Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, parciales e integrales: Método de descomposición de Adomian

Pedro Nava Soto

Bruno D. Garza Hernández

Alumnos de Matemáticas IV

Maestro: M.C. Guadalupe Evaristo Cedillo Garza

Junio 4, 2019

1 Introducción

El método de descomposición de Adomian fue propuesto por George Adomian, durante la década de los 80s. Propuso un método para resolver ecuaciones no lineales. Este método ha sido ampliamente aplicado y desarrollado para aproximar las soluciones a ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales, principalmente las ecuaciones diferenciales parciales no lineales de segundo orden.

Este método tiene el propósito de enfocar el problema que se quiere resolver de una manera directa sin la necesidad de aplicar métodos para linealizarlos, así como el método de perturbación o cualquier otro que pudiera modificar el comportamiento físico del modelo bajo consideración. Una parte importante de este método, son los polinomios de Adomian, los cuales se adaptan a la no linealidad particular para resolver ecuaciones de operadores no lineales.

En los últimos años, este método se ha ido modificando o mejorando permitiendo resolver ecuaciones diferenciales no lineales para una amplia clase de no linealidades, incluyendo el producto, polinomios, exponenciales, trigonométricos, hiperbólicos, compuestos, potencias negativas, radicales, e incluso no linealidades de potencia decimal.

El método de Adomian presenta muchas ventajas al momento de aplicarlo en problemas. Este no requiere discretizacion de las variables, de allí la solución no se ve afectada por errores al momento del redondeo. Además este método no necesita ser linealizado o perturbado, por lo tanto no necesita ninguna modificación del modelo real, siendo muy eficaz al momento de determinar una solución exacta o aproximada, tanto para problemas lineales, como no lineales.

2 Método de Adomian

Considerando una ecuación diferencial no lineal de valor inicial:

$$Lu + Ru + Nu = g$$

Donde Lu es el operador lineal que será invertido, el cual normalmente es la derivada de orden mayor en la ecuación diferencial, Ru representa el operador lineal restante y Nu el operador no lineal.

$$L = \frac{d^n}{dx^n}(\cdot)$$

Haciendo Lu de la siguiente manera

$$Lu = g - Ru - Nu$$

Debido a que el operador Lu es invertible, esto se pude realizar en ambos lados de la ecuación.

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu$$

Debido a que el operador Lu representa una derivada de grado n, el operador L^{-1} representa n integrales definidas desde x_0 hasta x. Ejemplo:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + 4\frac{du}{dt} + u^2 = g(t) \qquad u(0) = a, u'(0) = b$$

$$Lu = \frac{d^2}{dt^2} \quad Ru = 4\frac{d}{dt} \quad N = (u)^2$$

$$Lu + Ru + Nu = g$$

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu$$

$$L^{-1}Lu = \int_0^x \int_0^x \frac{d^2u}{dt^2} dxdx = \int_0^x \left[\frac{du}{dt}\right]_0^x dx = \int_0^x (u'(x) + b)\, dx$$

$$L^{-1}Lu = [u(x)]_0^x - bx|_0^x = u(x) - a - bx$$

Se despeja u(x) de la formula y se obtiene lo siguiente:

$$u(x) = a + bx + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu$$

Como

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 + u_1 + \cdots$$

Y de igual manera

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Donde A_n representan los polinomios de Adomian

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = a + bx + L^{-1}g - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

El termino u_0 se forma con la parte de la integral $a + bx + L^{-1}g$, entonces

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R\sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n$$

3 Polinomios de Adomian

Son los polinomios en los cuales se descompone la parte no lineal. A_n es dependiente de $u_0, u_1, \dots, u_n$ y se obtienen de acuerdo a la fórmula de definición.

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{\partial^n}{\partial\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{\infty}\lambda^i y_i\right)\right]\lambda = 0', \quad n = 0,1,2,\dots$$

Donde λ es un parámetro de agrupación de conveniencia

Ejemplo de los polinomios de Adomian cuando $N_u = u^3$

$$A_0 = u_0^3$$

$$A_1 = 3u_0^2u_1$$

$$A_2 = 3u_0^2u_2 + 3u_1^2u_0$$

$$A_3 = u_1^3 + 3u_0^2u_3 + 6u_0u_1u_2$$

$$A_4 = 3u_0^2u_4 + 3u_1^2u_2 + 3u_2^2u_0 + 6u_0u_1u_3$$

$$A_5 = 3u_0^2u_5 + 3u_1^2u_3 + 3u_2^2u_1 + 6u_0u_1u_4 + 6u_0u_2u_3$$

Otro ejemplo de los polinomios de Adomian cuando $N_u = u^2$

$$A_0 = u_0^2$$

$$A_1 = 2u_0u_1$$

$$A_2 = u_1^2 + 2u_0u_2$$

$$A_3 = 2u_1u_2 + 2u_0u_3$$

$$A_4 = u_2^2 + 2u_1u_3 + 2u_0u_4$$

$$A_5 = 2u_2u_3 + 2u_1u_4 + 2u_0u_5$$

4 Ejemplo

$$U_t + UU_x = U_{xx} \qquad U(0,t) = -\frac{2}{3t} \qquad U_x(o,t) = \frac{1}{t} + \frac{2}{9t^2}$$

Debido a que nuestras condiciones nos indican el valor de la función y la primera derivada respecto a x, cuando x=0, requerimos de utilizar como operador L, a una función que contenga derivadas parciales respecto a x, así cuando definamos el inverso del operador, asignando el valor de 0 al límite inferior de la integrales realizadas, podremos hacer uso de las condiciones iniciales.

De esta forma definimos, al operador L, el operador con derivadas parciales respecto a x de mayor orden, a R como el otro operador lineal que es de menor orden, y a R al operador no lineal.

$$R = (.)\frac{\partial}{\partial_X}(.) \qquad L = \frac{\partial}{\partial_X}\frac{\partial}{\partial_X}(.) \qquad N = \frac{\partial}{\partial_t}(.)$$

Al usar el método de Adomian se debe igualmente definir el inverso del operador L, en nuestro caso, será de tal forma que aproveche los comentarios previamente mencionados de su elección como operador L, y utilice las condiciones iniciales.

Por lo que definimos al inverso de L como:

$$L^{-1} = \iint_0^X (.)dxdx$$

Una vez hecho esto tomamos, despejamos el valor el valor de Lu y aplicamos el inverso a ambos lados de la igualdad:

$$L^{-1}L_U = L^{-1}(R_U + N_U)$$

Desarrollamos el lado izquierdo de la igualdad:

$$L^{-1}LU = \iint_0^X U_{XX}dxdx = \int_0^x (U_X(x,t)dx - U_X(0,t))dx = \int_0^x (U_X(x,t)dx - \int_0^x (U_X(0,t)dx$$

$$= U(x,t) - U(0,t) - \int_0^x (U_X(0,t)dx = U(x,t) - (U(0,t) + \int_0^x (U_X(0,t)dx)$$

Como se puede apreciar, nos queda una expresión de la forma:

$$= U(x,t) - U_0$$

Por lo que definimos a $U_0 = U(0,t) + \int_0^x (U_X(0,t)dx$

Utilizando la formula recursiva:

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n$$

Calculamos los demás términos de nuestra ecuación diferencial.

Para nuestro operador N, utilizamos los siguientes coeficientes de Adomian, definidos de la siguiente manera:

$$A_n = \sum_{j=0}^{n} U_J \frac{\partial}{\partial x}(U_{n-j)}$$

Por lo que una, vez, tenemos esto calculemos primeramente U_0:

$$U_0 = \frac{-2}{3t} + \int_0^x \left(\frac{1}{t} + \frac{2}{9t^2}\right)dx$$

$$U_0 = x\left(\frac{1}{t} + \frac{2}{9t^2}\right) - \frac{2}{3t}$$

Aplicando la formula recursiva, calculamos U_1, no obstante primero, calculamos A0.

$$A0 = U_0 \frac{\partial}{\partial x}(U_{0)}$$

$$A0 = (x\left(\frac{1}{t} + \frac{2}{9t^2}\right) - \frac{2}{3t})(\frac{\partial}{\partial x}\left(x\left(\frac{1}{t} + \frac{2}{9t^2}\right) - \frac{2}{3t}\right))$$

$$A0 = x\left(\frac{1}{t} + \frac{2}{9t^2}\right) - \frac{2}{3t}$$

$$U_1 = \int_0^x \int_0^x \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{3}{2}t + \frac{1}{t}x + \frac{2}{9t^2}x\right)dx\,dx + \int_0^x \int_0^x \left(-\frac{3}{2}t + \frac{1}{t}x + \frac{2}{9t^2}x\right)(\frac{2}{9t^2} + \frac{1}{t})dx\,dx$$

$$U_1 = \int_0^x \int_0^x (-\frac{x}{t^2} - \frac{4x}{9t^3} - \frac{2}{3})dx\,dx + \int_0^x \int_0^x \left(\frac{x}{t^2} + \frac{4x}{9t^3} + \frac{4x}{81t^4} - \frac{4}{27t} - \frac{2}{3}\right)dx\,dx$$

$$U_1 = \int_0^x \left(-\frac{2x}{3} - \frac{x^2}{2t^2} - \frac{2x^2}{9t^3}\right)dx + \int_0^x \frac{(x(9t+2)(-12t^3 + 9xt + 2x))}{162t^4}dx$$

$$U_1 = \int_0^x \left(-\frac{2x}{3} - \frac{x^2}{2t^2} - \frac{2x^2}{9t^3}\right) dx + \int_0^x \frac{(x(9t+2)(-12t^3+9xt+2x))}{162t^4} dx$$

$$U_1 = \frac{-\left(\frac{t}{2}+\frac{2}{9}\right)x^3}{3t^3} - \frac{x^2}{3} + \frac{x^2(9t+2)(-18t^3+9xt+2x)}{486t^4}$$

$$U_1 = \frac{-2x^2(81t^4+9t^3-x)}{243t^4}$$

Una vez calculada U1, calculamos A1.

$$A1 = U_0 \frac{\partial}{\partial x}(U_{1)} + U_1 \frac{\partial}{\partial x}(U_{0)}$$

$$A1 = (x\left(\frac{1}{t}+\frac{2}{9t^2}\right) - \frac{2}{3t})\frac{\partial}{\partial x}(\frac{-2x^2(81t^4+9t^3-x)}{243t^4}) + (\frac{-2x^2(81t^4+9t^3-x)}{243t^4})\frac{\partial}{\partial x}(x\left(\frac{1}{t}+\frac{2}{9t^2}\right))$$

$$A1 = \left(\frac{\frac{2x^3}{27}+\frac{x^2t(9x-18)}{54}}{t^3} - \frac{x(9t+2)(2x-12t+9tx}{162t^4}\right)\left(\frac{1}{t}+\frac{2}{9t^2}\right) - (x\left(\frac{1}{t}+\frac{2}{9t^2}\right) - \frac{2}{3t})(\frac{x(9t+2)^2}{162t^4} - \frac{\frac{tx^2}{6}+\frac{2x^2}{9}+\frac{xt(9x-18)}{27}}{t^3} + \frac{(9t+2)(2x-12t+9xt)}{162t^4})$$

$$U_2 = \int_0^x \int_0^x \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{-2x^2(81t^4+9t^3-x)}{243t^4}\right) dx\, dx + \int_0^x \int_0^x (\left(\frac{\frac{2x^3}{27}+\frac{x^2t(9x-18)}{54}}{t^3} - \frac{x(9t+2)(2x-12t+9tx}{162t^4}\right)\left(\frac{1}{t}+\frac{2}{9t^2}\right) - (x\left(\frac{1}{t}+\frac{2}{9t^2}\right) - \frac{2}{3t})(\frac{x(9t+2)^2}{162t^4} - \frac{\frac{tx^2}{6}+\frac{2x^2}{9}+\frac{xt(9x-18)}{27}}{t^3} + \frac{(9t+2)(2x-12t+9xt)}{162t^4}))dx\, dx$$

$$U_2 = \left(\frac{\#3\ \#1}{3} + \frac{\left(\frac{\#4}{162t^4}+\frac{1}{3t^2}\right)}{3} + \frac{2\ \#2}{9t^4}\right) - x^4\left(\frac{\#2\ \#1}{4t^3} + \frac{\left(\frac{t}{6}+\frac{2}{27}\right)\ \#1}{4t^3}\right) + \frac{\frac{tx^3(54x^2-270x+360)}{4860} - \frac{2x^4}{243} + \frac{t^2x^3(81x^2-675x+1080)}{4860}}{t^5} - x^2\left(\frac{\#3}{3t} + \frac{(9t+2)\#1\ 2}{27t^3}\right) + \frac{x(9t+2)4}{81t^4}$$

Donde:

$\#1 - \frac{1}{t} + \frac{2}{9t^2}$, $\#2 - \frac{t}{2} + \frac{2}{9}$, $\#3 - \frac{\#4}{81t^4} + \frac{2}{3t^2}$, $\#4 - (9t+2)^2$

$$U = -\frac{2}{3}t + \frac{1}{t}x + \frac{2}{9t^2}x - \frac{2x^2(81t^4 + 9t^3 - x)}{243t^4} + \left(\frac{\#3\ \#1}{3} + \frac{\left(\frac{\#4}{162t^4} + \frac{1}{3t^2}\right)}{3} + \frac{2\ \#2}{9t^4}\right) - x^4\left(\frac{\#2\ \#1}{4t^3} + \frac{\left(\frac{t}{6} + \frac{2}{27}\right)\ \#1}{4t^3}\right)$$
$$+ \frac{\frac{tx^3(54x^2 - 270x + 360)}{4860} - \frac{2x^4}{243} + \frac{t^2x^3(81x^2 - 675x + 1080)}{4860}}{t^5} - x^2\left(\frac{\#3}{3t} + \frac{(9t+2)\#1\ 2}{27t^3}\right)$$
$$+ \frac{x(9t+2)4}{81t^4}$$

5 Referencias

- Resolución de modelos Físico-Matemáticos no lineales por el método de descomposición de Adomian(2019). Extraído el 2 de junio del 2019 de: http://repositorio.utp.edu.co/dspace/bitstream/handle/11059/7658/51545A141.pdf?sequence=1&isAllowed=y

- Método de descomposición de Adormían (2019). Extraído el 2 de junio del 2019 de: https://www.researchgate.net/profile/Inna_Shingareva/publication/273773008_Metodo_de_Descomposicion

- Duan, J.S Baleanu, D., & Rach, R. (Octubre 2012). A review of the Adomian decomposition method and its applications to fractional differential equations. Extraído el 2 de junio del 2019 de: https://www.researchgate.net/publication/256841837_A_review_of_the_Adomian_decomposition_method_and_its_applications_to_fractional_differential_equations