EXAMEN DE THÉORIE DE LA RUINE

Théorie de la ruine– 2022-2023

Les calculatrices et les documents sont interdits tout au long de l'examen. Si le candidat repère ce qu'il croit être une erreur dans l'énoncé, il en fait la remarque dans sa copie. La rédaction des démonstrations mathématiques est aussi évaluée. Pour les questions d'interprétation, le candidat se doit de justifier son point de vu, que ce soit à l'aide d'arguments mathématiques ou de raisonnements en français.

L'objectif de cet examen est de modéliser et étudier une société d'assurance qui finance des actions de prévention.

Modélisons une compagnie d'assurance de la manière suivante : la compagnie d'assurance démarre son activité en t=0 avec un montant de réserves u. Elle collecte des primes à un rythme $c > 0$ par unité de temps. Elle investie une partie de ses primes $p < c$ en prévention. Elle touche donc un montant total $c - p$ par unité de temps. Cette compagnie d'assurance va devoir rembourser des sinistres. Ces sinistres arrivent de manière aléatoire suivant un processus de Poisson $N_p(t)$ de paramètre $\lambda(p)$. La fonction λ est supposée être une fonction réelle convexe, strictement décroissante et strictement positive. Les sinistres, notés X_i sont supposés iid et de montant moyen μ. Ils sont de plus supposés indépendant de p et de $N_p(t)$.

Les réserves à la date t sont représentées par le processus $R_t = u + (c-p)t - \sum_{i=0}^{N_p(t)} X_i$.

1. **Pourquoi les hypothèses effectuées sur la fonction λ sont-elles acceptables vis à vis de la modélisation de la prévention ?**

2. (a) **Soit $t > 0$. Donner une formule pour l'espérance des réserves $\mathbb{E}(R_t)$.**
   (b) **Trouver le montant de prévention p_e^* qui maximise $\mathbb{E}(R_t)$.**

On s'intéresse désormais à la probabilité qu'un jour cette compagnie d'assurance soit ruinée, c'est à dire que ses réserves deviennent strictement négatives. On note $\varphi(u,p) = 1 - \mathbb{P}(\inf_{t\geqslant 0} R_t < 0 | R_0 = u)$. Il est possible de montrer que si $1 - \frac{\lambda(p)\mu}{c-p} \leqslant 0$, alors la ruine est certaine : $\varphi(u,p) = 0$. On suppose donc que

$$1 - \frac{\lambda(p)\mu}{c-p} > 0. \tag{1}$$

3. **Interpréter cette dernière hypothèse.**

4. **Montrer que la fonction φ vérifie l'équation suivante :** $\varphi'(u,p) = \frac{\lambda(p)}{c-p}\varphi(u,p) - \frac{\lambda(p)}{c-p}\int_0^u \varphi(u-x,p)dF_X(x)$.

Il est possible de montrer que $\varphi(u,p) = \varphi(0,p) + \frac{\lambda(p)}{c-p}\int_0^u \varphi(u-x,p)(1-F_X(x))dx$.

5. **Donner une expression simple pour $\varphi(0,p)$.**

6. **Trouver le montant de prévention p_0^* qui maximise $\varphi(0,p)$.**

On peut montrer que $\varphi(u,p) = \varphi(0,p)\sum_{n=0}^{\infty}(1-\varphi(0,p))^n F_e^{*n}(u)$, avec $F_e(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^u(1 - F_X(t)dt)$ la fonction de répartition d'équilibre de la variable X_e.

7. **Interpréter la formule de $\varphi(u,p)$.**

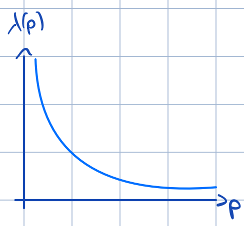
8. **Démontrer que, $\forall u > 0$, p_0^* maximise $\varphi(u,p)$.**

Les gérants d'une société d'assurance peuvent avoir différentes stratégies de gestion : l'un peut chercher à maximiser les profits espérés, quand un autre peut chercher à minimiser le risque de faillite. Le fait que p_0^* soit différent de p_e^* montre que ces stratégies sont concurrentes : il n'est en général pas possible d'à la fois maximiser l'espérance des gains et de minimiser le risque de ruine.

Théorie de la ruine - Annale 2023

1) Hypothèses sur λ à interpréter :

- λ fonct° réelle convexe
- λ strictem^t ↘
- λ strictem^t positive



Pourquoi ces hypothèses sont raisonnables ?

La prévention aura toujour un effet positif (même très faible) à réduire le nombre de sinistres mais jamais néfaste donc $p \mapsto \lambda(p)$ strictement ↘

La prévention totale n'existe pas car sinon il n'y aurait pas d'aléa donc plus de risque : la prévent° n'annule pas le risque d'où $p \mapsto \lambda(p)$ strictem^t positive.

Enfin, la prévention est de moins en moins efficace d'où la convexité

Ex Vaccination : 1er temps : ceux qui viennent naturellem^t

2^e temps : ceux qui sont un peu + réticent vont nécessiter un budget + important et ainsi de suite.

Hypothèse non mentionnée : λ ne dépend pas du temps.

=> L'effet de la prévent° ⫫ du temps.

2)

NB : un processus de Poisson N_t de paramètre λ a une $\mathbb{E}$ égale à λt

ⓐ $$R_t = u + (c-p)t - \sum_{i=0}^{N_p(t)} X_i$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[R_t] = u + (c-p)t - \mathbb{E}[N_t]\,\mathbb{E}[X_i]$$
$$= u + (c-p)t - \lambda(p)t \times \mu$$

ⓑ $$\frac{\partial \mathbb{E}[R_t]}{\partial p} = -t - \frac{\partial \lambda(p)}{\partial p}\mu t = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\partial \lambda(p)}{\partial p} = -\frac{1}{\mu}$$ on a λ ↘ d'où $\frac{\partial \lambda(p)}{\partial p} < 0$

3) On a comme un $\frac{S}{P}$ où S représente $\mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{N_p(t)} X_i\right] = \lambda(p)\mu t$

et P représente $(c-p)t$

d'où $1 > \frac{S}{P}$ veut dire que l'assureur se fait de la marge sur le long terme.

4) On a soit : $\begin{cases} 0 \text{ sinistre} \\ 1 \text{ sinistre} \\ >1 \text{ sinistres mais par le processus de Poisson c'est négligeable} \end{cases}$

$$\varphi(u,p) = \underbrace{(1-\lambda(p)dt)}_{\text{proba 0 sinistre}}\,\varphi(u+(c-p)dt, p) + \underbrace{\lambda(p)dt}_{\text{proba 1 sinistre}} \int_0^{\overbrace{u+(c-p)dt}^{\text{argent gagné en } dt}} \varphi(u+(c-p)dt - \underbrace{x}_{\text{montant du sinistre entre 0 et } u+(c-p)dt}, p)\, dF_X(x) + o(dt)$$

5) Si on fait tendre $u \to \infty$, $\varphi(u,p) \xrightarrow[u\to\infty]{} 1$ et $\int_0^u \varphi(u-x,p)(1-F_X(x))\,dx \xrightarrow[u\to\infty]{} \int_0^\infty (1-F_X(x))\,dx$

D'où $1 = \varphi(0,p) + \frac{\lambda(p)}{c-p} \underbrace{\int_0^\infty 1-F_X(x)\,dx}_{=E[X]=\mu} \Rightarrow \varphi(0,p) = 1 - \frac{\lambda(p)\mu}{c-p}$

6) $$\varphi'(0,p) = \frac{-\lambda'(p)\mu(c-p) - \lambda(p)\mu}{(c-p)^2} \Rightarrow \varphi'(0,p_0^*) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda'(p_0^*)\mu(c-p_0^*) + \lambda(p_0^*)\mu = 0$$

$$\Rightarrow \lambda'(p_0^*)c - \lambda'(p_0^*)p_0^* + \lambda(p_0^*) = 0$$

$$\Rightarrow p_0^* = \frac{\lambda'(p_0^*)c + \lambda(p_0^*)}{\lambda'(p_0^*)} = c + \frac{\lambda(p_0^*)}{\lambda'(p_0^*)}$$

7) Cours + TD

8) N_t^* processus de Poisson de paramètre $\lambda(p_0^*)$

Soit $p \in [0,c[$

$$R_t^* = u + (c-p_0^*)t - \sum_{i=1}^{N_t^*} X_i \qquad \varphi^1 = u + c_1 t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

$$R_t^p = u + (c-p)t - \sum_{i=1}^{N_t^p} X_i \qquad \varphi^2 = u + c_2 t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$$

$$\varphi^1 \leq \varphi^2 \Leftrightarrow c_1 \leq c_2$$

On définit $\tilde{R}_t^p = u + (c-p)\frac{\lambda(p_0^*)}{\lambda(p)} t - \sum_{i=1}^{N_t^*} X_i$

$$P(\exists T \text{ tq } \tilde{R}_T^p < 0 \mid \tilde{R}_0^p = u) = P(\exists T \text{ tq } R_T^p < 0 \mid R_0^p = u)$$

D'où $\varphi(u, p_0^*) \geq \varphi(u,p)$

$$\Leftrightarrow c - p_0^* \geq \frac{\lambda(p_0^*)}{\lambda(p)}(c-p)$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-p_0^*}{\lambda(p_0^*)} \geq \frac{c-p}{\lambda(p)}$$ vrai car p_0^* minimise $\frac{\lambda(p)}{c-p}$ par déf, q5 et q6.

Il est possible de montrer que $\varphi(u,p) = \varphi(0,p) + \frac{\lambda(p)}{c-p}\int_0^u \varphi(u-x,p)(1-F_X(x))dx$.

5. **Donner une expression simple pour $\varphi(0,p)$.**
6. **Trouver le montant de prévention p_0^* qui maximise $\varphi(0,p)$.**

   On peut montrer que $\varphi(u,p) = \varphi(0,p)\sum_{n=0}^{\infty}(1-\varphi(0,p))^n F_e^{*n}(u)$, avec $F_e(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^u(1-F_X(t)dt)$ la fonction de répartition d'équilibre de la variable X_e.

7. **Interpréter la formule de $\varphi(u,p)$.**
8. **Démontrer que, $\forall u > 0,\ p_0^*$ maximise $\varphi(u,p)$.**

   Les gérants d'une société d'assurance peuvent avoir différentes stratégies de gestion : l'un peut chercher à maximiser les profits espérés, quand un autre peut chercher à minimiser le risque de faillite. Le fait que p_0^* soit différent de p_e^* montre que ces stratégies sont concurrentes : il n'est en général pas possible d'à la fois maximiser l'espérance des gains et de minimiser le risque de ruine.