Synthèse : théorie des options

1 Introduction aux produits dérivés

On appelle **produit dérivé** un instrument construit à partir d'actifs et variables plus standards. La valeur d'un produit dérivé dépend des actifs à partir desquels il a été construit. *i.e.* Un produit dérivé est une va $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Différents types de produits : les options, les contrats à termes sur actions, les CFD (Contract for Difference), les trackers, les warrants, les swaps, les certificats, les contratsà terme (Futures et Forward) et les bons de souscriptions...

Pourquoi ? Se couvrir, Spéculer, Dégager des profits d'arbitrage

2 Définitions générales

Définition 2.1 (**Opportunité d'arbitrage**). *On dit qu'un marché présente une opportunité d'arbitrage lorsqu'on peut mettre en oeuvre une stratégie d'achat et de vente de différents titres qui ne coûte rien, et rapporte un gain strictement positifs (aujourd'hui ou à une date future).*

Définition 2.2 (**Sans risque**). *Un portefeuille ou un actif est sans risque si il n'y a aucune incertitude sur ces cashflows.*

Définition 2.3 (**Marché complet**). *Un marché avec AOA est complet si et seulement si il existe une unique probabilité risque-neutre* i.e. *tout actif est réplicable par une stratégie de portefeuille simple.*

Définition 2.4 (**Cash and Carry**). *Une stratégie de trade cash and carry est un arbitrage entre effectué entre les cours au comptant et à terme d'un même actif. L'opération consiste à prendre deux positions opposées (achat et vente). L'investisseur peut par exemple acheter le sous-jacent au comptant, puis vendre dans la foulée un futures sur celui-ci.*

Définition 2.5 (**Portefeuille autofinançant**). *Un portefeuille autofinançant (ou stratégie autofinancée) est une stratégie d'achat ou de vente de titres, actions, prêts et emprunts à la banque, et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'a pas été modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent.*

Définition 2.6 (**Stratégie admissible**). *Une stratégie est dite admissible si elle est autofinancée et si* $\forall t \geq 0, V_t(\phi) \geq 0.$

Définition 2.7 (**Probabilité risque-neutre**). *On appelle probabilitée neutre au risque ou probabilité risque-neutre ou encore mesure martingale équivalente toute probabilité, équivalente à la probabilité historique* $\mathbb{P}$ *sous laquelle le prix actualisé des actifs est une martingale.*

Théorème 2.8. *L'hypothèse d'AOA équivaut à l'existence d'une probabilité neutre au risque.*

Hypothèses sur le marché :

1. Les actifs sont divisibles à l'infini
2. Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant
3. On autorise les ventes à découvert
4. Les échanges ont lieu sans coût de transaction
5. On autorise les emprunts et les prêts illimités pour tous les agents au même
6. Taux constant r (accès à l'actif sans risque)

3 Valeurs des options

Influences des différentes variables sur les prix d'options

Facteur	Valeur du Call	Valeur du Put
S_0	$\nearrow$	$\searrow$
K	$\searrow$	$\nearrow$
σ	$\nearrow$	$\nearrow$
T	$\nearrow$	?($\nearrow$ pour put américain)
r	$\nearrow$	$\searrow$
D	$\searrow$	$\nearrow$

Définition 3.1 (**Payoff**). *Le payoff d'une option (ou valeur intrinsèque) est le maximum entre 0 et le flux engendré par un exercice immédiat de l'option.*

Définition 3.2 (**Effet de levier**). *C'est le nom que porte la démultiplication des taux de rentabilité et de risque permise par les opérations sur les options.*
L'acheteur du call ou du put bénéficie d'un effet de levier potentiellement très important si son option n'expire pas sans valeur.

Définition 3.3 (**Moneyness of a call option**). *Une option dite dans la monnaie (in-the-money) engendrerait un flux positif si elle était exercée immédiatement. Un call est dans la monnaie si et seulement si $S > K$. À la monnaie si $S = K$;en dehors de la monnaie si $S < K$.*

Théorème 3.4 (**Relation de parité Call-Put**). *Un CALL et un PUT européens ayant le même sous-jacent, le même prix d'exercice et la même échéance sont toujours liés par la relation :*

$$\boxed{C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}}$$

Remarque 3.5. *La relation de parité call-put signifie économiquement que sur les 4 instruments financiers que sont le titre support, le call, le put et l'actif sans risque, l'un quelconque est redondant, c'est-à-dire qu'on peut le répliquer à l'aide des 3 autres.*

Théorème 3.6 (**Relation de parité Call-Put avec dividende**). *En présence d'un dividende discret D versé à une date T_D, la relation de parité devient : $C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT} - De^{-rT_D}$*

Définition 3.7 (**Forward**).

$$F = S_0 e^{(r-q)t} = S_0(1 + r - q)^t$$

4 Les grecques

Lettre grecque	Définition	valeur pour un call dans le modèle de B& S
Δ	$\frac{\partial C}{\partial S}$	$\mathcal{N}(d_1) \in [0, 1]$
Γ	$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$	$f(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} > 0$
Θ	$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial \tau}$	$-\left[\frac{S\sigma}{2\sqrt{\tau}}f(d_1) + rKe^{-r\tau}\mathcal{N}(d_2)\right] < 0$
$\mathcal{V}$	$\frac{\partial C}{\partial \sigma}$	$C_\sigma = S\sqrt{\tau}f(d_1) > 0$
ρ	$\frac{\partial C}{\partial r}$	$\tau Ke^{-r\tau}\mathcal{N}(d_2) > 0$

— Le delta Δ mesure la sensibilité de la valeur de l'option par rapport aux variations du prix du sous-jacent. $\Delta_{put} = \Delta_{call} - 1$

- Le gamma Γ mesure la sensibilité du prix de l'option aux variation du Delta
- Le theta Θ mesure la sensibilité d'une option par rapport au temps qui reste jusqu'à l'échéance
- Le vega ν mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations de la volatilité
- Le rho ρ mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations du taux d'intérêt

5 Modèle binomial (Cox-Ross-Rubinstein)

Théorème 5.1 (**Pricing**). *Le prix du produit dérivé C donnant des flux C_1^u et C_1^d dans les états "up"et "down" est :*

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{R}\left[qC_1^u + (1-q)C_1^d\right]}$$

Il s'agit du payoff espéré de l'option.

Théorème 5.2 (**Existence**). *$AOA \iff d < R < u \iff$ il existe une probabilité neutre au risque.*

$$\boxed{q = \mathbb{Q}(w_u) = \frac{R-d}{u-d}} \quad \text{où} \quad R = e^{r\Delta t} \qquad \text{en cas de versement de dividende : } q = \frac{e^{(r-v)\Delta t} - d}{u-d}$$

Théorème 5.3 (**Unicité**). *Marché complet $\Rightarrow$ Unicité de la probabilité risque neutre.*

Théorème 5.4 (**Couverture**). *Le portefeuille de couverture de l'option est donné par une valeur initiale égale à la valeur initiale de l'option, et un investissement dans Δ actifs risqués où*

$$\boxed{\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u-d)S_0}}$$

Pour un call : achat de Δ actif risqué et placement de $C_0 - \Delta \times S_0$ actif sans risque
Pour un put : achat de Δ actif risqué et placement de $\Delta \times S_0 - P_0$ actif sans risque

Propriété 5.5 (**Relation u, d, μ et σ**). *Lorsque l'on possède des informations sur μ et σ, on peut utiliser :*

$$p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u-d} \qquad \text{et} \qquad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \qquad d = \frac{1}{u}$$

À RETENIR :
- Le prix de l'actif s'écrit toujours comme l'espérance actualisée de sa valeur finale sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$.
- La probabilité risque neutre rend les actifs réactualisés des martingales et de manière équivalente les stratégies de portefeuille simple réactualisées sont des martingales aussi.

Propriété 5.6 (**Arbre trinomial**).

$$p_u = \left(\frac{e^{Y\frac{t}{2}} - d}{u-d}\right)^2 \qquad p_d = \left(\frac{u - e^{Y\frac{t}{2}}}{u-d}\right)^2 \qquad p_m = 1 - p_u - p_d \qquad u = e^{\sigma\sqrt{2t}} \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{2t}}$$

6 Modèle de Black et Scholes

Idée : Définir le prix d'un produit dérivé comme celui de son portefeuille de couverture appliqué à un modèle log-normal.

Hypothèse supplémentaire sur le marché : le marché fonctionne en continu.

Hypothèse fondamentale : Rendements normaux / Prix lognormaux

On fait l'hypothèse que les rendements entre 0 et t suivent un mouvement Brownien de tendance $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ et de coefficient de diffusion σ, autrement dit que les rendements suivent une normale. Cela se traduit par les propriétés suivantes du processus des prix $\{S_t, t \in [0,T]\}$:

- $S_0 = x$.
- Les rendements $\ln(S_t) - \ln(S_s)$ suivent une loi gaussienne de moyenne $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)$ et de variance $\sigma^2(t-s)$.
- $\forall 0 < t_1 < ... < t_n$, les accroissements relatifs $\left\{\frac{S_{t_i+1}}{S_{t_i}}; 0 \leq i \leq n-1\right\}$ sont indépendants, et de même loi.

En d'autres termes, il existe un mouvement Brownien W tel que :

$$\boxed{S_t = f(t, W_t) = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} = x e^{\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t}}$$

Après application de la formule d'Itô on a

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = \mu\,\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W_t$$

Théorème 6.1 (Hypothèse fondamentale des rendements lognormaux). *Les rendements entre deux périodes sont mesurés par la différence des logarithmes des cours. Le principe de base du modèle de Black-Scholes est la modélisation de la dynamique du sous-jacent par un mouvement brownien géométrique.*

Définition 6.2 (Prime de risque). *Aussi appelé ratio de sharpe. Définit par* $\boxed{\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}}$

Remarque 6.3 (Limites). *Les paramètres sont supposés constants. (pour la volatilité notamment : smile, skew...) Black-Scholes fonctionne bien dans les temps "normaux", mais en cas de gros mouvement, Black-Scholes est mauvais dans les extrêmes (sous-évalue).*

Théorème 6.4. *L'EDS de BS admet une unique solution qui est donnée par :*

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}, \mathbb{P}_{p.s} \qquad NB : \langle Y_t \rangle_t = \sigma^2 Y_t^2\,\mathrm{d}t$$

Démonstration. On pose $\boxed{Y_t = e^{-\mu t} X_t}$. Avec la formule d'Itô on a : $\mathrm{d}Y_t = -\mu X_t e^{-\mu t}\,\mathrm{d}t + e^{-\mu t}\,\mathrm{d}X_t = \sigma Y_t\,\mathrm{d}B_t$
On applique maintenant la formule d'Itô à $g : Y_t \mapsto \ln(Y_t)$. On obtient $\mathrm{d}(g(Y_t)) = \sigma\,\mathrm{d}B_t - \frac{1}{2}\sigma^2\,\mathrm{d}t$

On a donc

$$\begin{aligned} \ln Y_t &= \ln x + \int_0^t \sigma\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2\,\mathrm{d}s \\ &= \ln x + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t \end{aligned}$$

i.e.

$$Y_t = x e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t}$$

et donc

$$X_t = x e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

□

Définition 6.5 (Portefeuilles autofinançants). *Une stratégie de portefeuille consiste a l'investissement à tout instant $t \in [0,T]$ dans une quantité dénotée ϕ_t d'actif risqué S et d'une quantité ϕ_0^t d'actif sans risque S^0.*

$$V\ portefeuille : X_t = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t \qquad Cdt\ autofinancement : \boxed{\mathrm{d}X_t = \phi_t^0\,\mathrm{d}S_t^0 + \phi_t\,\mathrm{d}S_t}$$

Propriété 6.6. *L'existence d'une probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$ implique l'AOA entre stratégies de portefeuille simple autofinançantes.*

	Probabilité historique $\mathbb{P}$	Probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$
Actif risqué	$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$	$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\hat{W}_t$
Actif risqué réactualisé	$d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t$	$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\hat{W}_t$

Formule de Black et Scholes

Le prix d'une option de type européen de payoff $h(S_T)$ est de la vorme $V(t, S_t)$ avec :

$$v(t, S_t) := e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[h(S_T)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le prix du call de maturité T et de strike K est : Sans dividende

$$C_t = S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

Avec dividende continu

$$C_t = e^{-c(T-t)}[S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)]$$

Avec dividende discret

$$C_t = (S_t - D^*)\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

où D^* est le dividende actualisé.

Les relations de parités changent.
Cas continu : $C_t - P_t = e^{-c(T-t}S_t - Ke^{-r(T-t)}$.
Cas discret : $C_t - P_t = (S_t - D^*) - Ke^{-r(T-t)}$.
d_1 change aussi en conséquence.

avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$, d_1 et d_2 données par :

$$d_1 := \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad et \qquad d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Avec des dividendes continus (Merton), on remplace r par $r - c$.

Démonstration.

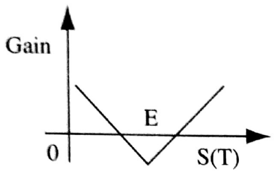
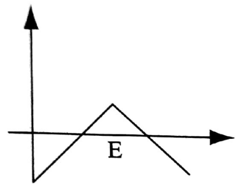
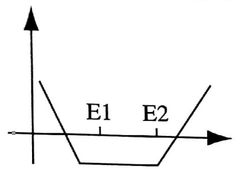
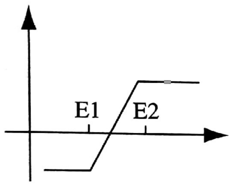
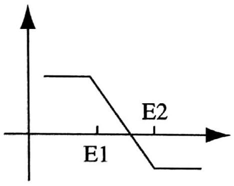
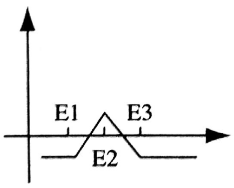
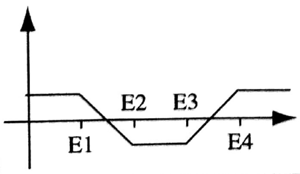
$$C(0, T) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[e^{-rT}(S_T - K)\mathbb{1}_{S_T \geq K}\right]$$

$$\boxed{\mathbb{P}(S_T \geq K) = \mathcal{N}(d_2) \qquad où \quad d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma\sqrt{T}}}$$

□

Remarque 6.7 (Volatilité implicite). *Absence de μ dans le résultat (idem modèle binomial), donc le prix ne dépend que de σ, et donc si on connait le prix, on peut en déduire la vol implicite. Cela consiste à inverser la formule de BS, ie à trouver la vol qui donne ces prix dans le modèle de BS. Elle ne correspond généralement pas à la vol historique ! Grosse question financière depuis des années.*

Stratégies avec les options

NOM	GRAPHIQUE	PROFIL GAIN-PERTE	SOLUTION(S)	ANTICIPATIONS
Stellage (*Straddle*) acheté		−1 (E) +1	$+C_E$, $+P_E$	Forte fluctuation, sens inconnu
Stellage (*Straddle*) vendu		+1 (E) −1	$-C_E$, $-P_E$	Stabilité, pertes non limitées
Strangle acheté		−1 (E1) 0 (E2) +1	$+P_{E1}$, $+C_{E2}$	Fluctuation de sens inconnu « écrêtage » de la perte maximale
Écart haussier (*bull spread*)		0 (E1) +1 (E2) 0	$+C_{E1}$, $-C_{E2}$ ou $+P_{E1}$, $-P_{E2}$	Hausse modérée, pertes limitées en cas de baisse
Écart baissier (*bear spread*)		0 (E1) −1 (E2) 0	$-C_{E1}$, $+C_{E2}$ ou $-P_{E1}$, $+P_{E2}$	Baisse modérée, pertes limitées en cas de hausse
Papillon (*Butterfly*) acheté		0 (E1) +1 (E2) −1 (E3) 0	$+C_{E1}$, $+C_{E3}$, $-2C_{E2}$ ou P_{E1}, $+P_{E3}$, $-2P_{E2}$	Stabilité, mais possible fluctuation, de sens inconnu, pertes limitées
Condor vendu		0 (E1) −1 (E2) 0 (E3) +1 (E4) 0	$-C_{E1}$, $-C_{E4}$, $+C_{E2}$, $+C_{E3}$ ou $-P_{E1}$, $-P_{E4}$, $+P_{E2}$, $+P_{E3}$	Forte fluctuation de sens inconnu, faibles gains et pertes