Lösungen zu Übungsblatt 5 Kryptographische Verfahren

Besprechung 4. Dezember 2015

Aufgabe 5.1. Der Geburtstagsangriff mit konstantem Speicher terminiert

Es sei mit P(n,k) die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, bei n Versuchen (n verschiedenen Eingaben) bei einer Hashlänge von 2^k Bits keine Kollision zu erhalten.

$$\begin{aligned} P(n,k) &= 1 \cdot \frac{2^k - 1}{2^k} \cdot \dots \cdot \frac{2^k - n + 1}{2^k} \\ P(n,k) &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2^k - i}{2^k} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} (1 - \frac{i}{2^k}) \end{aligned}$$

Da (1-x) durch e^{-x} nach oben abgeschätzt werden kann, gilt

$$\leqslant \prod_{i=1}^{n-1} e^{-\frac{i}{2^k}}
= e^{\sum_{i=1}^{n-1} - \frac{i}{2^k}}
= e^{-\frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{n-1} i}
= e^{-\frac{1}{2^k} \frac{n(n-1)}{2}}
\leqslant e^{-\frac{(n-1)^2}{2 \cdot 2^k}}$$

Gesucht ist nun n, sodass $P(n, 128) = \frac{1}{4}$.

$$\begin{split} e^{-\frac{(n-1)^2}{2\cdot 2^k}} &= \frac{1}{4} \\ -\frac{(n-1)^2}{2\cdot 2^k} &= \ln \frac{1}{4} \\ -(n-1)^2 &= 2\cdot 2^k \cdot \ln \frac{1}{4} \\ -n^2 + 2n - 1 &= 2\cdot 2^k \cdot \ln \frac{1}{4} \\ n^2 - 2n + 1 &= -2\cdot 2^k \cdot \ln \frac{1}{4} \end{split}$$

Mit den üblichen Verfahren, z.B. pq-Formel und Computerunterstützung lässt dies als positive Lösung zu

$$n_{128} \approx 30.715.843.678.825.642.450 \geqslant 3.0716 \cdot 10^{19}$$

Man müsste also mehr also über dreißig Trillionen Versuche machen. Analog gelangt man für $\mathbf{k}=160$ zu dem Ergebnis

$$n_{160} \approx 2.012.993.531.335.517.303.552.701 \geqslant 2.013 \cdot 10^{24}$$

oder etwa 2 Quadrillionen Versuche.

Aufgabe 5.2. Der Geburtstagsangriff mit konstantem Speicher findet Kollisionen

Falls es $1 \leqslant I < I$ mit $x_I = x_J$ und damit $H(x_{I-1}) = H(x_{J-1})$ gibt, so hat die Folge x_1, \ldots, x_q offenbar eine Periode von J-I. Der J-te Wert ist also gleich dem I-ten. Falls man die Periodizität schon für i < I annehmen kann, gilt $x_{J-I} = x_{J-I+J-I} = x_{2(J-I)}$.

Allgemein stimmt die Aussage aber nicht. Gilt zum Beispiel $x_7=x_{12}$, so ist $x_8=x_{13},x_9=x_{14},\ldots,x_{10}=x_{15}$.