TD Le producteur (1)

**Exercice 1**

Soit la fonction de production d'une entreprise :

$y = k^{1/4}(l-1)^{1/4}$ si $l > 1$

$y = 0$ si $l \leq 1$

$y$, $k$ et $l$ représentent respectivement les volumes de la production et des facteurs variables capital et travail (on raisonne à long terme).

$r$ est le prix unitaire du capital et $w$ celui du travail.

1- Ecrivez l'équation de l'isoquante $y = 1$ et vérifiez qu'elle soit décroissante et convexe.
2- Etablissez l'équation du $TMST_{k,l}$
3- Quelles sont les quantités de facteurs qui minimisent le coût d'une production $y = 1$ dans les cas suivants : Cas A : $r = 1$, $w = 1$ et Cas B : $r = 2$, $w = 3$ ?
Donnez l'interprétation économique de vos résultats.

**Exercice 2**

Partie 1

La fonction de production d'une entreprise est donnée par $Q(L,K) = 6L^{1/2}K^{2/3}$, où L et K représentent les quantités de travail et de capital.

1) Calculer les élasticités (partielles) de la production par rapport aux facteurs de production.
2) Déterminer le TMST
3) La fonction de production est-elle homogène ?
En déduire la nature des rendements d'échelle.
4) le théorème d'Euler ?

Partie 2

Déterminer si les fonctions suivantes sont homogènes et si elles vérifient le théorème d'Euler :

$Q(L,K) = L + K^{1/2}$

$Q(K,L,T) = \alpha.K + \beta.L + T$

**Exercice 3**

Soit une entreprise qui produit deux biens $Y_1$ et $Y_2$ à partir de deux inputs $X_1$, $X_2$ (par exemple le travail et le capital)

Pour produire $q$ unités de bien $Y_1$ (resp. $Y_2$), il faut au moins $q$ (resp. $q$) unités de $X_1$ et $12q$ (resp. $48q$) unités de $X_2$.

1) Ecrire les fonctions de production associés aux techniques qui permettent de produire les biens $Y_1$ et $Y_2$ .
2) Quelle est la forme des rendements d'échelle dans cette entreprise ?
3) On suppose que le producteur dispose de *100* unités de facteur *1* ($X_1$) et de *2400* unités de facteur 2 ($X_2$). Représenter dans le plan ($Y_1$, $Y_2$) l'ensemble des productions réalisables dans cette entreprise
4) Si l'entrepreneur a un comportement concurrentiel sur les marchés des biens $Y_1$ et $Y_2$ et si les prix de vente de ces biens sont respectivement *1* et *2* déterminer la décision de production
5) Quelle serait cette décision si les prix étaient respectivement de *2* et *1* ?

**Exercice 4**

Dans l'économie de Robinson ce dernier dispose de $t$ heures totales de travail pour produire les biens *1* et *2* qu'il répartira entre un temps consacré à la production de bien 1, noté $t_1$, et un temps consacré à la production de bien *2*, noté $t_2$. On note $y_1$ et $y_2$ les quantités produites par Robinson respectivement de bien *1* et de bien *2*. Ses techniques de production sont alors représentées par les équations suivantes

(1) $y_1 = f_1(t_1) = t_1^{1/2}$

(2) $y_2 = f_2(t_2) = 2t_2$

Commentez les techniques de Robinson en termes de productivités, de coûts réels et de rendements d'échelle.

# Exercice 1 :

Fonct° de prod d'une entreprise : $y = \begin{cases} k^{1/4}(l-1)^{1/4} & \text{si } l>1 \\ 0 & \text{si } l \leq 1 \end{cases}$

1) Isoquante $y=1 \Rightarrow k^{1/4}(l-1)^{1/4} = 1$

$\Rightarrow k = \dfrac{1}{l-1}$

$\dfrac{dk}{dl} = \dfrac{-1}{(l-1)^2} < 0 \Rightarrow$ isoquante ↘

$x^{\alpha}$

$\alpha x^{\alpha-1}$

$\dfrac{d^2k}{dl^2} = \dfrac{2}{(l-1)^3} > 0 \Rightarrow$ isoquante cvx.

2) $TMST_{k,l} = \left| \dfrac{\frac{\delta y}{\delta l}}{\frac{\delta y}{\delta k}} \right|$ où $\dfrac{\delta y}{\delta l} = k^{1/4} \times \dfrac{1}{4}(l-1)^{-3/4}$

$\dfrac{\delta y}{\delta k} = (l-1)^{1/4} \times \dfrac{1}{4} k^{-3/4}$

$= \dfrac{k^{1/4}(l-1)^{-3/4}}{k^{-3/4}(l-1)^{1/4}} = \dfrac{k}{(l-1)}$

3) La fonct° est strict^t cvx $\Rightarrow \exists!$ solut° donnée par $TMST =$ r/p^t prix

**Cas 1 :** $TMST_{k,l} = \dfrac{k}{l-1} = \dfrac{w}{r} = \dfrac{1}{1} = 1$

Comme $k(l) = \dfrac{1}{l-1} \Rightarrow \dfrac{1}{(l-1)^2} = 1 \Rightarrow l=2$ et donc $k=1$.

**Cas 2 :** $TMST_{k,l} = \dfrac{k}{l-1} = \dfrac{w}{r} = \dfrac{3}{2} \Rightarrow \dfrac{1}{(l-1)^2} = \dfrac{3}{2}$

$\Rightarrow l = \sqrt{\dfrac{2}{3}} + 1$ et $k = \sqrt{\dfrac{3}{2}}$

Pour le premier cas, à ces prix (r,w), la combinaison k=1 et l=2 est celle qui minimise les coûts pour les producteurs.

Pour le deuxième cas, le prix du capital (r) et celui du travail (w) ont augmenté, donc le producteur va augmenter son capital puisqu'il est relativement moins cher que le travail.

$e(x) = \frac{dq(r)}{q(r)} \frac{r}{dr}$

# Exercice 2 :

## Partie 1 :

$Q(L,K) = 6L^{1/2} K^{2/3}$

$L$ : qtt de travail
$K$ : qtt de Capital.

1) $e_L = \frac{\partial Q(L,K)}{\partial L} \times \frac{L}{Q(L,K)}$

et $e_K = \frac{\partial Q(L,K)}{\partial K} \times \frac{K}{Q(L,K)}$

$\Rightarrow \begin{cases} e_L = \cancel{6} \times \frac{1}{2} \cancel{L^{-1/2}} \times \cancel{K^{2/3}} \times \frac{\cancel{L}}{\cancel{6L^{1/2}K^{2/3}}} = \frac{1}{2} \\ e_K = \cancel{6}\cancel{L^{1/2}} \frac{2}{3} \cancel{K^{-1/3}} \times \frac{\cancel{K}}{\cancel{6L^{1/2}K^{2/3}}} = \frac{2}{3} \end{cases}$

2) $TMST_{K,L} = \left| \frac{\frac{\partial Q}{\partial L}}{\frac{\partial Q}{\partial K}} \right| = \frac{3L^{-1/2}K^{2/3}}{4L^{1/2}K^{-1/3}} = \frac{3}{4}\frac{K}{L}$

$TMST_{L,K} = \frac{4L}{3K}$

$\frac{3+4}{6}$

3) $Q(\lambda L, \lambda K) = 6(\lambda L)^{1/2}(\lambda K)^{2/3} = \lambda^{1/2+2/3} 6L^{1/2}K^{2/3}$
$= \lambda^{7/6} Q(L,K)$

$\Rightarrow h = \frac{7}{6} > 1 \Rightarrow$ rdt d'échelle $\nearrow$

Euler : $x f'(x) + y f'(y) = h f(x,y)$    $h$ deg d'homogénéité

$L \frac{\partial Q(L,K)}{\partial L} + K \frac{\partial Q(L,K)}{\partial K} = L \times 6 \frac{1}{2} L^{-1/2} K^{2/3} + K \times 6L^{1/2} \frac{2}{3} K^{-1/3}$
$= \frac{1}{2} \times 6L^{1/2}K^{2/3} + \frac{2}{3} \times 6L^{1/2}K^{2/3}$
$= \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{3}\right) 6L^{1/2}K^{2/3} = \frac{7}{6} Q(L,K)$

## Partie 2 :

$Q(L,K) = L + K^{1/2}$    $Q(\lambda L, \lambda K) = \lambda L + \lambda^{1/2} K^{1/2}$   non homogène

$Q(K,L,T) = \alpha K + \beta L + T$    $Q(\lambda K, \lambda L, \lambda T) = \lambda(\alpha K + \beta L + T)$   homogène deg $= 1$

et avec Euler $= K \times \alpha + L \times \beta + T \times 1 = Q(K,L,T) \Rightarrow$ deg $= 1$.

# Exercice 3 :

1) $\begin{cases} X_1 = aq \implies q = \frac{X_1}{a} \\ X_2 = bq \implies q = \frac{X_2}{b} \end{cases}$ $a=1$, $b=12$

$$Y_1 = f(x_1, x_2) = \mathrm{Min}\left\{X_1, \frac{X_2}{12}\right\}$$

$X_1 = aq \implies q = \frac{X_1}{a}$ $a=1$
$X_2 = bq \implies q = \frac{X_2}{b}$ $b=48$

$$Y_2 = f(x_1, x_2) = \mathrm{Min}\left\{X_1, \frac{X_2}{48}\right\}$$

2) Les rendements d'échelle seront cte car pas de substitutᵒ.
TMS pas important.

3) 100 de 1 et 400 de 2

Pour input 1

# Exercice 4 :

Techniques de product° : $y_1 = f_1(L_1) = L_1^{1/2}$

$y_2 = f_2(L_2) = 2L_2$

## Productivité marginales :

$$P_{m_1}(L_1) = \frac{\partial y_1}{\partial L_1} = \frac{1}{2} L_1^{-1/2} \qquad P_{m_2}(L_2) = \frac{\partial y_2}{\partial L_2} = 2$$

## Coûts réels :

Technique de prod 1 :

$\longrightarrow$ Coût moyen réel : $CM_1 = \frac{L_1}{y_1} = \frac{L_1}{L_1^{1/2}} = L_1^{1/2}$

$$\frac{\delta CM_1}{\partial L_1} = \frac{1}{2} L^{-1/2} > 0$$

Coût marginal réel : $C_{m_1} = \frac{\partial L_1}{\partial y_1} = \frac{1}{P_{m_1}(L_1)} = 2L^{1/2}$

Technique de prod 2 :

$$CM_2 = \frac{L_2}{y_2} = \frac{L_2}{2L_2} = \frac{1}{2}$$

Coût marginal réel : $C_{m_2} = \frac{\partial L_2}{\partial y_2} = \frac{1}{P_{m_2}(L_2)} = \frac{1}{2}$

$e_1 = \frac{\partial y_1}{\partial L_1} \times \frac{L_1}{y_1} = \frac{1}{2} L^{-1/2} \times \frac{L_1}{L^{1/2}} = \frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ rdt d'échelle $\searrow$

$e_2 = \frac{\partial y_2}{\partial L_2} \times \frac{L_2}{y_2} = 2 \times \frac{L_2}{2L_2} = 1$ $\Rightarrow$ rdt d'échelle cte.

L3 Actuariat Le producteur
TD2/3

**Exercice 5 :**

On considère la fonction de production définie par $y = A\left[a\, x_1^{-\alpha} + b\, x_2^{-\beta}\right]^{-\rho}$

*où* A, a, b, $\alpha$, $\beta$ et $\rho$ sont des constantes positives

1) Exprimez $\beta$ en fonction de $\alpha$ pour que le $TMST_{2,1}$ ne dépende que du rapport $x_1/x_2$
   *On conserve cette hypothèse pour la suite de l'exercice*
2) Exprimez $\rho$ en fonction de $\alpha$ pour que la fonction soit homogène de degré *1*
3) Trouver la valeur de $\alpha$ pour laquelle l'élasticité de substitution est égale à *1/3*

**Exercice 6 :**

Soit une firme qui produit un output avec une technologie représentée par la fonction de production $f(x_1,x_2)$. La production se fait avec deux facteurs, $x_1$ et $x_2$, dont les prix unitaires sont respectivement $w_1$ *et* $w_2$.

La fonction de production est de type Cobb-Douglas : $f(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$.

On suppose $0< \alpha <1$ ; $0< \beta <1$ et $\beta \neq 1-\alpha$ (A priori)

1- En utilisant le lagrangien, déterminer les quantités de facteurs utilisées à l'optimum par cette firme ?

2- Ecrire les fonctions de coût moyen et de coût marginal de long terme de la firme et établir la relation entre ces 2 coûts

**Exercice 7 :**

Soit une entreprise qui produit un bien (Y) à partir de trois inputs ($X_1$), ($X_2$)et ($X_3$) . La technique de production de cette dernière est décrite par la fonction $Y=X_1^{1/4}X_2^{1/4}X_3^{1/2}$

On suppose qu'à court terme le volume de l'input ($X_3$) est fixe pour toute production Y positive ou nulle. Il n'existe aucune rigidité sur ($X_1$), ($X_2$).

Les prix des inputs ($X_1$), ($X_2$)et ($X_3$) sont respectivement ½, ½ et *1*

En supposant l'entreprise concurrentielle sur le marché des inputs établir les fonctions de coûts à court et long terme

**Annexe**

Si on raisonne sur des accroissements très petits:

$$e_{f/x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\frac{x}{f} = f'\frac{x}{f} = x\frac{f'}{f}$$

On peut transformer ce résultat. Rappel: soit une fonction f à valeurs positives et dérivable. Prenons son Log népérien Log f. On a affaire à une fonction composée (la fonction Log et la fonction f). La dérivée de Log f (dite dérivée logarithmique) est:

$$\frac{\mathrm{d}Log\,f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}Log\,f}{\mathrm{d}f}.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

en vertu de la règle de dérivation des fonctions composées: $[u(v(x))]' = u'_v \,.\, v'_x$ ;

donc: $\frac{\mathrm{d}Log\,f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f}.f' = \frac{f'}{f}$ = taux de croissance instantané de $f$ en $x$.

D'où: $e_{f/x} = x.\frac{\mathrm{d}Log\,f}{\mathrm{d}x}$ qu'on peut encore transformer car:

d $Log\,f$ (différentielle de $Log\,f$ = variation infinitésimale) = $\frac{\mathrm{d}Log\,f}{\mathrm{d}f}.\mathrm{d}f = \frac{1}{f}\mathrm{d}f = \frac{1}{f}.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$

et d $Log\,x$ = 1/x . d$x$ d'où d$x$ = $x$ . d$Log\,x$.

D'où: $$\frac{\mathrm{d}Log\,f}{\mathrm{d}Log\,x} = \frac{\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}{\frac{1}{x}\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{x}{f} = f'.\frac{x}{f} = x.\frac{f'}{f} = e_{f/x}$$

## Exercice 5 :

$$y = A[a x_1^{-\alpha} + b x_2^{-\beta}]^{-\rho}$$

1) $$TMST_{2,1} = \left| \frac{\frac{\partial y}{\partial x_1}}{\frac{\partial y}{\partial x_2}} \right| = \frac{a\alpha}{b\beta} \frac{x_2^{\beta+1}}{x_1^{\alpha+1}}$$

Si $\beta = \alpha \Rightarrow y = A[a x_1^{-\alpha} + b x_2^{-\alpha}]^{-\rho}$

2) $$y(\lambda x_1, \lambda x_2) = A[a \lambda^{-\alpha} x_1^{-\alpha} + b \lambda^{-\alpha} x_2^{-\alpha}]^{-\rho}$$

$$= \lambda^{\alpha\rho} y(x_1, x_2) \Rightarrow \rho = \frac{1}{\alpha}$$

3) Elasticité de substitution

$$E = \frac{\frac{d(x_2/x_1)}{x_2/x_1}}{\frac{d\,TMST_{2,1}}{TMST_{2,1}}} = \frac{d\ln(x_2/x_1)}{d\ln(TMST_{2,1})}$$

$$TMST_{2,1} = \frac{a}{b}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha+1} \Rightarrow \ln(TMST_{2,1}) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + (\alpha+1)\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{d\ln(TMST_{2,1})}{d\ln\left(\frac{x_2}{x_1}\right)} = \alpha+1$$

$$\Rightarrow E = \frac{1}{\alpha+1} \text{ et } E = \frac{1}{3} \Rightarrow \alpha = 2.$$

## Exercice 6 :

$$f(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda) = w_1 x_1 + w_2 x_2 + \lambda(y - x_1^{\alpha} x_2^{\beta})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow w_1 = \lambda \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow w_2 = \lambda \beta x_2^{\beta-1} x_1^{\alpha} \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow y - x_1^{\alpha} x_2^{\beta} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha}{\beta} \times \frac{x_2}{x_1}$$

$$(3) \quad x_1^{\alpha} = y\, x_2^{-\beta} \Rightarrow x_1 = \frac{y^{1/\alpha}}{x_2^{\beta/\alpha}} = y^{1/\alpha} x_2^{-\beta/\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{x_2}{y^{1/\alpha} x_2^{-\beta/\alpha}} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{x_2^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}}{y^{1/\alpha}}$$

$$\Rightarrow \beta w_1 y^{1/\alpha} = \alpha w_2 x_2^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow x_2^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = \frac{\beta w_1 y^{1/\alpha}}{\alpha w_2} \Rightarrow x_2 = \left(\frac{\beta w_1}{\alpha w_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1^* = y^{1/\alpha} \left[\left(\frac{\beta w_1}{\alpha w_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\right]^{-\beta/\alpha} = y^{1/\alpha} \left(\frac{\beta w_1}{\alpha w_2}\right)^{\frac{-\beta}{\alpha+\beta}} \frac{1}{y^{\beta/(1+\beta/\alpha)}} \\ \end{cases}$$

$$x_1 = y^{\frac{1}{\alpha}} \, x_2^{-\beta/\alpha}$$

$$x_2 = \left(\frac{\beta\omega_1}{\alpha\omega_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \, y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$x_2^{-\frac{\beta}{\alpha}} = \left(\frac{\beta\omega_1}{\alpha\omega_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta} \times -\frac{\beta}{\alpha}} \, y^{-\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}}$$

$$= \left(\frac{\beta\omega_1}{\alpha\omega_2}\right)^{-\frac{1}{1+\alpha/\beta}} \, y^{-\frac{\beta}{\alpha(\alpha+\beta)} + \frac{\alpha+\beta}{\alpha(\alpha+\beta)}}$$

$$\underline{\alpha}$$

$$y^{\frac{1}{\alpha}}$$

$y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$ ok

$$x_2^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = \frac{\beta y^{1/\alpha} \omega_1}{\omega_2 \alpha} \Rightarrow$$

$$x_2 = \left(\frac{\beta\omega_1}{\alpha w_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \left(y^{1/\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}$$