

A minimalist line-art illustration in the background. On the right, a person with short hair and round glasses is shown from the chest up, holding a large open book. The book is held with both hands, and its pages are slightly curved. In the upper left area, there are three diamond shapes of varying sizes. A large, thin arc sweeps across the top of the page, partially enclosing the diamond shapes.

# Gráficos e interpretações gráficas

Interpretação de gráficos e seus principais pontos.

Prof. Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

## Propósito

Reconhecer que, no cotidiano, muitas quantidades dependem de uma ou mais variáveis; portanto, o conceito de gráfico das funções torna-se essencial ao profissional, pois os gráficos fazem parte da comunicação e conseguem, muitas vezes, passar informações independentemente de idiomas locais.

## Preparação

Reconhecer que, no cotidiano, muitas quantidades dependem de uma ou mais variáveis; portanto, o conceito de gráfico das funções torna-se essencial ao profissional, pois os gráficos fazem parte da comunicação e conseguem, muitas vezes, passar informações independentemente de idiomas locais.

## Objetivos

- Interpretar os conceitos básicos de intervalo.
- Identificar pontos no plano.
- Interpretar as informações contidas em um gráfico.
- Identificar pontos notáveis de um gráfico.

## Introdução

A matemática é uma linguagem que permite analisar e descrever diversas situações. Este conteúdo apresenta as funções a partir de conceitos elementares, como: intervalos, pontos e plano cartesiano, e contribui para o entendimento das funções, correlacionando-as a uma lista ou tabela em que o plano cartesiano não é nada além do objeto de manifestação gráfica de seus resultados.



### Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

## Intervalos

### Intervalos reais

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo a este vídeo. Vamos lá?



#### Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

No decorrer deste tema, os intervalos merecem destaque. Será necessário que você analise situações gráficas e localize os melhores momentos – os intervalos – para possíveis intervenções.

A palavra intervalo nos remete a uma forma de medir.

Quando consideramos o intervalo das 9 às 11 horas, temos todos os minutos, segundos e qualquer subdivisão de tempo compreendida nesse período.

No contexto matemático, os intervalos são subconjuntos do conjunto dos números reais  $R$ .



#### Exemplo

Todos os valores entre 3 e 5. Isso significa, por exemplo, que o número irracional  $\pi$  (pi), que é aproximadamente 3,14, pertence a esse intervalo, bem como o número 4, pois eles são maiores que 3 e menores que 5.

É claro que você pode usar a língua portuguesa para descrever tais conjuntos, mas a Matemática também é uma linguagem com características próprias, que serão abordadas ao longo deste tema.

## Conceitos

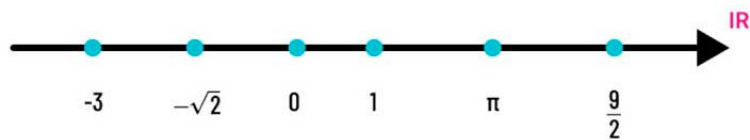
### Classificando intervalos na reta numéricas



#### Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Intuitivamente, ao pensar em números reais, você deve imaginar uma reta infinita, onde cada ponto dela é um número real. Esse objeto será chamado de **Reta Real** e admite o símbolo  $R$ . Essa reta é organizada de forma crescente do menos infinito ( $-\infty$ ) ao mais infinito ( $+\infty$ ).



Reta real

Dessa forma, é importante destacar que:

Um intervalo é um subconjunto dos números reais.

Para uma representação gráfica desse conceito, adotaremos a seguinte notação:

#### Bola fechada

Indica que o extremo do intervalo **está contido** no conjunto.

#### Bola aberta

Indica, em nossa representação, que o extremo do intervalo **não está contido** no conjunto.

Dessa forma, o intervalo, que pode ser visto na imagem a seguir, compreende todos os números reais de 1 até 6, **excluindo o 1** e **incluindo o 6**.



## Transferindo a linguagem

Quando tratarmos do conjunto dos números reais, os símbolos:

### Bola fechada

É representada por:

$\geq$  (maior ou igual) e  $\leq$  (menor ou igual) ou  $[ ]$  (colchetes)

Se  $x \in \mathbb{R}$  e  $-4 \leq x \leq 2$ , isso significa que  $x$  pode ser maior que  $-4$  ou igual a  $-4$  e menor que  $2$  ou igual a  $2$ ; portanto, dentro do intervalo.



Sobre a notação de conjuntos, podemos representar tal intervalo da seguinte forma:  $[-4, 2] = \{x \in \mathbb{R}; -4 \leq x \leq 2\}$  Ou seja, todos os números reais **a partir** do número  $-4$  até o número  $2$ . Um intervalo que possui as extremidades é chamado de intervalo fechado.

### Bola aberta

É representada por:

$>$  (maior) e  $<$  (menor) ou  $( )$  (parênteses) ou  $] [$  colchetes

Se  $x \in \mathbb{R}$  e  $-4 < x < 2$ ,  $x$  pode ser maior que  $-4$  e menor que  $2$ . Portanto, os extremos não fazem parte do conjunto.



Sobre a notação de conjuntos, podemos representar tal intervalo da seguinte forma:  $]-4, 2[ = \{x \in \mathbb{R}; -4 < x < 2\}$  Ou seja, todos os números reais depois do número  $-4$  anteriores ao número  $2$ . Um intervalo que não possui as extremidades é chamado de intervalo aberto.

A **amplitude de um intervalo** é sempre definida por:

$$\text{Amplitude} = \text{LS} - \text{LI} \text{ Onde: LS = Limite superior do Intervalo LI = Limite inferior do intervalo}$$

Portanto, nos **casos anteriores**, podemos calcular a **amplitude** do intervalo subtraindo a extremidade mais à direita da extremidade mais à esquerda:

$$2 - (-4) = 6$$

Isto é, nos **dois casos**, o **intervalo** possui a **amplitude** de **6 unidades**.

Você deve estar se perguntando:

Mesmo com os intervalos abertos, onde as extremidades não estão incluídas, a amplitude é a mesma dos intervalos fechados?

A resposta é **sim!**

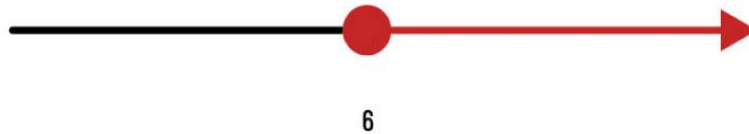
Isso acontece porque, mesmo nos intervalos abertos, é possível pensar que podemos ficar bem perto do limite aberto. Na verdade, podemos ficar "infinitamente" perto de um limite aberto. Logo, a amplitude (também traduzida na figura como o comprimento do trecho da reta) será igual se o limite for fechado ou aberto.

Agora, vamos entender as semirretas.



### Exemplo

$x \in \mathbb{R}$  e  $x \geq 6$   $x$  pode ser maior que 6 ou igual a 6 e, portanto, estará dentro do intervalo.



Intervalo

Sobre a notação de conjuntos, podemos representar tal intervalo da seguinte forma: `

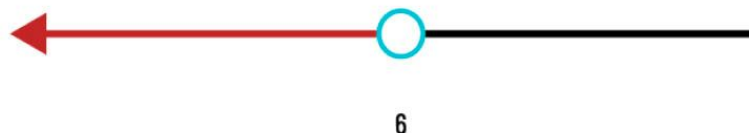
$$(-\infty, 6] = \{x \in \mathbb{R}; x \leq 6\}$$

Ou seja, todos os números reais a partir do número 6. Note que uma semirreta pode possuir, no máximo, uma extremidade e, neste caso, diremos que a semirreta é **fechada**.



### Exemplo

$x \in \mathbb{R}$  e  $x < 6$  isso significa que  $x$  pode ser apenas menor que 6, e nunca igual a 6; portanto, 6 não está dentro do intervalo.



6 não está dentro do intervalo.

Ou seja, todos os números reais **antes** do número 6. A semirreta que não possui a sua extremidade é denominada **semirreta aberta**.

Note que uma semirreta tem a **amplitude infinita**.

## Vamos aplicar o que estudamos até agora?

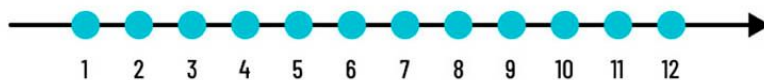
Exemplos onde podemos perceber intervalos à nossa volta



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Designaremos os valores de 1 até 12 como os meses do ano, 1 para janeiro, 2 para fevereiro, e assim por diante, até chegarmos a 12 para dezembro.



A partir das informações apresentadas até aqui, tente responder a questão a seguir.

### Atividade discursiva

Caracterize por intervalos o segundo trimestre do ano:

### Chave de resposta

O segundo trimestre de um ano contém os meses de abril, maio e junho. No gráfico da reta que temos, consideramos 1 para janeiro, 2 para fevereiro, e assim em diante. Desse modo, podemos seguir a lógica de 1 para janeiro; 2 para fevereiro; 3 para março; 4 para abril; 5 para maio; 6 para junho; 7 para julho; ....; 12 para dezembro.

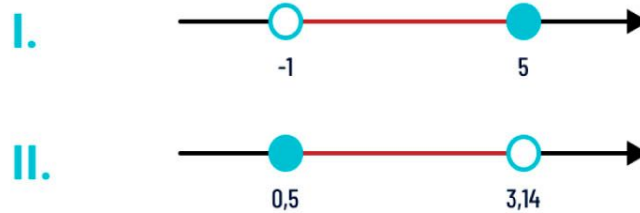
Logo, o segundo trimestre seria o intervalo dos números que representam os meses de abril, maio e junho, que seriam 4, 5 e 6. Portanto, o intervalo do segundo trimestre seria  $[4, 6]$ . Representado pela figura:



## Verificando o aprendizado

### Questão 1

Considere os intervalos a seguir:



A  $\{x \in R; -1 < x \leq 5\}$  e  $\{x \in R; 0,5 < x < 3,14\}$

B  $\{x \in R; -1 < x \leq 5\}$  e  $\{x \in R; 0,5 \leq x < 3,14\}$

C  $\{x \in R; -1 \leq x \leq 5\}$  e  $\{x \in R; 0,5 < x < 3,14\}$

D  $\{x \in R; -1 \leq x \leq 5\}$  e  $\{x \in R; 0,5 \leq x \leq 3,14\}$



E  $\{x \in \mathbb{R}; -1 < x < 5\}$  e  $\{x \in \mathbb{R}; 0,5 < x < 3,14\}$



A alternativa B está correta.

A atividade em questão tem o propósito das associações, isto é,  $>$ ,  $<$  bola aberta e  $\geq$ ,  $\leq$  bola fechada. Assim, devemos procurar a alternativa que contenha aberto em  $-1$ , fechado em  $5$ , fechado em  $0,5$  e aberto em  $3,14$ . A única alternativa com exatamente essa combinação é a letra B.

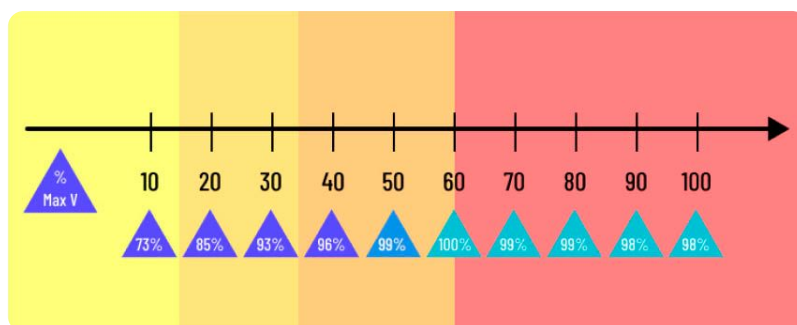
Vamos apresentar algumas soluções aceitáveis para cada uma das representações.

a.  $\{x \in \mathbb{R}; -1 < x \leq 5\}$  ou os números reais maiores que  $-1$  e menores ou iguais a  $5$  ou os números reais entre  $-1$  e  $5$ , incluindo o número  $5$  ou  $(-1, 5]$ .

b.  $\{x \in \mathbb{R}; 0,5 \leq x < 3,14\}$  ou os números reais maiores ou iguais a  $0,5$  e menores que  $3,14$  ou os números reais entre  $0,5$  e  $3,14$ , incluindo o número  $0,5$  ou  $[0,5, 3,14)$ .

## Questão 2

Veja, a seguir, o desempenho de um corredor durante uma competição dos 100 metros rasos. A reta em questão mostra a marcação da distância na pista e, a cada 10 metros, é apresentado o desempenho do corredor em comparação à sua velocidade máxima.



Em qual dos intervalos a seguir o corredor manteve a sua velocidade maior ou igual à de 99% de sua capacidade máxima.

A  $[50, 80]$

B  $[30, 100]$

C  $[0, 50)$  e  $(80, 100]$

D  $(59, 61)$

E  $[50, \infty)$



A alternativa A está correta.

A palavra maior ou igual presume que estamos considerando o valor de 99% em nossa análise. Sendo assim, o intervalo que corresponde ao que foi pedido é a letra A.

# Plano cartesiano

## Como posicionar pontos no plano cartesiano

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo ao presente vídeo.



### Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Na vida cotidiana, muitas quantidades mensuráveis dependem de uma ou mais variáveis. Por exemplo: o crescimento das plantas depende da luz solar e das chuvas; a velocidade depende da distância percorrida e do tempo gasto; a tensão elétrica depende da corrente e resistência.

O plano cartesiano é uma das formas mais eficientes para representar o relacionamento entre duas ou mais variáveis.



### Saiba mais

O plano cartesiano foi criado com o objetivo inicial de marcar pontos no plano pelo matemático e filósofo René Descartes (1596-1650).

Neste módulo, apresentaremos algumas ideias de como podemos fazer uso dessa ferramenta.

## Conceitos do plano cartesiano

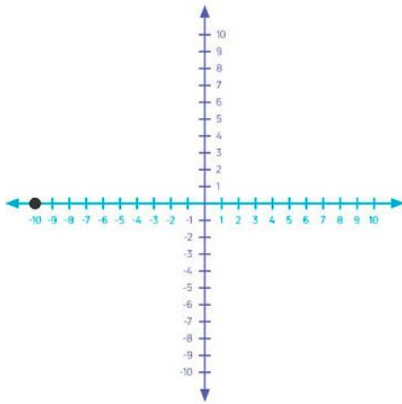
## Entendendo o plano cartesiano, marcando pontos com GeoGebra



### Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

O plano cartesiano apresenta duas linhas numéricas: uma horizontal, da esquerda para a direita, e outra vertical, de baixo para cima.



Exemplo de plano cartesiano

Utiliza-se a letra x para simbolizar os valores sobre a reta horizontal e a letra y para simbolizar os valores sobre a reta vertical.

Observe que, à medida que x aumenta, o ponto se move mais para a direita. Quando x diminui, o ponto se move mais para a esquerda.

À medida que y aumenta, o ponto se move mais para cima. Quando y diminui, o ponto se move mais para baixo.

É importante ressaltar que as retas horizontal e vertical também são chamadas, respectivamente, de "abscissa" e "ordenada". O ponto  $(0,0)$  é chamado de "origem".

As coordenadas são sempre escritas em determinada ordem. A coordenada horizontal vem primeiro. Então, em seguida, vem a coordenada vertical. Isso é chamado de **par ordenado**.

### Par ordenado

Par de números em uma ordem especial.



### Atenção

Os números são separados por vírgula e, em torno deles, ficam os parênteses.

Como exemplo vamos **marcar os pontos no plano cartesiano**:  $(1, -2)$ ;  $(2, 4)$ ;  $(-3, 0)$ ;  $(-1, -2)$ ;  $(0, 5)$ . Em primeiro lugar, precisamos montar uma tabela com os pontos dados:

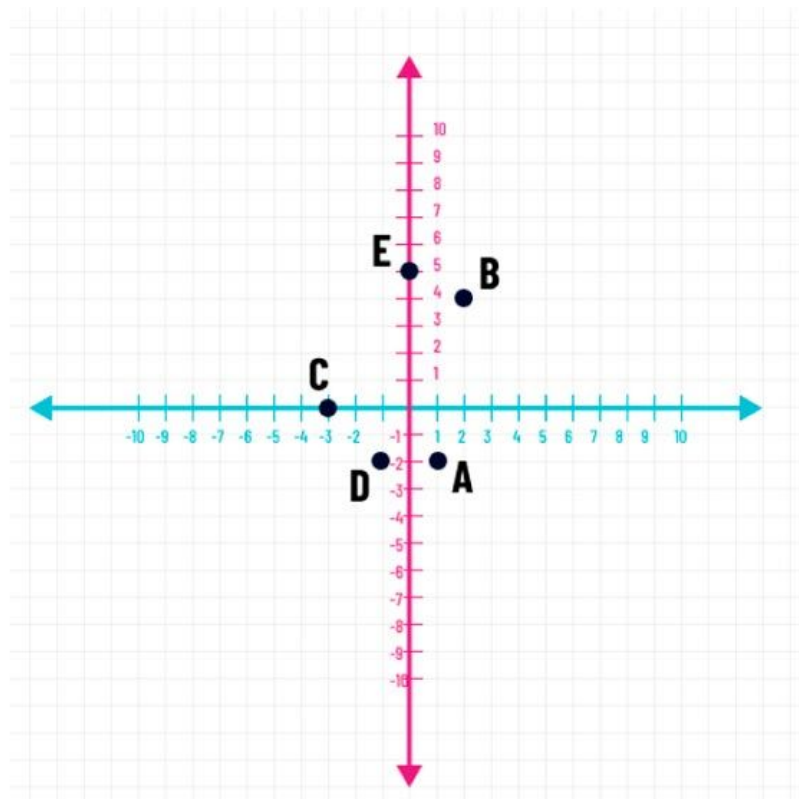
x	y
1	-2
2	4
-3	0
-1	-2
0	5

Pares ordenados para pontos no plano cartesiano.

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

É importante perceber que a notação se parece com a de intervalo aberto que aprendemos no Módulo 1. Portanto, você deve se manter atento ao que é pedido no enunciado de cada questão.

Agora, marcaremos as coordenadas no plano cartesiano. Sendo a primeira na reta horizontal, abscissa, e a segunda na vertical, ordenada.



Pontos no plano cartesiano

Vejamos agora um vídeo sobre a aplicação do conceito de plano cartesiano em robótica.

## Aplicação do plano cartesiano na robótica



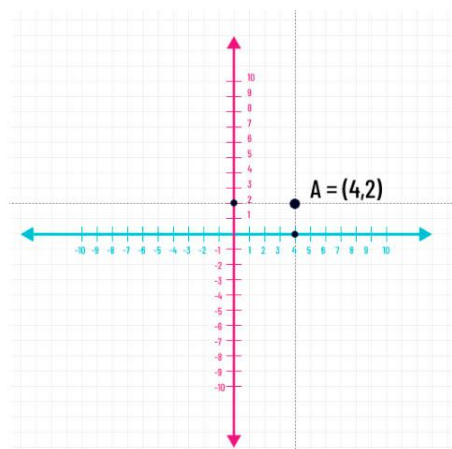
Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Agora, vamos verificar se você entendeu por meio de uma atividade?

## Atividade discursiva

Na figura a seguir, vemos o ponto  $(4, 2)$ .



Diga o que ocorre se movimentássemos o ponto:

1. Duas unidades para cima.
2. Três unidades para a esquerda e, depois, duas unidades para baixo.

#### Chave de resposta

1. O ponto moveria duas unidades na reta da variável  $y$  para cima. Logo, parou em  $(4, 4)$ .
2. O ponto moveria 3 unidades para a esquerda, parando em  $(1, 2)$  e, depois, foi deslocado duas unidades para baixo, parando em  $(1, 0)$ .



#### Saiba mais

Pesquise calculadoras e aplicativos na Internet para representar os pontos no plano cartesiano. O GeoGebra é um exemplo de ferramenta disponível na Internet.

Acabamos de vislumbrar o plano cartesiano como forma de representação gráfica de uma tabela, ilustrando a relação de dois ou mais objetos ou grandezas.

Um gráfico, nessas condições, é uma estrutura matemática bem definida. Em todos os exemplos e nas atividades, vimos que podemos representar pontos em uma tabela e as tabelas no plano cartesiano. Essa associação entre as tabelas e os pontos no plano cartesiano forma a ideia central do módulo 3.

## Verificando o aprendizado

### Questão 1

A imagem apresenta um gráfico de setores de uma cidade. Esses setores foram divididos de A a H, e de 0 a 3, assim a identificação de um setor pode ser feita da seguinte forma, como exemplo: A0, B3, F2 etc. Considere que todos os setores foram divididos em áreas iguais (considere os retângulos idênticos), e que existe a necessidade de se realizar uma entrega que saia de B0 e chegue em G0. O gráfico abaixo apresentam duas rotas para que seja realizada a entrega.

A				
B				
C				
D				
E				
F				
G				
H				
	0	1	2	3

Após observar essas rotas, analise as afirmativas "abaixo":

1. A rota vermelha é a mais longa
2. A rota verde é a mais curta
3. A rota vermelha é a mais adequada

Sabendo que a entrega deve ser feita o mais rápido possível, percorrendo a menor distância permitida, assinale a opção correta, sobre a veracidade das afirmações "acima":

A I- verdadeira, II- verdadeira, III- falsa

B I- falsa, II- verdadeira, III- falsa

C I- verdadeira, II- falsa, III- falsa

D I- verdadeira, II- falsa, III- verdadeira

E I- falsa, II- verdadeira, III- verdadeira



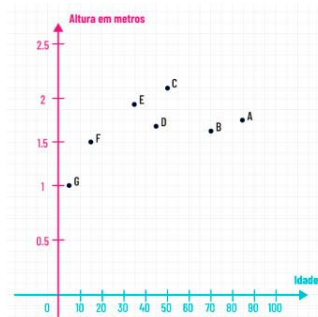
A alternativa A está correta.

Uma vez que os quadrados possuem áreas iguais e os retângulos são considerados idênticos, o que determina a distância é a quantidade de retângulos pintados. Veja que temos 10 retângulos vermelhos e 7

retângulos verdes, sendo assim, as afirmativas I e II são verdadeiras. Por conta do fato de a entrega ter que ser feita o mais rápido possível, percorrendo o menor caminho, a rota mais adequada é a rota verde, que é mais curta, por isso a afirmativa II é falsa.

## Questão 2

No gráfico abaixo é mostrada a relação da altura de 7 indivíduos, com sua idade:



Relação da altura

Após observar o gráfico, assinale a opção que apresenta, respectivamente, o indivíduo de maior idade e o indivíduo de maior altura.

☐ A F e G

☐ B A e E

☐ C D e A

☐ D D e C

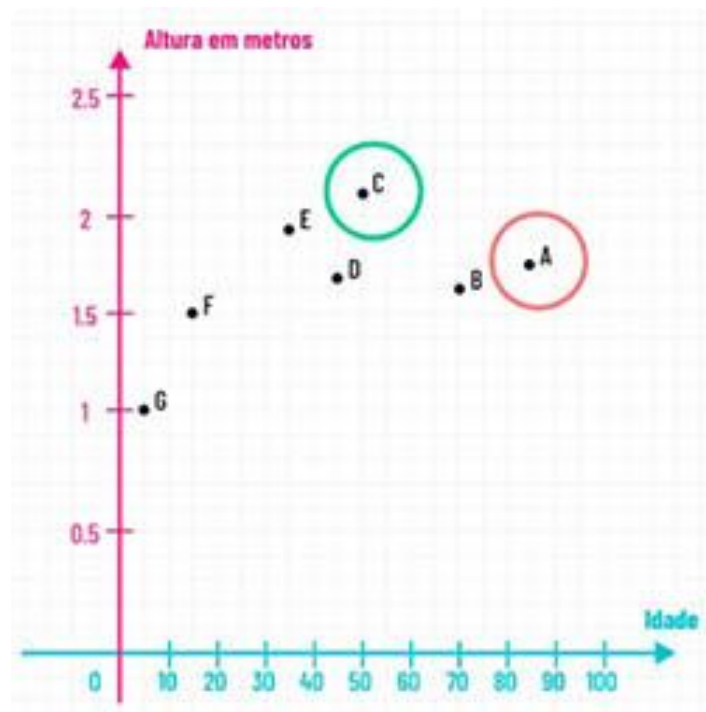
☒ E A e C



A alternativa E está correta.

Uma vez que os quadrados possuem áreas iguais e os retângulos são considerados idênticos, o que determina a distância é a quantidade de retângulos pintados. Veja que temos 10 retângulos vermelhos e 7 retângulos verdes, sendo assim, as afirmativas I e II são verdadeiras. Por conta do fato de a entrega ter que ser feita o mais rápido possível, percorrendo o menor caminho, a rota mais adequada é a rota verde, que é mais curta, por isso a afirmativa II é falsa.





Resposta do exercício

## Vamos começar!

### Exemplo de aplicação do plano cartesiano

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo ao presente vídeo.



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

## O que é função?

### Evolução do conceito histórico de funções



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

A palavra **função** apareceu pela primeira vez em um artigo de Gottfried Leibniz, em 1692. Ele chamou de função as **quantidades geométricas variáveis relacionadas** a uma **curva**.



Gottfried Leibniz

Filósofo alemão (1646 - 1716) e figura central na história da Matemática e da Filosofia.

No entanto, foi **Daniel Bernoulli**, em 1718, que definiu o conceito de função de maneira formal pela primeira vez, e se tratava de algo bem diferente do que conhecemos hoje em dia.



Daniel Bernoulli

Matemático suíço (1700 - 1782), lembrado por suas aplicações da Matemática à Mecânica.



#### Saiba mais

Para conhecer mais sobre a história e a formalização do conceito de função, leia o livro História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas.

Podemos perceber o conceito de função quando temos duas quantidades ("variáveis") e observamos que há uma relação entre elas. Se acharmos que, para cada valor da primeira variável, existe apenas um valor da segunda variável, dizemos que:

A **segunda variável** é uma função da **primeira variável**.

## Uma função é, a rigor, uma tabela organizada



### Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

No módulo anterior, vimos que podemos representar tabelas utilizando o plano cartesiano, no qual uma função não é nada além de uma tabela em que todos os valores da primeira coluna estão relacionados aos valores da segunda coluna, sem ambiguidades entre os valores da primeira coluna e os da segunda. É claro que esta não é a definição formal de função, mas, na prática, é o que se deseja. Veremos a seguir alguns exemplos de função.

## Exemplos de função

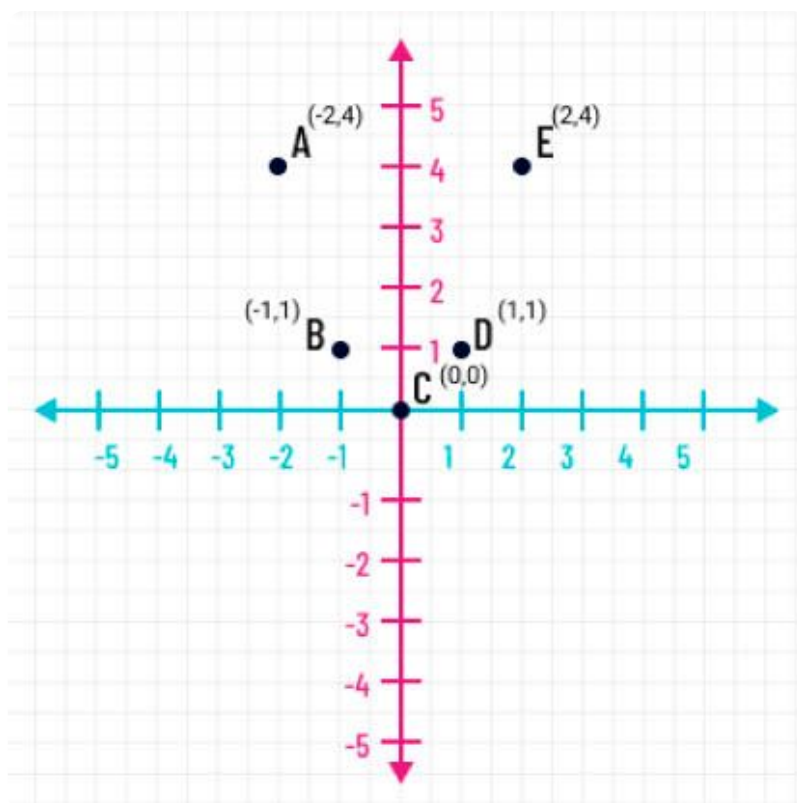
### Exemplo 1

Vamos fazer uma tabela com a seguinte relação: a cada número real  $x$ , associamos o seu valor ao quadrado  $x \times x = x^2$ . A seguir, podemos acompanhar o que ocorre com essa tabela de forma associada ao plano cartesiano.

Valor de $x$	Valor de $y = x^2$
-2	4
-1	1
0	0
1	1
2	4

Pares ordenados de  $X$  e  $Y$ .

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Plano cartesiano

Os valores da primeira coluna da tabela dependem explicitamente dos valores da segunda.

Devido à nossa experiência com o Ensino Médio, é possível ligar os pontos azuis, tendo, assim, melhor compreensão do todo que a tabela poderia nos dar.

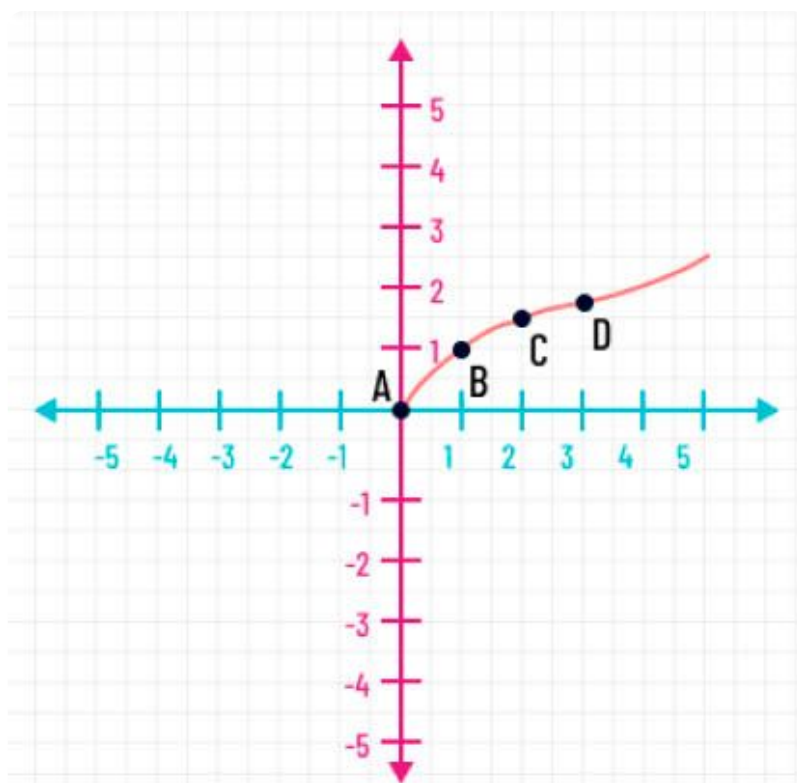
## Exemplo 2

Desta vez, faremos uma tabela com a seguinte relação: a cada número real  $x$ , associamos sua raiz quadrada  $\sqrt{x}$ .

Valor de $x$	Valor de $y = \sqrt{x}$
-1	$i \notin \mathbb{R}$
0	0
1	1
2	$\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$
3	2

Pares ordenados de X e Y

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Plano cartesiano

Percebemos que  $-1$ , em particular, **não gera valores** em nossa tabela, pois estamos trabalhando apenas com **números reais**.

Note que todo valor **maior ou igual a zero** possui um lugar em nossa tabela. O caso é que os valores **menores que zero** não fazem parte dela.

O maior conjunto de valores admissíveis de uma função, em analogia à primeira coluna de nossas tabelas, é conhecido como domínio da função.

Vejamos a seguir o ultimo exemplo desse grupo.

### Exemplo 3

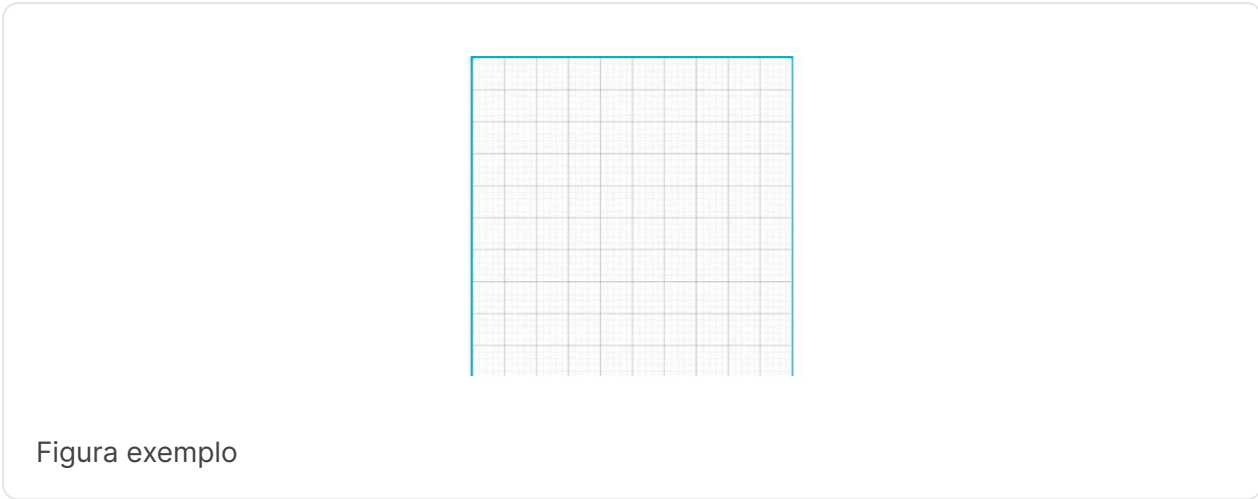
Qual é o custo de azulejar qualquer parede quadrada, com azulejos quadrados de **10cm (0,1m) de lado**, sabendo que **cada  $1\text{m}^2$  dos azulejos é vendido a R\$32** nas Casas Pitágoras?

Para solucionar essa questão, temos de analisar o problema e entender as suas variáveis. Primeiramente, devemos perceber que o metro quadrado depende do comprimento do lado do quadrado. Assim, podemos fazer uma primeira tabela:

Lado da parede quadrada	Parede em $\text{m}^2$	Quantidade de azulejos
1	1	100
2	4	400
3	9	900
x	$x^2$	$100 \times x^2$

Informações do exemplo  
Marcelo Leonardo dos Santos Rainha

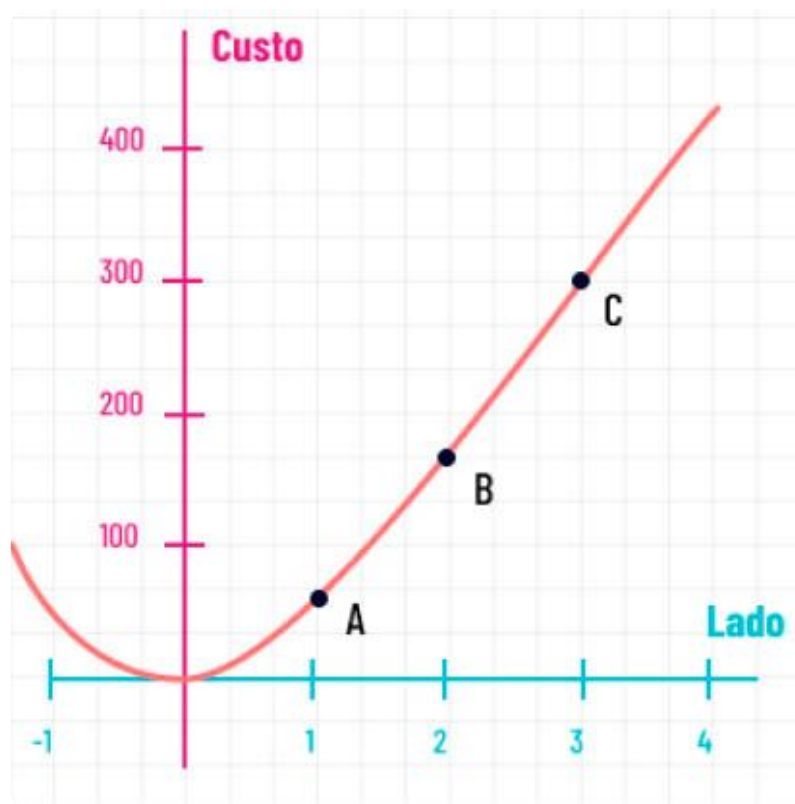
Para preencher a última coluna, basta entendermos quantos azulejos de 0,1m de lado são necessários para preencher um metro quadrado. A **figura exemplo** ilustra a ideia de um metro quadrado dividido em azulejos de 10cm de lado e, como podemos ver, são necessários 100 azulejos.



Podemos perceber que a quantidade 100 representa o número necessário de azulejos para preencher um metro quadrado de azulejos, que custa R\$32 nas Casas Pitágoras. Sendo assim, existe uma relação de 100 → R\$32. Concluimos, então, que a tabela final relaciona a metragem da parede com o custo em azulejos.

Lado da parede quadrada	Custo em azulejos \$
1	32
2	$32 \times 4$
3	$32 \times 9$
x	$32 \times x^2$





Custo x lado

Daí, a relação que expressa o custo e a metragem da parede é  $Cx = 32 \times x^2$  reais.

## Ambiguidade

Um conceito importante sobre a construção da relação entre uma tabela e a sua representação gráfica é que ela **não pode ser ambígua**, isto é, os valores do que estamos caracterizando por variável dependente **não devem gerar duas possibilidades**.

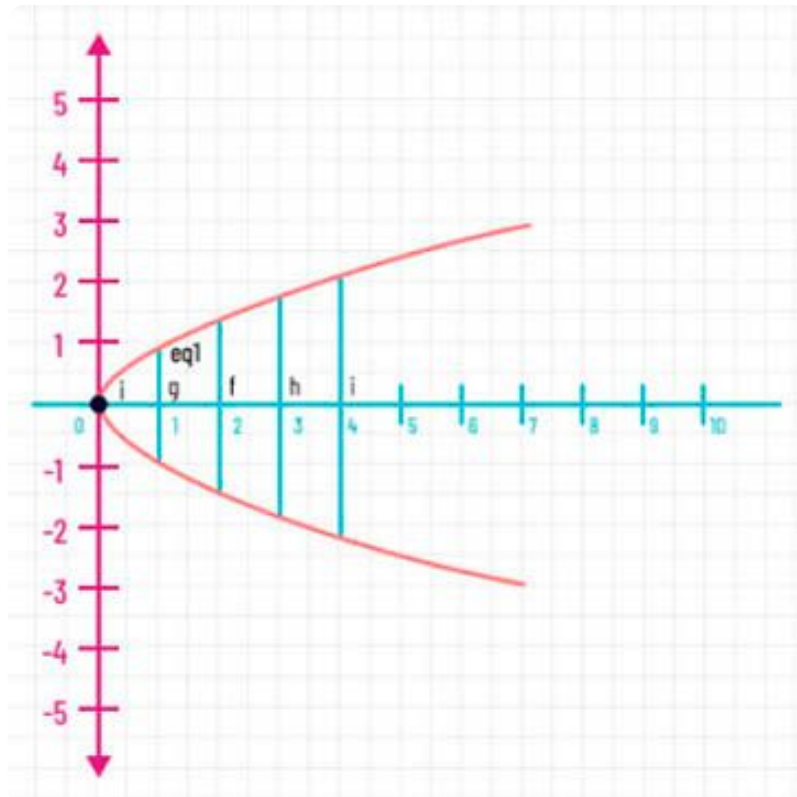
Vamos entender melhor a questão da ambiguidade e por que ela não é uma função:

Veja como exemplo uma tabela com as soluções da equação  $y^2 = x$ , onde  $x \in [0, \infty)$ .

Valores de $x$	Solução de
0	0
1	1 ou -1
2	$\sqrt{2}$ ou $-\sqrt{2}$
3	$\sqrt{3}$ ou $-\sqrt{3}$
4	2 ou -2

Valores de X.

Marcelo Leonardo dos Santos Rainha



Ambiguidade

Neste exemplo, fica clara a ambiguidade pela **não unicidade das soluções do problema**, deixando-nos o dilema em cada ponto, se estamos considerando a parte positiva ou negativa.

Quando esse tipo de fenômeno ocorrer, diremos que a relação estabelecida **não é uma função**.

Portanto, uma função  $f$  é uma tabela de pares ordenados com a seguinte propriedade: Se  $(x,y)$  e  $(x,b)$  estiverem na **mesma tabela**, então  **$b = y$** .



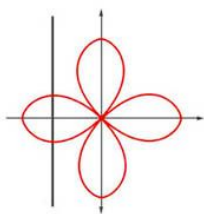
### Resumindo

Uma tabela não pode conter pares ordenados distintos que possuam o mesmo primeiro elemento.

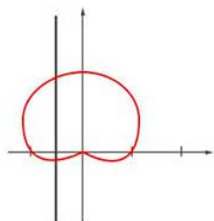
Sendo  $f$  uma função, o domínio de  $f$  é: o conjunto de todos os  $x$ , para o qual exista um  $y$ , tal que o par  $(x,y)$  esteja na tabela  $f$ .

Dessa forma, ao observarmos um gráfico no plano cartesiano, o que devemos perceber, a fim de entender se ele representa uma função, é se as **retas verticais o tocam em um único ponto**.

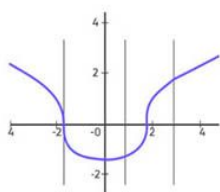
Veja os exemplos:



Não é função



Não é função



É função

Você já deve ter notado que **sempre associamos** as **tabelas** a uma **figura no plano cartesiano**, que representa todos os pontos possíveis das tabelas em questão.

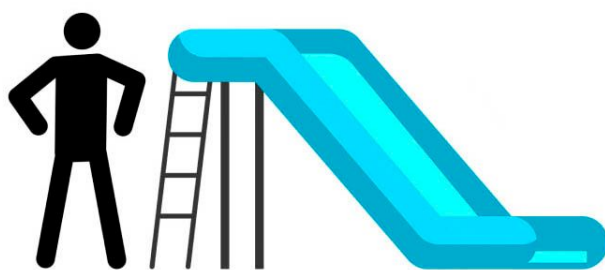
Essas figuras são chamadas de gráficos. Quando as tabelas representarem, de fato, uma função, a imagem será chamada de gráfico de função.

## Reconhecimento e contexto

Agora, apresentaremos uma série de exemplos a fim de que você possa entender que nem sempre podemos, de forma explícita, construir a tabela, embora a relação com o gráfico ainda se faça presente.

### Primeiro exemplo

A ilustração a seguir mostra um homem andando por um brinquedo em um parque:



A partir da imagem acima, pense na seguinte questão:

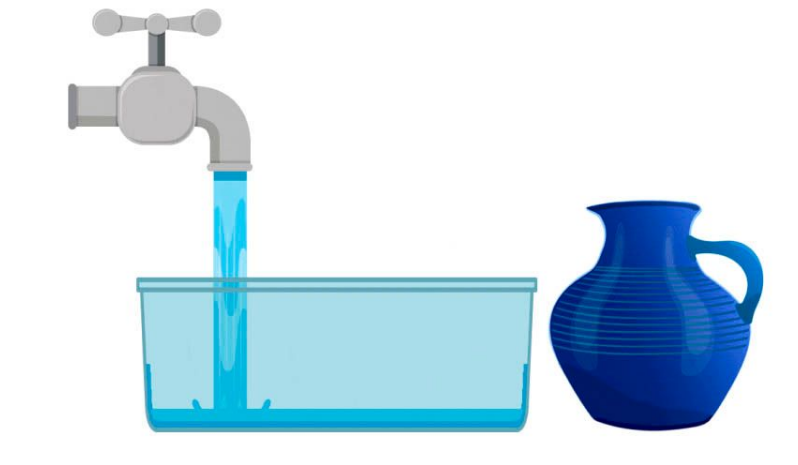
Quais diferentes medidas podemos ver em função do tempo associadas à ilustração?

A altura do homem em relação ao solo e sua velocidade variam em função do tempo.

Agora, ainda em relação à imagem apresentada no primeiro exemplo, tente responder a atividade proposta.

### Segundo exemplo

A ilustração a seguir apresenta um recipiente sendo cheio por água.



A partir da imagem acima, pensa na seguinte questão:

Quais diferentes variáveis podemos ver em função do tempo associadas à ilustração?

A quantidade de litros de água que está dentro do recipiente e a velocidade em que o recipiente fica cheio variam em função do tempo.

Agora, ainda em relação à imagem apresentada no segundo exemplo, tente responder a atividade proposta.

Os gráficos dos exemplos que acabamos de ver representam uma tabela em que a quantidade de água no recipiente ou a altura da cabeça do homem **variam sem ambiguidade em função do tempo**, apresentando, assim, o **conceito de função**.

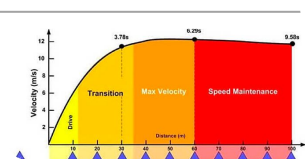
Geralmente, na escola, estudamos funções como fórmulas preestabelecidas. No entanto, como vimos nos exemplos anteriores, essa ideia não é completa. Devemos ser capazes de enxergar o conceito de função na diversidade à nossa volta, conforme os exemplos a seguir:

#### Exemplo A

A imagem mostra um gráfico do desempenho do corredor Usain Bolt ao conquistar o recorde mundial dos 100 metros rasos, no campeonato mundial de atletismo.

A reta vertical apresenta a velocidade do corredor em metros por segundo (m/s), e a reta horizontal mostra a distância percorrida em metros.

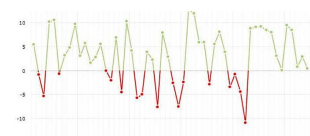
O gráfico é uma função que mede a velocidade do corredor em cada momento da trajetória.



#### Exemplo B

Já esta imagem mostra o crescimento do PIB argentino, do início dos anos 1960 até a década de 2010.

O gráfico apresenta o histórico do desenvolvimento econômico argentino. A partir dele, podemos apresentar uma tendência, auxiliando um futuro investidor.

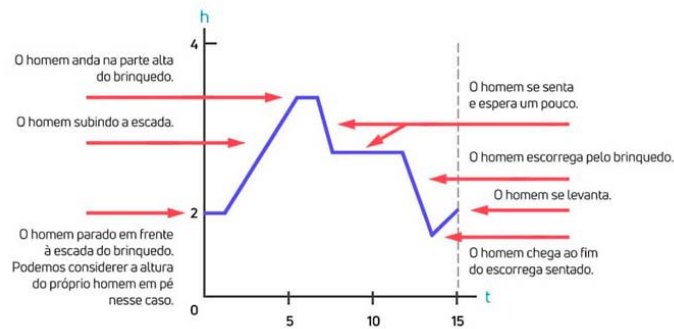


## Atividade discursiva

Agora, com uma caneta e um papel, tente desenhar o gráfico da **altura do homem** em função do **tempo**.

### Chave de resposta

Observe o gráfico da **altura do homem** em função do **tempo**.



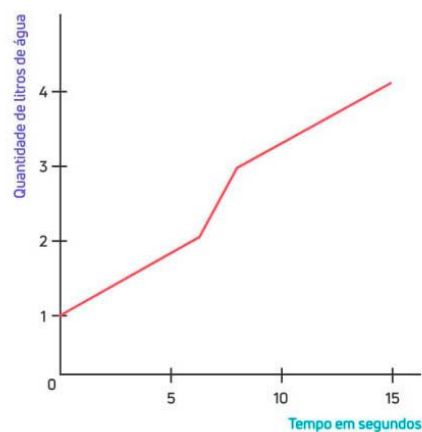
Altura em função do tempo.

## Atividade discursiva

Agora, com uma caneta e um papel, tente desenhar o gráfico da **quantidade de litros de água** no recipiente em função do **tempo**.

### Chave de resposta

Ao analisarmos a ilustração com cuidado, percebemos que já havia água no balde; depois, ele recebe mais um litro de água, além do que já estava entrando, fazendo com que o fluxo de água fosse maior nesse intervalo de tempo, retornando, mais tarde, à vazão natural. Obtemos assim:

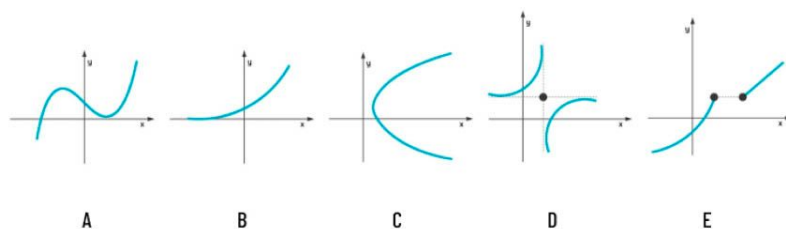


Quantidade de litros de água em função do tempo em segundos.

## Verificando o aprendizado

### Questão 1

Qual das opções a seguir não apresenta um gráfico de função?



Marque a opção correta:

☐ A

☐ B

☒ C

☐ D

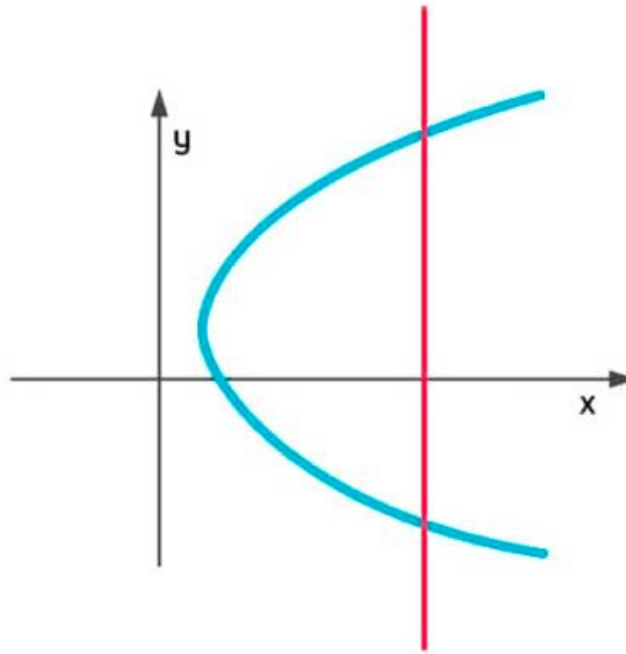
☐ E



A alternativa C está correta.

Os itens A, B, D e E são funções, e o item C não é uma função, de acordo com o que foi visto neste módulo, pois a reta vertical toca o gráfico em mais de um ponto.

Em relação à alternativa E, o ponto é que, na “tabela” que apresenta o gráfico, o que ocorreu foi que ela pulou alguns valores. De acordo com a definição de função, podemos entender que, em momento algum, é relatado que não é possível pularmos valores. Sendo assim, o item E não contradiz em nada a definição de função. Logo, também se trata de um gráfico de função.



Alternativa C

## Questão 2

Em 2020, houve uma pandemia global provocada pelo vírus SARS-CoV-2. Tal pandemia trouxe danos incalculáveis às economias globais e provocou milhares de mortes pelo mundo inteiro. O estudo do epidemiologista Neil Ferguson, do Imperial College, apresentou um gráfico mostrando requisitos de leito de cuidados intensivos (UTI) por 100 mil habitantes em diferentes cenários:

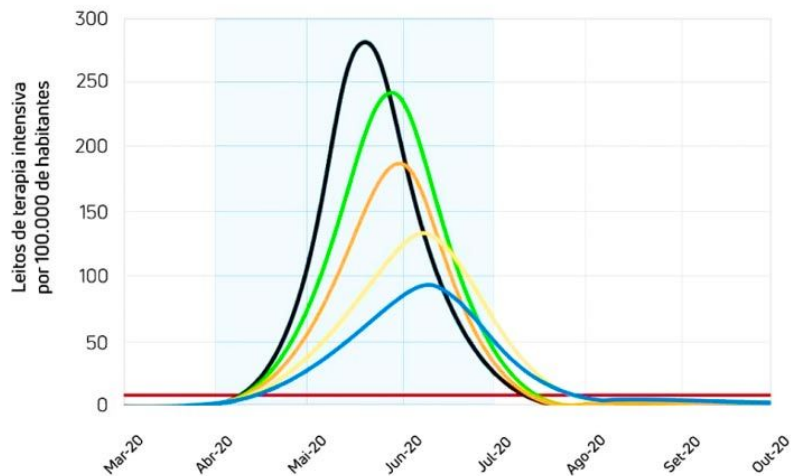


Figura A

- Mostra o número de leitos de UTI por 100 mil habitantes que a Inglaterra possuía em 2019, antes do surto.
- Mostra a epidemia não mitigada.
- Mostra o isolamento do caso.
- Mostra o isolamento dos casos e a quarentena das famílias.
- Mostra uma estratégia de mitigação com o fechamento de escolas e universidades.
- Mostra o isolamento de casos, a quarentena doméstica e o distanciamento social das pessoas com mais de 70 anos.



Figura B

Assinale a alternativa correta:

- A Nenhum dos gráficos apresentados nas figuras é função.
- B Os picos em todos os cenários ocorrem em maio.
- C Em todos os cenários, em junho, na Inglaterra, serão necessários 150 leitos de UTI a cada 100 mil habitantes.
- D O sistema de saúde inglês volta ao normal em todos os cenários em agosto.
- E Os picos de todos os cenários na Grã-Bretanha ocorrem no mês de junho.





A alternativa D está correta.

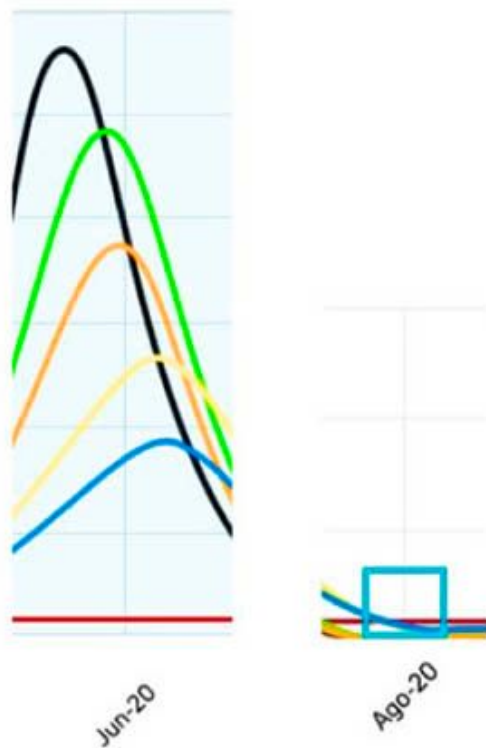
A letra A é falsa, pois não há ambiguidade nos pontos, portanto todos os cenários são funções.

Para responder se o item B é verdadeiro ou falso, temos duas opções: fazer o recorte do mês de maio ou fazer o recorte dos picos. O mesmo vale pra avaliarmos o item E. Optamos por fazer o recorte dos picos, como ilustra a Recorte A.

O gráfico deixa claro que os picos se concentram durante os meses de maio e junho é não só em maio ou só em junho.

No caso do item C, percebemos que os cenários amarelo e azul não chegam aos 150 leitos de UTI por 100 mil habitantes.

Esse raciocínio evidencia que a resposta é a letra D. O recorte a seguir (Recorte B) deixa claro que em todos os cenários o sistema de saúde inglês volta à normalidade no mês de agosto.



Recorte A

Recorte B

Recorte A e Recorte B

## Vamos começar!

### Exemplos de gráficos de modelos reais

Este módulo ficará mais fácil e interessante se você começar assistindo ao presente vídeo.



#### Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

## Raízes ou zeros

As **raízes ou zeros** de uma função  $f$  **serão os valores no eixo OX**, que também fazem parte da sua função/tabela  $(x, y)$ , onde  $y = f(x)$ . Isto é, correspondem aos valores  $x$  que são associados ao valor zero,  $(x, 0)$ .

Você, provavelmente, encontrará a seguinte representação nos livros de cálculo: são os valores de  $x$  tais que  **$f(x) = 0$** .

Graficamente, são os valores da função que se encontram sobre a reta horizontal (eixo OX).

Vejamos alguns exemplos a seguir:

#### Exemplo 1

Descreveremos o conjunto das raízes apresentadas no gráfico das funções a seguir.

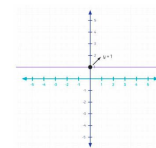
O gráfico das funções a serem consideradas está em roxo.

Exemplo 1.

Neste gráfico, podemos perceber que o gráfico da função nunca toca o eixo OX.

Esse tipo de gráfico é comumente conhecido como gráfico de uma **função constante**.

Sendo assim, o conjunto de todas as suas raízes é **vazio**.

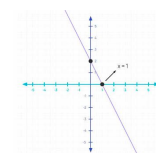


#### Exemplo 2

As raízes de uma função são os valores da primeira coordenada, cujo gráfico da função  $f$  está sobre o eixo OX.

Exemplo 2.

Neste caso, temos uma única raiz,  $x = 1$ .



Agora que você já compreendeu os exemplos, analise os gráficos a seguir e responda.

## Atividade discursiva

Quais são as raízes das funções a seguir?

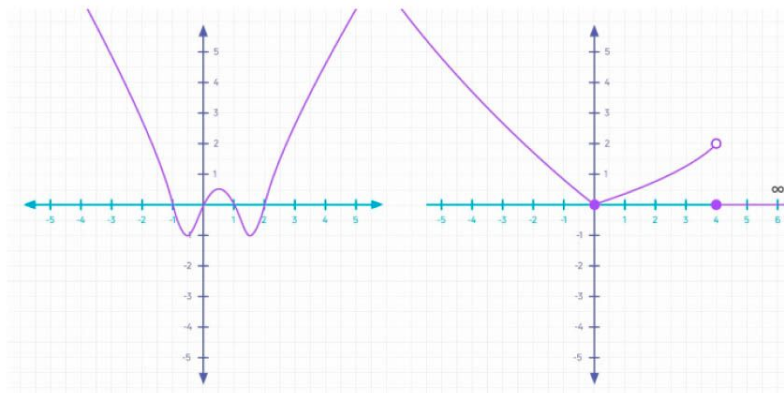


Figura A

Figura B

Função A (esquerda) e Função B (direita)

### Chave de resposta

#### Função A:

Podemos ver os valores na reta horizontal que são tocados pelo gráfico da função, isto é,  $\{-1, 0, 1, 2\}$ .

Dessa forma, temos que a função em questão possui 4 raízes.

#### Função B:

Os valores no eixo  $OX$  fazem parte da sua tabela/gráfico da função. Nesse sentido, podemos ver o valor  $x = 0$  e  $x = 4$ .

O caso aqui é que todos os valores de  $x$  maiores que 4 fazem parte da nossa tabela e estão sobre o eixo horizontal. Portanto, as raízes da função dada pelo gráfico são 4 e  $[4, \infty)$ . Ou seja, a função pode ter uma infinidade de raízes.

## Máximos e mínimos de um gráfico

### Reconhecendo máximos e mínimos locais e globais



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

Devemos sempre ter em mente que, quando falamos em ponto de máximo ou mínimo de um gráfico, este é um par ordenado, um elemento da nossa tabela, e, por isso, possui **dois valores associados**.

# $(x,y)$

O momento em que  
ocorre o evento

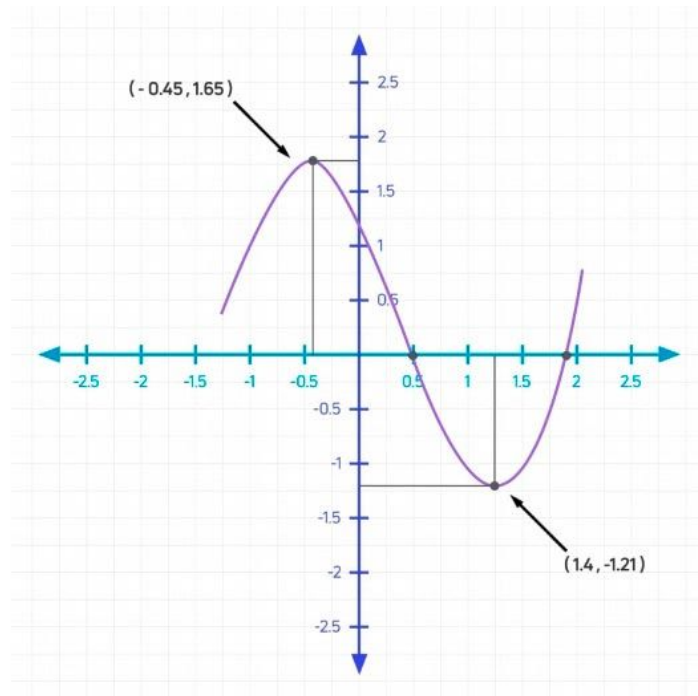
A altura do ponto em  
relação ao eixo  $OX$

O valor de  $x$  é o que geralmente chamamos na literatura de **máximo** ou **mínimo**.

O valor de  $y = f(x)$  é o **valor máximo** ou **valor mínimo**.

Muitas vezes, podemos nos confundir com o que o problema pede quando essas ideias não estão claras.

Considere o gráfico abaixo:



## Exemplo

De acordo com o gráfico temos: O máximo da função ocorre em  $x = -0.45$ , e o seu valor máximo é  $y = f(-0.45) = 1.65$ . O mínimo ocorre em  $x = 1.4$ , e o seu valor mínimo é  $y = f(1.4) = -1.21$ .

Trata-se do que chamamos na literatura de **máximos** e **mínimos globais**.

Trata-se do que chamamos na literatura de máximos e mínimos globais. Dado o gráfico de uma função  $f$ , o ponto de máximo (ou mínimo)  $(x, f(x))$  tem a propriedade de ser o ponto mais alto (ou mais baixo) do gráfico. Em linguagem matemática, é o ponto  $(x_0, f(x_0))$  tal que  $f(x_0) \geq f(x)$  e  $f(x_0) \leq f(x)$  para todo  $x$  admissível.

## Pontos notáveis de um gráfico



Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para assistir ao vídeo.

## Verificando o aprendizado

### Questão 1

O gráfico abaixo apresenta a taxa de desemprego de 2013.



Considerando as informações constantes no gráfico, em quais meses há o maior índice de desemprego e o menor índice?

- A Maior índice: dezembro; menor índice: junho.
- B Maior índice: fevereiro; menor índice: setembro.
- C Maior índice: agosto; menor índice: setembro.
- D Maior índice: janeiro; menor índice: setembro.
- E Maior índice: janeiro; menor índice: dezembro.



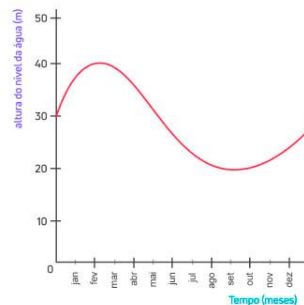
A alternativa B está correta.

A taxa mais alta do gráfico é 130, ou seja, ponto mais alto do gráfico. Portanto, o maior índice de desemprego ocorre no mês de fevereiro, e o menor índice, em setembro, onde se encontra o ponto mais baixo do gráfico, 90.

## Questão 2

O gráfico a seguir mostra o nível de água em um reservatório durante o ano de 2015.

Se os níveis de água no reservatório dependem dos níveis de chuva na região, assinale, respectivamente, os meses do ano em que mais choveu e em que menos choveu no ano de 2015.



Altura do nível da água (m) em função do tempo (meses)

A Janeiro e dezembro.

B Fevereiro e novembro.

C Março e outubro.

D Fevereiro e setembro.

E Janeiro e agosto.



A alternativa D está correta.

O mês de fevereiro teve o maior volume de chuvas. Além disso, podemos perceber que, em outubro, choveu mais que em setembro.

## Considerações finais

### O que você aprendeu neste conteúdo?

A Matemática é, a rigor, uma linguagem que permite analisar e descrever diversas situações. Como toda língua, ela possui seus conceitos mais elementares, que abrem caminho para toda a beleza, cultura e os mistérios que circundam civilizações antigas e as mais modernas tecnologias.

Este tema buscou apresentar as funções a partir de conceitos elementares, como intervalos e o plano cartesiano, e desmistificar o entendimento das funções, correlacionando-as a uma lista ou tabela onde o plano cartesiano não é nada além do objeto de manifestação gráfica de seus resultados.

#### Podcast

No podcast a seguir, veremos um breve resumo sobre o tema.



#### Conteúdo interativo

Acesse a versão digital para ouvir o áudio.

### Explore +

Para conhecer mais sobre a história e a formalização do conceito de função, leia o livro **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**, de Tatiana Roque.

Pesquise na Internet o projeto **Um livro aberto**, que conta com a colaboração de professores universitários de todo o Brasil.

Pesquise sites de calculadoras científicas e aplicativos que ajudem a fazer contas.

Procure na Internet o livro **Biomechanic of sprinting**.

Consulte o **Portal do Saber**, da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas.

### Referências

CONNALLY, E. et al. **Functions Modeling Change: A Preparation for Calculus**. Nova York: Wiler, 2010.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos matemáticos**. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

IEZZI, G.; DOLCE, O.; MURAKAMI, C. **Fundamentos de Matemática Elementar I**. São Paulo: Atual, 2013.

LIMA, E. L. **Curso de Análise – Volume 1**. Rio de Janeiro: IMPA, 2008.

ROQUE, T. **História da Matemática**: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

SPIVAK, M. **Calculus**: cálculo infinitesimal. Barcelona: Reverté, 1970.