TD 1

Exercice 1

1) $t \qquad T_k \qquad T_{k+1}$

$$\text{payeur} \xrightarrow{k(T_{k+1}-T_k)} \text{Receveur}$$

$$\text{payeur} \xleftarrow{R(T_k,T_{k+1})(T_{k+1}-T_k)} \text{Receveur}$$

$t \downarrow$ portefeuille d'investissement auj qui réplique les flux

$$\Pi^{FRA-P}(T_{k+1}, T_k, T_{k+1}, k)$$

$$= \underbrace{R(T_k, T_{k+1})}(T_{k+1}-T_k) - k(T_{k+1}-T_k)$$

$$\Pi^{FRA-P}(\underline{t}, T_k, T_{k+1}, k)$$

Sachant qu'en convention simple on a

$$R(T_k, T_{k+1}) = \frac{1}{T_{k+1}-T_k}\left\{\frac{1}{P(T_k,T_{k+1})} - 1\right\}$$

$$\Pi^{FRA-P}(\underline{\underline{T_{k+1}}}, T_k, T_{k+1}, k) = \underbrace{\frac{1}{P(T_k,T_{k+1})}}_{A} - \underbrace{(1+k(T_{k+1}-T_k))}_{B}$$

<u>Prix</u> : (A) : $P(t,T_k)$

(B) : $(1+k(T_{k+1}-T_k))P(t,T_{k+1})$

$$\Pi^{FRA-P}(t, T_k, T_{k+1}, k) = (A) - (B)$$

Le taux forward étant le prix d'équilibre du FRA

$$\Pi^{FRA-P}(t, T_k, T_{k+1}, F) = 0$$

Donc $$f(t, T_k, T_{k+1}) = \frac{1}{T_{k+1} - T_k}\left\{ \frac{P(t, T_k)}{P(t, T_{k+1})} - 1 \right\}$$

(2) • Flux fixes : $c(T_{k+1} - T_k)$

$\Rightarrow$ valeurs : $c(T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1})$

• Flux variables : $R(T_k, T_{k+1})(T_{k+1} - T_k) = \left(\frac{1}{P(T_k, T_{k+1})} - 1 \right)$

$\Rightarrow$ valeurs en t : $P(t, T_k) - P(t, T_{k+1})$

Donc

$$\Pi^{SWAP-P}(t, T_i, T_j) = N\left[\sum_{k=1}^{\gamma-1} \left[P(t, T_k) - P(t, T_{k+1}) \right] - c \sum_{k=1}^{\gamma-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) \right]$$

$$= N\left[P(t, T_i) - P(t, T_j) - c \sum_{k=1}^{j} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}) \right]$$

(3) Taux swap tel que $\Pi^{SWAP-P} = \Pi^{SWAP-R}$

$$\Rightarrow C_{eq} = \frac{P(t, T_i) - P(t, T_j)}{\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1})} = S(t, T_i, T_j)$$

(4) On remplace $P(t,T_i)-P(t,T_j)$ avec l'expression du (3)

On obtient

$$\Pi^{swap\text{-}P} = N\left[\sum_{k=i}^{j-1}(T_{k+1}-T_k)P(t,T_{k+1})\right](S(t,T_i,T_j)-c)$$

$$= N(S(t,T_i,T_j)-c)\sum_{k=i}^{j-1}(T_{k+1}-T_k)P(t,T_{k+1})$$

(5) On considère le flux en T.

On veut montrer que

$$(*) = \sum_{k=i}^{j}(T_{k+1}-T_k)P(T_i,T_{k+1})F(T_i,T_k,T_{k+1})$$

$$\overset{?}{=} \sum_{k=i}^{j}(T_{k+1}-T_k)P(T_i,T_{k+1}))\,S(T_i,T_i,T_j)$$

On sait que $F(t,T_k,T_{k+1}) = \dfrac{1}{T_{k+1}-T_k}\left\{\dfrac{P(t,T_k)}{P(t,T_{k+1})}-1\right\}$ (**)

On remplace (**) avec $t=T_i$ dans (*)

$$(*) = \sum_{k=i}^{j-1}\left[P(T_i-T_k)-P(T_i,T_{k+1})\right] = P(T_i,T_i)-P(T_i,T_j)$$

On utilise la formule trouvée en (3) avec $t = T_i$

$$(*) = \left[\sum_{k=i}^{j} (T_{k+1} - T_k) P(T_i, T_{k+1}) \right] S(T_i, T_i, T_j)$$

Exercice 2

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un MB

Rappel : $\begin{cases} W_0 = 0, & W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s \\ W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s) \end{cases}$

(1) Montrer que $M_t = W_t^2 - t$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

Rappel : M est une martingale ssi

- $\mathbb{E}[|M_t|] < \infty$
- M est adapté à $\mathbb{F}$
- $\mathbb{E}[M_{t+h} \mid \mathcal{F}_t] = M_t$

- $\mathbb{E}[|M_t|] = \mathbb{E}[|W_t^2 - t|] \leq \mathbb{E}[|W_t^2|] + t$
$= \underbrace{\mathbb{E}[W_t^2]} + t$
$= t + t < \infty$

$Var(W_t) = E[W_t^2] - \mathbb{E}[W_t]^2 = \mathbb{E}[W_t^2]$

- M_t est une transformation de W_t
$\Rightarrow M_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable
$\Rightarrow M$ est $\mathbb{F}$-adapté

- pour $t, h > 0$

$$\mathbb{E}[M_{t+h} \mid \mathcal{F}_t] = M_t \quad ?$$

$$\mathbb{E}[M_{t+h} \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[Z_{t+h}^2 \mid \mathcal{F}_t] - (t+h)$$

$$= \mathbb{E}[(Z_{t+h} - Z_t + Z_t)^2 \mid \mathcal{F}_t] - (t+h)$$

$$= \mathbb{E}[(Z_{t+h} - Z_t)^2 \mid \mathcal{F}_t] + 2\mathbb{E}[Z_t(Z_{t+h} - Z_t) \mid \mathcal{F}_t] + \mathbb{E}[Z_t^2 \mid \mathcal{F}_t]$$

$$- (t+h)$$

$$= \mathbb{E}[(Z_{t+h} - Z_t)^2] = h$$

$$+ 2Z_t \mathbb{E}[\underbrace{Z_{t+h} - Z_t}_{=0}] = 0$$

$$+ Z_t^2$$

$$- (t+h)$$

$$= Z_t^2 - t = M_t$$

Donc M est une martingale.

. Suite des questions $\Rightarrow$ voir correction 2