Cursul # 4

I.3) Variabile aleatoare

• Exemplu

Aruncăm cu două zaruri în timpul unui joc de Catan. Care este probabilitatea ca suma zarurilor să fie egală cu 8?

$\Omega = \{1 \dots 6\}^2 \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) \quad \mathbb{P}(\{(i,j)\}) = \frac{1}{36}$

Definim $X((i,j)) := i + j \ \forall i, j = \overline{1,6}$

Ne interesează evenimentul

$A = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = 8\} = X^{-1}(\{8\}) = \{X = 8\}$

(Notații echivalente)

$\mathbb{P}(X = 8) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{5}{36} = \mathbb{P}(X = 6)$

$\mathbb{P}(X = 9) = \frac{4}{36} = \mathbb{P}(X = 5)$

. . .

• Definiție (Variabila aleatoare discretă)
Numim orice funcție definită pe Ω
$X : \Omega \to S$
ce ia un număr cel mult numărabil de valori o variabilă aleatoare discretă.

• Observație
De cele mai multe ori, ne interesează în practică mai mult valorile rezultate în urma unui fenomen aleator și probabilitățile lor decât fenomenul în sine.

• Definiție (Distribuția unei v. a. discrete)
Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sp. de probabilități și $X : \Omega \to S$ o v. a. discretă.
Funcția $\mu_X : \mathcal{P}(S) \to [0, 1]$

$$\mu_X(B) := P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}) = \mathbb{P}(X^{-1}(B)) = \mathbb{P}(X \in B)$$

se numește distribuția lui X.

• Observații

i) μ_X este probabilitate și $(S, \mathcal{P}(S), \mu_X)$ spațiu de probabilități. Fie $(A_n)_n$ disj. 2 câte 2

$$\begin{cases} \mu_X\left(\bigcup_n A_n\right) = \mathbb{P}(X \in \bigcup_n A_n) = \mathbb{P}\left(\bigcup_n \{X \in A_n\}\right) = \sum_n \mu(A_n) \\ \mu_X(S) = \mathbb{P}(X \in S) = 1 \end{cases}$$

ii) X face legătura între 2 spații de probabilități

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \xrightarrow{X} (S, \mathcal{P}(S), \mu_X)$$

iii) Cum S este cel mult numărabilă,

$$S = \{x_1, x_2 \dots x_n \dots\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{x_n\}$$

Fie $B \in \mathcal{P}(S) \Leftrightarrow B = \bigcup_{x_k \in B} \{x_k\}$

$$\mu_X(B) = \mu_X\left(\bigcup_{x_k \in B} \{x_k\}\right) = \sum_{x_k \in B} \mu_X(\{x_k\})$$

• Morala:

μ_X e unic determinată de $(\mu_X(\{x_n\}))_{n \geq 1}$!

• Continuare exemplu Catan: Care e probabilitatea ca suma zarurilor să fie un număr par?

$X : \Omega \to \{2, 3, \dots 12\}$

$\mu_X(B) = \mathbb{P}(X \in B)$

$\mu_X(\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}) = \mu_X(\{2\}) + \mu_X(\{4\})$
$+ \mu_X(\{6\}) + \mu_X(\{8\}) + \mu_X(\{10\}) + \mu_X(\{12\})$
$= \dfrac{2+6+10}{36} = \dfrac{1}{2}$

• Definiție (funcția de masă X)

Fie $X : \Omega \to S = \{x_1, x_2 \dots x_n \dots\}$ v.a. discretă

Funcția $p : S \to [0, 1]$

$$p(x_i) := \mu_X(\{x_i\}) = \mathbb{P}(X = x_i)$$

se numește funcția de masă a lui X.

• Observații

i) Funcția de masă, p, este definită pe mulțimea valorilor lui X, S, iar μ_X pe mulțimea evenimentelor $\mathcal{P}(S)$.

ii) Cum μ_X e determinată unic de p, e de ajuns să știm p pentru a identifica distribuția lui X

• Notație pentru distribuția unei variabile aleatoare discrete

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n & \cdots \\ p(x_1) & p(x_2) & \cdots & p(x_n) & \cdots \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{valori} \\ \text{probabilități} \end{array}$$

• Continuare exemplu Catan

$$X \sim \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ \frac{1}{36} & \frac{2}{36} & \frac{3}{36} & \frac{4}{36} & \frac{5}{36} & \frac{6}{36} & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \frac{3}{36} & \frac{2}{36} & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

• Proprietăți

i) $p(x_i) = \mu_X(\{x_i\}) = P(X = x_i) > 0,$

$\forall x_i \in S$

ii) $\sum_{i=0}^{+\infty} p(x_i) = \sum_{i=0}^{+\infty} \mu_X(\{x_i\}) = \mu_X\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} \{x_i\}\right)$

$= \mu_X(S) = \mathbb{P}(X \in S) = 1.$

• Q: Există variabile aleatoare discrete ce iau o infinitate de valori echiprobabile?

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n & \dots \\ c & c & & c & \end{pmatrix}$$

$p(x_n) = c \quad \forall n \geq 1.$ [Echiprobabile]

Ce valori poate lua constanta c?

$p(x_n) > 0 \Rightarrow c > 0$

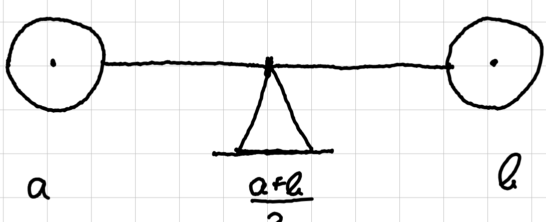
$$\sum_{n \geq 1} p(x_n) = 1 \iff \sum_{n \geq 1} c = 1.$$

Dar $\sum_{n \geq 1} c$ e divergentă $\forall c > 0$

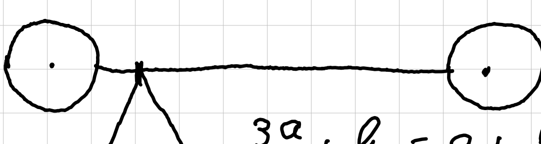
Concluzia: Nu există v.a. discrete ce iau o infinitate de valori cu aceeași probabilitate!

- Exemplu

O tijă rigidă și de masă neglijabilă unește două bile de masă egale aflate în a și b. Unde se află centrul de greutate al tijei?



Dar dacă bila din a e de 3 ori mai grea?



$$\frac{3a}{4} + \frac{b}{4} = a + \frac{b-a}{4}$$

• Definiție (Media unei v.a. discrete)

Fie X o v.a. discretă distribuită astfel

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n & \dots \\ p(x_1) & \dots & p(x_n) & \dots \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \, p(x_k)$$ „Media ponderată”

dacă $\exists \sum_{k=1}^{+\infty} x_k \, p(x_k) \in \mathbb{R}$

• Exemplu v.a. discretă fără medie

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n & \dots \\ c & \frac{c}{2^2} & \frac{c}{3^2} & \dots & \frac{c}{n^2} & \dots \end{pmatrix}, \; c > 0$$

i) $c = ?$ a. î. $p(n) = \frac{c}{n^2}$ să fie funcția de masă a lui X?

ii) $\mathbb{E}[X] = ?$

i) $p(n) = \frac{c}{n^2} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ ✓

$\sum_{n=1}^{+\infty} p(n) = 1 \iff \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{c}{n^2} = 1 \iff c \cdot \frac{\pi^2}{6} = 1$

(Basel problem)

$\Rightarrow c = \frac{6}{\pi^2}$ ✓

ii) $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} n \cdot \frac{6}{n^2 \pi^2} = \frac{6}{\pi^2} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = +\infty$

(Media nu există!)