Examen Séries temporelles 2018-2019

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice - 2 heures

Questions de cours et applications: (4 points)

1. Qu'est-ce qu'un processus stationnaire fort et un processus stationnaire faible? A partir de données, comment procédez-vous pour savoir si un processus est stationnaire (faible)? Donner plusieurs caractérisations possibles en expliquant l'intérêt de ces caractérisations.

2. En quoi consiste la méthode de désaisonnalisation par moyennes mobiles? Donner ses limites.

Vrai ou Faux ? (3 points)

Justifier à chaque fois sinon la réponse sera considérée comme fausse.

1. Soit $X_t = 0.8X_{t-1} + 1 + \varepsilon_t$, où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort Gaussien de variance unitaire. La probabilité que X_t prenne une valeur supérieure à 4.5 est plus grande que 1/2. Indication: montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus Gaussien. Calculer sa moyenne.

2. On suppose que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est toujours gouvernée par le processus précédent. La dernière observation connue de X_t est égale à 4. La probabilité que la valeur suivante soit plus grande que 4.5 est plus grande que 1/2. Indication: montrer que la loi conditionnelle de X_{t+1} sachant X_t est une loi Gaussienne. Calculer sa moyenne.

3. Le processus $(1 - L/4 + L^2/4)X_t = (1 - L/2)\varepsilon_t$, où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible, possède une représentation AR d'ordre fini.

4. Le processus $(1 - 5L/6 + L^2/6)X_t = (1 - 2L)\varepsilon_t$, où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible, possède une représentation AR d'ordre fini.

5. Si $X_t = \varepsilon_t + 2\varepsilon_{t-1}$ alors $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une série stationnaire sous sa représentation canonique.

6. Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire alors on espère que la statistique de Ljung-Box calculée sur $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ devrait nous amener à accepter l'hypothèse nulle qui lui est associée.

Exercice 1 : (5 points)

Soit $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc fort de variance σ_η^2.

0. Rappeler la définition d'un bruit blanc fort et d'un bruit blanc faible.

On definit

$$X_t = \eta_t\eta_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

1. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible et donner sa variance.

On définit

$$Y_t = (\eta_t + m)(\eta_{t-1} + m), \qquad t \in \mathbb{Z},$$

avec $m \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $MA(1)$ non centré (donner son espérance, sa variance et ses autocorrélations).

3. Ecrire la représentation canonique de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 2 : (4 points)

On considère le processus $AR(2)$, (X_t), solution de l'équation canonique:

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} = \varepsilon_t,$$

avec (ε_t) bruit blanc faible.

1. Montrer que, pour que (ε_t) soit le processus des innovations, il est nécessaire d'avoir $|\varphi_2| < 1$.

2. Ecrire les équations de Yule-Walker reliant φ_1, φ_2, $\rho(1)$ et $\rho(2)$. Exprimer les autocorrélations $\rho(1)$ et $\rho(2)$ en fonction de φ_1 et φ_2.

3. On rappelle que le coefficient d'autocorrélation partielle d'ordre k est défini par :

$$r(k) = \mathbb{C}or\left(\tilde{X}_t, \tilde{X}_{t-k}\right)$$

où $\tilde{X}_t = X_t - EL(X_t|X_{t-1}, \ldots, X_{t-k+1})$ et $\tilde{X}_{t-k} = X_{t-k} - EL(X_{t-k}|X_{t-1}, \ldots, X_{t-k+1})$. On peut montrer par ailleurs que $r(k) = a_{kk}$ où a_{kk} est le coefficient de X_{t-k} dans la régression linéaire $EL(X_t|X_{t-1}, \ldots, X_{t-k})$

$$EL(X_t|X_{t-1}, \ldots, X_{t-k}) = \sum_{j=1}^{k} a_{jk} X_{t-j}.$$

(a) Montrer que

$$a_{11} = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}.$$

(b) Montrer que

$$a_{12} = \varphi_1 \quad \text{et} \quad a_{22} = \varphi_2.$$

Exercice 3 : (4 points)

Soit

$$X_t = \varepsilon_t - \frac{2}{5}\varepsilon_{t-1} - \frac{3}{25}\varepsilon_{t-2},$$

avec $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc fort Gaussien de variance unitaire. On sait que $\varepsilon_{t-2} = 2.2$, $\varepsilon_{t-1} = -3.4$, $\varepsilon_t = 1.6$.

(a) Quelles prévisions faites-vous en t pour $t+1$? pour $t+2$? pour $t+10$? Donner simplement les expressions des prévisions.

(b) Quels intervalles de confiance à 95%, donnez vous pour ces trois prévisions ? Donner simplement les expressions des prévisions.

Exercice 2 :

On considère le processus AR(2) (X_t) solut° de l'équat° canonique :

$$X_t - \varphi_1 X_{t-1} - \varphi_2 X_{t-2} = \varepsilon_t$$

$$(\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

1) La forme canonique (i.e ε_t innovat°) exige que les racines du polynôme caractéristique se situent à l'intérieur du cercle unité sur le plan complexe.

Ici le polynôme caract. est $\phi(x) = 1 - \varphi_1 x - \varphi_2 x^2$

Soit λ_1, λ_2 racines de ϕ $(|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1)$

$$\Rightarrow \phi(x) = (1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)$$

$$= 1 - (\lambda_1 + \lambda_2)x + \lambda_1 \lambda_2 x^2$$

Par identificat°, $-\varphi_2 = \lambda_1 \lambda_2$

$$\Rightarrow |\varphi_2| = |\lambda_1 \lambda_2| < 1$$

Donc (ε_t) innovat° $\Rightarrow |\varphi_2| < 1$.

2) Rappel : Yule - Walker $\longrightarrow$ $\gamma_X(k) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \gamma_X(k-j)$ $\forall k \geq 0$ $\quad + \sigma^2$ en 0

$$\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \rho_X(k-j)$$

$\Rightarrow$ Pour un AR(2), les équat° de Yule-Walker sont :

- $\gamma_X(0) = \varphi_1 \gamma_X(1) + \varphi_2 \gamma_X(2) + \sigma^2$
- $\gamma_X(1) = \varphi_1 \gamma_X(0) + \varphi_2 \gamma_X(1)$
- $\gamma_X(2) = \varphi_1 \gamma_X(1) + \varphi_2 \gamma_X(0)$

De plus, $\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \rho_X(k-j)$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \rho_X(1) = \varphi_1 + \varphi_2 \rho_X(1) \\ \rho_X(2) = \varphi_1 \rho_X(1) + \varphi_2 \end{array} \Rightarrow \begin{cases} \rho_X(1) = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2} \\ \rho_X(2) = \frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2} + \varphi_2 = \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2(1-\varphi_2)}{1-\varphi_2} \end{cases}$$

3) $r(k) = \mathrm{Cor}(\tilde{X}_t, \tilde{X}_{t-k})$ où $\tilde{X}_t = X_t - EL(X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1})$

$\tilde{X}_{t-k} = X_{t-k} - EL(X_{t-k} | X_{t-1}, \dots, X_{t-k+1})$

On a $EL(X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-k}) = \sum_{j=1}^{k} a_{jk} X_{t-j}$

a) On a $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$ avec ε_t innovat°

$r(k) = a_{kk} \Rightarrow a_{11} = r(1) = \mathrm{Cor}(\tilde{X}_t, \tilde{X}_{t-1})$

$$= \rho_X(1) = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}$$

b) $EL(X_t \mid X_{t-1}, \dots, X_{t-k}) = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + 0$ Car ε_t innovat°

$$\Rightarrow \begin{cases} a_{12} = \varphi_1 \\ a_{22} = \varphi_2 \end{cases}$$