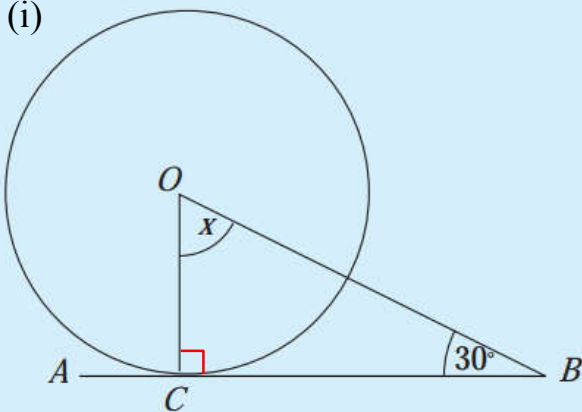


22.1 අභ්‍යාසය

1. පහත දැක්වෙන එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O ද AB යනු වෘත්තය මත පිහිටි C ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය ද වේ. දී ඇති දත්ත අනුව, විෂය සංකේතවලින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.

(i)



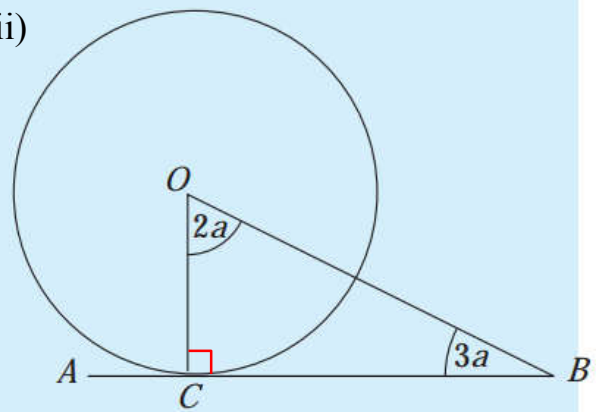
$O\hat{C}B = 90^\circ$ (ස්පර්ශකය අරයට ලම්භ වන නිසා)

$x + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක කෝණ)

$$x = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\underline{\underline{x = 60^\circ}}$$

(ii)

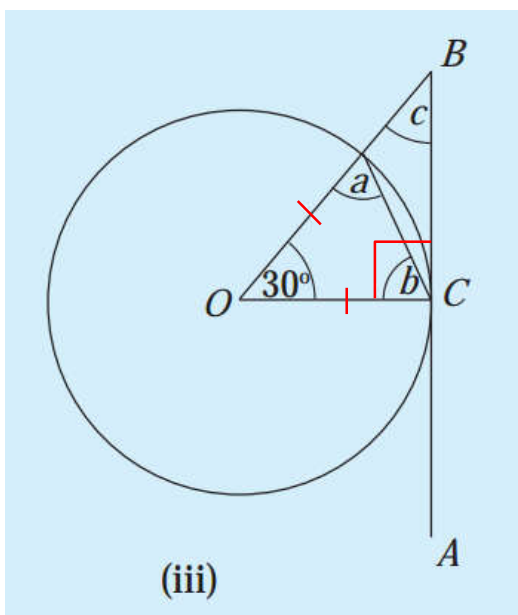


$O\hat{C}B = 90^\circ$ (ස්පර්ශකය අරයට ලම්භ වන නිසා)

$2a + 3a + 90^\circ = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක කෝණ)

$$5a = 90^\circ$$

$$\underline{\underline{a = 18^\circ}}$$



(iii)

$O\hat{C}B = 90^\circ$ (ස්පර්ශකය සහ අරය අතර කෝණය)

$a = b$ (සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක කෝණ)

$a + b + 30^\circ = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක කෝණ)

$$a + a + 30^\circ = 180^\circ$$

$$2a = 180^\circ - 30^\circ$$

$$2a = 150^\circ$$

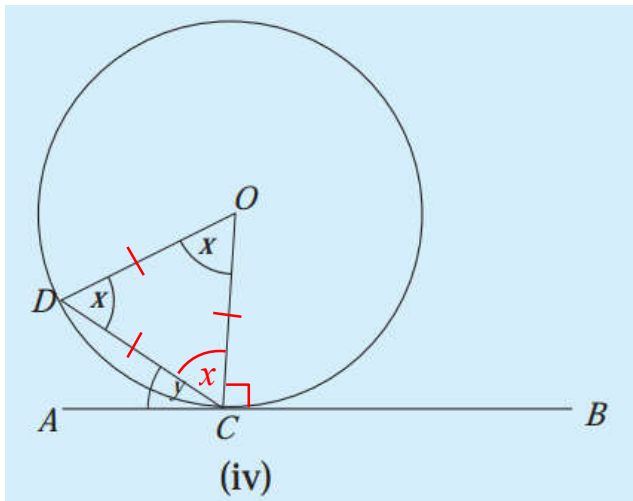
$$\underline{\underline{a = 75^\circ}}$$

$$\underline{\underline{b = 75^\circ}}$$

$c + 90^\circ + 30^\circ = 180^\circ$ ($OCBA\Delta$, ත්‍රිකෝණයක කෝණ)

$$c = 180^\circ - 120^\circ$$

$$\underline{\underline{c = 60^\circ}}$$



$$O\hat{C}D = O\hat{D}C = x \text{ (} OC, OD \text{ අරයන් සමාන නිසා)}$$

$$x + x + x = 180^\circ \text{ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ)}$$

$$3x = 180^\circ$$

$$\underline{\underline{x = 60^\circ}}$$

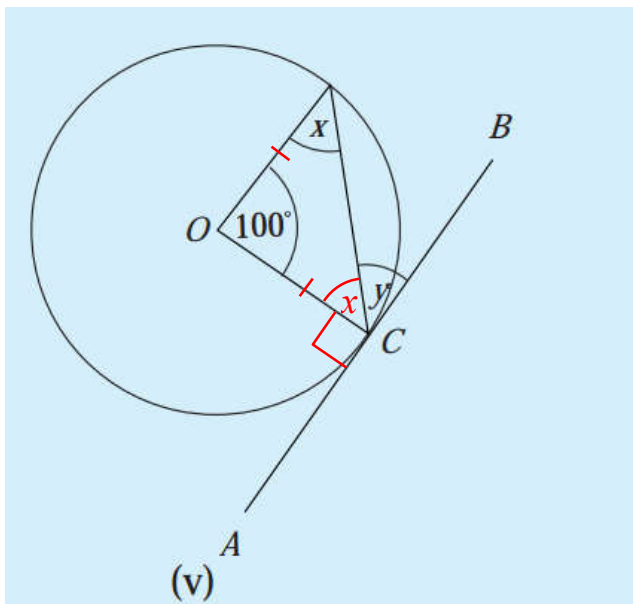
$$A\hat{C}O = 90^\circ \text{ (ස්පර්ශකය සහ අරය අතර කෝණය)}$$

$$x + y = 90^\circ$$

$$60^\circ + y = 90^\circ$$

$$y = 90^\circ - 60^\circ$$

$$\underline{\underline{y = 30^\circ}}$$



$$x + x + 100^\circ = 180^\circ \text{ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ)}$$

$$2x = 180^\circ - 100^\circ$$

$$2x = 80^\circ$$

$$\underline{\underline{x = 40^\circ}}$$

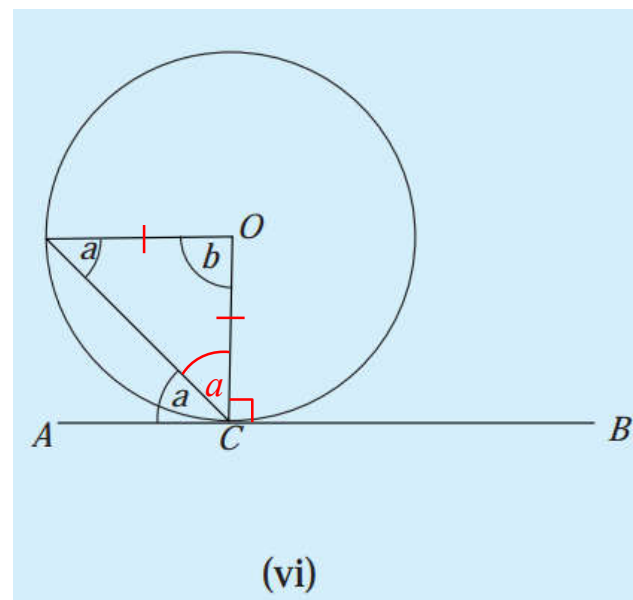
$$O\hat{C}B = 90^\circ \text{ (ස්පර්ශකය සහ අරය අතර කෝණය)}$$

$$x + y = 90^\circ$$

$$40^\circ + y = 90^\circ$$

$$y = 90^\circ - 40^\circ$$

$$\underline{\underline{y = 50^\circ}}$$



$$O\hat{C}A = 90^\circ \text{ (ස්පර්ශකය සහ අරය අතර කෝණය)}$$

$$a + a = 90^\circ$$

$$2a = 90^\circ$$

$$\underline{\underline{a = 45^\circ}}$$

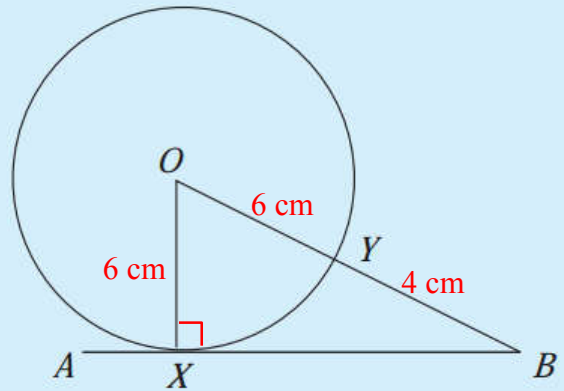
$$a + a + b = 180^\circ \text{ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ)}$$

$$45^\circ + 45^\circ + b = 180^\circ$$

$$b = 180^\circ - 90^\circ$$

$$\underline{\underline{b = 90^\circ}}$$

2. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි X ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. වෘත්තයේ අරය 6 cm ද $YB = 4\text{ cm}$ ද නම් XB හි දිග සොයන්න.



OXB ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$OB^2 = OX^2 + XB^2$$

$$10^2 = 6^2 + XB^2$$

$$XB^2 = 10^2 - 6^2$$

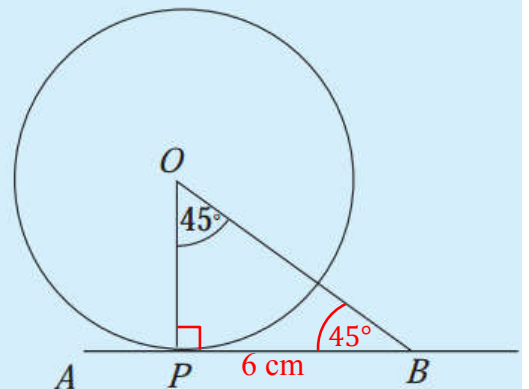
$$XB^2 = 100 - 36$$

$$XB^2 = 64$$

$$XB = \sqrt{64}$$

$$\underline{\underline{XB = 8\text{ cm}}}$$

3. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB ද $\hat{BOP} = 45^\circ$ ද $PB = 6\text{ cm}$ ද නම් වෘත්තයේ අරය සොයන්න.



$$\hat{PBO} + 90^\circ + 45^\circ = 180^\circ \text{ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ එකතුව = 180^\circ)}$$

$$\hat{PBO} = 45^\circ$$

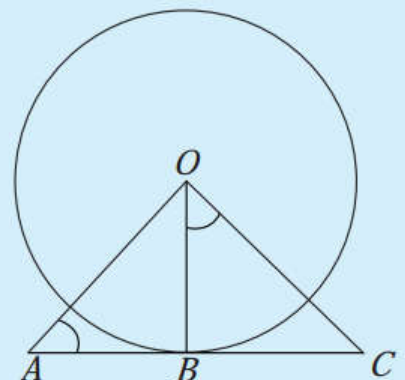
$$\therefore \hat{PBO} = \hat{POB}$$

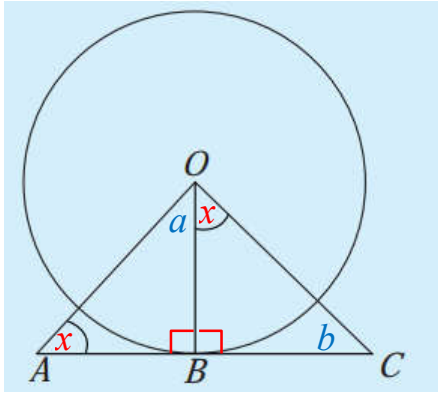
$$\therefore OP = PB \text{ (සමාන කෝණ වලට ඉදිරියෙන් පිහිටි පාද සමාන වේ.)}$$

$$\therefore OP = 6\text{ cm}$$

$$\text{වෘත්තයේ අරය} = \underline{\underline{6\text{ cm}}}$$

4. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට B හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AC වේ. $\hat{OAB} = \hat{BOC}$ නම් $\hat{AOB} = \hat{BCO}$ බව පෙන්වන්න.





$\hat{A}BO = \hat{C}BO = 90^\circ$ (ස්පර්ශකය සහ අරය අතර කෝණය)

AOB ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 180° නිසා

$$\hat{A}OB + x + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{A}OB = 90^\circ - x \rightarrow \textcircled{1}$$

BOC ත්‍රිකෝණයේ අභ්‍යන්තර කෝණවල එකතුව 180° නිසා

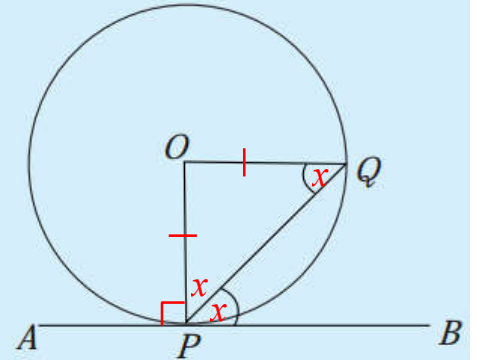
$$\hat{B}CO + x + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\hat{B}CO = 90^\circ - x \rightarrow \textcircled{2}$$

$$\therefore \underline{\underline{\hat{A}OB = \hat{B}CO}}$$

$$\begin{aligned} a + x &= b + x \\ a &= b \end{aligned}$$

5. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට P හිදී ඇඳි ස්පර්ශකය AB වේ. $O\hat{Q}P = Q\hat{P}B$ වන ලෙස Q ලක්ෂ්‍යය වෘත්තය මත පිහිටයි. OQ හා PO එකිනෙකට ලම්බ වන බව පෙන්වන්න.



$O\hat{P}A = 90^\circ$ (ස්පර්ශ ලක්ෂ්‍යයේදී, අරය සහ ස්පර්ශකය අතර කෝණය $= 90^\circ$)

$OQ \parallel AB$ ($O\hat{Q}P = Q\hat{P}B$, ඒකාන්තර කෝණ නිසා)

$P\hat{O}Q = O\hat{P}A$ (ඒකාන්තර කෝණ, $OQ \parallel AB$)

$$P\hat{O}Q = 90^\circ$$

$$\therefore \underline{\underline{OQ \perp PO}}$$

$$O\hat{P}B = 90^\circ$$

$$2x = 90^\circ$$

$$x = 45^\circ$$

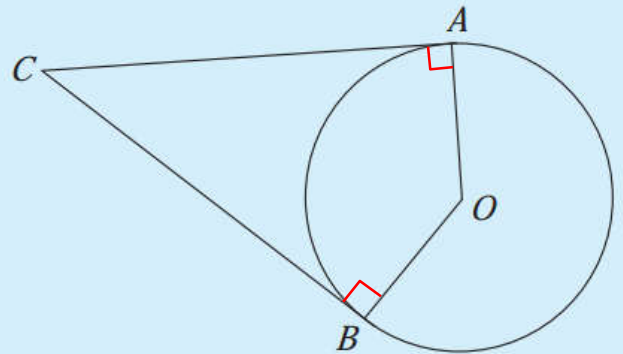
$$P\hat{O}Q + x + x = 180^\circ$$

$$P\hat{O}Q + 90^\circ = 180^\circ$$

$$P\hat{O}Q = 90^\circ$$

$$\therefore \underline{\underline{OQ \perp PO}}$$

6. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A සහ B ලක්ෂ්‍යවලදී ඇඳි ස්පර්ශක C ලක්ෂ්‍යයේ දී එකිනෙක ඡේදනය වේ. $AOBC$ වෘත්ත චතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



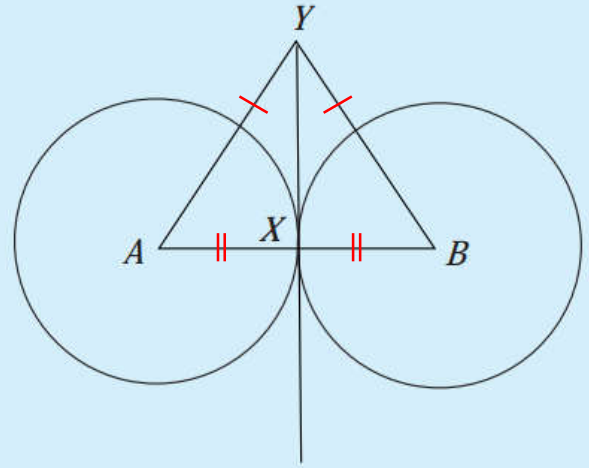
$O\hat{A}C = 90^\circ$ (ස්පර්ශකය සහ අරය අතර කෝණය)

$O\hat{B}C = 90^\circ$ (ස්පර්ශකය සහ අරය අතර කෝණය)

$$O\hat{A}C + O\hat{B}C = 180^\circ$$

සම්මුඛ කෝණ යුගලයක් පරිපූරක නිසා $AOBC$ වෘත්ත චතුරස්‍රයකි. //

7. රූපයේ දැක්වෙන්නේ අර සමාන වූ ද කේන්ද්‍ර A හා B වූ ද වෘත්ත දෙකකි. Y ලක්ෂ්‍යය පිහිටා ඇත්තේ $AY = YB$ වන පරිදි ය. YX රේඛාව වෘත්ත දෙකටම පොදු ස්පර්ශකයක් වන බව පෙන්වන්න.



AXY සහ BXY ත්‍රිකෝණ දෙකෙහි

$AY = BY$ (දත්තය)

$AX = XB$ (අරයන් සමාන නිසා)

$YX = YX$ (පොදු පාදය)

$\therefore \triangle AXY \equiv \triangle BXY$ (පා. පා. පා.)

$\therefore \angle AXY = \angle BXY$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

තවද $\angle AXY + \angle BXY = 180^\circ$

$\therefore \angle AXY = \angle BXY = 90^\circ$

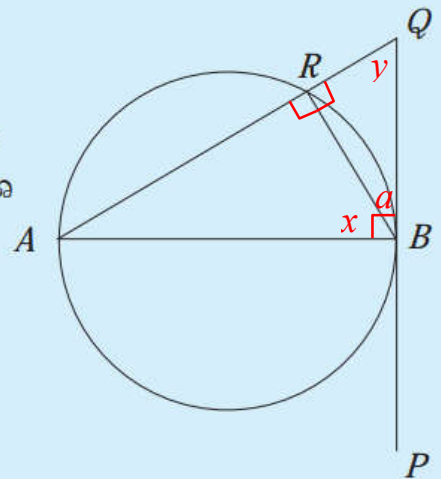
$\therefore YX$ රේඛාව වෘත්ත දෙකටම පොදු ස්පර්ශකයක් වේ. //

8. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයේ AB විශ්කම්භයක් වන අතර PQ රේඛාව B ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි.

(i) $\angle QRB = 90^\circ$ බව

(ii) $\angle ABR = \angle RQB$ බව

පෙන්වන්න.



$\angle ABQ = 90^\circ$ (ස්පර්ශකය සහ අරය අතර කෝණය)

$\angle ARB = 90^\circ$ (අර්ධ වෘත්තයක කෝණය)

(i) $\angle ABR + \angle RQB = 180^\circ$ (සරල රේඛාවක කෝණය)

$90^\circ + \angle RQB = 180^\circ$

$\angle RQB = 90^\circ$

(ii) $\hat{A}BR + \hat{R}BQ = 90^\circ \rightarrow \textcircled{1}$

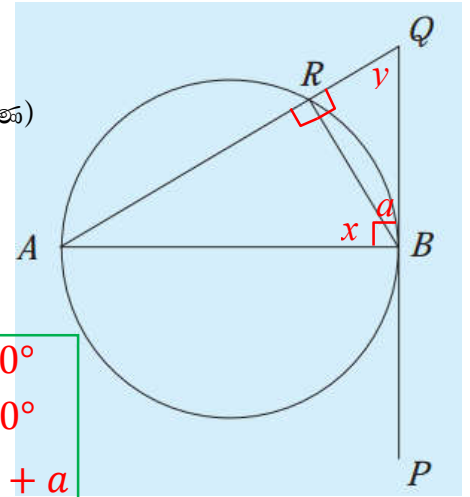
$\hat{R}BQ + \hat{B}RQ + \hat{R}QB = 180^\circ$ (ත්‍රිකෝණයක අභ්‍යන්තර කෝණ)

$\hat{R}BQ + 90^\circ + \hat{R}QB = 180^\circ$

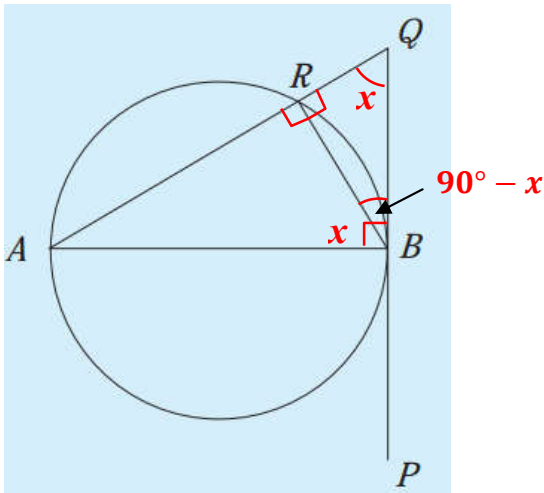
$\hat{R}BQ + \hat{R}QB = 90^\circ \rightarrow \textcircled{2}$

$\textcircled{1} = \textcircled{2}$; $\hat{A}BR + \cancel{\hat{R}BQ} = \cancel{\hat{R}BQ} + \hat{R}QB$

$\hat{A}BR = \hat{R}QB$

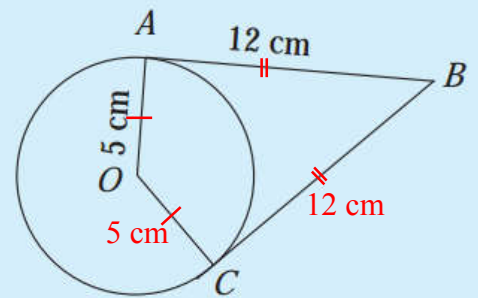


$x + a = 90^\circ$
 $y + a = 90^\circ$
 $x + a = y + a$
 $x = y$



22.2 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A සහ C ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක B හි දී හමු වේ. වෘත්තයේ අරය 5 cm ද $AB = 12 \text{ cm}$ ද නම් $ABCO$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය සොයන්න.

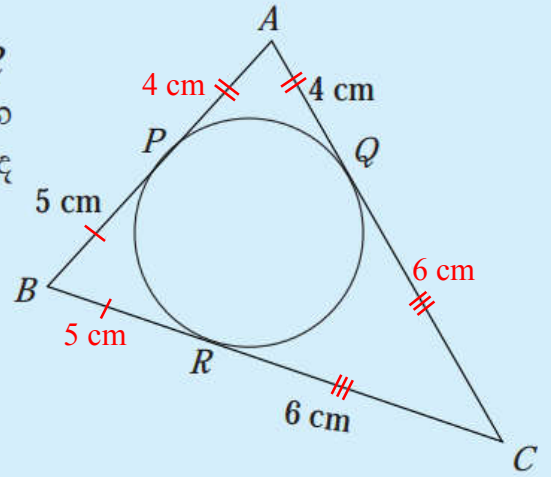


$AB = BC = 12 \text{ cm}$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ.)

$OA = OC = 5 \text{ cm}$ (වෘත්තයේ අරයන්)

$ABCO$ චතුරස්‍රයේ පරිමිතිය $= AO + OC + CB + BA$
 $= 5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 12 \text{ cm} + 12 \text{ cm}$
 $= \underline{\underline{34 \text{ cm}}}$

2. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තය මත පිහිටි P, Q හා R ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AB, AC සහ BC වේ. $RC = 6 \text{ cm}$ ද $BP = 5 \text{ cm}$ ද $AQ = 4 \text{ cm}$ ද නම් ABC ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය සොයන්න.



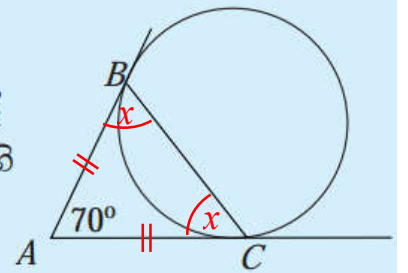
$AP = AQ = 4 \text{ cm}$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ.)

$BP = BR = 5 \text{ cm}$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ.)

$CR = CQ = 6 \text{ cm}$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ.)

$$\begin{aligned} ABC \text{ ත්‍රිකෝණයේ පරිමිතිය} &= AQ + QC + CR + RB + BP + PA \\ &= 4 \text{ cm} + 6 \text{ cm} + 6 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 5 \text{ cm} + 4 \text{ cm} \\ &= \underline{\underline{30 \text{ cm}}} \end{aligned}$$

3. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තය මත පිහිටි B සහ C ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක AB හි දී ඡේදනය වේ. $\hat{BAC} = 70^\circ$ නම් \hat{ABC} හි අගය සොයන්න.



$AB = AC$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක දිගින් සමාන වේ.)

$\therefore \hat{ABC} = \hat{ACB}$ (සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක කෝණ)

$$x + x + 70^\circ = 180^\circ$$

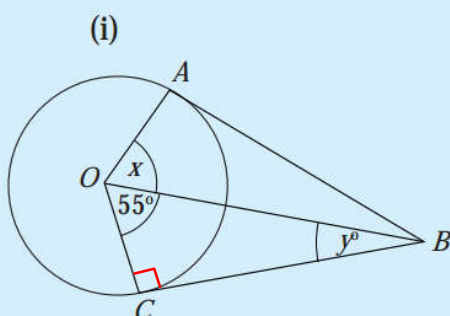
$$2x = 180^\circ - 70^\circ$$

$$2x = 110^\circ$$

$$x = 55^\circ$$

$$\underline{\underline{\hat{ABC} = 55^\circ}}$$

4. පහත දැක්වෙන එක් එක් වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය O ද වෘත්ත මත පිහිටි A සහ C ලක්ෂ්‍යවල දී ඇඳි ස්පර්ශක හමුවන ලක්ෂ්‍ය B ද වේ. දී ඇති දත්ත ඇසුරෙන්, විෂය සංකේතවලින් දැක්වෙන අගය සොයන්න.

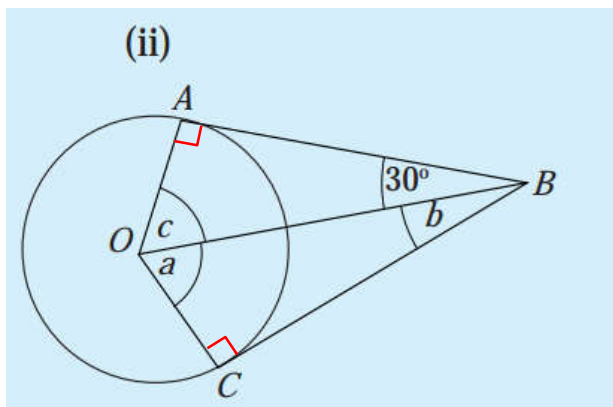


$\underline{\underline{x = 55^\circ}}$ (ස්පර්ශකවලින් කේන්ද්‍රයේ ආපාතනය කරන කෝණ සමාන වේ.)

$O\hat{C}B = 90^\circ$ (ස්පර්ශකය සහ අරය අතර කෝණය)

$$y + 55^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

$$\underline{\underline{y = 35^\circ}}$$



$O\hat{A}B = 90^\circ$ (ස්පර්ශකය සහ අරය අතර කෝණය)

$O\hat{C}B = 90^\circ$ (ස්පර්ශකය සහ අරය අතර කෝණය)

$b = 30^\circ$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යය සහ කේන්ද්‍රය යා කරන රේඛාව,
ස්පර්ශක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කරයි.)

$$a + b + 90^\circ = 180^\circ$$

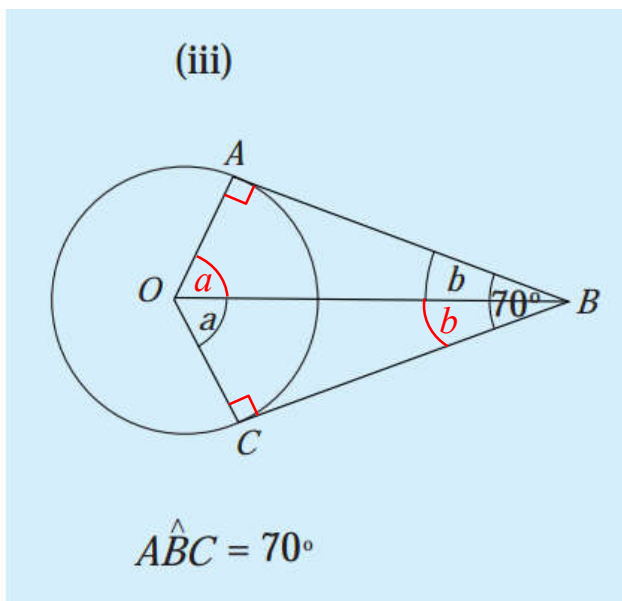
$$a + b = 90^\circ$$

$$a + 30^\circ = 90^\circ$$

$$\underline{\underline{a = 60^\circ}}$$

$a = c$ (ස්පර්ශකවලින් කේන්ද්‍රයේ ආපාතනය කරන කෝණ
සමාන වේ.)

$$\underline{\underline{c = 60^\circ}}$$



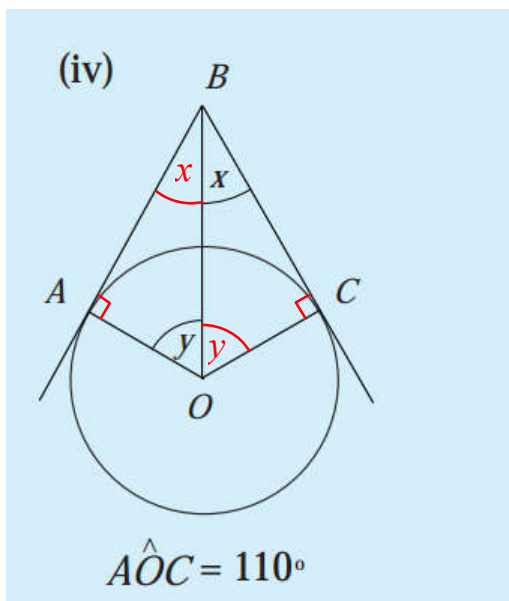
$$2b = 70^\circ$$

$$\underline{\underline{b = 35^\circ}}$$

$$a + b = 90^\circ$$

$$a + 35^\circ = 90^\circ$$

$$\underline{\underline{a = 55^\circ}}$$



$$A\hat{O}C = 110^\circ$$

$$2y = 110^\circ$$

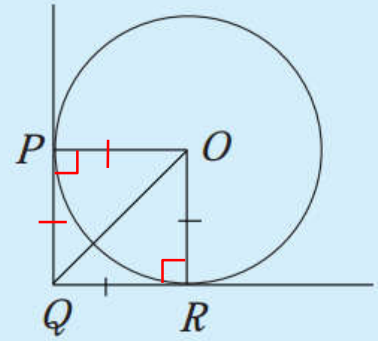
$$\underline{\underline{y = 55^\circ}}$$

$$x + y = 90^\circ$$

$$x + 55^\circ = 90^\circ$$

$$\underline{\underline{x = 35^\circ}}$$

5. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයේ P සහ R ලක්ෂ්‍යවලදී ඇඳි ස්පර්ශක Q හිදී හමුවේ. $QR = OR$ නම්, $PQRO$ යන්න සමචතුරස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



$$QR = OR \text{ (දත්තය)} \rightarrow \textcircled{1}$$

$$OR = OP \text{ (වෘත්තයේ අරයන්)} \rightarrow \textcircled{2}$$

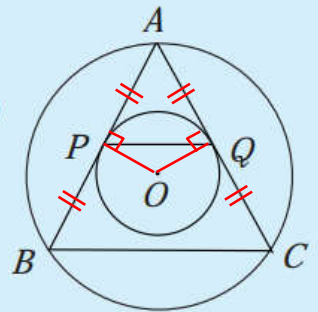
$$QR = QP \text{ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ස්පර්ශක)} \rightarrow \textcircled{3}$$

$$\therefore PQ = QR = RO = OP \rightarrow \textcircled{4}$$

$$\angle POQ = 90^\circ \text{ (ස්පර්ශකය සහ අරය අතර කෝණය)} \rightarrow \textcircled{5}$$

$\textcircled{4}$ සහ $\textcircled{5}$ අනුව $PQRS$ සමචතුරස්‍රයකි. //

6. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ විශාල වෘත්තය මත A, B සහ C ලක්ෂ්‍ය පිහිටා ඇත. වෘත්තය තුළ පිහිටි කුඩා වෘත්තය P සහ Q ලක්ෂ්‍යවල දී AB හා AC ස්පර්ශ කරයි.



(i) APQ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයක් බව

(ii) $BC \parallel PQ$ බව

පෙන්වන්න.

(i) $AP = AQ$ (කුඩා වෘත්තයට A සිට ඇඳි ස්පර්ශක)

$\therefore APQ$ සමද්විපාද ත්‍රිකෝණයකි. //

(ii) $OP \perp AB$ (ස්පර්ශකය අරයට ලම්බ වන නිසා) / (කුඩා වෘත්තයේ කේන්ද්‍රය ද O විය යුතුය)

වෘත්තයක කේන්ද්‍රයේ සිට ජ්‍යායකට අඳිනු ලබන ලම්බයෙන් එම ජ්‍යාය සමච්ඡේදනය වන නිසා

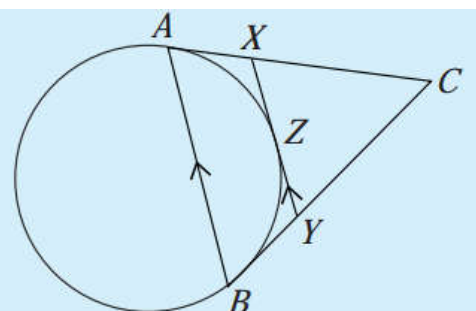
$$AP = PB$$

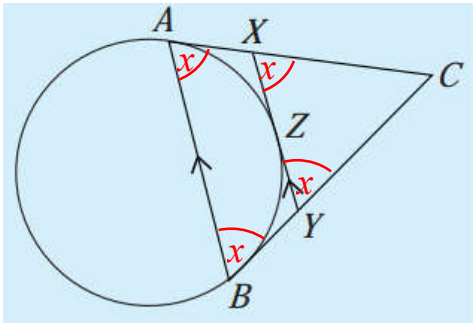
මේ අයුරින්ම, $AQ = QC$

ABC ත්‍රිකෝණයේ $AP = PB$ ද $AQ = QC$ ද නිසා මධ්‍ය ලක්ෂ්‍ය ප්‍රමේයයට අනුව

$$\underline{\underline{BC \parallel PQ}}$$

7. දී ඇති වෘත්තයට A, B හා Z හි දී ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් AC, BC හා XY වේ. රූපයේ දැක්වෙන තොරතුරු අනුව $XC = CY$ බව පෙන්වන්න.





$AC = BC$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක)

$$\therefore \angle CAB = \angle CBA$$

$$\angle CXY = \angle CAB \text{ (අනුරූප කෝණ, } XY \parallel AB)$$

$$\angle CYX = \angle CBA \text{ (අනුරූප කෝණ, } XY \parallel AB)$$

$$\therefore \angle CXY = \angle CYX$$

$$\therefore \underline{\underline{XC = CY}}$$

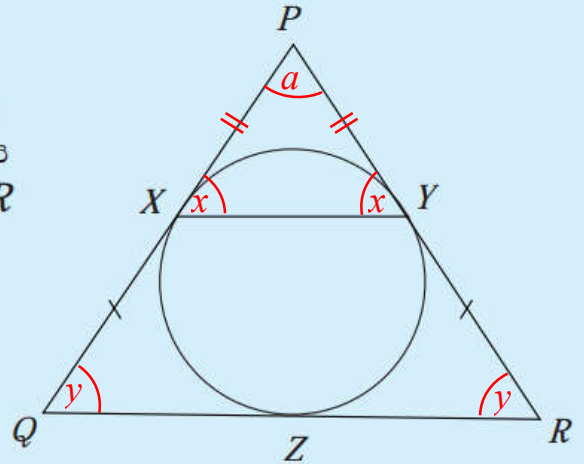
8. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්තයට P සිට අඳින ලද ස්පර්ශක X හා Y ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. $XQ = YR$ වන සේ අඳින ලද QR සරල රේඛාව Z හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි.

(i) $PR = PQ$ බව

(ii) $QR = XQ + YR$ බව

(iii) $XY \parallel QR$ බව

පෙන්වන්න.



(i) $PX = PY$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක) \rightarrow ①

$XQ = YR$ (දත්තය) \rightarrow ②

① + ②; $PX + XQ = PY + YR$

$$\underline{\underline{PQ = PR}}$$

(ii) $QZ = XQ$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක) \rightarrow ③

$ZR = YR$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක) \rightarrow ④

③ + ④; $QZ + ZR = XQ + YR$

$$\underline{\underline{QR = XQ + YR}}$$

(iii) $PXY \Delta$ න්; $a + x + x = 180^\circ \rightarrow$ ⑤

$PQR \Delta$ න්; $a + y + y = 180^\circ \rightarrow$ ⑥

⑤ = ⑥; $a + x + x = a + y + y$

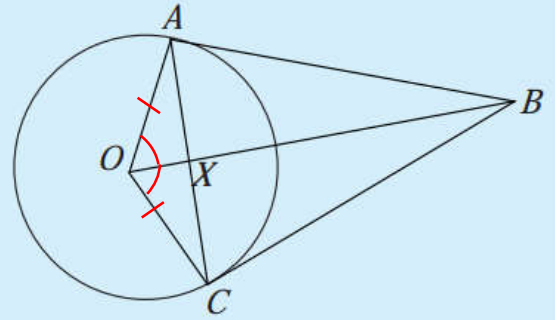
$$2x = 2y$$

$$x = y$$

$$\therefore \underline{\underline{XY \parallel QR}} \text{ (අනුරූප කෝණ සමාන නිසා)}$$

9. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A සහ C ලක්ෂ්‍යවලදී ඇඳි ස්පර්ශක B හිදී එකිනෙක හමුවේ.

- (i) $OAX \Delta \equiv OCX \Delta$ බව
 (ii) OB රේඛාව AC රේඛාවේ ලම්බ සමච්ඡේදකය බව
 (iii) $\hat{AOC} = 2 \hat{ACB}$ බව පෙන්වන්න.



(i) OAX සහ $OCX \Delta$ දෙකෙහි

$$OA = OC \text{ (අරයන්)}$$

$$\hat{AOX} = \hat{COX} \text{ (ස්පර්ශකවලින් ආපාතිත කෝණ)}$$

$$OX = OX \text{ (පොදු පාදය)}$$

$$\therefore \underline{OAX \Delta \equiv OCX \Delta} \text{ (පා. කෝ. පා.)}$$

(ii) $\hat{AXO} = \hat{CXO}$ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)

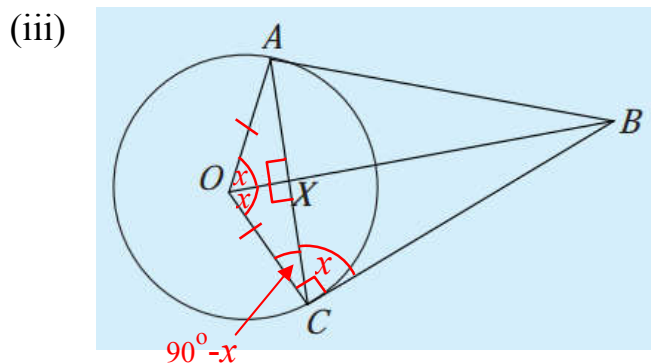
$$\hat{AXO} + \hat{CXO} = 180^\circ$$

$$\therefore \hat{AXO} = \hat{CXO} = 90^\circ$$

$$\therefore OB \perp AC$$

$$\text{තවද } AX = XC \text{ (අංගසම ත්‍රිකෝණවල අනුරූප අංග)}$$

$$\therefore OB \text{ රේඛාව } AC \text{ හි ලම්බ සමච්ඡේදකය වේ.}$$



$$\hat{ACB} = x \text{ යැයි ගනිමු.}$$

$$\hat{OCX} = 90^\circ - x$$

$$\hat{COX} + \hat{OCX} = 90^\circ$$

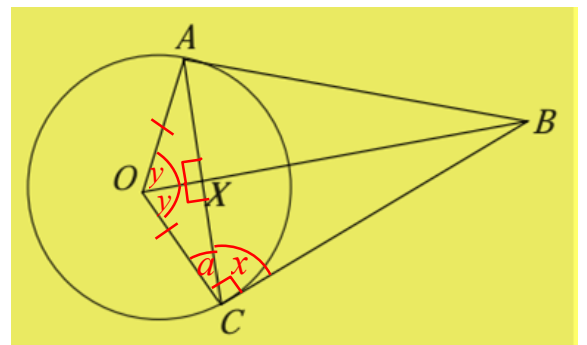
$$\hat{COX} + (90^\circ - x) = 90^\circ$$

$$\hat{COX} = x$$

$$\hat{COX} = \hat{AOX} = x \text{ (ස්පර්ශකවලින් කේන්ද්‍රයේ ආපාතනය කරන කෝණ සමාන වේ.)}$$

$$\therefore \hat{AOC} = 2x$$

$$\underline{\underline{\hat{AOC} = 2\hat{ACB}}}$$



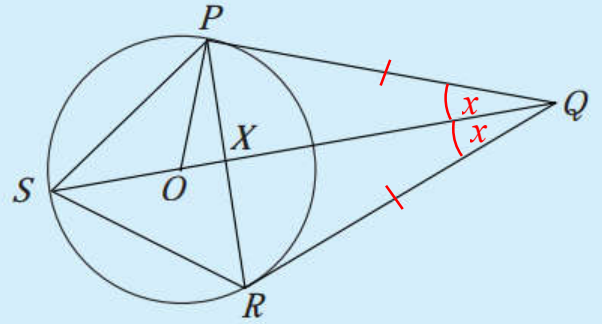
$$x + a = 90^\circ$$

$$y + a = 90^\circ$$

$$x + a = y + a$$

$$x = y$$

10. රූපයේ දැක්වෙන O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට Q සිට ඇඳි ස්පර්ශක PQ සහ QR වේ. දික් කරන ලද QO රේඛාවට S හි දී වෘත්තය හමුවේ.



(i) $PQS \Delta \equiv QRS \Delta$ බව

(ii) $2 \hat{OPX} = \hat{PQR}$ බව

පෙන්වන්න.

(i) PQS සහ $QRS \Delta$ දෙකෙහි

$PQ = RQ$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක)

$\hat{PQS} = \hat{RQS}$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යය සහ කේන්ද්‍රය යා කරන රේඛාව, ස්පර්ශක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කරයි.)

$SQ = SQ$ (පොදු පාදය)

$\therefore \underline{PQS \Delta \equiv QRS \Delta}$ (පා. කෝ. පා.)

(ii) $\hat{PQX} = x$ යැයි ගනිමු.

$\hat{QPX} = 90^\circ - x$

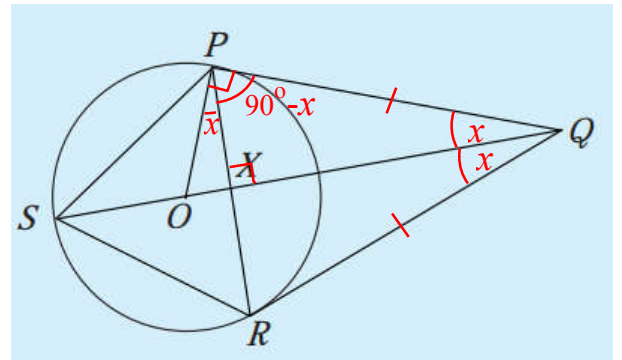
$\hat{OPX} + \hat{QPX} = 90^\circ$

$\hat{OPX} + (90^\circ - x) = 90^\circ$

$\hat{OPX} = x$

$2\hat{OPX} = 2x$

$2\hat{OPX} = \hat{PQR}$

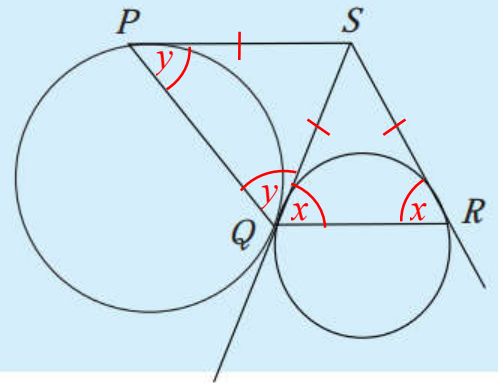


11. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙකම මත Q ලක්ෂ්‍යය පිහිටන අතර QS රේඛාව වෘත්ත දෙකටම පොදු ස්පර්ශකයක් වේ. S සිට වෘත්ත දෙකට අඳින ලද අනෙක් ස්පර්ශක දෙක P සහ R ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්ත ස්පර්ශ කරයි.

(i) $PS = SR$ බව

(ii) $\hat{PQR} = \hat{SPQ} + \hat{SRQ}$ බව

පෙන්වන්න.



(i) $PS = SQ$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක)

$SQ = SR$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක)

$\therefore \underline{PS = SR}$

(ii) $\hat{SQP} = \hat{SPQ}$ ($PS = SQ$ නිසා) \rightarrow ①

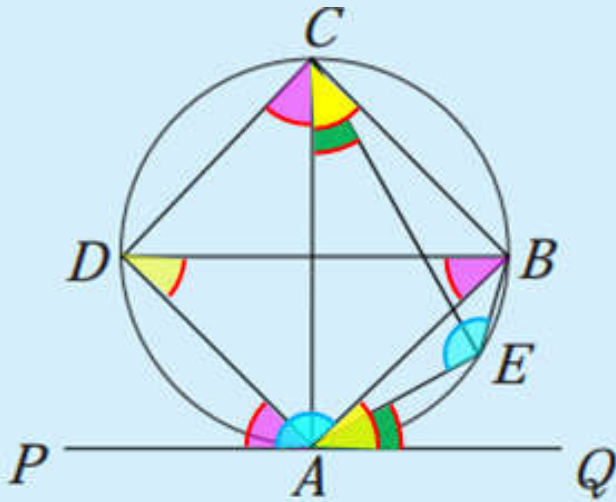
$\hat{SQR} = \hat{SRQ}$ ($SQ = SR$ නිසා) \rightarrow ②

① + ②; $\hat{SQP} + \hat{SQR} = \hat{SPQ} + \hat{SRQ}$

$\underline{\underline{\hat{PQR} = \hat{SPQ} + \hat{SRQ}}}$

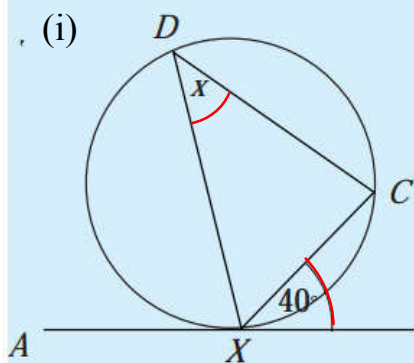
22.3 අභ්‍යාසය

1. රූපයේ දැක්වෙන ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ස්පර්ශකය PQ වේ. B, C, D සහ E ලක්ෂ්‍ය වෘත්තය මත පිහිටයි.

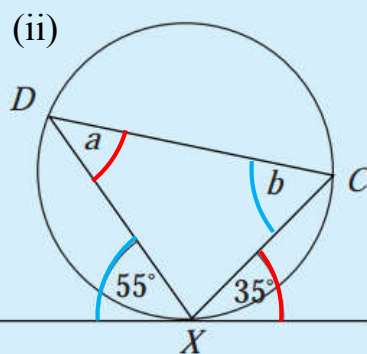


ස්පර්ශකයත් ජ්‍යායත් අතර කෝණය	අනුරූප ඒකාන්තර වෘත්ත බිණ්ඩයේ කෝණ
$\hat{B}AQ$ $\hat{P}AB$ $\hat{P}AD$ $\hat{E}AQ$ $\hat{D}AP$ $\hat{D}AP$	$\hat{A}DB \dots \hat{A}CB$ $\hat{A}EB$ $\hat{A}BD \dots \hat{A}CD$ $\hat{A}CE$ $\hat{D}BA$ $\hat{D}CA$

2. එක් එක් රූප සටහනේ AB ලෙස දැක්වෙන්නේ වෘත්තයට X ලක්ෂ්‍යයේ දී ඇඳි ලද ස්පර්ශකයකි. විච්ඡේද සංකේතවලින් දැක්වෙන අගයන් සොයන්න.

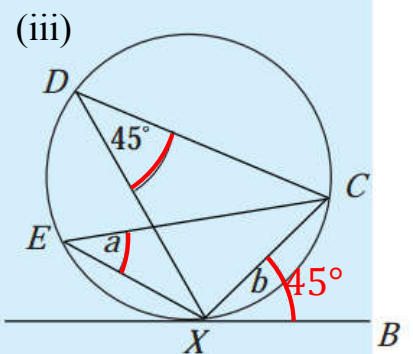


$$\underline{x = 40^\circ}$$

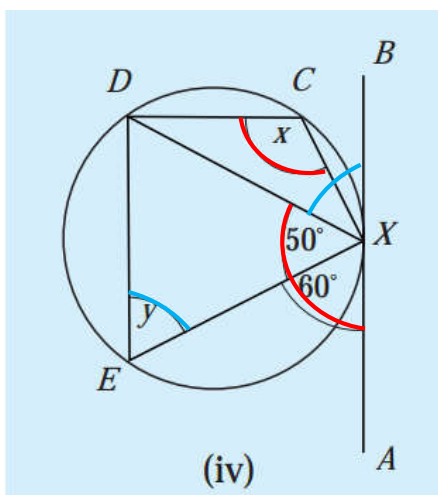


$$\underline{a = 35^\circ}$$

$$\underline{b = 55^\circ}$$



$$\underline{a = b = 45^\circ}$$



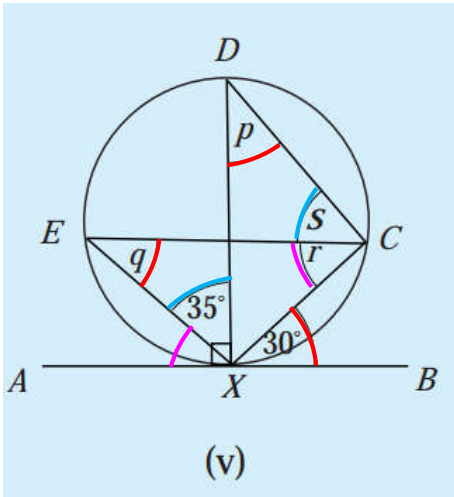
$$x = 50^\circ + 60^\circ \text{ (ඒකාන්තර වෘත්ත බිණ්ඩයේ කෝණ)}$$

$$\underline{x = 110^\circ}$$

$$y = \hat{D}XB \text{ (ඒකාන්තර වෘත්ත බිණ්ඩයේ කෝණ)}$$

$$y = 180^\circ - 110^\circ$$

$$\underline{y = 70^\circ}$$



$p = 30^\circ$ (ඒකාන්තර වෘත්ත බිණ්ඩයේ කෝණ)

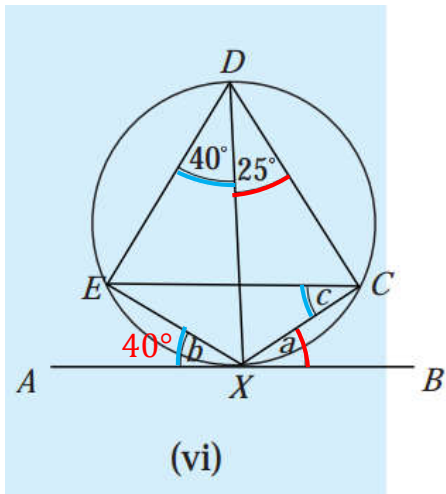
$q = 30^\circ$ (ඒකාන්තර වෘත්ත බිණ්ඩයේ කෝණ)

$s = 35^\circ$ (එකම බිත්තියේ කෝණ)

$$r = A\hat{X}E \text{ (ප්‍රකාශනවල වෘත්ත බන්ධනයේ කෝණ)}$$

$$r = 90^\circ - 35^\circ$$

$$\underline{\underline{r = 55^\circ}}$$



$a = 25^\circ$ (ඵකාන්තර වෘත්ත බණ්ඩයේ කෝණ)

$b = 40^\circ$ (ඵකාන්තර වෘත්ත බණ්ඩයේ කෝණ)

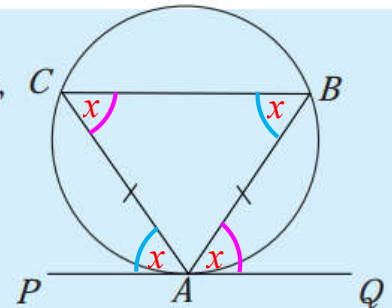
$c = 40^\circ$ (ඵකාන්තර වෘත්ත බණ්ඩයේ කෝණ)

3. PQ යනු A හි දි වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය වේ. $AC = AB$ නම්, C

(i) $\hat{C}A P = \hat{B}A Q$ බවත්

(ii) $PQ \parallel CB$ බවත්

පෙන්නන්න.



(i) $C\hat{A}P = A\hat{B}C$ (ඒකාන්තර වෘත්ත බිඳ්වියේ කෝණ) \longrightarrow ①

$$A\hat{B}C = A\hat{C}B \text{ (} AC = AB \text{ විසූ) } \longrightarrow \textcircled{2}$$

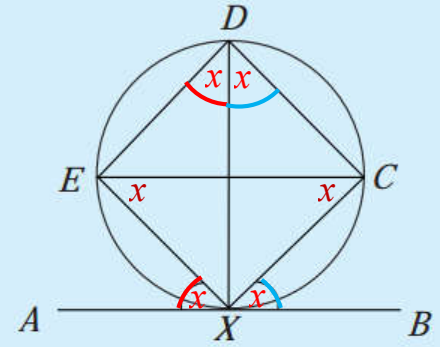
$$A\hat{C}B = B\hat{A}Q \text{ (පිකානර වෘත්ත බිඳ්වියේ කෝණ)} \longrightarrow \textcircled{3}$$

①, ② සහ ③ අනුව; $C\hat{A}P = B\hat{A}Q$

$$(ii) \ A\hat{B}C = B\hat{A}Q = x$$

$$\therefore PQ \parallel CB \text{ (} \angle \hat{A}BC, \angle \hat{A}QP \text{ එකාන්තර කෝණ සමාන නිසා)}$$

4. AB යනු X ලක්ෂ්‍යයේ දී වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශකය වේ. C සහ E ලක්ෂ්‍ය වෘත්තය මත පිහිටා ඇත්තේ $\hat{BXC} = \hat{AXE}$ වන පරිදි ය. D වෘත්තය මත පිහිටි තවත් ලක්ෂ්‍යයකි.



- (i) \hat{EDC} හි සමච්ඡේදකය XD බව
- (ii) $EX = CX$ බව
- (iii) $AB \parallel EC$ බව

පෙන්වන්න.

(i) $\hat{AXE} = \hat{EDX}$ (ඒකාන්තර වෘත්ත බන්ධයේ කෝණ) \rightarrow ①

$\hat{BXC} = \hat{XDC}$ (ඒකාන්තර වෘත්ත බන්ධයේ කෝණ) \rightarrow ②

$\hat{BXC} = \hat{AXE}$ (දත්තය) \rightarrow ③

$\therefore \hat{EDX} = \hat{XDC}$

$\therefore \hat{EDC}$ හි සමච්ඡේදකය XD වේ. //

(ii) $\hat{XEC} = \hat{XDC} = x$ (එකම බන්ධයේ කෝණ)

$\hat{XCE} = \hat{XDE} = x$ (එකම බන්ධයේ කෝණ)

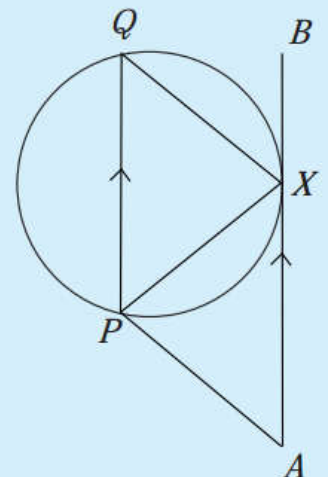
$\therefore \hat{XEC} = \hat{XCE}$

$\therefore \underline{EX = CX}$

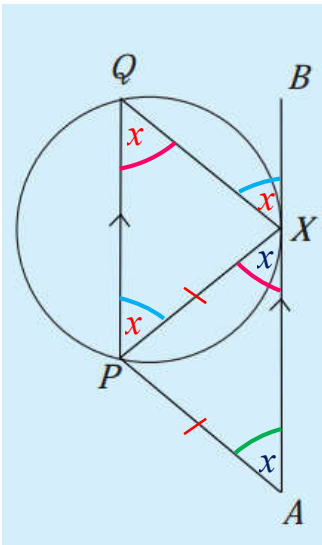
(iii) $\hat{ECX} = \hat{CXB} = x$ (ඉහත සාධන මගින්)

$\therefore \underline{AB \parallel EC}$ (\hat{ECX}, \hat{CXB} ඒකාන්තර කෝණ සමාන නිසා)

5. AB රේඛාව X හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. $PQ \parallel AB$ වන සේ PQ ඡායා ඇඳ ඇත.

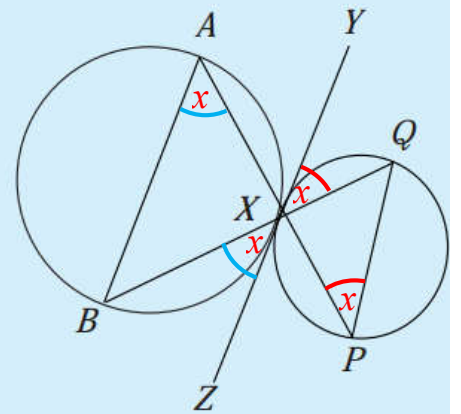


- (i) $\hat{BXQ} = \hat{AXP}$ බව සාධනය කරන්න.
- (ii) $PX = PA$ නම් $AXQP$ සමාන්තරාස්‍රයක් බව පෙන්වන්න.



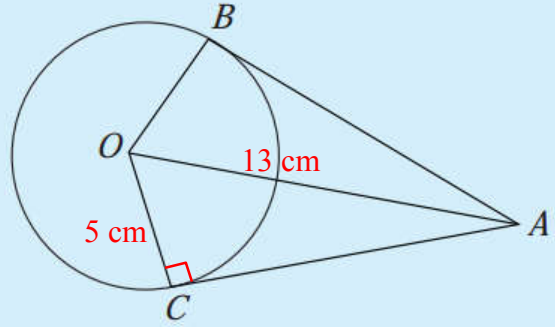
- (i) $\angle AXP = \angle PQX = x$ (ඒකාන්තර වෘත්ත බාහිර කෝණ)
 $\angle PQX = \angle BXP = x$ (ඒකාන්තර කෝණ)
 $\therefore \underline{\underline{\angle BXQ = \angle AXP}}$
- (ii) $\angle PAX = \angle AXB = x$ ($PX = PA$ නිසා)
 $\angle PAX = \angle QXB = x$ (ඉහත සාධන මගින්)
 $\therefore QX \parallel PA$ ($\angle PAX, \angle QXB$ අනුරූප කෝණ සමාන නිසා)
 $AXQP$ චතුරස්‍රයේ $QX \parallel PA$ ද $PQ \parallel AX$ ද නිසා
 $AXQP$ සමාන්තරාස්‍රයකි. //

6. වෘත්ත දෙකක් බාහිරව X ලක්ෂ්‍යයේ දී ස්පර්ශ වේ. YZ පොදු ස්පර්ශකය වේ. AB එක් වෘත්තයක ඡායායකි. දික් කරන ලද AX සහ BX පිළිවෙලින් අනෙක් වෘත්තය P හා Q හි දී හමුවේ.



- (i) $\angle BXZ = \angle XPQ = x$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)
 $\angle YXQ = \angle XPQ = x$ (ඒකාන්තර වෘත්ත බාහිර කෝණ)
 $\therefore \underline{\underline{\angle BXZ = \angle XPQ}}$
- (ii) $\angle BAX = \angle BXZ = x$ (ඒකාන්තර වෘත්ත බාහිර කෝණ)
 $\angle BAX = \angle XPQ = x$ (ඉහත සාධන මගින්)
එනම් $\angle BAP = \angle APQ = x$
 $\therefore \underline{\underline{AB \parallel PQ}}$ ($\angle BAP, \angle APQ$ ඒකාන්තර කෝණ සමාන නිසා)

1. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තයට A සිට අඳින ලද ස්පර්ශක B හා C හි දී වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. වෘත්තයේ අරය 5 cm හා $OA = 13 \text{ cm}$ නම් $OBAC$ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය සොයන්න.

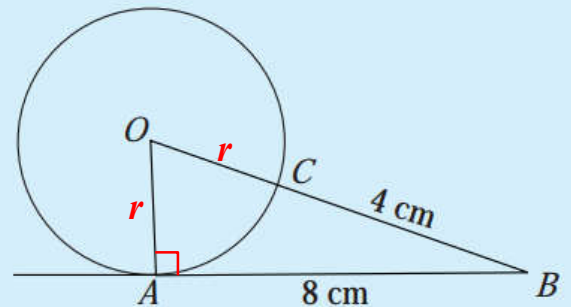


$$\begin{aligned} OCA \text{ ත්‍රිකෝණයේ වර්ගඵලය} &= \frac{1}{2} \times CA \times CO \\ &= \frac{1}{2} \times 12 \times 5 \\ &= 30 \text{ cm}^2 \\ OBAC \text{ චතුරස්‍රයේ වර්ගඵලය} &= 2 \times 30 \text{ cm}^2 \\ &= \underline{\underline{60 \text{ cm}^2}} \end{aligned}$$

OCA ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$\begin{aligned} OA^2 &= OC^2 + CA^2 \\ 13^2 &= 5^2 + CA^2 \\ CA^2 &= 13^2 - 5^2 \\ CA^2 &= 169 - 25 \\ CA^2 &= 144 \\ CA &= \sqrt{144} \\ CA &= 12 \text{ cm} \end{aligned}$$

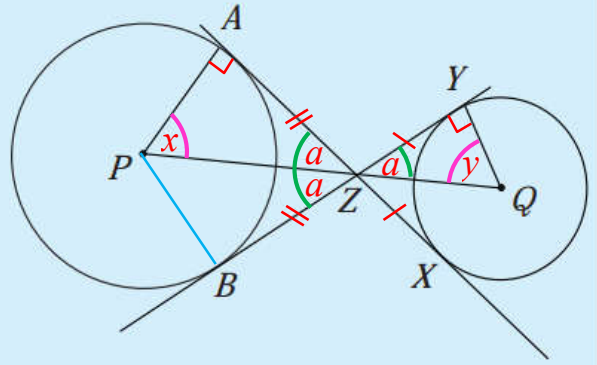
2. O කේන්ද්‍රය වූ වෘත්තය මත පිහිටි A ලක්ෂ්‍යයේ අඳින ලද ස්පර්ශකය AB වේ. OB , C හි දී වෘත්තය ඡේදනය කරයි. $CB = 4 \text{ cm}$ සහ $AB = 8 \text{ cm}$ වේ. වෘත්තයේ අරය ගණනය කරන්න.



OAB ත්‍රිකෝණයට පයිතගරස් ප්‍රමේයය යෙදීමෙන්

$$\begin{aligned} OB^2 &= OA^2 + AB^2 \\ (r + 4)^2 &= r^2 + 8^2 \\ r^2 + 8r + 16 &= r^2 + 64 \\ 8r &= 64 - 16 \\ 8r &= 48 \\ r &= 6 \\ \text{වෘත්තයේ අරය} &= \underline{\underline{6 \text{ cm}}} \end{aligned}$$

3. රූපයේ දැක්වෙන වෘත්ත දෙකේ කේන්ද්‍ර P හා Q වේ. විශාල වෘත්තය මත පිහිටි A හා B ලක්ෂ්‍යවල දී එම වෘත්තයට ඇඳි ස්පර්ශක පිළිවෙළින් X හා Y හිදී කුඩා වෘත්තය ස්පර්ශ කරයි. තවද මෙම ස්පර්ශක දෙක Z හිදී එකිනෙක ඡේදනය වේ.



(i) $AX = BY$ බව

(ii) $\hat{APZ} = \hat{YQZ}$ බව

පෙන්වන්න.

(i) $AZ = BZ$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක)

$ZX = ZY$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක)

$AZ + ZX = BZ + ZY$

$AX = BY$

(ii) $\hat{AZP} = \hat{BZP} = a$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යය සහ කේන්ද්‍රය යා කරන රේඛාව, ස්පර්ශක අතර කෝණය සමච්ඡේදනය කරයි.)

$\hat{BZP} = \hat{YZQ} = a$ (ප්‍රතිමුඛ කෝණ)

$\triangle APZ$ ට ; $x + a = 90^\circ \rightarrow ①$

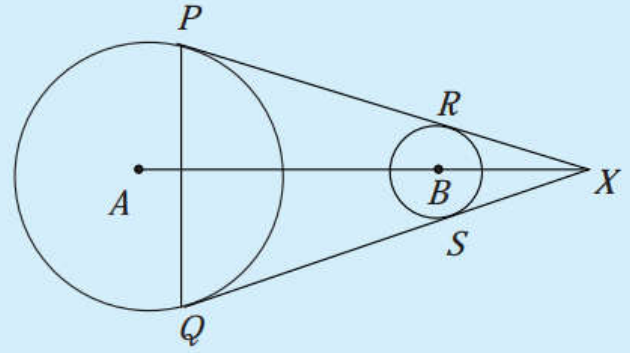
$\triangle YZQ$ ට ; $y + a = 90^\circ \rightarrow ②$

$x + a = y + a$

$x = y$

$\hat{APZ} = \hat{YQZ}$

4. රූපයේ දැක්වෙන පරිදි PX සහ QX ස්පර්ශක P, R, Q සහ S ලක්ෂ්‍යවල දී වෘත්ත ස්පර්ශ කරයි. වෘත්තවල කේන්ද්‍ර A සහ B වේ.



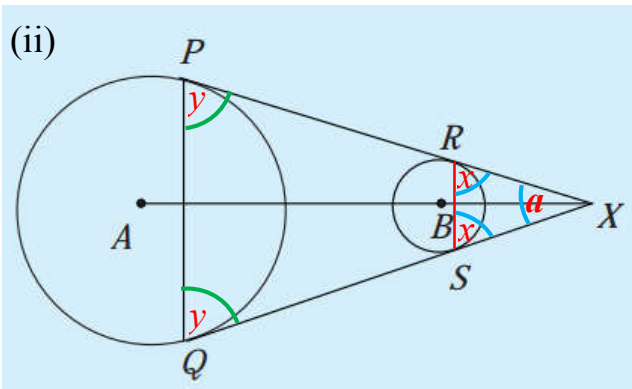
- (i) $PR = QS$ බව
(ii) $PQ \parallel RS$ බව
(iii) A, B සහ X එකම සරල රේඛාවක පිහිටන බව පෙන්වන්න.

(i) $PX = QX$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක) \rightarrow ①

$RX = SX$ (බාහිර ලක්ෂ්‍යයක සිට ඇඳි ස්පර්ශක) \rightarrow ②

$$PX - RX = QX - SX$$

$$\underline{PR = QS}$$



$RSX \Delta$ යේ $RX = SX$ නිසා

$$\angle XRS = \angle XSR = x$$

$PQX \Delta$ යේ $PX = QX$ නිසා

$$\angle XPQ = \angle XQP = y$$

$RSX \Delta$ යේ $2x + a = 180^\circ \rightarrow$ ①

$PQX \Delta$ යේ $2y + a = 180^\circ \rightarrow$ ②

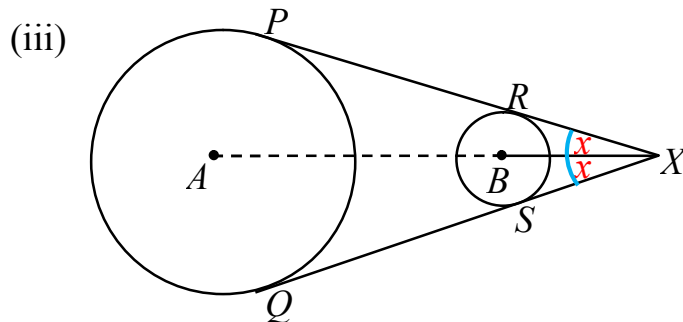
$$2x + a = 2y + a$$

$$2x = 2y$$

$$x = y$$

$$\angle SRX = \angle QPX$$

$\therefore \underline{PQ \parallel RS}$ ($\angle SRX, \angle QPX$ අනුරූප කෝණ සමාන නිසා)



RX සහ SX ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණයේ සමච්ඡේදකය XB වේ.

PX සහ QX ස්පර්ශක දෙක අතර කෝණයේ සමච්ඡේදකය ද XB වේ.

\therefore දික් කළ XB රේඛාව A හරහා ගමන් කරයි.

$\therefore A, B$ සහ X එකම සරල රේඛාවක පිහිටයි.