

Mathematik für Anwender II — Blatt 2

Rasmus Diederichsen Laura Goerke Tim Brockmeyer
Katharina Filodda

10. April 2016

Aufgabe 2.1

(1)

f :

$$\begin{aligned} f(A+D) &= f\left(\begin{pmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ 0 & c_1+c_2 \end{pmatrix}\right) \\ &= \begin{pmatrix} (a_1+a_2)-(c_1+c_2) & 3(b_1+b_2) \\ -2(a_1+a_2)+2(c_1+c_2) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (a_1-c_1)+(a_2-c_2) & 3b_1+3b_2 \\ -2a_1+2c_1-2a_2+2c_2 \end{pmatrix} = f(A) + f(D) \end{aligned}$$

f ist also linear.

g : Es seien $p_1(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ und $p_2(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$.

$$\begin{aligned} g(p_1+p_2) &= \begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2-2 \\ 0 & -b_1-b_2+c_1+c_2 \end{pmatrix} \\ g(p_1)+g(p_2) &= \begin{pmatrix} 0 & a_1-2 \\ 0 & -b_2+c_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a_2-2 \\ 0 & -b_2+c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_1+a_2-4 \\ 0 & -b_1-b_2+c_1+c_2 \end{pmatrix} \neq g(p_1+p_2) \end{aligned}$$

g ist also nicht linear.

(2)

Um $\text{Ker}(f)$ zu berechnen, muss folgendes Gleichungssystem gelöst werden.

$$\begin{aligned} a-c &= 0 \\ 3b &= 0 \\ -2a+2c &= 0 \\ \Rightarrow b &= 0 \\ a &= c \end{aligned}$$

$$\text{Also } \text{Ker}(f) = \left\{ k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid k \in \mathbb{R} \right\}$$

(3)

$$\text{Für } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ gilt}$$

$$\begin{aligned} a - c &= x_1 \\ 3b &= x_2 \\ -2a + 2c &= x_3, \end{aligned}$$

was sich umformen lässt zu

$$\begin{aligned} a &= x_1 + c \\ 3b &= x_2 \\ -2(x_1 + c) + 2c &= x_3 \\ \Rightarrow -2x_1 &= x_3 \end{aligned}$$

Es ist daher nicht möglich, x_1 und x_3 frei zu wählen. Der Vektor $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}^T$ wird z. B. nicht getroffen. Somit ist f nicht surjektiv und auch nicht bijektiv. Der Kern von f ist $\neq \{\mathbf{0}\}$. Nach Satz 1.11 ist f also nicht injektiv.

Aufgabe 2.2

(1)

Beweis. Angenommen, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ sind linear abhängig. Somit existieren $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{K}$, sodass

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0},$$

mit $\exists i : \alpha_i \neq 0$. Anwendung von f ergibt

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f(\mathbf{v}_i) = f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

Da nicht $\alpha_i = 0 \forall i$, sind $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ linear abhängig. □

(2)

Beweis. Angenommen, $\{f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)\}$ sind linear abhängig. Somit existieren $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{K}$ mit $\exists i : \beta_i \neq 0$, sodass

$$\begin{aligned}\beta_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + \beta_n f(\mathbf{v}_n) &= 0 & | - \beta_n f(\mathbf{v}_n) \\ \beta_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + \beta_{n-1} f(\mathbf{v}_{n-1}) &= -\beta_n f(\mathbf{v}_n) \\ f\left(\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{v}_i\right) &= f(-\beta_n \mathbf{v}_n)\end{aligned}$$

Es gilt nun, zwei Fälle zu unterscheiden.

f ist injektiv: Es gilt wegen der Injektivität $\sum_{i=1}^{n-1} \beta_i \mathbf{v}_i = -\beta_n \mathbf{v}_n$. Daher $\sum_{i=1}^n \beta_i \mathbf{v}_i = \mathbf{0}$, wobei nicht alle $\beta_i = 0$ sind. Die \mathbf{v}_i sind also linear abhängig.

\mathbf{v}_i sind linear unabhängig: Es gilt wie oben

$$\begin{aligned}\beta_1 f(\mathbf{v}_1) + \dots + \beta_n f(\mathbf{v}_n) &= \mathbf{0} \\ f(\beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

mit $\beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n \neq \mathbf{0}$, da nicht alle $\beta_i = 0$ sind. Allerdings ist auch

$$f(\mathbf{0}) = \mathbf{0},$$

denn f ist linear. f kann also nicht injektiv sein, da zwei ungleiche $\mathbf{v}_i \in V$ auf das selbe Element in W abgebildet werden.

Falls also $f(\mathbf{v}_1), \dots, f(\mathbf{v}_n)$ linear abhängig sind, sind entweder $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ linear abhängig, oder f ist nicht injektiv, ein Widerspruch. \square

(3)

Für Aussagen A, B, C gilt

$$\begin{aligned}A \wedge B &\rightarrow C \\ \Leftrightarrow \neg(A \wedge B) &\rightarrow C \\ \Leftrightarrow \neg A \vee \neg B &\vee C \\ \Leftrightarrow \neg B \vee \neg(A \wedge \neg C) \\ \Leftrightarrow A \wedge \neg C &\rightarrow \neg B\end{aligned}$$

Die Aussage ist also logisch äquivalent zu folgender:

$$\text{span}(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) = V \wedge \neg f \text{ injektiv} \Rightarrow \neg f(\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n) \text{ linear unabhängig.}$$

Beweis. Seien $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in V$ gegeben mit $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{u}_2$ und $f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2)$. Nach Voraussetzung existieren Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i \in \mathbb{K}$ mit

$$\begin{aligned}\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_1 \\ \beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n &= \mathbf{u}_2\end{aligned}$$

Also:

$$\begin{aligned}f(\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \alpha_n \mathbf{v}_n) &= f(\mathbf{u}_1) = f(\mathbf{u}_2) = f(\beta_1 \mathbf{v}_1 + \dots + \beta_n \mathbf{v}_n) \\ f\left(\sum \alpha_i \mathbf{v}_i\right) - f\left(\sum \beta_i \mathbf{v}_i\right) &= \mathbf{0} \\ \sum (\alpha_i - \beta_i) f(\mathbf{v}_i) &= \mathbf{0}\end{aligned}$$

Also sind die $f(\mathbf{v}_i)$ linear abhängig. □

Aufgabe 2.3

(1)

$\text{Ker}(\varphi)$ ist der Lösungsraum des Gleichungssystems

$$2x_1 + x_3 = 0 \tag{1}$$

$$2x_1 + x_2 = 0 \tag{2}$$

$$4x_1 + x_2 + x_3 = 0 \tag{3}$$

Subtraktion von (3) - (1) - (2) ergibt

$$2x_1 + x_3 = 0$$

$$2x_1 + x_2 = 0$$

$$0 = 0$$

und daher

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_3$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}x_2$$

$$x_2 = x_3$$

Also ist $\text{Ker}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} -0.5k & k & k \end{pmatrix}^T \mid k \in \mathbb{R} \right\}$. Offensichtlich ist $\dim(\text{Ker}(\varphi)) = 1$.

(2)

$$\dim V = \dim_{\mathbb{R}}(\text{Bild}(\varphi)) + \dim(\text{Ker}(\varphi)) \Rightarrow \dim(\text{Bild}(\varphi)) = 2$$

(3)

Eine Basis von $\text{Bild}(\varphi)$ ist die maximale Zahl linear unabhängiger Spalten von A (siehe Definition 1.9), also beispielsweise

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$