Examen sur les taux d'intérêt

Master 2 Probabilités et Finance, Sorbonne Université-X, Janvier 2025

N. El Karoui et C. Hillairet.

Sans document, ni calculatrice, ni téléphone.

Préliminaires :
– Les notations sont celles du cours et ne seront pas toujours rappelées. Tous les processus sont définis sur une espace de probabilité filtré, $(\Omega, \mathcal{F} = \{\mathcal{F}_t\}, \mathbb{P})$, complet, pour la modélisation historique. La probabilité risque-neutre sera quant à elle notée $\mathbb{Q}$.
– Au taux sans risque instantané $\{r_t\}$ sont associés, le facteur de capitalisation $S_t^0 = \exp(\int_0^t r_s ds)$, et les actifs zéro-coupons $B(t,T)$ tels que $B(T,T) = 1$. Rappelons que si $t > T$, $B(t,T) = S_t^0/S_T^0$.
– Dans tout le sujet, on considère une dynamique des zéro-coupons (ZC) issue de la théorie de Heath-Jarrow-Morton, où sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, avec les notations du cours, pour tout T, la dynamique de $(B(t,T), t \le T)$ est donnée par

$$B(t,T) = B(t,T)(r_t dt + < \Gamma(t,T), dW_t >), \;\; B(T,T) = 1. \tag{1}$$

Ici W est un $(\mathcal{F}, \mathbb{Q})$-mouvement brownien de dimension d, et $\Gamma(t,T)$ la volatilité vectorielle de $B(t,T)$, éventuellement stochastique, est supposée suffisamment intégrable pour que les différentes notions introduites ci-dessous fassent sens.

EXERCICE 1 – Options sur ZC

Première question Comme dans le cours, θ désigne une durée.

a) *Les ZC*

1. Que vaut le vecteur de volatilité $\Gamma(t,T)$ pour $t > T$?
2. Ecrire la formule exponentielle pour les ZC $\{B(t,T)\}$ et les ZC forwards $\{B_t(T, T+\theta) = B(t, T+\theta)/B(t,T)\}$.
3. Quelle est la volatilité des ZC forwards, que l'on notera $\Gamma_t(T, T+\theta)$?
4. Donner la densité de la probabilité forward neutre $\mathbb{Q}^T$ sous laquelle les ZC forwards sont des martingales locales.
5. Indiquer comment les mouvements browniens sont affectés par le changement de probabilité de $\mathbb{Q}$ vers $\mathbb{Q}^T$.

b) *Les taux spot forwards*

1. Ecrire les equation intégrales des taux spots forward $f(t,T) = -\partial_T \ln(B(t,T))$, pour $t < T$, à l'aide des vecteurs $\{\Gamma(t,T), \partial_T\Gamma(t,T) = \gamma(t,T)\}$.
2. En déduire les EDS de $f(t,T)$ et r_t. Quelle est leur dynamique sous $\mathbb{Q}^T$?

c) *Le cas des vol déterministes*

1. Montrer que si les vecteurs $\Gamma(t,T)$ sont déterministes, les processus $\{f(t,T)\}$ et $\{r_t\}$ sont des processus gaussiens.
2. Que peut on dire de la loi des processus des zéro-coupons $\{B(t,T)\}$?

Une rédaction soignée est demandée pour les réponses à ces questions (de cours).

Deuxième question

a) *Portefeuilles autofinançants écrits sur deux ZCs,* $(\{B(t,T), B(t,T+\theta)\})$ dont les quantités sont les processus adaptés η_t et δ_t. (Les processus (η_t) et (δ_t) sont tels que les intégrales stochastiques qui apparaîtront dans les calculs sont bien définies et sont des $\mathbb{Q}$-martingales.)
La valeur du portefeuille est désignée par

$$V_t = \eta_t B(t,T) + \delta_t B(t, T+\theta).$$

1. Donner la dynamique infinitésimale du processus $\{V_t, t \leq T\}$.
2. Soit $\{V_t^F = V_t/B(t,T), t < T\}$ la valeur Forward du portefeuille.
   Justifier par un argument financier que

$$dV_t^F = \delta_t \, dB_t(T, T+\theta),$$

Troisième question

a) *Options sur ZC* lorsque les volatilités sont **déterministes**. On considère une option sur zéro-coupon de maturité T et de flux à l'échéance égal à

$$\Phi(B(T, T+\theta)), \quad \text{payé en } T, \tag{2}$$

où Φ est une fonction positive donnée suffisamment régulière.

1. Calculer $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}(\Phi(B(T, T+\theta)))$ à l'aide de la densité gaussienne.
2. Montrer que plus généralement la $\mathbb{Q}^T$-martingale $M_t^T = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}(\Phi(B(T, T+\theta))|\mathcal{F}_t)$ est une fonction régulière $v(t, B_t(T, T+\theta))$ de la $\mathbb{Q}^T$-martingale $B_t(T, T+\theta)$.
3. En déduire qu'il existe un portefeuille autofinançant V_t^F qui réplique $\Phi(B(T, T+\theta))$. Expliciter la stratégie de couverture.
4. Donner une formule fermée pour le cas particulier d'une option Call $\Phi(x) = (x-K)^+$ et préciser la stratégie de couverture. *Attention, on vous demande de justifier avec précision l'application de la formule formule fermée : quel est le sous-jacent (et sa dynamique), quelle est sa volatilité, quel strike, quel taux d'intérêt, quelle maturité ?*

EXERCICE 2 – Option Call sur Swap de taux .

On s'intéresse à l'option qui paye en T la partie positive de la différence entre le taux de swap n ans (sur un Libor 1 an pour simplifier) et le prix d'exercice K.

Première question

1. Ecrire les valeurs en t de la jambe fixe et de la jambe variable du swap forward. En déduire la valeur du taux de swap forward $\mathrm{Tswap_t(T,n)}$ en fonction des zéro-coupon forwards.
2. Le taux de swap forward $\mathrm{Tswap_t(T,n)}$ est-il l'espérance forward-neutre de maturité T du taux de swap ? Sous quelle probabilité $\mathbb{Q}^T_{Swap}$ cette propriété est-elle vraie ?
3. On pose

$$L_t(T,n) = \sum_{i=1}^{n} B_t(T, T+i), \quad t < T.$$

   Montrer que si $\mathbb{Q}^T$ est la probabilité forward-neutre,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}(\mathrm{Tswap(T,n)}) = \mathrm{Tswap_0(T,n)} + \mathrm{cov}_{\mathbb{Q}^T}(\mathrm{Tswap(T,n)}, \frac{L(T,n)}{L_0(T,n)})$$

Deuxième question : Correction de convexité

1. On suppose que n est assez grand pour que

$$B_t(T, T+n) \sim \frac{1}{(1+\mathrm{Tswap_t(T,n)})^n}$$

   Montrer $L_t(T,n)$ est de la forme $h(\mathrm{Tswap_t(T,n)})$ où h est une fonction que l'on explicitera.
2. On observe, à partir des swaptions, la distribution implicite du taux $\mathrm{Tswap_t(T,n)}$ sous la probabilité $\mathbb{Q}^T_{Swap}$. En déduire une distribution de $\mathrm{Tswap_t(T,n)}$ sous la probabilité $\mathbb{Q}^T$.
3. On revient à l'option qui paye en T la différence positive entre $\mathrm{Tswap(T,n)}$ et K. Calculer le prix de l'option en t. Proposer une stratégie de réplication à l'aide de swaptions.