Méthodes de Monte Carlo en finance (G. Pagès)
M2 Probabilités & Finance, UPMC-X
28 mars 2008

3 h, polycopié et notes de cours autorisées

Problème I (Rejet avec recyclage)

On se place sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On considère deux vecteurs aléatoires X et Y définis sur cette espace et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$. On suppose que X et Y ont des densités respectives f et g par rapport à la mesure de Lebesgue λ_d sur $\mathbb{R}^d$. On suppose en outre que les fonctions f et g sont strictement positives λ_d-*p.p.* Sur un plan pratique, on suppose que f et g sont aussi "facilement" calculables et que la variable Y est "aisément" simulable. Enfin on suppose qu'il existe un réel $c > 0$ *explicite* tel que

$$f < c\, g \qquad \lambda_d\text{-}p.p.$$

1.a. Montrer que $c > 1$.

1.b. Soir $r \in [1, \infty[$. Montrer que si $\varphi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$, fonction borélienne, vérifie $\varphi(Y) \in L^r(\mathbb{P})$ alors $\varphi(X) \in L^r(\mathbb{P})$.

2. Soit φ une fonction borélienne générique telle que $\varphi(Y) \in L^1(\mathbb{P})$.

2.a. Soit U une variable aléatoire uniformément distribuée sur $[0, 1]$, indépendante de Y. Montrer que

$$\mathbb{E}\left(\varphi(Y)\mathbf{1}_{\{c\,U g(Y) \le f(Y)\}}\right) = \frac{1}{c}\mathbb{E}(\varphi(X)).$$

2.b. Établir l'existence d'une fonction borélienne $\rho_c : \mathbb{R}^d \to \overline{\mathbb{R}}_+$ que l'on déterminera, λ_d-*p.p.* finie (et ne dépendant pas de φ), telle que

$$\mathbb{E}\left(\varphi(Y)\mathbf{1}_{\{c\,U g(Y) > f(Y)\}}\right) = \mathbb{E}\left(\varphi(X)\rho_c(X)\right).$$

3.a. En déduire l'existence d'une fonction borélienne $\Pi_c : [0, 1] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ telle que

$$\mathbb{E}(\varphi(Y)\Pi_c(U, Y)) = \mathbb{E}\,\varphi(X).$$

3.b. Proposer à partir de ces résultats une méthode de calcul de $\mathbb{E}\varphi(X)$ par simulation de Monte Carlo de rendement 1 fondée sur la simulation d'une suite i.i.d. de vecteurs aléatoires $(Y_k, U_k)_{k\ge1}$ de même loi que (Y, U) définies ci-avant.

4. Montrer que

$$\mathrm{Var}\left(\varphi(Y)\Pi_c(U, Y)\right) = \frac{c}{4}\mathbb{E}\left(\varphi(X)^2\ \frac{1}{1 - \frac{f(X)}{cg(X)}}\right) - (\mathbb{E}\varphi(X))^2.$$

5. On veut se donner les moyens de comparer cette approche avec celle du rejet "standard". Dans cette question (**5.a.** et **5.b.**) on ne suppose plus que X a f pour densité mais que f est simplement dans $L^1_{\mathbb{R}_+}(\lambda_d)$ tout en conservant l'ensemble des autres hypothèses : X a donc pour loi $\frac{f}{\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d}.\lambda_d$. On reprend la suite i.i.d. de vecteurs aléatoires $(Y_k, U_k)_{k\geq 1}$ de même loi que (Y, U) et on pose $\tau_0 = 0$ puis

$$\tau_k = \min\{\ell > \tau_{k-1} \,|\, c\,U_\ell g(Y_\ell) \leq f(Y_\ell)\}, \quad k \geq 1.$$

5.a. Montrer que maintenant $c = \dfrac{\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d}{\mathbb{P}(c\,Ug(Y) \leq f(Y))} > \displaystyle\int_{\mathbb{R}^d} f d\lambda_d$.

5.b. Montrer que τ_1 suit une loi géométrique $G^*(p)$ avec une valeur de p que l'on précisera puis que Y_{τ_1} a même loi que X.

6. On admet dans la suite que la suite $(\tau_n - \tau_{n-1})_{n\geq 1}$ est i.i.d. et que $(Y_{\tau_n})_{n\geq 1}$ est i.i.d. de même loi que X. Soit φ une fonction borélienne bornée.

6.a. Montrer que la complexité (aléatoire) du calcul de

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \varphi(Y_{\tau_n})$$

est de la forme $(\tau_N - N)\kappa_1 + \kappa_2 N$ où $\kappa_1 < \kappa_2$.

6.b. On suppose à nouveau dans cette question que f est une densité de probabilité pour pouvoir comparer les deux méthodes. Montrer que, en moyenne la méthode du rejet dite "avec recyclage" (dont la moyenne empirique associée a une complexité de la forme $\kappa_3 N$, $\kappa_2 < \kappa_3$) est préférable si

$$\frac{1}{4}\mathbb{E}\left(\varphi(X)^2 \,\frac{1}{1-\frac{f(X)}{cg(X)}}\right) - \frac{1}{c}(\mathbb{E}\varphi(X))^2 < \frac{\frac{\kappa_2-\kappa_1}{c}+\kappa_1}{\kappa_3}\mathrm{Var}(X).$$

6.b. En déduire que, si $\kappa_3 < 4\kappa_1$, ce sera toujours le cas si la méthode du rejet a été suffisamment "mal conditionnée" (*i.e.* faire tendre c vers ∞).

COMMENTAIRE : En fait le principal atout de la méthode du rejet tient au fait que l'on peut la mettre en œuvre lorsque l'on ne connait la densité f qu'à une constante multiplicative près (le meilleur c connu étant alors souvent loin d'être optimal).

Problème II : Schémas de discrétisation implicites d'un modèle C.I.R.

Rappel. Soit b et σ deux fonctions boréliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ vérifiant

$$|b(x)| + |\sigma(x)| \leq C(1 + |x|).$$

Alors toute solution forte $(X_t)_{t\geq 0}$, d'une EDS $dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$, $X_0 = x$, ($W = (W_t)_{t\geq 0}$ mouvement brownien défini sur un espace probabilisé) vérifie, *dès qu'elle existe*,

$$\forall\, p \in [1, \infty[,\ \forall\, T > 0, \quad \|\sup_{t\in[0,T]} |X_t|\|_p \leq K_p(C)e^{K_p(C)T}(1 + |x|)$$

où $C \mapsto K_p(C)$ est une fonction croissante de $C > 0$.

On considère maintenant un mouvement brownien défini sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration complétée de W sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ (qui s'avère satisfaire aux conditions habituelles).

On considère l'équation du C.I.R. de paramètres a,k, $\vartheta > 0$:

$$dX_t = k(a - X_t)dt + \vartheta\sqrt{X_t}\, dW_t, X_0 = x > 0$$

1. Soit $\varepsilon \in]0, x[$ et $M \in]x, +\infty[$.

1.a. Montrer que l'EDS

$$d\xi_t = k(a - (\xi_t \vee \varepsilon) \wedge M)dt + \vartheta\sqrt{(\xi_t \vee \varepsilon) \wedge M}\, dW_t, \quad \xi_0 = x > 0$$

admet une solution unique sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on notera $\xi^{\varepsilon,M}$.

1.b. On pose pour toute fonction continue $\alpha \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ telle que $\alpha(0) = x$, $\tau^x_\varepsilon(\alpha) := \inf\{t \geq 0 \,|\, \alpha(t) = \varepsilon\}$ et $\tau^x_M(\alpha) = \inf\{t \geq 0 \,|\, \alpha(t) = M\}$. Justifier rapidement que $\tau^x_\varepsilon(\xi^{\varepsilon,M})$ et $\tau^x_M(\xi^{\varepsilon,M})$ sont des $\mathcal{F}_t$-temps d'arrêt.

1.c. Montrer que si $0 < \varepsilon' < \varepsilon < x < M < M'$, alors $(\xi^{\varepsilon',M'})^{\tau^x_\varepsilon(\xi^{\varepsilon,M})\wedge\tau^x_M(\xi^{\varepsilon,M})} = (\xi^{\varepsilon,M})^{\tau^x_\varepsilon(\xi^{\varepsilon,M})\wedge\tau^x_M(\xi^{\varepsilon,M})}$ et que $\varepsilon \mapsto \tau^x_\varepsilon(\xi^{\varepsilon,M})$ est décroissante sur $]0, x[$ et que $M \mapsto \tau^x_M(\xi^{\varepsilon,M})$ est croissante sur $]x, \infty[$.

1.d. On note τ^x_{0+} et τ^x_∞ les limites respectives de ces temps d'arrêt lorsque $\varepsilon \to$ et $M \to \infty$. Montrer que ce sont à nouveau des temps d'arrêt.

2.a. Soit $T > 0$. Montrer que, pour tout $\varepsilon \in]0, x[$ et $M \in]x, +\infty[$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in[0,T]} |\xi^{\varepsilon,M}_t|\right) \leq K(C)e^{K(C)T}(1 + |x|).$$

En déduire que $\tau^x_\infty = +\infty$ $\mathbb{P}$-$p.s.$.

2.b. En déduire l'existence d'une unique solution forte $X^x = (X^x_t)_{0\leq t\leq\tau^x_{0+}}$ à l'équation (CIR) sur l'intervalle aléatoire $[0, \tau^x_{0+}[$. Montrer que $\tau^x_{0+} = \tau^x_0(X^x)$ (premier temps d'atteinte de 0 par X^x).

3.a. Déterminer formellement le générateur infinitésimal L de la diffusion (CIR).

3.b. Montrer que la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$g(x) = \int_1^x e^{\frac{2ku}{\vartheta^2}} \frac{du}{u^{\frac{2ak}{\theta^2}}}$$

vérifie $Lg = 0$.

3.c. Montrer que

$$g(X^x_{t\wedge\tau^x(X^x)_\varepsilon\wedge\tau^x_M(X^x)}) = g(x) + \vartheta\int_0^{t\wedge\tau^x_\varepsilon(X^x)\wedge\tau^x_M(X^x)} g'(X^x_s)\sqrt{X^x_s}dW_s$$

et en déduire que

$$g(x) = \mathbb{E}(g(X^x_{t\wedge\tau^x(X^x)_\varepsilon\wedge\tau^x_M(X^x)})).$$

3.d. Montrer que $\inf_{\varepsilon\leq x\leq M} g'(x) > 0$. En déduire une minoration de

$$\mathbb{E}\left(\int_0^{t\wedge\tau^x_\varepsilon(X^x)\wedge\tau^x_M(X^x)} g'(X^x_s)\sqrt{X^x_s}dW_s\right)^2$$

puis en conclure que

$$\tau_\varepsilon^x(X) \wedge \tau_M^x(X^x) < +\infty \quad \mathbb{P}\text{-}p.s..$$

4.a. Montrer que, toujours en supposant $\varepsilon < x < M$, que

$$g(x) = g(\varepsilon)\mathbb{P}(\tau_\varepsilon^x(X^x) < \tau_M^x(X^x)) + g(M)\mathbb{P}(\tau_\varepsilon^x(X^x) \geq \tau_M^x(X^x))$$

4.b. On fait l'hypothèse que $\frac{\vartheta^2}{2ka} \leq 1$. Montrer que $\lim_{x\to 0} g(x) = -\infty$. En déduire que $\lim_{\varepsilon\to 0} \mathbb{P}(\tau_\varepsilon^x(X) < \tau_M^x(X^x)) = 0$. En conclure que

$$\mathbb{P}(\tau_0^x(X^x) = \infty) = 1.$$

5. On fait l'hypothèse $\frac{\vartheta^2}{2ka} \leq 1$ dans cette question et la suivante (*i.e.* de **5.a.** à **6.c.**).

5.a. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On considère le schéma d'Euler complètement implicite *naïf* associé aux instants $t_i^n = \frac{iT}{n}$, $i = 0, \ldots, n$ défini par

$$\bar{X}_{t_{i+1}^n} = \bar{X}_{t_i^n} + k(a - \bar{X}_{t_{i+1}^n})\frac{T}{n} + \vartheta\sqrt{\bar{X}_{t_{i+1}^n}}\Delta W_{t_{i+1}^n},\ i = 0, \ldots, n-1,\ \bar{X}_0 = x,$$

où $\Delta W_{t_{i+1}^n} = W_{t_{i+1}^n} - W_{t_i^n}$, $i = 0, \ldots, n-1$. Expliquer pourquoi ce schéma est incorrect.

5.b. Justifier heuristiquement (sur le processus CIR lui-même) le fait que

$$\mathbb{E}\left(\left(\sqrt{X_{t_{i+1}^n}} - \sqrt{X_{t_i^n}}\right)\Delta W_{t_{i+1}^n} \,|\, \mathcal{F}_{t_i^n}\right) \approx \frac{\vartheta}{2}\frac{T}{n}$$

En déduire que le schéma *complètement implicite* doit être défini par

$$\bar{X}_{t_{i+1}^n} = \bar{X}_{t_i^n} + k\left(a - \frac{\vartheta^2}{2k} - \bar{X}_{t_{i+1}^n}\right)\frac{T}{n} + \vartheta\sqrt{\bar{X}_{t_{i+1}^n}}\Delta W_{t_{i+1}^n},\ i = 0, \ldots, n-1,\ \bar{X}_0 = x.$$

5.c. Montrer que ce schéma peut-être entièrement explicité en

$$\bar{X}_{t_{i+1}^n} = \left(\frac{\vartheta\Delta W_{t_{i+1}^n} + \sqrt{(\vartheta\Delta W_{t_{i+1}^n})^2 + 4(k(a - \frac{\vartheta^2}{2k})\frac{T}{n} + \bar{X}_{t_i^n})(1 + \frac{kT}{n})}}{2(1 + \frac{kT}{n})}\right)^2,\ i = 0, \ldots, n-1,\ \bar{X}_0 = x.$$

6.a. On pose $Y_t = \sqrt{X_t}$. Montrer que Y est solution strictement positive de l'EDS

$$(E) \quad \equiv \quad dY_t = \frac{ka}{2}\left(\frac{c}{Y_t} - \frac{Y_t}{a}\right)dt + \frac{\vartheta}{2}dW_t, \quad Y_0 = \sqrt{x},$$

où c est une constante réelle strictement positive que l'on précisera.

6.b. Soit $T \in \mathbb{R}_+^*$. On considère le schéma d'Euler *complètement implicite* associé aux instants $t_i^n = \frac{iT}{n}$, $i = 0, \ldots, n$ défini par

$$\bar{Y}_{t_{i+1}^n} = \bar{Y}_{t_i^n} + \frac{ka}{2}\left(\frac{c}{\bar{Y}_{t_{i+1}^n}} - \frac{\bar{Y}_{t_{i+1}^n}}{a}\right)\frac{T}{n} + \frac{\vartheta}{2}\Delta W_{t_{i+1}^n}.$$

6.c. En déduire que ce schéma peut-être entièrement explicité en

$$\bar{Y}_{t^n_{i+1}} = \frac{\bar{Y}_{t^n_i} + \frac{\vartheta}{2}\Delta W_{t^n_{i+1}} + \sqrt{(\bar{Y}_{t^n_i} + \frac{\vartheta}{2}\Delta W_{t^n_{i+1}})^2 + 2akc\frac{T}{n}(1+\frac{kT}{2n})}}{2(1+\frac{kT}{2n})},\ i = 0,\ldots,n-1,\ \bar{Y}_0 = \sqrt{x}.$$

7.a. Vérifier que si $c = 0$, l'équation (E) admet pour unique solution un processus gaussien (bien connu...). En déduire que, pour ces valeurs des paramètres, l'équation (CIR) admet (au moins) une solution positive sur tout $\mathbb{R}_+$, non identiquement nulle, se réfléchissant infiniment souvent en 0. Quelle conclusion peut-on en tirer sur la convergence du schéma $\bar{Y}$ vers Y (sans préjuger de celle de son carré vers X ...) ?

Commentaires : La situation décrite en **7.a.** a lieu lorsque $1 < \frac{\vartheta^2}{2ka} \leq 2$. En pratique on s'intéresse souvent à des développements limités de ces schémas qui en préservent néanmoins la positivité.