Reitzner/Alberelli/Madani/Sieg 12. April 2016

Mathematik für Anwender II

Übungsblatt 3

Abgabe: 25.04.2016, bis 10:00 Uhr

In der Vorlesung haben wir gesehen, dass wir zu jeder linearen Abbildung $h : K^n \to K^m$ eine eindeutige Matrix $A \in K^{m,n}$ finden können, so dass $h(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ für alle $\mathbf{v} \in K^n$. Auf diesem Blatt wollen wir uns ein ähnliches Resultat für lineare Abbildungen zwischen beliebigen, endlichdimensionalen Vektorräumen erarbeiten.

Dafür benötigen wir zunächst den Begriff der *Koordinaten*. Wir betrachten einen Vektorraum V der Dimension n über einem Körper K und fixieren eine Basis $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$. Wir wissen, dass wir jeden Vektor $\mathbf{v} \in V$ als eindeutige Linearkombination der $\mathbf{v}_i$ darstellen können, das heißt es gibt eindeutige $a_1, \ldots, a_n \in K$, so dass

$$\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n.$$

Die *Koordinatenabbildung* $\varphi_{\mathscr{B}}$ ist nun dadurch definiert, dass sie einen Vektor aus V auf die Skalare dieser Linearkombination abbildet:

$$\varphi_{\mathscr{B}} : V \to K^n, \quad \mathbf{v} \mapsto (a_1, \ldots, a_n).$$

9. (1) Warum gilt $\varphi_{\mathscr{B}}(\mathbf{v}_i) = e_i$ für $i = 1, \ldots, n$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor in K^n ist?
   (2) Warum ist $\varphi_{\mathscr{B}}$ linear?
   (3) Warum ist $\varphi_{\mathscr{B}}$ bijektiv, also ein Isomorphismus?

10. Wir betrachten nun den Vektorraum $\mathbb{R}^2$ mit der Basis

$$\mathscr{B} = ((1,1), (1,-1)).$$

   (1) Bestimmen Sie $\varphi_{\mathscr{B}} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, das heißt geben Sie für einen beliebigen Vektor $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, $\varphi_{\mathscr{B}}(\mathbf{v}) \in \mathbb{R}^2$ an.
   (2) Bestimmen Sie die Koordinaten von $(1,2)$ und $(1,0)$ bezüglich $\mathscr{B}$.
   (3) Zeichnen Sie eine Skizze, die Teil (2) illustriert.
   (4) Bestimmen Sie die inverse Abbildung $\varphi_{\mathscr{B}}^{-1}$.

Haben wir nun einen weiteren Vektorraum W der Dimension m über dem Körper K und Basis $\mathscr{C} = (\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m)$ gegeben, ermöglicht uns die Koordinatenabbildung einen Weg, eine zu einer linearen Abbildung $h : V \to W$ gehörige Matrix $A \in K^{m,n}$ zu finden. Dafür betrachten wir einen Basisvektor $\mathbf{v}_i \in V$ aus $\mathscr{B}$. Diesen können wir mithilfe von $\varphi_{\mathscr{B}}$ in den K^n abbilden. Andererseits können wir ihn auch mit h erst nach W abbilden und dann mit $\varphi_{\mathscr{C}}$ nach K^m, das heißt wir betrachten $\varphi_{\mathscr{C}}(h(\mathbf{v}_i))$. Aus der Vorlesungen wissen wir jetzt, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $F : K^n \to K^m$ geben muss, die $\varphi_{\mathscr{B}}(\mathbf{v}_i)$ auf $\varphi_{\mathscr{C}}(h(\mathbf{v}_i))$ abbildet. Wir erhalten ein sogenanntes *kommutatives Diagramm*:

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{C}}"] \\ K^n \arrow[r, "F"] & K^m \end{tikzcd} \qquad F \circ \varphi_{\mathcal{B}} = \varphi_{\mathcal{C}} \circ h$$

Die *darstellende Matrix* von h ist dann definiert als die zu F gehörige Matrix $A \in K^{m,n}$.

Die j-te Spalte der Matrix A bestimmt man wie folgt:
1. Bestimme $h(\mathbf{v}_j) \in W$.
2. Stelle $h(\mathbf{v}_j)$ als Linearkombination der Basisvektoren aus $\mathscr{C} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$ dar:
$$h(\mathbf{v}_j) = a_{1j}\mathbf{w}_1 + a_{2j}\mathbf{w}_2 + \ldots + a_{mj}\mathbf{w}_m, \; a_{ij} \in K.$$
3. Die j-te Spalte von A besteht nun aus diesen Koordinaten $(a_{1j}, \dots, a_{mj}) \in K^m$.

Merke:
Die Spalten der darstellenden Matrix sind die Koordinaten von den Bildern der Basisvektoren aus $\mathscr{B} = (\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n)$ bezüglich $\mathscr{C} = (\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m)$.

Als ein wichtiges Beispiel werden wir im weiteren Verlauf den $\mathbb{R}$-Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens 2 betrachten:
$$\mathbb{R}_{\leq 2}[x] = \left\{a + bx + cx^2 \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}.$$
Dieser hat die Dimension 3 und eine Basis ist gegeben durch $\mathscr{B} = (1, x, x^2)$. Die Koordinatenabbildung ist dann definiert durch
$$\varphi_{\mathscr{B}} : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}^3, \quad a + bx + cx^2 \mapsto (a, b, c).$$

11. Wir betrachten die Ableitungsfunktion
$$D : \mathbb{R}_{\leq 2}[x] \to \mathbb{R}_{\leq 2}[x], \quad p = a + bx + cx^2 \mapsto p' = b + 2cx.$$
Aus den Ableitungsregeln folgt, dass D eine lineare Abbildung ist.
   (1) Bestimmen Sie die darstellende Matrix $A \in \mathbb{R}^{3,3}$ von D bezüglich der Basis $\mathscr{B}$, das heißt es gilt $\mathscr{C} = \mathscr{B}$ in den obigen Ausführungen.
   (2) Aus welchen Polynomen besteht der Kern von D und welche Dimension hat er?

12. Nun betrachten wir eine weitere Basis von $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$:
$$\mathscr{C} = (1 + x + x^2, -x + x^2, 1 + x^2).$$
Sie müssen nicht zeigen, dass $\mathscr{C}$ eine Basis bildet.
   (1) Bestimmen Sie die Koordinatenabbildung $\varphi_{\mathscr{C}}$, das heißt, geben Sie für ein beliebiges Polynom $p = a + bx + cx^2$, $\varphi_{\mathscr{C}}(p) \in \mathbb{R}^3$ an.
   (2) Bestimmen Sie die darstellende Matrix von D aus Aufgabe 11, wobei diesmal jedoch der Zielvektorraum $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$ mit der Basis $\mathscr{C}$ ausgestattet ist.