© Théo Jalabert

ISFA 2^{e} année
Processus Stochastiques
Examen du 11 janvier 2006

Durée : 3 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites.

Toutes les réponses,(dont passages à la limite, hypothèses de théorèmes utilisés...) doivent être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Questions de cours

1. Définir une martingale $(M_t, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ en temps continu. Donner également la définition d'un temps d'arrêt τ et de la tribu $\mathcal{F}_\tau$. Énoncer le théorème d'arrêt de Doob.
2. Soient $(M_t)_{t\geq 0}, (N_t)_{t\geq 0}$ deux martingales continues de carrés intégrables.
   - Soient g et h deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$. Écrire $g(M_t)$ à l'aide de la formule de Itô. Quelle est la partie martingale ? Quelle est la partie à variations bornées ? Donner une expression intégrale de $\langle g(M)\rangle_t$ et de $\langle g(M), h(N)\rangle_t$.
   - Soit maintenant $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Énoncer la formule de Itô appliquée à $f(M_t, N_t)$. Écrire $\langle f(M,N)\rangle_t$ comme une intégrale faisant intervenir $d\langle M\rangle_s$, $d\langle N\rangle_s$ et $d\langle M, N\rangle_s$.
   - Écrire également $M_tN_t - M_0N_0$ comme une somme de trois intégrales.
3. On se donne deux martingales continues indépendantes $(M_t)_t$ et $(N_t)_t$ par rapport à la même filtration $\mathcal{F}_t = \sigma\{M_s, N_s, s \leq t\}$. Montrer à la main que $\langle M, N\rangle_t = 0$.

Exercice 1 : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires positives, indépendantes et identiquement distribuées, vérifiant $\mathbf{E}(X_1^k) < \infty$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. On note $S_0 = 0$ et $S_n = S_{n-1} + X_n$ pour tout $n \geq 1$. Le processus $(R_t)_{t\geq 0}$ sera le processus de comptage associé à la suite (S_n), c'est-à-dire :

$$R_t = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{S_n \leq t}.$$

1. Rappeler la loi limite de $(S_{R_t+1} - t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. On notera Y une variable aléatoire de loi :
$$\mathbf{P}(Y \geq x) = \lim_{t\to+\infty} \mathbf{P}(S_{R_t+1} - t \geq x).$$
2. Montrer que $\mathbf{P}(Y \geq 0) = 1$.
3. Calculer pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{E}(Y^k)$ en fonction de $\mathbf{E}(X_1^{k+1})$ et de $\mathbf{E}(X_1)$.
4. En déduire que $0 < \mathbf{E}(Y^k) < \infty$.
5. On suppose pour cette question que X_1 sur la loi uniforme sur $[0,1]$. Donner alors la loi de Y et préciser ses moments.
6. On suppose pour cette question que X_1 suit une loi exponentielle de moyenne m. Donner également la loi de Y.

Exercice 2 : On se donne un mouvement brownien réel $(B_t)_{t\geq 0}$, issu de $B_0 \equiv 0$ ainsi que $\mathcal{F}_t$, sa filtration « canonique ». On considère deux nombres réels $a > 0$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ et on adopte les notations suivantes :

$$\begin{aligned}
M_t &= \exp(\lambda B_t - \lambda^2 t/2)\\
\tau_+ &= \tau_+(a) = \inf\{t > 0, B_t = a\},\\
\tau_- &= \tau_-(a) = \inf\{t > 0, B_t = -a\}\\
T &= T(a) = \min(\tau_+, \tau_-).
\end{aligned}$$

On rappelle que les variables aléatoires τ_+ et τ_- sont des temps d'arrêt.

© Théo Jalabert

1. Montrer que le minimum de deux temps d'arrêt est un temps d'arrêt et en déduire que T est un temps d'arrêt.
2. Montrer que $\mathbf{P}(|B_t| > a)$ tend vers 1 lorsque t tend vers $+\infty$ et en déduire que T est presque sûrement fini. Quel est l'ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire B_T ?
3. Montrer que τ_+ et τ_- suivent la même loi et sont indépendantes de B_T.
4. Montrer que M_t est une $\mathcal{F}_t$–martingale.
5. Montrer que les conditions d'application du théorème d'arrêt de Doob sont vérifiées en prenant comme martingale M_t et comme temps d'arrêt 0 et T. Écrire le résultat ainsi obtenu.
6. Déduire des questions précédentes la valeur de $\mathbf{E}\exp(-\lambda^2 T/2)$, puis calculer la transformée de Laplace de T.
7. Calculer, à l'aide de la question précédente, l'espérance et la variance de T.
8. Dans cette question, on fait varier a. Montrer qu'il existe un réel γ tel que la loi de $a^\gamma T(a)$ ne dépende pas de a. Ce résultat est-il surprenant ? Justifier.
9. On se donne un réel $b > 0$. Montrer que $T(a+b) - T(a)$ et $T(a)$ sont des variables aléatoires indépendantes. Quelle propriété du mouvement brownien est-elle utilisée ici ? Déduire de ce résultat la transformée de Laplace de la loi de $T(a+b) - T(a)$.

Exercice 3 : Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ issu de $B_0 \equiv 0$. On rappelle (cf exercice précédent) que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ fixé, le processus $M_t = \exp(\theta B_t - \theta^2 t/2)$ est une martingale.

1. Soit $a > 0$ et $T = \inf\{t \geq 0, B_t = a + bt\}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $T_n = \min(n, T)$. On admet que $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$. Montrer que T_n est une suite de temps d'arrêt.
2. Montrer que l'on peut appliquer le théorème d'arrêt de Doob à la martingale M_t et pour les temps d'arrêt $\sigma = 0$ et $\tau = T_n$. Écrire le résultat obtenu.
3. Faire tendre n vers $+\infty$ lorsque $\theta \geq 0$ et $b \leq 0$ puis lorsque $b > 0$ et $\theta \geq 2b$.
4. En déduire la valeur de $\mathbf{E}(\exp(-\lambda T))$ en posant $\theta = b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}$.
5. Montrer que $\mathbf{P}_0(T < \infty) = 1$ lorsque $b \leq 0$ et $\mathbf{P}_0(T < \infty) = e^{-ab}$ sinon.
6. Lorsque b est négatif, calculer $\mathbf{E}(T)$.

Exercice 4 : Un fabricant veut fixer le niveau de publicité qu'il fait passer dans un média. Il peut choisir entre une couverture publicitaire élevée (E) et une couverture publicitaire moyenne (M). Les ventes mensuelles sont réparties en trois catégories suivant leur nombre : C_1 (peu de ventes), C_2 (nombre de ventes normal) et C_3 (beaucoup de ventes). On estime que l'évolution de la catégorie des ventes mensuelles au cours du temps peut être représentée par une chaîne de Markov, dont la matrice de transition dépend de la couverture publicitaire. Les deux matrices de transition sont les suivantes :

$$\text{couv. élevée :}\quad P_E = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.1 & 0.5 & 0.4 \\ 0.1 & 0.2 & 0.7 \end{pmatrix} \qquad \text{et couv. moyenne :}\quad P_M = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.4 & 0 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \\ 0.4 & 0.5 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Un mois de vente de la catégorie C_1 (respectivement C_2, et C_3) rapporte environ 9 000 euros (respectivement 12 000 et 18 000 euros). Une forte couverture publicitaire coûte 5 000 euros par mois, alors qu'une courverture publicitaire moyenne ne coûte que 1000 par mois. Calculer le bénéfice moyen du fabricant sur une grande période de temps lorsque la couverture publicitaire est élevée, puis lorsqu'elle est moyenne. Quel est le choix le plus rentable ?

Exercice 2 :

© Théo Jalabert

$$M_t = \exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2})$$

$\tau_+ = \tau_+(a) = \inf\{t>0, B_t = a\}$ $\tau_- = \tau_-(a) = \inf\{t>0, B_t = -a\}$

$$T = T(a) = \min(\tau_+, \tau_-)$$

1) Soit τ et σ deux temps d'arrêt

σ est un temps d'arrêt donc $\forall t \in \mathbb{R}_+, \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

τ est ——— $\forall t \in \mathbb{R}_+, \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

$$\Rightarrow \{\sigma \wedge \tau \leq t\} = \underbrace{\{\tau \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \cup \underbrace{\{\sigma \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$$

Donc comme τ_+ et τ_- sont des temps d'arrêts
$\Rightarrow T = \min(\tau_+, \tau_-)$ temps d'arrêt

2) $\mathbb{P}(|B_t| \leq a) = \mathbb{P}(-a \leq B_t \leq a)$

$= \mathbb{P}(-\frac{a}{\sqrt{t}} \leq X \leq \frac{a}{\sqrt{t}})$ $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ car $B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(|B_t| > a) = \lim_{t\to\infty} \mathbb{P}(-\frac{a}{\sqrt{t}} \leq X \leq \frac{a}{\sqrt{t}})$$

$$= \mathbb{P}(X=0) = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(|B_t| > a) = 1 - \mathbb{P}(|B_t| \leq a) \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$$

Ainsi par définition de τ_+ et τ_-, on peut en déduire que, partant de 0 et avec des trajectoires continues puisque p.s $|B_t|$ prendra des valeurs $> a$, c'est que p.s à temps fini, B_t prendra la valeur a ou $-a$, soit

$$\mathbb{P}(\tau_+ < \infty \text{ ou } \tau_- < \infty) = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(T < \infty) = \mathbb{P}(\min(\tau_+, \tau_-) < \infty) = 1$$

T est donc bien un temps d'arrêt p.s fini

$B_T \in \{-a, a\}$.

© Théo Jalabert

3) $\mathbb{P}(\tau_+ \leq t) = 1 - \mathbb{P}(\tau_+ > t)$
$= 1 - \mathbb{P}(\forall s \leq t, B_t < a)$

$= 1 - \mathbb{P}(\forall s \leq t, -B_t > -a)$
$= 1 - \mathbb{P}(\forall s \leq t, \tilde{B}_t > -a)$ $\quad \tilde{B}_t = -B_t$
$= 1 - \mathbb{P}(\forall s \leq t, B_t > -a)$ car $\tilde{B}_t$ est un MB standard
$= 1 - \mathbb{P}(\tau_- > t) = \mathbb{P}(\tau_- \leq t)$ $\quad \Rightarrow$ suit la même loi que B_t

Donc τ_+ et τ_- suivent une même loi.

Donc $\forall t \geq 0$, $\mathbb{P}(T \leq t, B_T = a) = \mathbb{P}(T \leq t, \tilde{B}_T = -a)$

$= \mathbb{P}(T \leq t, B_T = -a) = \frac{1}{2}\mathbb{P}(T \leq t)$

Car $\{T \leq t\}$ est la réunion disjointe de $\{T \leq t\} \cap \{B_T = a\}$ et $\{T \leq t\} \cap \{B_T = -a\}$

Donc $\mathbb{P}(T \leq t, B_T = a) = \mathbb{P}(T \leq t)\mathbb{P}(B_T = a)$

$\Rightarrow \tau_+$ et $\tau_- \perp\!\!\!\perp B_T$

4) $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$

$Z_t = \exp(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2})$ $\quad Z_t$ suit une loi log normale car $B_t \sim \mathcal{N}(0, t)$

$\Rightarrow Z_t$ est $(\mathcal{F}_t)$ mes et $\mathcal{L}^1$

$\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} e^{\lambda B_s} \mathbb{E}[e^{\lambda(B_t - B_s)} | \mathcal{F}_s]$

$= e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} e^{\lambda B_s} \mathbb{E}[e^{\lambda(B_t - B_s)}] = e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}} e^{\lambda B_s} e^{\frac{\lambda^2 (t-s)}{2}} = e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}$

$\lambda(B_t - B_s) \sim \mathcal{N}(0, \lambda^2(t-s))$
$\Rightarrow \exp(\lambda(B_t - B_s)) \sim \text{Log-}\mathcal{N}(0, \lambda^2(t-s))$

$\Rightarrow$ Martingale

5) M_t est une martingale continue 0 et T deux temps d'arrêt $0 \leq T$ p.s

De plus M_t est unif $\mathcal{L}^1$ car majorée par $e^{\lambda a}$

De plus T est p.s fini

$\Rightarrow \mathbb{E}[\exp(\lambda B_T - \frac{\lambda^2 T}{2})] = 1$

6)

© Théo Jalabert