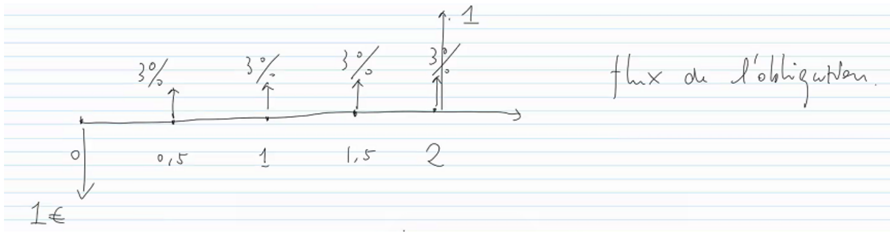
TD1 - Risque de crédit

Exercice 1

1.



Rappel : pour un paiement d'un montant x payé à la date $t > 0$, son actualisation à $t = 0$ est égale à :

— En convention simple : $\frac{x}{1+rt}$, pour $t < 1$

— En convention composée : $\frac{x}{(1+r)^t}$

— En convention continue : xe^{-rt}

En appliquant la convention composée, on trouve pour notre obligation :

$$V_0 = \frac{3\%}{(1+5\%)^{0.5}} + \frac{3\%}{(1+5.8\%)} + \frac{3\%}{(1+6.4\%)^{1.5}} + \frac{3\%}{(1+6.8\%)^2}$$

En effet, le taux de coupon donné ici est annuel, alors que le coupon est payé tous les 6 mois, donc le coupon versé est de 3% tous les 6 mois.

Une formule un peu plus générale en convention composée serait la suivante :

$$V_0 = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{4} \frac{1}{(1+r_{t_i})^{t_i}} + \frac{1}{(1+r_T)^T}$$

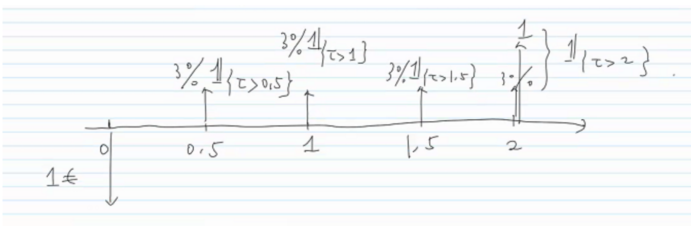
avec $t_i = \frac{i}{2}$ pour $i = 1, ..., 4$ et $T = t_4$.

En convention continue, on aurait :

$$V_0 = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{4} e^{-r_{t_i}\times t_i} + e^{-r_T \times T}$$

ce qui vaut dans notre cas 0.9838.

2. Le premier instant de saut est le premier moment où le processus vaut 1.



On reçoit les 3% de coupons à la date t que si le défaut arrive après la date t, donc le flux de paiement en t est multiplié par une indicatrice qui vaut 1 si le défaut survient après t, et 0 sinon.

Le flux à 6 mois vaut alors :

$$\frac{3\%}{(1+5\%)^{0.5}}E[\mathbf{1}_{\{\tau>0.5\}}] = \frac{3\%}{(1+5\%)^{0.5}}P(\tau>0.5)$$

où $P(\tau > 0.5)$ représente le premier instant de saut d'un processus de poisson $\tau \hookrightarrow \mathcal{E}(3\%)$.

On a $P(\tau > t) = exp(-\lambda t)$. Donc si on se place en taux continu, on a :

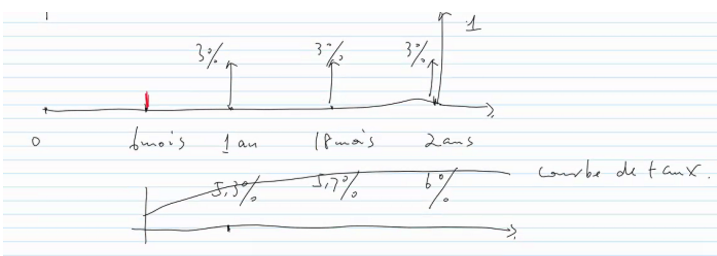
$$\begin{aligned}\tilde{V_0} &= 3\% \times e^{-5\%\times 0.5} \times e^{-3\%\times 0.5} + 3\% \times e^{-5.8\%\times 1} \times e^{-3\%\times 1} \\ &\quad + 3\% \times e^{-6.4\%\times 1.5} \times e^{-3\%\times 1.5} + 1.03\% \times e^{-6.8\%\times 2} \times e^{-3\%\times 2} \\ &= 0.9290\end{aligned}$$

Et une formule plus générale serait :

$$\tilde{V_0} = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{4} e^{-t_i(r_{t_i}+\lambda)} + e^{-T(r_T+\lambda)}$$

On voit que le risque de défaut est interprété par le spread entre le taux risqué (c'est-à-dire $r+\lambda$) et le taux sans risque.

3.



On se place à 6 mois, donc on ne sert pas de tous les taux qui nous sont donnés dans le tableau : en effet, on va avoir besoin des 3 premiers puisqu'on n'aura pas actualisé sur 2 ans, le dernier paiement étant le paiement du nominal et du dernier coupon 18 mois plus tard.

Si on ne considère pas le risque de défaut :

$$V_{0.5} = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{3} e^{-\hat{r}_{t_i}\times t_i} + e^{-\hat{r}_{1.5}\times 1.5} = 0.9989$$

et en considérant le risque de défaut :

$$\tilde{V}_{0.5} = \frac{c}{2}\sum_{i=1}^{3} e^{-(\hat{r}_{t_i}+\lambda)\times t_i} + e^{-(\hat{r}_{1.5}+\lambda)\times 1.5} = 0.9562$$

Remarque : L'intensité de défaut peut également évoluer avec le temps. Dans ce cas-là, on remplace λ dans $\tilde{V}_{0.5}$ par un $\hat{\lambda}$ (un λ dynamique) à la date $t = 0.5$.

Exercice 2

1. On a :

$$\tau = T\mathbf{1}_{\{V_T<L\}} + (+\infty)\mathbf{1}_{\{V_T>L\}}$$

et le payoff de la dette est

$$\begin{aligned}D &= V_T\mathbf{1}_{\{\tau=T\}} + L\mathbf{1}_{\{\tau=+\infty\}} \\ &= V_T\mathbf{1}_{\{V_T<L\}} + L\mathbf{1}_{\{V_T>L\}}\end{aligned}$$

2. Dans le modèle de Merton :
La dette s'écrit $D = V_T\mathbf{1}_{\{V_T<L\}} = L\mathbf{1}_{\{V_T>L\}}$ à T, $D_t, t\in[0,T]$.
D'après Black&Scholes, on note le Call à T $(S_T-K)^+$, C_t $t\in[0,T]$, et le Put $P_t, t\in[0,T]$.

On a le payoff de la dette $D = min(V_T, L)$ qui vaut $V_T - \underbrace{(V_T-L)^+}_{\text{Call}}$ (pour 3) $= L - \underbrace{(L-V_T)^+}_{\text{Put}}$.

En effet, $\forall x, y \in \mathbb{R}, min(x,y) = \left| \begin{array}{ll} y = x - (x-y) & \text{si } x > y \\ y = y - 0 & \end{array} \right. = \left| \begin{array}{l} x - (x-y)^+ \\ y - (y-x)^+ \end{array} \right.$

Par le théorème AOA, l'égalité à la date maturité T $D = L - (L - V_T)^+$ implique que leurs valeurs dynamiques sont égales à toutes les dates intermédiaires $t \in [0,T]$, c'est-à-dire

$$D_t = LB(t,T) - P_t$$

où $B(t,T)$ est le prix d'une obligation ZC de maturité T et P_T est le prix d'une option Put avec sous-jacent $(V_t)_t$, strike L et maturité T.

3. De la même manière que pour la question 2, on a :

$$E_T = V_T - D_T = V_T - (V_T - (V_T - L)^+) = (V_T - L)^+$$

Encore par le théorème d'AOA, on obtient $E_t = C_t, \forall t \in [0,T]$, où C_t est le prix d'une option Call avec sous-jacent $(V_t)_t$, de strike L et de maturité T.

4.

$$\begin{aligned} P(\tau \leq T) &= P(V_T < L) \\ &= P(V_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} < L) \\ &= P\left(W_T < \frac{ln(\frac{L}{V_0}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma}\right) \\ &\text{avec } W_t \hookrightarrow \sqrt{t}Z, \text{ et } Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1) \\ &= P\left(Z < \frac{ln(\frac{L}{V_0}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{ln(\frac{L}{V_0}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi $\mathcal{N}(0,1)$.

Cette quantité correspond dans le modèle de B&S à $\mathcal{N}(-d_0)$, où

$$d_0 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(ln(\frac{V_0}{L}) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T\right)$$

Pour la probabilité conditionnelle, on peut utiliser la propriété Markovienne du processus $(V_t)_t$ et on obtient $P(\tau \leq T|\mathcal{F}_t) = \mathcal{N}(-d_t)$, où

$$d_t = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(ln(\frac{V_t}{L}) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right)$$

ou par la méthode alternative en écrivant :

$$P(\tau \leq T|\mathcal{F}_t) = P(V_T < L|\mathcal{F}_t)$$

avec $V_T = V_t e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)}$. V_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable, et $W_T - W_t \perp \mathcal{F}_t$. Donc :

$$\begin{aligned} P(\tau \leq T|\mathcal{F}_t) &= P\left(\underbrace{W_T - W_t}_{\hookrightarrow \mathcal{N}(0, T-t)} < \frac{ln(\frac{L}{V_t}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma}|\mathcal{F}_t\right) \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{ln(\frac{L}{V_t}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right) \end{aligned}$$

Puisque $E(X|\mathcal{F}_t) = \left\{ \begin{array}{ll} X & \text{si } X \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable} \\ E(X) & \text{sinon} \end{array} \right.$.