

Provisionnement non vie

2 mai 2017

M1 Actuariat, année 2016-2017

Durée : 2h

La calculatrice est autorisée ainsi qu'une feuille manuscrite seulement recto.

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 Nous considérons le triangle de paiements de sinistres incrémentaux, effectués par une compagnie d'assurance pour son portefeuille Corps maritimes au titre des exercices de 1984 à 1991 :

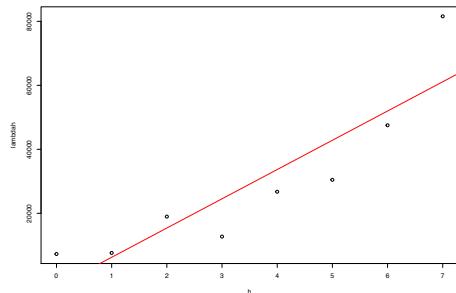
	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1381	4399	4229	435	465	205	110	67
1	859	6940	2619	1531	517	572	287	
2	6482	6463	3995	1420	547	723		
3	2899	16428	5521	2424	477			
4	3964	15872	8178	3214				
5	6809	24484	27928					
6	11155	38229						
7	10641							

a) Nous avons calculé le d -triangle ainsi que des statistiques élémentaires par colonnes.

	0	1	2	3	4	5	6
0	4,1854	1,7317	1,0435	1,0445	1,0188	1,0099	1,0060
1	9,0792	1,3358	1,1470	1,0433	1,0459	1,0220	
2	1,9971	1,3086	1,0838	1,0298	1,0382		
3	6,6668	1,2857	1,0976	1,0175			
4	5,0040	1,4123	1,1147				
5	4,5958	1,8925					
6	4,4271						
$\hat{\mu}$	5,1365	1,4944	1,0973	1,0338	1,0343	1,016	
$\hat{\sigma}$	2,0515	0,2326	0,0342	0,01103	0,0114	0,0061	
\hat{CV}	0,399	0,156	0,031	0,011	0,011	0,006	

Nous avons effectué un calcul de provision par la méthode de Chain-Ladder et avons obtenu une provision globale de 133750. L'application de cette méthode vous semble-t-elle appropriée ? Oui ? Non ? Pourquoi ?

- b) Calculer la provision par la méthode de Chain Ladder pondérée en utilisant une pondération par année calendaire. Comparer le résultat obtenu à celui obtenu par la méthode de Chain Ladder standard ($R = 133750$). Pourquoi utiliser une pondération par année calendaire ? Auriez-vous d'autres propositions de pondération ?
- c) Calculer le montant de provision globale par la méthode de séparation arithmétique de Verbeek-Taylor. Les facteurs d'inflation $(\lambda_h)_{h \geq n+1}$ seront extrapolés de façon linéaire : $\lambda_h = ah + b$. Les paramètres a et b ont été estimés par régression linéaire sur les valeurs antérieures de λ_h : $\hat{b} = -2890$ et $\hat{a} = 9142$. Dans le graphique ci-dessous, nous représentons les données avec la droite de régression estimée (en rouge).



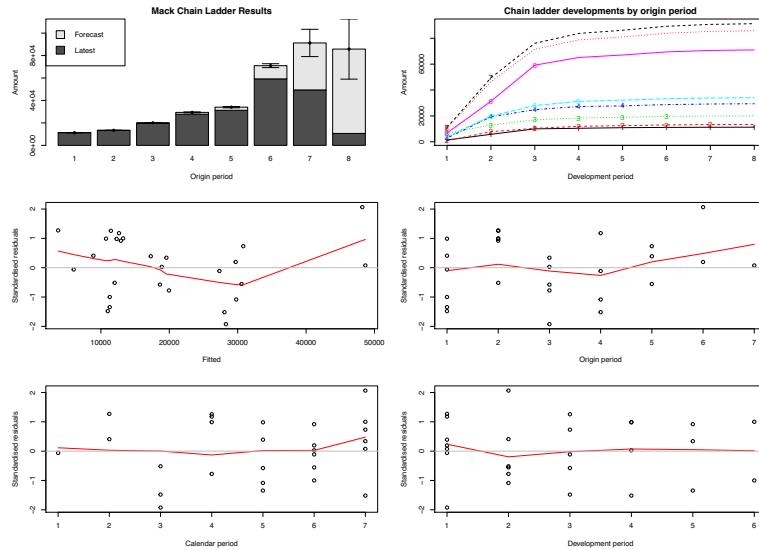
À votre avis, aurait-il été possible d'améliorer les résultats de cette méthode ? Si oui, comment ?

- d) Comparer les résultats obtenus par les trois dernières méthodes. Quelle méthode privilégeriez-vous ? Pourquoi ?

Exercice 2 Nous considérons le triangle de paiements incrémentaux de l'Exercice 1 (avec dorénavant $i, j = 1, \dots, 8$). À l'aide du logiciel R, nous avons estimé plusieurs modèles. Les résultats sont présentés ci-dessous :

- 1) modèle de Mack (N.B. les colonnes f_j et σ_j^2 ont été rajoutées)

	Latest	Dev.	To.Date	Ultimate	IBNR	Mack.S.E	CV(IBNR)	f_j	sigma^2_j
1	11,291		1.000	11,291	0.0	0.0	NaN	4.362693	1.214391e+04
2	13,325		0.994	13,405	79.5	32.3	0.406	1.541039	1.338376e+03
3	19,630		0.978	20,072	441.8	183.6	0.415	1.100012	1.640612e+01
4	27,749		0.944	29,380	1,631.1	410.7	0.252	1.029489	2.852305e+00
5	31,228		0.917	34,039	2,810.6	596.0	0.212	1.035476	2.265839e+00
6	59,221		0.834	71,007	11,785.9	1,728.8	0.147	1.016438	8.806148e-01
7	49,384		0.541	91,248	41,864.3	12,155.7	0.290	1.005969	3.572896e-02
8	10,641		0.124	85,778	75,137.0	26,779.8	0.356	1.000000	
	Totals								
	Latest:	222,469.00							
	Dev:		0.62						
	Ultimate:	356,219.13							
	IBNR:		133,750.13						
	Mack.S.E		31,223.77						
	CV(IBNR):		0.23						



- i) Pour l'année d'origine 2, détailler le calcul de chacune des quantités de la table tout en expliquant ce que chaque quantité représente.
 - ii) Calculer un intervalle de prédiction à 95% pour R sous l'hypothèse de normalité puis de lognormalité.
 - iii) Sous les mêmes hypothèses, calculer la provision suffisante dans 95% des cas.
 - iv) Commenter globalement les résultats du modèle de Mack (à l'aide de la table et des graphiques) ainsi que les résultats obtenus au point ii) et iii) ci-dessus (10 lignes maximum).
- 2) modélisation Log Poisson surdispersée (loi de Poisson surdispersée et fonction lien ln). *Nous rappelons que pour une loi de Poisson, la fonction variance est donnée par $V(\mu_{ij}) = \mu_{ij}$.*

	Estimate	Std. Error	t value	Pr(> t)
(Intercept)	7.2447	0.3083	23.498	< 2e-16 ***
anF2	0.1716	0.3627	0.473	0.64105
anF3	0.5753	0.3358	1.713	0.10142
anF4	0.9563	0.3186	3.002	0.00679 **
anF5	1.1035	0.3140	3.514	0.00206 **
anF6	1.8388	0.2954	6.224	3.57e-06 ***
anF7	2.0896	0.3048	6.857	8.89e-07 ***
anF8	2.0278	0.4128	4.912	7.37e-05 ***
devF2	1.2127	0.1761	6.888	8.30e-07 ***
devF3	0.8588	0.2048	4.193	0.00041 ***
devF4	-0.3969	0.3450	-1.150	0.26287
devF5	-1.5229	0.6584	-2.313	0.03095 *
devF6	-1.3090	0.7588	-1.725	0.09920 .
devF7	-2.0434	1.4406	-1.418	0.17073
devF8	-3.0400	3.4725	-0.875	0.39123
<hr/>				
Signif. codes:	0 ***	0.001 **	0.01 *	0.05 . 0.1 1
(Dispersion parameter for quasipoisson family taken to be 801.5309)				

- a) Écrire le modèle et montrer que dans ce modèle nous pouvons écrire :

$$MSEPC(\hat{R}_i) \approx \sum_{j \in \Delta_i} \phi \hat{\mu}_{ij} + \hat{\mu}_{ij}^2 Var(\hat{\eta}_{ij}) + 2 \sum_{j_1, j_2 \in \Delta_i, j_2 > j_1} \hat{\mu}_{ij_1} \hat{\mu}_{ij_2} Cov(\hat{\eta}_{ij_1}, \hat{\eta}_{ij_2})$$

$$MSEPC(\hat{R}) \approx \sum_{i, j \in \Delta} \phi \hat{\mu}_{ij} + \hat{\mu}_{ij}^2 Var(\hat{\eta}_{ij}) + 2 \sum_{i_1, j_1, i_2, j_2 \in \Delta, (i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)} \hat{\mu}_{i_1 j_1} \hat{\mu}_{i_2 j_2} Cov(\hat{\eta}_{i_1 j_1}, \hat{\eta}_{i_2 j_2})$$

avec Δ le triangle inférieur, Δ_i la i -ème ligne du triangle inférieur et η_{ij} le score.
Afin de simplifier les calculs, on considérera que \hat{R}_i est un estimateur sans biais de $E(R_i)$.

Nous avons ainsi pu calculer les quantités suivantes :

	R_i	sep(R_i)	CV(R_i)
1	0	0	NaN
2	80	354	4.43
3	442	818	1.85
4	1631	1575	1.38
5	2811	2052	0.73
6	11786	4747	0.40
7	41864	9873	0.24
8	75137	24332	0.32
R	133750		
sep(R)	30460.9		
CV(R)	0.228		

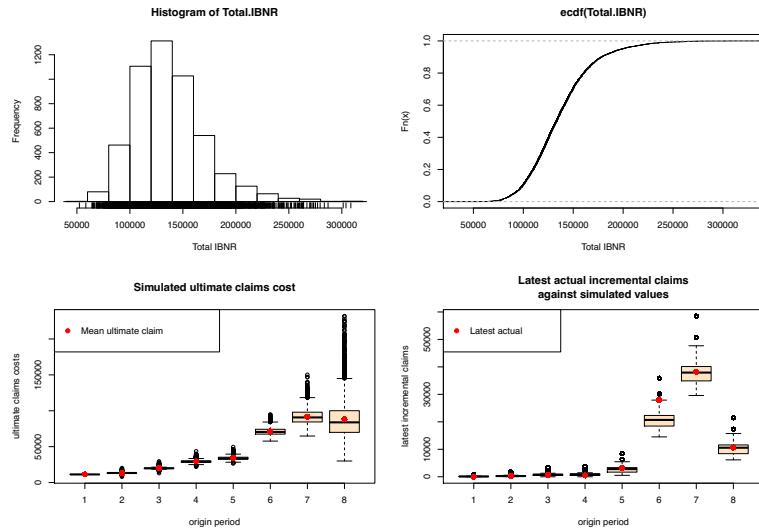
- b) Pour l'année d'origine 5, détailler le calcul de la provision.
- c) Nous avons ensuite effectué un Bootstrap sur ce modèle ($B=5000$) et nous avons obtenu un best estimate égale à 136042.9 et un risque d'estimation de 564676602. Calculer l'erreur de prédiction $sep_{boot}(\hat{R})$ et le coefficient de variation. Ensuite, comparer ces résultats aux résultats obtenus par le modèle Log Poisson surdispersé sans Bootstrap.
- 3) méthode Bootstrap avec modèle Log Gamma (loi de Gamma et fonction lien ln)

	Latest	Mean	Ultimate	Mean	IBNR	IBNR.S.E	IBNR	75%	IBNR	95%
1	11,291	11,291	0.0	0	0.0	0.0	0	0.0	0	0
2	13,325	13,398	73.3	496	43.1	805				
3	19,630	20,083	453.0	1,023	730.8	2,410				
4	27,749	29,409	1,660.4	1,842	2,538.5	5,237				
5	31,228	34,077	2,849.2	2,337	4,078.0	7,352				
6	59,221	71,155	11,934.3	5,191	15,003.6	21,552				
7	49,384	91,801	42,417.0	10,544	48,617.0	60,893				
8	10,641	87,902	77,260.6	26,554	89,424.4	128,422				
Totals										
Latest:	222,469									
Mean Ultimate:	359,117									
Mean IBNR:	136,648									
IBNR.S.E	33,281									
Total IBNR 75%:	154,235									
Total IBNR 95%:	198,805									

- a) Expliquer ce que chaque colonne de ce tableau représente.

- b) Calculer le coefficient de variation pour \hat{R}_i , $i = 2, \dots, 8$, et \hat{R} .

- c) À l'aide des graphiques ci-dessous, que pouvez-vous conclure sur la performance de la méthode ? Pourquoi ?



- 4) Au vu des résultats obtenus pour la provision globale par les différentes méthodes (modèle de Mack, modèle Log Poisson surdispersé, Bootstrap avec modèle Log Poisson surdispersé et Bootstrap avec modèle Log Gamma) quelle méthode privilégierez-vous ? Pourquoi ? Si vous le souhaitez, vous pouvez résumer les résultats dans un tableau afin de faciliter la comparaison entre les méthodes.

$$f_{ij} = \frac{\sum_{c=0}^{m-\delta-1} f_{ij}^{c+1} w_{ij}}{\sum_{c=0}^{m-\delta-1} w_{ij}}$$

$w_{ij} = i \in j \text{ ère année calend}$

Exercice 1.

© Théo Jalabert

a) Non cette méthode me semble pas appropriée car les facteurs de développement du d-triangle me sont pas semblablement constraint par colonnes.

b) Sous la méthode de Chain Ladder pondérée les facteurs de dev^t sont:

$$f_j = \frac{\sum_{i=0}^{7-j-1} f_{ij} W_{ij}}{\sum_{i=0}^{7-j-1} W_{ij}} \quad j \in [0, 6]$$

Ceux du d-triangle

Comme la pondération est par année calendaire
 $\Rightarrow W_{ij} = i + j + 1$.

$$\Rightarrow f_0 = 1,9495 ; f_1 = 1,531 ; f_2 = 1,1013 ; f_3 = 1,0316 ; f_4 = 1,0354 ; f_5 = 1,0164 ; f_6 = 1,0060$$

Le tableau fourni correspond au triangle de paiements sinistres cumulatifs.

⚠ nous ne sommes

pas obligé de construire
le tableau il suffit d'utiliser
la relation *

\Rightarrow Le triangle des paiements cumulés est obtenu par $C_{ij} = \sum_{h=0}^i x_{ih} *$

	0	1	2	3	4	5	6	7
0	1381	5780	10009	10444	10309	11114	11224	11291
1	859	7799	10418	11949	12466	13038	13325	
2	6482	12945	16360	18360	18907	19630		
3	2899	19327	24848	27272	27749			
4	3364	19836	28014	31228				
5	6809	31293	59221					
6	11155	49384						
7	10641							

Donc $\forall i \in [0, 6], C_{i,7} = C_{i,7-i} \prod_{h=7-i}^6 f_h$ et $R_i = C_{i,7} - C_{i,m-i} \quad i \in [1, m]$

$$\Rightarrow C_{0,7} = 11291$$

$$C_{1,7} = 13404,95$$

$$C_{2,7} = 20071,6436$$

$$C_{3,7} = 29377,7232$$

$$C_{4,7} = 34105,6477$$

$$C_{5,7} = 71230,0923$$

$$C_{6,7} = 89875,5716$$

$$C_{7,7} = 95851,5573$$

$$R_0 = 0$$

$$R_1 = 79,95$$

$$R_2 = 441,636$$

$$R_3 = 1628,7232$$

$$R_4 = 2877,6477$$

$$R_5 = 12003,0923$$

$$R_6 = 60491,5716$$

$$R_7 = 85210,5573$$

$$\Rightarrow R = \sum R_i = 142739,1857$$

On obtient une provision plus grande.

On utilise une pondération calendaire lorsqu'on souhaite donner + de poids aux années récentes.

On aurait pu prendre le dernier f_j ou la moyenne des 2 derniers.

c) Utilisation de Verbeek-Taylor arithmétique : $X_{ij} = y_j \lambda_{i,j}$, $\sum_{j=0}^m y_j = 1$

$$d_k = \lambda_k \sum_{j=0}^k y_j = \sum_{i=0}^k x_{i,k-i}; V_j = \sum_{i=0}^{m-j} x_{ij} = y_j \sum_{k=j}^m \lambda_k \Rightarrow \begin{cases} \lambda_k = \frac{d_k}{1 - \sum_{j=0}^{k-1} y_j} \\ y_k = \frac{V_k}{\sum_{k=j}^m \lambda_k} \end{cases}$$

" géométrique : $\prod_{j=0}^m y_j = 1$

$$q_k = \prod_{i=0}^k x_{i,k-i} = \lambda_k \prod_{j=0}^k y_j$$

$$w_j = \prod_{i=0}^{m-j} x_{ij} = y_j \prod_{k=j}^m \lambda_k$$

↳ On peut améliorer cette méthode en utilisant un ajustement exponentiel des λ_k plutôt que linéaire.

$$R_i = C_{im} - C_{i,m-i}$$

$$C_{ij} = \sum_{h=0}^j x_{ih}$$

$$= \sum_{h=0}^m x_{ih} - \sum_{h=0}^{m-i} x_{ih}$$

avec $x_{ih} = y_h \lambda_{i,h}$ $\lambda_{i,h} = \alpha \lambda_{i,h-1} + \beta$ $d_k = \sum_{i=0}^k x_{i,k-i}$

$$\Rightarrow d_0 = 1381; d_1 = 4399 + 859; d_2 = 6229 + 6940 + 6482; d_3 = 12416; d_4 = 26383; d_5 = 30344; d_6 = 47470; d_7 = 81586$$

$$= 5258 \quad \quad \quad = 17651$$

$$V_j = \sum \text{colonne} \Rightarrow V_0 = 64190, V_1 = 112815, V_2 = 52670, V_3 = 9024, V_4 = 2006, V_5 = 1500, V_6 = 397, V_7 = 67$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_7 = d_7 \\ y_7 = \frac{V_7}{\lambda_7} \end{cases}, \begin{cases} \lambda_6 = \frac{d_6}{1 - y_7} \\ y_6 = \frac{V_6}{\lambda_6 + \lambda_7} \end{cases}, \begin{cases} \lambda_5 = \frac{d_5}{1 - y_6 - y_7} \\ y_5 = \frac{V_5}{\lambda_5 + \lambda_6 + \lambda_7} \end{cases}, \dots \Rightarrow \begin{cases} \lambda_7 = 81586; \lambda_6 = 4750382; \lambda_5 = 346272; \lambda_4 = 2693861; \lambda_3 = 127222; \lambda_2 = 1859785; \lambda_1 = 7624846 \\ y_7 = 0.0008; y_6 = 0.0038; y_5 = 0.0010; y_4 = 0.1073; y_3 = 0.4535; y_2 = 0.24073; y_1 = 0.5003; y_0 = 0.18977 \end{cases}$$

$$X_{ij} = y_j \lambda_{i,j}$$

$$R_i = \sum_{h=0}^m x_{ih} - \sum_{h=0}^{m-i} x_{ih} = \sum_{h=m-i+1}^m x_{ih}$$

$$R_2 = \sum_{h=7-2=5}^3 x_{ih} = x_{25} + x_{27}$$

$$R_0 = 0; R_1 = x_{17} = y_7 \lambda_7 = y_7 (\alpha \times 8 + \beta) = 5770182; R_2 = 2812687; R_3 = 9773603$$

$$R_4 = 1857419; R_5 = 5260901; R_6 = 2280549; R_7 = 6077033$$

$$\Rightarrow R = 9200847$$

c) Par principe de prudence, on privilégie la méthode avec le + grand R . \Rightarrow C'est pondérée car $R = 142739$

Exercice 2:

1) i) ligne 2:

La teste: $C_{2,7} = \sum_{h=0}^7 x_{2h} = 13325 \leftarrow$ C'est le dernier ponctuellement comme pour les sinistres de la 2^e année.

Dev. la date : $\frac{\text{La teste}}{\text{Ultimate}} = 0,934 \leftarrow$ C'est la cadence du règlement "

Ultimate = $C_{2,8} = C_{2,7} \times f_7 = 13405 \leftarrow$ C'est la charge ultime pour les sinistres de la 2^e année

$$\text{Hack SE: } \sqrt{\text{MSEP}(\hat{R}_i)} = \sqrt{C_{i,2}^2 \frac{\bar{J}^2}{8}} \left[\frac{1}{C_{i,2}} + \frac{1}{C_{i,2}} \right] = 32,3 \leftarrow \text{Variat° de l'erreur de l'estimat°}$$

$$\text{CV(IBNR)} = \frac{\text{Hack SE}}{\text{IBNR}} = 0,46 \leftarrow \text{Coef de variat°}$$

$$\bar{J}_2 = \frac{\sum_{i=0}^{8-2-1} C_{i,2+1}}{\sum_{i=0}^{8-2-1} C_{i,2}} = 1,541639 \leftarrow \text{facteur de chgt de l'année 2.}$$

$$\hat{J}_2^2 = \frac{1}{8-2-1} \sum_{i=0}^{2} C_{i,2} \left(\frac{C_{i,2+1}}{C_{i,2}} - \bar{J}_2 \right)^2 \leftarrow \text{Variance de l'année 2.}$$

$$\text{se}(\hat{R}) = \sqrt{\text{MSEP}(\hat{R})}$$

ii) Hack hypothèse de normalité: $\text{IC} = [\hat{R} \pm 2\text{se}(\hat{R})]$
 $= [133750,13 \pm 2 \times 31223,77]$
 $= [71302,59 ; 196197,67]$.

Hack hypothèse de lognormalité: $\text{IC} = [\exp(\mu \pm 2\sigma)]$

$$\begin{aligned} \text{avec } \mu &= \ln(\hat{R}) - \frac{\bar{J}^2}{2} \quad \text{et } \bar{J}^2 = \ln\left(1 + \left(\frac{\text{se}(\hat{R})}{\hat{R}}\right)^2\right) \\ &= 11,77717957 \\ &\qquad\qquad\qquad = \ln\left(1 + \left(\frac{31223,77}{133750,13}\right)^2\right) \\ &\qquad\qquad\qquad = 0,053098134 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{IC} = [\exp(\mu \pm 2\sigma)] \\ = [82151,38 ; 206496,80]$$

iii) Hyp de Normalité: $R_{95\%} = \frac{\text{IE}[R]}{\text{IBNR}} + 1,96 \times \frac{\text{Var}(R)}{\text{se}(R)}$
 $= 133750,13 + 1,96 \times 31223,77$
 $= 191968,72$.

Hyp de Log-normalité: $R_{95\%} = \exp(\mu + 1,96 \times \sigma)$

$$\begin{aligned} &= \exp(11,77717957 + 1,96 \times \sqrt{0,053098134}) \\ &\approx 206602,22 \end{aligned}$$

iv) OK

$$\text{MSE}(\hat{R}_i) = \text{MSE}(\hat{R}_i) + \text{Var}(\hat{R}_i)$$

$$= \sum_{j \neq i} \text{Var}(\hat{\mu}_{ij}) + 2 \sum_{j \neq i} \text{cov}(\hat{\mu}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}) + \Phi \text{Var}(\hat{\mu}_{ij})$$

$$\text{Var}(d(b)) \approx \text{Var}[d(b) + d'(b)(\varepsilon - b)] \approx \text{Var}[d(bB)] \approx d(b)^2 \text{Var}(B) \text{ dupl. Taylor}$$

$$\hat{\mu}_{ij} = \exp(\hat{\eta}_{ij}) \quad \text{Var}(\hat{\mu}_{ij}) = \left(\frac{\partial \hat{\mu}_{ij}}{\partial \eta_{ij}} \right) \text{Var}(\eta_{ij}) = \hat{\mu}_{ij} \text{Var}(\eta_{ij})$$

$$\text{Cov}(\hat{\mu}_{ij}, \hat{\mu}_{ij}) = \left| \begin{array}{c|c} \frac{\partial \hat{\mu}_{ij}}{\partial \eta_{ij}} & \frac{\partial \hat{\mu}_{ij}}{\partial \eta_{ij}} \\ \hline \end{array} \right| \text{cov}(\eta_{ij}, \eta_{ij})$$

$$\text{MSE}(\hat{R}_i) = \sum_j \Phi \hat{\mu}_{ij} + \hat{\mu}_{ij}^2 \text{Var}(\eta_{ij}) + 2 \sum_j \hat{\mu}_{ij} \hat{\mu}_{ij} \text{cov}(\eta_{ij}, \eta_{ij})$$

b) $\mathbb{E}[\hat{R}_5] = \sum_{j=5}^8 e^{\hat{\mu} + \hat{\alpha}_5 + \hat{\beta}_j} = e^{\hat{\mu} + \hat{\alpha}_5} \sum_{j=5}^8 e^{\hat{\beta}_j} = 2810,506$

$$\mathbb{E}[\hat{R}_5] = \overline{\dots} = \sum_{j \geq 5}$$

c) $\text{Sep}_{\text{boot}}(\hat{R}) = \sqrt{\text{MSE}_{\text{boot}}(\hat{R}) + \text{Var}_{\text{boot}}(\hat{R})}$
 $= \sqrt{564676602 + 136042,9}$
 $= 23763,79$

$$CV = \frac{\text{Sep}_{\text{boot}}}{\bar{R}} = \frac{23763,79}{136042,9} = 0,1767$$

↳ meilleure estimat° car Sep et CV sont plus petit par bootstrap.

3) a) Latent ← Derniers paiements commis par année d'origine

Mem Ultimac ← Moyenne des charges ultimes

Mem IBNR ← Moyenne des provisions

IBNR SE ← erreurs sur provision

IBNR 75% ← Précis° suffisante dans 75% des cas.

IBNR 95% ← " 95% des cas.

b) $CV(\text{IBNR}_i) = (6,767; 2,258; 1,109; 0,820; 0,435; 0,219; 0,344)$
 $i \in \{2, 8\}$

$$CV(\text{IBNR}(\bar{R})) = \frac{33281}{136648} = 0,2436$$

c) On remarque que le bootstrap fonctionne mal sur les années récentes car le latent actual (point rouge) est hors des boxplots → mauvaise prediction du bootstrap.

d) Choix de la méthode avec la + petite dispersion afin de se rapprocher au mieux de la réalité.