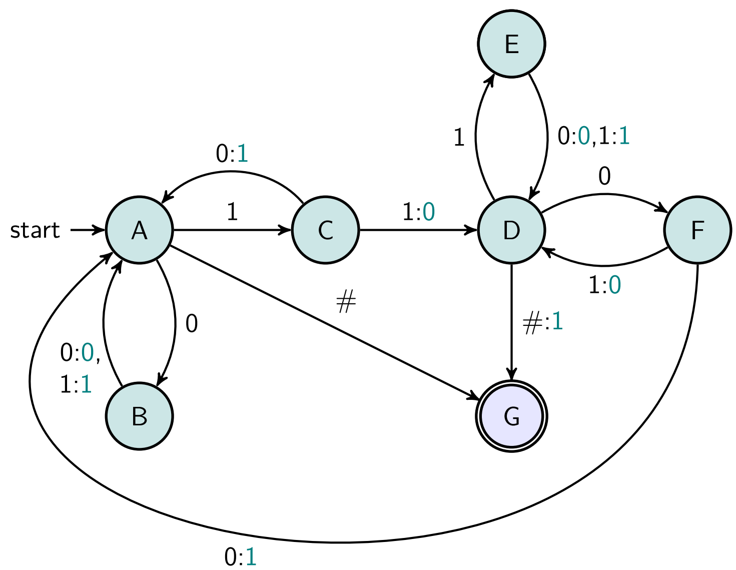
Informatik ꓷ: – Blatt 4

Rasmus Diederichsen   Sebastian Höffner

25. Juli 2014

Aufgabe 4.1



Aufgabe 4.2

Die Sprache L ist definiert über dem Alphabet $\Sigma = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k, *, (,), |, \emptyset\}$. Die Grammatik, die nötig ist, L zu beschreiben, muss mindestens kontextfrei sein, denn mit regulären Sprachen ist die Anforderung, dass jede geöffnete Klammer wieder geschlossen werden muss, nicht sicher zu stellen.

Die Grammatik könnte so aussehen:

$$
\begin{array}{rcl}
S & \to & \sigma_1 \mid \ldots \mid \sigma_k \\
S & \to & (SS) \\
S & \to & (S|S) \\
S & \to & (S)^* \\
(S & \to & \emptyset)
\end{array}
$$

Anmerkung: Es ist streitbar, inwiefern $\emptyset$ zum Alphabet gehört, in jedem Fall ist $\emptyset \in L$.

Aufgabe 4.3

a)

$$L_1 = \{♪^i 𝅗𝅥^{2i} \mid i \geq 0\}$$

Man nehme an, das Pumping Lemma sei durch L_1 erfüllt. Sei n die Wortmindestlänge und $z = ♪^n 𝅗𝅥^{2n} = uvw$ eine Zerlegung für $i = n$ mit $|z| \geq n$. Es gilt

$$|uv| \leq n$$

und

$$|v| = l \geq 1$$

also besteht v nur aus l Zeichen ♪. Sei $|u| = k$. Da $uv^*w \in L_1$ ist $uv^{3n}w = ♪^k ♪^{3n} 𝅗𝅥^{2n} \in L_1$. Dies ist ein Widerspruch.

b)

$$L_2 = \{♪^i 𝅗𝅥^j \mid 0 \leq i \leq j\}$$

Man nehme an, das Pumping Lemma gilt. Sei n die Wortmindestlänge, wir betrachten den Fall $i = n$. Sei $uvw = ♪^n 𝅗𝅥^j$ die Zerlegung für ein beliebiges Wort z mit $|z| \geq 2n$. Es gilt

$$uv = ♪^k, k \leq n$$

Da $|v| \geq 1$ ist, gilt

$$v = ♪^l, l \geq 1$$

Da $uv^*w \in L_2$, ist $uv^{(j+1)l}w = ♪^{k-l} ♪^{(j+1)l} 𝅗𝅥^j \in L_2$. Dies ist ein Widerspruch.

c)

$$L_3 = \{♪^{k^2} \mid k \geq 0\}$$

Sei das Pumping Lemma erfüllt und n die Wortmindestlänge. Wir betrachten den Fall $k = n$. Da $z = uvw \in L_3$ für $|z| \geq n$, ist $uv^2w \in L_3$. Es ist

$$\begin{array}{rcl} |uv^2w| & = & |uvw| + |v| \overset{?}{<} (n+1)^2 \\ n^2 + |v| & \overset{?}{<} & n^2 + 2n + 1 \\ |v| & < & 2n + 1 \end{array}$$

die letzte Ungleichung gilt, da $|uv| \leq n$, mithin $|v| \leq n$. Also ist uv^2w zu kurz, um $\in L_3$ sein zu können, was ein Widerspruch ist.

Aufgabe 4.4

a)

Für jede reguläre Sprache gibt es einen deterministischen endlichen Automaten $\mathcal{A}$ mit Zustandsmenge $\mathcal{Z}$, der die Worte dieser Sprache akzeptiert. Sei die Anzahl der Zustände n. Beim Lesen von n Zeichen durchläuft der Automat $n + 1$ Zustände, ergo $\exists Z_k \in \mathcal{Z}$, der zwei oder mehr mal durchlaufen wird.

Sei u die Zeichenkette, die $\mathcal{A}$ beim Durchlaufen von $Z_{start}, \ldots, Z_k$ liest. Sei v die Zeichenkette die $\mathcal{A}$ beim Durchlaufen von $Z_k, \ldots, Z_k$ liest und w die Zeichenkette, die $\mathcal{A}$ beim Durchlaufen der Zustände $Z_k, \ldots, Z_{end}$ durchläuft. Offensichtlich ist $0 < |v| \leq n$ und uv^*w durch den Auromaten akzeptiert.

Da die betrachtete Sprache nicht regulär ist, was das alternative Lemma aber nicht zeigt, eignet sich das origniale Lemma offenbar besser für die Prüfung, da es striktere Anforderungen an die Sprache stellt.

b)

Nimmt man das originale Pumping Lemma als gegeben an, ist dies trivial, da $|uv| \leq n \Rightarrow |v| \leq n$.

c)

Beweis der Nicht-Regularität

Sei n die Wortmindestlänge und $z = a^n b^n$. Es ist $|uv| \leq n$, also

$$v = a^k, k \geq 1$$

Da $uvw \in L(\Sigma)$, muss $uw = a^{n-k} b^n \in L(\Sigma)$ sein. Dies ist ein Widerspruch.

Beweis des alternativen Pumping Lemmas

Sei n die Wortmindestlänge. Falls $|z| = n$, wähle $v = z$. Offensichtlich ist $uv^*w = v^* \in L$. Falls $k = |z| > n$, gibt es einen Index i, sodass $z[i] \neq z[i+1]$, da z as und bs in gleicher Zahl enthält. Da u beliebig lang sein kann, wähle

$u = z[0] \dots z[i-1], v = z[i]z[i+1], w = z[i+2] \dots z[k]$. Offensichtlich ist $uv^*w \in L$.

Aufgabe 4.5

Wir nehmen an, L sei regulär. Wir schneiden L mit der regulären Sprache ca^*b^*

$$L' = L \cap \{c\}\{a\}^*\{b\}^* = \{ca^ib^i \mid i \geq 0\}$$

Wir definieren Homomorphismus h mit $h(c) = \varepsilon$, $h(a) = a$, $h(b) = b$ und wenden diesen auf L' an:

$$L'' = h(L') = \{a^ib^i \mid i \geq 0\}$$

Offensichtlich ist L'' nicht regulär, mithin auch nicht L' und L.

Aufgabe 4.6

Wenn die Sprache regulär ist, dann können wir z.B. einen endlichen Automaten oder regulären Ausdruck finden, der die Sprache $L = \left\{a^ib^j \mid i \geq j \geq 0, j \leq 2000\right\}$ beschreibt.

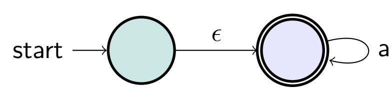
Die Sprache L lässt sich wie folgt als regulärer Ausdruck darstellen:

$$a^0a^*b^0 \mid a^1a^*b^1 \mid a^2a^*b^2 \mid \dots \mid a^{2000}a^*b^{2000}$$

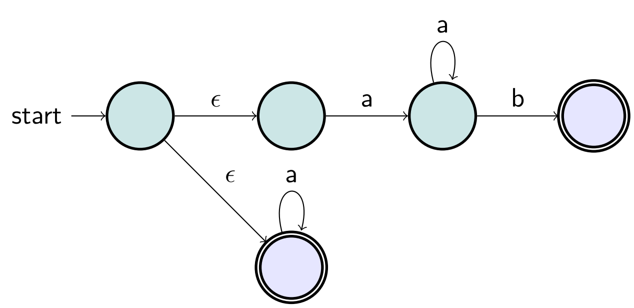
Wir können die Sprache L auch als NDEA darstellen. Angenommen die Bedingung für j ist nicht $j \leq 2000$ sondern $j \leq 0$, $j \leq 1$ oder $j \leq 2$ (aus Gründen der Aufschreibbarkeit).

Dann wären ein gültige Automaten:

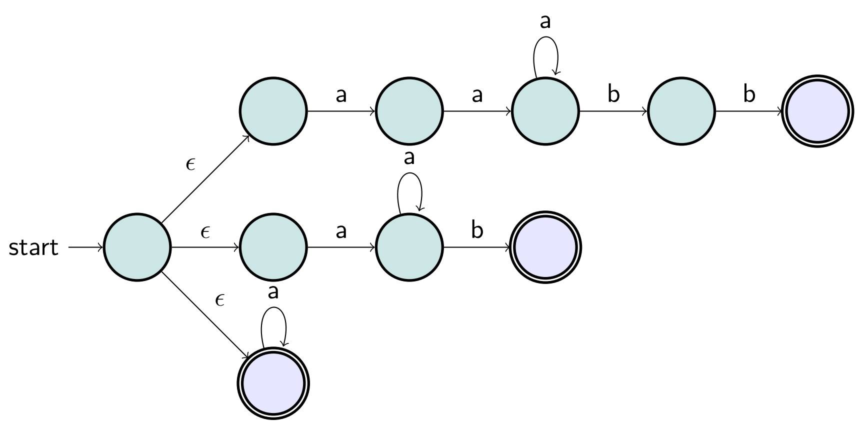
$j \leq 0$**:**



$j \leq 1$**:**



$j \leq 2$**:**



Einen Automaten für $j \geq 2000$ kann man nach dem selben Muster aufbauen.
Die Sprache $L = \left\{a^i b^j \mid i \geq j \geq 0, j \leq 2000\right\}$ ist also regulär.