



CentraleSupélec

Modélisation

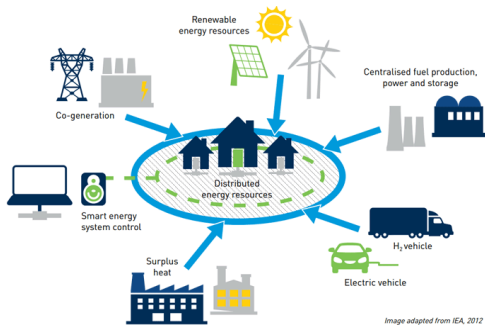
Transparents du cours

**Equipe pédagogique : M. Cicic, S. Font, V. Letort-Le Chevalier,
H. Lhachemi, C. Stoica Maniu, G. Sandou, C. Vlad**

Cristina.Vlad@centralesupelec.fr

modelisation.cours@centralesupelec.fr

Exemples de systèmes et modèles



Smart grids



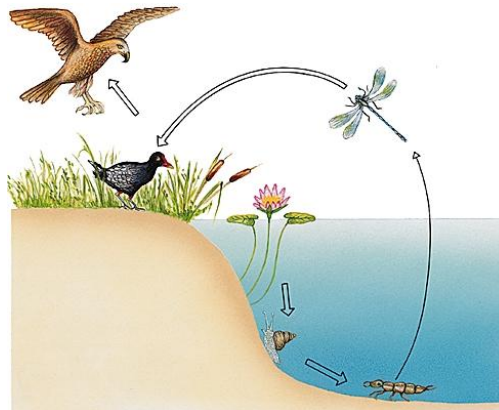
Véhicules autonomes



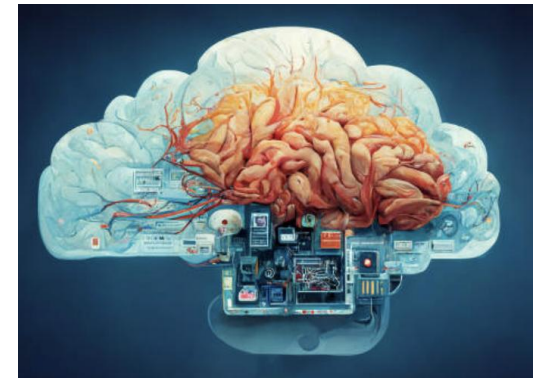
Finance



Gestion de l'eau



Biologie



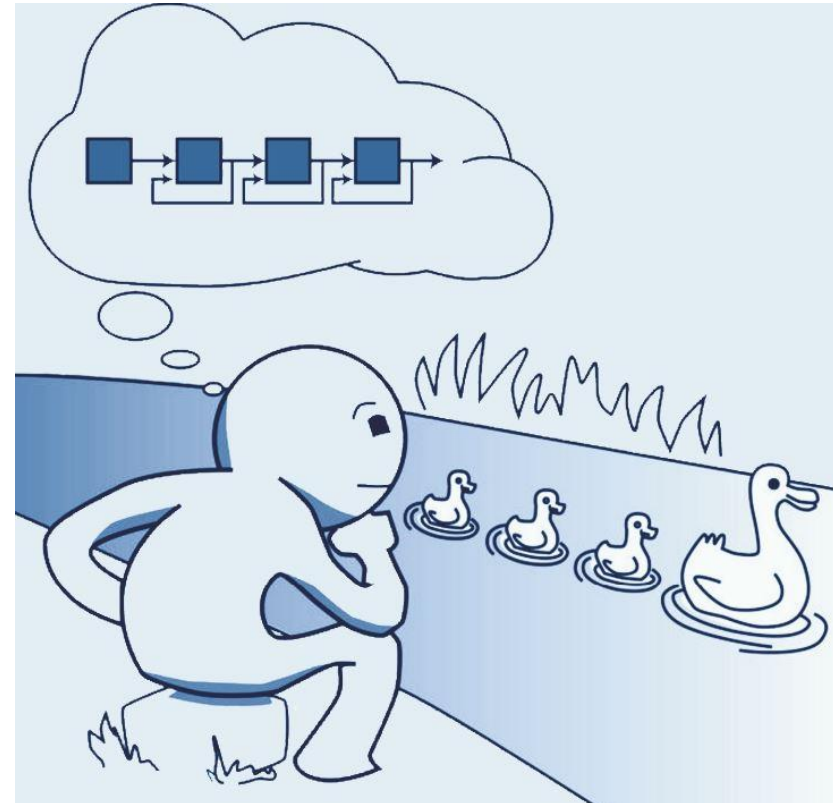
Neuroscience

➤ Modèle

- Définition (Académie Française) : *une œuvre ou un objet que l'on imite, que l'on reproduit ; ce qui sert d'exemple, de type, de norme*
- **Représentation simplifiée** de la réalité, qui peut (ou pas) être accompagnée d'une écriture mathématique

➤ Modélisation

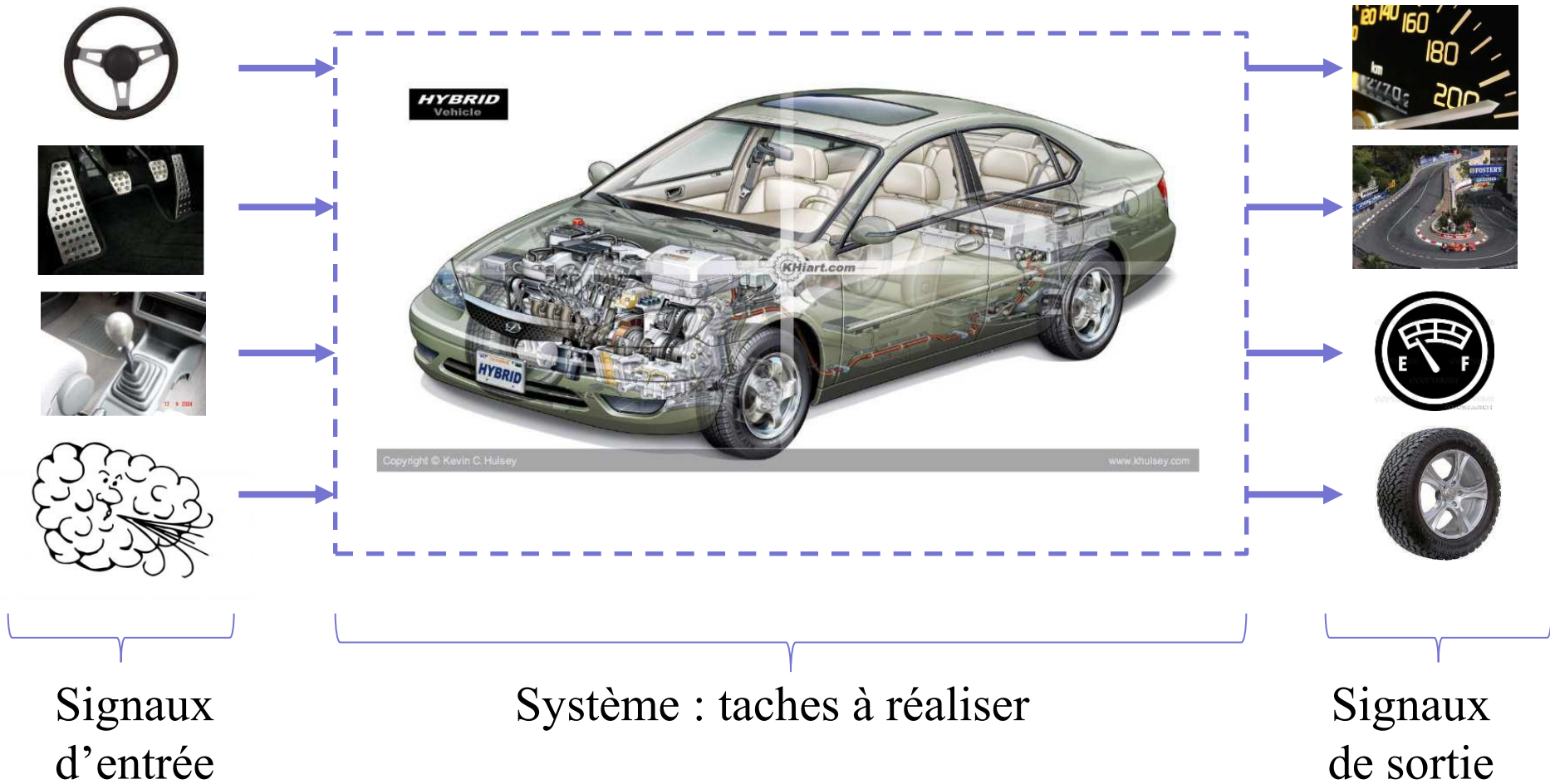
- Activité visant à représenter un objet ou un phénomène du monde réel par une instance du système formel choisi



P. Albertos, I. Mareels,
Feedback and Control for Everyone

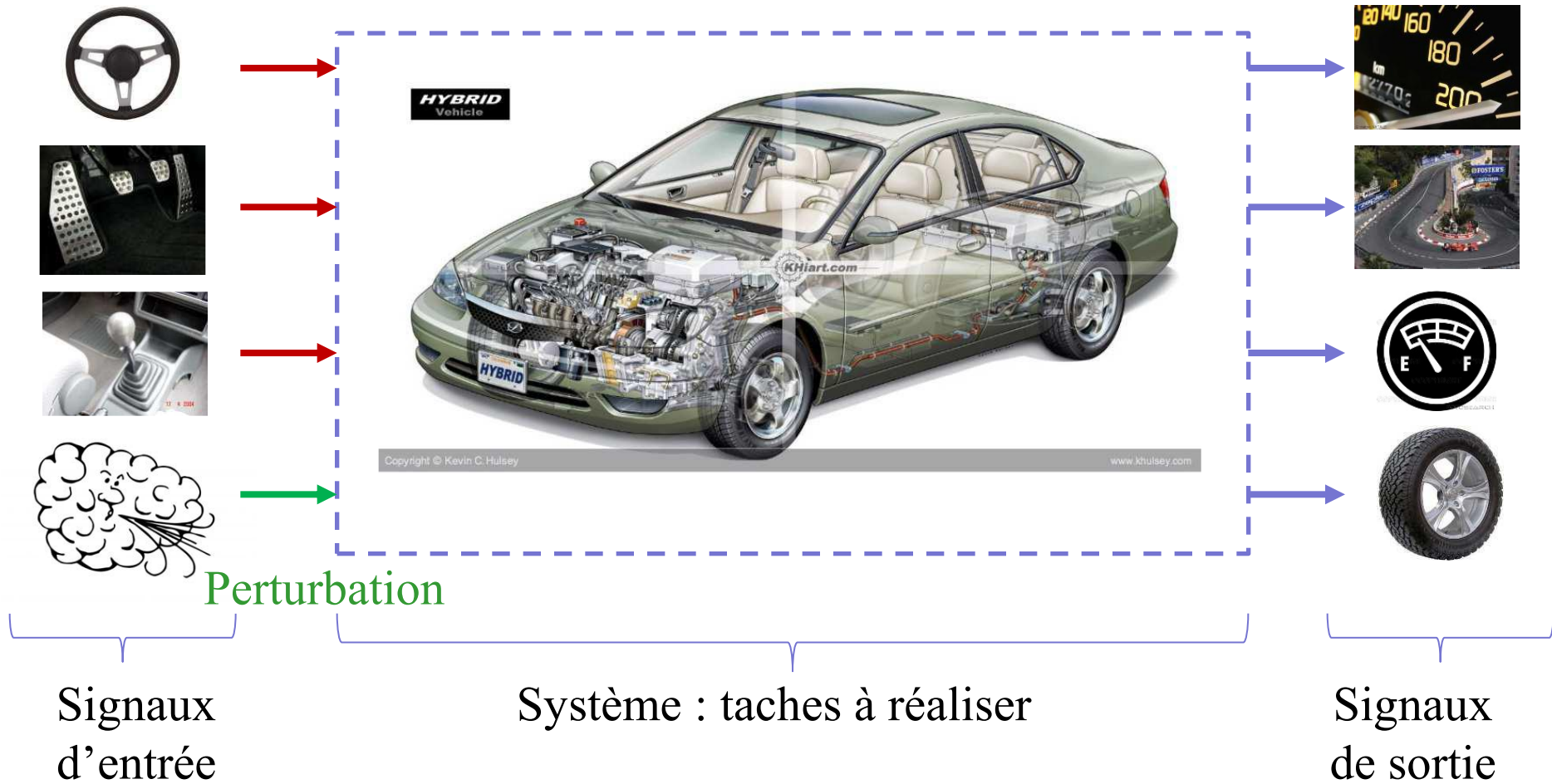
- Partie I : Modélisation des systèmes à état continu
- Partie II : Modélisation des systèmes à état discret (à évènements discrets)
- Partie III : Méthodologies pour l'analyse, l'identification des paramètres et l'évaluation des modèles

Exemple illustratif



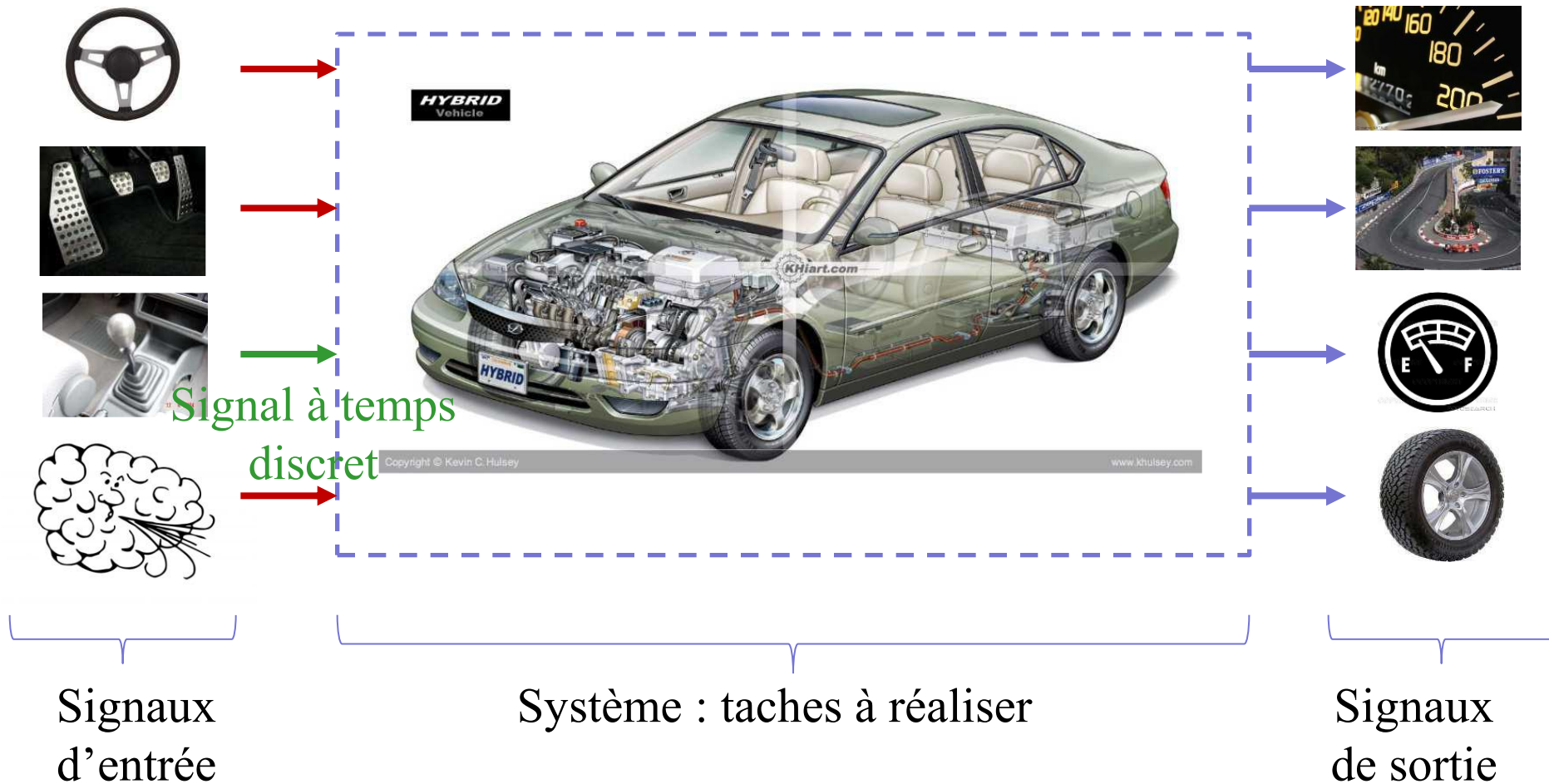
Exemple illustratif

Signaux d'entrée : choisis par l'utilisateur



Exemple illustratif

Signaux d'entrée à temps continu



Exemple illustratif

Sorties mesurées

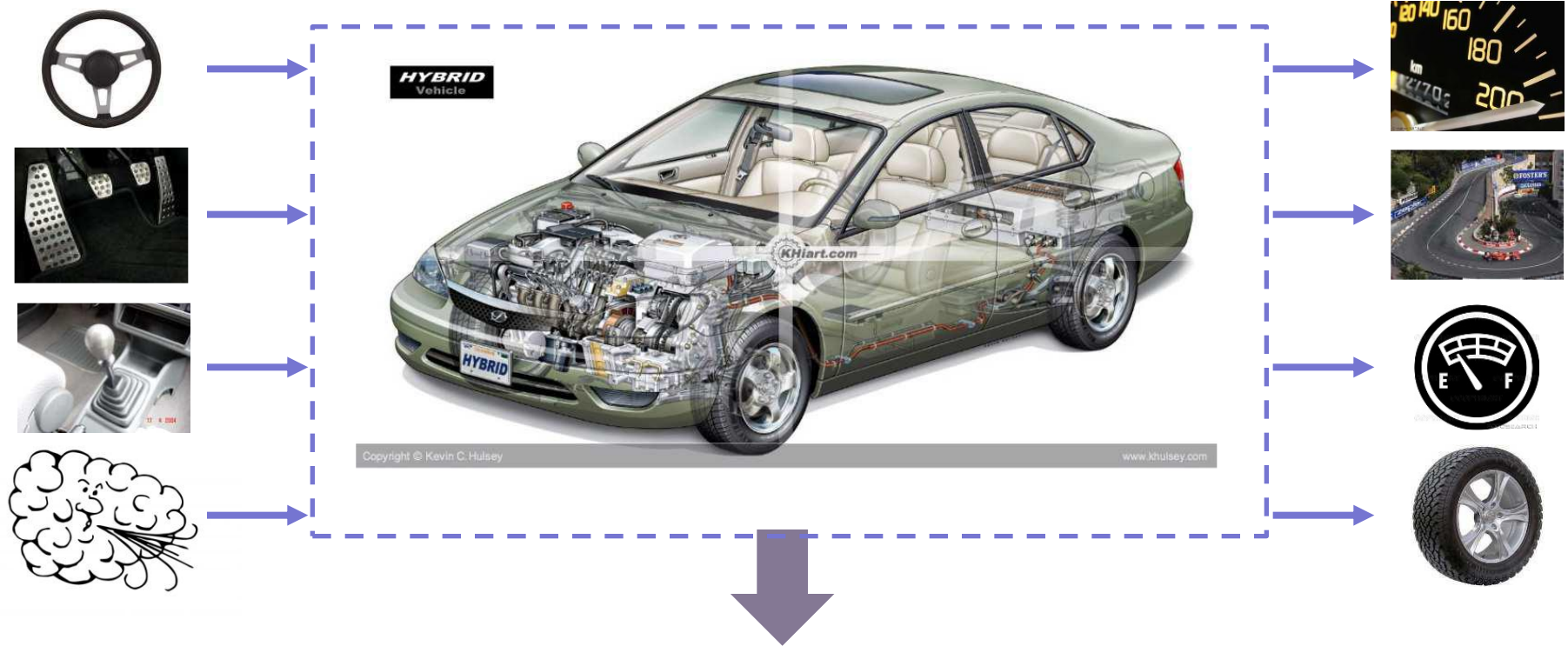


Signaux
d'entrée

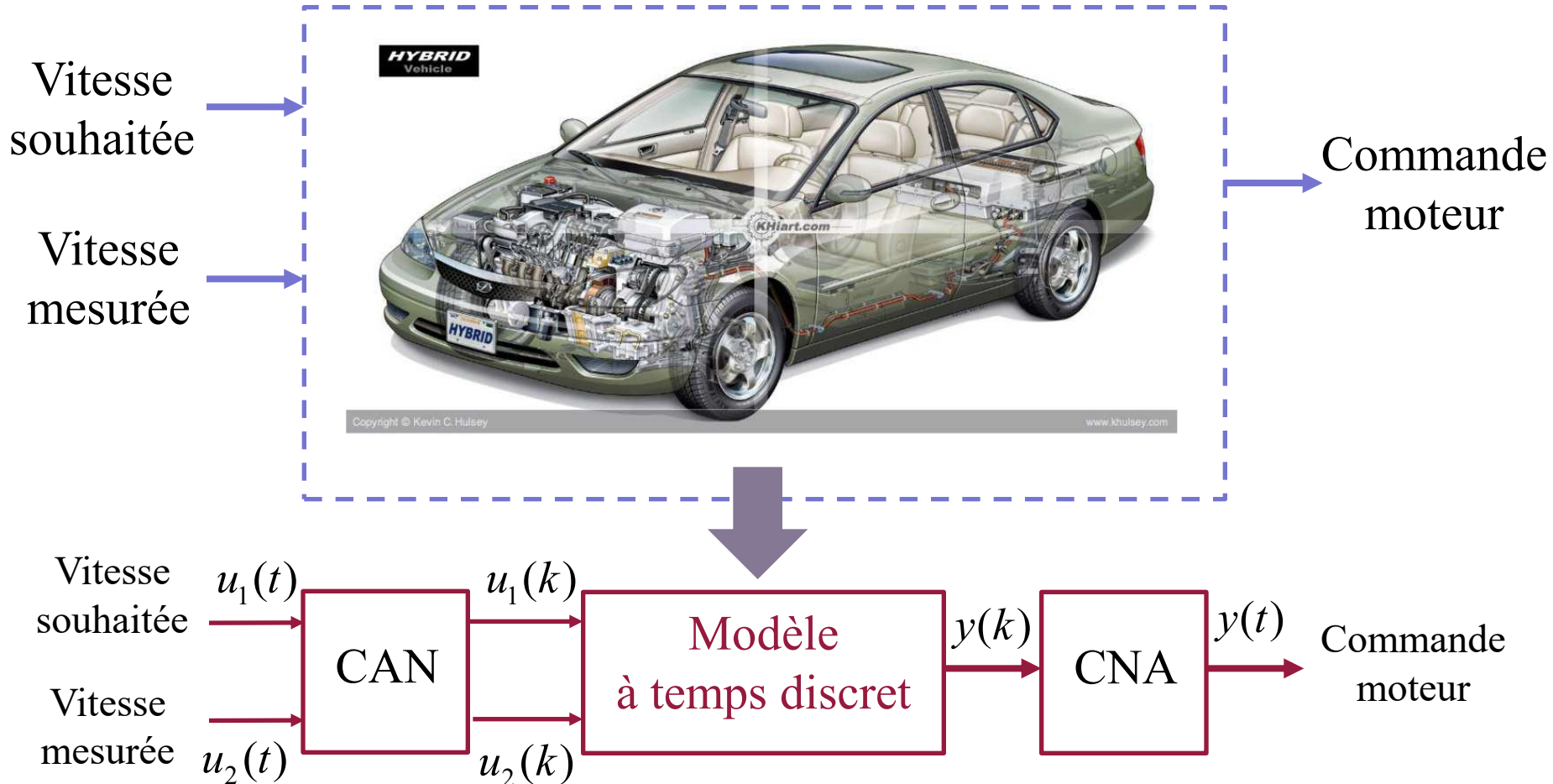
Système : tâches à réaliser

Signaux
de sortie

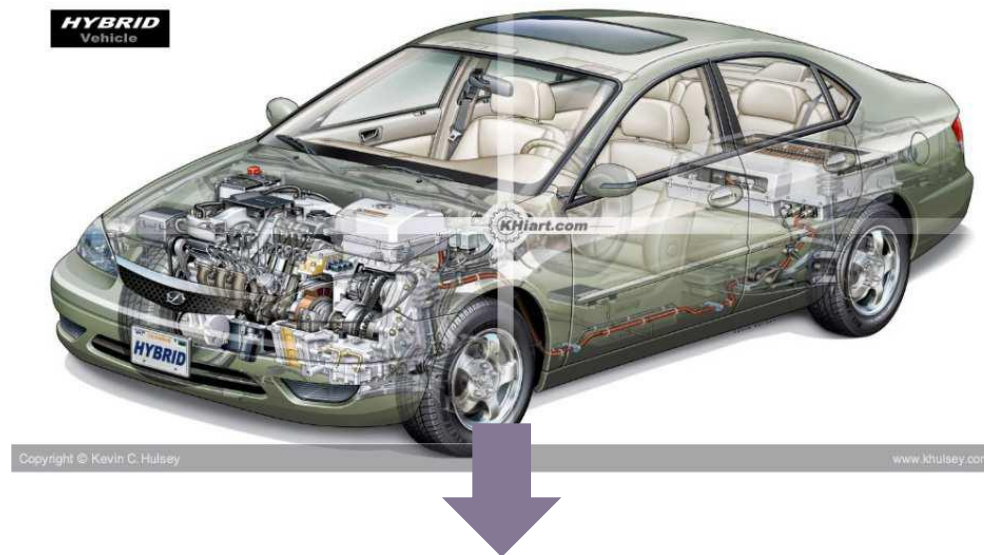
Point de vue : direction (axes XY)



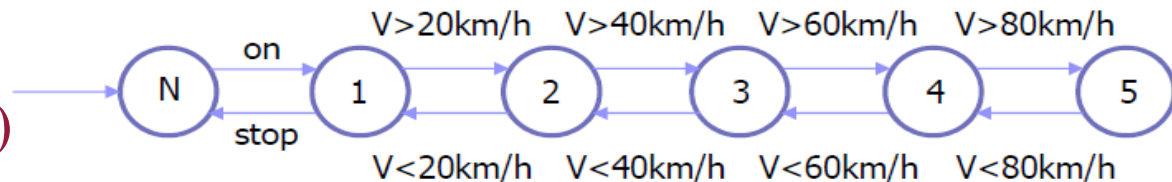
Point de vue : calculateur de bord



Point de vue : boîte de vitesse automatique



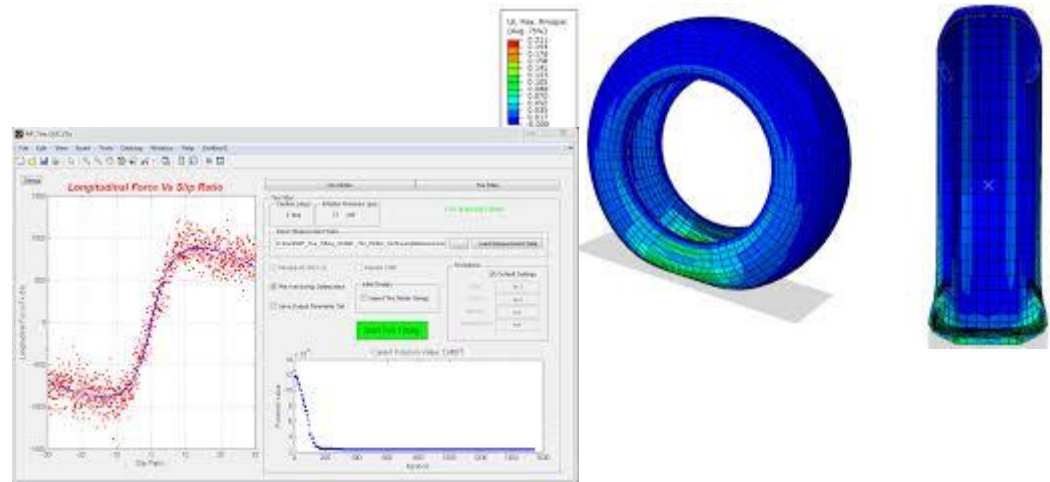
Système à état discret
(à évènements discrets)



- Identification des systèmes : structure & paramètres
- Système réel trop compliqué ou mal-connu

➡ *modèles simplifiés*

- Pertes ?
- Performances ?
- Choix ?



- Pas de modèle parfait

- Paramètres inconnus, incertitudes, perturbations et bruits, etc.
- Comment évaluer la qualité d'un modèle et sa fiabilité ?

➡ **Méthodes pour identifier et valider le modèle, pour évaluer la qualité du modèle et sa sensibilité aux valeurs des paramètres**

Objectifs du cours

- **Représenter** l'évolution d'un système (**Parties I et II**)
 - Modèle exploitable analytiquement (**TD**) ou numériquement (**simulations Matlab en TD/mini-projet**)
 - Modèle adapté à l'objectif de modélisation déterminé en termes d'hypothèses de modélisation, de représentativité et de niveau de complexité
 - Domaine de validité du modèle

- **Analyser** les propriétés du modèle ainsi obtenu (**Parties I et II**)
 - Confronter le modèle à la réalité (**Partie III**)
 - Evaluer les modèles proposés (**Partie III**)

- Acquérir une **expérience** supplémentaire de la modélisation
 - Pas une recette de cuisine sans la mettre en œuvre...! (**mini-projet**)

- **10 cours magistraux**

- M. Cicic, S. Font, V. Letort-Le Chevalier, H. Lhachemi, C. Stoica Maniu, G. Sandou, C. Vlad

- **8 TD – encadrants**

- Voie C : Cristina Vlad (gr. 7), Martin Soyer (gr. 8), Israel Hinostroza (gr. 9)

- **1 séance évaluation mini-projet**

- **Supports de cours**

- Polycopié (français & anglais), transparents du cours, Edunao...

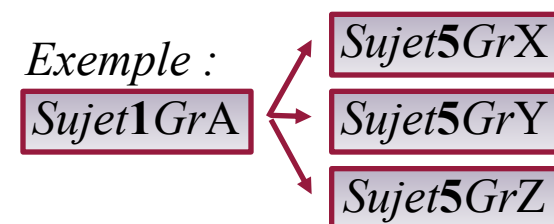
- **Prérequis : notions de calcul matriciel, maths, physique...**

- **Outils logiciels**

- TD : Matlab (*version 2016a ou plus récente*) avec portables des élèves
- **Formation Matlab Onramp à faire avant le premier TD (deadline : 30 Nov. à 23h)**

Ce cours est un prérequis pour la majorité des cours du nouveau cursus !

- **1 mini-projet** (équipes de 3, sur temps libre) – **consignes sur Edunao**
 - **Phase 1** : Choix sujet et trinôme (voies A&B&C&D), inscription sur Edunao
 - Ouverture : 27 novembre à 12h (midi)
 - Deadline : 7 décembre à 23h
 - **Phase 2** : Réalisation d'un projet proposé (*consignes à venir sur Edunao*)
 - Livrables :
 - Slides et courte vidéo de présentation contenant une analyse des 2 modèles (*Partie I et II*)
 - Un simulateur (*Partie I*) incluant une expérience typique à simuler (*Matlab ou Python*)
 - Deadline : 7 janvier à 23h
 - **Phase 3** : Evaluation par les pairs
 - Evaluation de projets réalisés par 3 autres équipes
 - Deadline : 11 janvier à 23h
- **Soutenance mini-projets : 13 janvier (13h45-15h15)**



- **Examen final (3h) : 75% de la note finale (individuel)**
 - Examen écrit, commun avec les autres voies, tous documents et avec calculatrice
 - Date : **vendredi 23 janvier**

- **Mini-projet : 25% de la note finale (par groupe de 3)**
Evaluation par les pairs et soutenance de mini-projet !

■ Evaluation compétence C1

Analyser, concevoir et réaliser des systèmes complexes à composantes scientifiques, technologiques, humaines et économiques

➡ Cohérence C1 & contenu du cours de Modélisation

■ Résultats affichés pour l'évaluation de C1

NA – *Non Atteint*




A – *Atteint*

■ Modes d'évaluation : examen & mini-projet

- *Une partie des questions permettant d'évaluer la compétence C1 marquées par (C1)*

Vous êtes acteurs de votre cursus...

■ Retours des années précédentes et évolutions

- Cours très intéressant, très bien construit
- Polycopié très claire, complet et très intéressant, sujets concrets
- **Evolutions**
 - Sujets mini-projet fournis, *nouveaux sujets en 2025-2026*
 - Reforme mini-projet 2025-2026 (*nouveaux livrables, soutenance*)
 - Groupe de mini-projets : choix libre dans la demi-promo A,B,C&D
 - Lien slides – polycopié 
 - **Réduction du présentiel** : exercices & Wooclap à travailler en autonomie, problème de synthèse à préparer/finir
 - Les PSI en ont déjà vu une partie  **pas les parties 2 et 3 !**
 **Investissez-vous sur le projet !**
- Contact : delegates.mode@listes.centralesupelec.fr

■ Introduction

■ Partie I : Modélisation des systèmes à état continu

- Chapitre 1 : Modélisation sous forme de représentation d'état
- Chapitre 2 : Représentation par fonctions de transfert à temps continu
- Chapitre 3 : Analyse de performances des systèmes à temps continu
- Chapitre 4 : Modélisation des systèmes à temps discret

TD sur la Partie I

- TD 1 : Représentation d'état, *application à un bras de robot*
- TD 2 : Transformée de Laplace pour les systèmes à temps continu, *application à un système de pesage*
- TD 3 : Transformée en z pour les systèmes à temps discret, *application à un système de gestion des horaires de trains*

■ **Partie II : Modélisation des systèmes à état discret**

- Chapitre 1 : Systèmes à événements discrets non temporisés
- Chapitre 2 : Systèmes à événements discrets temporisés

TD sur la Partie II

- TD 4 : Automates et réseaux de Petri, *application à un laboratoire de prélèvement sanguin*
- TD 5 : Systèmes hybrides, *application à un joueur de diablo*

- **Partie III** : Méthodes pour l'analyse, l'identification paramétrique et l'évaluation des modèles

- Chapitre 1 : Identification et évaluation des modèles
- Chapitre 2 : Analyse d'incertitude et de sensibilité

 **TD sur la Partie III**

- TD 6 : Identification par optimisation, *application au diagnostique du cancer de la prostate*
- TD 7 : Analyses d'incertitudes et de sensibilité, *application à la fabrication d'épées*

 **TD de synthèse Parties I & II & III**

- TD 8 : Problème de synthèse, *étude d'un quadricoptère*



Une partie du TD 8 à travailler en autonomie avant le TD !

Modélisation

Système à état continu à temps continu ou à temps discret

Système non linéaire - *représentation d'état*

Partie I

Point(s) d'équilibre

Linéarisation

Système linéaire - *représentation d'état*

Invariance dans le temps

Système linéaire invariant $\left\{ \begin{array}{l} - \text{représentation d'état} \\ - \text{fonction de transfert} \end{array} \right.$

Système à état discret (SED)

Système déterministe non temporisé

- *automate non temporisé*
- *réseau de Petri (RP) non temporisé*

- Partie II
- Système déterministe temporisé
 - *automate temporisé avec gardes (et inv.)*
 - *système hybride*
 - *RP P-temporisé ou T-temporisé*

Analyse des modèles

Stabilité

- EBSB
- asymptotique/exponentielle/au sens de Lyapunov

Partie I Analyse fréquentielle

- diagramme de Bode

Analyse temporelle

- réponse indicielle

Réduction de modèle

- connexions de systèmes, simplification pôles-zéros, approx. par un 2ème ordre

Réduction de modèle

- Partie II
- simulation/bisimulation d'automates
 - produit synchrone d'automates
 - transformation des RP

Analyse

- automates : accessible/co-accessible, émondé, sans blocage, ...
- RP : (pseudo-) vivant, borné, sauf, sans conflit, persistant, analyse linéaire par matrice d'incidence, ...

Evaluation des modèles

Identification des modèles

- identifiabilité
- structure et paramètres

Evaluation des modèles

- critères graphiques
- critères quantitatifs : biais, MSE, RRMSE, R2)

Sélection des modèles

- Partie III
- critères qualitatifs
 - critères quantitatifs : critères pénalisés (AIC, AICc), validation croisée

Analyse d'incertitudes

- modèle incert. : type A & B
- propagation incertitudes (intervalles, combinaison des variances, Monte Carlo)

Analyse de sensibilité

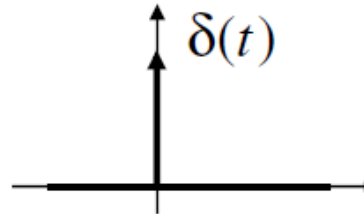
- indices locaux, SRC_i, Sobol
- indices totaux

Validation du modèle

- Notions de base de signaux
- Notion de système
- Classification des systèmes
- Modélisation des systèmes
- Quelques bases d'optimisation

➤ Signaux principaux

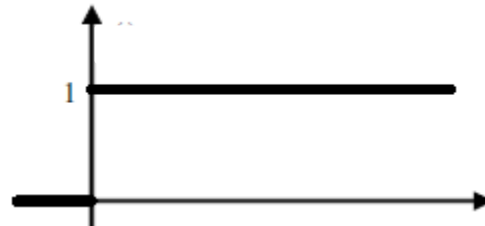
➤ Impulsion Dirac $\delta(t)$



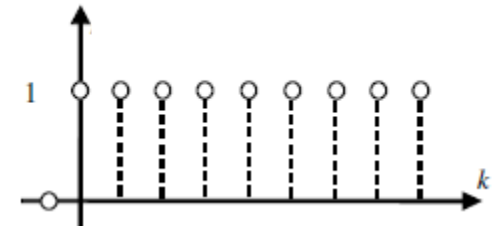
$$\begin{cases} \delta(t) = 0 \text{ si } t \neq 0 \\ \delta(0) = +\infty \end{cases} \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1 \quad \longrightarrow \quad \Phi(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) \Phi(t) dt$$

➤ Impulsion discrète $\delta(k)$: suite nulle partout sauf au point $k = 0$ où elle vaut 1

➤ Echelon unitaire



$$1(t) = \begin{cases} 0 \text{ si } t < 0 \\ 1 \text{ si } t \geq 0 \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$



$$1(k) = \begin{cases} 0 \text{ si } k < 0 \\ 1 \text{ si } k \geq 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

➤ Signal sinusoïdal

$$x(t) = A \sin(2\pi f_0 t + \varphi)$$

$$x(k) = A \sin(2\pi \nu_0 k + \varphi)$$

➤ Signaux

➤ Produit de convolution des deux signaux

➤ Produit de convolution à temps continu

$$y(t) = h * u(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\theta)u(t - \theta)d\theta$$

➤ Produit de convolution à temps discret

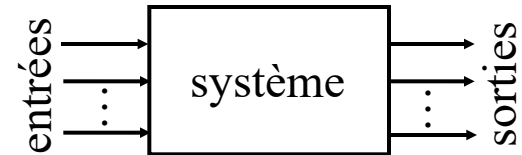
$$y(k) = h * u(k) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)u(k - n)$$

- Notions de base de signaux
- Notion de système
- Classification des systèmes
- Modélisation des systèmes
- Quelques bases d'optimisation

➤ Système

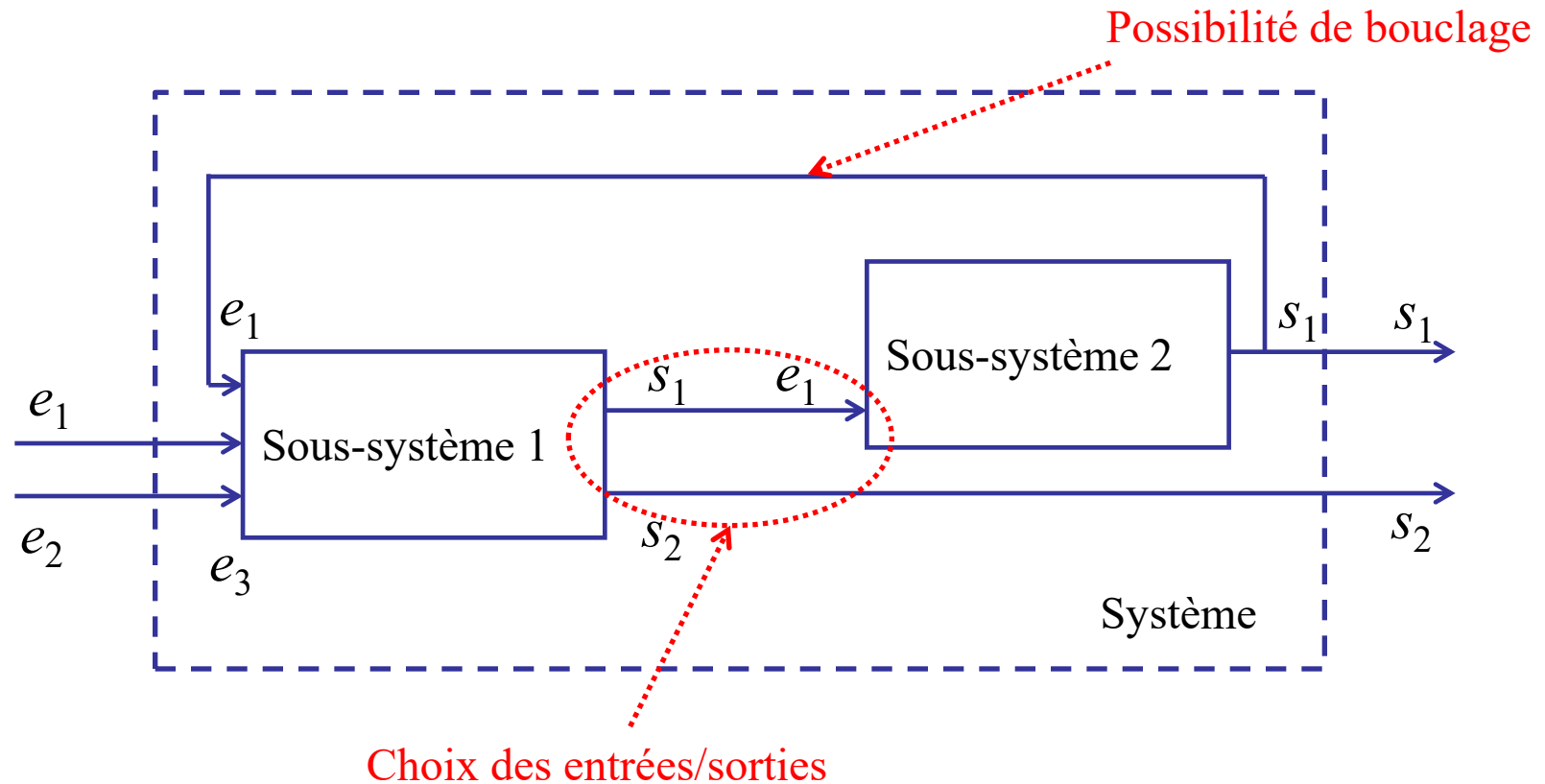
- Définition (Larousse) : Combinaison de parties qui se coordonnent pour concourir à un résultat

- Caractéristiques :



- Interdépendance de ses éléments
 - Entrées : *entrées de commande, perturbations*
 - Sorties : *sorties mesurées, sorties non mesurées*
- Synonymes : **procédé, processus** (**process, plant** en anglais)
- Notion utilisée dans plusieurs domaines : *Automatique* (système dynamique), *Informatique* (système d'information), *Economie* (système économique)...

➤ Décomposition d'un système en sous-systèmes

Poly
2.2

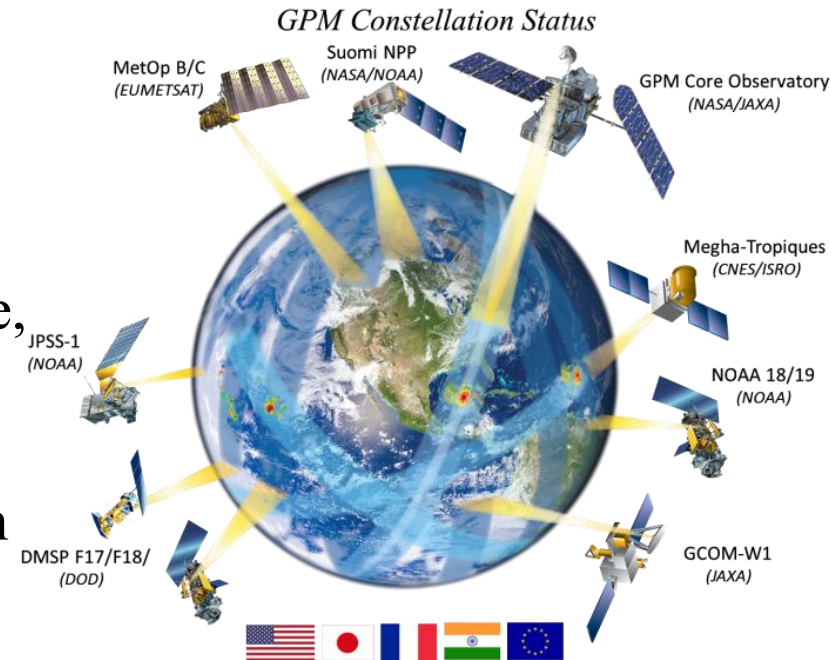
➤ Système de type **multi-agents** (an anglais **Multi-Agent System – MAS**)

- *Agent* : entité matérielle ou logicielle qui se trouve dans un certain environnement, et qui est capable d'actions autonomes dans l'environnement afin de répondre à ses objectifs
- *Système multi-agents* : système composé de plusieurs agents qui interagissent dans un environnement.
- *Caractéristiques* : autonomie de chaque agent, communication entre les agents, coordination, but commun
- *Exemples* : vol en formation, comportement des piétons dans une foule, fluidité de la circulation automobile



➤ **Système de systèmes (an anglais System of Systems – SoS)**

- *Définition* : systèmes de grande taille, intégrant plusieurs sous-systèmes, possible multidisciplinaires, autonomes, mais interconnectés, afin de satisfaire un besoin global
- *Caractéristiques* : indépendance opérationnelle, autonomie de gestion et répartition géographique des systèmes constitutifs, développement évolutif, comportement émergent
- *Exemples* : réseau de distribution électrique, control du trafic aérien au niveau européen, constellations de satellites...



- Notions de base de signaux
- Notion de système
- Classification des systèmes
- Modélisation des systèmes
- Quelques bases d'optimisation

➤ Classifications des systèmes

➤ Linéarité

➤ Systèmes linéaires

$$\begin{aligned} u_1(t) &\rightarrow y_1(t) \\ u_2(t) &\rightarrow y_2(t) \end{aligned}$$



$$\alpha u_1(t) + \beta u_2(t) \rightarrow \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$$

➤ Systèmes non linéaires

➤ Invariance dans le temps

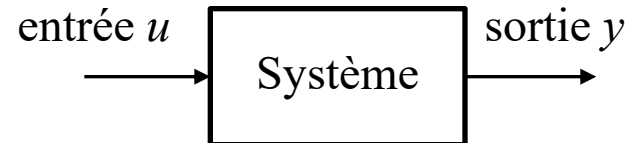
➤ Systèmes invariants dans le temps (stationnaires)

$$u(t) \rightarrow y(t)$$



$$u(t - \tau) \rightarrow y(t - \tau)$$

➤ Systèmes variants dans le temps



→ systèmes **LTI** =
systèmes linéaires
invariants dans le temps

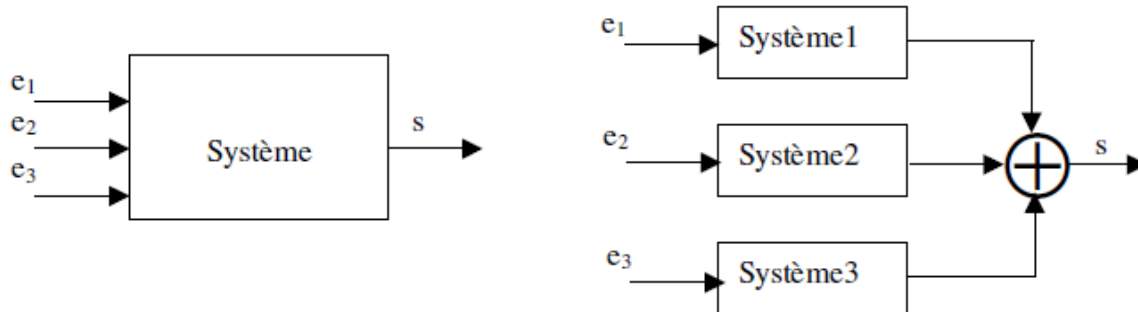
➤ Classifications des systèmes

➤ Nombre entrées/sorties

➤ **Monovariables**

➤ Multivariables ➡ voir le **théorème de superposition**

■ Théorème de superposition pour les systèmes linéaires (V1)



■ Théorème de superposition pour les systèmes linéaires (V2)

■ La sortie est la somme

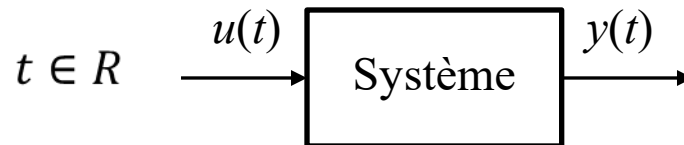
➤ *de la réponse aux conditions initiales*

➤ *et de la réponse à l'entrée pour des conditions initiales nulles*

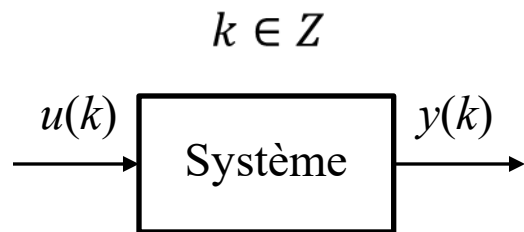
➤ Classifications des systèmes

➤ Critère temporel

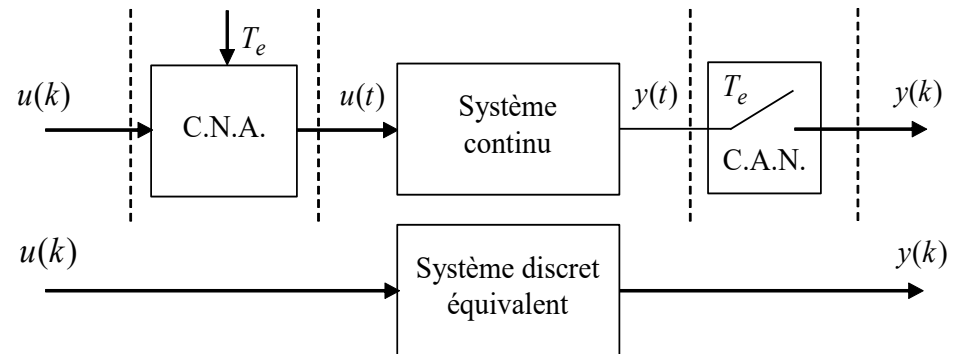
➤ **Systèmes continus** (ou systèmes à temps continu)



➤ **Systèmes discrets** (ou systèmes à temps discret)



système discret par nature



système échantillonné

➤ **Systèmes hybrides** (ou mixtes)

➤ Classifications des systèmes

➤ Causalité

- Systèmes **causaux** : *la réponse dépend que des valeurs de l'entrée aux instants précédents et présents*

$$y(t) = f(u(\tau), \tau \in]-\infty, t])$$

- Systèmes non-causaux

➤ Evolution au cours du temps

- Systèmes statiques : *ses sorties ne dépendent que des entrées au même instant.*

$$y(t) = f(u(t))$$

- Sinon, le système est dit « **dynamique** »

- Notions de base de signaux
- Notion de système
- Classification des systèmes
- Modélisation des systèmes
- Quelques bases d'optimisation

- Modéliser un système : *donner un ensemble d'équations décrivant le comportement du système*
 - Type d'équations
 - Equations statiques / algébriques
 - Linéaires : $y(t) = Au(t)$
 - Non-linéaires : $y(t) = f(u(t))$
 - Implicites : $f(y(t), u(t)) = 0$
 - Equations Différentiels Ordinaires
 - Linéaires, invariantes dans le temps : $\sum_{i=0}^n a_i y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j u^{(j)}(t)$
 - Linéaires, variantes dans le temps : $\sum_{i=0}^n a_i(t) y^{(i)}(t) = \sum_{j=0}^m b_j(t) u^{(j)}(t)$
 - Non linéaires, invariantes dans le temps : $f(y^{(n)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t)) = 0$
 - Non linéaires, variantes dans le temps : $f(y^{(n)}(t), \dots, \dot{y}(t), y(t), u^{(m)}(t), \dots, \dot{u}(t), u(t), t) = 0$

- Modéliser un système : *donner un ensemble d'équations décrivant le comportement du système*
 - Type d'équations
 - Equations aux Dérivées Partielles :

$$\alpha \frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + \lambda \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} + \beta \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} = u(t)$$

- Equations discrètes récurrentes :

$$\sum_{i=0}^n a_k^i y(k-i) = \sum_{j=0}^m b_k^j u(k-j)$$

- Un modèle n'est jamais parfait :
 - dépend de son objectif final (prédiction, simulation, optimisation, contrôle...)
 - doit être donné avec son domaine de validité

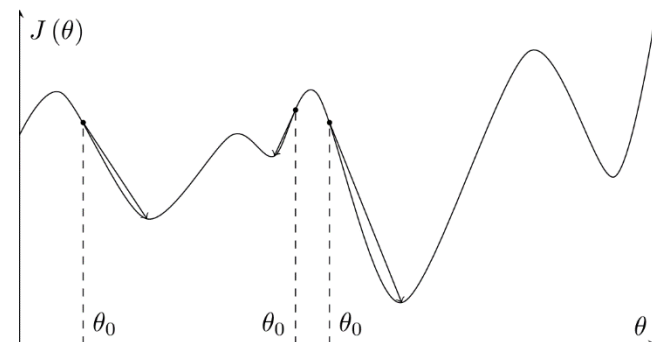
- Notions de base de signaux
- Notion de système
- Classification des systèmes
- Modélisation des systèmes
- Quelques bases d'optimisation

➤ Problème d'optimisation (cas général avec contraintes)

$$\theta^* = \arg \min_{\theta \in \mathbb{R}^n} J(\theta) \quad \text{Fonction coût (ou objectif)}$$

$$\text{s.c. } g(\theta) \leq 0 \quad \text{Contraintes inégalités}$$

$$h(\theta) = 0 \quad \text{Contraintes égalités}$$



Si problème global difficile

➡ recherche d'un *optimum local*
(sur un voisinage)

➤ Optimisation sans contraintes

$$\theta^* = \arg \min_{\theta} J(\theta)$$

➤ Condition nécessaire pour l'optimalité locale

$$\theta^* \text{ minimum local} \Rightarrow \begin{cases} \nabla J(\theta^*) = 0 \\ \nabla^2 J(\theta^*) \geq 0 \end{cases}$$

➤ Condition suffisante pour l'optimalité locale

$$\begin{cases} \nabla J(\theta^*) = 0 \\ \nabla^2 J(\theta^*) > 0 \end{cases} \Rightarrow \theta^* \text{ local minimum}$$