EPU-MAM4	Biologie mathématique	F. Grognard
Année 2025–2026	Projet - dynamique des populations	L. Maillert

Projet à effectuer par groupes de 2. Le rendu devra se faire sous la forme d'un Notebook Jupyter dans lequel vous aurez intégré vos développements mathématiques en Julia ou Python, incluant la génération des figures demandées. Projet à rendre pour le 13 mars 2026 à 18h30 par mail à `frederic.grognard@inria.fr` et `ludovic.maillet@inria.fr`. N'hésitez pas à nous contacter par mail ou à poser des questions lors de nos cours si vous avez des difficultés.

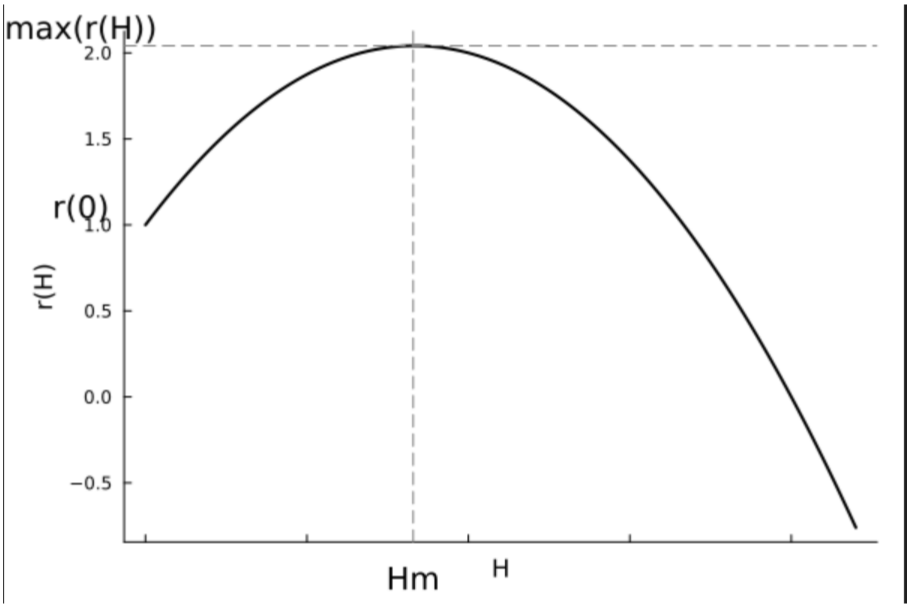
Certaines études sur les relations entre plantes et herbivores tendent à montrer que, à des niveaux faibles à modérés, les herbivores peuvent avoir un effet positif sur le taux de croissance des plantes, c'est-à-dire que pour certaines densités d'herbivores, le taux de croissance des plantes est plus élevé que en l'absence d'herbivores. À de plus hauts niveaux, l'effet sur la croissance des plantes est négatif, essentiellement du fait de l'augmentation de matière végétale par les herbivores.

Considérez le modèle suivant, avec P la densité des plantes et H celles des herbivores :

$$\begin{cases} \dot{P} = r(H)P - \delta P^2 \\ \dot{H} = \alpha PH - mH \end{cases}$$

avec $r(H)$ l'influence nette des herbivores sur la croissance des plantes (stimulation de croissance et consommation incluses), δP^2 un terme de compétition entre plantes, αPH le bénéfice pour les herbivores dû à la consommation des plantes et mH le terme de mortalité de ces derniers (m, α, δ sont des constantes stricte- ment positives).

1. Nous postulerons que $r(H)$ a la forme suivante :



a) Justifiez la forme de $r(H)$ en fonction des hypothèses précédentes.

b) Pour les développements théoriques, il vous est demandé de vous baser, sauf exception explicitée, uniquement sur la forme de la fonction donnée dans la figure. Pour certains autres développements et les simulations sous Julia ou Python, considérez la fonction

$$r(H) = r(0)\left(1 + \frac{H}{\beta}\right)\left(1 - \frac{H}{\gamma}\right) \tag{2}$$

avec $r(0), \beta, \gamma > 0$ ($r(0) = 1$, $\beta = \frac{1}{2}$ et $\gamma = 1$ pour les simulations). Sous quelle condition la fonction (2) est-elle bien une fonction du type de celle proposée dans la figure ? Que valent H_m et $r(H_m)$?

2. Par changement de variables et de temps, essayez d'éliminer le plus de paramètres possible parmi α, δ et m.

Jusqu'à la fin du devoir nous considérerons maintenant le modèle

$$\begin{cases} \dot{P} = r(H)P - \delta P^2 \\ \dot{H} = PH - H \end{cases} \tag{3}$$

avec les mêmes hypothèses que précédemment. Le $r(H)$ du modèle (3) n'est pas le même que celui du modèle (1) mais on considérera qu'il satisfait toujours la forme de la figure ou l'expression (2).

3. Calculez les isoclines nulles et les différents équilibres de ce système. Selon les valeurs des paramètres δ, différents cas sont possibles ; identifiez-les en utilisant la figure de la question 1 en identifiant les différents équilibres dans chacun de ces cas (on se concentrera uniquement sur les cas génériques). *Indice : il y a un équilibre positif atteint lorsque $H < H_m$, nommez cette valeur H_1^*, H_2^* sinon ; ne pas essayer de les calculer au-delà de la relation qui les définit implicitement et de leur position sur la figure.*

4. Calculez la matrice Jacobienne pour ce modèle. Utilisez-la pour évaluer la stabilité des différents équilibres dans chacun des cas.

5. Tracez à l'aide de Julia ou Python un diagramme de bifurcation illustrant les valeurs de H aux équilibres non triviaux en fonction de δ. Nommez les types de bifurcations.

6. Tracez à l'aide de Julia ou Python, dans chacun des cas, le plan de phase correspondant avec les plantes en abscisse et les herbivores en ordonnée(isoclines nulles, stabilité des équilibres, orientation du champ sur le plan de phase, pour chaque équilibre asymptotiquement stable au moins un trajectoire qui converge vers cet équilibre). *Indice : afin de vous confronter progressivement à la difficulté, commencez par les plans de phase présentant le moins d'équilibres.*

7. Fonction de Lyapunov–LaSalle :

On considère le cas où le système possède un seul équilibre positif (construit au H_2^*, qu'on n'a pas besoin de le calculer explicitement).

a) Construisez une fonction de Lyapunov de Harrison $V(P, H)$ pour l'équilibre et donnez sa dérivée temporelle, en indiquant bien dans quelle région les conditions du lemme de Harrison qui garantissent la positivité de $V(P, H)$ sont satisfaites.

b) Vérifiez les conditions du théorème de Harrison assurant la stabilité de l'équilibre en indiquant bien dans quelle région elles sont satisfaites.

c) On considère maintenant la fonction $r(H)$ donnée dans (2), dessinez $V(P(t), H(t))$ en fonction de t avec Julia ou Python pour une condition initiale quelconque et constatez sa décroissance vers 0.

8. Que pensez-vous de l'assertion : “dans certains cas, les plantes peuvent tirer bénéfice de la présence d'herbivores”. Discutez sur la base des résultats obtenus dans les questions précédentes en utilisant une comparaison entre le niveau de plantes atteint à l'équilibre en présence et en l'absence d'herbivores.