Computerorientierte Mathematik I

Mitschrft der Tutorien

Samanta Scharmacher[1]
Nicolas Lehmann[2] (Dipl. Kfm., BSC)

[1] Freie Universität Berlin, FB Mathematik und Informatik,
Institut für Informatik, scharbrecht@zedat.fu-berlin.de
[2] Freie Universität Berlin, FB Mathematik und Informatik,
Institut für Informatik, AG Datenbanksysteme, Raum 170,
mail@nicolaslehmann.de, http://www.nicolaslehmann.de

Tutorium 1, 28.10.2015

Tutor stellt sich vor: Tim Dittmann, eMail: tim@zedat.fu-berlin.de
Die geschriebenen Programme an die eMail-Adresse des Tutors senden.

Organisatorisches

Skript abzuholen im Copyshop in Dahlem Dorf (Könnigign-Luise -Strasse,
Preis 5,80 EUR

Scheinkriterien:

- Klausur bestehen mit ≥ 4.0
- Klausurtermine 05.02.2015 und 15.04.2015
- 60% der Programmieraufgaben
- 60% der Theorieaufgaben
- einmal Vorrechnen

Die Abgabe der übungszettel erfolgt in Zweiergruppen. Es ist ok, tutoriumübergreifende Übungsgruppen zu bilden. Abgabe soll bei Tim Dittmann erfolgen (Samanta Scharmacher und Nicolas Lehmann), zwei Wochen nach dem Erscheinen des Zettels. Quellcode an die eMail senden und Abgabe der Lösung des Zettel inklusive gedrucktem Quellcode ins Fach des Tutors.

Subject der eMail = `[CoMa] <Name1> <Name2> <Uebungszettelnummer>`

Abgabe der Dateien in gezippter Form. Es soll immer eine Run-Datei `run_x_y.m` und Funktions-Dateien abgegeben werden. (Mit x ist Zettelnummer und y ist Aufgabennummer.)

Positiossysteme

Einleitung

Problem: Natürliche Zahlen sind abstrakte mathematische Objekte, die wir darstellen wollen.

Lösung hierfür sind Positionssysteme.

$n \in \mathbb{N}$, mit Basis $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$n = \sum_{i=0}^{k} r_i \cdot q, 0 \leq r_i < q$ und identifizieren n mit dem r_i bzw. mit Ziffern (Darstellung von n zur Basis q)

Beispiel

$1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 3 \cdot 10^0 = 123_{10}$
$1 \cdot 7^2 + 2 \cdot 7^1 + 3 \cdot 7^0 = 123_7$

Umrechnen

Umrechnen: $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$

$n_0 = \sum_{i=0}^{k} r_i \cdot q^i \longrightarrow \frac{n_0}{q} = \sum_{i=1}^{k} r_i \cdot q^{i-1}$ + Rest r_0
$n_1 = \sum_{i=0}^{k} r_i \cdot q^i \longrightarrow \frac{n_1}{q} = \sum_{i=1}^{k} r_i \cdot q^{i-2}$ + Rest r_1
...
$n_k = r_k \cdot 1 \longrightarrow \frac{n_k}{q} = 0$ + Rest r_k

$\Rightarrow$ Darstellung von n ist $r_k r_{k-1} ... r_1 r_0$

Beispiel: $n = 52_{10}, q = 3$

$n_0 = 52_{10} \longrightarrow 17$ Rest 1
$n_1 = 17_{10} \longrightarrow 5$ Rest 2
$n_2 = 5_{10} \longrightarrow 1$ Rest 2
$n_3 = 1_{10} \longrightarrow 0$ Rest 1

$n = 1221_3$

Darstellung von negativen Zahlen

$q = 2$ ab jetzt (Dual bzw. Binärsystem) mit Vorzeichen-Bit: Darstellung der Zahl im 2er-System, erstes Bit gibt Vorzeichen an (+ = 0, - = 1)

0.1 Beispiel

z.B. 4-Bit, $3_{10} = 0011_2$, $-3 = 1011$ (nicht Zweierkomplement!)

N-Bit Zweierkomplement

N=4, positive Zahlen wie gewohnt, negative wie folgt:
$n = -3_{10} \to 0011 \to 1100 \to 1101$ (Bit-Flip, +1)

Vorteile: 0 eindeutig ($0000 \to 1111 \to [1]0000$) [nur 4 Bit]

Programmieren in MATLAB

Funktionen

```
function c = kgV(a,b)
c = 0;
i = 1;

while i <= a*b % solange i <= a * b tue folgendes
  if mod(i,a) == 0 && mod(i,b) == 0
    c = 1;
    break; % beende die Schleife
  else % ansonsten
    i = i+1;
  end
end

end %eof
```

Tutorium 2, 04.11.2015

Wiederholung zur Vorlesung

$z_n z_{n-1} z ... z_0 z_{-1} ... z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n} z_i \cdot q^i$, $q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $z_i \in \{0, ..., q-1\}$

z.B. $q = 10$ Dezimalbruch, $q = 2$ Dualbruch

Nicht jeder Bruch ist in endlicher q-adischer Bruch.

z.B. $\frac{1}{3} = 0,333... = 0,\overline{3}$, aber jeder Brch ist ei periodischer q-adicher Bruch.
z.B. $\frac{1}{4} = 0,25\overline{0} = 0,24\overline{9}$

$\frac{1}{3} = 0,333... = 0,3 \cdot (1 + 10^{-1} + 10^{-2} + ...) = 0,3 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} = \frac{1}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{1}{\frac{9}{10}} = \frac{3}{10} \cdot \frac{10}{9} = \frac{1}{3}$

$0,001100110011_2 = 0,\overline{0011} = (\frac{1}{8} + \frac{1}{16}) \cdot (2^0 + 2^{-4} + 2^{-8} + ...) = \frac{3}{16} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} 2^-4i = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{1-2^{-4}} = \frac{3}{16} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{16}} = \frac{3}{16} \cdot \frac{16}{15} = \frac{1}{5}$

Umrechnen

$q \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $z = \sum_{i=-m}^{n} z_i \cdot q^i = \sum_{i=0}^{n} z_i \cdot q^i + \sum_{i=-m}^{-1} z_i \cdot q^i$
Hinweis: Erste Summe wie gewohnt umrechnen, zweite Summe konvertieren zu $\sum_{i=1}^{m} z_i \cdot q^{-i}$

1. Fall: $m \in \mathbb{N}$

$z = p_1 p_2 ... p_m$, mit $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$p_1 = \sum_{i=1}^{m} z_i \cdot q^{-i} \longrightarrow \sum_{i=2}^{m} z_i \cdot q^{-i+1} + z_1$
$p_2 = \sum_{i=2}^{m} z_i \cdot q^{-i+1} \longrightarrow \sum_{i=3}^{m} z_i \cdot q^{-i+2} + z_2$
...
$p_m = z_m \cdot q^{-1} \longrightarrow 0 + z_m$

2. Fall: $m \in \infty$

$p_k = \sum_{i=k}^{\infty} z_i \cdot q^{-i} \longrightarrow \sum_{i=k+1}^{\infty} z_i \cdot q^{-i+1} + z_k$ mit $p_{k+1} = p_l$, $l \leq k$

$\Rightarrow z = z_n ... z_0, z_1 ... z_{l-1} \overline{z_l ... z_k}$

Beispiel

$z = \frac{1}{7}$, $q = 10$
$p_1 = \frac{1}{7} \longrightarrow \frac{10}{7} = \frac{3}{7} + 1$

$p_2 = \frac{3}{7} \longrightarrow \frac{30}{7} = \frac{2}{7} + 4$
$p_3 = \frac{2}{7} \longrightarrow \frac{20}{7} = \frac{6}{7} + 2$
$p_4 = \frac{6}{7} \longrightarrow \frac{60}{7} = \frac{4}{7} + 8$
$p_5 = \frac{4}{7} \longrightarrow \frac{40}{7} = \frac{5}{7} + 5$
$p_6 = \frac{5}{7} \longrightarrow \frac{50}{2} = \frac{1}{7} + 7$

$\Rightarrow 0,\overline{142857}$

In diesem Fall $l = 1, k = 6$, $p_1 = \frac{1}{7} = p_{k+1}$

Beispiel

$z = \frac{1}{10}$, $q = 2$
$p_1 = \frac{1}{10} \longrightarrow \frac{1}{5} + 0$
$p_2 = \frac{1}{5} \longrightarrow \frac{2}{5} + 0$
$p_3 = \frac{2}{5} \longrightarrow \frac{4}{5} + 0$
$p_4 = \frac{4}{5} \longrightarrow \frac{3}{5} + 1$
$p_5 = \frac{3}{5} \longrightarrow \frac{1}{5} + 1$

$\Rightarrow 0,0\overline{0011}$, da $p_2 = p_6$

Umrechnen

Rechnen mit Dualzahlen geht genauso wie im Dezimalsystem, z.B.: $111 \cdot 101,1$

$11,1 + 111 + 0000 + 11100 = 100110,1$

Numerische Darstellung von reelen Zahlen

Problem: Reele Zahlen sind nicht abzählbar, weshalb es kein Ziffernsystem für sie geben kann. Man kann nur Approximationen ausgeben, z.B. q-adische Brüche.

Festkommazahlen

Feste Anzahl von n Vor- und Nachkommastellen.

Darstellung iner reelen Zahl: $z_{n-1}z_{n-2}...z_0, z_{-1}...z_{-m} = \sum_{i=-m}^{n-1} z_i \cdot q^i$, $z_i \in \{0, ..., q-1\}$

Beispiel

$x = \pi$, $n = 3$, $m = 1 \to \tilde{x} = 003,1$, Problem: Kann ungenau sein, bei festem n und m.

Gleitkommazahlen

genauer bedeutet, dass der absolute Fehler $|x - \tilde{x}|$ bzw. der relative Fehler $\frac{|x-\tilde{x}|}{|x|}$ mglichst klein ist.

Die Zahl $\tilde{x} = (-1)^s a q^e$ mit $s \in \{0, 1\}$ Vorzeichenbit und $a = 0, a_1 ... a_l$, $a_1 \neq 0$ oder $\forall i : a_i = 0$, $a_i \in \{0, ..., q - 1\}$ und Exponent $e \in \mathbb{Z}$ heit Gleitkommazahl mit MAntissenlänge l, Schreibweise $\tilde{x} \in G(q, l)$

z.B.: $-12345, 67 \longrightarrow (-1)^1 \cdot 0, 1234567 \cdot 10^{-2}$, also $s = 1$,$l = 7$,$e = -2$, $q = 0, 1234567$

Tutorium 3, 11.11.2015