

Lösungen zu Übungsblatt 4 Kryptographische Verfahren

Besprechung 27. November 2015

Aufgabe 4.1. Zufallsgeneratoren

Meines Erachtens macht es keinen Sinn, nach einem generellen Beweis zu fragen, dass L und H keine PZG sind. Eher sollte es darum gehen, dass sie nicht *notwendigerweise* PZG sind, wenn G und G' PZG sind, denn dies könnte von der Wahl von G und G' abhängen. Diese Interpretation der Aufgabe wird hier angenommen (so wie z.B. Aufgabe 3.6 aus Katz & Lindell).

Sei G ein PZG mit $|G(s)| > 4|s| = 4n$. Definiere $G' := G(s_1, \dots, s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$. Nach Voraussetzungen ist G' PZG, denn $|G(s)| > 2n$.

a)

Da $|G'| > 2n$, gilt

$$H(s) = G'(0^{|s|} \parallel s) = G(0^{|s|})$$

Also berechnet H für alle s der Länge n den selben Wert und ist damit leicht von echtem Zufall unterscheidbar. Ein Distinguisher \mathcal{D} muss nur für gegebenes $|s|$ (die Länge des Seeds dürfte bekannt sein, oder er probiert alle n Längen durch, was polynomiell in n wäre) den Wert $G(0^{|s|})$ berechnen und prüfen, ob $H(s) = G(0^{|s|})$. Daher ist $P(\mathcal{D}(G(s)) = 1) = 1$, während die Situation, dass ein zufälliger Bistring r gerade $r = G(0^{|s|})$ ist, nur eine von $2^{|s|}$ Möglichkeiten ist, r zu wählen, mithin $P(\mathcal{D}(r) = 1) = \frac{1}{2^{|s|}}$. Die Wahrscheinlichkeiten unterscheiden sich also nicht-vernachlässigbar.

b)

Da $|G'| > 2n$, nehmen wir an

$$\begin{aligned} L(s) &= G'(s) \parallel G'(s+1) \\ &= G(s_1, \dots, s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) \parallel G'(s+1) \\ &= G(s_1, \dots, s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) \parallel G(s') \\ &= G(s_1, \dots, s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) \parallel G(s'_1, \dots, s'_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) \end{aligned}$$

Sei $D(K)$ ein Distinguisher mit

$$D(K) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k_1, \dots, k_{\frac{n}{2}} = k_{\frac{n}{2}+1}, \dots, k_n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$|K|$ muss für Strings, die durch L generiert wurden, gerade sein, da es eine Konkatenation zweier gleich langer Strings ist. Strings ungerader Länge können sofort als echt zufällig identifiziert werden und sind daher uninteressant.

Addiert man 1 zu s , so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Bit in der vorderen Hälfte ändert die Wahrscheinlichkeit, dass alle Bits der unteren Hälfte 1 sind. Damit D 0 zurück gibt auf einem von L

generierten String, muss genau der Fall eintreten, da die untere Hälfte jeweils abgeschnitten und ignoriert wurde.

$$P(\text{Bit } i \text{ geflippt mit } i > \frac{n}{2}) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}},$$

denn die unteren $\frac{n}{2}$ Bits müssen 1 sein. Daher ist

$$P(D(G(s)) = 1) = 1 - P(D(G(s)) = 0) = 1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem gleichverteilten Bitstring r die obere und untere Hälfte übereinstimmen (was zu einer Fehleinschätzung von $D(r)$ führen würde), lässt sich als Quotient der Anzahl von Strings, deren Hälften gleich sind und der Anzahl aller Strings berechnen. Für eine Hälfte gibt es $2^{\frac{n}{2}}$ Möglichkeiten und daher genauso viele Strings mit gleichen Hälften, gegenüber 2^n Strings insgesamt.

$$P(D(r) = 1) = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^n} = 2^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$$

Es gilt also

$$|P(D(G(s)) = 1) - P(D(r) = 1)| = |1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}| = 1 - \frac{2}{2^{\frac{n}{2}}} = 1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}$$

Dies ist nicht vernachlässigbar und wird insbesondere größer für wachsendes n . L ist also nicht notwendigerweise ein PZG.