

Εξήγηση κώδικα για την μέθοδο παραγοντοποίησης QR:

Έχουμε τα παρακάτω αρχεία:

- createA.m περιέχει την συνάρτηση createA η οποία δέχεται σαν όρισμα τον αριθμό των γραμμών και των στηλών ενός πίνακα και επιστρέφει τον Pei matrix.
- readingData.m έχει την συνάρτηση readingData που επιστρέφει τον πίνακα A. Υπάρχουν οι παρακάτω τρόποι για να διαβάσει η συνάρτηση τα δεδομένα:
 - να δώσει τον πίνακα A ο χρήστης
 - να διαβάσει το πρόγραμμα τον πίνακα από ένα αρχείο .txt
 - να δημιουργηθεί ένας τυχαίος πίνακας ή να δημιουργηθεί ο Pei array. Τον αριθμό των γραμμών και των στηλών θα τον προσδιορίσει ο χρήστης.
- ask3_QR_HOUS.m έχει την συνάρτηση που εκτελεί την παραγοντοποίηση QR με τον μετασχηματισμό householder δέχεται σαν όρισμα τον πίνακα A και επιστρέφει τον πίνακα Q και R.
- main.m βρίσκουμε τον πίνακα A μέσα από την συνάρτηση readingData και εκτελούμε την μέθοδο παραγοντοποίησης QR με την αντίστοιχη συνάρτηση. Με την συνάρτηση tic-toc της matlab υπολογίζουμε τον χρόνο που χρειάζεται η μέθοδος. Τέλος, υπολογίζουμε και εκτυπώνουμε τα error, το condition number του R και τον χρόνο εκτέλεσης της μεθόδου.

Το αρχείο .txt πρέπει να έχει την παρακάτω μορφή: αν για παράδειγμα ο αριθμός των γραμμών = m, αριθμό των στηλών = n το αρχείο κειμένου θα είναι:

$$a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n}$$

$$a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ \dots \ a_{2n}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{m1} \ a_{m2} \ a_{m3} \ \dots \ a_{mn}$$

Αν ο χρήστης θέλει να δώσει ο ίδιος τον πίνακα A αυτός πρέπει να έχει την παρακάτω μορφή και μετά να πατήσει enter:

$$[\ a_{11} \ a_{12} \ a_{13} \ \dots \ a_{1n}$$

$$a_{21} \ a_{22} \ a_{23} \ \dots \ a_{2n}$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$a_{m1} \ a_{m2} \ a_{m3} \ \dots \ a_{mn}]$$

Σχολιασμός αποτελεσμάτων:

Pei matrix Παραγοντοποίηση QR με Householder					
Διάσταση A $m = n$	α) Σφάλμα $\ A - QR\ _{\infty}$	β) Σφάλμα $\ Q^T Q - I\ _{\infty}$	γ) Σφάλμα $\ AR^{-1} - Q\ _{\infty}$	Αριθμός Συνθήκης cond(R)	Χρόνος
100	2.500777e-12	3.073366e-14	1.497413e-14	2.0101	0.006094sec
500	3.653988e-11	1.275320e-13	5.607017e-14	2.002	1.687113sec
1000	7.815115e-11	1.023313e-13	6.161163e-14	2.001	11.803916sec

Ο πίνακας παρουσιάζει τα αποτελέσματα της εφαρμογής της μεθόδου QR με τον μετασχηματισμό Householder για τον Pei matrix διαστάσεων $m = n = 100, 500$ ή 1000 . Ακολουθεί η ανάλυση των αποτελεσμάτων:

Σφάλμα $\|A - Q * R\|_{\infty}$: Παρατηρούμε ότι τα σφάλματα είναι αρκετά μικρά. Το γεγονός αυτό υποδεικνύει ότι η παραγοντοποίηση QR με τη χρήση του μετασχηματισμού Householder είναι αρκετά αποτελεσματική και ακριβής. Βέβαια, αυτό που παρατηρούμε είναι ότι το σφάλμα αυξάνεται με την αύξηση της διάστασης των δεδομένων.

Σφάλμα $\|Q^T * Q - I\|_{\infty}$: Το συγκεκριμένο σφάλμα είναι πολύ μικρό (τάξης $10e-14$ και $10e-13$), το οποίο υποδηλώνει ότι ο πίνακας Q είναι πολύ κοντά σε ορθογώνιο πίνακα. Το γεγονός αυτό είναι επιθυμητό αφού ο πίνακας Q πρέπει να είναι ορθογώνιος στο τέλος της παραγοντοποίησης QR.

Σφάλμα $\|A * R^{-1} - Q\|_{\infty}$: Τα σφάλματα αυτά είναι επίσης εξαιρετικά μικρά (τάξης $10e-14$), που επιβεβαιώνουν το γεγονός ότι η προσεγγιστική λύση είναι πολύ κοντά στην ακριβή λύση, το οποίο επαληθεύει την υψηλή ακρίβεια της μεθόδου παραγοντοποίησης QR.

Αριθμός συνθήκης πίνακα R - cond(R): Οι αριθμοί συνθήκης είναι κοντά στο 2, ανεξαρτήτως του μεγέθους του πίνακα. Αυτό σημαίνει πως η μέθοδος είναι αριθμητικά σταθερή και η παραγοντοποίηση είναι αποτελεσματική και ακριβής.

Χρόνος εκτέλεσης – CPU time: Παρατηρούμε ότι ο χρόνος εκτέλεσης αυξάνεται αρκετά καθώς αυξάνεται το μέγεθος των δεδομένων (διάσταση του πίνακα). Αυτό συμβαίνει επειδή η πολυπλοκότητα της μεθόδου QR, είναι $O(n^3)$.

Συνοψίζοντας, η μέθοδος παραγοντοποίησης QR με τον μετασχηματισμό Householder είναι πολύ αποτελεσματική και σταθερή για το Pei matrix, με σφάλματα που είναι πολύ μικρά, σχεδόν αμελητέα. Ωστόσο, η αποτελεσματικότητα της παραγοντοποίησης επηρεάζεται σημαντικά από το μέγεθος των δεδομένων, με χρόνους εκτέλεσης που αυξάνονται δραματικά καθώς μεγαλώνει η διάσταση του πίνακα.