TD - Indicateurs de performance

1. On considère 2 actifs dont les rendements annuels sont $\tilde{R}_1$ et $\tilde{R}_2$. On suppose que

$$\begin{pmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

   (a) Rappeler quelle est la ration de Sharpe notée ici Sh_i pour l'actif i ($i = 1$ ou $i = 2$).

   (b) Soit $(w, 1-w)'$ le portefeuille composé des 2 actifs ($w \neq 0$). Quelle est la ration de Sharpe Sh_P du portefeuille ?

   (c) Supposons que le deuxième actif est l'actif sans risque. Montrer que

$$Sh_P = \begin{cases} -Sh_1 & si \quad w < 0 \\ Sh_1 & si \quad w > 0 \end{cases}$$

2. On considère un portefeuille équipondéré de n actifs. Soit $\tilde{R} = (\tilde{R}_1 ... \tilde{R}_n)$ le vecteur des rendements annuels. On suppose que $\tilde{R}$ est un vecteur aléatoire de vecteur moyenne $\mu = (\mu_1 ... \mu_n)$ et de matrice de variance-covariance $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, $\sigma_{ij} = \rho_{ij}\sigma_i\sigma_j$.

   (a) On suppose que les rendements des actifs ne sont pas corrélés ($\rho_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

      i. Donnez l'expression du ratio de Sharpe du portefeuille.

      ii. Montrez alors que le ratio de Sharpe du portefeuille est une combinaison linéaire des ratios de Sharpe des actifs :

$$Sh = \sum_{i=1}^{n} p_i sh_i.$$

      iii. Vérifiez alors que $0 < p_i < 1$.

   (b) On étudie maintenant le cas où la corrélation est uniforme ($\rho_{ij} = \rho$ si $i \neq j$) et les actifs présentent la même volatilité ($\sigma_i = \sigma$).

      i. Donnez l'expression du ratio de Sharpe du portefeuille.

      ii. Montrez alors que le ratio de Sharpe du portefeuille est proportionnel au ratio de Sharpe moyen des actifs $Sh = p\bar{sh}$ où $\bar{sh} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} sh_i$.

      iii. On pose $\rho = 50\%$. Combien faut-il d'actifs pour que le ratio de Sharpe du portefeuille soit supérieur de 25% au ratio de Sharpe moyen ?

      iv. Même question si $\rho = 80\%$.

Exercice 1 :

$$\begin{pmatrix}\tilde{R}_1\\ \tilde{R}_2\end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right)$$

a) $Sh_i = \dfrac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}$

b) $P : (w \quad 1-w)'$

$Sh_P = \dfrac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$ où $\begin{cases} \mu_P = w\mu_1 + (1-w)\mu_2 \\ \sigma_P^2 = w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2 \end{cases}$

$$\Rightarrow Sh_P = \frac{w\mu_1 + (1-w)\mu_2 - r_f}{\sqrt{w^2\sigma_1^2 + (1-w)^2\sigma_2^2 + 2w(1-w)\sigma_1\sigma_2}}$$

c) On suppose que l'actif 2 est l'actif sans risque i.e $\begin{cases}\mu_2 = r_f \\ \sigma_2 = 0\end{cases}$

$$Sh_P = \frac{w\mu_1 + (1-w)r_f - r_f}{\sqrt{w^2\sigma_1^2}} = \frac{w(\mu_1 - r_f)}{|w|\sigma_1}$$

→ car les ventes à découvert peuvent être autorisées.

$$\Rightarrow Sh_P = \frac{\mu_1 - r_f}{\sigma_1} \times \frac{w}{|w|} = \begin{cases} -Sh_1 & \text{si } w<0 \\ +Sh_1 & \text{si } w>0 \end{cases}$$

Exercice 2 :

a) i) $Sh_P = \dfrac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$ où $\mu_P = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mu_i$

Ici $P : \left(\frac{1}{m} \;—\; \frac{1}{m}\right)'$

$$\sigma_P^2 = Var(\tilde{R}_P) = \frac{1}{m^2} Var\left(\sum_{i=1}^{m} \tilde{R}_i\right) \overset{\perp}{=} \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2$$

$$\text{Donc } Sh_P = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu_i - r_f}{\frac{1}{m}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2}} = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\mu_i - r_f)}{\frac{1}{m}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2}}$$

$$\Rightarrow Sh_P = \frac{\sum_{i=1}^{m}(\mu_i - r_f)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2}}$$

ii) $$Sh_P = \sum_{i=1}^{m} \underbrace{\frac{\mu_i - r_f}{\sigma_i}}_{Sh_i} \times \frac{\sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2}} = \sum_{i=1}^{m} Sh_i \times \underbrace{\frac{\sigma_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2}}}_{p_i} = \sum_{i=1}^{m} p_i Sh_i$$

iii) Les σ_i sont $>0 \Rightarrow p_i > 0$

Les $\sigma_i^2 < \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 \Rightarrow p_i < 1.$

b) i) $Sh_p = \dfrac{\mu_p - r_f}{\sigma_p}$ avec $\mu_p = \dfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mu_i$ et $\sigma_p^2 = \dfrac{1}{m^2} Var(\tilde{R}_i) + \dfrac{2}{m^2}\sum_{i<j} \underbrace{Cov(\tilde{R}_i, \tilde{R}_j)}_{\rho\sigma^2}$

$$\Rightarrow \sigma_p^2 = \frac{1}{m^2}\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2 + \frac{2}{m^2}\sum_{i<j}\rho\sigma^2$$

$$\Rightarrow \sigma_p^2 = \frac{1}{m^2} \times m\sigma^2 + \frac{2}{m^2}\,\frac{m(m-1)}{2}\rho\sigma^2$$

$$= \frac{\sigma^2}{m} + \frac{m-1}{m}\rho\sigma^2$$

$$\Rightarrow \sigma_p^2 = \sigma^2\left(\frac{1}{m} + \left(1 - \frac{1}{m}\right)\rho\right) \Rightarrow \sigma_p^2 = \sigma^2\left(\rho + \frac{1}{m}(1-\rho)\right)$$

ii) $$Sh_p = \frac{\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu_i\right) - r_f}{\sqrt{\sigma^2\left(\rho + \frac{1}{m}(1-\rho)\right)}} = \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\mu_i - r_f)}{\sigma\sqrt{\rho + \frac{1}{m}(1-\rho)}}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\frac{\mu_i - r_f}{\sigma}}_{Sh} \times \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\rho + \frac{1}{m}(1-\rho)}}}_{P}$$

iii) $\rho = 50\%$ On cherche m tq $P = 1{,}25.$

$$\Rightarrow 1{,}25 = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{\rho}_{0.5} + \frac{1}{m}(1-\underbrace{\rho}_{0.5})}} \Rightarrow m = 3{,}6 \Rightarrow \text{à partir de 4 actifs.}$$

iv) $\rho = 80\%$ On cherche m tq $P = 1{,}25$

Rq : $P = \dfrac{1}{\sqrt{\rho + \underbrace{\frac{1}{m}(1-\rho)}_{>0}}} < \dfrac{1}{\sqrt{\rho}}$

Si $\rho = 80\% \Rightarrow P < 1{,}12$

$\Rightarrow$ on ne peut pas améliorer le ratio Sharpe de 25 %