Informatik ᗡ: – Blatt 1

Rasmus Diederichsen

6. August 2014

Aufgabe 1.1

Die Reihenfolge ist

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{O}(\log x) \subseteq \mathcal{O}\left(\sqrt{x}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\sqrt{x}}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(n^{0.99}\right) \\
\subseteq\; & \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log x}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(\frac{x}{\log\log x}\right) \subseteq \mathcal{O}(x \log x) \subseteq \mathcal{O}\left(x \log x^2\right) \\
\subseteq\; & \mathcal{O}\left(x \log^2 x\right) \subseteq \mathcal{O}\left(x^{1.01}\right) \subseteq \mathcal{O}\left(2^x\right) \subseteq \mathcal{O}\left(2^{x+1}\right) \\
\subseteq\; & \mathcal{O}\left(2^{2x}\right)
\end{aligned}
$$

Dies kann leichter nachvollzogen werden, führt man sich vor Augen, dass $\log x$ asymptotisch langsamer wächst als jede Potenz von x und damit jedes Polynom in x (ohne Beweis). Weiterhin wächst jede Exponentialfunktion asymptotisch stärker als jedes Polynom (ebenfalls hier ohne Beweis).

Aufgabe 1.2

I

Zu Zeigen:

$$f_2(n) = n^2 + 1000n \in \mathcal{O}\left(n^2\right)$$

Wir betrachten $n > 0$.

$$
\begin{aligned}
n^2 + 1000n &\leq cn^2 \\
n(n + 1000) &\leq cn^2 \\
n + 1000 &\leq cn
\end{aligned}
$$

Sei nun $c = 1001$. Für alle $n > 0$ gilt

$$
\begin{aligned}
n + 1000 &\leq 1001n \\
1000 &\leq 1000n
\end{aligned}
$$

Daher gibt es für alle $n > 0$ ein c sodass $f_1(n) \leq cf_2(n)$, dies gilt für alle $c \geq 1001$.

II

Zu Zeigen:

$$f_3(n) = m^{\log n} \leq cn^{\log m}$$

Es ist

$$\begin{aligned} m^{\log n} &\leq cn^{\log m} \\ \log m^{\log n} &\leq \log cn^{\log m} \\ \log n \log m &\leq \log n \log m + \log c \log m \\ \log n &\leq \log n + \log c \end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist erfüllt für $c \geq 1$.

III

Zu Zeigen:

$$f_6(n) \notin f_5(n)$$

Die Beziehung ist erfüllt genau dann wenn $\forall c \forall n_0 > 0 : \exists n \geq n_0 : f_6(n) > cf_5(n)$. Sei daher c beliebig fest gewählt . Die Ungleichung ist genau dann lösbar, wenn n ungerade ist und > 100. In diesem Fall

$$\begin{aligned} f_6(n) &> cf_5(n) \\ n^3 &> cn \\ n &> \sqrt{c} \end{aligned}$$

Die Wahl von n_0 ist hier nicht relevant, da ich für jedes beliebige c ein ungerades und beliebig großes $n > n_0$ finden kann, sodass $n > \sqrt{c}$ gilt.

Aufgabe 1.3

a)

$$L_{min} = \{aa, ab, ac, ca, ba\}$$

$$L_{max} = \{ab, ba, ac, ca, bb, cc, bc, cb\}$$

$$L_{min} \cap L_{max} = \{ab, ac, ca, ba\}$$

$$L_{min} \cup L_{max} = \{aa, ab, ba, ac, ca, bb, cc, bc, cb\}$$

$$L_{min} \setminus L_{max} = \{aa\}$$

b)

$$\begin{aligned} \overline{L_{min}} &= \Sigma^* \setminus L_{min} \\ &= \{w \mid w \in \Sigma^*, w \notin L_{min}\} \\ &= \{a, b, c, bb, cc, cb, bc\} \cup \{w \in \Sigma^* \mid |w| > 2\} \cup \{\varepsilon\} \end{aligned}$$

c)

$$(L_{min} \setminus L_{max})^* = \{a^{2i} \mid i \in \mathbb{N}\}$$

Aufgabe 1.4

a)

$$\{a^i \mid i > 0, i \bmod 2 = 1\} \cup \{b^i \mid i > 1, i \bmod \ = 0\}$$

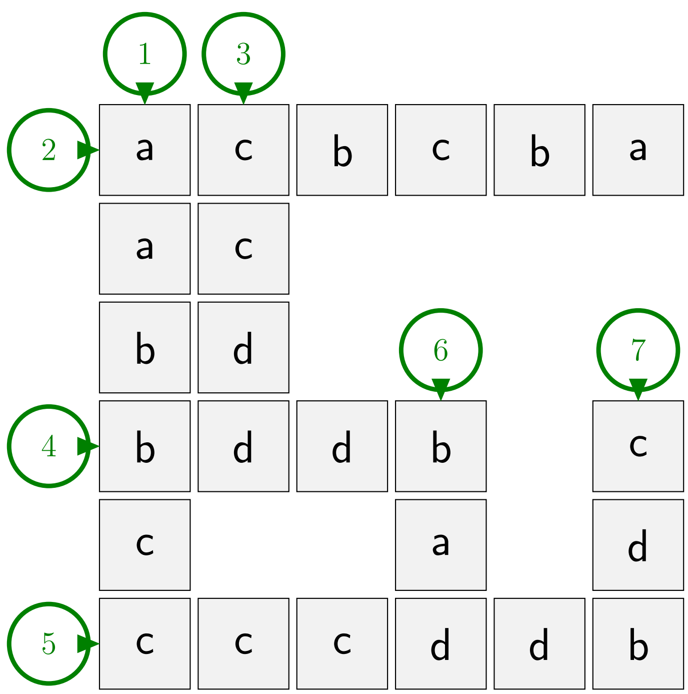
b)

$$\{b(ca)^i \mid i \geq 0\} \cup \{a(ca)^i \mid i \geq 0\}$$

c)

$$\{aba, bab, abb\}^+$$

Aufgabe 1.5



Aufgabe 1.6

a)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow \smiley A \\
A &\rightarrow \smiley B \\
B &\rightarrow \smiley B \mid \neutral B \mid \frownie B \mid \frownie C \\
C &\rightarrow \frownie
\end{aligned}
$$

b)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow \smiley S \mid \frownie S \mid \neutral S \mid \neutral A \\
A &\rightarrow \neutral B \\
B &\rightarrow \smiley B \mid \frownie B \mid \neutral B \mid \neutral C \\
C &\rightarrow \neutral D \\
D &\rightarrow \smiley D \mid \frownie D \mid \neutral D \mid \neutral E \\
E &\rightarrow \neutral F \\
F &\rightarrow \smiley F \mid \frownie F \mid \neutral F \mid \smiley \mid \neutral \mid \frownie
\end{aligned}
$$

c)

$$
\begin{aligned}
S &\rightarrow \neutral S \mid \frownie S \mid \smiley A \\
A &\rightarrow \neutral S \mid \frownie S \mid \smiley B \\
B &\rightarrow \neutral C \mid \frownie C \\
C &\rightarrow \neutral C \mid \frownie C \mid \smiley D \\
D &\rightarrow \neutral C \mid \frownie C \mid \smiley E \mid \smiley \\
E &\rightarrow \neutral \mid \frownie \mid \neutral D \mid \frownie D
\end{aligned}
$$