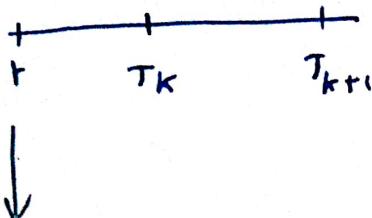


TD 1

Exercice 1

1)



portefeuille
d'investissement
qui réplique les flux

$$\Pi^{\text{FRA-P}}(t, T_k, T_{k+1}, k)$$

Sachant qu'en convention simple on a

$$R(T_k, T_{k+1}) = \frac{1}{T_{k+1} - T_k} \left\{ \frac{1}{P(T_k, T_{k+1})} - 1 \right\}$$

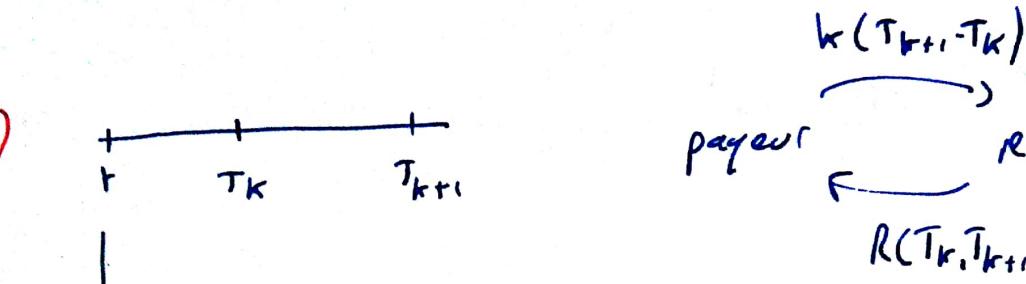
$$\Pi^{\text{FRA-P}}(T_{k+1}, T_k, T_{k+1}, k) = \underbrace{\frac{1}{P(T_k, T_{k+1})}}_A - \underbrace{\left(1 + k(T_{k+1} - T_k)\right)}_B$$

Prix : (A) : $P(t, T_k)$

(B) : $(1 + k(T_{k+1} - T_k))P(t, T_{k+1})$

$$\Pi^{\text{FRA-P}}(t, T_k, T_{k+1}, k) = (A) - (B)$$

le taux forward étant le prix d'équilibre du FRA



$$\Pi^{\text{FRA-P}}(T_{k+1}, T_k, T_{k+1}, k)$$

$$= R(T_k, T_{k+1})(T_{k+1} - T_k) - k(T_{k+1} - T_k)$$

$$\Pi^{\text{FRA-P}}(t, T_k, T_{k+1}, f) = 0$$

Donc $f(t, T_k, T_{k+1}) = \frac{1}{T_{k+1} - T_k} \left\{ \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_{k+1})} - 1 \right\}$

(2) • flux fixes: $C(T_{k+1} - T_k)$

$$\Rightarrow \text{valeurs: } C(T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1})$$

• flux variables: $R(T_k, T_{k+1})(T_{k+1} - T_k) = \left(\frac{1}{P(T_k, T_{k+1})} - 1 \right)$

$$\Rightarrow \text{valeurs en t: } P(t, T_k) - P(t, T_{k+1})$$

Donc

$$\begin{aligned} \Pi^{\text{SWAP-P}}(t, T_i, T_j) &= N \left[\sum_{k=i}^{j-1} [P(t, T_k) - P(t, T_{k+1})] - C \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) \right] \\ &= N \left[P(t, T_i) - P(t, T_j) - C \sum_{k=i}^j (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) \right] \end{aligned}$$

(3) Taux swap tel que $\Pi^{\text{SWAP-P}} = \Pi^{\text{SWAP-R}}$

$$\Rightarrow \text{Ceq} = \frac{P(t, T_i) - P(t, T_j)}{\sum_{k=i}^j (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1})} = S(t, T_i, T_j)$$

(4) On remplace $P(t, T_i) - P(t, T_j)$ avec l'expression de (3)

On obtient

$$\begin{aligned}\Pi^{\text{SWAP-P}} &= N \left[\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) \right] S(t, T_i, T_j) - c \\ &= N (S(t, T_i, T_j) - c) \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1})\end{aligned}$$

(5) On considère le flux en T .

On veut montrer que

$$\begin{aligned}\textcircled{1} &= \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(T_i, T_{k+1}) f(T_i, T_k, T_{k+1}) \\ &\stackrel{?}{=} \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(T_i, T_{k+1}) S(T_i, T_i, T_j)\end{aligned}$$

On sait que $f(t, T_k, T_{k+1}) = \frac{1}{T_{k+1} - T_k} \left\{ \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_{k+1})} - 1 \right\}$ (x*)

On remplace $\textcircled{1}$ avec $t = T_i$ dans (*)

$$(x) = \sum_{k=i}^{j-1} [P(T_i, T_k) - P(T_i, T_{k+1})] = P(T_i, T_i) - P(T_i, T_j)$$

On utilise la formule trouée en (3) avec $t = T_i$:

$$(x) = \left[\sum_{k=i}^j (T_{k+1} - T_k) P(T_i; T_{k+1}) \right] S(T_i, T_i, T_j)$$

Exercice 8

Soit $(Z_t)_{t \geq 0}$ un NB

Rappel: $\begin{cases} Z_0 = 0, \quad Z_t - Z_s \perp\!\!\!\perp F_s \\ Z_t - Z_s \sim N(0, t-s) \end{cases}$

(1) Montrer que $A_t = Z_t^2 - t$ est une F_t -martingale.

Rappel: A est une martingale si:

- $E[A_t] < \infty$
- A est adapté à F
- $E[A_{t+h} | F_t] = A_t$

$$\begin{aligned} E[A_t] &= E[Z_t^2 - t] \leq E[Z_t^2] + t & \text{Var}(Z_t) &= E[Z_t^2] - E[Z_t]^2 \\ &= \underbrace{E[Z_t^2]}_{= t + t} + t & &= E[Z_t^2] \\ &= t + t < \infty & & \end{aligned}$$

- A_t est une transformation de Z_t
 $\Rightarrow A_t$ est F_t -mesurable
 $\Rightarrow A$ est F -adapté

• pour $t, h > 0$

$$\mathbb{E}[\eta_{t+h} | \mathcal{F}_t] = \eta_t \quad ?$$

$$\mathbb{E}[\eta_{t+h} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[2_{t+h}^2 | \mathcal{F}_t] - (t+h)$$

$$= \mathbb{E}[(2_{t+h} - 2_t + 2_t)^2 | \mathcal{F}_t] - (t+h)$$

$$= \mathbb{E}[(2_{t+h} - 2_t)^2 | \mathcal{F}_t] + 2\mathbb{E}[2_t(2_{t+h} - 2_t) | \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[2_t^2 | \mathcal{F}_t] \\ - (t+h)$$

$$= \mathbb{E}[(2_{t+h} - 2_t)^2] = h$$

$$\begin{cases} + 2\mathbb{E}[2_t \underbrace{\mathbb{E}[2_{t+h} - 2_t]}_{=0}] \\ + 2_t^2 \\ - (t+h) \end{cases}$$

$$= 2_t^2 - t = \eta_t$$

Donc η est une martingale.

. Suite des questions \Rightarrow voir correction 2