

# TP 1 : Résolution numérique d'EDP

Techniques Numériques - M2 Actuariat

Armand Bernou

armand.bernou@univ-lyon1.fr

## Contexte

Dans cette séance, nous allons comparer plusieurs schémas numériques de résolution d'EDP pour évaluer le prix d'un contrat dépendant d'un sous-jacent stochastique. On s'intéresse à l'évaluation de fonctions de la forme

$$u(t, x) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)} f(X_T) | X_t = x],$$

où  $T > 0$  est la maturité du contrat et  $X_T$  la valeur du sous-jacent à maturité.

On rappelle que l'utilisation des deux changements de variable  $y = \ln(x)$  et  $\tau = T - t$  permet d'obtenir une EDP bien posée pour la fonction

$$v(\tau, y) = \mathbb{E}[e^{-r\tau} f(X_T) | X_{T-\tau} = e^y].$$

qui prend, sur  $[0, T] \times \mathbb{R}$ , la forme

$$\begin{cases} \partial_\tau v(\tau, y) + [r - \frac{\sigma^2}{2}] \partial_y v(\tau, y) - \frac{\sigma^2}{2} \partial_{yy}^2 v(\tau, y) = -rv(\tau, y) \\ v(0, y) = f(e^y), \end{cases} \quad y \in \mathbb{R}.$$

## 1 Schéma explicite

On rappelle que le schéma explicite mène à l'équation discrétisée

$$\begin{aligned} v_{n+1,i} &= v_{n,i} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} (v_{n,i+1} - 2v_{n,i} + v_{n,i-1}) \\ &\quad + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} (v_{n,i+1} - v_{n,i-1}) - r\Delta\tau v_{n,i} \end{aligned}$$

où  $v_{n,i}$  est l'approximation de  $v(n\Delta\tau, i\Delta y)$ , et que l'on utilise  $N$  points pour la discrétilsaiton en temps,  $M$  points pour la discrétilsaiton en espace.

- Soit  $V_n = (v_{n,0}, \dots, v_{n,M+1})^T$ . Montrer que le système précédent se réécrit  $V_{n+1} = AV_n$  où  $A$  est une matrice tri-diagonale à préciser. En particulier, quelles sont les valeurs extrêmes  $A_{0,0}$  et  $A_{M+1,M+1}$  de cette matrice ?
- On prend  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(x) = (K - x)_+$  pour simplifier. Implémenter ce schéma dans le langage de votre choix. Vérifier la convergence du schéma vers la valeur d'une option put en  $t = 0$  ( $\tau = T$ ) obtenue par la formule de Black-Scholes. On pourra utiliser les paramètres suivants :  $K = 800$ ,  $r = 0.05$ ,  $\sigma = 0.2$  et  $T = 1$ .
- Compiler le temps de calcul. Comparer les résultats obtenus (y compris le temps d'exécution) pour différentes valeurs de  $\sigma^2$ .

## 2 Schéma implicite

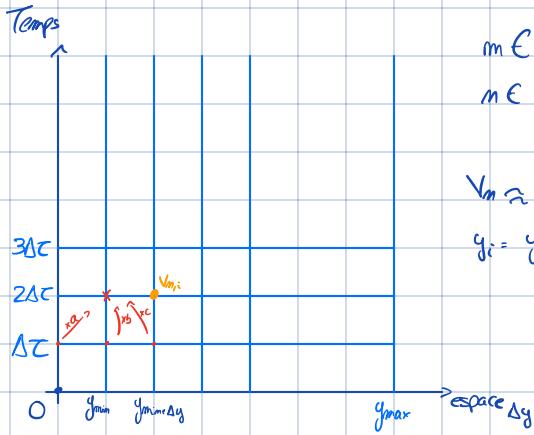
On rappelle l'équation discrétisée associée :

$$\begin{aligned} v_{n-1,i} = & v_{n,i-1} \left[ \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} \right] \\ & + v_{n,i} \left[ 1 + r\Delta\tau + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} \right] \\ & + v_{n,i+1} \left[ - \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} \right]. \end{aligned}$$

1. Soit  $V_n = (v_{n,0}, \dots, v_{n,M+1})^T$ . Montrer que le système précédent se réécrit  $BV_n = V_{n-1}$  où  $B$  est une matrice tri-diagonale à préciser. En particulier, quelles sont les valeurs extrêmes de  $B$  ?
2. Implémenter ce schéma et comparer avec la formule de Black-Scholes, pour les mêmes paramètres que précédemment.
3. Calculer le temps de calcul. Comparer les résultats obtenus avec ceux du schéma explicite.
4. Tracer, pour chacun des deux schémas, l'erreur d'approximation en fonction du nombre  $N$  de pas de temps considérés.

## 3 Schéma de Crank-Nicolson

1. Soit  $V_n = (v_{n,0}, \dots, v_{n,M+1})^T$ . Montrer que le schéma de Crank-Nicolson prend la forme  $AV_n = BV_{n+1}$ , avec  $A, B$  deux matrices dont on précisera les coefficients (dont les valeurs extrêmes).
2. Implémenter le schéma de Crank-Nicolson. Calculer le temps de calcul.
3. Comparer aux deux schémas précédent, en traçant à nouveau l'erreur d'approximation en fonction de  $N$ .
4. Comparer la stabilité des trois schémas quand  $\Delta\tau \gg \frac{\Delta y^2}{2}$ .



$$m \in \{0, \dots, M+1\}$$

$$m \in \{0, \dots, N\}$$

$$v_m \approx v(m\Delta\tau, y)$$

$$y_i = y_{\min} + i\Delta y$$

Condition de bord

$$f(x) = (k-x)_+$$

$$v(0, y) = f(e^y)$$

$$\forall \tau, v(\tau, y_{\min}) = e^{-\tau} K$$

$$v(\tau, y_{\max}) = 0$$

$$v_{m,i} = v_{m,i} \left[ 1 - n\Delta\tau - \frac{\nabla^2 \Delta\tau}{\Delta y^2} \right] + v_{m,i-1} \left[ \frac{\nabla^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} + (n - \frac{\nabla^2}{2}) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} \right] + v_{m,i+1} \left[ \frac{\nabla^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} - (n - \frac{\nabla^2}{2}) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} \right]$$

b      c      a

$$v_{m,i} = a v_{m,i+1} + b v_{m,i} + c v_{m,i-1}$$

$$= (a \ b \ c) \begin{pmatrix} v_{m,i+1} \\ v_{m,i} \\ v_{m,i-1} \end{pmatrix}$$

$$V_m = (v_{m,0}, v_{m,1}, \dots)$$

$$= A V_m$$

$$A = \begin{pmatrix} e^{-\nabla\Delta\tau} & 0 & & & \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^{-\nabla\Delta\tau} & \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_{m,0} &= e^{-\nabla\Delta\tau} K \\ &= e^{-\nabla\Delta\tau} \\ &= e^{-\nabla\Delta\tau} \underbrace{e^{-\nabla\Delta\tau(m-1)}}_{v_{m-1,0}} K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_{m,M+1} &= 0 \\ &= 0 \times v_{m-1,M+1} \end{aligned}$$

$$\text{Condition initiale: } v_{i,i} = f(e^{y_i}) = f(e^{y_{\min} + i\Delta y})$$

Paramètres

$$y_{\min} = \log(20)$$

$$y_{\max} = \log(2000)$$

$$M=300 \quad N=300$$

$$\Delta\tau = \frac{\pi}{N} \quad \Delta M = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{M}$$