

# Mathematik für Anwender II — Blatt 2

Rasmus Diederichsen      Laura Goerke      Tim Brockmeyer  
Katharina Filodda

9. April 2016

## Aufgabe 2.1

(1)

$f$ :

$$\begin{aligned} f(A+D) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & c_1+c_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)-(c_1+c_2) & 3(b_1+b_2) \\ -2(a_1+a_2)+2(c_1+c_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1-c_1)+(a_2-c_2) & 3b_1+3b_2 \\ -2a_1+2c_1-2a_2+2c_2 \end{pmatrix} = f(A) + f(D) \end{aligned}$$

$f$  ist also linear.

$g$ : Es seien  $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$  und  $p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$ .

$$\begin{aligned} g(p_1+p_2) &= \begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2-2 \\ 0 & -b_1-b_2+c_1+c_2 \end{pmatrix} \\ g(p_1)+g(p_2) &= \begin{pmatrix} 0 & a_1-2 \\ 0 & -b_2+c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2-2 \\ 0 & -b_2+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2-4 \\ 0 & -b_1-b_2+c_1+c_2 \end{pmatrix} \neq g(p_1+p_2) \end{aligned}$$

$g$  ist also nicht linear.

(2)

Um  $\text{Ker}(f)$  zu berechnen, muss folgendes Gleichungssystem gelöst werden.

$$\begin{aligned} a-c &= 0 \\ 3b &= 0 \\ -2a+2c &= 0 \\ \Rightarrow b &= 0 \\ a &= c \end{aligned}$$

$$\text{Also } \text{Ker}(f) = \left\{ k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

(3)

$$\text{Für } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} a - c &= x_1 \\ 3b &= x_2 \\ -2a + 2c &= x_3, \end{aligned}$$

was sich umformen lässt zu

$$\begin{aligned} a &= x_1 + c \\ 3b &= x_2 \\ -2(x_1 + c) + 2c &= x_3 \\ \Rightarrow -2x_1 &= x_3 \end{aligned}$$

Es ist daher nicht möglich,  $x_1$  und  $x_3$  frei zu wählen. Der Vektor  $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$  wird z. B. nicht getroffen. Somit ist  $f$  nicht surjektiv und auch nicht bijektiv. Der Kern von  $f$  ist  $\neq \{\mathbf{0}\}$ . Nach Satz 1.11 ist  $f$  also nicht injektiv.

## Aufgabe 2.2

(1)

*Beweis.* Angenommen,  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  sind linear abhängig. Somit existieren  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in V$ , sodass

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

mit  $\exists i : \alpha_i \neq 0$ . Anwendung von  $f$  ergibt

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Da nicht  $\alpha_i = 0 \forall i$ , sind  $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$  linear abhängig. □

(2)

*Beweis.* Angenommen,  $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$  sind linear abhängig. Somit existieren  $\beta_1, \dots, \beta_n \in W$  mit  $\exists i : \alpha_i \neq 0$ . Mithin

$$\begin{aligned}\beta_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + \beta_n f(\mathbf{v}_n) &= 0 & | - \beta_n f(\mathbf{v}_n) \\ \beta_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + \beta_{n-1} f(\mathbf{v}_{n-1}) &= -\beta_n f(\mathbf{v}_n) \\ f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{v}_i\right) &= f(-\beta_n \mathbf{v}_n)\end{aligned}$$

Es gilt nun, zwei Fälle zu unterscheiden.

**$f$  ist injektiv:** Es gilt wegen der Injektivität  $\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{v}_i = -\beta_n \mathbf{v}_n$ . Daher  $\sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$ , wobei nicht alle  $\beta_i = 0$  sind. Die  $\mathbf{v}_i$  sind also linear abhängig.

**$\mathbf{v}_i$  sind linear unabhängig:** Es gilt wie oben

$$\begin{aligned}\beta_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + \beta_n f(\mathbf{v}_n) &= \mathbf{0} \\ f(\beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

mit  $\beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$ , da nicht alle  $\beta_i = 0$  sind. Allerdings ist auch

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

denn  $f$  ist linear.  $f$  kann also nicht injektiv sein, da zwei ungleiche  $\mathbf{v}_i \in V$  auf das selbe Element in  $W$  abgebildet werden.

Falls also  $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$  linear abhängig sind, sind entweder  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  linear abhängig, oder  $f$  ist nicht injektiv, aber nicht beides.  $\square$

(3)

Für Aussagen  $A, B, C$  gilt

$$\begin{aligned}A \wedge B &\rightarrow C \\ \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) &\rightarrow C \\ \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B &\vee C \\ \Leftrightarrow \neg B \vee \neg(A \wedge \neg C) \\ \Leftrightarrow A \wedge \neg C &\rightarrow \neg B\end{aligned}$$

Die Aussage ist also logisch äquivalent zu folgender:

$$\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = V \wedge \neg f \text{ injektiv} \Rightarrow \neg f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \text{ linear unabhängig.}$$

*Beweis.* Seien  $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$  gegeben mit  $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$  und  $f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2)$ . Nach Voraussetzung existieren Koeffizienten  $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$  mit

$$\begin{aligned}\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_1 \\ \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_2\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}f(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) &= f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2) = f(\beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n) \\ f\left(\sum \alpha_i \mathbf{v}_i\right) - f\left(\sum \beta_i \mathbf{v}_i\right) &= \mathbf{0} \\ \sum (\alpha_i - \beta_i) f(\mathbf{v}_i) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Also sind die  $f(\mathbf{v}_i)$  linear abhängig. □