Mathematik für Anwender II — Blatt 1

Rasmus Diederichsen Laura Goerke Tim Brockmeyer
Katharina Filodda

8. April 2016

Aufgabe 1.1

(1)

Wir nehmen an, $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ seien linear abhängig. Folglich existieren $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{K}$, sodass $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \qquad | \cdot A \tag{1}$$

$$\alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \alpha_2 A\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{2}$$

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \qquad |\mathbf{v}_i \text{ Eigenvektoren} \tag{3}$$

Multipliziert man (1) mit λ_1, so erhält man

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{4}$$

Subtraktion $(3) - (4)$ ergibt

$$\mathbf{0} + (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{5}$$

Es muss also entweder (a) $\lambda_1 = \lambda_2$ oder (b) $\alpha_2 = 0$ oder (c) $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ gelten. (a) gilt nicht nach Aufgabenstellung. (c) gilt nicht aufgrund der Definition eines Eigenvektors. Wenn $\alpha_2 = 0$, muss aber nach Gleichung (1) Aauch $\alpha_1 = 0$ sein. Daraus folgt, dass $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ linear unabhängig sein müssen.

(2)

Da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ Eigenvektoren sind, gilt

$$A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \alpha_2 A\mathbf{v}_2 = \alpha_1\lambda\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda\mathbf{v}_2 = \lambda(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2)$$

Die Linearkombination ist also Eigenvektor von A.

(3)

In (1) wurde gezeigt, dass zwei Eigenvektoren linear unabhängig sind, wenn ihre Eigenwerte unterschiedlich sind. Wir beweisen zunächst, dass dies für n unterschiedliche Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren gilt.

Beweis. **Induktionsanfang:** Aussage gilt für $n = 2$.
Induktionsschritt: Sei bis n bewiesen. Gegeben seien paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ und Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$, wobei $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig sind, nach Vorraussetzung. Wir nehmen an, $\mathbf{v}_{n+1}$ wäre linear abhängig von $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Es existieren also Skalare α_i mit

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots \alpha_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Multiplikation mit A liefert

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots \alpha_n \lambda_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{2}$$

denn $\mathbf{v}_i$ sind Eigenvektoren. Multiplikation von (1) mit λ_{n+1} ergibt

$$\alpha_1 \lambda_{n+1} \mathbf{v}_1 + \dots \alpha_n \lambda_{n+1} \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{3}$$

Subtraktion (2)$-$(3) ergibt

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{4}$$

Da die λ_i unterschiedlich sind und $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig, muss $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ gelten. Mit (1) folgt $\alpha_{n+1} = 0$ und alle $\mathbf{v}_i$ sind linear unabhängig. □

A hat also n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$. Nach Satz 11.10 ist A als $B = S^{-1}AS$ diagonalisierbar mit

$$S = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \dots, \mathbf{v}_n \end{pmatrix}$$

Aufgabe 1.2

(1) A_1

Es ist $\chi_{A_1}(\lambda) = det(A_1 - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)(3-\lambda)$
A_1 hat also Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1$$
$$\lambda_2 = 3$$

Wir berechnen die Eigenvektoren.
$\boldsymbol{\lambda_1}$:

$$
\begin{aligned}
0x_1 + 2x_2 &= 0 \\
0x_1 + 2x_2 &= 0
\end{aligned}
$$

also ist $x_2 = 0$ und x_1 beliebig $\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder irgendein Vielfaches. Der Eigenraum zu λ_1 ist also der Spann von (die Gerade durch) $\mathbf{v}_1$ oder $\{\mu \cdot \mathbf{v}_1 \mid \mu \in \mathbb{K}\}$.
$\boldsymbol{\lambda_2}$:

$$
\begin{aligned}
-2x_1 + 2x_2 &= 0 \\
0 &= 0
\end{aligned}
$$

Es folgt

$$
x_1 = x_2
$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Eigenraum zu λ_2 ist $\{\mu \cdot \mathbf{v}_2 \mid \mu \in \mathbb{K}\}$

(2) A_2

Es ist $\chi_{A_2}(\lambda) = det(A_2 - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{pmatrix} \right| = (3-\lambda)(-2-\lambda)+4 = \lambda^2 - \lambda - 2$. Die pq-Formel liefert hierfür

$$
\begin{aligned}
\lambda_{1,2} &= \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2} \\
\lambda_1 &= 2 \\
\lambda_2 &= -1
\end{aligned}
$$

Wir berechnen die Eigenvektoren.
$\boldsymbol{\lambda_1}$:

$$
\begin{aligned}
1x_1 + 2x_2 &= 0 \\
-2x_1 - 4x_2 &= 0 \\
\Rightarrow x_1 &= -2x_2
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder irgendein Vielfaches. Der Eigenraum zu λ_1 ist also der Spann von (die Gerade durch) $\mathbf{v}_1$ oder $\{\mu \cdot \mathbf{v}_1 \mid \mu \in \mathbb{K}\}$.
$\boldsymbol{\lambda_2}$:

$$
\begin{aligned}
4x_1 + 2x_2 &= 0 \\
-2x_1 - 1x_2 &= 0 \\
\Rightarrow x_2 &= -2x_1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Der Eigenraum zu λ_2 ist $\{\mu \cdot \mathbf{v}_2 \mid \mu \in \mathbb{K}\}$

(3) A_3

Es ist $\chi_{A_3}(\lambda) = det(A_3 - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 + 6\lambda + 10$. Die pq-Formel liefert hierfür

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3-10}$$

Die Matrix hat also nur komplexe Eigenwerte.

$$
\begin{aligned}
\lambda_1 &= -3 + i \\
\lambda_2 &= -3 - i
\end{aligned}
$$

Wir berechnen die Eigenvektoren.
$\boldsymbol{\lambda_1}$:

$$
\begin{aligned}
-ix_1 - x_2 &= 0 \\
x_1 - ix_2 &= 0 \\
\Rightarrow x_1 &= ix_2
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ oder irgendein Vielfaches. Der Eigenraum zu λ_1 ist also der Spann von (die Gerade durch) $\mathbf{v}_1$ oder $\{\mu \cdot \mathbf{v}_1 \mid \mu \in \mathbb{K}\}$.
$\boldsymbol{\lambda_2}$:

$$
\begin{aligned}
ix_1 - x_2 &= 0 \\
x1 + ix_2 &= 0 \\
\Rightarrow x_2 &= ix_1
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Der Eigenraum zu λ_2 ist $\{\mu \cdot \mathbf{v}_2 \mid \mu \in \mathbb{K}\}$
Es ist offensichtlich, dass für A_1, A_2, A_3 die beiden Eigenvektoren jeweils linear unabhängig sind. Da es sich um 2×2-Matrizen handelt, findet Satz 11.10 Anwendung und die Matrizen sind mit $P_i = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ diagonalisierbar.

Aufgabe 1.3

Aufgabe 1.4

(1)

Nach Satz 11.4 gilt $rang(A) < n$ genau dann, wenn $det(A) = 0$, nach Satz 11.9 sind die Eigenwerte die Zahlen λ mit $det(A - \lambda I) = 0$. Folglich:

$$det(A) = 0 \Leftrightarrow rang(A) < n \Leftrightarrow rang(A - 0 \cdot I) < n$$

(2)

Es ist nach der Definition des Eigenwertes

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

für einen Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Multiplikation mit A gibt

$$\begin{aligned} A \cdot A\mathbf{v} &= A \cdot \lambda\mathbf{v} \\ A^2\mathbf{v} &= \lambda A\mathbf{v} \\ A^2\mathbf{v} &= \lambda\lambda\mathbf{v} \\ A^2\mathbf{v} &= \lambda^2\mathbf{v} \end{aligned}$$

Dies lässt sich beliebig fortführen.