ISFA, Université Claude Bernard - Lyon 1
M2 Actuariat, TD2
Finance Mathématique

Exercice 1 Soit $(r_t, t \geq 0)$ le taux d'intérêt court dans le modèle CIR où

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, r_0 > 0$$

avec a, b et σ des constantes.

1. En écrivant l'équation différentielle ordinaire (EDO) satisfaite par $\mathbb{E}[r_t]$, calculer la moyenne $\mathbb{E}[r_t]$.
2. En applicant la formule d'Itô à r_t^2 et utilisant la méthode similaire que dans l'exercice précédente, calculer la variance $\text{Var}(r_t)$.

Exercice 2 On considère le taux court dans le modèle Vasicek sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$ comme

$$dr_t = a(\widehat{b} - r_t)dt + \sigma dW_t^*, r_0 > 0$$

avec $a, \widehat{b}$ et σ des constantes.

1. Ecrire l'équation différentielle partielle (EDP) satisfaite par le prix de l'obligation zéro-coupon $B(t, r, T)$.
2. On cherche $B(t, r, T)$ de la forme $B(t, r, T) = \exp(-A(T - t)r + C(T - t))$ avec A et C des fonctions ne dépendant que de la maturité restante $\theta = T - t$.
   (a) Ecrire les EDOs satisfaite par A et C.
   (b) Résoudre ces équations et retrouver la formule de Vasicek pour le prix d'une OZC.
3. Calculer la volatilité du prix de l'OZC.

Exercice 3 On considère le modèle Ho-Lee pour modéliser le taux forward

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

où on fixe la volatilité du taux forward comme une constante

$$\sigma(t, T) = -\sigma.$$

1. En utilisant la relation entre la volatilité et le terme drift du taux forward, écrire l'EDS satisfaite par le taux forward.
2. En déduire le taux court r_t.
3. Calculer le prix $B(t, T)$ d'une obligation zéro-coupon de maturité T.

Exercice 1 : Modèle CIR

Soit $(r_t)_{t\geq 0}$, $dr_t = a(b-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\, dW_t \quad r_0 > 0$

1) $r_t = r_0 + \int_0^t a(b-r_s)ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r_s}\, dW_s$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[r_t] = r_0 + \mathbb{E}\left[\int_0^t a(b-r_s)ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r_s}\, dW_s\right] \qquad \text{or } \mathbb{E}\left[\int_0^t \sigma\sqrt{r_s}\, dW_s\right] = 0$$

On désigne par $\phi(t) = \mathbb{E}[r_t]$ qui est une fonction déterministe en temps et qui dépend des paramètres a, b et σ.

$$\Rightarrow \phi(t) = r_0 + \int_0^t a(b - \underbrace{\mathbb{E}[r_s]}_{\phi(s)})ds \qquad \underline{\text{EDO}}$$

On dérive aux 2 côtés de l'EDO et on obtient

$$\phi'(t) = a(b-\phi(t))$$
$$\phi'(t) + a\,\phi(t) = ab$$

$$\Rightarrow e^{at}(\phi'(t) + a\phi(t)) = abe^{at}$$
$$\Rightarrow (e^{at}\phi(t))' = abe^{at}$$

$$\Rightarrow \int_0^t (e^{at}\phi(t))'dt = \int_0^t abe^{at}dt \Rightarrow e^{at}\phi(t) - \phi(0) = \int_0^t abe^{as}ds$$
$$= b(e^{at}-1)$$
$$\Rightarrow \phi(t) = e^{-at}(\phi(0) + b(e^{at}-1))$$
$$= e^{-at}(r_0 + b(e^{at}-1))$$
$$= e^{-at}(r_0 - b) + b$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[r_t] = b + e^{-at}(r_0 - b)$$

2) Appliquons Itô à r_t^2 et calculons $Var(r_t)$

$$Y_t = r_t^2 = f(r_t) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x} = 2x \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$dr_t^2 = 2r_t dr_t + d\langle r\rangle_t$$
$$= 2r_t(a(b-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\, dW_t) + \sigma^2 r_t dt$$
$$= ((2ab+\sigma^2)r_t - 2ar_t^2)dt + 2\sigma r_t^{3/2} dW_t$$

$$\Rightarrow r_t^2 = r_0^2 + \int_0^t ((2ab+\sigma^2)r_s - 2ar_s^2)ds + \int_0^t 2\sigma r_s^{3/2} dW_s$$

$$\mathbb{E}[r_t^2] = r_0^2 + \int_0^t (2ab+\sigma^2)\mathbb{E}[r_s]ds - \int_0^t 2a\,\mathbb{E}[r_s^2]ds$$

Notons $\gamma(t) = \mathbb{E}[r_t^2]$

$$\Rightarrow \gamma(t) = r_0^2 + \int_0^t (2ab+\sigma^2)\,\phi(s)ds - \int_0^t 2a\,\gamma(s)ds$$

$$\Rightarrow \frac{d\gamma(t)}{dt} = (2ab+\sigma^2)\phi(t) - 2a\gamma(t)$$
$$= (2ab+\sigma^2)\phi(t) - 2a\,\gamma(t)$$

$$\Rightarrow \gamma'(t) + 2a\,\gamma(t) = (2ab+\sigma^2)\phi(t)$$

$$\Rightarrow e^{2at}\left(\gamma'(t) + 2a\,\gamma(t)\right) = (2ab+\sigma^2)\phi(t)e^{2at}$$

$$\Rightarrow \left(\gamma(t)e^{2at}\right)' = (2ab+\sigma^2)e^{2at}\phi(t)$$

$$\Rightarrow \gamma(t)e^{2at} - \gamma(0) = (2ab+\sigma^2)\int_0^t e^{2as}\phi(s)\,ds$$
$$= (2ab+\sigma^2)\int_0^t e^{2as}\left(b + (r_0-b)e^{-as}\right)ds$$

$$= (2ab+\sigma^2)\left(\frac{b}{2a}(e^{2at}-1) + \frac{r_0-b}{a}(e^{at}-1)\right)$$

$$\Rightarrow \gamma(t) = e^{-2at}\left[(2ab+\sigma^2)\left(\frac{b}{2a}(e^{2at}-1) + \frac{r_0-b}{a}(e^{at}-1)\right) + r_0^2\right] \qquad \gamma(0) = r_0^2$$

$$= (2ab+\sigma^2)\left(\frac{b}{2a}(1-e^{-2at}) + \frac{r_0-b}{a}(e^{-at}-e^{-2at})\right) + r_0^2e^{-2at}$$

$$\Rightarrow Var(r_t) = \gamma(t) - \phi(t)^2$$

$$= (2ab+\sigma^2)\left(\frac{b}{2a}(1-e^{-2at}) + \frac{r_0-b}{a}(e^{-at}-e^{-2at})\right) + r_0^2e^{-2at} - \left[b + e^{-at}(r_0-b)\right]^2$$

$$= (2ab+\sigma^2)\left(\frac{b}{2a}(1-e^{-2at}) + \frac{r_0-b}{a}(e^{-at}-e^{-2at})\right) + r_0^2e^{-2at} - \left[b^2 + 2be^{-at}(r_0-b) + e^{-2at}(r_0-b)^2\right]$$

$$= \ldots$$

Exercice 2 : Modèle Vasicek

Sous $\mathbb{P}^*$, $dr_t = a(\hat{b} - r_t)dt + \sigma dW_t^*$ $\qquad a, \hat{b}$ et σ des

1) On écrit le prix de l'OZC sous forme $B(t,T) = B(t, r_t, T)$

On applique Itô

$$\rightarrow dB(t,r_t,T) = \partial_t B(t,r_t)dt + \partial_r B(t,r_t)dr_t + \frac{1}{2}\partial_r^2 B(t,r_t)d\langle r\rangle_t$$

$$= \partial_t B(t,r_t)dt + \partial_r B(t,r_t)\left(a(\hat{b}-r_t)dt + \sigma dW_t^*\right) + \frac{1}{2}\partial_r^2 B(t,r_t)\sigma^2 dt$$
$$= \underbrace{\left[\partial_t B(t,r_t) + \partial_r B(t,r_t)a(\hat{b}-r_t) + \frac{1}{2}\sigma^2\partial_r^2 B(t,r_t)\right]dt}_{} + \sigma\partial_r B(t,r_t)\,dW_t^*$$

Par le principe AOA, on a que

$$dB(t,T) = d(t,r_t) = \underbrace{B(t,r_t)}_{}(r_t dt + Vol(t,T)dW_t^*) \qquad (1)$$

On a donc l'égalité :

$$\partial_t B(t,r_t) + a(\hat{b}-r_t)\partial_r B(t,r_t) + \frac{1}{2}\sigma^2\partial_r^2 B(t,r_t) - r_t B(t,r_t) = 0$$

Pour toute valeur de r_t

Donc pour la fonct° $B(t,r) : [0,T]\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+$ elle satisfait l'EDP

$$\partial_t B(t,r) + a(\hat{b}-r)\partial_r B(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2\partial_r^2 B(t,r) - r B(t,r) = 0$$

avec la condit° terminale $B(T,r) = 1$.

2) On cherche $B(t,r,T)$ de la forme $B(t,r,T) = \exp(-A(T-t)r + C(T-t))$ avec A et C 2 fonct° ne dépendant que de $\theta = T-t$

a) $B(t,r,T)$ satisfait l'EDP :

$$\partial_t B(t,r) + a(\hat{b}-r)\partial_r B(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2\partial_r^2 B(t,r) - r B(t,r) = 0$$

$$\begin{cases} \partial_t B(t,r) = (A'(\theta)r - C'(\theta))\, B(t,r) \\ \partial_r B(t,r) = -A(\theta)B(t,r) \\ \partial_r^2 B(t,r) = A(\theta)^2 B(t,r) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \quad A'(\theta)r - C'(\theta) - a(\hat{b}-r)A(\theta) + \frac{1}{2}\sigma^2 A(\theta)^2 - r = 0$$

$$\Longrightarrow (A'(\theta) + aA(\theta) - 1)r - C'(\theta) - a\hat{b}A(\theta) + \frac{1}{2}\sigma^2 A(\theta)^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} A'(\theta) + aA(\theta) = 1 \\ C'(\theta) + a\hat{b}A(\theta) - \frac{1}{2}\sigma^2 A(\theta)^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (e^{a\theta}A(\theta))' = e^{a\theta} \quad (*) \\ C'(\theta) = \frac{1}{2}\sigma^2 A(\theta)^2 - a\hat{b}A(\theta) \end{cases}$$

$(*) \Longrightarrow A(\theta) - A(0) = \dfrac{1-e^{-a\theta}}{a}$ $\qquad A(0)$ est nécessairement égal à 0 car $B(t,r) = e^{-A(\theta)r + C(\theta)}$ $\forall r$ et $B(T,r) = 1$

$$\Longrightarrow A(\theta) = \frac{1-e^{-a\theta}}{a}$$

$$\Longrightarrow C'(\theta) = \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{1}{a^2}(1-e^{-a\theta})^2 - a\hat{b}\,\frac{1-e^{-a\theta}}{a}$$

$$= -\left(\hat{b} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right) + \left(\hat{b} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)e^{-a\theta} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(e^{-a\theta} - e^{-2a\theta}\right)$$

$$= -R_\infty + R_\infty e^{-a\theta} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(e^{-a\theta} - e^{-2a\theta}\right)$$

avec $R_\infty = \hat{b} - \dfrac{\sigma^2}{2a^2}$

$$\Longrightarrow C(\theta) = -R_\infty(\theta - 0) + R_\infty\left(\frac{1-e^{-a\theta}}{a}\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-a\theta})^2$$

$$\Longrightarrow B(t,r_t,T) = \exp(-A(T-t)r_t + C(T-t))$$

$$= \exp\left(-\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}r_t + \left[-R_\infty(T-t) + R_\infty\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right)\right.$$

$$\Longrightarrow B(t,r_t,T) = \exp\left(-R_\infty(T-t) + (R_\infty - r_t)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right)$$

3) Par (1) on a que $dB(t,T) = dB(t,r_t,T) = B(t,r_t)\left(r_t dt + Vol(t,T)\, dW_t^*\right)$

$$\Rightarrow Vol(t,T) = \sigma \frac{\partial_r B(t,r_t)}{B(t,r_t)} = -\sigma A(\theta) = -\sigma \frac{1-e^{-a\theta}}{a} = -\frac{\sigma}{a}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)$$

Exercice 3 : Modèle Ho-Lee

$$df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW_t$$

où $\sigma(t,T) = -\sigma$

1) Sous la mesure risque neutre $\mathbb{P}^*$, si le modèle de taux forward est

$$df(t,T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW_t^*$$

La condition AOA impose que $\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,s)\,ds$

Ici on se place dans le cas du modèle Ho-Lee et on fixe la volatilité du taux forward comme une constante i.e $\sigma(t,T) = -\sigma$

$$\Rightarrow \alpha(t,T) = -\sigma\int_t^T -\sigma\,ds = \sigma^2(T-t)$$

Donc sous $\mathbb{P}^*$, $df(t,T) - f(0,T) = \sigma^2(T-t)dt - \sigma dW_t$

$$\Rightarrow f(t,T) - f(0,T) = \sigma^2\left(tT - \frac{t^2}{2}\right) - \sigma W_t$$

2) $r_t = f(t,t) = \frac{\sigma^2 t^2}{2} - \sigma W_t + f(0,T)$

3) $B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right]$

On a vu que $r_t = \frac{(\sigma t)^2}{2} - \sigma W_t + f(0,T)$

$$\Rightarrow r_s = r_t + \tfrac{1}{2}\sigma^2(s-t)^2 - \sigma(W_s - W_t)$$

$$\Rightarrow \int_t^T r_s\,ds = r_t(T-t) + \tfrac{1}{2}\sigma^2 \times \tfrac{1}{3}(T-t)^3 - \sigma\int_t^T W_s - W_t\,ds$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\int_t^T r_s\,ds \mid \mathcal{F}_t\right] = r_t(T-t) + \tfrac{1}{6}\sigma^2(T-t)^3 - \sigma\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\int_t^T W_s - W_t\,ds \mid \mathcal{F}_t\right]$$