Examen d'Enterprise Risk Management

Stéphane Loisel

10 janvier 2023

3 heures au total, pas de calculatrice

Les 5 questions sont indépendantes et valent 4 points chacune

1 feuille de notes personnelle, recto-verso, manuscrite (pas de photocopie)

Question 1 : ERM et incertitude sur l'impact du changement climatique en assurance

Enoncé : en 1 page et demie au global, présentez les 4 points qui vous semblent les plus importants de ce pan du cours.

Question 2 : Dépendance stochastique en assurance-finance

Enoncé : en 1 page et demie au global, présentez les 5 éléments principaux qui vous semblent les plus importants de cette partie du cours.

Question 3 : Titrisation des risques d'assurance

Enoncé : en 1 page et demie au global, présentez les 5 éléments principaux qui vous semblent les plus importants de cette partie du cours.

Question 4 : Mesures de risque et allocation de capital économique

Enoncé : en 1 page et demie au global, présentez les 5 choses à savoir qui vous semblent les plus importants de cette partie du cours.

Question 5 : Problème à résoudre sans calculatrice

Enoncé : Soit X une variable lognormale de paramètres (2 ;3) et Y une variable exponentielle de paramètre 1/5. On suppose que (X,Y) admet la copule C donnée par C= 0,5 C_1 + 0,3 C_2 + 0,2 C_3, où C_1 est la borne supérieure de Fréchet, C_2 la borne inférieure de Fréchet, et C_3 la copule Gaussienne de paramètre 0,8. Donner une estimation à 0,05 près de la probabilité conditionnelle que X soit strictement supérieur à sa médiane, sachant que Y est strictement supérieur à sa propre médiane. Justifier la réponse et expliquer votre méthode.

$\mathbb{P}(Y<y)=0.5$

$1-e^{-y/5}=0.5$

$e^{-y/5}=0.5$

$-y/5=\ln(0.5)$

$y=-5\ln(0.5)$

$\mathbb{P}(Y>-5\ln(0.5)) = 1-\mathbb{P}(Y<-5\ln(0.5))$

$= 1-[1-e^{+\cancel{5}\ln(0.5)/\cancel{5}}]$

$= 1-[1-0.5]$

$= 1-0.5$

$= 0.5$

$\mathbb{P}(X>\text{median}(X) \mid \text{——})$

$\mathbb{P}(\ln(X)>\ln(\text{median}(X)) \mid$

$\frac{\ln(m(X))-2}{\sqrt{3}}$

Question 5 : Problème à résoudre sans calculatrice

Enoncé : Soit X une variable lognormale de paramètres (2 ;3) et Y une variable exponentielle de paramètre 1/5. On suppose que (X,Y) admet la copule C donnée par C= 0,5 C_1 + 0,3 C_2 + 0,2 C_3, où C_1 est la borne supérieure de Fréchet, C_2 la borne inférieure de Fréchet, et C_3 la copule Gaussienne de paramètre 0,8. Donner une estimation à 0,05 près de la probabilité conditionnelle que X soit strictement supérieur à sa médiane, sachant que Y est strictement supérieur à sa propre médiane. Justifier la réponse et expliquer votre méthode.

$X \sim LN(2,3)$ $\quad Y \sim \mathcal{E}(1/5)$

$C = 0.5\,C_1 + 0.3\,C_2 + 0.2\,C_3$ où C_1 : borne sup Fréchet

C_2 : — inf —

C_3 : Copule gaussienne de param 0.8

$\Rightarrow C_1(u,v) = \min(u,v)$

$C_2(u,v) = \max(u+v-1, 0)$

$$\mathbb{P}(X > VaR_{1/2}(X) \mid Y > VaR_{1/2}(Y)) = 1 - \mathbb{P}(X \leq VaR_{1/2}(X) \mid Y > VaR_{1/2}(Y))$$
$$= 1 - \frac{\mathbb{P}(X \leq VaR_{1/2}(X), Y > VaR_{1/2}(Y))}{\mathbb{P}(Y > VaR_{1/2}(Y))}$$

$$\mathbb{P}(X \leq VaR_{1/2}(X), Y > VaR_{1/2}(Y)) = \underbrace{\mathbb{P}(X \leq VaR_{1/2}(X))}_{1/2} - \underbrace{\mathbb{P}(X \leq VaR_{1/2}(X), Y \leq VaR_{1/2}(Y))}_{\mathcal{C}(1/2,1/2) \sim 0.30 \pm 0.05}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X > VaR_{1/2}(Y) \mid Y > VaR_{1/2}(Y)) = 1 - \frac{1/2 - 0.30 \pm 0.05}{1/2}$$
$$= 1 - 2\left(\tfrac{1}{2} - 0.30 \pm 0.05\right)$$
$$= 1 - (1 - 0.6 \pm 0.1)$$
$$= 0.6 \pm 0.1$$

$\mathbb{P}(X > \underset{\text{médiane de } X}{VaR_{1/2}(X)}) = 1/2$ et $\mathbb{P}(Y > VaR_{1/2}(Y)) = 1/2$ par déf de la médiane

$C_1(u,v) = \min(u,v)$

$C_2(u,v) = \max(u+v-1, 0)$

pour $u = 0.5$ $v = 0.5$ $\Rightarrow C_1(u,v) = 0.5$ et $C_2(u,v) = 0$

On sait que $\underset{\text{inf}}{C_2} \leq \underset{\text{marche avec tout}}{C_3} \leq \underset{\text{sup}}{C_1}$

Pour $C_3(u,v)$ on ne peut pas calculer directement mais on peut estimer qu'avec une corrélat° positive, la proba conjointe d'être au dessus des médianes est légèrement supérieure à 0.25 (produit des proba marginale)

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X > VaR_{1/2}(X) \mid Y > VaR_{1/2}(Y)) = \frac{\mathcal{C}(u,v)}{\mathbb{P}(Y > VaR_{1/2}(Y))} = \frac{0.3}{1/2} = 0.6$$

$$\mathcal{C}(u,v) = 0.5 \times C_1(u,v) + 0.3\,C_2(u,v) + 0.2\,C_3(u,v)$$
$$\approx 0.5 \times 0.5 + 0 + 0.2 \times 0.25$$
$$\approx 0.3$$

Rappel : $\underset{\text{copule gaussienne de param } \rho}{\mathcal{C}(u_1, u_2; \rho)} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \displaystyle\int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u_2)} \exp\left(\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx\,dy$

où $\phi(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$

On veut $\underset{\rho = 0.8}{\mathcal{C}(0.5, 0.5, \rho)} = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{1-0.8^2}} \underbrace{\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} \exp\left(\frac{x^2 - 2\times 0.8\,xy + y^2}{2(1-0.8^2)}\right) dx\,dy}_{\leq 1/2}$

$$\Rightarrow \mathcal{C}(0.5, 0.5, \rho) \leq \frac{1}{2\pi\sqrt{1-0.8^2}}\,\frac{1}{2} = \frac{1}{4\pi}\,\frac{1}{\sqrt{1-0.8^2}}$$

=

$$\mathbb{P}(X > VaR_{1/2}(X) \mid Y > VaR_{1/2}(Y)) = \frac{\mathbb{P}(X > VaR_{1/2}(X), Y > VaR_{1/2}(Y))}{\underbrace{\mathbb{P}(Y > VaR_{1/2}(Y))}_{= 1/2}}$$

$$\mathbb{P}(X > VaR_{1/2}(X), Y > VaR_{1/2}(Y)) = 1 - \mathbb{P}(X \leq VaR_{1/2}(X), Y \leq VaR_{1/2}(Y))$$
$$= 1 - \mathbb{P}(F_X(X) \leq 1/2, F_Y(Y) \leq 1/2)$$

$$F_{X,Y}(x,y) = \mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y)$$
$$= \mathcal{C}(\underbrace{\mathbb{P}(X \leq x)}_{u}, \underbrace{\mathbb{P}(Y \leq y)}_{v})$$

$= 1 - \mathcal{C}(0.5, 0.5)$

$\mathcal{C}(0.5, 0.5) = 0.5\, C_1(0.5, 0.5) + 0.3 \times C_2(0.5, 0.5) + 0.2 \times C_3(0.5, 0.5)$

$C_1(0.5, 0.5) = \min(0.5, 0.5) = 0.5$ $\qquad 0.2 \times 0.5$

$C_2(0.5, 0.5) = \max(0.5 + 0.5 - 1, 0) = 0$ $\qquad \frac{2}{10} \times \frac{5}{10} \quad \frac{10}{100} = 0.1$

On sait que $C_2 \leq C_3 \leq C_1$

$\Rightarrow 0 \leq C_3(0.5, 0.5; 0.8) \leq 0.5$

$\Rightarrow 0 \leq 0.2 \times C_3(0.5, 0.5; 0.8) \leq 0.1$

On va considérer $0.2\, C_3(0.5, 0.5; 0.8) \sim 0.05$

$\Rightarrow C = 0.5 \times 0.5 + 0.05$

$= 0.30 \pm 0.05$

Question 5 : Problème à résoudre sans calculatrice

Enoncé : Soit X une variable lognormale de paramètres (2 ;3) et Y une variable exponentielle de paramètre 1/5. On suppose que (X,Y) admet la copule C donnée par C= 0,5 C_1 + 0,3 C_2 + 0,2 C_3, où C_1 est la borne supérieure de Fréchet, C_2 la borne inférieure de Fréchet, et C_3 la copule Gaussienne de paramètre 0,8. Donner une estimation à 0,05 près de la probabilité conditionnelle que X soit strictement supérieur à sa médiane, sachant que Y est strictement supérieur à sa propre médiane. Justifier la réponse et expliquer votre méthode.

$X \sim \mathcal{LN}(2;3)$ et $Y \sim \mathcal{E}(1/5)$

$$P(X > VaR_{1/2}(X) \mid Y > VaR_{1/2}(Y)) = 1 - P(X \leq VaR_{1/2}(X) \mid Y > VaR_{1/2}(Y))$$
$$= 1 - \frac{\mathbb{P}(X \leq VaR_{1/2}(X),\, Y > VaR_{1/2}(Y))}{\mathbb{P}(Y > VaR_{1/2}(Y))}$$

* $\mathbb{P}(Y > VaR_{1/2}(Y)) = 1/2$
* $\mathbb{P}(X \leq VaR_{1/2}(X),\, Y > VaR_{1/2}(Y)) = \mathbb{P}(X \leq VaR_{1/2}(X)) - \mathbb{P}(X \leq VaR_{1/2}(X),\, Y \leq VaR_{1/2}(Y))$
* $\mathbb{P}(X \leq VaR_{1/2}(X)) = 1/2$
* $\mathbb{P}(X \leq VaR_{1/2}(X),\, Y \leq VaR_{1/2}(Y)) = \mathcal{C}(\mathbb{P}(X \leq VaR_{1/2}(X)),\, \mathbb{P}(Y \leq VaR_{1/2}(Y)))$
$$= \mathcal{C}(1/2, 1/2)$$

$$\mathcal{C}(1/2, 1/2) = 0.5\, C_1(1/2, 1/2) + 0.3\, C_2(1/2, 1/2) + 0.2\, C_3(1/2, 1/2; 0.8)$$

On a $C_1(1/2, 1/2) = \min(1/2, 1/2) = 1/2$

$C_2(1/2, 1/2) = \max(1/2 + 1/2 - 1; 0) = 0$

et on a $C_2 \leq C_3 \leq C_1$

Ici $C_2 = 0$ et $C_1 = 0.5$

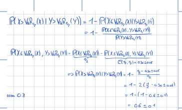
$\Rightarrow 0 \leq 0.2 \times C_3(1/2, 1/2; 0.8) \leq 0.1$

$\Rightarrow 0.2\, C_3(1/2, 1/2; 0.8) \in [0; 0.1]$

On va prendre $0.2\, C_3(1/2, 1/2, 0.8) \sim 0.05$ à 0.05 près

$\Rightarrow \mathcal{C}(1/2, 1/2) = 0.30$ à 0.05 près.

$$\Rightarrow P(X > VaR_{1/2}(X) \mid Y > VaR_{1/2}(Y)) = 1 - \frac{1/2 - 0.3}{1/2} \approx 0.6 \text{ à } 0.05 \text{ près.}$$



Examen d'Enterprise Risk Management

Stéphane Loisel

10 janvier 2023

3 heures au total, pas de calculatrice

Les 5 questions sont indépendantes et valent 4 points chacune

1 feuille de notes personnelle, recto-verso, manuscrite (pas de photocopie)

Question 1 : ERM et incertitude sur l'impact du changement climatique en assurance

Enoncé : en 1 page et demie au global, présentez les 4 points qui vous semblent les plus importants de ce pan du cours.

Question 2 : Dépendance stochastique en assurance-finance

Enoncé : en 1 page et demie au global, présentez les 5 éléments principaux qui vous semblent les plus importants de cette partie du cours.

Question 3 : Titrisation des risques d'assurance

Enoncé : en 1 page et demie au global, présentez les 5 éléments principaux qui vous semblent les plus importants de cette partie du cours.

Question 4 : Mesures de risque et allocation de capital économique

Enoncé : en 1 page et demie au global, présentez les 5 choses à savoir qui vous semblent les plus importants de cette partie du cours.

Question 5 : Problème à résoudre sans calculatrice

Enoncé : Soit X une variable lognormale de paramètres (2 ;3) et Y une variable exponentielle de paramètre 1/5. On suppose que (X,Y) admet la copule C donnée par C= 0,5 C_1 + 0,3 C_2 + 0,2 C_3, où C_1 est la borne supérieure de Fréchet, C_2 la borne inférieure de Fréchet, et C_3 la copule Gaussienne de paramètre 0,8. Donner une estimation à 0,05 près de la probabilité conditionnelle que X soit strictement supérieur à sa médiane, sachant que Y est strictement supérieur à sa propre médiane. Justifier la réponse et expliquer votre méthode.

$\mathbb{P}(Y<y) = 0.5$

$1-e^{-y/5} = 0.5$

$e^{-y/5} = 0.5$

$-y/5 = \ln(0.5)$

$y = -5\ln(0.5)$

$$\mathbb{P}(Y > -5\ln(0.5)) = 1 - \mathbb{P}(Y < -5\ln(0.5))$$
$$= 1 - [1 - e^{+\cancel{5}\ln(0.5)/\cancel{5}}]$$
$$= 1 - [1 - 0.5]$$
$$= 1 - 0.5$$
$$= 0.5$$

$\mathbb{P}(X > \text{median}(X) \mid \text{——})$

$\mathbb{P}(\ln(X) > \ln(\text{median}(X)) \mid$

$\frac{\ln(m(X))}{\sqrt{3}} - 2$