ISFA 2° année
Processus Stochastiques
Correction de l'examen du 10 janvier 2007

Exercice 1 Jeu de l'oie

1. La matrice de transition est la suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   La mesure initiale est la loi de Dirac en 1 : $P(X_0 = 1) = 1$. La chaîne ainsi construite est irréductible. Ce ne serait pas le cas si on arrêtait le jeu lorsque l'oie tombe sur 7 ; on aurait alors une chaîne de Markov avec un état absorbant.

2. La chaîne étant irréductible et l'espace d'états, fini, on peut affirmer que tous les états sont positivement récurrents et de même période. Cette période est égale à 1. Par exemple, les chemins

$$1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 1 \qquad \text{et} \qquad 1 \longrightarrow 5 \longrightarrow 7 \longrightarrow 1$$

   sont parcourus avec une probabilité stricetement positive par la chaîne, et le pgcd de leurs longueurs vaut 1.

3. La chaîne étant irréductible sur un espace d'états fini, la mesure stationnaire existe et est unique. Elle est l'unique solution du système $M^t\overline{\mu} = \overline{\mu}$ vérifiant de plus $\mu_1 + \cdots + \mu_7 = 1$. La solution de ce système est $\overline{\mu} = (2796, 1548, 1480, 1456, 1820, 1576, 1583)/12259$.

4. La chaîne étant récurrent positive, le temps moyen du premier retour en 7 partant de 7 est $1/\mu_7$. On gagne donc en moyenne en $1/\mu_7 - 1$ coups (il faut enlever la transition $7 \longrightarrow 1$). On obtient environ 6.74 coups.

   Attention : Regarder le premier instant de retour en 1 partant de 1 ne marche pas, car si on arrive en 1, rien ne dit que l'état précédent était l'état 7.

5. Cela reste évidemment une chaîne de Markov : le caractère markovien vient du fait que, conditionnellement à la position actuelle, on choisit la position suivante indépendamment du passé. Seule la 5e ligne de la matrice de transition est modifiée : elle devient $(0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0)$. La chaîne reste irréductible et apériodique. La probabilité stationnaire n'a aucun rapport avec celle calculée précédemment. On obtient ici en résolvant le nouveau système

$$\overline{\nu} = (524, 212, 720, 364, 455, 324, 352)/2951.$$

   La durée moyenne d'une partie est maintenant de $1/\nu_7 - 1$, soit environ 7.38 coups.

Exercice 2 Optimisation de richesse

Si ce n'est pas précisé, les variations quadratiques considérées son sous la probabilité P.

1. Le processus $(\int_0^t \mu_s ds)_t$ est à variations bornées donc sa variation quadratique est nulle. On applique la formule de Itô à la fonction $f(x,u) = x\exp(-u)$. Les dérivées de f sont
$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp(-u), \quad \frac{\partial f}{\partial u} = -x\exp(-u), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$
et si (U_t) est à variations bornées, on a
$$< U >_t = < X, U >_t = 0$$
d'où
$$f(S_t, U_t) = f(S_0, U_0) + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial x}(S_s, U_s) dS_s + \frac{\partial f}{\partial u}(S_s, U_s) dU_s \right)$$
ou encore :
$$df(S_t, U_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(S_s, U_s) dS_s + \frac{\partial f}{\partial u}(S_s, U_s) dU_s$$
On obtient
$$\begin{aligned} d\left(S_t \exp\left(-\int_0^t \mu_s ds\right)\right) &= \exp\left(-\int_0^t \mu_s ds\right) dS_t - \mu_t S_t \exp\left(-\int_0^t \mu_s ds\right) ds \\ &= \exp\left(-\int_0^t \mu_s ds\right) S_t \sigma dB_t \end{aligned}$$
(B_t) étant une P-martingale, toute intégrale stochastique par rapport à dB_t est une P-martingale donc $S_t \exp\left(-\int_0^t \mu_s ds\right)$ est une P-martingale.

2. (a) Soit $U_t = \int_0^t \theta_s dB_s$. C'est une P-martingale et on a $dU_t = \theta_t dB_t$ et $d < U >_t = \theta_t^2 dt$. En appliquant la formule de Itô à $f(u, \phi) = \exp(-u - \phi/2)$, il vient
$$df(U_t, \int_0^t \theta_s^2 ds) = dL_t = -L_t dU_t - \frac{1}{2} L_t U_t^2 + \frac{1}{2} V_t \theta_t^2 dt + \frac{1}{2} V_t d < U >_t .$$
d'où
$$dL_t = -L_t dU_t = -L_t \theta_t dB_t.$$
On en déduit $d < L >_t = L_t^2 \theta_t^2 dt$ et $d < L, B >_t = -L_t \theta_t dt$.
$$\begin{aligned} dL_t &= -\theta_t L_t dB_t - \frac{\theta_t^2}{2} L_t dt - (B_t + \theta_t t) L_t d\theta_t + \frac{1}{2} \theta_t^2 L_t d < B >_t \\ &= -\theta_t L_t dB_t \mu + \left(-\frac{\theta_t^2}{2} - (B_t + \theta_t t) \right) L_t dt \end{aligned}$$

(b) La formule de Girsanov dit exactement que $(\tilde{B}_t L_t)$ est une P-martingale, ou encore que, en posant $dQ_t = L_t dP_t$, dQ est une mesure de probabilité équivalente à P et $\tilde{B}_t$ est une Q-martingale.
On peut aussi vérifier (toujours avec Itô) que $(\tilde{B}_t L_t)$ est une P-martingale : on obtient :
$$\begin{aligned} d(\tilde{B}_t L_t) &= \tilde{B}_t dL_t + L_t d\tilde{B}_t + d < \tilde{B}, L >_t \\ &= \tilde{B}_t dL_t + L_t(dB_t + \theta_t dt) + d < B, L >_t \\ &= \tilde{B}_t dL_t + L_t dB_t + L_t \theta_t dt - L_t \theta_t dt \\ &= \tilde{B}_t dL_t + L_t dB_t \end{aligned}$$
$\tilde{B}_t L_t$ est donc la somme de deux intégrales stochstiques, l'une par rapport à dL_t, l'autre par rapport à dB_t. Or, (L_t) et (B_t) étant des P-martingales, toute intégrale stochastique par rapport à un de ces processus est une P-martingale. $(\tilde{B}_t L_t)$ est donc une P-martingale, ce qui équivaut au fait que $(\tilde{B}_t)$ est une Q-martingale.

(c) Le mouvement brownien étant la seule martingale de variation quadratique t, il faut montrer que $(B_t^2 - t)$ est une Q-martingale, ce qui équivaut à montrer que $(L_t(\tilde{B}_t^{\,2} - t))$ est une P-martingale. On applique à nouveau la formule de Itô à $f(x,y,t) = (x^2 - t)y$. Les dérivées partielles de f sont :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - t \quad \frac{\partial f}{\partial t} = -y$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2x$$

Les autres dérivées de f n'interviendront pas. Il vient

$$\begin{aligned} d(L_t(\tilde{B}_t^{\,2} - t)) &= 2\tilde{B}_t L_t d\tilde{B}_t + (\tilde{B}_t^2 - t)dL_t - L_t dt + L_t d < \tilde{B} >_t + 2\tilde{B}_t d < \tilde{B}, L >_t \\ &= 2\tilde{B}_t L_t dB_t + 2\tilde{B}_t L_t \theta_t dt + (\tilde{B}_t^2 - t)dL_t - L_t dt + L_t dt - 2\tilde{B}_t L_t \theta_t dt \\ &= 2\tilde{B}_t L_t dB_t + (\tilde{B}_t^2 - t)dL_t \end{aligned}$$

$(L_t(\tilde{B}_t^{\,2} - t)$ est donc une P-martingale et $((\tilde{B}_t^{\,2} - t)$ est une Q-martingale.

(d) On $d\tilde{B}_t = dB_t + \theta_t dt$ donc

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma(d\tilde{B}_t - \theta_t dt)) = S_t(\sigma d\tilde{B}_t + r_t dt).$$

3. (a) On remplace $d\tilde{S}_t$ par sa valeur dans l'expression de dX_t et on obtient :

$$\begin{aligned} dX_t &= n(t)dS_t + \tilde{n}(t)\tilde{S}_t r_t dt \\ &= n(t)dS_t + (X_t - n(t)S_t)r_t dt \\ &= X_t r_t dt + n(t)(dS_t - S_t r_t dt) \end{aligned}$$

(b) On remplace dS_t par sa valeur en fonction de $d\tilde{B}_t$ dans l'expression de dX_t et on obtient :

$$dX_t = r_t X_t dt + \pi_t \sigma d\tilde{B}_t.$$

(c) cf la question de cours : R_t est un processus à variations bornées donc $< R >_t = < X, R >_t = 0$ et

$$\begin{aligned} d(X_t R_t) &= X_t dR_t + R_t dX_t \\ &= -X_t R_t r_t dt + R_t(r_t X_t dt + \pi_t \sigma d\tilde{B}_t) \\ &= \sigma \pi_t d\tilde{B}_t \end{aligned}$$

$\tilde{B}_t$ étant une Q-martingale, $(X_t R_t)$ est aussi une Q-martingale.

(d) Par définition d'une martingale (sous Q), on a, pour tout $t \leq T$, $E_Q(X_T R_T | \mathcal{F}) = X_t R_t$.

4. (a) On calcule dZ_t :

$$\begin{aligned} dZ_t &= X_t dR_t + R_t dX_t + R_t c_t dt \\ &= -X_t R_t r_t dt + R_t(r_t X_t dt + \pi_t(dB_t + \theta_t dt) - c_t dt) + R_t c_t dt \\ &= R_t \pi_t d\tilde{B}_t \end{aligned}$$

Puisque $(\tilde{B}_t)$ est une Q-martingale, (Z_t) est une Q-martingale.

(b) On a donc, pour tout $t \leq T$, $\mathbf{E}_Q(Z_T|\mathcal{F}_t) = Z_t$. Les processus (c_t) et (r_t) sont $\mathcal{F}_t$-adaptés d'où
$$\mathbf{E}_Q\left(\int_0^t R_s c_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right) = \int_0^t R_s c_s ds.$$
On a donc bien
$$E_Q\left(X_T R_T + \int_t^T R_s c_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right) = X_t R_t$$

(c) Sous P, on a
$$E_Q\left(L_T\left(X_T R_T + \int_t^T R_s c_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_t\right) = L_t X_t R_t$$

Exercice 3

1. (N_t) vérifie :
   - $N_0 = 0$,
   - Pour tous réels $t \geq s \geq 0$, $N_t - N_s$ suit une loi de Poisson de moyenne $\lambda(t-s)$.
   - Pour tout $n \geq 3$ et tous réels $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \cdots \leq t_n$, les $n-1$ variables aléatoires $N(t_2) - N(t_1)$, $N(t_3) - N(t_2), \cdots, N(t_n) - N(t_{n-1})$ sont indépendantes.
2. Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi exponentielle de moyenne $1/\lambda$. On note $S_1 = X_1$ et, pour tout $n \geq 2$, $S_n = S_{n-1} + X_n$. Le processus défini pour tout $t \geq 0$ par $R_t = \mathrm{card}\{n \geq 1, S_n \leq t\}$ est un processus de Poisson de moyenne $\mathbf{E}(R_t) = \lambda t$.
3. On note $\{_\sqcup = \sigma\{\mathcal{N}_\int, \int \leq \sqcup\}$ la filtration naturelle du processus. Du fait de l'indépendance des accroissements du processus de Poisson, si $t > s$, la variable aléatoire $N_t - N_s$ est indépendante de la tribu $\{_\int$. On a donc
$$\begin{aligned} E(N_t - \lambda t|\mathcal{F}_s) &= N_s - \lambda t + \mathbf{E}(N_t - N_s|\mathcal{F}_s) \\ &= N_s - \lambda t + \mathbf{E}(N_t - N_s) \\ &= N_s - \lambda s \end{aligned}$$
4. On a de même
$$\begin{aligned} E\left((N_t - \lambda t)^2 - \lambda t|\mathcal{F}_s\right) &= E\left((N_t - N_s) + N_s - \lambda t)^2 - \lambda t|\mathcal{F}_s\right) \\ &= -\lambda t + E\left((N_t - N_s)^2 + N_s^2 + \lambda^2 t^2|\mathcal{F}_s\right) \\ &\quad +2E\left(N_s(N_t - N_s) - 2\lambda t(N_t - N_s) - 2\lambda t N_s|\mathcal{F}_s\right) \\ &= -\lambda t + E\left((N_t - N_s)^2\right) + N_s^2 + \lambda^2 t^2 + \\ &\quad +2N_s E(N_t - N_s|\mathcal{F}_s) - 2\lambda t E(N_t - N_s|\mathcal{F}_s) - 2\lambda t N_s \\ &= -\lambda t + \lambda(t-s) + \lambda^2(t-s)^2 + N_s^2 + \lambda^2 t^2 + \\ &\quad +2N_s\lambda(t-s) - 2\lambda^2 t(t-s) - 2\lambda t N_s \\ &= N_s^2 - 2\lambda s N_s - \lambda s + \lambda^2((t-s)^2 + t^2 - 2t(t-s)) \\ &= N_s^2 - 2\lambda s N_s - \lambda s + \lambda^2 s^2 \\ &= (N_s - \lambda s)^2 - \lambda s \end{aligned}$$
Cela signifie que la variation quadratique de la martingale (M_t) (et de la semi-martingale (N_t)) est λt.
5. La variable τ_k est le minimum d'une constante et d'un temps d'arrêt, c'est donc un temps d'arrêt borné (par k). On peut alors appliquer le théorème d'arrêt de Doob sans vérifier d'hypothèse supplémentaire. On obtient : $E(M_{\tau_k}) = \mathbf{E}(M_0) = 0$ ou encore : $\lambda E(\tau_k) = E(N_{tau_k})$.

6. Lorsque k tend vers $+\infty$, τ_k tend en croissant vers τ, ce qui implique que $E(\tau_k)$ tend vers $E(\tau)$. (N_t) étant un processus croissant, $E(N_{\tau_k})$ tend vers $E(N_\tau) = a$. On a donc $E(\tau) = a/\lambda$.
7. On applique le théorème d'arrêt de Doob à la martingale $(M_t^2 - \lambda t)$, entre les instants 0 et τ_k, temps d'arrêt borné. On obtient, pour tout k :

$$E(M_{\tau_k}^2 - \lambda \tau_k) = 0,$$

ou encore :

$$E(N_{\tau_k}^2) - 2\lambda E(\tau_k N_{\tau_k}) + \lambda^2 E(\tau_k^2) - \lambda E(\tau_k) = 0.$$

Toutes les espérances sont des espérances de variables aléatoires croissantes (on pourrait aussi appliquer le théorème de convergence dominée), on en déduit que

$$\begin{aligned} \lambda^2 E(\tau_k^2) &= -a^2 + 2\lambda a E(\tau) + \lambda E(\tau) \\ &= a^2 + a \end{aligned}$$

On obtient alors $E(\tau_k^2) = (a^2 + a)/\lambda^2$ et $\text{var}(\tau) = a/\lambda^2$.
Remarque : τ suit une loi Gamma(a, λ) car τ est égal à l'instant du a-ième saut de N_t : on sait en effet que les temps entre deux sauts consécutifs de (N_t) sont des variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de moyenne $1/\lambda$. On retrouve bien ici les résultats attendus pour la moyenne et la variance.