Mathematik für Anwender II — Blatt 2

Rasmus Diederichsen Laura Goerke Tim Brockmeyer
Katharina Filodda

8. April 2016

Aufgabe 2.1

(1)

f:

$$
\begin{aligned}
f(A+D) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & c_1+c_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)-(c_1+c_2) \\ 3(b_1+b_2) \\ -2(a_1+a_2)+2(c_1+c_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_1-c_1)+(a_2-c_2) \\ 3b_1+3b_2 \\ -2a_1+2c_1-2a_2+2c_2 \end{pmatrix} = f(A)+f(D)
\end{aligned}
$$

f ist also linear.

g: Es seien $p_1(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$ und $p_2(x) = a_2x^2+b_2x+c_2$.

$$
\begin{aligned}
g(p_1+p_2) &= \begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2-2 \\ 0 & -b_1-b_2+c_1+c_2 \end{pmatrix} \\
g(p_1)+g(p_2) &= \begin{pmatrix} 0 & a_1-2 \\ 0 & -b_2+c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2-2 \\ 0 & -b_2+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2-4 \\ 0 & -b_1-b_2+c_1+c_2 \end{pmatrix} \neq g(p_1+p_2)
\end{aligned}
$$

g ist also nicht linear.

(2)

Um $Ker(f)$ zu berechnen, muss folgendes Gleichungssystem gelöst werden.

$$
\begin{aligned}
a-c &= 0 \\
3b &= 0 \\
-2a+2c &= 0 \\
\Rightarrow b &= 0 \\
a &= c
\end{aligned}
$$

Also $Ker(f) = \left\{ k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$

(3)

Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} a - c &= x_1 \\ 3b &= x_2 \\ -2a + 2c &= x_3, \end{aligned}$$

was sich umformen lässt zu

$$\begin{aligned} a &= x_1 + c \\ 3b &= x_2 \\ -2(x_1 + c) + 2c &= x_3 \\ \Rightarrow -2x_1 &= x_3 \end{aligned}$$

Es ist daher nicht möglich, x_1 und x_3 frei zu wählen. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ wird z. B. nicht getroffen. Somit ist f nicht surjektiv und auch nicht bijektiv.
Der Kern von f ist $\neq \{\mathbf{0}\}$. Nach Satz 1.11 ist f also nicht injektiv.