Cursul #1

- Nota finală:
  - -> Parțial în Cursul 8 sau 9: 30%
  - -> Activitate laborator (activitate, teme): 30%
  - -> Examen final scris: 40%
- Promovare: Nota finală ≥ 5
- Cuprinsul cursului + exemple:

I) Probabilități

I).1) Spațiul de probabilități

[Aruncăm cu un ban: $\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(P) = \frac{1}{2}$]

I).2) Probabilități condiționate. Independență

[Două aruncări de monezi sunt independente: $\mathbb{P}(CC) = \mathbb{P}(C) \cdot \mathbb{P}(C) = \frac{1}{4}$ ...]

I.3) Variabile aleatoare

Asocia numere unor fenomene aleatoare.

Pariem o sumă de 10 lei pe o aruncare cu banul:

Dacă pică cap, primim 50% din sumă

Dacă pică pajură, pierdem 40% din sumă

Câștigul mediu e de 5%. Ce se întâmplă dacă îl jucăm de mai multe ori?

Pierdem. Dacă un joc câștig și unul pierd,

$$\underbrace{s\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{2}{5}\right)} = s\cdot\frac{9}{10}$$

Media geometrică contează! (Dob. compusă)

Temă: Considerăm același joc, dar cu un câștig de $100\cdot a\%$ și o pierdere de $100\cdot b\%$, unde $a, b \in [0,1]$ a. î. $a > b$.
Descrieți mulțimea de perechi a și b a.î. jocul de mai sus este dezavantajos dacă îl jucăm de mai multe ori.

I. 4) Legea numerelor mari și Teorema limită centrală

II) Statistică

Arunc o monedă de 99 ori și obțin numai cap. Ce urmează?

a) P: „Monte Carlo fallacy"

b) 50% C 50% P (Răspunsul probabilistului)

c) C (Moneda e măsluită) (Răspunsul stat.)

- Diferența probabilități și statistică

Șansele unui eveniment $\xrightarrow{\text{Probabilist}}$ Rezultate

Șansele unui eveniment $\xleftarrow[\text{Statistician}]{}$ Rezultate

I. 1) Spațiul de probabilități

• Definiție: Numim

→ „Experiment": Orice rezultat posibil obținut în urma unui fenomen aleator. Notație: ω

→ „Spațiu total": Mulțimea tuturor experimentelor (rezultatelor) posibile.

Notație: Ω

• Exemple:

1) Aruncăm cu moneda:

$\Omega = \{ \omega_1 = C, \omega_2 = P \}$

2) Aruncăm cu zarul:

$\Omega = \{ \omega_1 = 1, \omega_2 = 2 \ldots \omega_6 = 6 \}$

3) Nr. de vizitatori a unui site într-o zi

$\Omega = \{0, 1, 2 \ldots\} = \mathbb{N}$ (Oricât de mare DDoS)

4) Durata de rulare a unui cod

$\Omega = (0, +\infty)$

• Observații:

i) Mulțimile 1) și 2) sunt finite, iar cele de la 3) și 4) infinite

ii) Mulțimea 3) este infinit numărabilă, iar mulțimea 4) infinit nenumărabilă.

Hotelul lui Hilbert:
Avem un hotel cu o infinitate de camere cu toate ocupate: → 1 om / 40 oameni /
$n \mapsto n+1$ $\quad n \mapsto n+40$
inf. de oameni: $n \mapsto 2 \cdot n$ ...

iii) Vom numi spațiile totale cel mult numărabile (i.e. finite sau infinit numărabile) <u>discrete</u> și cele infinit nenumărabile <u>continue</u>.

• Definiție

Numim eveniment orice mulțime de experimente și se reprezintă, de regulă, sub forma

$A = \{\omega \in \Omega : \omega \text{ satisface o propr. dată}\} \subseteq \Omega$

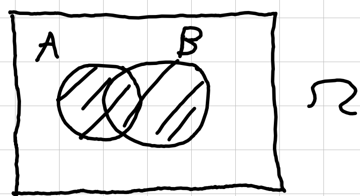
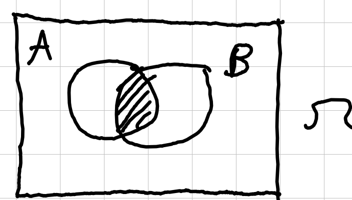
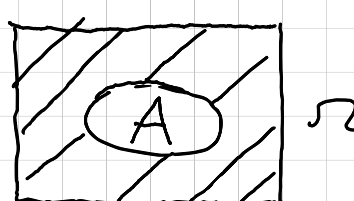
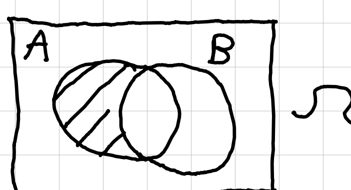
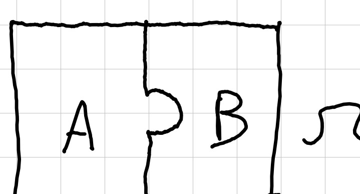
• Exemple

1) Scrieți evenimentul „Dau cu zarul un număr par".

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, $A = \{2, 4, 6\} \subseteq \Omega$

2) Scrieți evenimentul „Un număr real pozitiv este subunitar"

$\Omega = [0, +\infty)$, $A = [0, 1) \subseteq \Omega$

Operații logice cu evenimente	Operații cu mulțimi	Ilustrare grafică
A sau B	$A \cup B$	
A și B	$A \cap B$	
nu A	$A^c = \Omega \setminus A$	
A și nu B	$A \setminus B = A \cap B^c$	
A și B formează o partiție în Ω	$\begin{cases} A \cap B = \emptyset \\ A \cup B = \Omega \end{cases}$	

• Propoziție (Legile lui De Morgan)

(i) $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

(ii) $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

(iii) $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n^c$

(iv) $\left(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \right)^c = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n^c$

Demonstrație: Temă

Hint: Dublu incluziune + inducție

• Definiție (σ-algebră)

O familie de evenimente $\emptyset \neq \mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ s. n. σ-algebră dacă:

i) $A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F}$

ii) $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

• Notație:

$(\Omega, \mathcal{F})$ spațiu măsurabil

• Proprietățile σ-algebrei

i) $\Omega \in \mathcal{F}$

ii) $\emptyset \in \mathcal{F}$

iii) $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow \bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{F}$

Demonstrație:

i) $\emptyset \neq \mathcal{F} \Rightarrow \exists A \in \mathcal{F} \Rightarrow A^c \in \mathcal{F} \Rightarrow A \cup A^c = \Omega \in \mathcal{F}$

ii) $\emptyset = \Omega^c \in \mathcal{F}$

iii) $(A_n)_n \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow (A_n^c)_n \subseteq \mathcal{F} \Rightarrow$

$$\bigcup_n A_n^c \in \mathcal{F} \Rightarrow \left(\bigcup_n A_n\right)^c = \bigcap_n A_n \in \mathcal{F} \quad \square$$

• Exemple

1) Dacă Ω finită, $|\Omega| = N \in \mathbb{N}$, atunci $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ σ-algebră $|\mathcal{F}| = 2^N$

$\Omega = \{H, T\}$

$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \{H\}, \{T\}, \{H,T\}\}$

2) Dacă Ω infinit numărabilă (e.g. $\mathbb{N}$) atunci $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ σ-algebră

3) Dacă $\Omega = \mathbb{R}$, atunci $\mathcal{F} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{P}(\Omega)$ σ-algebră

$\downarrow$

Orice reuniune/intersecție de intervale închise/deschise, finite sau infinite

• Definiție (Probabilitate)

Fie $(\Omega, \mathcal{F})$ spațiu măsurabil. Definim

$$\mathbb{P} : \mathcal{F} \longrightarrow [0, 1]$$

probabilitate a. î.:

i) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$

ii) $\forall \ (A_n)_n \subseteq \mathcal{F}$ disjuncte 2 câte 2, i.e. $A_i \cap A_j = \emptyset \ \ \forall i \neq j$, avem că

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sum_n \mathbb{P}(A_n)$$

• Exemplu:

Probabilitatea să dăm cu zarul număr par pentru un zar echilibrat și pentru un zar măsluit a. î. 6 pică în jumătate din aruncări?

$\Omega = \{1 \ldots 6\} \quad \mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$

$\mathbb{P}(\{2, 4, 6\}) = \mathbb{P}(\{2\}) + \mathbb{P}(\{4\}) + \mathbb{P}(\{6\})$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{zar cinstit} \\ \frac{7}{10}, & \text{zar măsluit} \end{cases}$$