

Modèles de durée / Examen du 12 janvier 2015

Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Sur le modèle de Thatcher / Bongaarts

La qualité de la rédaction, des justifications apportées et de la présentation de la copie seront prises en compte dans la notation.

On s'intéresse, dans le cadre de la modélisation de la mortalité, au modèle

$$h(x) = \gamma + \frac{\alpha \exp(\beta x)}{1 + \alpha \exp(\beta x)}$$

avec h la fonction de hasard du modèle (utilisé par [Thatcher](#) et [Bongaarts](#)).

Question n°1 (2 points) : Rappelez la définition et les principales propriétés de la fonction logistique. Pourquoi l'utilise-t-on souvent dans les modèles de mortalité ?

Question n°2 (2 points) : Montrez que la transformation logistique appliquée à la fonction $h(x) - \gamma$ conduit à une fonction affine de l'âge que vous expliciterez.

Question n°3 (2 points) : Déterminez la fonction de survie de ce modèle.

À partir de maintenant, on suppose que $\gamma = 0$ et on note $a = \ln(\alpha)$ et on s'intéresse à l'estimation des paramètres du modèle avec des données censurées. On notera $(t_i, d_i)_{1 \leq i \leq n}$ la réalisation d'un échantillon censuré à droite avec t la durée observée et d l'indicatrice de non censure.

Question n°4 (3 points) : Rappelez, dans un cadre général, l'expression de la log-vraisemblance en fonction de S et h . Sans donner de démonstration de cette expression, vous fournirez une justification intuitive des termes associés à chaque observation. Comment cette expression doit-elle être modifiée en présence de troncature gauche ? Vous appellerez ce qu'est la troncature gauche.

On revient maintenant au cas particulier du modèle $h(x) = \frac{\alpha \exp(\beta x)}{1 + \alpha \exp(\beta x)}$.

Question n°5 (4 points) : Calculez les expressions de $\frac{\partial}{\partial a} \ln h$, $\frac{\partial}{\partial \beta} \ln h$, $\frac{\partial}{\partial a} \ln S$ et $\frac{\partial}{\partial \beta} \ln S$ en fonction de h et S .

Question n°6 (4 points) : En déduire les équations normales à résoudre pour l'estimation de (α, β) .

Question n°7 (3 points) : Comment résoudre ces équations ? Vous décrirez l'algorithme standard en détaillant chacun des termes mis en jeu. Quelle méthode d'estimation alternative pourriez-vous utiliser ?