TD2 - Risque de crédit

Exercice 1

1. Soit $D_t = \mathbf{1}_{\{\tau \le t\}}, t \ge 0$ le processus indicateur de défaut. La filtration $\mathcal{D}$ est la famille (croissante) de tribus engendrées par le processus $(D_t, t \ge 0)$, c'est-à-dire pour $t \ge 0$,

$$D_t = \sigma(\mathbf{1}_{\{\tau \le s\}}, s \le t)$$

ou de façon équivalente, $D_t = \sigma(\tau \wedge t)$.

2. L'information globale G contient les deux types d'information : ambiante et défaut, c'est-à-dire : $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{D}$ où $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{D}_t, \forall t \ge 0$.

3. On désigne le discount facteur *(facteur d'actualisation)* par

$$D(t,T) = exp(-\int_t^T r_s ds)$$

Pour le produit (C, G, Z), on a à la date $t < T \wedge \tau$,

$$V_t = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} E_* \left(C\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} D(t,T) + \int_t^T \mathbf{1}_{\{\tau > u\}} D(t,u) dG_u + Z_\tau \mathbf{1}_{\{\tau \le T\}} D(t,\tau) \middle| \mathcal{G}_t \right) \tag{1}$$

On a ici deux sources d'aléa : un aléa qui vient du processus stochastique Z, et un qui vient du temps de défaut τ, et ces deux sources d'aléa rajoutent des difficultés supplémentaires dans le calcul. Notre objectif est de calculer cette $\mathcal{G}_t$-espérance conditionnelle.

4.a) On rappelle le lemme Jenkin-Yor. Soit Y une v.a. $\mathcal{A}$-mesurable, on a pour tout $t \ge 0$:

$$\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} E(Y|\mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{E(\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t)}{E(\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{F}_t)}$$

On a $Y = C\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} D(t,T)$, donc

$$\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} E(C\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} D(t,T) | \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{E\left(\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} C\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} D(t,T) \middle| \mathcal{F}_t \right)}{E(\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{F}_t)}$$

Or $\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} = \mathbf{1}_{\{\tau > T\}}$. De plus, si on pose $S_t = E(\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{F}_t) = P(\tau > t | \mathcal{F}_t)$, on a :

$$\begin{aligned}
&= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{E\left(E(C\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} D(t,T) | \mathcal{F}_T) \middle| \mathcal{F}_t \right)}{S_t} \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{E\left(CD(t,T) E(\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} | \mathcal{F}_T) \middle| \mathcal{F}_t \right)}{S_t} \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{E\left(CD(t,T) S_T \middle| \mathcal{F}_t \right)}{S_t}
\end{aligned}$$

4.b) Le paiement lié à G :

$$\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}E_*\Bigg(\underbrace{\int_t^T \mathbf{1}_{\{\tau>u\}}D(t,u)dG_u}_{Y}\Bigg|\mathcal{G}_t\Bigg)$$

$$= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E\Big(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\int_t^T \mathbf{1}_{\{\tau>u\}}D(t,u)dG_u\Big|\mathcal{F}_t\Big)}{S_t}$$

$$= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E\Big(E(\int_t^T \mathbf{1}_{\{\tau>u\}}D(t,u)dG_u|\mathcal{F}_u)\Big|\mathcal{F}_t\Big)}{S_t}$$

$$\text{Par Fubini : } = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E\Big(\int_t^T E(\mathbf{1}_{\{\tau>u\}}D(t,u)dG_u|\mathcal{F}_u)\Big|\mathcal{F}_t\Big)}{S_t}$$

$$= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E\Big(\int_t^T D(t,u)\overbrace{E(\mathbf{1}_{\{\tau>u\}}|\mathcal{F}_u)}^{S_u}dG_u\Big|\mathcal{F}_t\Big)}{S_t}$$

$$= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E\Big(\int_t^T D(t,u)S_u dG_u\Big|\mathcal{F}_t\Big)}{S_t}$$

$$= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}E\Bigg(\int_t^T \frac{D(t,u)S_u dG_u}{S_t}\Bigg|\mathcal{F}_t\Bigg)$$

4.c) Indication : pour un processus prévisible, on peut approximer sous forme discrétisée $Z=(Z_u, u\geq 0)$:

$$Z_u = \sum_{i=0}^n \mathbf{1}_{(t_i,t_{i+1}]}(u)Z_{t_i}$$

Z_{t_i} est $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et $t_0 < t_1 < ... < t_{n+1}$.
On cherche à calculer dans V_t le troisième terme

$$\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}E_*\Big(\underbrace{Z_\tau\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}}D(t,\tau)}_{Y}\Big|\mathcal{G}_t\Big)$$

$$= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E\Big(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}Z_\tau\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}}D(t,\tau)\Big|\mathcal{F}_t\Big)}{S_t}$$

$$= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E\Big(\mathbf{1}_{\{t<\tau\leq T\}}Z_\tau D(t,\tau)\Big|\mathcal{F}_t\Big)}{S_t}$$

On utilise une discrétisation du processus Z avec $t = t_0 < t_1 < ... < t_{n+1} = T$. On a :

$$
\begin{aligned}
&E\bigg(\mathbf{1}_{\{t<\tau\leq T\}} Z_\tau D(t,\tau)\bigg|\mathcal{F}_t\bigg)\\
&= E\bigg(\sum_{i=0}^{n} \mathbf{1}_{\{t_i<\tau\leq t_{i+1}\}} Z_\tau D(t,\tau)\bigg|\mathcal{F}_t\bigg)\\
&= \sum_{i=0}^{n} E\bigg(\mathbf{1}_{\{t_i<\tau\leq t_{i+1}\}} Z_{t_i} D(t,t_i)\bigg|\mathcal{F}_t\bigg)\\
&= \sum_{i=0}^{n} E\bigg((\mathbf{1}_{\{t_i<\tau\}} - \mathbf{1}_{\{t_{i+1}<\tau\}}) Z_{t_i} D(t,t_i)\bigg|\mathcal{F}_t\bigg)\\
&= \sum_{i=0}^{n} E\bigg(\bigg(E\bigg(\mathbf{1}_{\{t_i<\tau\}} Z_{t_i} D(t,t_i)\bigg|\mathcal{F}_{t_i}\bigg) - E\bigg(\mathbf{1}_{\{t_{i+1}<\tau\}} Z_{t_i} D(t,t_i)\bigg|\mathcal{F}_{t_{i+1}}\bigg)\bigg)\bigg|\mathcal{F}_t\bigg)\\
&= \sum_{i=0}^{n} E\bigg(\bigg(Z_{t_i} D(t,t_i)\underbrace{E\bigg(\mathbf{1}_{\{t_i<\tau\}}\bigg|\mathcal{F}_{t_i}\bigg)}_{S_{t_i}} - Z_{t_i} D(t,t_i)\underbrace{E\bigg(\mathbf{1}_{\{t_{i+1}<\tau\}}\bigg|\mathcal{F}_{t_{i+1}}\bigg)}_{S_{t_{i+1}}}\bigg)\bigg|\mathcal{F}_t\bigg)\\
&= \sum_{i=0}^{n} E\bigg(Z_{t_i} D(t,t_i)(S_{t_i} - S_{t_{i+1}})\bigg|\mathcal{F}_t\bigg)\\
&= E\bigg(\sum_{i=0}^{n} Z_{t_i} D(t,t_i)(S_{t_i} - S_{t_{i+1}})\bigg|\mathcal{F}_t\bigg)\\
&\overset{n\to+\infty}{\longrightarrow} E\bigg(-\int_t^T Z_u D(t,u) dS_u\bigg|\mathcal{F}_t\bigg)
\end{aligned}
$$

On résume les trois termes et on obtient :

$$
V_t = \frac{\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}}{S_t} E_*\bigg(C S_T D(t,T) + \int_t^T S_u D(t,u) dG_u - \int_t^T Z_u D(t,u) dS_u\bigg|F_t\bigg) \tag{2}
$$

5. Pour un CDS, le triplet est donné par $C = 0$, $G_u = s \times u$ (où s est le spread de CDS), et $Z_\tau = -(1-R_\tau)$. On a $t = 0$, donc $S_0 = 1$ et

$$
\begin{aligned}
V_0 &= E\bigg(\int_0^T S_u D(0,u) s du + \int_0^T (1-R_u) D(0,u) dS_u\bigg) = 0\\
\Rightarrow s &= -\frac{E\bigg(\int_0^T (1-R_u) D(0,u) dS_u\bigg)}{E\bigg(\int_0^T S_u D(0,u) du\bigg)}
\end{aligned}
$$

qui est positif car $dS_u < 0$.

6.

$$
\begin{aligned}
S_t &= P(\tau > t|\mathcal{F}_t)\\
&= P(\underbrace{\int_0^t \lambda_s ds}_{\mathcal{F}_t-\text{mesurable}} \leq \underbrace{\Gamma}_{\perp\mathcal{F}_t} |\mathcal{F}_t)\\
&= exp(-\int_0^t \lambda_s ds)
\end{aligned}
$$

Si on remplace $(S_t, t \geq 0)$ dans (2), on obtient :

$$
V_t = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\bigg(C e^{-\int_t^T (r_s+\lambda_s)ds} + \int_t^T e^{-\int_t^u (r_s+\lambda_s)ds} dG_u + \int_t^T Z_u e^{-\int_t^u (r_s+\lambda_s)ds} \lambda_u du\bigg|\mathcal{F}_t\bigg)
$$

car $dS_t = -S_t \lambda_t dt$, et pour CDS, on a sa valeur dynamique (avec le spread S fixé à $t = 0$) :

$$
V_t(CDS) = E\bigg(S \int_t^T e^{-\int_t^u (r_s+\lambda_s)ds} du - \int_t^T (1-R_u)\lambda_u e^{-\int_t^u (r_s+\lambda_s)ds} du\bigg|\mathcal{F}_t\bigg)
$$

et à la date $t = 0$ on a :

$$\begin{aligned} &V_0(CDS) = 0 \\ &\Rightarrow S = \frac{E\left(\int_0^T (1 - R_u)\lambda_u e^{-\int_0^u (r_s+\lambda_s)ds} du \right)}{E\left(\int_0^T e^{-\int_0^u (r_s+\lambda_s)ds} du \right)} \end{aligned}$$