Mathematik für Anwender II

Übungsblatt 4

Abgabe: 02.05.2016, bis 10:00 Uhr

13. Sei

$$A_t = \begin{pmatrix} 4+t & 0 & 5 & t^2+t-7 \\ 0 & 2 & e^t & \sqrt{|t|} \\ 1 & 0 & t & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Für welche $t \in \mathbb{R}$ ist A_t über $\mathbb{R}$ diagonalisierbar?

14. Sei V ein n-dimensionaler $\mathbb{R}$-Vektorraum. Eine lineare Abbildung $p: V \to V$ heißt *Projektion*, falls $p(p(\mathbf{v})) = p(\mathbf{v})$ für alle $\mathbf{v} \in V$. In dieser Aufgabe geht es darum zu zeigen, dass Projektionen immer diagonalisierbar sind.
    (1) Folgern Sie aus $p(p(\mathbf{v})) = p(\mathbf{v})$, dass 0 und 1 die einzigen Eigenwerte von p sind. Somit wissen wir, dass das charakteristische Polynom von p in Linearfaktoren zerfällt.
    (2) Geben Sie ein Beispiel für eine Projektion $p: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ an, die nicht die Nullabbildung oder die Identität ist. Interpretieren Sie Teil (1) für diese Abbildung geometrisch und zeichnen Sie eine Skizze.
    (3) Zeigen Sie, dass $\mathrm{Kern}(p) = \mathrm{Eig}(p,0)$ und $\mathrm{Bild}(p) = \mathrm{Eig}(p,1)$. Folgern Sie hieraus mit Teil (1), dass p diagonalsierbar ist.
    Hinweis: Die Dimensionformel für lineare Abbildungen ist hier sehr hilfreich.

15. Die *Spur* einer Matrix $A = \left(a_{ij}\right)_{ij} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist definiert durch

$$\mathrm{Spur}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

    (1) Zeigen Sie, dass durch

$$\langle A,B \rangle := \mathrm{Spur}(A^T B), \qquad A,B \in \mathbb{R}^{n,n},$$

    ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^{n,n}$ definiert wird.
    (2) Bestimmen Sie die Skalarprodukte $\langle A,A \rangle, \langle B,B \rangle$ und $\langle A,B \rangle$ für

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 1 & -7 & 3 \\ 4 & 2 & -5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}, \quad B = \begin{pmatrix} -4 & 5 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3,3}.$$

16. (1) $C[a,b]$ bezeichne den Vektorraum aller auf $[a,b]$ stetigen (reellen) Funktionen. Weisen Sie nach, dass durch

$$\langle f,g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$$

    ein Skalarprodukt auf $C[a,b]$ gegeben ist.

(2) Es sei speziell $[a,b] = [-1,1]$, $f_n(x) = \sinh(mx)$ und $g_n(x) = \cosh(nx)$ für $m,n \in \mathbb{N}$. Bestimmen Sie das Skalarprodukt $\langle f_m, g_n \rangle$ für alle $m,n \in \mathbb{N}_{>0}$.
Hinweis: Sie können benutzen, dass

$$2\sinh(mx)\cosh(nx) = \sinh(mx - nx) + \sinh(mx + nx).$$