Méthodes de Monte Carlo en finance (G. Pagès)
M2 Probabilités & Finance, UPMC-X
28 janvier 2008

3 h, polycopié et notes de cours autorisées

Problème I (Grecques d'un modèle à volatilité locale)

On considère une dynamique d'actif risqué définie comme solution de l'EDS :

$$dX_t^x = rX_t^x dt + \sigma \frac{|X_t^x|^{\alpha+1}}{\sqrt{1+(X^x)_t^2}} dW_t, \qquad X_0^x = x > 0,$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ désigne un mouvement brownien standard défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\sigma > 0$ et la paramètre $\alpha \in]0,1]$. Si nécessaire on pourra poser $b(x) = rx$ et $\vartheta_\alpha(x) := \dfrac{|x|^{\alpha+1}}{\sqrt{x^2+1}}$.

1.a. Montrer que b et ϑ_α sont $\mathcal{C}_b^1$. En déduire un argument simple assurant l'existence d'une unique solution forte à l'EDS ci-dessus.

1.c. Montrer que, $\mathbb{P}$-*p.s.*, $X_t^x > 0$ pour tout $t \geq 0$ et que

$$X_t^x = x \exp\left(rt - \frac{\sigma^2}{2} \int_0^t \varphi_\alpha^2(X_s^x) ds + \sigma \int_0^t \varphi_\alpha(X_s^x) dW_s \right)$$

où φ_α est une fonction bornée.

1.d. On considère la suite de temps d'arrêt

$$\tau_n := \inf\{t \,|\, X_t^x \geq n \text{ ou } |\int_0^t \varphi_\alpha(X_s^x) dW_s| \geq n\}, \qquad n \geq 1.$$

Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(2\sigma \int_0^{t\wedge\tau_n} \varphi_\alpha(X_s^x) dW_s \right) \right) \leq e^{2\sigma^2 t \|\varphi_\alpha\|_{\sup}^2}.$$

1.e. En déduire que la martingale locale exponentielle $\widetilde{X}_t^x := e^{-rt} X_t^x$ est $L^2(\mathbb{P})$-borné sur tout intervalle $[0,T]$ et qu'en conséquence c'est une vraie martingale.

2. Soit $Y^{(x)}$ désigne le processus tangent de X^x en x.

2.a. Exprimer $Y_t^{(x)}$ sous la forme de l'exponentielle d'un processus d'Itô s'exprimant lui-même à l'aide de la fonction ϑ_α'.

2.b. Montrer rapidement que la fonction ϑ_α est $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^*$. En déduire que

$$\frac{Y_t^{(x)}}{\vartheta_\alpha(X_t^x)} = \frac{1}{\vartheta_\alpha(x)} \exp\left(\int_0^t \left(r u_1(X_s^x) + \frac{\sigma^2}{2} u_2(X_s^x) \right) ds \right)$$

où $u_1(y) = 1 - y \frac{d}{dy} \log(\vartheta_\alpha)(y)$ et $u_2(y) = -\vartheta_\alpha \vartheta_\alpha''(y)$, $y \in \mathbb{R}_+$.

2.c. Montrer que $-\alpha \leq u_1(y) \leq 1-\alpha$, $y \in \mathbb{R}_+$ et qu'il existe une constante C_α majorant la fonction u_2 sur tout $\mathbb{R}_+$. En déduire que $\frac{Y_t^{(x)}}{\vartheta_\alpha(X_t^x)}$ est borné par une constante $C_T(x)$ sur tout intervalle $[0,T]$.

3. On décide de pricer sous $\mathbb{P}$ dans ce modèle à volatilité locale (au sens où l'on ne cherche pas ici à résoudre la question de la complétude du marché, pour nous tourner vers des aspects plus orientés "probabilités numériques" ...). On admettra que pour tout $t > 0$, la loi de X_t^x n'a aucun atome et que, pour tous a, $b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$,

$$\sup_{x\in[a,b]} Y_T^{(x)} \in L^1(\mathbb{P}).$$

On considère un put vanille de payoff $g(y) = (K - y)_+$.

3.a. Montrer que le delta de la prime $P(x, K, r, \sigma, t, T)$ de cette option dans ce modèle vérifie

$$\delta_0(x) = \frac{\partial P}{\partial x}(x, K, r, \sigma, 0, T) = -e^{-rT}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{X_T^x \le K\}} Y_T^{(x)}\right)$$

où $Y^{(x)}$ désigne le processus tangent de X^x en x.

3.b. En déduire l'existence d'un poids Π_T centré que l'on explicitera après en avoir justifié l'existence tel que

$$\delta_0(x) = -e^{-rT}\mathbb{E}\left((K - X_T^x)_+ \Pi_T\right).$$

4.a. Montrer que le processus tangent $Y_t^{(x)}$ admet lui-même un processus tangent $Z_t^{(x)} = \frac{dY_t^{(x)}}{dx}$, donné par $Z_t^{(x)} = Y_t^{(x)} U_t$ où

$$U_t = \sigma \int_0^t \vartheta''_\alpha(X_s^x) Y_s^{(x)} dW_s - \sigma^2 \int_0^t \theta'_\alpha \theta''_\alpha(X_s^x) Y_s^{(x)} ds.$$

4.b. Montrer que, si certaines hypothèses que l'on explicitera sont vérifiées (sans qu'il soit exigé de les établir), le γ du put dans ce modèle admet la représentation suivante

$$\begin{aligned}
\gamma_0(x) &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x, K, r, \sigma, 0, T) \\
&= -e^{-rT}\mathbb{E}\left(\mathbf{1}_{\{X_T^x \le K\}} Y_T^{(x)} \Pi_T\right) + e^{-rT}\mathbb{E}\left((K - X_T^x)_+ \int_0^T \frac{Y_s^{(x)}}{\sigma \vartheta_\alpha(X_s^x)}\left(U_t - \frac{\vartheta'_\alpha(X_s^x) Y_s^{(x)}}{\vartheta_\alpha(X_s^x)}\right)\frac{dW_s}{T}\right).
\end{aligned}$$

5.a. Calculer les mêmes paramètres pour le Call vanille de prix d'exercice K et de maturité T.

5.b. Esquisser une métode pour calculer ces sensibilités par une simulation de Monte Carlo.

Problème II (Algorithmes quasi-stochastiques)

On se donne une suite $\xi = (\xi_n)_{n\ge1}$ à valeurs dans $[0, 1]^d$ et une suite $\Delta = (\Delta_n)_{n\ge1}$ de nombres réels strictement positifs, décroissante, vérifiant

$$S_n := \sum_{k=1}^n \Delta_k \longrightarrow +\infty \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Pour toute fonction borélienne $f : [0, 1]^d \to \mathbb{R}$ et tout entier $n \ge 1$, on pose

$$I_n(f, \Delta, \xi) = \frac{1}{S_n}\sum_{k=1}^n \Delta_k f(\xi_k)$$

et $I_n(f, \xi) = I_n(f, \mathbf{1}, \xi)$ où $\mathbf{1}$ désigne la suite constante égale à 1.

Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites deréels (par convention $a_0 = b_0 = 0$). On rappelle que

$$\forall\, n \geq 1, \qquad a_n b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k(b_k - b_{k-1}) + \sum_{k=1}^{n} b_{k-1}(a_k - a_{k-1}).$$

Partie A:

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$

$$I_n(f, \Delta, \xi) = n\frac{\Delta_n}{S_n} I_n(f, \xi) + \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k(\Delta_k - \Delta_{k+1}) I_k(f, \xi)}{S_n}$$

où l'on a posé par convention $\Delta_0 = 0$.

2. Dans cette question on suppose que la suite ξ est équirépartie sur $[0,1]^d$.

2.a. Pour tout $n \geq 1$, on définit la Δ-discrépance à l'origine par

$$D_n^*(\Delta, \xi) := \sup_{x\in[0,1]^d} \left| \frac{\sum_{k=1}^{n} \Delta_k \mathbf{1}_{[\![0,x]\!]}(\xi_k)}{S_n} - \mathrm{Vol}([\![0, x]\!]) \right|.$$

Montrer que,

$$D_n^*(\Delta, \xi) = n\frac{\Delta_n}{S_n} D_n^*(\Delta, \xi) + \frac{\sum_{k=1}^{n-1} k(\Delta_k - \Delta_{k+1}) D_k^*(\Delta, \xi)}{S_n}.$$

En déduire que

$$\lim_n D_n^*(\Delta, \xi) = 0.$$

3. On suppose à nouveau que la suite Δ est simplement décroissante. On veut proposer des estimations de la Δ-discrépance.

3.a. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$D_n^*(\Delta, \xi) \leq \frac{\Delta_1}{S_n} \max_{1\leq k\leq n} (k D_k^*(\xi))$$

3.b. En déduire que pour toute suite croissante $(\ell_n)_{n\geq 1}$ telle que $D_n^*(\xi) \leq \dfrac{\ell_n}{n}$ alors

$$D_n^*(\Delta, \xi) \leq \frac{\Delta_1 \ell_n}{S_n}.$$

3.c. On pose $\Delta_n = cn^{-\delta}$, $c > 0$, $0 < \delta < 1$. Montrer par la méthode de votre choix que

$$S_n \sim \frac{c}{1-\delta} n^{1-\delta} \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

En déduire que si ξ est une suite à discrépance faible (*i.e.* dont la discrépance à l'origine a pour asymptotique la "meilleure connue"), alors

$$D_n^*(\Delta, \xi) = O\left(\frac{(\log n)^d}{n^{1-\delta}}\right) \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad n \to \infty.$$

Partie B: On considère une procédure récursive de la forme

$$y_{n+1} = y_n - \gamma_{n+1} H(y_n, \xi_{n+1}), \qquad y_0 \in \mathbb{R}^d,$$

où $H : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^p$ est une fonction borélienne vérifiant et $\gamma = (\gamma_n)_{n\geq 1}$ une suite de pas positifs définie par

$$\forall\, n \geq 1, \qquad \gamma_n = \gamma_1 \frac{\Delta_n}{S_n} \qquad (\gamma_1 > 0)$$

et où la suite $\Delta = (\Delta_n)_{n\geq 1}$ est une suite décroissante de nombres strictement positifs vérifiant $\lim_n S_n = +\infty$ avec les notations de la partie A.

1.a. Montrer que la suite γ ainsi définie est décroissante.

1.b. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\log\left(\frac{S_{n+1}}{S_n}\right) \leq \frac{\gamma_n}{\gamma_1}$. En déduire que $\lim_n \sum_{k=1}^{n} \gamma_k = +\infty$.

2. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$y_n = \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_k (y_{k-1} - \gamma_1 H(y_{k-1}, \xi_k))}{S_n}.$$

3. On suppose que la fonction H vérifie l'hypothèse de contraction suivante

$$\exists\, \alpha > 0,\ \exists \rho \in]0,1[,\ \forall\, u \in [0,1]^d, \qquad y \mapsto y - \alpha H(y,u) \ \text{ est } \rho\text{-contractante sur } \mathbb{R}^p,$$

(on notera que ρ ne dépend pas de u). On suppose en outre que

$$H(0,.) \in L^1([0,1]^d, \lambda_d)$$

où λ_d désigne la mesure de Lebesgue.

3.a. Montrer que pour tout $\alpha' \in]0,\alpha[$, et pour tout $u \in \mathbb{R}^d$, la fonction $y \mapsto y - \alpha' H(y,u)$ est $1 + \frac{\alpha'}{\alpha}(\rho - 1)$-contractante sur $\mathbb{R}^p$.

3.b. Montrer que, d'une part, pour tout $y \in \mathbb{R}^p$, $u \mapsto H(y,u) \in L^1([0,1]^d, \lambda_d)$ et que, d'autre part, la fonction $h : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ définie par

$$h(y) = \int_{[0,1]^d} H(y,u)du$$

admet un unique zéro $y^* \in \mathbb{R}^p$.

4. On choisit $\gamma_1 \in]0,\alpha[$ et on suppose que $u \mapsto H(y^*, u)$ est $\lambda_d(du)$-*p.s.* continue et bornée.

4.a. Pour tout $n \geq 0$, on pose $r_n = |y_n - y^*|$. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$r_n \leq \rho_1 \frac{\sum_{k=1}^n \Delta_k\, r_{k-1}}{S_n} + \gamma_1 \varepsilon_n$$

où $\rho_1 = 1 + \frac{\gamma_1}{\alpha}(\rho - 1)$ et $\varepsilon_n := \left|\frac{\sum_{k=1}^n \Delta_k H(y^*, \xi_k)}{S_n}\right|$.

4.b. Montrer que la suite $(r_n)_{n\geq 1}$ vérifie

$$r_n \leq \rho_1 \max_{0\leq k\leq n-1} r_k + \varepsilon_n$$

En déduire que la suite $(r_n)_{n\geq 1}$ est bornée. [Indication : introduire l'indice d'échelle $\tau_A := \min\{n \geq 1 \,|\, r_n \geq A\}$ pour un A approprié et chercher une contradiction].

4.c. Montrer à l'aide de la question **4.a.** que pour tout $m \geq 0$,

$$\limsup_n r_n \leq \rho_1 \max_{n\geq m} r_n.$$

En déduire que $y_n \to y^*$ lorsque $n \to \infty$.