 11/2019

THÉORIE DE LA CRÉDIBILITÉ

Pierre Thérond
pierre@therond.fr
www.therond.fr

6x3h de cours.
POLY DE COURS DISPONIBLE (SLIDES)

examen proche du cours

→ Tarification a posteriori.
→ Jeu de la mutualisation en assurance : risques, segmentation et loi des grands nombres.

→ Définition de classes de risques homogènes puis intégrer la sinistralité pour ajuster la prime.

→ Un système bonus-malus est de la tarification a posteriori (cadre réglementaire et imposé)

PLAN :

1. Introduction
2. Prime de Bayes
3. Estimateurs de crédibilité
4. Modèle de Bühlmann.

Chapitre I : Introduction.

Illustration du fait que les petits contrats ont un risque assuré faible donc une forte volatilité du S/P.

Aujourd'hui, prime sur une base 100 (car c'est un S/P) on passe sur une base ... ?
Va-t-on tarifer à la même prime le contrat 1 et le contrat 3 ? (cf loss ratios annuels des bons contrats)

Exemple de Ragnar - Norberg

alternative 2 : compromis entre p et p_j
⇔ cœur de la théorie de la crédibilité.

Théorie de la fluctuation limitée

prime d'expérience : prime qui ajuste au plus juste la sinistralité historique.

nouvelle tarification : barycentre entre prime moyenne demandée aux assurés (prime collective) et la prime propre à l'assuré. $\Rightarrow$ facteur de crédibilité

Processus de Poisson composé (à revoir) $\quad S = \sum_{k=1}^{N} X_k$

Prime $E[S]$

$c \equiv$ écart relatif

$\varepsilon \equiv$ seuil

Nb : z est le quantile de la loi normale centrée réduite.

(X_k) va iid $\quad Var(X_1) = \sigma^2$

$E(X_1) = \mu$

$(X_k) \perp N \qquad N \sim P(\lambda)$

$E[S] = E[N]\, E[X_1]$

$= \lambda \mu$

$Var(S) = E[N]\{Var(X_1) + E^2[X_1]\} = E[N]\, E[X_1^2]$

$= \lambda(\mu^2 + \sigma^2)$

cf cours de S. Loisel, résultats obtenus en conditionnant par N et en utilisant la loi des probabilités totales.

Crédibilité partielle : même calcul en produisant par le facteur de crédibilité :

$$\Rightarrow \quad Z = \sqrt{\lambda / \lambda_F}$$

λ_F dépend directement de c et de ε, impact important et quel est le bon choix à faire sur ces valeurs.

⚠ Notations et Notions à avoir pour la suite.

$\hookrightarrow$ Formalisation mathématique.

⚠ Deux notations identiques à différencier suivant le contexte.

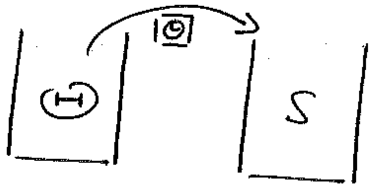
- Θ : ensemble des valeurs possibles pour θ
- Θ : v.a mesurant l'hétérogénéité résiduelle à l'intérieur du portefeuille.
  Distribution notée $U(\theta) \equiv$ fonction de structure du portefeuille.

Prime collective $\equiv$ somme des primes individuelles correctes sur le portefeuille.

$$P^{coll} = \int_{\Theta} \mu(\theta)\, dU(\theta) \hat{=} \mu_0$$

⚠ Une fonction de structure par segment (après la classification)
choix du θ à voir par la suite (non nécessairement univarié ...)
exemple de choix de θ : fréquence de sinistre en assurance auto.

Formulation Bayesienne:



$S|\Theta = \theta$

On observe S_1
S_2
$\vdots$

On cherche à améliorer la connaissance de θ

⚠ Prime individuelle $\equiv$ v.a. $\mu(\Theta)$
Prime collective $\equiv$ Montant certain.

Prime de Bayes $\equiv$ Espérance de la prime individuelle conditionnellement aux données (montant certain donc)

(Prime individuelle correcte $\equiv$ Montant certain)

⚠ On observe jamais les réalisations $\mu(\theta)$ de Θ
↪ but du chapitre suivant.

Chapitre II : Prime de Bayes.

-> formule de Bayes
-> Théorème des probabilités totales
-> décomposition de variance

outils mathématiques en pré-requis.

La prime de Bayes est un estimateur opérationnel dans le sens où on observe les X. La prime individuelle est également un estimateur mais non opérationnel dans le sens où on observe jamais les Θ

Meilleure prime d'expérience : preuve à faire en exercice.

Rappel : $Var(Y) = E[Var(Y|X)] + Var(E[Y|X])$

Prime de Bayes = meilleur estimateur au sens de l'erreur quadratique moyenne.

à retenir

Démonstration 3.2 :

$$u(\theta|N) = \frac{u(\theta)\ P[N|\Theta=\theta]}{P[N]}$$ avec la formule de Bayes.

À faire : exos chap 1 & 2

Chapitre 3 : Estimateurs de crédibilité.

<u>estimateur</u> : $\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}} = \hat{a} + \hat{b}\,\bar{X}$ où $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} X_j$

<u>notations importantes</u> :

$$\tau^2 = Var[\mu(\Theta)]$$
$$\sigma^2 = E[\sigma^2(\Theta)]$$

$$Var(X) = \underbrace{E[Var(X|\Theta)]}_{=\sigma^2} + \underbrace{Var(E[X|\Theta])}_{=\tau^2}$$

<u>interprétation physique</u> :

$E[Var(X|\Theta)]$: en moyenne quelle est la variabilité d'un profil de risque ? variabilité interne du risque.

$Var(E[X|\Theta])$: hétérogénéité du portefeuille, quelle est la variabilité <u>des</u> profils de risque ?

<u>Théorème</u> :

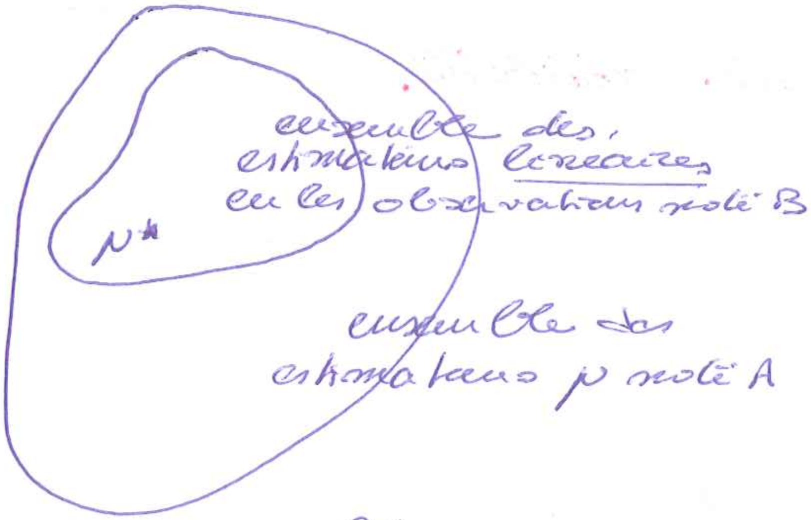
(à savoir par cœur) $\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}} = \alpha\bar{X} + (1-\alpha)\mu_0$

avec μ_0 prime collective.

et $\alpha = \dfrac{n}{n + \sigma^2/\tau^2}$ facteur de <u>crédibilité</u>

remarque : pas de Θ dans cette formule. On ne s'est pas donné un modèle ici. Néanmoins, il faudra estimer σ^2 et τ^2..

μ_0 connu a priori : c'est le tarif moyen du segment



Si le meilleur estimateur $\mu^* \in A$ et calculé comme le meilleur sur A. Il est également le meilleur sur B sachant $B \subset A$ et $\mu^* \in B$.

Rappel :
$$\tilde{\mu}(\Theta) = E[\mu(\Theta) \mid X]$$
$$\mu(\Theta) = E[X \mid \Theta] = \Theta$$
$$\mu_0 = E[X] = E[E[X \mid \Theta]] = E[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta}$$

$$\mu(\theta \mid n_1, \dots, n_k) \propto \mu(\theta) P[N_1 = n_1 - N_k = n_k \mid \Theta = \theta]$$
$\hookrightarrow$ densité $\Gamma\left(\gamma + \sum_{j=1}^{k} n_j ; \beta + k\right)$

Retour à l'exemple du chapitre 3 :

$$\alpha = \frac{k}{k + \left(\frac{\sigma}{\tau}\right)^2}$$

$$\sigma^2 = E[Var(N \mid \Theta)] = E[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta}$$
$$\tau^2 = Var(E[N \mid \Theta]) = Var\,\Theta = \gamma/\beta^2$$

$$\hat{\hat{\mu}}(\theta) = \alpha \bar{X} + (1-\alpha)\frac{\gamma}{\beta}$$
$$= \alpha \frac{1}{k} \sum_{j=1}^{k} X_j + (1-\alpha)\frac{\gamma}{\beta}$$

lire $(\bar{X} = \bar{N})$

$$\alpha = \frac{k}{k + \beta}$$

d'où
$$\hat{\hat{\mu}}(\theta) = \frac{\cancel{\beta}}{k+\beta}\frac{\gamma}{\cancel{\beta}} + \frac{\cancel{k}}{k+\beta}\frac{1}{\cancel{k}}\sum_{j=1}^{k} N_j$$

$$\boxed{\hat{\hat{\mu}}(\theta) = \frac{\gamma + \sum_{j=1}^{k} N_j}{k + \beta}}$$

notation : $K = \left(\dfrac{\sigma/\mu_0}{\tau/\mu_0}\right)^2$ coefficient de crédibilité

remarque : $\alpha \xrightarrow[\text{nombre de sinistres observés}]{} 1$

$$\alpha = \frac{n}{n + \sigma^2/\tau^2} = \frac{\tau^2}{\tau^2 + \frac{\sigma^2}{n}}$$

erreur quadratique moyenne de $p_{coll} = \mu_0$

$$(1-\alpha) = \frac{\sigma^2/n}{\tau^2 + \sigma^2/n}$$

erreur quadratique moyenne de $\bar{X}$

Modèle de Bühlmann

⚠ collectivement sans biais : $E[\widehat{\mu(\Theta_i)}] = E[\mu(\Theta_i)]$

Exercice 3.1 :

⚠ $p^{Bayes} \neq p^{cred}$ donc le modèle n'est pas dans la famille exponentielle car sinon les primes coïncident

$$\widehat{\mu(\Theta)} = \alpha \bar{X} + (1-\alpha)\mu_0$$

$\bar{X} = 1$

$\mu_0 = E[\mu(\Theta)]$ avec $\mu(\Theta) = E[X \mid \Theta]$

$= E[\Theta]$

$= 1/2$

$$\alpha = \frac{n}{n + \sigma^2/\tau^2} = \frac{1}{1 + \sigma^2/\tau^2} = 1/7$$

$p^{Bayes} \simeq 0,6$

avec $\sigma^2 = E[Var(X \mid \Theta)] = E[\Theta] = 1/2$

$\tau^2 = Var[E[X \mid \Theta]] = Var[\Theta] = 1/12$

$p^{cred} = 4/7 > p^{a\,priori} = 1/2 = \mu_0$

Exercice 3.2 :

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}} = \alpha \bar{X} + (1-\alpha)\mu_0$$

$n = 3 \;;\; \ell = 2$

$\bar{X}_1 = \frac{24}{3} = 8$

$\alpha = \frac{n}{n + \sigma^2/\tau^2}$

$\bar{X}_2 = \frac{36}{3} = 12$

avec $\sigma^2 = E[\mathrm{Var}(X \mid \Theta)]$

$\bar{X} = 10$

$$= E\Big[\frac{\qquad}{}$$

$$= \frac{1}{\ell(n-1)} \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \bar{X}_1)^2$$

$$\alpha = \frac{3}{3 + \frac{3 \cdot 5}{19}}$$

$$= \frac{1}{4} \times 20 = 5$$

$$= \frac{19}{24}$$

$$\tau^2 = \mathrm{Var}[E[X \mid \Theta]]$$

$$= \frac{1}{\ell-1} \sum_{i=1}^{\ell} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\mu_0 = \frac{1}{\ell \cdot n} \sum X_{ij} = 10$$

$$= 8 - 5/3 = 19/3$$

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta)}}_1 = \frac{19}{24}\, 8 + \frac{5}{24}\, 10 \simeq 8{,}416$$

$\oplus$

$$\widehat{\mu(\Theta)}_2 = \frac{19}{24}\, 12 + \frac{5}{24}\, 10 = 11{,}583$$

$\to$ en sommant ces deux primes, on retrouve la prime collective (collectivement sans biais !)

A l'examen : présenter sous forme de tableau au maximum

Chapitre 4 : Modèle de Bühlmann — Straub

→ prime de risque n'évolue pas d'où
$$\mu(\Theta_i) = E[X_{ij} \mid \Theta_i]$$

La fréquence de sinistre n'évolue pas (vrai ratio de sinistre constant)

→ La variance relative évolue. Si on passe de l'assurance d'une flotte auto de 200 véhicules à une flotte auto de 2000 véhicules, la variance relative diminue.

X_{ij} ratio de sinistre ici ; en pratique on teste plusieurs indicateurs avant de choisir le plus pertinent.

⚠ individuellement sans biais et non plus collectivement sans biais (c'est à dire pour l'ensemble du portefeuille)

On note donc $E[X_i \mid \Theta_i] = \mu(\Theta_i)$

$$\begin{aligned}
Var[X_i \mid \Theta_i] &= Var\left[\sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} X_{ij} \mid \Theta_i\right] \\
&= \sum_j \left(\frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}}\right)^2 Var[X_{ij} \mid \Theta_i] \\
&= \sum_j \left(\frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}}\right)^2 \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{ij}} \\
&= \frac{1}{w_{i\bullet}^2} \left(\sum_j w_{ij}\right) \sigma^2(\Theta_i) \\
&= \frac{\sigma^2(\Theta_i)}{w_{i\bullet}}
\end{aligned}$$

hypothèse (BS1)

définition de $\sigma^2(\Theta_i)$

$\sum_j w_{ij} = w_{i\bullet}$

⚠ $\hat{\mu}_0 \neq \sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i\bullet}} X_i$

$$\boxed{\hat{\mu}_0 = \sum_i \frac{\alpha_i}{\alpha_\bullet} X_i}$$

pondération par le facteur de crédibilité et pas par les poids.

Remarque : $Y = (1-a)X + aZ$

$$Y > X \Rightarrow Z > X$$

$$\left\{ \sum_{ij} w_{ij} \widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}}^{homo} = \sum_{ij} w_{ij} X_{ij} \right\} \equiv \text{équilibre financier.}$$

⚠ hypothèses dans ce modèle à tester :

→ Indépendance des profils de risques (contrats)

→ $\sigma^2(\Theta_i) = w_{ij}\, Var[X_{ij} | \Theta_i]$ à tester.

Exo 3.3 :

$N_i \sim P(\Theta_i)$ le nombre de sinistres déclarés

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = \alpha \bar{N}_i + (1-\alpha)\bar{N}$$

$$\bar{N} = \mu_0 = \frac{\text{nombre de sols}}{\text{nombre d'assurés}} = \frac{210}{340} \qquad n = 1 \qquad \alpha = \frac{n}{n + \sigma^2/\tau^2}$$

$$\alpha = \left(1 + \sigma^2/\tau^2\right)^{-1}$$

$$\sigma^2 = E[Var[N_i | \Theta_i]] = E[\Theta_i] = \frac{210}{340}$$

$$\tau^2 = Var[\mu(\Theta)] = Var[E[N|\Theta]] = Var(N) - \underbrace{E[Var(N|\Theta)]}_{= E(\Theta) = \frac{210}{340}}$$

← formule de décomposition de la variance

$$Var(N) = E(N^2) - E^2(N) = \frac{1}{340}(10 \cdot 3^2 + 50 \cdot 2^2 + 80 \cdot 1^2 + 200 \cdot 0^2) - \left(\frac{210}{340}\right)^2$$

$$\simeq 0{,}71$$

$\tau^2 \simeq 0{,}089$

$\alpha \simeq 0{,}126$

$$\widehat{\widehat{\mu(\Theta_i)}} = \alpha \bar{N}_i + (1-\alpha)\bar{N} = 0{,}126 \cdot 2 + (1 - 0{,}126)\frac{210}{340} \simeq 0{,}792$$

$\Rightarrow$ Augmentation prime : $0{,}792 - \frac{210}{340} \simeq 0{,}174$

 15/11

EXO 34 :

$\Theta \sim \Gamma(a, 1/\tau)$

| moyenne a/τ
| variance a/τ^2

① On cherche $E[\mu(\Theta) \mid N_1 = n_1, N_2 = n_2, N_3 = n_3]$

$$E[N] = a/\tau = \mu_0$$

⚠ $\{\Theta \mid N_1 = n_1, N_2 = n_2, N_3 = n_3\} \sim \Gamma(a + n_1 + n_2 + n_3, (\tau+3)^{-1})$

$$\Longrightarrow \widetilde{\mu(\Theta)} = \frac{a + n_1 + n_2 + n_3}{\tau + 3}$$

② $\alpha \bar{N} + (1-\alpha)\mu_0$

$\bar{N} = \dfrac{n_1 + n_2 + n_3}{3}$

$\mu_0 = a/\tau$

$$\alpha = \frac{3}{3 + \sigma^2/\tilde{\sigma}^2} = \frac{3}{3 + \frac{a/\tau}{a/\tau^2}} = \frac{3}{3+\tau}$$

$$\widehat{\mu(\Theta)} = \frac{n_1 + n_2 + n_3}{\tau + 3} + \frac{\cancel{\tau}}{3+\tau}\frac{a}{\cancel{\tau}}$$

$$= \frac{a + n_1 + n_2 + n_3}{\tau + 3}$$

car $\sigma^2 = E[\mathrm{Var}(N|\Theta)]$
$= E[\Theta] = a/\tau$
$\tilde{\sigma}^2 = \mathrm{Var}[E(N|\Theta)]$
$= \mathrm{Var}(\Theta) = a/\tau^2$

Familles de lois conjuguées dans la famille exponentielle donc le meilleur estimateur de la prime est linéaire en les observations et $\widehat{\mu(\Theta)} = \widetilde{\mu(\Theta)}$

Chapitre 5 : Systèmes BONUS - MALUS

⚠ pas de support de cours.
uniquement les notes.

Références : → Denuit, Charpentier (2005)
→ Denuit et al. (2005)
→ Jean Lemaire

① Introduction :

Application de la théorie de la crédibilité dans un contexte où l'assuré est conscient du système Bonus-Malus.
L'objectif est donc de responsabiliser les assurés.

Importance actuarielle : évolution de la prime avec le risque
Faire supporter aux "mauvais" assurés un coût de la sinistralité plus important qu'aux "bons" assurés.

Plusieurs types de systèmes bonus-malus existent.
En France du fait du code des assurances car assurance automobile obligatoire donc système imposé par la réglementation.

Le coefficient de réduction / majoration dépend uniquement de la sinistralité en responsabilité civile auto

réduction sur 1 an : 5%

majoration sur 1 an : 25%

borné : [0,5 , 3,5]

Clause de retour rapide : retour au niveau 100% si pas de sinistre pendant 2 années.

Clause de protection des bons assurés : Si on est à 0,5 de coefficient depuis 3 ans ou plus, le premier sinistre responsable qui suit n'entraîne pas de majoration.

⚠ Si le cadre du coefficient est fixé par la loi, l'assureur reste libre de fixer la prime sous-jacente, la prime de référence.

Dans la pratique, tarification qui tient compte du coefficient de réduction / majoration comme variable explicative dans les modèles de regression. (Significative pour des risques autres que la RC)

Système Bonus/Malus brésilien : système +1/-1 à 7 classes.

	degré	π
Classe de départ	7	100
	6	90
	5	85
	4	80
	3	75
	2	70
	1	65

⇒ toute chose égale par ailleurs, un assuré dans la classe 4 payera 20% de moins qu'un assuré dans la classe 7

⇒ Comment change-t-on de classe ?

0 sinistre ↪ (-1)

1 sinistre ↪ (+1)

2 sinistres ↪ (+2) etc.

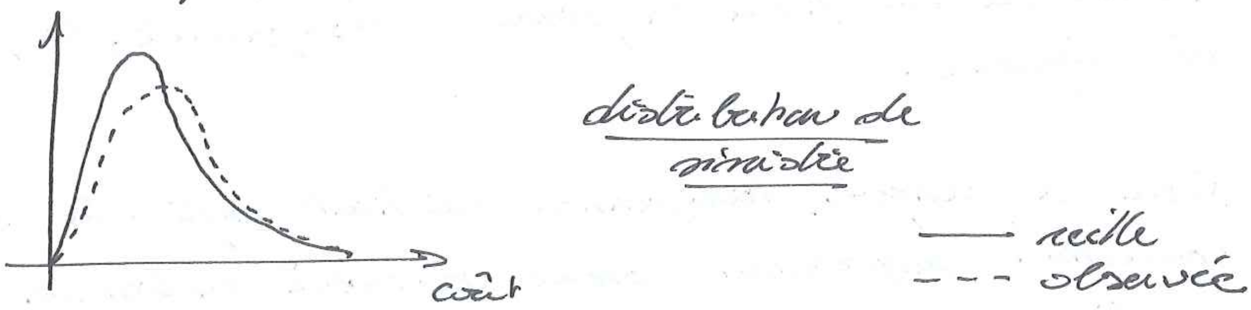
Certains systèmes tiennent également compte des infractions commises (USA)

Réglementation européenne et fin du système Bonus-Malus français ? Droit communautaire qui impose la liberté de la concurrence etc mais finalement, comme l'assureur reste libre de fixer la prime, donc pas de désaccord avec le droit communautaire.

Soif de Bonus ("Bonus Hunger")

fait que l'assuré ne déclare pas les petits sinistres pour ne pas avoir le malus l'année suivante.

⇒ L'assureur n'observe jamais la sinistralité réelle !
Fonctionne comme une franchise dont l'assureur n'a pas connaissance.



Très problématique lorsque l'assureur veut par exemple réduire la franchise car la soif de Bonus change avec ce montant de franchise.

Remarque : franchise qui est parfois une variable explicative dans la tarification.

On part parfois du système Bonus/Malus français en système à classe (cf article dans le Bulletin d'actuariat français) on obtient plusieurs centaines de classes...

(2) S.B.M. à classes et modélisation en chaînes de Markov

toujours de la forme suivante :

niveau	Prime relative
1	ρ_1
↓	↓
s	ρ_s

Il existe toujours une classe d'entrée (pas nécessairement la même pour tous les assurés, cf système larousien)

Les règles qui régissent le passage d'une classe à une autre ne dépendent que du nombre de sinistres

Réajustement annuel.

Autre exemple : système -1/Top à 3 degrés

deg	0	1
3	2	3
2	1	3
1	1	3

Soit un assuré de profil de risque θ

L est le parcours de l'assuré dans l'échelle.

$L = (L_k)_{k \in \mathbb{N}}$ où L_k est le degré occupé dans l'échelle pendant la $(k+1)$ième période.

$p_\theta(l_1, l_2)$ probabilité pour un assuré de profil de risque θ de passer de l_1 à l_2 pour niveau d'échelle, constante au cours du temps.

$\forall k$; $p_\theta(l_1, l_2) = P[L_{k+1} = l_2 \mid L_k = l_1, \Theta = \theta]$

$p_\theta(l_1, l_2) \in [0,1] \quad \forall (l_1, l_2) \in \{1 - s\}^2$

$\sum_{l_k=1}^{s} p_\theta(l_1, l_k) = 1$ (somme des lignes de la matrice P_θ)

$$P_\theta = \begin{pmatrix} p_\theta(1,1) & \cdots & p_\theta(1,s) \\ \vdots & & \vdots \\ p_\theta(s,1) & \cdots & p_\theta(s,s) \end{pmatrix}$$

Hypothèses :

→ θ constant au cours du temps.

→ la proba de passer d'un degré à un autre pour un assuré de profil de risque θ, est constant au cours du temps.

$p_\theta^{(k)}(l_0) = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$ ← la ième composante est la probabilité de passer de l_0 à l_i k périodes

$= P[L_k = l_i \mid L_0 = l_0, \Theta = \theta]$

$= \begin{bmatrix} \\ \\ \end{bmatrix}_{1}^{s}$ pour la taille de ce vecteur.

remarque : $p_\theta^{(0)}(l_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ ← la ième composante

On a également :

$$\rho_\theta^{(k)}(l_0)' = \rho_\theta^{(k+1)}(l_0)' P_\theta$$

et on itérant :

$$\rho_\theta^{(k)}(l_0)' = \rho_\theta^{(0)}(l_0)' P_\theta^k$$

<u>Propriété</u> : La matrice de transition est <u>régulière</u>

i.e $\exists\, \xi_0 \in \mathbb{N}$, $P_\theta^{\xi_0} > 0$

<u>Corollaire</u> : La chaîne de Markov L est <u>ergodique</u>

(en particulier, il n'y a pas d'état absorbant, la chaîne est irréductible...)

<u>Proposition</u> : L'échelle admet toujours une distribution stationnaire.

π_θ distribution stationnaire

$$\begin{cases} \pi_\theta' = \pi_\theta' P_\theta \\ \pi_\theta' \mathbb{1} = 1 \end{cases} \qquad \text{où } \mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 \\ | \\ 1 \end{pmatrix}$$

<u>Propriété</u> (pas très utile en pratique)

Si P_θ est régulière de dimension finie, l'unique distribution stationnaire est donnée par

$$\pi_\theta' = \mathbb{1}' [I - P_\theta - E]^{-1}$$

où I est la matrice identité

$E = (1)$

<u>Définition</u> : Une échelle B.M. est <u>équilibrée</u> si le vecteur $\rho = (\rho_1 - \rho_n)$ est tel que $\pi_\theta \rho = 1$

où π_θ est la distribution stationnaire

(C'est une contrainte d'équilibre très intuitive, la perte des uns permet de compenser le gain des autres)

I Illustration : échelle -1/TOP

3 classes : une année sans sinistre fait descendre d'une classe, une année avec un sinistre au moins fait remonter à la classe 3 qui est la plus défavorable.

On considère un assuré de profil de risque θ qui produit des nombres annuels de sinistre de $P(\theta)$

deg	0	1 sinistre
3	2	3
2	1	3
1	1	3

Représentation par une chaîne de Markov ?

Question : P_θ ? $P[U_{T+1}=l' \mid U_T = l, \Theta=\theta]$

$$P_\theta = \begin{pmatrix} e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ 0 & e^{-\theta} & 1-e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

Question : déterminer la distribution stationnaire, π_θ

on rappelle : $\begin{cases} \pi_\theta' = \pi_\theta' P_\theta & (1) \\ \pi_\theta' \mathbb{1}_3 = 1 & (2) \end{cases}$ avec $\mathbb{1}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on note $\pi_\theta = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$

$$(1) \iff \begin{cases} \alpha e^{-\theta} + \beta e^{-\theta} = \alpha \\ \gamma e^{-\theta} = \beta \\ \underbrace{(\alpha+\beta+\gamma)}_{=1 \text{ avec } (2)}(1-e^{-\theta}) = \gamma \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} \gamma = 1-e^{-\theta} \\ \beta = (1-e^{-\theta})e^{-\theta} \\ \alpha = e^{-2\theta} \end{cases} \iff \pi_\theta = \begin{pmatrix} e^{-2\theta} \\ (1-e^{-\theta})e^{-\theta} \\ 1-e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

Question : vitesse de convergence ?

Supposons $L_0 = 3$ $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

distribution de $L_1, L_2, \dots, L_k$

$$(0\ 0\ 1)\begin{pmatrix} e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ 0 & e^{-\theta} & 1-e^{-\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\theta} & 1-e^{-\theta} \end{pmatrix} = L_1'$$

$$(0\ e^{-\theta}\ 1-e^{-\theta})\begin{pmatrix} e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ 0 & e^{-\theta} & 1-e^{-\theta} \end{pmatrix} = \left(e^{-2\theta}\ \ e^{-\theta}(1-e^{-\theta})\ \ (1-e^{-\theta})\right) = \pi_\theta$$

Au bout de deux itérations, on se retrouve dans la distribution stationnaire.

<u>Question</u> : intérêt de la distribution stationnaire ?

↪ retour de la majoration de prime.

ρ le vecteur des CRM (coefficients reduction-majoration)

$\pi_\theta \rho = 1$ (contrainte : les "bons" assurés profite de la réduction égale à la majoration des "mauvais")

$$\begin{cases} 0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_3 \\ e^{-2\theta}(\rho_1 - \rho_2) + e^{-\theta}(\rho_1 - \rho_3) + \rho_3 = 1 \end{cases}$$

Détermination des coefficients bonus-malus :

<u>Problème</u> : déterminer un "bon" ρ

<u>Méthode de Norberg</u> : $N \sim \mathcal{P}(\lambda \Theta)$ $\quad E[\Theta = 1]$

$E[N] = E[\lambda \Theta] = \lambda$

θ_i pour un assuré

Sa fréquence de sinistres est donc $\lambda \theta_i$

donc θ_i est le rapport en son nombre de sinistres et le nombre de sinistres moyen du portefeuille.

Ici, on cherche une prime par classe et non plus pour un assuré avec son propre sinistre propre. Cette information est résumé ici par sa classe.

On cherche donc :

$$\rho^* = \underset{\rho}{\operatorname{argmin}}\ E[(\theta - \rho_L)^2]$$

si L est le degré occupé dans l'échelle par l'assuré (qui est aléatoire)

$$E[(\Theta - \rho_L)^2] = \sum_{l=1}^{n} E[(\Theta - \rho_l)^2 \mid L = l] . P[L = l]$$ (formule des probas totales)

$$= \sum_{l=1}^{n} \int_0^\infty (\theta - \rho_l)^2 u(\theta \mid L = l)\, d\theta . P[L = l]$$

Et on sait que (règle de Bayes)

$$u(\theta \mid L=\ell) = \frac{u(\theta)\, P(L=\ell \mid \Theta=\theta)}{P(L=\ell)}$$

D'où $E[(\Theta - \rho_L)^2] = \sum_{\ell=1}^{n} \int_0^{\infty} (\theta - \rho_\ell)^2\, u(\theta)\, P(L=\ell \mid \Theta=\theta)\, d\theta$

où $P(L=\ell \mid \Theta=\theta) = (\pi_{\lambda\theta})_\ell$ c'est le ℓ-ème terme de la distribution stationnaire pour le profil de risque $\lambda\theta$.

Et on cherche toujours ρ^* donc

$$\frac{\partial}{\partial \rho_\ell} E[(\Theta - \rho_L)^2] = 0 \iff \int_0^{+\infty} (\theta - \rho_\ell)\, u(\theta)\, (\pi_{\lambda\theta})_\ell\, d\theta = 0$$

$$\iff \rho_\ell = \frac{\int_0^{+\infty} \theta\, u(\theta)\, (\pi_{\lambda\theta})_\ell\, d\theta}{\int_0^{+\infty} u(\theta)\, (\pi_{\lambda\theta})_\ell\, d\theta}$$

$$\iff \rho_\ell = E[\Theta \mid L=\ell]$$

On vérifie que (équilibre financier)

$$E[\rho_L] = \sum_{\ell=1}^{n} \rho_\ell^*\, P[L=\ell] = \sum_{\ell=1}^{n} E[\Theta \mid L=\ell]\, P[L=\ell]$$
$$= E[\Theta] = 1$$

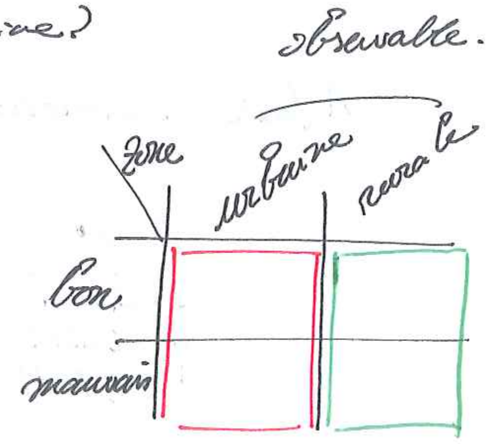
(Deuxième critère à voir la semaine prochaine)

Echelle Bonus-Malus après segmentation :

Exemple introductif : (cf Denuit & Charpentier)

Assurés : bons / mauvais

zone rurale / zone urbaine



$$\Lambda = \begin{cases} \lambda_A & \omega_A \to \text{zone urbaine} \\ \lambda_B & \omega_B \to \text{zone rurale} \end{cases}$$

(Proba : ω_A, ω_B)

$$\Theta = \begin{cases} 0{,}5 & 1/2 \\ 1{,}5 & 1/2 \end{cases}$$

Hypothèse fondamentale (souvent fausse en pratique)

$\Lambda \perp \Theta$

La fréquence de sinistre d'un assuré pris au hasard est $\Lambda \Theta$

$$E[\Theta \mid L=l] = 0{,}5\ P[\Theta = 0{,}5 \mid L=l] + 1{,}5\ P[\Theta = 1{,}5 \mid L = l]$$

$$P[\Theta = 0{,}5 \mid L = l] = \frac{P[L = l \mid \Theta = 0{,}5]\ P[\Theta = 0{,}5]}{P[L=l]}$$

$$= \frac{1}{2P[L=l]} \Big[P[L=l \mid \Theta = 0{,}5,\ \Lambda = \lambda_A]\ P[\Lambda = \lambda_A \mid \Theta = 0{,}5] + P[L=l \mid \Theta = 0{,}5,\ \Lambda = \lambda_B]\ P[\Lambda = \lambda_B \mid \Theta = 0{,}5] \Big]$$

$$= \frac{1}{2P[L=l]} \left[\pi_l(0{,}5\lambda_A)\,\omega_A + \pi_l(0{,}5\lambda_B)\,\omega_B \right]$$

$$= \frac{1}{2\pi_l} \left[\text{———} \right]$$

$$\pi_l = P[L=l] = P[L=l \mid \Theta = 0{,}5\ \ \Lambda = \lambda_A] * P[\Theta = 0{,}5\ \ \Lambda = \lambda_A]$$
$$+ P[L=l \mid \Theta = 1{,}5\ \ \Lambda = \lambda_A]\ \ P[\Theta = 1{,}5\ \ \Lambda = \lambda_A]$$
$$+ P[L=l \mid \Theta = 0{,}5\ \ \Lambda = \lambda_B]\ \ P[\Theta = 0{,}5\ \ \Lambda = \lambda_B]$$
$$+ P[L=l \mid \Theta = 1{,}5\ \ \Lambda = \lambda_B]\ \ P[\Theta = 1{,}5\ \ \Lambda = \lambda_B]$$

$$= \frac{\omega_A}{2}\left(\pi_l(0{,}5\lambda_A) + \pi_l(1{,}5\lambda_A)\right) + \frac{\omega_B}{2}\left(\pi_l(0{,}5\lambda_B) + \pi_l(1{,}5\lambda_B)\right)$$

et de même $\quad P[\Theta = 1{,}5 \mid L = l] = \frac{1}{2\pi_l}\left[\pi_l(1{,}5\lambda_A)\,\omega_A + \pi_l(1{,}5\lambda_B)\,\omega_B\right]$

A faire en exercice: | application à $\lambda = 10\%$
échelle à 3 classes $-1/+1$

$E[\Lambda] = 10\%$
$\omega_A = \omega_B = 1/2$
$\lambda_A = 8\%$
$\lambda_B = 12\%$

l	l^*	$l^* = E[\Theta \mid L=l]$
3	1,3956	1,3950
2	1,2332	1,2342
1	0,9679	0,9679

(cf Examen 2012 - sujet très proche de exemple du cours)

$$\Lambda = \begin{cases} 0{,}1 & 3/5 \\ 0{,}2 & 2/5 \end{cases}$$

On avait $\pi^{*} = \begin{pmatrix} e^{-2\gamma} \\ e^{-\gamma}(1-e^{-\gamma}) \\ (1-e^{-\gamma}) \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \pi = {} & \pi(\lambda_1 \theta_1)\, P[\Lambda = \lambda_1 ; \Theta = \theta_1] & \gamma = \lambda_1 \theta_1 = 5\% \\ & + \pi(\lambda_2 \theta_1)\, P[\Lambda = \lambda_2 ; \Theta = \theta_1] & \gamma = \lambda_2 \theta_1 = 10\% \\ & + \pi(\lambda_1 \theta_2)\, P[\Lambda = \lambda_1 ; \Theta = \theta_2] & \gamma = \lambda_1 \theta_2 = 15\% \\ & + \pi(\lambda_2 \theta_2)\, P[\Lambda = \lambda_2 ; \Theta = \theta_2] & \gamma = \lambda_2 \theta_2 = 30\% \end{aligned}$$

avec $P[\Lambda = \lambda_1 ; \Theta = \theta_1] = \underset{\text{car } \perp\!\!\!\perp}{P[\Lambda = \lambda_1]\, P[\Theta = \theta_1]}$

$$= \quad 3/5 \qquad 1/2$$

$$= 30\%$$

$P[\Lambda = \lambda_2 ; \Theta = \theta_2] = P[\Lambda = \lambda_2]\, P[\Theta = \theta_1] = 2/5 \cdot 1/2$

$$= 20\%$$

$(\vdots)$

Il reste donc à déterminer $\pi(\lambda_i ; \theta_i)$; $i = 1,2$ à partir de π^{*} et des γ

$$E[\Theta \mid L = \ell] = \theta_1\, P[\Theta = \theta_1 \mid L = \ell] + \theta_2\, P[\Theta = \theta_2 \mid L = \ell]$$

$$P[\Theta = \theta_1 \mid L = \ell] = \frac{\overset{1/2}{P[\Theta = \theta_1]}}{\underset{\text{proba stationnaire}}{P[L = \ell]}}\, \underset{\text{proba obs pour un assuré du profil } \theta_1}{P[L = \ell \mid \theta_1]}$$

Compléments de cours

$$\rho_\ell = E[\Theta \mid L = \ell]$$

Méthode de Gilde et Smidt

$$\rho_\ell = \alpha + \beta \ell \qquad \ell \in \{1, \dots, n\}$$

$$\underset{(\alpha,\beta)}{\operatorname{argmin}} \; E[(\Theta - \alpha - \beta L)^2] = (\alpha^*, \beta^*)$$

regression linéaire

$$\Rightarrow \beta = \frac{\lambda \operatorname{cov}(\Theta, L)}{Var(L)}$$

$$\alpha = \lambda - \frac{\lambda \operatorname{cov}(L,\Theta)}{Var(L)} E[L]$$

$$\rho_\ell = 1 + \frac{\operatorname{cov}(L,\Theta)}{Var(L)} [\ell - E(L)]$$

$$E(L) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell \int_{\theta>0} \pi_\ell(\lambda\theta)\, u(\theta)\, d\theta$$

$$Var(L) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell^2 \int_{\theta>0} \pi_\ell(\lambda\theta)\, u(\theta)\, d\theta - E^2[L]$$

$$\operatorname{cov}(L,\Theta) = \sum_{\ell=1}^{n} \ell \int_{\mathbb{R}^+} \theta\, \pi_\ell(\lambda\theta)\, u(\theta)\, d\theta - E[L]$$

point d'équilibre financier :

$$E[\rho_L] = 1 + \frac{\operatorname{cov}(L,\Theta)}{Var(L)} E[L - E(L)]$$

$$= 1$$

Mesures d'efficacité :

1) Prime moyenne relative à l'état stationnaire

(Relative stationary average Premium)

$$RSAP = \frac{\text{prime moyenne} - \text{prime minimum}}{\text{prime max} - \text{prime min}} \in [0,1]$$

remarque :
RSAP = 0,4 considéré comme grand
En général, on est beaucoup plus proche de la prime min que max

Si RSAP ≈ 0, l'échelle bonus-malus ne répartit pas bien les assurés, beaucoup se trouvent dans les niveaux classes les plus basses de l'échelle.

ordre de grandeur : 4% pour le système brésilien
10% pour beaucoup d'autres systèmes.

2) coefficient de variation $\quad coVa(\rho L) = \dfrac{\sqrt{Var(\rho L)}}{E(\rho L)}$

Reste proche de 0 => pas une excellente mesure encore.

3) Efficacité de Loimaranta

$$Eff(\theta) = \frac{\partial \rho(\theta) / \rho(\theta)}{\partial \theta / \theta} = \frac{d \ln \rho(\theta)}{d \ln \theta}$$

avec $\rho(\theta) = \sum_{l=1}^{n} \pi_l(\theta) \rho_l$

$$\frac{d\rho(\theta)}{d(\theta)} = \sum_{l=1}^{n} \frac{d\pi(\theta)}{d\theta} \rho_l$$

$$\frac{d\pi'(\theta)}{d\theta} = \frac{d\pi'(\theta)}{d\theta} P(\theta) + \pi'(\theta) \frac{dP(\theta)}{d\theta} \qquad \text{avec } P_\theta = \begin{pmatrix} & \end{pmatrix}$$

$$\pi'_\theta P_\theta = \pi'_\theta$$

où $\sum \frac{d\pi(\theta)}{d\theta} = 0$

On recherche encore à avoir cette efficacité proche de 1

Remarque pratique : * cette mesure dépend de la distribution stationnaire.

* mesure d'efficacité par l'ensemble de l'échelle bonus-malus, ne se base pas sur la classe ni sur la classe de départ.

4) Efficacité de Lemaire

Gratuité de Jean Lemaire (ASTIN Bulletin)

Exercice 4.1 :

groupe = flottes automobiles par exemple.

Ratio : montant moyen de sinistre par unité de groupe.

groupe \ année	1	2	3
1	200	220	200
2	200	200	150
3	200	250	225

taille → poids dans le modèle de Bühlmann-Straub.
(choisir le plus intuitif ici : prime par unité d'année)

$$(w_{i.}) = \left(\sum_{j=1}^{3} w_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 40+50+75 \\ 100+120+120 \\ 50+60+60 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 165 \\ 340 \\ 170 \end{pmatrix}$$

$$(X_i) = \left(\sum_j \frac{w_{ij}}{w_{i.}} X_{ij}\right) = \begin{pmatrix} 206,1 \\ 141,6 \\ 126,5 \end{pmatrix} \; ; \; \frac{\sum_{i=1}^{3}\left(\sum_{j=1}^{3} w_{ij}(X_{ij}-X_i)^2\right)}{l(n-1)} = 46\,673 = \hat{\sigma}^2$$

$$\sum_{j=1}^{3} w_{ij}(X_{ij}-X_i)^2 = \begin{pmatrix} - \\ - \\ - \end{pmatrix}$$

$\bar{X} = 198,26$

$w_{..} = 675$ $\Rightarrow$ $\boxed{\hat{\tau}^2 = 329}$

Groupe	$\alpha_i = \dfrac{w_{i.}}{w_{i.} + \hat{\sigma}^2/\hat{\tau}^2}$
1	0,54
2	0,71
3	0,55

$\hat{\mu}_0 = 202$

Groupe	$\alpha_i + (1-\alpha_i)\hat{\mu}$	$\hat{\hat{\mu}}$
1	204	15 397
2	144	17 893
3	295	12 952

Exercice 4.2

N_i = nombre de sinistres pour une année

$N \sim P(\theta_i)$

$\hat{\mu}(\theta) = \alpha N + (1-\alpha)\hat{\mu}_0$

$\alpha = \frac{n}{n + \sigma^2/\tau^2}$ avec $\sigma^2 = E[Var(N|\Theta)] = \frac{300}{300} = 1$

$n = 1$

(= paramètre de la loi de Poisson)

$\tau^2 = Var(E(N|\Theta)] = var(\Theta)$

$Var(N) = Var(E(N|\theta)) + E(Var(N|\theta))$

avec $var\, N = EN^2 - (EN)^2$

$= 2,18 - 1 = 1,18$

$\Rightarrow \tau^2 =$

$\Rightarrow \alpha = 0,15$

$\hat{\mu}(\theta) = 0,15 N + (0,85)\hat{\mu}_0 \quad \hookrightarrow \quad (\bar{\mu}(\theta) | \Theta = k) = 0,15\, k + 0,85$

Exercice 4.3

On travaille sur le montant de sinistre par unité de masse salariale.

$(w_{i\cdot}) = \begin{pmatrix} 12 \\ 9 \\ 10 \end{pmatrix} \quad (X_i) = \begin{pmatrix} 5,42 \\ 1,36 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \bar{X} = 2,87$

$w_{\cdot\cdot} = 31$

$l = 4$

$I = 3$

$\hat{\sigma}^2 = 6,57$

$\hat{\tau}^2 = 3,61$

$\alpha_i = \begin{pmatrix} 0,91 \\ 0,88 \\ 0,90 \end{pmatrix}$

$\mu_0 = 2,68$

$\hat{\mu}(\theta_1) = \alpha_1 X_1 + (1-\alpha_1)\hat{\mu}_0$ pour l'année 1

$= 5,17$

$\pi = \hat{\mu}(\theta_i) \cdot \underbrace{w_1}_{=3} = 15,5$

Exercice 1.1 :

En utilisant la formule donnée en 2.3

$$\lambda_F' = \frac{z^2_{\varepsilon/2}}{c^2}\left[1+\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^2\right] = 2670 \qquad \sigma = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_F = \frac{z^2_{\varepsilon/2}}{c^2} = 2670$$

$\rho_\varepsilon = 1000$
$\sigma^2_\varepsilon = 1500000$

$$\Rightarrow {}_\varepsilon\lambda_F = \frac{z^2_{\varepsilon/2}}{c^2}\left(1+\frac{\sigma^2_\varepsilon}{{}_\varepsilon N^2}\right) = 2670\left[1+\frac{1500000}{1000}\right]$$

$$= 6675$$

Exercice 1.2 :

$$x = \frac{z^2_{\varepsilon/2}}{C_x^2} = \frac{z^2_{\varepsilon/2}}{(5.10^{-2})^2}$$

$$y = \frac{z^2_{\varepsilon/2}}{C_y^2} = \frac{z^2_{\varepsilon/2}}{(10.10^{-2})^2}$$

$$\Rightarrow \frac{x}{y} = 4$$

Exercice 1.3 :

$$\lambda_F = \frac{z^2_{\varepsilon/2}}{c^2}\underbrace{\left(1+\left(\frac{\sigma}{\rho}\right)^2\right)}_{\geq 1}$$

$$\lambda_F \geq \frac{z^2_{\varepsilon/2}}{c^2} = 2401$$

$$Z_{max} = \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda_F}} \qquad \lambda = 40000 \cdot 0{,}0441$$

$$\Rightarrow Z_{max} = 0{,}897$$

Exercice 2.1

1) Prime pure à priori $= 1 \cdot E[N] = 1 \cdot P(N=1) + 0 \cdot P(N=0)$

$$= P(N=1|B)\,P(B) + P(N=1|B^c)\,P(B^c)$$

$$= 0{,}2 \cdot \tfrac{1}{2} + 0{,}8 \cdot \tfrac{1}{2}$$

en utilisant la formule des probabilités totales.

$$= \tfrac{1}{2}$$

2) On le traduit mathématiquement par :

$$P\left[B \,\middle|\, \begin{matrix} N_1=0 \\ N_2=1 \\ N_3=0 \end{matrix}\right] = \frac{P(N_1=0, N_2=1, N_3=0 \mid B)\; P(B)}{P(N_1=0, N_2=1, N_3=0)}$$

en utilisant la règle de Bayes.

avec $P(N_1=0, N_2=1, N_3=0 \mid B)$

$$= P(N_1=0 \mid B)\; P(N_2=1 \mid B)\; P(N_3=0 \mid B)$$

car les nombres de sinistres, conditionnellement à la qualité du risque, sont indépendants.

et

$$P(N_1=0, N_2=1, N_3=0) = P(N_1=0 \mid B)\,P(N_2=1 \mid B)\,P(N_3=0 \mid B)\,P(B)$$
$$+ P(N_1=0 \mid B^c)\; P(N_2=1 \mid B^c)\; P(N_3=0 \mid B)\,P(B^c)$$

$$= 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}5 + 0{,}2 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}5$$

$$= 0{,}08$$

d'où $P\left(B \,\middle|\, \begin{matrix} N_1=0 \\ N_2=1 \\ N_3=0 \end{matrix}\right) = \dfrac{0{,}04}{0{,}08} = 80\ \%$

3) Prime individuelle pour un bon risque : 0,2

Prime individuelle pour un mauvais risque : 0,8

→ moyenne pondérée...

Prime $= 0{,}2 \cdot 80\% + 20\% \cdot 0{,}8$

$\boxed{\text{Prime} = 0{,}32}$

ou

$$E[N_4 \mid N_1 = \ \ , N_2, N_3] = 0 \times P[N_4 = 0 \mid \text{—}] + 1\, P[N_4 = 1 \mid \text{—}]$$
$$= \dots$$

 09/1? (2)

Exercice 28

1) Prime de Bayes $= E(N)$

$$= E(E(N|\theta))$$

$$= E(\Theta) = 1/2$$

2) On cherche

$$E[N_2 | N_1 = 1]$$

$$= E[\,E[N_2 | N_1 = 1, \Theta]\,]$$

et on cherche la distribution a posteriori de Θ sachant que $N_1 = 1$, soit

$$u(\theta | N_1 = 1) = \frac{P(N_1 = 1 | \Theta = \theta)\, u(\theta)}{P(N_1 = 1)}$$

$$= \frac{e^{-\theta}\theta}{P(N_1 = 1)} \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)$$

$$P(N_1 = 1) = \int_{\Theta} P(N_1 = 1 | \theta)\, u(\theta)\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \theta e^{-\theta}\, d\theta$$

$$= 1 - 2e^{-1} \quad (?)$$

d'où par la prime

$$E[N_2 | N_1 = 1] = \int_0^1 \theta\, u(\theta | N_1 = 1)\, d\theta$$

$$= \int_0^1 \frac{\theta e^{-\theta}\theta\, \mathbb{1}_{[0,1]}(\theta)}{1 - 2e^{-1}}\, d\theta$$

$$= \ldots$$

Exercice 23 :

Les (N_i) sont indépendants conditionnellement à Θ

$\forall i \quad N_i \sim \mathcal{P}(\Theta)$

$g(\theta) = e^{-\theta}$

1) $P(N_1 = 2) = \int_0^{+\infty} P(N_2 = 2 \mid \Theta = \theta)\, g(\theta)\, d\theta$

$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{\theta^2}{2!} e^{-\theta}\right) e^{-\theta}\, d\theta$

$\underset{u=2\theta}{=} \frac{1}{4} \int_0^{+\infty} \frac{u^2}{4} e^{-u} \frac{du}{2}$

$= \frac{1}{16} \int_0^{+\infty} u^2 e^{-u}\, du$ (Rappel $\Gamma(n+1) = \int_0^{+\infty} u^n e^{-u}\, du$)

$= \frac{1}{16} \Gamma(3) = \frac{(3-1)!}{16} = \frac{2}{16}$

$= \frac{1}{8}$

2) $P(N_2 = n \mid N_1 = 2) = \frac{P(N_2 = n, N_1 = 2)}{P(N_1 = 2)}$

or a $P(N_2 = n, N_1 = 2) = \int_0^{+\infty} P(N_2 = n, N_1 = 2 \mid \Theta = \theta)\, g(\theta)\, d\theta$

$= \int_0^{+\infty} P(N_2 = n \mid \Theta = \theta)\, P(N_1 = 2 \mid \Theta = \theta)\, g(\theta)\, d\theta$

$= \int_0^{+\infty} \frac{\theta^n}{n!} e^{-\theta} \frac{\theta^2}{2!} e^{-\theta} e^{-\theta}\, d\theta$

$= \frac{1}{2n!} \int_0^{+\infty} \theta^{2+n} e^{-3\theta}\, d\theta$

$\underset{v=3\theta}{=} \frac{1}{2n!} \int_0^{+\infty} \left(\frac{v}{3}\right)^{2+n} e^{-v} \frac{dv}{3} = \frac{1}{2n!} \frac{1}{3^{n+3}} \int_0^{+\infty} v^{(2+n)} e^{-v}\, dv$

$= \frac{3^{-(n+3)}}{2n!} \Gamma(n+3)$

Finalement : $P(N_2 = n \mid N_1 = 2) = 4 \dfrac{(n+2)(n+1)}{3^{-(n+3)}}$

Classes de lois conjuguées : (diapositives)

4.3 : La prime de Bayes est linéaire en les observations dans le cadre exponentiel (Résultat important pour interpréter la validité des résultats).

4.4 : souvent donné en examen à l'examen

Exercice 2.4 :

1) La prime de Bayes est encore la prime collective car il n'y a pas d'observations

$$P^{Bayes} = E(X) = \int_{\mathbb{R}_+} E(X \mid T=t)\, h(t)\,dt$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+} E(x \mid T=t)\, t e^{-t}\, dt$$

$$= \iint_{\mathbb{R}_+} x\, f(x \mid T=t)\, t e^{-t}\, dt\, dx$$

$$= \iint_{\mathbb{R}_+} x\, t^2 e^{-t(1+x)}\, dt\, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^+} \frac{t^2}{t} \int_{\mathbb{R}^+} e^{-t(1+x)}\, dx\, dt = \frac{t^2}{t^2}\left[-e^{-t}\right]_0^{\infty}$$

$$= 1$$

2) $h(t \mid x=5)$

$$= \frac{h(t) \cdot f(x=5 \mid T=t)}{f(x=5)}$$

$$= \frac{t e^{-t} \cdot t e^{-t5}}{\int f(5 \mid T=t)\, dt}$$

$= \ldots$

$$f(5) = \int_{t \geq 0} f(5 \mid T=t)\, dt$$

$$= \frac{1}{108}$$

Exercice 5 :

$$P(H=h \mid D_1=1) = \frac{P(D_1=1 \mid H=h)\, P(H=h)}{P(D_1=1)}$$

$$P(D_1=1) = P(D_1=1 \mid H=0{,}25)\, P(H=0{,}25) + P(D_1=1 \mid H=0{,}5)\, P(H=0{,}5)$$

$$= 0{,}25 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}3$$

$$P(D_1=1 \mid H=h) = h$$

2) $P(D_2=d \mid D_1=1) = \dots$

$$= P(D_2=1 \mid H=0{,}25)\, P(\underbrace{H=0{,}25 \mid D_1=1}_{2/3}) + P(D_2=1 \mid H=0{,}5)\, P(\underbrace{H=0{,}5 \mid D_1=1}_{1/3})$$

assez intuitif !

$$= \begin{cases} 2/3 & d=0 \\ 1/3 & d=1 \end{cases}$$