Mathematik für Anwender II — Blatt 2

Rasmus Diederichsen Laura Goerke Tim Brockmeyer
Katharina Filodda

9. April 2016

Aufgabe 2.1

(1)

f:

$$\begin{aligned} f(A+D) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & c_1+c_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)-(c_1+c_2) \\ 3(b_1+b_2) \\ -2(a_1+a_2)+2(c_1+c_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1-c_1)+(a_2-c_2) \\ 3b_1+3b_2 \\ -2a_1+2c_1-2a_2+2c_2 \end{pmatrix} = f(A)+f(D) \end{aligned}$$

f ist also linear.

g: Es seien $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ und $p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$.

$$g(p_1+p_2) = \begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2-2 \\ 0 & -b_1-b_2+c_1+c_2 \end{pmatrix}$$

$$g(p_1)+g(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & a_1-2 \\ 0 & -b_2+c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2-2 \\ 0 & -b_2+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2-4 \\ 0 & -b_1-b_2+c_1+c_2 \end{pmatrix} \neq g(p_1+p_2)$$

g ist also nicht linear.

(2)

Um $Ker(f)$ zu berechnen, muss folgendes Gleichungssystem gelöst werden.

$$\begin{aligned} a-c &= 0 \\ 3b &= 0 \\ -2a+2c &= 0 \\ \Rightarrow b &= 0 \\ a &= c \end{aligned}$$

Also $Ker(f) = \left\{ k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$

(3)

Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} a - c &= x_1 \\ 3b &= x_2 \\ -2a + 2c &= x_3, \end{aligned}$$

was sich umformen lässt zu

$$\begin{aligned} a &= x_1 + c \\ 3b &= x_2 \\ -2(x_1 + c) + 2c &= x_3 \\ \Rightarrow -2x_1 &= x_3 \end{aligned}$$

Es ist daher nicht möglich, x_1 und x_3 frei zu wählen. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ wird z. B. nicht getroffen. Somit ist f nicht surjektiv und auch nicht bijektiv.
Der Kern von f ist $\neq \{\mathbf{0}\}$. Nach Satz 1.11 ist f also nicht injektiv.

Aufgabe 2.2

(1)

Beweis. Angenommen, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ sind linear abhängig. Somit existieren $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$, sodass

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

mit $\exists i : \alpha_i \neq 0$. Anwendung von f ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Da nicht $\alpha_i = 0 \; \forall i$, sind $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ linear abhängig. □

(2)

Beweis. Angenommen, $\{f(\mathbf{v}_1),\dots,f(\mathbf{v}_n)\}$ sind linear abhängig. Somit existieren $\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbb{K}$ mit $\exists i : \beta_i \neq 0$, sodass

$$\begin{aligned}
\beta_1 f(\mathbf{v}_1)+\ldots+\beta_n f(\mathbf{v}_n) &= 0 && \mid -\beta_n f(\mathbf{v}_n)\\
\beta_1 f(\mathbf{v}_1)+\ldots+\beta_{n-1} f(\mathbf{v}_{n-1}) &= -\beta_n f(\mathbf{v}_n)\\
f\left(\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\mathbf{v}_i\right) &= f(-\beta_n\mathbf{v}_n)
\end{aligned}$$

Es gilt nun, zwei Fälle zu unterscheinden.

f ist injektiv: Es gilt wegen der Injektivität $\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i\mathbf{v}_i = -\beta_n\mathbf{v}_n$. Daher $\sum_{i=1}^{n}\beta_i\mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, wobei nicht alle $\beta_i = 0$ sind. Die $\mathbf{v}_i$ sind also linear abhängig.

$\mathbf{v}_i$ sind linear unabhängig: Es gilt wie oben

$$\begin{aligned}
\beta_1 f(\mathbf{v}_1)+\ldots+\beta_n f(\mathbf{v}_n) &= \mathbf{0}\\
f(\beta_1\mathbf{v}_1+\ldots+\beta_n\mathbf{v}_n) &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

mit $\beta_1\mathbf{v}_1+\ldots+\beta_n\mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$, da nicht alle $\beta_i = 0$ sind. Allerdings ist auch

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

denn f ist linear. f kann also nicht injektiv sein, da zwei ungleiche $\mathbf{v}_i \in V$ auf das selbe Element in W abgebildet werden.

Falls also $f(\mathbf{v}_1),\dots,f(\mathbf{v}_n)$ linear abhängig sind, sind entweder $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ linear abhängig, oder f ist nicht injektiv, ein Widerspruch. □

(3)

Für Aussagen A,B,C gilt

$$\begin{aligned}
&A\wedge B\to C\\
\Leftrightarrow&\neg(A\wedge B)\to C\\
\Leftrightarrow&\neg A\vee\neg B\vee C\\
\Leftrightarrow&\neg B\vee\neg(A\wedge\neg C)\\
\Leftrightarrow&A\wedge\neg C\to\neg B
\end{aligned}$$

Die Aussage ist also logisch äquivalent zu folgender:

$$span(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n) = V\wedge\neg f \text{ injektiv} \Rightarrow \neg f(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n) \text{ linear unabhängig.}$$

Beweis. Seien $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ gegeben mit $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$ und $f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2)$. Nach Vorraussetzung existieren Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_1 \\ \beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_n \mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n) &= f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2) = f(\beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_n \mathbf{v}_n) \\ f\left(\sum \alpha_i \mathbf{v}_i\right) - f\left(\sum \beta_i \mathbf{v}_i\right) &= \mathbf{0} \\ \sum (\alpha_i - \beta_i) f(\mathbf{v}_i) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Also sind die $f(\mathbf{v}_i)$ linear abhängig. $\square$