

Chapitre 2 : Le modèle individuel

I - Définition de X_{ind}

Dans le modèle individuel, on somme les montants de sinistres de chaque contrat. On définit

$$X_{ind} = \sum_{i=1}^{n} I_i W_i$$

où

- n est le nombre de contrats
- $I_i \sim \mathcal{B}er(p_i)$ $\mathbb{P}(I_i = 1) = p_i$ et $\mathbb{P}(I_i = 0) = 1 - p_i = q_i$
  indique si un sinistre a été reporté ou pas
- W_i est une v.a positive égale au cumul des indemnisations pour le contrat i

Le modèle tient compte de l'hétérogénéité au sein du portefeuille pour mesurer précisement le risque

Deux problèmes :

- loi de X_{ind} inaccessible (sauf par simulation)
- Nécessite beaucoup de données pour chaque contrat.

II - Moments de X_{ind}

Proposition 1

Supposons que $I_1, \dots I_n$ et $W_1, \dots W_n$ soient idpt

① $\mathbb{E}[X_{ind}] = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{E}[W_i]$

② $V[X_{ind}] = \sum_{i=1}^{n} \left[p_i q_i \mathbb{E}[W_i]^2 + p_i V(W_i) \right]$

③ $m_{X_{ind}}(s) = \mathbb{E}[e^{sX_{ind}}] = \prod_{i=1}^{n} [p_i m_{W_i}(s) + q_i]$, $s \in \mathbb{R}$

où $m_{W_i}(s) = \mathbb{E}[e^{sW_i}]$ (fonction génératrice des moments de W_i

Preuve :

1. $\mathbb{E}[X_{ind}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{n} I_i W_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[I_i W_i]$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[I_i]\mathbb{E}[W_i] = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{E}[W_i]$$

2. $V(X_{ind}) = \sum_{i=1}^{n} V(I_i W_i) = \sum_{i=1}^{n} \left[V(E(I_i W_i \mid I_i)) + \mathbb{E}[V(I_i W_i \mid I_i)] \right]$

Or $V(E[I_i W_i \mid I_i]) = V[I_i E[W_i]] = V[I_i]\mathbb{E}[W_i]^2$
$= p_i q_i \mathbb{E}[W_i]^2$

et

$\mathbb{E}[V(I_i W_i) \mid I_i] = V(I_i W_i \mid I_i = 0)\,\mathbb{P}(I_i = 0) + V(I_i W_i \mid I_i = 1)\,\mathbb{P}(I_i = 1)$
$= V(W_i) p_i$

3. $$m_{X_{ind}}(s) = \mathbb{E}\left[e^{sX_{ind}}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[e^{s\sum I_i W_i}\right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\prod e^{sI_iW_i}\right]$$
$$= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{sI_iW_i}\right]$$
$$= \prod_{i=1}^{n}\left[\mathbb{E}\left[e^{sI_iW_i} \mid I_i=0\right]\mathbb{P}(I_i=0) + \mathbb{E}\left[e^{sI_iW_i} \mid I_i=1\right]\mathbb{P}(I_i=1)\right]$$
$$= \prod_{i=1}^{n}\left[q_i + m_{W_i}(s)\,p_i\right]$$

III - Distribution de X_{ind}

L'étude de la distribution de X_{ind} nécessite une hypothèse d'indépendance et prendre en compte beaucoup de cas. Supposons que 3 contrats reportent un sinistre alors

$$X_{ind} \mid \bigcap_{i=1}^{3}\{I_i=1\} \cap \bigcap_{j=4}^{n}\{I_j=0\} = W_1 + W_2 + W_3 \quad \text{(Intégrale triple)}$$

L'algorithme de De Pril basé sur deux approximations

- Regroupement des contrats en classe homogène $\left\{ \begin{array}{l} (i,j),\ i=1,\dots a \\ j=1,\dots b \end{array} \right\}$ contenant n_{ij} contrats $\left(\sum_{ij} n_{ij} = n\right)$ caractérisé par

* Une probabilité p_i de subir un sinistre
* Un cumul d'indemnisation distribué suivant W_j

- Les W_j sont des v.a discrètes de loi

$$p_{W_j}(\omega) = \mathbb{P}(W_j = \omega), \text{ avec } \omega = 1, \dots, m_j \text{ et } j = 1 \dots b$$

où m_j est le montant maximal pour un contrat de la classe j

classe d'accident	1	...	j	...	b
1	n_{11}	...	n_{1j}	...	n_{1b}
⋮	⋮		⋮		
i		...	n_{ij}	...	n_{ib}
⋮	⋮				
a	n_{a1}				n_{ab}

La charge totale X_{ind} est une va discrète et bornée avec $p_{X_{ind}}(x) = \mathbb{P}(X_{ind} = x)$, $x = 0, \dots, m$

avec $m = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} m_j$

Théorème 1 (Récurrence de De Pril)

La loi de X_{ind} est donnée par

$$\mathbb{P}_{X_{ind}}(0) = \mathbb{P}(X_{ind} = 0) = \prod_{i=1}^{a} (q_i)^{n_i}, \text{ où } n_i = \sum_{j=1}^{b} n_{ij} \text{ et}$$

$$x \cdot \mathbb{P}_{X_{ind}}(x) = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} V_{ij}(x)$$

avec

$$V_{ij}(x) = \frac{p_i}{q_i} \sum_{l=1}^{x \wedge m_j} \mathbb{P}_{W_j}(l) \left[l \, \mathbb{P}_{X_{ind}}(x-l) - V_{ij}(x-l) \right]$$

$$x = 1, \dots, m \text{ et } V_{ij}(0) = 0.$$

Exemple

Soit un portefeuille de contrat d'assurance décès avec versement d'un capital égal à 1 en cas de décès.

La probabilité p_i pour $i = 1, \dots, a$ est la probabilité de décès des assurés de la classe i. qui s'apparente à une classe d'âge. De plus,

$$\mathbb{P}(W_j = 1) = 1 \quad \text{pour tout } j = 1, \dots, b$$

$\mathbb{P}_{X_{ind}}(0)$ = probabilité de n'avoir aucun décès

La probabilité d'un décès dans la classe i est donnée par $\binom{n_i}{1} q_i^{n_i-1} p_i$ (prob qu'une va $Bin(n_i, p_i)$ soit égale à 1)

A_i = "Un décès dans la classe i et pas de décès dans les autres classes"

$$\mathbb{P}(A_i) = \binom{n_i}{1} q_i^{n_i-1} p_i \prod_{k \neq i} (q_k)^{n_k}$$

$$\boxed{\mathbb{P}_{X_{ind}}(1) = \mathbb{P}\Big(\bigcup_i A_i\Big) = \sum_{i=1}^{a} \binom{n_i}{1} q_i^{n_i-1} p_i \prod_{k \neq i} (q_k)^{n_k}}$$

En appliquant la formule de De Pril

$$V_{ij}(1) = \frac{p_i}{q_i} \sum_{l=1}^{1 \wedge 1} \Big(l\, \mathbb{P}_{W_j}(l)\, \mathbb{P}_{X_{ind}}(1-l) - \mathbb{P}_{W_j}(l-1) V_{ij}(1-l) \Big)$$

$$= \frac{p_i}{q_i} \mathbb{P}_{X_{ind}}(0)$$

$$\mathbb{P}_{X_{ind}}(1) = \sum_{i=1}^{a} \sum_{j=1}^{b} n_{ij} V_{ij}(1) = \sum_{i=1}^{a} n_i V_i(1) = \sum_{i=1}^{a} n_i \frac{p_i}{q_i} \mathbb{P}_{X_{ind}}(0)$$

$$= \sum_{i=1}^{a} n_i \frac{p_i}{q_i} \prod (q_k)^{n_k} = \sum_{i=1}^{a} n_i p_i q_i^{n_i-1} \prod_{k \neq i} (q_k)^{n_k}$$