Programa para casa #1

Sedimentação de uma esfera em um fluido viscoso
Aplicação do Método de Runge-Kutta de 4ª ordem

March 24, 2025

1 Contextualização

Nosso problema inicial se baseia no esquemático ilustrado na figura (1).

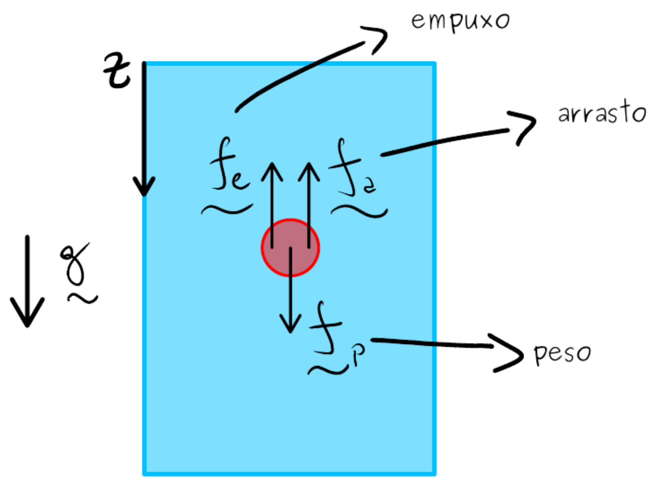

Figure 1: Esquemático do problema que iremos resolver nessa atividade.

Uma esfera de raio a, com massa específica ρ_s, sedimentando um fluido de viscosidade η sob a ação da gravidade g terá seu movimento descrito pela segunda lei de Newton:

$$m_s \frac{d\boldsymbol{v}}{dt} = \sum \boldsymbol{f}, \tag{1}$$

em que m_s é a massa da esfera, $\boldsymbol{v} = v_x\hat{e}_x + v_y\hat{e}_y + v_z\hat{e}_z$ é o vetor que representa a velocidade instantânea da esfera em cada direção do espaço, t é o tempo e $\boldsymbol{f}$ representam as forças que atuam sobre a esfera. Considerando que a esfera encontra-se sujeita a uma força de arrasto $\boldsymbol{f_d}$ provenientes da interação com o fluido base e ao empuxo líquido $\boldsymbol{f_g} = v_p(\rho_s - \rho_f)\boldsymbol{g}$. Em que $v_p = 4\pi a^3/3$ é o volume da esfera, ρ_f é a densidade do fluido e $\boldsymbol{g} = -g\hat{e}_z$ é o vetor aceleração da gravidade.

Para o contexto em que o escoamento induzido pelo movimento de sedimentação da esfera ocorre em regimes de baixos números de Reynolds, essa força de arrasto $\boldsymbol{f_d}$ pode ser determinada pela lei de Stokes:

$$\boldsymbol{f_d} = -6\pi\eta a\boldsymbol{v}, \tag{2}$$

Substituindo a equação (1) em (2), considerando o movimento 1D (apenas na direção z) e reorganizando os termos podemos escrever a seguinte equação que descreve a evolução (relaxação) da velocidade da esfera:

$$\frac{dv_z}{dt} = -\zeta v_z + \beta, \tag{3}$$

em que $\zeta = 9\eta a^2/(2\rho_s)$ e $\beta = \Delta\rho/\rho_s$. Utilizando a seguinte lei de conversão entre quantidades dimensionais e não dimensionais:

$$v_z^* = \frac{v_z}{U_s} \quad \text{e} \quad t^* = tU_s/a, \tag{4}$$

em que as quantidades * denotam grandezas não-dimensionais correspondentes e U_s representa a velocidade terminal de uma única partícula sedimentando em baixo Reynolds (velocidade de Stokes), podemos reescrever a equação (3) em sua forma não dimensional como:

$$St\frac{dv_z^*}{dt^*} = 1 - v_z^*, \tag{5}$$

em que $St = mU_s/(6\pi\eta a)$ representa o número de Stokes, um parâmetro adimensional que mede a razão entre a escala de tempo de relaxação da partícula e uma escala de tempo convectiva equivalente ao tempo que uma esfera em velocidade de Stokes demora para sedimentar o próprio raio. A equação (5) possui solução exata pelo método dos fatores integrantes. Para $v_z * (0) = 0$, a solução exata é dada por:

$$v_z^*(t) = 1 - e^{-t/St}. \tag{6}$$

2 Enunciado da tarefa

Baseado nessa contextualização, sua tarefa consiste em escrever um programa de computador (FORTRAN, C++ ou Python) que resolva o problema de sedimentação de uma esfera em baixo Reynolds na sua forma adimensional utilizando o método de Runge-Kutta de quarta ordem clássico para realizar as seguintes análises:

1. Para o caso de $Re \to 0$ compare a solução analítica com a solução exata para diferentes valores de St;

2. Para um dado cenário varie o passo de tempo e mostre como o refinamento dessa quantidade afeta a qualidade da solução;

3. Para um pequeno efeito inercial no fluido ($Re \neq 0$) devemos adicionar uma força de arrasto quadrática ao movimento da esfera, de tal sorte que agora a equação governante (dimensional) do problema é dada por:

$$m_p\frac{dv_z}{dt} = -6\pi\eta a v_z - \frac{9}{4}\pi\rho_f a^2 v_z^2 + \frac{4\pi a^3}{3}\Delta\rho g. \tag{7}$$

   Para esse cenário, adimensionalize a equação do movimento da partícula e mostre que a versão adimensional dessa equação possui além do número de Stokes uma dependência com o número de Reynolds de partícula Re_s baseado na velocidade de Stokes de uma partícula isolada, dado por:

$$Re_s = \frac{\rho_f U_s a}{\eta}; \tag{8}$$

4. Para este novo cenário, valide seu código com base na solução exata para o problema, que pode ser encontrada no artigo trabalhado nas aulas iniciais do curso [1];

5. Finalmente, plote o comportamento da solução numérica para diferentes valores de Re_s e mostre como a solução numérica se desvia do limite assintótico em que $Re \to 0$.

3 Referências bibliográficas

1. Sobral, Y. D., T. F. Oliveira, and F. R. Cunha. "On the unsteady forces during the motion of a sedimenting particle." Powder Technology 178.2 (2007): 129-141.