

PROPOSITION DE CORRECTIONS

ANNALES TVE
Exercices

E4; E5; E6 ; E7; E8; E9;
E10 ; E11; E13; E14; E15 ; E16

PILOU, PIERRE, ALICIA, AYMERIC

660 602 1104

Exercice 4

$$0. \quad F(n) = \exp(-1/n) = f(a_n n + b_n)^n = \exp\left(-\frac{1}{a_n n + b_n}\right)^n$$

ssi $\frac{1}{n} = \frac{n}{a_n n + b_n}$ ssi $a_n = h$ et $b_n = 0$

$$1. \quad Y_{i+1} = \max(\alpha y_i; (1-\alpha)x_{i+1})$$

$$= \max(\alpha \max_{j \geq 0} ((1-\alpha)\alpha^j x_{i-j}); (1-\alpha)x_{i+1})$$

$$= (1-\alpha) \max(\alpha \max_{j \geq 0} \alpha^j x_{i-j}; x_{i+1})$$

$$= (1-\alpha) \max(\max_{j \geq -1} \alpha^{j+1} x_{i-j}; \alpha^{(-1)+1} x_{i-(-1)})$$

$$= (1-\alpha) \max_{j \geq -1} (\alpha^{j+1} x_{i-j})$$

$$= (1-\alpha) \max_{j \geq 0} (\alpha^j x_{i+1-j})$$

$$P(Y_i \leq y) = P[(1-\alpha) \max_{j \geq 0} (\alpha^j x_{i-j}) \leq y]$$

$$= P[\max_{j \geq 0} (\alpha^j x_{i-j}) \leq \frac{1}{1-\alpha} y]$$

$$= P\left[\bigwedge_{j \geq 0} \left(\alpha^j x_{i-j} \leq \frac{1}{1-\alpha} y\right)\right]$$

$$= \prod_{j \geq 0} P\left[x_{i-j} \leq \frac{1}{(1-\alpha)\alpha^j} y\right]$$

$$= \exp\left\{-\frac{1}{y} \underbrace{(1-\alpha)}_{\text{recurrence}} \sum_{j \geq 0} \alpha^j\right\}$$

$$= \exp\left\{-1/y\right\} \quad \text{donc } Y_i \sim \Phi_1$$

$$3. \quad \max(y_i; Y_{i+1}) = \max(y_i; \max(\alpha y_i; (1-\alpha)x_{i+1}))$$

$$\max(y_i; Y_{i+1}) = \max(y_i; (1-\alpha)x_{i+1})$$

$$\text{donc } \max_{1 \leq i \leq n} (Y_i) = \max(\max_{1 \leq i \leq n} (y_i), y_n)$$

$$= \max(\max_{1 \leq i \leq n} (y_i); (1-\alpha)x_n)$$

recurrence $\Rightarrow \max_{1 \leq i \leq n} (Y_i) = \max_{2 \leq i \leq n} (1-\alpha)x_i$



$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq i \leq n} (Y_i) \leq y) = \mathbb{P}(\max(Y_1; \max_{2 \leq i \leq n} (1-\alpha)X_i) \leq y)$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\text{INDEP}}{=} \mathbb{P}(Y_1 \leq y) \prod_{i=2}^n \mathbb{P}(X_i \leq \frac{1}{1-\alpha}y) \\ &= \exp\left\{-\frac{1}{y}\right\} \exp\left(-\frac{1-\alpha}{y}\right)^{n-1} \\ &= \exp\left(-[1 + (n-1)(1-\alpha)]/y\right) \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n} \max_{1 \leq i \leq n} (Y_i) \leq y\right) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} (Y_i) \leq ny\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp(-1/y)^{\alpha-1}$$

Exercice 5

© Théo Jalabert



$$\phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0 \end{cases} \quad \text{Frochet}$$

$$1 - M_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} \sup \{x \in \mathbb{R}; F(x) < 1\} = +\infty$$

$$2 - P(n^{1/\alpha} H_n \leq x) = P(H_n \leq xn^{1/\alpha}) = F(xn^{1/\alpha})^n = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^\alpha) & x > 0 \end{cases}$$

donc $\exists \alpha_0 > 0, \exists b_0, \frac{H_n - b_0}{a_n} \xrightarrow{d} \phi_\alpha$

donc ϕ_α est max-stable.

-

Exercice 6

© Théo Jalabert

$(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ iid de f.d.r F

$$M_n = \max(X_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ et } X_{(n)} \leq \dots \leq X_{(1)} := q_n \quad B_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i > x\}}$$

$$1 - \{X_{(n)} \leq x\} = \{ \forall j \in \llbracket 1 ; n \rrbracket, X_{(j)} \leq x \}$$

$$\{X_{(n)} \leq x\} = \{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_{(j)} > x\}} = 0\}$$

$$\{X_{(n)} \leq x\} = \{\sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{X_{(j)} > x\}} < n\}$$

$$2 - B_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i > x\}} \sim \mathcal{B}(n; P(X_i > x)) \text{ par indépendance des indicateurs}$$

$$\text{donc } P(X_{(n)} \leq x) = \sum_{r=0}^{n-1} \binom{n}{r} [\bar{F}(x)]^r [F(x)]^{n-r}$$

$$3 - \varphi_n(t; n) = E(\exp(t B_n(n)))$$

$$= \sum_{r=0}^n \exp(tr) P(B_n(n) = r)$$

$$= \sum_{r=0}^n \exp(tr) \binom{n}{r} \bar{F}(x)^r F(x)^{n-r}$$

$$= \sum_{r=0}^n \binom{n}{r} [e^t \bar{F}(x)]^r F(x)^{n-r}$$

$$= [\bar{F}(x)e^t + F(x)]^n \text{ par Binôme Newton}$$

$$4 - \exists u_n, \lim_{n \rightarrow \infty} n P(X_1 > u_n) = \tau$$

$$\ln(\varphi_n(t; u_n)) = n \ln[\bar{F}(u_n)e^t + F(u_n)] = n \ln[1 + \bar{F}(u_n)(e^t - 1)]$$

$$\ln(1+x) \underset{x \rightarrow 0}{=} x + o(x) \text{ donc } \ln(\varphi_n(t; u_n)) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n \frac{\bar{F}(u_n)(e^t - 1)}{\tau}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(t; u_n) = \exp\{\tau(e^t - 1)\}$$

$$5 - \text{Pour } N \sim \mathcal{B}(\tau)$$

$$E(e^{tN}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tn} \bar{e}^{-\tau} \frac{\tau^n}{n!} = e^{-\tau} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^t \tau)^n}{n!} = \exp\{\tau(e^t - 1)\}.$$

$$6 - \text{La transformée de Laplace caractérise la loi}$$

$$\exists a_n > 0, \exists b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_{(n)} - b_n}{a_n} \leq x\right) = \Lambda(x)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(X_{(1)} \leq a_n x + b_n) = \lambda(u)$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n(a_n x + b_n) = \infty) = \lambda(u)$$

$$= e^{-\tau(u)} \text{ par la loi de Poisson donc } \tau(u) = -\ln \lambda(u)$$

$$P(X_{(k)} \leq a_n u + b_n) = P(B_n(a_n u + b_n) < k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\tau(u)} \frac{\tau(u)^i}{i!}$$

et en particulier,

$$\begin{aligned} P(X_{(2)} \leq a_n u + b_n) &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\tau(u)} - e^{-\tau(u)} \tau(u) \\ &= \lambda(u) [1 - \ln \lambda(u)]. \end{aligned}$$

Exercice 7

$$1 - \bar{F}^{n-1}(x_1) = P(X > x_1)^{n-1} = P\left[\bigwedge_{i=1}^{n-1} (X > x_i)\right] = P[\forall i \in \{1, n-1\}, X > x_i]$$

$$\bar{F}^{n-1}(x_1) = P(\max_{1 \leq i \leq n-1} (x_i) < x) = P(\max_{1 \leq i \leq n-1} (x_i) < \max_{1 \leq i \leq n} (x_i; x))$$

comme $(x_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ iid et $X_n := X \sqcup x_i$

$$\text{alors } E(\bar{F}^{n-1}(x_1)) = P(\max_{1 \leq i \leq n} (x_i) < \max_{1 \leq i \leq n} (x_i))$$

$$= P(\theta_{n-1} < \theta_n) \quad \underline{\text{OK}}$$

$$= P(\max_{1 \leq i \leq n} (x_i) = x_n)$$

$$= \frac{1}{n} \text{ car } (x_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ iid.}$$

$$2 - P(X_L=y | X_1=n) = \sum_{k=2}^{+\infty} P(X_k > y | X_1=n, L=k) P(L=k).$$

$$P(X_k > y | X_1=n, L=k)$$

$$= P(X_k > y | X_1=n, X_2 < n; X_3 < n, \dots; X_{k-1} < n; X_k > n)$$

$$= P(X_k > y | X_k > n) \text{ car les } (x_i)_{1 \leq i \leq n} \text{ sont iid.}$$

$$= \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(n)}$$

$$\text{donc } P(X_L=y | X_1=n) = \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(n)} \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} P(L=k)}_{=1} = \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(n)}.$$

Exercice 8

© Théo Jalabert

$Y \sim \text{GPD}(\sigma; \zeta)$

1 - $\zeta > 0$ alors $P(Y > y) = \left[1 + \frac{1}{\zeta} \gamma y \right]^{-1/\zeta}$ pour $y \in [0; +\infty[$

$\zeta < 0$ alors $P(Y > y) = \left[1 - \frac{1}{\zeta} (-\zeta)y \right]^{+1/\zeta}$ pour $y \in [0; \frac{1}{\zeta}(-\zeta)]$

$\zeta = 0$ alors $P(Y > y) = \exp(-y/\sigma)$ pour $y \in [0; +\infty[$

2 - $\zeta = -1$ alors $P(Y > y) = (1 - \frac{1}{\sigma}y)^{-1}$ sur $[0; \sigma]$

ou $P(Y \leq y) = \frac{1}{\sigma}y^{-1}$ sur $[0; \sigma]$ donc $Y \sim U[0; \sigma]$

$\zeta = \infty$ alors $Y \sim \mathcal{E}(1/\sigma)$ immédiat.

3 - $f(x) = \frac{d}{dx} P(Y < x) = \frac{1}{\sigma} \left[1 + \zeta \left(\frac{x}{\sigma} \right) \right]_{+}^{-1/\zeta-1}$

La densité ne permet pas une expression explicite de l'estimateur de maximum de vraisemblance.

4 - $U \sim U[0; 1]$

$$P\left(\sigma \left(\frac{U^{-\zeta}-1}{\zeta}\right) \leq x\right) = P\left(U^{-\zeta}-1 \leq \zeta \left(\frac{x}{\sigma}\right)\right) = P\left(U \geq \left(1 + \zeta \left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)^{1/\zeta}\right)$$

donc si $U \sim U[0; 1]$

$$\text{alors } \sigma \left(\frac{U^{-\zeta}-1}{\zeta} \right) \sim \text{GPD}(\sigma; \zeta)$$

Exercice 9

© Théo Jalabert

$(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ iid selon $\phi_1(x) = \exp(-1/x)$ si $x > 0$.

$$M_n^x = \max(X_i)_{1 \leq i \leq n}$$

0) $\frac{M_n x - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi_1$ si $\begin{cases} a_n = n \\ b_n = 0 \end{cases}$

$$\mathbb{P}(M_n^x \leq a_n x + b_n) = F(a_n x + b_n)^n = \left[\exp\left(-\frac{n}{a_n x + b_n}\right) \right]^n \rightarrow \phi_1(x)$$

1) $Y_n = \frac{1}{3} \max(X_n, X_{n+1}, X_{n+2})$

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{3} \leq x\right) = \mathbb{P}(Y_n \leq 3x) = \phi_1(3x)^3 = \exp(-1/3x)^3 = \phi_1(x).$$

donc $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} \phi_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $M_n^Y = \max(Y_i)_{1 \leq i \leq n}$

$$\frac{M_n^Y - b_n}{a_n} = \frac{1}{n} M_n^Y$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n^Y - b_n}{a_n} \leq x\right) = \mathbb{P}(M_n^Y \leq nx) = \phi_1(nx)^n = \phi_1(x).$$

Il s'agit ici de la propriété maxstabilité.

3) Question bonus : les dynamiques de dépassement de seuil

$$\mathbb{P}(i/n; X_i > a_n x + b_n)_{1 \leq i \leq n} = \mathbb{P}(i/n; Y_i > a_n x + b_n)_{1 \leq i \leq n}$$

est une loi de Poisson ($\lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{F}(u_n) = \tau$)

Exercice 10

© Théo Jalabert

1- Comme $X_1 \geq 0$ et $X_2 \geq 0$

$$X_1 > n \text{ ou } X_2 > n \Rightarrow X_1 + X_2 > n \text{ ou } X_1 + X_2 \geq n \Rightarrow X_1 + X_2 > n$$

$$\{X_1 > n\} \cup \{X_2 > n\} \subset \{X_1 + X_2 > n\}$$

$$\text{Donc } P(X_1 + X_2 > n) \geq P[\{X_1 > n\} \cup \{X_2 > n\}]$$

$$P(X_1 + X_2 > n) \geq 2P(X_1 > n) - P[\{X_1 > n\} \cap \{X_2 > n\}]$$

$$P(X_1 + X_2 > n) \geq 2P(X_1 > n) - P(X_1 > n)^2$$

$$\text{Mais } 2P(X_1 > n) - P(X_1 > n)^2 = \underset{n \rightarrow +\infty}{\lim} \left[2 - \frac{P(X_1 > n)}{\infty} \right] = \Theta(1)$$

$$\text{et donc } P(X_1 + X_2 > n) \geq \underset{n \rightarrow +\infty}{\lim} P(X_1 > n) (2 + \Theta(1))$$

$$\begin{aligned} A(n) &\stackrel{n \rightarrow \infty}{=} \Theta(B(n)) \\ \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A(n)}{B(n)} &= 0. \end{aligned}$$

2- Soit $\delta \in]0; \frac{1}{2}[$. Montrer que $A \subset B$ si $B^c \subset A^c$

$$\left\{ \begin{array}{l} A = \{X_1 + X_2 > n\} \\ A^c = \{X_1 + X_2 \leq n\} \\ B = \{X_1 > (1-\delta)n\} \cup \{X_2 > (1-\delta)n\} \cup \{X_1 > \delta n, X_2 > \delta n\} \\ B^c = \{X_1 \leq (1-\delta)n\} \cap \{X_2 \leq (1-\delta)n\} \cap \{(X_1 \leq \delta n) \cup (X_2 \leq \delta n)\} \\ B^c = \{X_1 \leq (1-\delta)n, X_2 \leq (1-\delta)n, X_1 \leq \delta n\} \\ \quad \cup \{X_1 \leq (1-\delta)n, X_2 \leq (1-\delta)n, X_2 \leq \delta n\} \end{array} \right.$$

$$B^c = \{X_1 \leq \delta n, X_2 \leq (1-\delta)n\} \cup \{X_1 \leq (1-\delta)n, X_2 \leq \delta n\}$$

$$\text{Or } \{X_1 \leq \delta n, X_2 \leq (1-\delta)n\} \subset \{X_1 + X_2 \leq n\} = A^c$$

$$\{X_1 \leq (1-\delta)n, X_2 \leq \delta n\} \subset \{X_1 + X_2 \leq n\} = A^c$$

$$\text{donc } B^c \subset A^c \Rightarrow A \subset B$$

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P(A) + P(B) + P(C) \\ &\quad - P(A \cap B) - P(B \cap C) \\ &\quad - P(C \cap A) \\ &\quad + P(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

$$\text{d'où } P(X_1 + X_2 > n) \leq 2P(X_1 > (1-\delta)n) + P(X_1 > \delta n)^2$$

$$- P(X_1 > (1-\delta)n)^2 - P(X_1 > \delta n)P(X_1 > (1-\delta)n)$$

$$- P(X_1 > (1-\delta)n)P(X_1 > \delta n) + P(X_1 > (1-\delta)n)^2$$

$$P(X_1 + X_2 > n) \leq 2P(X_1 > (1-\delta)n) \left[1 - \underbrace{P(X_1 > (1-\delta)n)}_{\stackrel{n \rightarrow \infty}{\Theta(1)}} + \frac{P(X_1 > (1-\delta)n)^2}{2P(X_1 > \delta n)} \right]$$

$$\text{donc } P(X_1 + X_2 > n) \underset{n \rightarrow \infty}{\leq} 2P(X_1 > (1-\delta)n)(1 + \Theta(1)) \stackrel{\text{calcul de la limite à faire}}{=} \Theta(1)$$

3_ On a donc $2\mathbb{P}(X_1 > u)(1+\Theta(1)) \leq \mathbb{P}(X_1 + X_2 > u) \leq 2\mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)u)(1+\Theta(1))$

$$\text{donc } 1+\Theta(1) \leq \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > u)}{2\mathbb{P}(X_1 > u)} \leq \frac{\mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)u)}{\mathbb{P}(X_1 > u)} (1+\Theta(1))$$

$$\text{mais } \frac{\mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)u)}{\mathbb{P}(X_1 > u)} = \frac{\bar{F}((1-\delta)u)}{\bar{F}(u)} = (1-\delta)^{-\alpha} \frac{L((1-\delta)u)}{L(u)} \xrightarrow[u \rightarrow \infty]{} (1-\delta)^{-\alpha} \xrightarrow[\delta \rightarrow 0]{} 1$$

variables lentes

donc par la limite lorsque $u \rightarrow \infty$ et $\delta \rightarrow 0$

$$\frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > u)}{2\mathbb{P}(X_1 > u)} \sim 1 \text{ et } \mathbb{P}(X_1 + X_2 > u) \sim 2\mathbb{P}(X_1 > u)$$

4- Par récurrence pour $n \geq 2$.

* Initialisation : déjà effectuée.

* Héritage : supposons $\mathbb{P}(S_n > u) \sim_n \mathbb{P}(X_1 > u)$

?

$$\mathbb{P}(M_n > u) = 1 - \mathbb{P}(M_n \leq u) = 1 - (1 - \bar{F}(u))^n = 1 - \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-1)^k \bar{F}(u)^k$$

$$\mathbb{P}(M_n > u) = 1 - 1 + n\bar{F}(u) + \Theta(n\bar{F}(u)) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} n\bar{F}(u) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \mathbb{P}(S_n > u)$$

En terme de risque extrêmes ($u \rightarrow \infty$)

et pour un échantillon de données assez large ($n \rightarrow \infty$)

la loi du max peut être approximée par la loi de la somme -

Exercice 12

© Théo Jalabert

0) Pour $x \in [0, 1]$; $P(X > x) = \exp\left(\frac{-x}{1-x}\right)$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{F}(u_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} n \exp\left\{\frac{-u_n}{1-u_n}\right\} = 2$$

ssi $\frac{u_n}{1-u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \ln\left(\frac{n}{2}\right)$

ssi $\frac{1}{1-u_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1 + \ln\left(\frac{n}{2}\right)$

ssi $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1 - \frac{1}{\ln\left(\frac{n}{2}\right) + 1}$: est une suite de seuils non linéaires

1) $P(M_n \leq a_n x + b_n) = f(a_n x + b_n)^n = \left[1 - \exp\left\{-\frac{a_n x + b_n}{1-a_n x - b_n}\right\}\right]^n$

et $n \times \exp\left\{-\frac{a_n x + b_n}{1-a_n x - b_n}\right\}$

$$= \exp\left\{\ln(n) - \frac{x + \ln(n)(1+\ln(n))}{(1+\ln(n))^2 - x - \ln(n)(1+\ln(n))}\right\}$$

$$= \exp\left\{\ln(n) - \frac{x + \ln(n)(1+\ln(n))}{-x + (1+\ln(n))}\right\}$$

$$= \exp\left\{-\frac{x \ln(n) + \ln(n)(1+\ln(n)) - x - \ln(n)(1+\ln(n))}{-n + (1+\ln(n))}\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{-x(1+\ln(n))}{-x + (1+\ln(n))}\right\} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \exp\left\{-\frac{x \ln(n)}{\ln(n)}\right\} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \exp(-x)$$

De cette manière,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq a_n x + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 - \frac{n \exp\left\{-\frac{a_n x + b_n}{1-a_n x - b_n}\right\}}{n}\right] = \exp\{-\exp(-x)\} = \Lambda(x)$$

2) Pour rappel, $F_E(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-x} & x \geq 0 \end{cases}$

$$\mathbb{P}(M_n^E \leq a_n^E x + b_n^E) = F_E(a_n^E x + b_n^E)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \Lambda(x) = \exp(-\exp(-x))$$

ainsi $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - e^{-a_n^E x - b_n^E})^n =: \Lambda(x)$

sii $\lim_{n \rightarrow \infty} n e^{-a_n^E x - b_n^E} =: \exp(-x)$ car $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \frac{x}{n})^n = e^{-x}$

sii $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln n - a_n^E x - b_n^E = -x$

En posant $a_n^E := 1$ et $b_n^E = \ln(n)$ l'équation est vérifiée.

3) On considère $g(x) = \frac{x}{1+x}$ $x > 0$.

a) $F_{g(E_1)}(x) := \mathbb{P}\left(\frac{E_1}{1+E_1} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(E_1 \leq \frac{x}{1-x}\right) = 1 - \exp\left(-\frac{x}{1-x}\right) = F(x)$

donc $g(E_1) \stackrel{d}{=} X_1$ $g'(x) = \frac{1}{(1+x)^2}$

et $\mathbb{P}\left(\frac{g(M_n^E) - g(\ln n)}{g'(\ln n)} \leq x\right) \stackrel{d}{=} \mathbb{P}\left(g(M_n^E) \leq \frac{1}{(1+\ln n)^2} x + \frac{\ln n}{1+\ln n}\right)$

mais g croissante bijective donc $g(M_n^E) = \max(g(E_i))_{1 \leq i \leq n}$

or $\forall i \in [1; n]$, $g(E_i) \stackrel{d}{=} X_i$

donc $\mathbb{P}\left(\frac{g(M_n^E) - g(\ln n)}{g'(\ln n)} \leq x\right) = \mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n)$

et ainsi $\frac{g(M_n^E) - g(\ln n)}{g'(\ln n)} \stackrel{d}{=} \frac{M_n - b_n}{a_n}$

b) Il s'agit ici d'appliquer le Théorème des Valeurs Intermédiaires

Prenons $f := g$, et $n \in \mathbb{N}$

$x = \ln n$ et $y = \theta_{n^E}$. alors

$\exists \xi_n$ tel que $\ln n \leq \xi_n \leq \theta_{n^E}$

$$\frac{g(\theta_{n^E}) - g(\ln n)}{\theta_{n^E} - \ln n} = g'(\xi_n)$$

$f \in C^1[a; b]$

$\forall (x, y) \in [a; b]$

$\exists c \in]a; b[$ tel que

$$\frac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(c).$$

c) $P\left(\frac{\theta_{n^E}}{\ln n} \leq x\right) = P\left(\theta_{n^E} \leq x \ln n\right) = (1 - e^{-x \ln n})^n : F_n(x)$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ (1 - \frac{1}{n^x})^n & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad \text{Par ailleurs,}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F_n(1) = e^{-1}$$

$$(1 - \frac{1}{n^x})^n = \exp\left\{n \ln\left(1 - \frac{1}{n^x}\right)\right\} = \exp\left\{n\left[\frac{1}{n^x} + o\left(\frac{1}{n^x}\right)\right]\right\}$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp\left\{\frac{-1}{n^{x-1}} + o\left(\frac{1}{n^{x-1}}\right)\right\} = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$$

pour $x \neq 1$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x) = F: x \mapsto \begin{cases} 0 & x < 1 \\ e^{-1} & x = 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{fonction de} \\ \text{répartition} \\ \text{de la masse} \end{array}$$

$$\text{donc } \frac{\theta_{n^E}}{\ln n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1 \quad x = 1$$

Supposons de plus que $\ln(n) \leq \xi_n \leq \theta_{n^E}$

alors $g'(\ln n) \geq g'(\xi_n) \geq g'(\theta_{n^E})$

alors $1 \geq \frac{g'(\xi_n)}{g'(\ln n)} \geq \frac{g'(\theta_{n^E})}{g'(\ln n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ par continuité de la dérivée

donc $\frac{g'(\xi_n)}{g'(\ln n)} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1$ et de suite

$$\frac{h_n - b_n}{a_n} \underset{\geq}{\asymp} \frac{g(h_n^E) - g(b_n)}{g'(b_n)} \underset{\geq}{\asymp} \underbrace{(h_n^E - b_n)}_{\hookrightarrow \Lambda(n)} \underbrace{\frac{g'(\xi_n^\circ)}{g'(b_n)}}_{\rightarrow 1}$$

donc $\frac{h_n - b_n}{a_n} \underset{\geq}{\asymp} 1$.

Exercice 13

1) Nous avons montré au cours que par la règle de l'Hopital lorsque x suit une loi normale,

$$\text{i)} h(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{x}$$

$$\text{ii)} b_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \sqrt{2 \ln(n)}$$

$$\frac{M_n}{b_n} - \frac{b_n}{b_n} \sim \frac{a_n}{b_n} \wedge$$

$$\text{or } a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{b_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2 \ln(n)}}$$

donc $\frac{a_n}{b_n} \underset{n \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$ et donc $\frac{M_n}{b_n} \overset{\text{P}}{\rightarrow} 1$.

$$2) \frac{M_n - b_n}{a_n} \not\rightarrow \wedge \text{ donc } \frac{M_n^2 - b_n^2}{a_n} \times \frac{1}{M_n + b_n} \not\rightarrow \wedge$$

cependant $M_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} b_n$ car $\frac{M_n}{b_n} \overset{\text{P}}{\rightarrow} 1$

$$\text{De cette manière nous obtenons } \frac{M_n^2 - b_n^2}{2a_n b_n} \not\rightarrow \wedge$$

$$\text{En posant } \begin{cases} d_n = b_n^2 \\ c_n = 2a_n b_n \end{cases} \quad \frac{M_n^2 - d_n}{c_n} \not\rightarrow \wedge$$

Exercice 14

© Théo Jalabert

$$1) \exists a_n > 0, \exists b_n, \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\max_{1 \leq i \leq n} (-x_i) \leq a_n x + b_n] = H(x)$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \mathbb{P}[\max_{1 \leq i \leq n} (-x_i) > a_n x + b_n] = 1 - H(x)$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \mathbb{P}[-\min_{1 \leq i \leq n} (x_i) > a_n x + b_n] = H(x)$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} 1 - \mathbb{P}[\min_{1 \leq i \leq n} (x_i) < -a_n x - b_n] = 1 - H(x)$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[\min_{1 \leq i \leq n} (x_i) < a_n x - b_n] = 1 - H(-x)$$

On retrouve alors $c_n := a_n$ et $d_n = -b_n$.

$$2) G_\xi(x) = \exp \left\{ - (1 + \xi x)_+^{-1/\xi} \right\} \text{ pour } \xi \in \mathbb{R}$$

$$\text{donc } 1 - G_\xi(-x) = 1 - \exp \left\{ - (1 - \xi x)_+^{-1/\xi} \right\}$$

3) Soit $\xi \in \mathbb{R}$ et $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ iid de fonction répartition $1 - G_\xi(-x)$.

$$\mathbb{P}[\min_{1 \leq i \leq n} (x_i) > x] = \mathbb{P}[\forall i \in [1:n], X_i > x]$$

$$= G_\xi(-x)^n$$

$$= \exp \left\{ - (1 - \xi x)_+^{-1/\xi} \right\}^n$$

$$= \exp \left\{ - n (1 - \xi x)_+^{-1/\xi} \right\}$$

$$= \exp \left\{ - \left[1 - \xi \left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi n^{1/\xi}} + n \frac{1}{n^{1/\xi}} \right) \right]_+^{-1/\xi} \right\}$$

$$= \exp \left\{ - \left[1 - \underbrace{\xi \left(\frac{n^{1/\xi} + 1 + \xi x}{\xi n^{1/\xi}} \right)}_{\text{par translation et hypothèse}} \right]_+^{-1/\xi} \right\}$$

par translation
et hypothèse

la loi est de même type donc max-stable.

Exercice 15

$$0) \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq a_n x + b_n) = H(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n x + b_n)^n = H(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \{ n \ln [1 - \bar{F}(a_n x + b_n)]^n \} = H(x)$$

$$\ln(1-x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x \text{ donc } \ln(1 - \bar{F}(a_n x + b_n)) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\bar{F}(a_n x + b_n)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \{ -n \bar{F}(a_n x + b_n) \} = H(x)$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} n \bar{F}(a_n x + b_n) = -\ln H(x).$$

1) a) $N \sim P(\lambda)$ et $N \perp\!\!\!\perp X_i$

$$P(M_N \leq x) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(H_n \leq x) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$P(M_N \leq x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F(x)^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

$$P(H_n \leq x) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[F(x)\lambda]^n}{n!}$$

$$P(H_n \leq x) = e^{-[1-F(x)]\lambda}$$

b) Soit $N_n \sim P(\lambda_n)$

$$\text{Si } \frac{M_{N_n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{X} H \text{ avec } P(M_{N_n} \leq a_n x + b_n) = e^{-[1-F(a_n x + b_n)]\lambda_n}$$

$$\text{alors } \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \{ -\lambda_n \bar{F}(a_n x + b_n) \} = H(x)$$

$$\text{ssi } \lambda_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} x$$

2) a) $N \sim \mathcal{B}(q)$ et $N \perp\!\!\!\perp X_i$

$$P(M_N \leq x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F(x)^n q (1-q)^{n-1} = F(x) q \sum_{n=1}^{+\infty} (F(x)[1-q])^{n-1}$$

$$P(M_N \leq x) = \frac{F(x) q}{1 - (1-q)F(x)}$$

2) b) $N_n \sim \mathcal{G}(q_n)$

© Théo Jalabert



Si $\frac{M_{N_n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} H$ avec $P(M_n \leq x) = \frac{q_n F(x)}{1 - (1-q_n)F(x)}$

alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q_n F(a_n x + b_n)}{1 - (1-q_n)F(a_n x + b_n)} = H(x)$

Exercice 16

© Théo Jalabert

$$A_- F(x) = \begin{cases} 1 - e^{1/x} & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$$

$$1) u_n := \frac{1}{\ln z - \ln n}$$

$$\text{alors } n \bar{F}(u_n) = n \bar{F}\left(\frac{1}{\ln z - \ln(n)}\right) = n \exp\{\ln z - \ln n\} = n \exp\left(\ln\left(\frac{z}{n}\right)\right) = z$$

$$\text{donc immédiatement } n \bar{F}(u_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} z \text{ donc } \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-z}.$$

$$2) \text{ On pose } z = \exp(-x) \text{ et on souhaite } \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-z}$$

$$\text{De cette manière } u_n = -[x + \ln(n)]^{-1} = \frac{-1}{\ln(n)} [1 + x \ln(n)]^{-1}$$

$$u_n = \frac{-1}{\ln(n)} \left[1 - \frac{x}{\ln(n)} + O\left(\frac{1}{\ln(n)}\right) \right]. \text{ donc limite en } x$$

$$\text{donc } \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq u_n) = \exp(-\exp(-x)) \quad \text{par application du 1)}$$

$$B_- F(x) = K(1 - e^{-x}) \mathbb{1}_{[0, x^F]}(x)$$

$$1) F'(x) = f(x) = K e^{-x} \mathbb{1}_{[0, x^F]}(x)$$

$$\text{donc } \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = K \int_0^{x^F} e^{-x} dx = K \left[-e^{-x} \right]_0^{x^F} = K(1 - e^{-x^F}) = 1$$

$$\text{donc } K = \frac{1}{1 - e^{-x^F}}$$

$$2) \text{ Pour } x < 0, \lim_{n \rightarrow \infty} P(M_n \leq a_n x + x^F) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(a_n x + x^F)^n = \exp(x)$$

$$F(a_n x + x^F)^n = \exp\{n \ln[K(1 - e^{-a_n x - x^F})]\}$$

$$= \exp\left\{n \ln\left[\frac{1 - \exp\{-(a_n x + x^F)\}}{1 - \exp(-x^F)}\right]\right\}$$

$$= \exp \left\{ -n \ln [1 - \exp(-x_F)] + n \ln [1 - \exp(-a_n x - x_F)] \right\}$$

© Théo Jalabert

$$\frac{1 - e^{-a_n x - x_F}}{1 - e^{-x_F}} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{x/n} \quad \text{donc} \quad \frac{1 - ye^{-a_n x}}{1 - y} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} e^{x/n}$$

$$\text{ssi } e^{-x/n} - ye^{-a_n x - x/n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1 - y$$

$$\text{ssi } -a_n x - \frac{x}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} 1$$

$$\text{ssi } a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n}.$$