# Cursul # 8

• Avem la dispoziție 10 000 de lei pe care vrem să îi investim în acțiunile companiilor Măr și Pară.

Știm că:

-> O acțiune Măr costă 10 lei, ne aduce un câștig mediu lunar de 1 leu cu o varianță de 96 de bani.

-> O acțiune Pară costă 50 lei, ne aduce un câștig mediu lunar de 5 lei cu o varianță de 1 leu.

-> Câștigurile asociate celor două acțiuni sunt independente.

Q: Câte acțiuni cumpărăm de la fiecare companie pentru a avea un câștig mediu lunar maxim cu o varianță minimă?

- Pp. cumpărăm $x$ acțiuni Măr și $y$ Pară

$$10x + 50y = 10000$$

$$5y = 1000 - x \Rightarrow \boxed{y = 200 - \frac{x}{5}}$$

acțiuni Pară

- Fie v.a. $M$ și $P$ a.î.

$$\mathbb{E}[M] = 1, \quad \mathbb{V}ar[M] = 0.96$$

$$\mathbb{E}[P] = 5, \quad \mathbb{V}ar[P] = 1$$

$$M \perp\!\!\!\perp P$$

- Câștigul mediu lunar al portofoliului

$$\mathbb{E}[xM + yP] = x + 5\left(200 - \frac{x}{5}\right) = 1000$$

$\forall x$ acțiuni Măr

- Avem doar de minimizat varianța

$$\mathbb{V}ar[xM + yP] = x^2\, \mathbb{V}ar[M] + \left(200 - \frac{x}{5}\right)^2 \mathbb{V}ar[P]$$

$$= \left(\frac{96}{100} + \frac{1}{25}\right) x^2 - 80x + 200^2$$ are min. în

$$x = \frac{80}{2} = 40 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = 40 \\ y = 196 \end{array}}$$

- Pentru $Y = \alpha \cdot X + \beta$,

  $\alpha >> 0$: Corelație pozitivă:

  Dacă $X$ e mare, $Y$ e mare

  $\alpha \approx 0$: $X$ și $Y$ aproape independente

  $\alpha << 0$: Corelație negativă:

  Dcă $X$ e mare, $Y$ e mic

- Vrem să cuantificăm în cazul general dependența a două variabile aleatoare $X$ și $Y$
- Vom pleca din nou de la modelul liniar, de data asta fără presupunerea că $X$ e independent de $Y$

$$\begin{array}{l} \mathbb{E}[X \cdot Y] = \alpha \cdot \mathbb{E}[X^2] + \beta \mathbb{E}[X] \\ \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = \alpha \cdot \mathbb{E}[X]^2 + \beta \mathbb{E}[X] \end{array} \Bigg| \ominus$$

$$\mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = \alpha \cdot \mathbb{V}ar[X]$$

$$\alpha = \frac{\mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]}{\mathbb{V}ar[X]}$$

- Definiție (Deviația standard a unei v.a.)

Fie $X$ v.a. discretă cu $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$

$\sigma_X := \sqrt{\mathbb{V}ar[X]}$ s.n. deviația standard $X$

$\left( \sqrt{\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2]} \approx \mathbb{E}[|X - \mathbb{E}[X]|] \right)$

- Cum $\mathbb{V}ar[Y] = \alpha^2 \cdot \mathbb{V}ar[X] \Rightarrow \sigma_Y = |\alpha| \cdot \sigma_X$

$$\alpha = \frac{\mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]}{\sigma_X \cdot \frac{\sigma_Y}{|\alpha|}}$$

$$\operatorname{sgn}(\alpha) = \frac{\mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

• Definiție (Covarianța a două v.a.)

Fie $X, Y$ două v.a. cu $E[X^2], E[Y^2] < +\infty$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$$
$$= \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

s.n. covarianța lui $X$ și $Y$

• Definiție (Coeficientul de corelație)

Fie $X, Y$ două v.a. cu $E[X^2], E[Y^2] < +\infty$

$$\rho(X,Y) := \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$$

s.n. coeficientul de corelație a lui $X$ și $Y$

• Proprietăți

Fie $X, Y$ două v.a. cu $E[X^2], E[Y^2] < +\infty$

i) $\mathbb{V}\mathrm{ar}[X+Y] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[Y] + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y)$

ii) $\rho(X,Y) \in [-1, 1]$

Demonstrație: Temă

Hint: Inegalitatea Cauchy - Schwarz