# Modèles de durée / Examen du 27 juin 2012

**Durée 1,5h – aucun document n'est autorisé**

## Corrigé

## Problème : modèle à risques concurrents

On s'intéresse à un individu soumis à deux événements concurrents : le décès et l'entrée en dépendance. La durée avant le décès est notée *D* et la durée avant l'entrée en dépendance *I*. Les fonctions de survie associées sont notées respectivement $S_D$ et $S_I$. On suppose ces 2 événements indépendants. Enfin, on note, pour $x \le y$ fixés :

$$\varphi(x,y) = P(x < I < D \wedge y)$$

**Question n°1 (4 points)** : Donner l'expression de $\varphi$ en fonction de $S_D$ et $S_I$ et $f_D$ (densité de *D*) en utilisant un argument de conditionnement.

> On observe que $\varphi(x,y) = P(x < I < D \wedge y) = E_D P(x < I < D \wedge y | D)$ et donc
>
> $$\varphi(x,y) = \int_x^{+\infty} P(x < I < u \wedge y) f_D(u) du .$$
>
> En notant alors que $P(x < I < u \wedge y) = S_I(x) - S_I(u \wedge y)$ on obtient aisément :
>
> $$\varphi(x,y) = S_I(x) S_D(x) - \int_x^y S_I(u) f_D(u) du - \int_y^{+\infty} S_I(y) f_D(u) du$$
>
> $$= S_I(x) S_D(x) - S_I(y) S_D(y) - \int_x^y S_I(u) f_D(u) du$$

On suppose dans la suite que *D* et *I* suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs $\lambda_D$ et $\lambda_I$.

**Question n°2 (3 points)** : Donner l'expression de $\varphi(x, x+1)$. Que représente cette probabilité ?

> Le fonction de survie d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda$ est $S(x) = e^{-\lambda x}$ et donc :
>
> $$\varphi(x, x+1) = e^{-\lambda x} \left( 1 - e^{-\lambda} - \frac{\lambda_D}{\lambda} \left( 1 - e^{-\lambda} \right) \right)$$
>
> $$= e^{-\lambda x} \left( 1 - e^{-\lambda} \right) \left( 1 - \frac{\lambda_D}{\lambda} \right)$$
>
> en notant $\lambda = \lambda_I + \lambda_D$. $\varphi(x, x+1)$ représente la probabilité d'observer une entrée en dépendance entre *x* et *x*+1.

**Question n°3 (3 points)** : Quelle est la loi de $I \wedge D$ ?

> $P(I \wedge D > x) = P(I > x) \times P(D > x) = e^{-\lambda x}$ et donc $I \wedge D$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \lambda_I + \lambda_D$.

**Question n°4 (4 points)** : Déduire de ce qui précède la probabilité d'observer une entrée en dépendance entre *x* et *x*+1 sachant que l'individu est à risque en *x*. Vous donnerez l'interprétation de la formule obtenue.

> La probabilité cherchée est $p = P\left(x < I < D \wedge (x+1) \middle| D \wedge I > x\right)$ ce qui conduit à l'expression $p = \dfrac{P\left(x < I < D \wedge (x+1)\right)}{P(D \wedge I > x)} = \left(1 - e^{-\lambda}\right)\left(1 - \dfrac{\lambda_D}{\lambda}\right)$. Le terme $\left(1 - e^{-\lambda}\right)$ représente la probabilité d'observer une sortie sur la période considérée et $1 - \dfrac{\lambda_D}{\lambda} = \dfrac{\lambda_I}{\lambda}$ est la probabilité que cette sortie soit une entrée en dépendance.

**Question n°5 (3 points)** : On suppose maintenant que les lois de *I* et *D* sont données de manière non paramétrique *via* des probabilité conditionnelles de sortie $q_I(x)$ et $q_D(x)$. En vous inspirant de la question précédente, proposez une approximation de la probabilité d'observer une entrée en dépendance entre *x* et *x*+1 sachant que l'individu est vivant valide en *x*.

> On approche le modèle non paramétrique entre *x* et *x*+1 par un modèle exponentiel de paramètre $\lambda$ tel que $1 - q(x) = e^{-\lambda}$ et on applique la formule démontrée à la question précédente :
>
> $$\begin{aligned} p &= \left(1 - \left(1 - q_I(x)\right)\left(1 - q_D(x)\right)\right) \times \frac{\mathbf{ln}\left(1 - q_I(x)\right)}{\mathbf{ln}\left(1 - q_I(x)\right) + \mathbf{ln}\left(1 - q_D(x)\right)} \\ &\approx \left(1 - \left(1 - q_I(x)\right)\left(1 - q_D(x)\right)\right) \times \frac{q_I(x)}{q_I(x) + q_D(x)} \\ &= q_I(x) \times \left(1 - \frac{q_D(x) q_I(x)}{q_I(x) + q_D(x)}\right) \end{aligned}$$

**Question n°6 (3 points)** : Vous disposez d'observations sur un portefeuille fermé de cotisants d'assurance dépendance dans lequel vous sont données, outre la date de naissance, la date de décès et la date d'entrée en dépendance (si l'un de ces 2 évènements s'est produit). Comment estimez-vous $q_I(x)$ ?

> On utilise l'estimateur de Kaplan-Meier de la fonction de survie $S_I$ en considérant les sorties éventuelles par décès comme des censures vis à vis de l'entrée en dépendance.