ISFA, Université Claude Bernard - Lyon 1
M2 Actuariat, TD3
Finance Mathmatique

Exercice 1 On considère une obligation qui verse un coupon régulier de montant $C > 0$ à des dates fixées T_i, $i = 1, \cdots, n$.

1. Donner la valeur O_t de cette obligation à une date $t \in [0, T_1)$.

On considère maintenant une option Call qui est écrite sur cette obligation dont la maturité est $T < T_1$ et le strike est $K > 0$.

2. Écrire la fonction payoff de cette option Call.
3. Écrire son prix Π_0 à la date $t = 0$ sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$.
4. On désigne par $\mathcal{E}$ l'ensemble $\{O_T \geq K\}$. Re-écrire le prix Π_0 en utilisant $1_{\mathcal{E}}$ sous la probabilité $\mathbb{P}^*$.
5. On considère un modèle de taux d'intérêt affine où le prix de l'obligation zéro-coupon $B(t,T)$ est donné sous forme $B(r_t, t, T) = A(t,T)e^{-r_t C(t,T)}$ qui est une fonction décroissante de taux court r_t avec $A(t,T)$ et $C(t,T)$ des fonctions déterministe positive. Montrer qu'il existe une constante r_K telle que $\mathcal{E} = \{r_T \leq r_K\}$.
6. Soient P^{T_i} et $\mathbb{P}^T$ les probabilités forwardes associées aux obligations zéro-coupon de maturité T_i et T respectivement. Montrer que, en utilisant les probabilités forwardes, le prix de Call peut s'crire sous forme

$$\Pi_0 = \sum_{i=1}^{n} CB(0, T_i)\mathbb{P}^{T_i}(\mathcal{E}) - KB(0,T)\mathbb{P}^T(\mathcal{E})$$

Exercice 1 :

On considère une obligation qui verse un montant régulier C à T_i $i = 1, \dots, n$

1) Donner la valeur de cette obligation.

$$O_t = \sum_{i=1}^{t} C\, B(t, T_i) \qquad \text{avec } B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

On considère une option CALL dont le sous-jacent est l'obligation, la maturité est T, le strike est K

2) Ecrire payoff.

$$C_T = (O_T - K)_+$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{T} C\, B(T, T_i) - K\right)_+$$

3) $\Pi_t = S_t^0\, \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{X}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t\right]$ où $S_t^0 = e^{\int_0^t r_s ds}$ $\quad S_0^0 = 1$

$$\Pi_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{X}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_0\right] \qquad \mathcal{F}_0 : \text{tribu triviale}$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{X}{S_T}\right] \qquad \mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[\cdot]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\underbrace{e^{-\int_0^T r_s ds}}_{\text{discount facteur}} \underbrace{X}_{\text{payoff}}\right]$$

$$\Rightarrow \Pi_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[e^{-\int_0^T r_s ds} (O_T - K)^+\right]$$

4) $\mathcal{E} = \{O_K \geq K\}$

$$\Rightarrow \Pi_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[e^{-\int_0^T r_s ds} (O_T - K) \mathbb{1}_{\mathcal{E}}\right] \qquad \text{car } (O_T - K)_+ = (O_T - K)\mathbb{1}_{\{O_T \geq K\}}$$

5) Modèle Affine :

Réviser pricer Vasicek pour OZC exam → audio

On considère $B(t,T)$ est de la forme $B(r_t, t, T) = A(t,T) e^{-r_t C(t,T)}$

où $\left.\begin{matrix} A(t,T) \\ C(t,T) \end{matrix}\right\}$ fonct° déterministes positives $\Rightarrow e^{-r_t C(t,T)} \searrow$ en r_t

$\Rightarrow B(r_t, t, T)$ est $\searrow$ en r_t

Mq $\mathcal{E} = \{O_T \geq K\} = \{r_T \leq r_K\}$

Par Q1, $O_T = \sum_{i=1}^{m} C\, B(T, T_i)$

$$\Rightarrow \{O_T \geq K\} = \left\{\sum_{i=1}^{m} C\, B(T, T_i) \geq K\right\}$$

$$\Rightarrow \{O_T \geq k\} = \{\underbrace{c\sum_{i=1}^{m} A(T,T_i)\, e^{-r_T C(T,T_i)}}_{O_T = O(r_T)} \geq k\}$$ où $O(x) = c\sum_{i=1}^{m} A(T,T_i)\, e^{-x C(T,T_i)}$ qui est encore une fonct° ↘ de x

$$= \{O(r_T) \geq k\}$$

$$= \{r_T \leq \underbrace{O^{-1}(k)}_{r_k}\}$$

6) Mq le prix du CALL est donné par :

$$\Pi_0 = \sum_{i=1}^{m} c B(0,T_i)\, \mathbb{P}^{T_i}(\mathcal{E}) - k B(0,T)\, \mathbb{P}^{T}(\mathcal{E})$$

Par $\underline{Q4}$, $\Pi_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[e^{-\int_0^T r_s ds}(O_T - K)\mathbb{1}_{\mathcal{E}}]$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0}(O_T - k)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0} O_T] - k\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0}]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0}\sum_{i=1}^{m} c B(T,T_i)] - k\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0}]$$

$$= c\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0} B(T,T_i)] - k\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0}]$$

On fait le changement de proba forward

$$\frac{d\mathbb{P}^{T_i}}{d\mathbb{P}^*}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{B(T,T_i)}{\xrightarrow{\text{cash}} S_T^0} \times \underbrace{\frac{S_0^0}{B(0,T_i)}}_{\text{normalisat° car martingale} \Rightarrow \mathbb{E}[\text{Martingale}] = \text{Martingale}_0 = 1} = \frac{B(T,T_i)}{S_T^0 B(0,T_i)}$$ ← densité Radon-Nikodym

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0} B(T,T_i)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_i}}[\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}^{T_i}}\Big|_{\mathcal{F}_T} \frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0} B(T,T_i)]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_i}}[\frac{S_T^0 B(0,T_i)}{B(T,T_i)}\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0} B(T,T_i)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_i}}[\mathbb{1}_{\mathcal{E}}\underbrace{B(0,T_i)}_{\text{prix à } t=0,\ \mathcal{F}_0\text{-mes.} \Rightarrow \text{cte}}] = B(0,T_i)\,\mathbb{P}^{T_i}(\mathcal{E})$$

$$\frac{d\mathbb{P}^{T}}{d\mathbb{P}^*}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{B(T,T)}{S_T^0} \times \frac{S_0^0}{B(0,T)} = \frac{1}{S_T^0 B(0,T)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T}}[\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}^{T}}\Big|_{\mathcal{F}_T}\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0}]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_i}}[S_T^0 B(0,T)\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[\mathbb{1}_{\mathcal{E}}\underbrace{B(0,T)}_{\text{prix à } t=0}] = B(0,T)\,\mathbb{P}^{T}(\mathcal{E})$$

Exercice 1 :

1) $O_t = \sum_{i=1}^{m} cB(t,T_i) \quad t \in [0, T_1[$

2) $Payoff_T = (O_T - k)_+$

3) $\Pi_t = \mathbb{E}[e^{-\int_t^T r_s ds} Payoff_T \,|\, \mathcal{F}_t]$

$\Rightarrow \Pi_t = \mathbb{E}[e^{-\int r_s ds} (O_T - k)_+ \,|\, \mathcal{F}_t]$

$= \mathbb{E}[\frac{S_t^0}{S_T^0} (O_T - k)_+ \,|\, \mathcal{F}_t]$ avec $S_t^0 = e^{\int_0^t r_s ds}$

$\Rightarrow \Pi_0 = \mathbb{E}_{P^*}[\frac{1}{S_T^0} (O_T - k)_+]$ car $\mathcal{F}_0$ tribu triviale

4) $\mathcal{E} = \{O_T > k\}$

$\Pi_0 = \mathbb{E}_{P^*}[\frac{1}{S_T^0} (O_T - k) \mathbb{1}_{\mathcal{E}}]$

$= \mathbb{E}_{P^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0} O_T] - k\,\mathbb{E}_{P^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0}]$

5) $B(r_t, t, T) = A(t,T) e^{-r_t C(t,T)}$

$\Rightarrow \{O_T \geq k\} = \{\sum_{i=1}^{m} cB(T,T_i) \geq k\}$

$= \{\underbrace{c \sum_{i=1}^{m} A(T,T_i) e^{-r_T C(T,T_i)}}_{O(r_T)} \geq k\}$

avec $O : x \mapsto c \sum_{i=1}^{m} A(T,T_i) e^{-x C(T,T_i)}$ qui est strict $\searrow$ en x

$= \{O(r_T) \geq k\}$

$= \{r_T \leq \underbrace{O^{-1}(k)}_{r_K}\}$

6) $\Pi_0 = \mathbb{E}_{P^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0} O_T] - k\,\mathbb{E}_{P^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0}]$

$= c \sum_{i=1}^{m} \mathbb{E}_{P^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0} B(T,T_i)] - k\,\mathbb{E}_{P^*}[\frac{\mathbb{1}_{\mathcal{E}}}{S_T^0}]$

$\frac{dP^{T_i}}{dP^*}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{B(T,T_i)}{S_T^0} \times \frac{S_0^0}{B(0,T_i)} = \frac{B(T,T_i)}{S_T^0 B(0,T_i)}$

$\frac{dP^T}{dP^*}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{B(T,T) \times S_0^0}{S_T^0 B(0,T)} = \frac{1}{S_T^0 B(0,T)}$

$\Rightarrow \Pi_0 = c \sum \mathbb{E}_{P^{T_i}}[\mathbb{1}_{\mathcal{E}} B(0,T_i)] - k\,\mathbb{E}_{P^T}[\mathbb{1}_{\mathcal{E}} B(0,T)]$

$= c \sum B(0,T_i) P^{T_i}(\mathcal{E}) - k B(0,T) P^T(\mathcal{E})$