Done

M2 "Probabilités et Finance" Sorbonne Université *Année 2022 – 2023*
"Introduction aux processus de diffusion" (L.Zambotti)

TD0. Prérecquis et rappels

Exercice 1 Soit ξ une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$. Soit $x > 0$ un réel strictement positif.

(i) Montrer que $\frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\mathrm{e}^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(\xi > x) \leq \frac{1}{(2\pi)^{1/2}}\,\frac{1}{x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

(ii) Montrer que[1] $\mathbb{P}(\xi > x) \leq \mathrm{e}^{-x^2/2}$.

$\mathbb{E}[\xi e^{a\xi}] = \int x e^{ax-\frac{x^2}{2}}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = e^{\frac{a^2}{2}}\int x\varphi(x-a)\,dx = a e^{a^2/2}$ ($\xi + a$)

Exercice 2 Soit ξ une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$.

(i) Calculer $\mathbb{E}(\xi^4)$ et $\mathbb{E}(|\xi|)$. $\mathbb{E}\xi^4 = 3$ $\mathbb{E}|\xi| = 2\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}}dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$

(ii) Calculer $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{a\xi})$, $\mathbb{E}(\xi\mathrm{e}^{a\xi})$ et $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{a\xi^2})$, où $a \in \mathbb{R}$ est un réel. $\mathbb{E}e^{a\xi} = e^{+\frac{a^2}{2}}$

$\mathbb{E}[e^{a\xi^2}] = \int e^{-\frac{x^2}{2}(1-2a)}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{1-2a}}$ $a > \frac{1}{2} \to \infty$

(iii) Soit $b \geq 0$ un réel positif. Soit η une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathcal{N}(0, 1)$, indépendante de ξ. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{b\xi^2}) = \mathbb{E}(\mathrm{e}^{\lambda\xi\eta})$, où $\lambda := (2b)^{1/2}$.

$\mathbb{E}[e^{\lambda\xi\eta}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{\lambda\xi\eta}|\xi]] = \mathbb{E}e^{+\frac{\lambda^2\xi^2}{2}} \Rightarrow \frac{\lambda^2}{2} = b \Rightarrow \lambda = \sqrt{2b}$.

Exercice 3 Soient ξ, ξ_1, ξ_2, $\cdots$ des variables aléatoires réelles. On suppose que pour tout n, ξ_n suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, où $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \geq 0$, et que ξ_n converge en loi vers ξ. Montrer que ξ suit une loi gaussienne. $|\varphi_n(\lambda)| = e^{-\frac{1}{2}\sigma_n^2\lambda^2} \to |\varphi(\lambda)| \Rightarrow \lambda$ conv.

Exercice 4 Soient ξ, ξ_1, ξ_2, $\cdots$ des variables aléatoires réelles. On suppose que pour tout n, ξ_n suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, où $\mu_n \in \mathbb{R}$ et $\sigma_n \geq 0$, et que ξ_n converge en probabilité vers ξ. Montrer que ξ_n converge dans L^p, pour tout $p \in [1, \infty[$. $\xi_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \xi$ $\mathbb{P}(|\xi_n - \xi| > \varepsilon) \xrightarrow{n\to\infty} 0$

$\eta_n = \xi_n - \xi \sim \mathcal{N}(\mu_n - \mu, \tilde{\sigma}_n^2)$, $\tilde{\sigma}_n^2 \to 0 \Rightarrow \mathbb{E}|\eta_n|^p = f(\mu_n - \mu, \tilde{\sigma}_n^2) \to 0$

Exercice 5 Soit (ξ, η, θ) un vecteur gaussien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. On suppose $\mathbb{E}(\xi) = \mathbb{E}(\eta) = \mathbb{E}(\xi\eta) = 0$, $\sigma_\xi^2 := \mathbb{E}(\xi^2) > 0$ et $\sigma_\eta^2 := \mathbb{E}(\eta^2) > 0$. $\sim \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2)$

1. Montrer que $\mathbb{E}(\theta \,|\, \xi) = \mathbb{E}(\theta) + \frac{\mathbb{E}(\theta\xi)}{\mathbb{E}(\xi^2)}\,\xi$. $\theta - \mathbb{E}\theta = a\xi + b\eta + \varepsilon$
2. Montrer que $\mathbb{E}(\theta \,|\, \xi, \eta) = \mathbb{E}(\theta \,|\, \xi) + \mathbb{E}(\theta \,|\, \eta) - \mathbb{E}(\theta)$. $\mathbb{E}[\theta|\xi,\eta] = \mathbb{E}\theta + \underbrace{\frac{\mathbb{E}\theta\xi}{\mathbb{E}\xi^2}\xi}_{\mathbb{E}[\theta|\xi]} + \underbrace{\frac{\mathbb{E}\theta\eta}{\mathbb{E}\eta^2}\eta}_{\mathbb{E}[\theta|\eta] - \mathbb{E}\theta}$
3. Montrer que $\mathbb{E}(\xi \,|\, \xi\eta) = 0$. $\sigma(\xi\eta) \subset \sigma(\xi,\eta) \Rightarrow$
4. Montrer que $\mathbb{E}(\theta \,|\, \xi\eta) = \mathbb{E}(\theta)$. $\mathbb{E}[\xi|\xi\eta] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\xi|\xi,\eta]|\xi\eta] = 0$

$\mathbb{E}\theta + \mathbb{E}[a\xi + b\eta|\xi\eta] = \mathbb{E}\theta + a\,\mathbb{E}[\xi|\xi\eta] + b\,\mathbb{E}[\eta|\xi\eta]$

Exercice 6 Soient ξ et η deux variables aléatoires intégrables, et soit $\mathscr{G}$ une sous-tribu de $\mathscr{F}$.

1. Plus tard, on verra que $\mathbb{P}(\xi > x) \leq \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-x^2/2}$.

(i) $X = \xi - \eta$ $\quad \mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0 \overset{?}{\Leftrightarrow} \mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{G}$

($\Rightarrow$) $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \mathbb{1}_A] \geq 0 \ \forall A \in \mathcal{G}$

($\Leftarrow$) Si $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \geq 0$ p.s., il existe $A \in \mathcal{G}$ t.q. $\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] < 0$ sur A, $P(A) > 0$

Donc $\mathbb{E}[X \mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{G}] \mathbb{1}_A] < 0$?!

(i) Montrer que $\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{G}) \leq \mathbb{E}(\eta \,|\, \mathscr{G})$, p.s., si et seulement si $\mathbb{E}(\xi \, \mathbf{1}_A) \leq \mathbb{E}(\eta \, \mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathscr{G}$.

(ii) Montrer que $\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{G}) = \mathbb{E}(\eta \,|\, \mathscr{G})$, p.s., si et seulement si $\mathbb{E}(\xi \, \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(\eta \, \mathbf{1}_A)$ pour tout $A \in \mathscr{G}$. (i) $\Rightarrow$ (ii)

Exercice 7 Soit $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ une famile de variables aléatoires réelles, indexée par un ensemble non vide A quelconque. On rappelle la définition suivante : $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ est dite uniformément intégrable si

$$\lim_{K \to +\infty} \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha| \, \mathbb{1}_{(|X_\alpha| > K)}) = 0.$$

Montrer que $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(i) $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha|) < \infty$;

(ii) pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall B \in \mathscr{F}$, $\mathbb{P}(B) < \delta \Rightarrow \sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_t| \, \mathbf{1}_B) < \varepsilon$.

Exercice 8 Soit ξ une variable aléatoire réelle telle que $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$. Montrer que la famille $(\mathbb{E}(\xi \,|\, \mathscr{G}),\, \mathscr{G} \subset \mathscr{F}$ sous-tribu) est uniformément intégrable. Preuve: par Th. de la V.-P.

Exercice 9 Soit $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ une famile de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe un réel $p > 1$ tel que $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}(|X_\alpha|^p) < \infty$. Montrer que $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable. $h(x) = x^p$ + voir exo 11

Exercice 10 Soit $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ une famile de variables aléatoires réelles. On suppose qu'il existe une variable aléatoire réelle intégrable Y telle que p.s. $\sup_{\alpha \in A} |X_\alpha| \leq Y$. Montrer que $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable.[2] $\sup_\alpha \mathbb{E}|X_\alpha| \mathbb{1}_{|X_\alpha| > L} \leq \mathbb{E}\, Y \mathbb{1}_{Y > L} \to 0$ (Y intégr)

Exercice 11 Soit $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ une famile de variables aléatoires réelles intégrables. Montrer qu'elle est uniformément intégrable s'il existe une fonction mesurable $h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ avec $\lim_{t \to \infty} \frac{h(t)}{t} = \infty$ telle que $\sup_{\alpha \in A} \mathbb{E}[h(|X_\alpha|)] < \infty$.

Exercice 12 Soit $(X_t,\, t \geq 0)$ une famille de variables aléatoires réelles indexée par $\mathbb{R}_+$, et soit X_∞ une variable aléatoire réelle. On suppose que $X_t \to X_\infty$ en probabilité (quand $t \to \infty$), et que $(X_t,\, t \geq 0)$ est uniformément intégrable. Montrer que $X_t \to X_\infty$ dans L^1.

Exercice 13 Soit $(X_n,\, n \geq 0)$ une famille de variables aléatoires réelles indexée par $\mathbb{Z}_+$, et soit X_∞ une variable aléatoire réelle. Montrer que $X_n \to X_\infty$ dans L^1 (quand $n \to \infty$) si et seulement si $X_n \to X_\infty$ en probabilité et $(X_n,\, n \geq 0)$ est uniformément intégrable.

2. En particulier, si $\sup_{\alpha \in A} |X_\alpha|$ est mesurable et intégrable, alors $(X_\alpha,\, \alpha \in A)$ est uniformément intégrable.

$\boxed{1}$ $\xi \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}(\xi > x) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)e^{-x^2/2}$$

$$\mathbb{P}(\xi > x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$

$$p = -\int_x^\infty \frac{1}{u} d\left(e^{-\frac{u^2}{2}}\right) = \left[-\frac{1}{u}e^{-\frac{u^2}{2}}\right]\Big|_x^\infty - \int_x^\infty e^{-\frac{u^2}{2}} \cdot \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} - \int_x^\infty \frac{1}{u^3} u e^{-\frac{u^2}{2}} du \geq$$

$$\left\{ u^3 \geq x^3 \Rightarrow \frac{1}{u^3} \leq \frac{1}{x^3} \Rightarrow -\frac{1}{u^3} \geq -\frac{1}{x^3} \right\}$$

$$\geq \frac{1}{x}e^{-\frac{x^2}{2}} - \frac{1}{x^3}\underbrace{\int_x^\infty u e^{-\frac{u^2}{2}} du}_{e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

$\boxed{7}$ $(X_\lambda)_{\lambda \in A}$ u.i. $\Leftrightarrow$ 1) $\sup_\lambda \mathbb{E}|X_\lambda| < \infty$

2) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 : \forall B : \mathbb{P}(B) < \delta$ $\sup_\lambda \mathbb{E}|X_\lambda| \mathbb{1}_B < \varepsilon$

$\Rightarrow$ On a $\sup_\lambda \mathbb{E}|X_\lambda| \mathbb{1}_{|X_\lambda| > K} \xrightarrow{K \to \infty} 0$

1) Supposons que $\sup_\lambda \mathbb{E}|X_\lambda| = \infty$. Donc $\exists (\lambda_n) : \mathbb{E}|X_{\lambda_n}| \to \infty$

$$\forall K > 0 \quad \underbrace{\mathbb{E}\left[|X_{\lambda_n}| \mathbb{1}_{|X_{\lambda_n}| > K}\right]}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} \infty \ \forall K} = \overset{\nearrow \infty}{\mathbb{E}|X_{\lambda_n}|} - \underbrace{\mathbb{E}|X_{\lambda_n}| \mathbb{1}_{|X_{\lambda_n}| \leq K}}_{\leq K}$$

Alors $\forall K\ \exists n(K) :$ $\mathbb{E}|X_{\lambda_{n(K)}}| \mathbb{1}_{|X_{\lambda_{n(K)}}| > K} > \delta \Rightarrow$

$\Rightarrow \sup_\lambda \mathbb{E}|X_\lambda| \mathbb{1}_{|X_\lambda| > K} \not\to 0$?!

2)
$$\mathbb{E}|X_\lambda| \mathbb{1}_B = \mathbb{E}\left[\overset{\leq K}{|X_\lambda|} \underset{\underset{K\delta}{\shortparallel}}{\mathbb{1}_B} \mathbb{1}_{|X_\lambda| < K}\right] + \underbrace{\mathbb{E}\left[|X_\lambda| \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{|X_\lambda| > K}\right]}_{\leq a(K) \to 0}$$

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists K > 0 : \sup_\lambda \mathbb{E}|X_\lambda| \mathbb{1}_{|X_\lambda| > K} < \frac{\varepsilon}{2}$

$\exists \delta = \frac{\varepsilon}{2K} \to \mathbb{E}|X_\lambda| \mathbb{1}_B < \varepsilon \; \forall \lambda.$

$(\Leftarrow)$ On a $\sup \mathbb{E}|X_\lambda| < \infty$

$\mathbb{E}|X_\lambda| \mathbb{1}_{|X_\lambda| > K}$

$\exists K : \mathbb{P}(|X_\lambda| > K) < \delta \quad \forall \lambda \quad \to \mathbb{E}|X_\lambda| \mathbb{1}_{\underbrace{|X_\lambda| > K}_{B_\lambda}} < \varepsilon$

$\mathbb{P}(B_\lambda) < \delta$

Sinon, $\forall K \; \exists \lambda(K) : \mathbb{P}(|X_\lambda| > K) \geq \delta$

$\mathbb{E}|X_{\lambda(K)}| > K \cdot \delta \to \infty \; ?!$ $\square$

$\boxed{11}$ (X_λ) intégrables. $\exists h : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ mesur. $\frac{h(t)}{t} \xrightarrow[t \to \infty]{} \infty$ et $\sup \mathbb{E}\, h(|X_\lambda|) < \infty$

Alors (X_λ) est u.i.

$$\mathbb{E}|X_\lambda| \mathbb{1}_{|X_\lambda| > K} = \mathbb{E} \overbrace{\frac{|X_\lambda|}{h(|X_\lambda|)}}^{\substack{\exists K \\ \leq \varepsilon / c}} \mathbb{1}_{|X_\lambda| > K} \cdot h(|X_\lambda|) \leq \frac{\varepsilon}{c} \overbrace{\sup \mathbb{E}\, h(|X_\lambda|)}^{= c < \varepsilon} < \varepsilon$$

$\boxed{12}$ $X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\infty$ + $(X_t)_{t \geq 0}$ u.i. Alors $X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\infty$

s.p.g. $X_\infty = 0$ $\quad X_t \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ $\quad \mathbb{P}(|X_t| > \varepsilon) \xrightarrow[t \to \infty]{} 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

$$\mathbb{E}|X_t| = \underbrace{\mathbb{E}|X_t| \mathbb{1}_{|X_t| < \varepsilon/3}}_{\leq \varepsilon/3} + \underbrace{\mathbb{E}|X_t| \mathbb{1}_{\varepsilon/3 \leq |X_t| \leq K}}_{\substack{\leq K \mathbb{P}(|X_t| > \varepsilon) \\ \exists t \gg 1 \;\; < \varepsilon/3}} + \underbrace{\mathbb{E}|X_t| \mathbb{1}_{|X_t| > K}}_{< \varepsilon/3 \; (\exists K)} < \varepsilon$$

(2) (1)

$\boxed{13}$ $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$ ssi $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\infty$ et (X_n) u.i.

$(\Leftarrow)$ vois N°12.

$(\Rightarrow)$ $\mathbb{E}|X_n - X_\infty| \to 0$

(X_n) converge dans L^1 $\to$ bornée, i.e. $\exists$ $\overset{\sup}{\nearrow}$ $\mathbb{E}|X_n| < M$

$\sup \mathbb{E}|X_n| \mathbb{1}_{|X_n|>K} \leq M\delta$

$\exists K$

$\exists K :\quad \mathbb{P}(|X_n|>K) < \delta \quad \forall n$

$\square$