Méthodes de Monte Carlo en finance (G. Pagès)
M2 Probabilités & Finance, UPMC-X
30 mars 2009

3 h, polycopié et notes de cours autorisées

Dans tout le sujet la notation $\mathcal{F}^W = (\mathcal{F}_t^W)_{t\geq 0}$ désignera la filtration naturelle (augmentée) d'un mouvement brownien standard $W = (W_t)_{t\geq 0}$. Tous les mouvements browniens seront supposés définis sur le même espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Problème 1 On modélise le prix *spot* du gaz au fil du temps par la dynamique suivante :

$$S_t = e^{X_t}, \qquad \text{où} \qquad \left\{ \begin{array}{c} dX_t = \lambda(Y_t - X_t)dt + \sigma_X(X_t, Y_t)dW_t \\ dY_t = \mu(m - Y_t)dt + \sigma_Y(X_t, Y_t)dB_t. \\ X_0 = x_0,\ Y_0 = y_0 \end{array} \right.$$

où $W = (W_t)_{t\geq 0}$ et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ sont deux mouvements browniens corrélés : $d\langle W, B\rangle_t = \rho dt$ ($\rho \in [-1,1]$) et σ_X, σ_Y sont deux fonctions lipschitziennes bornées définies sur $\mathbb{R}^2$ à valeurs réelles et λ, μ et m sont des constantes réelles. On supposera λ, $\mu \neq 0$, $\lambda \neq \mu$.

1.a. Montrer à l'aide d'un changement de variable élémentaire que l'on peut sans perte de généralité supposer que $m = 0$, ce que nous supposerons dans toute la suite.

1.b. Montrer l'existence d'une unique solution forte à l'EDS qui régit la dynamique du couple (X_t, Y_t).

2.a. Soit $\vartheta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée et $a \in \mathbb{R}$. Montrer que l'intégrale stochastique brownienne

$$M_t = \int_0^t e^{as}\vartheta(X_s, Y_s)dB_s$$

est une vraie martingale ayant une transformée de Laplace finie sur toute la droite réelle.

2.b. En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\left(e^{uY_t}\right) \leq e^{ue^{-\mu t}y_0 + \frac{u^2}{4}\|\sigma_Y\|^2_{\sup}\frac{1-e^{-2\mu t}}{\mu}}.$$

2.c. Montrer que, pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = e^{-\lambda t}x_0 + \lambda\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}Y_s ds + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\sigma_X(X_s, Y_s)dW_s.$$

2.d. Montrer que, pour tout $t \geq 0$ et tout $u \in \mathbb{R}$,

$$e^{u\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}Y_s ds} \leq \frac{\lambda}{1-e^{-\lambda t}}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}e^{u\frac{1-e^{-\lambda t}}{\lambda}Y_s}ds.$$

[On pourra appliquer l'inégalité de Jensen]. En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}(e^{u\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}Y_s ds}) < +\infty.$$

2.e. En conclure que pour tout $t \geq 0$ et tout $u \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}\left(e^{uX_t}\right) < +\infty$. Qel argument direct permet d'arriver à la même conclusion lorsque les fonctions σ_X et σ_Y sont constantes ?

3.a. Écrire le schéma d'Euler de pas $\frac{T}{n}$, $n \geq 1$, associé à cette EDS. En déduire une méthode de calcul par simulation du prix d'un contrat payable en $T > 0$ de valeur terminale $\varphi(S_T)$, où φ est une fonction sur $\mathbb{R}_+$, borélienne à support compact, dont le prix théorique est fixé à $\mathbb{E}\,\varphi(S_T)$.

3.b. On suppose en outre φ lipschitzienne. Analyser rapidement la structure biais-variance de l'erreur induite par cette méthode à partir des résultats du cours sur la convergence forte du schéma d'Euler. Qu'en déduisez-vous sur le dimensionnement relatif de la taille de la simulation et du pas de discrétisation ?

3.c. On suppose maintenant que les fonctions σ_X et σ_Y sont indéfiniment différentiables à dérivées partielles bornées et que φ est elle aussi infiniment différentiable (toujours à support compact). En quoi cela est-il susceptible de modifier votre approche du dimensionnement de la simulation ?

3.d. Proposer une méthode permettant de réduire l'erreur due à la discrétisation en temps.

4. Montrer que

$$Var\,(\varphi(S_T)) \geq Var\left(\mathbb{E}(\varphi(S_T \,|\, (B_t)_{t\in[0,T]}\right).$$

Dans toute la suite on suppose que $\sigma_X(x, y) = \sigma_X(y)$ et $\sigma_Y(x, y) = \sigma_Y(y)$.

5.a. Montrer qu'il existe un processus continu $\mathcal{F}_t^B$-adapté $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ et un mouvement brownien standard $W' = (W'_t)_{t\in[0,T]}$ indépendant de B tels que, pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = e^{-\lambda t}x_0 + Z_t + \sqrt{1-\rho^2}\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\sigma_X(Y_s)dW'_s.$$

5.b. Montrer que si l'on pose $t_k^n = k\frac{T}{n}$, alors

$$\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t e^{\lambda s}\sigma_X(Y_s)dW'_s - \sum_{i=1}^n e^{\lambda t_i^n}\sigma_X(Y_{t_{i-1}^n})(W'_{t_i^n} - W'_{t_{i-1}^n})\right|$$

converge dans $L^2(\mathbb{P})$.

5.c. En déduire que, pour tout $t \geq 0$,

$$\mathcal{L}\left(\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\sigma_X(Y_s)dW'_s \,|\, (B_u)_{u\geq 0}\right) \stackrel{d}{=} \mathcal{N}\left(0; \int_0^t e^{-2\lambda(t-s)}\sigma_X^2(Y_s)ds\right)$$

puis donner une formulation simple de la loi conditionnelle de X_t sachant B.

5.d. Montrer que l'on peut mettre Z_t sous la forme

$$Z_t = \frac{(e^{-\mu t} - e^{-\lambda t})}{\lambda - \mu}\lambda y_0 + \frac{\lambda}{\lambda-\mu}\int_0^t (e^{-\mu(t-s)} - e^{-\lambda(t-s)})\sigma_Y(Y_s)dB_s + \rho\int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\sigma_X(Y_s)dB_s.$$

6. Déduire de ce qui précède un schéma de simulation pour X_T conduisant à une évaluation plus efficace de $\mathbb{E}\,\varphi(S_T)$. Peut-on encore améliorer cette approche si σ_X et σ_Y sont constants ?

Problème 2 Soient X et Y deux variables aléatoires intégrables définies sur un même espace de probabilités. On veut minimiser au sens de la $CV@R_\alpha$ ($\alpha \in]0,1[$) la régression d'une variable aléatoire Y par θX où θ parcourt $\mathbb{R}$. Les conventions et définitions sont celles du cours.

On suppose que le couple (X, Y) a une densité, que $\mathbb{E}X = 0$, $\mathbb{E}|X| > 0$ et que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(X \leq a) \in]0,1[$.

1.a. Montrer que cela se ramène à résoudre le problème d'optimisation suivant

$$\inf_{y,\theta\in\mathbb{R}} V_\alpha(y,\theta) \quad \text{où} \quad V_\alpha(y,\theta) := y + \frac{1}{1-\alpha}\mathbb{E}(Y - \theta X - y)_+.$$

1.b. Montrer que V_α est une fonction convexe.

2.a. Montrer que la fonction V_α est différentiable et calculer une représentation de son gradient sous forme d'espérance.

On admet temporairement dans la suite de la question 2 que

$$\lim_{\max(|y|,|\theta|)\to\infty} V_\alpha(y,\theta) = +\infty.$$

2.b. Montrer que V_α atteint un minimum sur $\mathbb{R}^2$, *que l'on supposera unique pour simplifier dans la suite du problème*. Proposer un algorithme stochastique pour déterminer par simulation $\mathrm{argmin} V_\alpha$ et montrer à partir des résultats du cours que sous les hypothèses habituelles sur son pas, il converge effectivement *p.s.* vers sa cible.

2.c. Quelle difficulté risque-t-on de rencontrer lors de la mise en œuvre effective de cette procédure. Quelle suggestion peut-on faire pour (tenter d')y remédier ? (on ne demande pas de développer de calculs à ce stade).

3.a. Montrer que, pour tout $A \in \mathbb{R}$ et pour tout $y \in \mathbb{R}_+$,

$$y + \frac{1}{1-\alpha}(A - y)_+ \geq \max(y, A_+).$$

En déduire que

$$V_\alpha(y,\theta) \geq \max\left(y, \mathbb{E}(Y - \theta X)_+\right).$$

3.b. Montrer que

$$\mathbb{E}(Y - \theta\, X)_+ \geq \mathbb{E}\, Y \mathbf{1}_{\{X\leq 0\}} + \theta\, \mathbb{E}(X\mathbf{1}_{\{X>0\}}).$$

En déduire que

$$\lim_{\max(|y|,|\theta|)\to+\infty, y,\theta\geq 0} V_\alpha(y,\theta) = +\infty.$$

De façon analogue montrer que $\displaystyle\lim_{\max(|y|,|\theta|)\to+\infty, y\geq 0,\theta\leq 0} V_\alpha(y,\theta) = +\infty.$

3.c. On suppose maintenant $y \leq 0$. Montrer que, pour tout $a \in \mathbb{R}$,

$$V_\alpha(y,\theta) \geq \frac{|y|}{1-\alpha}\left(\alpha - \mathbb{P}(X > a)\right) + \frac{\theta}{1-\alpha}\mathbb{E}X\mathbf{1}_{\{X>a\}} + C_{X,Y}(a)$$

où $C_{X,Y}(a)$ est une constante dépendant de a. En déduire que

$$\lim_{\max(|y|,|\theta|)\to\infty, y\leq 0, \theta\geq 0} V_\alpha(y,\theta) = +\infty.$$

De façon analogue montrer que $\lim_{\max(|y|,|\theta|)\to\infty, y\leq 0, \theta\leq 0} V_\alpha(y,\theta) = +\infty$ puis conclure sur le comportement de V_α à l'infini.