Soit $p_b(v_b) = a_b + c_b v_b$ uniformément distribués sur $[a_b ; a_b + c_b]$. (acheteur)

$p_s(v_s) = a_s + c_s v_s$ " " " $[a_s ; a_s + c_s]$ (vendeur)

Pour trouver les solutions, il faut résoudre le pb de maximisa°:

① $$\max_{p_b} \left[v_b - \frac{p_b + \mathbb{E}[p_s(v_s) \mid p_b \geq p_s(v_s)]}{2} \right] \times \mathbb{P}[p_b \geq p_s(v_s)]$$

avec $\mathbb{P}[p_s(v_s) \leq p_b] = \dfrac{\overset{x}{p_b} - \overset{a}{a_s}}{\underbrace{a_s + c_s}_{b} - \underset{a}{a_s}}$, car $\mathbb{P}[X \leq x] = \dfrac{x-a}{b-a}$

et $\mathbb{E}[\ldots] = \dfrac{a_s + p_b}{2}$

Donc le pb devient:

$$\max_{p_b} \left[v_b - \frac{1}{2}\left(p_b + \frac{a_s + p_b}{2} \right) \times \frac{p_b - a_s}{c_s} \right.$$

De même pour le 2^e pb:

$$\underbrace{\max_{p_s} \left[\frac{1}{2}\left(p_s + \frac{p_s + a_b + c_b}{2} \right) - v_s \right] \times \frac{a_b + c_b - p_s}{c_b}}_{\pi}$$

On résoud:

Il faut d'abord vérifier que le max existe, donc CPO:

$\dfrac{\partial \pi}{\partial p_b} = \ldots$ et $\dfrac{\partial^2 \pi}{\partial p_b^2} < 0$, donc pour trouver le max on résoud $\dfrac{\partial \pi}{\partial p_b} = 0$

On obtient alors $p_b^* = \dfrac{2}{3} v_b + \dfrac{1}{3} a_s$

De même pour le $2^{\text{ème}}$ max, $p_s^* = \frac{2}{3} v_s + \frac{1}{3}(a_b + c_b)$

On doit ensuite passer par l'identificaθ :

$p_b = \frac{2}{3} v_b + \frac{1}{3} a_s = a_b + c_b v_b$, donc $a_b = \frac{1}{3} a_s$ et $c_b = \frac{2}{3}$

$p_s = \frac{2}{3} v_s + \frac{1}{3}(a_b + c_b) = a_s + c_s v_s$, donc $a_s = \frac{1}{3}(a_b + c_b)$ et $c_s = \frac{2}{3}$

Ainsi il reste à déterminer a_s et a_b :

$$\begin{cases} a_b = \frac{1}{3} a_s \\ a_s = \frac{1}{3}(a_b + c_b) = \frac{1}{3}\left(a_b + \frac{2}{3}\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_b = \frac{1}{12} \\ a_s = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Conclusion : $p_b(v_b) = \frac{2}{3} v_b + \frac{1}{12}$

$p_s(v_s) = \frac{2}{3} v_s + \frac{1}{4}$

Le jeu est réalisé si $p_b(v_b) \geq p_s(v_s) \Leftrightarrow \boxed{v_b \geq v_s + \frac{1}{4}}$ équilibre de Nash.