Chapitre 1 : MARTINGALES ET TEMPS D'ARRÊT

I. Généralités sur les processus stochastiques.

1/ Premières Définitions

On commence par introduire une notion mathématique qui joue un rôle central en théorie des marchés financiers :

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ une famille de sous-tribus de $\mathcal{F}$.
On dit que $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est une filtration si c'est une famille croissante, au sens où

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \quad \text{si} \quad s \leq t$$

* Il faut comprendre $\mathcal{F}_t$ comme "l'information au temps t" : plus le temps croît $(s \leq t)$, plus on a d'information $(\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t)$.
* Une filtration $\{\mathcal{G}_t, t \geq 0\}$ est dite plus grosse que $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ si $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t \ \forall t \geq 0$
* Une filtration est dite normale si elle vérifie les propriétés supplémentaires :
  - Les négligeables au sens large sont dans tous les $\mathcal{F}_t$:
  $$\mathbb{P}[A] = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{F}_0 .$$
  - La filtration est continue à droite :
  $$\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{s > t} \mathcal{F}_s .$$
* Si $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ est une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on dit que $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré.

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.
- Une famille $X = \{X_t, t \geq 0\}$ de v.a. sur Ω est appelée processus stochastique.
- On dit que le processus X est $(\mathcal{F}_t)$-adapté si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable pour tout $t \geq 0$.

A un processus stochastique X on peut associer sa filtration naturelle $(\sigma(X_s, s \leq t), t \geq 0)$, qui est la plus petite filtration telle que le processus stochastique X soit adapté.

A un processus stochastique X on associe plus généralement sa **filtration naturelle complétée** $\{\mathcal{F}_t^X, t \geq 0\}$ définie par :

$$\mathcal{F}_t^X = \sigma(\sigma(X_s, s \leq t), \mathcal{N}) .$$

où $\mathcal{N}$ désigne la tribu des négligeables pour $\mathbb{P}$.

La tribu $\mathcal{F}_t^X$ représente l'information portée par X_s, $s \leq t$, et les négligeables. Evidemment, X est un processus $(\mathcal{F}_t^X)$-adapté.

On peut montrer que si X a p.s. des trajectoires continues à droite, pourvues de limites à gauche (càdlàg), en particulier continues, alors la filtration $\{\mathcal{F}_t^X, t \geq 0\}$ est continue à droite.

> **Définition** : On dit que deux processus X et Y sont égaux à modification près si
>
> $$\mathbb{P}[X_t = Y_t] = 1 . \quad \text{pour tout } t .$$

Remarquons que si deux processus continus à droite sont égaux à modification près, alors :

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t, \forall t \geq 0] = 1 .$$

En effet, comme $\mathbb{Q}$ est dénombrable et que l'intersection d'une famille dénombrable d'évènements certains est un évènement certain, on voit facilement que :

$$\mathbb{P}[X_t = Y_t, \forall t \in \mathbb{Q}] = 1 ,$$

si X et Y sont égaux à modification près.

De plus, comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et X et Y sont continus à droite, les trajectoires de X et Y sont uniquement déterminées par leurs valeurs sur $\mathbb{Q}$ puisque

$$X_t = \lim_{t_n \in \mathbb{Q} \downarrow t} X_{t_n} . \quad \text{pour tout } t \geq 0 .$$

On a donc bien $\mathbb{P}[X_t = Y_t, \forall t \geq 0] = 1$.

Définition : On dit que deux processus X et Y sont égaux en loi et on écrit $X \overset{d}{=} Y$ si pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $(t_1, t_2, \dots, t_n)$ on a :

$$\{X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n}\} \overset{d}{=} \{Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n}\}$$

On dit que X et Y sont des versions l'un de l'autre

Remarque : on remarque immédiatement que si X et Y sont continues à droite et modification l'un de l'autre, alors ils sont égaux en loi.

Attention : la réciproque est fausse : en effet, si X est symétrique (au sens où $X \overset{d}{=} -X$), alors X et $-X$ sont des versions l'un de l'autre mais évidemment

$$\mathbb{P}(X_t = -X_t, \forall t \geq 0) = 1 \quad \text{ssi} \quad X \equiv 0 \;!$$

2/ Propriétés fonctionnelles

- Un processus X est croissant si p.s. $t \mapsto X_t$ est une fonction croissante. c'est-à-dire si $X_t(\omega) \leq X_s(\omega)$ $\forall t \leq s$ p.s.
- De même on dira qu'un processus est continu à droite, continu, dérivable, de classe $\mathcal{C}^2$, ... si la fonction $t \mapsto X_t(\omega)$ vérifie la propriété considérée.
- Un processus est dit à variation finie (VF) sur $[0,t]$ si

$$\boxed{\sup_{0 \leq t_0 < \dots < t_n \leq t} \left(\sum_{k=0}^{n} \left| X_{t_{k+1}} - X_{t_k} \right| \right) < +\infty}.$$

Cette dernière notion, assez délicate, joue un rôle fondamental en théorie de l'intégration. Elle signifie que la longueur de la courbe trajectoire de X est localement finie (quand cette longueur est infinie, ce qui sera le cas pour la courbe brownienne par exemple, on mesure la complexité de la courbe à l'aide de notions de dimension fractale et de mesure de Hausdorff).

- En particulier : $\boxed{X \text{ est V.F. s'il est dérivable}}$
- Dans le cas réel, on peut montrer que

(R) $\boxed{X \text{ est V.F. ssi } X \text{ est la différence de 2 processus croissants}}$

3/ Processus Gaussiens

Définition : Un processus X est appelé processus gaussien si toute combinaison linéaire finie de X_t est une v.a. gaussienne autrement dit si $\forall n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n, a_1, \dots, a_n$:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} \text{ est une variable aléatoire gaussienne.}$$

Un processus gaussien est caractérisé par 2 fonctions :

- sa fonction espérance $t \mapsto m(t) = E[X_t]$
- sa fonction de covariance $(s,t) \longmapsto \Gamma(s,t) = E\left[(X_t - m(t))(X_s - m(s)) \right]$

La fonction $\Gamma(s,t)$ est de type positif au sens où $\forall n, t_1, \dots, t_n, a_1, \dots, a_n$

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \Gamma(t_i, t_j) \geq 0 .$$

Théorème (Kolmogorov) : Soit $m : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction quelconque et $\Gamma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction symétrique de type positif.
Alors il existe un processus gaussien X de fct° espérance m et de fct° de covariance Γ.

L'espace gaussien engendré par un processus gaussien X est le sous-espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les v.a.r. centrées $\{ X_t - E[X_t], t \geq 0 \}$, càd le ss-espace formé par les combinaisons linéaires de ces variables centrées et leurs limites en moyenne quadratique.

Définition : Un processus est dit stationnaire si

$$\{X_{t+s}, t \geq 0\} \overset{d}{=} \{X_t, t \geq 0\} \quad \forall s \in \mathbb{R}^+$$

En particulier, tous les X_t ont même loi.

Rq : On voit immédiatement qu'un processus gaussien stationnaire est tel que sa fonction espérance est constante et sa fonction de covariance $\Gamma(s,t)$ ne dépend que de $(s-t)$.

Théorème (Bochner) : Soit X un processus gaussien stationnaire. Il existe une unique mesure finie μ, appelée mesure spectrale associée à X, telle que

$$\Gamma(s,t) = \int_{\mathbb{R}} \cos((t-s)z)\,\mu(dz)$$

Exercice : Montrer que la fonction $(s,t) \longmapsto \inf(s,t)$ est une fonction de type positif sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, autrement dit que pour tout $t_1 \leq \dots \leq t_n$ et pour tous réels $a_1, \dots, a_n$:

$$\sum_{i,j=1}^{n} \inf(t_i, t_j)\, a_i a_j \geq 0$$

Le processus gaussien centré ayant pour fonction de covariance

$$(s,t) \longmapsto \inf(s,t)$$

est appelé mouvement brownien.

II- Temps d'Arrêt

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré.
Un temps d'arrêt relativement à $\mathcal{F}_t$ est une variable aléatoire τ à valeur dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ telle que

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^+$$

Remarques :

* La définition est équivalente à $\{\tau > t\} \in \mathcal{F}_t, \forall\, t \in \mathbb{R}^+$, par stabilité des tribus par passage au complémentaire.
* Un temps d'arrêt doit être vu comme un temps aléatoire qui suit l'évolution aléatoire sous-jacente.

→ illustration
- sortie d'autoroute
- cours d'action
- notion de décision d'arrêt conforme à l'information disponible au temps t.

* ⚠ c'est l'événement $\{\tau \leq t\}$ et non l'événement $\{\tau = t\}$ qui intervient dans la définition du temps d'arrêt.

En temps discret, relativement à une filtration $\{\mathcal{F}_n, n \geq 0\}$, un temps d'arrêt est plus simplement défini par $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
On voit facilement que ceci est équivalent à $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n, \forall n \in \mathbb{N}$.
En effet,

$$\{\tau = n\} = \underbrace{\{\tau \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{\tau \leq n-1\}^c}_{\in \mathcal{F}_{n-1} \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$$

et

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\{\tau = k\}}_{\in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n.$$

Cela n'est pas vrai en continu. Typiquement, l'événement $\{\tau = t\}$ est de probabilité nulle en temps continu.
C'est pourquoi on étend la définition en utilisant les événements $\{\tau \leq t\}$.

Exercice : • les constantes sont des temps d'arrêt
• si S et T sont des temps d'arrêt alors $S \wedge T = \min(S,T)$ et $S \vee T = \max(S,T)$ sont des temps d'arrêt.

L'exemple le plus simple de temps d'arrêt est un temps déterministe $t_0 \geq 0$.
En particulier, si T est un temps d'arrêt, alors $T \wedge n$ est un temps d'arrêt pour tout $n \in \mathbb{N}$, propriété très utile dans la suite.

Un exemple plus élaboré et extrêmement important de temps d'arrêt :

Exemple : Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté à valeurs réelles, continu à droite et partant de 0 ($X_0 = 0$). Pour tout $a > 0$, le temps aléatoire $\boxed{T_a = \inf\{t > 0, X_t > a\}}$ appelé premier temps de passage au seuil a est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt.

En effet, pour tout $t > 0$, on a l'identification
$$\{T > t\} = \{X_s \leq a, \forall s \leq t\} = \bigcap_{s \in \mathbb{Q}^+ \leq t} \{X_s \leq a\} \quad \left(\begin{array}{l} X \text{ càd} \\ \text{et } \mathbb{Q} \text{ dense ds } \mathbb{R} \end{array}\right)$$
la deuxième égalité provenant de l'hypothèse cruciale de continuité à droite de X (qui est alors entièrement déterminé par ses évaluations sur les rationnels).
Comme X est $(\mathcal{F}_t)$-adapté et par stabilité des tribus par intersection dénombrable, on voit que l'événement de droite est dans $\mathcal{F}_t$.

Remarques : * Si X est continu, on a de plus $T_a = \inf\{t > 0, X_t = a\}$ et $X_{T_a(\omega)}(\omega) = a$.

* On montre de même que $T_a = \inf\{t > 0, X_t < a\}$ est un temps d'arrêt pour tout $a < 0$.

* D'une manière générale on peut montrer que si X est un processus càd et adapté à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ et si A est un Borélien de $\mathbb{R}^d$, alors $T_A = \inf\{t > 0, X_t \in A\}$, premier temps d'atteinte de A, est un temps d'arrêt (Démonstration très difficile...)

* ⚠ On prendra garde qu'en général, le dernier temps de passage en A : $L_A = \sup\{t>0, X_t \in A\}$ n'est pas un temps d'arrêt, même dans les situations les plus simples.

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t\geq 0\}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et τ un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)$.
On appelle *filtration arrêtée en τ* la σ-algèbre
$$\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F},\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t,\ \forall t \in \mathbb{R}^+\}$$

Pour bien comprendre l'intérêt de cette notion, remarquons que τ est toujours $\mathcal{F}_\tau$-mesurable : les Boréliens de $\mathbb{R}^+$ étant engendrés par les intervalles du type $]-\infty, u]$, il suffit de montrer que $\{\tau \leq u\} \in \mathcal{F}_\tau$. Mais c'est évident car $\{\tau\leq u\}\cap\{\tau\leq t\} = \{\tau \leq t\wedge u\} \in \mathcal{F}_{t\wedge u} \subset \mathcal{F}_t$.
De même on montre la proposition suivante :

Proposition : Si S et T sont des temps d'arrêt tels que p.s. $S \leq T$, alors $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.

preuve : Soit $A \in \mathcal{F}_S$. Montrons que $A \in \mathcal{F}_T$.
$\forall t\geq 0$, on a $A\cap\{T\leq t\} = A\cap\{S\leq t\}\cap\{T\leq t\}$ puisque $S \leq T$ $(\{T\leq t\}\subset\{S\leq t\})$
D'autre part $\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t$ car T est un temps d'arrêt.
et $A\cap\{S\leq t\}\in\mathcal{F}_t$ puisque $A\in\mathcal{F}_S$.
Donc $A\cap\{S\leq t\}\cap\{T\leq t\}\in\mathcal{F}_t$, $\forall t\geq 0$. cqfd □.

Une propriété importante, mais + difficile à montrer est la suivante :

Proposition : Soit $X : \mathbb{R}^+\times\Omega \to \mathbb{R}$ un processus et T un temps d'arrêt.
Rappelons que X_T est définie par $X_T(\omega) = X_{T(\omega)}(\omega)$.
Si le processus X est càd et adapté, alors la v.a.
$$X_T \mathbb{1}_{\{T<+\infty\}} \text{ est } \mathcal{F}_T\text{-mesurable}.$$

III - Martingales.

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$ - adapté.

On dit que X est une $(\mathcal{F}_t)$ - martingale si

- $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$ (autrement dit $X_t \in L^1(\Omega)$) pour tout $t \geq 0$
- $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) = X_s \quad \forall s \leq t$

Remarque : on peut en fait définir X sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ sans filtration préalable, en disant que c'est une martingale si $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty \quad \forall t \geq 0$ et $\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s^X) = X_s$, $\forall s \leq t$, où l'on rappelle que $\{\mathcal{F}_t^X, t \geq 0\}$ est la filtration naturelle de X.

Si X est une $(\mathcal{F}_t)$ - martingale, alors c'est nécessairement une $(\mathcal{F}_t^X)$ - martingale.

En effet, on a d'abord $\mathcal{F}_u^X = \sigma\{X_s^{-1}(A) ; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), s \leq u\} \subset \mathcal{F}_u$ puisque X est $(\mathcal{F}_t)$ - adapté et donc $X_s^{-1}(A) \in \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_u$, $\forall s \leq u$.

D'où

$$\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s^X) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}(X_t | \mathcal{F}_s) | \mathcal{F}_s^X\right) = \mathbb{E}(X_s | \mathcal{F}_s^X) = X_s$$

où on a successivement utilisé la propriété d'emboîtement de l'espérance conditionnelle, que X est une $(\mathcal{F}_t)$ - martingale, et la mesurabilité de X_s par rapport à $\mathcal{F}_s^X$.

Propriété (fondamentale et constamment utilisée en finance)

Pour tout horizon $T > 0$, ~~si~~ X est une martingale, alors l'ensemble du processus $\{X_t, t \leq T\}$ est complètement déterminé par la valeur terminale X_T au sens où

$$X_t = \mathbb{E}(X_T | \mathcal{F}_t), \quad \forall t \leq T$$

Définition : Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ une $(\mathcal{F}_t)$ - martingale. On dit que c'est une martingale fermée si il existe $Z \in L^1(\Omega)$ tel que

$$X_t = \mathbb{E}(Z | \mathcal{F}_t), \quad \forall t \geq 0$$

Autrement dit, l'ensemble du processus est déterminé par une valeur terminale à l'horizon infini.

On verra + tard que Z est en fait la limite de X_t quand $t \nearrow +\infty$.

Le théorème suivant caractérise les martingales fermées par leur uniforme intégrabilité :

Théorème : Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ une $\mathcal{F}_t$ - martingale.
C'est une martingale fermée ssi la famille de va $\{X_t, t\geq 0\}$ est UI

Définition : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ un espace de proba filtré et $X = \{X_t, t\geq 0\}$ un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que $E(|X_t|) < +\infty$ pour tout $t \geq 0$. On dit que
* X est une $(\mathcal{F}_t)$ - sous-martingale si $\mathbb{E}(X_t \mid \mathcal{F}_s) \geq X_s, \forall s \leq t$
* X est une $(\mathcal{F}_t)$ - surmartingale si $E(X_t \mid \mathcal{F}_s) \leq X_s, \forall s \leq t$

Par analogie, on dira qu'une $(\mathcal{F}_t)$ - sousmartingale (resp. surmartingale) est fermée si il existe une va. Z $\mathcal{F}$-mesurable telle que $\mathbb{E}(Z \mid \mathcal{F}_t) \geq X_t$ (resp. $E(Z \mid \mathcal{F}_t) \leq X_t$) $\forall t \geq 0$.

Il découle facilement des définitions qu'une martingale est un processus à espérance constante : $E(X_t) = E(X_s)$ ne dépend pas de t.
Une martingale modélise un jeu équitable.
Une sousmartingale est un processus à espérance croissante (jeu favorable)
Une surmartingale est un processus à espérance décroissante (jeu défavorable)

La manière la plus simple de construire une sousmartingale est d'ajouter à une martingale donnée une fonction croissante déterministe.
Le théorème suivant, très célèbre, dit que la réciproque est presque vraie (la fct° croissante est remplacée par un processus aléatoire croissant) :

Théorème (Décomposition de Doob-Meyer) : Soit X une $(\mathcal{F}_t)$-sousmartingale telle que la famille $\{X_T, T \ (\mathcal{F}_t)\text{-temps d'arrêt borné}\}$ est UI.
Il existe une $(\mathcal{F}_t)$-martingale M et un processus croissant $(\mathcal{F}_t)$-adapté A tels que $X_t = M_t + A_t$. $\forall t \geq 0$.
De plus, M et A sont uniques à une constante additive près.

variation quadratique (ou crochet stochastique)

Par l'inégalité de Jensen, on voit immédiatement que si X est une $(\mathcal{F}_t)$ - martingale alors $t \mapsto X_t^2$ est une $(\mathcal{F}_t)$ - sous-mg.

Sous réserve d'UI, si f convexe, alors $E(f(X)|\mathcal{F}) \geq f(E(X|\mathcal{F}))$

la décomposition de Doob-Meyer assure l'existence d'un processus croissant A tel que $t \mapsto X_t^2 - A_t$ soit une $(\mathcal{F}_t)$ - martingale.

(Rq : on peut en fait se passer de la condition d'UI).

On appelle A le crochet de la martingale X (ou variation quadratique de X) et on écrit $\boxed{A_t = \langle X \rangle_t}$ pour tout $t \geq 0$.

Nous reviendrons sur le crochet des martingales au chapitre sur l'intégrale stochastique, où il joue un rôle très important.

Exercice : Si T est un temps d'arrêt et M une $\mathcal{F}_t$ - martingale, alors le processus Z défini par $Z_t = M_{t \wedge T}$ est une $\mathcal{F}_t$ - martingale. et $E(M_{t\wedge T}) = E(M_0)$. $(t \in \mathbb{N})$.

indice : $Z_t = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{k \leq T} (M_k - M_{k-1})$

On énonce maintenant, sans les démontrer, une série de résultats fondamentaux de la théorie des martingales, essentiellement dus à J.L. Doob dans les années 50.

Théorème (Inégalité Maximale)

Soit X une surmartingale réelle continue. Alors, pour tout $t, \lambda > 0$

$$P\left(\sup_{s \leq t} |X_s| \geq \lambda\right) \leq \frac{3}{\lambda} \sup_{s \leq t} E(|X_s|)$$

Exercice : Exercice 1 feuille de TD sur les martingales continues.

L'intérêt d'une telle inégalité est de donner une vitesse de convergence (en $\frac{1}{\lambda}$) de la quantité $\mathbb{P}(\sup_{s\leq t} |X_s| \geq \lambda)$ vers 0 quand $\lambda \nearrow +\infty$.
En fait, cette vitesse peut être améliorée quand X est une martingale ayant des moments d'ordre supérieur, grâce au théorème suivant :

Théorème (Inégalités dans L^p) Soit $p \geq 1$ et X une martingale réelle continue telle que $X_t \in L^p$ $\forall t \geq 0$. Alors $\forall t \geq 0$:

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t} |X_s^p|\right) \leq q^p \, \mathbb{E}\left[|X_t|^p\right]$$

où q est le nombre conjugué de p : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Par l'inégalité de Markov, on déduit de ce théorème que si $X_t \in L^p$ pour tout $t \geq 0$, alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t} |X_s| \geq \lambda\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t} |X_s|^p \geq \lambda^p\right) \leq \frac{q^p}{\lambda^p} \mathbb{E}\left(|X_t|^p\right)$$

D'où une meilleure vitesse de convergence, en $\frac{1}{\lambda^p}$.

Remarque : Pour appliquer ce théorème il ne suffit pas que $X_t \in L^p$ pour un seul $t \geq 0$, et la condition $X_t \in L^p$ $\forall t \geq 0$ est nécessaire.
En effet il existe des martingales telles que $X_1 \in L^p$ et $X_2 \notin L^p$ $\forall p > 1$.
Prenons par exemple X une v.a. qui soit dans L^1 mais pas dans L^2, et considérons une filtration $\{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ qui soit triviale pour $0 \leq t \leq 1$ et égale à $\sigma(X)$ pour $t \geq 2$. La martingale $t \mapsto X_t = \mathbb{E}(X|\mathcal{F}_t)$ est telle que $X_1 =$ constante $\in L^2$ et $X_2 \notin L^2$.

Théorème (de convergence des martingales) :

Soit X une martingale continue. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) X est une martingale fermée par X_∞

(ii) X converge p.s. et dans L^1 vers X_∞

(iii) X est uniformément intégrable

Attention : la limite de X_t est une variable aléatoire X_∞.

De plus, il existe des martingales qui ne sont pas uniformément intégrables, autrement dit qui ne converge pas.

Un exemple typique de martingale non convergente est le mouvement brownien, que nous verrons ds le chap. 2.

Le théorème suivant est le plus important de cette série pour la finance :

Théorème d'arrêt de Doob :

Soit M une $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue et S et T deux temps d'arrêt tels que $S \leq T$ p.s.

Supposons que M soit uniformément intégrable ou que les temps d'arrêt soient bornés par une constante finie déterministe K.

Alors M_T est une v.a intégrable et

$$E(M_T \mid \mathcal{F}_S) = M_S .$$

Quand les 2 temps d'arrêt ne sont pas bornés, l'uniforme intégrabilité de la martingale est une condition essentielle.

Quand la martingale n'est pas UI, une technique standard consiste à utiliser les temps d'arrêt $S \wedge n$ et $T \wedge n$ qui sont bornés par n, et faire tendre n vers $+\infty$.

Quand la martingale est UI, nous avons vu qu'elle était fermée par M_∞. Le théorème d'arrêt reste valable avec des valeurs infinies pour T, au sens où

$$E(M_\infty \mid \mathcal{F}_S) = M_S .$$

La caractérisation des martingales donnée par la proposition suivante est quelquefois utile :

> <u>Proposition</u> : Soit X un processus $(\mathcal{F}_t)$-adapté et intégrable tel que $E(X_\tau) = E(X_0)$ pour tout temps d'arrêt borné τ. Alors le processus X est une martingale.

On prendra garde que la condition $E(X_t) = E(X_0)$ pour tout $t \geq 0$ n'est pas suffisante pour que X soit une martingale. Un contre-exemple typique est le processus $X_t = \int_0^t M_u du$, où M est une martingale d'espérance nulle : X est un processus d'espérance constante (nulle), mais n'est pas une martingale.

La proposition suivante montre enfin que les trajectoires d'une martingale continue non constante sont très irrégulières :

> <u>Proposition</u> : Si une martingale M continue est un processus à variations finies, alors elle est constante :
>
> $$M_t = M_0 \text{ p.s. } \quad \forall t \geq 0 .$$

Martingales locales

L'intégrabilité est une hypothèse forte dans la construction des martingales : certains processus ressemblent fortement à des martingales du point de vue du conditionnement mais ne sont pas intégrables, et on ne peut donc pas calculer leur espérance conditionnelle.
Les martingales locales permettent de contourner ce problème :

Définition : Un processus càdlàg $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale pour une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ si il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\geq 1}$ tendant vers $+\infty$ et telle que le processus $(M_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ soit une martingale.
On définit de façon similaire les sous-martingales et les sur-martingales locales.

Exercice 4 : Fortune du joueur

Exercice 5 : Ruine du joueur

Exercice 6 : Martingales et Options Américaines

Exercice 3 — FORTUNE DU JOUEUR

Un joueur de pile ou face débute à la date 0 avec une richesse X_0. La pièce utilisée est équilibrée, et les résultats sont +1 si pile sort et −1 si face sort.
Les jets successifs sont supposés indépendants et T parties sont prévues. Montrez que le processus de richesse du joueur, noté X, est une martingale en précisant l'espace probabilisé et la filtration utilisés.

Solution

Soit Y_t le résultat de la $t^{\text{ème}}$ partie. $Y_t = 1$ si pile, −1 si face.
La richesse du joueur après t parties, notée X_t, s'écrit

$$X_t = X_0 + \sum_{s=1}^{t} Y_s$$

où les Y_s sont des variables indépendantes centrées (jeu équilibré).
$\mathcal{F}$ est la filtration naturelle de Y : $\mathcal{F}_s = \sigma(Y_u, u \leq s)$
X est donc adapté à $\mathcal{F}$. On a

$$E(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(X_{t-1} + Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) + E(Y_t | \mathcal{F}_{t-1})$$

Comme X adapté à $\mathcal{F}$, $E(X_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1}$
Par ailleurs, les Y_t étant indépendants, Y_t indép. de $\mathcal{F}_{t-1}$
et $E(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = E(Y_t) = 0$
D'où $E(X_t | \mathcal{F}_{t-1}) = X_{t-1}$ $\Rightarrow$ X martingale sur $(\{pile, face\}^N, \mathbb{P}_{unif}, \mathcal{F})$

pas martingale car $E(X_\tau) = X_0 + 1 \neq E(X_0) = 0$ (on part de richesse 0)
(cf processus arrêté : X_t^τ)
Pq pas appliquer th Doob ?
car → temps d'arrêt non borné : jeu peut durer ∞^t
→ richesse non unif^t bornée (pertes peuvent être très grosses).

MARTINGALES – ESPERANCE CONDITIONNELLE DISCRETES

Exercice 0 bis   Ruine du joueur

2 joueurs : A possède a euros, B en possède b.
ils parient sur 1 pièce, misent 1 euro à la fois.
Le jeu cesse qd l'un des 2 est ruiné.
P(A gagne fortune de B) ?

solut° : fortune de A : $X_n = a + \varepsilon_1 + \dots + \varepsilon_n$
où (ε_i) iid, $\varepsilon_i = \begin{cases} 1 & \text{si A gagne au ième coup} \\ -1 & \text{sinon} \end{cases}$
X_n martingale
temps de ruine $T = \inf\{n \geq 0,\ X_n = 0 \text{ ou } X_n = a+b\}$ tps d'arrêt
Théorème d'arrêt : $E(X_{n \wedge T}) = E(X_0)$ — X unif borné
puisque $|X_{n\wedge T}| \leq a+b$ et $n \wedge T$ borné par n
T non borné donc on passe par $n \wedge T$.
D'où $E(X_{n\wedge T}) = a = E(X_n \mathbb{1}_{\{n<T\}}) + E(X_T \mathbb{1}_{\{T \leq n\}})$
Or $E(X_n \mathbb{1}_{\{n<T\}}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ car $|X_n| \leq a+b$ + th cv dominée

et $E(X_T \mathbb{1}_{\{T\leq n\}}) \xrightarrow[n\to+\infty]{} E(X_T)$ car $X_T \mathbb{1}_{\{T\leq n\}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} X_T$
en croissant
donc th cv monotone

puis $n \to +\infty$ d'où
$$a = E(X_T) = 0 \cdot P(A \text{ ruiné}) + (a+b)\, P(A \text{ gagnant})$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A \text{ gagnant}) = \frac{a}{a+b}}$$

Rq : $\{X_{n\wedge T}\}$ martingale $X_{n\wedge T} = \begin{cases} X_n & \text{si } T > n-1 \\ X_T & \text{si } T \leq n-1 \end{cases}$ $X_{n\wedge T} = X_n \mathbb{1}_{\{T>n-1\}} + X_T \mathbb{1}_{\{T\leq n-1\}}$

$$E(X_{n\wedge T} | \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n \underbrace{\mathbb{1}_{\{T>n-1\}}}_{\in \mathcal{F}_{n-1}} | \mathcal{F}_{n-1}) + E(\underbrace{X_T \mathbb{1}_{\{T\leq n-1\}}}_{\in \mathcal{F}_{n-1}} | \mathcal{F}_{n-1})$$
$$= \mathbb{1}_{\{T>n-1\}} E(X_n|\mathcal{F}_{n-1}) + X_T \mathbb{1}_{\{T\leq n-1\}} \overset{!}{=} X_{n-1} \mathbb{1}_{\{T>n-1\}} + X_T \mathbb{1}_{\{T\leq n-1\}}$$
$$= X_{(n-1)\wedge T}$$

Exercice 4 MARTINGALES ET OPTIONS AMERICAINES

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{F}, P)$ un espace probabilisé filtré tel que $\mathrm{Card}(\Omega) < +\infty$, $\mathbb{F}$ filtration définie par $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_t, t = 0, \dots, T\}$. Soit un processus Z adapté à $\mathbb{F}$ et intégrable. On définit le processus U par :

$$U_T = Z_T$$
$$U_t = \max(Z_t ; E[U_{t+1} | \mathcal{F}_t])$$

1) montrer que U est une surmartingale adaptée à $\mathbb{F}$ (et que $U_t \geq Z_t, \forall t$)

2) Soit Γ l'ensemble des surmartingales X telles que $X_t \geq Z_t, \forall t$
Montrez que, $\forall X \in \Gamma$: $\forall t \leq T$, $X_t \geq U_t$
(indic : raisonnez par récurrence en partant de la date T)

3) Soit $\tau = \inf\{t \leq T, U_t = Z_t\}$. On définit Y le processus arrêté de U par : $Y_t = U_{\min(t,\tau)}$

a) montrez que $\forall \omega \in \{\tau \geq t+1\}$, $U_t(\omega) = E(U_{t+1} | \mathcal{F}_t)(\omega)$

b) déduisez que Y est une martingale

4) Quelle interprétation financière donnez-vous aux processus Z et U ?

solution : 1°) U surmartingale si $E(U_{t+1} | \mathcal{F}_t) \leq U_t$. Ceci est évident par définition de U_t

U_t adapté à $\mathcal{F}_t$ ($= Z_t$ ou $= E(U_{t+1} | \mathcal{F}_t)$)

U_t intégrable car Z_t l'est : $E(U_t) = E(Z_t)$ ou $= E(U_{t+1} | \mathcal{F}_t)$

ainsi $E(U_t) = E(Z_{t'})$ où $t' \in [t, T]$ $\boxed{= E(U_{t+1})}$

2°) Il s'agit de montrer que U est la plus petite sur-martingale qui domine Z. Soit $X \in \Gamma$

Par définition de U, on a $X_T \geq U_T$

Supposons $X_t \geq U_t$. On montre que $X_{t-1} \geq U_{t-1}$

$X_t \geq U_t \Rightarrow X_{t-1} \geq E[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] \geq E[U_t | \mathcal{F}_{t-1}]$

Comme X domine Z, $X_{t-1} \geq Z_{t-1}$

D'où $X_{t-1} \geq \max(Z_{t-1}, E(U_t | \mathcal{F}_{t-1})) = U_{t-1}$

et par récurrence, $\forall t \leq T$, $X_t \geq U_t$

3°) a) cette relation est évidente puisque $\forall \omega \in \{\tau \geq t+1\}$, par définition de τ :

$$U_t(\omega) = \max\left(Z_t(\omega), E(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega)\right)$$
$$= E(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega) \quad \text{car } \forall t < \tau(\omega),\ U_t^{(\omega)} \neq Z_t^{(\omega)}.$$

b)

$Y_t = U_{\min(\tau,t)} = U_0 + \sum_{s=1}^{t} \phi_s \Delta U_s \quad , \quad \phi_s = 1\!\!1_{\{\tau \geq s\}}$

$\forall m$ tq $\tau > m$, $Y_m = U_m$ et si $\tau \leq m$, $Y_m = U_\tau$

D'où $Y_{t+1} - Y_t = \phi_{t+1}(U_{t+1} - U_t)$

$$= \phi_{t+1}\left(U_{t+1} - E(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)\right)$$

car si $\tau \geq t+1$, le membre de gauche $= U_{t+1} - U_t$, mb dte $= U_{t+1} - E(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)$

et si $\tau < t+1$ mbre gauche $= 0$ et mb dte $= 0$ puisque $\phi = 0$

de +, $E(Y_{t+1} - Y_t|\mathcal{F}_t) = E\left(\phi_{t+1}\left(U_{t+1} - E(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)\right)|\mathcal{F}_t\right)$

comme $\{\tau \geq t+1\} = \{\tau \leq t\}^c$ on déduit que ϕ_{t+1} est $\mathcal{F}_t$-mesurable

et donc mbre de droite $= 0$. donc Y martingale.

4°) Z_t : gain du détenteur d'un contrat de put d'échéance T exercé en date t.

$U_t = \max(Z_t, E(U_{t+1}|\mathcal{F}_t))$: max du gain si exercice et du gain espéré + tard sachant l'info disponible.

Z_t : valeur intrinsèque de l'option $(= \max(K - S_t, 0)$ p. exemple$)$

$U_t - Z_t$: valeur spéculative, tjrs ≥ 0.

Exercice 7 PROCESSUS DE VALEUR D'UNE STRATEGIE AUTOFINANCÉE

Sur un marché sont échangés K titres, dont les prix en date t sont notés $X_t = (X_t^1, \ldots, X_t^k)$. On suppose que le processus de prix est une martingale. ~~Soit $\theta_t = (\theta_t^1, \ldots, \theta_t^k)$ le portefeuille détenu entre t-1 et t~~ (prévisible)(part détenue dans chaque actif)

1°) Quelle est la valeur du portefeuille détenu à l'instant t ?

On appelle stratégie de portefeuille $\theta = (\theta_t^1, \ldots, \theta_t^k)$ tout processus prévisible borné (part détenue dans chaque actif).

Une stratégie de portefeuille θ est dite autofinancée si, $\forall t$ (entre t-1 et t)

$$\sum_{k=1}^{K} \theta_t^k X_t^k = \sum_{k=1}^{K} \theta_{t+1}^k X_t^k$$

2°) Montrer que si X est une martingale et θ une stratégie autofinancée, alors le processus de valeur de la stratégie est une martingale. Signification financière ?

3°) Montrer que si X est une martingale et θ processus prévisible borné, alors le processus Z défini par $Z_0 = 0$ et $Z_t = \sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{t} \theta_s^k (X_s^k - X_{s-1}^k)$ est une martingale.

Solution : 1°) Processus de valeur Y :

$$Y_0 = \sum_{k=1}^{K} \theta_1^k X_0^k \quad \text{et} \quad Y_t = \sum_{k=1}^{K} \theta_t^k X_t^k$$

Y_0 : coût initial du portefeuille, Y_t = valeur stratégie à l'instant t.

2°) $E[Y_t - Y_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] = E\left[\sum_{k=1}^{K} (\theta_t^k X_t^k - \theta_{t-1}^k X_{t-1}^k) | \mathcal{F}_{t-1}\right]$

l'hypothèse d'autofinancement permet d'écrire :

$$E[Y_t - Y_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] = E\left[\sum_{k=1}^{K} \theta_t (X_t^k - X_{t-1}^k) | \mathcal{F}_{t-1}\right]$$

Comme θ prévisible :

$$E[Y_t - Y_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{k=1}^{K} \theta_t^k E[(X_t^k - X_{t-1}^k) | \mathcal{F}_{t-1}]$$

Or X martingale :

$$E[Y_t - Y_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] = 0$$

$\Rightarrow E(Y_t | \mathcal{F}_{t-1}) = Y_{t-1}$.

Significat° : Si les prix des actifs échangés suivent une martingale, il est vain de chercher une stratégie de portefeuille qui puisse "battre le marché" ou + précisément qui puisse transformer un jeu équilibré en jeu favorable.

3°) $E[Z_t - Z_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}] = E\left[\sum_{k=1}^{K} \theta_t^k (X_t^k - X_{t-1}^k) \mid \mathcal{F}_{t-1}\right]$

linéarité espérance + θ prévisible

$\Rightarrow E[Z_t - Z_{t-1} \mid \mathcal{F}_{t-1}] = \sum_{k=1}^{K} \theta_t^k \, E(X_t^k - X_{t-1}^k \mid \mathcal{F}_{t-1}) = 0$

car X martingale.

Chapitre 2 : LE MOUVEMENT BROWNIEN

I - Un peu d'histoire.

Avant d'être un objet mathématique rigoureux, le mouvement Brownien a été étudié en Botanique, en Finance et en Physique.

1828 : le botaniste R. Brown observe le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau.

1877 : Delsaux explique les chgmts incessants de direction de trajectoires par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau.

Un mouvement de ce type est alors appelé mouvement au hasard.

En 1900, L. Bachelier, en vue d'étudier les cours de la Bourse de Paris dans sa thèse "Théorie de la Spéculation", met en évidence le caractère markovien du mouvement brownien : la position d'une particule à l'instant t+s dépend de sa position en t, et ne dépend pas de sa position avant t.

1905 : * A. Einstein détermine la densité de transition du Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur.

* Smoluchowski décrit le mouvement brownien comme une limite de promenades aléatoires.

1923 : La 1ère étude mathématique rigoureuse du Brownien est faite par N. Wiener, qui construit une mesure de probabilités sur l'espace des fonctions continues sous laquelle le processus canonique est un mouvement Brownien.

1948 : P. Lévy mène ensuite des recherches d'une influence considérable. Il s'est intéressé aux propriétés fines des trajectoires du Brownien.

Ces objets ont été développés par les potentialistes américains à la suite de J.L. Doob, puis systématisés par les spécialistes de la "Théorie Générale des Processus" de l'École de Strasbourg, autour de P.-A. Meyer.

II - Définitions, constructions

1/ Définitions

Définition : Soit $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus issu de 0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X est un mouvement brownien si il vérifie l'une des 2 conditions suivantes (équivalentes) :

(i) X est un processus gaussien centré et de fonction de covariance

$$\mathbb{E}(X_s X_t) = s \wedge t$$

(ii) X est un processus à accroissements indépendants et stationnaires tels que $X_t \sim \mathcal{N}(0, t)$ $\forall t \geq 0$. (PAIS)

- On montre que le MB est à trajectoires continues.
- La propriété d'indépendance des accroissements signifie que $\forall s \leq t$, la variable $X_t - X_s$ est indépendante de $\sigma\{X_u, u \leq s\}$.
  = tribu du passé avant s.
- La propriété de stationnarité des accroissements signifie que la loi de $X_t - X_s$ ne dépend que de $t - s$
  $\Leftrightarrow$ $\forall t \geq s$, $X_t - X_s \overset{d}{=} X_{t-s}$.
- Les Processus à Accroissements Indépendants et Stationnaires (PAIS) portent aussi le nom de Processus de Levy. Leur structure a été caractérisée dans les années 30 par De Finetti, Khintchine et Lévy. Ces processus sont très importants et de plus en plus utilisés par les financiers mathématiciens.

Souvent noté B comme Brownien
ou W comme Wiener.

2/ Constructions

* La preuve rigoureuse de l'existence du mouvement brownien repose sur la construction d'une mesure de probabilités sur l'espace des trajectoires, la mesure de Wiener.

Plus précisément, on prend comme espace de probabilités sous-jacent l'espace $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ des fct^{os} continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, on note :

$$X_t(\omega) = \omega(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0$$

le processus canonique (ici, $\omega \in \Omega$ est une fonction),

$\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$ la filtration canonique, et $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$.

La mesure de Wiener est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t^X\})$ sous laquelle X est un mouvement brownien au sens de la définit^{o} pcdte.

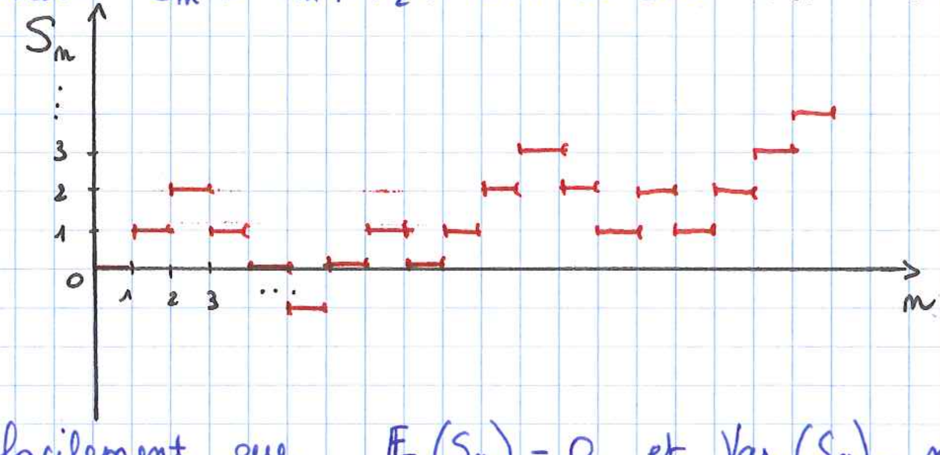
Référence : I. KARATZAS et S.E. SHREVE "Brownian Motion and Stochastic Calculus" Springer 1991.

* On peut construire plus simplement le Brownien comme limite de promenades aléatoires renormalisées. Cette propriété est notamment exploitée pour les simulations.

Soit X une v.a. de Bernoulli, $\mathbb{P}[X=1] = \mathbb{P}[X=-1] = \frac{1}{2}$

et soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une suite de v.a. indépendantes et équidistribuées de même loi que X.

① On considère $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ la marche aléatoire symétrique simple



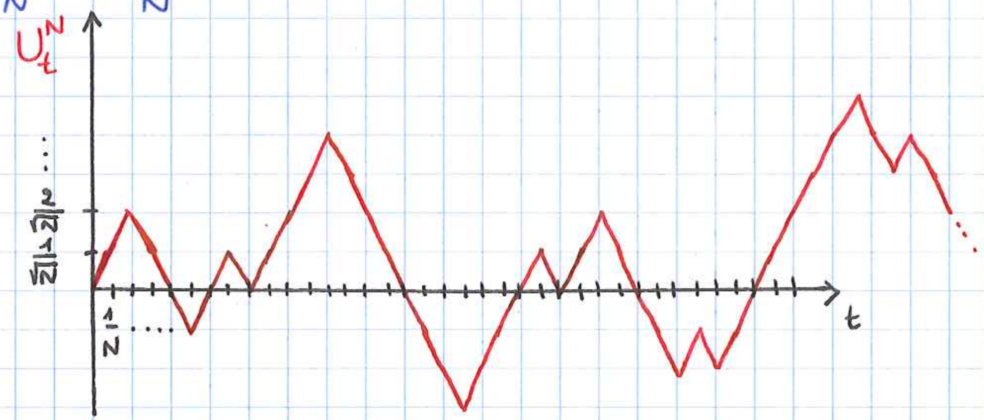
On voit facilement que $\mathbb{E}(S_n) = 0$ et $Var(S_n) = n$.

②. On procède ensuite à une double renormalisation en temps et en espace, en fixant N et en considérant :

$$U_{\frac{k}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} S_k \qquad \text{pour } k = 0, \dots, N.$$

On remarque que pour $k = 0, \dots, N$, $\frac{k}{N} = 0, \frac{1}{N}, \dots, 1$, que $\mathbb{E}(U_{\frac{k}{N}}) = 0$ et $\mathrm{Var}(U_{\frac{k}{N}}) = \frac{k}{N}$.

③. On définit ensuite un processus à temps continu $\{U_t^N, t \in [0,1]\}$ à partir de $U_{\frac{k}{N}}$ en imposant à la fonction $t \longrightarrow U_t^N$ d'être affine entre $\frac{k}{N}$ et $\frac{k+1}{N}$:



Pour $t = 1$, on a

$$U_1^N = \frac{S_N - N\,\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{N \,\mathrm{Var}(X_1)}}$$

de sorte que par le Théorème Central Limite $U_1^N \xrightarrow[N \to +\infty]{} \mathcal{N}(0,1)$ en loi.

De même on voit que $U_t^N \xrightarrow[N \to +\infty]{} \mathcal{N}(0,t)$ en loi $\forall t \in [0,1]$.

On peut alors montrer que <u>toute la trajectoire du processus</u> U^N converge en loi vers celle du mouvement brownien B.

Cette convergence en loi de processus porte aussi le nom de principe d'invariance de Donsker, et utilise de façon cruciale la notion de tension d'une famille de lois de probabilités.

Trajectoires d'un mouvement Brownien.

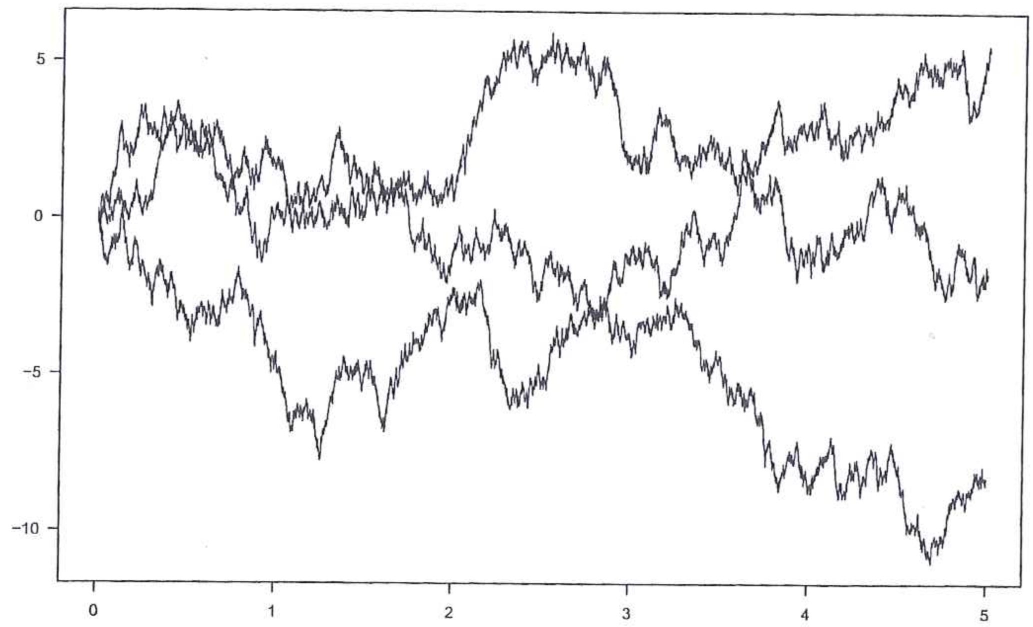


FIG. 3.1 – Trajectoires Browniennes

Trajectoires d'un mouvement Brownien avec drift

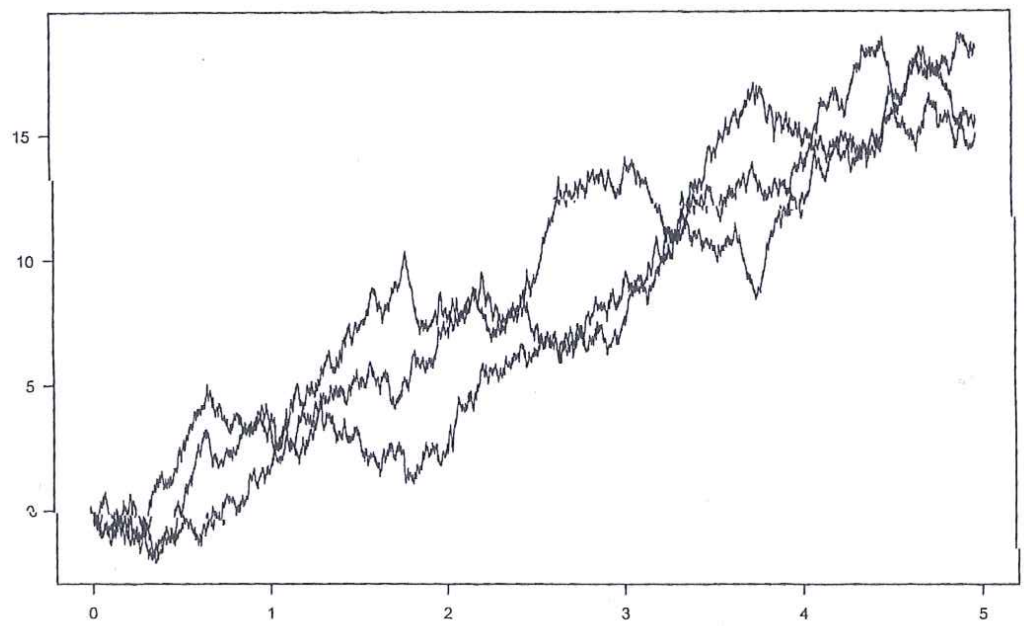


FIG. 3.2 – Mouvement Brownien avec drift

3/ Equivalence des 2 définitions

Etablissons maintenant l'équivalence entre les points (i) et (ii) dans la définition du brownien :

- Supposons (i) vraie et fixons $r \leq s \leq t$. On a

$$\mathbb{E}\left(X_r\left(X_t - X_s\right)\right) = \mathbb{E}\left(X_r X_t\right) - \mathbb{E}\left(X_r X_s\right) = r \wedge t - r \wedge s = r - r = 0.$$

Donc $H = \text{Vect}\{X_r, r \leq s\}$ est orthogonal à $X_t - X_s$ dans L^2.
Mais comme X est un processus gaussien par hypothèse, cela entraîne que $\sigma(H) = \sigma\{X_r, r \leq s\}$ est indépendante de $X_t - X_s$, et donc que X est à <u>accroissements indépendants</u>.
Enfin, on sait que $X_t - X_s$ est une gaussienne centrée, et qu'il suffit de calculer sa variance pour déterminer sa loi.

$$\begin{aligned}\text{Var}\left(X_t - X_s\right) = \mathbb{E}\left[\left(X_t - X_s\right)^2\right] &= \mathbb{E}(X_t^2) - 2\,\mathbb{E}\left(X_s X_t\right) + \mathbb{E}\left(X_s^2\right) \\ &= t - 2\, t \wedge s + s \quad = t - 2s + s \\ &= t - s.\end{aligned}$$

D'où $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ ce qui montre (ii).

- <u>Réciproquement</u>, supposons (ii) vraie.
  Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $0 = t_0 \leq t_1 < \dots < t_n$. On a :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} = \sum_{i=1}^{n} \left(a_i + \dots + a_n\right)\left(X_{t_i} - X_{t_{i-1}}\right)$$

et on voit que le terme de droite est une somme de gaussiennes indépendantes (par indépendance des accroissements), donc une gaussienne.
Ceci entraîne que X est un <u>processus gaussien</u>, et l'on voit immédiatement qu'il est <u>centré</u>.
Pour calculer sa covariance : $\forall s \leq t$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(X_s X_t\right) = \mathbb{E}\left(X_s\left(X_s + X_t - X_s\right)\right) &= \mathbb{E}\left(X_s^2\right) + \mathbb{E}\left(X_s\left(X_t - X_s\right)\right) \\ &= s + 0 \quad = s \quad = s \wedge t\end{aligned}$$

$\square$

II - Propriétés du Mouvement Brownien

Propriété de martingale : Si B_t est un mouvement Brownien, alors (i) B_t est une martingale
(ii) $B_t^2 - t$ est une martingale $(\langle B \rangle_t = t)$
(iii) $\exp(\theta B_t - \theta^2 \frac{t}{2})$ est une martingale.

preuve : par rapport à la filtration $(\mathcal{F}_t)$ continue complétée :

$$\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon \downarrow 0} \overline{\sigma(B_s, s \leq t+\varepsilon)} .$$

(i) il est clair que les $(\mathcal{F}_t)$ forment une filtration complète et càd, et que B_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Il est aussi intégrable (car $\sim \mathcal{N}(0,t)$).
Il faut donc montrer que $\forall t \geq s \geq 0$, $\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = B_s$.

$$\mathbb{E}(B_t | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s) = \mathbb{E}(B_t - B_s | \mathcal{F}_s) + \mathbb{E}(B_s | \mathcal{F}_s)$$

$$= 0 + B_s$$

par indépendance de $B_t - B_s | \mathcal{F}_s$ et $\mathbb{E}(B_t - B_s) = 0$ — car B_s est $\mathcal{F}_s$-mesurable.

(ii) et (iii) cf TD - Réciproque célèbre :

Théorème de caractérisation de P. Lévy :
Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus continu issu de 0. Alors X est un mouvement brownien s'il vérifie l'une des conditions suivantes :
(i) Les processus $X.$ et $t \mapsto X_t^2 - t$ sont des martingales
(ii) Le processus $t \mapsto \exp(\theta X_t - \theta^2 \frac{t}{2})$ est une mg $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

Rq : * La variation quadratique de $(B_t)_{t \geq 0}$ est égale à t
* Le mouvement Brownien est la seule martingale continue, nulle en $t=0$, de carré intégrable et de variation quadratique t.

Proposition : si B^1 et B^2 sont deux Browniens indépendants, alors le produit B^1B^2 est une martingale

preuve : On peut le voir de 2 façons

(a) En utilisant le fait que si $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ sont 2 tribus et X, Y 2 v.a telles que $\mathcal{F} \vee \sigma(X)$ et $\mathcal{G}$ sont indép. ainsi que $\mathcal{G} \vee \sigma(Y)$ et $\mathcal{F}$, alors :

$$\mathbb{E}(XY \mid \mathcal{F} \vee \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X \mid \mathcal{F})\,\mathbb{E}(Y \mid \mathcal{G}).$$

(b) En remarquant que $\dfrac{B^1 + B^2}{\sqrt{2}}$ est un processus gaussien de covariance $t \wedge s$, donc un Brownien.

Donc $\dfrac{(B_t^1 + B_t^2)^2}{2} - t$ est une martingale.

Donc $B_t^1 B_t^2 = \left((B_t^1 + B_t^2)^2 - t\right) - \frac{1}{2}\left[(B_t^1)^2 - t\right] - \frac{1}{2}\left((B_t^2)^2 - t\right)$

différence de 3 martingales, est une martingale. $\square$

Proposition : (i) Un Mouvement Brownien (B_t) est un processus presque sûrement continu.

càd qu'il existe un ensemble négligeable N tel que, $\forall \omega \notin N$, la trajectoire $t \longmapsto B_t(\omega)$ est continue

(ii) Les trajectoires du mouvement brownien sont nulle part dérivables.

càd qu'il $\exists$ un ensemble négligeable N' tel que $\forall \omega \notin N'$, la trajectoire $t \longmapsto B_t(\omega)$ est nulle part dérivable.

Rq : Signalons qu'il n'est pas évident de construire de telles fonctions sans faire appel aux probabilités.

Un exemple célèbre est cependant la fonction de Weierstrass (1889) :

$$f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^k \cos \beta^k t$$

qui est continue partout et nulle part dérivable dès que $\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Transformations du Brownien : Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien, alors les processus suivants

(a) $t \mapsto -B_t$ (processus symétrique)

(b) $t \mapsto \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ (processus rééchelonné)

(c) $t \mapsto t B_{1/t}$ si $t \neq 0$, $t \mapsto 0$ si $t = 0$ (processus inversé)

sont aussi des mouvements browniens.

Preuve : Il suffit de vérifier que ces processus sont bien gaussiens, et de calculer leurs espérances et leurs covariances.

- L'invariance du processus (b) porte aussi le nom d'invariance par scaling et signifie que le Brownien est un processus autosimilaire.

Propriétés trajectorielles du Brownien :

Proposition : Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien. Alors p.s.

(i) $\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} B_t = \limsup_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t}} B_t = +\infty$

(ii) $\liminf_{t \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} B_t = \liminf_{t \to 0} \frac{1}{\sqrt{t}} B_t = -\infty$

(iii) $\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} B_t = 0$.

Théorème (loi du logarithme itéré) Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un MB. Alors p.s.

(i) $\limsup_{t \to 0^+} \frac{B_t}{\varphi(t)} = 1$ et $\liminf_{t \to 0} \frac{B_t}{\varphi(t)} = -1$

(ii) $\limsup_{t \to +\infty} \frac{B_t}{\varphi(t)} = 1$ et $\liminf_{t \to +\infty} \frac{B_t}{\varphi(t)} = -1$

où $\varphi(t) = \sqrt{2t \log\log(1/t)}$ $\forall t < 1/e$ et $\varphi(t) = \sqrt{2t \log\log(t)}$ $\forall t > e$

Rq : les fct^{os} φ et φ ressemblent bcp à $t \mapsto \sqrt{t}$ car $\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{\varphi(t)}{t^\alpha} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} 0$ $\forall \alpha < \frac{1}{2}$

et $\frac{\varphi(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$, $\frac{\varphi(t)}{t^\alpha} \underset{t\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ $\forall \alpha > \frac{1}{2}$.

Ainsi, une bonne image déterministe de la courbe brownienne, aussi bien localement que globalement, sont les fct^{os} $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto -\sqrt{t}$.

Le théorème suivant sera utilisé dans la construction de l'intégrale stochastique. Il met une nouvelle fois en évidence le caractère "quadratique" de la courbe brownienne :

Théorème : Fixons $t>0$ et posons $t_j = j\frac{t}{2^n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ et $j=0,\dots,2^n$

Alors $$Z_t^n = \sum_{j=1}^{2^n} |B_{t_j} - B_{t_{j-1}}|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} t \quad \text{p.s. et dans } L^2$$

Preuve : Remarquons déjà que $\mathbb{E}(Z_t^n) = t$.

Pour la convergence dans L^2 il faut montrer que $\mathbb{E}(|Z_t^n - t|^2) \to 0$ soit $Var(Z_t^n) \to 0$, ce qui se déduit de

$$Var(Z_t^n) = \sum_{j=1}^{2^n} Var(B_{t_j} - B_{t_{j-1}})^2 = \sum_{j=1}^{2^n} 2\left(\frac{t}{2^n}\right)^2 = 2^{1-n}t^2$$

où la 2^e égalité vient de ce que si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$, alors $Var(X^2) = 2\sigma^4$.

D'autre part on en déduit que

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |Z_t^n - t|^2\right) = t\sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} < +\infty$$

d'où $\sum_{n=1}^{+\infty} |Z_t^n - t|^2 < +\infty$ p.s. (une va ≥ 0 d'esp. finie est finie), de sorte que le terme général de la série $|Z_t^n - t|^2$ converge nécessairement p.s. vers 0. $\square$.

III La propriété de Markov et ses conséquences

La propriété de Markov du Brownien W est ici une conséquence de l'indépendance de ses accroissements : on sait que, pour tout $s \geq 0$, le processus $\{W_u^s = W_{u+s} - W_s,\ u \geq 0\}$ est un mouvement brownien indépendant de $\mathcal{F}_s^W$ et ceci entraine le théorème suivant :

Théorème (Propriété de Markov simple)

Soit W un mouvement brownien. Pour toute fonction f borélienne bornée et pour tout $s \leq t$,

$$\mathbb{E}(f(W_t) \mid \mathcal{F}_s^W) = \mathbb{E}(f(W_t) \mid W_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(y-W_s)^2}{2(t-s)}} dy$$

Preuve : on utilise les propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}(f(W_t) \mid \mathcal{F}_s^W) = \mathbb{E}(f(W_s + W_t - W_s) \mid \mathcal{F}_s^W)$$
$$= \mathbb{E}(f(x + W_t - W_s))_{x = W_s}$$

puisque W_s est $\mathcal{F}_s^W$-mesurable et $(W_t - W_s)$ est indépendant de $\mathcal{F}_s^W$.

Comme $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ on peut calculer :

$$\mathbb{E}(f(x + W_t - W_s)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) e^{-\frac{y^2}{2(t-s)}} dy$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}} dy \quad \text{après un chgt de variable.}$$

Une autre façon de décrire cette propriété est de dire que pour tout $t \geq s$, conditionnellement à $\mathcal{F}_s^W$, la v.a. W_t est de loi gaussienne d'espérance W_s et de variance $t-s$.

Le théorème suivant étend la propriété de Markov à des temps aléatoires.

Théorème (Propriété de Markov forte)

Soit W un mouvement brownien et T un $(\mathcal{F}_t^W)$-temps d'arrêt à valeurs finies. Pour toute fonction f borélienne bornée et $t \geq 0$,

$$E\left(f(W_{T+t}) \mid \mathcal{F}_T\right) = E\left(f(W_{T+t}) \mid W_T\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-(x-W_T)^2/2t} dx$$

En particulier, pour tout temps d'arrêt fini T, le processus $\{W_t^T = W_{T+t} - W_T, t \geq 0\}$ est un Brownien indépendant de $\mathcal{F}_T^W$.

Propriété essentielle du mouvement Brownien.

Théorie des Fluctuations :

Cette théorie concerne la loi jointe du processus bivarié $\{(W_t, S_t), t \geq 0\}$ où S est le processus (croissant) du supremum $\boxed{S_t = \sup_{s \leq t} W_s}$.

On a vu que $\limsup_{t \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} W_t = +\infty$, ce qui entraîne clairement que $S_t \to +\infty$ p.s. quand $t \to +\infty$.

En particulier, si $T_a = \inf\{t > 0, W_t = a\}$ désigne le temps d'atteinte du Brownien au seuil $a > 0$, alors pour tout $M > 0$, $\{T_a < M\} = \{S_M > a\}$ et comme $P(S_M > a) \nearrow 1$ quand $M \nearrow +\infty$, on voit que p.s. $T_a < +\infty$.

Autrement dit T_a est un temps d'arrêt fini (attention, T_a n'est pas un temps d'arrêt borné, en effet $E(T_a) = +\infty$).

Le théorème suivant, utilisé en Finance pour évaluer les options barrières, précise la loi jointe du couple de v.a. (W_t, S_t) :

Théorème (Désiré André) Pour tout $t, x \geq 0$ et pour tout $y \leq x$

$$P(S_t \geq x, W_t \leq y) = P(W_t \geq 2x - y)$$

preuve : On écrit d'abord

$$P(S_t \geq x, W_t \leq y) = P(T_x \leq t, W_t \leq y) = P(T_x \leq t, W_{t-T_x+T_x} - W_{T_x} \leq y - W_{T_x})$$

D'une part $W_{T_x} = x$, par continuité de W.

D'autre part $W_s^x = W_{s+T_x} - W_{T_x}$ est un Brownien indép. de $\mathcal{F}_{T_x}$ (donc de T_x).

Chapitre 3 : L'intégrale stochastique - Formule d'Itô

Dans ce chapitre on cherche à définir des variables aléatoires du type

$$\omega \longmapsto Y_1(\omega) = \left(\int_0^1 X_s \, dB_s \right)(\omega)$$

où $\{X_t, t \geqslant 0\}$ est un certain processus et $\{B_t, t \geqslant 0\}$ est un mouvement brownien.

Le problème est bien sûr de donner un sens à l'élément différentiel dB_s puisque la fonction $s \longmapsto B_s$ n'est pas dérivable.

Un objet mathématique adéquat, introduit par K. Itô en 1942, est l'intégrale stochastique, laquelle permet de construire $Y_1(\omega)$ comme une limite de v.a., sous l'hypothèse cruciale d'adaptation du processus X à la filtration du Brownien.

La théorie plus récente du calcul anticipatif permet de lever cette hypothèse d'adaptation dans certains cas, ce qui est d'un intérêt évident en finance, mais nous n'aborderons pas cela ici.

Dans la pratique, on s'intéresse souvent à des quantités du type $F(Y_1(\omega))$ où F est une fonction réelle. Quand F est suffisamment régulière, le lemme d'Itô permet alors d'exprimer $F(Y_1(\omega))$ au moyen d'intégrales stochastiques.

Cette méthodologie s'applique aux intégrales $Y_t = \int_0^t X_s \, dB_s$. Le processus $\left(\int_0^t X_s \, dB_s \right)_{t \geqslant 0}$ est alors, sous conditions d'intégrabilité de X, une martingale.

Le processus $F(Y_t)$ est alors décomposé en une martingale et un processus à variations finies.

→ Explication parallèle intégrale de Riemann.

I - L'intégrale de Wiener

1/ L'espace $L^2([0,T],\mathbb{R})$

Dans cette section, les fct$^{\text{ons}}$ et processus sont à valeurs réelles (les définitions et résultats se généralisent sans difficulté au cas $\mathbb{R}^d$).

- L'intégrale de Wiener est simplement une intégrale du type $\int_0^T X_s\, dB_s$ avec X fonction déterministe (ie ne dépendant pas de ω).
- On fixe un horizon $T>0$ déterministe (éventuellement $T=+\infty$) et on note :

$$\boxed{L^2([0,T],\mathbb{R}) = \left\{ f : [0,T] \to \mathbb{R} \;\middle|\; \int_0^T |f(s)|^2\, ds < +\infty \right\}}$$

* Si $T<+\infty$, les fct$^{\text{ons}}$ continues et les fct$^{\text{ons}}$ bornées sont dans $L^2([0,T],\mathbb{R})$.
* Muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_0^T f(s)g(s)\,ds$, $L^2([0,T],\mathbb{R})$ est un espace de Hilbert, au sens où toute suite de $L^2([0,T],\mathbb{R})$ qui soit de Cauchy pour la norme $\|f\|_{2,T} = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left(\int_0^T f^2(s)\,ds\right)^{1/2}$ converge vers un unique élément de $L^2([0,T],\mathbb{R})$.

La propriété fondamentale des espaces de Hilbert est l'existence d'une base orthonormée dénombrable : il existe un système de fonctions $\{f_n, n\geq 0\}$ de $L^2([0,T],\mathbb{R})$ tel que $\langle f_n, f_p\rangle = 0$ si $n\neq p$ et $\langle f_n, f_p\rangle = 1$ si $n=p$ et tel que tout élément f de $L^2([0,T],\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$f = \sum_{n\geq 1} a_n f_n$$

où les coefficients a_n sont les coordonnées de f dans la base $\{f_n, n\geq 0\}$.

Dans le cas précis de $L^2([0,T],\mathbb{R})$, la base $\{f_n, n\geq 0\}$ peut être constituée de fonctions en escalier :

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \mathbb{1}_{]t_i^{(n)}, t_{i+1}^{(n)}]}(t)$$

où $p_n\in\mathbb{N}$, les α_i sont réels et $\{t_i^{(n)}\}$ une suite croissante de $[0,T]$.

On a le lemme suivant :

> **Lemme hilbertien** : Soit $f\in L^2([0,T],\mathbb{R})$. Il existe une suite de fonctions en escalier $\{f_n\}$ telle que $\|f-f_n\|_{2,T} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

2/ Le cas des fonctions en escalier

Si f_n est la fonction donnée par la décomposition précédente, que l'on note simplement $f_n(t) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$.

Il est facile de définir son intégrale de Wiener :

$$I_T(f_n) = \int_0^T f_n(s)\, dB_s = \int_0^T \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s)\, dB_s$$

$$= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \underbrace{\int_{t_i}^{t_{i+1}} dB_s}_{= B_{t_{i+1}} - B_{t_i}} = \underbrace{\sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right)}_{\text{somme d'accroissements de Brownien}}.$$

Remarquons que par le caractère gaussien du Brownien et l'indépendance des accroissements, la variable aléatoire $I_T(f_n)$ est une va gaussienne d'espérance nulle et de variance :

$$\mathrm{Var}\left(I_T(f_n)\right) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2\, \mathrm{Var}\left(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}\right) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 \left(t_{i+1} - t_i\right) = \int_0^T f_n^2(s)\, ds$$

car $f_n^2(s) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s)$

De plus, on remarque que $f \longmapsto I_T(f)$ est une <u>fonction linéaire</u> au sens où $I_T(af + bg) = a\, I_T(f) + b\, I_T(g)$ pour toute fonctions f, g en escalier et tous $a, b \in \mathbb{R}$.

Enfin, si f et g sont 2 fonctions en escalier, on a :

$$\mathbb{E}\left(I_T(f) I_T(g)\right) = \frac{1}{2}\left[\mathrm{Var}\left(I_T(f) + I_T(g)\right) - \mathrm{Var}\left(I_T(f)\right) - \mathrm{Var}\left(I_T(g)\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^T (f+g)^2(s)\, ds - \int_0^T f^2(s)\, ds - \int_0^T g^2(s)\, ds\right]$$

$$= \int_0^T f(s)\, g(s)\, ds.$$

Cette dernière égalité est très importante et signifie que l'application $f \longmapsto I_T(f)$ est une isométrie de $L^2([0,T], \mathbb{R})$ dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$.

On parle de la <u>propriété d'isométrie de l'intégrale de Wiener</u>, qui signifie

$$\boxed{\langle I_T(f), I_T(g) \rangle_{L^2(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\mathbb{R})}}$$

3/ Le cas général

Pour construire $I_T(f)$ quand f est un élément quelconque de $L^2([0,T],\mathbb{R})$, on utilise l'isométrie et le lemme suivant :

lemme gaussien : Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une suite de variables gaussiennes suivant la loi $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n)$ convergeant vers une v.a. X dans L^2 (càd $\mathbb{E}(|X-X_n|^2) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$). Alors $\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu$ et $\sigma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma$ et $X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma)$

Soit maintenant $f \in L^2([0,T],\mathbb{R})$ et soit d'après le Lemme hilbertien, $\{f_n, n \geq 0\}$ une suite de fonctions en escalier telles que $\|f-f_n\|_{2,T} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.
D'après le paragraphe précédent on peut construire les intégrales de Wiener $I_T(f_n)$ qui sont des gaussiennes centrées qui, par isométrie forment une suite de Cauchy. L'espace L^2 étant complet, cette suite converge vers une va gaussienne notée $I_T(f)$.
D'après le lemme gaussien, $I_T(f) \sim \mathcal{N}(0, \|f\|^2_{2,T})$.
Il reste à vérifier que la limite Y ne dépend que de f et non pas de la suite $\{f_n\}$ choisie.

Rq : $I_T(f)$ n'est jamais une variable p.s. positive, même si f est elle-même toujours positive.

L'application $f \longmapsto I_T(f)$ est linéaire et isométrique de $L^2([0,T],\mathbb{R}) \to L^2(\Omega)$ au sens où $I_T(af+bg) = a\,I_T(f) + b\,I_T(g)$ et

$$\mathbb{E}\big(I_T(f)\,I_T(g)\big) = \int_0^T f(s)\,g(s)\,ds$$

pour tout $a,b \in \mathbb{R}$ et $f,g \in L^2([0,T],\mathbb{R})$.

Enfin, $I_T(f)$ est une variable gaussienne mesurable par rapport à $\sigma\{B_t, 0\leq t\leq T\}$ qui vérifie pour tout $t \in [0,T]$

$$\mathbb{E}(I_T(f)\,B_t) = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^T f(s)\,dB_s\right)\left(\int_0^T \mathbb{1}_{[0,t]}(s)\,dB_s\right)\right]$$
$$= \int_0^T f(s)\,\mathbb{1}_{[0,t]}(s)\,ds = \int_0^t f(s)\,ds$$

où la 2^e égalité provient de la formule d'isométrie.

Par propriété d'espace gaussien, cette formule caractérise l'intégrale stochastique : $I_T(f)$ est l'unique v.a. Z gaussienne mesurable par rapport à $\sigma\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ telle que

$$\mathbb{E}[Z B_t] = \int_0^t f(s)\,ds \qquad \forall t \in [0,T].$$

4/ L'intégrale de Wiener vue comme processus gaussien

On note $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ la réunion des $L^2([0,T], \mathbb{R})$ pour $T>0$ et on considère $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. Par le paragraphe précédent, le processus

$$M_t = \int_0^t f(s)\,dB_s$$

a donc bien un sens pour tout $t \geq 0$.

On a alors le théorème suivant :

Théorème : Le processus $\{M_t, t \geq 0\}$ est un processus gaussien $(\mathcal{F}_t^B)$-adapté, centré, de fonction de covariance :

$$\Gamma(s,t) = \int_0^{t \wedge s} f^2(u)\,du.$$

De plus, M est un P.A.I. au sens où

$$\{M_{t+s} - M_s, t \geq 0\} \perp \sigma\{B_u, u \leq s\} \quad \text{pour tout } s \geq 0.$$

preuve : Si on note M_t^n la suite d'intégrale de Wiener associée à la suite $\{f_n\}$ approchant f dans L^2, on voit que $t \longmapsto M_t^n$ est un processus gaussien comme le Brownien. Par stabilité dans L^2 des espaces gaussiens, on en déduit que $t \longmapsto M_t$ est un processus gaussien. L'expression de son espérance et sa fonction de covariance découlent des calculs précédents, et il est évident par construction que M est $(\mathcal{F}_t^B)$-adapté.

Pour montrer l'indépendance des accroissements, on écrit $\forall s,t \geq 0$

$$M_{t+s} - M_s = \int_s^{t+s} f(u)\,dB_u = \int_s^{t+s} f(u)\,d_u(B_u - B_s) \in \sigma\{B_u - B_s, u \in [s, t+s]\}$$

et on utilise l'indépendance des accroissements du processus B, qui entraîne

$$\sigma\{B_u - B_s,\ u \in [s, t+s]\} \perp \sigma\{B_u,\ u \leq s\}. \quad \square$$

On a également le résultat suivant :

Corollaire : Les processus $\{M_t, t \geq 0\}$ et $\{\tilde{M}_t, t \geq 0\}$ où $\tilde{M}_t = M_t^2 - \int_0^t f^2(s)\,ds$ sont des $(\mathcal{F}_t^B)$-martingales.

preuve : c'est une conséquence de

exo ‖ si X est un PAI et $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$ (resp $\mathbb{E}(|X_t|^2) < +\infty$) alors $X_t^1 = X_t - \mathbb{E}(X_t)$ (resp. $X_t^2 = X_t^2 - \mathbb{E}(X_t^2)$) est une $\mathcal{F}_t^X$-martingale. $\square$

Remarque : Sauf lorsque f est constante, le processus M est un PAI, mais pas un PAIS, au sens où l'égalité $M_{t+s} - M_s \overset{d}{=} M_t$ n'est pas vérifiée pour tout t. Ceci se comprend intuitivement vue l'expression de M sous forme intégrale.

C'est aussi une conséquence d'un résultat plus profond, la formule de Lévy-Khintchine, sorte de formule de structure des PAIS. Elle entraîne que les seuls processus de Lévy qui soient des martingales continues sont du type cB_t pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

En particulier, M est un PAIS ssi $f \equiv c$ pour un certain $c \in \mathbb{R}$.

Rappelons également que (conséquence de la formule d'isométrie), si $f, g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f(u)\,dB_u\right)\left(\int_0^s g(u)\,dB_u\right)\right] = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)\,du.$$

Enfin on a si f est dérivable :

Théorème (Formule d'intégration par parties) Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, alors

$$I_t(f) = f(t)B_t - \int_0^t f'(s)\,B_s\,ds \qquad \forall t \geq 0$$

preuve : fixons $t \geq 0$. Par propriété des espaces gaussiens, il suffit de vérifier que

$$E(B_u I_t(f)) = E\left(B_u\left(f(t)B_t - \int_0^t f'(s)\,B_s\,ds\right)\right) \quad \forall u \leq t.$$

En utilisant la formule d'IPP classique :

$$\mathbb{E}\left[B_u\left(f(t)B_t - \int_0^t f'_s B_s\,ds\right)\right] = u f(t) - \int_0^t f'(s)(s\wedge u)\,ds = u f(t) - \left(u\int_u^t f'(s)\,ds + \int_0^u f'(s)\,s\,ds\right)$$

$$= u f(u) - \int_0^u f'(s)\,s\,ds = \int_0^u f(s)\,ds = \mathbb{E}(B_u I_t(f)). \quad \square$$

II - L'intégrale stochastique générale

On cherche maintenant à définir la variable aléatoire

$$\int_0^t \theta_s \, dB_s$$

quand $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique.
Le caractère aléatoire de θ va exiger des conditions supplémentaires par rapport au cas de l'intégrale de Wiener.
On note $\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\}$, la filtration naturelle du mvt Brownien B.

> Définition : On dit que $\{\theta_t, t \geq 0\}$ est un bon processus*
> s'il est $(\mathcal{F}_t^B)$-adapté, càglàd et si
> $$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 \, ds\right] < +\infty \quad \text{pour tout } t > 0$$

(*) = cette dénomination n'est pas standard !!

Comme dans le cas de l'intégrale de Wiener, la construction de $I_t(\theta)$ se fait par discrétisation.

1) Cas des processus étagés

On appelle processus étagé (ou processus simple) les processus du type :

$$\theta_t^n = \sum_{i=0}^{p_n} \overset{\text{adapté}}{\theta_i} \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$$

où $p_n \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 \leq t_1 \ldots \leq t_{p_n}$ et $\boxed{\theta_i \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P})}$ $\forall i = 0 \ldots p_n$.

Sinon autre intégrale

On voit immédiatement que θ^n est un "bon processus".
On définit alors :

$$I_t(\theta^n) = \int_0^t \theta_s^n \, dB_s = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

On peut vérifier que $\forall i \neq j$, $\mathbb{E}(\theta_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \theta_j (B_{t_{j+1}} - B_{t_j})) = 0$
et que $\mathbb{E}(I_t(\theta^n)) = 0$ et $Var(I_t(\theta^n)) = \mathbb{E}\left(\int_0^t (\theta_s^n)^2 \, ds\right)$.
Attention : à cause du caractère aléatoire de θ^n, la variable $I_t(\theta^n)$ n'est pas une va gaussienne en général.

2/ Cas général

Le principe est le même que pour l'intégrale de Wiener, mais les outils mathématiques sous-jacents plus compliqués que les lemmes hilbertien et gaussien de la partie précédente.
Nous passerons les détails.
Si θ est un bon processus, on montre d'abord qu'il existe $\{\theta^n, n \geq 0\}$ suite de processus étagés telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

puis pour tout $t > 0$ il existe une va $I_t(\theta)$ de carré intégrable telle que

$$\mathbb{E}\left[|I_t(\theta) - I_t(\theta^n)|^2\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

avec $I_t(\theta^n)$ défini comme au paragraphe précédent.
On pose alors naturellement $\quad I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s, \quad \forall t \geq 0.$
Par indépendance, on remarque d'abord que

$$\mathbb{E}[I_t(\theta^n)] = \sum_{i=0}^{p_n} \mathbb{E}(\theta_i)\, \mathbb{E}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) = 0,$$

de sorte en passant à la limite, que

$$\mathbb{E}(I_t(\theta)) = 0.$$

De même, on obtient

$$\mathrm{Var}(I_t(\theta)) = \lim_{n \nearrow +\infty} \mathrm{Var}(I_t(\theta^n)) = \lim_{n \nearrow +\infty} \mathbb{E}(I_t(\theta^n)^2)$$
$$= \lim_{n \nearrow +\infty} \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{p_n} \theta_i^2 (t_{i+1} - t_i)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

Insistons à nouveau sur le point que $I_t(\theta)$ n'est pas gaussienne en général, sauf lorsque θ est déterministe.
En revanche, d'autres propriétés de l'intégrale de Wiener sont conservées

Linéarité : pour tous $t \geq 0$, $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ et θ^1, θ^2 bons processus, on a

$$I_t(a_1\theta^1 + a_2\theta^2) = a_1 I_t(\theta^1) + a_2 I_t(\theta^2)$$

Propriétés de martingales : Pour tout bon processus θ, les processus

$$t \longmapsto I_t(\theta) \quad \text{et} \quad t \longmapsto I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2\, ds$$

sont des $(\mathcal{F}_t^B)$-martingales continues.

On a donc, $\forall s \leq t$: $\quad \mathbb{E}\left[I_t(\theta) \mid \mathcal{F}_s^B \right] = I_s(\theta)$

(soit $\mathbb{E}(I_t(\theta) - I_s(\theta) \mid \mathcal{F}_s^B) = 0$).

On montre également que

$$\mathbb{E}\left((I_t(\theta) - I_s(\theta))^2 \mid \mathcal{F}_s^B \right) = \mathbb{E}\left[(I_t(\theta))^2 - (I_s(\theta))^2 \mid \mathcal{F}_s^B \right]$$
$$= \mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_u^2\, du \mid \mathcal{F}_s^B \right].$$

En conséquence du théorème de Doob, on voit aussi que pour tout $(\mathcal{F}_t^B)$ temps d'arrêt τ et tout θ bon processus tel que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^\tau \theta_s^2\, ds \right] < +\infty$$

on a $\quad \mathbb{E}(I_\tau(\theta)) = 0 \quad$ et $\quad \mathbb{E}(I_\tau^2(\theta)) = \mathbb{E}\left(\int_0^\tau \theta_s^2\, ds \right)$.

Enfin, on peut appliquer les théorèmes vus au chap. 1 $(p = q = 2)$

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s \leq t} I_s(\theta) \right)^2 \right] \leq 4\, \mathbb{E}\left[(I_t(\theta))^2 \right] = 4 \int_0^t \mathbb{E}(\theta_u^2)\, du.$$

Propriété d'isométrie : Pour tous bons processus φ, θ et tout $s, t \geq 0$,

on a

$$\mathbb{E}\left[I_s(\varphi) . I_t(\theta) \right] = \mathbb{E}\left[\int_0^{s \wedge t} \theta_u \varphi_u\, du \right]$$

De plus le processus

$$I_t(\theta)\, I_t(\varphi) - \int_0^t \theta_u \varphi_u\, du \quad \text{est une } (\mathcal{F}_t^B)\text{-martingale}$$

Résumé

Comme dans le cas déterministe (intégrale de Riemann), on définit l'intégrale stochastique comme limite d'intégrales de fonctions "simples" (= étagées).

cas déterministe = fonctions en escalier

cas stochastique = sommes d'indicatrices

$$\int_0^t \alpha_a \mathbb{1}_{[a,b]}(s)\, dB_s = \alpha_a (B_b - B_a)$$

+ linéarité / multiplication par un scalaire / Chasles
  → propriétés identiques intégrale standard.
+ toute fonction mesurable s'écrit comme limite de fonctions simples (limite L^2)

Théorème L'intégrale stochastique d'une fonction mesurable est définie comme la limite ($L^2_{(?)}$) des intégrales des fonctions simples qui convergent vers cette fonction mesurable.

Difficulté Formule d'Intégration par parties : différente.
→ Formule d'Itô (cf après).

Application : Calcul de $\int_0^t B_s dB_s$.

Il s'agit, en utilisant la définition / construction de l'intégrale stochastique, de calculer $\int_0^t B_s dB_s$.

$$t=0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_k = \frac{kt}{n} \quad \cdots \quad t = t_n$$

Un processus étagé approchant B_s sur la discrétisat° donnée est $H_n(t) = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(t)$ où $\forall k$, $B_k = B_{t_k}$.

① Montrons que $H_n(s)$ pour $s \in [0,t]$ converge vers $\xrightarrow[L^2([0,t])]{n \to +\infty} (B_s)_{s\in[0,t]}$

à savoir :
$$\boxed{\begin{aligned} H_n \xrightarrow[L^2([0,t])]{n\to+\infty} X &\iff \| H_n - X \|_{L^2([0,t])} \xrightarrow{n\to+\infty} 0 \\ &\iff E\left[\int_0^t (H_n(s) - X(s))^2 ds\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \end{aligned}}$$

Il faut donc montrer que
$$\| H_n - B \|_{L^2([0,t])} \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

$$\iff E\left[\int_0^t (H_n(s) - B_s)^2 ds\right] \xrightarrow{n\to+\infty} 0$$

$$E\left[\int_0^t (H_n(s) - B_s)^2 ds\right] = E\left[\int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_k \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(s) - B_s\right)^2 ds\right]$$
$$= E\left[\int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n-1} (B_k - B_s) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(s) ds\right)\right]$$
$$= E\left[\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^t (B_k - B_s) \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(s) ds\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} E\left([B_{t_k} - B_s]^2\right) ds \quad \text{par le thm de Fubini}$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k) ds = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \left[(s-t_k)^2\right]_{t_k}^{t_{k+1}}$$
$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2 = \frac{1}{2} \times n \times \left(\frac{t}{n}\right)^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Donc $H_n \xrightarrow[L^2([0,t])]{} X$ donc $\int_0^t B_s dB_s = \lim_{\text{dans } L^2(\Omega)} \int_0^t H_n(s) dB_s$.

② Il faut donc calculer $\int_0^t H_n(s)\,dB_s$.

$$\int_0^t H_n(s)\,dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k}\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} B_k \,\Delta B_k \;(*) \quad \text{où } B_k = B_{t_k} \text{ et } \Delta B_k = (B_{k+1} - B_k)$$

$$\Delta(B_k^2) = B_{k+1}^2 - B_k^2$$

$$= (B_{k+1} - B_k)^2 + 2B_k(B_{k+1} - B_k)$$

$$= (\Delta B_k)^2 + 2 B_k \Delta B_k$$

D'où $\quad B_k \Delta B_k = \frac{1}{2}\left(\Delta(B_k^2) - (\Delta B_k)^2\right)$

$$(*) \quad \int_0^t H_n(s)\,dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \Delta B_k = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left[\Delta(B_k^2) - (\Delta B_k)^2\right]\right)$$

or $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1} \Delta(B_j)^2 = \left(B_{\frac{t}{n}}^2 - B_0^2\right) + \dots + \left(B_{\frac{nt}{n}}^2 - B_{\frac{(n-1)t}{n}}^2\right) = B_t^2 - B_0^2 = B_t^2$

D'où $\displaystyle\int_0^t H_n(s)\,dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} B_k \Delta B_k = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - \sum_{j=0}^{n-1}(\Delta B_j)^2\right).$

On va donc avoir :

$$\int_0^t B_s\,dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$$

à condition de montrer que $\displaystyle\sum_{j=0}^{n-1}(\Delta B_j)^2 \xrightarrow[L^2(\Omega)]{n\to+\infty} t$

ie mq $\displaystyle E\left(\left[\sum_{j=0}^{n-1}(\Delta B_j)^2 - t\right]^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

$$E\left[\left(\sum_{j=0}^{n-1}(\Delta B_j)^2 - t\right)^2\right] = E\left[\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)\right]^2\right]$$

$$= E\left[\sum_{j=0}^{n-1}\left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)^2\right] + \sum_{\substack{j\neq i\\ i,j=0}}^{n-1} E\left(\left[(\Delta B_j)^2 - (\Delta t_j)\right]\left[(\Delta B_i)^2 - \Delta t_i\right]\right)$$

$$= \underbrace{E\left((\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right)}_{=0} \times \underbrace{E\left((\Delta B_i)^2 - \Delta t_i\right)}_{=0}$$

$= 0$ car $E((\Delta B_j)^2) = E((B_{t_{j+1}} - B_{t_j})^2) = t_{j+1} - t_j = \Delta t_j$; car PAI. les 2 intervalles sont disjoints

$$= \sum_{j=0}^{n-1} E\left(\left[(\Delta B_j)^2 - \Delta t_j\right]^2\right)$$

$$= n\,E\left(\left(B_{\frac{t}{n}}^2 - \frac{t}{n}\right)^2\right) \quad \text{car vaiid}$$

$$= n\,E\left(\left[\frac{t}{n}(B_1^2 - 1)\right]^2\right) \quad \text{car } cB_{t/c^2} \overset{loi}{=} B_t \text{ donc } B_{\frac{t}{n}} \overset{loi}{=} \sqrt{\frac{t}{n}}\,B_1$$

$$= n\frac{t^2}{n^2}E\left((B_1^2 - 1)^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \text{cqfd !!}$$

3/ Extensions aux martingales locales

Dans la définition d'un "bon processus", la condition d'intégrabilité

$$E\left(\int_0^t \theta_s^2\, ds\right) < +\infty$$

est parfois trop exigeante dans la pratique. Il est possible de définir $I_t(\theta)$ sous la seule condition

$$\int_0^t \theta_s^2\, ds < +\infty \quad \text{p.s.}$$

Cependant dans ce cas, $t \longmapsto I_t(\theta)$ n'est plus nécessairement une martingale, et en particulier $E(I_t(\theta))$ peut être non nul.

On a besoin pour définir $I_t(\theta)$ de la notion de martingale locale.

Rappel : $\{\mathcal{F}_t, t \geqslant 0\}$ une filtration et $\{X_t, t \geqslant 0\}$ un processus $\mathcal{F}_t$-adapté.

On dit que X est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale si $\exists$ une suite $\{\tau_n, n \geqslant 0\}$ de $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt telle que $\mathbb{P}[\tau_n \longrightarrow +\infty] = 1$ et telle que le processus $X^n : t \longmapsto X_{t \wedge \tau_n}$ est une martingale $\forall n \geqslant 0$.

* Par le lemme de Fatou, on peut montrer qu'une martingale locale positive est une surmartingale.
* Par le théorème de convergence dominée, une martingale locale uniformément intégrable est une vraie martingale.

Définition : On dit que $\{\theta_t, t \geqslant 0\}$ est un "bon processus local" s'il est càglàd, $(\mathcal{F}_t^B)$-adapté et si

$$\int_0^t \theta_s^2\, ds < +\infty \quad \text{p.s.} \qquad \text{pour tout } t > 0$$

Soit θ un bon processus local. On pose

$$\tau_n = \inf\left\{t > 0, \int_0^t \theta_s^2\, ds = n\right\}$$

Comme $\{\tau_n > t\} = \left\{\int_0^t \theta_s^2\, ds < n\right\} \quad \forall n \in \mathbb{N}, t \geqslant 0$

on voit que τ_n est un $(\mathcal{F}_t^B)$-temps d'arrêt $\forall n \in \mathbb{N}$ car θ est adapté.

De plus, l'hypothèse d'intégrabilité sur θ entraîne facilement $\tau_n \to +\infty$ p.s.

Enfin, par construction on a

$$E\left[\int_0^{t \wedge \tau_n} \theta_s^2\, ds\right] \leqslant n < +\infty .$$

Ainsi, par le paragraphe précédent on peut définir $I_{t \wedge \tau_n}(\theta)$ qui est une martingale. Comme p.s. $\tau_n \longrightarrow +\infty$, on peut définir $\underline{I_t(\theta)}$ pour tout $t > 0$, qui est une <u>martingale locale</u>.

De même, en prenant la même suite de temps d'arrêt, on montre que le processus

$$I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 \, ds$$

est une martingale locale.

<u>Exemple</u> : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On veut savoir quand l'intégrale stochastique

$$I_t(B^\alpha) = \int_0^t B_s^\alpha \, dB_s$$

a un sens, et quand le processus associé est une martingale.

Remarquons déjà que :

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (B_s^\alpha)^2 ds\right] = \int_0^t \mathbb{E}(B_s^{2\alpha}) \, ds = \int_0^t s^\alpha \, \mathbb{E}(B_1^{2\alpha}) \, ds = \mathbb{E}(B_1^{2\alpha}) \int_0^t s^\alpha ds$$

Dans le terme de droite, l'intégrale est finie ssi $\alpha > -1$.

Donc pour tout $t \longmapsto I_t(B^\alpha)$ soit bien défini et une martingale, il faut que $\alpha > -1$ et $\mathbb{E}(B_1^{2\alpha}) < +\infty$. Or

$$\mathbb{E}(B_1^{2\alpha}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} x^{2\alpha} e^{-x^2/2} \, dx .$$

et cette intégrale est finie ssi $\alpha > -\frac{1}{2}$ (seul pb d'intégrabilité en 0)

Finalement $t \longmapsto \int_0^t B_s^\alpha \, dB_s$ est une martingale $\iff \alpha > -\frac{1}{2}$.

Quand $-1 < s \leq -\frac{1}{2}$, on cherche à savoir quand $I_t(B^\alpha)$ est malgré tout défini comme une martingale locale.

D'après les propriétés du mouvement Brownien (comportement au voisinage de 0 et comparaison avec $t \mapsto t^{1/2}$), on en déduit

$$\int_0^t B_s^{2\alpha} \, ds < +\infty \text{ p.s.} \iff \alpha > -1$$

D'où d'après ce qui précède

$$t \longmapsto \int_0^t B_s^\alpha \, dB_s \text{ est défini et martingale locale} \iff \alpha > -1$$

On en déduit que :

$$\mathbb{P}(S_t \geq x,\ W_t \leq y) = \mathbb{P}(T_x \leq t,\ W^x_{t-T_x} \leq y-x) = \mathbb{P}(T_x \leq t,\ W^x_{t-T_x} \geq x-y)$$

où la deuxième égalité vient de la symétrie du processus W^x sachant T_x.

Mais

$$\mathbb{P}(T_x \leq t,\ W^x_{t-T_x} \geq x-y) = \mathbb{P}(T_x \leq t,\ W_t - x \geq x-y) = \mathbb{P}(W_t \geq 2x-y).$$

où la 2e égalité vient de l'inclusion $\{W_t \geq 2x-y\} \subset \{T_x \leq t\}$, laquelle découle immédiatement de ce que $2x-y \geq x$. □

En dérivant par rapport à x puis à y, on obtient la densité jointe du couple de v.a. (S_t, W_t) :

$$f_{(S_t,W_t)}(x,y) = \frac{2(2x-y)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2x-y)^2}{2t}} \mathbb{1}_{\{x \geq y,\ x \geq 0\}}, \quad \forall t \geq 0$$

On peut aussi calculer la loi de S_t, soit en intégrant l'expression précédente par rapport à y, soit en écrivant pour tout $x \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(S_t \geq x) &= \mathbb{P}(S_t \geq x,\ W_t \geq x) + \mathbb{P}(S_t \geq x,\ W_t \leq x)\\ &= \mathbb{P}(W_t \geq x) + \mathbb{P}(W_t \geq 2x-x)\\ &= 2\,\mathbb{P}(W_t \geq x) = \mathbb{P}(|W_t| \geq x)\end{aligned}$$

Par égalité des fonctions de répartitions

$$\boxed{S_t \overset{d}{=} |W_t|} \quad \forall t \geq 0.$$

Cela permet de calculer simplement la loi de T_a, pour $a>0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_a \leq t) &= \mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(|W_t| \geq a) = \mathbb{P}(W_t^2 \geq a^2)\\ &= \mathbb{P}(t W_1^2 \geq a^2) = \mathbb{P}(a^2 W_1^{-2} \leq t)\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{T_a \overset{d}{=} \frac{a^2}{W_1^2}}$$

On a alors directement la densité : $f_{T_a}(t) = \dfrac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}} \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$

On peut montrer également que

Théorème : Les processus $\{S_t - W_t,\ t \geq 0\}$ et $\{|W_t|,\ t \geq 0\}$ ont même loi

Rq : = en loi entre processus bien plus fort que $S_t \overset{d}{=} |W_t|\ \forall t \geq 0$.

Rq2 : $S_t \overset{d}{=} S_t - W_t$ conséquence directe.

IV Mouvement Brownien Multidimensionnel

Soit $\{B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^n), t \geq 0\}$ un processus n-dimensionnel.
On dit que B est un Brownien multidimensionnel si les processus B^i, $i \leq n$ sont des Browniens réels indépendants.

B est aussi un processus à accroissements indépendants et stationnaires et un processus gaussien de fonction de covariance

$$\mathbb{E}(\langle B_t, B_s \rangle) = n(s \wedge t)$$

(où $\langle \cdot , \cdot \rangle$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$).

- On a également une caractérisation de type Lévy :
Un processus n-dimensionnel B est un mouvement brownien ssi tous les processus B^i et $(B_t^i B_t^j - \delta_{i,j} t, \ t \geq 0)$ sont des martingales.
(avec la notation de Kronecker $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$).

- Pour tous $a_1, \dots, a_n$, il est facile de vérifier en calculant son espérance et sa covariance que le processus W défini par

$$W_t = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + \dots + a_n^2}} (a_1 B_t^1 + \dots + a_n B_t^n)$$

est un Mouvement Brownien réel.

- On dira que 2 mvmts browniens réels B^1 et B^2 sont corrélés avec coefficient de corrélation ρ si le processus $t \mapsto B_t^1 B_t^2 - \rho t$ est une martingale.

On "décorrèle" alors B^1 et B^2 en introduisant $B_t^3 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}} (B_t^2 - \rho B_t^1)$
Ce processus est une martingale.
On peut montrer que $(B_t^3)^2 - t$ est aussi une martingale, de sorte que B^3 est un mouvement brownien.
B^3 est indépendant de B^2, de sorte que $B^2 B^3$ est une martingale.

4/ Crochet - Variation quadratique.

(cf chap 1)
Rappel : Sous réserve d'uniforme intégrabilité, la décomposition de Doob-Meyer assure l'existence, pour Z une $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue de carré intégrable, d'un processus croissant A_t tel que $t \mapsto Z_t^2 - A_t$ soit une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.
On appelle ce processus crochet de la martingale Z, et on écrit $\langle Z \rangle_t := A_t$. (ou variation quadratique).

Quitte à utiliser les temps d'arrêt
$$\tau_n = \inf \{ t \geq 0, Z_t^2 = n \},$$
on peut maintenant étendre cette définition aux martingales locales :

Déf : si Z est une martingale locale, $\langle Z \rangle$ est l'unique processus croissant continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que $t \mapsto Z_t^2 - \langle Z \rangle_t$ soit une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale.

On peut également définir le crochet de deux $(\mathcal{F}_t)$-martingales locales M et N en écrivant :

$$\boxed{\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{2} \left(\langle M+N \rangle_t - \langle M \rangle_t - \langle N \rangle_t \right)}$$

Propriété : Le crochet $\langle M, N \rangle$ est aussi l'unique processus à variation finie tel que le processus $MN - \langle M, N \rangle$ soit une martingale locale

On a alors :

Proposition : Soit M une martingale locale continue.
Alors M est une martingale L^2 ssi $E(\langle M \rangle_t) < +\infty \ \forall t \geq 0$.

Enfin, la proposition suivante donne de $\langle M,N\rangle$ une importante construction trajectorielle :

Proposition : Soient M et N deux martingales locales continues. Alors p.s. pour tout $t \geq 0$:

$$\langle M,N\rangle_t = \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{2^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})$$

où $\{t_i^n, i=0,\dots,2^n\}$ désigne la subdivision régulière sur $[0,t]$

Remarques : • Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, le terme de droite est bien défini pour deux processus à variation quadratique finie.

• On voit aussi que ce crochet sera nul dès qu'une variation quadratique est nulle, en particulier dès qu'un des deux processus est à variation finie.

Proposition : Une conséquence cruciale est que le crochet $\langle M,N\rangle$ reste inchangé si l'on effectue un changement de probabilité équivalente.

Définition : On dit que deux martingales continues sont orthogonales si leur crochet est nul, càd si leur produit est une martingale.

Exemples : • Deux Browniens indépendants sont des martingales orthogonales

• Le crochet du Brownien B est $\langle B\rangle_t = t$.

• On peut aussi calculer le crochet de deux Browniens corrélés avec coefficient ρ. Par définition $\langle B_1,B_2\rangle_t = \rho t$.

- On peut aussi bien entendu calculer le crochet d'intégrales stochastiques générales, et les propriétés de martingale entraînent immédiatement que

$$\langle I(\theta)\rangle_t = \int_0^t \theta_s^2\, ds \quad \text{et} \quad \langle I(\theta), I(\varphi)\rangle_t = \int_0^t \theta_s \varphi_s\, ds$$

autrement écrit :

$$\boxed{\left\langle \int_0^{\cdot} \theta_s\, dB_s, \int_0^{\cdot} \varphi_s\, dB_s \right\rangle = \int_0^t \theta_s \varphi_s\, ds}.$$

- <u>Exercice</u> : Montrer que si M et N sont deux martingales indépendantes et suffisamment intégrables, par rapport à $\mathcal{F}_t$, $\mathcal{F}_t = \sigma\{M_s, N_s, s \leq t\}$, alors $(M_t N_t)$ est une martingale et $\langle M, N\rangle_t = 0$ p.s.

IV Processus d'Itô

. 1/ Semi-martingale = processus de la forme $X_t = M_t + A_t$ où M martingale et A processus à variat° bornée.

Ce sont des processus écrits sous la forme

$$X_t = x + \int_0^t b_s\,ds + \int_0^t \sigma_s\,dB_s \qquad (*)$$

où b est un processus $\mathcal{F}_t^B$-adapté tel que $\int_0^t |b_s|\,ds < +\infty$ p.s. $\forall t \geq 0$, et σ un bon processus local (ie càglàd, $\mathcal{F}_t^B$ adapté et $\int_0^t \sigma_s^2\,ds < +\infty$ p.s. $\forall t \geq 0$).

On utilise également la notation sous forme d'EDS (Equation Différentielle Stochastique) :

$$\begin{cases} dX_t = b_t\,dt + \sigma_t\,dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

→ condition initiale.

. Remarque : Si condition terminale $X_T = \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$ alors cette équation s'appelle une EDSR (Rétrograde).

. Le coefficient b_t s'appelle la dérive (ou le drift) du processus, et σ_t son coefficient de diffusion (ou volatilité).

On appelle aussi le processus

$$t \longmapsto x + \int_0^t b_s\,ds$$

la partie à variation finie de X, et le processus

$$t \longmapsto \int_0^t \sigma_s\,dB_s$$

la partie martingale de X (c'est a priori une martingale locale, d'après la construction de l'intégrale stochastique).

Comme une martingale locale à variation finie est un processus constant, on en déduit que la décomposition $(*)$ est unique, au sens où si X admet une autre décomposition

$$X_t = x + \int_0^t \tilde{b}_s\,ds + \int_0^t \tilde{\sigma}_s\,dB_s,$$

alors $b \equiv \tilde{b}$ et $\sigma \equiv \tilde{\sigma}$.

En particulier, $\boxed{X \text{ sous la forme } (*) \text{ est une martingale locale } \underline{\text{ssi}}\ b \equiv 0}$

En fait, cette représentation des martingales locales dans une filtration Brownienne est caractéristique, indépendamment de ce que le processus soit "a priori" un processus d'Itô :

Théorème de représentation des martingales locales :
Soit B un mouvement Brownien et M une $(\mathcal{F}_t^B)$-martingale locale continue. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ et θ un bon processus local tel que

$$M_t = x + \int_0^t \theta_s \, dB_s$$

Ce théorème est extrêmement important en Finance, et est lié à la complétion d'un marché financier.
L'hypothèse fondamentale est que M est une martingale <u>par rapport à la filtration naturelle du Brownien</u>.

<u>Remarque</u> : Dans certains cas, la formule de Clark-Ocone donne une représentation explicite du processus θ.

→ Dans la filtration brownienne, processus d'Itô = semi-martingale

Crochet de 2 processus d'Itô

Si X^1 et X^2 sont deux processus d'Itô de décomposition

$$X_t^i = x^i + \int_0^t b_s^i \, ds + \int_0^t \sigma_s^i \, dB_s \qquad \text{pour } i = 1,2$$

alors leur crochet est par définition <u>le crochet de leurs partie martingales</u>. Autrement dit :

$$\langle X^1, X^2 \rangle = \langle I(\sigma^1), I(\sigma^2) \rangle$$
$$= \left\langle \int_0^{\cdot} \sigma_s^1 \, dB_s , \int_0^{\cdot} \sigma_s^2 \, dB_s \right\rangle$$
$$= \int_0^t \sigma_s^1 \sigma_s^2 \, ds$$

Attention, à cause de la partie à variation finie, le processus $t \mapsto X_t^1 X_t^2 - \langle X^1, X^2 \rangle$ n'est pas une martingale locale en général.
En revanche, comme $X^i - I(\sigma^i)$ est un processus à variat° finie, on a toujours

$$\langle X^1, X^2 \rangle_t = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{2^n} \left(X_{t_i^n}^1 - X_{t_{i-1}^n}^1 \right) \left(X_{t_i^n}^2 - X_{t_{i-1}^n}^2 \right).$$

Intégration par rapport à une martingale générale.

Soit M une martingale continue $/ (\mathcal{F}_t^B)$.

Le Théorème de représentation donne $\exists x \in \mathbb{R}$ et θ ~~bon~~ processus local

tq
$$M_t = x + \int_0^t \theta_s \, dB_s$$

Ainsi on peut donner un sens à
$$dM_t = \theta_s \, dB_s$$

et donc à
$$\int_0^t X_s \, dM_s = \int_0^t X_s \theta_s \, dB_s \quad \text{pour tout } X \text{ bon processus local.}$$

De même on peut donner un sens à l'intégrale par rapport à une semi-martingale continue :
$$X_t = M_t + A_t \quad \text{où } M_t \text{ martingale}$$
A_t processus adapté à variations bornées.

Ainsi
$$\int_0^t H_s \, dX_s = \int_0^t H_s \, dM_s + \int_0^t H_s \, dA_s .$$

~~Ce qui~~ TRM : $dM_s = f(B_s) \, dB_s$

mais aussi $dA_s = g(B_s) \, ds$

d'où
$$dX_s = f(B_s) \, dB_s + g(B_s) \, ds \qquad (= \text{EDS})$$

et donc
$$\int_0^t H_s \, dX_s = \int_0^t f(B_s) \, dB_s + \int_0^t g(B_s) \, ds .$$

V - Formule d'Itô.

Dans ce paragraphe, on se donne un processus d'Itô réel X de décomposition

$$X_t = x + \int_0^t b_s \, ds + \int_0^t \sigma_s \, dB_s$$

et une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière.

La formule d'Itô vise à donner une formule de changement de variable pour le processus $f(X_t)$ qui sera un processus d'Itô.

* Imaginons que $\sigma \equiv 0$ et que b soit $\mathcal{C}^0$.

Alors X est un processus $\mathcal{C}^1$ et $(f \circ X)' = (f' \circ X) X'$.

D'où par la ~~e~~formule de changement de variables classique :

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t (f \circ X)'(s) \, ds \\ &= f(x) + \int_0^t f'(X_s) X'_s \, ds \\ &= f(x) + \int_0^t f'(X_s) \, dX_s . \end{aligned}$$

Cette formule garderait encore un sens quand $\sigma \not\equiv 0$ en posant

$$dX_s = b_s \, ds + \sigma_s \, dB_s .$$

Mais en fait, cette formule de 1^{er} ordre n'est plus vraie quand $\sigma \not\equiv 0$, à cause du caractère quadratique de la partie martingale de X.

On a en fait une formule du 2^e ordre :

Théorème (1ère formule d'Itô)

Supposons f de classe $\mathcal{C}^2$. Alors

$$f(X_t) = f(x) + \int_0^t f'(X_s) \, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 \, ds$$

Si f est à dérivées bornées, le processus

$f(X_t) - \int_0^t f'(X_s) b_s \, ds - \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) \sigma_s^2 \, ds$ est une martingale

Cette formule s'écrit :

$$\boxed{df(X_t) = f'(X_t) \, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t) \, d\langle X \rangle_t} \quad (1)$$

On peut également écrire :

$$df(X_t) = f'(X_t)\, b_t\, dt + \frac{1}{2} f''(X_t)\, d\langle X\rangle_t + f'(X_t)\sigma_t\, dB_t$$

$$= \underbrace{\left(f'(X_t)\, b_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, \sigma_t^2\right) dt}_{\text{dérive}} + \underbrace{f'(X_t)\, \sigma_t\, dB_t}_{\text{volatilité}} .$$

En particulier $t \mapsto f(X_t)$ est un processus d'Itô de dérive

$$\int_0^t \left(f'(X_s)\, b_s + \frac{1}{2} f''(X_s)\, \sigma_s^2\right) ds$$

et de partie martingale

$$\int_0^t f'(X_s)\, \sigma_s\, dB_s .$$

Quand les dérivées sont bornées, l'intégrale stochastique apparaissant dans la formule est une vraie martingale, et on en déduit :

$$E(f(X_t)) = E(f(X_0)) + E\left[\int_0^t \left(f'(X_s)\, b_s + \frac{1}{2} f''(X_s)\sigma_s^2\right) ds\right]$$

$$= E(f(X_0)) + \int_0^t E\left(f'(X_s)\, b_s + \frac{1}{2} f''(X_s)\, \sigma_s^2\right) ds .$$

Les financiers utilisent souvent une notation (variante de (1)) :

$$df(X_t) = f'(X_t)\, dX_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\, dX_t . dX_t$$

avec la table de multiplication

	dt	dB_t
dt	0	0
dB_t	0	dt

Remarque : On peut également calculer de la même façon des espérances conditionnelles :

$$E\left[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s^B\right] = f(X_s) + E\left[\int_s^t \left(f'(X_u)\, b_u + \frac{1}{2} f''(X_u)\, \sigma_u^2\right) du \;\middle|\; \mathcal{F}_s^B\right]$$

$$= f(X_s) + \int_s^t E\left(f'(X_u)\, b_u + \frac{1}{2} f''(X_u)\, \sigma_u^2 \mid \mathcal{F}_s^B\right) du .$$

Quid si la fonction à étudier dépend de X_t et de t ?

La 2e formule d'Itô fait intervenir le temps en première variable

Elle sera très utile pour étudier les EDS inhomogènes.

Théorème (2e formule d'Itô)

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ par rapport à t, de classe $\mathcal{C}^2$ par rapport à x. On a :

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)\,ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)\,d\langle X\rangle_s$$

Comme précédemment, on peut écrire la formule sous forme différentielle :

$$df(t,X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)\,dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)\,d\langle X\rangle_t$$

Exemple : le mouvement brownien géométrique ou processus log-normal est défini par l'équation :

$$X_t = x + \mu\int_0^t X_s\,ds + \sigma\int_0^t X_s\,dB_s.$$

avec $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$.

cela équivaut à l'EDS de Black-Scholes $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$.

Si on pose $Y_t = e^{-\mu t}X_t$, pour tout $t \geq 0$, la formule d'Itô donne :

$f(t,X_t) = e^{-\mu t}X_t$; $\frac{\partial f}{\partial t} = -\mu X_t e^{-\mu t}$; $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\mu t}$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$$dY_t = -\mu X_t e^{-\mu t}dt + e^{-\mu t}dX_t = \sigma Y_t\,dB_t.$$

$$\Rightarrow \quad Y_t = x + \int_0^t \sigma Y_s\,dB_s.$$

Appliquons maintenant la formule d'Itô à $g(Y_t) = \ln(Y_t)$.

$g(Y_t) = \ln Y_t$; $g'(Y_t) = \frac{1}{Y_t}$; $g''(Y_t) = -\frac{1}{Y_t^2}$ et $\langle Y\rangle_t = \sigma^2 Y_t^2\,dt$

D'après Itô,
$$\begin{aligned} dg(Y_t) &= g'(Y_t)\,dY_t + \frac{1}{2}g''(Y_t)\,d\langle Y\rangle_t \\ &= \frac{1}{Y_t}dY_t + \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{Y_t^2}\right)\sigma^2 Y_t^2\,dt \\ &= \sigma\,dB_t - \frac{1}{2}\sigma^2\,dt. \end{aligned}$$

Ainsi cela montre que

$$\ln Y_t = \ln x + \int_0^t \sigma \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds$$

$$= \ln x + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t.$$

Et donc on obtient une expression de Y_t :

$$Y_t = x \exp\left[\sigma B_t - \sigma^2 \frac{t}{2}\right]$$

et donc de X_t :

$$X_t = x \exp\left[\mu t + \sigma B_t - \sigma^2 \frac{t}{2}\right].$$

On peut aussi considérer le cas où μ et σ sont des fonctions déterministes :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s) X_s \, ds + \int_0^t \sigma(s) X_s \, dB_s.$$

On dit alors que X est un <u>Brownien géométrique à coefficients déterministes</u>.

Toujours par la 2^e formule d'Itô on montre que le processus

$$t \longmapsto X_t \exp\left[-\int_0^t \mu(s)\, ds\right]$$

est une martingale locale.

C'est en fait une vraie martingale et

$$X_t = X_0 \exp\left[\int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) ds - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s) ds\right].$$

~~Finalement, une 3^e formule d'Itô permet de traiter les fonctions de plusieurs variables~~ :

~~Théorème (3^e formule d'Itô)~~

~~Soient X^1 et X^2 deux processus d'Itô issus de x_1 (resp. x_2)~~.

~~Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées~~.

~~On a~~

$\cancel{f(X_t^1, X_t^2)}$

Finalement, une 3^e formule d'Itô permet de traiter les fonctions de plusieurs variables ... et de retrouver les 2 autres formules !!

Théorème (3^e ... et unique formule d'Itô)

Soient X et Y deux processus d'Itô issus de x et y.

Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ à dérivées bornées.

On a :

$$f(X_t, Y_t) = f(x,y) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s)\, dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s)\, dY_s$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f(X_s,Y_s)}{\partial x^2} d\langle X\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f(X_s,Y_s)}{\partial y^2} d\langle Y\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f(X_s,Y_s)}{\partial x \partial y} d\langle X, Y\rangle_s .$$

Rq 1 : . Pour f indépendante de Y_t, on retrouve la 1ère formule d'Itô !

. Pour $Y_t = t$ on retrouve la 2^e formule d'Itô !

$\Rightarrow$ UNIQUE FORMULE À RETENIR !!!

Proposition : Pour X_t et Y_t suivant les dynamiques

$$dX_t = b_t^X dt + \sigma_t^X dB_t^X$$
$$dY_t = b_t^Y dt + \sigma_t^Y dB_t^Y$$

où B^X et B^Y sont deux Brownien corrélés de coefficient de corrél^o ρ

La formule devient :

$$f(X_t, Y_t) = f(x,y) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s)\, dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s)\, dY_s$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f(X_s,Y_s)}{\partial x^2}(\sigma_s^X)^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s,Y_s)(\sigma_s^Y)^2 ds + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X_s,Y_s)\rho\sigma_s^X\sigma_s^Y ds$$

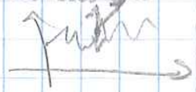
Exemple important : $f(x,y) = xy$.

$$\boxed{d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t}$$

VI Equations Différentielles Stochastiques

1/ Approche qualitative

Avant d'appliquer "brutalement" la formule d'Itô, il y a certaines choses que l'on peut déduire sur le comportement d'une ~~solution~~ d'EDS à la lecture même de l'EDS. $dX_t = \underbrace{\mu_t\, dt}_{\text{tendance}} + \underbrace{\sigma_t\, dW_t}_{\text{écart-type instantané}}$



Exemple : (ex 6. TD Itô) décrire le comportement de la solution de l'EDS

$$dX_t = \left(\frac{1}{2} - X_t\right) dt + \sqrt{X_t(1-X_t)}\, dW_t$$

en supposant que la valeur initiale X_0 est une va à valeurs dans $[0,1]$

Expliquer pourquoi X_t est aussi une va à valeurs dans $[0,1]$.

solution : explication qualitative du comportement de l'EDS.

2/ Processus d'Ornstein Uhlenbeck

Très utile en finance pour décrire la dynamique des taux courts, en particulier dans le modèle de Vasicek (1977), on modélise l'évolution du processus de taux par l'EDS : $(a, b > 0)$

$$dX_t = a(b - X_t)\, dt + \sigma\, dW_t$$

On applique Itô à $Y_t = \underbrace{(X_t - b)e^{at}}_{= f(t, X_t)}$ et on obtient :

$d(t) = 0 \quad d(t,Y) = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$$\begin{aligned} dY_t &= a(X_t - b)e^{at}\, dt + e^{at} dX_t + 0 + 0 + 0 \\ &= aY_t\, dt + a(-Y_t)\, dt + \sigma e^{at} dW_t \\ &= \sigma e^{at} dW_t \end{aligned}$$

D'où $Y_t - Y_0 = \sigma \int_0^t e^{as}\, dW_s$

d'où $(X_t - b)e^{at} = (X_0 - b) + \sigma \int_0^t e^{as}\, dW_s$

$$\Rightarrow \quad X_t = b + (X_0 - b)e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{a(s-t)}\, dW_s .$$

- lorsque taux faible $\rightarrow$ tendance $\sim abdt > 0$
- lorsque taux élevé $\rightarrow$ tendance $a.(b - X_t)\, dt < 0$

d'où le terme de "force de rappel"

⚠ Ce processus peut prendre des valeurs négatives.

Si $X_t = 0$, $dX_t = ab\,dt + \sigma dW_t$ loi normale

D'où le choix de Cox - Ingersoll - Ross de modéliser plutôt les taux d'intérêt par un processus "racine carrée"

$$dX_t = a(b - X_t)\,dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dW_t .$$

3/ Martingale exponentielle et condition de Novikov.

Soit θ un bon processus local et Z_0 une constante.
Par la formule d'Itô, on démontre que l'unique solution de l'EDS

$$dZ_t = \theta_t Z_t \, dB_t ,$$

(ou sous forme intégrale $Z_t = Z_0 + \int_0^t \theta_s Z_s \, dB_s$

est $$Z_t = Z_0 \exp\left[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \, ds\right].$$

Le processus Z, noté $\mathcal{E}_t(\theta * B)$ est appelé l'exponentielle de Doléans-Dade de $\theta * B$.

D'après l'EDS, c'est une martingale locale positive dès que $Z_0 > 0$.
Le critère suivant, de preuve difficile, permet de savoir quand l'exponentielle de Doléans-Dade est une vraie martingale :

> **Théorème** (condition de Novikov)
> Supposons que $\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \, ds\right)\right) < +\infty$, $\forall t > 0$.
> Alors $t \mapsto \mathcal{E}_t(\theta * B)$ est une vraie martingale.

Quand la condition de Novikov n'est pas satisfaite, $\mathcal{E}(\theta * B)$ est une martingale locale positive, donc une surmartingale, et $\mathbb{E}(Z_t) \leq \mathbb{E}(Z_s) \leq Z_0$ $\forall t \geq s \geq 0$.
On ne connaît pas de conditions plus faciles à vérifier que la condition de Novikov, sauf dans le cas particulier suivant :

> **Proposition** : Supposons $\theta_t = f(t, B_t)$ où f est une fonction globalement Lipschitzienne.
> Alors $t \mapsto \mathcal{E}_t(\theta * B)$ est une vraie martingale.

Théorème : Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$.
Alors il existe une unique semi-martingale continue solution de l'EDS

$$(*) \qquad Z_t = 1 + \int_0^t Z_s \, dX_s \qquad (\text{ou } dZ_s = Z_s \, dX_s)$$

et elle s'explicite en :

$$Z_t(X) = \exp\left(X_t - \frac{1}{2} \langle X \rangle_t\right)$$

preuve : c'est une conséquence des résultats sur l'exponentielle de Doléans-Dade.

Définition : Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$.
On appelle **exponentielle stochastique** de X, notée $\mathcal{E}(X)$ l'unique solution de $(*)$.

Exemple : soit $X = aB$ où $a \in \mathbb{R}$ et B le mvt brownien.
Alors $\mathcal{E}_t(aB) = \exp\left(aB_t - \frac{1}{2} a^2 t\right)$
est le mouvement brownien géométrique (de tendance nulle).

On donne quelques résultats sur ces exponentielles stochastiques :

Théorème : Soit X et Y deux semi-martingales continues, $X_0 = Y_0 = 0$.
Alors $\mathcal{E}(X) \cdot \mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y \rangle)$

preuve : on pose $U_t = \mathcal{E}_t(X)$ et $V_t = \mathcal{E}_t(Y)$.
On applique la formule d'intégration par parties

$$U_t V_t - 1 = \int_0^t \left(U_s \, dV_s + V_s \, dU_s + d\langle U, V \rangle_s\right)$$

En posant $W = UV$ et en utilisant la définition différentielle de l'exponentielle stochastique on obtient le résultat $\square$.

Corollaire : Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$.
Alors l'inverse $\mathcal{E}_t^{-1}(X) = \mathcal{E}_t(-X + \langle X \rangle)$

On peut considérer des EDS linéaires un peu plus générales.

Théorème : Soit Z et H deux semi-martingales continues réelles, $Z_0 = 0$.
Alors l'EDS
$$X_t = H_t + \int_0^t X_s \, dZ_s$$
admet pour unique solution
$$\mathcal{E}_H(Z)_t = \mathcal{E}_t(Z) \left(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(Z) \left(dH_s - d\langle H, Z \rangle \right)_s \right)$$

IV - Théorème de Représentation Prévisible

Soit B un mouvement brownien et $\mathbb{F}$ sa filtration naturelle

$$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t^B)_{t \geq 0} \quad \text{où} \quad \mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s,\ s \leq t)$$

⚠ il est très important que $\mathcal{F}_t^B$ soit la filtration naturelle.

On a le théorème très important suivant :

Théorème (de représentation prévisible)

- Soit M une $(\mathcal{F}_t^B)$-martingale telle que $\sup_{t \leq T} \mathbb{E}(M_t^2) < +\infty$.
  Alors il existe un unique processus prévisible H tq $\mathbb{E}\left(\int_0^T H_s^2 ds\right) < +\infty$ et tq
  $$\forall t \in [0,T], \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dB_s$$
- Si M est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale, il existe un unique processus prévisible H tel que $\int_0^T H_s^2 ds < +\infty$ et
  $$\forall t \in [0,T], \quad M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dB_s.$$

Rq : Ce résultat est important en finance pour exhiber un portefeuille de couverture. On remarque que $d\langle M, B\rangle_t = H_t \, dt$.

- Si M est une martingale de la forme $f(t, B_t)$, on trouve $H_t = \frac{\partial f}{\partial x}(t, B_t)$ en appliquant la formule d'Itô.
- Ce théorème se généralise aux Browniens d-dimensionnels.

Corollaire : Toutes les $(\mathcal{F}_t^B)$-martingales locales sont continues

Chapitre 4 : Changement de Probabilité Théorème de Girsanov.

Avec la formule d'Itô, le théorème de Girsanov est l'outil fondamental du calcul stochastique. Il décrit comment changer de façon absolument continue la loi de certains processus. Plus précisément, on considère un processus $\{X_t, t \geq 0\}$ défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ et on perturbe la mesure $\mathbb{P}$ à l'aide d'une $(\mathcal{F}_t)$-martingale exponentielle. On obtient alors une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}$, sous laquelle le processus X suit une autre loi, qu'il aurait pu être délicat d'étudier directement. On étudie alors cette loi en revenant sous la mesure $\mathbb{P}$ avec la martingale exponentielle.

Les applications de cette méthode sont multiples, aussi bien en finance que pour le mouvement brownien proprement dit.

I - Généralités

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et Z une v.a. $\mathcal{F}$-mesurable, positive d'espérance 1. On définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}$ par

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z \mathbb{1}_A) = \int_A Z \, d\mathbb{P} .$$

(densité de Radon-Nikodym)

La formule de Bayes nous assure que pour toute v.a. X, $\mathcal{F}$-mesurable et $\mathbb{Q}$-intégrable, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z.X) .$$

Si l'espace de probabilité est muni d'une filtration, et si Z_T est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable positive d'espérance 1, on définit $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_T$ par

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T \mathbb{1}_A) = \int_A Z_T \, d\mathbb{P} .$$

La probabilité $\mathbb{Q}$ est équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ ssi $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$ chargent les mêmes ensembles de mesure nulle, donc si Z_T ne s'annule jamais, puisque $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T \mathbb{1}_A)$, donc ssi $Z_T > 0$.

Alors la densité de Radon-Nikodym de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}$ est $\frac{1}{Z_T}$.

ie $\quad \mathbb{P}(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{Z_T} \mathbb{1}_A\right)$.

Enfin, pour tout $t < T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t$, on a :

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T \mathbb{1}_A \mid \mathcal{F}_t)\right)$$
$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T \mid \mathcal{F}_t)}_{Z_t} \mathbb{1}_A\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t \mathbb{1}_A)$$

Il est naturel d'associer à la va Z_T le processus martingale

$$Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T \mid \mathcal{F}_t).$$

Ainsi, $\forall t$ et $\forall$ va. X $\mathcal{F}_t$-mesurable, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T X_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T X_t \mid \mathcal{F}_t)\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T \mid \mathcal{F}_t) . X_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t X_t).$$

En fait, Z_t est la densité de Radon-Nikodym (définie à une modificat° près) de $\mathbb{Q}$ restreint à $\mathcal{F}_t$ par rapport à $\mathbb{P}$ restreint à $\mathcal{F}_t$. On note :

$$Z_t = \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} \quad \text{ou encore} \quad d\mathbb{Q}\big|_{\mathcal{F}_t} = Z_t \, d\mathbb{P}\big|_{\mathcal{F}_t}.$$

Lemme : Soit $\{M_t, t \geq 0\}$ un processus.
C'est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale sous $\mathbb{Q}$ ssi le processus $\{Z_t M_t, t \geq 0\}$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale sous $\mathbb{P}$.

preuve : Supposons que M soit une $\mathbb{Q}$-martingale. $\forall s \leq t \leq T$, $\forall A \in \mathcal{F}_s$, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t M_t \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(M_t \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(M_s \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_s M_s \mathbb{1}_A).$$

et on déduit que ZM est une $\mathbb{P}$-martingale.

La réciproque se démontre de la même façon.

Proposition : (formule de Bayes généralisée)

Si on considère un processus X $\mathcal{F}$-adapté, la formule de Bayes généralisée s'écrit

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X_T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\frac{Z_T}{Z_t} X_T \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{1}{Z_t} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T X_T \mid \mathcal{F}_t)$$

preuve : En effet, pour toute v.a. Y_t, $\mathcal{F}_t$-mesurable bornée, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}(X_T Y_t) &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T X_T Y_t) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T X_T Y_t \mid \mathcal{F}_t)) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T X_T \mid \mathcal{F}_t) Y_t) \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{Z_t} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T X_T \mid \mathcal{F}_t) Y_t\right) \quad \square .
\end{aligned}$$

II - La formule de Cameron - Martin

Avant de passer à cette formule qui est de type fonctionnel, donnons un exemple en dimension finie.

Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes, construites sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

$\forall (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$, on calcule :

$$\mathbb{E}\left(\exp \sum_{i=1}^n \mu_i X_i\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{E}(\exp(\mu_i X_i)) = \prod_{i=1}^n \exp\left(\frac{\mu_i^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu_i^2\right)$$

ce qui entraîne que

$$\mathbb{E}\left(\exp \sum_{i=1}^n \left(\mu_i X_i - \frac{\mu_i^2}{2}\right)\right) = 1 .$$

Ainsi, on peut définir une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ en posant

$$Z(\omega) = \exp \sum_{i=1}^n \left(\mu_i X_i(\omega) - \frac{\mu_i^2}{2}\right)$$

et $\mathbb{Q}(d\omega) = Z(\omega)\, \mathbb{P}(d\omega)$.

Autrement dit : $\mathbb{Q}(A) = E_{\mathbb{P}}(Z \mathbb{1}_A) = \int_A Z(\omega)\, d\mathbb{P}(\omega) = \int_A Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega), \forall A \in \mathcal{F}$.

La mesure $\mathbb{Q}$ est bien une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ puisque $E_{\mathbb{P}}(Z) = 1$ et que Z est strictement positive.

De plus comme $Z > 0$ p.s., les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes

$$\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{Q}(A) = 0 \qquad \forall A \in \mathcal{F}.$$

La variable Z désigne la densité de Radon-Nikodym de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}$.

On cherche maintenant à savoir quelle est la loi du n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$ sous cette nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$.

On écrit :

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(X_1 \in dx_1, \dots, X_n \in dx_n) &= \exp\left[\sum_{i=1}^n \left(\mu_i x_i - \frac{\mu_i^2}{2}\right)\right] \mathbb{P}(X_1 \in dx_1, \dots, X_n \in dx_n) \\ &= (2\pi)^{-n/2} \exp\left(\sum_{i=1}^n \left(\mu_i x_i - \frac{\mu_i^2}{2}\right)\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{2}\right) dx_1 \dots dx_n \\ &= (2\pi)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_i)^2\right) dx_1 dx_2 \dots dx_n.\end{aligned}$$

et on en déduit que sous $\mathbb{Q}$

$$(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\mu, I_d).$$

où $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$.

La formule de Cameron-Martin obéit au même principe de changement de probabilité, sauf que celui-ci a lieu sur l'espace des fonctions continues et donc en dimension infinie.

On se donne $\{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on note $\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$ sa <u>filtration naturelle complétée</u>.

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on sait que le processus

$$t \longmapsto Z_t^m = \exp\left[m W_t - \frac{m^2 t}{2}\right]$$

est une $\mathcal{F}_t^W$-martingale positive.

Remarquons déjà l'analogie entre cette martingale Z^m et la variable Z définie plus haut.

On fixe alors un horizon $T > 0$ et on construit une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}_T^m$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ en posant $\quad \mathbb{Q}_T^m(A) = E_{\mathbb{P}}(Z_T^m \mathbb{1}_A)$.

La formule de Cameron-Martin spécifie alors la loi de W sous $\mathbb{Q}_T^m$:

Théorème (Formule de Cameron-Martin)

Sous la mesure $\mathbb{Q}_T^m$, le processus

$$\tilde{W} : t \longmapsto W_t - mt \quad , \quad t \leq T$$

est un mouvement brownien.

preuve : Remarquons d'abord que les tribus $\mathcal{F}_t^W$ et $\mathcal{F}_t^{\tilde{W}}$ sont égales $\forall t \leq T$.

On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$ et on considère le processus

$$L_t^\lambda = \exp\left[\lambda \tilde{W}_t - \lambda^2 \frac{t}{2}\right].$$

Pour tout $s \leq t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_s^W$, on remarque que

$$\begin{aligned}
E_{\mathbb{Q}}(L_t^\lambda \mathbb{1}_A) &= E_{\mathbb{P}}(L_t^\lambda Z_t \mathbb{1}_A) \\
&= E_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\lambda \tilde{W}_t - \frac{\lambda^2 t}{2} + m W_t - m^2 \frac{t}{2}\right) \mathbb{1}_A\right] \\
&= E_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(\lambda W_t - \lambda m t - \lambda^2 \frac{t}{2} + m W_t - m^2 \frac{t}{2}\right) \mathbb{1}_A\right] \\
&= E_{\mathbb{P}}\left(\exp\left((\lambda+m) W_t - (\lambda+m)^2 \frac{t}{2}\right) \mathbb{1}_A\right) \\
&= E_{\mathbb{P}}\left(\exp\left((\lambda+m) W_s - (\lambda+m)^2 \frac{s}{2}\right) \mathbb{1}_A\right) \\
&= E_{\mathbb{P}}\left(L_s^\lambda Z_s \mathbb{1}_A\right) = E_{\mathbb{Q}}\left(L_s^\lambda \mathbb{1}_A\right).
\end{aligned}$$

où dans l'avant-dernière ligne on a utilisé la propriété de $(\mathcal{F}_t^W)$-martingale sous $\mathbb{P}$ du processus $t \longmapsto \exp\left[(\lambda+m) W_t - (\lambda+m)^2 \frac{t}{2}\right]$, puisque W est un Brownien sous $\mathbb{P}$.

On en déduit que $E_{\mathbb{Q}}(L_t^\lambda \mathbb{1}_A) = E_{\mathbb{Q}}(L_s^\lambda \mathbb{1}_A) \quad \forall A \in \mathcal{F}_s^W$

cela signifie que

$$E_{\mathbb{Q}}(L_t^\lambda \mid \mathcal{F}_s^W) = L_s^\lambda \quad , \quad \forall\, s \leq t \leq T$$

Donc L^λ est une $(\mathcal{F}_t^W)$-martingale pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$.

Par le théorème de caractérisation de Paul Levy, cela signifie que $\tilde{W}$ est un mouvement brownien. $\square$

III - Les deux théorèmes de Girsanov

On se donne à nouveau $\{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on note $\{\mathcal{F}_t^W, t \geq 0\}$ sa filtration naturelle complétée.

Soit $\{\theta_t, t \geq 0\}$ un bon processus local vérifiant la condition de Novikov.

Par les résultats du chapitre précédent, on sait que l'unique solution de l'EDS

$$Z_t^\theta = 1 + \int_0^t \theta_s Z_s^\theta \, dW_s$$

qui s'écrit

$$Z_t^\theta = \exp\left[\int_0^t \theta_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \, ds\right]$$

est une $(\mathcal{F}_t^W)$ - martingale.

Comme précédemment, on fixe un horizon $T > 0$ et on définit la mesure

$$\mathbb{Q}_T^\theta(d\omega) = Z_T(\omega) \, \mathbb{P}(d\omega).$$

sur $(\Omega, \mathcal{F}_T^W)$, qui est une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T^W$.

La loi de W sous $\mathbb{Q}_T^\theta$ est alors donnée par le théorème suivant, lequel peut être vu comme une généralisation de la formule de Cameron-Martin au cas $\theta \not\equiv m$ constante.

Théorème de Girsanov : Sous la mesure $\mathbb{Q}_T^\theta$, le processus

$$\tilde{W} : t \longmapsto W_t - \int_0^t \theta_s \, ds \quad , \quad t \leq T$$

est un mouvement brownien.

Ce théorème s'avère extrêmement utile en pratique.

La preuve s'établit de 2 façons. L'une repose sur le lemme du début du chapitre. On démontre d'abord directement que $Z\tilde{W}$ est une martingale sous $\mathbb{P}$, donc par le lemme que $\tilde{W}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}_T^\theta$.

De plus, le crochet sous $\mathbb{P}$ de $\tilde{W}$ vu comme processus d'Itô est le crochet de sa partie martingale, donc $\langle \tilde{W} \rangle_t = t$. Mais le crochet est invariant par chgt de proba, donc sous $\mathbb{Q}_T^\theta$, $\tilde{W}$ est une martingale continue de crochet $\langle \tilde{W} \rangle_t = t$, autrement dit un mouvement brownien. □

La 2e méthode repose sur le théorème de Girsanov abstrait, d'intérêt moins évident a priori, mais qui reste valable dans un cadre très général.

Théorème de Girsanov abstrait :

Soit $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesures de probabilité équivalentes sur un espace filtré $(\Omega, \{\mathcal{F}_t, t \leq T\})$. On suppose que toutes les $(\mathcal{F}_t)$-martingales sont continues. Alors sous $\mathbb{P}$ il existe une $(\mathcal{F}_t)$-martingale L telle que $\forall t \leq T$ et $\forall A \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}\left[\exp\left[L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right] \mathbb{1}_A\right].$$

De plus, si M est une martingale locale continue sous $\mathbb{P}$, alors le processus

$$\tilde{M} : t \longmapsto M_t - \langle M, L\rangle_t$$

est une martingale locale continue sous $\mathbb{Q}$.

Preuve : Expliquons d'abord la première partie de ce théorème concernant l'existence de la martingale L.

Elle repose sur le théorème de Radon-Nikodym, qui assure l'existence d'un processus densité $\{D_t, t \geq 0\}$ de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}$, au sens où $\forall t \leq T$ et $\forall A \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D_t \mathbb{1}_A).$$

Comme $A \in \mathcal{F}_T$, on a aussi

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D_T \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D_T \mid \mathcal{F}_t) \mathbb{1}_A\right].$$

de sorte que, par identification :

$$D_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(D_T \mid \mathcal{F}_t), \qquad \forall t \leq T.$$

On en déduit que D est une martingale UI continue sous $\mathbb{P}$.

De plus, elle est strictement positive, par équivalence entre $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$.

On peut alors définir le processus (on peut effectivement définir une intégrale stochastique par rapport à une martingale continue) :

$$L_t = \ln D_0 + \int_0^t \frac{1}{D_s} dD_s . \qquad \left(dL_t = \frac{1}{D_t} dD_t \right)$$

On applique la formule d'Itô à $R_t = \exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right)$

$$R_t = \exp\left[L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right] = D_0 + \int_0^t R_s dL_s - \frac{1}{2}\int_0^t R_s d\langle L\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t R_s d\langle L\rangle_s$$
$$= D_0 + \int_0^t R_s dL_s .$$

Mais par définition de L, on a aussi

$$D_t = D_0 + \int_0^t D_s dL_s .$$

De sorte que D et R sont solutions de la même EDS. Par unicité on a $R \equiv D$.

D'où
$$D_t = \exp\left[L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right] .$$

Ceci entraîne finalement que $\forall t \leq T$ et $\forall A \in \mathcal{G}_t$:

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right) \mathbb{1}_A\right] \qquad \square .$$

On voit enfin finalement que le théorème de Girsanov abstrait entraîne le 1er th. de Girsanov. La martingale L est ici

$$L_t = \int_0^t \theta_s dB_s$$

et on a donc

$$\langle B, L\rangle_t = \int_0^t \theta_s ds .$$

Comme B est une martingale locale continue sous $\mathbb{P}$, $\tilde{B}$ est une martingale locale continue sous $\mathbb{Q}_T^\theta$.

On démontre cō précédemment que son crochet est $\langle \tilde{B}\rangle_t = t$ stable par changement de probabilité, et on en déduit que $\tilde{B}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}_T^\theta$. $\square$

IV Applications au mouvement brownien et aux EDS

1) Calcul d'Espérances - Exemple 1.

Le théorème de Girsanov permet de calculer diverses espérances de fonctionnelles du mouvement brownien. Par exemple on peut s'intéresser à

$$\mathbb{E}\left[B_t \exp\left[\int_0^T \theta_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 \, ds\right]\right]$$

pour $t<T$ et θ fonction déterministe.

On effectue un changement de probabilité en posant

$$L_t = \exp\left[\int_0^t \theta_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \, ds\right]$$

et on calcule

$$\begin{aligned} E_{\mathbb{P}}\left[B_t L_T\right] = E_{\mathbb{P}}\left[B_t L_t\right] &= E_{\mathbb{Q}}(B_t) \\ &= E_{\mathbb{Q}}\left(\tilde{B}_t + \int_0^t \theta_s \, ds\right) \\ &= E_{\mathbb{Q}}\left(\int_0^t \theta_s \, ds\right) = \int_0^t \theta_s \, ds . \end{aligned}$$

On en déduit que

$$E_{\mathbb{P}}\left[B_t \exp\left[\int_0^T \theta_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 \, ds\right]\right] = \int_0^t \theta_s \, ds .$$

Et en faisant en particulier $\theta \equiv 1$, on trouve

$$E_{\mathbb{P}}\left(B_t \exp B_t\right) = t e^{t/2},$$

qu'il aurait été plus difficile de calculer directement.

2) Calcul d'espérance - exemple 2.

Dans le modèle de Black-Schole sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{P}$, le prix d'un call européen $C(T,T) = (S_T - K)_+$ se calcule par :

$$C(0,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(e^{-rT}(S_T - K)\mathbb{1}_{S_T \geq K}\right)$$
$$= e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K}\right) - Ke^{-rT}\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_{S_T \geq K}\right)}_{=\mathbb{P}(S_T \geq K)}$$

Il faut donc calculer les 2 termes.

Or sous $\mathbb{P}$, S est solution de l'EDS $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$.

Donc $S_T = S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right]$.

Ainsi le 2^e terme se déduit en calculant

$$\mathbb{P}(S_T \geq K) = \mathbb{P}\left(S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right] \geq K\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T \geq \ln\frac{K}{S_0}\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(-\frac{W_T}{\sqrt{T}} \leq \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}}_{=d_2}\right) = \mathcal{N}(d_2)$$

car $-\frac{W_T}{\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ sous $\mathbb{P}$.

où $\mathcal{N}$ désigne la fct° de répartition de la $\mathcal{N}(0,1)$.

Pour l'autre terme :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K}\right) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right]\mathbb{1}_{S_T \geq K}\right)$$
$$= S_0 e^{rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}T + \sigma W_T\right)\mathbb{1}_{S_T \geq K}\right)$$

Si on définit une nouvelle probabilité $\mathbb{P}^*$ par sa dérivée de Radon-Nikodym

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left[-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t\right]$$

d'après la formule de Cameron-Martin, sous $\mathbb{P}^*$ c'est $W_t^* = W_t - \sigma t$ qui est un mouvement brownien. Ainsi

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K}\right) = S_0 e^{rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left(\mathbb{1}_{S_T \geq K}\right) = S_0 e^{rT}\mathbb{P}^*(S_T \geq K)$$

Or

$$\{S_T \geq K\} = \left\{-\frac{W_T}{\sqrt{T}} \leq d_2\right\} = \left\{-\frac{W_T - \sigma T}{\sqrt{T}} \leq \underbrace{d_2 + \sigma\sqrt{T}}_{=d_1}\right\} = \left\{-\frac{W_T^*}{\sqrt{T}} \leq d_1\right\}$$

et $\frac{W_T^*}{\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ car c'est 1 MB sous $\mathbb{P}^*$

Donc $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K}\right) = S_0 e^{rT}\mathcal{N}(d_1)$

D'où $C(0,T) = S_0\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$ □