Présentation projet de recherche

Théodore CHAPUIS-CHKAIBAN, Ghita CHEMIA, Paul LIEUTIER, Hugo SERVANT, Victor SANSAC

Ecole CentraleSupélec

10/03/2020

Page Rank

- **Classer les noeuds** d'un graphe par ordre d'importance
- Parcourir le graphe avec une **marche aléatoire** (chaîne de Markov) : selon le nombre de visites d'un noeud, on lui **attribue un score**
- Cela revient à **diagonaliser la matrice d'occurrences** A du graphe (si les sommets i et j sont connectés alors A[i][j] = 1, sinon 0)

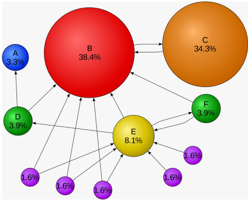


FIGURE 1 – Exemple de Graphe sur lequel fonctionne le Page Rank.

Page Rank

- Problème avec la diagonalisation : matrice de **dimension** $10^9 \times 10^9$: trop calculatoire
  $\rightarrow$ Projeter les valeurs propres sur un **espace de dimension inférieure** (SVD par ACP)
- Analogie avec la transformée de Fourier : que se passe-t-il si on applique la transformée de Fourier au PageRank ?
  $\rightarrow$ Objectif : **analogue quantique de la transformée de Fourier pour les graphes** ?

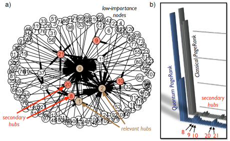


FIGURE 2 – Mise en évidence de la décomposition en fréquences pour un graphe

Applications actuelle du pageRank

Principale application directe à l'heure actuelle :

- La **classification** des pages internet.

Les vecteurs du PageRank sont aussi utilisés pour :

- Trouver des **clusters** dans un graphe
- Calcul de **partitions** de graphe
- Intelligence artificielle
- Quantifier / **classer les noeuds** selon leur importance

$\rightarrow$ Dans tous les cas : **établir l'importance de certains noeuds** par rapport aux autres

Outline

Quantum Fourier Transform

Quantum Fourier Transform :

- Applique une transformée de **Fourier Bit par Bit** :
- En utilisant le morphisme de $(\mathbb{R}, +)$ dans $(\mathbb{R}^{+*}, \times)$
- Et la rotation $R_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & exp(\frac{-2i\pi}{2^k}) \end{bmatrix}$

Circuit final :

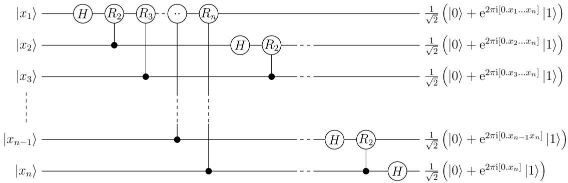


FIGURE 3 – Circuit de la Transformée de Fourier Quantique

Complexité

Théorème

La transformée de Fourier Quantique a une complexité en $\Theta(\log(N))$
Cela est un **gain de temps phénoménal** par rapport à la Transformée de Fourier classique / Rapide ($\Theta(N^2)$)

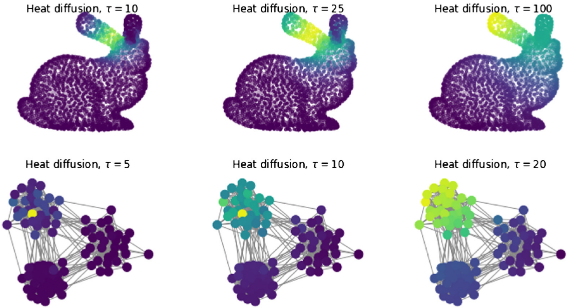
$\rightarrow$ Appliquer cela au PageRank ?

Origines de la Transformée de Fourier sur les Graphes

Théorie spectrale des graphes : très récent (2015 pour les premiers articles)

Comment **définir une transformée de Fourier sur des Graphes** ?

$\rightarrow$ structure irrégulière



Formalisation

- **Propagation de chaleur dans un graphe $\leftrightarrow$ marche aléatoire sur les sommets**
- $\frac{d\phi}{dt} = -k\underbrace{(D - A)}_{\doteq L}\phi$; équation de la chaleur
- D : matrice des degrés, $D \doteq diag(deg(0), \ldots, deg(n))$; A : matrice d'adjacence, ϕ : distribution de chaleur

- ∇ : gradient ; $\nabla f(i,j) \doteq \sqrt{A_{ij}}(f(j) - f(i))$
- $L = \nabla^T \nabla$: Laplacien

Définition

Transformée de Fourier sur les graphes

- Vecteurs propres du Laplacien u_k : **base de décomposition de Fourier**
- $\hat{f}(\lambda_k) \doteq \sum_{i \in V} f(i) u_k(i) = < f | u_k >$: **changement de base**
- $f(i) \doteq \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(\lambda_k) u_k(i)$: **transformation inverse**

Modes de Fourier

- **Energie de Dirichlet** :

$$< f|Lf > \doteq f^T Lf = \sum_{(i,j)\in E} A_{ij}(f(j) - f(i))^2 = \|\nabla f\|_2^2$$

- **Interprétation** : Mesure des oscillations sur le graphe.
- **Théorème MiniMax** : obtention des valeurs propres de L avec certaines valeurs de l'énergie de Dirichlet.
- Plus valeur propre est **grande**, plus énergie est **élevée**.

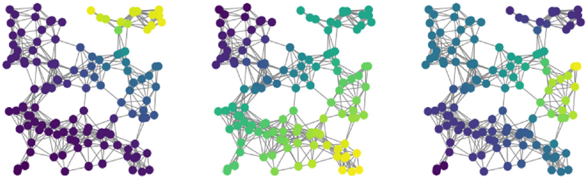


FIGURE 5 – Modes de fourier dans un graphe : u_1, u_2, u_3.

Filtrage et convolution

- On peut appliquer des filtres aux modes pour ne **conserver que certaines fréquences**. Attention à la définition des filtres (fréquences ne sont plus régulièrement espacées).
- **Convolution** : $(f * g)(i) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(\lambda_k)\hat{g}(\lambda_k)u_k(i)$: conserver action sur Fourier
- $(f * \delta_v)(i) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{f}(\lambda_k)u_k(i)u_k(\nu)$: **localiser le signal f** au noeud ν

Problèmes de Fourier

- Fourier donne une information globale, on voudrait connaître les importances relatives des noeuds : **localiser la transformer de Fourier**.
- Solution : **Transformée de Fourier à temps rapide**

$$Sf(t,\nu) = \int_{\mathbb{R}} f(u)g(u-t)e^{-2i\pi\nu u}du = \langle f|T_t M_\nu g\rangle$$

Avec g, une fonction à support compact localisé autour d'une valeur moyenne.

- **Version Graphe** : $Sf(i,\lambda_k) = \langle f|M_{\lambda_k}(g*\delta_i)\rangle$

Propagation d'ondelettes

- **Ondelettes** en Fourier Classique

$$Wf(t,s) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{s}\psi^*(\frac{u-t}{s})f(u)du = \int_{\mathbb{R}} \psi^*(s\nu)\hat{f}(\nu)e^{2i\pi\nu t}d\nu$$

Avec ψ, une ondelette mère (fonction de L_2).

- **Version Graphe** : $Wf(t,s) = \sum_{k=0}^{N-1} \hat{\psi}(s\lambda_k)\hat{f}(\lambda_k)u_k(i)$

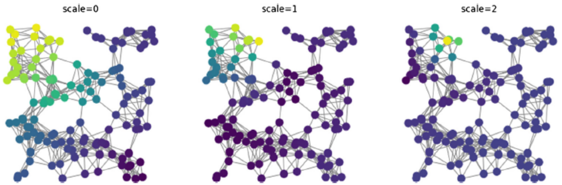


FIGURE 6 – Propagations d'ondelettes dans un graphe

Quantum Fourier Transform for Graphs

- **But du travail** : Adapter les atouts de la transformée de Fourier Quantique pour les graphes → **réelle avancée**
- Pour l'instant, on cherche toujours à adapter le FFT aux graphes
→ trouver un invariant (équivalent de la rotation) pour **définir une transformée de Fourier efficace**.
- Avec un invariant, la transformée de Fourier quantique devient possible
- Chercher du **côté de la marche aléatoire** ?

Algorithmes

- **Classique** : L'algorithme de pagerank est en open source donc nous avons pu le trouver facilement
- **Quantique** : Pas de documentation précise sur le code. Travail basé sur le projet de l'année dernière et utlisation d'IBM pour mieux implémenter le code.
- En parallèle nous essayons d'utiliser le créateur de circuit d'IBM pour créer des circuits comme celui de groover :

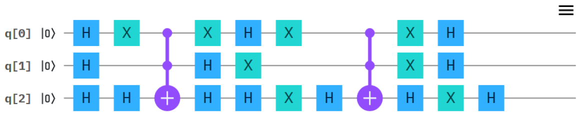


FIGURE 7 – Circuit de Groover