Probabilités numériques (G. Pagès, V. Lemaire)
M2 Probabilités & Finance, UPMC-École Polytechnique
10 janvier 2013

3 h, polycopié, notes de cours, livres et téléphones mobiles non autorisés

Problème 1 (Autour du schéma de Milstein) On considère une équation de diffusion

$$(EDS) \equiv dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dW_t$$

où b et σ sont des fonctions continues sur $[0, T] \times \mathbb{R}$, à croissance linéaire en x uniformément en t et où $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement brownien standard.

1.a. Justifier en vous appuyant sur un théorème du cours l'existence d'une constante $C_{b,\sigma,T} \in]0, +\infty[$ telle que, toute solution forte d'(EDS) issue de $x \in \mathbb{R}$, notée $(X^x_t)_{t\in[0,T]}$ vérifie

$$\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |X^x_t|^2 \le C_{b,\sigma,T}(1 + |x|^2).$$

1.b. Donner des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution forte à (EDS), issue de $x \in \mathbb{R}$.

1.c. Expliciter le schéma d'Euler à temps discret de pas $\frac{T}{n}$ $(n \ge 1)$ associé à cette équation de diffusion brownienne (on notera comme c'est l'usage $t^n_i = \frac{iT}{n}$, $i = 0, \ldots, n$ les instants de discrétisation et $(\bar{X}_{t^n_i})_{0\le i\le n}$ le dit schéma d'Euler à ces instants).

Dans toute la suite on suppose que $b(t, .)$ et $\sigma(t, .)$ sont dérivables en x sur $\mathbb{R}$ pour tout $t \in [0, T]$, que $\sigma^2(t, .)$ est une fonction croissante en x (à t fixé) et que σ ne s'annule pas sur $[0, T] \times \mathbb{R}_+$ (et est donc de signe constant).

2.a. Montrer que si $x \ge 0$ et

$$\forall\, t \in [0, T],\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}_+,\ b(t, \xi) - \frac{1}{4}(\sigma^2)'_x(t, \xi) \ge 0 \quad \text{ et } \quad \frac{\sigma}{\sigma'_x}(t, \xi) \le 2\xi$$

alors, le schéma de Milstein constant par morceaux issu de x vérifie pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$, $\widetilde{X}^{mil}_{t^n_i} \ge 0$ où $t^n_i = \frac{iT}{n}$ (et donc $\widetilde{X}^{mil}_t \ge 0$, $t \in [0, T]$) [Indication : on pourra procéder par récurrence sur i].

2.b. Montrer que sous les mêmes hypothèses, le schéma de Milstein continu vérifie également: $\mathbb{P}$-$p.s.$ $\bar{X}^{mil}_t \ge 0$, $t \in [0, T]$.

3. Soit $\kappa \in \mathbb{R}$. Pour tout $t \in [0, T]$, on pose

$$Y_t = e^{\kappa t} X^x_t.$$

3.a. Montrer que le processus $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ est solution d'une équation différentielle stochastique

$$dY_t = \widetilde{b}(t, Y_t)dt + \widetilde{\sigma}(t, Y_t)dW_t,$$

où l'on exprimera $\widetilde{b}$ et $\widetilde{\sigma}$ en fonction de b, σ et de la constante κ.

3.b. En déduire à partir des questions **2.a** et **2.b** des conditions sur b est σ assurant que le schéma de Misltein continu de $(Y_t)_{t\in[0,T]}$ issu de $x \geq 0$ reste positif [Indication: l'idée est d'introduire un degré de liberté avec le paramètre κ].

4.a. Donner des conditions suffisantes sur b et σ assurant la convergence des schémas de Milstein de (Y_t) vers la diffusion dans les espaces $L^p(\mathbb{P})$, $p\in [1, +\infty)$.

4.b. En déduire un critère sur b est σ assurant que la solution d'(EDS) reste positive sur $[0, T]$ lorsque $X_0 = x \geq 0$.

Dans la suite on admettra qu'il suffit que les fonctions b et σ soient continues et à croissance linéaire en x uniformément en $t\in [0, T]$ et que (EDS) ait une unique solution forte issue de tout $x\in \mathbb{R}$ pour que le schéma de Milstein continu (issu de x converge en loi vers la solution X^x d'(EDS) au sens: $\forall\, t\in [0, T], \bar{X}_t^{mil} \xrightarrow{\mathcal{L}} X_t^x$ lorsque $n \to \infty$.

5. On considère pour tout $\alpha\in [\frac{1}{2}, 1]$ et tous $a\in \mathbb{R}_+^*$, $b\in \mathbb{R}$, $\vartheta\in \mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle stochastique

$$(CIR)_\alpha \equiv dX_t = (a - bX_t)dt + \vartheta|X_t|^\alpha dW_t,\ X_0 = x\in \mathbb{R}_+.$$

dont on admettra qu'elle a une unique solution forte issue de tout $x \geq 0$. Lorsque $\alpha = \frac{1}{2}$, il s'agit du modèle (CIR) classique.

5.a. Dans quels cas les théorèmes généraux standard ne permetttent pas de justifier directement l'existence de cette unique solution forte issue de $x\in \mathbb{R}_+$?

5.b. Discuter à l'aide de ce qui précède, et selon les valeurs de α, a, b et ϑ, la positivité de la solution $(X_t^x)_{t\in[0,T]}$.

6. On considère un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de paramètre $\lambda\in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ solution de l'équation

$$dZ_t = -\lambda Z_t dt + \sigma dW_t,\ Z_0 = z\in \mathbb{R},\ t\in [0, T].$$

6.a. Montrer que le processus $(Z_t^2)_{t\in[0,T]}$ vérifie une équation de type (CIR) dont on précisera les paramètres α, a, b et ϑ en fonction de λ et σ.

6.b. Expliciter le schéma d'Euler de pas $\frac{T}{n}$, noté $(\bar{Z}_t^n)_{t\in[0,T]}$, associé à l'équation d'Ornstein-Uhlenbeck.

6.c. Montrer par une méthode votre choix que

$$\sup_n \| |Z_T| + |\bar{Z}_T^n| \|_2 < +\infty.$$

6.d. En déduire un schéma de discrétisation du modèle (CIR) lorsque $a = \vartheta^2/4$ pour laquelle on peut établir à partir des résultats du cours une erreur de discrétisation en temps de l'ordre de $\frac{1}{n}$ "le long" des fonctions lipschitziennes $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ pour X_T et $\widetilde{X}_T^{mil}$.

6.e. Comment simuler de façon exacte un (CIR) dans le cas $a = \vartheta^2/4$?

On introduit maintenant le modèle de Heston suivant:

$$\begin{cases} dS_t = rS_t dt + \sqrt{v_t} S_t\big(\rho dW_t + \sqrt{1-\rho^2} dB_t\big), & S_0 > 0 \\ dv_t = (a - bv_t)dt + \sigma\sqrt{v_t} dW_t, & v_0 > 0, \end{cases}$$

avec $\rho \in [-1,1]$, $a>0, b>0, \sigma>0$ et $r\in\mathbb{R}$. On suppose de plus $\sigma^2 < 2a$.

7.a. Que représente le paramètre ρ ?

7.b. Soit φ une fonction borélienne à croissance polynomiale de payoff classique et $P_{BS}(x,r,s) = \mathbb{E}\left(e^{-rT}\varphi\Big(xe^{(r-\frac{s^2}{2})T+sB_T}\Big)\right)$ le prix dans un modèle de Black-Scholes de valeur initiale $x>0$, de taux r et de volatilité constante s. On note $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s, 0\le s\le t, \mathcal{N}_{\mathbb{P}})$ la tribu (complétée) de W en T. Montrer qu'il existe une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable Ξ telle que

$$\mathbb{E}\left(e^{-rT}\varphi(S_T)|\mathcal{F}_T\right) = P_{BS}\left(\Xi, r, \sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}\int_0^T v_t dt}\right).$$

7.c. En déduire un estimateur de Monte Carlo (*a priori* plus efficace que l'estimateur naïf) pour le calcul de $\mathbb{E}\Big(e^{-rT}\varphi(S_T)\Big)$.

Numériquement, quelle propriété doit vérifier φ pour que cette méthode soit réellement implémentable ?

8. Sous quelles conditions peut-on mettre en œuvre un schéma de Milstein pour le couple (S_t, v_t) garantissant la positivité de $(v_t)_{t\in[0,T]}$.

Problème 2 (Autour du pont de diffusion). On considère un processus de diffusion solution de l'EDS

$$(EDS) \equiv dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t,\ X_0^x = x_0 \in \mathbb{R},\ t\in[0,T],\ T>0,$$

où $b, \sigma : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sont lipschitziennes et $(W_t)_{t\ge 0}$ est un mouvement brownien standard défini sur un espace de probabilités $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

On rappelle que le pont brownien$(Y_t^{B,T,y})_{t\in[0,T]}$ associé à un mouvement brownien standard $B=(B_t)_{t\in[0,T]}$ issu de 0 en $t=0$ et valant $y\in\mathbb{R}$ en $t=T$ est défini par

$$Y_t^{B,T,y} = B_t - \frac{t}{T}(B_T - y)$$

et que la loi de son supremum sur $[0,T]$ est donnée à travers sa fonction de répartition par

$$\forall\, z\in\mathbb{R},\quad \mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,T]} Y_t^{B,T,y} \le z\Big) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{2}{T}z(z-y)} & \text{si } z\ge \max(y,0)\\ 0 & \text{si } z\le\max(y,0).\end{cases}$$

1.a. Montrer par un argument de symétrie approprié que

$$\forall\, z\in\mathbb{R},\quad \mathbb{P}\Big(\inf_{t\in[0,T]} Y_t^{B,T,y} \le z\Big) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{T}z(z-y)} & \text{si } z\le \min(y,0)\\ 1 & \text{si } z\ge\min(y,0).\end{cases}$$

1.b. En déduire pour tous x, $y\in\mathbb{R}$ fixés et tout $\lambda\in\mathbb{R}_+^*$, la fonction de répartition de

$$\inf_{t\in[0,T]}\Big(x + \frac{t}{T}(y-x) + \lambda Y_t^{B,T,0}\Big).$$

1.c. En déduire une méthode simple de simulation de cette variable aléatoire.

2.a. On considère le schéma d'Euler continu (ou authentique) de la diffusion de pas $\frac{T}{n}$, noté $(\bar{X}_t)_{t\in[0,T])}$. Rappeler avec soin le résultat du cours sur la loi conditionnelle de $(\bar{X}_t)_{t\in[0,T]}$ sachant la tribu $\sigma(\{\bar{X}_{t_k^n},\ k=0,\ldots,n\})$ et sa version "régulière" *i.e.* sachant $\{\bar{X}_{t_k^n}=x_k,\ k=0,\ldots,n\}$.

2.b. Proposer à partir de ce schéma d'Euler une méthode de calcul approché par simulation de Monte Carlo de $\mathbb{E}\big(f(X_T,\inf_{t\in[0,T]}X_t)\big)$ où $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ est borélienne à croissance linéaire.

2.c. On suppose en outre que la fonction f est lipschitzienne. À quelle vitesse de convergence est-on assuré que disparaîtra l'erreur due à la discrétisation en temps d'(EDS) ?

3.a. On souhaite calculer par simulation de Monte Carlo du schéma d'Euler une quantité de type barrière basse $\mathbb{E}\big(g(X_T)\mathbf{1}_{\{\inf_{t\in[0,T]}X_t\geq L\}}\big)$ où $L\in(-\infty,x_0)$. Montrer que

$$\mathbb{E}\big(g(\bar{X}_T)\mathbf{1}_{\{\inf_{t\in[0,T]}\bar{X}_t\geq L\}}\big)=\mathbb{E}\left(g(\bar{X}_T)\mathbf{1}_{\{\min_{0\leq k\leq n}\bar{X}_{t_k^n}\geq L\}}\prod_{i=1}^n\left(1-e^{-\frac{2n(\bar{X}_{t_i^n}-L)(\bar{X}_{t_{i-1}^n}-L)}{T\sigma^2(\bar{X}_{t_{i-1}^n})}}\right)\right).$$

En déduire un algorithme de simulation de Monte Carlo.

3.b. En quoi le terme produit $\prod_{i=1}^n\left(1-e^{-\frac{2n(\bar{X}_{t_i^n}-L)(\bar{X}_{t_{i-1}^n}-L)}{T\sigma^2(\bar{X}_{t_{i-1}^n})}}\right)$ de la représentation précédente peut-il être considéré comme un terme correctif ?

3.c. Comparer les variances des estimateurs obtenus aux questions **3.b.** et **2.b.**