Chapitre 6

Extensions du modèle de Black et Scholes

On a démontré la formule d'évaluation de Black et Scholes au chapitre précédent :

Proposition 6.1 *Soit $F_r(t,x)$ la fonction :*

$$F_r(t,x) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\left(xe^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}U} - K\right)_+\right)$$

où U est une variable aléatoire gaussienne, centrée, réduite sous $\hat{\mathbb{P}}$. Alors

$$F_r(t,x) = x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

où $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et où

$$d_1 = \frac{ln\frac{x}{K} + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Exercice : Calculer les primes d'un CALL et d'un PUT européen sur une action valant 500€ , de prix d'exercice 520€ et de maturité 90 jours. On prendra un taux continu annuel r égal à $4,88\%$ et une volatilité égale à 40%.

Réponse : Attention, il faut exprimer T en années, donc $T = \frac{90}{365}$. Et on trouve $C = 33,58$€ et $P = 47,36$€ .

Le présent chapitre propose plusieurs extensions de la formule de Black et Scholes à des modélisations où les sous-jacents sont autres qu'une action ne versant pas de dividendes.

I Sous-jacent versant une rémunération

Le versement d'une rémunération (="droit") se traduit par une baisse instantanée de leur valeur au moment du détachement du droit. Les options ne sont jamais protégées contre le versement des droits. Par conséquent, toutes choses étant égales par ailleurs, la valeur du CALL diminue et celle du PUT augmente avec le montant du ou des droits distribués avant l'échéance T. Nous étudions d'abord le cas d'une action versant un dividende continu, puis le cas d'une action versant un dividende discret versé à une date unique.

1 Modèle à dividende continu

Le processus de prix $(S_t)_{t\geq 0}$ est supposé suivre l'EDS de BS

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t d\hat{X}_t$$

où $(\hat{W}_t)_t \geq 0$ est un mouvement brownien standard sous la probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$.

1ère question : Sous la probabilité risque neutre, quelle doit Ãªtre la tendance du processus $(S_t)_{t\geq 0}$? Si l'action ne versait pas de dividende, $\mu = r$ le taux sans risque. Mais cela change si le support verse une rémunération.
En effet, sur un intervalle de temps dt, l'action verse un flux de dividende d'un montant $cS_t dt$ où c est le taux de rémunération (constant ici) sur la période $[t, t+dt]$. Ainsi, la rémunération totale R_t du placement en action durant la période $[t, t+dt]$ résulte du gain en capital dS_t et du dividende $cS_t dt$:

$$dR_t = \frac{dS_t + cS_t dt}{S_t} = \frac{dS_t}{S_t} + cdt$$

La rentabilité instantanée dR_t est la somme du taux de plus-value $\frac{dS_t}{S_t}$ et du taux de dividende sur la période cdt. Soit

$$dR_t = (\mu + c)dt + \sigma d\hat{W}_t.$$

Dans l'univers risque-neutre, l'espérance de rentabilité de tous les placements doit Ãªtre égale au taux sans risque. Ici l'espérance de rentabilité de ce placement est $(\mu + c)$. d'où on en déduit

$$\mu + c = r \text{ ou encore } \mu = r - c$$

Donc pour modéliser la valeur S_t d'une action versant un coupon continu au taux c, on utilise la dynamique suivante, sous la probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$:

$$dS_t = (r - c)S_t dt + \sigma S_t d\hat{X}_t$$

dont la solution s'écrit :

$$S_T = S_t e^{\left(r-c-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\left(\hat{W}_T - \hat{W}_t\right)}$$

Dans l'univers risque-neutre, le taux de croissance du sous-jacent est égale au taux sans risque r diminué du taux de coupon c. Le versement d'un dividende diminue la croissance de la valeur boursière de l'action, mais pas la rentabilité globale du placement.

Ce modèle est appelé modèle de Merton. On peut adapter le raisonnement fait pour obtenir la formule de Black et Scholes à ce modèle, le raisonnement restant identique, et on obtient la formule suivante :

Proposition 6.2 (Modèle de Merton pour un actif versant un dividende continu) *Soient un CALL et un PUT européens, de prix d'exercice K, de maturité T, sur une action de prix S_t versant un taux de dividende continu constant c. r le taux sans risque est supposé constant, et σ la volatilité du sous-jacent aussi.*
Les valeurs du CALL et du PUT sont données par :

$$C(t, S_t) = S_t e^{-c(T-t)} \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2),$$

$$P(t, S_t) = K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2) - S_t e^{-c(T-t)} \mathcal{N}(-d_1),$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r - c + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Preuve : L'évaluation par espérance sous la probabilité risque-neutre permet d'écrire la formule d'évaluation du CALL :

$$\begin{aligned}
[\cancel{rcl}]C(t, S_t) &= \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left((S_t - K)_+ e^{-r(T-t)}\right) \\
&= e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\max\left(S_t e^{\left(r-c-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\left(\hat{W}_T - \hat{W}_t\right)} - K, 0\right)\right) \\
&= e^{-c(T-t)} e^{-(r-c)(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\max\left(S_t e^{\left(r-c-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}U} - K, 0\right)\right) \\
&= e^{-c(T-t)} F_{(r-c)}(t, S_t)
\end{aligned}$$

et on retrouve la fonction d'évaluation de Black et Scholes, mais avec $r-c$ à la place de r. D'où

$$C(t, S_t) = e^{-c(T-t)}\left[S_t \mathcal{N}(d_1) - K e^{-(r-c)(T-t)} \mathcal{N}(d_2)\right].$$

Avec d_1 et d_2 les quantités calculées avec $r-c$ au lieu de r. D'où la formule cherchée. Pour le prix du PUT, il suffit d'utiliser la formule du CALL et la relation de parité CALL-PUT en présence de dividende :

$$C_t - P_t = e^{-c(T-t)} S_t - K e^{-r(T-t)}.$$

Exercice : Calculer les primes du CALL et du PUT européens de l'exercice précédent sur une action valant 500€ , de prix d'exercice 520€ et de maturité 90 jours, en supposant ccette fois que l'action verse un dividende continu de taux $c = 3\%$. On prendra toujours un taux continu annuel r égal à $4,88\%$ et une volatilité égale à 40%.
Réponse : On trouve $C = 31,82$€ et $P = 49,29$€ . On retrouve bien que la prime du CALL diminue et la prime du PUT augmente avec le versement d'un dividende.

Remarque : Le modèle à dividende continu est utile dans différents contextes (options sur indices, options sur devises, options longues,...) où le taux est effectivement continu, ou bien lorsque de nombreux versements ou dividendes sont attendus avant l'échéance de l'option et peuvent Ãªtre plus ou moins facilement représentés/modélisés par un flux continu.

Cependant les actions cotées versant un dividende annuel (ou mÃªme trimestriel souvent aux Etats-Unis), dont le montant est connu quelques mois auparavant, rendent nécessaire la modélisation pour un dividende discret.

2 Modèle à dividende discret

On note S_t le prix de l'action support, t la date à laquelle on opère l'évaluation, D la valeur du dividende à percevoir à une date $\tau^* \in]t, T[$, et D^* la valeur actualisée en t du dividende à recevoir.

Proposition 6.3 (Modèle pour un actif versant un dividende discret) *Soient un CALL et un PUT européens, de prix d'exercice K, de maturité T, sur une action de prix S_t versant un dividende entre t et T dont la valeur actualisée en t est notée D^*. r le taux sans risque est supposé constant, et σ la volatilité du sous-jacent aussi. L'évaluation s'opère à l'aide des formules de Black et Scholes dans lesquelles S_t est remplacé par $S_t - D^*$. Les valeurs du CALL et du PUT sont données par :*

$$C(t, S_t) = (S_t - D^*)\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2),$$

$$P(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - (S_t - D^*)\mathcal{N}(-d_1),$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t - D^*}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Preuve : On rappelle la relation de parité CALL-PUT pour les dividendes discrets :

$$C_t - P_t = (S_t - D^*) - Ke^{-r(T-t)}.$$

Soit ϕ la stratégie qui consiste à acheter en t une action S_t et à emprunter D^* jusqu'en τ (donc sur une durée $\tau - t$). L'action est conservée jusqu'en T et en τ le dividende sert à rembourser l'emprunt.
En t l'investissement correspondant à la valeur du portefeuille est

$$V_\phi(t) = S_t - D^*$$

En τ on rembourse l'emprunt de valeur D par le versement du dividende, aucun flux ne sort du portefeuille, aucun flux ne rentre, le portefeuille reste bien autofinancé. Et en T, l'action seule est détenue au final, elle a pour valeur S_T, donc le portefeuille vaut

$$V_\phi(T) = S_T$$

Si on considère que le portefeuille ϕ est alors un portefeuille fictif, on un fonds, ne versant pas de dividende, on peut évaluer un CALL européen, de strike K, de maturité T sur une part du fonds ϕ, qui vaut $(S_t - D^*)$ en t et S_T en T. Cela nous donne les formules voulues. Or le payoff d'une telle option est en T égal à $(S_T - K)_+$, qui est le mÃªme que celui d'un CALL européen écrit directement sur S. Les deux options ont donc mÃªme valeur à l'instant final, elles onnt mÃªme valeur à tout instant, d'où les formules.

Remarque : Ce raisonnement s'étend au cas du versement de plusieurs dividendes à plusieurs dates $D_1, D_2, ..., D_N$ à $\tau_1, \tau_2, ..., \tau_N$ comprises entre t et T. Il suffit que D^* soit égal à la valeur actualisée de l'ensemble des dividendes prévus à la date d'évaluation.

Exercice : Calculer cette fois-ci les primes du CALL et du PUT européens de l'exercice précédent sur une action valant 500€ , de prix d'exercice 520€ et de maturité 90 jours, en supposant que l'action verse un dividende de 14€ dans 53 jours (valeur actualisée 13, 90€). On prendra toujours un taux continu annuel r égal à 4, 88% et une volatilité égale à 40%.
Réponse : On trouve $C = 27,23$€ et $P = 54,91$€ . On retrouve encore que la prime du CALL diminue et la prime du PUT augmente avec le versement d'un dividende.

II Options sur matières premières

Ce cas peut Ãªtre traité à partir du modèle de Merton car une matière première fonctionne techniquement comme un actif versant un dividende continu. En effet, il existe ce qu'on appelle un *convenience yield* c qui traduit à la fois l'éventuel avantage de disposer physiquement de la matière première, le coÃ»t de stockage et la liquidité du marché (stocks disponibles attendus dans le futur,...). Le *convenience yield* qui peut donc Ãªtre positif ou négatif en fonction des divers coÃ»t/bénéfices de l'investissement, fonctionne techniquement comme un dividende algébrique qui diminuerait (lorsqu'il est positif) l'espérance de croissance du prix de la matière première.

La dynamique risque-neutre du prix S_t d'une matière première est donc généralement représentée dans l'univers risque-neutre comme solution de l'EDS :

$$dS_t = (r - c)S_t dt + \sigma S_t d\hat{W}_t$$

où r est le taux sans risque, c le *convenience yield* et σ la volatilité, tous supposés constants.

Ainsi, les formules d'évaluation précédentes de Merton peuvent également Ãªtre utilisées dans le cas des options sur matières premières. Notons cependant que souvent les options sur matières premières sont écrites sur des prix *futures* et non pas sur les cours comptant des actifs considérés. Or le résultat de Merton n'est valable que sur des actifs évalués au comptant. Pour les contrats sur prix *futures*, voir plus loin la formule de Black (on n'aura alors pas à tenir compte du *convenience yield*).

III Options sur taux de change

On peut également évaluer les options sur taux de change par la formule de Merton.
Il suffit d'écrire la dynamique risque-neutre du taux de change et de montret que cette dynamique est similaire à celle d'une action versant un dividende continu. Ce modèle est appelé **modèle de Garman et Kohlagen** (1983).

On note cette fois S_t le taux de change (= la valeur d'une unité de monnaie étrangère, exprimée en monnaie domestique). On note r_f le taux sans risque (rémunération des prÃªts/emprunts) étranger (*foreign*), et r_d le taux sans risque domestique.
Dans le modèle de Black et Scholes, sous la probabilité risque-neutre, S_t suit l'EDS :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t d\hat{X}_t$$

où $(\hat{W}_t)_t \geq 0$ est un mouvement brownien standard sous la probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$.

Question : Sous la probabilité risque neutre, quelle doit Ãªtre la tendance du taux de change $(S_t)_{t\geq 0}$?
On construit un portefeuille autofinancé π de la manière suivante : en $t = 0$, une unité monétaire domestique est changée contre $\frac{1}{S_0}$ monnaie étrangère, placée au taux dans risque r_f.
L'encours du portefeuille π en monnaie étrangère en t est donc $\frac{1}{S_0}e^{r_f t}$. Exprimé en monnaie domestique, cela donne :

$$\pi_t = \frac{S_t}{S_0}e^{r_f t}$$

On applique la formule d'ItÃ´, et on obtient :

$$d\pi_t = \frac{1}{S_0}e^{r_f t}dS_t + r_f\frac{S_t}{S_0}e^{r_f t}dt$$

soit

$$\frac{d\pi_t}{\pi_t} = \frac{dS_t}{S_t} + r_f dt$$

D'où en remplaÃ§ant dS_t par sa valeur :

$$\frac{d\pi_t}{\pi_t} = (\mu + r_f)dt + \sigma d\hat{W}_t$$

On utilise la propriété selon laquelle tout portefeuille autofinancé libellé en monnaie domestique a une tendance risque neutre égale à r_d pour en déduire :

$$\mu + r_f = r_d \text{ ou encore } \mu = r_d - r_f.$$

Ainsi, sous la probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$, le taux de change S qui exprime le prix de la monnaie étrangère en monnaie domestique est régi par l'EDS :

$$dS_t = (r_d - r_f)S_t dt + \sigma S_t d\hat{W}_t,$$

la tendance risque-neutre du taux de change étant égale à la différence entre le taux domestique et le taux étranger.

Le taux étranger fonctionne ainsi pour le taux de change comme un taux de dividende. Il suffit d'appliquer les résultats de la formule du modèle de Merton, en remplaÃ§ant r par r_d et c par r_f pour obtenir le résultat de Garman-Kohlagen :

Proposition 6.4 (Modèle de Garman-Kohlagen pour une option sur taux de change) *Soient un CALL et un PUT européens, de prix d'exercice K, de maturité T, sur un taux de change S_t, r_f désignant le taux sans risque étranger, et r_d le taux sans risque domestique, et σ la volatilité.*
Les valeurs du CALL et du PUT sont données par :

$$C(t, S_t) = S_t e^{-r_f(T-t)} \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r_d(T-t)} \mathcal{N}(d_2),$$

$$P(t, S_t) = K e^{-r_d(T-t)} \mathcal{N}(-d_2) - S_t e^{-r_f(T-t)} \mathcal{N}(-d_1),$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \text{ et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

De plus la relation de parité s'écrit :

$$C_t - P_t = S_t e^{-r_f(T-t)} - K e^{r_d(T-t)}.$$

IV Options sur contrat à terme

Certains produits optionnels sont définis sur des contrats futures. C'est particulièrement le cas sur les matières premières, pour lesquelles il n'existe presque pas d'options sur les marchés organisés d'options écrites sur des prix au comptant (pour des raisons de temps de livraison par exemple).

Sous la probabilité risque-neutre $\hat{\mathbb{P}}$, le prix de cotation d'un contrat *future*, sans spécifier la nature du sous-jacent, suit une martingale. En effet, en supposant la volatilité constante, on peut écrire :

$$\frac{dF_t^{T'}}{F_t^{T'}} = \sigma d\hat{W}t$$

où $F_t^{T'}$ désigne le prix de cotation en t d'un contrat *future* d'échéance T' et $(\hat{W}t)_{t\geq 0}$ représente un mouvement brownien standard sous $\hat{\mathbb{P}}$.

Remarque : ce résultat est vrai pour un prix *forward* quand celui-ci est égal au prix *future* (i.e. dans le cas de taux déterministes) mais faux quand les 2 prix sont différents (i.e. dans le cas de taux stochastiques).

Si on considère un CALL (PUT) européen sur *future*, de maturité $T \leq T'$, ayant pour payoff final $(F_T^{T'} - K)_+$ (ou $(K - F_T^{T'})_+$ pour un PUT), il suffit alors d'appliquer les résultats des propositions précédentes en remplaÃ§ant c par r pour annuler la tendance risque-neutre. On obtient la relation de parité CALL-PUT et la formule d'évaluation de Black.

Proposition 6.5 (Modèle de Black pour une option sur contrat *future*) *Soient un CALL et un PUT européens, de prix d'exercice K, de maturité T, sur un contrat à terme d'échéance T' dont le prix de cotation en t est $F_t^{T'}$. Le taux sans risque r*

et σ la volatilité sont supposés constants.
Les valeurs du CALL et du PUT sont données par :

$$C(t, F_t^{T'}) = e^{-r(T-t)} \left(F_t^{T'} \mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2) \right),$$

$$P(t, F_t^{T'}) = e^{-r(T-t)} \left(K\mathcal{N}(-d_2) - F_t^{T'} \mathcal{N}(-d_1) \right),$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln \frac{F_t^{T'}}{K} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \textit{et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

De plus la relation de parité s'écrit :

$$C_t - P_t = e^{-r(T-t)}(F_t^{T'} - K).$$

Remarque : la valeur de l'option sur contrat *future* ne dépend pas du fait que le support verse un dividende, contrairement à l'option sur action elle-mÃªme. L'impact de l'éventuel versement de dividende est intégré dans le prix à terme par rapport au prix comptant.

V Volatilité variable

La formule de Black et Scholes est obtenue sous l'hypothèse d'une volatilité constante du titre sous-jacent. Elle peut s'étendre au cas où la volatilité est variable (mais déterministe).
Supposons que la dynamique risque-neutre de S est donnée par

$$dS_t = rS_t dt + \sigma_t d\hat{W}_t$$

Proposition 6.6 *Lorsque la volatilité de S_t est une fonction σ_t déterministe du temps, le logarithme du rapport $\frac{S_T}{S_t}$ suit une loi gaussienne de variance $v_s = \int_t^T \sigma_s^2 ds$ et de moyenne $m_s = r(T-t) - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 ds$.*
En appelant $\bar{\sigma}_t$ la volatilité moyenne du support entre t et T

$$\bar{\sigma}_t^2 = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_s^2 ds = \frac{v_s}{T-t}$$

on a

$$S_T = S_t e^{\left(r - \frac{\bar{\sigma}_t^2}{2}\right)(T-t) + \bar{\sigma}_t\sqrt{T-t}U} \quad , \textit{où } U \sim N(0,1)$$

Dans le cas où la volatilité du support n'est pas constante mais est déterministe, et en notant $\bar{\sigma}_t$ la volatilité moyenne du support entre t et T, les modèles de type Black et Scholes précédents restent valables, à condition de remplacer σ par $\bar{\sigma}_t$. On peut ainsi généraliser les formules d'évaluation.