Examen 2021 - 2022 Théorie des Options

Durée: 2 heures, une fiche recto-verso et la calculatrice sont autorisées

Exercice : arbre binomial (7 points)

On considère un modèle binomial à trois étapes. On suppose que $S_0 = 20$ euros et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1,15$ et $d = 0,85$. Le taux sans risque est $r = 1\%$, et la maturité de l'option est de une année.

1) Donner la dynamique de S à l'aide d'un arbre.

2) Donner la probabilité risque-neutre.

3) Déterminer le prix d'un CALL **européen** de prix d'exercice $K = 40$ euros à la date $t = 0$.

4) Quel serait le prix d'un PUT **européen** de mêmes caractéristiques ?

5) Quel serait le prix d'un PUT **américain** de mêmes caractéristiques ?

Problème: les options sur devise (13 points)

Le but de ce problème est de déterminer le prix d'une stratégie permettant d'échanger un taux de change variable contre un taux de change fixe. Afin de se fixer les idées, les devises considérées sont l'euro et le dollar. Le taux de change retenu est l'EURUSD, qui permet d'acheter une quantité de dollars à partir d'une quantité d'euros. En notant $(S)_{t\geq 0}$ le processus associé au taux de change, nous avons l'égalité suivante à tout instant t:

$$1 \text{ euro} \times S_t = 1 \text{ dollar}.$$

Partie 1: stratégie d'échange change variable contre change fixe

1) En notant K le taux de change fixe, quelle serait la stratégie à mettre en place afin de recevoir le taux de change variable S_T et de payer le taux de change fixe K à l'instant T ? En donner le nom, la forme et le graphique associé.

Partie 2: dynamique du taux de change dans le monde dollar risque-neutre

Notons r_e le taux sans risque et $\mathbb{Q}_e$ la probabilité risque-neutre associés au monde euro risque-neutre. De la même façon, notons r_d le taux sans risque et $\mathbb{Q}_d$ la probabilité risque-neutre associés au monde dollar risque-neutre.

Sous la probabilité $\mathbb{Q}_d$, donc dans le monde dollar risque-neutre, la dynamique du taux de change est donnée par:

$$dS_t = \alpha(S_t, t)dt + \sigma S_t dW_t, \tag{1}$$

où α est une fonction non spécifiée a priori, et W est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}_d$.

2) Sous $\mathbb{Q}_d$, donner le processus de prix des dollars actualisés à l'aide de r_e, r_d et S.

3) En utilisant un argument de martingalité, montrer que $\alpha(S_t, t) = S_t(r_d - r_e)$ et interpréter ce résultat.

4) Résoudre l'équation (1).

Partie 3: prix d'un CALL sur le change sous $\mathbb{Q}_d$

5) A l'aide de la forme trouvée en 4), montrer que le prix d'un CALL sur le taux de change sous $\mathbb{Q}_d$ en $t = 0$, de strike K et de maturité T est

$$C_d(0, K) = S_0 \exp(-r_e T)\mathcal{N}(d_1) - K \exp(-r_d T)\mathcal{N}(d_2),$$

où d_1 et d_2 sont des variables à spécifier et $\mathcal{N}$ représente la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite.

6) Sur le marché des changes, les options sont cotées en delta. Rappeler la formule générale du delta.

7) Montrer que

$$S_0 \exp(-r_e T)\frac{\partial \mathcal{N}(d_1)}{\partial S} = K \exp(-r_d T)\frac{\partial \mathcal{N}(d_2)}{\partial S}.$$

8) En déduire que $\Delta_{CALL} = \exp(-r_e T)\mathcal{N}(d_1)$.

9) L'option CALL 50Δ de maturité T correspond à $\mathcal{N}(d_1) = 0,5$. En déduire le strike associé.

Partie 4: passage de $\mathbb{Q}_d$ à $\mathbb{Q}_e$

10) En exprimant des euros sous la forme d'une espérance actualisée d'un flux futur sous $\mathbb{Q}_e$, puis des dollars sous la forme d'une espérance actualisée d'un flux futur sous $\mathbb{Q}_d$, montrer qu'il est possible de définir un mouvement brownien $\hat{W}$ sous $\mathbb{Q}_e$ tel que

$$\hat{W}_t = W_t - \sigma t,$$

où W est le mouvement brownien du taux de change sous $\mathbb{Q}_d$.

11) En déduire la forme du taux de change sous $\mathbb{Q}_e$.

Partie 5: projection d'euros dans le monde dollar risque-neutre

Considérons maintenant un actif Y libellé en euros, dont la dynamique dans le monde euro risque-neutre est donnée par

$$dY_t = r_e Y_t dt + \gamma Y_t d\hat{U}_t,$$

où $\hat{U}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}_e$. Les mouvements browniens de l'actif Y et du taux de change S ont une corrélation de ρ, c'est-à-dire

$$\langle \hat{U}, \hat{W} \rangle = \rho t.$$

12) En adoptant le même raisonnement qu'en 10) et à l'aide de la forme du théorème de Girsanov donnée ci-dessous, montrer que sous $\mathbb{Q}_d$,

$$\hat{U}_t = U_t - \sigma \rho t,$$

où U est mouvement brownien sous $\mathbb{Q}_d$. Note: $\langle \hat{U}, \hat{W} \rangle = \rho t = \langle U, W \rangle$.

13) En déduire que sous $\mathbb{Q}_d$

$$dY_t = (r_e - \rho\sigma\gamma) Y_t dt + \gamma Y_t dU_t.$$

Forme générale du théorème de Girsanov:
Soit X une martingale sous une probabilité A. Le processus Z donné par

$$Z_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X \rangle_t \right)$$

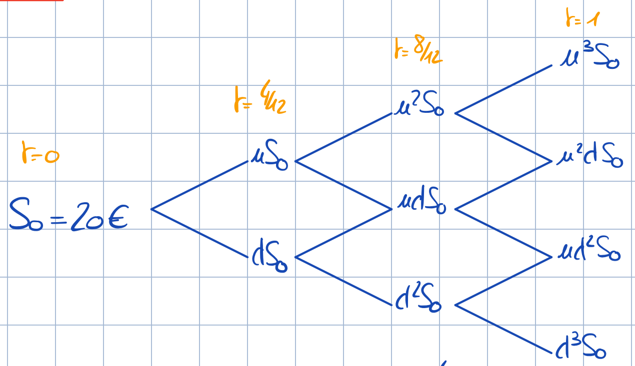
est une martingale locale sous A et il existe une mesure B équivalente à A telle que

$$\frac{dB}{dA} = Z_t.$$

De plus, si V est un mouvement brownien sous A, alors $\hat{V}_t = V_t - \langle V, X \rangle_t$ est un mouvement brownien sous B.

Exercice : $S_0 = 20€$ $\quad u = 1,15 \quad d = 0,85 \quad r = 1\% \quad T = 1$ an

1)



2) $q = \dfrac{R-d}{u-d} = \dfrac{e^{r\Delta t} - 0,85}{1,15-0,85} = \dfrac{e^{0,01 \times 4/12} - 0,85}{1,15-0,85} = 0,5111$

3) CALL européen avec $K = 40€$

$f_{u^3} = (u^3S_0 - 40)_+ = (1,15^3 \times 20 - 40)_+ = (30,4175 - 40)_+ = 0$

$f_{u^2d} = (u^2dS_0 - 40)_+ = 0$

$f_{ud^2} = (ud^2 - 40)_+ = 0$

$f_{d^3} = (d^3S_0 - 40)_+ = 0$

$\Rightarrow f = 0€.$

4) PUT européen avec $K = 40€$

$f_{u^3} = (40 - u^3S_0)_+ = 9,5825\ €$

$f_{u^2d} = (40 - u^2dS_0)_+ = 17,5175\ €$

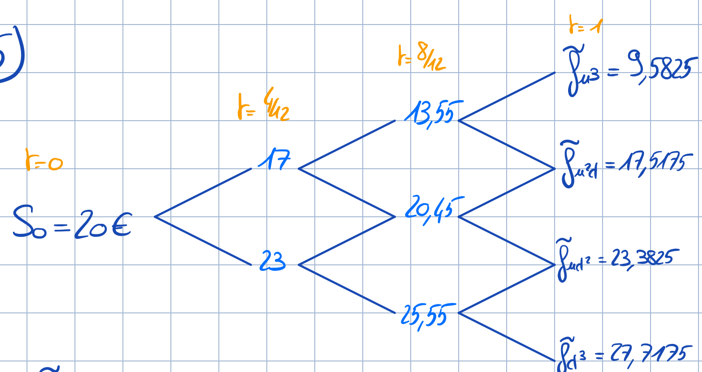
$f_{ud^2} = (40 - ud^2S_0)_+ = 23,3825\ €$

$f_{d^3} = (40 - d^3S_0)_+ = 27,7175\ €$

$$\Rightarrow \begin{cases} f_{u^2} = \frac{1}{R}\left[q f_{u^3} + (1-q) f_{u^2d}\right] = 13,4169 \\ f_{ud} = \frac{1}{R}\left[q f_{u^2d} + (1-q) f_{ud^2}\right] = 20,3169 \\ f_{d^2} = \frac{1}{R}\left[q f_{ud^2} + (1-q) f_{d^3}\right] = 25,4169 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{R^2}\left[q^2 f_{uu} + 2q(1-q) f_{ud} + (1-q)^2 f_{dd}\right] = 19,602$$

5)



$\tilde{f}_{uu} = \max\left(f_{uu}, K - u^2S_0\right) = \max(13,4169 ; 40 - 26,45) = 13,55$

$\tilde{f}_{ud} = \max\left(f_{ud} ; K - udS_0\right) = 20,45$ $\qquad \tilde{f}_{d^2} = \max\left(f_{d^2} ; K - d^2S_0\right) = 25,55$

$\tilde{f}_u = \max(f_u ; K - uS_0) = \max(16,7342 ; 40 - 1,15 \times 20) = 17$

$\tilde{f}_d = \max(f_d ; K - dS_0) = \max(22,7342 ; 40 - 0,85 \times 20) = 23$

$\tilde{f} = \max(f ; K - S_0) = \max(19,602 ; 40 - 20) = 20$

Problème : Les options sur devise

Partie 1 : Stratégie d'échange change variable contre change fixe.

1) Soit K le taux de change fixe.

Stratégie : Achat CALL européen avec strike $= K$ et échéance $= T$

Partie 2 : Dynamique du taux de change dans le monde dollar risque neutre.

2) On sait que $(S)_{t \geq 0}$ est le processus du taux de change tel que :

$$\forall t \geq 0, \quad 1 \text{euro} \times S_t = 1 \text{ dollar}$$

On a donc $\forall t \geq 0$, $S_t = \frac{1 \text{dollar}}{1 \text{euro}}$ $\Rightarrow$ Sous $\mathbb{Q}^d$, $S_t = S_0 e^{(r_d - r_e)t}$

3) Or sous $\mathbb{Q}_d$,

$$e^{r_e T} S_T = e^{r_d T}$$

$$S_T = e^{(r_d - r_e) T}$$

4) On a donc $\alpha(S_t, t) = S_t (r_d - r_e) \overset{\text{Sous } \mathbb{Q}^d}{\Longrightarrow} dS_t = S_t \left[(r_d - r_e) dt + \sigma dW_t \right]$

Partie 3 : prix d'un CALL sur le change sous $\mathbb{Q}_d$.

5) On sait grâce à (4) que sous $\mathbb{Q}_d$, $dS_t = S_t[(r_d - r_e)dt + \sigma dW_t]$

$\Rightarrow$ sous $\mathbb{Q}_d$, $S_t = S_0 \exp((r_d - r_e - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$ en appliquant Itô à $\ln(S_t)$

De plus, on sait aussi que $C_d(0,k) = C_d(T,k)e^{-r_d T}$ ← valeur actualisée

$$\Rightarrow C_d(0,k) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_d}[(S_T - k)_+]e^{-r_d T}$$
$$= (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_d}[S_T \mathbb{1}_{S_T > k}] - k\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_d}[\mathbb{1}_{S_T > k}])e^{-r_d T}$$
$$= S_0 e^{-r_e T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_d}[e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T}\mathbb{1}_{S_T > k}] - ke^{-r_d T}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_d}[\mathbb{1}_{S_T > k}]$$

Or $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_d}[\mathbb{1}_{S_T > k}] = \mathbb{Q}^d(S_T > k)$

$$= \mathbb{Q}^d(S_0 \exp((r_d - r_e - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T) > k)$$
$$= \mathbb{Q}^d((r_d - r_e - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\,\overset{\sim \mathcal{N}(0,1) \text{ sous } \mathbb{Q}^d}{U_T} > \ln(\tfrac{k}{S_0}))$$
$$= \mathbb{Q}^d(U_T < \underbrace{\frac{(r_d - r_e - \sigma^2/2)T - \ln(k/S_0)}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_2}) = \mathcal{N}(d_2)$$

car $U_T \sim -U_T$

Radon Nikodym $\left.\frac{d\mathbb{Q}_e}{d\mathbb{Q}_d}\right|_{\mathcal{F}_T} = e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_d}[e^{-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T}\mathbb{1}_{S_T > k}] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}_e}[\mathbb{1}_{S_T > k}]$$
$$= \mathbb{Q}^e[S_T > k]$$

Or sous $\mathbb{Q}_e$, $S_T = S_0\exp((r_d - r_e - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \overset{\text{brownien sous } \mathbb{Q}_e}{W_T^e} + \sigma^2 T)$
$$= S_0 \exp((r_d - r_e + \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma W_T^e)$$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}^e[S_T > k] = \mathbb{Q}^e[(r_d - r_e + \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma\sqrt{T}\,\overset{\sim \mathcal{N}(0,1) \text{ sous } \mathbb{Q}_e}{U_T^e} > \ln(\tfrac{k}{S_0})]$$
$$= \mathbb{Q}^e[U_T^e < \underbrace{\frac{(r_d - r_e + \sigma^2/2)T - \ln(k/S_0)}{\sigma\sqrt{T}}}_{d_1}] = \mathcal{N}(d_1)$$

car $U_T^e \sim -U_T^e$

Donc $C_d(0,k) = S_0 e^{-r_e T}\mathcal{N}(d_1) - ke^{-r_d T}\mathcal{N}(d_2)$.

6) $\Delta = \frac{\partial p}{\partial S_0}$ le Delta correspond à la variation de la prime p de l'option quand le sous-jacent S_0 varie d'une unité

7) Par (5) on déduit $\frac{\partial C_d(0,k)}{\partial S} = 0$

$$\Rightarrow 0 = S_0 e^{-r_e T} \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} - K e^{-r_d T} \frac{\partial N(d_2)}{\partial S}$$

D'où $S_0 e^{-r_e T} \frac{\partial N(d_1)}{\partial S} = K e^{-r_d T} \frac{\partial N(d_2)}{\partial S}$

8) $\Delta_{CALL} = \frac{\partial C_d(0,K)}{\partial S_0} = \exp(-r_e T) N(d_1)$ par q5)

9) On a $N(d_1) = 0{,}5 \Rightarrow d_1 = 0 \Rightarrow \left(r_d - r_e + \frac{\sigma^2}{2}\right) T = \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)$

Donc on a $K = S_0 e^{\left(r_d - r_e + \frac{\sigma^2}{2}\right) T}$

Partie 4 : passage de Q_d à Q_e.

10)