

# FPTAS für das Restricted Shortest Path-Problem

Rasmus Diederichsen    Sebastian Höffner

Universität Osnabrück

4. Dezember 2015

# Inhalt

## ① Das Problem

## ② Exakte Lösung

Algorithmus

Laufzeit

Terminierung

Beispiel

## ③ Das FPTAS

Test für Grenzen von  $OPT$

# Problemstellung

## Gegeben

- azyklischer Graph  $G = (V, E)$
- $(u, v) \in E$  hat Gewicht  $c$  und Verzögerung  $t$

## Single Source Shortest Path

Berechne vom Startknoten aus alle nach Kosten kürzesten Wege zu allen anderen ► Dijkstra

## All Pairs Shortest Path

Kürzeste Wege zwischen allen Knotenpaaren ► Floyd

# Das Problem

## Gegeben

- azyklischer Graph  $G = (V, E)$
- $(u, v) \in E$  hat gewicht  $c$  und Verzögerung  $t$

## Restricted Shortest Path

Finde nach Kosten kürzesten Weg von  $a$  nach  $b$  mit Verzögerung  $\leq T$ . **NP**-schwer.

# Exakte Lösung

## Algorithmus

Dynamische Programmierung (ähnlich wie Knapsack). Kanten  $(i, j)$  mit  $i < j$ , da azyklisch.

## Algorithmus

$$g_1(c) = 0, \text{ Für } c = 0, \dots, OPT,$$

$$g_j(0) = \infty, \text{ Für } j = 2, \dots, n,$$

$$g_j(c) = \min \left\{ g_j(c-1), \min_{k | c_{kj} \leq c} \{ g_k(c - c_{kj}) + t_{kj} \} \right\}$$

$$\text{Für } j = 2, \dots, n; \ c = 1, \dots, OPT$$

# Exakte Lösung

## Laufzeit

$$g_1(c) = 0, \text{ Für } c = 0, \dots, OPT,$$

$$g_j(0) = \infty, \text{ Für } j = 2, \dots, n,$$

$$g_j(c) = \min \left\{ g_j(c-1), \min_{k | c_{kj} \leq c} \{ g_k(c - c_{kj}) + t_{kj} \} \right\}$$

$$\text{Für } j = 2, \dots, n; c = 1, \dots, OPT$$

- $\mathcal{O}(OPT \cdot n \cdot \text{Aufwand pro } (c, j))$ 
  - ▶ Pro  $(c, j)$  evtl. alle Vorgänger betrachten
  - ▶  $\mathcal{O}(n^2 OPT) = \mathcal{O}(|E| OPT)$
- Pseudopolynomiell

# Exakte Lösung

## Terminierung

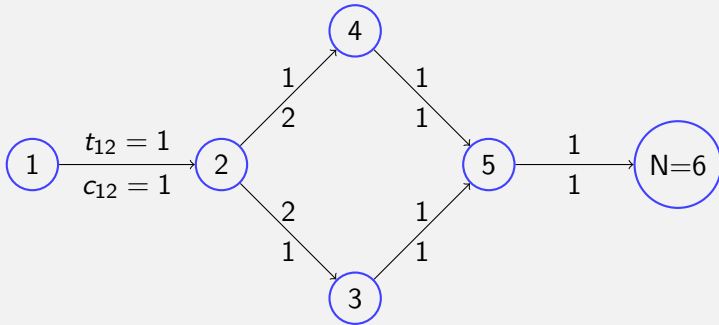
Man weiß  $OPT = \min \{c \mid g_n(c) \leq T\}$

- Setze  $OPT$ , sobald erstes  $c$  mit  $g_n(c) \leq T$  gefunden.

# Exakte Lösung

## Beispiel

Autobahn? Oder doch lieber Landstraße?





# Exakte Lösung

## Beispiel

$j \backslash c$	0	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0	0
2	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

# Exakte Lösung

## Beispiel

$j \backslash c$	0	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0	0
2	$\infty$	1	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$

$$g_2(1) = \min \left\{ g_2(0), \min_{k | c_{kj} \leq c} \{ g_k(c - c_{kj}) + t_{kj} \} \right\}$$

$$g_2(1) = \min \{ \infty, \min \{ g_1(1 - 1) + 1 \} \}$$

$$g_2(1) = 1$$

# Exakte Lösung

## Beispiel

$j \backslash c$	0	1	2	3	4	5
1	0	0	0	0	0	0
2	$\infty$	1	1	1	1	1
3	$\infty$	$\infty$	3	3	3	3
4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	2	2
5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	4	3	3
6	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	5	<b>4</b>

# Das FPTAS

## Test für Grenzen von $OPT$

Wir suchen zunächst ein Verfahren, dass untere und obere Schranken für  $OPT$  findet.

- Wunsch-dir-was: Polynomieller Algorithmus  $TEST(k)$ , sodass

$$TEST_{magic}(k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } OPT \geq k \\ 0 & \text{falls } OPT < k \end{cases}$$

- ▶ Binäre Suche auf  $0, \dots, UB$
- ▶ Leider **NP**-schwer

# Das FPTAS

## Test für Grenzen von $OPT$

$TEST_{magic}(k)$  kann nicht existieren, also schwächer:

### Eigenschaften von $TEST(k)$

$$TEST(k) = \begin{cases} 1 & \text{falls } OPT \geq k \\ 0 & \text{falls } OPT < k(1 + \epsilon) \end{cases}$$

# Das FPTAS

## Test für Grenzen von $OPT$

$TEST_{magic}(k)$  kann nicht existieren, also schwächer:

### $TEST(k)$

- Skaliere und runde Kantengewichte als  $\hat{c}_{ij} = \left\lfloor \frac{c_{ij}(n-1)}{k\epsilon} \right\rfloor$
- Wende exakten Algorithmus an, bis  $g_n(c) \leq T$  gefunden ist oder  $c \geq \frac{n-1}{\epsilon}$ .

# Das FPTAS

Test für Grenzen von  $OPT$

$TEST(k)$  erfüllt seinen Zweck:

$$c < \frac{n-1}{\epsilon}$$

$$\begin{aligned} k &\leq k \\ \frac{k\epsilon}{n-1} \frac{n-1}{\epsilon} &\leq k \end{aligned}$$

Durch Einsetzen folgt:

$$\begin{aligned} \frac{k\epsilon}{n-1} c &< k \\ \frac{k\epsilon}{n-1} c + k\epsilon &< k + k\epsilon \end{aligned}$$

# Das FPTAS

## Test für Grenzen von $OPT$

$TEST(k)$  erfüllt seinen Zweck:

$$c \geq \frac{n-1}{\epsilon}$$

$$\begin{aligned} c &\geq \frac{n-1}{\epsilon} \\ c \frac{k\epsilon}{n-1} &\geq \frac{k\epsilon}{n-1} \frac{n-1}{\epsilon} \\ c \frac{k\epsilon}{n-1} &\geq k \end{aligned}$$



# Das FPTAS

Test für Grenzen von  $OPT$