Chapitre I : les Suites

Théo André

Semestre 2

Sommaire

I Les Suites **3**

1 Introduction **4**
1.1 Généralités 4
1.2 Suites Arithmétiques et Géométriques 4

2 Limites **6**
2.1 Suites Convergentes 6
2.2 Propriétés sur les Suites 7

Première partie

Les Suites

Chapitre 1

Introduction

1.1 Généralités

Complémentaire du cours : Fiche Cours Analyse Exo7.

On appelle suite, toute application de $\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ (ex : $\begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longrightarrow (-1)^n \end{array}$). La suite définie dans l'exemple donne une suite dont le terme principal est $(-1)^n$. Pour parler de suite, on peut utiliser les notations suivantes : $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou (u_n). Attention à ne pas utiliser le symbole u_n sans parenthèses, qui représente le nombre plutôt que la suite.

Définition : Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est majorée lorsque $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \mathbb{N}, u_n \leq M$.

Définition : Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est minorée lorsque $\exists M \in \mathbb{R}, \forall n \mathbb{N}, u_n \geq M$.

Définition : Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est bornée, si (u_n) est majorée et minorée (ou $|(u_n)|$ est majorée).

Soit (u_n) une suite réelle. On dit que (u_n) est croissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geq u_n$. Elle est décroissante lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leq u_n$). La suite est dite monotone dans le cas où elle est soit croissante, soit décroissante.

1.2 Suites Arithmétiques et Géométriques

Suites Arithmétiques : Soit $n \in \mathbb{N}, r \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite. On dit que (u_n) est arithmétique de raison r lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} - u_n = r$.

Somme des premiers termes : La somme des premiers termes $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ d'une suite arithmétique est donnée par la formule :

$$\frac{(n+1)(u_0 + un)}{2}$$

Qui relie le nombre de terme (n+1) la somme du premier et du dernier terme, le tout divisé par 2.

Suites Géométriques : Soit $n \in \mathbb{N}, q \in \mathbb{R}$ et (u_n) une suite. On dit que (u_n) est géométrique de raison q lorsque u_n est de la forme $u_{n+1} = qu_n$.

Somme des premiers termes : La somme des premiers termes $u_0 + u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$ d'une suite géométrique est donnée par la formule :

$$u_0 \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q}$$

Cette formule est valable pour $q \neq 1$ et comprends u_0 le premier terme ainsi que le nombre de termes (n+1).

Chapitre 2

Limites

2.1 Suites Convergentes

Soit (u_n) une suite réelle et $l \in \mathbb{R}$. On dit que (u_n) converge vers l lorsque :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{R}, \forall n > N_\epsilon, \quad l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$$

Exemple : On pose pour $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n = \frac{1}{n}$. Montrons que $\lim_{n \to +\infty} u_n = 0$. C'est-à-dire que l'on a u_n converge vers 0.

On veut trouver un N_ϵ tel que : $\forall n \geq N_\epsilon, \quad \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \epsilon$. Posons donc $N_\epsilon = E(\frac{1}{\epsilon}) + 1 \in \mathbb{N}$. On a $n \geq N_\epsilon > \frac{1}{\epsilon}$. Donc $\frac{1}{n} < \frac{1}{\frac{1}{\epsilon}} = \epsilon$. Alors

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon, \quad |u_n - 0| < \epsilon \Longleftrightarrow (u_n) \text{ converge vers } 0$$

Definition : On dit que (u_n) admet l pour limite lorsqu'il existe un réel $l \in \mathbb{R}$ tel que (u_n) converge vers l.

propriété : *Si une suite converge, alors sa limite est unique.*

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. On suppose que $u_n \longrightarrow l$ et $u_n \longrightarrow l'$ avec $l \neq l'$. Supposons $l < l'$. On décide alors d'appliquer la définition avec $\epsilon = \frac{l'-l}{2} > 0$. Donc :

$$\exists N_\epsilon \in \mathbb{R} \parallel \forall n \geq N_\epsilon, \quad l - \epsilon < u_n < l + \epsilon$$

$$\exists N_\epsilon \in \mathbb{R} \parallel \forall n \geq N_\epsilon, \quad l' - \epsilon < u_n < l' + \epsilon$$

Posons alors $N = \max(N_\epsilon, N'_\epsilon)$. Par suite, comme $N \geq N_\epsilon$, on a $(l - \epsilon) < u_n < l + \epsilon$. Et comme $N \geq N'_\epsilon$, on a $l' - \epsilon < u_n < (l' + \epsilon)$. Par suite il vient en substituant ϵ par $\frac{l'-l}{2}$:

$$\frac{l' + l}{2} < u_n < \frac{l' + l}{2}$$

Nous aboutissons à une contradiction. Notre hypothèse de départ était donc absurde, on en déduit que l est unique. □

Remarque : dire que $u_n \longrightarrow l$ revient à dire que $u_n - l \longrightarrow 0$.

Exemple : $u_n = \frac{(-1)^n}{n}$. $|u_n - 0| = \frac{1}{n}$ or $\frac{1}{n} \xrightarrow{+\infty} 0$ Donc on peut dire que u_n tend vers 0.

2.2 Propriétés sur les Suites

Propriété : Si une suite est converge, alors elle est bornée.

Démonstration. Supposons que $u_n \longrightarrow l \in \mathbb{R}$, par définition :

$$\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon, |u_n - l| < \epsilon$$

On l'applique avec $\epsilon = 1 > 0$. Il existe alors $N_\epsilon \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n > N_\epsilon, \quad l - 1 < u_n < l + 1$. On pose alors $M = \max(u_0, u_1, u_2, ..., u_{N_{\epsilon-1}}, l + 1)$ et $m = \min(u_0, u_1, u_2, \ldots, u_{N_{\epsilon-1}}, l - 1)$ Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a bien

$$m \leq u_n \leq M$$

Ainsi, (u_n) est bornée. □

Propriété : Si $u_n \longrightarrow 0$ et v_n est bornée. Alors le produit $u_n v_n \longrightarrow 0$

Démonstration. On veut montrer que $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \quad |u_n v_n| < \epsilon$. Come v_n est bornée, il existe $M \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad |v_n| \leq M$. De plus, comme $u_n \longrightarrow 0$, il existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N_0, \quad |u_n| < \frac{\epsilon}{M} (\epsilon > 0)$. Par suite, il vient que :

$$\forall n \geq N_0, \quad |u_n v_n| < M|u_n| < M\frac{\epsilon}{M} = \epsilon$$

Ceci achève la preuve. □

Propriétés a. : Si $u_n \longrightarrow l \Longrightarrow |u_n| \longrightarrow |l|$

Propriétés b. : Si $u_n \longleftrightarrow l, v_n \longrightarrow l' \Longrightarrow u_n + v_n \longrightarrow l + l'$

Propriétés c. : Si $u_n \longrightarrow l$, alors $\lambda u_n \longrightarrow \lambda l$

Propriétés d. : Si $u_n \longrightarrow l$ et $l \neq 0 \Longrightarrow \frac{1}{u_n} \longrightarrow \frac{1}{l}$

Démonstration. preuve de a. et b.

a. Il nous faut montrer que $||u_n| - |l|| < \epsilon$ En utilisant les inégalités triangulaires généralisées on obtient que $||u_n| - |l|| < \epsilon < |u_n - l| < \epsilon$

b. Montrons que $\forall \epsilon > 0, \exists N_\epsilon \in \mathbb{N}, \forall n \geq N_\epsilon, \quad |(u_n + v_n) - (l + l')| < \epsilon$: Comme $u_n \longrightarrow l$, il existe N_{ϵ_1} tel que $\forall n \geq N_{\epsilon_1}, \quad |u_n - l| < \frac{\epsilon}{2}$. Et que $v_n \longrightarrow l'$, il existe N_{ϵ_2} tel que
$\forall n \geq N_{\epsilon_2}, \quad |v_n - l'| < \frac{\epsilon}{2}$. On en déduit l'inégalité suivante :

$$|(u_n + v_n) - (l + l')| = |(u_n - l) + (v_n - l')| < |u_n - l| - |v_n - l'| < 2\frac{\epsilon}{2} = \epsilon \quad \text{(par I.T.G)}$$

□

Propriété : Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue en un point $a \in I$. Soit (u_n) une suite d'éléments de I qui converge vers $a \in I$. Alors la suite $f(u_n) \longrightarrow f(a)$