Méthodes de Monte Carlo en finance (G. Pagès)
M2 Probabilités & Finance, UPMC-X
26 janvier 2009

3 h, polycopié et notes de cours autorisées

1 Problème 1

On considère un modèle de diffusion

$$dX_t = \beta(X_t)\,dt + \sigma dW_t, \quad X_0 = x,$$

où β est une fonction lipschitzienne bornée, σ un nombre réel strictement positif et W un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Typiquement X est susceptible de représenter le rendement d'un actif risqué.

1. Soit $T > 0$ fixé. Montrer qu'il existe une probabilité $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$ que l'on déterminera explicitement à travers sa densité $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ telle que $B_t := \frac{X_t - x}{\sigma}$ soit un mouvement brownien standard.

2. En déduire que si $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction borélienne bornée ou positive

$$\mathbb{E} f(X_T, \sup_{t\in[0,T]} X_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\frac{1}{\sigma}\int_0^T \beta(x+\sigma B_s)dB_s - \frac{1}{2\sigma^2}\int_0^T \beta^2(x+\sigma B_s)ds} f(x+\sigma B_T, x+\sigma \sup_{t\in[0,T]} B_t)\right).$$

3. On suppose que la fonction β est continûment dérivable. Montrer qu'il existe une fonction $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$, et une fonction continue $\theta_\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que l'on précisera telles que

$$\mathbb{E} f(X_T, \sup_{t\in[0,T]} X_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{\frac{1}{\sigma^2}\Phi(x+\sigma B_T) + \int_0^T \theta(\sigma B_u)du} f(x+\sigma B_T, x+\sigma \sup_{t\in[0,T]} B_t)\right).$$

4. On décide d'approcher l'intégrale en temps par une somme de Riemann usuelle. Proposer en vous inspirant du cours un schéma performant de simulation pour le calcul de $\mathbb{E}\, g(X_T, \sup_{t\in[0,T]} X_t)$ par la méthode de Monte Carlo.

2 Problème 2

1.a. Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$, I intervalle de $\mathbb{R}$, monotones de même monotonie. Soit $X : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to I$ une variable aléatoire telle que $f(X)$, $g(X) \in L^2(\mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathrm{Cov}(f(X), g(X)) \geq 0$$

1.b. En déduire que, si $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction décroissante et $TX \stackrel{d}{=} X$,

$$\mathrm{Cov}(f(X), f(T(X))) \leq 0$$

1.c. En déduire que
$$\mathrm{Var}\left(\frac{f(X)+f(T(X))}{2}\right) \le \frac{1}{2}\mathrm{Var}(f(X)).$$
Interpréter cela en terme de simulation (en supposant que le principal coût de calcul est celui de f).

2. Soit $X_1,\ldots,X_n,\ldots$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes.

2.a. Montrer par la méthode de votre choix que, pour tout $n\ge 1$, si $\theta:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est une fonction borélienne telle que $\theta(X_1,\ldots,X_n)\in L^1(\mathbb{P})$, alors
$$\mathbb{E}\,\theta(X_1,\ldots,X_n) = \mathbb{E}\,\Theta(X_1,\ldots,X_{n-1})$$
où $\Theta(x_1,\ldots,x_{n-1}) = \mathbb{E}\,\theta(x_1,\ldots,x_{n-1},X_n)$.

2.b. Soit $n\ge 1$. On considère $F,G:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ deux fonctions monotones de même monotonie en chacun de leurs arguments *i.e.* pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, $x_i\mapsto F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ et $x_i\mapsto F(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ sont monotones de même monotonie pouvant varier avec i (mais ne dépendant pas de $(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^{n-1}$). Montrer qu'alors
$$\mathrm{Cov}(F(X_1,\ldots,X_n),G(X_1,\ldots,X_n))\ge 0.$$
On pourra utiliser la question précédente.

2.c. On suppose que, pour tout $i\in\{1,\ldots,n\}$, $X_i\stackrel{d}{=}T_i(X_i)$ où $T_i:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction décroissante. Montrer que
$$\mathrm{Cov}(F(X_1,\ldots,X_n),F(T_1(X_1),\ldots,T_n(X_n)))\le 0.$$

3. On considère une diffusion, unique solution forte de l'EDS
$$(E_W)\ \equiv\ dX_t = b(t,X_t)\,dt+\sigma(t)\,dW_t,\quad X_0=x_0,$$
où $b:[0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est continue, lipschitzienne en x uniformément en $t\in[0,T]$ et $\sigma:[0,T]\to\mathbb{R}_+^*$ une fonction continue. Soit $(\bar{X}_{t_k^n})_{0\le k\le n}$ son schéma d'Euler (constant par morceaux) à accroissements browniens issu de x_0. On note $t_k^n=\frac{kT}{n}$, $k=0,\ldots,n$, et $\Delta W_{t_k^n}:=W_{t_k^n}-W_{t_{k-1}^n}$, $k=1,\ldots,n$. On suppose en outre que b est croissante en x (pour tout t fixé).

3.a. Montrer par récurrence sur k qu'il existe pour tout $k\in\{1,\ldots,n\}$ une fonction $\varphi_k:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ telle que
$$\bar{X}_{t_k^n}=\varphi_k(\Delta W_{t_1^n},\ldots,\Delta W_{t_k^n})$$
et possédant des propriétés de monotonie que l'on pécisera.

3.b. En déduire que si $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ est monotone de même monotonie en chacune de ses variables, alors il existe une fonction borélienne $\Psi_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ possédant des propriétés de monotonie que l'on pécisera telle que
$$f(\bar{X}_{t_1^n},\ldots,\bar{X}_{t_n^n})=\Psi_n(\Delta W_{t_1^n},\ldots,\Delta W_{t_k^n},\ldots,\Delta W_{t_n^n}).$$

3.c. Montrer que si $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est bor/'elienne bornée, monotone de même monotonie en ses deux variables, alors

$$\mathrm{Cov}(g(\bar{X}^{(W)}_{T}, \max_{0\le k\le n}\bar{X}^{(W)}_{t^n_k}), g(\bar{X}^{(-W)}_{T}, \max_{0\le k\le n}\bar{X}^{(-W)}_{t^n_k}))\le 0$$

où l'on désigne par $\bar{X}^{(W)}$ le schéma d'Euler issu de x_0 relatif aux accroissements du mouvement brownien W.

3.d. Montrer que si, en outre, b et σ sont lipschitziennes et si g est continue bornée, on a

$$\mathrm{Cov}(g(X^{(W)}_{T}, \sup_{t\in[0,T]}X^{(W)}_{t}), g(X^{(-W)}_{T}, \sup_{t\in[0,T]}X^{(-W)}_{t}))\le 0$$

où l'on désigne par $X^{(B)}$ la solution forte de l'EDS (E_B) relativement à un mouvement brownien standard B.

4. Énoncer (avec soin) et montrer (rigoureusement) un résultat analogue à **3.c.** pour des fonctionnelles de la forme

$$G\left(x(T), \int_0^T g(x(s))ds\right),\quad G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R},\ g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$$

où $x:[0,T]\to\mathbb{R}^d$ désigne une fonction càdlàg générique.

5. Décrire et justifier rapidement une méthode de réduction de variance générique pour les différents type de fonctionnelles abordées dans les questions qui précèdent.

3 Problème 3

Soit $n\ge 1$ un entier et $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ un n-uplet de réels de $[0,1]$. On définit la discrépance quadratique par

$$T_n(\xi_1,\dots,\xi):=\left(\int_0^1\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{\{\xi_k\le x\}}-x\right|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

et la diaphonie par

$$F_n(\xi_1,\dots,\xi_n)=\frac{1}{2\pi n}\left(2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^2}\left|\sum_{k=1}^n e^{2i\pi m\xi_k}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

1.a. Montrer que $T_n(\xi_1,\dots,\xi_n)\le D^*_n(\xi_1,\dots,\xi_n)$.

1.b. Soit $f\in H^1:=\{h:[0,1]\to\mathbb{R}\,|\,h(x)=h(0)+\int_0^x h'(u)du,\ h'\in L^2([0,1],du)\}$ (l'écriture h' est conventionnelle mais ne signifie pas h est dérivable ponctuellement). Montrer que

$$\forall\, f\in H^1,\quad \left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)-\int_0^1 f(u)du\right|\le \|f'\|_2 T_n(\xi_1,\dots,\xi_n).$$

2. Soit $\xi=(\xi_n)_{n\ge}$ une suite de réels de l'intervalle $[0,1]$. Montrer que ξ est équirépartie si et seulement si $F_n(\xi_1,\dots,\xi_n)$ converge vers 0 lorsque $n\to\infty$.

3. Montrer que

$$T_n^2(\xi_1, \ldots, \xi_n) = \left(\frac{\xi_1 + \cdots + \xi_n}{n} - \frac{1}{2}\right)^2 + F_n^2(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

4.a. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction dont le développement en série de Fourier

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m(f) e^{2i\pi mx}, \qquad c_m(f) = \int_0^1 f(x) e^{-2i\pi mx} dx, \quad m \in \mathbb{Z},$$

converge en tout point x de l'intervalle $[0,1]$ (par exemple parce que $\sum_{m \in \mathbb{Z}} |c_m(f)| < +\infty$). Montrer que

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) - \int_0^1 f(u)du\right| \leq 2\pi \left(\sum_{m \in \mathbb{Z}^*} m^2 |c_m(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}} F_n(\xi_1, \ldots, \xi_n).$$

4.b. Donner une condition suffisante simple sur f assurant que $\displaystyle\sum_{m \in \mathbb{Z}^*} m^2 |c_m(f)|^2 < +\infty$.

Commentaire: L'intérêt de la discrépance quadratique et surtout de la diaphonie tient au fait que l'on peut établir pour certaines suites usuelles, comme par exemple les automorphismes du tore $(\xi_n) = (\{n\alpha\})$ $(\alpha \notin \mathbb{Q})$ ou les suites de Van der Corput, que

$$T_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = O\left(\frac{\sqrt{\log n}}{n}\right)$$

et

$$F_n(\xi_1, \ldots, \xi_n) = O\left(\frac{\sqrt{\log n}}{n}\right).$$

L'intérêt spécifique de la diaphonie est que la condition d'application de la formule de contrôle d'erreur d'intégration numérique porte sur les coefficients de Fourrier et que cette notion s'étend agréablement à un cadre à plusieurs variables. Malheureusement, comme pour la discrépance, on ne dispose pas en dimension supérieure d'estimation fine de la diaphonie.