

## MSG: Hausaufgabe 4

Milan Andreew (milanand)

17. Juni 2020

### Frage 1.

---

*Weise nach: Für jede natürliche Zahl  $n$  ist  $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$  durch 9 teilbar.*

$$\begin{aligned}(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3 &= (n+1)^3 + (n+2)^3 + (n^3 + 9n^2 + 27n + 81) \\ &= n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 + (9n^2 + 27n + 81)\end{aligned}$$

**Wenn**  $n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3$  durch 9 teilbar ist, **dann** ist  $(n+1)^3 + (n+2)^3 + (n+3)^3$  auch durch 9 teilbar.

### Frage 2.

---

*Weise nach: Für jede natürliche Zahl  $n$  ist  $11^{n+2} + 12^{2n+1}$  durch 133 teilbar.*

$$\begin{aligned}11^{n+2} + 12^{2n+1} &= 11^2 \cdot 11^n + 12 \cdot 12^{2n} = 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 144^n \\ &= 121 \cdot 11^n + 12 \cdot (133 + 11)^n \\ &\iff 121 \cdot 11^n + 12 \cdot 11^n = 133 \cdot 11^n \\ &\iff 0 \pmod{133}\end{aligned}$$

### Frage 3.

---

(a) *Begründe die Schritte der folgenden Umformung:*

(b) *Beweise durch vollständige Induktion unter Verwendung der in a) hergeleiteten Ungleichung, dass für alle natürlichen Zahlen  $n \geq 2$  gilt:*  
$$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$$