

Mathematik für Anwender II — Blatt 2

Rasmus Diederichsen Laura Goerke Tim Brockmeyer
Katharina Filodda

17. April 2016

Aufgabe 2.1

(1)

f :

$$\begin{aligned} f(A+D) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & c_1+c_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)-(c_1+c_2) \\ 3(b_1+b_2) \\ -2(a_1+a_2)+2(c_1+c_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1-c_1)+(a_2-c_2) \\ 3b_1+3b_2 \\ -2a_1+2c_1-2a_2+2c_2 \end{pmatrix} = f(A) + f(D) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(\alpha A) &= f\left(\begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha \cdot 0 & \alpha c \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a - \alpha c \\ 3\alpha b \\ -2\alpha a + 2\alpha c \end{pmatrix} \\ &= \alpha f(A) \end{aligned}$$

f ist also linear.

g : Es seien $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ und $p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$.

$$\begin{aligned} g(p_1 + p_2) &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 - 2 \\ 0 & -b_1 - b_2 + c_1 + c_2 \end{pmatrix} \\ g(p_1) + g(p_2) &= \begin{pmatrix} 0 & a_1 - 2 \\ 0 & -b_1 + c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2 - 2 \\ 0 & -b_2 + c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1 + a_2 - 4 \\ 0 & -b_1 - b_2 + c_1 + c_2 \end{pmatrix} \neq g(p_1 + p_2) \end{aligned}$$

g ist also nicht linear.

(2)

Um $\text{Ker}(f)$ zu berechnen, muss folgendes Gleichungssystem gelöst werden.

$$\begin{aligned}a - c &= 0 \\3b &= 0 \\-2a + 2c &= 0 \\&\Rightarrow b = 0 \\a &= c\end{aligned}$$

$$\text{Also } \text{Ker}(f) = \left\{ k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

(3)

$$\text{Für } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned}a - c &= x_1 \\3b &= x_2 \\-2a + 2c &= x_3,\end{aligned}$$

was sich umformen lässt zu

$$\begin{aligned}a &= x_1 + c \\3b &= x_2 \\-2(x_1 + c) + 2c &= x_3 \\&\Rightarrow -2x_1 = x_3\end{aligned}$$

Es ist daher nicht möglich, x_1 und x_3 frei zu wählen. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ wird z. B. nicht getroffen. Somit ist f nicht surjektiv und auch nicht bijektiv. Der Kern von f ist $\neq \{\mathbf{0}\}$. Nach Satz 1.11 ist f also nicht injektiv.

Aufgabe 2.2

(1)

Beweis. Angenommen, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sind linear abhängig. Somit existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, sodass

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

mit $\exists i : \alpha_i \neq 0$. Anwendung von f ergibt

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Da nicht $\alpha_i = 0 \forall i$, sind $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ linear abhängig. □

(2)

Beweis. Sei $\sum_{i=1}^n \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = \mathbf{0}$ mit α_i beliebig. Da f linear ist, gilt

$$f\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i\right) = \mathbf{0}$$

Da f linear und injektiv ist, ist $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$$

Da die \mathbf{v}_i linear unabhängig sind, ist

$$\alpha_i = 0$$

Also sind die $f(\mathbf{v}_i)$ auch linear unabhängig. □

(3)

Für Aussagen A, B, C gilt

$$\begin{aligned} A \wedge B &\rightarrow C \\ \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) &\rightarrow C \\ \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B &\vee C \\ \Leftrightarrow \neg B \vee \neg(A \wedge \neg C) & \\ \Leftrightarrow A \wedge \neg C &\rightarrow \neg B \end{aligned}$$

Die Aussage ist also logisch äquivalent zu folgender:

$$\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = V \wedge \neg f \text{ injektiv} \Rightarrow \neg f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \text{ linear unabhängig.}$$

Beweis. Seien $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ gegeben mit $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$ und $f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2)$. Nach Voraussetzung existieren Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned} \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_1 \\ \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_2 \end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned} f(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) &= f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2) = f(\beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n) \\ f\left(\sum \alpha_i \mathbf{v}_i\right) - f\left(\sum \beta_i \mathbf{v}_i\right) &= \mathbf{0} \\ \sum (\alpha_i - \beta_i) f(\mathbf{v}_i) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Also sind die $f(\mathbf{v}_i)$ linear abhängig. □

Aufgabe 2.3

(1)

$\text{Ker}(\varphi)$ ist der Lösungsraum des Gleichungssystems

$$2x_1 + x_3 = 0 \tag{1}$$

$$2x_1 + x_2 = 0 \tag{2}$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{3}$$

Subtraktion von (3) - (1) - (2) ergibt

$$2x_1 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 = 0$$

$$0 = 0$$

und daher

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2$$

$$x_2 = x_3$$

Also ist $\text{Ker}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} -0.5k & k & k \end{pmatrix}^T \mid k \in \mathbb{R} \right\}$. Offensichtlich ist $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 1$.

(2)

$$\dim V = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(\varphi)) + \dim(\text{Ker}(\varphi)) \Rightarrow \dim(\text{Bild}(\varphi)) = 2$$

(3)

Eine Basis von $\text{Bild}(\varphi)$ ist die maximale Zahl linear unabhängiger Spalten von A (siehe Definition 1.9), also beispielsweise

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2.4

(1) f ist linear & Bestimmung der Matrix

Da Addition, Subtraktion und Multiplikation in \mathbb{C} kommutativ und distributiv sind, ist die Linearität eigentlich trivial. Wir rechnen nach:

Seien (z_1, z_2, z_3) und $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{aligned} f(z_1 + y_1, z_2 + y_2, z_3 + y_3) &= (z_1 + y_1 + i(z_2 + y_2) - (z_3 + y_3), i(z_1 + y_1) - (z_2 + y_2) + (1 + i)(z_3 + y_3)) \\ &= (z_1 + y_1 + iz_2 + iy_2 - z_3 - y_3, iz_1 + iy_1 - z_2 - y_2 + (1 + i)z_3 + (1 + i)y_3) \\ &= (z_1 + iz_2 - z_3, iz_1 - z_2 + (1 + i)z_3) + (y_1 + iy_2 - y_3, iy_1 - y_2 + (1 + i)y_3) \\ &= f(z_1, z_2, z_3) + f(y_1, y_2, y_3) \end{aligned}$$

Sei zudem $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha z_1, \alpha z_2, \alpha z_3) &= (\alpha z_1, \alpha iz_2 - \alpha z_3, \alpha iz_1 - \alpha z_2 + \alpha(1 + i)z_3) \\ &= \alpha f(z_1, z_2, z_3) \end{aligned}$$

Die Matrix A_f muss offensichtlich $\in \mathbb{C}^{2 \times 3}$ sein. Aus der Abbildungsvorschrift lässt sich sofort ablesen.

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ i & -1 & (1+i) \end{pmatrix} \xrightarrow{II - iI} \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 0 & 1+2i \end{pmatrix}$$

(2) Kern, Bild & Dimensionen

Der Kern von f ist der Lösungsraum von $A_f \mathbf{x} = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 - x_3 &= 0 \\ (1 + 2i)x_3 &= 0 \\ \Rightarrow x_3 &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= -ix_2 \end{aligned}$$

$$\text{Ker}(f) = \left\{ k \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \mid k \in \mathbb{C} \right\} \text{ und } \dim_{\mathbb{C}}(\text{Ker}(f)) = 1.$$

$$\text{Bild}(f) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix} \right\},$$

denn die ersten zwei Spalten von A_f sind linear abhängig. Also $\dim_{\mathbb{C}}(\text{Bild}(f)) = 2$.