Cursul #9

- V. a. distribuite uniform

Alegem un număr la întâmplare din intervalul $[0, 1]$. Care este probabilitatea ca acesta să fie $\frac{1}{2}$? Dar să fie mai mare ca $\frac{1}{4}$?

$X : \Omega \to [0, 1]$ uniform, i.e.

$$\mathbb{P}(X = a) = \mathbb{P}(X = b) \quad \forall a, b \in [0, 1]$$

$$\mathbb{P}\left(X = \frac{1}{2}\right) = \frac{\#\text{ Cazuri favorabile}}{\#\text{ Cazuri posibile}} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\mathbb{P}\left(X > \frac{1}{4}\right) = \frac{3}{4} \quad (\text{Intuitiv})$$

- Definiție (V. a. continuă)

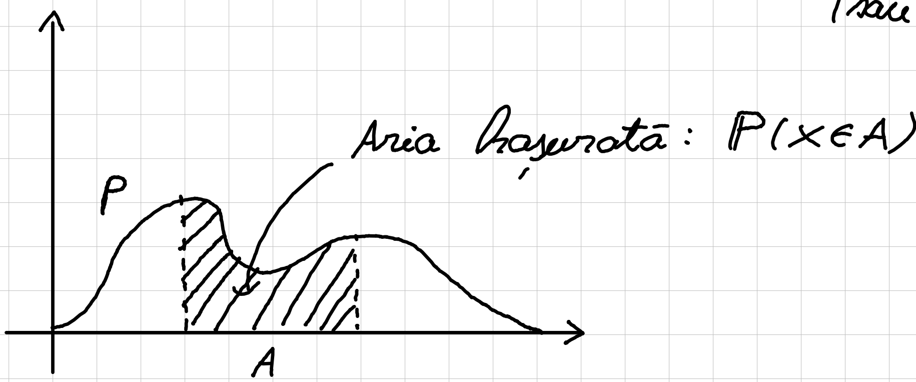
Numim orice funcție definită pe spațiul total cu valori reale

$X : \Omega \to \mathbb{R}$

o variabilă aleatoare (absolut) continuă dacă $\exists\, p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ măsurabilă și integrabilă a.î.

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) = \int_A p(x)\,dx, \ \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

(sau $\forall A$ interval)



Numim p funcția de densitate a lui X.

Notație: $X \sim p\,dx$.

- Observații

i) Intuitiv, p este o pondere continuă pe axa numerelor reale.

ii) $\int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx = \mu_X(\mathbb{R}) = \mathbb{P}(X \in \mathbb{R}) = 1$

iii) Orice funcție $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ cu $\int_{\mathbb{R}} p(x)dx = 1$ generează o v.a. (absolut) continuă cu distribuția

$$\mu(A) := \int_A p(x)\,dx \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

- Formula de transport

Fie $X \sim p\,dx$ v.a. (absolut) continuă

și $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ măsurabilă a.î. $\mathbb{E}[|f(X)|] < +\infty$

Atunci,

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_{\mathbb{R}} f(x)\, p(x)\, dx$$

- Cazuri particulare

i) Media unei v.a. (absolut) continue

$X \sim p\,dx$ cu $\mathbb{E}[|X|] < +\infty$

$$\mathbb{E}[X] := \int_{\mathbb{R}} x\, p(x)\, dx$$

ii) Varianța unei v.a. (absolut) continue

$X \sim p\,dx$ cu $\mathbb{E}[X^2] < +\infty$

$$\begin{aligned} Var[X] &:= \int_{\mathbb{R}} (x - \mathbb{E}[X])^2\, p(x)\, dx \\ &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \end{aligned}$$

• Propoziție (Funcția de repartiție)

Fie $X : \Omega \to \mathbb{R}$ v.a. cu distribuția

$$\mu_X(A) = \mathbb{P}(X \in A) \quad \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$$

Considerăm $F : \mathbb{R} \to [0, 1]$ dată de

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x)$$
$$= \mu((-\infty, x]) \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

F se numește funcția de repartiție a lui X și are următoarele proprietăți

i) F e crescătoare

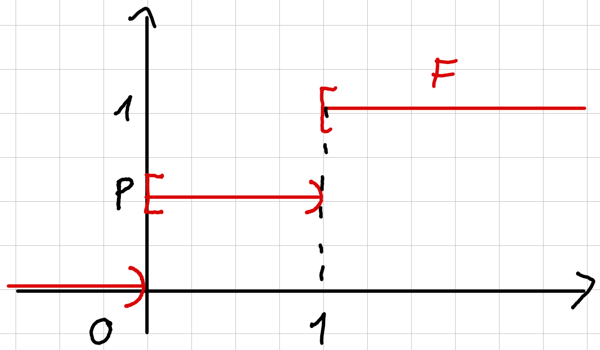
ii) $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ și $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$

iii) F e continuă la dreapta

• Funcția de repartiție a unei v.a. discrete

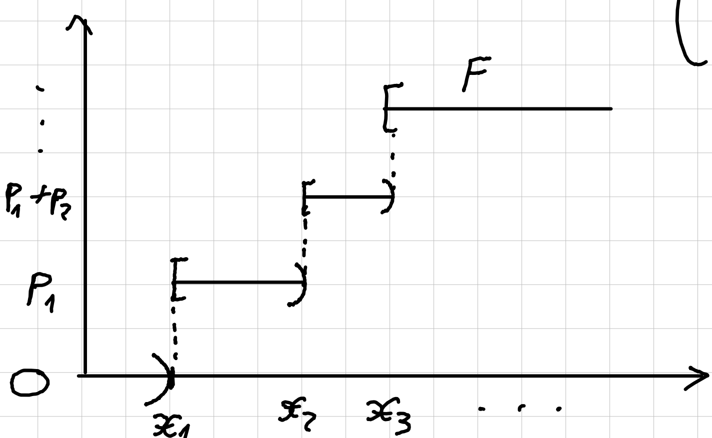
i) $X \sim \text{Bernoulli}(p)$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ p, & x \in [0, 1) \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$$



ii) $X \sim \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_n \\ p_1 & & p_n \end{pmatrix}$

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \begin{cases} 0, & x < x_1 \\ p_1, & x \in [x_1, x_2) \\ p_1 + p_2, & x \in [x_2, x_3) \\ \vdots & \\ 1, & x \ge x_n \end{cases}$$



• Funcția de repartiție a unei v.a. continue

Dacă $X \sim p\,dx$ v.a. continuă,

$$F(x) = \mathbb{P}(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} p(y)\,dy$$

$$\Rightarrow F'(x) = p(x).$$

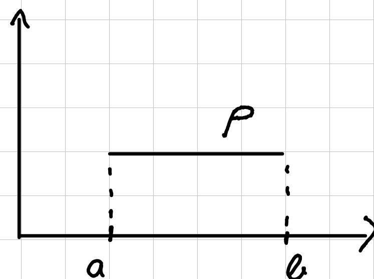
• Observație

Funcțiile de repartiție a unei v.a. determină unic distribuția sa, i.e. există o bijecție între mulțimea distribuțiilor pe $\mathbb{R}$ și mulțimea funcțiilor de repartiție

Tipuri de v.a. continue

1) V.a. uniform distribuite pe un interval $[a, b]$ au densitatea p constantă pe intervalul respectiv

$$p(x) = \begin{cases} c, & x \in [a, b] \\ 0, & \text{rest} \end{cases}$$



Cum p e densitate,

$$1 = \int_{\mathbb{R}} p(x)\,dx = \int_a^b c\,dx = (b-a)\cdot c \Rightarrow \boxed{c = \frac{1}{b-a}}$$

Notație: $X \sim \mathrm{Unif}([a, b])$

$$\mathbb{E}[X] = \int_a^b x \cdot \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{b^2 - a^2}{2(b-a)} = \frac{a+b}{2}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_a^b x^2 \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{b^3 - a^3}{3(b-a)} = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{(a-b)^2}{12}$$

$$F(x) = \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}$$

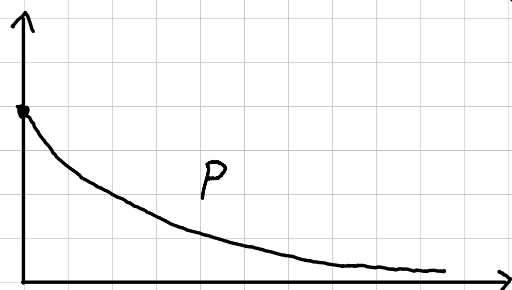
• Cum generăm un număr aleator uniform pe $\mathbb{R}$?

Fie $X \sim Unif(\mathbb{R}) \Rightarrow p(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\, dx = c \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} dx = +\infty \text{ (Contradicție!)}$$

Concluzie: Nu se poate!

2) V.a. exponențiale sunt echivalentul continuu al v.a. geometrice și modelează timpul de așteptare al unui eveniment ce se întâmplă cu o frecvență $\lambda > 0$



Alegem p a.î. să descrească exponențial în raport cu λ și cu timpul de așteptare

$$p(t) := \begin{cases} c \cdot e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{rest} \end{cases}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} p(x)\,dx = c \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x}\,dx = c \cdot \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right) \Big|_{0}^{+\infty}$$

$$= \frac{c}{\lambda} \Rightarrow \boxed{c = \lambda}$$

Notație: $X \sim Exp(\lambda)$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} x \lambda e^{-\lambda x} \, dx = - \int_0^{+\infty} x \left(e^{-\lambda x}\right)' dx$$

$$= \underbrace{- x e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty}}_{0} + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda x} \, dx = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^{+\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x} \, dx = - \int_0^{+\infty} x^2 \left(e^{-\lambda x}\right)' dx$$

$$= - x^2 e^{-\lambda x} \Big|_0^{+\infty} + 2 \int_0^{+\infty} x e^{-\lambda x} \, dx$$

$$= \frac{2}{\lambda} \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$