

DIFFUSION-DRIVEN INSTABILITY AND PATTERN FORMATION IN REACTION-DIFFUSION-ODE SYSTEMS

Théo André

Heidelberg University

Applied Analysis (Prof. Dr. Anna Marciniak Czochra)

December 2024



UNIVERSITÄT
HEIDELBERG
ZUKUNFT
SEIT 1386

PRÉREQUIS

ÉQUATIONS DE RÉACTION-DIFFUSION

Équations de réaction-diffusion (RD) : classe d'équations de la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) - D_+ \Delta \mathbf{u}(x, t) = \Psi(\mathbf{u}(x, t))$$

Avec :

ÉQUATIONS DE RÉACTION-DIFFUSION

Équations de réaction-diffusion (RD) : classe d'équations de la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) - D_+ \Delta \mathbf{u}(x, t) = \underbrace{\Psi(\mathbf{u}(x, t))}_{\text{réaction}}$$

Avec :

- $\Psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, la fonction décrivant les interactions entre les composantes

ÉQUATIONS DE RÉACTION-DIFFUSION

Équations de réaction-diffusion (RD) : classe d'équations de la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) - \underbrace{D_+ \Delta \mathbf{u}(x, t)}_{\text{diffusion}} = \Psi(\mathbf{u}(x, t))$$

Avec :

- $D_+ = \text{diag}(d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, la matrice de diffusion avec $d_i > 0$ pour $i = 1, \dots, N$

ÉQUATIONS DE RÉACTION-DIFFUSION

Équations de réaction-diffusion (RD) : classe d'équations de la forme

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(x, t) - \underbrace{D_+ \Delta \mathbf{u}(x, t)}_{\text{diffusion}} = \underbrace{\Psi(\mathbf{u}(x, t))}_{\text{réaction}}$$

Avec :

- $x \in \Omega$, avec Ω un domaine quelconque de \mathbb{R}
- $t \geq 0$, domaine temporel
- $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^N$, le vecteur des composantes
- $D_+ = \text{diag}(d_1, \dots, d_N) \in \mathbb{R}^{N \times N}$, la matrice de diffusion avec $d_i > 0$ pour $i = 1, \dots, N$
- $\Psi : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$, la fonction décrivant les interactions entre les composantes

TURING ET LA FORMATION DE MOTIFS

Situation : On fixe $N = 2$ et considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = g(u, v) \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad v(\cdot, 0) = v_0 \end{array} \right. + \quad \text{Conditions au bord}$$

On suppose qu'il existe un équilibre, \bar{X} , asymptotiquement stable à l'EDO associée en l'absence de diffusion, *i.e.* lorsque $d_1 = 0$ et $d_2 = 0$.

Turing Patterns : Dans de bonnes conditions sur f, g , le choix de d_1, d_2 peut déstabiliser l'équilibre (DDI) et donner lieu à des solutions à motifs autour de \bar{X}

TURING ET LA FORMATION DE MOTIFS

Situation : On fixe $N = 2$ et considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = g(u, v) \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad v(\cdot, 0) = v_0 \end{array} \right. + \quad \text{Conditions au bord}$$

On suppose qu'il existe un équilibre, \bar{X} , asymptotiquement stable à l'EDO associée en l'absence de diffusion, *i.e.* lorsque $d_1 = 0$ et $d_2 = 0$.

Turing Patterns : Dans de bonnes conditions sur f, g , le choix de d_1, d_2 peut déstabiliser l'équilibre (DDI) et donner lieu à des solutions à motifs autour de \bar{X}

TURING ET LA FORMATION DE MOTIFS

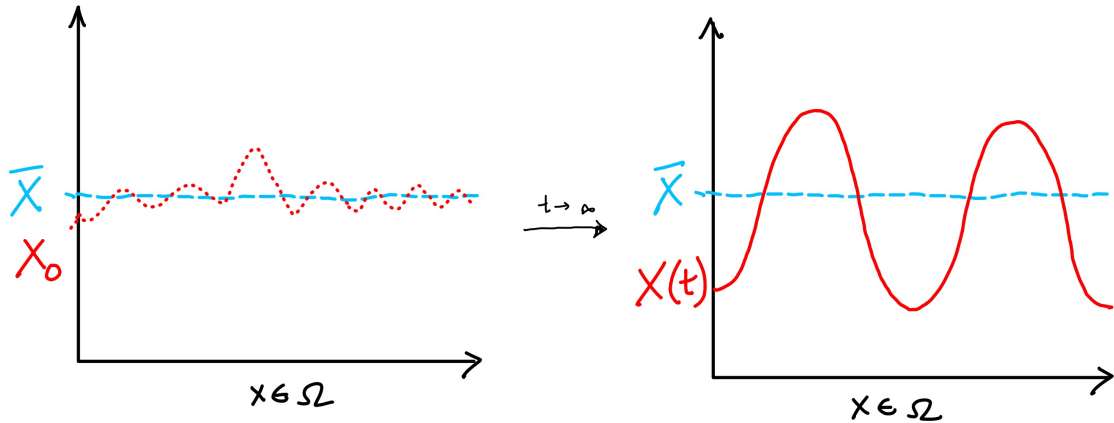
Situation : On fixe $N = 2$ et considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u}{\partial t} - d_1 \Delta u = f(u, v) \\ \frac{\partial v}{\partial t} - d_2 \Delta v = g(u, v) \\ u(\cdot, 0) = u_0, \quad v(\cdot, 0) = v_0 \end{array} \right. + \quad \text{Conditions au bord}$$

On suppose qu'il existe un équilibre, \bar{X} , asymptotiquement stable à l'EDO associée en l'absence de diffusion, *i.e.* lorsque $d_1 = 0$ et $d_2 = 0$.

Turing Patterns : Dans de bonnes conditions sur f, g , le choix de d_1, d_2 peut déstabiliser l'équilibre (DDI) et donner lieu à des solutions à motifs autour de \bar{X}

EXEMPLE DE MOTIFS DE TURING



UNE LITTÉRATURE ABONDANTE SUR LE SUJET

1950

Turing : The chemical basis of morphogenesis

1960

Murray : On the Stochastic Theory of Reaction-Diffusion Systems

1970

Gierer, Meinhardt : A Theory of Biological Pattern Formation

Nicolis, Prigogine : Self-Organization in Nonequilibrium Systems

Meinhardt : Models of Biological Pattern Formation

1980

Cooke : The Effect of Diffusion on Oscillatory Chemical Reactions...

Markow : Morphogenesis and the Theory of Turing Patterns in Biological Systems

Bard : A Model for Generating Aspects of Zebrafish Color Patterns

1990

Maini, Meinhardt : Pattern Formation in Reaction-Diffusion Systems...

Deisboeck, Maini : Spatio-temporal Modeling of Pattern Formation in Tumors

Maini, Al. : Budding in Hydra and the Theory of Localized Patterns

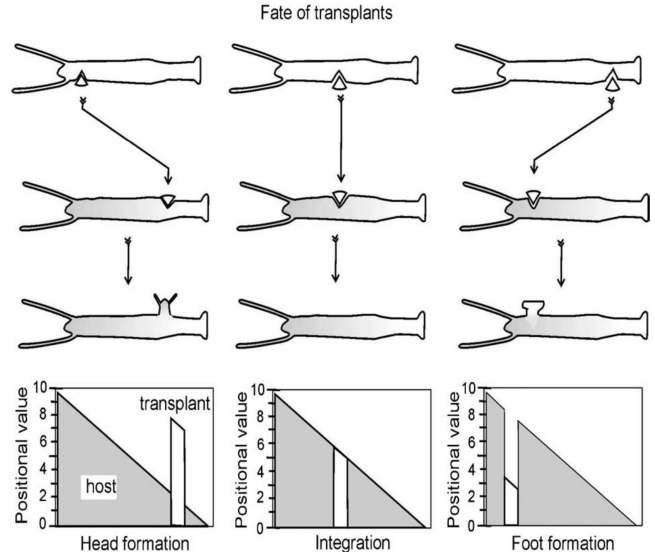
UN CAS LIMITE : GREFFE CHEZ L'HYDRE

Observation : La greffe d'un tissu proche de la tête dans une zone proche du pied d'un autre Hydre génère une seconde tête et vice-versa

Conséquence : Génération *de novo* d'un gradient discontinu de morphogènes le long de l'axe du corps

Problème : Les systèmes de RD ne sont pas capables de capturer ce genre d'information

⇒ Besoin d'une structure plus générale !



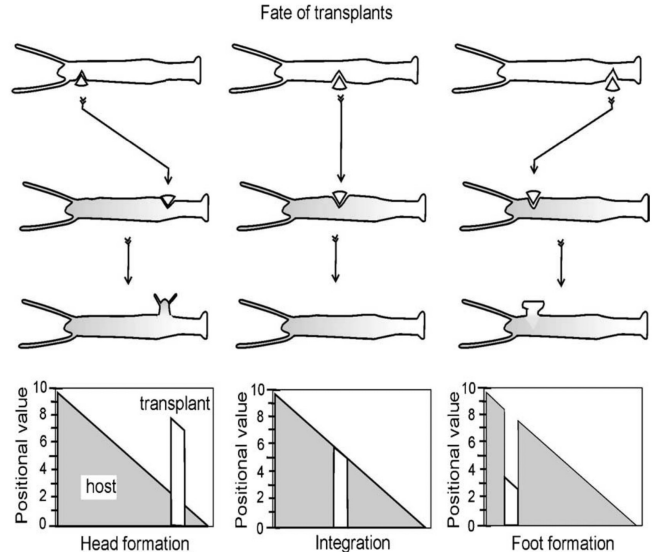
UN CAS LIMITE : GREFFE CHEZ L'HYDRE

Observation : La greffe d'un tissu proche de la tête dans une zone proche du pied d'un autre Hydre génère une seconde tête et vice-versa

Conséquence : Génération *de novo* d'un gradient discontinu de morphogènes le long de l'axe du corps

Problème : Les systèmes de RD ne sont pas capables de capturer ce genre d'information

⇒ Besoin d'une structure plus générale !



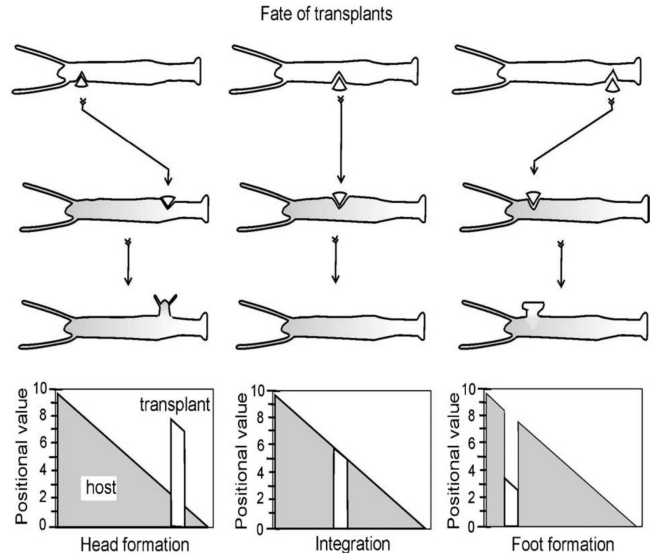
UN CAS LIMITE : GREFFE CHEZ L'HYDRE

Observation : La greffe d'un tissu proche de la tête dans une zone proche du pied d'un autre Hydre génère une seconde tête et vice-versa

Conséquence : Génération *de novo* d'un gradient discontinu de morphogènes le long de l'axe du corps

Problème : Les systèmes de RD ne sont pas capables de capturer ce genre d'information

⇒ Besoin d'une structure plus générale !



SYSTÈMES DE REACTION-DIFFUSION-ODE (RD-ODE)

Modélisation : Couplage de dynamiques globales à des interactions locales !

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - D_+ \Delta \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0, \mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \partial_t \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & D_+ \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}$$

Avec : $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^j, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-j}$ et $\mathbf{D} := \text{diag}(\mathbf{0}, D_+)$

Conséquences :

- Perte de l'effet régularisant du Laplacien pour les u^i avec $i \leq j$
- Possibilité d'obtenir des solutions à motifs mais *discontinues* (e.g. jump-discontinuous)

Remarque :

- Littérature dense pour $j = N - 1$, mais clairsemée pour $j = N - 2 \implies$ Au boulot !

SYSTÈMES DE REACTION-DIFFUSION-ODE (RD-ODE)

Modélisation : Couplage de dynamiques globales à des interactions locales !

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - D_+ \Delta \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0, \mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \partial_t \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & D_+ \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}$$

Avec : $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^j, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-j}$ et $\mathbf{D} := \text{diag}(\mathbf{0}, D_+)$

Conséquences :

- Perte de l'effet régularisant du Laplacien pour les u^i avec $i \leq j$
- Possibilité d'obtenir des solutions à motifs mais *discontinues* (e.g. jump-discontinuous)

Remarque :

- Littérature dense pour $j = N - 1$, mais clairsemée pour $j = N - 2 \implies$ Au boulot !

SYSTÈMES DE REACTION-DIFFUSION-ODE (RD-ODE)

Modélisation : Couplage de dynamiques globales à des interactions locales !

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - D_+ \Delta \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0, \mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \partial_t \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & D_+ \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}$$

Avec : $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^j, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-j}$ et $\mathbf{D} := \text{diag}(\mathbf{0}, D_+)$

Conséquences :

- Perte de l'effet régularisant du Laplacien pour les u^i avec $i \leq j$
- Possibilité d'obtenir des solutions à motifs mais *discontinues* (e.g. jump-discontinuous)

Remarque :

- Littérature dense pour $j = N - 1$, mais clairsemée pour $j = N - 2 \implies$ Au boulot !

SYSTÈMES DE REACTION-DIFFUSION-ODE (RD-ODE)

Modélisation : Couplage de dynamiques globales à des interactions locales !

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} - D_+ \Delta \mathbf{v} = \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{u}(\cdot, 0) = \mathbf{u}_0, \mathbf{v}(\cdot, 0) = \mathbf{v}_0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \partial_t \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \\ & D_+ \Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \\ \mathbf{g}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \end{pmatrix}$$

Avec : $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^j, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n-j}$ et $\mathbf{D} := \text{diag}(\mathbf{0}, D_+)$

Conséquences :

- Perte de l'effet régularisant du Laplacien pour les u^i avec $i \leq j$
- Possibilité d'obtenir des solutions à motifs mais *discontinues* (e.g. jump-discontinuous)

Remarque :

- Littérature dense pour $j = N - 1$, mais clairsemée pour $j = N - 2 \implies$ Au boulot !

PROBLÈME

Cadre du problème :

- Domaine : $\Omega = (0, L)$, $L > 0$ + Conditions de Neumann homogènes au bord
- Paramètres : $\mu_f, \mu_b, \mu_l, \mu_e, m_1, m_2, m_3 > 0$
- Système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u = -\mu_f u + m_1 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv & x \in \bar{\Omega}, t \geq 0 \\ \partial_t v - d_1 \Delta v = -\mu_l v + m_2 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv - vw & x \in \Omega, t \geq 0 \\ \partial_t w - d_2 \Delta w = -\mu_e w + m_3 \frac{uv}{1+uv} & x \in \Omega, t \geq 0 \end{array} \right.$$

Résultats :

- Existence d'une unique solution globale
- Analyse des équilibres du système
- Conditions explicites pour la DDI (\Rightarrow formation de motifs)

PROBLÈME

Cadre du problème :

- Domaine : $\Omega = (0, L)$, $L > 0$ + Conditions de Neumann homogènes au bord
- Paramètres : $\mu_f, \mu_b, \mu_l, \mu_e, m_1, m_2, m_3 > 0$
- Système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u = -\mu_f u + m_1 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv & x \in \bar{\Omega}, t \geq 0 \\ \partial_t v - d_1 \Delta v = -\mu_l v + m_2 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv - vw & x \in \Omega, t \geq 0 \\ \partial_t w - d_2 \Delta w = -\mu_e w + m_3 \frac{uv}{1+uv} & x \in \Omega, t \geq 0 \end{array} \right.$$

Résultats :

- Existence d'une unique solution globale
- Analyse des équilibres du système
- Conditions explicites pour la DLI (la formation de motifs)

PROBLÈME

Cadre du problème :

- Domaine : $\Omega = (0, L)$, $L > 0$ + Conditions de Neumann homogènes au bord
- Paramètres : $\mu_f, \mu_b, \mu_l, \mu_e, m_1, m_2, m_3 > 0$
- Système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u = -\mu_f u + m_1 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv & x \in \bar{\Omega}, t \geq 0 \\ \partial_t v - d_1 \Delta v = -\mu_l v + m_2 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv - vw & x \in \Omega, t \geq 0 \\ \partial_t w - d_2 \Delta w = -\mu_e w + m_3 \frac{uv}{1+uv} & x \in \Omega, t \geq 0 \end{array} \right.$$

Résultats :

- Existence d'une unique solution globale
- Analyse des équilibres du système
- Conditions explicites pour la DDI (→ formation de motifs)

PROBLÈME

Cadre du problème :

- Domaine : $\Omega = (0, L)$, $L > 0$ + Conditions de Neumann homogènes au bord
- Paramètres : $\mu_f, \mu_b, \mu_\ell, \mu_e, m_1, m_2, m_3 > 0$
- Système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u = -\mu_f u + m_1 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv & x \in \bar{\Omega}, t \geq 0 \\ \partial_t v - d_1 \Delta v = -\mu_\ell v + m_2 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv - vw & x \in \Omega, t \geq 0 \\ \partial_t w - d_2 \Delta w = -\mu_e w + m_3 \frac{uv}{1+uv} & x \in \Omega, t \geq 0 \end{array} \right.$$

Résultats :

- Existence d'une unique solution globale
- Analyse des équilibres du système

PROBLÈME

Cadre du problème :

- Domaine : $\Omega = (0, L)$, $L > 0$ + Conditions de Neumann homogènes au bord
- Paramètres : $\mu_f, \mu_b, \mu_\ell, \mu_e, m_1, m_2, m_3 > 0$
- Système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u = -\mu_f u + m_1 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv & x \in \bar{\Omega}, t \geq 0 \\ \partial_t v - d_1 \Delta v = -\mu_\ell v + m_2 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv - vw & x \in \Omega, t \geq 0 \\ \partial_t w - d_2 \Delta w = -\mu_e w + m_3 \frac{uv}{1+uv} & x \in \Omega, t \geq 0 \end{array} \right.$$

Résultats :

- Existence d'une unique solution globale
- Analyse des équilibres du système
- Conditions explicites pour la DDI (\Rightarrow formation de motifs)

PROBLÈME

Cadre du problème :

- Domaine : $\Omega = (0, L)$, $L > 0$ + Conditions de Neumann homogènes au bord
- Paramètres : $\mu_f, \mu_b, \mu_\ell, \mu_e, m_1, m_2, m_3 > 0$
- Système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u = -\mu_f u + m_1 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv & x \in \bar{\Omega}, t \geq 0 \\ \partial_t v - d_1 \Delta v = -\mu_\ell v + m_2 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv - vw & x \in \Omega, t \geq 0 \\ \partial_t w - d_2 \Delta w = -\mu_e w + m_3 \frac{uv}{1+uv} & x \in \Omega, t \geq 0 \end{array} \right.$$

Résultats :

- Existence d'une unique solution globale
- Analyse des équilibres du système
- Conditions explicites pour la DDI (\Rightarrow formation de motifs)

PROBLÈME

Cadre du problème :

- Domaine : $\Omega = (0, L)$, $L > 0$ + Conditions de Neumann homogènes au bord
- Paramètres : $\mu_f, \mu_b, \mu_\ell, \mu_e, m_1, m_2, m_3 > 0$
- Système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u = -\mu_f u + m_1 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv & x \in \bar{\Omega}, t \geq 0 \\ \partial_t v - d_1 \Delta v = -\mu_\ell v + m_2 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv - vw & x \in \Omega, t \geq 0 \\ \partial_t w - d_2 \Delta w = -\mu_e w + m_3 \frac{uv}{1+uv} & x \in \Omega, t \geq 0 \end{array} \right.$$

Résultats :

- Existence d'une unique solution globale
- Analyse des équilibres du système
- Conditions explicites pour la DDI (\Rightarrow formation de motifs)

EXISTENCE D'UNE UNIQUE SOLUTION GLOBALE

EXISTENCE D'UNE SOLUTION GLOBALE UNIQUE (ÉTAPE I : EXISTENCE LOCALE)

THEOREM (ROTHE, 1984)

On suppose que les nonlinéarités Ψ sont localement bornées, Lipschitz continues et soit $X_0 \in L^\infty(\Omega)^3$. Il suit :

- 1 Il existe une unique solution faible X .*
- 2 Le temps d'existence T_{\max} peut être choisi maximal. Si $T_{\max} < \infty$, X explose en temps fini.*
- 3 Si X_0 est suffisamment régulier, alors X est régulier et est également une solution classique.*

Remarque : La restriction $\Psi|_{(\mathbb{R}_{>0})^3}$ est bien localement bornée Lipschitz continue
 \implies Construction d'une solution locale unique est possible sur $(\mathbb{R}_{>0})^3$.

EXISTENCE D'UNE SOLUTION GLOBALE UNIQUE (ÉTAPE I : EXISTENCE LOCALE)

THEOREM (ROTHE, 1984)

On suppose que les nonlinéarités Ψ sont localement bornées, Lipschitz continues et soit $X_0 \in L^\infty(\Omega)^3$. Il suit :

- 1** *Il existe une unique solution faible X .¹*
- 2** *Le temps d'existence T_{\max} peut être choisi maximal. Si $T_{\max} < \infty$, X explose en temps fini.*
- 3** *Si X_0 est suffisamment régulier, alors X est régulier et est également une solution classique.*

Remarque : La restriction $\Psi|_{(\mathbb{R}_{>0})^3}$ est bien localement bornée Lipschitz continue
 \implies Construction d'une solution locale unique est possible sur $(\mathbb{R}_{>0})^3$.

1. X définie sur $[0, T)$, avec $X \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)^3)$ pour tout $T < T_{\max}$

EXISTENCE D'UNE SOLUTION GLOBALE UNIQUE (ÉTAPE I : EXISTENCE LOCALE)

THEOREM (ROTHE, 1984)

On suppose que les nonlinéarités Ψ sont localement bornées, Lipschitz continues et soit $X_0 \in L^\infty(\Omega)^3$. Il suit :

- 1** *Il existe une unique solution faible X .*
- 2** *Le temps d'existence T_{\max} peut être choisi maximal. Si $T_{\max} < \infty$, X explose en temps fini.²*
- 3** *Si X_0 est suffisamment régulier, alors X est régulier et est également une solution classique.*

Remarque : La restriction $\Psi|_{(\mathbb{R}_{>0})^3}$ est bien localement bornée Lipschitz continue
 \implies Construction d'une solution locale unique est possible sur $(\mathbb{R}_{>0})^3$.

2. $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|u(\cdot, t)\|_\infty = \infty$

EXISTENCE D'UNE SOLUTION GLOBALE UNIQUE (ÉTAPE I : EXISTENCE LOCALE)

THEOREM (ROTHE, 1984)

On suppose que les nonlinéarités Ψ sont localement bornées, Lipschitz continues et soit $X_0 \in L^\infty(\Omega)^3$. Il suit :

- 1** *Il existe une unique solution faible X .*
- 2** *Le temps d'existence T_{\max} peut être choisi maximal. Si $T_{\max} < \infty$, X explose en temps fini.*
- 3** *Si X_0 est suffisamment régulier, alors X est régulier³ et est également une solution classique.*

Remarque : La restriction $\Psi|_{(\mathbb{R}_{>0})^3}$ est bien localement bornée Lipschitz continue
 \implies Construction d'une solution locale unique est possible sur $(\mathbb{R}_{>0})^3$.

3. $u \in \mathcal{C}^{1,\alpha/2}([0, T]; \mathcal{C}(\bar{\Omega})) \cap \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}))$ and $v, w \in \mathcal{C}^{1,\alpha/2}([0, T]; \mathcal{C}(\bar{\Omega})) \cap \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}))$ for all $T < T_{\max}$.

EXISTENCE D'UNE SOLUTION GLOBALE UNIQUE (ÉTAPE I : EXISTENCE LOCALE)

THEOREM (ROTHE, 1984)

On suppose que les nonlinéarités Ψ sont localement bornées, Lipschitz continues et soit $X_0 \in L^\infty(\Omega)^3$. Il suit :

- 1** *Il existe une unique solution faible X .*
- 2** *Le temps d'existence T_{\max} peut être choisi maximal. Si $T_{\max} < \infty$, X explose en temps fini.*
- 3** *Si X_0 est suffisamment régulier, alors X est régulier³ et est également une solution classique.*

Remarque : La restriction $\Psi|_{(\mathbb{R}_{>0})^3}$ est bien localement bornée Lipschitz continue
 \implies Construction d'une solution locale unique est possible sur $(\mathbb{R}_{>0})^3$.

3. $u \in \mathcal{C}^{1,\alpha/2}([0, T]; \mathcal{C}(\bar{\Omega})) \cap \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}))$ and $v, w \in \mathcal{C}^{1,\alpha/2}([0, T]; \mathcal{C}(\bar{\Omega})) \cap \mathcal{C}([0, T]; \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega}))$ for all $T < T_{\max}$.

INTERMEZZO : REGIONS INVARIANTES BORNÉES

DÉFINITION : SMOLLER (1992)

Un convexe fermé $\Sigma := \bigcap_i \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^N : G_i(\mathbf{X}) \leq 0 \} \subset \mathbb{R}^n$ est appelé région invariante bornée du système si

- 1 $\mathbf{X}_0(\cdot) \in \Sigma$
- 2 $(\nabla G_i \cdot \Psi)(\mathbf{X}) \leq 0$ pour tout $\mathbf{X} \in \partial\Sigma = \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^N \mid \exists i : G_i(\mathbf{X}) = 0 \}$

Conséquence : $\mathbf{X}(\cdot, t) \in \Sigma$ pour tout t où la solution existe

\implies Les RIB fournissent des bornes, *a priori*, L^∞ aux solutions du système !

Exemple de région : Sur \mathbb{R} , le segment $[a, b]$ peut être défini comme l'intersection des

$$G_1(x) = a - x, \quad G_2(x) = x - b$$

En effet, $\{x : G_1(x) \leq 0\} \cap \{x : G_2(x) \leq 0\} = \{x \geq a\} \cap \{x \leq b\} = [a, b]$

INTERMEZZO : REGIONS INVARIANTES BORNÉES

DÉFINITION : SMOLLER (1992)

Un convexe fermé $\Sigma := \bigcap_i \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N : G_i(\mathbf{X}) \leq 0\} \subset \mathbb{R}^n$ est appelé région invariante bornée du système si

- 1 $\mathbf{X}_0(\cdot) \in \Sigma$
- 2 $(\nabla G_i \cdot \Psi)(\mathbf{X}) \leq 0$ pour tout $\mathbf{X} \in \partial\Sigma = \{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^N \mid \exists i : G_i(\mathbf{X}) = 0\}$

Conséquence : $\mathbf{X}(\cdot, t) \in \Sigma$ pour tout t où la solution existe

\implies Les RIB fournissent des bornes, *a priori*, L^∞ aux solutions du système !

Exemple de région : Sur \mathbb{R} , le segment $[a, b]$ peut être défini comme l'intersection des

$$G_1(x) = a - x, \quad G_2(x) = x - b$$

En effet, $\{x : G_1(x) \leq 0\} \cap \{x : G_2(x) \leq 0\} = \{x \geq a\} \cap \{x \leq b\} = [a, b]$

INTERMEZZO : REGIONS INVARIANTES BORNÉES

DÉFINITION : SMOLLER (1992)

Un convexe fermé $\Sigma := \bigcap_i \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^N : G_i(\mathbf{X}) \leq 0 \} \subset \mathbb{R}^n$ est appelé région invariante bornée du système si

- 1 $\mathbf{X}_0(\cdot) \in \Sigma$
- 2 $(\nabla G_i \cdot \Psi)(\mathbf{X}) \leq 0$ pour tout $\mathbf{X} \in \partial\Sigma = \{ \mathbf{X} \in \mathbb{R}^N \mid \exists i : G_i(\mathbf{X}) = 0 \}$

Conséquence : $\mathbf{X}(\cdot, t) \in \Sigma$ pour tout t où la solution existe

\implies Les RIB fournissent des bornes, *a priori*, L^∞ aux solutions du système !

Exemple de région : Sur \mathbb{R} , le segment $[a, b]$ peut être défini comme l'intersection des

$$G_1(x) = a - x, \quad G_2(x) = x - b$$

En effet, $\{x : G_1(x) \leq 0\} \cap \{x : G_2(x) \leq 0\} = \{x \geq a\} \cap \{x \leq b\} = [a, b]$

EXISTENCE D'UNE SOLUTION GLOBALE UNIQUE (ÉTAPE II : RECTANGLES INVARIANTS)

THEOREM (GLOBALITÉ DE LA SOLUTION)

Soit X une solution faible du Sys. (1), définie sur un intervalle de temps maximal $I_{max} = [0, T_{max})$, avec des conditions initiales, $X_0 = (u_0, v_0, w_0) \in L^\infty(\Omega)^3$ telles que : pour tout $x \in \Omega$,

$$0 \leq u_0(x) \leq \frac{m_1}{\min(\mu_f, \mu_b)}, \quad 0 \leq v_0(x) \leq \frac{m_2}{\min(\mu_\ell, \mu_b, 1)}, \quad 0 \leq w_0(x) \leq \frac{m_3}{\mu_e}.$$

Alors, $I_{max} = [0, \infty)$ et X est positive, uniformément bornée sur $\Omega \times I_{max}$

Preuve : La région

$$\Sigma := \left\{ (u, v, w) : 0 \leq u \leq \frac{m_1}{\min(\mu_f, \mu_b)}, \quad 0 \leq v \leq \frac{m_2}{\min(\mu_\ell, \mu_b, 1)}, \quad 0 \leq w \leq \frac{m_3}{\mu_e} \right\}$$

est une région invariante bornée du Sys. (1). □

EXISTENCE D'UNE SOLUTION GLOBALE UNIQUE (ÉTAPE II : RECTANGLES INVARIANTS)

THEOREM (GLOBALITÉ DE LA SOLUTION)

Soit X une solution faible du Sys. (1), définie sur un intervalle de temps maximal $I_{max} = [0, T_{max})$, avec des conditions initiales, $X_0 = (u_0, v_0, w_0) \in L^\infty(\Omega)^3$ telles que : pour tout $x \in \Omega$,

$$0 \leq u_0(x) \leq \frac{m_1}{\min(\mu_f, \mu_b)}, \quad 0 \leq v_0(x) \leq \frac{m_2}{\min(\mu_\ell, \mu_b, 1)}, \quad 0 \leq w_0(x) \leq \frac{m_3}{\mu_e}.$$

Alors, $I_{max} = [0, \infty)$ et X est positive, uniformément bornée sur $\Omega \times I_{max}$

Preuve : La région

$$\Sigma := \left\{ (u, v, w) : 0 \leq u \leq \frac{m_1}{\min(\mu_f, \mu_b)}, \quad 0 \leq v \leq \frac{m_2}{\min(\mu_\ell, \mu_b, 1)}, \quad 0 \leq w \leq \frac{m_3}{\mu_e} \right\}$$

est une région invariante bornée du Sys. (1). □

ÉQUILIBRES DU SYSTÈME

EQUILIBRES CONSTANTS

Cadre : On se concentre sur le cas où il existe précisément trois équilibres positifs de type stable-instable-stable (*i.e.* cas bi-stable)

Les équilibres du système $\bar{X} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ satisfont

$$0 = -\mu_f \bar{u} + m_1 \frac{\bar{u}\bar{v}}{1 + \bar{u}\bar{v}} - \mu_b \bar{u}\bar{v}$$

$$0 = -\mu_\ell \bar{v} + m_2 \frac{\bar{u}\bar{v}}{1 + \bar{u}\bar{v}} - \mu_b \bar{u}\bar{v} - \bar{v}\bar{w}$$

$$0 = -\mu_e \bar{w} + m_3 \frac{\bar{u}\bar{v}}{1 + \bar{u}\bar{v}}$$

Observation : L'origine $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ est un équilibre (trivial).

EQUILIBRES CONSTANTS

Cadre : On se concentre sur le cas où il existe précisément trois équilibres positifs de type stable-instable-stable (*i.e.* cas bi-stable)

Les équilibres du système $\bar{X} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ satisfont

$$0 = -\mu_f \bar{u} + m_1 \frac{\bar{u}\bar{v}}{1 + \bar{u}\bar{v}} - \mu_b \bar{u}\bar{v}$$

$$0 = -\mu_\ell \bar{v} + m_2 \frac{\bar{u}\bar{v}}{1 + \bar{u}\bar{v}} - \mu_b \bar{u}\bar{v} - \bar{v}\bar{w}$$

$$0 = -\mu_e \bar{w} + m_3 \frac{\bar{u}\bar{v}}{1 + \bar{u}\bar{v}}$$

Observation : L'origine $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ est un équilibre (trivial).

EQUILIBRES CONSTANTS

Cadre : On se concentre sur le cas où il existe précisément trois équilibres positifs de type stable-instable-stable (*i.e.* cas bi-stable)

Les équilibres du système $\bar{\mathbf{X}} = (\bar{u}, \bar{v}, \bar{w})$ satisfont

$$0 = -\mu_f \bar{u} + m_1 \frac{\bar{u}\bar{v}}{1 + \bar{u}\bar{v}} - \mu_b \bar{u}\bar{v}$$

$$0 = -\mu_\ell \bar{v} + m_2 \frac{\bar{u}\bar{v}}{1 + \bar{u}\bar{v}} - \mu_b \bar{u}\bar{v} - \bar{v}\bar{w}$$

$$0 = -\mu_e \bar{w} + m_3 \frac{\bar{u}\bar{v}}{1 + \bar{u}\bar{v}}$$

Observation : L'origine $\mathbf{0} = (0, 0, 0)$ est un équilibre (trivial).

ÉQUILIBRE CONSTANTS

Il existe (jusqu'à) trois équilibres supplémentaires de la forme

$$\bar{X} = \left(\frac{m_1}{\mu_f + \mu_b \bar{v}} - \frac{1}{\bar{v}}, \quad \bar{v}, \quad \frac{m_3}{\mu_e} \left(1 - \frac{\mu_f + \mu_b \bar{v}}{m_1 \bar{v}} \right) \right)$$

où \bar{v} est l'une des (jusqu'à) trois racines réelles de $P(X) = \varrho_0 + \varrho_1 X + \varrho_2 X^2 + \varrho_3 X^3$, avec

$$\varrho_3 = -\mu_e \mu_b - \frac{m_3 \mu_b}{\mu_e} + \frac{m_3 \mu_b^2}{m_1 \mu_e}$$

$$\varrho_2 = -\mu_e \mu_f + m_2 \mu_b - \frac{m_2 \mu_b^2}{m_1} + \mu_b^2 - m_1 \mu_b - \frac{m_3 \mu_f}{\mu_e} + \frac{2 \mu_f \mu_b m_3}{\mu_e m_1}$$

$$\varrho_1 = m_2 \mu_f - \frac{2 \mu_f \mu_b m_2}{m_1} + \mu_f \mu_b + \frac{m_3 \mu_f^2}{\mu_e m_1}$$

$$\varrho_0 = -\frac{m_2 \mu_f^2}{m_1}.$$

ÉQUILIBRE CONSTANTS

Il existe (jusqu'a) trois équilibres supplémentaires de la forme

$$\bar{X} = \left(\frac{m_1}{\mu_f + \mu_b \bar{v}} - \frac{1}{\bar{v}}, \quad \bar{v}, \quad \frac{m_3}{\mu_e} \left(1 - \frac{\mu_f + \mu_b \bar{v}}{m_1 \bar{v}} \right) \right)$$

où \bar{v} est l'une des (jusqu'à) trois racines réelles de $P(X) = \varrho_0 + \varrho_1 X + \varrho_2 X^2 + \varrho_3 X^3$, avec

$$\varrho_3 = -\mu_e \mu_b - \frac{m_3 \mu_b}{\mu_e} + \frac{m_3 \mu_b^2}{m_1 \mu_e}$$

$$\varrho_2 = -\mu_e \mu_f + m_2 \mu_b - \frac{m_2 \mu_b^2}{m_1} + \mu_b^2 - m_1 \mu_b - \frac{m_3 \mu_f}{\mu_e} + \frac{2 \mu_f \mu_b m_3}{\mu_e m_1}$$

$$\varrho_1 = m_2 \mu_f - \frac{2 \mu_f \mu_b m_2}{m_1} + \mu_f \mu_b + \frac{m_3 \mu_f^2}{\mu_e m_1}$$

$$\varrho_0 = -\frac{m_2 \mu_f^2}{m_1}.$$

ROOTS OF P AS A FUNCTION OF μ_b

Remarque : $\varrho_3, \varrho_0 < 0 \implies$ Il existe une racine réelle négative. Mais *quid* des deux autres ?

Stratégie : Utiliser μ_b comme paramètre de bifurcation !

THEOREM (RACINES DE P)

Soit $(P(X))(\mu_b) = \sum_i \varrho_i(\mu_b) X^i$ le polynôme P qui dépend maintenant de μ_b , dont les coefficients $\varrho_i = \varrho_i(\mu_b)$ dépendent aussi de μ_b . Alors sont équivalent :

- 1 Il existe $\eta > 0$ tel que, pour $\mu_b \in (0, \eta)$, $(P(X))(\mu_b)$ a trois racines réelles. L'une d'elle étant négative, les deux autres positives.
- 2 Les paramètres satisfont l'égalité $\left(m_2 - \frac{m_3 \mu_f}{m_1 \mu_e}\right)^2 > 4 \mu_\ell \mu_f \frac{m_2}{m_1}$.

ROOTS OF P AS A FUNCTION OF μ_b

Remarque : $\varrho_3, \varrho_0 < 0 \implies$ Il existe une racine réelle négative. Mais *quid* des deux autres ?

Stratégie : Utiliser μ_b comme paramètre de bifurcation !

THEOREM (RACINES DE P)

Soit $(P(X))(\mu_b) = \sum_i \varrho_i(\mu_b) X^i$ le polynôme P qui dépend maintenant de μ_b , dont les coefficients $\varrho_i = \varrho_i(\mu_b)$ dépendent aussi de μ_b . Alors sont équivalent :

- 1 Il existe $\eta > 0$ tel que, pour $\mu_b \in (0, \eta)$, $(P(X))(\mu_b)$ a trois racines réelles. L'une d'elle étant négative, les deux autres positives.
- 2 Les paramètres satisfont l'égalité $\left(m_2 - \frac{m_3 \mu_f}{m_1 \mu_e}\right)^2 > 4 \mu_\ell \mu_f \frac{m_2}{m_1}$.

ROOTS OF P AS A FUNCTION OF μ_b

Remarque : $\varrho_3, \varrho_0 < 0 \implies$ Il existe une racine réelle négative. Mais *quid* des deux autres ?

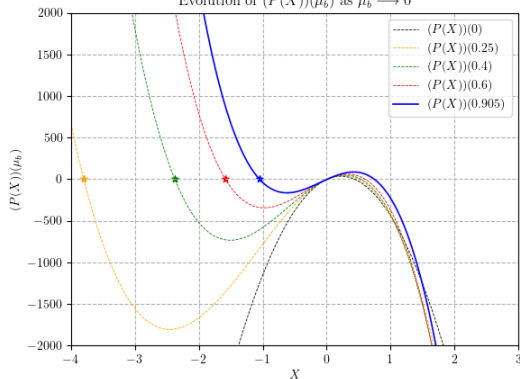
Stratégie : Utiliser μ_b comme paramètre de bifurcation !

THEOREM (RACINES DE P)

Soit $(P(X))(\mu_b) = \sum_i \varrho_i(\mu_b) X^i$ le polynôme P qui dépend maintenant de μ_b , dont les coefficients $\rho_i = \rho_i(\mu_b)$ dépendent aussi de μ_b . Alors sont équivalent :

- 1 Il existe $\eta > 0$ tel que, pour $\mu_b \in (0, \eta)$, $(P(X))(\mu_b)$ a trois racines réelles. L'une d'elle étant négative, les deux autres positives.
- 2 Les paramètres satisfont l'égalité $\left(m_2 - \frac{m_3 \mu_f}{m_1 \mu_e}\right)^2 > 4 \mu_\ell \mu_f \frac{m_2}{m_1}$.

PREUVE

Evolution of $(P(X))(\mu_b)$ as $\mu_b \rightarrow 0$ 

- Soit $Q = (P(X))(0)$. On montre que Q a deux racines positives *via* la relation de Viète :

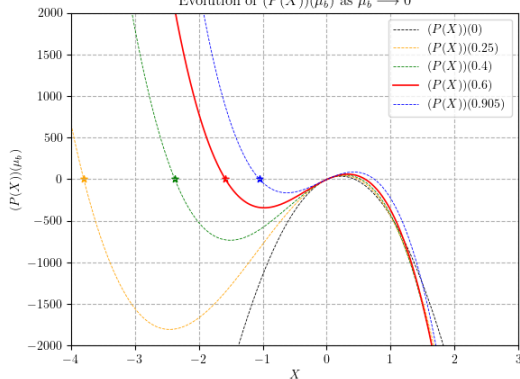
$$\tilde{v}_1 \tilde{v}_2 = \frac{q_0}{q_2} = \frac{m_2 \mu_f \mu_e}{m_1 (\mu_l \mu_e + m_3)} > 0$$

$$\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 = -\frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1 m_2 \mu_e + m_3 \mu_f}{m_1 (m_3 + \mu_e)} > 0.$$

- Dépendance continue des ρ_i en $\mu_b \implies$ Il existe deux racines réelles positives pour μ_b suffisamment petit.

\implies Reste à montrer qu'il s'agit bien de la racine négative qui disparaît lorsque $\mu_b \rightarrow 0$.

PREUVE

Evolution of $(P(X))(\mu_b)$ as $\mu_b \rightarrow 0$ 

- Soit $Q = (P(X))(0)$. On montre que Q a deux racines positives *via* la relation de Viète :

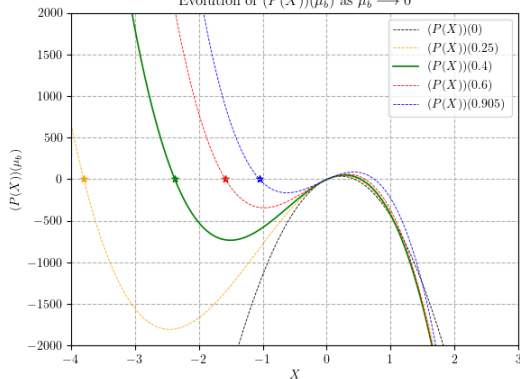
$$\tilde{v}_1 \tilde{v}_2 = \frac{q_0}{q_2} = \frac{m_2 \mu_f \mu_e}{m_1 (\mu_l \mu_e + m_3)} > 0$$

$$\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 = -\frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1 m_2 \mu_e + m_3 \mu_f}{m_1 (m_3 + \mu_e)} > 0.$$

- Dépendance continue des ρ_i en $\mu_b \implies$ Il existe deux racines réelles positives pour μ_b suffisamment petit.

\implies Reste à montrer qu'il s'agit bien de la racine négative qui disparaît lorsque $\mu_b \rightarrow 0$.

PREUVE

Evolution of $(P(X))(\mu_b)$ as $\mu_b \rightarrow 0$ 

- Soit $Q = (P(X))(0)$. On montre que Q a deux racines positives *via* la relation de Viète :

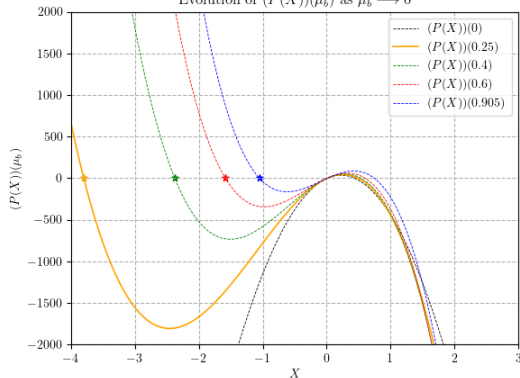
$$\tilde{v}_1 \tilde{v}_2 = \frac{q_0}{q_2} = \frac{m_2 \mu_f \mu_e}{m_1 (\mu_l \mu_e + m_3)} > 0$$

$$\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 = -\frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1 m_2 \mu_e + m_3 \mu_f}{m_1 (m_3 + \mu_e)} > 0.$$

- Dépendance continue des ρ_i en $\mu_b \implies$ Il existe deux racines réelles positives pour μ_b suffisamment petit.

\implies Reste à montrer qu'il s'agit bien de la racine négative qui disparaît lorsque $\mu_b \rightarrow 0$.

PREUVE

Evolution of $(P(X))(\mu_b)$ as $\mu_b \rightarrow 0$ 

- Soit $Q = (P(X))(0)$. On montre que Q a deux racines positives *via* la relation de Viète :

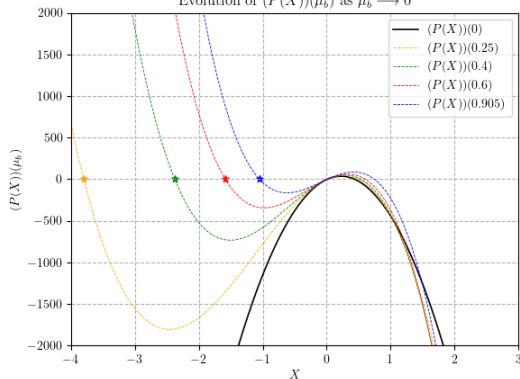
$$\tilde{v}_1 \tilde{v}_2 = \frac{q_0}{q_2} = \frac{m_2 \mu_f \mu_e}{m_1 (\mu_l \mu_e + m_3)} > 0$$

$$\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 = -\frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1 m_2 \mu_e + m_3 \mu_f}{m_1 (m_3 + \mu_e)} > 0.$$

- Dépendance continue des ρ_i en $\mu_b \implies$ Il existe deux racines réelles positives pour μ_b suffisamment petit.

\implies Reste à montrer qu'il s'agit bien de la racine négative qui disparaît lorsque $\mu_b \rightarrow 0$.

PREUVE

Evolution of $(P(X))(\mu_b)$ as $\mu_b \rightarrow 0$ 

- Soit $Q = (P(X))(0)$. On montre que Q a deux racines positives *via* la relation de Viète :

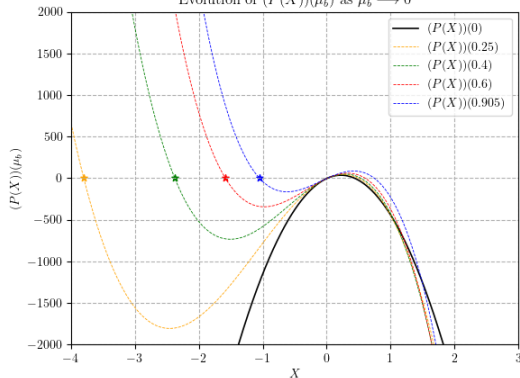
$$\tilde{v}_1 \tilde{v}_2 = \frac{q_0}{q_2} = \frac{m_2 \mu_f \mu_e}{m_1 (\mu_l \mu_e + m_3)} > 0$$

$$\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 = -\frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1 m_2 \mu_e + m_3 \mu_f}{m_1 (m_3 + \mu_e)} > 0.$$

- Dépendance continue des ρ_i en $\mu_b \implies$ Il existe deux racines réelles positives pour μ_b suffisamment petit.

\implies Reste à montrer qu'il s'agit bien de la racine négative qui disparaît lorsque $\mu_b \rightarrow 0$.

PREUVE

Evolution of $(P(X))(\mu_b)$ as $\mu_b \rightarrow 0$ 

- Soit $Q = (P(X))(0)$. On montre que Q a deux racines positives *via* la relation de Viète :

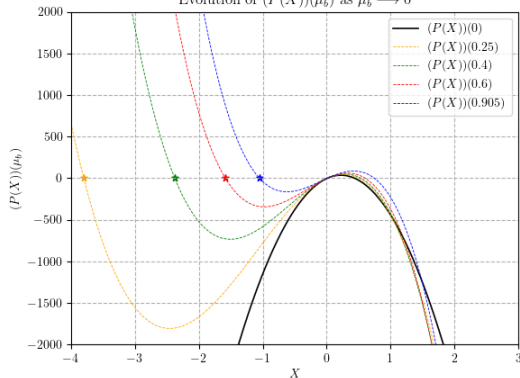
$$\tilde{v}_1 \tilde{v}_2 = \frac{q_0}{q_2} = \frac{m_2 \mu_f \mu_e}{m_1 (\mu_l \mu_e + m_3)} > 0$$

$$\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 = -\frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1 m_2 \mu_e + m_3 \mu_f}{m_1 (m_3 + \mu_e)} > 0.$$

- Dépendance continue des ρ_i en $\mu_b \implies$ Il existe deux racines réelles positives pour μ_b suffisamment petit.

\implies Reste à montrer qu'il s'agit bien de la racine négative qui disparaît lorsque $\mu_b \rightarrow 0$.

PREUVE

Evolution of $(P(X))(\mu_b)$ as $\mu_b \rightarrow 0$ 

- Soit $Q = (P(X))(0)$. On montre que Q a deux racines positives *via* la relation de Viète :

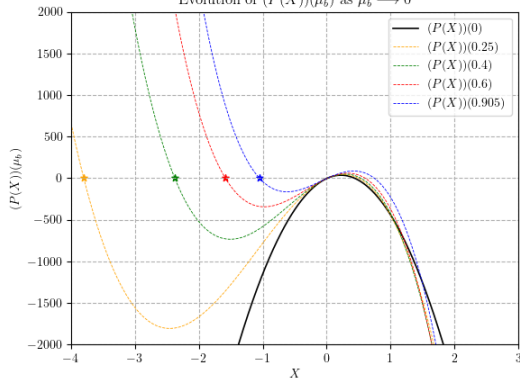
$$\tilde{v}_1 \tilde{v}_2 = \frac{q_0}{q_2} = \frac{m_2 \mu_f \mu_e}{m_1 (\mu_l \mu_e + m_3)} > 0$$

$$\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 = -\frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1 m_2 \mu_e + m_3 \mu_f}{m_1 (m_3 + \mu_e)} > 0.$$

- Dépendance continue des ρ_i en $\mu_b \implies$ Il existe deux racines réelles positives pour μ_b suffisamment petit.

\implies Reste à montrer qu'il s'agit bien de la racine négative qui disparaît lorsque $\mu_b \rightarrow 0$.

PREUVE

Evolution of $(P(X))(\mu_b)$ as $\mu_b \rightarrow 0$ 

- Soit $Q = (P(X))(0)$. On montre que Q a deux racines positives *via* la relation de Viète :

$$\tilde{v}_1 \tilde{v}_2 = \frac{q_0}{q_2} = \frac{m_2 \mu_f \mu_e}{m_1 (\mu_l \mu_e + m_3)} > 0$$

$$\tilde{v}_1 + \tilde{v}_2 = -\frac{q_1}{q_2} = \frac{m_1 m_2 \mu_e + m_3 \mu_f}{m_1 (m_3 + \mu_e)} > 0.$$

- Dépendance continue des ρ_i en $\mu_b \implies$ Il existe deux racines réelles positives pour μ_b suffisamment petit.

\implies Reste à montrer qu'il s'agit bien de la racine négative qui disparaît lorsque $\mu_b \rightarrow 0$.

\bar{v}_1 EST BIEN LA RACINE QUI DISPARAÎT

Idée : On exprime les racines de $(P(x))(\mu_b)$ comme des séries de Puiseux : $\mathbb{C}(\{\mu_b^\star\}) = \bigcup_{d \geq 1} \mathbb{C}(\{\mu_b^{\frac{1}{d}}\})$

- Soient $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ les racines dans l'ordre croissant, on introduit la valuation d'une série f , notée $\nu(f)$, telle que :

$$\nu(f) = k \quad \text{si et seulement si} \quad \exists c > 0 : |f(\mu_b)| \underset{\mu_b \rightarrow 0}{\sim} c |\mu_b|^k$$

- Un peu d'algèbre donne : $\nu(\bar{v}_1) = -1$ (donc \bar{v}_1 est $O(1/\mu_b)$) et le coefficient dans le développement de \bar{v}_1 autour de 0 est $-\varrho_2/\varrho_3 < 0$.
- En conclusion, $\bar{v}_1 = -(\varrho_2/\varrho_3)\mu_b^{-1} + O(1)$. □

\bar{v}_1 EST BIEN LA RACINE QUI DISPARAÎT

Idée : On exprime les racines de $(P(x))(\mu_b)$ comme des séries de Puiseux : $\mathbb{C}(\{\mu_b^\star\}) = \bigcup_{d \geq 1} \mathbb{C}(\{\mu_b^{\frac{1}{d}}\})$

- Soient $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ les racines dans l'ordre croissant, on introduit la valuation d'une série f , notée $\nu(f)$, telle que :

$$\nu(f) = k \quad \text{si et seulement si} \quad \exists c > 0 : |f(\mu_b)| \underset{\mu_b \rightarrow 0}{\sim} c |\mu_b|^k$$

- Un peu d'algèbre donne : $\nu(\bar{v}_1) = -1$ (donc \bar{v}_1 est $O(1/\mu_b)$) et le coefficient dans le développement de \bar{v}_1 autour de 0 est $-\varrho_2/\varrho_3 < 0$.
- En conclusion, $\bar{v}_1 = -(\varrho_2/\varrho_3)\mu_b^{-1} + O(1)$. □

\bar{v}_1 EST BIEN LA RACINE QUI DISPARAÎT

Idée : On exprime les racines de $(P(x))(\mu_b)$ comme des séries de Puiseux : $\mathbb{C}(\{\mu_b^\star\}) = \bigcup_{d \geq 1} \mathbb{C}(\{\mu_b^{\frac{1}{d}}\})$

- Soient $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ les racines dans l'ordre croissant, on introduit la valuation d'une série f , notée $\nu(f)$, telle que :

$$\nu(f) = k \quad \text{si et seulement si} \quad \exists c > 0 : |f(\mu_b)| \underset{\mu_b \rightarrow 0}{\sim} c |\mu_b|^k$$

- Un peu d'algèbre donne : $\nu(\bar{v}_1) = -1$ (donc \bar{v}_1 est $O(1/\mu_b)$) et le coefficient dans le développement de \bar{v}_1 autour de 0 est $-\varrho_2/\varrho_3 < 0$.
- En conclusion, $\bar{v}_1 = -(\varrho_2/\varrho_3)\mu_b^{-1} + O(1)$. □

\bar{v}_1 EST BIEN LA RACINE QUI DISPARAÎT

Idée : On exprime les racines de $(P(x))(\mu_b)$ comme des séries de Puiseux : $\mathbb{C}(\{\mu_b^\star\}) = \bigcup_{d \geq 1} \mathbb{C}(\{\mu_b^{\frac{1}{d}}\})$

- Soient $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ les racines dans l'ordre croissant, on introduit la valuation d'une série f , notée $\nu(f)$, telle que :

$$\nu(f) = k \quad \text{si et seulement si} \quad \exists c > 0 : |f(\mu_b)| \underset{\mu_b \rightarrow 0}{\sim} c |\mu_b|^k$$

- Un peu d'algèbre donne : $\nu(\bar{v}_1) = -1$ (donc \bar{v}_1 est $O(1/\mu_b)$) et le coefficient dans le développement de \bar{v}_1 autour de 0 est $-\varrho_2/\varrho_3 < 0$.
- En conclusion, $\bar{v}_1 = -(\varrho_2/\varrho_3)\mu_b^{-1} + O(1)$. □

POUR RÉSUMER

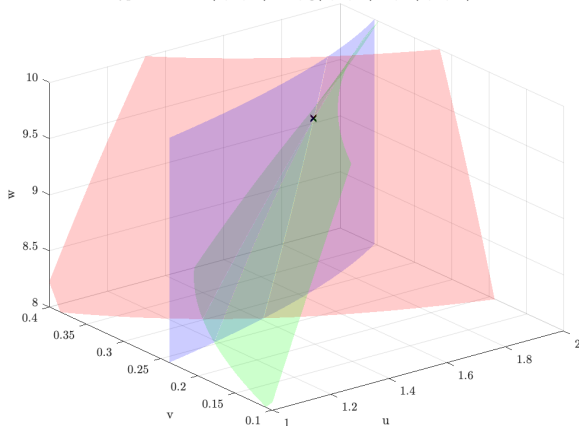
hypersurfaces $f(u, v, w) = 0$, $g(u, v, w) = 0$, $h(u, v, w) = 0$ 

Figure : Zoom sur l'intersection des nullclines du système

- Le polynôme P a trois racines réelles $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ dont deux positives

- \bar{v}_2, \bar{v}_3 donnent deux nouveaux équilibres positifs de la forme

$$\bar{X}_{1,2} = \left(\frac{m_1}{\mu_f + \mu_b \bar{v}_{1,2}} - \frac{1}{\bar{v}_{1,2}}, \quad \bar{v}_{1,2}, \quad \frac{m_3}{\mu_e} \left(1 - \frac{\mu_f + \mu_b \bar{v}_{1,2}}{m_1 \bar{v}_{1,2}} \right) \right)$$

- L'origine et \bar{X}_2 sont stables, \bar{X}_1 instable.

⇒ C'est le scénario souhaité !

POUR RÉSUMER

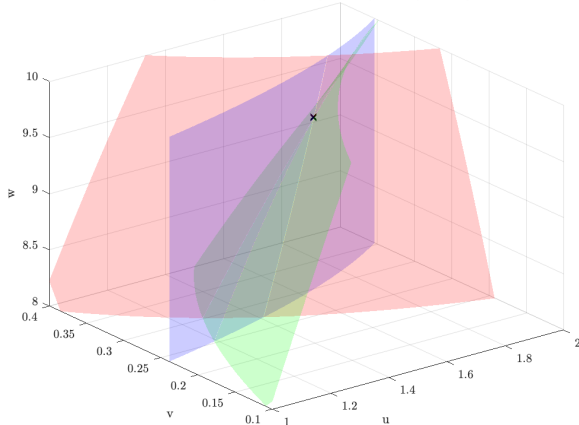
hypersurfaces $f(u, v, w) = 0$, $g(u, v, w) = 0$, $h(u, v, w) = 0$ 

Figure : Zoom sur l'intersection des nullclines du système

- Le polynôme P a trois racines réelles $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ dont deux positives

- \bar{v}_2, \bar{v}_3 donnent deux nouveaux équilibres positifs de la forme

$$\bar{X}_{1,2} = \left(\frac{m_1}{\mu_f + \mu_b \bar{v}_{1,2}} - \frac{1}{\bar{v}_{1,2}}, \quad \bar{v}_{1,2}, \quad \frac{m_3}{\mu_e} \left(1 - \frac{\mu_f + \mu_b \bar{v}_{1,2}}{m_1 \bar{v}_{1,2}} \right) \right)$$

- L'origine et \bar{X}_2 sont stables, \bar{X}_1 instable.

⇒ C'est le scénario souhaité !

POUR RÉSUMER

hypersurfaces $f(u, v, w) = 0$, $g(u, v, w) = 0$, $h(u, v, w) = 0$

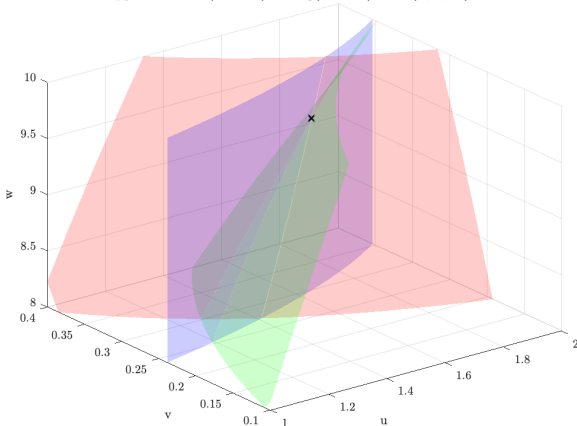


Figure : Zoom sur l'intersection des nullclines du système

- Le polynôme P a trois racines réelles $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ dont deux positives

- \bar{v}_2, \bar{v}_3 donnent deux nouveaux équilibres positifs de la forme

$$\bar{X}_{1,2} = \left(\frac{m_1}{\mu_f + \mu_b \bar{v}_{1,2}} - \frac{1}{\bar{v}_{1,2}}, \quad \bar{v}_{1,2}, \quad \frac{m_3}{\mu_e} \left(1 - \frac{\mu_f + \mu_b \bar{v}_{1,2}}{m_1 \bar{v}_{1,2}} \right) \right)$$

- L'origine et \bar{X}_2 sont stables, \bar{X}_1 instable.

⇒ C'est le scénario souhaité !

POUR RÉSUMER

hypersurfaces $f(u, v, w) = 0$, $g(u, v, w) = 0$, $h(u, v, w) = 0$

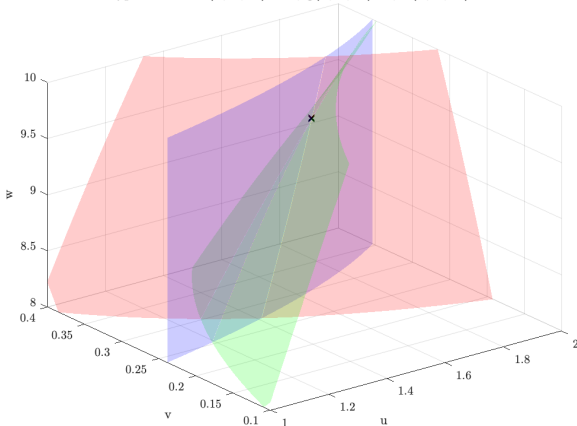


Figure : Zoom sur l'intersection des nullclines du système

- Le polynôme P a trois racines réelles $\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3$ dont deux positives

- \bar{v}_2, \bar{v}_3 donnent deux nouveaux équilibres positifs de la forme

$$\bar{X}_{1,2} = \left(\frac{m_1}{\mu_f + \mu_b \bar{v}_{1,2}} - \frac{1}{\bar{v}_{1,2}}, \quad \bar{v}_{1,2}, \quad \frac{m_3}{\mu_e} \left(1 - \frac{\mu_f + \mu_b \bar{v}_{1,2}}{m_1 \bar{v}_{1,2}} \right) \right)$$

- L'origine et \bar{X}_2 sont stables, \bar{X}_1 instable.

⇒ C'est le scénario souhaité !

INSTABILITÉ INDUITE PAR DIFFUSION

NOTATION

Vecteur solution : $X = (u, v, w)$

Nonlinearités : $\Psi = (f, g, h)$, où

$$f(u, v, w) = -\mu_f u + m_1 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv,$$

$$g(u, v, w) = -\mu_\ell v + m_2 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv - vw,$$

$$h(u, v, w) = -\mu_e w + m_3 \frac{uv}{1+uv}.$$

Jacobienne : $J = \nabla_X \Psi = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial \Psi}{\partial u} & \frac{\partial \Psi}{\partial v} & \frac{\partial \Psi}{\partial w} \end{array} \right)$

Sous-systèmes de J :

$$J_i(X) = \nabla_{X^i} \Psi^i(X), \quad J_{ij}(X) = \nabla_{(X^i, X^j)} (\Psi^i, \Psi^j)(X)$$

Exemple :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 9 \\ -2 & -2 & 3.5 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = -1 \quad J_2 = -2 \quad J_3 = -3$$

$$J_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$J_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$J_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 3.5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

NOTATION

Vecteur solution : $X = (u, v, w)$

Nonlinearités : $\Psi = (f, g, h)$, où

$$f(u, v, w) = -\mu_f u + m_1 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv,$$

$$g(u, v, w) = -\mu_\ell v + m_2 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv - vw,$$

$$h(u, v, w) = -\mu_e w + m_3 \frac{uv}{1+uv}.$$

Jacobienne : $J = \nabla_X \Psi = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial \Psi}{\partial u} & \frac{\partial \Psi}{\partial v} & \frac{\partial \Psi}{\partial w} \end{array} \right)$

Sous-systèmes de J :

$$J_i(X) = \nabla_{X^i} \Psi^i(X), \quad J_{ij}(X) = \nabla_{(X^i, X^j)} (\Psi^i, \Psi^j)(X)$$

Exemple :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 9 \\ -2 & -2 & 3.5 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = -1 \quad J_2 = -2 \quad J_3 = -3$$

$$J_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$J_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$J_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 3.5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

NOTATION

Vecteur solution : $\mathbf{X} = (u, v, w)$

Nonlinearités : $\Psi = (f, g, h)$, où

$$f(u, v, w) = -\mu_f u + m_1 \frac{uv}{1 + uv} - \mu_b uv,$$

$$g(u, v, w) = -\mu_\ell v + m_2 \frac{uv}{1 + uv} - \mu_b uv - vw,$$

$$h(u, v, w) = -\mu_e w + m_3 \frac{uv}{1 + uv}.$$

Jacobienne : $J = \nabla_{\mathbf{X}} \Psi = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial \Psi}{\partial u} & \frac{\partial \Psi}{\partial v} & \frac{\partial \Psi}{\partial w} \end{array} \right)$

Sous-systèmes de J :

$$J_i(\mathbf{X}) = \nabla_{X^i} \Psi^i(\mathbf{X}), \quad J_{ij}(\mathbf{X}) = \nabla_{(X^i, X^j)} (\Psi^i, \Psi^j)(\mathbf{X})$$

Exemple :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 9 \\ -2 & -2 & 3.5 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = -1 \quad J_2 = -2 \quad J_3 = -3$$

$$J_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$J_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$J_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 3.5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

NOTATION

Vecteur solution : $\mathbf{X} = (u, v, w)$

Nonlinearités : $\Psi = (f, g, h)$, où

$$f(u, v, w) = -\mu_f u + m_1 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv,$$

$$g(u, v, w) = -\mu_\ell v + m_2 \frac{uv}{1+uv} - \mu_b uv - vw,$$

$$h(u, v, w) = -\mu_e w + m_3 \frac{uv}{1+uv}.$$

Jacobienne : $J = \nabla_{\mathbf{X}} \Psi = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial \Psi}{\partial u} & \frac{\partial \Psi}{\partial v} & \frac{\partial \Psi}{\partial w} \end{array} \right)$

Sous-systèmes de J :

$$J_i(\mathbf{X}) = \nabla_{X^i} \Psi^i(\mathbf{X}), \quad J_{ij}(\mathbf{X}) = \nabla_{(X^i, X^j)} (\Psi^i, \Psi^j)(\mathbf{X})$$

Exemple :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 9 \\ -2 & -2 & 3.5 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = -1 \quad J_2 = -2 \quad J_3 = -3$$

$$J_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$J_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$J_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 3.5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

NOTATION

Vecteur solution : $\mathbf{X} = (u, v, w)$

Nonlinearités : $\Psi = (f, g, h)$, où

$$f(u, v, w) = -\mu_f u + m_1 \frac{uv}{1 + uv} - \mu_b uv,$$

$$g(u, v, w) = -\mu_\ell v + m_2 \frac{uv}{1 + uv} - \mu_b uv - vw,$$

$$h(u, v, w) = -\mu_e w + m_3 \frac{uv}{1 + uv}.$$

Jacobienne : $J = \nabla_{\mathbf{X}} \Psi = \left(\begin{array}{c|c|c} \frac{\partial \Psi}{\partial u} & \frac{\partial \Psi}{\partial v} & \frac{\partial \Psi}{\partial w} \end{array} \right)$

Sous-systèmes de J :

$$J_i(\mathbf{X}) = \nabla_{X^i} \Psi^i(\mathbf{X}), \quad J_{ij}(\mathbf{X}) = \nabla_{(X^i, X^j)} (\Psi^i, \Psi^j)(\mathbf{X})$$

Exemple :

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 & 9 \\ -2 & -2 & 3.5 \\ -9 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$J_1 = -1 \quad J_2 = -2 \quad J_3 = -3$$

$$J_{12} = \begin{pmatrix} -1 & 1.5 \\ -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$J_{13} = \begin{pmatrix} -1 & 9 \\ -9 & -3 \end{pmatrix}$$

$$J_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 3.5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$$

PLUS DE DÉTAILS SUR LA DDI

Hypothèse : On suppose qu'il existe un équilibre, \bar{X} , constant, strictement positif au système.

\implies On cherche sous quelles conditions on a de la DDI

DÉFINITION : DDI

L'équilibre \bar{X} exhibe de la DDI en tant qu'équilibre du système si :

- 1 \bar{X} est stable pour $d_1 = d_2 = 0$
- 2 \bar{X} est instable en présence de diffusion, $d_1, d_2 > 0$, adaptée

PLUS DE DÉTAILS SUR LA DDI

Hypothèse : On suppose qu'il existe un équilibre, \bar{X} , constant, strictement positif au système.

\implies On cherche sous quelles conditions on a de la DDI

DÉFINITION : DDI

L'équilibre \bar{X} exhibe de la DDI en tant qu'équilibre du système si :

- 1 \bar{X} est stable pour $d_1 = d_2 = 0$
- 2 \bar{X} est instable en présence de diffusion, $d_1, d_2 > 0$, adaptée

CONDITIONS POUR LA DDI

Expression de l'opérateur linéarisé autour de \bar{X} :

$$\mathcal{L}_{d_1, d_2}[\xi] = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & d_1 & \\ & & d_2 \end{pmatrix} \Delta \xi + \nabla_X \Psi(\bar{X}) \xi$$

Spectre sur $L^2(\Omega)^3$: Avec "un peu" de travail, on a la décomposition :

$$\sigma(\mathcal{L}_{d_1 d_2}) = \{\partial_u f(\bar{X})\} \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} \sigma(\lambda_j D + \nabla_X \Psi(\bar{X})), \quad \lambda_j \in \sigma(-\Delta_N^\Omega)$$

CONDITIONS POUR LA DDI

On définit $s(\mathcal{L}) = \sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L})} \operatorname{Re} \lambda$, la borne spectrale de \mathcal{L} . Alors, \bar{X} exhibe de la DDI en tant qu'équilibre du système si

- 1 $s(\mathcal{L}_{0,0}) < 0$
- 2 Le choix d_1, d_2 est tel que $s(\mathcal{L}_{d_1, d_2}) > 0$

CONDITIONS POUR LA DDI

Expression de l'opérateur linéarisé autour de \bar{X} :

$$\mathcal{L}_{d_1, d_2}[\xi] = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & d_1 & \\ & & d_2 \end{pmatrix} \Delta \xi + \nabla_X \Psi(\bar{X}) \xi$$

Spectre sur $L^2(\Omega)^3$: Avec "un peu" de travail, on a la décomposition :

$$\sigma(\mathcal{L}_{d_1 d_2}) = \{\partial_u f(\bar{X})\} \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} \sigma(\lambda_j D + \nabla_X \Psi(\bar{X})), \quad \lambda_j \in \sigma(-\Delta_N^\Omega)$$

CONDITIONS POUR LA DDI

On définit $s(\mathcal{L}) = \sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L})} \operatorname{Re} \lambda$, la borne spectrale de \mathcal{L} . Alors, \bar{X} exhibe de la DDI en tant qu'équilibre du système si

- 1 $s(\mathcal{L}_{0,0}) < 0$
- 2 Le choix d_1, d_2 est tel que $s(\mathcal{L}_{d_1, d_2}) > 0$

CONDITIONS POUR LA DDI

Expression de l'opérateur linéarisé autour de \bar{X} :

$$\mathcal{L}_{d_1, d_2}[\xi] = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & d_1 & \\ & & d_2 \end{pmatrix} \Delta \xi + \nabla_X \Psi(\bar{X}) \xi$$

Spectre sur $L^2(\Omega)^3$: Avec "un peu" de travail, on a la décomposition :

$$\sigma(\mathcal{L}_{d_1 d_2}) = \{\partial_u f(\bar{X})\} \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} \sigma(\lambda_j D + \nabla_X \Psi(\bar{X})), \quad \lambda_j \in \sigma(-\Delta_N^\Omega)$$

CONDITIONS POUR LA DDI

On définit $s(\mathcal{L}) = \sup_{\lambda \in \sigma(\mathcal{L})} \operatorname{Re} \lambda$, la borne spectrale de \mathcal{L} . Alors, \bar{X} exhibe de la DDI en tant qu'équilibre du système si

- 1 $s(\mathcal{L}_{0,0}) < 0$
- 2 Le choix d_1, d_2 est tel que $s(\mathcal{L}_{d_1, d_2}) > 0$

QUELQUES REMARQUES

Rappel : $\sigma(\mathcal{L}_{d_1 d_2}) = \{\partial_u f(\bar{\mathbf{X}})\} \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} \sigma(\lambda_j \mathbf{D} + \nabla_{\mathbf{X}} \Psi(\bar{\mathbf{X}}))$

AUTOCATALYSE

La condition $\partial_u f(\bar{\mathbf{X}}) > 0$ s'appelle condition d'autocatalyse. Si satisfaite, $\bar{\mathbf{X}}$ exhibe de la DDI indépendamment de d_1, d_2 (trivial). De plus, toute solution stationnaire qui intersecte $\bar{\mathbf{X}}$ est instable.

\implies Cas peu intéressant pour nous !

CONDITIONS POUR LA DDI (REFORMULATION)

$\bar{\mathbf{X}}$ exhibe de la DDI en tant qu'équilibre du système si

- 1 La Jacobienne, $J = \nabla_{\mathbf{X}} \Psi(\bar{\mathbf{X}})$, a toutes ses valeurs propres de partie réelle < 0
- 2 d_1, d_2 sont tels qu'il existe un $j > 0$: $J - \lambda_j \mathbf{D}$ a une valeur propre de partie réelle > 0

QUELQUES REMARQUES

Rappel : $\sigma(\mathcal{L}_{d_1 d_2}) = \{\partial_u f(\bar{\mathbf{X}})\} \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} \sigma(\lambda_j \mathbf{D} + \nabla_{\mathbf{X}} \Psi(\bar{\mathbf{X}}))$

AUTOCATALYSE

La condition $\partial_u f(\bar{\mathbf{X}}) > 0$ s'appelle condition d'autocatalyse. Si satisfaite, $\bar{\mathbf{X}}$ exhibe de la DDI indépendamment de d_1, d_2 (trivial). De plus, toute solution stationnaire qui intersecte $\bar{\mathbf{X}}$ est instable.

\implies Cas peu intéressant pour nous !

CONDITIONS POUR LA DDI (REFORMULATION)

$\bar{\mathbf{X}}$ exhibe de la DDI en tant qu'équilibre du système si

- 1 La Jacobienne, $J = \nabla_{\mathbf{X}} \Psi(\bar{\mathbf{X}})$, a toutes ses valeurs propres de partie réelle < 0
- 2 d_1, d_2 sont tels qu'il existe un $j > 0$: $J - \lambda_j \mathbf{D}$ a une valeur propre de partie réelle > 0

QUELQUES REMARQUES

Rappel : $\sigma(\mathcal{L}_{d_1 d_2}) = \{\partial_u f(\bar{\mathbf{X}})\} \cup \bigcup_{j=0}^{\infty} \sigma(\lambda_j \mathbf{D} + \nabla_{\mathbf{X}} \Psi(\bar{\mathbf{X}}))$

AUTOCATALYSE

La condition $\partial_u f(\bar{\mathbf{X}}) > 0$ s'appelle condition d'autocatalyse. Si satisfaite, $\bar{\mathbf{X}}$ exhibe de la DDI indépendamment de d_1, d_2 (trivial). De plus, toute solution stationnaire qui intersecte $\bar{\mathbf{X}}$ est instable.

\implies Cas peu intéressant pour nous !

CONDITIONS POUR LA DDI (REFORMULATION)

$\bar{\mathbf{X}}$ exhibe de la DDI en tant qu'équilibre du système si

- 1 La Jacobienne, $J = \nabla_{\mathbf{X}} \Psi(\bar{\mathbf{X}})$, a toutes ses valeurs propres de partie réelle < 0
- 2 d_1, d_2 sont tels qu'il existe un $j > 0$: $J - \lambda_j \mathbf{D}$ a une valeur propre de partie réelle > 0

CONDITIONS POUR LA DDI

On peut montrer :

CONDITIONS THÉORIQUES (GÉNÉRAL)

On suppose que $s(J) < 0$ et $J_1 < 0$. Alors, \bar{X} exhibe de la DDI si et seulement si

- 1 $s(J_{12}) > 0$, $d_1 \geq 0$ suffisamment petit, $d_2 > 0$ fixé, $L = 1$,
- 2 $s(J_{12}) > 0$, $d_1 > 0$ fixé, $d_2 > 0$ suffisamment large, $L \geq 1$ suffisamment large,
- 3 $s(J_{13}) > 0$, $d_1 > 0$ fixé, $d_2 \geq 0$ suffisamment petit, $L = 1$,
- 4 $s(J_{13}) > 0$, $d_1 > 0$ suffisamment large, $d_2 > 0$ fixé, $L \geq 1$ suffisamment large,

Proposition : Dans notre système, la DDI ne peut provenir que de l'instabilité de J_{12} .

CONDITIONS POUR LA DDI

On peut montrer :

CONDITIONS THÉORIQUES (GÉNÉRAL)

On suppose que $s(J) < 0$ et $J_1 < 0$. Alors, \bar{X} exhibe de la DDI si et seulement si

- 1 $s(J_{12}) > 0$, $d_1 \geq 0$ suffisamment petit, $d_2 > 0$ fixé, $L = 1$,
- 2 $s(J_{12}) > 0$, $d_1 > 0$ fixé, $d_2 > 0$ suffisamment large, $L \geq 1$ suffisamment large,

Proposition : Dans notre système, la DDI ne peut provenir que de l'instabilité de J_{12} .

PREUVE (J_{12} EST LE SEUL SOUS-SYSTÈME INSTABLE)

1 On commence par montrer que J_1, J_2 et J_3 sont tous négatifs. De plus, un calcul donne que $s(J_{13}), s(J_{23})$ sont également négatifs.

2 On montre $\text{tr } J_{12} < 0$ d'où J_{12} est instable ssi $\det J_{12} < 0$. On a

$$\det J_{12} = \frac{\varphi(\mu_b)}{(1 + uv)^2} \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = \mu_f(\mu_\ell + w)((\bar{u}\bar{v})^2 - 1)$$

3 Il tient $uv \xrightarrow{\mu_b \rightarrow 0} \mu_f / (m_1 - \mu_f) < 1$. D'où $\det J_{12}|_{\mu_b=0} < 0$.

4 On conclue qu'il existe un ouvert sur lequel $\det J_{12} < 0$ en utilisant la continuité de J_{12} en μ_b . □

PREUVE (J_{12} EST LE SEUL SOUS-SYSTÈME INSTABLE)

- 1 On commence par montrer que J_1, J_2 et J_3 sont tous négatifs. De plus, un calcul donne que $s(J_{13}), s(J_{23})$ sont également négatifs.
- 2 On montre $\text{tr } J_{12} < 0$ d'où J_{12} est instable ssi $\det J_{12} < 0$. On a

$$\det J_{12} = \frac{\varphi(\mu_b)}{(1 + uv)^2} \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = \mu_f(\mu_\ell + w)((\bar{u}\bar{v})^2 - 1)$$

- 3 Il tient $uv \xrightarrow{\mu_b \rightarrow 0} \mu_f / (m_1 - \mu_f) < 1$. D'où $\det J_{12}|_{\mu_b=0} < 0$.

- 4 On conclue qu'il existe un ouvert sur lequel $\det J_{12} < 0$ en utilisant la continuité de J_{12} en μ_b . □.

$$1. \varphi(\mu_b) = \bar{u}^2 \bar{v}^2 A(\mu_b) B(\mu_b) - (A(\mu_b) - \mu_b \bar{v}(1 + \bar{u}\bar{v}))(B(\mu_b) - \mu_b \bar{u}(1 + \bar{u}\bar{v}))$$

PREUVE (J_{12} EST LE SEUL SOUS-SYSTÈME INSTABLE)

1 On commence par montrer que J_1, J_2 et J_3 sont tous négatifs. De plus, un calcul donne que $s(J_{13}), s(J_{23})$ sont également négatifs.

2 On montre $\text{tr } J_{12} < 0$ d'où J_{12} est instable ssi $\det J_{12} < 0$. On a

$$\det J_{12} = \frac{\varphi(\mu_b)}{(1 + uv)^2} \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = \mu_f(\mu_\ell + w)((\bar{u}\bar{v})^2 - 1)$$

3 Il tient $uv \xrightarrow{\mu_b \rightarrow 0} \mu_f / (m_1 - \mu_f) < 1^2$. D'où $\det J_{12}|_{\mu_b=0} < 0$.

4 On conclue qu'il existe un ouvert sur lequel $\det J_{12} < 0$ en utilisant la continuité de J_{12} en μ_b □.

2. en utilisant $f(\bar{X}) = 0$ et si $\mu_f \in (0, m_1/2)$

PREUVE (J_{12} EST LE SEUL SOUS-SYSTÈME INSTABLE)

1 On commence par montrer que J_1, J_2 et J_3 sont tous négatifs. De plus, un calcul donne que $s(J_{13}), s(J_{23})$ sont également négatifs.

2 On montre $\text{tr } J_{12} < 0$ d'où J_{12} est instable ssi $\det J_{12} < 0$. On a

$$\det J_{12} = \frac{\varphi(\mu_b)}{(1 + uv)^2} \quad \text{avec} \quad \varphi(0) = \mu_f(\mu_\ell + w)((\bar{u}\bar{v})^2 - 1)$$

3 Il tient $uv \xrightarrow{\mu_b \rightarrow 0} \mu_f / (m_1 - \mu_f) < 1$. D'où $\det J_{12}|_{\mu_b=0} < 0$.

4 On conclue qu'il existe un ouvert sur lequel $\det J_{12} < 0$ en utilisant la continuité de J_{12} en μ_b □.

Mais on peut faire mieux !

THEOREM (CONDITIONS NÉCESSAIRES ET SUFFISANTES POUR DDI)

Sur le domaine $\Omega = (0, L)$, L 'équilibre constant nontrivial \bar{X} exhibe de la DDI si

1 $L > 0$, le coefficient de diffusion $d_2 > 0$ est fixé et

$$0 < d_1 < \frac{\det J - \det J_{12}d_2\lambda_j}{\lambda_j(\det J_{13} - J_1d_2\lambda_j)}$$

pour au moins un $j \in \mathbb{N}$,

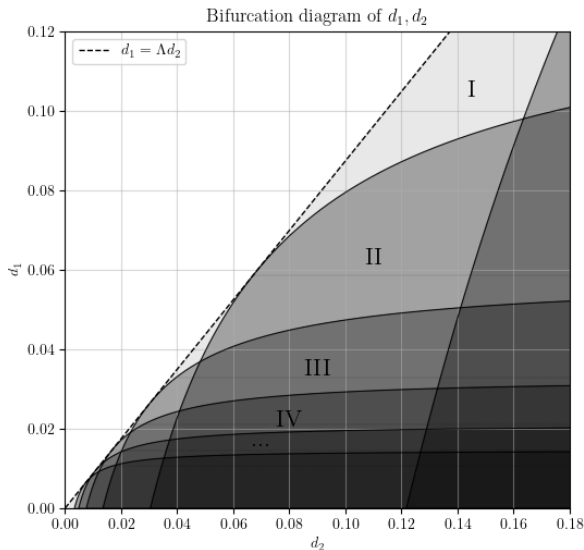
2 $d_1 > 0$ fixé et

$$L > \pi j \sqrt{\frac{J_1 d_1}{\det J_{12}}}, \quad d_2 > \frac{\det J - \det J_{13}d_1\lambda_j}{\lambda_j(\det J_{12} - J_1d_1\lambda_j)} > 0$$

tient pour au moins un $j \in \mathbb{N}$.

Preuve : On utilise le critère de Routh-Hurwitz en dimension 3 pour dériver les inégalités précédentes.

DIAGRAMME DE BIFURCATION



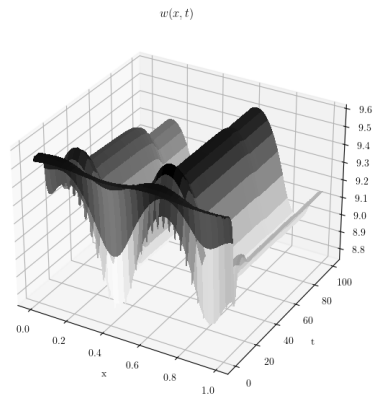
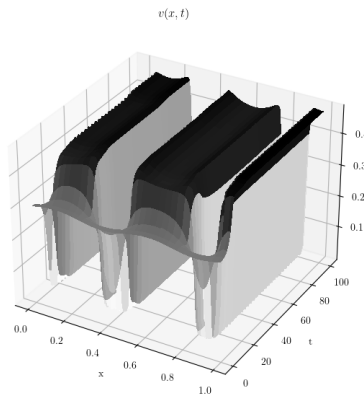
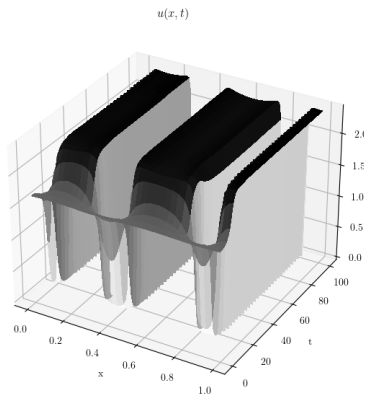
Légende :

- (I) DDI si le coefficient L est choisi plus large.
- (II) Exactement **une** valeur propre instable
- (III) Exactement **deux** valeurs propres instables
- ⋮

Note : Deux régions de la même couleur ont le même nombre de valeurs propres instables (lesquelles peuvent différer).

SIMULATIONS

EXEMPLE DE SIMULATION (3D)



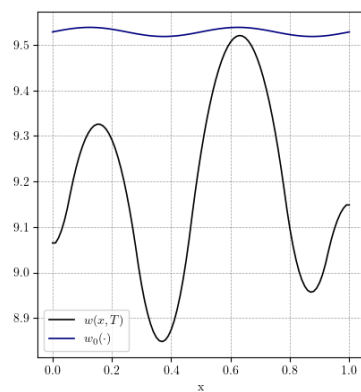
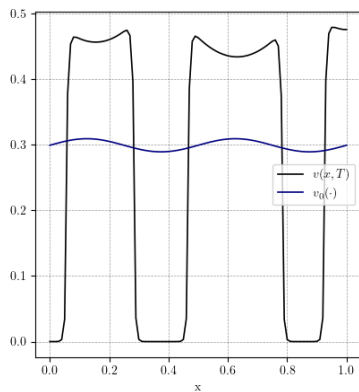
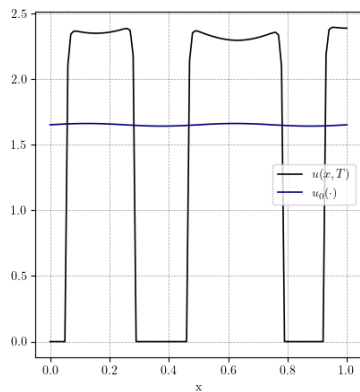
Paramètres :

$$\mu_f = 0.87, \mu_b = 0.68, \mu_\ell = 0.05, \mu_e = 0.6, m_1 = 5.36, m_2 = 9.68, m_3 = 17.27, d_1 = 0.0001, d_2 = 0.1, L = 1$$

Condition Initiale :

$$u_0(x) = \bar{u} + 0.01 \sin(4\pi x), \quad v_0(x) = \bar{v} + 0.01 \sin(4\pi x), \quad w_0(x) = \bar{w} + 0.01 \sin(4\pi x)$$

EXEMPLE DE SIMULATION (2D)



Paramètres :

$$\mu_f = 0.87, \mu_b = 0.68, \mu_\ell = 0.05, \mu_e = 0.6, m_1 = 5.36, m_2 = 9.68, m_3 = 17.27, d_1 = 0.0001, d_2 = 0.1, L = 1$$

Condition Initiale :

$$u_0(x) = \bar{u} + 0.01 \sin(4\pi x), \quad v_0(x) = \bar{v} + 0.01 \sin(4\pi x), \quad w_0(x) = \bar{w} + 0.01 \sin(4\pi x)$$

Mission Accomplie !

EN CONCLUSION...

Innovation : On propose une analyse nouvelle du mécanisme de formation de motif dans des systèmes de Réaction-Diffusion-EDO pour *deux* composantes diffusives

On a :

- Montré que le problème est bien posé et il est simple de construire des solutions globales sous des hypothèses faibles sur les nonlinéarités
- Montré que le modèle est capable de générer des motifs discontinus autour de l'équilibre + développé une méthodologie pour trouver des conditions explicites

Qu'en retenir ? \implies Premiers pas dans un champ encore largement inexploré + des perspectives optimistes pour des applications réelles en biologie !

EN CONCLUSION...

Innovation : On propose une analyse nouvelle du mécanisme de formation de motif dans des systèmes de Réaction-Diffusion-EDO pour *deux* composantes diffusives

On a :

- Montré que le problème est bien posé et il est simple de construire des solutions globales sous des hypothèses faibles sur les nonlinéarités
- Montré que le modèle est capable de générer des motifs discontinus autour de l'équilibre + développé une méthodologie pour trouver des conditions explicites

Qu'en retenir ? \implies Premiers pas dans un champ encore largement inexploré + des perspectives optimistes pour des applications réelles en biologie !

EN CONCLUSION...

Innovation : On propose une analyse nouvelle du mécanisme de formation de motif dans des systèmes de Réaction-Diffusion-EDO pour *deux* composantes diffusives

On a :

- Montré que le problème est bien posé et il est simple de construire des solutions globales sous des hypothèses faibles sur les nonlinéarités
- Montré que le modèle est capable de générer des motifs discontinus autour de l'équilibre + développé une méthodologie pour trouver des conditions explicites

Qu'en retenir ? \implies Premiers pas dans un champ encore largement inexploré + des perspectives optimistes pour des applications réelles en biologie !

EN CONCLUSION...

Innovation : On propose une analyse nouvelle du mécanisme de formation de motif dans des systèmes de Réaction-Diffusion-EDO pour *deux* composantes diffusives

On a :

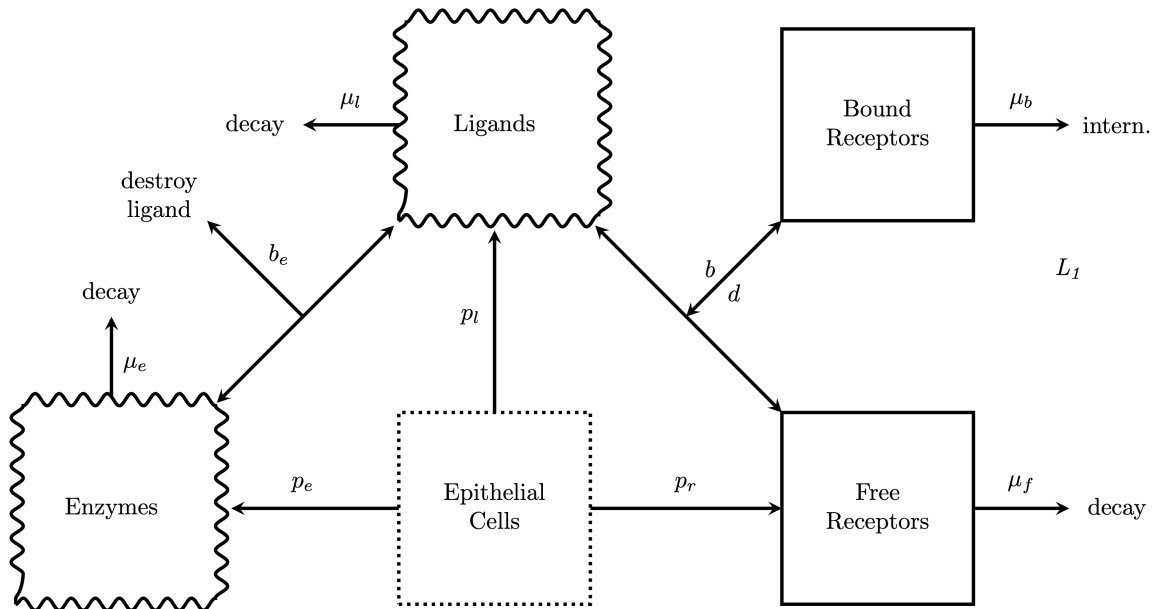
- Montré que le problème est bien posé et il est simple de construire des solutions globales sous des hypothèses faibles sur les nonlinéarités
- Montré que le modèle est capable de générer des motifs discontinus autour de l'équilibre + développé une méthodologie pour trouver des conditions explicites

Qu'en retenir ? \implies Premiers pas dans un champ encore largement inexploré + des perspectives optimistes pour des applications réelles en biologie !

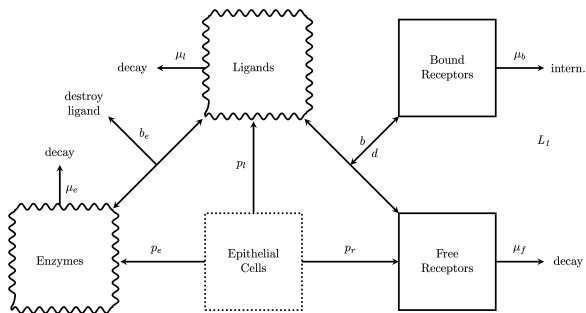
Merci à tous pour votre attention !
(Des questions ?)

ADDITIONAL SLIDES

ORIGINE DU SYSTÈME 1.



ORIGINE DU SYSTÈME 2.



Réduction (QSSA) : Soit $\varepsilon > 0$, on prend r_b comme variable "rapide".

$$\varepsilon \partial_t r_b \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} r_b = \frac{b}{d + \mu_b} r_f \ell$$

Choix du terme de production :

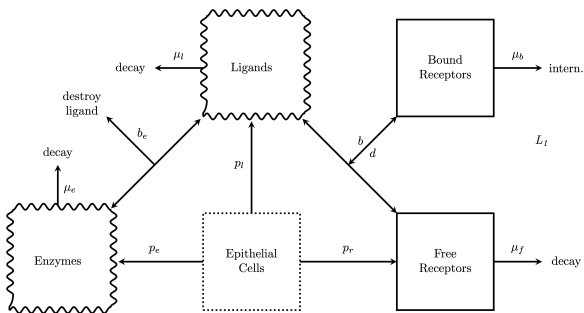
$$p_\bullet(r_b) = \frac{r_b}{1 + r_b}$$

Equations :

$$\begin{cases} \partial_t r_f = -\mu_f r_f + p_r(r_b) - b r_f \ell + d r_b, \\ \partial_t r_b = -\mu_b r_b + b r_f \ell - d r_b, \\ \partial_t \ell - d_1 \Delta \ell = -\mu_\ell \ell + p_\ell(r_b) - b r_f \ell + d r_b, \\ \partial_t e - d_2 \Delta e = -\mu_e e + p_e(r_b), \end{cases}$$

+ substitution + rescaling \longrightarrow modèle

ORIGINE DU SYSTÈME 2.



Réduction (QSSA) : Soit $\varepsilon > 0$, on prend r_b comme variable "rapide".

$$\varepsilon \partial_t r_b \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} r_b = \frac{b}{d + \mu_b} r_f \ell$$

Choix du terme de production :

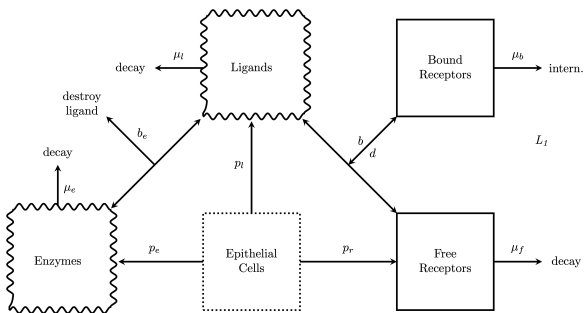
$$p_\bullet(r_b) = \frac{r_b}{1 + r_b}$$

Equations :

$$\begin{cases} \partial_t r_f = -\mu_f r_f + p_r(r_b) - b r_f \ell + d r_b, \\ \partial_t r_b = -\mu_b r_b + b r_f \ell - d r_b, \\ \partial_t - \ell d_1 \Delta \ell = -\mu_\ell \ell + p_\ell(r_b) - b r_f \ell + d r_b, \\ \partial_t e - d_2 \Delta e = -\mu_e e + p_e(r_b), \end{cases}$$

+ substitution + rescaling \longrightarrow modèle

ORIGINE DU SYSTÈME 2.



Réduction (QSSA) : Soit $\varepsilon > 0$, on prend r_b comme variable "rapide".

$$\varepsilon \partial_t r_b \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} r_b = \frac{b}{d + \mu_b} r_f \ell$$

Choix du terme de production :

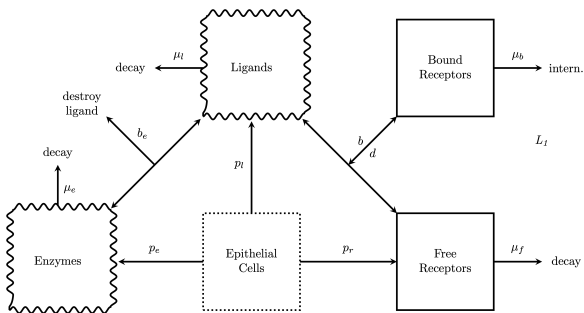
$$p_\bullet(r_b) = \frac{r_b}{1 + r_b}$$

Equations :

$$\begin{cases} \partial_t r_f = -\mu_f r_f + p_r(r_b) - b r_f \ell + d r_b, \\ \partial_t r_b = -\mu_b r_b + b r_f \ell - d r_b, \\ \partial_t \ell - d_1 \Delta \ell = -\mu_\ell \ell + p_\ell(r_b) - b r_f \ell + d r_b, \\ \partial_t e - d_2 \Delta e = -\mu_e e + p_e(r_b), \end{cases}$$

+ substitution + rescaling \rightarrow modèle

ORIGINE DU SYSTÈME 2.



Réduction (QSSA) : Soit $\varepsilon > 0$, on prend r_b comme variable "rapide".

$$\varepsilon \partial_t r_b \xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} r_b = \frac{b}{d + \mu_b} r_f \ell$$

Choix du terme de production :

$$p_\bullet(r_b) = \frac{r_b}{1 + r_b}$$

Equations :

$$\begin{cases} \partial_t r_f = -\mu_f r_f + p_r(r_b) - b r_f \ell + d r_b, \\ \partial_t r_b = -\mu_b r_b + b r_f \ell - d r_b, \\ \partial_t \ell - d_1 \Delta \ell = -\mu_\ell \ell + p_\ell(r_b) - b r_f \ell + d r_b, \\ \partial_t e - d_2 \Delta e = -\mu_e e + p_e(r_b), \end{cases}$$

+ substitution + rescaling \longrightarrow modèle

EXISTENCE OF A UNIQUE GLOBAL SOLUTION (ORIGINAL RESULT)

Theorem (Rothe, Thm. I p. 111) : Assume Ψ is a locally bounded, Lipschitz continuous, i.e., for every bounded set $B \subseteq \mathbb{R}^3$, there exists $L(B) > 0$ such that

$$\|\Psi(\mathbf{X})\| \leq L(B), \quad \text{and} \quad \|\Psi(\mathbf{X}) - \Psi(\mathbf{Y})\| \leq L(B)\|\mathbf{X} - \mathbf{Y}\|, \quad \forall \mathbf{X}, \mathbf{Y} \in B$$

Moreover, assume $\mathbf{X}_0 \in L^\infty(\Omega)^3$. Then the following properties hold

- (I) There exists $T_{\max} \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$ such that the associated Cauchy problem has a unique mild solution \mathbf{X} on $[0, T)$, with $\mathbf{X} \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega)^3)$ for all $T < T_{\max}$.
- (II) The existence time $T_{\max} \in (0, \infty) \cup \{\infty\}$ can be chosen maximal. If $T_{\max} < \infty$, then $\lim_{t \rightarrow T_{\max}} \|\mathbf{u}(\cdot, t)\|_\infty = \infty$
- (III) If we consider regular initial data $\mathbf{X}_0 \in \mathcal{C}^{0,\alpha}(\bar{\Omega}) \times \mathcal{C}^{2,\alpha}(\bar{\Omega})^2$, then \mathbf{X} is smooth and is also a classical solution.