Procesarea semnalelor

Transformata Fourier.

Paul Irofti

Universitatea din București

Facultatea de Matematică și Informatică

Departmentul de Informatică

Email: paul.irofti@fmi.unibuc.ro

Discretizare și eșantionare

Continuu:

$$x(t) = \sin(2\pi f_0 t) \tag{1}$$

Discret:

$$x(n) = \sin(2\pi f_0 n t_s) = \sin(2\pi (f_0 + k f_s) n t_s) \tag{2}$$

unde

- f_0 – frecvența (Hz) măsoară numărul de oscilații într-o secundă
- n – eșantionul, indexul în șirul de timpi $0, 1, 2 \dots$
- t_s – perioada de eșantionare; constantă (ex. la fiecare secundă)
- nt_s – orizontul de timp (s)
- $f_0 n t_s$ – numărul de oscilații măsurat
- $2\pi f_0 nt$ – unghiul măsurat în radiani (vezi note de curs)
- f_s – frecvența de eșantionare (Hz)
- $f_0 + kf_s$ – frecvența de aliere, $\forall k \in \mathbb{N}$

Cum trecem în frecvență și înapoi în timp?

Transformata Fourier și Transformata Fourier Inversă ne ajută să trecem din domeniul timpului în domeniul frecvenței și vice-versa.

Transformata Fourier Continuă (TF)

Definiție

Transformata Fourier a unui semnal continuu:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} \tag{3}$$

transformă semnalul continuu din domeniul timpului $x(t)$ *în semnalul continuu* $X(f)$ *din domeniul frecvenței.*

Aici e este numărul lui Euler, baza logaritmului natural, și j reprezintă numărul complex $j = \sqrt{-1}$.

Relația lui Euler

Definiție

Relația lui Euler

$$e^{j\alpha} = \cos\alpha + j\sin\alpha \tag{4}$$

pune în legătură numerele complexe, funcțiile trigonometrice și funcțiile exponențiale.

Pentru un număr complex $z \in \mathbb{C}$:

$$z = a + jb = |z|(\cos\varphi + j\sin\varphi) = re^{j\varphi} \tag{5}$$

unde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ este magnitudinea și $\varphi = \arctan\frac{b}{a}$

Pentru Transformata Fourier Continuă:

$$e^{-j\alpha} = \cos(-\alpha) + j\sin(-\alpha) = \cos\alpha - j\sin\alpha \tag{6}$$

Radiani

Definiție

Radianii descriu unghiul unui arc de cerc drept raportul dintre lungimea arcului împărțită la rază.

Exemplu

$1 \; rad = 180^\circ/\pi$
$2\pi \; rad = 360^\circ$

Frecvența unghiulară și frecvența de eșantionare

Definiție

Frecvența unghiulară este frecvența exprimată în radiani pe secundă:

$$\Omega = \frac{\omega}{T} = \frac{[rad]}{[s]} = \omega f \tag{7}$$

Definiție

Frecvența de eșantionare în radiani este:

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f_s \tag{8}$$

Discretizare

Dacă un semnal este periodic, iar eșantioanele $x[n]$ se repetă o dată la fiecare N măsurători atunci discretizarea timp-frecvență devine:

- discretizarea timpului $t \to nt_s$ și
- frecvența $f \to \frac{1}{N}$
- frecvența unghiulară $\Omega \to \frac{\omega}{N}$
- frecvența unghiulară de eșantionare $\Omega \to \frac{2\pi}{N}$
- $e^{-j\Omega t} = e^{-j2\pi ft} \to e^{-j2\pi f_s nt_s} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nt_s}$

Transformata Fourier Discretizată în Timp (DTFT)

Definiție

Transformata Fourier Continuă a unui semnal discretizat în timp:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j2\pi ft} = \tag{9}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nt_s) e^{-j2\pi fnt_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(nt_s) e^{-j\Omega nt_s} \tag{10}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j2\pi fnt_s} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\Omega nt_s} \tag{11}$$

numită în literatură Discrete-Time Fourier Transform (DTFT).

Transformata Fourier Discretizată în Timp (DFS)

Fie un șir $x[n]$ cu perioadă N a.î. $x[n] = x[n + kN]$, $\forall n, k \in \mathbb{N}$.

Definiție

Transformata Fourier a semnalului $x[n]$ cu perioadă N este:

$$X(m) = \sum_{n} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \tag{12}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m} X(m) e^{j2\pi mn/N} \tag{13}$$

numită în literatură Discrete Fourier Sequence (DFS).

Remarcă

Dacă semnalul este periodic, observăm că informația se repetă o dată la N eșantioane a.î. putem limita capetele sumei la intervalul $0 \ldots N - 1$.

Transformata Fourier Discretă (DFT)

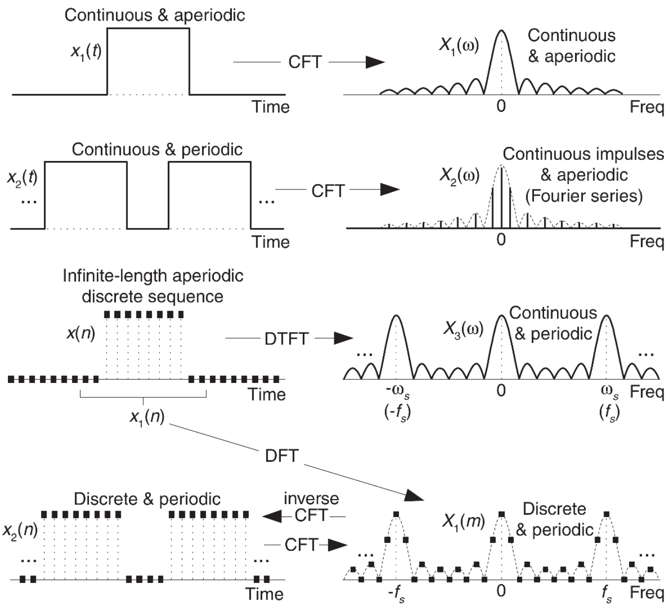
Definiție

Transformata Fourier a unui semnal discret (aperiodic):

$$
\begin{aligned}
X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[\cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N)\right]
\end{aligned}
\tag{14}
$$

- $X(m)$ – componenta m DFT (ex. $X(0), X(1), X(2), \dots$)
- m – indicele componentei DFT în domeniul frecvenței ($m = 0, 1, \dots, N-1$)
- $x(n)$ – eșantioanele în timp (ex. $x(0), x(1), x(2), \dots$)
- n – indicele eșantioanelor în domeniul timpului ($n = 0, 1, \dots, N-1$)
- N – numărul eșantioanelor în timp la intrare și numărul componentelor în frecvență la ieșire

CFT, DTFT, DFT



Continuous & aperiodic
x1(t)
CFT
Time
X1(ω)
Continuous
& aperiodic
0
Freq
Continuous & periodic
x2(t)
...
...
CFT
Time
X2(ω)
Continuous impulses
& aperiodic
(Fourier series)
0
Freq
Infinite-length aperiodic
discrete sequence
x(n)
DTFT
Time
x1(n)
X3(ω)
Continuous
& periodic
...
...
-ωs
(-fs)
0
ωs
(fs)
Freq
DFT
Discrete & periodic
x2(n)
...
...
inverse
CFT
CFT
Time
X1(m)
Discrete
& periodic
...
...
-fs
0
fs
Freq

Exemplu DFT $N = 4$

Pentru $N = 4$ eșantioane, vom avea $n, m = \{0, 1, 2, 3\}$:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{3} x(n) \left[\cos(2\pi mn/4) - j\sin(2\pi mn/4)\right] \qquad (15)$$

Pentru $m = 0$:

$$\begin{aligned}
X(0) = x(0) &\left[\cos(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot n}/4) - j\sin(2\pi \underbrace{0 \cdot 0}_{m \cdot n}/4)\right] \\
&+ x(1)\left[\cos(2\pi 0 \cdot 1/4) - j\sin(2\pi 0 \cdot 1/4)\right] \\
&+ x(2)\left[\cos(2\pi 0 \cdot 2/4) - j\sin(2\pi 0 \cdot 2/4)\right] \\
&+ x(3)\left[\cos(2\pi 0 \cdot 3/4) - j\sin(2\pi 0 \cdot 3/4)\right]
\end{aligned}$$

Exemplu DFT $N = 4$

$$
\begin{aligned}
X(1) = {} & x(0)[\cos(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot n}/4) - j\sin(2\pi \overbrace{1 \cdot 0}^{m \cdot n}/4)] \\
& + x(1)[\cos(2\pi 1 \cdot 1/4) - j\sin(2\pi 1 \cdot 1/4)] \\
& + x(2)[\cos(2\pi 1 \cdot 2/4) - j\sin(2\pi 1 \cdot 2/4)] \\
& + x(3)[\cos(2\pi 1 \cdot 3/4) - j\sin(2\pi 1 \cdot 3/4)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X(2) = {} & x(0)[\cos(2\pi 2 \cdot 0/4) - j\sin(2\pi 2 \cdot 0/4)] \\
& + x(1)[\cos(2\pi 2 \cdot 1/4) - j\sin(2\pi 2 \cdot 1/4)] \\
& + x(2)[\cos(2\pi 2 \cdot 2/4) - j\sin(2\pi 2 \cdot 2/4)] \\
& + x(3)[\cos(2\pi 2 \cdot 3/4) - j\sin(2\pi 2 \cdot 3/4)]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
X(3) = {} & x(0)[\cos(2\pi 3 \cdot 0/4) - j\sin(2\pi 3 \cdot 0/4)] \\
& + x(1)[\cos(2\pi 3 \cdot 1/4) - j\sin(2\pi 3 \cdot 1/4)] \\
& + x(2)[\cos(2\pi 3 \cdot 2/4) - j\sin(2\pi 3 \cdot 2/4)] \\
& + x(3)[\cos(2\pi 3 \cdot 3/4) - j\sin(2\pi 3 \cdot 3/4)]
\end{aligned}
$$

Transformata Fourier inversă

Transformata Fourier a unui semnal discret:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi mn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \left[cos(2\pi mn/N) - j \sin(2\pi mn/N)\right]$$

Definiție

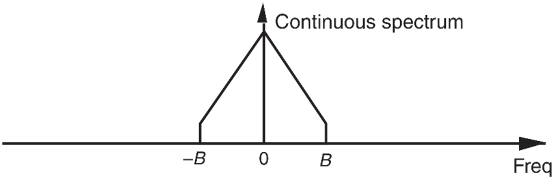
Transformata Fourier inversă a unui semnal discret (IDFT):

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) e^{j2\pi mn/N} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} X(m) \left[cos(2\pi mn/N) + j \sin(2\pi mn/N)\right] \tag{16}$$

Recapitulare: Semnale trece-jos (lowpass)

Definiție

Un semnal trece-jos este un semnal limitat în bandă și centrat în jurul frecvenței zero.



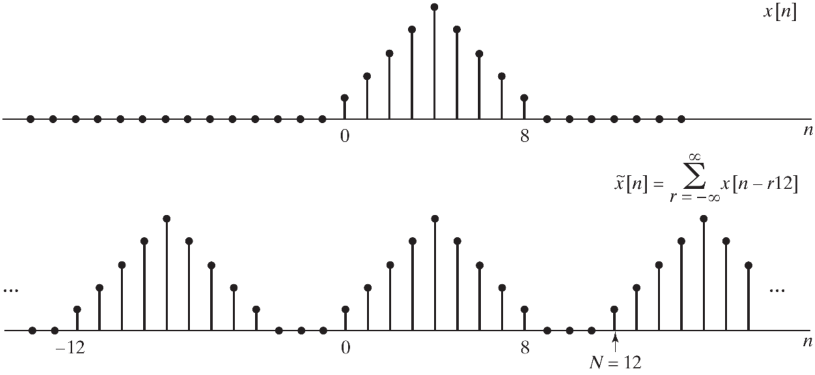
Sursă: (Lyons 2004)

Remarcă

Din considerente didactice, aici am analizat spectrul continuu obținut din Transformata Fourier Continuă. În practică folosim Transformata Fourier Discretă.

Extinderea unui semnal discret

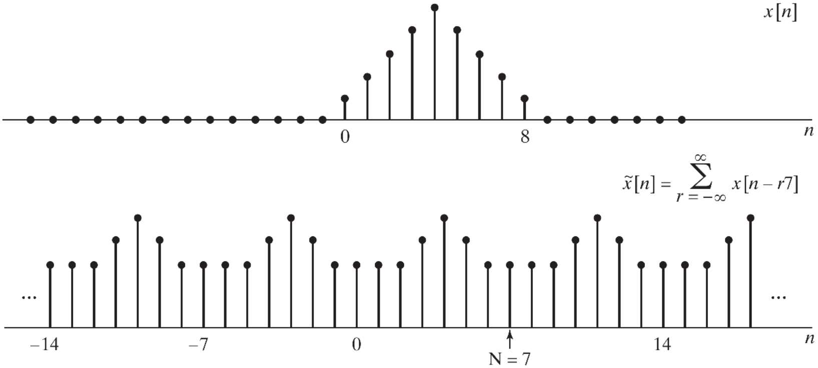
Dacă avem de a face cu un semnal discret aperiodic, îl putem extinde la un semnal periodic pentru a aplica DFT.
Exemplu eșantionare a transformatei Fourier cu $N = 12$:



Sursă: (Oppenheim and Schafer 2014)

Extinderea unui semnal discret

Atenție la fenomenul de aliere când extindem (exemplu $N = 7$).



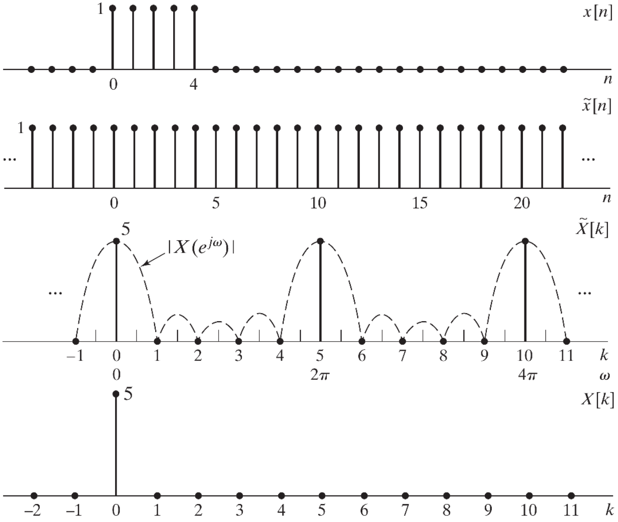
Sursă: (Oppenheim and Schafer 2014)

Remarcă

Problema alierii este aceiași în frecvență ca și în timp. Metoda de discretizare și eșantionare fiind aceiași. Doar domeniul se schimbă.

Exemplu: treaptă

Atenție la efectele secundare extinderii unui semnal aperiodic.



Sursă: (Oppenheim and Schafer 2014)

Frecvențe importante

Frecvența fundamentală este

$$f = \frac{f_s}{N} \tag{17}$$

Frecvențele analizate sunt:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} \tag{18}$$

Componenta $m = 0$ este numită componenta curent continuu (*Direct Current (DC)*)

$$X(0) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)[cos(0) - jsin(0)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \tag{19}$$

Magnitudinea și puterea componentelor (*power spectrum (PS)*):

$$X(m) = X_{\text{real}}(m) + jX_{\text{imag}}(m) \tag{20}$$

$$X_{\text{mag}} = |X(m)| \qquad X_{\text{PS}}(m) = X_{\text{mag}}(m)^2 \tag{21}$$

Exemplu: Frecvențe importante

Pentru un semnal continuu eșantionat cu 500 eșantioane pe secundă asupra căruia se aplică DFT în 16 puncte avem:

$$f = \frac{f_s}{N} = \frac{500}{16} = 31,25Hz$$

Frecvențele analizate sunt:

$$X(0) = 0 \cdot 31.25 = 0Hz \qquad \text{(prima componentă în frecvență)}$$
$$X(1) = 1 \cdot 31.25 = 31,25Hz \qquad \text{(a doua componentă în frecvență)}$$
$$X(2) = 2 \cdot 31.25 = 62,5Hz \qquad \text{(a treia componentă în frecvență)}$$
$$X(3) = 3 \cdot 31.25 = 93,75Hz \qquad \text{(a patra componentă în frecvență)}$$
$$\vdots$$
$$X(15) = 15 \cdot 31.25 = 468,75Hz \qquad \text{(componenta 16 în frecvență)}$$

Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de $N = 8$ eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000$.

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} =$$

Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de $N = 8$ eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000$.

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz, 1kHz, 2kHz, \ldots, 7kHz\} \tag{22}$$

Exemplu: Calcul DFT

Vom calcula 8 componente DFT pentru semnalul alcătuit din două componente de 1kHz și 2kHz:

$$x(t) = \sin(2\pi \cdot 1000 \cdot t) + \frac{1}{2}\sin(2\pi \cdot 2000 \cdot t + \frac{3\pi}{4})$$

pentru asta avem nevoie de $N = 8$ eșantioane în timp pentru care alegem frecvența de eșantionare $f_s = 8000$.

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = \{0kHz, 1kHz, 2kHz, \ldots, 7kHz\} \tag{22}$$

Transformata Fourier devine:

$$X(m) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\left[cos(2\pi mn/8) + j\sin(2\pi mn/8)\right]$$

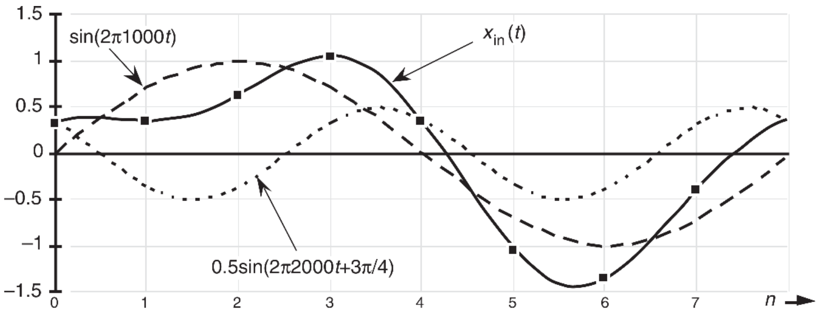
$$X(1) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\left[cos(2\pi n/8) + j\sin(2\pi n/8)\right]$$

$$\vdots$$

Exemplu: Calcul DFT

Fie cele 8 eșantioane în timp:

$$x[0] = 0,3535, \qquad x[1] = 0,3535$$
$$x[2] = 0,6464, \qquad x[3] = 1,0607$$
$$x[4] = 0,3535, \qquad x[5] = -1,0607$$
$$x[6] = -1,3535, \qquad x[7] = -0,3535$$



Sursă: (Lyons 2004)

Exemplu: Calcul DFT

$$
\begin{aligned}
X(1) = \sum_{n=0}^{7} x(n)\,[cos(2\pi n/8) + j\sin(2\pi n/8)] = \\
&= x(0)\cos(0) - jx(0)\sin(0) + \\
&+ x(1)\cos(\pi/4) - jx(1)\sin(\pi/4) + \\
&+ x(2)\cos(\pi/2) - jx(2)\sin(\pi/2) + \\
&+ x(3)\cos(3\pi/4) - jx(3)\sin(3\pi/4) + \\
&+ x(4)\cos(\pi) - jx(4)\sin(\pi) + \\
&+ x(5)\cos(5\pi/4) - jx(5)\sin(5\pi/4) + \\
&+ x(6)\cos(3\pi/2) - jx(6)\sin(3\pi/2) + \\
&+ x(7)\cos(7\pi/4) - jx(7)\sin(7\pi/4) = \\
&= \cdots = 0,0 - j4,0
\end{aligned}
$$

Exemplu: Calcul DFT

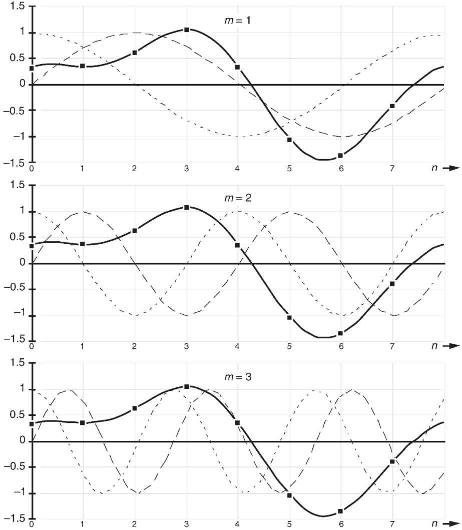
Aplicăm formula pentru calculul celorlalte componente:

$$
\begin{aligned}
X(1) &= 0,0 - j4,0 \\
X(2) &= 1,414 + j1,414 \\
X(3) &= 0,0 + j0,0 \\
X(4) &= 0,0 + j0,0 \\
X(5) &= 0,0 + j0,0 \\
X(6) &= 1,414 - j1,414 \\
X(7) &= 0,0 + j4,0
\end{aligned}
$$

Cât este $X(0)$?

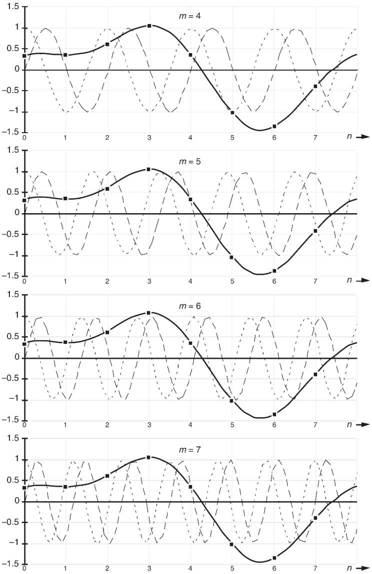
Exemplu: Componentele DFT

Cum arată componentele cos și sin în funcție de m?



Sursă: (Lyons 2004)

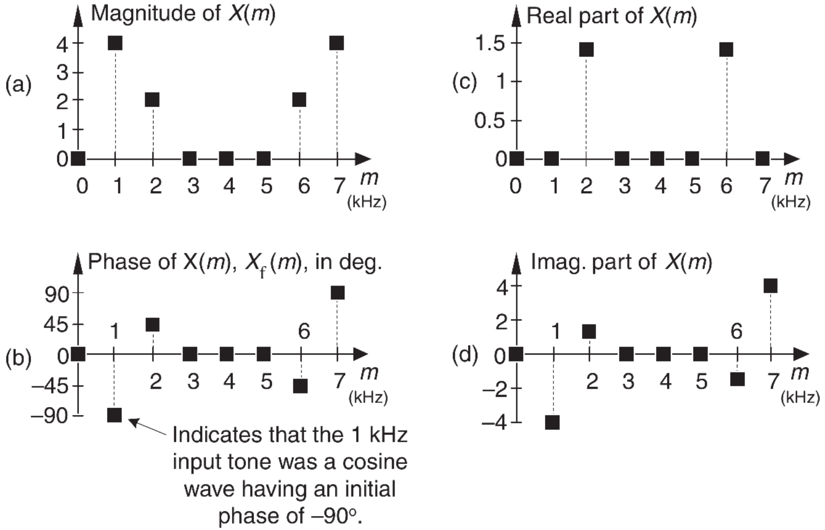
Exemplu: Componentele DFT



Sursă: (Lyons 2004)

Exemplu: Rezultate DFT

Simetrie și anti-simetrie în componentele spectrale:



Sursă: (Lyons 2004)

Simetrie

Pentru semnale $x(n)$ reale, DFT este simetrică în jurul $N/2$.

$$X(m) = |X(m)|e^{j\varphi} = |X(N-m)|e^{-j\varphi} = \overline{X}(N-m) \qquad (23)$$

Putem arăta ușor această proprietate folosind forma exponențială:

$$\begin{aligned}
X(N-m) &= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi n(N-m)/N} = \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \underbrace{e^{-j2\pi nN/N}}_{\cos(2\pi n) - j\sin(2\pi n)} e^{j2\pi nm/N} = \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{j2\pi nm/N} = \overline{X}(N-m)
\end{aligned}$$

Liniaritate

Fie $x(n) = x_1(n) + x_2(n)$, atunci DFT este suma DFT-urilor pe componente:

$$X(m) = X_1(m) + X_2(m) \tag{24}$$

Putem demonstra din nou ușor folosind forma exponențială:

$$\begin{aligned}
X(m) &= \sum_{n=0}^{N-1} \underbrace{[x_1(n) + x_2(n)]}_{x(n)} e^{-j2\pi nm/N} = \\
&= \sum_{n=0}^{N-1} x_1(n) e^{-j2\pi nm/N} + \sum_{n=0}^{N-1} x_2(n) e^{-j2\pi nm/N} \\
&= X_1(m) + X_2(m)
\end{aligned}$$

Magnitudine

De ce nu corespunde amplitudinea în timp cu cea în frecvență?

Magnitudine

De ce nu corespunde amplitudinea în timp cu cea în frecvență?

Dacă avem o sinusoidă cu

- frecvența $f < f_s/2$
- amplitudinea A_0
- cu număr întreg de perioade de-alungul celor N eșantioane

atunci amplitudinea în frecvență este:

$$M_r = A_0 N/2 \tag{25}$$

dacă semnalul este complex:

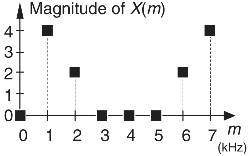
$$M_c = A_0 N \tag{26}$$

Din această cauză întâlnim în practică DFT scalat cu $\frac{1}{N}$ sau $\frac{1}{\sqrt{N}}$:

$$X(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j2\pi nm/N} \tag{27}$$

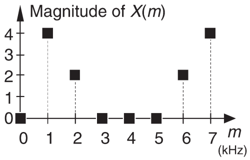
Axa frecvenței

Care este frecvența cu cea mai mare magnitudine $|X(m)|$ în Hz din figură? (în figură pe axa frecvenței avem valorile lui m)



Axa frecvenței

Care este frecvența cu cea mai mare magnitudine $|X(m)|$ în Hz din figură? (în figură pe axa frecvenței avem valorile lui m)



Răspuns: Depinde de rata de eșantionare f_s. În figură ne interesează $m = 1$ pentru care aplicăm (22) cu $f_s = 8000Hz$:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N} = f_a(1) = \frac{1 \cdot 8000}{8} = 1000Hz \tag{28}$$

Pentru frecvența de eșantionare $f_s = 75Hz$ obținem altă frecvență:

$$f_a(1) = \frac{1 \cdot 75}{8} = 9,375Hz \tag{29}$$

pentru că rezoluția (spațiul între eșantioanele frecvenței) este f_s/N.

Shifting

Teoremă

O deplasare k în timp a semnalului periodic $x(n)$ rezultă într-o deplasare constantă a fazei în domeniul frecvenței cu $2\pi km/n$ radiani (sau $360km/N$ grade).

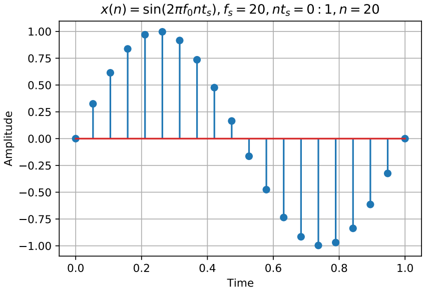
$$X_{shifted}(m) = e^{j2\pi km/N} X(m) \tag{30}$$

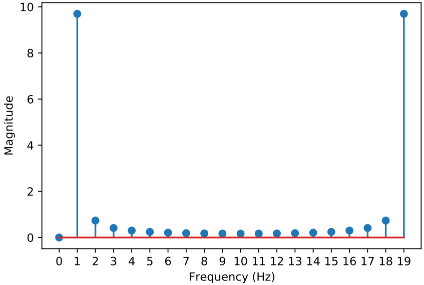
În exemplul noastru, o întârziere cu $k = 3$ rezultă într-o multiplicare cu $e^{j2\pi 3 \cdot m/8}$ iar pentru $m = 1$ avem:

$$X_{\text{shifted}}(1) = e^{j2\pi 3 \cdot 1/8} X(1) = e^{j2\pi 3 \cdot 1/8} 4e^{-j\pi/2} = 4e^{j\pi/4}$$

DFT în practică

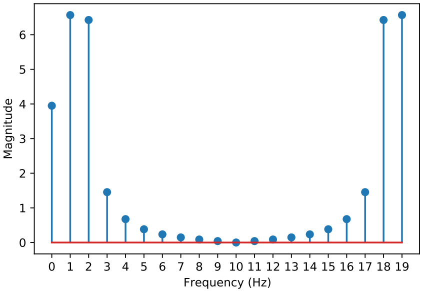
Transformata DFT pentru sinusoida noastră din primul curs. Ce se întâmplă în punctul 19? Dar în punctele 2 și 3?





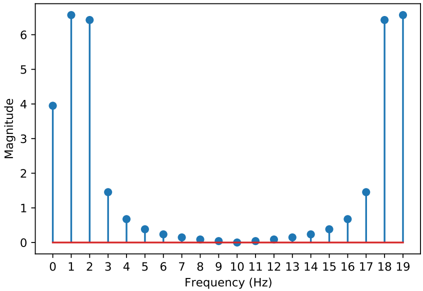
DFT în practică

Ce semnal reprezintă această spectrogramă?

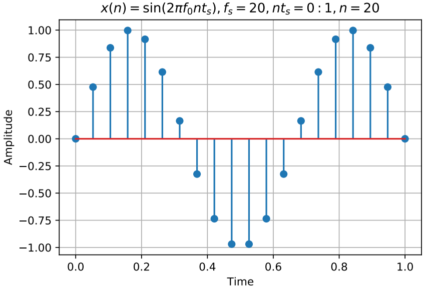


DFT în practică

Ce semnal reprezintă această spectrogramă?



Tot o sinusoidă!
Frecvența diferă:
$f_0 = 1,5Hz$.



Leakage

În practică DFT produce rezultate în domeniul frecvenței ce pot induce în eroare datorită frecvențelor de analiză:

$$f_a(m) = \frac{mf_s}{N}, \; m = \{0, 1, 2, \ldots, N-1\} \tag{31}$$

DFT reflectă realitatea doar când energia semnalului dat coincide cu frecvențele de analiză din (31).

Remarcă

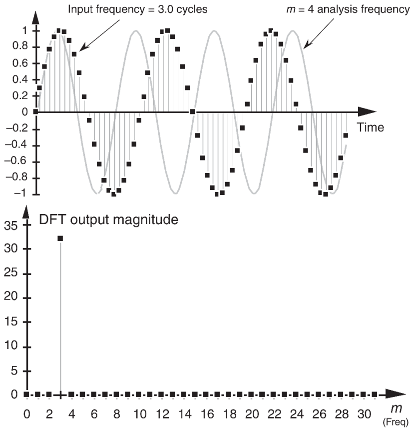
Dacă semnalul dat conține o componentă în frecvență intermediară frecvențelor de analiză (31), *atunci aceasta va apărea parțial în toate cele* N *componente:* **leakage**.

Definiție

Componentele în frecvență se numesc **output bins** *sau simplu* **bins**.

Exemplu fără leak

Fie un semnal sinusoidal eșantionat în $N = 64$ de puncte cu 3 perioade complete în orizontul de timp analizat.

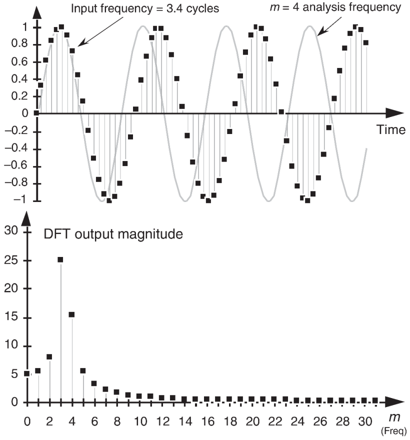


Sursă: (Lyons 2004)

Observăm că toate frecvențele în afară de bin-ul $m = 3$ sunt nule.

Exemplu leak

Fie un semnal sinusoidal eșantionat în $N = 64$ de puncte cu **3,4** perioade complete în orizontul de timp analizat.



Sursă: (Lyons 2004)

Observăm că apare fenomenul de **leak** în celelalte bin-uri.

Apariția unui leak

Remarcă

Fenomenul de leak apare când semnalul nu are un număr întreg de perioade în orizontul de timp eșantionat.

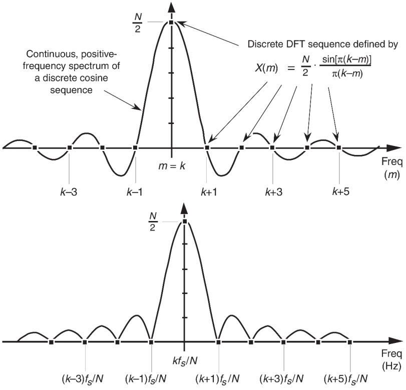
Teoremă

Pentru un semnal sinusoidal având $k \in \mathbb{R}$ perioade în orizontul de timp de N eșantioane, putem aproxima amplitudinea unui bin DFT în funcție de m cu ajutorul funcției sinc*:*

$$X(m) = \frac{A_0 N}{2} \frac{\sin[\pi(k - m)]}{\pi(k - m)} \tag{32}$$

Funcția sinc. Lobi.

N eșantioane DFT ce conțin k perioade a unei sinusoide: sus avem amplitudinea în funcție de bin-ul m, jos magnitudinea în frecvență.

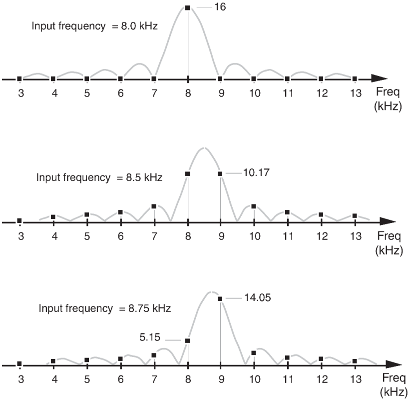


Sursă: (Lyons 2004)

Figură compusă din **lobul principal** și **loburi secundare** mai mici.

Eșantionarea sinc

Fie o sinusoidă de $8kHz$ eșantionată la $32kHz$. În figură avem DFT-ul în $N = 32$ puncte (bin-uri distanțate la $f_s/N = 1kHz$).

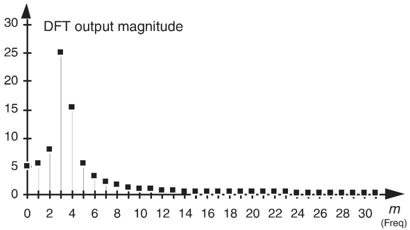


Sursă: (Lyons 2004)

Leak când frecvența sinusoidei nu este centrată în lobul principal.

Asimetrie

De ce este DFT asimetrică în exemplul de mai devreme? (ex. $m = 4$)

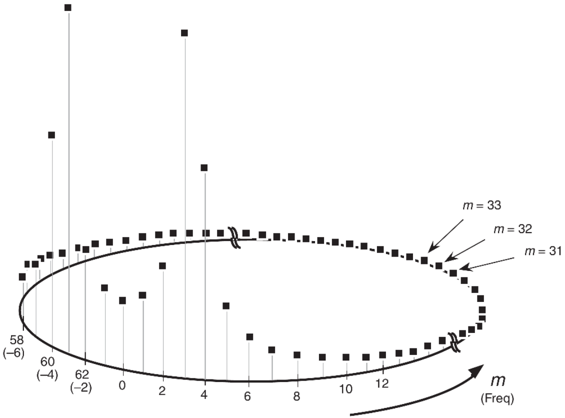


Sursă: (Lyons 2004)

Am arătat că DFT este simetrică și se repetă o dată la N puncte. În cazul semnalelor reale chiar $N/2$!

Înfășurare

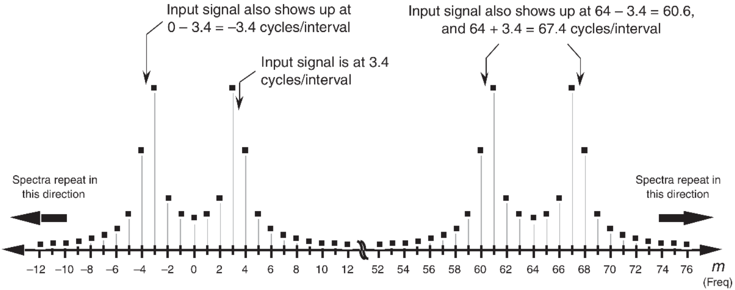
DFT se repetă din N în N puncte creând un cerc de-alungul căruia eșantioanele DFT se înfășoară.



Sursă: (Lyons 2004)

Înfășurare linarizată

Expus liniar, discul pentru un semnal cu $k = 3,4$ perioade în fereastra de $N = 64$ eșantione devine:

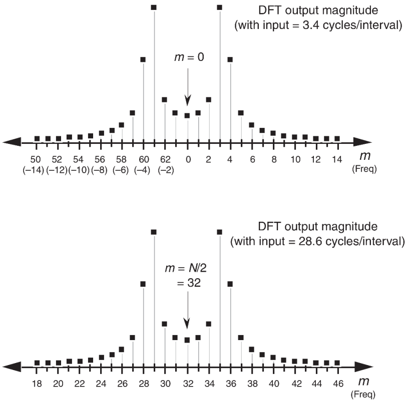


Sursă: (Lyons 2004)

Ce se întâmplă cu semnalele reale?

Înfășurare semnale reale

Semnalele reale se repetă la $N/2$ a.î. $|X(m)| = |X(N-m)|$ cf. (23)
Magnitudinea DFT pentru $k = 32 - 3,4$ și $k = 3,4$ este similară.

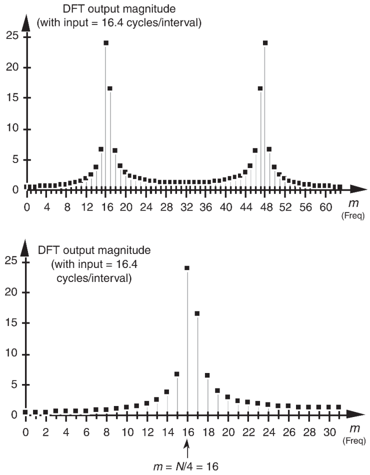


Sursă: (Lyons 2004)

Pentru semnale reale avem înfășurare și în jurul $m = N/2$.

Înfășurare semnale reale

Alt exemplu pentru $k = 16,4$ și $N = 64$.



Sursă: (Lyons 2004)

Leak minim la $N/4$ ce crește când ne îndepărtăm de lobul principal.

Ferestre

Definiție

Ferestrele sunt folosite pentru a atenua amplitudinea semnalului la începutul și la capătul orizontului de eșantionare astfel încât să reducă fenomenul de leak.

Remarcă

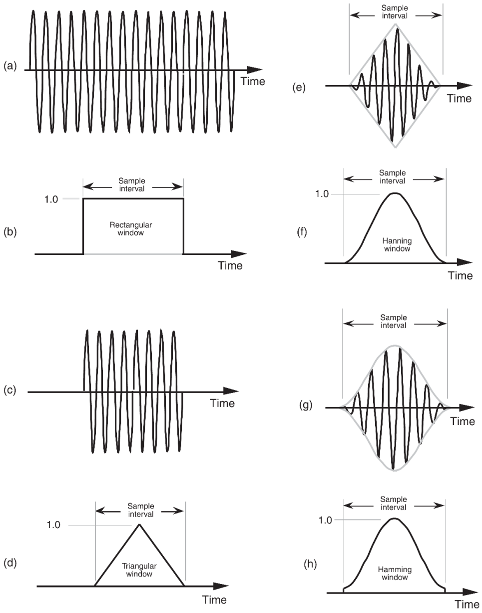
De fiecare dată când aplicăm DFT folosim o fereastră dreptunghiulară în care înmulțim fiecare eșantion cu o secvență, sau fereastră, de eșantioane de valoare unu.

În afara ferestrei secvența este nulă.

Propoziție

DFT a ferestrei dreptunghiulare este funcția sinc.

Exemple de ferestre (Lyons 2004)



Aplicarea unei ferestre

Înainte de a aplica DFT, eșantioanele semnalului $x(n)$ sunt înmulțit cu coeficienții corespunzători din fereastra $w(n)$:

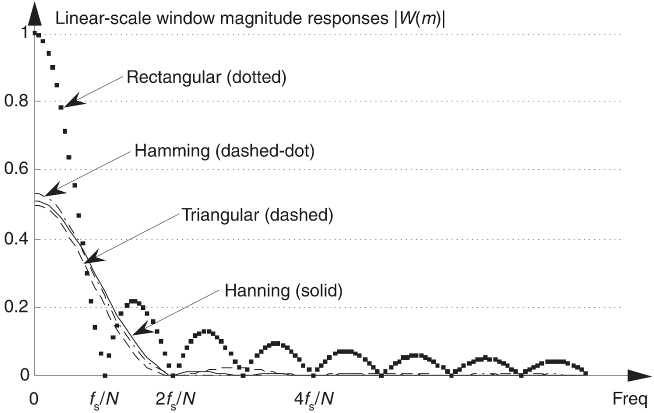
$$X_w(m) = \sum_{n=0}^{N-1} w(n)x(n)e^{-j2\pi nm/N} \tag{33}$$

unde $w(n)$ este o fereastră:

Dreptunghilară	$w(n) = 1$
Trianghiulară	$w(n) = \begin{cases} \frac{n}{N/2}, n = 2k \\ 2 - \frac{n}{N/2}, n = 2k+1 \end{cases}$
Hanning	$w(n) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos(\frac{2\pi n}{N})$
Hamming	$w(n) = 0,54 - 0,46\cos(\frac{2\pi n}{N})$

Magnitudinea răspunsului în frecvență

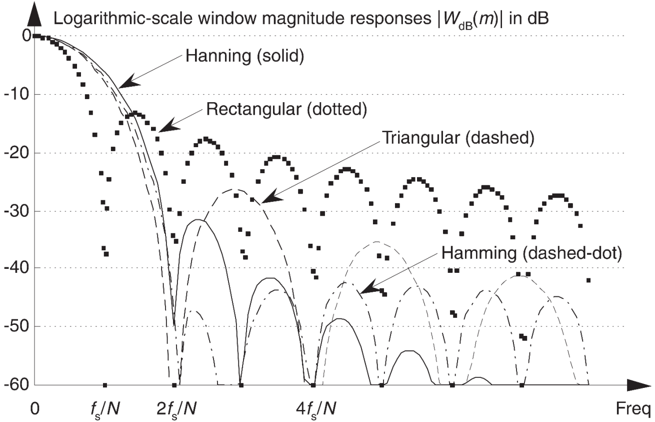
Ferestrele alternative reduc lobii secundari (vs. dreptunghiular).



Observăm că lobul principal scade în magnitudine: **processing gain** sau **loss** al ferestrei.

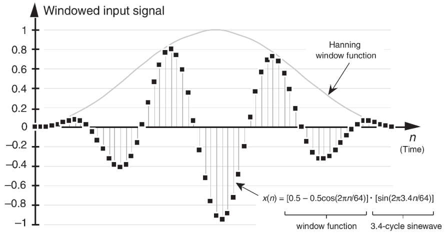
Magnitudinea(dB) răspunsului în frecvență

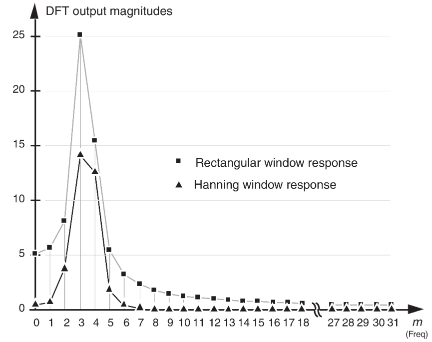
$$|W_{\text{dB}}(m)| = 20\log_{10}\left(\frac{|W(m)|}{|W(0)|}\right) \tag{34}$$



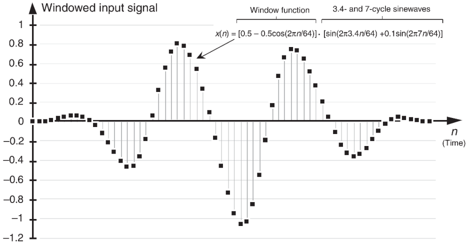
Obs: Scad lobii secundari, dar scade și rezoluția frecvenței.

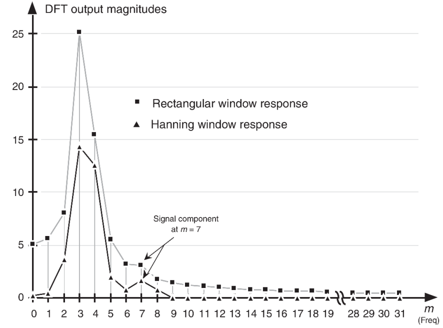
Exemplu: Hanning pentru $k = 3, 4$





Exemplu: Hanning pentru detecție semnal de nivel scăzut





Alegerea ferestrei

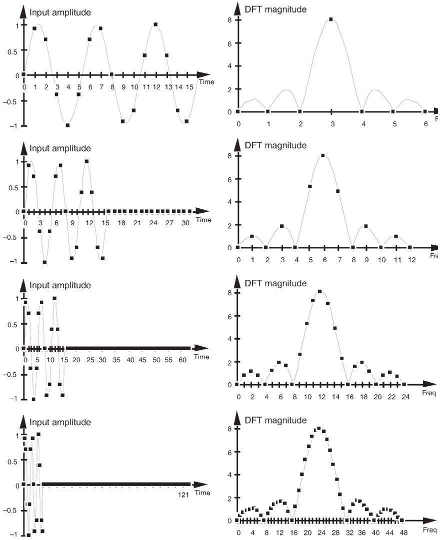
Alegerea ferestrei potrivite este un compromis între:

- lățirea lobului principal
- nivelele primelor loburi secundare (ex. Hanning vs. Hamming)
- viteza de descreștere a loburilor secundare

Dimensiunea și forma ferestrei afectează direct rezoluția și sensivitatea semnalului.

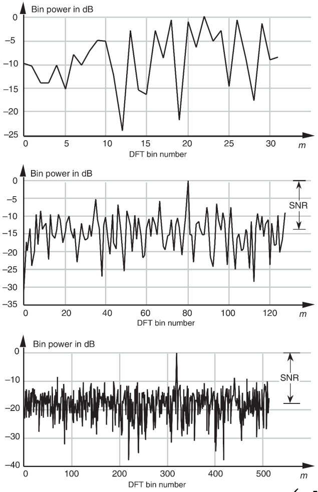
Rezoluție. Zero padding.

Creștem artificial rezoluția DFT prin adăugarea de eșantioane nule.



Gain, SNR

Creștem puterea semnalului (sau **gain**) prin creșterea lui N.



$$\mathrm{SNR}_N = \mathrm{SNR}_{N'} + 10\log_{10}\left(\frac{N}{N'}\right) \tag{36}$$