

# Master PROBABILITE et FINANCE

Université Pierre et Marie Curie, Ecole Polytechnique,

Année 2018-2019

## Le Monde des Taux d'intérêt: Avant et après la crise :



email : elkaroui@gmail.com

# Table des matières

<b>I Avant la crise</b>	<b>3</b>
<b>1 Le monde des taux d'intérêt</b>	<b>4</b>
1.1 La formation des taux d'intérêt . . . . .	5
1.1.1 L'intérêt . . . . .	5
1.1.2 La maturité des taux . . . . .	6
1.1.3 Le rôle des Banques Centrales. . . . .	7
1.1.4 Crise, rating et qualité de signature . . . . .	8
1.2 Les différents types de taux des marchés financiers . . . . .	9
1.2.1 Le taux de refinancement de la BCE . . . . .	9
1.2.2 Les taux interbancaires Euribor, Eonia, et Libor . . . . .	9
1.2.3 Taux d'intérêt, Obligations, Taux à terme . . . . .	11
1.3 Calibration de la courbe des taux . . . . .	13
1.3.1 Les méthodes classiques . . . . .	13
1.3.2 Gestion actuarielle du risque de taux . . . . .	16
<b>2 Absence d'arbitrage et modélisation dynamique des taux d'intérêt</b>	<b>18</b>
2.1 Capitalisation, Actualisation et primes de risque . . . . .	18
2.1.1 Capitalisation et Actualisation et un peu d'histoire . . . . .	18
2.2 Les modèles à facteurs uni-dimensionnel . . . . .	23
2.2.1 Le modèle de CIR . . . . .	24
2.2.2 Les modèles linéaires . . . . .	27
2.2.3 Les modèles multi-dimensionnels de type affine . . . . .	28
<b>3 Les modèles de déformation de la courbe des taux pour les produits dérivés</b>	<b>29</b>
3.1 Le modèle en absence d'opportunité d'arbitrage . . . . .	30
3.1.1 Le modèle pour les zéro-coupon . . . . .	31
3.2 Equation structurelle des taux . . . . .	33
3.2.1 Taux zéro-coupon et conditions initiales . . . . .	33
3.2.2 Exemples de fonctions de volatilité . . . . .	39
3.2.3 Le cas unidimensionnel . . . . .	39
3.2.4 Le cas multi-dimensionnel . . . . .	41
<b>4 Pricing des Dérivés de Taux d'Intérêt</b>	<b>43</b>
4.1 Les instruments de couverture . . . . .	44

## TABLE DES MATIÈRES

4.1.1	Contrats forward et FRA's . . . . .	44
4.1.2	Les contrats Future . . . . .	45
4.1.3	Les options sur future . . . . .	46
4.1.4	Les Swaps . . . . .	46
4.1.5	Les instruments optionnels de taux . . . . .	47
4.2	Introduction aux méthodes d'évaluation . . . . .	48
4.3	Identification de l'échéancier . . . . .	49
4.3.1	Quelques exemples d'échéanciers . . . . .	49
4.4	Evaluation forward . . . . .	51
4.4.1	Exemples de contrats dont l'évaluation ne demande pas de modèle . .	52
4.4.2	Marché à terme et probabilité forward neutre . . . . .	53
4.4.3	Correction de convexité pour les contrats forwards . . . . .	55
4.4.4	Correction de convexité lorsque les volatilités sont déterministes . . .	57

## Première partie

### Avant la crise

# Chapitre 1

## Le monde des taux d'intérêt

### A- Taux d'intérêt, Banques centrales et marchés financiers

L'étude de la structure par terme des taux d'intérêt est d'une grande importance pratique, qui révèle les anticipations des agents sur les risques économiques ou financiers à venir. En particulier, la compréhension des déformations de la courbe des taux permet d'asseoir une stratégie de gestion de trésorerie (choix de la durée de placement, spéculation sur la structure des taux, éléments de couverture). La volatilité accrue des taux d'intérêt rend techniquement très important tout progrès allant dans le sens d'une plus grande maîtrise de ces problèmes. Modéliser les déformations futures de la courbe des taux est un enjeu majeur dans de nombreux domaines de la finance, tant pour gérer les risques de taux affectant le bilan des banques, que pour évaluer et couvrir les nombreux produits financiers auxquels recourent les marchés pour faire face au risque de taux et plus généralement de change. C'est aussi un enjeu majeur pour les banques centrales et les agences de régulation qui assurent la jonction entre les taux d'intérêt et l'économie réelle.

## 1.1 La formation des taux d'intérêt

### 1.1.1 L'intérêt

La notion d'intérêt est indissociable de celle de monnaie<sup>1</sup>, qui permet de préciser l'équivalent monétaire d'un échange. Historiquement<sup>2</sup>, cette notion n'allait pas de soi car elle a été souvent associée à celle d'*usure*, notion largement décriée sur le plan éthique (en particulier dans les différentes religions). La question de l'intérêt place *le temps au cœur* de la transaction, en associant la consommation immédiate et l'investissement en vue une consommation future plus importante.

La notion d'équivalent monétaire ne recouvre pas toujours la même notion, mais elle est toujours associée à une différence entre le « rendement global » et le coût total de l'opération. Par exemple, un prêt immobilier à taux fixe doit être associé à un TEG, taux effectif global, qui donne le taux actuariel de l'opération, en incluant les frais d'assurance et de transaction bancaire pour le calcul du taux effectif de l'opération. Il existe un taux maximum légal admis lors de la conclusion d'un prêt, le *taux d'usure* publié par la banque de France dont le dépassement est un délit pénal. Pour les économistes, l'intérêt est le prix à payer pour l'utilisation d'un crédit ou d'un capital. Associé à la notion de préférence pour le présent, c'est à dire qu'immobiliser du capital a un coût, il est naturel que les taux fluctuent en fonction de l'offre et de la demande. La question d'un taux « d'équilibre » long terme fait largement débat en ce moment, en référence au financement de l'écologie ou des retraites dans un contexte d'augmentation de la longévité.<sup>3</sup>.

Pour les juristes, ce sont les propriétés contractuelles et informatives qui sont mises en avant, (en particulier les taux sont en général exprimés sous forme de taux annuel pour être plus facilement comparables) et qui joueront un grand rôle dans les marchés.

**LE TAUX D'INTÉRÊT NOMINAL ET L'INFLATION a reprendre** Dans les marchés, il faut aussi tenir compte de la différence entre le taux d'intérêt nominal, qui est le taux de référence, et le taux réel, qui est le taux nominal diminué de l'inflation. S'il peut être assez courant que le taux réel soit négatif, il l'est beaucoup moins que comme dans la période actuelle, le taux nominal lui-même soit négatif, ce qui est le cas au Japon depuis des dizaines d'années. Nous reviendrons sur cette question à propos de la question des taux bas.

1. Pour une présentation motivée et détaillée, voir le document du Parlement Européen sur la détermination des taux d'intérêt ECON 116 fr, qui fait une très bonne synthèse, dont le texte qui suit s'inspire franchement, ainsi que d'une ancienne présentation faite par Y.Samuelides, un ancien. Des informations claires peuvent trouvées aussi sur le site de « La finance pour tous, », et des données statistiques sur les sites des banques centrales (Banque de France) et de la banque centrale européenne (BCE)
2. Voir la présentation de Bernard Bru sur le site du LPMA
3. Voir le cours du 2 ème semestre sur Risques de long terme en assurance et finance

### 1.1.2 La maturité des taux

Les taux se distinguent aussi par leur *maturité*, allant du taux au jour le jour aux taux long terme de maturité trente ans et plus.

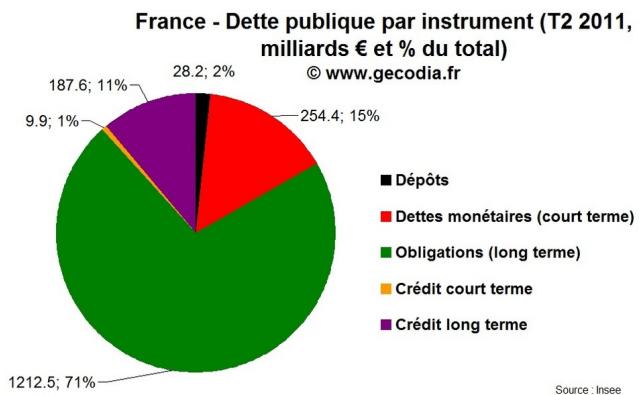
- Le taux court au jour le jour est le taux de prêt appliqué par la banque centrale aux banques et intermédiaires financiers; il est déterminé par la politique monétaire de la banque centrale dans sa lutte contre l'inflation. Les taux un peu plus longs (moins d'un an) sont associés à des produits financiers, ou autres instruments traités dans le marché dit « monétaire ».
- Par contre, les taux long terme sont déterminés par l'équilibre entre prêteurs et emprunteurs pour les obligations long terme, en fait 10 ans et plus en Europe, alimentant le marché dit « obligataire ».

Notons que les emprunteurs les plus importants sont les États. En France, les emprunts d'Etat s'appellent OAT, Obligations Assimilables du Trésor. Les grandes entreprises empruntent également beaucoup mais quantifient en particulier le compromis entre le placement financier à long terme et l'investissement dans un projet industriel. Il est en général convenu que les taux longs doivent être plus hauts que les taux courts, par suite de la préférence pour le présent des investisseurs ou consommateurs, mais des situations différentes ont parfois perduré pendant des années. On parle alors de courbe inversée. Cela peut résulter du fait que beaucoup d'acteurs économiques ont des difficultés de trésorerie (hausse des taux à court terme) ou d'une baisse de l'inflation (baisse des taux longs).

Les taux long terme dépendent à la fois des anticipations d'inflation et de croissance, suivant des mécanismes complexes, dont voici quelques exemples :

*Exemple :*

- En 1989, les agents anticipaient avec raison la fin d'un cycle de croissance dans les pays industrialisés. Les taux à long terme se sont alors détendus, alors que la politique monétaire restrictive des banques centrales maintenait des taux courts élevés : on a assisté à une inversion de la courbe.
- En 1997, lorsque le Royaume Uni a proclamé l'indépendance de sa banque centrale, les taux longs anglais ont baissé car les agents ont anticipé une politique monétaire plus efficace et une inflation mieux maîtrisée.
- De manière générale, lorsque les déficits publics augmentent, les taux d'intérêt ont tendance à augmenter, car l'épargne disponible pour les projets d'investissement a tendance à être captée par les émissions de l'Etat.
- Mais depuis les politiques de « Quantitative Easing » introduites aux Etats-Unis dans les



DETTE FRANCE 2011 D'APRÈS GECODIA

années 2005, et reprises en Europe depuis la crise, cet argument est maintenant largement en défaut.

### 1.1.3 Le rôle des Banques Centrales.

La Banque Centrale est un établissement financier public, qui a le monopole de l'émission des billets. Une Banque Centrale est donc associée à une monnaie, la BCE (Banque Centrale Européenne pour l'Euro ou Federal Reserve pour le dollar). Toutes les autres banques ont des comptes à la Banque Centrale, qui servent notamment pour les mécanismes de compensation interbancaire. Les banques se refinancent en permanence auprès de la Banque Centrale. Aujourd'hui ces banques sont indépendantes, et un partage de rôle s'effectue entre elles et les gouvernements. La Banque Centrale a pour objectif la stabilité des prix, et celle des taux de change, tandis que le gouvernement doit veiller sur la croissance et sur l'emploi.

#### *Commentaire historique*

Une date stratégique dans l'histoire de la monnaie et des taux d'intérêt est le 15 Août 1971, lorsque le Président Nixon annonce la fin de la convertibilité du dollar en or. Cette décision engendre une grande instabilité financière, notamment sur les taux et les changes. Moins de deux ans plus tard, le premier marché à terme (CBOE) est créé à Chicago.

Jusque vers les années 70, les banques centrales agissaient essentiellement par l'encadrement du volume de crédit et la courbe des taux était relativement stable. Pour combattre la tendance permanente à l'inflation, elles ont choisi de modifier leur action ; elles ajustent désormais le taux court au jour le jour, dont les variations se transmettent ou non selon les cas aux taux longs. Il en résulte que la courbe des taux est beaucoup plus mobile et le risque de taux auquel sont exposées les grandes institutions industrielles et financières est beaucoup plus complexe, ce qui a conduit au développement des marchés de dérivés de taux.

#### LES INSTRUMENTS DE LA POLITIQUE MONÉTAIRE

Depuis la libéralisation des marchés financiers, les banques centrales ont pratiquement abandonné les instruments directs comme l'encadrement du crédit ou la fixation autoritaire des taux de change<sup>4</sup> et procèdent essentiellement à une action directe par les taux d'intérêt court terme, puisqu'elles sont essentiellement préteuses aux autres banques à un horizon très court. Intuitivement, si elle procède à une injection massive de monnaie centrale, il devient plus facile de se procurer de l'argent, les taux interbancaires à court terme baissent, mais il peut y avoir inflation puisque l'argent devient un bien moins cher en valeur relative. C'est cette politique qui a été utilisée par la BCE depuis 2011 pour relancer l'économie européenne. Aujourd'hui les montants négociés sur les marchés financiers sont tels que la force de frappe de la banque centrale, tant sur l'évolution de la masse monétaire que sur celle du taux de change est limitée. On comprend alors toute l'importance des effets de signaux et des actions psychologiques de la banque centrale. Un exemple emblématique est fourni par le président

4. La crise de 1993-1993 contre les monnaies européennes a signé pratiquement la fin du serpent monétaire européen

de la Federal Reserve, Alan Greenspan, dont les moindres mots ont longuement pesé sur les marchés financiers du monde entier.

#### CHAMP D'ACTION DE LA POLITIQUE MONÉTAIRE

La banque centrale gère la liquidité à très court terme pour empêcher l'inflation. Son action dirige les taux courts du marché interbancaire. Cependant, elle a nécessairement une influence sur les taux à plus long terme qui dirigent les décisions d'investissement. C'est l'origine du débat entre ceux qui pensent que la politique monétaire doit avoir comme objectif la seule lutte contre l'inflation, et ceux qui pensent qu'elle doit également intégrer des considérations portant sur la croissance et l'emploi.

En même temps, la plus grande liquidité des produits de taux, la création d'un grand nombre de nouveaux produits non nécessairement optionnels a fait rentrer le marché des taux d'intérêt dans la sphère financière très active, et à conduit à de nouveaux points de vue (généralisant la théorie des anticipations rationnelles) sur les liens qui existent entre les taux de différentes maturités.

#### 1.1.4 Crise, rating et qualité de signature

##### a développer

A tout emprunt est associé un risque de défaut, c'est à dire le risque de non remboursement du capital, par l'emprunteur. C'est ce qu'on appelle le risque de défaut, et plus généralement le risque de crédit, qui se traduit par une prime de risque substantielle, si le « rating » de l'emprunteur n'est pas très bon. Le **spread de crédit** représente alors le différentiel de taux d'intérêt exigé par le prêteur pour compenser la mauvaise qualité de signature de l'emprunteur. Cette prime qui concerne aussi les Etats a été largement d'actualité pendant les différentes crises qui ont ébranlé les marchés financiers ces quarante dernières années.

##### *Exemple :*

- Au moment de la crise asiatique en 1998, le spread entre la dette de l'Etat coréen libellée en dollars américains et celles des Etats-Unis est passé de 50 bp (points de base) (c'est à dire 0.5%) à 800 pb.
- Lors du passage à l'an 2000, le spread entre le taux à un jour sur le marché interbancaire européen et le taux directeur de la banque centrale, habituellement négligeable est passé à 70 points de base en raison des anticipations du bug.

Le problème de modéliser ce spread est source de beaucoup d'activité dans les centres de recherche des banques actuellement, tant au front office que dans les départements des risques, afin de satisfaire aux exigences du régulateur.

La crise de 2008 a induit une autre forme de type de risque, le *risque de liquidité* associé à l'absence de confiance qui existait dans le marché interbancaire, mais c'est un thème entier à développer. Dans la suite de ce cours, nous ne le prendrons en compte que dans les derniers chapitres.

## 1.2 Les différents types de taux des marchés financiers

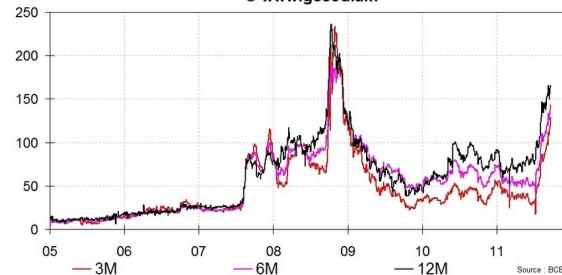
### 1.2.1 Le taux de refinancement de la BCE

Ce taux joue un rôle spécial dans les marchés financiers. L'un des objectifs importants de la BCE (banque centrale de la zone euro) est de définir et d'implémenter la politique monétaire européenne, ce qui inclut le niveau des taux. Son principal objectif, avant la crise, était de maintenir la stabilité des prix et de maintenir l'inflation au-dessous de la barre des 2%. Depuis l'objectif s'est infléchi vers la stabilité financière.

Elle offre des facilités aux banques pour emprunter de la monnaie, qu'elles utilisent notamment lorsqu'elles ont des problèmes de funding comme

après la crise. Les banques paient un intérêt sur le prêt qui est appellé *taux de refinancement* (refi). En jouant sur ce taux, la banque centrale influence le taux auquel les banques elles-même vont prêter.

Zone euro - Ecart entre taux Euribor et taux d'emprunt d'Etat zone euro (AAA), en pb  
© www.gecodia.fr



Ce taux n'est pas négociable pour les banques, puisque sa fixation ne relève pas à proprement parler de l'offre et de la demande. Il ne peut être utilisé sans précaution pour construire la courbe des taux ou dans les modèles d'arbitrage.

### 1.2.2 Les taux interbancaires Euribor, Eonia, et Libor

Nous introduisons maintenant les différents taux interbancaires.

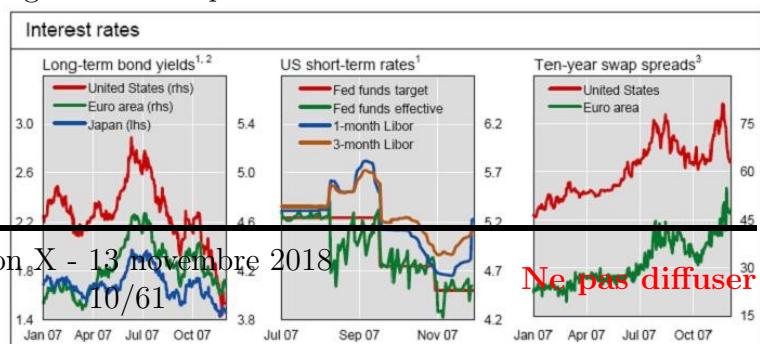
LES TAUX EURIBOR : Euro Interbank Offered Rate.

C'est le taux d'intérêt moyen auquel environ 25/40 banques européennes se consentent des prêts, comme les swaps de taux d'intérêt, les opérations à terme sur taux d'intérêt, les comptes d'épargne et les hypothèques. C'est pour cette raison que les taux Euribor sont suivis de près tant par les professionnels que par de nombreux particuliers.

Ils existent pour 8 maturités allant de 1 semaine à un an, mais les plus liquides sont le 1 mois, 3 mois, 6 mois et un an. Il existe également un taux overnight (durée de 1 jour) appellé Eonia.

*Commentaire technique:* Les taux Euribor ont été introduits en 1999 en même temps que l'Euro. Avant 1999, il y avait déjà des taux compa-

Fig: Les spreads entre les taux en 2007



rables comme le taux PIBOR en France et le taux FIBOR en Allemagne. Tous ces taux sont nés du besoin d'un benchmark pour les taux d'emprunt.

L'Euribor est un taux déclaratif, fixé partir de l'information fournie par un panel de banques. Chaque banque du panel doit communiquer avant 10h45 CET à Thomson Reuters les taux d'intérêt auxquels elle **peut** souscrire pour des prêts en euros sur le marché financier interbancaire. Ensuite, les 15% de valeurs les plus élevées et les 15% de valeurs les plus basses sont supprimées. La moyenne des 70% restantes constitue le taux Euribor officiel.

Dans le monde anglo-saxon, suivant le même principe sont négociés des taux Libor. Quelquefois, pour ne pas préciser le pays, on parle de taux BOR.

Les banques qui empruntent de l'argent à d'autres banques peuvent le réutiliser pour le prêter à d'autres. Vu sous cet angle, l'Euribor est le prix d'achat que paie une banque pour des prêts à court terme (moins d'un an). Les taux BOR sont utilisés pour calculer le taux de prêts hypothécaires, les prêts étudiants et de cartes de crédit, et concernent plus de 360.000 milliards de dollars dans le monde. Environ 90% des prêts commerciaux ou hypothécaires américains sont basés sur cet indice.

Mais les banques peuvent aussi attirer l'argent en utilisant d'autres méthodes : notamment en proposant des comptes d'épargne. La personne qui ouvre un compte d'épargne et épargne de l'argent dans une Caisse d'épargne prêt en réalité de l'argent à la banque. La valeur du taux Euribor et l'intérêt de l'épargne proposé sont fortement liés pour 2 raisons :

- ▷ Tout d'abord, les banques du panel peuvent choisir d'emprunter de l'argent aux autres banques (au taux Euribor) ou d'emprunter aux épargnants
- ▷ L'intérêt de l'épargne versé aux épargnants est généralement inférieur à l'Euribor. La différence est donc une marge pour la banque, qui supporte par ailleurs le risque de non remboursement.

Quand l'Euribor chute, les marges de la banque chutent donc également. C'est pourquoi les banques décident bien souvent de réduire leurs taux d'intérêt aux épargnants si les taux Euribor connaissent une baisse et inversement, mais souvent on observe un certain décalage dans le temps. Cependant, l'Euribor est un excellent indicateur pour la tendance des taux de l'épargne.

#### *Commentaire: Le scandale du Libor par Barry Grey*

Le scandale du Libor a révélé au grand jour comment les banques ont manipulé ces taux de référence mondiale pendant plusieurs années. Ce scandale qui a d'abord surtout éclaboussé la Barclays au Royaume-Uni s'étend maintenant au cœur du système financier mondial. De nombreuses autres grandes banques ont reconnu avoir participé à ces manipulations.

Dans un accord à l'amiable passé avec les Autorités réglementaires des pays concernés (Royaume Uni, USA, Europe) des services financiers, elle a accepté de verser un total de 453 millions de dollars aux trois agences pour avoir tenté de manipuler le taux du Libor entre 2005 et 2009 :

- a) Entre 2005 et 2007 la banque avait sciemment présenté à la direction du Libor de fausses évaluations, le plus souvent trop élevées, des taux d'intérêt auxquels elle empruntait aux autres banques, ce qui profitait au desk des CDS et autres dérivés.
- b) Entre 2007 et 2009, au plus fort de la crise financière mondiale, la banque a volontairement sous-estimé les taux d'emprunts vis à vis des autres banques dans les chiffres qu'elle envoyait à la direction du Libor dans le but de mieux dissimuler la vulnérabilité de sa situation financière.

L'une des raisons pour lesquelles les gouvernement américain et britannique et les régulateurs voulaient régler ce scandale le plus rapidement possible est qu'ils étaient plus ou moins directement impliqués.

- Des accusations selon lesquelles les banques manipulaient le Libor furent avancées dès 2007 et furent ignorées par les gouvernement américain et européen ainsi que les régulateurs.
- En fait, après la crise de 2007-2008, les autorités avaient encouragé à soumettre des chiffres de taux bas afin de cacher l'ampleur de la crise et de protéger les grandes banques.

## B- Le point de vue actuariel sur les taux d'intérêt

Le point de vue actuariel est un point de vue statique, basé sur l'absence d'arbitrage statique entre les différents produits financiers. L'outil fondamental est la courbe des taux.

Précisons rapidement les notations relatives aux différentes notions de taux d'intérêt. Sans autre précision, la date  $t$  est la date courante.

### 1.2.3 Taux d'intérêt, Obligations, Taux à terme

#### CONVENTIONS ACTUARIELLES

- ▷ Un zéro-coupon d'échéance  $T$ ,  $B(t, T)$  est le prix en  $t$  de 1 € payé en  $T$ .
- ▷ Le taux actuariel  $\widehat{R}(t, \theta)$  en  $t$  de maturité  $\theta$  est le taux annualisé auquel est prêté l'argent entre les dates  $t$  et  $t + \theta$ , soit

$$B(t, t + \theta) = (1 + \widehat{R}(t, \theta))^{-\theta}$$

- ▷ Le taux continu de maturité  $\theta$ , comptée en années et fraction d'année, est

$$R(t, \theta) = \ln[1 + \widehat{R}(t, \theta)] = \frac{1}{\theta} \ln B(t, t + \theta)$$

- ▷ Le taux linéaire, surtout utilisé pour des maturités de moins d'un an est noté  $L(t, \theta)$  en référence aux taux Libor, et vérifie  $B(t, t + \theta) = (1 + \theta L(t, \theta))^{-1}$ , soit

$$L(t, \theta) = \frac{1 - B(t, t + \theta)}{\theta B(t, t + \theta)}$$

- ▷ Le taux court  $r_t$  est la limite des taux continus  $R(t, h)$  quand la maturité tend vers 0,

$$r_t = -\partial_T(\ln B(t, T))_{T=t}$$

- ▷ La **courbe des taux** est la fonction qui donne les différents taux de la date  $t$  en fonction de leur maturité  $\theta$ , soit  $[\theta \rightarrow R(t, \theta)]$ . La courbe est plate si cette fonction est constante.

## LE MARCHÉ DE LA DETTE: LES BONS DU TRÉSOR ET LES OBLIGATIONS

### (i) Les bons du Trésor et la dette court terme

**A faire**

(ii) *Les Obligations Assimilables du Trésor* En général sur le marché français, notamment sur le marché obligataire, il n'existe pas beaucoup de zéro-coupons, mais des **obligations** (OAT), c'est à dire des titres émis par l'Etat français pour financer sa dette, qui versent des coupons  $C_i$  exprimés en pourcentage du nominal à des dates  $T_i$ , généralement annuelles, fixées par contrat, et un nominal à l'échéance de l'obligation  $T = T_n$ . Les flux de coupons sont notés  $C_{[1,n]} = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ , et la famille des dates de paiement est notée  $T_{[1,n]} = \{T_1, T_2, \dots, T_n\}$ .

En absence d'arbitrage, la valeur financière d'une obligation à la date courante  $t$ , dont le nominal est ramené à  $N = 100$  € est la somme actualisée des flux futurs,

$$O_t(C_{[1,n]}, T_{[1,n]}) = \sum_{T_i \geq t}^n C_i B(t, T_i) + N B(t, T_n) \quad (1.1)$$

Pour une OAT, les coupons ne dépendent pas de la date de paiement, et les dates de paiement sont régulièrement espacées d'une année.

#### Parler de la notation pied de coupon et coupon couru

- Lorsque la courbe est plate,  $B(t, T_i) = (1 + \widehat{R})^{-(T_i-t)}$ , et l'obligation  $O_t(C_{[1,n]}, T_{[1,n]})$  est une fonction strictement décroissante de  $\widehat{R}$ ,  $F(\widehat{R}, (C_{[1,n]}, T_{[1,n]}))$ . Observons que l'obligation est « au pair»(c'est à dire égale à 100) aux dates de paiement de coupon si le taux de coupon est égal au taux actuarial. Cela se vérifie grâce à la formule sur les progression géométriques.
- Lorsque la courbe n'est pas plate, on associe à une obligation son **taux de rendement actuariel** implicite  $\text{TxAct}_t^O$  défini par

$$O_t(C_{[1,n]}, T_{[1,n]}) = F(\text{TxAct}_t^O(C_{[1,n]}, T_{[1,n]})) = \sum_{T_i \geq t}^n C_i (1 + \text{TxAct}_t^O)^{-(T_i-t)} + N (1 + \text{TxAct}_t^O)^{-(T_n-t)}$$

## 1.3 Calibration de la courbe des taux

Le problème de reconstruire une courbe de taux à partir des données de marché est un enjeu majeur du « risk management » des produits de taux. Différentes méthodes sont utilisées dans les banques. Nous en décrivons quelques unes, en évoquant leurs limites.

### 1.3.1 Les méthodes classiques

#### La courbe OAT et la linéarisation au plus proche voisin ou bootstrapping

La méthode habituellement utilisée par les gestionnaires, pour reconstituer cette courbe de taux zéro-coupon, est une méthode récursive qui calcule les taux zéro-coupon de proche en proche (Dans le marché on dit par « bootstrapping »). Cette méthode consiste à considérer la courbe des taux actuariels, notés  $TxActu(\theta)$  obtenue par approximation linéaire entre les taux actuariels des actifs du marché. Le point de départ est le taux actuariel de maturité un an qui est aussi le taux zéro-coupon de même maturité. Le zéro-coupon de maturité deux ans est obtenu en résolvant en  $B(0, 2)$ , l'équation suivante :

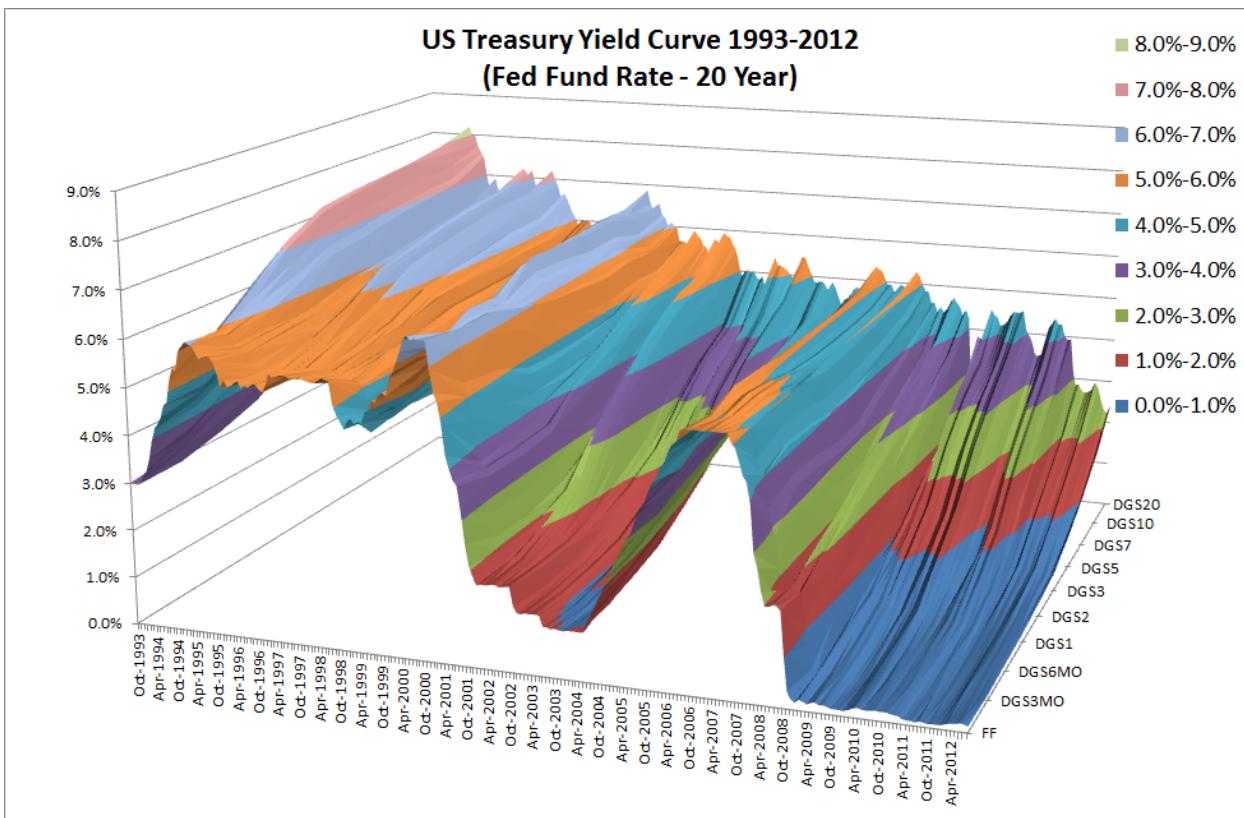
$$100 = TxActu(2)B(0, 1) + (TxActu(2) + 100)B(0, 2)$$

Cette équation vient du fait qu'une obligation dont le taux facial est égal au taux actuariel est au pair. La courbe des taux zéro-coupon s'obtient alors par itération; en effet pour passer zéro-coupon de maturité  $n$  au zéro-coupon de maturité  $n + 1$ , il suffit de calculer le taux  $B(0, n + 1)$  qui vérifie l'équation suivante :

$$100 = \sum_{i=1}^n TxActu(n+1)B(0, i) + (TxActu(n+1) + 100)B(0, n+1)$$

*Commentaire :*

- ▷ Cette méthode, simple à mettre en oeuvre, a l'inconvénient de reconstituer des taux zéro-coupon qui dépendent fortement du taux actuariel de l'obligation la plus courte, obligation qui est en général très peu liquide et donc dont le prix ne reflète pas vraiment le taux de marché pour cette maturité. Cette erreur sur le premier taux zéro-coupon se propage ensuite par itération sur toute la courbe.
- ▷ L'autre inconvénient majeur de cette méthode est la trop forte dépendance de ses résultats par rapport aux caractéristiques de chaque obligation utilisée dans la procédure. En effet, le calcul pour chaque maturité étant fait par rapport à une obligation donnée, le taux zéro-coupon calculé pour cette maturité dépend alors des spécificités de cette obligation et de celles des obligations choisies dans les étapes précédentes.



## Document Provisoire

### La méthode des splines pour des courbes de taux (avec plus d'information)

Pour pallier ces inconvénients et vu que la courbe des taux, à un jour donné, a en général une forme assez régulière et présentant peu de changement de convexité, on peut penser à l'approcher par des fonctions simples telles que polynômes, exponentielles de polynômes ..etc.. Une méthode (très classique dans de nombreux domaines en dehors de la finance) consiste à ajuster sur des plages de maturités judicieusement choisies des polynômes de degré trois ou quatre, les splines. Le calage des paramètres se fait alors sous la contrainte de continuité et de double dérivabilité aux points de raccord à fin de générer des courbes forward régulières. La question de choisir de manière robuste les points de raccord est une question centrale dans l'utilisation des méthodes de splines.

*Commentaire technique* Le marché suggère évidemment des points obligatoires compte tenu de la segmentation des marchés: le un an, car c'est une maturité clé entre le court et le moyen terme. Les points 3, 6 mois, car ce sont des maturités très liquides à cause des taux Libor. Les maturités 5, 10 et 30 ans sont aussi des références incontournables, car associées aux Swaps, qui sont des produits liquides dans le marché.

Cette méthode donne de bons résultats mais présente une forte sensibilité aux points de découpage pour les splines.

## Paramétrisation fonctionnelle

Une Analyse en Composantes Principales (ACP) sur un historique de courbes de taux zéro-coupon a montré que trois facteurs expliquent la quasi-totalité des déformations de ces courbes. Ces trois facteurs s'interprètent comme suit :

1. un premier facteur qui présente une forme quasiment plate et qui correspond à des déplacements parallèles de la courbe des taux. Ce facteur s'interprète comme un *facteur de niveau*.
2. un deuxième facteur qui rend compte des inversions de la courbe autour d'un point. Ce facteur s'interprète comme un *facteur de pente* car il a une influence contraire sur les taux longs et sur les taux courts.
3. Un troisième facteur, qui agit différemment sur les trois compartiments de la courbe des taux, et qui s'interprète comme un facteur de courbure.

Ceci laisse à penser qu'une bonne méthode de reconstitution de la courbe des taux zéro-coupon, serait de rechercher des fonctionnelle de la maturité dépendant de manière linéaire d'un paramètre de niveau des taux  $R_\infty$ , d'un paramètre de spread (ou de pente)  $S = R(\infty) - R(0)$  et d'un paramètre de courbure  $\gamma$  et de caler ensuite ces paramètres sur les données du marché.

*Commentaire historique* Ce type de représentation a été obtenue pour la première fois en 1977 par Vasicek [?]. Il est le premier à avoir introduit un point de vue dynamique dans le monde des taux d'intérêt, en particulier pour expliquer et quantifier le risque de taux, qui avait conduit à la faillite de nombreuses Caisses d'Epargne aux Etats-Unis. Son objectif était double, expliquer la courbe des taux aujourd'hui mais surtout ces déformations futures. Comme cela relève plus d'une vision dynamique que statique, nous détaillerons ce modèle dans le prochain chapitre.

**PARAMÉTRISATION À LA VASICEK** La formule obtenue par Vasicek est la suivante:

$$\begin{aligned} R(\theta) &= R_\infty - S G_1(\theta) + \gamma G_2(\theta) \\ G_1(\theta) &= \frac{1 - e^{-a\theta}}{a\theta}, \quad G_2(\theta) = \frac{(1 - e^{-a\theta})^2}{a\theta}, \end{aligned} \tag{1.2}$$

*Commentaire pratique* Le paramètre  $a$  qui apparaît de manière non linéaire dans la fonctionnelle des taux est un paramètre d'échelle; le laisser libre dans le calage des autres paramètres introduit une trop grande instabilité pour ces derniers. On peut décider de le fixer avant la calibration des autres paramètres. Des tests empiriques montrent que avant la crise sa valeur était raisonnablement comprise entre 0.1 et 0.8, suivant les fluctuations des taux longs.

**AUTRES TYPES DE PARAMÈTRISATION: NELSON SIEGEL, ... (à faire)**

**PRINCIPES DE LA CALIBRATION** Le problème revient donc à estimer les paramètres  $R_\infty$ ,  $S$  et  $\gamma$ , sur un panel bien choisi d'actifs du marché. Les valeurs de ces paramètres au moment

du calcul sont obtenues par la minimisation, sur le panel d'actifs du marché, de l'écart quadratique moyen suivant :

$$E(t, R_\infty, S, \gamma) = \sum_{i=1}^N m_{i,t} \left( P_{i,t}^{\text{théo}}(R_\infty, S, \gamma) - P_{i,t}^{\text{obs}} \right)^2 \quad (1.3)$$

où :

- $(P_{i,t}^{\text{obs}})$  est le prix observé dans le marché de l'actif  $i$ . On choisira les actifs les plus liquides, car seuls ces actifs sont bien arbitrés et leurs prix reflètent réellement le marché.
- $(P_{i,t}^{\text{théo}})$  est le prix de l'actif  $i$ , en fonction des paramètres, tel qu'il est calculé par le modèle choisi. Ce prix théorique étant estimé par rapport à « une moyenne du marché », on observera à chaque date  $t$  un résidu entre ce prix et le prix de marché de l'actif.

$$P_{i,t}^{\text{marché}} = P_{i,t}^{\text{théorique}} + \epsilon_{i,t}$$

Ce résidu peut refléter soit une option caché dans l'actif (Possibilité de prorogation aux conditions du marché, possibilité d'échange contre des obligations à taux variable ou révisable), soit par exemple un coupon fort (ou faible) ce qui implique un certain type d'intervenants à cause des problèmes de fiscalité, soit tout autre cause spécifique à l'actif.

- $m_i$  est un facteur de pondération, qui peut-être lié soit à la liquidité du titre, soit à l'inverse de sa maturité résiduelle. On choisira un facteur de pondération plus fort pour les actifs qu'on veut favoriser dans le programme d'optimisation; c'est ainsi qu'on peut favoriser par exemple, les actifs les plus liquides, les actifs sans clause spéciale ou encore les actifs à faible maturité résiduelle.

L'algorithme de Newton-Raphson permet de converger rapidement vers un minimum (éventuellement local), quand il en existe un, et permet donc d'obtenir les paramètres de la courbe des taux correspondant à la date et au panel choisis. Le panel de données doit recouvrir les différentes parties de la courbe, courte, moyenne longue, et utiliser les instruments les plus liquides possibles, les taux Euribor notamment.

### 1.3.2 Gestion actuarielle du risque de taux

La représentation de la courbe des taux sous une forme fonctionnelle rend aisée le calcul de certains indicateurs de risque, comme le risque de déplacement parallèle de la courbe, mesuré par la duration, ou le risque de pente... Les indicateurs les plus classiques sont calculés par des sensibilités.

## Sensibilités aux paramètres de risque

On peut de même calculer la sensibilité de ce prix théorique par rapport à chacun de ces paramètres. La sensibilité du prix  $P_t$  par rapport au paramètre  $p$  est définie comme la variation relative du prix par rapport au paramètre. Différentes notations peuvent être utilisées

$$\text{Sensi}_p(t) = \frac{1}{P(t, p)} \frac{\partial P(t, p)}{\partial p} = \frac{P'_p(t, p)}{P(t, p)} \quad (1.4)$$

Les sensibilités par rapport aux différents paramètres s'interprètent comme suit :

LA SENSIBILITÉ PAR RAPPORT AU TAUX ACTUARIEL définie comme,

$$\text{Sensi}_{\text{TxActu}}(t, \text{para}) = \frac{1}{P(t, \text{para})} \frac{\partial P(t, \text{para})}{\partial \text{TxActu}(t, \text{para})}$$

représente une sensibilité par rapport à déplacement parallèle de la courbe des taux. Cette sensibilité est donc de la même nature que la duration, qui est la sensibilité du prix  $P(t, \text{para})$  de l'actif par rapport à sa maturité  $T_n$ , définie par :

$$\text{Duration}(t, \text{para}) = \text{Sensi}_{T_n}(t, \text{para}) = -(1 + \text{TxActu}(t, \text{para})) \text{Sensi}_{\text{TxActu}}(t, \text{para})$$

LA SENSIBILITÉ PAR RAPPORT AU SPREAD TAUX LONG-TAUX COURT  $S$

La sensibilité par rapport à ce paramètre,  $\text{Sensi}_S = \frac{1}{P_t} \frac{\partial P_t}{\partial S}$ , est en fait une sensibilité par rapport au taux court, le taux long et le paramètre de courbure étant supposés constants. Cette

LA SENSIBILITÉ PAR RAPPORT AU PARAMÈTRE DE COURBURE

La sensibilité par rapport à ce paramètre,  $S_\gamma = \frac{1}{P_t} \frac{\partial P_t}{\partial \gamma}$ , est une sensibilité par rapport à un changement de courbure, le niveau des taux long et des taux courts étant inchangés.

## Donner quelques ordre de grandeur

*Commentaire historique* Réduire la duration de son exposition est souvent un objectif majeur dans la gestion de la dette. Lors de la création de L'Agence France-Trésor en 2001? à compléter.

# Chapitre 2

## Absence d'arbitrage et modélisation dynamique des taux d'intérêt

### A- Les modèles à facteurs de taux d'intérêt

Comme nous l'avons évoqué dans le chapitre précédent, le premier modèles dynamique de taux en absence d'arbitrage est le modèle introduit pour Vasicek en 1977 pour quantifier le risque de taux décrit par la courbe des taux de la date courante. L'idée est de base est la modélisation des zéro-coupon sur une base de non-arbitrage. Nous avons vu que le « stripping » des obligations permet de représenter la valeur présente des obligations et plus généralement des produits à coupons fixés comme des combinaisons linéaires de zéro-coupon. Ceci entraîne entre les obligations de différentes échéances une liaison très forte entre les taux de différentes maturités, qui implique que les déformations futures ne peuvent affecter de manière absolument quelconque la structure par terme des taux d'intérêt. Insistons toutefois sur le fait que cette vue issue de l'arbitrage est pertinente pour la gestion au jour le jour des fluctuations des taux d'intérêt, mais ne remplace évidemment pas l'analyse macroéconomique sur les fondamentaux qui expliquent les grandes tendances des mouvements de taux (cf Quantitative Easing).

### 2.1 Capitalisation, Actualisation et primes de risque

#### 2.1.1 Capitalisation et Actualisation et un peu d'histoire

**FACTEUR DE CAPITALISATION** La connaissance des taux très courts, aussi appelés instantanés  $r_t$ , permet par des opérations de « rolling » de connaître la valeur à la date  $t$  d'un placement de 1€ à la date 0. Il s'agit d'un actif financier souvent noté  $S_t^0$  par les acadé-

mique de la finance et défini par  $S_t^0 = S_0^0 \exp(\int_0^t r_s ds)$ . Le ration  $S_t^0/S_0^0$  s'appelle le facteur de **capitalisation**. Dans cette définition, le taux instantanés  $r_t$  peut être déterministe ou stochastique.

(i) Si les taux d'intérêt sont déterministes, par absence d'arbitrage (deux opérations qui donnent les mêmes flux ont la même valeur), le prix de 1€ payé (reçu) à la date  $T$  correspond à un investissement  $B(0, T)$  capitalisé au taux de  $r_t$ , soit  $B(0, T) = \exp(-\int_0^t r_s ds)$ . Les mêmes évaluations peuvent être faites entre les dates  $t$  et  $T$ , de telle sorte que  $B(t, T) = \exp(-\int_t^T r_s ds)$  soit encore à partir dit que les prix des zéro-coupon, qui correspondent au prix de 1€ payé dans le futur doivent vérifier  $B(t, T) = \exp(-\int_t^T r_s ds)$  soit aussi  $B(t, T) = B(0, T) \exp(\int_0^t r_s ds)$  qui établit le lien entre capitalisation de la valeur initiale et actualisation de la valeur terminale.

*L'hypothèse des anticipations rationnelles* qui prévalait chez les économistes jusque dans les années 1990 dit que le taux continu pour une période  $t, t + \theta$  doit être la moyenne des taux instantanés pour la période,  $R^{\text{ant}}(t, \theta) = \frac{1}{\theta} \int_t^{t+\theta} r_u du$ . Elle n'est donc pas compatible, même dans le cas déterministe, avec l'hypothèse de non arbitrage.

(ii) Depuis la fin de la convertibilité du dollar en 1971, les fondamentaux de l'économie dont les taux d'intérêt ne cessent de fluctuer. L'hypothèse déterministe ne peut être maintenue. L'idée de Vasicek est donc d'introduire sur le taux instantané une petite perturbation de type brownienne. Partant d'une évolution très simple du taux instantané évoluant vers avec une valeur de long terme à une vitesse raisonnable, il suppose que

$$dr_t^{\text{pert}} = a(b - r_t^{\text{pert}}) dt - \sigma d\widehat{W}_t, \quad r_0^{\text{pert}} = r \quad (2.1)$$

dont la solution est

$$r_t^{\text{pert}} = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) - \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} d\widehat{W}_s. \quad (2.2)$$

La fonction  $r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at})$  représente le taux moyen déterministe à la date  $t$ .  $a$  est comme nous l'avons vu au chapitre précédent, un paramètre d'échelle ou de retour à la moyenne.

(iii) PRIME DE RISQUE S'il n'y a pas de problème pour définir le facteur aléatoire de capitalisation, il y en a plus pour définir le zéro-coupon puisque le facteur d'actualisation est stochastique, et dépend du futur du taux instantané qui est inconnu. L'idée est de prendre en compte ce risque de « terme » par l'introduction d'une prime de risque  $\lambda$ , dont le niveau sera ajusté à l'observation des taux. Le processus utilisé dans le calcul des zéro-coupon devient

$$dr_t = a(b - r_t) dt - \sigma dW_t, \quad dW_t = d\widehat{W}_t + \Lambda dt \quad (2.3)$$

L'hypothèse est qu'avec cette correction le bruit corrigé  $W_t$  est un mouvement brownien sous la probabilité de calcul Q (dite risque-neutre) et que

$$B(t, T) = E_Q \left( \exp \left( - \int_t^T r_s ds \right) \right) \quad (2.4)$$

## Les mathématiques du modèle de Vasicek

L'équation suivie par le taux court est celle d'un processus d'Ornstein-Uhlenbeck, c'est à dire d'un processus gaussien, qui oscille autour d'une tendance centrale  $b$ , avec une force de rappel d'intensité  $a$ . Le processus OU est très utilisé en modélisation physique, où il est connu comme le « brownien physique ». L'existence d'une mesure gaussienne invariante  $N_{(\mu, \alpha^2)}$  de moyenne de moyenne  $\mu = b$  et de variance  $\alpha^2 = \frac{\sigma^2}{2a}$  nous garantit que si la variable  $r_0$  est tirée suivant la loi invariante, alors toutes les variables  $r_t$  sont distribuées selon la mesure invariante. Plus important sur le plan des données est la convergence presque sûre des moyennes temporelles empiriques  $\frac{1}{t} \int_0^t f(r_s) ds$  lorsque  $t$  tend vers l'infini vers  $\int_{\mathbb{R}} f(r) N_{(\mu, \Sigma^2)}(dr)$  (Théorème ergodique).

L'équation (2.3) se résoud comme une équation différentielle ordinaire, bien que son second membre soit aléatoire.

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) - \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s. \quad (2.5)$$

L'étude des modèles de taux met l'accent sur le discount facteur entre  $t$  et  $T$ , ce qui entraîne que les variables d'intérêt sont plutôt les quantités  $I(t, T) = \int_t^T r_s ds$ , intégrales du taux instantané dans l'intervalle  $(t, T)$ . Puisque ces intégrales sont les limites de leurs sommes de Riemann, ce sont des limites de combinaisons linéaires des coordonnées d'un processus gaussien. Ce sont donc encore des variables gaussiennes, de moyenne  $m(t, T-t)$  et de variance  $\Sigma^2(t, T-t)$ , dont la représentation est donnée par

$$I(t, T) = b(T-t) + (b - r_t) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} - \sigma \int_t^T \frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} dW_s \quad (2.6)$$

Conditionnellement par rapport à l'observation de  $r_t$ , l'espérance est donnée par les deux premiers termes de la somme, et la variance conditionnelle par

$$\Sigma^2(t, T-t) = \sigma^2 \int_t^T \left( \frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} \right)^2 ds = \frac{\sigma^2}{2a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2} \left( (T-t) - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right)$$

### PREUVE :

- (i) Le modèle de taux court est celui de l'Ornstein Uhlenbeck dont les propriétés sont bien connues.
  - La solution de l'équation linéaire ( ??) s'obtient comme dans le cas déterministe par la méthode de variation des constantes, en étudiant le processus  $\{e^{at} r_t; t \in [0, T]\}$ , solution de  $d\rho_t = b e^{at} dt - \sigma e^{at} dW_t$ . Le caractère stationnaire, qui signifie que  $r_t$  a une distribution indépendante de  $t$  se vérifie facilement.
  - Pour montrer les propriétés de  $I(t, T)$ , le plus simple est de calculer  $I(t, T)$  à partir de l'équation différentielle en notant que  $aI(t, T) = -(r_T - r_t) + ab(T-t) - \sigma(W_T - W_t)$ . Reportant dans cette équation la forme intégrale du taux spot, nous obtenons la formule de

l'encadré.

- Le calcul de la variance se fait à partir de l'intégrale  $\sigma^2 \int_t^T \left(\frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a}\right)^2 ds$ .

(ii) Nous aurons souvent à utiliser des processus d'Ornstein-Uhlenbeck non stationnaires, vérifiant

$$dr_t = a(t)(b_t - r_t) dt - \sigma_t dW_t \quad r_0 = r \quad (2.7)$$

La solution est donnée par :  $r_s = r_t e^{-\int_t^s a_u du} + \int_t^s e^{-\int_u^s a_v dv} (b_u du + \sigma_u dW_u)$ .

Le calcul de  $I(t, T)$  s'obtient en utilisant une formule d'intégration par parties dans l'intégrale stochastique, soit

$$I(t, T) = r_t \int_t^T e^{-\int_t^s a_u du} ds + \int_t^T \int_u^T e^{-\int_u^s a_v dv} ds (b_u du + \sigma_u dW_u)$$

Les calculs de moments précédents se généralisent alors facilement à cette situation.

LE PRIX DES ZÉRO-COUPOON ET LA COURBE DES TAUX DANS LE MODÈLE DE VASICEK  
Ces quantités se déduisent alors aisément du caractère gaussien de  $I(t, T)$ .

**Théorème 2.1.** *Dans le modèle de Vasicek, le prix d'un zéro-coupon de maturité  $T$  est donné par :*

$$B(t, T) = \exp - \left[ R_\infty(T-t) - (R_\infty - r_t) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \right]$$

et sa volatilité par

$$\Gamma_V^a(t, T) = \sigma \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

La courbe des taux de la date  $t$  est donnée par :

$$R(t, \theta) = R_\infty - (R_\infty - r_t) \frac{1 - e^{-a\theta}}{a\theta} + \frac{\sigma^2}{4a^3\theta} (1 - e^{-a\theta})^2, \quad R(t, +\infty) = R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

PREUVE :

La représentation des zéro-coupon est essentiellement une conséquence des calculs précédents et des propriétés de la transformée de Laplace d'une v.a. gaussienne.

- Il nous suffit de calculer  $B(t, T)$  comme :

$$B(t, T) = \mathbb{E}_Q[e^{-I(t, T)} | \mathcal{F}_t] = e^{-\mathbb{E}(I(t, T)) + \frac{1}{2} \text{var}(I(t, T))} = e^{-m(T-t) + \frac{1}{2} \Sigma^2(T-t)}$$

car la variable  $I(t, T)$  étant gaussienne, sa transformée de Laplace ne dépend que son espérance et de sa variance. La formule explicite est obtenue en regroupant les termes de même nature. L'équation des taux s'en déduit aisément à partir de la formule  $R(t, \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln[B(t, t + \theta)]$ .

- Il reste à noter que  $R(t, \theta)$  tend vers :  $R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$  (indépendante de  $t$ ) si  $\theta$  tend vers

l'infini.

#### LA COURBE DES TAUX ISSUE DU MODÈLE DE VASICEK

Le modèle de Vasicek donne la forme analytique de la courbe des taux aujourd’hui et plus généralement de n’importe quelle date.

Le graphe de la fonction  $\theta \rightarrow R(t, \theta)$ , que nous avons commenté dans le chapitre précédent, est bien une combinaison linéaire de trois fonctions de base, avec une interprétation aisée des coefficients. Il ressemble effectivement à celui de nombreuses courbes de taux observées sur le marché. Toutefois, certaines d’entre elles, notamment les courbes dites “inversées”, où le taux court  $r_0$  est plus haut que le taux long  $R_\infty$ , et où apparaît un creux ne peuvent être atteintes par un modèle de ce genre.

**Donner des exemples de graphes de courbes**

## B- Les modèles à facteurs de diffusion de la courbe

Dans cette section, nous restons dans la même logique que dans le paragraphe précédemment, en mettant l'accent sur deux caractéristiques spécifiques de la modélisation.

- ▷ Le taux court est défini comme une fonction de facteurs (variables cachées dans le vocabulaire statistique), solutions markoviennes d'équations différentielles stochastiques.
- ▷ Les zéro-coupon sont considérés comme des produit dérivés, dont le prix est l'espérance "corrigé du risque" (risque-neutre) du discount facteur entre la date courante  $t$  et la maturité  $T$ . Les « bons » modèles doivent conduire à des formes quasi-fermées pour les zéro-coupon et les taux d'intérêt.
- ▷ Les modèles considèrent la courbe des taux du jour comme une donnée sur laquelle se calibrer.

### 2.2 Les modèles à facteurs uni-dimensionnel

Le modèle de Vasicek à paramètres constants peut être utilisé comme « lisseur » de courbes des taux. Comme modèle utilisé dans le pricing de dérivés, le marché préfère introduire la courbe des taux d'aujourd'hui comme une donnée du problème. La calibration à la courbe de marché va introduire une dépendance des paramètres par rapport au temps (non stationnarité). C'est ce que nous voyons dans l'exemple ci-dessous. Cette généralisation du modèle de Vasicek est connue comme le modèle de Hull et White.

#### Le modèle de Hull et White

Dans le cas du modèle de Vasicek, il est toujours possible d'introduire une fonction  $b_t$  pour que l'ajustement soit parfait. (On est alors dans le modèle de Hull et White.)

Pour cela remarquons que la courbe des taux aujourd'hui est associée à un modèle stationnaire ( $b_t$  constant) de Vasicek, si la courbe des taux spot *forwards*  $f(0, T) = -\partial_T \ln(B(0, T))$  aujourd'hui vérifie,

$$f(0, t) = R_\infty - (R_\infty - r_0)e^{-at} + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})e^{-at}$$

Cette fonction vérifie donc l'équation différentielle en maturité, dans laquelle  $R_\infty, a, \sigma^2$  sont supposés donnés

$$\partial_t f(0, t) + a(f(0, t) - R_\infty) - \frac{\sigma^2}{2a}e^{-2at} = 0, \quad f(0, +\infty) = R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \quad (2.8)$$

Pour simplifier, nous supposons les volatilités stationnaires.

**Proposition 2.2.** *Le taux court  $r_t$  vérifie le modèle de Hull et White ajusté à la courbe des taux forwards ( $f(0, T); T \in \mathbb{R}^+$ ) si*

$$dr_t = [\partial_t f(0, t) + a(f(0, t) - R_\infty) - \frac{\sigma^2}{2a} e^{-2at}] dt - ar_t dt - \sigma dW_t \quad (2.9)$$

PREUVE :

- ▷ Notons  $r_t^V$  la dynamique d'un Vasicek de même fonction de volatilité, mais de niveau de rappel constant,  $b = f(0, +\infty) + \frac{\sigma^2}{2a^2}$ , partant de  $r_0 = f(0, 0)$  aujourd'hui. La courbe des spots forwards issue de ce modèle  $f^V(0, t)$  vérifie

$$f^V(0, +\infty) = f(0, +\infty), \quad f^V(0, 0) = f(0, 0) = r_0$$

- ▷ La différence  $r_t - r_t^V$  satisfait à l'équation linéaire, non stochastique

$$d(r_t - r_t^V) = [a(b_t - b) - a(r_t - r_t^V)]dt,$$

- ▷ Cette différence déterministe est encore égale à la différence des taux forwards aujourd'hui associés à chacun des deux modèles Par suite, les deux courbes  $f(0, t)$  et  $f^{mod}(0, t)$  la courbe forward déduite du modèle sont égales car

$$df^{mod}(0, t) + af^{mod}(0, t)dt = df^V(0, t) + af^V(0, t)dt + a(b_t - b)dt \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} &= ab - \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) + \partial_t f(0, t) + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) - ab \\ &= \partial_t f(0, t) + af(0, t)dt \end{aligned} \quad (2.11)$$

### 2.2.1 Le modèle de CIR

Pour lever l'objection liée au caractère négatif possible des taux d'intérêt issu du modèle gaussien de Vasicek, COX, INGERSOLL ET ROSS (1985) ont introduit le modèle dit en "racine carrée", sur le taux spot, dans l'univers risque-neutre.

$$dr_t = a(b - r_t)dt - \sigma\sqrt{r_t}dW_t \quad r(0) = r \quad (2.12)$$

*Commentaire mathématique:* La fonction  $\sqrt{r}$  n'étant pas une fonction lipschitzienne, l'existence d'une solution de cette équation différentielle stochastique est plus difficile à établir, que dans le cas du modèle de Vasicek. De plus, dans le cas général, il n'existe pas de solution explicite. La preuve de l'existence et de l'unicité peut être trouvée dans KARLIN [Karl].

#### CALCUL DES PRIX ZÉRO-COUPOON DANS CIR PAR EDP

Pour calculer le prix des zéro-coupon, il est nécessaire de procéder un peu différemment que dans le cas du modèle de Vasicek, puisqu'il n'existe pas de formule explicite pour l'équation

stochastique. Nous allons plutôt utiliser l'équation aux dérivées partielles d'évaluation, qui permet d'obtenir grâce à un théorème de vérification les formules de prix comme solution d'une équation aux dérivées partielles.

**Proposition 2.3.** *Supposons qu'il existe une fonction régulière du temps et du paramètre  $r$   $\mathcal{B}(t, r, T)$ , de condition terminale  $\mathcal{B}(T, r, T) = 1$ , solution dans  $]0, T[\otimes\mathbb{R}^+$  de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{1}{2}\sigma^2 r \partial_{r^2}\mathcal{B}(t, r, T) + a(b - r)\partial_r\mathcal{B}(t, r, T) - r\mathcal{B}(t, r, T) + \partial_t\mathcal{B}(t, r, T) = 0 \quad (2.13)$$

- (i)  $\mathcal{B}(t, r_t, T)$  est le prix  $B(t, T)$  d'un zéro-coupon de maturité  $T$ .
- (ii) Plus généralement, si l'EDP admet une solution régulière  $u(t, r, f, T)$  lorsque la condition terminale est  $f(T, r)$ ,  $u(t, r_t, f, T)$  est le prix à la date  $t$  du produit financier qui délivre  $f(T, r_T)$  en  $T$ .

#### PREUVE :

Nous appliquons la formule d'Itô à la fonction  $\mathcal{B}(t, r, T)$  et à la solution  $r_t$  de l'équation différentielle stochastique. Il vient que :

$$d\mathcal{B}(t, r_t, T) = \partial_r\mathcal{B}(t, r_t, T)dr_t + [\partial_t\mathcal{B}(t, r_t, T) + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \partial_r^2\mathcal{B}(t, r_t, T)]dt$$

- ▷ Le fait que  $\mathcal{B}(t, r, T)$  satisfasse à l'EDP entraîne immédiatement que :

$$d\mathcal{B}(t, r_t, T) = r_t\mathcal{B}(t, r_t, T)dt - \partial_r\mathcal{B}(t, r_t, T)\sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

Si le processus  $-\partial_r\mathcal{B}(t, r_t, T)\sigma\sqrt{r_t}$  est de carré intégrable,  $\mathcal{B}(t, r_t, T)$  est une martingale sous la probabilité risque-neutre de condition terminale  $\mathcal{B}(T, r_T, T) = 1$ . Par suite, c'est nécessairement le prix d'un zéro-coupon.

- ▷ Le même argument est utilisé pour montrer que le prix d'une option s'obtient à partir de la solution de l'EDP.

Or l'équation aux dérivées partielles dépend linéairement du taux  $r$ . Il est donc naturel de rechercher pour les zéro-coupon des solutions dont le logarithme dépend de manière affine de  $r$ .

**Théorème 2.4.** *Définissons les fonctions  $C(t)$  et  $A(t)$  par*

$$\begin{cases} C(\theta) &= \frac{2(e^{\rho\theta} - 1)}{(\rho + a)(e^{\rho\theta} - 1) + 2\rho} & \rho &= [a^2 + 2\sigma^2]^{\frac{1}{2}} \\ \varphi(\theta) &= \frac{2\rho e^{\frac{(\rho+a)\theta}{2}}}{(\rho + a)(e^{\rho\theta} - 1) + 2\rho} & A(\theta) &= \varphi(t)^{\frac{2ab}{\sigma^2}} \end{cases} \quad (2.13)$$

Quand  $\theta \mapsto \infty$ ,  $C(\theta)$  tend vers 1 et  $\ln(\varphi(\theta)) \sim \text{Cste}(a/2)\theta$

- (i) Les prix des zéro-coupon en  $t$  s'écrivent comme :  $B(t, T) = A(T-t)e^{-rt}C(T-t)$  et la courbe

des taux est donnée par

$$R(t, \theta) = r_t \frac{C_\theta}{\theta} - \frac{2ab}{\sigma^2 \theta} \ln \varphi(\theta) \quad (2.13)$$

(ii) Le taux  $R(t, \infty)$ , (de maturité  $\theta$  infinie), est constant pour tout  $t$  et égal à  $R_\infty = \frac{2ab}{\sigma + a}$ .

PREUVE :

Nous recherchons les solutions de l'EDP ??, à priori de la forme d'une exponentielle d'une fonction affine du taux, ce qui est possible puisque la condition terminale est de cette forme.

- ▷ L'identification des coefficients de  $r$  dans l'EDP conduit aux équations différentielles satisfaites par les fonctions  $C(t)$  et  $A(t)$ . Il reste à résoudre explicitement ces équations différentielles pour conclure.
- ▷ L'équation aux dérivées partielles ne donne pas immédiatement une solution explicite. L'idée est de faire à la fois un changement de variable en posant  $y = \mathcal{B}(t, r, T)$  et de fonction en posant  $v(t, y) = \frac{u(t, r, f)}{\mathcal{B}(t, r, T)}$ , pour se ramener à une EDP de type Black et Scholes et appliquer la formule connue.

### Commentaire technique

(i) Comme dans le modèle de Vasicek, la forme analytique de la courbe des taux aujourd'hui est une des conséquences du modèle. La structure des formes a priori possibles est mieux décrite par ce modèle, qui de plus respecte le caractère positif des taux

(ii) A cause de la racine carré, dans la dynamique, ce modèle est beaucoup plus difficile à simuler, notamment à cause du comportement au voisinage de zéro. Ce problème à donner lieu à de nombreux travaux [?]

(iii) Les simulations robustes sont atteintes pour des valeurs des paramètres qui conduisent le processus à ne jamais atteindre zéro

### Etude du temps d'atteinte de 0 par le processus de CIR (complément)

L'étude repose sur le résultat suivant, que nous appliquons à l'équation 2.2.1 à laquelle on peut toujours ramener l'équation 2.12 par le théorème de Girsanov.

$$dr(t) = ab dt - \sigma \sqrt{r(t)} dW(t) \quad r(0) = r \quad (2.13)$$

Nous étudions les propriétés du premier temps de sortie d'un intervalle  $[\alpha, \beta]$  par le niveau  $\alpha$ , à partir des deux temps d'arrêt  $T_\beta^{up} = \inf \{t; r_t > \beta\}$  et  $T_\alpha^{down} = \inf \{t; r_t < \alpha\}$  si les ensembles sont non vides, et égaux à  $+\infty$  sinon.

**Lemme 2.5.** Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux nombres positifs ( $\alpha < \beta$ ). Pour  $r \in [\alpha, \beta]$ , on pose  $V_{\alpha, \beta}(r) = \mathbb{P}(T_\beta < T_\alpha) | r_0 = r$ .  $V$  satisfait à l'équation aux dérivées partielles,  $Lv(r) = 0$ ,  $v(\alpha) = 1$ ,  $v(\beta) = 0$ , où :

$$\left\{ \begin{array}{l} LV_{\alpha,\beta}(x) = \frac{1}{2}\sigma^2 r \frac{dV^2}{dr^2} + ab \frac{dV}{dr} = 0 \quad \text{si } 0 < \alpha < r < \beta \\ \text{dont la solution est} \\ V_{\alpha,\beta}(r) = \frac{r^{1-u} - \alpha^{1-u}}{\beta^{1-u} - \alpha^{1-u}} \quad \text{où } u = \frac{2ab}{\sigma^2} \end{array} \right. \quad (2.13)$$

Si  $u > 1$ ,  $T_0$  est infini p.s.; si  $u < 1$ ,  $V(r)$  tend vers  $V_0(r) = \left(\frac{r}{\beta}\right)^{1-u}$ .

PREUVE :

On procède par vérification. Il est clair que la fonction  $V(r)$  définie en 2.2.1 est une fonction régulière, qui vérifie l'équation 2.2.1.

Appliquons la formule d'Itô à cette fonction et au processus  $r_t$  arrêté en  $T_\alpha \wedge T_\beta$ . Il vient :

$$dV(r(t)) = V'(r(t)) \sigma \sqrt{r(t)} dW(t) \quad \text{sur } t < T_\alpha \wedge T_\beta$$

$$\text{Puisque } V(\beta) = 1 \text{ et } V(\alpha) = 0 \quad V(r) = \mathbb{E}[V(r(T_\alpha \wedge T_\beta))] = \mathbb{P}(T_\beta < T_\alpha)$$

Puisque  $V(\beta) = 1$  et  $V(\alpha) = 0$ , nous obtenons  $V(r) = \mathbb{E}[V(r(T_\alpha \wedge \widehat{T}_\beta))] = \mathbb{P}(\widehat{T}_\beta < T_\alpha)$ . Lorsque  $\mu > 1$ , les intégrales du numérateur et du dénominateur divergent, mais sont équivalentes.  $\square$

## 2.2.2 Les modèles linéaires

Les deux exemples que nous venons de présenter rentrent dans la classe plus générale des modèles linéaires, pour lesquels les prix des zéro-coupon sont des exponentielles d'une fonction affine du taux spot. Il est montré dans DUFFIE-KAN ([Du-Ka]) qu'une condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que

**Proposition 2.6.** *Le taux spot a une dynamique risque-neutre de la forme :*

$$\begin{aligned} dr_t &= \mu(r_t, t) dt + \gamma(r_t, t) dW_t, \\ \text{où ,} \\ \mu(r, t) &= \alpha_1(t) + \alpha_2(t) r \quad \text{et } \sigma(r, t)^2 = \beta_1(t) + \beta_2(t) r \end{aligned}$$

De nombreux autres modèles ont été proposés pour modéliser le taux spot, notamment avec des termes de volatilités  $\sigma(r, t)$  proportionnels à  $r$ , qui dans le cas où les autres paramètres sont aussi proportionnels, conduit à des taux lognormaux.

- Le modèle de DOTAN :  $\mu(r, t) = \alpha r$ ,  $\sigma(r, t) = \beta r$
- Le modèle de COURTADON :  $\mu(r, t) = \alpha_1 r + \alpha_2$ ,  $\sigma(r, t) = \beta r$

- Le modèle log-normal généralisé :  $\mu(r, t) = \alpha(t) r + \alpha_2 r \log r$   
 $\sigma(r, t) = \beta(t) r$

Toutefois les prix des zéro-coupon n'admettent en général pas des représentations analytiques explicites. Les méthodes numériques sont alors utilisées, mais sont plus lourdes à manier pour les calages implicites aux données du marché.

### 2.2.3 Les modèles multi-dimensionnels de type affine

a taper, voir les slides

- Les modeles quadratiques
- les modeles affines
- Le caractere nécessaire des modeles affines

## Chapitre 3

# Les modèles de déformation de la courbe des taux pour les produits dérivés

Comme nous l'avons vu, modéliser les déformations futures de la courbe des taux est un enjeu majeur pour les établissements financiers. Dans le chapitre précédent, nous avons vu quels liens peuvent exister entre les taux de différentes maturités, si nous partons d'une modélisation a priori du taux court. Dans un modèle stationnaire, la courbe des taux aujourd'hui ainsi que les courbes futures ne dépendent que de la valeur aujourd'hui du taux court et des paramètres du modèle. La conséquence en est une reconstruction, cohérente avec le modèle de déformation, mais éventuellement imparfaite, de la courbe des taux aujourd'hui.

Pour évaluer et couvrir les principaux produits dérivés de taux d'inintérêt, le marché cherche à être exact sur les valeurs de marché des sous-jacents. En d'autres termes, la courbe des taux aujourd'hui, et non seulement la valeur du taux court devient une donnée initiale de la modélisation. Le problème devient un problème de modélisation de dimension infinie, représenter la dynamique de la courbe des taux dans le futur, tout en respectant l'absence d'opportunité d'arbitrage. La conséquence en est une complexité accrue, et une quasi-impossibilité de traiter des produits de type américain. D'où une recherche de modèles mixtes, c'est à dire à facteurs, mais exacts sur la courbe des taux aujourd'hui comme nous l'avons évoqué dans le modèle de Vasicek généralisé.

Les travaux dans cette direction ont été initialisés par Ho & Lee (1985) dans les modèles d'arbre, puis par Heath, Jarrow & Morton (1987-1992) pour les modèles en temps continu.

Comme nous le montrons dans la première partie de ce chapitre, l'hypothèse fondamentale d'absence d'opportunité d'arbitrage dans le marché permet de décrire algébriquement

ces contraintes à partir de la seule connaissance de la volatilité, fonction de la maturité, des zéro-coupons.

Le plan de ce chapitre est le suivant : après avoir présenté le cadre dans lequel nous travaillons, nous montrons en toute généralité la nature des contraintes qui lient les différents taux et les conséquences qui en résultent sur l'estimation des déformations futures de la gamme des taux d'intérêt dans le cas où les volatilités locales sont déterministes. La courbe des taux aujourd'hui, et la courbe des taux forwards que l'on déduit, apparaissent des éléments essentiels à la prévision des taux dans le futur, mais non suffisants. Une attention particulière doit être portée à la forme de la fonction de volatilité locale.

La modélisation par arbitrage des taux futurs permet de disputer la théorie des anticipations rationnelles.

## A- La problématique de Heath, Jarrow, Morton concernant les taux d'intérêt

Alors que Vasicek est le premier à introduire un modèle dynamique de taux court pour étudier le risque de taux dans un monde plutôt actuariel, Heath, Jarrow et Morton (1987-1993) ([?]) sont les premiers à un modèle dynamique global de la courbe, afin de modéliser tous les taux concernés en même temps.

### 3.1 Le modèle en absence d'opportunité d'arbitrage

Comme nous l'avons vu dans les chapitres précédents, l'absence d'arbitrage introduit des contraintes sur les rendements des titres financiers, qu'ils soient de base, ou valeur de marché de produits dérivés.

Lorsqu'on s'intéresse aux problèmes liés aux taux d'intérêt, ce ne sont pas les taux eux-mêmes sur lesquels on va a priori écrire les contraintes, mais sur les prix des opérations financières auxquels ils ont associés.

La référence de base sera donc les prix des zéro-coupon , même si pour des maturités supérieures à un an, il n'y a pas de marché vraiment liquide, le marché traitant plutôt de titres avec coupons dont la valeur de marché sera reliée à celle des zéro-coupon par la règle de non arbitrage statique développée dans le premier chapitre.

### 3.1.1 Le modèle pour les zéro-coupon

Nous supposons un marché qui traite en temps continu les zéro-coupon de toutes les maturités, sans arbitrage. L'incertain du marché s'exprime via la présence de sources de bruit additives et indépendantes que nous représentons à travers  $k$  mouvements browniens, notés  $\widehat{W}$ , non corrélés, définis sur l'ensemble de probabilité.

*Commentaire mathématique* La famille de tribus  $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$  représente la structure d'information disponible au cours du temps aux agents. ce sera souvent la filtration des mouvement browniens  $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}, \mathbb{P})$ . La probabilité a priori  $\mathbb{P}$  des agents du marché, peut être établie à partir des données historiques ou refléter leurs anticipations. Mais c'est la même pour tout le monde.

Nous modélisons les zéro-coupon en supposant que leur dynamique respecte les contraintes dues à l'absence d'arbitrage que nous avons établies précédemment. Nous avons montré qu'un marché est caractérisé par le processus de taux court  $r_t$  et le vecteur (de dimension  $k$ ) des primes de risque  $\lambda_t$ . Les prix négociés sont alors uniquement différenciés par leur vecteur de volatilité, et leur valeur d'aujourd'hui. Aussi nous faisons les hypothèses suivantes :

 La dynamique des prix zéro-coupon  $B(t, T)$  est représentée par

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T)(d\widehat{W}_t + \lambda_t dt), \quad B(T, T) = 1, \quad (3.1)$$

#### Le champ aléatoire des volatilités

$\Gamma(t, T)$  est *la famille des volatilités instantanées, éventuellement aléatoires* des zéro-coupon , paramétrée par les dates d'échéance  $T$ , sur la base des Browniens orthogonaux  $(W_t^j)_{j=1}^k$ . Comme à l'échéance, le prix du zéro-coupon est égal à 1 Euro il est donc connu avec certitude. Nous supposons donc que  $\Gamma(T, T) = 0$ , et que plus généralement pour toutes les dates postérieures à l'échéance  $T$ . Cette convention revient à considérer que le flux est réinvesti dans le marché au taux sans risque.

Nous supposerons que la fonction de volatilité est continue et dérivable par rapport à la maturité  $T$  et que les dérivées sont uniformément bornées, ou au moins uniformément majorée par une v.a. intégrable, soit si  $K_t$  est un processus adapté , borné ou suffisamment intégrable

$$|\partial_T \Gamma(t, T)| = |\gamma(t, T)| \leq K_t$$

*Commentaire mathématique:*

Lorsque le mouvement brownien est vectoriel, la notation  $d\widehat{W}_t$  représente un vecteur colonne de dimension  $(d, 1)$  et de composantes  $d\widehat{W}_t^j$ .  $\Gamma(t, T)$  une matrice de dimension  $(1, d)$ , de composantes  $\Gamma_j(t, T)$  de telle sorte que la quantité

$$\Gamma(t, T)d\widehat{W}_t = \sum_{j=1}^k \Gamma_j(t, T)d\widehat{W}_t^j, \quad \text{soit un réel.}$$

### Prolonger avec l'identification des browniens unidimensionnels

#### Probabilité risque-neutre

L'absence d'opportunité d'arbitrage implique que tous les prix des titres du marché dépendent fondamentalement du processus  $W_t$  défini par :

$$dW_t = \lambda_t dt + d\widehat{W}_t. \quad (3.0)$$

$\{\widehat{W}_t; t \in [0, T]\}$  est un mouvement brownien sous la probabilité objective  $\mathsf{P}$ , qui régit les aléas observés sur les taux. Par suite,  $W$  est un mouvement brownien vectoriel décentré sous  $\mathsf{P}$ , le paramètre de décentralité étant le vecteur des primes de risque  $\lambda_t$ .

Nous annulons l'effet de la prime de risque en introduisant la probabilité risque-neutre  $\mathsf{Q}$  pour laquelle  $\{W_t; t \in [0, T]\}$  est un mouvement brownien centré. Nous dirons que  $\{W_t; t \in [0, T]\}$  est un  $\mathsf{Q}$ -mouvement brownien. Dans ce contexte, l'équation donnant les prix des zéro-coupon devient

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T)dW_t \quad (3.0)$$

#### Dimension des bruits et volatilité

Il est traditionnel lorsqu'on modélise la dynamique du prix d'un actif risqué de lui associer sa volatilité, que nous noterons dans le cas des zéro-coupon  $\text{vol}(t, T)$ , qui mesure le risque instantané du rendement du titre. C'est donc un processus réel et positif tel que

$$dB(t, T) = B(t, T)[r_t dt + \text{vol}(t, T)dZ_t^T]$$

où  $dZ_t^T$  est un mouvement brownien sous la probabilité risque-neutre. Ainsi, dans un marché dans lequel un nombre très grand de titres est négocié, le point de vue traditionnel conduit à introduire autant de bruits que de maturités négociées. Un point délicat à préciser alors est la corrélation de tous ces mouvements browniens entre eux.

Nous avons donc choisi de modéliser a priori la structure des ces corrélations par l'intermédiaire d'un nombre fini de mouvements browniens indépendants et d'un vecteur de volatilité désigné par  $\Gamma(t, T)$ . Le lien entre le vecteur de volatilités locales et la volatilité des zéro-coupon est,

$$[\text{vol}(t, T)]^2 = \sum_{j=1}^k [\Gamma_j(t, T)]^2. \quad (3.0)$$

soit en utilisant le module du vecteur  $\Gamma(t, T)$ ,  $\text{vol}(t, T) = |\Gamma(t, T)|$ .

### *Commentaire mathématique*

D'après les propriétés de l'intégrale stochastique et du mouvement brownien, il est bien connu que l'intégrale stochastique  $\Gamma(t, T)dW_t = \sum_{j=1}^k \Gamma_j(t, T)dW_t^j$  peut se représenter à l'aide de la volatilité  $\text{vol}(t, T)$  et d'un mouvement brownien unidimensionnel  $Z_t^T$  (défini sur un espace éventuellement augmenté [Ka.Sh]) sous la forme

$$\Gamma(t, T)dW_t = \text{vol}(t, T)dZ_t^T$$

Le vecteur de volatilités locales permet de calculer facilement les corrélations instantanées entre les différents zéro-coupon sous la forme

$$\text{cov}_t\left(\frac{dB(t, T + \theta)}{B(t, T + \theta)}, \frac{dB(t, T)}{B(t, T)}\right) = \Gamma(t, T)\Gamma(t, T + \theta)^*dt$$

## 3.2 Equation structurelle des taux

### 3.2.1 Taux zéro-coupon et conditions initiales

L'équation différentielle donnant les prix des zéro-coupon admet une solution explicite, fonction de leur condition initiale, du taux spot  $r_t$  et de leur vecteur de volatilité. Mais le taux spot  $r_t$  est une fonction des prix des zéro-coupon que nous pouvons éliminer. Les prix des zéro-coupon à la date  $t$  dépendent alors seulement des conditions initiales, constituées par la famille des prix zéro-coupon aujourd'hui et de la structure des volatilités locales. En général, une telle propriété est plutôt énoncée sur les taux que sur les prix, sous la forme :

*la dynamique des taux n'est fonction que de la courbe des taux aujourd'hui et de la structure des volatilités locales des prix zéro-coupon .*

Les relations les plus simples sont obtenues pour les taux courts forwards.

#### Analyse des prix des zéro-coupon

**Proposition 3.1.** *Le prix en  $t$  d'un zéro-coupon d'échéance  $T$  est donné par :*

$$B(t, T) = B(0, T) \exp\left[\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, T)dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\Gamma(s, T)|^2 ds\right] \quad (3.0)$$

*L'élimination du taux court conduit à :*

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp\left[\int_0^t [\Gamma(s, T) - \Gamma(s, t)]dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t [|\Gamma(s, T)|^2 - |\Gamma(s, t)|^2]ds\right] \quad (3.0)$$

PREUVE :

La solution explicite<sup>1</sup> de l'équation différentielle stochastique linéaire (3.1.1) est donnée par :

$$B(t, T) = B(0, T) \exp \left[ \int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, T) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\Gamma(s, T)|^2 ds \right] \quad (3.0)$$

⇒ Il est possible d'éliminer  $r_t$  dans cette formule en utilisant la condition frontière  $B(t, t) = 1$ , qui s'exprime par

$$1 = B(0, t) \exp \left[ \int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s, t) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\Gamma(s, t)|^2 ds \right] \quad (3.0)$$

Faisons le quotient de l'équation donnant  $B(t, T)$  par celle donnant  $B(t, t)$ . Il vient :

$$B(t, T) = \frac{B(0, T)}{B(0, t)} \exp \left[ \int_0^t [\Gamma(s, T) - \Gamma(s, t)] dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t (|\Gamma(s, T)|^2 - |\Gamma(s, t)|^2) ds \right]$$

La première égalité (3.1) met en jeu le prix à la date 0 du zéro-coupon d'échéance  $T$ , le taux court, et le vecteur des volatilités locales de l'échéance  $T$ . La deuxième relation (3.1) montre que l'élimination de  $r_t$  conduit à prendre en compte plus d'information sur la courbe des taux aujourd'hui, par l'intermédiaire notamment du prix forward en  $t$  du zéro-coupon d'échéance  $T$ ,  $\frac{B(0, T)}{B(0, t)}$ , ainsi que sur la structure des volatilités locales.

## Les équations intégrales des taux

Nous traduisons maintenant en termes de taux d'intérêt les contraintes que nous avons mis en évidence sur les prix des zéro-coupon. Les principales notations ont été introduites au chapitre précédent. Les équations des taux s'obtiennent aisément à partir des formules de prix que nous venons d'établir. Toutefois pour justifier mathématiquement les formules donnant les équations des taux courts forwards, nous utiliserons que le vecteur des volatilités locales a été supposé dérivable par rapport à la maturité, à dérivée bornée<sup>2</sup>. Nous insistons sur le fait qu'il n'est pas fait dans cette section d'hypothèse de volatilité déterministe, même si les notations ne le rappellent pas toujours. La dérivée de  $\{\Gamma(t, T); t \leq T\}$  par rapport à

1. Il est facile de justifier cette écriture de la manière suivante :

- si la volatilité est nulle, il s'agit d'une équation différentielle linéaire ordinaire, dont la solution est une exponentielle
- si le taux est nul, il s'agit d'une équation stochastique dont la solution doit être d'espérance constante. La solution est alors une exponentielle faisant intervenir deux termes : une intégrale stochastique et la variation quadratique associée à cette intégrale stochastique. Cette propriété est justifiée en Appendice pour le théorème de Girsanov.

2. L'hypothèse de bornitude du vecteur des volatilités locales et de leur dérivées peut être remplacée par l'hypothèse moins forte suivante : il existe un processus de carré intégrable adapté  $\kappa_t$  positif, tel que  $|\gamma(t, T)| \leq \kappa_t dt \otimes dP$  p.s. Des hypothèses d'intégrabilité plus fortes seront établies si nécessaire.

l'échéance  $T$ , c'est à dire la deuxième variable a été notée

$$\partial_T \Gamma(t, T) = \gamma(t, T) \quad (3.0)$$

**Théorème 3.2.** *La représentation des taux à l'instant futur  $t$  est donnée par :*

$$R(t, \theta) = R_0(t, \theta) - \int_0^t \frac{\Gamma(s, t + \theta) - \Gamma(s, t)}{\theta} dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{1}{\theta} [|\Gamma(s, t + \theta)|^2 - |\Gamma(s, t)|^2] ds \quad (3.1)$$

$R_0(t, \theta) = \frac{1}{\theta} [\ln B(0, t) - \ln B(0, t + \theta)]$  est le taux forward vu de 0, pour l'échéance  $t$ , de maturité  $\theta$ . Ce taux est lu sur la courbe des taux aujourd'hui.

De même, la représentation des taux courts forwards dans le futur est donnée par

$$f(t, T) = f(0, T) - \int_0^t \gamma(s, T) dW_s + \int_0^t \gamma(s, T) \Gamma(s, T)^* ds \quad (3.2)$$

En particulier, la représentation du taux court est :

$$r_t = f(0, t) - \int_0^t \gamma(s, t) dW_s + \int_0^t \gamma(s, t) \Gamma(s, t)^* ds \quad (3.2)$$

Si l'on souhaite donner moins d'importance à la courbe des taux aujourd'hui, et plus au taux court  $r$ , on peut donner une autre forme à la relation donnant les taux forwards

$$f(t, T) = r_T + \int_t^T \gamma(s, T) dW_s - \int_t^T \gamma(s, T) \Gamma(s, T)^* ds \quad (3.2)$$

*Commentaire historique :* Les équations (3.2) et (3.2) ont été obtenues pour la première fois par HEATH-JARROW-MORTON en 1987 [H.J.M.]. Ces derniers partent à priori d'un modèle pour les taux forwards et formulent un peu différemment la relation (3.2) sous la forme :

$$f(t, T) = f(0, T) - \int_0^t \gamma(s, T) dW_s + \int_0^t \gamma(s, T) \left( \int_s^T \gamma(s, u) du \right)^* ds \quad (3.2)$$

mais contrairement à de nombreux auteurs, nous n'y faisons pas référence comme au **modèle** de HJM, car il s'agit en fait d'équations conséquences structurelles de l'absence d'arbitrage. Nous appellerons modèle de HJM le modèle que nous évoquerons brièvement à la fin de ce chapitre, où le choix d'une fonction de volatilité est proposé sous la forme

$$\gamma(s, t) = \sigma(s, f(s, t)) \quad (3.2)$$

Ces équations ont été le point de départ à la fois d'une réflexion de nature différente sur les

---

3. Ce terme est aussi la dérivée par rapport à la maturité du carré de la volatilité locale du zéro-coupon,  $|\Gamma(s, t)|^2 = \text{vol}(s, t)^2$ , au coefficient  $\frac{1}{2}$  près, et nous utiliserons indifféremment les deux notations.

taux d'intérêt, ainsi que de très nombreuses publications sur le sujet. ( HULL-WHITE, JAMSHIDIAN, EL KAROUI-GEMAN , EL KAROUI-MYNENI-VISWANATHAN , BRACE-MUSIELA.

PREUVE :

- ▷ La première relation dérive immédiatement de la définition du taux actuariel continu  $R(t, \theta)$ , et des formules explicites des prix de zéro-coupon.
- ▷ L'équation des taux courts forwards s'obtient soit en passant à la limite dans les relations précédentes, soit directement en prenant la dérivée logarithmique des prix des zéro-coupon :

$$\begin{aligned} f(t, T) &= -\partial_T \ln B(t, T) = f(0, T) - \partial_T \left( \int_0^t \Gamma(s, T) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t |\Gamma(s, T)|^2 ds \right) \\ &= f(0, T) - \int_0^t \partial_T \Gamma(s, T) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_T |\Gamma(s, T)|^2 ds \end{aligned} \quad (3.2)$$

La dérivation sous l'intégrale ou intégrale stochastique est justifiée par les hypothèses de bornitude faites sur la dérivée par rapport à la maturité de la fonction de volatilité.

En particulier, si nous désignons par  $r(t, 0) = f(t, t)$  le taux court forward d'échéance  $t$ , il est clair que  $r(t, 0)$  satisfait l'équation (3.2).

### *Commentaire mathématique*

Il est intéressant de démontrer que les deux processus  $r(t, 0)$  et  $r_t$  coïncident, même si cette propriété est en général considérée comme acquise dans la littérature financière. Avec le point de vue que nous avons adopté, la preuve n'est pas immédiate.

PREUVE :

- Pour montrer l'identité de  $r(t, 0)$  et de  $r_t$ , nous calculons les intégrales  $I_1 = \int_0^t r(s, 0) ds$  et  $I_2 = \int_0^t r_s ds$ . La deuxième s'obtient à partir de l'équation (3.2.1)

$$I_2 = \int_0^t r_s ds = \int_0^t f(0, s) ds - \int_0^t \Gamma(s, T) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t |\Gamma(s, t)|^2 ds$$

La première s'obtient à partir de l'équation (3.2) appliquée à  $r(t, 0) = f(t, t)$ ,

$$I_1 = \int_0^t r(s, 0) ds = \int_0^t f(0, s) ds - \int_0^t ds \int_0^s \gamma(u, s) dW_u + \frac{1}{2} \int_0^t ds \int_0^s \partial_s |\Gamma(u, s)|^2 du$$

– Grâce à la formule d'intégration par parties (ou théorème de Fubini) déterministe ou stochastique, justifiée par les hypothèses d'intégrabilité (bornée ou de carré intégrable) faites sur la volatilité des taux forwards, nous pouvons faire les transformations suivantes qui utilisent le fait que  $\Gamma(u, u) = 0$ , et que le processus  $\gamma(u, t)$  est  $\mathcal{F}_u$  mesurable

$$\int_0^t ds \int_0^s \gamma(u, s) dW_u = \int_0^t \left( \int_u^t \gamma(u, s) ds \right) dW_u = \int_0^t [\Gamma(u, t) - \Gamma(u, u)] dW_u = \int_0^t \Gamma(u, t) dW_u$$

De même,

$$\frac{1}{2} \int_0^t ds \int_0^s \partial_2 |\Gamma(u, s)|^2 du = \frac{1}{2} \int_0^t |\Gamma(s, t)|^2 ds$$

En regroupant ces égalités, nous voyons que les quantités  $I_1$  et  $I_2$  que nous cherchons à évaluer sont égales.

## Les équations différentielles des taux

Nous nous proposons maintenant de mesurer le comportement infinitésimal des déformations de la courbe entre deux dates très rapprochées, et d'en déduire la dynamique des taux de différentes maturités, et du taux court en particulier.

Comme nous le montrons, la pente de la courbe des taux forwards est un élément important pour expliquer la dynamique infinitésimale des taux.

**Théorème 3.3.** *L'équation différentielle du taux actuarial de maturité  $\theta$  tient compte du taux forward en  $t + dt$  de même maturité  $\theta$  et de la structure des volatilités locales sous la forme :*

$$dR(t, \theta) = \partial_T R_t(T, \theta)dt + \frac{1}{2\theta}|\Gamma(t, t + \theta)|^2dt - \frac{1}{\theta}\Gamma(t, t + \theta)dW_t \quad (3.3)$$

où  $\partial_T R_t(t, \theta)$  est la dérivée du taux forward de maturité  $\theta$  par rapport à l'échéance  $T$ , prise en  $T = t$ .

Les taux courts forwards  $r(t, u) = f(t, t + u)$  évoluent comme

$$dr(t, u) = \partial_2 r(t, u)dt + \frac{1}{2}\partial_2 |\Gamma(t, t + u)|^2dt - \gamma(t, t + u)dW_t \quad (3.4)$$

En particulier le taux court a une dynamique de la forme :

$$dr_t = 2\partial_2 R(t, 0)dt - \gamma(t, t)dW_t = \partial_2 r(t, 0)dt - \gamma(t, t)dW_t \quad (3.4)$$

*Commentaire technique* a) Il est possible d'interpréter la quantité  $\partial_T R_t(T, \theta)_{T=t}$  à partir de taux forward. Rappelons que le taux forward  $R_t(T, \theta)$  est égal à

$$R_t(T, \theta) = -1/\theta(\ln(B(t, T + \theta)) - \ln(B(t, T))) = (1/\theta) \int_T^{T+\theta} f(t, u)du.$$

Par suite, sa dérivée par rapport à la date  $T$  est la dérivée discrète des taux spot forwards entre  $t$  et  $t + \theta$ ,

$$\partial_T R_t(T, \theta) = 1/\theta(f(t, T + \theta) - f(t, T))$$

qui converge quand  $T \mapsto t$  vers  $\partial_T R_t(T, \theta)_{T=t} = 1/\theta(f(t, t + \theta) - r_t)$

b) Une autre représentation est donnée par la représentation des taux forwards à l'aide des taux continus

$$R_t(T, \theta) = 1/\theta((T + \theta - t)R(t, T + \theta) - (T - t)R(t, T))$$

Avec cette représentation, on obtient que  $\partial_T R_t(T, \theta)$  est associée à la différence de deux taux,

$$\partial_T R_t(T, \theta) = \frac{1}{\theta} \left( R(t, T + \theta) - R(t, T) + (T - t)(\partial_2 R(t, T + \theta) - \partial_2 R(t, T)) \right) + \partial_2 R(t, T + \theta)$$

Lorsque  $T \mapsto t$  l'égalité devient

$$\partial_T R_t(T, \theta)_{T=t} = \frac{1}{\theta} (R(t, t + \theta) - R(t, t)) + \theta \partial_2 R(t, t + \theta)$$

*Commentaire historique* a) M.MUSIELA en 1993 [?] est le premier à avoir montré l'importance de ces relations dans la modélisation des déformations de la courbe des taux, en notant en particulier que structurellement le système différentiel qui dirige la déformation de la courbe des taux est de dimension infinie. Nous avons déjà vu que sous certaines contraintes sur la volatilité on peut réduire le nombre de facteurs à utiliser.

b) Musiela est aussi le premier à avoir écrit l'équation différentielle stochastique qui régit la dynamique global des taux.

c) L'interprétation économique de l'équation (3.4) n'a pas été clairement explicitée à ce jour (dans la littérature), à savoir la relation entre l'espérance de l'accroissement du taux et la théorie des anticipations rationnelles.

#### PREUVE :

L'équation différentielle satisfaite par le logarithme des cours des zéro-coupon  $\ln(B(t, T))$  est donnée simplement par :

$$d_t \ln(B(t, T)) = r_t dt - \frac{1}{2} |\Gamma(t, T)|^2 dt + \Gamma(t, T) dW_t.$$

- ▷ Pour en déduire l'équation différentielle satisfaite par les taux, la première étape est de rendre l'échéance glissante, puisque nous avons la relation :

$$\theta R(t, \theta) = -\ln B(t, t + \theta)$$

Par la formule de différentiation composée<sup>4</sup>, la dynamique d'un taux de maturité fixe et donc d'échéance variable est donnée par :

$$\begin{aligned} d_t[\theta R(t, \theta)] &= d_t(-\ln B(t, t + \theta)) = -\partial_2 \ln B(t, t + \theta) dt - d_t \ln B(t, T)_{T=t+\theta} \\ &= \partial_2(\theta R(t, \theta)) dt - r_t dt + \frac{1}{2} |\Gamma(t, t + \theta)|^2 dt - \Gamma(t, t + \theta) dW_t \end{aligned}$$

- ▷ Il nous reste donc à interpréter la quantité  $\partial_\theta(\theta R(t, \theta)) - r_t = f(t, t + \theta) - r_t$  qui est aussi égale à  $[R(t, \theta) + \theta \partial_\theta R(t, \theta) - r_t]$  comme la dérivée d'un taux forward par rapport à la date d'échéance du taux. Or  $R_t(T, \theta) = -\frac{1}{\theta} [\ln B(t, T + \theta) - \ln B(t, T)]$  admet comme dérivée par rapport à la date  $T$ ,

$$\partial_T r_t(T, \theta) = \frac{1}{\theta} [f(t, T + \theta) - f(t, T)]$$

ce qui prouve la propriété recherchée. Il en résulte que

$$dR(t, \theta) = \partial_T(R_t(\theta))_{T=t} dt + \frac{1}{2} |\Gamma(t, t + \theta)|^2 dt - \frac{1}{\theta} \Gamma(t, t + \theta) dW_t$$

Pour obtenir l'équation du taux court, il suffit de faire tendre  $\theta$  vers 0 dans ces relations.

---

4. Il s'agit de l'analogue différentiel de la formule d'intégration par parties que nous avons utilisée précédemment

- ▷ Pour obtenir celle des taux courts forwards, il suffit de dériver l'équation de  $(uR(t, u))$ . La dynamique du taux court dépend de la pente de la courbe à l'origine.

Par le même argument, il est possible d'écrire la dynamique de toutes les dérivées successives par rapport à la maturité de  $\partial_2(uR(t, u)) =: r(t, u)$ , à condition de supposer que *le vecteur de volatilités instantanées est indéfiniment dérivable par rapport à la maturité* et que toutes les dérivées sont majorées par des processus de carré intégrable. Nous notons  $r^{(n)}(t, u)$  la dérivée n-ième par rapport à la maturité  $u$  du taux court forward d'échéance glissante.

$$dr^{(n)}(t, \theta) = r^{(n+1)}(t, \theta)dt + \frac{1}{2}\partial_2^{(n+1)}[vol(t, t + \theta)^2]dt - \partial_2^{(n+1)}\Gamma(t, t + \theta)dW_t \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Exemples de fonctions de volatilité

**reprendre pour raccourcir et donner d'autres exemples** UN MODÈLE FAIBLEMENT STATIONNAIRE

Supposons que le vecteur des volatilités instantanées des zéro-coupon se factorise en un produit de deux processus, l'un qui est un vecteur aléatoire que nous noterons  $(\sigma_t)$  et l'autre une fonction déterministe  $G(T - t)$  de dérivée  $g(T - t)$  de telle sorte que

$$\Gamma(t, T) = G(T - t)\sigma_t ; \quad \gamma(t, T) = g(T - t)\sigma_t ; \quad g(0) = 1$$

Les équations des taux se simplifient un peu en

$$dR(t, \theta) = \frac{1}{\theta}[r(t, \theta) - r_t]dt + \frac{1}{2\theta}G^2(\theta)|\sigma_t|^2dt - \frac{1}{\theta}G(\theta)\sigma_tdW_t \quad (3.3)$$

Nous retrouverons cette forme à plusieurs reprises dans les exemples décrits ci-dessous. En particulier, dans le cas stationnaire, ( $\sigma$  indépendant du temps), l'équation des taux forwards (3.2) devient

$$f(t, T) = f(0, T) - \int_0^t g(T - s)\sigma dW_s + |\sigma|^2[G^2(T) - G^2(T - t)] \quad (3.3)$$

Nous décrivons ci-dessous un certain nombre de fonctions de volatilité locale, couramment utilisées dans la pratique, en faisant référence explicitement aux modèles auxquelles elles sont associées et qui ne seront présentées que dans la deuxième partie de ce chapitre.

### 3.2.3 Le cas unidimensionnel

Nous supposons le nombre de browniens égal à 1 .

## Volatilité locale de Vasicek et Ho et Lee

La fonction de volatilité est une fonction non aléatoire définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$\begin{aligned}\Gamma_V^a(t, t + \theta) &= \sigma \frac{1 - e^{-a\theta}}{a} \quad \theta \geq 0 \\ \gamma_V^a(t, t + \theta) &= \sigma e^{-a\theta}\end{aligned}\tag{3.4}$$

pour le modèle de VASICEK.

La limite de cette fonction lorsque  $a$  tend vers 0 est la volatilité du modèle de HO ET LEE en temps continu.

$$\Gamma_{Ho.Lee}(t, t + \theta) = \sigma\theta \tag{3.4}$$

$$\gamma_{Ho.Lee}(t, t + \theta) = \sigma \tag{3.5}$$

Ces modèles sont stationnaires, associés à la fonction  $G^a(\theta) = \frac{1}{a}(1 - e^{-a\theta})$ ; leur version faiblement stationnaire consiste à faire dépendre du temps le paramètre  $\sigma$ .

L'une des propriétés remarquables de cette classe de fonctions de volatilité est la factorisation suivante :

$$\Gamma_V^a(u, t + \theta) - \Gamma_V^a(u, t) = \Gamma_V^a(0, \theta)e^{-a(t-u)} \quad (u \leq t). \tag{3.5}$$

L'identité suivante est également très utile

$$\int_0^t |\Gamma_V^a(u, t + \theta)|^2 du \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma^2}{a^2} \int_0^t [(1 - e^{-a(t+\theta-u)}) - (1 - e^{-a(t+\theta-u)})e^{-a(t+\theta-u)}] du \\ &= \frac{\sigma^2}{a^2} [t - \frac{e^{-a\theta}}{a}(1 - e^{-at}) - \frac{(1 - e^{-a(t+\theta)})^2}{2a} + \frac{(1 - e^{-a\theta})^2}{2a}]\end{aligned}\tag{3.6}$$

La représentation des taux se simplifie considérablement sous la forme

$$R(t, \theta) = R_0(t, \theta) + \Phi^a(t, \theta) - \Gamma_V^a(0, \theta) \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u \tag{3.6}$$

$\Phi(t, \theta)$  est une fonction que l'on peut expliciter à partir des calculs précédents mais nous verrons que c'est rarement nécessaire.

- Pour  $a > 0$ ,

$$\begin{aligned}\Phi^a(t, \theta) &= \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ (1 - e^{-a\theta}) \frac{1 - e^{-at}}{a} - \frac{(1 - e^{-a(t+\theta)})^2}{2a} \right] \\ &\quad + \frac{\sigma^2}{a^2} \left[ \frac{(1 - e^{-at})^2}{2a} + \frac{(1 - e^{-a\theta})^2}{2a} \right] \\ &= \frac{\sigma^2}{2a} [(G^a(t) + G^a(\theta))^2 - (G^a(t + \theta))^2]\end{aligned}\tag{3.5}$$

Pour  $a = 0$

$$\Phi^0(t, \theta) = \frac{\sigma^2}{3} [(t + \theta)^3 - \theta^3 - t^3] = \sigma^2 t \theta (t + \theta)\tag{3.5}$$

*Exemple :*

Des tests empiriques faits à partir de prix d'OAT montrent que sur le marché français, des valeurs raisonnables de  $a$  se situent entre 0,1 et 0,8 et pour  $\sigma$  entre 0,4% et 4%.

## Volatilité de CIR

La fonction de volatilité est une fonction du taux spot, définie sur  $\mathbb{R}^+$  par

$$\Gamma_{CIR}(t, t + \theta) = \sigma \sqrt{r_t} G(T - t)\tag{3.5}$$

où  $G$  est une fonction déterministe solution d'une certaine équation différentielle de type Riccati (??). Dans cet exemple la fonction de volatilité est aléatoire.

### 3.2.4 Le cas multi-dimensionnel

Nous supposons que maintenant deux sources de bruit perturbent les prix.  
La fonction de volatilité est supposée de la forme

$$\begin{aligned}\Gamma(u, t)_1 &= \frac{1 - e^{-a(t-u)}}{a} \sigma_{11} + \frac{1 - e^{-\alpha(t-u)}}{\alpha} \sigma_{21} \\ \Gamma(u, t)_2 &= \frac{1 - e^{-a(t-u)}}{a} \sigma_{12} + \frac{1 - e^{-\alpha(t-u)}}{\alpha} \sigma_{22}\end{aligned}\tag{3.5}$$

Par les mêmes calculs que précédemment, il vient

$$\begin{aligned}R(t, \theta) &= R_0(t, \theta) + \widehat{\Phi}(t, \theta) - \frac{1 - e^{-a\theta}}{a\theta} \left[ \int_0^t e^{-a(t-u)} \sigma_{11} dW_u^1 + \sigma_{12} dW_u^2 \right] \\ &\quad - \frac{1 - e^{-\alpha\theta}}{\alpha\theta} \left[ \int_0^t e^{-\alpha(t-u)} \sigma_{21} dW_u^1 + \sigma_{22} dW_u^2 \right]\end{aligned}\tag{3.5}$$

*Exemple :*

Dans ce modèle vectoriel, les tests menés dans le travail de (El Karoui, Geman, Lacoste), montrent que des valeurs raisonnables de  $a$  se situent entre 0,1 et 0,8 et pour  $\alpha$  entre 0,001 et 0,01. Les ordres de grandeurs des paramètres  $\sigma_{ij}$  sont de 0,1% à 5%.

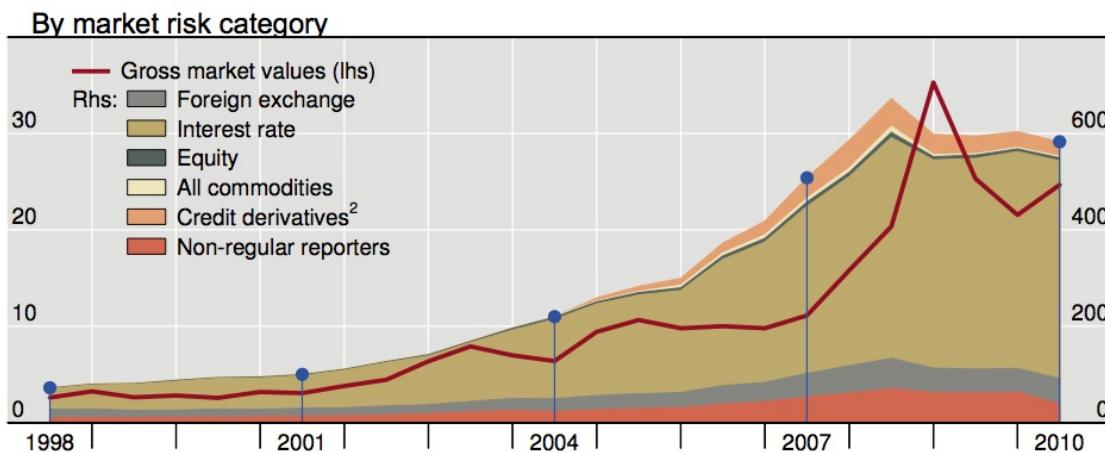
*Tracer la courbe des volatilités locales des taux forwards pour montrer les bosses de volatilités*

# Chapitre 4

## Pricing des Dérivés de Taux d'Intérêt

### Global OTC derivatives market

Triennial and semiannual surveys, notional amounts outstanding<sup>1</sup>, in trillions of US dollars



<sup>1</sup> Dots mark triennial survey dates and data. <sup>2</sup> Data available from end-December 2004.

ure: Evolution of notional size of OTC derivatives market. Source: BIS.

## A- Swaps, forwards et futurs

### 4.1 Les instruments de couverture

Les principaux instruments de couverture sur risque de taux sont les contrats de type FRAs, Futures, Swaps et les options sur ces contrats les Caps, Floors et Swaptions. Les contrats future sont cotés sur les marchés organisés, ce qui leur assure une grande liquidité et peu de frais de transaction.

#### 4.1.1 Contrats forward et FRA's

Un contrat **Forward** est un accord entre deux parties d'acheter ou vendre un sous-jacent la date  $T$  dans le futur  $T$ . Dans un contrat **Forward**, tous les paiements ont lieu en  $T$ .

*Un contrat **Forward** signé en  $t_0$ , délivrant  $\Phi$  en  $T$ , et de **prix forward**  $F_{t_0}(T, \Phi)$  est défini par les flux suivants :*

- ▷ *Le signataire du contrat reoit en  $T$  la quantité  $\Phi$  de l'émetteur du contrat.*
- ▷ *Le signataire du contrat paie en  $T$  le montant  $F_{t_0}(T, \Phi)$  à l'émetteur.*
- ▷ *Le prix forward  $F_{t_0}(T, \Phi)$  est déterminé en  $t_0$  de faon telle que la valeur du contrat soit nulle en  $t_0$ .*

Le contrat forward se résume donc un payoff en  $T$  de  $\Psi_T = F_{t_0}(T, \Phi) - \Phi_T$  en  $T$ . Par conséquent, sa valeur est déterminée à toute date intermédiaire par la règle d'évaluation habituelle.

Il convient de préciser la différence entre le prix forward et la valeur d'un contrat signé en  $t_0$  d'expiration  $T$  et de payoff  $\Phi$ . Pour ce faire, considérons une date  $t$ ,  $t_0 < t < T$ :

- Le prix forward (souvent appelé le strike forward)  $F_{t_0}(T, \Phi)$  correspond au montant versé en  $T$  à l'émetteur du contrat signé en  $t_0$ .
- La valeur en  $t$  du contrat signé en  $t_0$  est:

$$F_{t_0}(T, \Phi_T)B(t, T) - \Pi_t(\Phi_T) = B(t, T)(F_{t_0}(T, \Phi_T) - F_t(T, \Phi_T)) \quad (4.0)$$

**Exemple 4.1.1.** Si l'on considère un contrat forward sur un actif  $S_t$ , défini par le processus adapté  $dS_t = S_t(r(t)dt + h(t)dW_t)$  sous la mesure de probabilité *risque neutre* Q en absence

d'opportunité d'arbitrage, alors:

$$\mathbb{E}^t \left[ \exp \left( - \int_t^T r(s) ds \right) S_T \right] = S_t \text{ et } F_t(T, S_T) = \frac{S_t}{B(t, T)}$$

### Les options sur forward

Considérons une option *call* d'échéance  $T$  sur le prix forward associé au contrat signé en  $t$  d'échéance  $T_F > T$ . Le flux terminal de l'option en  $T$  est  $\Psi_T$  :

$$\Psi = B(T, T_F)(F_T(T_F, \Phi) - K)_+$$

#### 4.1.2 Les contrats Future

Un contrat **Future** diffère du contrat forward par le fait que le paiement se fait continument durant la vie du contrat, de façon ce que la valeur du contrat soit constamment nulle.

*Un contrat **Future** signé en  $t$  sur  $\Phi_T$ , d'échéance  $T$  est caractérisé par les propriétés suivantes :*

- ▷ *Sur la période  $[t, T]$ , le **prix future**  $\text{Fut}_T(T, \Phi)$  de livraison de  $\Phi_T$  en  $T$  est coté sur le marché.*
- ▷ *Le signataire du contrat paie en  $T$  le montant  $\text{Fut}_T(T, \Phi)$  et reçoit la quantité  $\Phi_T$  de la contre partie.*
- ▷ *Sur l'intervalle  $[s, s + ds]$ ,  $s \in [t, T]$ , le signataire du contrat reçoit la quantité  $\text{Fut}_s(T, \Phi) - \text{Fut}_{s+ds}(T, \Phi)$ , de la contre partie.*
- ▷ *La valeur du contrat future  $\Pi_s$  est nulle  $\forall s \in [t, T]$ .*

Le contrat future peut donc être vu comme un instrument financier payant des dividendes continûment, et dont l'achat ou la vente ne coûte rien. Il en découle que  $\text{Fut}_T(T, \Phi) = \Phi$ , et par conséquent il est inutile de délivrer le sous-jacent  $\Phi$ . De plus, en aucun moment on ne paie le montant  $\text{Fut}_t(T, \Phi)$  mais uniquement ses variations, ce pourquoi le terme *prix* utilisé pour  $\text{Fut}$  est source de confusions.

Comme le future est un contrat forward qui paie un dividende, son évaluation diffère des règles standards. On a en particulier que le **prix future** est un processus  $\text{Fut}_t(T, \Phi)$  défini par :

$$\text{Fut}_t(T, \Phi) = \mathbb{E}_t^Q[\Phi] \tag{4.0}$$

Dans le cas où les taux d'intérêt sont déterministes, le prix forward est le même que le prix future.

### 4.1.3 Les options sur future

En fonction de la place de marché, les options sur futures sont traitées différemment. Dans certains cas, la prime de l'option n'est pas payée, et le vendeur reçoit quotidiennement les variations du prix de l'option. Ce sont les *future-like* options. Dans d'autres cas, le vendeur de l'option reçoit la prime, puis doit payer des appels de marges jusqu'à l'échéance de l'option. Ces options sont dites *marked-to-market*. Leur évaluation est très difficile, car les appels de marges sont fonctions du calcul de risque *SPAN*<sup>1</sup> que la caisse de compensation applique aux portefeuilles des traders en fonction de leur contenu. Cependant, en négligeant ces derniers, il est possible d'en calculer le prix explicitement.

#### LES NOT-MARKED-TO-MARKET OPTIONS

Prenons le cas d'un future obligataire livrant à l'échéance  $T_F$  un zéro coupon  $B(T_F, T_0)$  et considérons une option *call* sur ce dernier, d'échéance  $T$  où  $t < T < T_F < T_0$ . Alors le prix de l'option est donné par:

$$C(t, b; T, K) = \mathbb{E}_t^Q \left[ \exp \left( \int_t^T -r_s ds \right) \left( \mathbb{E}_T^Q [B(T_F, T_0)] - K \right)_+ \right] \quad (4.0)$$

#### LES FUTURE-LIKE OPTIONS

Les *future-like* options sont traitées exactement comme des contrats future, c'est--dire que le flux journalier correspond à la variation du prix de l'option et à l'échéance, l'acheteur paie le prix initial de l'option et le vendeur le payoff de cette dernière. Ceci rend l'évaluation beaucoup plus simple. Se basant sur le même argument que pour les futures (cf. page 45), le prix d'un *call* est:

$$C(t, F(t, T_F, \Phi); T, K) = \mathbb{E}_t^Q \left[ \left( \text{Fut}_T(T_F, \Phi) - K \right)_+ \right]$$

### 4.1.4 Les Swaps

Quand la maturité augmente, comme pour les prêts et les emprunts, les mécanismes mis en place dans les années 80 conduisent à échanger à des dates pluriannuelles les coupons variables contre des coupons fixes payés aux mêmes dates. L'opération s'appelle un swap. Historiquement, les premiers swaps conclus au début des années 1980 étaient des swaps de devises. La simplicité du mécanisme financier ainsi que le fait que le risque de contrepartie soit limité à un flux d'intérêt et ne concerne pas le nominal expliquent le formidable succès des swaps de taux d'intérêt.

*Un swap (du mot anglais signifiant échange) de taux d'intérêt est un contrat de gré à gré aux termes duquel deux parties s'engagent à échanger pendant un nombre d'années*

---

1. Standard Portfolio Analysis of Risk

*et pour un montant nominal définis dans le contrat des flux d'intérêt annuels (ou pluriannuel) calculés pour une partie sur la base d'un taux variable constaté à des dates prefixées et pour l'autre partie sur la base d'un taux fixe, appelé **taux de swap**.*

Nous avons vu que le prix des contrats à terme se déduit des prix de marché, par absence d'arbitrage. Ils sont caractérisés par le fait que la valeur financière globale de l'opération est nulle à la date de signature du contrat. Cette même règle prévaut pour les Swaps, qui prennent de la valeur dès qu'ils commencent à vivre.

Nous verrons dans la suite que si le taux variable est prédeterminé et ajusté à la période de paiement, sa valeur peut être déterminée à partir des données de marché, sans référence à un modèle spécifique.

#### 4.1.5 Les instruments optionnels de taux

Les contrats à terme et les future sont l'objet d'options dont certaines sont négociées sur le MATIF. Un contrat à terme est symétrique en terme de risque pour l'acheteur et le vendeur. Par contre,

*Moyennant le paiement d'une prime à la date de signature du contrat, une option sur contrat à terme de taux d'intérêt garantit à son détenteur le droit d'emprunter ou de prêter à la date d'échéance, pour une maturité qui est celle du taux de référence, à un cours garanti, qui est souvent proche de la valeur du taux forward. On parle aussi de caplet ou de floorlet.*

Concernant les Swaps, plusieurs types d'options sont proposées

- **LES CAPS**

Un investisseur a une dette pluri-annuelle, indexée sur un taux variable, par exemple l'EURIBOR trois mois. Il désire swaper cette dette contre le paiement de coupons fixes, mais seulement si les taux variables ont beaucoup monté. Il achète donc un Cap, qui lui permet à chaque date de paiement de coupon de comparer le taux variable avec le taux garanti. Si le taux variable est plus grand que le taux garanti, il exerce son droit. Si le taux variable est inférieur au taux garanti, il y renonce.

Un point important : le taux garanti est le même pour toutes les dates de paiement.

- **LES FLOORS**

Les floors sont les analogues des caps, mais sur le principe de l'option de vente.

- **LES SWAPPTIONS**

Un investisseur désire rentrer dans un swap dans le futur. Moyennant une prime, il veut se garantir contre une hausse excessive du taux de swap, en achetant une caption, qui est une option "d'achat" sur taux de swap, qui lui garantit un taux fixe plafonné. Ce taux est souvent proche du taux de Swap forward. Suivant sa position dans le Swap,

il peut être plutôt intéressé par une option de vente. Il faut noter qu'en cas d'exercice, ce sont tous les paiements futurs qui seront affectés par l'option.

Ces dernières années des produits "exotiques" de taux d'intérêt, de type américain, ont rencontré beaucoup de succès. Il s'agit des

- ▷ **Swaptions Bermuda**, où l'investisseur peut choisir le moment où il rentre dans une swaption. S'il rentre après le début de l'option, la maturité du Swap sera réduite d'autant.
- ▷ Les **flex-caps** ont également rencontré un succès certain, par la possibilité qu'ils offrent de choisir les caplets du Cap qui seront exercés (en nombre fixé dans le contrat). La prime est moins élevée que celle d'un Cap standard.
- ▷ D'autres options sont couramment traitées, comme les **options corridor ou Boost**, qui parient sur la stabilité des taux : moyennant une prime, on reçoit un montant proportionnel au nombre de jours passés par le taux de référence à l'intérieur d'un corridor, pendant la durée du contrat.
- ▷ De nombreuses variantes existent, les **options à cliquets**, qui autorisent périodiquement la redéfinition du corridor.....

Les **Caps CMS** échangent périodiquement un taux de Swap de maturité fixé dans le contrat contre un taux fixe, si l'opération est favorable à celui qui a payé la prime.

Les profonds mouvements de taux d'intérêt qui ont affectés les marchés européens pendant les années 92-95, la grande volatilité des taux sur le marché américain, le passage à l'Euro, ont amplifié l'intérêt porté aux produits dérivés de taux; en particulier, les marchés des Swaps, des Caps et des Floors, et des options exotiques sur taux ont vu leurs volumes de transaction exploser....

## B Pricing Forward-neutre

**Ce chapitre n'a pas été repris en fonction des modifications apportées au début**

### 4.2 Introduction aux méthodes d'évaluation

Le problème de l'évaluation et de la couverture de produits de taux est un problème majeur depuis de nombreuses années. Pour traiter ce problème, la première étape est celle de la **description précise de l'échéancier** associé au portefeuille, c'est à dire l'identification des dates de paiement et des flux connus ou aléatoires attendus dans l'avenir. Lorsque le portefeuille contient des produits hors bilan comme des Swaps, des Caps, des Floors, ou

d'autres produits dérivés, cette identification peut être complexe..

Lorsque les flux attendus dans le futur sont connus, notamment pour un portefeuille d'obligations à taux fixe, la valeur financière du titre aujourd'hui est, comme nous l'avons vu à de nombreuses reprises, représentable en absence d'opportunité d'arbitrage à l'aide des prix zéro-coupon .

Un flux aléatoire  $\Phi$  payé à une date future  $T$  est pour le détenteur du titre auquel il est associé doublement risqué :

- par suite de l'incertitude d'évaluation qui résulte du fait qu'il n'est pas connu aujourd'hui
- à cause du risque de taux associé au fait que le paiement à lieu à une date future  $T$ .

Aussi lorsque les flux attendus sont aléatoires, leur évaluation demande un modèle cohérent de déformation de la courbe des taux, et un principe d'évaluation qui repose lui aussi sur l'AOA.

Lorsqu'on cherche à évaluer et couvrir un produit dérivé sur un sous-jacent qui est un actif négocié du marché, le principe de l'évaluation qui est à la base de la formule de Black et Scholes est le suivant : on construit un portefeuille autofinancant qui duplique les flux aléatoires attendus dans le futur. Le prix du produit dérivé est la valeur financière de ce portefeuille qui est le portefeuille de couverture.

Dans un marché où les taux sont aléatoires, au risque propre du sous-jacent, en général mesuré par sa volatilité, s'ajoute donc le risque de taux. Comment dans ce contexte, calculer le prix de certains produits et les couvrir ?

Dans le cas des options sur taux, le risque spécifique est directement lié au risque de taux.

Dans ce contexte, peut-on encore calculer les prix d'options du type cap et floor et autres produits dérivés, avec des formules de type Black et Scholes.?

L'évaluation et la couverture des produits de taux d'intérêt reposent qu'il s'agisse d'obligations, d'obligations à taux variable, de Swaps, ou de Caps ou de Floors sur la même méthodologie

- modéliser les flux aléatoires ou non attendus et leurs dates de paiement
- évaluer l'équivalent certain, (ou contrat forward) vu d'aujourd'hui, de ces flux .

## 4.3 Identification de l'échéancier

### 4.3.1 Quelques exemples d'échéanciers

#### Obligation taux fixe

Soit une obligation de taux de coupon  $C$ , annuel, de nominal  $100F$  et de maturité  $T = t + N$ . Les flux sont de la forme  $(C, T_i)$  pour  $i = 1.....N - 1$  et  $(100 + C), T_N$  à l'échéance

**Exemple 4.3.1.** Considérons l'OAT 10024, d'échéance le 21 Janvier 2005, de taux de coupon 9,7%. A la date du 21 Janvier 1995 l'échéancier est le suivant :

$$T_i = 21/01/1995 + i, C_i = 9,7, T_N = 21/01/2005, C_N = 100 + 9,7$$

A la date du 30 Mars 1995, l'échéancier est le même. En particulier il n'est pas intégré dans cette représentation, la variation du coupon couru.

### Obligation à taux variable

Soit une obligation référencée sur un taux de marché noté  $TM$  qui peut être le TAM, le T4M, ou le TME par exemple, de nominal  $100F$  et de maturité  $T = t + N$ .

Si les taux sont postcomptés les flux sont de la forme  $(TM(T_i), T_i)$  pour  $i = 1, \dots, (N - 1)$  et  $(100 + TM(T_N)), T_N$  à l'échéance.

Si les taux sont précomptés, les flux ont la même forme, mais mettent en jeu des taux de la forme  $(TM(T_i - d), T_i)$ , où  $d$  est la fraction d'année qui mesure l'écart entre le moment où le taux est connu et celui où il est payé.

Les Swaps CMS rentrent dans cette catégorie.

**Exemple 4.3.2.** L'obligation à taux variable référencée sur le TME a comme échéance le 31 Mars 2000. Les coupons annuels sont référencés sur le TME de la date de paiement. Le TME étant un taux long, il y a dans ce cadre un grand décalage entre la maturité des taux et l'espacement des paiements. Nous verrons que ceci induit un risque réel.

### Swaps

Dans la description de l'échéancier d'un Swap, on distingue la branche variable, qui correspond à des paiements régulièrement espacés (par exemple tous les trois mois) d'une fraction (égale à nombre de jours du mois/360) du taux variable de référence, (par exemple le taux Euribor 3 Mois), constaté à la date de paiement précédente. En d'autres termes, le paiement en  $T_{i+1} = T_i + \delta$  est le taux  $\delta L(T_i, \delta)$ .

La branche fixe consiste au paiement aux mêmes dates du taux fixe, ou taux de Swap,  $T^{Swap}$  qui est fixé dans le contrat.

L'échéancier est donc de la forme  $(\delta L(T_i, \delta) - T^{SW}, T_{i+1})$ , pour des indices  $i=1,\dots,N$ , et des dates  $T_i = T_0 + i\delta$ .

Noter que par un artifice, on peut toujours rajouter 100FF à la branche variable, à l'échéance du Swap et 100FF à la branche fixe à la même date et que cela n'a pas d'importance si la courbe d'actualisation est la même. Le Swap ressemble alors à une obligation à taux variable.

## Option d'achat sur obligation

Les caractéristiques de l'option sont son échéance  $T_C$  et son prix d'exercice  $K$ , celles de l'obligation sont sa maturité  $T > T_C$ , et les coupons  $C_i$  payés après la maturité de l'option aux dates :

$$T_{O_C} = T_C < T_1 < T_2 < \dots < T_N = T$$

Nous notons  $O_t$  la valeur financière en  $t$  de cette obligation.

Les flux attendus dépendent du fait qu'il y a exercice ou non en  $T_C$ .

Désignons par  $\mathcal{E}$  l'événement aléatoire : il y a exercice à la date  $T_C$ ,

$$\mathcal{E} = \{O_{T_C} \geq K\}$$

Les flux aléatoires associés à cette option peuvent être décrits de deux manières :

- Lors de l'exercice, le titre est livré. Les flux attendus sont alors de : 0 si  $\mathcal{E}$  n'est pas réalisé et sur  $\mathcal{E}$  de la forme,  $(-K, T_C)$  et  $(C_i, T_i) i = 1 \dots n$
- Le titre peut aussi être renégocié immédiatement à sa valeur financière, sans coût de transaction et le flux est alors de  $O_{T_C} - K$  sur  $\mathcal{E}$ , 0 ailleurs.

## 4.4 Evaluation forward

La deuxième étape est l'évaluation et la couverture de ces flux, payés dans le futur, et donc à priori soumis au risque de taux.

Lorsque les flux sont connus, comme par exemple dans le cas des obligations, la connaissance des prix des zéro-coupon aujourd'hui suffit à déterminer sous l'hypothèse d'AOA la valeur financière de tels titres. En particulier le prix à la date  $t$  d'une obligation est donné par

$$O_t = \sum_{i=1}^N C_i B(t, T_i)$$

Si les flux sont aléatoires, notamment par exemple pour une obligation à taux variable, ou dans la branche variable d'un Swap, il est souhaitable d'obtenir une représentation du prix à la date  $t$  par une relation similaire, ce qui revient à remplacer le flux aléatoire  $(X_i, T_i)$  par un son "équivalent certain" vu de la date  $t$ .

En d'autre terme, cela revient à fixer à la date  $t$  le prix auquel on serait prêt à financer le flux aléatoire  $X_i$  en  $T_i$ . Mais c'est exactement la définition du prix à terme négocié en  $t$ , dont nous noterons le cours  $\Phi_t(X_i, T_i)$ , calculé de manière à donner une valeur financière nulle au contrat à terme à la date  $t$  de négociation. Le prix d'une obligation à flux éventuellement

variable est alors

$$O_t = \sum_{i=1}^N \Phi_t(X_i, T_i) B(t, T_i)$$

#### 4.4.1 Exemples de contrats dont l'évaluation ne demande pas de modèle

##### Contrat forward sur un actif financier

Lorsque  $X_T$  est la valeur en  $T$  d'un actif  $S$ , c'est à dire lorsqu'on écrit un contrat forward sur un actif qui ne paye pas de dividende, nous avons vu que par un petit raisonnement d'arbitrage

$$\boxed{\Phi_t(S_T, T) = \frac{S_t}{B(t, T)}} \quad (4.-2)$$

En particulier, le montant à investir en  $T$  pour se garantir  $1FF$  payé en  $T+\theta$  peut être évalué en  $t$  comme le prix d'un contrat forward sur le zéro-coupon  $B_t(T, T + \theta)$ , soit  $\frac{B(t, T + \theta)}{B(t, T)}$ . Le taux de rendement linéaire de cette opération est le taux forward linéaire  $L_t(T, \theta)$ .

##### Contrat forward sur un taux prédéterminé

Considérons un taux variable précompté de  $h$  intervenant dans les flux d'une obligation à taux variable, ou dans la branche variable d'un Swap.

Si le taux linéaire,  $L(T - h, T)$  est payé en  $T$ , l'équivalent certain de ce taux est le taux linéaire forward entre les dates  $T - h$  et  $T$ .

$$\boxed{\Phi_t(L(T - h, h), T) = L_t(T - h, h)} \quad (4.-2)$$

PREUVE :

En effet, considérons un investisseur qui cherche à se garantir un revenu en  $T$  associé au placement de  $1Euro$  à la date  $T - h$ . Le flux aléatoire garanti est

$$1 + hL(T - h, h))$$

Mais un contrat à terme sur la même opération lui garantit en  $T$  le paiement associé au taux à terme

$$1 + hL_t(T - h, h)$$

Ces deux opérations à terme garantissent le même flux en  $T - h$ , elles ont donc la même valeur aux dates intermédiaires, soit

$$1 + h\Phi_t(L(T - h, h), T) = 1 + hL_t(T - h, h) = \frac{B(t, T - h)}{B(t, T)}$$

En terme de taux d'intérêt, cela s'exprime par

$$\Phi_t(L(T - h, T), T) = L_t(T - h, h)$$

### Calcul du taux de Swap

La branche variable d'un taux de Swap est donc donnée par

$$\begin{aligned} \text{branche variable}_t &= \sum_{i=1}^N B(t, T_i) \delta \Phi_t(L(T_{i-1}, \delta), T) \\ &= \sum_{i=1}^N B(t, T_i) \left[ \frac{B(t, T_{i-1})}{B(t, T_i)} - 1 \right] = B(t, T_0) - B(t, T_N) \end{aligned}$$

Cette remarque jointe au fait que la valeur d'un Swap est nulle au moment de la signature du contrat, conduit à la caractérisation suivante du taux de Swap

$$T_t^{SW}(T_0, T_N) = \frac{B(t, T_0) - B(t, T_N)}{\sum_{i=1}^N B(t, T_i)} \quad (4.-5)$$

### Contrat à terme sur le taux court

Supposons maintenant que le taux de référence payé en  $T$  soit le taux court  $r_T$ , c'est à dire aussi la limite quand  $h$  tend vers 0 de  $L(T - h, T)$ . De même, le taux spot forward  $f(t, T)$  est la limite des taux forwards  $L_t(T - h, T)$ . Ces taux sont donc liés par

$$\boxed{\Phi_t(r_T, T) = f(t, T)} \quad (4.-5)$$

#### 4.4.2 Marché à terme et probabilité forward neutre

Dans le cas général, un flux aléatoire  $X_T$  versé à l'échéance  $T$  est évalué suivant le principe habituel de l'évaluation dégagé dans le Chapitre 4 sous le nom d'évaluation risque-neutre,

comme la valeur moyenne sous la probabilité risque neutre du flux terminal actualisé

$$\Pi_t(X_T) = \mathbb{E}_t[\exp - \left( \int_t^T r_s ds \right) X_T] \quad (4.-5)$$

Il faut donc à priori modéliser les corrélations entre les taux et les flux aléatoires. De même le contrat forward se calcule comme

$$\Phi_t(X_T) = \frac{\Pi_t(X_T)}{B(t, T)} = \frac{\mathbb{E}_t[\exp - \int_t^T r_s ds X_T]}{\mathbb{E}_t[\exp - \int_t^T r_s ds]}$$

Ainsi, de même que le prix s'écrit comme une espérance, de même le contrat forward s'écrit comme une espérance par rapport à la probabilité appelée **forward-neutre** et notée  $\mathbb{Q}_T$ .

$$\Phi_t(X_T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T}[X_T] \quad (4.-6)$$

Dans ce cadre, les instruments de couverture seront naturellement les contrats forwards de la maturité  $T$ .

Nous avons plusieurs manières de caractériser cette probabilité forward :

- En calculant sa densité par rapport à la probabilité risque-neutre , grâce à la comparaison des deux formules d'évaluation (4.4.2) et (4.4.2).

$$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{Q}} = \frac{\exp - \int_0^T r_s ds}{B(0, T)} b$$

L'équation des prix zéro-coupons, jointe à la condition  $B(t,t) = 1$  entraîne que cette densité est une martingale exponentielle, associée au vecteur de volatilité du zéro-coupon de maturité  $T$ .

$$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{Q}} = \exp \int_0^T \Gamma(s, T) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T |\Gamma(s, T)|^2 ds \quad (4.-7)$$

- En écrivant que sous la probabilité  $\mathbb{Q}_T$ , la dynamique des contrats forwards  $\frac{B(t,T+\theta)}{B(t,T)}$  déduites des équations de chapitre précédent a un rendement instantané nul.  
On voit alors facilement que

$$W_t^T = W_t - \int_0^t \Gamma(s, T) ds$$

doit être un  $\mathbb{Q}_T$  mouvement brownien.

La probabilité forward  $\mathbb{Q}_T$  est la probabilité risque-neutre attachée au choix de l'argent de la date  $T$  comme numéraire, dont la valeur en  $t$  est  $B(t, T)$

L'équation d'évaluation montre que tous les contrats forwards ont des prix martingales (locales) par rapport à la probabilité forward. En particulier, la relation (4.4.1) montre que le spot forward est une martingale.

#### 4.4.3 Correction de convexité pour les contrats forwards

Nous avons vu que le contrat forward associé à un taux prédéterminé est le taux forward. Lorsqu'il n'y a pas adéquation entre le période qui sépare les dates de paiement et la maturité du taux, on doit corriger le taux forward pour avoir la valeur du contrat forward, qui jouera un rôle déterminant dans la théorie des options.

##### Les formules générales

L'une des caractéristiques des produits de taux d'intérêt est le fait que le taux payé à une date donnée est souvent connu en avance. Plus généralement, cela revient à considérer un flux aléatoire, connu à la date  $T$ ,  $X_T$ , et payé à une date future  $T + h$ . Dans le cas des taux par exemple, on connaît l'espérance de cette variable sous  $Q_{T+h}$  et on voudrait la connaître sous  $Q_T$ . Plus généralement, on peut être intéressé à connaître la distribution sous  $Q_T$ , connaissant celle sous  $Q_{T+h}$ .

Le résultat général suivant donne une intuition de la nature de la correction. **Evaluation en retard**

Soit  $X_T$  une v.a.  $\mathcal{F}_T$ -mesurable. La valeur du contrat à terme d'échéance  $T$  diffère de celle d'échéance  $T + h$  par :

$$\mathbb{E}_t^{Q_T}[X_T] = \mathbb{E}_t^{Q_{T+h}}[X_T] + \text{cov}_t^{Q_{T+h}}\left(X_T, \frac{hL(T, h)}{1 + hL_t(T, h)}\right)$$

La covariance est une covariance globale et non locale.

Plus généralement, la densité de probabilité de  $Q_T$  par rapport à  $Q_{T+h}$ , sur la tribu  $\mathcal{F}_T$  est donnée par

$$\frac{dQ_T}{dQ_{T+h}} = \frac{1 + hL(T, h)}{1 + hL_t(T, h)}$$

##### Evaluation en avance

Soit  $X_T$  une v.a.  $\mathcal{F}_T$ -mesurable.

$$\mathbb{E}_t^{Q_{T-h}}[X_T] = \mathbb{E}_t^{Q_T}[X_T] + \int_{T-h}^T \text{cov}_t^{Q_s}(X_T, r_s) ds$$

En particulier, le prix d'un contrat future diffère du prix forward par

$$\mathbb{E}_t^Q[X_T] = \mathbb{E}_t^{Q_T}[X_T] + \int_0^T \text{cov}_t^{Q_s}(X_T, r_s) ds$$

PREUVE :

⇒ Par construction des probabilités  $Q_T$  et  $dQ_{T+h}$ , nous avons

$$\mathbb{E}_t^{Q_T}[X_T] = \frac{B(t, T+h)}{B(t, T)} \mathbb{E}_t^{Q_{T+h}}[X_T B(T, T+h)^{-1}] \quad (4.11)$$

$$= \mathbb{E}_t^{Q_{T+h}}\left[X_T \frac{1 + hL(T, h)}{1 + hL_t(T, h)}\right] \quad (4.10)$$

$$= \mathbb{E}_t^{Q_{T+h}}[X_T] + \text{cov}_t^{Q_{T+h}}\left[X_T, \frac{1 + hL(T, h)}{1 + hL_t(T, h)}\right] \quad (4.9)$$

⇒ Si maintenant on s'intéresse à l'évaluation d'un taux connu seulement dans le futur, par rapport à la date de maturité du contrat, c'est à dire à un flux qu'on constatera plus tard Le plus simple est de tout ramener à la probabilité risque neutre en notant que la différence des densités de  $Q_T$  et de  $Q_{T-h}$  peut s'écrire

$$\frac{dQ_T}{d} - \frac{dQ_{T-h}}{d}|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\int_t^{T-h}(r_s - f(t, s))ds} \left( e^{-\int_{T-h}^T(r_u - f(t, u))du} - 1 \right) \quad (4.8)$$

$$= e^{-\int_t^{T-h}(r_s - f(t, s))ds} \left[ - \int_{T-h}^T e^{-\int_s^T(r_u - f(t, u))du} (r_s - f(t, s)) ds \right] \quad (4.7)$$

$$= - \int_{T-h}^T e^{-\int_t^s(r_u - f(t, u))du} (r_s - f(t, s)) ds \quad (4.6)$$

Il suffit de prendre l'espérance de la variable  $X_T$  par rapport à ces deux probabilités, pour obtenir la formule du théorème, en utilisant que l'espérance forward du taux spot est le spot forward.

**Exemple 4.4.1.** Nous considérons le paiement à la date  $T$  d'un taux connu en  $T - h$  et de maturité  $h + \delta$ . Le contrat forward sur le taux associé au paiement en  $T + \delta$  est connu comme le taux forward  $L_t(T - h, h + \delta)$ .

La correction de convexité conduit à

$$\boxed{\mathbb{E}_t^{Q_T}[L(T - h, h + \delta)] = L_t(T_h, h + \delta) + \text{cov}_t^{Q_{T+h}}[L(T - h, h + \delta), \frac{hL(T, h)}{1 + hL_t(T, h)}]}$$

#### 4.4.4 Correction de convexité lorsque les volatilités sont déterministes

##### Hypothèse

Les volatilités des zéro-coupon sont des fonctions déterministes.

Les zéro-coupon sont log-normaux et les taux continus, dont les taux spot forwards sont gaussiens.

Ces propriétés sont conservées sous toutes les probabilités forwards. De plus dans l'évaluation des moments des variables gaussiennes, les structures de variance et covariance ne dépendent pas de la probabilité de référence. Une application immédiate de cette remarque et des résultats ci-dessus est la proposition suivante

##### **Proposition 4.1. Correction des taux continus**

*Sous la probabilité  $Q_T$ , les taux instantanés ont comme espérance :*

$$\mathbb{E}_{Q_T}(R(T, \theta)) = R_0(T, \theta) + \frac{\theta}{2} var(R(T, \theta)) \quad (4.-7)$$

*Sous la probabilité  $Q_{T+h}$ , les taux instantanés ont comme espérance :*

$$\mathbb{E}_{Q_{T+h}}(R(T, \theta)) = \mathbb{E}_{Q_T}(R(T, \theta)) - hcov(R(T, \theta), R(T, h)) \quad (4.-7)$$

# Bibliographie

- [Af.Po] AFTALION.F., PONCET.P (1991): *Les futures sur taux d'intérêt : le MATIF* PUF
- [As.Fi] ASSOCIÉS EN FINANCE (1985) *Les options sur actions* PUF
- [CH.DE] CHABARDES.P., DELCAUX.F. (1996) *Les produits dérivés* Les Carrés, Gualino éditeur
- [Ch.Lo.] CHESNEY.M., LOUBERGÉ.H.(1992), *Les options de change*, PUF Paris
- [Co.Ru.] COX.J., RUBINSTEIN.M.(1985), *Options Markets*, Englewood Cliffs, New Jersey : Prentice-Hall.
- [Da.JP] DANA.R.A..JEANBLANC-PICQUÉ.M.(1994) *Marchés Financiers en temps continu : valorisation et équilibre* Economica
- [De.Ro] DEMANGE.G..ROCHET.J.C.(1992) *Méthodes mathématiques de la Finance* Econométrica
- [Doth] DOTHON.M.(1990) *Prices in Financial Markets* Oxford University Press N.Y.
- [Duff1] DUFFIE.D.(1988), *Security Markets : Stochastic Models*, Boston : Academic Press.
- [Duff2] DUFFIE.D.(1992), *Dynamic Asset Pricing Theory* Princeton University Press.
- [Duff3] DUFFIE.D.(1994), *Modèles dynamiques d'évaluation* Collection Finance PUF.
- [Ja.Ru] JARROW.R.A AND RUDD.A.(1983) *Option pricing* Irving
- [Ka.Sh] KARATZAS.I. AND SHREVE.S.(1988) *Brownian motion and stochastic calculus*. Springer Verlag. New York.
- [Karl] KARLIN.S(1981) *A second course in Stochastic Processes*. Academic Press
- [La.La] LAMBERTON.D..LAPEYRE.B. (1991), *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*. Mathématiques et Applications. Ellipses. Paris
- [Mert] MERTON.R.(1991), *Continuous time finance*, Basil Blackwell.

- [Mull] MULLER.S. (1987), *Arbitrage pricing of contingent claims* Lecture Notes in Economics and Mathematical systems. Springer Verlag n-254
- [Okse] OKSENDAL.B. (1985), *Stochastic differential equations*. Springer- Verlag.
- [Po.P.H.] PONCET.P, PORTAIT.R.HAYAT.S.(1993), *Mathématiques financières : Evaluation des actifs et analyse du risque*.Gestion+ .Précis Dalloz Paris
- [Quit] QUITTARD-PINON.F. (1993), *Marché des capitaux et Théorie Financière*. Gestion.Economica
- [Wilm] WILMOTT.P. (1998), *DERIVATIVES, The Theory and Practice of Financial Engineering*. John Wiley& Sons

### Articles

- [Bach] BACHELIER.L.(1900) "Théorie de la spéculation" Ann.Sci.Ecole Norm.Sup.**17**,pp.21-86.
- [Bens] BENSOUSSAN.A.(1984), "On the theory of option pricing", *Acta Applicandae Mathematicae***2**, pp.139-158.
- [Bl.Sc] BLACK F.AND SCHOLES M.(1973),"The pricing of Options and Corporate Liabilities",*Journal of Political Economy* **3**, pp.637-654.
- [Br.Sch] BRENNAN.J., E.SCHWARTZ.E.S.(1979),"A continuous Time Approach to the pricing of bonds" , *Journal of Banking and Finance*, **3**,n-2, Juil 79 pp 133-155
- [C.I.R 1] Cox.J., INGERSOLL.J. ET Ross.S (1985), "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*,**53**, pp.363-384.
- [C.I.R 2] Cox.J., INGERSOLL.J. ET Ross.S (1985), "An Intertemporal General Equilibrium Model of Asset Prices", *Econometrica*,**53**, pp.385-407.
- [C.R.R] Cox.J., Ross.S. RUBINSTEIN.M.(1979),"Option pricing. A simplified approach," *J. Fin. Econ.*bf 7, pp.229-263.
- [De.Er.Ka] DERMAR.E., ERGENER.D., &KANI(1994),"Riding on a smile", *Risk magazine* **7**(2). pp. 32-39.
- [Dudl] DUDLEY.R.M.(1977),"Wiener functionals as Itô integrals", *Ann. Probability* **5**. pp. 140-141.
- [Duff3] DUFFIE.D.(1988), "An extension of the Black-Scholes Model of Security Valuation", *Journal of Economic Theory*, Vol.46, n.1.
- [Du.Ka] DUFFIE.D.KAN.R(1993), "A Yield-Factor Model of Interest Rates ",*Journal of Finance*, à paraître

- [Dupi] DUPIRE.B.(1993), "Pricing with a smile ", *Risk magazine* 7. pp. 18-20.
- [Eins] EINSTEIN A.(1905), "On the movement of small particles suspended in a stationary liquid demanded by the molecular-kinetic theory of heat." *Ann. Physik*,
- [EK.Ge] EL KAROUI.N.GEMAN.H.(1992) "Probabilistic Approach for the Valuation of floating-rate notes with applications to Swaps" *Advances in Options and Futures 1994*
- [EK.GE] EL KAROUI.N. GEMAN.H. ROCHE J.C.(1992) "Change of Numéraire, Change of Probability and options " *AFFI Congrès de Paris 1992- à paraître*
- [Ek.M.W.] EL KAROUI.N MYNENI.R. AND WISVANATHAN.R.(1992) "Arbitrage Pricing and Hedging of Interest Rate Claim with State Variable : I Theory II Applications *AFFI Congrès de Louvain 1991- AFFI Congrès de Paris 1992 Working paper, Sept 1990-Sept 1992, Laboratoire de Probabilités Paris VI*)
- [Ek.R] EL KAROUI.N.. ROCHE J.C.(1989) A pricing formula for options on coupon bonds, SEEDS working paper 72,1989.
- [Ek.Sa] EL KAROUI.N, SAADA D.(1991) The Ho et Lee Model revisited. Working paper, Sept 1991-Juil 1992 Laboratoire de probabilités Paris VI et AFFI 1992:
- [Fo.Sc1] FÖLLMER H., SCHWEITZER.M.(1990) "Hedging of Contingent Claims under Incomplete Information" Working paper 1990
- [Fo.Sc2] FÖLLMER H., SCHWEITZER.M.1993) "A Microeconomic Approach to Diffusion Models for stock Prices" *Mathematical finance* 3-1 pp 1-23
- [Fo.So] FÖLLMER.H. SONDERMANN.D.(1986), "Hedging of non redundant contingent claims" *Contributions to mathematical economics. In Honor of Gérard Debreu*. Hildenbrand. Mas-Colell editors. North-Holland.
- [Ge.Yo] GEMAN.H.YOR.M.(1992) "Options asiatiques et fonctions confluentes géométriques", *C.R.A.S.314* Série 1,
- [Ge.Yo] GEMAN.H. .YOR.M.1992) "Asiatic options and Bessel processes" *Mathematical Finance* 1994
- [Ha.Kr] HARRISON.M.AND KREPS.D.(1979), "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory*, 20, pp. 381-408.
- [Ha.Pl1] HARISSON.J.AND PLISKA.S.P (1981) "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading." *Stochastic Processes and their Applications*, 11,pp.215-260.

- [Ha.Pl2] HARISSON.J.AND PLISKA.S.P(1981) "A stochastic calculus model of continuous trading : Complete markets". *Stochastic Processes and their Applications*, **15**,pp.313-316.
- [H.J.M.] HEATH.D. JARROW.A..MORTON.A (1987-92) "Bond pricing and the term structure of interest rate : a new methodology" *Econometrica*. 1992.
- [Ho.Le] HO.T. AND LEE.S.(1986) "Term structure Movements and pricing Interest rate Contingents Claims" *Journal of Finance***41**,pp.1011-1029
- [Hu.Wh] HULL.J. WHITE.A.(1990), "Pricing Interest Rate Derivate securities", *The Review of Financial Studies***3**n.4 pp;573-592
- [Jams] JAMSHIDIAN. F.(1990),"Bond and Option Evaluation in the Gaussian Interest rate Model" *Res.Finance*,**9**, pp.131-170
- [Kara 1] KARATZAS. I.(1988),"On the pricing of American options," *Appl. Math. Optimization*,**17**, pp. 37-60.
- [Mert 2] MERTON.R.(1973), "Theory of Rational Option Pricing",*Bell Journal of Economics and Management Science*, **4**, pp.141-183.
- [Plis] PLISKA.S. (1986), "A stochastic calculus model of continuous trading: optimal portfolios, *Math. of operations research*. **11**, n.2, pp.371-382.
- [Sc.Sc] SCHAEFFER.S.M.,SCHWARTZ.E.S. (1990): "A two-factor of the term structure : An approximate analytical solution" *JFQA***19** n-1, mars 1990. pp 413-424.
- [Stri] STRICKER.C. (1989),"Arbitrage et lois de martingale". *Annales I.H.P.*, **26**, n-3, pp. 451-460.
- [Vasi] VASICEK.O.(1977) : An equilibrium Charactérisation of the term of structure *Journal of financial Economics***5**, 1977, pp177-188.
- [Wi.Ta] WILLINGER.W.,TAQQU.M.1991) "Towards a convergence theory for continuous stochastic securities market models" *Mathematical Finance*, **1**, pp 55-99.