Examen Théorie des Valeurs Extrêmes 2016-2017

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice - 1h30

Remarque préliminaire: les questions des exercices peuvent se traiter en utilisant les résultats des questions précédentes même si vous n'avez pas réussi à y répondre.

Questions de cours et exercices d'applications du cours (6 points):

1. Expliquer ce que veut dire "F appartient au domaine d'attraction d'un loi max-stable G ($F \in D(G)$)". On considère la variable aléatoire de distribution H telle que

$$H(x) = F(\alpha x + \beta)$$

avec $\alpha > 0$. A quel domaine d'attraction appartient H? Donner les relations qui existent entre les suites de normalisation pour H et F.

2. Supposons que F a une densité positive f et un point extrémal infini, x^F, telle que

$$\lim_{x \to x^F} \frac{(1+\beta x) f(x)}{\bar{F}(x)} = c.$$

A quel domaine d'attraction appartient F?

3. On rappelle que la distribution de Pareto généralisée GPD(β, ξ) est définie par

$$G^p_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - [1 + \xi(x/\beta)]_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x/\beta} & \text{si } \xi = 0, \end{cases}.$$

Expliquer à quel domaine d'attraction appartient la distribution de Pareto généralisée GPD(β, ξ).

4. Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution F et soit $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. On rappelle que:

i) Pour un $\tau > 0$ et une suite de réels (u_n), les conditions suivantes sont équivalentes: quand $n \to \infty$

$$\begin{aligned} &1) \quad \Pr(M_n \leq u_n) \to e^{-\tau}, \\ &2) \quad n\bar{F}(u_n) = n(1 - F(u_n)) \to \tau. \end{aligned}$$

ii) Il existe une suite (u_n) satisfaisant $n\bar{F}(u_n) \to \tau$ quand $n \to \infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \uparrow x^F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-)} = 1,$$

où $x^F = \sup\{x : F(x) < 1\}$. Peut-on trouver une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} \Pr(M_n \leq u_n) = e^{-\tau}$ si

- les X_i ont une loi Exponentielle de paramètre λ

$$\Pr(X_i > x) = \exp(-\lambda x), \quad x > 0;$$

- les X_i ont une loi Géométrique de paramètre p

$$\Pr(X_i = n) = p(1-p)^n, \quad n \in \mathbb{N};$$

- les X_i ont une loi de Poisson de paramètre λ

$$\Pr(X_i = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 1 (8 points):

On considère la distribution donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{1-x}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Soient $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de distribution F et $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

0. Est-ce que M_n peut avoir une distribution non dégénérée avec une suite de seuils non-linéaires?

1. En choisissant

$$a_n = \frac{1}{(1+\ln n)^2} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\ln n}{1+\ln n},$$

trouver la loi limite de $a_n^{-1}(M_n - b_n)$.

Soient $E_1, ..., E_n$ une suite de variables aléatoires IID de distribution exponentielle de paramètre 1 et $M_n^E = \max(E_1, ..., E_n)$.

2. Donner les constantes de normalisation a_n^E et b_n^E telles que $(a_n^E)^{-1}\left(M_n^E - b_n^E\right)$ converge en distribution vers la loi de Gumbel.

3. On considère la fonction

$$g(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x > 0.$$

a. Montrer que $X_1 \stackrel{d}{=} g(E_1)$. En déduire que

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \stackrel{d}{=} \frac{g\left(M_n^E\right) - g(\ln n)}{g'(\ln n)}.$$

b. Montrer qu'il existe ζ_n tel que

$$g\left(M_n^E\right) - g(\ln n) = \left(M_n^E - \ln n\right) g'(\zeta_n)$$

avec $\ln n \leq \zeta_n \leq M_n^E$ si $\ln n \leq M_n^E$ et inversement.

c. Montrer que

$$\frac{M_n^E}{\ln n} \xrightarrow{P} 1,$$

et en déduire que

$$\frac{g'(\zeta_n)}{g'(\ln n)} \xrightarrow{P} 1.$$

Retrouver le résultat de la question 1.

Exercice 2 (6 points): On rappelle qu'une fonction L mesurable et positive sur $]0,\infty[$ est *à variations lentes*, si, pour tout $x>0$, $\lim_{t\to\infty} L(tx)/L(t) = 1$. De plus un distribution F appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet Φ_α ($\alpha > 0$), si et seulement si $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$, pour une fonction à variations lentes L.

Soient X_1 et X_2 deux variables **positives**, indépendantes, identiquement distribuées de distribution caractérisée par $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$.

1. Montrer que

$$\{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\} \subset \{X_1 + X_2 > x\}.$$

En déduire que

$$P(X_1 + X_2 > x) \geq 2P(X_1 > x)(1 + o(1))$$

quand $x \to \infty$.

2. Montrer à l'aide d'un graphique que, pour $0 < \delta < 1/2$

$$\{X_1 + X_2 > x\} \subset \{X_1 > (1-\delta)x\} \cup \{X_2 > (1-\delta)x\} \cup \{X_1 > \delta x, X_2 > \delta x\}.$$

En déduire que

$$P(X_1 + X_2 > x) \leq 2P(X_1 > (1-\delta)x)(1 + o(1))$$

quand $x \to \infty$.

3. En jouant sur δ, montrer que

$$P(X_1 + X_2 > x) \sim 2P(X_1 > x).$$

4. Soient $X_1, ..., X_n$ n variables positives, indépendantes, identiquement distribuées de distribution caractérisée par $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$. On note $S_n = X_1 + ... + X_n$. Montrer que

$$P(S_n > x) \sim nP(X_1 > x)$$

quand $x \to \infty$. En déduire que

$$P(S_n > x) \sim P(M_n > x)$$

quand $x \to \infty$, où $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Utiliser la formule du binôme de Newton.

Interpréter ce résultat en terme de gestion des risques extrêmes.