Troisième partie

Théorie de la ruine

Soit $R(t) = u + X(t)$ un processus de risque classique :
- $(X(t))_{t\geq 0}$ est donc défini pour tout $t \geq 0$ par

$$X(t) = ct - \sum_{i=1}^{N(t)} W_i,$$

- $(N(t))_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson homogène d'intensité λ,
- les W_i sont des v.a.i.i.d. positives de moyenne μ et indépendantes de $(N(t))_{t\geq 0}$,
- la somme est nulle si $N(t) = 0$,
- le chargement de sécurité relatif

$$\rho = \frac{c - \lambda\mu}{\lambda\mu} > 0.$$

Définissons la probabilité de ruine

$$\psi(u) = P\left(\exists t > 0, \quad u + X(t) < 0\right)$$

et la probabilité de non-ruine (ou de survie)

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u) = P\left(\forall t > 0, \quad u + X(t) \geq 0\right).$$

Théorème III.1 (Equation intégro-différentielle)
Pour tout $u \geq 0$,

$$\varphi'_d(u) = \frac{\lambda}{c}\left(\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-y)dF_W(y)\right). \tag{9.1}$$

Preuve :
Pour $h > 0$,

$$\varphi(u) = E\left(\varphi(u + X(T_1 \wedge h))\right).$$

L'idée est de distinguer les cas $T_1 \leq h$ (dans ce cas le processus repart après un temps aléatoire T_1 de la position aléatoire $u + cT_1 - W_1$) et $T_1 > h$ (dans ce cas, le processus repart après un temps h de la position $u+ch$). La perte de mémoire de la loi exponentielle nous garantit la perte de mémoire du processus de Poisson $(N(t))_{t\geq 0}$, et donc du processus $(X(t))_{t\geq 0}$ qui est *sans mémoire.*

$$\varphi(u) = \varphi(u+ch)P(T_1 > h) + \int_0^h f_{T_1}(t)\int_0^{+\infty}\varphi(u+ct-y)dF_{W_1}(y)dt.$$

En inversant les signes, en rajoutant $\varphi(u+ch)$ à droite et à gauche, et en divisant par h, on obtient

$$\frac{\varphi(u+ch) - \varphi(u)}{h} = \varphi(u+ch)\left(\frac{1-e^{-\lambda h}}{h}\right) - \frac{1}{h}\int_0^h \lambda e^{-\lambda t}\int_0^{+\infty}\varphi(u+ct-y)dF_{W_1}(y)dt.$$

En passant à la limite lorsque $h \downarrow 0$, en utilisant la continuité à droite de φ et le fait que
$$\frac{1}{h}\int_0^h g(t)dt \to g(0)$$
quand $h \to 0$ pour toute fonction g continue à droite, on obtient
$$c\varphi'_d(u) = \lambda\left(\varphi(u) - \int_0^{+\infty} \varphi(u-y)dF_W(y)\right),$$
ce qui fournit le résultat demandé en observant que $\varphi(x) = 0$ pour $x < 0$.

$\square$

On obtient de même pour tout $u \geq 0$,
$$\varphi'_g(u) = \frac{\lambda}{c}\left(\varphi(u) - \int_0^{u_-} \varphi(u-y)dF_W(y)\right). \tag{9.2}$$
Dans le cas où F_W est continue, les dérivées à droite et à gauche sont les mêmes pour tout u et correspondent donc à $\varphi'(u)$.

Plaçons-nous dans le cas où W_1 admet une densité f_{W_1}.

Proposition III.1 (Equation intégrale)
Pour tout $u \geq 0$,
$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-y)(1-F_W(y))dy. \tag{9.3}$$

Preuve :
D'après (9.2), pour $u > 0$,
$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\left(\varphi(u) - (\varphi * f_W)(u)\right).$$
En prenant la transformée de Laplace, on obtient pour $s > 0$
$$sL_\varphi(s) - \varphi(0) = \frac{\lambda}{c}L_\varphi(s) - \frac{\lambda}{c}L_\varphi(s).sL_{F_W}(s). \tag{9.4}$$
En effet, rappelons que
$$L_{\varphi'}(s) = \int_0^{+\infty} \varphi'(u).e^{-su}du = \left[\varphi(u).e^{-su}\right]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} \varphi(u).se^{-su}du = -\varphi(0) + sL_\varphi(s)$$
en utilisant une intégration par parties classique. De la même manière, $L_{\varphi * f_W} = L_\varphi.L_{f_W}$, et donc comme $F_W(0) = 0$,
$$L_{f_W}(s) = L_{F'_W}(s) = F_W(0) + sL_{F_W}(s) = sL_{F_W}(s).$$

En divisant par s l'équation (9.4), on obtient

$$L_\varphi(s) = \frac{\varphi(0)}{s} + \frac{\lambda}{c}\left(L_\varphi(s)\left(\frac{1}{s} - L_{F_W}(s)\right)\right)..$$

Or, pour toute constante $C > 0$,

$$L_C(s) = \frac{C}{s},$$

donc

$$\frac{1}{s} - L_{F_W}(s) = L_{1-F_W}(s)$$

et on obtient pour tout $s > 0$

$$L_\varphi(s) = L_{\varphi(0)+\frac{\lambda}{c}\varphi*(1-F_W)}(s),$$

ce qui donne le résultat recherché d'après l'injectivité de la transformée de Laplace.

$\square$

Proposition III.2

$$\varphi(+\infty) = \lim_{u\to+\infty}\varphi(u) = 1.$$

Preuve :
φ est une fonction croissante. Pour $n \geq 1$,

$$\varphi(n) = E\left(1_{\{\inf X(t) < -n\}}\right).$$

Or $I_n = 1_{\{\inf X(t) > -n\}}$ est une suite croissante de v.a., qui tend vers 1 presque sûrement. En effet, comme $\rho > 0$, d'après la loi des grands nombres, $X(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$, et donc le processus est positif à partir d'un certain temps (aléatoire) T fini presque sûrement, et l'infimum pris sur le compact $[0, T]$ est donc fini. D'après le théorème de convergence monotone,

$$\lim E(I_n) = E(\lim I_n) = E(1) = 1.$$

$\square$

En passant à la limite dans l'équation (9.3), on obtient

$$\varphi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c},$$

ce qui constitue un résultat très robuste qui ne dépend de F_W que par la moyenne μ de W.

Dans le cas où $W \sim Exp(1/\mu)$, d'après l'équation intégro-différentielle (9.2), pour tout $u \geq 0$,

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\left(\varphi(u) - \int_0^u \varphi(u-y)e^{-y/\mu}dy\right) = \frac{\lambda}{c}\left(\varphi(u) - \int_0^u \varphi(y)e^{-(u-y)/\mu}dy\right). \tag{9.5}$$

En dérivant par rapport à u, on obtient

$$\varphi''(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi'(u) - \frac{\lambda}{c}\frac{(-1)}{\mu}\int_0^u \varphi(y)e^{-(u-y)/\mu}dy - \frac{\lambda}{c\mu}\varphi(u). \tag{9.6}$$

(Par exemple factoriser le $e^{-u/\mu}$ à l'extérieur de l'intégrale puis dériver le produit). Remarquons que d'après (9.2), le second terme de droite dans (9.6) est égal à

$$-\frac{\lambda}{c}\frac{(-1)}{\mu}\int_0^u \varphi(y)e^{-(u-y)/\mu}dy = \frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \varphi'(u)\right).$$

L'équation (9.6) se simplifie donc en

$$\varphi''(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi'(u) + \frac{1}{\mu}\left(\frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \varphi'(u)\right) - \frac{\lambda}{c\mu}\varphi(u),$$

et donc

$$\varphi''(u) = \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right)\varphi'(u).$$

Soit

$$R = \frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu} = \frac{\rho}{\mu(1+\rho)}.$$

En intégrant deux fois, on obtient

$$\varphi(u) = C_1 + C_2 e^{-Ru}.$$

$C_1 = \varphi(+\infty) = 1$ et

$$\varphi(0) = C_1 + C_2 = 1 - \frac{1}{1+\rho},$$

d'où pour $u \geq 0$,

$$\varphi(u) = 1 - \frac{1}{1+\rho}e^{-Ru} \tag{9.7}$$

et

$$\psi(u) = \frac{1}{1+\rho}e^{-Ru}. \tag{9.8}$$

9.3 Méthodes de martingales

Appliquons le théorème d'arrêt optimal de Doob à la martingale $(M(t))_{t\geq 0}$ (exercice : montrer qu'il s'agit bien d'une martingale par rapport à la filtration naturelle de $(M(t))_{t\geq 0}$) définie par

$$M(t) = \frac{e^{-r(u+X(t))}}{E\left[e^{-rX(t)}\right]},$$

où $r \geq 0$ est tel que

$$E\left[e^{-rX(t)}\right] < +\infty,$$

et au temps d'arrêt $T_u \wedge t_0$, où

$$T_u = \inf\{t \geq 0, u + X(t) < 0\}$$

est la variable aléatoire défective représentant l'instant de ruine, et t_0 est un réel positif fixé. On obtient en conditionnant par $T_u \leq t_0$ ou $T_u > t_0$

$$\begin{aligned} e^{-ru} &= E[M(0)] = E\left[M(T_u \wedge t_0)\right] && (9.9)\\ e^{-ru} &= E\left[M(T_u \wedge t_0) \mid T_u \leq t_0\right] P\left(T_u \leq t_0\right) + E\left[M(T_u \wedge t_0) \mid T_u > t_0\right] P\left(T_u > t_0\right) \\ e^{-ru} &\geq E\left[M(T_u) \mid T_u \leq t_0\right] P\left(T_u \leq t_0\right). && (9.10)\end{aligned}$$

Rappelons que pour utiliser le théorème d'arrêt de Doob (voir cours de 2ème année), il faut (le plus souvent) avoir un temps d'arrêt, qui doit être fini presque sûrement. Or,

$$P(T_u = +\infty) = \varphi(u) > 0$$

dès que $\rho > 0$. La solution classique consiste à appliquer le théorème d'arrêt au temps d'arrêt $T_u \wedge t_0$ (qui est toujours fini car inférieur à $t_0 < \infty$), et à passer à la limite ($t_0 \to +\infty$) pour obtenir le résultat avec T_u. On a donc d'après (9.10)

$$P\left(T_u \leq t_0\right) \leq \frac{e^{-ru}}{E\left[M(T_u) \mid T_u \leq t_0\right]}. \tag{9.11}$$

Or

$$\frac{1}{E\left[M(T_u) \mid T_u \leq t_0\right]} = \frac{1}{E\left[\frac{e^{-r(u+X(T_u))}}{e^{g(r)T_u}} \mid T_u \leq t_0\right]} \leq \frac{1}{E\left[\frac{1}{e^{g(r)T_u}} \mid T_u \leq t_0\right]},$$

où $g(r)$ est défini par

$$E\left[e^{-rX(t)}\right] = e^{g(r)t}$$

et est égal à

$$g(r) = \lambda\left(E\left[e^{rW}\right] - 1\right) - rc, \tag{9.12}$$

car sachant que T_u est fini, $u+X(T_u) < 0$. Donc l'inéquation (9.11) devient

$$P\left(T_u \leq t_0\right) \leq \frac{e^{-ru}}{E\left[e^{-g(r)T_u} \mid T_u \leq t_0\right]}. \tag{9.13}$$

On a conditionné par rapport à l'événement $\{T_u \leq t_0\}$, et donc

$$E\left[e^{-g(r)T_u} \mid T_u \leq t_0\right] \geq \inf_{0\leq t\leq t_0} e^{-tg(r)},$$

et

$$\frac{1}{E\left[e^{-g(r)T_u} \mid T_u \leq t_0\right]} \leq \frac{1}{\inf_{0\leq t\leq t_0} e^{-tg(r)}} = \sup_{0\leq t\leq t_0} e^{tg(r)}.$$

Cela permet de réécrire (9.13) en

$$P(T_u \leq t_0) \leq e^{-ru} \sup_{0\leq t\leq t_0} e^{tg(r)}.$$

En passant à la limite quand $t_0 \to +\infty$, on obtient

$$\psi(u) = P(T_u < +\infty) \leq e^{-ru} \sup_{t\geq 0} e^{tg(r)}.$$

Pour que la borne soit finie et présente un intérêt, il faut que r soit le plus grand possible tout en ayant $g(r) \leq 0$. Il faut donc prendre

$$R = \sup\{r \geq 0, g(r) \leq 0\}.$$

Dans le cas où $W \sim Exp(1/\mu)$, on retrouve la valeur de l'exposant de Cramer-Lundberg

$$R = \frac{\rho}{\mu(1+\rho)},$$

qui est ici le nombre strictement positif qui vérifie $g(R) = 0$. On obtient alors dans le cas général l'inégalité de Cramer-Lundberg

$$\psi(u) \leq e^{-Ru}. \tag{9.14}$$

Le cas où $W \sim Exp(1/\mu)$ nous montre que la valeur de R est optimale. Il existe dans de nombreux cas des inégalités doubles qui permettent d'encadrer la probabilité de ruine par deux fonctions de type Ce^{ru}.

On a appliqué le théorème de Doob à la martingale exponentielle pour pouvoir utiliser le théorème de convergence dominée : $u + X(t) \to +\infty$ presque sûrement quand $t \to +\infty$, et donc $e^{-r(u+X(t))}$ va tendre vers 0 presque sûrement.

L'inéquation (9.11) a été obtenue en passant de (9.9) à (9.10) en minorant brutalement par 0 le terme

$$E\left[M(T_u \wedge t_0) \mid T_u > t_0\right] P\left(T_u > t_0\right).$$

En prenant $r = R$, on peut montrer que ce terme tend vers 0 lorsque $t_0 \to +\infty$. Rappelons que dans ce cas $g(R) = 0$ et que $M(t)$ s'écrit simplement

$$M(t) = e^{-R(u+X(t))}.$$

Ceci nous permet d'écrire

$$0 \leq E\left[M(T_u \wedge t_0) \mid T_u > t_0\right] P\left(T_u > t_0\right) = E\left[e^{-R(u+X(t_0))}.1_{\{T_u > t_0\}}\right],$$

et comme

$$\{T_u > t_0\} \subset \{u + X(t_0) \geq 0\},$$

on obtient l'inégalité

$$0 \leq E\left[M(T_u \wedge t_0) \mid T_u > t_0\right] P\left(T_u > t_0\right) \leq E\left[e^{-R(u+X(t_0))}.1_{\{u+X(t_0)\geq 0\}}\right] \leq 1. \tag{9.15}$$

Or quand $t \to +\infty$,

$$u + X(t) \to +\infty \quad \text{p.s.},$$

ce qui implique que lorsque $t_0 \to +\infty$,

$$1_{\{u+X(t_0)\geq 0\}} \to 0 \quad \text{p.s.}.$$

D'après le théorème de convergence dominée, on peut passer à la limite dans l'inéquation (9.15), ce qui donne à partir de (9.9) l'*égalité* suivante :

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E\left[e^{-R(u+X(T_u))} \mid T_u < +\infty\right]}. \tag{9.16}$$

Exercice III.1 *Dans le cas où $W \sim Exp(1/\mu)$, utiliser la perte de mémoire de la loi exponentielle et l'équation (9.16) pour retrouver la formule exacte de la probabilité de ruine dans le cas exponentiel (9.8).*

Cet exercice sera corrigé en séance de TD. Il est vivement conseillé de le faire auparavant. Conseil : utiliser le conditionnement par rapport à la tribu qui correspond à l'information disponible sur le processus $(X(t))_{t\geq 0}$ jusqu'à "juste avant la ruine" (c'est-à-dire obtenue à des temps strictement inférieurs à T_u) :

$$\mathcal{F}_{T_u^-} = \sigma\left(A \cap \{t < T_u\}, \quad A \in \mathcal{F}_t, t > 0\right),$$

où $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle du processus $(X(t))_{t\geq 0}$.