

Übungsblatt 1 zur Informatik Q: Einführung in die Theoretische Informatik

Ausgabe: 28. April

Besprechung: 5.–7. Mai

Aufgabe 1.1: Landau-Symbole – Anordnen

Gegeben seien die folgenden Funktionen:

$$\begin{array}{ccccccc} n \log n, & n \log^2 n, & \sqrt{n}, & n, & n^{1.01}, & 2^{n+1}, & \frac{n}{\log \log n}, \\ n^{0.99}, & \frac{n}{\log n}, & 2^{2n} & \log n, & 2^n, & \frac{n}{\sqrt{n}}, & n \log n^2 \end{array}$$

Ordnen Sie die obigen zwölf Funktionen f_i so an $(f_1, f_2, \dots, f_{12})$, dass für jedes Paar aufeinanderfolgender Funktionen $f_i \in \mathcal{O}(f_{i+1})$ gilt. Markieren Sie außerdem die Funktionen, bei denen $f_i \in \Theta(f_{i+1})$ gilt.

Aufgabe 1.2: Landau-Symbole – Beweise

Es seien die folgenden sechs Funktionen gegeben ($m > 1$ konstant):

$$\begin{array}{ll} f_1(n) = n^2 & f_3(n) = m^{\log n} \\ f_2(n) = n^2 + 1000n & f_4(n) = n^{\log m} \\ f_5(n) = \begin{cases} n & n \text{ ist ungerade} \\ n^3 & \text{sonst} \end{cases} & f_6(n) = \begin{cases} n & n \leq 100 \\ n^3 & \text{sonst} \end{cases} \end{array}$$

Zeigen Sie formal, dass folgende Aussagen gelten: $f_2 \in \mathcal{O}(f_1)$, $f_3 \in \mathcal{O}(f_4)$, $f_6 \notin \mathcal{O}(f_5)$.

Hinweise: Nutzen Sie die Definition der Landau-Symbole. Setzen Sie *gegebenenfalls* einige Werte für n und m in f_3 und f_4 ein um ein Gefühl für die Funktionen zu bekommen.

Aufgabe 1.3: Mengenoperationen auf Sprachen

Seien L_{\min} und L_{\max} diejenigen Sprachen mit Wörtern der Länge 2 über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$, die *mindestens* bzw. *maximal* einmal das Symbol „a“ enthalten.

- Geben Sie L_{\min} , L_{\max} , $L_{\min} \cap L_{\max}$, $L_{\min} \cup L_{\max}$, $L_{\min} \setminus L_{\max}$ explizit an (d. h. zählen Sie die Elemente in Mengenklammern auf).
- Mit $\overline{L} := \Sigma^* \setminus L$ bezeichnet man das *Komplement* einer Sprache L (mit Alphabet Σ). Geben Sie $\overline{L_{\min}}$ in Mengenschreibweise (ggf. unter Zuhilfenahme von „ \cup “) an.
- Geben Sie $(L_{\min} \setminus L_{\max})^*$ in Mengenschreibweise an.

Aufgabe 1.4: Unendliche Mengen zu regulären Sprachen

Gegeben eine unendliche Sprache in nicht geschlossener Mengenschreibweise über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. Die enthaltenen Wörter sind der Länge nach sortiert angegeben. Geben Sie die Sprache in Mengenschreibweise an (ggf. unter Zuhilfenahme von „ \cup “)!

Beispiel: $\{a, bab, bbabb, bbbabbb, \dots\} \Rightarrow$ Lösung: $\{b^i ab^i \mid i \geq 0\}$

- (a) $\{a, bb, aaa, bbbb, aaaaa, bbbbbb, aaaaaa, bbbbbb, \dots\}$
- (b) $\{a, b, aca, bca, acaca, bcaca, acacaca, bcacaca, \dots\}$
- (c) $\{aba, bab, abb, abaaba, bababa, abbaba, ababab, babbab, abbbab, abaabb, bababb, abbabb, abaabaaba, \dots\}$

Aufgabe 1.5: Kreuzworträtsel

Lösen Sie das folgende Kreuzworträtsel. Jedes Wort ist als Sprache oder durch seine Grammatik gegeben.

1 $\{aa, bb, cc\}^3$

2 $S \rightarrow aAa$
 $A \rightarrow cb \mid cbA$

3 $\{c\}^* \{ab\}^* \{dd\}^*$

4 $S \rightarrow bA \mid dA \mid A$
 $A \rightarrow dS \mid db$

5 $\{c^3, d^3\} \{a^2, b^2, c^2, d^2\} \{a, b\}$

6 $S \rightarrow aA \mid bA \mid cA$
 $A \rightarrow aA \mid ad \mid d$

7 $\{a\}^* \{cd\}^+ \{b\}^*$

1 $\{aa, bb, cc\}^3$

2 $S \rightarrow aAa$
 $A \rightarrow cb \mid cbA$

3 $\{c\}^* \{ab\}^* \{dd\}^*$

4 $S \rightarrow bA \mid dA \mid A$
 $A \rightarrow dS \mid db$

5 $\{c^3, d^3\} \{a^2, b^2, c^2, d^2\} \{a, b\}$

6 $S \rightarrow aA \mid bA \mid cA$
 $A \rightarrow aA \mid ad \mid d$

7 $\{a\}^* \{cd\}^+ \{b\}^*$

Aufgabe 1.6: Von der Sprachbeschreibung zur (regulären) Grammatik

Schreiben Sie folgenden Sprachen über dem Alphabet $\Sigma = \{\ominus, \ominus, \ominus\}$ jeweils als *reguläre Grammatik*.

- (a) Alle Wörter die mit $\ominus\ominus$ beginnen und auf $\ominus\ominus$ enden.
- (b) Alle Wörter die *mindestens* drei Mal die Zeichenfolge $\ominus\ominus$ enthalten.
Anmerkung: Die Zeichenfolge $\ominus\ominus\ominus\ominus$ (auch wenn man sie als drei *überlappende* $\ominus\ominus$ -Folgen interpretieren könnte) zählt *nicht* als drei Zeichenfolgen $\ominus\ominus$.
- (c) Alle Wörter die *genau* zwei Mal die Zeichenfolge $\ominus\ominus$, aber kein $\ominus\ominus\ominus$, enthalten.

Viel Erfolg!