Probabilités numériques (G. Pagès, V. Lemaire)
M2 Probabilités & Finance, Sorbonne Université – École Polytechnique
M2 P.M.A.
27 mars 2022

3 h, polycopié, notes de cours, livres et téléphones mobiles non autorisés

Exercice (Quasi-Monte Carlo : Hammersley revisité). **1.** Soit $(\zeta_1,\dots,\zeta_n)$ un n-uplet composantes strictement croissantes et à valeurs dans $[0,1]$ d'une part et, d'autre part, $n+1$ réels positifs $a_1,\dots,a_n$ et b. On pose pour tout $y\in[0,1]$,

$$\varphi(y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k\mathbf{1}_{\{\zeta_k\le y\}}-b\,y.$$

Montrer que φ est càdlàg ($\varphi(y-)$ désignera la limite à gauche de φ en $y\in[0,1]$) et que

$$\begin{aligned}\sup_{y\in[0,1]}|\varphi(y)| &= \max_{1\le k\le n}|\varphi(\zeta_k)|\vee|\varphi(\zeta_k-)|\vee|\varphi(1)|\\ &= \max_{1\le k\le n}\left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{k}a_\ell-b\,\zeta_k\right|\vee\left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{k-1}a_\ell-b\,\zeta_k\right|\vee\left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{n}a_\ell-b\right|\end{aligned}$$

avec la convention $\sum_\emptyset=0$.

2. On se donne maintenant un n-uplet $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ à valeurs dans $[0,1]^d$, $d\ge 2$, tel que le n-uplet de ses d-ème coordonnées, noté $(\xi_1^d,\dots,\xi_n^d)$, soit strictement croissant avec $\xi_n^d=1$.

2.a. Rappeler la définition de la discrépance à l'origine du n-uplet $(\xi_1,\dots,\xi_n)$, que l'on notera $D_n^*(\xi_1,\dots,\xi_n)$ dans la suite, en accord avec le cours.

2.b. Montrer que

$$D_n^*(\xi_1^d,\dots,\xi_n^d)=\max_{1\le k\le n}\left|\xi_k^d-\frac{k}{n}\right|\vee\left|\xi_k^d-\frac{k-1}{n}\right|.$$

2.c. On note $\tilde\xi_k=(\xi_k^1,\dots,\xi_k^{d-1})$, $k=1,\dots,n$. Montrer (avec les notations vues en cours) que $D_n^*(\xi_1,\dots,\xi_n)$ est égale à

$$D_n^*(\tilde\xi_1,\dots,\tilde\xi_n)\vee\max_{1\le k\le n}\sup_{x\in[0,1]^{d-1}}\left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{k}\mathbf{1}_{[0,x]}(\tilde\xi_\ell)-\xi_k^d\prod_{i=1}^{d-1}x^i\right|\vee\left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{k-1}\mathbf{1}_{[0,x]}(\tilde\xi_\ell)-\xi_k^d\prod_{i=1}^{d-1}x^i\right|.$$

2.d. En déduire que

$$D_n^*(\tilde\xi_1,\dots,\tilde\xi_n)\le D_n^*(\xi_1,\dots,\xi_n)\le\frac{\max_{1\le k\le n}kD_k^*(\tilde\xi_1,\dots,\tilde\xi_k)}{n}+D_n^*(\xi_1^d,\dots,\xi_n^d).$$

3.a. Rappeler la définition de le suite de Halton pour une dimension d donnée ainsi qu'une estimation explicite non asymptotique de sa discrépance à l'origine en fonction de n.

3.b. Soit $d\ge 2$. Montrer l'existence d'une constante $C_d>0$ telle que, pour tout entier $n\ge 1$, il existe un n-uplet $(\xi_1,\dots,\xi_n)\in([0,1]^d)^n$ tel que

$$D_n^*(\xi_1,\dots,\xi_n)\le C_d\frac{(\log(n+1))^{d-1}}{n}.$$

On proposera en outre une heuristique pour un choix performant de la d-ème coordonnée de ce n-uplet.

4. Rappeler brièvement les principes de base de la simulation *QMC* et quel rôle y joue la discrépance à l'origine.

Problème 1 (Réduction de variance). On considère un marché financier de d actifs risqués $(X_t^1,\dots,X_t^d)_{t\in[0,T]}$ (l'actif dit sans risque $X_t^0\equiv 1$ pour simplifier) définis sur un espace probabilisé filtré $\big(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P},(\mathcal{F}_k)_{k\ge0}\big)$. Ces actifs sont tous supposés de carré intégrable. On note les valeurs initiales pour mettre en évidence leur caractère déterministe $X_0^i=x_0^i$, $i=1:d$. On négocie sur ce marché, outre les actifs eux-mêmes, des options européennes multi-sous-jacents de maturité T de forme générique

$$h_T=\varphi\big(X_T^1,\dots,X_T^d\big)\ge 0.$$

où $\varphi:\mathbf{R}_+^d\to\mathbf{R}_+$ est à croissance linéaire. On dispose de l'information selon laquelle, pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$, le payoff vanille

$$k_T^i=\varphi(x_0^1,\dots,x_0^{i-1},X_T^i,x_0^{i+1},\dots,x_0^d)$$

donne lieu à un calcul de prime par formule fermée. En d'autres termes, on sait calculer (sans EDP ni simulation de Monte Carlo)

$$P_i(x_0^1,\dots,x_0^d)=\mathbf{E}\,k_T^i=\mathbf{E}\,\varphi(x_0^1,\dots,x_0^{i-1},X_T^i,x_0^{i+1},\dots,x_0^d),\ i=1:d.$$

On veut utiliser ces payoffs vanille comme variables de contrôle pour le calcul par simulation de Monte Carlo de la prime $\mathbf{E}\,h_T$. À cette fin, on définit pour tout $\lambda=(\lambda_1,\dots,\lambda_d)\in\mathbf{R}^d$, la variable aléatoire

$$k_T^{(\lambda)}=\sum_{i=1}^{d}\lambda_i k_T^i.$$

1. Donner un exemple simple d'une telle situation lorsque les $X^1,\dots,X^d$ suivent un modèle de Black-Scholes multi-dimensionnel (aucun calcul n'est demandé).

2. On pose

$$\Sigma=\Big[\mathrm{Cov}(k_T^i,k_T^j)\Big]_{1\le i,j\le d}$$

que l'on suppose inversible. Calculer pour tout $\lambda\in\mathbf{R}^d$, $\mathrm{Var}\big(h_T-k_T^{(\lambda)}\big)$ en fonction de la variance de h_T, de Σ et des covariances entre h_T et les k_T^i.

3. Déterminer le vecteur λ_{opt} qui minimise la variance de $h_T-k_T^{(\lambda)}$.

4. Proposer un estimateur "simple" du vecteur λ_{opt}.

5. Proposer des méthodes de réduction de variance reposant sur cette variable de contrôle.

Problème 2 (Autour du schéma d'Euler). On considère une diffusion brownienne $X=(X_t)_{t\in[0,T]}$, solution de l'équation différentielle stochastique (EDS) :

$$dX_t=b(X_t)dt+\sigma(X_t)dW_t,$$

issue de X_0 où b,σ sont des fonctions boréliennes définies sur $\mathbf{R}^d$ à valeurs dans $\mathbf{R}^d$ et $\mathbf{M}(d,q,\mathbf{R})$ respectivement et W est un mouvement brownien q-dimensionnel ($q\in\mathbf{N}^*$) défini sur un espace de probabilité $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$, indépendant de la variable aléatoire X_0 définie sur le même espace. On munit cet espace de probabilité de la filtration naturelle augmentée de W.

Questions préliminaires α. Écrire le schéma d'Euler $\bar X^n=(\bar X^n_{t_k^n})_{k=0:n}$ à temps discret de pas $\frac{T}{n}$ associé à cette EDS (les notations sont celles du cours), puis le schéma d'Euler en temps continu $(\bar X_t)_{t\in[0,T]}$.

β. On suppose que b et σ sont à croissance (au plus) linéaire, au sens où il existe une constante réelle $C > 0$ telle que

$$\forall x \in \mathbf{R}^d, \quad |b(x)| + \|\sigma(x)\| \leq C(1 + |x|)$$

où, pour fixer les idées $|\,.\,|$ désigne la norme euclidienne canonique sur $\mathbf{R}^d$ et $\|A\|^2 = \mathrm{Tr}(AA^*) = \sum_{1\leq i\leq d}\sum_{1\leq j\leq q} a_{ij}^2$, $A = [a_{ij}] \in \mathbf{M}(d,q,\mathbf{R})$. Soit $p \in [1,+\infty[$. Rappeler *sans démonstration* un résultat précis relatif aux moments d'ordre p (éventuels) de la diffusion et du schéma d'Euler continu.

γ. Que peut-on dire de l'*EDS* ci-dessus si b et σ sont lipschitziennes sur $\mathbf{R}^d$?

Aucun autre résultat relatif au schéma d'Euler ne pourra être utilisé ou invoqué dans la suite sans démonstration, sauf dans la question **3.e.**

On suppose à partir de maintenant que $d = q = 1$, b est toujours lipschitzienne et que

$$\sigma(x) = \sigma > 0 \text{ est constante.}$$

Les notations sont celles utilisées en cours et dans le polycopié.

1.a. Montrer que

$$\sup_{t\in[0,T]} |\bar{X}_t - X_t| \leq e^{[b]_{\mathrm{Lip}}T} \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t \big(b(\bar{X}_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}})\big) ds \right|.$$

1.b. En déduire alors l'existence d'une constante réelle $C^{(1)}_{p,b,\sigma,T} \geq 0$ telle que

$$\left\| \sup_{t\in[0,T]} |\bar{X}_t - X_t| \right\|_p \leq C^{(1)}_{p,b,\sigma,T}(1 + \|X_0\|_p)\sqrt{\frac{T}{n}}.$$

2. On suppose maintenant que b est dérivable à dérivée lipschitzienne. Montrer que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t \big(b(\bar{X}_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}})\big) ds \right| \leq [b]_{\mathrm{Lip}} \frac{T}{n} \int_0^T |b(\bar{X}_{\underline{s}})| ds + [b']_{\mathrm{Lip}} \int_0^T |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|^2 ds$$
$$+ \sigma \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})\big(W_s - W_{\underline{s}}\big) ds \right|.$$

3.a. Montrer que $\sup_{n\geq 1} \left\| \int_0^T |b(\bar{X}^n_{\underline{s}})| ds \right\|_p < +\infty$ et qu'il existe une constante réelle $C^{(2)}_{p,b,\sigma,T} \geq 0$ telle que

$$\left\| \int_0^T |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|^2 ds \right\|_p \leq C^{(2)}_{p,b,\sigma,T}(1 + \|X_0\|_p)\frac{T}{n}.$$

3.b. Montrer que, pour tout $t = \frac{kT}{n}$, $k = 0, \ldots, n$ (*i.e.* tel que $t = \underline{t}$),

$$\int_0^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})\big(W_s - W_{\underline{s}}\big) ds = \int_0^t (\overline{s} - s) b'(\bar{X}_{\underline{s}}) dW_s$$

où $\overline{s} = \frac{kT}{n}$ pour $s \in \left]\frac{(k-1)T}{n}, \frac{kT}{n}\right]$ puis que, pour tout $t \in [0,T]$,

$$\int_{\underline{t}}^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})\big(W_s - W_{\underline{s}}\big) ds = b'(\bar{X}_{\underline{t}}) \int_{\underline{t}}^t (t - s) dW_s.$$

3.c. Montrer que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})\big(W_s - W_{\underline{s}}\big) ds \right| \leq \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t (\overline{s} - s) b'(\bar{X}_{\underline{s}}) dW_s \right|$$
$$+ \frac{T}{n} \sup_{t\in[0,T]} |b'(\bar{X}_{\underline{t}})| |W_t - W_{\underline{t}}|.$$

3.d. Montrer que

$$\left\| \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t (\overline{s} - s) b'(\bar{X}_{\underline{s}}) dW_s \right| \right\|_p \leq \kappa_p \frac{T}{n} \left\| \int_0^T |b'(\bar{X}_{\underline{s}})|^2 ds \right\|_{\frac{p}{2}}^{\frac{1}{2}}$$

où κ_p est une constante réelle universelle ne dépendant que de p [Indication : on pourra d'abord examiner le cas $p = 2$ puis s'appuyer sur une inégalité vue en cours de calcul stochastique.].

3.e. Rappeler (sans démonstration) la majoration vue en cours pour $\left\| \sup_{t\in[0,T]} |W_t - W_{\underline{t}}| \right\|_p$ en fonction du pas $\frac{T}{n}$. En déduire qu'il existe une constante réelle $C^{(3)}_{p,b,\sigma,T} \geq 0$ telle que

$$\left\| \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t \big(b(\bar{X}_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}})\big) ds \right| \right\|_p \leq C^{(3)}_{p,b,\sigma,T}(1 + \|X_0\|_p^2)\frac{T}{n}.$$

4. Quelle conclusion vue en cours, mais non démontrée, peut-on tirer des résultats obtenus au fil des questions précédentes ?

Exercice QMC : Hammersley revisité

1) $(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \in [0,1]$ $\forall i$ $\zeta_i < \zeta_{i+1}$ $(a_i)_{i \le m} > 0$ et $b \in \mathbb{R}$

$$\varphi(y) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbb{1}_{\{\zeta_k \le y\}} - by$$

Mq φ càd-làg et $\sup_{y \in [0,1]} |\varphi(y)| = \max_{1 \le k \le m} |\varphi(\zeta_k)| \vee |\varphi(\zeta_k -)| \vee |\varphi(1)|$

$$= \max_{1 \le k \le m} \left|\frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell - b\zeta_k\right| \vee \left|\frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^{k-1} a_\ell - b\zeta_k\right| \vee \left|\frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell - b\right|$$

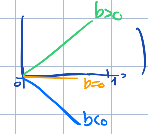
$$\varphi(y) = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} a_k \underbrace{\mathbb{1}_{\{\zeta_k \le y\}}}_{\text{càd làg}} - by$$

$\Rightarrow \varphi$ càd làg par somme

$y \mapsto \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} a_k \mathbb{1}_{\{\zeta_k \le y\}}$ est cte par morceaux

et $y \mapsto -by$ est monotone

$\Rightarrow$ max $|\varphi(y)|$ est atteint soit en un point de saut (ζ_k et $\zeta_k -$) soit en 0 (où $\varphi = 0$) soit en 1 $\left(-by \text{ à la forme suivante} \right)$



De +, $\varphi(\zeta_k) = \frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^{m} a_\ell \underbrace{\mathbb{1}_{\{\zeta_\ell \le \zeta_k\}}}_{=1 \text{ ssi } \ell \le k} - b\zeta_k = \frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^{k} a_\ell - b\zeta_k$

$\varphi(\zeta_k -) = \frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^{k-1} a_\ell - b\zeta_k$ car $\{\zeta_{k-\varepsilon} < \zeta_k\}$

2) $(\xi_1, \dots, \xi_m) \in [0,1]^d$ $d \ge 2$ tq $(\xi_1^d, \dots, \xi_m^d)$ est strict^t $\nearrow$ avec $\xi_m^d = 1$

2-a) Rappeler la déf de la discrépance à l'origine du m-uplet $(\xi_1, \dots, \xi_m)$ notée $D_m^*(\xi_1, \dots, \xi_m)$

$$D_m^*(\xi_1, \dots, \xi_m) := \sup_{x \in [0,1]^d} \left| \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{m} \mathbb{1}_{\{\xi_k \in [0,x]\}} - \underset{\prod_{i=1}^{d} x_i}{\underset{\parallel}{\mathrm{Vol}([0,x])}} \right|$$

2-b) Mq $D_m^*(\xi_1^d, \dots, \xi_m^d) = \max_{1 \le k \le m} \left|\xi_k^d - \frac{k}{m}\right| \vee \left|\xi_k^d - \frac{k-1}{m}\right|$

On applique 1) avec $a_\ell = 1$ et $b = 1$

$\Rightarrow$ par 1) on a $\sup_{y \in [0,1]} |\varphi(y)| = \max_{1 \le k \le m} \left|\frac{1}{m} \times k - \xi_k^d\right| \vee \left|\frac{1}{m} \times (k-1) - \xi_k^d\right|$

et $\sup_{y \in [0,1]} |\varphi(y)| = D_m^*(\xi_1^d, \dots, \xi_m^d)$

$\Rightarrow D_m^*(\xi_1^d, \dots, \xi_m^d) = \max_{1 \le k \le m} \left|\xi_k^d - \frac{k}{m}\right| \vee \left|\xi_k^d - \frac{k-1}{m}\right|$

2-c) $\tilde{\xi}_k = (\xi_k^1, \dots, \xi_k^{d-1})$ Mq $D_m^*(\xi_1, \dots, \xi_m) = D_m^*(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m) \vee \max_{1 \le k \le m} \sup_{x \in [0,1]^{d-1}} \left|\frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \xi_k^d \prod_{i=1}^{d-1} x^i\right| \vee \left|\frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \xi_k^d \prod_{i=1}^{d-1} x^i\right|$

$$D_m^*(\xi_1, \dots, \xi_m) = \sup_{x \in [0,1]^{d-1}} \sup_{z \in [0,1]} \left|\frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^{m} \underbrace{\mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell)}_{a_\ell} \mathbb{1}_{\{\xi_\ell^d \le z\}} - z \underbrace{\prod_{i=1}^{d-1} x^i}_{b}\right|$$

$$\underset{\substack{\text{par (1)} \\ \text{et } \xi_m^d = 1}}{=} \max_{1 \le k \le m} \sup_{x \in [0,1]^{d-1}} \left|\frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \xi_k^d \prod_{i=1}^{d-1} x^i\right| \vee \left|\frac{1}{m} \sum_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \xi_k^d \prod_{i=1}^{d-1} x^i\right| \vee \underbrace{D_m^*(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_m)}_{\varphi(1) = \varphi(\xi_m^d)}$$

2-d) (2-c) $\Rightarrow D_m^*(\xi_1,\dots,\xi_m) \geq D_m^*(\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_m)$

et
$$\max_{1\le k\le m}\sup_{x\in[0,1]^{d-1}} \underbrace{\left|\frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{k}\mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell)-\xi_k^d\prod_{i=1}^{d-1}x^i\right|}_{\le\frac{k}{m}\underbrace{\left|\frac{1}{k}\sum_{1}^{k}\mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell)-\prod_{1}^{d-1}x^i\right|}_{\le\frac{k}{m}D_k^*(\tilde{\xi})}+\left(\prod_{1}^{d-1}x^i\right)\left|\xi_k^d-\frac{k}{m}\right|} \vee \underbrace{\left|\frac{1}{m}\sum_{\ell=1}^{k-1}\mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell)-\xi_k^d\prod_{i=1}^{d-1}x^i\right|}_{\le\frac{k-1}{m}\underbrace{\left|\frac{1}{k-1}\sum_{1}^{k-1}\mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell)-\prod_{1}^{d-1}x^i\right|}_{\le\frac{k-1}{m}D_{k-1}^*(\tilde{\xi})}+\left(\prod_{1}^{d-1}x^i\right)\left|\xi_k^d-\frac{k-1}{m}\right|} \le \max_{1\le k\le m}\frac{k}{m}D_k^*(\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_k)+\underbrace{\sup_x\prod_{i=1}^{d-1}x^i}_{=1}\underbrace{\max_{1\le k\le m}\left|\xi_k^d-\frac{k}{m}\right|\vee\left|\xi_k^d-\frac{k-1}{m}\right|}_{\overset{(2b)}{=}D_m^*(\xi_1^d,\dots,\xi_m^d)}$$

D'où $D_m^*(\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_m) \le D_m^*(\xi_1,\dots,\xi_m) \le \frac{1}{m}\max_{1\le k\le m} k D_k^*(\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_k) + D_m^*(\xi_1^d,\dots,\xi_m^d)$

3-a) Rappeler déf suite de Halton pour dim d et une estimat° explicite non asympt de sa discrépance à l'origine en fct° de m.

$p_1,\dots,p_d$ d premiers nbs $\neq$

$m = a_{i0} + a_{i1}p_i + a_{i2}p_i^2 + \dots + a_{ir}p_i^r$ où $a_{ij} \in \{0,1,\dots,p-1\}$

$\xi_m^i = \frac{a_{i0}}{p_i} + \frac{a_{i1}}{p_i^2} + \dots + \frac{a_{ir}}{p_i^{r+1}} \in [0,1)$

$\xi_m = (\xi_m^1,\dots,\xi_m^d)$

$D_m^*(\xi_1,\dots,\xi_m) \le \frac{1}{m}\prod_{i=1}^{d}\left((p_i-1)\left\lfloor\frac{\log(p_i m)}{\log(p_i)}\right\rfloor\right) \le C\,\frac{\log(m)^d}{m}$

3-b) $d\geq 2$, Mq $\exists\, C_d>0$ cte tq $\forall m\geq 1$, $\exists(\xi_1,\dots,\xi_m)\in([0,1]^d)^m$ tq
$$D_m^*(\xi_1,\dots,\xi_m) \le C_d\,\frac{\log(m+1)^{d-1}}{m}$$

On fixe m. $(\tilde{\xi}_\ell)_{\ell=1}^m$ suite de Halton dans $[0,1]^{d-1}$

On prend $\xi_\ell = (\underset{\in[0,1]^{d-1}}{\tilde{\xi}_\ell}, \overset{\xi_\ell^d}{\frac{\ell}{m}-\frac{1}{2m}})$ où $\tilde{\xi}_\ell$ la suite de Halton.

$D_m^*(\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_k) \le C_H\,\frac{\log(m)^{d-1}}{m}$ $\forall m$

Par (2d) $D_m^*(\xi_1,\dots,\xi_m) \le \max_{1\le k\le m}\frac{k D_k^*(\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_k)}{m} + \overset{= 1/2m}{D_m^*(\xi_1^d,\dots,\xi_m^d)} \le \max_{1\le k\le m}\left(\frac{kC_H\frac{\log(k)^{d-1}}{k}}{m}+1/2m\right) = \frac{1/2 + C_H\log(m)^{d-1}}{m} \le C_d\,\frac{\log(m)^{d-1}}{m}$

4) Rappeler brièvem^t les principes de base de QMC et quel rôle y joue la discrépance à l'origine

Pour estimer $\mathbb{E}[f(U)]$ on veut utiliser $\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}f(\xi_k) \to \mathbb{E}[f(U)]$

Si ξ_k iid $\sim \mathcal{U}([0,1])$, on a LGN, TCL etc où l'erreur $\sim \frac{1}{\sqrt{m}}$

Mais on a $\frac{1}{m}\sum f(\xi_k) \to \int_0^1 f(u)\,du$ $\underset{\forall f C^0}{\overset{\text{Glivenko Cantelli}}{\Longleftrightarrow}}$ $\frac{1}{m}\sum\delta_{\xi_k} \Rightarrow \lambda_d$ $\rightarrow$ on peut chercher la suite (ξ_m) tq $\frac{1}{m}\sum\delta_{\xi_k}\Rightarrow\lambda_d$ (équirépartie) et la vitesse de CV est mieux que pour MC standard

Rôle de D_m^* : pour f fct° à variat° finie au sens de la mesure, on a l'égalité de Koksma-Hlawka $\left|\frac{1}{m}\sum f(\xi_k) - \int f(u)\,du\right| \le V(f)\,D_m^*(\xi)$

C'est pourquoi on cherche les suites à discrépance faible
($D_m^*(\xi)\to 0$ plus vite que $\frac{1}{\sqrt{m}}$) En fait, $\frac{\log(m)^d}{m}$

Problème 1 (Réduction de variance)

$h_T = \varphi(X_T^1,\dots,X_T^d) \geq 0$ où $\varphi: \mathbb{R}_+^d \to \mathbb{R}_+$ est à croissance linéaire.

$\forall i\in\{1,\dots,d\}$, payoff vanille $h_T^i = \varphi(x_0^1,\dots,x_0^{i-1},X_T^i,x_0^{i+1},\dots,x_0^d)$ donne lieu à un calcul de prime par formule fermée.

c.e on sait calculer de façon déterministe $P_i(x_0^1,\dots,x_0^d) = \mathbb{E}[h_T^i] = \mathbb{E}[\varphi(x_0^1,\dots,x_0^{i-1},X_T^i,x_0^{i+1},\dots,x_0^d)]$ $i=1:d$

Variable de contrôle $h_T^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^{d}\lambda_i h_T^i$

1) Exemple d'une telle situat°

Opt° sur panier $h_T = (\underbrace{\sum\omega_i X_T^i}_{\varphi(X_T^1,\dots,X_T^d)} - K)^+$

$k_T^i = (\omega_i X_T^i - (\underbrace{k - \sum_{j\neq i} \omega_j x_0^j}_{\tilde{k}}))^+$ – Opt° vanille standard → Formule de BS

2) On pose $\Sigma = [Cov(k_T^i, k_T^j)]_{1\leq i,j\leq d}$ Supposée inversible

$\forall \lambda \in \mathbb{R}^d$, $\mathbb{V}[h_T - k_T^{(\lambda)}] = \mathbb{V}[h_T] + \mathbb{V}[k_T^{(\lambda)}] - 2Cov(h_T, k_T^{(\lambda)})$

$$= \mathbb{V}[h_T] + \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \Sigma_{ij} - 2\sum_i \lambda_i Cov(h_T, k_T^i)$$

$$= \underbrace{\mathbb{V}[h_T] + \lambda^T \Sigma \lambda - 2\lambda^T \underbrace{Cov(h_T, k_T)}_{=(Cov(h_T, k_T^i))_i}}_{J(\lambda)}$$

3) Déterminer λ_{opt} qui minimise $\mathbb{V}[h_T - k_T^{(\lambda)}]$

$J(\lambda)$ est st $\underline{cvx}$ (Σ inversible) → $\nabla J(\lambda^*) = 0$

$\nabla J(\lambda) = 2\Sigma\lambda - 2Cov(h_T, k_T) = 0$

$$\Rightarrow \lambda^* = \underbrace{\Sigma^{-1} \cdot Cov(h_T, k_T)}_{\text{inconnus}}$$

4) Estimateur simple de $\lambda^* \hookrightarrow \lambda_{opt}$

$\Sigma = \mathbb{E}[k_T k_T^T]$

$Cov(h_T, k_T) = \mathbb{E}[h_T \cdot k_T] - \mathbb{E}[h_T]\mathbb{E}[k_T]$ $\Big\}$ Estimer via simulat° $\rightarrow \hat{\lambda}_{opt} = \hat{\Sigma}^{-1} \widehat{Cov}(h_T, k_T)$

5) Proposer méthodes de réduct° de variance reposant sur cette variable de contrôle

$\mathbb{V}[h_T - k_T^{(\lambda)}] \leq \mathbb{V}[h_T]$ $\forall k$ si $Cov(h_T, k_T^{i}) \neq 0$

$\|$

$\mathbb{V}[h_T] - Cov(h_T, k_T)^T \Sigma^{-1} Cov(h_T, k_T)$

$$\mathbb{E}[h_T] = \mathbb{E}[h_T - k_T^{(\lambda^*)}] + \sum_{i=1}^d \lambda_i^* P_i(x_0^1, \dots, x_0^d)$$

Simuler $X_T^{(m)}$ $m = 1, \dots, N$

$$\mathbb{E}[h_T] \approx \sum_{i=1}^d \lambda_i^* P_i(x_0^1, \dots, x_0^d) + \frac{1}{N}\sum_{m=1}^N (\varphi(X_T^{(m)}) - \sum \lambda_i^* \varphi(\dots x_0^{i-1}, X_T^{(m),i}, x_0^{i+1} \dots))$$

Problème 2 (Autour du Schéma d'Euler)

$$d\underset{\in\mathbb{R}^d}{X_t} = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t^{\leftarrow q\text{-dim}}$$

α- Écrire le Schéma d'Euler discret / continu

$$\bar{X}_{t_{k+1}} = \bar{X}_{t_k} + b(\bar{X}_{t_k})(t_{k+1} - t_k) + \sigma(\bar{X}_{t_k})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

$$\bar{X}_t = \bar{X}_{\underline{t}} + b(\bar{X}_{\underline{t}})(t - \underline{t}) + \sigma(\bar{X}_{\underline{t}})(W_t - W_{\underline{t}})$$

β- On suppose que b et σ sont à $\nearrow^{ce}$ (au plus) linéaire au sens où $\exists C > 0, \forall x \in \mathbb{R}^d, |b(x)| + \|\sigma(x)\| \leq C(1 + |x|)$

b et σ $\nearrow$ pol ⟹ $\|\sup_{t\in[0,T]} |X_t|\|_p + \|\sup |\bar{X}_t|\|_p \leq C(1 + \|x_0\|_p)$

γ- Si b, σ Lip sur $\mathbb{R}^d$?

⟹ ∃! solut° forte de l'EDS

On suppose mtn que $d = q = 1$, b est Lip et $\sigma(x) = \sigma > 0$ cte

1-a) Mq $\sup_{t\in[0,T]} |\bar{X}_t - X_t| \leq e^{[b]_{Lip} T} \sup_{t\in[0,T]} |\int_0^t (b(\bar{X}_{\underline{s}}) - b(\bar{X}_s)) ds|$

$X_t = x + \int_0^t b(X_s)\,ds + \sigma W_t$

$\bar X_t = x + \int_0^t b(\bar X_{\underline s})\,ds + \sigma W_t$

$\Rightarrow |\bar X_t - X_t| \le \left|\int_0^t b(X_s) - b(\bar X_{\underline s})\,ds\right|$

$\le \left|\int_0^t b(X_s) - b(\bar X_s)\,ds\right| + \left|\int_0^t b(\bar X_s) - b(\bar X_{\underline s})\,ds\right|$

$\le [b]_{Lip} \int_0^t |\bar X_s - X_s|\,ds + \underbrace{\sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t b(\bar X_s) - b(\bar X_{\underline s})\,ds\right|}_{\perp t}$

<u>Lemme de Gronwall</u>: Soient f, g et y trois fct° continues sur $[a,b]$, à valeurs positives et tq $\forall t\in[a,b]$, $y(t) \le f(t) + \int_a^t g(s)y(s)\,ds$

Alors, $\forall t\in[a,b]$, $y(t) \le f(t) + \int_a^t f(s)g(s)\exp\left(\int_s^t g(u)\,du\right)ds$

⚠ Si f cte, i.e si y vérifie $\forall t\in[a,b]$, $y(t) \le C + \int_a^t g(s)y(s)\,ds$ $\quad C\in\mathbb{R}_+$

Alors, $\forall t\in[a,b]$, $y(t) \le C\exp\left(\int_a^t g(s)\,ds\right)$

Donc par Gronwall, $|\bar X_t - X_t| \le e^{[b]_{Lip} t} \cdot \sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t b(\bar X_s) - b(\bar X_{\underline s})\,ds\right| \le e^{[b]_{Lip} T} \cdot \sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t b(\bar X_s) - b(\bar X_{\underline s})\,ds\right|$

Ici, $f(t) = |\bar X_t - X_t|$

$C = \sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t b(\bar X_s) - b(\bar X_{\underline s})\,ds\right|$

$g(s) = [b]_{Lip} \quad \Rightarrow f(t) \le C e^{\int_0^t g(s)\,ds}$

1-b) On déduire $\exists\, C^{(1)}_{p,b,\sigma,T} \ge 0$ tq $\left\|\sup_{t\in[0,T]} |\bar X_t - X_t|\right\|_p \le C^{(1)}_{p,b,\sigma,T}(1+\|X_0\|_p)\sqrt{\frac{T}{m}}$

Par 1-a on a donc $\left\|\sup_{t\in[0,T]}|\bar X_t - X_t|\right\|_p \le e^{[b]_{Lip}T} \left\|\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t b(\bar X_s) - b(\bar X_{\underline s})\,ds\right|\right\|_p \le e^{[b]_{Lip}T}\left\|\int_0^T [b]_{Lip}|\bar X_s - \bar X_{\underline s}|\,ds\right\|_p$

$\le e^{[b]_{Lip}T}[b]_{Lip}\left\|\int_0^T |\bar X_s - \bar X_{\underline s}|\,ds\right\|_p$

$\le C\int_0^T \|\bar X_s - \bar X_{\underline s}\|_p\,ds$

Or $\|\bar X_s - \bar X_{\underline s}\|_p = \underbrace{\left\|\int_{\underline s}^s b(\bar X_{\underline s})\,ds\right\|_p}_{(s-\underline s)|b(\bar X_{\underline s})|,\ \le 1+|\bar X_{\underline s}|} + \sigma\underbrace{\|W_s - W_{\underline s}\|_p}_{C_p\sqrt{s-\underline s}} \le (s-\underline s)(1+\|\bar X_{\underline s}\|_p) + \sigma C_p\sqrt{s-\underline s}$

$\Rightarrow \left\|\sup_{t\in[0,T]}|\bar X_t - X_t|\right\|_p \le C^{(1)}_{b,p,\sigma,T}(1+\|X_0\|_p)\sqrt{\frac{T}{m}}$

2) On suppose b dérivable à dérivée lipschitzienne.

Mq $\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t b(\bar X_s) - b(\bar X_{\underline s})\,ds\right| \le [b]_{Lip}\frac{T}{m}\int_0^T |b(\bar X_{\underline s})|\,ds + [b']_{Lip}\int_0^T |\bar X_s - \bar X_{\underline s}|^2\,ds + \sigma\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t b'(\bar X_{\underline s})(W_s - W_{\underline s})\,ds\right|$

b est dérivable on utilise donc un dvp^t de Taylor $\Rightarrow b(\bar X_s) - b(\bar X_{\underline s}) = b'(\eta_s)(\bar X_s - \bar X_{\underline s})$ où $\eta_s \in [\bar X_{\underline s}, \bar X_s]$

$\Rightarrow \int_0^T b(\bar X_s) - b(\bar X_{\underline s})\,ds = \int_0^T b'(\eta_s)(\bar X_s - \bar X_{\underline s})\,ds$

Or b' est Lip $\Rightarrow |b'(\eta_s) - b'(\bar X_{\underline s})| \le [b']_{Lip}|\eta_s - \bar X_{\underline s}|$

$\Rightarrow |b'(\eta_s)| \le |b'(\bar X_{\underline s})| + [b']_{Lip}|\bar X_s - \bar X_{\underline s}|$

$\Rightarrow b(\bar X_s) - b(\bar X_{\underline s}) \le b'(\bar X_{\underline s})(\bar X_s - \bar X_{\underline s}) + [b']_{Lip}|\bar X_s - \bar X_{\underline s}|^2 \le b'(\bar X_{\underline s})\big(b(\bar X_{\underline s})(s-\underline s) + \sigma(W_s - W_{\underline s})\big) + [b']_{Lip}|\bar X_s - \bar X_{\underline s}|^2$

$\le [b]_{Lip}$ ← qu'on utilise que sur le terme $b(\bar X_s)(s-\underline s)$ ⚠ A revoir la validité de cela.

$\Rightarrow \sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t b(\bar X_s) - b(\bar X_{\underline s})\,ds\right| \le \sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t \overbrace{b'(\eta_s)}^{\le [b]_{Lip}}\underbrace{(\bar X_s - \bar X_{\underline s})}_{b(\bar X_{\underline s})(s-\underline s)+\sigma(W_s - W_{\underline s})}\,ds\right| + [b']_{Lip}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t |\bar X_s - \bar X_{\underline s}|^2\,ds$

$\Rightarrow \sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t b'(\eta_s)(\bar X_s - \bar X_{\underline s})\,ds\right| \le \left|\int_0^T [b]_{Lip}\, b(\bar X_{\underline s})\underbrace{(s-\underline s)}_{\le \frac{T}{m}}\,ds\right| + \sigma\sup\left|\int_0^t b'(\bar X_{\underline s})(W_s - W_{\underline s})\,ds\right| + [b']_{Lip}\sup_{t\in[0,T]}\int_0^t |\bar X_s - \bar X_{\underline s}|^2\,ds$

$\le [b']_{Lip}\frac{T}{m}\int_0^T |b(\bar X_{\underline s})|\,ds + [b']_{Lip}\int_0^T |\bar X_s - \bar X_{\underline s}|^2\,ds + \sigma\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t b'(\bar X_{\underline s})(W_s - W_{\underline s})\,ds\right|$

3-a) Mq $\sup_{m\ge 1}\left\|\int_0^T |b(\bar X^m_{\underline s})|\,ds\right\|_p < \infty$ et qu'$\exists\, C^{(2)}_{p,b,\sigma,T} \ge 0$ tq $\left\|\int_0^T |\bar X_s - \bar X_{\underline s}|^2\,ds\right\|_p \le C^{(2)}_{p,b,\sigma,T}(1+\|X_0\|_p)\frac{T}{m}$

$\int_0^T |b(\bar X^m_{\underline s})|\,ds \le \int_0^T C(1+|\bar X^m_{\underline s}|)\,ds$

$\Rightarrow \sup_{m\ge 1}\left\|\int_0^T |b(\bar X^m_{\underline s})|\,ds\right\|_p \le \tilde C\int_0^T (1+\|X_0\|_p)\,ds < \infty$

D'autre part, $\int_0^T |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|^2 ds \leq 2\int_0^T |b(\bar{X}_{\underline{s}})(\underbrace{s-\underline{s}}_{\leq \frac{T}{m}})|^2 + \sigma^2 |W_s - W_{\underline{s}}|^2 ds$

$\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}} = \underbrace{\int_{\underline{s}}^s b(\bar{X}_{\underline{u}}) du}_{\leq b(\bar{X}_{\underline{s}})(s-\underline{s})} + \sigma(W_s - W_{\underline{s}})$

$\bar{X}_t = x + \int_0^t b(\bar{X}_{\underline{s}}) ds + \sigma W_t$

$$\Rightarrow \left\| \int_0^T |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|^2 ds \right\|_p \leq 2\int_0^T \underbrace{\|b(\bar{X}_{\underline{s}})^2\|_p}_{\leq C_{b,p}(1+\|X_0\|^2)} \underbrace{\left(\frac{T}{m}\right)^2}_{\leq \frac{T}{m}} + \sigma^2 \underbrace{\|(W_s - W_{\underline{s}})^2\|_p}_{\leq C_p \sqrt{\frac{T}{m}}^2} \leq C^{(2)}_{p,b,\sigma,T} (1+\|X_0\|_p^2) \frac{T}{m}$$

3-b) Mq $\forall t = \frac{kT}{m}$ $k=0,\dots,m$ i.e tq $t = \underline{t}$, $\int_0^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}}) ds = \int_0^t (\bar{s} - s) b'(\bar{X}_{\underline{s}}) dW_s$ où $\bar{s} = \frac{kT}{m}$ pour $s \in]\frac{(k-1)T}{m}, \frac{kT}{m}]$

puisque $\forall t \in [0,T]$, $\int_{\underline{t}}^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}}) ds = b'(\bar{X}_{\underline{t}}) \int_{\underline{t}}^t (t-s) dW_s$

$$\int_0^{t_k} b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}}) ds = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}}) ds$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} b'(\bar{X}_{t_k})(W_s - W_{t_k}) ds$$

$$= \sum_{k=0}^{m-1} b'(\bar{X}_{t_k}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s - W_{t_k}) ds$$

Or $d(sW_s) = s\,dW_s + W_s\,ds$ $\Rightarrow t_{k+1} W_{t_{k+1}} - t_k W_{t_k} = \int_{t_k}^{t_{k+1}} s\,dW_s + \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s\,ds$

$$\Rightarrow t_{k+1}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} s\,dW_s + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s - W_{t_k}) ds$$

$$\Rightarrow \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - s) dW_s = \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s - W_{t_k}) ds$$

$$\Rightarrow \int_0^{t_k} b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}}) ds = \sum_{k=0}^{m-1} b'(\bar{X}_{t_k}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s - W_{t_k}) ds = \sum_{k=0}^{m-1} b'(\bar{X}_{t_k}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (t_{k+1} - s) dW_s$$

ça prouve les 2 points

$$= \int_0^t (\bar{s} - s) b'(\bar{X}_{\underline{s}}) dW_s$$

3-c) Mq $\sup_{t \in [0,T]} \left| \int_0^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}}) ds \right| \leq \sup_{t \in [0,T]} \left| \int_0^t (\bar{s} - s) b'(\bar{X}_{\underline{s}}) dW_s \right| + \frac{T}{m} \sup_{t \in [0,T]} |b'(\bar{X}_{\underline{t}})| |W_t - W_{\underline{t}}|$

$$\int_0^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}}) ds = \int_0^{\underline{t}} - + \int_{\underline{t}}^t - \overset{\text{par 3b}}{=} \underbrace{\int_0^{\underline{t}} (\bar{s} - s) b'(\bar{X}_{\underline{s}}) dW_s}_{\leq \sup_t \left| \int_0^t (\bar{s}-s) b'(\bar{X}_{\underline{s}}) dW_s \right|} + \overbrace{(t - \underline{t})}^{\leq \frac{T}{m}} \sup_{s \in [\underline{t}, t]} |b'(\bar{X}_{\underline{s}})| |W_s - W_{\underline{s}}|$$

$$\Rightarrow \sup_{t \in [0,T]} \left| \int_0^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}}) ds \right| \leq \sup_{t \in [0,T]} \left| \int_0^t (\bar{s} - s) b'(\bar{X}_{\underline{s}}) dW_s \right| + \frac{T}{m} \sup_{t \in [0,T]} |b'(\bar{X}_{\underline{t}})| \cdot |W_t - W_{\underline{t}}|$$

3-d) Mq $\left\| \sup_{t \in [0,T]} \left| \int_0^t (\bar{s} - s) b'(\bar{X}_{\underline{s}}) dW_s \right| \right\|_p \leq K_p \frac{T}{m} \left\| \int_0^T |b'(\bar{X}_s)|^2 ds \right\|_{p/2}^{1/2}$

Inégalité de BDG (Burkholder-Davis-Gundy)

↳ Soit M une mart continue à valeurs réelles avec $M_0 = 0$ et $\langle M \rangle_t$ sa variat° quadratique

$\forall p > 0$, $\exists C_p^{(1)}, C_p^{(2)} > 0$ tq $C_p^{(1)} \mathbb{E}[\langle M \rangle_T^{p/2}] \leq \mathbb{E}[\sup_{t \in [0,T]} |M_t|^p] \leq C_p^{(2)} \mathbb{E}[\langle M \rangle_T^{p/2}]$ $\forall T \geq 0$

$M_t = \int_0^t (\bar{s} - s) b'(\bar{X}_{\underline{s}}) dW_s$ est une vraie martingale car $\mathbb{E}[\int_0^T (\bar{s}-s)^2 b'(\bar{X}_{\underline{s}})^2 ds \leq \left(\frac{T}{m}\right)^2 \int_0^T C_b (1 + \|X_0\|^2) ds < \infty$

$\langle M \rangle_t = \int_0^t (\bar{s} - s)^2 b'(\bar{X}_{\underline{s}})^2 ds \leq \left(\frac{T}{m}\right)^2 \int_0^T |b'(\bar{X}_{\underline{s}})^2| ds$

Par BDG, $\| \sup |M_t|^p \|_p = \mathbb{E}[\sup_{t \in [0,T]} |M_t|^p] \leq C_p \left(\frac{T}{m}\right)^p \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |b'(\bar{X}_{\underline{s}})|^2 ds\right)^{p/2}\right]$

$$\Rightarrow \left\| \sup_{t \in [0,T]} |M_t| \right\|_p \leq \underbrace{C_p^{1/p}}_{K_p} \frac{T}{m} \underbrace{\mathbb{E}\left[\left(\int_0^T |b'(\bar{X}_{\underline{s}})|^2 ds\right)^{1/2}\right]}_{\left\| \int_0^T |b'(\bar{X}_{\underline{s}})|^2 ds \right\|_p^{1/2}}$$

3-e) Rappeler la majorat° pour $\| \sup_{t\in[0,T]} |W_t - W_{\underline{t}}| \|_p$ en fct° de $\frac{T}{n}$

En déduire qu'$\exists\, C^{(3)}_{p,b,\sigma,T} \geq 0$ tq

$$\Big\| \sup_{t\in[0,T]} \Big| \int_0^t (b(\bar{X}_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}}))ds \Big| \Big\|_p \leq C^{(3)}_{p,b,\sigma,T} (1 + \|X_0\|_p^2) \frac{T}{n}$$

Par 2) on a

$$\Big\| \sup_{[0,T]} \Big| \int_0^t (b(\bar{X}_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}}))ds \Big| \Big\|_p \leq [b']_{Lip} \frac{T}{n} \underbrace{\Big\| \int_0^T |b(\bar{X}_{\underline{s}})| ds \Big\|_p}_{\substack{3\cdot a \\ <\infty \text{ car } \sup|\cdot|<\infty \\ \Rightarrow \leq C_{p,b}}} + [b']_{Lip} \underbrace{\Big\| \int_0^T |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|^2 ds \Big\|_p}_{3\cdot a\ \leq C^{(2)}_{p,b,\sigma,T}(1+\|X_0\|_p^2)\frac{T}{n}} + \sigma \underbrace{\Big\| \sup_{t\in[0,T]} \Big| \int_0^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}}) ds \Big| \Big\|_p}_{3\cdot c + 3\cdot d}$$

$$\leq k_p \frac{T}{n} \Big\| \int_0^T \underbrace{|b'(\bar{X}_{\underline{s}})|^2}_{\leq [b']_{Lip} \bar{X}_{\underline{s}}^2} ds \Big\|_{p/2}^{1/2} + \frac{T}{n} \|\sup |b'(\bar{X}_{\underline{t}})| |W_t - W_{\underline{t}}| \|_p$$

$\sup|\cdot| \leq C(1+\|X_0\|^2)$

$C_{b,p}$

$$\Rightarrow \exists\, C^{(3)}_{b,p,\sigma,T} \geq 0 \text{ tq } \Big\| \sup_{t\in[0,T]} \Big| \int_0^t (b(\bar{X}_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}}))ds \Big| \Big\|_p \leq C^{(3)}_{p,b,\sigma,T} (1 + \|X_0\|_p^2) \frac{T}{n}$$

4) Quelle Conclus° vue en cours, mais non démontrée, peut-on tirer des résultats obtenus au fil des quest°

On a mq (1a + 3e) que $\| \sup_{t\in[0,T]} |\bar{X}_t - X_t| \|_p \leq C_{p,b,\sigma,T} (1 + \|X_0\|_p^2) \cdot \frac{T}{n}$ si $\sigma(x) \equiv \sigma$ et $b \in \mathcal{C}^1_{Lip}$

C'est le thm sur l'erreur forte pour le schéma de Milstein qui coïncide dans ce cas avec le schéma d'Euler car $\sigma' = 0$