Méthodes de Monte Carlo en finance (G. Pagès, V. Lemaire)
M2 Probabilités & Finance, UPMC-X
3 janvier 2011

3 h, polycopié et notes de cours non autorisées

Rappel. On pourra, si nécessaire, utiliser sans démonstration le résultat suivant: deux solutions fortes $(X_t^x)_{t\geq 0}$ et $(X_t^{x'})_{t\geq 0}$ de l'EDS (scalaire) $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$ issues respectivement de x et x', $x \geq x'$, où b et σ sont lipschitziennes et W est un mouvement brownien standard réel, vérifient $\mathbb{P}$-$p.s.$: pour tout $t \geq 0$, $X_t^x \geq X_t^{x'}$.

Problème 1 (Sensibilités I : accélérer les différences finies) Soit $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne et $Z : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})\mathbb{R}^q$ un vecteur aléatoire. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé et $\varepsilon_0 > 0$ vérifiant $F(x, Z) \in L^2(\mathbb{P})$ et il existe une constante réelle $C_{F,Z} > 0$ telle que

$$\forall\, x' \in I_x := (x - \varepsilon_0, x + \varepsilon_0), \qquad \|F(x', Z) - F(x, Z)\|_2 \leq C_{F,Z}|x' - x|.$$

On suppose d'autre part que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(\xi) = \mathbb{E}\, F(\xi, Z)$ est trois fois dérivable sur I_x de dérivée troisième lipschitzienne sur I_x (on notera $[f^{(3)}]_{\rm Lip}$ sa constante de Lipschitz). On considère enfin une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ de copies indépendantes de Z que l'on supposera définies sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que Z.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\left|\frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} - f'(x) - \frac{\varepsilon^2}{6} f^{(3)}(x)\right| \leq [f^{(3)}]_{\rm Lip} \frac{\varepsilon^3}{6}.$$

2. On pose pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$F_\varepsilon(x, z) = \frac{F(x+\varepsilon, z) - F(x-\varepsilon, z)}{2\varepsilon}.$$

Pour tout $M \geq 1$, on pose $\widehat{f'(x)}_{\varepsilon,M} := \dfrac{1}{M} \displaystyle\sum_{k=1}^{M} F_\varepsilon(x, Z_k)$.

2.a. Montrer que pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\mathbb{E}\, F_\varepsilon(x, Z) = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}$ puis que

$$\lim_M \widehat{f'(x)}_{\varepsilon,M} = \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} \; p.s. \text{ et } \sqrt{M}\left(\widehat{f'(x)}_{\varepsilon,M} - \frac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0; \sigma_{f,\varepsilon}^2)$$

où $\sigma_{f,\varepsilon} \leq \sigma_{f,\varepsilon}^* := \sqrt{C_{F,Z}^2 - \left(\dfrac{f(x+\varepsilon) - f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon}\right)^2} \leq C_{F,Z}$.

2.b. Montrer que

$$\left\|f'(x) - \widehat{f'(x)}_{\varepsilon,M}\right\|_2 \leq \sqrt{\left(\frac{\varepsilon^2}{6}\left(|f^{(3)}(x)| + \varepsilon [f^{(3)}]_{\rm Lip}\right)\right)^2 + \frac{\sigma_{f,\varepsilon}^2}{M}}.$$

2.c. Comment agir sur ε et M pour diviser l'(estimation de l')erreur quadratique par un facteur 2 ? Tire-t-on partie de la régularité supplémentaire de f (par rapport au résultat vu en cours?).

3.a. Montrer l'existence de réels a et b que l'on déterminera explicitement tels que, pour tout $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$,

$$\left|\mathbb{E}\left(aF_\varepsilon(x,Z) + bF_{\frac{\varepsilon}{2}}(x,Z)\right) - f'(x)\right| \leq [f^{(3)}]_{\mathrm{Lip}} \frac{\varepsilon^3}{12}.$$

3.b. Construire un estimateur (biaisé) $\widetilde{f'(x)}_{\varepsilon,M}$ de $f'(x)$ tel que

$$\begin{aligned}\left\|f'(x) - \widetilde{f'(x)}_{\varepsilon,M}\right\|_2 &\leq \sqrt{\left([f^{(3)}]_{\mathrm{Lip}}\frac{\varepsilon^3}{12}\right)^2 + \frac{1}{M}\left(\left(\frac{5}{3}C_{F_Z}\right)^2 - \left(a\frac{f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon)}{2\varepsilon} + b\frac{f(x+\varepsilon/2)-f(x-\varepsilon/2)}{\varepsilon}\right)^2\right)} \\ &\leq \sqrt{\left([f^{(3)}]_{\mathrm{Lip}}\frac{\varepsilon^3}{12}\right)^2 + \left(\frac{5C_{F_Z}}{3\sqrt{M}}\right)^2}.\end{aligned}$$

3.c. Montrer par un réordonnement adéquat des termes dans l'expression originelle de la variance asymptotique que la constante $5/3$ peut-être en fait remplacée par $4/3$.

3.d. Comment agir sur ε et M pour diviser l'(estimation de l')erreur quadratique par un facteur 2 ? Que constate-t-on ?

Problème 2 (Sensibilités II: options digitales). On considère un marché constitué d'un unique actif risqué dont le prix est donc régi entre l'instant 0 et une maturité $T > 0$ par l'EDS

$$dX_t^x = X_t^x\big(r dt + \sigma(X_t^x) dW_t\big), \quad X_0^x = x > 0.$$

où $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est bornée, dérivable de dérivée vérifiant $\sup_{\xi\in\mathbb{R}} |\xi\sigma'(\xi)| \leq C$ pour une constante réelle $C > 0$. Le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1.a. Justifier sans calculs l'existence et l'unicité de $(X_t^x)_{t\in[0,T]}$ comme solution de cette EDS.

1.b. Montrer que le processus

$$\left(x \exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2(X_s^x)}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma(X_s^x) dW_s\right)\right)_{t\in[0,T]}$$

est bien défini sur $[0, T]$, puis, en appliquant la formule d'Itô à une fonction adéquate, montrer que ce processus n'est autre que $(X_t^x)_{t\in[0,T]}$ lui-même.

1.c. En déduire que X^x est en fait strictement positif (ce qui justifie sa qualité de modèle de prix) et que $Y_t^{(x)} = \ln(X_t^x)$ est solution de l'équation

$$dY_t^{(x)} = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(e^{Y_t^{(x)}})\right)dt + \sigma(e^{Y_t^{(x)}})dW_t, \quad Y_0^{(x)} = \ln x.$$

On suppose dans la suite que, $\xi \mapsto \sigma(\xi)$ est en outre indéfiniment dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ avec $|\sigma^{(k)}(\xi)| \leq C_k/|\xi|^k$, $\xi \in \mathbb{R}_+^*$, et que σ est uniformément elliptique au sens où

$$\forall\, \xi \in \mathbb{R}, \quad \sigma(\xi) > \varepsilon_0 > 0.$$

On admettra alors que, pour tout $t>0$, la loi marginale $\mathbb{P}_{Y_t^{(x)}}$ du processus $Y^{(x)}$ admet une densité bornée et indéfiniment différentiable $(x,y)\mapsto q(t,x,y)$ sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$ et que pour tout $k\geq 0$, il existe $C_{k,T}>0$ tel que

$$\forall\, x\in\mathbb{R}_+^*,\ \forall\, y\in\mathbb{R},\qquad \left|\frac{\partial^k q(t,x,y)}{\partial x^k}\right|\leq C_{k,T}\, e^{-\frac{(y-\ln x)^2}{C_{k,T}}}x^{-k}.$$

2. On se propose de calculer numériquement le δ-hedge d'une option d'achat digitale de prix d'exercice $K>0$ *i.e.* de payoff

$$h_T=\mathbf{1}_{\{X_T^x\geq K\}}.$$

2.a. Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ définie par

$$f(x)=\mathbb{P}(X_T^x\geq K)$$

est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et donner une expression de f' en fonction de q. Justifier rapidement qu'en fait f est indéfiniment dérivable.

2.b. Soit I un intervalle fermé inclus dans $\mathbb{R}_+^*$. Montrer que pour tous $x,\,x'\in I$, $x<x'$,

$$\left\|\mathbf{1}_{\{X_T^x\geq K\}}-\mathbf{1}_{\{X_T^{x'}\geq K\}}\right\|_2^2=f(x')-f(x)$$

2.c. En déduire que $x\mapsto\mathbf{1}_{\{X_T^x\geq K\}}$ est Höldérienne d'ordre $\frac{1}{2}$ sur tout intervalle fermé $I\subset\mathbb{R}_+^*$ à valeurs dans $L^2(\mathbb{P})$.

3. On définit la fonction aléatoire F sur $\mathbb{R}_+^*\times\Omega$ par $F(x,\omega):=\mathbf{1}_{\{X_T^x(\omega)\geq K\}}$.

3.a. Proposer un estimateur $\widehat{f'(x)}_{\varepsilon,M}$ de $f'(x)$ par différences finies symétrique d'amplitude 2ε (en vous inspirant si nécessaire du début du Problème 1).

3.b. Montrer que

$$\left\|f'(x)-\widehat{f'(x)}_{\varepsilon,M}\right\|_2\leq\sqrt{\left(\frac{\varepsilon^2}{6}\big(|f^{(3)}(x)|+\varepsilon[f^{(3)}]_{\rm Lip}\big)\right)^2+\frac{\sigma_{f,\varepsilon}^2}{2M\varepsilon}}$$

où $\sigma_{f,\varepsilon}\leq\sigma_{f,\varepsilon}^*:=\sqrt{C_{Hol,F}^2-\dfrac{(f(x+\varepsilon)-f(x-\varepsilon))^2}{2\varepsilon}}\leq C_{Hol,F}^2$ (constante de Hölder d'ordre $\frac{1}{2}$ de F).

3.b. Comment agir simultanément sur ε et M pour diviser l'(estimation de l')erreur quadratique par 2 ?

4. En vous inspirant de la fin du problème 1, améliorer la méthode proposée en justifiant l'approche adoptée.

Problème 3 (Réduction de variance). Soit $Z=(Z_1,\ldots,Z_d)$ un vecteur gaussien centré de $\mathbb{R}^d$ de matrice de variance-covariance l'identité I_d défini sur un espace de probabilités $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$. Le pricing d'un Put de prix d'exercice $K>0$ sur un panier (option Basket) dans un modèle de Black-Scholes à d actifs risqués (avec un taux d'intérêt nul pour simplifier) se ramène au calcul d'une espérance de la forme $\mathbb{E}[\phi(Z)]$ où

$$\phi(Z) = \left(K - \sum_{k=1}^{d} \lambda_k e^{\sigma_k Z_k} \right)_+$$

avec $\sigma_k > 0$ et $\lambda_k = x_k e^{-\frac{\sigma_k^2}{2}}$, $x_k > 0$, $k = 1, \ldots, d$.

1. Montrer que pout tout $\theta \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathbb{E}[\phi(Z)] = \mathbb{E}\left[\phi(Z+\theta) e^{-\langle \theta, Z\rangle - \frac{\|\theta\|^2}{2}}\right]$$

où $\langle \,.\, , \,.\, \rangle$ désigne le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^d$ et $\| \,.\, \|$ la norme euclidienne associée.

2. Écrire l'estimateur de Monte Carlo fondé sur cette seconde représentation (qui dépend de θ). On note g la fonction définie par

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^d, \quad g(\theta) = \mathbb{E}\left[\phi^2(Z+\theta) e^{-2\langle \theta, Z\rangle - \|\theta\|^2}\right].$$

A quoi correspond $g(\theta)$?

3.a. Montrer que $\mathbb{P}(\phi(Z) > 0) > 0$ et que

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^d, \quad g(\theta) = \mathbb{E}\left[\phi^2(Z) e^{-\langle \theta, Z\rangle + \frac{\|\theta\|^2}{2}}\right].$$

En déduire que la fonction g est strictement convexe et que $\lim_{|\theta| \to +\infty} g(\theta) = +\infty$. En conclure qu'il existe un unique $\theta^* \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$g(\theta^*) = \min_{\theta \in \mathbb{R}^d} g(\theta).$$

3.b. Montrer rigoureusement que

$$\forall k \in \{1, \ldots, d\}, \quad \frac{\partial g}{\partial \theta_k}(\theta) = \mathbb{E}\left[\phi^2(Z) e^{-\langle \theta, Z\rangle + \frac{\|\theta\|^2}{2}} (\theta_k - Z_k)\right].$$

4. Soit $\Lambda = \sum_{1 \le k \le d} \lambda_k$. Dans toute la suite de l'exercice, on suppose $K < \Lambda$. Montrer que

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{k=1}^{d} \lambda_k e^{\sigma_k x_k} < K \right\} \subseteq \left\{ x \in \mathbb{R}^d \mid \sum_{k=1}^{d} \lambda_k \sigma_k x_k < \Lambda \log(K/\Lambda) \right\}.$$

5. On considère le vecteur $\theta(\alpha)$ défini par $\theta_k(\alpha) = \alpha \lambda_k \sigma_k$, $k = 1, \ldots, d$, où α est un paramètre réel. Montrer à l'aide de la question précédente que

$$\frac{\mathrm{d}(g \circ \theta)(\alpha)}{\mathrm{d}\alpha} > 0 \quad \text{pour tout} \quad \alpha > \frac{\Lambda \log(K/\Lambda)}{\sum_{1 \le k \le d} (\lambda_k \sigma_k)^2}.$$

6.a. En déduire que $\bar{\theta} \in \mathbb{R}^d$ défini par

$$\bar{\theta}_k = \frac{\sigma_k \lambda_k}{\sum_{1 \le k \le d} (\lambda_k \sigma_k)^2} \Lambda \log(K/\Lambda), \ k = 1, \ldots, d,$$

vérifie $g(\bar{\theta}) < g(0)$.

6.b. Quelle méthode ce résultat suggère-t-il d'utiliser pour le calcul de $\mathbb{E}[\phi(Z)]$?