Solución de una ecuación diferencial parcial no lineal: Método de descomposición de Adomian

Laura Carina Del Olmo Turrubiates

Carlos Daniel Montes Guerrero

Alumnos de Matemáticas IV

Catedrático: M.C. Guadalupe Evaristo Cedillo Garza

Junio 3, 2019

1. Introducción

La mayoría de los problemas y fenómenos físicos, como la transferencia de calor, ocurren de forma no lineal y están representados por ecuaciones diferenciales de orden superior y frecuentemente, en términos de derivadas parciales. El método de descomposición de Adomian (MDA) es un método poderoso y sumamente efectivo empleado para resolver una amplia variedad de ecuaciones, tanto lineales como no lineales, deterministas o estocásticas (por ejemplo, ecuaciones algebraicas, diferenciales ordinarias, diferenciales parciales, algebraicas diferenciales, integrales, integro-diferenciales).

Debido al amplio campo de aplicación de las ecuaciones diferenciales parciales en diversos fenómenos como: la propagación del sonido, electroestática, electrodinámica, dinámica de fluidos, elasticidad, electricidad y magnetismo, es de suma importancia el conocimiento y dominio del MDA. Por ello, se demostrará y explicará a detalle el procedimiento de aplicación del método en la resolución de ecuaciones diferenciales, en concreto, en ecuaciones diferenciales parciales no lineales.

2. Dato histórico

El MDA, fue propuesto por primera vez por el matemático estadounidense George Adomian en su libro *"Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method"*, publicado en 1993. Este método enfoca el problema de una manera directa siguiendo un procedimiento simple sin necesidad de aplicar criterios de linealización, perturbación o cualquier otro método restrictivo que pudiera modificar el comportamiento físico del modelo bajo consideración, siendo esta la principal ventaja de su aplicación, sobre todo en la resolución numérica de ecuaciones diferenciales de orden superior.

Para ecuaciones diferenciales parciales no lineales, la idea del método de descomposición de Adomian consiste en descomponer la función desconocida $u_{(a,b)}$, solución de la ecuación en cuestión, en una serie infinita de la forma:

$$u_{(a,b)} = \sum_{n=0}^{\infty} u_{n\,(a,b)}$$

donde los componentes $u_{n\,(a,b)}$ son determinados recursivamente. El término no lineal $N(u)$ se representa en forma de una serie infinita de expresiones algebraicas denominados polinomios de Adomian (A_n):

$$N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

3. Simbología

Considerando la ecuación general como la siguiente:

$$Lu + Nu + Ru = g$$

Donde:

u = función desconocida

L = operador diferencial lineal de mayor orden; ej: $L_t(u) = \frac{\partial(\mathrm{u})}{\partial \mathrm{t}}$

L^{-1} = operador integral (inverso a L); ej: $L_t^{-1}(u) = \int_0^t (u)dt$

N = operador no lineal, el cual se representa como: $N(u) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$

A_n = polinomio de Adomian

R = parte lineal de orden menor al operador L

g = función dada, cuya única condición es que sea continua

4. Preliminares

4.1 Relación de recurrencia

En matemáticas, podemos denominar a la relación de recurrencia de una ecuación como una función definida por una secuencia recursiva, es decir, cada término que existe en la expresión es definido por términos anteriores de cada variable.

Resolver una ecuación recurrente es encontrar una función de *n* explícita *f(n)* tal que *an* = *f(n)* para todo valor de *n* mayor o igual a cero.

Para términos de las expresiones empleadas en el método de descomposición de Adomian, dicha recurrencia será expresada en la obtención de los términos *u* de nuestra ecuación. En la siguiente expresión se muestra un ejemplo de la aplicación de dicha relación.

Si

$$u_{n+1} = -\int_0^t A_n \, dt$$

Entonces

$$u_1 = -\int_0^t A_0 \, dt$$

4.2 Polinomios de Adomian

Los polinomios de Adomian son un conjunto de expresiones algebraicas que representan a los términos no lineales de nuestra ecuación diferencial.

Dichos polinomios tienen como característica principal que son recursivos y para calcularlos existen diversos métodos.

Ejemplo 1.

La expresión matemática expresada a continuación representa la fórmula general para la determinación de los polinomios de Adomian sin importar la forma en la que se nos presente el término no lineal (cuadrática, producto de dos funciones, cúbica, trascendental, etc.)

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{n}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} \quad ; n = 0,1,2,3 \ldots$$

Tomando como ejemplo un operador de la forma $Nu=u^2$ obtendremos que:

Para A_0,

$$A_0 = \frac{1}{0!}\frac{d^0}{d\lambda^0}\left[N\left(\sum_{i=0}^{0}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$A_0 = Nu_0$$

Y para A_2,

$$A_2 = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\left[N\left(\sum_{i=0}^{2}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\lambda^2}[(\lambda^0 u_o + \lambda^1 u_1 + \lambda^2 u_2 + \cdots)^2]_{\lambda=0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\frac{d^2}{d\lambda^2}[{u_0}^2 + 2\lambda u_0 u_1 + 2\lambda^2 u_0 u_2 + 2\lambda^3 u_1 u_2 + \lambda^2 {u_1}^2 + \lambda^4 {u_2}^2 + \cdots]_{\lambda=0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[4u_0 u_2 + 12\lambda u_1 u_2 + 2{u_1}^2 + 12\lambda^2 {u_2}^2 + \cdots]_{\lambda=0}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}[4u_0 u_1 + 2{u_1}^2]$$

$$A_2 = 2u_0 u_1 + {u_1}^2$$

Como se puede observar, aún cuando es el método o fórmula original para la obtención de los polinomios de Adomian, resulta un proceso muy largo y complejo el desarrollo de los términos A_n para nuestra ecuación. Debido a ello, se han generado una gran cantidad de métodos alternativos para el desarrollo de dichos polinomios (sin embargo, todos ellos se encuentran limitados a un cierto rango de formas que pueda poseer el término NO lineal de la ecuación).

Ejemplo 2. Cuando el operador NO lineal eleva a la función al cuadrado, entonces:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)^a$$

Donde *a* representa el orden de la potencia que opera en el término no lineal. Al desarrollar el polinomio, los términos de los A_n estarán dados por todos aquellos cuya suma sea igual a *n*.

$$Nu = u^2$$

$$a = 2$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)^2$$

Desarrollando:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right)^2 = u_0{}^2 + 2u_0u_1 + u_1{}^2 + 2u_ou_2 + 2u_0u_3 + 2u_1u_2 + u_2{}^2 + \cdots$$

Donde:

$$A_n = suma\ de\ términos\ cuya\ suma\ de\ subíndices\ sea\ igual\ a\ n$$

$$A_0 = u_0{}^2 - - - (Subínidices\ 0 + 0 = 0)$$

$$A_1 = 2u_0u_1 - - - (Subíndices\ 0 + 1 = 1)$$

$$A_2 = u_1{}^2 + 2u_ou_2 - - - (Subínidices\ 1 + 1 = 2\ y\ 0 + 2 = 2)$$

Ejemplo 3. También podemos desarrollar los polinomios de Adomian utilizando la fórmula del operador en términos de valores de *u*.

Si

$$Nu = u\frac{\partial u}{\partial x}$$

Entonces

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} u_i \frac{\partial u_{n-i}}{\partial x}$$

Donde

$$A_1 = \sum_{i=0}^{1} u_i \frac{\partial u_{n-i}}{\partial x} = u_o \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

En el desarrollo del problema utilizado para analizar el método, debido a que el operador representa el producto de una función y su correspondiente derivada parcial, lo cual es un caso particular de una función elevada al cuadrado, es más practica la utilización del método del ejemplo 3.

5. Resolución de un problema

Como ejemplo de las diversas aplicaciones que puede tener este método en la resolución de problemas de ecuaciones diferenciales, se muestra el procedimiento para la resolución de la siguiente ecuación diferencial parcial no lineal.

$$u_t + uu_x = 0 \qquad ; \qquad u_{(x,0)} = \frac{1}{1+x}$$

Sean:

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t} \quad y \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}$$

Entonces, podemos definir a la ecuación como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

Por lo tanto, empleamos los operadores L y N para representar la ecuación:

$$L_t = \frac{\partial}{\partial t} \quad ; \quad N = (.)\frac{\partial (.)}{\partial x}$$

$$L_t u + Nu = 0$$

Por ser un problema de condiciones iniciales, debemos tomar en cuenta la variable en la cual se encuentran dadas dichas condiciones. Para este caso, la condición inicial del problema se encuentra dada en *t*, por lo que emplearemos el operador correspondiente multiplicando por el lado izquierdo de la ecuación:

$${L_t}^{-1}(L_t u + Nu) = 0$$

$${L_t}^{-1}L_t u + {L_t}^{-1}Nu = 0$$

$${L_t}^{-1}L_t u = -{L_t}^{-1}Nu$$

$$\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}\, dt = -\int_0^t Nu\, dt$$

Calculamos u_0 igualando a cero el primer término de nuestra ecuación:

$$\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}\, dt = 0$$

$$\int_0^t \frac{\partial u}{\partial t}\, dt = u_{(x,t)}\Big]_0^t = u_{(x,t)} - u_{(x,0)}$$

Y sustituimos el valor de la condición inicial en el segundo término de nuestra ecuación:

$$u_{(x,t)}\Big]_0^t = u_{(x,t)} - \frac{1}{1+x}$$

Entonces:

$$u_{(x,t)} - \frac{1}{1+x} = -\int_0^t Nu\ dt$$

$$u_{(x,t)} = \frac{1}{1+x} - \int_0^t Nu\ dt = \frac{1}{1+x} - \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} A_n\ \ dt$$

Donde u_0 se representa por los valores ya integrados, por lo tanto:

$$u_0 = \frac{1}{1+x}$$

Para la determinación de los términos no lineales (A_n) se emplea la siguiente ecuación, que nos ayuda a determinar los polinomios de Adomian cuando el operador no lineal nos representa el producto de un término por su derivada parcial con respecto a cualquier variable existente en la ecuación.

$$A_n = \sum_{i=0}^{n} u_i \frac{\partial u_{n-i}}{\partial x}$$

Para la determinación de A_0, tenemos:

$$A_0 = \sum_{i=0}^{0} u_i \frac{\partial u_{n-i}}{\partial x}$$

$$A_0 = u_0 \frac{\partial u_{0-0}}{\partial x} = u_o \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

Sustituyendo:

$$A_0 = \left(\frac{1}{1+x}\right)\left[\frac{\partial\left(\frac{1}{1+x}\right)}{\partial x}\right] = \left(\frac{1}{1+x}\right)\left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right]$$

$$A_0 = -\frac{1}{(1+x)^3}$$

Para el cálculo de los siguientes términos de nuestra función, transformamos a la relación de recurrencia.

$$u_{n+1} = -\int_0^t A_n\ dt$$

Y así podemos trabajar para obtener los términos de la serie que nos represente nuestra ecuación diferencial.

$$Para \quad n = 0$$

$$u_{0+1} = -\int_0^t A_0 \, dt$$

$$u_1 = -\int_0^t A_0 \, dt = -\int_0^t \left[-\frac{1}{(1+x)^3}\right] dt$$

$$u_1 = \frac{1}{(1+x)^3}\int_0^t dt$$

$$u_1 = \frac{t}{(1+x)^3}$$

Para A_1, tenemos:

$$A_1 = \sum_{i=0}^{1} u_i \frac{\partial u_{n-i}}{\partial x}$$

$$A_1 = u_o \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$A_1 = \left(\frac{1}{1+x}\right)\left[-\frac{3t}{(1+x)^4}\right] + \left[\frac{t}{(1+x)^3}\right]\left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right]$$

$$A_1 = -\frac{4t}{(1+x)^5}$$

$$Para \quad n = 1$$

$$u_{1+1} = -\int_0^t A_1 \, dt$$

$$u_2 = -\int_0^t A_1 \, dt = -\int_0^t \left[-\frac{4t}{(1+x)^5}\right] dt$$

$$u_2 = \frac{1}{(1+x)^5}\int_0^t (4t) dt$$

$$u_2 = \frac{2t^2}{(1+x)^5}$$

Para A_2 tenemos:

$$A_2 = \sum_{i=0}^{2} u_i \frac{\partial u_{n-i}}{\partial x}$$

$$A_2 = u_o \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_0}{\partial x}$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{1+x}\right)\left[-\frac{10t^2}{(1+x)^6}\right] + \left[\frac{t}{(1+x)^3}\right]\left[-\frac{3t}{(1+x)^4}\right] + \left[\frac{2t^2}{(1+x)^5}\right]\left[-\frac{1}{(1+x)^2}\right]$$

$$A_2 = -\frac{15t^2}{(1+x)^7}$$

Así, para los siguientes valores de *u* obtendremos lo siguiente:

$$u_3 = -\int_0^t A_2\, dt = \frac{5t^3}{(1+x)^7}$$

$$u_4 = -\int_0^t A_3\, dt = \frac{14t^4}{(1+x)^9}$$

$$u_5 = -\int_0^t A_4\, dt = \frac{42t^5}{(1+x)^{11}}$$

$$u_6 = -\int_0^t A_5\, dt = \frac{132t^6}{(1+x)^{13}}$$

Y para los valores de *A:*

$$A_3 = \sum_{i=0}^{3} u_i \frac{\partial u_{n-i}}{\partial x}$$

$$A_3 = u_o \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_3 \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{56t^3}{(1+x)^9}$$

$$A_4 = \sum_{i=0}^{4} u_i \frac{\partial u_{n-i}}{\partial x}$$

$$A_4 = u_o \frac{\partial u_4}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_3 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_4 \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{210t^4}{(1+x)^{11}}$$

$$A_5 = \sum_{i=0}^{5} u_i \frac{\partial u_{n-i}}{\partial x}$$

$$A_5 = u_o \frac{\partial u_5}{\partial x} + u_1 \frac{\partial u_4}{\partial x} + u_2 \frac{\partial u_3}{\partial x} + u_3 \frac{\partial u_2}{\partial x} + u_4 \frac{\partial u_1}{\partial x} + u_5 \frac{\partial u_0}{\partial x} = -\frac{210t^4}{(1+x)^{13}}$$

Nota: Se pueden calcular *n* cantidad de sumandos de *u* y sus respectivos valores de *A* para obtener una mayor extensión de la ecuación representativa de la expresión.

Por último, obtendremos la ecuación en términos de *u* que nos representa la ecuación diferencial

$$Y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

Entonces, la solución particular de la expresión sería:

$$y(t) = \frac{1}{1+x} + \frac{t}{(1+x)^3} + \frac{2t^2}{(1+x)^5} + \frac{5t^3}{(1+x)^7} + \frac{14t^4}{(1+x)^9} + \frac{42t^5}{(1+x)^{11}} + \frac{132t^6}{(1+x)^{13}} + \cdots$$

6. Referencias

[1] Ballén López, J. P., & León Velasco, P. A. (2017). *Método de descomposición de Adomian.* Universidad EAFIT, Departamento de Ciencias Básicas, Medellín.

[2] Cedillo Garza, G. E., Alcorta García, E., Castillo Mártinez, R., & Garza Rocha, D. (2018). *Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, parciales e integrales: Método de descomposición de Adomian.* Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza.

[3] Shingareva, I., & Lizárraga Celaya, C. (2012). *Método de descomposición de Adomian: soluciones analíticas aproximadas de ecuaciones diferenciales parciales no lineales.* Universidad de Sonora, Departamento de Matemáticas y Física.

[4] Wazwaz, A.-M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory.* Chicago: Springer.