Cursul #2

• Probabilitatea de numărare pe o mulțime finită cu experimente de probabilitate egală, p

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2 \dots \omega_n\} = \bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}$$

Cum $(\{\omega_i\})_{i=\overline{1,n}}$ disj. 2 câte 2,

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} \{\omega_i\}\Big) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(\{\omega_i\}) = n \cdot p$$

$$\Rightarrow p = \frac{1}{n}$$

Fie E eveniment cu t experimente

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{\omega_k \in E} \underbrace{\mathbb{P}(\{\omega_k\})}_{\frac{1}{n}} = \frac{t}{n} = \frac{\#\text{ Exp. } E}{\#\text{ Exp. totale}}$$

• Morala: Această probabilitate poate fi folosită numai pentru experimente în care rezultatele au ac. probabilitate (e.g. zar sau monedă cinstită)

- Proprietăți

i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

ii) $\mathbb{P}(A^c) = 1 - \mathbb{P}(A)$

iii) $A \subseteq B \Rightarrow \mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$

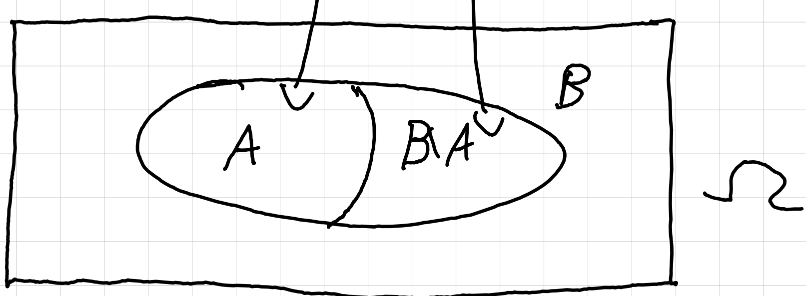
iv) $\mathbb{P}(A \cup B) = ?$

Demonstrație:

i) $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\Omega \cup \emptyset) = \mathbb{P}(\Omega) + \mathbb{P}(\emptyset) = 1 + \mathbb{P}(\emptyset)$

ii) $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \cup A^c) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(A^c)$

iii) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cup (B \setminus A)) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A)$

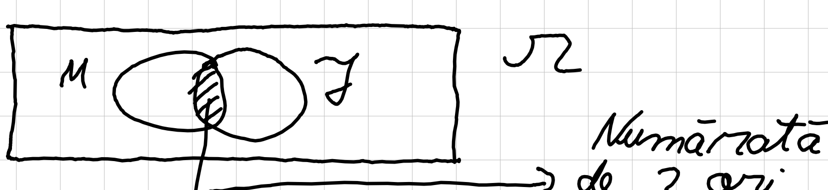


• Exemplu: În timpul lucrărilor de restaurare a Universității din București, curentul este întrerupt miercuri cu probabilitatea 0.7 și joi cu probabilitatea 0.5. Care este probabilitatea să se întrerupă curentul miercuri sau joi, știind că probabilitatea să se întrerupă și miercuri și joi este 0.35?

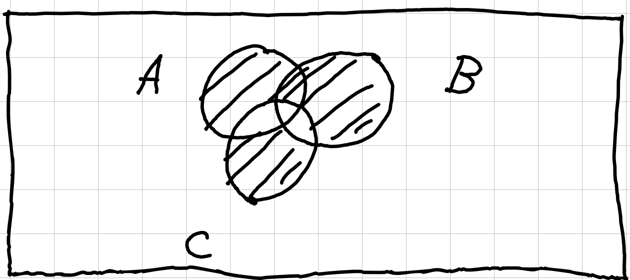
M = „Curentul se întrerupe miercuri"

J = „Curentul se întrerupe joi"

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(M \cup J) &= \mathbb{P}(M \setminus (M \cap J)) + \mathbb{P}(J \setminus (M \cap J)) \\
&\quad + \mathbb{P}(M \cap J) \\
&= \mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(J) - \mathbb{P}(M \cap J) \\
&= 0.85
\end{aligned}
$$



- $\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = ?$



$$\mathbb{P}(A \cup B \setminus ((A \cup B) \cap C)) + \mathbb{P}(C \setminus (A \cup B) \cap C)$$
$$+ \mathbb{P}((A \cup B) \cap C)$$

$$= \mathbb{P}(A \cup B) - \mathbb{P}((A \cap C) \cup (B \cap C))$$
$$+ \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(\cancel{(A \cap C)} \cup (B \cap C))$$
$$+ \mathbb{P}(\cancel{(A \cap C)} \cup (B \cap C))$$

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C)$$
$$- \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C)$$
$$+ \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$$

- Temă: $\mathbb{P}\left(\bigcup_{n \geq 1} A_n\right) = ?$ Hint: Inducție

I.2) Probabilități condiționate. Independență

• Continuare exemplu laborator:
Care este probabilitatea să formăm o „poartă în casă", știind că primul zar a căzut 6?

$\Omega = \{(i,j) \mid i,j=\overline{1,6}\}$ $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

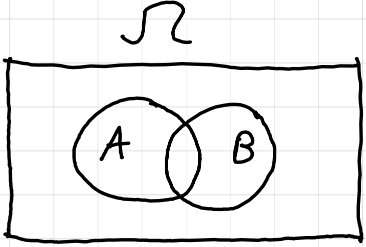
$$\mathbb{P}(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{|A|}{36}$$

$A = \{(i,j) \mid |i-j|=2,\ i,j=\overline{1,6}\} \cup \{(i,i) \mid i=\overline{1,6}\}$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{14}{36} = \frac{7}{18}$$

$B = \{(6,j) \mid j=\overline{1,6}\}$ „Primul zar e 6"

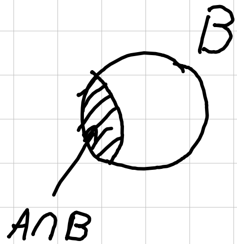
$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{|A\cap B|}{|\Omega \cap B|} = \frac{|A\cap B|}{|B|} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} < \mathbb{P}(A)$$



Când B e sigur $\longrightarrow$

Ω devine B

A devine $A \cap B$



• Pentru ce valori ale primului zar avem șansele cele mai mari să obținem poartă în casă?

B_i = „Primul zar e i", $i = \overline{1,6}$

$P(A \mid B_1) = \frac{1}{3}$ $\quad P(A \mid B_2) = \frac{1}{3}$ $\quad P(A \mid B_3) = \frac{1}{2}$

$P(A \mid B_4) = \frac{1}{2}$ $\quad P(A \mid B_5) = \frac{1}{3}$ $\quad P(A \mid B_6) = \frac{1}{3}$

• Definiție (Probabilități condiționate)

Numim probabilitatea ca A să se întâmple, știind că B s-a întâmplat ($\mathbb{P}(B) > 0$) probabilitatea condiționată

$$\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} \Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A|B) \cdot \mathbb{P}(B)$$

• Definiție (Independență)

Spunem că evenimentul A este independent de evenimentul B dacă B nu afectează probabilitatea lui A

$$\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$$

Notație: $A \perp\!\!\!\perp B$

• Definiție echivalentă

$$A \perp\!\!\!\perp B \Leftrightarrow \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$$

• Observație: Relația de independență este simetrică: $A \perp\!\!\!\perp B \iff B \perp\!\!\!\perp A$

• Exemple

i) Arunc de 2 ori o monedă cinstită. Este evenimentul de a obține cap în prima aruncare independent de evenimentul de a obține cap în a doua aruncare? Dar dacă moneda e măsluită și cade cap cu probabilitate $p \in [0, 1]$?

$\Omega = \{C, P\}^2 \qquad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$C_1 = \{(C, x) \mid x \in \Omega\} \quad \mathbb{P}(C_1) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$C_2 = \{(x, C) \mid x \in \Omega\} \quad \mathbb{P}(C_2) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

$\frac{1}{4} = \mathbb{P}(C_1 \cap C_2) = \mathbb{P}(C_1) \cdot \mathbb{P}(C_2) \Rightarrow C_1 \perp\!\!\!\perp C_2$

ii) Ce secvență este mai probabilă?

C C C C C C

C P C P C P

P P C C C P

Toate au probabilitate $\frac{1}{2^6}$

iii) Aruncăm cu două zaruri și considerăm evenimentele

$A =$ „ Primul e ≤ 2 "

$B =$ „ Suma lor e 7 "

$C =$ „ Al doilea e par "

Care din ele sunt independente?

$A \perp\!\!\!\perp B$? $A \perp\!\!\!\perp C$? $B \perp\!\!\!\perp C$?

$\Omega = \{(i,j) \mid i,j = \overline{1,6}\}$ $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36} \quad \forall i,j = \overline{1,6} \Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$

$A = \{1,2\} \times \{1,2 \ldots 6\}$ $\mathbb{P}(A) = \frac{1}{3}$

$B = \{(1,6), (2,5) \ldots (6,1)\}$ $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{6}$

$C = \{1,2 \ldots 6\} \times \{2,4,6\}$ $\mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}$

$A \cap B = \{(1,6), (2,5)\}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{18} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$

$A \cap C = \{1,2\} \times \{2,4,6\}$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{6} = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(C)$

$B \cap C = \{(1,6), (3,4), (5,2)\}$, $\mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{12} = \mathbb{P}(B) \cdot \mathbb{P}(C)$

• Exemple probabilități condiționate 1

O statistică întocmită de CFR ne spune că 90% din trenuri pleacă la timp, 60% din trenuri nu întârzie pe drum, iar 55% din trenuri pleacă și ajung la timp. [A ajunge la timp: întârziere < 15 min.]

a) Sunt evenimentele plecării și ajungerii la timp independente?

b) Andrei îl așteaptă pe Mihai, care a plecat la timp cu trenul. Care e probabilitatea ca Mihai să ajungă la timp?

c) Andrei s-a întâlnit cu Mihai, care nu a avut întârzieri pe drum. Care e probabilitatea să fi plecat la timp?

$P =$ „Pleacă la timp" $\quad \mathbb{P}(P) = 0.9$

$A =$ „Ajunge fără întârzieri pe drum" $\mathbb{P}(A) = 0.6$

a) $\mathbb{P}(A \cap P) = 0.55 \neq 0.73 = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(P)$

b) $\mathbb{P}(A | P) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap P)}{\mathbb{P}(P)} = \dfrac{5.5}{9} = 0.6(1)$

c) $\mathbb{P}(P | A) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap P)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{0.55}{6} = 0.91(6)$

- Proprietăți

i) $A \perp\!\!\!\perp \emptyset$ și $A \perp\!\!\!\perp \Omega \quad \forall A \in \mathcal{F}$

$$0 = \mathbb{P}(A \cap \emptyset) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(\emptyset) = 0 \quad \checkmark$$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A \cap \Omega) = \mathbb{P}(A) \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\Omega)}_{1} \quad \checkmark$$

ii) $A \perp\!\!\!\perp A \iff \mathbb{P}(A) \in \{0, 1\}$

$\Updownarrow$

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A)^2$$

iii) Dacă $A \perp\!\!\!\perp B$,

$$\mathbb{P}(A \cap B) = 0 \iff \mathbb{P}(A) = 0 \text{ sau } \mathbb{P}(B) = 0$$

$$0 = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B) = 0$$

Disjunct $\neq$ Independent!

$\Downarrow$

Relație de dependență