Séries temporelles
ISFA - Université Lyon 1
Janvier 2022 - Durée 1h30 - Sans document et sans calculatrice

---

On considère deux bruits blancs faibles $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(\varepsilon'_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
On suppose que ces deux processus sont indépendants, c'est-à-dire que ε_u est indépendant de ε'_v pour tout couple d'entiers (u, v).
On note σ (rep. σ') la variance de ε_t (resp. ε'_t).
On définit les deux processus suivants

$$\begin{aligned} X_t &= \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} \\ X'_t &= \varepsilon'_t - \theta'\varepsilon'_{t-1} \end{aligned}$$

où θ et θ' sont deux réels.

---

1. Quelle est la nature des processus X_t et X'_t ?
2. Exprimer leurs fonctions d'autocovariance.
3. Montrer que le processus "somme" $\varepsilon_t + \varepsilon'_t$ est encore un bruit blanc.
4. Montrer que le processus "produit" $\varepsilon_t\varepsilon'_t$ est encore un bruit blanc.
5. Montrer que le processus $Y_t = X_t + X'_t$ est stationnaire (au second ordre).
6. Exprimer sa fonction d'autocovariance.
7. Donner une condition pour que le processus Y_t soit un processus AR (autorégressif).
8. Montrer que le processus $Z_t = X_t X'_t$ est encore stationnaire.
9. Exprimer sa fonction d'autocovariance.
10. Si on suppose que les ε_t suivent une loi normale centrée de variance σ, donner la loi de X_t.
11. En supposant que les ε_t suivent une loi normale centrée de variance σ, donner la loi jointe de (X_t, X_{t-1}).

Soient (ε_t) et (ε'_t) 2 bruits blancs faibles.

$(\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma^2)$

$(\varepsilon'_t) \sim BB(0, \sigma'^2)$

$\forall (u,v),\ \varepsilon_u \perp\!\!\!\perp \varepsilon'_v$

On définit $X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$

$X'_t = \varepsilon'_t - \theta' \varepsilon'_{t-1}$

$\theta, \theta' \in \mathbb{R}^2$

1) Nature de X_t et X'_t

Ce sont des MA(1) car $\begin{cases} X_t = \Theta(L)\varepsilon_t \\ X'_t = \Theta'(L)\varepsilon'_t \end{cases}$ avec $\begin{cases} \begin{cases} \varepsilon_t \sim BB(0,\sigma^2) \\ \Theta(L) = 1 - \theta L \\ \theta \in \mathbb{R}^* \end{cases} \\ \begin{cases} \varepsilon'_t \sim BB(0,\sigma'^2) \\ \Theta'(L) = 1 - \theta' L \\ \theta' \in \mathbb{R}^* \end{cases} \end{cases}$

si $\theta = 0 \Rightarrow X_t$ est un $BB(0,\sigma^2)$

si $\theta' = 0 \Rightarrow X'_t \sim BB(0,\sigma'^2)$

2) $\gamma_X(k)$ et $\gamma_{X'}(k)$

$\mathbb{E}[X_t] = 0$

$$\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{V}[\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}]$$
$$= \sigma^2 + \theta^2\sigma^2$$
$$= (1+\theta^2)\sigma^2$$

$$\gamma_X(k) = Cov(X_t, X_{t+k})$$
$$= Cov(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+k} - \theta\varepsilon_{t+k-1}) = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2 & \text{si } k=0 \\ -\theta\sigma^2 & \text{si } |k|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

De même, $\gamma_{X'}(k) = \begin{cases} (1+\theta'^2)\sigma'^2 & \text{si } k=0 \\ -\theta'\sigma'^2 & \text{si } |k|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3) Mq $\varepsilon_t + \varepsilon'_t \sim BB$

* $\mathbb{E}[\varepsilon_t + \varepsilon'_t] = 0$
* $\mathbb{V}ar[\varepsilon_t + \varepsilon'_t] = \sigma^2 + \sigma'^2$ par $\perp\!\!\!\perp$
* $Cov(\varepsilon_t + \varepsilon'_t, \varepsilon_{t+k} + \varepsilon'_{t+k}) = 0 \quad \forall k \neq 0, \forall t$ par $\perp\!\!\!\perp$ entre les ε_t et ε'_t et car $\varepsilon_t, \varepsilon'_t \sim BB$.

$\Rightarrow (\varepsilon_t + \varepsilon'_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim BB(0, \sigma^2 + \sigma'^2)$

4) Mq $\varepsilon_t\varepsilon'_t \sim BB$

* $\mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon'_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t]\mathbb{E}[\varepsilon'_t]$ car $\forall (u,v),\ \varepsilon_u \perp\!\!\!\perp \varepsilon'_v$

  $= 0$ car $\varepsilon_t, \varepsilon'_t \sim BB(0,\cdot)$

* $\mathbb{V}[\varepsilon_t\varepsilon'_t] = \mathbb{E}[(\varepsilon_t\varepsilon'_t)^2] - \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon'_t]^2}_{=0}$

  $= \mathbb{E}[\varepsilon_t^2\varepsilon'^2_t]$

  $= \mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\mathbb{E}[\varepsilon'^2_t]$ car $\forall (u,v),\ \varepsilon_u \perp\!\!\!\perp \varepsilon'_v \Rightarrow \forall (u,v),\ \varepsilon_u^2 \perp\!\!\!\perp \varepsilon'^2_v$

  $= \sigma^2\sigma'^2$

* $Cov(\varepsilon_t\varepsilon'_t, \varepsilon_{t+k}\varepsilon'_{t+k}) = \mathbb{E}[(\varepsilon_t\varepsilon'_t - \mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon'_t])(\varepsilon_{t+k}\varepsilon'_{t+k} - \mathbb{E}[\varepsilon_{t+k}\varepsilon'_{t+k}])]$

$= \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_t' \varepsilon_{t+k} \varepsilon_{t+k}'] + \mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_t]\mathbb{E}[\varepsilon_{t+k} \varepsilon_{t+k}']]$

$= 0$ car $\forall (u,v)$, $\varepsilon_u \perp\!\!\!\perp \varepsilon_v'$ et car $\varepsilon_t \sim BB(0,\sigma^2)$, $\varepsilon_t' \sim BB(0,\sigma'^2)$

5) $Y_t = X_t + X_t'$

$= \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t' - \theta'\varepsilon_{t-1}'$

$= \varepsilon_t + \varepsilon_t' - \theta\varepsilon_{t-1} - \theta'\varepsilon_{t-1}'$

$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t + \varepsilon_t' - \theta\varepsilon_{t-1} - \theta'\varepsilon_{t-1}']$

$= 0$ car $\varepsilon_t \sim BB(0,\sigma^2)$, $\varepsilon_t' \sim BB(0,\sigma'^2)$

$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[X_t + X_t']$

$= \mathbb{V}[X_t] + \mathbb{V}[X_t']$ car $X_t \perp\!\!\!\perp X_t'$

$= (1+\theta^2)\sigma^2 + (1+\theta'^2)\sigma'^2$

$Cov(Y_t, Y_{t+k}) = Cov(X_t + X_t', X_{t+k} + X_{t+k}')$

$= \gamma_X(k) + \gamma_{X'}(k)$ car $\forall (u,v)$, $\varepsilon_u \perp\!\!\!\perp \varepsilon_v'$

$$= \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2 + (1+\theta'^2)\sigma'^2 & \text{si } k=0 \\ -\theta\sigma^2 - \theta'\sigma'^2 & \text{si } |k|=1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Donc Y_t est bien stationnaire.

6) $$\gamma_Y(k) = \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2 + (1+\theta'^2)\sigma'^2 & \text{si } k=0 \\ -\theta\sigma^2 - \theta'\sigma'^2 & \text{si } |k|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

7) On dit d'un processus (X_t) qu'il est $AR(p)$ $(p \in \mathbb{N}^*)$ si :

$*$ $(X_t)_t$ est stationnaire

$*$ $\Phi(L)X_t = \varepsilon_t$

avec $\Phi(L) = id - \phi_1 L - \ldots - \phi_p L^p$ $\quad \phi_j \in \mathbb{R}, \phi_p \neq 0$

et $\varepsilon_t \sim BB(0,\sigma_\varepsilon^2)$

On a montré que Y_t est stationnaire

$Y_t = X_t + X_t'$

Si $\theta = \theta'$ on a $Y_t = \varepsilon_t + \varepsilon_t' - \theta(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_{t-1}')$

$= \eta_t - \theta\eta_{t-1}$

$= \Theta(L)\eta_t$ $\quad$ avec $\eta_t \sim BB(0,\sigma^2+\sigma'^2)$

$\Rightarrow$ Y_t est un $MA(1)$

avec $\Theta(L) = 1 - \theta L$

Si $|\theta| < 1$, $\Theta(L)$ est inversible et $\Theta^{-1}(L) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^j L^j$

$|\theta| > 1$, $\Theta(L)$ est inversible et $\Theta^{-1}(L) = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{-j} F^j$

$|\theta| = 1$, $\Theta(L)$ non inversible

$\Rightarrow$ Si $|\theta| \neq 1$ $\Rightarrow$ $\Theta^{-1}(L)Y_t = \eta_t$

$\Rightarrow$ Y_t est un AR

8) $Z_t = X_t X'_t$

* $\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[X_t X'_t]$

$= \mathbb{E}[X_t]\mathbb{E}[X'_t]$ car $\forall (u,v), \varepsilon_u \perp\!\!\!\perp \varepsilon'_v$

$= 0$

* $\mathbb{V}[Z_t] = \mathbb{V}[X_t X'_t]$

$= \mathbb{V}[X_t]\mathbb{V}[X'_t]$ car $\forall (u,v), \varepsilon_u \perp\!\!\!\perp \varepsilon'_v$

$= (1+\theta^2)\sigma^2 (1+\theta'^2)\sigma'^2$

$$\begin{aligned}
Cov(Z_t, Z_{t+k}) &= \mathbb{E}[Z_t Z_{t+k}] - \underbrace{\mathbb{E}[Z_t]}_{=0}\underbrace{\mathbb{E}[Z_{t+k}]}_{=0} \\
&= \mathbb{E}[Z_t Z_{t+k}] \\
&= \mathbb{E}[X_t X'_t X_{t+k} X'_{t+k}] \\
&= \mathbb{E}[X_t X_{t+k}]\mathbb{E}[X'_t X'_{t+k}] = \gamma_X(k)\gamma_{X'}(k) \\
&= \begin{cases} (1+\theta^2)\sigma^2(1+\theta'^2)\sigma'^2 & \text{si } k=0 \\ \theta\sigma^2\theta'\sigma'^2 & \text{si } |k|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

$\Longrightarrow Z_t$ stationnaire

9) $$\gamma_Z(k) = \begin{cases} (1+\theta^2)(1+\theta'^2)\sigma^2\sigma'^2 & \text{si } k=0 \\ \theta\theta'\sigma^2\sigma'^2 & \text{si } |k|=1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

10) On suppose $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

$\Longrightarrow X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$

$\mathbb{E}[X_t] = 0$

$\mathbb{V}[X_t] = \gamma_X(0) = (1+\theta^2)\sigma^2$

$\Longrightarrow X_t \sim \mathcal{N}(0, (1+\theta^2)\sigma^2)$ car CL de $\mathcal{N}$

11) Loi jointe de (X_t, X_{t-1})

$\longrightarrow (X_t, X_{t-1})$ suit une loi multidimensionnelle avec $\mu = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X_t] \\ \mathbb{E}[X_{t-1}] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

et $$\Sigma = \begin{pmatrix} \gamma_X(0) & \gamma_X(1) \\ \gamma_X(1) & \gamma_X(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1+\theta^2)\sigma^2 & -\sigma^2\theta \\ -\sigma^2\theta & (1+\theta^2)\sigma^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbb{V}[X_t] & Cov(X_t, X_{t-1}) \\ Cov(X_{t-1}, X_t) & \mathbb{V}[X_{t-1}] \end{pmatrix}$$