Mathematik für Anwender II — Blatt 3

Rasmus Diederichsen Laura Goerke Tim Brockmeyer
Katharina Filodda

16. April 2016

Aufgabe 3.1

(1)

(2)

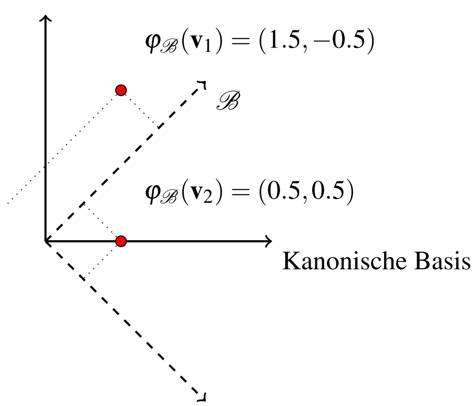
(3)

Aufgabe 3.2

(1)

(2)

(3)



(4)

Aufgabe 3.3

(1)

Die Bilder der Basisvektoren $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ sind

$$\begin{aligned}
D(p(x)=1) &= (p'(x)=0) = 0\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 \\
D(p(x)=2) &= (p'(x)=1) = 1\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 \\
D(p(x)=3) &= (p'(x)=2x) = 0\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3
\end{aligned}$$

Die darstellende Matrix ist also

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(2)

Der Kern von D sind alle Polynome, deren Ableitung die Nullfunktion ist, also alle Konstanten Polynome. Der Kern hat Dimension 1, denn $\{p(x)=1\}$ ist eine Basis.

Aufgabe 3.4

Seien $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3) = \mathscr{C}$

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathscr{C}}(a+bx+cx^2) &= \varphi_{\mathscr{C}}(a(\mathbf{v}_3 - \mathbf{v}_2 - (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3)) + b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)) \\
&= \varphi_{\mathscr{C}}(a(-\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_3) + b(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3) + c(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3)) \\
&= \varphi_{\mathscr{C}}(-a\mathbf{v}_1 + b\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_1 - a\mathbf{v}_1 + c\mathbf{v}_2 + 2a\mathbf{v}_3 - b\mathbf{v}_3 - c\mathbf{v}_3) \\
&= (-a+b+c, -a+c, 2a-b-c)
\end{aligned}$$

(1)

Indem man die drei Polynome aus $\mathscr{B}$ ableitet und mithilfe der zweiten Zeile in der obigen Definition von $\varphi_{\mathscr{C}}$ nach $\mathscr{C}$ übersetzt, ergibt sich.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix},$$

denn für $p'(x) = 1$ ist nur $a = 1$, für $p'(x) = x$ nur $b = 1$