Examen de MASTER 2, 1ère session, finance, modèles de sauts.

Sorbonne Université, le 07 février 2025.
Campus Jussieu, Amphi A1

Durée 3 heures, aucun document n'est autorisé.

Exercice I. Pour tout réel t on note $\lfloor t \rfloor$ la partie entière de t et $\{t\} = t - \lfloor t \rfloor$ sa partie fractionnaire. Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction donnée par $F(t) = t\{t\}$.

1. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction qui est C^1. Montrer que f est à variaton bornée sur tout intervalle compact. Calculer var_f^+, var_f^- and var_f.
2. Montrer que F fonction à variation bornée sur tout intervalle $[0, T]$. Calculer $dF_{\mathbf{d}}$ et $dF_{\mathbf{a}}$.
3. Montrer qu'il existe une unique fonction $X : [2, \infty[\to \mathbb{R}_+$, à variation bornée sur tout intervalle $[2, \infty[$ telle que
$$X(t) = 1 + \int_{]2,t]} X(s-) \lfloor s \rfloor^{-2} \, dF(s) \, , \quad t \geq 2 \, ,$$
que l'on calculera à l'aide des fonctions usuelles et des deux suites
$$h_n = \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad a_n = \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \, , \quad n \geq 2 \, .$$

Exercice II. On munit $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique et de la norme Euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$. On note ℓ_3 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^3$ et ℓ_1 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Si $B(x, r)$ désigne la boule ouverte de centre x et de rayon r dans $\mathbb{R}^3$, alors on rappelle que $\ell_3(B(x, r)) = 4\pi r^3/3$. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité sur lequel est défini un nuage Poissonnien $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_{\mathbb{R}^3}$ d'intensité ℓ_3. On pose
$$\Pi_0 = \big\{ \|X\| \, ; \, X \in \Pi \big\} \, .$$

1. Pour tout exposant $\beta \in]0, \infty[$, on pose $Y_\beta = \sum_{X \in \Pi} \|X\|^{-\beta}$, qui est une variable aléatoire $\mathscr{F}$-mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$. Trouver les $\beta \in]0, \infty[$ tels que $\mathbf{E}[Y_\beta] = \infty$.
2. Trouver tous les exposants $\beta \in]0, \infty[$ tels que $\mathbf{P}(Y_\beta < \infty) > 0$.
3. Calculer à une constante multiplicative près la fonction $\phi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ telle que $\mathbf{E}[\exp(-\lambda Y_{7/2})] = \exp(-\phi(\lambda))$, $\lambda \in]0, \infty[$.
4. Montrer que Π_0 est presque sûrement égal à un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}_+$ dont on précisera l'intensité.
5. On note $h(r) = qr^\alpha$. Pour quelles valeurs de q et de α, $h(\Pi_0)$ est un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité ℓ_1 ?
6. Montrer qu'il existe une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables $\mathscr{F}$-mesurables telles que $0 < \|X_n\| < \|X_{n+1}\|$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Pi = \{X_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ presque sûrement.
7. Montrer qu'il existe des constantes strictement positives C et K, que l'on calculera, telles que
$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \lim_{n \to \infty} n^{-C} \|X_n\| = K \, .$$

Exercice III Toutes les variables sont définies sur un même espace mesurable $(\Omega, \mathscr{F})$.
Soient $\mathscr{E}_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ et $Z_n : \Omega \to]-1, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$, une suite de de variables aléatoires. On pose

$$T_n = \mathscr{E}_1 + \ldots + \mathscr{E}_n \quad \text{et} \quad \Pi = \{(T_n, Z_n) \, ; \, n \in \mathbb{N}^*\} \, .$$

On fixe $a \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$N_t = N_{[0,t] \times \mathbb{R}}(\Pi) \quad \text{et} \quad U_t = \sum_{1 \leq n \leq N_t} Z_n - at \, .$$

Soit $\mathbf{P}$, une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$. On suppose que sous $\mathbf{P}$, les variables $\mathscr{E}_n$ et Z_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sont mutuellement indépendantes, que les $\mathscr{E}_n$ suivent une loi exponentielle de paramètre θ et que les Z_n ont même loi notée ρ. On fixe les paramètres suivants

$$m \in \mathbb{R}, \quad r = \text{taux d'intérêt fixe}, \quad \mu_2 = \int z^2 \rho(dz) < \infty \, , \quad \mu_1 = \int z \rho(dz).$$

On note $\mathscr{F}_t = \sigma(\Pi \cap ([0, t] \times \mathbb{R}))$, $t \in \mathbb{R}_+$. On note $(S_t)_{t \geq 0}$ le prix de l'actif qui suit l'équation

$$dS_t = m S_{t-} \, dt + S_{t-} dU_t \quad \text{et} \quad S_0 = s_0 > 0 \, .$$

On note $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$, le prix actualisé.

1. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $(U_t - ct)_{t \geq 0}$ soit une $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$-martingale.

2. Montrer que $\mathbf{E}[U_t^2] < \infty$ et calculer cette quantité. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que
$$\big((U_t - ct)^2 - bt\big)_{t \geq 0}$$
soit une $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$-martingale.

3. Calculer explicitement S_t, $\widetilde{S}_t$. Calculer
$$\mathbf{E}\big[\widetilde{S}_{t+t_0} \,\big|\, \mathscr{F}_{t_0}\big] \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\big[S_t^2\big] \, .$$

4. Quelle equa-diff (version variation bornée) satisfait $(\widetilde{S}_t)_{t \geq 0}$?

5. Soit $\psi :]-1, 1[\to]-1, \infty[$, une fonction mesurable. On pose
$$M_t = e^{-\beta t} \prod_{1 \leq n \leq N_t} (1 + \psi(Z_n)) \, .$$
avec la convention qu'un produit sur un ensemble d'indices vide est pris égal à 1. Ici, la constante β est choisie telle que $(M_t)_{t \geq 0}$ soit une $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$-martingale sous $\mathbf{P}$. Préciser β.

6. On définit une mesure $\mathbb{Q}'_T$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$ en posant
$$\mathbb{Q}'_T(B) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_B M_T] \, .$$
Montrer que $\mathbb{Q}'_T$ est une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbf{P}$ et que $\mathbf{P}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{Q}'_T$. On note $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}'_T}$ l'espérance sous $\mathbb{Q}'_T$.

7. Montrer que Π_T sous $\mathbb{Q}'_T$ est un nuage Poissonnien sur $[0, T] \times]-1, 1[$ d'intensité $\kappa \ell(\,\cdot \cap [0, T]) \otimes \nu(dz)$, où on précise le paramètre κ et la loi de probabilité ν. (Justifier sa réponse soigneusement)

8. Quelles sont les conditions sur ψ pour que sous $\mathbb{Q}'_T$, $(\widetilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$ soit une $(\mathscr{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$-martingale ? (Justifier sa réponse soigneusement)