

Übungsblatt 10 zur Informatik Q: Einführung in die Theoretische Informatik

Ausgabe: 4. Juli

Besprechung: 14.–16. Juli

Aufgabe 10.1. Laufzeit

Betrachten Sie den folgenden Algorithmus \mathcal{A} , der als Eingabe die Zahl $x \in \mathbb{N}$ liest:

```
y := 3
for i = 1, ..., x:
    y := y * y * y
return y
```

- (a) Welche Funktion berechnet \mathcal{A} ?
- (b) Warum ist das uniforme Kostenmaß untauglich, um die Laufzeit von \mathcal{A} zu analysieren?
- (c) *Bonusfrage (nicht notwendig für das Kreuzchen):* Was ist die Laufzeit von \mathcal{A} in \mathcal{O} -Notation mit logarithmischem Kostenmaß? *Tipp:* Die Kosten für „ $y * y * y$ “ sind $3(\log y)^2$.

Aufgabe 10.2. Entscheidungs- und Optimierungsprobleme

Gegeben sei das folgende Optimierungsproblem:

$$\max_{x \in \mathbb{R}^n} \{c^T x \mid Ax \leq b\}$$

wobei $c \in \mathbb{R}^n$, $b \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ konstante Vektoren bzw. Matrizen sind.

- (a) Wie lautet das zugehörige Entscheidungsproblem?
- (b) Angenommen, es gibt einen Algorithmus \mathcal{A} , der das zugehörige Entscheidungsproblem in Zeit $t_{\mathcal{A}}(n, m)$ löst. Ferner nehmen wir an, dass c und x boolesche Vektoren sind, d. h. $c, x \in \{0, 1\}^n$. Entwerfen Sie einen Algorithmus, der in Zeit $\mathcal{O}(t_{\mathcal{A}}(n, m) \log n)$ das Optimierungsproblem löst.

Aufgabe 10.3. Disjunktive Normalform

Formel \mathcal{F}_{DNF} in *disjunktiver Normalform* (DNF) = Disjunktion von Konjunktionstermen.

D. h. $\mathcal{F} := T_1 \vee T_2 \vee T_3 \vee \dots$, wobei jeder Konjunktionsterm T_i , wie der Name sagt, eine Konjunktion (=Ver-UND-ung) von Literalen ist. Ein Literal ist jeweils eine (boolesche) Variable oder die Negation einer solchen.

- (a) Gegeben eine Formel \mathcal{F} in DNF. Wie kann man die Erfüllbarkeit von \mathcal{F} in linearer Zeit testen?
- (b) Man kann jede beliebige boolesche Formel \mathcal{F}' in DNF verwandeln. Wo liegt der Fehler in folgendem Beweis?

Theorem. SAT kann in polynomieller Zeit gelöst werden.

Beweis. Gegeben eine beliebige Formel (z. B. in KNF). Wir können diese Formel in DNF verwandeln, und dann das Erfüllbarkeitsproblem in polynomieller Zeit lösen. Daher haben wir in polynomieller Zeit eine korrekte Antwort für das allgemeine SAT-Problem. \square

Aufgabe 10.4. SAT-Formulierung

Wir befinden uns in *King's Landing*, der Hauptstadt der sieben Königreiche auf dem Kontinent Westeros. Tyrion Lannister wurde erdolcht in seinen Gemächern aufgefunden. Neben seiner Leiche steht „Es war“ mit Blut geschrieben; daneben ein schwach angedeutetes *S*, worauf Tyrions lebloser, im eigenen Blut getränkter Finger verharret. Da Tyrion sich stets grammatisch korrekt ausdrückte, kann es sich nur um einen Einzeltäter handeln, dessen Name mit dem Buchstaben S anfangen muss. Diese Information schränkt den Kreis der Verdächtigen auf Tyrions Verlobte *Sansa Stark*, ein Freudenmädchen namens *Shae*, den grimmigen *Stannis Baratheon* und den meist als „Bluthund“ bezeichneten *Sandor Clegane* ein.

Sie sind jetzt in der Rolle des Eunuchen Varys und erfahren zeitnah vom Mord an Tyrion. Als Meister der Flüsterer sind Sie immer über alle Angelegenheiten bestens informiert. Ihnen werden folgende Informationen über die Geschehnisse der letzten drei Stunden geflüstert:

- (0) Jeder Verdächtige war zu einer Stunde immer nur an einem Ort.
- (1) Stannis sprach zur Stunde 1 mit Sansa über aktuelle Geschehnisse in Westeros.
- (2) Zu keinem Zeitpunkt waren mehr als zwei Verdächtige gemeinsam in Tyrions Gemächern.
- (3) Stannis und Shae waren in dem Zeitraum jeweils nur höchstens ein einziges Mal in den Gemächern von Tyrion.
- (4) Sansa hat zwischen Stunde 1 und Stunde 2 nicht den Ort gewechselt. In Stunde 3 war sie in den königlichen Gärten.
- (5) Zum Ende von Stunde 1 trug Sansa das Haar offen und zu Beginn von Stunde 3 war es auf besondere Art geflochten. Shae ist die einzige, die Haare auf diese Weise flechtet.
- (6) In der zweiten Stunde füllte Shae den Wein in Tyrions Kelch in seinen Gemächern nach.
- (7) Solange Shae in Tyrions Gemächern war, war Tyrion noch am Leben.

Aufgabenstellung: Beschreiben Sie die obigen Fakten (1)–(7) mittels einfacher boolescher Formeln. Wegen (0) benutzt Varys die Variablen $x_{v,t}$ und y_t , wobei $x_{v,t} = \text{true}$, gdw. der Verdächtige v sich zur Stunde t in Tyrions Gemächern aufhielt, und $y_t = \text{true}$, gdw. Tyrion zur Stunde t noch lebte. Denken Sie auch daran, zu formulieren, dass tote Menschen tot bleiben. Finden Sie eine Belegung für die Konjunktion aller Teilformeln. Welche Informationen können Sie damit herausfinden? Wer ist der Mörder von Tyrion?

Aufgabe 10.5. SAT vs. P

Wir betrachten das folgende praxisnahe Problem:

Obelix wirft Hinkelsteine auf n verschiedene Haufen. Ein Haufen bietet Platz für maximal drei Hinkelsteine. Miraculix färbt diese Hinkelsteine während des Fluges mit je einer aus m verschiedenen Farben ein. Majestix wählt seine Lieblingsfarbe ℓ und stellt Klugwienix die Frage: Gibt es eine *schöne* Teilmenge $F_{\text{schön}}$ der Farben, die ℓ enthält und sodass es *keinen* Haufen gibt, auf dem genau ein einziger Hinkelstein schöner Farbe liegt?

- (a) Helfen Sie Klugwienix, indem Sie das Problem als SAT-Instanz formulieren.
- (b) Geben Sie einen Algorithmus mit polynomieller Laufzeit zur Lösung des Problems an.

Aufgabe 10.6. Vom Entscheidungsproblem zum Zeugen

Sei \mathcal{X} ein Entscheidungsproblem in NP , und nehmen Sie an, Sie haben einen Entscheidungsalgorithmus $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ für \mathcal{X} . Sie wissen *nichts* über diesen Algorithmus, außer, dass Sie ihn mit einer Instanz \mathcal{I} aufrufen können, und entsprechend korrekt *ja* oder *nein* als Ergebnis erhalten.

Sei \mathcal{I}^* eine *ja*-Instanz. Wie können Sie mithilfe von $\mathcal{A}_{\mathcal{X}}$ einen Zeugen ermitteln? Gegebenenfalls ist es schwer, dies ganz allgemein zu beschreiben. Beschreiben Sie es zumindest für $\mathcal{X} = \text{SAT}$.

nc haxxx nc τόλμης haxxx hxx