Cours de Topologie et Calcul Différentiel

Théo ANDRÉ et Ctirad KLIMCIK

3 mai 2020

Table des matières

1 Topologie

1.1 Introduction

<u>Définition 1.1</u> : *Toute famille τ des sous ensembles d'un ensemble X est appelée une* topologie *sur X si elle contient X lui-même ainsi que l'ensemble vide $\varnothing$, si toute intersection d'un nombre fini des membres de τ est un membre de τ, de même quand à l'union finie de membres de τ. L'ensemble X muni d'une topologie est appelé* Espace Topologie *et les membres de la topologie sont appelés* Ensembles Ouverts

<u>Définition 1.2</u> : *Le complémentaire des ensembles ouverts dans X sont appelés* ensembles fermés. *Le plus petit ensemble fermé qui contient un sous-ensemble $S \subset X$ donné est appelé adhérence de S et est noté $\bar{S}$. Autrement dit l'adhérence $\bar{S}$ est l'intersection de tous les fermés contenant S. On dit que S est dense dans X si $\bar{S} = X$ ce qui veut dire que tout ouvert $\Omega \neq \varnothing$ dans la topologie contient des éléments de S.*

<u>Définition 1.3</u> : *Tout ensemble ouvert qui contient un point $x \in X$ est appelé voisinage de x. Un point d'accumulation d'un sous-ensemble $S \subset X$ est un point $y \in X$ tel que dans tout voisinage de y se trouve au moins un point $s \in S$ qui n'est pas y*

On remarque dans la figure précédente que M_1 est un point d'accumulation tandis que M_2 n'en est pas un

<u>Définition 1.4</u> : *Une application $f : (X, \tau) \to (X', \tau')$* entre deux espaces topologiques est dite continue si l'image inverse $f^{-1}(\Omega')$ de tout membre Ω' de la topologie τ' est membre de la topologie τ

Exemple : On considère l'ensemble $X = \{+, -\}$ Prenons comme exemple les deux topologies $\tau_1 = \{\varnothing, \{+\}, \{+, -\}\}$ et $\tau_2 = \{\varnothing, \{-\}\{+, -\}\}$ ainsi que la fonction $f_+ : (X, \tau_1) \to (X, \tau_2)$ définie telle que $f_+(\pm) = +$. Puisque l'image réciproque de chaque ouvert de τ_2 est un ouvert dans τ_1, il est donc clair que la fonction f_+ est continue.

Si f est une bijection et l'application $f - 1$ est en sus continue, on dit que f est un *homéomorphisme*. En particulier l'image $f(\Omega)$ d'un ensemble ouvert Ω est un ouvert. On dit alors que l'homéomorphisme préserve la topologie.

<u>Définition 1.5</u> : Soient τ et τ' deux topologies sur un espace X. On dit que τ est plus forte que τ' si l'application identité $id : (X, \tau) \to (X, \tau')$ est continue. Dit autrement, la topologie τ' est plus faible que la topologie τ si tout membre de τ' est membre de τ.

Une façon importante de construire une topologie sur X est basée sur la notion de distance sur X

1.2 Distances

<u>Définition 1.6</u> : On appelle *distance* sur X, toute application $d : X \times X \to \mathbb{R}^+$

1. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad d(x, y) = d(y, x)$
2. $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad d(x, y) = 0 \Longrightarrow x = y$
3. $\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \quad d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$

<u>Définition 1.7</u> : On définit un espace métrique comme un couple (X, d) où X est un ensemble et d une distance sur X. De plus on appelle *boule ouverte* noté $\mathcal{B}_0(a, r)$ respectivement *boule fermée* $\mathcal{B}(a, r)$ de centre x, de rayon r, l'ensemble des points $x \in X$ qui vérifient $d(x, a) \leqslant r$ respectivement $d(x, a) < r$.

La topologie τ associée à l'espace métrique (X, d) est la collection des ensembles ouverts définis par la proscription suivante : *"Un sous ensemble $\Omega \subset X$ si pour chaque x de Ω, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\mathcal{B}_0(x, \varepsilon) \subset \Omega$ "*

2 Calcul Différentiel

2.1 Introduction

Dans cette version du cours je donnerai les preuves en annexe avec les noms des propriétés don't worry, on notera aussi l'espace $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m) := \mathbb{R}^{mn}$.

<u>Définition 2.1</u> : *Une application* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est un* $o(x)$ *si pour tout* $\epsilon > 0$ *il existe* $r > 0$ *tel que* $||x|| < r \Rightarrow ||f(x)|| < \epsilon ||x||$*. Autrement dit, si* $f(x) = \epsilon ||x||$ *et* $\lim\limits_{x \to 0} \epsilon(x) = 0$

Par exemple la fonction $f(x) = ||x||^3$ est un $o(x)$. Rappelons la définition de la dérivée d'une fonction réelle d'une variable réelle $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

qui peut être réécrite de façon équivalente comme

$$f(x_0 + h) - f(x_0) - f(x_0) \cdot h = o(x) \tag{1}$$

La généralisation de la définition de la dérivée pour les applications $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est basée sur la formulation (1)

<u>Définition 2.2</u> : *Soient* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *un ouvert de* x_0*. Une fonction* $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ *est dite différentiable en* x_0*, s'il existe une application linéaire* $L : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *de sorte que* $f(x_0 + h) - f(x_0) - L \cdot h = o(h)$ (2)*. L'application* L *est appelée la dérivée de la fonction* f *en* x_0 *et elle est notée* $f'(x_0)$*.*

Proposition 2.1 : Si la dérivée $f'(x_0)$ existe, elle est unique.

Proposition 2.2 : Si la fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en x_0 alors elle y est continue

On dit que f est différentiable sur $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, si pour tout $x \in \Omega$, f est différentiable en x. Dans ce cas, la dérivée f' peut être interprétée en tant que fonction $f' : \Omega \to \mathbb{R}^{nm}$, où l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{nm}$ est identifié avec l'espace vectoriel des opérations linéaires $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$

<u>Définition 2.3</u> : *La fonction* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *est dite continuement différentiable (ou de classe* $\mathcal{C}^1$*) sur* Ω *si sa dérivée* $f' : \Omega \to \mathbb{R}^{nm}$ *est continue sur* Ω

<u>Définition 2.4</u> : *Si la dérivée* f' *est elle-même différentiable, on dit que* f *est deux fois différentiable et on note la dérivée* f''

Théorème 2.1 : Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ et $U \subset \mathbb{R}^m$ deux ouverts et $f : \Omega \to U$ et $g : U \to \mathbb{R}^k$ deux fonctions différentiables respectivement dans les points $x_0 \in \Omega$ et $f(x_0) \in U$ alors la fonction composée $g \circ f : \Omega \to \mathbb{R}^k$ est différentiable en x_0 et sa dérivée $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$

2.2 Propriétés de la dérivée

Si $f_1 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ et $f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ sont différentiables en $x_0$alors leur combinaison linéaire est aussi différentiable et on a

$$\forall (\lambda_1 \lambda_2) \in \mathbb{R}^2, (\lambda_1 \cdot f_1 + \lambda_2 \cdot f_2)'(x_0) = \lambda_1 f_1'(x_0) + \lambda_2 f_2'(x_0)$$

Notons d'ailleurs que la dérivée d'une fonction constante est nulle. En effet, on a $f(x_0 + h) - f(x_0) - 0 \cdot h = 0 = o(h)$. La dérivée l' d'une fonction linéaire $l : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est égale à l elle même, en effet on a $l(x_0 + h) - l(x_0) - l'(x_0) \cdot h = 0 = o(h)$. Calculons alors maintenant la dérivée d'une forme quadratique $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par la relation $Q(x) = B(x, x), x \in \mathbb{R}^n$ où $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique (*i.e. :* $B(x, y) = B(y, x)$)

2.3 Vitesse et Dérivée directionnelles

On s'intéresse dans ce passage à la notion de dérivées selon une direction et aux vitesses de courbes paramétrées.

<u>Définition 2.5</u> : *Soit* $I \subset \mathbb{R}$ *un intervalle. Une n-courbe paramétrée est une application différentiable* $C : I \to \mathbb{R}^n$*. La dérivée* $C'(t_0)$ *est appelée la vitesse de la courbe au point* t_0*. Les courbes pour lesquelles* $C'(t_0) \neq 0 \ \forall t \in I$ *sont appelées régulières.*

Par exemple nous pouvons considérer un mouvement rectiligne dans l'espace $\mathbb{R}^n$ qui est une courbe $C : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ de la forme $C(t) = C_0 + v \cdot t$ où $v \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur fixé dans $\mathbb{R}^n$. Nous trouvons $C'(t) = v$ ce qui veut dire que la vitesse du mouvement rectiligne est constante. Si la vitesse n'est pas nulle, le mouvement rectiligne est régulier. Si C est une n-courbe différentiable et $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une application différentiable quelconque, nous pouvons transporter la n-courbe C vers une n-courbe $f \circ C$. La vitesse de la n-courbe transportée est donnée alors par la formule de la dérivée de fonctions composées, à savoir :

$$(f \circ C)'(t) = C'(t) \cdot f'(C(t))$$

On peut interpréter ce résultat de la façon suivante : Tandis que la courbe c est transportée de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^m$ par l'application f, la vitesse C' de la courbe est transportée par la dérivée f'.

Définition 2.6 : *On dit que l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admet une dérivée directionnelle au point $x \in \mathbb{R}^n$ dans la direction $h \in \mathbb{R}^n$, si elle réalise un transport différentiable du mouvement réctiligne de vitesse h. Autrement dit, la n-courbe $f(x+n,t)$ doit être différentiable en $t = 0$. Dans ce cas là, la dérivée directionnelle $f'(x,h)$ est donnée par la vitesse de la courbe transportée en $t = 0$, à savoir $f'(x,h) = \lim_{t\to 0} \frac{f(x+h-t)-f(x)}{t}$.*

Proposition 2.3 : Si l'application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en $x \in \mathbb{R}^n$ alors pour tout $h \in \mathbb{R}^n$, la dérivée directionnelle $f'(x,h)$ existe s'exprime suivant la relation : $f'(x;h) - f'(x) \cdot h$

Soulignons que la réciproque est fausse. Par exemple, la fonction caractéristique $\chi_A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de la région délimitée par les inégalités $xn > 0$ et $0 < x2 < x1$, possède à l'origine $(0,0)$ une dérivée directionnelle nulle dans toutes les directions malgré le fait qu'elle ne soit pas différentiable en ce point de par sa discontinuité en $(0;0)$.

La proposition 2.3 nous permet de calculer la dérivée en commençant d'abord par la dérivée directionelle. Pour calculer $f'(x)$ no peut alors adopter la démarche suivante :

1. On détermine la dérivée directionnelle $f'(x,h)$
2 On vérifie que $f(x+h) - f(x) - f'(x,h)$ est un $o(h)$ ce qui montre que f est différentiable et que l'action de la dérivée $f'(x)$ sur le vecteur h est donnée par $f'(x,h)$.

2.4 Dérivées partielles

Considérons l'application différentiable $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. L'argument x ainsi que l'image $f(x)$ peuvent être décomposés dans les bases canoniques $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots e_n)$ et $\mathcal{B}_2 = (E_1 \dots E_m)$ des espaces $\mathbb{R}^n$et $\mathbb{R}^m$comme suit :

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \quad \text{et} \quad f(x) = \sum_{i=1}^{m} f_i(\vec{x}) E_i = f_1(\vec{x}) E_1 + \cdots + f_m(\vec{x}) E_m$$

La dérivée directionnelle $f'(x, e_i)$ peut aussi être décomposée dans la base $\mathcal{B}_2$, la formule dans la définition 2.5 nous donne alors :

$$f'(x, e_i) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_j}{\partial x_i} E_j = \frac{\partial f_1}{\partial x_i} E_1 + \cdots + \frac{\partial f_m}{\partial x_i} E_m$$

où les dérivées partielles sont définies comme :

$$\frac{\partial f_j}{\partial x_i} = \lim_{t \to 0} \frac{f_j(\vec{x} + t e_j) - f(\vec{x})}{t}$$

Exprimons enfin la dérivée $f'(x)$ dans les bases canoniques $\mathcal{B}_1$ et $m\mathcal{B}_2$:

$$f'(h) \cdot h = \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} J(f)_{ji}(x) E_j \cdot h_i$$

où la matrice de *Jacobi* $J(f)_{ji}$ est donnée par $J(f)_{ji} = \frac{\partial f_j}{x_i}$

Exemple : Calculons la matrice de Jacobi associée à la fonction $f(x, y) = x^2 + y^2$.

Commençons par remarquer que la fonction f est à valeurs de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$. Notons la matrice de Jacobi $J(f) \in \mathcal{M}_{1,2}(\mathbb{R})$. De plus nous avons que $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x$ et $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y$ La matrice de Jacobi est alors exprimée comme suit :

$$J(f) = \begin{pmatrix} 2x & 2y \end{pmatrix}$$

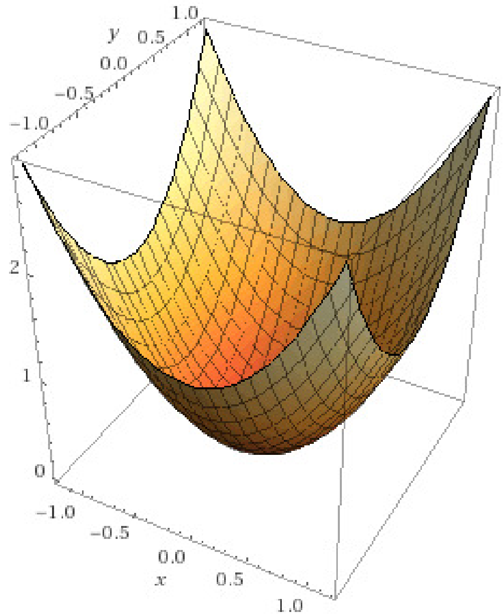

FIGURE 1 – Graphe de $f(x, y) = x^2 + y^2$

2.5 Difféomorphismes

Définition 2.6 : *Soient $(U, V) \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ deux ouverts . Un difféomorphisme est une bijection différentiable $f : U \to V$ telle que f^{-1} soit également différentiable.*

Proposition 2.4 : Si f est un difféomorphisme alors, en tout point $x \in \mathbb{R}^n$, la dérivée de f est une application linéaire inversible dont l'application inverse est donnée par $(f(x))^{-1} = (f^{-1})(f(x))$

Théorème 2.2 (*Théorème des Accroissements Finis*) : Soit $f(x_1, \ldots x_n)$ une fonction réelle qui possède des dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_i}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ dans un produit cartésien d'intervalles $I = \times_{i=1}^{n} I_i$. Soient a et b deux points de I. alors il existe n points $c_{(1)}, c_{(2)}, \ldots c_{(n)}$ tels que $min(a_k, b_k) \leqslant c_{(j),k} \leqslant max(a_k, b_k) \forall j, k = 1, \ldots n$ qui vérifient la relation suivante :

$$f(b) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \frac{\partial f}{\partial x_i}(c_{(j)})$$

Théorème 2.3 : Soit $U \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction réelle. Si les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, $j = 1, \ldots n$ existent en tout point de U et sont continues en un point $a \in U$ alors la fonction f possède une dérivée $f'(a)$.

Définition 2.7 : *La dérivée d'une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est aussi appelée gradient de la fonction f. Donnons une interprétation géométrique de la notion du gradient :* Le graphique de la fonction $f(x_1, \ldots, x_n)$ est l'ensemble dest points $(y, x_1, \ldots, x_n)$ dans l'espace $\mathbb{R}^{n+1}$ qui vérifient l'équation $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. En particulier, le graphique de la fonction affine $y = A_0 + A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n$ s'appelle hyperplan.

Choisissons un point $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ et considérons un point $P = (f(a), a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ qui appartient au graphique de la fonction f. Nombre d'hyperplans passent par le point P, mais nous cherchons celui d'entre eux qui lui est tangent ce qui veut dire qui adhère le mieux possible au graphique de la fonction f . L'hyperplan tangent est alors donné par l'équation :

$$y = f(a) + \frac{\partial f}{\partial x_1} a(x_1 - a_1) + \cdot + \frac{\partial f}{\partial x_n} a(x_n - a_n)$$