Examen Théorie des Valeurs Extrêmes 2012-2013
Seconde session

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice

Question de cours (6 points):

1. Quel est l'intérêt de la Théorie des valeurs extrêmes et quelles sont ces utilisations pratiques?

2. Qu'appelle-t-on une distribution à queue épaisse et comment l'identifie-t-on dans la pratique?

3. Quel lien relie les distributions GEV (Generalised Extreme Value distibutions) et les distributions GPD (Generalised Pareto distributions)?

4. Quelles sont les procédures statistiques à utiliser pour estimer les paramètres des distributions GEV (discuter suivant la nature des observations)?

Exercice 1 (3 points):

On définit la loi de

$$\text{Fréchet } (\alpha > 0): \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & \text{si } x > 0, \end{cases} .$$

Soient $X, X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. de Fréchet de paramètre α.

1. Quelle est la limite de $\max(X_1, \ldots, X_n)$ quand $n \to \infty$?

2. Montrer que

$$n^{-1/\alpha} \max(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{d}{=} X.$$

Qu'en concluez vous?

Exercice 2 (4 points):

Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. de loi absolument continue et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

1. Montrer que

$$\Pr(M_n > M_{n-1}) = \mathbb{E}\left[\bar{F}^{n-1}(X_1)\right] = n^{-1}.$$

2. On définit le temps du premier record de la manière suivante :

$$L = \inf\{j > 1 : M_j > X_1\}.$$

Montrer que si $y > x$

$$\Pr(X_L > y | X_1 = x) = \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)}.$$

Indication: décomposer la probabilité par rapport aux valeurs possibles de L.

Exercice 3 (7 points):

Supposons que Y a une distribution Pareto Généralisée GPD(σ, ξ) ($\xi \neq 0$) telle que

$$P(Y < y) = 1 - \left[1 + \xi \left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}.$$

1. Donner le domaine de définition de Y, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de réalisation possibles de la variable aléatoire Y.

2. De quelle loi connue s'agit-il lorsque $\xi = -1$? Est-il possible de définir une loi si $\xi = 0$?

3. Donner la densité de cette loi. Peut-on trouver des expressions analytiques pour l'estimateur du maximum de vraisemblance de (σ, ξ).

4. Montrer que si $U \sim U[0, 1]$, alors

$$Y \sim \sigma \left(\frac{U^{-\xi} - 1}{\xi}\right).$$

Donner une procédure pour simuler une loi GPD(σ, ξ).

5. Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution F et soit $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Montrer que si, lorsque $u \to x^F = \sup\{x : F(x) < 1\}$

$$\frac{X - u}{a(u)} | X > u \xrightarrow{L} GPD(1, \xi),$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \begin{cases} \exp\left(-[1 + \xi x]_+^{-1/\xi}\right) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{si } \xi = 0, \end{cases},$$

avec $a_n = a(b_n)$ et $b_n = F^{-1}(1 - n^{-1})$.