MFA Révisions examen

Garantie temporaire DC

(1) GMDB garantie de capital minimum en cas de DC.
forcément sur un contrat en UC où les actifs sont modélisés par un sous jacent S_t (valeur UC en $t = S_t$)
Principe : si l'assuré décède alors que la valeur du support est inférieur au capital minimum garanti (noté K) alors l'assureur finance la différence
C'est une garantie plancher, elle est exercée seulement si l'assuré décède à une date où la situation de l'épargne est défavorable
On suppose ici un contrat uni support ⇒ actif constitué d'un seul support d'où le cours est décrit par un MB $(S_t)_t$

Flux de l'assureur $F(T_x) = (K - S_{T_x})_+ \mathbb{1}_{\underbrace{T_x}_{DC} \leq \underbrace{T}_{\text{terme du contrat}}}$

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}}\left[\overbrace{\delta(T_x)}^{\text{facteur d'actualisat°}} F(T_x)\right]$$

rep° du temps

$$= \int_0^T \delta(t) F(t) f_{T_x}(t)\,dt = \int_0^T \delta(t) F(t) \mu(t) S_x(t)\,dt$$

$$= \int_0^T \delta(t) (K - S_t)_+ \mathbb{1}_{t \leq T} \mu(t) \times S_x(t)\,dt$$

thm de transfert / à T_x

on additionne les flux probables sur toute la durée de l'engagement

(2) Contrat d'épargne en €

$$GSE \to \underbrace{ALM}_{RC \quad PB} \to (F_t^{(k)}, t \geq 1) \quad \text{fabrication de flux}$$

RC : règles comptables — PB : participat° aux bénéf°

$$BE \approx BE^{(K)} = \frac{1}{K} \sum_{\substack{n=1 \\ t \geq 1}}^{K} \delta^{(n)}(t) F^{(n)}(t)$$

approximat°

quels sont les points de divergence de ces 2 méthodes ?

★ Flux de prestations
Explicitement connus pour (1) GMDB
Sortent d'une "boîte noire" / on reconstruit les flux par simulation
↳ (2) Contrat d'épargne en €

* Risques d'assurances

① GMDB : risque de mortalité

② Contrat d'épargne € : risque de mortalité + risque de rachats

* Risques financiers (leur nature) de l'assureur

① ils sont exogènes : comme le flux est assimilé à une option de vente sur un sous jacent $(S_t)_t$, les fluctuations des marchés financiers vont directement impacter l'option de vente et in fine le BE

② ils sont partiellement exogènes car l'impact des marchés financiers sera modifié par les règles comptables, la participat° aux bénéfices, la stratégie de l'assureur qui peut lisser ou couvrir les impacts ...

ALM

* Gestion de l'actif

Rappel en AOA, prix = coût de réplication, ainsi le prix d'un actif peut être déterminé via une stratégie de réplication ie via la gestion d'un portefeuille.

① L'allocation des actif est cantonnée : la règle de gestion est donnée car on veut répliquer $(K - S_t)^+$ pour un coût $P(S_0, t, K) / \mathcal{F}_\pi$

$$P(S_0, t, K) - \underbrace{\alpha_0 S_0}_{\text{proport° actif risqué}} - \underbrace{\beta_0}_{\text{proportion actif sans risque}} = 0$$

possible en UC
ex formule puts moyens pondérés

donc

Actif	Passif
$\alpha_0 S_0 + \beta_0$	BE en 0

on suppose en théorie que les flux de tréso futurs ($\in$ BE) peuvent chacun être répliqué par un portefeuille d'actifs financiers

② Ici l'actif est trop général, du fait qu'on simule BE avec des hyp de distributions on n'a pas de lien entre le prix et la couverture par réplication

contrat en € pas de notion de réplication pour le BE.

* Prix observables ou non

① contrat en UC dont le support est constitué d'actifs $(S_{t_i})_{t_i}$ financiers généralement côtés ⇒ les prix sont observables sur le marché. (on observe les prix de marché)

② le prix est non observable car dans l'approximation du BE ce sont des flux qui n'existent pas dans la réalité / pour lesquels on n'a pas d'options existantes en face

Exercice 1

Contrat frais d'obsèques

Assureur $\begin{cases} \text{paie } K \text{ aux ayants droits à la date du DC } T_x \\ \text{pas de limite de contrat} \Rightarrow \text{contrat viager} \end{cases}$

Assuré paie une cotisation c (jusqu'à sa mort)

Modelisation en tps continu, $\mu_x(t)$ fonction de hasard qui représente la sortie de l'assuré (ie le DC)

x l'âge de l'assuré

Calculer $c = f(K)$

Methodo
1) quels sont les flux de l'assureur ? De l'assuré ?
2) Actualisation
3) Calculs de la valeur économique $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}$
4) Hyp cotisation équilibre telle que engagements assureur = engagements assuré

1) et 2) assureur noté $\Lambda_p = \sum$ flux prestat° actualisés

$$\Lambda_p = \underbrace{K}_{\text{assureur verse } K} \underbrace{\delta(T_x)}_{\text{on actualise à partir du DC.}}$$

assuré noté $\Lambda_c = \sum$ cotisat° actualisée

$$\Lambda_c = \underbrace{\int_0^{+\infty}}_{\text{addition de toutes les cots actualisées}} c\, \delta(t) \underbrace{\mathbb{1}_{T_x > t}}_{\text{assuré verse les cots tant qu'il est en vie}} dt$$

⇒ les versements s'arrêtent bien à sa mort

3) <u>assureur</u>

$$V_p = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[K\delta(T_x)]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\Big[\underset{\uparrow}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}}[K\underbrace{\delta(T_x)}\mid T_x]\Big]$$

car facteur d'actualisation est modelisé par proba risque neutre $\mathbb{Q}^f$ (= risque financier)

$\perp\!\!\!\perp T_x$ car risque financier qui ne dépend pas de la mortalité

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\Big[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[K\delta(T_x)]\Big] = K\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\Big[\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta(T_x)]}_{=P(0,T_x)}\Big]$$

par $X \perp\!\!\!\perp Y$ $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$

prix ZC maturité T_x

$$= K\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}[P(0,T_x)]$$

$$\underset{\text{thm de tranfert}}{=} K\int_0^{+\infty} P(0,u)\underbrace{f_{T_x}(u)}_{=\mu_x(u)S_x(u)}\,du$$

$$= K\int_0^{+\infty} P(0,u)\,\mu_x(u)\,S_x(u)\,du.$$

<u>assuré</u>

$$V_c = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[\Lambda_c] \underset{\text{linéarité}}{=} c\int_0^{+\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[\delta(t)\,\mathbb{1}_{T_x > t}]\,dt$$

$$= c\int_0^{+\infty} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}[\mathbb{1}_{T_x>t}]}_{=\mathbb{P}^a(T_x>t)}\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta(t)]}_{=P(0,t)}\,dt$$

$\perp\!\!\!\perp$ de $\delta(t)$ risque financier modelisé par $\mathbb{Q}^f$ et $\mathbb{1}_{T_x>t}$ risque d'assurance (de mortalité) modelisé par $\mathbb{P}^a$

$$= c\int_0^{+\infty} S_x(t)\,P(0,t)\,dt.$$

4) $V_p = V_c$

$$\Leftrightarrow K\int_0^{+\infty} P(0,u)\,S_x(u)\,\mu_x(u)\,du = c\int_0^{+\infty} S_x(t)\,P(0,t)\,dt$$

$$\Leftrightarrow c = K\,\frac{\int_0^{+\infty} P(0,u)S_x(u)\mu_x(u)\,du}{\int_0^{+\infty} P(0,u)S_x(u)\,du} = K\bar{\mu}_x$$

$\simeq$ tx moyen pondéré μ.

tx moyen de DC qui prend en compte les effets d'actualisation

(la mortalité est constante)

Supposons $\mu_x(t) = \mu \ \forall t$, réévaluer c

si

$$c = K \frac{\mu \int_0^{+\infty} \cancel{P(0,u) S_x(u)} du}{\int_0^{+\infty} \cancel{P(0,u) S_x(u)} du} = K\mu$$

si période de cotisat° ∞ petite

NB cohérent que $c = K\mu$ si μ est la proba de décès entre t et t+dt
la cotisation entre t et t + dt
correspond au capital à recevoir
× proba de décès

Supposons qu'avec l'inflation les prix des cercueils augmentent, il faudrait penser à revaloriser K.
Cas d'un capital revalorisé : on revalorise K sur la base de $\underbrace{\alpha}_{\text{quote part}} \underbrace{r(t)}_{\text{tx sans risque instantané entre t et t+dt}}$ avec $\alpha \in [0, 1[$

Recalculer c

assureur (la partie de l'assuré ne change pas)

$$K(t) = K \underbrace{e^{\alpha \int_0^t r_u du}}_{\text{capitalisat° tps } C^°}$$

$$\Lambda_p = K(T_x) b(T_x) = K e^{\alpha \int_0^{T_x} r_u du} e^{-\int_0^{T_x} r_u du} = K e^{(\alpha - 1)\int_0^{T_x} r_u du}$$

$$V_p^* = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[\Lambda_p] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[K(T_x) b(T_x) \mid T_x]\right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[K \, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[b(T_x)^{1-\alpha} \mid T_x]\right]$$

$b(T_x)^{1-\alpha} \perp\!\!\!\perp T_x$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[K \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[b(T_x)^{1-\alpha}]}_{\text{notation } \tilde{P}^\alpha(0, T_x)}\right]$$

$$= \int_0^{+\infty} K \tilde{P}^\alpha(0,u) \mu_x(u) S_x(u) du$$

thm de transfert

on voit que si $\alpha = 0$ on retombe sur $P(0, T_x)$
on note $\tilde{P}^\alpha(0, T_x)$

d'où $C = K \dfrac{\int_0^{+\infty} \tilde{P}^{\alpha}(0,u) S_x(u) \mu_x(u) du}{\int_0^{+\infty} P(0,u) S_x(u) du}$

on suppose que $r(t)$ gaussien
Comment peut-on calculer $\tilde{P}^{\alpha}(0,u)$ et $P(0,u)$?

si $r(t)$ est gaussien $\Rightarrow \int_0^t r_u du$ est gaussien

on pose $\sim \mathcal{N}(m(t), v(t))$

$P(0,t) = \mathbb{E}^{Q^f}\left[e^{-\int_0^t r_u du}\right] = e^{-m(t) + \frac{v(t)}{2}}$

on utilise $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}[e^X] = e^{-m + \frac{\sigma^2}{2}}$

$\tilde{P}^{\alpha}(0,t) = \mathbb{E}^{Q^f}\left[e^{(\alpha-1)\int_0^t r_u du}\right]$

$= e^{-(\alpha-1)m(t) + (\alpha-1)^2 \frac{v(t)}{2}}$

Si $\mu_x(t) = \mu$ et $r(t) = r$ calculer c.

$\mu_x(t) = \mu \Rightarrow S_x(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(u) du} = e^{-\mu t}$

$r(t) = r \Rightarrow b(t) = e^{-\int_0^t r_u du} = e^{-rt}$

$C = K \dfrac{\int_0^{+\infty} e^{(\alpha-1)rt} e^{-\mu t} \mu dt}{\int_0^{+\infty} e^{-\mu t} e^{-rt} dt}$

$= K\mu \dfrac{\left[\frac{1}{(\alpha-1)r-\mu} e^{((\alpha-1)r-\mu)t}\right]_0^{+\infty}}{\left[-\frac{1}{\mu+r} e^{-(\mu+r)t}\right]_0^{+\infty}}$

$= K\mu \dfrac{-\frac{1}{(\alpha-1)r-\mu}}{\frac{1}{\mu+r}} = K\mu \dfrac{\mu+r}{\mu+(1-\alpha)r}$

on voit bien que notre expression est cohérente

on a bien
$(\alpha-1)r - \mu < 0$
$\Leftrightarrow \underbrace{(\alpha-1)}_{<0}\underbrace{r}_{>0} < \underbrace{\mu}_{>0}$

NB si $\alpha = 0$ $C = K\mu$: sans revalorisat°
on retombe sur la cotisat° précédente
si $\alpha = 1$ $C = K(\mu+r)$: revalo à 100%
on redonne K en entier, actualisé

$\mathbb{P}^{nh}$ pour modéliser non réplicable

$\mathbb{Q}^{h}$ pour modéliser réplicable

Exercice 2 Contrat d'épargne en €

$r_S(t)$ le taux de revalorisation, tps C°

$$\underbrace{VR(t)}_{\text{valeur de rachat en } t} = \underbrace{VR(0)}_{\text{valeur de rachat en 0}} \underbrace{e^{\int_0^t r_S(u)\,du}}_{\text{capitalisation}}$$

= ce que les assuré ont investi

pas de rachat conjoncturel

on suppose que les sorties sont définitives du contrat (peuvent être DC ou rachat total)

on ne peut pas faire de rachat partiel.

Soit τ_x la date de sortie des individus d'âge x

μ_x la fonction de hasard / loi de sortie / loi de τ_x

NB : $x \wedge y = \min(x,y)$

x âge des individus, T échéance contrat

Calculer valeur économique engagements assureur

$$\Lambda_x = VR(\tau_x \wedge T)\, \delta(\tau_x \wedge T)$$

$$\begin{cases} \tau_x \wedge T = \tau_x \Rightarrow \text{sortie avant échéance} \\ \tau_x \wedge T = T \Rightarrow \text{contrat arrive au terme} \end{cases}$$

Dans les 2 cas l'assuré (ou ayants droits si DC) touche la valeur de rachat revalorisée

Rappel $\mathbb{E}[X|Y] = \int x\, f_{X|Y}(x|Y)\,dx$

on conditionne par rapport à r_S pour représenter l'environnement financier

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}[\Lambda_x | r_S] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[\mathbb{1}_{\tau_x < T}\, VR(\tau_x)\, \delta(\tau_x) \,|\, r_S\right]$$

$$+ \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[\underbrace{\mathbb{1}_{\tau_x > T}}_{\perp\!\!\!\perp}\, \underbrace{VR(T)\,\delta(T)}_{\text{dépendent de l'environnement financier} \Rightarrow \text{mesurables}} \,|\, r_S\right]$$

$\perp\!\!\!\perp$ de l'environnement financier car sortie DC ou rachats non conjoncturels } risque morta et rachats

Thm transfert $\mathbb{E}[X|Y]$

$$= \int_0^T VR(u)\delta(u) f_{\tau_x|F}(u)\,du + VR(T)\delta(T)\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}[\mathbb{1}_{\tau_x > T}]$$

$\tau_x \perp\!\!\!\perp F$ car pas de rachat conjoncturel

$= f_{\tau_x} = \mu_x S_x$

$$= \int_0^T VR(u)\delta(u)\mu_x(u)S_x(u)\,du + VR(T)\delta(T)S_x(T)$$

on applique $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}$ pour avoir BE

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}\left[\int_0^T VR(u)\delta(u)\mu_x(v)S_x(v)\,du + VR(T)\delta(T)S_x(T)\right]$$

$\to \perp\!\!\!\perp r(t)$

Cas n°1 $\quad r_s(t) = \underbrace{r(t)}_{\text{tx sans risque (replicable)}} + \underbrace{\omega(t)}_{\text{spread (non réplicable)}}$

$\tau_x \perp\!\!\!\perp$ risques financiers = pas de rachats conjoncturels

Calculer BE

$$VR(u)\delta(u) = \underbrace{VR(0)}_{=1 \text{ pour la suite}} e^{\int_0^u r_s(t)dt} e^{-\int_0^v r(t)dt} = e^{\int_0^v \omega_t d_t}$$

modelisé par $\mathbb{P}^{nh}$

on va écrire

$$BE = \int_0^T \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{nh}}\left[e^{\int_0^v \omega_t d_t}\right]\mu_x(t)S_x(t)\,dt + \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{nh}}\left[e^{\int_0^T \omega_t dt}\right]S_x(T)$$

On suppose $(\omega(t), t \geq 0)$ gaussien calculer BE

$$\int_0^t \omega_u\,du \sim \mathcal{N}(m(t), v(t))$$

$$BE = \int_0^T e^{-m(v) + \frac{v(v)}{2}}\mu_x(u)S_x(u)\,du + e^{-m(T)+\frac{v(T)}{2}}S_x(T)$$

On suppose maintenant $r(t) = r \quad \mu(t) = \mu$
calculer BE $\quad \omega(t) = \omega$

$$VR(u)\delta(u) = e^{\omega u}$$

$$BE = \int_0^T e^{\omega u}\mu e^{-\mu u}\,du + e^{\omega T}e^{-\mu T} = \mu\left[\frac{1}{\omega-\mu}e^{(\omega-\mu)u}\right]_0^T + e^{(\omega-\mu)T}$$

$$= \frac{\mu}{\omega-\mu}\left(e^{(\omega-\mu)T} - 1\right) + e^{(\omega-\mu)T}$$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

si $\mu > \omega$ $\quad BE \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{\mu}{\mu - \omega}$

+ μ est grand, + les assurés sortent vite
- il y a de flux futurs
$\Rightarrow$ BE finit par être constant

si $\omega > \mu$ $\quad BE \underset{T \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$

+ on revalorise beaucoup, + les gens restent $\Rightarrow$ + il ~~faut~~ faudra toujours provisionner plus

Cas n°2 $\quad r_S(t) = \dfrac{1}{d} \displaystyle\int_{(t-d)^+}^{t} \underbrace{r_A(u)}_{\text{rdt de l'actif}} du$

r_S est une moyenne mobile de r_A

$\Rightarrow$ sert à lisser.

on supp $t > d$

Calculer BE

$$VR(t) = VR(0)\, e^{\int_0^t r_S(u)du} = \underbrace{VR(0)}_{=1}\, e^{\int_0^t \frac{1}{d} \int_{(u-d)^+}^{u} r_A(v)\,dv\,du}$$

$$\int_0^t \int_{(u-d)^+}^{u} \frac{1}{d} r_A(v)\,dv\,du = \int_0^t \int_0^u \frac{1}{d} r_A(v) \mathbb{1}_{u<d}\,dv\,du$$

$$+ \int_0^t \int_{u-d}^{u} \frac{1}{d} r_A(v) \mathbb{1}_{u>d}\,dv\,du$$

$$= \int_0^d \int_v^d \frac{1}{d} r_A(v)\,du\,dv + \int_0^t \int_d^{v+d} \frac{1}{d} r_A(v)\,du\,dv$$

$$= \frac{1}{d} \int_0^d r_A(v)(d-v)\,dv + \frac{1}{d} \int_0^t r_A(v)\, v\,dv$$

$\left.\begin{array}{l} v<d<t \\ v<u \end{array}\right|$

$\Rightarrow \begin{cases} v<d \\ v<u<d \end{cases}$

$u-d<v<u$
$u<t,\ u>d$

$\Rightarrow \begin{cases} u<v+d<u+d \\ v<t \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} d<u<v+d \\ v<t \end{cases}$

$\Rightarrow$ BE

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{nh}}\left[\int_0^T VR(t)\,b(t)\,\mu_x(t)\,S_x(t)\,dt + VR(T)\,b(T)\,S_x(T)\right]$$

Pas possible d'aller plus loin.