# TD 5: CHAINE DE MARKOV

Modèles Aléatoires Discrets M1– 2019-2020

P.-O. Goffard & Rémy Poudevigne

---

1. Soit $X_n$ et $Y_n$ deux martingales de carré intégrable définies sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_n, \mathbb{P})$.

   (a) Montrer que pour tout $m \leq n$, on a $\mathbb{E}\left[X_m Y_n | \mathcal{F}_m\right] = X_m Y_m$ p.s., et donc en particulier que $\mathbb{E}\left[X_m X_n | \mathcal{F}_m\right] = X_m X_m$ p.s.

   **Solution:** On sait que $X_m$ est $\mathcal{F}_m$-mesurable donc

   $$\mathbb{E}\left[X_m Y_n | \mathcal{F}_m\right] = X_m \mathbb{E}\left[Y_n | \mathcal{F}_m\right] \text{ p.s.}$$

   De plus $Y$ est une martingale et $m \leq n$ donc

   $$\mathbb{E}\left[Y_n | \mathcal{F}_m\right] = Y_m \text{ p.s.}$$

   On en conclut que $\mathbb{E}\left[X_m Y_n | \mathcal{F}_m\right] = X_m Y_m$ p.s.

   (b) Montrer que pour tout $m < n \leq p < q$, on a Cov $(X_n - X_m, Y_q - Y_p) = 0$.

   **Solution:** On a :

   $$\text{Cov }(X_n - X_m, Y_q - Y_p) = \mathbb{E}((X_n - X_m)(Y_q - Y_p)) - \mathbb{E}(X_n - X_m)\mathbb{E}(Y_q - Y_p).$$

   On a
   $$\mathbb{E}(X_n - X_m) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_n - X_m | \mathcal{F}_m)) = \mathbb{E}(X_m - X_m) = 0.$$

   De même $\mathbb{E}(Y_q - Y_p) = 0$. On a donc :

   $$\begin{aligned}\text{Cov }(X_n - X_m, Y_q - Y_p) =& \mathbb{E}((X_n - X_m)(Y_q - Y_p)) \\ =& \mathbb{E}(\mathbb{E}((X_n - X_m)(Y_q - Y_p)|\mathcal{F}_p)) \\ =& \mathbb{E}((X_n - X_m)\mathbb{E}((Y_q - Y_p)|\mathcal{F}_p)) \text{ car } (X_n - X_m) \text{ est } \mathcal{F}_m - \text{mesurable} \\ =& \end{aligned}$$

   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\mathbb{E}\left[(X_n - X_0)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_k - X_{k-1})^2\right]$.

   **Solution:** On va raisonner par récurrence. Pour $n \in \{0, 1\}$, $(X_n - X_0)^2 = \sum_{k=1}^{n}(X_k - X_{k-1})^2$ et donc $\mathbb{E}\left[(X_n - X_0)^2\right] = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[(X_k - X_{k-1})^2\right]$.

On suppose l'égalité vraie au rang $n$. On a :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_0)^2\right] =&\mathbb{E}\left[((X_{n+1}-X_n)+(X_n-X_0))^2\right]\\ =&\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_n)^2+(X_n-X_0)^2+2(X_{n+1}-X_n)(X_n-X_0)\right]\\ =&\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_n)^2+(X_n-X_0)^2\right] \text{ par l'exercice précédent.}\\ =&\mathbb{E}\left[(X_{n+1}-X_n)^2+\sum_{k=1}^{n}(X_k-X_{k-1})^2\right]\\ =&\sum_{k=1}^{n+1}\mathbb{E}\left[(X_k-X_{k-1})^2\right].\end{aligned}$$

2. On considère l'espace de probabilité filtré $(\Omega,\mathcal{F},\mathcal{F}_n,\mathbb{P})$ où $\Omega=\mathbb{N}^*$, $\mathcal{F}=\mathcal{P}(\mathbb{N}^*)$, $\mathbb{P}(\{n\})=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$, $\mathcal{F}_n=\sigma(\{1\},...,\{n\},[n+1,+\infty[)$. On considère la suite de variables aléatoires réelles $X_n=(n+1)\mathbb{I}_{[n+1,+\infty[}$.
   (a)
   - Montrer que pour la filtration $\mathcal{F}_n$, $X_n$ est une martingale positive.
   - Vérifier que $X_n\to 0$ p.s.
   - $X_n$ converge-t-elle dans $\mathcal{L}^1$ ?

   **Solution:** Pour tout $n\in\mathbb{N}$, $X_n\in\{0,n+1\}$ donc la variable $X_n$ est positive. Pour tout $i\in[[1;n]]$,
   $$\mathbb{E}(X_{n+1}|\{i\})=0.$$
   On a également
   $$\mathbb{E}(X_{n+1}|\,[n+1,+\infty[)=\frac{\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)\times 0+\frac{1}{n+2}\times(n+2)}{\frac{1}{n+1}}=n+1.$$
   On a bien $\mathbb{E}(X_{n+1}|\mathcal{F}_n)=X_n$ p.s.
   Pour tout $i\in\mathbb{N}$, pour tout $n\geq i$, $X_n(i)=0$ donc $X_n\to 0$ p.s.
   On a $\mathbb{E}(|X_n-0|)=\mathbb{E}(X_n)=1$ donc on n'a pas convergence dans $\mathcal{L}^1$.

   (b) Pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, quelle est la valeur de $\sup_{n\in\mathbb{N}}X_n(k)$ ? En déduire $\mathbb{E}[\sup_{n\in\mathbb{N}}X_n]$.

   **Solution:** On a que le maximum est atteint pour $n=k-1$ et on a alors $X_{k-1}(k)=k$ donc $\sup_{n\in\mathbb{N}}X_n(k)=k$. On en déduit que :
   $$\begin{aligned}\mathbb{E}[\sup_{n\in\mathbb{N}}X_n]*=&\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)k\\ =&\sum_{k\geq 1}\frac{1}{k(k+1)}k\\ =&\sum_{k\geq 1}\frac{1}{(k+1)}\\ =&\infty.\end{aligned}$$

3. Soit $(Y_n)$ une suite de variables aléatoires réelles, positives, indépendantes, définies sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de même espérance 1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on poste $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, ..., Y_n)$ et $X_n = Y_0 ... Y_n$.
   (a) Montrer que $X_n$ est une $\mathcal{F}_n$-martingale et que $\sqrt{X_n}$ est une $\mathcal{F}_n$-surmartingale.

   **Solution:**

   (b) Montrer que le produit infini $\displaystyle\prod_{k=0}^{+\infty} \mathbb{E}\left[\sqrt{Y_k}\right]$ converge dans $\mathbb{R}_+$, on note $l$ sa limite.

   **Solution:**

   (c) On suppose que $l = 0$. Montrer que $\sqrt{X_n} \to 0$ p.s. La martingale $(X_n)$ est-elle régulière ?

   **Solution:**

   (d) On suppose que $l > 0$. Montrer que $\left(\sqrt{X_n}\right)$ est une suite de Cauchy dans $L^2$. En déduire que $(X_n)$ est régulière.

   **Solution:**

   (e) Application : Soit $P$ et $Q$ deux probabilités distinctes sur un ensemble dénombrable $E$ et $(Z_n)$ une suite de variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $E$ de même loi $Q$.
   On suppose que pout tout $x \in E$, on a $Q(x) > 0$.
   On pose $X_n = \dfrac{P(Z_0)}{Q(Z_0)} ... \dfrac{P(Z_n)}{Q(Z_n)}$.
   Déduire de ce qui précède que $X_n \to 0$ p.s.

   **Solution:**

4. On considère une variable aléatoire $N$ à valeurs dans $\mathbb{N}$, et une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi $(X_k)_{k \geq 1}$, indépendante de $N$.
   On pose
$$Y = \sum_{k=1}^{N} X_k \,.$$
   (a) Déterminer $\mathbb{E}[Y|N]$, puis $\mathbb{E}[Y]$.

   **Solution:** On a:
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y|N] &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N} C_i | N\right] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}[C_i|N] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \mathbb{E}(C_1) = N\mathbb{E}(C_1),\end{aligned}$$
   où dans l'avant dernière égalité on utilise le fait que les $C_i$ sont indépendantes de $N$. On obtient donc que
$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(\mathbb{E}[Y|N]) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(C_1).$$

(b) Déterminer $\text{Var}(Y|N)$, puis $\text{Var}(Y)$.

**Solution:** Rappelons que

$$\text{Var}(Y|N) = \mathbb{E}\left[(Y - \mathbb{E}[Y|N])^2|N\right],$$

et que

$$\text{Var}\, Y = \mathbb{E}(\text{Var}(Y|N)) + \text{Var}(\mathbb{E}[Y|N]).$$

On obtient

$$\begin{aligned}\text{Var}(Y|N) &= \mathbb{E}\left[Y^2|N\right] - \mathbb{E}[Y|N]^2\\ &= \mathbb{E}\left[Y^2|N\right] - \mathbb{E}[Y|N]^2\\ &= \cdots = N\,\text{Var}(C_1).\end{aligned}$$

Puis $\text{Var}(Y) = \cdots = \mathbb{E}(N)\,\text{Var}(C_1) + \mathbb{E}(C_1)^2\text{Var}(N)$

(c) Montrer que $L_S = G_N \circ L_X$ où $L_Z$ est la transformée de Laplace de la variable aléatoire $Z$ et $G_Z$ est sa fonction génératrice des probabilités.

**Solution:** On a pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{\lambda Y}|N\right) =& \mathbb{E}\left(e^{\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i}|N\right)\\ =&\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^{n} e^{\lambda X_i}|N\right)\\ =&\prod_{i=1}^{n}\mathbb{E}\left(e^{\lambda X_i}|N\right)\\ =&\mathbb{E}\left(e^{\lambda X_1}\right)^N.\end{aligned}$$

On trouve donc :

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda Y}\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda Y}|N\right)\right) = \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(e^{\lambda X_1}\right)^N\right).$$

On a bien $L_S = G_N \circ L_X$.

5. Soit $X_k$ des v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\theta$ et $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ avec la convention $S = 0$ si $N = 0$. On suppose que $N$ suit une loi binomiale négative (ou loi de Pólya) de paramètres $r$ et $p$ avec $r$ entier. C'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbb{P}(N = n) = \frac{\Gamma(r+n)}{n!\Gamma(r)} p^r (1-p)^n.$$

(a) • Soit $\theta, x \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $I_k$ définie pour $k \in \mathbb{N}^*$ par :

$$I_k = \int_0^x t^{k-1} \exp(\theta t)\; dt\ .$$

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\frac{\theta^k}{(k-1)!} I_k = 1 - \exp(\theta x) \sum_{j=0}^{k-1} \frac{(\theta x)^j}{j!} \ .$$

- Déterminer la fonction de répartition de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$.

**Solution:**

(b) Déterminer une expression (avec une somme infinie) de la fonction de répartition de $S$.

**Solution:**

(c)
- Déterminer la fonction génératrice des probabilités d'une v.a. de loi binomiale négative Neg-Bin$(r, p)$ et celle d'une v.a. de loi binomiale Neg-Bin$(r, 1-p)$. Déterminer la fonction génératrice des moments d'une v.a. de loi exponentielle.
- En déduire que la composée d'une loi Neg-Bin$(r, p)$ par la loi Exp$(\theta)$ a même fonction génératrice des moments que la composée d'une loi Bin$(r, 1-p)$ par la loi Exp$(p\theta)$.

**Solution:**

(d) En déduire une expression simple (avec une somme finie) de la fonction de répartition de $S$.

**Solution:**