TD Sélection contraire

Exercice 1 . Vente de vin.

On a :

1. Utilité de l'achat d'une bouteille : $u = \theta q - p$

avec q : qualité

p : prix

θ : paramètre de sophistication ($\theta > 0$ et $\theta_H > \theta_B$)

$\underline{u} = 0$

$C(q)$: fonction de coût du producteur, convexe et inversible. ($C' > 0$ et $C'' > 0$)

1) Le producteur observe le type de consommateur

On note $i = H, B$

$$\text{Max } \Pi = P_i - C(q_i)$$

$$\text{s.c } u \geq \underline{u} \quad (=) \quad \theta_i q_i - P_i \geq 0 \qquad (CP)$$

On montre facilement que la CP est saturée :

On note $G_1 = \theta_i q_i - P_i \geq 0$

$$\left.\begin{array}{ll} \frac{\partial \Pi}{\partial p} > 0 \quad \text{et} & \frac{\partial G_1}{\partial p} < 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial q} < 0 \quad \text{et} & \frac{\partial G_1}{\partial q} > 0 \end{array}\right\} \text{CP saturée}$$

Donc $P_i = \theta q_i$

Le programme : $\text{Max } \Pi = P_i - C(q_i)$

$\text{sc } \theta_i q_i = P_i$

On max. par rapport à q_i :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0 \iff \theta_i - C'(q_i) = 0$$

$$\iff \theta_i = C'(q_i)$$

$$\iff q_i^* = C'^{-1}(\theta_i)$$

$$\iff P_i^* = \theta_i \cdot C'^{-1}(\theta_i)$$

Puisqu'on a $\theta_H > \theta_B$, on aura $q_H > q_B$ et $P_H > P_B$

Soit $\begin{cases} q_H^* = C'^{-1}(\theta_H) \\ q_B^* = C'^{-1}(\theta_B) \end{cases}$ et $\begin{array}{l} P_H^* = \theta_H\, C'^{-1}(\theta_H) \\ P_B^* = \theta_B \cdot C'^{-1}(\theta_B) \end{array}$ (avec $P_H^* > P_B^*$)

(un peu abstrait car on a pas spécifié $C(q_i)$)

 Sélection ②

2) Problème de sélection adverse.

↳ les θ_H n'achèteront pas les bouteilles q_H^* mais les bouteilles q_B^*. Pourquoi ? :

$$U_{HH} = \theta_H \cdot q_H^* - p_H^* = \theta_H \cdot C'(\theta_H)^{-1} - \theta_H \cdot C'(\theta_H)^{-1} = 0$$

$$U_{HB} = \theta_H \cdot q_B^* - p_B^* = \theta_H \cdot C'(\theta_B)^{-1} - \theta_B \cdot C'(\theta_B)^{-1} > 0$$

(↳ car $\theta_B \cdot C'(\theta_B)^{-1} - \theta_B \, C'(\theta_B)^{-1} = 0$ et $\theta_H > \theta_B$ -> donc ...)

↳ $U_{HB} > U_{HH}$

=> intérêt à consommer des bouteilles de qualité B.

Ce qui implique une perte de surplus pour le vendeur -> pas optimal.

Donc menus différenciés.

(Note : C'est que le H qui va dévier, l'autre non, pas d'intérêt.)

3. Asymétrie d'info.

Le producteur ne peut pas observer le type de l'agent.

=> Il faut proposer un menu tel que les consommateurs révèlent leur type automatiquement (choix naturel du bien qui leur correspond.

Comment calculer ce contrat ?

Le type n'étant pas connu, le producteur connait seulement la probabilité qu'un consommateur soit tel ou tel type. Il va donc maximiser son profit de manière indépendante sur les deux segments de consommateurs compte tenu des proba :

$$\text{Max } \pi \left(P_B - C(q_B)\right) + (1-\pi)\left(P_H - C(q_H)\right)$$

π : proba qu'un conso. soit non connaisseur (B)

$1-\pi$: " " connaisseur (H)

$P_B - C(q_B)$ recette lorsqu'il vend une unité de bien de "Basse qualité" (prix - coût)

$P_H - C(q_H)$: recette lorsqu'il vend une unité bien de "Haute qualité" (prix - coût).

Pour s'assurer que le contrat proposé aux deux types soit accepté (i.e. achat du bien), on ajoute des contraintes de participation pour les 2 types :

(CP_B) : $\theta_B q_B - P_B \geq 0$

(CP_H) : $\theta_H q_H - P_H \geq 0$

Pour s'assurer que chaque type choisira le bien qui lui correspond, on ajoute des contraintes d'incitation pour les 2 types :

CI_B : $\theta_B q_B - P_B \geq \theta_B q_H - P_H$

CI_H : $\theta_H q_H - P_H \geq \theta_H q_B - P_B$

Soit le programme :

$$\text{Max } \pi\left(P_B - C(q_B)\right) + (1-\pi)\left(P_H - C(q_H)\right)$$

Sc :

$$\theta_B q_B - P_B \geq 0 \quad (CP_B)$$

$$\theta_H q_H - P_H \geq 0 \quad (CP_H)$$

$$\theta_B q_B - P_B \geq \theta_B q_H - P_H \quad (CI_B)$$

$$\theta_H q_H - P_H \geq \theta_H q_B - P_B \quad (CI_H)$$

- Simplification du programme :

+ La CI_B peut être mise de côté : on a vu en question 1 que même lorsqu'on ne prend pas en compte l'asymétrie d'information, le consommateur "non-connaisseur" n'a aucun intérêt à mentir sur son type et ne pose donc aucun pb de sélection adverse.

Ainsi on met de côté la contrainte CI_B.
(on vérifiera ça en fin d'exercice)
~~[illegible]~~

+ On peut montrer que si CP_B et CI_H sont satisfaites alors CP_H l'est également, on pourra ainsi également mettre cette contrainte de côté.

si CP_B satisfaite $\Leftrightarrow \theta_B q_B - P_B \geq 0$

si CI_H " $\Leftrightarrow \theta_H q_H - P_H \geq \theta_H q_B - P_B$

Comme $\theta_H > \theta_B$, on a :

$$\theta_H q_B - P_B > \theta_B q_B - P_B$$

En combinant ces 3 inéquations on montre que si CP_B et CI_H sont satisfaites alors CP_H l'est aussi :

$$\theta_H q_H - P_H \geq \theta_H q_B - P_H \geq \theta_B q_B - P_B \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \theta_H q_H - P_H > 0$$

Le programme d'optimisation devient :

$$\text{Max} \quad \pi(p_B - C(q_B)) + (1-\pi)(p_H - C(q_H))$$

$$\text{s.c} \qquad \theta_B q_B - p_B \geq 0 \qquad (CP_B)$$

$$\theta_H q_H - p_H \geq \theta_H q_B - p_B \qquad (CI_H)$$

Est-ce que les contraintes sont saturées ?

+ CP_B saturée ?

Posons $G_1(p_B, q_B) = \theta_B q_B - p_B$ et $\Pi(p_B, q_B, p_H, q_H) =$

$$\pi(p_B - C(q_H)) + (1-\pi)(p_B - C(q_B))$$

On a : $\dfrac{\partial \Pi}{\partial p_B} > 0$ et $\dfrac{\partial G_1}{\partial p_B} < 0$

Ainsi que :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial q_B} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G_1}{\partial q_B} > 0$$

→ CP saturée : $\theta_B q_B - p_B = 0$

[autre possibilité pour vérifier si CP saturée ? :]

On regarde le cas inverse : $\theta_B q_B - P_B > 0$

On aurait $\underbrace{\theta_H q_H - P_H \geq \theta_H q_B - P_B}_{CI_H} > \theta_B q_B - P_B > 0$

car $\theta_H > \theta_B$

CP non saturée

On voit que dans cette inégalité, le producteur a intérêt à augmenter P_B, ce n'est donc pas un optimum.

→ le principal va faire augmenter P_B jusqu'à ce que $\theta_B q_B - P_B = 0$ → CP saturée

+ CI_{H} saturée ?

Posons $G_2(p_H, q_H) = \theta_H q_H - p_H - \overline{\alpha}$

où $\overline{\alpha} = \theta_H . q_B - p_B$.

On fixe q_B et p_B car on s'intéresse à CI_H et donc les variables de decision sont q_H et P_H Selection (5)

car on veut qu'il choisissent le bien de Haute qualité.

On a :
$$\frac{\partial \pi}{\partial P_H} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G_2}{\partial P_H} < 0$$

et :
$$\frac{\partial \pi}{\partial q_H} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G_2}{\partial q_H} > 0$$

On a donc : CI_H saturée :

$$\theta_H q_H - P_H = \theta_H q_B - P_B$$

Autre possibilité pour montrer CI_H saturée :

- On prend le cas inverse : $\theta_H q_H - P_H > \theta_H q_B - P_B$

On aurait : $\underbrace{\theta_H q_H - P_H > \theta_H q_B - P_B}_{CI_H} > \underbrace{\theta_B q_B - P_B = 0}_{CP_1}$

On voit que le principal a intérêt à augmenter P_H jusqu'à $\underbrace{\theta_H q_H - P_H = \theta_H q_B - P_B}_{\text{saturée !}}$

- Puisque $P_B = \theta_B \cdot q_B$, on aura : $\theta_H q_H - P_H = \theta_H q_B - \theta_B q_B$

$= q_B \underbrace{(\theta_H - \theta_B)}_{>0} \Big\} > 0 \Rightarrow U_{HH} > 0$

il réalise un surplus

On a donc : $\theta_B q_B^* = P_B^*$

et $\theta_H q_H^* - P_H^* = \theta_H q_B^* - P_B^*$

$\Leftrightarrow P_H^* = \theta_H q_H^* - \theta_H q_B^* + \theta_B q_B^*$

Le programme devient :

$$\text{Max } \pi\left(P_B - C(q_B)\right) + (1-\pi)\left(P_H - C(q_H)\right)$$

s.c $\theta_B q_B = P_B$

$\theta_H q_H^* - P_H = \theta_H q_B - P_B$

$\Leftrightarrow P_B = \theta_B q_B$

$P_H = \theta_H q_H - \theta_H q_B + P_B$

$= \theta_H q_H - \theta_H q_B + \theta_B q_B$

La maximisation devient :

$$\text{Max } \pi\left(\theta_B . q_B - C(q_B)\right) + (1-\pi)\left(\theta_H q_H - \theta_H q_B + \theta_B q_B - C(q_H)\right)$$

Sélection

Nous n'avons plus de contrainte car elles sont implicitement prises en compte dans le programme. On va utiliser les CPO pour trouver l'optimum de cette fonction.

CPO :

$$\frac{\partial \pi(q_B, q_H)}{\partial q_B} = 0 \iff \pi \theta_B - \pi C'(q_B) + (1-\pi)(-\theta_H + \theta_B) = 0$$

$$\iff C'(q_B^*) = \theta_B - \left(\frac{1-\pi}{\pi}\right)(\theta_H - \theta_B)$$

Par rappel : en info symétrique :

$$C'(q_B^*) = \theta_B \qquad \left(\iff q_B^* = C'^{-1}(\theta_B) \right.$$

$$C'(q_H^*) = \theta_H \qquad \left. q_H^* = C'^{-1}(\theta_H) \right)$$

-> Détérioration de la qualité des bouteilles B avec l'asymétrie d'info.

$$\frac{\partial \pi(q_B, q_H)}{\partial q_H} = 0 \iff (1-\pi)(\theta_H - C'(q_H)) = 0$$

$$\iff C'(q_H^*) = \theta_H$$

-> les connaisseurs se voient offrir des bouteilles de même qualité qu'en info synétique.

Sélection contraire

Exercice 2.

1) Info symétrique

a) CP_i : $P_i . \ln(64 - 63 - \varphi_i + q_i)$

$+ (1 - P_i) \ln(64 - \varphi_i) \geq$

$P_i . \ln(64 - 63) + (1 - P_i) \ln(64) = \overline{u}$

$\Leftrightarrow P_i . \ln(1 - \varphi_i + q_i) + (1 - P_i) . \ln(64 - \varphi_i) \geq$

$(1 - P_i) \ln(64)$

b) Profits espérés :

Par un conducteur prudent :

$\Pi_{esp} = P_p(\varphi_p - q_p) + (1 - P_p)(\varphi_p)$

$= \varphi_p - \frac{1}{3} q_p$

Pour un conducteur à risque :

$$\Pi_{esp} = p_R\left(Y_R - q_R\right) + \left(1 - p_R\right)\left(Y_R\right)$$

$$= Y_R - \frac{1}{2}\, q_R$$

Pour un "type" inconnu :

$$\Pi_{esp} = t\left[p_p \cdot \left(Y_p - q_p\right) + \left(1 - p_p\right)\left(Y_p\right)\right] +$$

$$\left(1 - t\right)\left[p_R\left(Y_R - q_R\right) + \left(1 - p_R\right)\left(Y_R\right)\right.$$

$$\Leftrightarrow\ t\left(Y_p - \frac{1}{3}\, q_p\right) + \left(1 - t\right)\left(Y_R - \frac{1}{2}\, q_R\right).$$

[à partir de là on remplace Y_i par x_i pour éviter un pb de notation avec p_i]

c) Étape 1 : trouver le montant de la couverture souhaité par l'assuré.

Sachant l'assureur neutre vis-à-vis du risque et l'assuré averse $\Rightarrow$ <u>couv totale</u>

En effet l'assureur est indifférent entre porter le risque ou non alors que l'assuré a une désutilité à porter ce risque. Ainsi l'assureur portera l'intégralité du risque (soit $q_i = 63$) en échange d'une prime calculée suivant le type de l'agent. (info symétrique).

Montrons que $q_i = 63$ ...

En info symétrique, l'assureur optimise son profit sur chaque segment de consommateur.

Il va résoudre le programme suivant :

$$\max \quad x_i - p_i q_i$$

$$\text{s.c} \quad p_i \ln(1 - x_i + q_i) + (1 - p_i) \ln(64 - x_i) \geq (1 - p_i) \ln(64).$$

On peut voir que la contrainte est saturée.

Posons $G_i(x_i, q_i) = p_i \ln(1 - x_i + q_i) + (1 - p_i) \ln(64 - x_i) - \bar{u}$ et $\Pi_i(x_i, q_i) = x_i - p_i q_i$.

CP est saturée car :

$$\frac{\partial \Pi_i(x_i, q_i)}{\partial x_i} > 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G_i(x_i, q_i)}{\partial x_i} < 0$$

Et $$\frac{\partial \Pi_i(x_i, q_i)}{\partial q_i} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial G_i(x_i, q_i)}{\partial q_i} > 0$$

Le programme d'optimisation devient :

$$\max \; x_i - p_i q_i$$

sc. $$p_i \ln(1 - x_i + q_i) + (1 - p_i) \ln(64 - x_i) = (1 - p_i) \ln(64).$$

Lagrangien :

$$\mathcal{L}(x_i, q_i, \lambda) = x_i - p_i q_i + \lambda\Big(p_i \ln(1 - x_i + q_i) + (1 - p_i) \ln(64 - x_i) - (1 - p_i)\ln(64)\Big)$$

Condition de Kuhn Tucker :

$$\frac{\partial L(x_i, q_i, \lambda)}{\partial x_i} = 0 \iff 1 - \lambda \frac{p_i}{1 - x_i + q_i} - \lambda(1 - p_i)\frac{1}{64 - x_i} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial L(x_i, q_i, \lambda)}{\partial q_i} = 0 \iff -p_i + \lambda \frac{p_i}{1 - x_i + q_i} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x_i, q_i, \lambda)}{\partial \lambda} = 0 \iff p_i \ln(1 - x_i + q_i) + (1-p_i)\ln(64 - x_i) = (1 - p_i)\ln(64) \quad (3)$$

$\to$ car CP saturée.

(2) $\Rightarrow \lambda = 1 - x_i + q_i$

Je remplace dans (1) : $1 - x_i + q_i = 64 - x_i$

Ainsi $\forall i = (p, r)$ $\quad q_i^* = 63$. (on a donc bien montré que la couverture était complète)

II Nous reste à trouver la prime optimale proposée à chaque type, en fonction de la concentration du marché :

+ Cas 1 : Monopole.

Le monopole maximise la fonction de profit $x_i - p_i q_i$ sous contrainte que le consommateur de type i participe $p_i \ln(1 - x_i + q_i) + (1 - p_i)\ln(64 - x_i) \geq (1 - p_i)\ln(64)$.

Nous avons vu que la CP_i est saturée, il suffit donc de remplacer la couverture optimale dans la contrainte de participation pour trouver la prime optimale proposé à chaque conducteur :

$$p_i \ln(1 - x_i + q_i) + (1-p_i)\ln(64 - x_i) = (1-p_i)\ln(64)$$

$$\Leftrightarrow p_i \ln(64 - x_i) + (1-p_i)\ln(64 - x_i) = (1-p_i)\ln(64)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_i^* = 64 - \exp\left((1-p_i)\ \ln(64)\right)$$

On a donc en monopole :

$$x_p^* = 48 \quad \text{et} \quad x_r^* = 56$$

→ prime supérieure, logique.

+ 2ème cas = CPP : (faible concentration du marché) :

On sait qu'en CPP, le profit d'une entreprise est égal à zéro.

Ainsi : $x_i - p_i q_i = 0 \Leftrightarrow x_i^* = p_i q_i^*$

Donc en CPP : $x_p^* = 21$ et $x_r^* = 31{,}5$

2. Asymétrie d'information :

a) Ces contrats ne peuvent pas être proposés lorsque les assureurs ignorent le type car pb de sélection adverse.

En effet, les conducteur de type risqué " voit de faire passer pour des conducteurs prudents pour payer une prime moins élevée.

Dans ce cas le profit de l'assureur sera plus faible :

+ en CPP, il avait un profit de zéro en info symétrique, s'il propose ces contrats il aura un profit de :

$$t\left(21 - \frac{1}{3}63\right) + (1-t)\left(21 - \frac{1}{2}63\right) = (1-t) - 10{,}5 < 0$$

+ En monopole, il recevait un profit de :

$$t\left(48 - \frac{1}{3}63\right) + (1-t)\left(56 - \frac{1}{2}63\right) = 24{,}5 + 2{,}5t$$

s'il propose les contrats en asymétrie d'info, il recevra :

$$t\left(48 - \frac{1}{3}63\right) + (1-t)\left(48 - \frac{1}{2}63\right) = 16{,}5 + 10{,}5t$$

Or $24{,}5 + 2{,}5t > 16{,}5 + 10{,}5t \quad \forall t \in [0;1]$

b) Programme à résoudre :

L'assureur veut proposer un contrat t.q l'assuré se dirige lui-même vers le contrat qui lui correspond. Nous avons donc besoin de mettre des contraintes d'incitations. Le programme sera t.q.

$$\max \; t\left(p_p\,(x_p - q_p) + (1-p_p)\,x_p\right) + (1-t)\left(p_r(x_r - q_r) + (1-q_r)\,x_r\right)$$

$(CP)_p$ $\quad p_p\,\ln(1 - x_p + q_p) + (1-p_p)\,\ln(64 - x_p) \geq (1-p_p)\,\ln(64)$

$(CP)_r$ $\quad p_r\,\ln(1 - x_r + q_r) + (1-p_r)\,\ln(64 - x_r) \geq (1-p_r)\,\ln(64)$

$(CI)_{p\,vs\,r}$ $\quad p_p\,\ln(1 - x_p + q_p) + (1-p_p)\,\ln(64 - x_p) \geq p_p\,\ln(1 - x_r + q_r) + (1-p_p)\,\ln(64 - x_r)$

$(CI)_{r\,vs\,p}$ $\quad p_r\,\ln(1 - x_r + q_r) + (1-p_r)\,\ln(64 - x_r) \geq p_r\,\ln(1 - x_p + q_p) + (1-p_r)\,\ln(64 - x_p)$.

(on éliminera deux contrainte ...)