Remarque sur le BE

① GMWB → garantie temporaire décès.

$$F(T_x) = [K - S_{T_x}]^+ \mathbb{1}_{T_x \leq T}$$

$$BE = \mathbb{E}^{P \otimes Q^f}(\delta(T_x) F(T_x))$$

② Contrat en €

$\boxed{GSE} \longrightarrow \boxed{ALM}$ → $(F_t^{(k)}, t \geq 1)$

$\boxed{RC \mid PB}$ ← Règles Comptables

$$BE \simeq BE^{(K)} = \frac{1}{K}\sum_{k=1}^{K}\sum_{t \geq 1} \delta^{(k)}(t) F^{(k)}(t)$$

Différences

① Flux : explicites en ① / non en ②

② Risques financiers : "direct" en ① (exogène) / partiellement endogène ②

③ gestion de l'actif : actif cantonné ① / actif général ② (pas de lien prix / réplication)

④ prix observable ① / prix non observable ②

Pour le partiel

Voir les annales, globalem^t la même chose

Exercices :

① Frais d'obsèques (paye une somme K à la date du décès T_x, pas de limite ⇒ viager donc on paiera 1 jour) en contrepartie d'une cotisation c payé de manière continue. (temps continu) $\mu_x(t)$ = mortalité

$$\delta(t) = e^{-\int_0^t r_u du}$$

→ Calculer $c = f(K)$?

P pour presta → $\Lambda_x^P = K\,\delta(T_x)$ ← flux assureur

Pour l'assuré qui paie la cotisat° → $\Lambda_x^C = c\int_0^\infty \mathbb{1}_{T_x > t}\,\delta(t)\,dt$ ← flux assuré

$$\mathbb{E}^{P \otimes Q^f}(\Lambda_x^P) = K\int_0^\infty \underbrace{S_x(t)\mu_x(t)}_{f_x(t) = \text{densité de } T_x} P(0,t)\,dt$$

$$\mathbb{E}[\Lambda_x^P \mid T_x] = K\,\underbrace{\mathbb{E}^{Q^f}(\delta(T_x))}_{P(0,T_x)} = K\,P(0,T_x) \leftarrow \text{prix ZC}$$

$\mathbb{E}^{P\otimes Q^f}[\Lambda_x^c] = \mathbb{E}^P[\mathbb{E}^{Q^f}[\Lambda_x^c \mid T_x]]$

$$\mathbb{E}^{P\otimes Q^f}[\Lambda_x^c] = c\int_0^\infty \underbrace{\mathbb{E}^{P}(\mathbb{1}_{T_x > t})}_{S_x(t)}\,\underbrace{\mathbb{E}^{Q^f}[\delta(t)]}_{P(0,t)}\,dt$$

$$\Rightarrow c = K\,\frac{\int_0^\infty S_x(t)\mu_x(t)P(0,t)\,dt}{\int_0^\infty S_x(t)P(0,t)\,dt} = K\,\bar{\mu}_x$$

↖ Sorte de taux de décès moyen compte tenu de l'actualisation.

Si $\mu_x(t) = \mu \rightarrow S_x(t) = e^{-\mu t}$

$$\Rightarrow c = K\,\frac{\mu\int_0^\infty S_x(t)P(0,t)\,dt}{\int_0^\infty S_x(t)P(0,t)\,dt} = K\mu$$

Cas d'un capital revalorisé

On revalorise K sur la base de $\alpha \times r(t)$ $\quad 0 \leq \alpha \leq 1$.

$K(t) = K \times \exp\left(\alpha\int_0^t r_u\,du\right)$ (car le taux est instantané par risque)

$$\Lambda_x^P = K(T_x)\,\delta(T_x)$$

$$BE_x^P = K\int_0^\infty S_x(t)\,\mu_x(t)\,\underbrace{\cancel{k(t)\,P(0,t)}}_{?}\,dt$$

$$\rightarrow c = K\,\frac{\int_0^\infty S_x(t)\mu_x(t)\tilde{P}_\alpha(0,t)\,dt}{\int_0^\infty S_x(t)P(0,t)\,dt}$$

$$K(T_x)\,\delta(T_x) = K\exp\left(-(1-\alpha)\int_0^{T_x} r_u\,du\right)$$

$$\mathbb{E}^{Q^f}\left[\exp\left(-(1-\alpha)\int_0^{T_x} r_u\,du\right)\right] = \tilde{P}_\alpha(0,T_x)$$

Si $r(t)$ gaussien, $\int_0^t r(u)\,du$ gaussien $(m(t), v(t))$

$$\Rightarrow P(0,t) = e^{-m(t)+\frac{v(t)}{2}}$$

$$\tilde{P}_\alpha(0,t) = e^{-(1-\alpha)m(t) + \frac{(1-\alpha)^2}{2}v(t)}$$

Si $\mu_x(t)=\mu$ et $r(t)=r$

$$c = k\,\frac{\int_0^\infty \mu e^{-\mu t} e^{-(1-\alpha)rt}\,dt}{\int_0^\infty e^{-(\mu+r)t}\,dt} \qquad \int_0^\infty e^{-(\mu+r)t}\,dt = \left[-\frac{1}{\mu+r}e^{-(\mu+r)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{\mu+r}$$

$$= k\mu\,\frac{\mu+r}{\mu+(1-\alpha)r}$$

Si $\alpha=0$, $c=k\mu$

$\alpha=1$, $c=k(\mu+r)$

Exercice n°2 $^{BE\ sur}$ Contrat d'épargne en €

$r_s(t)$ le taux de revalorisation de fact° de hasard (conditionnelle) $\mu_x(t)$

$$VR(t) = VR(0)\exp\left(\int_0^t r_s(u)\,du\right)$$

$$E^{P^a}\left[(\text{flux em}) \mid r_s(\cdot), r(\cdot)\right]$$

?

τ_x = la date de rachat

$$\Lambda_x = VR(\tau_x\wedge T)\,\delta(\tau_x\wedge T)$$

$$E^{P\otimes Q^f}[\Lambda_x] = E^{Q^f}\Big[\underbrace{\int_0^T VR(t)\delta(t)S_x(t)\mu_x(t)\,dt}_{\text{décès ou rachat avant terme}} + \underbrace{VR(T)\delta(T)S_x(T)}_{\text{Sortie de contrat}}\Big]$$

$$BE = \int_0^T E^Q\left[VR(t)\delta(t)S_x(t)\mu_x(t)\right]dt + E^Q\left[VR(T)\delta(T)S_x(T)\right] \qquad VR(t)\,\delta(t) = e^{\int_0^t \omega(u)\,du} \times VR(0)$$

Cas n°1 :

$$\begin{cases} r_s(t) = r(t) + \overset{\text{spread}}{\omega(t)} \\ \mu_x(t) \text{ ind du risque financier} \end{cases}$$

$$BE = \int_0^T E^{Q^f}\left[e^{\int_0^t \omega_u du}\right] S_x(t)\mu_x(t)\,dt + E\left[e^{\int_0^T \omega_u du}\right]S_x(T)$$

si ω est gaussien $\Rightarrow$ on sait faire les calculs

Si $r(t)=r$, $\omega(t)=\omega$ et $\mu(t)=\mu$.

$$\Rightarrow BE = \int_0^T e^{\omega t}e^{-\mu t}\mu\,dt + e^{\omega T}e^{-\mu T}$$

$$= \mu\left[\frac{1}{\omega-\mu}e^{(\omega-\mu)t}\right]_0^T + e^{(\omega-\mu)T} = \frac{\mu}{\omega-\mu}\left(e^{(\omega-\mu)T}-1\right) + e^{(\omega-\mu)T}$$

$$= \frac{\omega}{\mu-\omega} - \frac{\omega}{\mu-\omega}e^{(\omega-\mu)T}$$

Si $\mu>\omega$, $BE \xrightarrow[T\to\infty]{} \frac{\mu}{\mu-\omega}$

Si $\mu(t) = \mu_0(t) - \eta\,\omega(t)$

Cas n°2 :

Si $r_s(t) = \frac{1}{d}\int_{[t-d]^+}^t r_A(u)\,du$ avec $r_A(t)$ le rendement de marché de l'actif

$$VR(t) = VR(0)\exp\left(\int_0^t r_s(u)\,du\right)$$

$$= VR(0)\exp\left(\frac{1}{d}\int_0^t\int_{[v-d]^+}^v r_A(u)\,du\,dv\right)$$

$$= VR(0)\exp\left(\frac{1}{d}\int_0^t r_A(u)\int_D^D dv\,du\right)$$

$$\int_0^t r_S(u)\,du = \int_0^t \left(\frac{1}{d}\int_{[u-d]^+}^u r_A(v)\,dv\right)du$$

$$= \int_0^d \frac{1}{d}\int_0^u r_A(v)\,dv\,du + \int_d^t \left(\frac{1}{d}\int_{u-d}^u r_A(v)\,dv\right)du$$

$$= \int_0^d \frac{d-v}{d}\, r_A(v)\,dv$$

sans rachats conjoncturels

$$BE = \int_0^T \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t (r_S(u)-r(u))\,du\right.\right.$$
$$\left.\left. - \int_0^t \mu(u)\,du\right] \times \mu(t)\,dt\right.$$
$$+ \mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^T (r_S(u)-r(u))\right)\right] S(T)$$

$$E^Z\left[\exp\left(\int_0^t w(\,)\,du\right)\right] = e^{m_w(t)+\frac{V_w(t)}{2}}$$

$$\int_0^T \simeq \sum_{i=1}^m f(t_i)\,\frac{\ell_{t_i}}{\ell_0}\,q_{t_i}$$

① $r_S - r = w$ non réplicable

Z = proba $= \mathbb{P}^{nh}$

$$dw(t) = k(w_\infty - w_t)\,dt + \sigma_w\,dW_t$$

$$m_w(t) = \mathbb{E}\left[\int_0^t w(u)\,du\right]$$

$$V_w(t) = \mathbb{V}\left[\int_0^t w(u)\,du\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^t w_u\,du\right)\right] = \exp\left(m_w(t) + \frac{V_w(t)}{2}\right)$$

② $r_S(t) = \frac{1}{d}\int_{[t-d]^+}^t r_A(u)\,du$ $\qquad Z = \mathbb{Q}$

associé à r_A et r.

$(m_w(t),\ V_w(t))$