ISFA 2$^{\text{ème}}$ année

Processus Stochastiques

Examen Terminal

LT

Jeudi 5 janvier 2023 – durée : 2h

Aucun document autorisé, calculatrices non programmables autorisées.

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Questions de cours :

1. Définir une martingale $(M_t)_{t\geq 0}$.
2. Définir un temps d'arrêt τ.
3. Soient $(M_t)_{t\geq 0}$, $(N_t)_{t\geq 0}$ deux martingales continues de carrés intégrables. Soient g, h deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Ecrire $g(M_t)$ à l'aide de la formule d'Itô. Identifier la partie martingale et la partie à variations bornées. Donner une expression intégrale de $\langle g(M)\rangle_t$ et de $\langle g(M), h(N)\rangle_t$.

Exercice 1 :

On considère les deux processus stochastiques suivants :

$$X_t = \int_0^t e^s dB_s \,, \qquad Y_t = e^{-t} X_t$$

1. Déterminer $\mathbb{E}(X_t), Var(X_t), \mathbb{E}(Y_t), Var(Y_t)$.
2. Spécifier la loi de X_t et de Y_t.
3. Montrer que Y_t converge en loi vers une variable Y_∞ lorsque $t \mapsto +\infty$ et spécifier sa loi.
4. Exprimer dY_t en fonction de Y_t et de B_t. Reconnaissez-vous cette EDS ?

Exercice 2 :

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard. Appliquer la formule d'Itô et calculer dZ_t pour les processus Z_t suivants :

1. $Z_t = \frac{B_t}{1+t}$;
2. $Z_t = (X_t - k)^2$, où $X_t = \exp(\sigma B_t + \mu t)$;
3. $Z_t = \ln\left(\frac{X_t}{1-X_t}\right)$, où X_t satisfait $dX_t = X_t(1 - X_t)dB_t$.

Exercice 3 :

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard et $\mathcal{F}_t$ sa filtration naturelle. Démontrer, en utilisant la formule d'Itô, que le processus $(B_t^4 - 6tB_t + 3t^2)_{t\geq 0}$ est une martingale relativement à la filtration $\mathcal{F}_t$.

Exercice 4 :

On se donne un mouvement Brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$, et on note $\mathcal{F}_t$ sa filtration naturelle. On considère deux nombre réels $a > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et on adopte les notations suivantes :

$$M_t = \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$$

$M_s = \exp\left(\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}\right)$

$$\tau_+ = \tau_+(a) = \inf\{t > 0, B_t = a\}$$
$$\tau_- = \tau_-(a) = \inf\{t > 0, B_t = -a\}$$
$$T = T(a) = \min(\tau_+, \tau_-)$$

On rappelle que les variables τ_+ et τ_- sont des temps d'arrêt.

1. Montrer que le minimum de deux temps d'arrêt est un temps d'arrêt et en déduire que T est un temps d'arrêt.
2. Montrer que $\mathbb{P}(|B_t| > a)$ tend vers 1 lorsque $t \mapsto +\infty$ et en déduire que T est presque sûrement fini. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire B_T ?
3. Montrer que τ_+ et τ_- suivent la même loi et sont indépendantes de B_T.
4. Montrer que M_t est une $\mathcal{F}_t$-martingale
5. Appliquer le théorème d'arrêt de Doob en prenant comme martingale M_t et comme temps d'arrêt 0 et T. Ecrire le résultat ainsi obtenu. (On admettra que les hypothèses du théorème d'arrêt son satisfaites).
6. Déduire des questions précédentes la valeur de $\mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{\lambda^2 T}{2}\right)\right)$, puis calculer la transformée de Laplace de T, $\mathbb{E}(e^{-sT})$.
7. En déduire l'espérance et la variance de T.

Exercice 1 :

$$X_t = \int_0^t e^s dB_s \quad \text{et } Y_t = e^{-t} X_t$$

1) $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\int_0^t e^s dB_s] = 0$

$$V(X_t) = \int_0^t e^{2s} ds = [\tfrac{1}{2} e^{2s}]_0^t = \frac{e^{2t}-1}{2}$$

$$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\int_0^t e^{s-t} dB_s] = 0$$

$$V(Y_t) = \int_0^t e^{2(s-t)} ds = e^{-2t} \frac{e^{2t}-1}{2} = \frac{1-e^{-2t}}{2}$$

2) X_t et Y_t correspondent à des intégrales de Wiener. Donc les processus X_t et Y_t sont gaussiens.

$\Rightarrow X_t \sim \mathcal{N}(0, \frac{e^{2t}-1}{2})$ et $Y_t \sim \mathcal{N}(0, \frac{1-e^{-2t}}{2})$

3) $\lim\limits_{t\to\infty} \frac{1-e^{-2t}}{2} = 1/2$ Donc la loi $\mathcal{N}(0, 1/2)$ est un bon candidat pour Y_∞

$\mathbb{E}[|Y_t - Y_\infty|] = \mathbb{E}[|Z_t|]$ où $Z_t = Y_t - Y_\infty \sim \mathcal{N}(0, -\frac{e^{-2t}}{2})$

$= 0$

Donc $Y_t \xrightarrow{\mathcal{L}} Y_\infty \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$

4) $Y_t = e^{-t} X_t = f(t, X_t)$

$$dX_t = e^{-t} dB_t$$

$$dY_t = e^{-t} dX_t - e^{-t} X_t dt$$

$$= e^{-2t} dB_t - Y_t dt$$

Exercice 2 :

1) $Z_t = \frac{B_t}{1+t} = f(t, B_t)$ $\quad$ f est C^1 p/r à t et C^2 p/r à x

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-1}{(1+t)^2}x \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+t} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$\underset{\text{Itô}}{\Longrightarrow} \quad dZ_t = -\frac{B_t}{(1+t)^2}dt + \frac{1}{1+t}dB_t$$
$$= \frac{1}{1+t}(-Z_t dt + dB_t)$$

2) $Z_t = (X_t - k)^2$ $\quad$ où $X_t = \exp(\mu t + \sigma B_t)$

$$= X_t(X_t - 2k) + k^2$$

$$\Longrightarrow dZ_t = X_t\, d(X_t - 2k) + (X_t - 2k)dX_t$$
$$= 2X_t dX_t - 2k dX_t$$

$X_t = f(t, B_t)$ $\qquad$ $f : (t,x) \mapsto e^{\mu t + \sigma x}$ $\qquad$ f C^1 p/r à t et C^2 p/r à x

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \mu e^{\mu t + \sigma x} \qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \sigma e^{\mu t + \sigma x} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \sigma^2 e^{\mu t + \sigma x}$$

$$\underset{\text{Itô}}{\Longrightarrow} dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t + \frac{1}{2}\sigma^2 X_t dt$$
$$= \left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)X_t dt + \sigma X_t dB_t$$
$$= X_t\left[\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_t\right]$$

$$\Longrightarrow dZ_t = 2X_t^2\left[\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_t\right] - 2kX_t\left[\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_t\right]$$
$$= 2\, X_t(X_t - 2k)\left[\left(\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma dB_t\right]$$

3) $Z_t = \ln\left(\frac{X_t}{1-X_t}\right)$ $\qquad$ où $dX_t = X_t(1-X_t)dB_t$

$Z_t = f(X_t)$ $\qquad$ où $f : x \mapsto \ln\left(\frac{x}{1-x}\right)$ qui est C^2 p/r à x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x(1-x)} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x-1}{x^2(1-x)^2}$$

$$\underset{\text{Itô}}{\Longrightarrow} dZ_t = \frac{1}{X_t(1-X_t)}dX_t + \frac{1}{2}\,\frac{2X_t - 1}{X_t^2(1-X_t)^2}\, X_t^2(1-X_t)^2 dt$$

$$= dB_t + \frac{2X_t - 1}{2}dt$$