© Théo Jalabert

Formules partiel

$${}_kp_x = \frac{l_{x+k}}{l_x}$$ → Proba qu'un individu d'âge x survive à l'âge $x+k$

$$\mathbb{P}(A) = \frac{l_{x+k}}{l_x}$$

$$S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)}$$

$$S_x(t+u) = S_x(t)S_{x+t}(u)$$

$${}_tq_x = F_x(t)$$ → Proba qu'un individu d'âge x décède au plus tard à l'âge $x+t$

$${}_tp_x = S_x(t)$$

$${}_{u|t}q_x = {}_{u+t}q_x - {}_uq_x$$ → Proba qu'un individu d'âge x décède entre $x+u$ et $x+u+t$

$$q_x = {}_1q_x, p_x = {}_1p_x, {}_{u|}q_x = {}_{u|1}q_x$$

$${}_np_x = p_xp_{x+1}..p_{x+n-1}$$

$$l_x = l_0 . {}_xp_0$$ → espérance du nbr de survivants à l'âge x parmi une populat° de l_0 nouveaux-nés

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$ → probas viagères en termes de l'ordre de survie

$$d_x = l_xq_x = l_x - l_{x+1}$$ → les décrements successifs de l'ordre de survie

↳ interprétat°: nb de décès attendu entre x et $x+1$.

$$\mu_x = \lim_{dt \to 0^+} \frac{d}{dt}{}_tq_x$$ → taux instantané de mortalité à l'âge x.

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}{}_hq_x$$

$${}_{dt}q_x \approx \mu_x dt$$

© Théo Jalabert

$$_{t+h}q_x = {}_tq_x + {}_tp_x\,{}_hq_{x+t}$$

$$\frac{d}{dt}\,{}_tq_x = {}_tp_x\mu_{x+t}$$

$$_tp_x = exp\left(- \int_0^t \mu_{x+s}ds \right)$$

Hypothèse 1 : Distribution uniforme des décès

$$\forall x \in \mathbb{N}, 0 \leq t \leq 1$$

$$\begin{cases} _tq_x = tq_x \\ _tp_x = 1 - tq_x \end{cases}$$

Hypothèse 2 : Taux instantané de mortalité constant

$$\begin{cases} _tp_x = p_x^t \\ _tq_x = 1 - (1 - q_x)^t \end{cases}$$

$$e_x = \sum_{k=1}^{+\infty} {}_kp_x$$

$$\mathring{e}_x = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_j^{j+1} {}_tp_x dt = \int_0^{\infty} {}_tp_x dt$$

→ espérance de vie à l'âge x.

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + ... + v^n = \frac{1-v^n}{i}$$

→ annuité temporaire (immédiate à terme échu)

$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{nm} v^{\frac{k}{m}} = \frac{1-v^n}{i^{(m)}}$$

$i^{(m)} = m \times \left((1+i)^{1/m} - 1\right)$ → taux annuel nominal.

→ annuité temporaire fractionnée (immédiate à terme échu)

$$_{p|}a_{\overline{n}|} = v^p a_{\overline{n}|}$$

→ " dont le 1er payement est différé de p années.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

→ Annuité payable par anticipation.

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{nm-1} v^{\frac{k}{m}} = \frac{1}{m}\frac{1 - v^n}{1 - v^{\frac{1}{m}}}$$

→ " en fractionné

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt = \frac{1-v^n}{\delta}$$

$\delta = \ln(1+i)$

→ Valeur actuelle d'une annuité continue

© Théo Jalabert

$$A_x = \sum_{n=0}^{\infty} {}_np_x q_{x+n} v^{n+1}$$

→ Prime pure pour une assurance d'un capital 1€ payable à la fin de l'année du décès d'une tête d'âge x.

$$\mathrm{A}_x = q_x v + p_x v A_{x+1}$$

$$\overline{A}_x = \int_0^{\infty} {}_tp_x \mu_{x+t} v^t dt$$

→ Prime pure pour une assurance d'un capital 1€ payable au moment du décès d'une tête d'âge x.

$$\overline{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$$

$$A_x^{(m)} = \sum_{r=0}^{\infty} {}_{\frac{r}{m}}p_x \, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{r}{m}} v^{\frac{r+1}{m}}$$

→ Prime pure pour une assu. de capital 1€ payable à la fin de la fract° de $\frac{1}{m}$ ème année d'une tête d'âge x.

$$A^1_{x\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x q_{x+t} v^{t+1}$$

→ Prime pure d'assu. temp de capital 1€ payable fin d'année du décès si ce décès survient avant n années.

$$A^1_{x\overline{n}|} = A_x - {}_np_x v^n A_{x+n}$$

$$\overline{A}^1_{x\overline{n}|} = \int_0^{n} {}_tp_x \mu_{x+t} v^t dt$$

→ " payable au moment du décès.

$$\overline{A}^1_{x\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} A^1_{x\overline{n}|}$$

$$\overline{A}^1_{x\overline{n}|} = \sum_{n=0}^{n-1} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} v^{t+\frac{1}{2}}$$

$$D_x = l_x v^x$$

$$C_x = (l_x - l_{x+1}) v^{x+1}$$

$$M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$$

$$\overline{C}_x = (l_x - l_{x+1}) v^{x+\frac{1}{2}}$$

$$\overline{M}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{C}_{x+t}$$

$$N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+k}$$

$x+t$

© Théo Jalabert

$$\overline{A}^1_{x\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(l_{x+t} - l_{x+t+1})v^{t+x+\frac{1}{2}}}{l_x v^x}$$
$$= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{\overline{C}_{x+t}}{D_x}$$
$$= \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{D_x}$$

$$A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

$$\overline{A}_x = \frac{\overline{M}_x}{D_x}$$

$$A^1_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

Assu. temp
Capital croissant en prog. arith.

$$(IA)^1_{x\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) v^{t+1} {}_tp_x q_{x+t}$$

Prime pure d'une assu. temp de n années sur tête d'âge x garantissant le payement d'un capital k en cas de décès au cours de la $k^{\text{ème}}$ année.

$$(IA)^1_{x\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) \frac{C_{x+t}}{D_x}$$

$$(I\overline{A})^1_{x\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} (IA)^1_{x\overline{n}|}$$

Le capital est payé au moment du décès

$$(I\overline{A})^1_{x\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) \frac{\overline{C}_{x+t}}{D_x}$$

Assu temp
Capital décroissant en prog. arith.

$$(DA)^1_{x\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} (n-k) v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k}$$

Prime pure d'une assu. temp de n années sur tête d'âge x garantissant le payement d'un capital n-k à la fin de la k+1 ème année si l'assuré décède dans cette année.

$$(DA)^1_{x\overline{n}|} = (n+1) A^1_{x\overline{n}|} - (IA)^1_{x\overline{n}|}$$

$${}_nE_x = v^n {}_np_x$$

Prime pure d'une assu. d'un capital unitaire différé de n années sur une tête d'âge x.

$${}_nE_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x}$$

$${}_{n+k}E_x = {}_nE_x {}_kE_{x+n}$$

$$A_{x\overline{n}|} = A^1_{x\overline{n}|} + {}_nE_x$$

Prime pure pour une assu. mixte de n années sur une tête d'âge x. Payable en fin d'année

© Théo Jalabert

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{M_x + M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \longrightarrow A_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$\overline{A}_{x\overline{n}|} = \overline{A}^{1}_{x\overline{n}|} + {}_nE_x$$

" Payable au moment du décès

$$\overline{A}_{x\overline{n}|} = \frac{\overline{M}_x + \overline{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x} \longrightarrow \overline{A}_{x\overline{n}|} = \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x q_{x+k} a_{\overline{k}|} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x v^k$$

Prime pure pour une rente viagère d'1€ par an payable à la fin de chaque année tant que le rentier est vivant.

$$ia_x = 1 - (1+i)A_x$$

$$a_x = vp_x(1 + a_{x+1})$$

$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + .. + \frac{D_{x+n}}{D_x} + ..$$

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

$$\ddot{a}_x = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x q_{x+k} \ddot{a}_{\overline{k+1}|}$$

Prime pure pour une rente viagère d'1€ par an payable au début de chaque année tant que le rentier est vivant.

$$\ddot{a}_x = 1 + v_k p_x + .. + v^n {}_np_x + ..$$

$$(1-v)\ddot{a}_x = 1 - A_x$$

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x \ddot{a}_{x+1}$$

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

$$a_{x\overline{n}|} = v_1 p_x + .. + v^n {}_np_x$$

Prime pure d'une rente de 1€ par an payable annuellement à terme échu tant que le rentier est vivant mais au plus pendant n années.

$$a_{x\overline{n}|} = a_x - {}_np_x v^n a_{x+n}$$

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = 1 + v_1 p_x + .. + v^{n-1} {}_{n-1}p_x$$

Prime pure pour une rente d'1€ par an payable annuellement par anticipation tant que le rentier est vivant mais au plus pendant n années.

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x\overline{n}|}}{1 - v}$$

© Théo Jalabert

$$_{n|}a_x = v^n {}_np_x a_{x+n}$$ Prime pure d'une rente viagère dont le 1er payement est différé de n années. Payable annuellement à terme échu

$$_{n|}a_x = a_x - a_{x\overline{n|}}$$

$$_{n|}\ddot{a}_x = v^n {}_np_x \ddot{a}_{x+n}$$ " Par anticipat°

$$a_x^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_{\frac{k}{m}}p_x v^{\frac{k}{m}}$$ $\longrightarrow a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty} {}_{\frac{k}{m}}p_x v^{\frac{k}{m}}$ Prime pure d'une rente de 1€ par an payable par fract° de $\frac{1}{m}$ à la fin de chaque m-ème année tant que le rentier est en vie

$$a_x^{(m)} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_{\frac{k}{m}}E_x$$ $\longrightarrow a_x^{(m)} = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty} {}_{\frac{k}{m}}E_x$

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m+1}{2m}$$ Prime pure d'une rente d'1€ par an payable par fractions de $\frac{1}{m}$ au début de chaque m-ème année tant que le rentier est en vie.

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

$$a_{x\overline{n|}}^{(m)} = a_x^{(m)} - {}_nE_x a_{x+n}^{(m)}$$ Prime unique pure pour la rente fractionnée temporaire à terme échu.

$$\ddot{a}_{x\overline{n|}}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}^{(m)}$$ " par anticipat°

$$\bar{a}_x = \int_0^{\infty} v^t {}_tp_x dt$$ Prime pure pour une rente viagère de 1€ par an payable de façon continue i.e tant que le rentier est vivant, tout intervalle de temps dt => payement de dt

$$(Ia)_x = \sum_{k=1}^{\infty} k v^k {}_kp_x$$ Prime pure pour rentes croissant en progression arithmétique.

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) v^k {}_kp_x$$ $\longrightarrow (I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^k {}_kp_x$ " par anticipation.

$$R(t) = C - PA\ddot{a}_{\overline{t+1|}}(1+i)^{t+\frac{1}{2}}$$ Si l'assuré décède (milieu d'année) à l'âge x+t, la perte, est appelée Capital sous risque

$$PU' = PU + B$$ Prime unique d'inventaire

$$\hat{PU} = PU' + A = PU + B + A$$ Prime unique de réduction

$$PU'' = \frac{\hat{PU}}{1-c} = \frac{PU+B+A}{1-c}$$ Prime unique commerciale.

$$V(t) = \varepsilon_{[t,n]} - \mathcal{P}_{[t,n]}$$ Réserve mathématique pure du contrat.

PU: prime unique pure
B: montant total des chargements
A: montant du chargement d'acquisit°
c: taux de chargem^t d'encaissem^t

© Théo Jalabert

$$\varepsilon_{[t,\infty)} = \int_0^\infty {}_sp_{x+t}\mu_{x+t+s}v^s ds = \overline{A}_{x+t}$$ → Prime unique pure d'une assu. vie entière sur une tête d'âge $x+t$

$$_tV_x = \overline{A}_{x+t}$$

$V'(t)$: réserve mathématique d'inventaire

$$V'(t) - V(t) = \varepsilon'_{[t;n]} - \mathcal{P}'_{[t;n]} - (\varepsilon_{[t;n]} - \mathcal{P}_{[t;n]})$$
$$= \mathcal{B}_{[t,n]} - \left(\mathcal{P}'_{[t;n]} - \mathcal{P}_{[t;n]}\right)$$ → Réserve pour frais de gestion futurs.

$$_tp_{x_1,..,x_r} = \prod_{k=1}^r {}_tp_{x_k}$$ → Proba de survie conjointe des r têtes après un temps t.

$$\mu_{x_1,..,x_r} = \sum_{j=1}^r \mu_{x_j}$$ → taux instantané de mortalité sur plusieurs têtes

$$_tp_{x_1,..,x_r} = exp\left(-\int_0^t \mu_{x_1+s,..,x_r+s}ds\right)$$

$$_tp_{\overline{x_1,..,x_r}} = P\left[\bigcup_{i=1}^r (T_{x_i} > t)\right]$$ → Proba qu'une au moins des r têtes survivent après un temps t.

$$_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}$$

$$_tp_{\overline{xyz}} = {}_tp_x + {}_tp_y + {}_tp_z - ({}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} + {}_tp_{yz}) + {}_tp_{xyz}$$

$$_nE_{x_1x_2..x_r} = {}_np_{x_1x_2..x_r}v^n$$ → Prime unique pure.
→ toutes les têtes en vie.

$$_nE_{\overline{x_1x_2..x_r}} = {}_np_{\overline{x_1x_2..x_r}}v^n$$ → Prime unique pure
→ une au moins des r têtes est en vie.

$$A_{x_1..x_r} = \sum_{t=0}^\infty v^{t+1}{}_tp_{x_1..x_r}(1 - {}_tp_{x_1+t,..,x_r+t})$$ → Prime pure d'une assu. sur r têtes d'âges $x_1,-,x_r$ garantissant le payement d'un capital unitaire à la fin d'année du 1er décès

$$A_{\overline{x_1..x_r}} = \sum_{t=0}^\infty v^{t+1}({}_tp_{\overline{x_1..x_r}} - {}_{t+1}p_{\overline{x_1..x_r}})$$ → " à la fin de l'année du dernier décès.

$$_{|n}A_{x_1..x_r} = \sum_{t=0}^\infty v^{t+1}{}_tp_{x_1..x_r}(1 - {}_tp_{\overline{x_1..x_r}})$$ → $_{|n}A_{x_1,-,x_r} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1}{}_tp_{x_1-x_r}(1-p_{x_1+t:-:x_r+t})$

assu. temp.

$$_{|n}\overline{A}_{x_1..x_r} = \int_0^n {}_tp_{x_1..x_r}\mu x1+t...x_r+tv^tdt$$ → $_{|n}\overline{A}_{x_1-x_r} = \int_0^n {}_tp_{x_1-x_r}\mu_{x_1+t:-:x_r+t}v^t dt$

$$a_{x_1..x_r} = \sum_{k=1}^\infty {}_kp_{x_1..x_r}v^k$$ → Prime pure pour une rente unitaire payable annuellement à terme échu tant que les r têtes sont en vies.

© Théo Jalabert

$$\ddot{a}_{x_1x_2..x_r} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_{x_1..x_r}v^k = 1 + a_{x_1..x_r}$$

$$_{n|}a_{x_1..x_r} = \sum_{k=n}^{\infty} {}_kp_{x_1..x_r}v^k = {}_nE_{x_1..x_r}a_{x_1+n..x_r+n}$$

$$a_{x_1..x_r\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_kp_{x_1..x_r}v^k = a_{x_1x_2..x_r} - {}_nE_{x_1..x_r}a_{x_1+n..x_r+n}$$

$$\ddot{a}_{x_1..x_r\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_{x_1..x_r}v^k = \ddot{a}_{x_1x_2..x_r} - {}_nE_{x_1..x_r}\ddot{a}_{x_1+n..x_r+n}$$

$$a^{(m)}_{x_1..x_r} \underset{\approx}{=} a_{x_1..x_r} + \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x_1..x_r} \underset{\approx}{=} \ddot{a}_{x_1..x_r} - \frac{m-1}{2m}$$

$$a^{(m)}_{x_1..x_r\overline{n}|} \underset{\approx}{=} a_{x_1..x_r\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_{x_1..x_r})$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x_1..x_r\overline{n}|} \underset{\approx}{=} \ddot{a}_{x_1..x_r\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_{x_1..x_r})$$

$$a_{\overline{x_1..x_r}} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_{\overline{x_1..x_r}}v^k$$

$$\ddot{a}_{\overline{x_1..x_r}} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_{\overline{x_1..x_r}}v^k = 1 + a_{\overline{x_1..x_r}}$$

$$a_{\overline{x_1..x_r}\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_kp_{\overline{x_1..x_r}}v^k$$

$$\ddot{a}_{\overline{x_1..x_r}\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_{\overline{x_1..x_r}}v^k$$

$$a_{\overline{xy}} = a_x + a_y - a_{xy}$$

$$a_{\overline{xyz}} = a_x + a_y + a_z - (a_{xy} + a_{xz} + a_{yz}) + a_{xyz}$$

$$a_{\overline{xy}\overline{n}|} = a_{x\overline{n}|} + a_{y\overline{n}|} - a_{xy\overline{n}|}$$

$$_{n|}a_{\overline{xy}} = {}_{n|}a_x + {}_{n|}a_y - {}_{n|}a_{xy}$$