Mathematatik für Anwender II — Blatt 1

Rasmus Diederichsen

5. April 2016

Aufgabe 1.1

(1)

Wir nehmen an, $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ seien linear abhängig. Folglich existieren $\alpha_1,\ \alpha_2 \in \mathbb{K}$, sodass $\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$

$$\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \qquad |\cdot A \tag{1}$$

$$\alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \alpha_2 A\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{2}$$

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \qquad |\mathbf{v}_i \text{ Eigenvektoren} \tag{3}$$

Multipliziert man (1) mit λ_1, so erhält man

$$\alpha_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda_1\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{4}$$

Subtraktion $(1) - (6)$ ergibt

$$\mathbf{0} + (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0} \tag{5}$$

Es muss also entweder (a) $\lambda_1 = \lambda_2$ oder (b) $\alpha_2 = 0$ oder (c) $\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ gelten. (a) gilt nicht nach Aufgabenstellung. (c) gilt nicht aufgrund der Definition eines Eigenvektors. Wenn $\alpha_2 = 0$, muss aber nach Gleichung (1) Aauch $\alpha_1 = 0$ sein. Daraus folgt, dass $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ linear unabhängig sein müssen.

(2)

Da $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ Eigenvektoren sind, gilt

$$A(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2) = \alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \alpha_2 A\mathbf{v}_2 = \alpha_1\lambda\mathbf{v}_1 + \alpha_2\lambda\mathbf{v}_2 = \lambda(\alpha_1\mathbf{v}_1 + \alpha_2\mathbf{v}_2)$$

Die Linearkombination ist also Eigenvektor von A.

(3)

In (1) wurde gezeigt, dass zwei Eigenvektoren linear unabhängig sind, wenn ihre Eigenwerte unterschiedlich sind. Wir beweisen zunächst, dass dies für n unterschiedliche Eigenwerte mit zugehörigen Eigenvektoren gilt.

Beweis. **Induktionsanfang:** Aussage gilt für $n = 2$.
Induktionsschritt: Sei bis n bewiesen. Gegeben seien paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n+1}$ und Eigenvektoren $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{n+1}$, wobei $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig sind, nach Vorraussetzung. Wir nehmen an, $\mathbf{v}_{n+1}$ wäre linear abhängig von $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Es existieren also Skalare α_i mit

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots \alpha_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{1}$$

Multiplikation mit A liefert

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \ldots \alpha_n \lambda_n \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{2}$$

denn $\mathbf{v}_i$ sind Eigenvektoren. Multiplikation von (1) mit λ_{n+1} ergibt

$$\alpha_1 \lambda_{n+1} \mathbf{v}_1 + \ldots \alpha_n \lambda_{n+1} \mathbf{v}_n + \alpha_{n+1} \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \mathbf{0} \tag{3}$$

Subtraktion (2)$-$(3) ergibt

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_{n+1}) \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_n (\lambda_n - \lambda_{n+1}) \mathbf{v}_n = \mathbf{0} \tag{4}$$

Da die λ_i unterschiedlich sind und $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ linear unabhängig, muss $\alpha_1 = \ldots = \alpha_n = 0$ gelten. Mit (1) folgt $\alpha_{n+1} = 0$ und alle $\mathbf{v}_i$ sind linear unabhängig. □

A hat also n linear unabhängige Eigenvektoren $\mathbf{v}_i$. Nach Satz 11.10 ist A als $B = S^{-1}AS$ diagonalisierbar mit

$$S = \left(\mathbf{v}_1 \ldots, \mathbf{v}_n \right)$$