Rasmus Diederichsen
Lisa Goerke
Sebastian Höffner

Sven Kleine-Albers
Kristin Schmidt

Lösungen zu Übungsblatt 4
Kryptographische Verfahren

Besprechung 27. November 2015

Aufgabe 4.1. Zufallsgeneratoren

Meines Erachtens macht es keinen Sinn, nach einem generellen Beweis zu fragen, dass L und H keine PZG sind. Eher sollte es darum gehen, dass sie nicht *notwendigerweise* PZG sind, wenn G und G′ PZG sind, denn dies könnte von der Wahl von G und G′ abhängen. Diese Interpretation der Aufgabe wird hier angenommen (so wie z.B. Aufgabe 3.6 aus Katz & Lindell).

Sei G ein PZG mit $|G(s)| > 4|s| = 4n$. Definiere $G' \coloneqq G(s_1, \ldots, s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})$. Nach Voraussetzungen ist G′ PZG, denn $|G(s)| > 2n$.

a)

Da $|G'| > 2n$, gilt
$$H(s) = G'(0^{|s|} \parallel s) = G(0^{|s|})$$
Also berechnet H für alle s der Länge n den selben Wert und ist damit leicht von echtem Zufall unterscheidbar. Ein Distinguisher $\mathcal{D}$ muss nur für gegebenes $|s|$ (die Länge des Seeds dürfte bekannt sein, oder er probiert alle n Längen durch, was polynomiell in n wäre) den Wert $G(0^{|s|})$ berechnen und prüfen, ob $H(s) = G(0^{|s|})$. Daher ist $P(\mathcal{D}(G(s)) = 1) = 1$, während die Situation, dass ein zufälliger Bistring r gerade $r = G(0^{|s|})$ ist, nur eine von $2^{|s|}$ Möglichkeiten ist, r zu wählen, mithin $P(\mathcal{D}(r) = 1) = \frac{1}{2^{|s|}}$. Die Wahrscheinlichkeiten unterscheiden sich also nicht-vernachlässigbar.

b)

Da $|G'| > 2n$, nehmen wir an

$$\begin{aligned}
L(s) &= G'(s) \parallel G'(s+1) \\
&= G(s_1, \ldots, s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) \parallel G'(s+1) \\
&= G(s_1, \ldots, s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) \parallel G(s') \\
&= G(s_1, \ldots, s_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}) \parallel G(s'_1, \ldots, s'_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor})
\end{aligned}$$

Sei $\mathcal{D}(K)$ ein Distinguisher mit

$$\mathcal{D}(K) = \begin{cases} 1, \text{falls } k_1, \ldots, k_{\frac{n}{2}} = k_{\frac{n}{2}+1}, \ldots, k_n \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$|K|$ muss für Strings, die durch L generiert wurden, gerade sein, da es eine Konkatenation zweier gleich langer Strings ist. Strings ungerader Länge können sofort als echt zufällig identifiziert werden und sind daher uninteressant.

Addiert man 1 zu s, so ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich ein Bit in der vorderen Hälfte ändert die Wahrscheinlichkeit, dass alle Bits der unteren Hälfte 1 sind. Damit D 0 zurück gibt auf einem von L generierten String, muss genau der Fall eintreten, da die untere Hälfte jeweils abgeschnitten und ignoriert wurde.

$$P(\mathcal{D}(L(s)) = 0) = P(\text{Bit } i \text{ geflippt mit } i > \frac{n}{2}) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}},$$

denn die unteren $\frac{n}{2}$ Bits müssen 1 sein. Daher ist

$$P(\mathcal{D}(L(s)) = 1) = 1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem gleichverteilten Bitstring r die obere und untere Hälfte übereinstimmen (was zu einer Fehleinschätzung von $\mathcal{D}(r)$ führen würde), lässt sich als Quotient der Anzahl von Strings, deren Hälften gleich sind und der Anzahl aller Strings berechnen. Für eine Hälfte gibt es $2^{\frac{n}{2}}$ Möglichkeiten und daher genauso viele Strings mit gleichen Hälften, gegenüber 2^n Strings insgesamt.

$$P(\mathcal{D}(r) = 1) = \frac{2^{\frac{n}{2}}}{2^n} = 2^{-\frac{n}{2}} = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}$$

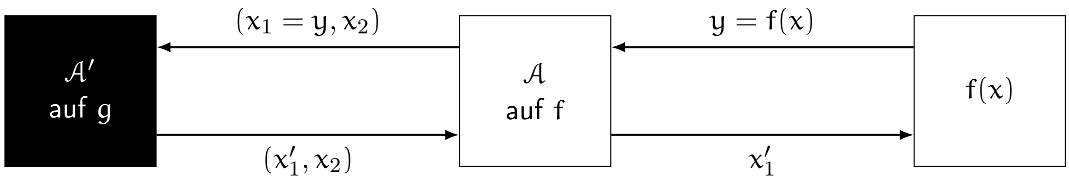
Es gilt also

$$|P(\mathcal{D}(L(s)) = 1) - P(\mathcal{D}(r) = 1)| = \left|1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}} - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}}\right| = 1 - \frac{2}{2^{\frac{n}{2}}} = 1 - \frac{1}{2^{\frac{n}{2}-1}}$$

Dies ist nicht vernachlässigbar und wird insbesondere größer für wachsendes n. L ist also nicht notwendigerweise ein PZG.

Aufgabe 4.2. Beweis des Satzes von Goldbach-Levin (erster Teil)

Unter der Annahme, dass g keine Einwegfunktion ist—also einen nicht vernachlässigbar häufig erfolgreichen Angreifer $\mathcal{A}'$ besitzt—können wir einen Angreifer $\mathcal{A}$ auf die eigentliche Einwegfunktion f konstruieren. $\mathcal{A}$ agiert als Orakel für $\mathcal{A}'$ und sendet seine erhaltene Eingabe y weiter an $\mathcal{A}'$, nachdem es ein beliebiges x_2 mit $|x_2| = |y|$ gewählt hat. $\mathcal{A}'$ antwortet mit einer Lösung (x_1', x_2) für das Tupel. $\mathcal{A}$ kann nun x_1' weiterleiten an f.



Offensichtlich ist $\mathcal{A}$ genau dann erfolgreich, wenn $\mathcal{A}'$ erfolgreich ist. Dies ist ein Widerspruch zur Annahme, dass f eine Einwegfunktion ist.

$\square$

Aufgabe 4.3. Einwegfunktionen?

Angenommen, g wäre keine Einwegfunktion und man könnte g^{-1} effizient berechnen. Dann gälte

$$\begin{aligned} g^{-1}(g(x)) &= x \\ g^{-1}(f(f(x))) &= x \\ g^{-1}(y) &= f^{-1}(f^{-1}(y)) \end{aligned}$$

g^{-1} revidiert also zwei Anwendungen von f. Dann ist aber auch für $y = f(x)$

$$\begin{aligned} g^{-1}(f(y)) &= f^{-1}(f^{-1}(f(y))) \\ &= f^{-1}(y) \end{aligned}$$

Und die Umkehrfunktion $f^{-1}(y)$ ist effizient als $g^{-1}(f(y))$ berechenbar, was ein Widerspruch ist, denn f ist Einwegfunktion. g ist also eine Einwegfunktion.

Ich vermute, dass g' ebenfalls eine Einwegfunkion ist. Gegeben ein y könnte man die Konkatenationsstelle zwar leicht bestimmen durch sukzessive Anwendung von f auf immer längere Teilstrings und das Problem so in zwei Teile brechen, jedoch müsste man dann $f(x)$ und $f(f(x)) = g(x)$ invertieren. Wir wissen, dass wir g^{-1} allein nicht effizient bestimmen können. Möglicherweise ist es hilfreich, für ein $f(f(x))$ das Urbild zu kennen (da es am Anfang steht), aber ich sehe keinen Weg, dies zur Berechnung von x zu nutzen.