

Mathematik für Anwender II — Blatt 1

Rasmus Diederichsen

8. April 2016

Aufgabe 1.1

(1)

Wir nehmen an, \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 seien linear abhängig. Folglich existieren $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{K}$, sodass $\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad | \cdot A \quad (1)$$

$$\alpha_1 A \mathbf{v}_1 + \alpha_2 A \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad (2)$$

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad | \mathbf{v}_i \text{ Eigenvektoren} \quad (3)$$

Multipliziert man (1) mit λ_1 , so erhält man

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_1 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad (4)$$

Subtraktion (1) – (6) ergibt

$$\mathbf{0} + (\lambda_2 - \lambda_1) \alpha_2 \mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \quad (5)$$

Es muss also entweder (a) $\lambda_1 = \lambda_2$ oder (b) $\alpha_2 = 0$ oder (c) $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ gelten. (a) gilt nicht nach Aufgabenstellung. (c) gilt nicht aufgrund der Definition eines Eigenvektors. Wenn $\alpha_2 = 0$, muss aber nach Gleichung (1) auch $\alpha_1 = 0$ sein. Daraus folgt, dass \mathbf{v}_1 und \mathbf{v}_2 linear unabhängig sein müssen.

(2)

Da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ Eigenvektoren sind, gilt

$$A(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2) = \alpha_1 A \mathbf{v}_1 + \alpha_2 A \mathbf{v}_2 = \alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 = \lambda(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2)$$

Die Linearkombination ist also Eigenvektor von A.

(3)

In (1) wurde gezeigt, dass zwei Eigenvektoren linear unabhängig sind, wenn ihre Eigenwerte unterschiedlich sind. Wir beweisen zunächst, dass dies für n unterschiedliche Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren gilt.

Beweis. Induktionsanfang: Aussage gilt für $n = 2$.

Induktionsschritt: Sei bis n bewiesen. Gegeben seien paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1}$ und Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$, wobei $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig sind, nach Voraussetzung. Wir nehmen an, \mathbf{v}_{n+1} wäre linear abhängig von $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Es existieren also Skalare α_i mit

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (1)$$

Multiplikation mit A liefert

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (2)$$

denn \mathbf{v}_i sind Eigenvektoren. Multiplikation von (1) mit λ_{n+1} ergibt

$$\alpha_1 \lambda_{n+1} \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \lambda_{n+1} \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \quad (3)$$

Subtraktion (2)–(3) ergibt

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \quad (4)$$

Da die λ_i unterschiedlich sind und $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig, muss $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ gelten. Mit (1) folgt $\alpha_{n+1} = 0$ und alle \mathbf{v}_i sind linear unabhängig. \square

A hat also n linear unabhängige Eigenvektoren \mathbf{v}_i . Nach Satz 11.10 ist A als $B = S^{-1}AS$ diagonalisierbar mit

$$S = (\mathbf{v}_1 \dots, \mathbf{v}_n)$$

Aufgabe 1.2

(1) A_1

Es ist $\chi_{A_1}(\lambda) = \det(A_1 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda)$

A_1 hat also Eigenwerte

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_2 = 3$$

Wir berechnen die Eigenvektoren.

λ_1 :

$$0x_1 + 2x_2 = 0$$

$$0x_1 + 2x_2 = 0$$

also ist $x_2 = 0$ und x_1 beliebig $\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ oder irgendein Vielfaches. Der Eigenraum zu λ_1 ist also der Spann von (die Gerade durch) \mathbf{v}_1 oder $\{\mu \cdot \mathbf{v}_1 \mid \mu \in \mathbb{K}\}$.
 λ_2 :

$$-2x_1 + 2x_2 = 0$$

$$0 = 0$$

Es folgt

$$x_1 = x_2$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Eigenraum zu λ_2 ist $\{\mu \cdot \mathbf{v}_2 \mid \mu \in \mathbb{K}\}$

(2) A_2

Es ist $\chi_{A_2}(\lambda) = \det(A_2 - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -2 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = \lambda^2 - \lambda - 2$. Die pq-Formel liefert hierfür

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + 2}$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\lambda_2 = -1$$

Wir berechnen die Eigenvektoren.

λ_1 :

$$1x_1 + 2x_2 = 0$$

$$-2x_1 - 4x_2 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 = -2x_2$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder irgendein Vielfaches. Der Eigenraum zu λ_1 ist also der Spann von (die Gerade durch) \mathbf{v}_1 oder $\{\mu \cdot \mathbf{v}_1 \mid \mu \in \mathbb{K}\}$.

λ_2 :

$$\begin{aligned}4x_1 + 2x_2 &= 0 \\ -2x_1 - 1x_2 &= 0 \\ \Rightarrow x_2 &= -2x_1\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$. Der Eigenraum zu λ_2 ist $\{\mu \cdot \mathbf{v}_2 \mid \mu \in \mathbb{K}\}$

(3) A_3

Es ist $\chi_{A_3}(\lambda) = \det(A_3 - \lambda I) = \left| \begin{pmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 + 6\lambda + 10$. Die pq-Formel liefert hierfür

$$\lambda_{1,2} = -3 \pm \sqrt{3-10}$$

Die Matrix hat also nur komplexe Eigenwerte.

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -3 + i \\ \lambda_2 &= -3 - i\end{aligned}$$

Wir berechnen die Eigenvektoren.

λ_1 :

$$\begin{aligned}-ix_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 - ix_2 &= 0 \\ \Rightarrow x_1 &= ix_2\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$ oder irgendein Vielfaches. Der Eigenraum zu λ_1 ist also der Spann von (die Gerade durch) \mathbf{v}_1 oder $\{\mu \cdot \mathbf{v}_1 \mid \mu \in \mathbb{K}\}$.

λ_2 :

$$\begin{aligned}ix_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + ix_2 &= 0 \\ \Rightarrow x_2 &= ix_1\end{aligned}$$

$\Rightarrow \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$. Der Eigenraum zu λ_2 ist $\{\mu \cdot \mathbf{v}_2 \mid \mu \in \mathbb{K}\}$

Es ist offensichtlich, dass für A_1, A_2, A_3 die beiden Eigenvektoren jeweils linear unabhängig sind. Da es sich um 2×2 -Matrizen handelt, findet Satz 11.10 Anwendung und die Matrizen sind mit $P_i = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ diagonalisierbar.

Aufgabe 1.3

Aufgabe 1.4

(1)

Nach Satz 11.4 gilt $\text{rang}(A) < n$ genau dann, wenn $\det(A) = 0$, nach Satz 11.9 sind die Eigenwerte die Zahlen λ mit $\det(A - \lambda I) = 0$. Folglich:

$$\det(A) = 0 \Leftrightarrow \text{rang}(A) < n \Leftrightarrow \text{rang}(A - 0 \cdot I) < n$$

(2)

Es ist nach der Definition des Eigenwertes

$$A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$$

für einen Vektor $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Multiplikation mit A gibt

$$A \cdot A\mathbf{v} = A \cdot \lambda \mathbf{v}$$

$$A^2\mathbf{v} = \lambda A\mathbf{v}$$

$$A^2\mathbf{v} = \lambda \lambda \mathbf{v}$$

$$A^2\mathbf{v} = \lambda^2 \mathbf{v}$$

Dies lässt sich beliebig fortführen.