MÉTODO DE DESCOMPOSICIÓN DE ADOMIAN PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES PARCIALES Y NO LINEALES

Andrés Alberto Romero Sobrevilla
José Alfredo Rosas Córdova

Alumnos de Matemáticas IV

Catedrático: M.C. Guadalupe Evaristo Cedillo Garza

4 de junio de 2019

1 Introducción

Las ecuaciones diferenciales representan una de las maneras más idóneas que se tienen para representar y describir matemáticamente un sinfín de fenómenos reales. La resolución de ecuaciones diferenciales suele caracterizarse por un nivel alto de complejidad. Lo anterior siendo atribuible a la naturaleza misma de los sistemas que éstas buscan modelar. El algoritmo de solución aplicado a una ecuación diferencial obedece a la clasificación de ésta. Acorde a su estructura, una ecuación diferencial puede ser, ordinaria, parcial, lineal, no lineal o alguna combinación de éstas; cada una de estas categorías agrega a la ecuación un grado de complejidad distinto lo que implica en algunos casos métodos de resolución más elaborados. La solución de sistemas representados por ecuaciones diferenciales no lineares es hoy en día un problema decisivo en campos relacionados a la ciencia y la tecnología; estos sistemas pueden estar representados tanto por ecuaciones diferenciarles ordinarias (ODE) o parciales (PDE).

Mediante la aplicación de distintos métodos es posible encontrar la solución para este tipo de sistemas, sin embargo, un número significativo de estos aplica un proceso de linealización al término no lineal de la ecuación. Lo anterior puede provocar una desviación importante entre el resultado encontrado y el comportamiento físico esperado si existe un término fuertemente no lineal dentro de la ecuación. Para evitar esta problemática se vuelve pertinente aplicar metodologías de resolución mediante las cuales se pueda trabajar con el miembro no lineal de la ecuación sin modificarlo; un ejemplo de este tipo de metodologías es la del método de descomposición de Adomian.

El método de descomposición de Adomian fue introducido por George Adomian en los años 80’s. Se caracteriza por sustituir el miembro no lineal de la ecuación por una serie de polinomios llamados «polinomios de Adomian», evitando así inconsistencias producidas por procesos de linealización. Al aplicar esta metodología, se expresa la solución de la ecuación diferencial como una serie infinita de sumandos con una rápida convergencia. El método de Adomian es aplicable no sólo a ODEs y PDEs no lineales, siendo completamente válido para aquellas que cumplan con los criterios de linealidad. Adicionalmente, se han sugerido un amplio número de modificaciones al método original con el fin de enriquecer y facilitar su aplicación.

2 Método de descomposición de Adomian

Tomando como punto de partida la siguiente ecuación diferencial:

$$Fu = g(t) \tag{1}$$

Donde *F* es un operador diferencial ordinario no lineal con partes tanto lineales como no lineales. Con el fin de descomponer el operador *F* en sus distintas partes se definen los siguientes operadores:

L	Operador lineal de mayor orden.
R	Operador correspondiente al resto de los términos lineales.
N	Operador no lineal.

Partiendo de lo anterior, el operador *L* será entonces la derivada lineal de mayor orden en la ecuación, el operador *R* representará al resto de los términos lineales y el operador *N* consistirá en la parte no lineal de la ecuación. Sustituyendo en (1) se llega a:

$$Lu + Ru + Nu = g(t) \tag{2}$$

Donde para llegar a la solución de la ecuación *u*, se vuelve necesario aislar al termino afectado por el operador lineal de mayor orden de un lado de la ecuación y posteriormente aplicar el operador *L* de manera inversa. Puesto que *L* siempre se tratará de una derivada, L^{-1} tendrá la forma de una integral: definida si se trata de un problema de valores iniciales (IVP) e indefinida si se está resolviendo un problema de valor en la frontera (BVP). Aplicando lo descrito a (2) se tiene lo siguiente:

$$Lu = g(t) - Ru - Nu \tag{3}$$

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g(t) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{4}$$

$$u - \varphi = L^{-1}g(t) - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \tag{5}$$

Para continuar con el proceso de solución se consideran las siguientes dos expresiones:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \tag{6}$$

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \tag{7}$$

Sustituyendo (6) y (7) en (5) y despejando φ al otro lado de la ecuación se llega a:

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \varphi + L^{-1}g(t) - L^{-1}R\left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right) - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right) \tag{8}$$

De (8) se determina que:

$$u_0 = \varphi + L^{-1}g(t) \tag{9}$$

La parte restante de (8) se emplea para desarrollar el algoritmo de solución, utilizado para el cálculo del resto de las u_n. La expresión resulta de la siguiente forma:

$$u_{n+1} = -L^{-1}Ru_n - L^{-1}A_n \tag{10}$$

Donde el valor del polinomio de Adomian A_n depende de u_n así como de la forma del miembro no lineal de la ecuación que se resuelve. En su forma ral, los polinomios de Adomian están dados por:

$$A_n = \frac{1}{n!}\frac{d^n}{d\lambda^n}\left[N\left(\sum_{i=0}^{n} \lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0}, n = 0,1,2,3 \ldots \tag{11}$$

Una vez se computan el número de u_n considerado como apropiado, la solución de la ecuación se expresa como la suma de éstas, como se estableció en (6):

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots \tag{6}$$

El algún caso será posible obtener soluciones exactas para las ecuaciones resultas aplicando series conocidas como son la geométrica o una expansión de la serie de Taylor de alguna función.

Con el objetivo de evitar confusión, al aplicar el procedimiento descrito con anterioridad a la solución de PDE es recomendable agregar subíndices a los operadores lineales de mayor orden de la siguiente forma:

L_t	Operador lineal de mayor orden respecto a la variable *t.*
R_t	Operador correspondiente al resto de los términos lineales respecto a la variable *t.*

L_x	Operador lineal de mayor orden respecto a la variable *x.*
R_x	Operador correspondiente al resto de los términos lineales respecto a la variable *x.*

Con lo anterior en mente, es sencillo aplicar el procedimiento escrito con anterioridad a una PDE. El operador que se ha de invertir para llegar a la solución de la ecuación dependerá de las condiciones iniciales con las que se cuenten, si se llega a contar con ambos se debe de encontrar la misma solución sin importar la elección.

Ejemplo

Considérese la siguiente ecuación diferencial parcial no lineal:

$$\frac{\partial u}{\partial t}+u\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2};\quad u(x,0)=2x \tag{12}$$

Siguiendo la metodología descrita anteriormente, se definen los siguientes operadores:

L_t	$\frac{\partial u}{\partial t}$
N	$u\frac{\partial u}{\partial x}$
L_{xx}	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

Reescribiendo a (16) en términos de operadores obtenemos:

$$L_t u + Nu = L_{xx}u \tag{13}$$

Considerando la condición inicial dada, se elige al operador L_t como aquel que se ha de invertir. Despejando para *u* llegamos a:

$$L_t u = L_{xx}u - Nu \tag{14}$$

Aplicando el inverso de L_t a toda la ecuación, obtenemos:

$$L_t^{-1}L_t u = L_t^{-1}L_{xx}u - L_t^{-1}Nu \tag{15}$$

Partiendo de que L_t representa el derivar una función respecto a la variable t, se define L_t^{-1} de la siguiente manera:

L_t^{-1}	$\int_0^t dt$

Resolviendo el lado derecho de la igualdad en (18) se llega a:

$$L_t^{-1}L_t u = \int_0^t \frac{\partial u}{\partial t} dt = u(x,t)\,\Big|_0^t = u(x,t) - u(x,0) = u(x,t) - 2x \qquad (16)$$

Aislando a $u(x,t)$ del lado izquierdo de la igualdad, obtenemos:

$$u(x,t) = 2x + L_t^{-1}L_{xx}u - L_t^{-1}Nu \qquad (17)$$

Donde, partiendo de lo establecido anteriormente, es posible obtener de (17) tanto que $u_0 = 2x$, así como la ecuación de recurrencia (18).

$$u_{n+1} = L_t^{-1}L_{xx}u_n - L_t^{-1}Nu_n \qquad (18)$$

Expresando el término no lineal Nu como la serie de polinomios de Adomian resulta en:

$$u_{n+1} = L_t^{-1}L_{xx}u_n - L_t^{-1}A_n \qquad (19)$$

Mediante (23) se determinarán los valores de las u_n restantes.

Para el cálculo de u_1 es necesario determinar el valor de A_0, sustituyendo u_0 en (11), obtenemos:

$$A_0 = \frac{1}{0!}\frac{d^0}{d\lambda^0}\left[N\left(\sum_{i=0}^{0}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = u_0\frac{\partial u_0}{\partial x} = (2x)\frac{\partial(2x)}{\partial x} = 4x \qquad (20)$$

Una vez obtenidos los valores de u_0 y A_0 es posible calcular u_1 utilizando (19), como se muestra a continuación:

$$u_1 = L_t^{-1}L_{xx}u_0 - L_t^{-1}A_0 = \cdots$$
$$\int_0^t \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}dt - \int_0^t A_0 dt = \int_0^t \frac{\partial^2(2x)}{\partial x^2}dt - \int_0^t (4x)dt = -4tx \qquad (21)$$

Con el valor de u_1 calculamos el valor de A_1:

$$A_1 = \frac{1}{1!}\frac{d^1}{d\lambda^1}\left[N\left(\sum_{i=0}^{1}\lambda^i u_i\right)\right]_{\lambda=0} = (u_0+\lambda u_1)+\frac{\partial(u_0+\lambda u_1)}{\partial x} = \cdots$$
$$= (2x-4xt\lambda)\frac{\partial(2x-4xt\lambda)}{\partial x} = -16tx \tag{22}$$

Aplicando nuevamente la ecuación de recurrencia (23) se determina el valor de u_2:

$$u_2 = L_t{}^{-1}L_{xx}u_1 - L_t{}^{-1}A_1 = \cdots$$
$$\int_0^t \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2}dt - \int_0^t A_1 dt = \int_0^t \frac{\partial^2(-4xt)}{\partial x^2}dt - \int_0^t(-16xt)dt = 8t^2x \tag{23}$$

Repitiendo los pasos descritos anteriormente es posible calcular el número de u_n's que se desee. Repitiendo el algoritmo se llegó a los siguientes valores para los primero seis términos de la solución:

$u_0 = 2x$	$u_1 = -4tx$	$u_2 = 8t^2x$
$u_3 = -16t^3x$	$u_4 = 32t^4x$	$u_5 = -64t^5x$

Remontándonos a (6) posible expresar la función solución de la siguiente manera:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n = 2x - 4tx + 8t^2x - 16t^3x + 32t^4x - 64t^5x \ldots \tag{24}$$

Al analizar la serie solución, es posible percatarse de que ésta se asemeja a la serie geométrica con *a= -2t*, permitiendo así llegar una solución exacta para nuestra ecuación diferencial.

$$u(x,t) = \frac{2x}{1-2t}, \quad |-2t| < 1 \tag{25}$$

Referencias

Adomian, G. (1994). *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method.* Dordrecht: Springer Science+Business Media.

Al awawdah, E. (2016). The Adomian Decomposition Method For Solving Partial Differential Equations. Palestine: Birzeit University.

Cedillo Garza, G. E., Alcorta Garcia, E., Castillo Martínez, R., & Garza Rocha, D. (13 de Marzo de 2018). Solución de ecuaciones diferenciales ordinarias, parciales e integrales: Método de descomposición de Adomian. Monterrey, Nuevo León, México: Universidad Autónoma de Nuevo León.

Wazwaz, A.-M. (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory.* Chicago: Springer.