

Informatik CI – Blatt 7

Rasmus Diederichsen

28. August 2014

Aufgabe 7.1

a)

Es ist $L = \{a^k b^l c^m \mid k, l, m \in \mathbb{N}\} \cup \{d^j a^k b^k c^k \mid j, k \in \mathbb{N}, j > 0\} = L_1 \cup L_2$. Offensichtlich ist L_2 nicht kontextfrei, da es sich in einer kontextfreien Grammatik nicht sicherstellen lässt, dass mehr als zwei verschiedenen Symbole gleich häufig vorkommen müssen. Dies wäre unproblematisch, falls $L_2 \subseteq L_1$, denn eine reguläre Sprache (wie L_1) kann ja ohne Weiteres eine Sprache höherer Klasse als Teilmenge beinhalten. Dies ist hier nicht der Fall, $L_1 \cap L_2 = \emptyset$. Um L darzustellen, ist also eine kontextfreie Grammatik nicht ausreichend.

b)

Es wird hier angenommen, dass es sich in der Sprachspezifikation um ein nicht-exklusives 'Oder' handelt.

Fall 1: Für $j = 0, k = l = m$ wähle v, x entweder so, dass sie jeweils nur ein Zeichen (beliebig oft wiederholt) enthalten oder leer sind (nicht beide zugleich). Man kann dann beliebig aufpumpen. Zwar verliert man die Struktur $a^k b^k c^k$, jedoch ist $a^l b^m c^n$ ja immernoch $\in L$.

Fall 2: Falls $j = 0, k, l, m \geq 0$, ist die Sprache offensichtlich kontextfrei (sie ist sogar regulär), da es keine weiteren Beschränkungen für k, l, m gibt. Das Pumping Lemma hilft hier also schonmal nicht weiter.

Fall 3: Falls $j \neq 0, k, l, m \geq 0$, ist die Sprache ebenfalls regulär und damit kontextfrei.

Fall 4: Falls $j \neq 0, k = l = m$ haben wir ein Wort $z = d^j a^k b^k c^k$ mit $j + 3k \geq n$. In diesem Fall wähle

- $u = \varepsilon$
- $v = d$
- $w = \varepsilon$

- $x = \varepsilon$
- $y = a^k b^k c^k$

Die Bedingungen $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq n$ sind erfüllt. Offensichtlich ist $uv^iwx^iy = \varepsilon d^i \varepsilon \varepsilon^i a^k b^k c^k \in L$. Diese Zerlegung lässt sich immer finden, unabhängig von n . Das Pumping Lemma ist demnach hier unnütz.

Aufgabe 7.2

Die Sprache L ist nicht kontextfrei, was wir mittels des Pumping Lemmas zeigen. Sei n die Wortmindestlänge und $z_n = a^n b^{2^n} \in L$. Es gilt

$$|z_n| = n + 2^n \text{ und } |z_{n+1}| = n + 1 + 2^{n+1}$$

Es gibt folgende Möglichkeiten, eine Zerlegung $uvwxy$ von z_n zu finden:

Fall 1: $vwx = a^k, k \geq 1$ enthält nur as . Hierbei könnten durch Pumpen beliebig viele as erzeugt werden, ohne dass die bs mitgepumpt werden daher z.B. $uv^2wx^2y \notin L$.

Fall 2: vwx enthält as und bs .

- (a) Falls $w = \varepsilon$, so ist $vwx = a^l b^k, n \geq l + k \geq 1$. Es ist $v = a^l, x = b^k$, da sonst die Folge ab beliebig oft gepumpt werden könnte. Es gilt für $uv^2wx^2y = a^{n-l} a^{2l} b^{2k} b^{2^n-k} = a^{n+l} b^{2^n+k}$ dass $|uv^2wx^2y| = n + l + 2^n + k$. Dieses Wort muss mindestens die Länge von z_{n+1} haben, um in L enthalten sein zu können. Die Gleichung

$$\begin{aligned} n + l + 2^n + k &\geq n + 1 + 2^{n+1} \\ l + k &\geq 1 + 2^{n+1} - 2^n \\ &\geq 1 + 2^n(2 - 1) \\ &\geq 1 + 2^n \end{aligned}$$

ist jedoch nicht erfüllbar, da $l + k \leq n$ nach Voraussetzung.

- (b) Falls $w \neq \varepsilon$, ändert dies nichts, da $l + k$ dadurch lediglich kleiner würde und die obige Gleichung weiterhin unerfüllbar ist.

Fall 3: vwx enthält nur bs . Mit der Begründung von Punkt 1 gilt $uv^iwx^iy \notin L$

Aufgabe 7.3

Ausgehend von

Markieren wir

$$\begin{array}{ll} S & \rightarrow E \mid ABC \\ A & \rightarrow bdC \mid E \mid S \\ B & \rightarrow acDC \mid C \\ C & \rightarrow ab \mid Ja \mid IdA \\ D & \rightarrow deF \mid DeF \mid dEF \mid DEF \\ E & \rightarrow abba \mid aBBa \mid AbbA \\ F & \rightarrow JcJ \mid GJ \mid bG \\ G & \rightarrow F \mid IG \\ H & \rightarrow SA \mid Hcc \\ I & \rightarrow c \mid cIc \mid dF \end{array} \quad 2$$

Schritt 1

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow E \mid ABC \\
 A &\rightarrow bdC \mid E \mid S \\
 B &\rightarrow acDC \mid C \\
 C &\rightarrow ab \mid Ja \mid IdA \\
 D &\rightarrow deF \mid DeF \mid dEF \mid DEF \\
 E &\rightarrow abba \mid aBBa \mid AbbA \\
 F &\rightarrow JcJ \mid GJ \mid bG \\
 G &\rightarrow F \mid IG \\
 H &\rightarrow SA \mid Hcc \\
 I &\rightarrow c \mid cIc \mid dF
 \end{aligned}$$

Schritt 4

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow E \mid ABC \\
 A &\rightarrow bdC \mid E \mid S \\
 B &\rightarrow acDC \mid C \\
 C &\rightarrow ab \mid Ja \mid IdA \\
 D &\rightarrow deF \mid DeF \mid dEF \mid DEF \\
 E &\rightarrow abba \mid aBBa \mid AbbA \\
 F &\rightarrow JcJ \mid GJ \mid bG \\
 G &\rightarrow F \mid IG \\
 H &\rightarrow SA \mid Hcc \\
 I &\rightarrow c \mid cIc \mid dF
 \end{aligned}$$

Schritt 2

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow E \mid ABC \\
 A &\rightarrow bdC \mid E \mid S \\
 B &\rightarrow acDC \mid C \\
 C &\rightarrow ab \mid Ja \mid IdA \\
 D &\rightarrow deF \mid DeF \mid dEF \mid DEF \\
 E &\rightarrow abba \mid aBBa \mid AbbA \\
 F &\rightarrow JcJ \mid GJ \mid bG \\
 G &\rightarrow F \mid IG \\
 H &\rightarrow SA \mid Hcc \\
 I &\rightarrow c \mid cIc \mid dF
 \end{aligned}$$

Schritt 3

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow E \mid ABC \\
 A &\rightarrow bdC \mid E \mid S \\
 B &\rightarrow acDC \mid C \\
 C &\rightarrow ab \mid Ja \mid IdA \\
 D &\rightarrow deF \mid DeF \mid dEF \mid DEF \\
 E &\rightarrow abba \mid aBBa \mid AbbA \\
 F &\rightarrow JcJ \mid GJ \mid bG \\
 G &\rightarrow F \mid IG \\
 H &\rightarrow SA \mid Hcc \\
 I &\rightarrow c \mid cIc \mid dF
 \end{aligned}$$

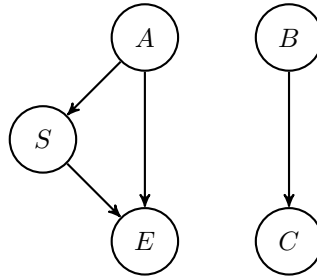
Wir sehen also, dass die Sprache nicht leer ist. Markiert man bis zum Ende durch, erhält man

$$\begin{aligned}
 S &\rightarrow E \mid ABC \\
 A &\rightarrow bdC \mid E \mid S \\
 B &\rightarrow acDC \mid C \\
 C &\rightarrow ab \mid Ja \mid IdA \\
 D &\rightarrow deF \mid DeF \mid dEF \mid DEF \\
 E &\rightarrow abba \mid aBBa \mid AbbA \\
 F &\rightarrow JcJ \mid GJ \mid bG \\
 G &\rightarrow F \mid IG \\
 H &\rightarrow SA \mid Hcc \\
 I &\rightarrow c \mid cIc \mid dF
 \end{aligned}$$

Die reduzierte Grammatik ist also

$$\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & E \mid ABC \\
A & \rightarrow & E \mid S \\
B & \rightarrow & C \\
C & \rightarrow & ab \mid IdA \\
E & \rightarrow & abba \mid aBBa \mid AbbA \\
I & \rightarrow & c \mid cIc
\end{array}$$

Die Regeln der Form $V \rightarrow V$ sind $\{S \rightarrow E, A \rightarrow E, A \rightarrow S, B \rightarrow C\}$. Hieraus entsteht der Graph



Der Graph ist bereits kreisfrei. Es müssen also noch die Senken eliminiert werden.

Elimination von Senke C

Man führt die neuen Regeln

$$B \rightarrow ab \mid IdA$$

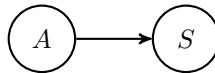
ein. Entfernt wird die Regel $B \rightarrow C$.

Elimination von Senke E

Man führt die neuen Regeln

$$\begin{array}{lcl}
S & \rightarrow & abba \mid aBBa \mid AbbA \\
A & \rightarrow & abba \mid aBBa \mid AbbA
\end{array}$$

ein. Entfernt werden die Regeln $A \rightarrow E$ und $S \rightarrow E$. Der reduzierte Graph ist



Elimination von Senke S

Man führt die Regeln

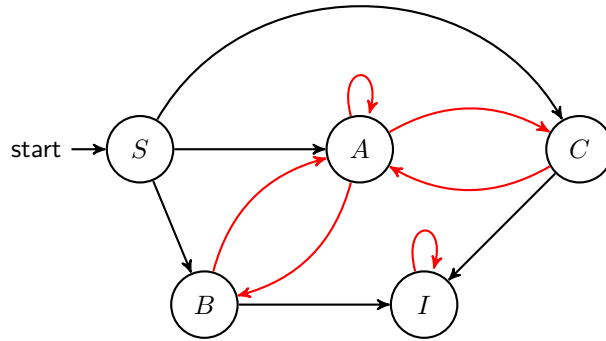
$$A \rightarrow abba \mid aBBa \mid AbbA \mid ABC$$

ein, von denen Teile in A bereits enthalten sind. Wir entfernen $A \rightarrow S$. Die finale Grammatik ist

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & abba \mid aBBa \mid AbbA \mid ABC \\ A & \rightarrow & abba \mid aBBa \mid AbbA \mid ABC \\ B & \rightarrow & ab \mid IdA \\ C & \rightarrow & ab \mid IdA \\ E & \rightarrow & abba \mid aBBa \mid AbbA \\ I & \rightarrow & c \mid cIc \end{array}$$

wobei die Variable E nicht mehr erreicht wird aufgrund der Substitutionen mit ihrer rechten Seite in den anderen Regeln.

Der Graph bestehend aus den Variablen ist



Dieser Graph hat Kreise, also ist die Sprache nicht endlich.

Aufgabe 7.4

Das “Problem” mit der zweiten Definition ist, dass A nur eine Variable sein kann, der Rest der Satzform muss auf u und w aufgeteilt werden, die auf der rechten Seite unverändert bestehen bleiben müssen. Egal ob man A mit A oder B belegt, die jeweils andere Variable wird nach anwenden der Produktion rechts oder links stehen bleiben.

Um diese Art von Regeln darstellen zu können, führen wir ein:

$$\begin{array}{lcl} X & \rightarrow & AB \\ Y & \rightarrow & BA \end{array}$$

ein, die beide der zweiten Definition Genüge tun. Zusätzlich definiert man die Regel

$$X \rightarrow Y$$

sowie für jede Regel

$$uVv \rightarrow u \dots AB \dots v$$

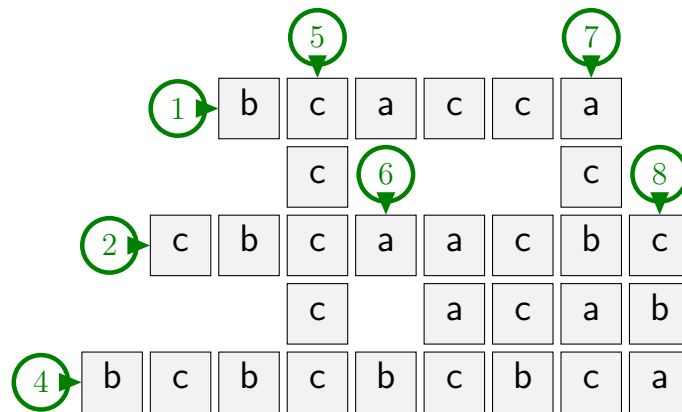
eine Regel

$$uVv \rightarrow u \dots X \dots v$$

Alternativ könnte man Regeln der folgenden Form einführen (C sei eine neue Variable):

$$\begin{aligned} AB &\rightarrow AC \\ AC &\rightarrow BC \\ BC &\rightarrow BA \end{aligned}$$

Aufgabe 7.5



Aufgabe 7.6

