Mathematik für Anwender II — Blatt 2

Rasmus Diederichsen Laura Goerke Tim Brockmeyer
Katharina Filodda

11. April 2016

Aufgabe 2.1

(1)

f:

$$\begin{aligned}
f(A+D) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & c_1+c_2 \end{pmatrix}\right) \\
&= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)-(c_1+c_2) \\ 3(b_1+b_2) \\ -2(a_1+a_2)+2(c_1+c_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} (a_1-c_1)+(a_2-c_2) \\ 3b_1+3b_2 \\ -2a_1+2c_1-2a_2+2c_2 \end{pmatrix} = f(A)+f(D)
\end{aligned}$$

f ist also linear.

g: Es seien $p_1(x) = a_1x^2+b_1x+c_1$ und $p_2(x) = a_2x^2+b_2x+c_2$.

$$g(p_1+p_2) = \begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2-2 \\ 0 & -b_1-b_2+c_1+c_2 \end{pmatrix}$$

$$g(p_1)+g(p_2) = \begin{pmatrix} 0 & a_1-2 \\ 0 & -b_2+c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2-2 \\ 0 & -b_2+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2-4 \\ 0 & -b_1-b_2+c_1+c_2 \end{pmatrix} \neq g(p_1+p_2)$$

g ist also nicht linear.

(2)

Um $Ker(f)$ zu berechnen, muss folgendes Gleichungssystem gelöst werden.

$$\begin{aligned}
a-c &= 0 \\
3b &= 0 \\
-2a+2c &= 0 \\
\Rightarrow b &= 0 \\
a &= c
\end{aligned}$$

Also $Ker(f) = \left\{ k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$

(3)

Für $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\begin{aligned} a - c &= x_1 \\ 3b &= x_2 \\ -2a + 2c &= x_3, \end{aligned}$$

was sich umformen lässt zu

$$\begin{aligned} a &= x_1 + c \\ 3b &= x_2 \\ -2(x_1 + c) + 2c &= x_3 \\ \Rightarrow -2x_1 &= x_3 \end{aligned}$$

Es ist daher nicht möglich, x_1 und x_3 frei zu wählen. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ wird z. B. nicht getroffen. Somit ist f nicht surjektiv und auch nicht bijektiv.
Der Kern von f ist $\neq \{\mathbf{0}\}$. Nach Satz 1.11 ist f also nicht injektiv.

Aufgabe 2.2

(1)

Beweis. Angenommen, $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ sind linear abhängig. Somit existieren $\alpha_1, \ldots \alpha_n \in \mathbb{K}$, sodass

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

mit $\exists i : \alpha_i \neq 0$. Anwendung von f ergibt

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Da nicht $\alpha_i = 0 \ \forall i$, sind $\{f(\mathbf{v}_1), \ldots, f(\mathbf{v}_n)\}$ linear abhängig. $\square$

(2)

Beweis. Angenommen, $\{f(\mathbf{v}_1),\dots,f(\mathbf{v}_n)\}$ sind linear abhängig. Somit existieren $\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbb{K}$ mit $\exists i : \beta_i \neq 0$, sodass

$$\begin{aligned}
\beta_1 f(\mathbf{v}_1) + \ldots + \beta_n f(\mathbf{v}_n) &= 0 && \mid -\beta_n f(\mathbf{v}_n)\\
\beta_1 f(\mathbf{v}_1) + \ldots + \beta_{n-1} f(\mathbf{v}_{n-1}) &= -\beta_n f(\mathbf{v}_n)\\
f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{v}_i\right) &= f(-\beta_n \mathbf{v}_n)
\end{aligned}$$

Es gilt nun, zwei Fälle zu unterscheinden.

f **ist injektiv:** Es gilt wegen der Injektivität $\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{v}_i = -\beta_n \mathbf{v}_n$. Daher $\sum_{i=1}^{n} \beta_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, wobei nicht alle $\beta_i = 0$ sind. Die $\mathbf{v}_i$ sind also linear abhängig.

$\mathbf{v}_i$ **sind linear unabhängig:** Es gilt wie oben

$$\begin{aligned}
\beta_1 f(\mathbf{v}_1) + \ldots + \beta_n f(\mathbf{v}_n) &= \mathbf{0}\\
f(\beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_n \mathbf{v}_n) &= \mathbf{0}
\end{aligned}$$

mit $\beta_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_n \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$, da nicht alle $\beta_i = 0$ sind. Allerdings ist auch

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

denn f ist linear. f kann also nicht injektiv sein, da zwei ungleiche $\mathbf{v}_i \in V$ auf das selbe Element in W abgebildet werden.

Falls also $f(\mathbf{v}_1),\dots,f(\mathbf{v}_n)$ linear abhängig sind, sind entweder $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ linear abhängig, oder f ist nicht injektiv, ein Widerspruch. □

(3)

Für Aussagen A, B, C gilt

$$\begin{aligned}
&A \land B \to C\\
\Leftrightarrow &\neg(A \land B) \to C\\
\Leftrightarrow &\neg A \lor \neg B \lor C\\
\Leftrightarrow &\neg B \lor \neg(A \land \neg C)\\
\Leftrightarrow &A \land \neg C \to \neg B
\end{aligned}$$

Die Aussage ist also logisch äquivalent zu folgender:

$$span(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n) = V \land \neg f \text{ injektiv} \Rightarrow \neg f(\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n) \text{ linear unabhängig.}$$

Beweis. Seien $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ gegeben mit $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$ und $f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2)$. Nach Vorraussetzung existieren Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned}\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_1\\ \beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_2\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}f(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n\mathbf{v}_n) = f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2) &= f(\beta_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \beta_n\mathbf{v}_n)\\ f\left(\sum \alpha_i\mathbf{v}_i\right) - f\left(\sum \beta_i\mathbf{v}_i\right) &= \mathbf{0}\\ \sum(\alpha_i - \beta_i) f(\mathbf{v}_i) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Also sind die $f(\mathbf{v}_i)$ linear abhängig. □

Aufgabe 2.3

(1)

$Ker(\varphi)$ ist der Lösungsraum des Gleichungssystems

$$2x_1 + x_3 = 0 \tag{1}$$
$$2x_1 + x_2 = 0 \tag{2}$$
$$4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{3}$$

Subtraktion von (3) - (1) - (2) ergibt

$$\begin{aligned}2x_1 + x_3 &= 0\\ 2x_1 + x_2 &= 0\\ 0 &= 0\end{aligned}$$

und daher

$$\begin{aligned}x_1 &= -\frac{1}{2}x_3\\ x_1 &= -\frac{1}{2}x_2\\ x_2 &= x_3\end{aligned}$$

Also ist $Ker(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix}-0.5k & k & k\end{pmatrix}^T \mid k \in \mathbb{R} \right\}$. Offensichtlich ist $dim(Ker(\varphi)) = 1$.

(2)

$dimV = dim_{\mathbb{R}}(Bild(\varphi)) + dim(Ker(\varphi)) \Rightarrow dim(Bild(\varphi)) = 2$

(3)

Eine Basis von $Bild(\varphi)$ ist die maximale Zahl linear unabhängiger Spalten von A (siehe Definition 1.9), also beispielsweise

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Aufgabe 2.4

(1) f ist linear & Bestimmung der Matrix

Da Addition, Subtraktion und Multiplikation in $\mathbb{C}$ kommutativ und distributiv sind, ist die Lienarität eigentlich trivial. Wir rechnen nach:
Seien (z_1, z_2, z_3) und $(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{C}^3$.

$$\begin{aligned} f(z_1+y_1, z_2+y_2, z_3+y_3) &= (z_1+y_1+i(z_2+y_2)-(z_3+y_3), i(z_1+y_1)-(z_2+y_2)+(1+i)(z_3+y_3)) \\ &= (z_1+y_1+iz_2+iy_2-z_3-y_3, iz_1+iy_1-z_2-y_2+(1+i)z_3+(1+i)y_3) \\ &= (y_1+iy_2-y_3, iy_1-y_2+(1+i)y_3)+(y_1+iy_2-y_3, iy_1-y_2+(1+i)y_3) \\ &= f(y_1,y_2,y_3)+f(y_1,y_2,y_3) \end{aligned}$$

Sei zudem $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} f(\alpha z_1, \alpha z_2, \alpha z_3) &= (\alpha z_1, \alpha i z_2 - \alpha z_3, \alpha i z_1 - \alpha z_2 + \alpha(1+i)z_3) \\ &= \alpha f(z_1, z_2, z_3) \end{aligned}$$

Die Matrix A_f muss offensichtlich $\in \mathbb{C}^{2\times 3}$ sein. Aus der Abbildungsvorschrift lässt sich sofort ablesen.

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ i & -1 & (1+i) \end{pmatrix} \xrightarrow{II-i\cdot I} \begin{pmatrix} 1 & i & -1 \\ 0 & 0 & 1+2i \end{pmatrix}$$

(2) Kern, Bild & Dimensionen

Der Kern von f ist der Lösungsraum von $A_f\mathbf{x} = 0$:

$$\begin{aligned} x_1 + ix_2 - x_3 &= 0 \\ (1+2i)x_3 &= 0 \\ \Rightarrow x_3 &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= -ix_2 \end{aligned}$$

$$Ker(f) = \left\{ k \begin{pmatrix} -i & 1 & 0 \end{pmatrix}^T \mid k \in \mathbb{C} \right\} \text{ und } dim_{\mathbb{C}}(Ker(f)) = 1.$$

$$Bild(f) = span\left\{ \begin{pmatrix} i \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1+i \end{pmatrix} \right\},$$

denn die ersten zwei Spalten von A_f sind linear abhängig. Also $dim_{\mathbb{C}}(Bild(f)) = 2$.