Done

M2 "Probabilités et Finance" Sorbonne Université *Année 2022 – 2023*
"Introduction aux processus de diffusion" (L.Zambotti)

Chapitre VII. Équations différentielles stochastiques

Exercice 1. Considérons une solution X de l'EDS $E_x(\sigma, b)$ en dimension 1.

(1) Soit $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\frac{1}{2}s''\sigma^2 + s'\, b = 0$. Montrer que $(s(X_t),\, t \geq 0)$ est une martingale locale continue. La fonction s est appelée une **fonction d'échelle** de X.

(2) On suppose que σ est continue et que s' et σ ne s'annulent pas. Soient $a < x < b$ des réels, et soit $T_{a,b} := \inf\{t \geq 0 :\, X_t \notin \,]a,\, b[\,\}$ (avec $\inf \varnothing := \infty$).

Montrer que $\mathbb{P}^x(T_{a,b} < \infty) = 1$ (on pourra utiliser le Théorème de Dubins-Schwarz), et que (en utilisant des formules analogues pour le MB)

$$\mathbb{P}^x\{X_{T_{a,b}} = a\} = \frac{s(b) - s(x)}{s(b) - s(a)}, \qquad \mathbb{P}^x\{X_{T_{a,b}} = b\} = \frac{s(x) - s(a)}{s(b) - s(a)}.$$

Exercice 2. (1) Soit $X := (X_t,\, t \geq 0)$ solution de $E(\sigma, b)$ à valeurs dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ un réel. Soit $f :\, D \subset \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $\mathscr{L} f = \lambda f$, où $(\mathscr{L} f)(x) := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) + \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. Montrer que $(f(X_t)\, \mathrm{e}^{-\lambda t},\, t \geq 0)$ est une martingale locale continue.

(2) Soit $B := (B^1,\, B^2,\, B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$, issu de $B_0 := a \in \mathbb{R}^3\backslash\{0\}$. Soit $X := |B|^2$, où $|B|$ désigne la norme euclidienne de B. Montrer que X est solution d'une EDS $E(\sigma, b)$ dont on précisera les coefficients σ et b.

(3) On suppose désormais $\lambda \geq 0$. Montrer que $2tg''(t) + 3g'(t) = \lambda g(t)$, $t > 0$, pour $g(t) = \frac{\mathrm{e}^{\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$ ou $g(t) := \frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$.

(4) Soit $f(t) = \frac{\mathrm{sh}(\sqrt{2\lambda t})}{\sqrt{2\lambda t}}$, $t > 0$. Montrer que $M_t := f(X_t)\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$ est une martingale locale.

(5) Soient $x > |a|^2$ et $T_x := \inf\{t \geq 0 \,:\, X_t = x\}$. En utilisant la martingale locale $M_t := f(X_t)\, \mathrm{e}^{-\lambda t}$, montrer que pour tout $\lambda \geq 0$, on a $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda T_x}) = \frac{f(|a|^2)}{f(x)}$.

(6) On suppose maintenant $B_0 = 0 \in \mathbb{R}^3$. Montrer que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{-\lambda T_x}) = \frac{1}{f(x)} = \frac{\sqrt{2\lambda x}}{\mathrm{sh}(\sqrt{2\lambda x})}$, $\lambda \geq 0$ (il faudra utiliser la propriété de Markov forte).

Exercice 3. Soient $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P}, B)$ un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien (réel issu de 0) et σ et b des fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$|\sigma(x)| \leq M,\ |b(x)| \leq M,\ |\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x - y|,\ |b(x) - b(y)| \leq K|x - y|.$$

Soit, x étant fixé, X la solution de l'EDS $X_t = x + \int_0^t \sigma(X_s)\, \mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X_s)\, \mathrm{d}s$.

On considère le processus X^n défini pour $n \geq 1$ par $X_0^n = x$ et

$$X_t^n = X_{k/n}^n + \sigma(X_{k/n}^n)(B_t - B_{k/n}) + b(X_{k/n}^n)\left(t - \frac{k}{n}\right), \quad \frac{k}{n} \leq t \leq \frac{k+1}{n}, \quad k = 0, 1, \cdots$$

On pose $\tau_s^n := \sum_{k=0}^\infty \frac{k}{n}\, \mathbf{1}_{[\frac{k}{n},\, \frac{k+1}{n}[}(s)$.

(1) Montrer que $X_t^n = x + \int_0^t \sigma(X^n_{\tau^n_s})\,\mathrm{d}B_s + \int_0^t b(X^n_{\tau^n_s})\,\mathrm{d}s$.

(2) Montrer qu'il existe une constante A telle que $\mathbb{E}\{(X_t^n - X^n_{\tau^n_t})^2\} \le \frac{A}{n}$, $\forall t \in [0,1]$, $\forall n \ge 1$.

(3) Montrer que pour tout $n \ge 1$ et $t \in [0,1]$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\{(X_t - X_t^n)^2\} &\le 4K^2 \int_0^t \mathbb{E}\{(X_s - X^n_{\tau^n_s})^2\}\,\mathrm{d}s \\ &\le 8K^2 \int_0^t \mathbb{E}\{(X_s - X^n_s)^2\}\,\mathrm{d}s + \frac{32K^2M^2}{n}.\end{aligned}$$

En déduire qu'il existe une constante C_1 telle que $\sup_{t\in[0,1]} \mathbb{E}\{(X_t - X_t^n)^2\} \le \frac{C_2}{n}$, $\forall n \ge 1$.

(4) Montrer qu'il existe une constante C_2 telle que pour toute fonction f à dérivées continues bornées, $|\mathbb{E}\{f(X_1^n) - f(X_1)\}| \le \|f'\|_\infty \frac{C_2}{\sqrt{n}}$, $\forall n \ge 1$.

✓ **Exercice 4.** Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard.

(1) Montrer qu'il existe un processus X continu adapté tel que

$$X_t = 1 + \int_0^t \frac{1}{(1+s)(1+|X_s|)}\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s\,\mathrm{d}s, \qquad t \ge 0.$$

(2) Montrer que X est adapté par rapport à la filtration canonique de B.

(3) Soit $X_t^* := \sup_{s\in[0,t]} |X_s|$. Montrer que $\mathbb{E}[\,(X_1^*)^2\,] < \infty$. En considérant $X_t - X_1$, montrer que $\mathbb{E}[\,(X_2^*)^2\,] < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[\,(X_t^*)^2\,] < \infty$ pour tout $t \ge 0$.

(4) Soit $Y_t := \mathrm{e}^{1/(1+t)}(1 + X_t^2)$, $t \ge 0$. Montrer que Y est une surmartingale (par rapport à la filtration $(\mathscr{F}_t)$). On en déduit que $\lim_{t\to\infty} Y_t$ existe p.s. (et la limite est p.s. finie).

(5) Montrer que $\lim_{t\to\infty} |X_t|$ existe p.s.

(6) En considérant la partie à variation finie de Y, montrer que $\int_0^\infty X_s^2\,\mathrm{d}s < \infty$, p.s.

(7) Montrer que $\liminf_{t\to\infty} |X_t| = 0$ p.s. En déduire que $\lim_{t\to\infty} X_t = 0$ p.s.

✓ **Exercice 5.** Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard. Soit $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Fixons $x \in \mathbb{R}$ et $0 < \varepsilon \le 1$. Soit $X^{x,\varepsilon} := (X_t^{x,\varepsilon},\ t \ge 0)$ solution de l'EDS

$$X_t^{x,\varepsilon} = x + \varepsilon B_t + \int_0^t b(X_s^{x,\varepsilon})\,\mathrm{d}s, \qquad t \ge 0.$$

Soit $y^x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 telle que

$$y^x(t) = x + \int_0^t b(y^x(s))\,\mathrm{d}s, \qquad t \ge 0.$$

Montrer que

(1) $\sup_{s\in[0,\,t]} |X_s^{x,\varepsilon} - y^x(s)| \le \varepsilon B_t^* \mathrm{e}^{Kt}$, $t \in [0,\,1]$, ou $K > 0$ est une constante

(2) pour tout $\delta > 0$, il existe $c_1 \in \mathbb{R}_+^*$ et $c_2 \in \mathbb{R}_+^*$, dont les valeurs ne dépendent pas de (x,ε), telles que $\mathbb{P}\{\sup_{t\in[0,1]} |X_t^{x,\varepsilon} - y^x(t)| > \delta\} \le c_1 \exp(-\frac{c_2}{\varepsilon^2})$.

Exercice 6. Soit $(X_t,\ t \geq 0)$ un processus continu et adapté, à valeurs dans $]0,\ 1]$, tel que

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^t X_s(1 - X_s^2)\,\mathrm{d}B_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s(1 - X_s^2)(1 + 3X_s^2)\,\mathrm{d}s.$$

(1) Soit $\gamma \in]0,\ 1[$ un réel, et soit $\tau := \inf\{t \geq 0 :\ X_t \geq \gamma\}$ ($\inf \varnothing := \infty$). On considère le processus $U_t := f(X_{t\wedge\tau})$, $t \geq 0$, où $f(x) := \frac{x^2}{1-x^2}$, $x \in [0, 1[$.

Montrer que $(U_t,\ t \geq 0)$ est une semimartingale, et écrire sa décomposition canonique.

(2) Montrer que $\mathbb{E}(U_t) = 1$ pour tout $t \geq 0$.

(3) Montrer à l'aide du lemme de Fatou que $f(\gamma)\mathbb{P}(\tau < +\infty) \leq 1$ et en déduire que $\mathbb{P}(\tau < \infty) \leq \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}$.

(4) Montrer que presque sûrement, $X_t < 1$ pour tout $t \geq 0$. En particulier, on peut p.s. définir le processus $V_t := \frac{X_t^2}{1-X_t^2}$, $t \geq 0$.

(5) Montrer que $(V_t,\ t \geq 0)$ est solution d'une équation différentielle stochastique dont on précisera les coefficients.

(6) Écrire $(X_t,\ t \geq 0)$ en fonction de $(B_t,\ t \geq 0)$.

N1. X sol de l'EDS $E_x(b,\sigma)$

(1) Soit $s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de C^2 $\frac{1}{2}s''\sigma^2 + s'b = 0$

M.q. $(s(X_t))_{t\geq 0}$ est une mart. locale continue

$$ds(X_t) = (\underbrace{s'b + \frac{1}{2}s''\sigma^2}_{=0})dt + s'(X_t)\sigma(X_t)dW_t$$

$$s(X_t) = s(x) + \int_0^t s'(X_s)\sigma(X_s)dW_s \in \mathcal{M}_{loc}$$

(2) σ est continue, $s' \neq 0$, $\sigma \neq 0$. Soient $a < x < b$

Faut-il ajouter que $|s'(x)| \geq \varepsilon > 0$
$|\sigma'| \geq \varepsilon > 0$?

$T_{a,b} = \inf\{t \geq 0 : X_t \notin]a,b[\}$

M.q. $\mathbb{P}^x(T_{a,b} < \infty) = 1$ et $\mathbb{P}^x(X_{T_{a,b}} = a) = \frac{s(b)-s(x)}{s(b)-s(a)}$

$$\mathbb{P}^x(X_{T_{a,b}} = b) = \frac{s(x)-s(a)}{s(b)-s(a)}$$

Par le thm. de Rubins-Schwarz $M_0 = 0$ et $\langle M\rangle_\infty = +\infty$

$$\langle s(X)\rangle_t = \int_0^t \underbrace{s'(X_s)^2\sigma(X_s)^2}_{\text{continue positive}}ds \xrightarrow{\geq \varepsilon^4 t} \infty \, ?$$

Donc $\exists$ MB B : $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$

$$X_t = a \Leftrightarrow s(X_t) = s(x) + B_{\langle s(X)\rangle_t} = s(a)$$

$$X_t = b \Leftrightarrow s(X_t) = s(x) + B_{\langle s(X)\rangle_t} = s(b)$$

$\Rightarrow T_{a,b} < \infty$ p.s.
car $\tau_{s(a)-s(x)} < \infty$
$\tau_{s(b)-s(x)} < \infty$

On suppose que $s(x)$ est entre $s(a)$ et $s(b)$ (sinon les formules ne marchent plus)

$M_t = B^{T_{a,b}}_{\langle s(X)\rangle_t}$ une mart locale bornée $\to$ fermée $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ par le thm d'arrêt $0 = (s(a)-s(x))\mathbb{P}(X_{T_{a,b}}=a) + (s(b)-s(x))\mathbb{P}(X_{T_{a,b}}=b)$

$\to \mathbb{P}(X_{T_{a,b}}=a) = \dfrac{s(b)-s(x)}{s(b)-s(a)} \quad \mathbb{P}(X_{T_{a,b}}=b) = \dfrac{s(x)-s(a)}{s(b)-s(a)}$

N2 X sol de $E(\sigma,b)$ à valeurs dans un ouvert $D \subset \mathbb{R}^d$

$\lambda \in \mathbb{R}$ $f : D \to \mathbb{R}$ de C^2 : $\mathcal{L}f = \lambda f$

(1) M.q. $(f(X_t)e^{-\lambda t})_{t\geq 0}$ une mart. locale

$$d[f(X_t)e^{-\lambda t}] = \underbrace{-\lambda e^{-\lambda t} f(X_t)dt + e^{-\lambda t}\mathcal{L}f(X_t)dt}_{=0} + \nabla f(X_t)\cdot\sigma(X_t)dW_t$$

$$\to f(X_t)e^{-\lambda t} = f(X_0) + \int_0^t \nabla f(X_s)\sigma(X_s)dW_s \text{ une mart. locale}$$

(2) $B := (B^1, B^2, B^3)$ $\quad B_0 = a \neq 0$

$$X_t = |B_t|^2 = \sum_{i=1}^3 (B_t^i)^2 \qquad \text{un MB}$$

$$dX_t = 2\sum_1^3 B_t^i dB_t^i + 3dt = 2|B_t| \underbrace{\sum_1^3 \frac{B_t^i dB_t^i}{|B_t|}}_{d\tilde{W}_t} + 3dt = 3dt + 2\sqrt{X_t}\,d\tilde{W}_t$$

$b = 3$

$\sigma = 2\sqrt{x}$

(3) $\lambda \geq 0$. M.q. $2tg'' + 3g' = \lambda g$ pour $g(t) = \dfrac{e^{\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$ où $g(t) = \dfrac{e^{-\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$

$$g'(t) = \frac{1}{2\lambda t}\left[\cancel{\sqrt{2\lambda t}}\, e^{\sqrt{2\lambda t}} \cdot \sqrt{2\lambda} \cdot \frac{1}{2\cancel{\sqrt{t}}} - e^{\sqrt{2\lambda t}} \frac{\sqrt{2\lambda}}{2\sqrt{t}}\right] = \frac{e^{\sqrt{2\lambda t}}}{2t}\left[1 - \frac{1}{\sqrt{2\lambda t}}\right] =$$

$$= \frac{e^{\sqrt{2\lambda t}} - g(t)}{2t}$$

$$g''(t) = \frac{1}{2t}\left[e^{\sqrt{2\lambda t}}\sqrt{\frac{\lambda}{2t}} - g'(t)\right] - \frac{1}{2t^2}\left[e^{\sqrt{2\lambda t}} - g(t)\right]$$

$$2tg'' + 3g' = e^{\sqrt{2\lambda t}}\sqrt{\frac{\lambda}{2t}} + \underbrace{2g'(t)}_{\frac{\cancel{e^{\sqrt{2\lambda t}}} - \cancel{g(t)}}{t}} - \frac{\cancel{e^{\sqrt{2\lambda t}}}}{t} + \frac{\cancel{g(t)}}{t} = \sqrt{\frac{\lambda}{2t}}e^{\sqrt{2\lambda t}} = \lambda g(t)$$

Le $\hat{m}$ raisonnement pour $\dfrac{e^{-\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$

(4) $f(t) = \dfrac{sh(\sqrt{2\lambda t})}{\sqrt{2\lambda t}}$. M.q. $M_t = f(X_t)e^{-\lambda t}$ est une mart. locale

$$\mathcal{L}f(x) = 3g' + 2x^2 g''$$

On a montré que pour $\dfrac{e^{\pm\sqrt{2\lambda t}}}{\sqrt{2\lambda t}}$ on $\mathcal{L}g = \lambda g$ ->

-> pour f comme combinaison linéaire $\overset{(1)}{\Rightarrow} M_t \in \mathcal{M}^c_{loc}$

(5) $x > |a|^2$, $T_x = \inf\{t \geq 0 : X_t = x\}$. M.q. $\forall \lambda \geq 0$ $\mathbb{E}e^{-\lambda T_x} = \dfrac{f(|a|^2)}{f(x)}$

$B_0 = a$ -> $X_0 = |a|^2$

$M_t^{T_x} = f(X_t^{T_x})e^{-\lambda t \wedge T_x}$ est bornée car X est borné ->

=> mart. fermée => par le thm. d'arrêt

$$f(|a|^2) = \mathbb{E}[\underbrace{f(X_{T_x})}_{f(x)}e^{-\lambda T_x}] \to \mathbb{E}[e^{-\lambda T_x}] = \frac{f(|a|^2)}{f(x)}$$

(6) On suppose $B_0 = 0 \in \mathbb{R}^3$. M.q. $\mathbb{E}[e^{-\lambda T_x}] = \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{\sqrt{2\lambda x}}{sh(\sqrt{2\lambda x})}$, $\lambda \geq 0$

On introduit $T_r = \inf\{t : |B_t|^2 = r\}$ $T_r < \infty$ p.s. $r < x$

$$X^{0,0}_{T_x} = X^{T_r, r}_{T_x} \rightarrow \mathbb{E}\left[e^{-\lambda(T_x - T_r)}\right] = \frac{f(r)}{f(x)}$$

$$\text{TCM} \downarrow \quad r \to 0 \downarrow \qquad \lim_{x \downarrow 0} \frac{sh(x)}{x} = 1$$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_x}\right] = \frac{1}{f(x)}$$

N3 B $(\mathcal{F}_t)$ - MB. $|\sigma(x)| \leq M$, $|b(x)| \leq M$, $|\sigma(x) - \sigma(y)| \leq K|x-y|$

$|b(x) - b(y)| \leq K|x-y|$

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dW_t$$

schéma d'Euler

$$X^n_t = X^n_{\frac{k}{n}} + \sigma(X^n_{\frac{k}{n}})(B_t - B_{\frac{k}{n}}) + b(X^n_{\frac{k}{n}})(t - k/n) \qquad t \in \left[\tfrac{k}{n}, \tfrac{k+1}{n}\right]$$

$$\tau^n_s = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{n} \mathbb{1}_{[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}[}(s)$$

(1) $X^n_t = X_{\tau^n_t} + \sigma(X^n_{\tau^n_t})(B_t - B_{\tau^n_t}) + b(X^n_{\tau^n_t})(t - \tau^n_t) = X^n_{\tau^n_t} + \int_{\tau^n_t}^t b(X^n_{\tau^n_s})\,ds + \sigma(X^n_{\tau^n_s})\,dB_s =$

$$= X + \int_0^t b(X^n_{\tau^n_s})\,ds + \int_0^t \sigma(X^n_{\tau^n_s})\,dB_s$$

(2) M.q. il existe une constante A t.q. $\mathbb{E}|X^n_t - X^n_{\tau^n_t}|^2 \leq \frac{A}{n}$ $\forall t \in [0,1]$

$$|X^n_t - X^n_{\tau^n_t}| = \left|\int_{\tau^n_t}^t \underbrace{b(X^n_{\tau^n_t})}_{|\cdot| \leq M} ds + \int_{\tau^n_t}^t \sigma(X^n_{\tau^n_t})\,dB_s\right| \leq M \cdot \frac{1}{n} + \left|\int_{\tau^n_t}^t \sigma(X^n_{\tau^n_t})\,dB_s\right|$$

$$\mathbb{E}|X^n_t - X^n_{\tau^n_t}|^2 \leq \left(2M \cdot \frac{1}{n}\right)^2 + 2\,\mathbb{E}\int_{\tau^n_t}^t \underbrace{\sigma(X^n_{\tau^n_t})^2}_{\leq M^2} ds \leq \frac{1}{n}\left(\frac{4M^2}{n} + 2M^2\right) \leq \frac{A}{n}$$

$$A = 4M^2 \quad (n \geq 2)$$

(3) $\forall n \geq 1$ $\forall t \in [0,1]$ M.q. $\mathbb{E}(X_t - X^n_t)^2 \leq 4K^2 \int_0^t \mathbb{E}(X_s - X^n_{\tau^n_s})^2 ds \leq$

$$\leq 8K^2 \int_0^t \mathbb{E}(X_s - X^n_s)^2 ds + \frac{32K^2M^2}{n} \quad \xrightarrow{\text{Gronwall}} \quad \mathbb{E}|X_t - X^n_t|^2 \leq \frac{32K^2M^2}{n} e^{8K^2 T} = \frac{C_2}{n}$$

$$\mathbb{E}|X_t - X^n_t|^2 \leq \mathbb{E}\left|\int_0^t (b(X_s) - b(X^n_{\tau^n_s}))\,ds + \int_0^t (\sigma(X_s) - \sigma(X^n_{\tau^n_s}))\,dB_s\right|^2 \leq$$

$$\le 2\mathbb{E}\left(\int_0^t |b(X_s)-b(X^n_{\tau^n_s})|\,ds\right)^2 + 2\mathbb{E}\left(\left(\int_0^t (\sigma(X_s)-\sigma(X^n_{\tau^n_s}))\,dB_s\right)^2\right) \le 4K^2\mathbb{E}\int_0^t |X_s - X^n_{\tau^n_s}|^2\,ds =$$

$$2\mathbb{E}\left(\int_0^t |b(X_s)-b(X^n_{\tau_s})|\,ds\right)^2 \le 2\underbrace{T}_{\le 1}\mathbb{E}\int_0^t \underbrace{|b(X_s)-b(X^n_{\tau_s})|^2}_{\le K^2|X_s-X^n_{\tau_s}|^2}\,ds$$

$$2\mathbb{E}\int_0^t \underbrace{|\sigma(X_s)-\sigma(X^n_{\tau_s})|^2}_{\le K^2|X_s-X^n_{\tau_s}|^2}\,ds$$

$$= 4K^2\mathbb{E}\int_0^t |X_s - X^n_s + X^n_s - X^n_{\tau^n_s}|^2\,ds \le 8K^2\mathbb{E}\int_0^t |X_s-X^n_s|^2\,ds + 8K^2\mathbb{E}\int_0^t \underbrace{|X^n_s - X^n_{\tau_s}|^2}_{\le \frac{1}{n}4M^2}\,ds \le$$

$$\le 8K^2\int_0^t \mathbb{E}|X_s-X^n_s|^2\,ds + \frac{32K^2M^2}{n}$$

(4) M.q. il existe une constante C_2 t.q. $\forall f \in C^1_B$

$$|\mathbb{E}[f(X^n_1)-f(X_1)]| \le \|f'\|_\infty \frac{C_2}{\sqrt{n}}$$

$$\wedge$$

$$\mathbb{E}|f(X^n_1)-f(X_1)| = \mathbb{E}\,|\underbrace{f'(\xi)}_{\le \|f'\|_\infty}|\,|X^n_1-X_1| \le \|f'\|_\infty \mathbb{E}|X^n_1-X_1| \le \|f'\|_\infty \sqrt{\mathbb{E}|X^n_1-X_1|^2} \le$$

$$\overset{(3)}{\le} \|f'\|_\infty \frac{\sqrt{C_2}}{\sqrt{n}}$$

$h : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$, $x \mapsto \frac{1}{1+x}$, $h' = -\frac{1}{(1+x)^2}$, $|h'| \le 1$

→ Lipschitz avec $[h]_{Lip} \le 1$

N4

B un $(\mathcal{F}_t)$-MB

(1) M.q. $\exists X$ continu adapté : $dX_t = \underbrace{-\frac{1}{2}X_t}_{\text{continu Lipschitz ✓}}\,dt + \overbrace{\frac{1}{(1+s)(1+|X_s|)}}^{\text{continue Lipschitz ✓}}\,dB_t$

→ il existe une solution forte unique. $\underbrace{\mathcal{F}^B_t = \sigma(B_s, s\le t)}$

(2) M.q. X est adapté par rapport à la filtration canonique de B

On peut prendre $(\mathcal{F}^B_t)_{t\ge 0}$ en tant que filtration dans le thm de $\exists!$ de sol. forte $\Rightarrow$ X_t est $\mathcal{F}^B$-adapté

(3) $X_t^* = \sup_{[0,t]} |X_s|$ m.q. $\mathbb{E}|(X_1^*)^2|^2 < \infty$

En considérant $X_t - X_1$, m.q. $\mathbb{E}|X_2^*|^2 < \infty$ --- $\mathbb{E}|X_t^*|^2 < \infty$ $\forall t \geq 0$

$$\mathbb{E} \sup_{[0,1]} |X_s|^2 \overset{\text{Doob}}{\leq} 4 \mathbb{E}_1 |X_1|^2$$

$$X_t = 1 - \frac{1}{2}\int_0^t X_s ds + \underbrace{\int_0^t \frac{dB_s}{(1+s)(1+|X_s|)}}_{\text{une vraie mart car } \sigma \leq 1}$$

$\downarrow \mathbb{E}_1$

$$\underbrace{\mathbb{E} X_t}_{m(t)} = 1 - \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E} X_s ds$$

$$\begin{cases} \dot{m} = -\frac{1}{2} m \\ m(0) = 1 \end{cases} \qquad m(t) = e^{-\frac{t}{2}}$$

$$dX_t^2 = 2X_t dX_t + d\langle X\rangle_t = -X_t^2 dt + \sigma^2 dt + dM_t$$

$$\mathbb{E} X_t^2 = 1 + \int_0^t \left(-\mathbb{E} X_s^2 + \mathbb{E} \overset{\leq 1}{\sigma^2}(s, X_s)\right) ds \leq 1 - \int_0^t (\mathbb{E} X_s^2 + 1) ds \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ Gronwall $\Rightarrow$ $1 + \mathbb{E} X_t^2 \leq 2e^{ct} \leq 2e^{cT} \Rightarrow \mathbb{E} X_1^2 \leq e^{cT}$

On fait le $\hat{m}$ raisonnement pour $X_t - X_1$, $t \in [1,2]$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathbb{E}|X_2^*| < \infty$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}|X_n^*| < \infty$ $\forall n$.

(4) $Y_t = e^{\frac{1}{1+t}}(1 + X_t^2)$ $t \geq 0$ M.q. Y_t une surmart.

En déduire que $\exists \lim_{t \uparrow \infty} Y_t$ p.s.

$$dY_t = -\frac{1}{(1+t)^2} \cdot (1 + X_t^2) e^{\frac{1}{1+t}} dt + e^{\frac{1}{1+t}}\left(-X_t^2 + \frac{1}{(1+t)^2(1+|X_t|)^2}\right) dt + dM_t$$

$$= e^{\frac{1}{1+t}}\Bigg(\underbrace{-\frac{1}{(1+t)^2}\Big(\underbrace{1-\frac{1}{1+|X_t|^2}}_{\geq 0}\Big)-X_t^2\Big(1+\frac{1}{(1+t)^2}\Big)}_{\leq 0}\Bigg)dt + dM_t$$

M_t martingale

$\Rightarrow Y_t$ est une surmart

Y_t surmartingale positive $\Rightarrow \exists\ Y_\infty = \lim_{s\uparrow\infty} Y_s \in L^1$ ($\to$ finie p.s.)

(5) $\quad \underbrace{e^{\frac{1}{1+t}}}_{\downarrow 1}(1+X_t^2) \to Y_\infty \to 1+X_t^2 \to 1+X_\infty^2 \to \exists\ X_\infty = \lim_{t\to\infty}|X_t|$

$Y_s \geq E[Y_t | \mathcal{F}_s] \to EY_t \downarrow \to$ converge

(6) M.q. $\int_0^\infty X_s^2 ds < \infty$

$$Y_t = \int_0^t -\frac{e^{\frac{1}{1+s}}}{(1+s)^2}\Big(1-\frac{1}{1+|X_s|^2}\Big)ds - \int_0^t X_s^2\Big(e^{\frac{1}{1+s}}\ 1+\frac{1}{(1+s)^2}\Big)ds + M_t$$

$$E\int_0^t X_s^2 ds \leq -\underbrace{EY_t}_{\lim EY_t<\infty} - \underbrace{E\int_0^t \frac{\overbrace{e^{\frac{1}{1+s}}}^{\leq e}}{(1+s)^2}\Big(\overbrace{1-\frac{1}{1+|X_s|^2}}^{\leq 1}\Big)ds}_{\to \int_0^\infty \dots < \infty} + \cancel{EM_t}^{\,0}$$

$\downarrow$ TCM

$$E\int_0^\infty X_s^2 ds < \infty \Rightarrow \int_0^\infty X_s^2 ds < \infty.$$

(7) M.q. $\liminf_{t\uparrow\infty}|X_t| = 0$ p.s. En déduire que $\lim_{t\uparrow\infty} X_t = 0$ p.s.

Par absurd : si $\liminf_{t\uparrow\infty}|X_t| > 0 \Rightarrow \exists\,\varepsilon : |X_t| > \varepsilon\ \forall t>0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int_0^\infty X_s^2 ds \geq \varepsilon^2\cdot\infty = \infty \text{ contradiction avec (6).}$$

Mais on a montré que $\exists \lim|X_t|$ p.s. $\Rightarrow \lim_{t\to 0}|X_t| = 0 \to \lim_{t\to\infty} X_t = 0.$

N°5 Soit B un $(\mathcal{F}_t)$-MB. b fct Lipschitz, $x \in \mathbb{R}$, $0 < \varepsilon \leq 1$

$X^{x,\varepsilon}$ sol de l'EDS $\quad X_t^{x,\varepsilon} = x + \varepsilon B_t + \int_0^t b(X_s^{x,\varepsilon})\,ds$

Soit $y^x : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ de $\mathcal{C}^1$ t.q. $y^x(t) = x + \int_0^t b(y^x(s))\,ds$ $\quad$ ("$\varepsilon = 0$")

(1) M.q. $\sup_{s\in[0,t]} |X_s^{x,\varepsilon} - y^x(s)| \leq \varepsilon B_t^* e^{Kt}$

$$X_s^{x,\varepsilon} - y^x(s) = \varepsilon B_t + \int_0^t \left(b(X_s^{x,\varepsilon}) - b(y^x(s))\right) ds$$

$$|X_t^{x,\varepsilon} - y^x(t)| \leq \varepsilon |B_t| + \int_0^t |b(X_s^{x,\varepsilon}) - b(y^x(s))|\,ds \leq \varepsilon |B_t| + [b]_{Lip} \int_0^t |X_s^{x,\varepsilon} - y^x(s)|\,ds$$

$$\sup_{[0,t]} |X_s^{x,\varepsilon} - y^x(s)| \leq \varepsilon B_t^* + [b]_{Lip} \int_0^t \sup_{[0,s]} |X_s^{x,\varepsilon} - y^x(s)|\,ds$$

Par le lemme de Gronwall,

$$\sup_{[0,t]} |X_s^{x,t} - y^x(s)| \leq \varepsilon B_t^* \, e^{\overbrace{[b]_{Lip}}^{K} \cdot t}$$

(2) M.q. pour tout $\delta > 0$ il existe $c_1, c_2 \in \mathbb{R}_+^*$: ← ne dépend pas de (x,ε)

$$\mathbb{P}\left(\sup_{[0,1]} |X_t^{x,\varepsilon} - y^x(t)| > \delta\right) \leq c_1 \exp\left(-\frac{c_2}{\varepsilon^2}\right)$$

$$\wedge$$

$$\mathbb{P}(\varepsilon B_1^* e^K > \delta)$$

$$\|$$

$$\mathbb{P}\left(B_1^* > \frac{\delta e^{-K}}{\varepsilon}\right) = \{\mathcal{L}(B_t^*) = \mathcal{L}(|B_1|)\} =$$

$$= \mathbb{P}\Big(\underset{\sim \mathcal{N}(0,1)}{|Z|} > \frac{\delta e^{-K}}{\varepsilon}\Big) = 2\mathbb{P}\left(Z > \frac{\delta e^{-Kt}}{\varepsilon}\right) \leq e^{-\frac{\delta^2 e^{-2K}}{\varepsilon^2}} = e^{-\frac{c_2}{\varepsilon^2}}$$

cf TD2 N°7

N6 X_t continu adapté à valeurs ds $]0,1]$ tel que

$$X_t = \frac{1}{\sqrt{2}} + \int_0^t X_s(1-X_s^2)\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t X_s(1-X_s^2)(1+3X_s^2)\,ds$$

(1) $\delta \in]0,1[$ $\quad \tau := \inf\{t \geq 0 : X_t \geq \delta\}$

$U_t := f(X_{t\wedge\tau})$ $\quad t \geq 0$ $\quad$ où $f(x) := \dfrac{x^2}{1-x^2}$

M.q. $(U_t)_{t\geq 0}$ est une semimartingale, décomposition canonique ?

La dynamique de $f(X_t)$? $\quad f(x) = \dfrac{1}{1-x^2} - 1 \quad f'(x) = \dfrac{2x}{(1-x^2)^2}$

$$f''(x) = \frac{2(1-x^2)^2 + (2x)^2 2(1-x^2)}{(1-x^2)^4} = \left(\frac{1}{(1-x^2)^2} + \frac{4x^2}{(1-x^2)^3}\right)\cdot 2$$

$$df(X_t) = f'(X_t)\left(-\tfrac{1}{2}X_t(1-X_t^2)(1+3X_t^2)\,dt + X_t(1-X_t^2)\,dB_t\right) + \tfrac{1}{2}f''(X_t)X_t^2(1-X_t^2)^2\,dt =$$

$$= \frac{2X_t}{(1-X_t^2)}\left(-\tfrac{1}{2}X_t(1+3X_t^2)\,dt + X_t\,dB_t\right) + \left(X_t^2 + \frac{4X_t^4}{(1-X_t^2)}\right)dt =$$

$$= \Big(-\underbrace{\frac{X_t^2}{1-X_t^2}}_{f(X_t)} + \underbrace{\frac{X_t^4}{1-X_t^2}}_{X_t^2 f(X_t)} + X_t^2\Big)dt + \underbrace{\frac{2X_t^2}{1-X_t^2}}_{2f(X_t)}dB_t = \big(\underbrace{X_t^2 + X_t^2 f(X_t) - f(X_t)}\big)\,dt + 2f(X_t)\,dB_t$$

$$x^2 - f(x)(1-x^2) = (x^2-1) + (1-x^2) = 0$$

$$U_t = f(X_{t\wedge\tau}) = f\left(\tfrac{1}{\sqrt{2}}\right) + \int_0^t 2f(X_s)\,\mathbb{1}_{\{s\leq\tau\}}\,dB_s$$ → une mart. locale → une semimartingale

(2) M.q. $\mathbb{E}[U_t] = 1$ $\quad \forall t \geq 0$ $\quad 0 < X_{t\wedge\tau} \leq \delta$ $\quad \forall t$ → $f(X_{t\wedge\tau})$ est bornée

→ U_t est une vrai martingale et $\mathbb{E}[U_t] = f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 1$ $\quad \forall t \geq 0$

(3) $f(\delta)\,\mathbb{P}(\tau < +\infty) \leq 1$. En déduire que $\mathbb{P}(\tau < \infty) \leq \dfrac{1-\delta^2}{\delta^2}$ $\left(= \dfrac{1}{f(\delta)}\right)$

$0 \leq U_t \leq \frac{1}{1-\gamma}$ → fermée → on peut appliquer le thm d'arrêt
($\exists U_\infty = \lim_{t\to\infty} U_t$ p.s et ds L^1)

$$1 = \mathbb{E}[U_\tau] = \mathbb{P}(\tau<\infty) f(\gamma) + \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}} \underbrace{U_\infty}_{\geq 0}] \geq f(\gamma)\mathbb{P}(\tau<\infty)$$

<u>Via le lemme de Fatou</u> $T\wedge\tau$ est p.s. fini $T\wedge\tau \underset{T\to\infty}{\to} \tau$ p.s

Par le thm d'arrêt, $1 = \mathbb{E}[U_{T\wedge\tau}]$

$$1 = \lim \mathbb{E}[U_{T\wedge\tau}] \geq \mathbb{E}[\liminf_{T\to\infty} U_{T\wedge\tau}] \geq \mathbb{P}(\tau<\infty) f(\gamma)$$

(4) M.q. $X_t<1$ p.s. $\forall t\geq 0$. En particulier, on peut définir $V_t = \frac{X_t^2}{1-X_t^2}$

Par (3) $\mathbb{P}(\tau^\gamma<\infty) \leq \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2}$ → $\mathbb{P}(\tau^\gamma=\infty) \geq 1 - \frac{1-\gamma^2}{\gamma^2} = \frac{2\gamma^2-1}{\gamma^2} \underset{\gamma\to\infty}{\to} 1$

$$\mathbb{P}(X_t<1 \text{ p.s.}) = \mathbb{P}(\tau^1=\infty) \overset{TCM}{=} \lim_{\gamma\to\infty} \mathbb{P}(\tau^\gamma=\infty) = 1$$

(5) M.q. V_t est une solution d'une EDS

Par (1), $dV_t = 2V_t dB_t$

(6) Écrire $(X_t, t\geq 0)$ en fonction de $(B_t, t\geq 0)$.

EDS de MB géométrique ($\sigma=2$) → $V_t = \underset{V_0=1}{\uparrow} e^{2(B_t-t)}$