Seminar 5

INFO

gr. 132-134

Geometrie și algebră liniară

Apl (T) Fie $V_1 = \{(x, y, 0) / x, y \in \mathbb{R}\}$

$V_2 = \{(u, 0, v) / u, v \in \mathbb{R}\}$

a) Ar. că: $V_2 \subset \mathbb{R}^3$ ssp. vect. și precizați $\dim V_2$.

b) Dem. că: $V_1 + V_2 = \mathbb{R}^3$ (E adev. și rel. $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$?)

Rez:

a) Fie $w_1, w_2 \in V_2 \Rightarrow w_1 = (u_1, 0, v_1)$, $w_2 = (u_2, 0, v_2)$, $u_1, v_1, u_2, v_2 \in \mathbb{R}$; $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = (\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, 0, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$, unde $\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2, \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in V_2 \Rightarrow V_2 \subset \mathbb{R}^3$ ssp. vect.

$V_2 \ni (u, 0, v) = u e_1 + v e_3$, $u, v \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow B_2 = \{e_1, e_3\}$ bază $\Rightarrow \dim V_2 = 2$ (plan vectorial)

b) T. dimensiunii (Grassmann)

$$\boxed{\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)}$$

$V_1 \cap V_2 \ni v \Rightarrow \begin{cases} x = u \ (\stackrel{not}{=} t) \\ y = 0 \\ v = 0 \end{cases} \Rightarrow V_1 \cap V_2 = \{(t, 0, 0) / t \in \mathbb{R}\}$

$= \{t e_1 / t \in \mathbb{R}\} = \langle e_1 \rangle$

$\Rightarrow \dim V_1 \cap V_2 = 1$

Avem: $\dim V_1 = \dim V_2 = 2$

Așadar: $\dim(V_1 + V_2) = 2 + 2 - 1 = 3$.

$\dim(V_1+V_2)=3$
Dar: $V_1+V_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ ssp. vect. $\Rightarrow \boxed{V_1+V_2=\mathbb{R}^3}$

! Relația $V_1 \oplus V_2 = \mathbb{R}^3$ nu este adevărată deoarece: $V_1 \cap V_2 \neq \{0_{\mathbb{R}^3}\}$ (mai exact, $V_1 \cap V_2 = \langle e_1 \rangle$).

(T)* Fie $V_1 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / \underset{\text{urma}}{Tr}\, A = 0\}$

$V_2 = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) / A = \lambda I_n, \lambda \in \mathbb{R}\}$

a) Ar. că: $V_1, V_2 \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ ssp. vect.

b) Dem. că: $V_1 \oplus V_2 = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

c) Verificați teorema dimensiunii în acest caz.

Aplicații liniare

(morfisme de spații vectoriale)

Def: Fie $V, W/_K$ → spații vectoriale

O aplicație $f: V \to W$ s.n. aplicație liniară (sau morfism de sp. vect.) dacă: $\begin{cases} 1)\ f(x+y)=f(x)+f(y) \\ 2)\ f(\lambda x)=\lambda f(x) \end{cases}, (\forall)\, x,y \in V, \lambda \in K \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow [\, f(\alpha x+\beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y),\ (\forall)\, x,y \in V,\ \alpha,\beta \in K \,]$

Obs: $f(0_V) = 0_W$.

Exemple:

1) $V/_K$ sp. vect.

$0_V : V \to V$, $0_V(x) = 0$, $(\forall)\ x \in V$ (apl. nulă)

$1_V : V \to V$, $1_V(x) = x$, $(\forall)\ x \in V$ (apl. identică)

2) $T_r : \mathcal{M}_n(K) \to K$, $T_r(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (apl. urmă)

Avem: $\begin{cases} T_r(A+B) = T_r(A) + T_r(B) \\ T_r(\lambda A) = \lambda T_r(A) \end{cases}$, $(\forall)\ A, B \in \mathcal{M}_n(K)$, $\lambda \in K$

3) $f : \mathcal{M}_n(K) \to K^{n^2}$

$f(A) = (a_{11}, \dots, a_{1n}, a_{21}, \dots, a_{2n}, \dots, a_{n1}, \dots, a_{nn})$, $(\forall)\ A = (a_{ij})_{i,j=\overline{1,n}}$

4) Fie $A \in \mathcal{M}_{(m,n)}(K)$

$f_A : K^n \to K^m$, $f_A(X) = AX$

Avem: $f_A(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = f_A(X) + f_A(Y)$, $(\forall)\ X, Y \in K^n$

$f_A(\lambda X) = A(\lambda X) = (A\lambda)X = (\lambda A)X = \lambda(AX) = \lambda f_A(X)$, $(\forall)\ X \in K^n$, $\lambda \in K$

<u>Obs</u>: 1) $(\exists)$ tot atâtea apl. liniare câte matrice.

2) $(\forall)$ apl. liniară e de tipul acesta.

5) $\det : \mathcal{M}_n(K) \to K$ <u>nu</u> e apl. liniară pt. că $\det(A+B) \neq \det A + \det B$

Fie $f : V \to W$ apl. liniară

$\mathrm{Ker}\, f = \{x \in V \mid f(x) = 0_W\} \subseteq V$ ssp. vect.
(nucleul)

$\mathrm{Im}\, f = \{y \in W \mid (\exists)\ x \in V \text{ a.î. } f(x) = y\} \subseteq W$ ssp. vect.
(imaginea)

$\boxed{P}$ a) O apl. lin. $f: V \to W$ e inj. $\Leftrightarrow \operatorname{Ker} f = \{0_V\}$

b) O apl. lin $f: V \to W$ e surj. $\Leftrightarrow \operatorname{Im} f = W$

c) O apl. lin $f: V \to W$ e bij $\Leftrightarrow \begin{cases} \operatorname{Ker} f = \{0_V\} \\ \operatorname{Im} f = W \end{cases}$

T (rang-defect)

Fie $V, W/_K$ - 2 sp. vect. (finit dimensionale).

$f: V \to W$ apl. liniară.

Atunci: $\underbrace{\dim_K \operatorname{Ker} f}_{= \operatorname{def}(f)} + \underbrace{\dim_K \operatorname{Im} f}_{= \operatorname{rg}(f)} = \dim_K V$

$\boxed{Ap1}$. Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$f(x,y) = (x+y, x-y, y)$, $(\forall)\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

a) Ar. că f e aplicație liniară.

b) Scrieți matricea asociată lui f în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$.

Rez:

a)

(V_1) Fie $v_1 = (x_1, y_1)$, $v_2 = (x_2, y_2)$ $\in \mathbb{R}^2$

și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Atunci: $f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = f(\alpha_1 (x_1, y_1) + \alpha_2 (x_2, y_2)) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 - \alpha_1 y_1 - \alpha_2 y_2, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$= (\alpha_1 (x_1 + y_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2), \alpha_1 (x_1 - y_1) + \alpha_2 (x_2 - y_2), \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$

$= \alpha_1 (x_1 + y_1, x_1 - y_1, y_1) + \alpha_2 (x_2 + y_2, x_2 - y_2, y_2) = \alpha_1 f(x_1, y_1) + \alpha_2 f(x_2, y_2) =$

$= \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$

$\boxed{V_2}$ Scriem $f(X) = AX$, unde $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(f. matriceală)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{(3,2)}(\mathbb{R})$$

Fie: $\underset{\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}}{X_1}, \underset{\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}}{X_2} \in \mathbb{R}^2$

și $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$f(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = A(\alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2) = A(\alpha_1 X_1) + A(\alpha_2 X_2)$$
$$= (A\alpha_1)X_1 + (A\alpha_2)X_2 = (\alpha_1 A)X_1 + (\alpha_2 A)X_2 = \alpha_1(AX_1) + \alpha_2(AX_2)$$
$$= \alpha_1 f(X_1) + \alpha_2 f(X_2) \Rightarrow f \text{ apl. lin. (morf. de sp. vect.)}$$

b) $A = \begin{pmatrix} \underset{f(e_1)}{\boxed{\begin{matrix}1\\1\\0\end{matrix}}} & \underset{f(e_2)}{\boxed{\begin{matrix}1\\-1\\1\end{matrix}}} \end{pmatrix} \to$ m. asoc. apl. lin. f în raport cu bazele canonice din $\mathbb{R}^2$, resp. $\mathbb{R}^3$.

, unde $\underbrace{\{e_1, e_2\} \subset \mathbb{R}^2}_{\text{b. canonică}}$

$f(e_1) = f(1,0) = (1,1,0)$

$f(e_2) = f(0,1) = (1,-1,1)$

$\boxed{T}$ Aceleași cerințe pentru: $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x+y+z, x-y+z, x-y-z)$

$\boxed{Apl}$: Fie $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$f(x,y) = (x+y, x, -y)$ apl. liniară.

a) Determinați $\operatorname{Ker} f$ și $\operatorname{Im} f$

b) Precizați dacă f e injectivă, surjectivă, resp. bijectivă

c) Verificați T. rang-defect în acest caz.

Rez: a) $\mathrm{Ker}\, f = \{ v \in \mathbb{R}^2 \,/\, \underline{f(v) = 0_{\mathbb{R}^3}} \}$
(nucleul) $\qquad$ " (x,y)

$f(x,y) = (0,0,0) \Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 0 \\ x = 0 \\ -y = 0 \end{cases}$ Teoria S.L.O. $\Rightarrow x = y = 0$ sol. unică
$(\mathrm{rg}\, A = 2)$
"
$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Deci: $\mathrm{Ker}\, f = \{ 0_{\mathbb{R}^2} \}$

$\mathrm{Im}\, f = \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, (\exists)\, (x,y) \in \mathbb{R}^2$ a.î. $\underline{f(x,y) = (x', y', z')} \}$
(imaginea)

$f(x,y) = (x', y', z') \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = x' & (1) \\ x = y' & (2) \\ -y = z' \Leftrightarrow \underline{y = -z'} & (3) \end{cases}$

(2),(3) în (1)
$\Rightarrow y' - z' = x' \Leftrightarrow x' - y' + z' = 0$

Deci: $\mathrm{Im}\, f = \{ (x', y', z') \in \mathbb{R}^3 \,/\, x' - y' + z' = 0 \} \subset \mathbb{R}^3$
ssp. vect.

b) $\mathrm{Ker}\, f = \{ 0_{\mathbb{R}^2} \} \Leftrightarrow f$ injectivă
$\mathrm{Im}\, f \subset \mathbb{R}^3 \Rightarrow f$ nu este surj
subsp. propriu
$\Rightarrow f$ nu este nici bijectivă.

c) Verificăm T. rang-defect în acest caz, i.e.

$\dim(\mathrm{Ker}\, f) + \dim(\mathrm{Im}\, f) = \dim \mathbb{R}^2$

Evident: $\dim \mathrm{Ker}\, f = 0$
şi
$\dim \mathbb{R}^2 = 2$

Determinăm $\underline{\dim \mathrm{Im}\, f}$.

(V1) $\underline{rg f = \dim(\operatorname{Im} f)} = n - \underset{\underset{(1\ -1\ 1)}{\shortparallel}}{rg\, A'} = 3-1=\underline{2}$

sau

(V2) $\operatorname{Im} f \ni (x', y', z') = (x', x'+z', z') = (x', x', 0) + (0, z', z')$

$x' - y' + z' = 0 \iff y' = x' + z'$

$= x'\underbrace{(1,1,0)}_{v_1} + z'\underbrace{(0,1,1)}_{v_2} = x'v_1 + z'v_2 \Rightarrow B = \{v_1, v_2\} \subset \operatorname{Im} f$

$x', z' \in \mathbb{R}$ s. de generatori

+ s.v. lin. indep. (se verifică ușor)

$\Rightarrow B \subset \operatorname{Im} f$

bază $\Rightarrow$ $\underline{\dim(\operatorname{Im} f) = 2}$

Revenim, și observăm că:

$0 + 2 = 2$, i.e. $\dim(\operatorname{Ker} f) + \dim(\operatorname{Im} f) = \dim \mathbb{R}^2$,

echivalent cu $\boxed{\operatorname{def} f + rg f = 2}$.

Forme liniare pe un sp. vect.

Dualul unui sp. vect. Baze duale

Def: Fie $V/_K$ sp. vect. și $f : V \to K$ o aplicație care

satisface cond.: $\left[(\forall)\, \alpha_1, \alpha_2 \in K,\ v_1, v_2 \in V \quad f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)\right]$

f s.n. formă liniară pe V (sau funcțională liniară pe V)

<u>Exemplu</u>: $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$f(x_1, \dots, x_n) = a_1 x_1 + \dots + a_n x_n$$

$a_i \in \mathbb{R}$, $(\forall)\, i = \overline{1,n}$
const.

f este o formă liniară

$V^* \stackrel{not}{=} \{ f : V \to K \,/\, f \text{ - formă lin. pe } V \}$

$+ : V^* \times V^* \to V^*$

$$(f+g)(v) = f(v) + g(v), \ (\forall)\, v \in V$$

$\cdot : K \times V^* \to V^*$

$$(\alpha f)(v) = \alpha f(v), \ (\forall)\, v \in V, \ \alpha \in K$$

$(V^*, +, \cdot)$ sp. vect. dual al lui V.

$\boxed{P}$. Fie V/K sp. vect.
Atunci: $\dim V = \dim V^*$

<u>Obs</u>: Dacă $B = \{e_1, \dots, e_n\} \subset V$, $\dim V = n$
bază

$\Rightarrow B^* = \{f_1, \dots, f_n\} \subseteq V^*$, unde $f_i : V \to K$, $(\forall)\, i = \overline{1,n}$
bază (baza duală bazei B din V) def. prin $f_i(e_j) = \delta_{ij}$, $(\forall)\, i,j = \overline{1,n}$

$$\left\{ \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{dc } i = j \\ 0, & \text{dc } i \neq j \end{cases} \right\}$$

simbolul lui Kronecker

$\boxed{A_1 1}$ Fie $B=\{e_1, e_2, e_3\} \subset \mathbb{R}^3$
baza canonică

O formă liniară $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este definită prin:

$$\begin{cases} f(e_1) = 1 \\ f(e_2) = 2 \\ f(e_3) = 3 \end{cases}$$

Fie $B_1 = \{v_1 = (1,1,0),\ v_2 = (0,1,-1),\ v_3 = (-1,0,1)\} \subset \mathbb{R}^3$
bază

Determinați baza duală B_1^* și exprimați forma liniară f în raport cu B_1^*.

Rez: $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ este de forma:

$$f(x_1, x_2, x_3) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3, \ (\forall)(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$$

Avem: $\begin{cases} 1 = f(e_1) = f(1,0,0) = a_1 \\ 2 = f(e_2) = f(0,1,0) = a_2 \\ 3 = f(e_3) = f(0,0,1) = a_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_2 = 2 \\ a_3 = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow f(x_1, x_2, x_3) = x_1 + 2x_2 + 3x_3, \ (\forall)(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Rezultă că

$$\begin{cases} f(v_1) = f(1,1,0) = 3 \\ f(v_2) = f(0,1,-1) = -1 \\ f(v_3) = f(-1,0,1) = 2 \end{cases}$$

Notăm cu $B_1^* = \{f^1, f^2, f^3\}$ baza duală lui B_1.

$\Leftrightarrow f^i(v_j) = \delta_{ij}, \ (\forall)\ i,j = \overline{1,3}$

Fie $f^1(x_1, x_2, x_3) = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \ (\forall)(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$.

Avem: $\begin{cases} f^1(v_1) = f^1(1,1,0) = \alpha_1 + \alpha_2 = \delta_{11} = 1 \\ f^1(v_2) = f^1(0,1,-1) = \alpha_2 - \alpha_3 = \delta_{12} = 0 \\ f^1(v_3) = f^1(-1,0,1) = -\alpha_1 + \alpha_3 = \delta_{13} = 0 \end{cases}$

$\Leftarrow (S_1) \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \\ \alpha_2 - \alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathcal{S}_1 = \{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})\}$

Deci: $f^1(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$

Analog, se calculează: $f^2(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3$,

$f^3(x_1, x_2, x_3) = -\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3$.

! Obs. că matricea coord. formelor liniare ce formează baza duală B_1^* (așezate pe linii), adică $A^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

este inversa matricii coord. vect. ce formează baza B_1 (așezate pe coloane),

adică $\underline{A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = (A^*)^{-1}}$.