Assurance non-vie - Théorie de la crédibilité

Année universitaire 2006-2007 - Première session

23 avril 2007 - Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé.

Exercice n°1

Le tableau suivant reprend le nombre de sinistres causés par 300 assurés pendant la première année d'observation.

Nombre de sinistres	0	1	2	3	4	5
Nombre d'assurés	123	97	49	21	8	2

En supposant que le nombre de sinistres causés par un assuré est distribué selon une loi de Poisson (conditionnelle) dont la moyenne peut être différente selon les assurés, donnez, pour chaque assuré, une estimation de crédibilité du nombre de sinistres qu'il causera durant la prochaine année d'observation.

Exercice n°2

Considérons la famille des distributions géométriques

$$\mathcal{F} = \left\{ f_\theta(x) = (1-\theta)^x \, \theta, x \in \mathbf{N}; \theta \in [0;1] \right\}.$$

Trouvez la famille $\mathcal{U}$ conjuguée à $\mathcal{F}$.

Exercice n°3

Un actuaire doit tarifer un traité de réassurance en excédent de sinistre. Des études statistiques l'ont conduit à modéliser le coût des sinistres de montant supérieur à x_0 par des variables aléatoires de type Pareto

$$F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0.$$

1. En vous fondant sur l'étude du coût moyen par sinistre à la charge du réassureur en fonction du niveau de la priorité, expliquez l'intérêt d'une telle modélisation dans ce contexte.

2. Donnez l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre θ.

3. Montrez que la famille des distributions Gamma est conjuguée à la famille des distributions Pareto

$$\mathcal{F} = \left\{ F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0 \ ; \ \theta > 0 \right\}.$$

Dans la suite, on se place dans le modèle Pareto-Gamma.

4. *A priori* $\Theta \sim \Gamma(\gamma, \beta)$, quelle est la valeur espérée du paramètre si l'on ne dispose par d'observation ?

5. Pour un contrat particulier, on a observé durant la première période un échantillon de n sinistres dépassant le montant x_0. Donnez l'estimateur bayesien de Θ pour ce contrat. Exprimez-le en fonction de l'e.m.v (lorsque l'on ne dispose pas d'information *a priori*) et de l'estimation *a priori* (lorsque l'on ne dispose pas d'observations). Commentez.

Quelques rappels :

- La famille $\mathcal{U}$ est conjuguée à la famille $\mathcal{F}$ si, pour tout $\gamma \in \Gamma$ et pour toute réalisation $\mathbf{x}$ du vecteur des observations $\mathbf{X}$, il existe $\gamma' \in \Gamma$ tel que $U_\gamma(\theta|\mathbf{X} = \mathbf{x}) = U_{\gamma'}(\theta), \quad$ pour tout $\theta \in \Theta$.

- Une variable aléatoire distribuée selon une loi Gamma de paramètre (γ, β) a pour densité $u(\theta) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\theta^{\gamma-1}\exp(-\beta\theta)$.