MSG: Hausaufgabe 4

Milan Andreew (milanand)

17. Juni 2020

Frage 1.

Weise nach: Für jede natürliche Zahl n ist $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ durch 9 teilbar.

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + \Big(n^3 + 9n^2 + 27n + 81\Big) \\ &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + \Big(9n^2 + 27n + 81\Big)\end{aligned}$$

Wenn $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$ durch 9 teilbar ist, **dann** ist $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$ auch durch 9 teilbar.

Frage 2.

Weise nach: Für jede natürliche Zahl n ist $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ durch 133 teilbar.

$$\begin{aligned}11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot 12^{2n} &= 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= 121 \cdot 11^n + 12 \cdot (133 + 11)^n \\ \iff 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 11^n &= 133 \cdot 11^n \\ &\iff 0(\mod 133)\end{aligned}$$

Frage 3.

(a) *Begründe die Schritte der folgenden Umformung:*

(b) *Beweise durch vollständige Induktion unter Verwendung der in a) hergeleiteten Ungleichung, dass für alle natürlichen Zahlen $n \geq 2$ gilt:* $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$