ERM
M2A, année 2022 – 2023

TD 2 : COPULES

Exercice 1
Soit (U, V) un vecteur Gaussien centré, dont les variances sont $Var(U) = a^2$ et $Var(V) = b^2$, et de corrélation $r \in [-1, 1]$. On pose
$$X = \frac{U}{a} + \frac{V}{b} \text{ et } Y = \frac{U}{a} - \frac{V}{b}.$$
Donner la copule du couple (X, Y).

Exercice 2
Déterminer les distributions marginales $F(x)$ et $G(x)$ associées à la distribution $H(x, y)$ puis construire la copule $C(u, v)$ associée à H par le théorème de Sklar.

$$H(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y}} \text{ ; } pour\ x, y \in \mathbb{R}$$

Exercice 3
On considère deux variables alatoires indpendantes X_1 et X_3 telles que $X_1 \sim Exp(1)$ et $X_3 \sim Exp(2)$. On pose alors $X_2 = X_1 + X_3$ et $X = (X_1, X_2)$.

(1) **Copules**
  (a) Déterminer la fonction de répartition de X_2.
  (b) Déterminer la fonction de répartition jointe de X. Vérifier alors le résultat de (a).
  (c) On note désormais F_1 et F_2 les fonctions de répartition de X_1 et X_2. Déterminer la fonction copule associée à F_X, ie. la fonction de C de $[0, 1]^2$ dans $[0, 1]$ telle que :
$$F_X(X_1, X_2) = C(F_1(X_1), F_2(X_2)).$$
(2) **Corrélations**
  (a) Calculer le ρ de Spearmann de X, $\rho(X, Y) = 12 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) du dv - 3$
  (b) Calculer le τ de Kendall de X de trois manières différentes :
    (i) A l'aide de la définition $\tau = \mathbb{P}[(X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0]$
    (ii) A l'aide de la formule $\tau = 4\, \mathbb{E}[F_X(X_1, X_2)] - 1$
    (iii) A l'aide des copules $\tau(X, Y) = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$

TD2 : Copules

14/10/2022

- Exercice 1

Soit (U,V) un vecteur Gaussien centré, dont les variances sont $\mathbb{V}(U) = a^2$ et $\mathbb{V}(V) = b^2$, et de corrélation $r \in [-1,1]$. On pose

$$X = \frac{U}{a} + \frac{V}{b} \quad \text{et} \quad Y = \frac{U}{a} - \frac{V}{b}$$

Donner la copule du couple (X,Y).

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathrm{Cov}\left(\frac{U}{a} + \frac{V}{b}, \frac{U}{a} - \frac{V}{b}\right)$$

$$= \frac{1}{a^2}\mathbb{V}(U) - \frac{1}{b^2}\mathbb{V}(V) + \cancel{\mathrm{Cov}\left(\frac{U}{a}, -\frac{V}{b}\right)} + \cancel{\mathrm{Cov}\left(\frac{V}{b}, \frac{U}{a}\right)}$$

$$= 1 - 1 = 0 \quad \Rightarrow X \text{ et } Y \text{ indépendants}$$

(X,Y) vecteur Gaussien car combinaison linéaire de n vecteurs gaussiens

$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)\,F_Y(y)$

$C(u,v) = uv$

• Exercice 3

On considère deux variables aléatoires indépendantes X_1 et X_3 telles que $X_1 \sim Exp(1)$ et $X_3 \sim Exp(2)$. On pose alors $X_2 = X_1 + X_3$ et $X(X_1, X_2)$

(1) Copules

(a) Déterminer la fdr de X_2.

$$
\begin{aligned}
F_{X_2}(x_2) &= \mathbb{P}(X_2 \leqslant x_2) = \mathbb{P}(X_1 + X_3 \leqslant x_2) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x_2 - X_3 \mid X_3 = x_3)\, \mathbb{P}(X_3 = x_3) \\
&= \int_0^{\infty} F_{X_1}(x_2 - x_3)\, f_{X_3}(x_3)\, dx_3 \\
&= \int_0^{x_2} (1 - e^{-(x_2 - x_3)}) \cdot 2e^{-2x_3}\, dx_3 \\
&= 2 \int_0^{x_2} e^{-2x_3} - e^{-x_2} \cdot e^{-x_3}\, dx_3 \\
&= 2 \left(\left[-\frac{1}{2} e^{-2x_3} \right]_0^{x_2} - e^{-x_2} \left[-e^{-x_3} \right]_0^{x_2} \right) \\
&= 2 \left(-\frac{1}{2} e^{-2x_2} + \frac{1}{2} - e^{-x_2}(-e^{-x_2} + 1) \right) \\
&= -e^{-2x_2} + 1 + 2e^{-2x_2} - 2e^{-x_2} \\
&= 1 - 2e^{-x} + e^{-2x_2} \\
&= (1 - e^{-x_2})^2
\end{aligned}
$$

(b) Déterminer la fdr jointe de X. Vérifier alors le résultat de (a).

$$
\begin{aligned}
F_{X_1, X_2}(x_1, x_2) &= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_1 + X_3 \leqslant Y \cap X_1 \leqslant x \mid X_1 = x_1)\, f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \\
&= \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(X_3 \leqslant Y - x_1 \cap x_1 \leqslant x)\, f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \\
&= \int_0^{\min(x,y)} \mathbb{P}(X_3 \leqslant Y - x_1)\, f_{X_1}(x_1)\, dx_1 \\
&= \int_0^{\min(x,y)} (1 - e^{-2(y - x_1)})\, e^{-x_1}\, dx_1 \\
&= \int_0^{\min(x,y)} e^{-x_1} - e^{-2y} e^{x_1}\, dx_1 \\
&= 1 - e^{-\min(x,y)} - e^{-2y} \left[e^{-\min(x,y)} - 1 \right] \\
&= 1 - e^{-\min(x,y)} - e^{-2y + \min(x,y)} + e^{-2y}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{X_2}(y) &= \lim_{x \to \infty} F_X(x, y) \\
&= 1 - e^{-y} - e^{-y} + e^{-2y} \\
&= 1 - 2e^{-y} + e^{-2y} \\
&= (1 - e^{-y})^2
\end{aligned}
$$

Exercice 3 :

$X_1 \sim \mathcal{E}(1)$ et $X_3 \sim \mathcal{E}(2)$ On pose $X_2 = X_1 + X_3$ et $X = (X_1, X_2)$

$$f_{X_2}(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X_1}(t) f_{X_3}(x-t)\,dt$$
$$= \int_{\mathbb{R}} e^{-t} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(t) \times 2e^{-2(x-t)} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x-t)\,dt$$
$$= 2e^{-2x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) \int_0^x e^t\,dt$$
$$= 2e^{-2x} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x) [e^x - 1] = 2e^{-x}(1-e^{-x}) \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$$

1) $x_2 \in \mathbb{R}^+$, $F_{X_2}(x_2) = \mathbb{P}(X_1 + X_3 \leq x_2)$

$$= \int_0^{x_2} 2e^{-t}(1-e^{-t})\,dt$$
$$= [-2e^{-t} + e^{-2t}]_0^{x_2}$$
$$= e^{-2x_2} - 2e^{-x_2} - (1-2)$$
$$= 1 - 2e^{-x_2} + e^{-2x_2} = (1-e^{-x_2})^2$$

b) On veut $F_X(x_1, x_2)$ où $X = (X_1, X_2)$

$$F_X(x, y) = F_{X_1,X_2}(x, y) = \mathbb{P}(X_1 \leq x, X_2 \leq y)$$
$$= \mathbb{P}(X_1 \leq x, X_1 + X_3 \leq y)$$
$$= \mathbb{P}(X_1 + X_3 \leq y, X_1 \leq x \mid X_1 = x_1)\,\mathbb{P}(X_1 = x_1)$$
$$= \int_0^{\infty} \mathbb{P}(x_1 + X_3 \leq y, x_1 \leq x) f_{X_1}(x_1)\,dx_1$$
$$= \int_0^{\min(x,y)} \mathbb{P}(X_3 \leq y - x_1) f_{X_1}(x_1)\,dx_1$$
$$= \int_0^{x \wedge y} (1 - e^{-2(y-x_1)}) e^{-x_1}\,dx_1$$
$$= \int_0^{x \wedge y} e^{-x_1} - e^{-2y} e^{x_1}\,dx_1$$
$$= [-e^{-x_1}]_0^{x \wedge y} - e^{-2y}[e^{x_1}]_0^{x \wedge y}$$
$$= 1 - e^{-x \wedge y} - e^{-2y}(e^{x \wedge y} - 1)$$
$$= 1 + e^{-2y} - e^{-x \wedge y} - e^{-2y} e^{x \wedge y}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \to \infty} F_{X_1,X_2}(x, y) = 1 + e^{-2y} - e^{-y} - e^{-2y} e^{y}$$
$$= 1 + e^{-2y} - 2e^{-y} = (1 - e^{-y})^2$$
$$= F_{X_2}(y)$$

c) On a aussi $F_{X_1}(x) = 1 - e^{-x}$

$$F_X(X_1, X_2) = 1 - e^{-X_1 \wedge X_2} - e^{-2X_2}(e^{X_1 \wedge X_2} - 1)$$

$F_1(X_1) = 1 - e^{-X_1} \Rightarrow F_1^{-1}(u) = -\ln(1-u)$ $\quad u = F_1(X_1)$

$F_2(X_2) = (1 - e^{-X_2})^2 \Rightarrow F_2^{-1}(v) = -\ln(1 - \sqrt{v})$ $\quad v = F_2(X_2)$

$X_1 \wedge X_2 = \min(-\ln(1-u), -\ln(1-\sqrt{v}))$ $\quad x \mapsto \ln(1-x)$ est $\searrow$ en x $\Rightarrow x \mapsto -\ln(1-x)$ est $\nearrow$ en x

$$= -\ln(1 - \min(u, \sqrt{v}))$$

$$\Rightarrow C(u,v) = 1 - e^{-(-\ln(1-\min(u,\sqrt{v})))} + e^{-2 \times -\ln(1-\sqrt{v})}\left(e^{-\ln(1-\min(u,\sqrt{v}))} - 1\right)$$
$$= 1 - (1 - \min(u, \sqrt{v})) + (1-\sqrt{v})^2 \left(\frac{1}{1 - \min(u,\sqrt{v})} - 1\right)$$
$$= \min(u, \sqrt{v}) + (1-\sqrt{v})^2 \frac{\min(u, \sqrt{v})}{1 - \min(u, \sqrt{v})}$$

2) a) $\rho(X, Y) = 12 \int_{[0,1]^2} C(u,v)\,du\,dv - 3$

$$\int_{[0,1]^2} C(u,v)\,du\,dv = \int_0^1 \int_0^{u^2} \sqrt{v} + (1-\sqrt{v})^2 \frac{\sqrt{v}}{1-\sqrt{v}}\,dv\,du + \int_0^1 \int_{u^2}^1 u + (1-\sqrt{v})^2 \frac{u}{1-u}\,dv\,du$$

$$= \int_0^1 \int_0^{u^2} (1+v)\,dv\,du + \int_0^1 \int_{u^2}^1 u + (1-\sqrt{v})^2 \frac{u}{1-u}\,dv\,du$$

$$\int_{u^2}^1 (1-\sqrt{x})^2\,dx = \left[t - 2 \times \frac{2}{3} t^{3/2} + \frac{1}{2} t^2\right]_{u^2}^1 = \left(1 - \frac{4}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(u^2 - \frac{4}{3}u^3 + \frac{1}{2}u^4\right)$$
$$= (1-u^2) - \frac{4}{3}(1-u^3) + \frac{1}{2}(1-u^4) = *$$

$$= \int_0^1 u^2 + \frac{1}{2}u^4 \, du \quad + \int_0^1 u(1-u^2) + \frac{u}{1-u} \times \Big((1-u)\Big[(1+u) - \frac{4}{3}(1+u+u^2) + \frac{1}{2}(1+u+u^2+u^3)\Big]\Big) \, du$$

$$* = (1-u)(1+u) - \frac{4}{3}(1-u)(1+u+u^2) + \frac{1}{2}(1-u)(1+u+u^2+u^3)$$

$$= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{10}\right) + \int_0^1 u - u^3 + u\Big((1+u) - \frac{4}{3}(1+u+u^2) + \frac{1}{2}(1+u+u^2+u^3)\Big) \, du$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \int_0^1 u - u^3 + u + u^2 - \frac{4}{3}(u+u^2+u^3) + \frac{1}{2}(u+u^2+u^3+u^4) \, du$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{10} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right)$$

$$= \frac{257}{360}$$

$$\Rightarrow \rho(X,Y) = 12 \int_{[0,1]^2} C(u,v) \, du \, dv - 3 = 12 \times \frac{257}{360} - 3$$

$$= \frac{167}{30}$$

b) i) $\tau = \mathbb{P}((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0) - \mathbb{P}((X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0)$

$$= 2\,\mathbb{P}(\underbrace{(X_1 - X_1')(X_2 - X_2')}_{A} > 0) - 1$$

$$\mathbb{P}(A > 0) = \mathbb{P}((X_1 < X_1', X_2 < X_2') \cup (X_1 > X_1', X_2 > X_2'))$$

$$= 2\,\underbrace{\mathbb{P}(X_1 < X_1', X_2 < X_2')}_{F_{(X_1,X_2)}(X_1', X_2')}$$

$$F_{(X_1,X_2)}(X_1', X_2') = \int_{\mathbb{R}_+^2} F_{(X_1,X_2)}(x', y') \, f_{X_1'}(x') f_{X_2'}(y') \, dx' dy'$$

$$= \int_{\mathbb{R}_+^2} (1 + e^{-2y'} - e^{-x' \wedge y'} - e^{-2y'} e^{x' \wedge y'}) \, e^{-x'} \, 2e^{-2y'} \, dx' dy'$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{x'} (\underbrace{1 + e^{-2y'} - e^{-y'} - e^{-2y'} e^{y'}}_{(1-e^{-y'})^2}) e^{-x'} 2e^{-2y'} \, dy' dx' + \int_0^\infty \int_{x'}^\infty (\underbrace{1 + e^{-2y'} - e^{-x'} - e^{-2y'} e^{x'}}_{1 - e^{-x'} + (1-e^{x'})e^{-2y'}}) e^{-x'} 2e^{-2y'} \, dy' dx'$$

$$= \int_0^\infty \int_0^{x'} 2(1 - e^{-y'})^2 e^{-x'} e^{-2y'} \, dy' dx' + \int_0^\infty \int_{x'}^\infty 2e^{-x'} (1 - e^{-x'} + (1 - e^{x'}) e^{-2y'}) e^{-2y'} \, dy' dx'$$

$$= \int_0^\infty 2e^{-x'} \Big[\frac{1}{2}(1 - e^{-2x'}) - \frac{2}{3}(1 - e^{-3x'}) + \frac{1}{4}(1 - e^{-4x'})\Big] dx' + \int_0^\infty 2e^{-x'} \Big[\frac{1}{2}(1 - e^{-x'}) e^{-2x'} + \frac{1}{4}(1 - e^{x'}) e^{-4x'}\Big] dx'$$

$$= \left(1 - \frac{1}{3} - \frac{4}{3}\Big[1 - \frac{1}{4}\Big] + \frac{1}{2}\Big[1 - \frac{1}{5}\Big]\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\Big[\frac{1}{5} - \frac{1}{4}\Big]\right)$$

$$= \frac{1}{15} + \frac{7}{120}$$

$$= \frac{1}{8}$$

$$\Rightarrow \tau = 2 \times 2 \times \frac{1}{8} - 1$$

$$= -1/2$$

ii) $\tau = 4\,\mathbb{E}[F_X(X_1, X_2)] - 1$

$$= 4 \times 1/8 - 1 = -1/2$$

iii) $\tau(X,Y) = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u,v) \, dC(u,v) - 1$