Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2019-2020 - Première session
24 janvier 2020 - Durée : 2 heures
Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

Problème

Considérons le système bonus-malus avec le fonctionnement suivant :

— un sinistre ou plus au cours de l'année conduit à payer une prime c l'année suivante ;
— pas de sinistre au cours de l'année et un sinistre ou plus l'année précédente conduit à payer c pour l'année suivante ;
— pas de sinistre les deux dernières années conduit à payer a l'année suivante.

Dans tout l'exercice, le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres causé par un assuré.

Considérons un assuré qui produit un nombre de sinistres annuel selon une loi de Poisson de paramètre θ.

1. Donnez la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours de cet assuré dans l'échelle bonus-malus.

2. Donnez la distribution stationnaire de cette chaîne.

3. Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?

4. Quelle est la valeur espérée de la prime en régime stationnaire ? Commentez.

5. Mesurez l'élasticité de l'échelle.

6. Supposons que cet assuré n'a pas eu de sinistre au cours des deux précédentes années. En se rendant au réveillon du jour de l'an, il cause un sinistre le 31 décembre à 23h59. Il n'avait précédemment pas causé de sinistre au cours de l'année. À partir de quel montant de sinistre a-t-il intérêt à déclarer le sinistre à son assureur (on supposera que l'assuré connaît son profil de risque θ et qu'il raisonne avec une actualisation nulle) ?

Question de cours

Avec les notations habituelles du cours, montrez que l'estimateur de Bayes $\widetilde{\mu(\Theta)} = \mathrm{E}\left[\mu(\Theta)|\mathbf{X}\right]$ est le meilleur estimateur de $\mu(\Theta)$, au regard du critère de l'erreur quadratique moyenne.

Exercice 1

Considérons un assuré dont le nombre annuel de sinistres est distribué selon une loi de Poisson de paramètre Θ. Les montants de sinistres sont constants. La distribution *a priori* de Θ est une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Donnez la prime de Bayes de cet assuré.

2. Lors de la première année d'observation, l'assuré n'a pas causé de sinistre. Quelle prime lui réclameriez-vous pour la seconde année ?

3. Utilisez le modèle de Bühlmann pour estimer le nombre de sinistres espéré que va engendrer cet assuré pour la deuxième année.

4. Comparez les résultats des questions 2. et 3. et commentez

Exercice 2

Considérons la famille des distributions Pareto :

$$\mathcal{F} = \left\{ F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta},\ \text{pour } x \geq x_0\ ;\ \theta > 0 \right\}.$$

Déterminez la famille $\mathcal{U}$ conjuguée à $\mathcal{F}$.

Problème:

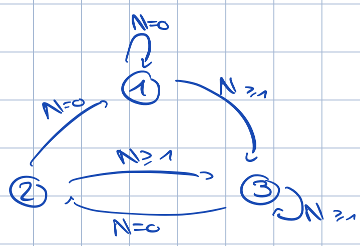
1) 3 états:

Prime

① $N_t = 0, N_{t-1} = 0 \longrightarrow a$

② $N_t = 0, N_{t-1} \geq 1 \longrightarrow c$

③ $N_t \geq 1 \longrightarrow c$



On suppose $N \sim \mathcal{P}(\theta)$

$$P(N=0 \mid \Theta=\vartheta) = e^{-\vartheta}$$
$$P(N \geq 1 \mid \Theta = \vartheta) = 1 - e^{-\vartheta}$$

$$\Rightarrow P_\theta = \begin{pmatrix} e^{-\vartheta} & 0 & 1-e^{-\vartheta} \\ e^{-\vartheta} & 0 & 1-e^{-\vartheta} \\ 0 & e^{-\vartheta} & 1-e^{-\vartheta} \end{pmatrix}$$

"je suis en ③ je vais en ②"

2) On cherche π_θ tq $\begin{cases} \pi_\theta' P_\theta = \pi_\theta' \\ \pi_\theta' e_3 = 1 \end{cases}$ $\qquad e_3 = (1\ 1\ 1)$

$$\Rightarrow \exists (\pi_i)_{i \in [\![1,3]\!]} \text{ tq } \pi_\theta = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \end{pmatrix}$$

π_θ distributⁱ stationnaire de la chaîne $\Rightarrow \begin{cases} \pi_\theta' P_\theta = \pi_\theta' \\ \pi_\theta' e_3 = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{3} \pi_i = 1$$

et $\begin{cases} \pi_1 e^{-\theta} + \pi_2 e^{-\theta} = \pi_1 \\ \pi_3 e^{-\theta} = \pi_2 \\ (1-e^{-\theta}) = \pi_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = e^{-2\theta} \\ \pi_2 = e^{-\theta}(1-e^{-\theta}) \\ \pi_3 = 1 - e^{-\theta} \end{cases}$$

On a bien $\sum \pi_i = 1$

$$\Rightarrow \pi_\theta = \begin{pmatrix} e^{-2\theta} \\ e^{-\theta}(1-e^{-\theta}) \\ 1-e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

3) Pour déterminer le rang d'atteinte i.e $k \in \mathbb{N}$, tq $P_\theta^k = P_\theta$ on peut déterminer le $rg(P_\theta)$

Ici $rg(P_\theta) = 2 \Rightarrow$ Le temps d'atteinte est 2.

4) La valeur espérée en régime stationnaire est :

$$P_{\text{Stationnaire}} = \Pi_0' \begin{pmatrix} a & c & c \end{pmatrix} = ae^{-2\theta} + ce^{-\theta}(1-e^{-\theta}) + c(1-e^{-\theta})$$
$$= ae^{-2\theta} + c(1-e^{-2\theta})$$
$$= (a-c)e^{-2\theta} + c$$

5) $$\text{Elasticité} = \frac{\frac{dP_{\text{statio}}}{P_{\text{statio}}}}{\frac{d\theta}{\theta}} = \frac{dP_{\text{statio}}}{d\theta} \times \frac{\theta}{P_{\text{statio}}}$$

$$\frac{dP_{\text{statio}}}{d\theta} = -2(a-c)e^{-2\theta}$$

$$\Longrightarrow \text{Elasticité} = -2(a-c)e^{-2\theta} \times \frac{\theta}{(a-c)e^{-2\theta}+c}$$

$$= \frac{-2\theta(a-c)}{a-c(1-e^{2\theta})}$$

6) Soit x le montant du sinistre.
La distribut° stationnaire étant atteinte au bout de 2 itérat°, il faut considérer les montants de prime à régler sur les 2 prochaines périodes lorsqu'il déclare le sinistre et lorsqu'il ne le déclare pas.

D : Il déclare
$\bar{D}$: Il ne déclare pas

Année	N	N+1		N+2	
Evénement		D	$\bar{D}$	D	$\bar{D}$
Classe	1	3	1	2 ou 3	1 ou 3
Coût	a	c	$a+x$	c	$ae^{-\theta}+c(1-e^{-\theta})$

Donc il déclarera si $\underbrace{c+c}_{\text{Coût sans déclarer}} < a+x+ae^{-\theta}+c(1-e^{-\theta})$

$$\Longrightarrow x > (c-a)(1+e^{-\theta})$$

Question de cours

Soit $\widehat{\mu(\theta)}$ un estimateur de $\mu(\theta)$

$$\mathbb{E}[(\hat{\mu}(\theta)-\mu(\theta))^2] = \mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)} - \widetilde{\mu(\theta)} + \widetilde{\mu(\theta)} - \mu(\theta))^2]$$
$$= \mathbb{E}[\,\mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)} - \widetilde{\mu(\theta)})^2 + (\widetilde{\mu(\theta)} - \mu(\theta))^2 + 2(\widehat{\mu(\theta)} - \widetilde{\mu(\theta)})(\widetilde{\mu(\theta)} - \mu(\theta)) \mid \underline{X}]]$$
$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)} - \widetilde{\mu(\theta)})^2 \mid \underline{X}]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\widetilde{\mu(\theta)} - \mu(\theta))^2 \mid \underline{X}]] + 2\,\mathbb{E}[\,\mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)} - \widetilde{\mu(\theta)})(\widetilde{\mu(\theta)} - \mu(\theta)) \mid \underline{X}]]$$

Or $\mathbb{E}[(\tilde{\mu}-\hat{\mu})(\hat{\mu}-\mu)|\underline{X}] = \hat{\mu}\,\mathbb{E}[\hat{\mu}|\underline{X}] - \mathbb{E}[\mu\hat{\mu}|\underline{X}] - \hat{\mu}^2 + \hat{\mu}^2$

$\Rightarrow \mathbb{E}[(\widehat{\mu(\Theta)}-\mu(\theta))^2] > \mathbb{E}[(\widetilde{\mu(\Theta)}-\mu(\theta))^2]$ pour tout estimateur $\hat{\mu}$ de $\hat{\mu}$

Donc au regard du critère de l'erreur quadratique moyenne, l'estimateur de Bayes $\widetilde{\mu(\Theta)}$ est le meilleur estimateur de $\mu(\Theta)$

Exercice 1

1) On connait rien $\Rightarrow P^{Bayes} = P^{coll} = \mathbb{E}[N_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_1|\Theta]] = \mathbb{E}[\Theta] = \frac{1}{2}$ car $N_j \sim \mathcal{P}(\Theta)$ et $\Theta \sim \mathcal{U}([0,1])$

2) On suppose $N_1 = 0$

On va lui réclamer $P^{Bayes} = \mathbb{E}[N_2 | N_1 = 0]$

$$= \int_\Theta \underbrace{\mathbb{E}[N_2|\Theta=\theta]}_{=\theta}\, u(\theta|N_1=0)\, d\theta$$

$$u(\theta|N_1=0) = \frac{\mathbb{P}(N_1=0|\Theta=\theta)}{\mathbb{P}(N_1=0)}\, u(\theta)$$

$N \sim \mathcal{P}(\Theta)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(N_1=0|\Theta=\theta) = e^{-\theta}$

$\mathbb{P}(N_1=0) = \int_\Theta e^{-\theta}\, d\theta = [-e^{-\theta}]_0^1 = -e^{-1}+1$

$= 1-e^{-1}$

$u(\theta) = 1$

$$\Rightarrow u(\theta|N_1=0) = \frac{e^{-\theta}}{1-e^{-1}} = \frac{e}{e-1}\, e^{-\theta}$$

$$\Rightarrow P^{Bayes} = \int_\Theta \theta\, \frac{e}{e-1}\, e^{-\theta}\, d\theta = \frac{e}{e-1}\int_0^1 \theta e^{-\theta}\, d\theta$$

$-(x+1)e^{-x}$

$$= \frac{e}{e-1}\left[-\theta e^{-\theta} - e^{-\theta}\right]_0^1$$

$$= \frac{e}{e-1}\left(-2e^{-1}+1\right)$$

$$= \frac{e}{e-1}\,\frac{e-2}{e} = \frac{e-2}{e-1}$$

3) $P^{Bühlmann} = \alpha \overline{N} + (1-\alpha)\mu_0$ $\qquad \alpha = \frac{n}{n+\frac{\sigma^2}{\tau^2}}$

$\sigma^2 = \mathbb{E}[\mathbb{V}[N|\Theta]] = \mathbb{E}[\Theta] = \frac{1}{2} = \frac{a+b}{2}$

$\tau^2 = \mathbb{V}[\mathbb{E}[N|\Theta]] = \mathbb{V}[\Theta] = \frac{1}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$

$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{1+\frac{1/2}{1/12}} = \frac{1}{7}$

$\Rightarrow P^{Bühl.} = \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{6}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{7}$

4) Coïncident pas car lois pas conjuguées. $\left(P^{\text{Bayes}} = \frac{1}{2} \neq \frac{3}{7}\right)$
Car sinon linéaire dans les observat° $\Rightarrow P^{\text{Bül.}}$

Exercice 2 :

Pareto $\longrightarrow f_\theta(x) = \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta+1}$

$$\mu_X(\theta) \propto \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \frac{\theta^n}{x_0^n} e^{-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}$$

$$\propto \underbrace{\theta^n e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}}_{\text{noyau d'une } \Gamma}$$

De plus la famille des distrib de Γ est fermée sous l'opérateur produit

Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2018-2019 - Première session
17 janvier 2019 - Durée : 2 heures
Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

$\alpha = \frac{n}{n+\frac{\sigma^2}{\tau^2}}$ $\sigma^2 = \mathbb{E}[\mathbb{V}[N|\Theta]]$ $\tau^2 = \mathbb{V}[\mathbb{E}$

$\widehat{\mu(\Theta_i)}^{Bu} = \alpha \bar{X}_i + (1-\alpha)\mu_0$

Question de cours

Dans le modèle de Bühlmann, avec les notations habituelles,

(1) donnez les expressions de la prime de crédibilité et du facteur de crédibilité ;

(2) donnez une interprétation de α, τ^2, σ^2 et μ_0 ;

(3) déduisez-en le sens de variation de la prime de crédibilité en fonction de τ^2, σ^2 et le nombre de périodes d'observation n.

Problème

Considérons un portefeuille d'assurance dans lequel le profil de risque d'un assuré i est représenté par le couple (θ_i, λ_i) :

— θ_i représente la partie non-observable *a priori* du profil de risque ;
— λ_i représente la partie *a priori* observable du profil de risque (ex : la zone d'habitation).

On modélise l'hétérogénéité (non observée *a priori* par l'assureur) par la variable aléatoire Θ et la partie observable *a priori* par la variable Λ. Θ et Λ sont supposées indépendantes. Un assuré de profil de risque (θ, λ) produit un nombre de sinistres par an avec la distribution :

$$\Pr[N = k|\Theta = \theta, \Lambda = \lambda] = e^{-\theta\lambda}\frac{(\theta\lambda)^k}{k!}, k \in \mathbb{N}.$$

L'assureur estime que les profils de risque *a priori* non-observables sont distribués selon une loi Gamma de paramètre (α, β), i.e.

$$u(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}, \theta \geq 0.$$

De plus,

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_r & \text{si l'assuré vit en zone rurale } (w_r)\,; \\ \lambda_u & \text{si l'assuré vit en zone urbaine } (w_u = 1 - w_r). \end{array} \right\}$$

Le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres et l'espérance mathématique du coût d'un sinistre est normalisée à 1.

Partie I

1. Quelle est la prime individuelle correcte d'un assuré de profil de risque (θ, λ) ?

2. Déterminez la prime collective.

3. Montrez que les familles de distribution poisson et gamma sont conjuguées.

On se place à présent après n années d'observations $(k_1, ..., k_n)$ d'un assuré vivant en zone urbaine.

4. Déterminez la densité *a posteriori* de Θ pour cet assuré.

5. Calculez la prime de Bayes pour la $(n+1)$-ème année pour ce même assuré.

6. Calculez la prime de Bühlmann $(n+1)$-ème année pour ce même assuré.

7. Comparez les primes de Bayes et de Bühlmann et commentez.

Partie II

L'assureur souhaite mettre en place une échelle bonus-malus à trois degrés (numérotés 1 à 3) avec le fonctionnement suivant :

— une année sans sinistre fait descendre d'un degré dans l'échelle,

— un sinistre ou plus au cours de l'année fait remonter au niveau 3.

1. Donnez la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours d'un assuré de profil de risque (θ, λ) dans l'échelle.

2. Donnez la distribution stationnaire de cette chaîne et précisez son temps d'atteinte.

3. Donnez la distribution stationnaire du portefeuille.

4. Quelles primes relatives proposeriez-vous d'associer aux trois degrés de l'échelle en utilisant la méthode de Norberg ?

5. Calculez l'élasticité de la prime en régime stationnaire pour un assuré vivant en zone urbaine, de profil de risque (θ, λ_u).

Problème :

$$N \sim \mathcal{P}(\Lambda \Theta)$$

avec $\Theta \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ $\mu(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$

$$\Lambda = \begin{cases} \lambda_r & \text{si assuré } Z_{\text{rurale}} \ (\omega_r) \\ \lambda_u & \text{si assuré } Z_{\text{urb.}} \ (\omega_u = 1-\omega_r) \end{cases}$$

Partie 1 :

1) $P^{ind} = \mathbb{E}[N \mid \Theta = \theta, \Lambda = \lambda] = \lambda\theta$

2) $P^{col} = \mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N \mid \Theta, \Lambda]]$

$$= \mathbb{E}[\Theta \Lambda]$$

$$= \mathbb{E}[\Theta]\mathbb{E}[\Lambda] \quad \text{car } \Theta \perp\!\!\!\perp \Lambda$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \times (\lambda_r \omega_r + \lambda_u (1-\omega_r))$$

3) $\mu(\theta \mid \underline{N}) \propto \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(N_i = k_i \mid \Theta = \theta, \Lambda = \lambda_i) \mu(\theta)$

$$\propto \prod_{i=1}^{n} \frac{(\lambda_i \theta)^{k_i}}{k_i!} e^{-\lambda_i \theta} \times \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$$

$$\propto \underbrace{\theta^{\alpha + \sum k_i - 1} e^{-(\beta + \sum \lambda_i)\theta}}_{\text{noyau d'un } \Gamma}$$

$$\Rightarrow \Theta \mid \underline{N} \sim \Gamma(\alpha + \sum k_i \ ; \ \beta + \sum \lambda_i)$$

4) $\Theta \mid \underline{N} \sim \Gamma(\underbrace{\alpha + \sum k_i}_{\alpha'} \ ; \ \underbrace{\beta + \sum \lambda_i}_{\beta'})$

$$\mu(\theta \mid \underline{N}) = \frac{(\beta + \sum \lambda_i)^{\alpha + \sum k_i}}{\Gamma(\alpha + \sum k_i)} \theta^{\alpha + \sum k_i - 1} e^{-(\beta + \sum \lambda_i)\theta}$$

5) $P^{Bayes} = \mathbb{E}[N_{r+1} \mid N]$

$$= \int_{\Theta} \mathbb{E}[N_{r+1} \mid \Theta = \theta, \Lambda = \lambda_u] \mu(\theta \mid N) d\theta$$

$$= \int_0^\infty \theta \lambda_u \times \frac{\beta'^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')} \theta^{\alpha'-1} e^{-\beta'\theta} d\theta$$

$$= \int_0^\infty \lambda_u \frac{\beta'^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')} \theta^{\alpha'} e^{-\beta'\theta} d\theta$$

$$= \lambda_u \frac{\beta'^{\alpha'}}{\Gamma(\alpha')} \underbrace{\int_0^\infty \theta^{\alpha'+1-1} e^{-\beta'\theta} d\theta}_{= \frac{\Gamma(\alpha'+1)}{\beta'^{\alpha'+1}}} = \lambda_u \frac{\alpha'}{\beta'} = \lambda_u \frac{\alpha + \sum k_i}{\beta + m\lambda_u}$$

6) $\widehat{\mu(\theta_i)}^{Bam} = \alpha \bar{X} + (1-\alpha)\mu_0$

$\alpha = \frac{n}{n + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$

$\sigma^2 = \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)] = \mathbb{E}[\Theta \lambda_\mu]$
$= \lambda_\mu \frac{\alpha}{\beta}$

$\tau^2 = \mathbb{V}[\mu(\Theta)] = \mathbb{V}[\lambda_\mu \Theta] = \lambda_\mu^2 \frac{\alpha}{\beta^2}$

$\Rightarrow \frac{\sigma^2}{\tau^2} = \frac{\beta}{\lambda_\mu}$

Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2017-2018 - Première session
15 janvier 2018 - Durée : 2 heures
Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

Problème

Considérons un portefeuille d'assurance dont on modélise l'hétérogénéité (non observée *a priori* par l'assureur) par la variable aléatoire Θ. Un assuré de profil de risque $\theta \in [0,1]$ produit un nombre de sinistres par an avec la distribution :

$$\Pr\left[N = k | \Theta = \theta\right] = \theta(1-\theta)^k, k \in \mathbb{N}.$$

L'assureur estime que les profils de risque sont distribués selon une loi Bêta, i.e.

$$u(\theta) = \frac{\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)}, 0 < \theta < 1.$$

Le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres et l'espérance mathématique du coût d'un sinistre est normalisée à 1.

Partie I

1. Quelle est la prime individuelle correcte d'un assuré de profil de risque θ ?

2. Montrez que les familles de distribution géométrique et bêta sont conjuguées.

3. Déterminez la prime collective.

On se place à présent après n années d'observations $(k_1, ..., k_n)$.

4. Déterminez la densité *a posteriori* de Θ.

5. Calculez la prime de Bayes pour la $(n+1)$-ème année.

6. Calculez la prime de Bühlmann $(n+1)$-ème année.

7. Comparez les primes de Bayes et de Bühlmann et commentez.

Partie II

L'assureur souhaite mettre en place une échelle bonus-malus à trois degrés (numérotés 1 à 3) avec le fonctionnement suivant :

— une année sans sinistre fait descendre d'un degré dans l'échelle,

— les assurés ayant causé au moins un sinistre au cours de l'année remontent au degré 3 de l'échelle.

1. Donnez la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours d'un assuré de profil de risque θ dans l'échelle.

2. Donnez la distribution stationnaire de cette chaîne.

3. Quel est son temps d'atteinte ?

4. Donnez la distribution stationnaire du portefeuille.

5. Quelles primes relatives proposeriez-vous d'associer aux trois degrés de l'échelle ?

Exercice

Une société d'assurance couvre deux contrats depuis 3 ans. Elle dispose des montants annuels de sinistres suivants :

Contrat	Année 1	Année 2	Année 3
1	5	8	11
2	11	13	12

Selon le modèle de Bühlmann, quelles primes réclameriez-vous à ces deux assurés pour la 4^e année ?

Annexe : Fonctions Bêta et Gamma

On rappelle les définitions des fonctions Bêta et Gamma :

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt,$$

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt,$$

et la propriété :

$$B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}.$$

Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2016-2017 - Première session
18 janvier 2017 - Durée : 2 heures
Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1

Considérons le système bonus-malus avec le fonctionnement suivant :
- — un sinistre ou plus au cours de l'année conduit à payer une prime c l'année suivante ;
- — pas de sinistre au cours de l'année et un sinistre ou plus l'année précédente conduit à payer c pour l'année suivante ;
- — pas de sinistre les deux dernières années conduit à payer a l'année suivante.

Dans tout l'exercice, le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres causé par un assuré.

Considérons un assuré qui produit un nombre de sinistres annuel selon une loi de Poisson de paramètre θ.

1. Donnez la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours de cet assuré dans l'échelle bonus-malus.

2. Donnez la distribution stationnaire de cette chaîne.

3. Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?

4. Quelle est la valeur espérée de la prime en régime stationnaire ? Commentez.

5. Supposons que cet assuré n'a pas eu de sinistre au cours des deux précédentes années. En se rendant au réveillon du jour de l'an, il cause un sinistre le 31 décembre à 23h59. Il n'avait précédemment pas causé de sinistre au cours de l'année. À partir de quel montant de sinistre a-t-il intérêt à déclarer le sinistre à son assureur (on supposera que l'assuré connaît son profil de risque θ et qu'il raisonne avec une actualisation nulle) ?

Exercice 2

Considérant les hypothèses (H1) et (H2) ci-dessous, trouvez le meilleur estimateur, linéaire en $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)'$, de $\mu(\Theta) = \mathrm{E}\left[X_{n+1}|\Theta\right]$.

— (H1) Les variables aléatoires X_j $(j = 1, ..., n)$ sont, conditionnellement à $\Theta = \theta$, indépendantes et identiquement distribuées selon une loi F_θ avec les moments conditionnels

$$\mu(\theta) = \mathrm{E}\left[X_j|\Theta = \theta\right],$$
$$\sigma^2(\theta) = \mathrm{Var}\left[X_j|\Theta = \theta\right].$$

— Θ est une variable aléatoire de distribution $U(\theta)$.

Exercice 3

Considérons un portefeuille d'assurance dont on modélise l'hétérogénéité (non observée *a priori* par l'assureur) par la variable aléatoire Θ. Un assuré de profil de risque $\theta \in [0, 1]$ produit un nombre de sinistres par an avec la distribution :

$$\mathrm{Pr}\left[N = k|\Theta = \theta\right] = \theta(1-\theta)^k, k \in \mathbb{N}.$$

Le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres et l'espérance mathématique du coût d'un sinistre est normalisée à 1.

1. Quelle est la prime individuelle correcte d'un assuré de profil de risque θ ?

2. Ne disposant pas d'information supplémentaire sur la distribution des profils de risque dans le portefeuille, déterminez la famille de lois conjuguée à la famille des distributions du nombre annuel de sinistres.

Dans la suite on se place dans le modèle défini par la famille des distributions du nombre annuel de sinistres et sa famille de lois conjuguées déterminée à la question 2.

3. Déterminez la prime collective.

On se place à présent après n années d'observations $(k_1, ..., k_n)$.

4. Déterminez la densité *a posteriori* de Θ.

5. Calculez la prime de Bayes pour la $(n+1)$-ème année.

6. Calculez la prime de Bühlmann $(n+1)$-ème année.

7. Comparez les primes de Bayes et de Bühlmann et commentez.

Annexe : Paramétrisation des lois de probabilité

A.1. Distributions discrètes

Distribution	Paramètres	Fonction de probabilité	Domaine
Binomiale	$0 \leq \theta \leq 1$	$\Pr[X = x] = C_n^k \theta^x (1-\theta)^{n-x}$	$x \in \mathbb{N}$
Binomiale négative	$0 \leq \theta \leq 1, r > 0$	$\Pr[X = x] = C_{r-1}^{x+r-1} \theta^r (1-\theta)^x$	$x \in \mathbb{N}$
Poisson	$\lambda > 0$	$\Pr[X = x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	$x \in \mathbb{N}$

A.2. Distributions continues

Distribution	Paramètres	Densité	Domaine
Bêta	$\alpha > 0, \beta > 0$	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$0 < x < 1$
Gamma	$\alpha > 0, \lambda > 0$	$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$	$x > 0$
Gaussienne	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$x \in \mathbb{R}$
Pareto	$\alpha > 0, \lambda > 0$	$f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(x+\lambda)^{\alpha+1}}$	$x > 0$

Exercice 2

À partir des données de sinistres ci-dessous, calculer les primes de crédibilité de Bühlmann de l'année 7 pour chacun des trois contrats.

Contrats - Années	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	1	2	0
2	3	4	2	1	4	4
3	3	3	2	1	2	1

Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2013-2014 - Première session
24 janvier 2014 - Durée : 2 heures
Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 ($\approx$ 7 points)

Un actuaire doit tarifer un traité de réassurance en excédent de sinistre. Des études statistiques l'ont conduit à modéliser le coût des sinistres de montant supérieur à x_0 par des variables aléatoires de type Pareto

$$F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0.$$

1. En vous fondant sur l'étude du coût moyen par sinistre à la charge du réassureur en fonction du niveau de la priorité, expliquez l'intérêt d'une telle modélisation dans ce contexte.

2. Donnez l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ.

3. Montrez que la famille des distributions Gamma est conjuguée à la famille des distributions Pareto

$$\mathcal{F} = \left\{F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0 \ ; \ \theta > 0\right\}.$$

Dans la suite, on se place dans le modèle Pareto-Gamma.

4. *A priori* $\Theta \sim \Gamma(\gamma, \beta)$, quelle est la valeur espérée du paramètre si l'on ne dispose par d'observation ?

5. Pour un contrat particulier, on a observé durant la première période un échantillon de n sinistres dépassant le montant x_0. Donnez l'estimateur bayesien de Θ pour ce contrat. Exprimez-le en fonction de l'e.m.v (lorsque l'on ne dispose pas d'information *a priori*) et de l'estimation *a priori* (lorsque l'on ne dispose pas d'observations). Commentez.

Rappel Une variable aléatoire distribuée selon une loi Gamma de paramètre (γ, β) a pour densité $u(t) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} \exp(-\beta t), t \geq 0$.

Exercice 2 (≈ 4 points) *Présenter sous forme d'un tableau.*

Dans le modèle de Bühlmann, avec les notations habituelles, donnez une interprétation de τ^2, σ^2 et μ_0. Déduisez-en le sens de variation de la prime de crédibilité en fonction de τ^2, σ^2 et le nombre de périodes d'observation n.

Exercice 3 (≈ 9 points)

Soit N_j le nombre annuel de sinistres causés par un conducteur du portefeuille. Supposons que, conditionnellement à $\Lambda\Theta$, les N_j soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre $\Lambda\Theta$, où :

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} 0,1, \text{ si l'assuré vit en zone rurale ;} \\ 0,2, \text{ si l'assuré vit en zone urbaine.} \end{array} \right\}$$

et

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{l} 0,5, \text{ avec la probabilité } 1/2 \text{ ;} \\ 1,5, \text{ avec la probabilité } 1/2. \end{array} \right\}$$

Les variables aléatoires Λ et Θ sont supposées indépendantes et le portefeuille est constitué de $3/5$ d'assurés vivant en zone rurale et de $2/5$ d'assurés vivant en zone urbaine. De plus, pour simplifier, on supposera les montants de sinistres égaux à 1.

1. Un assuré vivant en zone rurale arrive dans ce portefeuille, quelle prime lui sera réclamée ?

2. Trois années plus tard, cet assuré n'a pas déclaré de sinistre au cours de cette période. Quelle est la réévaluation de sa fréquence annuelle de sinistre au terme de ces 3 ans ?

3. Afin de corriger l'hétérogénéité du portefeuille induite par Θ, la société d'assurance met en place un système bonus-malus à trois degrés $(1; 2; 3)$ destiné à s'appliquer à l'ensemble de la population couverte. L'entrée se fait au niveau 3 puis :
– chaque année sans sinistre est gratifiée d'une descente d'un degré dans l'échelle ;
– au moindre sinistre, l'assuré est renvoyé au niveau 3.

a. Expliquez la problématique associée à la mise en place d'une échelle bonus-malus pour un portefeuille à la tarification segmentée (*moins de 5 lignes*).
b. Donnez la distribution stationnaire de l'échelle.
c. Déterminez les coefficients de réduction-majoration des primes r_1, r_2, r_3 selon la méthode de Norberg en régime stationnaire.

Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2011-2012 - Première session
20 janvier 2012 - Durée : 2 heures
Aucun document n'est autorisé.

Exercice n° 1

Considérons un assuré dont le nombre annuel de sinistres est distribué selon une loi de Poisson de paramètre Θ. Les montants de sinistres sont constants égaux à 1. La distribution *a priori* de Θ est une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Quelle prime réclameriez-vous à cet assuré la première année ?

2. Lors de la première année d'observation, l'assuré a causé un sinistre.
 a. Donnez la prime de Bayes pour cet assuré pour la deuxième période.
 b. Donnez la prime de Bühlmann pour cet assuré pour la deuxième période.

3. Comparez ces primes et commentez le modèle (Poisson-uniforme) considéré.

Exercice n° 2

Dans le modèle de Bühlmann, avec les notations habituelles, donnez une interprétation de τ^2, σ^2 et μ_0. Déduisez-en le sens de variation de la prime de crédibilité en fonction de τ^2, σ^2 et le nombre de périodes d'observation n.

N.B. : Présenter ces éléments sous forme d'un tableau synthétique.

Exercice n°3

Soit N_j le nombre annuel de sinistres causés par un conducteur du portefeuille. Supposons que, conditionnellement à $\Lambda\Theta$, les N_j soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre $\Lambda\Theta$, où :

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{ll} 0,1, & \text{si l'assuré vit en zone rurale ;} \\ 0,2, & \text{si l'assuré vit en zone urbaine.} \end{array} \right\}$$

et

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{ll} 0,5, & \text{avec la probabilité } 1/2\,; \\ 1,5, & \text{avec la probabilité } 1/2. \end{array} \right\}$$

Les variables aléatoires Λ et Θ sont supposées indépendantes et le portefeuille est constitué de $3/5$ d'assurés vivant en zone rurale et de $2/5$ d'assurés vivant en zone urbaine.

De plus, pour simplifier, on supposera les montants de sinistres égaux à 1.

1. Un assuré vivant en zone rurale arrive dans ce portefeuille, quelle prime lui sera réclamée ?

2. Trois années plus tard, cet assuré n'a pas déclaré de sinistre au cours de cette période. Quelle est la réévaluation de sa fréquence annuelle de sinistre au terme de ces 3 ans ?

3. Afin de corriger l'hétérogénéité du portefeuille induite par Θ, la société d'assurance met en place un système bonus-malus à trois degrés $(1; 2; 3)$ destiné à s'appliquer à l'ensemble de la population couverte. L'entrée se fait au niveau 3 puis :
- chaque année sans sinistre est gratifiée d'une descente d'un degré dans l'échelle ;
- au moindre sinistre, l'assuré est renvoyé au niveau 3.

a. Expliquez la problématique associée à la mise en place d'une échelle bonus-malus pour un portefeuille à la tarification segmentée (*moins de 5 lignes*).

b. Déterminez les coefficients de réduction-majoration des primes r_1, r_2, r_3 selon la méthode de Norberg (à l'aide de la distribution stationnaire).

Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2010-2011 - Première session
17 janvier 2011 - Durée : 2 heures
Aucun document n'est autorisé.

Exercice n°1
Considérons un portefeuille d'assurés au sein duquel, les assurés produisent des sinistres dont la charge annuelle S est donnée par :

$$\Pr(S = x|\Theta = \theta) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}, x = 0, 1, ...$$

La répartition des profils de risques θ au sein du portefeuille est donnée par la densité :

$$u(\theta) \propto \theta^2 e^{-4\theta}, \theta > 0.$$

1. Calculer la prime collective.
2. Au cours des deux premières années, un assuré engendre des sinistres de charge annuelle $S_1 = 4$ et $S_2 = 1$, calculer la prime de crédibilité de cet assuré pour la troisième année.

Exercice n°2
Soit N_j le nombre annuel de sinistres causés par un conducteur du portefeuille. Supposons que, conditionnellement à Θ, les N_j soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que :

$$\Pr(N_j = 1|\Theta = \theta) = 1 - \Pr(N_j = 0|\Theta = \theta) = \theta,$$

avec

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{ll} 0,1, & \text{avec la probabilité } 0{,}8\,; \\ 0,2, & \text{avec la probabilité } 0{,}2. \end{array} \right\}$$

1. Si un assuré n'a déclaré aucun sinistre au cours des 3 premières années de couverture, estimez la probabilité qu'il cause 1 sinistre durant la quatrième année.

2. Afin de corriger l'hétérogénéité du portefeuille induite par Θ, la société d'assurance met en place un système bonus-malus à trois degrés $(0; 1; 2)$. L'entrée se fait au niveau 1 puis :

– chaque année sans sinistre est gratifiée d'une descente d'un degré dans l'échelle ;
– chaque sinistre est pénalisé par une remontée d'un niveau.

a. Donnez la matrice de transition sachant $\Theta = 0,1$.

b. En régime stationnaire, quelle est la répartition des assurés entre les trois degrés de l'échelle ?

c. Quelle prime relative associer aux différents échelons ?

Exercice n°3

Un actuaire doit tarifer un traité de réassurance en excédent de sinistre. Des études statistiques l'ont conduit à modéliser le coût des sinistres de montant supérieur à x_0 par des variables aléatoires de type Pareto

$$F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0.$$

1. Donnez l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ.

2. Montrez que la famille des distributions Gamma est conjuguée à la famille des distributions Pareto

$$\mathcal{F} = \left\{ F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0 \ ; \ \theta > 0 \right\}.$$

Dans la suite, on se place dans le modèle Pareto-Gamma.

3. *A priori* $\Theta \sim \Gamma(\gamma, \beta)$, quelle est la valeur espérée du paramètre si l'on ne dispose pas d'observation ?

4. Pour un contrat particulier, on a observé durant la première période un échantillon de n sinistres dépassant le montant x_0. Donnez l'estimateur bayesien de Θ pour ce contrat. Exprimez-le en fonction de l'e.m.v (lorsque l'on ne dispose pas d'information *a priori*) et de l'estimation *a priori* (lorsque l'on ne dispose pas d'observations). Commentez.

Rappel : Une variable aléatoire distribuée selon une loi Gamma de paramètre (γ, β) a pour densité $u(\theta) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\theta^{\gamma-1}\exp(-\beta\theta)$.

Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2009-2010 - Première session
28 avril 2010 - Durée : 2 heures
Aucun document n'est autorisé.

Exercice n°1

Un portefeuille d'assurance est composé de 25% de bons risques, 60% de risques moyens et de 15% de mauvais risques. Tous les risques ont une distribution de sinistres de type gamma, mais dont les paramètres diffèrent selon le tableau ci-dessous.

Type de risque	γ	β
Bon	4	2
Moyen	4	1
Mauvais	10	2

1. Donner la prime collective de ce portefeuille.

Le dossier de sinistre d'un risque pris au hasard est de 1 et 2 au cours des deux premières années.

2. Calculer la prime bayesienne de ce risque pour la troisième année.

3. Calculer la prime de crédibilité de ce risque pour la troisième année selon le modèle de Bühlmann.

Exercice n°2

Une société d'assurance couvre deux contrats depuis 3 ans. Elle dispose des montants annuels de sinistres suivants. Selon le modèle de Bühlmann, quelles primes réclameriez-vous à ces deux assurés pour la 4^e année ?

Contrat	Année 1	Année 2	Année 3
1	5	8	11
2	11	13	12

Exercice n°3

Soit N_j le nombre annuel de sinistres causés par un conducteur du portefeuille. Supposons que, conditionnellement à Θ, les N_j soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que :

$$\Pr\left(N_j = 1 | \Theta = \theta\right) = 1 - \Pr\left(N_j = 0 | \Theta = \theta\right) = \theta,$$

avec

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{ll} 0,1, & \text{avec la probabilité 0,75 ;} \\ 0,2, & \text{avec la probabilité 0,25.} \end{array} \right\}$$

1. Si un assuré n'a déclaré aucun sinistre au cours des 3 premières années de couverture, estimez la probabilité qu'il cause 1 sinistre durant la quatrième année.

2. Afin de corriger l'hétérogénéité du portefeuille induite par Θ, la société d'assurance met en place un système bonus-malus à trois degrés $(0; 1; 2)$. L'entrée se fait au niveau 1 puis :
- chaque année sans sinistre est gratifiée d'une descente d'un degré dans l'échelle ;
- chaque sinistre est pénalisé par une remontée au niveau 2.

a. Donnez la matrice de transition sachant $\Theta = 0,1$.

b. En régime stationnaire, quelle est la répartition des assurés entre les trois degrés de l'échelle ?

c. Quelle prime relative associer aux différents échelons ?

Exercice n°4

Considérons la famille des distributions géométriques

$$\mathcal{F} = \left\{ f_\theta(x) = (1-\theta)^x \theta, x \in \mathbf{N}; \theta \in [0; 1] \right\}.$$

Trouvez la famille $\mathcal{U}$ conjuguée à $\mathcal{F}$.

Quelques rappels :

– Estimateurs des paramètres de structure dans le modèle de Bühlmann :

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{I(n-1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2,$$

$$\widehat{\tau^2} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^{I} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \frac{\widehat{\sigma^2}}{n};$$

– Si $Y \sim Gamma(\gamma, \beta)$, alors $\mathrm{E}[Y] = \frac{\gamma}{\beta}$ et $\mathrm{Var}[Y] = \frac{\gamma}{\beta^2}$.

– Une loi Gamma de paramètres γ et β a pour densité

$$u(\theta) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \theta^{\gamma-1} e^{-\beta\theta}, \text{ pour } \theta \geq 0.$$

– La famille $\mathcal{U}$ est conjuguée à la famille $\mathcal{F}$ si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour toute réalisation $\mathbf{x}$ du vecteur des observations $\mathbf{X}$, il existe $\gamma' \in \Gamma$ tel que $U_\gamma(\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = U_{\gamma'}(\theta), \quad$ pour tout $\theta \in \Theta$.