

## TD 3 Maths Actuarielles

*de 40 ans.*

**Exercice 1** Une personne souscrit un contrat d'assurance vie comportant les garanties suivantes :

- En cas de décès avant 65 ans, le paiement immédiat d'un capital de 5000€
- En cas de vie à 65 ans, le paiement d'un capital de 10000€

Le contrat prévoit des primes payables annuellement par anticipation pendant les 20 premières années. Ces primes sont de montant  $P$  durant les 10 premières années, de montant  $1,5P$  à partir de la 11ème année. Le tarif est calculé sur les bases techniques suivantes :

- Pas de chargement
  - Taux d'intérêt technique et table de mortalité : voir tableau ci-dessous
- Calculer :

1. La prime unique du contrat
2. La prime annuelle  $P$  des 10 premières années
3. La réserve mathématique pure à la fin de la 5ème année

Données : Commutations dans la table à 4,75%

$x$	$D_x$	$N_x$	$\bar{M}_x$
40	147349	2432717	37905
45	114590	1764397	35394
50	88268	1246350	32947
60	49478	551011	25067
65	35069	333532	20413 height

**Exercice 2** Une personne de 40 ans souscrit une assurance vie garantissant les prestations suivantes :

- Le paiement d'un capital de 400000€ en cas de décès de l'assuré avant 55 ans
- Le paiement d'un capital de 200000€ en cas de décès de l'assuré après 55 ans
- Une rente viagère de 30000€ par an payable par douzièmes mensuellement à terme échu et prenant cours au 65ème anniversaire de l'assuré s'il atteint cet âge

Le contrat prévoit des primes constantes payables trimestriellement par anticipation pendant 25 ans. Le tarif est calculé sur les bases techniques suivantes :

- Taux d'intérêt technique : 3,75%

- Table mortalité : Voir ci-dessous

- Chargements :

\* Inventaire

- 100€ pour chacune des 25 premières années (valeur début d'année)

- Chargement sur le taux d'intérêt instantané de 0,15%

- Chargement de 2% sur tous les arrérages de rente

\* Acquisition : 3% sur la prime unique de réduction

\* Encasement : 5% de la prime payée

Sur la base des données ci-dessous, calculer :

1. Le taux d'intérêt technique en inventaire
2. Les primes uniques d'inventaire et de réduction du contrat
3. Les primes annuelles d'inventaire, de réduction et commerciale

Données : Commutations calculées au taux technique d'inventaire

$x$	$D_x$	$N_x$	$\bar{M}_x$
40	229646	4372986	79305
45	188776	3309085	75279
50	153707	2437404	70368
50	123211	1731472	64259
60	96267	1170552	56644
65	72125	738515	47329 height

**Exercice 3** Deux personnes âgées de 60 et 70 ans ont des durées de survie indépendantes. Etant donné que  ${}_10p_{60}$  et  ${}_10p_{70}$ , calculer la probabilité :

$$=0,91 \quad =0,83$$

1. Les deux soient toujours en vie dans 10 ans
2. Au moins une des deux personnes soit en vie dans 10 ans
3. Exactement une des deux personnes soit en vie dans 10 ans
4. Au moins une des deux personnes décède dans un délai de 10 ans
5. Les deux personnes décèdent dans un délai de 10 ans

**Exercice 4** Deux personnes âgées de 60 et 70 ans ont des durées de survie indépendantes. Pour les contrats suivants, exprimez la prime pure en termes de notations actuarielles et somme de flux futurs :

$$20000 \bar{a}_{60,70} = 20000 \sum_{k=1}^{\infty} k p_{60,70} v^k$$

1. Une rente viagère de 20000€ par an, payable à terme échu aussi longtemps qu'une des deux personnes est en vie
2. Une rente de 30000€ par an, payable annuellement par anticipation pour au plus 10 ans, à condition que les deux personnes soient en vie

$$\begin{aligned} 30000 \ddot{a}_{60,70:10} &= 30000 \sum_{k=0}^{9} k p_{60,70} v^k \\ &= 30000 (\ddot{a}_{60,70} - {}_{10}\bar{E}_{60,70} \ddot{a}_{70,80}) \end{aligned}$$

## Exercice 1:

© Théo Jalabert



1) La prime unique du contrat s'écrit :

$$\begin{aligned}
 PU &= \bar{A}_{40:25}^1 \times 5000 + {}_25 E_{40} \times 10000 \\
 &= \left( \frac{\bar{M}_{40} - \bar{M}_{65}}{D_{40}} \right) \times 5000 + \frac{D_{65}}{D_{40}} \times 10000 \\
 &= 2973,5526
 \end{aligned}$$

2) On sait que pour la prime annuelle  $P$  des 10 premières années, on a :

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{PU}{\ddot{a}_{40:10} + 1,5 \cdot {}_{10}E_{40} \ddot{a}_{50:10}} \\
 &= PU \left( \frac{N_{40} - N_{50}}{D_{40}} + 1,5 \cdot \frac{D_{50}}{D_{40}} \cdot \frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} \right)^{-1} \\
 &= 136,5349
 \end{aligned}$$

3) Afin de calculer la réserve mathématique pure à la fin de la 5<sup>ème</sup> année, nous devons calculer la différence entre la valeur actuelle des engagements futurs et des primes futures, à condition que l'assuré soit toujours vivant dans 5 ans.

$$\begin{aligned}
 \Rightarrow {}_5 V_{40} &= \bar{A}_{45:20}^1 \times 5000 + {}_{20}E_{45} \times 10000 - P(\ddot{a}_{45:5} + 1,5 \cdot {}_{5}E_{45} \ddot{a}_{50:10}) \\
 &= \left( \frac{\bar{M}_{45} - \bar{M}_{65}}{D_{45}} \right) \times 5000 + \frac{D_{65}}{D_{45}} \times 10000 - P \left( \frac{N_{45} - N_{50}}{D_{45}} + 1,5 \times \frac{D_{50}}{D_{40}} \times \frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}} \right) \\
 &= 1036,680
 \end{aligned}$$

**Exercice 2** Une personne de 40 ans souscrit une assurance vie garantissant les prestations suivantes :

- Le paiement d'un capital de 400000€ en cas de décès de l'assuré avant 55 ans
- Le paiement d'un capital de 200000€ en cas de décès de l'assuré après 55 ans
- Une rente viagère de 30000€ par an payable par douzièmes mensuellement à terme échu et prenant cours au 65<sup>ème</sup> anniversaire de l'assuré si l'atteint cet âge

Le contrat prévoit des primes constantes payables trimestriellement par anticipation pendant 25 ans. Le tarif est calculé sur les bases techniques suivantes :

- Taux d'intérêt technique : 3,75%

Table mortalité : Voir ci-dessous

Chargements :

- \* Inventaire
- 100€ pour chacune des 25 premières années (valeur début d'année)
- Chargement sur le taux d'intérêt instantané de 0,15%
- Chargement de 2% sur tous les arrêts de rente
- \* Acquisition : 3% sur la prime unique de réduction
- \* Encasement : 5% de la prime payée

Sur la base des données ci-dessous, calculer :

1. Le taux d'intérêt technique en inventaire
2. Les primes uniques d'inventaire et de réduction du contrat
3. Les primes annuelles d'inventaire, de réduction et commerciale

Données : Commutations calculées au taux technique d'inventaire

x	D <sub>x</sub>	N <sub>x</sub>	M <sub>x</sub>
40	229646	4372986	79305
45	188776	3309085	75279
50	153707	2437404	70368
50	123211	1731472	64259
60	96267	1170552	56644
65	72125	738515	47329 height

Exercice 2:

$$1) i^* = e^{\frac{\ln(1+0,0375) - 0,0015}{-1}} \\ = 0,035945 = 3,5945\%$$

$$2) a_{65}^{(12)} = \frac{N_{65}}{D_{65}} - \frac{13}{24} = 9,69771$$

Calculons la prime unique d'inventaire :

$$\begin{aligned} PU' &= 200000 \left( \bar{A}_{40:55}^1 + \bar{A}_{40} \right) + (1+2\%) \times 30000 \times {}_{25}E_{40} \times a_{65}^{(12)} + 100 \ddot{a}_{40:25} \\ &= 200000 \left( \frac{\bar{M}_{40} - \bar{M}_{55}}{D_{40}} - \frac{\bar{M}_{40}}{D_{40}} \right) + 1,02 \times 30000 \times \frac{D_{65}}{D_{40}} \times a_{65}^{(12)} + 100 \frac{N_{40} - N_{65}}{D_{40}} \\ &= 176953,8 \end{aligned}$$

Puis  $\widehat{PU}$  la prime unique de réduction se calcule comme  $\widehat{PU} = \frac{PU'}{(1-3\%)}$

$$\Rightarrow \widehat{PU} = 182426,5979$$

3) Pour le calcul des primes annuelles, on calcule le facteur de remboursement correspondant :

$$\ddot{a}_{40:25}^{(4)} = \frac{N_{40} - N_{65}}{D_{40}} - \frac{3}{8} \left( 1 - \frac{D_{65}}{D_{40}} \right) = 15,56918$$

On a donc :

$$PA' = \frac{PU'}{\ddot{a}_{40:25}^{(4)}} = 11365,6467 \leftarrow \text{prime annuelle d'inventaire.}$$

$$\widehat{PA} = \frac{PA'}{(1-3\%)} = 11717,1615 \leftarrow \text{prime annuelle de réduction}$$

$$PA'' = \frac{\widehat{PA}}{(1-5\%)} = 12333,85 \leftarrow \text{prime annuelle commerciale.}$$

**Exercice 3** Deux personnes âgées de 60 et 70 ans ont des durées de survie indépendantes. Etant donné que  ${}_10p_{60}$  et  ${}_10p_{70}$ , calculer la probabilité :

1. Les deux soient toujours en vie dans 10 ans
2. Au moins une des deux personnes soit en vie dans 10 ans
3. Exactement une des deux personnes soit en vie dans 10 ans
4. Au moins une des deux personnes décède dans un délai de 10 ans
5. Les deux personnes décèdent dans un délai de 10 ans

Exercice 3:  $\underline{10P_{60} = 0,94}$   $\underline{10P_{70} = 0,83}$

© Théo Jalabert



1)  $10P_{60;70} = 10P_{60} \times 10P_{70} = 0,94 \times 0,83 = 0,7802$ .

2)  $10\bar{P}_{60;70} = 10P_{60} + 10P_{70} - 10P_{60;70} = 0,94 + 0,83 - 0,7802$   
 $= 0,9898$

3)  $P = 10P_{60} \times 10q_{70} + 10q_{60} \times 10P_{70} = 0,94 \times 0,17 + 0,06 \times 0,83$   
 $= 0,2096$

4)  $P' = P + 10q_{60} \times 10q_{70} = 0,2096 + 0,0102$   
 $= 0,2198$

5)  $P'' = 10q_{60} \times 10q_{70} = 0,0102$

Exercice 4:

a) La prime pure de la rente est :

$$20000 \sum_{r=1}^{\infty} v^r (rP_{60} + rP_{70} - rP_{60;70}) = 20000 (a_{60} + a_{70} - a_{60;70}) \\ = 20000 a_{\overline{60};70}$$

b) La prime pure de la rente est :

$$30000 \sum_{r=0}^9 v^r rP_{60;70} = 30000 \ddot{a}_{60;70;10}$$