Gestion de portefeuille

Plan :

I - Modèle de Markowitz (2CM + 2TD)

II - Modèle de Black-Litterman (1CM + 1TD)

III - MEDAF (1CM + 1TD)

IV - Révision

Bibliographie :

- Octave JOKUNG-NGUENA "Mathématiques et gest° financière", 2014
- Harry MARKOWITZ "Portfolio Selection", Journal of Finances, 7 pages 77-99, 1952
- Fischer BLACK, Robert LITTERMAN "Global Portfolio optimizat°" Financial Analytics Journal, pages 28-243, 1992
- Patrice PONCET, Roland PORTAIT "Finance de marché" 2011
- ...

Rappels et outils :

A - Calcul des gradients. Matrices

- Soit $x = (x_1 - x_n)'$ un vecteur de $\mathbb{R}^n$, le prime désignant la transposée et soit A une matrice $n \times n$ de terme général a_{ij}

Rappelons que :

$$x'Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$$

- Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonct° dérivable p/r à chacune de ses composantes.
Notons $\nabla_x f(x)$ le gradient de f càd

$$\nabla_y f(y) = \left(\frac{\partial f}{\partial y_1}, \frac{\partial f}{\partial y_2}, -, \frac{\partial f}{\partial y_n}\right)'(y) \quad \text{où } y = (y_1 - y_n) \in \mathbb{R}^n$$

Dans le cas particulier où $f(x) = x'Ax$, $\nabla_x f(x) = ?$

$$\frac{\partial}{\partial x_k} x'Ax = \frac{\partial}{\partial x}\left[\sum_{i=1}^{m} x_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j\right)\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{m} a_{kj} x_j + \sum_{i=1}^{m} x_i a_{ik}$$ soit la $k^{\text{ème}}$ ligne du vecteur $Ax + A'x$.

On peut donc écrire :

$$\nabla_x x'Ax = Ax + A'x$$

Si la matrice A est symétrique (i.e $A = A'$)

$$\boxed{* \ \nabla_x x'Ax = 2Ax}$$

$* \ \nabla_x x'A = A$ et $\nabla_x Ax = A'$

- $(AB)' = B'A'$ — A, B matrices
- $\lambda' = \lambda$ — λ scalaire

B - Espérance, variance, covariance

Soient X et Y deux v.a d'espérance $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{E}[Y]$, de variances σ_X^2 et σ_Y^2 et covariance σ_{XY}

$$\sigma_X^2 = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$\sigma_{XY} = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$$

Soient $R_1, \dots, R_m$ m v.a et $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ m scalaires. On note $\mu_i = \mathbb{E}[R_i]$ et $\sigma_i^2 = Var(R_i)$
$\mu = (\mu_1 \dots \mu_m)'$, Σ la matrice de variance-cov de terme général $\sigma_{ij} = Cov(R_i, R_j)$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m} \lambda_i R_i\right] = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \underbrace{\mathbb{E}[R_i]}_{\mu_i} = \lambda'\mu \quad \text{avec } \lambda = (\lambda_1 \dots \lambda_m)'$$

$$Cov\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i R_i, X\right) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \, Cov(R_i, X)$$

$$Var\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i R_i\right) = Cov\left(\sum_{i=1}^{m} \lambda_i R_i, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j R_j\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} \lambda_i \lambda_j \, Cov(R_i, R_j)$$

$$= \lambda' \Sigma \lambda$$

C - Optimisat° de Lagrange.

Nous considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\begin{cases} \text{optimiser } f(x) \\ \text{sous les contraintes } g_1(x) = 0 \\ \qquad \vdots \\ \qquad g_m(x) = 0 \end{cases}$$

$$x = (x_1 \dots x_n)' \in \mathbb{R}^n$$

On introduit la fonct° suivante :

$$\mathcal{L}(x,\lambda) = f(x) - \lambda_1 g_1(x) - \ldots - \lambda_m g_m(x) \qquad \lambda = (\lambda_1 \ldots \lambda_m)' \quad (x,\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$$

On l'appelle le Lagrangien du problème. λ est un vecteur inconnu appelé multiplicateur de Lagrange.
On suppose f et $g_1 \ldots g_m$ dérivables.

La méthode de Lagrange consiste à chercher les valeurs x^* et λ^* ($n+m$ inconnues) qui optimisent $\mathcal{L}(x,\lambda)$ sous contraintes.

x^* et λ^* sont solut° de $\nabla_{(x,\lambda)} \mathcal{L}(x,\lambda) = 0_{\mathbb{R}^{n \times m}}$, i.e
$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = \ldots = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_n} = 0 \\ \text{et} \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = \ldots = \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_m} = 0 \end{cases}$$

I - Modèle de Markowitz

Les techniques modernes de gest° d'actifs trouvent leur origine dans les travaux de Markowitz développés en 1952.
Il s'intéresse à la question suivante : Compte tenu des différentes caractéristiques des actifs du marché, quelle est la composit° optimale du portefeuille ?
i.e Quelle proportion de richesse doit-on investir dans chaque actif ?

Markowitz montre qu'il est possible, par la combinaison de plusieurs actifs dans un portefeuille, de réduire le risque total subi pour une rentabilité espérée donnée : c'est l'effet de diversification.

I - 1 - Marché à n actifs risqués

I - 1.1 - Cadre général et notations

Nous considérons un marché financier composé de plusieurs actifs risqués qui peuvent être achetés ou vendus.
Les rentabilités de ces actifs sont aléatoires => en univers aléatoire choisir entre plusieurs portefeuilles est un pb + difficile qu'en univers certain car les port. diffèrent entre eux non seulement pour l'espérance mathématique des flux qu'ils génèrent, mais également par leur signe.

On observe le marché sur une période de temps. Sur ce marché, il n'existe pas d'actif sans risque.

m actifs risqués noté $j=1,\dots,m$ existent. On note :

- $p_j(0)$ le prix du titre j en début de période
- $\tilde{p}_j(1)$ le prix aléatoire du titre j en fin de période
- $\tilde{R}_j$ le rendement aléatoire du titre j sur la période

$$\tilde{R}_j = \frac{\tilde{p}_j(1) - p_j(0)}{p_j(0)}$$

- $\tilde{R}$ le vecteur aléatoire des rendements des m actifs

$$\tilde{R} = (\tilde{R}_1\ \tilde{R}_2\ \dots\ \tilde{R}_m)'$$

- μ_j le rendement espéré du titre j sur la période.

$$\mu_j = \mathbb{E}[\tilde{R}_j]$$

- μ le vecteur des rendements espérés des actifs

$$\mu = (\mu_1\ \mu_2\ \dots\ \mu_m)'$$

- Σ la matrice de Var-Cov de m actifs.

Σ est une matrice de terme général $\sigma_{ij} = \text{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)$ où $\sigma_{ii} = \sigma_i^2 = \text{Var}(\tilde{R}_i)$

Hypothèse : Σ existe et est inversible

Un portefeuille est formé par une combinaison de ces actifs. Il est entièrement déterminé par la proportion de richesse investie dans chaque actif.

C'est un vecteur de poids. On note :

- w_j la proportion de richesse investie dans l'actif j.
- w le vecteur des poids w_j. $w = (w_1 \dots w_m)'$

$$\sum_{j=1}^{m} w_j = 1 \implies w' 1_{\mathbb{R}^m} = 1 \quad \text{où } 1_{\mathbb{R}^m} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

- $\tilde{R}_p$ le rendement aléatoire du port.

$$\tilde{R}_p = \sum_{j=1}^{m} w_j \tilde{R}_j = w'\tilde{R}$$

- μ_p = le rendement espéré du port. :

$$\mu_p = \mathbb{E}[\tilde{R}_p] = \mathbb{E}[\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{R}_j] = \sum_{j=1}^{n} w_j \mathbb{E}[\tilde{R}_j] = \sum_{j=1}^{n} w_j \mu_j = w'\mu$$

- σ_p l'écart-type du port. (risque)

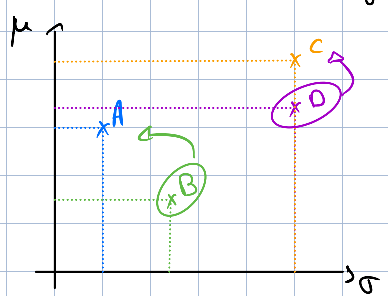
$$\sigma_p^2 = \mathrm{Var}(\tilde{R}_p) = \mathrm{Var}(\sum_{j=1}^{n} w_j \tilde{R}_j) = w'\Sigma w$$

I - 1.2 - Le portefeuille de Markowitz

Définition : Un portefeuille P est efficient si pour tout portefeuille V on a :

$$\sigma_V < \sigma_P \Rightarrow \mu_V < \mu_P$$
$$\sigma_V = \sigma_P \Rightarrow \mu_V \leq \mu_P$$

Exo 1 : Quels sont les portefeuilles clairement inefficients ?



D car $\sigma_D = \sigma_C$
$\mu_D < \mu_C$

B car $\sigma_B > \sigma_A$
$\mu_B < \mu_A$

Exo 2 : Montrer que P est efficient si pour tout port. V :

$$\begin{cases} \mu_V > \mu_P \Rightarrow \sigma_V > \sigma_P \\ \mu_V = \mu_P \Rightarrow \sigma_V \geq \sigma_P \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sigma_V < \sigma_P \Rightarrow \mu_V < \mu_P \\ \sigma_V = \sigma_P \Rightarrow \mu_V \leq \mu_P \end{cases}$$

On sait que $\mu_V > \mu_P \Rightarrow \sigma_V > \sigma_P$

$$(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$$

$\Updownarrow$

$\sigma_V \leq \sigma_P \Rightarrow \mu_V \leq \mu_P$ (1)

En particulier,

$$\sigma_V = \sigma_P \Rightarrow \mu_V \leq \mu_P$$

On sait aussi que :

$\mu_V = \mu_P \Rightarrow \sigma_V \geq \sigma_P$

$\Updownarrow$

$\sigma_V < \sigma_P \Rightarrow \mu_V \neq \mu_P$ (2)

$\sigma_v < \sigma_p$ est un cas particulier de $\sigma_v \leq \sigma_p$

$$\left.\begin{array}{l} \overset{(1)}{\Longrightarrow} \mu_v \leq \mu_p \\ \text{D'après (2), } \sigma_v < \sigma_p \Rightarrow \mu_v \neq \mu_p \end{array}\right\} \Rightarrow \mu_v < \mu_p$$

Remarque: De la même manière, on peut mq la réciproque et donc

$$\begin{pmatrix} \mu_v > \mu_p \Rightarrow \sigma_v > \sigma_p \\ \mu_v = \mu_p \Rightarrow \sigma_v \geq \sigma_p \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \sigma_v < \sigma_p \Rightarrow \mu_v < \mu_p \\ \sigma_v = \sigma_p \Rightarrow \mu_v \leq \mu_p \end{pmatrix}$$

Markowitz propose le programme d'optimisat° suivant pour un rendement objectif donné μ_{obj}, la proportion optimale de chaque actif est celle minimisant la variance globale du port. (ie risque)

$$\min_{\text{s.c rendement}=\mu_{obj}} \text{risque} \rightsquigarrow \begin{cases} \min\limits_{w \in \mathbb{R}^n} w'\Sigma w \\ \text{s.c } w'1_{\mathbb{R}^n} = 1 \Leftrightarrow w'1_{\mathbb{R}^n} - 1 = 0 \\ \quad\;\; w'\mu = \mu_{obj} \Leftrightarrow w'\mu - \mu_{obj} = 0 \end{cases}$$

$\nabla_w(\nabla_w w'\Sigma w) = \nabla_w(2\Sigma w) = 2\Sigma$ matrice définie positive

$w \longrightarrow w'\Sigma w$ convexe $\Rightarrow$ le min existe.

Le Lagrangien du modèle est :

$$\mathcal{L}(w, \lambda_1, \lambda_2) = w'\Sigma w - \lambda_1(w'1_{\mathbb{R}^n} - 1) - \lambda_2(w'\mu - \mu_{obj}).$$

$\nabla_w \mathcal{L}(w, \lambda_1, \lambda_2) = 0$

$\Rightarrow 2\Sigma w - \lambda_1 1_{\mathbb{R}^n} - \lambda_2 \mu = 0$

$\Rightarrow 2\Sigma w = \lambda_1 1_{\mathbb{R}^n} + \lambda_2 \mu$

car Σ est inversible

$\Rightarrow w = \frac{1}{2}\Sigma^{-1}(\lambda_1 1_{\mathbb{R}^n} + \lambda_2 \mu)$

$\Rightarrow w = \frac{\lambda_1}{2}\Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n} + \frac{\lambda_2}{2}\Sigma^{-1}\mu.$ $(*)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}(w, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \Leftrightarrow w'1_{\mathbb{R}^n} = 1 \Leftrightarrow 1'_{\mathbb{R}^n} w = 1 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_2}(w, \lambda_1, \lambda_2) = 0 \Leftrightarrow w'\mu = \mu_{obj} \Leftrightarrow \mu' w = \mu_{obj} \end{cases}$$

On remplace w dans ces deux relations :

$$1'_{\mathbb{R}^m}\left(\frac{\lambda_1}{2}\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^m}+\frac{\lambda_2}{2}\Sigma^{-1}\mu\right)=1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\lambda_1}{2}1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^m}+\frac{\lambda_2}{2}1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}\mu=1 \\ \frac{\lambda_1}{2}\mu'\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^m}+\frac{\lambda_2}{2}\mu'\Sigma^{-1}\mu=\mu_{obj} \end{cases}$$

On note $A=1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}\mu$; $B=\mu'\Sigma^{-1}\mu$ et $C=1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^m}$

Rq : · A, B et C sont scalaires

$$A=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\mu_j \qquad B=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}\mu_i\mu_j \qquad C=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}a_{ij}$$

où a_{ij} est le terme général de Σ^{-1}

· A scalaire $\Rightarrow A=A' \Rightarrow 1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}\mu=(1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}\mu)'=\mu'\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^m}$

On réécrit le système : $\begin{cases} C\lambda_1+A\lambda_2=2 \\ A\lambda_1+B\lambda_2=2\mu_{obj} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=2\,\frac{B-\mu_{obj}A}{BC-A^2} \\ \lambda_2=2\,\frac{\mu_{obj}C-A}{BC-A^2} \end{cases}$

Rq : $BC-A^2\neq 0$

Preuve Pour $m=2$, $\Sigma^{-1}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$ $\quad \mu=\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}$

$$A=\mu_1(a_{11}+a_{12})+\mu_2(a_{21}+a_{22})$$
$$B=a_{11}\mu_1^2+2a_{12}\mu_1\mu_2+a_{22}\mu_2^2$$
$$C=a_{11}+2a_{12}+a_{22}$$

Hyp : Σ existe et est inversible

$\Downarrow$

Σ^{-1} inversible

$\det(\Sigma^{-1})=a_{11}a_{22}-a_{12}^2\neq 0$.

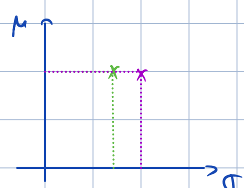
Par l'absurde, on suppose $BC-A^2=0$.

$$\Rightarrow (a_{11}\mu_1^2+2a_{12}\mu_1\mu_2+a_{22}\mu_2^2)(a_{11}+2a_{12}+a_{22})-(\mu_1(a_{11}+a_{12})+\mu_2(a_{21}+a_{22}))^2=0$$

$$\Leftrightarrow (\mu_1-\mu_2)^2\underbrace{(a_{11}a_{22}-a_{12}^2)}_{\neq 0}=0$$

car Σ^{-1} est inversible

Si $\mu_1=\mu_2$



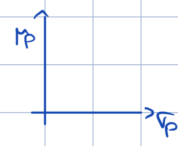
$\mu_{obj}>\mu$

On remplace λ_1 et λ_2 dans ⊛ :

$$w^*=\frac{B-\mu_{obj}A}{BC-A^2}\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^m}+\frac{\mu_{obj}C-A}{BC-A^2}\Sigma^{-1}\mu$$

Donc $\boxed{\omega^* = \frac{1}{BC-A^2}\left(B\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^m} - A\Sigma^{-1}\mu\right) + \frac{1}{BC-A^2}\left(C\Sigma^{-1}\mu - A\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^m}\right)\underbrace{\mu_{obj}}_{\to \mu_p}}$

I - 1.3 - Frontière efficiente (FE)



La FE est l'ensemble des portefeuilles optimaux efficients.

Nous avons trouvé les port. optimaux ω^*.
Calculons la variance d'un tel portefeuille.

$$\sigma_p^2 = \omega^{*\prime}\Sigma^{-1}\omega^* \underset{(*)}{=} \left(\frac{\lambda_1}{2}\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^m} + \frac{\lambda_2}{2}\Sigma^{-1}\mu\right)'\Sigma\,\omega^*$$

$$= \left(\frac{\lambda_1}{2}1_{\mathbb{R}^m}'\Sigma^{-1} + \frac{\lambda_2}{2}\mu'\Sigma^{-1}\right)\Sigma\,\omega^*$$

$$= \frac{\lambda_1}{2}1_{\mathbb{R}^m}'\underbrace{\Sigma^{-1}\Sigma}_{I_d}\omega^* + \frac{\lambda_2}{2}\mu'\underbrace{\Sigma^{-1}\Sigma}_{I_d}\omega^*$$

$$= \frac{\lambda_1}{2}\underbrace{1_{\mathbb{R}^m}'\omega^*}_{=1} + \frac{\lambda_2}{2}\underbrace{\mu'\omega^*}_{\mu_{obj}}$$

$$\Rightarrow \sigma_p^2 = \frac{\lambda_1}{2} + \frac{\lambda_2}{2}\mu_{obj} = \frac{B - \mu_{obj}A}{BC-A^2} + \frac{\mu_{obj}C - A}{BC-A^2}\mu_{obj}$$

$$\Rightarrow \sigma_p^2 = \frac{1}{BC-A^2}\left(C\mu_{obj}^2 - 2A\mu_{obj} + B\right)$$

$$= \frac{1}{BC-A^2}\left(C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B\right)$$

Ecrivons cette équation différemment.

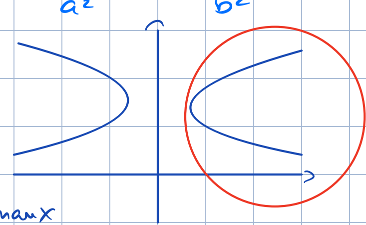
$$\sigma_p^2 = \frac{C}{BC-A^2}\left(\mu_p^2 - 2\frac{A}{C}\mu_p + \frac{B}{C}\right)$$

$$= \frac{C}{BC-A^2}\left(\mu_p^2 - 2\frac{A}{C}\mu_p + \frac{A^2}{C^2} + \underbrace{\frac{B}{C} - \frac{A^2}{C^2}}_{\frac{BC-A^2}{C^2}}\right)$$

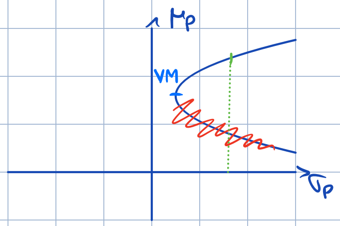
$$\Rightarrow \sigma_p^2 = \frac{C}{BC-A^2}\left(\mu_p + \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C}$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_p^2}{1/C} - \frac{\left(\mu_p - \frac{A}{C}\right)^2}{(BC-A^2)/C^2} = 1$$

Rappel : L'équat° d'une hyperbole est : $\frac{(x-r)^2}{a^2} - \frac{(y-r)^2}{b^2} = 1$



On faisant varier μ_p, on peut représenter les port. optimaux dans le plan (σ_p, μ_p)



La partie de l'hyperbole située en-dessous de VM n'est bien entendu pas efficiente puisqu'il est possible d'obtenir, pour un même risque, un rendement + élevé.

Calcul de VM

1) $\sigma_p^2 = f(\mu_p)$ $\qquad \min\limits_{\mu_p} f(\mu_p)$

2) formule du foyer d'une hyperbole

3) Outre l'équation définissant la FE, nous pouvons déterminer le port. ayant la variance la + faible (le port. de variance minimale)

$$\begin{cases} \min\limits_{w \in \mathbb{R}^n} w' \Sigma w \\ \text{s.c } w' 1_{\mathbb{R}^n} = 1 \end{cases}$$

Le Lagrangien s'écrit : $\mathcal{L}(w, \lambda) = w' \Sigma w - \lambda (w' 1_{\mathbb{R}^n} - 1)$

$$\nabla_w \mathcal{L}(w, \lambda) = 0 \Rightarrow 2 \Sigma w - \lambda 1_{\mathbb{R}^n} = 0$$

$$\Rightarrow 2 \Sigma w = \lambda 1_{\mathbb{R}^n}$$

$$\Rightarrow w = \frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n} \qquad (**)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(w, \lambda) = 0 \Rightarrow w' 1_{\mathbb{R}^n} = 1$$

On remplace w dans cette dernière relat°

$$\left(\frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n}\right)' 1_{\mathbb{R}^n} = 1 \quad \Rightarrow \frac{\lambda}{2} \underbrace{1'_{\mathbb{R}^n} \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n}}_{=C} = 1$$

$$\xRightarrow{(**)} \boxed{w^* = \frac{1}{C} \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n}}$$

On peut également calculer le rendement espéré et le risque :

$$\mu_{VM} = \mu' w_{VM} = \frac{1}{C} \overbrace{\mu' \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n}}^{=A} = \frac{A}{C}$$

$$\Rightarrow \sigma_{VM} = \sqrt{w'_{VM} \Sigma w_{VM}} = \sqrt{\frac{1}{C^2} (\Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n})' \Sigma (\Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n})}$$

$$= \sqrt{\frac{1}{C^2} 1'_{\mathbb{R}^n} \underbrace{\Sigma^{-1} \Sigma}_{= I_d} 1_{\mathbb{R}^n}} = \sqrt{\frac{1}{C^2} \underbrace{1'_{\mathbb{R}^n} \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n}}_{=C}}$$

$$\Rightarrow \sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{C}}$$

→ EXERCICE : PORTEFEUILLE ORTHOGONAL (voir note dédiée).

I - 2 - Marché à n actifs risqués et un actif sans risque

Introduisons désormais un actif sans risque et observons comment se transforme la FE.

Formellement, le portefeuille est maintenant caractérisé par un vecteur w de $\mathbb{R}^n$ et par le réel w_{n+1} poids du portefeuille investi dans l'actif sans risque. Il a un rendement certain r_f.

Les caractéristiques du portefeuille deviennent :

Marché à n actifs risqués	Introduction à l'actif sans risque
$\tilde{R}_p = w'\tilde{R}$	$\tilde{R}_p = w'\tilde{R} + w_{n+1} r_f$
$\mu_p = \mathbb{E}[\tilde{R}_p] = w'\mu$	$\mu_p = \mathbb{E}[\tilde{R}_p] = w'\mu + w_{n+1} r_f$
$\sigma_p^2 = Var(\tilde{R}_p) = w'\Sigma w$	$\sigma_p^2 = Var(\tilde{R}_p) = w'\Sigma w$
$w' 1_{\mathbb{R}^n} w = 1$ $= (1-1)$	$w' 1_{\mathbb{R}^n} w + w_{n+1} = 1$ $\Rightarrow w_{n+1} = 1 - w' 1_{\mathbb{R}^n} w$
	$\Rightarrow \mu_p = w'\mu + (1 - w' 1_{\mathbb{R}^n}) r_f$ $= w'\mu + r_f - r_f w' 1_{\mathbb{R}^n}$ $= w'(\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n}) + r_f$

Notation : On introduit $\Pi = \mu - r_f 1_{\mathbb{R}^n}$ le vecteur primes de risque

$$\Rightarrow \mu_p = w'\Pi + r_f$$

I - 2.1 - Portefeuille optimal de Markowitz

$$\min_{\substack{w \in \mathbb{R}^n \\ w_{n+1} \in \mathbb{R}}} w'\Sigma w$$

$$\text{s.c} \begin{cases} w' 1_{\mathbb{R}^n} + w_{n+1} = 1 & \Rightarrow w_{n+1} = 1 - w' 1_{\mathbb{R}^n} \\ w'\mu + w_{n+1} r_f = \mu_{obj} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \min_{w \in \mathbb{R}^n} w'\Sigma w \qquad w_{n+1} = 1 - w' 1_{\mathbb{R}^n}$$

$$\text{s.c } w'\Pi + r_f = \mu_{obj} \Rightarrow w'\Pi + r_f - \mu_{obj} = 0$$

Le lagrangien du problème est :

$$\mathcal{L}(\omega,\lambda) = \omega'\Sigma\omega - \lambda(\omega'\Pi + r_f - \mu_{obj})$$

$$\nabla_\omega \mathcal{L}(\omega,\lambda) = 0 \Rightarrow 2\Sigma\omega - \lambda\Pi = 0$$

$$\Rightarrow 2\Sigma\omega = \lambda\Pi$$

$$\Rightarrow \Sigma\omega = \frac{\lambda\Pi}{2}$$

$$\Rightarrow \omega = \frac{\lambda}{2}\Sigma^{-1}\Pi \qquad (2)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\lambda}(\omega,\lambda) = 0 \Rightarrow \omega'\Pi + r_f - \mu_{obj} = 0.$$

On remplace ω dans cette relation et on obtient

$$\underbrace{\frac{\lambda}{2}(\Sigma^{-1}\Pi)'}_{\omega'}\Pi + r_f - \mu_{obj} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda}{2}\Pi'\Sigma^{-1}\Pi + r_f - \mu_{obj} = 0 \Rightarrow \frac{\lambda}{2} = \frac{\mu_{obj} - r_f}{\Pi'\Sigma^{-1}\Pi}$$

On remplace $\frac{\lambda}{2}$ dans la relation (2) et on obtient

$$\boxed{\omega^* = \frac{\mu_{obj} - r_f}{\Pi'\Sigma^{-1}\Pi}\Sigma^{-1}\Pi}$$

$$\omega^*_{m\alpha} = 1 - \omega^{*\prime}1_{\mathbb{R}^m} = 1 - \underbrace{\frac{\mu_{obj} - r_f}{\Pi'\Sigma^{-1}\Pi}}_{\text{Scalaire}}(\Sigma^{-1}\Pi)'1_{\mathbb{R}^m}$$

$$= 1 - \frac{\mu_{obj} - r_f}{\Pi'\Sigma^{-1}\Pi}\Pi'\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^m}$$

$$= \frac{\Pi'\Sigma^{-1}(\Pi - (\mu_{obj} - r_f)1_{\mathbb{R}^m})}{\Pi'\Sigma^{-1}\Pi} = \frac{\Pi'\Sigma^{-1}(\mu - \mu_{obj}1_{\mathbb{R}^m})}{\Pi'\Sigma^{-1}\Pi}$$

I - 2.2 - Frontière efficiente

La variance du portefeuille optimal trouvé précédemment est :

$$\sigma_p^2 = w^{*\prime}\Sigma w^* \quad \text{avec } w^* = \overset{\text{Scalaire}}{\frac{\mu_{obj}-r_f}{\pi'\Sigma^{-1}\pi}}\,\Sigma^{-1}\pi$$

$$\sigma_p^2 = \left(\frac{\mu_{obj}-r_f}{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\right)^2 (\Sigma^{-1}\pi)'\,\Sigma\,(\Sigma^{-1}\pi)$$

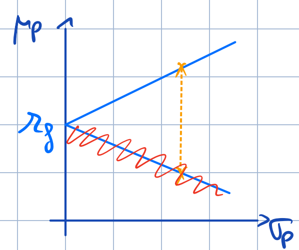
$$\sigma_p^2 = \left(\frac{\mu_{obj}-r_f}{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\right)^2 \pi'\Sigma^{-1}\Sigma\,\Sigma^{-1}\pi$$

$$= \frac{(\mu_{obj}-r_f)^2}{(\pi'\Sigma^{-1}\pi)^{\cancel{2}}}\,\cancel{\pi'\Sigma^{-1}\pi} = \frac{(\mu_{obj}-r_f)^2}{\pi'\Sigma^{-1}\pi}$$

$$\Rightarrow \sigma_p = \frac{|\mu_{obj}-r_f|}{\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}}$$

En faisant varier μ_{obj} on peut représenter les portefeuilles optimaux dans le plan (σ,μ).

$$\Rightarrow \mu_{obj} = \begin{cases} \sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\,\sigma_p + r_f & \text{si } \mu_{obj} \geq r_f \\ r_f - \sigma_p\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi} & \text{si } \mu_{obj} < r_f \end{cases}$$



Le cas $\mu_p < r_f$ n'est pas efficient puisque pour le même risque nous pouvons obtenir un rendement élevé.

Exercice : Montrer que avec deux actifs risqués corrélés parfaitement négativement $(\rho = -1)$ on peut construire un portefeuille sans risque.

$$A_1(\mu_1, \sigma_1) \quad A_2(\mu_2, \sigma_2) \quad \rho = -1$$

$$(\alpha \quad 1-\alpha)'$$

poids investi dans A_1 — " dans A_2

On veut mq $\exists \alpha$ tq $(\alpha \; 1-\alpha)'$ soit le port. sans risque.

$$Var(\alpha \tilde{R}_{A_1} + (1-\alpha)\tilde{R}_{A_2}) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\underbrace{Cov(\tilde{R}_{A_1},\tilde{R}_{A_2})}_{\rho\,\sigma_{A_1}\sigma_{A_2}} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 \sigma_1^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_2^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 = 0$$

$$\Rightarrow (\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_2)^2 = 0$$

$$\Rightarrow \alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_2 = 0 \Rightarrow \alpha(\sigma_1+\sigma_2) = \sigma_2$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$$

Rq : $0 < \alpha < 1$.

$$w^* = (10\% \quad 30\% \quad 60\%)' \quad 100€$$

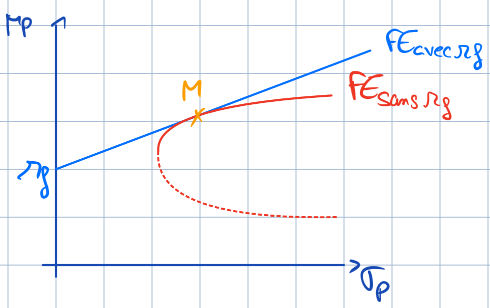
$$w^* = (-10\% \quad 50\% \quad 60\%)' \quad 100€$$

Vente à découvert +10€

achat du 2ème actif 50€
3e actif 60€

Exercice : Dans l'ensemble des port. optimaux efficients avec la présence d'un actif sans risque il existe un port. uniquement composé d'actifs risqués.
Trouver le rendement espéré, l'écart-type et le port.
Exprimer les résultats en fonction de π, Σ et μ.

Rq : Le port. est à l'intersect° de la FE déterminé avec l'absence d'actif sans risque avec celle déterminée précédemment avec la présence de l'actif sans risque.
Le port. est appelé portefeuille de marché.



Solution : $M \in FE_{avec\ r_f} \Rightarrow w^*, \underbrace{w^*_{mt}}_{=0}$

moyenne composantes $= 1$

$$w_M^* = \frac{\mu_M - r_f}{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\Sigma^{-1}\pi$$. Nous ajoutons à cette équation la contrainte $w_M^{*'} 1_{\mathbb{R}^n} = 1$ $(\Leftrightarrow w^*_{mt} = 0)$

$$\Leftrightarrow 1_{\mathbb{R}^n} w_M^* = 1 \Rightarrow \frac{\mu_M - r_f}{\pi'\Sigma^{-1}\pi} 1'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^n} = 1$$

On remplace

$$\Rightarrow \mu_M = r_f + \frac{\pi'\Sigma^{-1}\pi}{1'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\pi} = \frac{r_f 1'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\pi + \pi'\Sigma^{-1}\pi}{1'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\pi}$$

$$\Rightarrow \mu_M = \frac{(\overbrace{r_f 1'_{\mathbb{R}^m} + \pi'}^{\mu'})\Sigma^{-1}\pi}{1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}\pi}$$

Rappel : $\pi = \mu - r_f 1_{\mathbb{R}^m}$
$\Rightarrow \pi' = \mu' - r_f 1_{\mathbb{R}^m}$

$$\Rightarrow \boxed{\mu_M = \frac{\mu'\Sigma^{-1}\pi}{1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}\pi}}$$

On remplace μ_M dans $\omega_M^* = \frac{\mu_M - r_f}{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\Sigma^{-1}\pi$

$$\Rightarrow \boxed{\omega_M^* = \frac{\Sigma^{-1}\pi}{1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}\pi}}$$

Pour trouver σ_M on utilise l'équation de la FE $\sigma_M = \frac{\mu_M - r_f}{\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}}$

$$\Rightarrow \sigma_M = \frac{\frac{\mu'\Sigma^{-1}\pi}{1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}\pi} - r_f}{\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}} = \frac{\mu'\Sigma^{-1}\pi - r_f 1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}\pi}{1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}\pi\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}} = \frac{(\mu' - r_f 1'_{\mathbb{R}^m})\Sigma^{-1}\pi}{1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}\pi\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_M = \frac{\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}}{1'_{\mathbb{R}^m}\Sigma^{-1}\pi}}$$

Les limites du modèle

Le modèle de Markowitz constitue le modèle standard.
Il repose sur différentes hypothèses qui ne sont pas toujours conformes à la réalité :

* Les ventes à découvert peuvent être constituées sans contraintes sur tous les actifs
* L'investissement ne porte que sur une seule période
* L'hypothèse sur $\Sigma \Rightarrow$ pb lié à l'estimation et au calcul de l'inverse.
* Les sentiments des investisseurs ne sont pas pris en compte.

Site ABC Bourse Boursorama.

Rappel : **Théorème de Bayes**

Soient A et B 2 évènements, $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(B|A)\,\mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$

* $\mathbb{P}(A)$ est la proba "a priori" de A. "a priori" dans le sens où elle ne prend pas en compte l'informat° $\mathbb{P}$.

* $\mathbb{P}(A|B)$ est la proba "a posteriori" de A sachant B (elle prend en compte l'informat° disponible B).

Théorème de Bayes pour les densités.

Soient X, Y 2 va absolument continues ⟹ elles admettent des densités.

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)}{f_Y(y)} \implies f_{X|Y}(x|y) \propto f_{Y|X}(y|x)\, f_X(x)$$

Rappel : **Densité gaussienne**

Soit X un vecteur gaussien de dimens° n et A une matrice $\in \mathcal{M}_{k,n}(\mathbb{K})$

⟹ AX est un vecteur gaussien de dimens° k et $f_X(x) \propto f_{AX}(Ax)$

II - Modèle de Black - Litterman

II -1- Cadre général

Black et Litterman ont développé en 1990 un modèle d'allocation sur lequel nous pouvons effectuer des "vues" de sur ou sous-évaluation sur les actifs.

Nous appellerons "vues" les différents sentiments (anticipations) de l'investisseur relatifs aux actifs disponibles sur le marché.

L'optimisation de Markowitz en présence de l'actif sans risque constitue le socle du modèle. Nous en conservons les principales notions et notations.

Contrairement à un problème d'optimisation classique qui ne part de rien, pour le modèle BL, on a besoin d'un port. initial (benchmark) w.

C'est un port. de référence.

Le modèle de BL permet de combiner les relations de Markowitz pour le benchmark avec les anticipations de l'investisseur.

Rappel : Dans le modèle de Markowitz, on avait n actifs risqués de rendements espérés μ_i ($i \in [\![1,n]\!]$), $\mu = (\mu_1 - \mu_n)'$ et de matrice de Var-Cov Σ avec μ, Σ déterministes.

Dans le modèle de BL, nous maintenons les hypothèses sur Σ, mais μ est inconnu. Il devient aléatoire et on le note désormais $\tilde{\mu}$ (~ pour v.a) (le ~ indiquant le caractère incertain).

Le but est d'estimer $\tilde{\mu}$ (à partir des vues et du benchmark). Ensuite, on intègre ce vecteur dans un pb d'optimisation de type $\mathbb{E}$ - Var avec ou sans contrainte (on reprend les formules du TD).

En pratique, il est plus rapide d'estimer le vecteur de primes de risque. C'est pourquoi nous essayons d'estimer $\tilde{\pi} = \tilde{\mu} - r_f \mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}$

Black et Litterman font l'hypothèse que $\tilde{\pi}$ suit, a priori, une loi normale.

II - 2 - Hypothèses du modèle

L'originalité du modèle BL repose sur le fait qu'il prend en compte les anticipations (vues) de l'investisseur relatives aux actifs.

Via ce modèle, l'investisseur peut introduire 2 formes de vues :

→ Vue absolue : il juge qu'un actif aura un rendement x.

→ Vue relative : il juge que le rendement d'un actif A surperformera celui de l'actif B de y.

En pratique, les investisseurs raisonnent souvent à travers ce type de schéma.

L'investisseur peut également affecter à ses vues un degré de confiance ± important.

Chaque vue émise se traduit mathématiquement par un port. dit "portefeuille de vue" construit de sorte que la prime de risque de ce port. représente la vue de l'investisseur et la variance représente le niveau d'incertitude associé.

Exemple :

Notre marché se compose de 3 actifs risqués.
L'investisseur a 2 vues : une absolue et une relative.

Vue absolue : l'actif A_1 aura une prime de risque de 3%.

$$\tilde{\Pi} = \begin{pmatrix} \tilde{\Pi}_1 \\ \tilde{\Pi}_2 \\ \tilde{\Pi}_3 \end{pmatrix}$$ quel sera P_1' pour donner

$$P_1'\tilde{\Pi} = \dots \tilde{\Pi}_1 = 3\%$$

On introduit alors le port. composé uniquement de l'actif A_1.

$$P_1' = (1 \ 0 \ 0) \quad \text{Somme} = 1.$$

$$P_1'\tilde{\Pi} = 3\% + \varepsilon_1 \qquad \text{où } \varepsilon_1 \text{ va gaussienne centrée}$$

→ Interprétation : La prime de risque $P_1'\tilde{\Pi}$ du port. s'élève comme le suggère la vue à 3%. Cependant on atténue cette affirmat° en introduisant l'aléa ε_1 : la prime de risque se situe désormais à 3%.
La variance de ε_1 joue alors un rôle particulier : elle spécifie l'incertitude de l'investisseur

$\sigma^2_{\varepsilon_1} = 20\% \implies$ l'investisseur est sûr à 80% de sa vue.

$\sigma^2_{\varepsilon_1} = 0 \implies$ l'investisseur est certain de sa vue $(\varepsilon_1 \sim \mathcal{N}(0,0) \implies \varepsilon_1 = 0)$.

Vue relative : l'actif A_2 sur-performera l'actif A_3 de 1%.

Càd $\tilde{\Pi}_2 - \tilde{\Pi}_3 = 1\%$ en maths
pour que $P_2'\tilde{\Pi} = 1\%$ il faut $P_2' = (0 \ 1 \ -1)$ Somme = 0

$$P_2'\tilde{\Pi} = 1\% + \varepsilon_2 \quad \text{où } \varepsilon_2 \text{ va gaussienne centrée et } \varepsilon_1 \perp \varepsilon_2$$

La variance de ε_2 traduit l'incertitude de l'investisseur

Rq : Le port de vue relative = port des actifs performants $(0 \ 1 \ 0)$ → dans notre ex A_2 est le seul qui perf.
⊖
port des actifs sous-performants $(0 \ 0 \ 1)$ → dans notre ex, A_3 est le seul qui sous-perf.

Vue absolue → Somme = 1 Vue relative Somme = 0 TOUJOURS VRAI !

Généralisation :

L'investisseur émet k vues sur les actifs du marché. Il rassemble ses vues matriciellement avec la relation suivante :

$$P\tilde{\pi} = q + \varepsilon \quad \text{avec } \varepsilon \sim \mathcal{N}_k(0_k, \Omega)$$ ← matrice diagonale

$P \in \mathcal{M}_{k,m}(\mathbb{K})$ et $q \in \mathbb{R}^k$ vecteur de dimens° k.

Dans l'exemple,

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow P_1' \\ \leftarrow P_2' \end{array} \qquad q = \begin{pmatrix} 3\% \\ 1\% \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} \sigma_{\varepsilon_1}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{\varepsilon_2}^2 \end{pmatrix}$$

L'investisseur peut ne pas avoir de vue sur un ou plusieurs actifs.

Exercice :

L'investisseur a 3 vues sur les 7 actifs du marché.
D'après lui :

* l'actif 1 aura une prime de risque de 5% (incertitude de la vue : 20%)
* l'actif 2 sur-performera l'actif 7 de 1,5% (confiance de la vue : 50%)
* l'actif 4 sur-performera la somme des actifs 3 et 5 de 2% (confiance de la vue 70%)

→ Écrire P, q et Ω.

$$q = \begin{pmatrix} 5\% \\ 1{,}5\% \\ 2\% \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 20\% & & \\ & 50\% & \\ & & 30\% \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(20\%, 50\%, 30\%)$$

↑ incertitude

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow P_1' \\ \leftarrow P_2' \\ \leftarrow P_3' \end{array}$$

On ne peut pas avoir
$P_3' = (0\ 0\ -1\ 2\ -1\ 0\ 0)$
car port. actifs perf $\ominus$ port. actifs sous-perf
(ici 4) (ici 3 et 5)

$\underbrace{(0\,0\,0\,1\,0\,0\,0)}_{\text{Somme}=1} \ominus (0\ 0\ \alpha\ 0\ 1-\alpha\ 0\ 0) \to$ Somme $=1$.

donc ici $\alpha = \frac{1}{2}$ car pas + d'info

Rq : Le poids de chaque actif dans le port de vue relative est

→ pour les actifs perf : $\frac{1}{\text{nb actifs perf}}$ → par les actifs non-perf : $-\frac{1}{\text{nb actifs sous-perf.}}$

$$P\tilde{\pi} = q + \varepsilon \quad \text{où } \varepsilon \sim \mathcal{N}_k(0_k, \Omega) \Rightarrow P\tilde{\pi} \sim \mathcal{N}_k(q, \Omega)$$

$$f_{P\tilde{\pi}}(P_y) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}\sqrt{|\Omega|}} e^{-\frac{1}{2}(P_y - q)'\Omega^{-1}(P_y - q)}$$

N'oublions pas que dans ce modèle, on a un port de référence w.
Soit π le vecteur de primes de risques implicites.

Black et Litterman font l'hypothèse suivante :

$$\boxed{\pi | \tilde{\pi} \sim \mathcal{N}_n(\tilde{\pi}, \tau\Sigma)}$$ où τ est une pondérat° que l'on se donne sur les primes implicites.

τ dépend de la confiance de l'investisseur VS ses propres anticipations.
$\tau \in [0, 1]$.

Exemple :

τ petit → confiance + grande dans les primes implicites et − de confiance dans les vues.

The factor Tau in the BL Model, 2010, Jay Walters.

$$f_{\pi|\tilde{\pi}}(x|y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\sqrt{|\tau\Sigma|}} e^{-\frac{1}{2}(x-y)'(\tau\Sigma)^{-1}(x-y)}$$

D'après le thm de Bayes, $f_{\tilde{\pi}|\pi}(y|x) = \frac{f_{\pi|\tilde{\pi}}(x|y) f_{\tilde{\pi}}(y)}{f_\pi(x)}$ ou encore

$$f_{\tilde{\pi}|\pi}(y|x) \propto f_{\pi|\tilde{\pi}}(x|y) f_{\tilde{\pi}}(y)$$

$$\Rightarrow f_{\tilde{\pi}|\pi}(y|x) \propto f_{\pi|\tilde{\pi}}(x|y) f_{P\tilde{\pi}}(P_y)$$

$$\Rightarrow f_{\tilde{\pi}|\pi}(y|x) \propto e^{-\frac{1}{2}(x-y)'(\tau\Sigma)^{-1}(x-y) - \frac{1}{2}(P_y - q)'\Omega^{-1}(P_y - q)}$$

Or,

$$-\frac{1}{2}\left[(x-y)'(\tau\Sigma)^{-1}(x-y) + (P_y - q)'\Omega^{-1}(P_y - q)\right] = -\frac{1}{2}\left[(x'-y')(\tau\Sigma)^{-1}(x-y) + (y'P' - q')\Omega^{-1}(P_y - q)\right]$$

$$= -\frac{1}{2}\left[x'(\tau\Sigma)^{-1}x - x'(\tau\Sigma)^{-1}y - y'(\tau\Sigma)^{-1}x + y'(\tau\Sigma)^{-1}y\right.$$

$$+ y'P'\Omega^{-1}Py - y'P'\Omega^{-1}q - q'\Omega^{-1}Py + q'\Omega^{-1}q]$$

$$= -\frac{1}{2}[y'Hy + A - C'y - y'C]$$

où $H = (\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P \longrightarrow \underline{Rq} : H' = H$

$$A = x'(\tau\Sigma)^{-1}x + q'\Omega^{-1}q$$

$$C = (\tau\Sigma)^{-1}x + P'\Omega^{-1}q \Rightarrow C' = x'(\tau\Sigma)^{-1} + q'\Omega^{-1}P$$

$$= -\frac{1}{2}[y'H'HH^{-1}y + A - C'H^{-1}Hy - y'H'H^{-1}C]$$

$$= -\frac{1}{2}[(Hy - C)'H^{-1}(Hy - C) - C'H^{-1}C + A].$$

$$\Rightarrow f_{\tilde{\pi}|\pi}(y|x) \propto e^{-\frac{1}{2}(-C'H^{-1}C+A)} e^{-\frac{1}{2}(Hy-C)'H^{-1}(Hy-C)}$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}(Hy-C)'H^{-1}(Hy-C)}$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}(y-H^{-1}C)'H'H^{-1}H(y-H^{-1}C)}$$

$$\propto e^{-\frac{1}{2}(y-H^{-1}C)H(y-H^{-1}C)}$$

$\Rightarrow \tilde{\pi}|\pi \sim \mathcal{N}_m(H^{-1}C, H^{-1})$ Black et Litterman font l'estimation :

$$\tilde{\pi}_{BL} = H^{-1}C$$

$$\boxed{\tilde{\pi}_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q]}$$

La dernière étape consiste simplement à intégrer ce vecteur dans un pb d'optimisation E-Var.

$$\boxed{\omega_{BL} = (k\Sigma)^{-1}\tilde{\pi}_{BL}}$$

aversion au risque

équation à retrouver au TD 2.

Remarque :

1) Dans le cas d'un unique actif : $\Sigma = \sigma^2$ la variance de l'actif,
$P = 1$ en effet puisqu'il n'y a qu'un actif, la vue ne peut être qu'absolue ;

$\Omega = \omega^2$ représente l'incertitude de la vue, q est un scalaire.

$$\tilde{\Pi}_{BL} = \frac{\frac{\Pi}{\tau\sigma^2} + \frac{q}{\omega^2}}{\frac{1}{\tau\sigma^2} + \frac{1}{\omega^2}}$$

2) L'investisseur n'avait aucune vue $\Rightarrow P=0$ et $\tilde{\Pi}_{BL} = (\tau\Sigma)(\tau\Sigma)^{-1}\Pi = \Pi$.

3) L'investisseur est certain de toutes ses vues $\Rightarrow \Omega$ est nulle et perd son caractère inversible. L'approche ne convient plus.

Dans ce cas, la meilleure estimation de Π est obtenue en minimisant la variance autour des primes implicites.

$$\begin{cases} \min\limits_{\tilde{\Pi}} (\tilde{\Pi}-\Pi)'(\tau\Sigma)^{-1}(\tilde{\Pi}-\Pi) \\ s.c\ P\tilde{\Pi} = q \qquad (P\tilde{\Pi} \sim \mathcal{N}(q,\Omega) \text{ et } \Omega = 0) \end{cases}$$

Décomposition du risque d'un actif.

Les fluctuations du cours d'un actif peuvent être attribuées d'une part à des facteurs communs qui affectent l'ensemble du marché et d'autre part, à des causes spécifiques de l'entreprise.

Le risque d'une action se compose de 2 risques :

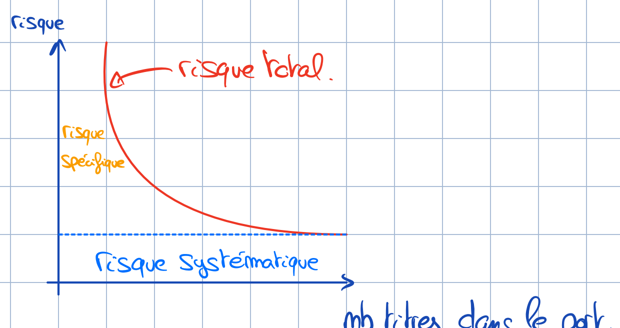
* Le risque systématique : risque qui ne peut pas être éliminé par diversification.
* Le risque spécifique : risque propre à l'instrument financier considéré

Facteurs : mauvaise gestion des ressources humaines de l'entreprise, qualité du management...

Les risques spécifiques des différentes entreprises sont, en général, indépendants les uns des autres et peuvent donc disparaître par diversification.

Le risque total = risque spécifique + risque systématique.

Influence de la taille du port. sur le risque



Les premiers modèles

* le modèle de marché (modèle diagonal)

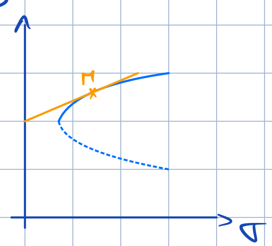
* le MEDAF

① Modèle diagonal (Sharpe 1959)

$$\tilde{R}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_M + \varepsilon_i \quad i \in [\![1, n]\!]$$

où $\tilde{R}_i$ = le rendement aléat. de l'actif i.
$\tilde{R}_M$ = le rendement aléat. du port. de marché
α_i, β_i des ctes propres au titre i.
ε_i V.a gaussienne centrée
$\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\varepsilon_i}^2) \perp\!\!\!\perp \tilde{R}_M$

Rappel:



$$\overset{\mathbb{E}}{\Longrightarrow} \mathbb{E}[\tilde{R}_i] = \alpha_i + \beta_i \, \mathbb{E}[\tilde{R}_M]$$

$$\Longrightarrow \mu_i = \alpha_i + \beta_i \, \mu_M$$

$$\overset{Var}{\Longrightarrow} \underbrace{\sigma_i^2}_{\text{risque total (variance)}} = \underbrace{\beta_i^2 \sigma_M^2}_{\text{risque systématique}} + \underbrace{\sigma_{\varepsilon_i}^2}_{\text{risque spécifique}}$$

⑪ MEDAF (Modèle d'Équilibre Des Actifs Financiers)

CAPM (Capital Asset Pricing Model)

Une dizaine d'années après les travaux de Markowitz et sur les bases de ces derniers, Sharpe, Lintner, Treynor et Mossin, développèrent, dans les années 60, un modèle qui donne la relation entre le rendement espéré d'un titre quelconque et son risque.

Hyp:

① Les investisseurs évaluent les port. en terme d'$\mathbb{E}$ et de Var des rendements sur une période.

② Le marché est parfait (actifs divisibles, pas de coût de transact°, pas de restrictions sur les ventes à découvert...)

③ Les investisseurs ont accès aux mêmes opportunités d'investissement

④ Les anticipat° des rendements ($\mathbb{E}$, Var, Cov) sont identiques

Sous ces hypothèses, tous les investisseurs déterminent la même FE et le même port. M

II - 2.1 - Droite de marché

Prop :

Pour tout port. efficient P, on a :

① $$\mu_P = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_P$$

Preuve :

$$P \text{ efficient} \Rightarrow P \in FE \Rightarrow \mu_P = r_f \pm \sqrt{\pi' \Sigma^{-1} \pi}\,\sigma_P$$

$$M \text{ le port} \in FE \Rightarrow \mu_M = r_f \pm \sqrt{\pi' \Sigma^{-1} \pi}\,\sigma_M$$

$$\Rightarrow \sqrt{\pi' \Sigma^{-1} \pi} = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$$

on remplace

Rq :

Notat° : $\frac{\mu - r_f}{\sigma}$ = ratio Sharpe

D'après ① : $\frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P} = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}$ ⇒ tous les port. eff ont le m̃ ratio Sharpe, celui du port. de marché.

prix du risque

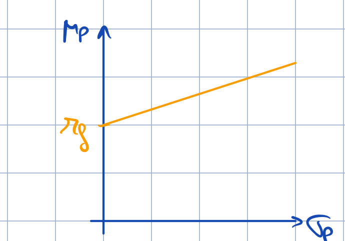
(1) $$\mu_P = r_f + \underbrace{\frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_P}_{\text{prime de risque}}$$

qté de risque

rend. esp de P

taux sans risque

L'équation (1) est représentée graphiquem^t par une droite appelée CML (Capital Market Line) ou droite de marché des port.



$(= FE_{\text{Markowitz}})$

II - 2.2 - Le MEDAF

L'équat° (1) n'est valide que pour des port. efficients et non pas pour un titre individuel.

Le MEDAF établit la relation qui doit prévaloir entre le risque et le rendement espéré d'un titre / port. quelconque.

Prop : (MEDAF général)

i) Il existe 2 paramètres λ et θ tq $\forall$ actif $i \in [\![1,m]\!]$.

$$(2) \quad \mu_i = \lambda + \theta \sigma_{iM} \quad \text{avec } \sigma_{iM} = \mathrm{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)$$

ii) La relat° (2) est vraie pour tout port P efficient au mom :

$$\mu_P = \lambda + \theta \sigma_{PM}$$

iii) La relation (2) s'écrit aussi :

$$(3) \quad \mu_i = \lambda + \beta_i (\mu_M - \lambda) \quad \text{où } \beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

Preuve :

i) Soit P optimal au sens de Markowitz
$w_p = (w_1 - w_m)'$

Rappel : On a trouvé ces port en résolvant un pb d'optimisat°
$\nabla_w \mathcal{L}(w, \lambda_1, \lambda_2) = 0$

$$2\Sigma w_P - \lambda_1 1_{\mathbb{R}^m} - \lambda_2 \mu = 0$$

$$\Leftrightarrow \mu + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} 1_{\mathbb{R}^m} - \frac{2}{\lambda_2} \Sigma w_P = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,m]\!], \; \mu_i + \underset{-\lambda}{\underset{\parallel}{\frac{\lambda_1}{\lambda_2}}} - \underset{\theta}{\underset{\parallel}{\frac{2}{\lambda_2}}} \sum_{j=1}^m w_j \sigma_{ij} = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall i \in [\![1,m]\!], \; \mu_i - \lambda = \theta \underbrace{\sum_{j=1}^m w_j \sigma_{ij}}$$

$$\sum_{j=1}^m w_j \mathrm{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j) = \mathrm{Cov}(\tilde{R}_i, \underbrace{\sum_{j=1}^m w_j \tilde{R}_j}_{\tilde{R}_P}) = \sigma_{iP}$$

On prend $P = M \Rightarrow \mu_i = \lambda + \theta \sigma_{iM}$

ii) Soit P un port quelconque $(w_1 - w_m)'$

$$\mu_P = \sum_{i=1}^m w_i \mu_i = \sum_{i=1}^m w_i (\lambda + \theta \, \mathrm{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M))$$

$$= \lambda \underbrace{\sum_{i=1}^m w_i}_{=1} + \theta \, \mathrm{Cov}(\underbrace{\sum_{i=1}^m w_i \tilde{R}_i}_{\tilde{R}_P}, \tilde{R}_M)$$

$$\Rightarrow \mu_P = \lambda + \theta \sigma_{PM}$$

iii) On appliquant (2) à M lui-même :

$$\mu_M = \lambda + \theta \sigma_M^2 \Rightarrow \theta = \frac{\mu_M - \lambda}{\sigma_M^2}$$

On remplace θ par cette valeur dans (2) :

$$\mu_i = \lambda + \underbrace{\frac{\mu_M - \lambda}{\sigma_M^2}\sigma_{iM}}_{=\beta_i} \Rightarrow \mu_i = \lambda + (\mu_M - \lambda)\beta_i$$

Prop : (MEDAF 0-Beta)

i) Les port./actifs V dont le rendement n'est pas corrélé avec le port. de marché M, ont tous le même rendem^t espéré μ_V.

ii) Pour tout titre $i \in [\![1,n]\!]$, on a :

$$(4) \quad \mu_i = \mu_V + \beta_i(\mu_M - \mu_V)$$

Preuve :

i) Soit V tq $\underbrace{Cov(\tilde{R}_V, \tilde{R}_M)}_{\sigma_{VM}} = 0 \Big| \Rightarrow \beta_V = 0$

On remplace dans (2) : $\mu_V = \lambda$

ii) On remplace λ par μ_V dans (3) $\Rightarrow$ (4)

Prop : (MEDAF Standard)

Pour tout titre $i \in [\![1,n]\!]$.

$$(5) \quad \mu_i = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f)$$

Preuve :

Dans (4) on considère V = l'actif sans risque

$$\Rightarrow \mu_V = r_f.$$

Le MEDAF + modèle diagonal

MEDAF : $\mu_i = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f)$

Modèle diagonal : $\tilde{R}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_M + \varepsilon_i \overset{\mathbb{E}}{\Rightarrow} \mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_M$

$\Bigg\} \Rightarrow \alpha_i = r_f(1 - \beta_i)$ et β_i le m̂

$$\sigma_i^2 = \underbrace{\beta_i^2 \sigma_M^2}_{\text{risque Syst.}} + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

Interprétation β.

Il représente :

- la part du risque systématique (ou risque non-diversifiable) contenue dans le risque total du titre.

ou encore

- la sensibilité du rendem^t du titre au rendem^t du marché.
  - Si $\beta < 1$, le rend^t du titre varie moins que celui du marché
    $\longrightarrow$ titre "défensif"
  - Si $\beta > 1$, le rend^t du titre varie plus que celui du marché
    $\longrightarrow$ titre "agressif"
  - Si $\beta = 1$, alors en moyenne le titre varie dans les m^ proportions que le march

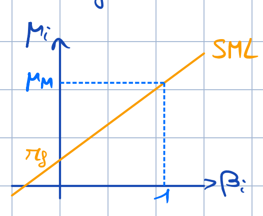
$$\beta_i \overset{\text{déf}}{=} \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$$

Rq : β est une mesure linéaire :

$$\beta_p \overset{\text{déf}}{=} \frac{\sigma_{PM}}{\sigma_M^2} = \frac{\mathrm{Cov}\left(\sum_{i=1}^{n} \omega_i \tilde{R}_i, \tilde{R}_M\right)}{\sigma_M^2} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{\mathrm{Cov}(\tilde{R}_i, \tilde{R}_M)}{\sigma_M^2} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i \beta_i$$

II - 2.3 - Droite SML

Si l'on trace le graphe de la relation (5) dans le plan (β_i, μ_i) on obtient la droite SML (Security Market Line) ou droite de marché des actifs risqués



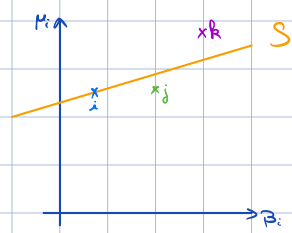
Elle passe par les points $(0, r_f)$ et $(1, \mu_M)$

Rq :

* La SML est la CML au niveau des actifs individuels.

* Contrairement à la CML située dans le plan (σ_p, μ_p) qui n'est, en fait, qu'une demi-droite, la SML dans le plan (β_i, μ_i) est complète puisqu'il n'y a pas de limite théorique pour la valeur de β (+ ou −).

Exemple :



Le titre $i \in$ SML
$\Longrightarrow$ le rendem^t espéré de i, donc son prix actuel, est correctem^t évalué par le marché

En revanche, j et k ne sont pas correctem^t évalués, j étant trop cher (pas assez rentable) et k pas assez cher (trop rentable) compte tenu de leur risque.

Le marché sera à l'équilibre lorsque j, vendu car trop cher, et k, acheté car bon marché, verront leurs prix baisser (resp augmenter).

Limites du MEDAF

- hyp
- M difficilement observable
- stabilité de β dans le temps.

II - 2.4 - Modèle APT (Arbitrage Pricing Theory)

Le modèle APT est l'un des plus célèbres modèles d'évaluation d'actifs financiers (c'est en quelque sorte le principal concurrent du MEDAF).

L'APT repose sur le fait que l'on peut modéliser le rendement espéré d'un titre par une fonction linéaire de différents facteurs socio-économiques ou propres au secteur du titre pondérés selon leur impact sur le titre par un coeff β spécifique.

Ex facteurs :

Cours du pétrole, PIB d'un état, taux d'inflat°, taux de change entre 2 devises...

$$\tilde{R}_i = r_f + \sum_{k=1}^{m} \beta_{k_i} (F_k - r_f) + \varepsilon_i$$

avec F_k les facteurs

$$\beta_{k_i} = \frac{Cov(R_i, F_k)}{Var(F_k)}$$

ε_i va gaussienne centrée $\perp\!\!\!\perp (F_k)_k$.

En prenant l'espérance :

$$\mu_i = r_f + \sum_{k=1}^{m} \beta_{k_i} \left(\mathbb{E}[F_k] - r_f\right)$$

MEDAF = APT à un seul facteur
M

APT ⟶ + réaliste mais plus complexe.

II - 2.5 - Indicateurs de performance

Trois indicateurs de performance constituent la référence lorsqu'on analyse une gestion de portefeuille :

* Ratio Sharpe : $S = \dfrac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}$

↳ Permet de classer des port. de risques différents sur une période donnée, le port. ayant la valeur la plus élevée du ratio, est considéré comme le plus performant puisque, pour un niveau de risque donné, il procure la prime de risque la plus élevée.

* Ratio Treynor : $T = \dfrac{\mu_p - r_f}{\beta_p}$

Les port. ayant le ratio de Treynor le plus élevé est considéré comme le plus performant.

* Alpha de Jensen : $\alpha_p = \mu_p - r_f - \beta_p(\mu_M - r_f)$

Il permet de mesurer la part de rendement non-expliquée par le MEDAF.
MEDAF : $\mu_p = r_f + \beta_p(\mu_M - r_f)$

ex :