Mathematik für Anwender II — Blatt 3

Rasmus Diederichsen Laura Goerke Tim Brockmeyer
Katharina Filodda

17. April 2016

Aufgabe 3.1

(1)

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathscr{B}}(\mathbf{v}_i) &= \varphi_{\mathscr{B}}(0\mathbf{v}_1 + \ldots + 1\mathbf{v}_i + \ldots + 0\mathbf{v}_n)\\ &= (0, \ldots, 1, \ldots, 0)\end{aligned}$$

(2)

Sei $\alpha \in \mathbb{K}^n$ und $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$ sowie $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{u}$.

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathscr{B}}(\alpha\mathbf{v} + \mathbf{u}) &= \varphi_{\mathscr{B}}\left(\alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v} i + \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v} i\right)\\ &= \varphi_{\mathscr{B}}\left(\sum_{i=1}^n (\alpha\alpha_i + \beta_i)\mathbf{v} i\right)\\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta_1 + \ldots + \alpha\alpha_n + \beta_n)\\ &= (\alpha\alpha_, \ldots, \alpha\alpha_n) + (\beta_, \ldots, \beta_n)\\ &= \alpha(\alpha_, \ldots, \alpha_n) + (\beta_, \ldots, \beta_n)\\ &= \alpha\varphi_{\mathscr{B}}(\mathbf{v}) + \varphi_{\mathscr{B}}(\mathbf{u})\end{aligned}$$

(3)

Seien $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in V$. Da $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ eine Basis ist, existieren eindeutige α_i mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{x}$ und eindeutige β_i. mit $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{y}$. Wenn $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$, so können nicht alle $\alpha_i = \beta_i$ sein, sonst wäre die Darstellung nicht eindeutig. Also is die Funtkion injektiv.
Für $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ gibt es aber auch genau ein Urbild, nämlich $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n$. Sie ist also auch surjektiv, also bijektiv.

Aufgabe 3.2

(1)

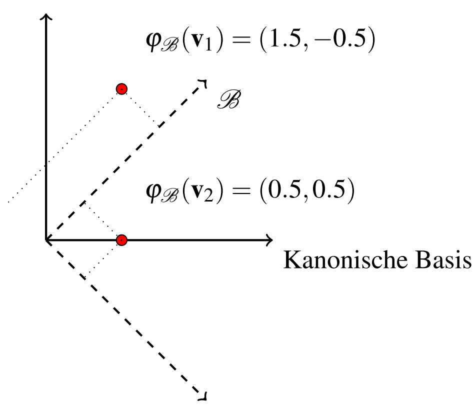
Es sei $\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ und $\mathbf{b_2} = \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathscr{B}}(\mathbf{v} = (v_1, v_2)) &= \varphi_{\mathscr{B}}(v_1 \cdot 0.5 \cdot (\mathbf{b_1} + \mathbf{b_2}) + v_2 \cdot 0.5 \cdot (\mathbf{b_1} - \mathbf{b_2})) \\
&= \varphi_{\mathscr{B}}(v_1 \cdot 0.5 \cdot \mathbf{b_1} + v_1 \cdot 0.5 \cdot \mathbf{b_2} + v_2 \cdot 0.5 \cdot \mathbf{b_1} - v_2 \cdot 0.5 \cdot \mathbf{b_2}) \\
&= \varphi_{\mathscr{B}}((v_1 + v_2) \cdot 0.5 \cdot \mathbf{b_1} + (v_1 - v_2) \cdot 0.5 \cdot \mathbf{b_2}) \\
&= \varphi_{\mathscr{B}}((v_1 + v_2) \cdot 0.5, (v_1 - v_2) \cdot 0.5)
\end{aligned}$$

(2)

$$\varphi_{\mathscr{B}}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = (1.5, -0.5)$$
$$\varphi_{\mathscr{B}}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = (0.5, 0.5)$$

(3)



(4)

Aus

$$\begin{aligned}
\frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2} &= a_1 \\
\frac{v_1}{2} - \frac{v_2}{2} &= a_2
\end{aligned}$$

folgt durch elementare Umformungen $v_1 = a_1 + a_2$ und $v_2 = a_1 - a_2$, sodass

$$\varphi_{\mathscr{B}}^{-1}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3.3

(1)

Die Bilder der Basisvektoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sind

$$\begin{aligned} D(p(x) = 1) &= (p'(x) = 0) = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 \\ D(p(x) = 2) &= (p'(x) = 1) = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 \\ D(p(x) = 3) &= (p'(x) = 2x) = 0\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Die darstellende Matrix ist also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

Der Kern von D sind alle Polynome, deren Ableitung die Nullfunktion ist, also alle Konstanten Polynome. Der Kern hat Dimension 1, denn $\{p(x) = 1\}$ ist eine Basis.

Aufgabe 3.4

Seien $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (1, x, x^2) = \mathscr{C}$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathscr{C}}(a + bx + cx^2) &= \varphi_{\mathscr{C}}(a(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3)) + b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)) \\ &= \varphi_{\mathscr{C}}(a(-\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3) + b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)) \\ &= \varphi_{\mathscr{C}}(-a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_1 - a\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2 + 2a\mathbf{v}_3 - b\mathbf{v}_3 - c\mathbf{v}_3) \\ &= (-a + b + c, -a + c, 2a - b - c) \end{aligned}$$

(1)

Indem man die drei Polynome aus $\mathscr{B}$ ableitet und mithilfe der zweiten Zeile in der obigen Definition von $\varphi_{\mathscr{C}}$ nach $\mathscr{C}$ übersetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{v}_1) &= D(p = 1) = 0 \quad \Rightarrow a = b = c = 0 \\ D(\mathbf{v}_2) &= D(p = x) = 1 \quad \Rightarrow a = 1, b = c = 0 \\ D(\mathbf{v}_3) &= D(p = x^2) = 2x \Rightarrow a = c = 0, b = 2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$