Informatik d: – Blatt 1

Rasmus Diederichsen

25. Juli 2014

Aufgabe 1.1

Die Reihenfolge ist

$$\mathcal{O}\left(\log x\right) \subseteq \mathcal{O}\left(\sqrt{x}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(n^{0.99}\right)$$

$$\subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log\log x}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(x\log x\right) \subseteq \mathcal{O}\left(x\log x^{2}\right)$$

$$\subseteq \mathcal{O}\left(x\log^{2} x\right) \subseteq \mathcal{O}\left(x^{1.01}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(2^{x}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(2^{x+1}\right)$$

$$\subseteq \mathcal{O}\left(2^{2x}\right)$$

Dies kann leichter nachvollzogen werden, führt man sich vor Augen, dass $\log x$ asymptotisch langsamer wächst als jede Potenz von x und damit jedes Polynom in x (ohne Beweis). Weiterhin wächst jede Exponentialfunktion asymptotisch stärker als jedes Polynom (ebenfalls hier ohne Beweis).

Aufgabe 1.2

Ι

Zu Zeigen:

$$f_2(n) = n^2 + 1000n \in \mathcal{O}\left(n^2\right)$$

Wir betrachten n > 0.

$$n^2 + 1000n \le cn^2$$
$$n(n+1000) \le cn^2$$
$$n+1000 \le cn$$

Sei nun c = 1001. Für alle n > 0 gilt

$$n + 1000 \le 1001n$$
$$1000 \le 1000n$$

Daher gibt es für alle n>0 ein c sodass $f_1(n)\leq cf_2(n)$, dies gilt für alle $c\geq 1001$.

 \mathbf{II}

Zu Zeigen:

$$f_3(n) = m^{\log n} \le c n^{\log m}$$

Es ist

$$\begin{split} m^{\log n} &\leq c n^{\log m} \\ \log m^{\log n} &\leq \log c n^{\log m} \\ \log n \log m &\leq \log n \log m + \log c \log m \\ \log n &\leq \log n + \log c \end{split}$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt für $c \geq 1.$

III

Zu Zeigen:

$$f_6(n) \not\in f_5(n)$$

Die Beziehung ist erfüllt genau dann wenn $\forall c \forall n_0 > 0 : \exists n \geq n_0 : f_6(n) > c f_5(n)$. Sei daher c beliebig fest gewählt . Die Ungleichung ist genau dann lösbar, wenn n ungerade ist und > 100. In diesem Fall

$$f_6(n) > cf_5(n)$$

$$n^3 > cn$$

$$n > \sqrt{c}$$

Die Wahl von n_0 ist hier nicht relevant, da ich für jedes beliebige c ein ungerades und beliebig großes $n > n_0$ finden kann, sodass $n > \sqrt{c}$ gilt.

Aufgabe 1.3

a)

$$L_{min} = \{aa, ab, ac, ca, ba\}$$

$$L_{max} = \{ab, ba, ac, ca, bb, cc, bc, cb\}$$

$$L_{min} \cap L_{max} = \{ab, ac, ca, ba\}$$

$$L_{min} \cup L_{max} = \{aa, ab, ba, ac, ca, bb, cc, bc, cb\}$$

$$L_{min} \setminus L_{max} = \{aa\}$$

b)

$$\overline{L_{min}} = \Sigma^* \setminus L_{min}$$

$$= \{ w \mid w \in \Sigma^*, w \notin L_{min} \}$$

$$= \{ a, b, c, bb, cc, cb, bc \} \cup \{ w \in \Sigma^* \mid |w| > 2 \} \cup \{ \varepsilon \}$$

c)
$$(L_{min} \setminus L_{max})^* = \{a^{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Aufgabe 1.4

 $\mathbf{a})$

$${a^i \mid i > 0, i\%2 = 1} \cup {b^i \mid i > 1, i\% = 0}$$

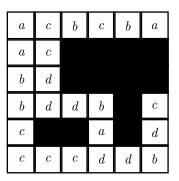
b)

$$\{b(ca)^i \mid i \ge 0\} \cup \{a(ca)^i \mid i \ge 0\}$$

 $\mathbf{c})$

$$\{aba, bab, abb\}^+$$

Aufgabe 1.5



Aufgabe 1.6

a)

$$\begin{split} S &\to \circleddash A \\ A &\to \circleddash B \\ B &\to \circleddash B \mid \circleddash B \mid \circleddash B \mid \boxdot C \\ C &\to \circleddash \end{split}$$

b)

$$S \to \bigcirc S \mid \bigcirc S \mid \bigcirc S \mid \bigcirc A$$

$$A\to \circleddash B$$

$$B\to @B\mid @B\mid @B\mid @C$$

$$C \to @C \mid @C \mid @C \mid @D$$

$$D \to \odot D \mid \odot D \mid \odot D \mid \odot E$$

$$E \to \circleddash E \mid \circleddash E \mid \boxdot E \mid \boxdot F$$

 $\mathbf{c})$

$$S \to @S \mid @S \mid @A$$

$$A \to \Theta S \mid \Theta S \mid \Theta B$$

$$B \to \mathfrak{D}C \mid \mathfrak{D}C$$

$$C \to \circleddash C \mid \circleddash C \mid \boxdot D$$

$$D \to \circleddash C \mid \boxdot C \mid \boxdot E \mid \boxdot$$

$$E \to \Theta \mid \Theta \mid \Theta D \mid \Theta D$$