13/03/24

Théorie des Valeurs Extrêmes.

Rappels

$M_n \leq u_n$ si $u_n = a_n x + b_n \Leftrightarrow M_n \leq a_n x + b_n \Leftrightarrow \frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x$

$F \in \mathcal{D}(GEV(0,1,\xi))$ si $h'(y) \xrightarrow[y \to x]{} \xi$

$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} GEV(0,1,\xi)$

$\Rightarrow b_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$, $a_n = h(b_n)$

quand on a une distribution normale

$b_n \sim (2\ln n)^{1/2}$ et $a_n \sim (2\ln n)^{-1/2} \longrightarrow 0$!

$\Rightarrow M_n - b_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

- $X \sim \mathcal{LN}(\mu, \sigma^2) \Leftrightarrow Y = \ln X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ on pose $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$Y = \mu + \sigma Z$

$M_n^X \overset{?}{\longleftrightarrow} M_n^Z$

lien

Déjà $M_n^Y = \mu + \sigma M_n^Z$ car le max est invariant par transformation croissante

$\Rightarrow M_n^X = e^{\mu + \sigma M_n^Z}$ ok car exp est une fonction croissante.

On sait que $\frac{M_n^Z - b_n^Z}{a_n^Z} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda \Leftrightarrow \mathbb{P}(M_n^Z \leq a_n^Z x + b_n^Z) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \underbrace{e^{-e^{-x}}}_{\text{fonction de répartit° de Gumbel !}}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(M_n^Z \leq a_n^Z x + b_n^Z) = \mathbb{P}\Big(M_n^X \leq \underbrace{e^{\sigma(a_n^Z x + b_n^Z) + \mu}}_{= e^{\sigma a_n^Z x}\, e^{\mu + \sigma b_n^Z}}\Big)$

et $e^{\sigma a_n^Z x} \simeq 1 + \sigma a_n^Z x$ car $a_n \to 0$ car $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

D'où $e^{\sigma a_n^Z x} e^{\mu + \sigma b_n^Z} = \underbrace{e^{\mu + \sigma b_n^Z}}_{b_n^X} + \underbrace{\sigma e^{\mu + \sigma b_n^Z} a_n^Z x}_{a_n^X}$

Conclusion $\frac{M_n^X - b_n^X}{a_n^X} \to \Lambda \iff \mathcal{LN} \in \mathcal{D}(\Lambda)$

- $Y \sim \mathcal{E}(1)$ on sait que $F_Y \in \mathcal{D}(\Lambda)$

  et $M_n^Y - \ln n \to \Lambda$

  $Z = e^Y \quad \mathbb{P}(Z > z) = \mathbb{P}(e^Y > z)$

  $= \mathbb{P}(Y > \ln z) = e^{-\ln z} = \underbrace{\frac{1}{z}}$

  fonction de survie d'une Pareto (1, 1)

Rappel Pareto(c, α)

$\bar{F}(x) = \frac{c}{x^\alpha}$

On sait que

$F_Z \in \mathcal{D}(\phi_1)$ et $\frac{M_n^Z}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \phi_1$

exp dans Gumbel et exp(exp) dans Fréchet
alors que l'exemple précédent $\mathcal{N} \in \Lambda \Rightarrow \mathcal{LN} \in \Lambda$
on restait dans la même distribution / domaine d'attraction

$e^{M_n^Y - \ln n} = \frac{M_n^Z}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} e^{\Lambda} = \phi_1$

- On va maintenant passer à la caractérisation de la loi de Pareto

Si $X \sim$ Pareto$(c, \alpha) \iff \bar{F}(x) = \frac{c}{x^\alpha}$

$a_n = \frac{1}{\alpha}(cn)^{1/\alpha} \quad b_n = (cn)^{1/\alpha}$ alors $\frac{M_n - b_n}{a_n} \to GEV(0, 1, \frac{1}{\alpha})$

$\iff c_n = \frac{1}{\alpha}(cn)^{1/\alpha} \quad d_n = 0$ alors $\frac{M_n}{c_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \phi_\alpha$ même distribut°

Domaine d'attraction de ϕ_α (Fréchet)

$\Leftrightarrow$ F / $\frac{M_n - d_n}{c_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \phi_\alpha$

On sait que Pareto $(c, \alpha) \in \mathcal{D}(\phi_\alpha)$

$$\bar{F}(x) = \frac{c}{x^\alpha}$$

Théorème

$F \in \mathcal{D}(\phi_\alpha) \Leftrightarrow \exists$ une fonction à variations lentes L /

$$\bar{F}(x) = \frac{L(x)}{x^\alpha}$$

On remplace la constante de Pareto par une fonction à variat° lentes

Définition L est une fonction à variations lentes

si elle est >0

mesurable

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{L(tx)}{L(t)} = 1 \quad \forall x$$

Exemples

1) $L(x) = c$ $\qquad \frac{L(tx)}{L(t)} = \frac{c}{c} = 1 \to 1 \quad \forall x$ | OK

2) $L(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} c$ $\qquad \frac{L(tx)}{L(t)} \longrightarrow \frac{c}{c} = 1 \quad \forall x \quad$ OK

3) $L(x) = \ln x$ $\qquad \frac{L(tx)}{L(t)} = \frac{\ln t + \ln x}{\ln t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 1 \quad \forall x$

$\to +\infty$

4) $L(x) = \frac{1}{\ln x}$ $\qquad \frac{L(tx)}{L(t)} = \frac{\frac{1}{\ln t + \ln x}}{\frac{1}{\ln x}} = \frac{\ln x}{\ln t + \ln x} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{\ln x}{\ln x} = 1$

$\to 0$

Contre exemples

1) $L(x) = x^\beta$, $\beta \neq 0$ $\qquad \frac{L(tx)}{L(t)} = x^\beta \neq 1$

donc $\to +\infty$ ou $\to 0$ trop vite alors pas à variations lentes

2) $L(x) = 2 + \cos x$ $\qquad \frac{L(tx)}{L(t)} = \frac{2 + \cos xt}{2 + \cos t}$ ne converge pas car $\cos$ ne converge pas

$F^{\leftarrow}$ définition générale quantile

Domaine d'attraction de Gumbel $\Lambda \cdot GEV(0, 1, 0)$

Si F est $2\times$ dérivable et si $h'(y) \underset{y \to x^F}{\longrightarrow} 0$

$h(y) = \dfrac{\bar{F}(y)}{f(y)}$ alors $\dfrac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda = GEV(0, 1, 0)$

avec $\begin{cases} a_n = h(b_n) \\ b_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \end{cases}$

$\exists g \,/\, \dfrac{\bar{F}(x + tg(x))}{\bar{F}(x)} \longrightarrow e^{-t} \quad \forall t \in \mathbb{R} \quad (*)$

Exemple $g(x) = \mathbb{E}[X - x \mid X > x] \iff F \in \mathcal{D}(\Lambda)$

$\dfrac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ avec $b_n = F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

$a_n = g(b_n)$

Soient t et $x > 0$

$\mathbb{P}\left(\dfrac{X - x}{g(x)} > t \mid X > x\right) = \dfrac{\bar{F}(x + tg(x))}{\bar{F}(x)} \longrightarrow e^{-t}$

$\iff \dfrac{X - x}{g(x)} \mid X > x \underset{x \to x^F}{\xrightarrow{\mathcal{L}}} \mathcal{E}(1)$

Exemple $\dfrac{X - x}{\mathbb{E}[X - x \mid X > x]} \mid X > x \longrightarrow \mathcal{E}(1)$

Retour sur le domaine d'attraction de Fréchet

$F \in \mathcal{D}(\phi_\alpha) \iff \bar{F}(x) \in \dfrac{L(x)}{x^\alpha}$

Pour $t > 1$ $\mathbb{P}\left(\dfrac{X}{x} > t \mid X > x\right) = \dfrac{\mathbb{P}(X > xt)}{\mathbb{P}(X > x)} = \dfrac{L(tx)}{L(x)} = \dfrac{1}{t^\alpha} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \dfrac{1}{t^\alpha}$

$\iff \dfrac{X}{x} \mid X > x \xrightarrow{\mathcal{L}} \text{Pareto}(1, \alpha)$

$g(x) = \mathbb{E}[X - x \mid X > x]$ esp de vie

$h(x) = \dfrac{\bar{F}(x)}{f(x)}$

lien ?

$$g(x) = \frac{\mathbb{E}[(X-x)\mathbb{1}_{X>x}]}{\mathbb{P}(X>x)} = \frac{1}{\mathbb{P}(X>x)} \int_x^{x^F} (u-x) f_X(u)\, du$$

IPP

$$= \frac{1}{\mathbb{P}(X>x)} \left(\Big[(u-x)(-\bar{F}(u))\Big]_x^{x^F} + \int_x^{x^F} \bar{F}(u)\, du \right)$$

en x ça donne 0

en x^F $\bar{F}(x_F) = 0$

$$= \frac{\int_x^{x^F} \bar{F}(u)du}{\bar{F}(x)} = \frac{A(x)}{B(x)}.$$

d'où $h(x) = \dfrac{A'(x)}{B'(x)}$

Rmq Weibull $\in \mathcal{D}(\Lambda)$

$\hookrightarrow$ de Mr Planchet

distribution sur $\mathbb{R}_+$

Domaine d'attraction de Weibull Ψ_α (il faut que $x^F < +\infty$)

$F \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha) \Leftrightarrow \bar{F}\left(x^F - \frac{1}{x}\right) = x^{-\alpha} L(x)$ avec L à variations lentes

$(*)$ $\Leftrightarrow$

$X \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha) \Leftrightarrow \dfrac{1}{x^F - X} \in \mathcal{D}(\phi_\alpha)$

Preuve $(*)$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{x^F - X} > x\right) = \mathbb{P}\left(X > x^F - \frac{1}{x}\right) = \bar{F}\left(x^F - \frac{1}{x}\right)$$

Prenons $d_n = x^F$ et $c_n = x^F - F^{\leftarrow}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$

On a des distributions qui ne sont dans aucun des 3 domaines d'attractions cités.

- $\bar{F}(x) = \frac{1}{\ln x}$ si $x > e$

$Y \sim$ Pareto $(1, 1)$ $\quad X = e^Y$ distribution ?

$P(Y > y) = \frac{1}{y}$ $\quad$ $P(X > x) = P(e^Y > x) = P(Y > \ln x)$

$= \frac{1}{\ln x}$

$$h(x) = \frac{\bar{F}(x)}{f(x)} = x \ln x$$

$$h'(x) = 1 + \ln x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty = \xi$$

$GEV(\mu, \sigma, +\infty)$ n'existe pas

$\Rightarrow X \notin D(\phi_\alpha, \Lambda, \Psi_\alpha)$

$$Y = \ln X \in D(\phi_1) \Rightarrow \frac{M_n^Y}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \phi_1$$

- $\bar{F}(x) = \frac{1}{\ln(\ln x)}$ idem

$X = e^{e^Y}$ $\quad P(X > x) = P(e^{e^Y} > x) = P(e^Y > \ln x)$

$= P(Y > \ln \ln x)$

$= \frac{1}{\ln \ln x}$

$$f(x) = \frac{u'}{u} = \frac{\frac{1/x}{\ln x}}{\ln \ln x} = \frac{1}{x \ln x \ \ln \ln x}$$

$$h(x) = \frac{\bar{F}(x)}{f(x)} = \frac{x \ln x \ \cancel{\ln \ln x}}{\cancel{\ln \ln x}} = x \ln x$$

$$h'(x) = \underset{1 + \ln x}{\cancel{\ldots}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty = \xi \ldots$$

Vitesse de convergence

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mathbb{E}[\bar{X}_n]}{\sigma(\bar{X}_n)} \leq x \right) - \phi(x) \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

la plus grande erreur possible sera d'ordre $\frac{1}{\sqrt{n}}$

Théorème de Berry Essor (?) si $\mathbb{E}[|X|^3] < +\infty$ alors

$\mathbb{P}\Big(\; M_n - b_n$

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x \right) - G(x) \right| = O\left(\frac{1}{n}, h'(b_n) - \xi \right)$$

est approximé par

$F \in \mathcal{D}(G)$

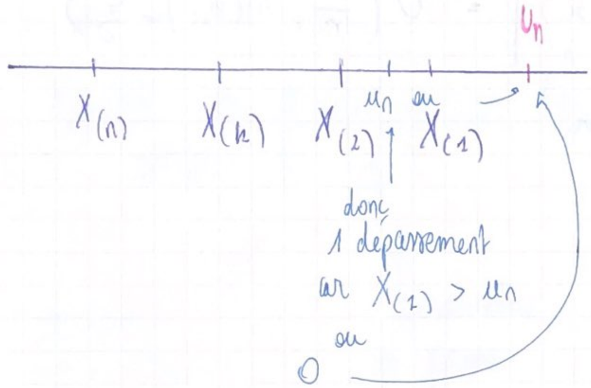
et $G = GEV(0, 1, \xi)$

Convergence des statistiques d'ordre (X_i) iid $i \in [\![1, n]\!]$

$$\min X_1,..,X_n \overset{=}{\leq} X_{(n)} \leq X_{(n-1)} \leq \dots \leq X_{(2)} \leq X_{(1)} \overset{=}{\leq} \max(X_1,..,X_n) \overset{=}{\leq} M_n$$

On définit les statistiques d'ordre $(X_{(1)},..,X_{(n)})$ avec $X_{(k)} = k^{\text{ième}}$ plus grande valeur.

$X_{(k)} \leq u_n$ $\qquad N_n(u_n) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i > u_n}$ nb de dépassements de u_n



$\{X_{(1)} \leq u_n\} = \{N_n(u_n) = 0\}$

$\{X_{(2)} \leq u_n\} = \{N_n(u_n) = 1 \text{ ou } 0\} = \{N_n(u_n) \leq 1\}$

$\{X_{(3)} \leq u_n\} = \{N_n(u_n) = 2 \text{ ou } = 1 \text{ ou } 0\} = \{N_n(u_n) \leq 2\}$

Donc $\{X_{(k)} \leq u_n\} = \{N_n(u_n) \leq k-1\}$

Si $n\bar{F}(u_n) \to \tau$ alors $N_n(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathcal{P}(\tau)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X_{(k)} \leq u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\tau} \frac{\tau^i}{i!}$$

Hyp $X \in \mathcal{D}(G) \Leftrightarrow \dfrac{X_{(1)} - b_n}{a_n} \to G$

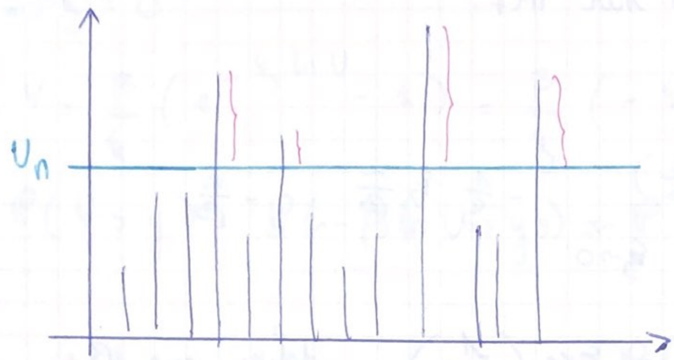
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X_{(1)} \leq a_n x + b_n) \to G(x)$$

$$\Leftrightarrow n\bar{F}(a_n x + b_n) \to -\ln G(x) = \tau$$

$u_n = a_n x + b_n \Rightarrow \mathbb{P}(X_{(k)} \leq a_n x + b_n) \to G(x) \sum_{i=0}^{k-1} \dfrac{(-\ln G(x))^i}{i!}$

en remplaçant τ par sa valeur

2. Les dépassements de seuils



Dépassement de seuil

$N_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i > u_n} \to \mathcal{P}(\tau)$

$n\bar{F}(u_n) \to \tau > 0$

on veut étudier l'intensité du dépassement de seuil

$X - u_n \mid X > u_n$

Famille des distributions de Pareto Généralisées

GPD(β, ξ)

paramètre d'échelle $\beta > 0$ (zoome ou dézoome)

paramètre de forme $\xi \in \mathbb{R}$

pas de paramètre de position car on partira toujours du m̂ point de départ : 0. (voir les v.a "}" sur le schéma : elles sont forcément ≥ 0) ($X - u_n \mid X > u_n \geq 0$)

si $X \sim GPD(\beta, \xi)$ et $Y \sim GPD(1, \xi)$ alors $X \overset{\mathcal{L}}{=} \beta Y$

Fonction de survie

$X \sim GPD(\beta, 0)$

$$\mathbb{P}(X > x) = \left[1 + \xi\left(\frac{x}{\beta}\right)\right]_+^{-1/\xi}$$

1) si $\xi > 0$ $\quad \mathbb{P}(X > x) = \frac{1}{\left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{1/\xi}}$ défini sur $[0, +\infty[$

$$\mathbb{P}(X > x) \underset{x \to +\infty}{\simeq} \left(\frac{\beta}{\xi x}\right)^{1/\xi} \sim \left(\frac{\beta}{\xi}\right)^{1/\xi} \frac{1}{x^{1/\xi}}$$

$$\sim \text{Pareto}\left(\left(\frac{\beta}{\xi}\right)^{1/\xi}, \frac{1}{\xi}\right)$$

On a les Pareto définis sur $\mathbb{R}_+$.

2) $\xi = 0$

$$\frac{1}{\left(1+\xi\frac{x}{\beta}\right)^{1/\xi}} = e^{\frac{-1}{\xi}\ln\left(1+\xi\frac{x}{\beta}\right)} \underset{\xi\to 0}{\sim} e^{-\frac{1}{\xi}\xi\frac{x}{\beta}} \sim e^{-\frac{x}{\beta}}$$

$$\mathbb{P}(X > x) = e^{-\frac{x}{\beta}} \sim \mathcal{E}xp\left(\frac{1}{\beta}\right) \quad \text{défini sur } \mathbb{R}_+.$$

3) $\xi < 0$ $\quad \mathbb{P}(X > x) = \left(1-(-\xi)\frac{x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$

$(-\xi > 0)$

$$x \in \Big[0, \underbrace{-\frac{\beta}{\xi}}\Big]$$

au delà $\mathbb{P}(X > x)$ devient négatif
ici on s'affranchit de la partie positive

Rmq $\xi = -1$ $\quad \mathbb{P}(X > x) = 1 - \frac{x}{\beta} \quad x \in [0, \beta]$

$\mathcal{U}([0, \beta])$

<u>Propriétés</u>

Si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$ alors $Y = \frac{\beta}{\xi}\left(U^{-\xi} - 1\right) \sim GPD(\beta, \xi)$

Preuve

- $\xi > 0$

$$\mathbb{P}(Y > y) = \mathbb{P}\left(\frac{\beta}{\xi}\left(U^{-\xi} - 1\right) > y\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(U^{-\xi} > 1 + \frac{\xi y}{\beta}\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(U < \left(1+\frac{\xi y}{\beta}\right)^{-1/\xi}\right)$$
$$= \left(1+\frac{\xi y}{\beta}\right)^{-1/\xi}$$

- $\xi = 0$

$$Y = \frac{\beta}{\xi}\left(e^{-\xi \ln U} - 1\right) = \frac{\beta}{\xi}\left(-\xi \ln U\right) = -\beta \ln U.$$

$$\mathbb{P}(Y > y) = \mathbb{P}(-\beta \ln U > y) = \mathbb{P}\left(\ln U < -\frac{y}{\beta}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(U < e^{-\frac{y}{\beta}}\right)$$

$$= e^{-\frac{y}{\beta}} \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\beta}\right)$$

- $\xi < 0$ à faire en exercice

Espérance

$$\mathbb{E}[Y] = \frac{\beta}{\xi}\left(\underbrace{\mathbb{E}\left[U^{-\xi}\right]}_{} - 1\right) = \frac{\beta}{1-\xi}$$

$$= \int_0^1 u^{-\xi}\, du = \left[\frac{u^{-\xi+1}}{1-\xi}\right]_0^1 \quad \text{intégrable si } \xi < 1$$

$$= \frac{1}{1-\xi}$$

Propriété (la + importante à retenir)

si $X \sim GPD(\beta, \xi)$ alors $\underbrace{X - x \mid X > x}_{\text{la loi du dépassement est une GPD}} \sim GPD(\beta + \xi x, \xi)$

La GPD est seuil-stable !

même paramètre de forme

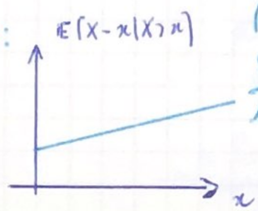
Corollaire Si $X \sim GPD(\beta, \xi)$ alors

$$\mathbb{E}[X - x \mid X > x] = \frac{\beta + \xi x}{1-\xi} = \frac{\beta}{1-\xi} + \frac{\xi}{1-\xi}x$$

linéaire en x

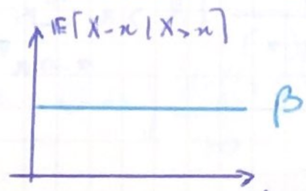
Remarques :

$0 < \xi < 1$



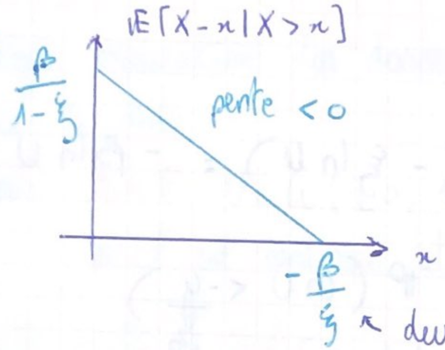
pente > 0 $\frac{\xi}{1-\xi} > 0$

$\xi = 0$



durée de vie constante peu importe l'âge (Exp)

$\xi < 0$



← durée de vie maximale

Preuve On pose $Y = X - x \mid X > x$ avec $X \sim GPD(\beta, \xi)$

$$\mathbb{P}(Y > y) = \mathbb{P}(X - x > y \mid X > x) = \frac{\mathbb{P}(X > x+y)}{\mathbb{P}(X > x)}$$

$$= \frac{\left(1 + \xi \frac{x+y}{\beta}\right)^{-1/\xi}}{\left(1 + \xi \frac{x}{\beta}\right)^{-1/\xi}}$$

on omet les parties positives

$$= \left(1 + \frac{\frac{\xi y}{\beta}}{1 + \xi \frac{x}{\beta}}\right)^{-1/\xi}$$

$$= \left(1 + \xi \frac{y}{\beta + \xi x}\right)^{-1/\xi}$$

$$\sim GPD(\beta + \xi x, \xi)$$

Théorème (important) Propositions suivantes sont équivalentes

1) $F \in \mathcal{D}(GEV(0,1,\xi)) \Leftrightarrow \exists (a_n), (b_n)$

$$b_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$$

$$a_n = g(b_n) \text{ avec } g(x) = \mathbb{E}[X - x \mid X > x]$$

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} GEV(0, 1, \xi)$$

2) $$\frac{X - x}{g(x)} \mid X > x \xrightarrow[x \to x^F]{\mathcal{L}} GPD(1, \xi)$$

même ξ

Analyse explicative des données

Q - Q plots

Rappel $X \sim F \quad U \sim \mathcal{U}([0,1]) \quad F^{-1}(U) \sim X$

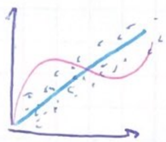
si F est continue alors $F(X) \sim \mathcal{U}([0,1])$

(U_i) iid $\sim \mathcal{U}([0,1]) \quad U_{(n)} \leq \cdots \leq U_{(k)} \leq \cdots \leq U_{(1)}$

$U_{(k)} \sim 1 - \frac{k}{n}$ d'où $F^{-1}(U_{(k)}) \sim F^{-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)$

$\sim X_{(k)}$

si on a la bonne distribution



proche de la $1^{ère}$ bissectrice

sinon

Exemple sinistres auto et MRH

Rappel EMV $\hat{\theta}_n$ $f(x, \theta)$ la densité

$$L(\theta; x_1; \dots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

$$\hat{\theta}_n = \underset{\theta \in \Theta}{\operatorname{argmax}}\, L(\theta, x_1, \dots, x_n)$$

Propriétés de l'EMV

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{ps} \theta_0$$

vecteur score $\frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta}$ on a $\mathbb{E}\left[\frac{\partial \ln f(X, \theta)}{\partial \theta}\right] = 0$

on a $\int_{\mathbb{R}} f(x, \theta)\, dx = 1 \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \int_{\mathbb{R}} f(x, \theta)\, dx = 0$

en dérivant par rapport à θ

$\Rightarrow \int \frac{\partial}{\partial \theta} f(x, \theta)\, dx = 0 \Rightarrow \int \frac{\partial \ln f(x, \theta)}{\partial \theta} f(x, \theta)\, dx = 0$

si le support est ⊥⊥ de θ

D'où $\mathbb{E}\left[\dfrac{\partial \ln f(X,\theta)}{\partial \theta} \right] = 0$

En dérivant une 2e fois,

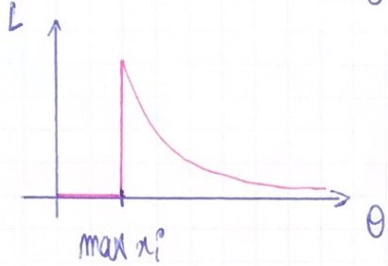
$$\mathbb{V}\left[\frac{\partial \ln f(X,\theta_0)}{\partial \theta} \right] = - \mathbb{E}\left[\frac{\partial^2 \ln f(X,\theta)}{\partial \theta \partial \theta'} \right] = I(\theta_0)$$

l'information de Fisher.

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta}_n - \theta_0) \longrightarrow \mathcal{N}(0, I^{-1}(\theta_0))$$

Exercice $X \sim \mathcal{U}[0,\theta]$ $\quad f(x,\theta) = \dfrac{1}{\theta} \mathbb{1}_{x \in [0,\theta]}$

$$L(\theta, x_1, .., x_n) = \frac{1}{\theta^n} \mathbb{1}_{\max x_i \leq \theta}$$



EMV $\hat{\theta}_n = \max X_i = M_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x^F = \theta$ ici

$$n\,\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\theta} = n \max\left(\frac{X_1 - \theta}{\theta}, \dots, \frac{X_n - \theta}{\theta} \right) \text{ sachant que } \frac{X_i - \theta}{\theta} \sim \mathcal{U}[-1,0]$$

$$\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \Psi_1$$

/!\
- la loi limite ici n'est pas la loi normale
- convergence en $\frac{1}{n}$ sans que l'on puisse généraliser ce résultat à d'autres distributions.