

## 1 Convergence p.s, en probabilité et dans $L^p$

### Exercice 1 : Liens entre les différents types de convergence

1. Montrer que si  $1 \leq q \leq p$  alors la convergence dans  $L^p$  implique la convergence dans  $L^q$ .
2. Montrer que la convergence dans  $L^p$  avec  $p \geq 1$  implique la convergence en probabilité.
3. Montrer que la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.
4. Montrer que la réciproque des deux propositions précédentes est fausse en considérant une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de v.a réelles indépendantes telles que pour tout entier  $n$ ,  $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$  et  $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$ .
5. Montrer que la convergence dans  $L^p$  n'implique pas la convergence presque sûre en considérant le contre-exemple précédent mais avec  $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$  et  $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ .
6. Montrer que la convergence p.s n'implique pas la convergence dans  $L^p$  en considérant le contre-exemple précédent mais avec  $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$  et  $\mathbb{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$ .
7. Cependant, montrer que la convergence p.s accompagnée d'une hypothèse de domination que l'on précisera implique la convergence dans  $L^p$ . Quel est le nom de ce théorème ?

Remarque : La convergence en probabilité ainsi que la convergence dans  $L^p$  implique la convergence presque-sûre d'une sous-suite.

La convergence en probabilité plus une hypothèse d'uniforme intégrabilité implique la convergence dans  $L^p$ .

### Exercice 2 : Convergence d'un estimateur

Soit  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a i.i.d de loi uniforme sur  $[0, \theta]$  avec  $\theta \in \mathbb{R}_+$ , un paramètre inconnu que l'on cherche à estimer. On s'intéresse à la consistance de l'estimateur défini par :

$$X_n = \max(U_1, \dots, U_n).$$

1. Calculer la fonction de répartition de  $X_n$ .
2. Montrer que

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{p.s} \theta.$$

On dit que l'estimateur est consistant.

3. Montrer que la convergence a lieu aussi dans  $L^p$  pour n'importe quel  $p \geq 1$ .

Remarque :  $X_n$  est l'estimateur du maximum de vraisemblance

### Exercice 3 : Record de crue d'une rivière.

On s'intéresse au record de hauteur d'inondation d'une rivière que l'on modélise de la façon suivante. On considère une suite de v.a réelles  $(H_n)_{n \in \mathbb{N}}$  i.i.d de loi exponentielle de paramètre 1 ( $H_n$  représentant la hauteur d'inondation en mètres lors de la  $n$ -ème crue). On s'intéresse au record de crue, c'est à dire à

$$R_n = \max(H_1, \dots, H_n).$$

1. Calculer la fonction de répartition de  $R_n$ .
2. Montrer la convergence en probabilité suivante :

$$\frac{R_n}{\log n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} 1.$$

Remarque : on peut en fait montrer qu'il y a convergence p.s et ce même si on remplace l'hypothèse  $H_n \sim \mathcal{E}(1)$  par  $\mathbb{P}(H_n \geq x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} e^{-x}$ .

## 2 Convergence dans $L^2$ et LGN

### Exercice 4 : CNS de la convergence dans $L^2$ vers une constante

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires de carré intégrable, et  $a \in \mathbb{R}$  une constante. Montrer que  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} a$  si et seulement si  $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow a$  et  $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0$ .

Indication : utiliser une décomposition de  $\mathbb{E}[(X_n - a)^2]$  faisant apparaître  $\mathbb{E}[X_n]$  et  $\text{Var}(X_n)$ .

### Exercice 5 : Convergence dans $L^2$ de la moyenne de Bernoulli

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a i.i.d de loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ .

1. En utilisant l'exercice 4, montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} p.$$

2. On suppose maintenant que les variables  $X_i$  ne sont plus indépendantes mais seulement deux à deux indépendantes. De plus, on suppose que leurs paramètres  $p_i$  peuvent différer. En utilisant l'exercice 4, donner une CNS pour que la suite  $\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $L^2$  vers une variable aléatoire constante que l'on précisera.

### Exercice 6 : Loi (faible) des grands nombres

Montrer la *loi faible des grands nombres* : Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de v.a i.i.d dans  $L^2$ , alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X_i].$$

Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 4.

Exercice 1 : Liens entre les différents types de convergence

1. Montrer que si  $1 \leq q \leq p$  alors la convergence dans  $L^p$  implique la convergence dans  $L^q$ .
2. Montrer que la convergence dans  $L^p$  avec  $p \geq 1$  implique la convergence en probabilité.
3. Montrer que la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité.
4. Montrer que la réciproque des deux propositions précédentes est fausse en considérant une suite  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de v.a réelles indépendantes telles que pour tout entier  $n$ ,  $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$  et  $\mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{n}$ .
5. Montrer que la convergence dans  $L^p$  n'implique pas la convergence presque sûre en considérant le contre-exemple précédent mais avec  $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$  et  $\mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ .
6. Montrer que la convergence p.s n'implique pas la convergence dans  $L^p$  en considérant le contre-exemple précédent mais avec  $\mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$  et  $\mathbb{P}(X_n = n^2) = \frac{1}{n^2}$ .
7. Cependant, montrer que la convergence p.s accompagnée d'une hypothèse de domination que l'on précisera implique la convergence dans  $L^p$ . Quel est le nom de ce théorème ?

Rappelle :

$$X_n \xrightarrow{L^p} X \Leftrightarrow \|X_n - X\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

et

$$\|X\|_p \Rightarrow E[|X|^p]^{1/p}$$

S:  $1 \leq q \leq p$  alors  $\|X\|_q \leq \|X\|_p$   
 soit  $L^p \subset L^q$

1) But:  $L^p \Rightarrow L^q$  si  $1 \leq q \leq p$ 

$X_n \xrightarrow{L^p} X$  alors  $0 \leq \|X_n - X\|_q \leq \|X_n - X\|_p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$   
 donc,  $X_n \xrightarrow{L^q} X$

et la convergence en  $L^p$  implique la convergence en  $L^q$  si  $q \leq p$

2) Mq  $L^p \rightarrow \mathbb{P}$  pour  $p \geq 1$ 

Rappel:  $X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$

Soit  $\varepsilon > 0$ 

$0 < \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = \mathbb{P}(|X_n - X|^p > \varepsilon^p) \stackrel{\text{Markov}}{\leq} \frac{E[|X_n - X|^p]}{\varepsilon^p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  car  $X_n \xrightarrow{L^p} X$

Donc,  $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  et  $X_n \xrightarrow{L^p} X$

3) P.S  $\Rightarrow \mathbb{P}$ 

Supposons que  $X_n \xrightarrow{\text{P.S.}} X$

Rappel:  $X_n \xrightarrow{\text{P.S.}} X \Rightarrow \mathbb{P}(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n = X) = 1$  ou  $\mathbb{P}(w: X_n(w) = X(w), \forall w \in \Omega) = 1$

Soit  $\varepsilon > 0$ 

$$\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = E[\mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}]$$

Comme  $X_n \xrightarrow{\text{P.S.}} X$ ,  $\mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon} \xrightarrow{\text{P.S.}} 0$

et la suite  $(\mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon})$  est majorée par 1

Par le théorème de convergence dominée,  $E[\mathbb{1}_{|X_n - X| > \varepsilon}] \rightarrow E[0] = 0$

donc si  $\mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  donc  $X_n \xrightarrow{L^p} X$

## Méthode 2: (Fatou)

$$X_n = \mathbb{1}_{|X_n - x| > \varepsilon}$$

$$1 = \underbrace{\mathbb{P}(\liminf_{n \rightarrow \infty} |X_n - x| \leq \varepsilon)}_{X_n \xrightarrow{\text{PS}} x} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - x| \leq \varepsilon) \leq 1$$

Donc  $\liminf_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|X_n - x| \leq \varepsilon) = 1$

$$\Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} x$$

Exercice 4 : CNS de la convergence dans  $L^2$  vers une constante

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de variables aléatoires de carré intégrable, et  $a \in \mathbb{R}$  une constante. Montrer que  $X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} a$  si et seulement si  $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow a$  et  $\text{Var}(X_n) \rightarrow 0$ .

Indication : utiliser une décomposition de  $\mathbb{E}[(X_n - a)^2]$  faisant apparaître  $\mathbb{E}[X_n]$  et  $\text{Var}(X_n)$ .

Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , v.a dans  $L^2$

Rappel : norme  $\|X\|_{L^2} = \|X\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}[|X|^2]}$

$$X_n \xrightarrow{L^2} X \iff \mathbb{E}[|X_n - X|^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

CNS:

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} a \iff \begin{cases} \mathbb{E}[X_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \\ \text{Var}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0 \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[|X_n - a|^2] \leftarrow \text{faire apparaître Variance et espérance}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X_n - a|^2] &= \mathbb{E}\left[\left(X_n - \mathbb{E}[X_n] + (\mathbb{E}[X_n] - a)\right)^2\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\left(X_n - \mathbb{E}[X_n]\right)^2\right] + \mathbb{E}\left[\left(\mathbb{E}[X_n] - a\right)^2\right] + 2\mathbb{E}\left[\left(X_n - \mathbb{E}[X_n]\right)(\mathbb{E}[X_n] - a)\right] \\ &= \text{Var}(X_n) + (\mathbb{E}[X_n] - a)^2 \end{aligned}$$

$$\text{CC1}^\circ: \mathbb{E}[|X_n - a|^2] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ssi} \quad \text{Var}(X_n) + (\mathbb{E}[X_n] - a)^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{ssi} \quad \text{Var}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a$$

$$\text{i.e } X_n \xrightarrow{L^2} a \iff \begin{cases} \text{Var}(X_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\ \mathbb{E}[X_n] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} a \end{cases}$$

**Exercice 5 :** Convergence dans  $L^2$  de la moyenne de Bernoulli  
Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a i.i.d de loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$ .

1. En utilisant l'exercice 4, montrer que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} p.$$

2. On suppose maintenant que les variables  $X_i$  ne sont plus indépendantes mais seulement deux à deux indépendantes. De plus, on suppose que leurs paramètres  $p_i$  peuvent différer. En utilisant l'exercice 4, donner une CNS pour que la suite  $\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $L^2$  vers une variable aléatoire constante que l'on précisera.

### Exo 5

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  suite de v.a i.i.d  $X_n \sim B(p)$   
 $p \in [0, 1]$  et  $p\delta_1 + (1-p)\delta_0 = 1$

$$E[X] = p$$

$$\text{But: } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} E[X_i]$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} E[\bar{X}_n] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E[X_i] \\ V(\bar{X}_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0 \end{cases}$$

$$E[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = E[X_i] \quad \text{car les } X_i \text{ sont identiquement distribuées}$$

$$\text{Var}(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \underbrace{\text{Var}(X_i)}_{=: \text{Var}(X_i)} = \frac{1}{n} \underbrace{\text{Var}(X_i)}_{\substack{\leq 0 \\ \text{car } X_i \in L^2}} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$$\text{Par l'exercice 4, } \bar{X}_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} p$$

2) On ne suppose plus que les  $X_i$  sont i.i.d.

On suppose que les  $X_i$  sont 2 à 2 indépendants  
et  $X_i \sim B(p_i)$ ,  $p_i \in [0, 1]$

$$E[\bar{X}_n] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E[X_i] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$$

$$\begin{aligned} V(\bar{X}_n) &= \text{cov}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^n \text{cov}(X_i, X_j) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \underbrace{\text{cov}(X_i, X_i)}_{\text{Var}(X_i)} + \frac{2}{n^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} \text{cov}(X_i, X_j) \end{aligned}$$

Comme les  $X_i$  sont deux à deux indépendants, on a  $\text{cov}(X_i, X_j) = 0$

$$\text{donc } V(\bar{X}_n) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n V(X_i) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n p_i(1-p_i)$$

$\forall i \in \mathbb{N}^*, p_i \in [0, 1]$

$$|\nu(\bar{x}_n)| \leq \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n |\rho_i| |1 - \rho_i| \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0$$

$\leq 1$

$$\text{donc } \nu(\bar{x}_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0$$

En utilisant l'exercice 4,  $\bar{x}_n$  converge dans  $L^2$  ssi la suite

$$\left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i \right)_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ converge}$$

Dans ce cas,  $\bar{x}_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{L^2} \ell$  où  $\ell = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \rho_i$

#### Exercice 6 : Loi (faible) des grands nombres

Montrer la loi faible des grands nombres : Si  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de v.a i.i.d dans  $L^2$ , alors :

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} E[X_i].$$

Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 4.

#### Exo 6

$(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de v.a i.i.d dans  $L^2$

$$\text{alors, } \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{P} E[X_i]$$

$$\text{On va montrer que } \bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{L^2} E[X_i]$$

Comme  $CV L^2 \Rightarrow CV P$ , on aura montré que la CV précédente a lieu au sens IP

$$E[\bar{X}_n] = E[X_1] \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} E[X_1]$$

les  $X_i$  sont i.i.d

$$\nu(\bar{X}_n) \underset{i.i.d.}{=} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \nu(X_i) = \underbrace{\frac{1}{n} \nu(X_1)}_{\hookrightarrow \infty} \xrightarrow{} 0 \text{ car } X_i \in L^2$$

et l'ex 4 permet de conclure que  $\bar{x}_n \rightarrow E[x_i]$