Méthodes de Monte Carlo en finance (G. Pagès, V. Lemaire)
M2 Probabilités & Finance, UPMC-X
18 janvier 2010

3 h, polycopié et notes de cours non autorisées

Rappel: On pourra, si nécessaire, utiliser sans démonstration le résultat suivant: si $(Y_n)_{n\geq 1}$ désigne une suite de variables aléatoires indépendantes et centrées telle que

$$\exists\,\delta>0 \;\text{ tel que }\; \sup_n \mathbb{E}\,|Y_n|^{2+\delta}<+\infty \quad \text{ et } \quad \exists\, N_n\to\infty \;\text{ telle que }\; \frac{1}{N_n}\sum_{k=1}^{N_n}\mathrm{Var}(Y_k)\stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow}\sigma^2,$$

alors
$$\frac{1}{\sqrt{N_n}}\sum_{k=1}^{N_n} Y_k \stackrel{\mathcal{L}}{\longrightarrow}\mathcal{N}(0;\sigma^2).$$

Problème 1 (Sensibilités I : différences finies) Soit $F:\mathbb{R}\times\mathbb{R}^q\to\mathbb{R}$ une fonction borélienne et $Z:(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^q$ vérifiant: il existe $\eta\geq 0$ tel que $F(x,Z)\in L^{2+\eta}(\mathbb{P})$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et

$$\forall\, x,\,x'\in\mathbb{R},\qquad \|F(x,Z)-F(x',Z)\|_{2+\eta}\leq C_{F,Z}|x-x'|.$$

On suppose en outre que la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\mathbb{E}\,F(x,Z)$ est dérivable de dérivée f' lipschitzienne (on notera $[f']_{\rm Lip}$ sa constante de Lipschitz). On considère enfin une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$ une suite de copies indépendantes de Z que l'on supposera définies sur le même espace de probabilités que Z.

1. Montrer que pour tout $\varepsilon>0$, $\left|\dfrac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}-f'(x)\right|\leq [f']_{\rm Lip}\varepsilon.$

2. Pour tout $n\geq 1$, on pose $\widehat{f'(x)}_{\varepsilon,n}:=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{F(x+\varepsilon,Z_k)-F(x,Z_k)}{\varepsilon}$.

Montrer que pour tout $\varepsilon>0$,

$$\lim_n \widehat{f'(x)}_{\varepsilon,n}=\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\;\; p.s. \quad\text{ et }\quad \sqrt{n}\left(\widehat{f'(x)}_{\varepsilon,n}-\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\right)\stackrel{\mathcal{L}}{\longrightarrow}\mathcal{N}(0;\sigma^2_{f,\varepsilon})$$

où $\sigma_{f,\varepsilon}\leq\sqrt{C^2_{F,Z}-\left(\dfrac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}\right)^2}$.

3. Soit $(\varepsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de réels strictement positifs convergeant vers 0 telle que $\sum_n\varepsilon_n<+\infty$. On pose pour tout $n\geq 1$,

$$\widetilde{f'(x)}_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{F(x+\varepsilon_k,Z_k)-F(x,Z_k)}{\varepsilon_k}.$$

3.a. On pose pour tout $\alpha\in[0,\frac12[$ et tout $n\geq 1$,

$$N_n^{(\alpha)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{F(x+\varepsilon_k,Z_k)-F(x,Z_k)-(f(x+\varepsilon_k)-f(x))}{k^{1-\alpha}\varepsilon_k}.$$

Montrer que $(N_n^{(\alpha)})_{n\geq 1}$ est une martingale L^2-bornée.

3.b. En déduire que, pour tout $\alpha\in]0,\frac{1}{2}[$,

$$\widetilde{f'(x)}_n - f'(x) = o(n^{-\alpha}) \quad p.s.$$

4.a. Montrer que

$$\limsup_n \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}\left(\frac{F(x+\varepsilon_k, Z_k) - F(x, Z_k)}{\varepsilon_k}\right) \leq C_{F,Z}^2 - (f'(x))^2.$$

4.b. On suppose dans cette dernière question que $\eta > 0$. En déduire que la suite $(\sqrt{n}(\widetilde{f'(x)}_n - f'(x))_{n\geq 1}$, est "séquentiellement relativement compacte" pour la convergence étroite, d'adhérence contenue dans la famille de lois $\{\mathcal{N}(0;v),\ 0\leq v\leq C_{F,Z}^2 - (f'(x))^2\}$. [En d'autres termes, de toute suite extraite, on peut extraire une sous-suite convergeant en loi vers une loi gaussienne appartenant à l'ensemble indiqué ci-dessus.]

Problème 2 (Sensibilités II) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, $F:\mathbb{R}\times\Omega\to\mathbb{R}$ une fonctionnelle aléatoire $\mathcal{B}or(\mathbb{R})\otimes\mathcal{A}$-mesurable et $x_0\in\mathbb{R}$ vérifiant $F(x_0,.)\in L^2(\mathbb{P})$ et

$$(i) \qquad \forall\, x\in\mathbb{R}, \quad \|F(x,.) - F(x_0,.)\|_2 \leq C_F|x - x_0|,$$

$$(ii) \quad \exists\,\Omega_{x_0} \text{ tel que } \mathbb{P}(\Omega_{x_0}) = 1 \text{ et } \forall\,\omega\in\Omega_{x_0},\ \lim_{x\to x_0}\frac{F(x,\omega) - F(x_0,\omega)}{x - x_0} = F'_x(x_0,\omega).$$

1. Montrer que la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie pour tout $x\in\mathbb{R}$ par $f(x) = \int_\Omega F(x,\omega)\mathbb{P}(d\omega) = \mathbb{E}\,F(x,.)$ existe et qu'elle est lipschitzienne.

2.a. On pose $F'_x(x_0,\omega) = 0$, si $\omega\notin\Omega_{x_0}$. Montrer que $F'_x(x_0,.)\in L^2(\mathbb{P})$ et proposer un majorant pour $\|F'_x(x_0,.)\|_2$. On pose $f'(x_0) := \mathbb{E}\,F'_x(x_0,.)$.

2.b. Soit $R > 0$ un paramètre réel strictement positif. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$\left|\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0)\right| \leq \mathbb{E}\left[\left|\frac{F(x,.) - F(x_0,.)}{x - x_0} - F'(x_0,.)\right|\wedge R\right] + \frac{4C_F^2}{R}.$$

2.c. En déduire que la fonction f est dérivable en x_0 de nombre dérivé $f'(x_0)$ en ce point.

3. On considère une dynamique à volatilité locale pour un actif risqué (sous sa probabilité risque-neutre, le numéraire évoluant selon la dynamique déterministe élémentaire e^{rt})

$$dX_t^x = X_t^x(rdt + \sigma(X_t^x)dW_t), \quad X_0^x = x > 0$$

où W est un mouvement brownien standard défini sur sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On suppose que la fonction $\sigma:\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$ est continument différentiable, bornée, de dérivée $\sigma'(x) = O(|x|^{-1})$ lorsque $|x|\to\infty$ et qu'elle vérifie en outre une hypothèse d'ellipticité de la forme

$$\varepsilon_0 = \inf_{x\in\mathbb{R}}\sigma(x) > 0.$$

On admettra qu'une telle diffusion n'a pas d'atome hors l'origine *i.e.*, pour tout tout $t > 0$ et tout $z\in\mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X_t^x = z) = 0$.

3.a. Montrer que le processus de prix $(X_t^x)_{t\geq 0}$ existe bien pour toute valeur initiale $x>0$ et que pour tout $x>0$ et tout $t\geq 0$

$$X_t^x = x\exp\Big(\int_0^t (r-\frac{\sigma(X_s^x)^2}{2})ds + \int_0^t \sigma(X_s^x)dW_s\Big).$$

3.b. Soit $T>0$. Montrer qu'il existe une constante réelle $C_{_T}>0$ telle que, pour tout $t\in[0,T]$ et pour tous $x,\, x'\in\mathbb{R}_+^*$,

$$\mathbb{E}|X_t^x - X_t^{x'}|^2 \leq C_{_T}|x-x'|^2.$$

[Indication: on pourra appliquer le lemme de Gronwall à $\varphi(t)=\sup_{0\leq s\leq t}\mathbb{E}|X_s^x - X_s^{x'}|^2$.]

4. On considère une option européenne sur cet actif risqué de maturité $T>0$ et de fonction payoff $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ lipschitzienne, différentiable sauf en un nombre fini de points. On note

$$F(x,\omega) = e^{-rT}h(X_{_T}^x(\omega))$$

le *payoff* actualisé qui lui est associé et par $f(x)$ la valeur de la prime à l'origine.

4.a. Montrer que ceci définit une fonction $f:\mathbb{R}_+^*\to\mathbb{R}$ différentiable telle que

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\qquad f'(x) = e^{-rT}\mathbb{E}(h'(X_{_T}^x)Y_{_T}^x)$$

où $(Y_t^x)_{t\geq 0}$ est une famille de proccessus que l'on précisera.

4.b. Montrer qu'il existe une famille de processus $(\xi_t^x)_{t\in[0,T]}$ que l'on précisera telle que

$$\forall\, x\in\mathbb{R},\qquad f'(x) = \mathbb{E}(h'(\xi_{_T}^x)).$$

4.c. Montrer que, pour tout $x\in\mathbb{R}$, il existe un “poids” $\Pi_{_T}^{x,r,\sigma}$ que l'on déterminera explicitement tel que

$$f'(x) = \mathbb{E}(h(X_{_T}^x)\Pi_{_T}^{x,r,\sigma}).$$

5. Proposer des schémas numériques pour calculer la quantité $f'(x)$ et commenter rapidement.

Problème 3 (Ponts de Markov gaussiens) On considère un processus gaussien centré $(Y_t)_{t\geq 0}$ de fonction de covariance $C:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall\, s,\, t\geq 0,\quad C(s,t) = \mathbb{E}\, Y_tY_s.$$

On suppose en outre que que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est adapté à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ et possède la propriété processus de Markov par rapport à cette filtration : pour tous $t_1,\ldots,t_p\geq t>0$ et toute fonction borélienne $g:\mathbb{R}^p\to\mathbb{R}$, positive ou telle que $g(Y_{t_1},\ldots,Y_{t_p})\in L^1(\mathbb{P})$,

$$\mathbb{E}(g(Y_{t_1},\ldots,Y_{t_p})\,|\,\mathcal{F}_t^W) = \mathbb{E}(g(Y_{t_1},\ldots,Y_{t_p})\,|\,Y_t).$$

Soit $T_0,\, T_1>0$, $T_0<T_1$ deux instants. Soit $\varphi=(\varphi_0,\varphi_1):[T_0,T_1]\to\mathbb{R}^2$ une fonction et un processus $(Z_t^\varphi)_{t\in[T_0,T_1]}$ défini par

$$Z_t^\varphi = Y_t - \varphi_0(t)Y_{T_0} - \varphi_1(t)Y_{T_1},\quad t\in[T_0,T_1].$$

1. Caractériser en fonction de la covariance C la fonction φ de façon que

$$\forall\, t \in [T_0, T_1], \quad Z_t^\varphi \perp Y_{T_0} \text{ et } Y_{T_1}$$

où $\perp$ désigne la relation d'orthogonalité dans $L^2(\mathbb{P})$. On notera simplement $Z = (Z_t)_{t\in[T_0,T_1]}$ le processus Z^φ ainsi spécifié. On appelle la fonction φ ainsi spécifiée la "fonction de pont".

2. En déduire que

$$\mathcal{L}((Y_t)_{t\in[T_0,T_1]} \,|\, Y_{T_0} = y_0,\, Y_{T_1} = y_1) = \mathcal{L}\Big((Y_t - \varphi_0(t)(Y_{T_0} - y_0) - \varphi_1(t)(Y_{T_1} - y_1))_{t\in[T_0,T_1]}\Big).$$

3.a. Montrer que pour tout $t \in [T_0, T_1]$ et tout $s \notin]T_0, T_1[$, $Z_t \perp Y_t$. En déduire que Z est indépendant de $(Y_s)_{s\notin]T_0,T_1[}$.

3.b En déduire que

$$\mathcal{L}((Y_t)_{t\in[T_0,T_1]} \,|\, \sigma(Y_s,\, s \notin]T_0, T_1[)) = \mathcal{L}((Y_t)_{t\in[T_0,T_1]} \,|\, Y_{T_0},\, Y_{T_1}).$$

3.b Retrouver dans le cas d'un mouvement brownien standard W les résultats vus en cours et rappeler brièvement leur utilité en Probabilités numériques (simulation).

4. On considère un actif énergétique (gaz) risqué dont la dynamique *spot* est donnée par $X_t = x\, e^{Y_t}$, $x > 0$ où $(Y_t)_{t\geq 0}$ vérifie l'E.D.S.

$$dY_t = -a(Y_t - m)dt + \sigma dW_t$$

où a, $\sigma > 0$, $m \in \mathbb{R}$, $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $Y_0 \in L^2(\mathbb{P})$ est une variable aléatoire indépendante de W elle aussi définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

4.a Montrer, pour tout $t \geq 0$,

$$Y_t = m + (Y_0 - m)e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s.$$

En déduire la moyenne et la fonction de covariance de $(Y_t)_{t\geq 0}$.

4.b. Montrer qu'il existe une loi ν sur $\mathbb{R}$ que l'on déterminera sous laquelle, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, Y_t a pour loi ν. On dira que Y est sous régime stationnaire.

4.c. Calculer dans ce cadre stationnaire la fonction de covariance de Y. En déduire, toujours dans ce cas, la valeur de la fonction de pont φ.

4.d. Monter que, pour toute valeur initiale Y_0 indépendante de W, Y_t converge en loi vers ν, puis que, *p.s.*, pour toute fonction lipschitzienne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$\frac{1}{t} \int_0^t f(Y_s) ds \overset{t\to\infty}{\longrightarrow} \int_{\mathbb{R}} f d\nu.$$