Examen Théorie des Valeurs Extrêmes 2012-2013

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice - 2h00

Question de cours (6 points):

Répondre aux questions suivantes de manière la plus littérale possible, c'est-à-dire avec le minimum de mathématique.

1. Qu'est-ce que la propriété de max-stabilité? Est-ce que les lois suivantes sont max-stables:

$$\begin{array}{lll} \text{Fréchet :} & F(x) = & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & \text{si } x > 0. \end{cases} \\ \text{Exponentielle :} & F(x) = & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ 1 - \exp\{-x\} & \text{si } x > 0. \end{cases} \\ \text{Gumbel :} & \Lambda(x) = & \exp\{-e^{-x}\} \qquad x \in \mathbb{R} \end{array}$$

2. <u>Domaine d'attraction et max-stabilité:</u>

(a) Qu'est-ce que le domaine d'attraction d'une loi max-stable?

(b) A quel domaine d'attraction appartient la loi de Pareto?

(c) Est-ce que deux distributions qui ont des comportements de leur fonction de survie identiques pour des grandes valeurs peuvent appartenir à deux domaines d'attraction différents?

(d) Comment utilise-t-on un graphique Quantile-Quantile pour identifier le domaine d'attraction d'une distribution?

3. Les distributions Pareto généralisées GPD(β, ξ) sont définies par

$$G^p_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} 1 - [1 + \xi(x/\beta)]_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ 1 - e^{-x/\beta} & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Rappeler leur domaine de définition. Quelle est la propriété principale de ces distributions? Quel lien existe-t-il avec les distributions max-stables?

Exercice 1 (4 points):

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID.

1. Montrer que s'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(\max(-X_1, \ldots, -X_n) \leq a_n x + b_n) = H(x)$$

pour une fonction de distribution H non-dégénérée, alors il existe deux suites (c_n) et (d_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(\min(X_1, \ldots, X_n) \leq c_n x + d_n) = 1 - H(-x).$$

Quelles relations existe-t-il entre les suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n)?

2. On rappelle que les distributions des extrêmes généralisées (GEV) sont caractérisées par les fonctions de répartition

$$G_\xi(x) = \exp\left(-(1+\xi x)_+^{-1/\xi}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Caractériser alors les distributions limites possibles pour le minimum de variables aléatoires indépendantes.

3. Montrer qu'elles sont min-stables et donner les coefficients de normalisation.

Exercice 2 (5 points):

Soient $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID, $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

0. Soit $\bar{F} = 1 - F$. Montrer que, pour deux suites (a_n) et (b_n), et une fonction de répartition H, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{ll} 1) & \lim_{n\to\infty} \Pr\left(M_n \le a_n x + b_n\right) = H(x), \\ 2) & \lim_{n\to\infty} n\bar{F}\left(a_n x + b_n\right) = -\ln H(x). \end{array}$$

1. Soit N une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ, indépendante des X_i.

(a) Montrer que

$$\Pr\left(M_N \le x\right) = \exp\left(-\lambda\left(1 - F(x)\right)\right).$$

On rappelle que $\Pr\left(N = n\right) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Supposons que N_n une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ_n. Quelle condition faut-il mettre sur λ_n pour que

$$\frac{M_{N_n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{L} H$$

quand $n \to \infty$?

2. Soit N une variable aléatoire Géométrique de paramètre q, indépendante des X_i.

(a) Montrer que

$$\Pr\left(M_N \le x\right) = \frac{qF(x)}{1 - (1-q)F(x)}.$$

On rappelle que $\Pr\left(N = n\right) = q(1-q)^{n-1}$, $n \ge 1$.

(b) Supposons que N_n une variable aléatoire Géométrique de paramètre q_n. Est-il possible de trouver q_n telle que

$$\frac{M_{N_n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{L} H$$

quand $n \to \infty$?

3. Quelle conclusion tirez-vous de cet exercice?

Exercice 3 (5 points):

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution de Fréchet de paramètre 1, i.e. $\Pr(X_1 \leq x) = \exp\left(-x^{-1}\right)$.

0. Donner les constantes a_n et b_n telles que

$$\frac{\max(X_1, ..., X_n) - b_n}{a_n} \overset{L}{=} X_1.$$

On définit le processus max-autoregressif de la manière suivante:

$$Y_i = \max\left(\alpha Y_{i-1}, (1-\alpha)X_i\right)$$

avec $0 \leq \alpha < 1$.

1. Montrer que si $Y_i = \max_{j\geq 0} \alpha^j (1-\alpha) X_{i-j}$ alors Y_{i+1} a la même distribution que Y_i. Il s'agit de la distribution stationnaire. Montrer que cette distribution est la distribution de Fréchet de paramètre 1.

2. Montrer que

$$\Pr\left(\max(Y_1, ..., Y_n) \leq x\right) = \Pr\left(Y_1 \leq x, (1-\alpha)\, X_2 \leq x, \ldots, (1-\alpha)\, X_n \leq x\right).$$

3. En déduire que

$$\Pr\left(\max(Y_1, ..., Y_n) \leq x\right) = \exp\left(-\left[1 + (1-\alpha)\,(n-1)/x\right]\right)$$

et que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{\max(Y_1, ..., Y_n) - b_n}{a_n} \leq x\right) = \exp\left(-\,(1-\alpha)\, x^{-1}\right).$$

4. Pour quelle valeur de α les lois asymptotiques des maxima des X_i et des Y_i normalisés coïncident?