Laboratorul 11

- Funcția de repartiție a v.a. exponențiale

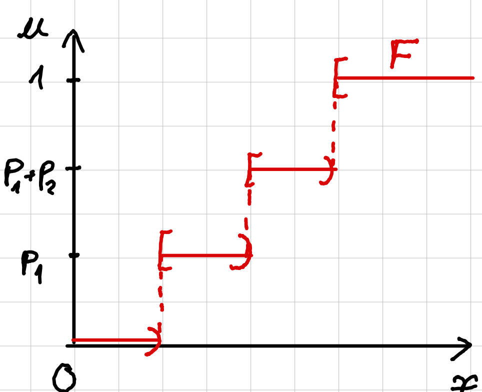
Fie $X \sim Exp(\lambda)$ cu $\lambda > 0$

$$p(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t}, & t \geq 0 \\ 0, & \text{rest} \end{cases}$$

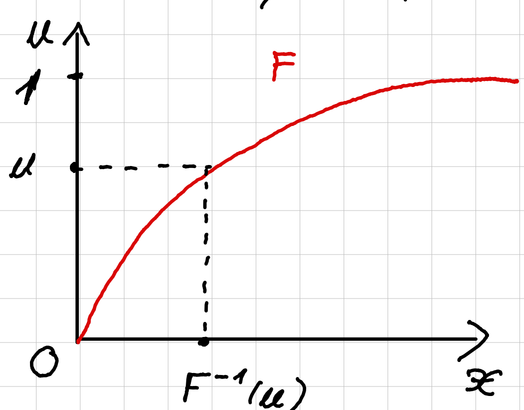
$$F(t) = \mathbb{P}(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx = -\int_0^t (e^{-\lambda x})'\,dx$$

$$= 1 - e^{-\lambda t}$$

- Simularea v.a. discrete VS. exponențiale



$$X \sim \begin{pmatrix} x_1 & \dots & x_m \\ p_1 & \dots & p_m \end{pmatrix}$$



$X \sim Exp(\lambda)$

• Când simulăm v.a. discrete, alegeam un număr u uniform din intervalul $[0, 1)$ și vedeam în ce interval de tipul $\left[\sum_{i=1}^{n-1} p_i, \sum_{i=1}^{n} p_i\right)$ se află, i.e. pe ce treaptă a lui F se află.

• La v.a. continue, lucrurile devin mai simple: alegem din nou u uniform din intervalul $[0, 1)$ și alegem x ca fiind $F^{-1}(u)$.

• Inversa funcției de repartiție exponențiale

$$1 - e^{-\lambda x} = u \iff e^{-\lambda x} = 1 - u$$

$$\iff x = \underbrace{-\frac{1}{\lambda} \ln(1-u)}_{F^{-1}(u)}$$

• Observație:

$U, 1-U \sim \text{Uniform}(0, 1)$

- Propoziție

Fie $U \sim Unif(0,1)$ și $\lambda > 0$. Definim $X := -\frac{1}{\lambda} \ln(U)$. Atunci $X \sim Exp(\lambda)$

Soluție:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in (a,b)) &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\lambda} \ln(U) \in (a,b)\right) \\
&= \mathbb{P}(\ln(U) \in (-\lambda b, -\lambda a)) \\
&= \mathbb{P}(U \in (e^{-\lambda b}, e^{-\lambda a})) \\
&= e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b} \\
&= \int_a^b \lambda e^{-\lambda x} dx \quad \forall\, 0 \le a < b < +\infty
\end{aligned}$$

$\square$

- Metoda Transformării inverse

Fie X v.a. continuă cu funcția de repartiție $F_X(x)$. Definim $U = F_X(X)$. Atunci U e distribuită $Unif([0,1])$ și implicit putem simula X ca $F_X^{-1}(U)$.

Argument:

Cum $F(x) \in [0,1]$ $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow U$ ia valori numai în intervalul $[0,1]$.

Fie $u \in [0,1]$

$$F_U(u) = \mathbb{P}(U \leq u) = \mathbb{P}(F_X(X) \leq u)$$
$$= \mathbb{P}(X \leq F_X^{-1}(u))$$
$$= F_X(F_X^{-1}(u))$$
$$= u \Rightarrow U \sim Unif([0,1])$$

- Observație:

Dacă F nu e inversabilă,

$$F_X^{-1}(u) = \min\{x \mid F_X(x) = u\}$$

• Variabila aleatoare Cauchy

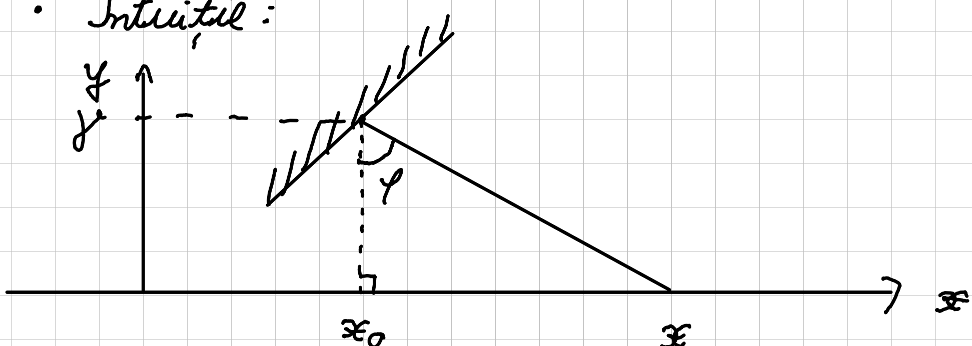
$$F(x; x_0, \gamma) = \frac{1}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$$

$$u = \frac{1}{\pi} \operatorname{atan}\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right) + \frac{1}{2}$$

$$\pi\left(u - \frac{1}{2}\right) = \operatorname{atan}\left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)$$

$$x = \underbrace{x_0 + \gamma \tan\left(\pi\left(u - \frac{1}{2}\right)\right)}_{F^{-1}(u)}$$

• Intuiție:



$$\varphi = \pi\left(u - \frac{1}{2}\right) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ uniform}$$

$$\tan(\varphi) = \frac{x - x_0}{\gamma} \Rightarrow x = x_0 + \gamma \tan\left(\pi\left(u - \frac{1}{2}\right)\right)$$

- Funcția de densitate

$$p(x) = F'(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\frac{1}{\gamma}}{1 + \left(\frac{x - x_0}{\gamma}\right)^2}$$

$$= \frac{\gamma}{\pi} \cdot \frac{1}{\gamma^2 + (x - x_0)^2}$$

- $\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, p(x)\, dx$ nu există !