

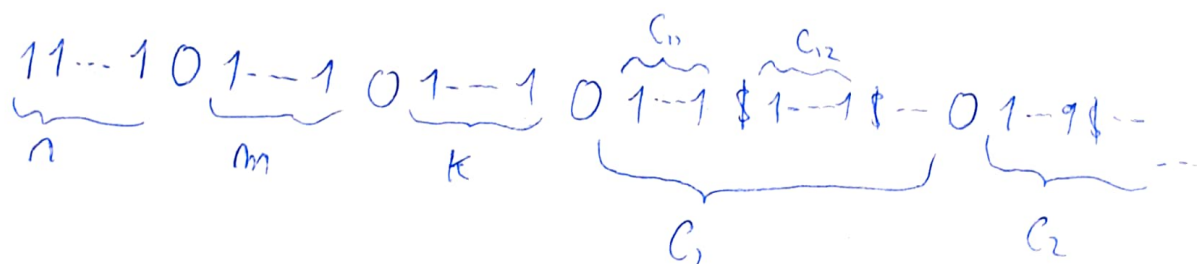
## Examen CC

### Problema 4.

- Limbajul atașat

Fie  $n, C_1, C_2, \dots, C_m, m$  și  $k$  dați.

Putem codifica această instanță în felul următor:



- Este în NP.

Cu o MT nedeterministă, alegem toate seturile posibile de elemente între 1 și  $N$ .

- Dacă sunt mai mult de  $k$  elemente refuzăm.
- Dacă nu, verificăm intersecția cu toate mulțimile  $C_i$ . Dacă se intersectează cu toate acceptăm.

- Este NP-hard

Fie PROB instanța noastră.

Vrem să arătăm că  $SAT \in PROB$ .

IDEE:

Vom reprezenta fiecare clauză din SAT ca o mulțime, și  $S$  ca fiind ~~variab~~ soluția SAT.

Dacă SAT are  $N$  variabile, vom alege în PROB  $n = 2 \cdot N$ .

Numerele vor reprezenta:

$2i-1 \Rightarrow x_i$  este adevărat

$2i \Rightarrow x_i$  este fals.

Pentru a ne asigura că  $S$  va conține exact unul dintre  $1, 2, 3, 4, \dots, 2x, 2x-1$ , impunem:

-  $K = N$

- adăugăm clauzele  $(x_i \vee \bar{x}_i)$  pt toți  $i$ , care se traduc în mulțimile  $\{2i-1, 2i\}$ .

Din principiul cutiei, avem max  $N$  elemente, și  
 cel puțin unul din  $\{1, 2\}, \{3, 4\}, \dots, \{2N-1, 2N\}$ ,  
 deci vom avea exact unul dintre  $1, 2, 3, 4, \dots$  astfel  
 încât  $S$  reprezintă o soluție validă.

Astfel: din  $(x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \dots \vee x_{i_{n_1}}) \wedge (x_{j_1} \vee x_{j_2} \vee \dots \vee x_{j_{n_2}}) \wedge \dots$   
 obținem:

$$n = 2 \cdot \text{ID\_max}$$

$$K = \text{ID\_max}$$

$$C = \{ \{x'_{i_1}, x'_{i_2}, \dots, x'_{i_{n_1}}\} \mid x_i \text{ clauză în SAT} \} \cup$$

$$\{1, 2\} \cup \{3, 4\} \cup \dots \cup \{2n-1, 2n\}$$

$$\text{prin } x' \text{ se înțelege } \begin{cases} 2x-1 & \text{* adevărat} \\ 2x & \text{! * fals} \end{cases}$$

asadar, existența unei mulțimi  $S$  confirmă / infirmă  
 existența unei soluții la SAT.

$$\text{Soluția este dată de } x_i = \begin{cases} 1 & \text{if } 2x_i-1 \in S \\ 0 & \text{if } 2x_i \in S. \end{cases}$$

Notă am demonstrat aici sus că fie  $2x_i \in S$  fie  
 $2x_i-1 \in S$ .

## Tipul reducerii:

Estă o reducere în timp polinomial și memorie logaritmică. Putem construi o MT traducător astfel:

- Citesc în SAT cât este  $N$ , și scriu  $n=2N$  pe banda de scriere
- Citesc câte clauze  $x$  avem, și scriu  $m=N+x$
- ~~cite~~  
scriu  $k=N$
- pt. fiecare  $i$  de la 1 la  $N$ , scriu mulțimea  $\{2i-1, 2i\}$
- pt. fiecare clauză  $x$  scriu mulțimea corespunzătoare transformând  $x$  în  $2x-1$  și  $\bar{x}$  în  $2x$ .

Cum problema este în NP și  $SAT \leq_{p.s.c.} PROB$ , problema dată este și NP-hard, deci este NP-completă.