

Modélisation

Introduction

L'équipe Modélisation : Mladen Cicic, Stéphane Font,
Véronique Letort-Le Chevalier, Hugo Lhachemi, Cristina
Stoica Maniu, Guillaume Sandou, Cristina Vlad

Professeur de la voie : S. Font

2025 – 2026



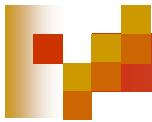
Questions :

Noter que certaines théories physiques très avancées se mettent aux sciences de l'information...

Comprendre le big-bang n'est pas toujours d'une utilité immédiate... pour faire voler un avion

- La modélisation au quotidien : un acte inconscient ?
 - Provocation : faut-il passer un doctorat en physique de la combustion pour conduire une voiture ?
 - Exploration des modèles implicites : quels modèles avez-vous inconsciemment appris pour utiliser un smartphone ? (interaction avec l'interface, gestion de l'énergie, compréhension des risques...). Est-ce que tout le monde a le/les mêmes modèles ?
- De l'utilisateur au concepteur
 - Comment les concepteurs de smartphones modélisent-ils les composants ? (télécommunications, systèmes d'exploitation, gestion de l'énergie, les applications, le traitement photo, son, la modélisation des batteries, la thermique...)
 - Les modèles varient-ils selon les utilisateurs et les concepteurs ? Pourquoi ?
- La nature des modèles : simplification ou réalité
 - Le modèle $f = -k\Delta x$ représente-t-il fidèlement un ressort ?
 - Quel modèle pour un ressort dans un satellite à -271°C (2 Kelvin) ?
- Qu'avez-vous déjà réellement modélisé ? Pour quoi faire ? Quel but ?
 - Quels phénomènes avez-vous modélisés ? À quel degré de précision ?
 - J'ai pratiqué un exercice de modélisation pour intégrer des concepts (notion de force, de flux, d'énergie...)
 - J'ai fait une modélisation qualitative pour comprendre un phénomène
 - J'ai fait un modèle qui permet de prédire un comportement exact à quelques % près d'un véritable objet
 - ...
- le modèle au service de qui, de quoi ?
 - Quand et pourquoi physiciens et ingénieurs créent-ils des modèles ?
 - Leurs objectifs sont-ils les mêmes ?
 - Quel est le rapport entre modèle / mathématique / réalité ?

« The Unreasonable Effectiveness of Mathematics in the Natural Sciences... »
Eugène Wigner
Nobel de physique
1960



Naviguer dans l'univers des modèles

- Diversité des buts :
 - Modéliser pour prouver.
 - Modéliser pour apprendre.
 - Modéliser pour comprendre l'univers.
 - Modéliser pour agir sur ou piloter un objet.
 - Modéliser pour prédire le comportement de systèmes ou d'un système spécifique.
 - Modéliser pour créer un système, une composante ou une fonctionnalité.
- Universalité des Modèles
 - Unicité vs Multiplicité : existe-t-il un modèle universel pour comprendre, prédire et piloter un objet ? Pour tous les Buts ?
 - Fantasme du "méta-modèle" : le mythe d'un modèle parfait qui simulerait « la réalité ».
 - Interchangeabilité : Si plusieurs modèles existent pour un même objet avec différents objectifs, peut-on facilement passer de l'un à l'autre ?
 - Domaine de Validité : Quelles sont les limites d'un modèle ? Peut-il s'adapter à des situations imprévues ?
- Gestion de la complexité et construction de modèle représentatifs
 - Est-il préférable de posséder :
 - un modèle théoriquement « parfait » mais difficile à simuler, ou un modèle moins précis mais facilement exploitable ?
 - un modèle global pour répondre à de nombreuses questions ou plusieurs modèles pour chaque fonction/objectif intermédiaire ?
 - Un "bon" modèle global se construit-il à partir des meilleurs sous-modèles de chaque partie ?
 - Quel compromis faut-il faire ?



Naviguer dans l'univers des modèles

■ Véracité des Modèles : le concept de non-falsification

- Question fondamentale : peut-on prouver qu'un modèle est bon ?
- Peut-on le mettre en défaut ?
 - Un modèle n'est jamais prouvé vrai ; il est conservé tant qu'il résiste à la falsification (à un certain niveau, pour un objectif donné, dans un domaine de fonctionnement donné).
- En modélisation comportementale, on ne cherche pas le « modèle parfait expliquant une loi fondamentale », on vérifie :
 - La cohérence par rapport à des mesures (représentativité par rapport aux données);
 - Cohérence structurelle par rapport aux attentes comportementales (vérification de la causalité, pas de création d'énergie, stabilité...).

■ L'approche système

- Un **système** se réfère à une réalité (physique, humaine, économique...) associée, implicitement ou explicitement, à un but, un domaine de fonctionnement, une utilité, ou un cahier des charges.
 - Cet ensemble, vu comme un tout, représente alors une fonctionnalité spécifique.
-  En approche système, le terme « **système** » désigne généralement le modèle mathématique utilisé pour décrire l'objet précédent.
 - Il n'est pas rare de lire « soit un système », suivies d'une équation différentielle...
 - Ce glissement de sens, couramment employé dans le domaine systémique, implique qu'au-delà de l'équation, un certain regard est porté sur l'objet étudié (présumé comme représentatif d'une réalité causale).
- Ce déplacement sémantique peut parfois mener à un besoin de clarifications lorsque cela s'avère nécessaire :
 - au premier sens ci-dessus, on parle de **système** physique (humain, économique...) ;
 - en opposition au **système** mathématique qui représente le système physique.



Système : de l'intuition à la définition

■ Un voyage en épistémologie

- Le terme « système » est omniprésent dans l'ingénierie et la recherche... mais sa familiarité masque une complexité profonde.
- Les épistémologues décortiquent ce concept apparemment simple pour révéler ses subtilités cachées, illustrant ainsi sa richesse et son influence au-delà de son usage quotidien.

« (Un système c'est :

quelque chose (n'importe quoi, présumé identifiable)

qui dans quelque chose (environnement)

pour quelque chose (finalité ou projet)

fait quelque chose (activité = fonctionnement)

par quelque chose (structure = forme stable)

qui se transforme dans le temps (évolution)

Ou encore, en acceptant une définition passe-partout du mot objet : un objet actif et stable et évoluant dans un environnement, et par rapport à quelque finalité. »



Jean-Louis Le Moigne

*La théorie du système général
(théorie de la modélisation).*

Collection «Systèmes-Décisions», 1977

Il s'agit donc d'un concept complexe qui sera affiné au fur et à mesure de la formation dans les différents modules du cursus liés à l'approche systémique (modélisation, automatique, traitement du signal...)



Les sciences des signaux et systèmes

■ Sciences des signaux et des systèmes

- Sciences « jeunes » (<100 ans)
- Signal et système : deux visions duales du monde !
- Plusieurs noms... selon la période historique ou la spécialité : **systémique, cybernétique, automatique, communication, sciences du signal, signaux et systèmes, théorie des signaux, systèmes dynamiques, théorie des systèmes, traitement des signaux, systèmes de contrôle**
- Un objet scientifique n'existe pas indépendamment de son usage :
objet mathématique + vision systèmes + usages systèmes → **objet contextuel**

systemics, cybernetics, automation, communication, signal sciences, signals and systems, signal processing, **system theory**, dynamic systems, control systems, communication systems, linear systems theory

Par exemple, la transformation de Fourier, aujourd'hui incontournable en traitement du signal, a été initialement développée par Fourier pour résoudre des équations aux dérivées partielles liées à la conduction thermique. Elle a ensuite trouvé des applications fondamentales en théorie des espaces fonctionnels, facilitant notamment des opérations de lissage et des injections entre certains espaces

■ Explosion récente (< 30 ans)

- Favorisée par les avancées en matière de traitement de l'information.

■ Le cours :

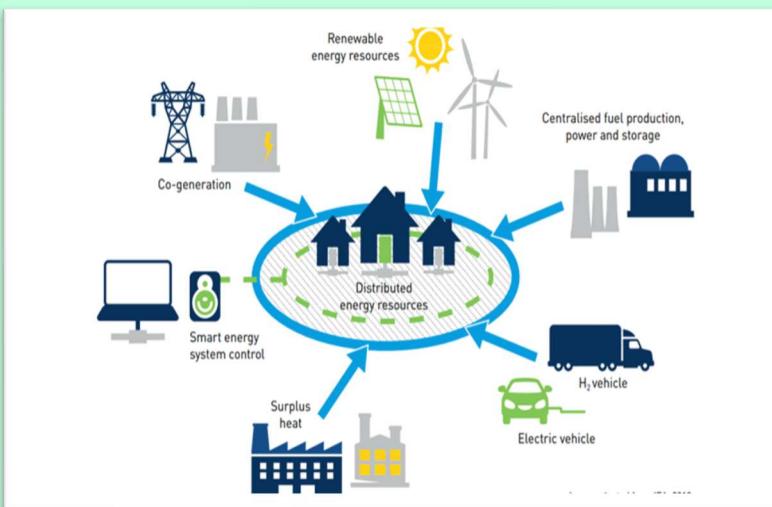
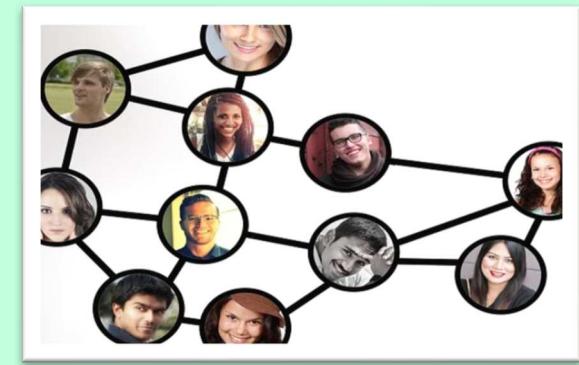
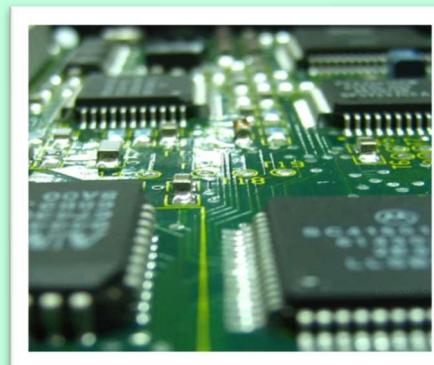
- **se concentre sur les fondamentaux de la modélisation** dans le cadre des sciences des systèmes.
- **Exploration de quels outils efficaces** pour modéliser des systèmes, prédire leur comportement, estimer des risques et/ou les piloter.
- **Ces outils**, principalement mathématiques, ne sont pas une fin en soi. Ils **servent à comprendre, expliquer et prévoir des comportements**

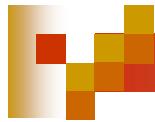
Les propriétés **constructives**... ont de l'importance !

Pour un même système...
Plusieurs buts ⇒ plusieurs modèles

Ex.

Exemples de systèmes... et de modèlesles





Contenu général du module

ce n'est ni un cours de mécanique, ni d'électricité, ni de thermique, ni de biologie, ni...

■ Ce que nous ne ferons pas (ou peu) :

- Traiter des « modèles de compréhension »
- Faire l'inventaire de tous les types de modèles

Classifications : statiques/dynamiques, stochastiques/déterministes, à temps discret/continu, à état discrets/continus, spatialisés ou pas, à résolution analytique/numérique, construits selon une approche empirique/mécaniste...

Exemples de modèles : chaînes de Markov, EDP ou EDPS (stochastiques), automates cellulaires, grammaires algébriques, processus de branchement, multi-agents, marches aléatoires, réseaux et graphes, ...

■ Ce que nous allons faire

- Découvrir quelques familles emblématiques de modèles
 - les modèles à états continus (EDOs) et en particulier les SLI (Système Linéaire Invariant) continus et discrets
 - les modèles à événements discrets et à états discrets (automates, réseaux de Pétri)

→ pour en connaître les propriétés fondamentales et les méthodes d'analyse associées
- Présenter les méthodes permettant de confronter ces modèles à la réalité
 - identification de paramètres,
 - évaluation et comparaison de modèles,
 - analyse d'incertitudes et de sensibilité.



Contenu général du module

- Partie I: **Modélisation** des systèmes à état continu
- Partie II: **Modélisation** des systèmes à évènements discrets
- Partie III: Méthodologies pour **l'analyse**, **l'identification** des paramètres et **l'évaluation** des modèles



Contenu général du module

- Partie I: Modélisation des systèmes à état continu
- Partie II: Modélisation des systèmes à évènements discrets
- Partie III: Méthodologies pour l'analyse, l'identification des paramètres et l'évaluation des modèles

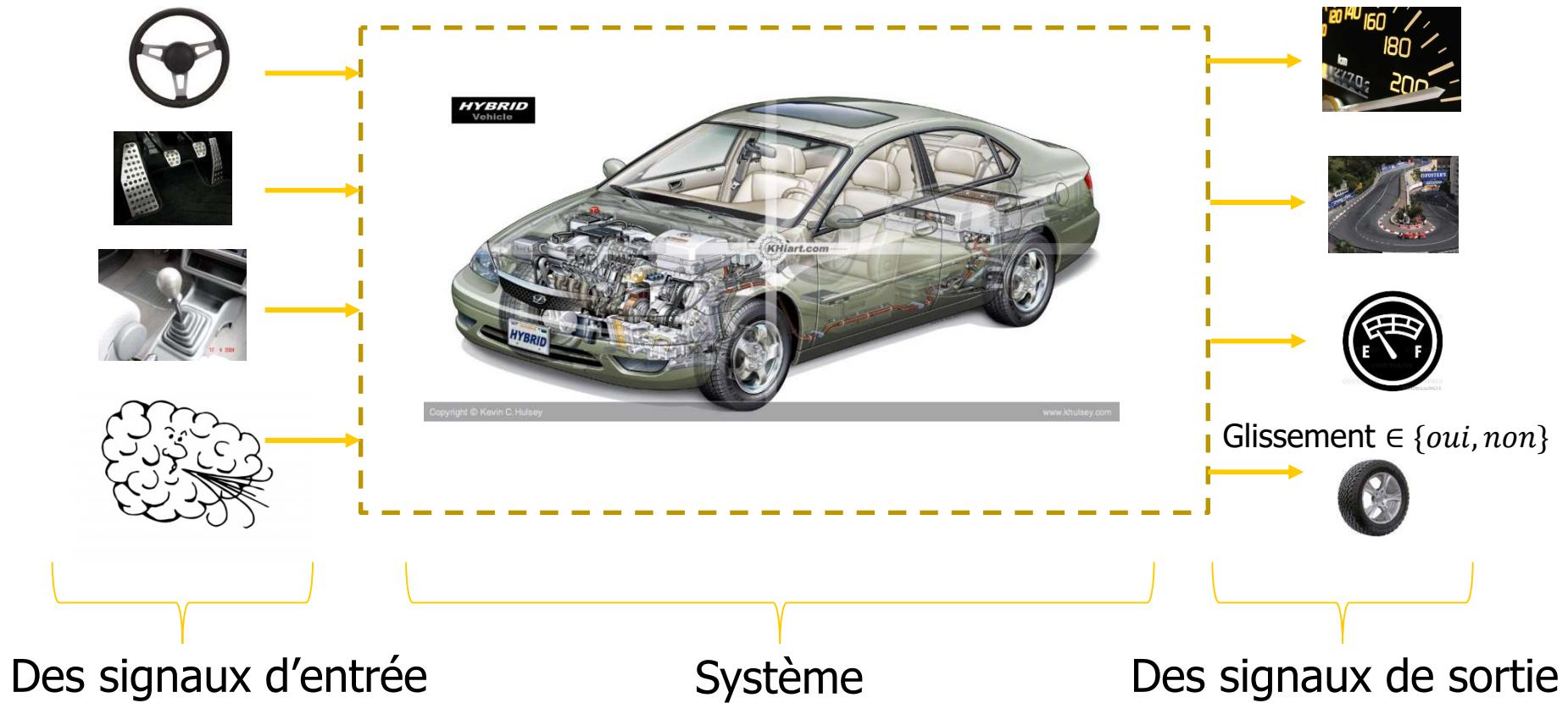
Précision...

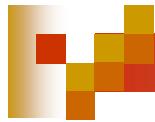


Ex.

Exemple illustratif

Partie I



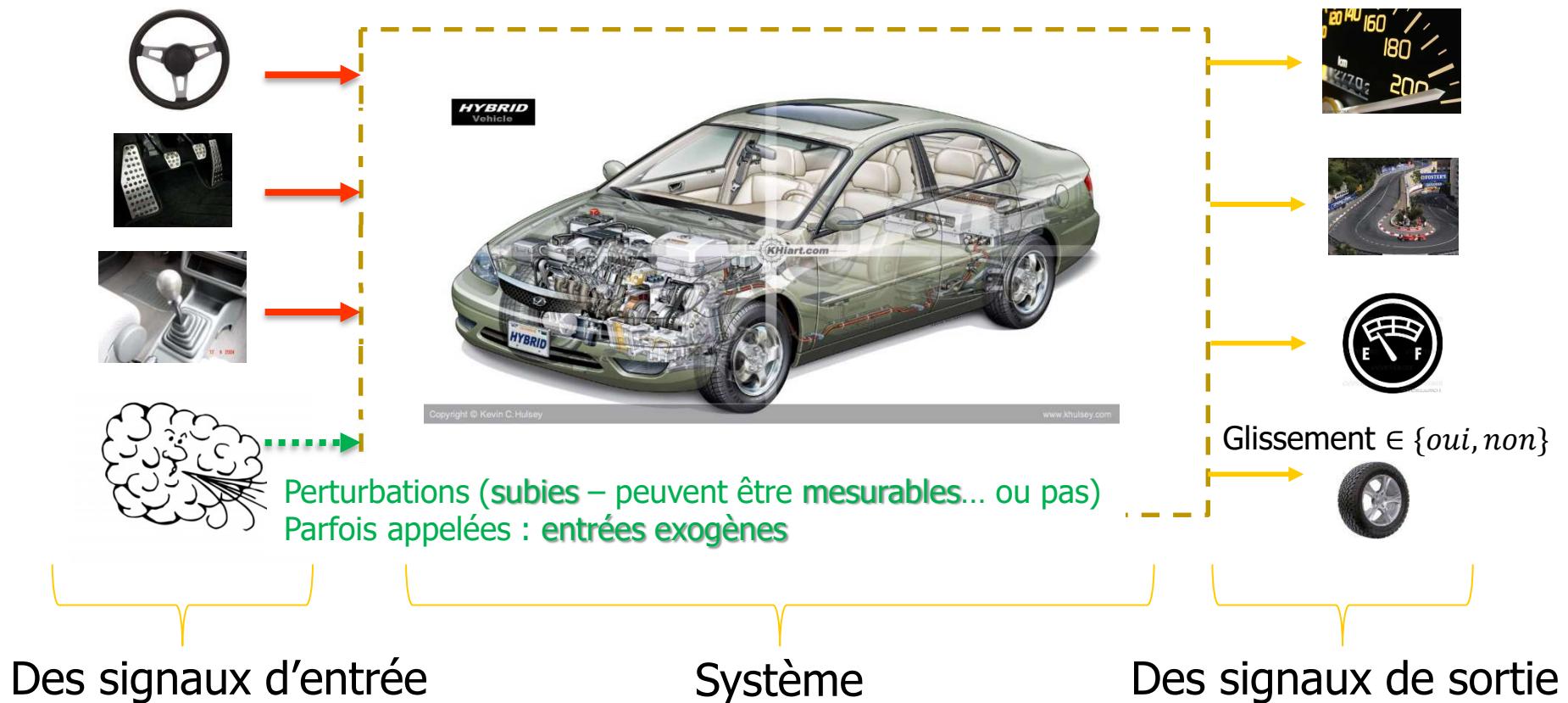


Ex.

Exemple illustratif

Entrées de commande / entrées de perturbations

Entrées de commande: choisies par l'utilisateur

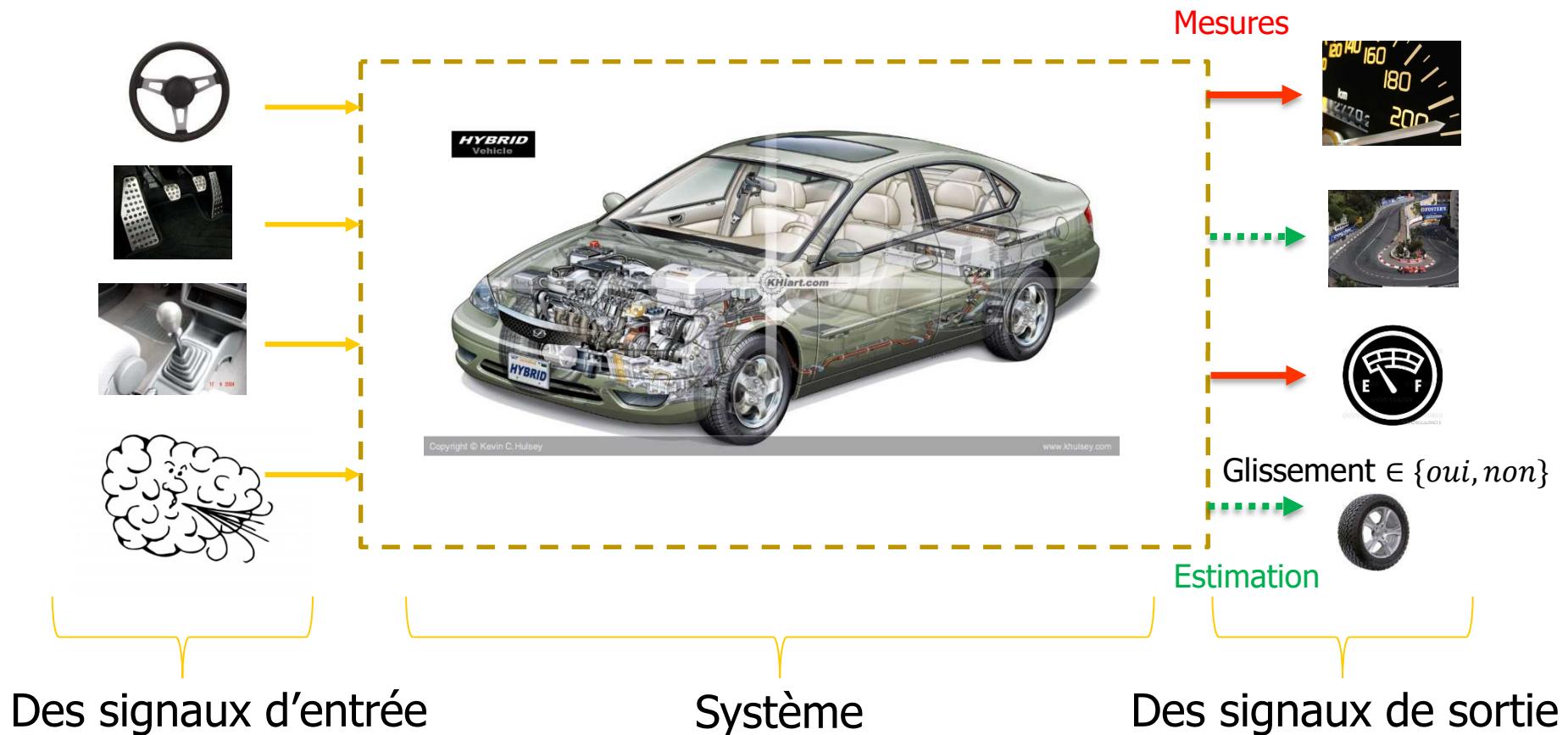




Ex.

Exemple illustratif

Sorties mesurées / sorties estimées

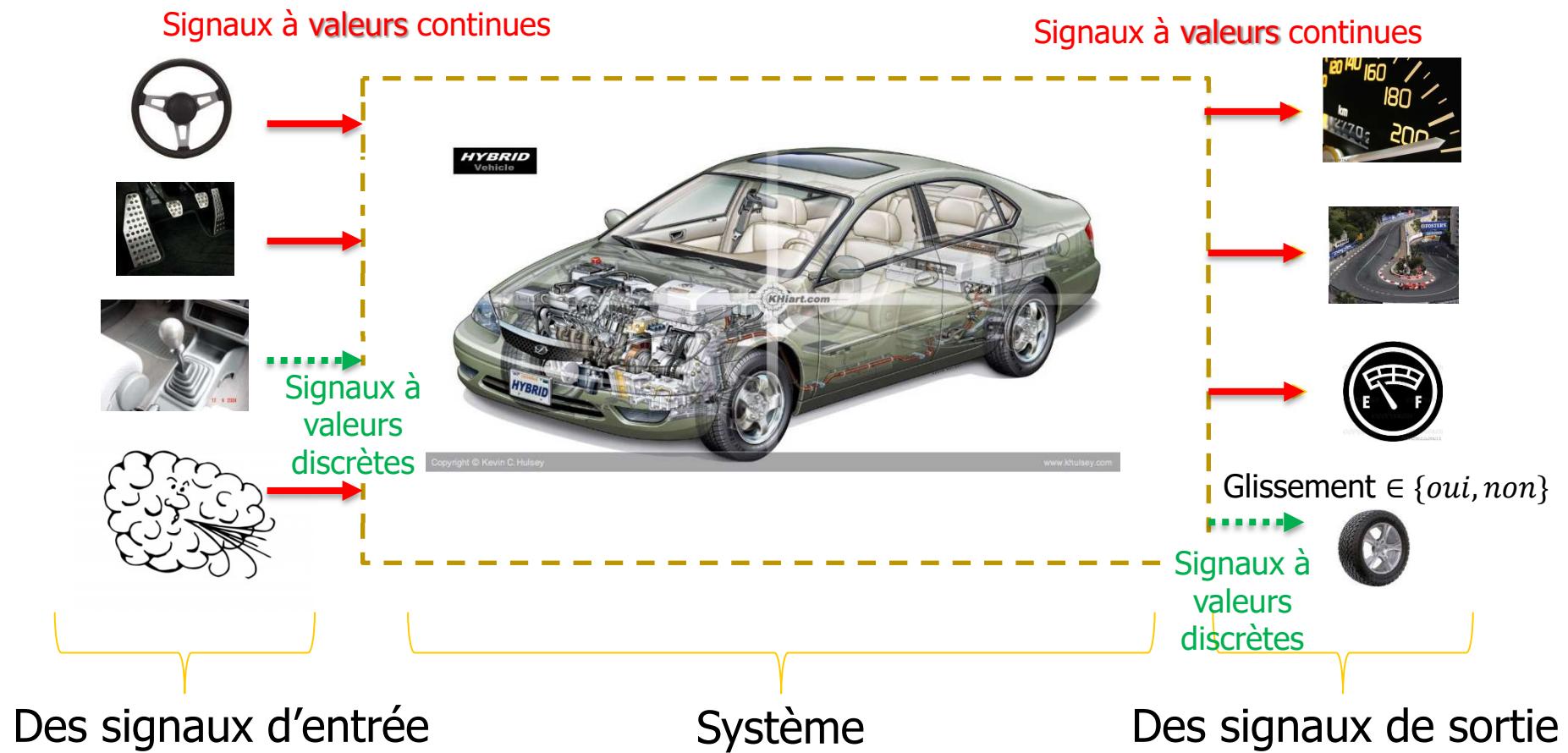




Ex.

Exemple illustratif

Signaux en temps continu à valeurs continues ou discrètes



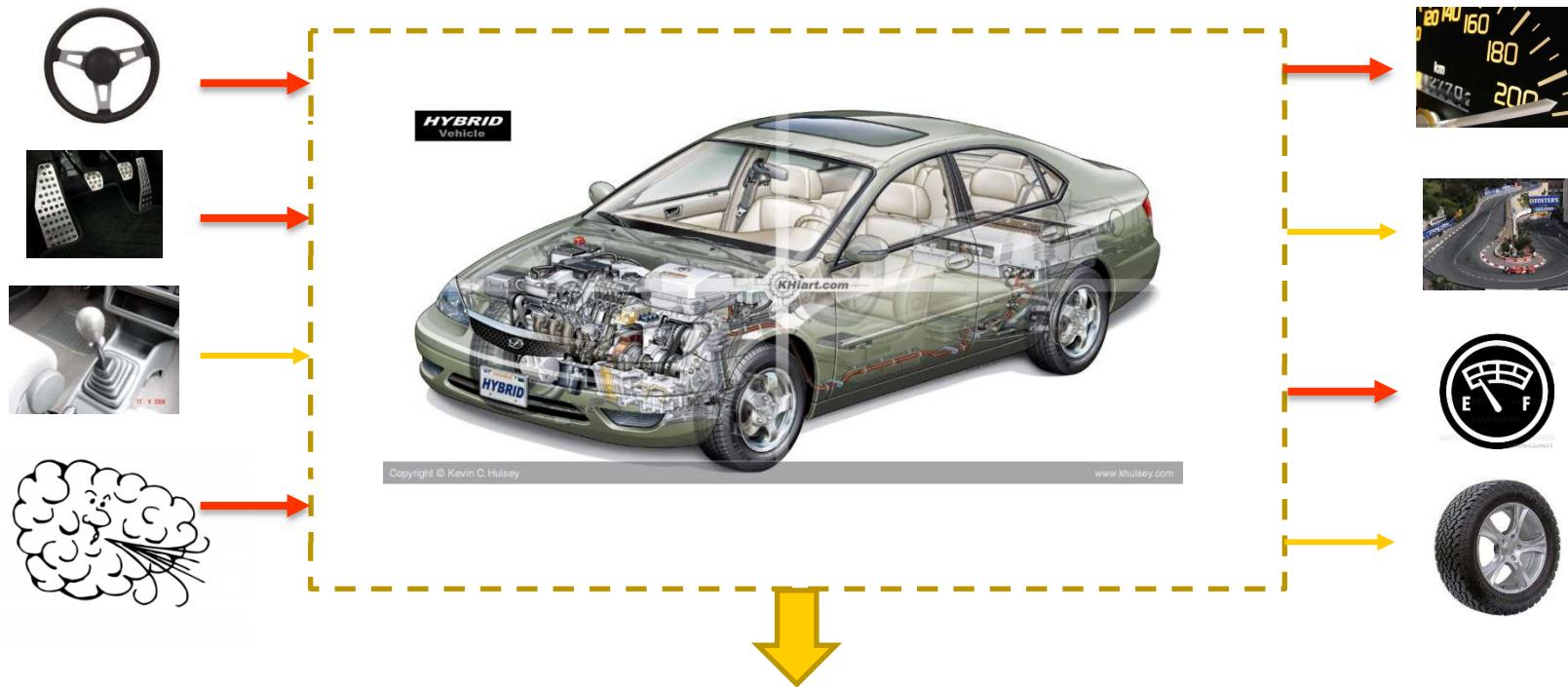


Ex.

Exemple illustratif

Partie I

Système à temps continu et valeurs continues



Abstraction du modèle physique... pour un objectif donné, un domaine d'opération, un niveau de complexité/représentativité/véracité...





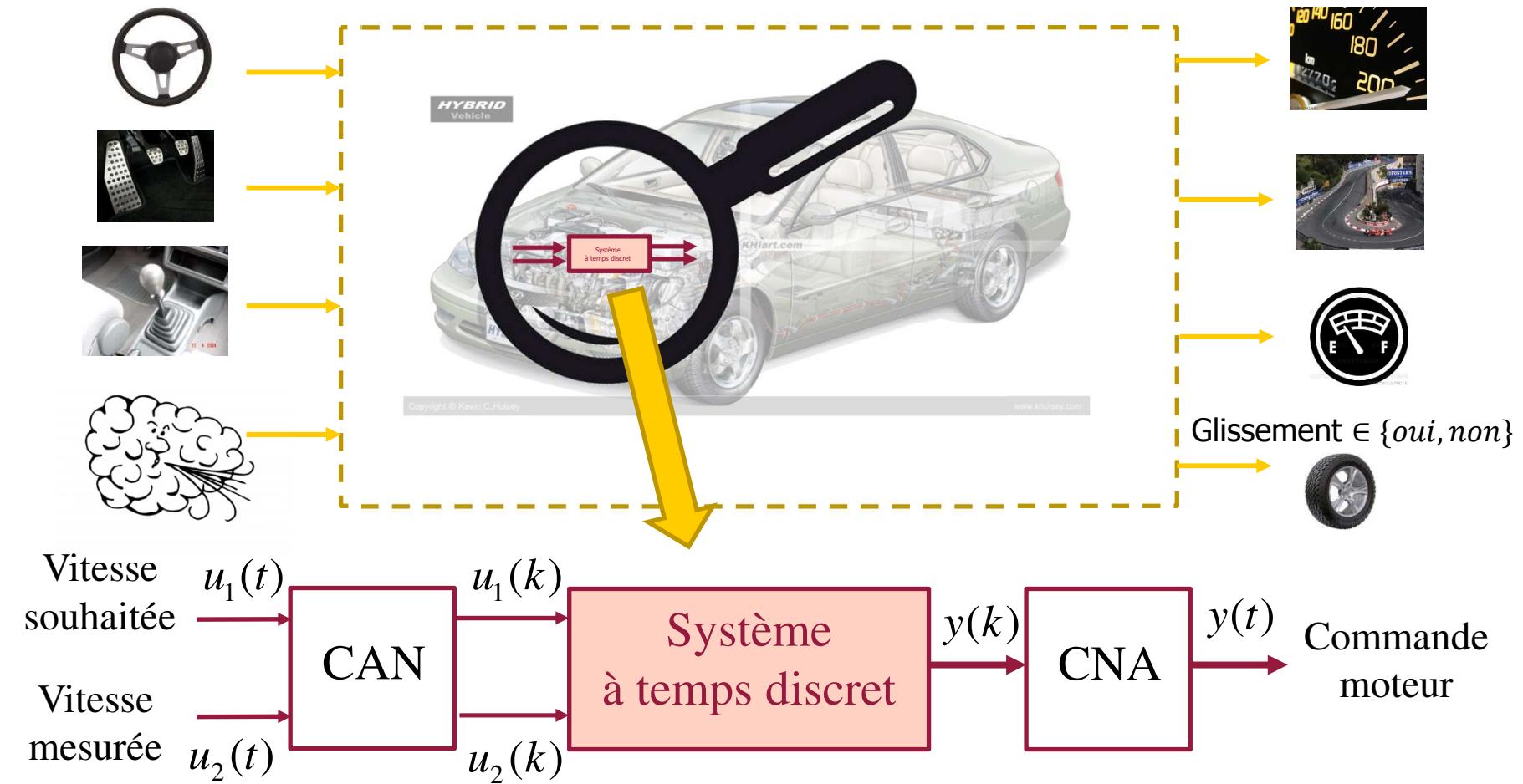
Ex.

Exemple illustratif

Partie I

Système à temps discret et valeurs continues

Exemple du calculateur embarqué



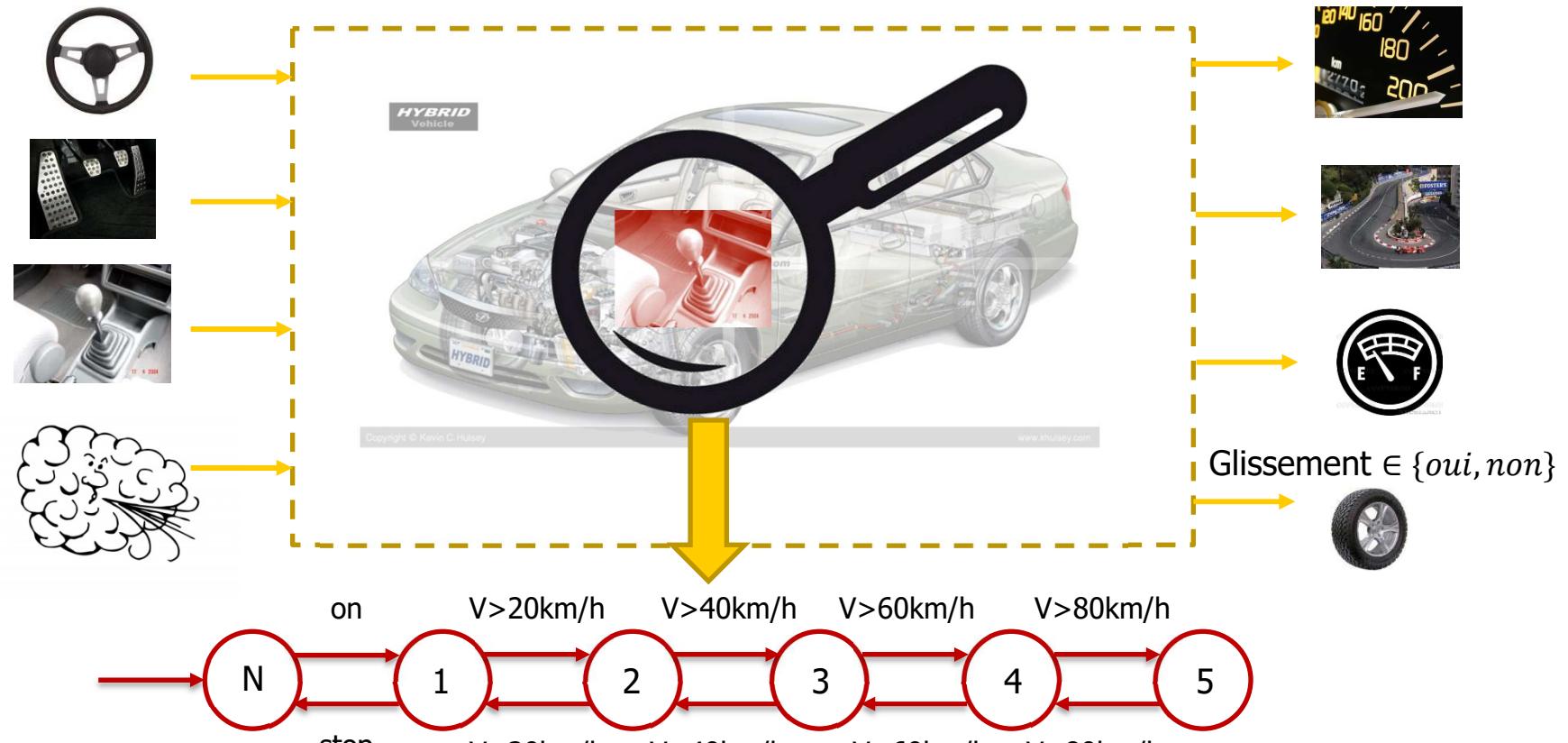


Ex.

Exemple illustratif

Partie II

Système à état à valeurs discrètes
Exemple de la boîte de vitesse automatique



Abstraction du modèle physique...



Ex.

Exemple illustratif

Partie III

■ Modélisation du mouvement de la voiture

$$\begin{aligned} M\ddot{x} &= -(F_{x_1} + F_{x_2})\cos(\alpha_f) - (F_{x_3} + F_{x_4})\cos(\alpha_r) - (F_{y_1} + F_{y_2})\sin(\alpha_f) - (F_{y_3} + F_{y_4})\sin(\alpha_r) \\ M\ddot{y} &= -(F_{x_1} + F_{x_2})\sin(\alpha_f) - (F_{x_3} + F_{x_4})\sin(\alpha_r) + (F_{y_1} + F_{y_2})\cos(\alpha_f) - (F_{y_3} + F_{y_4})\cos(\alpha_r) \\ J_f \ddot{\alpha}_f + f_f \dot{\alpha}_f + k_f \alpha_f &= U_f - (F_{x_1} + F_{x_2})\cos(\alpha_f)D - (F_{y_1} + F_{y_2})\sin(\alpha_f)D \\ J_r \ddot{\alpha}_r + f_r \dot{\alpha}_r + k_r \alpha_r &= U_r - (F_{x_3} + F_{x_4})\cos(\alpha_r)D - (F_{y_3} + F_{y_4})\sin(\alpha_r)D \\ I_z \dot{\Gamma} &= -a(F_{x_1} + F_{x_2})\sin(\alpha_f) + a(F_{y_1} + F_{y_2})\cos(\alpha_f) + b(F_{x_3} + F_{x_4})\sin(\alpha_r) \\ &\quad - b(F_{y_3} + F_{y_4})\cos(\alpha_r) + \frac{d}{2}(F_{x_1} - F_{x_2})\cos(\alpha_f) + \frac{d}{2}(F_{x_3} - F_{x_4})\cos(\alpha_r) \end{aligned}$$

Variables:

(x, y) Coordonnées de la voiture

(α_f, α_r) Angle de braquage des roues
avants et arrière

(U_f, U_r) Couple de braquage avant et arrière

$(F_{x_1}, F_{x_2}, F_{x_3}, F_{x_4}, F_{y_1}, F_{y_2}, F_{y_3}, F_{y_4})$ Forces de la route à la roue

Γ Angle de lacet



Valeurs précises des paramètres

$M, J_f, J_r, f_f, f_r, k_f, k_r, I_z, a, b, \dots$

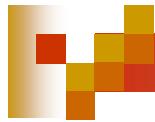
Structure du modèle

Comment avoir/choisir/valider la structure ?

Non trivial et parfois non « directement mesurable »

Comment avoir/choisir/valider les valeurs ?

Paramètres du modèle



Exemple illustratif

Partie III

■ Identification des systèmes

- En bref : trouver/choisir la structure + déterminer les paramètres du modèle
- Questions associées :
 - Comment bien représenter un comportement réel ?
 - Comment choisir entre plusieurs modèles ?
 - Comment gérer le compromis représentativité/complexité ?
 - ...

■ Analyse d'incertitude et de sensibilité

- En bref : chiffrer l'impact d'une méconnaissance sur le comportement
 - Présentation d'outils généraux pour une approche quantitative
- Questions associées :
 - Système réel trop compliqué ou mal connu → modèle simplifié (et souvent purement comportemental) → Comment analyser la représentativité d'un modèle ?
 - Influence des perturbations, des bruits...
 - Influence des phénomènes négligés, des paramètres inconnus...
 - ...

Organisation du module

■ 10 cours magistraux

- Mladen Cicic, Stéphane Font, Véronique Letort-Le Chevalier, Hugo Lhachemi, Cristina Stoica Maniu, Guillaume Sandou, Cristina Vlad

■ 8 TD

■ Supports de cours

- Polycopiés (en français et en anglais), transparents, bibliographie, corrigés des exercices de TD (en français et en anglais), exercices complémentaires corrigés
→ Edunao... (lire / relire le mail : Bienvenue dans le cours et informations importantes)

■ Prérequis

- Notions de calcul matriciel, maths, physique...

■ Outils logiciels

- TD : Matlab avec portables des élèves
- Formation Matlab Onramp à faire avant le premier TD (deadline : 30 nov. à 23h)
→ remise du certificat de complétion sur Eduano

Ce cours est un prérequis pour beaucoup de cours du cursus !

Organisation du module

■ Organisation des TDs

- Alternance des cours magistraux et des TDs
 - Sauf pour le premier cours (il faut avancer un peu après l'introduction générale pour avoir de la matière)
- Chaque TD est basé sur un exemple réel associé à des études menées en laboratoire.
 - Adaptés pour être traités dans le temps d'une séance de travaux pratiques.
- Un TD final de synthèse devra être fait en partie à la maison.
 - Il permettra de réviser l'ensemble du programme.

Organisation du module

- **1 mini-projet** (équipes de 3, sur temps libre) – **consignes sur Edunao**
 - **ATTENTION → changement d'organisation, ne vous basez pas sur ce que dit la promotion précédente !**
 - **Phase 1** : Choix du projet + trinôme avec inscription sur Edunao
 - Ouverture : jeudi 27 novembre 2025 à 12h00
 - Fermeture : dimanche 7 décembre 2025 à 23h00
 - Contraintes liées à l'évaluation : A,B,C&D | E,F&G | et la voie H à part
 - **Phase 2** : Réalisation d'un projet proposé (*sujets et templates à venir sur Edunao*)
 - Livrables :
 - Slides avec des annexes contenant les détails mathématiques + Une vidéo (approx. 5 min à confirmer) pour présenter le travail + L'annexe technique sera utilisée pour répondre aux questions lors de la séance d'évaluation « live ».
 - Un simulateur (pour la *Partie I* uniquement) incluant une expérience typique à simuler (*Matlab ou Python*)
 - Commencez le projet rapidement !
 - **Deadline prévisionnelle (à confirmer)** : mercredi 7 janvier 2026 à 23h
 - **Phase 3** : Evaluation par les pairs
 - Evaluation supports + vidéo + codes réalisés par d'autres équipes
 - **Deadline prévisionnelle (à confirmer)** : dimanche 11 janvier 2026 à 23h
 - Soutenances : mardi 13 janvier après midi

La qualité de l'évaluation est prise en compte dans la notation

Evaluation

- **Examen écrit final** : 75% de la note du module, individuelle
 - Examen écrit de 3h, commun à tous les étudiants, avec documents du cours et calculatrice
 - Date prévisionnelle : **vendredi 23 janvier matin**
 - Attention → évolution des sujets d'examen en 2022
 - Ajout dans le sujet d'une partie d'exercices variés pour couvrir tout le programme
 - En complément d'un problème transversal
- **Mini projet** : 25% de la note du module (par groupes de 3 étudiants), répartie en :
 - Validation finale par l'équipe enseignante

Modélisation du mouvement ...

No. 1

Contexte
Dans le domaine du transport vertical, il est important de comprendre le comportement dynamique des cabines d'ascenseur pour garantir la sécurité e...

Objectif
L'objectif est de proposer et étudier un modèle permettant de prédirer et évaluer le comportement du mouvement d'une cabine d'ascenseur.

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires du mouvement de la cabine d'ascenseur....

1.2 Analyser les hypothèses du modèle.

1.3 Caractériser les points d'équilibre du système et analyser leur stabilité.

1.4 Proposer un réseau de Petri modélisant la gestion du trafic d'un ou plusieurs ascenseurs dans un bâtiment.

Ressource

Modélisation d'une toupie

No. 2

Contexte
La toupie est un jeu intemporel qui émerveille petits et grands. Rendons cela encore plus amusant en modélisant le problème !

Objectif
L'objectif de ce projet est de modéliser le comportement d'une toupie.

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires.

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 Proposer un modèle de système hybride (associé à un scénario de jeu) décrivant la dynamique d'une toupie mise en rotation par un joueur.

Ressource

Dynamique épidémique avec ...

No. 3

Contexte
L'apparition et la propagation de maladies émergentes sont devenues des sujets majeurs pour nos sociétés humaines. Afin de mieux de se ...

Objectif
L'objectif de ce projet est de modéliser l'impact des interventions non pharmaceutiques sur la propagation des épidémies.

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires.

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 Proposer un réseau de Petri modélisant la propagation d'une épidémie et de l'impact des interventions non pharmaceutiques.

Ressource

Modélisation du chômage

No. 4

Contexte
Selon une enquête emploi de l'INSEE, en 2023, 8,7% des jeunes actifs diplômés du supérieur sortis de formation initiale depuis 1 à 4 ans son...

Objectif
L'objectif de ce mini-projet est d'étudier un modèle mathématique du chômage.

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires.

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Choisir un point d'équilibre et analyser sa stabilité.

1.4 Proposer un réseau de Petri permettant de modéliser des mesures à mettre en place pour diminuer le taux de chômage chez les jeunes diplômés en...

Ressource

Modélisation du bonheur

No. 5

Contexte
De nombreux philosophes ont analysé le bonheur. De nombreuses citations existent sur le sujet. Mais, est-ce qu'il est possible de décrire le bonheur par...

Objectif
Le but de ce mini-projet est de proposer et d'analyser un modèle de véhicules circulant sur une autoroute. Vous devrez modéliser la manière dont ...

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires.

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Choisir un point d'équilibre et analyser sa stabilité.

1.4 Proposer un réseau de Petri permettant de modéliser le bonheur des étudiants de 1ère année de CentraleSupélec depuis la rentrée.

Ressource

Modélisation du trafic auto...

No. 6

Contexte
Un trafic autoroutier dense ne provoque pas seulement des retards, de la frustration et quelques accès de rage au volant — il donne aussi ...

Objectif
L'objectif de ce projet est de proposer et d'analyser un système

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires.

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 Proposer un réseau de Petri pour modéliser un système démographique-économique incluant plusieurs pays, avec migration entre eux, en formulan...

Ressource

Changeons l'âge de la retraite !

No. 7

Contexte
Modifier l'âge de la retraite est une mesure politiquement simple qui ne provoque pas seulement des retards, de la frustration et quelques accès de rage au volant — il donne aussi ...

Objectif
L'objectif de ce projet est de proposer et d'analyser un système

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 Proposer un réseau de Petri pour modéliser un système démographique-économique où la population est découpée en cohortes ou en générations imbriquées, représenté p...

Ressource

Modélisation de la glycémie c...

No. 8

Contexte
Le diabète de type 1 se caractérise par une incapacité du pancréas à produire l'insuline nécessaire à la régulation du taux de glucose dans le sang. Ainsi, lo...

Objectif
L'objectif est de proposer et étudier un modèle permettant de prédirer et d'analyser l'évolution de la glycémie en présence d'un repas, ainsi que l'impac...

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle de glycémie, formulé sous forme d'équations différentielles ordinaires, en fonction du débit d'insuline injecté...

1.2 Analyser les hypothèses du modèle.

1.3 Caractériser les points d'équilibre du système et analyser leur stabilité.

1.4 Proposer un réseau de Petri modélisant un dispositif de régulation de la glycémie chez une personne diabétique, en prenant en compte, pa...

Ressource

Modélisation des systèmes d...

No. 9

Contexte
Le secteur du bâtiment représente 44 % de l'énergie consommée en France, loin devant le secteur des transports (31,3%). Chaque année, le secteur du ...

Objectif
Ce projet s'attache ainsi à la modélisation d'un système HVAC pour un bâtiment, ceci afin d'être à même d'identifier les principaux paramètres ...

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle dynamique de l'évolution de la température et de l'humidité dans un bâtiment. Le modèle pourra inclure à ...

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 En considérant un bâtiment équipé d'un système de chauffage, ventilation et air conditionné alimenté par le réseau électrique, proposer une ...

Ressource

Modélisation du retraitement...

No. 10

Contexte
L'accès à l'eau potable, la dépollution et le retraitement des eaux usées sont des enjeux cruciaux pour la gestion planétaire des ressources disponibles.

Objectif
Le fonctionnement des stations d'épuration repose sur une pilotage de la ventilation en mode tout ou rien. Ce projet propose de réfléchir, à partir ...

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle dynamique non linéaire d'une station d'épuration permettant d'étudier l'évolution de la concentration en ...

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système. Même si le fonctionnement actuel des stations d'épurations ...

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 En considérant une station d'épuration équipée d'un système d'aération pilote, alimenté par le réseau électrique, proposer une modélisation de ...

Ressource

Cliodynamique : l'histoire en ...

No. 11

Contexte
Les fluctuations de l'Empire romain tardif, les phases d'expansion et de crise sous les dynasties chinoises (Han, Tang, Ming), ou encore les vagues ...

Objectif
Vous proposerez une extension de votre choix de l'un des modèles proposés.

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposez et simulez un modèle de cliodynamique en étendant l'un des modèles présenté dans l'article (changer la forme de certains termes, ...

1.2 Calculer analytiquement et/ou numériquement les points d'équilibre du système s'ils existent ou bien montrez la présence d'oscillations.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre dans les cas où ils existent.

1.4 Proposez un réseau de Petri modélisant un phénomène d'histoire des civilisations incluant une compétition pour des ressources (à définir à votre ...

Ressource

Addiction aux réseaux sociaux

No. 12

Contexte
La dopamine joue un rôle clé dans l'installation du phénomène d'addiction. Ce neurotransmetteur agit dans le cerveau comme une ...

Objectif
Le sujet proposé vise à comprendre les mécanismes combinés de la dopamine et de la mémoire sensorielle qui installent l'addiction. Il s'agira de ...

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposez et simulez un modèle d'addiction aux réseaux sociaux basé sur le modèle présenté dans l'article et le modifiant ou l'étoffant pour prendr...

1.2 Calculer analytiquement et/ou numériquement les points d'équilibre du système s'ils existent ou bien montrez la présence d'oscillations.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre dans les cas où ils existent.

1.4 Reprendre l'automate hybride présenté dans l'article "en le rendant totalement conforme au formalisme présenté en cours* et en l'adaptant à votre nouvell...

Ressource

Energie cellulaire : quand les ...

No. 13

Contexte
La glycolyse est l'une des réactions fondamentales qui permet aux cellules de transformer le glucose en énergie. Dans les années 60, Higgins a propos...

Objectif
Mettre en œuvre un modèle dynamique inspiré des mécanismes cellulaires de production d'énergie, en reproduisant ses comportements ...

0 Réaliser un court état de l'art sur les m...

1.1 Reconstituer le système différentiel du modèle de Higgins. L'implémenter puis simuler le modèle non linéaire dans le plan de phase pour observer les ...

1.2 Déterminer le point d'équilibre et linéariser le modèle. Calculer la matrice jacobienne, étudier la stabilité locale et interpréter les valeurs propres en ...

1.3 Simuler le modèle non linéaire et sa version linéarisée dans le même plan de phase (conditions initiales proches). Comparer les trajectoires pour ...

1.4 Imaginer un scénario simple et cohérent inspiré du fonctionnement d'un lac peu profond. Sélectionner quelques variables sur lesquelles une action humaine peut ...

Ressource

Validation d'hypothèses écol...

No. 14

Contexte
Certains lacs peu profonds présentent des alternances marquées entre états clairs et états turbides. L'étude de ces comportements atypiques s'appuie su...

Objectif
Reproduire et analyser les comportements caractéristiques de plusieurs modèles dynamiques, étudier leur linéarisation et comparer leurs ...

0 Réaliser un état de l'art soit sur l'usag...

1.1 Identifier les trois modèles présents dans l'article et en faire une simulation numérique. Valider les comportements et retrouver les résultats principaux. ...

1.2 Choisir l'un des modèles. Écrire les équations caractérisant les points d'équilibre, justifier la méthode choisie et résoudre ces équations ...

1.3 Pour un système présentant des cycles, analyser si le cycle est stable ou instable en perturbant l'état initial. Comparer les comportements à l'aide ...

1.4 Imaginer un scénario simple inspiré du fonctionnement d'un lac peu profond. Sélectionner quelques variables sur lesquelles une action humaine peut ...

Ressource

**Déjà sur
Edunao**

Modélisation du mouvement ...

No. 1

Contexte
Dans le domaine du transport vertical, il est important de comprendre le comportement dynamique des cabines d'ascenseur pour garantir la sécurité e...

Objectif
L'objectif est de proposer et étudier un modèle permettant de prédirer et évaluer le comportement du mouvement d'une cabine d'ascenseur.

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires du mouvement de la cabine d'ascenseur....

1.2 Analyser les hypothèses du modèle.

1.3 Caractériser les points d'équilibre du système et analyser leur stabilité.

1.4 Proposer un réseau de Petri modélisant la gestion du trafic d'un ou plusieurs ascenseurs dans un bâtiment.

Ressource

Modélisation d'une toupie

No. 2

Contexte
La toupie est un jeu intemporel qui émerveille petits et grands. Rendons cela encore plus amusant en modélisant le problème !

Objectif
L'objectif de ce projet est de modéliser le comportement d'une toupie.

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires.

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 Proposer un modèle de système hybride (associé à un scénario de jeu) décrivant la dynamique d'une toupie mise en rotation par un joueur.

Ressource

Dynamique épidémique avec ...

No. 3

Contexte
L'apparition et la propagation de maladies émergentes sont devenues des sujets majeurs pour nos sociétés humaines. Afin de mieux s'en se ...

Objectif
L'objectif de ce projet est d'impact des interventions pharmacologiques sur la propagation des épidémies.

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires.

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 L'impr... pharm...

Ressource

Modélisation du chômage

No. 4

Contexte
Selon une enquête réalisée par l'INSEE, en 2023, 8,7% des personnes diplômées du supérieur ont été victimes de chômage. Ainsi, l'objectif de ce projet est de proposer et étudier un modèle pour modéliser le chômage.

Objectif
L'objectif de ce projet est de proposer et étudier un modèle pour modéliser le chômage.

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires.

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 Proposer un réseau de Petri pour modéliser le comportement d'un peloton de véhicules, y compris les modifications de sa structure dues au ...

Ressource

Modélisation du bonheur

No. 5

Contexte
Des chercheurs ont analysé de nombreuses citations sur le bonheur. Mais, est-ce qu'il existe une relation entre le bonheur par rapport au trafic automobile ?

Objectif
Le but de ce projet est de proposer et étudier un modèle pour modéliser le bonheur.

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires.

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 Proposer un réseau de Petri pour modéliser un système démographique-économique incluant plusieurs pays, avec migration entre eux, en formulant des hypothèses.

Ressource

Modélisation du trafic auto...

No. 6

Contexte
Un trafic autoroutier dense ne provoque pas seulement des retards, de la frustration et quelques accès de rage au volant — il donne aussi ...

Objectif
L'objectif de ce projet est de proposer et d'analyser un système circulant sur une autoroute. Vous devrez modéliser la manière dont ...

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires.

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 Proposer un réseau de Petri pour modéliser un système démographique-économique incluant plusieurs pays, avec migration entre eux, en formulant des hypothèses.

Ressource

Changeons l'âge de la retraite !

No. 7

Contexte
Modifier l'âge de la retraite est une mesure politiquement simple qui ne provoque jamais la moindre agitation ni mécontentement. Alors jouons avec d...

Objectif
L'objectif de ce projet est de proposer et d'analyser un système démographique-économique à l'échelle d'un pays. Vous devrez modéliser ...

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle sous forme d'équations différentielles ordinaires.

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 Proposer un réseau de Petri pour modéliser un système démographique-économique incluant plusieurs pays, avec migration entre eux, en formulant des hypothèses.

Ressource

Modélisation de la glycémie c...

No. 8

Contexte
Le diabète de type 1 se caractérise par une incapacité du pancréas à produire l'insuline nécessaire à la régulation du taux de glucose dans le sang. Ainsi, lo...

Objectif
L'objectif est de proposer et étudier un modèle permettant de prédirer et d'analyser l'évolution de la glycémie en présence d'un repas, ainsi que l'impac...

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle de glycémie, formulé sous forme d'équations différentielles ordinaires, en fonction du débit d'insuline injecté...

1.2 Analyser les hypothèses du modèle.

1.3 Caractériser les points d'équilibre du système et analyser leur stabilité.

1.4 Proposer un réseau de Petri modélisant un dispositif de régulation de la glycémie chez une personne diabétique, en prenant en compte, pa...

Ressource

Modélisation des systèmes d...

No. 9

Contexte
Le secteur du bâtiment représente 44 % de l'énergie consommée en France, loin devant le secteur des transports (31,3%). Chaque année, le secteur du ...

Objectif
Ce projet s'attache ainsi à la modélisation d'un système HVAC pour un bâtiment, ceci afin d'être à même d'identifier les principaux paramètres ...

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle dynamique de l'évolution de la température et de l'humidité dans un bâtiment. Le modèle pourra inclure à ...

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 En considérant un bâtiment équipé d'un système de chauffage, ventilation et air conditionné alimenté par le réseau électrique, proposer une modélisation de ...

Ressource

Modélisation du retraitement...

No. 10

Contexte
L'accès à l'eau potable, la dépollution et le retraitement des eaux usées sont des enjeux cruciaux pour la gestion planétaire des ressources disponibles. ...

Objectif
Le fonctionnement des stations d'épuration repose sur une pilotage de la ventilation en mode tout ou rien. Ce projet propose de réfléchir, à partir ...

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposer et simuler un modèle dynamique non linéaire d'une station d'épuration permettant d'étudier l'évolution de la concentration en ...

1.2 Calculer analytiquement ou numériquement les points d'équilibre du système. Même si le fonctionnement actuel des stations d'épurations ...

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre.

1.4 En considérant une station d'épuration équipée d'un système d'aération piloté, alimenté par le réseau électrique, proposer une modélisation de ...

Ressource

Cliodynamique : l'histoire en ...

No. 11

Contexte
Les fluctuations de l'Empire romain tardif, les phases d'expansion et de crise sous les dynasties chinoises (Han, Tang, Ming), ou encore les vagues ...

Objectif
Vous proposerez une extension de votre choix de l'un des modèles proposés.

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposez et simulez un modèle de cliodynamique en étendant l'un des modèles présenté dans l'article (changer la forme de certains termes, ...

1.2 Calculer analytiquement et/ou numériquement les points d'équilibre du système s'ils existent ou bien montrez la présence d'oscillations.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre dans les cas où ils existent.

1.4 Proposez un réseau de Petri modélisant un phénomène d'histoire des civilisations incluant une compétition pour des ressources (à définir à votre ...

Ressource

Addiction aux réseaux sociaux

No. 12

Contexte
La dopamine joue un rôle clé dans l'installation du phénomène d'addiction. Ce neurotransmetteur agit dans le cerveau comme une ...

Objectif
Le sujet proposé vise à comprendre les mécanismes combinés de la dopamine et de la mémoire sensorielle qui installent l'addiction. Il s'agira de ...

0 Réaliser un état de l'art du sujet.

1.1 Proposez et simulez un modèle d'addiction aux réseaux sociaux basé sur le modèle présenté dans l'article et le modifiant ou l'étoffant pour prendr...

1.2 Calculer analytiquement et/ou numériquement les points d'équilibre du système s'ils existent ou bien montrez la présence d'oscillations.

1.3 Analyser la stabilité des points d'équilibre dans les cas où ils existent.

1.4 Reprendre l'automate hybride présenté dans l'article "en le rendant totalement conforme au formalisme présenté en cours* et en l'adaptant à votre nouvell...

Ressource

Energie cellulaire : quand les ...

No. 13

Contexte
La glycolyse est l'une des réactions fondamentales qui permet aux cellules de transformer le glucose en énergie. Dans les années 60, Higgins a propos...

Objectif
Mettre en œuvre un modèle dynamique inspiré des mécanismes cellulaires de production d'énergie, en reproduisant ses comportements ...

0 Réaliser un court état de l'art sur les m...

1.1 Reconstituer le système différentiel du modèle de Higgins. L'implémenter puis simuler le modèle non linéaire dans le plan de phase pour observer les ...

1.2 Déterminer le point d'équilibre et linéariser le modèle. Calculer la matrice jacobienne, étudier la stabilité locale et interpréter les valeurs propres en ...

1.3 Simuler le modèle non linéaire et sa version linéarisée dans le même plan de phase (conditions initiales proches). Comparer les trajectoires pour ...

1.4 Imaginer un scénario simple et cohérent inspiré du fonctionnement d'un lac peu profond. Sélectionner quelques variables sur lesquelles une action humaine peut ...

Ressource

Validation d'hypothèses écol...

No. 14

Contexte
Certains lacs peu profonds présentent des alternances marquées entre états clairs et états turbides. L'étude de ces comportements atypiques s'appuie su...

Objectif
Reproduire et analyser les comportements caractéristiques de plusieurs modèles dynamiques, étudier leur linéarisation et comparer leurs ...

0 Réaliser un état de l'art soit sur l'usag...

1.1 Identifier les trois modèles présents dans l'article et en faire une simulation numérique. Valider les comportements et retrouver les résultats principaux. ...

1.2 Choisir l'un des modèles. Écrire les équations caractérisant les points d'équilibre, justifier la méthode choisie et résoudre ces équations ...

1.3 Pour un système présentant des cycles, analyser si le cycle est stable ou instable en perturbant l'état initial. Comparer les comportements à l'aide ...

1.4 Imaginer un scénario simple inspiré du fonctionnement d'un lac peu profond. Sélectionner quelques variables sur lesquelles une action humaine peut ...

Ressource

Evaluation par compétences

- Evaluation compétence C1

- Analyser, concevoir et réaliser des systèmes complexes à composantes scientifiques, technologiques, humaines et économiques

- Cohérence C1 & contenu du cours de Modélisation
 - Cohérence évaluation C1 sur les 3 campus

- Résultats affichés pour l'évaluation de C1

NA – *Non Atteint*

A – *Atteint*

- Modes d'évaluation : examen & mini-projet
 - Une partie des questions permet d'évaluer la compétence C1

Retours des années précédentes et évolutions

■ Retours des années précédentes

- Cours jugé intéressant, structuré et utile ; densité importante sur l'ensemble, surtout la partie 3
- Polycopié très complet et clair mais dense ; nécessite une reprise personnelle régulière
- TD très appréciés : bien construits, en adéquation avec le partiel, séance finale de révision efficace
- Rythme du cours : majoritairement adéquat, mais parfois rapide selon les groupes
- Les PSI en ont déjà vu des éléments de la partie 1 (pas les parties 2 et 3 et pas tous les résultats de la partie 1... **ne vous laissez pas surprendre par une familiarité apparente pour seulement quelques heures de cours !**)

■ Evolutions

- Sujet mini-projet fourni ; **changement d'organisation en 2025-2026**
- Groupe de mini-projet : choix **constraint au sein du sous-groupe de promotion**, du fait de l'évolution des modalités d'évaluation
- Slides pour structurer ; poly indispensable pour les détails, démonstrations et exemples

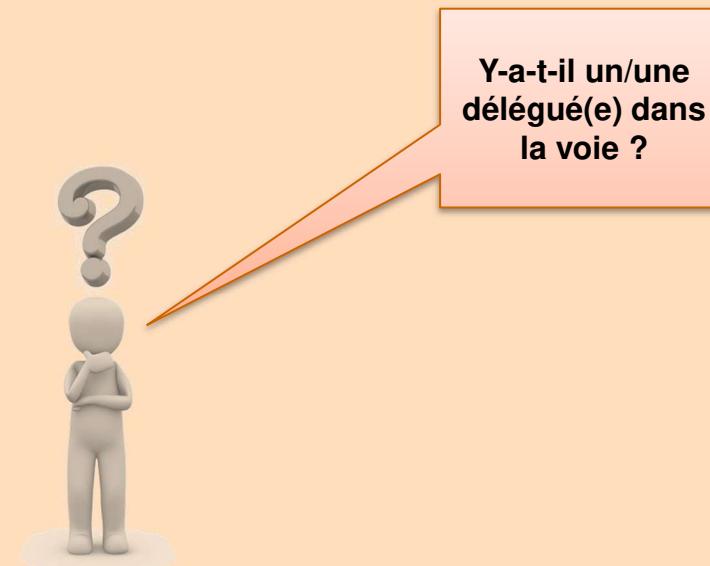
Poly
2.5Orga. &
Recap.

Ex.

Retours des années précédentes et évolutions

■ Contact

- modelisation.cours@centralesupelec.fr
- delegues.mode@listes.centralesupelec.fr
- Pour le moment : Hugo Likaj ; Alicia Crochet-Blaisse ; Jana Hajj Sleiman



Plan général du module

- Introduction
- Partie I: Modélisation des systèmes à état continu
 - Chapitre 1 : Représentation d'état
 - Chapitre 2 : Modélisation et représentation des systèmes linéaires à temps continu
 - Chapitre 3 : Modélisation et représentation des systèmes linéaires à temps discret
 - Chapitre 4 : Relations entre la représentation sous forme d'état et sous forme de transfert – quelques systèmes particuliers

Plan général du module

- Partie II: Modélisation des systèmes à évènements discrets
 - Chapitre 5 : Systèmes à évènements discrets non temporisés
 - Chapitre 6 : Systèmes à évènements discrets temporisés et hybrides
- Partie III: Méthodologies pour l'analyse, l'identification de paramètres, et l'évaluation des modèles
 - Chapitre 7 : Identification et évaluation des modèles
 - Chapitre 8 : Analyses d'incertitudes et de sensibilité

Introduction de concepts clefs

- Définition des systèmes – décomposition

- Principaux critères de classification

- Modéliser un système

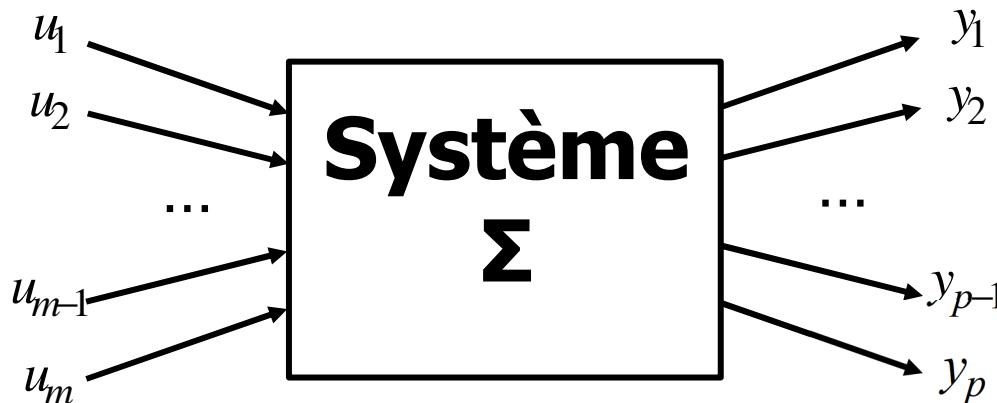
- Quelques bases utiles de traitement du signal et d'optimisation



Définition des systèmes - décomposition

■ Qu'est-ce qu'un système ?

Entrées
*de commande
de perturbation*



Sorties
*mesurable (observable)
non observables*

Ici défini comme objet technique / mathématique utilisé dans le cadre du cours

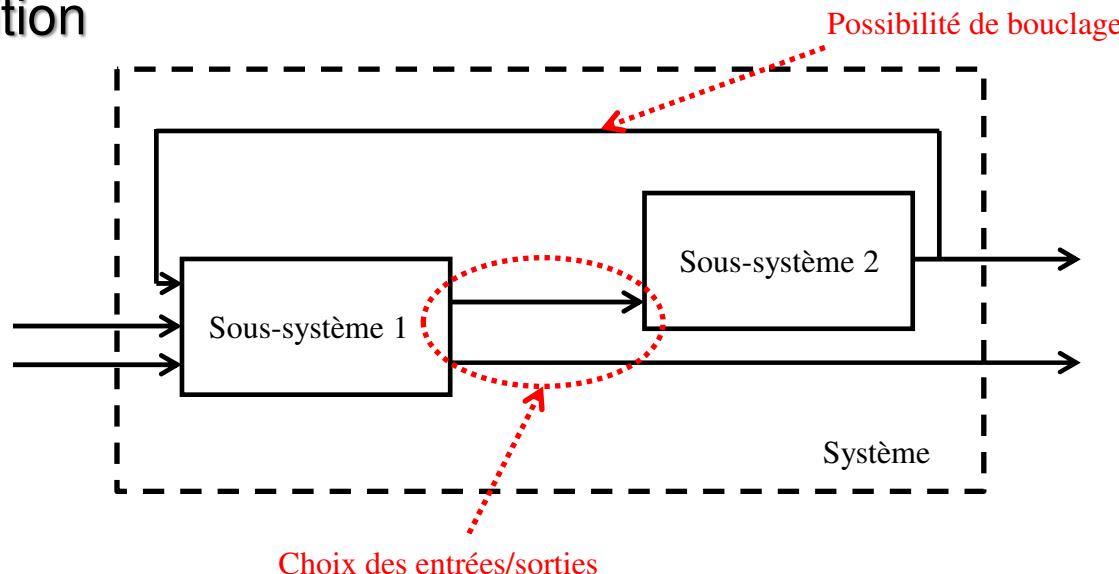
... similaire à aux opérateurs de l'algèbre linéaire... mais ici les opérateurs doivent prendre en compte la notion de dynamique

Opérateur « mathématique » transformant un ensemble de signaux d'entrées en un ensemble de signaux de sortie, et conçu pour obtenir un comportement global (une finalité) Il possède un « état » courant (notion à venir)



Définition des systèmes - décomposition

- Un système peut-être divisé en plusieurs sous-systèmes → décomposition

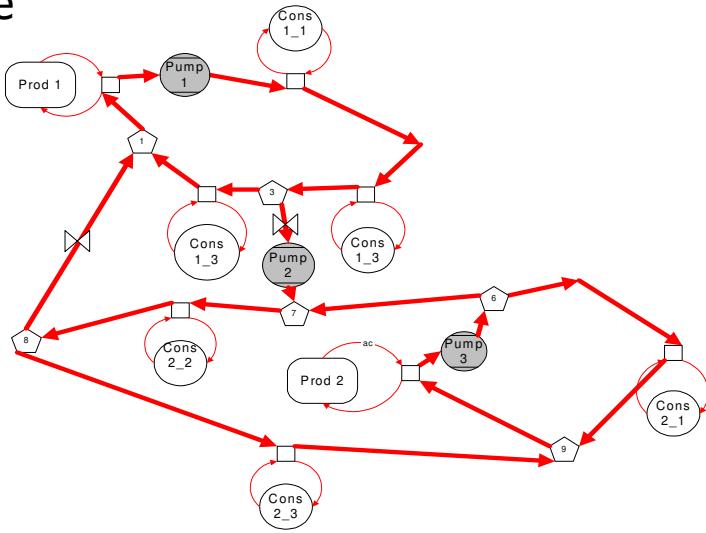


- Utilisation pour l'analyse / la synthèse de systèmes complexes
- Structure hiérarchique spontanée dans certains systèmes
 - Système de type multi-agents (en anglais Multi-Agent System – MAS)
 - Exemples : vol en formation, comportement des piétons dans une foule, fluidité de la circulation automobile
 - Système de systèmes (en anglais System of Systems – SoS)
 - Exemples : réseau français de distribution électrique, control du trafic aérien au niveau européen, constellations de satellites...

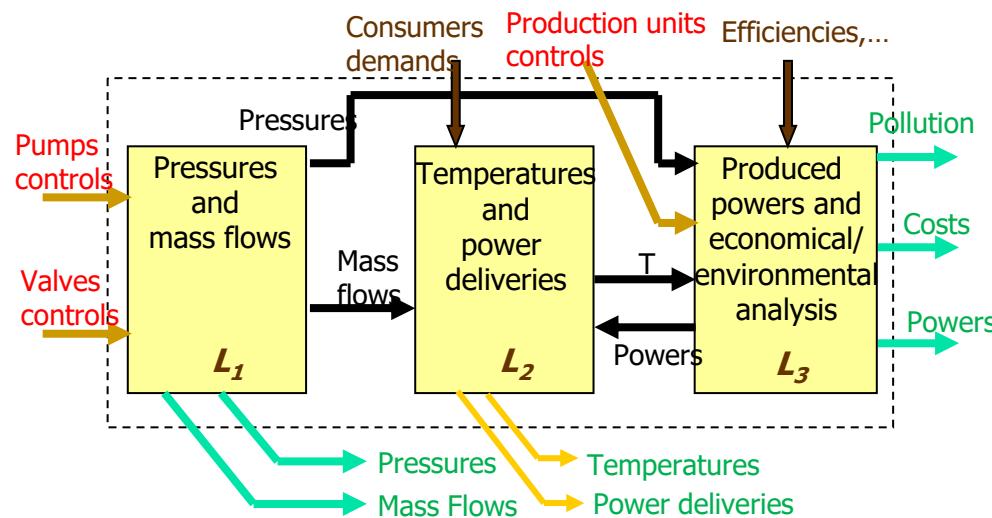
Ex.

Définition des systèmes - décomposition

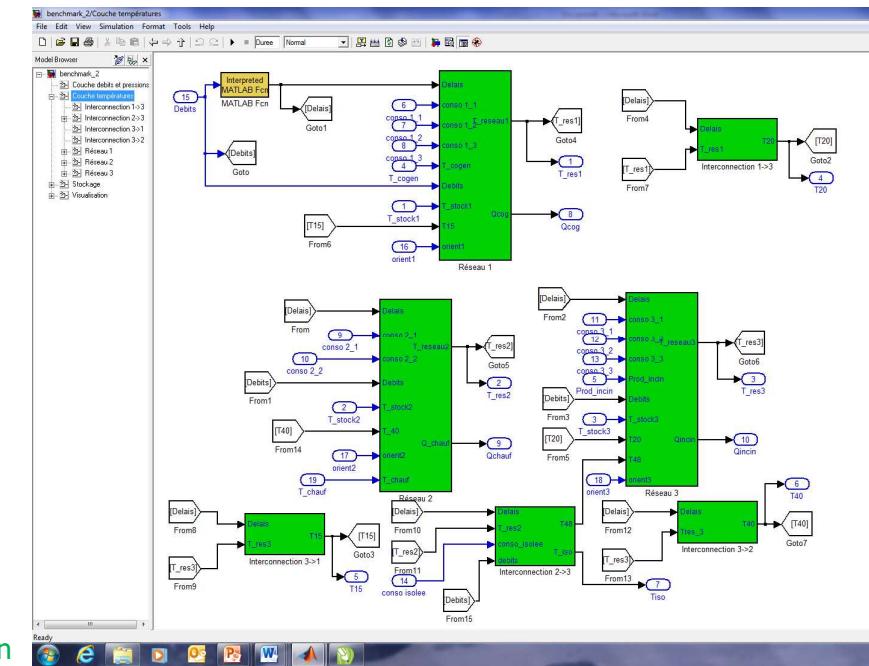
Système



Principal niveau de décomposition



Matlab / Simulink implémentation



Exemple : réseau de chauffage urbain

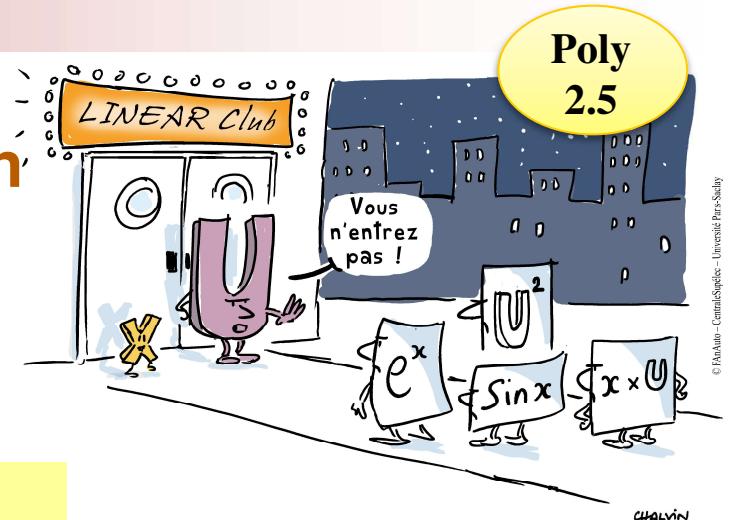
Nous allons étudier
les « briques de bases »

Introduction de concepts clefs

- Définition des systèmes – décomposition
- **Principaux critères de classification**
- Modéliser un système
- Quelques bases utiles de traitement du signal et d'optimisation



Principaux critères de classification



■ Linéarité

$$\begin{aligned}u_1(t) &\rightarrow y_1(t) \\u_2(t) &\rightarrow y_2(t) \\\lambda u_1(t) + \mu u_2(t) &\rightarrow \lambda y_1(t) + \mu y_2(t)\end{aligned}$$

■ Invariance par rapport au temps

$$\begin{aligned}u(t) &\rightarrow y(t) \\u(t - \tau) &\rightarrow y(t - \tau)\end{aligned}$$

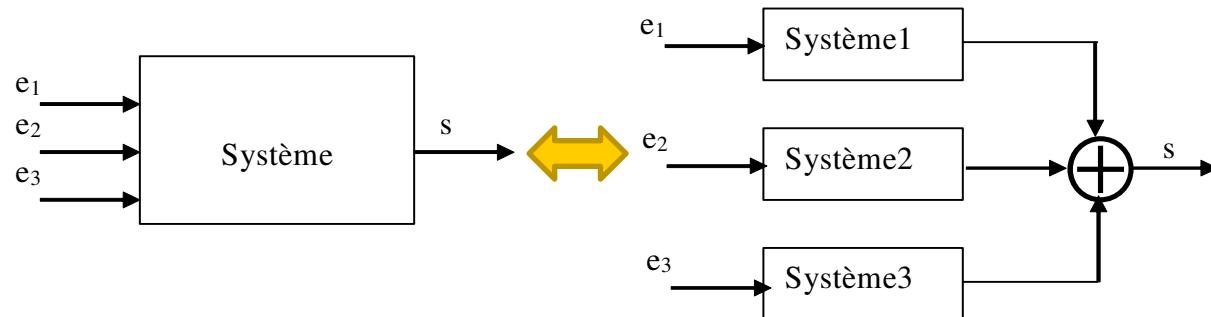
■ Linéarité + invariance par rapport au temps : **système LTI**

Associé à de nombreux concepts... calculables en complexité "raisonnable"

"outils" puissant et universel
→ à maîtriser

Principaux critères de classification

- Théorèmes de superposition pour les SLI
 - V1 - vis-à-vis des entrées



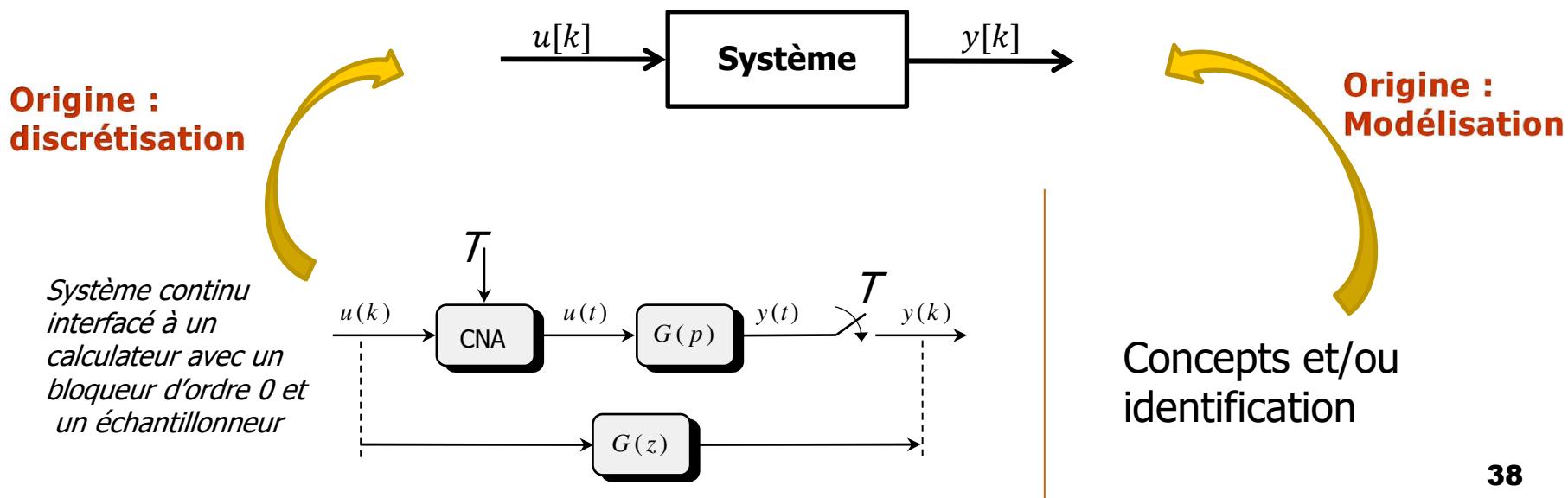
- V2 – vis-à-vis de l'état (notion à venir...)
 - La sortie est la somme :
 - de la réponse aux conditions initiales
 - et de la réponse à l'entrée pour des conditions initiales nulles

Principaux critères de classification

- Homogénéité entrées & sorties
 - Systèmes continus $t \in \mathbb{R}$



- Systèmes discrets $t \in \mathbb{Z}$, souvent noté $k, i, j \dots$





Principaux critères de classification

■ Causalité

Un système est causal si ses sorties ne dépendent que des valeurs présentes et passées des entrées

Ne pas confondre avec l'invariance dans le temps

$$\ll y(t) = \text{fonction}(u(]-\infty, t])) \gg$$



Voitures, téléphones... sont des systèmes causaux / les traitements d'image peuvent être non causaux

Etes-vous un système causal ?

Pas besoin d'information passées ou future ou à gauche et à droite pour le traitement non causal !

■ Statique / Dynamique

Un système est statique si ses sorties ne dépendent que des entrées au même instant

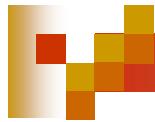
$$y(t) = f(u(t))$$

Sinon, le système est dit « dynamique »

Besoin d'information passées ou futures ou à gauche et à droite pour le traitement non causal des images !

Introduction de concepts clefs

- Définition des systèmes – décomposition
- Principaux critères de classification
- **Modéliser un système**
- Quelques bases utiles de traitement du signal et d'optimisation



Ex.

Modéliser un système

Modéliser un système, c'est donner un jeu d'équations décrivant le comportement du système

■ Type d'équations

□ Equations statiques / algébriques

- Linéaires $y(t) = \mathbf{A}u(t)$
- Non-linéaires $y(t) = f(u(t))$
- Implicites $f(y(t), u(t)) = 0$

Dans le cadre
de ce cours

□ Equations Différentielles Ordinaires

- Linéaires, temps invariantes

$$\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t)$$

- Linéaires, temps variantes

$$\sum_{i=0}^n a_i(t) y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j(t) u^{(j)}(t)$$

- Non linéaires, temps invariantes

$$f(y^{(n)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), \\ u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t)) = 0$$



Ex.

Modéliser un système

□ Equations Différentielles Ordinaires (suite)

- Non linéaires, temps variantes

$$f(y^{(n)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t), t) = 0$$

- Equations discrètes récurrentes

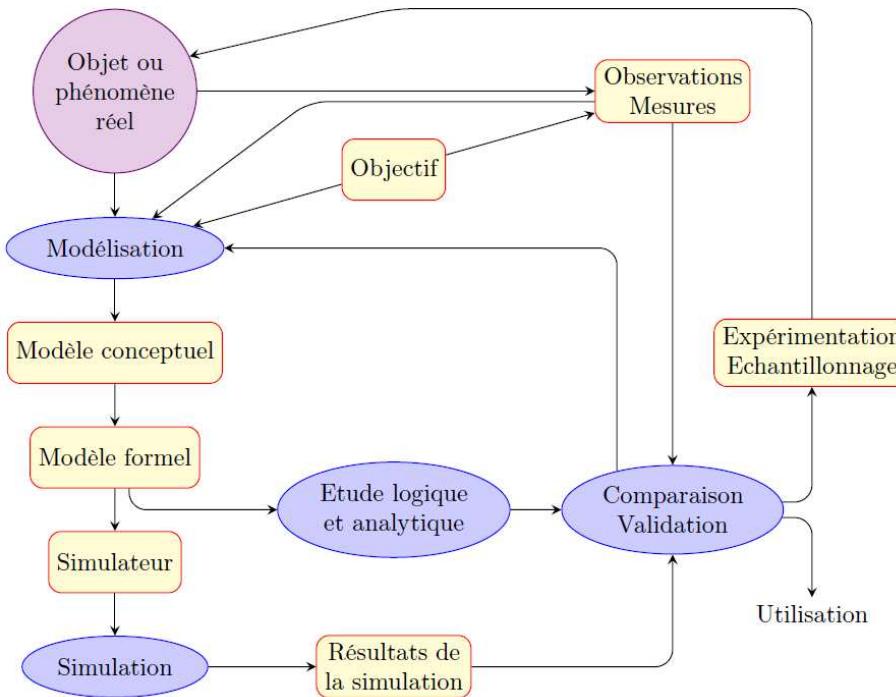
$$\sum_{i=0}^n a_k^i y_{k-i} = \sum_{i=0}^m b_k^i u_{k-i}$$

□ Equations aux Dérivées Partielles

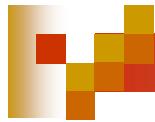
$$\alpha \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = u(t)$$

Exemple de démarche

- C'est un processus itératif, par essais et erreurs...



- Un modèle n'est **jamais** la réalité
 - Il est lié à son **but final** (prédiction, simulation, optimisation, commande...)
 - Il doit être donné avec son **domaine de validité**



Ex.

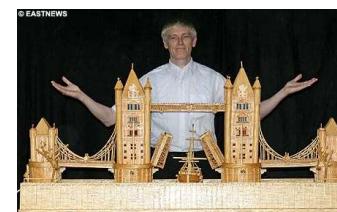
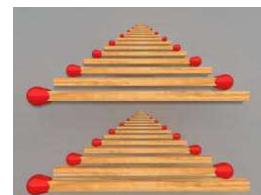
Modéliser un système

- Garder à l'esprit que durant tout le cursus

- Les systèmes sont de plus en plus complexes



- Les modèles sont de plus en plus complexes



- Les moyens de commande sont de plus en plus sophistiqués



Introduction de concepts clefs

- Définition des systèmes – décomposition
- Principaux critères de classification
- Modéliser un système
- **Quelques bases utiles de traitement du signal et d'optimisation**

Quelques bases utiles de traitement du signal

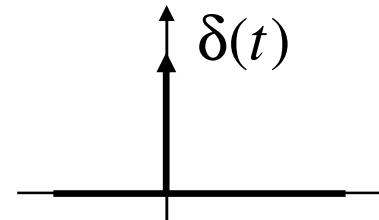
■ Principaux signaux

□ Impulsion de Dirac $\delta(t)$

$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \text{ if } t \neq 0 \\ \delta(0) = +\infty \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1$$

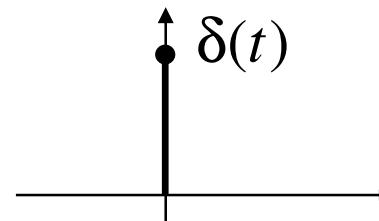
 $\Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \Phi(t) dt$

Une définition rigoureuse passe par la théorie des distributions

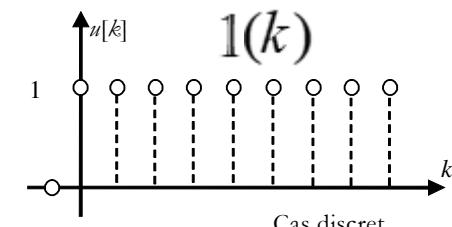
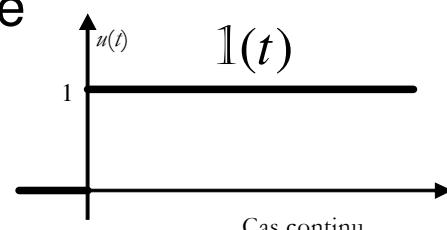


□ Impulsion discrète

$$\begin{cases} \delta[0] = 1 \\ \delta[k] = 0 \quad \text{if } k \neq 0 \end{cases}$$



□ Echelon de Heaviside

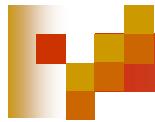


□ Signal sinusoïdal

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$x(k) = A \sin(2\pi \nu_0 k + \varphi)$$





Quelques bases utiles de traitement du signal

■ Produit de convolution de 2 signaux

□ Cas continu

$$y(t) = (h * u)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)u(t - \theta)d\theta$$

□ Cas discret

$$y(k) = y_k = y[k] = (h * u)(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)u(t - n)$$

Mnémotechnique
 $\theta + (t - \theta) = t_{courant}$

Mnémotechnique
 $n + (k - n) = k_{courant}$

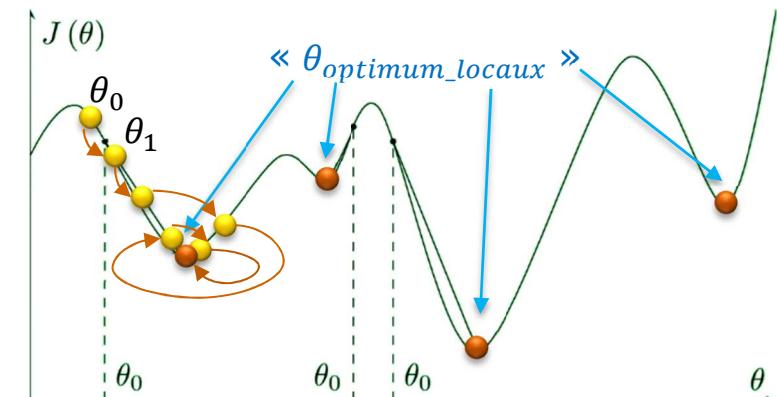
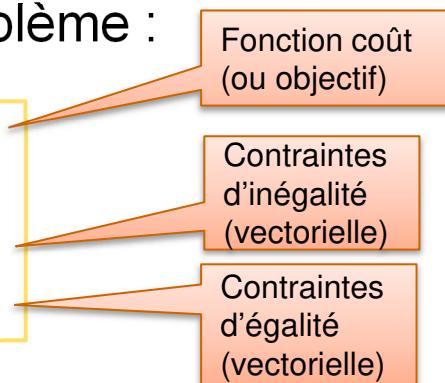
Quelques bases utiles d'optimisation

- Définition du problème :

$$\theta_{opt} = \underset{\theta \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}(J(\theta))$$

so that

$$\begin{cases} g(\theta) \leq 0 \\ h(\theta) = 0 \end{cases}$$



- Idée : principe des solutions numériques

- construire une séquence $\theta_0, \theta_1, \theta_3 \dots$ telle que
 - $J(\theta_i)$ décroissante, θ_i respecte les contraintes et $\theta_i \rightarrow \theta_{optimum_local}$
 - Si le problème global est difficile → pas de solution explicite d'un optimum global
 - $\theta_{optimum_local}$ dépend du point de départ (θ_0) → voir graphique ci-dessus



8.5 Méthodes des moindres carrés : extensions au cas non linéaire

- Nous ne considérons, que le cas « optimisation différentiable sans contrainte »

voir ST7 pour plus de détails

$$\theta_{opt} = \underset{\theta \in \mathbb{R}^n}{\operatorname{argmin}}(J(\theta))$$

+ hypothèse $J(\theta)$ différentiable

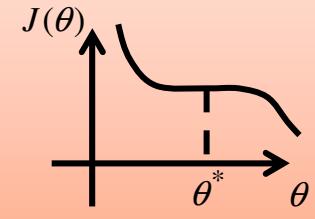
- Condition nécessaire d'optimalité locale :

$$\theta^* \text{ minimum local} \Rightarrow \begin{cases} \nabla J(\theta^*) = 0 \\ \nabla^2 J(\theta^*) \geq 0 \end{cases}$$

- Condition suffisante d'optimalité locale :

$$\begin{cases} \nabla J(\theta^*) = 0 \\ \nabla^2 J(\theta^*) > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta^* \text{ minimum local}$$

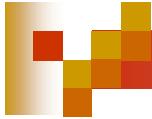
Contre-exemple à la suffisance



Dans le cas général... il n'y a pas de condition nécessaire et suffisante



**Un peu (beaucoup) de prise de recul,
prendre un moment de réflexion**



Un peu (beaucoup) de prise de recul, prendre un moment de réflexion

"The sciences do not try to explain, they hardly even try to interpret, they mainly make models. By a model is meant a mathematical construct which, with the addition of certain verbal interpretations, describes observed phenomena. The justification of such a mathematical construct is solely and precisely that it is expected to work - that is correctly to describe phenomena from a reasonably wide area.

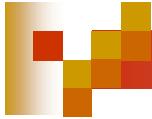
*Furthermore, it must satisfy certain esthetic criteria - that is, in relation to how much it describes, it must be rather simple."**

John von Neumann

Method in the Physical Sciences,
in The Unity of Knowledge (1955),
ed. L. G. Leary (Doubleday & Co., New York), p. 157

* « Les sciences n'essaient pas d'expliquer, elles n'essaient même pas d'interpréter, elles font surtout des modèles. Par modèle, on entend une construction mathématique qui, avec l'ajout de certaines interprétations verbales, décrit des phénomènes observés. La justification d'une telle construction mathématique est uniquement et précisément qu'elle est censée fonctionner, c'est-à-dire décrire correctement des phénomènes dans un domaine raisonnablement large.

En outre, elle doit satisfaire à certains critères esthétiques, c'est-à-dire qu'elle doit être relativement simple par rapport à la quantité de descriptions qu'elle donne. »



Un peu (beaucoup) de prise de recul, prendre un moment de réflexion

«*Modélisation, n.f. Art subtil de remplacer l'insaisissable réalité par un objet mathématique (formule, équations, surface, loi d'évolution...) utilisable.*

Objet complexe aux yeux du profane, mais en vérité outrageuse simplification de la si complexe réalité ! »

Cédric Villani



Un peu (beaucoup) de prise de recul, prendre un moment de réflexion



*“Remember that all models are wrong...the practical question is how wrong do they have to be to not be useful” **

George E.P. Box

Box, George EP; Norman R. Draper (1987).

Modèles empiriques de construction

et surfaces de réaction, p. 424,

Wiley. ISBN 0471810339

** Rappelez-vous que tous les modèles sont erronés... la question pratique est de savoir jusqu'à quel point ils doivent être erronés pour ne pas être utiles...*