



# Cours 7 "Processus stochastiques et produits dérivés"

[emmanuel.gobet@polytechnique.edu](mailto:emmanuel.gobet@polytechnique.edu)

PLAN DU COURS

## Ch. V Marchés internationaux

1. Arbitrage entre marchés étrangers et domestiques
2. Quelques formules de valorisation
3. Diff swap forward



## Chapitre 5. Marché de change, options quanto

Produits multi-devises : dollar-euro, dollar-yen ...

Plusieurs types de contrat : le sous-jacent est un actif étranger, mais le payoff peut-être en monnaie étrangère ou domestique.

Conventions :

- l'indice  $f$  se réfère à des variables dans le marché étranger (foreign),
- l'indice  $d$  se réfère à des variables dans le marché domestique,
- $X_t$  = le taux de change *foreign-domestic* à la date  $t$  = le nombre d'unités monétaires domestic pour avoir une unité monétaire foreign.

Ex : change Dollar-Euro  $1\$ = X_t \text{€}$ .

Attention :  $X_t$  n'est pas lui-même un actif.



## 5.1. Arbitrage entre marchés étrangers et domestiques

**Proposition.** La valorisation entre marchés étrangers et domestiques d'un flux  $\Psi_T$  en  $T$  en monnaie  $f$  obéit à la règle :

$$X_t C_t^f(\Psi_T, T) = C_t^d(X_T \Psi_T, T).$$

**Proposition (Drift de  $X$ ).** Supposons que chaque marché est d'Itô et en AOA. Il existe un processus vecteur de volatilité  $(\sigma_t^X)_t$  tel que

$$\frac{dX_t}{X_t} = (r_t^d - r_t^f)dt + \sigma_t^X dW_t^d,$$

où  $W_t^d = \widehat{W}_t + \int_0^t \lambda_s^d ds$  est le MB sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}^d$  du marché domestique (dont la prime de risque est  $\lambda_s^d$ ).

**Proposition (lien entre primes de risque  $d$  et  $f$ , et MB risque-neutre).**

$$\lambda_t^d = \lambda_t^f + (\sigma_t^X)^\top,$$

$$W_t^d = W_t^f + \int_0^t (\sigma_s^X)^\top ds.$$



## 5.2. Quelques formules de valorisation

**Exemple (Call sur actif étranger  $S^f$  avec strike en monnaie étrangère).**

Payoff :  $(S_T^f - K^f)_+$ .

Valorisation standard (sans pb de change).

**Exemple (Call sur actif étranger  $S^f$  avec strike en monnaie domestique).**

Payoff :  $(X_T S_T^f - K^d)_+$ .

Valorisation dans le marché domestique : prix comptant  $C_t^d((X_T S_T^f - K^d)_+, T)$

Dynamique RN :  $\frac{d(X_t S_t^f)}{X_t S_t^f} = r_t^d dt + (\sigma_t^X + \sigma_t^S) dW_t^d$ .

**Proposition.** Si  $r_t^d$  aléatoire mais  $\sigma_t^X + \sigma_t^S - \Gamma^d(t, T)$  déterministe, formule de Black avec achat de  $\mathcal{N}(d_1(\dots))$  actifs domestiques  $X_t S_t^f$  (actif étranger payé en monnaie domestique) et vente de  $K^d \mathcal{N}(d_0(\dots))$  zéro-coupons domestiques  $B^d(t, T)$ .



## Exemple (Call sur taux de change $X$ ).

Payoff :  $(X_T - K)_+$ .

Se ramène au cas précédent en prenant  $S_t^f = B^f(t, T)$  le zéro-coupon étranger d'échéance  $T$  car

$$(X_T - K)_+ = (X_T S_T^f - K)_+.$$

Formule de Garman-Kolhagen'83 étendu au taux d'intérêt aléatoire.

## 5.3 Diff swap forward

Swap entre Libor 3 mois Yen et Euro payé en Dollar.

Payoff en  $T_k$  :

$$\Psi_{T_k} = \delta(L^Y(T_{k-1}, \delta) - L^\epsilon(T_{k-1}, \delta))\$.$$

Calcul de prix explicite dans le cadre de vol déterministe