Cursul # 7

4) V. a. Poisson: Numărul de evenimente rare (ce nu se pot întâmpla simultan) într-o perioadă fixă de timp se modelează cu o v. a. Poisson

$X : \Omega \to \mathbb{N}$

$p_X(n) = \mathbb{P}(X = n) = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^n}{n!}, \ \forall n \in \mathbb{N}$

Notație: $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$

- Q: Este p_X funcție de masă?

$$\sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda} = 1$$

- Reamintire: Serii Taylor

Pentru $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de clasă $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, $a \in \mathbb{R}$

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

- Exemplu: Pentru $f(x) = \sin(x)$, și $a=0$,

$$\sin(x) = \sin(0) + \cos(0)x - \sin(0)\frac{x^2}{2} - \cos(0)\frac{x^3}{3!}\dots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

- Ne interesează $f(\lambda) := e^\lambda \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}_+)$ în $a=0$:

$$f(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} f^{(n)}(0) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!}$$

- $$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=0}^{+\infty} n \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = \lambda$$

- $$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1) e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} + \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} n e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!}}_{\mathbb{E}[X]}$$

$$= \lambda^2 e^{-\lambda} \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-2}}{(n-2)!}}_{e^\lambda} + \mathbb{E}[X] = \lambda^2 + \lambda$$

- $\mathbb{V}ar[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \lambda$
- Proprietate

Fie $X \sim \text{Poisson}(\alpha)$, $Y \sim \text{Poisson}(\beta)$ a.î. $X \perp\!\!\!\perp Y$. Atunci $X + Y \sim \text{Poisson}(\alpha + \beta)$

Demonstrație:

Observăm întâi că

$$\{X+Y=n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{X+Y=n\} \cap \{X=i\}$$

$$= \bigcup_{i=0}^{n} \{X=i\} \cap \{Y=n-i\}$$

$$\mathbb{P}(X+Y=n) = \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i, Y=n-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} \mathbb{P}(X=i) \cdot \mathbb{P}(Y=n-i)$$

$$= \sum_{i=0}^{n} e^{-\alpha} \frac{\alpha^i}{i!} e^{-\beta} \frac{\beta^{n-i}}{(n-i)!}$$

$$= e^{-\alpha+\beta} \cdot \frac{1}{n!} \sum_{i=0}^{n} \frac{n!}{i!(n-i)!} \alpha^i \beta^{n-i}$$

$$= e^{-\alpha+\beta} \frac{(\alpha+\beta)^n}{n!} \qquad \square$$

• Problema Lotto (6/49)

Din $N = 49$ de numere, $K = 6$ sunt câștigătoare. Jocul constă în a alege $n = 6$ din cele N numere. Care e probabilitatea să nimerim k nr. câștigătoare din cele n alese?

$K = 6$ numere câștigătoare

$N - K = 43$ numere necâștigătoare

$X : \Omega \longrightarrow \{0, 1 \dots 6\}$

$$P_X(k) = P(X = k) = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n} \quad \forall k \in \{0, 1 \dots 6\}$$

Notație: $X \sim Hypergeom\,(N = 49, K = 6, n = 6)$

$$P_X(0) = \frac{C_6^0 \cdot C_{43}^6}{C_{49}^6} = \frac{\dfrac{43!}{\cancel{6}! \cdot 37!}}{\dfrac{49!}{\cancel{6}! \cdot 43!}} = \frac{43! \cdot 43!}{37! \cdot 49!}$$

$$= \frac{38 \cdot 39 \cdot 40 \cdot 41 \cdot 42 \cdot 43}{44 \cdot 45 \cdot 46 \cdot 47 \cdot 48 \cdot 49} \simeq 0.43 \quad (43\%)$$

$$p_X(1) = \frac{C_6^1 \cdot C_{43}^5}{C_{49}^6} \simeq 0.413 \quad (41,3\%)$$

$$p_X(2) = \frac{C_6^2 \cdot C_{43}^4}{C_{49}^6} \simeq 0.132 \quad (13,2\%)$$

$$p_X(3) = \frac{C_6^3 \cdot C_{43}^3}{C_{49}^6} \simeq 0.017 \quad (1,7\%)$$

$$\vdots$$

$$p_X(6) = \frac{C_6^6 \cdot C_{43}^0}{C_{49}^6} \simeq 0.0000000715 \quad \left(\simeq \frac{1}{14\,000\,000}\right)$$

- Q: Este p_X funcție de masă?

$$\sum_{k=0}^{6} p_X(k) = \sum_{k=0}^{6} \frac{C_6^k \cdot C_{43}^{6-k}}{C_{49}^6} = 1 \quad \left(\begin{array}{c}\text{Identitatea} \\ \text{Vandermonde}\end{array}\right)$$

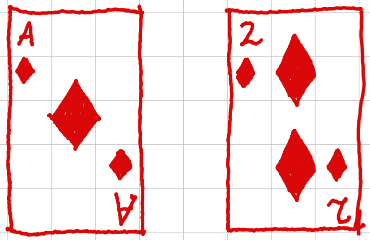
- Alte aplicații

1) Numărul de ași într-o mână de 5 cărți de joc e modelat de

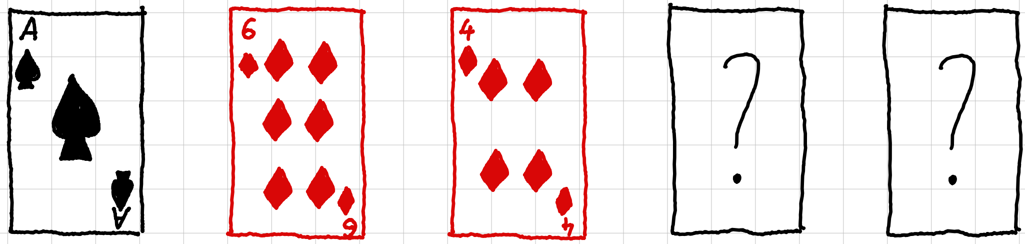
$$X \sim \text{Hypergeom}(\underbrace{52}_{\text{Nr. cărți joc}}, \underbrace{4}_{\text{Nr. ași}}, \underbrace{5}_{\text{Nr. cărți mână}})$$

- Jucăm Texas hold'em:

→ Avem în mână:



→ Flop-ul este următorul:



→ Ce șanse avem să obținem „culoare”, i.e. să mai pice un romb?

$$X \sim \text{Hypergeom}(47, 9, 2)$$

Cărți rămase (47); Romburi rămase (9); Cărți ce urmează a fi extrase (2)

$$P(X \geq 1) = P(X=1) + P(X=2)$$

$$= \frac{C_9^1 \cdot C_{38}^1}{C_{47}^2} + \frac{C_9^2 \cdot C_{38}^0}{C_{47}^2} = \frac{378}{1081} \simeq 35\%$$

5) V. a. Hypergeometrică: Din N obiecte, K sunt câștigătoare. Numărul de obiecte câștigătoare dintr-o selecție de n obiecte se modelează cu o v. a. hypergeometrică.

$X : \Omega \longrightarrow ?$

K obiecte câștigătoare

$N-K$ obiecte necâștigătoare

- Dacă $n = N - K + 1 \Rightarrow$ minimul e $1 = n - (N-K)$

  Dacă $n = N - K + 2 \Rightarrow$ minimul e $2 = n - (N-K)$

  $\vdots$

  În general, minimul e $\max(0, n-(N-K))$.

- Numărul maxim e $\min(n, K)$.

$$X : \Omega \longrightarrow \{\underbrace{\max(0, n-(N-K)), \ldots \min(n, K)}_{S}\}$$

$$p_X(k) = P(X = k) = \frac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}, \quad \forall k \in S$$

Notație: $X \sim \mathrm{Hypergeom}(N, K, n)$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{k \in S} k \dfrac{C_K^k \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$

$$= \sum_{k \in S} K \frac{C_{K-1}^{k-1} \cdot C_{N-K}^{n-k}}{C_N^n}$$

$$= \sum_{k \in S} K \frac{C_{K-1}^{k-1} \cdot C_{(N-1)-(K-1)}^{(n-1)-(k-1)}}{\frac{N}{n} C_{N-1}^{n-1}}$$

$$= \frac{nK}{N}$$

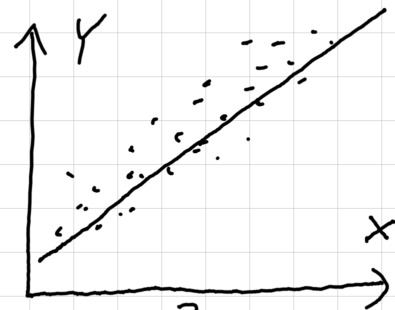
- Temă: Calculați $Var[X]$

• Q: Cum cuantificăm dependența a două variabile aleatoare?

• Exemplu: Dependența liniară

X v.a., $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$Y = \alpha X + \beta$ v.a.



Ce se întâmplă dacă

$X \perp\!\!\!\perp Y$ ($\Leftrightarrow E[X \cdot Y] = E[X] \cdot E[Y]$) ?

$$Y = \alpha X + \beta \Rightarrow E[Y] = \alpha E[X] + \beta$$

$$XY = \alpha X^2 + \beta X$$

$$\underbrace{E[XY]}_{E[X](\alpha E[X] + \beta)} = \alpha E[X^2] + \beta E[X]$$

$$\Leftrightarrow \alpha E[X]^2 + \beta E[X] = \alpha E[X^2] + \beta E[X]$$

$$\Leftrightarrow \alpha \underbrace{(E[X^2] - E[X]^2)}_{Var(X) \geq 0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ sau } X = E[X] = \text{constantă}$$

- Corolar

Dacă $Y = \alpha X + \beta$, $\alpha \neq 0$, atunci

$X \perp\!\!\!\perp Y \iff X$ sau Y constante