Rappel :

Information complète :
Chaque joueur connait :
- ses possibilités d'actions
- les possibilités d'action des autres joueurs
- les gains résultants de ces actions
- les motivations des autres joueurs

Information parfaite :
Chaque joueur à une connaissance parfaite de toute l'histoire du jeu au moment de prendre une décision.

<u>Exercice 1 :</u> Dilemme du prisonnier

1) Les composantes du jeu :

- Le jeu est non coopératif (ils ne se mettent pas d'accord sur le choix de la stratégie) ;
- il est simultané et non répété (pas de représailles en cas de déviance) ;
- il est à information complète (les deux joueurs connaissent les règles) ;
- mais imparfaite (au moment de prendre ça décision le joueur ne connait pas la décision de l'autre) ;
- N=2.

Jeux sous forme normale :

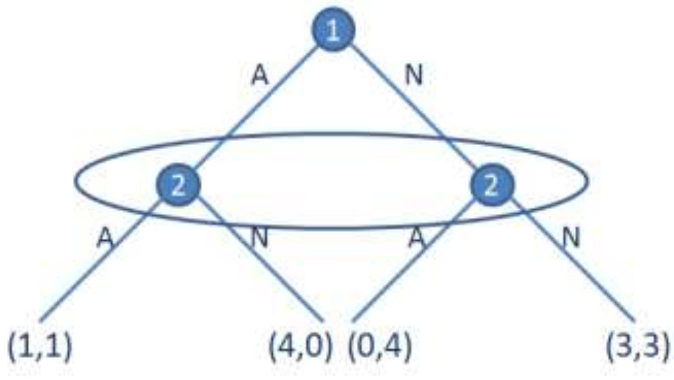
$$N = \{1; 2\}$$
$$S_1 = S_2 = \{nier; avouer\} = \{n; a\}$$
$$Profils\ de\ stratégies\ possibles: S = S_1 \times S_2 = \{(n,n); (a,a); (a,n); (n,a)\}$$
$$Paiements:$$
$$U_1(n,n) = U_2(n,n) = 3$$
$$U_1(a,a) = U_2(a,a) = 1$$
$$U_1(a,n) = U_2(n,a) = 4$$
$$U_1(n,a) = U_2(a,n) = 0$$

Matrice de paiement :

$J1 \backslash J2$	A	N
A	(1,1)	(4,0)
N	(0,4)	(3,3)

(Remarque : du point de vue de l'optimum social, on voit l'intérêt à jouer (N,N), or chaque joueur a une incitation individuelle à dévier).

Jeux sous forme extensive :



2) Equilibre en stratégies dominantes et équilibre de Nash du jeu.

Une stratégie est dominante pour un joueur si la stratégie est choisie par le joueur quelque soit les stratégies des autres joueurs.

$$Si\ J_2\ joue\ A\ ; S_1^*(A) = A\ \ car\ \mathrm{U}_1(\mathrm{A},\mathrm{A}) = 1 \geq \mathrm{U}_1(\mathrm{N},\mathrm{A}) = 0$$

$$Si\ J_2\ joue\ N\ ; S_1^*(N) = A\ \ car\ \mathrm{U}_1(\mathrm{A},\mathrm{N}) = 4 \geq \mathrm{U}_1(\mathrm{N},\mathrm{N}) = 3$$

Ainsi peu importe ce que joue le joueur 2, 1 à toujours intérêt à jouer la stratégie Avouer. La stratégie « avouer » et donc une stratégie dominante pour le joueur 1. Les paiements étant symétriques le même raisonnement peut s'appliquer pour le joueur 2. Ainsi l'équilibre de Nash de ce jeu est (A, A) c'est un équilibre de Nash parfait.

Pourquoi parfait ? Car ne comprend qu'une seule stratégie, il n'est pas composé de probabilité de jouer telle ou telle stratégie.

Rappel définition équilibre de Nash : Un équilibre de Nash est un ensemble de stratégies tel que pour chaque joueur sa stratégie et la meilleure réponse étant donné les stratégies, appartenant à l'équilibre, des autres. Personne n'a intérêt à dévier. Ici $S_1^*(A) = A\ et\ S_2^*(A) = A$.

<u>Exercice 2 :</u> Bataille des sexes et jeu de coordination

1) Les composantes du jeu :

- Le jeu est simultané, non répété et non coopératif ;
- L'information est complète et imparfaite ;
- N=2

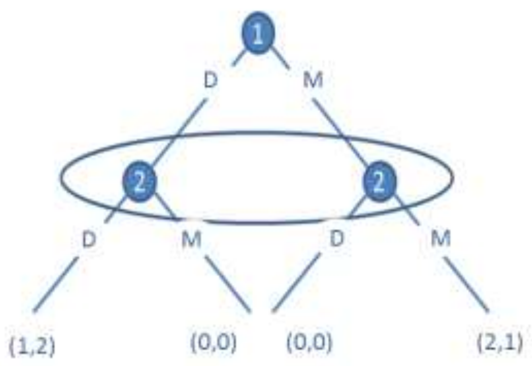
Jeu sous forme normale :

$$N = \{1;2\}$$
$$S_1 = S_2 = \{match; danse\} = \{m; d\}$$
$$Profils\ de\ stratégies\ possibles: S = S_1 \times S_2 = \{(m,m);(d,d);(m,d);(d,m)\}$$
$$Paiements:$$
$$U_1(m,m) = U_2(d,d) = 2$$
$$U_1(d,d) = U_2(m,m) = 1$$
$$U_1(m,d) = U_2(d,m) = U_1(d,m) = U_2(m,d) = 0$$

Matrice de paiement :

$J1\backslash J2$	D	M
D	(1,2)	(0,0)
M	(0,0)	(2,1)

Forme extensive :



2) Le plus important pour les deux joueurs est de se coordonner mais chacun d'eux a une préférence contrastée avec celle de l'autre. Bien que les deux souhaitent se coordonner, ils arrivent toujours à des résultants conflictuels (problème de coordination). Ainsi, aucune stratégie n'est strictement dominée ou dominante.

3)

$$Si\ J_2\ joue\ D\ ; S_1^*(D) = D\ \ car\ \mathrm{U_1(D, D)} = 1 \geq \mathrm{U_1(M, D)} = 0$$

$$Si\ J_2\ joue\ M\ ; S_1^*(M) = M\ \ car\ \mathrm{U}_1(M, M) = 2 \geq \mathrm{U}_1(D, M) = 0$$

Et

$$Si\ J_1\ joue\ D\ ; S_2^*(D) = D\ \ car\ \mathrm{U_2(D, D)} = 2 \geq \mathrm{U_2(M, D)} = 0$$

$$Si\ J_1\ joue\ M\ ; S_2^*(M) = M\ \ car\ \mathrm{U}_2(M, M) = 1 \geq \mathrm{U}_2(D, M) = 0$$

➔ Pas d'équilibre en stratégie dominante !

Remarque : on peut mentionner le fait il y a deux équilibres de Nash $(M, M)\ et\ (D, D)$ dans ce jeu.

En effet : $S_1^*(D) = D\ et\ S_2^*(D) = D$ et $S_1^*(M) = M\ et\ S_2^*(M) = M$

Ainsi, tout jeu qui comporte deux (ou plus) équilibres de Nash en stratégie pure comprend aussi un équilibre de Nash en stratégie mixtes. Attention l'inverse n'est pas vrai !

Comment déterminer l'équilibre de Nash mixte ? On pondère chaque stratégie par une probabilité de la choisir. Et nous devons déterminer les probabilités d'équilibre.

Supposons que J_1 joue D avec proba p et M avec proba $(1 - p)$ et J_2 joue D avec proba q et M avec proba $(1 - q)$.

Nous avons donc :

$$U_1(D, pD + (1 - p)M) = p \times 1 + (1 - p) \times 0 = p$$

$$U_1(M, pD + (1 - p)M) = p \times 0 + (1 - p) \times 2 = 2(1 - p)$$

De même on a :

$$U_2(qD + (1 - q)M, M) = q \times 0 + (1 - q) \times 1 = (1 - q)$$

$$U_2(qD + (1 - q)M, D) = q \times 2 + (1 - q) \times 0 = q$$

On se pose la question suivante : Pour quelle valeur de p le joueur 1 joue toujours M ?

$$U_1(M, pD + (1 - p)M) > U_1(D, pD + (1 - p)M) \Leftrightarrow 2 - 2p > p \Leftrightarrow p < \frac{3}{2}$$

Ainsi pour $p < \frac{3}{2}$ nous avons $q = 0$ et $p = \frac{3}{2}$ indifférent entre jouer $M\ ou\ D$ et si $p > \frac{2}{3} q = 1$;

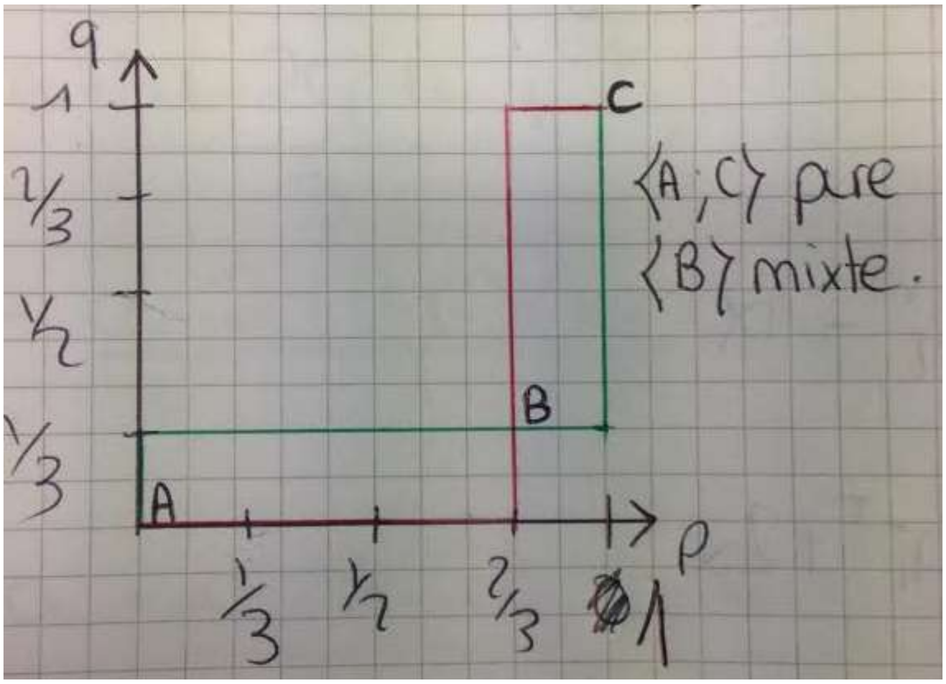
On a donc $S_1^* = q^*(p) = \begin{cases} 1 \; si \; p > \frac{2}{3} \\ (0,1) \; si \; p = \frac{2}{3} \\ 0 \; si \; p < \frac{2}{3} \end{cases}$

De même : Pour quelle valeur de q le joueur 2 joue toujours M ?

$$U_2(qD + (1-q)M, M) > U_2(qD + (1-q)M, D) \Leftrightarrow 1 - q > 2q \Leftrightarrow q < \frac{1}{3}$$

On a donc $S_2^* = p^*(q) = \begin{cases} 1 \; si \; q > \frac{1}{3} \\ (0,1) \; si \; q = \frac{1}{3} \\ 0 \; si \; q < \frac{1}{3} \end{cases}$

On a donc les deux fonctions de réactions des joueurs et le ou les équilibre(s) Nash mixte(s) sont tous les cordonnées (p, q) tel que les fonctions de réactions se croisent.



Ainsi, l'équilibre en stratégie mixte de ce jeu est : $(\frac{1}{3}D + \frac{2}{3}M, \frac{2}{3}D + \frac{1}{3}M)$

4) Le jeu est toujours simultané, non répété et non coopératif. L'information est toujours complète et imparfaite. N=2.

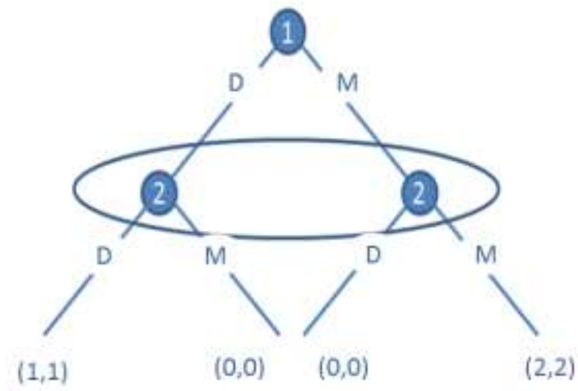
Jeu sous forme normale :

$$N = \{1; 2\}$$
$$S_1 = S_2 = \{match; danse\} = \{m; d\}$$
$$Profils\ de\ stratégies\ possibles: S = S_1 \times S_2 = \{(m,m); (d,d); (m,d); (d,m)\}$$
$$Paiements:$$
$$U_1(m,m) = U_2(m,m) = 2$$
$$U_1(d,d) = U_2(d,d) = 1$$
$$U_1(m,d) = U_2(d,m) = U_1(d,m) = \mathrm{U}_2(m,d) = 0$$

Matrice de paiement :

$J1 \backslash J2$	D	M
D	(1,1)	(0,0)
M	(0,0)	(2,2)

Forme extensive :



Les joueurs peuvent se coordonner en choisissant(M, M), les intérêts ne sont pas conflictuels.