

ISFA

Anne Eyraud-Loisel

Processus stochastiques - M1 Actuariat

Semestre automne 2021-2022

Éléments de correction TD n° 1

MARTINGALES DISCRÈTES ET TEMPS D'ARRÊTS

Exercice 1 : Les martingales de la marche aléatoire simple.

Soit $(Y_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Soit la *marche aléatoire simple* $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \sum_{i=1}^n Y_i, \quad \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est (\mathcal{F}_n) -adapté.
2. Montrer que $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(S_n^2 - n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(e^{\lambda S_n - n \ln(\cosh \lambda)})_{n \in \mathbb{N}}$ sont des (\mathcal{F}_n) -martingales.

Correction exercice 1 : Application directe du cours.**Exercice 2 : Martingale de Doob**

Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration. On définit le processus $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $Y_n = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n]$. Montrez que $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X .

Correction exercice 2 :

- Le processus $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -adapté car $\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n]$ est une variable aléatoire \mathcal{F}_n -mesurable.
- Pour tout entier n , la variable aléatoire Y_n est intégrable car on a l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|Y_n|] &= \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n]|] \\ &\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X| | \mathcal{F}_n]] \\ &= \mathbb{E}[|X|] < +\infty. \end{aligned}$$

- Enfin, pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_{n+1}] | \mathcal{F}_n] \\ &= \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n] \text{ (car } \mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}) \\ &= Y_n. \end{aligned}$$

Le processus stochastique $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est donc une martingale.

Exercice 3 : Propriétés des temps d'arrêt

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration et soient S et T deux temps d'arrêt discrets par rapport à cette filtration.

1. Montrez que $S \wedge T = \min(S, T)$, $S \vee T = \max(S, T)$ et $S + T$ sont aussi des temps d'arrêt.
2. Montrez que, si $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
3. * Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Montrez que la variable $Y_T = \mathbf{1}_{T < \infty} X_T$ est \mathcal{F}_T -mesurable.

Correction exercice 3 :

1. Les variables $S \wedge T$, $S \vee T$ et $S + T$ sont bien des variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

Ensuite, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned}\{S \wedge T \leq n\} &= \{S \leq n\} \cup \{T \leq n\} \\ \{S \vee T \leq n\} &= \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \\ \{S + T = n\} &= \bigcup_{i=0}^n \{S = i\} \cap \{T = n - i\}.\end{aligned}$$

Or, S et T sont des temps d'arrêts, donc tous les événements $\{S \leq n\}$, $\{S = i\}$ et $\{T \leq n\}$, $\{T = n - i\}$ sont \mathcal{F}_n -mesurables si $i \leq n$.

On en conclut que $S \wedge T$, $S \vee T$ et $S + T$ sont des temps d'arrêts.

2. Soit $A \in \mathcal{F}_S$. Il faut montrer que $A \in \mathcal{F}_T$. Pour cela, montrons que pour tout entier n , $A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$. On a l'égalité suivante :

$$\begin{aligned}A \cap \{T \leq n\} &= A \cap \{S \leq T \leq n\} \text{ (car } S \leq T) \\ &= A \cap \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\},\end{aligned}$$

qui appartient à \mathcal{F}_n car $A \in \mathcal{F}_S$ donc $A \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ car T est un temps d'arrêt.

On a donc bien que $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$.

3. * Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Montrons que $\{Y_T \in A\} \in \mathcal{F}_T$ en montrant que :

- $\{Y_T \in A\} \in \mathcal{F}$ (où \mathcal{F} est la tribu sous-jacente à l'espace de probabilité qui contient en particulier toutes les sous-tribus \mathcal{F}_n de la filtration)
- $\{Y_T \in A\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

Pour le premier point, il suffit d'écrire que

$$\begin{aligned}\{Y_T \in A\} &= \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{Y_T \in A\} \cap \{T = k\} \bigcup \{Y_T \in A\} \cap \{T = +\infty\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{+\infty} \{X_k \in A\} \cap \{T = k\} \bigcup \{0 \in A\} \cap \{T = +\infty\}\end{aligned}$$

qui appartient à la tribu \mathcal{F} car les variables aléatoires X_k et T sont mesurables par rapport à la tribu \mathcal{F} .

Ensuite,

$$\{Y_T \in A\} \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^n \{X_k \in A\} \cap \{T = k\}$$

qui appartient à \mathcal{F}_n car X_k est \mathcal{F}_k -mesurable ainsi que $\{T = k\}$ donc $\{X_k \in A\} \cap \{T = k\}$ est \mathcal{F}_n -mesurable.

Cela prouve que Y_T est \mathcal{F}_T -mesurable.

Exercice 4 : Temps d'arrêts et marche aléatoire.

Soit $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple issue de 0 définie par $S_0 = 0$ et $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$ si $n \geq 1$ où les $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont des v.a i.i.d de loi $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dire dans chaque cas si les variables aléatoires suivantes sont des temps d'arrêts.

1. $\tau = \inf\{n \geq 1, S_n = 0\}$.
2. $T = \max\{n \in \{0, \dots, 4\}, S_n = 0\}$.

Correction exercice 4 :

1. Montrons que τ est un temps d'arrêt. Pour cela, on montre que $\{\tau \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Or, τ est le premier temps (plus grand que 1) de retour en 0. Donc, si $n = 0$, alors $\{\tau \leq n\} = \emptyset$ et si $n \geq 1$ on a :

$$\begin{aligned}\{\tau \leq n\} &= \{ \text{la marche aléatoire est revenue en 0 avant le temps } n \} \\ &= \bigcup_{k=1}^n \{Y_1 + \dots + Y_k = 0\}.\end{aligned}$$

Or, pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, Y_1, \dots, Y_k sont des variables aléatoires réelles mesurables par rapport à \mathcal{F}_n par définition de cette tribu. Donc la somme $Y_1 + \dots + Y_k$ est aussi mesurable par rapport à \mathcal{F}_n , ce qui implique que $\{Y_1 + \dots + Y_k = 0\} \in \mathcal{F}_n$.

2. Montrons que T n'est pas un temps d'arrêt. Supposons par l'absurde que c'est un temps d'arrêt. Cela implique que $\{T = 2\}$ est mesurable par rapport à \mathcal{F}_2 . Or, \mathcal{F}_2 est indépendante de $\sigma(Y_3, Y_4)$, donc $\{T = 2\}$ est indépendant de $\{Y_3 + Y_4 = 0\}$ et on obtient que :

$$\mathbb{P}[T = 2 \text{ et } Y_3 + Y_4 = 0] = \mathbb{P}[T = 2] \mathbb{P}[Y_3 + Y_4 = 0].$$

Or le membre de gauche est nul car si $T = 2$ alors $S_2 = 0$ et $S_4 \neq 0$ donc $Y_3 + Y_4 \neq 0$. Par ailleurs, le membre de droite est strictement positif car $T = 2$ si et seulement si $X_1 = -X_2$ (ce qui a probabilité 1/2 par indépendance de Y_1 et Y_2) et $\mathbb{P}[Y_3 + Y_4 = 0] = 1/2$ donc est strictement positive. On est bien arrivés à une contradiction.

Exercice 5 : Martingale et processus prévisible

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration et soit $(H_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ un *processus prévisible* qui signifie, par définition, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est mesurable par rapport à \mathcal{F}_{n-1} . Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$. On suppose que pour tout n , H_n est borné et on définit le processus $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante : $N_0 = 0$ et

$$N_n = \sum_{k=1}^n H_k(M_k - M_{k-1}) \text{ si } n \geq 1.$$

1. Montrez que $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
2. Soit T un temps d'arrêt. En appliquant le résultat de la question précédente avec $H_k := \mathbf{1}_{T \geq k}$, en déduire que si $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale, alors il en est de même pour le processus arrêté $(M_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$.

Correction exercice 5 :

1. Le vocabulaire “prévisible” vient de l’observation suivante : H_k étant mesurable par rapport à \mathcal{F}_{k-1} , on connaît déjà cette variable aléatoire si on a toute l’information disponible avant le temps $k-1$.

Montrons que $(N_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale. Pour cela on montre les trois propriétés suivantes :

- (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, N_n est \mathcal{F}_n -mesurable. Le cas $n = 0$ vient du fait que N_0 est une constante donc est mesurable par rapport à n’importe quelle tribu. Pour $n \geq 1$, remarquons d’abord que pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, M_k est \mathcal{F}_k -mesurable et H_k, M_{k-1} sont \mathcal{F}_{k-1} -mesurable. Par croissance de la filtration, ils sont \mathcal{F}_n -mesurable, donc N_n est obtenu à partir de sommes et produits finis de variables \mathcal{F}_n -mesurables donc est \mathcal{F}_n -mesurable.
- (b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, N_n est intégrable. Comme une somme de variables intégrables est intégrable, il suffit de montrer que pour tout $k \geq 1$, $H_k M_{k-1}$ et $H_k M_k$ sont intégrables. Or pour tout $k \geq 1$ il existe $A_k \in \mathbb{R}_+$ tel que $|H_k| \leq A_k$ et donc :

$$\mathbb{E}[|H_k M_k|] \leq A_k \mathbb{E}[|M_k|].$$

$\mathbb{E}[|M_k|]$ est fini car $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ -martingale donc $\mathbb{E}[|H_k M_k|]$ est bien fini. On raisonne de même pour $\mathbb{E}[|H_k M_{k-1}|]$.

- (c) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[N_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = N_n$. On a :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[N_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] &= \mathbb{E}\left[N_n + H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathcal{F}_n\right] \\ &= N_n + \mathbb{E}\left[H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) \mid \mathcal{F}_n\right] \quad (\text{car } N_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}) \\ &= N_n + H_{n+1} \mathbb{E}\left[M_{n+1} - M_n \mid \mathcal{F}_n\right] \quad (\text{car } H_{n+1} \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}). \end{aligned}$$

Finalement, $\mathbb{E} [M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ car $(M_m)_{m \in \mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ -martingale et $\mathbb{E} [M_n \mid \mathcal{F}_n] = M_n$ car M_n est \mathcal{F}_n -mesurable. On a donc bien $\mathbb{E} [N_{n+1} \mid \mathcal{F}_n] = N_n$.

2. Remarquons pour commencer que $\{T \geq k\} = \{T \leq k-1\}^c$ appartient à \mathcal{F}_{k-1} pour tout entier non nul k . Cela prouve que $H_k = \mathbf{1}_{T \geq k}$ est bien un processus prévisible. Ensuite, on vérifie que si $T \leq n$, alors

$$\begin{aligned} N_n &= \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{T \geq k} (M_k - M_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^T (M_k - M_{k-1}) = M_T - M_0, \end{aligned}$$

et que si $T > n$, alors,

$$\begin{aligned} N_n &= \sum_{k=1}^n \mathbf{1}_{T \geq k} (M_k - M_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^n (M_k - M_{k-1}) = M_n - M_0. \end{aligned}$$

On a donc que $N_n = M_{T \wedge n} - M_0$. Par ailleurs, d'après la question précédente, N_n est une martingale. Il en suit que le processus arrêté $M_{T \wedge n} = N_n + M_0$ est également une martingale.

Exercice 6 : La fortune du joueur de pile ou face

Un joueur de pile ou face débute à la date 0 avec la richesse X_0 . La pièce est équilibrée, et les résultats sont $+1$ si "pile" sort et -1 si "face" sort. Les jets successifs sont supposés indépendants.

1. T parties sont prévues. Montrez que le processus de richesse du joueur, noté X , est une martingale, en précisant l'espace probabilisé et la filtration utilisée.
2. Au lieu de prévoir T parties, le joueur décide de s'arrêter dès que son gain est strictement positif.
 - (a) Ecrire cela sous forme de temps d'arrêt
 - (b) Quelle est la valeur de $\mathbb{E}(X_\tau)$?
 - (c) Le théorème d'arrêt de Doob s'applique-t-il ? pourquoi ?

Correction exercice 6 : Exercice corrigé en cours.

Exercice 7 : La ruine du joueur.

Deux joueurs, le joueur A possédant initialement a euros et le joueur B en possédant b , jouent au jeu suivant. A chaque coup, les deux joueurs misent un euro et on lance une pièce de monnaie équilibrée. Si le résultat de la pièce est pile, le joueur A remporte la mise et si le résultat de la pièce est face, le joueur B remporte la mise. Le jeu cesse quand l'un des deux est ruiné.

1. En reprenant les notation de l'exercice 1, on note $Y_n = 1$ si le résultat du n^{e} lancer est pile et $Y_n = -1$ si c'est face. Soit S_n l'argent du joueur A au temps n . On a donc :

$$S_n = a + \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Soit

$$T = \inf\{n, S_n \in \{0, a+b\}\}.$$

Justifier que T définit bien un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Quel interprétation donner au temps d'arrêt T et aux évènements $\{S_T = 0\}$ et $\{S_T = a+b\}$?

2. On admet que $T < +\infty$ presque sûrement. En appliquant le théorème d'arrêt à $(S_{T \wedge n})_{n \in \mathbb{N}}$, calculer la probabilité que A gagne la fortune de B.
 3. * Démontrer que $T < +\infty$ presque sûrement.

Correction exercice 7 : Il s'agit d'un exercice important qui met en jeu la notion de martingales, de temps d'arrêts et une application du théorème d'arrêt.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a

$$\begin{aligned} \{T \leq n\} &= \{\exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket, S_k \in \{0, a+b\}\} \\ &= \bigcup_{k=0}^n \underbrace{\{S_k \in \{0, a+b\}\}}_{\in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n}, \end{aligned}$$

et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ puis T est un temps d'arrêt.

Le temps d'arrêt T représente la fin de la partie, l'événement $\{S_T = 0\}$ correspond à la ruine du joueur A alors que l'événement $\{S_T = a+b\}$ correspond à "A gagne la fortune de B".

2. On aimerait appliquer le théorème d'arrêt, aux temps d'arrêts 0 et T afin de calculer $\mathbb{E}[S_T]$ et d'en déduire $\mathbb{P}(S_T = a+b)$. Malheureusement, T n'est pas un temps d'arrêt borné... On applique donc le **théorème d'arrêt** à la martingale $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et aux temps d'arrêts bornés $0 \leq T \wedge n$ (on sait que c'est un temps d'arrêt comme minimum de 2 temps d'arrêts d'après l'exercice 3). On en déduit que

$$\mathbb{E} [S_{T \wedge n} \mid \mathcal{F}_0] = S_0,$$

et donc en passant à l'espérance

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [S_{T \wedge n}] &= \mathbb{E} [\mathbb{E} [S_{T \wedge n} \mid \mathcal{F}_0]] \\ &= \mathbb{E} [S_0] = a. \end{aligned}$$

Maintenant, on va utiliser le théorème de convergence dominée et faire tendre n vers l'infini. Comme T est fini presque sûrement, on a que

$$S_{T \wedge n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s.} S_T.$$

De plus, on a la domination

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad |S_{T \wedge n}| \leq a + b,$$

car S_n est compris entre 0 et $a + b$ pour tout entier n inférieur ou égal à T . On peut donc appliquer le **théorème de convergence dominée** pour en déduire que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[S_{T \wedge n}] = \mathbb{E}[S_T],$$

et donc que

$$\mathbb{E}[S_T] = a.$$

Par ailleurs, S_T ne prend que deux valeurs : 0 ou $a + b$. On en déduit

$$\mathbb{E}[S_T] = (a + b)\mathbb{P}(S_T = a + b).$$

et finalement

$$\boxed{\mathbb{P}(S_T = a + b) = \frac{a}{a+b}.}$$

Le joueur A gagne donc la fortune de B avec probabilité $\frac{a}{a+b}$. On remarque que si les deux joueurs partent avec la même somme d'argent ($a = b$) chaque joueur à une chance sur deux de remporter la mise de l'autre.

3. Si $\{T = +\infty\}$, alors la marche aléatoire reste comprise entre 1 et $a + b - 1$ pour tout n et donc en particulier, elle ne peut pas monter de 1 sur $a + b$ temps consécutifs. Nous allons montrer que presque sûrement, il arrive un instant où la marche aléatoire simple monte de 1 sur $a + b$ temps consécutifs. Pour cela, on définit pour tout $k \in \mathbb{N}$ l'événement :

$$A_k := \bigcap_{i=1}^{(a+b)} \{Y_{(a+b)k+i} = 1\}.$$

Si un des A_k est réalisé, alors la marche aléatoire monte de 1 sur $a + b$ temps consécutifs (entre les temps $(a + b)k$ et $(a + b)(k + 1)$) et donc $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ne peut pas rester bornée entre 1 et $a + b - 1$ et donc $T < +\infty$. En résumé :

$$\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \subseteq \{T < +\infty\}.$$

Maintenant

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) &= 1 - \mathbb{P} \left(\bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k^c \right) \\
 &= 1 - \prod_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(A_k^c) && \text{car les } A_k \text{ sont indépendants} \\
 &= 1 - \prod_{k=0}^{\infty} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\
 &= 1 - \prod_{k=0}^{\infty} \left(1 - \prod_{i=1}^{a+b} \mathbb{P}(Y_{(a+b)k+i} = 1) \right) && \text{car les } Y_i \text{ sont indépendants} \\
 &= 1 - \prod_{k=0}^{\infty} \underbrace{\left(1 - \frac{1}{2^{a+b}} \right)}_{<1} \\
 &= 1 - 0 = 1.
 \end{aligned}$$

On a donc

$$\mathbb{P}(T < +\infty) \geq \mathbb{P} \left(\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \right) = 1.$$

et donc \$T\$ est fini presque sûrement.

Exercice 8 : Martingales et Options Américaines

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé filtré tel que $\text{card}(\Omega) < +\infty$ et $\mathcal{F}_{t=0, \dots, T}$ une filtration. Soit un processus Z adapté à \mathcal{F} et intégrable. On définit le processus U par :

$$\begin{aligned}
 U_T &= Z_T \\
 U_t &= \max(Z_t; E[U_{t+1} | \mathcal{F}_t])
 \end{aligned}$$

1. Montrez que U est une surmartingale adaptée à \mathcal{F} , et que $U_t \geq Z_t, \forall t$.
2. Soit Γ l'ensemble des surmartingales X telles que $X_t \geq Z_t, \forall t$. Montrez que $\forall X \in \Gamma$:

$$\forall t \leq T, \quad X_t \geq U_t$$

Indication : raisonnez par récurrence en partant de la date T

3. Soit $\tau = \inf\{t \leq T, U_t = Z_t\}$. On définit Y le processus arrêté de U par $Y_t = U_{\min(t, \tau)}$.
 - (a) Montrez que

$$\forall \omega \in \{\tau \geq t+1\}, \quad U_t(\omega) = E(U_{t+1} | \mathcal{F}_t)(\omega).$$
 - (b) Déduisez que Y est une martingale.
4. Quelle interprétation financière donnez-vous aux processus Z et U .

Correction exercice 8 :

1. — $\forall t = 0, \dots, T$, X_t est \mathcal{F}_t -mesurable et intégrable car Z_t et $E(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)$ le sont.
— $\forall t = 0, \dots, T$, $U_t \geq Z_t$ et $U_t \geq E(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)$.
2. Par récurrence descendante sur $[0, T]$:
 - $X_T \geq Z_T = U_T$
 - HR : $\exists t \in [1, T]$ tel que $X_t \geq U_t$.
Mq $X_{t-1} \geq U_{t-1}$. On a déjà $X_{t-1} \geq Z_{t-1}$. Il suffit donc de montrer $X_{t-1} \geq E(U_t|\mathcal{F}_{t-1})$.
Or $E(U_t|\mathcal{F}_{t-1}) \underbrace{\leq}_{HR} E(X_t|\mathcal{F}_{t-1}) \underbrace{\leq}_{X \text{ sur-martingale}} X_{t-1}$.
Récurrence établie : $\forall t = 0, \dots, T$, $X_t \geq U_t$.
3. Soit $Z = \inf\{t \leq T, U_t = Z_t\}$.
 - (a) Soit $\omega \in \{\omega, \tau(\omega) \geq t + 1\}$.
On a : $\min(t, \tau(\omega)) = t$ et $\min(t + 1, \tau(\omega)) = t + 1$ (alors $Y_t(\omega) = U_t(\omega)$ et $Y_{t+1}(\omega) = U_{t+1}(\omega)$). De plus, $U_t(\omega) > Z_t(\omega)$ donc $U_t(\omega) = E(U_{t+1}(\omega)|\mathcal{F}_t)$.
 - (b) — $\forall t = 0, \dots, T$, Y_t est \mathcal{F}_t -mesurable car U_t l'est et que $\min(t, \tau)$ est un temps d'arrêt et intégrable car U_t l'est.
— D'après a) : $\forall \omega \in \{\tau \geq t + 1\}$, $Y_t(\omega) = E(Y_{t+1}(\omega)|\mathcal{F}_t)$ et $\forall \omega \in \{\tau \leq t\}$, $Y_t(\omega) = Y_{t+1}(\omega) = U_\tau(\omega)$ donc Y_{t+1} est \mathcal{F}_t -mesurable sur $\{\omega, \tau \leq t\}$ d'où $Y_t(\omega) = E(Y_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega)$.
Donc Y est une martingale.

Exercice 9 : Ordres de Bourse

La date du jour est le 5 décembre. Parmi les ordres de bourse suivants, quels sont ceux dont la date d'exécution est un temps d'arrêt ? Précisez pour chaque exemple la filtration pertinente en supposant une seule cotation par jour.

1. Achat de 10000 Alcatel à 13€ : date limite de validité le 31 décembre. Alcatel cote aujourd'hui à 13,4€.
2. Vente de 40000 Eurotunnel à 0,7€ : date limite de validité le 31 décembre. Eurotunnel cote aujourd'hui à 0,6€.
3. Achat de 100 Air Liquide au cours minimum entre aujourd'hui et le 31 décembre. Air Liquide cote aujourd'hui à 140€.

Exercice 10 : Processus à espérance constante et Martingales

Une urne contient un nombre de boules pair N . La moitié des boules sont blanches et les autres sont noires. A chaque tirage, on tire (sans remise) une boule au hasard. On définit Y (resp. Z) le processus comptant le nombre de boules blanches (resp. noires) tirées. On retient ici la filtration naturelle de Y (montrez que cette filtration est la même que celle engendrée par Z).

Soit $X_n = Y_n - Z_n$ l'écart entre le nombre de boules blanches et le nombre de boules noires tirées après n tirages. Montrez que le processus X a une espérance constante, mais que X n'est pas une martingale.

Exercice 11 : Processus de valeur d'une stratégie autofinancée

Sur un marché financier sont échangés K titres, dont les prix en date t sont notés $X_t = (X_t^1, \dots, X_t^K)$. Les cotations sont supposées être discrètes ($t \in \mathbb{N}$). On suppose que le processus de prix est une martingale. On appelle *stratégie de portefeuille* $\theta = (\theta_t^1, \dots, \theta_t^K)$ tout processus prévisible borné (θ représente la part détenue dans chaque actif entre $t-1$ et t).

1. Quelle est la valeur du portefeuille détenu par l'agent dont la stratégie est θ à l'instant t ?
2. Montrer que si X est une martingale et θ un processus prévisible borné, alors le processus Z défini par $Z_0 = 0$ et

$$Z_t = \sum_{k=1}^K \sum_{s=1}^t \theta_s^k (X_s^k - X_{s-1}^k)$$

est une martingale.

3. Une stratégie de portefeuille θ est dite *autofinancée* si $\forall t :$

$$\sum_{k=1}^K \theta_t^k X_t^k = \sum_{k=1}^K \theta_{t+1}^k X_t^k$$

Montrer que si X est une martingale et θ une stratégie autofinancée, alors le processus de valeur de la stratégie est une martingale. Quelle est la signification financière d'un tel résultat ?