Cursul #5

- Exemplu

Arunc un zar și primesc pătratul rezultatului aruncării în lei. Cât câștig în medie?

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \mathbb{E}[X] = 3.5$$

$$X^2 \sim \begin{pmatrix} 1 & 4 & 9 & 16 & 25 & 36 \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \quad \mathbb{E}[X^2] = \frac{91}{6} \neq \mathbb{E}[X]^2 \,!$$

- Generalizare: Formula de transport

$$\mathbb{E}[f(X)] = \sum_{k=1}^{+\infty} f(x_k)\, p(x_k), \quad X \text{ v.a. cu medie}$$

• Observații

i) De regulă, $\mathbb{E}[f(X)] \neq f(\mathbb{E}[X])$ pentru funcții f neliniare.

ii) Fie X v.a. cu medie și $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = \sum_{k=1}^{+\infty} (a x_k + b) P(x_k)$$

$$= a \sum_{k=1}^{+\infty} x_k P(x_k) + b \underbrace{\sum_{k=1}^{+\infty} P(x_k)}_{1}$$

$$= a\,\mathbb{E}[X] + b$$

iii) Fie X, Y v.a. cu medie și $a, b \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[a \cdot X + b \cdot Y] = a\,\mathbb{E}[X] + b\,\mathbb{E}[Y]$$

(Media este liniară)

- Exemplu

Mihai pariază 1 dolar și Andrei 10 000 de dolari că o monedă cinstită va cădea cap. Ce au în comun și ce diferențiază cele 2 pariuri?

$$M \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad A \sim \begin{pmatrix} 10\,000 & -10\,000 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[M] = \mathbb{E}[A] = 0$$

A variază mult mai mult decât M!

- Definiție (Varianța unei v.a. discrete)

Fie X o v.a. discretă de medie $\mu := \mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[(X-\mu)^2]$$
$$= \mathbb{E}[X^2 - 2\mu X + \mu^2]$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2\mu X] + \mathbb{E}[\mu^2]$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mu\,\mathbb{E}[X] + \mu^2$$
$$= \mathbb{E}[X^2] - \mu^2$$

dacă $\exists\ \mathbb{E}[X^2] = \sum_n x_n^2\, p(x_n) < +\infty$

• Observație: Varianța nu este liniară!

i) $\mathrm{Var}[aX] = a^2\,\mathrm{Var}[X]$

ii) $\mathrm{Var}[X+b] = \mathrm{Var}[X]$

Demonstrație:

i) $\mathrm{Var}[aX] = \mathbb{E}[a^2X^2] - \mathbb{E}[aX]^2$

$$= a^2\left(\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\right)$$

$$= a^2\,\mathrm{Var}[X]$$

ii) $\mathrm{Var}[X+b] = \mathbb{E}[(X+b-\mathbb{E}[X+b])^2]$

$$= \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2]$$

$$= \mathrm{Var}[X]$$

• Definiție (Independența v.a. discrete)

Fie $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ spațiu de probabilități și $X : \Omega \longrightarrow S_X$, $Y : \Omega \longrightarrow S_Y$ v.a. discrete.

Spunem că X este independent de Y dacă

$$\mathbb{P}(X=x, Y=y) = \mathbb{P}(X=x)\cdot\mathbb{P}(Y=y) \quad \forall x\in S_X,\ y\in S_Y$$

Notație: $X \perp\!\!\!\perp Y$

• Proprietăți

Pe spațiul de probabilități $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$,

$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n & \dots \\ p_X(x_1) & & p_X(x_n) & \end{pmatrix}$$

$$Y \sim \begin{pmatrix} y_1 & \dots & y_n & \dots \\ p_Y(y_1) & & p_Y(y_n) & \end{pmatrix}$$

Dacă $X \perp\!\!\!\perp Y$,

i) $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$

ii) $\mathbb{V}ar[X + Y] = \mathbb{V}ar[X] + \mathbb{V}ar[Y]$

Demonstrație:

Definim $Z := X \cdot Y$. Valorile lui Z sunt toate de forma $x_i \cdot y_j$ $\forall i, j \in \mathbb{N}^*$ cu probabilitățile:

$$\begin{aligned} P(Z = x_i \cdot y_j) &= \mathbb{P}(X = x_i, Y = y_j) \\ &= \mathbb{P}(X = x_i) \cdot \mathbb{P}(Y = y_j) \\ &= p_X(x_i) \cdot p_Y(y_j), \ \forall i, j \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

(din $X \perp\!\!\!\perp Y$)

$$Z \sim \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n & \cdots \\ \sum\limits_{\substack{i,j\in\mathbb{N}^* \\ x_i y_j = z_1}} P_X(x_i) P_Y(y_j) & \cdots & \sum\limits_{\substack{i,j\in\mathbb{N}^* \\ x_i y_j = z_n}} P_X(x_i) P_Y(y_j) & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} z_n \left(\sum_{\substack{i,j\in\mathbb{N}^* \\ x_i \cdot y_j = z_n}} P_X(x_i) P_Y(y_j) \right)$$

$$= \sum_{i,j\in\mathbb{N}^*} x_i \, y_j \, P_X(x_i) P_Y(y_j)$$

$$= \left[\sum_{i\in\mathbb{N}^*} x_i \, P_X(x_i) \right] \cdot \left[\sum_{j\in\mathbb{N}^*} y_j \, P_Y(y_j) \right]$$

$$= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$$

ii) $\mathbb{V}ar[X+Y] = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2$

$= \mathbb{E}[X^2] + \cancel{2\mathbb{E}[X\cdot Y]} + \mathbb{E}[Y^2] -$

$\mathbb{E}[X]^2 - \cancel{2\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]} - \mathbb{E}[Y]^2$

$= \mathbb{V}ar[X] + \mathbb{V}ar[Y] \qquad \square$

Tipuri de v.a. discrete

1) V.a. Bernoulli: Orice experiment a cărui rezultat poate fi etichetat cu „succes" sau „eșec" se numește experiment Bernoulli și se modelează cu o v.a. Bernoulli:

$X : \Omega \to \{0, 1\}$ unde $\begin{cases} 0 \equiv \text{„eșec"} \\ 1 \equiv \text{„succes"} \end{cases}$

$p_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = p \in [0, 1]$, $p_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = 1-p$

Deci $X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1-p & p \end{pmatrix}$

Notație: $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot (1-p) + 1 \cdot p = p$

$E[X^2] = 0^2 \cdot (1-p) + 1^2 \cdot p = p$

$Var[X] = E[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = p - p^2 = p(1-p)$

$\Downarrow$

Maximă pentru $p = \frac{1}{2}$ și inexistentă $p \in \{0, 1\}$

2) V.a. Binomiala: Numărul de succese în n experimente Bernoulli independente și de probabilitate p se modelează cu o v.a. binomială

$X : \Omega \to \{0, 1 \ldots n\}$

$P_X(0) = \mathbb{P}(X=0) = (1-p)^n$

$$P_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = p\,(1-p)\ldots(1-p)(1-p) + (1-p)\,p \ldots (1-p)(1-p) + \cdots + (1-p)(1-p)\ldots(1-p)\,p$$

$$= n \cdot p^1 (1-p)^{n-1}$$

$P_X(k) = \mathbb{P}(X=k) = C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} \quad \forall k = \overline{0,n}$

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & \ldots & k & \ldots & n \\ (1-p)^n & \ldots & C_n^k p^k (1-p)^{n-k} & \ldots & p^n \end{pmatrix}$$

Notație: $X \sim Bin(n, p)$

• Q: Este p_X funcție de masă?

$p_X(k) > 0 \quad \forall k = \overline{0,n}$ ✓

$$\sum_{k=0}^{n} p_X(k) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k} = (p+1-p)^n = 1 \checkmark$$

↪ Am folosit binomul lui Newton

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \, a^k \, b^{n-k}$$

• $$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{n} k \, C_n^k \, p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{n!}{(n-k)! \, k!} \, p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= n \sum_{k=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-k)!(k-1)!} \, p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} C_{n-1}^{k-1} \, p^{k-1} (1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=0}^{n-1} C_{n-1}^{k} \, p^{k} (1-p)^{n-1-k}$$

$$= np\,(1+1-p)^{n-1} = np$$