= CURS 5 =

<u>Teoremă</u> Orice funcție (parțială) calculabilă cu PS este (parțial) Turing calculabilă.

<u>Clasa funcțiilor (parțiale) recursive</u>

Funcții elementare: succ : $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $s(x) = x+1$

proiecții : $\pi_k^{(n)} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $\pi_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_k$

constante : $C_k^{(n)} : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$, $C_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = k$.

(I) Sunt aceste funcții calculabile cu PS ?

succ : $Y \leftarrow X$

$Y \leftarrow Y+1$.

π_k : $Y \leftarrow X_k$.

C_k : $\left.\begin{array}{l} Y \leftarrow Y+1 \\ \dots \\ Y \leftarrow Y+1 \end{array}\right\}$ k ori

<u>Operații cu funcții</u>

1) Compunere funcțională

$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ este definită prin comp. funct. a funcțiilor $h : \mathbb{N}^m \to \mathbb{N}$ și $g_i : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$, $i = \overline{1,m}$

dacă $f(x_1, \dots, x_k) = h(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k))$

(II) Dacă funcțiile g_i și h sunt calculabile cu PS este f calc. cu PS ?

$Z_1 \leftarrow g_1(X_1, \dots, X_k)$

$Z_2 \leftarrow g_2(X_1, \dots, X_k)$

$\dots$

$Z_m \leftarrow g_m(X_1, \dots, X_k)$

$Y \leftarrow h(Z_1, \dots, Z_m)$

GOTO E

A_j

$A_j : Z_t \leftarrow Z_t$.

Recurența primitivă

$f : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ este definită prin recurența primitivă din $g : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ și $h : \mathbb{N}^{k+2} \to \mathbb{N}$ dacă

$$f(x_1, \dots, x_k, 0) = g(x_1, \dots, x_k)$$

$$f(x_1, \dots, x_k, t+1) = h(x_1, \dots, x_k, t, f(x_1, \dots, x_k, t))$$

(iii) Dacă funcțiile g și h sunt calc. cu PS, este f calc. cu PS? DA.

$Z_1 \leftarrow g(X_1, \dots, X_k)$ // $Z_1 = f(x_1, \dots, x_k, 0)$

IF $X_{k+1} \neq 0$ GOTO A_1

$Y \leftarrow Z_1$

GOTO E

$$A_1 : Z_2 \leftarrow h(\underbrace{X_1, \dots, X_k, \overset{0}{Z_3}, \overset{f(x_1, \dots, x_k, 0)}{Z_1}}_{f(x_1, \dots, x_k, 1)})$$

$X_{k+1} \leftarrow X_{k+1} \dot{-} 1$.

$Z_3 \leftarrow Z_3 + 1$.

$Z_1 \leftarrow Z_2$

IF $X_{k+1} \neq 0$ GOTO A_1.

$Y \leftarrow Z_1$

Minimizare nemărginită

$f : \mathbb{N}^k \to \mathbb{N}$ este definită prin minimizare nemărginită din $g : \mathbb{N}^{k+1} \to \mathbb{N}$ dacă

$$f(x_1, \dots, x_k) = \min_{t} \left[g(x_1, \dots, x_k, t) = 0 \right]$$

(iv) Dacă g este calc. cu PS, este f calc. cu PS?

$A_2: Z_1 \leftarrow g(X_1, \dots, X_k, Y)$

IF $Z_1 \neq 0$ GOTO A_1

GOTO E

$A_1: Y \leftarrow Y+1$

GOTO A_2

<u>Def.</u> O funcție (parțială) este recursivă dacă se poate obține din funcții elementare prin aplicarea iterată a op. de comp funcționala, recurența primitivă și minimizare nemărginită.

<u>Teoremă</u> Orice funcție (parțială) recursivă este (parțial) calculabilă cu PS.

Fie $\mathrm{sum}(x_1, x_2) = x_1 + x_2$: Este recursivă?

$$f(x_1, 0) = x_1 = \pi_1^{(1)}(x_1)$$

$$f(x_1, x_2+1) = f(x_1, x_2) + 1 = \mathrm{succ}\left(\pi_3^{(3)}(x_1, x_2, f(x_1, x_2))\right)$$

$$\mathrm{prod}(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

$$\mathrm{prod}(x_1, 0) = 0$$

$$\mathrm{prod}(x_1, x_2+1) = \mathrm{prod}(x_1, x_2) + x_1$$

$x!$.
$$0! = 1$$
$$(x+1)! = x!\,(x+1) = x! \cdot \mathrm{succ}(x)$$

$$\begin{tikzcd} FR \arrow[r] & PS \arrow[dl] \\ MT \arrow[u, "?"] & \end{tikzcd}$$

Codificarea PS $\quad P \longleftrightarrow n(P)\ (\#(P)) \in \mathbb{N}$

Dacă g este Turing calculabilă este f, obținută prin minimizare nemărginită din g, Turing calc? (0,2p)