Théorie des Options 2018

Question de cours :

1. Mq $C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$.

$$\iff \quad P_0 + S_0 = C_0 + Ke^{-rT}$$

Portefeuille A : un Put + un actif ss-jacent

Portefeuille B : un Call + un ZC de nominal K (d'échéance T)

	en $t=0$	en $t=T$
A	$P_0 + S_0$	$(K-S_T)^+ + S_T = \max(K, S_T)$
B	$C_0 + Ke^{-rT}$	$(S_T-K)^+ + K = \max(K, S_T)$

Port A et Port B ont m̂ valeur en $t=T$, donc par AOA ils ont la m̂ valeur en $t=0$

$$\Longrightarrow P_0 + S_0 = C_0 + Ke^{-rT} \Longrightarrow C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$$

2. a) $\Delta = \dfrac{\partial P}{\partial S_0}$ où P valeur du port. et S_0 un actif ss-jacent.
Traduit la sensibilité de la valeur du port. à une évolution de S_0

$\Gamma = \dfrac{\partial^2 P}{\partial S_0^2}$, $\theta = \dfrac{\partial P}{\partial t}$ ← temps ; $\rho = \dfrac{\partial P}{\partial r}$ ← taux d'intérêt

b) A partir de la relation de parité Call-Put,

- en dérivant p/r à S_0 $\Longrightarrow$ $\Delta(\text{Call}) - \Delta(\text{Put}) = 1$
- en dérivant p/r à r $\Longrightarrow$ $\rho(\text{Call}) - \rho(\text{Put}) = K \cdot T \cdot e^{-rT}$

c) Variation de la valeur du portefeuille :

⚠ les Δ de cette expression n'ont rien à voir avec le Δ précédent

$$\Delta P = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial S_0}}_{\Delta} \cdot \Delta S_0 + \underbrace{\frac{\partial P}{\partial t}}_{\theta} \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{\partial^2 P}{\partial S_0^2}}_{\Gamma} \Delta S_0^2$$

Exercice : Complétude et marché discret

1.
$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

on constate que $C_2 \overset{(*)}{=} 4 \cdot C_3 - C_4 - C_1$.

Cherchons le rang de la famille (C_1, C_3, C_4).

$$= \text{Rg}\left[\underset{C_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{C_3' = C_3 - C_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{C_4' = C_4 - C_1}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}} \right]$$

$$= \text{Rg}\left[\underset{C_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \quad \underset{C_3'}{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} \quad \underset{C_4'' = C_4' - C_3'}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}} \right]$$

↳ famille triangulaire, || Rang = 3 = nbr d'états sur le marché

donc marché complet

2. On s'inspire de l'égalité (*).

Stratégie : achat de 4 actifs 3 + vente de 1 actif 2, 1 actif 4, 1 actif 1

- en $t = 1$, valeur du portefeuille $= 0$ dans tous les états de la nature
- en $t = 0$: gain de : $-4 \times \frac{5}{6} + 1 + 2 + \frac{2}{3}$

$$= \frac{-20}{6} + \frac{6 + 12 + 4}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} > 0$$

$\Longrightarrow$ il y a OA

3. En se basant sur la 2 : pour qu'il y ait AOA on veut :

$$P_2 = 4 \cdot P_3 - P_4 - P_1 = 4 \times \frac{5}{6} - \frac{2}{3} - 1 = \frac{20-4-6}{6}$$

$$\hookrightarrow \quad P_2 = \frac{5}{3}$$

4. L'actif 3 est sans risque (valeur cste en $t = 1$). Par AOA, il doit avoir le m̂ rendement que l'actif sans risque.

Ainsi,

car tx discret

$$P_3 \times (1 + r) = 1 \leftarrow \text{valeur de l'actif 3 en } t = 1$$

$$\Leftrightarrow \quad r = \frac{1}{P_3} - 1 = \frac{1}{5}$$

d'où $\quad r = 20\ \%$

5. • L'actif d'Arrow-Debreu pour l'état 1 a pour payoff $\overset{A_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}$ et prix a_1

• - - - 2 . . . $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow A_2$ . . . a_2

• - - - 3 . . . $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \leftarrow A_3$ . . . a_3

Par AOA, le prix de X est : $\quad P_X = x \cdot a_1 + y \cdot a_2 + z \cdot a_3$

Soient q_1, q_2, q_3 (avec $q_1 + q_2 + q_3 = 1$) les probas risque neutre associées aux états 1, 2 et 3.

Alors par définition de la proba RN :

$$P_X (1 + r) = \mathbb{E}^Q [\text{ payoff de } X \,]$$

$$\Leftrightarrow \quad (1+r) \cdot [x \cdot a_1 + y a_2 + z \cdot a_3] \overset{(**)}{=} q_1 \cdot x + q_2 \cdot y + q_3 \cdot z$$

6. • on voit que $A_1 = 2 \cdot C_4 - C_1$. donc par AOA :

$$a_1 = 2 \cdot p_4 - p_1 = \frac{1}{3}$$

• $A_2 = C_1 - C_4 \implies a_2 = p_1 - p_4 = \frac{1}{3}$

• $A_3 = C_3 - C_4 \implies a_4 = p_3 - p_4 = \frac{1}{6}$

Ensuite, par def de la proba RN :

• $(1+r) \cdot a_1 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\text{ payoff de } A_1] = q_1 \implies q_1 = \frac{6}{15}$

• $(1+r) \cdot a_2 = q_2 \implies q_2 = \frac{6}{15}$

• $(1+r)\, a_3 = q_3 \implies q_3 = \frac{1}{5} = \frac{3}{15}$

et on vérifie que $q_1 + q_2 + q_3 = 1$

Problème : Call sur ZC

Partie 1 : expression de $P(t,T)$

1.a) $P(t,t)$ correspond au prix ent d'un ZC de maturité t.

De manière évidente, $\boxed{P(t,t) = 1}$

1.b) on a $dP(t,T) = P(t,T) \cdot r \cdot dt - P(t,T) \cdot \sigma(t,T) \cdot dW_t$

Remarque : ici T est fixé, c'est t qui "bouge"

Calculons $\ln(P(t,T))$. Formule d'Itô avec $f : x \mapsto \ln(x)$

$$f' : x \mapsto \frac{1}{x}$$

$$f'' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$$

$\hookrightarrow$ $$d\ln(P(t,T)) = \frac{1}{P(t,T)} \times dP(t,T) + \frac{1}{2} \times -\frac{1}{P(t,T)^2} \times d\langle P(t,T)\rangle_t$$

$$d\ln(P(t,T)) = r\,dt - \sigma(t,T)\,dW_t - \frac{1}{2}\,\frac{\sigma(t,T)^2 \cdot P(t,T)^2}{P(t,T)^2}\,dt$$

$$= \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(t,T)\right)dt - \sigma(t,T)\,dW_t$$

d'où $$\ln(P(t,T)) = \ln(P(0,T)) + \int_0^t r - \frac{1}{2}\sigma^2(s,T)\,ds - \int_0^t \sigma(s,T)\,dW_s$$

et $$P(t,T) = P(0,T) \cdot e^{\int_0^t r - \frac{1}{2}\sigma^2(s,T)\,ds - \int_0^t \sigma(s,T)\,dW_s}$$ ← par la suite on notera u plutôt que s dans les intégrales

1.c) Avec $P(t,t) = 1$, les expressions de $P(t,T)$ et $P(t,t)$ on peut écrire :

$$\frac{P(t,T)}{\underset{\uparrow\,=1}{P(t,t)}} = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \times \exp\left\{ \left[\int_0^t r - \frac{1}{2}\sigma^2(u,T)\,du - \int_0^t \sigma(u,T)\,dW_u\right] - \left[\int_0^t r - \frac{1}{2}\sigma^2(u,t)\,du - \int_0^t \sigma(u,t)\,dW_u\right] \right\}$$

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \times \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_0^t \left(\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t)\right)du - \int_0^t \left(\sigma(u,T) - \sigma(u,t)\right)dW_u \right\}$$

→ On remarque que le paramètre r a disparu de l'expression du prix du ZC → celui-ci ne dépend que de sa structure de volatilité.

Partie 2 : passage à l'univers s-forward neutre

2.a) $$\eta_t^s = \frac{e^{-rt} P(t,s)}{P(0,s)}$$

$$= \frac{e^{-rt} \times P(0,s)}{P(0,s)} \times e^{\int_0^t r - \frac{1}{2}\sigma^2(u,s)\,du - \int_0^t \sigma(u,s)\,dW_u}$$

$$= e^{-rt + \int_0^t r \cdot du - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,s)\,du - \int_0^t \sigma(u,s)\,dW_u}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,s)\,du - \int_0^t \sigma(u,s)\,dW_u}$$

2.b) on a $$\left.\frac{dQ^s}{Q}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\int_0^t \sigma(u,s)\,dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,s)\,du}$$

d'où, via le théorème de Girsanov :

$$W_t^s = W_t + \int_0^t \sigma(u,s)\,du \quad \text{est un MB sous } Q^s$$

2.c) on a $$W_t = W_t^s - \int_0^t \sigma(u,s)\,du$$

$$\Longleftrightarrow dW_t = dW_t^s - \sigma(u,s)\,du$$

<u>en t-forward neutre</u> : on part de l'équation (2) et on remplace dW_u par dW_u^t...

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_0^t \left(\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t)\right)du - \int_0^t \left(\sigma(u,T) - \sigma(u,t)\right)\cdot\left(dW_u^t - \sigma(u,t)\,du\right) \right\}$$

$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_0^t \left(\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t)\right)du + \overbrace{\int_0^t \sigma(u,T)\,\sigma(u,t) - \sigma(u,t)^2\,du}^{= -\frac{1}{2}\int_0^t 2\sigma(u,t)^2 - 2\sigma(u,T)\sigma(u,t)\,du} - \int_0^t \left(\sigma(u,T) - \sigma(u,t)\right)dW_u^t \right.$$

$$\boxed{P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t))^2 \, du - \int_0^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t)) \, dW_u^t \right\}}$$

en T-forward neutre : même idée en utilisant dW_u^T

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t) \, du - \int_0^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t)) \, dW_u^T + \overbrace{\int_0^t \sigma(u,T)^2 - \sigma(u,t)\sigma(u,T) \, du}^{= -\frac{1}{2}\int_0^t 2\sigma(u,t)\sigma(u,T) - 2\sigma^2(u,T) \, du} \right\}$$

⚠ le "−" a disparu

$$\boxed{P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left\{ \frac{1}{2}\int_0^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t))^2 \, du - \int_0^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t)) \, dW_u^T \right\}}$$

Partie 3 : pricing de l'option Call

3.a) Sous $\mathbb{Q}$ les prix actualisés sont des martingales. On a :

$$C(0,t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\text{ payoff actualisé }]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta(t) \, (P(t,T) - K)_+]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta(t) \cdot \mathbb{1}_{P(t,T)>K} (P(t,T) - K)]$$

$$\boxed{C(0,t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta(t) \cdot P(t,T) \cdot \mathbb{1}_{P(t,T)>K}] - K \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta(t) \cdot \mathbb{1}_{P(t,T)>K}]}$$

3.b) On effectue le changement de proba de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{Q}^s$ en utilisant η_t^s :

$$C(0,t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\frac{1}{\eta_t^T} \delta(t) \cdot P(t,T) \right] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^t}\left[\frac{1}{\eta_t^t} \cdot \delta(t) \cdot \mathbb{1}_{P(t,T)>K} \right] \cdot K$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\frac{P(0,T)}{\delta(t) \cdot P(t,T)} \cancel{\delta(t) \cdot P(t,T)} \right] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^t}\left[\frac{P(0,t)}{\delta(t) \cdot \underbrace{P(t,t)}_{=1}} \cancel{\delta(t)} \cdot \mathbb{1}_{P(t,T)>K} \right] \cdot K$$

on peut sortir $P(0,T)$ et $P(0,t)$ car ces quantités n'ont rien d'aléatoires, elles sont connues en 0. Donc :

$$C(0,t) = P(0,T)\cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\mathbb{1}_{P(t,T)>K}\right] - P(0,t)\cdot K \cdot \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^t}\left[\mathbb{1}_{P(t,T)>K}\right]$$

$$\boxed{C(0,t) = P(0,T)\cdot \mathbb{Q}^T(P(t,T)>K) - K\cdot P(0,t)\cdot \mathbb{Q}^t(P(t,T)>K)}$$

3. c) Calcul de $\mathbb{Q}^T(P(t,T)>K)$

(cf. partie "volatilité variable" du CH6) soit $\overline{\Delta\sigma_t}^2 = \frac{1}{t}\int_0^t \left(\sigma(u,T)-\sigma(u,t)\right)^2 du$

en T-forward, on peut alors écrire :

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left\{ \frac{1}{2} t\, \overline{\Delta\sigma_t}^2 - \overline{\Delta\sigma_t}\cdot\sqrt{t}\cdot \overbrace{U^T}^{\sim \mathcal{N}(0,1) \text{ sous } \mathbb{Q}^T} \right\}$$ donc :

$$\mathbb{Q}^T(P(t,T)>K) = \mathbb{Q}^T\left(\ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right) + \frac{1}{2}t\,\overline{\Delta\sigma_t}^2 - \overline{\Delta\sigma_t}\sqrt{t}\, U^T > \ln(K) \right)$$

$$= \mathbb{Q}^T\left(U^T < \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right) - \ln(K) + \frac{1}{2}t\,\overline{\Delta\sigma_t}^2}{\overline{\Delta\sigma_t}\cdot\sqrt{t}}}_{\text{on le note } d_1} \right) = \mathcal{N}(d_1)$$

fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Calcul de $\mathbb{Q}^t(P(t,T)>K)$:

en t-forward on peut écrire :

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left\{ -\frac{1}{2} t\, \overline{\Delta\sigma_t}^2 - \overline{\Delta\sigma_t}\cdot\sqrt{t}\cdot \overbrace{U^t}^{\sim \mathcal{N}(0,1) \text{ sous } \mathbb{Q}^t} \right\}$$

$$\mathbb{Q}^t(P(t,T)>K) = \mathbb{Q}^t\left(\ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right) - \frac{1}{2}t\,\overline{\Delta\sigma_t}^2 - \overline{\Delta\sigma_t}\sqrt{t}\, U^t > \ln(K) \right)$$

$$= \mathbb{Q}^t \left(U^t < \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right) - \frac{1}{2} t \cdot \overline{\Delta\sigma_t}^{\,2} - \ln(K)}{\overline{\Delta\sigma_t} \cdot \sqrt{t}}}_{\text{on le note } d_2} \right) = \mathcal{N}(d_2)$$

Calcul de $C(0,t)$:

Finalement, avec les notations précédentes :

$$C(0,t) = P(0,T) \cdot \mathcal{N}(d_1) - K \cdot P(0,t) \cdot \mathcal{N}(d_2)$$