

Курсовая работа

на тему

«Исследование процесса программного разворота малого космического аппарата
при воздействии возмущений»

Научный руководитель: Лебедев Антон Викторович

Автор: Тарлинский Игорь Викторович

Группа: 321

Факультет: Механико-математический

Кафедра: Прикладной механики и управления

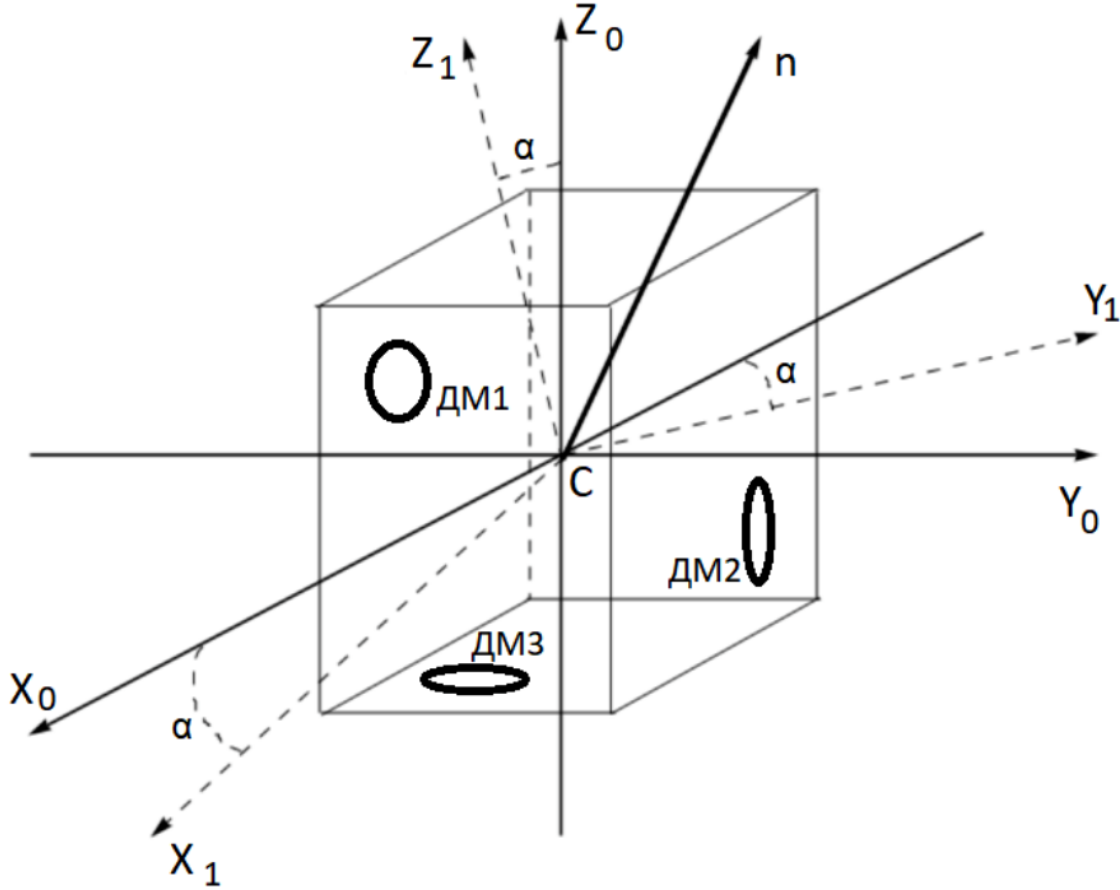
Лаборатория: Математического обеспечения имитационных динамических систем

Содержание

1	Введение	3
2	Постановка задачи	4
3	Описание алгоритма управления	7
4	Поиск кратчайшей оси разворота спутника \vec{n} и требуемого угла α_*	8
5	Определение оптимального управления в задаче быстрогодействия при одноосном развороте КА вокруг оси с осью \vec{n} , проходящей через Ц.М. КА	9
6	Результаты численного моделирования	12
7	Заключение	17
8	Приложение. Исходный код алгоритма	19

1 Введение

Рассматривается малый космический аппарат, движущийся по близкой к круговой низкой орбите, на высоте 250 - 300 км. Для выполнения целевых задач спутнику необходимо совершать переориентацию в орбитальной системе координат за кратчайшее время. Для выполнения этого маневра на борту аппарата установлена система двигателей-маховиков, однако данные органы управления имеют ограниченные ресурсы, выраженные моментной характеристикой. Кроме того, на корпус спутника действует ощутимый возмущающий момент силы сопротивления среды. Также, тензор инерции спутника не известен точно. Эти факторы затрудняют выполнение программного маневра и удлиняют процесс последующий стабилизации.



- XYZ - система координат, с началом в центре масс спутника C ,
- $X_0Y_0Z_0$ - положение спутника в момент начала разворота t_0 ,
- $X_kY_kZ_k$ - положение спутника в момент окончания разворота t_k ,
- $\vec{\omega}$ - вектор абсолютной угловой скорости спутника,
- \vec{n} - вектор, вокруг которого совершается кратчайший разворот спутника,
- α_* - угол поворота спутника вокруг \vec{n}

2 Постановка задачи

Объектом исследования является искусственный спутник Земли (далее по тексту: КА - космический аппарат) во время выполнения маневра переориентации в инерциальной системе координат. Такие маневры свойственны как орбитальным телескопам, которым необходимо перенацеливаться на небесной сфере с одного объекта на другой, так и КА дистанционного зондирования Земли во время калибровочных работ по идентификации взаимного расположения чувствительных элементов (датчиков) и целевой аппаратуры.

С корпусом КА жестко связана система координат XYZ с началом в центре масс C , в которой задано расположение датчиков и органов управления, также в ней известен тензор инерции корпуса I , который мы будем считать неизменным (т.е. спутник считается гироскопом). В качестве датчиков на борту КА выступают:

- Измерители угловой скорости (ДУС),
- Звездные датчики (ЗД), измеряющие ориентацию КА относительно инерциальной системы координат (ИСК).

В данной задаче будем пренебрегать погрешностями измерений, таким образом считая, что в каждый момент времени системе управления точно известны:

- вектор угловой скорости $\vec{\omega}$ вращения корпуса КА в проекции на оси ССК,
- кватернион q преобразования из ИСК в ССК (см. [1], § 2.6, §2.8)

Рассматривается КА с активной электро-маховичной системой ориентации, основным элементом которой является ДМ (двигатель-маховик), представляющий собой электродвигатель с тяжелым ротором.

По командам системы управления КА, на обмотку ДМ подается ток заданной величины, и, в результате воздействия электромагнитных сил, на ротор ДМ начинает действовать механический момент, пропорциональный подаваемому току. Этот момент ограничен по величине электро-механическими особенностями конструкции ДМ. Под воздействием момента ротор ДМ начинает раскручиваться, накапливая кинетический момент, также ограниченный по модулю известной величиной.

Согласно закону сохранения кинетической энергии, на корпус КА передается момент, равный по величине моменту, передаваемому на ротор ДМ, но обратному ему по направлению.

Для полной управляемости КА необходимо иметь на борту не менее трех ДМ. В данной задаче мы рассматриваем именно такой вариант, когда вдоль каждой из 3-х осей связанной системы координат ССК расположен один ДМ. Все ДМ на борту одинаковы.

Суммарный кинетический момент КА записывается в следующей форме: $\vec{K}(t) = I\vec{\omega}(t) + \vec{H}(t)$, где

- I - тензор инерции корпуса КА,
- $\vec{\omega}(t)$ - вектор абс. угловой скорости КА в проекции на оси ССК,
- $\vec{H}(t)$ - вектор суммарного кинетического момента двигателей-маховиков, причем: $\vec{H}(t) = \vec{e}_1(t) \cdot J \cdot \Omega_1(t) + \vec{e}_2(t) \cdot J \cdot \Omega_2(t) + \vec{e}_3(t) \cdot J \cdot \Omega_3(t)$, где:

– J - момент инерции ротора ДМ,

- $\Omega_i(t), i = 1, 2, 3$ - скорости вращения роторов ДМ,
- $\vec{e}_i(t)$ - орты ССК.

Согласно теореме об изменении кинетического момента (см. [1], §6.2) в проекции на оси ССК получим следующее дифференциальное уравнение:
 $I\dot{\vec{\omega}}(t) + \vec{H}(t) + \vec{\omega}(t) \times I\vec{\omega}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{H}(t) = \vec{M}$, где \vec{M} - момент внешних сил, которым в данной задаче будем пренебрегать.

Таким образом, динамические уравнения движения КА предстанут в следующем виде:

$$(1) \quad \begin{cases} I\dot{\vec{\omega}}(t) = -\dot{\vec{H}}(t) - \vec{\omega}(t) \times I\vec{\omega}(t) - \vec{\omega}(t) \times \vec{H}(t), \\ \dot{\vec{H}}(t) = -\vec{M}_u(t) \end{cases}$$

Где $\vec{M}_u(t)$ - вектор, управляющего момента, подаваемый на двигатели-маховики.

Кинематические уравнения, выражающие зависимость кватерниона ориентации $q(t)$ от вектора угловой скорости $\vec{\omega}(t)$ записываются в следующей форме (см. [1], стр.138, следствие 2.15.1):

$$(2) \quad \dot{q} = q \circ \frac{q_\omega}{2}$$

Где q_ω - кватернион, задаваемый следующими элементами $q_\omega = (0, \omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t))$, где $\omega_x(t), \omega_y(t), \omega_z(t)$ - проекции вектора угловой скорости $\vec{\omega}(t)$ на оси ССК.

Соотношения (2) можно подробнее расписать в следующей форме:

$$(2') \quad \begin{cases} \dot{q}_0(t) = -\frac{1}{2}(\omega_x(t)q_1 + \omega_y(t)q_2 + \omega_z(t)q_3), \\ \dot{q}_1(t) = \frac{1}{2}(\omega_x(t)q_0 - \omega_y(t)q_3 + \omega_z(t)q_2), \\ \dot{q}_2(t) = \frac{1}{2}(\omega_y(t)q_0 - \omega_z(t)q_1 + \omega_x(t)q_3), \\ \dot{q}_3(t) = \frac{1}{2}(\omega_z(t)q_0 - \omega_x(t)q_2 + \omega_y(t)q_1) \end{cases}$$

В начальный момент времени ориентация КА произвольная; а угловая скорость КА и скорости вращения ДМ - нулевые;

$$(3) \quad \begin{cases} q(0) = q_0, \\ \vec{H}(0) = (0, 0, 0)^\top, \\ \vec{\omega}(0) = (0, 0, 0)^\top \end{cases}$$

Без ограничения общности будем считать, что системе управления требуется с помощью задания вектора управляющего момента $\vec{M}_u(t)$ перевести корпус КА из положения q_0 в положение, заданное единичным кватернионом $q_e = (1, 0, 0, 0)$. Также отметим, что в силу конструктивных особенностей КА, кинетический момент ДМ $\vec{H}(t)$ и управляющий момент $\vec{M}_u(t)$ - ограничены:

$$(4) \quad \begin{cases} \|\vec{H}(t)\| \leq H_{max}, \\ \|\vec{M}_u(t)\| \leq M_{max} \end{cases}$$

Если известна вектор-функция $M_u(t)$, то уравнения (1), (2), (3) образуют замкнутую систему.

Целью данной работы является исследование заданного алгоритма управления, формирующего вектор-функцию $\vec{M}_u(t)$ и время окончания разворота t_k . (Об алгоритме речь пойдет в следующем разделе работы).

Требуется промоделировать движение системы при произвольной начальной ориентации q_0 и при воздействии управления $\vec{M}_u(t)$ на отрезке времени $[0, t_k]$, где t_k - время окончания разворота, вычисляемое алгоритмом.

3 Описание алгоритма управления

Предлагаемый к исследованию в данной работе алгоритм, формирующий вектор управляющего момента $\vec{M}_u(t)$ состоит из двух этапов. Первый этап - предрасчетный, совершается до начала выполнения маневра. На этом этапе рассчитываются параметры разворота, к которым относятся:

- \vec{n} - вектор, задающий ось кратчайшего разворота, в проекции на оси ССК.
- $\hat{\omega}(t)$ - скалярная функция угловой скорости плоского разворота КА в проекции на плоскость кратчайшего разворота.
- $\dot{\hat{\omega}}(t)$ - угловое ускорение плоского разворота.
- t_k - время окончания разворота.

На втором этапе по заданной временной программе на отрезке времени $[0, t_k]$ реализуется управляющий момент на основе параметров, рассчитанных на первом этапе:

$$(5) \quad \vec{M}_u(t) = I\vec{n} \cdot \dot{\hat{\omega}}(t) + \vec{\omega}(t) \times \vec{H}(t) + \vec{\omega}(t) \times I\vec{\omega}(t)$$

Алгоритм формирует параметры $\vec{n}, \hat{\omega}(t), \dot{\hat{\omega}}(t), t_k$ исходя из предположения, что КА совершает разворот вокруг фиксированной оси, таким образом, что угловая скорость $\vec{\omega}(t)$ вдоль этой оси. Фактически, это заведомо ложное предположение, которое подразумевает наличие голономной связи. Ввиду того, что в реальности такой связи нет, к моменту времени t_k КА может иметь ненулевое отклонение от желаемой ориентации.

Целью данной работы как раз и является оценить полученные в результате работы алгоритма отклонения.

Принятия такого заведомо ложного предположения обусловлено несколькими вещами.

Во-первых, алгоритм не требует больших вычислительных ресурсов, поскольку расчет параметров разворота $\vec{n}, \hat{\omega}(t), \dot{\hat{\omega}}(t), t_k$ производится только один раз - на первом этапе. А на втором этапе просто в течение рассчитанного времени t_k формируется управляющий сигнал на двигатели-маховики вида (5)

Во-вторых, параметры разворота выбираются оптимальным образом. Рассчитывается ось кратчайшего разворота \vec{n} , проходящая через центр масс КА (совпадающий с центром ССК), и кратчайший угол α_* , на который требуется развернуть ССК в начальный момент времени, чтобы оси ССК совпали с осями ИСК (проекция вектора \vec{n} на оси ССК сохраняются постоянными во время разворота).

Далее решается задача разворота твердого тела на плоскости с нормалью \vec{n} за кратчайшее время с учетом ограничений на управление и фазовое состояние системы. В результате решения такой экстремальной задачи рассчитываются скалярные функции $\hat{\omega}(t), \dot{\hat{\omega}}(t)$ и минимальное время разворота t_k .

Далее будут подробно описаны методы нахождения $\vec{n}, \hat{\omega}(t), \dot{\hat{\omega}}(t), t_k$.

4 Поиск кратчайшей оси разворота спутника \vec{n} и требуемого угла α_*

Пусть $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - система координат в момент начала разворота t_0 . Пусть $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ - система координат в момент окончания разворота t_* . Запишем матрицу перехода от исходной системы к конечной. Т.е:

$$\hat{e}_i = c_i^1 \vec{e}_1 + c_i^2 \vec{e}_2 + c_i^3 \vec{e}_3, \quad i = 1, 2, 3.$$

Заметим следующий факт: матрица перехода

$$C = \begin{pmatrix} c_1^1 & c_2^1 & c_3^1 \\ c_1^2 & c_2^2 & c_3^2 \\ c_1^3 & c_2^3 & c_3^3 \end{pmatrix}$$

является одновременно и линейным оператором, переводящим исходный базис в конечный. Кроме того, в силу того, что обе системы право-ориентированны и ортонормированны, следует, что $\det(C) = 1$. Таким образом имеем

$$\begin{cases} \det(C) = 1, \\ C^\top C = 1 \end{cases}$$

Следовательно матрица C есть матрица линейного оператора поворота вокруг некоторой оси \vec{n} на угол α_* .

Как известно из линейной алгебры, след матрицы линейного оператора инвариантен относительно смены базиса, т.е $\text{Tr}(P^{-1}CP) = \text{Tr}(C)$, поэтому $\text{Tr}(C) = 1 + 2 \cos(\alpha_*)$, откуда находим искомый угол $\alpha_* = \arccos\left(\frac{\text{Tr}(C)-1}{2}\right)$.

Для поиска оси \vec{n} заметим, что $C(\vec{n}, \alpha_*)\vec{n} = \vec{n} = E\vec{n} \Rightarrow \exists! \lambda_* = 1$ - собственное значение, отвечающее собственному подпространству $\text{Ker}(C - \lambda_* E)$.

Таким образом, искомый угол α_* и ось кратчайшего разворота \vec{n} найдены.

5 Определение оптимального управления в задаче быстрогодействия при одноосном развороте КА вокруг оси с осью \vec{n} , проходящей через Ц.М. КА

Принимая сказанное ранее допущение о развороте КА вокруг оси с направлением \vec{n} , проходящей через Ц.М. КА, и учитывая результат, описанный в [1], §6.3, получаем следующие уравнения, описывающие одноосное вращение КА:

$$(6) \quad \begin{cases} \dot{\omega} I_n = -\dot{H}_n(t), |M_u(t)| \leq M_{max} \\ \frac{d}{dt} \alpha = \hat{\omega}(t) \\ \dot{H}_n(t) = -M_n(t), |H_n(t)| \leq H_{max} \end{cases} \quad \text{Спроецированная система уравнений}$$

Где

- $I_n = \vec{n}^\top I \vec{n}$ - кинетический момент спутника относительно оси кратчайшего разворота \vec{n} ,
- $H_n(t)$ - кинетический момент системы ДМ, формируемый вдоль оси \vec{n} при одноосном развороте,
- $M_n(t)$ - управление, подаваемое в систему ДМ вдоль направления \vec{n}

Требуется определить такое управление $M_n(t)$, чтобы решение системы приходило в точку $\alpha(t_k) = \alpha_*, \hat{\omega}(t_k) = 0$ в момент времени t_k , который является минимальным из всех возможных:

$$(7) \quad \begin{cases} \alpha(t_k) = \alpha_*, \hat{\omega}(t_k) = 0, \\ t_k \rightarrow \min_{M_n(t): |M_n(t)| \leq M_{max}} \end{cases}$$

Синтез такого управления рассмотрен в статье [2]. Решение определяется описанным ниже способом.

Ввиду того, что кинетический момент системы двигателей маховиков ограничен, возможны 2 варианта наикратчайшего разворота на заданный угол α_* . Если за время переориентации спутника - угловая скорость спутника не превышает максимально допустимого значения ω_{max} , то происходит сначала разгон спутника до определенного момента, а затем сразу же начинается торможение. Если же спутник успеет выйти на предельный кинетический момент H_{max} , то происходит выход системы двигателей на предельное значение кинетического момента и между двумя перечисленными фазами появляется фаза движения с постоянной скоростью, т.е с нулевым моментом (дрейф).

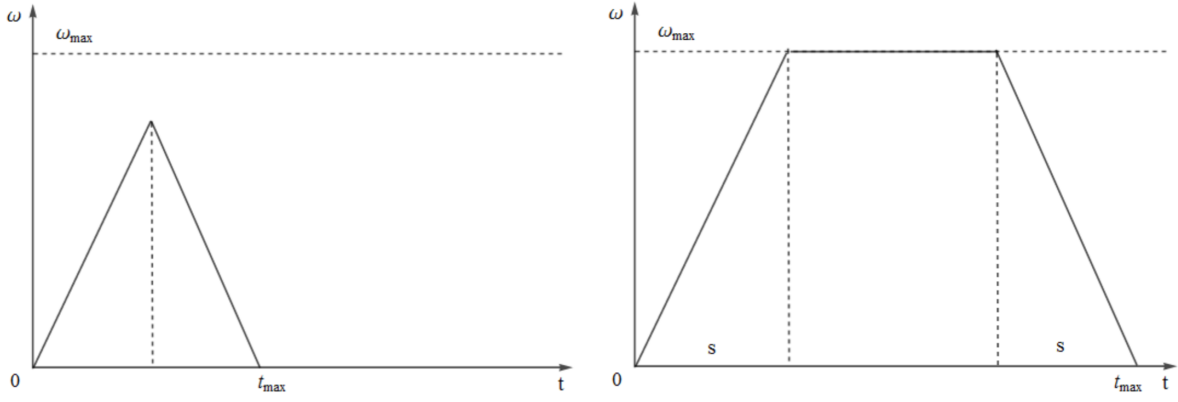


Рис. 5.1: Зависимость угловой скорости от времени при развороте на заданный угол (слева - без выхода на ограничение по кинетическому моменту, справа - с выходом на ограничение)

Из системы (6) имеем:

$$\dot{\omega}_{max} = \frac{M_{max}}{I_n} = const \Rightarrow \omega(t) = \omega_{max}t$$

$$\alpha_* = \int_0^{t_*} \omega(t)dt$$

Первый случай - без выхода на предельный кинетический момент (рисунок слева)

$$\alpha_* = 2 \int_0^{\frac{t_*}{2}} \frac{M_{max}}{I_n} t dt = \frac{M_{max}}{I_n} \left(\frac{t_*}{2}\right)^2 \Rightarrow \frac{t_*}{2} = \sqrt{\frac{I_n \alpha_*}{M_{max}}}$$

Первый случай возможен $\Leftrightarrow \omega(\frac{t_*}{2}) \leq \omega_{max} \Rightarrow \frac{M_{max}}{I_n} \sqrt{\frac{I_n \alpha_*}{M_{max}}} \leq \frac{H_{max}}{I_n}$

Рассмотрим теперь второй случай: Обозначим первый момент выхода на предельную угловую скорость через t_1 , второй через $t_2 \Rightarrow$

$$\omega(t_1) = \frac{M_{max}}{I_n} t_1 = \omega_{max} = \frac{H_{max}}{I_n} \Rightarrow t_1 = \frac{H_{max}}{M_{max}} \Rightarrow \alpha_* = \text{площадь трапеции} =$$

$$2 \frac{M_{max}}{I_n} \frac{t_1^2}{2} + \frac{H_{max}}{I_n} (t_2 - t_1) = \frac{M_{max} H_{max}^2}{I_n^3} + \frac{H_{max}}{I_n} t_* - 2 \frac{H_{max}^2}{I_n M_{max}} \Rightarrow$$

$$t_* = \frac{I_n}{H_{max}} \alpha_* + 2 \frac{H_{max}}{M_{max}} - \frac{M_{max} H_{max}}{I_n^2} \Rightarrow$$

$$t_2 = t_* - t_1 = \frac{I_n}{H_{max}} \alpha_* + \frac{H_{max}}{M_{max}} - \frac{M_{max} H_{max}}{I_n^2}$$

Таким образом, в каждом из случаев определен управляющий момент, подаваемый на двигателя маховики:

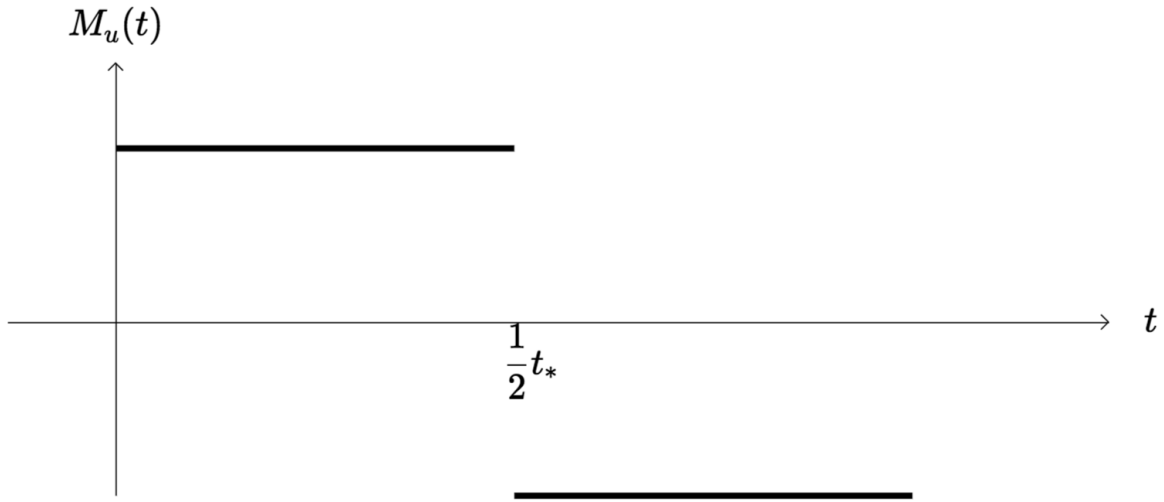


Рис. 5.2: Управляющий момент в первом случае.

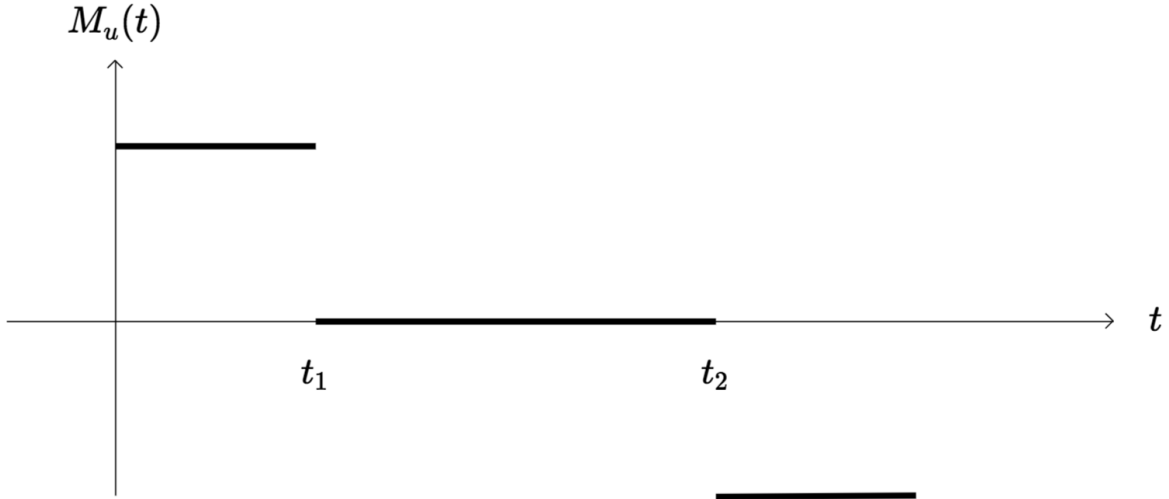


Рис. 5.3: Управляющий момент с выходом на ограничения по развиваемому кинетическому моменту.

Таким образом определяются необходимые для совершения последующего маневра параметры t_1, t_2, t_k, \vec{n} и скалярные функции $\hat{\omega}(t), \dot{\hat{\omega}}$, чтобы далее сформировать управляющие сигналы в форме (5).

В следующем разделе работы представлены результаты численного моделирования движения системы (1), (2) под воздействием рассчитанного управления (5) и будут определены отклонения в момент времени t_k при некоторых начальных условиях.

6 Результаты численного моделирования

Ниже представлены результаты численного моделирования системы (1),(2),(3) с управлением вида (5), сформированным алгоритмом управления.

Исходные данные

- Тензор инерции КА:

$$I = \begin{pmatrix} 230 & 2 & 16 \\ 2 & 210 & 2 \\ 16 & 2 & 97 \end{pmatrix} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

- Максимальный кинетический момент ДМ: $H_{max} = 4 \text{ Н} \cdot \text{м} \cdot \text{с}$
- Максимальный управляющий момент: $M_{max} = 0.1 \text{ Н} \cdot \text{м}$
- Начальная угловая скорость: $\vec{\omega}(0) = (0, 0, 0)^\top \text{ р/с}$
- Начальный кватернион ориентации: $q(0) = (0.5, 0.288675, 0.388675, 0.488675)$

Результаты моделирования

- Начальные углы Эйлера-Крылова ССК КА относительно ИСК (град): $\varphi(0) = -19.7215, \theta(0) = 68.0567, \gamma(0) = 102.076$
- Осевой момент инерции одноосного разворота: $I_n = 168.59 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$
- Время разгона t_1 , дрейфа $(t_2 - t_1)$ и торможения $(t_k - t_2)$:

$$\begin{cases} t_1 = 40 \text{ с}, \\ t_2 - t_1 = 39.4292 \text{ с}, \\ t_k - t_2 = 40 \text{ с} \end{cases}$$

- Угол кратчайшего разворота $\alpha_* = 107.977 \text{ град.}$,
- Время разворота $t_k = 119.429 \text{ с.}$,
- Ось кратчайшего разворота: $\vec{n} = (-0.419647, -0.565018, -0.710388)^\top$,
- Кватернион отклонения ССК КА относительно ИСК в момент t_k завершения маневра: $q(t_k) = (0.000169747, 0.000228548, 0.00028735)$,
- Углы Эйлера-Крылова ССК КА относительно ИСК (град) в момент t_k завершения маневра: $\varphi(t_k) = 0.0265682, \theta(t_k) = 0.03558011, \gamma(t_k) = 0.0449908$.

Графики, представляющие законы изменения переменных в системе

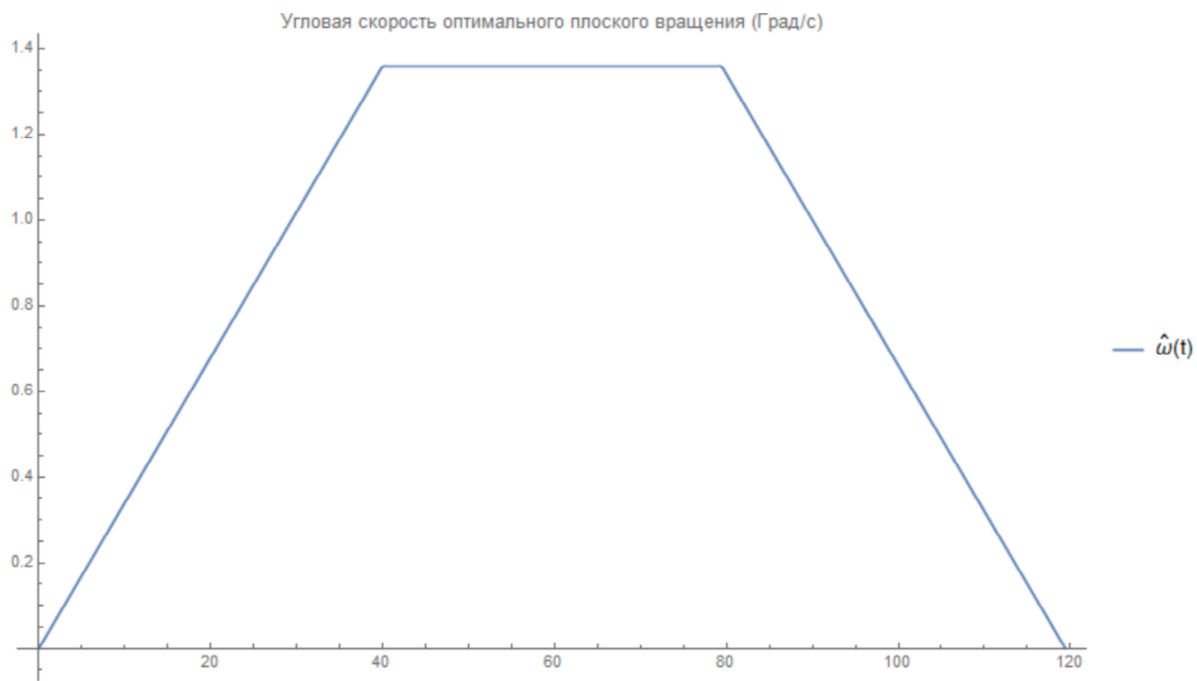


Рис. 6.4: Функция $\hat{\omega}(t)$ оптимального плоского вращения (град/с)

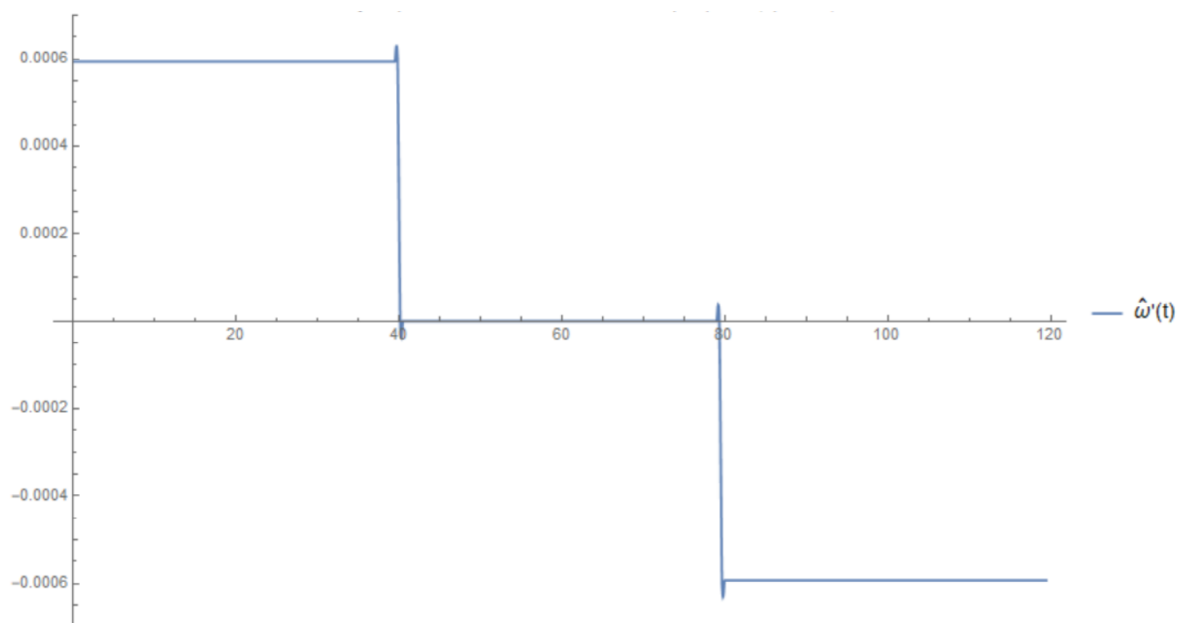


Рис. 6.5: функция $\dot{\omega}'(t)$ оптимального плоского вращения (град/с²)

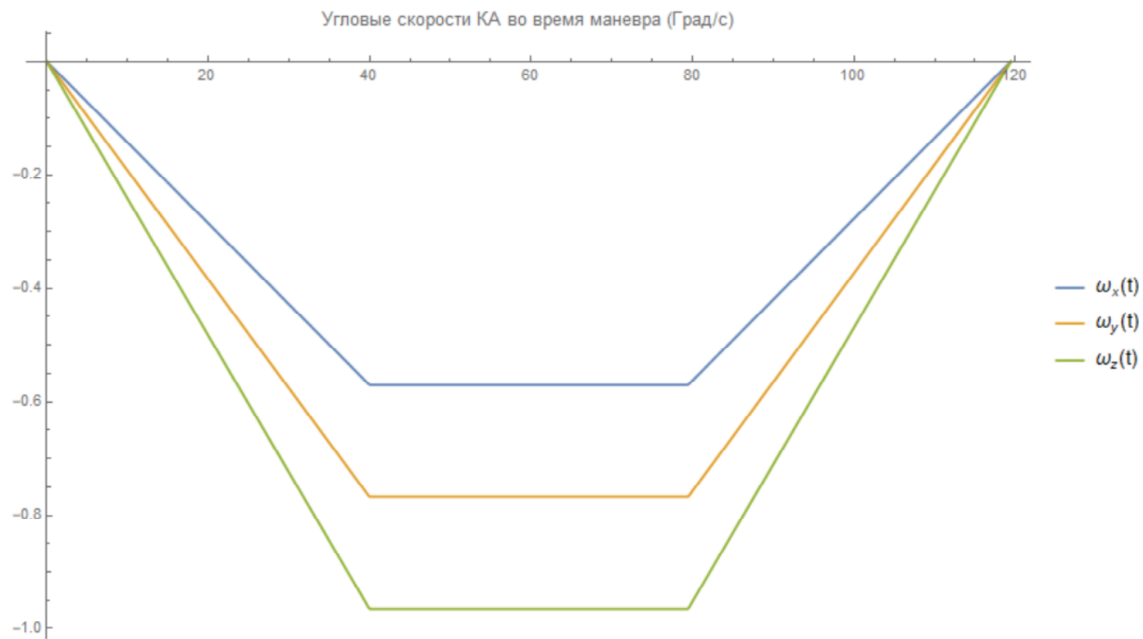


Рис. 6.6: Компоненты вектора угловой скорости КА (град/с) в проекции на оси ССК

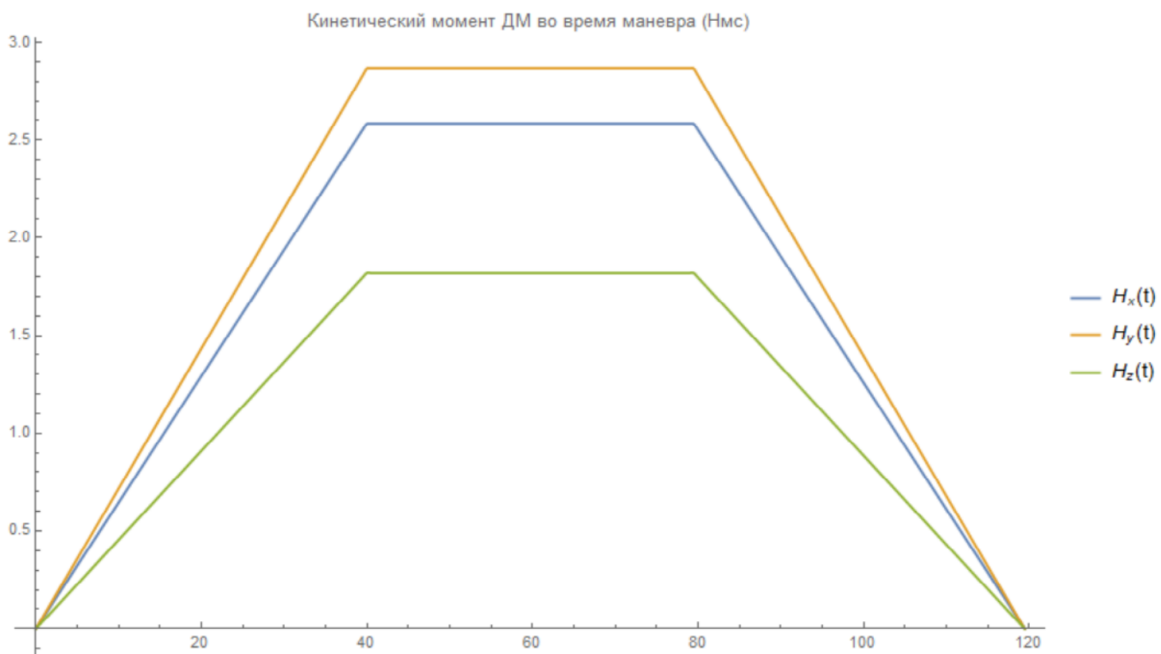


Рис. 6.7: Компоненты вектора кинетического момента ДМ во время маневра (Нмс)

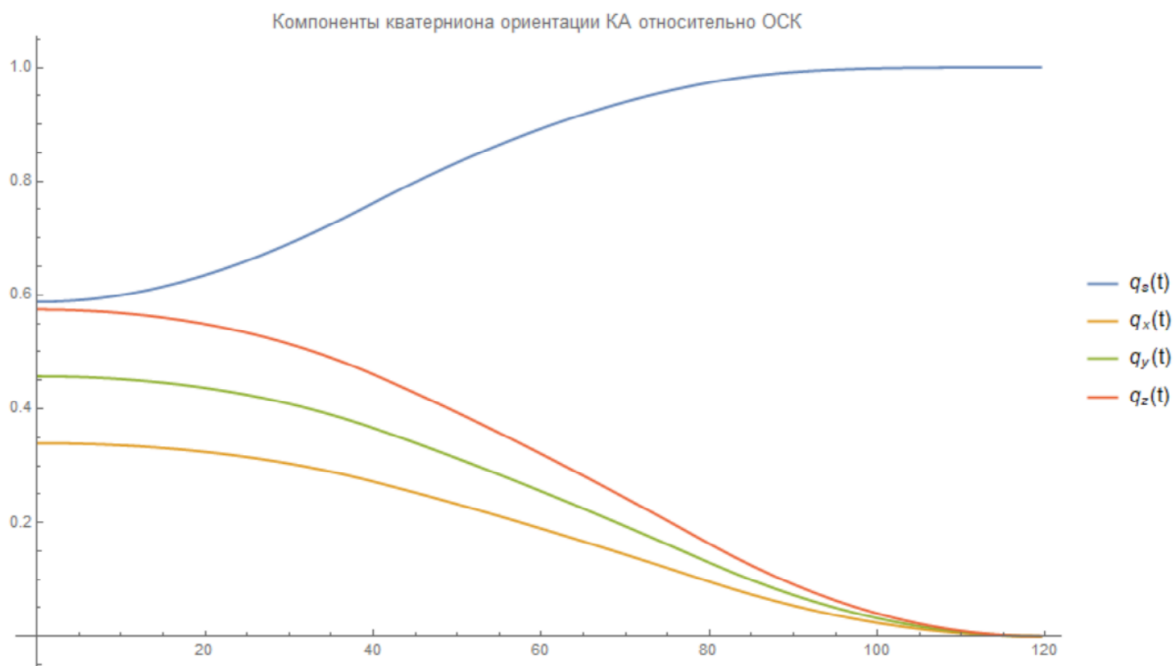


Рис. 6.8: Компоненты кватерниона ориентации КА относительно ИСК

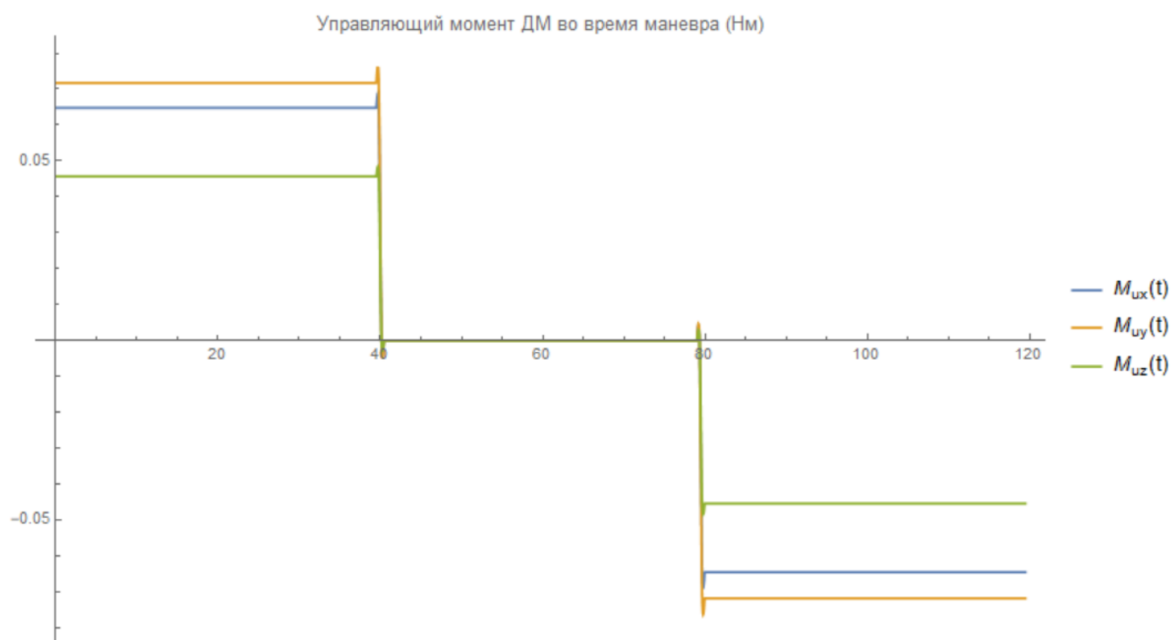


Рис. 6.9: Компоненты вектора управляющего момента во время маневра

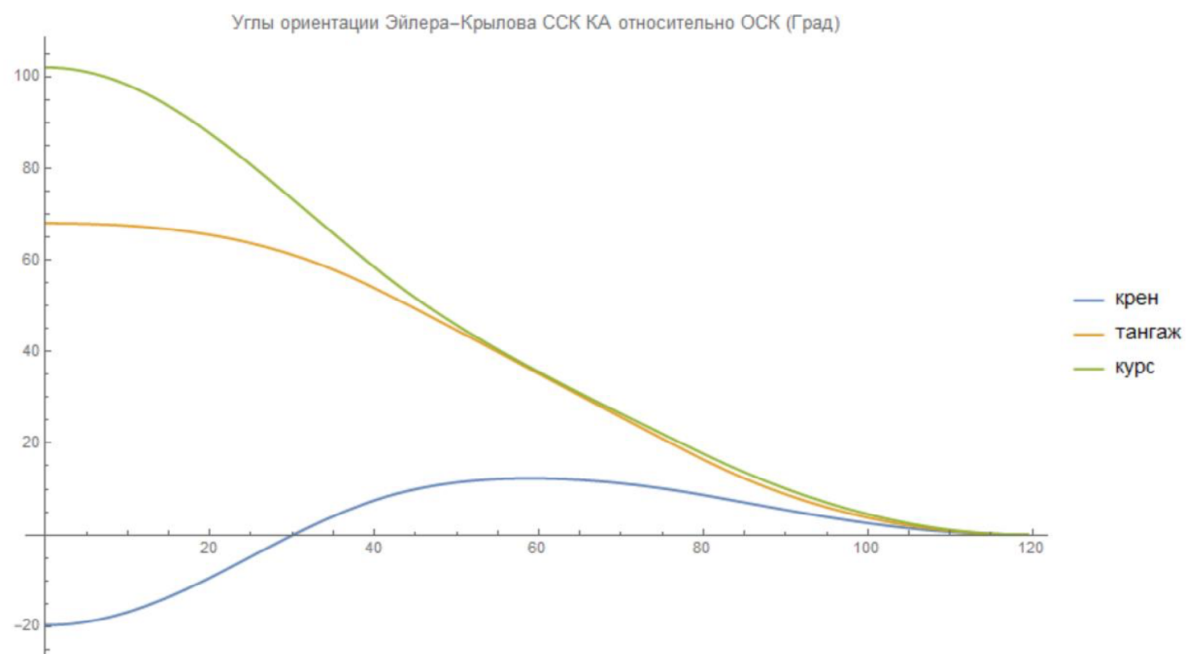


Рис. 6.10: Углы Эйлера-Крылова ССК КА относительно ИСК во время маневра

7 Заключение

В данной работе рассмотрена задача пространственного разворота КА. Рассмотрен один из алгоритмов совершения такого разворота, произведено численное моделирование процесса разворота КА и вычислены конечные ошибки при некоторых начальных условиях.

В дальнейшем планируется развивать полученные результаты в следующих направлениях:

1. Определить наихудшие параметры \vec{n} и α_* при которых исследуемый алгоритм приводит к наихудшим отклонениям. Это актуальная инженерная задача, решение которой позволит найти оптимальные коэффициенты обратной связи на этапе стабилизации, который начинается после активной фазы разворота КА, рассматриваемой в данной работе.

2. Исследовать влияние возмущающих моментов и неточностей определения тензора инерции на ошибку получаемую в результате разворота.

3. Рассмотреть модификацию представленного в данной работе алгоритма с добавкой, стабилизирующей ось вращения КА.

4. Рассмотреть модификацию алгоритма, описанного в данной работе, учитывающую гравитационный момент при построении оптимального разворота.

Список литературы

- [1] Голубев Ю. Ф., "Основы теоретической механики". М.: Моск. Гос. Университет, 2000 - 719стр.

- [2] Александров В. В., Черемисин В. В., "Оптимальный синтез в задачи одноосной стабилизации спутника при наличии фазовых ограничений". Вестник МГУ, сер. Математика. Механика. 2010 №6, с.61-65

- [3] Александров В. В., Беленький А. Д., Лебедев А. В., Матлалкати Ругерио Э., "Оптимальный синтез в задаче быстрогодействия при наличии фазовых ограничений". Вест. Моск. Университета, сер.1, Математика. Механика, 2012. №1, с.67-71.

8 Приложение. Исходный код алгоритма