Présentation du projet B : Quantum Walk for Page Ranking

Théodore CHAPUIS-CHKAIBAN

Page Rank

- Page Rank : attribuer à chaque page un score de visibilité.
- Le score dépend du nombre de pages auquel une page est liée (ie le degré de la page dans le graphe du web)
- Plus précisément, soit I l'importance d'une page Web :
  - L'importance d'une page Web dépend de la somme des importances de ses voisins
  - Plus le degré d'un noeud voisin est élevé, plus sa contribution est faible (éviter effets d'échelle)

$$I(P_i) \coloneqq \sum_{j \in B_i} \frac{I(P_j)}{outdeg(P_j)}$$

Equation du Page Rank

- Si $H_{i,j} := \begin{cases} {}^{1}/_{outdeg(P_j)} & si\ P_j \in B_i \\ 0 & sinon \end{cases}$
- I le vecteur dont les composants sont les page ranks $I(P_i)$

$$I = HI$$

I = HI

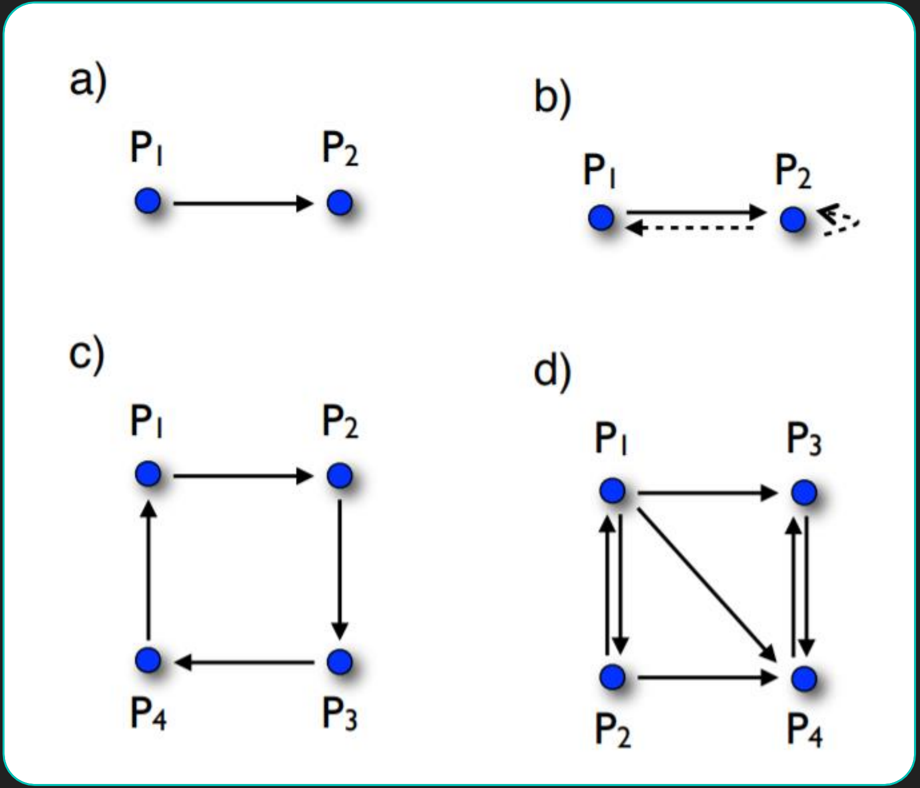
- Page rank : étudier les vecteurs propres associés à 1 pour H
- Mais H : 50 Milliards x 50 Milliards : trop de calcul !
- Théorème de Perron-Frobenius : convergence de $I^{k+1} = HI^k$ vers $I = HI$

Perron Frobenius

- Certaines conditions à l'utilisation de Perron Frobenius pour la convergence :
  - Valeurs propres toutes inférieures à 1
  - Seconde valeur propre la plus grande strictement inférieure à 1

Exemple d'utilisation

- Pour a : $M_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
  - Prendre $I_0 = \binom{0}{1}$
- Pour b : $M_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}$
- Pour c : $\lambda_2 = 1$: pas de convergence
- Pour d : découpage en deux sous-graphes déconnectés ({1,2} ; {3,4})



Solution

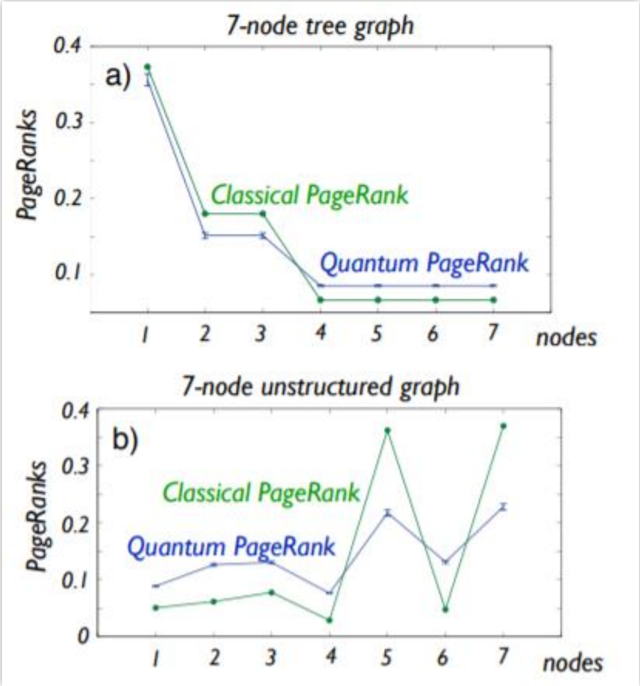
- Partir de $G = \alpha E + \frac{1-\alpha}{N}\Gamma$
  - Généralement $\alpha = 0.85$

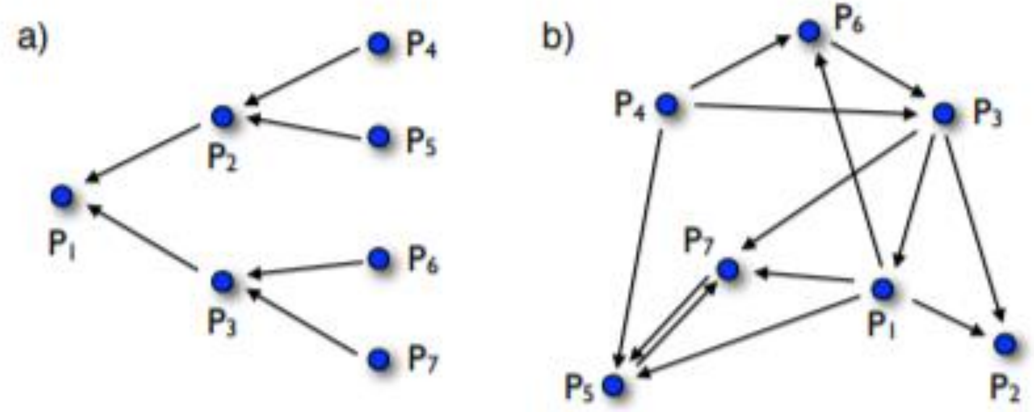
- Interprétation de G : Marche aléatoire qui diffuse sur le graphe du Web
  - $X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(T)}$ variables aléatoires sur les nœuds du graphe

$$G_{i,j} = \Pr\left(X^{(n+1)} = P_i \,\middle|\, X^{(n)} = P_j\right)$$

Quantum Page Rank protocol

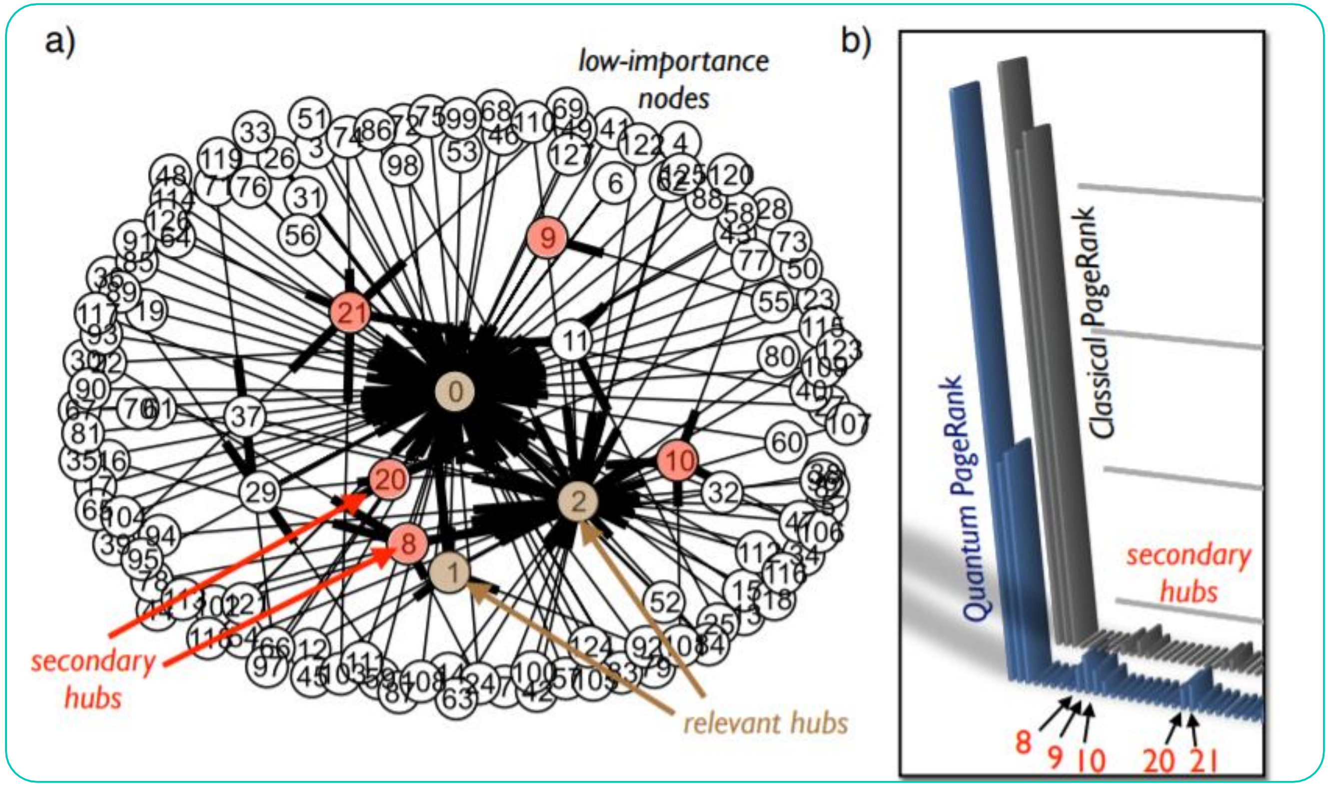
- Ecrire la matrice du réseau Google notée G et l'état initial $|\psi_0>$
  - $|\psi_0> = \sum_j |\psi_j>$
  - $|\psi_j> = |j>_1 \otimes \sum_{k=1}^{N} \sqrt{G_{kj}}\, |k>_2$
- Ecrire l'opérateur de transformation $U^2 = \left(S(2\Pi - \Gamma)\right)^2$
  - S est l'opérateur de Swap : $S = \sum_{j,k=1}^{N} |j,k><k,j|$
  - Π est le projecteur sur le sous espace généré par les $|\psi_j>$
- Trouver les vecteurs propres et les valeurs propres de l'opérateur de transformation U^2
- Extraire la valeur du page Rank


7-node tree graph
a)
Classical PageRank
Quantum PageRank
PageRanks
nodes
7-node unstructured graph
b)
Classical PageRank
Quantum PageRank
PageRanks
nodes


a)
b)

Résultats

Résultats


a)
b)
low-importance nodes
secondary hubs
relevant hubs
Quantum PageRank
Classical PageRank
secondary hubs
8
9
10
20
21