Méthodes de Monte Carlo en finance (G. Pagès, V. Lemaire)
M2 Probabilités & Finance, UPMC-École Polytechnique
2 avril 2012

3 h, polycopié, notes de cours et téléphones mobiles non autorisés

Exercice 1.a. Rappeler la définition d'une suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ équirépartie sur un hypercube $[0,1]^d$ et les diverses caractérisations.

1.b. Quand dit-on d'une telle suite qu'elle est "à discrépance faible" ?

2. Soit p un entier, $p \geq 2$. Pour tout entier $n \geq 1$ on considère sa décompostion $p-$adique $n = \sum_{k\geq 0} a_k p^k$ où $a_k \in \{0,\ldots,p-1\}$. On pose

$$\xi_n = \sum_{k\geq 0} \frac{a_k}{p^{k+1}}.$$

On admettra que cette suite $(\xi_n)_{n\geq 1}$ est équirépartie sur $[0,1]$.

2.a. Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ et pour $r \in \{0,\ldots,p-1\}$, $\xi_{np+r} = \dfrac{\xi_n + r}{p}$. En déduire la valeur de

$$\lim_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_{kp+r}.$$

2.b. Calculer pour tout $r,\ r' \in \{0,\ldots,p-1\}$, les limites lorsque $n \to \infty$ des quantités

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_{kp+r}\xi_{kp+r'} \quad \text{puis} \quad \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_{kp+r}\xi_{kp+r'}\right) - \left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_{kp+r}\right)\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_{kp+r'}\right).$$

3. Que vous inspire le résultat établi à la question précédente ?

3.a. Proposer une méthode de quasi-Monte Carlo pour calculer $\mathbb{E}f(Z)$, $Z \sim \mathcal{N}\Big(0; I_2\Big)$ (loi normale bi-variée) ?

3.bÉtendre la méthode au cas d'une matrice de covariance $\Sigma \in \mathcal{S}(2,\mathbb{R})$.

Exercice 2 (Co-monotonie) Soit $Z : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire réelle et deux fonctions f, $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la variable réelle à valeurs réelles, monotones de même monotonie.

2.a. Montrer que si $f(Z)$ et $g(Z) \in L^2(\mathbb{P})$, alors

$$\mathbb{E}\, f(Z)g(Z) \geq \mathbb{E}\, f(Z)\mathbb{E}\, g(Z).$$

2.b. Montrer qu'il y a égalité dans l'inégalité ci-dessus si et seulement si $f(Z)$ ou $g(Z)$ est $\mathbb{P}$-$p.s.$ constante.

2.c. On suppose que f et g sont positives. Montrer que l'inégalité établie en **2.a** a un sens et reste valide.

3. On considère un actif risqué de type Black-Scholes $X_t = x_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t+\sigma W_t}$, x_0, $\sigma > 0$, $r \in \mathbb{R}$, et une fonction payoff $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ convexe et dérivable que l'on supposera en outre à croissance polynomiale ($\varphi(x) \le C(1+x^r)$, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$).

3.a. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+$,

$$\varphi(x) - \varphi(x-1) \le \varphi'(x) \le \varphi(x+1) - \varphi(x)$$

(où φ est prolongé sur $\mathbb{R}_-$ de façon $\mathcal{C}^1$ et affine) et en déduire que φ' est aussi à croissance polynomiale.

3.b. Montrer que la sensibilité de la prime $\Phi(x_0, \sigma, r, T)$ de l'option européenne de maturité $T > 0$ est donnée par

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}(x_0, \sigma, r, T) = e^{-rT}\mathbb{E}\Big(\varphi'(X_T)X_T(W_T - \sigma T)\Big)$$

3.c. Montrer à l'aide d'un changement de variable approprié de votre choix que

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}(x_0, \sigma, r, T) = x_0\sqrt{T}\,\mathbb{E}\Big(\varphi'\big(x_0 e^{\sigma\sqrt{T}Z+(r+\frac{\sigma^2}{2})T}\big)Z\Big)$$

où Z suit une loi normale centrée réduite.

3.d. En déduire sans autres calculs que $\frac{\partial \Phi}{\partial \sigma}(x_0, \sigma, r, T) \ge 0$.

Exercice 3 (Convergence *p.s.* **du schéma d'Euler)** On considère une diffusion d-dimensionnelle

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t,\ \ X_0 = x \in \mathbb{R}^d,$$

où $b : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \to \mathcal{M}_{d,q}(\mathbb{R})$ sont des fonctions *a priori* boréliennes et $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ un mouvement brownien q-dimensionnel.

1.a. Définir formellement le schéma d'Euler à temps discret de pas $\frac{T}{n}$ ($n \ge 1$) associé à cette équation de diffusion brownienne (on notera t_k^n, $k = 0, \ldots, n$ les instants de discrétisation et $(\bar{X}_{t_k^n})_{0\le k\le n}$ le dit schéma d'Euler à ces instants).

1.b. Définir les schémas d'Euler dits "constant par morceaux" et "continu", notés respectivement $(\widetilde{X}_t^n)_{t\in[0,T]}$ et $(\bar{X}_t^n)_{t\in[0,T]}$.

2. Donner des conditions classiques sur b et σ qui assurent à la fois l'existence d'une unique solution forte à l'équation et la convergence dans tous les espaces L^p, $p \in [1, +\infty[$, des deux schémas d'Euler mentionnés dans la question **1.b.**, ainsi que la vitesse de convergence de ces schémas dans tous les L^p.

3. On suppose dans cette question que b et σ sont Lipschitz en (t, x).

3.a. Montrer que, pour tout réel $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$, il existe $p \ge 1$ tel que

$$\sum_{n\ge1} n^{p\alpha}\mathbb{E}\sup_{t\in[0,T]}|X_t - \bar{X}_t^n|^p < +\infty.$$

3.b. En déduire que, pour tout $\alpha \in]0, \frac{1}{2}[$,

$$n^\alpha \sup_{t\in[0,T]}|X_t - \bar{X}_t^n| \xrightarrow{p.s.} 0.$$

3.c. Ce résultat s'étend-il au schéma d'Euler constant par morceaux ?

Problème (Volatilité locale). On considère un marché constitué d'un unique actif risqué dont le prix (actualisé) est régi entre l'instant 0 et une maturité $T > 0$ par l'EDS

$$dX_t^x = X_t^x \sigma(X_t^x) dW_t, \quad X_0^x = x > 0.$$

où $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est bornée, dérivable de dérivée vérifiant $\sup_{\xi \in \mathbb{R}_+} |\xi \sigma'(\xi)| \leq C$ pour une constante réelle $C > 0$. En outre on prolonge canoniquement σ à tout $\mathbb{R}$ en posant $\sigma(x) = \sigma(x_+)$ (soit encore $\sigma(x) = \sigma(0)$, $x \leq 0$). Le processus $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

1.a. Justifier sans calculs l'existence et l'unicité de $(X_t^x)_{t \in [0,T]}$ comme solution forte de cette EDS.

1.b. Montrer que le processus

$$\left(x \exp\left(-\int_0^t \frac{\sigma^2(X_s^x)}{2} ds + \int_0^t \sigma(X_s^x) dW_s \right) \right)_{t \in [0,T]}$$

est bien défini sur $[0, T]$, puis, en appliquant la formule d'Itô à une fonction adéquate, montrer que ce processus n'est autre que $(X_t^x)_{t \in [0,T]}$ lui-même.

1.c. En déduire que X^x est en fait strictement positif (ce qui justifie sa qualité de modèle de prix) et que $\xi_t^{(x)} = \ln(X_t^x)$ est solution de l'équation

$$d\xi_t^{(x)} = -\frac{1}{2}\sigma^2(e^{\xi_t^{(x)}})\, dt + \sigma(e^{\xi_t^{(x)}}) dW_t, \quad \xi_0^{(x)} = \ln x.$$

On admettra dans la suite le résultat classique suivant : une fonction convexe g sur $\mathbb{R}$ est dérivable à droite et à gauche en tout point et ses dérivées g'_g et g'_d sont toutes deux croissantes et classées ($g'_g \leq g'_d$); à ce titre, elle sont simultanément continues sauf sur un ensemble dénombrable D_g de points de $\mathbb{R}$. En dehors de D_g, g est dérivable et $g' = g'_g = g'_d$.

2.a. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ croissante (resp. lipschitzienne). Montrer que son prolongement à tout $\mathbb{R}$ défini par $f(x) = f(x_+)$ reste croissant (resp. lipschitzien). Même question si f est convexe croissante .

2.b. Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ convexe et lipschitzienne. Montrer que que g'_d et g'_g sont bornées sur $\mathbb{R}$.

2.c. Soit $Z : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire *intégrable, centrée* et *sans atome* et g croissante, convexe et lipschitzienne sur $\mathbb{R}$. Montrer que la fonction $Q(g) : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \forall\, u \in \mathbb{R}_+, \quad Q(g)(x, u) = \mathbb{E} g(x + uZ)$$

est dérivable en u sur $\mathbb{R}_+^*$ de dérivée

$$\forall\ u > 0,\ x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial Q(g)}{\partial u}(x, u) = \mathbb{E}\big(g'_d(x + uZ)Z\big).$$

2.d. En déduire que pour toute fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ convexe et lipschitzienne, la fonction $Q_+(f)$ définie par

$$Q_+(f)(x, u) = \mathbb{E}\, f\big((x + uZ)_+\big), u \geq 0,\ x \in \mathbb{R}$$

est croissante en u, convexe et lipschitzienne en (x,u).

On rappelle que dans toute la suite la fonction σ est prolongée à $\mathbb{R}$ tout entier par $\sigma(x)=\sigma(x_+)$.

3.a. On considère le schéma d'Euler (à temps discret) $(\bar{X}^n_{t^n_k})_{0\le k\le n}$ de l'EDS ci-dessus de pas $\frac{T}{n}$, $n\ge 1$. Montrer que, si l'on pose $t^n_k=\frac{kT}{n}$, $k=0,\dots,n$, alors $\bar{X}^n_0=x$ et

$$\bar{X}^n_{t^n_k}=\bar{X}^n_{t^n_{k-1}}\Big(1+\sigma(\bar{X}^n_{t^n_{k-1}})\sqrt{\frac{T}{n}}Z_k\Big)\text{ où } Z_k=\sqrt{\frac{n}{T}}(W_{t_k}-W_{t_{k-1}}),\ k=1,\dots,n \text{ est i.i.d. de loi } \mathcal{N}(0;1).$$

En déduire que la suite $\big((\bar{X}^n_{t^n_k})_+\big)_{0\le k\le n}$ est une chîne de Markov.

3.b. Justifier soigneusement le fait que $\max_{0\le k\le n}|X_{t^n_k}-\bar{X}^n_{t^n_k}|\to 0$ dans tous les espaces L^p, $p\in(0,\infty)$. En déduire que pour toute fonction $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue à croissance polynomiale

$$\lim_n \mathbb{E}\,\varphi\big((\bar{X}^n_T)_+\big)=\mathbb{E}\,\varphi\big(X_T\big).$$

4.a. Pour tout entier $n\ge 1$ fixé, on définit la martingale $(\bar{M}^n_k)_{k=0,\dots,n}$ de valeur terminale $\varphi\big((\bar{X}^n_T)_+\big)$ en posant

$$\bar{M}^n_k=\mathbb{E}\Big(\varphi\big((\bar{X}^n_T)_+\big)\,|\,\mathcal{F}^Z_k\Big)\qquad \text{où } \mathcal{F}^Z_k=\sigma(Z_1,\dots,Z_k).$$

Montrer par récurrence, l'existence de fonctions $\varphi_k:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$, $k=0,\dots,n$, telles que

$$\bar{M}^n_k=\varphi_k\big((\bar{X}^n_{t^n_k})_+\big)$$

où les fonctions φ_k s'obtiennent par récurrence rétrograde comme suit:

$$\varphi_n=\varphi,\quad \varphi_k(x)=Q_+(\varphi_{k+1})\Big(x,\sqrt{\frac{T}{n}}x\sigma(x)\Big),\ x\in\mathbb{R}_+,\ k=0,\dots,n-1,$$

où l'opérateur Q_+ est associé à la loi normale centrée réduite des Z_k.

4.b. Montrer que si les fonctions φ et $\xi\mapsto\xi\sigma(\xi)$ sont toutes deux convexes (et lipschitziennes) sur $\mathbb{R}_+$, alors ces propriétés se propagent aux fonctions φ_k, $k=n,\dots,0$.

5. On considère un second modèle à volatilité locale

$$dY^x_t=Y^x_t\vartheta(Y^x_t)dW_t,\ Y^x_0=x>0$$

où la fonction ϑ vérifie $\xi\mapsto\xi\vartheta(\xi)$ est lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$ et une fonction payoff $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ continue à croissance polynomiale. On associe à ψ les fonctions ψ_k selon la même récurrence que celle décrite en **4.a.** On suppose en outre que

$$(*)\qquad 0\le\varphi\le\psi\quad\text{et}\quad\sigma\le\vartheta\quad\text{sur}\quad\mathbb{R}_+.$$

5.a. Montrer par récurrence que pour tout $k=0,\dots,n$, $\varphi_k\le\psi_k$.

5.b. En déduire que $\mathbb{E}\big(\varphi((\bar{X}^n_T)_+)\big)\le\mathbb{E}\big(\psi((\bar{Y}^n_T)_+)\big)$ pour tout $n\ge 1$ puis que $\mathbb{E}\big(\varphi(X^x_T)\big)\le\mathbb{E}\big(\psi(Y^x_T)\big)$.

5.c. On suppose maintenant que ψ et $\xi \mapsto \xi\vartheta(\xi)$ sont convexes croissantes et lipschitziennes et que φ est simplement continue et que ces fonctions vérifient en outre $(*)$. Qu'en est-il de la conclusion de la question **5.b.** dans ce cadre "dual" ?

5.d. Quelles conclusions peut-on tirer sur le prix d'un *call* de maturité $T > 0$ et de prix d'exercice K lorsque la fonction de volatilité locale positive σ vérifie $\xi \mapsto \xi\sigma(\xi)$ est lipschitzienne bornée et σ est encadrée par deux réels strictement positifs $\underline{\sigma}$ et $\overline{\sigma}$ *i.e.* $0 < \underline{\sigma} \leq \sigma(x) \leq \overline{\sigma}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$?