

3 h, polycopié, notes de cours, livres, téléphones mobiles et montres connectées non autorisés

Avertissement : La précision et la rigueur des arguments seront des éléments déterminants de l'évaluation de la copie.

Exercice (Quasi-Monte Carlo : Hammersley revisité) Dans cet exercice on adopte la notation $u = (u^1, \dots, u^d) \in \mathbb{R}^d$ pour désigner les coordonnées d'un vecteur de u de \mathbb{R}^d .

1.a. Soit (ξ_1, \dots, ξ_n) un n -uplet à coordonnées strictement croissantes à valeurs dans $[0, 1]$ d'une part et, d'autre part, $n+1$ réels positifs a_1, \dots, a_n et b . On pose pour tout $y \in [0, 1]$,

$$\varphi(y) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n a_k \mathbf{1}_{\{\xi_k \leq y\}} - by.$$

Montrer que φ est càdlàg ($\varphi(y-)$ désignera la limite à gauche de φ en $y \in]0, 1[$) et que

$$\begin{aligned} \sup_{y \in [0, 1]} |\varphi(y)| &= \max_{1 \leq k \leq n} |\varphi(\xi_k)| \vee |\varphi(\xi_k -)| \vee |\varphi(1)| \\ &= \max_{1 \leq k \leq n} \left| \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^k a_\ell - b \xi_k \right| \vee \left| \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{k-1} a_\ell - b \xi_k \right| \vee \left| \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^n a_\ell - b \right| \end{aligned}$$

avec la convention $\sum_0 = 0$.

1.b. Rappeler la définition de la discrépance à l'origine d'un n -uplet $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in ([0, 1]^d)^n$ ($d \geq 1$), que l'on notera $D_n^*(\xi_1, \dots, \xi_n)$ dans la suite, en accord avec le cours.

2. On se donne maintenant un n -uplet (ξ_1, \dots, ξ_n) de $([0, 1]^d)^n$, $d \geq 2$, tel que le n -uplet de ses d -ème coordonnées, noté $(\xi_1^d, \dots, \xi_n^d) \in [0, 1]^n$, soit strictement croissant avec $\xi_n^d = 1$.

2.b. Montrer que la discrépance à l'origine de $(\xi_1^d, \dots, \xi_n^d)$ vérifie

$$D_n^*(\xi_1^d, \dots, \xi_n^d) = \max_{1 \leq k \leq n} \left| \xi_k^d - \frac{k}{n} \right| \vee \left| \xi_k^d - \frac{k-1}{n} \right|.$$

2.c. On considère le n -uplet $(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n)$ où $\tilde{\xi}_k = (\xi_k^1, \dots, \xi_k^{d-1}) \in [0, 1]^{d-1}$, $k = 1, \dots, n$. Montrer (avec les notations vues en cours) que

$$D_n^*(\xi_1, \dots, \xi_n) = D_n^*(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n) \vee \max_{1 \leq k \leq n} \left[\sup_{x \in [0, 1]^{d-1}} \left| \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^k \mathbf{1}_{[0, x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \xi_k^d \prod_{i=1}^{d-1} x^i \right| \vee \left| \frac{1}{n} \sum_{\ell=1}^{k-1} \mathbf{1}_{[0, x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \xi_k^d \prod_{i=1}^{d-1} x^i \right| \right].$$

2.d. En déduire que

$$D_n^*(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq D_n^*(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n) \leq \frac{\max_{1 \leq k \leq n} [k D_k^*(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_k)]}{n} + D_n^*(\xi_1^d, \dots, \xi_n^d).$$

3.a. Rappeler la définition de la suite de Halton pour une dimension d donnée ainsi qu'une majoration explicite non asymptotique de sa discrépance à l'origine en fonction de n .

3.b. Soit $d \geq 2$. Montrer l'existence d'une constante $C_d > 0$ telle que, pour tout entier $n \geq 1$, il existe un n -uplet $(\xi_1, \dots, \xi_n) \in ([0, 1]^d)^n$ tel que

$$D_n^*(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq C_d \frac{(\log n)^{d-1}}{n}.$$

On proposera en outre une heuristique pour un choix performant de la d -ème coordonnée de ce n -uplet.

4. Rappeler brièvement les principes de base d'un estimateur Quasi-Monte Carlo et quel rôle y joue la discrépance à l'origine dans son analyse.

Exercice (Autour du pont de diffusion). On considère un processus de diffusion solution de l'EDS

$$(EDS) \equiv dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}, \quad t \in [0, T], \quad (T > 0),$$

où $b, \sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont lipschitziennes et $(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On rappelle que le pont brownien $(Y_t^{B,T,y})_{t \in [0,T]}$ associé à un mouvement brownien standard $B = (B_t)_{t \in [0,T]}$ issu de 0 en $t = 0$ et valant $y \in \mathbb{R}$ en $t = T$ est défini par

$$Y_t^{B,T,y} = B_t - \frac{t}{T}(B_T - y)$$

et que la loi de son supremum sur $[0, T]$ est donnée à travers sa fonction de répartition par

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P} \left(\sup_{t \in [0,T]} Y_t^{B,T,y} \leq z \right) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{2}{T}z(z-y)} & \text{si } z \geq \max(y, 0) \\ 0 & \text{si } z \leq \max(y, 0). \end{cases}$$

1.a. Montrer par un argument de symétrie approprié que

$$\forall z \in \mathbb{R}, \quad \mathbb{P} \left(\inf_{t \in [0,T]} Y_t^{B,T,y} \leq z \right) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{T}z(z-y)} & \text{si } z \leq \min(y, 0) \\ 1 & \text{si } z \geq \min(y, 0). \end{cases}$$

1.b. En déduire pour tous $x, y \in \mathbb{R}$ fixés et tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, la fonction de répartition de

$$\inf_{t \in [0,T]} \left(x + \frac{t}{T}(y - x) + \lambda Y_t^{B,T,0} \right).$$

1.c. En déduire une méthode simple de simulation de cette variable aléatoire.

2.a. On considère le schéma d'Euler continu (ou authentique) de la diffusion de pas $\frac{T}{n}$, noté $(\bar{X}_t)_{t \in [0,T]}$. Rappeler avec soin le résultat du cours sur la loi conditionnelle de $(\bar{X}_t)_{t \in [0,T]}$ sachant la tribu $\sigma(\{\bar{X}_{t_k}^n, k = 0, \dots, n\})$ et sa version régulière i.e. "sachant" $\{\bar{X}_{t_k}^n = x_k, k = 0, \dots, n\}$.

2.b. Proposer à partir de ce schéma d'Euler une méthode de calcul approché par simulation de Monte Carlo de $\mathbb{E}(f(X_T, \inf_{t \in [0,T]} X_t))$ où $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est borélienne à croissance linéaire.

2.c. On suppose en outre que la fonction f est lipschitzienne. À quelle vitesse de convergence est-on assuré que disparaîtra l'erreur due à la discrétisation en temps d'(EDS) ?

3.a. On souhaite calculer par simulation de Monte Carlo du schéma d'Euler une quantité de type barrière basse (ou down-and-out) $\mathbb{E}(g(X_T) \mathbf{1}_{\{\inf_{t \in [0,T]} X_t \geq L\}})$ où $L \in (-\infty, x_0)$. Montrer que

$$\mathbb{E}(g(\bar{X}_T) \mathbf{1}_{\{\inf_{t \in [0,T]} \bar{X}_t \geq L\}}) = \mathbb{E} \left(g(\bar{X}_T) \mathbf{1}_{\{\min_{0 \leq k \leq n} \bar{X}_{t_k}^n \geq L\}} \prod_{i=1}^n \left(1 - \exp \left(- \frac{2n(\bar{X}_{t_i}^n - L)(\bar{X}_{t_{i-1}}^n - L)}{T\sigma^2(\bar{X}_{t_{i-1}}^n)} \right) \right) \right).$$

En déduire un algorithme de simulation de type Monte Carlo.

3.b. En quoi le terme produit $\prod_{i=1}^n \left(1 - \exp \left(- \frac{2n(\bar{X}_{t_i}^n - L)(\bar{X}_{t_{i-1}}^n - L)}{T\sigma^2(\bar{X}_{t_{i-1}}^n)} \right) \right)$ de la représentation précédente peut-il être considéré comme un terme correctif ?

3.c. Comparer les variances des estimateurs obtenus aux questions 3.b. et 2.b. (une justification rigoureuse est demandée).

Problème : du flot du schéma d'Euler au modèle pseudo-CEV. On considère un processus de diffusion solution de l'EDS

$$(EDS) \equiv dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad t \in [0, T], \quad (T > 0),$$

où $b : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $\sigma : \mathbb{R}^d \rightarrow M_d(d, q, \mathbb{R})$ sont lipschitziennes, $(W_t)_{t \in [0,T]}$ est un mouvement brownien standard q -dimensionnel défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ et X_0 est un vecteur aléatoire également défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, indépendant de W .

- 1.a. Rappeler la définition des schéma d'Euler à temps discret $(\tilde{X}_t^n)_{k=0,\dots,n}$ et constant par morceaux $(\tilde{X}_t^n)_{t \in [0,T]}$ de pas $h = \frac{T}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$). [Les notations sont celles du cours].
- 1.b. Rappeler la définition du schéma d'Euler *authentique* $(\bar{X}_t^n)_{t \in [0,T]}$ de pas $h = \frac{T}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$) et énoncer avec précision le théorème de contrôle des moments dans le cadre du problème (b et σ autonomes et Lipschitz).
- 1.c. Rappeler dans el cadre de problème les théorèmes relatifs à la vitesse de convergence dans les espaces $L^p(\mathbb{P})$ (en norme-sup sur $[0, T]$) des schémas précédents vers la diffusion X ci-dessus.

On suppose pour simplifier que $d = q = 1$ dans la suite.

2. Montrer que le schéma d'Euler authentique $(\bar{X}_t^n)_{t \in [0,T]}$ issu de $x \in \mathbb{R}$ est un processus d'Itô que l'on explicitera (on pourra introduire la notation \bar{t} vue en cours dont on rappellera la définition le cas échéant). Énoncer un résultat de contrôle des moments d'ordre p d'un tel processus (aucune démonstration demandée ici).
3. On pose pour tout $t \in [0, T]$,

$$f_n(t) = \mathbb{E} \sup_{s \in [0, t]} |\bar{X}_s^{x,n} - \bar{X}_s^{y,n}|^2.$$

Montrer que f_n est bien définie comme une fonction croissante de $[0, T]$ dans \mathbb{R}_+ . Montrer en vous inspirant d'une démonstration vue en cours que, pour tout $t \in [0, T]$

$$f_n(t) \leq 3 \left(|x - y|^2 + t \int_0^t \mathbb{E} |b(\bar{X}_s^{x,n}) - b(\bar{X}_s^{y,n})|^2 ds + \mathbb{E} \sup_{s \in [0, t]} \left| \int_0^s (\bar{X}_u^{x,n} - \bar{X}_u^{y,n}) dW_u \right|^2 \right).$$

La précision des arguments donnés sera déterminante dans l'évaluation de cette question et de la suivante.

- 4.a. En déduire que pour tout $t \in [0, T]$,

$$f_n(t) \leq 3 \left(|x - y|^2 + (T[b]_{\text{Lip}}^2 + 4[\sigma]_{\text{Lip}}^2) \int_0^t f_n(s) ds \right)$$

- 4.b. En conclure qu'il existe une constante $C_{b,\sigma,T} > 0$ que l'on précisera telle que

$$\forall t \in [0, T], \quad \left\| \sup_{s \in [0, t]} |\bar{X}_s^{x,n} - \bar{X}_s^{y,n}| \right\|_2 \leq \sqrt{3} e^{C_{b,\sigma,T} t} |x - y|.$$

5. On considère maintenant un modèle pseudo-CEV sur un marché de maturité $T > 0$ où le numéraire est donné par $S_t^0 = e^{rt}$ et l'actif risqué est régi sous probabilité risque-neutre par l'EDS

$$dX_t = rX_t dt + \sigma(X_t) dW_t, \quad X_0 = x_0 > 0, \quad t \in [0, T]$$

où $\sigma(\xi) = \vartheta \frac{|\xi|^{1+\beta}}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}$, $\xi \in \mathbb{R}$ avec $\vartheta, \eta > 0$ et $\beta \in (0, 1]$.

- 5.a. Montrer que σ est lipschitzienne que \mathbb{R} . Que peut-on en déduire ?
- 5.b. Montrer à l'aide de la formule d'Itô que le processus

$$Y_t = x_0 \exp \left(rt - \frac{\vartheta^2}{2} \int_0^t \frac{|X_s|^{2\beta}}{X_s^2 + \eta^2} ds + \vartheta \int_0^t \frac{|X_s|^\beta}{\sqrt{X_s^2 + \eta^2}} dW_s \right)$$

vérifie l'EDS ci-dessus. En déduire que $X_t > 0$ pour tout $t \in [0, T]$.

- 5.c. Ecrire le schéma d'Euler du processus pseudo-CEV.

6. On se donne un payoff européen $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ lipschitzien. Le prix $C(x_0, r, \vartheta, \beta, T)$ du contrat d'option associé à ce payoff dans un modèle pseudo-CEV est donc donné par $e^{-rT} \mathbb{E} h(X_T)$. Proposer une approximation de ce prix à l'aide du schéma d'Euler. Quelle erreur commet-on en se fondant sur les résultats de vitesse de convergence forte du schéma d'Euler de cette diffusion ? Pour quelle régularité du payoff h peut-on espérer pouvoir s'appuyer sur les résultats d'erreur faible associés à ce même schéma ? [Pour les M2 P & F: Est-ce un hypothèse réaliste en matière de produits dérivés ?]

7. On suppose $r = 0$ dans la suite pour simplifier et l'on note $C(x_0, T)$ le prix du contrat d'option.

7.a. Proposer, dans l'hypothèse (irréaliste) où la diffusion pseudo-CEV serait simulable de façon exacte avec une complexité "raisonnable", une méthode de calcul de la couverture (le δ -hedge) $\frac{\partial C}{\partial x}(x_0, T)$. Proposer une ou plusieurs solutions alternatives réalistes que l'on justifiera de façon heuristique.

- 7.b. On privilégie dans la suite du problème une approche par différences finies et l'on suppose que pour $\varepsilon \in (0, x_0)$, ε assez petit,

$$\frac{\partial C}{\partial x}(x_0, T) \simeq \mathbb{E} \left[\frac{h(\bar{X}^{n,x_0+\varepsilon}) - h(\bar{X}^{n,x_0-\varepsilon})}{2\varepsilon} \right].$$

Montrer que l'on peut borner la variance de l'estimateur Monte Carlo associé au membre de droite lorsque ε tend vers 0.

- 7.c. On suppose que la fonction payoff h est suffisamment régulière pour que

$$\left| \frac{\partial \mathbb{E} h(\bar{X}^{n,x_0})}{\partial x}(x_0, T) - \mathbb{E} \left[\frac{h(\bar{X}^{n,x_0+\varepsilon}) - h(\bar{X}^{n,x_0-\varepsilon})}{2\varepsilon} \right] \right| \leq c\varepsilon^2$$

où $c = c_{h,x_0,\beta,\vartheta,\eta} > 0$. Proposer une décomposition (d'un majorant) de l'erreur L^2 (RMSE ou *root mean squared error* en anglais) commise en approchant $\frac{\partial \mathbb{E} h(\bar{X}^{n,x_0})}{\partial x}(x_0, T)$ par l'estimateur Monte Carlo évoqué à la question 7.b.. Expliquer comment choisir théoriquement ε et la "taille" M de l'estimateur Monte Carlo pour équilibrer les deux termes de cette erreur et pourquoi une telle approche ne peut généralement pas être mise en pratique sous cette forme naïve.

Expliquer comment modifier ε et M pour diviser cette erreur par un facteur 2.

[Indication : On pourra raisonner indifféremment sur l'erreur L^2 elle-même ou, pour plus de commodité, sur son carré (la MSE pour *Mean Squared Error* sans pour autant changer la nature et les termes de la question posée.)]

- 7.d. Proposer et analyser rapidement une méthode de construction d'un estimateur asymptotiquement sans biais.

On sup $\sqrt{n} (\hat{f}'(x) - f'(x)) \xrightarrow{L^2} \sqrt{f''(x)^2 - (f'(x))^2}$

à vitesse de convergence que $n^{-1/2}$.