# Informatik ᗡ: – Blatt 1

Rasmus Diederichsen

6. August 2014

## Aufgabe 1.1

Die Reihenfolge ist

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{O}(\log x) \subseteq \mathcal{O}(\sqrt{x}) \subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(n^{0.99}\right) \\
&\subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log\log x}\right) \subseteq \mathcal{O}(x \log x) \subseteq \mathcal{O}\left(x \log x^2\right) \\
&\subseteq \mathcal{O}\left(x \log^2 x\right) \subseteq \mathcal{O}\left(x^{1.01}\right) \subseteq \mathcal{O}(2^x) \subseteq \mathcal{O}\left(2^{x+1}\right) \\
&\subseteq \mathcal{O}\left(2^{2x}\right)
\end{aligned}
$$

Dies kann leichter nachvollzogen werden, führt man sich vor Augen, dass $\log x$ asymptotisch langsamer wächst als jede Potenz von $x$ und damit jedes Polynom in $x$ (ohne Beweis). Weiterhin wächst jede Exponentialfunktion asymptotisch stärker als jedes Polynom (ebenfalls hier ohne Beweis).

## Aufgabe 1.2

### I

Zu Zeigen:

$$f_2(n) = n^2 + 1000n \in \mathcal{O}\left(n^2\right)$$

Wir betrachten $n > 0$.

$$
\begin{aligned}
n^2 + 1000n &\leq cn^2 \\
n(n + 1000) &\leq cn^2 \\
n + 1000 &\leq cn
\end{aligned}
$$

Sei nun $c = 1001$. Für alle $n > 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
n + 1000 &\leq 1001n \\
1000 &\leq 1000n
\end{aligned}
$$

Daher gibt es für alle $n > 0$ ein $c$ sodass $f_1(n) \leq cf_2(n)$, dies gilt für alle $c \geq 1001$.

### II

Zu Zeigen:

$$f_3(n) = m^{\log n} \leq cn^{\log m}$$

Es ist

$$\begin{aligned}
m^{\log n} &\leq cn^{\log m} \\
\log m^{\log n} &\leq \log cn^{\log m} \\
\log n \log m &\leq \log n \log m + \log c \log m \\
\log n &\leq \log n + \log c
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt für $c \geq 1$.

### III

Zu Zeigen:

$$f_6(n) \notin f_5(n)$$

Die Beziehung ist erfüllt genau dann wenn $\forall c \forall n_0 > 0 : \exists n \geq n_0 : f_6(n) > cf_5(n)$. Sei daher $c$ beliebig fest gewählt . Die Ungleichung ist genau dann lösbar, wenn $n$ ungerade ist und $> 100$. In diesem Fall

$$\begin{aligned}
f_6(n) &> cf_5(n) \\
n^3 &> cn \\
n &> \sqrt{c}
\end{aligned}$$

Die Wahl von $n_0$ ist hier nicht relevant, da ich für jedes beliebige $c$ ein ungerades und beliebig großes $n > n_0$ finden kann, sodass $n > \sqrt{c}$ gilt.

## Aufgabe 1.3

### a)

$$L_{min} = \{aa, ab, ac, ca, ba\}$$

$$L_{max} = \{ab, ba, ac, ca, bb, cc, bc, cb\}$$

$$L_{min} \cap L_{max} = \{ab, ac, ca, ba\}$$

$$L_{min} \cup L_{max} = \{aa, ab, ba, ac, ca, bb, cc, bc, cb\}$$

$$L_{min} \setminus L_{max} = \{aa\}$$

### b)

$$\begin{aligned}
\overline{L_{min}} &= \Sigma^* \setminus L_{min} \\
&= \{w \mid w \in \Sigma^*, w \notin L_{min}\} \\
&= \{a, b, c, bb, cc, cb, bc\} \cup \{w \in \Sigma^* \mid |w| > 2\} \cup \{\varepsilon\}
\end{aligned}$$

**c)**

$$(L_{min} \setminus L_{max})^* = \{a^{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$$

## Aufgabe 1.4

**a)**

$$\{a^i \mid i > 0, i \bmod 2 = 1\} \cup \{b^i \mid i > 1, i \bmod\ = 0\}$$

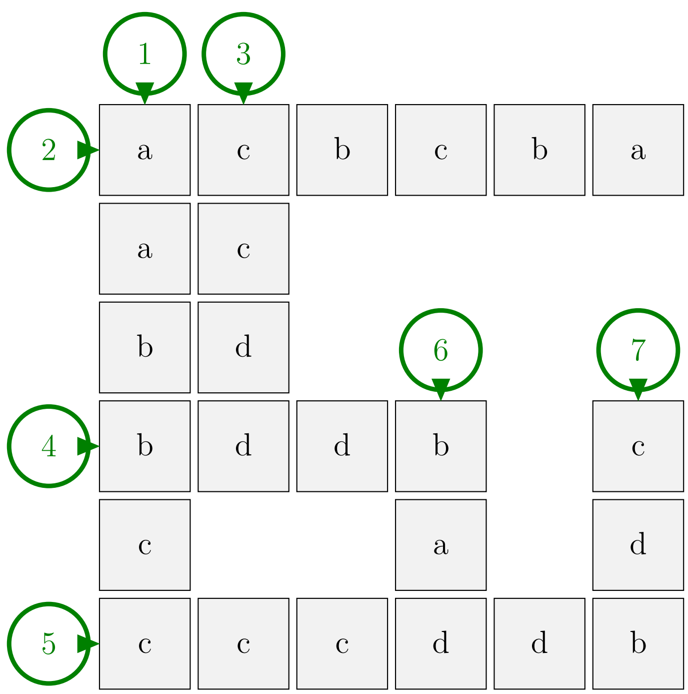
**b)**

$$\{b(ca)^i \mid i \geq 0\} \cup \{a(ca)^i \mid i \geq 0\}$$

**c)**

$$\{aba, bab, abb\}^+$$

## Aufgabe 1.5



## Aufgabe 1.6

**a)**

$$
\begin{aligned}
S &\to \text{☺}A \\
A &\to \text{☺}B \\
B &\to \text{☺}B \mid \text{😐}B \mid \text{☹}B \mid \text{☹}C \\
C &\to \text{☹}
\end{aligned}
$$

**b)**

$$
\begin{aligned}
S &\to \text{☺}S \mid \text{☹}S \mid \text{😐}S \mid \text{😐}A \\
A &\to \text{😐}B \\
B &\to \text{☺}B \mid \text{☹}B \mid \text{😐}B \mid \text{😐}C \\
C &\to \text{😐}D \\
D &\to \text{☺}D \mid \text{☹}D \mid \text{😐}D \mid \text{😐}E \\
E &\to \text{😐}F \\
F &\to \text{☺}F \mid \text{☹}F \mid \text{😐}F \mid \text{☺} \mid \text{😐} \mid \text{☹}
\end{aligned}
$$

**c)**

$$
\begin{aligned}
S &\to \text{😐}S \mid \text{☹}S \mid \text{☺}A \\
A &\to \text{😐}S \mid \text{☹}S \mid \text{☺}B \\
B &\to \text{😐}C \mid \text{☹}C \\
C &\to \text{😐}C \mid \text{☹}C \mid \text{☺}D \\
D &\to \text{😐}C \mid \text{☹}C \mid \text{☺}E \mid \text{☺} \\
E &\to \text{😐} \mid \text{☹} \mid \text{😐}D \mid \text{☹}D
\end{aligned}
$$