Mathematik für Anwender II — Blatt 2

Rasmus Diederichsen Laura Goerke Tim Brockmeyer
Katharina Filodda

17. April 2016

Aufgabe 2.1

(1)

f:

$$
\begin{aligned}
f(A+D) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & c_1+c_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)-(c_1+c_2) \\ 3(b_1+b_2) \\ -2(a_1+a_2)+2(c_1+c_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_1-c_1)+(a_2-c_2) \\ 3b_1+3b_2 \\ -2a_1+2c_1-2a_2+2c_2 \end{pmatrix} = f(A)+f(D)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(\alpha A) &= f\left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha \cdot 0 & \alpha c \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} \alpha a - \alpha c \\ 3\alpha b \\ -2\alpha a + 2\alpha c \end{pmatrix} \\
&= \alpha f(A)
\end{aligned}
$$

f ist also linear.

g: Es seien $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ und $p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$.

$$
\begin{aligned}
g(p_1+p_2) &= \begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2-2 \\ 0 & -b_1-b_2+c_1+c_2 \end{pmatrix} \\
g(p_1)+g(p_2) &= \begin{pmatrix} 0 & a_1-2 \\ 0 & -b_1+c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2-2 \\ 0 & -b_2+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2-4 \\ 0 & -b_1-b_2+c_1+c_2 \end{pmatrix} \neq g(p_1+p_2)
\end{aligned}
$$

g ist also nicht linear.

(2)

Um $Ker(f)$ zu berechnen, muss folgendes Gleichungssystem gelöst werden.

$$\begin{aligned} a-c &= 0 \\ 3b &= 0 \\ -2a+2c &= 0 \\ \Rightarrow b &= 0 \\ a &= c \end{aligned}$$

Also $Ker(f) = \left\{ k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$

(3)

Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} a-c &= x_1 \\ 3b &= x_2 \\ -2a+2c &= x_3, \end{aligned}$$

was sich umformen lässt zu

$$\begin{aligned} a &= x_1 + c \\ 3b &= x_2 \\ -2(x_1+c)+2c &= x_3 \\ \Rightarrow -2x_1 &= x_3 \end{aligned}$$

Es ist daher nicht möglich, x_1 und x_3 frei zu wählen. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ wird z. B. nicht getroffen. Somit ist f nicht surjektiv und auch nicht bijektiv.
Der Kern von f ist $\neq \{\mathbf{0}\}$. Nach Satz 1.11 ist f also nicht injektiv.

Aufgabe 2.2

(1)

Beweis. Angenommen, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ sind linear abhängig. Somit existieren $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$, sodass

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

mit $\exists i : \alpha_i \neq 0$. Anwendung von f ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Da nicht $\alpha_i = 0 \; \forall i$, sind $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ linear abhängig. □

(2)

Beweis. Sei $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = 0$ mit α_i beliebig. Da f linear ist, gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = 0$$

Da f linear und injektiv ist, ist $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = 0$$

Da die $\mathbf{v}_i$ linear unabhängig sind, ist

$$\alpha_i = 0$$

Also sind die $f(\mathbf{v}_i)$ auch linear unabhängig. □

(3)

Für Aussagen A, B, C gilt

$$\begin{aligned} & A \wedge B \rightarrow C \\ \Leftrightarrow & \neg(A \wedge B) \rightarrow C \\ \Leftrightarrow & \neg A \vee \neg B \vee C \\ \Leftrightarrow & \neg B \vee \neg(A \wedge \neg C) \\ \Leftrightarrow & A \wedge \neg C \rightarrow \neg B \end{aligned}$$

Die Aussage ist also logisch äquivalent zu folgender:

$$span(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) = V \wedge \neg f \text{ injektiv} \Rightarrow \neg f(\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n) \text{ linear unabhängig.}$$

Beweis. Seien $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ gegeben mit $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$ und $f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2)$. Nach Vorraussetzung existieren Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_1 \\ \beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_n \mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1\mathbf{v}_1+\ldots+\alpha_n\mathbf{v}_n) &= f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2) = f(\beta_1\mathbf{v}_1+\ldots+\beta_n\mathbf{v}_n) \\ f\left(\sum\alpha_i\mathbf{v}_i\right) - f\left(\sum\beta_i\mathbf{v}_i\right) &= \mathbf{0} \\ \sum(\alpha_i-\beta_i)f(\mathbf{v}_i) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Also sind die $f(\mathbf{v}_i)$ linear abhängig. □

Aufgabe 2.3

(1)

$Ker(\varphi)$ ist der Lösungsraum des Gleichungssystems

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 0 && (1) \\ 2x_1 + x_2 &= 0 && (2) \\ 4x_1 + x_2 + x_3 &= 0 && (3) \end{aligned}$$

Subtraktion von (3) - (1) - (2) ergibt

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{1}{2}x_3 \\ x_1 &= -\frac{1}{2}x_2 \\ x_2 &= x_3 \end{aligned}$$

Also ist $Ker(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} -0.5k & k & k \end{pmatrix}^T \mid k \in \mathbb{R} \right\}$. Offensichtlich ist $dim(Ker(\varphi)) = 1$.

(2)

$dimV = dim_{\mathbb{R}}(Bild(\varphi)) + dim(Ker(\varphi)) \Rightarrow dim(Bild(\varphi)) = 2$

(3)

Eine Basis von $Bild(\varphi)$ ist die maximale Zahl linear unabhängiger Spalten von A (siehe Definition 1.9), also beispielsweise

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2.4

(1) f ist linear & Bestimmung der Matrix

Da Addition, Subtraktion und Multiplikation in $\mathbb{C}$ kommutativ und distributiv sind, ist die Lienarität eigentlich trivial. Wir rechnen nach:
Seien (z_1, z_2, z_3) und $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{aligned}
f(z_1+y_1, z_2+y_2, z_3+y_3) &= (z_1+y_1+i(z_2+y_2)-(z_3+y_3), i(z_1+y_1)-(z_2+y_2)+(1+i)(z_3+y_3)) \\
&= (z_1+y_1+iz_2+iy_2-z_3-y_3, iz_1+iy_1-z_2-y_2+(1+i)z_3+(1+i)y_3) \\
&= (z_1+iz_2-z_3, iz_1-z_2+(1+i)z_3)+(y_1+iy_2-y_3, iy_1-y_2+(1+i)y_3) \\
&= f(z_1,z_2,z_3)+f(y_1,y_2,y_3)
\end{aligned}$$

Sei zudem $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
f(\alpha z_1, \alpha z_2, \alpha z_3) &= (\alpha z_1, \alpha iz_2 - \alpha z_3, \alpha iz_1 - \alpha z_2 + \alpha(1+i)z_3) \\
&= \alpha f(z_1,z_2,z_3)
\end{aligned}$$

Die Matrix A_f muss offensichtlich $\in \mathbb{C}^{2\times 3}$ sein. Aus der Abbildungsvorschrift lässt sich sofort ablesen.

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ i & -1 & (1+i) \end{pmatrix} \xrightarrow{(ii)-i\cdot(i)} \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 0 & 1+2i \end{pmatrix}$$

(2) Kern, Bild & Dimensionen

Der Kern von f ist der Lösungsraum von $A_f\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{aligned}
x_1 + ix_2 - x_3 &= 0 \\
(1+2i)x_3 &= 0 \\
\Rightarrow x_3 &= 0 \\
\Rightarrow x_1 &= -ix_2
\end{aligned}$$

$$Ker(f) = \left\{ k \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \mid k \in \mathbb{C} \right\} \text{ und } dim_{\mathbb{C}}(Ker(f)) = 1.$$

$$Bild(f) = span\left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix} \right\},$$

denn die ersten zwei Spalten von A_f sind linear abhängig. Also $dim_{\mathbb{C}}(Bild(f)) = 2$.