L3 actuariat

Exercice 1

On envisage une entreprise en concurrence parfaite dont la fonction de production s'écrit :

$y = x_1^{1/3} x_2^{1/3}$ où y, x_1 et x_2 désignent respectivement le volume de production et les quantités des deux facteurs utilisés 1 et 2. Les prix unitaires des facteurs sont égaux à l'unité et on note *p* le prix du bien produit. On raisonne à long terme, les deux facteurs sont donc variables

1- Déterminez la fonction de coût total. En déduire la fonction d'offre de l'entreprise et la demande pour chaque facteur en fonction de *p*.
2- Retrouvez les résultats de la question 1 par un calcul direct c'est à dire sans passer par la fonction de coût total.

Exercice 2

Une firme offre son produit sur un marché concurrentiel, elle est caractérisée par la fonction de profit Π (p,ω)

$$\Pi(p,\omega) = A.\left(\omega_1^{-\alpha/1-v}\right)\left(\omega_2^{-\beta/1-v}\right)\left(p^{1/1-v}\right)$$

où v =α+ β, où 0<α<1 et 0< β<1et A une constante positive
v=α+β<1
ω_1, ω_2 représentent les prix respectifs des inputs 1 et 2
p le prix de l'output

1-Déterminez les fonctions de demande d'inputs x_1^* et x_2^*
2- Déterminer la fonction d'offre d'output y* et en déduire la fonction de coût marginal de la firme.

Correction

Exercice 1

1- On va déterminer les fonctions de demande de facteurs en minimisant le coût de production pour un volume de production y donné (Les prix unitaires des facteurs sont égaux à l'unité).

$$\underset{x_1,x_2}{\text{Min}}\, x_1 + x_2$$

$$\text{Sous les contraintes}\begin{cases} y \le x_1^{1/3} x_2^{1/3} \\ x_1, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

Rq :Il n'y a pas de solutions en coin, à l'optimum chaque facteur sera demandé en quantité strictement positive. Par ailleurs, la contrainte associée au niveau de production à atteindre est saturée (condition d'efficience) dès lors que la production est croissante en chacun des facteurs des facteurs de production et que les facteurs de production ont un prix strictement positif.

On peut écrire Le lagrangien du programme de minimisation des coûts :

$$L(x_1,x_2,\lambda) = x_1 + x_2 + \lambda(y - x_1^{1/3}x_2^{1/3})$$

CPO :

$$\frac{\delta L(x_1,x_2,\lambda)}{\delta x_1} = 1 - \frac{\lambda}{3}x_1^{-2/3}x_2^{1/3} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\delta L(x_2,x_2,\lambda)}{\delta x_2} = 1 - \frac{\lambda}{3}x_2^{-2/3}x_1^{1/3} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\delta L(x_1,x_2,\lambda)}{\delta \lambda} = y - x_1^{1/3}x_2^{1/3} = 0$$

$$\Rightarrow y = x_1^{1/3}x_2^{1/3} \quad (3)$$

Avec (1) et (2) on trouve $x_1 = x_2$

En utilisant (3) on obtient :

$$x_1 = x_2 = y^{3/2}$$

les fonctions de demande des deux facteurs :

$$x_1(\omega_1,\omega_2,y) = y^{3/2}$$

$$x_2(\omega_1,\omega_2,y) = y^{3/2}$$

où ω_1,ω_2 représentent les prix des facteurs de production (ici égaux à1)

Rq Avec les CPO (1) et (2) on a que le TMST (x_1,x_2) = rapport des prix des facteurs à l'optimum
La CPO(3) correspond à la condition d'efficience

On en déduit la <u>fonction de coût total de long terme</u> (les prix des facteurs sont égaux à l'unité):

$$CT(\omega_1,\omega_2,y) = y^{3/2} + y^{3/2}$$

Pour déterminer la fonction d'offre on détermine le seuil de rentabilité qui dans le cas du long terme où tous les facteurs sont variables est égal au seuil de fermeture. Il n'y a plus de coûts fixes (Tous les coûts sont variables en longue période).
Le coût moyen :

$$CM(\omega_1,\omega_2,y) = \frac{y^{3/2} + y^{3/2}}{y} = 2y^{1/2}$$

Le coût moyen est toujours croissant .

$$\frac{\delta 2y^{1/2}}{\delta y} = 0 \text{ pour y } = 0$$

Le seuil de rentabilité (minimum du coût moyen) est donc égal à CM(0)=0

Ce qui signifie que quelque soit le prix de vente *p*, l'entreprise va toujours produire

La quantité qui maximise le profit est définie par l'égalité du prix *p* et du coût marginal :

$$Cm(\omega_1,\omega_2,y) = 3y^{1/2}$$

Le prix *:*

$$p = 3y^{1/2}$$

La fonction d'offre de long terme est donc *y(p)*

$$y(p) = \frac{p^2}{9}$$

La demande exprimée sur les marchés des facteurs de production est obtenue en remplaçant *y* par la quantité choisie par l'entreprise (c'est à dire la quantité définie par la fonction d'offre) dans les fonctions de demande de facteurs :

$$x_1 = x_2 = \left(\frac{p^2}{9}\right)^{3/2} = \frac{p^3}{27}$$

2- Le problème de maximisation du profit (recette totale – coût total) s'écrit :

$$\max_{x_1,x_2} py - (x_1\omega_1 + x_2\omega_2) \text{ sc } x_1,x_2 \geq 0 \; et \; y = x_1^{1/3}x_2^{1/3}$$

En remplaçant *y* par sa valeur en fonction de x_1 et x_2 donnée par la fonction de production on obtient un problème où les seules variables sont x_1 et x_2,

Maximiser $px_1^{1/3}x_2^{1/3} - x_1 - x_2$

$x_1,x_2 \geq 0$

En négligeant les conditions de signes qui seront effectivement satisfaites pour la solution trouvée, on a alors un simple problème de maximisation d'une fonction à deux variables à x_1 et x_2.

$$\frac{\delta\Pi(x_1, x_2, p)}{\delta x_1} = \frac{p}{3} x_1^{-2/3} x_2^{1/3} - 1 = 0$$

et

$$\frac{\delta\Pi(x_1, x_2, p)}{\delta x_2} = \frac{p}{3} x_2^{-2/3} x_1^{1/3} - 1 = 0$$

ce qui implique que:

$$x_1^{-2/3} x_2^{1/3} = \frac{3}{p}$$

$$x_2^{-2/3} x_1^{1/3} = \frac{3}{p}$$

$$d'où\ x_1^{-2/3} x_2^{1/3} = x_2^{-2/3} x_1^{1/3} = \frac{3}{p}$$

c'est à dire que $x_1 = x_2 = \left(\frac{3}{p}\right)^{-3} = \frac{p^3}{27}$

et $y = x_1^{1/3} x_2^{1/3} = \frac{p^2}{9}$

Exercice 2

1°- La fonction de profit ne dépend que des prix et des paramètres de la technologie de production. On peut appliquer le lemme de Hotelling

La dérivée partielle de la fonction de profit par rapport au prix de l'input w permet d'obtenir directement (au signe près) la <u>fonction de demande de l'input</u> soit :- x(p,w)

$$-x_1^* = \frac{\partial \Pi}{\delta \omega_1}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\delta \omega_1} = \left(-\frac{A\alpha}{1-v}\right)\omega_1^{\frac{-(1-\beta)}{1-v}}\omega_2^{\frac{-\beta}{1-v}}p^{\frac{1}{1-v}}$$

$$\Leftrightarrow x_1^* = \frac{A\alpha}{1-v}.\omega_1^{\frac{-(1-\beta)}{1-v}}.\omega_2^{\frac{-\beta}{1-v}}.p^{\frac{1}{1-v}}$$

et

$$-x_2^* = \frac{\partial \Pi}{\delta \omega_2}$$

$$\Leftrightarrow x_2^* = \frac{A\beta}{1-v}.\omega_2^{\frac{-(1-\alpha)}{1-v}}.\omega_1^{\frac{-\alpha}{1-v}}.p^{\frac{1}{1-v}}$$

2) On peut déterminer la fonction d'offre du producteur à partir du lemme de hotelling la dérivée de $\Pi(p,w)$ par rapport à p .Il s'agit de la fonction d' offre d'output y* de la firme qui maximise son profit au prix (p,w)

$$y^* = \frac{\partial \Pi}{\delta p}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\delta p} = \left(\frac{A}{1-v}\right)p^{\frac{v}{1-v}}\omega_1^{\frac{-\alpha}{1-v}}\omega_2^{\frac{-\beta}{1-v}} = y^*$$

Pour trouver l'expression de la fonction de coût marginal de longue période on va exprimer la fonction d'offre inverse du producteur c'est à dire en fonction du prix $p(y^*)$ (cf le cours)

$$p(y^*) = (y^*)^{\frac{1-v}{v}}\underbrace{\left[\frac{1-v}{A}\omega_1^{\frac{\alpha}{1-v}}\omega_2^{\frac{\beta}{1-v}}\right]^{\frac{1-v}{v}}}_{Z}$$

$$p(y^*) = (y^*)^{\frac{1-v}{v}}.Z = Cm(Y)$$

où Z est une constante indépendante du niveau de production