## Informatik d: – Blatt 1

#### Rasmus Diederichsen

12. Mai 2014

### Aufgabe 1.1

Die Reihenfolge ist

$$\mathcal{O}\left(\log x\right) \subseteq \mathcal{O}\left(\sqrt{x}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(n^{0.99}\right)$$

$$\subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log\log x}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(x\log x\right) \subseteq \mathcal{O}\left(x\log x^{2}\right)$$

$$\subseteq \mathcal{O}\left(x\log^{2} x\right) \subseteq \mathcal{O}\left(x^{1.01}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(2^{x}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(2^{x+1}\right)$$

$$\subseteq \mathcal{O}\left(2^{2x}\right)$$

Dies kann leichter nachvollzogen werden, führt man sich vor Augen, dass  $\log x$  asymptotisch langsamer wächst als jede Potenz von x und damit jedes Polynom in x (ohne Beweis). Weiterhin wächst jede Exponentialfunktion asymptotisch stärker als jedes Polynom (ebenfalls hier ohne Beweis).

#### Aufgabe 1.2

I

Zu Zeigen:

$$f_2(n) = n^2 + 1000n \in \mathcal{O}(n^2)$$
 (1)

Wir betrachten n > 0.

$$n^2 + 1000n \le cn^2$$
$$n(n+1000) \le cn^2$$
$$n+1000 \le cn$$

Sei nun c=1001. Für alle n>0 gilt

$$n + 1000 \le 1001n$$
$$1000 \le 1000n$$

Daher gibt es für alle n>0 ein c sodass  $f_1(n)\leq cf_2(n)$ , dies gilt für alle  $c\geq 1001$ .

 $\mathbf{II}$ 

Zu Zeigen:

$$f_3(n) = m^{\log n} \le c n^{\log m} \tag{2}$$

Es ist

$$m^{\log n} \le c n^{\log m}$$
$$\log m^{\log n} \le \log c n^{\log m}$$
$$\log n \log m \le \log n \log m + \log c$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt für  $c \ge 1$ .

III

Zu Zeigen:

$$f_6(n) \not\in f_5(n) \tag{3}$$

Die Beziehung ist erfüllt genau dann wenn  $\forall c \forall n_0 > 0 : \exists n \geq n_0 : f_6(n) > c f_5(n)$ . Sei daher c beliebig fest gewählt . Die Ungleichung ist genau dann lösbar, wenn n ungerade ist und > 100. In diesem Fall

$$f_6(n) > f_5(n)$$

$$n^3 > cn$$

$$n > \sqrt{c}$$

Die Wahl von  $n_0$  ist hier nicht relevant, da ich für jedes beliebige c ein ungerades und beliebig großes  $n>n_0$  finden kann, sodass  $n>\sqrt{c}$  gilt.

### Aufgabe 1.3

**a**)

$$L_{min} = \{aa, ab, ac, ca, ba\}$$

$$L_{max} = \{ab, ba, ac, ca, bb, cc, bc, cb\}$$

$$L_{min} \cap L_{max} = \{ab, ac, ca, ba\}$$

$$L_{min} \cup L_{max} = \{aa, ab, ba, ac, ca, bb, cc, bc, cb\}$$

$$L_{min} \setminus L_{max} = \{aa\}$$

b)

$$\overline{L_{min}} = \Sigma^* \setminus L_{min}$$

$$= \{ w \mid w \in \Sigma^*, w \notin L_{min} \}$$

$$= \{ a, b, c, bb, cc, cb, bc \} \cup \{ a^i b^j c^k \mid i + j + k > 2 \} \cup \{ \varepsilon \}$$

c) 
$$(L_{min} \setminus L_{max})^* = \{a^{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$$

## Aufgabe 1.4

 $\mathbf{a})$ 

$$\{a^i \mid i > 0, i\%2 = 1\} \cup \{b^i \mid i > 1, i\% = 0\}$$

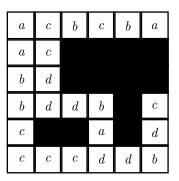
b)

$$\{b(ca)^i \mid i \ge 0\} \cup \{a(ca)^i \mid i \ge 0\}$$

 $\mathbf{c})$ 

$$\{aba, bab, abb\}^+$$

## Aufgabe 1.5



# Aufgabe 1.6

**a**)

$$\begin{split} S &\to \circleddash A \\ A &\to \circleddash B \\ B &\to \circleddash B \mid \circleddash B \mid \circleddash B \mid \boxdot C \\ C &\to \circleddash \end{split}$$

b)

$$S \to \bigcirc S \mid \bigcirc S \mid \bigcirc S \mid \bigcirc A$$

$$A\to \circleddash B$$

$$B\to @B\mid @B\mid @B\mid @C$$

$$C \to @C \mid @C \mid @C \mid @D$$

$$D \to \odot D \mid \odot D \mid \odot D \mid \odot E$$

$$E \to \circleddash E \mid \circleddash E \mid \boxdot E \mid \boxdot F$$

 $\mathbf{c})$ 

$$S \to @S \mid @S \mid @A$$

$$A \to \Theta S \mid \Theta S \mid \Theta B$$

$$B \to \mathfrak{D}C \mid \mathfrak{D}C$$

$$C \to \circleddash C \mid \circleddash C \mid \boxdot D$$

$$D \to \circleddash C \mid \boxdot C \mid \boxdot E \mid \boxdot$$

$$E \to \Theta \mid \Theta \mid \Theta D \mid \Theta D$$