Chapitre 3 : L’intégrale stochastique et le calcul d’Itô

1/ Construction de l’intégrale stochastique

Introduction

- Dans ce chapitre, on cherche à définir des variables aléatoires du type

$$\omega \mapsto Y_t(\omega) = \left(\int_0^t X_s dB_s\right)(\omega)$$

Où $(X_t)_{t\geq 0}$ est un certain processus stochastique, dont la nature est à préciser, et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard.

- **Problème** : donner un sens à l'élément différentiel dB_s puisque la fonction $s \mapsto B_s$ n'est pas dérivable.
- **Solution** : un objet mathématique adéquat, introduit par K. Itô en 1942, est **l'intégrale stochastique**, qui permet de construire $Y_t(\omega)$ comme une limite de v.a., à condition que le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ soit **adapté à la filtration naturelle du Brownien** (hypothèse cruciale).
- NB : Théorie plus récente du **calcul anticipatif**, permet de lever cette hypothèse d'adaptation dans certains cas, qui est intéressant en finance, mais ne sera pas étudié ici. Attention : si on n'a plus l'hypothèse d'adaptation, l'objet étudié n'est plus l'intégrale stochastique. Autres intégrales...

Introduction

- En plus de chercher à définir des variables aléatoires du type

$$\omega \mapsto Y_t(\omega) = \left(\int_0^t X_s dB_s\right)(\omega)$$

On va s'intéresser à des quantités du type

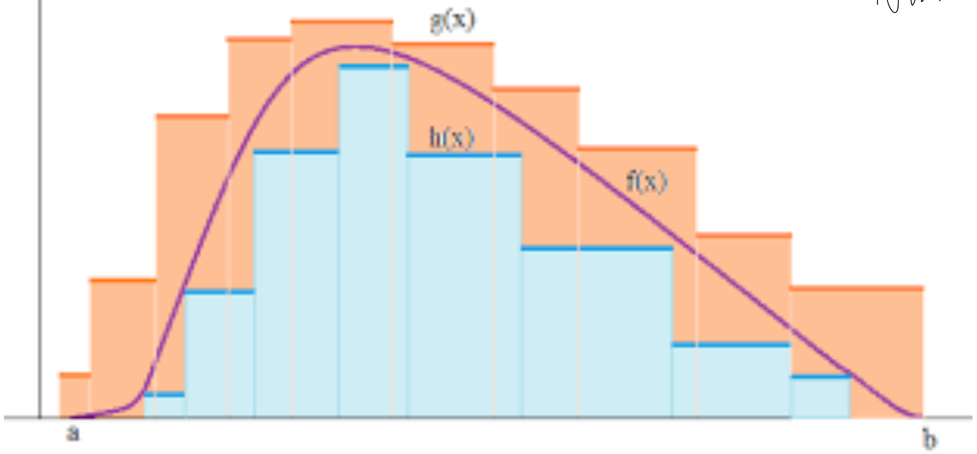
$$F\big(Y_t(\omega)\big) = F\left(\left(\int_0^t X_s dB_s\right)(\omega)\right)$$

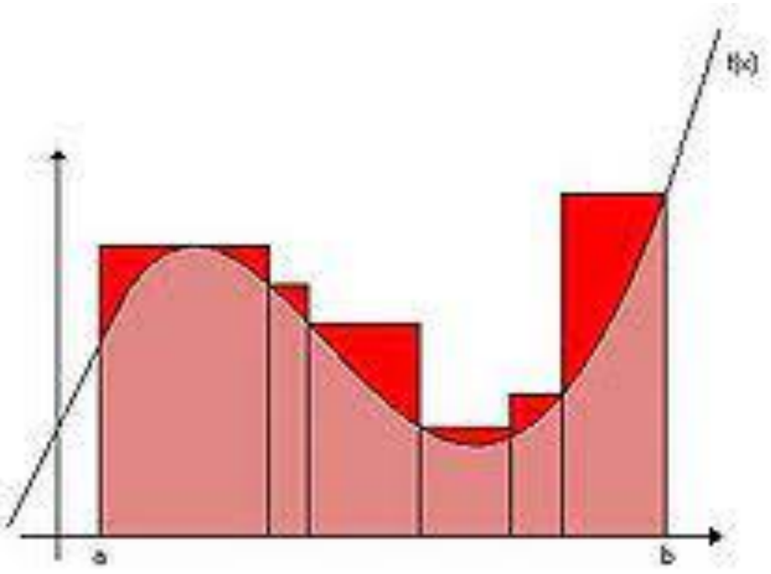
Où F est une fonction réelle.

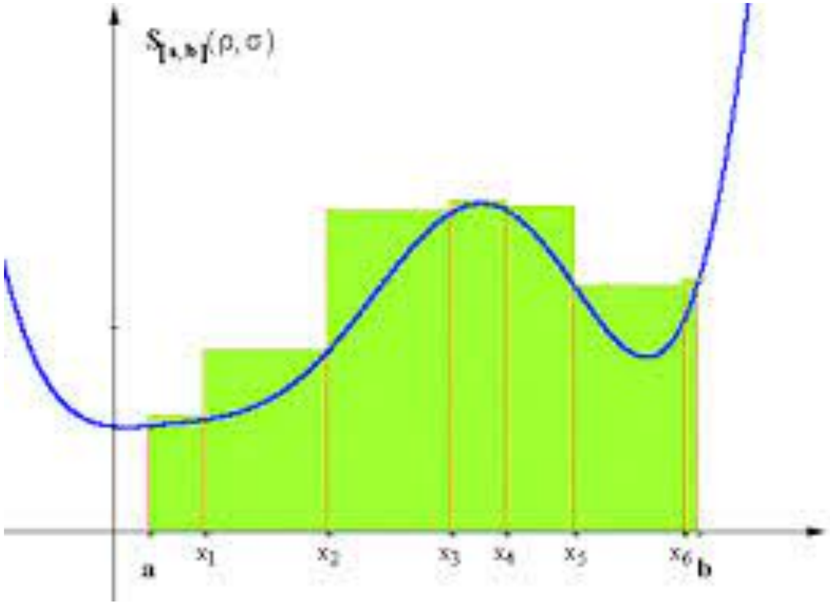
- Quand F est suffisamment régulière, la **formule d'Itô** va permettre d'exprimer $F\big(Y_t(\omega)\big)$ grâce à des intégrales stochastiques.
- Sous certaines conditions d'intégrabilité sur X, le processus $(Y_t)_{t\geq 0} = \left(\int_0^t X_s dB_s\right)_{t\geq 0}$ sera une martingales. Il sera même possible de décomposer toutes les martingales sous cette forme d'intégrale stochastique (**Théorème de Représentation des Martingales**).
- Tout processus $F(Y_t)$ pourra alors être décomposé en une martingale et un processus à variation finies.

Méthode

Parallèle avec intégrale de Riemann







Démarche - étapes

Poser le problème :

- Définir les objets qu'on veut intégrer : les processus stochastiques.
- Par rapport à quoi on veut intégrer ? Le mouvement Brownien.

Commencer par définir l'intégrale stochastique des fonctions réelles : Intégrale de Wiener

- Approximer les fonctions réelles par les fonctions en escalier, idem intégrale de Riemann
- Définir l'intégrale d'une fonction en escalier
- Passer à la limite
- Regarder quelles sont les propriétés de l'intégrale ainsi construite

Etendre la définition aux processus stochastiques

- Chercher l'équivalent des fonctions en escalier quand on veut intégrer un processus stochastique réel
- Passer à la limite, Étendre la définition
- Regarder quelles propriétés sont conservées et quelles propriétés sont perdues

Conclure sur ce qu'est et ce que vérifie l'intégrale stochastique ainsi construite

- Quelles propriétés sont vérifiées par l'intégrale stochastique

Dernière étape calculer une intégrale stochastique !

- Calculer une intégrale stochastique !
- Définir la formule d'Itô
- Voir l'utilité de la formule d'Itô
- Apprendre à utiliser l'intégrale stochastique
- Définir les EDS : équations différentielles stochastiques

Intégrale de Wiener : intégrale stochastique des fonctions réelles

- On cherche à définir des variables aléatoires du type

$$\omega \mapsto Y_t(\omega) = \left(\int_0^t \boldsymbol{X_s} dB_s\right)(\omega)$$

où $(X_t)_{t\geq 0}$ est un certain processus stochastique, dont la nature est à préciser, et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard.

- On va commencer par définir cette intégrale quand $(X_t)_{t\geq 0}$ est une fonction déterministe (c'est-à-dire que $(X_t)_{t\geq 0}$ ne dépend pas de ω).

On appellera cette première intégrale **l'intégrale de Wiener**.

L'espace $L^2([0,T],\mathbb{R})$

- Dans toute cette partie, les fonctions et processus sont à valeurs dans $\mathbb{R}$ (on peut généraliser à $\mathbb{R}^d$ sans difficulté).
- On fixe un horizon T>0 déterministe (éventuellement $T=+\infty$) et on note :

$$\boldsymbol{L^2([0,T],\mathbb{R})} = \left\{ f:[0,T]\to\mathbb{R}, \int_0^T |f(s)|^2 ds < +\infty \right\}$$

L'ensemble des fonctions réelles de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ de carré intégrable.

- **Remarque** : si $T<+\infty$, les fonctions continues et les fonctions bornées sont dans $L^2([0,T],\mathbb{R})$.
- On munit cet espace du **produit scalaire**

$$\langle f,g\rangle = \int_0^T f(s)g(s)ds$$

Et de la **norme correspondante** :

$$\|f\|_{2,T} = \sqrt{\langle f,f\rangle} = \left(\int_0^T f^2(s)ds\right)^{\frac{1}{2}}$$

- Muni de ce produit scalaire, $L^2([0,T],\mathbb{R})$ est un **espace de Hilbert** (au sens où toute suite de $L^2([0,T],\mathbb{R})$ qui est de Cauchy pour la norme $\|.\|_{2,T}$ converge vers un élément de $L^2([0,T],\mathbb{R})$).

Lemme hilbertien

- La propriété fondamentale des espaces de Hilbert est l'existence d'une **base orthonormée dénombrable** : il existe une suite de fonctions $\{f_n, n \geq 0\}$ de $L^2([0,T],\mathbb{R})$ telle que
$$\langle f_n, f_p \rangle = 0 \quad si\ n \neq p\,, \qquad et \quad \langle f_n, f_p \rangle = 1 \quad si\ n = p$$

Et telle que tout élément $f \in L^2([0,T],\mathbb{R})$ s'écrit de manière unique sous la forme
$$f = \sum_{n \geq 1} a_n f_n$$

Où les coefficients a_n sont les coordonnées de f dans la base $\{f_n, n \geq 0\}$.

- Dans le cas précis de $L^2([0,T],\mathbb{R})$, la base $\{f_n, n \geq 0\}$ peut être constituée de fonctions en escaliers :
$$f_n(t) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \mathbb{1}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}(t)$$

Où $p_n \in \mathbb{N}$, les $\alpha_i \in \mathbb{R}$, et $\{t_i^n\}$ forment une suite croissante de $[0,T]$.

- Le principal résultat est le suivant :

Lemme hilbertien : Soit $f \in L^2([0,T],\mathbb{R})$, alors il existe une suite de fonctions en escalier $\{f_n, n \geq 0\}$ telle que
$$\|f - f_n\|_{2,T} \to_{n \to +\infty} 0$$

Intégrale des fonctions en escalier

- Soit f_n une fonction en escalier, donnée par la décomposition précédente :

$$f_n(t) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \mathbb{1}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}(t)$$

- On définit son intégrale de Wiener de la manière suivante, assez naturelle :

$$I_T(f_n) = \int_0^T f_n(s) dB_s = \int_0^T \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \mathbb{1}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}(s)\ dB_s = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \int_0^T \mathbb{1}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}(s)\, dB_s$$
$$= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \underbrace{\int_{t_i^n}^{t_{i+1}^n} dB_s}_{=\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)} = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)$$

- L'intégrale ainsi définie est une application $f_n \mapsto I_T(f_n)$ qui va de l'espace $L^2([0,T], \mathbb{R})$ dans l'espace des variables aléatoires $L^2(\Omega, \mathbb{P})$.

Intégrale de fonctions en escalier gaussienne

$$I_T(f_n) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n} \right)$$

- L'intégrale de Wiener ainsi définie est une somme pondérée d'accroissements de Browniens. D'après le caractère gaussien du Brownien et l'indépendance des accroissements, cela définit donc une **variable aléatoire $\boldsymbol{I_T(f_n)}$ gaussienne**, **d'espérance nulle**, et de **variance** :

$$Var(I_T(f_n)) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 Var(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})$$

$$= \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 (t_{i+1} - t_i) = \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2 \int_0^T \mathbb{1}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}\, ds = \int_0^T \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i^2\, \mathbb{1}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}(s) ds = \int_0^T f_n^2(s) ds$$

Puisque $f_n^2(s) = \sum_i^{p_n} \alpha_i^2\, \mathbb{1}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}(s)$

Propriétés de l'intégrale des fonctions en escalier

- De plus, par la définition, on déduit directement que $f \to I_T(f)$ est une **application linéaire**, au sens où pour toutes fonctions en escalier f, g et tous réels a, b :

$$I_T(af + bg) = aI_T(f) + bI_T(g)$$

- Enfin, pour toutes fonctions en escalier f, g on a également :

$$\mathbb{E}\big(I_T(f)I_T(g)\big) = \frac{1}{2}\left[Var\big(I_T(f) + I_T(g)\big) - Var\big(I_T(f)\big) - Var\big(I_T(g)\big)\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^T (f+g)^2(s)ds - \int_0^T f^2(s)ds - \int_0^T g^2(s)ds\right] = \int_0^T f(s)g(s)\, ds$$

Cette dernière égalité est très importante et signifie que l'application $f \to I_T(f)$ est une **isométrie** de $L^2([0,T],\mathbb{R})$ dans $L^2(\Omega,\mathbb{P})$. Le produit scalaire est conservé par l'application intégrale de Wiener.

C'est la propriété d'isométrie de l'intégrale de Wiener qui s'écrit aussi :

$$\langle I_T(f), I_T(g)\rangle_{L^2(\Omega,\mathbb{P})} = \langle f, g\rangle_{L^2([0,T],\mathbb{R})}$$

Cas général des fonctions réelles : passage à la limite

- Pour construire $I_T(f)$ quand f est un élément quelconque de $L^2([0,T],\mathbb{R})$, on va l'approcher par une suite de fonctions en escalier, en utilisant le **lemme hilbertien**, puis pour passer à la limite et trouver les propriétés de la limite, on va utiliser la **propriété d'isométrie** et le **lemme gaussien** suivant :

Lemme gaussien : Soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une suite de variables gaussiennes suivant la loi $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n)$ convergeant vers une v.a. $X \in L^2(\Omega, \mathbb{P})$ (c'est-à-dire $\mathbb{E}(|X - X_n|^2) \to_{n\to+\infty} 0$). Alors :

$$\mu_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mu, \qquad \sigma_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \sigma, \qquad \text{et} \quad \mathrm{X} \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$$

- Ainsi, si on prend $f \in L^2([0,T],\mathbb{R})$, d'après le lemme hilbertien, f peut être approché par une suite de fonctions en escalier $\{f_n, n \geq 0\}$ telle que

$$\|f - f_n\|_{2,T} \to_{n\to+\infty} 0$$

- On peut construire les intégrales de Wiener $I_T(f_n)$ pour chaque fonction en escalier de la suite.
- Pas isométrie, les f_n étant une suite de Cauchy, les $I_T(f_n)$ aussi. L'espace $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ étant complet, cette suite converge, vers une v.a. notée $I_T(f)$.
- D'après le lemme gaussien, $I_T(f) \sim \mathcal{N}\left(0, \|f\|^2{}_{2,T}\right)$
- Point admis ici : il resterait à vérifier que la limite $I_T(f)$ ne dépend pas de la suite $\{f_n, n \geq 0\}$ choisie.

Propriétés de l'intégrale de Wiener des fonctions réelles

- $I_T(f) \sim \mathcal{N}\left(0, \|f\|^2{}_{2,T}\right)$ donc $I_T(f)$ est gaussienne et donc n'est JAMAIS une variable aléatoire p.s. positive, même si f est elle-même toujours positive.

Propriétés de l'intégrale de Wiener

- L'application $f \mapsto I_T(f)$ est **linéaire** et **isométrique** de $L^2([0,T],\mathbb{R}) \to L^2(\Omega,\mathbb{P})$:

Linéaire : pour toutes fonctions $f, g \in L^2([0,T],\mathbb{R})$ et tous réels a, b :

$$I_T(af + bg) = aI_T(f) + bI_T(g)$$

Isométrie : pour toutes fonctions $f, g \in L^2([0,T],\mathbb{R})$:

$$\mathbb{E}\big(I_T(f)I_T(g)\big) = \int_0^T f(s)g(s)\,ds$$

- $I_T(f)$ est une variable aléatoire **gaussienne** mesurable par rapport à $\sigma\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$

Caractérisation de l'intégrale de Wiener

- $I_T(f)$ est une v.a. gaussienne mesurable par rapport à $\sigma\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ qui vérifie $\forall t \in [0,T]$

$$\mathbb{E}(I_T(f)B_t) = \mathbb{E}\left(\left(\int_0^T f(s)dB_s\right)\left(\int_0^T \mathbb{1}_{[0,t]}(s)dB_s\right)\right) = \int_0^T f(s)\mathbb{1}_{[0,t]}(s)ds = \int_0^t f(s)ds$$

- Par propriété d'espace gaussien, cette formule caractérise l'intégrale stochastique :

Proposition :

$I_T(f)$ est l'unique variable aléatoire Z gaussienne mesurable par rapport à $\sigma\{B_t, 0 \leq t \leq T\}$ telle que

$$\mathbb{E}(ZB_t) = \int_0^t f(s)ds \,, \forall t \in [0,T]$$

Intégrale de Wiener vue comme processus gaussien

- On note $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ la réunion des $L^2([0,T], \mathbb{R})$ pour $T > 0$ et on considère une fonction $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$. D'après ce qu'on a défini avant, le processus

$$M_t = \int_0^t f(s) dB_s$$

A donc bien un sens pour tout $t \geq 0$.

Chaque M_t est une v.a. gaussienne. Cf les propriétés de l'intégrale stochastique précédemment énoncés. Mais on a même un résultat plus fort : **l'intégrale de Wiener est un processus gaussien**.

Théorème : Le processus $\{M_t, t \geq 0\}$ est un **processus gaussien**, $(\mathcal{F}_t^B)$-adapté, centré, de fonction de covariance

$$\Gamma(s,t) = \int_0^{s \wedge t} f^2(u) du\,.$$

De plus, M est un Processus à accroissements indépendants, au sens où

$$\{M_{t+s} - M_s\} \perp \sigma\{B_u, u \leq s\}, \forall s \geq 0$$

Intégrale de Wiener vue comme processus gaussien

Preuve :

- Si on note M_t^n la suite d'intégrales de Wiener associée à la suite $\{f_n\}$ de fonctions en escalier approchant f dans $L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, on voit que $t \mapsto M_t^n$ est un processus gaussien comme combinaison linéaire de Browniens.
- Par stabilité dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ des espaces gaussiens, on en déduit que la limite, $t \mapsto M_t$ est un processus gaussien. L'expression de son espérance et de sa fonction de covariance découlent des calculs précédents, et il est évident par construction que M_t est $(\mathcal{F}_t^B)$-adapté.
- Pour montrer l'indépendance des accroissements, on écrit $\forall s, t \geq 0$

$$M_{t+s} - M_t = \int_s^{t+s} f(u) dB_u = \int_s^{t+s} f(u) d(B_u - B_s) \ \in \sigma\{B_u - B_s, u \in [s, s+t]\}$$

Et on utilise l'indépendance des accroissements du Brownien qui entraîne

$$\sigma\{B_u - B_s, u \in [s, s+t]\} \perp \sigma\{B_u, u \leq s\}$$

Intégrale de Wiener : martingale et variation quadratique

- Notons $N_t = M_t^2 - \int_0^t f^2(s)ds$.

Proposition : Les processus $\{M_t, t \geq 0\}$, et $\{N_t, t \geq 0\}$ sont des $(\mathcal{F}_t^B)$- martingales.

- **Preuve** : à faire en exercice. Montrer que si X est un PAI et $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$ (resp. $\mathbb{E}(|X_t|^2) < +\infty$) alors $Y_t = X_t - \mathbb{E}(X_t)$ et $Z_t = X_t^2 - \mathbb{E}(X_t^2)$ sont des martingales.
- **Remarque** : Sauf lorsque f est constante, le processus $\{M_t, t \geq 0\}$ est un PAI gaussien, mais n'est pas un PAIS ! La loi de $M_{t+s} - M_s$ n'est pas la même que la loi de M_t.
- Cela signifie que si $f \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, alors son intégrale de Wiener est une **martingale**, et la **variation quadratique de l'intégrale de Wiener** est :

$$\left\langle \int_0^{\cdot} f(s)dB_s \right\rangle_t = \int_0^t f^2(s)ds$$

- Rappelons également que si $f, g \in L^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ l'isométrie implique :

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t f(s)dB_s\right)\left(\int_0^s g(s)dB_s\right)\right] = \int_0^{t\wedge s} f(u)g(u)du$$

Démarche - étapes

Poser le problème :

- Définir les objets qu'on veut intégrer : les processus stochastiques.
- Par rapport à quoi on veut intégrer ? Le mouvement Brownien.

Commencer par définir l'intégrale stochastique des fonctions réelles : l'intégrale de Wiener

- Approximer les fonctions réelles par les fonctions en escalier, idem intégrale de Riemann
- Définir l'intégrale d'une fonction en escalier
- Passer à la limite
- Regarder quelles sont les propriétés de l'intégrale ainsi construite

Etendre la définition aux processus stochastiques

- **Chercher l'équivalent des fonctions en escalier quand on veut intégrer un processus stochastique réel**
- **Passer à la limite, Étendre la définition**
- **Regarder quelles propriétés sont conservées et quelles propriétés sont perdues**

Conclure sur ce qu'est et ce que vérifie l'intégrale stochastique ainsi construite

- Quelles propriétés sont vérifiées par l'intégrale stochastique

Dernière étape : calculer une intégrale stochastique !

- Calculer une intégrale stochastique !
- Définir la formule d'Itô
- Voir l'utilité de la formule d'Itô
- Apprendre à utiliser l'intégrale stochastique
- Définir les EDS : équations différentielles stochastiques

Intégrale stochastique générale

- On cherche maintenant à définir la variable aléatoire

$$\int_0^t \theta_s dB_s$$

Lorsque $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un processus stochastique.

- Le caractère aléatoire de θ va exiger des conditions supplémentaires par rapport au cas de l'intégrale de Wiener.
- On note $\{\mathcal{F}_t^B, t \geq 0\}$ la filtration naturelle engendrée par le mouvement Brownien.

- **Définition** : on dira que $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un **bon processus** si il est $(\mathcal{F}_t^B)$-adapté, càglàd, et si

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty, \qquad \forall t > 0$$

NB : dénomination « bon processus » non standard.

Intégrale stochastique des processus simples/étagés

- Comme dans le cas de l'intégrale de Wiener, la construction de $I_t(\theta)$, l'intégrale stochastique de θ, se fait par discrétisation et par approximation des processus par des processus dit étagés, ou processus simples, qui vont être l'équivalent des fonctions en escalier pour les fonctions réelles.

- **Définition** : on appelle **processus étagé**, ou **processus simple**, les processus du type

$$\theta_t^n = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \, \mathbb{1}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}(t)$$

Où $p_n \in \mathbb{N}, 0 = t_0^n \leq t_1^n \leq \cdots \leq t_{p_n}^n$ et $\theta_i \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P}\right), \forall i = 0, \ldots, p_n$.

- On voit immédiatement que θ_t^n est un « bon processus » (somme finie de variables aléatoires de carré intégrable).

- **Remarque** : Grande importance des $\theta_i \in L^2\left(\Omega, \mathcal{F}_{t_i}, \mathbb{P}\right)$. Chaque θ_i doit être $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable, afin d'être indépendant de l'accroissement de Brownien entre t_i^n *et* t_{i+1}^n. Si ce n'est pas vérifié, alors l'intégrale définie n'est pas l'intégrale stochastique. Parallèle avec les différentes intégrales de Riemann.

Intégrale stochastique des processus simples/étagés

- On définit alors l'intégrale stochastique d'un processus simple

$$\theta_t^n = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \, \mathbb{1}_{]t_i^n, t_{i+1}^n]}(t)$$

De manière identique à ce qui a été fait pour les fonctions en escalier :

$$I_t(\theta^n) = \int_0^t \theta_s^n dB_s = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n} \right)$$

$$\theta_i \ doit \ \hat{e}tre \ \mathcal{F}_{t_i} - mesurable$$

- **Propriétés** :

On vérifie que pour $i \neq j$,

$$\mathbb{E}\left(\theta_i \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n} \right) \theta_j (B_{t_{j+1}^n} - B_{t_j^n}) \right) = 0$$

Comme dans le cas des fonctions en escalier et de l'intégrale de Wiener, on a

$$\mathbb{E}[I_t(\theta^n)] = 0 \quad et \quad Var[I_t(\theta^n)] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s^n)^2 ds \right]$$

En revanche, à cause du caractère aléatoire de θ^n et des θ_i, la variable aléatoire $I_t(\theta^n)$ n'est PAS une variable aléatoire gaussienne en général.

Cas général : intégrale stochastique d'un bon processus

- Le principe est le même que pour l'intégrale de Wiener, mais les outils mathématiques sous-jacents plus compliqués que les lemmes hilbertien et gaussien de la partie précédente.
- Nous passerons les détails ici et présenterons juste la démarche.
- Si θ est un bon processus, il faut montrer d'abord qu'il existe $\{\theta^n, n \geq 0\}$ une suite de processus étagés telle que

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (\theta_s - \theta_s^n)^2 ds\right] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

- Puis il faut montrer que pour tout $t > 0$ il existe une variable aléatoire $I_t(\theta)$ de carré intégrable tq :

$$\mathbb{E}[\, |I_t(\theta) - I_t^n(\theta)|^2 \,] \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Avec $I_t^n(\theta)$ défini comme $\int_0^t \theta_s^n dB_s = \sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)$.

- On pose naturellement la limite des $I_t^n(\theta)$ comme étant $I_t(\theta) = \int_0^t \theta_s dB_s \,, \forall t \geq 0$.

Propriétés de l'intégrale stochastique générale

- Par indépendance, on peut écrire :

$$\mathbb{E}[I_t(\theta^n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{p_n} \theta_i \left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)\right] = \sum_{i=0}^{p_n} \mathbb{E}(\theta_i)\mathbb{E}\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right) = 0$$

Et par passage à la limite

$$\mathbb{E}[I_t(\theta)] = 0$$

- De même on obtient

$$Var\left(I_t(\theta^n)\right) = \mathbb{E}[I_t(\theta^n)^2] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{p_n} \theta_i^2 \mathbb{E}\left[\left(B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}\right)^2\right]\right] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{p_n} \theta_i^2 (t_{i+1}^n - t_i^n)\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t {\theta_s^n}^2 ds\right]$$

Et par passage à la limite quand $n \to +\infty$:

$$Var\left(I_t(\theta)\right) = \mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

- Insistons à nouveau sur le point que $I_t(\theta)$ n'est pas gaussienne, sauf lorsque θ est déterministe.

Propriétés de l'intégrale stochastique générale

- D'autres propriétés de l'intégrale de Wiener sont conservées :
  - La linéarité

  Pour tout $t \geq 0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}, et\ \theta^1, \theta^2$ bons processus, on a
  $$I_t(a_1\theta^1 + a_2\theta^2) = a_1 I_t(\theta^1) + a_2 I_t(\theta^2)$$
  - La propriété de martingales

  Pour tout bon processus θ, les processus $t \mapsto I_t(\theta)$ et $t \mapsto I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$ sont des $(\mathcal{F}_t^B)$-martingales continues.
  - La propriété d'isométrie

  Pour tous bons processus ϕ, θ et pour tous $s, t \geq 0$, on a
  $$\mathbb{E}[I_s(\phi)I_t(\theta)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{s\wedge t} \phi_u \theta_u du\right]$$

La propriété de martingales

- La propriété de martingales

Pour tout bon processus θ, les processus $t \mapsto I_t(\theta)$ et $t \mapsto I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$ sont des $(\mathcal{F}_t^B)$-martingales continues.

- On a donc, pour tous $s, t \geq 0$

$$\mathbb{E}[I_t(\theta)|\mathcal{F}_s^B] = I_s(\theta)$$

- On montre également que

$$\mathbb{E}\left[\left(I_t(\theta) - I_s(\theta)\right)^2 |\mathcal{F}_s^B\right] = \mathbb{E}\left[\left(I_t(\theta)\right)^2 - \left(I_s(\theta)\right)^2 |\mathcal{F}_s^B\right] = \mathbb{E}\left[\int_s^t \theta_u^2 du\, |\mathcal{F}_s^B\right]$$

- Comme conséquence du théorème de Doob, on voit aussi que pour tout $(\mathcal{F}_t^B)$-temps d'arrêt τ et tout θ bon processus tel que $\mathbb{E}\left[\int_0^\tau \theta_s^2 ds\right] < +\infty$, on a

$$\mathbb{E}[I_\tau(\theta)] = 0, \qquad et \quad \mathbb{E}[I_\tau(\theta)^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^\tau \theta_s^2 ds\right]$$

- Enfin, on peut appliquer les théorèmes vus au chapitre 1 sur les martingales :

$$\mathbb{E}\left[\left(\sup_{s \leq t} I_s(\theta)\right)^2\right] \leq 4\mathbb{E}[I_\tau(\theta)^2] \leq E\int_0^\tau \mathbb{E}(\theta_s^2)ds$$

La propriété d'isométrie et variation quadratique

- La propriété d'isométrie

Pour tous bons processus ϕ, θ et pour tous $s, t \geq 0$, on a

$$\mathbb{E}[I_s(\phi)I_t(\theta)] = \mathbb{E}\left[\int_0^{s\wedge t} \phi_u\theta_u du\right]$$

- De plus, le processus $I_t(\phi)I_t(\theta) - \int_0^t \phi_u\theta_u du$ est une $(\mathcal{F}_t^B)$-martingale.
- On peut donc calculer le **crochet stochastique** de 2 intégrales stochastiques et la **variation quadratique** d'une intégrale stochastique :

$$\langle I_t(\theta)\rangle_t = \left\langle \int_0^{\cdot} \theta_s dB_s \right\rangle_t = \int_0^t \theta_s^2(s) ds$$

$$\langle I_t(\phi), I_t(\theta)\rangle_t = \left\langle \left(\int_0^{\cdot} \phi_s dB_s\right), \left(\int_0^{\cdot} \theta_s dB_s\right) \right\rangle = \int_0^t \phi_u\theta_u du$$

Résumé

- Comme dans le cas déterministe avec l'intégrale de Riemann, on a défini l'intégrale stochastique comme limite d'intégrales de fonctions « simples »
  - Cas déterministe (intégrale stochastique d'une fonction déterministe) : fonctions en escalier
  - Cas stochastique (intégrale stochastique d'un processus stochastique) : processus simples, sommes d'indicatrices

$$\int_0^t \alpha_a \mathbb{1}_{[a,b]}(s)dB_s = \alpha_a(B_b - B_a)$$

- Linéarité / multiplication par un scalaire / Chasles : propriétés identiques à l'intégrale classique
- Toute fonction mesurable s'écrit comme limite $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ de fonctions simples
- Ainsi : l'intégrale stochastique d'un processus mesurable « bon processus » est défini comme la limite $L^2(\Omega, \mathbb{P})$ des intégrales des processus simples qui convergent vers ce processus
- Propriété de martingales, isométrie, calcul de variation quadratique
- **Reste une difficulté** : la formule d'intégration par parties → Formule d'Itô ! Différent du calcul intégral classique.

Dernière étape !

Poser le problème :

- Définir les objets qu'on veut intégrer : les processus stochastiques.
- Par rapport à quoi on veut intégrer ? Le mouvement Brownien.

Commencer par définir l'intégrale stochastique des fonctions réelles : l'intégrale de Wiener

- Approximer les fonctions réelles par les fonctions en escalier, idem intégrale de Riemann
- Définir l'intégrale d'une fonction en escalier
- Passer à la limite
- Regarder quelles sont les propriétés de l'intégrale ainsi construite

Etendre la définition aux processus stochastiques

- **Chercher l'équivalent des fonctions en escalier quand on veut intégrer un processus stochastique réel**
- **Passer à la limite, Étendre la définition**
- **Regarder quelles propriétés sont conservées et quelles propriétés sont perdues**

Conclure sur ce qu'est et ce que vérifie l'intégrale stochastique ainsi construite

- Quelles propriétés sont vérifiées par l'intégrale stochastique

Dernière étape : calculer une intégrale stochastique !

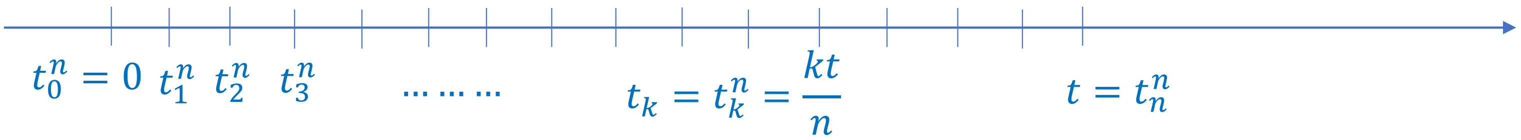
- Calculer une intégrale stochastique !
- Définir la formule d'Itô
- Voir l'utilité de la formule d'Itô
- Apprendre à utiliser l'intégrale stochastique
- Définir les EDS : équations différentielles stochastiques

Calcul d’une intégrale stochastique

- Calculer, grâce à la définition de l’intégrale stochastique
$$\int_0^t B_s dB_s$$
- Autrement dit, trouver une suite de processus simples qui approche B_s, en calculer l’intégrale stochastique, puis passer à la limite.
- **Attention** : bien réfléchir aux espaces dans lesquels on travaille et dans lesquels on cherche des limites
- Etapes :
  - Découper l’intervalle de temps, et trouver une suite de processus simples qui approchent B_s
  - Vérifier que cette suite de processus simples converge bien vers B_s dans $L^2(\Omega \times [0, T], \mathbb{R})$
  - Calculer l’intégrale stochastique de ce processus simple
  - Faire tendre n vers l’infini, et trouver la limite dans $L^2(\Omega, \mathbb{R})$

Calcul de $\int_0^t B_s dB_s$ - trouver une suite de processus simples pour approximer B_s

- Il s'agit donc, en utilisant la définition/construction de l'intégrale stochastique, de calculer $\int_0^t B_s dB_s$, en approchant B_s par une suite de fonctions étagées.
- Découpons d'abord l'intervalle de temps $[0, t]$ en n intervalles de même longueur $\frac{k}{n}$:



- Un processus étagé approchant B_s sur la discrétisation ci-dessus peut être donnée par :

$$H_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(s)$$

- Tout d'abord il faut vérifier que $H_n(s)$ pour s $\in [0, t]$ converge bien vers B_s dans $L^2(\Omega \times [0, T], \mathbb{R})$:

$$H_n(s) \xrightarrow[n \to +\infty]{} B_s$$

Calcul de $\int_0^t B_s dB_s$ - montrer que les processus simples convergent vers B_s

$$H_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(s)$$

- Tout d'abord il faut vérifier que $H_n(s)$ pour s $\in [0, t]$ converge bien vers B_s dans $L^2(\Omega \times [0, T], \mathbb{R})$:

$$H_n(s) \xrightarrow[n \to +\infty]{} B_s$$

- Qu'est-ce que la convergence dans $L^2(\Omega \times [0, T], \mathbb{R})$?

$$H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} X \quad dans L^2(\Omega \times [0, T], \mathbb{R})$$
$$\Leftrightarrow \quad \|H_n - X\|_{L^2(\Omega \times [0,T], \mathbb{R})} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$
$$\Leftrightarrow \quad \mathbb{E}\left[\int_0^t (H_n(s) - X(s))^2 ds\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

- Il faut donc montrer que $\|H_n - B\|_{L^2(\Omega \times [0,T], \mathbb{R})} \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$, ou encore $\mathbb{E}\left[\int_0^t (H_n(s) - B_s)^2 ds\right] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Calcul de $\int_0^t B_s dB_s$ - montrer que les processus simples convergent vers B_s

$$H_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(s)$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^t (H_n(s) - B_s)^2 ds\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(s) - B_s\right)^2 ds\right]$$

$= \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\sum_{k=0}^{n-1} (B_{t_k} - B_s)\mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(s)\right)^2 ds\right]$ car $\mathrm{B_s} = \sum_{k=0}^{n-1} (B_s)\mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(s)$

$= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n-1} \int_0^t \left(B_{t_k} - B_s\right)^2 \mathbb{1}_{[t_k, t_{k+1}[}(s)\, ds\right]$ car tous les doubles produits sont nuls (X d'indicatrices disjointes)

$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E}\left[\left(B_{t_k} - B_s\right)^2\right] ds$ par le Théorème de Fubini

$= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} (s - t_k)\, ds = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} [(s - t_k)^2]_{t_k}^{t_{k+1}} = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} (t_{k+1} - t_k)^2 = \frac{1}{2} \times n \times \left(\frac{t}{n}\right)^2 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

Donc $H_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} B \quad dans L^2(\Omega \times [0, T], \mathbb{R})$

Et donc $\int_0^t B_s dB_s = \lim_{n \to +\infty} \int_0^t H_n(s) dB_s$ dans $L^2(\Omega, \mathbb{P})$.

Calcul de $\int_0^t B_s dB_s$ - calculer $\int_0^t H_n(s)dB_s$

$$H_n(s) = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k} \mathbb{1}_{[t_k,t_{k+1}[}(s)$$

- Il faut maintenant calculer $\int_0^t H_n(s)dB_s$. Par définition de l'intégrale stochastique des processus simples :

$$\int_0^t H_n(s)dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k}\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)$$

Or

$$B_{t_k}\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right) = B_{t_k}B_{t_{k+1}} - B_{t_k}^2 = \frac{1}{2}\left(B_{t_{k+1}}^2 + B_{t_k}^2 - \left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2\right) - B_{t_k}^2 = \frac{1}{2}\left(B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2 - \left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2\right)$$

Donc

$$\int_0^t H_n(s)dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} B_{t_k}\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2 - \left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left(B_{t_{k+1}}^2 - B_{t_k}^2\right)}_{somme\ téléscopique = B_t^2} - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2\right) = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}\underbrace{\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2\right)}_{\substack{tend\ vers\ t\ quand\ n \to +\infty \\ reste\ à\ montrer}}$$

Calcul de $\int_0^t B_s dB_s$ - calculer la limite de $\int_0^t H_n(s) dB_s$

- On a déjà vu dans le cours sur le Brownien que $\sum_{j=1}^{2^n} \left|B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} t \quad p.s.\ et\ dans\ L^2$ (cf slide sur la longueur quadratique de la courbe Brownienne).
- Ici c'est un peu la même chose, on va devoir montrer que $\sum_{k=1}^{n-1} \left|B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} t$ dans L^2
- On va montrer que la norme L^2 de la différence tend vers 0 :

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2\right) - t\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2 - (t_{k+1} - t_k)\right)\right)^2\right], \quad \text{puisque t} = \sum_{k=0}^{n-1}(t_{k+1} - t_k)$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=0}^{n-1}\left(\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2 - (t_{k+1} - t_k)\right)^2\right)\right] + \underbrace{\mathbb{E}\left[\sum_{\substack{k,k'=0\\k\neq k'}}^{n-1}\left(\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2 - (t_{k+1} - t_k)\right)\left(\left(B_{t_{k'+1}} - B_{t_{k'}}\right)^2 - (t_{k'+1} - t_{k'})\right)\right]}_{=\sum_{\substack{k,k'=0\\k\neq k'}}^{n-1} \mathbb{E}\left(\left(B_{t_{k+1}}-B_{t_k}\right)^2-(t_{k+1}-t_k)\right)\underbrace{\left(\left(B_{t_{k'+1}}-B_{t_{k'}}\right)^2-(t_{k'+1}-t_{k'})\right)}_{=0\ car\ loi\ du\ Brownien}\mathbb{E}\ par\ indépendance}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1}\mathbb{E}\left(\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2 - (t_{k+1} - t_k)\right)^2 = n\mathbb{E}\left(\left(B_{\frac{t}{n}}^2 - \frac{t}{n}\right)^2\right)$$ car les variables aléatoires $\left(B_{t_{k+1}} - B_{t_k}\right)^2 - (t_{k+1} - t_k)$ sont iid

$$= n\mathbb{E}\left(\frac{t^2}{n^2}(B_1^2 - 1)^2\right) = n\frac{t^2}{n^2}\mathbb{E}\left((B_1^2 - 1)^2\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$ car (scaling) $B_{\frac{t}{n}} \sim \sqrt{\frac{t}{n}} B_1$

Donc $\int_0^t H_n(s) dB_s \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$ et donc $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$

Extension de l'intégrale stochastique aux martingales locales

- Dans la définition d'un « bon processus », la condition d'intégrabilité $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty$ est parfois trop exigeante dans la pratique.
- Il est en réalité possible de définir l'intégrale stochastique $I_t(\theta)$ sous la seule condition $\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty$ p.s.
- Cependant, dans ce cas, $t \mapsto I_t(\theta)$ n'est plus nécessairement une martingale, et en particulier $\mathbb{E}[I_t(\theta)]$ peut être non nul.
- **Définition** : on dira que $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un **bon processus local** si il est $(\mathcal{F}_t^B)$-adapté, càglàd, et si
$$\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty \text{ p.s.}$$
- Soit $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un bon processus local. On pose $\tau_n = \inf\{t > 0, \int_0^t \theta_s^n ds = n\}$.
- Comme $\{\tau_n > t\} = \{\int_0^t \theta_s^n ds < n\}$, et comme θ_s est $(\mathcal{F}_s^B)$-adapté, τ_n est un $(\mathcal{F}^B)$-temps d'arrêt.
- L'hypothèse d'intégrabilité sur θ_s entraîne que $\tau_n \to +\infty$ p.s.
- Enfin, par construction, on a $\mathbb{E}\left[\int_0^{t\wedge\tau_n} \theta_s^2 ds\right] \leq n < +\infty$.
- Ainsi, on peut définir $I_{t\wedge\tau_n}(\theta)$ qui est une martingale, donc $I_t(\theta)$ est une **martingale locale**.
- Idem pour $I_t(\theta)^2 - \int_0^t \theta_s^2 ds$ qui n'est plus une martingale mais qui est aussi une martingale locale.

Next steps : après les vacances

- Formule d'Itô
- Equations Différentielles Stochastiques
- Girsanov