TP 1 : Simulations et réductions de variance

Techniques Numériques - M2 Actuariat

Armand Bernou armand.bernou@univ-lyon1.fr

Exercice 1 : Soit $X = (X_1, X_2)$ de loi $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ avec

$$m = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

Simuler une suite de vecteurs $(X_1^n, X_2^n)_{n\geq 1}$ qui suivent la loi de X. On pourra comparer (par histogramme ou autre) avec les packages existant.

Exercice 2 : échantillonnage préférentiel pour la loi de Cauchy Soit X une variable aléatoire de loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$. On cherche à estimer

$$\delta = \mathbb{P}(X \geq 40) = \int_{40}^{\infty} \frac{1}{\pi(1+x^2)}\, dx.$$

On va comparer la méthode de Monte-Carlo classique et la méthode d'échantillonnage préférentiel utilisant la loi de Pareto. La fonction de répartition correspondante est donnée par

$$F(x) = \left[1 - \left(\frac{a}{x}\right)^k\right] \mathbf{1}_{x\geq a}, \qquad \text{avec } a > 0 \text{ et } k > 0.$$

On va considérer $n = 10^5$ tirages.

1. Donner une estimation de p à partir de simulations de la loi de Cauchy $\mathcal{C}(0,1)$.
2. — Quelles valeurs de a et k choisir pour l'échantillonnage préférentiel ?
   — En déduire une estimation de p par cette méthode.
3. Comparer l'efficacité relative des deux méthodes (on pourra calculer la variance des vecteurs obtenus).

Exercice 3 : Simulation d'une trajectoire à l'aide du pont Brownien

1. Sur l'intervalle $[0,1]$, simuler d'abord $W_{t_0}, \dots, W_{t_{10}}$ avec $t_i = i * 0.1$.
2. En utilisant la formule du pont Brownien vu en cours, simuler ensuite 21 points $W_{t_0^1}, \dots W_{t_{20}^1}$ avec $t_0^1 = t_0$, $t_1^1 = \frac{t_0+t_1}{2}$, $t_2^1 = t_1$, etc... Dit autrement, on veut ajouter des points intermédiaires entre chaque point déjà simulé. On conservera les points déjà simulés de la question 1.
3. Itérer le processus, en multipliant le nombre de points par 2 jusqu'à atteindre 1280 points et observer la trajectoire obtenue.

Exercice 4 : Mouvement Brownien et valeur d'un contrat. Soit $X = (X_1, X_2)$ un vecteur de loi $\mathcal{N}(0, \Sigma)$ avec

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$

On souhaite estimer

$$\mathcal{J} = \mathbb{E}\Big[\max\Big\{0, \frac{1}{2}e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma X_1} + \frac{1}{2}e^{-\frac{\sigma^2}{2}+\sigma X_2} - 1\Big\}\Big].$$

On prendra $\sigma = 0.2$, $n = 5000$ tirages.

1. Donner une estimation de $\mathcal{J}$ par la méthode de Monte-Carlo classique. Donner un intervalle de confiance au niveau 95%.

Pour utiliser la méthode de la variable antithétique, on introduit

$$Z \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \qquad \text{et } A = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. — Montrer que $AZ \overset{\mathcal{L}}{=} Z$.
   — En déduire un estimateur antithétique de $\mathcal{J}$.
   — Comparer la variance de cet estimateur avec la méthode de Monte-Carlo classique. Que constatez-vous ?
3. (Variable de contrôle)
   — Calculer $\mathbb{E}[e^{\sigma X_1} + e^{\sigma X_2}]$.
   — En déduire une estimation de $\mathcal{J}$ par la méthode de la variable de contrôle.
4. Déterminer l'efficacité relative des trois méthodes.

Pour 1 dim

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$
$Y \sim \mathcal{N}(0,1)$
$X = m + \sigma Y$

dim ≥ 2

$X \sim \mathcal{N}(m, \Sigma)$
$Y \sim \mathcal{N}(0, I_d)$
$\Sigma = LL^T$ (cholesky)
$X = M + LY$

Exercice 4:

Variable de contrôle on veut calculer $\mathbb{E}[e^{\sigma X_1} + e^{\sigma X_2}]$

$$\mathbb{E}[e^{\sigma X_1} + e^{\sigma X_2}] = \mathbb{E}[e^{\sigma X_1}] + \mathbb{E}[e^{\sigma X_2}]$$
$$= e^{\mu_1 \sigma + \frac{\sigma^2}{2} Var(X_1)} + e^{\mu_2 \sigma + \frac{\sigma^2}{2} Var(X_2)}$$

$\mu_1 = 2$ $\mu_2 = 3$
$Var(X_1) = 2$ $Var(X_2) = 1$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[e^{\sigma X_1} + e^{\sigma X_2}] = e^{2\sigma + \frac{\sigma^2}{2} \times 2} + e^{3\sigma + \frac{\sigma^2}{2} \times 1}$$
$$= 3,41164$$