Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2022-2023 - Première session
13 janvier 2023 - Durée : 2 heures
Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

Problème

Considérons un portefeuille d'assurance dans lequel le profil de risque d'un assuré i est représenté par le couple (θ_i, λ_i) :

— θ_i représente la partie non-observable *a priori* du profil de risque ;

— λ_i représente la partie *a priori* observable du profil de risque (ex : la zone d'habitation).

On modélise l'hétérogénéité (non observée *a priori* par l'assureur) par la variable aléatoire Θ et la partie observable *a priori* par la variable Λ. Θ et Λ sont supposées indépendantes. Un assuré de profil de risque (θ, λ) produit un nombre de sinistres par an avec la distribution :

$$\Pr\left[N = k | \Theta = \theta, \Lambda = \lambda\right] = e^{-\theta\lambda} \frac{(\theta\lambda)^k}{k!}, k \in \mathbb{N}.$$

L'assureur estime que les profils de risque *a priori* non-observables sont distribués selon une loi Gamma de paramètre (α, β), i.e.

$$u(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}, \theta \geq 0.$$

De plus,

$$\Lambda = \begin{cases} \lambda_r & \text{si l'assuré vit en zone rurale } (w_r)\,; \\ \lambda_u & \text{si l'assuré vit en zone urbaine } (w_u = 1 - w_r). \end{cases}$$

Le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres et l'espérance mathématique du coût d'un sinistre est normalisée à 1.

Partie I

1. Quelle est la prime individuelle correcte d'un assuré de profil de risque (θ, λ) ?
2. Déterminez la prime collective.
3. Montrez que les familles de distribution poisson et gamma sont conjuguées.

On se place à présent après n années d'observations $(k_1, ..., k_n)$ d'un assuré

vivant en zone urbaine.
4. Déterminez la densité *a posteriori* de Θ pour cet assuré.
5. Calculez la prime de Bayes pour la $(n+1)$-ème année pour ce même assuré.
6. Calculez la prime de Bühlmann $(n+1)$-ème année pour ce même assuré.
7. Comparez les primes de Bayes et de Bühlmann et commentez.

Partie II

L'assureur souhaite mettre en place une échelle bonus-malus à trois degrés (numérotés 1 à 3) avec le fonctionnement suivant :

— une année sans sinistre fait descendre d'un degré dans l'échelle,
— un sinistre ou plus au cours de l'année fait remonter au niveau 3.

1. Donnez la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours d'un assuré de profil de risque (θ, λ) dans l'échelle.
2. Donnez la distribution stationnaire de cette chaîne et précisez son temps d'atteinte.
3. Donnez la distribution stationnaire du portefeuille.
4. Quelles primes relatives proposeriez-vous d'associer aux trois degrés de l'échelle en utilisant la méthode de Norberg ?

Question de cours

Considérant les hypothèses (H1) et (H2) ci-dessous, trouvez le meilleur estimateur, linéaire en $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)'$, de $\mu(\Theta) = \mathrm{E}[X_{n+1}|\Theta]$.

— (H1) Les variables aléatoires X_j $(j = 1, ..., n)$ sont, conditionnellement à $\Theta = \theta$, indépendantes et identiquement distribuées selon une loi F_θ avec les moments conditionnels

$$\mu(\theta) = \mathrm{E}[X_j|\Theta = \theta],$$
$$\sigma^2(\theta) = \mathrm{Var}[X_j|\Theta = \theta].$$

— (H2) Θ est une variable aléatoire de distribution $U(\theta)$.

Exercice

Considérons la famille des distributions Pareto :

$$\mathcal{F} = \left\{ F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0 \ ; \ \theta > 0 \right\}.$$

Déterminez la famille $\mathcal{U}$ conjuguée à $\mathcal{F}$.

On note $\widehat{\mu(\theta)}$ le meilleur estimateur linéaire en $\underline{X}$ de $\mu(\theta)$.

Cet estimateur est de la forme : $\widehat{\mu(\theta)} = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^n \hat{a}_j X_j = \hat{a} + \hat{b}\,\overline{X}$ car $X_1, \dots, X_n$ iid

où $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont solutions de : $(\hat{a}, \hat{b}) = \arg\min \mathbb{E}\left[(\mu(\theta) - a - b\overline{X})^2\right]$

On a les EDP : $\mathbb{E}[\mu(\theta) - a - b\overline{X}] = 0$

$\mathrm{Cov}(\overline{X}, \mu(\theta)) - b\,\mathbb{V}(\overline{X}) = 0$

On a $\mathrm{Cov}(\overline{X}, \mu(\theta)) = \mathbb{E}\left(\mu(\theta)\frac{\sum X_j}{n}\right) - \mathbb{E}(\mu(\theta))\mathbb{E}\left(\frac{\sum X_j}{n}\right) = \mathbb{E}(\mu(\theta)^2) - \mathbb{E}(\mu(\theta))^2 = \mathbb{V}(\mu(\theta)) = \tau^2$

$\mathbb{V}(\overline{X}) = \mathbb{E}\left[\mathbb{V}\left(\frac{\sum X_j}{n}\right)\right] + \mathbb{V}\left[\mathbb{E}\left(\frac{\sum X_j}{n}\right)\right] = \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\theta)]}{n} + \mathbb{V}[\mu(\theta)] = \frac{\sigma^2}{n} + \tau^2$

$\mathbb{E}[\mu(\theta)] = \mu_0$

Les EDP deviennent : $\begin{cases} \mu_0 - a - b\mu_0 = 0 \\ \tau^2 - b\left(\frac{\sigma^2}{n} + \tau^2\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \mu_0(1-b) = \mu_0(1-\alpha) \\ b = \dfrac{\tau^2}{\frac{\sigma^2}{n} + \tau^2} = \dfrac{n}{n + \sigma^2/\tau^2} = \alpha \end{cases}$

$\widehat{\mu(\theta)} = \alpha\overline{X} + (1-\alpha)\mu_0$