FPTAS für das Restricted Shortest Path-Problem nach (Hassin 1992)

Rasmus Diederichsen   Sebastian Höffner

Universität Osnabrück

7. Dezember 2015

Inhalt

Problemstellung

Gegeben

- azyklischer, gerichteter Graph $G = (V, E)$
- $(u, v) \in E$ hat Gewicht c und Verzögerung t

Single Source Shortest Path

Berechne vom Startknoten aus alle nach Kosten kürzesten Wege zu allen anderen ▸ Dijkstra

All Pairs Shortest Path

Kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren ▸ Floyd

Problemstellung

Gegeben

- azyklischer, gerichteter Graph $G = (V, E)$
- $(u, v) \in E$ hat Gewicht c und Verzögerung t

Restricted Shortest Path

Finde nach Kosten kürzesten Weg von a nach b mit Verzögerung $\leq T$. **NP**-schwer.

Exakte Lösung

Algorithmus

Dynamische Programmierung (ähnlich wie Knapsack). Kanten (i, j) mit $i < j$, da azyklisch.

Algorithmus

$$
\begin{aligned}
g_1(c) &= 0,\ \text{Für } c = 0, \dots, OPT, \\
g_j(0) &= \infty,\ \text{Für } j = 2, \dots, n, \\
g_j(c) &= \min \left\{ g_j(c-1), \min_{k \mid c_{kj} \le c} \{ g_k(c - c_{kj}) + t_{kj} \} \right\} \\
&\quad \text{Für } c = 1, \dots, OPT;\ j = 2, \dots, n
\end{aligned}
$$

Exakte Lösung

Laufzeit

$$g_1(c) = 0,\ \text{Für } c = 0, \dots, OPT,$$

$$g_j(0) = \infty,\ \text{Für } j = 2, \dots, n,$$

$$g_j(c) = \min\left\{g_j(c-1), \min_{k|c_{kj} \leq c} \{g_k(c - c_{kj}) + t_{kj}\}\right\}$$

$$\text{Für } c = 1, \dots, OPT;\ j = 2, \dots, n$$

- $\mathcal{O}(OPT \cdot n \cdot \text{Aufwand pro } (c, j))$
  - Pro (c, j) alle direkten Vorgänger betrachten, alle Kanten max. 2-mal
  - $\mathcal{O}(2|E|OPT) = \mathcal{O}(|E|OPT)$
- Pseudopolynomiell

Exakte Lösung

Terminierung

$$g_1(c) = 0,\ \text{Für } c = 0, \ldots, OPT,$$
$$g_j(0) = \infty,\ \text{Für } j = 2, \ldots, n,$$
$$g_j(c) = \min\left\{ g_j(c-1), \min_{k \mid c_{kj} \leq c} \{g_k(c - c_{kj}) + t_{kj}\} \right\}$$
$$\text{Für } c = 1, \ldots, OPT;\ j = 2, \ldots, n$$

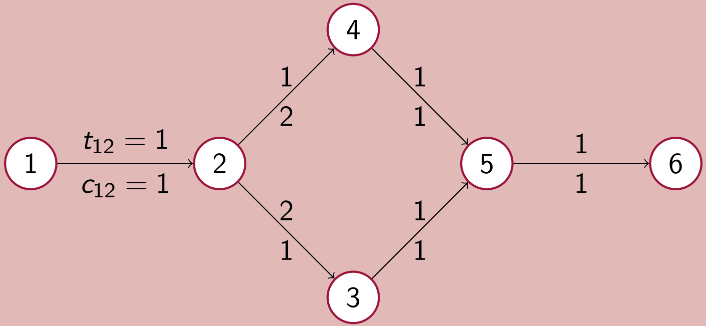
Man weiß $OPT = \min\{c \mid g_n(c) \leq T\}$

- Setze OPT, sobald erstes c mit $g_n(c) \leq T$ gefunden.

Exakte Lösung

Beispiel

Autobahn? Oder doch lieber Landstraße?



Exakte Lösung

Beispiel

$j \backslash c$	0	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0	0
2	∞	∞	∞	∞	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

Exakte Lösung

Beispiel

$j \backslash c$	0	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0	0
2	∞	1	∞	∞	∞	∞
3	∞	∞	∞	∞	∞	∞
4	∞	∞	∞	∞	∞	∞
5	∞	∞	∞	∞	∞	∞
6	∞	∞	∞	∞	∞	∞

$$g_2(1) = \min\left\{g_2(0), \min_{k|c_{kj}\leq c}\{g_k\left(c - c_{kj}\right) + t_{kj}\}\right\}$$

$$g_2(1) = \min\{\infty, \min\{g_1\left(1-1\right)+1\}\}$$

$$g_2(1) = 1$$

Exakte Lösung

Beispiel

$j \backslash c$	0	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0	0
2	∞	1	1	1	1	1
3	∞	∞	3	3	3	3
4	∞	∞	∞	2	2	2
5	∞	∞	∞	4	3	3
6	∞	∞	∞	∞	5	**4**

Das FPTAS

Test für Grenzen von *OPT*

Wir suchen zunächst ein Verfahren, dass untere und obere Schranken für OPT findet.

- Wünsch-dir-was: Polynomieller Algorithmus $TEST(k)$, sodass

$$TEST_{magic}(k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } OPT \geq k \\ 0 & \text{falls } OPT < k \end{cases}$$

  - Binäre Suche auf $0, \ldots, UB$
  - Leider **NP**-schwer

Das FPTAS

Test für Grenzen von OPT

$TEST_{magic}(k)$ kann nicht existieren, also schwächer:

Eigenschaften von $TEST(k)$

$$TEST(k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } OPT \geq k \\ 0 & \text{falls } OPT < k(1+\epsilon) \end{cases}$$

Das FPTAS

Test für Grenzen von *OPT*

$TEST_{magic}(k)$ kann nicht existieren, also schwächer:

$TEST(k)$

- Skaliere und runde Kantengewichte als $\hat{c}_{ij} = \left\lfloor \frac{c_{ij}(n-1)}{k\epsilon} \right\rfloor$
- Wende exakten Algorithmus an, bis $g_n(c) \leq T$ gefunden ist oder $c \geq \frac{n-1}{\epsilon}$.

Das FPTAS

Test für Grenzen von *OPT*

$TEST(k)$ erfüllt seinen Zweck:

$c < \frac{n-1}{\epsilon} \rightarrow$ Es gibt Pfad $< k(1+\epsilon)$

$$k \leq k$$

$$\frac{k\epsilon}{n-1}\frac{n-1}{\epsilon} \leq k$$

Durch Einsetzen folgt:

$$\frac{k\epsilon}{n-1}c < k$$

$$\frac{k\epsilon}{n-1}c + k\epsilon < k + k\epsilon$$

$$\frac{k\epsilon}{n-1}c + k\epsilon < k(1+\epsilon)$$

Das FPTAS

Test für Grenzen von *OPT*

$TEST(k)$ erfüllt seinen Zweck:

$c \geq \frac{n-1}{\epsilon} \rightarrow$ Jeder T-Pfad hat Länge $\geq k$

$$c \geq \frac{n-1}{\epsilon}$$
$$c\frac{k\epsilon}{n-1} \geq \frac{k\epsilon}{n-1}\frac{n-1}{\epsilon}$$
$$c\frac{k\epsilon}{n-1} \geq k$$

Das FPTAS

Test für Grenzen von *OPT*

Test-Algorithmus

1 Setze $c \leftarrow 0$
2 Für alle $(i,j) \in E$:
3   Falls c_{ij} > k, entferne (i,j)
4   Sonst $c_{ij} \leftarrow \lfloor c_{ij}(n-1)/k\epsilon \rfloor$
5
6 Falls $c \geq (n-1)/\epsilon$, return true
7 Sonst:
8   Wende Algorithmus B an und berechne $g_j(c)$ für $j = 2, \ldots, n$
9   Falls $g_n(c) \leq T$, return false
10   Sonst:
11   Setze $c \leftarrow c + 1$
12   Goto Zeile 6

Das FPTAS

Laufzeit des Tests

- Runden: in $\mathcal{O}(\log n)$ durch binäre Suche, falls nach oben beschränkt ▸ $\mathcal{O}\left(|E| \log \frac{n-1}{\epsilon}\right)$
- Exakter Algorithmus führt $\leq \frac{n-1}{\epsilon}$ Iterationen durch, $\mathcal{O}\left(|E|\right)$ pro Iteration
  - Insgesamt $\mathcal{O}\left(|E| \log \frac{n-1}{\epsilon} + |E| \frac{n-1}{\epsilon}\right) = \mathcal{O}\left(|E| \frac{n-1}{\epsilon}\right)$
- Runden und wieder Multiplizieren verringern Kantenkosten um höchstens $\frac{k\epsilon}{n-1}$, Kosten über $n-1$ Kanten also max. $k\epsilon$.

Das FPTAS

Verbesserte Grenzen von OPT

Wir benötigen obere und untere Schranken $LB \leq OPT \leq UB$.

Lower Bound

- $LB = 1$
- $LB =$ kürzester Pfad nach Kosten

Das FPTAS

Verbesserte Grenzen von OPT

Wir benötigen obere und untere Schranken $LB \leq OPT \leq UB$.

Lower Bound

- $LB = 1$
- $LB =$ kürzester Pfad nach Kosten

Upper Bound

- $UB = \sum(n-1)$ längste Kanten
- $UB =$ Kosten schnellster Pfad von 1 nach n.

Das FPTAS

Algorithmus

Approximationsschema-Algorithmus

```
1   UB := ∑(n − 1) größte Kosten
2   LB := 1
3
4   Falls UB ≤ 2LB, Goto Zeile 11
5   Sonst:
6       k := √(UB · LB)
7       Falls TEST(k) == true, LB := k
8       Sonst UB := k(1 + ϵ)
9       Goto Zeile 4
10
11  Setze c_ij ← c_ij(n − 1)/LBϵ
12  Berechne optimale Lösung
```

Das FPTAS

Laufzeit des FPTAS

- Wie für $TEST$ kann Abweichung vom OPT nicht größer als $k\epsilon$ sein, hier mit $k = LB$, die Abweichung ist also $\leq OPT\epsilon$

Das FPTAS

Laufzeit des FPTAS

- Wie für $TEST$ kann Abweichung vom OPT nicht größer als $k\epsilon$ sein, hier mit $k = LB$, die Abweichung ist also $\leq OPT\epsilon$
- Rundung der Kantenkosten: Laufzeit letzte Anwendung des exakten Algorithmus' ist $\mathcal{O}\left(|E|OPT\frac{(n-1)}{LB\epsilon}\right)$

Das FPTAS

Laufzeit des FPTAS

- Wie für $TEST$ kann Abweichung vom OPT nicht größer als $k\epsilon$ sein, hier mit $k = LB$, die Abweichung ist also $\leq OPT\epsilon$
- Rundung der Kantenkosten: Laufzeit letzte Anwendung des exakten Algorithmus' ist $\mathcal{O}\left(|E|OPT\frac{(n-1)}{LB\epsilon}\right)$
- $OPT \leq 2LB$: $\mathcal{O}(|E|2LB\frac{(n-1)}{LB\epsilon}) = \mathcal{O}(|E|2\frac{(n-1)}{\epsilon}) = \mathcal{O}\left(|E|\frac{n-1}{\epsilon}\right)$

Das FPTAS

Laufzeit des FPTAS

- Wie für *TEST* kann Abweichung vom *OPT* nicht größer als $k\epsilon$ sein, hier mit $k = LB$, die Abweichung ist also $\leq OPT\epsilon$
- Rundung der Kantenkosten: Laufzeit letzte Anwendung des exakten Algorithmus' ist $\mathcal{O}\left(|E|OPT\frac{(n-1)}{LB\epsilon}\right)$
- $OPT \leq 2LB$: $\mathcal{O}(|E|2LB\frac{(n-1)}{LB\epsilon}) = \mathcal{O}(|E|2\frac{(n-1)}{\epsilon}) = \mathcal{O}\left(|E|\frac{n-1}{\epsilon}\right)$
- Laut Hassin $\log\log\frac{UB}{LB}$ Tests, bis $\frac{UB}{LB} \leq 2$ ♁

Das FPTAS

Laufzeit des FPTAS

- Wie für *TEST* kann Abweichung vom *OPT* nicht größer als $k\epsilon$ sein, hier mit $k = LB$, die Abweichung ist also $\leq OPT\epsilon$
- Rundung der Kantenkosten: Laufzeit letzte Anwendung des exakten Algorithmus' ist $\mathcal{O}\left(|E|OPT\frac{(n-1)}{LB\epsilon}\right)$
- $OPT \leq 2LB$: $\mathcal{O}(|E|2LB\frac{(n-1)}{LB\epsilon}) = \mathcal{O}(|E|2\frac{(n-1)}{\epsilon}) = \mathcal{O}\left(|E|\frac{n-1}{\epsilon}\right)$
- Laut Hassin $\log\log\frac{UB}{LB}$ Tests, bis $\frac{UB}{LB} \leq 2$ ♁
- Wurzeln evtl. teuer, es reicht aber $\log\log\frac{UB}{LB}$ ♁

Das FPTAS

Laufzeit des FPTAS

- Wie für *TEST* kann Abweichung vom *OPT* nicht größer als $k\epsilon$ sein, hier mit $k = LB$, die Abweichung ist also $\leq OPT\epsilon$
- Rundung der Kantenkosten: Laufzeit letzte Anwendung des exakten Algorithmus' ist $\mathcal{O}\left(|E|OPT\frac{(n-1)}{LB\epsilon}\right)$
- $OPT \leq 2LB$: $\mathcal{O}(|E|2LB\frac{(n-1)}{LB\epsilon}) = \mathcal{O}(|E|2\frac{(n-1)}{\epsilon}) = \mathcal{O}\left(|E|\frac{n-1}{\epsilon}\right)$
- Laut Hassin $\log\log\frac{UB}{LB}$ Tests, bis $\frac{UB}{LB} \leq 2$ ♁
- Wurzeln evtl. teuer, es reicht aber $\log\log\frac{UB}{LB}$ ♁
- Einzelne Aufrufe von *TEST*: $\mathcal{O}\left(|E|\frac{n-1}{\epsilon}\right)$

Das FPTAS

Laufzeit des FPTAS

- Wie für $TEST$ kann Abweichung vom OPT nicht größer als $k\epsilon$ sein, hier mit $k = LB$, die Abweichung ist also $\leq OPT\epsilon$
- Rundung der Kantenkosten: Laufzeit letzte Anwendung des exakten Algorithmus' ist $\mathcal{O}\left(|E|OPT\frac{(n-1)}{LB\epsilon}\right)$
- $OPT \leq 2LB$: $\mathcal{O}(|E|2LB\frac{(n-1)}{LB\epsilon}) = \mathcal{O}(|E|2\frac{(n-1)}{\epsilon}) = \mathcal{O}\left(|E|\frac{n-1}{\epsilon}\right)$
- Laut Hassin $\log\log\frac{UB}{LB}$ Tests, bis $\frac{UB}{LB} \leq 2$ ♁
- Wurzeln evtl. teuer, es reicht aber $\log\log\frac{UB}{LB}$ ♁
- Einzelne Aufrufe von $TEST$: $\mathcal{O}\left(|E|\frac{n-1}{\epsilon}\right)$
- Insgesamt $\mathcal{O}(\log\log\frac{UB}{LB} \cdot (|E|\frac{n-1}{\epsilon} + \log\log\frac{UB}{LB}))$

Fin.