Espaces vectoriels

Dans ce chapitre, nous allons reprendre certaines propriétés des espaces $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ dans le but de les généraliser à un cadre plus abstrait. En particulier, nous voulons garder toutes les propriétés usuelles d'addition de vecteurs et de multiplication d'un vecteur par un scalaire.

1. Espace vectoriel réel

Définition Un *espace vectoriel réel* est un ensemble non vide E muni de deux lois suivantes:

1. Une loi interne d'addition $\boxplus : E \times E \to E$ qui à un couple d'éléments $u, v \in E$ associe un élément $u \boxplus v \in E$, ayant les propriétés suivantes :

   ① $\forall u, v \in E, \quad u \boxplus v = v \boxplus u,$

   ② $\forall u, v, w \in E, \quad (u \boxplus v) \boxplus w = u \boxplus (v \boxplus w),$

   ③ il existe un élément $\vec{0}_E \in E$, appelé vecteur nul, tel que
   $\forall u \in E, \quad \vec{0}_E \boxplus u = u \boxplus \vec{0}_E = u,$

   ④ pour tout $u \in E$ il existe un élément $-u \in E$, appelé l'opposé de u, tel que $u \boxplus (-u) = \vec{0}_E$.

2. Une loi externe de multiplication par un scalaire $\boxdot : \mathbb{R} \times E \to E$ qui à un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ et à un élément $u \in E$ associe un élément $\lambda \boxdot u \in E$, ayant les propriétés suivantes :

   ⑤ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall u \in E, \quad \lambda \boxdot (\mu \boxdot u) = \mu \boxdot (\lambda \boxdot u) = (\lambda \cdot \mu) \boxdot u,$

   ⑥ $\forall u \in E, \quad 1 \boxdot u = u.$

3. Les deux lois sont définies de manière cohérente pour que les propriétés usuelles de distributivité soient satisfaites:

   ⑦ $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R},\ \forall u \in E, \quad (\lambda + \mu) \boxdot u = (\lambda \boxdot u) \boxplus (\mu \boxdot u),$

   ⑧ $\forall \lambda, \in \mathbb{R},\ \forall u, v \in E, \quad \lambda \boxdot (u \boxplus v) = (\lambda \boxdot u) \boxplus (\lambda \boxdot v).$

Remarques sur les notations :
1. Dans la définition ci-dessus, les symboles $\boxplus$ et $\boxdot$ désignent les nouvelles lois d'addition de vecteurs et de multiplication d'un vecteur par un scalaire, tandis que les symboles standard $+$ et $\cdot$ désignent l'addition et la multiplication usuelles de nombres réels. Cette double notation étant plutôt lourde, il est habituel d'utiliser les mêmes symboles $+$ et $\cdot$ pour désigner aussi les lois vectorielles. Par exemple, dans la pratique nous remplacerons $\lambda \boxdot u$ par $\lambda \cdot u$ ou même tout simplement par λu. Nous verrons cependant des exemples où cette simplification d'écriture pourrait être trompeuse et où il vaut mieux garder la distinction claire entre ces deux types de lois.
2. Les éléments d'un espace vectoriel E sont appelés *vecteurs* et les réels *scalaires*. En mathématiques, pour alléger les notations, la plupart du temps un vecteur est noté sans la flèche au-dessus: on écrira simplement u au lieu de $\vec{u}$. Pour éviter la confusion entre les vecteurs et les scalaires, nous allons habituellement réserver les lettres u, v, w pour désigner les vecteurs et les lettres grecques $\alpha, \beta, \lambda, \mu$... pour désigner les scalaires. Les lettres a, b, c ou x, y, z désigneront souvent les composantes d'un vecteur dans un espace comme $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$.
3. Nous allons garder la flèche dans la notation du vecteur nul $\vec{0}_E$ pour éviter la confusion avec le nombre réel (scalaire) zéro, surtout que nous allons généralement omettre la lettre E en indice. Le vecteur nul sera donc noté simplement $\vec{0}$, sauf s'il est important de préciser dans quel espace vectoriel on se trouve.
4. Formellement, dans un espace vectoriel nous ne définissons pas de soustraction de vecteurs, mais à un vecteur u nous pouvons additionner l'opposé d'un autre vecteur v. L'écriture

formelle $u + (-v)$ sera simplifiée en $u - v$.

Voici quelques exemples classiques d'espaces vectoriels réels.

Exemple 1 Comme les ensembles $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ nous ont servi comme modèle pour introduire la notion d'un espace vectoriel, il n'est pas étonnant que nous les citons au début de cette liste. De manière plus générale, pour tout entier $n \geq 1$, nous pouvons définir l'ensemble $\mathbb{R}^n$ comme l'ensemble de tous les n-uplets de nombres réels

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n) : x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}.$$

L'ensemble $\mathbb{R}^n$ devient un espace vectoriel si on le muni des lois d'addition et de multiplication par un scalaire usuelles :

$$\forall_{(x_1,\ldots,x_n),\ (y_1,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n} \quad (x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\forall_{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n}\ \forall_{\lambda\in\mathbb{R}} \quad \lambda(x_1, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_n).$$

Le vecteur nul de cet espace est $\vec{0} = (0, \ldots, 0)$ et l'opposé d'un vecteur $(x_1, \ldots, x_n)$ est donné par $(-x_1, \ldots, -x_n)$.

Exemple 2 Soit $n \geq 0$ un entier et considérons l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ de tous les polynômes à coefficients réels d'une variable X de degré au plus n:

$$\mathbb{R}_n[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n : a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}.$$

L'addition de polynômes

$$(a_0+a_1X+\ldots+a_nX^n)+(b_0+b_1X+\ldots+b_nX^n) = (a_0+b_0)+(a_1+b_1)X+\ldots+(a_n+b_n)X^n$$

et la multiplication d'un polynôme par un réel

$$\lambda(a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1X + \ldots + \lambda a_nX^n$$

munissent cet ensemble de la structure d'un espace vectoriel réel. Le polynôme constant égal à zéro joue le rôle du vecteur nul de cet espace.

Remarque Il est important de signaler que même si en analyse nous pouvons multiplier deux polynômes entre eux, cette opération n'est pas en relation avec la structure vectorielle de $\mathbb{R}_n[X]$. Nous ne multiplions jamais un vecteur (polynôme) par un autre vecteur (polynôme). Il est donc important de bien faire la distinction entre un réel λ (scalaire) et un polynôme constant $p(X) = \lambda$ (vecteur).

Exemple 3 L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ de tous les polynômes à coefficients réels d'une variable X (sans restriction sur le degré), muni des lois usuelles comme ci-dessus, est aussi un espace vectoriel réel.

Exemple 4 Dans la seconde moitié de ce cours nous allons parler de matrices. Soient $n, p \geq 1$ deux entiers. On définit une matrice de taille nxp à coefficients réels comme un tableau composé de n lignes et p colonnes dont les cases sont remplies de nombres réels :

$$M = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix}, \quad a_{i,j} \in \mathbb{R}.$$

L'ensemble de toutes les matrices de taille nxp à coefficients réels sera noté $M_{n,p}(\mathbb{R})$. On définit sur cet ensemble la structure d'un espace vectoriel en le munissant des lois d'addition et de multiplication par un scalaire "case par case" :

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{1,1} & \cdots & b_{1,p} \\ b_{2,1} & \cdots & b_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & \cdots & b_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1}+b_{1,1} & \cdots & a_{1,p}+b_{1,p} \\ a_{2,1}+b_{2,1} & \cdots & a_{2,p}+b_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1}+b_{n,1} & \cdots & a_{n,p}+b_{n,p} \end{pmatrix}$$

et

$$\lambda \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & \cdots & a_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1,1} & \cdots & \lambda a_{1,p} \\ \lambda a_{2,1} & \cdots & \lambda a_{2,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{n,1} & \cdots & \lambda a_{n,p} \end{pmatrix}.$$

Exemple 5 Considérons l'ensemble $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$ de toutes les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Nous définissons de manière usuelle l'addition de fonctions et la multiplication d'une fonction par un réel:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \text{et} \quad (\lambda f)(x) = \lambda f(x).$$

L'ensemble $\mathcal{F}$ muni de ces deux lois devient un espace vectoriel réel. Cet exemple peut être généralisé en considérant l'ensemble $\mathcal{A} = \{f : D \to E\}$ de toutes les applications définies sur un domaine non vide D et à valeurs dans un espace vectoriel E quelconque. Dans ce cas, l'addition $f(x) + g(x)$ et la multiplication $\lambda f(x)$ désignent les lois correspondantes dans l'espace vectoriel E en question.

Les propriétés suivantes paraissent évidentes mais nécessitent une justification à partir des axiomes ① - ⑧ de la définition d'un espace vectoriel.

Proposition 1 Soit E un espace vectoriel réel.

(i) $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \lambda \vec{0}_E = \vec{0}_E,$

(ii) $\forall u \in E, \quad 0u = \vec{0}_E,$

(iii) $\lambda u = \vec{0}_E \Rightarrow (\lambda = 0 \text{ ou } u = \vec{0}_E),$

(iv) $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in E, \quad -(\lambda u) = (-\lambda)u = \lambda(-u),$

(v) pour tout $u \in E$, l'opposé $-u$ est unique.

Démonstration (i) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\lambda \vec{0}_E \overset{③}{=} \lambda(\vec{0}_E + \vec{0}_E) \overset{⑧}{=} \lambda \vec{0}_E + \lambda \vec{0}_E.$$

D'après ④, le vecteur $\lambda \vec{0}_E$ admet un opposé noté $-(\lambda \vec{0}_E)$. En l'additionnant à l'égalité ci-dessus, nous avons:

$$\vec{0}_E \overset{④}{=} \lambda\vec{0}_E + (-(\lambda\vec{0}_E)) = [\lambda\vec{0}_E + \lambda\vec{0}_E] + (-(\lambda\vec{0}_E)) \overset{②}{=} \lambda\vec{0}_E + [\lambda\vec{0}_E + (-(\lambda\vec{0}_E))] \overset{④}{=} \lambda\vec{0}_E + \vec{0}_E \overset{③}{=} \lambda\vec{0}_E.$$

(ii) Soit $u \in E$. Comme au point précédent, en appliquent ⑦, on écrit $0u = (0+0)u = 0u + 0u$, puis on additionne un opposé $-(0u)$ pour obtenir

$$\vec{0}_E \overset{④}{=} 0u + (-(0u)) = [0u + 0u] + (-(0u)) \overset{②}{=} 0u + [0u + (-(0u))] \overset{④}{=} 0u + \vec{0}_E \overset{③}{=} 0u.$$

(iii) Supposons que $\lambda \neq 0$. Dans ce cas, nous pouvons multiplier l'égalité correspondante par $1/\lambda$ pour obtenir

$$\vec{0}_E \overset{(i)}{=} \frac{1}{\lambda}\vec{0}_E = \frac{1}{\lambda}(\lambda u) \overset{⑤}{=} \left(\frac{1}{\lambda}\lambda\right) u = 1u \overset{⑥}{=} u.$$

(iv) Soit $u \in E$. Nous avons

$$u + (-1)u \overset{⑥}{=} 1u + (-1)u \overset{⑦}{=} (1 + (-1))u = 0u \overset{(ii)}{=} \vec{0}_E,$$

d'où $(-1)u$ est un opposé de u pour tout $u \in E$. On obtient donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$

$$-(\lambda u) = (-1)(\lambda u) \overset{⑤}{=} (-\lambda)u \overset{⑤}{=} \lambda((-1)u) = \lambda(-u).$$

(v) Soit $u \in E$ et supposons qu'on ait deux vecteurs u_1 et u_2 tels que $u + u_1 = u + u_2 = \vec{0}_E$. On obtient

$$u_1 \overset{③}{=} u_1 + \vec{0}_E = u_1 + (u + u_2) \overset{②}{=} (u_1 + u) + u_2 = \vec{0}_E + u_2 \overset{③}{=} u_2.$$

2. Sous-espaces vectoriels

Définition Soit E un espace vectoriel et soit $F \subset E$ une partie non vide de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E si la restriction à F des lois d'addition de vecteurs et de la multiplication par un scalaire présentes dans E, font de F un espace vectoriel.

Proposition 2 Soit E un espace vectoriel et soit $F \subset E$ une partie de E. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si:

1. F est non vide,
2. $\forall u, v \in F, \quad u + v \in F$,
3. $\forall \lambda \in \mathbb{R},\ \forall u \in F, \quad \lambda u \in F$.

La proposition ci-dessus peut être reformulée de manière équivalente suivante.

Proposition 3 Soit E un espace vectoriel et soit $F \subset E$ une partie de E. L'ensemble F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si:

1. F est non vide,
2. $\forall u, v \in F, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \quad \lambda u + \mu v \in F$.

Remarque Il est facile de voir que tout sous-espace vectoriel de E contient le vecteur nul de E. Cette condition nécessaire n'est pas suffisante pour prouver qu'un ensemble est un sous-espace vectoriel, mais elle est très utile pour montrer qu'un ensemble n'en est pas un.

Avant de passer aux exemples, rappelons les définitions suivantes déjà vues dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Définition Soit E un espace vectoriel. On dit que deux vecteurs $u, v \in E$ sont colinéaires s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $u = \lambda v$ ou $v = \lambda u$.

Définition Soit E un espace vectoriel. Soit $u_1, u_2, \ldots, u_k$ une famille finie de vecteurs de E. Tout vecteur v de la forme

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k,$$

avec $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, est appelé *combinaison linéaire* des vecteurs $u_1, u_2, \ldots, u_k$.

Exemple 1 Soit E un espace vectoriel. Alors $F_1 = \{\vec{0}_E\}$ et $F_2 = E$ sont deux sous-espaces vectoriels de E.

Exemple 2 Soit E un espace vectoriel et soit $u \in E$ un vecteur non nul. Définissons l'ensemble

$$D(u) = \{\lambda u,\ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

composé de tous les vecteurs colinéaires à u. Cet ensemble est appelé *droite vectorielle* engendré par le vecteur u. Il est facile de montrer, en appliquant la Proposition 3 ci-dessus, que $D(u)$ est un sous-espace vectoriel de E. Premièrement, on voit que $u = 1u \in D(u)$ donc $D(u)$ est non vide. Soient $v_1, v_2 \in D(u)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. On a $v_1 = \lambda_1 u$ et $v_2 = \lambda_2 u$ d'où on obtient

$$\alpha v_1 + \beta v_2 = \alpha\lambda_1 u + \beta\lambda_2 u = (\alpha\lambda_1 + \beta\lambda_2)u \in D(u).$$

Dans le cas de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $D(u)$ est aussi une droite au sens géométrique. Inversement, une droite géométrique de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ est une droite vectorielle (sous-espace vectoriel) uniquement si elle passe par l'origine.

Exemple 3 Soient $u, v \in E$ deux vecteurs non colinéaires (donc en particulier non nuls). L'ensemble

$$P(u, v) = \{\lambda u + \mu v, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$$

composé de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs u et v, est un sous-espace vectoriel de E. Il est appelé *plan vectoriel* engendré par les vecteurs u et v. Dans le cas de $\mathbb{R}^3$, l'ensemble $P(u, v)$ est aussi un plan au sens géométrique. Inversement, un plan géométrique de $\mathbb{R}^3$ est un plan vectoriel (sous-espace vectoriel) uniquement s'il passe par l'origine.

Exemple 4 De manière plus générale, soit $u_1, u_2, \ldots, u_k \in E$ une famille de vecteurs de E. On définit l'ensemble

$$\mathrm{Vect}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} = \{\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \ldots + \lambda_k u_k, \quad \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}\}$$

de toutes les combinaisons linéaires des vecteurs donnés. En particulier, $D(u) = \mathrm{Vect}\{u\}$ et $P(u, v) = \mathrm{Vect}\{u, v\}$. L'ensemble $\mathrm{Vect}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\}$ est un sous-espace vectoriel de E appelé *sous-espace engendré* par les vecteurs $u_1, u_1, \ldots, u_k$. C'est le plus petit sous-espace vectoriel de E contenant tous les vecteurs $u_1, \ldots, u_k$.

Exemple 5 Pour tout entier $n \geq 0$, l'ensemble $\mathbb{R}_n[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$. Pour tous entiers $n \geq k \geq 0$, l'ensemble $\mathbb{R}_k[X]$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exemple 6 L'ensemble $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de toutes les fonction continues définies sur l'intervale $[0, 1]$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace de toutes les fonctions définies sur cet intervalle.

Exemple 7 L'ensemble des matrices diagonales et l'ensemble des matrices triangulaires supérieures, respectivement de la forme

$$\begin{pmatrix} d_{1,1} & 0 & 0 \\ 0 & d_{2,2} & 0 \\ 0 & 0 & d_{3,3} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & 0 & a_{3,3} \end{pmatrix},$$

sont deux sous-espaces vectoriels de l'espace $M_{3,3}(\mathbb{R})$ des matrices carrées de taille 3x3 à coefficients réels.

3. Construction de nouveau sous-espaces

Nous pouvons introduire de nouveau sous-espaces vectoriels à partir de ceux déjà existant. Voici quelques résultats élémentaires dans cette direction.

Proposition 4 Soit E un espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E.

1. L'ensemble $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E.
2. L'ensemble $F \cup G$ est un sous-espace vectoriel de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.
3. L'ensemble $F \setminus G$ n'est pas un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration 1. Pour montrer que $F \cap G$ est un sous-espace vectoriel de E, nous allons utiliser la Proposition 3 de la section précédente. On remarque que $\vec{0}_E \in F$ et $\vec{0}_E \in G$ car tout sous-espace vectoriel de E contient le vecteur nul. On en déduit que $\vec{0}_E \in F \cap G$ et par conséquent $F \cap G$ est non vide. Montrons maintenant que $F \cap G$ est fermé par rapport aux opérations d'addition et de multiplication par un scalaire. Soient $u, v \in F \cap G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $u, v \in F$ et comme F est un sous-espace vectoriel de E, on en déduit que $\lambda u + \mu v \in F$. De même, on a $\lambda u + \mu v \in G$. Ceci implique que $\lambda u + \mu v \in F \cap G$.

2. Si $F \subset G$ ou $G \subset F$, on a respectivement $F \cup G = G$ ou $F \cup G = F$ et c'est un sous-espace vectoriel de E. Supposons maintenant que $F \not\subset G$ et $G \not\subset F$. Soit $u \in F \setminus G$ et $v \in G \setminus F$. On a $u, v \in F \cup G$ car $u \in F$ et $v \in G$. Mais $u + v \notin F \cup G$ et par conséquent cet ensemble n'est pas fermé par rapport à l'addition de vecteurs. En effet, si $u + v$ appartenait à F, on aurait $v = (u + v) - u \in F$ ce qui est une contradiction avec le choix de v. De manière analogue on montre que $u + v \notin G$.

3. Comme $\overrightarrow{0}_E \in G$, on obtient que $\vec{0}_E \notin F \setminus G$ et donc l'ensemble $F \setminus G$ ne peut pas être un sous-espace vectoriel de E.

Remarque Il est facile de voir que la démonstration du point 1. de la proposition ci-dessus se généralise au cas de l'intersection d'un nombre quelconque de sous-espaces vectoriels.

Corollaire Considérons un système homogène de n équations linéaires avec p inconnues de la forme

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \dots & + & a_{1,p}x_p & = & 0 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \dots & + & a_{2,p}x_p & = & 0 \\ \vdots & & & & & & & & \\ a_{n,1}x_1 & + & a_{n,2}x_2 & + & \dots & + & a_{n,p}x_p & = & 0. \end{array}\right.$$

L'ensemble $\mathcal{S}$ des solutions $(x_1, x_2, \dots, x_p)$ d'un tel système peut être vu comme un sous-ensemble de l'espace $\mathbb{R}^p$. Notons aussi $\mathcal{S}_i$ l'ensemble d'éléments $(x_1, x_2, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$ qui vérifient la i-ème équation du système uniquement. Nous avons

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \cap \mathcal{S}_2 \cap \dots \cap \mathcal{S}_n.$$

Nous voulons montrer que $\mathcal{S}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$. Pour cela, il suffit de montrer que chaque $\mathcal{S}_i$ est un sous-espace de $\mathbb{R}^p$. Considérons une équation de la forme

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p = 0. \tag{$\star$}$$

L'ensemble de ses solution n'est pas vide car $x_1 = x_2 = \dots = x_p = 0$ est une solution de cette équation. De plus, soient $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_p)$ deux solutions de $(\star)$ c'est-à-dire tels que

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_px_p = 0 \quad \text{et} \quad a_1y_1 + a_2y_2 + \dots + a_py_p = 0.$$

On voit facilement que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, la combinaison linéaire $\lambda x + \mu y$ est aussi une solution de $(\star)$. En effet, on a

$$a_1(\lambda x_1 + \mu y_1) + a_2(\lambda x_2 + \mu y_2) + \ldots + a_p(\lambda x_p + \mu y_p) =$$

$$= \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_px_p) + \mu(a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_py_p) = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 0 = 0.$$

On a montré que l'ensemble des solutions de toute équation de la forme $(\star)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$ et par conséquent les ensembles $\mathcal{S}_i$, $i = 1, \ldots, n$, sont des sous-espaces de $\mathbb{R}^p$.

Nous avons vu que généralement la réunion de deux sous-espaces vectoriels n'est pas un sous-espace vectoriel. Nous pouvons cependant construire un sous-espace vectoriel contenant les deux sous-espaces donnés en effectuant la construction suivante.

Définition Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace vectoriel E. On définit la somme de ces sous-espaces par

$$F + G = \{u + v : u \in F,\ v \in G\}.$$

Proposition 5 La somme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de E.

Démonstration Comme F et G sont des sous-espaces vectoriels de E, ils sont non vides. En particulier, on a $\vec{0}_E \in F$ et $\vec{0}_E \in G$ d'où $\vec{0}_E = \vec{0}_E + \vec{0}_E \in F + G$ et donc $F + G$ n'est pas vide. Soient $w_1, w_2 \in F + G$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a $w_1 = u_1 + v_1$ et $w_2 = u_2 + v_2$ avec $u_1, u_2 \in F$ et $v_1, v_2 \in G$. On obtient

$$\lambda w_1 + \mu w_2 = \lambda(u_1 + v_1) + \mu(u_2 + v_2) = \underbrace{(\lambda u_1 + \mu u_2)}_{\in F} + \underbrace{(\lambda v_1 + \mu v_2)}_{\in G} \in F + G.$$

Corollaire En raisonnant par récurrence, il est facile de montrer que si $F_1, F_2, \ldots, F_k$ sont des sous-espaces vectoriels de E, alors

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_k = \{u_1 + u_2 + \ldots + u_k : u_1 \in F_1, u_2 \in F_2, \ldots, u_k \in F_k\}$$

est aussi un sous-espace vectoriel de E. En particulier, comme

$$\text{Vect}\{u_1, u_2, \ldots, u_k\} = D(u_1) + D(u_2) + \ldots + D(u_k),$$

on obtient que le sous-espace engedré est en effet un sous-espace vectoriel.