Mathematik für Anwender II — Blatt 3

Rasmus Diederichsen Laura Goerke Tim Brockmeyer
Katharina Filodda

17. April 20163

Aufgabe 3.1

(1)

(2)

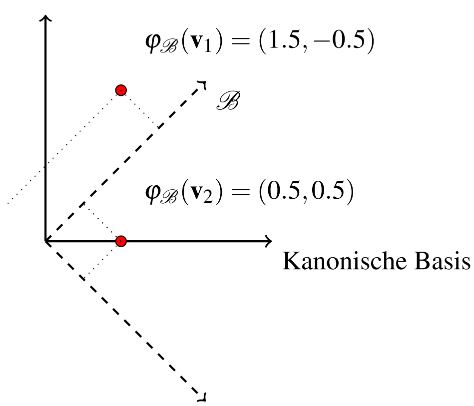
(3)

Aufgabe 3.2

(1)

(2)

(3)



(4)

Aufgabe 3.3

(1)

Die Bilder der Basisvektoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sind

$$\begin{aligned} D(p(x) = 1) &= (p'(x) = 0) = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 \\ D(p(x) = 2) &= (p'(x) = 1) = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 \\ D(p(x) = 3) &= (p'(x) = 2x) = 0\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Die darstellende Matrix ist also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

Der Kern von D sind alle Polynome, deren Ableitung die Nullfunktion ist, also alle Konstanten Polynome. Der Kern hat Dimension 1, denn $\{p(x) = 1\}$ ist eine Basis.

Aufgabe 3.4

Seien $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (1, x, x^2) = \mathscr{C}$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathscr{C}}(a + bx + cx^2) &= \varphi_{\mathscr{C}}(a(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3)) + b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)) \\ &= \varphi_{\mathscr{C}}(a(-\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3) + b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)) \\ &= \varphi_{\mathscr{C}}(-a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_1 - a\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2 + 2a\mathbf{v}_3 - b\mathbf{v}_3 - c\mathbf{v}_3) \\ &= (-a + b + c, -a + c, 2a - b - c) \end{aligned}$$

(1)

Indem man die drei Polynome aus $\mathscr{B}$ ableitet und mithilfe der zweiten Zeile in der obigen Definition von $\varphi_{\mathscr{C}}$ nach $\mathscr{C}$ übersetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{v}_1) &= D(p = 1) = 0 \quad &&\Rightarrow a = b = c = 0 \\ D(\mathbf{v}_2) &= D(p = x) = 1 \quad &&\Rightarrow a = 1, b = c = 0 \\ D(\mathbf{v}_3) &= D(p = x^2) = 2x &&\Rightarrow a = c = 0, b = 2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$