Méthodes de Monte Carlo en finance (G. Pagès, V. Lemaire)
M2 Probabilités & Finance, UPMC-X
30 mars 2010

3 h, polycopié et notes de cours non autorisées

L'espace canonique $\mathbb{R}^d$ est supposé muni d'une norme euclidienne notée $|\,.\,|$ dérivant d'un produit scalaire noté $(\,.\,|\,.\,)$.

Problème I (Vitesse de convergence L^2 d'un algorithme stochastique) Soit $H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^d$ une fonction borélienne et $Z : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^q$ un vecteur aléatoire vérifiant

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^d, \qquad \|H(y, Z)\|_2 \le C_{H,Z}(1 + |y|).$$

Question préliminaire. Montrer que l'égalité

$$h(y) = \mathbb{E}\, H(y, Z)$$

définit bien une fonction (borélienne) $h : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ vérifiant

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^d, \quad |h(y)| \le C_{H,Z}(1 + |y|).$$

On définit par récurrence l'algorithme stochastique

$$Y_{n+1} = Y_n - \gamma_{n+1} H(Y_n, Z_{n+1}), \quad Y_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

où $(Z_n)_{n\ge1}$ désigne une suite de copies indépendantes de Z définies sur ce même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et $(\gamma_n)_{n\ge1}$ une suite de pas strictement positifs vérifiant

$$\lim_n \gamma_n = 0.$$

1. On suppose dans toute la suite du problème qu'il existe $y^* \in \mathbb{R}^d$ et une constante réelle $c > 0$ telle que

$$\forall\, y \in \mathbb{R}^d, \quad (y - y^*|h(y)) \ge c|y - y^*|^2.$$

1.a. Montrer que $\{h = 0\} = \{y^*\}$.

1.b. Montrer que, sous des hypothèses aditionnelles que l'on précisera avec soin, la suite $(Y_n)_{n\ge0}$ converge $p.s.$ vers y^* [Des arguments précis sur h et $(\gamma_n)_{n\ge1}$ sont demandés].

2. Pour tout $n \ge 0$, on pose $\varepsilon_n = \mathbb{E}|Y_n - y^*|^2$.

2.a. Montrer que, pour tout $n \ge 0$,

$$\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_n - 2c\,\gamma_{n+1}\varepsilon_n + \gamma_{n+1}^2 \mathbb{E}\,|H(Y_n, Z_{n+1})|^2.$$

2.b. Montrer que pour tout $n \ge 0$, $\mathbb{E}|H(Y_n, Z_{n+1})|^2 \le C'(1 + \varepsilon_n)$ et en déduire que

$$\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_n(1 - 2c\,\gamma_{n+1} + C'\gamma_{n+1}^2) + C'\gamma_{n+1}^2.$$

3. On pose pour tout $n \geq 0$, $\widetilde{\varepsilon}_n = \dfrac{\varepsilon_n}{\gamma_n}$ (convention $\gamma_0 = 1$) et

$$a_n = \frac{1}{\gamma_{n+1}}\left[\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}\Big(1 - 2c\,\gamma_{n+1}\Big) - 1\right].$$

3.a. Montrer que pour tout $n \geq 0$

$$\widetilde{\varepsilon}_{n+1} \leq \widetilde{\varepsilon}_n(1 + (a_n + C'\gamma_n)\gamma_{n+1}) + C'\gamma_{n+1}$$

où $C'' > 0$ est une constante réelle.

3.b. En déduire que si

$$\limsup_n a_n = -\kappa^*,\ \kappa^* > 0,$$

alors, il existe un entier n^* tel que, pour tout $n \geq n^*$,

$$\widetilde{\varepsilon}_{n+1} \leq \widetilde{\varepsilon}_n\Big(1 - \frac{1}{2}\kappa^*\gamma_{n+1}\Big) + C'\gamma_{n+1}.$$

3.c. Montrer que la suite $(\widetilde{\varepsilon}_n)_{n\geq 0}$ est bornée par $\max\Big(\widetilde{\varepsilon}_{n^*}, \frac{2C'}{\kappa^*}\Big)$. En conclure à l'existence d'une constante $C'' > 0$ telle

$$\forall\, n \geq 0, \qquad \|Y_n - y^*\|_2 \leq C''\sqrt{\gamma_n}.$$

3.d. Montrer que si $\gamma_n = \frac{\bar{\gamma}}{n^\alpha}$, $n \geq 1$, $0 < \alpha < 1$, alors $\limsup_n a_n < 0$.

3.e. On suppose que $\gamma_n = \frac{\bar{\gamma}}{n}$, $n \geq 1$. Donner une condition sur $\bar{\gamma}$ pour assurer que $\limsup_n a_n < 0$.

3.f. Montrer que si $\lim_n a_n = a_\infty > 0$, alors $\sum_n \gamma_n < +\infty$.