Teoria dos conjuntos e princípios de contagem

Você vai compreender a teoria dos conjuntos, uma linguagem essencial para a descrição de temas matemáticos, bem como conhecer os principais métodos e estratégias combinatórias de contagem.

Prof. Carlos Eddy Esaguy Nehab

Propósito

É fundamental compreender a linguagem da matemática básica para ter domínio dos conceitos e propriedades de conjunto, bem como dos princípios de contagem.

Preparação

Antes de iniciar este conteúdo, tenha em mãos papel, caneta e uma calculadora científica ou use a calculadora de seu smartphone/computador.

Objetivos

- Reconhecer os princípios de contagem.
- Identificar os principais agrupamentos combinatórios.
- Reconhecer a linguagem da teoria dos conjuntos.

Introdução

Olá! Antes de começarmos, assista ao vídeo a seguir e compreenda os conceitos de teoria dos conjuntos e princípios de contagem.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Representação de conjuntos

Neste vídeo, você entenderá as representações e operações entre conjuntos e os intervalos na reta numérica e valor absoluto.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

O conceito intuitivo de **conjunto** é estabelecido desde que somos ainda muito crianças: o conjunto dos meus brinquedos, o conjunto das pessoas de minha família, o conjunto de meus amigos de turma etc.

Naturalmente, conforme vamos amadurecendo, temos contato com conjuntos mais abstratos, como os conjuntos numéricos e, além disso, conjuntos **finitos** e **infinitos**.

Assim, temos:

- O conjunto dos números pares positivos.
- O conjunto de todos os pontos de uma circunferência.
- O conjunto dos pontos do gráfico de uma reta cuja equação é $y = x + 1$.

O importante, de fato, é estabelecermos uma escrita mais formal e adequada para descrever conjuntos, sejam finitos ou infinitos.

Representação explícita de conjuntos

Uma das formas usuais de descrever um conjunto é, simplesmente, enumerando seus objetos entre um par de chaves, separando-os por vírgulas ou, preferencialmente, por ponto e vírgula – para evitar que nosso separador decimal, a vírgula, cause ambiguidades.

Exemplo 1

Confira alguns exemplos.

A = { 1,2 , 1,3 }

Observe que, usando o separador vírgula, não podemos distinguir se os objetos do conjunto são os inteiros de 1 a 4 ou os dois números decimais 1,2 e 1,3, por exemplo. Por isso, em português, sempre que houver possibilidade de dúvida, preferimos utilizar o separador ponto e vírgula.

B = { 1; 3; 9; 7; 5 }

Conjunto cujos elementos (objetos) que o compõem são os números ímpares entre 0 e 10.
Note que em um conjunto não existe o conceito de ordem. Fazendo uma analogia: tudo se passa como se tivéssemos os objetos de um conjunto em uma caixa e os listássemos em qualquer ordem, entre o par de chaves. No entanto, é claro, sempre que fizer sentido, listá-los em ordem crescente ou decrescente (quando seus objetos são números, por exemplo). Isso facilitará a percepção de seus elementos, caso haja alguma lei de formação (equação que representa a variação de uma ou mais variáveis).

C = { 1,7; 1,3; 1,5; 1,1; 1,9 }

Os valores dos 5 primeiros termos de uma progressão aritmética de razão 0,2 e menor termo igual a 1,1.

D= { 1 ; 4; 9; 16; 25; 36; ... }

Observe que a descrição deste conjunto sugere que desejamos descrever uma infinidade de elementos: os tais três pontinhos, ao final, sugerem que estamos interessados nos quadrados de todos os números inteiros.
Esta forma de representar conjuntos infinitos só é indicada quando a lei de formação de seus elementos é natural, simples e não uma charada, como o exemplo a seguir.

E = { 4 ; 13; 34; 73; 136; .... }

Neste caso, há infinitas leis de formação possíveis, uma das quais é **n^3 + 2n + 1**, com n percorrendo os inteiros 1, 2, 3, ... Nestes casos, esta notação não é adequada. A seguir, analisaremos a chamada notação implícita para conjuntos, mais adequada para situações dessa natureza.

Símbolo de pertinência

Quando um objeto x é um dos elementos de um conjunto P, dizemos que x pertence a P e usamos o símbolo de pertinência, representado pela letra grega épsilon, estilizada: " ϵ ". Assim: $x \in P$

Caso x não seja um dos objetos do conjunto P, dizemos que x não pertence a P e escrevemos: $x \notin P$.

Exemplo 2

Perceba, em cada item, que cada pertinência indicada é, como assinalado, uma assertiva verdadeira (V) ou falsa (F).

- $12 \in \{4; 5; 10; 12; 18\}$ V
- $5 \notin \{4; 5; 10; 12; 18\}$ F
- $7 \notin \{4; 5; 10; 12; 18\}$ V
- $\sqrt{16} \notin \{4; 5; 10; 12; 18\}$ F

Exemplo 3

Conjuntos podem, por sua vez, serem também objetos de conjuntos. Uma analogia curiosa, mas extremamente útil, é imaginar uma sacola de compras. O objeto colocado nela diretamente é entendido como um de seus elementos.

Assim, se colocarmos uma caixa de ovos (contendo dez ovos) na sacola de compras, é a caixa de ovos que pertence à sacola, pois, na verdade, cada ovo é um objeto da caixa de ovos, e não da sacola.

Por exemplo, se A é o conjunto { 1; 2; {3, 4}; 5; 6 },perceba que todas as relações de pertinência indicadas a seguir são assertivas verdadeiras.

- $1 \in \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$
- $3 \notin \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$
- $\{3; 4\} \in \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$

- $7 \notin \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$
- $\{1; 2\} \notin \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$
- $\{1\} \notin \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$
- $\{1; 3\} \notin \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$

Representação implícita de conjuntos

A chamada notação implícita de conjuntos utiliza outra estratégia para se referir a seus elementos. Exige que seja explicitada uma propriedade (chamada, na lógica, de sentença aberta) que descreva os objetos nos quais temos interesse.

A seguir, temos a forma usual, embora sejam utilizadas algumas variantes semelhantes.

$$A = \{x \mid p(x)\}$$

Lemos assim: o conjunto dos objetos x tais que p(x) se torna uma proposição verdadeira.

Ou seja, serão objetos do conjunto **exatamente** e **apenas** os objetos que tornarem a expressão p(x) uma proposição verdadeira.

Exemplo 4

F = { x │ x^2 = 9 }

Os valores cujo quadrado igualam 9 são exatamente 3 e -3, e apenas eles. Na verdade, é fácil perceber isso algebricamente. Observe!

$x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (x-3)(x+3) = 0$ [um produto notável].

Mas, o produto de dois números só vale zero exatamente quando um deles é nulo, ou seja:

$(x-3)(x+3) = 0 \Leftrightarrow x - 3 = 0 \text{ ou } x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = 3 \text{ ou } x = -3$

G = { x │ x é inteiro e x^2 < 9 }

Como estamos restringindo x a ser, explicitamente, um número inteiro (a primeira das duas condições), é usual declararmos tal restrição escrevendo essa limitação antes do sinal da i. Usando, como usual, a letra Z para indicar o conjunto dos números inteiros (incluindo os negativos), podemos escrever:

$\{x \in Z \mid x^2 lt; 9\}$

Lemos da seguinte maneira: "O conjunto dos valores de x pertencentes a Z tais que $x^2 lt; 9$ ".

Relação de inclusão entre conjuntos

A representação pictórica (geométrica) de um conjunto, através de alguma figura simples, é extremamente útil. Veja: se X = { 1; 2; 3; 4; 5 }, a imagem a seguir sugere que seu contorno delimita a representação de seus elementos, exibidos, por sua vez, como pontos.

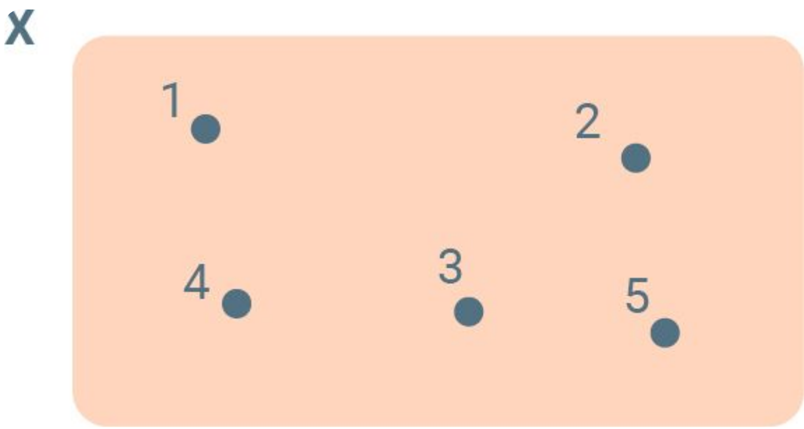


Imagem 1: Representação de um conjunto.

A imagem a seguir, com o diagrama de Y contido no diagrama de X, sugere que todo elemento de Y é, também, um elemento de X.

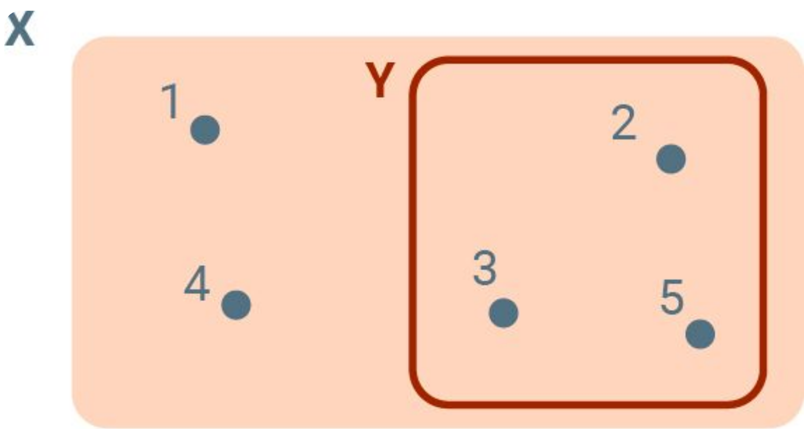


Imagem 2: Representação de um conjunto em que todo elemento Y é também um elemento X.

Essa situação é matematicamente representada pela relação de inclusão entre dois conjuntos, na qual dizemos que "Y está contido em X" ou que "X contém Y".

Representamos situações de inclusão com os sinais usuais $\subset$ e $\supset$. Assim:

$$X \subset \text{ Y ou } Y \supset X$$

Lemos: "X contém Y" ou "Y é parte de X", no primeiro caso e, "Y está contido em X", no segundo caso.

A afirmação "todo elemento de Y é, também, um elemento de X " é válida quando os dois conjuntos X e Y são iguais, ou seja, possuem os mesmos elementos. Assim, para qualquer conjunto X, são válidas as relações $X \subset X$ e $X \supset X$.

Naturalmente, como usual na matemática, uma barra "/" em um sinal que relaciona objetos nega o referido relacionamento.

Vejamos alguns sinais e suas negações.

Igualdade e de desigualdade

$< br > \begin{matrix} < br > amp; a = b \\ < br > amp; a \neq b < br > \end{matrix} < br >$

Paralelismo e não paralelismo

$< br > \begin{matrix} < br > amp; r \| s \\ < br > amp; r \nparallel s < br > \end{matrix} < br >$

Pertinência e não pertinência

$< br > \begin{matrix} < br > amp; x \in X \\ < br > amp; x \notin X < br > \end{matrix} < br >$

Inclusão e não inclusão

$< br > \begin{matrix} < br > amp; X \subset Y \\ < br > amp; X \not\subset Y < br > \end{matrix} < br >$

Contirência (do verbo conter) e não continência

$< br > \begin{matrix} < br > amp; Y \supset X \\ < br > amp; Y \not\supset X < br > \end{matrix} < br >$

Exemplo 5

Analisando as relações apresentadas, verdadeiras, verifique cuidadosamente a justificativa.

$\{1; 5\} \subset \{1; 2; 5; 6\}$

Porque todo elemento do conjunto { 1; 5 }, os números 1 e 5 são, também, elementos do conjunto { 1 ; 2; 5; 6 }.

$\{1\} \subset \{0; 1; 6\}$

Porque o único elemento do conjunto { 1 }, que é o número 1, é também um elemento do conjunto { 0; 1; 6 }.

$\{1; 3\} \not\subset \{1; 2; \{3, 4\}; 5; 6\}$

Embora o número 1, elemento do conjunto { 1; 3 }, seja também objeto do conjunto { 1 ; 2; {3, 4}; 5; 6 }, o número 3, o outro elemento do conjunto { 1; 3 } não é elemento do conjunto { 1 ; 2; {3, 4}; 5; 6 }.

O conjunto vazio

É extremamente útil para a teoria dos conjuntos imaginar um conjunto sem elementos: o conjunto vazio! Designamos esse conjunto pela letra "O" cortada: $\varnothing$. Ou, alternativamente, \{\} .

Seguindo a mesma analogia entre um conjunto e uma sacola de compras do supermercado, a sacola, sem nenhuma compra, representaria o conjunto vazio.

Além disso, o conjunto vazio $\varnothing$ é subconjunto de qualquer conjunto X , ou seja, $\varnothing \subset X$!

Embora a justificativa formal para essa relação seja pouco natural, podemos argumentar, intuitivamente, o seguinte: como não há elementos no conjunto $\varnothing$, a afirmativa "todo elemento de $\varnothing$ é também um elemento de X" não é contrariada. Portanto, podemos admitir que, para qualquer conjunto $X, \varnothing \subset X$.

Intervalos na reta numérica e valor absoluto

Conjuntos numéricos usuais

No estudo de conjuntos, dedicamos importância especial aos conjuntos numéricos, entre os quais os conjuntos básicos a seguir:

Conjunto dos números naturais

Tipicamente, os números naturais, representados por N, são os números utilizados na contagem. Ou seja, $N = \{1; 2; 3; \ldots\}$

Alguns autores incluem o zero como número natural, mas outros preferem omiti-lo.

Conjunto dos números inteiros

Designado tipicamente pela letra Z, inclui os números naturais, o zero e o simétrico dos números naturais. Ou seja, $Z = \{0; -1; 1; -2; 2; -3; 3; \ldots\}$.

Conjunto dos números racionais

Designado pela letra Q (que lembra a palavra quociente), se refere aos números obtidos pelo quociente de números inteiros. Incluem, naturalmente, os números inteiros, os números decimais exatos, como 0,37 e -3,78, por exemplo; e, também, os números cuja parte decimal forma dízimas periódicas. Ou seja, $Q = \{\ldots -0,8; -0,3; 0; 0,3; 0,5 \ldots\}$

Conjunto dos números reais

A totalidade dos números reais é designada, como usual, pela letra R .

Além desses, há uma família de conjuntos extremamente úteis, chamados de intervalos, designados por $R = \{\ldots -3, -2, -1, -\frac{1}{2}, 0, 1, \frac{1}{2}, 2, 3 \ldots\}$

A reta real e os intervalos

Representamos os números reais em uma reta-eixo. Está implícito, nesta representação, o seguinte:

Cada ponto da reta-eixo está associado a um único número real e vice-versa, a cada número real está associado um único ponto da reta-eixo. Confira.

Imagem 3: Representação de uma reta-eixo.

Como decorrência da continuidade dos números na reta-eixo, é interessante imaginar um conjunto de números cuja representação geométrica seja um segmento de reta ou uma semirreta, com os valores das extremidades sendo ou não incluídos no conjunto desejado.

Tais conjuntos são chamados intervalos, cujas convenções utilizadas nas representações gráficas e textuais relativas à inclusão ou não das extremidades estão descritas a seguir.

Inclui extremidade

Nomenclatura: intervalo fechado nesta extremidade.

Representação no gráfico: círculo cheio.

Na notação escrita: colchetes.

Não inclui extremidade

Nomenclatura: intervalo aberto nesta extremidade.

Representação no gráfico: círculo vazado ou seta.

Na notação escrita: parênteses ou colchetes invertidos.

Acompanhe agora diversas situações de representação de intervalos matemáticos.

Situação 1

Representação implicita: $\{x \in R \mid alt; xlt; b\}$
Representação como intervalo: (a; b) ou $]a; b[$

A representação gráfica pode ser vista na imagem a seguir.

Situação 2

Representação implícita: $\{x \in R \mid a \leq xlt; b\}$
Representação como intervalo: $[a; b)$ ou $[a; b[$

A representação gráfica pode ser vista na imagem a seguir.

Situação 3

Representação implícita: $\{x \in R \mid x \geq a\}$
Representação como intervalo: $[a; +\infty)$ ou $[a; +\infty[$

A representação gráfica pode ser vista na imagem a seguir.

Situação 4

Representação implícita: $\{x \in R \mid xlt; b\}$
Representação como intervalo: $(-\infty; b)$ ou $]-\infty; b[$

A representação gráfica pode ser vista na imagem a seguir.

Valor absoluto

A criação do conceito de reta-eixo permite que associemos representações algébricas a representações geométricas, de maneira imediata.

Analisando a imagem a seguir, percebemos que a distância entre os pontos associados a dois números na reta real pode ser calculada subtraindo-se o menor do maior.

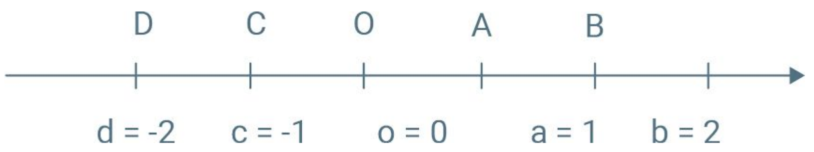


Imagem 8: Reta-eixo.

Ou seja, a distância entre os pontos A e B vale b – a. De forma análoga, podemos calcular as distâncias entre:

- A e O: a – o = 1 – 0 = 1
- C e D: c – d = (-1) – (-2) = 1
- C e A: a – c = 1 – (-1) = 2

Entretanto, como calcular, algebricamente, a distância de um número real (na verdade, o ponto associado) e a origem?

Essa distância é chamada de módulo do número x , e é representado por $|x|$. Claro que $|x|$ tem que ser um valor positivo, por ser uma distância. Então, para evitar a situação de número negativo nas diferenças $x-0$ ou $0-x$, podemos usar duas possíveis expressões algébricas que tornam as diferenças (seja x ou -x) sempre positivas:

$$|x|=\sqrt{x^2} \text{ ou } |x|=\left\{\begin{array}{l} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x<0 \end{array}\right|$$

Experimente atribuir valores positivos e negativos a x e calcule o resultado obtido pelas expressões indicadas.

Exemplo 6

Determine o conjunto-solução das expressões indicadas.

$|x-1|=3$

A expressão modular $|x-1|$ corresponde à distância, na reta real, entre x e 1. Então, a nova pergunta é: quais dos pontos do eixo distam 3 unidades de 1? À direita de 1 é o valor 1+3=4; e à esquerda de 1 é o valor 1-3=-2. Então, o conjunto-solução dessa desigualdade é $S=\{4;-2\}$. Desenhe a reta real (imagem 3) para visualizar esta discussão.

$|2x-4|lt;3$

Inicialmente, convém dividir toda expressão por 2. Obtemos: $|x-2|lt;3/2$

Agora, a pergunta geométrica é: quais xis distam de 2 menos do que $3/2$? Naturalmente, os xis de interesse estão $3/2$ à direita e à esquerda de 2 , no máximo! Ou seja, entre $2=3/2$ e $2+3/2$, isto é, valores de x tais que $0,5lt;xlt;3,5$. Analise a discussão na reta real (imagem 3). Neste caso, a resposta pode ser fornecida sob a forma de intervalo: $S=]0,5;1,5[$.; 1,5[\).

Exemplo 7

Determine o conjunto-solução da equação

$$|x+1|+|x-5|=a$$

Para:

- a=2
- a=3
- a=1

Pegando intimidade com módulos!

Neste vídeo, você verá a solução e a explicação do exemplo anterior.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Operações entre conjuntos

Operação entre objetos matemáticos não constituem novidade: as operações de adição e multiplicação de números reais, adição de vetores, composta de funções, e assim por diante.

Para estudar as operações entre conjuntos, precisamos representá-los graficamente, utilizando os chamados diagramas de Venn.

Diagramas de Venn

Uma discussão envolvendo conjuntos está, em geral, restrita a uma certa categoria de objetos, a um certo universo de discussão. Tal conjunto de objetos é chamado, apropriadamente, de conjunto Universo (U) e, nestes casos, todos os conjuntos em discussão são, naturalmente, subconjuntos de U!

Exemplo

Quando resolvemos uma equação, estamos sempre com algum conjunto universo em mente: o conjunto dos números naturais; dos números racionais etc. Ou seja, nada fora do universo de discussão tem interesse naquele momento. Assim, se você encontrar, algebricamente, uma raiz igual a -4, para uma equação, mas o universo da discussão for o conjunto dos números naturais, tal raiz deve ser descartada. Ela é chamada de raiz estranha ao universo.

Então, quando desenhamos diagramas para conjuntos, no contexto de um conjunto universo U, todos os conjuntos em discussão são, naturalmente, subconjuntos do universo escolhido.

Na imagem 9, os conjuntos X e Y são “restritos” ao conjunto universo U escolhido e seus diagramas estão contidos no diagrama de U.

- X = { a; b; c; d; e; f; g }
- Y = { e; f; g; h; i; j; k}

O universo U de discussão é constituído pelas letras do alfabeto de a até n.

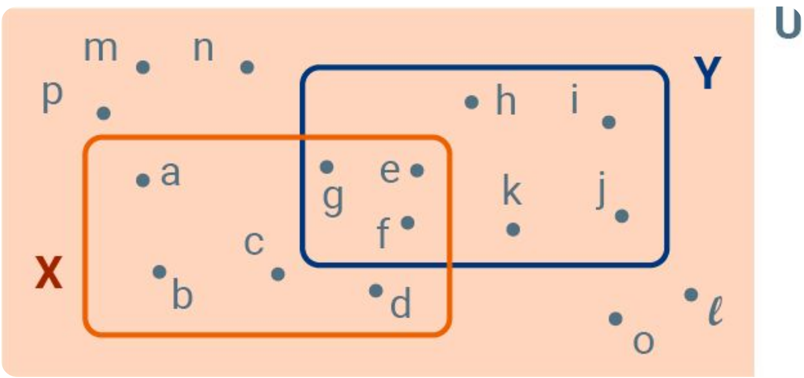
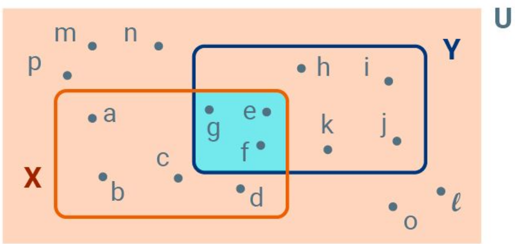


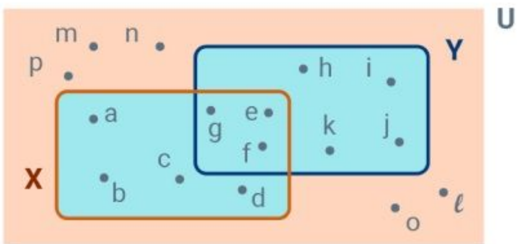
Imagem 9: Representação dos conjuntos X e Y.

A seguir, veja algumas situações interessantes:



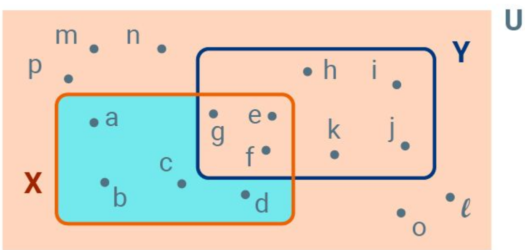
Objetos em comum dos conjuntos

Sugere, em azul, os objetos que pertencem simultaneamente a X e Y. Esse novo conjunto, associado a esses objetos, é chamado de conjunto interseção de X e Y, e o representamos por $X \cap Y$.



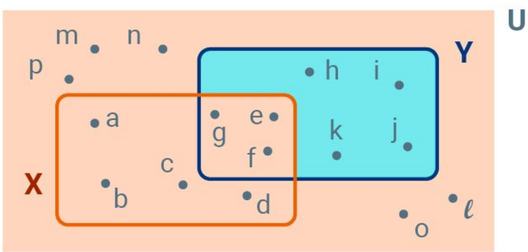
Todos os objetos dos conjuntos

Destaca, em azul, a totalidade dos objetos que pertencem a pelo menos um dos conjuntos X ou Y, podendo, eventualmente, pertencer a ambos. O conjunto constituído por tais objetos é designado por união de X e Y e é representado por XUY.



Objetos que pertencem a X

Indica, em azul, o conjunto dos objetos que pertencem a X, mas que, entretanto, não pertencem a Y.



Objetos que pertencem a Y

Indica, em azul, o conjunto dos objetos que pertencem a Y, mas que não pertencem a X.

Como essa situação lembra o ato de retirar (no sentido de subtrair) de um dos conjuntos os objetos do outro, chamamos essa operação de diferença entre os conjuntos e, no exemplo, as representamos, respectivamente, por X – Y (e Y – X).

Finalmente, é útil referenciar os objetos que não estão em um dado conjunto, ou seja, aqueles fora do conjunto X (ou de Y). Contudo, pertencem ao conjunto universo. Essas situações, descritas na imagem 10, representam as diferenças U - X e U - Y.

Dada a importância dessas situações (determinar o que falta para um conjunto completar o conjunto universo), utilizamos uma nomenclatura adicional: dizemos que, se Z é um conjunto, U – Z é o complementar de Z (com relação ao conjunto universo), e escrevemos simplesmente Z’ (Z linha). Veja.

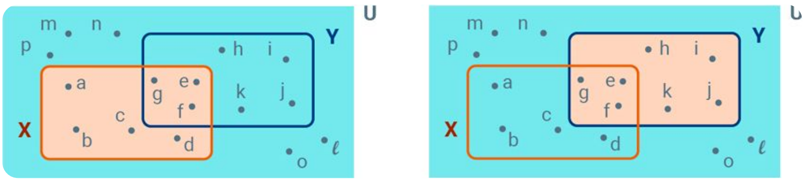


Imagem 10: Representação do conjunto X e Y com o conjunto universo.

Operações usuais entre conjuntos

A análise do diagramas de Venn permite explicitar as seguintes operações entre conjuntos, mais formalmente. Assim, se A e B são conjuntos restritos ao universo U, temos

- A⋂B={x∈U|x∈A **e** x∈B}
- A⋃B={x∈U|x∈A **ou** x∈B}
- A−B={x∈U|x∈A **e** x∉B}
- A’={x∈U|x∉A}

Exemplo 8

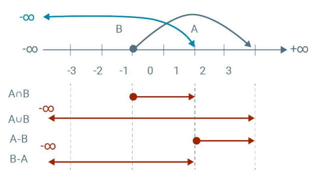
Determine, para cada um dos pares de conjuntos A e B indicados, os conjuntos união, interseção e as diferenças entre ambos.

- a. $A=\{1;2;3;-1;-5\}$ e $B=\{-3;-2;1;3\}$
- b. $A=]-1;3$] e $B=]-\infty;1[$

Solução

a.

A∩B={1;3}
A∪B={1;2;3;−1;−2;−3;−2}
A−B={2;−1}
B−A={−3}



b. A imagem 12 ilustra a solução:

A∩B=[0;1[;A∪B=]−∞;3[A−B=[1;3[e B−A=]−1;1[

Exemplo 9

Dados os conjuntos $A=\{-3;2], B=]-\infty;1]$ e $C=[-1;4[$, determine quantos são os números inteiros do conjunto $X=(A\cap B)\cup C$.

Trabalhando com intervalos!

Neste vídeo, você verá a solução e a explicação do exemplo acima.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Mão na massa

Questão 1

Se Q designa o conjunto dos números racionais e temos $A=\{1;3;-4;2/3;0,111\ldots;\pi\}$, podemos afirmar que $A \cap Q$ é igual a

A { 1; 3; -4; 0,111... }

B { 1; 3 }

C $\{\pi\}$

D { 1; 3; -4 }

E $\{0,111\ldots;\pi\}$

A alternativa A está correta.

Todos os números de A, com exceção de π , são racionais, pois podem ser expressos como quociente de dois inteiros (por exemplo, $0,111\ldots=1/9$).

Questão 2

Assinale a opção que corresponde à representação explícita dos conjuntos $A=\{x \in Z \mid x^2 lt; 4\}$ e $B=\{x \in R \mid x^2 lt; 4\}$

A A = { -2; -1; 0; 1; 2 } e B = [- 2 ; 2 [.

B A = { -1; 0; 1 } e B =] -2; 2 [.

C A = { -1; 0; 1 } e B = [- 2 ; 2].

D A = { -2; -1; 0; 1; 2 } e B = [- 2 ; 2].

E A = { 0 } e B =]- 2 ; 2 [.

A alternativa B está correta.

Se x é um número real positivo, a desigualdade $x^2 lt; 4$ exige $x lt; 2$. Mas, se x for um número real negativo, é necessário que x esteja entre -2 e 0 . Logo, é imediato, para os universos escolhidos, que a resposta correta é B.

Questão 3

Considere as seguintes igualdades, em que A, B e C são conjuntos arbitrários:

(1) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(3) $(A - B) \cup C = A - (B \cup C)$

Das afirmativas realizadas, estão corretas

A todas.

B apenas 1 e 2.

C apenas 1 e 3.

D apenas 3.

E apenas 1, 2 e 4.

A alternativa B está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 4

Considere os conjuntos $X = \{x \in Z \mid 2x - 4gt;3\}$ e $Y = \{x \in Z \mid 3x - 5lt;11\}$. Podemos afirmar que $X \cap Y$ vale

A { 4; 5 }.

B { 3; 4; 5 }.

C { 3; 4; 5; 6 }.

D { 4; 5; 6 }.

E $\varnothing$.

A alternativa A está correta.

A condição $2x - 4gt;3$ acarreta $xgt;3,5$ e a condição $3x - 5lt;11$ implica $xgt;16/3 \cong 5,3$. Mas, como estamos restritos ao conjunto dos números inteiros Z , a opção correta corresponde aos inteiros entre 3,5 e 5,3 .

Questão 5

Considere o conjunto $X = \{x \in R \mid -4lt;xlt;5\}$. Então, o conjunto $Y = \{x^2 \mid x \in X\}$ vale

A] 16; 25 [.

B] 0; 16 [.

C] 0; 25 [.

D] -16; 25 [.

E ø.

A alternativa C está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

A solução da inequação $|x-3| lt; 5$, no universo dos números reais, pode ser expressa pelo intervalo

A] 2; 8 [

B] -2; 8 [

C] 2; 5 [

D] 5; 8 [

E] 0; 8 [

A alternativa B está correta.

A expressão $|x-3|$ representa a distância entre o número real x e o número real 3 . Se essa distância deve ser menor do que $5, x$, deve variar no máximo 5 unidades à esquerda de 3 e, no máximo, 5 unidades à direita de 3. Ou seja, x deve variar entre -2 e 8 .

Teoria na prática

Resolver um sistema de equações/inequações é, conceitualmente, encontrar as soluções comuns a todas as equações/inequações que compõem o sistema. Então, resolver um sistema é determinar a interseção dos conjuntos solução de cada uma das equações. Assim, iremos resolver o sistema indicado.

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 4 \\ |2x - 7| \leq 2 \end{cases}$$

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Se somarmos todos os números reais do intervalo] -2; 5] com todos os números do intervalo [1; 7 [, qual conjunto obtemos?

A [0; 12]

B] -1; 12]

C [-2 ; 11 [

D] -1; 11 [

E] -1; 12 [

A alternativa E está correta.

Uma forma interessante de encontrar a solução é imaginar o que ocorre ao intervalo] -2; 5] quando somamos apenas um mesmo valor, como 3, por exemplo, a todos os seus elementos. O resultado é um outro intervalo que vai de -2 + 3 (exclusive) até 5 + 3 (inclusive), ou seja, o intervalo] 1; 8]. Dessa forma, se somarmos ao intervalo] -2; 5 [todos os números do intervalo [1; 7 [, ou seja, números de 1 (inclusive) a 7 (exclusive), a solução será um intervalo que vai de -2 + 1 (exclusive) a 5 + 7 (também exclusive).

Questão 2

Dados os conjuntos $A = \{1, 3, 5\}$ e $B = \{3; 5; 7\}$. Quantos elementos possui o conjunto $(A - B) \cup (B - A)$?

A 1

B 2

C 3

D 4

E 5

A alternativa B está correta.

$X - Y$ representa o conjunto dos objetos de X que não estão em Y. Assim, $A - B = \{1\}$ e $B - A = \{7\}$. Logo, a união desses conjuntos é $\{1; 7\}$, que possui 2 elementos.

Princípios básicos da contagem

Neste vídeo, você entenderá os princípios básicos da contagem, da casa dos pombos, da adição e da multiplicação.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Princípio da casa dos pombos

É, sem dúvida, um dos enunciados mais poderosos e interessantes da matemática da contagem. Surpreendentemente simples, possibilita a solução de problemas muitas vezes difíceis de abordar, de uma forma elegante e simples. Veja!

> Se n pombos devem ser colocados em m casas, com n>m, então, pelo menos uma casa deverá conter mais do que um pombo.

A seguir, apresentamos uma ilustração desse princípio, para n = 10 e m = 9.

Imagem 12: Ilustração do princípio da casa dos pombos, para n = 10 e m = 9.

Exemplo 1

A seguir, mostramos um exemplo clássico e divertido da aplicação do princípio da casa dos pombos.

Mostre que, em uma cidade de um milhão de habitantes (por exemplo), pelo menos dois habitantes possuem o mesmo número de fios de cabelo.

Solução

Uma rápida consulta à internet informa que o número de fios de cabelo de uma pessoa é por volta de 150.000, não ultrapassando 200.000. Imagine 200.000 casas, numeradas de 1 a 200.000, m que as pessoas com m fios de cabelo serão colocados m-ésimas casas.

Estamos diante da imediata aplicação do princípio da casa de pombos: o número de pessoas (os pombos) vale n =1.000.000; logo, é maior do que m = 200.000 (número de casas). Então, haverá mais de um pombo (pessoa) na mesma casa, ou seja, com o mesmo número de fios de cabelo.

Exemplo 2

Dados doze números inteiros, mostre que, necessariamente, a diferença entre dois deles tem que ser divisível por onze.

Solução

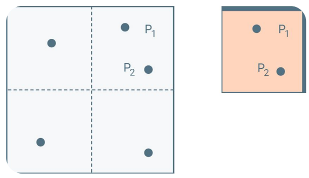
Imagine os restos da divisão de cada um dos 12 números por 11. Como na divisão por 11 os restos são, necessariamente, números entre 0 e 10, então há apenas 11 restos diferentes (que serão associados a 11 casas, uma para cada resto). Logo, dois desses 12 números (os pombos, como no princípio) têm que estar na mesma casa (mesmo resto quando divididos por 11). Mas, se esses dois números deixam o mesmo resto quando divididos por 11, pois a diferença entre os restos vale zero, logo, é divisível por 11!

Exemplo 3

Mostre que, se em quadrado de lado igual a 2 cm há 5 pontos em seu interior, dois deles, necessariamente, distam menos do que $\sqrt{2}$.

Solução

Este é um problema curioso e clássico. Na imagem a seguir, dividimos o quadrado de lado 2 cm em 4 quadrados iguais, de 1 cm de lado cada um. Pelo princípio da casa dos pombos, certamente 2 dos 5 pontos devem estar em um desses 4 quadrados menores, como sugerem os pontos P_1 e P_2.



Além disso, como a maior distância entre dois pontos do quadrado menor é 2 (sua diagonal), o enunciado está provado. Note que, pelo teorema de Pitágoras, o quadrado da hipotenusa é a soma dos quadrados dos catetos. Logo, se um quadrado possui lado 1, sua diagonal é dada por 12+12=2.

Princípio da adição

O chamado princípio da adição, na sua forma mais simples, relaciona os quantitativos de elementos de dois conjuntos finitos com o quantitativo de elementos da sua união e de sua interseção.

Se indicarmos por n(X) o número de elementos do conjunto X, a imagem 14 sugere que

$$n(A \cup B) + n(A \cap B) = n(A) + n(B), \text{ ou } n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

Veja na próxima imagem:

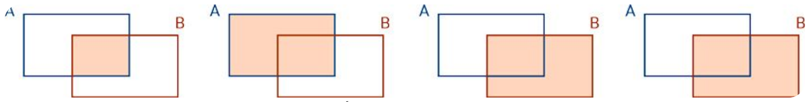


Imagem 14: Representação do princípio da adição.

Se $A \cap B = \varnothing$, então obtemos a versão mais comum do princípio da adição, que diz que, se dois conjuntos não possuem elementos em comum, vale a igualdade.

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

Exemplo 4

No caso de três conjuntos, a análise do diagrama de Venn a seguir auxilia as situações de contagem, bastando observar que os três conjuntos definem uma partição de no máximo 7 regiões disjuntas cuja união reproduz a união dos três conjuntos. Veja!

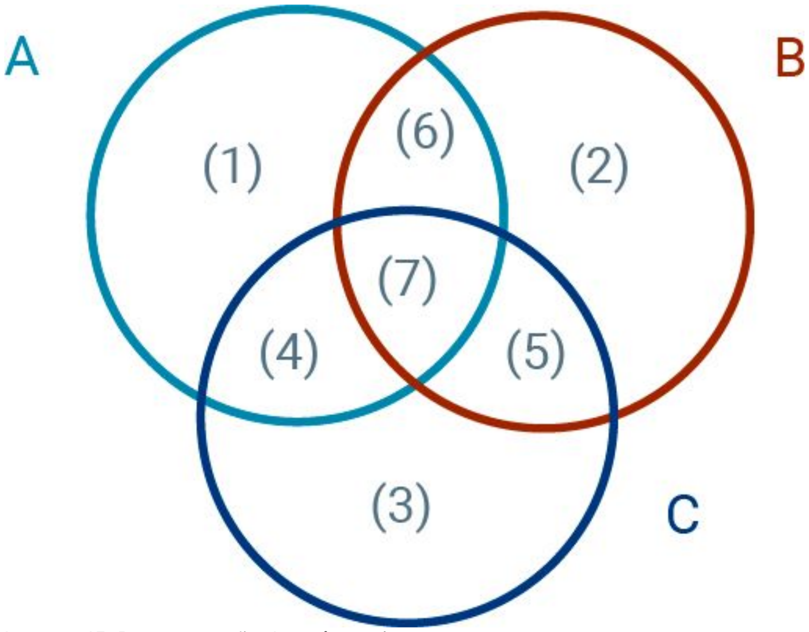


Imagem 15: Representação dos três conjuntos.

Na tabela a seguir, encontramos a explicação.

Subconjunto		Elementos que estão
(1)	$A - (B \cup C)$	exclusivamente em A
(2)	$B - (A \cup C)$	exclusivamente em B
(3)	$C - (A \cup C)$	exclusivamente em C
(4)	$(A \cap C) - B$	em A e em C, mas não em B
(5)	$(B \cap C) - A$	em B e em C, mas não em A

Subconjunto		Elementos que estão
(6)	$(A \cap B) - C$	em A e em B, mas não em C

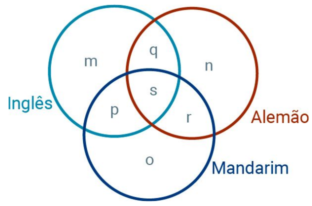
Tabela: Solução do exemplo. Carlos Eddy Esaguy Nehab

Exemplo 5

Em uma escola de idiomas, 200 alunos estão matriculados em algum dos idiomas (inglês, alemão e mandarim). Desses, 50 estudam inglês e alemão; 60 estudam inglês e mandarim; 70 estudam alemão e mandarim e 20 estudam os três idiomas. Qual é a quantidade de alunos que estudam apenas um dentre os três idiomas?

Solução

Chamando as quantidades de alunos de cada parte do diagrama de m, n, o, p, q, r e s, note que o enunciado informa diretamente a quantidade de elementos na interseção dos três conjuntos, ou seja, s = 20. Analisando as diversas regiões do diagrama, podemos concluir, sucessivamente que



s=20
q+s=50⇒ q=30
p+s=60⇒ p=40
r+s=70⇒ r=50

Mas a soma de todas as partes do diagrama (união dos três conjuntos) vale 200.

Como desejamos calcular m + n + o, o resultado é imediato:

m + n + o = 200 – (p + q + r + s)
= 200 – (40 + 30 + 50 + 20)
= 60

Veja na imagem

Princípio da multiplicação

O princípio das multiplicação permite que analisemos um problema de contagem dividindo a análise em etapas, facilitando sua abordagem.

Vejamos seu enunciado.

Se para realizar um processo de contagem precisamos tomar duas decisões sucessivas, tais que:

- Há p maneiras de tomar a 1a decisão.
- Para qualquer uma dessas p maneiras de tomar a 1a decisão, há sempre q maneiras de tomar a 2a decisão.

Então, o número de formas de tomar as duas condições, sucessivamente, é igual a pq .

Atenção

O princípio da multiplicação não exige que a 2ª decisão seja independente da 1ª, mas que a quantidade de formas de tomar a 2ª decisão, ela, sim, seja independente da forma como foi tomada a 1ª.

Analisemos o exemplo a seguir.

Exemplo 6

Determine quantos são os números de 2 dígitos distintos formados com os algarismos 1, 2, 3 e 4.

Solução

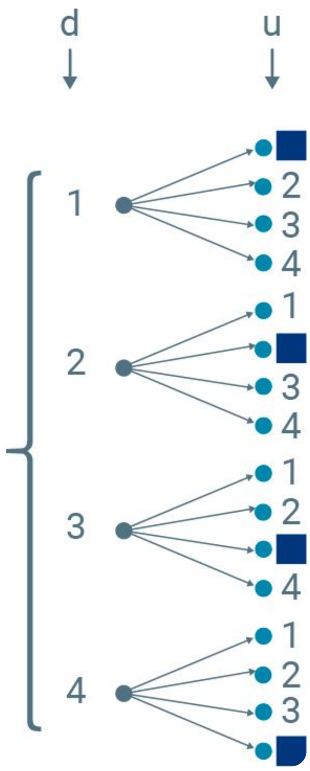
Podemos abordar esse exemplo da seguinte forma:

- 1ª decisão: Escolha do algarismo das dezenas.
- 2ª decisão: Escolha dos algarismos das unidades, que dependem do algarismo das dezenas escolhido.

Note que a quantidade de escolhas para o algarismo das unidades não depende da escolha do algarismo das unidades.

Dispomos de p=4 algarismos para escolher o algarismo das dezenas; e independentemente dessa escolha, teremos sempre q=3 possibilidades de escolha para o algarismo das unidades. Logo, há pq=4.3=12 números que atendem ao problema.

A imagem, uma árvore de decisão, ilustra a solução, em que d e u se referem às escolhas dos algarismos das dezenas e das unidades.



Fatorial e sua notação

É muito comum em problemas de contagem ocorrerem produtos de inteiros consecutivos como o produto dos inteiros de 1 a 5, ou de 9 a 15, ou de 100 a 1000. Um conceito simples e muito útil para representar resultados com produtos dessa natureza o **fatorial**.

Se n é um número inteiro positivo, representamos por n! (com ponto de exclamação) o produto de 1 a n, ou seja: n! = 1.2.3...n. Por exemplo, 3! = 1 × 2 × 3 = 6 e 6! = 1 × 2 x ... x 6 = 720.

Note que produtos de inteiros consecutivos, como 10 × 11 × 12 × 13 × 14, podem ser facilmente expressos com o uso de fatoriais. Veja um exemplo.

$$10 \times 11 \times 12 \times 13 \times 14 = \frac{1.2.3.4.5 \cdot 6 \cdot 7.8.9}{1.2.3.4.5 \cdot 6.7.8.9} \times 10.11.12.13.14 = \frac{14!}{9!}$$

Por conveniência, convencionamos definir zero fatorial como igual a 1, ou seja: 0! = 1.

Exemplo 7

Determine quantas senhas de 6 algarismos podemos formar utilizando os algarismos de 0 a 9, nas seguintes hipóteses:

- Podendo repetir algarismos.
- Usando algarismos todos diferentes.

Solução

Nossa senha possui 6 algarismos: 1º 2º 3º 4º 5º 6º. A escolha de qualquer um desses algarismos pode ser, sem restrição, qualquer um dos 10 algarismos (de 0 a 9). Portanto, pelo princípio da multiplicação, a quantidade de senhas é simplesmente o produto das escolhas de cada um dos dígitos da senha: 10 × 10 × 10 × 10 × 10 × 10 = um milhão.

Uma outra forma de pensar a solução desse problema, direta, é: as possíveis senhas são, na verdade, todos os números que se podem escrever de 000000 até 999999. Ou seja, um milhão de senhas.

Exemplo 8

Determine quantos são os números de 4 algarismos diferentes que podemos formar utilizando apenas os algarismos 0, 4, 5, 6, 7 e 8?

Solução

Nosso número possui 4 algarismos: MCDU. Então, devemos tomar 4 decisões: escolher um algarismo para milhar (M), um para a centena (C), um para a dezena (D) e um para unidade (U). Façamos as escolhas na ordem M, C, D e U.

Escolha de M: Como M é o algarismo de milhar, ele não pode ser 0. Portanto, há 5 possibilidades de escolha: 4, 5, 6, 7, e 8.

Escolha de C: Como já escolhemos um algarismo para M, e os algarismos devem ser diferentes, sobram 5 algarismos para utilizar como algarismo das centenas, C (incluso o 0, que não foi usado para M).

Escolha de D: Como já usamos dois algarismos, podemos escolher para D apenas 4 dos algarismos restantes ainda não usados.

Escolha de U: Restam apenas 3 dos seis algarismos. Portanto, há 3 possibilidades de escolha de U, algarismo das unidades.

Como as quantidades sucessivas de algarismos possíveis não depende de qual escolha fizemos na etapa anterior, o total desejado é, pelo princípio da multiplicação, igual ao produto das quantidades das escolhas sucessivas, ou seja, 5 × 5 × 4 × 3 = 300 números diferentes.

Exemplo 9

Determine quantos são os números de 3 algarismos distintos que podem ser formados com os algarismos de 0 a 6.

Aplicando o princípio da multiplicação!

Neste vídeo, você verá a solução e explicação do exemplo anterior.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Agrupamento simples

Neste vídeo, você entenderá a análise sistemática de problemas de contagem, bem como duas situações específicas desse tipo de agrupamento.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

A análise sistemática de problemas de contagem permite identificar duas situações básicas que ocorrem quando formamos agrupamentos com p elementos a partir de n objetos dados. Veja!

Situação 1

Quando a ordem dos p objetos escolhidos para constituir um particular agrupamento gera agrupamentos diferentes entre si. Por exemplo:

- A definição de senhas ou códigos na qual a ordem em que os algarismos ou letras são escolhidos gera uma senha ou código diferente.
- A determinação de anagramas de uma palavra.
- A criação de filas a partir de um certo conjunto de pessoas.
- E assim por diante.

Situação 2

Quando a ordem de escolha dos p objetos para a formação de um agrupamento é irrelevante na geração do agrupamento. Por exemplo:

- A criação de comissões com p pessoas a partir de um conjunto de n pessoas disponíveis.
- A escolha de uma sobremesa quando temos direito a duas sobremesas dentre as 7 disponíveis.
- E assim por diante.

O primeiro caso remete a uma situação bastante banal, imediatamente contável a partir do princípio da multiplicação. É o caso dos agrupamentos chamados de arranjos simples e permutações simples.

O segundo caso (quando a ordem dos objetos escolhidos é irrelevante na formação dos agrupamentos) é uma situação mais elaborada e se constitui nos agrupamentos chamados de combinações ou de números binomiais.

Analisemos, a seguir, exemplos dessas situações.

Exemplos

Exemplo 10

Agrupamento arranjo simples

De quantas maneiras podemos fazer filas com 5 alunos, se dispomos de 12 alunos?

Solução

Neste caso, temos 5 lugares a preencher: 1º lugar ao 5º lugar da fila. Para escolher o 1º da fila, dispomos dos 12 alunos; logo há 12 escolhas possíveis; para o 2º lugar da fila só há, agora, 12 – 1 = 11 alunos. Continuando o raciocínio, é fácil perceber que o número total de filas será, pelo ***princípio da multiplicação***, o produto das quantidades de escolhas para cada um dos 5 lugares na fila, ou seja:

12 × 11 × 10 × 9 × 8 (total de 5 parcelas multiplicadas, do 12 ao 8).

Vejamos como expressar esse resultado na forma de fatorial:

$$< br > \begin{matrix} < br > amp; 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 = 12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8 \times \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}{7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1} \\ < br > amp; = \frac{12!}{7!} = \frac{12!}{(12-5)!} < br > \end{matrix} < br >$$

Esse tipo de situação, na qual dispomos de n objetos e queremos criar filas (ordenações), usando apenas p dos n objetos disponíveis, é um dos agrupamentos usuais da análise combinatória: são os chamados **arranjos de n objetos tomados p a p** que, usualmente, representamos por A_p^n ou $A_{n,p}$.

Nessas situações, a quantidade de situações a ser calculada pode ser expressa de duas maneiras. Veja!

- Produto de p números consecutivos, a partir de n, inclusive, e de forma decrescente.
- Quociente dos fatoriais de n e de $n-p$, ou seja, $\frac{n\,!}{(n-p)!}$.

Experimente agora refazer esse exemplo para os seguintes casos:

- 20 alunos com filas com 2 alunos.
- 10 alunos com filas de 3 alunos e, finalmente; caso de 8 alunos com todos na fila.
- 8 alunos com todos na fila.

Se você encontrou os valores a seguir, parabéns!

- 20 × 19 = 20!/(20 – 2)! = 20!/18! = 380 filas.
- 10 × 9 × 8 = 10!/(10 – 3)! = 10!/7! = 10.9.8 = 720 filas.
- 8 × 7 × 6 × 5 × 4 × 3 × 2 × 1 = 8!/(8 – 8)! = 8!/0! = 8! = 40.320 filas.

Exemplo 11

Agrupamento permutação simples

Calcule o número de anagramas das palavras “trapo” e da palavra “publicar”.

Solução

Antes de resolvermos o exercício proposto, observe o seguinte:

Se dispusermos de n objetos e colocarmos todos na fila, o número total de possíveis filas é o produto n x (n – 1) x ... x 2 × 1, porque podemos escolher um dos n objetos como 1º da fila, um dos n – 1 restantes como 2º da fila e assim sucessivamente, até atingirmos o último lugar da fila onde só teremos um objeto para escolher.

Essa situação, na qual $n = p$, ou seja, dispomos de n objetos para ordenar todos os n objetos, é um caso particular de arranjo (onde $p = n$) e preferimos chamá-lo de **permutação simples de n objetos** (porque pressupõe-se que desejamos ordenar todos eles)!

A notação utilizada é $P_n = n! = 1 \times 2 \times \ldots \times n$ e, é claro, $A_n^n = P_n = n!$

Retomando o exemplo:

O anagrama de uma palavra é uma combinação das mesmas letras da palavra original, na mesma quantidade que cada letra ocorre, formando outra (e que possua ou não significado). Por exemplo, “porta”, “prato” e “optar” são anagramas da palavra “trapo”.

Então, desejamos, simplesmente, calcular de quantas maneiras podemos embaralhar as letras da palavra trapo (todas diferentes). Isso é equivalente a ordenar de todas as maneiras possíveis as 5 letras (diferentes) da palavra indicada. Naturalmente, a resposta é imediata:
$A_5^5 = P_5 = 5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$ anagramas.

No segundo caso, a palavra "publicar" também possui letras diferentes e um total de 8 letras.
Então, o número de anagramas é
$< br > A_8^8 = P_8 = 8! = 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 40320 \text{ anagramas } < br >$

Portanto, o agrupamento permutação nada mais é que um caso particular do agrupamento arranjo, quando desejamos ordenar (embaralhar todos os n objetos, ou seja, o tamanho p das filas é igual ao próprio n.

As situações em que há letras repetidas na palavra original serão tratadas mais a frente.

Exemplo 12

Agrupamento combinação

Dispomos de 8 funcionários de uma empresa para formar uma comissão de três participantes, na qual um dos participantes será o presidente, um o secretário e outro, o tradicional puxa-saco.

Quantas são as comissões possíveis? E se na comissão não houver os cargos descritos, ou seja, forem apenas comissões com 3 participantes dentre os 8 disponíveis?

O agrupamento combinação simples

Neste vídeo, você verá a solução e explicação do exemplo anterior.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Exemplo 13

Determine quantos subconjuntos de 3 elementos podemos construir a partir de um conjunto com 7 elementos.

Solução

Os últimos exemplos abordados tratam, basicamente, de ordenar objetos. Mas há situações em que a ordem dos objetos não é relevante. Este exemplo é uma dessas situações, pois os conjuntos a seguir são o mesmo conjunto, cujos elementos são a, b e c.

$< br > \{a, b, c\} e \{a, c, b\}, \{b, c, a\}, \{b, a, c\}, \{c, a, b\} e \{c, b, a\} < br >$

Então, como seria possível realizarmos o cálculo solicitado, ajustando o raciocínio utilizado na ordenação de objetos para este caso? É simples! Se desejamos saber quantas filas de 3 objetos podemos fazer com os 7 elementos de um conjunto, basta perceber que "arranjo de 7 objetos tomados três a três" responde parcialmente ao problema, pois estamos contando mais de uma vez um mesmo conjunto. Por exemplo, se a, b e c são 3 dos 7 objetos do conjunto, então estamos contando as 6 filas diferentes, mas como subconjuntos diferentes, que são, na verdade, iguais. Então, ordenando 7 objetos 3 a 3 , obtemos $A_3^7 = \frac{7!}{(7-3)!} = 7.6.5 = 210$. Mas, de cada três objetos escolhidos, estamos contando $3! = 6$ vezes o mesmo conjunto! Então, para ajustar nosso resultado, devemos dividir o resultado anterior por $3! = 6$. Logo, podemos formar $210/3! = 35$ subconjuntos de 3 elementos a partir de um conjunto com 7 elementos.

Então, no caso geral, devemos dividir o número de filas por p! para contarmos uma única vez cada uma das p! filas que compõem o mesmo conjunto.

Representando o número de combinações de n, p a p por C_p^n ou $\binom{n}{p}$, temos:

$$C_p^n = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

Mão na massa

Questão 1

Em um saco com 50 bolas, 20 são azuis e 30 são verdes. Qual é o menor número de bolas que devemos retirar do saco para garantirmos que retiramos pelo menos duas bolas azuis?

A 21

B 22

C 25

D 31

E 32

A alternativa E está correta.

Podemos resolver este problema sem usarmos, diretamente, o princípio da casa dos pombos, mas veja: imaginemos duas caixas, uma azul e outra verde. Retirando uma a uma as bolas do saco, em certo momento você pode garantir que não haja alternativa a não ser colocar duas bolas na caixa azul! Certamente quando todas as bolas verdes estiverem na caixa verde!

Questão 2

Quantos são os anagramas da palavra “Alfredo”?

A 8!

B 8+7+6+5+4+3+2+1

C 7!

D 7+6+5+4+3+2+1

E 6!

A alternativa C está correta.

Como as letras da palavra "Alfredo" são diferentes, basta embaralharmos todas (que são 7). Logo, a resposta correta é a permutação de 7 objetos, ou seja, $P_7 = 7$!.

Questão 3

Se as placas de carro de um país são formadas por 2 letras distintas, seguidas de 4 algarismos, também diferentes, quantas são as possíveis placas?

A $26^2 \times 9^4$.

B $26 \times 25 \times 10^4$.

C $26^2 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$.

D $26 \times 25 \times 10 \times 9 \times 8 \times 7$.

E $26 \times 25 \times 10^3$.

A alternativa D está correta.

A placa deve possuir 6 caracteres, assim: $C_1C_2C_3C_4C_5C_6$. Para o primeiro caractere, C_1 , podemos escolher qualquer uma das 26 letras do alfabeto; como segundo caractere, já que devem ser diferentes, podemos escolher apenas 25 letras; analogamente, os caracteres C_3 a C_6 poderão ser preenchidos respectivamente por 10,9,8 e 7 dígitos, respectivamente. Como essas escolhas são independentes, pelo princípio da multiplicação, a opção correta é a alternativa D.

Questão 4

Utilizando os algarismos de 1 a 8, quantos números pares podemos formar de 4 algarismos distintos?

A $8! = 40.329$

B $7! \times 4 = 20.160$

C $8 \times 7 \times 6 = 336$

D $4 \times 7 \times 6 \times 5 = 840$

E $8^3 \times 4$

A alternativa D está correta.

Escolhendo os algarismos das unidades (U), dezenas (D), centenas (C) e milhares (M), nesta ordem, temos:

U: 4 alternativas $\Rightarrow$ 2, 4, 6, ou 8. D: 7 alternativas $\Rightarrow$ 7 algarismos (exceto o já utilizado como U). C: 6 alternativas $\Rightarrow$ 6 algarismos (exceto dois já usados). M: 5 alternativas $\Rightarrow$ 5 algarismos (exceto dois já usados).

Como as escolhas dos dígitos de cada ordem são independentes, o total desejado é $4 \times 7 \times 6 \times 5 =$ 840

Uma outra solução é calcular todos os números de 4 dígitos distintos independentemente de serem pares ou ímpares. Equivalem a 8.7.6.5 = 1680. Como há 4 algarismos pares e 4 algarismos ímpares, por simetria, a metade é de números pares.

Questão 5

Os artigos em uma loja são codificados da forma que se segue: três letras maiúsculas e diferentes consecutivas, seguidas de um hífen; mais 6 algarismos quaisquer (de 0 a 6); mais um hífen e, finalmente, mais uma letra qualquer do alfabeto.

Considere, como exemplo, o conjunto de códigos: {AHD-4193678-K, GEQ-093044-Q, AAA-9497-X}.

Qual o número total de produtos que podem ser codificados dessa maneira?

A $26^4 \times 10^6$

B $26^2 \times 25 \times 24 \times 10^2$

C $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 7^6$

D $\frac{26!}{23!} \times 7^6$

E $26^2 \times 25 \times 24 \times 7^6$

A alternativa E está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Questão 6

Dado o conjunto A = { a; b; c; d; e; f; g }, quantos são os subconjuntos de A que não possuem os objetos a e b, mas necessariamente possuem os objetos f e g?

A 20

B 16

C 12

D 8

E 6

A alternativa D está correta.

Essa situação é equivalente a dispormos apenas dos objetos c, b, e, e escolhemos ou não tais objetos em nosso subconjunto! Escolher ou não c, nos dá 2 alternativas; escolher ou não d também, e escolher ou não e também, duas alternativas. Como a escolha (ou não) de c, d ou e são independentes, o princípio da multiplicação nos dá:

$2 \times 2 \times 2 = 8$ alternativas para formar os subconjuntos desejados.

Teoria na prática

Dos 20 funcionários de uma empresa, 13 são homens e 7 são mulheres. Desejamos formar uma comissão constituída por 3 homens e 5 mulheres. Quantas são as possíveis comissões?

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Quantas senhas com algarismos diferentes podem ser formadas com no mínimo 4 e no máximo 6 dígitos, usando os algarismos de 0 a 9?

A 186.480

B 188.455

C 139.339

D 122.222

E 111.987

A alternativa A está correta.

4 algarismos: 10 escolhas para o 1º algarismo; 9 para o 2º; 8 para o 3º e 7 para o 4º. Logo há 10´9´8´7 = 5.040 senhas.

5 algarismos: Analogamente, 10´9´8´7´6 = 30.240 senhas.

6 algarismos: 10´9´8´7´6´5 = 151.200 senhas.

Observe que os conjuntos das senhas de 4, 5 ou 6 algarismos são conjuntos disjuntos dois a dois. Então, pelo princípio da adição, o total de senhas é 5.040 + 30.240 + 151.200 = 186.480.

Questão 2

Dado o conjunto A = { 1, 3, 5; 7; 9 }, quantos são os subconjuntos de A, com 3 elementos, mas que não possuem o número 5?

A 2

B 4

C 6

D 12

E 24

A alternativa C está correta.

Se não podemos escolher o número 5, tudo se passa como se escolhêssemos apenas os outros 2 elementos dentre os elementos 1, 3, 7 e 9 (de A). Então, o resultado desejado equivale a combinações de 4 elementos tomados 3 a 3, ou seja:

$C_2^4 = \frac{4!}{(4-2)!2!} = 6$

Agrupamentos especiais

Neste vídeo, você entenderá mais sobre alguns pontos importantes, como arranjo com repetição e permutação com repetição.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

A análise dos diversos tipos de problemas de contagem sugere que há padrões úteis e que é possível, em casos mais simples, usar uma tipologia de agrupamentos para tipificar inúmeros problemas. Destacamos a família dos arranjos, das permutações e a das combinações.

Você já conhece algumas dessas situações utilizando os chamados arranjos, permutações e combinações simples. Destacamos as seguintes características:

- Se, ao criar um agrupamento com os objetos disponíveis, a mudança da ordem dos objetos gera um agrupamento diferente, ou seja, a ordem em que os objetos formam o particular agrupamento é relevante, temos o caso clássico de filas, senhas etc., e os agrupamentos utilizados são os arranjos e as permutações.
- Se, ao criar um agrupamento com os objetos disponíveis, a mudança da ordem dos objetos não gera um agrupamento diferente, ou seja, a ordem em que os objetos formam o agrupamento é irrelevante, temos o caso clássico de formar subconjuntos ou comissões de pessoas. São as chamadas combinações.

Mas há situações adicionais, quando podemos repetir objetos nos agrupamentos, como determinar o número de anagramas de uma palavra, em que haja letras repetidas; ou, por exemplo, escolher um sorvete “casquinha” quando podemos escolher dentre 3 dos 5 sabores disponíveis, sendo permitido repetir um sabor.

Neste módulo, trataremos de algumas dessas situações, em especial as de agrupamentos com repetição.

Arranjo com repetição

Arranjos com repetição de n objetos tomados p a p, cuja quantidade é representada por AR_p^n , são agrupamentos da seguinte natureza:

Dispomos de n objetos e queremos saber de quantas maneiras podemos escolher p desses elementos de tal forma que possa haver repetição dos objetos no agrupamento formado.

Para escolher o primeiro dos objetos, dispomos dos n objetos originais. Mas, na escolha dos demais objetos, como pode haver repetição, há sempre n objetos disponíveis. Ou seja:

$$AR_p^n = n \times n \times \ldots \times n = n^p$$

Uma situação clássica é a formação de senhas de 6 caracteres, por exemplo, dispondo-se das letras (maiúsculas são contadas como diferentes das minúsculas) e dos 10 algarismos, não sendo permitidos caracteres especiais. Naturalmente, como o total de caracteres disponíveis é 26 + 26 + 10 = 62, o número de senhas possíveis com 6 caracteres é 62^6, que é superior a 60 bilhões! Quase 10 vezes a quantidade de habitantes do planeta!

Permutação com repetição

Uma situação típica que este agrupamento descreve são anagramas de uma palavra quando a original possui letras repetidas.

Exemplo 1

Calcule o número de anagramas das palavras “Araraquara” e da palavra “matemática”.

Permutando objetos repetidos

Neste vídeo, você verá a solução e explicação do exemplo anterior.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Permutação circular

Normalmente, os agrupamentos são sequências de objetos dispostos em linha. Entretanto, um tipo especial de agrupamento ocorre quando desejamos dispor n objetos ou pessoas em volta de uma mesa ou de um círculo. Veja!

Exemplo 2

Desejamos dispor quatro amigos (Antônio, Bernardo, Carlos e Daniel) em volta de uma mesa. De quantas maneiras podemos realizar essa tarefa?

Solução

De uma maneira geral,representando por PC_n o número de permutações circulares de n objetos, é imediato perceber que a solução desejada é
$PC_4 = (4-1)! = 6$

Agrupamento especial sem ordem

Combinação com repetição

O agrupamento combinações simples são caracterizados por serem formados com p objetos, a partir de n objetos disponíveis, em que a ordem não é relevante e não há repetição de nenhum objeto no mesmo agrupamento.

Quando permitimos que objetos em um mesmo agrupamento possam ser repetidos, temos as chamadas combinações com repetição de n objetos tomados p a p.

Exemplo 3

Suponha que uma loja possua tabletes (barras) de chocolate de três marcas diferentes e você deseja comprar oito tabletes. De quantas formas diferentes podem ser escolhidos os tabletes em sua compra?

A combinação com objetos repetidos!

Neste vídeo, você verá a solução e explicação do exemplo anterior.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

O exemplo anterior mostra que a invenção dos diversos tipos de agrupamentos e as expressões para o cálculo do quantitativo de cada um deles é, na prática, decorrente diretamente de estratégias e do princípio da multiplicação. Portanto, é perfeitamente possível (e diríamos, desejável) resolvermos problemas de contagem sem sabermos o que são arranjos, permutações e combinações!

Síntese dos tipos de agrupamento

Explicitamos, a seguir, as principais categorias de agrupamentos abordados, bem como as notações de seus quantitativos e as fórmulas associadas.

É importante perceber que, dentre todos esses agrupamentos estudados, apenas a permutação simples e a combinação simples são, de fato, relevantes para a solução de problemas de contagem. Isso porque os princípios da adição e da multiplicação resolvem, por si só, praticamente qualquer problema de contagem.

Arranjos

Esse tipo de agrupamento possui os seguintes subtipos:
Simples: $A_p^n = n(n-1)\ldots(n-p+1) = \frac{n!}{(n-p)!}$
Com repetição: $AR_p^n = n^p$

Permutações

Esse tipo de agrupamento possui os seguintes subtipos:
Simples: $P_n = n \cdot (n-1)(n-2)\ldots 1 = n!$
Circular: $P_n = (n-1)(n-2)\ldots 1 = (n-1)!$
Com repetição: $P_{p,q,\ldots,s}^n = \frac{n!}{p!q!\ldots r!}$

Combinações

Esse tipo de agrupamento possui os seguintes subtipos:
Simples: $C_p^n = \frac{A_p^n}{p!} = \frac{n!}{(n-p)!p!}$
Com repetição: $C_{p,q,\ldots,t}^t = \frac{n!}{p!q!\ldots t!}$

Mão na massa

Questão 1

Quantos são os anagramas da palavra “arranjo”?

A 10.080

B 5040

C 2520

D 1260

E 620

A alternativa D está correta.

Desejamos embaralhar (permutar) as 7 letras. Mas, há duas letras A e duas letras R. Portanto, trata-se de um agrupamento do tipo permutação com repetição. Logo, a quantidade de agrupamentos é $PR^7_{2,2} = \frac{7!}{2!2!} = 1260$.

Questão 2

Determine de quantas maneiras posso construir senhas de exatamente 4 caracteres, a partir exclusivamente das 26 letras minúsculas, dos 10 algarismos, e dos 3 símbolos especiais @, # e &?

A 39^{39}

B 4^{39}

C 39^4

D 4^4

E 39×4

A alternativa C está correta.

Neste caso, desejamos embaralhar um total de 4 objetos (podendo repeti-los) sendo que dispomos de um total de 39 objetos. A solução é imediata, porque temos 39 objetos para escolher como primeiro caractere da senha e, também, 39 objetos para os demais caracteres da senha. Pelo princípio da multiplicação, a quantidade total é $39 \times 39 \times 39 \times 39 = 39^4$. Este exemplo configura o agrupamento arranjo com repetição de n objetos tomados p a p , onde $n = 39$ e $p = 4$, e usando a fórmula, temos: $AR^{39}_4 = 39^4$.

Questão 3

Em uma padaria, há 10 tipos de biscoitos doces e 7 tipos de biscoitos salgados. Você deseja comprar 4 pacotes de biscoito doce e 3 pacotes de biscoito salgado. Se você poderá comprar pacotes iguais de biscoitos, de quantas maneiras os 7 pacotes de biscoitos que você pretende comprar podem ser escolhidos?

A $P_{10} \times P_4$

B $PR_4^{10} \times PR_3^7$

C $A_4^{10} \times A_3^7$

D $C_4^{10} \times C_3^7$

E $CR_4^{10} \times CR_3^7$

A alternativa E está correta.

Inicialmente, é importante perceber que você deverá realizar duas ações independentes: escolher os 4 pacotes de biscoitos doces dentre os 10 tipos disponíveis e, analogamente, escolher 3 pacotes de biscoitos salgados dentre os 7 tipos disponíveis. Cada uma dessas ações corresponde a uma situação de combinar certa quantidade de biscoitos a partir de uma quantidade disponível, configurando duas situações de combinações com repetição!

- Quantidade de escolhas de pacotes 'doces': $CR_4^{10} = C_{10}^{10+4-1} = C_{10}^{13}$
- Quantidade de escolhas de pacotes 'salgados': $CR_3^7 = C_7^{7+3-1} = C_7^9$.

Como estas duas ações são independentes, o número total de escolhas é dado pelo Princípio da Multiplicação: $CR_4^{10} \times CR_3^7$.

Questão 4

Desejamos arrumar 5 livros de probabilidade, 7 livros de cálculo e 8 de álgebra linear em uma prateleira de uma estante, de tal forma que livros sobre o mesmo assunto fiquem juntos. Quantas são as formas de arrumá-los?

A $3! \times 5! \times 7! \times 8!$

B 20!

C 20!/[5!×7!×8!]

D 5!×7!×8!

E 3!×20!

A alternativa A está correta.

Vejamos uma forma natural de analisar este problema. Se você imaginar que cada assunto é um bloco de livros, um primeiro aspecto do problema é calcular quantas são as formas de ordenar os 3 assuntos (claro, imaginando os livros de cada assunto amarrados com barbante): naturalmente é a quantidade de formas em que posso permutar 3 objetos (os amarrados): 3!.

Mas, dentro de cada assunto, os livros também podem ser permutados entre si. Então, como cada uma dessas 4 ações são independentes, a quantidade desejada é: $3! \times 5! \times 7! \times 8!$

Questão 5

Vamos retornar à análise de problemas de contagem priorizando a estratégia mais importante, o princípio da multiplicação, em vez dos agrupamentos.

“Em uma eleição para um clube, um grupo de 20 amigos deseja formar uma chapa para se candidatar, sendo necessário um nome para presidente, outro para vice-presidente e outro para diretor tesoureiro, e tais cargos não podem ser preenchidos pela mesma pessoa. No estatuto do clube, há uma restrição quanto à escolha do tesoureiro, que deve ser um contador. Sabendo que no grupo de amigos há apenas 4 contadores, quantas chapas diferentes podem ser formadas por eles?

A 20^2

B 20^3

C 4×19^2

D $4 \times 19 \times 18$

E 2×19^2

A alternativa D está correta.

Vamos abordar o problema pensando diretamente no princípio da multiplicação, escolhendo, em primeiro lugar as eventuais situações que possuem algum tipo de restrição. Veja!

- Para escolher o tesoureiro, há apenas 4 amigos disponíveis.
- Após a escolha, restam 19 amigos para presidente.
- Finalmente, após essa escolha, ainda há 18 amigos para vice-presidente.

Logo, como as escolhas para cada cargo são ações independentes, pelo princípio da multiplicação há exatamente $4 \times 19 \times 18$ chapas para concorrer.

Questão 6

Quantos subconjuntos possui um conjunto com 8 elementos?

A 28

B 56

C 64

D 128

E 8!

A alternativa D está correta.

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Teoria na prática

De quantas maneiras poderemos dividir entre três herdeiros uma herança de 20 moedas de ouro idênticas?

Chave de resposta

Assista ao vídeo a seguir para conferir a resolução da questão.

Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Verificando o aprendizado

Questão 1

Quantos são os anagramas da palavra “anagrama”?

A 8!

B 8!/4!

C 4!

D 8! / [4! . 4!]

E 8^4

A alternativa B está correta.

Quando permutamos as 8 letras da palavra "anagrama", obtemos um total de 8!. Mas há 4 letras A. Imagine, então, que você misture entre eles, nos 8! anagramas, formados essas 4 letras A. Estaríamos contando $4! = 24$ anagramas como diferentes, quando, na verdade, são o mesmo anagrama. Portanto, devemos dividir 8 ! por $4! = 24$ para ajustar as repetições contidas nos 8 ! anagramas iniciais. Outra forma direta de analisar o problema consiste em perceber que é um caso típico de permutações com repetição, ou seja: $PR^8_{4,1,1,1} = 8!/4$!.

Questão 2

Um grupo de 10 crianças forma uma roda para brincar da dança das cadeiras. De quantas maneiras diferentes as crianças podem formar a roda inicial?

A 9!/10

B 9!

C 10!

D 10! /10

E 10^9!

A alternativa D está correta.

O importante aqui é a ordem circular em que as crianças estão dispostas. A diferença dessa situação para simplesmente colocar as 10 crianças em fila é que, nas 10 ! filas possíveis, ocorre a repetição 10 vezes de cada organização em círculo! Ou seja, estamos, tipicamente, com um agrupamento do tipo permutação circular. Então, o número desejado é a permutação (circular) de 10 objetos, dividido por 10, ou seja, 10!/10, que é exatamente o número de permutações circulares de 10 objetos, ou seja, PC_{10} .

Considerações finais

A teoria ingênua dos conjuntos enfatiza os aspectos gerais e básicos da representação de conjuntos, bem como suas principais operações. Os principais subconjuntos do conjunto dos números reais, em particular, os chamados intervalos, foram abordados nos aspectos de notação, de suas representações na reta real e das operações gerais sobre conjuntos. O conceito de módulo é tratado sob o aspecto algébrico e sua interpretação como distância de um ponto na reta real à origem.

Os conceitos básicos de conjuntos, aliados à argumentação lógica, são parte essencial da linguagem utilizada na narrativa matemática, em geral. Assim, podemos dizer, sem exagero, que o módulo 1 é pré-requisito para a leitura de qualquer texto sobre matemática. Os aspectos básicos relativos à contagem, além da capacidade de dominar os campos aditivos e multiplicativos numéricos são, atualmente, a essência do que chamamos de numerácia.

Posteriormente, apresentamos os princípios centrais da contagem, em especial, os princípios da adição e da multiplicação e, a partir deles, identificamos categorias típicas de contagem de objetos, envolvendo ou não a possibilidade do uso de repetição nos agrupamentos formados a partir de um conjunto inicial de objetos disponíveis. O módulo encerra enfatizando o uso de padrões de contagem e explora, também, os agrupamentos simples, notadamente os arranjos, as permutações e as combinações. Observe a importância desse tema para os dois subsequentes: probabilidade e estatística.

Por fim, aprofundamos o assunto da contagem, abordando problemas mais sofisticados, bem como explicitamos os agrupamentos que incluem a possibilidade de repetição de objetos na composição de cada agrupamento. Os problemas mais sofisticados de contagem, normalmente, exigem múltipla abordagem, ou seja, o eventual do princípio da multiplicação, aliado ao uso dos agrupamentos padrão já conhecidos e estudados. É muito importante perceber que podemos resolver qualquer problema de contagem sem conhecer os diversos agrupamentos convencionais encontrados na literatura, mas jamais sem o uso dos princípios da multiplicação/adição (os carros-chefes) de todo processo de contagem.

Explore +

Compreenda um pouco mais sobre o princípio de contagem lendo o artigo **Intervenção em princípios de contagem: desenvolvimento do programa e aplicação inicial**, de Évelin de Assis e Luciana Corso, disponível no portal da Fundação Carlos Chagas.

Uma fonte inestimável de consulta pode ser encontrada no **Portal da Matemática da OBMEP**, do IMPA. Lá, você pode rever qualquer assunto de seu interesse.

Sugerimos também a palestra **Princípios de contagem, de A a Z**, apresentada no IMPA em janeiro de 2024, pelo professor Carlos Nehab. O vídeo está disponível no YouTube.

Referências

HALMOS, P. **Teoria ingênua dos conjuntos**. São Paulo: Ciência Moderna, 2001.

MACEDO, R. S. **Teoria dos conjuntos**: a alma do movimento da matemática moderna. *s.l.. s.n.*, 2020.

SANTOS, J. P. O.; MELLO, M. P.; MURARI, I. T. C. **Introdução à análise combinatória**. São Paulo: Ciência Moderna, 2008.

SANTOS, I. **Introdução à análise combinatória**. São Paulo: Ciência Moderna, 2020.