TD 2 Finance Mathématique M2 Actuariat

Yahia SALHI
yahia.salhi@univ-lyon1.fr

Modèle de Vasicek

On suppose que les taux courts $(r_t)_{t\geq 0}$ sont solution de l'EDS suivante (Vasicek) sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}^*$:

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t, \qquad (*)$$

où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard et a, b et σ sont des constantes positives. L'objectif de ce TD est de déterminer l'expression explicite des prix des zéro-coupon $P(t,T)$, des taux courts moyens $R(t,T)$ ainsi que les taux forward $f(t,T)$.

Questions

1. En choisissant une variable adéquate montrer que l'expression explicite des taux courts $(r_t)_{t\geq 0}$ solution de l'équation $(*)$ est la suivante:

$$r_t = b + (r_0 - b)e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u.$$

2. Pour déterminer l'expression explicite de $P(t,T)$ nous allons partir de l'expression (corollaire, voir cours) de ce dernier, c-à-d

$$P(t,T) = \mathbb{E}^* \left[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t \right] . = \mathbb{E}(e^{-X}) = e^{-m + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

$X \sim \mathcal{N}(m, \sigma)$

Les autres taux peuvent être déduits directement à partir de leur définition.

   (a) En intégrant l'équation $(*)$ montrer que

$$\int_t^T r_s ds = -\frac{1}{a}(r_T - r_t) + b(T-t) + \frac{\sigma}{a} \int_t^T dW_s$$

   (b) En déduire que

$$\int_t^T r_s ds = b(T-t) + (r_t - b)\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} + \sigma \int_t^T \frac{1 - e^{-a(T-s)}}{a} dW_s$$

   (c) Quelle est la loi de $\int_t^T r_s ds$ conditionnellement à $\mathcal{F}_t$? Donner sa moyenne et sa variance.

   (d) Donner l'expression explicite des $P(t,T)$ en fonction de $R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{4a^2}$ et r_t.

   (e) Montrer que $P(t,T)$ peut s'écrire de la façon suivante

$$P(t,T) = e^{-r_t A(t,T) - C(t,T)},$$

   où $A(t,T)$ et $C(t,T)$ sont des fonctions à déterminer.

   (f) A partir de l'expression de $P(t,T)$ montrer que ce dernier est solution de l'equation aux dérivées partielles suivantes

$$\partial_t P + a(b - r_t)\partial_r P + \frac{\sigma^2}{2}\partial_r^2 P = r_t P.$$

3. Donner des expressions explicites de $R(t,T)$ (taux spot) et $f(t,T)$ (taux forward instantané)