Cursul #3

• Exemplul 1

Pentru examenul de probabilități și statistică, Andrei învață un singur capitol din 14. Examenul se desfășoară astfel: Mihai alege aleator o întrebare din cele 14 capitole, cu 5 variante de răspuns, din care doar una este corectă. La corectare, Mihai vede că Andrei a dat răspunsul corect. Care e probabilitatea ca Andrei să nu fi știut, dar să fi ghicit?

A = „Andrei știe răspunsul" $P(A) = \frac{1}{14}$

C = „Andrei bifează răspunsul corect"

$P(C \mid A) = 1$ și $P(C \mid A^c) = \frac{1}{5}$

Ne interesează $\mathbb{P}(A^c \mid C) = ?$

Andrei nu știe | Bifează corect

$$\mathbb{P}(A^c \mid C) = \frac{\mathbb{P}(A^c \cap C)}{\mathbb{P}(C)} = \mathbb{P}(C \mid A^c) \cdot \frac{\mathbb{P}(A^c)}{\mathbb{P}(C)}$$

Cum îl aflăm pe $\mathbb{P}(C)$?

$$\underbrace{(C \cap A)}_{A} \cup (C \cap A^c) = C$$

$\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C \cap A^c)$, deoarece A, $C \cap A^c$ disj.

$$= \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(C \mid A^c) \cdot \mathbb{P}(A^c)$$

$$= \frac{1}{14} + \frac{1}{5} \cdot \frac{13}{14} = \frac{18}{70} = \frac{9}{35}$$

Putem calcula acum

$$\mathbb{P}(A^c \mid C) = \frac{1}{5} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{35}{9} = \frac{91}{126} \approx 0.7222$$

(72.22%)

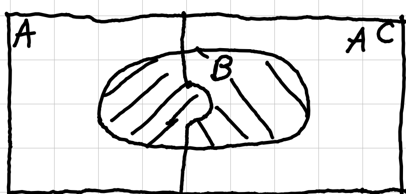
• Observații:

i) $\mathbb{P}(B|A) = \dfrac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)} = \dfrac{\mathbb{P}(A|B)\cdot \mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(A)}$

(Formula lui Bayes)

ii) Fie $A \in \mathcal{F}$. A și A^c partiție Ω

Pentru $\forall B \in \mathcal{F}$, $A\cap B$ și $A^c \cap B$ partiție B



$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A\cap B) + \mathbb{P}(A^c \cap B)$

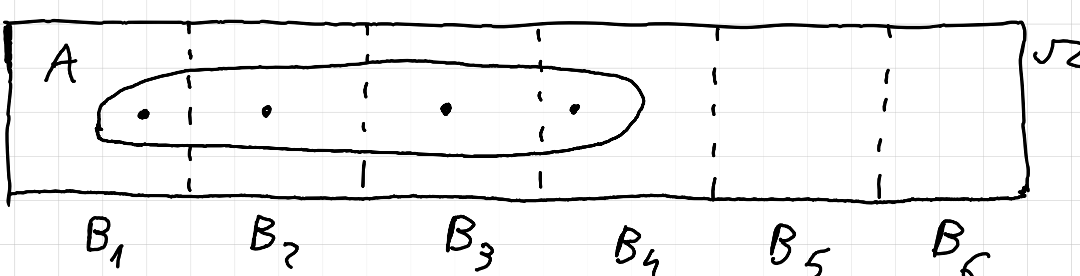
$= \mathbb{P}(B|A)\cdot \mathbb{P}(A) +$

$\mathbb{P}(B|A^c)\cdot \mathbb{P}(A^c)$

iii) Generalizare: Formula probabilității totale.

Fie $(B_k)_{k=\overline{1,n}}$ partiție Ω. Atunci:

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A\cap B_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A|B_k)\cdot \mathbb{P}(B_k)$$



• Exemplul 2

În Iunie 2020, se estimează că 0.1% din populație avea Covid. Un test rapid are următoarele caracteristici:

i) Din 100 bolnavi testați, 98 sunt depistați pozitiv. [Sensibilitatea testului]

ii) Din 100 sănătoși testați, 95 sunt depistați negativ. [Specificitatea testului]

Mihai se testează și iese pozitiv. Care este probabilitatea să aibe Covid?

B = „Mihai are Covid"

+ = „Testul iese pozitiv"

$P(B) = \frac{1}{1000}$, $P(+|B) = 0.98$, $P(+|B^C) = 0.05$

Ne interesează $P(B|+) = ?$

$$P(B|+) = \frac{P(+|B) \cdot P(B)}{P(+)}$$

$$= \frac{P(+|B) \cdot P(B)}{P(+|B) \cdot P(B) + P(+|B^C) \cdot P(B^C)}$$

$$\mathbb{P}(B \mid +) = \frac{0.98 \cdot \frac{1}{1000}}{0.98 \cdot \frac{1}{1000} + 0.05 \cdot \frac{999}{1000}}$$

$$= \frac{98}{98 + 5 \cdot 999} = \frac{98}{5093} \simeq 0.019$$

(1.9%)

- Ajutor pentru intuiție: luăm eșantion 100.000

$\left\{ \begin{array}{l} 100 \text{ bolnavi} \\ 99\,900 \text{ sănătoși} \end{array} \right.$ $\qquad \mathbb{P}(B) = \dfrac{\#\text{bolnavi}}{\#\text{total}} = \dfrac{1}{1000}$

$\downarrow$ Testăm eșantionul și reținem doar cei depistați pozitiv

$\left\{ \begin{array}{l} 98 \text{ bolnavi} \\ 4995 \text{ sănătoși} \end{array} \right.$ $\qquad \mathbb{P}(B \mid C) = \dfrac{\#\text{bolnavi}}{\#\text{pozitivi}} = \dfrac{98}{5093} \simeq 0.019$

$\vee$!

$\mathbb{P}(B)$

- Morala: Testele nu îți spun dacă ai o boală, sau care sunt șansele să ai o boală, ci îți actualizează șansele de a avea o boală.

• Definiție (Independență condiționată)

A și B sunt independente condiționat de C dacă

$$P(A \mid B \cap C) = P(A|C)$$
$$\Updownarrow$$
$$\frac{P(A \cap B|C)}{P(B|C)} = P(A|C)$$
$$\Updownarrow$$
$$P(A \cap B|C) = P(A|C) \cdot P(B|C)$$

Notație:

$A \perp\!\!\!\perp B \mid C$

• Continuare exemplu test: Care e probabilitatea să aibe Covid, știind că are 2 teste pozitive?

$$P(B \mid +_1 +_2) = P(+_1 +_2 \mid B) \cdot \frac{P(B)}{P(+_1 +_2)}$$

Acum avem $+_1 \perp\!\!\!\perp +_2 \mid B$

$$P(+_1 +_2 \mid B) = P(+_1 \mid B) \cdot P(+_2 \mid B) = \left(\frac{98}{100}\right)^2$$

$$P(+_1 +_2) = \underbrace{P(+_1 +_2 \mid B)}_{= \left(\frac{98}{100}\right)^2} \cdot \underbrace{P(B)}_{= \frac{1}{1000}} + \underbrace{P(+_1 +_2 \mid B^C)}_{= \left(\frac{5}{100}\right)^2} \cdot \underbrace{P(B^C)}_{= \frac{999}{1000}}$$

$$P(B \mid t_1 t_2) = \left(\frac{98}{100}\right)^2 \cdot \frac{\frac{1}{1000}}{\left(\frac{98}{100}\right)^2 \cdot \frac{1}{1000} + \left(\frac{5}{100}\right)^2 \cdot \frac{999}{1000}}$$

$$= \frac{98^2}{98^2 + 25 \cdot 999} \simeq 27.77\%$$

- Temă: $P(B \mid t_1 t_2^c) = ?$

  $P(B^c \mid t_1^c t_2^c) = ?$