Examen de Calcul Stochastique
2ème année Actuariat, janvier 2022, durée 2h

Dans la suite on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard (MB).

1. Soit
$$X_t = \int_0^t s dB_s.$$
   (a) Justifier que le processus X est une martingale.
   (b) Calculer $\mathbb{E}(X_t)$, $Var(X_t)$. Quelle est la loi de X_t ?
   (c) Calculer $d(tB_t)$ à l'aide de la formule d'Itô.
   (d) En déduire une relation entre X_t et $Y_t = \int_0^t B_s ds$.
   (e) Calculer la variance de Y_t.
2. Soit r, α deux constantes réelles. On considère le processus stochastique
$$F_t = \exp\left\{-\alpha B_t + \frac{\alpha^2}{2}t\right\}, \ t \geq 0.$$
   (a) Appliquer la formule d'Ito pour trouver la dynamique dF_t.
   (b) Considérons maintenant l'EDS
$$dY_t = rdt + \alpha Y_t dB_t, \quad Y_0 = x, \ t \geq 0, \tag{1}$$
      i. Etudier l'existence et l'unicité de la solution de cette équation.
      ii. Calculer $d(Y_t F_t)$.
   (c) Calculer $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(B_t F_t)$.
3. Soit $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par le mouvement brownien $(B_t)_{t\geq 0}$. Corriger (si nécessaire !) les formules ci-dessous pour que les affirmations suivantes soient vraies :
   (a) $(B_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-martingale.
   (b) $(2 + B_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-martingale.
   (c) $(2 + B_{2t})_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-martingale.
   (d) $\left(\frac{B_{3t}}{\sqrt{2}}\right)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.
   (e) $\left(e^{B_t - \frac{t}{4}}\right)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-martingale.
4. Soient $T > 0$ et M une $(\mathcal{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-martingale telle que $dM_t = \sigma M_t dB_t$, $t \leq T$, $M_0 = 1$ où σ est une constante.
   (a) Vérifier que M est à valeurs strictement positives.
   (b) Calculer dY_t quand $Y_t = (M_t)^{-1}$.
   (c) Soit $\mathbb{Q}$ une nouvelle proba définie par $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = M_T$. Déterminer la loi de Y sous $\mathbb{Q}$. En déduire que Y sous $\mathbb{Q}$ a la même loi que M sous $\mathbb{P}$.
   (d) Montrer que $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left((M_T - K)^+\right) = K\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left((K^{-1} - M_T)^+\right)$.

1) Soit $X_r := \int_0^r s\, dB_s$.

a) $X_r = \int_0^r s\, dB_s$ drift nul $\Longrightarrow$ martingale locale

De plus $\mathbb{E}[\langle X \rangle_r] = r^4 < \infty$ donc X est une vraie martingale.

b) On remarque que $X_r = \int_0^r s\, dB_s$ est une intégrale de Wiener

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X_r] = \mathbb{E}\left[\int_0^r s\, dB_s\right]$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow V(X_r) = \mathbb{E}[X_r^2] - \mathbb{E}[X_r]^2$$
$$= \mathbb{E}\left[\left(\int_0^r s\, dB_s\right)^2\right]$$
$$= \int_0^r s^2 ds = \frac{r^3}{3}$$

Comme X_r est une intégrale de Wiener. X_r est une va gaussienne.

$$\Rightarrow X_r \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{r^3}{3}\right)$$

c) On applique la 2e formule d'Itô avec $f : (x,r) \mapsto rx$ qui est bien C^1 p/r à r et C^2 p/r à x.

avec $\frac{\partial f}{\partial x} = r$, $\frac{\partial f}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial r} = x$

Donc on obtient

$$d(rB_r) = r\, dB_r + B_r\, dr.$$

d) On a donc $rB_r = \int_0^r s\, dB_s + \int_0^r B_s\, ds$

$$= X_r + Y_r$$

Donc $Y_r = rB_r - X_r$

e) $V(Y_t) = V(tB_t - X_t)$

$$= \mathbb{E}[(tB_t - X_t)^2] - \underbrace{\mathbb{E}[tB_t - X_t]}_{=0}{}^2$$

$$= \mathbb{E}[t^2B_t^2 - 2tB_tX_t + X_t^2]$$

$$= t^3 + \frac{t^3}{3} = \frac{4t^3}{3}$$

2) $F_t = \exp\left(-\alpha B_t + \frac{\alpha^2 t}{2}\right) \quad t \geq 0$

a) On applique la 2^e formule d'Itô avec $f : (x,t) \mapsto \exp\left(-\alpha x + \frac{\alpha^2 t}{2}\right) = e^{-\alpha x} e^{\frac{\alpha^2 t}{2}}$
qui est bien C^1 p/r à t et C^2 p/r à x

avec $\frac{\partial f}{\partial x} = -\alpha e^{-\alpha x + \frac{\alpha^2 t}{2}}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \alpha^2 e^{-\alpha x + \frac{\alpha^2 t}{2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\alpha^2}{2} e^{-\alpha x + \frac{\alpha^2 t}{2}}$$

D'où avec la formule d'Itô on a :

$$dF_t = -\alpha e^{-\alpha B_t + \frac{\alpha^2 t}{2}} dB_t + \frac{1}{2}\alpha^2 e^{-\alpha B_t + \frac{\alpha^2 t}{2}} dt + \frac{\alpha^2}{2} e^{-\alpha B_t + \frac{\alpha^2 t}{2}} dt$$

$$= \alpha^2 F_t \, dt - \alpha F_t \, dB_t.$$

b) $dY_t = r\,dt + \sigma Y_t \, dB_t \;;\; Y_0 = x \quad t \geq 0$

i) $Y_t = x + \int_0^t r\,ds + \int_0^t \sigma Y_s \, dB_s$

ii) On applique la 3e formule d'Itô avec $f:(x,y)\mapsto xy$ C^2 p/r à x, y

avec $\frac{\partial f}{\partial x} = y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

Donc il vient :

$$d(Y_t F_t) = F_t dY_t + Y_t dF_t$$
$$= F_t (r dt + \alpha Y_t dB_t) + Y_t (\alpha^2 F_t dt - \alpha F_t dB_t)$$
$$= (r + \alpha^2 Y_t) F_t dt$$

c) $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[B_t \exp(-\alpha B_t + \frac{\alpha^2 t}{2})] = ?$

Bizarre

On pose le changement de proba $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L_t = \exp(-\alpha B_t + \frac{\alpha^2}{2} t)$

Grâce au thm de Girsanov, on sait que sous $\mathbb{Q}$ le processus $\tilde{B}_t = B_t + \alpha t$ est un MB.

Donc $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[B_t \exp(-\alpha B_t + \frac{\alpha^2 t}{2})] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[B_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\tilde{B}_t - \alpha t] = -\alpha t$

3) a) $(B_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-martingale Correct

b) $(2+B_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$-martingale Correct.

c)

d)

e)

4) $dM_t = \sigma M_t dB_t$, $M_0 = 1$, σ cte

a) $M_t = M_0 \exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t) = \exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t) > 0 \quad \forall t \geq 0$

b) Soit $Y_t = (M_t)^{-1}$

On applique la 1ère formule d'Itô avec $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ qui est C^2 pr à x

avec $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

$$\Rightarrow dY_t = -Y_t^2 dM_t + \frac{1}{2} 2 Y_t^3 d\langle M \rangle_t$$

$$= -Y_t^2 \sigma M_t dB_t + Y_t^3 \sigma^2 M_t^2 dt$$

$$= -\sigma Y_t dB_t + \sigma^2 Y_t dt$$

$$\Rightarrow dY_t = -\sigma Y_t (-\sigma dt + dB_t)$$

c) Soit $\mathbb{Q}$ une nouvelle proba def par $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp(\sigma B_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T) = M_T$

Donc par le thm de Girsanov, sous $\mathbb{Q}$ le processus $\tilde{B} : t \mapsto B_t - \sigma t$ est un MB

$$\Rightarrow dY_t = -\sigma Y_t d\tilde{B}_t$$

$$\Rightarrow Y_t = Y_0 \exp(-\sigma \tilde{B}_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$$

Exercice 1 : $X_t = \int_0^t s\,dB_s$

a) $dX_t = t\,dB_t$

Le drift est nul $\Rightarrow$ martingale locale

et $\mathbb{E}[\langle X\rangle_t] = \int_0^t s^2 ds = \frac{t^3}{3} < \infty$

Donc X est une martingale

b) $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\int_0^t s\,dB_s] = 0$

$V(X_t) = \mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[(\int_0^t s\,dB_s)^2] = \int_0^t s^2 ds$

$X_t = \int_0^t s\,dB_s$ est une intégrale de Wiener donc X_t suit une loi gaussienne

de paramètre 0 et $\frac{t^3}{3}$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, X_t \sim \mathcal{N}(0, \frac{t^3}{3})$.

c) On applique la 2e formule d'Itô avec $f : (t,x) \mapsto tx$ qui est bien C^1 p/r à t
C^2 p/r à x

$\frac{\partial f}{\partial x} = t \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial t} = x$

D'où

$d\,tB_t = t\,dB_t + B_t\,dt$

d) On a $d(tB_t) = t\,dB_t + B_t\,dt$

$\Rightarrow tB_t = \int_0^t s\,dB_s + \int_0^t B_s\,ds$

$= X_t + Y_t$

Donc $X_t + Y_t = tB_t$.

e) $V(Y_t) = V(tB_t - X_t) = \mathbb{E}[(tB_t - X_t)^2] - \mathbb{E}[tB_t - X_t]^2$

Or $\mathbb{E}[tB_t - X_t]^2 = 0$ car $\mathbb{E}[tB_t - X_t] = t\mathbb{E}[B_t] - \mathbb{E}[X_t]$
$= t \times 0 - 0 = 0$

et $(tB_t - X_t)^2 = t^2 B_t^2 - 2tB_t X_t + X_t^2$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(tB_t - X_t)^2] = \mathbb{E}[t^2 B_t^2 - 2tB_t X_t + X_t^2]$$
$$= t^2 \times t - 2t \times 0 + \frac{t^3}{3}$$
$$= \frac{4t^3}{3}$$

Exercice 2 :

$$F_t = \exp\left(-\alpha B_t + \frac{\alpha^2}{2} t\right) \quad t \geq 0$$

a) $F_t = f(t, B_t)$ avec $f : (t, x) \mapsto \exp\left(-\alpha x + \frac{\alpha^2}{2} t\right)$

On applique la 2e formule d'Itô avec f qui est bien C^1 p/r à t et C^2 p/r à x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\alpha \exp\left(-\alpha x + \frac{\alpha^2}{2} t\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \alpha^2 \exp\left(-\alpha x + \frac{\alpha^2}{2} t\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\alpha^2}{2} \exp\left(-\alpha x + \frac{\alpha^2}{2} t\right)$$

Donc

$$dF_t = -\alpha F_t \, dB_t + \frac{1}{2} \alpha^2 F_t \, dt + \frac{\alpha^2}{2} F_t \, dt$$
$$= \alpha^2 F_t \, dt - \alpha F_t \, dB_t$$
$$= F_t (\alpha^2 dt - \alpha \, dB_t)$$
$$= \alpha F_t (\alpha \, dt - dB_t)$$

b) On considère l'EDS $dY_t = r\,dt + \alpha Y_t\,dB_t$, $Y_0 = x$, $t \geq 0$

i) Etudier l'existence et l'unicité de la solut° de cette équat°

Les propriétés à vérifier sont :

a) $Y_0 = x$ $\mathbb{P}$.p.s

b) Les fonct° $t \mapsto r$ et $t \mapsto \alpha Y_t$ sont continues

c) $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \forall t \in T, \exists k \in \mathbb{R}, \ |\mu(t,x) - \mu(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k|x-y|$

d) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall t \in T, \exists C \in \mathbb{R}, \ |\mu(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1+|x|)$

et de + $\mathbb{E}[\sup_{t \in T} |X_t|^2] < \infty$.

Donc si a → d l'EDS admet une unique solut°

Grosso modo on va utiliser le Théorème (d'existence sous condit° lipschitziennes).

<u>i.e</u> Si $\exists k > 0$ tq

$* \ |b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq k|x-y| \quad \forall t \geq 0, \ x,y \in \mathbb{R}_+$ (Condit° de Lipschitz globale)

$* \ |b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq k(1+|x|) \quad \forall t \geq 0, \ x \in \mathbb{R}_+$ (Condit° de croissance linéaire)

Alors, il existe une solut° forte de $E_x(b,\sigma)$ sur $\mathbb{R}_+$

On a considéré l'EDS $dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t$

Donc dans notre cas, $dY_t = r\,dt + \alpha Y_t\,dB_t$

1 Condit° de Lipschitz globale : $|\alpha x - \alpha y| \leq k|x-y| \quad x,y \in \mathbb{R}_+$

2 Condit° de croissance linéaire : $|r| + |\alpha x| \leq k(1+|x|)$

On choisit $k = |\alpha + r|$ sous lequel les point 1 et 2 sont respectés

Donc d'après le thm précédemment énoncé, nous avons bien existence <u>et</u> unicité de la solut° de cette EDS.

ii) On applique la 3ᵉ formule d'Itô avec $f:(x,y)\mapsto xy$

Donc $d(Y_t F_t) = F_t\, dY_t + Y_t\, dF_t$

$= F_t(r\,dt + \alpha Y_t\, dB_t) + Y_t \alpha F_t(\alpha\, dt - dB_t)$

$= rF_t\, dt + \alpha Y_t F_t\, dB_t + \alpha^2 Y_t F_t\, dt - \alpha Y_t F_t\, dB_t$

$= (r + \alpha^2 Y_t) F_t\, dt$

c) Calculer $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t F_t]$

Soit $L_t = \exp(\alpha B_t - \frac{\alpha^2}{2} t)$ est une martingale car α cte

On définit alors le changement de proba $dQ = L_t\, d\mathbb{P} \Leftrightarrow d\mathbb{P} = F_t\, dQ$

$B_t F_t$ est une VA $(\mathcal{F}_t^B)$-mesurable donc $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t F_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_t]$

$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t F_t - \alpha t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_t - \alpha t]$

Par le Thm de Girsanov, sous $\mathbb{Q}$ le processus $\tilde{B}: t \mapsto B_t - \alpha t$ est un MB

$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t F_t - \alpha t] = 0$

$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t F_t] = \alpha t$

Exercice 3 :

a) ✓

b) Faux car pour la $\mathcal{F}_t^B$ mesurabilité il faudrait $2 + B_t$ MB or ce n'est pas le cas (processus gaussien non centré).

c) Faux de même que b

d) On sait que si B_t est un MB alors $\frac{1}{\sqrt{3}} B_{3t}$ est un MB

que $\forall a$, aB_t est un MB

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} B_{3t}$ est un MB ✓

e) Quest° : Est-ce que $\exp(B_t - \frac{t}{4})$ est une $(\mathcal{F}_t^B)$ martingale.

$X_t = \exp(B_t - \frac{t}{4})$ $\qquad \exp(x - \frac{t}{4})$ $\frac{\partial f}{\partial x} = \exp(x - \frac{t}{4}) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$

$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{4}\exp(x - \frac{t}{4})$

Itô

$$dX_t = \exp(B_t - \tfrac{t}{4})dB_t + \frac{1}{2}\exp(B_t - \tfrac{t}{4})dt - \frac{1}{4}\exp(B_t - \tfrac{t}{4})dt$$

$$= \frac{1}{4} X_t dt + X_t dB_t$$

$\Rightarrow X_t$ n'est pas une $\mathcal{F}_t^B$ martingale

On peut en revanche dire que $\exp(B_t - \frac{1}{2}t)$ est une $\mathcal{F}_t^B$ martingale.

Exercice 4 :

Soit $T > 0$ et M une $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$ martingale tq $dM_t = \sigma M_t dB_t \quad M_0 = 1$, σ cte

a) C'est un résultat de cours $M_t = M_0 \exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$

$= \exp(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$

Donc il est clair que $\forall t$, $M_t > 0$

b) Soit $Y_t = (M_t)^{-1} = f(M_t)$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ $\qquad f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ et $f''(x) = \frac{2}{x^3}$

Avec la 1ère formule d'Itô il vient :

$$dY_t = -Y_t^2 dM_t + \frac{1}{2} \times 2 Y_t^3 d\langle M\rangle_t$$

$$= -Y_t^2 \sigma M_t dB_t + Y_t^3 \sigma^2 M_t^2 dt$$

$$= -\sigma Y_t dB_t + \sigma^2 Y_t dt$$

$$= \sigma Y_t(\sigma dt - dB_t) = -\sigma Y_t (dB_t - \sigma dt)$$

c) $M_T = \exp(\sigma B_T - \frac{\sigma^2}{2} T)$

Soit $\mathbb{Q}$ la nouvelle proba tq $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = M_T$

Par le Thm de Girsanov,

Sous $\mathbb{Q}$, le processus $\tilde{B} : t \mapsto B_t - \sigma t$ est un MB

Donc $dY_t = -\sigma Y_t d\tilde{B}_t$ sous $\mathbb{Q}$

Or sous $\mathbb{P}$, $dM_t = \sigma M_t dB_t$ $\Rightarrow$ Y sous $\mathbb{Q}$ a m̂ loi que M sous $\mathbb{P}$

(⚠ Il y a le moins chelou)

d) $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(M_T - K)^+] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(Y_T - K)^+]$ car m̂ loi...

$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(\frac{1}{M_T} - K)^+]$

$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(1 - K(M_T)^{-1})^+ M_T^{-1}]$ $\quad M_T^{-1} = Y_T$

$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(1 - KM_T)^+]$ car changement de proba $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_t Y_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_t]$, $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Y_t$

$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[K(K^{-1} - M_T)^+]$

$= K\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[(K^{-1} - M_T)^+]$