



CentraleSupélec

# Introduction

# Modélisation

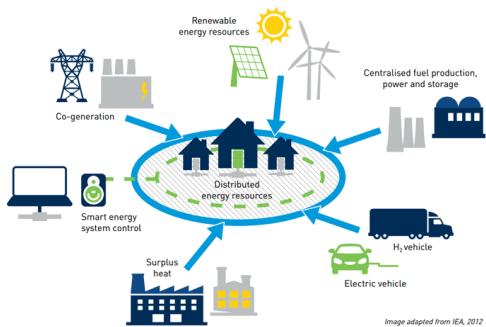
## Transparents du cours

**Equipe pédagogique : M. Cicic, S. Font, V. Letort-Le Chevalier,  
H. Lhachemi, C. Stoica Maniu, G. Sandou, C. Vlad**

*Cristina.Vlad@centralesupelec.fr*

*modelisation.cours@centralesupelec.fr*

# Exemples de systèmes et modèles



Smart grids



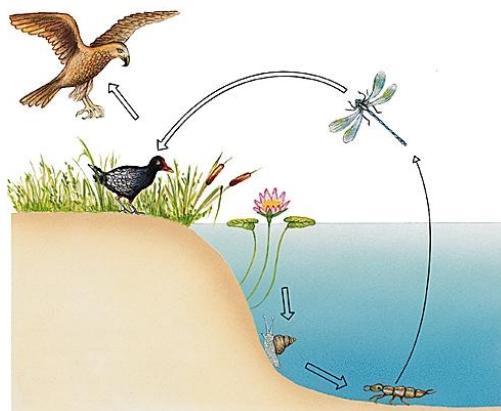
Véhicules autonomes



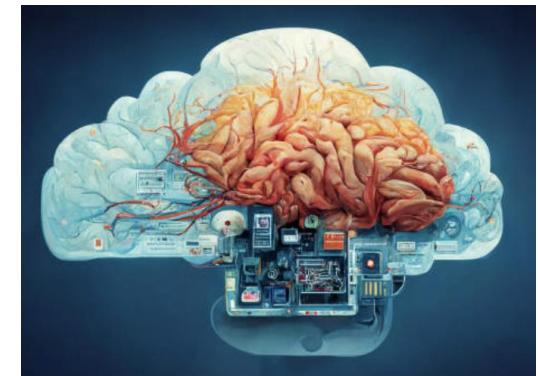
Finance



Gestion de l'eau



Biologie



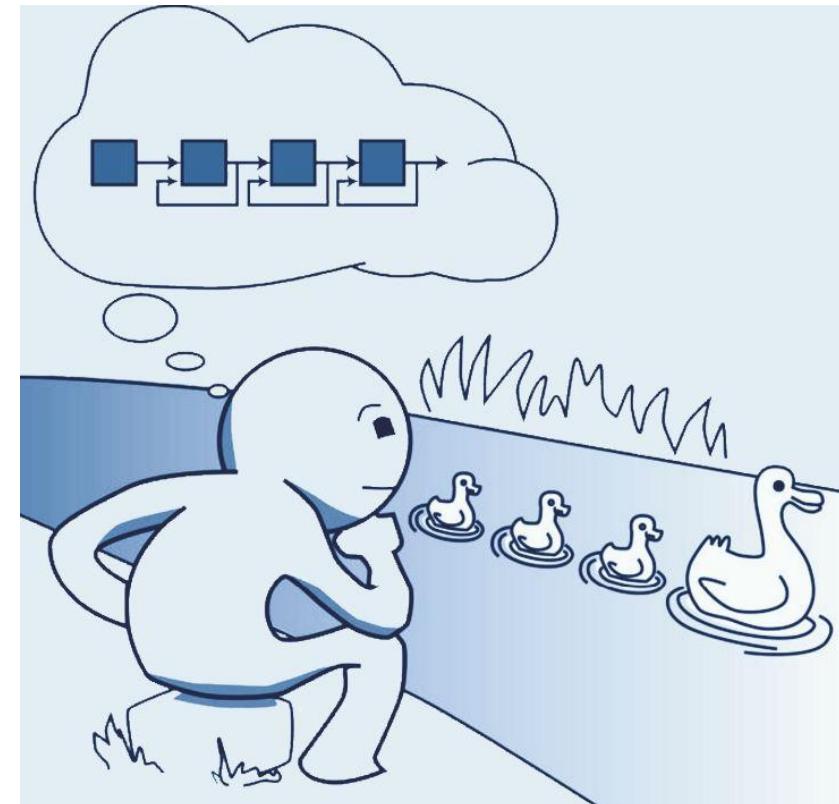
Neuroscience

## ➤ Modèle

- Définition (Académie Française) :  
*une œuvre ou un objet que l'on imite, que l'on reproduit ; ce qui sert d'exemple, de type, de norme*
- Représentation simplifiée de la réalité, qui peut (ou pas) être accompagnée d'une écriture mathématique

## ➤ Modélisation

- Activité visant à représenter un objet ou un phénomène du monde réel par une instance du système formel choisi



P. Albertos, I. Mareels,  
*Feedback and Control for Everyone*

# Contenu général du cours

- Partie I : Modélisation des systèmes à état continu
- Partie II : Modélisation des systèmes à état discret (à évènements discrets)
- Partie III : Méthodologies pour l'analyse, l'identification des paramètres et l'évaluation des modèles

# Exemple illustratif



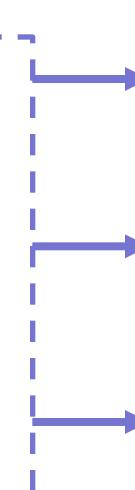
HYBRID  
Vehicle

Khiart.com

Copyright © Kevin C. Hulsey

HYBRID

www.khulsey.com



Signaux  
d'entrée

Système : tâches à réaliser

Signaux  
de sortie

# Exemple illustratif

Signaux d'entrée : choisis par l'utilisateur



Perturbation

Signaux  
d'entrée

HYBRID  
Vehicle

HYBRID

Copyright © Kevin C. Hulsey

www.khulsey.com



Système : tâches à réaliser



Signaux  
de sortie

# Exemple illustratif

## Signaux d'entrée à temps continu



Signaux  
d'entrée

HYBRID  
Vehicle

Copyright © Kevin C. Hulsey  
www.khulsey.com



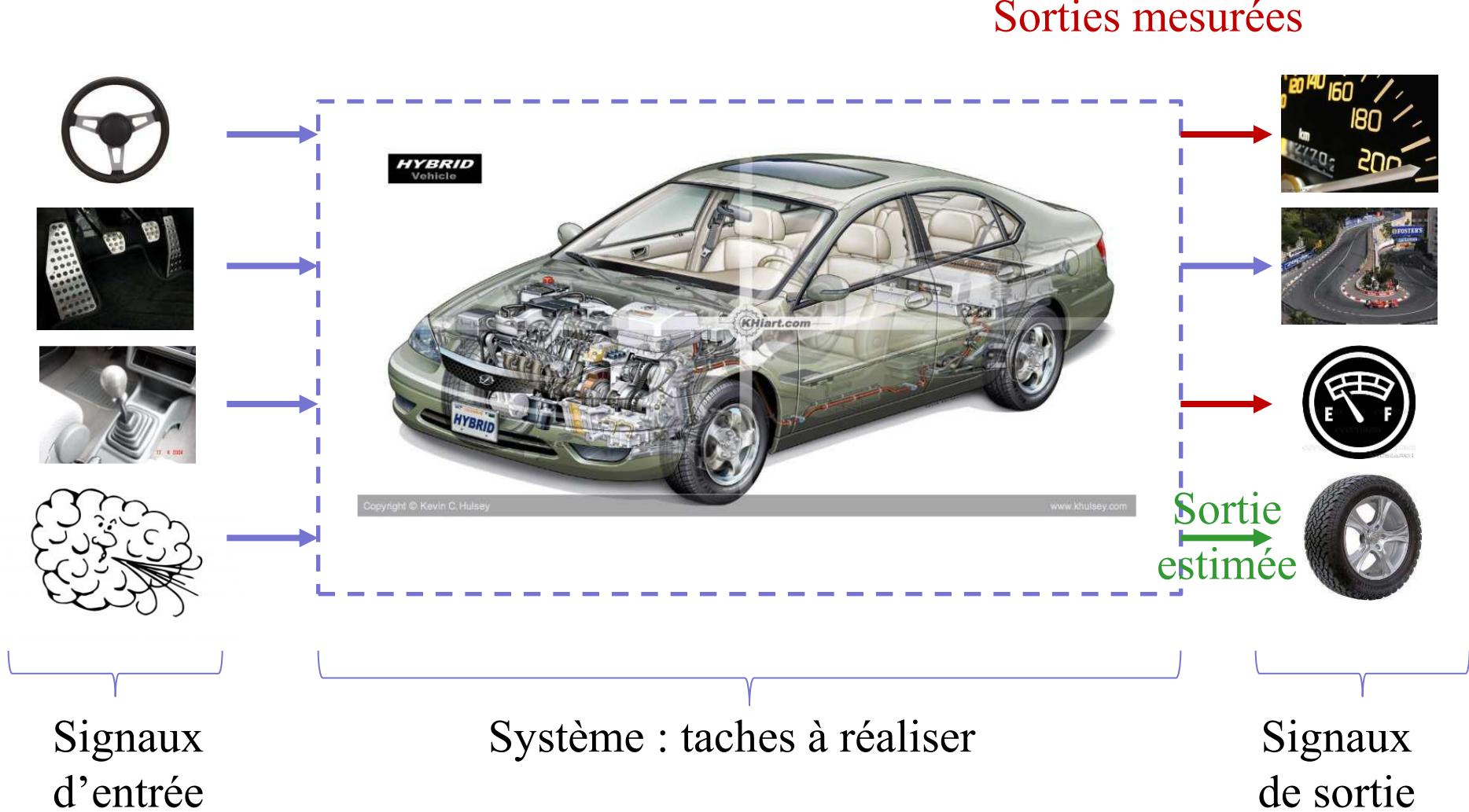
Signal à temps  
discret



Système : tâches à réaliser

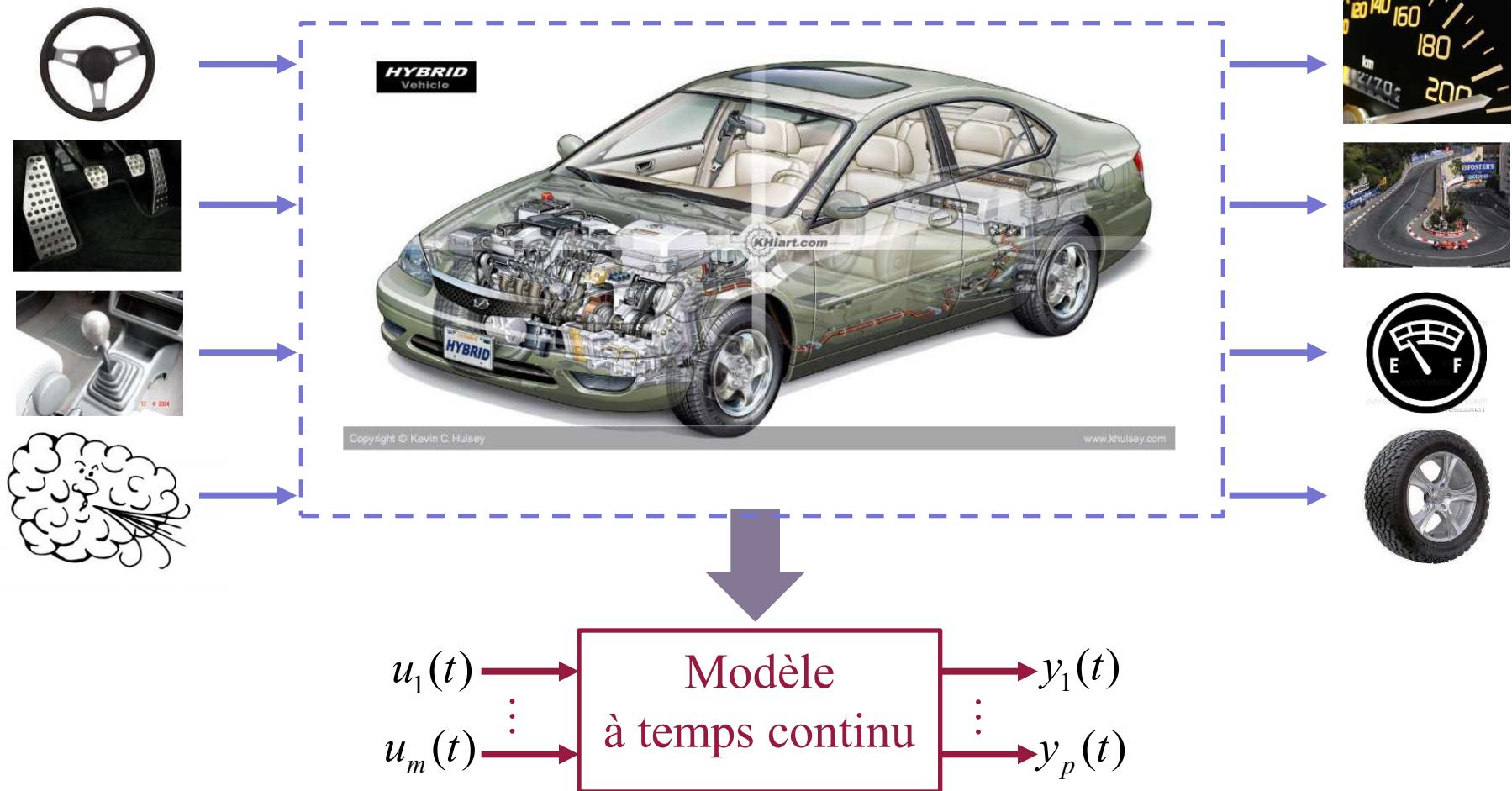
Signaux  
de sortie

# Exemple illustratif



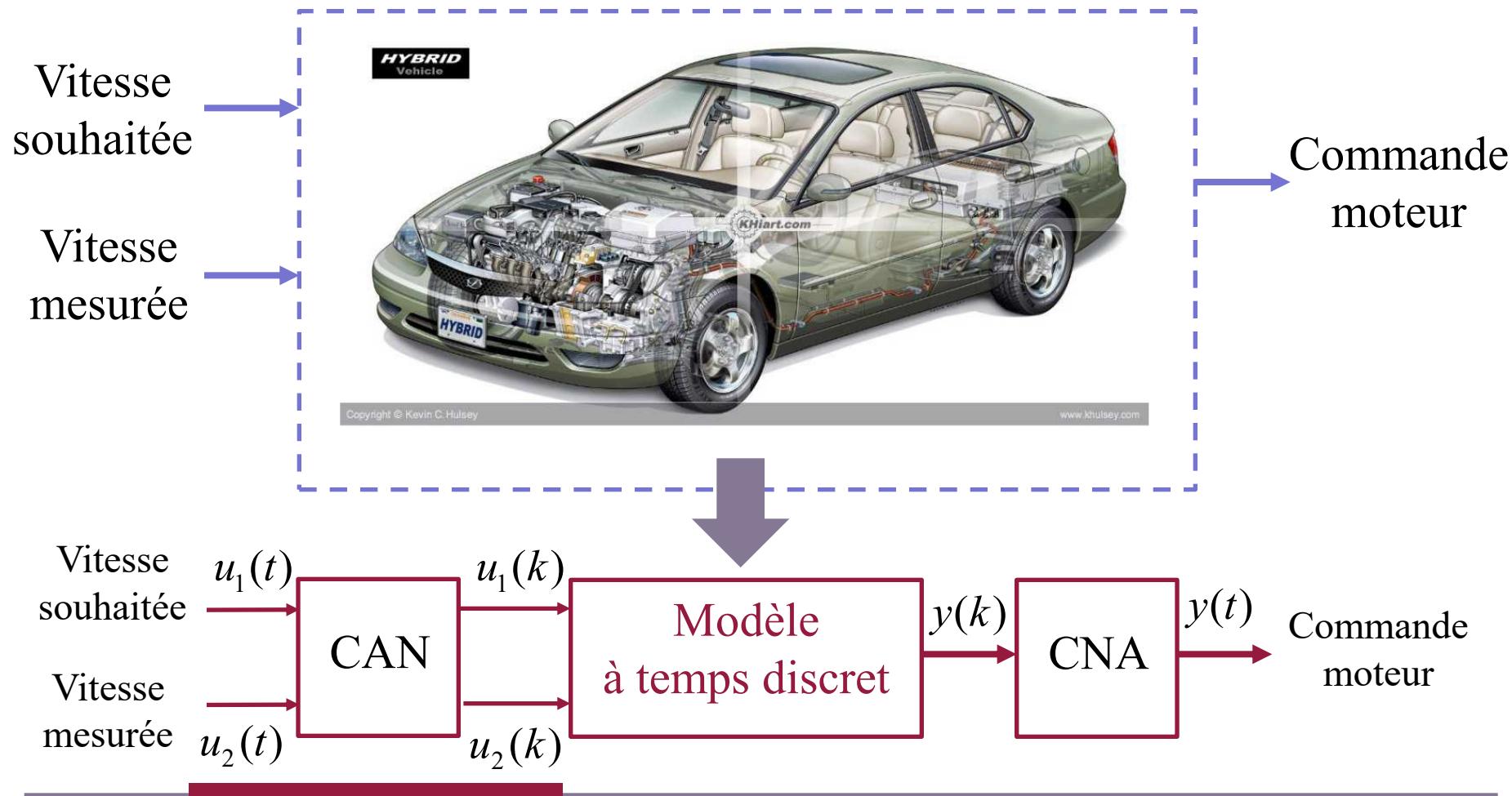
# Exemple illustratif

Point de vue : direction (axes XY)



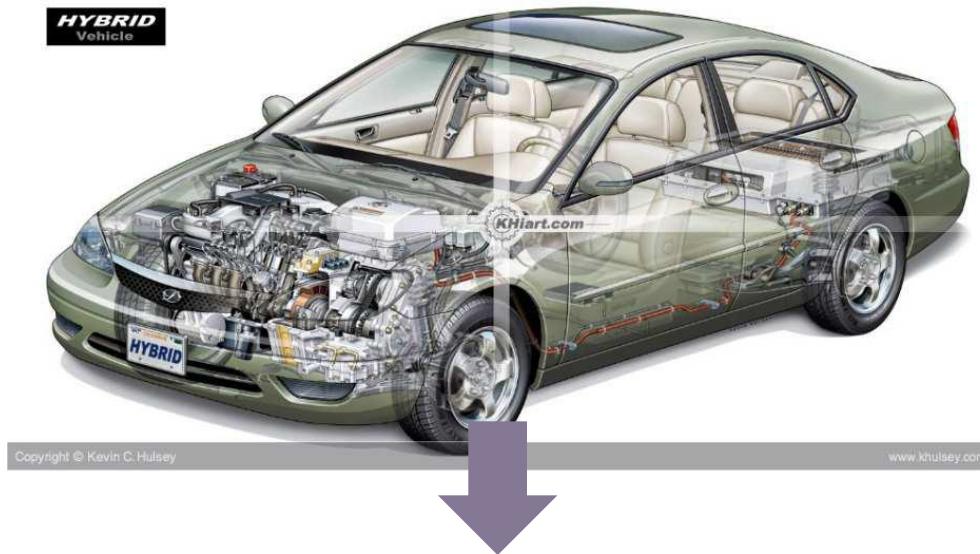
# Exemple illustratif

Point de vue : calculateur de bord

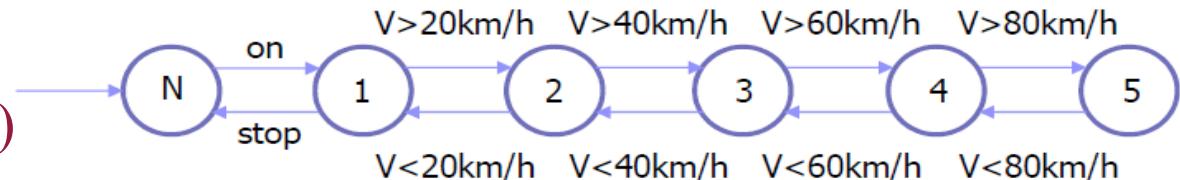


# Exemple illustratif

Point de vue : boîte de vitesse automatique

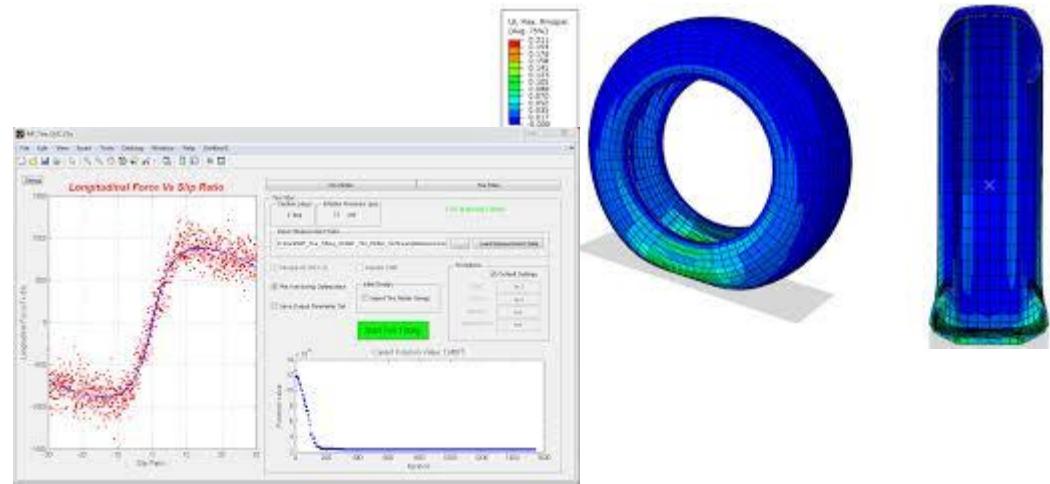


Système à état discret  
(à évènements discrets)



- Identification des systèmes : structure & paramètres
- Système réel trop compliqué ou mal-connu
  - ➡ *modèles simplifiés*

- Pertes ?
- Performances ?
- Choix ?



- Pas de modèle parfait
  - Paramètres inconnus, incertitudes, perturbations et bruits, etc.
  - Comment évaluer la qualité d'un modèle et sa fiabilité ?
    - ➡ Méthodes pour identifier et valider le modèle, pour évaluer la qualité du modèle et sa sensibilité aux valeurs des paramètres

# Objectifs du cours

- **Représenter** l'évolution d'un système (**Parties I et II**)
  - Modèle exploitable analytiquement (**TD**) ou numériquement (**simulations Matlab en TD/mini-projet**)
  - Modèle adapté à l'objectif de modélisation déterminé en termes d'hypothèses de modélisation, de représentativité et de niveau de complexité
  - Domaine de validité du modèle
- **Analyser** les propriétés du modèle ainsi obtenu (**Parties I et II**)
  - Confronter le modèle à la réalité (**Partie III**)
  - Evaluer les modèles proposés (**Partie III**)
- Acquérir une **expérience** supplémentaire de la modélisation
  - Pas une recette de cuisine sans la mettre en œuvre...! (**mini-projet**)

## ■ 10 cours magistraux

- M. Cicic, S. Font, V. Letort-Le Chevalier, H. Lhachemi, C. Stoica Maniu, G. Sandou,  
C. Vlad

## ■ 8 TD – encadrants

- Voie C : Cristina Vlad (gr. 7), Martin Soyer (gr. 8), Israel Hinostroza (gr. 9)

## ■ 1 séance évaluation mini-projet

## ■ Supports de cours

- Polycopié (français & anglais), transparents du cours, Edunao...

## ■ Prérequis : notions de calcul matriciel, maths, physique...

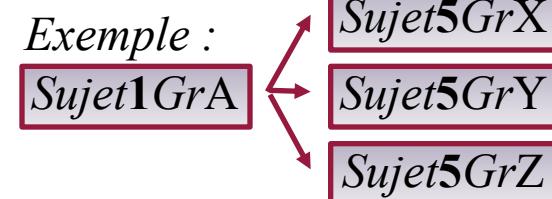
## ■ Outils logiciels

- TD : Matlab (*version 2016a ou plus récente*) avec portables des élèves
- **Formation Matlab Onramp à faire avant le premier TD (deadline : 30 Nov. à 23h)**

*Ce cours est un prérequis pour la majorité des cours du nouveau cursus !*

# Organisation du cours

- **1 mini-projet** (équipes de 3, sur temps libre) – **consignes sur Edunao**
  - **Phase 1** : Choix sujet et trinôme (voies A&B&C&D), inscription sur Edunao
    - Ouverture : 27 novembre à 12h (midi)
    - Deadline : 7 décembre à 23h
  - **Phase 2** : Réalisation d'un projet proposé (*consignes à venir sur Edunao*)
    - Livrables :
      - Slides et courte vidéo de présentation contenant une analyse des 2 modèles (*Partie I et II*)
      - Un simulateur (*Partie I*) incluant une expérience typique à simuler (*Matlab ou Python*)
    - **Deadline** : 7 janvier à 23h
  - **Phase 3** : Evaluation par les pairs
    - Evaluation de projets réalisés par 3 autres équipes
    - **Deadline** : 11 janvier à 23h
  - **Soutenance mini-projets** : **13 janvier (13h45-15h15)**



- **Examen final (3h) : 75% de la note finale (individuel)**
  - Examen écrit, commun avec les autres voies, tous documents et avec calculatrice
  - Date : **vendredi 23 janvier**
- **Mini-projet** : 25% de la note finale (par groupe de 3)  
*Evaluation par les pairs et soutenance de mini-projet !*

# Evaluation par compétences

## ■ Evaluation compétence C1

*Analyser, concevoir et réaliser des systèmes complexes à composantes scientifiques, technologiques, humaines et économiques*

→ Cohérence C1 & contenu du cours de Modélisation

## ■ Résultats affichés pour l'évaluation de C1

NA – Non Atteint

A – Atteint

### ■ Modes d'évaluation : examen & mini-projet

- *Une partie des questions permettant d'évaluer la compétence C1 marquées par (C1)*

# Vous êtes acteurs de votre cursus...

## ■ Retours des années précédentes et évolutions

- Cours très intéressant, très bien construit
- Polycopié très claire, complet et très intéressant, sujets concrets
- **Evolutions**
  - Sujets mini-projet fournis, *nouveaux sujets en 2025-2026*
  - Reforme mini-projet 2025-2026 (*nouveaux livrables, soutenance*)
  - Groupe de mini-projets : choix libre dans la demi-promo A,B,C&D
  - Lien slides – polycopié 
  - Réduction du présentiel : exercices & Wooclap à travailler en autonomie, problème de synthèse à préparer/finir
  - Les PSI en ont déjà vu une partie  **pas les parties 2 et 3 !**  
 **Investissez-vous sur le projet !**
  - Contact : [delegues.mode@listes.centralesupelec.fr](mailto:delegues.mode@listes.centralesupelec.fr)

- **Introduction**
- **Partie I : Modélisation des systèmes à état continu**
  - Chapitre 1 : Modélisation sous forme de représentation d'état
  - Chapitre 2 : Représentation par fonctions de transfert à temps continu
  - Chapitre 3 : Analyse de performances des systèmes à temps continu
  - Chapitre 4 : Modélisation des systèmes à temps discret

## → TD sur la Partie I

- TD 1 : Représentation d'état, *application à un bras de robot*
- TD 2 : Transformée de Laplace pour les systèmes à temps continu, *application à un système de pesage*
- TD 3 : Transformée en  $z$  pour les systèmes à temps discret, *application à un système de gestion des horaires de trains*

- **Partie II : Modélisation des systèmes à état discret**
  - Chapitre 1 : Systèmes à évènements discrets non temporisés
  - Chapitre 2 : Systèmes à évènements discrets temporisés

## → TD sur la Partie II

- TD 4 : Automates et réseaux de Petri, *application à un laboratoire de prélèvement sanguin*
- TD 5 : Systèmes hybrides, *application à un joueur de diabolo*

# Plan du cours

## ■ Partie III : Méthodes pour l'analyse, l'identification paramétrique et l'évaluation des modèles

- Chapitre 1 : Identification et évaluation des modèles
- Chapitre 2 : Analyse d'incertitude et de sensibilité

### → TD sur la Partie III

- TD 6 : Identification par optimisation, *application au diagnostic du cancer de la prostate*
- TD 7 : Analyses d'incertitudes et de sensibilité, *application à la fabrique d'épées*

### → TD de synthèse Parties I & II & III

- TD 8 : Problème de synthèse, *étude d'un quadricoptère*



**! Une partie du TD 8 à travailler en autonomie avant le TD !**

# Plan du cours

## Modélisation

**Système à état continu**  
**à temps continu ou à temps discret**

Système non linéaire - *représentation d'état*

Point(s) d'équilibre

Linéarisation

Système linéaire - *représentation d'état*

Invariance dans le temps

Système linéaire invariant {- *représentation d'état*  
{- *fonction de transfert*

## Système à état discret (SED)

Système déterministe non temporisé

- *automate non temporisé*

- *réseau de Petri (RP) non temporisé*

Système déterministe temporisé

- *automate temporisé avec gardes (et inv.)*

- *système hybride*

- *RP P-temporisé ou T-temporisé*

Partie I

Partie II

## Analyse des modèles

### Stabilité

- EBSB
- asymptotique/exponentielle/au sens de Lyapunov

### Analyse fréquentielle

- diagramme de Bode

### Analyse temporelle

- réponse indicielle

### Réduction de modèle

- connexions de systèmes, simplification pôles-zéros, approx. par un 2ème ordre

Partie I

Partie II

## Evaluation des modèles

### Identification des modèles

- identifiabilité
- structure et paramètres

### Evaluation des modèles

- critères graphiques
- critères quantitatifs : biais, MSE, RRMSE, R2)

### Sélection des modèles

- critères qualitatifs
- critères quantitatifs : critères pénalisés (AIC, AICc), validation croisée

### Analyse d'incertitudes

- modèle incert. : type A & B
- propagation incertitudes (intervalles, combinaison des variances, Monte Carlo)

### Analyse de sensibilité

- indices locaux, SRC<sub>j</sub>, Sobol
- indices totaux

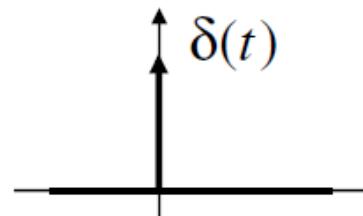
### Validation du modèle

- Notions de base de signaux
- Notion de système
- Classification des systèmes
- Modélisation des systèmes
- Quelques bases d'optimisation

# Introduction

- Signaux principaux

- *Impulsion Dirac  $\delta(t)$*

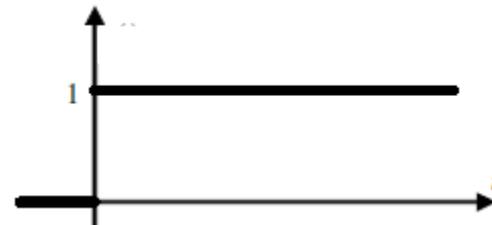


Poly  
2.6

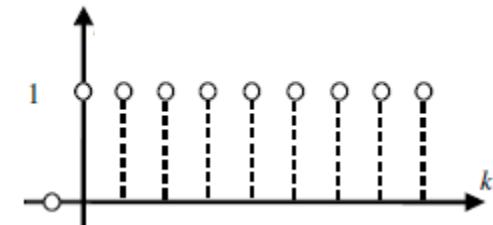
$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \text{ si } t \neq 0 \\ \delta(0) = +\infty \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \xrightarrow{\hspace{1cm}} \quad \Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \Phi(t) dt$$

- *Impulsion discrète  $\delta(k)$*  : suite nulle partout sauf au point  $k = 0$  où elle vaut 1

- *Echelon unitaire*



$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ 1 & \text{si } t \geq 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$



$$1(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k < 0 \\ 1 & \text{si } k \geq 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

- *Signal sinusoïdal*

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$x(k) = A \sin(2\pi \nu_0 k + \varphi)$$

- Signaux
  - Produit de convolution des deux signaux
    - Produit de convolution à temps continu

$$y(t) = h * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)u(t - \theta)d\theta$$

- Produit de convolution à temps discret

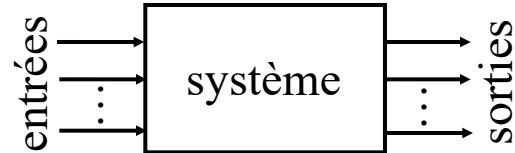
$$y(k) = h * u(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)u(k - n)$$

Poly  
2.6

- Notions de base de signaux
- Notion de système
- Classification des systèmes
- Modélisation des systèmes
- Quelques bases d'optimisation

## ➤ Système

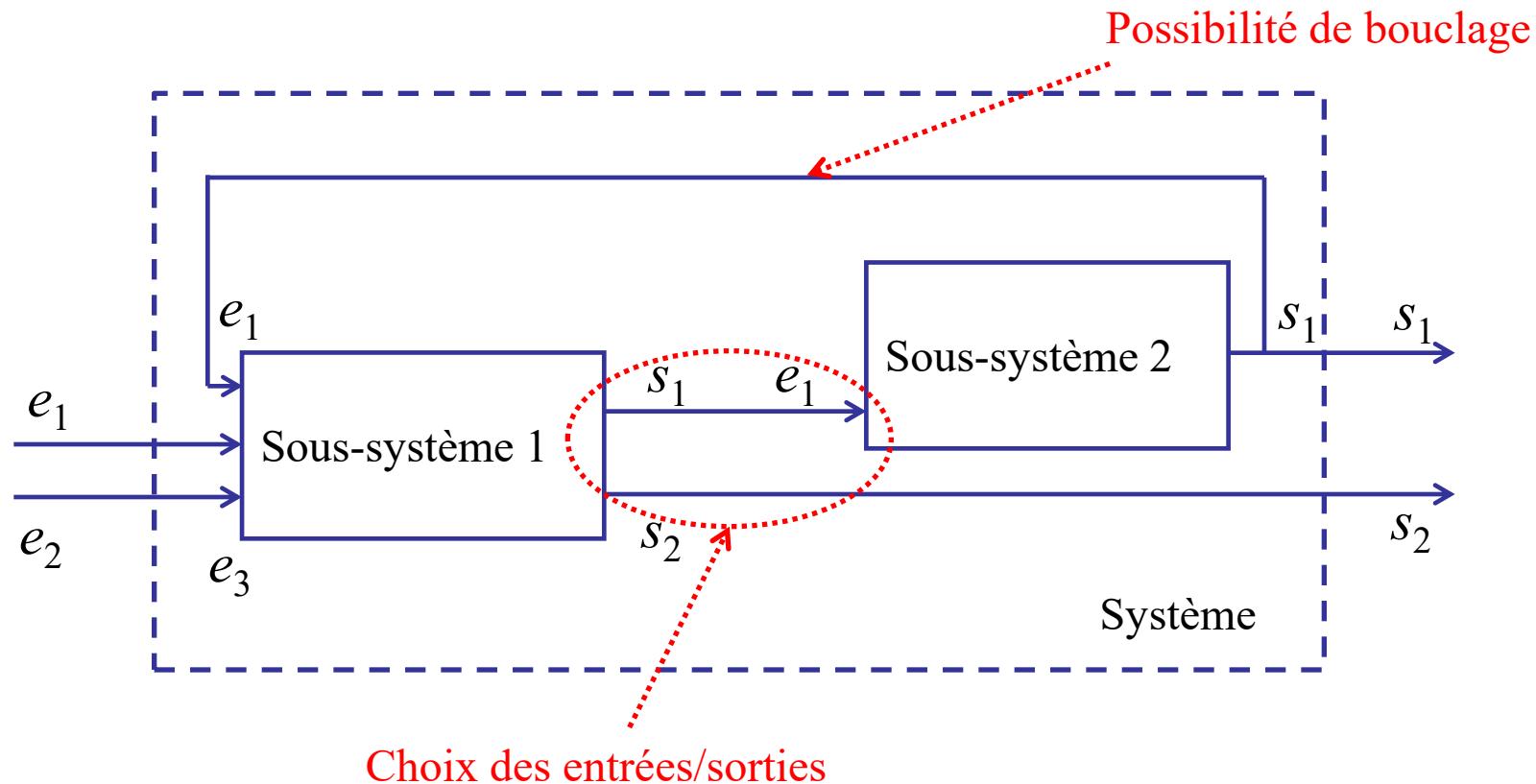
- Définition (Larousse) : Combinaison de parties qui se coordonnent pour concourir à un résultat
- Caractéristiques :
  - Interdépendance de ses éléments
  - Entrées : *entrées de commande, perturbations*
  - Sorties : *sorties mesurées, sorties non mesurées*
- Synonymes : **procédé, processus (process, plant en anglais)**
- Notion utilisée dans plusieurs domaines : *Automatique* (système dynamique), *Informatique* (système d'information), *Economie* (système économique)...



# Introduction

- Décomposition d'un système en sous-systèmes

Poly  
2.2



# Introduction

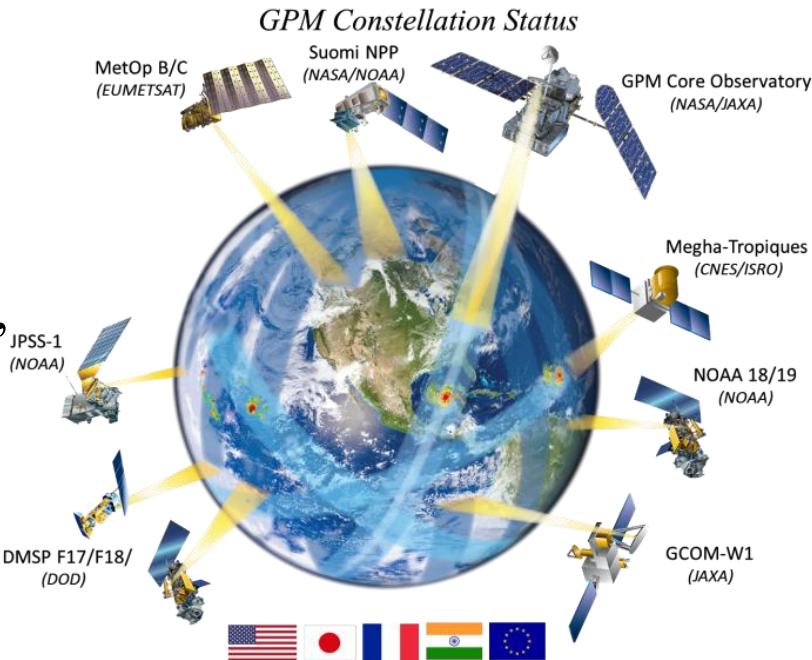
- **Système de type multi-agents** (en anglais **Multi-Agent System – MAS**)
  - *Agent* : entité matérielle ou logicielle qui se trouve dans un certain environnement, et qui est capable d'actions autonomes dans l'environnement afin de répondre à ses objectifs
  - *Système multi-agents* : système composé de plusieurs agents qui interagissent dans un environnement.
  - *Caractéristiques* : autonomie de chaque agent, communication entre les agents, coordination, but commun
  - *Exemples* : vol en formation, comportement des piétons dans une foule, fluidité de la circulation automobile



# Introduction

## ➤ Système de systèmes (en anglais System of Systems – SoS)

- *Définition* : systèmes de grande taille, intégrant plusieurs sous-systèmes, possible multidisciplinaires, autonomes, mais interconnectés, afin de satisfaire un besoin global
- *Caractéristiques* : indépendance opérationnelle, autonomie de gestion et répartition géographique des systèmes constitutifs, développement évolutif, comportement émergent
- *Exemples* : réseau de distribution électrique, control du trafic aérien au niveau européen, constellations de satellites...



- Notions de base de signaux
- Notion de système
- Classification des systèmes
- Modélisation des systèmes
- Quelques bases d'optimisation

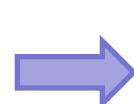
# Introduction

- Classifications des systèmes

- Linéarité

- Systèmes linéaires

$$\begin{aligned} u_1(t) &\rightarrow y_1(t) \\ u_2(t) &\rightarrow y_2(t) \end{aligned}$$



$$\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$



Poly  
2.5

- Systèmes non linéaires

- Invariance dans le temps

- Systèmes invariants dans le temps (stationnaires)

$$u(t) \rightarrow y(t)$$



$$u(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau)$$

- Systèmes variants dans le temps

systèmes LTI =  
systèmes linéaires  
invariants dans le temps

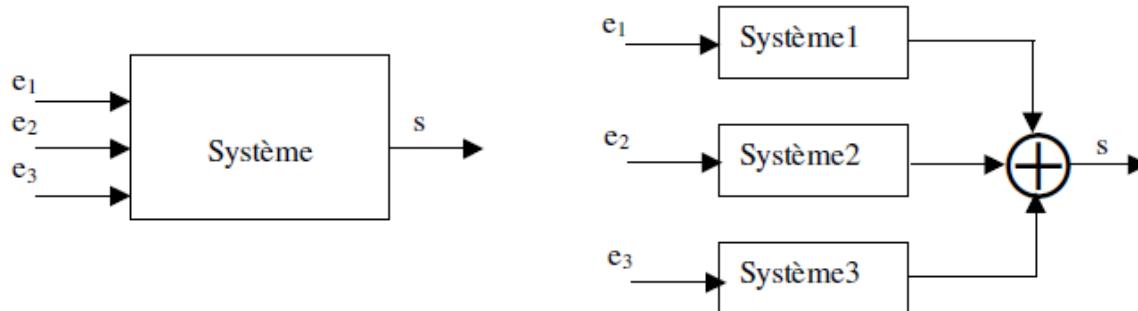
## ➤ Classifications des systèmes

### ➤ Nombre entrées/sorties

#### ➤ **Monovariables**

#### ➤ **Multivariables** ➔ voir le **théorème de superposition**

### ■ Théorème de superposition pour les systèmes linéaires (V1)



### ■ Théorème de superposition pour les systèmes linéaires (V2)

#### ■ La sortie est la somme

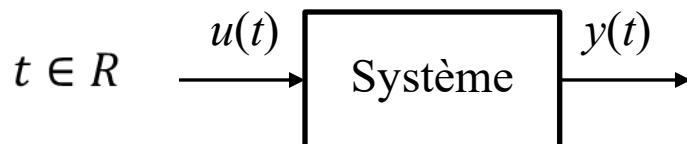
➤ *de la réponse aux conditions initiales*

➤ *et de la réponse à l'entrée pour des conditions initiales nulles*

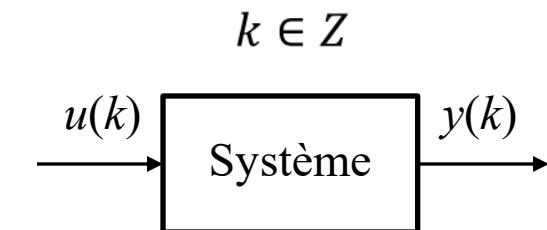
- Classifications des systèmes

- Critère temporel

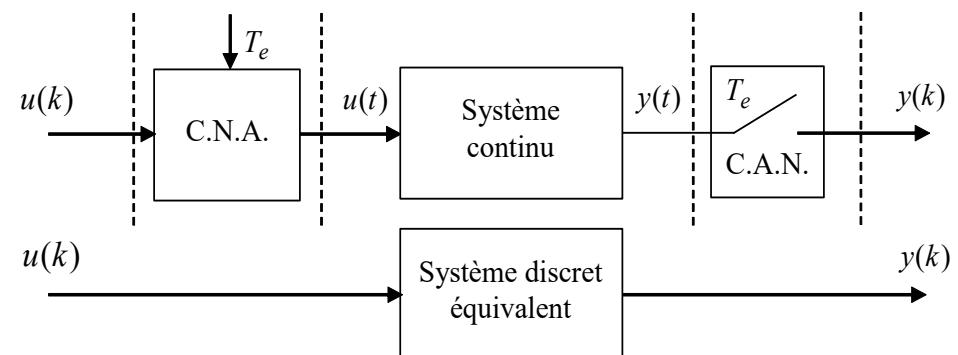
- **Systèmes continus** (ou systèmes à temps continu)



- **Systèmes discrets** (ou systèmes à temps discret)



système discret par nature



- **Systèmes hybrides** (ou mixtes)

système échantillonné

- Classifications des systèmes

- Causalité

- Systèmes **causaux** : *la réponse dépend que des valeurs de l'entrée aux instants précédents et présents*

$$y(t) = f(u(\tau), \tau \in ]-\infty, t])$$

- Systèmes non-causaux

- Evolution au cours du temps

- Systèmes statiques : *ses sorties ne dépendent que des entrées au même instant.*

$$y(t) = f(u(t))$$

- Sinon, le système est dit « **dynamique** »

- Notions de base de signaux
- Notion de système
- Classification des systèmes
- Modélisation des systèmes
- Quelques bases d'optimisation

- Modéliser un système : *donner un ensemble d'équations décrivant le comportement du système*
- Type d'équations
  - Equations statiques / algébriques
    - Linéaires :  $y(t) = Au(t)$
    - Non-linéaires :  $y(t) = f(u(t))$
    - Implicites :  $f(y(t), u(t)) = 0$
  - Equations Différentiels Ordinaires
    - Linéaires, invariantes dans le temps :  $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t)$
    - Linéaires, variantes dans le temps :  $\sum_{i=0}^n a_i(t) y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j(t) u^{(j)}(t)$
    - Non linéaires, invariantes dans le temps :
 
$$f(y^{(n)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t)) = 0$$
    - Non linéaires, variantes dans le temps :
 
$$f(y^{(n)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t), t) = 0$$

# Introduction

- Modéliser un système : *donner un ensemble d'équations décrivant le comportement du système*
  - Type d'équations
    - Equations aux Dérivées Partielles :
$$\alpha \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = u(t)$$
    - Equations discrètes récurrentes :
$$\sum_{i=0}^n a_k^i y(k-i) = \sum_{j=0}^m b_k^j u(k-j)$$
  - Un modèle n'est jamais parfait :
    - dépend de son objectif final (prédiction, simulation, optimisation, contrôle...)
    - doit être donné avec son domaine de validité

- Notions de base de signaux
- Notion de système
- Classification des systèmes
- Modélisation des systèmes
- Quelques bases d'optimisation

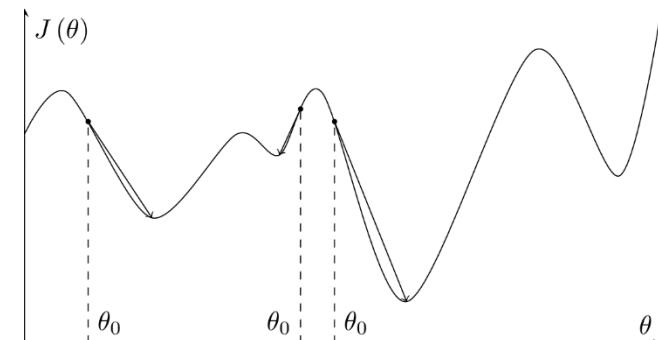
# Quelques bases d'optimisation

## ➤ Problème d'optimisation (cas général avec contraintes)

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^n} J(\theta) \quad \text{Fonction coût (ou objectif)}$$

s.c.  $g(\theta) \leq 0$       Contraintes inégalités

$h(\theta) = 0$       Contraintes égalités



## ➤ Optimisation sans contraintes

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} J(\theta)$$

➤ Condition nécessaire pour l'optimalité locale

$$\theta^* \text{ minimum local} \Rightarrow \begin{cases} \nabla J(\theta^*) = 0 \\ \nabla^2 J(\theta^*) \geq 0 \end{cases}$$

➤ Condition suffisante pour l'optimalité locale

$$\begin{cases} \nabla J(\theta^*) = 0 \\ \nabla^2 J(\theta^*) > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta^* \text{ local minimum}$$

Si problème global difficile  
 ➔ recherche d'un *optimum local*  
 (sur un voisinage)