# Processus fractionnaires et processus de Volterra



$K : [0,T]^2 \to \mathbb{R}$

$t \mapsto \int_0^t K(t,s) f(s)\, ds$ bien-définie ?

$$\left( \int_0^t K(t,s) f(s)\, ds \right)^2 \underset{C.S.}{\leq} \int_0^t K(t,s)^2\, ds \int_0^t f^2(s)\, ds$$

$f \in L^2[0,T] \Rightarrow$ il faut que $\boxed{\sup_t \int_0^t K(t,s)^2 ds < \infty}$

pour les noyaux de convolution $K(t,s) = K(t-s)$ il faut que $\int_0^T K(u)^2 du < \infty$

On peut montrer ça pour $f \in L^1$ par l'inégalité de Young

$t \mapsto \int_0^t K(t,u)\, dW_u$

Fix $t$ $\quad f_t(s) = K(t,s) \mathbb{1}_{\{s \leq t\}}$

Si $f_t \in L^2$ $\quad \int_{\mathbb{R}_+} f_t(s)^2 ds < \infty \Rightarrow \int_{\mathbb{R}_+} f_t(s)\, dW_s = \int_0^t K(t,s)\, dW_s$ intégrale de Wiener

On fait ça pour tout $t > 0$

**Thm** $X_t = g_0(t) + \int_0^t K(t,s)\, dW_s$ a une cov. $\Sigma(t,s) = \int_0^{t \wedge s} K(t,u) K(s,u)\, du$

$g_0$ : moyenne

$$N_t = \int_0^t K(t,s)\, dW_s$$

Si $K(t,s) = f(t) \Rightarrow N(t) = f(t) W_t$.

$\mathbb{E}[N_t | \mathcal{F}_s] = f(t) W_s = \frac{f(t)}{f(s)} N_s \Rightarrow$ en général, $N$ n'est pas une martingale.

On peut pas utiliser BDG là.

Qu'est-ce qu'on fait avec le premier argument $t$ ?

$$\tilde{N}_t(u) = \int_0^t K(u,s)\, dW_s, \quad t \in [0,u]$$

$$\tilde{N}_u(u) = N_u$$

Pour $u$ fixé $\tilde{N}_t(u)$ est un mart. $\Rightarrow$ on peut appliquer BDG à $\tilde{N}_\cdot(u)$ pour tout $u$.

1) $X_t = (K * dW)_t$

$$X_{t+h} = \int_0^{t+h} K(t+h-s)\,dW_s = \int_0^t K(t+h-s)\,dW_s + \int_t^{t+h} K(t+h-s)\,dW_s$$

$\Delta_h f(s) = f(s+h)$

$$\mathbb{E}_t[X_{t+h}] = \mathbb{E}_t\left[\int_0^t K(t+h-s)\,dW_s\right] + \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} K(t+h-s)\,dW_s\right]}_{0} = \int_0^t K(t+h-s)\,dW_s = (\Delta_h K * dW)_t$$

2) On suppose qu'il existe une mesure $L$ t.q. $(K * L)(s) = 1$, $s \geq 0$.

Celle existe si $K$ est complètement monotone sur $(0,T)$ : $K \in C^\infty$ $(-1)^k K^{(k)} \geq 0$

Bernstein $K(t) = \int e^{-xt} \mu(dt)$

Si $t \mapsto (\Delta_h K * L)(t)$ est dérivable

$$f(t) = f(0) + \underbrace{\int_0^t f'(s)\,ds}_{(1 * f')_t} \Rightarrow \Delta_h K * L = (\Delta_h K * L)(0) + \left(1 * (\Delta_h K * L)'\right)$$

$* K$

$$\underbrace{(\Delta_h K * L)}_{\Delta_h K} \underbrace{* K}_{1} = (\Delta_h K * L)(0)\underbrace{(1 * K)}_{K} + 1 * \left((\Delta_h K * L)'\right) * K$$

3) $$\mathbb{E}_t[X_{t+h}] = (\Delta_h K * W)_t = (\Delta_h K * L)(0)\underbrace{(K * dW)_t}_{X} + \left((\Delta_h K * L)' * \underbrace{(K * dW)}_{X}\right)_t =$$

$$= (\Delta_h K * L)(0)\, X_t + \int_0^t (\Delta_h K * L)'(t-s)\, X_s\,ds$$

4) $$[X_{t+h} \mid \mathcal{F}_t] \sim \mathcal{N}\left(\mathbb{E}_t[X_{t+h}], \int_t^{t+h} K(u)^2\,du\right)$$

Donc $X$ est Markovien ssi $\mathbb{E}_t[X_{t+h}]$ n'est une fct que de $X_t$ ssi

$(\Delta_h K * L)' = 0$

Exemple 1) MB $X_t = W_t$ i.e. $K(t) = 1 = (\Delta_h K)(t)$

$(\Delta_h K * L)(t) = (K * L)(t) \Rightarrow (\Delta_h K * L)' \equiv 0$

2) OU $K(t) = e^{-\lambda t}$ $\Delta_h K(t) = e^{-\lambda h} e^{-\lambda t}$

$$(\Delta_h K * L)(t) = e^{-\lambda t}(K * L)(t) = e^{-\lambda h} \Rightarrow (\Delta_h K * L)' \equiv 0, \quad \mathbb{E}_t[X_{t+h}] = e^{-\lambda h} X_t$$

Exo Regarder un cas fractionnaire. Trouver $L$. M.q. le deuxieme terme ne s'annule pas

7) $K \in C^1([0,T]) \Rightarrow X$ est une semimartingale

$$X_t = \int_0^t K(t-s)\,dW_s = (K * dW)_t$$

$$K(t) = K(0) + (1 * K')(t)$$

$X_t = K(0)(1 * dW)_t + 1*(K' * dW)_t$

Fubini ↑ ; ↖ a du sens car $K' \in C \to$ bornée $\to$ dans $L^2$.

$$\boxed{dX_t = K(0)\, dW_t + \left(\int_0^t K'(t-s)\, dW_s\right) dt} \to \text{une semimartingale}$$

↖ il faut que $K' \in L^2$

↑ il faut que $K(0) < +\infty$

$K(t) = t^{H-\frac{1}{2}}$ $H \in (0,1)$ Si $H < \frac{1}{2} \to K(0) = +\infty$

$\sum_j (X_{t_{j+1}} - X_{t_j})^2 \to \infty \Rightarrow$ ne peut pas être une semimartingale

Si $H > \frac{1}{2} \to K(0) = 0$. Mais $K'(t) = t^{H-\frac{3}{2}}$ $H \in (\frac{1}{2}, 1)$ $K' \notin L^2 \to$

$\to \langle X \rangle \equiv 0$, mais $X$ n'est pas à variation finie. $\to$ pas une semimart.

On a considéré résolvente du prémier type : $K * X = f \to X = (L * f)'$

$$1 = (K * L)(t) = \int_0^t K(t-s)\, L(ds)$$

Resolvente du seconde type

$t_i = \frac{iT}{n}$ $\quad (K(t_i, t_j))_{i,j=0}^{n-1} := K^n \in \mathbb{R}^{n \times n}$ $\quad$ Volterra $= \begin{bmatrix} 0 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 0 \end{bmatrix}$

La résolvente du 1re type n'existe pas toujours ⇝

⇝ régularisation $\varepsilon X + K * X = f$ ← Fredholm

⇓ discretisation

système linéaire $\quad \underbrace{(I_n + \frac{1}{n} K^n)}_{\in \mathbb{R}^{n\times n}} \underbrace{\Phi^n}_{\in \mathbb{R}^n} = \underbrace{f^n}_{\in \mathbb{R}^n}$

⇓ inversible

solution

⇓ $n \to \infty$

$X$

1er exemple: $K^n$ symétrique, semi-def $\geq 0$.

$$\Phi^n = (I_n + \tfrac{1}{n} K^n)^{-1} f^n$$

2em exemple: $K^n$ Volterra $\to I_n + \frac{1}{n} K^n = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & 1 \end{bmatrix} \to$ inversible

$$\underset{n \to \infty}{\leadsto} \Phi = (Id + K)^{-1} f$$

$R_T = K + K \star R_T$

résolvente du seconde type

$$R_T(t,s) = K(t,s) + \int_0^T K(t,u) R_T(u,s)\,du$$

$K^{op}$ symétrique : $K(t,s) = K(s,t)$

Semi-def. positif : $\langle K^n f^n, f^n \rangle \geq 0 \underset{n\to\infty}{\rightsquigarrow} \langle f, K^{op} f \rangle_{\mathcal{L}^2}$

Pickard $\quad R^{n+1} = K + K \star R^n$

$R^0 = K \qquad R^1 = K + K \star K \qquad R^2 = K + K\star K + K \star K \star K \quad \dots$

$$R = \sum_{n \geq 1} K^{\star n}$$

Si $K = c \to K^{\star n} = \frac{(ct)^n}{n!}$

Remarque $R(t)$ - analogue de $e^{-\gamma t}$ utilisée pour résoudre l'équation O.U

$$X_t = g_0(t) \underbrace{- \lambda \int_0^t K(t,s) X_s\,ds}_{-\lambda (K^{op} X)(t)} + \int_0^t K(t,s) \sigma\, dW_s$$

$$X = g_0 - \lambda K^{op} X + K^{op} \sigma . dW$$

$$(Id + \lambda K^{op}) X = g_0 + K^{op} \sigma . dW$$

$$X = (Id + \lambda K^{op})^{-1} [g_0 + K^{op} \sigma . dW]$$

$$X_t = g_0(t) + (R_T \star g_0)(t) + \frac{1}{\lambda} \int_0^t R_T(t,s) \sigma\, dW_s \ - \text{gaussien Volterra}$$

Comment arriver à calcul pour $\mathbb{E}[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t]$ ?

$$r_t = a X_t^2 + b(t)$$

$\mathbb{E}\, e^{-\int X_s^2 ds}$ ? $\qquad \int_t^T X_s^2 ds \approx \frac{T-t}{n} \sum_i X_{t_i}^2 = \frac{1}{n} X^n{}^T X^n$

on peut calculer comme pour $\chi^2$ (en complét. le carré)

$X^n = (X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \sim \mathcal{N}(\cdot, \cdot)$

# Modèles de vol stoch



## Stein-Stein (1990)

$$\begin{cases} dS_t = X_t S_t dB_t \\ dX_t = (a + bX_t)dt + \sigma dW_t \end{cases} \qquad d\langle W, B\rangle_t = \rho\, dt$$

$$\boxed{\rho = 0}$$

$$\mathbb{E}[e^{u \cdot \log S_T} | \mathcal{F}_t] = \text{explicite}$$

## Heston (1993)

$\nearrow$ CIR (1987)

$\searrow$ $V_t := X_t^2$

$$dV_t = 2X_t dX_t + d\langle X\rangle_t = (2b \underbrace{X_t^2}_{V_t} + c^2)dt + 2c \underbrace{X_t}_{\sqrt{V_t}\cdot \operatorname{sign}(X_t)} dW_t \rightsquigarrow \text{CIR}$$

$$\begin{cases} dS_t = S_t \sqrt{V_t} dB_t \\ dV_t = (\vartheta - \varkappa V_t)dt + \eta\sqrt{V_t} dW_t \end{cases} \qquad d\langle B, W\rangle = \rho\, dt$$

$$t = \inf\{s : V_s = 0\} \qquad V_{t+h} \simeq V_t + (\vartheta - \varkappa \cancel{V_t}^{\,0})h + \eta\sqrt{\cancel{V_t}^{\,0}}\,\Delta_h W \approx \vartheta h$$

$$\mathbb{E}[e^{u \cdot \log S_T} | \mathcal{F}_t] = \exp\{\varphi(T-t) + \psi(T-t)V_t + \chi(T-t)\log S_t\} \quad (*)$$

fonct. à déterminer

**Valeur terminale** $\quad e^{u \cdot \log S_T} = e^{\varphi(0) + \psi(0)V_T + \chi(0)\log S_0}$

Donc $\boxed{\begin{array}{l} \varphi(0) = \psi(0) = 0 \\ \chi(0) = u \end{array}}$

Pour $t < T$ $\quad M_t = e^{\varphi(T-t) + \psi(T-t)V_t + \chi(T-t)\log S_t}$

Alors $M_T = e^{u \cdot \log S_T}$

Donc si $(*)$ est vrai, $M_t = \mathbb{E}_t[M_T]$

Dynamique de $M$ $\quad (\varphi, \psi, \chi \in C^1)$

$$U_t = \log M_t = \varphi(T-t) + \psi(T-t)V_t + \chi(T-t)\log S_t$$

$$dM_t = M_t\left[dU_t + \tfrac{1}{2}d\langle U\rangle_t\right]$$

$$d\log S_t = -\frac{V_t}{2}dt + \sqrt{V_t}\,dB_t$$



$$dU_t = \left[\begin{array}{l} -\varphi' - \psi' V_t - \chi' \log S_t + \\ + \psi(\theta - \varkappa V_t) - \chi \cdot \frac{V_t}{2} \end{array}\right] dt + \psi\eta\sqrt{V_t}\,dW_t + \chi\sqrt{V_t}\,dB_t$$

$$d\langle U\rangle_t = V\left[\psi^2\eta^2 + \chi^2 + 2\rho\psi\chi\eta\right]dt$$

Donc partie $dt$ de $M$ :

$$0 = -\varphi' + \psi\theta + V\left[-\psi' - \varkappa\psi + \frac{\psi^2\eta^2}{2} + \rho\psi\chi\eta + \frac{1}{2}(\chi^2 - \chi)\right] - \log S \cdot \chi'$$

Donc $\chi' = 0$ D'où $\chi(t) - \chi(0) = u$

$$\begin{cases} \psi' = \frac{1}{2}\eta^2\psi^2 + [\rho\eta u - \varkappa]\psi + \frac{1}{2}(u^2 - u) \\ \psi(0) = 0 \\ \varphi' = \psi \cdot \theta \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

$$(*) : \quad \mathbb{E}\left[e^{u \cdot \log\frac{S_T}{S_t}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = e^{\varphi(T-t) + \psi(T-t)V_t}$$

**Théorème** S'il existe $\varphi, \psi \in C^1$ t.q. $(*)$ est vrai alors $(\varphi, \psi)$ solution de $(R)$.

On veut le résultat inverse !

**Théorème 2** Supposons qu'il existe $\varphi, \psi \in C^1$ les solutions de $(R)$ (1)
On définit $M_t = e^{\varphi(T-t) + \psi(T-t)V_t + u\log S_t}$. Alors $M_t$ est une martingale locale. Si $M$ est une vraie martingale alors (2) $(*)$ est vérifiée.

(1)
$$\begin{cases} \dot\psi = a\psi^2 + b\psi = \underbrace{(\psi - r_1)(\psi - r_2)} \\ \psi(0) = 0 \end{cases} \qquad \tilde\psi = \psi + r_1$$

Si $\mathrm{Re}(u) \in [0,1]$ $\exists$ sol. $(\psi, \varphi)$ explicite, $\mathrm{Re}(\varphi) \leq 0$ ; $\underset{\leq 0}{\text{sol.}}$

(2)
$$|M_t| = \left|e^{\varphi + \psi \cdot V + u \cdot \log S}\right| = e^{\underbrace{\mathrm{Re}\,\varphi}_{\leq 0} + \underbrace{\mathrm{Re}(\psi)}_{\leq 0} \cdot \underbrace{V}_{\geq 0}} \leq 1$$

$u \in i\mathbb{R}$

# Équation de Riccati : cas fractionnaire



$$dS_t = S_t\sqrt{V_t}\,dB_t$$
$$dV_t = V_0 + \int_0^t K(t-s)\,\theta\,V_s\,ds + \int_0^t K(t-s)\,\eta\sqrt{V_s}\,dW_s$$

<u>But</u> $\mathbb{E}\left[e^{u\log\frac{S_T}{S_t}}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = \exp\left\{\varphi(T-t) + \psi(T-t)V_t\right\}$

Ansatz. Ne marche pas pour les modèle non-Markovien

Trouver un bon ansatz :

- Pas markovien
- Coïncide avec l'ansatz standard dans le cas markovien.

Heston : $d\tilde{V}_t = (\theta - \lambda\tilde{V}_t)\,dt + \eta\sqrt{\tilde{V}_t}\,dW_t$

$$\tilde{\psi}' = -\lambda\tilde{\psi} + F(\tilde{\psi})$$
$$F(\tilde{\psi}) = \frac{\eta^2}{2}\tilde{\psi}^2 + u\rho\tilde{\psi} + \frac{u^2-u}{2}$$
$$\tilde{\varphi}(t) = \theta\int_0^t \tilde{\psi}(s)\,ds$$

$$\tilde{q}_t(s) = \mathbb{E}[\tilde{V}_s\,|\,\mathcal{F}_t] = e^{-\lambda(s-t)}\tilde{V}_t + \int_t^s e^{-\lambda(s-u)}\theta\,du$$

$$\tilde{\psi}(t) = \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}F(\psi(s))\,ds$$

$$\tilde{V}_s = e^{-\lambda(s-t)}\tilde{V}_t + \int_t^s e^{-\lambda(t-u)}\theta\,du + \int_t^s e^{-\lambda(s-u)}\cdot\eta\sqrt{\tilde{V}_u}\,dW_u$$

$$\tilde{\varphi}(T-t) + \tilde{\psi}(T-t)\tilde{V}_t = \int_0^{T-t} e^{-\lambda(T-t-s)}\tilde{V}_t\,F(\psi(s))\,ds + \tilde{\varphi}(T-t) =$$
$$= \int_t^T \tilde{q}_t(s)\cdot F(\psi(T-s))\cdot ds$$

$$\mathbb{E}\left[e^{u\log\frac{\tilde{S}_T}{\tilde{S}_t}}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = \exp\left\{\int_t^T F(\psi(T-s))\cdot\tilde{q}_t(s)\,ds\right\}$$

Ansatz général

$$\mathbb{E}\left[e^{u\cdot\log\frac{S_T}{S_t}}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = \exp\left\{\int_t^T K(T-s)\,g_t(s)\,ds\right\} \quad (*)$$

Volterra Heston : $\begin{cases} dS_t = S_t\sqrt{V_t}\,dB_t \\ V_t = V_0 + \int_0^t K(t-s)\,\theta\,ds + \int_0^t K(t-s)\,\eta\sqrt{V_s}\,dW_s \end{cases}$

$$g_t(s) = \mathbb{E}[V_s\,|\,\mathcal{F}_t] = V_0 + \int_0^t K(s-r)\,\eta\sqrt{V_r}\,dW_r$$

À $s$ fixé : $dg_t(s) = K(s-t)\,\eta\sqrt{V_t}\,dW_t$

On suppose que (*) est vrai

$$U_t = \int_t^T \chi(T-s)\, g_t(s)\, ds + u \log S_t$$

$$M_t = \exp\{U_t\} \qquad M_T = \exp\{u \log S_T\}$$

$$\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[e^{u\cdot \log S_T}|\mathcal{F}_t] \overset{(*)}{=} M_t$$ Donc $M_t$ martingale

Partie en dt de M est 0 :

$$dM_t = M_t\left(dU_t + \tfrac{1}{2} d\langle U\rangle_t\right)$$

$$dU_t = -\chi(T-t)\underbrace{g_t(t)}_{V_t}dt + \underbrace{\left(\int_t^T \chi(T-s)\kappa(s-t)\,ds\right)\eta\sqrt{V_t}\,dW_t}_{(\kappa*\chi)(T-t)\eta\sqrt{V_t}\,dW_t} - \frac{u}{2}V_t\,dt + \underbrace{u\sqrt{V_t}\,dB_t}$$

$$d\langle U\rangle_t = \left[\eta^2(\kappa*\chi)^2(T-t) + u^2 + 2u\rho\eta(\kappa*\chi)(T-t)\right]V_t\,dt$$

Drift M = 0 ssi

$$\chi = \frac{\eta^2}{2}(\kappa*\chi)^2 + u\rho\eta(\kappa*\chi) + \frac{u^2-u}{2}$$

$$\psi(t) = (\kappa*\chi)(t)$$

$$\Downarrow$$

$$\chi = \frac{\eta^2}{2}\psi(t)^2 + u\rho\eta\psi(t) + \frac{u^2-u}{2} = F(\psi)$$

$$\Downarrow\ \kappa * \ldots$$

$$\begin{cases} \psi(t) = \int_0^t \kappa(t-s)F(\psi(s))\,ds \\ F(\psi) = \frac{\eta^2}{2}\psi^2 + \rho u\eta\psi + \frac{u^2-u}{2} \end{cases}$$ – Riccati fractionnaire

$$\psi = g/f \qquad g = f\psi$$

$$g' = f'\psi + f\psi'$$

$$g' - f'\psi = \underbrace{f\frac{\eta^2}{2}\psi^2}_{\frac{\eta^2}{2}g\cdot\psi} + (\rho\eta u - \lambda)\underbrace{f\psi}_{g} + \frac{1}{2}(u^2-u)f$$

$$\begin{cases} g' = \frac{1}{2}(u^2-u) + (\rho\eta u - \lambda)g \\ f' = -\frac{\eta^2}{2}g \end{cases}$$ - système linéaire

Il existe la formule explicite parce qu'il y a un carré de Gaussien derrier.