Examens Hillairet

Sujet 2017-2018

$$\begin{cases} dB(t,T) = r_t B(t,T)dt + \Gamma(t,T)B(t,T)dW_t \\ B(T,T) = 1 \end{cases}$$

Deux maturités $T^0 < T$
$S_t^0 \to ZC$ de maturité T^0
$S_t \to ZC$ de maturité T

$V_t := S_t^0 B(t,T^0) + S_t B(t,T)$ Portefeuille autofinancé
$dV_t = S_t^0 dB(t,T^0) + S_t dB(t,T)$ Condition d'autofinancement

$B_t(T^0,T)$ = Prix fixé en t que je dois payer en T^0 pour recevoir 1€ en T

1) Stratégie 1 : En t, achat du ZC de maturité T
* Coût en $t = B(t,T)$
* Flux en T : 1

Stratégie 2 : En t achat du ZC forward $B_t(T^0,T)$
* Coût en T^0 : $B_t(T^0,T)$
* Coût équivalent en t : $B_t(T^0,T) \times B(t,T^0)$
* Flux en T : 1

$\Rightarrow$ Par AOA $\boxed{B_t(T^0,T) = \dfrac{B(t,T)}{B(t,T^0)}}$

2) On applique la formule d'Itô à $f(B(t,T), B(t,T^0)) = \dfrac{B(t,T)}{B(t,T^0)}$ où $f(x,y) = \dfrac{x}{y}$

$\partial_x f = \dfrac{1}{y}$, $\partial_y f = -\dfrac{x}{y^2}$, $\partial_{xx} f = 0$, $\partial_{yy} = \dfrac{2x}{y^3}$, $\partial_{xy} f = -\dfrac{1}{y^2}$

$$\Rightarrow dB_t(T^0,T) = B_t(T^0,T)\left\{ r_t dt + \Gamma(t,T)dW_t - r_t dt - \Gamma(t,T^0)dW_t + \Gamma^2(t,T^0)dt - \Gamma(t,T)\Gamma(t,T^0)dt \right\}$$

$$= B_t(T^0,T)\left\{ \Gamma(t,T^0)\left(\Gamma(t,T^0) - \Gamma(t,T)\right)dt + \left(\Gamma(t,T) - \Gamma(t,T^0)\right)dW_t \right\}$$

$$= B_t(T^0,T)\left(\Gamma(t,T) - \Gamma(t,T^0)\right)\left\{ dW_t - \Gamma(t,T^0)dt \right\}$$

Donc $\boxed{dB_t(T^0,T) = B_t(T^0,T)\left(\Gamma(t,T) - \Gamma(t,T^0)\right)\left\{ dW_t - \Gamma(t,T^0)dt \right\}}$

3) On pose $V_t^F := \dfrac{V_t}{B(t,T^0)} = S_t^0 \times 1 + S_t \times B_t(T,T^0)$

La condition d'autofinancement étant invariante par changement de numéraire
on obtient que $\boxed{dV_t^F = S_t \, dB_t(T^0,T)}$

4) On introduit $\left.\dfrac{d\mathbb{Q}^{T^0}}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} =: Z_t$

a) Par le cours : $\boxed{Z_t = \dfrac{B(t,T^0)}{B(0,T^0)} e^{-\int_0^t r_u du} = \exp\left(-\dfrac{1}{2}\int_0^t \Gamma(u,T^0)^2 du + \int_0^t \Gamma(u,T^0)dW_u\right)}$

Par le théorème de Girsanov, $W_t^{\mathbb{Q}^{T^0}} = W_t - \Gamma(t,T^0)dt$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}^{T^0}$

b) On obtient directement que $dB_t(T^0,T) = B_t(T^0,T)\left(\Gamma(t,T) - \Gamma(t,T^0)\right)dW_t^{\mathbb{Q}^{T^0}} \Rightarrow B_t(T^0,T)$ est bien une martingale sous $\mathbb{Q}^{T^0}$

et $dV_t^F = S_t \, dB_t(T^0,T) = S_t B_t(T^0,T)\left(\Gamma(t,T) - \Gamma(t,T^0)\right)dW_t^{\mathbb{Q}^{T^0}}$ est aussi une martingale sous $\mathbb{Q}^{T^0}$

5)-6) On applique Itô à $v(t, B_t(T^0, T))$

$$dv(t, B_t(T^0,T)) = \frac{\partial v}{\partial t}(t, B_t(T^0,T))\,dt + \frac{\partial v}{\partial x}(t, B_t(T^0,T))\,dB_t(T^0,T) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t, B_t(T^0,T))B_t^2(T^0,T)\left(\Gamma(t,T)-\Gamma(t,T^0)\right)^2 dt$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x}(t, B_t(T^0,T))\,dB_t(T^0,T)$$

$$dV_t^F = \delta_t\, dB_t(T^0,T)$$

D'où par identification

$$\boxed{\begin{aligned} \delta_t &= \frac{\partial v}{\partial x}(t, B_t(T^0,T)) \\ \delta_t^0 &= \frac{V_t - \delta_t B(t,T)}{B(t,T^0)} = V_t^F - \delta_t B_t(T^0,T) = v(t, B_t(T^0,T)) - \frac{\partial v}{\partial x}(t, B_t(T^0,T))\, B_t(T^0,T) \end{aligned}}$$

7) Evaluation d'un caplet

$[T^0, \underset{T^0+\Theta}{T}]$ Payoff d'un caplet : $\Theta(L(T^0,\Theta)-k)^+$ payé en $T^0+\Theta = T$

a) $$\boxed{P_0 = \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_0^T r_u du}\,\Theta(L(T^0,\Theta)-k)^+\right] = B(0,T)\,\mathbb{E}^{Q^T}\left[\Theta(L(T^0,\Theta)-k)^+\right]}$$

b) Astuce Utiliser le taux forward linéaire comme sous-jacent

$$P_0 = B(0,T)\,\mathbb{E}^{Q^T}\left[\Theta\left(L(T^0,\Theta)-k\right)^+\right],$$
$$= B(0,T)\,\mathbb{E}^{Q^T}\left[\left(\Theta L(T^0,\Theta) - k\Theta\right)^+\right]$$

on sait que $1+\Theta L_t(T^0, T^0+\Theta) = \dfrac{1}{B_t(T^0,T^0+\Theta)} = \dfrac{B(t,T^0)}{B(t,T^0+\Theta)}$ => $1+\Theta L_t(T^0,T^0+\Theta)$ est une Q^T-martingale

i.e $$\frac{d\left(1+\Theta L_t(T^0,T^0+\Theta)\right)}{1+\Theta L_t(T^0,T^0+\Theta)} = \left(\Gamma(t,T^0)-\Gamma(t,T)\right)dW_t^{Q^T}$$

D'où $$P_0 = B(0,T)\,\mathbb{E}^{Q^T}\left[\left(1+\Theta L(T^0,\Theta) - (1+k\Theta)\right)^+\right]$$

$$1+\Theta L(T^0,\Theta) = \frac{1}{B(T^0,T)} = \frac{B(T^0,T^0)}{B(T^0,T)} = 1+\Theta L_{T^0}(T^0,\Theta)$$

$$= B(0,T)\,\mathbb{E}^{Q^T}\left[\left(1+\Theta L_{T^0}(T^0,\Theta) - \tilde{k}\right)^+\right],\quad \tilde{k} = 1+k\Theta$$

$$= B(0,T)\left(\frac{B(0,T^0)}{B(0,T)}N(d_1) - \tilde{k}\,N(d_2)\right)$$

$$= B(0,T^0)N(d_1) - \tilde{k}\,B(0,T)N(d_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_0 = B(0,T^0)N(d_1) - \tilde{k}\,B(0,T)N(d_2)}$$

$$\boxed{d_{1,2} = \frac{\ln\left(\dfrac{B(0,T^0)}{B(0,T)\tilde{k}}\right) \pm \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^T \left(\Gamma(u,T^0)-\Gamma(u,T)\right)^2 du}{\sqrt{\displaystyle\int_0^T \left(\Gamma(u,T^0)-\Gamma(u,T)\right)^2 du}}}$$

Sujet 2016-2017

Exercice 5

1) Modèle de Vasicek : $dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$

- k : Vitesse de retour à la moyenne
- θ : Moyenne de long terme
- σ : Volatilité du taux court

2) Contrat qui paie $f(T, r_T)$ en T. Le prix de ce contrat en t est $\Pi_t = u(t, r_t)$

① On applique Itô à $u(t, r_t)$

$$du(t,r_t) = \frac{\partial u}{\partial t}(t,r_t)dt + \frac{\partial u}{\partial r}(t,r_t)dr_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}(t,r_t)\sigma^2 dt$$

$$= u'_t(t,r_t)dt + u'_r(t,r_t)\left(k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t\right) + \frac{1}{2}u''_{rr}(t,r_t)\sigma^2 dt$$

$$= \left(u'_t(t,r_t) + k(\theta - r_t)u'_r(t,r_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 u''_{rr}(t,r_t)\right)dt + \sigma u'_r(t,r_t)\,dW_t$$

Par autofinancement on doit avoir $d\Pi_t = r_t \Pi_t dt + \Pi_t \Gamma(t,T)dW_t$

Ainsi u doit satisfaire l'EDP suivante

$$\boxed{\begin{array}{l} u'_t(t,r) + k(\theta - r)u'_r(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 u''_{rr}(t,r) - r\,u(t,r) = 0 \\ u(T, r_T) = f(T, r_T) \end{array}}$$

Par identification, la volatilité de Π_t est donnée par $\boxed{\Gamma(t,T) = \sigma\,\frac{u'_r(t,r_t)}{u(t,r_t)}}$

Exercice 6

1) $$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t dt + \Gamma(t,T)dW_t^Q$$

2) a) $$L_t(T,\theta) = \frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{B_t(T,T+\theta)} - 1\right) \quad \text{où} \quad B_t(T,T+\theta) = \frac{B(t,T+\theta)}{B(t,T)}$$

$$= \frac{1}{\theta}\left(\frac{B(t,T)}{B(t,T+\theta)} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{L_t(T,\theta)B(t,T+\theta) = \frac{1}{\theta}\left(B(t,T) - B(t,T+\theta)\right)}$$

b) $$e^{-\int_0^t r_s ds}L_t(T,\theta)B(t,T+\theta) = \frac{1}{\theta}\left(e^{-\int_0^t r_s ds}B(t,T) - e^{-\int_0^t r_s ds}B(t,T+\theta)\right)$$

Or comme $B_t := e^{\int_0^t r_s ds}$ est le numéraire associé à la probabilité risque neutre Q

$\left(e^{-\int_0^t r_s ds}B(t,T)\right)_t$ et $\left(e^{-\int_0^t r_s ds}B(t,T+\theta)\right)_t$ sont des Q-martingales

$$\boxed{\text{Ainsi } \left(e^{-\int_0^t r_s ds}L_t(T,\theta)B(t,T+\theta)\right)_t \text{ est bien une martingale sous } Q \text{ comme différence de deux martingales}}$$

c) Définissons : $\boxed{\left.\dfrac{dQ^{T+\theta}}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_t} = \dfrac{B(t,T+\theta)}{B(0,T+\theta)}\, e^{-\int_0^t r_s ds} := Z_t}$

Soit $s \leq t$. D'après b) on a

$$\mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_0^t r_s ds} L_t(T,\theta) B(t,T+\theta) \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = e^{-\int_0^s r_u du} L_s(T,\theta) B(s,T+\theta)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}^{Q}\left[\frac{e^{-\int_0^t r_u du} B(t,T+\theta)}{B(0,T+\theta)} L_t(T,\theta) \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = \frac{e^{-\int_0^s r_u du} B(s,T+\theta)}{B(0,T+\theta)} L_s(T,\theta)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}^{Q}\left[Z_t L_t(T,\theta) \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = Z_s L_s(T,\theta)$$

$$\underset{\text{(Bayes)}}{\Leftrightarrow} Z_s \mathbb{E}^{Q^{T+\theta}}\left[L_t(T,\theta) \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = Z_s L_s(T,\theta)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}^{Q^{T+\theta}}\left[L_t(T,\theta) \,\middle|\, \mathcal{F}_s \right] = L_s(T,\theta)$$

$\boxed{\text{Donc } (L_t(T,\theta))_t \text{ est bien une martingale sous } Q^{T+\theta}}$

3) Evaluation d'un caplet

Payoff à l'échéance $T+\theta$ du caplet : $\theta\left(L(T,\theta)-k\right)^+$

a) $$P_0 = \mathbb{E}^{Q}\left[e^{-\int_0^{T+\theta} r_u du} \theta\left(L(T,\theta)-k\right)^+ \right]$$

$$= B(0,T+\theta)\, \mathbb{E}^{Q^{T+\theta}}\left[\theta\left(L(T,\theta)-k\right)^+ \right]$$

b) D'après ce qui précède, $L_t(T,\theta)$ est une martingale sous $Q^{T+\theta}$, de plus $1+\theta L_t(T,\theta) = \dfrac{B(t,T)}{B(t,T+\theta)}$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{d(1+\theta L_t(T,\theta))}{1+\theta L_t(T,\theta)} = \left(\Gamma(t,T)-\Gamma(t,T+\theta)\right) dW_t^{Q^{T+\theta}}}$$

c) Hypothèse importante : $\Gamma(t,T)$ continue et déterministe

$$P_0 = B(0,T+\theta)\, \mathbb{E}^{Q^{T+\theta}}\left[\left(1+\theta L(T,\theta) - \tilde{k}\right)^+ \right] \quad \text{où} \quad \tilde{k} = 1+k\theta$$

$$= B(0,T+\theta)\, \mathbb{E}^{Q^{T+\theta}}\left[\left(1+\theta L_T(T,\theta) - \tilde{k}\right)^+ \right]$$

$$= B(0,T+\theta)\left(\frac{B(0,T)}{B(0,T+\theta)} N(d_1) - \tilde{k} N(d_2) \right)$$

$$\boxed{P_0 = B(0,T+\theta) N(d_1) - \tilde{k} B(0,T+\theta) N(d_2)}$$

où $$\boxed{d_{1,2} = \frac{\ln\left(\dfrac{B(0,T)}{\tilde{k} B(0,T+\theta)} \right) \pm \dfrac{1}{2} \int_0^T \left(\Gamma(u,T)-\Gamma(u,T+\theta)\right)^2 du}{\int_0^T \left(\Gamma(u,T)-\Gamma(u,T+\theta)\right)^2 du}}$$

Sujet 2020-2021

$$\begin{cases} dB(t,T) = \mu(t,T)\,dt + \Gamma(t,T)\,B(t,T)\,dW_t \\ B(T,T) = 1 \end{cases}$$

1)a) On sait que sous $\mathbb{Q}$, $\left(e^{-\int_0^t r_u du} B(t,T)\right)_t$ doit être une martingale

$$d\left(e^{-\int_0^t r_u du} B(t,T)\right) = -r_t B(t,T)\, e^{-\int_0^t r_u du} dt + e^{-\int_0^t r_u du} dB(t,T)$$

$$= \left(-r_t B(t,T) + \mu(t,T)\right) dt + e^{-\int_0^t r_u du}\, \Gamma$$