Cursul #6

- $$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{n} k(k-1) \frac{n!}{(n-k)!\,k!} p^k (1-p)^{n-k} + np$$

$$= n(n-1) p^2 \sum_{k=2}^{n} \frac{(n-2)!}{(n-k)!\,(k-2)!} p^{k-2} (1-p)^{n-k} + np$$

$$= np\,[np - p + 1] = (np)^2 + np(1-p)$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = np(1-p)$$

- Alternativă: $X \sim Bin(n, p)$

$\Rightarrow X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$, $X_i \sim Bernoulli(p)$

independente

$$\mathbb{E}[X] = n\,\mathbb{E}[X_1] = np$$

$$\mathbb{V}\text{ar}[X] = n\,\mathbb{V}\text{ar}[X_1] = np(1-p)$$

Deoarece sunt independente

3) V.a. geometrică: Numărul de experimente Bernoulli independente de probabilitate $p>0$ efectuate până la primul succes se modelează cu o v.a. geometrică

$$X : \Omega \to \mathbb{N}^*$$

$$p_X(1) = \mathbb{P}(X=1) = p$$

$$p_X(2) = \mathbb{P}(X=2) = (1-p)\,p$$

$$p_X(n) = \mathbb{P}(X=n) = (1-p)^{n-1}\,p$$

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ p & (1-p)p & & (1-p)^{n-1}p & \end{pmatrix}$$

Notație: $X \sim \text{Geom}(p)$

- Q: Este p_X funcție de masă?

$$\sum_{n=1}^{+\infty} p_X(n) = \sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} = p \cdot \sum_{n=0}^{+\infty} (1-p)^n$$

$$= p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} = 1 \ \checkmark \quad [1-p<1]$$

$$p_X(n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \ \checkmark$$

- $\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{+\infty} n p \underbrace{(1-p)}_{:=q<1}^{n-1}$

$$= p \sum_{n=1}^{+\infty} n q^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} (q^n)'$$

$$= p \left(\sum_{n=1}^{+\infty} q^n \right)' = p \left(\frac{1}{1-q} \right)'$$

$$= \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p}$$

- Intuitiv:

→ Dacă arunc un ban cinstit până pică cap, am de așteptat, în medie, 2 aruncări

→ Dacă arunc un zar cinstit până pică 6, am de așteptat, în medie, 6 aruncări

- $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 p \underbrace{(1-p)}_{:=q}^{n-1}$

$$= p \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 q^{n-1}$$

$$= pq \sum_{n=1}^{+\infty} \underbrace{n(n-1) q^{n-2}}_{(q^n)''} + \overbrace{p \sum_{n=1}^{+\infty} n q^{(n-1)}}^{\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}}$$

$$= pq\left(\sum_{n=}^{+\infty} q^{n}\right)'' + \frac{1}{p}$$

$$= pq\underbrace{\left(\frac{1}{1-q}\right)''}_{\frac{2}{(1-q)^3}} + \frac{1}{p} = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} = \frac{2-p}{p^2}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{2-p}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

- Exemplu

Aruncăm o monedă cinstită până cade cap. Care e probabilitatea ca aceasta să se întâmple după 7 aruncări, știind că în primele 5 aruncări nu am avut nici un cap?

$X \sim \mathrm{Geom}\left(\frac{1}{2}\right)$

$$P(X>7 \mid X>5) = P(X>2) = 1 - P(X\le 2)$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|cc} \underset{1}{P} & \underset{2}{P} & \underset{3}{P} & \underset{4}{P} & \underset{5}{P} & \underset{6}{?} & \underset{7}{?} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc} \underset{1}{?} & \underset{2}{?} \end{array}\right]$$

• Definiție (Lipsă memorie)

$X : \Omega \to \mathbb{N}$ v.a. discretă nu are memorie dacă

$$\mathbb{P}(X > m+n \mid X > n) = \mathbb{P}(X > m) \quad \forall m, n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\mathbb{P}(X > m+n, X > n)}{\mathbb{P}(X > n)} = \mathbb{P}(X > m)$$

$$\Updownarrow$$

$$\mathbb{P}(X > m+n) = \mathbb{P}(X > m) \cdot \mathbb{P}(X > n)$$

• Proprietate

Fie $X : \Omega \to \mathbb{N}$ v.a. discretă

$X \sim Geom(p) \iff X$ nu are memorie

Demonstrație:

Observăm întâi că

$X \sim Geom(p) \iff$

$$\mathbb{P}(X > n) = 1 - \mathbb{P}(X \leq n) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X = k)$$

$$= 1 - \sum_{k=1}^{n} p(1-p)^{k-1}$$

$$= 1 - p \cdot \frac{1-(1-p)^n}{1-(1-p)} = (1-p)^n$$

Deci $X \sim \text{Geom}(p) \Leftrightarrow \mathbb{P}(X > n) = (1-p)^n$

„$\Rightarrow$" $X \sim \text{Geom}(p)$

Vrem $\underset{\substack{\parallel \\ (1-p)^{m+n}}}{\mathbb{P}(X > m+n)} = \underset{\substack{\parallel \\ (1-p)^{m}}}{\mathbb{P}(X > m)} \cdot \underset{\substack{\parallel \\ (1-p)^{n}}}{\mathbb{P}(X > n)} \quad \forall m,n$ ✓

„$\Leftarrow$" $\mathbb{P}(X > m+n) = \mathbb{P}(X > m)\,\mathbb{P}(X > n) \quad \forall m,n$

Definim $\varphi : \mathbb{N}^* \longrightarrow [0, 1]$

$$\varphi(n) := \mathbb{P}(X > n)$$

$\varphi(m+n) = \varphi(n) \cdot \varphi(m) \quad \forall m,n \in \mathbb{N}^*$

$\varphi(2) = \varphi(1+1) = \varphi(1)^2$

Inductiv, $\varphi(n) = \varphi(1)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\varphi(1) = \mathbb{P}(X > 1) = 1 - \mathbb{P}(X = 1) = 1 - p$

$\Rightarrow \mathbb{P}(X > n) = \varphi(n) = (1-p)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow X \sim \text{Geom}(p)$ $\square$

• Exemplu

Site-ul facultății este supus unei serii de atacuri cibernetice succesive. În medie, λ atacuri pe zi reușesc să facă site-ul să se blocheze. Care e probabilitatea ca site-ul să se blocheze de cel puțin 3 ori într-o zi?

Soluție:

Presupunem că avem $n \in \mathbb{N}$ atacuri zilnice

Probabilitatea ca un atac să aibe succes este de $\frac{\lambda}{n}$.

$X \sim Bin\left(n, \frac{\lambda}{n}\right)$ # Atacuri reușite zilnice.

$$\mathbb{P}(X \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(X < 3) = 1 - \sum_{k=0}^{2} \mathbb{P}(X = k)$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{2} C_n^k \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k}$$

(greu de calculat, mai ales pentru n foarte mare!)

Ce se întâmplă când $n \to +\infty$?

$$\lim_{n} P(X=k) = \lim_{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} \cdot \frac{\lambda^k}{n^k} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}_{\downarrow \atop e^{-\lambda}} \underbrace{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_{\downarrow \atop 1}$$

$$= \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \lim_{n} \frac{n!}{(n-k)!\, n^k} =$$

$$= \boxed{e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}} ,$$

$$\frac{(n-k+1)^k}{n^k} \le \frac{(n-k+1) \cdots n}{n^k} \le 1$$

$$\downarrow$$

$$1$$