FPTAS für das Restricted Shortest Path-Problem

Rasmus Diederichsen Sebastian Höffner

Universität Osnabrück

4. Dezember 2015

Inhalt

Problemstellung

Gegeben

- azyklischer Graph $G = (V, E)$
- $(u, v) \in E$ hat gewicht c und Verzögerung t

Single Source Shortest Path

Berechne vom Startknoten aus alle nach Kosten kürzesten Wege zu allen anderen ▶ Dijkstra

All Pairs Shortest Path

Kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren ▶ Floyd

Restricted Shortest Path

Finde nach Kosten kürzesten Weg von a nach b mit Verzögerung $\leq T$

Exakte Lösung

Algorithmus

Dynamische Programmierung (ähnlich wie Knapsack). Kanten (i, j) mit $i < j$, da azyklisch.

Algorithmus

$$
\begin{aligned}
&g_1(c) = 0,\ \text{Für } c = 0, \ldots, OPT,\\
&g_j(0) = \infty,\ \text{Für } j = 2, \ldots, n,\\
&g_j(c) = \min\left\{ g_j(c-1), \min_{k \mid c_{kj} \leq c} \{g_k(c - c_{kj}) + t_{kj}\} \right\}\\
&\qquad \text{Für } j = 2, \ldots, n;\ c = 1, \ldots, OPT
\end{aligned}
$$

Exakte Lösung

Laufzeit

$$
\begin{aligned}
g_1(c) &= 0,\ \text{Für } c = 0, \dots, OPT, \\
g_j(0) &= \infty,\ \text{Für } j = 2, \dots, n, \\
g_j(c) &= \min\left\{ g_j(c-1), \min_{k \mid c_{kj} \le c} \{ g_k(c - c_{kj}) + t_{kj} \} \right\} \\
&\qquad \text{Für } j = 2, \dots, n;\ c = 1, \dots, OPT
\end{aligned}
$$

- $\mathcal{O}(OPT \cdot n \cdot \text{Aufwand pro } (c, j))$
  - Pro (c, j) evtl. alle Vorgänger betrachten
  - $\mathcal{O}\left(n^2 OPT\right) = \mathcal{O}\left(|E| OPT\right)$
- Pseudopolynomiell

Exakte Lösung

Terminierung

Man weiß $OPT = \min \{c \mid g_n(c) \leq T\}$

- Setze OPT, sobald erstes c mit $g_n(c) \leq T$ gefunden.