

# Informatik CI – Blatt 1

Rasmus Diederichsen

25. Juli 2014

## Aufgabe 1.1

Die Reihenfolge ist

$$\begin{aligned}\mathcal{O}(\log x) &\subseteq \mathcal{O}(\sqrt{x}) \subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) \subseteq \mathcal{O}(n^{0.99}) \\ &\subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log \log x}\right) \subseteq \mathcal{O}(x \log x) \subseteq \mathcal{O}(x \log x^2) \\ &\subseteq \mathcal{O}(x \log^2 x) \subseteq \mathcal{O}(x^{1.01}) \subseteq \mathcal{O}(2^x) \subseteq \mathcal{O}(2^{x+1}) \\ &\subseteq \mathcal{O}(2^{2x})\end{aligned}$$

Dies kann leichter nachvollzogen werden, führt man sich vor Augen, dass  $\log x$  asymptotisch langsamer wächst als jede Potenz von  $x$  und damit jedes Polynom in  $x$  (ohne Beweis). Weiterhin wächst jede Exponentialfunktion asymptotisch stärker als jedes Polynom (ebenfalls hier ohne Beweis).

## Aufgabe 1.2

### I

Zu Zeigen:

$$f_2(n) = n^2 + 1000n \in \mathcal{O}(n^2)$$

Wir betrachten  $n > 0$ .

$$\begin{aligned}n^2 + 1000n &\leq cn^2 \\ n(n + 1000) &\leq cn^2 \\ n + 1000 &\leq cn\end{aligned}$$

Sei nun  $c = 1001$ . Für alle  $n > 0$  gilt

$$\begin{aligned}n + 1000 &\leq 1001n \\ 1000 &\leq 1000n\end{aligned}$$

Daher gibt es für alle  $n > 0$  ein  $c$  sodass  $f_1(n) \leq cf_2(n)$ , dies gilt für alle  $c \geq 1001$ .

## II

Zu Zeigen:

$$f_3(n) = m^{\log n} \leq cn^{\log m}$$

Es ist

$$\begin{aligned} m^{\log n} &\leq cn^{\log m} \\ \log m^{\log n} &\leq \log cn^{\log m} \\ \log n \log m &\leq \log n \log m + \log c \log m \\ \log n &\leq \log n + \log c \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt für  $c \geq 1$ .

## III

Zu Zeigen:

$$f_6(n) \not\leq f_5(n)$$

Die Beziehung ist erfüllt genau dann wenn  $\forall c \forall n_0 > 0 : \exists n \geq n_0 : f_6(n) > cf_5(n)$ .  
Sei daher  $c$  beliebig fest gewählt. Die Ungleichung ist genau dann lösbar, wenn  $n$  ungerade ist und  $> 100$ . In diesem Fall

$$\begin{aligned} f_6(n) &> cf_5(n) \\ n^3 &> cn \\ n &> \sqrt{c} \end{aligned}$$

Die Wahl von  $n_0$  ist hier nicht relevant, da ich für jedes beliebige  $c$  ein ungerades und beliebig großes  $n > n_0$  finden kann, sodass  $n > \sqrt{c}$  gilt.

## Aufgabe 1.3

a)

$$\begin{aligned} L_{min} &= \{aa, ab, ac, ca, ba\} \\ L_{max} &= \{ab, ba, ac, ca, bb, cc, bc, cb\} \\ L_{min} \cap L_{max} &= \{ab, ac, ca, ba\} \\ L_{min} \cup L_{max} &= \{aa, ab, ba, ac, ca, bb, cc, bc, cb\} \\ L_{min} \setminus L_{max} &= \{aa\} \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} \overline{L_{min}} &= \Sigma^* \setminus L_{min} \\ &= \{w \mid w \in \Sigma^*, w \notin L_{min}\} \\ &= \{a, b, c, bb, cc, cb, bc\} \cup \{w \in \Sigma^* \mid |w| > 2\} \cup \{\varepsilon\} \end{aligned}$$

c)

$$(L_{min} \setminus L_{max})^* = \{a^{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$$

#### Aufgabe 1.4

a)

$$\{a^i \mid i > 0, i \bmod 2 = 1\} \cup \{b^i \mid i > 1, i \bmod 2 = 0\}$$

b)

$$\{b(ca)^i \mid i \geq 0\} \cup \{a(ca)^i \mid i \geq 0\}$$

c)

$$\{aba, bab, abb\}^+$$

#### Aufgabe 1.5

|          |          |          |          |          |          |
|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| <i>a</i> | <i>c</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | <i>b</i> | <i>a</i> |
| <i>a</i> | <i>c</i> |          |          |          |          |
| <i>b</i> | <i>d</i> |          |          |          |          |
| <i>b</i> | <i>d</i> | <i>d</i> | <i>b</i> |          | <i>c</i> |
| <i>c</i> |          |          | <i>a</i> |          | <i>d</i> |
| <i>c</i> | <i>c</i> | <i>c</i> | <i>d</i> | <i>d</i> | <i>b</i> |

#### Aufgabe 1.6

a)

$$S \rightarrow \ominus A$$

$$A \rightarrow \ominus B$$

$$B \rightarrow \ominus B \mid \ominus B \mid \ominus B \mid \ominus C$$

$$C \rightarrow \ominus$$

b)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \ominus S \mid \ominus S \mid \ominus S \mid \ominus A \\ A &\rightarrow \ominus B \\ B &\rightarrow \ominus B \mid \ominus B \mid \ominus B \mid \ominus C \\ C &\rightarrow \ominus D \\ D &\rightarrow \ominus D \mid \ominus D \mid \ominus D \mid \ominus E \\ E &\rightarrow \ominus F \\ F &\rightarrow \ominus F \mid \ominus F \mid \ominus F \mid \ominus \mid \ominus \mid \ominus \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} S &\rightarrow \ominus S \mid \ominus S \mid \ominus A \\ A &\rightarrow \ominus S \mid \ominus S \mid \ominus B \\ B &\rightarrow \ominus C \mid \ominus C \\ C &\rightarrow \ominus C \mid \ominus C \mid \ominus D \\ D &\rightarrow \ominus C \mid \ominus C \mid \ominus E \mid \ominus \\ E &\rightarrow \ominus \mid \ominus \mid \ominus D \mid \ominus D \end{aligned}$$