

# INSTITUT DE SCIENCE FINANCIÈRE ET D'ASSURANCES

## PROJET RISQUE DE CRÉDIT

---

# Considération du risque de défaut pour l'estimation d'obligations convertibles

---

Léo ALLERS  
Théo JALABERT  
Lou SIMONEAU-FRIGGI

## Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>2</b>
I.1	Obligations convertibles avec risque de crédit . . . . .	2
I.2	Revue de la littérature . . . . .	3
<b>II</b>	<b>Modèle à différences finies</b>	<b>5</b>
II.1	Processus stochastique . . . . .	5
II.2	Dérivation . . . . .	5
II.3	Différences finies . . . . .	6
II.3.A	Schéma Explicite . . . . .	7
II.3.B	Schéma Implicite . . . . .	7
II.3.C	Schéma de Crank-Nicolson . . . . .	7
<b>III</b>	<b>Modèle Binomial</b>	<b>9</b>
III.1	Processus Binomial . . . . .	9
III.2	Dérivation . . . . .	9
III.3	Restrictions . . . . .	10
III.4	Évaluation . . . . .	11
III.4.A	Évaluation sans coupons . . . . .	11
III.4.B	Évaluation avec coupons . . . . .	13
III.5	Stratégie de synthèse et de couverture . . . . .	13
III.6	Paramètres et formules du modèle . . . . .	15
<b>IV</b>	<b>Exemple numérique</b>	<b>17</b>
IV.1	Sensibilité . . . . .	18
IV.2	Coût du défaut après couverture . . . . .	22
IV.3	Convergence . . . . .	23
	<b>Conclusion</b>	<b>25</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>26</b>
	<b>Annexes</b>	<b>29</b>
.1	Améliorations des différences finies . . . . .	29

# I Introduction

Ce projet de recherche a pour objectif l'évaluation d'obligations convertibles basée sur les publications de AYACHE, FORSYTH et VERTZAL [1] ainsi que MILANOV et KOUNCHEV [2].

Comme abordé en cours d'ACTIFS HYBRIDES avec le professeur Stanislas Quelin, les obligations convertibles sont un instrument hybride disponible sur les marchés financiers. L'obligation convertible est un instrument similaire à une obligation normale, à ceci près que le détenteur a la possibilité de convertir l'obligation en un nombre spécifié d'actions. De plus, l'obligation convertible comprend typiquement des options intégrées permettant à l'émetteur de racheter l'obligation convertible à un prix spécifié et à l'investisseur de forcer l'émetteur à racheter l'obligation convertible. En cas de défaut de paiement de l'émetteur, l'obligation pourrait faire l'objet d'une récupération partielle ou d'un défaut total.

## I.1 Obligations convertibles avec risque de crédit

Une obligation convertible est une rente qui verse des coupons  $C_i$  à une date  $t_i$  et paie un montant  $R$  à l'échéance  $T$ , avec les options intégrées suivantes :

- **Une option de vente pour le détenteur de l'obligation** : le détenteur peut exiger le remboursement de l'obligation par l'émetteur avant l'échéance pour  $K_t^p$ , à condition que  $t \in \Omega^p$ . Cette option n'est pas applicable à l'échéance,  $T \notin \Omega^p$
- **Un call pour l'émetteur de l'obligation** : l'émetteur peut forcer le remboursement anticipé de l'obligation pour  $K_t^c$ , à condition que  $t \in \Omega^c$ . Habituellement,  $K_t^c > K_t^p$ . Cette option n'est pas applicable à l'échéance,  $T \notin \Omega^c$ .
- **Une option de conversion** : le détenteur de l'obligation peut convertir l'obligation en  $\kappa_t$  actions, pour une valeur de  $\kappa_t S_t$ , à condition que  $t \in \Omega^v$ . Pour optimiser les profits, le détenteur de l'obligation préférerait convertir plutôt qu'exercer si  $K_t^p < \kappa_t S_t$ . Cette option de conversion prévaut sur l'option d'achat (c'est-à-dire que si l'émetteur de l'obligation force le remboursement anticipé, le détenteur de l'obligation peut toujours convertir l'obligation en actions). Cette option est applicable à l'échéance,  $T \in \Omega^v$ .

En cas de défaut, le détenteur de l'obligation peut soit récupérer les restes de la rente, soit convertir en actions, selon la valeur la plus élevée. Dès lors, le défaut est considéré comme terminal.

Supposons que la récupération de l'obligation soit  $\gamma$ , et que la baisse du prix de l'action soit  $\eta$ , alors la valeur de l'obligation convertible en défaut est <sup>1</sup> :

$$X = \max(\gamma R, (1 - \eta)\kappa_t S_t) \quad (\text{I.1})$$

Le tableau 1 illustre les différents choix effectués par le détenteur de l'obligation et l'émetteur de l'obligation, ainsi que les circonstances dans lesquelles ces choix sont faits AMMANN, KIND et WILDE [3]. AYACHE, FORSYTH et VERTZAL [1] utilise une méthode alternative, un problème complémentaire linéaire, pour décrire les paiements. La

1. Ceci suppose que la récupération de l'obligation est basée sur la valeur de rachat. Une autre possibilité est de baser la récupération sur la valeur de l'obligation au temps  $t$

figure 1 illustre les actions prises sur l'obligation pendant la durée de vie d'une obligation convertible.

Action	Payoff	Condition
Put	$K_t^p$	$(V_t \leq K_t^p) \wedge (t \in \Omega^p) \wedge [(\kappa_t S_t < V_t) \vee (t \notin \Omega^v)]$
Call	$K_t^c$	$(V_t \geq K_t^c) \wedge (t \in \Omega^c) \wedge [(\kappa_t S_t < K_t^c) \vee (t \notin \Omega^v)]$
Conversion	$\kappa_t S_t$	$(\kappa_t S_t \geq V_t) \wedge (t \in \Omega^v)$
Conversion Forcée	$\kappa_t S_t$	$(V_t > \kappa_t S_t \geq K_t^c) \wedge (t \in \Omega^v) \wedge (t \in \Omega^c)$
Remboursement	$R$	$(t = T) \wedge [(\kappa_t S_t \leq R) \vee (t \notin \Omega^v)]$
Maintien		<i>sinon</i>

TABLE 1 – Gain pour l'obligation convertible.  $V_t$  est supposé être la valeur intrinsèque uniquement dans ce contexte.

## I.2 Revue de la littérature

INGERSOLL [4] a initialement publié sur l'évaluation d'une obligation convertible avec des extensions de BRENNAN et SCHWARTZ [5] et BRENNAN et SCHWARTZ [6]. L'approche originale consistait à traiter l'obligation et l'équité comme des composantes de la valeur de l'émetteur et à considérer le défaut lorsque la valeur de l'émetteur tombe en dessous d'un point où il ne peut plus répondre à ses obligations financières. Un aperçu de ce type d'approche est fourni par NYBORG [7] et les critiques sont adressées par JARROW et TURNBULL [8]. Les principaux problèmes de ce modèle sont que la valeur de l'émetteur n'est pas directement observable, difficile à paramétrer et que toutes les dettes seniors par rapport à l'obligation convertible doivent également être évaluées.

Une seconde approche consistait à évaluer l'obligation convertible sur la base du prix de l'action de l'émetteur. HO et PFEFFER [9], TSIVERIOTIS et FERNANDES [10] et MCCONNELL et SCHWARTZ [11] sont des exemples de ceux qui ont mis en œuvre des modèles à différences finies. DAVIS et LISCHKA [12] a été le premier à proposer l'utilisation d'un arbre trinomial, cependant il ne l'a pas implémenté. BARDHAN et al. [13] et HULL [14] ont tous deux mis en œuvre des arbres binomiaux. Une méthode raffinée, appelée « forme réduite », traite le défaut comme un saut discret dans le temps. AYACHE, FORSYTH et VERTZAL [1] ont été les premiers à permettre des sauts d'actions qui ne tombent pas à zéro. La probabilité du saut de perte sur une courte période est décrite par un taux de danger.

Le modèle binomial avec risque de crédit a été d'abord dérivé par MILANOV et KOUNCHEV [2], qui a montré que ce modèle converge, en temps continu, vers le modèle AYACHE, FORSYTH et VERTZAL [1]. MILANOV et KOUNCHEV [2] ont également montré que la méthode d'évaluation de ce modèle est la même que celle utilisée dans le modèle binomial classique.

Des méthodes de tarification basées sur la méthode de Monte Carlo ont également été considérées comme proposées par BOSSAERTS [15] avec GARCIA [16] fournissant une approche d'optimisation pour gérer l'exercice optimal anticipé des options américaines. D'autres améliorations des méthodes de tarification ont été réalisées par AMMANN, KIND et WILDE [3].

D'autres méthodes utilisées pour la tarification incluent une méthode par éléments finis de BARONE-ADESI, BERMUDEZ et HATGIOANNIDES [17] et une méthode par arbre binomial de TAKAHASHI, KOBAYASHI et NAKAGAWA [18] et AYACHE, FORSYTH et VERTZAL [19].

## II Modèle à différences finies

Cette section reproduit la dérivation, en utilisant une technique différente, du modèle stochastique tel que décrit par AYACHE, FORSYTH et VERTZAL [1]. Les paramètres pour la solution numérique, utilisant une construction en réseau, sont explicitement dérivés.

### II.1 Processus stochastique

Soit une action avec le modèle stochastique suivant pour les mouvements des prix des actions :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t - \eta S_t dq_t \quad (\text{II.1})$$

Si nous supposons que l'espérance, sous la probabilité risque-neutre, de l'évolution du prix de l'action soit le taux sans risque,  $\mathbb{E}[dS_t] = r S_t dt$ , alors  $\mu = (r + \lambda\eta)$  et l'équation différentielle devient :

$$dS_t = (r + \lambda\eta) S_t dt + \sigma S_t d\widetilde{W}_t - \eta S_t dq_t \quad (\text{II.2})$$

où :

- $\mu$  est le taux de dérive ou drift du prix de l'action ;
- $r$  est le taux sans risque ;
- $\sigma$  est la volatilité logarithmique du prix de l'action ;
- $\lambda$  est le taux de danger ;
- $\eta$  est la baisse en pourcentage du prix de l'action lors d'un événement de défaut ;
- $d\widetilde{W}_t$  est un processus de Wiener ;
- $dq_t$  est un processus de saut de Poisson où le premier saut est l'événement de défaut.

### II.2 Dérivation

Soit un portefeuille,  $\Pi_t$ , qui détient une position longue dans le dérivé,  $V_t$ , et une position courte de  $\Delta_t$  dans l'action,  $S_t$ . Le résidu  $\Pi_t = V_t - \Delta_t S_t$  est investi au taux sans risque. Cela fournit une équation différentielle pour  $\Pi_t$  :

$$\begin{aligned} d\Pi_t &= r\Pi_t dt \\ &= r(V_t - \Delta_t S_t) dt \end{aligned} \quad (\text{II.3})$$

En cas de défaut, les avoirs du portefeuille  $\Pi_t^x$  comprennent une position longue dans le dérivé avec une valeur résiduelle  $X_t$  et une position courte de  $\Delta_t$  dans l'action avec une valeur résiduelle de  $(1 - \eta)S_t$ . Ainsi, la différence des avoirs du portefeuille lors de l'entrée en défaut est :

$$\begin{aligned} d\Pi_t^x &= \Pi_t^x - \Pi_t \\ &= X_t - (V_t - \eta\Delta_t S_t) \end{aligned} \quad (\text{II.4})$$

À tout moment, le portefeuille peut soit faire défaut, soit évoluer de manière stochastique normale. La probabilité de défaut à tout instant donné est  $\lambda dt$  et la probabilité de non-défaut est  $(1 - \lambda)dt$ . En prenant l'espérance de la différentielle de  $\Pi_t$  et en appliquant le lemme d'Itô à la composante stochastique :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbb{E}}_t[d\Pi_t] = (1 - \lambda dt) & \left[ \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \mu S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} - \mu S_t \Delta_t \right) dt + \right. \\ & \left. \left( \sigma S_t \frac{\partial V}{\partial S} - \sigma S_t \Delta_t \right) d\widetilde{W}_t \right] + \lambda dt (X_t - (V_t - \eta \Delta_t S_t)) \end{aligned} \quad (\text{II.5})$$

En choisissant  $\Delta_t$  pour éliminer le terme  $d\widetilde{W}_t$ ,  $\Delta_t = \frac{\partial V}{\partial S}$ , la différentielle se simplifie à :

$$\tilde{\mathbb{E}}_t[d\Pi_t] = \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \lambda dt (X_t - (V_t - \eta \Delta_t S_t)) \quad (\text{II.6})$$

En égalisant la différentielle (II.3) et la différentielle attendue (II.6) pour  $\Pi_t$ , l'équation aux dérivées partielles (EDP) pour un dérivé avec risque de crédit est dérivée :

$$\begin{aligned} r(V_t - \Delta_t S_t)dt &= \left( \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} \right) dt + \lambda dt (X_t - (V_t - \eta \Delta_t S_t)) \\ (r + \lambda)V_t &= \frac{\partial V}{\partial t} + (r + \lambda\eta)S_t \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + \lambda X_t \end{aligned} \quad (\text{II.7})$$

### II.3 Différences finies

L'EDP dérivée peut être résolue numériquement en construisant un réseau de prix d'actions et de temps.  $V_j^n$  désignera la valeur du réseau au  $j^{\text{ème}}$  nœud d'actions et au  $n^{\text{ème}}$  nœud temporel où le pas entre les nœuds d'actions est  $\delta S_t$  et le pas entre les nœuds temporels est  $\delta t$ .  $S_j$  désignera la valeur de l'action au  $j^{\text{ème}}$  nœud d'actions et  $X_j$  désignera la valeur en défaut au  $j^{\text{ème}}$  nœud d'actions. Les prix des actions vont d'un minimum de  $S_0$  à un maximum de  $S_J$ .

Toutes les équations aux différences finies dérivées ici peuvent être exprimées en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\kappa$  où :

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2} \sigma^2 S_j^2 \frac{\delta t}{\delta S_t^2} - (r + \lambda\eta) S_j \frac{\delta t}{2\delta S_t} \\ \beta &= -(r + \lambda) - \sigma^2 S_j^2 \frac{\delta t}{\delta S_t^2} \\ \kappa &= \frac{1}{2} \sigma^2 S_j^2 \frac{\delta t}{\delta S_t^2} + (r + \lambda\eta) S_j \frac{\delta t}{2\delta S_t} \end{aligned}$$

et il est supposé que pour les nœuds limites :

$$\begin{aligned}\frac{V_0^n - V_{-1}^n}{\delta S_t} &= \frac{V_1^n - V_0^n}{\delta S_t} \\ V_{-1}^n &= 2V_0^n - V_1^n \\ \frac{V_J^n - V_{J-1}^n}{\delta S_t} &= \frac{V_{J+1}^n - V_J^n}{\delta S_t} \\ V_{J+1}^n &= 2V_J^n - V_{J-1}^n\end{aligned}$$

### II.3.A Schéma Explicite

En utilisant l'équation aux différences finies dans l'autre sens pour la dérivée temporelle, l'équation aux différences finies est :

$$(r + \lambda)V_j^n = \frac{V_j^n - V_j^{n-1}}{\delta t} + (r + \lambda\eta)S_j \frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2\delta S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{V_{j-1}^n - 2V_j^n + V_{j+1}^n}{\delta S_t^2} + \lambda X_j$$

$$V_j^{n-1} = \alpha V_{j-1}^n + (1 + \beta)V_j^n + \kappa V_{j+1}^n + \lambda \delta t X_j \quad (\text{II.8})$$

$$V_0^{n-1} = (1 + \beta + 2\alpha)V_0^n + (\kappa - \alpha)V_1^n + \lambda \delta t X_j \quad (\text{II.9})$$

$$V_J^{n-1} = (\alpha - \kappa)V_{J-1}^n + (1 + \beta - 2\kappa)V_J^n + \lambda \delta t X_j \quad (\text{II.10})$$

### II.3.B Schéma Implicite

En utilisant l'équation aux différences finies dans l'autre sens pour la dérivée temporelle et en évaluant les différentielles spatiales à l'étape de temps précédente, l'équation aux différences finies est :

$$(r + \lambda)V_j^{n-1} = \frac{V_j^n - V_j^{n-1}}{\delta t} + (r + \lambda\eta)S_j \frac{V_{j+1}^{n-1} - V_{j-1}^{n-1}}{2\delta S_t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{V_{j-1}^{n-1} - 2V_j^{n-1} + V_{j+1}^{n-1}}{\delta S_t^2} + \lambda X_j$$

$$-\alpha V_{j-1}^{n-1} + (1 - \beta)V_j^{n-1} - \kappa V_{j+1}^{n-1} = V_j^n + \lambda \delta t X_t \quad (\text{II.11})$$

$$(1 - \beta - 2\alpha)V_0^{n-1} - (\kappa - \alpha)V_1^{n-1} = V_0^n + \lambda \delta t X_t \quad (\text{II.12})$$

$$-(\alpha - \kappa)V_{J-1}^{n-1} + (1 - \beta - 2\kappa)V_J^{n-1} = V_J^n + \lambda \delta t X_t \quad (\text{II.13})$$

### II.3.C Schéma de Crank-Nicolson

En utilisant l'équation aux différences finies rétrogrades pour la dérivée temporelle et en prenant la moyenne des différentielles spatiales aux étapes de temps actuelle et précédente, l'équation aux différences finies est :

$$\begin{aligned}(r + \lambda)\frac{1}{2}(V_j^n + V_j^{n-1}) &= \frac{V_j^n - V_j^{n-1}}{\delta t} + (r + \lambda\eta)S_j \frac{1}{2} \left( \frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2\delta S_t} + \frac{V_{j+1}^{n-1} - V_{j-1}^{n-1}}{2\delta S_t} \right) + \\ &\quad \frac{1}{2}\sigma^2 S_j^2 \frac{1}{2} \left( \frac{V_{j-1}^n - 2V_j^n + V_{j+1}^n}{\delta S_t^2} + \frac{V_{j-1}^{n-1} - 2V_j^{n-1} + V_{j+1}^{n-1}}{\delta S_t^2} \right) + \lambda X_j\end{aligned}$$



$$-\alpha V_{j-1}^{n-1} + (2 - \beta) V_j^{n-1} - \kappa V_{j+1}^{n-1} = \alpha V_{j-1}^n + (2 + \beta) V_j^n + \kappa V_{j+1}^n + 2\lambda \delta t X_t \quad (\text{II.14})$$

$$(2 - \beta - 2\alpha) V_0^{n-1} - (\kappa - \alpha) V_1^{n-1} = (2 + \beta + 2\alpha) V_0^n + (\kappa + \alpha) V_1^n + 2\lambda \delta t X_t \quad (\text{II.15})$$

$$-(\alpha - \kappa) V_{J-1}^{n-1} + (2 - \beta - 2\kappa) V_J^{n-1} = (\alpha - \kappa) V_{J-1}^n + (2 + \beta + 2\kappa) V_J^n + 2\lambda \delta t X_t \quad (\text{II.16})$$

### III Modèle Binomial

Cette section reproduit la dérivation, en utilisant une technique différente, du modèle binomial tel que décrit par MILANOV et KOUNCHEV [2]. Une extension est ajoutée en considérant la stratégie de couverture.

#### III.1 Processus Binomial

Considérons un modèle binomial qui a un pas de temps  $\delta t$ , des pas de montée et de descente,  $u$  et  $d$  avec des probabilités respectives  $p_u$  et  $p_d$ <sup>2</sup>, et où la probabilité de défaut est  $p_o$ <sup>3</sup>. La moyenne et la variance de ce modèle sont :

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{S_{t+\delta t}}{S_t}\right] &= up_u + dp_d + (1 - \eta)p_o \\ &= up_u + d(e^{-\lambda\delta t} - p_u) + (1 - \eta)(1 - e^{-\lambda\delta t})\end{aligned}\quad (III.1)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{Var}}\left[\frac{S_{t+\delta t}}{S_t}\right] &= u^2p_u + d^2p_d + (1 - \eta)^2p_o - \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{S_{t+\delta t}}{S_t}\right]^2 \\ &= u^2p_u + d^2(e^{-\lambda\delta t} - p_u) + (1 - \eta)^2(1 - e^{-\lambda\delta t}) - \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{S_{t+\delta t}}{S_t}\right]^2\end{aligned}\quad (III.2)$$

La moyenne et la variance de l'équation différentielle stochastique de l'action sont :

$$\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] = rdt \quad (III.3)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right] &= \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{S_t}{S_t} + \frac{dS_t}{S_t}\right] \\ &= 1 + \widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right]\end{aligned}\quad (III.4)$$

$$\widetilde{\mathbb{Var}}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] = (\sigma^2 + \lambda\eta^2)dt \quad (III.5)$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbb{Var}}\left[\frac{S_{t+dt}}{S_t}\right] &= \widetilde{\mathbb{Var}}\left[\frac{S_t}{S_t} + \frac{dS_t}{S_t}\right] \\ &= \widetilde{\mathbb{Var}}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right]\end{aligned}\quad (III.6)$$

#### III.2 Dérivation

Si l'on égalise le premier moment du modèle stochastique (III.4)<sup>4</sup>, en temps  $\delta t$ , avec celui du modèle binomial (III.1) alors :

2.  $p_d = 1 - p_u - p_o = e^{-\lambda\delta t} - p_u$

3. Le temps jusqu'au premier saut suit une distribution exponentielle avec une intensité  $\lambda$  et a une probabilité  $\mathbb{P}(q_{t+dt} = 1 | q_t = 0) = p_o = 1 - e^{-\lambda\delta t}$

4.  $\widetilde{\mathbb{E}}\left[\frac{S_{t+\delta t}}{S_t}\right] = e^{r\delta t}$

$$\begin{aligned} e^{r\delta t} &= up_u + d(e^{-\lambda\delta t} - p_u) + (1 - \eta)(1 - e^{-\lambda\delta t}) \\ p_u(u - d) &= e^{r\delta t} - de^{-\lambda\delta t} - (1 - \eta)(1 - e^{-\lambda\delta t}) \end{aligned} \quad (\text{III.7})$$

$$p_u = \frac{e^{r\delta t} - de^{-\lambda\delta t} - (1 - \eta)(1 - e^{-\lambda\delta t})}{u - d} \quad (\text{III.8})$$

$$p_d = -\frac{e^{r\delta t} - ue^{-\lambda\delta t} - (1 - \eta)(1 - e^{-\lambda\delta t})}{u - d} \quad (\text{III.9})$$

et si l'on égalise le second moment autour de la moyenne du modèle stochastique (III.6), en temps  $\delta t$ , avec celui du modèle binomial (III.2) alors <sup>5</sup> :

$$\begin{aligned} (\sigma^2 + \lambda\eta^2)\delta t &= u^2p_u + d^2(e^{-\lambda\delta t} - p_u) + (1 - \eta)^2(1 - e^{-\lambda\delta t}) - \tilde{\mathbb{E}}\left[\frac{S_{t+\delta t}}{S_t}\right]^2 \\ &= (u^2 - d^2)p_u + d^2e^{-\lambda\delta t} + (1 - \eta)^2(1 - e^{-\lambda\delta t}) - e^{-2r\delta t} \end{aligned} \quad (\text{III.10})$$

$$\begin{aligned} &= (u + d)(e^{r\delta t} - de^{-\lambda\delta t} - (1 - \eta)(1 - e^{-\lambda\delta t})) \\ &\quad + d^2e^{-\lambda\delta t} + (1 - \eta)^2(1 - e^{-\lambda\delta t}) - e^{-2r\delta t} \end{aligned} \quad (\text{III.11})$$

$$\begin{aligned} &= (u + d)(e^{r\delta t} - (1 - \eta)(1 - e^{-\lambda\delta t})) - ude^{-\lambda\delta t} \\ &\quad + (1 - \eta)^2(1 - e^{-\lambda\delta t}) - e^{-2r\delta t} \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Si l'on suppose que  $\delta t^2 = 0$ ,  $ud = 1$  et  $u = e^{\sqrt{A\delta t}}$  et que l'expansion en série de Taylor est prise pour tous les termes exponentiels, alors :

$$\begin{aligned} u &= 1 + \sqrt{A\delta t} + \frac{A\delta t}{2!} + \frac{(A\delta t)^{\frac{3}{2}}}{3!} \\ d &= 1 - \sqrt{A\delta t} + \frac{A\delta t}{2!} - \frac{(A\delta t)^{\frac{3}{2}}}{3!} \\ u + d &= 2 + A\delta t \end{aligned} \quad (\text{III.13})$$

et en substituant (III.13) dans (III.12) avec les expansions appropriées alors :

$$\begin{aligned} (\sigma^2 + \lambda\eta^2)\delta t &= (2 + A\delta t)(1 + r\delta t - \lambda\delta t(1 - \eta)) - (1 - \lambda\delta t) \\ &\quad + \lambda\delta t(1 - \eta)^2 - (1 - 2r\delta t) \\ &= A\delta t + \lambda\delta t - \lambda\delta t(1 - \eta)(1 + \eta) \\ &= A\delta t + \lambda\eta^2\delta t \\ A\delta t &= \sigma^2\delta t \end{aligned} \quad (\text{III.14})$$

### III.3 Restrictions

Le pas de temps  $\delta t$  est supposé être strictement positif ( $\delta t > 0$ ), car le temps augmente de manière monotone.

Bien que  $\sigma$  puisse être positif ou négatif, les formules utilisent  $\sigma$  où, strictement,  $|\sigma|$  devrait être utilisé. Si  $\sigma = 0$ , alors le modèle n'est plus utile. La restriction  $\sigma > 0$  peut être introduite par commodité et sans perte de généralité.

5. En substituant l'équation (III.7) dans (III.10) on obtient (III.11)

Une hypothèse implicite de ce modèle est que  $p_u$ ,  $p_d$  et  $p_o$  constituent une mesure de probabilité valide. Cela impose les conditions suivantes :

$$\min(p_u, p_d, p_o) \geq 0 \quad (\text{III.15})$$

$$p_u + p_d + p_o = 1 \quad (\text{III.16})$$

Soit  $p_o$ , la probabilité de défaut. Sa valeur est égale à la fonction de densité cumulée d'une distribution exponentielle avec une intensité  $\lambda$ . En tant que telle,  $p_o$  est déjà confinée à l'intervalle  $[0, 1]$  avec la restriction que  $\lambda > 0$ . Si  $\lambda = 0$ , aucun défaut n'est possible, alors  $p_o$  aura une valeur de 0 et est une probabilité valide, ainsi la restriction sur  $\lambda$  peut être relâchée à  $\lambda \geq 0$ .

Soit  $p_d$ , la probabilité d'un mouvement à la baisse. Sa valeur est définie en termes de  $p_u$  et de  $p_o$ . Si  $p_u$  et  $p_o$  sont des probabilités valides, dans les limites, alors  $p_d$  le sera également.

Soit  $p_u$ , la probabilité d'un mouvement à la hausse. En tenant compte de la définition de  $p_d$ , cela exige que  $p_u$  satisfasse :

$$0 \leq p_u \leq e^{-\lambda \delta t} \quad (\text{III.17})$$

$$0 \leq \frac{e^{r\delta t} - de^{-\lambda \delta t} - (1 - \eta)(1 - e^{-\lambda \delta t})}{u - d} \leq e^{-\lambda \delta t}$$

$$0 \leq e^{r\delta t} - de^{-\lambda \delta t} - (1 - \eta)(1 - e^{-\lambda \delta t}) \leq e^{-\lambda \delta t}(u - d)$$

$$e^{-\lambda \delta t}(d - (1 - \eta)) \leq e^{r\delta t} - (1 - \eta) \leq e^{-\lambda \delta t}(u - (1 - \eta))$$

$$\ln \left( \frac{d - (1 - \eta)}{e^{r\delta t} - (1 - \eta)} \right) \leq \lambda \delta t \leq \ln \left( \frac{u - (1 - \eta)}{e^{r\delta t} - (1 - \eta)} \right) \quad (\text{III.18})$$

$$\delta t \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{u - (1 - \eta)}{e^{r\delta t} - (1 - \eta)} \right) \quad (\text{III.19})$$

En utilisant la limite à la fois sur  $\delta t$  et sur  $\lambda$ , les inégalités autour de  $\lambda \delta t$  sont également limitées ainsi :

$$\begin{aligned} 0 &\leq \ln \left( \frac{u - (1 - \eta)}{e^{r\delta t} - (1 - \eta)} \right) \\ e^{r\delta t} - (1 - \eta) &\leq u - (1 - \eta) \\ r\delta t &\leq \sigma \sqrt{\delta t} \\ \delta t &\leq \frac{\sigma^2}{r^2} \end{aligned} \quad (\text{III.20})$$

L'inégalité de  $\ln \left( \frac{d - (1 - \eta)}{e^{r\delta t} - (1 - \eta)} \right) \leq 0$  résulte dans la même inégalité que ci-dessus.

Basé sur les limites de probabilité (III.16) aucune restriction n'est imposée sur  $r$ , le taux sans risque, ou  $\eta$ , la baisse en pourcentage du prix de l'action.

## III.4 Évaluation

### III.4.A Évaluation sans coupons

Soit un portefeuille,  $\Pi_t$ , qui détient une position longue dans le dérivé,  $V_t$ , et une position courte de  $\Delta_t$  dans l'action,  $S_t$ . Le résidu  $\Pi_t = V_t - \Delta_t S_t$  est investi au taux sans

risque. Au temps  $t + \delta t$ , on devrait avoir :

$$\Pi_{t+\delta t} = \begin{cases} V_t^u - \Delta_t S_t u & \text{avec probabilité } p_u \\ V_t^d - \Delta_t S_t d & \text{avec probabilité } p_d \\ X_t - (1 - \eta) \Delta_t S_t & \text{avec probabilité } p_o \end{cases}$$

où

$V_t^u$  est la valeur du portefeuille lors d'une montée à l'instant  $t + \delta t$   
 $V_t^d$  est la valeur du portefeuille lors d'une descente à l'instant  $t + \delta t$   
 $X_t$  est la valeur en cas de défaut à l'instant  $t$

Si l'on souhaite se couvrir contre les mouvements ascendants et descendants de l'action alors :

$$\begin{aligned} V_t^u - \Delta_t S_t u &= V_t^d - \Delta_t S_t d \\ \Delta_t S_t (d - u) &= V_t^d - V_t^u \\ \Delta_t &= \frac{V_t^u - V_t^d}{S_t(u - d)} \end{aligned} \quad (\text{III.21})$$

La valeur requise de  $\Pi$  au temps  $t + \delta t$  est :

$$\begin{aligned} \Pi_{t+\delta t} &= \Pi_t e^{r\delta t} \\ &= \left( V_t - \frac{V_t^u - V_t^d}{u - d} \right) e^{r\delta t} \end{aligned} \quad (\text{III.22})$$

comme  $\Pi_t$  est investi au taux sans risque, et en prenant la valeur attendue de  $\Pi_{t+\delta t}$ , qui doit évaluer (III.22), on obtient :

$$\begin{aligned} \left( V_t - \frac{V_t^u - V_t^d}{u - d} \right) e^{r\delta t} &= \tilde{\mathbb{E}}_t [\Pi_{t+\delta t}] \\ &= \left( V_t^u - \frac{V_t^u - V_t^d}{u - d} u \right) e^{-\lambda\delta t} \\ &\quad + \left( X_t - \frac{V_t^u - V_t^d}{u - d} (1 - \eta) \right) (1 - e^{-\lambda\delta t}) \\ &= V_t^u \left( e^{-\lambda\delta t} - \frac{ue^{-\lambda\delta t} + (1 - \eta)(1 - e^{-\lambda\delta t})}{u - d} \right) \\ &\quad + V_t^d \left( \frac{ue^{-\lambda\delta t} + (1 - \eta)(1 - e^{-\lambda\delta t})}{u - d} \right) + X_t(1 - e^{-\lambda\delta t}) \\ V_t e^{r\delta t} &= V_t^u \frac{e^{r\delta t} - de^{-\lambda\delta t} - (1 - \eta)(1 - e^{-\lambda\delta t})}{u - d} \\ &\quad + V_t^d \frac{ue^{-\lambda\delta t} + (1 - \eta)(1 - e^{-\lambda\delta t}) - e^{r\delta t}}{u - d} + X_t(1 - e^{-\lambda\delta t}) \\ V_t &= e^{-r\delta t} (V_t^u p_u + V_t^d p_d + X_t p_o) \end{aligned} \quad (\text{III.23})$$

ainsi, la méthode de tarification de ce modèle binomial est la même que celle du modèle binomial classique :

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r\delta t}(V_t^u p_u + V_t^d p_d + X_t p_o) \\ &= e^{-r\delta t} \tilde{\mathbb{E}}_t[V_{t+\delta t}] \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

### III.4.B Évaluation avec coupons

Considérons un portefeuille, comme mentionné ci-dessus, avec l'ajout de coupons. À l'instant  $t + \delta t$ , on devrait avoir :

$$\Pi_{t+\delta t} = \begin{cases} V_t^u - \Delta_t S_t u + c_i e^{t+\delta t - t_i^c} & \text{avec probabilité } p_u \\ V_t^d - \Delta_t S_t d + c_i e^{t+\delta t - t_i^c} & \text{avec probabilité } p_d \\ X_t - (1 - \eta) S_t + c_i (1 - q_{t_i^c}^c) e^{t+\delta t - t_i^c} & \text{avec probabilité } p_o \end{cases}$$

où

$c_i$  est la valeur du  $i^{\text{ème}}$  coupon

$t_i^c$  est le moment du  $i^{\text{ème}}$  coupon, avec  $t_i^c \in (t, t + \delta t)$

$q_{t_i^c}^c$  est une variable indicatrice unitaire si défaut survient après le paiement du coupon <sup>6</sup>

En utilisant la méthode ci-dessus, il est aisé de montrer que :

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r\delta t}(V_t^u p_u + V_t^d p_d + X_t p_o) + c_i e^{-(r+\lambda)(t_i^c - t)} \\ &= e^{-r\delta t} \tilde{\mathbb{E}}_t[V_{t+\delta t}] + c_i e^{-(r+\lambda)(t_i^c - t)} \end{aligned} \quad (\text{III.25})$$

si, cependant,  $t_i^c = t$ , donc  $c_i$  arrive avec certitude à  $t$ , il est trivialement démontré que :

$$\begin{aligned} V_t &= e^{-r\delta t}(V_t^u p_u + V_t^d p_d + X_t p_o) + c_i \\ &= e^{-r\delta t} \tilde{\mathbb{E}}_t[V_{t+\delta t}] + c_i \end{aligned} \quad (\text{III.26})$$

### III.5 Stratégie de synthèse et de couverture

Soit la stratégie où  $V_t - \Delta_t S_t$  est investi au taux sans risque et  $\Delta_t S_t$  est détenu en actions. Cela crée le portefeuille  $\Pi_t = \Delta_t S_t + (V_t - \Delta_t S_t) = V_t$  et en un pas de temps, la valeur du portefeuille est :

$$\Pi_{t+\delta t} = \begin{cases} \Delta_t S_t u + e^{r\delta t}(V_t - \Delta_t S_t) & \text{avec probabilité } p_u \\ \Delta_t S_t d + e^{r\delta t}(V_t - \Delta_t S_t) & \text{avec probabilité } p_d \\ (1 - \eta) \Delta_t S_t + e^{r\delta t}(V_t - \Delta_t S_t) & \text{avec probabilité } p_o \end{cases} \quad (\text{III.27})$$

Maintenant, considérons la valeur du portefeuille pour un mouvement ascendant de l'action :

6.  $\mathbb{P}(q_{t_i^c}^c = 0 | q_s = 1, s \in (t, t + \delta t]) = \frac{e^{-\lambda(t_i^c - t)} - e^{-\lambda\delta t}}{1 - e^{-\lambda\delta t}}$ , la probabilité que le coupon arrive avant que le défaut ne se produise, étant donné que le défaut se produit dans l'intervalle

$$\begin{aligned}
 \Pi_{t+\delta t}^u &= \Delta_t S_t u + e^{r\delta t} (V_t - \Delta_t S_t) \\
 &= \Delta_t S_t (u - e^{r\delta t}) + e^{r\delta t} V_t \\
 &= (V_t^u - V_t^d) \left( \frac{u - e^{r\delta t}}{u - d} \right) + (V_t^u p_u + V_t^d p_d + X_t p_o) \\
 &\quad + V_t^d \left( \frac{ue^{-\lambda\delta t} + (1 - \eta)p_o - e^{r\delta t}}{u - d} \right) + X_t p_o \\
 &= V_t^u + \left( V_t^u \left( \frac{d - de^{-\lambda\delta t} - (1 - \eta)p_o}{u - d} \right) \right. \\
 &\quad \left. + V_t^d \left( \frac{ue^{-\lambda\delta t} + (1 - \eta)p_o - u}{u - d} \right) + X_t p_o \right) \\
 &= V_t^u + \left( \left( \frac{V_t^u d - V_t^d u}{u - d} \right) - (1 - \eta) \left( \frac{V_t^u - V_t^d}{u - d} \right) + X_t \right) p_o \\
 &= V_t^u + \left( -V_t^u + \left( \frac{V_t^u - V_t^d}{u - d} \right) u - (1 - \eta) \Delta_t S_t + X_t \right) p_o \\
 &= V_t^u + (X_t - (V_t^u - \Delta_t S_t u) - (1 - \eta) \Delta_t S_t) p_o
 \end{aligned} \tag{III.28}$$

De même, la valeur du portefeuille pour un mouvement descendant de l'action :

$$\Pi_{t+\delta t}^d = V_t^d + (X_t - (V_t^d - \Delta_t S_t d) - (1 - \eta) \Delta_t S_t) p_o \tag{III.29}$$

La valeur du portefeuille pour un défaut de l'action :

$$\begin{aligned}
 \Pi_{t+\delta t}^o &= (1 - \eta) \Delta_t S_t + e^{r\delta t} (V_t - \Delta_t S_t) \\
 &= \Delta_t S_t ((1 - \eta) - e^{r\delta t}) + e^{r\delta t} V_t \\
 &= (V_t^u - V_t^d) \left( \frac{(1 - \eta) - e^{r\delta t}}{u - d} \right) + (V_t^u p_u + V_t^d p_d + X_t p_o) \\
 &= X_t p_o - V_t^u \left( \frac{de^{-\lambda\delta t} - (1 - \eta)e^{-\lambda\delta t}}{u - d} \right) + V_t^d \left( \frac{ue^{-\lambda\delta t} - (1 - \eta)e^{-\lambda\delta t}}{u - d} \right) \\
 &= X_t p_o - \left( \frac{V_t^u d - V_t^d u}{u - d} \right) e^{-\lambda\delta t} + (1 - \eta) \left( \frac{V_t^u - V_t^d}{u - d} \right) e^{-\lambda\delta t} \\
 &= X_t p_o + ((V_t^u - \Delta_t S_t u) + (1 - \eta) \Delta_t S_t) e^{-\lambda\delta t} \\
 &= X_t - (X_t - (V_t^u - \Delta_t S_t u) - (1 - \eta) \Delta_t S_t) e^{-\lambda\delta t}
 \end{aligned} \tag{III.30}$$

Soit  $H_t^c = X_t - (V_t^u - \Delta_t S_t u) - (1 - \eta) \Delta_t S_t$ , qui pourrait être considéré comme le coût de défaut non ajusté<sup>7</sup> après couverture.  $H_t^c p_o$  est reçu pour une montée et une descente du prix de l'action, donc  $H_t^c p_o$  est reçu  $e^{-\lambda\delta t}$  du temps et  $H_t^c e^{-\lambda\delta t}$  est payé  $p_o$  du temps, en équilibre.

Une note importante concernant l'utilisation de la propriété d'auto-financement de ce modèle en pratique est qu'elle nécessitera un grand nombre de portefeuilles non corrélés

7. Des ajustements doivent être faits pour la probabilité de défaut

avec le même coût de défaut ajusté après couverture et une considération actuarielle pour gérer efficacement les « primes » et les réserves.

L'équation III.27 peut être réécrite comme :

$$\Pi_{t+\delta t} = \begin{cases} V_t^u + H_t^c p_o & \text{with probability } p_u \\ V_t^d + H_t^c p_o & \text{with probability } p_d \\ X_t - H_t^c e^{-\lambda \delta t} & \text{with probability } p_o \end{cases} \quad (\text{III.31})$$

Il est trivial de confirmer que la valeur attendue de  $\Pi_{t+\delta t}$  est  $e^{r\delta t}\Pi_t$ .

### III.6 Paramètres et formules du modèle

Sur la base de ce qui précède, le Tableau 2 répertorie les paramètres requis pour cet arbre binomial, le Tableau 3 liste les limites de cet arbre binomial, et le Tableau 4 liste les formules pour tarifier cet arbre binomial.

Paramètre	Description
$r$	Taux sans risque
$\sigma$	Log-volatilité du prix de l'action
$\lambda$	Taux de risque de défaillance
$\eta$	Pourcentage de baisse du prix de l'action en cas de défaillance
$\delta t$	Pas de temps
$V_t^u$	Valeur du portefeuille pour une montée à $t + \delta t$
$V_t^d$	Valeur du portefeuille pour une descente à $t + \delta t$
$X_t$	Valeur du portefeuille en défaut à $t$
$c_i$	Valeur du paiement du $i^{\text{ème}}$ coupon
$t_i^c$	Moment du paiement du $i^{\text{ème}}$ coupon

TABLE 2 – Paramètres du modèle binomial avec risque de crédit

Limite	Description
$0 < \sigma$	La volatilité doit être positive
$0 \leq \lambda$	Le taux de danger doit être non-négatif
$0 < \delta t$	Le pas de temps doit être positif
$\delta t \leq \frac{\sigma^2}{r^2}$	Le pas de temps doit être assez petit pour gérer la volatilité <sup>8</sup>
$\delta t \leq \frac{1}{\lambda} \ln \left( \frac{u-(1-\eta)}{e^{r\delta t}-(1-\eta)} \right)$	Le pas de temps doit être assez petit pour gérer le taux de danger <sup>9</sup>

TABLE 3 – Limits of the Binomial Model with Credit Risk

8. Si  $r = 0$  alors cette inégalité n'est pas applicable.

9. Si  $\lambda = 0$  alors cette inégalité n'est pas applicable.



Formules	Description
$u = e^{\sigma\sqrt{\delta t}}$	Multiplicateur pour une hausse
$d = e^{-\sigma\sqrt{\delta t}}$	Multiplicateur pour une baisse
$p_u = \frac{e^{r\delta t} - de^{-\lambda\delta t} - (1-\eta)(1-e^{-\lambda\delta t})}{u-d}$	Probabilité d'une hausse
$p_d = e^{-\lambda\delta t} - p_u$	Probabilité d'une baisse
$p_o = 1 - e^{-\lambda\delta t}$	Probabilité de défaut
$V_t = e^{-r\delta t}(V_t^u p_u + V_t^d p_d + X_t p_o) + c_i$	Valeur du portefeuille à $t$ pour $t_i^c = t$
$\Delta_t = \frac{V_t^u - V_t^d}{S(u-d)}$	Ratio Delta pour la couverture
$H_t^c = X_t - (V_t^u - \Delta_t S_t u) - (1 - \eta)\Delta_t S_t$	Coût de défaut non ajusté après couverture

TABLE 4 – Formules pour le Modèle Binomial avec Risque de Crédit

## IV Exemple numérique

Dans l'analyse suivante des résultats numériques, le Tableau 5, qui contient les paramètres de l'obligation, et le Tableau 6, qui contient les paramètres de l'action, sont utilisés comme base. Trois différents types de baisse du prix des actions sont utilisés : un défaut total lorsque l'action perd toute sa valeur, un défaut typique lorsque l'action perd 30% de sa valeur et un défaut partiel où le prix de l'action ne perd aucune valeur.

Si  $t^+$  est le moment immédiatement après un paiement de coupon et  $t^-$  est le moment immédiatement avant un paiement de coupon, alors le paiement du coupon est géré de la manière suivante :

$$V_{t_i^-} = V_{t_i^+} + C_i \quad (\text{IV.1})$$

et il est supposé que les options intégrées ne peuvent être exercées qu'après réception du paiement du coupon (c'est-à-dire à  $t_i^+$ ).

Composant	Paramètre	Valeur
Rente	Notionnel <sup>10</sup>	100
	Coupon <sup>11</sup>	8%
	Fréquence <sup>12</sup> de coupon	Semestrielle
	Maturité	$T := 5$
	Recouvrement	$\gamma := 0\%$
Put	Strike	$K_t^p := 105$
	Période(s)	$\Omega^p := \{3\}$
Call	Strike <sup>13</sup>	$K_t^c := 110 + C_i \frac{t \pmod{0.5}}{0.5}$
	Période(s)	$\Omega^c := [2, 5)$
Conversion	Quantité d'actions	$\kappa_t := 1$
	Période(s)	$\Omega_v := [0, 5]$

TABLE 5 – Paramètres des obligations convertibles

Paramètre	Valeur
Taux sans risque	$r := 5\%$
Volatilité	$\sigma := 20\%$
Taux risqué	$\lambda := 2\%$
Défaut (total)	$\eta := 100\%$
Défaut (typique <sup>14</sup> )	$\eta := 30\%$
Défaut (partiel)	$\eta := 0\%$

TABLE 6 – Paramètres du stock

10.  $R := 104$

11.  $C_i := 4$

12.  $t_i := \{0.5, 1, \dots, 4.5\}$

13. Le prix d'exercice de 110 est le prix net et doit être ajusté pour tenir compte des intérêts courus, sur la base d'un intérêt simple.

14. BENEISH et PRESS [20] ont constaté que les prix des actions chutent généralement de 30 % lors de l'annonce du défaut

## IV.1 Sensibilité

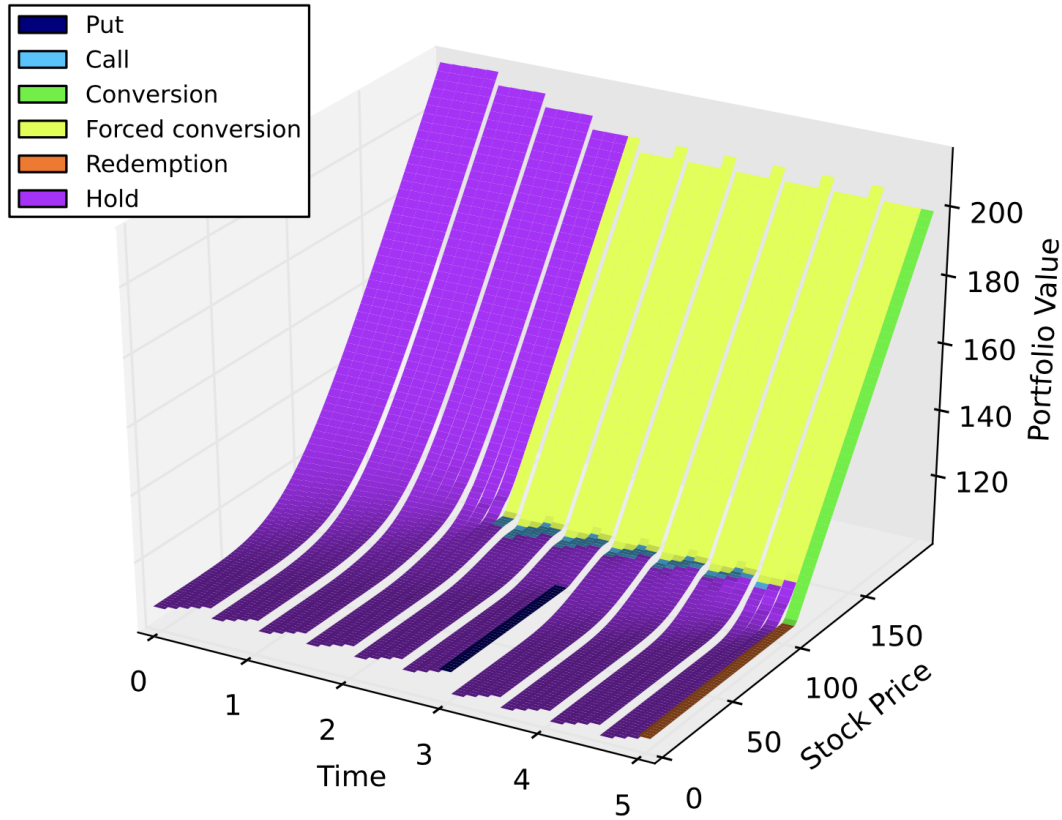


FIGURE 1 – Remboursement de l’obligation convertible, avec défaut total, et couleurs indiquant l’action entreprise pour ce remboursement.  $\delta t = 2^{-3}$ ,  $\delta S_t = 2$  et  $S_t \in [0, 250]$ .

La figure 1 illustre le paiement de l’obligation convertible au cours de sa durée de vie et les actions qui ont conduit à ce paiement (voir le tableau 1 pour la liste des actions, le paiement associé et les conditions requises pour le paiement).

La figure présente des sauts nets à chaque paiement de coupon, ce qui produit un effet de scie. Les autres facteurs d’influence sont indiqués ci-dessous :

- **Put** : l’action « Put » est prise au temps  $t = 3$  au prix des actions de  $S_t = 0$  jusqu’à  $S_t \approx 75$ . Cette option entraîne une augmentation de la valeur de l’obligation convertible avant le temps  $t = 3$  en raison du paiement plus élevé que la valeur intrinsèque.
- **Call** : l’action « Call » est prise à partir du temps  $t = 2$  jusqu’à presque  $t = 5$  avec un plateau étroit autour des prix des actions autour de  $S_t = 110$ . L’option d’achat réduit la valeur intrinsèque au lieu d’être simplement la base de la conversion forcée.
- **Conversion** : à la fin, l’action « Conversion » est prise pour  $S_t \geq 104$ . À aucun autre moment il n’y a de conversion volontaire car, au moment  $t = 2$ , le gain supérieur est similaire à celui d’un forward et, pour des raisons similaires, la valeur de l’obligation convertible augmente. En raison de l’augmentation de la valeur, la valeur intrinsèque n’est jamais inférieure au seuil de conversion.
- **Conversion forcée** : l’action « Conversion forcée » est prise à partir du temps  $t = 2$  jusqu’à presque  $t = 5$  au-dessus du prix de l’action  $S_t \approx 110$ .

- **Remboursement** : à la fin, l'action « Remboursement » est prise pour  $S_t < 104$ .
- **Maintien** : l'obligation convertible est détenue pour toutes les autres zones. Il convient de noter qu'au moment  $t = 3$ , il existe une « fenêtre » étroite entre le prix de l'action  $S_t \approx 75$  et  $S_t \approx 110$  où le détenteur de l'obligation ne remboursera pas, ou ne sera pas forcé de rembourser l'obligation. Il est évident que les changements liés à la détention de l'obligation au-delà du temps  $t = 3$  sont assez faibles. De ce fait, la valeur de l'obligation convertible est dominée par les options de vente, d'achat et de conversion avec la valeur de remboursement, et les coupons après le temps  $t = 3$  ont un impact minime.

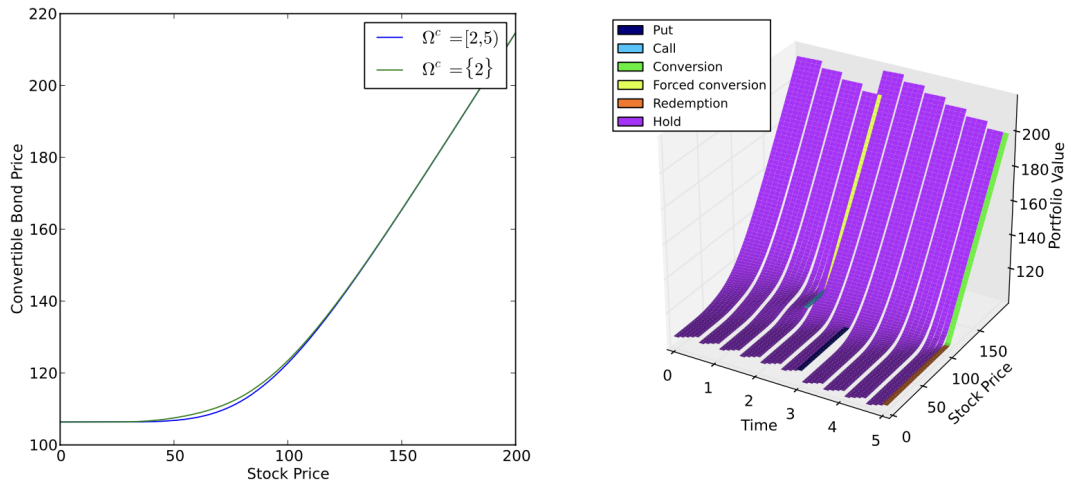


FIGURE 2 – Comparaison de la valeur initiale de l'obligation convertible standard, avec défaut total, par rapport à une obligation avec un temps singulier pour l'option d'achat. Également le payoff du call simple et les couleurs indiquant l'action prise pour le paiement.

L'analyse ci-dessus suggère que la majorité de l'impact du call sur la valeur de l'obligation convertible est le bord d'attaque au temps  $t = 2$  et la Figure 2 illustre le changement minimal du prix dû à l'existence d'un call avec un temps d'exercice unique de  $\Omega^c = \{2\}$ .

En examinant la sensibilité de l'obligation convertible aux variations de chacune des quatre composantes, on peut considérer les figures suivantes.

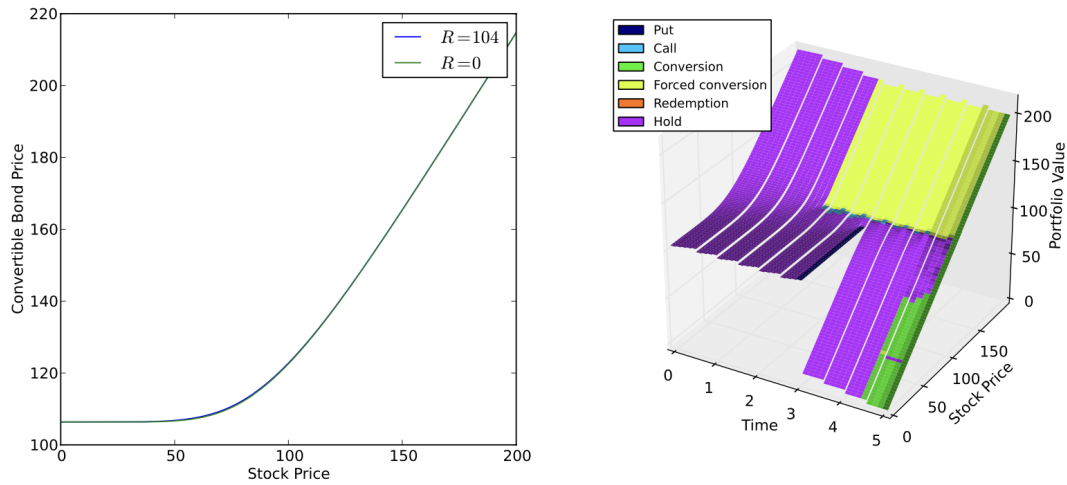


FIGURE 3 – Comparaison de la valeur initiale d'obligations convertibles standard, avec défaut total, et d'une obligation sans valeur de remboursement. Également le payoff de l'obligation « sans remboursement » et les couleurs indiquant l'action prise pour le remboursement.

**Rente :** La figure 3 compare l'obligation convertible, avec un défaut total, avec une valeur de remboursement normale et sans valeur de remboursement. La surface de payoff montre qu'au temps  $t = 3$ , le put « réinitialise » effectivement le profil de payoff à celui d'une valeur de remboursement normale.

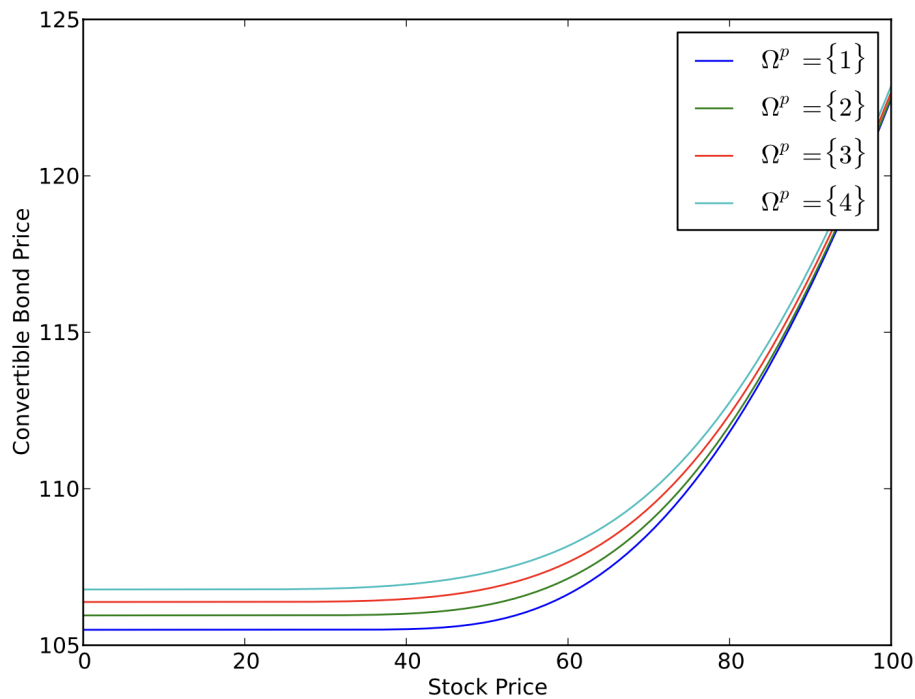


FIGURE 4 – Comparaison de la valeur initiale des obligations convertibles, avec défaillance totale, avec différentes échéances pour l'option de vente.

**Put :** La figure 4 compare le prix d'une obligation convertible avec différents délais d'exercice de l'option de vente. La figure montre que le prix de l'obligation est corrélé avec le délai d'exercice de l'option de vente. Cet effet est dû au fait que le taux de coupon (converti en NACC) est supérieur au taux sans risque. Si le taux de coupon était inférieur,

on observerait une corrélation inverse. L'effet est dominant pour  $S_t \in [0, 50]$  et s'atténue jusqu'à devenir presque nul pour  $S_t = 100$ .

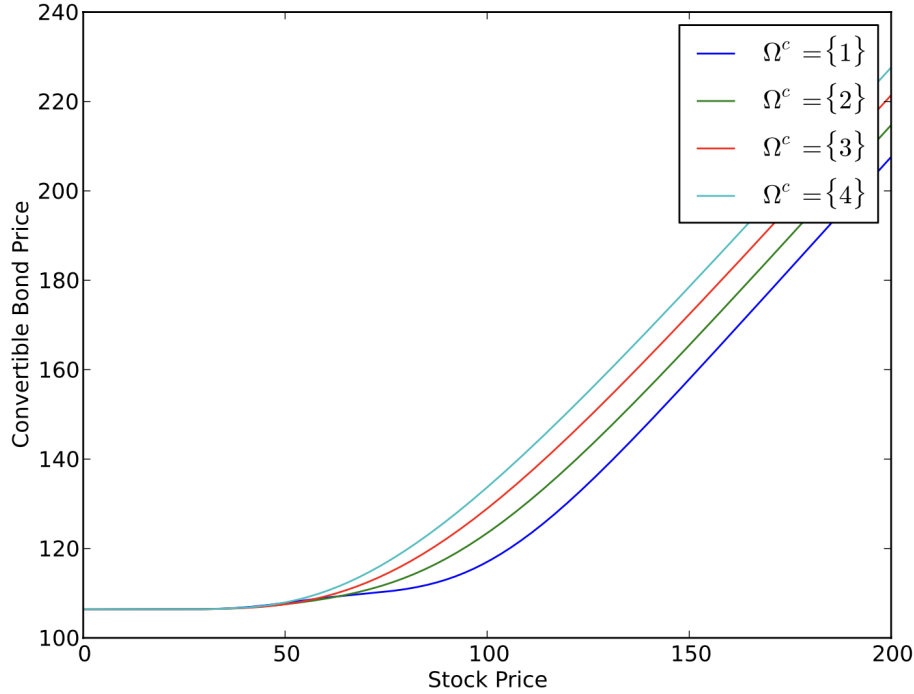


FIGURE 5 – Comparaison de la valeur initiale des obligations convertibles, avec défaut total, avec différentes heures pour l'option call.

**Call** : La figure 5 compare le prix d'une obligation convertible avec différents délais d'exercice. La figure montre que le prix de l'obligation est corrélé avec le délai d'exercice de l'option d'achat. Cet effet est dû au fait que le paiement se comporte de la même manière qu'un contrat à terme sur l'action et augmente donc avec le temps.

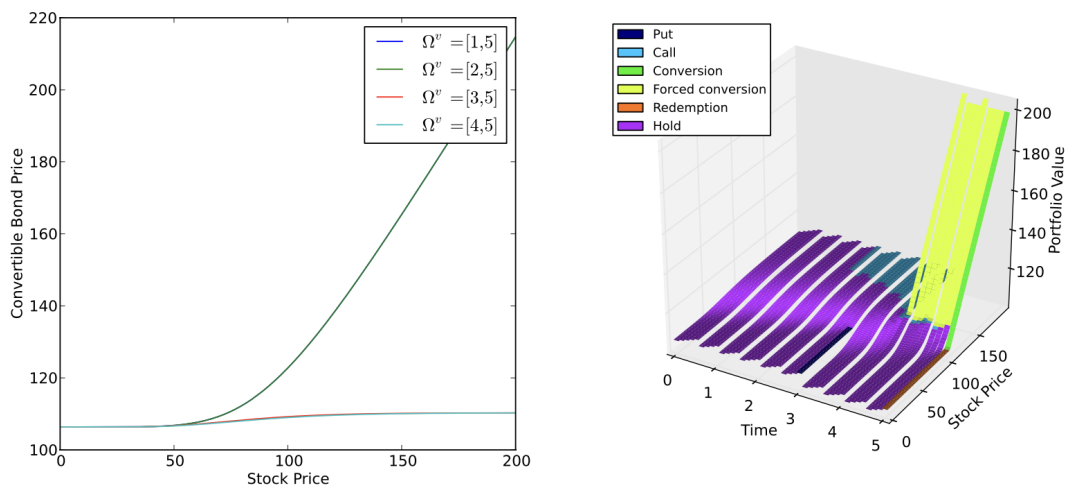


FIGURE 6 – Comparaison de la valeur initiale des obligations convertibles, avec défaut total, avec différents temps pour l'option de conversion. Également le paiement pour  $\Omega^v = [4, 5]$  et les couleurs indiquant l'action prise pour le paiement.

**Conversion** : La figure 6 compare le prix d'une obligation convertible avec différents délais de conversion. La figure illustre l'impact de l'option de conversion, en conjonction

avec l'option d'achat, sur le prix. Pour les intervalles de conversion qui se chevauchent avec le bord avant de l'option d'achat (c'est-à-dire  $\Omega^v = [1, 5]$  et  $\Omega^v = [2, 4]$ ), la valeur reste inchangée. Cependant, lorsqu'il n'y a pas de chevauchement (c'est-à-dire  $\Omega^v = [3, 5]$  et  $\Omega^v = [4, 4]$ ), la partie supérieure de la valeur de l'obligation convertible est considérablement supprimée, se limitant au prix d'exercice de l'option d'achat.

Comme nous l'avons vu ci-dessus, l'obligation convertible est insensible aux changements de la valeur de remboursement et la majorité de la valeur est déterminée par le bord d'attaque des options d'achat et de vente (c'est-à-dire  $\min(\Omega^c)$  et  $\min(\Omega^p)$ ). L'option d'achat influence la partie supérieure et l'option de vente la partie inférieure de la courbe de prix de l'obligation convertible. Un autre critère important de la sensibilité est de savoir si l'option de conversion se produit sur ou avant le front de l'option d'achat ou après le front de l'option d'achat.

## IV.2 Coût du défaut après couverture

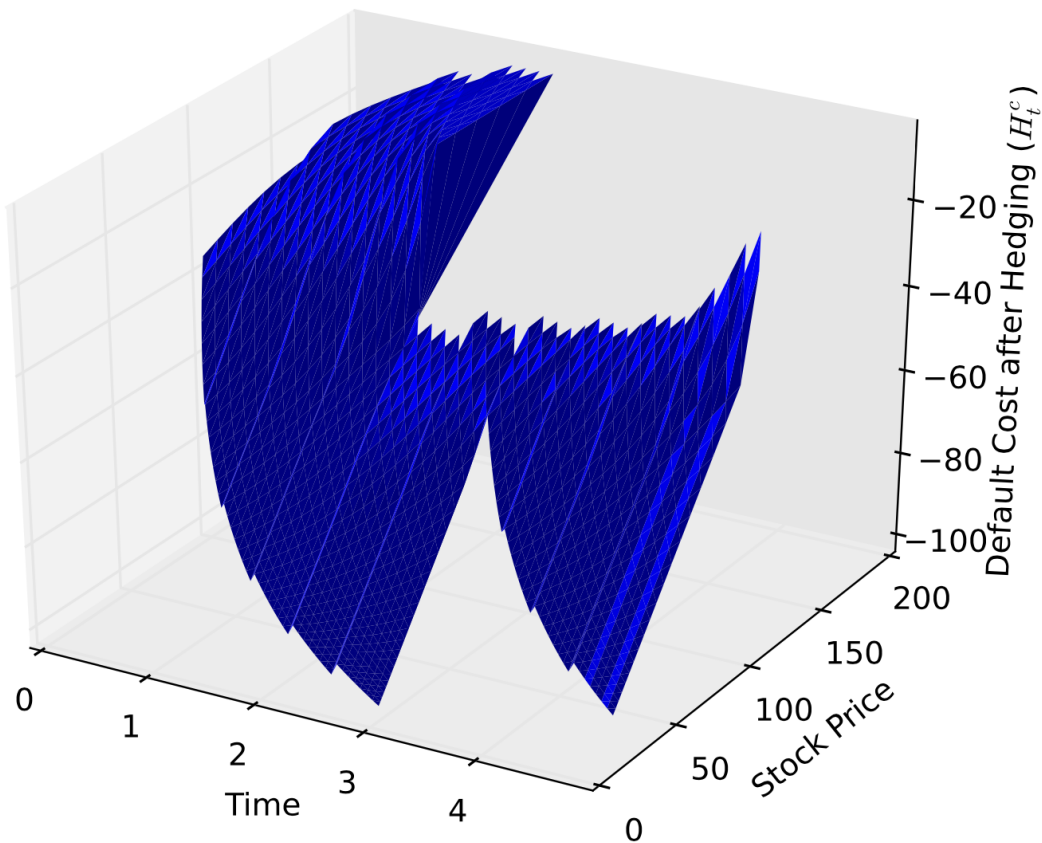


FIGURE 7 – Coût du défaut après couverture,  $H_t^c$ , pour une obligation convertible avec un défaut typique.

La figure 7 montre le coût par défaut non ajusté après couverture. La forme montre les zones où la couverture n'était pas possible : en haut à droite où les options d'achat et de conversion (forcée) s'appliquent et en bas à droite où l'option de vente limite la capacité de l'action à descendre jusqu'au bout. La stratégie de couverture est décrite dans les équations III.27 et III.31.



La figure montre que l'obligation convertible a un coût de défaut négatif après couverture. Si l'on devait synthétiser l'obligation convertible, les événements de défaut seraient rentables en raison d'un excédent (indiqué par le négatif dans le graphique) après avoir payé la composante de recouvrement  $X_t$ .

Si l'on couvre une position longue sur l'obligation convertible, on perdra de l'argent en cas de défaut en raison de la stratégie de couverture. Toutefois, la couverture sera rentable jusqu'à la défaillance en raison de la composante « prime d'assurance » de la stratégie de couverture.

La stratégie de couverture n'est pas parfaite. Toutefois, si une « population » suffisamment importante d'obligations convertibles non corrélées est utilisée dans la stratégie de couverture, il est possible de se protéger contre les pertes de couverture en cas de défaillance.

### IV.3 Convergence

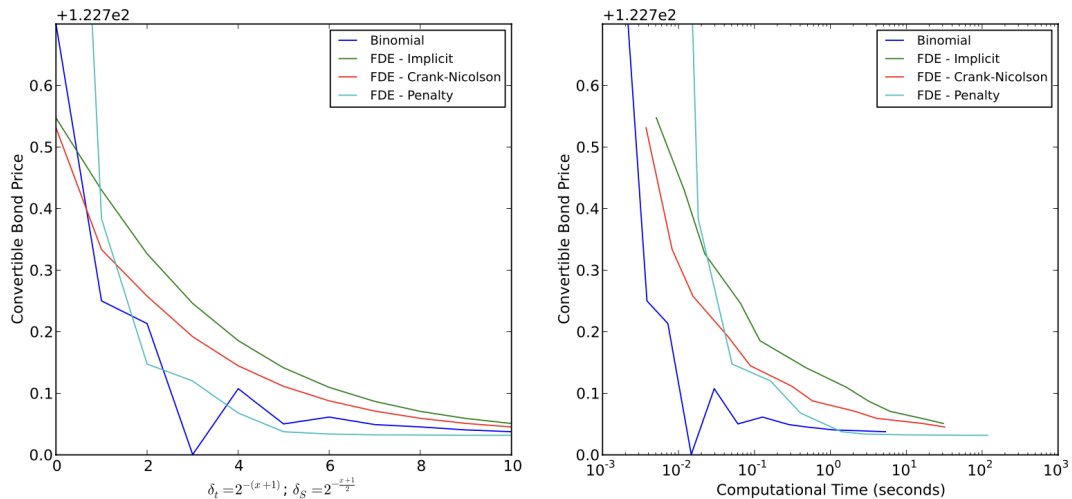


FIGURE 8 – Comparaison de la convergence de différentes méthodes de tarification, en fonction de la taille du pas et en fonction du temps

La figure 8 présente la convergence des différentes méthodes de tarification. Le schéma explicite de différences finies n'a pas été utilisé en raison de problèmes de stabilité. Le schéma de pénalisation est une extension du schéma de Crank-Nicolson décrit par AOUBIZA et LAYDI [21] et CHRISTARA et DANG [22]. La tolérance pour la méthode de pénalisation est basée sur les tailles de pas pour le stock et le temps, à savoir  $\min(\delta t, \delta S_t)^{-2}$ , comme recommandé par FORSYTH et VETZAL [23].

Le schéma de Crank-Nicolson converge plus rapidement, à la fois pour la taille du pas et le temps, que le schéma implicite. Le modèle binomial converge plus rapidement que le modèle de Crank-Nicolson en temps et en taille de pas, sauf pour les tailles de pas les plus grandes. Dans le cas limite, la méthode de pénalisation converge le plus rapidement, à la fois en temps et en taille de pas.

Si le temps est une ressource limitative, la méthode de pénalité est la plus mauvaise option, le modèle binomial offrant une meilleure convergence que les autres schémas de



différences finies, sinon la méthode de pénalité semble être la meilleure méthode.

## Conclusion

Ce projet a permis d'élaborer et de mettre en œuvre deux méthodes d'évaluation des obligations convertibles qui tiennent compte de différents niveaux de défaillance de l'émetteur. Les paramètres de trois schémas, l'explicite, l'implicite et le Crank-Nicolson, ont été utilisés.

Le modèle binomial a été étendu en considérant la stratégie de couverture et a montré que celui-ci ne permet pas une couverture parfaite, nécessitant un financement croisé des événements de défaut et de non-défaut. L'exigence de financement croisé est  $H_t^c$ , le coût de défaut non ajusté après couverture, et une analyse numérique a montré que l'obligation convertible présente un  $H_t^c$  négatif.

Les sensibilités de l'obligation convertible ont été examinées, les options de vente et d'achat influençant respectivement les sections inférieure et supérieure de la courbe de prix. L'option de conversion pourrait avoir un impact sur le prix si elle ne coïncide pas avec le bord d'attaque de l'option d'achat. Il a été démontré que la valeur de remboursement avait peu d'impact sur le prix.

Pour approfondir ce sujet, plusieurs pistes peuvent être explorées :

- la prise en compte de l'impact de la récupération des obligations et des actions sur le prix de l'obligation convertible,
- l'exploration de meilleures stratégies de couverture,
- des schémas de différences finies alternatifs pour une meilleure convergence,
- la tarification par méthode de Monte Carlo, et
- simulations d'« assurance » de l'obligation convertible par rapport à  $H_t^c$ .

## Bibliographie

- [1] E. AYACHE, P. A. FORSYTH et K. R. VERTZAL. "The Valuation of Convertible Bonds With Credit Risk". In : *Journal of Derivatives* 11.1 (2003), p. 9-44. URL : <http://www.cs.uwaterloo.ca/~paforsyt/convert.pdf>.
- [2] K. MILANOV et O. KOUNCHEV. "Binomial Tree Model for Convertible Bond Pricing within Equity to Credit Risk Framework". Cornell University. 2012. URL : <http://arxiv.org/pdf/1206.1400v1>.
- [3] M. AMMANN, A. KIND et C. WILDE. "Simulation-based pricing of convertible bonds". In : *Journal of Empirical Finance* 15 (2007), p. 310-331. URL : <http://www.finance.uni-frankfurt.de/wp/1107.pdf>.
- [4] J. E. INGERSOLL. "A contingent-claims valuation of convertible securities". In : *Journal of Financial Economics* 4 (1977), p. 289-322. URL : [http://pdn.sciencedirect.com/science?\\_ob=MiamiImageURL&\\_cid=271671&\\_user=1378557&\\_pii=0304405X77900046&\\_check=y&\\_origin=article&\\_zone=toolbar&\\_coverDate=31-May-1977&view=c&originContentFamily=serial&wchp=dGLbVlV-zSkWA&md5=1a08ca85100b76b56a163548090f&pid=1-s2.0-0304405X77900046-main.pdf](http://pdn.sciencedirect.com/science?_ob=MiamiImageURL&_cid=271671&_user=1378557&_pii=0304405X77900046&_check=y&_origin=article&_zone=toolbar&_coverDate=31-May-1977&view=c&originContentFamily=serial&wchp=dGLbVlV-zSkWA&md5=1a08ca85100b76b56a163548090f&pid=1-s2.0-0304405X77900046-main.pdf).
- [5] M. J. BRENNAN et E. S. SCHWARTZ. "Convertible bonds : Valuation and optimal strategies for call and conversion". In : *Journal of Finance* 15 (1980), p. 907-929. URL : <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2326820.pdf>.
- [6] M. J. BRENNAN et E. S. SCHWARTZ. "Analyzing convertible bonds". In : *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 32 (1977), p. 1699-1715. URL : <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2330567.pdf>.
- [7] K. G. NYBORG. "The use and pricing of convertible bonds". In : *Applied Mathematical Finance* 3 (1996), p. 167-190. URL : <http://content.ebscohost.com/pdf10/pdf/1996/5AV/01Sep96/5750289.pdf?T=P&P=AN&K=5750289&S=R&D=bth&EbscoContent=dGJyMNxb4kSepq84v%2Bv10LCmr0qeprVSsKy4Sa%2BWxWXS&ContentCustomer=dGJyMPGrSuyvr7ZNuePfgeyx44Dt6fIA>.
- [8] R. A. JARROW et S. M. TURNBULL. "Pricing derivatives on financial securities subject to credit risk". In : *Journal of Finance* 50 (1995), p. 789-819. URL : <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2329239.pdf>.
- [9] T.S.Y. HO et D. M. PFEFFER. "Convertible Bonds : Model, Value Attribution, and Analytics". In : *Financial Analysis Journal* 52 (1996), p. 35-44. URL : <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/4479943.pdf>.
- [10] K. TSIVERIOTIS et C. FERNANDES. "Valuing Convertible Bonds with Credit Risk". In : *Journal of Fixed Income* 8 (1998), p. 95-102. URL : [http://www.math.nyu.edu/~lw429/ms\\_project/cb3.pdf](http://www.math.nyu.edu/~lw429/ms_project/cb3.pdf).
- [11] J. J. MCCONNELL et E. S. SCHWARTZ. "LYON taming". In : *Journal of Finance* 41 (1986), p. 561-576. URL : <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/2328484.pdf>.
- [12] M. DAVIS et F. R. LISCHKA. "Convertible bonds with market risk and credit risk". In : *AMS IP Studies in Advanced Mathematics* 26 (2002). URL : [http://www.math.nyu.edu/~lw429/ms\\_project/cb2.pdf](http://www.math.nyu.edu/~lw429/ms_project/cb2.pdf).

- [13] I. BARDHAN et al. "Valuing Convertible Bonds as Derivatives". In : *Quantitative Strategies Research* (1994), p. 1-31. URL : [http://www.ederman.com/new/docs/gs-valuing\\_convertibles.pdf](http://www.ederman.com/new/docs/gs-valuing_convertibles.pdf).
- [14] J. C. HULL. *Options, Futures, And Other Derivatives*. 8<sup>e</sup> éd. Pearson, 2011.
- [15] P. BOSSAERTS. "Simulation estimator of optimal early exercise". 1989.
- [16] D. GARCIA. "Convergence and biases of Monte Carlo estimates of American option pricing using a parametric exercise rule". In : *Journal of Economic Dynamics and Control* 26 (2003), p. 1855-1879. URL : <http://www.cmapx.polytechnique.fr/~mazari/articles-Finances-X-scans/Garcia.pdf>.
- [17] G. BARONE-ADESI, A. BERMUDEZ et J. HATGIOANNIDES. "Two-factor convertible bonds valuation using the method of characteristics/finite elements". In : *Journal of Economic Dynamics and Control* 27 (2003), p. 1801-1831. URL : [http://0-pdn.sciencedirect.com/science?\\_ob=MiamiImageURL&\\_cid=271650&\\_user=1378557&\\_pii=S0165188902000830&check=y&\\_origin=article&\\_zone=toolbar&\\_coverDate=31-Aug-2003&view=c&originContentFamily=serial&wchp=dGLbVlk-zSkzk&md5=95b6023ae8823717ed6fe0d74497503d&pid=1-s2.0-S0165188902000830-main.pdf](http://0-pdn.sciencedirect.com/science?_ob=MiamiImageURL&_cid=271650&_user=1378557&_pii=S0165188902000830&check=y&_origin=article&_zone=toolbar&_coverDate=31-Aug-2003&view=c&originContentFamily=serial&wchp=dGLbVlk-zSkzk&md5=95b6023ae8823717ed6fe0d74497503d&pid=1-s2.0-S0165188902000830-main.pdf).
- [18] A. TAKAHASHI, T. KOBAYASHI et N. NAKAGAWA. "Pricing convertible bonds with default risk". In : *Journal of Fixed Income* 11 (2001), p. 20-29. URL : <http://park.itc.u-tokyo.ac.jp/takahashi-lab/WPs/p4.pdf>.
- [19] E. AYACHE, P. A. FORSYTH et K. R. VERTZAL. "Next Generation Models for Convertible Bonds with Credit Risk". In : *Wilmott Magazine* (2002), p. 68-77. URL : [http://www.wilmott.com/pdfs/030813\\_ayache.pdf](http://www.wilmott.com/pdfs/030813_ayache.pdf).
- [20] M. D. BENEISH et E. PRESS. "The Resolution of Technical Default". In : *The Accounting Review* 70 (1995), p. 337-353. URL : <http://www.jstor.org/stable/pdfplus/248309.pdf>.
- [21] B. AOUBIZA et M. R. LAYDI. "A Penalty Method of solving partial differential equations with periodic boundary condition : Application to the homogenization theory". In : *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 8.5 (1998), p. 749-760. URL : <http://www.ens2m.fr/math/Laydi/Publications/APENALTY.pdf>.
- [22] C. C. CHRISTARA et D. M. DANG. "Adaptive and high-order methods for valuing American options". In : *The Journal of Computational Finance* 14.4 (2011), p. 73-113. URL : <ftp://ftp.csri.toronto.edu/na/Reports/coc/americanOption.pdf>.
- [23] P. A. FORSYTH et K. R. VETZAL. "Quadratic convergence for valuing American options using a penalty method". In : *SIAM Journal on Scientific Computing* 23.6 (2002), p. 2096-2122. URL : <http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.28.9066&rep=rep1&type=pdf>.
- [24] J. BECKER. "A second order backward difference method with variable steps for a parabolic problem". In : *BIT Numerical Mathematics* 38 (1998), p. 644-662. URL : <http://www.springerlink.com/content/1516ql207x263187/fulltext.pdf>.

- [25] D. J. DUFFY. “A Critique of the Crank Nicolson Scheme Strengths and Weaknesses for Financial Instrument Pricing”. In : *Wilmott Magazine* (2004), p. 68-76. URL : [http://www.wilmott.com/pdfs/071203\\_duffy.pdf](http://www.wilmott.com/pdfs/071203_duffy.pdf).
- [26] M. B. GILES et R. CARTER. “Convergence analysis of Crank-Nicolson and Rannacher time-marching”. In : *The Journal of Computational Finance* (2006), p. 89-112. URL : <http://eprints.maths.ox.ac.uk/1137/1/NA-05-16.pdf>.
- [27] R. RANNACHER. “Finite element solution of diffusion problems with irregular data”. In : *Numerische Mathematik* 43 (1984), p. 309-327. URL : <http://www.springerlink.com/content/x5406160464124jr/fulltext.pdf>.

## Annexes

### .1 Améliorations des différences finies

D'autres améliorations des schémas de différences finies ont été mises en œuvre, mais n'ont pas été utilisées dans l'analyse.

RANNACHER [27] a décrit à l'origine une méthode de traitement des sauts discrets dans une équation aux différences finies, tels que ceux introduits par les coupons. Dans ce cas, la méthode consiste en deux demi-pas implicites au lieu d'un pas normal de Crank-Nicolson à la suite d'un saut discret. GILES et CARTER [26] recommande d'utiliser quatre quarts de pas au lieu d'un demi-pas. Cette recommandation a été appliquée et a démontré une meilleure capacité de lissage du delta de prix et du gamma.

DUFFY [25] décrit une classe de schémas exponentiels ajustés qui sont capables de gérer de petits paramètres de dérive et de volatilité.

**Fin du Rapport**