Risque de crédit

Ying Jiao

M2 Actuariat | ISFA | 2022

Table des matières

I. Introduction aux dérivés de crédit

Références :

- Duffie &Singleton. Credit risk : princing, measurement and management
- Bielecki & Rutkowski. Credit risk : modelling, valorisation and hedging
- Schöncucher. Credit derivatives : princing models

Historiquement :

- Les banques gèrent les emprunts/prêts en proposant un taux qui est plus élevé par rapport aux taux d'intérêt de base (sans risque) de l'état. Cette différence appelé **spread** a pour but ecompenser le risque de défaut (non remboursement) de l'emprunteur.
- Les agences de notation (Moody's, SP…) proposent des notes de crédit à des entreprises pour mesurer leur qualité de crédit (AAA, AA, …, D)
- Ces mesures sont souvent basées sur les méthodologies statistiques en utilisant les données historiques. Par exemple on peut estimer la probabilité de défaut pour une note donnée (AAA, BB) en faisant une moyenne empirique. On peut aussi calculer la probaibilité de transition d'une note à l'autre.

Actuellement :

Le marché de dérivé de crédit a été créé dans les années 1990 et c'est ensuite développé très rapidement. Un dérivé de crédit est un produit financier dont les flux sont liés aux événements de crédit d'un sous-jacent. (une entreprise ou un état ouverain). Le but est de gérer, transférer et couvrir les risques de crédit liés au sous-jacents.

Les composantes caractéristiques d'un dérivide crédit incluent le nom du sous-jacent, l'événment de crédit (par exemple, défaut de l'entreprise ou défaut d'une obligation spécifique) la maturité, la date de défaut des paiements en cas de défaut ou sans défaut.

Le produit le plus populaire est le crédit default swap (CDS) qui est écrit sur un seul sous-jacent. Il existe des produits en portefeuille où la corrélation entre dynamique et **transparent** de la qualité de crédit de son sous-jacent. Suggéré par son nom, un CDS ressemble à un swap de taux.

1. Credit default swap

Un CDS ressemble à un swap de taux dans le sens qu'il existe un échange entre des flux fixes et flottants pour les acheteurs et vendeurs de CDS. Un CDS porte aussi la caractéristique d'un produit d'assurance qui fournit à son acheteur la protection contre le défaut (le sinistre) du sous-jacent. L'acheteur du CDS paie un montant fixe S, appelé le spread de CDS, à des dates régulières préfixées jusqu'à la date de dafaut τ si le défaut a lieu avant la maturité T, au cas contraire, il va payer jusqu'à T.

La partie flottante payée par le vendeur dépend de l'état de défaut ou non du sous-jacent avant la maturité. Dans le cas de défaut, le vendeur va rembourser l'acheteur une proportion(I-R) de son nominal où R est le taux de recouvrement du sous-jacent dans le cas sans défaut, le veneur ne paie rien.

Le taux de recouvrement est une quantité qui ne se révèle qu'au moment de défaut et il est en général difficile d'estimer sa valeur qui peut varier largement d'une entreprise à l'autre. Une hypothèses souvent adoptée est de supposer que R suit une loi de Beta (à valeurs dans $[0, 1]$) de moyenne 40% et de variance 26%. On peut aussi modéliser R pour un processus $(R_t, t \geq 0)$ à valeurs dans $[0, 1]$ et le recouvrement réalisé au défaut est égal R_τ.

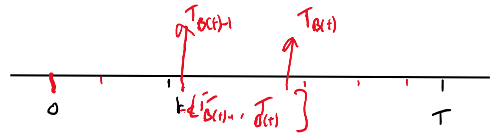
Le prix du CDS ou sous-spread, est déterminé à la date initiale telle que l'espérance de flux payé parrespectivement l'acheteur et le veur soit égale.

On introduit quelques notations :

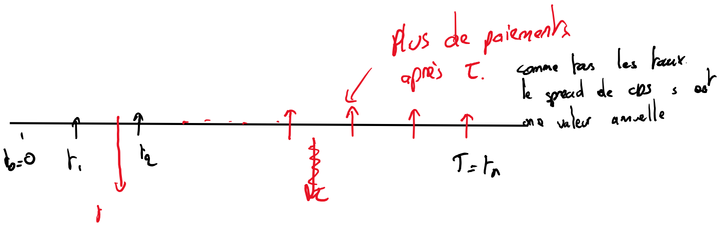
- τ le temps de défaut (une variable aléatoire positive)
- R le taux de recouvrement
- S spread du CDS
- $T_0 = 0$ la date de signature du CDS et T sa maturité.

- $\{T_1, T_2, \dots, T_n = T\}$ les dates de paiement où $\Delta T = T_i - T_{i-1}$ sont égaux pour tout $i = 1, \dots, n$.
- $\beta_{(t)}$ un indice à valeur dans $\{1, \dots, n\}$ tel que $t \in [T_{\beta(t)-1} - T_{\beta(t)}]$
- $r = (r_t, t \geq 0)$ taux d'intérêt (unprocessus stochastique)

$T = 5$ ans
$\Delta T = 3$ mois



On va préciser les flux de paiement pour le CDS. Pour le vendeur du CDS à une date t avant la fin du contrat min (T, τ) le flux future qu'il va recevoir est donné par



On va préciser les flux de paiement pour le CDS. Pour le vendeur du CDS à une date t avant la fin du contrat min (T, τ) le flux future qu'il va recevoir est donné par :

$$s\Big\{(T_{\beta(t)}-t)D(t,T_{\beta(t)})1_{\{\tau>T_{\beta(t)}\}} + \underbrace{\sum_{i=\beta(t)+1}^{n}\Delta T\, D(t,T_i)1_{\{\tau>T_i\}}}_{\text{si il n'y a pas de défaut}} + \underbrace{(\tau-T_{\beta(t)-1})D(t,\tau)1_{\{\tau\leq T\}}}_{\text{si défaut avant } T}\Big\}$$

où $D(s,t) = \exp\left(-\int_s^t r_u\,du\right)$ est le discount factor pour tous $s \leq t$
le facteur d'actualisation

Le flux future qu'il va payer à la date du défaut est donné par

$$1_{[\tau \leq T]}D(t,T)(1-R)$$

On peut approximer le flux discrétisé par un flux en temps continu comme la suite.

$$\int_t^T 1_{[u<\tau]}D(t,u)Sdu$$

On cherche à calculer le spread s à la date initiale $t = 0$ et on a

$$\mathbb{E}_Q\left[\int_0^T 1_{\{u<\tau\}}D(0,u)\,s\,du\right] = \mathbb{E}_Q\left[1_{\{\tau\leq T\}}D(0,\tau)(1-R)\right]$$

Où Q est une probabilité de princing. Alors on obtient :

s - spread

$$s = \frac{\mathbb{E}_Q\left[1_{\{\tau\leq T\}}D(0,\tau)(1-R)\right]}{\mathbb{E}_Q\left[\int_0^T 1_{\{\tau>u\}}D(0,u)\,du\right]} \qquad (*)$$

La formule (*) est générale et s'applique à tout modèle. Pour obtenir une valeur explicite de (*) il faut préciser le modèle pour τ, mais aussi pour $(r_t, t \geq 0)$ et R.

On peut aussi calculer la valeur dynamique d'un CDS qui a été transacté à la date 0. On prend toujours la position d'un vendeur et on re-évalue le CDS à la date t. alors on obtient

fixé à $t=0$

$$V_t = E_Q\left[\int_t^T D(t,u)sdu - 1_{[\tau\leq T]}D(t,\tau)(1-R)|g_t\right]$$

g_t : représente l'infomation du marché à la date t

2. Formulation générale

De façon générale, un dérivé de crédit ou un produit finanier standard (eg. Obligation) soumis au risque de défaut peut être représenté par un triplet (C, G, Z).

Où

- C est une variable alétaoire représentant le paiement à la maturité si $\tau > T$.
- G est un processus croissant avec $G_0 = 0$ représentant le paiement continue accumulé.
- Z est une variable aléatoire ou un processus stochastique représentant le paiement ou défaut si $\tau < T$

Exemple : • CDS

	Vendeur	Acheteur
$C=$	0	
G_t	$s.t$	$-st$
Z	$-(1-R)$	$1-R$

• Obligation zéro-coupon défaultable

O2C standard 1 € à la maturité T
O2C défaultable liée au défaut τ
1 € à T si τ > T
0/R à si τ ≤ T

$C = 1$
$G = 0$
$Z = 0/R$

II. Modèles structurels

Dans la modélisation de temps de défaut, il existe deux approches principales. L'approche structurelle et celle de forme réduite (ou d'intensité). L'idée des modèles structurels est basée sur le papier de Merton (1973) où un défaut est provoqué quand une entreprise n'arrive pas à rembourser ses dettes.

1. Modèle de Merton

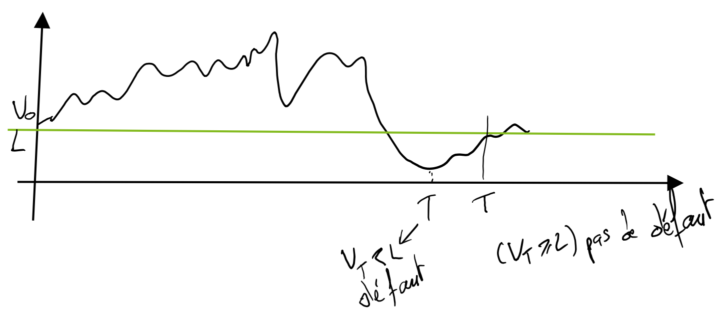
Dans le modèle de Merton, on modélise la valeur de l'entreprise par une EDS (la même que dans le modèle B&S pour le prix de l'actif sous-jacent).

$$dV_t = V_t(\mu dt + \sigma dW_t) \qquad V_0 > 0$$

Où μ et σ sont constantes et $(W_t, t \geq\ 0)$ un mouvement brownien.

Le défaut de l'entreprise se produit à l'échéance de ses dettes $T > 0$, si la valeur de l'entreprise à T ne permet pas d'effectuer le remboursement de dette dont la valeur est notée par L qui est une constante. Plus précisément, l'entreprise fait faillite si $V_T < L$. Sinon, il n'y aura pas de défaut pour l'entreprise (à une date future).

En d'autres termes, le défaut ne dépend que de la valeur terminale de V mais pas de sa trajectoire et il existe une seule date possible pour le défaut.



Dans ce modèle là, le temps de défaut τ est définit comme $\tau = T1_{[V_T<L]} + (+\infty)1_{V_T \geq L}$

On considère ensuite le niveau de dette soumis au risque de défaut.

Pour l'émetteur de dette, il reçoit à l'échéance T le montant L s'il n'y a pas défaut. Au cas contraire, sil va recevoir un remboursement partiel qui est égal à la valeur de l'entreprise V_T. (qui est plus petit que L). Donc le niveau de dette de l'entreprise(à la date T) est donné par

$$\begin{aligned} D_T &= L1_{\tau=+\infty} + V_T 1_{\tau=T} \\ &= L1_{\tau \geq L} + V_T 1_{\tau<L} = \min(V_T, L) \end{aligned}$$

On cherche à évaluer la valeur dynamique de la dette à une date intermédiaire $t \in [0, T]$.

Soit $F = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par le mouvement brownien $W_t, t \geq 0)$, c-a-d

$$\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$$

L'objectif est de calculer l'espérance conditionnelle de D_T par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sous une probabilité risque-neutre de pricing.

(Similaire dans la théorie de l'option, étant donnée la fonction payoff de l'option $(S_T - K)^+$ ou $(K - S_T)^+$ par exemple, on cherche à calculer le prix de l'option à une date $t \in [0, t]$ par la formule de B&S).

L'idée est d'appliquer les résultats otenus dans le modèle de B&S (pour éviter de refaire les calculs explicites).

La première étape est de faire un lien avec le payoff de dette $D_T = \min(V_T, L)$ et ceux des options (Call $(S_T - K)^+$ ou Put $(K - S_T)^+$).

$$x, y \in \mathbb{R}$$

$$\min(x, y) = \begin{cases} x = x - 0 = x - (x - y)^+ \\ \quad y - (y - x)^+ \end{cases}$$

D'où

$$D_T = \min(V_T, L) = V_T - (V_T - L)^+ = L - (L - V_T)^+$$

Ensuite, on utilise l'égalité

$$D_T = L - (L - V_T)^+$$

Pour calculer la valeur dynamique de dette qui est égale à

$$V_t(D) = LB(t, T) - P_t$$

Où $B(t, T)$ est le prix à t d'une obligation zéro-coupon de maturité T et P_t le prix d'une option Put à t. (pour la formule de B&S)

On s'intéresse qussi à la valeur d'équity de l'entreprise à la date t définit par

$$E_t = V_t - D_t$$

Par AOA, si deux flux $\mathcal{F}_t$-mesurable sont égaux à la date T p.s,
$X_T = Y_T$ ps
Alors à tout $t \in [0, T]$ on a
$V_t(X) = V_t(Y)$ ps

On utilise encore la même méthode que précédemment. On calcule d'abord

$$E_T = V_T - D_T = V_T - (V_T - (V_T - L)^+ = (V_T - L)^+$$

Dans le modèle de Merton, on calcule la probabilité (conditionnelle) de défaut/survie de manière explicite.

Par la définition

$$P(\tau \leq T) = P(\tau = T) = P(V_T < L)$$

Par l'EDS

$$V_T = V_0 e^{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T + \sigma W_T}$$

$$P(V_T < L) = P(W_T < \frac{\ln \frac{L}{V_0} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma}$$

$$N \times \frac{\ln \frac{L}{V_0} - \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

Pour la probb ilité cobditionnelle, par la propriété markovienne,

$$\mathbb{P}(V_T < L \mid \mathcal{F}_t) = \mathcal{N}\left[\frac{\ln \frac{L}{V_t} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \right]$$

Méthode alternative, on écrit la solution de l'eds .

On a V_t et $W_T - W_t$ est ⊥ (prop. mvt Brown

$$V_T = V_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)}$$

plus $W_T - W_t$

$$\mathbb{P}(V_T < L \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}\left(V_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

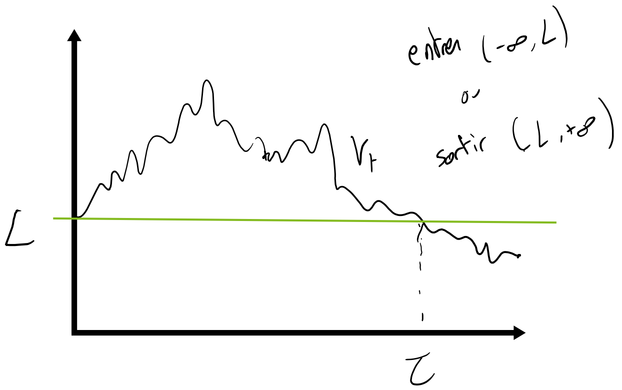
$$= \mathbb{P}\left[W_T - W_t < \frac{\ln \frac{L}{V_t} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$\mathcal{N}\left[\frac{\ln \frac{L}{V_t} - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{} \right]$$

2. Modèle de premier temps de passage

En pratique, un défaut peut avoir lieu à tout moment et non seulement à la date d'échéance T. Il est donc naturel de généraliser le modèle de Merton dans le cas où le défaut est provoqué quand la valeur de l'entreprise descend au-dessous du niveau de dettees.

En terme mathématique, il s'agit d'un premier temps de passage (entrer ou sortir d'un domain) pour un processus stochastique.



a. Modèle Black-Cox

On modélise la valeur de l'entreprise toujours par l'EDS de B&S et on définit le temps de défaut par

$$\tau = \{t \geq 0, V_t < L\}$$

Comme

$$V_t = V_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$$

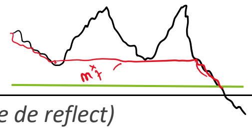
On a

$$\tau = \inf\{ t \geq 0 : W_t + (\frac{\mu}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma)t < \frac{1}{\sigma} \ln \frac{L}{V_0} \}$$

Donc le temps aléatoire τ est un temps de passage (ou temps d'atteinte) d'un mouvement brownien avec drift de temps pour une barrière constante τ est un temps d'arret par rapport à la filtration $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$.

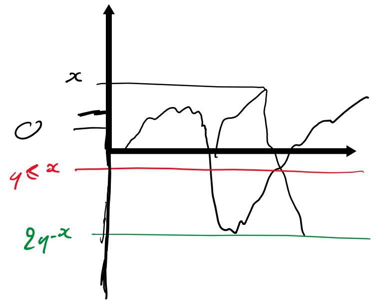
Dans la suite, on désigne par $X_t = W_t + \nu t$ où ν est une constante et on désigne par son processus infimum par

$$m_t^X = \min_{0 \leq u \leq t} X_u$$



Lemme. *(Principe de reflect)*
Soit $(W_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien. Pour tout $y \leq 0$ et toute fonction $f()$ tel que $E[f(W)]$ existe, on a

$$\mathbb{E}\left[f(W_t) \mathbb{1}_{[W_t \geq y, m_t^W \leq y]} \right] = \mathbb{E}\left[f(2y - W_t) \mathbb{1}_{[2y - W_t \geq y]} \right]$$



Preuve :

On remarque que pour tout $y \leq 0$ et $x \geq y$

Alors on a $\mathbb{P}(W_t \geq x, m_t^W \leq y) = \mathbb{P}(2y - x \geq W_t) = \mathbb{P}(2$

$$\mathbb{E}\left[f(\underbrace{2y - W_t}_{U}) \mathbb{1}_{[2y - W_t \geq y]} \right] = -\int_y f(x)\, d_x \mathbb{P}(2y - W_t \geq x)$$

$$= -\int_y^{\infty} f(x)\, d_x \mathbb{P}(W_t \geq x, m_t^x \leq y) = \mathbb{E}\left[f(W_t) \mathbb{1}_{[W_t \geq y]} \mathbb{1}_{[m_t^W \leq y]} \right]$$

Ce résultat nous permet de réduire les calculs concernant la loi jointe de (W_t, m_t^W) par la loi simple de W_t.

On va généraliser ce résultat à $X_t = W_t + \nu t$

Proposition. Pour tout $y \leq 0$ et $x \geq y$.
On a

$$P(X_t \geq x, m_t^X \geq y) = e^{2\nu y} N(\frac{2y - x + \nu t}{\sqrt{t}})$$

où $N()$ est la fonction de répartition de $N(0,1)$.

Rappel. *(Théorème de Girsanov)*
Soit P une probabilité et (W_t,t≥0) un MB sous P. On définit une nouvelle probabilité
tel que

$$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t \quad \text{où} \quad Z_t = e^{\mu W_t - \frac{1}{2}\mu^2 t}$$

Alors $\tilde{W}$ *est un MB sous* Q

Preuve de la proposition :

Pour appliquer le lemme précédent. On fait d'abord un changement de probabilité pour que $X_t = W_t + \nu t$ devienne un MB sous la nouvelle probabilité.

On introduit

$$\left.\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\nu W_t - \frac{1}{2}\nu^2 t}$$ Ps qui est une (F.P) martingale

Alors par le théorème de Girsnanov, $X_t = W_t + \nu t$ est un MB sous

De plus, on a

$$\left.\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{\nu W_t + \frac{1}{2}\nu^2 t} = e^{\nu X_t - \frac{1}{2}\nu^2 t} \quad \text{(qui est une } \hat{\mathbb{P}}\text{. martingale)}$$

Donc on calcule

$$\mathbb{P}(X_t \geq x, m_t^x \leq y) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\{X_t \geq x, m_t^x \leq y\}}\right] \overset{\text{chgt. Proba}}{=} \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{1}_{\{X_t \geq x, m_t^x \leq y\}} e^{\nu X_t - \frac{1}{2}\nu^2 t}\right]$$

$$\underset{X_t \text{ est } \hat{\mathbb{P}}\text{-mb}}{\overset{\text{Lemme car}}{=}} \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}\left[e^{\nu(2y - X_t) - \frac{\nu^2}{2}t}\mathbb{1}_{\{2y - X_t \geq x\}}\right]$$

$$= e^{2\nu y}\,\mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}\left[\underbrace{e^{-\nu X_t - \frac{\nu^2}{2}t}}\mathbb{1}_{\{2y - X_t \geq x\}}\right]$$

On introduit un autte changement de probabilité

$$\left.\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\nu X_t - \frac{\nu^2}{2}t} \quad \text{où } \tilde{W}_t = X_t + \nu t \text{ est un } (\mathcal{F}, \tilde{\mathbb{P}}) \text{ MB.}$$

$$= e^{2\nu y}\,\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{1}_{\{2y - X_t \geq x\}}\right]$$

$X_t \leq y - x$
$\tilde{W}_t \leq \nu t + 2y - x$

$$= e^{2\nu y}\,\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}\left[\mathbb{1}_{\{\tilde{W} < \nu t + 2y - x\}}\right]$$

$$= e^{2\nu y}\,\mathcal{N}\left(\frac{\nu t + 2y - x}{\sqrt{t}}\right)$$

■

Proposition. *Pour tout* $y \leq 0$.

$$\mathbb{P}(m_t^x \leq y) = \mathcal{N}\left(\frac{-y + \nu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\nu y}\,\mathcal{N}\left(\frac{y + \nu t}{\sqrt{t}}\right)$$

Preuve : $\mathbb{P}(m_t^x > y) = \mathbb{P}(X_t > y, m_t^x > y)$

Alors $\forall\, y \leq 0$ et $x \geq y$

$$\mathbb{P}(X_t > x, m_t^x > y) = \mathbb{P}(X_t > x) - \mathbb{P}(X_t > x, m_t^x < y)$$

$$= \mathbb{P}(W_t > x - \nu t) - \mathbb{P}(X_t > x, m_t^x < y)$$

$$= \mathcal{N}\left(\frac{-x + \nu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\nu y}\,\mathcal{N}\left(\frac{2y - x + \nu}{\sqrt{t}}\right)$$

■

Proposition. *La probabilité. Ondiyionnelle de survie dans le modèle de Black-Cox est donnée par*

$$\mathbb{P}(\tau > T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}\left[\mathcal{N}\left(\frac{-y + X_t + \nu(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) - e^{2\nu(y - X_t)}\,\mathcal{N}\left(\frac{y - X_t + \nu(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right)\right]$$

où $X_t = W_t + \nu t$ et $\nu = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$ $\quad y = \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{L}{x}\right)$

Preuve :
Il suffit de remarquer que

$$\{\tau > T\} = \{m_T^V > L\} = \{m_t^x > y\}$$

Ensuite par la propriétéMarkovienne, on remplace la valeur de y par $y - X_t$ et t par $T - t$ dans le proposition précédente.

■

III. Modèles de formes réduites

On a deux approches principales de modélisation pour le temps de défaut.

1. Structurelle où $\tau = \inf\{t \geq 0 : S_t < L\}$ avec $(S_t)_t$ un processus stochastique donné par une diffusion brownienne $(W_t)_t$. Dans l'approche structurelle, τ est un **temps d'arrêt prévisible** par rapport à la filtration $F = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ engendrée par M.B

2. Forme-réduite/intensité où le défaut est modélisé avec plus de risque « imprévisible » et arrive de façon plus « surprise ».
   Dans l'approche forme-réduite, τ n'est pas nécessairement un temps d'arrêt dans F qui représente l'information ambiante du marché (prix des actifs, taux d'intérêt, etc). Ceci dit, l'information dans F n'implique pas connaissance directe de l'arrivée de défaut.

Dans le deuxième cas, on a besoin de distinguer d'abord les différents types d'information sur le marché. L'information ambiante toujours par la filtration F, mais on doit aussi modéliser les informations concernant l'événement de défaut par une nouvelle filtration D. L'information globale du marché est donnée par

$$G = \mathrm{D} \vee \mathrm{F}$$

$$g_t = D_t \vee F$$

Financièrement, $G = (g_t)_{t \geq 0}$ est l'information avec laquelle on calcule le prix dynamique des dérivées de crédit ou d'autres produits financiers qui sont impactés par l'événement de défaut.

Ex : BS : $\frac{dS_t}{S_t} = r\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}}$

$(S_T - K)^+$

$(S_i - K)^+ \to C_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}$

$\mathcal{F}_t = \sigma(W_t^{\mathbb{Q}}, t \geq 0)$

$C_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T-K)^+ | \mathcal{F}_t]$

Si on incorpore le risque de défaut dans l'évaluation

$\mathcal{F}_t \to \mathcal{G}_t$ dans le calcul

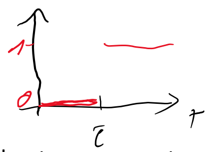
Mathématiquement, on adopte « Théorie de grossissement de filtration » 70s-80s par l'école française de probabilités. De nombreusss applications en finance en risque de crédit et risque d'information asymétrique.

On commence par décrire la filtration $D = (D_t)_{t\geq 0}$ qui représente l'information que l'on connait sur un événement de défaut.

1. À un instant t, est-ce que le sous-jacent (entreprise, pays souverain) a fait faillite ou non ;
2. Si le défaut a eu lieu, le temps exacte de l'événement de défaut est connu ;

Mathématiquement, on utilise le processus indicatrice de défaut

$$D_t = 1_{[\tau \leq t]} \qquad t \geq 0$$



Et on définit $D_t = \sigma(D_s, s \leq t) = \sigma(1_{[\tau \leq s]}, s \leq t)$

$(D_t)_{t\geq 0}$ contient les informations décrites plus haut concernant l'événement de défaut.

Remarque : Ici, τ n'est pas nécessairement un temps d'arrêt dans F.
Dans l'approche structurelle, τ est un t.a. de F.
Dans l'approche structurelle, τ est un t.a. de F c-a-d, $\{\tau \leq t\}$ est F_t-mesurable alors D_t est automatiquement F_t-mesurable donc $D_t \in F_t$ (toute information de défaut est déjà comprise dans F).

Quand τ n'est pas F-t.a. alors D représente une nouvelle source d'information observée concernant le défaut et

$$D_t \notin F_t$$

On définit $G_t = F_t \vee D_t$ l'information globale observable dans un marché avec risque de crédit.

En général, F est engendrée par un mouvement brownien (uni ou multi-dimensionnel) et on sait calculer les espérances conditionnelles par rapport à F_t.
Maintenant la question est d'établir un lien entre G et F.

Quelques exemples :

Dans un marché avec risque de défaut, on cherche souvent à calculer les g_t-espérances conditionnelles

1. Probabilité conditionnelle de défaut/survie

$\mathbb{P}(\tau \leq T | \mathcal{G}_0)$ $\qquad \mathbb{P}(\tau \geq T)$

$\mathbb{P}(\tau \leq T | \mathcal{G}_t)$ $\qquad \mathbb{P}(\tau \geq T | \mathcal{G}_t)$

structurelle

dans l'approche $\qquad D_t \subseteq \mathcal{F}_t$

$\mathcal{G}_t = \mathcal{D}_t \cup \mathcal{F}_t = \mathcal{F}_t$ mais dans l'approche forme réduite $\mathcal{G}_t \supset \mathcal{F}_t$

2. Obligation zéro-coupon défaultable
   OZC classique l'acheteur va recevoir 1€ à la maturité T le prix d'une OZC. Souvent noté comme $B(t,T), t \in [0,T]$ est obtenu par un calcul d'actualisation.

$$B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \qquad (1)$$

Où $(r_t)_t$ est le taux court (Vasichek, CIR) processus stochastique par une diffusion M.B la filtration $F = (\mathcal{F}_t)_t$ est engendréed par le M.B.

Pour une OZC défautable, on considère la possibilité de défaut d'un sous-jacent (l'émetteur de l'obligation par exemple). L'acheteur va recevoir 1€ à T si le sous-jacent n'a pas fait défaut avant T. Donc le payoff est devenu

$$1_{[\tau > T]}(+R1_{[\tau \leq T]})$$

R ce que l'on peut récupéré en cas de défaut

À une date $t < T \wedge \tau = \min(T,\tau)$

On a $\tilde{B}(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} e^{-\int_t^T r_s ds} \,\middle|\, \mathcal{G}_t\right] \qquad (2)$

L'idée est de transformer (2) en des espérances conditionnelles par rapport à F_t et puis les calculer grâce à (1).

Proposition. *(Le lemme clé)*
Soit Y unt variable aléatoire A-mesurable. Pour tout $t \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{G}_t] = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{F}_t]}$$

Remarque :

1. La gauche de l'égalité s'écrit

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{G}_t] = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}[Y | \mathcal{G}_t]$$

car $\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} = 1 - \underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau \leq t\}}}_{D_t}$ est D_t-mesurable et donc $\mathcal{G}_t$ mesurable.

Financièrement, les produits financiers impactés par le défaut sont évalués à des dates t avant le défaut τ (car sinon, le produit arrive à l'échéance) qui correspond à l'indicatrice $1_{[\tau > t]}$.
La variable Y représente la fonction payoff du produit éventuellement multipliée par le discount facteur.

2. La partie droite transforme g_t-espérance conditionnelle (restreint à l'ensemble $t < \tau$ pour le but du pricing) à des F_t-espérances conditionnelles.

$$E[1_{[\tau > t]} | F_t] = P(\tau > t | F_t)$$

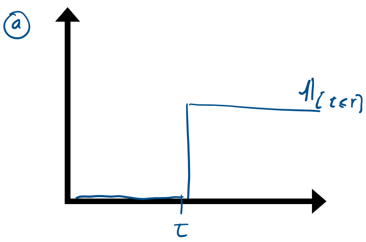
Pour $E[1_{[\tau > t]} Y | F_t]$ on ne peut pas sortir $1_{\{\tau > t\}}$ à l'extérieur de F_t-espérance conditionnelle mais on peut chercher à le calculer avec des modèles de défaut explicites basés sur des diffusions browniennes.

Preuve :

1. On va d'abord montrer que sur l'ensemble $\{t < \tau\}$ Toute variable aléatoire g_t-mesurable coïncide avec une F_t-mesurable variable élatoire.

   On a par la définition de $g_t = F_t \vee D_t$ où $D_t = \sigma(1_{\{\tau \le s\}}, s \le t$

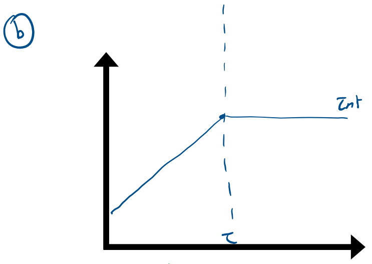
Alors, on a une représentation équivalente de $D_t = \sigma(\tau \wedge t)$



$g_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau \wedge t)$

sur l'ensemble $\{\tau > t\}$, on a $\tau \wedge t = t$ donc $g_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(t) = \mathcal{F}_t$

2.) Alors pour toute va Y qui est g_t-mesurable par ①, il existe une va Z qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable tq Z coïncide avec Y sur $\{\tau > t\}$. Donc pour Y qui est A-mesurable, on a



$$\overbrace{\mathbb{1}_{[\tau > t]}}^{\text{restriction sur } \{\tau>t\}} \underbrace{\mathbb{E}[Y|g_t]}_{g_t\text{-mes.}} = \overbrace{\mathbb{1}_{[\tau>t]}}^{\text{restriction sur } \{\tau>t\}} \underbrace{Z}_{\mathcal{F}_t\text{-mes.}}$$

3. Il reste à trouver la forme explicite de Z.
On prend l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$ pour l'égalité 3 et on obtient:

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \mathbb{E}[Y|g_t] | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} Z | \mathcal{F}_t] \qquad (4)$$

$$\text{La gauche} = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} Y) g_t | \mathcal{F}_t]$$

$$\overset{g_t \supset \mathcal{F}_t}{=} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{(\tau>t)} Y) \mathcal{F}_t]$$

$$\text{La droite} = Z_t \, \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} | \mathcal{F}_t]$$

$$\Rightarrow Z_t = \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} Y | \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{(\tau>t)} | \mathcal{F}_t]}$$

On remplace dans Z donné par (5) dans l'égalité (3) on obtient

$$\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \mathbb{E}[Y | g_t] = \mathbb{1}_{[\tau>t]} \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} Y) \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} | \mathcal{F}_t]}$$

On applique la proposition aux calculs de probabilités conditionnelles et de pricing dynamique des produits financiers.

On revient au calcul de probabilité de survie conditionnelle

$$\mathbb{P}(\tau > T \quad g_t) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} | g_t]$$

$$\overset{!!}{=} \mathbb{1}_{[\tau>t]} \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_{[\tau>t]}}_{Y} | g_t] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[\tau>t]} \mathbb{1}_{\{\tau>T\}} | g_t]$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{[\tau>T]} | g_t]$$
$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{[\tau>t]} \mathbb{1}_{[\tau>T]} | g_t]$$

Proposition.

$$\mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} \mid \mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\mid\mathcal{F}_t]} = \mathbb{1}_{\{\tau>t\}} \frac{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau>T}\mid\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau>t}\mid\mathcal{F}_t]}$$

$$= \mathbb{1}_{\tau>t}\frac{\mathbb{E}[\mathbb{E}(\mathbb{1}_{\tau>T}\mid\mathcal{F}_T)\mid\mathcal{F}_t]}{S_t}$$

$$= \mathbb{1}_{\tau>t}\frac{\mathbb{E}[S_T\mid\mathcal{F}_t]}{S_t} \left(= \mathbb{1}_{\tau>t}\,\mathbb{E}\left[\frac{S_T}{S_t}\mid\mathcal{F}_t\right]\right)$$

On revient a l'exemple 2 pour le pricing dynalique de l'obligation zero-coupon défautable.

$$\tilde{B}(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau>T\}} e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{G}_t\right]$$

$$= \mathbb{1}_{\{\tau>t\}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\underbrace{\mathbb{1}_{\tau>T}\, e^{-\int_t^T r_s ds}}_{\uparrow} \mid \mathcal{G}_t\right]$$

proposition

$$= \mathbb{1}_{\tau>t}\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\cancel{\mathbb{1}_{\tau>t}}\,\mathbb{1}_{\tau>T}\, e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right)}{S_t}$$

$$= \mathbb{1}_{\tau>t}\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_{\tau>T}e^{-\int_t^T r_s ds}\mid\mathcal{F}_T)\mid\mathcal{F}_t]}{S_t}$$

$$= \mathbb{1}_{\tau>t}\frac{\mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\tau>T}\mid\mathcal{F}_T]\mid\mathcal{F}_t\right)}{S_t}$$

$$= \mathbb{1}_{\tau>t}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\frac{S_T}{S_t}\mid\mathcal{F}_t\right]$$

$$= \mathbb{1}_{\tau>t}\frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}S_T\mid\mathcal{F}_t\right]}{S_T}$$

Définition. (Compensateur)

Le compensateur Λ^G du temps de défaut τ est définit comme le processus G-prévisible croissant tel que :

$1_{\tau\leq t} - \Lambda_t^G, t \geq 0$ est une G-martingale

Si Λ_t^G est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, c-a-d, il existe un processus G-adapté et positive λ_t^G teql que

$\Lambda_t^G = \int_0^t \lambda_s^G ds\,, alors, (\lambda_t^G, t \geq 0)$ est appelé l'intensité de τ.

La définition ne dépend pas du modèle

Exemple : pour le processus de l'intensité

3. Poisson

Processus avec l'intensité $\lambda > 0$ est un processus de comptage tel que

$$P(N_T - N_t = n) = \frac{1}{n!}(T-t)^n\lambda^n e^{-\lambda(T-t)}$$

On prend τ comme le premier instant de saut d'un processus de poisson.

$$\tau := \inf\{t \geq 0, N_t > 0\}$$

$$P(\tau > t) = P(N_t - N_0 = 0) = e^{-\lambda t}$$

Par ailleurs, on a pour processus de Poisson $(N_t - \underbrace{\lambda t}_{\text{compensateur}}, t \geq 0)$ est une martingale.

$$\Lambda_t = \lambda t = \int_0^t \lambda ds$$

$\lambda_t = \lambda$ est une constante l'intensité du processus de Poisson est l'intensité du défaut.

4. Processus de Poisson inhomogène

Une extension du processus de Poisson avec l'intensité qui est une fonction déterministe du temps

$$\mathbb{P}(N_T - N_t = n) = \frac{1}{n!}\left(\int_t^T \lambda(s)ds\right)^n e^{-\int_t^T \lambda(s)ds}$$

Explications

Par le th. d'arrêt de Doob qui implique que toute martingale arrêtée à un temps d'arrêt reste encore une martingale

$\boxed{N_{t\wedge\tau} = \mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}}$ $(M_t, t\geq 0)$ martingale

τ un t.a

$(M_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$ est encore une martingale.

On calcul la probabilité de survie

$$\mathbb{P}(\tau > t) = \mathbb{P}(N_t - N_0 = 0) = e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}$$

Et de manière simpliste

$$\left(N_t - \int_0^t \lambda(s)ds,\ t \geq 0\right)$$

Est une martingale donc l'intensité de défaut est donnée par $\lambda(t)$

On va généraliser pour que $(\lambda_t, \geq 0)$ soit stochastique. Pour commencer, on donne quelques propriétés concernant l'intensité :

Proposition.

1. Le G-compensateur Λ^G est un processus arrêté en τ. C-a-d $\Lambda_t^G = \Lambda_{t\wedge\tau}^G$
2. Pour tout $t > \tau$ la G-intensité satisfait $\lambda_t^G = 0$
3. On introduit une F-intensité de défaut λ^F qui coïncide avec λ^G avant τ et satisfait $\lambda_t^G = 1_{\{\tau>t\}}\lambda_t^F$

Preuve :

1. Par définition $(1_{\tau\leq t} - \Lambda_t^G, t \geq 0)$ est G-martingale comme $1_{\{\tau\leq t\}}$ est un processus arrêté en τ par le théorème d'arrêt de Doob
$$(1_{\{\tau\leq t\wedge T\}} - \Lambda_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$$
est encore G-martingale.
Par ailleurs $1_{\{\tau\leq t\wedge T\}} = 1_{\{\tau\leq t\}}$
$$(1_{\{\tau\leq t\}} - \Lambda_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$$
est G-martingale

donc $(\Lambda^G_{t\wedge\tau}, t \geq 0)$ est aussi G-compensateur de τ par l'unicité du compensateur $\Lambda^G_t = \Lambda^G_{t\wedge\tau}$

2. Est une conséquence de 1. car

$\Lambda^G_t = \Lambda^G_{t\wedge\tau}$ donc pour tout $t > \tau$

$\Lambda^G_t = \Lambda^G_\tau$, $t > \tau$

$$\Lambda^G_t = \int_0^t \lambda^G_s ds = \underbrace{\int_0^\tau \lambda^G_s ds}_{\Lambda^G_\tau} + \underbrace{\int_\tau^t \lambda^G_s ds}_{0}$$

3. Similaire que dans la preuve de la proposition clé sur $\{t < \tau\}$ toute variable aléatoire G_t-mesurable coïncide avec une variable aléatoire F_t-mesurable, donc $\exists \lambda^F_t$ qui est F_t-mesurable tel que

$1\!\!1_{\{\tau > t\}} \lambda^G_t = 1\!\!1_{\{\tau > t\}} \lambda^F_t$ comme $\lambda^G_t = 0$ sur $t > \tau$

On a $\lambda^G_t = 1\!\!1_{\{\tau > t\}} \lambda^F_t$ ■

On peut donc modéliser (et calculer avec) une intensité de défaut $(\lambda^F_t, t \geq 0)$ qui est F-adapté et positif. On donne la forme générale de F-intensité de la proposition suivante

Proposition.

Soit $S_t = P(\tau > t|F_t)$ qui est une surmartingale qui admet la décomposition de Doob-Meyer

$$S_t = M_t - A_t$$

Où $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale et $(A_t, t \geq 0)$ est un processus prévisible croissant $A_0 = 0$

Alors

$$\lambda^F_t dt = \frac{dA_t}{S_t}$$

Preuve :

Pour montrer que la F-intensité est donnée sous forme

$$\lambda^F_t dt = \frac{dA_t}{S_t}$$

Par la définition de compensateur, il nous suffit de démontrer que

$$1\!\!1_{\{\tau \leq t\}} - \int_0^t \lambda^G_s ds = 1\!\!1_{\{\tau \leq t\}} - \int_0^t 1\!\!1_{\{\tau > s\}} \lambda^F_s ds$$

$$= 1\!\!1_{\{\tau \leq t\}} - \int_0^t 1\!\!1_{\{\tau > s\}} \frac{dA_s}{S_s} \text{ soit une } G\text{-martingale}$$

En d'autres termes, on doit démontrer

$$\mathbb{E}\left[1\!\!1_{\{\tau \leq T\}} - \int_0^T 1\!\!1_{\{\tau > s\}} \frac{dA_s}{S_s} \,\Big|\, G_t\right] = 1\!\!1_{\{\tau \leq t\}} - \int_0^t 1\!\!1_{\{\tau > s\}} \frac{dA_s}{S_s}$$

i.e. $\mathbb{E}\left[1\!\!1_{\{\tau \leq T\}} - 1\!\!1_{\{\tau \leq t\}} \,|\, G_t\right] \overset{?}{=} \mathbb{E}\left[\int_t^T 1\!\!1_{\{\tau > s\}} \frac{dA_s}{S_s} \,\Big|\, G_t\right]$

• Gauche $= \mathbb{E}[1\!\!1_{\{t < \tau \leq T\}} | G_t]$

prop. clé

$$= 1\!\!1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}[1\!\!1_{\{t < \tau \leq T\}} | F_t]}{S_t}$$

$$= 1\!\!1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}[1\!\!1_{\{t < \tau\}} - 1\!\!1_{\{T < \tau\}} | F_t]}{S_t}$$

$$= 1\!\!1_{\{\tau > t\}} \frac{S_t - \mathbb{E}[1\!\!1_{\{T < \tau\}} | F_T) | F_t]}{S_t} = 1\!\!1_{\{\tau > t\}} \frac{S_t - \mathbb{E}[S_T | F_t]}{S_t}$$

• droite $= \mathbb{E}\left[\int_t^T 1\!\!1_{\{\tau > s\}} \frac{dA_s}{S_s} \,\Big|\, G_t\right]$

prop. clé

$$= 1\!\!1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}\left[1\!\!1_{\{\tau > t\}} \int_t^T 1\!\!1_{\{\tau > s\}} \frac{dA_s}{S_s} \,\Big|\, F_t\right]}{S_t} \quad \text{— } S_s\text{-mesurable}$$

$$= 1\!\!1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_t^T 1\!\!1_{\{\tau > s\}} \frac{dA_s}{S_s} \,\Big|\, F_s\right] \Big|\, F_t\right]}{S_t}$$

$$= 1\!\!1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}\left[\int_t^T \mathbb{E}[1\!\!1_{\{\tau > s\}} | F_s] \frac{dA_s}{S_s} \,\Big|\, F_t\right]}{S_t}$$

$$= 1\!\!1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}[A_T - A_t | F_t]}{S_t}$$

$$= 1\!\!1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}[M_T - S_T - M_t + S_t | F_t]}{S_t}$$

$$= 1\!\!1_{\{\tau > t\}} \frac{\mathbb{E}[S_t - S_T | F_t]}{S_t}$$

On rappelle que $S_t = M_t - A_t$ $\Rightarrow A_t = M_t - S_t$ (M: F-martingale)

On vérifie bien gauche = droite et donc la proposition est démontrée ■

5. Processus de Poisson doublement stochastique (Cox)

(Processus de Cox ou modèle de Cox)

Définition. (Processus de Cox)

Un processus de Cox est une généralisation du processus de Poisson qui admet une intensité $(\lambda_t, t \geq 0)$ un processus F-adapté et positif. C'est un processus qui, conditionnellement à la filtration F, peut être vu comme un processus de poisson inhomogène.

On considère le modèle de Cox par la suite.

Soit $(\lambda_t)_{t\geq 0}$ un processus stochastique F-adapté et positif. On définit le temps de défaut par

$$\tau = \inf\{t \geq 0, \int_0^t \lambda_s ds > 1\}$$

Où Γ est une variable aléatoire qui suit la loi exponentielle de paramètre 1 et indépendante de la filtration F.

On calcule la probabilité (conditionnelle) de survie

$$\begin{aligned} S_t &= P(\tau > t | F_t) \\ &= P\left(\int_0^t \lambda_s ds \leq \Gamma \middle| F_t\right) \\ &= \exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right) \end{aligned}$$

On vérifie également que l'intensité de défaut est effectivement donné par le processus $(\lambda_t)_{t\geq 0}$

Par la proposition précédente, on a

$$\lambda_t^F dt = \frac{dA_t}{S_t}$$

Dans le modèle de Cox, on a $S_t = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right)$ qui est automatiuement un processus décroissant ce qui implique que $(M_t, t \geq 0)$ est une constante qui vaut 1, et donc

$$\begin{aligned} A_t &= M_t - S_t \\ &= 1 - \exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right) \end{aligned}$$

On applique la proposition et on obtient

$$dA_t = \exp\left(-\int_0^t \lambda_s ds\right) \lambda_t dt$$

Donc

$$\frac{dA_t}{S_t} = \frac{S_t \lambda_t dt}{S\_t} = \lambda_t dt$$

On vérifie que $(\lambda_t)_t$ est l'intensité de défaut.

On peut aussi simuler le temps de défaut τ numériquemet par la méthode suivante (par exemple pou une application de méthode de Monte-Carlo).

1. On simule une variable aléatoire indépendante $U \sim U(0,1)$
2. On obtient τ par
$$\tau := \inf |t \geq 0, e^{-\int_0^t \lambda_s ds} \leq U\}$$

En discrétisant $(\lambda_t)_t$ en temps et calculant $\int_0^t \lambda_s \, ds$ par une approximation.

$E[f(\tau)]$ par la méthode de Monte-Carlo

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau > T\}} f(S_T) + \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} f(S_\tau)]$$

<u>Simuler</u> l'échantillon de τ par la méthode précédente.

On revisite le ZCB défautable.

On a le payoff de l'OZC défautable $\mathbb{1}_{\{\tau > T\}}$

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t,T) &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_*\left[e^{-\int_t^T \lambda_s ds} \underbrace{e^{-\int_t^T r_s ds}}_{\text{standard}} \middle| F_t\right] \\ &= \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} \mathbb{E}_*\left[e^{-\int_t^T (\lambda_s + r_s) ds} \middle| F_t\right] \quad (*) \end{aligned}$$

Pour rappel le prix d'une OZC est

$$B(t,T) = \mathbb{E}_*\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| F_t\right] \leftarrow \text{Modèle tx court}$$

<u>Modèle Vasicek</u>:

$$\boxed{dr_t = a(b - r_t) dt + \sigma dW_t^*}$$

$$F_t = \sigma(W_s^*, s \leq t)$$

Dans le cas avec défaut

$$\begin{aligned} dr_t &= a_1(b_1 - r_t) dt + \sigma_1 dW_t^1 \\ d\lambda_t &= a_2(b_2 - \lambda_t) dt + \sigma_2 dW_t^2 \end{aligned}$$

où $d\langle W_t^1, W_t^2 \rangle = \rho \, dt$ avec $\rho \in (-1,1)$ la corrélation

On suit la même méthode pour le modèle de taux

1 résoudre l'EDS

$$\int_t^T dr_t = \int_t^T a_1(b_1 - r_t) dt + \sigma_1 dW_t^1 \quad (1)$$

$$dr_t + a_1 r_t \, dt = a_1 b_1 \, dt + \sigma_1 dW_t^1$$

$$\int_t^T d(e^{at} r_t) = \int_t^T e^{at}(a r_t dt + dr_t) = e^{at}(a_1 b_1 dt + \sigma_1 dW_t^1)$$

$$e^{at} r_t - r_0 = \int_0^t e^{as}(a_1 b_1 ds + \sigma_1 dW_s^1)$$

$$\Rightarrow r_t = r_0 e^{-at}$$

$$\Rightarrow r_T = r_t \cdots \quad \Rightarrow \lambda_t \text{ pareil}$$

② $\int_t^T r_s ds$ et $\int_t^T \lambda_s ds$

Intégrer directement (1) et on obtient

$$r_T - r = \int_t^T a_1(b_1 - r_s)ds + \int_t^T \sigma_1 dW_s^1$$

$$\Rightarrow a_1 \boxed{\int_t^T r_s ds} = -(r_T - r_t) + a_1 b_1 (T-t) + \int_t^T \sigma_1 dW_s^1$$

③ $\mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T (r_s+\lambda_s)ds} \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\text{proc gauss de } r + \lambda} \mid \mathcal{F}_t\right]$

$\mathbb{E}[e^X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$

$\mu = \mathbb{E}\left[-\int_t^T (r_s+\lambda_s)ds \mid \mathcal{F}_t\right]$

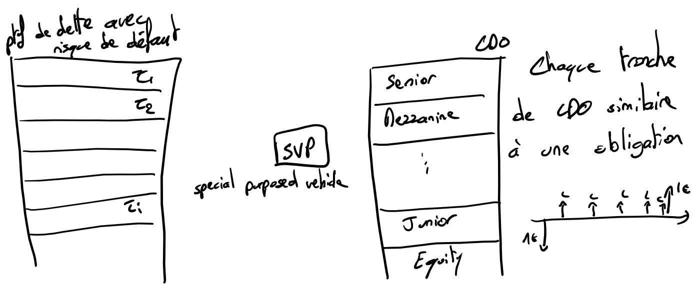
$\sigma^2 = Var\left(-\int_t^T (r_s+\lambda_s)ds \mid \mathcal{F}_t\right)$ # Ne pas oublier la covariance

IV. Dérivé de crédit en portefeuille et corrélation de défaut CDO

1. Introduction

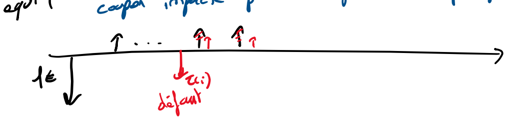
CDO (Collateralized dept obligation)

produit structuré — Nature du sous-jacent — forme similaire à une obligation



Acheteur d'une trance de CDO equity

coupon impacté par les défauts du portefeuille sous jacent



Un CDO est un produit financier structuré qui permet aux banques et institutions financières de transférer et réattribuer leurs risques liés aux dettes et diminuer leurs fonds propres associés.

Le sousjacent d'une CDO est un portefeuille de dettes (obligation CBO, prêt CLO, CDS CDO synthétique)

CDO lorsque l'on mets des CDS dans le portefeuille de risque.

Qui sont soumises aux risques de crédit (défaut). La mission de SVP est de réorganiser ces dettes sous forme de tranches de CDO et les revendre aux investisseurs du marché. Cette procédure est apelée la titrisation. Chaque tranche de CDO est similaire à une obligation. Un investisseur paie un montant nominal à la date initiale et reçoit des coupons préfixés pour la tranche correspondante à des dates régulières. La tranche senior reçoit le coupon le moins élevé et sera remboursé en premier, les mezzanine et junior ensuite, et puis la tranche equity qui reçoit le coupon le plus élevé et sera remboursé à la fin.

Par cet ordre de subordination, les tranches supérieures sont protégées par les tranches inférieures conre les risques de défaut du portefeuille sousjacent.

2. Formalisation

On considère un portefeuille de taille n et désigne par τ_i $(i = 1, \dots, n)$ les temps de défaut de chaque nominal sous-jacent et par N_i son nominal.

Soit $N = \sum_{i=1}^n N_i$ le poids de chaque nominal est $w_i = \frac{N_i}{N}$

Soit R_i le taux de recouvrement de τ_i. Le terme clé à calculer est la perte totale du portefeuille à la date $t \geq 0$ définie par

$$L_t = \sum_{i=1}^n N_i(1 - R_i)1_{[\tau_i \leq t]}$$

Et la perte cumulative en pourcentage est

$$l_t = \frac{L_t}{N} = \sum_{i=1}^n w_i(1 - R_i)1_{[\tau_i \leq t]}$$

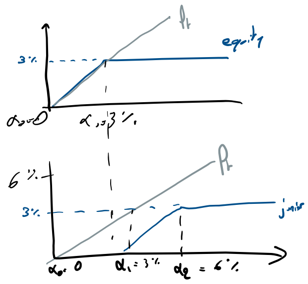
Evidemment, on a $0 \leq l_t \leq 1$

Un CDO est structuré par différentes tranches. On décompose l'intervalle $]0,1]$ par des unions disjointes $]\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ où $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < \dots < \alpha_k = 1$.

L'intervalle $]\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ correspond à la j-ème tranche où α_{j-1} et α_j sont appelés « attachement point » et « detachement point ». Les premieurs défauts induisent d'abord des pertes sur la tranche equity et le montant nominal de la tranche est réduit par la quantité de perte qui implique une perte de coupons (régulières) et aussi de remboursement de nominal.

Quand la perte total (pourcentage) est inférieur au nominal de la tranche equity, ie $l_t < \alpha_1$, les autres tranches sont protégées par celle-ci. Quand $l_t \geq \alpha_1$, la tranche equity est complètement perdue et c'est la tranche junior qui sera touchée ensuite. Ainsi, la perte pourcetage de la jeune tranche à la date $t \geq 0$ est donné par $l_t^{(j)}$

$$l_t^{(j)} = \begin{cases} 0 & , \text{si } l_t \leq \alpha_{j-1} \\ l_t - \alpha_{j-1} & \text{si } \alpha_{j-1} < l_t \leq \alpha_j \\ \alpha_j - \alpha_{j-1} & , \text{si } l_t > \alpha_j \end{cases}$$



Qui est un « call spread » sur la perte cumulative l_t. Le flux de la j-ème tranche est comme suit : l'acheteur paie à la date $t = 0$ un montant nominal et reçoit des coupons à des dates régulières $t_1, t_2, \dots, t_n = T\ (maturité)$ qui sont proportionnés par rapport au reste du montant nominal de la tranche

$$s_j \left(1 - \frac{l_{t_u}^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right) \quad u = 1, \dots, M$$

Où S_j est le taux de coupon de la j-ème tranche.

Si $l_{t_u} \leq \alpha_{j-1}$ alors $l_{t_u}^{(j)} = 0$, donc l'acheteur va recevoir un coupon complet

Si $\alpha_{j-1} < l_{t_u} \leq \alpha_j$ alors $0 < l_{t_u}^{(j)} \leq \alpha_j - \alpha_{j-1}$ alors l'acheteur va recevoir un coupon partiel.

Si $\backslash l_{t_u} > \alpha_j$ alors $l_{t_u}^{(j)} = \alpha_j - \alpha_{j-1}$ le coupon devient zéro car la tranche est complètement perdue.

A la date de maturité $t_n = T$, le monotant restant du nominal de la variable est

$$1 - \frac{l_T^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}$$

Le flux (actualisé à la date 0) vu par le vendeur de la j-ème tranche est alors :

$$N(\alpha_j - \alpha_{j-1}) \left[1 - S_j \sum_{u+1}^{M} \left(1 - \frac{l_{t_u}^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right) D(0, t_u) - \left(1 - \frac{l_T^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right) D(0, T)\right]$$

D'où vient

$$S_j = \frac{1 - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(1 - \frac{l_T^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right) D(0,T)\right]}{\sum_{j=1}^{M} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[1 - \frac{l_{t_u}^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right]}$$

Le terme clé à calculer est donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[l_{t_u}^{(j)}\right] \quad u = 1, \dots, T$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[l_t^{(j)}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(l_t - \alpha_{j-1})^+ - (l_t - \alpha_j)^+\right]$$

$$\boxed{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(l_t - k)^+\right]}$$

Annale :

Un sujet : approche intensité, savoir appliquer la proposition clé

Sujet 2 : concernant les CDO, structure de corrélation, modèle facteur

3. Modèle à copule gaussien

Pour les CDOs, comme la taille du portefeuille est très grande, on utilise souvent des modèles « statique » comme des modèles de copule.

On rappelle qu'une copule est une application

$$\underbrace{[0,1]^n}_{n \text{ lois marginales}} \rightarrow [0,1] : \underbrace{C(u_1, \dots, u_n)}_{\text{loi jointe}}$$

Par le théorème de sklar pour F une fonction cumulative de distribution jointe pour les variables aléatoire $(X_1, \dots X_n)$ dont les lois marginales sont $F_1, \dots, F_n$. Il existe une fonction copule $C : [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ telle que

$\forall x_1, \dots, x_n \in R$

$$F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\tau_1 > t_1, \dots, \tau_n > t_n) = C(\mathbb{P}(\tau_1 > t_1), \dots, \mathbb{P}(\tau_n > t_n))$$

$$\mathbb{P}(\tau_1 < t_1, \dots, \tau_n < t_n) = C'(\mathbb{P}(\tau_1 < t_1), \dots, \mathbb{P}(\tau_n < t_n))$$

Le modèle starndard utilisé au marché pour les CDOs est le modèle à copule gaussienne.

Soient $U_1, \dots, U_n$ des variables aléatoires uniforme en $[0,1]$ avec une copule $C(U_1, \dots, U_n)$ comme distribution jointe.

On définit les temps de défaut individuel par

$$\tau_i = \inf\{t \geq 0, U_i \leq P_i(t)\}$$

Où $P_i(t)$ est la probabilité de défaut du i-ème nominal calibré avec les données du marché.

Par cette définition, on obtient bien (en vérifiant)

$$P(\tau_i \leq t) = P(U_i \leq P_i(t)) = P_i(t)$$

(donc la définition est bien cohérente et τ_i respecte bien les observations du marché)

Maintenant, on définit la variable aléatoire U_i avec des facteurs de la loi normale, plus précisément, on a

$$U_i = \Phi(V_i) \quad \text{où} \quad V_i = \sqrt{\phi}Y + \sqrt{1 - \Phi}Y_i \sim N(0,1)$$

Où Φ est la fonction de répartition de la loi $N(0,1)$, Y et $Y_i (i = 1, \dots n)$ sont des v.a normale $N(0,1)$ iid.

Y est un facteur commun du marché ou macroéconomique.

Y_i est un facteur individuel propre à chaque sous-jacent. Tous les τ_i sont corrélés par le facteur commun Y et conditionnellement à Y, $(\tau_i)_{i=1,\dots,n}$ sont indépendantes.

On a donc par la définition

$$\begin{aligned} P(\tau_i \leq t|Y = y) &= P(U_i \leq P_i(t)|Y = y) \\ &= P(\Phi(V_i) \leq P_i(t)|Y = y) \\ &= P\big(\Phi\big(\sqrt{\rho_i}Y + \sqrt{1-\rho_i}Y_i\big) \leq P_i(t)Y = y\big) \\ &= \mathbb{P}\left(\sqrt{\rho_i}\, Y + \sqrt{1-\rho_i}\, Y_i \leq \Phi^{-1}(p_i(t) | Y = y\right) \\ &= \mathbb{P}\left(Y_i \leq \frac{\Phi^{-1}(p_i(t)) - \sqrt{\rho_i}\, y}{\sqrt{1-\rho_i}} \,\Big|\, Y = y\right) \\ &= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_i(t)) - \sqrt{\rho_i}}{\sqrt{1-\rho_i}} \right) \end{aligned}$$

$\mathbb{E}[(l_t - k)^+]$

$l_t = \sum w_i (1-R_i) \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$

si τ_i sont conditionnellement idpt le terme clé

$\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$

On suppose $w_i = w = \frac{1}{n}$ et $R_i = R$ variable aléatoire indépendante de loi de $Beta(4\%, 26\%)$

Il reste à calculer

$$\frac{1}{n}(1-R)\boxed{\sum_{i=1}^{n} 1_{[\tau_i \leq t]}}$$

Nombre de défaut dans le portefeuille avant la date t.

Soit N^n le nombre de défaut dans un portefeuille de taille n avant t. On suppose que le poretefeuille est homogène càd

$$p_t^i(y) = p_t(y) \; et \;\; \rho_i = \rho$$

$$\mathbb{P}(N_t^n = k \mid Y = y) = \binom{n}{k} p_t^i(y)^k (1 - p_t(y))^{n-k}$$

Comme $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ on obtient

$$\mathbb{P}(N_t^n = k) = \int_{\mathbb{R}} \binom{n}{k} p_t(y)^k (1-p_t(y))^{n-k} \phi(y) dy \qquad \text{où } \phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$$