Systèmes d'équations linéaires et pivot de Gauss

Un système de n équations linéaires avec p inconnues est de la forme

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{1,p}x_p & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{2,p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \ldots & + & a_{n,p}x_p & = & b_n \ , \end{array}\right.$$

où les coefficients réels $a_{i,j}$ et b_i sont donnés et les réels x_j sont des inconnues. Résoudre un tel système signifie trouver toutes ses solutions, c'est-à-dire tous les p-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ de nombres réels vérifiant simultanément toutes les n équations ci-dessus. Nous allons voir plus loin qu'un tel système peut soit ne pas avoir de solution, soit avoir une solution unique, soit avoir une infinité de solutions.

Nous allons expliquer une méthode particulière permettant de résoudre tout système d'équations linéaires. Cette méthode est appelée méthode de *l'échelonnement* ou de *pivot de Gauss*. Les exemples suivants nous serviront d'illustration pour mieux comprendre l'algorithme de résolution étudié.

Exemple 1 Un système de 3 équations avec 4 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcl} 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 & = & 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 3x_3 - 3x_4 & = & 5. \end{array}\right.$$

Exemple 2 Un système de 4 équations avec 3 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = & 4 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 & = & 11 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 & = & 13 \\ 4x_1 + 11x_2 & = & 37. \end{array}\right.$$

Exemple 3 Un système de 3 équations avec 4 inconnues

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 & = & 5 \\ x_1 - x_2 + 9x_3 - x_4 & = & 7 \\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 - 2x_4 & = & 9. \end{array}\right.$$

1. Algorithme de l'échelonnement

Etant donné un système d'équations linéaires à résoudre, nous allons le transformer successivement jusqu'à arriver à un système plus simple, dit *échelonné*, dont il est facile de donner les solutions. Pour ce faire, nous n'allons utiliser que deux types de transformations élémentaires suivants:

① Changer l'ordre des lignes du système en remplaçant la i-ème ligne par la j-ème et inversement. Cette permutation de deux lignes sera notée $L_i \leftrightarrow L_j$.

② Multiplier la i-ème ligne par un réel **non nul** $\lambda \neq 0$ et lui additionner la j-ème ligne multipliée par un réel μ quelconque. Cette modification de la i-ème ligne sera notée $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$. En particulier, si $\mu = 0$, la transformation correspondante consiste simplement à multiplier la i-ème ligne par un réel non nul λ.

Il est important de noter que chacune de ces transformations élémentaires produit un nouveau système d'équations linéaires qui est équivalent au système initial, c'est-à-dire possède le même ensemble de solutions. Cette affirmation sera justifiée plus tard dans ce cours.

La méthode de l'échelonnement consiste à répéter les transformations élémentaires ① et ② dans un ordre bien précis afin d'éliminer successivement les inconnues des équations du système. Voici l'algorithme correspondant.

I. On choisit une inconnue dans une équation du système, non encore choisie précédemment. Le couple inconnue-équation choisi sera appelé *le pivot*, l'inconnue correspondante *l'inconnue pivotale* et l'équation correspondante *l'équation pivotale*. A l'aide d'une transformation de type ①, on place cette nouvelle équation pivotale après celles choisies précédement et directement au-dessus des éventuelles équations non pivotales restantes. Une équation choisie comme pivotale ne sera plus modifiée jusqu'à la fin de l'algorithme.

II. S'il ne reste plus d'équation non pivotale, l'algorithme est terminé. Sinon, on utilise le nouveau pivot du point précédent pour éliminer son inconnue pivotale de toutes les équations non pivotales à l'aide de transformations élémentaires de type ②. Ici nous pouvons rencontrer deux cas particuliers :

   - Nous avons créé l'équation "$0 = 0$" - cette équation est toujours satisfaite, n'apporte aucune contrainte sur les inconnues du système et nous pouvons donc la supprimer ce qui réduit le nombre d'équations du système.
   - Nous avons créé une équation de la forme "$0 = b$" avec $b \neq 0$ - cette équation incompatible n'est jamais satisfaite, l'algorithme est terminé et on conclut que le système initial n'admet pas de solution.

III. On retourne à l'étape I.

Avant d'expliquer comment décrire toutes les solutions d'un système échelonné, appliquons l'algorithme de l'échelonnement aux exemples proposés ci-dessus.

Exemple 1 (suite et fin) Comme premier pivot, nous pouvons choisir l'inconnue x_1 dans la première équation du système :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 4 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & - & 3x_4 & = & 5 \end{array}\right. \qquad \leftarrow \text{premier pivot}$$

Nous n'avons pas besoin de permuter les lignes car l'équation pivotale est déjà placée au-dessus des autres. On va utiliser maintenant ce pivot pour éliminer l'inconnue pivotale x_1 de toutes les autres équations placées en-dessous. Pour cela, nous allons remplacer la deuxième ligne L_2 par $2L_2 - 3L_1$, puis remplacer la troisième ligne L_3 par $2L_3 - 3L_1$. Nous obtenons le système suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2x_1 & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 & \\ & & x_2 & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 5 & \qquad L_2 \leftarrow 2L_2 - 3L_1 \\ & & 3x_2 & + & 12x_3 & - & 15x_4 & = & 7 & \qquad L_3 \leftarrow 2L_3 - 3L_1 \end{array}\right.$$

La première boucle de l'algorithme est terminée. Comme deuxième pivot, on choisi l'inconnue x_2 dans la deuxième équation du système. Comme cette équation et placée au bon endroit, en-dessous du premier pivot et au-dessus des autres équations non pivotales, nous n'avons pas besoin de permuter les lignes. Nous utilisons ce nouveau pivot pour éliminer la nouvelle inconnue pivotale x_2 des équations non pivotales restantes:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} 2{\color{red}x_1} & + & x_2 & - & 2x_3 & + & 3x_4 & = & 1 & \\ & & {\color{red}x_2} & + & 4x_3 & - & 5x_4 & = & 5 & {\color{red}\leftarrow \text{deuxième pivot}} \\ & & & & & & 0 & = & -8 & L_3 \leftarrow L_3 - 3L_2 \end{array}\right.$$

Nous avons obtenu une équation incompatible $0 = -8$ ce qui implique que le système initial n'admet pas de solutions.

Exemple 2 (suite) Comme premier pivot nous choisissons encore l'inconnue x_1 dans la première équation du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} {\color{red}x_1} & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 & {\color{red}\leftarrow \text{premier pivot}} \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 11 & \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & 4x_3 & = & 13 & \\ 4x_1 & + & 11x_2 & & & = & 37 & \end{array}\right.$$

Cette équation pivotale est placée au-dessus de toutes les équations non pivotales donc nous n'avons pas besoin de permuter les lignes. Nous utilisons ce pivot pour éliminer x_1 de toutes les équations restantes:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} {\color{red}x_1} & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 & \\ & & x_2 & + & 4x_3 & = & 7 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & = & 5 & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \\ & & 3x_2 & + & 12x_3 & = & 21 & L_4 \leftarrow L_4 - 4L_1 \end{array}\right.$$

Comme deuxième pivot nous pouvons choisir l'inconnue x_2 dans la deuxième équation du système (encore pas besoin de permuter les lignes) et nous nous servons de ce pivot pour éliminer l'inconnue pivotale x_2 de toutes les équations non pivotales:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} {\color{red}x_1} & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 & \\ & & {\color{red}x_2} & + & 4x_3 & = & 7 & {\color{red}\leftarrow \text{deuxième pivot}} \\ & & & & -x_3 & = & -2 & L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ & & & & 0 & = & 0 & L_4 \leftarrow L_4 - 3L_2 \end{array}\right.$$

Nous pouvons supprimer la dernière équation triviale $0 = 0$ qui est toujours satisfaite. Nous n'avons plus de choix, pour troisième pivot nous devons choisir l'inconnue x_3 dans la troisième équation du système, après quoi il ne reste plus d'équation non pivotale. L'algorithme de l'échelonnement est donc terminé et nous avons obtenu le système échelonné suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrl} {\color{red}x_1} & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 & \\ & & {\color{red}x_2} & + & 4x_3 & = & 7 & \\ & & & & -{\color{red}x_3} & = & -2 & {\color{red}\leftarrow \text{troisième pivot}} \end{array}\right.$$

Exemple 3 (suite) Comme premier pivot nous choisissons encore l'inconnue x_1 dans la première équation du système

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} {\color{red}x_1} & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 5 & {\color{red}\leftarrow \text{premier pivot}} \\ x_1 & - & x_2 & + & 9x_3 & - & x_4 & = & 7 & \\ x_1 & - & 2x_2 & + & 7x_3 & - & 2x_4 & = & 9 & \end{array}\right.$$

et nous l'utilisons pour éliminer x_1 de toutes les équations suivantes:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} {\color{red}x_1} & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 5 & \\ & & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 2 & L_2 \leftarrow L_2 - L_1 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & & & = & 4 & L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \end{array}\right.$$

Comme deuxième pivot nous choisissons l'inconnue x_2 dans la deuxième équation du système et nous l'utilisons pour éliminer x_2 de la dernière équation non pivotale:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 5 & \\ & & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 2 & \quad \leftarrow \text{deuxième pivot} \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 6 & \quad L_3 \leftarrow 2L_3 - L_2 \end{array}\right.$$

Pour troisième pivot nous choisissons l'inconnue x_3 dans la trosième équation du système. Comme il ne reste plus d'équation non pivotale, l'échelonnement est terminé et nous avons obtenu le système échelonné suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrl} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 5 & \\ & & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 2 & \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 6 & \quad \leftarrow \text{troisième pivot} \end{array}\right.$$

2. Description des solutions

Etant donné un système déjà échelonné, et n'ayant pas rencontré d'équation incompatible, nous divisons l'ensemble des inconnues du système en deux catégories:

- *inconnues pivotales* - celles que nous avons choisi comme pivots successifs lors de l'échelonnement du système;
- *variables libres* - toutes les autres inconnues qui ne sont pas pivotales.

Nous avons donc deux cas possibles.

$\boxed{\textbf{Cas1}}$ Si toutes les inconnues sont pivotales, le système admet une solution unique que l'on obtient en remontant le système échelonné à partir de sa dernière équation.

Exemple 2 (fin) Nous avons transformé le système d'équations linéaires initial en un système échelonné équivalent suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ & & x_2 & + & 4x_3 & = & 7 \\ & & & & -x_3 & = & -2 \end{array}\right.$$

Toutes les trois inconnues x_1, x_2, x_3 ont été choisies comme inconnues pivotales, donc ce système n'admet pas de variable libre. Par conséquent il n'existe qu'une solution unique de ce système d'équations. Nous trouvons cette solution en parcourant le système échelonné de la dernière équation vers la première :

$$\begin{array}{rcl} -x_3 = -2 & \Rightarrow & x_3 = 2 \\ x_2 + 4x_3 = 7 & \Rightarrow & x_2 = 7 - 4x_3 = -1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 4 & \Rightarrow & x_1 = 4 - 2x_2 + 3x_3 = 12. \end{array}$$

Nous avons obtenu la solution $x_1 = 12$, $x_2 = -1$ et $x_3 = 2$.

$\boxed{\textbf{Cas2}}$ S'il existe au moins une variable libre (inconnue non pivotale), le système admet une infinité de solutions. Pour les décrire, on exprime les inconnues pivotales en fonction des variables libres, toujours en partant de la dernière équation du système échelonné. Les variables libres jouent le rôle de paramètres et peuvent prendre des valeurs arbitraires. Les inconnues pivotales s'expriment en fonction de ces paramètres.

EXEMPLE 3 (FIN) Dans cet exemple, nous sommes arrivés à la forme échelonnée

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 3x_2 & + & 4x_3 & - & 2x_4 & = & 5 \\ & & 2x_2 & + & 5x_3 & + & x_4 & = & 2 \\ & & & & x_3 & - & x_4 & = & 6 \end{array}\right.$$

où les inconnues x_1, x_2, x_3 sont pivotales et l'inconnue x_4 est une variable libre (non pivotale). Ceci implique que le système d'équations correspondant admet une infinité de solutions que l'on peut décrire en fonction d'un paramètre. Pour commencer, nous exprimons les inconnues pivotales x_1, x_2, x_3 en fonction de la variable libre x_4, en parcourant le système de la dernière équation vers la première :

$$\begin{array}{rcl} x_3 - x_4 = 6 & \Rightarrow & x_3 = 6 + x_4 \\ 2x_2 + 5x_3 + x_4 = 2 & \Rightarrow & x_2 = \frac{1}{2}(2 - 5x_3 - x_4) = \frac{1}{2}(2 - 5(6 + x_4) - x_4) = -14 - 3x_4 \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 5 & \Rightarrow & \end{array}$$

$$x_1 = 5 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 5 + 3(-14 - 3x_4) - 4(6 + x_4) + 2x_4 = -61 - 11x_4$$

Pour finir, la variable libre x_4 devient un paramètre et nous obtenons toutes les solutions de ce système sous la forme

$$\left\{\begin{array}{rcl} x_1 & = & -61 - 11t \\ x_2 & = & -14 - 3t \\ x_3 & = & 6 + t \\ x_4 & = & t \end{array}\right. \qquad \text{avec } t \in \mathbb{R}.$$

3. Un dernier exemple

Appliquons la méthode étudiée à la résolution d'un système impressionnant de 5 équations avec 6 inconnues suivant:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & 3x_6 & = & 1 \\ -x_1 & & & - & 2x_3 & + & 2x_4 & & & - & 4x_6 & = & 0 \\ -x_1 & & & - & 2x_3 & + & 3x_4 & - & x_5 & - & 4x_6 & = & -1 \\ x_1 & + & 6x_2 & - & x_3 & + & 9x_4 & + & x_5 & + & x_6 & = & 1 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & & & + & x_6 & = & 0 \end{array}\right.$$

Nous choisissons l'inconnue x_1 dans la première équation comme premier pivot et éliminons x_1 de toutes les équations non pivotales suivantes. Remarquons que la dernière équation ne nécessite pas de modification car elle ne contient pas de x_1.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & 3x_6 & = & 1 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 1 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 4x_4 & & & - & x_6 & = & 0 \\ & & 4x_2 & - & 2x_3 & + & 8x_4 & & & - & 2x_6 & = & 0 \\ & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 4x_4 & & & + & x_6 & = & 0 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{premier pivot} \\ L_2 \leftarrow L_2 + L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 - L_1 \\ \\ \end{array}$$

Nous choisissons l'inconnue x_2 dans la deuxième équation comme deuxième pivot et éliminons x_2 de toutes les équations non pivotales suivantes.

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & 3x_6 & = & 1 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 1 \\ & & & & & & x_4 & - & x_5 & & & = & -1 \\ & & & & & & 2x_4 & - & 2x_5 & & & = & -2 \\ & & & & & & -x_4 & + & x_5 & & & = & 1 \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} \\ \leftarrow \text{deuxième pivot} \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2 \\ L_5 \leftarrow L_5 + L_2 \end{array}$$

Nous ne pouvons pas choisir x_3 comme troisième inconnue pivotale car elle n'apparait plus dans les équations non pivotales restantes. Nous choisissons donc x_4 dans la troisième équation comme troisième pivot, puis éliminons x_4 des équations suivantes.

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccccl} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & 3x_6 & = & 1 & & \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 1 & & \\ & & & & & & x_4 & - & x_5 & & & = & -1 & & \leftarrow \text{troisième pivot} \\ & & & & & & & & & & 0 & = & 0 & & L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \\ & & & & & & & & & & 0 & = & 0 & & L_5 \leftarrow L_5 + L_3 \end{array}\right.$$

Pour finir, nous supprimons les deux équations triviales $0 = 0$. Il ne reste plus d'équation non pivotale donc l'échelonnement est terminé. Le système obtenu est le suivant:

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & + & 3x_6 & = & 1 \\ & & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & + & x_5 & - & x_6 & = & 1 \\ & & & & & & x_4 & - & x_5 & & & = & -1 \end{array}\right.$$

Nous avons trois inconnues pivotales x_1, x_2, x_4 et trois variables libres x_3, x_5, x_6. Le système admet donc une infinité de solutions. Pour décrire ces solutions, nous exprimons les inconnues pivotales en fonction des variables libres. Nous commençons par la dernière équation et remontons vers la première.

$$x_4 = -1 + x_5$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(1 + x_3 - 3x_4 - x_5 + x_6) = \frac{1}{2}(1 + x_3 + 3 - 3x_5 - x_5 + x_6) = 2 + \frac{1}{2}x_3 - 2x_5 + \frac{1}{2}x_6$$

$$x_1 = 1-2x_2-x_3-x_4-x_5-3x_6 = 1-4-x_3+4x_5-x_6-x_3+1-x_5-x_5-3x_6 = -2-2x_3+2x_5-4x_6$$

Nous obtenons l'ensemble de toutes les solutions du système décrit à l'aide de trois paramètres:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 & = & -2 - 2r + 2s - 4t \\ x_2 & = & 2 + \frac{1}{2}r - 2s + \frac{1}{2}t \\ x_3 & = & r \\ x_4 & = & -1 + s \\ x_5 & = & s \\ x_6 & = & t \end{array}\right. \qquad \text{avec } r, s, t \in \mathbb{R}.$$