

Teoremă Orice funcție (parțială) calculabilă
cu PS este (parțial) Turing calculabilă.

Clasa funcțiilor (parțiale) recursive

Funcții elementare : $\text{succ} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $s(x) = x+1$

proiecții : $\pi_k^{(n)} : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, $\pi_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = x_k$

constante : $C_k^{(n)} : \mathbb{N}^n \rightarrow \mathbb{N}$, $C_k^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = k$.

(I) Sunt aceste funcții calculabile cu PS ?

$\text{succ} : Y \leftarrow X$

$Y \leftarrow Y+1$

$\pi_k : Y \leftarrow X_k$

$C_k : Y \leftarrow Y+1 \quad \text{for } k \text{ ori}$
 $Y \leftarrow Y+1$

Operații cu funcții

1) Compunere funcțională

$f : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ este definită prin comp. funcț.
a funcțiilor $h : \mathbb{N}^m \rightarrow \mathbb{N}$ și $g_i : \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$, $i = \overline{1, m}$
dacă $f(x_1, \dots, x_k) = h(g_1(x_1, \dots, x_k), \dots, g_m(x_1, \dots, x_k))$

(II) Dacă funcțiile g_i și h sunt calculabile cu PS este f calc. cu PS ?

$Z_1 \leftarrow g_1(x_1, \dots, x_k)$

$Z_2 \leftarrow g_2(x_1, \dots, x_k)$

\vdots
 $Z_m \leftarrow g_m(x_1, \dots, x_k)$

$Y \leftarrow h(Z_1, \dots, Z_m)$

goto A_j

$A_j : Z_c \leftarrow Z_c$

Recursivitate primitivă

$f: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ este definită prin recursivitate primitivă din $g: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ și $h: \mathbb{N}^{k+2} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\text{dacă } f(x_1, \dots, x_k, 0) = g(x_1, \dots, x_k)$$

$$f(x_1, \dots, x_k, t+1) = h(x_1, \dots, x_k, t, f(x_1, \dots, x_k, t))$$

(iii) Dacă funcțiile g și h sunt calc. cu PS, este f calc. cu PS? DA.

$$Z_1 \leftarrow g(x_1, \dots, x_k) \quad // \quad Z_1 = f(x_1, \dots, x_k, 0)$$

IF $X_{k+1} \neq 0$ GOTO A1

$Y \leftarrow Z_1$

GOTO E

$$A1: Z_2 \leftarrow h(x_1, \dots, x_k, \overset{0}{Z_3}, \overset{g}{Z_1})$$

$$f(x_1, \dots, x_k, 1)$$

$$X_{k+1} \leftarrow X_{k+1} - 1$$

$$Z_3 \leftarrow Z_3 + 1$$

$$Z_1 \leftarrow Z_2$$

IF $X_{k+1} \neq 0$ GOTO A1.

$Y \leftarrow Z_1$

Minimizare nemărginită

$f: \mathbb{N}^k \rightarrow \mathbb{N}$ este definită prin minimizare nemărginită din $g: \mathbb{N}^{k+1} \rightarrow \mathbb{N}$ dacă

$$f(x_1, \dots, x_k) = \min_{t \in \mathbb{N}} [g(x_1, \dots, x_k, t) = 0]$$

(iv) Dacă g este calc. cu PS, este f calc. cu PS?

= 3 =

A₂: Z₁ ← g(x₁, ..., x_k, Y)

IF Z₁ ≠ 0 GOTO A₁

GOTO E

A₁: Y ← Y + 1

GOTO A₂

Def. O funcție (parțială) este recursivă dacă se poate obține din funcții elementare prin aplicarea iterată a op. de comp. funcțională, recursivă primitivă și minimizare necăzguite.

Teorema Orice funcție (parțială) recursivă este (parțial) calculabilă cu PS.

Ex: succ(x₁, x₂) = x₁ + x₂ : Este recursivă?

$$f(x_1, 0) = x_1 = \pi_1^{(1)}(x_1)$$

$$f(x_1, x_2 + 1) = f(x_1, x_2) + 1 \\ = \text{succ}(\pi_3^{(3)}(x_1, x_2, f(x_1, x_2)))$$

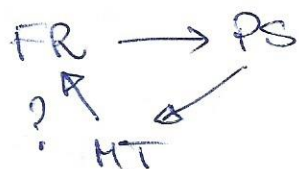
$$\text{prod}(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2$$

$$\text{prod}(x_1, 0) = 0$$

$$\text{prod}(x_1, x_2 + 1) = \text{prod}(x_1, x_2) + x_1$$

$$x! \quad 0! = 1$$

$$(x+1)! = x! \cdot (x+1) = x! \cdot \text{succ}(x)$$



= 4 =

Codificarea PS $P \mapsto n(P) (\#(P)) \in \mathbb{N}$

Dacă g este Turing calculabilă este f , obținută
prin minimizare nemărginită din g , Turing
calc? (0,2p)

