Reitzner/Alberelli/Madani/Sieg 24. März 2016

Mathematik für Anwender II

Übungsblatt 1

Abgabe: 11.04.2015, bis 10:00 Uhr

0. Bitte schreiben Sie bei jeder Abgabe auf das erste Blatt die/den jeweilige/n TutorIn und die Namen sowie die Matrikelnummern aller Gruppenmitglieder in leserlicher Schrift! Die Blätter werfen Sie dann bitte in den jeweiligen weißen Briefkasten im Erdgeschoss des Mathegebäudes (69). Die korrigierten Blätter werden in der darauffolgenden Woche im jeweiligen Tutorium zurück gegeben.

1. Beantworten Sie die folgenden Fragen und begründen Sie Ihre Antworten.
   (1) Sei $A \in K^{n,n}$ mit zwei Eigenwerten λ_1, λ_2 mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ und Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ (zu λ_1) und $\mathbf{v}_2$ (zu λ_2). Sind $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ linear abhängig oder linear unabhängig?
   (2) Sei $A \in K^{n,n}$ mit einem Eigenwert λ und zwei zu diesem Eigenwert gehörige linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$. Ist jede Linearkombination der beiden $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2$, wobei α_1, α_2 nicht beide null seien, wieder ein Eigenvektor zum Eigenwert λ?
   (3) Sei $A \in K^{n,n}$ mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten. Ist A diagonalisierbar?

2. Wir betrachten die Matrizen
$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}, \quad A_3 = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$
   Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, Eigenwerte, die zugehörigen Eigenräume und falls existent gegebenenfalls Matrizen P_i so, dass $P_i^{-1}A_iP_i$ Diagonalgestalt hat. Unterscheiden Sie $K = \mathbb{R}$ und $K = \mathbb{C}$ wenn nötig.

3. Wir betrachten
$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3} \quad \text{und} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$
   Bestimmen sie alle Eigenwerte und zugehörigen Eigenräume. Überprüfen Sie, ob die Matrizen diagonalisierbar sind und berechnen Sie falls möglich $P_i \in \mathbb{R}^{3,3}$ so, dass $P_i^{-1}A_iP_i$ eine Diagonalmatrix ist.

4. Beweisen Sie:
   (1) Sei $A \in K^{n,n}$. Dann gilt $\det(A) = 0$ genau dann, wenn 0 ein Eigenwert von A ist.
   (2) Sei λ ein Eigenwert von $A \in K^{n,n}$. Dann ist λ^k ein Eigenwert von A^k für alle $k \in \mathbb{N}$.