Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias y parciales: Método de descomposición de Adomian

Rogelio A. Jurado Rodríguez

Andoni Bernal Gómez

Alumnos Matemáticas 4

Maestro: Guadalupe Evaristo Cedillo Garza

Junio 4, 2019

1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales parciales no lineales han ido tomando relevancia en distintos campos de estudio como lo son las matemáticas, la física, la química, la ingeniería, entre otros. Encontrar la solución, o una aproximación a está, es muy importante ya que nos permite modelar el comportamiento de diversos mecanismos o fenómenos.

Debido al interés por resolver estas ecuaciones, se han creado distintos métodos que permiten llegar a la solución o en su defecto a una aproximación; En los últimos años varios autores han prestado su atención a la solución de ecuaciones diferenciales parciales no lineales algunos de los métodos más sobresalientes son el método de perturbación de homotopía, el método de Runge-Kutta (Método numérico) y el método de descomposición de Adomian (MDA).

El MDA es conocido por dar una solución práctica a las ecuaciones lineales o no lineales con operadores, incluyendo las EDO (ecuaciones diferenciales ordinarias), y las EDP (ecuaciones diferenciales en derivadas parciales) y ecuaciones integro-diferenciales. Todo esto sin suposiciones restrictivas no físicas como las requeridas en la linealización. Esto es una de las características más importante tanto del método de Adomian como del de homotopía, la parte no lineal no la linealiza, el MDA utiliza los llamados polinomios de Adomian para manejar la no linealidad. El MDA descompone la solución en series infinitas que convergen rápidamente a la solución exacta.

El método desarrollado entre 1970 y 1990 por George Adomian, quien fuera presidente del Centro de Matemáticas Aplicadas de la Universidad Georgia, ha sido modificado/mejorado a lo largo de los últimos años por una serie de colaboradores quienes en conjunto han logrado resolver ecuaciones diferenciales con no linealidades como por ejemplo productos, polinomios, exponenciales, trigonométricos, hiperbólicos, potencias negativas, radicales e incluso exponentes no enteros lo que demuestra la capacidad del método.

2 Método de Adomian

Empezaremos definiendo los principios básicos del método de descomposición de Adomian

Considerando la ecuación diferencial no lineal de valor inicial:

$$Lu + Ru + Nu = g$$

Donde L es el operador lineal que será invertido, el cual normalmente es la derivada de orden mayor en la ecuación diferencial, R representa el operador lineal restante y N el operador no lineal. Cabe destacar que la elección de un operador lineal es diseñada para ceder un operador fácilmente invertible con integrales resultantes triviales.

$$L = \frac{d^n}{dx^n}(\cdot)$$

Haciendo Lu el sujeto de la fórmula

$$Lu = g - Ru - Nu$$

Debido a que el operador L es invertible, podemos aplicar esto a ambos lados de la ecuación y obtenemos

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu$$

Dado que el operador L representa una derivada de grado n, el operador L^{-1} representa n integrales definidas desde x_0 hasta x. Por ejemplo, si tenemos la ecuación

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{du}{dt} + u^2 = g(t) \qquad u(0) = a, u'(0) = b$$

$$L = \frac{d^2}{dt^2} \quad R = \frac{d}{dt} \quad N = (\cdot)^2$$

$$Lu + Ru + Nu = g$$

$$L^{-1} = \int_0^x \int_0^x (\cdot)\, dxdx$$

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu$$

$$L^{-1}Lu = \int_0^x \int_0^x \frac{d^2u}{dt^2} dxdx = \int_0^x \left[\frac{du}{dt}\right]_0^x dx = \int_0^x (u'(x) + b)\, dx = [u(x)]_0^x - bx\Big|_0^x = u(x) - a - bx$$

$$u(x) = a + bx + L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu$$

Como se mencionó anteriormente, el método de Adomian descompone la solución de la ecuación diferencial en series infinitas

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Y de igual manera descompone el termino no lineal en series

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

Donde A_n son los polinomios de Adomian

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = a + bx + L^{-1}g - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

El termino u_0 se forma con la parte de la integral $a + bx + L^{-1}g$, entonces

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1}R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n$$

La cantidad de sumando necesarios dependerá del comportamiento de los coeficientes de la serie resultante. Existe la posibilidad de que sea una serie conocida o podemos utilizar métodos establecidos para acelerar la convergencia de la serie.

3 Polinomios de Adomian

Anteriormente se introdujo el termino “polinomios de Adomian”, estos son los polinomios en los que descomponemos la parte no lineal. A_n es dependiente de $u_0, u_1, \ldots, u_n$ y se obtienen de acuerdo a la fórmula de definición.

$$A_n = \frac{1}{n!} \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left[N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i \right) \right] \lambda = 0, \quad n = 0,1,2, \ldots$$

Donde λ es un parámetro de agrupación de conveniencia

A continuación, se encuentran las formulas para obtener los primeros polinomios de Adomian

$$A_0 = f(u_0)$$

$$A_1 = f'(u_0)u_1$$

$$A_2 = f'(u_0)u_2 + f''(u_0)\frac{{u_1}^2}{2!}$$

$$A_3 = f'(u_0)u_3 + f''(u_0)u_1u_2 + f^{(3)}(u_0)\frac{{u_1}^3}{3!}$$

Como se observa, son formulas que se van alargando que dependiendo de los términos a calcular, puede hacerse un procedimiento largo.

Se han establecido nuevos algoritmos y diseñado esquemas alternativos de recursión mediante los cuales es mas sencillo representar a los términos de Adomian, algunos de ellos son:

Para $Nu = u^2$ $\quad A_0 = {u_0}^2$ $\quad A_n = \sum_{i=0}^{n} u_i u_{n-i}$

Para $Nu = u\frac{du}{dx}$ $\quad A_0 = u_0\frac{\partial u_0}{\partial x}$ $\quad A_n = \sum_{i=0}^{n} u_i \frac{\partial u_{n-i}}{\partial x}$

4 Problema

Considere la siguiente EDP no lineal de valores iniciales.

$$u_{t+}uu_x = 0, \quad u(x,0) = -2x$$

$$L = \frac{\partial u}{\partial t}\ , \quad Nu = u\frac{\partial u}{\partial x}\quad , \qquad L^{-1} = \int_o^t (.)dt$$

$$Lu + Nu = 0$$

$$Lu = -Nu$$

$$L^{-1}Lu = \ -L^{-1}Nu$$

$$\int_o^t \frac{du}{dt} = [u]_0^t = u(x,t) - u(x,0) = u(x,t) + 2x$$

$$u(x,t) + 2x = \ -L^{-1}Nu$$

$$u(x,t) = -2x - L^{-1}Nu$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = -2x - L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$\boldsymbol{u_0 = -2x}$$

$$\boldsymbol{u_{n+1} = -\,L^{-1}\sum_{n=0}^{\infty} A_n}$$

$$u_{n+1} = -\int_o^t \sum_{n=0}^{\infty} A_n\, dt$$

Polinomios de Adomian para este caso:

$$\boldsymbol{A_n = \sum_{j=0}^{n} u_j \frac{\partial u_{n-j}}{\partial x}}$$

$$A_0 = u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$A_1 = u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$A_2 = u_0 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$A_3 = u_0 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_3 \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$Cuando\ n = 0$$

$$u_1 = -\int_o^t A_0 dt$$

$$= -\int_o^t u_0 \frac{\partial u_0}{\partial x} dt$$

$$= -\int_o^t (-2x) \frac{\partial(-2x)}{\partial x} dt$$

$$= (2x) \int_o^t (-2) dt$$

$$= (2x) \int_o^t (-2) dt$$

$$u_1 = (-4x) \int_o^t dt = \boldsymbol{-4xt}$$

$$Cuando\ n = 1$$

$$u_2 = -\int_o^t A_1 dt$$

$$= -\int_o^t \left(u_0 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x} \right) dt$$

$$= -\int_o^t \left(-2x \frac{\partial(-4xt)}{\partial x} - (4xt) \frac{\partial(-2x)}{\partial x} \right) dt$$

$$= -\int_o^t ((-2x)(-4t) - (4xt)(-2)) dt$$

$$= -8x\int_o^t tdt - 8x\int_o^t tdt$$

$$=-8x\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t - 8x\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^t$$

$$u_2=-8x\frac{t^2}{2} - 8x\frac{t^2}{2} = \mathbf{-8xt^2}$$

$$Cuando\ n = 2$$

$$u_3 = -\int_o^t A_2 dt$$

$$u_3 = -\int_o^t \left(u_0\frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1\frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2\frac{\partial u_0}{\partial x}\right)dt$$

$$= -\int_o^t \left(-2x\frac{\partial(-8xt^2)}{\partial x} - 4xt\frac{\partial(-4xt)}{\partial x} - 8xt^2\frac{\partial(-2x)}{\partial x}\right)dt$$

$$= -\int_o^t \big((-2x)(-8t^2) - (4xt)(-4t) - (8xt^2)(-2)\big)dt$$

$$= -16x\int_o^t t^2dt - 16x\int_o^t t^2dt - 16x\int_o^t t^2dt$$

$$= -16x\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^t - 16x\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^t - 16x\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^t$$

$$= -16x\frac{t^3}{3} - 16x\frac{t^3}{3} - 16x\frac{t^3}{3}$$

$$u_3 = -16xt^3$$

$$\boldsymbol{u = u_0 + u_1 + u_2 + u_3}$$

$$\boldsymbol{u = -2x - 4xt - 8xt^2 - 16xt^3 = -2x\big(1 + 2 + 4t^2 + 8t^3\big) = -2x\sum_{n=0}^{\infty} 2^n t^n}$$

5 Ecuaciones diferenciales de orden no entero

El método de descomposición de Adomian puede ser usado para resolver casos mas generales, incluyendo ecuaciones diferenciales de orden no entero como:

$$D_t^{\mu}u(t) + D_t^{\beta}u(t) + Nu(t) = g(t),\ \ u(0) = C_0,\ \ u'(0) = C_1$$

Donde μ y β son números reales que satisfacen $1< \mu \leq 2$ y $0 < \beta \leq 1$, $Nu(t)$ sigue representando la parte no lineal. Aplicando el operador J_t^{μ} a ambos lados de la ecuación

$$u(t) = C_0 + C_1 t + J_t^{\mu} g(t) + \frac{C_0 t^{\mu-\beta}}{\Gamma(\mu-\beta+1)} - J_t^{\mu-\beta} u(t) - J_t^{\mu} Nu(t)$$

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$u_0 = C_0$$

$$u_1 = C_1 t + J_t^{\mu} g(t) + \frac{C_0 t^{\mu-\beta}}{\Gamma(\mu-\beta+1)} - J_t^{\mu-\beta} u(t) - J_t^{\mu} A_0$$

$$u_{n+1} = -J_t^{\mu-\beta} u_n - J_t^{\mu} A_n, n \geq 1$$

6 Bibliografía

Duan, J.-S., Baleanu, D., & Rach, R. (Octubre de 2012). *A review of the Adomian decomposition method and its applications to fractional differential equations.* Obtenido de ResearchGate: https://www.researchgate.net/publication/256841837_A_review_of_the_Adomian_decomposition_method_and_its_applications_to_fractional_differential_equations

Hilal, E., & Elzaki, T. (26 de Marzo de 2014). *Solution of Nonlinear Partial Differential Equations by New Laplace Variational Iteration Method.* Obtenido de Hindawi: http://downloads.hindawi.com/journals/jfs/2014/790714.pdf

Polyanin, A., & Zaitsev, V. (enero de 2012). *Handbook of nonlinear partial differential equations.* Obtenido de ResearchGate: https://www.researchgate.net/publication/284640259_Handbook_of_Nonlinear_Partial_Differential_Equations_Second_Edition