© Théo Jalabert

Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2013-2014 - Première session
24 janvier 2014 - Durée : 2 heures
Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1 ($\approx$ 7 points)

Un actuaire doit tarifer un traité de réassurance en excédent de sinistre. Des études statistiques l'ont conduit à modéliser le coût des sinistres de montant supérieur à x_0 par des variables aléatoires de type Pareto

$$F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0.$$

1. En vous fondant sur l'étude du coût moyen par sinistre à la charge du réassureur en fonction du niveau de la priorité, expliquez l'intérêt d'une telle modélisation dans ce contexte.

2. Donnez l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ.

3. Montrez que la famille des distributions Gamma est conjuguée à la famille des distributions Pareto

$$\mathcal{F} = \left\{F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0 \text{ ; } \theta > 0\right\}.$$

Dans la suite, on se place dans le modèle Pareto-Gamma.

4. *A priori* $\Theta \sim \Gamma(\gamma, \beta)$, quelle est la valeur espérée du paramètre si l'on ne dispose par d'observation ?

5. Pour un contrat particulier, on a observé durant la première période un échantillon de n sinistres dépassant le montant x_0. Donnez l'estimateur bayesien de Θ pour ce contrat. Exprimez-le en fonction de l'e.m.v (lorsque l'on ne dispose pas d'information *a priori*) et de l'estimation *a priori* (lorsque l'on ne dispose pas d'observations). Commentez.

Rappel Une variable aléatoire distribuée selon une loi Gamma de paramètre (γ, β) a pour densité $u(t) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} t^{\gamma-1} \exp(-\beta t), t \geq 0$.

© Théo Jalabert

Exercice 2 (≈ 4 points) *Présenter sous forme d'un tableau.*

Dans le modèle de Bühlmann, avec les notations habituelles, donnez une interprétation de τ^2, σ^2 et μ_0. Déduisez-en le sens de variation de la prime de crédibilité en fonction de τ^2, σ^2 et le nombre de périodes d'observation n.

Exercice 3 (≈ 9 points)

Soit N_j le nombre annuel de sinistres causés par un conducteur du portefeuille. Supposons que, conditionnellement à $\Lambda\Theta$, les N_j soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Poisson de paramètre $\Lambda\Theta$, où :

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{l} 0,1, \text{ si l'assuré vit en zone rurale}\,; \\ 0,2, \text{ si l'assuré vit en zone urbaine.} \end{array} \right\}$$

et

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{l} 0,5, \text{ avec la probabilité } 1/2\,; \\ 1,5, \text{ avec la probabilité } 1/2. \end{array} \right\}$$

Les variables aléatoires Λ et Θ sont supposées indépendantes et le portefeuille est constitué de $3/5$ d'assurés vivant en zone rurale et de $2/5$ d'assurés vivant en zone urbaine. De plus, pour simplifier, on supposera les montants de sinistres égaux à 1.

1. Un assuré vivant en zone rurale arrive dans ce portefeuille, quelle prime lui sera réclamée ?

2. Trois années plus tard, cet assuré n'a pas déclaré de sinistre au cours de cette période. Quelle est la réévaluation de sa fréquence annuelle de sinistre au terme de ces 3 ans ?

3. Afin de corriger l'hétérogénéité du portefeuille induite par Θ, la société d'assurance met en place un système bonus-malus à trois degrés $(1; 2; 3)$ destiné à s'appliquer à l'ensemble de la population couverte. L'entrée se fait au niveau 3 puis :
- chaque année sans sinistre est gratifiée d'une descente d'un degré dans l'échelle ;
- au moindre sinistre, l'assuré est renvoyé au niveau 3.

   a. Expliquez la problématique associée à la mise en place d'une échelle bonus-malus pour un portefeuille à la tarification segmentée (*moins de 5 lignes*).

   b. Donnez la distribution stationnaire de l'échelle.

   c. Déterminez les coefficients de réduction-majoration des primes r_1, r_2, r_3 selon la méthode de Norberg en régime stationnaire.

© Théo Jalabert

Exercice 1 :

1) L'utilisation d'une distribution de Pareto pour modéliser le coût des sinistres en réassurance en excédent de sinistre est particulièrement pertinente pour plusieurs raisons.

1. **Modélisation des sinistres de grande ampleur** : La distribution de Pareto est connue pour bien représenter les phénomènes dans lesquels une petite proportion d'événements contribue à une grande partie des coûts totaux. Dans le contexte de la réassurance, cela signifie qu'elle est efficace pour modéliser les sinistres rares mais très coûteux.

2. **Flexibilité de la distribution** : Le paramètre θ dans la distribution de Pareto permet d'ajuster la lourdeur de la queue de la distribution. Cela est crucial en réassurance car cela permet d'ajuster le modèle en fonction de la nature et de l'historique des sinistres de l'assureur.

3. **Calcul du coût moyen par sinistre** : Le coût moyen par sinistre, en particulier au-delà d'un certain seuil (x_0 dans ce cas), est une mesure clé pour l'actuaire. En utilisant la distribution de Pareto, l'actuaire peut estimer de manière plus précise ce coût moyen, ce qui est essentiel pour tarifer correctement le traité de réassurance.

4. **Gestion du risque de survenance de sinistres majeurs** : En modélisant le coût des sinistres à l'aide d'une distribution de Pareto, l'actuaire peut mieux comprendre et quantifier le risque de survenance de sinistres majeurs. Cela aide à déterminer un niveau de priorité (franchise) adéquat pour la réassurance en excédent de sinistre, assurant ainsi une protection efficace contre les risques financiers importants.

5. **Optimisation de la priorité** : En étudiant le coût moyen des sinistres en fonction de différents niveaux de priorité, l'actuaire peut identifier le point optimal où le coût de la réassurance est équilibré par la réduction du risque financier pour l'assureur. Cela permet de définir une priorité qui maximise l'efficacité de la couverture de réassurance tout en contrôlant les coûts.

En conclusion, l'utilisation de la distribution de Pareto permet à l'actuaire de mieux comprendre et de gérer les risques financiers liés aux sinistres de grande ampleur, et de tarifer de manière plus efficace et précise les traités de réassurance en excédent de sinistre.

2) On a $f_\theta(x) = \theta x_0^\theta x^{-\theta-1} = \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-(\theta+1)}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{m} f_\theta(x_i) = \theta^m x_0^{-m} e^{-(\theta+1)\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}$$

$$\Rightarrow \ln(\mathcal{L}(\theta)) = m\ln(\theta) - m\ln(x_0) - (\theta+1)\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)$$

$$* \ \frac{\partial \ln(\mathcal{L}(\theta))}{\partial\theta} = 0 \iff m \times \frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}^{MV} = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}$$

3) $u_x(\theta) \propto \prod_{i=1}^{m} f_\theta(x_i)$

Or $\prod_{i=1}^{m} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{m}\frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_i}{x_0}\right)^{-(\theta+1)} = \frac{\theta^m}{x_0^m} e^{-(\theta+1)\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}$

$$\Rightarrow u_x(\theta) \propto \underbrace{\theta^m e^{-\theta\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}}_{\text{noyau d'une }\Gamma}$$

de +, si $\Theta \sim \Gamma(\gamma,\beta)$, $u(\theta|\underline{X}) \propto u(\theta)\prod_{i=1}^{m} f(X_i = x_i | \Theta = \theta)$

$$\propto \theta^{\gamma-1}e^{-\beta\theta}\prod_{i=1}^{m}\frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_i}{x_0}\right)^{-(\theta+1)} = \theta^{\gamma-1}e^{-\beta\theta}\frac{\theta^m}{x_0^m}e^{-(\theta+1)\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}$$

$$\propto \theta^{m+\gamma-1} e^{-\left(\beta+\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)\right)\theta}$$

$$\Rightarrow \Theta|\underline{X} \sim \Gamma\left(m+\gamma, \beta+\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)\right)$$

$\mathcal{U}$, la famille des lois Gamma, est fermée sous l'opérateur produit et est donc une extens° naturelle de $\mathcal{U}'$ (la famille conjuguée à $\mathcal{F}$).

$\Rightarrow$ La famille des distributions Gamma est donc conjuguée à la famille des distributions de Pareto.

4) A priori $\Theta \sim \Gamma(\gamma,\beta)$, valeur du param si pas d'obs.

$\rightarrow$ Si on ne dispose pas d'observat°, on estime θ par $\mathbb{E}[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta}$

© Théo Jalabert

5) Par Q3, $\Theta | \underline{X} \sim \Gamma\left(n+\gamma, \beta + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)\right)$

$\Rightarrow$ Estimateur bayésien $= \mathbb{E}[\Theta | \underline{X}] = \dfrac{n+\gamma}{\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}$

On a vu que $\hat{\theta}^{MV} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}$

Si on dispose d'obs. $\Rightarrow$ $E^{Bayes} = \dfrac{n+\gamma}{\beta + \frac{n}{\hat{\theta}^{MV}}} = \dfrac{n\hat{\theta}^{MV} + \gamma\hat{\theta}^{MV}}{\beta\hat{\theta}^{MV} + n}$

Si on ne dispose pas des observations $\theta = \mathbb{E}[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta}$

$\rightarrow E^{Bayes} = \mathbb{E}[\Theta | \underline{X}] = \mathbb{E}[\Theta] = \dfrac{\gamma}{\beta}$

© Théo Jalabert

$$u(\theta|X) \propto \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) \propto$$

La distribut° a posteriori vaut :

$$u(\theta|x) = \frac{f_\theta(x)u(\theta)}{\int f_\theta(x)u(\theta)d\theta} = \frac{\int f_\theta(x)d\theta}{\int f_\theta(x)u(\theta)d\theta} u_x(\theta)u(\theta) \in \mathcal{U}$$

$$\Rightarrow u(\theta|X) \propto \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j)$$

Exercice n°3

Considérons la famille des distributions de Pareto

$$\mathcal{F} = \left\{F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\theta, \theta > 0\right\}.$$

Trouvez la famille $\mathcal{U}$ conjuguée à $\mathcal{F}$.

Avec les notations du cours, $f_\theta(x) = \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta+1}$

$$u_{\mathrm{x}}(\theta) \propto f_\theta(\mathrm{x}) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) \propto \theta^n \exp\left(-\theta \sum_{j=1}^{n} \ln \frac{x_j}{x_0}\right).$$

Donc les distributions de $\mathcal{U}'$ sont des distributions Gamma. La famille $\mathcal{U}$ des distributions Gamma est fermée sous l'opérateur produit, c'est donc une extension naturelle à $\mathcal{U}'$.

$$u(\theta|\underline{X}) \sim \mathcal{L}(f_\theta(x))\, u(\theta)$$

© Théo Jalabert

Exercice 1 :

1) L'utilisation d'une distribution de Pareto pour modéliser le coût des sinistres en réassurance en excédent de sinistre est particulièrement pertinente pour plusieurs raisons.

1. **Modélisation des sinistres de grande ampleur** : La distribution de Pareto est connue pour bien représenter les phénomènes dans lesquels une petite proportion d'événements contribue à une grande partie des coûts totaux. Dans le contexte de la réassurance, cela signifie qu'elle est efficace pour modéliser les sinistres rares mais très coûteux.

2. **Flexibilité de la distribution** : Le paramètre θ dans la distribution de Pareto permet d'ajuster la lourdeur de la queue de la distribution. Cela est crucial en réassurance car cela permet d'ajuster le modèle en fonction de la nature et de l'historique des sinistres de l'assureur.

3. **Calcul du coût moyen par sinistre** : Le coût moyen par sinistre, en particulier au-delà d'un certain seuil (x_0 dans ce cas), est une mesure clé pour l'actuaire. En utilisant la distribution de Pareto, l'actuaire peut estimer de manière plus précise ce coût moyen, ce qui est essentiel pour tarifer correctement le traité de réassurance.

4. **Gestion du risque de survenance de sinistres majeurs** : En modélisant le coût des sinistres à l'aide d'une distribution de Pareto, l'actuaire peut mieux comprendre et quantifier le risque de survenance de sinistres majeurs. Cela aide à déterminer un niveau de priorité (franchise) adéquat pour la réassurance en excédent de sinistre, assurant ainsi une protection efficace contre les risques financiers importants.

5. **Optimisation de la priorité** : En étudiant le coût moyen des sinistres en fonction de différents niveaux de priorité, l'actuaire peut identifier le point optimal où le coût de la réassurance est équilibré par la réduction du risque financier pour l'assureur. Cela permet de définir une priorité qui maximise l'efficacité de la couverture de réassurance tout en contrôlant les coûts.

En conclusion, l'utilisation de la distribution de Pareto permet à l'actuaire de mieux comprendre et de gérer les risques financiers liés aux sinistres de grande ampleur, et de tarifer de manière plus efficace et précise les traités de réassurance en excédent de sinistre.

2) On a $f_\theta(x) = \theta x_0^\theta x^{-\theta-1} = \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x}{x_0}\right)^{-(\theta+1)}$

$$\Rightarrow \mathcal{L}(\theta) = \prod_{i=1}^{m} f_\theta(x_i) = \theta^m x_0^{-m}\, e^{-(\theta+1)\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}$$

$$\Rightarrow \ln(\mathcal{L}(\theta)) = m\ln(\theta) - m\ln(x_0) - (\theta+1)\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)$$

$$* \ \frac{\partial \ln(\mathcal{L}(\theta))}{\partial\theta} = 0 \iff m \times \frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}^{MV} = \frac{m}{\sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}$$

3) $\mathcal{U}_X(\theta) \propto \prod_{i=1}^{m} f_\theta(x_i)$

Avec $\prod_{i=1}^{m} f_\theta(x_i) = \theta^m x_0^{-m}\, e^{-(\theta+1)\sum_{i=1}^{m}\ln(x_i/x_0)}$

$$\Rightarrow \mathcal{U}_X(\theta) \propto \underbrace{\theta^m e^{-\theta\sum\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}}_{\text{noyau d'une }\Gamma}$$

De plus, si $\Theta \sim \Gamma(\gamma, \beta)$, $u(\theta|\underline{X}) \propto \underline{u(\theta)} \prod_{i=1}^{n} f(X_i = x_i | \Theta = \theta)$ ← On mq $\mathcal{U}_\Gamma$ est fermée par l'opérateur produit

$$\propto \theta^{\gamma-1}e^{-\beta\theta}\prod_{i=1}^{n}\frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_i}{x_0}\right)^{-(\theta+1)} = \theta^{\gamma-1}e^{-\beta\theta}\frac{\theta^m}{x_0^m}\, e^{-(\theta+1)\sum\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}$$

$$\propto \theta^{m+\gamma-1} e^{-(\beta+\sum\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right))\theta}$$

$$\Rightarrow \Theta | \underline{X} \sim \Gamma\left(m+\gamma, \beta + \sum_{i=1}^{m}\ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)\right)$$

$\mathcal{U}$, la famille des lois Gamma, est fermée sous l'opérateur produit et est une extension naturelle de $\mathcal{U}'$ (la famille conjuguée à $\mathcal{F}$)

$\Rightarrow$ La famille des distributions Gamma est donc conjuguée à $\mathcal{F}_{\text{Pareto}}$.

© Théo Jalabert

4) Ici $\Theta \sim \Gamma(\gamma, \beta)$

Si on ne dispose pas d'informations, on estime θ par $\mathbb{E}[\Theta] = \frac{\gamma}{\beta}$

5) Par Q3, $\Theta \mid \underline{X} \sim \Gamma\left(n+\gamma, \beta + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)\right)$

$\Longrightarrow$ Si pas d'information, Estimateur bayésien $= \mathbb{E}[\Theta \mid \underline{X}] = \frac{n+\gamma}{\beta + \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}$

On a vu que $\hat{\theta}^{MV} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{x_i}{x_0}\right)}$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[\Theta \mid \underline{X}] = \frac{n\hat{\theta}^{MV} + \gamma\hat{\theta}^{MV}}{n + \beta\hat{\theta}^{MV}}$$

<u>ou</u> $\mathbb{E}[\Theta \mid X] = \omega \hat{\theta}^{MV} + (1-\omega)\,\mathbb{E}[\Theta]$

↳ écrire ω, ici ce n'est pas un facteur de crédibilité

<u>Cl</u> : $E^{\text{Bayésien}}$ pas linéaire en observat°. Pareto pas dans Fexponentielle.

Exercice 2 :

Prime de Bühlmann : $\widehat{\widehat{\mu(\theta)}}^{\text{hom}} = \alpha \bar{X} + (1-\alpha)\mu_0$

- Facteur de crédibilité : $\alpha = \frac{n}{n + \sigma^2/\tau^2}$

- Paramètres de structure
  - Mesure de la variabilité interne : $\sigma^2 = \mathbb{E}[\sigma(\theta)]$ ↳ $\sigma(\theta) = \mathbb{V}[X_j \mid \Theta = \theta]$
  - Mesure de l'hétérogénéité du portefeuille : $\tau^2 = \mathbb{V}[\mu(\theta)]$ ↳ $\mu(\theta) = \mathbb{E}[X_j \mid \Theta = \theta]$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{I(n-1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2 \quad \text{et} \quad \hat{\tau}^2 = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^{I} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \frac{\hat{\sigma}^2}{n}$$

Paramètre	Interprétation	Impact sur la prime de crédibilité
τ^2	Variance des risques entre différents assurés (variabilité inter-individuelle)	Plus τ^2 est élevé, plus la prime de crédibilité se rapproche de la prime collective
σ^2	Variance intra-individuelle (variabilité des sinistres pour un assuré donné d'une année à l'autre)	Plus σ^2 est élevé, plus la prime de crédibilité se rapproche de la prime individuelle
μ_0	Prime collective ou prime moyenne pour l'ensemble des assurés	Sert de base pour le calcul de la prime de crédibilité
n	Nombre de périodes d'observation (années, par exemple)	Plus n est grand, plus la prime de crédibilité se rapproche de la prime individuelle et se base sur le passé de l'assuré

© Théo Jalabert

Exercice 3 : $N_j \sim \mathcal{P}(\Lambda\Theta)$ On suppose $\Lambda \perp\!\!\!\perp \Theta$

$$\Lambda = \begin{cases} 0{,}1 & \text{si assuré vit en Z rurale} \\ 0{,}2 & \text{si — Z urbain} \end{cases}$$

$$\Theta = \begin{cases} 0{,}5 & \text{avec } P = 1/2 \\ 1{,}5 & \text{—} \end{cases}$$

1) $\pi = \mathbb{E}[N_j \mid \Lambda = 0{,}1] = \mathbb{E}[N_j \mid \Lambda = 0.1, \Theta = 0.5]\,\mathbb{P}(\Theta = 0.5) + \mathbb{E}[N_j \mid \Lambda = 0.1, \Theta = 1.5]\,\mathbb{P}(\Theta = 1.5)$

proba

$$= 0.1 \times 0.5 \times \tfrac{1}{2} + 0.1 \times 1.5 \times \tfrac{1}{2}$$
$$= 0.1$$

2) On note $\Theta = \{\theta_1 = 0.5, \theta_2 = 1.5\}$ les profils de risque

$$P(\Theta = \theta_i \mid \underline{N}) = \frac{P(\underline{N} = \underline{n} \mid \Theta = \theta_i)\,P(\Theta = \theta_i)}{\sum_{i=1}^{2} P(\underline{N} = \underline{n} \mid \Theta = \theta_i)\,P(\Theta = \theta_i)}$$ * La distribut° a posteriori de Θ.

On veut $\mathbb{E}[N_4 \mid \underline{N} = 0]$, comme $N_j \sim \mathcal{P}(\Lambda\Theta)$, $\mathbb{E}[N_4 \mid \underline{N} = 0] = \mathbb{E}[\Lambda\Theta \mid \underline{N} = 0]$

Ici on s'intéresse à un assuré vivant en zone rurale

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N_4 \mid \underline{N} = 0] = 0{,}1\,\mathbb{E}[\Theta \mid \underline{N} = 0]$$

$$P(\underline{N} = 0 \mid \Theta = \theta_i, \Lambda = 0.1) = \left(e^{-0.1 \times \theta_i}\right)^3 = e^{-0.3 \times \theta_i}$$
$$P(\underline{N} = 0 \mid \Theta = 0.5, \Lambda = 0.1)\,P(\Theta = 0.5) = 0.5\, e^{-0.3 \times 0.5}$$
$$P(\underline{N} = 0 \mid \Theta = 1.5, \Lambda = 0.1)\,P(\Theta = 1.5) = 0.5\, e^{-0.3 \times 1.5}$$

$$\Rightarrow \sum_i P(\underline{N} = 0 \mid \Theta = \theta_i, \Lambda = 0.1)\,P(\Theta = \theta_i) = 0.5\left(e^{-0.3 \times 0.5} + e^{-0.3 \times 1.5}\right)$$

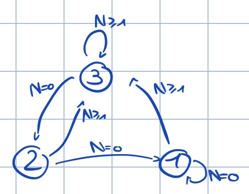
$$\Rightarrow P(\Theta = 0.5 \mid \underline{N} = 0) = \frac{0.5\, e^{-0.3 \times 0.5}}{0.5\left(e^{-0.3 \times 0.5} + e^{-0.3 \times 1.5}\right)} = 0.5744$$

$$\Rightarrow P(\Theta = 1.5 \mid \underline{N} = 0) = \frac{0.5\, e^{0.3 \times 1.5}}{0.5\left(e^{-0.3 \times 0.5} + e^{-0.3 \times 1.5}\right)} = 0.4256$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N_4 \mid \underline{N} = 0] = \mathbb{E}[\Lambda\Theta \mid \underline{N} = 0] = 0.1\,[0.5 \times 0.5744 + 1.5 \times 0.4256]$$
$$= 0.09256$$
$$= 9.256\,\%$$

3)

	ℓ	0	1ou+
entrée →	3	2	3
	2	1	3
	1	1	3



a) Hétérogénéité → 2 phénomènes : Zone et profil de risque

La zone est déjà prise en compte dans la prime a priori, il faut que l'échelle BM reflète l'info sur Θ (son amélioration → moins de prime

b) $\Theta = \theta$, $\Lambda = \lambda$ $\qquad N \sim \mathcal{P}(\Lambda\Theta)$

© Théo Jalabert

$$P_{\lambda\theta} = \begin{pmatrix} e^{-\lambda\theta} & 0 & 1-e^{-\lambda\theta} \\ e^{-\lambda\theta} & 0 & 1-e^{-\lambda\theta} \\ 0 & e^{-\lambda\theta} & 1-e^{-\lambda\theta} \end{pmatrix}$$

proba d'être en 3 et d'aller en 2

$P(N=0) = e^{-\lambda\theta}$

$P(N \geq 1) = 1 - e^{-\lambda\theta}$

$\pi_{\lambda\theta}$ est tq $\begin{cases} \pi_{\lambda\theta}' P_\theta = \pi_{\lambda\theta}' \\ \pi_{\lambda\theta} e_3 = 1 \end{cases}$

$\pi_{\lambda\theta}' = (\pi_1 \quad \pi_2 \quad \pi_3)$

$\Rightarrow \pi_{\lambda\theta}' P_\theta = \left((\pi_1 + \pi_2) e^{-\lambda\theta} \quad \pi_3 e^{-\lambda\theta} \quad \underbrace{(\pi_1+\pi_2+\pi_3)}_{=1}(1-e^{-\lambda\theta}) \right)$

$\Rightarrow \begin{cases} (\pi_1+\pi_2)e^{-\lambda\theta} = \pi_1 \\ \pi_3 e^{-\lambda\theta} = \pi_2 \\ (1-e^{-\lambda\theta}) = \pi_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \pi_1 = e^{-2\lambda\theta} \\ \pi_2 = (1-e^{-\lambda\theta})e^{-\lambda\theta} \\ \pi_3 = 1-e^{-\lambda\theta} \end{cases}$ On a bien $\sum_i \pi_i = 1$.

$\Rightarrow \pi_{\lambda\theta} = \begin{pmatrix} e^{-2\lambda\theta} \\ e^{-\lambda\theta}(1-e^{-\lambda\theta}) \\ 1-e^{-\lambda\theta} \end{pmatrix}$

c) Méthode de Norberg.

$$r_\ell = \frac{\sum_k w_k \int_\Theta \theta\, \pi_\ell(\lambda_k\theta) u(\theta)\, d\theta}{\sum_k w_k \int_\Theta \pi_\ell(\lambda_k\theta) u(\theta)\, d\theta}$$

$$\int_\Theta \theta\, \pi_\ell(\lambda_k\theta) u(\theta)\, d\theta = 0.5 \times \pi_\ell(\lambda_k 0)\tfrac{1}{2} + 1.5 \times \pi_\ell(\lambda_k \theta)\tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow r_\ell = \frac{\left(\tfrac{3}{5} \times \left(0.5 \times \pi_\ell(0.1\cdot 0.5)\tfrac{1}{2} + 1.5 \times \pi_\ell(0.1\cdot 1.5)\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{2}{5}\left(0.5 \times \pi_\ell(0.2\cdot 0.5)\tfrac{1}{2} + 1.5 \times \pi_\ell(0.2\cdot 1.5)\tfrac{1}{2}\right)\right)}{\left(\tfrac{3}{5} \times \left(\pi_\ell(0.1\cdot 0.5)\tfrac{1}{2} + \pi_\ell(0.1\cdot 1.5)\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{2}{5}\left(\pi_\ell(0.2\cdot 0.5)\tfrac{1}{2} + \pi_\ell(0.2\cdot 1.5)\tfrac{1}{2}\right)\right)}$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{\tfrac{3}{5} \times \left(0.5 \times e^{-2\times 0.1 \times 0.5} \times \tfrac{1}{2} + 1.5\, e^{-2\times 0.1 \times 1.5} \times \tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{2}{5}\left(0.5\, e^{-2\times 0.2 \times 0.5}\tfrac{1}{2} + 1.5 \times e^{-2\times 0.2\times 1.5} \times \tfrac{1}{2}\right)}{\tfrac{3}{5} \times \left(e^{-2\times 0.1\times 0.5}\tfrac{1}{2} + e^{-2\times 0.1 \times 1.5}\tfrac{1}{2}\right) + \tfrac{2}{5}\left(e^{-2\times 0.2\times 0.5}\tfrac{1}{2} + e^{-2\times 0.2\times 1.5}\tfrac{1}{2}\right)}$$

$= 0.93275$

De même $r_2 = 1.20486$

$r_3 = 1.23553$