Algoritmi Aproximativi

Theodor Negrescu

(1p oficiu)

1 Knapsack

1. Fie S un șir de numere naturale, și K un număr natural, cu $K \geq s_i \ \forall \ s_i \in S$.

a) (1p) Scrieți un algoritm pseudo-polinomial care găsește suma maximă, dar care să fie $\leq K$, ce poate fi formată din elementele din S. Indicați complexitatea de timp/spațiu a algoritmului propus de voi și justificați de ce acesta este corect (de ce soluția găsită este optimă).

Vezi knapsack_optimal din homework_knapsack.c pentru implementare.

Se folosește relația de recurență:

$$\text{DP}[i][w] = \begin{cases} 0, & \text{dacă } i = 0 \\ \text{DP}[i-1][w], & s_i > w \\ \max(\text{DP}[i-1][w], \text{DP}[i-1][w-s_i] + s_i), & \text{altfel} \end{cases}$$

Se demonstrează prin inducție că $\text{DP}[n][w]$ este valoarea soluției optime care poate fi obținută cu primele n elemente și cu maxim w greutate.

- În cazul $i = 0$, nu avem niciun element, deci singura posibilitate este 0.
- În cazul $s_i > w$, nu putem adăuga elementul s_i la sumă, deci soluția este la fel ca și dacă nu am avea acces la elementul s_i, adică $\text{DP}[i-1][w]$.
- În cazul general, putem alege să adăugăm elementul s_i la sumă sau nu.
  - Dacă este optim să adăugăm elementul s_i, atunci cu restul capacității vom alege optim elementele între $1, 2, \ldots, i-1$, ceea ce se găsește în $\text{DP}[i-1][w-s_i]$.
  - Dacă nu, atunci la fel ca la cazul $s_i > w$, soluția este $\text{DP}[i-1][w]$.

  Vom alege maximul dintre valorile obținute în cele două cazuri.

Algoritmul va returna $\text{DP}[n][K]$.

Complexitatea de timp este $O(nK)$.

Deoarece relația de recurență folosește doar ultimul rând, complexitatea de spațiu este $O(K)$.

b) (1p) Scrieți un algoritm aproximativ care calculează o sumă cel puțin pe jumătate de mare ca cea optimă, dar rulează în timp $O(n)$ și complexitate spațiu $O(1)$.

Vezi knapsack_approximation din homework_knapsack.c pentru implementare.

Algoritmul rulează în timp $O(n \log n)$, nu $O(n)$.

Nu am găsit o soluție care să ruleze în timp $O(n)$.

Nu se poate folosi radix sort, deoarece are complexitatea de spațiu $O(n)$ pentru numere mari.

2 Load Balance

1. Fie o iterație a problemei Load Balancing (cursul 2, slide-ul 16) pentru 2 mașini. La seminarul de algoritmi aproximativi unul dintre studenți propune un algoritm de rezolvare și susține că acesta este 1.1 aproximativ. El rulează algoritmul pe un set de n activități și obține o încărcătură de 80 pe una dintre mașini, respectiv 120 pe cealaltă. Este posibil ca factorul lui de aproximare să fie corect...

a) (0,5p) ...ținând cont că rezultatul obținut anterior a fost făcut pe un set de activități, fiecare cu timpul de lucru cel mult 100?

Da.

Exemplu: $\{30, 80, 90\}$ se poate împărți în $\{30, 80\}$ și $\{90\}$, sau $\{30, 90\}$ și $\{80\}$. $\text{OPT} = 110$, iar $\text{ALG} = 120$. $120 < 1,1 \cdot 110$.

b) (0,5p) ...ținând cont că rezultatul obținut anterior a fost făcut pe un set de activități, fiecare cu timpul de lucru cel mult 10?

Nu.

Fie două seturi de activități, cu $\text{sum}(S_1) = 80$ și $(S_2) = 120$, $s_i \leq 10 \; \forall \; s_i \in S_1 \lor s_i \in S_2$.

Presupunem că nu există $S \in S_2$ astfel încât $\text{sum}(S) \in \{11, \ldots, 29\}$, fiindcă altfel am putea construi o soluție ALG_2 cu $\frac{\text{ALG}}{\text{ALG}_2} > 1.1$, mutând activitățile din S în S_1.

Deci $6, \ldots, 10$ nu apar de două ori în S_2, $5, 4$ nu apare de trei ori, 3 nu apare de patru ori, 2 nu apare de sase ori, iar 1 nu apare de 11 ori.

$(\nexists S \implies \text{sum}(S_2) \leq 87 \land \text{sum}(S_2) = 120 \implies \perp) \implies \exists S$. (Contradicție)

2. Fie ALG1 și ALG2 doi algoritmi de rezolvare pentru aceeași problemă de minimizare. ALG1 este un algoritm 2-aproximativ, respectiv ALG2 este un algoritm 4-aproximativ. Stabiliți valoarea de adevăr a următoarelor propoziții, dând și o scurtă justificare:

a) (0,5p) Există cu siguranță un input I pentru care

$$\text{ALG2}(I) \geq 2 \cdot \text{ALG1}(I)$$

Fals. Deoarece factorul de aproximare nu este tight-bound, este posibil ca, de exemplu,

$$\text{ALG2}(I) = \text{ALG1}(I) = \text{OPT}(I) \; \forall \; I$$

b) (0,5p) Nu există niciun input I pentru care

$$\text{ALG1}(I) \geq 2 \cdot \text{ALG2}(I)$$

Fals. Este posibil că există I pentru care

$$\text{ALG1}(I) = 2 \cdot \text{OPT}(I)$$

$$\text{ALG2}(I) = \text{OPT}(I)$$

3 Traveling Salesman Problem

1. Considerăm o variantă a TSP, în care toate muchiile au ponderea 1 sau 2.

a) (1p) Arătați că problema rămâne NP-hard pentru aceste instanțe.

Fie o problemă de ciclu Hamiltonian $G = (V, E)$.

Se construiește o problemă TSP $G' = (V, E')$ cu $E' = \{(e, 1) \mid e \in E\} \cup \{(e, 2) \mid e \notin E\}$.

Dacă există un ciclu Hamiltonian în G, atunci există un tur de cost $|V|$ în G', altfel costul minim este $|V| + 1$.

Dacă algoritmul găsește un tur de cost $|V|$ în G', atunci există un ciclu Hamiltonian corespunzător în G.

Deoarece problema ciclului Hamiltonian (NP-hard) se reduce la problema TSP cu muchii de cost 1 sau 2, aceasta este și ea NP-hard.

b) (0p) Arătați că aceste ponderi satisfac în continuare inegalitatea triunghiului.

$$c \leq 2$$

$$a + b \geq 1 + 1 = 2$$

$$a + b \geq c$$

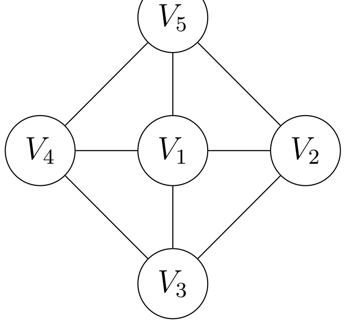
c) (1p) Algoritmul descris în curs (cursul 3, slides 18-19) oferă o aproximare de ordin 2 pentru forma generală a TSP (pentru instanțele care respectă inegalitatea triunghiului). Verificați dacă în această instanță a problemei, algoritmul din curs este $\frac{3}{2}$-aproximativ.

Se va demonstra că factorul de aproximare 2 este tight-bound.

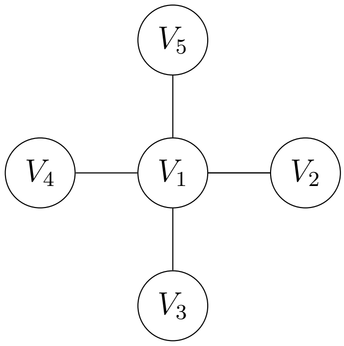
Fie G_n un graf complet cu n noduri, unde toate muchiile cu V_i au cost 1, muchiile $(V_2, V_3), (V_4, V_5), \ldots, (V_n, V_2)$ au cost 1, iar restul au cost 2.

Exemplu - Muchiile cu cost 1 pentru G_4:

(muchiile cu cost 2 sunt omise pentru spațiu)



Este posibil să se aleagă pentru MST muchiile $(V_1, V_2), (V_1, V_3), \ldots$:



Este posibil să se aleagă ca start V_1 și să se meargă în ordinea:

$$V_1, V_2, V_4, V_6, \dots, V_3, V_5, V_7, \dots\ V_1$$

.

Dar există soluție optimă doar cu muchii de cost 1:

$$V_1, V_2, V_3, \dots, V_n, V_1$$

.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{ALG}}{\text{OPT}} = \frac{1 + (n-1) * 2 + 1}{n+1} = 2$$

.

Deci factorul de aproximare 2 este tight-bound. Deoarece G_n are doar muchii de cost 1 sau 2, tight-bound-ul se aplică pentru TSP cu muchii de cost 1 sau 2.

(Nu este specificat cum se alege MST-ul și nodul start. Dacă este aleator, atunci e posibil să se aleagă soluția de cost $2n$. Dacă alegerea e bazată pe ordinea nodurilor, i.e. se alege mereu turul $V_1, V_2, V_3, \dots, V_n, V_1$, atunci se pot reordona nodurile pentru a păcăli algoritmul să aleagă soluția de cost $2n$.)

4 Vertex Cover

Fie $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ o o mulțime de variabile boolene. Numim formulă booleană (peste mulțimea X) în Conjunctive Normal Form (CNF) o expresie de forma $C_1 \wedge C_2 \wedge \dots \wedge C_m$, unde fiecare C_i este o disjuncție a unui număr de variabile.

Ne interesează să aflăm numărul minim de variabile care trebuie să aibă valoarea *true* astfel încât expresia să fie *true*.

Fie următorul algoritm pentru problema de mai sus în varianta în care fiecare clauză are exact trei variabile (numită 3CNF):

4.1 Greedy-3CNF

1. Fie $C = \{C_1, C_2, \dots, C_m\}$ mulțimea de predicate, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ mulțimea de variabile.

2. Cât timp $C \neq \emptyset$:

a) Alegem aleator un $C_i \in C$.

b) Fie x_j o variabilă din C_i.

c) $x_j \leftarrow true$.

d) Eliminăm din C toate clauzele care conțin x_j.

3. Soluția este mulțimea de variabile care au fost setate la *true*.

4.2 Cerințe

a) (0,5p) Analizați factorul de aproximare (worst case) al algoritmului.

$$\text{Fie } C = \bigwedge_{i=3}^{n} (x_1 \vee x_2 \vee x_i)$$

Este posibil ca algoritmul să aleagă variabilele $\{x_3, x_4, \ldots, x_n\}$, dacă alege mereu a treia variabilă din fiecare clauză, dar soluția optimă este $\{x_1\}$ sau $\{x_2\}$.

$\lim_{n\to\infty} \frac{\text{ALG}}{\text{OPT}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n-2}{1} = \infty$.

Soluția dată de algoritm poate fi arbitrar de rea, deci nu există un factor de aproximare.

b) (0,5p) Modificați algoritmul de mai sus, astfel încât acesta să fie un algoritm 3-aproximativ pentru problema inițială (și justificați).

În loc de a alege o singură variabilă, se aleg toate variabilele dintr-o clauza aleasă aleator.

Demonstrație (similar cu cea de la curs)

Algoritmul este similar cu cel de la curs pentru Vertex Cover, dar muchiile au trei noduri în loc de două.

Lemă Fie C^* o mulțime de clauze disjuncte, fie S o mulțime de variabile care rezolvă problema. S trebuie să acopere toate clauzele din C^*.

Fiecare variabilă din S acoperă cel mult o clauză din C^*. Fie există o singură variabilă pentru fiecare clauză din C^*, fie unele clauze sunt acoperite de mai multe variabile.

Deci $|S| = \text{OPT} \geq |C^*|$.

Teorema Fie C^* mulțimea de clauze alese aleator de algoritm, S mulțimea de variabile alese de algoritm.

Deoarece la fiecare pas se elimină toate variabilele în comun cu clauza aleasă, C^* este o mulțime de clauze disjuncte, deci $\text{OPT} \geq |C^*|$.

Pentru fiecare clauză aleasă, se adaugă 3 variabile, deci $|S| = 3|C^*|$. Substituind în $\text{OPT} \geq |C^*|$, obținem $\text{OPT} \geq \frac{1}{3}|S|$.

$3 \cdot \text{OPT} \geq |S|$, deci algoritmul este 3-aproximativ.

c) (0,5p) Reformulează problema de mai sus sub forma unei probleme de programare liniară (cu numere reale).

Minimizăm $x_1 + x_2 + \cdots + x_n$, folosind constrângerile generate din clauza C:

$$\forall (x_1 \lor x_2 \lor x_3) \in C,\ x_1 + x_2 + x_3 \geq 1$$
$$x_i \in [0, 1]\ \forall\, i \in \{1, 2, \dots, n\}$$

d) (0,5p) Dați o soluție 3-aproximativă pentru problema de programare liniară formulată la sub-punctul anterior.

Rulăm simplex pe problema de programare liniară formulată anterior.

Pentru a converti soluția problemei de programare liniară în soluția problemei inițiale, se va seta $X_i \leftarrow \textit{true}$ dacă și numai dacă $x_i \geq \frac{1}{3}$.

Soluția S aleasă va fi o soluție pentru clauză, deoarece $x_1 + x_2 + x_i \geq 1 \implies x_i \geq \frac{1}{3}$ pentru cel puțin un i.

$$\mathrm{ALG} = \sum_{i=1}^{n} \begin{cases} 1, & x_i \geq \frac{1}{3} \\ 0, & x_i < \frac{1}{3} \end{cases} \leq 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \leq 3 \cdot \mathrm{OPT}$$