} : \underline{\underline{\dot{\mathbf{E}}}}_{ln}$$

où  $\underline{\underline{\mathbf{S}}}$  est le second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF.

- cette relation de dualité permet de passer d'une contrainte à une autre ;

- l'option « grands déplacements » permet le calcul de l'équilibre sur la configuration déformée ;
- par défaut, on est en « lagrangien réactualisé ». Dans INCREPL, on calcule l'incrément de déformation linéarisé sur la configuration en milieu de pas et on transporte le résultat de la loi de comportement sur la configuration de fin de pas ;
- il y a un « bug » dans les versions inférieures à 2012 : la contrainte n'est pas réactualisée pour les lois utilisateur. On est alors proche de la formulation PETIT\_REAC de Code-Aster :
  - « très petits incréments [de temps] ;
  - très petites rotations (ce qui implique un chargement quasi-radial) ;
  - déformation élastiques petites devant les déformations plastiques ;
  - comportement isotrope. »
- Cast3M propose deux dérivées objectives, mais ces approches ont leurs propres défauts ;
- dans tous les cas, on peut mieux faire :  
**mais on doit le faire soi-même !**

## Que propose mfront ?

- une loi de comportement en grandes transformations prend en entrée :
  - $\tilde{\mathbf{F}} \Big|_t$  est le gradient de la déformation en début de pas ;
  - $\tilde{\mathbf{F}} \Big|_{t+\Delta t}$  est le gradient de la déformation en fin de pas ;
- une loi de comportement en grandes transformations ressort :
  - la contrainte de CAUCHY ;
- on peut écrire des lois de comportement avec ces ingrédients, mais on a souvent de nombreuses difficultés liées à l'objectivité, l'introduction de nouveaux concepts (configuration relâchée), le traitement de l'anisotropie ou des déformations libres ;
  - on peut le faire en mfront !
  - voir les exemples (modèles néo-hookéens, lois plastiques de SIMO-MIEHE, etc...)
- le mieux est de cacher ces détails aux ingénieurs et faire ne sorte que l'utilisateur mfront ne voit qu'une loi HPP, et ça peut être assez facile !
  - on garde le formalisme, mais il faut ré-identifier les lois !

- Les stratégies lagrangiennes calculent à partir de  $\tilde{\mathbf{F}} \Big|_t$  et  $\tilde{\mathbf{F}} \Big|_{t+\Delta t}$  un incrément de déformation  $\Delta \underline{\underline{\varepsilon}}$  lagrangiens :

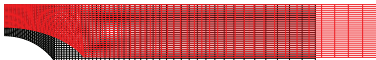
$$\Delta \underline{\underline{\varepsilon}} = f(\underline{\underline{\mathbf{C}}})$$

- on appelle la loi de comportement HPP ;
- on interprète la sortie de la loi de comportement comme la contrainte duale du tenseur de déformation choisi, puis on calcule la contrainte de CAUCHY ;
- avantages :
  - lois hyperélastiques ;
  - pas de restriction sur la loi (anisotropie, écrouissage cinématique, etc...) ;
  - si la loi HPP dérive d'une formulation thermodynamique, la loi obtenue aussi ;
- restriction :
  - le matériau garde la trace de son état initial ;
  - la contrainte manipulée n'a pas de sens physique direct ;
  - si on doit remailler... ;

- On choisit la contrainte de GREEN-LAGRANGE, la sortie est le second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF,  $\underline{\mathbf{S}}$  ;
- La transformation du second tenseur de PIOLA-KIRCHHOFF en contrainte de CAUCHY s'écrit, pour des petites déformations :

$$\underline{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{1}{J} \underline{\mathbf{F}}^T \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{F}} \approx \underline{\mathbf{R}}^T \cdot \underline{\mathbf{S}} \cdot \underline{\mathbf{R}}$$

- avantages :
  - pas besoin de réidentifier la loi !
- défauts :
  - n'est pas adapté aux grandes déformations !
  - les conditions d'incompressibilité plastique ne sont pas vérifiées exactement



- introduit par MIEHE, APEL et Lambrecht ;
- une forme de Graal pour l'équipe de Code-Aster ;
- les résultats sont très proches de formulations grandes transformations classiques de type  $F^e F^p$ , mais en tellement plus simple !
- il faut identifier la loi avec cette formulation ;
- en cours de test à DMN sur des aciers de cuve !

- on décrit le comportement dans un repère qui tourne avec le matériau :
  - la rotation du repère est choisie telle que la loi obtenue est objective ;
  - on obtient (presque toujours) une loi hypoélastique...
  - pas encore implantée...

- deux nouveaux mots clés :
  - `UMATFiniteStrainStrategy`
  - `UMATFiniteStrainStrategies`
- les lois `MFrontMaterials` seront compilées en trois versions :
  - petites déformations;
  - « grandes rotations, petites déformations » (le défaut en grands déplacements?);
  - déformations logarithmiques;
- test sur l'essai d'écrasement de plaquettes;