Prof. Dr. M. Chimani
Dipl.-Inf. S. Beyer
Dipl.-Math. I. Hedtke

Universität Osnabrück
Theoretische Informatik
Sommersemester 2014

Übungsblatt 4 zur
Informatik Ɑ: Einführung in die Theoretische Informatik

Ausgabe: 19. Mai Besprechung: 26.–28. Mai

Aufgabe 4.1. Endlicher Automat mit Ausgabe, Summe

Seien $x = (x_n x_{n-1} \dots x_2 x_1 x_0)_{\mathrm{bin}}$ und $y = (y_n y_{n-1} \dots y_2 y_1 y_0)_{\mathrm{bin}}$ jeweils Binärzahlen, d. h. $x_i \in \{0, 1\}$ und $x = \sum_{i=0}^{n} 2^i x_i$ (und analog für y).

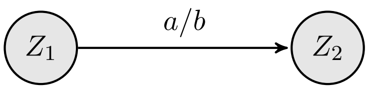
Wir erweitern deterministische endliche Automaten so, dass bei jedem Übergang ein Zeichen ausgegeben werden kann. Geben Sie einen endlichen Automaten an, der eine Eingabe

$$w = x_0 y_0 x_1 y_1 x_2 y_2 \dots x_{n-1} y_{n-1} x_n y_n \#$$

akzeptiert. Dabei soll die Ausgabe die Summe aus x und y in umgekehrter Binärstellen-Reihenfolge (d. h. Least Significant Bit zuerst) sein.

Beispiel: Der DEA soll auf Eingabe $w = \texttt{111010}\#$ (entspricht $7 + 1$) die Ausgabe `0001` (entspricht 8) erzeugen.

Anmerkung zur Notation: Schreiben Sie das auszugebende Zeichen an die Kante, neben das zu lesende Symbol. Soll bei einem Übergang kein Zeichen ausgegeben werden, geben Sie das Leerwort ε aus. Das Bild unterhalb bezeichnet also einen Übergang von Zustand Z_1 zu Zustand Z_2, der ausgeführt wird, wenn das Symbol a gelesen wird. Beim Benutzen dieses Übergangs wird das Symbol b als nächstes Zeichen der Ausgabe (das ist nicht die Eingabe!) geschrieben.



Aufgabe 4.2. Reguläre Ausdrücke in der Chomsky-Hierarchie

Sei $L = \{w \mid w \text{ ist ein regulärer Ausdruck über dem Alphabet } \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}\}$. Die regulären Ausdrücke in L sollen der strikten Definition entsprechen (volle Klammerung, kein ε, keine positive Hülle).

Über welchem Alphabet ist L definiert? Was ist die kleinste (eingeschränkteste) Sprachklasse in der Chomsky-Hierarchie (Typ 0 bis 3), in der L liegt? Geben Sie dementsprechend eine reguläre, kontextfreie, kontextsensitive oder allgemeine Grammatik an, die L beschreibt.

S -> s_1 | ... | s_k
S -> "(" S "|" S ")"
S -> "(" SS ")"
S -> S "*"

Aufgabe 4.3. Pumping Lemma (reguläre Sprachen)

Zeigen Sie mithilfe des Pumping Lemmas, dass die folgenden Sprachen nicht regulär sind:

(a) $L_1 = \{♪^i 𝅗𝅥^{2i} \mid i \geq 0\}$

(b) $L_2 = \{♪^i 𝅗𝅥^j \mid 0 \leq i \leq j\}$

(c) $L_3 = \{♩^{(k^2)} \mid k \geq 0\}$

Aufgabe 4.4. Alternatives Pumping Lemma

Betrachten Sie das alternative Pumping Lemma, das genauso aussieht wie das Pumping Lemma aus der Vorlesung, jedoch als zweite Bedingung $|v| \leq n$ fordert (statt $|uv| \leq n$).

(a) Beweisen Sie, dass das alternative Pumping Lemma gilt.

(b) Zeigen Sie, dass eine (beliebige, also nicht zwingend reguläre) Sprache, die unser originales Pumping Lemma erfüllt, auch das alternative Pumping Lemma erfüllt.

(c) Betrachten Sie die Sprache der Wörter über $\Sigma = \{a, b\}$ die (in beliebiger Reihenfolge!) gleich viele a und b Symbole enthalten. Zeigen Sie, dass diese Sprache das alternative, jedoch nicht das originale Pumping Lemma erfüllt.—Ist die Sprache regulär? Welche Variante des Pumping Lemmas ist nützlicher, um die Nichtregularität einer Sprache zu beweisen?

Aufgabe 4.5. Nicht-Regularität durch Abschlusseigenschaften

Betrachten Sie die Sprache $L := \{c^j a^i b^i \mid i, j \geq 0\} \cup \{a^j b^i \mid i, j \geq 0\}$ aus der Vorlesung.

Wir haben gesehen, dass das Pumping Lemma nicht stark genug ist, um zu zeigen, dass L nicht regulär ist. Die Tatsache, *dass* L nicht regulär ist, haben wir allerdings nur grob argumentiert (weil die nicht-reguläre Sprache $a^i b^i$ mit c^*-Präfixen enthalten ist).

Benutzen Sie Ihr Wissen um die inzwischen besprochenen *Abschlusseigenschaften* der regulären Sprachen, um formal die Nicht-Regularität von L zu beweisen. Benutzen Sie dabei *nicht* das Pumping Lemma, sondern nur das Wissen, dass $\{a^i b^i \mid i \geq 0\}$ nicht regulär ist.

Hinweis: Nehmen Sie in dem Beweis zunächst an, dass L regulär wäre.

Aufgabe 4.6. Regulär?

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Behauptung:

Die Sprache $\{a^i b^j \mid i \geq j \geq 0$ *und* $j \leq 2000\}$ *ist regulär.*

Ни пуха, ни пера!