

# Mathematik für Anwender II — Blatt 1

Rasmus Diederichsen

5. April 2016

## Aufgabe 1.1

(1)

Wir nehmen an,  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  seien linear abhängig. Folglich existieren  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$ , sodass  $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad | \cdot A \quad (1)$$

$$\alpha_1 A \mathbf{v}_1 + \alpha_2 A \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad | \mathbf{v}_i \text{ Eigenvektoren} \quad (3)$$

Multipliziert man (1) mit  $\lambda_1$ , so erhält man

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_1 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad (4)$$

Subtraktion (1) – (6) ergibt

$$\mathbf{0} + (\lambda_2 - \lambda_1) \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad (5)$$

Es muss also entweder (a)  $\lambda_1 = \lambda_2$  oder (b)  $\alpha_2 = 0$  oder (c)  $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$  gelten. (a) gilt nicht nach Aufgabenstellung. (c) gilt nicht aufgrund der Definition eines Eigenvektors. Wenn  $\alpha_2 = 0$ , muss aber nach Gleichung (1) auch  $\alpha_1 = 0$  sein. Daraus folgt, dass  $\mathbf{v}_1$  und  $\mathbf{v}_2$  linear unabhängig sein müssen.

(2)

Da  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$  Eigenvektoren sind, gilt

$$A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = \alpha_1 A \mathbf{v}_1 + \alpha_2 A \mathbf{v}_2 = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \lambda(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2)$$

Die Linearkombination ist also Eigenvektor von A.

(3)

In (1) wurde gezeigt, dass zwei Eigenvektoren linear unabhängig sind, wenn ihre Eigenwerte unterschiedlich sind. Wir beweisen zunächst, dass dies für  $n$  unterschiedliche Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren gilt.

**Beweis. Induktionsanfang:** Aussage gilt für  $n = 2$ .

**Induktionsschritt:** Sei bis  $n$  bewiesen. Gegeben seien paarweise verschiedene Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$  und Eigenvektoren  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$ , wobei  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  linear unabhängig sind, nach Voraussetzung. Wir nehmen an,  $\mathbf{v}_{n+1}$  wäre linear abhängig von  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ . Es existieren also Skalare  $\alpha_i$  mit

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Multiplikation mit  $A$  liefert

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (2)$$

denn  $\mathbf{v}_i$  sind Eigenvektoren. Multiplikation von (1) mit  $\lambda_{n+1}$  ergibt

$$\alpha_1 \lambda_{n+1} \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_{n+1} \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (3)$$

Subtraktion (2)–(3) ergibt

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (4)$$

Da die  $\lambda_i$  unterschiedlich sind und  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  linear unabhängig, muss  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$  gelten. Mit (1) folgt  $\alpha_{n+1} = 0$  und alle  $\mathbf{v}_i$  sind linear unabhängig.  $\square$

$A$  hat also  $n$  linear unabhängige Eigenvektoren  $\mathbf{v}_i$ . Nach Satz 11.10 ist  $A$  als  $B = S^{-1}AS$  diagonalisierbar mit

$$S = (\mathbf{v}_1 \dots, \mathbf{v}_n)$$

## Aufgabe 1.2

(1)  $A_1$

Es ist  $\chi_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)$

$A_1$  hat also Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 3$$