Examen CC

Problema 4.

- Limbajul atașat

Fie n, $C_1, C_2, \dots, C_m$, m și k dați.

Putem codifica această instanță în felul următor:

$$\underbrace{11\cdots1}_{n}\,0\,\underbrace{1\cdots1}_{m}\,0\,\underbrace{1\cdots1}_{k}\,0\,\underbrace{\overbrace{1\cdots1}^{C_{11}}\,\$\,\overbrace{1\cdots1}^{C_{12}}\,\$\cdots}_{C_1}\,0\,\underbrace{1\cdots1\,\$\cdots}_{C_2}\cdots$$

- Este în NP:

Cu o MT nedeterministă, alegem toate seturile posibile de elemente între 1 și N.

- Dacă sunt mai mult de k elemente refuzăm.
- Dacă nu, verificăm intersecția cu toate mulțimile C_i. Dacă se intersectează cu toate acceptăm.

- Este NP-hard

Fie PROB instanța noastră.

Vrem să arătam că SAT ≤ PROB.

IDEE:

Vom reprezenta fiecare clauză din SAT ca o mulțime, și S ca fiind ~~variab~~ soluția SAT.

Dacă SAT are N variabile, vom alege în PROB $n = 2 \cdot N$.

Numerele vor reprezenta:

$2i-1 \Rightarrow x_i$ este adevărat

$2i \Rightarrow x_i$ este fals.

Pentru a ne asigura că S va conține exact unul dintre 1 și 2, 3 și 4 ... $2x, 2x-1$, impunem:

- $K = N$
- adăugăm clauzele $(x_i \vee \bar{x}_i)$ pt toți i, care se traduc în mulțimile $\{2i-1, 2i\}$.

Din principiul cutiei, avem max N elemente, și cel puțin unul din $\{1,2\}, \{3,4\}, \dots \{2N-1, 2N\}$, deci vom avea exact unul dintre 1,2, 3-4, -- altfel spus S reprezintă o soluție validă.

Astfel: din $(x_{11} \vee x_{12} \vee \dots \vee x_{1k}) \wedge (x_{21} \vee x_{22} \vee \dots \vee x_{2k_2}) \wedge \dots$

obținem:

$n = 2 \cdot ID\_max$

$K = ID\_max$

$C = \{\{x'_{i1}, x'_{i2}, \dots x'_{ik_i}\} \mid X_i$ clauză în SAT $\} \cup$

$\{1,2\} \cup \{3,4\} \cup \dots \cup \{n-1, n\}$

prin x' se înțelege $\begin{cases} 2x-1 \mid x \text{ adevărat} \\ 2x \mid x \text{ fals} \end{cases}$

așadar, existența unei mulțimi S confirmă/infirmă existența unei soluții la SAT.

Soluția este dată de $x_i = \begin{cases} 1 \mid 2x_i-1 \in S \\ 0 \mid 2x_i \in S. \end{cases}$

Notă am demonstrat mai sus că fie $2x_i \in S$ fie $2x_i - 1 \in S$.

Tipul reducerii:

Este o reducere în timp polinomial și memorie logaritmică. Putem construi o MT traducător astfel:

- Citește în SAT cât este N, și scrie $n = 2N$ pe banda de scriere
- Citește câte clauze X avem, și scrie $m = N + X$
- ~~câte~~ scrie $k = N$
- pt. fiecare i de la 1 la N, scrie mulțimea $\{2i-1, 2i\}$
- pt. fiecare clauză X scrie mulțimea corespunzătoare, transformând x în $2x-1$ și $\bar{x}$ în $2x$.

Cum problema este în NP, și $SAT \leq_{tp,SL} PROB$, problema dată este și NP-hard, deci este NP-completă