Probabilités numériques (G. Pagès, V. Lemaire)
M2 Probabilités & Finance, UPMC-École Polytechnique
5 janvier 2015

3 h, polycopié, notes de cours, livres et téléphones mobiles non autorisés

Quasi-Monte Carlo I **1.a.** Décrire en détail une version quasi-Monte Carlo de la méthode de Box-Müller pour la simulation d'une loi normale centrée réduite sur $\mathbb{R}$, incluant la spécification précise d'une suite à discrépance faible de votre choix.

1.b. Que proposez-vous pour la simulation d'une loi $\mathcal{N}\big(0, I_d\big)$ sur $\mathbb{R}^d$, $d \geq 1$.

2.a. Rappeler la définition d'une fonction à variation finie au sens de la mesure définie sur $[0,1]^d$, puis l'inégalité de Koksma-Hlawka.

2.b. Quelles conclusions peut-on en tirer quant à l'estimation d'erreur *a priori* pour des intégrales gaussiennes sur $\mathbb{R}^d$?

Quasi-Monte Carlo II (randomisation) Pour tout réel x, on note $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor \in [0,1[$ sa partie fractionnaire. Par extension, si $x = (x^1, \ldots, x^d) \in \mathbb{R}^d$, on note $\{x\} = \big(\{x^1\}, \ldots, \{x^d\}\big)$.

1. Soit $f : [0,1]^d \to \mathbb{R}$ une fonction Riemann intégrable (*i.e.* f est bornée et l'ensemble $Disc(f)$ des points de $[0,1]^d$ en lesquels f est discontinue est Lebesgue négligeable) et $\xi \in]0,1[^d$. Montrer que la fonction f_ξ définie par $f_\xi(u) = f(\{u + \xi\})$, est Riemann-intégrable. Puis, montrer par récurrence sur d, que

$$\int_{[0,1]^d} f\big(\{u+\xi\}\big)du = \int_{[0,1]^d} f(u)du.$$

2. Soit $(U_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. variables aléatoires de même loi uniforme sur $[0,1]^d$ que U et $(\xi_k)_{1\leq k\leq n}$ une suite de réels de $]0,1[^d$. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$,

$$\widehat{I}(f)_{n,M} := \frac{1}{Mn}\sum_{k=1}^{M}\sum_{\ell=1}^{n} f\big(\{U_k + \xi_\ell\}\big) \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}f(U) \quad \text{lorsque} \;\; M \to +\infty,$$

puis que

$$\mathrm{Var}\big(\widehat{I}(f)_{n,M}\big) = \frac{\sigma_n^2(f)}{M}$$

où $\sigma_n^2(f)$ est une quantité que l'on explicitera.

3. On suppose maintenant que f est définie sur tout $\mathbb{R}^d$ et est isotropiquement périodique au sens où (δ_{ij} désignant le symbole de Kronecker)

$$\forall\, e_i = (\delta_{ij})_{1\leq j\leq d},\, i\in \{1,\ldots,d\},\, \forall\, x \in \mathbb{R}^d, \quad f\big(x+e_i\big) = f(x).$$

3.a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $\xi \in]0,1[^d$, $f(\{x+\xi\}) = f(x+\xi)$.

4.b. En admettant que si f est continue et à variation finie sur $[0,1]^d$ de variation $V(f)$, alors, pour tout $v \in \mathbb{R}$, f_v est à variation finie sur $[0,1]^d$ avec $V(f_v) = V(f)$, montrer que

$$\sigma_n(f) \le D_n^*(\xi_1, \ldots, \xi_n)\, V(f).$$

3.c. Donner un exemple explicite de suite $(\xi_\ell)_{\ell \ge 1}$ telle qu'il existe une constante $C > 0$ (ne dépendant pas de f) pour laquelle, pour tous n, $M \ge 1$,

$$\mathrm{Var}\big(\widehat{I}(f)_{n,M}\big) \le C \frac{(\log n)^{2d}}{n^2 M} V(f)^2.$$

3.d. Comparer (par exemple en termes d'intervalles de confiance) le résultat obtenu avec un estimateur Monte Carlo standard de taille nM. Conclure.

4.a. Énoncer le théorème de Proïnov sur la vitesse d'intégration numérique des fonctions lipschitziennes par des suites équiréparties sur des hypercubes $[0,1]^d$.

4.b. On suppose que f est isotropiquement périodique et Lipschitz. Reprendre les questions **3.b**, **3.c** et **3.d.** Que peut-on en conclure ?

Problème : couvrir une option digitale On considère une diffusion brownienne unidimensionnelle (pour simplifier) $X = (X_t)_{t \in [0,T]}$, solution de l'équation différentielle stochastique (EDS):

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \; X_0 = x_0$$

où $b, \sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont des fonctions lipschitziennes et W est un mouvement brownien unidimensionnel défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (que l'on munit de la filtration naturelle augmentée de W). Le but du problème est d'étudier comment évaluer numériquement le *kappa* d'un *call* digital européen de prix d'exercice K relatif à la diffusion $(X_t)_{t \in [0,T]}$ *i.e.* la dérivée de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(K) = \mathbb{P}(X_T \ge K).$$

On se placera au voisinage d'un point K (diverses propriétés seront admises sous forme d'hypothèses au fil du problème).

Questions préliminaires α. Écrire le schéma d'Euler $\bar{X}^n = (\bar{X}^n_{t^n_k})_{k=0:n}$ à temps discret de pas T/n associé à cette EDS (les notations sont celles du cours).

β. Rappeler sans démonstration quelle est la vitesse de convergence forte dans tous les espaces L^p des schémas $\bar{X}^n$ vers X lorsque le pas $\frac{T}{n}$ tend vers 0.

1.a. Soient Y et $\bar{Y}$ deux variables aléatoires définies sur un même espace de probabilités. Montrer que

$$\Big| \mathbf{P}(Y \ge K) - \mathbf{P}(\bar{Y} \ge K) \Big| \le \mathbf{P}(\bar{Y} < K \le Y) + \mathbf{P}(Y < K \le \bar{Y}).$$

1.b. Montrer que, pour tout réel $\eta > 0$ et tout réel $p \in [1, +\infty[$,

$$\mathbf{P}(\bar{Y} < K \le Y) \le \eta^{-p}\mathbf{E}\big[(Y - \bar{Y})^p \mathbf{1}_{\{Y > \bar{Y} + \eta\}}\big] + \mathbf{P}(K \le Y \le K + \eta).$$

En déduire que

$$\Big|\mathbf{P}(Y\geq K)-\mathbf{P}(\bar Y\geq K)\Big|\leq \eta^{-p}\mathbf{E}|Y-\bar Y|^p+\mathbf{P}(K-\eta\leq Y\leq K+\eta).$$

2. On suppose que la loi de la variable aléatoire $X^{x_0}_{_T}$ est absolument continue de densité $p_{_{x_0,T}}(\xi)$ vérifiant en outre

$$\exists \eta_0>0 \quad \text{tel que}\quad \Lambda=\Lambda(K,\eta_0):=\sup_{\xi\in[K-\eta_0,K+\eta_0]}p_{_{x_0,T}}(\xi)<+\infty.$$

Montrer pour tout $\delta\in]0,\frac12]$ l'existence d'une constante réelle $C_\delta>0$ (ne dépendant notamment pas n) telle que, pour tout entier n assez grand

$$\forall\, K'\in[K-\eta_0/2,K+\eta_0/2],\qquad \Big|f(K')-\bar f_n(K')\Big|\leq C_\delta n^{-\frac12(1-\delta)}$$

où, pour tout entier $n\geq 1$, $\bar f_n(K)=\mathbf{P}(\bar X^n_{_T}\geq K)$. [Indication : on pourra passer par une majoration de type fort appropriée.]

3. On suppose en outre que, dans ce voisinage fermé $[K-\eta_0,K+\eta_0]$ de K, la fonction $\xi\mapsto p_{_{x_0,T}}(\xi)$ est lipschitzienne de rapport $[p_{_T}]_{\rm Lip}$. Montrer que la fonction f est dérivable en K et que, pour tout $\varepsilon\in(0,\eta_0]$,

$$\left|f'(K)-\frac{f(K+\varepsilon)-f(K)}{\varepsilon}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}[p_{_T}]_{\rm Lip}.$$

4. Pour tout n, $M\in\mathbf{N}^*$ et tout réel $\varepsilon>0$, on définit l'estimateur

$$\widehat{\kappa}^n_{_{\varepsilon,M}}=\frac{1}{M\varepsilon}\sum_{k=1}^M\mathbf{1}_{\{\bar X^{n,k}_{_T}\geq K+\varepsilon\}}-\mathbf{1}_{\{\bar X^{n,k}_{_T}\geq K\}}.$$

où $(\bar X^{n,k}_{_T})_{k\geq1}$ est une suite de copies indépendantes (obtenue par simulation du schéma) de $\bar X^{n,x_0}_{_T}$.

4.a. Montrer que

$$\Big\|f'(K)-\widehat{\kappa}^n_{_{\varepsilon,M}}\Big\|_2^2\leq\left(f'(K)-\frac{\bar f_n(K+\varepsilon)-\bar f_n(K)}{\varepsilon}\right)^2+\frac{\mathbf{E}\left|\mathbf{1}_{\{\bar X^n_{_T}\geq K+\varepsilon\}}-\mathbf{1}_{\{\bar X^n_{_T}\geq K\}}\right|^2}{\varepsilon^2M}.$$

4.b. Montrer que, pour $\varepsilon>0$ suffisamment petit et pour tout $\delta\in]0,\frac12]$,

$$\left|f'(K)-\frac{\bar f_n(K+\varepsilon)-\bar f_n(K)}{\varepsilon}\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}[p_{_T}]_{\rm Lip}+\frac{2}{\varepsilon}C_\delta\, n^{-\frac12(1-\delta)}.$$

4.c. Montrer que, pour $\varepsilon>0$ suffisamment petit et pour tout $\delta\in]0,\frac13]$,

$$\Big\|\mathbf{1}_{\{\bar X^n_{_T}\geq K+\varepsilon\}}-\mathbf{1}_{\{\bar X^n_{_T}\geq K\}}\Big\|_{_2}\leq\sqrt{\varepsilon\Lambda}+2\,C_\delta\, n^{-\frac12(1-\delta)}.$$

[Indication : cf. indication de la question **2.**]

5.a. Montrer en choisissant un $\varepsilon = \varepsilon_n$ approprié que, pour n assez grand,

$$\left(f'(K) - \frac{\bar{f}_n(K+\varepsilon_n) - \bar{f}_n(K)}{\varepsilon_n}\right)^2 \leq 4\,[p_{_T}]_{\mathrm{Lip}} C_\delta n^{-\frac{1}{2}(1-\delta)}.$$

5.b. Montrer que, pour cette même spécification de $\varepsilon = \varepsilon_n$,

$$\frac{\mathbf{E}\left|\mathbf{1}_{\{\bar{X}^n_T \geq K+\varepsilon\}} - \mathbf{1}_{\{\bar{X}^n_T \geq K\}}\right|^2}{\varepsilon^2 M} \leq \frac{C_1}{M}\left([p_{_T}]^{\frac{1}{2}}_{\mathrm{Lip}} \Lambda\, C_\delta^{-\frac{1}{2}} + 2\,[p_{_T}]_{\mathrm{Lip}} C_\delta n^{-\frac{3}{4}(1-\delta)}\right) n^{\frac{1}{4}(1-\delta)}$$

où C_1 est une constante réelle purement numérique.

5c. Proposer un choix raisonnable pour la taille M de la simulation. Quelle est, en fonction de n, la vitesse en moyenne quadratique de cette méthode de calcul par simulation de cette sensibilité?