POLLACZECK-KINCHINE

TDs Thérorie de la ruine – 2023
Romain Gauchon

1. **Démonstration de la formule de Pollaczeck-Kinchine**

Modélisons une compagnie d'assurance de la manière suivante: la compagnie d'assurance démarre son activité avec un montant de réserve u. Elle collecte des primes à un rythme c. En contrepartie, cette compagnie d'assurance va devoir rembourser des sinistres. Ces sinistres arrivent de manière aléatoire suivant un processus de poisson $N(t)$ de paramètre λ. Les sinistres, notés X_i sont supposés iid et de montant moyen μ.

On peut alors regarder l'évolution des réserves: les réserves à la date t sont représentées par le processus $R_t = u + ct - \sum_{i=0}^{N(t)} X_i$.

On s'intéresse ici à la probabilité qu'un jour notre compagnie d'assurance soit ruinée, c'est à dire que ses réserves passent sous 0. On note $\varphi(u) = 1 - \mathbb{P}(\inf_{t \geqslant 0} R_t < 0 | R_0 = u)$. Il est possible de montrer que si $1 - \frac{\lambda\mu}{c} \leqslant 0$, alors la ruine est certaine : $\varphi(u) = 0$. On suppose donc que $1 - \frac{\lambda\mu}{c} > 0$.

(a) En s'intéressant à l'intervalle $[0, dt]$ puis en faisant tendre dt vers 0, Montrer que

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)dF_X(x).$$

(b) En intégrant l'équation précédente, montrer que

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)(1-F_X(x))dx.$$

(c) En déduire une expression simple pour $\varphi(0)$.

(d) On note φ_{LS} la transformée de Laplace Stieltjes de φ ($\varphi_{LS}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su} d\varphi(u)$) et φ_L la transformée de Laplace de φ ($\varphi_L(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su}\varphi(u)du$). Montrer que

$$\varphi_{LS}(s) = s\varphi_L(s).$$

(e) On note $F_e(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^u (1 - F_X(t)dt)$. Montrer que

$$\varphi_L(s) = \frac{1 - \frac{\lambda\mu}{c}}{s} + \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)\varphi_L(s).$$

(f) Montrer que

$$\boldsymbol{\varphi}(u) = \boldsymbol{\varphi}(0)\sum_{n=0}^{\infty}(1-\boldsymbol{\varphi}(0))^n F_e^{*n}(u).$$

1- Démonstration de la formule de Pollaczeck-Kinchine

a) En s'intéressant à l'intervalle $[0, dt]$ puis lorsque $dt \to 0$.
Montrer que $\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\, dF_X(x)$

$$\varphi(u) = \varphi(u+cdt)\underbrace{(1-\lambda dt)}_{P(N_{dt}=0)} + \underbrace{\lambda dt}_{P(N_{dt}=1)}\int_0^{u+cdt}\varphi(u+cdt-x)\, dF_X(x) + O(dt)$$

Prop de processus de poisson homogène
$P(N_{dt}=0) = 1-\lambda dt + O(dt)$
$P(N_{dt}=1) = \lambda dt + O(dt)$

$$\Rightarrow \frac{\varphi(u) - \varphi(u+cdt)}{cdt} = -\frac{\lambda}{c}\varphi(u+cdt) + \frac{\lambda}{c}\int_0^{u+cdt}\varphi(u+cdt-x)\, dF_X(x) + \frac{O(dt)}{cdt}$$

$$\Rightarrow -\varphi'(u) = \lim_{dt\to 0} -\frac{\lambda}{c}\varphi(u+cdt) + \frac{\lambda}{c}\int_0^{u+cdt}\varphi(u+cdt-x)\, dF_X(x) + \frac{O(dt)}{cdt}$$

$$\Rightarrow \varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\, dF_X(x)$$

b) En intégrant l'équation précédente, montrer que
$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)(1-F_X(x))\, dx$

$$\underbrace{\int_0^u \varphi'(x)\, dx}_{\varphi(u)-\varphi(0)} = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(y)\, dy - \frac{\lambda}{c}\underbrace{\int_{y=0}^u\left[\int_{x=0}^y \varphi(y-x)\, dF_X(x)\right]dy}_{A}$$

$$A = \int_{x=0}^u\left[\int_{y=x}^u \varphi(y-x)\, dy\right]dF_X(x)$$

$$= \int_{x=0}^u\left[\int_{T=0}^{u-x}\varphi(T)\, dT\right]dF_X(x) = \int_{T=0}^u\left[\int_{T=0}^{u-T}\varphi(T)\, dF_X(x)\right]dT$$

$$= \int_{T=0}^u \varphi(T)\left[\int_{x=0}^{u-T} dF_X(x)\right]dT = \int_{T=0}^u \varphi(T)\left[F_X(x)\right]_0^{u-T}dT$$

$$= \int_{T=0}^u \varphi(T)\, F_X(u-T)\, dT$$

$$\Rightarrow \varphi(u) - \varphi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(y)\, dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(T)\, F_X(u-T)\, dT$$

$$= \frac{\lambda}{c}\int_0^u\left(\varphi(y) - \varphi(y)\, F_X(u-y)\right)dy$$

$$= \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(y)\left[1-F_X(u-y)\right]dy$$

$$= \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\left[1-F_X(x)\right]dx$$

D'où $\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\left[1-F_X(x)\right]dx$

c) En déduire une expression simple pour $\varphi(0)$

$$\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = 1 = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c} \lim_{u\to\infty} \int_0^u \varphi(u-x)\left[1-F_X(x)\right]dx$$

$$\Rightarrow 1 = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c} \lim_{u\to\infty} \int_0^\infty \varphi(u-x)\left[1-F_X(x)\right]dx$$

$$\Rightarrow 1 = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c} \int_0^\infty \left[1-F_X(x)\right]dx$$

$$\Rightarrow \varphi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$$

d) On note φ_{LS} la transformée de Laplace Stieltjes de φ $\left(\varphi_{LS}(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-su}\, d\varphi(u)\right)$ et φ_L la transformée de φ $\left(\varphi_L(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-su}\varphi(u)\,du\right)$. Montrer que :

$$\varphi_{LS}(s) = s\,\varphi_L(s)$$

$$\int_a^b f(u)\,dg(u) = \left[f(u)g(u)\right]_a^b - \int_a^b g(u)\,df(u)$$

Si $f(u) = e^{-su}$ $\quad df(u) = -s\,e^{-su}\,du$

$dg(u) = d\varphi(u)$ $\quad g(u) = \varphi(u)$

$$\varphi_L(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-su}\varphi(u)\,du$$

$$\varphi_{LS}(s) = \int_{-\infty}^\infty e^{-su}\,d\varphi(u)$$

$$= \underbrace{\left[e^{-su}\right]_{-\infty}^\infty}_{0} + s\int_{-\infty}^\infty e^{-su}\varphi(u)\,du \qquad \text{car } \varphi(x) = 0 \ \forall x<0.$$

$$= s\int_{-\infty}^\infty e^{-su}\varphi(u)\,du$$

$$= s\,\varphi_L(s)$$

e) On note $F_e(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^u (1-F_X(t))\,dt$

Montrer que $\varphi_L(s) = \frac{1-\frac{\lambda\mu}{c}}{s} + \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)\,\varphi_L(s)$

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\,dF_e(x)$$

$$\varphi_L(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx}\varphi(0)\,dx + \frac{\lambda\mu}{c}\int_{y=0}^{u}\left[e^{-sy}\int_{x=0}^{y}\varphi(y-x)\,dF_X(x)\right]dy$$

$$= \frac{1}{s}\varphi(0) + \underbrace{\frac{\lambda\mu}{c}\int_{y=0}^{\infty}\left[e^{-sy}\int_{x=0}^{y}\varphi(y-x)\,dF_X(x)\right]dy}_{B}$$

$$B = \frac{\lambda\mu}{c}\int_{y=0}^\infty e^{-sy}\int_{x=0}^y \varphi(y-x)\,dF_X(x)\,dy$$

$$= \frac{\lambda\mu}{c}\int_{x=0}^\infty\int_{y=x}^\infty e^{-sy}\varphi(y-x)\,dy\,dF_X(x)$$

$$= \frac{\lambda\mu}{c}\int_{x=0}^\infty\int_{y=x}^\infty e^{-s(y-x)}e^{-sx}\varphi(y-x)\,dy\,dF_X(x)$$

$$= \frac{\lambda\mu}{c} \int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} \int_{T=0}^{\infty} e^{-sT} \varphi(T)\, dT\, dF_X(x)$$

$$= \frac{\lambda\mu}{c} \left[\int_{x=0}^{\infty} e^{-sx} dF_X(x)\right] \times \left[\int_{T=0}^{\infty} e^{-sT} \varphi(T)\, dT\right]$$

$$= \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)\, \varphi_L(s)$$

D'où $\varphi_L(s) = \frac{\varphi(0)}{s} + \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)\, \varphi_L(s)$

Par c) on a $\varphi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$

$$\Rightarrow \varphi_L(s) = \frac{1 - \frac{\lambda\mu}{c}}{s} + \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)\, \varphi_L(s)$$

f) Montrer que $\varphi(u) = \varphi(0) \sum_{n=0}^{\infty} (1-\varphi(0))^n F_e^{*n}(u)$

Par e) $\varphi_L(s)\left[1 - \frac{\lambda\mu}{c F_{e,LS}(s)}\right] = \frac{\varphi(0)}{s}$

Par d) $\varphi_{LS}(s)\left[1 - \frac{\lambda\mu}{c F_{e,LS}(s)}\right] = \varphi(0)$

$$\Rightarrow \varphi_{LS}(s) = \underbrace{\frac{1}{1 - \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)}}_{\text{On reconnait une série géométrique en } \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)} \varphi(0)$$

$$\Rightarrow \varphi_{LS}(s) = \varphi(0) \times \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)^n F_{e,LS}^{*n}(s)$$

$$= \varphi(0) \times \sum_{n=0}^{\infty} (1-\varphi(0))^n F_{e,LS}^{*n}(u)$$

D'où $\varphi(u) = \varphi(0) \times \sum_{n=0}^{\infty} (1-\varphi(0))^n F_e^{*n}(u)$