ISFA, Université Claude Bernard - Lyon 1
M2 Actuariat, TD1
Finance Mathématique

Exercice 1 La courbe de taux à la date $t = 0$ est comme la suite :

	6 mois	1 an	18 mois	2 ans
r	5,0%	5,8%	6,4%	6,8%

1. On considère une obligation zéro-coupon de maturité $T = 1$ an, quel est son prix à $t = 0$?
2. Quel est le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité $T = 2$ ans ?
3. On considère maintenant une obligation standard de maturité $T = 2$ ans. Le taux de coupon est égal à $c = 6\%$ et les coupons sont payés semestriellement 2 fois par an. Écrire les flux de cette obligation.
4. Calculer le prix de cette obligation à $t = 0$.
5. Après le premier paiement de coupon à $t = 6$ mois, On suppose que la valeur de l'intensité reste unchangée et que la courbe de taux du marché devient

	6 mois	1 an	18 mois	2 ans
r	5,3%	5,7%	6,0%	6,5%

Quelle est la valeur de l'obligation à $t = 6$ mois ?

Exercice 2 On considère un modèle de taux d'intérêt court où $(r_t, t \geq 0)$ suit l'EDS suivante

$$dr_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad r_0 > 0$$

avec μ et σ des constantes. Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par le mouvement brownien $(W_t, t \geq 0)$, i.e. $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$. On définit la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = e^{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}.$$

1. Donner l'EDS satisfaite par r_t sous la probabilité $\mathbb{Q}$.
2. Calculer le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité T à la date $t \leq T$ par

$$B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t].$$

ISFA, Université Claude Bernard - Lyon 1
M2 Actuariat, TD2
Finance Mathématique

Exercice 1 Soit $(r_t, t \geq 0)$ le taux d'intérêt court dans le modèle CIR où

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, r_0 > 0$$

avec a, b et σ des constantes.

1. En écrivant l'équation différentielle ordinaire (EDO) satisfaite par $\mathbb{E}[r_t]$, calculer la moyenne $\mathbb{E}[r_t]$.
2. En applicant la formule d'Itô à r_t^2 et utilisant la méthode similaire que dans l'exercice précédente, calculer la variance $\text{Var}(r_t)$.

Exercice 2 On considère le taux court dans le modèle Vasicek sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$ comme

$$dr_t = a(\widehat{b} - r_t)dt + \sigma dW_t^*, r_0 > 0$$

avec $a, \widehat{b}$ et σ des constantes.

1. Ecrire l'équation différentielle partielle (EDP) satisfaite par le prix de l'obligation zéro-coupon $B(t, r, T)$.
2. On cherche $B(t, r, T)$ de la forme $B(t, r, T) = \exp(-A(T-t)r + C(T-t))$ avec A et C des fonctions ne dépendant que de la maturité restante $\theta = T - t$.
   (a) Ecrire les EDOs satisfaite par A et C.
   (b) Résoudre ces équations et retrouver la formule de Vasicek pour le prix d'une OZC.
3. Calculer la volatilité du prix de l'OZC.

Exercice 3 On considère le modèle Ho-Lee pour modéliser le taux forward

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

où on fixe la volatilité du taux forward comme une constante

$$\sigma(t, T) = -\sigma.$$

1. En utilisant la relation entre la volatilité et le terme drift du taux forward, écrire l'EDS satisfaite par le taux forward.
2. En déduire le taux court r_t.
3. Calculer le prix $B(t, T)$ d'une obligation zéro-coupon de maturité T.

ISFA, Université Claude Bernard - Lyon 1
M2 Actuariat, TD3
Finance Mathmatique

Exercice 1 On considère une obligation qui verse un coupon régulier de montant $C > 0$ à des dates fixées T_i, $i = 1, \cdots, n$.

1. Donner la valeur O_t de cette obligation à une date $t \in [0, T_1)$.

On considère maintenant une option Call qui est écrite sur cette obligation dont la maturité est $T < T_1$ et le strike est $K > 0$.

2. Écrire la fonction payoff de cette option Call.
3. Écrire son prix Π_0 à la date $t = 0$ sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$.
4. On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble $\{O_T \geq K\}$. Re-écrire le prix Π_0 en utilisant $1_{\mathcal{E}}$ sous la probabilité $\mathbb{P}^*$.
5. On considère un modèle de taux d'intérêt affine où le prix de l'obligation zéro-coupon $B(t,T)$ est donné sous forme $B(r_t, t, T) = A(t,T)e^{-r_t C(t,T)}$ qui est une fonction décroissante de taux court r_t avec $A(t,T)$ et $C(t,T)$ des fonctions déterministe positive. Montrer qu'il existe une constante r_K telle que $\mathcal{E} = \{r_T \leq r_K\}$.
6. Soient P^{T_i} et $\mathbb{P}^T$ les probabilités forwardes associées aux obligations zéro-coupon de maturité T_i et T respectivement. Montrer que, en utilisant les probabilités forwardes, le prix de Call peut s'crire sous forme

$$\Pi_0 = \sum_{i=1}^{n} CB(0,T_i)\mathbb{P}^{T_i}(\mathcal{E}) - KB(0,T)\mathbb{P}^T(\mathcal{E})$$