Examen Séries temporelles 2011-2012

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice - 2 heures

Questions de cours : (4 points)

1. Qu'est-ce qui caractérise un processus stationnaire faible (stationnaire à l'ordre 2)? Donner plusieurs caractérisations possibles en expliquant l'intérêt de ces caractérisations.

2. On suppose qu'il est possible de décomposer une série temporelle en trois termes:

$$X_t = m_t + S_t + Y_t$$

où m_t est une tendance déterministe, S_t est une saisonnalité déterministe et Y_t est un processus stationnaire.

Expliquer quelles sont les différentes méthodes que vous connaissez pour identifier chacun des termes sur des données. Donner les avantages et les défauts de chaque méthode.

Problème : (16 points)

On considère le processus (X_t) suivant:

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

où $(\varepsilon_t) \sim BBF(0, \sigma_\varepsilon^2)$. On définit les polynômes

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= 1 - \varphi_1 x - \varphi_2 x^2 \\ \bar{\Phi}(x) &= x^2 - \varphi_1 x - \varphi_2 \end{aligned}$$

1. Donner les conditions sur les racines de Φ et $\bar{\Phi}$ pour qu'il existe une solution stationnaire.

2. On cherche les conditions sur les coefficients φ_1 et φ_2 pour que l'écriture du processus soit l'écriture canonique.

a) Donner les conditions sur les racines de $\bar{\Phi}$ pour que ce soit le cas.

b) En considérant le produit des racines, en déduire qu'une condition nécessaire est $|\varphi_2| < 1$.

c) Montrer que, si les racines sont complexes conjuguées ($\varphi_1^2 + 4\varphi_2 < 0$), alors la condition $-\varphi_2 < 1$ est suffisante.

d) Montrer à l'aide d'un graphique que, si les racines sont réelles ($\varphi_1^2 + 4\varphi_2 \geq 0$), alors les conditions suivantes sont suffisantes

$$1 - \varphi_1 - \varphi_2 > 0, \qquad 1 + \varphi_1 - \varphi_2 > 0.$$

e) En déduire sur une représentation graphique, le domaine d'existence du couple (φ_1, φ_2) pour que l'écriture du processus soit l'écriture canonique.

On suppose dorénavant qu'il s'agit de la représentation canonique.

3. On cherche une représentation $MA(\infty)$ de X_t.

   a) Donner les propriétés de (ε_t).

   b) On suppose que les racines, λ_1 et λ_2, de Φ sont réelles ($\varphi_1^2 + 4\varphi_2 > 0$). Donner la représentation $MA(\infty)$ de X_t. (Indication: utiliser une décomposition en éléments simples).

$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$

$\mathbb{V}[X_t]$

4. On cherche à déterminer les autocorrélations du processus.

   a) Montrer que

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) &= \frac{(1-\varphi_2)}{(1+\varphi_2)\left((1-\varphi_2)^2 - \varphi_1^2\right)} \sigma_\varepsilon^2 \\ \rho_X(1) &= \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2} \\ \rho_X(2) &= \frac{\varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \varphi_2}{1-\varphi_2} \end{aligned}$$

   b) Montrer que pour $h \geq 2$

$$\rho_X(h) = \varphi_1 \rho_X(h-1) + \varphi_2 \rho_X(h-2).$$

   c) Donner suivant le signe de $\varphi_1^2 + 4\varphi_2$, la forme générale de $\rho_X(h)$.

5. On cherche à déterminer les autocorrélations partielles du processus. On rappelle que le coefficient autocorrélations partielle d'ordre k, $r_X(k)$, est égal à a_k où a_k est le coefficient de X_{t-k} dans la régression linéaire $EL(X_t|X_{t-1}, \ldots, X_{t-k})$

$$EL(X_t|X_{t-1}, \ldots, X_{t-k}) = \sum_{j=1}^{k} a_j X_{t-j}.$$

   a) Montrer que, quelque soit le processus stationnaire, $r_X(1) = \rho_X(1)$. En déduire $r_X(1)$.

   b) Donner les valeurs de $r_X(k)$ pour $k \geq 2$.

   c) Etudier les signes de $r_X(1)$ et $r_X(2)$ en fonction des signes de φ_1 et φ_2.

6. On cherche à estimer les coefficients φ_1 et φ_2.

   a) Montrer que

$$\varphi_1 = \frac{\rho_X(1)(1-\rho_X(2))}{1-\rho_X^2(1)} \qquad \varphi_2 = \frac{\rho_X(2) - \rho_X^2(1)}{1-\rho_X^2(1)}.$$

b) En déduire des estimateurs $\hat{\varphi}_{1,T}$ et $\hat{\varphi}_{2,T}$ en fonction des observations $x_1, \ldots, x_T$ du processus.

c) On peut montrer que

$$\sqrt{T}\begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{1,T} - \varphi_1 \\ \hat{\varphi}_{2,T} - \varphi_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{L} N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1-\varphi_2^2 & -\varphi_1(1+\varphi_2) \\ -\varphi_1(1+\varphi_2) & 1-\varphi_2^2 \end{pmatrix}\right).$$

Proposer un test pour savoir si $\varphi_1 = \varphi_2$.

7. La prévision linéaire optimale de X_{T+h} sachant $\underline{X_T}$ est définie par :

$${}_TX^*_{T+h} = EL(X_{T+h}|\underline{X_T}).$$

a) Montrer que

$${}_TX^*_{T+1} = \varphi_1 X_T + \varphi_2 X_{T-1}$$

et que

$${}_TX^*_{T+2} = \left(\varphi_1^2 + \varphi_2\right) X_T + \varphi_1\varphi_2 X_{T-1}.$$

b) Montrer que pour $h \geq 2$

$${}_TX^*_{T+h} = \varphi_1\ {}_TX^*_{T+h-1} + \varphi_2\ {}_TX^*_{T+h-2}\,.$$

c) En déduire la forme générale de la prévision ${}_TX^*_{T+h}$ lorsque $\varphi_1^2 + 4\varphi_2 = 0$.