# Master 2 Probabilités et Finance UPMC-X

# "Processus stochastiques et produits dérivés"

## I.d Marché à temps continu log-normal

## Traduction du problème de couverture parfaite de l'option

Le vendeur de l'option doit déterminer un processus de couverture $(\delta(t))_t$ et une richesse initiale $V_0$ tels que

$$\mathbf{dV_t = rV_t dt + \delta(t)(dS_t - rS_t dt)}$$

avec une erreur de couverture nulle

$$\boxed{\epsilon_\mathbf{T} = \mathbf{0} = \mathbf{V_T - h(S_T)},}$$

où

- $h(S_T) = (S_T - K)_+$ dans le cas de la vente d'un Call,
- $h(S_T) = (K - S_T)_+$ dans le cas de la vente d'un Put,
- ou encore $h(S_T) = \mathbf{1}_{S_T > K}$ pour un Call binaire (ou Call digital).

**S'il existe un tel portefeuille de couverture**, l'option et le portefeuille de couverture ont même valeur en $T$ avec probabilité 1. En vertu de l'AOA, leurs valeurs à toute date intermédiaire coïncident. En particulier, **$\mathbf{V_0}$ est la valeur de l'option aujourd'hui (la prime à verser par l'acheteur au vendeur).**

# Résolution par équation aux dérivées partielles

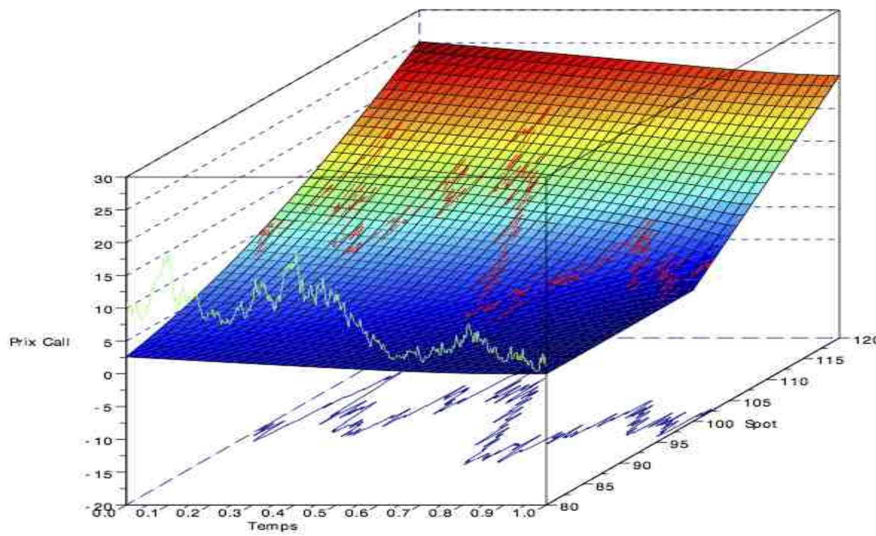
**Théorème.** Soit $h$ une fonction mesurable, à croissance au plus linéaire, pour laquelle l'EDP ci-dessous admet une solution régulière $v(t,x)$ sur $]0,T[\times]0,+\infty[$ :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2\, v''_{xx}(t,x) + r\,x\,v'_x(t,x) + v'_t(t,x) - rv(t,x) = 0, \\ v(T,x) = h(x) \end{cases}$$

Le flux $h(S_T)$ est duplicable par un portefeuille autofinancant, dont la valeur à la date $t$ est $v(t,S_t)$, et celle du portefeuille de couverture $\delta(t,S_t) = v'_x(t,S_t)$.

bien **différencier la fonction prix $v(t,x)$ du processus de prix $v(t,S_t)$.**

**l'EDP ne dépend pas de $\mu$, le rendement du titre !** La stratégie dynamique permet de suivre l'évolution du titre, quelle qu'elle soit (haussière ou baissière).



## Résolution de l'EDP par la formule de Feyman-Kac

Cas général : voir le cours de calcul sto.

**Théorème (Formule de Feynman-Kac).** Considérons une fonction $h$ avec $\sup_{y>0} \frac{|h(y)|}{1+y^p} < +\infty$ pour un $p \geq 0$.

Soit $\sigma > 0$, $T > 0$ et $S$ un $\mathbf{MBG}(\mu, \sigma)$.

La fonction $(\mathbf{t}, \mathbf{S}) \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{S}) = \mathbb{E}[\mathbf{e}^{-\mathbf{r}(\mathbf{T}-\mathbf{t})}\mathbf{h}(\mathbf{S_T})|\mathbf{S_t} = \mathbf{S}]$ est la solution à l'équation aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \mathbf{u}'_\mathbf{t}(\mathbf{t}, \mathbf{S}) + \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}[\sigma\mathbf{S}]^\mathbf{2}\mathbf{u}''_{\mathbf{S},\mathbf{S}}(\mathbf{t}, \mathbf{S}) + \mu\mathbf{S}\mathbf{u}'_\mathbf{S}(\mathbf{t}, \mathbf{S}) - \mathbf{r}\mathbf{u}(\mathbf{t}, \mathbf{S}) = \mathbf{0} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{pour } (t, S) \in ]0, T[\times]0, \infty[, \\ \mathbf{u}(\mathbf{T}, \mathbf{S}) = \mathbf{h}(\mathbf{S}) \quad \text{dans } ]\mathbf{0}, \infty[. \end{cases}$$

## Espérance risque-neutre

**Corollaire.** Soit $(\tilde{S}_t)_t$ un titre fictif de dynamique :

$$\frac{\mathbf{d\tilde{S}_t}}{\mathbf{\tilde{S}_t}} = \mathbf{r}\mathrm{d}\mathbf{t} + \sigma \mathrm{d}\mathbf{W_t},$$

avec $W$ un mouvement brownien sous une probabilité $\mathbb{Q}$. Alors la solution de l'EDP d'évaluation est donnée par

$$\mathbf{v(t,x)} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbf{e^{-r(T-t)}h(\tilde{S}_T)}|\mathbf{\tilde{S}_t = x}\right].$$

## Commentaires sur la fonction prix

— Le **règle de prix reste linéaire** par rapport au payoff $h$, ce qui est satisfaisant vis-à-vis de l'AOA.

— Le titre fictif $\tilde{S}$ n'a aucune réalité financière et ne sert qu'à calculer la fonction prix de l'option.

— Si le titre $S$ avait pour tendance $\mu = r$, alors le prix aujourd'hui de l'option serait $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-rT}h(S_T))$, ce qui se relit comme **"le prix de l'option est la moyenne des flux futurs actualisés"**, ce qui intuitivement raisonnable. Ce cas-là correspondant à un **titre neutre au risque** car sa prime de risque $\frac{\mu-r}{\sigma} = 0$ est nulle.

— Si le titre $S$ a une tendance $\mu \neq r$, alors la règle précédente $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-rT}h(S_T))$ de moyennisation sous la probabilité historique n'est plus valable. On verra qu'il faut remplacer $\mathbb{P}$ par une autre probabilité (dite neutre au risque). Cf arguments dans le modèle binomial.

— Dans le cas $h(x) = (x - K)_+$, on trouve la formule de Black-Scholes.

**Théorème (Black-Scholes Call Formula).** The cash-price at time $t = 0$ of an European Call Option, with payoff $(S - K)^+$ at time $T$, in the Black-Scholes Model, is $\mathrm{Call}^{\mathrm{BS}}(0, T, S_0, K, \sigma, r)$ with

$$C_0((S_T - K)_+, T) = \mathrm{Call}^{\mathrm{BS}}(0, T, S_0, K, \sigma, r) := S_0 \mathcal{N}(d_+) - K e^{-rT} \mathcal{N}(d_-),$$

$$d_\pm = d_\pm(T, S_0 e^{rT}, K) := \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log\left(\frac{S_0 e^{rT}}{K}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T},$$

$$\mathcal{N}(x) := \int_{-\infty}^{x} \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{d}u.$$

**Numerical example** Take $S_0 = 100$ , $r = 2\%$ , $T = \frac{1}{2}$ (6 months) , $\sigma = 25\%$.

| $K$ | $d_+$ | $d_-$ | $S\mathcal{N}(d_+)$ | $Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_-)$ | $C_0((S_T - K)_+, T)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 95 | 0.435 | 0.258 | 66.8 | 56.6 | 10.2 |
| 100 | 0.145 | -0.032 | 55.8 | 48.28 | 7.52 |
| 105 | -0.131 | -0.308 | 44.7 | 39.33 | 5.37 |

**Théorème (Black-Scholes Put Formula).** The price at time 0 of an European Put Option, with payoff $(K - S_T)^+$ at maturity $T$, in the Black-Scholes Model, is $\text{Put}^{\text{BS}}(0, T, S_0, K, \sigma, r)$ with

$$\text{Put}^{\text{BS}}(0, T, S_0, K, \sigma, r) = Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_-) - S_0\mathcal{N}(-d_+), \tag{1}$$

with $d_\pm$ and $\mathcal{N}$ as for Call.

# The Greeks - Partial derivatives

## Delta

**Définition.** Delta $\Delta$ is the sensitivity of the price to the current value of the underlying asset.

**Proposition.** The Delta of Call and Put options are :

$$\Delta^{\mathrm{Call}^{\mathrm{BS}}} = \frac{\partial \mathrm{Call}^{\mathrm{BS}}}{\partial S_0} = \mathcal{N}(d_+) \in [0,1],$$

$$\Delta^{\mathrm{Put}^{\mathrm{BS}}} = \frac{\partial \mathrm{Put}^{\mathrm{BS}}}{\partial S_0} = \mathcal{N}(d_+) - 1 \in [-1,0].$$

**Lemme.** Let $x, y > 0$ and let $d_\pm(x,y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \ln(\frac{x}{y}) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$. Then

$$xe^{-\frac{1}{2}d_+^2(x,y)} = ye^{-\frac{1}{2}d_-^2(x,y)}.$$

**Définition.** Gamma $\Gamma$ is defined as the second derivative of the price relative to the value of the underlying asset or the first derivative of the delta.

**Proposition.** The Gamma of Call and Put options are :

$$\Gamma^{\mathrm{Put}^{\mathrm{BS}}} = \Gamma^{\mathrm{Call}^{\mathrm{BS}}} = \frac{\partial^2 \mathrm{Call}^{\mathrm{BS}}}{\partial S_0^2} = \frac{1}{S_0 \sigma \sqrt{T}} \mathcal{N}'(d_+) > 0$$

with

$$\mathcal{N}'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

**Définition.** The Vega is the change in the option price with respect to the change in volatility $\sigma$.

**Proposition.** The Vega of Call and Put options are :

$$\texttt{Vega}^{\mathrm{Put}^{\mathrm{BS}}} = \texttt{Vega}^{\mathrm{Call}^{\mathrm{BS}}} = S_0\sqrt{T}\mathcal{N}'(d_+) > 0.$$

**Définition.** The Theta $\Theta$ is the rate of change of the option's price with respect its maturity (or time to maturity) $T$ (or $(T-t)$).

**Proposition.** The Theta of Call and Put options are :

$$\Theta^{\mathrm{Call}^{\mathrm{BS}}} = \frac{\partial \mathrm{Call}^{\mathrm{BS}}}{\partial T} = \frac{S_0 \sigma}{2\sqrt{T}} \mathcal{N}'(d_+) + rKe^{-rT}\mathcal{N}(d_-),$$

$$\Theta^{\mathrm{Put}^{\mathrm{BS}}} = \frac{\partial \mathrm{Put}^{\mathrm{BS}}}{\partial T} = \frac{S_0 \sigma}{2\sqrt{T}} \mathcal{N}'(d_+) - rKe^{-rT}(1-\mathcal{N}(d_-)).$$

## Numerical values

We consider a Call option such that $S_0 = 100$ , $r = 2\%$ , $T = 6$ months , $\sigma = 25\%$.

| $K$ | $\Delta$ | Delta of the Strike | $\Gamma$ | Vega | $\Theta$ | $\rho$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 95 | 0.668 | -0.595 | 0.021 | 25.662 | -7.548 | 28.307 |
| 100 | 0.558 | -0.482 | 0.022 | 27.915 | -7.944 | 24.123 |
| 105 | 0.448 | -0.375 | 0.022 | 27.968 | -7.780 | 19.705 |