ISFA, Université Claude Bernard - Lyon 1
Modélisation de risque de crédit, TD2

Exercice 1 On fixe un espace de probabilité fourni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On considère un produit financier général qui est sensible au risque de défaut et représenté par le triplet (C, G, Z) où C est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable pour le paiement à la maturité $T > 0$, $G = (G_t, t \geq 0)$ est un processus $\mathbb{F}$-adapté pour le paiement continue et et Z un processus $\mathbb{F}$-prévisible pour le paiement au temps de défaut τ.

1. Préciser l'information observable concernant l'événement de défaut $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t\geq 0}$.
2. Préciser l'information globale du marché $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$.
3. On suppose que le taux d'intérêt court $r = (r_t, t \geq 0)$ est un processus $\mathbb{F}$-adapté. Donner la valeur du produit (C, G, Z) à la date $t < T \wedge \tau$ en terme de l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{G}_t$.
4. En utilisant la lemma Jeulin-Yor, calculer en terme de l'espérance conditionelle par rapport à $\mathcal{F}_t$ les quantités suivantes :
   (a) le paiement à la maturité T si le défaut est après T ;
   (b) le paiement continue jusqu'à la maturité T ou le défaut τ suivant laquelle arrive au premier ;
   (c) le paiment au défaut si le défaut arrive avant T.
5. Pour un CDS, préciser le triplet (C, G, Z), en déduire le spread du CDS de maturité T qui est émis à la date $t = 0$.
6. Pour le CDS dans la question précédente, calculer sa valeur à une date $0 < t < T \wedge \tau$.
7. On rappelle le modèle de Cox où

$$\tau := \inf\{t \geq 0, \int_0^t \lambda_s ds > \Gamma\}$$

   où $(\lambda_t, t \geq 0)$ est un processus $\mathbb{F}$-adapté et Γ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1 qui est indépendente de $\mathcal{F}_\infty$. Calculer la valeur du produit financier (C, G, Z), et en particulier celle de CDS dans le modèle de Cox.