Examen - Processus Stochastiques - M1 Actuariat

7 Janvier 2021 - Durée : 1h30

Documents **non autorisés**. Tout appareil électronique est interdit, y compris les calculatrices.

La clarté de la rédaction et de la présentation, ainsi que la précision des raisonnements et des arguments entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Soit $B = (B_t, t \geq 0)$ un P-mouvement brownien réel défini sur un espace de probabilté $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ fixé et soit $(\mathcal{F}_t, t \geq 0)$ sa filtration naturelle.

Exercice 1. (10 points)

Soit l'équation différentielle stochastique (EDS)

$$X_0 = x, \quad dX_t = bX_t dt + dB_t, \quad t \geq 0,$$

avec $x, b \in \mathbb{R}$.

1. On pose $Y_t = e^{-bt} X_t$. Exprimer Y_t sous la forme $Y_t = x + \int_0^t f(s) dB_s$ où f est une fonction qu'on explicitera. (2 points)
2. Calculer $E(Y_t)$ et $\mathrm{Var}(Y_t)$. (2 points) — $\mathcal{N}(0,1)$
3. Justifier que $\int_0^t Y_s ds$ est un processus gaussien. (2 points)
4. Calculer $E\left(e^{\int_0^t Y_s ds}\right)$. (4 points)

Exercice 2. (10 points)

Soit S le processus solution de $dS_t = S_t\,(\mu\, dt + \sigma\, dB_t)$, les coefficients μ et σ étant constants.

1. Montrer que $S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \dfrac{\sigma^2}{2} t\right)$. (2 points)
2. On pose $\theta = -\dfrac{\mu - r}{\sigma}$, avec $r \in \mathbb{R}$. Soit Q définie sur $\mathcal{F}_t$ par $dQ = L_t dP$ avec $L_t = \exp\left(\theta B_t - \dfrac{1}{2}\theta^2 t\right)$. Justifier que W défini par $W_t = B_t - \theta t$ est un Q-mouvement brownien. (2 points) — Girsanov
3. Soit $\widetilde{P}$ définie sur $\mathcal{F}_t$ par $d\widetilde{P} = Z_t dQ$ avec $Z_t = \exp\left(\sigma W_t - \dfrac{\sigma^2}{2} t\right)$. Montrer que $dS_t = S_t\left[(r + \sigma^2)\, dt + \sigma\, d\widetilde{B}_t\right]$ où $\widetilde{B}$ est un $\widetilde{P}$-mouvement brownien. (3 points)
4. Montrer que $e^{-rt} S_t$ est une Q-martingale, tandis que $\dfrac{e^{rt}}{S_t}$ est une $\widetilde{P}$-martingale. (3 points)

Exercice 1 :

Soit l'EDS $X_0 = x$

$dX_t = bX_t\,dt + dB_t \quad t \geq 0$ avec $x, b \in \mathbb{R}$.

1) On pose $Y_t = e^{-bt} X_t$

On utilise la 2e formule d'Itô avec $f : (x,t) \mapsto e^{-bt}x$ qui est bien C^1 p/r à t et C^2 p/r à x

Avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-bt} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -bxe^{-bt}$

Donc avec la formule d'Itô, on obtient :

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{-bs}\,dX_s + \int_0^t -bX_s e^{-bs}\,ds.$$

$$= x + \int_0^t e^{-bs}(bX_s\,ds + dB_s) - b\int_0^t X_s e^{-bs}\,ds$$

$$= x + \int_0^t e^{-bs}\,dB_s.$$

Donc $Y_t = x + \int_0^t f(s)\,dB_s$ où $f : s \mapsto e^{-bs}$
f est déterministe et de carré intég.

2) $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[x + \int_0^t f(s)\,dB_s]$

$$= x + \mathbb{E}[\int_0^t f(s)\,dB_s]$$

$$= x$$ (car $\int_0^t f(s)\,dB_s$ est une intégrale de Wiener donc processus centré)

$$V(Y_t) = \mathbb{E}[Y_t^2] - \mathbb{E}[Y_t]^2$$

$$= \mathbb{E}[(x + \int_0^t f(s)\,dB_s)^2] - x^2$$

$$= \mathbb{E}[x^2 + 2x\int_0^t f(s)\,dB_s + (\int_0^t f(s)\,dB_s)^2] - x^2$$

$$= \mathbb{E}[(\int_0^t f(s)\,dB_s)^2]$$

$$= \mathbb{E}[\int_0^t f(s)^2\,dB_s]$$ Variance pour l'intégrale de Wiener

$$= \mathbb{E}[\int_0^t e^{-2bs}\,dB_s] = \int_0^t e^{-2bs}\,ds = \frac{1}{2b}(1 - e^{-2bt})$$

3) $\forall t \geq 0$, on peut écrire

$$\int_0^t f(s)\,dB_s = \sum_{i=0}^{m(t)-1} \alpha_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \alpha_{m(t)} (B_t - B_{t_{m(t)}})$$

avec $m(t)$ l'unique entier naturel tq $t_{m(t)} \leq t < t_{m(t)+1}$

$\Rightarrow Y_t$ est une CL de B_{t_i} avec $t_i \leq t$ et de B_t qui sont toutes des va $\mathcal{F}_t$-adaptées

Donc $(Y_t)_{t\geq 0}$ est un processus $\mathcal{F}_t$-adapté

De +, toute CL de Y_{T_i} pour $\neq$ valeurs de T_i peut s'écrire comme CL de B_{t_i} et B_{T_i}

Or B est un processus Gaussien

Donc $\left(\int_0^t Y_s\,ds\right)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien.

4) $$\mathbb{E}\left[\int_0^t Y_s\,ds\right] = \int_0^t \mathbb{E}[Y_s]\,ds = \int_0^t x\,ds = tx$$

$$V\left(\int_0^t Y_s\,ds\right) = \int_0^t V(Y_s)\,ds = \int_0^t \frac{1}{2b}(1-e^{-2bs})\,ds = \frac{1}{2b}\left(t + \left[\frac{1}{2b}e^{-2bs}\right]_0^t\right) = \frac{1}{2b}\left(t + \frac{1}{2b}e^{-2bt} - \frac{1}{2b}\right)$$

$$\Rightarrow V\left(\int_0^t Y_s\,ds\right) = \frac{1}{(2b)^2}\left(2bt - 1 + e^{-2bt}\right)$$

$$\Rightarrow \int_0^t Y_s\,ds \sim \mathcal{N}\left(tx, \frac{1}{(2b)^2}(2bt - 1 + e^{-2bt})\right)$$

$$\mathbb{E}\left[e^{\int_0^t Y_s\,ds}\right] = \mathbb{E}\left[e^{\int_0^t Y_s\,ds - tx + tx}\right] = e^{tx}\,\mathbb{E}\left[e^{\int_0^t Y_s\,ds - tx}\right] = e^{tx} e^{\frac{1}{2}\times\frac{1}{(2b)^2}(2bt-1+e^{-2bt})}$$

Car $\int_0^t Y_s\,ds - tx \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{(2b)^2}(2bt - 1 + e^{-2bt})\right)$

et si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}[e^{\alpha X}] = e^{\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}$

ici $\alpha = 1$
et $\sigma^2 = \frac{1}{(2b)^2}(2bt - 1 + e^{-2bt})$

Exercice 2. (10 points)

Soit S le processus solution de $dS_t = S_t\,(\mu\,dt + \sigma\,dB_t)$, les coefficients μ et σ étant constants.

✓. 1. Montrer que $S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$. (2 points)

2. On pose $\theta = -\frac{\mu - r}{\sigma}$, avec $r \in \mathbb{R}$. Soit Q définie sur $\mathcal{F}_t$ par $dQ = L_t dP$ avec $L_t = \exp\left(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$.
Justifier que W défini par $W_t = B_t - \theta t$ est un Q-mouvement brownien. (2 points) — Girsanov

3. Soit $\widetilde{P}$ définie sur $\mathcal{F}_t$ par $d\widetilde{P} = Z_t dQ$ avec $Z_t = \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$.
Montrer que $dS_t = S_t\left[(r + \sigma^2)\,dt + \sigma\,d\widetilde{B}_t\right]$ où $\widetilde{B}$ est un $\widetilde{P}$-mouvement brownien. (3 points)

4. Montrer que $e^{-rt} S_t$ est une Q-martingale, tandis que $\frac{e^{rt}}{S_t}$ est une $\widetilde{P}$-martingale. (3 points)

Exercice 2 :

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t) \qquad \mu, \sigma \text{ cte.}$$

1) Rappel : $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$

Méthode : - On applique la 2e formule d'Itô à $Y_t = e^{-\mu t} X_t$

- Puis 1ère formule d'Itô à $Z_t = \ln(Y_t)$

On pose $Y_t = e^{-\mu t} S_t$

On applique la 2e formule d'Itô avec $f : (x,t) \mapsto e^{-\mu t} x$ qui est bien C^1 p/r à t et C^2 p/r à x

avec $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\mu t}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial t} = -\mu x e^{-\mu t}$

D'où avec la formule d'Itô on a

$$dY_t = e^{-\mu t} dS_t - \mu S_t e^{-\mu t} dt$$

$$\Rightarrow dY_t = e^{-\mu t} S_t(\mu dt + \sigma dB_t) - \mu S_t e^{-\mu t} dt$$

$$= \sigma S_t e^{-\mu t} dB_t$$

$$= \sigma Y_t dB_t$$

On pose $Z_t = \ln Y_t$

On applique la 1ère formule d'Itô avec $f : x \mapsto \ln x$ qui est bien C^2 p/r à x

avec $f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Donc avec la formule d'Itô, on a

$$dZ_t = \frac{1}{Y_t} dY_t - \frac{1}{2}\frac{1}{Y_t^2} d\langle Y\rangle_t$$
$$= \frac{1}{Y_t} dY_t - \frac{1}{2}\frac{1}{Y_t^2} \sigma^2 Y_t^2 dt$$
$$= -\frac{\sigma^2}{2} dt + \sigma dB_t$$

$$\Rightarrow d \ln Y_t = -\frac{\sigma^2}{2} dt + \sigma dB_t$$

$$\Rightarrow \ln Y_t = \ln Y_0 + \int_0^t \sigma dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds = \ln S_0 + \int_0^t \sigma dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds$$

Donc $Y_t = \exp\left(\ln S_0 + \int_0^t \sigma dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds\right)$

$$= S_0 \exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

Or $Y_t = e^{-\mu t} S_t$

$$\Rightarrow S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right)$$

2) On pose $\theta = -\frac{\mu - r}{\sigma}$ $\quad r \in \mathbb{R}$.

Soit $\mathbb{Q}$ déf sur $\mathcal{F}_t$ par $d\mathbb{Q} = L_t d\mathbb{P}$ avec $L_t = \exp(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$

$$\Rightarrow \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = L_t = \exp\left(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$$

B_t est un $\mathbb{P}$-MB et $\theta = -\frac{\mu - r}{\sigma}$ $\Rightarrow$ L_t est une martingale exponentielle i.e $\mathcal{E}(\theta \ast B)$

Donc grâce au théorème de Girsanov,

Sous $\mathbb{Q}$, le processus $W : t \mapsto B_t - \int_0^t \theta_s ds = B_t - \theta t$ car θ cte

est un MB.

3) Soit $\tilde{\mathbb{P}}$ déf sur $\mathcal{F}_t$ par $d\tilde{\mathbb{P}} = Z_t d\mathbb{Q}$ avec $Z_t = \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2})$

$d\mathbb{Q} = L_t d\mathbb{P}$ $\quad \Rightarrow d\tilde{\mathbb{P}} = Z_t L_t d\mathbb{P} = Z'_t d\mathbb{P}$

avec $Z'_t = \exp(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}) \exp(\theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t)$

$$= \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2} + \theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$$

Or $W_t = B_t - \theta t$

$$\Rightarrow Z'_t = \exp\left(\sigma(B_t - \theta t) - \frac{1}{2}\sigma^2 t + \theta B_t - \frac{1}{2}\theta^2 t\right)$$

$$= \exp\left((\sigma+\theta)B_t - \frac{1}{2}(\sigma^2 + 2\sigma\theta + \theta^2)t\right)$$

$$= \exp\left((\sigma+\theta)B_t - \frac{1}{2}(\sigma+\theta)^2 t\right)$$

Or $\theta = -\frac{(\mu - r)}{\sigma}$

$$\Rightarrow \sigma + \theta = \sigma - \frac{(\mu-r)}{\sigma} = \frac{\sigma^2 - \mu + r}{\sigma} = -\frac{(\mu - r - \sigma^2)}{\sigma}$$

$$\Rightarrow Z'_t = \exp\left(-\frac{(\mu-r-\sigma^2)}{\sigma}B_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r-\sigma^2}{\sigma}\right)^2 t\right)$$

Donc Z'_t est une martingale exponentielle $\mathcal{E}\left(-\frac{(\mu-r-\sigma^2)}{\sigma} * B\right)$ donc $d\tilde{\mathbb{P}} = Z'_t \, d\mathbb{P}$

$\Rightarrow$ Sous $\tilde{\mathbb{P}}$, le processus $\tilde{B} : t \mapsto B_t - \left(-\frac{(\mu-r-\sigma^2)}{\sigma}\right)t$ est un MB

Thm de Girsanov

En réécrivant $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$ avec $dB_t = d\tilde{B}_t - \frac{(\mu-r-\sigma^2)}{\sigma} dt$

il vient $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t \left(d\tilde{B}_t - \frac{(\mu-r-\sigma^2)}{\sigma} dt\right)$

$$= \mu S_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t - \mu S_t dt + (r+\sigma^2) S_t dt$$

$$= S_t\left((r+\sigma^2)dt + \sigma d\tilde{B}_t\right)$$ avec $\tilde{B}_t$ un $\tilde{\mathbb{P}}$-MB

4) Mq $e^{-rt}S_t$ est une $\mathbb{Q}$ martingale.

Par 1) on a $S_t = S_0 \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$

$$\Rightarrow e^{-rt} S_t = S_0 \exp\left((\mu - r)t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$$

Sous $\mathbb{Q}$ on a $W_t = B_t - \theta t$ MB

autrement $W_t = B_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$

Or $e^{-rt} S_t = S_0 \exp\left(\sigma\left(\frac{\mu-r}{\sigma}t + B_t\right) - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$

$$= S_0 \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} e^{-r\times 0} S_0 = S_0 \\ d e^{-rt} S_t = \sigma e^{-rt} S_t \, dW_t = \sigma M_t \, dW_t \end{cases}$$ On note $M_t = e^{-rt} S_t$

Drift nul $\Rightarrow$ Sous $\mathbb{Q}$, $e^{-rt} S_t$ est une martingale locale.

De plus, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\langle M \rangle_t] = \sigma^2 M_t^2 < \infty$

Donc Sous $\mathbb{Q}$, $e^{-rt} S_t$ est une $\mathbb{Q}$ martingale.

Mq $\frac{e^{rt}}{S_t}$ est une $\widetilde{\mathbb{P}}$ martingale

Avec 1) $\frac{e^{rt}}{S_t} = \frac{1}{S_0} \exp\left(rt - \mu t - \sigma B_t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$

$$= \frac{1}{S_0} \exp\left(-\sigma \underbrace{\left(\frac{\mu - r}{\sigma} t + B_t\right)}_{\widetilde{B}_t} + \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{S_0} \exp\left(-\sigma \widetilde{B}_t + \frac{\sigma^2 t}{2}\right)$$ On note $M_t' = \frac{e^{rt}}{S_t}$

$$\Rightarrow \begin{cases} - \\ dM_t' = -\sigma M_t' \, d\widetilde{B}_t \end{cases}$$

Drift nul $\Rightarrow$ martingale locale sous $\widetilde{\mathbb{P}}$

De +, $\mathbb{E}_{\widetilde{\mathbb{P}}}[\langle M' \rangle_t] = \sigma^2 M_t'^2 < \infty$

Donc Sous $\widetilde{\mathbb{P}}$, $\frac{e^{rt}}{S_t}$ est une martingale.