PLANCHE D'EXERCICES

Intégration L3– 2021
Pierre-O Goffard et Garry Terii

---

1. Soient $(\Omega, \mathcal{A})$ un espace mesurable et $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$. Pour tout $A \in \mathcal{A}$, on pose $\mu(A) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(A)$

   (a) Montrer que μ est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

   Solution: Ainsi définie, μ est bien une application à valeurs dans $[0, +\infty]$.
   Comme, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mu_n(\emptyset) = 0$, on a $\mu(\emptyset) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n(\emptyset) = 0$ et pour $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de parties de $\mathcal{A}$ deux à deux disjointes, il vient

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=0}^{+\infty} \mu_n(A_k) \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} \mu_n(A_k), \text{ Fubini-Tonelli pour la mesure de comptage.} \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} \mu(A_k).
\end{aligned}$$

   Finalement, μ définit bien une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

   (b) On suppose que les μ_n sont des mesures de probabilités, et soit $(p_n)_n \in \mathbb{N}$ une suiste de réels positifs tels que $\sum_{n\in\mathbb{N}} p_n = 1$. On pose

$$\mu(A) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\mu_n(A),\ \forall A \in \mathcal{A}.$$

   Montrer que μ est une mesure de probabilité.

   Solution: Le même raisonnement que (a) permet de conclure que μ est une mesure et on a

$$\mu(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n\mu_n(\Omega) = \sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1,$$

   où on a utilisé que $\mu_n(\Omega) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ pour la deuxième égalité.
   On montre ainsi que μ est une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

   (c) Application: On considère les mesures

$$\mu_1 = \sum_{p=1}^{+\infty} \delta_p, \text{ et } \mu_2 = \sum_{p=1}^{+\infty} p\delta_p.$$

Calculer pour chacune de ces mesures la mesure des ensembles suivants:

$$A_n = [n, n+1+1/n^2],\ B_n = \bigcup_{p=1}^{n} A_p,\ B = \bigcup_{p=1}^{+\infty} A_p,\ C_n = \bigcap_{p=1}^{n} A_p,\ \text{et } C = \bigcap_{p=1}^{+\infty} A_p$$

pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution: D'après la question (1.a), les applications μ_1 et μ_2 sont des mesures. La mesure μ_1 correspond à la mesure de comptage des entiers dans $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$ et la mesure μ_2 est la mesure qui somme tous les entiers d'une partie de $\mathbb{R}$.
On a

- $A_1 = [1,3]$ donc $\mu_1(A_1) = 3$ et $\mu_2(A_1) = 6$. Si $n \geq 2$, les seuls entiers dans $A_n = [n, (n+1) + \frac{1}{n^2}]$ sont n et $n+1$. Donc, $\mu_1(A_n) = 2$ et $\mu_2(A_n) = 2n+1$ dès que $n \geq 2$.

- $\mu_1(B_1) = \mu_1(A_1) = 3$ et $\mu_2(B_1) = \mu_2(A_1) = 6$. Pour tout $n \geq 2,\ B_n = [1, n+1+\frac{1}{n^2}]$, donc $\mu_1(B_n) = n+1$ et $\mu_2(B_n) = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$. On a également $\mu_1(B) = +\infty$ et $\mu_2(B) = \infty$. En effet, $B_n \subset B$ pour tout $n \geq 1$ et donc $\mu(B_n) \leq \mu(B)$ puis le passage à la limite permet de conclure.

- $C_1 = A_1,\ C_2 = [2,3],\ C_3 = \{3\}$ et $C_n = \emptyset,\ n \geq 4$. Donc

  $\mu_1(C_1) = 3$, $\mu_1(C_2) = 2$, $\mu_1(C_3) = 1$ et $\mu_1(C_n) = 0$ $n \geq 4$, et $\mu_2(C_1) = 6$ $\mu_2(C_2) = 5$, $\mu_2(C_3) = 3$ et $\mu_2(C_n) = 0$ $n \geq 4$. On a également $\mu_1(C) = 0$ et $\mu_2(C) = 0$ puisque $C \subset C_4$.

2. On note Γ la fonction définie par

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \mathrm{d}t,\ x \in]0, +\infty[$$

On pose

$$H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},\ n \geq 1.$$

(a) Vérifier que Γ est bien définie.

Solution: Pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$ on pose $f(t,x) = e^{-t}t^{x-1}$.
La fonction $t \mapsto f(t,x)$, avec $x > 0$, est continue sur $]0, +\infty[$ donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. Comme $e^{-t}t^{x-1} \sim t^{x-1}$ lorsque $t \to 0$ alors $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est intégrable en 0 puisque $1 - x < 1$. Comme $t^2 e^{-t} t^{x-1} \xrightarrow[t \to +\infty]{} 0$ alors $f(t,x) = o(1/t^2)$ lorsque $t \to +\infty$ et on en déduit l'intégrabilité au voisinage de $+\infty$ de $t \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ au voisinage de $+\infty$ en utilisant le critère d'intégrabilité de Riemann. La fonction Γ est donc bien définie.

(b) Démontrer que la fonction Γ est dérivable sur $]0, +\infty[$, avec

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln(t) \mathrm{d}t.$$

Solution: $f : (t,x) \mapsto e^{-t}t^{x-1}$ est dérivable rapport à la variable x sur $]0,+\infty[$ avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-t}t^{x-1}\ln(t)$ pour tout $(x,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$. On a, pour $x \in [a,b]$, (avec $0 < a < b$)

$$\begin{aligned}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| &= e^{-t}t^{x-1}(-\ln(t))\mathbb{1}_{]0,1[} + e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\mathbb{1}_{]1,+\infty[} \\ &\leq e^{-t}t^{a-1}(-\ln(t))\mathbb{1}_{]0,1[} + e^{-t}t^{b-1}\ln(t)\mathbb{1}_{]1,+\infty[} = g(t).\end{aligned}$$

La fonction g est continue sur $]0,+\infty[$ donc localement intégrable sur $]0,+\infty[$.

- Au voisinage de 0, $g(t) = \underset{t\to 0}{o}(t^{a/2-1})$ et g est intégrable au voisinage de 0 puisque $t \mapsto t^{a/2-1}$ est intégrable au voisinage de 0.
- Au voisinage de $+\infty$, $g(t) = \underset{t\to+\infty}{o}(1/t^2)$, d'où l'intégrabilité g au voisinage de $+\infty$.

La fonction g est donc intégrable sur $]0,\infty[$.
La dérivée $\frac{\partial f}{\partial x}$ étant dominée par une fonction intégrable sur $]0,+\infty[$, on appliquer le résultat de dérivabilité sous le signe intégrale pour les intégrales dépendant d'un paramètre, ce qui donne

$$\Gamma'(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}\ln(t)\mathrm{d}t.$$

(c) Montrer que la suite

$$u_n = H_n - \log(n),\ n \geq 1$$

admet une limite lorsque n tend vers l'infini. On notera γ cette limite, ausi appelée constante d'Euler.

Solution: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$u_{n+1} - u_n = H_{n+1} - H_n + \log\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{n+1} + \log\left(1 - \frac{1}{n+1}\right).$$

Or, $\log\left(1 - \frac{1}{1+n}\right) = -\frac{1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$, puis $u_{n+1} - u_n = \underset{n\to+\infty}{O}\left(\frac{1}{n^2}\right)$. On en déduit que la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ est absolument convergente. Par conséquent, la suite (u_n) est convergente puisque (u_n) et la série précédente sont de même nature.

(d) Montrer que

$$H_n = \int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\mathrm{d}v,\ n \geq 1.$$

Solution: On a $1-(1-v)^n = nv + \underset{n\to+\infty}{o}(v)$, puis $\frac{1-(1-v)^n}{v} = n + \underset{n\to+\infty}{o}(1)$. La fonction

$v \to \frac{1-(1-v)^n}{v}$ est donc intégrable sur $]0,1[$ et on a

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1-(1-v)^n}{v}\mathrm{d}v &= \int_0^1 \frac{1-u^n}{1-u}\mathrm{d}u \\
&= \int_0^1 \sum_{k=0}^{n-1} u^k \mathrm{d}u \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k+1} = H_n.
\end{aligned}$$

où on a posé le changement de variable $v = 1-u$ pour la première égalité.

(e) En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{H_{n+1}}{n+1} = -\int_0^1 (1-v)^n \log(v)\mathrm{d}v.$$

Solution: D'après la question précédente,

$$\begin{aligned}
\frac{H_{n+1}}{n+1} &= \frac{1}{n+1}\int_0^1 \frac{1-(1-v)^{n+1}}{v}\mathrm{d}v \\
&\overset{\text{IPP}}{=} \frac{1}{n+1}\left\{0 - \lim_{v\to 0}[1-(1-v)^{n+1}]\ln(v) - \int_0^1 (n+1)\ln(v)(1-v)^n \mathrm{d}v\right\} \\
&= -\int_0^1 \log(v)(1-v)^n \mathrm{d}v
\end{aligned}$$

(f) Etablir que pour tout $t \geq 0$, $1-t \leq e^{-t}$.

Solution: Il y existe plusieurs façons de traiter cette question. En voici trois:

1. Etudier la fonction $t \mapsto 1-t-e^{-t}$. Elle est décroissante et sa valeur maximale est atteinte en $t=0$ et vaut 0. On en déduit le résultat.

2. On utilise la caractérisation d'une fonction convexe par ses dérivées. La fonction $t \mapsto e^{-t}$ est convexe et son graphe est au dessus de toutes ses tangentes, en particulier celle en 0 c'est-à-dire $e^{-t} \geq 1-t$ pour tout $t \geq 0$.

3. On utilise Taylor-Lagrange. On sait que $t \mapsto e^{-t}$ est $\mathcal{C}^\infty$, elle admet donc un développement de Taylor-Lagrange de tout ordre en 0. En particulier, pour tout $t \geq 0$, il existe $\xi \in]0,t[$ tel que

   $$e^{-t} = 1 - t + \frac{1}{2}e^{-\xi}t^2$$

   et l'inégalité en découle.

Les deux dernières méthodes nous donnent plus d'informations que la première et précisent que l'inégalité démontée est en fait vraie quelque soit $t \in \mathbb{R}$.

(g) On pose $I_n = \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log(t)\mathrm{d}t$. Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t.$$

Solution: Pour tout $n \geq 1$, $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \ln(t)\mathbb{1}_{[0,n]}(t)$ qui converge vers $e^{-t}\ln(t)$ lorsque $n \to +\infty$. Les f_n sont mesurables et, d'après la question précédente, on a $|f_n(t)| \leq e^{-t}\ln(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. La fonction $g : t \to e^{-t}\ln(t)$ est continue donc localement intégrable sur $]0, +\infty[$. De plus,

- **au voisinage de** 0**:** on a $g(t) \underset{t\to 0}{=} o\left(\frac{1}{t^{1/2}}\right)$, donc g est intégrable au voisinage de 0 par comparaison avec une intégrale de Riemann.
- **au voisinage de** $+\infty$**:** on a $g(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$ donc g est intégrable au voisinage de $+\infty$ par comparaison avec une intégrale de Riemann.

Finalement, la fonction g est intégrable sur $]0, +\infty[$ et on applique le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} I_n = \int_0^{+\infty} e^{-t}\log(t)\mathrm{d}t.$$

(h) Montrer que $\gamma = -\Gamma'(1)$.
Indication: On pourra montrer que $I_n = \frac{n}{n+1}(\log(n) - H_{n+1})$.

Solution: On a

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \log(t)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (1-v)^n \log(nv) n\mathrm{d}v \\
&= n\int_0^1 (1-v)^n (\log(n) + \log(v))\mathrm{d}v \\
&= n\log(n)\int_0^1 u^n \mathrm{d}u + n\int_0^1 (1-v)^n \log(v)\mathrm{d}v \\
&= \frac{n}{n+1}\left(\log(n) - H_{n+1}\right).
\end{aligned}$$

On a $u_n \sim -I_n$ puis $\gamma = -\lim_{n\to+\infty} I_n = -\Gamma'(1)$.

3. Evaluation de l'intégrale de Gauss et de la fonction gamma par les intégrales de Wallis.

(a) L'intégrale de Wallis est définie par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)\mathrm{d}\theta.$$

Montrer que $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$, pour $n \geq 2$. En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\geq 1}$ est constante qu'on explicitera.

Solution:

$$\begin{aligned} W_n &= \int_0^{\pi/2} \cos(\theta)\cos^{n-1}(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\overset{IPP}{=} (n-1)\int_0^{\pi/2} \sin^2(\theta)\cos^{n-2}(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= (n-1)[W_{n-2} - W_n], \end{aligned}$$

puis $W_n = \frac{n-1}{n} W_{n-2}$ après ré-arrangement. On note ensuite que $nW_nW_{n-1} = (n-1)W_{n-1}W_{n-2}$. la suite (nW_nW_{n-1}) est constante égale à $W_1W_0 = \pi/2$.

(b) Montrer que

$$W_nW_{n+1} \leq W_n^2 \leq W_nW_{n-1}.$$

En déduire l'équivalent en l'infini $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

Solution: On a, pour $\theta \in [0, \pi/2]$,

$$\begin{aligned} \cos^{n+1}(\theta) \leq &\quad \cos^n(\theta) &\leq \cos^{n-1}(\theta) \\ W_{n+1} \leq &\quad W_n &\leq W_{n-1} \\ W_{n+1}W_n \leq &\quad W_n^2 &\leq W_nW_{n-1} \end{aligned}$$

On écrit ensuite

$$\frac{n}{n+1}(n+1)W_{n+1}W_n \leq nW_n^2 \leq nW_nW_{n-1}.$$

Ce qui implique que $W_n \sim \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$.

(c) On pose

$$J_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t$$

Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

Solution: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$, on note $f_n(t) = \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0,\sqrt{n}]}$. Alors, $f_n(t)$ converge $t \mapsto e^{-t^2}$ lorsque $n \to +\infty$. De plus, on applique encore l'inégalité $1 - t \leq e^{-t}$ pour $t \geq 0$ et on obtient l'inégalité $|f_n(t)| < e^{-t^2}$ pour tout $t \geq 0$. La fonction $t \mapsto e^{-t^2}$ étant intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on applique le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} J_n = \int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t.$$

(d) Exprimer J_n en fonction d'une intégrale de Wallis. En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss,

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\sqrt{2\pi} = \sqrt{\pi/2}$$

Solution: On note d'abord que $\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t$, puis

$$\begin{aligned} J_n &= \int_0^{\sqrt{n}} \left(1-\frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{n}\int_0^1 \left(1-u^2\right)^n \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{n}\int_0^{\pi/2} \cos^{2n+1}(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &\xrightarrow[n\to+\infty]{} \sqrt{\pi}/2 \end{aligned}$$

où on a utilisé le changement de variable $\varphi : [0,\pi/2] \to [0,1],\ \theta \mapsto \sin(\theta)$ à la dernière égalité. On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2}\mathrm{d}t = \sqrt{\pi/2}.$$

(e) Connaissant la valeur de l'intégrale de Gauss, montrer que

$$\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$$

Solution:

$$\begin{aligned} \Gamma(1/2) &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\mathrm{d}u \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

(f) En utilisant un changement de variable, évaluer l'intégrale suivante

$$K = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-(x-y)^2} e^{-(x+y)^2} d\lambda(x,y)$$

Solution: On utilise le changement de variable

$$\begin{cases} u = x+y \\ v = x-y \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(u-v) \end{cases}$$

On définit alors le $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ϕ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ par $\phi(u,v) = \left(\frac{1}{2}(u+v), \frac{1}{2}(u-v)\right)$ de Jacobien $\det\left(\frac{D\phi}{D(u,v)}(u,v)\right) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{vmatrix} = 1/2$
On applique la formule de changement de variable pour obtenir

$$\begin{aligned} K &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{-u^2} e^{-v^2} \frac{1}{2}\, d\lambda_2(u,v) \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}} e^{-u^2}\, d\lambda_1(u) \int_{\mathbb{R}} e^{-v^2}\, d\lambda_1(v) \\ &= \frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

4. Calculer, en justifiant, les limites des suites suivantes

   (a) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{n}{1+x^2} \sin\left(\frac{x}{n}\right) dx$ pour tout $n \geq 1$.

Solution: Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in [0,1]$, on pose $f_n(x) = \dfrac{n}{1+x^2} \sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$. Les f_n sont mesurables et pour tout $x \in [0,1]$, $f_n(x) \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n}{1+x^2}\dfrac{x}{n} = \dfrac{x}{1+x^2}$. De plus, on a pour tout $n \geq 1$ et $x \in [0,1]$,

$$|f_n(x)| \leq \frac{n}{1+x^2}\frac{x}{n} = \frac{x}{1+x^2}$$

où on a utilisé l'inégalité $|\sin(y)| = \left|\displaystyle\int_0^y \cos(t)\, dt\right| \leq \displaystyle\int_0^y dt = y$ avec $y \in \mathbb{R}$.
La fonction $x \mapsto \frac{x}{1+x^2}$ est continue, donc intégrable sur le compacte $[0,1]$. On peut appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}\, dx = \frac{1}{2}\left[\ln(1+x^2)\right]_0^1 = \frac{\ln(2)}{2}$$

   (b) La suite $(u_n)_{n\geq 1}$ définie par $u_n = \displaystyle\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^m dx$ pour tout $n \geq 1$ et $m \in \mathbb{N}$.

Solution: Pour tout $n \geq 1$ et tout $x \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_n(x) = \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n x^m \mathbb{1}_{[0,n]}$. Les f_n sont mesurables et

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-x} x^m \mathbb{1}_{[0,+\infty[},\ \forall x \in \mathbb{R}_+.$$

De plus, en utilisant l'inégalité $1 - t \leq e^{-t}$ dès que $t \geq 0$, on a

$$|f_n(x)| \leq \left(e^{-x/n}\right)^n x^m = e^{-x} x^m$$

La fonction $x \mapsto e^{-x}x^m$ est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc localement intégrable sur $\mathbb{R}_+$. De plus, $e^{-x}x^m = \underset{x\to+\infty}{o}\left(\dfrac{1}{x}\right)$, donc $x \mapsto e^{-x}x^m$ est intégrable au voisinage de $+\infty$. Chaque terme de la suite de fonctions est donc dominée par une fonction intégrable sur $\mathbb{R}_+$, on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^m\, dx = I_m$$

Pour $m=0$, on a $I_0 = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 1$.

Pour $m \geq 0$, on a $I_{m+1} \overset{IPP}{=} \left[-e^{-x}x^{m+1}\right]_0^{+\infty} + (m+1)\int_0^{+\infty} e^{-x}x^m\,dx = (m+1)I_m$. Par récurrence, on montre alors que $I_m = m!$ et on conclut que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = m!$$

5. (a) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $(g_n)_{n\geq 1}$ une suite de fonctions mesurables à valeurs positives. Montrer que

$$\int_\Omega \sum_{n=1}^{+\infty} g_n\,d\mu = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_\Omega g_n\,d\mu$$

Solution: La suite de fonctions de termes positifs $\sum_{k=1}^n f_k,\ n \geq 1$ est croissante, on peut alors appliquer le théorème de convergence monotone pour trouver l'égalité voulue.

(b) Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx = \Gamma(s)\zeta(s)$$

où $\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}$.

Solution: La fonction ζ est définie pour les réels s tels que $s > 1$. Soit $s > 1$, alors

$$\begin{aligned}
\zeta(s)\Gamma(s) &= \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\Gamma(s)\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-s}\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{s-1}\,dt\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-t}\left(\frac{t}{n}\right)^{s-1}\frac{1}{n}\,dt\\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-nx}x^{s-1}\,dx \text{ en utilisant le changement de variable } x = t/n\\
&= \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nx}\right)x^{s-1}\,dx \text{ par la question précédente avec } f_n(x) = e^{-nx}x^{s-1} \geq 0\\
&= \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{1-e^{-x}} - 1\right)x^{s-1}\,dx\\
&= \int_0^{+\infty} \frac{x^{s-1}}{e^x - 1}\,dx
\end{aligned}$$

6. (a) Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : \Omega \to \mathbb{R}_+$ une application mesurable. Montrer que l'application définie par

$$\lambda(A) = \int_A f \, d\mu, \quad A \in \mathcal{A}$$

est une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Solution: Comme $f \geq 0$, l'application μ est à valeurs dans $[0, +\infty]$. On vérifie que

1. $\lambda(\emptyset) = \displaystyle\int_\emptyset f \, d\mu = 0$ puisque $\mu(\emptyset) = 0$.

2. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties de $\mathcal{A}$ deux à deux disjointes, on pose $A = \displaystyle\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n$. Alors, $\mathbb{1}_A = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n}$ car $A_i \cap A_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et on applique le résultat de la question 5.a avec $f_n = f\mathbb{1}_{A_n} \geq 0$ pour trouver

$$\begin{aligned}
\lambda\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) &= \int_\Omega \mathbb{1}_A f \, d\mu \\
&= \int_\Omega f \, d\mu \\
&= \int_\Omega \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{1}_{A_n} f \, d\mu \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_\Omega \mathbb{1}_{A_n} f \, d\mu \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \int_{A_n} f \, d\mu \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \lambda(A_n)
\end{aligned}$$

L'application λ est bien une mesure sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

(b) Calculer la limite

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|} \, dx.$$

Solution: Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, on pose $f_n(x) = e^{1+\cos^{2n}(x)} e^{-|x|}$. Les f_n sont mesurables et pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$f_n(x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(x) = \mathbb{1}_A e^{2-|x|} + \mathbb{1}_{A^c} e^{1-|x|} \text{ où } A = \pi\mathbb{Z}$$

et $|f_n(x)| \leq e^{2-|x|}$. On vérifie que $x \mapsto e^{2-|x|}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$ (c'est une fonction paire et continue donc localement intégrable, et négligeable en $+\infty$ devant $x \mapsto 1/x^2$ d'où l'intégrabilité). On applique le théorème de convergence dominée pour trouver

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{1+\cos^{2n}(x)}e^{-|x|}\,dx &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{1}_A e^{2-|x|} + \mathbb{1}_{A^c}e^{1-|x|}\,dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{1-|x|}\,dx \text{ car } A \text{ est de mesure de Lebesgue nulle} \\ &= 2\int_0^{+\infty} e^{1-x}\,dx \text{ par parité de } x\mapsto e^{1-|x|} \\ &= 2e\end{aligned}$$

7. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies par

$$f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \cos(x)\mathbb{1}_{[0,n]}(x), \quad x\in\mathbb{R}.$$

(a) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions mesurables.

Solution: Pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, f_n est une fonction mesurable sur $\mathbb{R}$ comme produits de fonctions mesurables sur $\mathbb{R}$.

(b) Montrer que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite qui converge simplement et préciser sa limite.

Solution: On va montrer que $f_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} f$ sur $\mathbb{R}$ avec $f(x) = e^{-x}\cos(x)\mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.
Pour tout $x\in]-\infty,0[$, $f_n(x) = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 = f(x)$.
Pour tout $x\in\mathbb{R}_+$, il existe $n_x\in\mathbb{N}^*$ tel que $f_n(x) = \left(1-\frac{x}{n}\right)^n\cos(x)$ pour tout $n\geq n_x$. On peut prendre par exemple $n_x = E(x)+1$ où $E(x)$ est la partie entière de x. On en déduit que

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim_{n\to+\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\cos(x) = e^{-x}\cos(x)$$

et le résultat en découle.

(c) Pour tout $n\geq 1$, on pose

$$I_n = \int_{[0,n]}\left(1-\frac{x}{n}\right)^n\cos(x)\,dx$$

Montrer que $(I_n)_{n\geq 1}$ est une suite convergente et donner sa limite.

Solution: On utilise encore l'inégalité $1-t\leq e^{-t}$ dès que $t\geq 0$ pour dominer les f_n et on trouve

$$|f_n(x)|\leq \mathbb{1}_{[0,+\infty[}e^{-x},\ \forall (n,x)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{R}$$

avec $x\mapsto \mathbb{1}_{[0,+\infty[}e^{-x}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et on applique le théorème de convergence dominée pour obtenir

$$I_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty} e^{-x}\cos(x)\,dx = I$$

puis une double IPP montre que $I = 1 - I$ c'est-à-dire $I = 1/2$.