VI - Calcul obligataire à taux fixe

Diffère des emprunts indivis car ici l'emprunteur (une grande entreprise, l'État, ...) fait appel à de multiples prêteurs (par exemple via un marché boursier) en émettant des produits financiers de dette appelés obligations

1) Principales caractéristiques d'un emprunt obligataire

- Montant global emprunté 100 M€ (on parle aussi de "principal")
- Durée de l'emprunt (souvent supérieur à 5 - 7 ans)
  des emprunts d'État peuvent être très longs (40-50 ans)
- Nombre de titres financiers émis qui portent le nom d'obligations (bond en anglais)
  $N = 100\,000$ titres

les 100 M€ sont divisés en 100 000 titres de valeur unitaire :
$\frac{100\,M}{100\,000} = 1000$ € qui sont proposés individuellement à l'émission sur le marché primaire

- Valeur nominale (ou faciale) $F = \frac{\text{Montant global}}{N} = 1000$ €
- Taux nominal (ou faciale) k qui permet de calculer les intérêts (annuels ou + fréquents, par exemple semestriels ou trimestriels) qui seront versés au détenteur d'un titre
  $k = 5\%$ par an soit $5\% \times 1000 = 50$ € par titre et par an
- coupon = montant de l'intérêt périodique coupon annuel de 50 €
- date de souscription = date limite à laquelle les prêteurs (investisseurs) se déclarent intéressés par un certain nombre de titres (ils sont prêts à prêter un multiple de F) ⚠ on doit prêter un nb entier de titres

- date de règlement = date à laquelle les prêteurs versent effectivement l'argent à l'emprunteur
- date de jouissance = date à partir de laquelle les intérêts sont calculés

→ On supposera ces dates confondues dans le reste du cours

- Prix d'émission d'un titre, PE (en général $\leq F$). PE est exprimé en % de F. Si $PE = F$ (= 100%), on dit alors que l'emprunt est émis au pair.

Si PE = 99%, le prix d'émission d'un titre est égal à 990 € (99% × 1000) réglé à la date de règlement

⚠ le coupon n'est pas modifié, il reste égal à $k \times F$

$$\underbrace{\frac{50}{990} = 5.05\%}_{\text{ne concerne que le prêteur initial qui apporte l'argent à l'emprunteur}} \qquad k = \frac{50}{1000} = 5\%$$

- le(s) prix de remboursement PR_t à la date t ($t \leq T$ durée de l'emprunt en notant 0 la date d'émission)

PR_t s'exprime en % de F (en général $\geq F$)

si $PR_t = F$, le remboursement est dit au pair

si PR_t = 102%, le titre sera remboursé à 1020 €

Si la seule date de remboursement est d'échéance T, le remboursement est dit "in fine"

- on définit (contractuellement) le nombre de titres n_t qui sera remboursé à la date t (au prix PR_t). Les titres remboursés le sont par tirage au sort à la date de remboursement

Par exemple remboursement en 2 tranches égales de $\frac{100000}{2} = 500000$ titres aux deux dernières dates

Rem: Condition de remboursement de l'emprunt obligataire $N = \sum_{t=1}^{T} n_t$ (n_t entier)

i.e on a remboursé (amorti) l'emprunt obligataire lorsque tous les titres sont amortis

Le remboursement est en générale différé i.e on ne paye que les coupons pendant plusieurs échéances avant de commencer à rembourser les titres.

2) Principaux risques associés à une émission obligataire

- Risque de crédit / Risque de défaut : l'emprunteur n'assume pas tout (faillite → liquidation) ou partie de ses engagements financiers (intérêts et/ou remboursement)

Rem: Dans le cas où l'émetteur est un Etat, on parle de debt sans risque comme si l'Etat ne pouvait pas faire défaut mais en réalité, il y a toujours un risque de défaut (politique, financier) qui est qualifié de risque souverain.

Par exemple : Grèce, Argentine, Emprunts russes (1917)

Les entreprises/États sont ou non notés (rating) pour rendre compte de leur solidité financière (aujourd'hui et évolution future)

⟶ notation par des agences indépendantes → Standard & Poors, Moodys, Fitch

(grilles avec des lettres/notes et des matrices qui donnent les probas de chgmt de note)

Les émissions obligataires (dettes) ont des rangs qui peuvent définir les priorités à être indemnisé en cas de faillite. Certains créanciers peuvent être prioritaires sur d'autres, l'État arrivant en premier.
Dettes SENIOR (indemnisé si faillite)
Dettes JUNIOR
En l'absence de priorité, les créanciers sont dit <u>chirographaires</u>.

- Risque de taux : risque de variation de la valeur de l'obligation dû au mouvement des taux d'intérêts (paramètres macro-économiques, santé financière de l'entreprise (émetteur)...) Variation à la hausse ou à la baisse. Impact pour le marché secondaire.

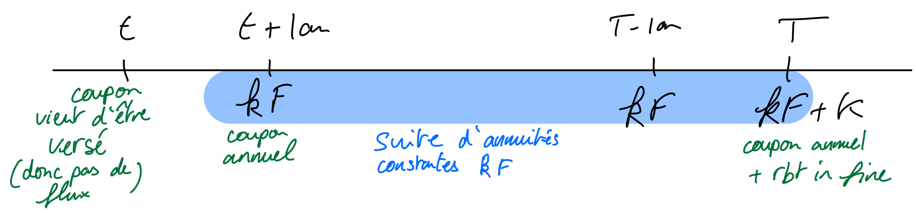
- Risque de liquidité : Risque de ne pas pouvoir revendre ses titres car il n'y a pas d'acheteur

- Pleins d'autres risques en fonction du produit financier :
  - risque législatif
  - risque de change
  - ...

3) Illustration du risque de taux

Cas d'une obligation échéant à la date T, percevant un coupon annuel $k \times F$ remboursable in fine au prix K

Considérons t une date anniversaire (date de versement de coupon et éventuellement de remboursement)



La valeur de l'obligation à la date t s'obtient en actualisant les flux futures au "taux de marché" r. Schématiquement r représente le taux auquel l'émetteur pourrait se financer en t pour une durée d'emprunt (= maturité) $T - t$

→ durée de vie résiduelle de l'emprunt

r prend en compte la santé financière de l'émetteur en t, le(s) niveau(x) des taux d'intérêt globaux (y compris l'inflation), etc...

* r est supposé constant dans le temps pour ce chapitre.

Valeur de l'obligation en t, $B_t = kF \times \dfrac{1-(1+r)^{-(T-t)}}{r} + \dfrac{K}{(1+r)^{T-t}}$

Rem: si $r = k$ et $K = F$ (rbt in fine au paire), alors $B_t = F$.

Application numérique : émission au pair. rbt in fine au pair

$F = 1000$ € $k = 6\%$ $T = 10$ ans

- Calcul B_0 pour $r = 7\%, 6\%, 5\%$ (à l'émission)
- Calcul de B_6 pour $r = 7\%, 6\%, 5\%$

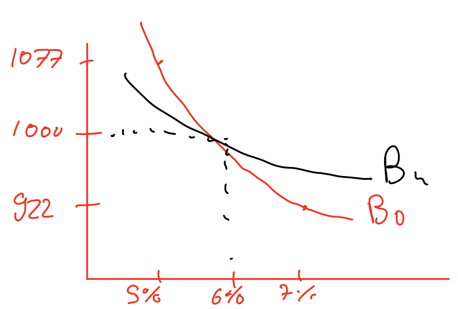
- $r = 7\%$ $B_0 = 0.06 \times 1000 \times \frac{1 - 1.07^{-10}}{0.07} + \frac{1000}{(1.07)^{10}}$
  $= 922$ €
- $r = 6\%$ on a $r = k$ donc $B_0 = F = 1000$ i.e: le TRI à l'émission est de 6% (montant de l'investissement = 1000€ = à la somme actualisé des CF futures
- $r = 5\%$ $B_0 = 0.06 \times 1000 \times \frac{1 - 1.05^{-10}}{0.05} + \frac{1000}{(1.05)^{10}}$
  $= 1077$ €

  immédiatement après l'émission les taux de rentabilité baissent de 1%

b) 4 coupon kF + rbt à 1000€

- $r = 7\%$ $B_6 = 0.06 \times 1000 \times \frac{1 - 1.07^{-4}}{0.07} + \frac{1000}{(1.07)^4} = 966$ €
- $r = 6\%$ $r = k$ donc $B_6 = F = 1000$
- $r = 5\%$ $B_6 = 0.06 \times 1000 \times \frac{1 - 1.05^{-4}}{0.05} + \frac{1000}{(1.05)^4}$
  $= 1035$ €

Quand les taux d'actualisation augmentent les B_t diminuent



4) Première approche du risque de taux

En cas de hausse des taux, la variation relative de la valeur des obligations s'écrit $\dfrac{B_{r+\Delta r} - B_r}{B_r}$ en %

$B_{r+\Delta r}$ = valeur de l'obligation au taux de marché $r+\Delta r$

Les taux sont passés de r à $r+\Delta r$

pour une variation (absolue en %) $+\Delta r$ des taux

On s'intéresse $\dfrac{\dfrac{B_{r+\Delta r} - B_r}{B_r}}{\Delta r} < 0$ car $B_{r+\Delta r} < B_r$

Avec l'exemple numérique ($\Delta r = 1\%$) entre 6% et 7% (r et $r+\Delta r$)

en 0 : $\dfrac{\dfrac{B_{0,7\%} - B_{0,6\%}}{B_{0,6\%}}}{1\%} = \dfrac{\dfrac{922-1000}{1000}}{1\%} = -7.8$

en 6 : $\dfrac{\dfrac{B_{6.7\%} - B_{6.6\%}}{B_{6.6\%}}}{1\%} = \dfrac{\dfrac{966-1000}{1000}}{1\%} = -3.4$

Symétriquement, en cas de baisse des taux $-\Delta r$, on calcule

$$\dfrac{\dfrac{B_{r-\Delta r} - B_r}{B_r}}{-\Delta r} < 0$$ et sans unité

en 0 : $\dfrac{\dfrac{1077-1000}{1000}}{1\%} = -7.7$

en 6 : $\dfrac{\dfrac{1035-1000}{1000}}{-1\%} = -3.5$

Pour étudier la variation de valeur de l'obligation en fonction du taux (d'actualisation) pour comparer ces variations entre obligations, on s'intéresse à

rappelle le concept d'élasticité → $\left| \dfrac{\dfrac{\Delta B}{B}}{\Delta r} \right|$

en valeur absolue car le signe - n'apporte pas d'autre information que le fait que l'oblig décroit en fonction du taux d'actualisation de ses flux

On regardera la limite $\left| \dfrac{\frac{\Delta B}{B}}{\Delta r} \right|$ quand Δr tend vers 0

On définit la sensibilité (ou duration modifiée) par

$$S_{r_{marché}} = \frac{-\partial B}{\partial r} \times \frac{1}{B}$$

Calcul en 0 et en 6 avec $r_{marché} = 6\%$

en 6 : $B_{marché} = \dfrac{60}{1+r} + \dfrac{60}{(1+r)^2} + \dfrac{60}{(1+r)^3} + \dfrac{1060}{(1+r)^4}$

$B_{6\%} = 1000$

$$\left.\frac{-\partial B_r}{\partial r}\right|_{r_{marché}} = \frac{1\times 60}{(1+r)^2} + \frac{2\times 60}{(1+r)^3} + \frac{3\times 60}{(1+r)^4} + \frac{4\times 1060}{(1+r)^5} = 3465$$

$$S = \frac{3465}{1000} = 3.465$$

en 0 $\quad B_{r_{marché}} = \dfrac{60}{1+r} + \dfrac{60}{(1+r)^2} + \dots + \dfrac{60}{(1+r)^9} + \dfrac{1060}{(1+r)^{10}} \Rightarrow B_{6\%} = 1000$

$$\left.\frac{-\partial B_r}{\partial r}\right|_{r_{marché}} = \frac{1\times 60}{(1+r)^2} + \frac{2\times 60}{(1+r)^3} + \dots + \frac{9\times 60}{(1+r)^9} + \frac{10\times 1060}{(1+r)^{11}} = 7360$$

$$S = \frac{7360}{1000} = 7.36$$

De manière générale, si on note F_t le flux versé à la date t par une obligation (coupon et/ou remboursement), on peut écrire en 0 (aujourd'hui) la valeur de l'obligation $B_0 = \sum_t \dfrac{F_t}{(1+r)^t}$

$$S = \frac{1}{B_0} \times \sum_t \frac{t \times F_t}{(1+r)^{t+1}} = \frac{1}{\sum_t \frac{F_t}{(1+r)^t}} \times \sum_t \frac{t \times F_t}{(1+r)^{t+1}}$$

$$S = \frac{1}{1+r} \times \frac{\sum_t t \times \frac{F_t}{(1+r)^t}}{\sum_t \frac{F_t}{(1+r)^t}}$$

$$S = \frac{1}{1+r} \times \frac{\sum_t t\, w_t}{\sum_t w_t} \quad \text{avec } w_t = \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

donc $S = \frac{1}{1+r} \times D$ où D est appelée duration

D à comme unité l'année

en 0 $\quad D = 7.36 \times 1.06 = 7.8$ ans

en 6 $\quad D = 3.465 \times 1.06 = 3.67$

D est tjrs inférieur à la maturité de l'oblig ou égale

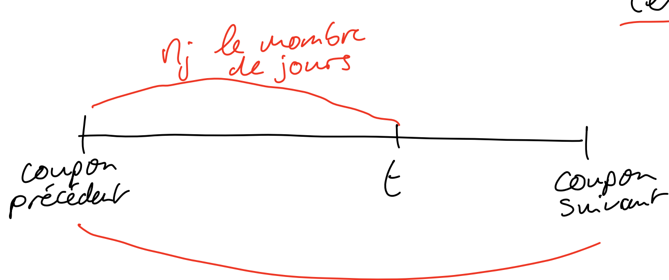
5) Éléments de cotation

On distingue :

- le coupon couru
- le cours (pied de coupon) = valeur de l'obligation - coupon couru

le coupon couru$_t$ = $k \times a$ où a représente la durée écoulée depuis le versement du coupon précédent, calculée pro rata temporis

$\longrightarrow a = \frac{n_j}{n_{j_{an}}}$



$n_{j_{an}} = 365$ ou 366 jours pour un coupon annuel

Les différentes normes de calcul peuvent être lues dans les documents du CNO (Comité de Normalisation Obligataire) cnofrance.org

VII - Duration

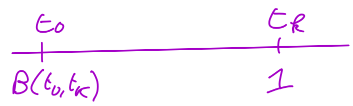
1- Actifs à taux fixe (typiquement les obligations à taux fixe)

- Les flux de trésorerie sont supposés non aléatoires
- On suppose que les fluxs futurs F_{t_k}, $k=1,..,T$ associés a l'échéancier sont positifs ou nuls et que au moins un des flux est non nul. (i.e au moins un zero-coupon dans le cas des obligations.
- On note 0 ou t_0 la date courante
- Notons P le prix (la valeur) de l'actif à la date courante. Le flux associé est alors $-P$

On suppose que l'on peut acheter ou vendre à la date courante des zéro coupons de maturités t_k, $k=1,\dots,T$ c'est à dire des obligations dont l'unique flux est versé à l'échéance t_k

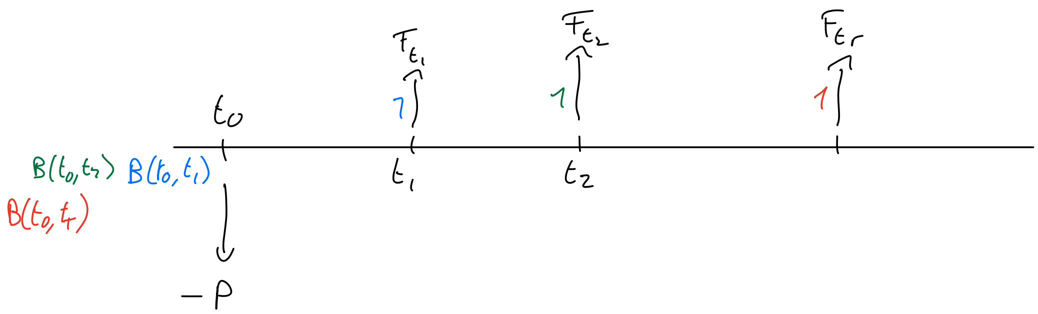
On peut alors synthétiser (ou dupliquer) l'échéancier $(F_{t_k})_{k=1,..,T}$ de manière statique à partir de ces zéro coupons
On dit alors que le marché est <u>complet</u>. On est sous l'hypothèse d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA) : ici cela signifie qu'il est équivalent financièrement de considérer l'échéancier d'origine ou l'échéancier dupliqué
Notons $B(t_0, t_k)$ le prix à la date t_0 d'un zéro coupon remboursement d'une manière certaine 1 unité monétaire à la date t_k

(ZC élémentaire car payant 1)



Le prix de duplication de l'échéancier est donné par

$$P = \sum_{k=1}^{T} F_{t_k} \times B(t_0, t_k)$$



$$P = \sum_{k} \text{valeur actualisée de } F_{t_k} \qquad F_{t_k} \times (B(t_0,t_k)) = F_{t_k} \times \left(\begin{array}{c}\text{valeur actualisé de}\\ \text{1 payé en } t_k\end{array}\right)$$

$$P = \sum_{k} F_{t_k} \times B(t_0,t_k) \quad \longleftarrow \quad F_{t_k} \times B(t_0,t_k) = \text{valeur actualisé de } F_{t_k}$$

On peut voir que $B(t_0,t_k)$ joue le rôle d'un facteur d'actualisation

Le TRI discret r et le TRI continu noté y vérifie

t_0 = date courante

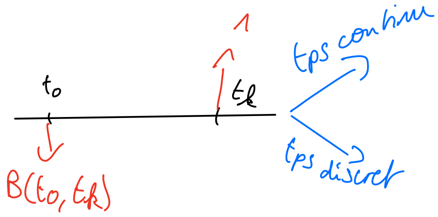
$$P = \sum_{k=1}^{T} \frac{F_{t_k}}{(1+r)^{t_k - t_0}} = \sum_{k=1}^{T} F_{t_k} \times e^{-y \times (t_k - t_0)}$$

On rappelle que $y = \ln(1+r)$

absence d'opportunité d'arbitrage

$$P = \frac{\sum F_{t_k}}{(1+r)^{t_k - t_0}} \overset{AOA}{=} \sum F_{t_k} \times B(t_0,t_k)$$

On considère les taux $y_{t_0,t_k} = -\frac{1}{t_k - t_0} \ln B(t_0,t_k)$ le taux actuariel continu à la date t_0 du zéro-coupon élémentaire ($B(t_0,t_k)$ payant 1 en t_k) d'échéance t_k. Cette écriture est équivalente à $B(t_0,t_k) = \underbrace{e^{-y_{t_0,t_k} \times (t_k - t_0)}}_{\text{actualisation en tps continu de 1 pour la durée } t_0 - t_k}$



$$B(t_0, t_k) = \frac{1}{(1+r_{t_0,t_k})^{t_k - t_0}}$$

en notant r_{t_0,t_k} l'équivalent discret de $y_{t_0,t_k} = \ln(1+r_{t_0,t_k})$

2) La Duration de Macaulay

Définition : $t_0 = 0$

La duration (version 1) de l'échéancier $(F_{t_k})_{k=1,\dots,T}$ est définie par :

$$D_1 = \frac{\sum_{k=1}^{T} \frac{F_{t_k}}{(1+r)^{t_k}} \times t_k}{\sum_{k=1}^{T} \frac{F_{t_k}}{(1+r)^{t_k}}} = \frac{1}{P} \times \sum_{k=1}^{T} \frac{F_{t_k}}{(1+r)^{t_k}} \times t_k = \frac{1}{P} \times \sum_{k=1}^{T} F_{t_k} e^{-y \times t_k} \times t_k$$

En utilisant le prix des zero-coupons élémentaires, il existe une autre définition de la duration.

Définition :

La duration (version 2) de l'échéancier $(F_{t_k})_{k=1,\dots,T}$ est définie par

$$D_2 = \frac{\sum_{k=1}^{T} F_{t_k} \times B(0,t_k) \times t_k}{\sum_{k=1}^{T} F_{t_k} \times B(0,t_k)} = \frac{1}{P} \times \sum_{k=1}^{T} F_{t_k} \times B(0,t_k) \times t_k$$

$$= \frac{1}{P} \times \sum_{k=1}^{T} F_{t_k} \times e^{-y_{0,t_k} \times t_k} \times t_k$$

où $B(0,t_k)$ représente le facteur d'actualisation entre la date t_k et la date courante 0, ou encore le prix à la date 0 du ZC élémentaire payant le flux unique 1 en t_k et $y_{0,t_k} = -\frac{1}{t_k}\ln(B(0,t_k))$ le TRI continu correspondant.

Remarques :

- La duration version 1 est une moyenne pondérée des dates de paiement des fluxs futurs, pondérée par la part $\frac{F_{t_k}}{(1+r)^{t_k}}$ des flux dans la valeur actuelle P de l'actif. Tous les fluxs sont actualisés au TRI r.

- La duration version 2 est la moyenne pondérée des dates de paiement des fluxs futurs, pondérée par la part de chaque flux en fonction de sa valeur économique individuelle (pas de TRI) puisque l'actualisation s'effectue avec le zéro-coupon correspondant à la date de paiement.

- La duration version 1 est plus couramment utilisée quand on considère une seule créance, par exemple une obligation, pour une raison essentiellement pratique. En effet, pour calculer D_1, il suffit de connaître le prix, l'échéancier et le TRI qui en découle.

- La duration version 2 nécessite la connaissance des taux actuarielles des ZC pour toutes les maturités correspondant aux dates de paiement. On parle de "taux zéro-coupons" pour qualifier ces taux actuariels. Sauf pour quelques cas particuliers simples, ce n'est pas une opération immédiate et il peut exister plusieurs structures des taux zéro-coupons compatibles avec les prix des actifs. Il pourrait donc y avoir une ambiguité sur la valeur de D_2.
Il faut donc bien préciser le mode de calcul des taux zéro-coupons
Malgré ces difficultés, la duration version 2 présente des propriétés intéressantes lorsque l'on considère des portefeuilles de créances. Elle est adapté à la gestion du risque de taux globale des institutions financières, des assurances, ...

- On appelle la duration modifiée (modified duration) ou sensibilité se définit par $S = D_1^* = \frac{D_1}{1+r}$

- La duration d'un actif ne doit être confondu avec sa vie moyenne qui se rapporte au capital (pas d'actualisation). Plus précisément, si la créance qui rembourse un flux de capital FC_{t_k} à la date t_k et que le capital restant dû à la date 0 est CRD_0, la moyenne se définit par $\sum_{k=1} \frac{FC_{t_k}}{CRD_0} \times t_k$.

3- Quelques premières caractéristiques de la duration

La duration est homogène à un temps (il s'agit d'une moyenne pondérée de date de paiement) et s'exprime en année. Pour une créance à flux positifs, la duration est positive, inférieur ou égale à la maturité de la créance.

Si $\forall k = 1, \dots T$, $F_{t_k} \geq 0$, la positivité des flux implique

$$0 \leq D_1 \leq t_T \quad \text{et} \quad 0 \leq D_2 \leq t_T$$

Exercice : Mq la duration d'un ZC élémentaire est égale à sa maturité : $D_1 = D_2 = t_T$

$$D_1 = \frac{1}{\cancel{B(0, t_T)}} \times t_T \times \cancel{\frac{1}{(1+R)^{t_T}}} \; B(0, t_T) = t_T$$

$$D_2 = \frac{1}{\cancel{B(0, t_T)}} \times t_T \times \cancel{\frac{1}{(1+R_{0,t_T})^{t_T}}} \; B(0, t_T) = t_T$$

Propriété d'invariance de la duration

Soit λ un réel non nul et $(F_{t_k})_{k=1,\dots T}$ un échéancier de prix P à la date courante. Soient D_1 et D_2 les durations versions 1 et 2 de cet échéancier.

Les durations versions 1 et 2 de l'actif d'échéancier $(\lambda F_{t_k})_{k=1,\dots T}$ sont également D_1 et D_2. En gros le risque est le même si on achète 1 ou 100 titres

(La preuve est évidente)

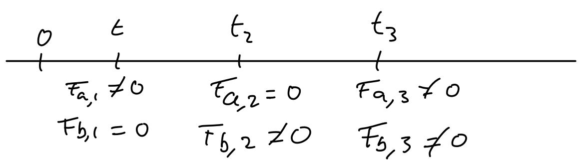
Propriété de linéarité de la duration version 2

Soit une créance a de prix P_a et de duration v2 $D_{2,a}$

Soit une créance b de prix P_b et de duration v2 $D_{2,b}$

Le portefeuille constitué des créances a et b a pour duration version 2 $D_{2,a+b}$ égale à $D_{2,a+b} = \frac{P_a}{P_a+P_b} \times D_{2,a} + \frac{P_b}{P_a+P_b} \times D_{2,b}$

Preuve : Notons $F_{a,k}$ et $F_{b,k}$ les flux aux dates t_k respectifs des créances a et b



Les flux $F_{a+b,k}$ de la créance agrégée (ptf) notée (a+b) sont égaux à $F_{a,k} + F_{b,k}$. Le prix de la créance agrégée sera notée

$$P_{a+b} = P_a + P_b \quad \text{(linéarité des prix)}$$

$$D_{2,a} = \frac{1}{P_a} \times \sum_k t_k \times F_{a,k} \times B(0,t_k) \Leftrightarrow D_{2,a} \times P_a = \sum_k t_k \times F_{a,k} \times B(0,t_k)$$

$$D_{2,b} = \frac{1}{P_b} \times \sum_k t_k \times F_{b,k} \times B(0,t_k) \Leftrightarrow D_{2,b} \times P_b = \sum_k t_k \times F_{b,k} \times B(0,t_k)$$

$$D_{2,a+b} = \frac{1}{P_a \cdot P_b} \times \sum_k t_k \times F_{a+b,k} \times B(0,t_k) \Leftrightarrow D_{2,a+b} \times (P_a+P_b) = \sum_k t_k \times (F_{a,k}+F_{b,k}) \times B(0,t_k)$$

$$= \sum_k t_k F_{a,k} \times B(0,t_k) + \sum_k t_k F_{b,k} \times B(0,t_k)$$

$$= D_{2,a} \times P_a + D_{2,b} \times P_b$$

Rem : dans la duration version 1, $D_{1,a}$ utilise un taux actuariel unique r_a. Pareil pour $D_{1,b}$. En général $r_a \neq r_b$ et donc on a pas la linéarité pour D_1.

Propriété de décroissance de la duration version 1 en fonction du taux d'actualisation

Considérons une créance payant les flux (positifs ou nuls) F_k aux dates t_k et on note

$$D_1(y) = \frac{1}{P(y)} \sum_{k=1}^{T} t_k F_{t_k} e^{-y \times t_k} \quad (0 \text{ est la date courante})$$

On montre alors que $D_1(y)$ est une fonction décroissante de y

On en déduit que $D_1(r)$ est une fonction décroissante de taux d'actualisation discret r.

Preuve : indication : on notera $w_k(y) = \frac{F_{t_k} e^{-y \times t_k}}{P(y)}$.

Rappel : $D_1(y) = \frac{-P'(y)}{P(y)}$

avec $P(y) = \sum_k^T F_{t_k} e^{-y t_k}$ $(t_0 = 0)$

$P'(y) = -\sum_k F_{t_k} \times t_k e^{-y t_k}$

or $D_1(y) = \frac{1}{P(y)} \times \sum_k F_{t_k} e^{-y t_k \times t_k}$

soit $D_1(y) = \frac{-P'(y)}{P(y)}$

calculer $\frac{d w_k(y)}{dy}$

$$= \frac{-t_k \underbrace{F_{t_k} e^{-y t_k} \times \cancel{P(y)}}_{w_k(y)}}{P(y)^{\cancel{2}}} - \underbrace{\frac{P'(y)}{P(y)}}_{D_1(y)} \underbrace{F_{t_k} e^{-y t_k}}_{w_k(y)}$$

$$= -t_k w_k(y) + D_1(y) \times w_k(y)$$

$$D_1(y) = \sum_k w_k(y) \times t_k$$

$$\frac{dD_1(y)}{dy} = \sum_k \frac{d w_k(y)}{dy} \times t_k = \sum_k w_k(y) [D_1(y) - t_k] \times [t_k - D_1(y) + D_1(y)]$$

$$= -\sum_k \underbrace{w_k(y)}_{\geq 0} \underbrace{[D_1(y) - t_k]^2}_{\geq 0} + \sum_k w_k(y) [D_1(y) - t_k] \times D_1(y)$$

$$= \underbrace{A}_{\leq 0} + \dots$$

Or $\sum_k w_k(y) = 1$ donc on a $A + D_1(y)^2 - D_1(y)^2 = A$

On a finalement $\dfrac{d D_1(y)}{dy} = \underbrace{- \sum_k w_k(y) \overbrace{\left[D_1(y) - t_k\right]^2}^{\text{écart à la moyenne}}}_{\text{Variance des dates de paiement avec les poids } w_k(y) \text{ pour les dates } t_k} \leq 0$ et

donc D_1 décroit avec y

On en déduit la décroissance de $D_1(r)$ par rapport à r car

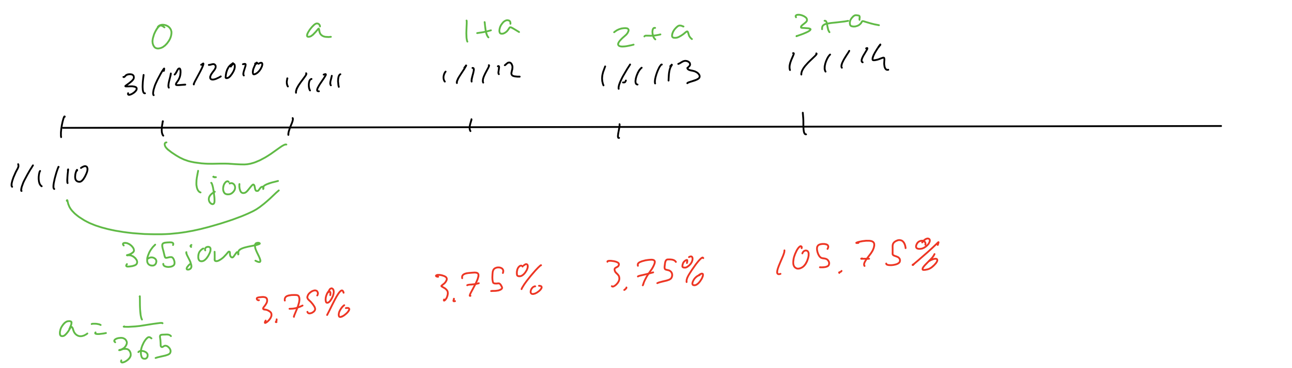
$y = \ln(1+r)$ et donc r est une fonction croissante de y.

4. Evolution de la duration au cours du temps

On reprend la question 2 de l'exo 2 de la feuille n°6 sur le calcul obligataire. On avait calculé la duration au 1/1/2011

$$D_{1/1/11} = 2.89 \text{ ans}$$
$$= \frac{\frac{3,75\%}{1,04} + \frac{2 \times 3,75\%}{1,04^2} + \frac{3 \times 105,75\%}{1,04^3}}{\frac{3,75\%}{1,04} + \frac{3,75\%}{1,04^2} + \frac{105,75\%}{1,04^3}}$$

Calculer cette duration au 31/12/2010 (1 jour avant) toujours avec $r = 4\%$



0.0027

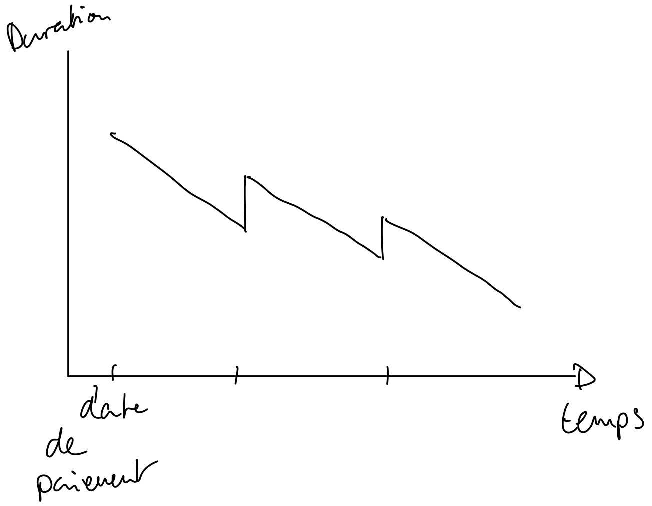
$$D_{31/12/10} = \frac{\frac{\frac{1}{365}(3.75\%)}{1.04^{a}} + \frac{(1+\frac{1}{365})(3.75\%)}{1.04^{1+a}} + \frac{(2+\frac{1}{365})(3.75\%)}{1.04^{2+a}} + \frac{(3+\frac{1}{365})(3.75\%)}{1.04^{3+a}}}{\frac{3.75\%}{1.04^{a}} + \frac{3.75}{1.04^{1+a}} + \frac{3.75\%}{1.04^{2+a}} + \frac{105,75\%}{1.04^{3+a}}}$$

$$= 2.79 \text{ ans}$$

La décroissance entre 2 dates de paiement est comme celle de la date courante, i.e on montre que $\frac{\partial D_1}{\partial t} = -1$

$$D_1 = \frac{-\partial \ln P}{\partial y} \quad \left(\text{en effet } D_1(y) = \frac{1}{P(y)} \cdot \frac{\partial P(y)}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial D_1}{\partial t} = \frac{-\partial^2 \ln P}{\partial t \, \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \ln P}{\partial t} = -1$$



Résumé : Duration Version 1

On note t_0 la date courante, au taux discret r où $r \in]-1, \infty[$, on associe la fonction prix

$$P(r) = \sum_{k=1}^{T} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k}}$$

Au taux continu $y \in \mathbb{R}$ on associe la fonction prix

$$P(y) = \sum_{k=1}^{T} F_k \, e^{-y \times t_k} \qquad \text{Rappel } (y = \ln(1+r))$$

On note $D_1(r)$ et $D_1^*(r)$ les fonctions duration et duration modifiée (ou sensibilité) définis par

$$D_1(r) = \frac{1}{P(r)} \sum_{k=1}^{T} \frac{t_k \times F_k}{(1+r)^{t_k}} \quad \text{et} \quad D_1^*(r) = \frac{D_1(r)}{(1+r)}$$

On note $D_1(y)$ la fonction Duration continue définie par

$$D_1(y) = \frac{1}{P(y)} \sum_{k=1}^{T} t_k F_k e^{-y \times t_k}$$

on a alors
$$\frac{1}{P(r)} \times \frac{dP}{dr} = -D_1^*(r) = \frac{-D(r)}{1+r}$$
$$\frac{1}{P(y)} \times \frac{dP}{dy} = -D(y)$$

5) Duration, Convexité et immunisation

On s'interesse à la façon dont le prix de la créance évolue au cours du temps, à taux d'actualisation fixé.

Pour $(y,t) \in \mathbb{R} \times]-\infty,+1]$ la fonction prix s'écrit

$$P(y,t) = \sum_{k=1}^{T} F_k \times e^{-y \times (t_k - t)}$$

Pour $(r,t) \in]-1,+\infty[\times]-\infty,t_1[$

$$P(r,t) = \left.\sum_{k=1}^{T} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k - t}} \right\} \text{actualisation}$$

$$P(r,t) = \underbrace{(1+r)^t}_{\text{Capitalisation jusqu'à } t} \underbrace{\sum_{k=1}^{T} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k}}}_{\text{Somme actualisé sur } t_k}$$

$$\frac{\partial P(y,t)}{\partial t} = y\, P(y,t) \quad \Big| \quad \frac{\partial P(r,t)}{\partial t} = \ln(1+r) \cdot P(r,t)$$

Définition: On definit la <u>convexité</u> comme

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^{T} t_k^2 F_k e^{-y t_k}$$

<u>Propriété évidente</u> :

La fonction prix est une fonction convexe du TRI continu y (on suppose les $F_k \geq 0$ pour une créance)

Propriété: la fonction prix est une fonction convexe du TRI discret r

Preuve à faire : $$\frac{\partial^2 P(r)}{\partial r^2} = \sum_{k=1}^{T} \frac{t_k (t_k + 1) F_k}{(1+r)^{k+2}}$$

$$= \frac{1}{(1+r)^2} \left[\underbrace{\sum_{k}^{T} \frac{t_k F_k}{(1+r)^{t_k}}}_{D_1 \times P(r)} + \underbrace{\sum_{k} \frac{t_k^2 F_k}{(1+r)^{F_k}}}_{\geq 0} \right]$$

donc $$\frac{d^2 P}{dr^2} \geq 0$$

Exercice d'application:

On considère une zero-coupon payant 1 à son échéance dans T années.
Calculer la Duration et la convexité dans les cas discret et continu

- $\text{Duration}_{\text{Discrète}} = \text{Duration}_{\text{continu}} = T$

- Convexité :

  - Convexité continue (C_c)

  $$C_c(y) = T^2 \times e^{-yT}$$

  - Convexité discrète

$$B_r(0,T) = \frac{1}{(1+r)^T} \qquad B_y(0,T) = e^{-yT}$$

$$D_1(r) = \frac{1}{B_r(0,T)} \times T \times \frac{1}{(1+r)^T} = \frac{1}{B_r(0,T)} \times T \times B_r(0,T) = T$$

$$\ln B_y(0,T) = -y \times T \text{ donc } D_1(y) = \frac{-d\ln B_y(0,T)}{dy} = T$$

La duration d'un zero coupon est égale à sa maturité !

$$\frac{d^2 B_r(0,T)}{dr^2} = T \times (T+1) \times \frac{1}{(1+r)^{T+2}} = (T^2+T) \times \frac{1}{(1+r)^T} \times \frac{1}{(1+r)^2}$$

$$\frac{d^2 B_y(0,T)}{dy^2} = T^2 e^{-y\times T} = T^2 \times B_y(0,T) = D_1^2 \times B_y(0,T)$$

Propriété : On considère des créances dont on connait dès l'achat les fluxs F_k positifs aux dates de paiement t_k. Pour chaque créance, on calcule $P(y) = \sum_{k=1}^{T} F_k e^{-y\times t_k}$

On montre alors que la créance qui minimise la concexité sous contrainte de prix et de duration est un zéro-coupon

Plus précisément : on étudie le $\min_{(F_k, t_k)} \frac{d^2P}{dy^2}(y=y_0)$

sous les contraintes $P(y_0) = P$ et $D_1(y_0) = D$

Preuve : indice : $t_k^2 = (t_k - D)^2 + 2t_k D - D^2$

$$\min_{F_k, t_k} \frac{d^2P}{dy^2} = \min_{F_k, t_k} \sum_{k=1}^{T} (t_k - D)^2 F_k e^{-yt_k} \;) \geq 0$$

$$+ \underbrace{2D\sum_{k=1}^{T} t_k F_k e^{-yt_k}}_{= D\times P} - \underbrace{D^2 \sum_{k=1}^{T} F_k e^{-yt_k}}_{D^2 \times P}$$

$$\frac{D^2P}{dy^2}(y=y_0) = \underbrace{\sum_{k=1}^{T} (t_k - D)^2 F_k e^{-y t_k}}_{\geq 0} + \cancel{2}D^2P - \cancel{D^2P}$$

$$\frac{d^2P}{dy^2}(y=y_0) \geq \underbrace{D^2P}_{=\text{convexité}}$$

Le ZC de maturité D payant Pe^{yD} à l'échéance a pour convexité D^2P (son prix est bien $Pe^{yD} \times e^{-yD} = P$)

La convexité est d'autant plus forte que la quantité $\sum_{k=1}^{T} (t_k - D)^2 F_k e^{-y t_k}$ est élevée c'est à dire que les flux sont dispersés autour de la « moyenne » (duration) en considérant les dates de paiement.

Immunisation

On s'intéresse à la valeur d'un portefeuille obligataire qui ré-investit les coupons. On regarde ce portefeuille au bout d'un certain temps / délai appelé horizon de gestion ou horizon d'investissement. On admet que les marchés financiers permettent ces réinvestissements.

On reste dans l'univers des TRI constant (r ou y) dans le temps.

2 risques opposées présent sur la rentabilité du portefeuille :

- le risque de moins-value lorsque les taux montent (les titres du portefeuille perdent de la valeur mais les coupons peuvent être réinvestis à un taux plus élevé.

On regarde l'influence sur la valeur du portefeuille d'un choc initial sur le taux de placement, celui-ci restant constant jusqu'à l'horizon d'investissement noté T.

Remarque : En économie, on parle parfois de choc auto-entretenu ou d'effet permanent.

0 = date du choc

Immédiatement après le choc, en 0^+, le taux d'actualisation passe au niveau r et reste constant entre 0 et T.

Pour $0 \leq t \leq T$, la valeur du portefeuille est appelée fonction d'accumulation notée $V(r)$

$$V_t(r) = \underbrace{\sum_{t_k < t}^{t} F_k (1+r)^{t-t_k}}_{\text{flux passées réinvestir}} + \underbrace{\sum_{t_k > t} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k - t}}}_{\text{fluxs futurs actualisés}}$$

en notant F_k les flux, qui seront réinvestits, versés en t_k

$$V_t(r) = \sum_{k=1}^{T} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k - t}} = (1+r)^t \sum_{k=1}^{T} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k}}$$

$$V_t(r) = (1+r)^t \, V_0(r)$$

Propriété : La fonction d'accumulation $V_t(r)$ est une fonction convexe de r. Idem avec le taux continu y

A parté :
- Structure par terme des taux d'intérêt
- Options/derivées a terme ferme
- Swap

$\Big\}$ reste du cours

Fiche Concept d'immunisation

VIII Elément de la structure par terme des taux d'intérêt.

On s'interesse à la courbe des taux, c'est à dire la mise en relation des taux de rendement obligataires d'un émetteur donné (typiquement l'Etat pour obtenir ce qu'on appelle la courbe des taux sans risque) avec leurs maturités (terme) pour construire une telle courbe, en première approche, on peut partir de celle de l'Etat comme référence.
3 raisons principales pour prendre cette référence

- Les Etats (en général) émettant suffisamment de titres pour que l'on dispose de nombreuses maturités (et donc de points pour établir la courbe)

- Les émissions d'emprunts d'Etat sont fréquentes et en grande quantité ce qui garantit, normalement une bonne liquidité

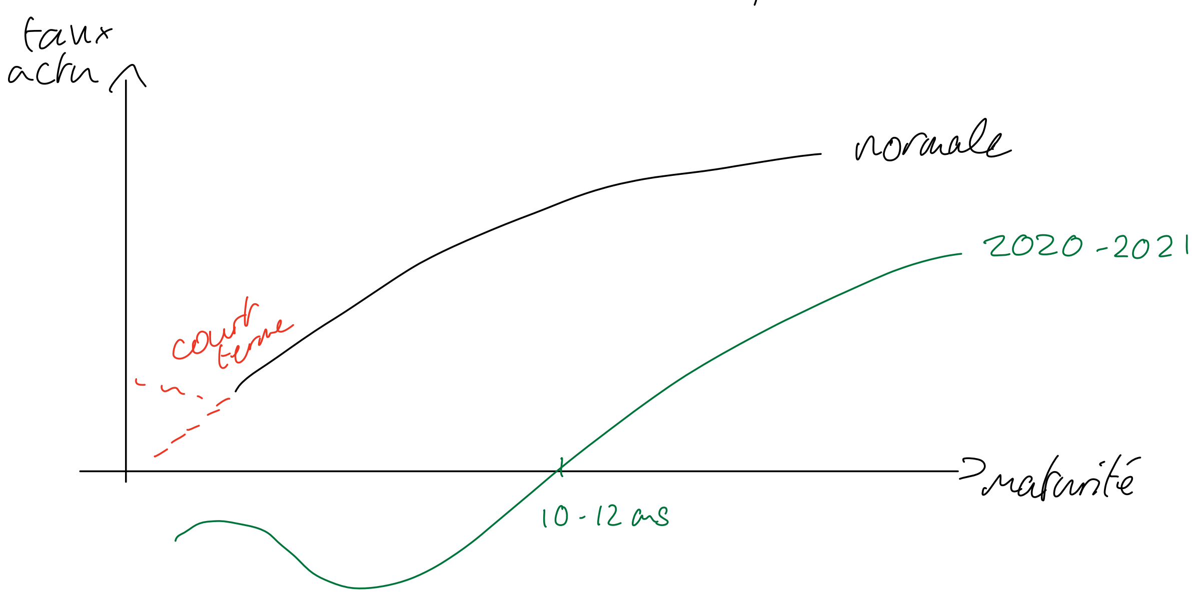
- En temps normal, l'Etat ne présente pas de risque de défaut

pas de prime de liquidité
pas de |marge / spread| de crédit
| dans le taux actu° des emprunts

La courbe des taux (actuariels) sans risque peut alors être utilisée pour évaluer d'autres titres obligataires, dans le même contexte économique, en actualisant les flux du titre avec le(s) taux actuariels sans risque majoré(s) d'une prime de risque adaptée (par exemple en fonction du rating du titre)

Formes usuelles de courbes des taux

Ici la courbe est une "photo" des taux à une date donnée. Cette courbe évolue et se déforme dans le temps (cours de 3A)



Exemple: Spreads de taux - Allemagne oct. 2016

Maturité	Emetteurs	Rating	taux actu°	
7 ans	allemand	AAA	-0.17	—
7 ans	Glencore Finance	BBB-	1.82	199 bps
7 ans	Groupe FNAC	BB	2.86	303 bps
7 ans	AREVA	B+	4,31	448 bps

24 Mars

Determination de taux zéro-coupon :

En t_0, le prix d'une oblig s'écrit

$$P_{t_0} = \sum_{k=1}^{T} \frac{F_k}{(1+r_{t_T})^{t_k - t_0}}$$

r_T = rdt actuariel (TRI) pour le titre de maturité $t_T - t_0$

Pour un ZC élémentaire entre t_0 et t_k (payant 1 en t_k)

$$B(t_0, t_k) = \frac{1}{(1+r_{t_0,t_k})^{t_k - t_0}}$$

$$P_{t_0} = \sum_{k=1}^{T} F_k \times B(t_0, t_k)$$

Exemple numérique :

Considérons 4 obligations du Trésor (OAT) à taux fixe, de coupons annuels, le 1er coupon étant payable dans 1 an, remboursable au pair.

Maturité	Taux Nominal	Valeur de Marché
1 an	3%	101,50%
2 ans	2.5%	100 %
3 ans	3.25%	100%
4 ans	3.5%	99%

Déterminer les taux ZC sans risque $r_{0,1}$, $r_{0,2}$, $r_{0,3}$, $r_{0,4}$

$$101.5 = \frac{103}{(1+r_{0,1})^1} \qquad \frac{1}{(1+r_{0,1})} = \frac{101.5}{103} \qquad r_{0,1} = \frac{103}{101.5} - 1$$

$$r_{0,1} = 1.478\%$$

$$100 = \frac{2.5}{(1+r_{0,1})^1} + \frac{102.5}{(1+r_{0,2})^2}$$

$$= \frac{2.5}{(101.47\%)} + \frac{102.5}{(1+r_{0,2})^2}$$

$$97.536 = \frac{102.5}{(1+r_{0,2})^2} \qquad \sqrt[2]{\frac{102.5}{97.536}} - 1 = 2,513\%$$

$$r_{0,2} = 2,513\%$$

$$100 = \frac{3.25}{(101.47\%)} + \frac{3.25}{(102.51\%)^2} + \frac{103.25}{(1+r_{0,3})^3}$$

$$100 = 3.2 + 3.09 + \frac{103.25}{(1+r_{0,3})^3}$$

$$93.71 = \frac{103.25}{(1+r_{0,3})^3}$$

$$r_{0,3} = \sqrt[3]{\frac{103.25}{93.71}} - 1 \qquad r_{0,3} = 3.28\%$$

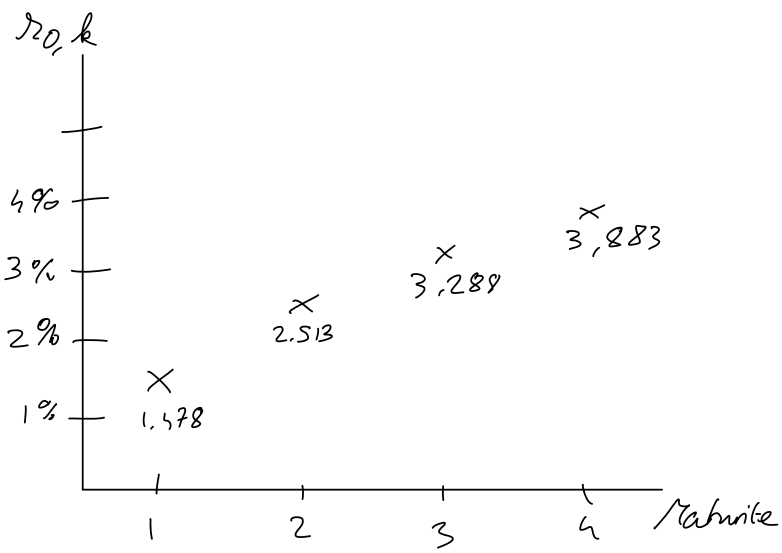
$$99 = \frac{3.5}{(101.47\%)} + \frac{3.5}{(102.51\%)^2} + \frac{3.5}{(103.28\%)^3} + \frac{103.5}{(1+r_{0,4})^4}$$

$$99 = 3.45 + 3.33 + 3.177 + \frac{103.5}{(1+r_{0,4})^4}$$

$$89 = \frac{103.5}{(1+r_{0,4})^4} \qquad r_{0,4} = \sqrt[4]{\frac{103.5}{89}} - 1 = 3.833\%$$

Remarque: extraire des taux ZC n'est pas toujours aussi simple. Il peut s'agir de résoudre un système d'équations.
Il faut autant d'obligation que de taux à extraire avec les "bonnes" maturités pour obtenir des solutions
Financièrement, on parle de marché complet

- Courbe des taux sans risque (émetteur : État)



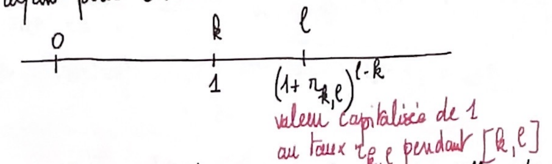
Remarque : On cherche à interpoler une courbe pour disposer de tous les (r_0, t_k). Ex : Méthode des spline cubiques

- pour simplifier on notera $r(k) : r_{0,k}$

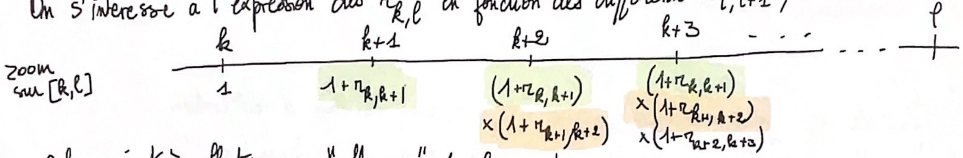
Ce taux est aussi appelé taux spot

1. Taux à terme implicite ou taux forward

Notons $r_{k,\ell}$ le taux forward actuel pour la période $[k,\ell]$ i.e. le taux (de cdt) (vu d'aujourd'hui = date 0) d'un placement effectué en k et ayant pour échéance ℓ.



On s'intéresse à l'expression des $r_{k,\ell}$ en fonction des différents $r_{i,i+1}$, i variant de k à $\ell-1$



Cela revient à effectuer un "roll-over" de placements :
- on place 1 en k
- on récupère $(1+r_{k,k+1})$ en $k+1$ que l'on place jusqu'en $k+2$
- on récupère $(1+r_{k,k+1})(1+r_{k+1,k+2})$ en $k+2$ que l'on place à nouveau

etc.

Sous l'hypothèse d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA), on écrit

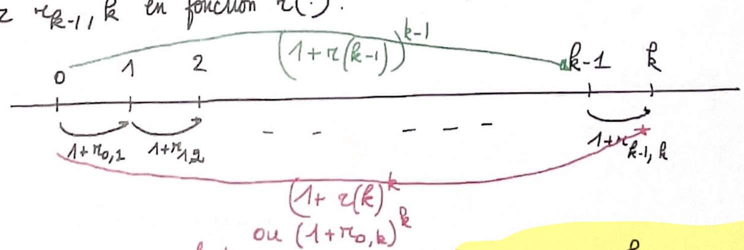
$$(1+r_{k,\ell})^{\ell-k} \underset{\text{AOA}}{\overset{\text{car}}{=}} \prod_{i=k}^{\ell-1} (1+r_{i,i+1}).$$

__Rem__ : une Opportunité d'Arbitrage est une stratégie d'investissement sans mise de fonds initiale permettant de dégager un résultat (financier) strictement positif avec une probabilité non nulle.

Ici, AOA signifie qu'il est équivalent de placer directement entre k et ℓ ou de faire le roll-over de placements (aucune stratégie ne domine l'autre).

On dispose de la courbe des taux spot (ou taux comptant) $k \longmapsto r_{0,k}$
ou plus simplement $k \longmapsto r(k)$

Exprimez $r_{k-1,k}$ en fonction $r(\cdot)$.



$$(1+r(k))^k \overset{\text{AOA}}{=} \prod_{i=0}^{k-1} (1+r_{i,i+1})$$

$$(1+r(k-1))^{k-1} \overset{\text{AOA}}{=} \prod_{i=0}^{k-2} (1+r_{i,i+1})$$

$$\frac{(1+r(k))^k}{(1+r(k-1))^{k-1}} = 1+r_{k-1,k}$$

On connaît les $r_{k,\ell}$ à partir des $r_{i,i+1}$ qui se déduisent des $r(i)$ et $r(i+1)$.

Exemple : calculer les taux forward à partir de la courbe des taux spot tirée des OAT du début du cours.

$r(1) = 1{,}478\%$ $\quad r(2) = 2{,}513\%$ $\quad r(3) = 3{,}286\%$ $\quad r(4) = 3{,}833\%$

$f_{1,1} = r_{1,2} = 3{,}56\%$ $\quad f_{1,2} = r_{1,3} = 4{,}2\%$

$f_{2,1} = r_{2,3} = 4{,}85\%$ $\quad f_{1,3} = r_{1,4} = 4{,}6\%$

$f_{3,1} = r_{3,4} = 5{,}5\%$ $\quad f_{2,2} = r_{2,4} = 5{,}2\%$

$$(1+r_{1,2}) = \frac{(1+r(2))^2}{1+r(1)} = \frac{1{,}02513^2}{1{,}01478} = 1{,}0356$$

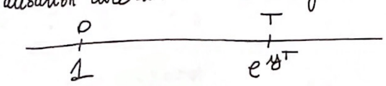
$$(1+r_{2,3}) = \frac{(1+r(3))^3}{(1+r(2))^2} = 1{,}0485$$

Rem : on note aussi $r_{1,2} = f_{1,1}$ taux forward dans 1 an pour 1 an

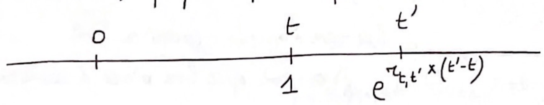
$$(1+r_{1,3})^2 = (1+r_{1,2}) \times (1+r_{2,3}) \qquad r_{1,3} = \sqrt{1{,}0356 \times 1{,}0485} - 1$$

2. Taux instantanés

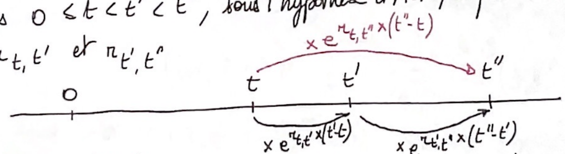
Rappel : Capitalisation avec un taux continu y entre les dates 0 (aujourd'hui) et T



On définit le taux forward annuel continu $r_{t,t'}$ comme le taux d'intérêt continu vu d'aujourd'hui (date 0) qui prévaut pour un placement entre les dates futures t et t'



Pour les dates $0 \leq t < t' < t''$, sous l'hypothèse d'AOA, on peut écrire une relation entre $r_{t,t''}$, $r_{t,t'}$ et $r_{t',t''}$



On écrit
$$e^{r_{t,t''} \times (t''-t)} \underset{AOA}{=} e^{r_{t,t'} \times (t'-t)} \times e^{r_{t',t''} \times (t''-t')}$$

soit
$$(t''-t)\, r_{t,t''} = (t'-t)\, r_{t,t'} + (t''-t')\, r_{t',t''}$$

Notons $r(t) = r_{0,t}$ pour $t \geq 0$ (version continue). La fonction $r(\cdot)$ est appelée courbe des taux continus (au comptant).

Comme pour les taux discrets, on cherche à exprimer $r_{t,t'}$ en fonction $r(\cdot)$.

Mq l'on a $\quad r_{t,t'} = r(t) + t' \dfrac{r(t') - r(t)}{t'-t}$

$t \leftrightarrow 0$

$t' \leftrightarrow t$

$t'' \leftrightarrow t'$

$$t'\, r(t') = t\, r(t) + (t'-t)\, r_{t,t'}$$

soit
$$r_{t,t'} = \frac{t'\, r(t') - t\, r(t)}{t'-t}$$

$$r_{t,t'} = \frac{t'\, r(t') - t'\, r(t) + t'\, r(t) - t\, r(t)}{t'-t}$$

$$r_{t,t'} = \frac{t'\left[r(t') - r(t)\right] + (t'-t)\, r(t)}{t'-t}$$ d'où la solution.

Si l'on suppose $r(\cdot)$ dérivable, en faisant tendre t' vers t, on définit

$r_F(t) = r(t) + t\, r'(t)$ appelé taux forward annuel instantané.

3) Synthétisation d'un zero coupon

On considère 2 obligations à coupons annuels de maturités respectives 1 an et 2 ans.

Elles sont remboursés au pair

On note F_1 et F_2 leurs valeurs nominales

k_1 et k_2 leurs taux nominaux

On veut créer/synthétiser un z.c de maturité 2 ans à partir de ces 2 obligations (i.e le zc n'existe pas deja sur les marchés financiers).

Pour ce faire, on réalise la stratégie suivante :

- Achat de l'obligation de durée 2 ans (long)
- Vente à découvert d'une certaine quantité x (court) de l'obligation de maturité 1 an

peut être non entier (rompus autorisés)

	Flux dans 1 an	Flux dans 2 ans
Achat oblig 2	$k_2 \times F_2$ (coupon)	$k_2 \times F_2 + F_2 = (k+1) F_2$
Vente de x oblig 1	$-x \times (k_1 + 1) \times F_1$	0
	0	$(k_2+1) F_2$

F_2 = rmbst au pair

on trouve $x = \dfrac{k_2 F_2}{(k_1+1) F_1}$

-IX- Contrats à terme ferme (par opposition aux options - cf. 2A)

I - Généralités

Une opération à terme consiste à fixer aujourd'hui les conditions d'une transaction effectuée à une date future.

Un contrat à terme ferme signé à la date 0, entre un acheteur et un vendeur, constitue pour son acheteur l'obligation d'acheter à l'échéance T un actif sous-jacent (ou support) à un prix déterminé et convenu à la date 0.

Symétriquement, le vendeur du contrat aura l'obligation de vendre le support au prix convenu.

a) Supports (ou sous-jacents)

- Actifs physiques de qualité bien spécifiée (commodity contracts)
  - Marchandises ou matières premières (blé, maïs, soja, sucre, pétrole, gaz naturel, ...)
  - Métaux (or, argent, ...)
- Actifs financiers
  - Actions
  - Taux d'intérêt
  - Devises (FX ou Forex = Foreign Exchange) voire cryptomonnaies
  - Indices boursiers
  - ...

b) Marchés

On distingue :

- les marchés organisés où les contrats à terme sont appelés futures
- les marché de gré à gré (OTC) où l'on parle alors de forwards

over the counter

Les marchés organisés sont standardisés et réglementés avec des appels de marge dans le cadre de chambres de compensation (Clearing House)

margin call

Ces marchés offrent plus de liquidité et plus de sécurité en "éliminant" le risque de contrepartie via les appels de marge (cf. + loin).

Les marchés de gré à gré offrent plus de souplesse quant aux caractéristiques des contrats.

c) Caractéristiques d'un contrat

- le sous-jacent et notamment sa qualité s'il ne s'agit pas d'actif financier
- la taille du contrat (le nb d'unités d'actif sous jacent par contrat)
- le lieu de livraison (pour un actif physique)
- la date de livraison (confondue ici avec l'échéance du contrat).

Aucun échange financier n'a lieu entre l'acheteur et le vendeur à la création du contrat.

d) Notations

On note $F_0 = F(0,T)$ le prix du sous-jacent vu de 0 et déterminé pour une livraison et un paiement en T. On appelle ce prix le prix à terme du support / sous-jacent ou encore le prix du contrat (par abus de langage).

Ici on se place en t :

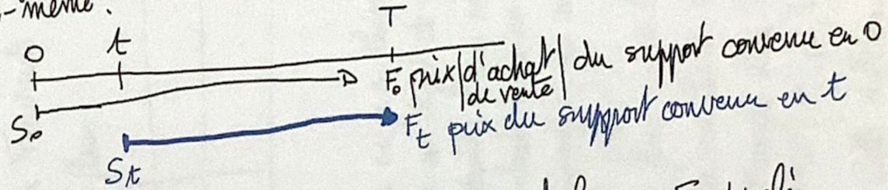
De manière générale, on écrira $F_t = F(t,T)$ le prix à terme en $t \in [0,T]$.

Soit S_t le prix spot (au comptant) du sous-jacent en t, c'est-à-dire le prix du support qu'il faudrait payer en t pour un paiement et une livraison en t du support.

En règle générale, $F_t \neq S_t$ et on définit la base $B_t = F_t - S_t$

Remarque : en T, $F_T = S_T$. La base converge vers 0 qd on se rapproche de l'échéance du contrat. $F_T = F(T,T) = S_T$

⚠ Attention à ne pas confondre le contrat (i.e. l'obligation d'acheter / de vendre le sous-jacent) et le sous-jacent lui-même.



⚠ Attention à ne pas confondre la valeur du contrat V et le prix F appelé pourtant (abusivement) prix du contrat. V est nul au départ du contrat qui peut être acheté ou vendu sans mise de fonds (excepté un éventuel dépôt de garantie).

II- Comparaison Futures et Forwards

a- Forwards

Il n'y a aucun flux financier échangé entre l'acheteur et le vendeur du contrat avant l'échéance T.

En T, la différence $F_T - F_0$ $(S_T - F_0)$, appelée marge, est réglée par le "perdant" :

- soit par livraison effective (physical delivery) du sous-jacent valant $S_T (= F_T)$ contre le paiement de F_0.
- soit par le règlement en liquide (cash settlement) de :
  - $F_T - F_0$ si $F_T > F_0$ (i.e. le vendeur du contrat est perdant)
  - $F_0 - F_T$ si $F_T < F_0$ (i.e. l'acheteur du contrat est perdant)

⚠ Attention, $S_T = F_T$ doit pouvoir être observé/calculé sans ambiguïté ni contestation / manipulation possible.

b - Futures

Dans ce cas, la marge $F_T - F_0$ est versée progressivement chaque jour j entre 0 et T.
Tous les jours j, on constate une différence ou marge quotidienne $\underbrace{F_j}_{F(j,T)} - \underbrace{F_{j-1}}_{F(j-1,T)}$ qui est versée par l'acheteur (si elle est négative) ou par le vendeur (si elle est positive).
On appelle ces versements des appels de marge (margin calls) ; ils sont collectés par la chambre de compensation (clearing house) du marché organisé (EUREX, CBOE, ...).
A priori, acheteurs et vendeurs ne se connaissent pas.
En T, la situation est la même que pour les Forwards.

c - Tableau comparatif des flux

Jour	0	1	...	j	...	T	TOTAL
Forwards	0	0	...	0	...	$F_T - F_0$	$F_T - F_0$
Futures	0	$F_1 - F_0$	...	$F_j - F_{j-1}$	...	$F_T - F_{T-1}$	$F_T - F_0$

Remarques :

- Si dans les 2 cas l'ouverture du contrat en 0 n'exige en théorie aucune mise de fonds initial, en pratique, sur le marché des Futures, il y a un dépôt de garantie initial (initial deposit) assez faible par rapport au montant de l'opération et qui est parfois rémunéré.
- Le système des appels de marge des contrats Futures leur offre une garantie bcp + forte contre le risque de défaillance d'une contrepartie, les autorités de marché pouvant annuler la position d'une contrepartie défaillante (cf. d).
- La différence temporelle des séquences de flux entre les 2 types de contrats (appels de marge quotidiens pour les Futures) influe sur leurs valeurs capitalisées.
Ainsi, en T, la valeur capitalisée des marges d'un Forward est égale à $F_T - F_0$ alors que pour un Futures on obtient $\sum_{j=1}^{T} e^{(T-j)\, r_{j,T}} [F_j - F_{j-1}]$ en considérant $r_{j,T}$ le taux forward continu qui prévaut entre j et T. Cette différence est souvent négligée car les écarts sont faibles en pratique.

d- Débouclage d'une position avant terme

Il est possible, le soir du jour j, de vendre (position courte) au prix F_j un contrat d'échéance T, superposant ainsi à la position longue initiale (achat du contrat en 0) une nouvelle position courte de signe contraire, cette nouvelle opération n'impliquant aucun flux en j.
Pour le vendeur, l'opération serait symétrique.

* Pour un contrat Futures

Jour	j	j+1	- - - -	T-1	T
Contrat acheté en 0	$F_j - F_{j-1}$	$F_{j+1} - F_j$	- - - -	$F_{T-1} - F_{T-2}$	$F_T - F_{T-1}$
Contrat vendu en j	0	$F_j - F_{j+1}$	- - - -	$F_{T-2} - F_{T-1}$	$F_{T-1} - F_T$
Total	$F_j - F_{j-1}$	0		0	0

Remarque : la position longue est exactement annulée à partir de j+1 par la vente du contrat en j. Comme cette vente n'exige pas de flux et que les contrats Futures sont standardisés, une position peut donc être annulée/débouclée/dénouée à toute date, simplement et sans aucun coût (ou presque). Bien souvent, sur les marchés Futures concernant les actifs financiers (et même sur les autres), le contrat ne va pas jusqu'à son terme, les contreparties n'étant pas intéressées par la livraison du support mais par la spéculation sur l'évolution des prix des contrats (gains, couverture de risque, ...)

* Pour un contrat Forward, la chronique des flux est :

Jour	j	j+1		T-1	T
Contrat acheté en 0	0	0	- - -	0	$F_T - F_0$
Contrat vendu en j	0	0	- - -	0	$-(F_T - F_j)$
Total	0	0		0	$F_j - F_0$

Remarque : la vente du contrat en j n'annule pas le flux à venir à l'échéance mais fixe sa valeur au niveau $F_j - F_0$ connu en j. En pratique, le débouclage avant terme est plus compliqué pour un Forward que pour un Futures.

c- Valeur d'un contrat à terme

Il faut vraiment faire attention à ne pas confondre le prix à terme du sous-jacent F que l'on appelle aussi prix du contrat et la valeur V du contrat lui-même qui donne l'obligation de payer F pour obtenir le sous-jacent à l'échéance.

La valeur d'un contrat Futures est constamment nulle car on a en effet la possibilité de réaliser un débouclage à tout moment et sans coût (au moins après les appels de marge).

La valeur $V_0(t)$ en t d'un contrat Forward d'échéance T émis en 0 pour un prix à terme du sous-jacent F_0 est égale à $V_0(t) = \underbrace{(F_t - F_0)}_{\text{valeur fixée par débouclage de la position en } t} e^{-(T-t)r_{t,T}}$ $r_{t,T}$ = tx forward continu entre t et T

III - Relation entre prix au comptant et prix à terme

Nous allons examiner ici une relation de parité dite cash and carry sous hyp. d'AOA.
Cette relation s'applique aux Forward et aux Futures, en univers de taux déterministes.
Elle est utilisée lorsque les supports sont des indices boursiers, des taux d'intérêt, des taux de change.

a - Formulation de base

L'arbitrage cash and carry consiste à :

- acheter le ~~support~~ support au comptant (cash) au prix S_0
- à détenir ce support entre 0 et T (carry).

Cet achat est financé par l'emprunt de S_0. On note I les intérêts de cet emprunt entre 0 et T.
L'emprunt est remboursé en T.
Parallèlement, on réalise la vente à terme du support au prix à terme F_0. Cette opération se conclut en T par la livraison du support contre le paiement de F_0

	0	T
Achat du support (+ rémunération)	$-S_0$	$0 + \boxed{R}$
Vente à terme du support	0	$+F_0$
Emprunt	$+S_0$	$-(S_0+I)$
TOTAL	0	$F_0 - S_0 - (I-R)$

→ car vendu à F_0 via le contrat à terme
rémunération supposée connue dès 0 et capitalisée en T

Mise de fonds nulle, donc en T, sous AOA, $F_0 - S_0 = I - R$ (sinon, il y aurait des arbitrages)

$F_0 - S_0 =$ base
$I - R =$ coût de portage (cost of carry)

$F_0 - S_0 = I - R$ est la relation de parité comptant-terme (spot-forward).
La base est donc positive ou négative en fonction de ce coût de portage.

- si la base est positive ($F > S$), on dit que le prix à terme est en report (premium) par rapport au prix comptant.
- si la base est négative, on dit que le prix à terme est en déport (discount)

La relation de parité comptant-terme permet de voir qu'on peut synthétiser en 0 un contrat Forward :

$$\underbrace{S_T + R - S_0 - I}_{\text{portf contenant le support et un emprunt de durée } T} = \underbrace{F_T - F_0}_{\text{valeur du Forward à l'échéance}} \quad (\text{car } S_T = F_T)$$

Les swaps de taux

1- Introduction

Définition : un swap est un contrat d'échange de flux financiers entre 2 contreparties. Le contrat précise :
- le montant (ou l'indice) de référence
- les dates d'échange des flux
- le mode de calcul des flux échangés
- les frais éventuels

Principe ancien mais fort développement depuis les années 1980 via les marchés organisés (pour les taux d'intérêt).

Ici nous nous intéresserons aux swaps de taux d'intérêt standards mais il existe de nombreuses autres sortes de swaps.

Les principaux types de swaps sont :
- swaps de taux d'intérêt standard (plain vanilla interest rate swap)
- swap OIS (Overnight Index Swap)
- swap de devises (cross currency swap)
- swap de risque de crédit (credit default swap - CDS)
- swap de matière première (commodity swap)
- swap à partir des rendement d'une action (equity-linked swap)

2) Principes du swap de taux standard

Mise en place d'un contrat entre 2 contrepartie (entreprise, banque, ...), à partir d'un principal (ou montant nominal) P donné :

- L'une des contreparties s'engage à payer les intérêts calculés à taux fixe T_f à partir du nominal (on parle de <u>jambe fixe</u>)
- L'autre contrepartie s'engage à payer les intérêts calculés à taux variable T_v (Euribor, Libor, ...) à partir du nominal (<u>jambe variable</u>)

On note D la durée servant au calcul des intérêts.

On a le schéma suivant

A une date t

$$A \xrightarrow{\text{jambe fixe } \; P\times T_f \times D} B$$

$$A \xleftarrow{\text{jambe variable } \; P\times T_v(t)\times D} B$$

Pour A, il s'agit d'un <u>swap taux fixe contre taux variable</u> ou <u>taux fixe donneur</u> ou <u>swap emprunteur</u>

Pour B, il s'agit d'un <u>swap taux variable contre taux fixe</u> ou <u>taux fixe receveur</u> ou <u>swap prêteur</u>

Le flux net en t pour A : $P\left(T_v(t) - T_f\right) \times D$

pour B : $P\left(T_f - T_v(t)\right) \times D$

Le seul flux qui est alors versé est le flux positif à la contrepartie qui doit le recevoir (on ne verse pas chacun des 2 flux du schéma).

<u>Exemple</u> : On considère un swap de durée 2 ans entre A et B. P = 1M€

A s'engage à payer annuellement 2% à B.

B " Euribor 12 mois à A.

<u>Rem</u> : P n'est jamais échangé.

<u>Dans 1 an</u>, A doit payer 20 000 € au titre de la jambe fixe.

Supposons Euribor 12 mois = 1,7%

B doit régler 17 000 € au titre de la jambe variable

En pratique, en net, A versera 3000 € à B (seul flux échangé)

<u>Dans 2 ans</u>, A doit toujours 20000 € à B

si Euribor 12 mois vaut 2,4%

B devra alors verser 4000 € à A.

3_ Pourquoi réaliser un swap de taux standard ?

* Pour gérer le risque de taux

Un swap taux fixe contre taux variable est favorable en cas de hausse des taux car le flux net $P \times (T_v(t) - T_f) \times D$ sera positif dès que $T_v(t) > T_f$.
Inversement, un swap taux variable contre taux fixe sera favorable en cas de baisse des taux.

Prenons une entreprise qui a emprunté (dette contractée en dehors du swap) P à taux variable $T_v + \alpha$. Si elle réalise un swap taux fixe contre taux variable T_v elle transforme alors son emprunt à taux variable en un emprunt à taux fixe $T_f + \alpha$.

cf. exercices 1 & 2

* Pour bénéficier d'une bonne signature (rating).

2 contreparties ayant des signatures différentes peuvent réaliser entre elles un swap afin de profiter respectivement d'un avantage pourvu que leurs conditions d'emprunt n'aient pas le même différentiel de taux selon qu'elles empruntent à taux fixe ou à taux variable

cf exercice 3

4_ En pratique.

Les contreparties d'un swap passent généralement par un intermédiaire financier pour réaliser le contrat. Cet intermédiaire est rémunéré (à parts égales par les 2 contreparties) sous la forme de quelques points de base d'intérêts (calculés sur le principal P).
Comme il est rare d'avoir 2 contreparties A et B avec des positions parfaitement symétriques, des institutions financières jouent le rôle de <u>market-makers</u> en fixant leurs conditions de taux fixe donneur ou de taux fixe receveur.