

本节内容

# 特殊矩阵 压缩存储

王道考研/CSKAOYAN.COM

1

## 知识总览

### 矩阵的压缩存储

数组的存储结构

一维数组

二维数组

特殊矩阵

对称矩阵

三角矩阵

三对角矩阵

稀疏矩阵

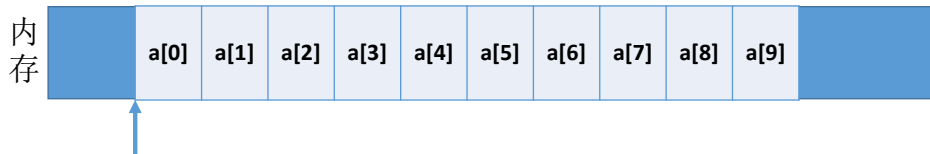
王道考研/CSKAOYAN.COM

2

## 一维数组的存储结构

```
ElemType a[10]; //ElemType型一维数组
```

C语言定义  
一维数组



起始地址: LOC

各数组元素大小相同，且物理上连续存放。

数组元素 $a[i]$  的存放地址 =  $LOC + i * \text{sizeof}(\text{ElemType})$  ( $0 \leq i < 10$ )

注：除非题目特别说明，否则数组下标默认从0开始

注意审题！  
易错！

王道考研/CSKAOYAN.COM

3

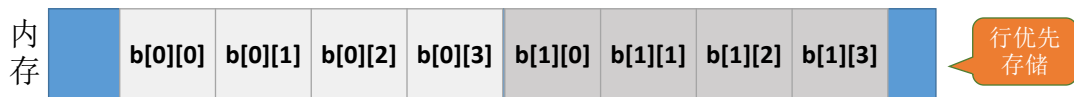
## 二维数组的存储结构

```
ElemType b[2][4]; //2行4列的二维数组
```

C语言定义  
二维数组

b[0][0]	b[0][1]	b[0][2]	b[0][3]
b[1][0]	b[1][1]	b[1][2]	b[1][3]

逻辑视角



王道考研/CSKAOYAN.COM

4

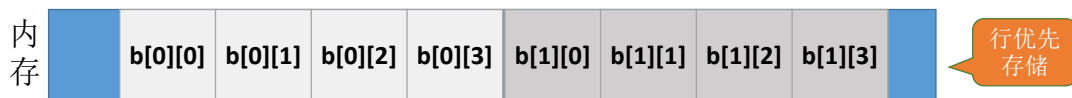
## 二维数组的存储结构

ElemType b[2][4]; //2行4列的二维数组

C语言定义  
二维数组

b[0][0]	b[0][1]	b[0][2]	b[0][3]
b[1][0]	b[1][1]	b[1][2]	b[1][3]

逻辑视角



起始地址: LOC

M行N列的二维数组 b[M][N] 中, 若按行优先存储, 则

$b[i][j]$  的存储地址 =  $LOC + (i * N + j) * \text{sizeof}(\text{ElemType})$

王道考研/CSKAOYAN.COM

5

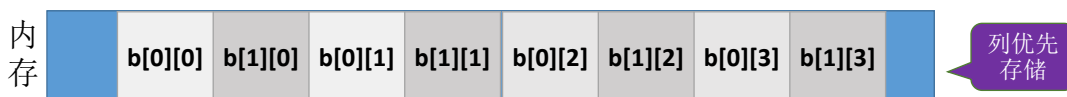
## 二维数组的存储结构

ElemType b[2][4]; //2行4列的二维数组

C语言定义  
二维数组

b[0][0]	b[0][1]	b[0][2]	b[0][3]
b[1][0]	b[1][1]	b[1][2]	b[1][3]

逻辑视角



起始地址: LOC

M行N列的二维数组 b[M][N] 中, 若按列优先存储, 则

$b[i][j]$  的存储地址 =  $LOC + (j * M + i) * \text{sizeof}(\text{ElemType})$

王道考研/CSKAOYAN.COM

6

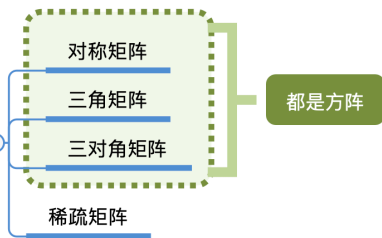
## 普通矩阵的存储

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	.....	$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	.....	$a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	.....	$a_{3,n-1}$	$a_{3,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$a_{m,1}$	$a_{m,2}$	$a_{m,3}$	.....	$a_{m,n-1}$	$a_{m,n}$

可用二维数组存储

注意：描述矩阵元素时，行、列号通常从1开始；而描述数组时通常下标从0开始  
(具体看题目给的条件，注意审题！)

特殊矩阵



某些特殊矩阵可以压缩存储空间

王道考研/CSKAOYAN.COM

7

## 对称矩阵的压缩存储

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	.....	$a_{1,n-1}$	$a_{1,n}$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{2,3}$	.....	$a_{2,n-1}$	$a_{2,n}$
$a_{3,1}$	$a_{3,2}$	$a_{3,3}$	.....	$a_{3,n-1}$	$a_{3,n}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$a_{n-1,1}$	$a_{n-1,2}$	$a_{n-1,3}$	.....	$a_{n-1,n-1}$	$a_{n-1,n}$
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	$a_{n,3}$	.....	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$

若  $n$  阶方阵中任意一个元素  $a_{ij}$  都有  $a_{ij} = a_{ji}$   
则该矩阵为对称矩阵

普通存储:  $n*n$  二维数组

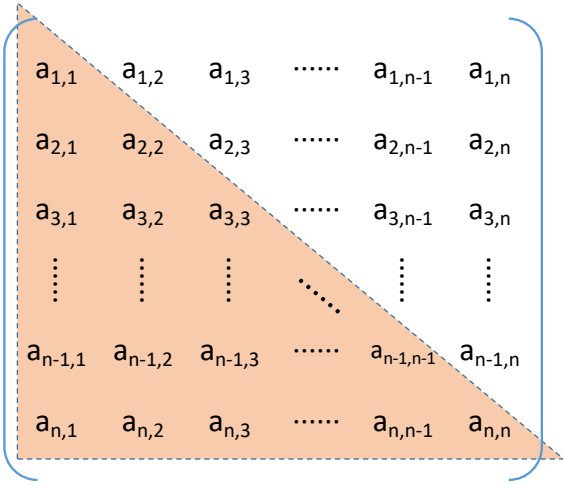
压缩存储策略: 只存储主对角线+下三角区  
(或主对角线+上三角区)

上三角区:  $i < j$ 主对角线:  $i = j$ 下三角区:  $i > j$ 

王道考研/CSKAOYAN.COM

8

### 对称矩阵的压缩存储




策略：只存储主对角线+下三角区

按行优先原则将各元素存入一维数组中。

B[0] B[1] B[2] B[3] .... B[?]

a <sub>1,1</sub>	a <sub>2,1</sub>	a <sub>2,2</sub>	a <sub>3,1</sub>	.....	a <sub>n,n-1</sub>	a <sub>n,n</sub>
------------------	------------------	------------------	------------------	-------	--------------------	------------------



思考：

- ① 数组大小应为多少？
- ② 站在程序员的角度，对称矩阵压缩存储后怎样才能方便使用？

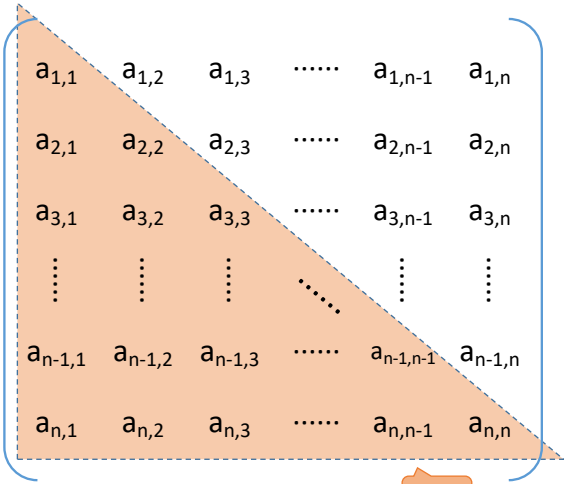
①  $(1+n)*n/2$

② 可以实现一个“映射”函数  
矩阵下标 → 一维数组下标

王道考研/CSKAOYAN.COM

9

### 对称矩阵的压缩存储




策略：只存储主对角线+下三角区

按行优先原则将各元素存入一维数组中。

B[0] B[1] B[2] B[3] .... B[ $\frac{n(n+1)}{2}-1$ ]

a <sub>1,1</sub>	a <sub>2,1</sub>	a <sub>2,2</sub>	a <sub>3,1</sub>	.....	a <sub>n,n-1</sub>	a <sub>n,n</sub>
------------------	------------------	------------------	------------------	-------	--------------------	------------------



矩阵下标 → 一维数组下标

$a_{i,j} (i \geq j) \rightarrow B[k]$

key: 按行优先的原则， $a_{i,j}$  是第几个元素？

$[1+2+\dots+(i-1)] + j \rightarrow$  第  $\frac{i(i-1)}{2} + j$  个元素

$\rightarrow k = \frac{i(i-1)}{2} + j - 1$

王道考研/CSKAOYAN.COM

10

王道考 研,cskaoyan.com

5

### 对称矩阵的压缩存储

策略：只存储主对角线+下三角区

按行优先原则将各元素存入一维数组中。

$B[0] \quad B[1] \quad B[2] \quad B[3] \quad \dots \quad B[\frac{n(n+1)}{2}-1]$

$a_{1,1}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{3,1}$	.....	$a_{n,1}$	$a_{n,n}$
-----------	-----------	-----------	-----------	-------	-----------	-----------

矩阵下标  $\rightarrow$  一维数组下标

$a_{i,j} \ (i < j) \rightarrow B[k]$

$a_{i,j} = a_{j,i}$  (对称矩阵性质)

$\rightarrow k = \frac{j(j-1)}{2} + i - 1$

王道考研/CSKAOYAN.COM

11

### 对称矩阵的压缩存储

策略：只存储主对角线+下三角区

按行优先原则将各元素存入一维数组中。

$B[0] \quad B[1] \quad B[2] \quad B[3] \quad \dots \quad B[\frac{n(n+1)}{2}-1]$

$a_{1,1}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{3,1}$	.....	$a_{n,1}$	$a_{n,n}$
-----------	-----------	-----------	-----------	-------	-----------	-----------

矩阵下标  $\rightarrow$  一维数组下标

$a_{i,j} \rightarrow B[k]$

$a_{i,j} = a_{j,i}$  (对称矩阵性质)

$k = \begin{cases} \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, & i \geq j \text{ (下三角区 and 主对角线元素)} \\ \frac{j(j-1)}{2} + i - 1, & i < j \text{ (上三角区元素 } a_{i,j} = a_{j,i} \text{)} \end{cases}$

王道考研/CSKAOYAN.COM

12

### 对称矩阵的压缩存储

策略：只存储主对角线+下三角区

按列优先原则将各元素存入一维数组中。

$B[0] \quad B[1] \quad B[2] \quad B[3] \quad \dots \quad B[\frac{n(n+1)}{2}-1]$

$a_{1,1}$	$a_{2,1}$	$a_{3,1}$	$a_{4,1}$	.....	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$
-----------	-----------	-----------	-----------	-------	-------------	-----------

矩阵下标  $\rightarrow$  一维数组下标  
 $a_{i,j} \rightarrow B[k]$   
 $a_{i,j} = a_{j,i}$  (对称矩阵性质)

存储上三角? 下三角?  
行优先? 列优先?  
矩阵元素的下标从0? 1? 开始  
数组下标从0? 1? 开始

出题方法

王道考研/CSKAOYAN.COM

13

### 三角矩阵的压缩存储

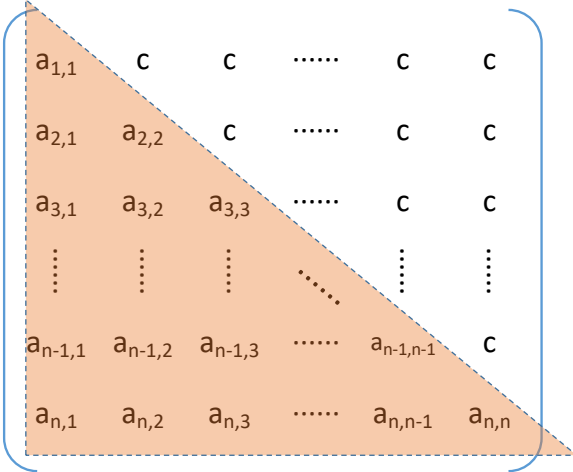
下三角矩阵：除了主对角线和下三角区，其余的元素都相同

上三角矩阵：除了主对角线和上三角区，其余的元素都相同

王道考研/CSKAOYAN.COM

14

### 三角矩阵的压缩存储



**下三角矩阵：**除了主对角线和下三角区，其余的元素都相同

压缩存储策略：按**行优先**原则将**橙色区**元素存入一维数组中。并在**最后一个位置**存储常量**c**

**B[0] B[1] B[2] B[3] .... B[ $\frac{n(n+1)}{2}-1$ ] B[ $\frac{n(n+1)}{2}$ ]**

$a_{1,1}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{3,1}$	.....	$a_{n,n-1}$	$c$
-----------	-----------	-----------	-----------	-------	-------------	-----

矩阵下标  $\rightarrow$  一维数组下标  
 $a_{i,j} (i \geq j) \rightarrow B[k]$

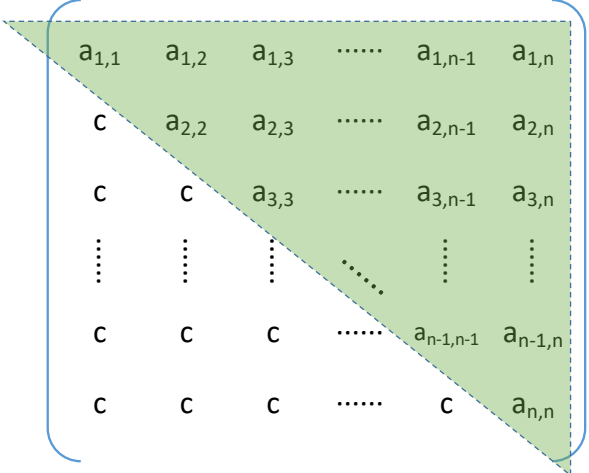
**Key:** 按**行优先**的原则， $a_{i,j}$  是第几个元素？

$$k = \begin{cases} \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, & i \geq j \text{ (下三角区和主对角线元素)} \\ \frac{n(n+1)}{2}, & i < j \text{ (上三角区元素)} \end{cases}$$

王道考研/CSKAOYAN.COM

15

### 三角矩阵的压缩存储



**上三角矩阵：**除了主对角线和上三角区，其余的元素都相同

压缩存储策略：按**行优先**原则将**绿色区**元素存入一维数组中。并在**最后一个位置**存储常量**c**

**B[0] B[1] B[2] B[3] .... B[ $\frac{n(n+1)}{2}-1$ ] B[ $\frac{n(n+1)}{2}$ ]**

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{1,3}$	$a_{1,4}$	.....	$a_{n,n}$	$c$
-----------	-----------	-----------	-----------	-------	-----------	-----

矩阵下标  $\rightarrow$  一维数组下标  
 $a_{i,j} (i \leq j) \rightarrow B[k]$

**Key:** 按**行优先**的原则， $a_{i,j}$  是第几个元素？

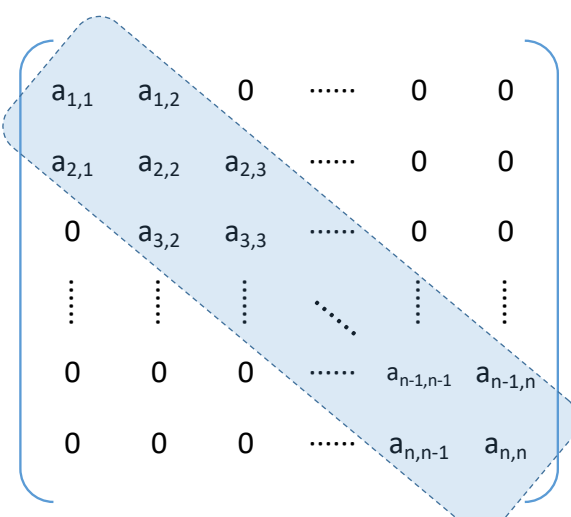
$$k = \begin{cases} \frac{(i-1)(2n-i+2)}{2} + (j-i), & i \leq j \text{ (上三角区和主对角线元素)} \\ \frac{n(n+1)}{2}, & i > j \text{ (下三角区元素)} \end{cases}$$

王道考研/CSKAOYAN.COM

16



### 三对角矩阵的压缩存储




**三对角矩阵**，又称**带状矩阵**：  
当  $|i-j|>1$  时，有  $a_{ij}=0$  ( $1\leq i,j\leq n$ )

压缩存储策略：  
按**行优先**（或列优先）原则，只存储带状部分

**B[0]** **B[1]** **B[2]** **B[3]** .... **B[3n-3]**

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	.....	$a_{n,n-1}$	$a_{n,n}$
-----------	-----------	-----------	-----------	-------	-------------	-----------



矩阵下标  $\rightarrow$  一维数组下标  
 $a_{ij}$  ( $|i-j|\leq 1$ )  $\rightarrow$  **B[k]**

**Key:** 按**行优先**的原则， $a_{ij}$  是第几个元素？

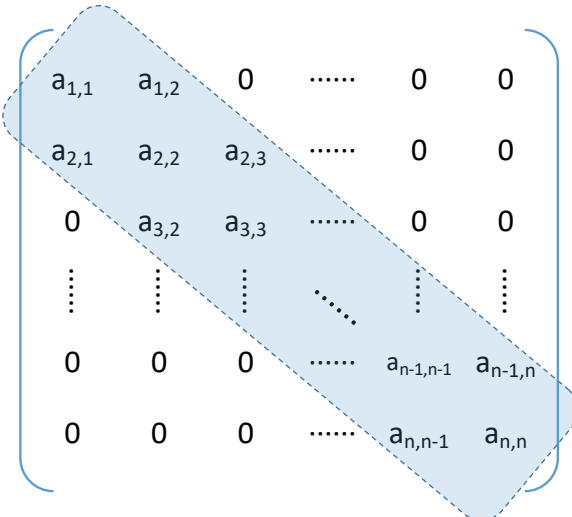
前*i*-1行共  $3(i-1)-1$  个元素  
 $a_{ij}$  是 *i* 行第  $j-i+2$  个元素  
 $a_{ij}$  是第  $2i+j-2$  个元素


数组下标从0开始  
 $\rightarrow$   **$k = 2i+j-3$**

王道考研/CSKAOYAN.COM

17

### 三对角矩阵的压缩存储





若已知数组下标  $k$ ，如何得到  $i, j$  ?  
**B[k]**  $\rightarrow$   $a_{ij}$

第  $k+1$  个元素，在第几行？第几列？

前*i*-1行共  $3(i-1)-1$  个元素  
前*i*行共  $3i-1$  个元素  
显然，  $3(i-1)-1 < k+1 \leq 3i-1$

$i \geq (k+2)/3$  可以理解为“刚好”大于等于

$i = \lceil (k+2)/3 \rceil$  向上取整即可满足“刚好”大于等于

王道书的计算逻辑：  $3(i-1)-1 \leq k < 3i-1$

$i \leq (k+1)/3+1$  可以理解为“刚好”小于等于

$i = \lfloor (k+1)/3+1 \rfloor$  向下取整即可满足“刚好”小于等于

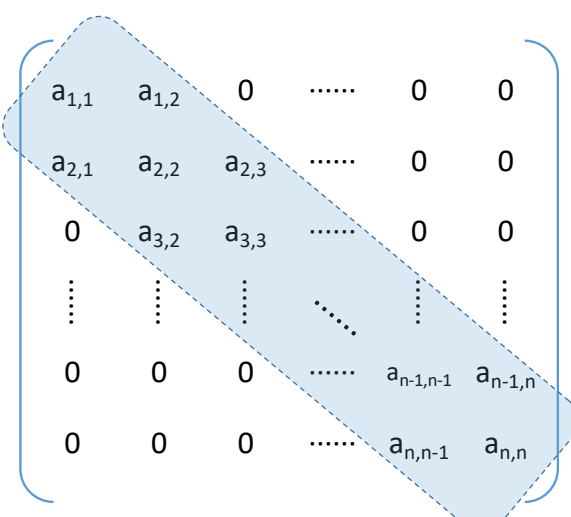
王道考研/CSKAOYAN.COM


18

王道考 研,cskaoyan.com

9

### 三对角矩阵的压缩存储





若已知数组下标k, 如何得到 i, j ?  
 $B[k] \rightarrow a_{i,j}$

第 k+1 个元素, 在第几行? 第几列?

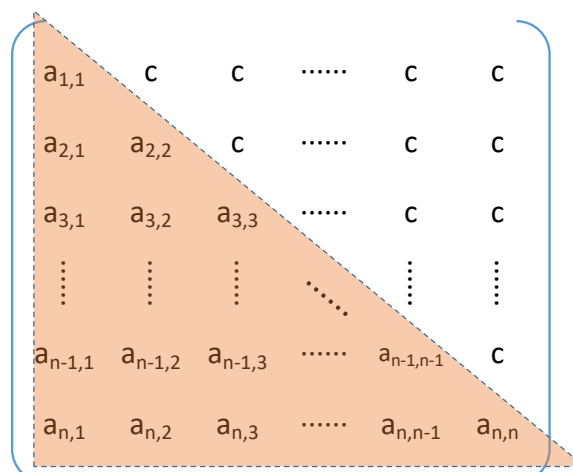
$i = \lfloor (k+2)/3 \rfloor$  或  $i = \lfloor (k+1)/3 + 1 \rfloor$

由  $k = 2i + j - 3$ , 得  
 $j = k - 2i + 3$

王道考研/CSKAOYAN.COM

19


### 三角矩阵的压缩存储



压缩存储策略: 按行优先原则将绿色区元素存入一维数组中。并在最后一个位置存储常量c

$B[0] \ B[1] \ B[2] \ B[3] \ \dots \ B[\frac{n(n+1)}{2}-1] \ B[\frac{n(n+1)}{2}]$

$a_{1,1}$	$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	$a_{3,1}$	.....	$a_{n,n}$	c
-----------	-----------	-----------	-----------	-------	-----------	---



矩阵下标  $\rightarrow$  一维数组下标  
 $a_{i,j} \ (i \geq j) \rightarrow B[k]$

Key: 按行优先的原则,  $a_{i,j}$  是第几个元素?

思考: 如何用k推出 i, j?

$k = \begin{cases} \frac{i(i-1)}{2} + j - 1, & i \geq j \text{ (下三角区和主对角线元素)} \\ \frac{n(n+1)}{2}, & i < j \text{ (上三角区元素)} \end{cases}$

王道考研/CSKAOYAN.COM

20

### 稀疏矩阵的压缩存储

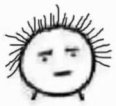
004005

030900

000070

020000

000000



青少年

**稀疏矩阵：**非零元素远远少于矩阵元素的个数

压缩存储策略：  
顺序存储——三元组 <行，列，值>

i (行)	j (列)	v (值)
1	3	4
1	6	5
2	2	3
2	4	9
3	5	7
4	2	2

(注：此处行、列标从1开始)

王道考研/CSKAOYAN.COM

21

### 稀疏矩阵的压缩存储

004005

030900

000070

020000

000000

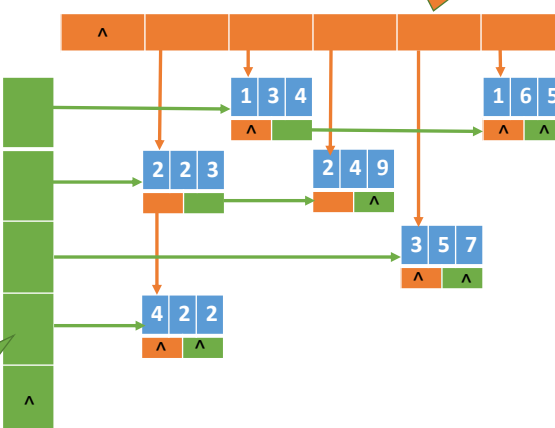
非零数据

行	列	值
指向同列的下一个元素	指向同行的下一个元素	

压缩存储策略二：  
链式存储——十字链表法

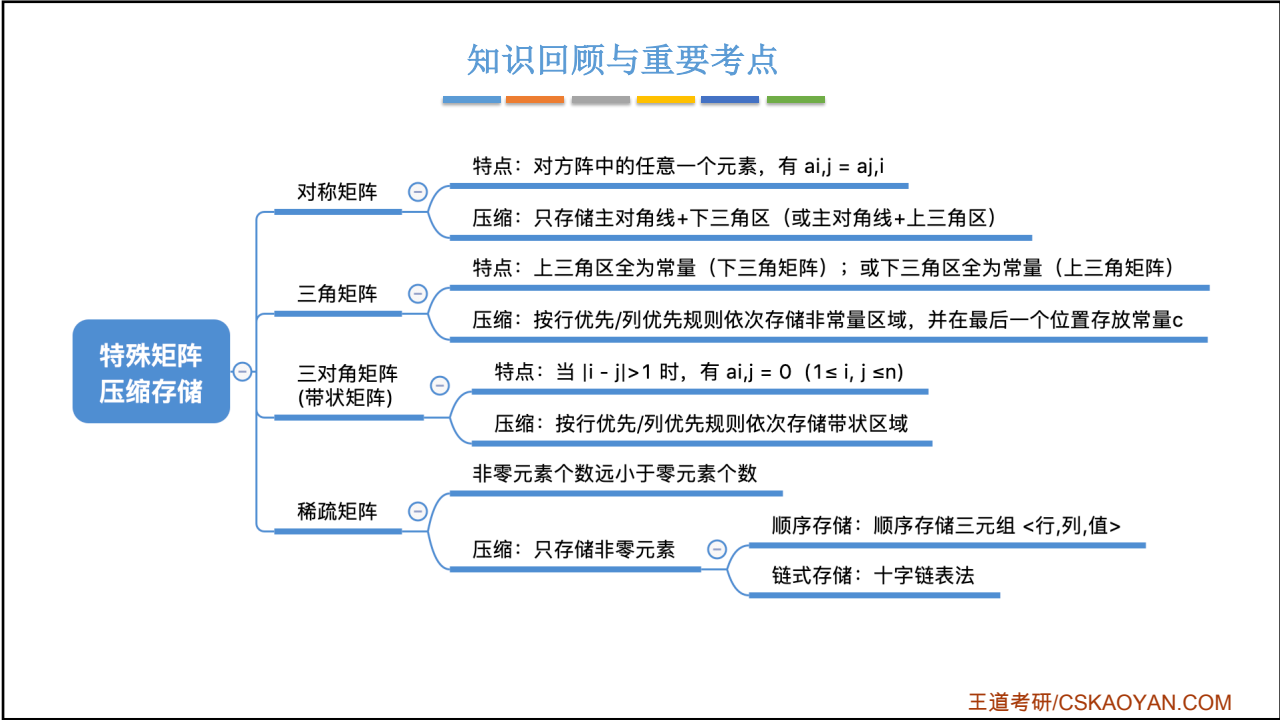
向下域 down, 指向第 j 列的第一个元素

向右域 right, 指向第 i 行的第一个元素

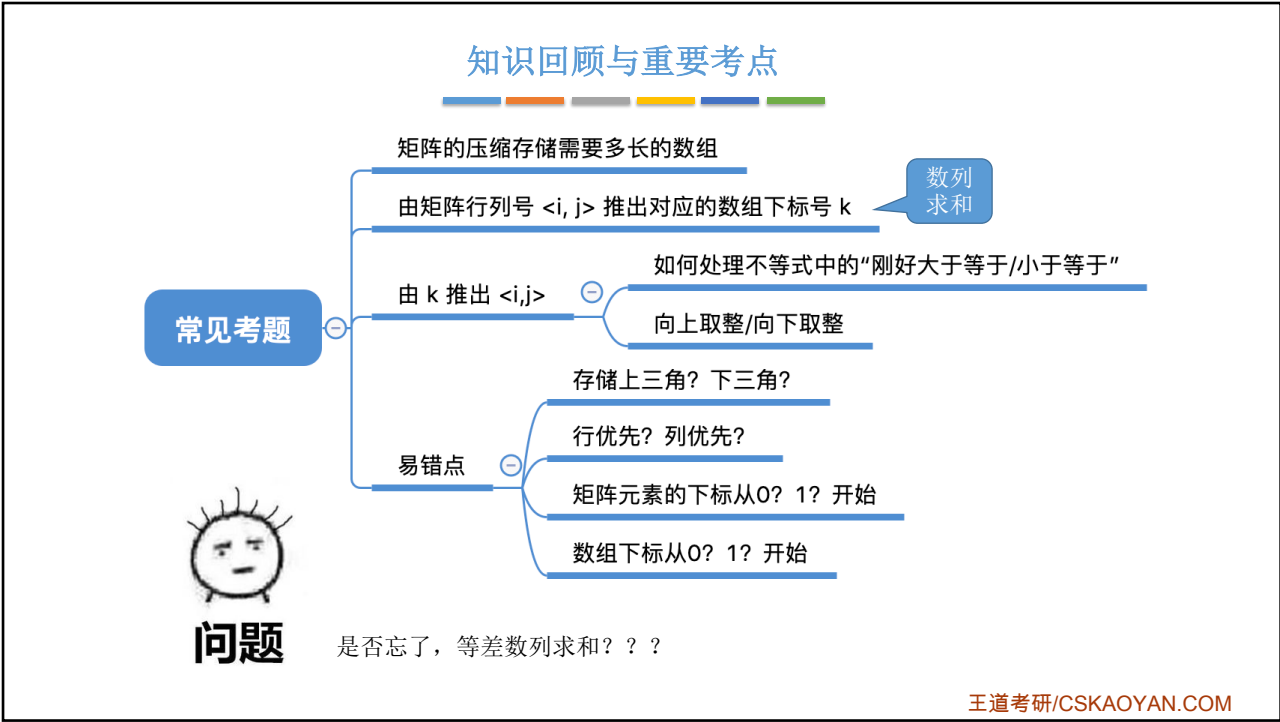


王道考研/CSKAOYAN.COM

22



23



24