

# Mathematik für Anwender II — Blatt 3

Rasmus Diederichsen      Laura Goerke      Tim Brockmeyer  
Katharina Filodda

18. April 2016

## Aufgabe 3.1

(1)

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}_i) &= \varphi_{\mathcal{B}}(0\mathbf{v}_1 + \dots + 1\mathbf{v}_i + \dots + 0\mathbf{v}_n) \\ &= (0, \dots, 1, \dots, 0)\end{aligned}$$

(2)

Sei  $\alpha \in \mathbb{K}^n$  und  $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i$  sowie  $\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{u}_i$ .

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{B}}(\alpha\mathbf{v} + \mathbf{u}) &= \varphi_{\mathcal{B}}\left(\alpha \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i + \sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i\right) \\ &= \varphi_{\mathcal{B}}\left(\sum_{i=1}^n (\alpha\alpha_i + \beta_i) \mathbf{v}_i\right) \\ &= (\alpha\alpha_1 + \beta_1 + \dots + \alpha\alpha_n + \beta_n) \\ &= (\alpha\alpha, \dots, \alpha\alpha_n) + (\beta, \dots, \beta_n) \\ &= \alpha(\alpha, \dots, \alpha_n) + (\beta, \dots, \beta_n) \\ &= \alpha\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) + \varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{u})\end{aligned}$$

(3)

Seien  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \in V$ . Da  $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$  eine Basis ist, existieren eindeutige  $\alpha_i$  mit  $\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{x}$  und eindeutige  $\beta_i$  mit  $\sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i = \mathbf{y}$ . Wenn  $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ , so können nicht alle  $\alpha_i = \beta_i$  sein, sonst wäre die Darstellung nicht eindeutig. Also ist die Funktion injektiv.

Für  $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  gibt es aber auch genau ein Urbild, nämlich  $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n$ . Sie ist also auch surjektiv, also bijektiv.

### Aufgabe 3.2

(1)

Es sei  $\mathbf{b}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  und  $\mathbf{b}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ .

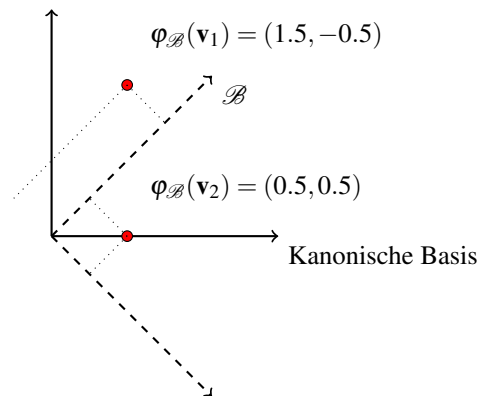
$$\begin{aligned}\varphi_{\mathcal{B}}(\mathbf{v} = (v_1, v_2)) &= \varphi_{\mathcal{B}}(v_1 \cdot 0.5 \cdot (\mathbf{b}_1 + \mathbf{b}_2) + v_2 \cdot 0.5 \cdot (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2)) \\ &= \varphi_{\mathcal{B}}(v_1 \cdot 0.5 \cdot \mathbf{b}_1 + v_1 \cdot 0.5 \cdot \mathbf{b}_2 + v_2 \cdot 0.5 \cdot \mathbf{b}_1 - v_2 \cdot 0.5 \cdot \mathbf{b}_2) \\ &= \varphi_{\mathcal{B}}((v_1 + v_2) \cdot 0.5 \cdot \mathbf{b}_1 + (v_1 - v_2) \cdot 0.5 \cdot \mathbf{b}_2) \\ &= (v_1 + v_2) \cdot 0.5, (v_1 - v_2) \cdot 0.5\end{aligned}$$

(2)

$$\varphi_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = (1.5, -0.5)$$

$$\varphi_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = (0.5, 0.5)$$

(3)



(4)

Aus

$$\begin{aligned}\frac{v_1}{2} + \frac{v_2}{2} &= a_1 \\ \frac{v_1}{2} - \frac{v_2}{2} &= a_2\end{aligned}$$

folgt durch elementare Umformungen  $v_1 = a_1 + a_2$  und  $v_2 = a_1 - a_2$ , sodass

$$\varphi_{\mathcal{B}}^{-1} \left( \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a_1 + a_2 \\ a_1 - a_2 \end{pmatrix}.$$

### Aufgabe 3.3

(1)

Die Bilder der Basisvektoren  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  sind

$$\begin{aligned} D(p(x) = 1) &= (p'(x) = 0) = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 \\ D(p(x) = 2) &= (p'(x) = 1) = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 \\ D(p(x) = 3) &= (p'(x) = 2x) = 0\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 \end{aligned}$$

Die darstellende Matrix ist also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

Der Kern von  $D$  sind alle Polynome, deren Ableitung die Nullfunktion ist, also alle Konstanten Polynome. Der Kern hat Dimension 1, denn  $\{p(x) = 1\}$  ist eine Basis.

### Aufgabe 3.4

Seien  $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = (1, x, x^2) = \mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathcal{C}}(a + bx + cx^2) &= \varphi_{\mathcal{C}}(a(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3)) + b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)) \\ &= \varphi_{\mathcal{C}}(a(-\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3) + b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)) \\ &= \varphi_{\mathcal{C}}(-a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_1 - a\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2 + 2a\mathbf{v}_3 - b\mathbf{v}_3 - c\mathbf{v}_3) \\ &= (-a + b + c, -a + c, 2a - b - c) \end{aligned}$$

(1)

Indem man die drei Polynome aus  $\mathcal{B}$  ableitet und mithilfe der zweiten Zeile in der obigen Definition von  $\varphi_{\mathcal{C}}$  nach  $\mathcal{C}$  übersetzt, ergibt sich:

$$\begin{aligned} D(\mathbf{v}_1) &= D(p = 1) = 0 \Rightarrow a = b = c = 0 \\ D(\mathbf{v}_2) &= D(p = x) = 1 \Rightarrow a = 1, b = c = 0 \\ D(\mathbf{v}_3) &= D(p = x^2) = 2x \Rightarrow a = c = 0, b = 2 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$