ISFA - M2 Actuariat | Techniques Numériques
Projet à rendre pour le 31 janvier 2022 (avant 23h00)

Dans ce projet on considère un contrat d'épargne qui mature dans T ans. Dans cet exemple, on s'intéresse un seul contrat et nous nous focalisons sur le risque financier sous-jacent. On fait les hypothèses simples suivantes :

— La maturité du contrat est $T = 2$;

— Le marché est caractérisé par un seul actif risqué $(S_t)_{t\geq 0}$, dont la volatilité implicite (en environnement risque neutre) est $\sigma_i = 25\%$, la volatilité historique est $\sigma_r = 15\%$, le rendement escompté (en environnement historique) est $\mu = 2\%$;

— Le sous-jacent $(S_t)_{t\geq 0}$ suit un processus de Black-Scholes (mouvement Brownien géométrique) ;

— Le taux sans risque est fixé à $r = 1\%$;

— Le taux technique (garanti) est fixé à $r_g = 0.5\%$

— La valeur initiale du fond (valeur du marché) est de $\mathrm{VM}_0 = 110$, l'assureur choisit d'investir une proportion $x = 30\%$ du fond en actif risqué $(S_t)_{t\geq 0}$, la partie restante est investit en taux sans risque ;

— Le contrat d'épargne est caractérisé par une garantie de capital à terme, l'assureur s'engage à rembourser au minimum le montant investi par l'assuré en date $t = 0$, $\mathrm{PM}_0 = 100$ rémunéré au taux technique r_g, c.-à-d. $e^{r_g T}\mathrm{PM}_0$. La garantie s'écrit donc :

$$\max\left(e^{r_g T}\mathrm{PM}_0,\ R \times \mathrm{VM}_T\right),$$

où la quote-part de l'assuré dans le fond est $R = \mathrm{PM}_0/\mathrm{VM}_0$.

Le contrat ainsi décrit présente deux composante (à la maturité)

— Une partie garantie : $\mathrm{BE}_T = R \times \mathrm{VM}_0 \times \left(xS_T + (1-x)e^{rT}\right)$

— Une partie optionnelle (put européen) : $O_T = (K - S_T)^+$ avec un *strike* $K = R \times \mathrm{VM}_0 e^{r_g T} - (1-x) \times R \times \mathrm{VM}_0 \times e^{r\times T}$ sur un sous-jacent dont la valeur initiale est $x \times R \times \mathrm{VM}_0$.

L'objectif de ce projet est de calculer le montant du capital de solvabilité (SCR) en utilisant les méthodes vues en cours. Le besoin de capital réglementaire pour ce contrat est définie de la façon suivante :

$$\mathrm{SCR} = \mathrm{NAV}_0 - \mathrm{V@R}_{99.5\%}\left(\frac{\mathrm{NAV}_1}{1+r_1}\right),$$

où NAV_t est la *net asset value* (valeur nette des actifs) à la date t et r_t est le taux d'intérêt à la même date. Le calcul du SCR nécessite la connaissance (estimation) de la distribution (empirique) de la variable aléatoire NAV_1. En effet, cette dernière est définie de la façon suivante :

$$\mathrm{NAV}_t = \underbrace{e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{Q}}\left[VM_T|S_t\right]}_{\text{actif}} - \underbrace{e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}\otimes\mathbb{Q}}\left[\mathrm{BE}_T + \mathrm{O}_T|S_t\right]}_{\text{passif}}.$$

Nota Bene : Les simulations sur $[0,1]$ se font en environnement historique, puis en environnement risque neutre à partir de $t = 1$.

Calcul de la NAV_0. En implémentant un schéma numérique simple pour calculer la valeur de la *net asset value* à date $t = 0$.

Dans la suite on s'intéresse à la distribution de la variable aléatoire NAV_1.

Simulations dans les Simulations (SdS). Ici, nous allons déterminer la distribution de la variable aléatoire NAV_1. Il s'agit d'une espérance conditionnelle. Cette dernière doit être estimée de la façon suivante :

— Simuler N trajectoires du sous-jacent à la date $t = 1$, notées S_1^k, pour $k = 1, \cdots, N$

— Pour chaque simulation k, estimer par Monte-Carlo NAV_1^k (le sous-jacent part de S_1^k)

$$\mathrm{NAV}_1^k = \frac{1}{M}e^{-r(T-1)}\sum_{i=1}^{i=M}\left(\mathrm{VM}_T^{k,i} - \mathrm{BE}_T^{k,i} - O_T^{k,i}\right).$$

— Estimer la value-at-risk à 99.5% de la NAV_1 actualisée à partir de ces N simulations

Méthode LSMC. Ici, on utilisera la méthode de *Least-Square Monte-Carlo* (LSMC) pour caractériser la distribution de NAV_1. L'idée consiste en l'utilisation de la méthode SdS avec moins de simulations secondaire (M), puis utiliser une régression linéaire sur une base orthonormée afin de déterminer d'une façon plus précise l'évolution de NAV_1 :

— Simuler N trajectoires du sous-jacent à la date $t = 1$, notées S_1^k, pour $k = 1, \cdots, N$

— Pour chaque simulation k, estimer par Monte-Carlo NAV_1^k (le sous-jacent part de S_1^k)

$$\mathrm{NAV}_1^k = \frac{1}{M}e^{-r(T-1)}\sum_{i=1}^{i=M}\left(\mathrm{VM}_T^{k,i} - \mathrm{BE}_T^{k,i} - O_T^{k,i}\right).$$

— Utiliser une base orthonormée $(P_j(X))_{j=0,\cdots,d}$ (avec $P_j(X)$ est un polynôme de degré j)et estimer par moindres carrées la régression linéaire suivante :

$$\mathrm{NAV}_1 = \alpha_0 \times P_0(S_1) + \cdots + \alpha_d \times P_d(S_1).$$

Ici, les $\widehat{\alpha}_j$ optimaux minimisent :

$$\sum_{k=1}^{k=N}\left(\mathrm{NAV}_1^k - \sum_{j=1}^{j=d}\alpha_j \times P_j(S_1^k)\right)^2.$$

— Nous utilisant $\sum_{j=1}^{j=d} \widehat{\alpha}_j \times P_j(S_1^k)$ en lieu et place de NAV_1^k pour déterminer la distribution de NAV_1.

— Pour cette méthode, il faut proposer une base de polynomes orthonormés P_j et tester l'impact (voir le package `orthopolynom` de `R`).

Méthode Mixte (Simulations/EDP). Il s'agit dans un premier temps d'évaluer par une méthode déterministe la fonction $u(t, y) = e^{-r\times(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\text{O}_T|S_t = y]$.

— On écrira la fonction u comme solution d'une EDP et on applique un schéma de résolution pour caractériser les valeurs prises par la fonction en des points de la grille de discrétisation.

— Dans un second temps, on simuler N trajectoires du sous-jacent à la date $t = 1$, notées S_1^k, pour $k = 1, \cdots, N$.

— La répartition de NAV_1 peut être déduite en appliquant la fonction u aux points $(t = 1, y = S_1^k)$ et en rajoutant S_1^k.

Questions :

1 - Nombre de simulations secondaires Étudier les estimations précédentes du SCR en fonction de N, M et d (nombre de polynômes).

2 - Comparaison En utilisant ces trois méthodes comparer :

— les estimations puis commenter l'efficacité de chacune de ces méthodes ;

— les temps de calcul ;

pour différentes valeurs de N, M et d.
Que peut-on dire de la précision (intervalles de confiance) ?

3 - Sensibilités En se basant sur la méthode LSMC, calculer la sensibilité du SCR par rapport à :

— au taux garanti r_g

— au taux sans risque r

Consignes : Le rendu doit comporter les éléments suivants :

— Un rapport structuré détaillant les résultats pour chaque méthode avec des tests de sensibilité et une comparaison des méthodes

— Un fichier source avec les codes qui ont permis de produire les résultats

Le projet est à rendre avant le 31/01/2022 à 23h00à l'adresse suivante : yahia.salhi@univ-lyon1.fr. Aucun projet rendu en retard ne sera corrigé.

L'objet de votre mail de rendu devra être : [Projet TM 2021]. Le code et le rapport doivent être envoyés dans un dossier compressé (.zip) avec le nom :

GX_NOM1_NOM2_NOM3_NOM4

GX renvoie au numéro de votre groupe (G1, G2, etc).