Cursul # 10

• Care este probabilitatea să așteptăm mai mult de t un eveniment care se întâmplă cu frecvență λ?

$$\mathbb{P}(X > t) = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t}$$

• Propoziție (Lipsa de memorie a exponențialei)
Fie X o v.a. abs. continuă. X e distribuită exponențial dacă și numai dacă

$$\mathbb{P}(X > t_1 + t_2 \mid X > t_1) = \mathbb{P}(X > t_2) \quad \forall t_1, t_2 > 0$$

Demonstrație: „$\Rightarrow$" Fie $X \sim Exp(\lambda)$, $\lambda > 0$

$$\mathbb{P}(X > t_1 + t_2 \mid X > t_1) = \frac{\mathbb{P}(X > t_1 + t_2, X > t_1)}{\mathbb{P}(X > t_1)}$$

$$= \frac{\mathbb{P}(X > t_1 + t_2)}{\mathbb{P}(X > t_1)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t_1 + t_2)}}{e^{-\lambda t_1}} = e^{-\lambda t_2}$$

$$= \mathbb{P}(X > t_2)$$

„ <= " Notăm cu $G(t) := P(X > t)$

G este fct. de repartiție a unei v.a. X (absolut) continue, deci și G e fct. continuă

Știm că $G(t_1 + t_2) = G(t_1) \cdot G(t_2)$ $\forall t_1, t_2 > 0$

$G(2) = G(1)^2 \quad . \quad . \quad . \quad G(n) = G(1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

$G(1) = G\left(\frac{1}{2}\right)^2 \quad . \quad . \quad . \quad G\left(\frac{1}{m}\right) = G(1)^{\frac{1}{m}} \quad \forall m \in \mathbb{N}^*$

$$\Rightarrow G\left(\frac{n}{m}\right) = G(1)^{\frac{n}{m}} \Rightarrow G(q) = G(1)^q \quad \forall q \in \mathbb{Q}$$

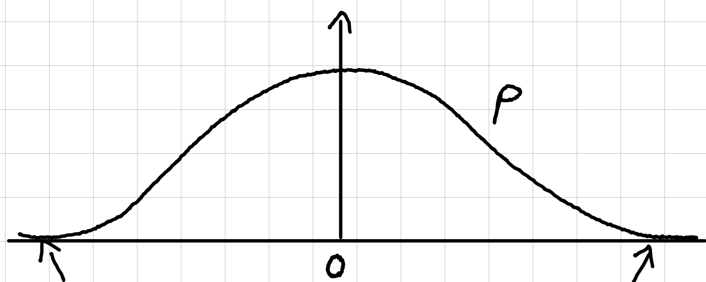
Fie $t \in \mathbb{R}$, $t = \lim\limits_{n \to \infty} \frac{[nt]}{n}$

$$G(t) = G\left(\lim_n \frac{[nt]}{n}\right) = \lim_n G(1)^{\frac{[nt]}{n}} = G(1)^t$$

Notăm cu $\lambda := -\ln \underbrace{G(1)}_{\in [0,1]} > 0$

$$\Rightarrow G(t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow X \sim Exp(\lambda) \quad \square$$

3) V. a. normală modelează distribuția unor variabile fizice precum greutatea sau înălțimea unor indivizi, temperatura, nivel de poluare, notele studenților etc.



Vrem o densitate p care să descrească mult mai repede decât variabile Cauchy sau chiar variabile lipsite de memorie (i.e. exponențiale), deci alegem p să descrească de ordinul $e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$p(x) = C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} C \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = C \cdot \sqrt{2\pi} \Rightarrow \boxed{C = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}}$$

Notație: $Z \sim \mathcal{N}(\underset{\text{medie}}{0}, \underset{\text{Varianță}}{1})$ (Normala standard)

$$\mathbb{E}[Z] = \int_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-\frac{z^2}{2}}}_{f(z)} dz = 0$$

$$f(-z) = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-\frac{z^2}{2}} = -f(z)$$

(f este funcția impară)

$$\mathbb{E}[Z^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} z^2 e^{-\frac{z^2}{2}} dz$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} z \left(e^{-\frac{z^2}{2}}\right)' dz$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} z e^{-\frac{z^2}{2}} \Bigg|_{-\infty}^{+\infty}}_{0} + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{z^2}{2}} dz}_{1}$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}ar[Z] = 1 - 0^2 = 1.$$

$$F(z) = \mathbb{P}(Z \leq z) = \underbrace{\int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx}_{\Phi(z)}$$

Nu există reprezentare analitică pentru Φ, dar valorile ei pot fi aproximate numeric.

• Propoziție

Fie $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Atunci:

i) V. a. $X = Z + \mu$ are densitatea

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}$$

Notație: $X \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$

ii) V. a. $X = \sigma \cdot Z$ are densitatea

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}$$

Notație: $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Demonstrație:

i) Fie $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$

$$\mathbb{P}(Z + \mu \in [a, b]) = \mathbb{P}(Z \in [a-\mu, b-\mu])$$

$$= \int_{a-\mu}^{b-\mu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = \int_a^b \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2}}}_{p_X(x)} dx$$

S. V. $\begin{cases} x = z + \mu \\ dx = dz \end{cases}$

ii) Temă

- Corolar

i) Pentru $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $X := \mu + \sigma Z$

are densitatea

$$p_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Notație: $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\mathbb{E}[X] = \mu + \sigma \mathbb{E}[Z] = \mu$$

$$\mathrm{Var}[X] = \sigma^2 \mathrm{Var}[Z] = \sigma^2$$

ii) Pentru $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$Z := \frac{X-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

(Standardizarea unei normale oarecare)

• Exemplul 1

Înălțimea medie a unui bărbat european este de 178 cm cu o deviație standard de 7 cm. Asumând o distribuție normală, care este procentul de populație cu o înălțime între 171 și 185 cm?

$$X \sim \mathcal{N}(178, 7^2) \Rightarrow Z := \frac{X-178}{7} \sim \mathcal{N}(0,1)$$

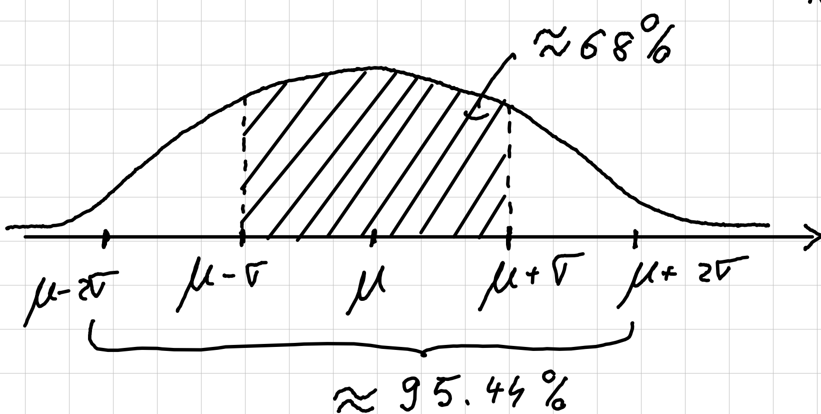
$$\mathbb{P}(171 < X < 185) =$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{171-178}{7} < \frac{X-178}{7} < \frac{185-178}{7}\right)$$

$$= \mathbb{P}(-1 < Z < 1) = \mathbb{P}(Z<1) - \mathbb{P}(Z<-1)$$

$$= \Phi(1) - \Phi(-1) = 0.8413 - 0.1587 = 0.6826$$

Valori din tabelul Z



• Exemplul 2

Pentru datele din exemplul de mai sus, ce înălțime ar trebui să ai să fii în primii 10% din europeni?

$X \sim \mathcal{N}(178, 7)$.

$x = ?$ a.î. $\mathbb{P}(X > x) = 0.1 \Leftrightarrow$

$\mathbb{P}\left(Z > \frac{x - 178}{7}\right) = 0.1 \Leftrightarrow$

$1 - \Phi\left(\frac{x-178}{7}\right) = 0.1 \Leftrightarrow \Phi\left(\frac{x-178}{7}\right) = 0.9$

$\Leftrightarrow \frac{x - 178}{7} \approx 1.28$ (Din tabelul Z)

$\Leftrightarrow \boxed{x \approx 186.96}$

• Tabelul Z îl găsiți în folderul de cursuri din grupul de MS Teams