

---

# EXAMEN FINAL

Modèles Aléatoires Discrets– 2019-2020  
Pierre-O Goffard

---

**Instructions:** On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils électroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.

Question:	1	2	3	4	Total
Points:	3	7	5	5	20
Score:					

1. Questions de cours. Processus de Poisson.

- (a) (1 point) Soit  $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ , montrer que

$$\mathbb{P}(X > t + s | X > t) = \mathbb{P}(X > s), \quad s, t > 0.$$

- (b) (1 point) Rappeler la définition d'un processus de Poisson  $(N_t)_{t \geq 0}$

- (c) (1 point) Soit  $(N_t)_{t \geq 0}$  un processus de Poisson, montrer que

$$\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!}, \quad k \geq 0.$$

**Solution:** Voir le cours.

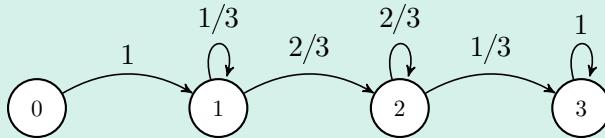
2. On suppose qu'une playlist (pour aller courir) contient 3 chansons différentes. On définit le processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  égal au nombre de chansons différentes écoutées jusqu'à l'instant  $n \in \mathbb{N}$ . On suppose que  $X_0 = 0$ .

- (a) (1 point) Le processus  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définit une chaîne de Markov homogène. Donner son espace d'état, sa loi initiale, sa matrice des transitions et son graphe des transitions.

**Solution:**  $E = \{0, 1, 2, 3\}$ ,  $\mu = (1, 0, 0, 0)$ , La matrice des transitions est données par

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et le graph des transition



(b) (1 point)  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est elle irréductible? Justifier.

**Solution:** L'espace d'état comprend 4 classes de communications dont

- $\{0\}$ ,  $\{1\}$ , et  $\{2\}$  sont des classes ouvertes
- $\{3\}$  est une classe fermée.

La chaîne n'est donc pas irréductible.

(c) (2 points) Discuter l'existence et l'unicité d'une loi stationnaire.

**Solution:** L'espace d'état est fini, il existe au moins une loi stationnaire. Celle-ci est unique car on n'a qu'une seule classe fermée, la loi stationnaire est donnée par  $\pi = (0, 0, 0, 1)$

(d) (1 point) On note  $\tau_3 = \inf\{n \geq 0 ; X_n = 3\}$ .  $\tau_3$  est-il un temps d'arrêt? Justifier.

**Solution:** On peut écrire

$$\{\tau_3 = n\} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \{X_k \neq 3\} \cap \{X_n = 3\} \in \mathcal{F}_n,$$

avec  $\mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \dots, X_n)$ .

(e) (2 points) En utilisant une analyse à un pas, donner  $\mathbb{E}_0(\tau_3) := \mathbb{E}(\tau_3 | X_0 = 0)$ .

**Solution:** On résout le système suivant

$$\mathbb{E}_0(\tau_3) = 1 + \mathbb{E}_1(\tau_3) \quad (1)$$

$$\mathbb{E}_1(\tau_3) = 1 + \mathbb{E}_1(\tau_3)/3 + 2\mathbb{E}_2(\tau_3)/3 \quad (2)$$

$$\mathbb{E}_2(\tau_3) = 1 + 2\mathbb{E}_2(\tau_3)/3 \quad (3)$$

On obtient  $\mathbb{E}_2(\tau_3) = 3$ ,  $\mathbb{E}_1(\tau_3) = 9/2$  et  $\mathbb{E}_0(\tau_3) = 11/2$ .

3. La vie de Pierre-O.

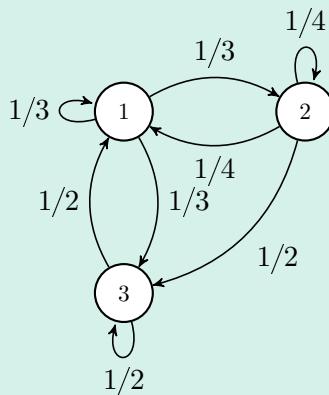
Nous allons géolocaliser Pierre-O heure par heure à l'aide d'une chaîne de Markov homogène  $(X_n)_{n \geq 0}$ . Pierre-O peut se trouver dans 3 positions

1. Maison
2. ISFA
3. Bar

On suppose qu'initialement il peut se trouver dans un de ces trois endroits de manière equiprobable. Ensuite ses déplacements suivent la dynamique suivante

- lorsqu'il est à la maison il peut rester à la maison, aller à l'ISFA ou aller au bar de manière equiprobable
  - lorsqu'il est à l'ISFA il va au bar dans 50% des cas, va à la maison dans 25% des cas, reste à l'ISFA dans 25% des cas
  - lorsqu'il est au bar soit il reste au bar, soit il rentre à la maison de manière équiprobable.
- (a) (1 point) Donner l'espace d'état, la loi initiale, le graph des transitions et la matrice des transitions de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Solution:** L'espace d'état est donné par  $E = \{1, 2, 3\}$ , la loi initiale est  $\mu = (1/3, 1/3, 1/3)$ . Le graph des transitions est le suivant



La matrice des transition est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

- (b) (1 point) La chaîne est-elle irréductible?

**Solution:** Oui, il n'y a qu'une seule classe de communication

- (c) (1 point) Donner la période de chaque état

**Solution:** Tous les états sont dans la même classe de communication et ont donc même période, celle ci est égale à 1 car par exemple

$$d(1) = \text{pgcd}\{1, 2, \dots\} = 1$$

- (d) (2 points) Après avoir justifié son existence et son unicité, donner la loi stationnaire de  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

**Solution:** L'espace d'état est de dimension fini, la loi stationnaire existe. Comme la chaîne est irréductible alors la loi stationnaire est unique et solution de

$$\begin{cases} \pi \cdot Q = \pi \\ \pi \cdot \mathbf{1}_3 = 1 \end{cases}$$

On trouve  $\pi = (9/23, 4/23, 10/23)$

4. L'objectif est de modéliser le temps d'attente à un guichet d'un guichet ouvert 24 heures sur 24. Les clients arrivent au guichet suivant un processus de Poisson  $(N_t)_{t \geq 0}$  d'intensité  $\lambda$ , l'unité de temps est l'heure. Le temps de service pour chaque client est une variable aléatoire  $X$ , positive, continue (à densité par rapport à la mesure de Lebesgue). Le temps d'occupation effectif du guichet est donné par un processus de Poisson composé défini par

$$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i, \quad t \geq 0.$$

où  $(X_i)_{i \geq 1}$  est une suite i.i.d. de variables aléatoires distribuées comme  $X$ , indépendantes de  $(N_t)_{t \geq 0}$ . Le temps d'attente d'un client arrivant à l'instant  $t$  est un processus donné par

$$R_t = (S_t - t)_+, \quad t \geq 0$$

où  $(x)_+ = \max(x, 0)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  désigne la fonction partie positive.

- (a) (1 point) Lors de la première journée qui démarre à 0 : 00 heure, quelle est la probabilité d'avoir entre 2 et 4 clients entre 8 : 00 et 11 : 00. Donner le résultat en fonction de  $\lambda$ .

**Solution:** On calcule

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(N_{11} - N_8 \in \{2, 3, 4\}) &= \mathbb{P}(N_3 = 2) + \mathbb{P}(N_3 = 3) + \mathbb{P}(N_3 = 4) \\ &= \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^2}{2!} + \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^3}{3!} + \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^4}{4!} \end{aligned}$$

- (b) (2 points) Le temps de traitement de la demande d'un client suit une loi de Weibull  $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$  de densité (par rapport à la mesure de Lebesgue) donnée par

$$f_X(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right), \quad x > 0, \quad \alpha, \beta > 0.$$

Calculer  $\mathbb{E}(X^k)$  pour  $k \geq 1$ . Donner le résultat en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$  et de la fonction gamma définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx, \quad \text{avec } z > 0.$$

**Solution:** On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^k) &= \int_0^{+\infty} x^k \left(\frac{\alpha}{\beta}\right) \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^\alpha\right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \beta^k y^{k/\alpha} e^{-y} dy \\ &= \beta^k \Gamma(1 + k/\alpha)\end{aligned}$$

- (c) (1 point) Donner la moyenne et la variance de  $S_t$  pour un instant  $t > 0$  en fonction de  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\lambda$ . Si vous n'êtes pas parvenu à résoudre la question précédente, vous pouvez noter  $\mu = \mathbb{E}(X)$  et  $\sigma^2 = \text{Var}(X)$ .

**Solution:** On a

$$\mathbb{E}(S_t) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(X) = \lambda t \beta \Gamma(1 + 1/\alpha)$$

et

$$\text{Var}(S_t) = t \lambda \beta^2 \Gamma(1 + 2/\alpha)$$

- (d) (1 point) On approche la distribution de  $(S_t)_{t \geq 0}$  (approximation grossière) par une loi exponentielle de paramètre  $1/\mathbb{E}(S_t)$  (L'atome de probabilité en 0 de  $S_t$  peut en particulier être négligé pour  $\lambda$  grand). En utilisant cette approximation, donner l'expression du temps d'attente moyen  $\mathbb{E}(R_t)$  à l'instant  $t \geq 0$  en fonction de  $\lambda$ ,  $t$ ,  $\alpha$ , et  $\beta$  (à défaut  $\mu$  si vous n'êtes pas parvenu à répondre à la question b).

**Solution:** On a

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(S_t - t)_+] &= \mathbb{E}[(S_t - t)\mathbb{I}_{S_t > t}] \\ &= \mathbb{E}(S_t \mathbb{I}_{S_t > t}) - t \mathbb{P}(S_t > t) \\ &= \lambda t \beta \Gamma(1 + 1/\alpha) \exp(-1/\lambda \beta \Gamma(1 + 1/\alpha))\end{aligned}$$

## FORMULAIRE

Nom	abbrev.	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(X)$	FGM
Binomial	Bin( $n, p$ )	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$np$	$np(1-p)$	$[(1-p) + pe^t]^n$
Poisson	Pois( $\lambda$ )	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	$\lambda$	$\lambda$	$\exp(\lambda(e^t - 1))$
Geometric	Geom( $p$ )	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ pour $t < -\ln(1-p)$
Uniform	Unif( $a, b$ )	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponential	Exp( $\lambda$ )	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ pour $t < \lambda$
Normal	N( $\mu, \sigma^2$ )	$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) \exp\left(\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\mu$	$\sigma^2$	$e^{\mu t} e^{\sigma^2 t^2 / 2}$