Théorie des Valeurs Extrêmes - QCM

ISFA3, ANNEE 2023-2024

Examen Théorie de valeurs extrêmes 2010-2011 - Master II SAF Pro - Sans document - Sans calculatrice - Durée 2h00

Ce examen est un questionnaire à choix multiples constitué de 16 questions. Plusieurs réponses sont proposées pour chaque question. Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses.

Les réponses sont à inscrire sur la feuille jointe, en cochant pour chaque question la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Toute réponse exacte entraîne une bonification de 1 point, toute erreur est pénalisée de 0,5 point.

Q 1) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. et $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Il est possible de trouver une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} P(M_n \le u_n) = e^{-\tau}$ si

A) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_i > u_n) = \ln(\tau)$

B) $\lim_{n\to\infty} n \Pr(X_i > u_n) = \ln(\tau)$

C) $\lim_{n\to\infty} \ln(n) \Pr(X_i > u_n) = \tau$

D) $\lim_{n\to\infty} n \Pr(X_i > u_n) = \tau$

1 $\lim_{n\to\infty} P(M_n \le u_n) = e^{-\tau}$

$P(M_n \le u_n) = F(u_n)^n$

$= \exp(n \ln(1-\bar{F}(u_n)))$ $\quad \bar{F}(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\underset{\infty}{\sim} e^{-n\bar{F}(u_n)}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) = \tau$

Q 2) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. et $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$. Alors

$$\Pr\left(\bar{X}_n \le \sigma_n x + m_n\right) \to \Phi(x) \text{ quand } n \to \infty,$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite si

$P\left(\frac{\bar{X}_n - m_n}{\sigma_n} \le x\right)$ $\quad$ TCL : $\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$

$\Rightarrow m_n = \mu$

$\sigma_n^2 = \mathbb{V}[\bar{X}_n]$

A) $m_n = \mathbb{E}(\bar{X}_n)$, $\sigma_n^2 = Var(\bar{X}_n)$

B) $m_n = n\mathbb{E}(\bar{X}_n)$, $\sigma_n^2 = Var(\bar{X}_n)$

C) $m_n = \mathbb{E}(X_1)$, $\sigma_n = Var(\bar{X}_n)$

D) $m_n = \mathbb{E}(\bar{X}_n)$, $\sigma_n^2 = nVar(\bar{X}_n)$

Q 3) S'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\right) = H(x),$$

$$P(M_n \le \tilde{a}_n x + \tilde{b}_n)$$
$$= P(M_n \le c a_n x + b_n + d^{-1} a_n)$$
$$= P(M_n \le a_n(cx + d^{-1}) + b_n)$$
$$= H(cx + d^{-1})$$

et si $\tilde{a}_n = c a_n$ et $\tilde{b}_n = b_n + d^{-1} a_n$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{M_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \le x\right) =$$

A) $H(cx + d)$

B) $H(c^{-1}x + d)$

C) $H(cx + d^{-1})$

D) $H(c^{-1}x + d^{-1})$

Q 4) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d.et une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} n \Pr(X_i > u_n) = \tau$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\mathbb{E}\left[\exp\left(t \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i > u_n\}}\right)\right]\right) =$$

$$\mathbb{E}[\exp(t \mathbb{1}_{\{X>u_n\}})^n] = \mathbb{E}[\exp(t \mathbb{1}_{\{X>u_n\}})]^n$$
$$= [e^t P(X>u_n) + P(X \le u_n)]^n$$
$$= [e^t \bar{F}(u_n) + 1 - \bar{F}(u_n)]^n$$
$$= [(e^t - 1)\bar{F}(u_n) + 1]^n$$
$$\Rightarrow \ln(\mathbb{E}[\ ]) = n \ln([(e^t-1)\bar{F}(u_n) + 1])$$
$$\bar{F}(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \lim \ln \ldots = \lim n \times \bar{F}(u_n)(e^t - 1) = \tau(e^t - 1)$$

A) τe^t

B) τt

C) $\tau(t-1)$

D) $\tau(e^t - 1)$

Q 5) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. de loi $G_\xi = GEV(0, 1, \xi)$

$$G_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(-[1+\xi x]_+^{-1/\xi}\right) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, alors $(M_n - b_n)/a_n$ a la même loi que X_1 si

$$P(M_n \le x) = G_\xi(x)^n = \exp(-[1+\xi x]_+^{-1/\xi})^n$$
$$= \exp(-[n^\xi + n^\xi \xi x]_+^{-1/\xi})$$
$$P(X_1 \le x) = \exp(-[1+\xi x]_+^{-1/\xi})$$
$$P(M_n \le a_n x + b_n) = \exp(-[1 + \xi a_n x + \xi b_n]_+^{-1/\xi})$$

Identificat° : $a_n = n^\xi$ $\quad 1 + \xi b_n = n^\xi \Rightarrow b_n = \frac{n^\xi - 1}{\xi}$

A) $a_n = n^\xi$ et $b_n = (n^\xi - 1)/\xi$

B) $a_n = (n^\xi - 1)\xi$ et $b_n = n^{-\xi}$

C) $a_n = (n^\xi - 1)/\xi$ et $b_n = n^\xi$

D) $a_n = n^{-\xi}$ et $b_n = (n^\xi - 1)\xi$

On définit les lois de

$$\text{Fréchet } (\alpha > 0) : \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

$$\text{Weibull } (\alpha > 0) : \quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{\alpha}\} & \text{si } x \le 0, \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

$$\text{Gumbel} : \quad \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} \quad x \in \mathbb{R}.$$

$X \sim \Phi_\alpha \Leftarrow \ln(X^\alpha) \sim \Lambda \Leftrightarrow -X^{-1} \sim \Psi_\alpha$

Q 6) Si $X \sim \Phi_\alpha$, alors

A) $\alpha \ln(X) \sim \Lambda$
B) $\ln(X) \sim \alpha^{-1}\Phi_\alpha$
C) $-X \sim \Psi_\alpha$
D) $X^\alpha \sim \Lambda$

Q 7) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. de loi $N(0,1)$ et $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. On définit les suites a_n et b_n par

$$\begin{aligned} a_n &= (2\log n)^{-1/2} \\ b_n &= (2\log n)^{1/2} - \frac{1}{2}(2\log n)^{-1/2}[\log(\log n) + \log(4\pi)] \end{aligned}$$

telles que, quand $n \to \infty$,

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{L} \Lambda.$$

$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Lambda(x)$

Soient $Y_i = \exp(\mu + \sigma X_i)$ et $\tilde{M}_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$. Alors

$\tilde{M}_n = e^{\mu + \sigma M_n}$

$$\frac{\tilde{M}_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \xrightarrow{L} \Lambda$$

$\mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n) = \mathbb{P}\left(M_n \leq \frac{1}{\sqrt{2\ln n}} x + \sqrt{2\ln n} - \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{2\ln n}}[\ln(\ln(n)) + \ln(4\pi)]\right)$

si

A) $\tilde{a}_n = \sigma a_n \exp(\mu + b_n)$ et $\tilde{b}_n = \exp(\mu + b_n)$
B) $\tilde{a}_n = \mu a_n \exp(\mu + \sigma b_n)$ et $\tilde{b}_n = \exp(\mu + \sigma b_n)$
C) $\tilde{a}_n = \exp(\mu + \sigma b_n)$ et $\tilde{b}_n = \sigma a_n \exp(\mu + \sigma b_n)$
D) $\tilde{a}_n = \sigma a_n \exp(\mu + \sigma b_n)$ et $\tilde{b}_n = \exp(\mu + \sigma b_n)$

$x^F = \sup(x \mid F(x) < 1)$

Q 8) La distribution logistique,

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

A) appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel
B) appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet
C) appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull
D) n'appartient à aucun domaine d'attraction

$\bar{F}(x) = 1 - \frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}$

$f(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}$

$h(x) = \frac{\bar{F}(x)}{f(x)} = \frac{\frac{e^{-x}}{1+e^{-x}}}{\frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2}} = 1 + e^{-x} \Rightarrow h'(x) = -e^{-x} \xrightarrow[x \to x^F]{} 0 = \xi$

$\Rightarrow F \in D(GEV(0,1,0)) = D(\Lambda)$

Q 9) Soit X une variable aléatoire de distribution log-gamma de densité

$$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)}(\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}.$$

Sa fonction de répartition

A) appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel

B) appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet

C) appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull

D) n'appartient à aucun domaine d'attraction.

Q 10) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. de loi absolument continue et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, alors

$$\Pr(M_n > M_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n > X_1, \dots, X_{n-1})$$

$= \mathbb{P}(X_n > M_{n-1}) = \frac{1}{n}$ car X_i iid

$\mathbb{P}(X_n = M_n) = 1/n$

A) $\mathbb{E}\left[\bar{F}^n(X_1)\right]$

B) $\mathbb{E}\left[\bar{F}^{n-1}(X_1)\right]$

C) n^{-1}

D) $1/\ln(n)$

X **Q 11)** Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F telle que

$$\lim_{u \to x^F} \frac{\bar{F}\left(u + xa\left(u\right)\right)}{\bar{F}\left(u\right)} = \begin{cases} [1+\xi x]_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ e^{-x} & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \begin{cases} \exp\left(-[1+\xi x]_+^{-1/\xi}\right) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp\left(-\exp\left(-x\right)\right) & \text{si } \xi = 0, \end{cases},$$

si

A) $a_n = a(b_n)$ et $b_n = F^{-1}(1 - n^{-1})$

B) $b_n = a(a_n)$ et $a_n = F^{-1}(1 - n^{-1})$

C) $b_n = a(a_n)$ et $b_n = F^{-1}(n^{-1})$

D) $a_n = a(b_n)$ et $b_n = 1 - F^{-1}(n^{-1})$

Q 12) Pour détecter qu'une distribution empirique a une queue de distribution (pour ses grandes valeurs) de type Pareto, il faut considérer le graphique quantile-quantile suivant

Si $X \sim \text{Pareto}(\alpha, x_m) \Rightarrow Y = \ln(X) \sim \mathcal{E}(\alpha)$

$\Rightarrow \{\ln(X_{(i)}), -\ln(\frac{i}{n})\}$

A) $\{\ln(\ln X_{(i)}), -\ln(i/n)\}$

B) $\{X_{(i)}, -\ln(i/n)\}$

C) $\{\ln X_{(i)}, -\ln(i/n)\}$

D) $\{\ln X_{(i)}, \ln(-\ln(i/n))\}$

Remarque: si X a une distribution de Pareto, alors $\ln(X)$ a une distribution Exponentielle.

Q 13) Soit e la fonction d'espérance de vie résiduelle d'une variable aléatoire X

$$e(u) = \mathbb{E}(X - u | X > u).$$

Si X a une distribution Exponentielle de paramètre λ, alors

A) $\forall u \; e(u) = \lambda$.

B) $\forall u \; e(u) = \lambda^{-1}$.

C) $\lim_{u\to\infty} e(u) = \lambda$.

D) $\lim_{u\to\infty} e(u) = \lambda^{-1}$.

Q 14) Soit G la fonction de répartition telle que

$$G(x) = \exp\left(-\exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\right), \qquad x \in \mathbb{R}. \sim \Lambda\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

Alors le niveau z_p de période de retour $1/p$ est donnée par

niveau de retour $1/p$ de G

$\Rightarrow$ résoudre $G(z_p) = 1-p$

$\Rightarrow \exp\left(-\exp\left(-\left(\frac{z_p-\mu}{\sigma}\right)\right)\right) = 1-p$

$\Rightarrow -\exp\left(-\left(\frac{z_p-\mu}{\sigma}\right)\right) = \ln(1-p)$

$\Rightarrow -\left(\frac{z_p-\mu}{\sigma}\right) = \ln(-\ln(1-p))$

$\Rightarrow z_p = -\sigma\ln(\ln(1-p)) + \mu$

A) $\mu - \sigma\log(-\log(1-p))$

B) $\mu - \log(-\log(1-\sigma p))$

C) $-\log(-\log(\mu - \sigma p))$

D) $\mu - \sigma\log(1-p)$

Q 15) Supposons que Y a une distribution Pareto Généralisée GPD(σ, ξ) telle que

$$P(Y < y) = 1 - \left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}.$$

Alors $Y - v | Y > v$ a une distribution

$Y \sim GPD(\sigma,\xi)$ tq $P(Y<y) = 1 - \left[1+\xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}$

$P(Y-u \leq y | Y>u) = P(Y \leq y+u | Y>u) = \frac{P(Y\leq y+u \cap Y>u)}{P(Y>u)}$

$f_Y(y) = \frac{1}{\sigma}\left(1+\xi\frac{y}{\sigma}\right)^{1/\xi - 1}$

$= \dfrac{\int_u^{y+u} \frac{1}{\sigma}\left(1+\xi\frac{t}{\sigma}\right)^{1/\xi-1} dt}{\int_u^{\infty} \frac{1}{\sigma}\left(1+\xi\frac{t}{\sigma}\right)^{-1/\xi-1} dt}$

A) GPD(σ, ξ)

B) GPD$(\sigma, v\xi)$

C) GPD$(\sigma + v, \xi)$

D) GPD$(\sigma + \xi v, \xi)$

Q 16) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. de loi F et et une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) = \tau$. On définit $Y_i = \max(X_i, X_{i-2})$ alors

$$\lim_{n\to\infty} P(\max(Y_1, \ldots, Y_n) \leq u_n) =$$

$P(\max(Y_i) \leq u_n) \underset{n\to\infty}{\approx} F_Y(u_n)^n$

$= (F_X(u_n)^2)^n$

$= F_X(u_n)^{2n} = e^{2n\ln(1-\bar{F}(u_n))}$

$Y_1 = \max(Y_1)$

$Y_2 = \max(Y_2, Y_0)$

$Y_3 = \max(Y_3, Y_1)$

$\vdots$

$Y_{n-2} = \max(Y_{n-2}, Y_{n-4})$

$Y_{n-1} = \max(X_{n-1}, X_{n-3})$

$Y_n = \ldots$

Comme $\bar{F}(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} e^{2n\ln(1-\bar{F}(u_n))} = \lim_{n\to\infty} e^{-2n\bar{F}(u_n)}$

et $\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) = \tau$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(\max(Y_i) \leq u_n) = e^{-2\tau}$

A) $\exp(-\tau)$

B) $\exp(-\tau/2)$

C) $\exp(-2\tau)$

D) $\lim_{n\to\infty} P(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq u_n)$