

## Lösungen zu Übungsblatt 5 Kryptographische Verfahren

Besprechung 4. Dezember 2015

### Aufgabe 5.1. Der Geburtstagsangriff mit konstantem Speicher terminiert

Es sei mit  $P(n, k)$  die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, bei  $n$  Versuchen ( $n$  verschiedenen Eingaben) bei einer Hashlänge von  $2^k$  Bits keine Kollision zu erhalten.

$$\begin{aligned} P(n, k) &= 1 \cdot \frac{2^k - 1}{2^k} \cdot \dots \cdot \frac{2^k - n + 1}{2^k} \\ P(n, k) &= \prod_{i=0}^{n-1} \frac{2^k - i}{2^k} \\ &= \prod_{i=1}^{n-1} \left(1 - \frac{i}{2^k}\right) \end{aligned}$$

Da  $(1 - x)$  durch  $e^{-x}$  nach oben abgeschätzt werden kann, gilt

$$\begin{aligned} &\leq \prod_{i=1}^{n-1} e^{-\frac{i}{2^k}} \\ &= e^{\sum_{i=1}^{n-1} -\frac{i}{2^k}} \\ &= e^{-\frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{n-1} i} \\ &= e^{-\frac{1}{2^k} \frac{n(n-1)}{2}} \\ &\leq e^{-\frac{(n-1)^2}{2 \cdot 2^k}} \end{aligned}$$

Gesucht ist nun  $n$ , sodass  $P(n, 128) = \frac{1}{4}$ .

$$\begin{aligned} e^{-\frac{(n-1)^2}{2 \cdot 2^k}} &= \frac{1}{4} \\ -\frac{(n-1)^2}{2 \cdot 2^k} &= \ln \frac{1}{4} \\ -(n-1)^2 &= 2 \cdot 2^k \cdot \ln \frac{1}{4} \\ -n^2 + 2n - 1 &= 2 \cdot 2^k \cdot \ln \frac{1}{4} \\ n^2 - 2n + 1 &= -2 \cdot 2^k \cdot \ln \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Mit den üblichen Verfahren, z.B. pq-Formel und Computerunterstützung lässt dies als positive Lösung zu

$$n_{128} \approx 30.715.843.678.825.642.450 \geq 3.0716 \cdot 10^{19}$$

Man müsste also mehr also über dreißig Trillionen Versuche machen. Analog gelangt man für  $k = 160$  zu dem Ergebnis

$$n_{160} \approx 2.012.993.531.335.517.303.552.701 \geq 2.013 \cdot 10^{24}$$

oder etwa 2 Quadrillionen Versuche.

### **Aufgabe 5.2. Der Geburtstagsangriff mit konstantem Speicher findet Kollisionen**