

Procesarea semnalelor

Transformata Discretă Cosinus

Paul Irofti

Universitatea din București

Facultatea de Matematică și Informatică

Departmentul de Informatică

Email: paul.irofti@fmi.unibuc.ro

Discretizare și eșantionare

Continuu:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \quad (1)$$

Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi (f_0 + k f_s) n t_s) \quad (2)$$

unde

- ▶ f_0 – frecvența (Hz) măsoară numărul de oscilații într-o secundă
- ▶ n – eșantionul, indexul în șirul de timpi $0, 1, 2 \dots$
- ▶ t_s – perioada de eșantionare; constantă (ex. la fiecare secundă)
- ▶ $n t_s$ – orizontul de timp (s)
- ▶ $f_0 n t_s$ – numărul de oscilații măsurat
- ▶ $2\pi f_0 n t$ – unghiul măsurat în radiani (vezi note de curs)
- ▶ f_s – frecvența de eșantionare (Hz)
- ▶ $f_0 + k f_s$ – frecvența de aliare, $\forall k \in \mathbb{N}$

Transformata Fourier Discretă (DFT)

Definiție

Transformata Fourier a unui semnal discret (aperiodic):

$$\begin{aligned} X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) [\cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N)] \end{aligned} \tag{3}$$

- ▶ $X(m)$ – componenta m DFT (ex. $X(0), X(1), X(2), \dots$)
- ▶ m – indicele componentei DFT în domeniul frecvenței ($m = 0, 1, \dots, N - 1$)
- ▶ $x(n)$ – eșantioanele în timp (ex. $x(0), x(1), x(2), \dots$)
- ▶ n – indicele eșantioanelor în domeniul timpului ($n = 0, 1, \dots, N - 1$)
- ▶ N – numărul eșantioanelor în timp la intrare și numărul componentelor în frecvență la ieșire

Generalizare DFT

DFT aparține unei clase generale de transformări ortogonale de lungime finită de tipul:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \Phi_m^H(n) \quad (4)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) \Phi_m^H(n) \quad (5)$$

unde secvențele, vectorii, $\Phi_m(n)$ formează o bază ortogonală:

$$\Phi_i \Phi_j^H = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \Phi_i(n) \Phi_j^H(n) = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \quad (6)$$

Unde H este operatorul de conjugare și transpunere.

Baza ortogonală DFT

În cazul DFT baza ortogonală este

$$W_N = e^{-j2\pi/N} \quad (7)$$

Putând rescrise DFT și IDFT:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{mn} \quad (8)$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) W_N^{-mn} \quad (9)$$

Notăția diferă un pic față de formularea generală, dar este cea întâlnită în literatură.

Baza ortogonală reală ($\Phi_m \in \mathbb{R}$)

În cazul DFT baza ortogonală este alcătuită din numere complexe:

$$W_N = e^{-j2\pi/N} = \cos(2\pi/N) + j \sin(2\pi/N) \quad (10)$$

dar multe semnale au doar componente reale și sunt prelucrate pe calculatoare numerice ce suportă nativ numere reale.

→ nevoia unei baze reale a.î. când $x(n) \in \mathbb{R}$ să fie și $X(m) \in \mathbb{R}$

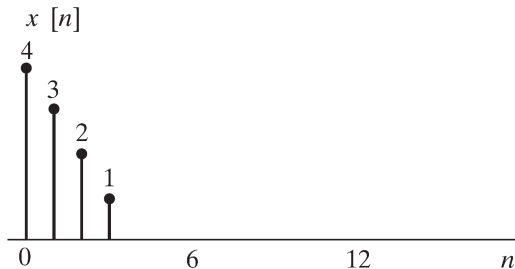
Apar mai multe transformate: Haar, Hadamard, DCT.

Cea mai apropiată de DFT este DCT cu multiple aplicații în practică (ex. JPEG, MP3 etc.)

Transformata cosinus discretă (DCT)

DCT folosește cosinus pentru a forma baza vectorială Φ_m .

Fie $x(n)$ un semnal cu $N = 4$ eșantioane

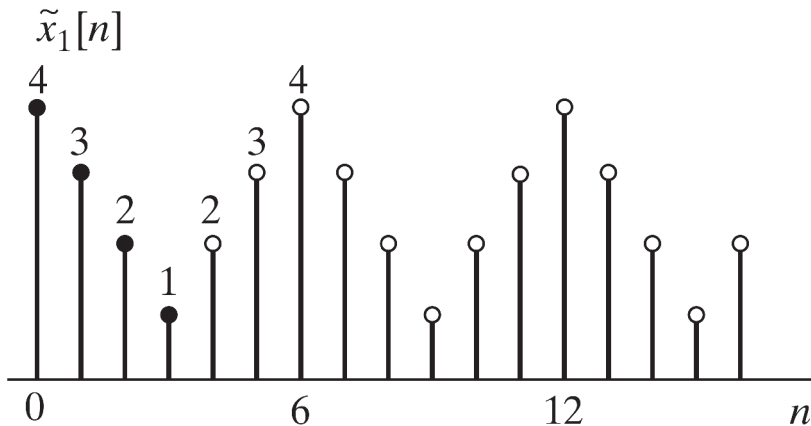


Cosinus este periodică și pară, $\cos(x) = \cos(-x)$, deci extensia unui semnal $x(n)$ în afara intervalului $n = 0 : N - 1$ trebuie să fie periodică și pară.

Există mai multe moduri de a extinde un semnal ceea ce duce la mai multe tipuri de transformată DCT.

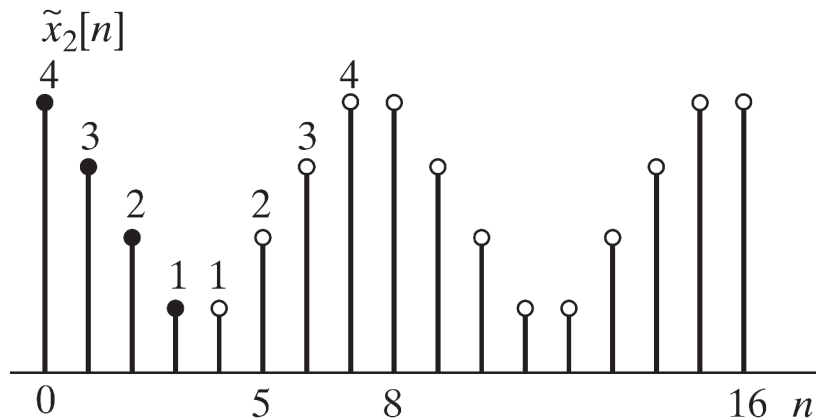
DCT-I (Type-1)

Extensia la un semnal $\tilde{x}_1(n)$ periodic și par de 17 eșantioane.



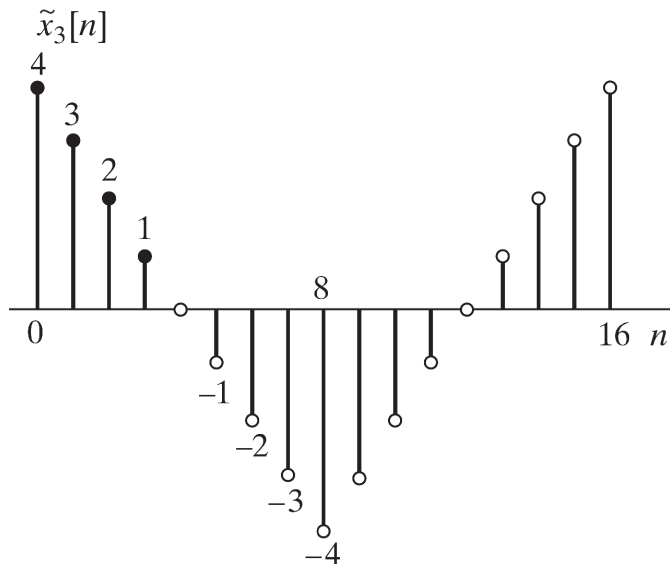
Perioadă: $2N - 2 = 6$ și simetrie pară la $n = \{0, N - 1\}$

DCT-II (Type-2)



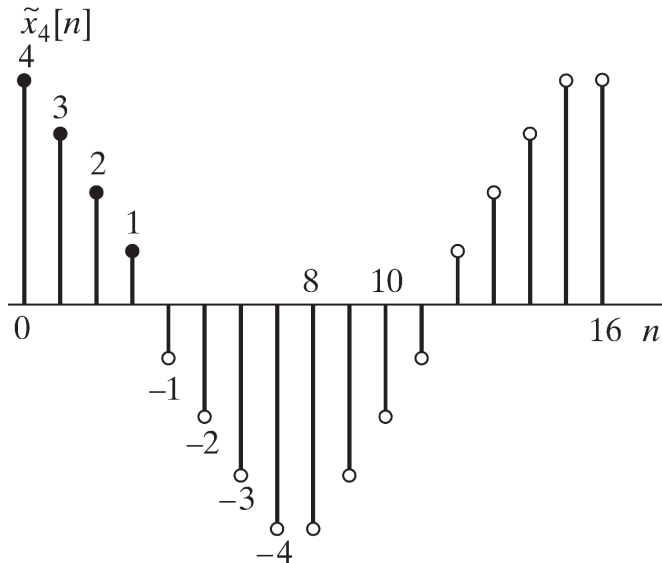
Periodă: $2N = 8$ și simetrie pară la $n = \{-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\}$

DCT-III (Type-3)



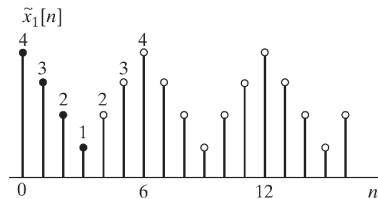
Perioadă: $4N = 16$ și simetrie pară la $n = \{0, 8\}$

DCT-IV (Type-4)

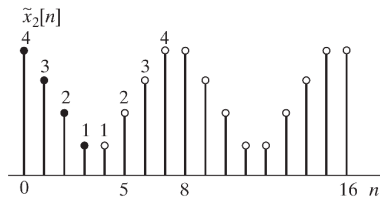


Periodă: $4N = 16$ și simetrie pară la $n = \{-\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\}$

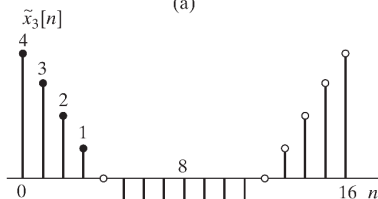
Varianțele DCT



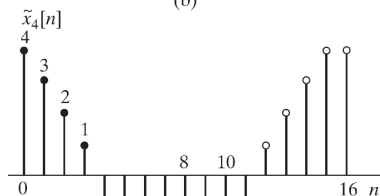
(a)



(b)



(c)



(d)

Varianțele sunt copii deplasate de N eșantioane $\pm x(n)$ și $\pm x(-n)$.

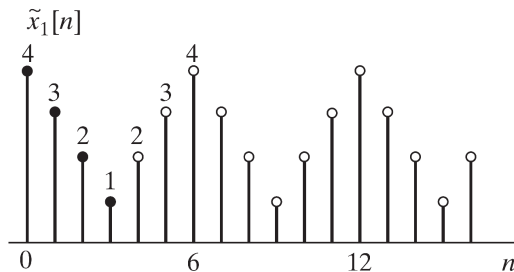
Secvența de perioadă $2N-2$ este produsă prin extinderea semnalului original:

$$\tilde{x}_1(n) = x_\alpha(n \bmod 2N - 2) + x_\alpha((-n) \bmod 2N - 2) \quad (11)$$

unde $x_\alpha(n) = \alpha(n)x(n)$ cu
$$\begin{cases} \frac{1}{2}, & n = \{0, N - 1\} \\ 1, & n = \overline{1 : N - 2} \end{cases}.$$

Semnalul rezultat este identic cu originalul în intervalul $1 : N - 1$ și este par cu puncte de simetrie la $n = \{0, N - 1, 2N - 2, \dots\}$

Calcul extindere DCT-I



$$\tilde{x}_1(0) = \frac{1}{2}x(0) + \frac{1}{2}x(-0) = x(0); \quad \tilde{x}_1(4) = x(4) + x(2) = x(2);$$

$$\tilde{x}_1(1) = x(1) + \underbrace{x(5)}_{-1 \bmod 6} = x(1); \quad \tilde{x}_1(5) = x(5) + x(1) = x(1);$$

$$\tilde{x}_1(2) = x(2) + x(4) = x(2); \quad \tilde{x}_1(6) = \frac{1}{2}x(0) + \frac{1}{2}x(0) = x(0);$$

$$\tilde{x}_1(3) = \frac{1}{2}x(3) + \frac{1}{2}x(3) = x(3); \quad \tilde{x}_1(7) = x(1) + x(5) = x(1);$$

Simetrie pară periodică în punctele $n = \{0, N - 1, 2N - 2, \dots\}$.

Definiție

Transformata DCT-I este definită de perechea:

$$X_1(m) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(n) x(n) \cos \left(\frac{\pi mn}{N-1} \right) \quad (12)$$

$$x_1(n) = \frac{1}{N-1} \sum_{m=0}^{N-1} \alpha(m) X_1(m) \cos \left(\frac{\pi mn}{N-1} \right) \quad (13)$$

Transformata DCT-II

Relația de extindere a semnalului este dată de:

$$\tilde{x}_2(n) = x_\alpha(n \bmod 2N) + x_\alpha((-n-1) \bmod 2N) \quad (14)$$

Simetrie pară periodică în punctele $n = \{-\frac{1}{2}, N - \frac{1}{2}, 2N - \frac{1}{2}, \dots\}$.

Definiție

Transformata DCT-II este definită de perechea:

$$X_2(m) = 2 \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos\left(\frac{\pi m(2n-1)}{2N}\right) \quad (15)$$

$$x_2(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \beta(m) X_2(m) \cos\left(\frac{\pi m(2n+1)}{2N}\right) \quad (16)$$

cu $\beta(0) = \frac{1}{2}$ și $\beta(m) = 1$ în rest.

Transformata DCT-II unitară

În multe aplicații avem nevoie de o transformată unitară (ce distribuie factorii de-a lungul vectorilor din bază).

Definiție

Transformata DCT-II unitară este definită de perechea:

$$X_2(m) = \sqrt{\frac{2}{N}} \tilde{\beta}(m) \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cos \left(\frac{\pi m(2n+1)}{2N} \right) \quad (17)$$

$$x_2(n) = \sqrt{\frac{2}{N}} \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{\beta}(m) X_2(m) \cos \left(\frac{\pi m(2n+1)}{2N} \right) \quad (18)$$

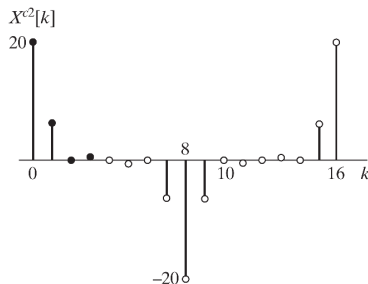
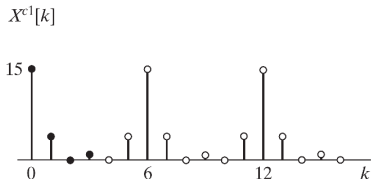
cu $\tilde{\beta}(0) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ și $\tilde{\beta}(m) = 1$ în rest.

Unitar: $\sum_{n=0}^{N-1} x(n)^2 = \sum_{m=0}^{N-1} X(m)^2$ (conservă norma).

Exemplu: transformata DCT-I și DCT-II

În partea dreaptă avem transformata DCT-I și DCT-II pentru semnalul cu $N = 4$ eşantioane.

- ▶ periodicitate în după $N - 1$
- ▶ simetrie nu respectă tipul DCT
- ▶ simetrie identică pentru X_1
- ▶ dar diferită pentru X_2
- ▶ X_2 are simetria lui \tilde{x}_3 (DCT-III)
- ▶ perioada lui \tilde{x}_2 este $2N$
- ▶ perioada lui X_2 este $4N$!



Ortogonalitate

Pentru că $X(m)$ sunt reprezentări în urma unei transformări ortogonale, DCT are proprietăți similare cu DFT.

$$\text{Fie } v_m = \begin{bmatrix} \cos(1m) \\ \cos(2m) \\ \cos(3m) \\ \vdots \\ \cos(Nm) \end{bmatrix} \text{ și baza } V = [v_1, v_2, \dots, v_N].$$

Este $v_p^T v_q = 0, \forall p \neq q$? Dar $v_p^T v_q \neq 0$?

$$v_p^T v_q = [\cos(1p) \ \cos(2p) \ \dots \ \cos(Np)] \begin{bmatrix} \cos(1q) \\ \vdots \\ \cos(Nq) \end{bmatrix}$$

Ortogonalitate

$$\begin{aligned} v_p^T v_q &= [\cos(1p) \ \cos(2p) \ \cdots \ \cos(Np)] \begin{bmatrix} \cos(1q) \\ \vdots \\ \cos(Nq) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos(pn) \cos(qn) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_p^T v_q &= [\cos(1p) \ \cos(2p) \ \cdots \ \cos(Np)] \begin{bmatrix} \cos(1q) \\ \vdots \\ \cos(Nq) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos(pn) \cos(qn) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \{\cos[(p-q)n] + \cos[(p+q)n]\} = \end{aligned}$$

Ortogonalitate

$$\begin{aligned} v_p^T v_q &= [\cos(1p) \ \cos(2p) \ \cdots \ \cos(Np)] \begin{bmatrix} \cos(1q) \\ \vdots \\ \cos(Nq) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos(pn) \cos(qn) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \{ \cos[(p-q)n] + \cos[(p+q)n] \} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{-(p-q)nj} + e^{(p-q)nj} + e^{(p+q)nj} + e^{-(p+q)nj} \right] = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_p^T v_q &= [\cos(1p) \ \cos(2p) \ \cdots \ \cos(Np)] \begin{bmatrix} \cos(1q) \\ \vdots \\ \cos(Nq) \end{bmatrix} = \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \cos(pn) \cos(qn) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \{ \cos[(p-q)n] + \cos[(p+q)n] \} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{-(p-q)nj} + e^{(p-q)nj} + e^{(p+q)nj} + e^{-(p+q)nj} \right] = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{N-1} \left[e^{pnj}(-1 + 1 + 1 - 1) + e^{qnj}(1 - 1 + 1 - 1) \right] = 0 \end{aligned}$$

Teorema lui Parseval

Teoremă

Dacă $x(n) \xleftrightarrow[\text{IFT}]{\text{FT}} X(e^{j\omega})$ atunci:

$$E = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega \quad (19)$$

unde funcția $|X(e^{j\omega})|^2$ se numește și densitatea energiei spectrului pentru că determină distribuția energiei în domeniul frecvenței.

Compactarea energiei

DCT este folosită în multe aplicații ce implică compresia datelor datorită proprietății sale de compactare a energiei.

Remarcă

DCT-II a unui semnal are adesea coeficienții adunați la indicii mici $X(m)$ ai transformatei față de DFT care îi are distribuiți de-a lungul tuturor indicilor.

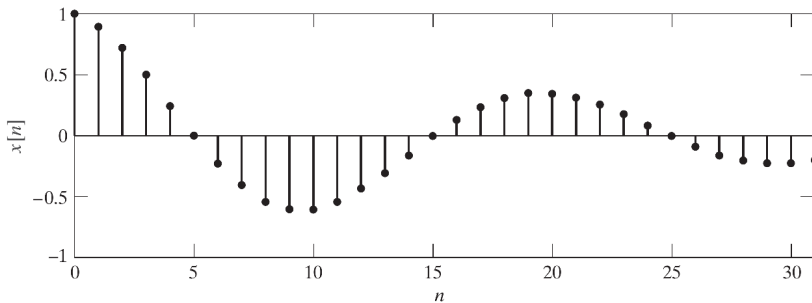
Remarca devine importantă în contextul teoremei lui Parseval:

$$\text{DCT-I: } \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(n) |x(n)|^2 = \frac{1}{2N-2} \sum_{n=0}^{N-1} \alpha(m) |X(m)|^2 \quad (20)$$

$$\text{DCT-II: } \sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \beta(m) |X(m)|^2 \quad (21)$$

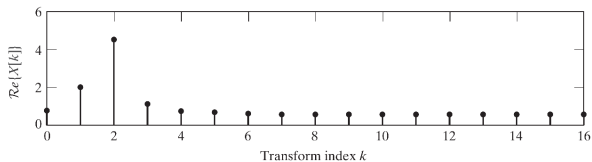
Exemplu: compactarea energiei

Fie semnalul $x(n) = a^n \cos(\omega_0 n + \varphi)$.

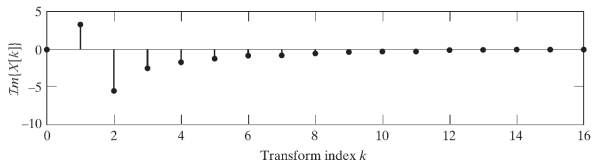


în figură cu parametrizarea $a = 0,9$, $f_0 = 0,1\pi$ și $N = 32$.

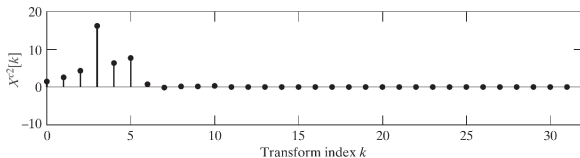
Exemplu: compactarea energiei DFT vs. DCT



(a)



(b)



(c)

DFT și DCT-II pentru semnalul $x(n)$ din figura anterioară.

Exemplu: trunchiere DFT

Trunchierea în frecvență a DFT:

$$x^{\text{dft}}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} T_k(m) X(m) e^{j2\pi mn/N} \quad (22)$$

se efectuează printr-un operator de *hard-thresholding*:

$$T_k(m) = \begin{cases} 1, & 0 \leq m \leq (N-1-k)/2 \\ 0, & (N+1-k)/2 \leq m \leq (N-1+k)/2 \\ 1, & (N+1+k)/2 \leq m \leq N-1 \end{cases} \quad (23)$$

- ▶ pentru $k = 1$, termenul $X(N/2)$ este anulat.
- ▶ pentru $k = 3$, termenii $X(N/2)$, $X(N/2 - 1)$ și termenul conjugat $X(N/2 + 1)$ sunt anulați
- ▶ ș.a.m.d. pentru $k = \{1, 3, 5, \dots, N-1\}$.

Exemplu: mean squared error (MSE)

Trunchierea în frecvență a DCT-II este mai simplă:

$$x^{\text{dct}}(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1-k} \beta(m) X(m) \cos\left(\frac{\pi m(2n+1)}{2N}\right) \quad (24)$$

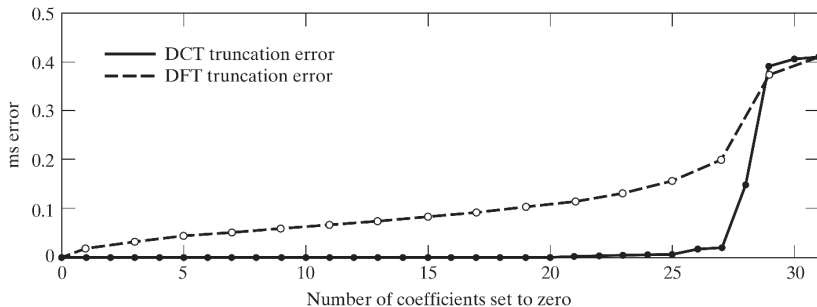
Comparăm cele două aproximări cu ajutorul medie pătratice a erorii:

$$E^{\text{dft}}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n) - x_k^{\text{dft}}(n)|^2 \quad (25)$$

$$E^{\text{dct}}(k) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |x(n) - x_k^{\text{dct}}(n)|^2 \quad (26)$$

Exemplu: Rezultat DFT vs. DCT-II

Trunchierea în funcție de numărul de coeficienți anulați k :



Adesea împreună cu trunchierea sunt folosite tehnici de cuantizare.

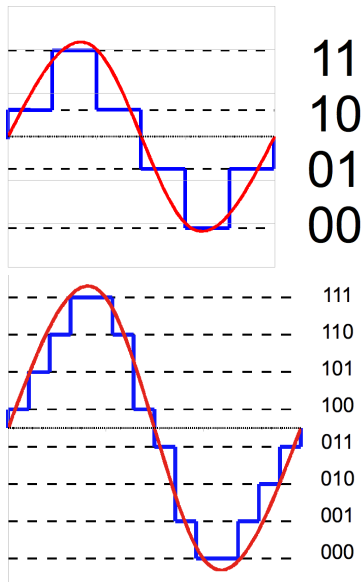
Cuantizarea este similară cu discretizarea:

- ▶ alegem anumiți pași de cuantizare Δ
- ▶ Δ este similar cu bin-urile de la DFT
- ▶ către aceste cuante aproximăm valorile $x(n)$ ale semnalului dat

$$Q(n) = \Delta \left\lfloor \frac{x(n)}{\Delta} + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad (27)$$

unde $\Delta = 1$ pentru rotunjirea către cel mai apropiat întreg.

Exemplu: cuantizare pe 2-biți și 3-biți



Sursă: [https://en.wikipedia.org/wiki/Quantization_\(signal_processing\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Quantization_(signal_processing))

Ipotezele JPEG bazate pe modul de funcționare al ochilor umani:

- ▶ ochii sunt mai sensibili la luminozitatea culorii decât la paleta cromatică
- ▶ ochii nu observă conținutul de frecvență înaltă din imagini

Algoritmul de compresie JPEG are patru etape:

1. transformarea imaginii din pixeli RGB în Y'CbCr
2. aplicarea 2D-DCT pe blocuri disincte de 8x8 pixeli din imagine
3. cuantizarea în frecvență cu Q dat de standardul JPEG
4. opțional compresia rezultatului cu coduri Huffman

Algoritmul JPEG fără compresie Huffman

Fie imaginea $I \in \mathbb{R}^{h \times w \times 3}$ păstrată drept un tensor tridimensional cu luminozitatea Y' , cromatica albastră Cb , și cromatica roșie Cr .

1. cuantizarea (*down-sampling*) paletelor cromatice:

$$I_{Cb} = Q_{Cb} \left\lfloor \frac{I_{Cb}}{Q_{Cb}} + \frac{1}{2} \right\rfloor; \quad I_{Cr} = Q_{Cr} \left\lfloor \frac{I_{Cr}}{Q_{Cr}} + \frac{1}{2} \right\rfloor \quad (28)$$

2. pentru fiecare dimensiune $d \in \{Y', Cb, Cr\}$

- 2.1 pentru fiecare bloc x de 8×8 pixeli

- 2.1.1 $X = \text{DCT}(x)$

- 2.1.2 $X = Q_{\text{JPEG}} \left\lfloor \frac{X}{Q_{\text{JPEG}}} + \frac{1}{2} \right\rfloor$

- 2.1.3 $x = \text{IDCT}(X)$

unde pașii de cuantizare Q_{JPEG} sunt dați de către standardul JPEG.