

tabular[t]cLeonard Borg

@manual anleitung,author = "TU Dortmund",title = "Versuchsanleitung zu Versuch Nr. 354 Gedämpfte und erz

Versuch Nr. 354 Gedämpfte und erzwungene Schwingungen

Kyra Klos Leonard Borg

Durchführung: 3.11.2015; Abgabe: 10.11.2015

TU Dortmund – Fakultät Physik

1 Zielsetzung

In diesem Versuch werden anhand eines LRC-Schwingkreises die verschiedenen Lösungen der Schwingungsgleichung untersucht. Es werden gemessen: der effektive Widerstand im Fall der homogenen gedämpften Schwingung, der Widerstand bei dem der aperiodische Grenzfall eintritt und inhomogenen Fall die Resonanzfrequenz, sowie die Phasenverschiebung, die der Schwingkreis verursacht.

2 Theorie

2.1 Schwingungsgleichung

Der gegebene, wie auch der standard LRC-Reihenschwingkreis besteht aus einer Induktivität L , einem Ohmschen Widerstand R und einer Kapazität C . Im Idealfall ($R=0$) wird nur zwischen der Induktivität und der Kapazität harmonisch Energie ausgetauscht, ist $R>0$ so nimmt diese auch exponentiell ab, da sie vom Widerstand des Stromkreises in Wärme umgesetzt wird. Da sich alle Spannungen in einem geschlossenen einfachen Stromkreis dank der Maschenregel zu null addieren müssen, ergibt sich die Gleichung:

$$U_L(t) + U_R(t) + U_C(t) = 0. \quad (1)$$

Für die gegebenen Spannungen gelten die Identitäten

$$\begin{aligned} U_L &= \dot{I}L \\ U_R &= IR \\ U_C &= \frac{I}{C}. \end{aligned}$$

Dies ergibt mit $I = \dot{I}$ die homogene Schwingungsgleichung in I :

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = 0 \quad (2)$$

Die Lösung für diese DGL lautet

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t}(A_0 e^{2\pi\nu it} + A_1 e^{-2\pi\nu it}) \quad (3)$$

mit physikalischen Konstanten

$$\mu = \frac{R}{4\pi L} \quad (4)$$

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{4L^2}} \quad (5)$$

Der Verlauf der entsprechenden Ladungs- bzw. Spannungskurve hängt nun davon ab, ob ν reellwertig ist oder echt komplexe Werte annimmt:

$$\nu \in \mathbb{R} \iff \frac{1}{LC} > \frac{R^2}{4L^2}$$

Mit $e^i\phi = \cos(\phi) + i\sin(\phi)$ und (3) folgt dann:

$$I(t) = e^{-2\pi\mu t} \cos(2\pi\nu t) \quad (6)$$

Die Zeit, zu der Exponent genau -1 ist nennt man Abklingdauer:

$$T_{ex} := \frac{1}{2\pi\mu}. \quad (7)$$

Für $\nu = 0$ tritt der sog. aperiodische Grenzfall ein, wo $I(t)$ durch nur eine Exponentialfunktion beschrieben werden kann und es somit zu garkeiner Schwingung kommt. In diesem Fall nähert sich die Auslenkung am schnellsten Null von allen Lösungen der DGL.

2.1.1 Getriebene Schwingung

Im weitem Verlauf des Versuchs wird ein mit einer Wechselspannung getriebener Schwingkreis untersucht. Die Differentialgleichung dadurch eine Inhomogenität der Form:

$$U_0 e^{i\omega_0 t}$$

Nachdem sich das System eingeschwungen hat und $\omega = \omega_0$ gilt berechnet sich die Spannung am Schwingkreis mit

$$|U(t)| = U_0 \sqrt{\frac{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (8)$$

Mit der komplexen Phase

$$\phi(\omega) = \text{atan}\left(\frac{-\omega RC}{1 - LC\omega^2}\right) \quad (9)$$

Da $|U_C| = |U(t)|$ folgt

$$U_C(\omega) = \frac{U_0}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + \omega^2 R^2 C^2}} \quad (10)$$

An dieser Formel kann man erkennen, dass für $\omega = 0$ $U_C = U_0$ gilt, und außerdem, dass für große ω : $U_C \propto \frac{1}{\omega^2} \rightarrow 0$. Für Phasen Φ_1, Φ_2 bei $\frac{\pi}{4}$ und $\frac{3\pi}{4}$ respektive gilt:

$$\omega_{1,2} = \pm \frac{R}{2L} + \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} + \frac{1}{LC}} \quad (11)$$

Außerdem gilt für die Resonanzfrequenz

$$\omega_{res} = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{2L^2}}, \quad (12)$$

wo der Maximalwert von $U_C(\omega)$ erreicht wird, der i.d.R. deutlich höher ist als U_0 .

Wenn die Dämpfung schwach ist, also gilt

$$\frac{R^2}{2L^2} \ll \frac{1}{LC},$$

so vereinfacht man das problem aus eine ungedämpfte Schwingung, bei der die Eigenfrequenz des Schwingkreises danngegeben ist durch

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (13)$$

Für diesen Fall gilt dann $\omega_{res} \approx \omega_0$ und daher

$$U_C(\omega_{res}) = qU_0 \text{ mit } q = \frac{1}{\omega_0 RC} \quad (14)$$

Man nennt q dann die Güte des Schwingkreises. Zusätzlich wird gewöhnlich auch die Breite der Resonanzkurve von $U_C(\omega)$ angegeben mit der Näherung

$$\omega_+ - \omega_- \approx \frac{R}{L} \quad (15)$$

3 Durchführung

Als erstes wird an den gegebenen Schwingkreis mit vorab bekannten Größen L,R,C eine Nadelpulsspannung angelegt und parallel zum Kondensator wird ein Oszilloskop angeschlossen. Nun stellt man die Frequenz des Nadelpuls' so ein, dass man nach dem jeweiligen Puls Relaxionsverhalten beobachten kann (die Spannung sollte mindestens um $\frac{1}{e}$ abgenommen haben). Von der entstehenden Abbildung einer gedämpften (Co-)Sinusschwingung wird der Thermindruck genommen, und bei den Extrema der Funktion werden jeweils Zeit seit dem Nadelpuls und Amplitude gemessen.

Um den Grenzwiderstand R_{ap} für den aperiodischen Grenzfall zu bestimmen wird nun, anstatt einem statischen R ein regelbarer Widerstand in den Schwingkreis geschaltet. Dieser wird von seinem Maximalwert so weit reduziert, dass sich eine sichtbare Überschwingung ausbildet und dann zurück auf eben den Wert eingestellt wo das Oszilloskop das erste mal eindeutig dem relaxionsverhalten eines geladenen Kondensators gleicht Der an diesem Punkt abzulesende Widerstand wird notiert.

Zur Messung des Verhaltens des getriebenen Schwingkreises wird eine Wechselspannung and den Schwingkreis gelegt und zum Abgleich auf den zweiten Kanal des Oszilloskops gespeist. Als erstes wird die Amplitude der angelegten Wechselspannung aufgenommen und im Folgenden wird die Frequenz ν am Sinusgenerator variiert. Es sollte darauf geachtet werden, dass die Messabstände bei stärkeren Änderungen entsprechend kleiner zu wählen sind.

Als Abschluss wird $\Phi(\omega)$ bestimmt die Phasenverschiebung, die der Schwingkreis aufgrund seiner Impedanz hervorruft. Zunächst wird die Erregerfrequenz klein gehalten, sodass die Erregung überwiegt und beide Wellen phasengleich sind und justiert das Oszilloskop so, dass bei beiden Wellen die Nulldurchgänge im selben punkt liegen. Und nun variiert man wie zuvor die Frequenz und misst die entstehenden Abstände zwischen den Nulldurchgängen.

4 Auswertung

Hier folgt nun die Auswertung des Experiments, das mit Hilfe des Gräts 2 durchgeführt wurde. Die Plots wurden mit Hilfe des Programs Gnuplot erstellt.

4.1 Zeitabhängigkeit der gedämpften Schwingungsamplitude

Zuerst wurde die abklingenden Amplituden U_C mit dem Fehler $\pm 0,08\text{V}$ des LCR-Schwingkreises im Bezug auf die Zeit t_i mit der Ungenauigkeit von $\pm 2\mu\text{s}$ gemessen. (Siehe Abbildung 1) Besonders hervor zu heben ist der Dämpfungswiderstand des aperiodischen

Tabelle 1: Hier sieht man deutlich den exponentiellen Abfall der Ampiltuden der Schwingung mit 1997 Hz Eregerfrequenz zu der Zeit

U_C / V	$t_i / \mu\text{sec}$
4,56	12
3,76	28
3,36	44
2,64	56
2,40	70
2,24	86
1,76	102
1,60	116
1,36	128
1,20	146
0,96	158
0,96	173
0,80	186
0,72	202
0,56	216
0,56	230
0,48	240

Grenzfalls, der experimentel einen Wert von $(3,19 \pm 0,01) \text{ k}\Omega$ beträgt. Verglichen mit dem durch () errechneten Widerstand von $(4,39 \pm 0,09) \text{ k}\Omega$, ist eine Differenz von $1,4 \text{ k}\Omega$ zu ersehen. Durch die Ausgleichrechnung () erhält man μ aus dem Exponenten der Gleichung () und kann somit folgendes berechnen:

$$T_{ex} = 123(1) \text{e} - 6 \text{sec}$$
$$R_{eff} = (123 \pm 1) \Omega$$

Vergleicht man nun den effektiven Widerstand R_{eff} mit dem in der Schaltung eingesetzten von $(48,1 \pm 0,1) \Omega$, ist eine Diskrepanz von ungefähr 50Ω zu erkennen.

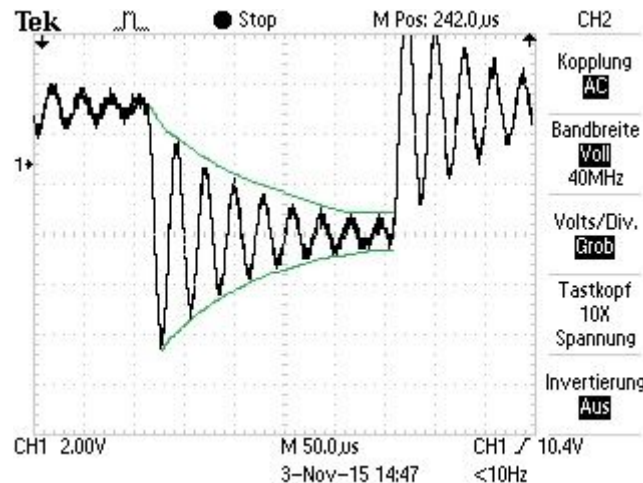


Abbildung 1: Thermodruck des zeitlichen Abklingens der gedämpften Schwingungsamplitude mit der Einfüllenden(in grün).

4.2 Messung der Frequenzabhängigkeiten an einem LCR-Schwingkreis

In der folgenden Tabelle sind die Daten aus der Messreihe der Kondensatorspannung mit der Ungenauigkeit $\pm 0,3\text{V}$ zu den Frequenzen mit der Ungenauigkeit $\pm 0,03\text{kHz}$, sowie das Verhältnis dieser zur Erregerspannung von ca. 10V zu finden. Diese Daten sind in zwei Plots einem in linearer (2) und einem in halblogarithmischer (3) Form aufgetragen. Wichtig hierbei zu erwähnen ist, dass ab einschließlich dem Wert $27,15\text{kHz}$ die Skala vergrößert wurde, sodass sich die darauffolgenden Werte leicht verschieben können. Aus dem Linearen der darauffolgenden Plots, in dem die Frequenz zum Spannungsverhältnis aufgetragen wurde, sind die experimentellen Werte für die Resonanzüberhöhung bzw. Güte q , sowie die Breite der Resonanzkurve $\nu_1 - \nu_2$ entnommen und werden hier mit den durch () berechneten Werten mit einem Gesamtwiderstand von $(559,5 \pm 0,5)\ \Omega$ verglichen:

$$q_{theo} = 3,923(5)$$

$$q_{exp} = 3,72$$

$$\text{Theoretisch: } \nu_+ - \nu_- = (8,81 \pm 0,03) \cdot 10^3 \text{ Hz} \quad \text{Experimentell: } \nu_+ - \nu_- = 11,19 \cdot 10^3 \text{ Hz}$$

Die relativ geringen Differenzen von q bei etwa $0,2$ und bei Resonanzkurvenbreite bei etwa $1,3 \cdot 10^3 \Omega$ sind im Fehlertoleranzbereich und benötigen somit keine weitere Erläuterung.

4.3 Messung der Phasen zwischen Erreger- und Kondensatorspannung

Im letzten Teil des Experiments wurden die Phasendifferenzen δt zu den einzelnen Frequenzen gemessen und daraus die Phasenverschiebung φ im Bogenmaß berechnet. Hier sind die Phasenverschiebung φ und die Phasendifferenz δt mit der Ungenauigkeit $\pm 0,2\mu\text{s}$ zur Frequenz ν vom Verhältnis LCR-Schwingkreis zu Sinus-Schwingungsgenerator.

Tabelle 2: Die Messdaten zeigen hierbei einen deutlichen Anstieg bis zum Maximum, sowie einen nachträglichen Abfall gleichermaßen

ν / kHz	U_C / V	U_C/U
2,00	10,0	1,00
4,00	10,0	1,00
5,00	10,2	1,02
7,50	10,4	1,04
9,00	10,6	1,06
11,00	11,0	1,10
14,00	11,5	1,15
16,00	12,0	1,20
18,00	12,6	1,26
18,65	13,0	1,30
19,50	13,6	1,36
20,30	14,0	1,40
21,00	14,6	1,46
21,45	15,0	1,50
22,50	15,8	1,58
23,00	16,3	1,63
23,60	16,9	1,69
24,20	17,6	1,76
24,55	18,0	1,80
25,00	18,6	1,86
25,35	19,0	1,90
25,65	19,4	1,94
26,10	20,1	2,01
26,50	20,7	2,07
26,80	21,2	2,12
27,10	21,7	2,17
27,15	22,4	2,24
27,50	22,8	2,28
28,00	24,0	2,40
28,40	24,8	2,48
28,60	25,2	2,52
29,05	26,4	2,64
29,35	27,2	2,72
29,50	27,6	2,76
29,85	28,4	2,84
30,00	28,8	2,88
30,15	29,2	2,92
30,25	29,6	2,96
30,45	30,0	3,00
30,55	30,4	3,04
30,70	30,8	3,08
30,85	31,2	3,12
31,00	31,6	3,16
31,10	32,0	3,20
31,25	32,4	3,24
31,55	33,4	3,34
31,70	33,2	3,32
31,90	34,0	3,40
32,20	34,8	3,48
32,35	35,2	3,52
32,55	35,6	3,56
32,80	36,0	3,60

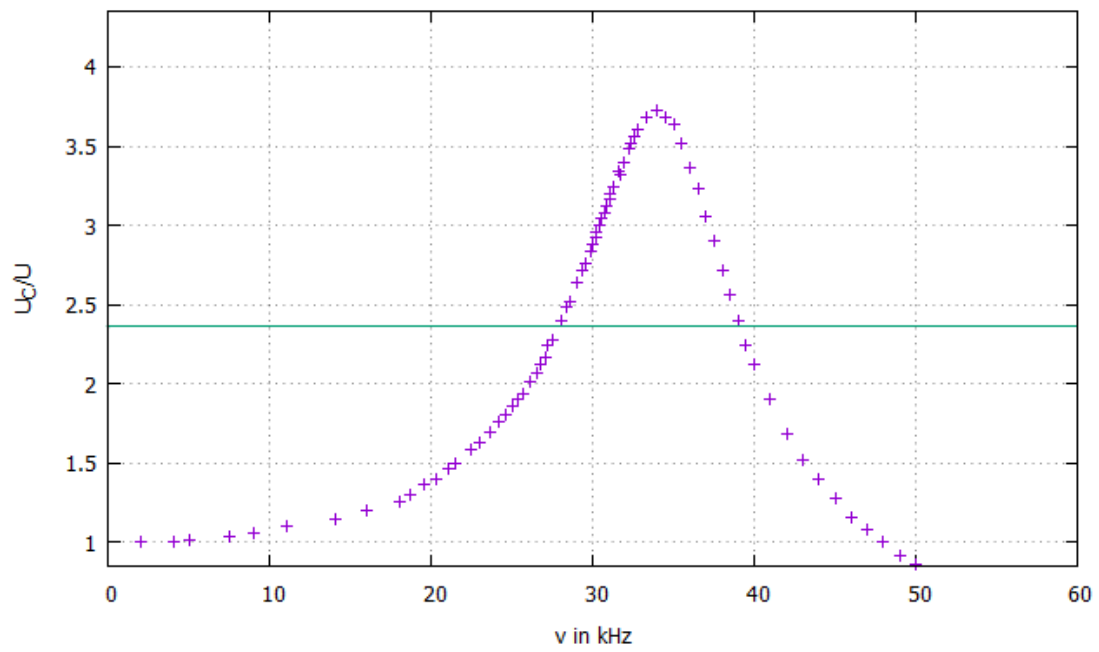


Abbildung 2: Aus der hierzusehenden linearen Darstellung der Frequenzabhängigkeit der Spannung sind die Daten zur Güte und die Resonanzkurve mit ihren eingezeichneten Ränder anzulesen.

Tabelle 3: Hier sieht man die Werte, der durch Lissajou-Figuren gemessenen Phasendifferenz, und die dazugehörige Verschiebung zu den Frequenzen.

ν / kHz	Δt / μsec	φ / rad
2,0	0,00	0,0000
5,0	1,00	0,0314
10,0	1,00	0,0628
15,0	1,50	0,1414
20,0	1,80	0,2262
25,0	2,10	0,3300
27,5	3,00	0,5184
30,0	4,00	0,7540
30,5	4,10	0,7854
31,0	4,50	0,8765
32,0	5,20	1,0455
33,0	6,00	1,2440
33,5	6,50	1,3681
34,0	6,70	1,4313
34,5	7,50	1,6258
35,0	7,50	1,6493
35,5	8,00	1,7844
36,0	8,50	1,9227
36,5	8,70	1,9952
37,0	9,00	2,0923
37,5	9,25	2,1795
38,0	9,50	2,2682
38,5	9,50	2,2980
39,0	9,50	2,3279
39,5	9,75	2,4198
40,0	9,75	2,4504

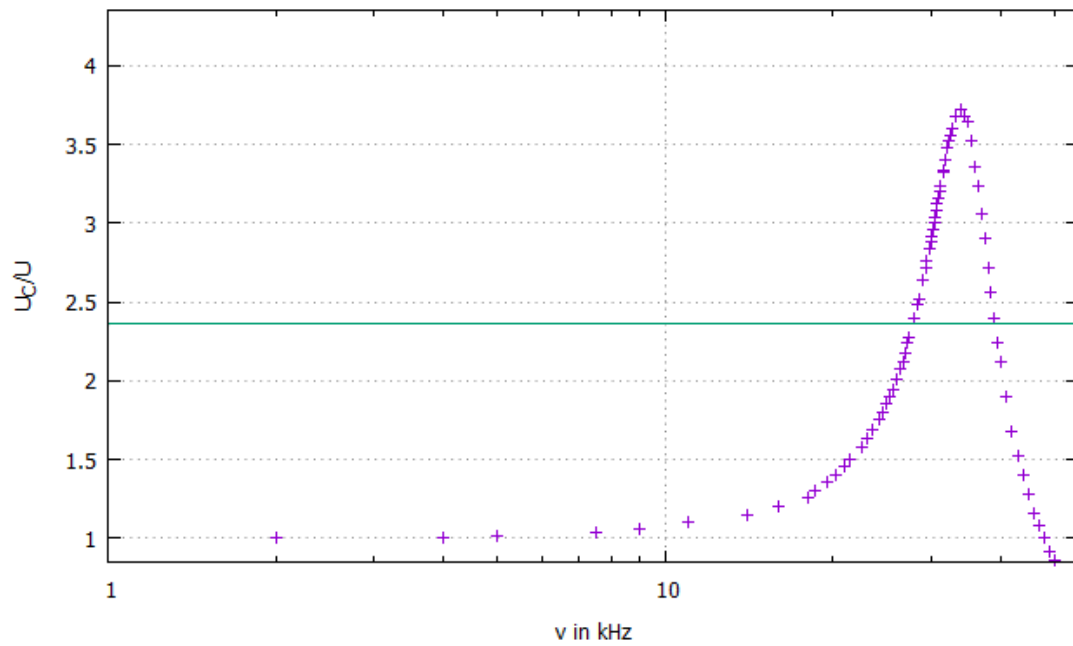


Abbildung 3: Hier ist die halblogarithmische Darstellung des Spannungs-Frequenzverhältnisses zu sehen.

Die Plots der Frequenzen in Abhängigkeit der Phasenverschiebung sind in halblogarithmischer (5) und linearer (4) Form in den folgenden Abbildungen zusehen.

Aus Letztrem werden die experimentellen Werte für die Resonanzspannung ν_{res} , die sich im Bereich von $\pi/2$ befindet, sowie die Ränder der Resonanzkurve ν_1 und ν_2 bei $\pi/4$ und $3 * \pi/2$ entnommen. Hier in der linearen Abbildung ist gut der extreme Anstieg der arctan-annähernden Kurve zu sehen.

Die Spitze und ihr Abflachen sind, durch die begrenzte Maximalfrequenz nur zu erahnen.

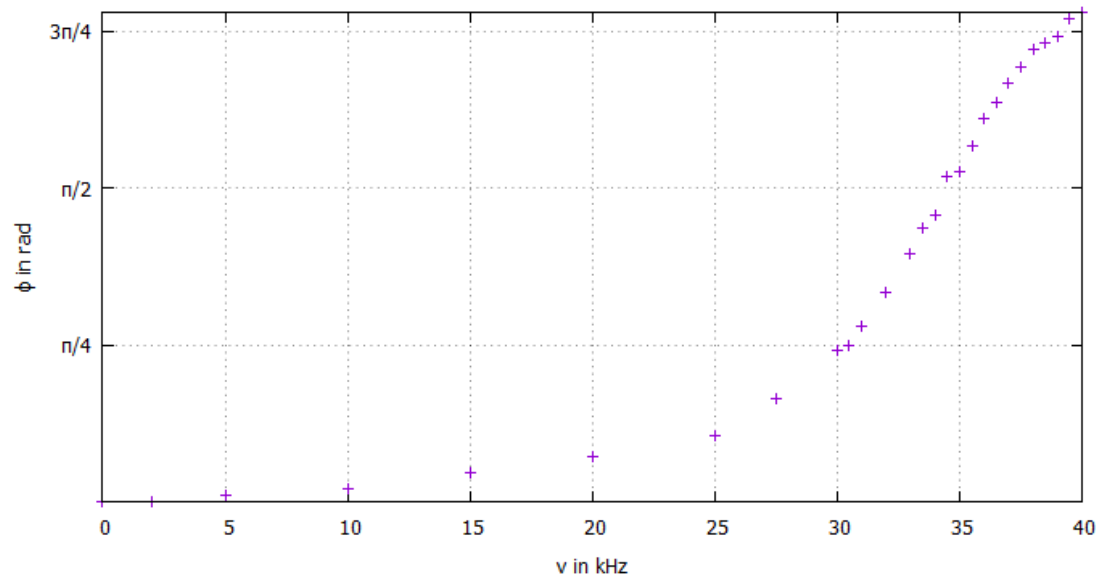


Abbildung 4: Die lineare Darstellung des Verhältnisses Phasenverschiebung von Erreger- und Kondensatorspannung zur Frequenz.

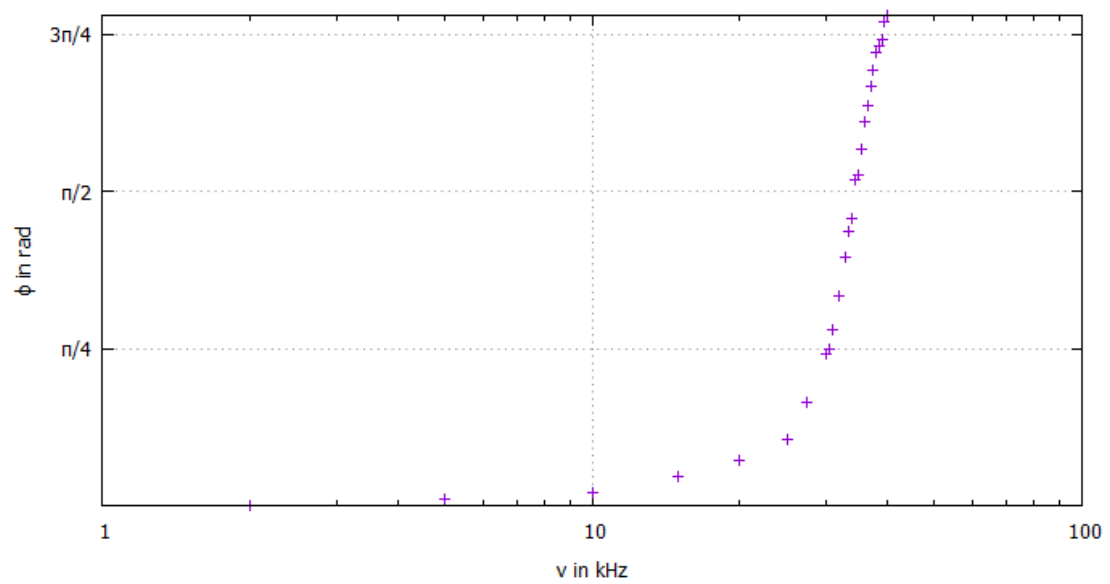


Abbildung 5: Die halblogarithmische Darstellung der Frequenzabhängigkeit der Phase zwischen Erreger- und Kondensatorspannung.

Die experimentellen Werte werden mit den durch (12) und (??) berechneten Werten verglichen:

$$\begin{array}{lll} \text{Theoretisch: } \nu_{res} = (34,55 \pm 0,08) \text{ kHz} & \nu_1 = (30,78 \pm 0,04) \text{ kHz} & \nu_2 = (38,80 \pm 0,03) \text{ kHz} \\ \text{Experimentell: } \nu_{res} = 34,60 \text{ kHz} & \nu_1 = 30,50 \text{ kHz} & \nu_2 = 39,0 \text{ kHz} \end{array}$$

5 Diskussion

Zum Abschluss werden nun Auffälligkeiten und Unterschiede von theoretischen und experimentellen Werten näher untersucht. Der Unterschied vom errechneten effektiven Widerstand R_{eff} und dem im Schaltkreis eingesetzten beträgt, wenn man kleine Messungenauigkeiten vernachlässigt etwa 55Ω , was ungefähr der Wert der des Innenwiderstandes des Funktionengenerators ist und somit geklärt wäre. Der nächste zu betrachtende Wert ist R_{ap} der Widerstand des aperiodischen Grenzfalls, hier ist ein Unterschied von etwa $1,4 \Omega$ zu vermerken, dieser rührt daher, Die folgende Werte zur Güte sowie zur Breite der Resonanzkurve beim Untersuchen der Frequenzabhängigkeit der Kondensatorspannung, liegt klar im Fehlertoleranzbereich. Bei der Phasenuntersuchungen zeigen sich nur sehr geringe Diskrepanzen zwischen den berechneten und gemessenen Werten, was besonders durch Instrumente, wie dem digitalen Oszilloskop und dessen Cursor für genaue Messungen, gegeben ist.