Reitzner/Alberelli/Madani/Sieg 6. April 2016

Mathematik für Anwender II

Übungsblatt 2

Abgabe: 18.04.2016, bis 10:00 Uhr

5. Gegeben seien der 3-dimensionale $\mathbb{R}$-Vektorraum der oberen Dreiecksmatrizen:
$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a,b,c \in \mathbb{R} \right\}$$
und die beiden Abbildungen f, g:
$$f : V \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a-c \\ 3b \\ -2a+2c \end{pmatrix},$$
$$g : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to V, \quad ax^2+bx+c \mapsto \begin{pmatrix} 0 & a-2 \\ 0 & -b+c \end{pmatrix}.$$
   (1) Überprüfen Sie, ob die Abbildungen f und g linear sind.
   (2) Bestimmen Sie Kern(f).
   (3) Ist f injektiv/surjektiv/bijektiv?

6. Sei K ein Körper und V und W zwei K-Vektorräume. Weiterhin sei $f : V \to W$ linear und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Zeigen Sie:
   (1) $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ linear unabhängig in $W \Rightarrow (v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig in V
   (2) $(v_1, \ldots, v_n)$ linear unabhängig in V und f injektiv $\Rightarrow (f(v_1), \ldots, f(v_n))$ linear unabhängig in W
   (3) $\text{span}(v_1, \ldots, v_n) = V$ und $(f(v_1), \ldots, f(v_n))$ linear unabhängig in $W \Rightarrow f$ injektiv

7. Gegeben sei die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}$$
und die dadurch gegebene lineare Abbildung $\varphi_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto Ax$. Bestimmen Sie Kern$(\varphi_A)$ und $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Kern}(\varphi_A))$. Bestimmen Sie daraus $\dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(\varphi_A))$ und berechnen Sie *anschließend* eine Basis von Bild(φ_A).

8. Die Abbildung $f : \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^2$ sei gegeben durch
$$f(z_1, z_2, z_3) = (z_1 + iz_2 - z_3\,,\, iz_1 - z_2 + (1+i)z_3).$$
   (1) Zeigen Sie, dass f linear ist und bestimmen Sie die Matrix von f.
   (2) Bestimmen Sie Kern(f) und Bild(f), sowie deren Dimensionen.