# Mathématiques actuarielles

Karim Barigou

ISFA

# Introduction



Définition de l'assurance vie ? Il s'agit d'un contrat entre :

- Un assureur qui s'engage à payer des prestations en cas de réalisation d'évènements aléatoires (survie ou décès)
- Un souscripteur qui s'engage à payer les primes à dates régulières.
- L'assuré qui est la personne couverte par l'assurance (pas nécessairement le souscripteur).

Différents types d'engagements possibles :

- Assurance vie-entière : payement au moment du décès.
- Assurance de capital différé : payement en cas de survie.
- Rentes viagères : flux de payements tant que la personne est en vie.
- Rachat : payement en quittant la police.

# Introduction

Contributions du souscripteur :

- Une prime unique payée le jour de la signature du contrat.
- Primes périodiques : série de payements au cours du temps (soit constants ou nivelés).
- Les primes sont la plupart du temps payées avant la période de couverture.

Que contient la prime d'assurance ?

- La prime pure : la part de la prime qui couvre l'espérance des engagements de l'assureur.
- La prime chargée : somme de la prime pure et
  - Chargements d'acquisition (commission d'agent).
  - Chargements d'encaissement.
  - Chargements de gestion.

# Introduction



Pourquoi l'assurance vie est un business risqué ?

- L'assurance est caractérisée par l'inversion du cycle de production : les primes sont collectés avant le paiement d'engagements incertains.
  - Incertitude sur les **taux d'intérêt** et la mortalité.
  - Incertitude sur la **longévité**.
- L'assureur met de côté une partie des primes sous forme de réserves. Celles-ci sont ensuite investis dans des produits financiers (L'assureur est alors exposé aux risques de **marché** et de **crédit**).

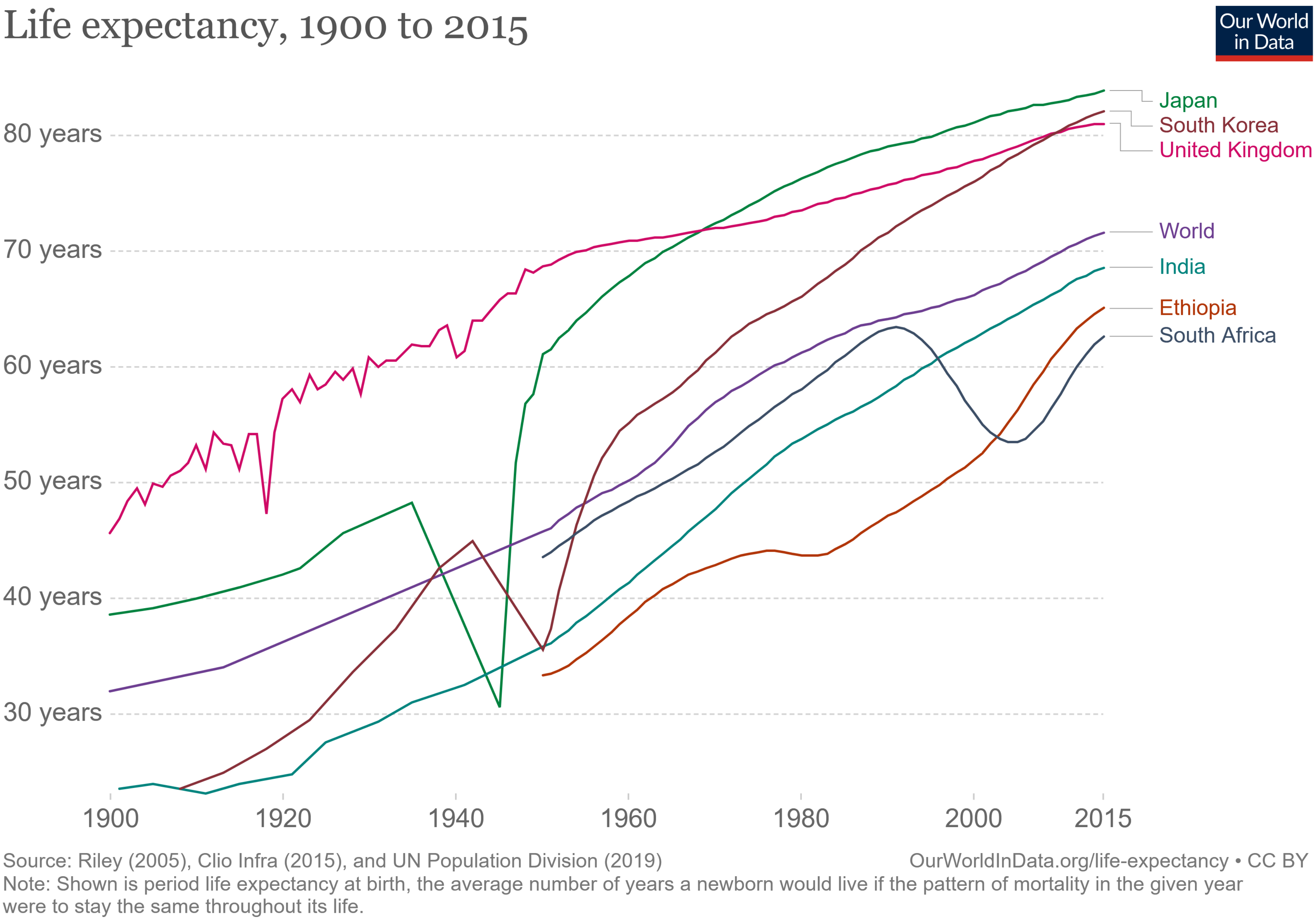
# Introduction

Quelques exemples de faillite :

- 1997 : Nissan Mutual Life (Japon) fait faillite suite à des garanties trop élevées sur les taux qui lui coûte 300 milliards Yen. Nissan promettait 4.7% alors que ses investissements lui rapportaient 3.1%.
- 2003 : Equitable Life Assurance Society (Angleterre) : Liquidation suite à des garanties trop élevées sur des contrats de pension.
- 2002 : Gerling Global Re (Allemagne) : Compagnie d'assurances sous-capitalisée pendant de nombreuses années.
- Août 2009 : AIG (Etats-Unis) : perte de 145 milliards USD durant la crise des subprimes.

# Introduction

© Théo Jalabert



# Introduction



Quand les risques de vie sont assurables ?

- Les assureurs mutualisent les risques en regroupant un grand nombre de contrats similaires.
- Ceci permet aux assureurs d'utiliser la loi des grands nombres de sorte que le risque de perte soit proche de zero.

**Principe de prime**

La prime pure est la valeur actualisée des engagements futurs attendus de l'assuré.

# Durées de survie

# Probabilités viagères



Considérons un individu dont la durée de vie $T$ est une variable aléatoire de fonction de distribution :

$$G(t) = \mathbb{P}[T \leq t]$$

Supposons que l'individu ait atteint l'âge $x$ et notons $T_x$ sa durée de survie au-delà de l'âge $x$. Soit $G_x(t)$ la distribution de $T_x$ :

$$\begin{aligned} G_x(t) &= \mathbb{P}\left[T_x \leq t\right] \\ &= \mathbb{P}[T \leq x + t \mid T > x] \\ &= \frac{G(x+t) - G(x)}{1 - G(x)} \end{aligned}$$

# Probabilités viagères



Notations actuarielles :

- Probabilité pour un individu d'âge $x$ de décéder au plus tard à l'âge $x+t$ :

$$_tq_x = \mathbb{P}\left[T_x \leq t\right] = G_x(t)$$

- Probabilité pour un individu d'âge $x$ de décéder entre les âges $x+s$ et $x+s+t$ :

$$_{s|t}q_x = \mathbb{P}\left[s < T_x \leq s+t\right] = {}_{s+t}q_x - {}_sq_x$$

- Probabilité pour qu'un individu d'âge $x$ survive à l'âge $x+t$ :

$$_tp_x = \mathbb{P}\left[T_x > t\right] = 1 - {}_tq_x$$

- On note aussi : $q_x = {}_1q_x$, ${}_{s|}q_x = {}_{s|1}q_x$, $p_x = {}_1p_x$.
- De plus, ${}_np_x = p_x \; p_{x+1} \ldots p_{x+n-1} \quad (n = 1, 2, \ldots)$

## Exemple

Soit la distribution de la durée de vie donnée par

$$G(t) = \begin{cases} 1 - (1 - t/120)^{1/6} & \text{for } 0 \leq t \leq 120 \\ 1 & \text{for } t > 120 \end{cases}$$

Calculer la probabilité que

1. un nouveau-né vit au-delà de 30 ans, $\rightarrow {}_{30}p_0 = 1 - G(30) = 0{,}9532$
2. une personne de 30 ans décède avant l'âge de 50 ans, ${}_{20}q_{30} = \dfrac{G(50) - G(30)}{1 - G(30)} = 0{,}0410$
3. une personne de 40 ans vit au-delà de 65 ans. $\rightarrow {}_{25}p_{40} = \dfrac{1 - G(65)}{1 - G(40)} = 0{,}9395$

. (1) 0.9532, (2) 0.0410, (3) 0.9395.

# Probabilités viagères



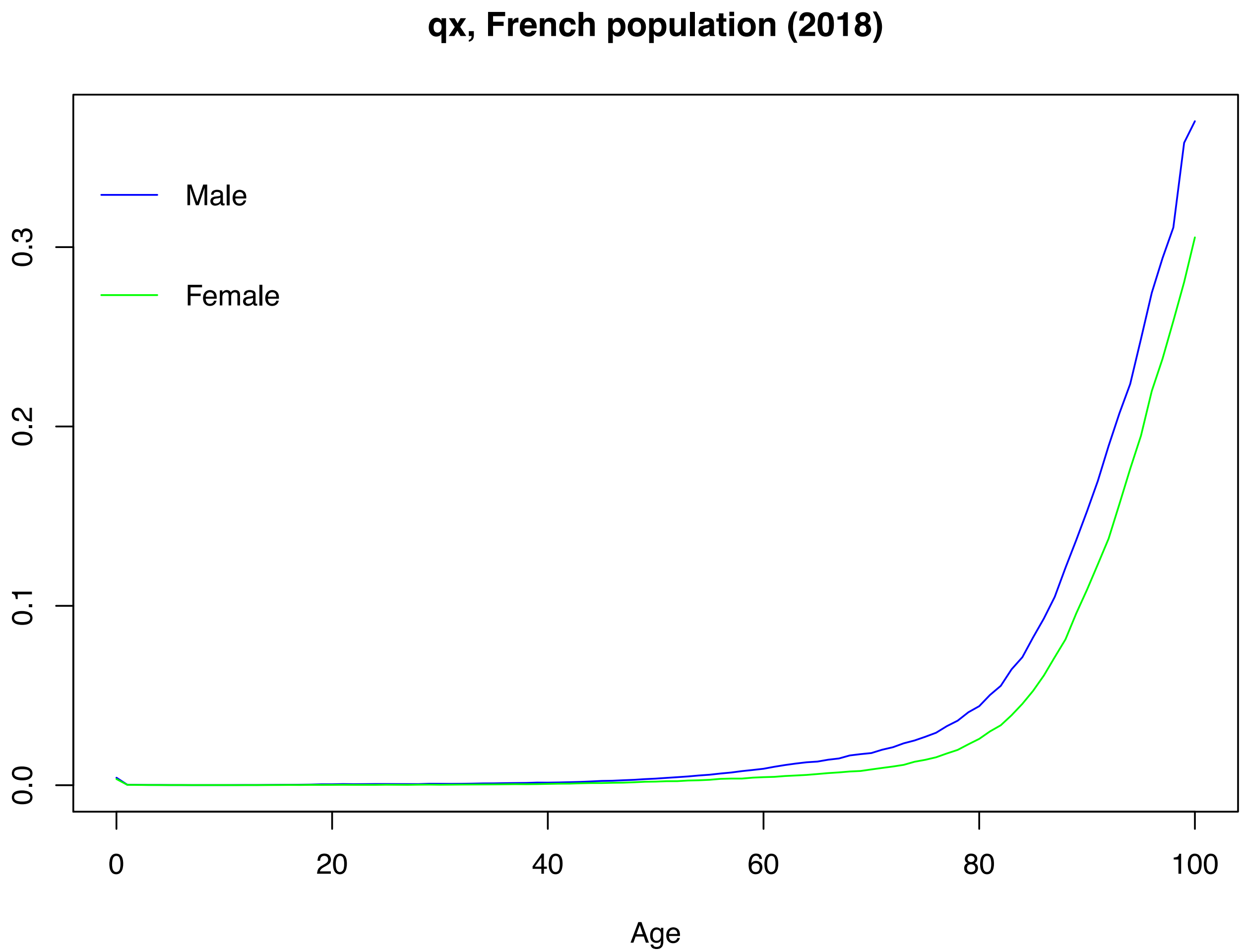



Figure – Estimation brute des probabilités de décès $q_x$ pour les hommes et les femmes de la population française (année 2018).

# Probabilités viagères



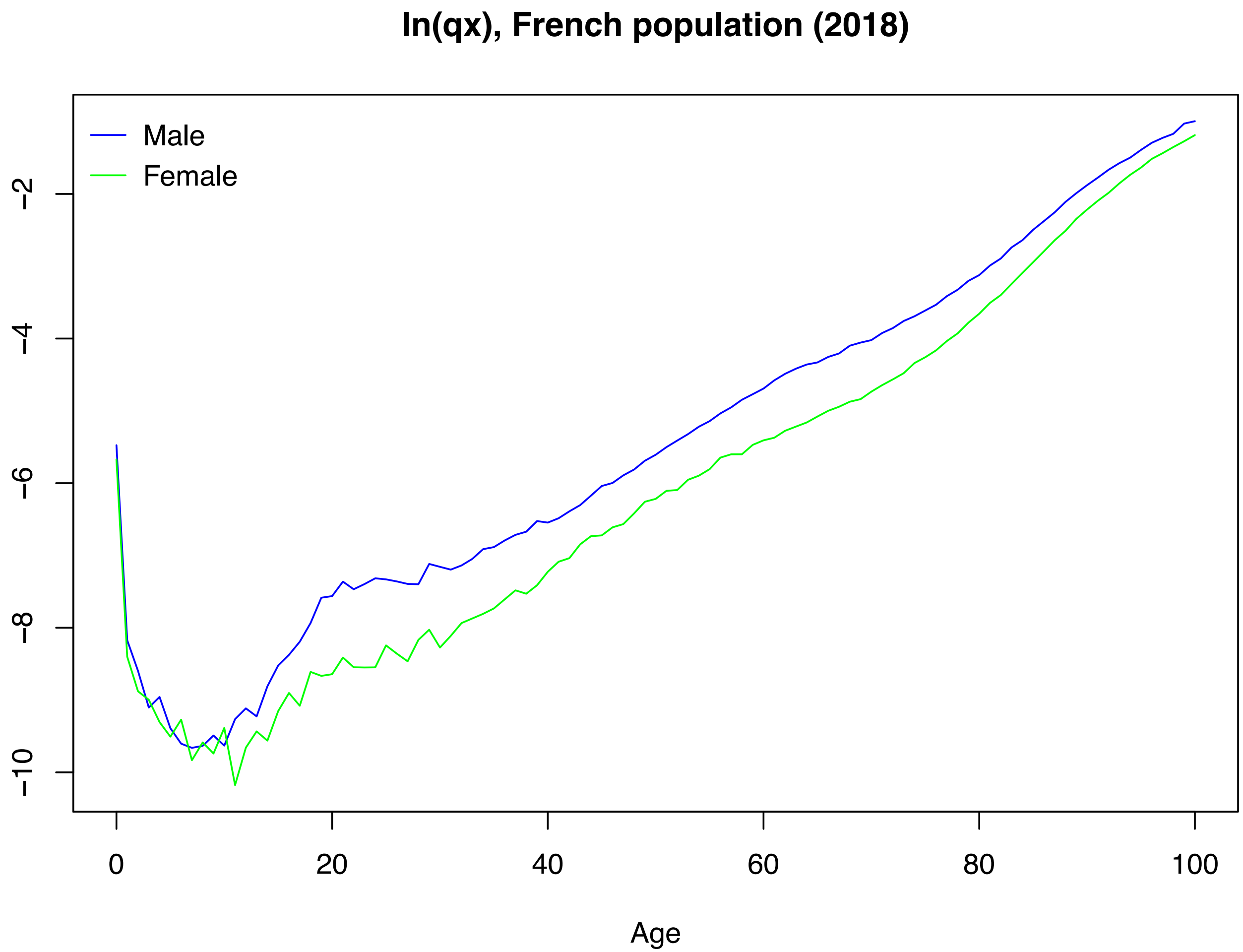



Figure – Estimation brute des logarithmes des probabilités de décès $q_x$ pour les hommes et les femmes de la population française (année 2018).

# Probabilités viagères



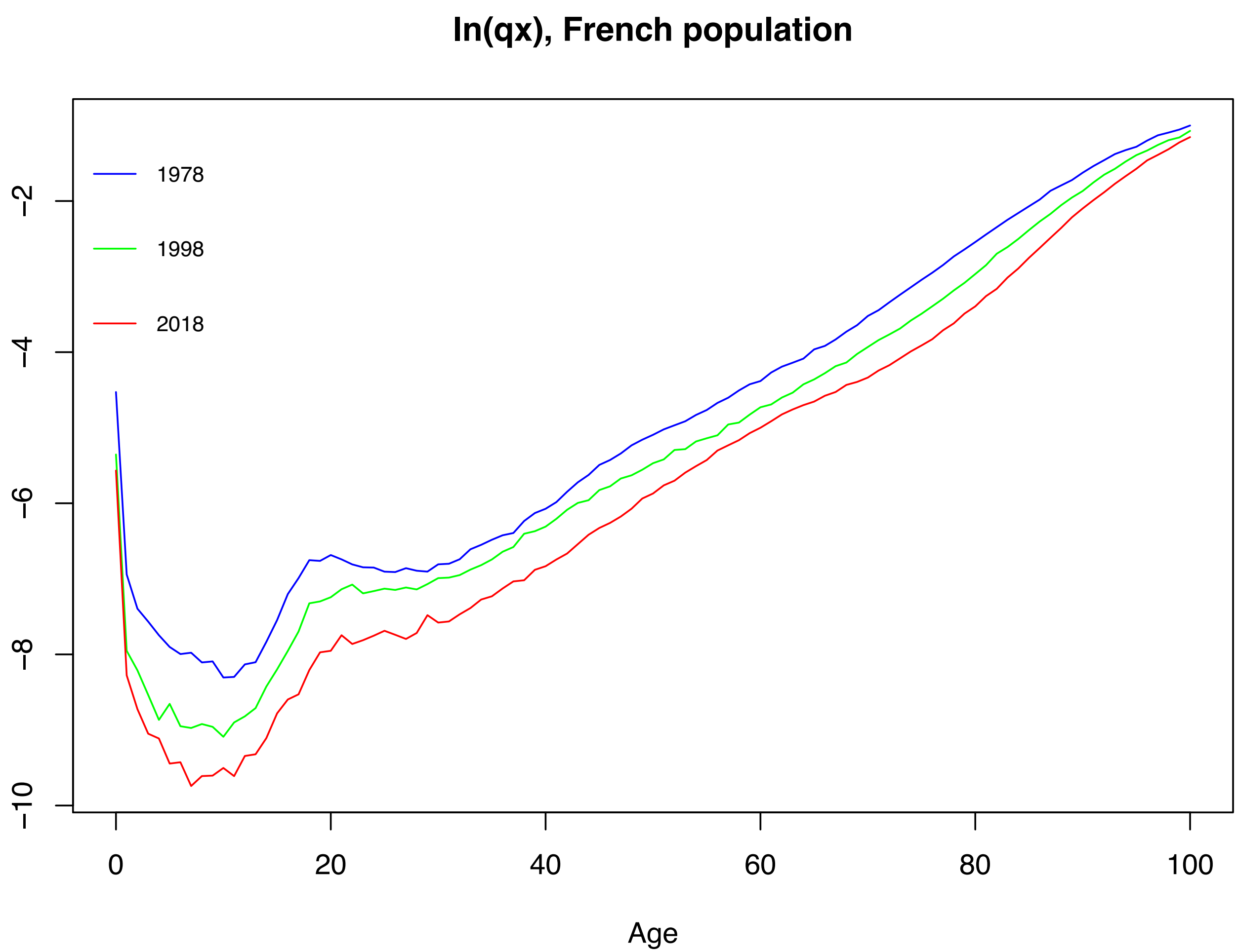



Figure – Estimation brute des logarithmes des probabilités de décès $q_x$ pour la population française (hommes et femmes) en 1978, 1998, 2018.

# Probabilités viagères



- Nombreuses ressources disponibles sur le site de l'INSEE et de l'INED sur la population française : `https://www.ined.fr/fr/tout-savoir-population/chiffres/france/mortalite-cause-deces/table-mortalite/`
- Sur les données mondiales : `www.mortality.org`
- Ces sites fournissent le nombre de décès par âge et par année pour une population donnée. Ceci permet ensuite d'estimer les probabilités de décès $q_x$.

# Tables de mortalité

- La table de mortalité d'une population donne pour chaque âge entier $x$ $(0 \leq x \leq \omega)$ la probabilité annuelle de décès $q_x$ des individus de cette population :
$$\{q_x \mid (0 \leq x \leq \omega)\},$$
où $\omega$ est l'âge ultime : $q_\omega = 1$ (souvent $\omega = 110$ ou $120$).
- Ces tables sont soit issues de
  - Recensements périodiques
  - ou de la mortalité observée chez les assurés (*tables de mortalité d'expérience*).
- Soit $l_x$ l'espérance du nombre de survivants à l'âge $x$ parmi une population de $l_0$ nouveaux-nés soumis à la loi de mortalité décrite par la table $\{q_x; 0 \leq x \leq \omega\}$. On a donc :
$$l_x = l_0 \ {}_xp_0$$

# Tables de mortalité

- On appelle $\{l_x, x = 0, 1 \ldots, \omega\}$ l'ordre de survie associé à la table de mortalité.
- Choix de $l_0$ : $l_0 = 100.000$ ou $l_0 = 1.000.000$.
- Probabilités viagères en termes de l'ordre de survie :

$$_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

- On note $d_x$ les décréments successifs de l'ordre de survie :

$$d_x = l_x - l_{x+1} = l_x q_x$$

**Interprétation** $d_x$ : nombre attendu de décès entre les âges $x$ et $x + 1$.

Table – Début de la table de mortalité française pour les hommes (période 2012-2016) [1]

| $x$ | $d_x$ | $l_x$ |
|---|---|---|
| 0 | 354 | 100.000 |
| 1 | 62 | 99.646 |
| 2 | 23 | 99.584 |
| 3 | 18 | 99.561 |
| 4 | 14 | 99.543 |
| 5 | 12 | 99.529 |
| 6 | 10 | 99.517 |
| 7 | 10 | 99.507 |
| 8 | 8 | 99.497 |
| 9 | 8 | 99.489 |
| 10 | 8 | 99.481 |

Question : Calculer ${}_5p_3$ et ${}_{5|2}q_2$.

$${}_5p_3 = \frac{l_8}{l_3} = 0,99936$$

$${}_{5|2}q_2 = {}_7q_2 - {}_5q_2 = \frac{l_2 - l_9}{l_2} - \frac{l_2 - l_7}{l_2} = 0,0001807$$

$$= 0,018\%$$

1. Source : https://www.insee.fr/fr/statistiques/3311422?sommaire=3311425

# Tables de mortalité



- En France, il existe des tables réglementaires TH et TF 00-02 pour les assurances vie établies à partir des données de l'INSEE issues d'observations réalisées entre 2000 et 2002 (TH : hommes, TF : femmes).
- Les assureurs peuvent par ailleurs utiliser des tables d'expérience établies à partir de leur portefeuille d'assurés et certifiées par un actuaire indépendant agréé à cet effet.

# Commentaires sur l'hétérogénéité en mortalité



Les assureurs ont différents modèles de survie :

- *Hommes* vs. *Femmes*. Suite à la loi sur la discrimination, les assureurs utilisent la table la plus prudente.
- *Paiements en cas de vie* vs. *paiements en cas de décès*.
- *Fumeurs* ou *non-fumeurs* (capital en cas de décès).

# Commentaires sur l'hétérogénéité en mortalité



**Observations générales :**

- Les gens riches ont une mortalité plus faible que les gens pauvres.
- Les acheteurs de rentes ont une mortalité plus faible que les acheteurs d'assurance-décès.
- Politique de souscription de l'assureur :
  - L'assuré doit répondre à un questionnaire ou subir un examen médical avant le début du contrat.
  - Dans le but d'éviter l'anti-sélection.
  - Pour des garanties décès, mais non pour des garanties vie.
  - Pour des contrats individuels, mais non pour des contrats de groupe.

# Commentaires sur l'hétérogénéité en mortalité



TABLE 11

MORTALITY, ALL CAUSES: RATIOS PRODUCED BY DIVIDING THE MORTALITY RATE OF THE UNMARRIED BY THE MORTALITY RATE OF THE MARRIED, WHITES, UNITED STATES, 1960*

| UNMARRIED CATEGORY (RATIO) | AGE | | | | | | | | AVERAGE RATIO | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | 25–34 | 35–44 | 45–54 | 55–59 | 60–64 | 65–69 | 70–74 | 75+ | 25+ | 25–64 |
| Single: | | | | | | | | | | |
| Male ...... | 2.23 | 2.25 | 1.83 | 1.49 | 1.50 | 1.46 | 1.43 | 1.38 | 1.81 | 1.95 |
| Female .... | 2.29 | 1.88 | 1.42 | 1.16 | 1.11 | 1.04 | 1.05 | 1.49 | 1.55 | 1.68 |
| Widowed: | | | | | | | | | | |
| Male ...... | 3.85 | 2.86 | 2.16 | 1.83 | 1.56 | 1.49 | 1.42 | 1.56 | 2.33 | 2.64 |
| Female .... | 2.43 | 1.82 | 1.54 | 1.29 | 1.26 | 1.22 | 1.18 | 1.45 | 1.64 | 1.77 |
| Divorced: | | | | | | | | | | |
| Male ...... | 3.92 | 4.07 | 3.14 | 2.58 | 2.27 | 1.99 | 1.83 | 1.59 | 2.96 | 3.39 |
| Female .... | 2.86 | 2.00 | 1.56 | 1.41 | 1.31 | 1.28 | 1.26 | 1.38 | 1.77 | 1.95 |

* Ratios calculated by the author from mortality rates presented by Grove and Hetzel (1968, p. 335).

# Commentaires sur l'hétérogénéité en mortalité



| | n | Number of deaths | Mortality per 1000 person-years (95% CIs) | Mortality rate ratio (*vs* partnered counterparts) | Mortality rate ratio (*vs* single mothers) |
|---|---|---|---|---|---|
| Single fathers | 871 | 35 | 5·81 (3·21–8·99) | 2·99 | 3·34 |
| Partnered fathers | 16 341 | 345 | 1·94 (1·67–2·26) | .. | .. |
| Single mothers | 4590 | 85 | 1·74 (1·23–2·41) | 1·46 | .. |
| Partnered mothers | 18 688 | 228 | 1·19 (0·97–1·44) | .. | .. |

Data are from Canadian Community Health Survey years 2001–12, respondents were followed up for a median of 11·10 years (IQR 7·36–13·54). All estimates are weighted by the survey weights and 95% CIs were estimated using bootstrap methods.

***Table 2*: Mortality for single fathers, single mothers, partnered fathers, and partnered mothers**

Figure – Source : Mortality in single fathers compared with single mothers and partnered parents : a population-based cohort study. The Lancet Public Health, 3(3), 2018.

# Taux instantané de mortalité



## Taux de mortalité

On appelle "taux instantané de mortalité à l'âge $x$" ou encore "intensité de mortalité à l'âge $x$" le nombre

$$\mu_x = \left(\frac{d}{dt}\,{}_tq_x\right)_{t=0} = \lim_{h\to 0} \frac{{}_hq_x}{h}$$

Pour $h$ petit, $\mu_x h$ est en première approximation la probabilité pour qu'un individu ayant atteint l'âge $x$ décède avant l'âge $x+h$ :

$${}_hq_x \approx \mu_x h$$

# Taux instantané de mortalité

Comme la relation suivante

$$ {}_{t+h}q_x = {}_tq_x + {}_tp_x \ {}_hq_{x+t} $$

implique que

$$ \begin{aligned} \frac{d}{dt}{}_tq_x &= \lim_{h\to 0} \frac{{}_{t+h}q_x - {}_tq_x}{h} \\ &= {}_tp_x \lim_{h\to 0} \frac{{}_hq_{x+t}}{h} \\ &= {}_tp_x\mu_{x+t} \end{aligned} \qquad (1) $$

On en déduit que

$$ -\frac{d}{dt}{}_tp_x = {}_tp_x\mu_{x+t} \quad \text{et} \quad \frac{d}{dt}\log{}_tp_x = -\mu_{x+t} $$

Ceci implique la relation importante :

$$ {}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}ds\right) \qquad (2) $$

# Taux instantané de mortalité



## Exemple

Soit la distribution de la durée de vie donnée par

$$G(x) = 1 - (1 - x/120)^{1/6} \text{ for } 0 \leq x \leq 120$$

Montrer que le taux instantané de mortalité est donné par

$$\mu_x = \frac{1}{720 - 6x}$$

$$-\frac{d}{dx} \log(1 - G(x)) = \mu(x)$$

$$\log\left(1 - \frac{x}{120}\right)$$

$$\Rightarrow -\frac{d}{dx} \log\left(\left(1 - \frac{x}{120}\right)^{1/6}\right) = -\frac{1}{6} \times \frac{-1}{120} \times \frac{1}{1 - \frac{x}{120}} = \mu(x)$$

$$\Rightarrow \mu(x) = \frac{1}{6 \times 120} \times \frac{1}{1 - \frac{x}{120}} = \frac{1}{720 - 6x}$$

# Lois paramétriques

**La loi de De Moivre (1724)** : De Moivre supposa que la durée de la vie humaine était distribuée uniformément entre l'âge 0 et un âge ultime $\omega$ :

$$ {}_tq_0 = G(t) = \frac{t}{\omega}. $$

Il vient alors :

$$ {}_tq_x = \frac{{}_{x+t}q_0 - {}_xq_0}{1 - {}_xq_0} = \frac{t}{\omega - x} $$

$$ \mu_x = \lim_{t \to 0} \frac{{}_tq_x}{t} = \frac{1}{\omega - x} \quad (0 \leq x \leq \omega, t \leq \omega - x) $$

La loi de De Moivre représente très mal la mortalité observée.

**La loi de Gompertz (1824)** : Gompertz émit l'hypothèse que le taux instantané de mortalité croît exponentiellement avec l'âge :

$$\mu_x = \alpha c^x \quad (\alpha > 0, c > 1)$$

On obtient alors en posant $g = e^{-\alpha/\log c}$ :

$${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds} = g^{c^{x+t} - c^x}$$

La loi de Gompertz rendait mieux compte de la mortalité observée que celle de De Moivre, mais elle n'était cependant pas encore satisfaisante.

# Lois paramétriques

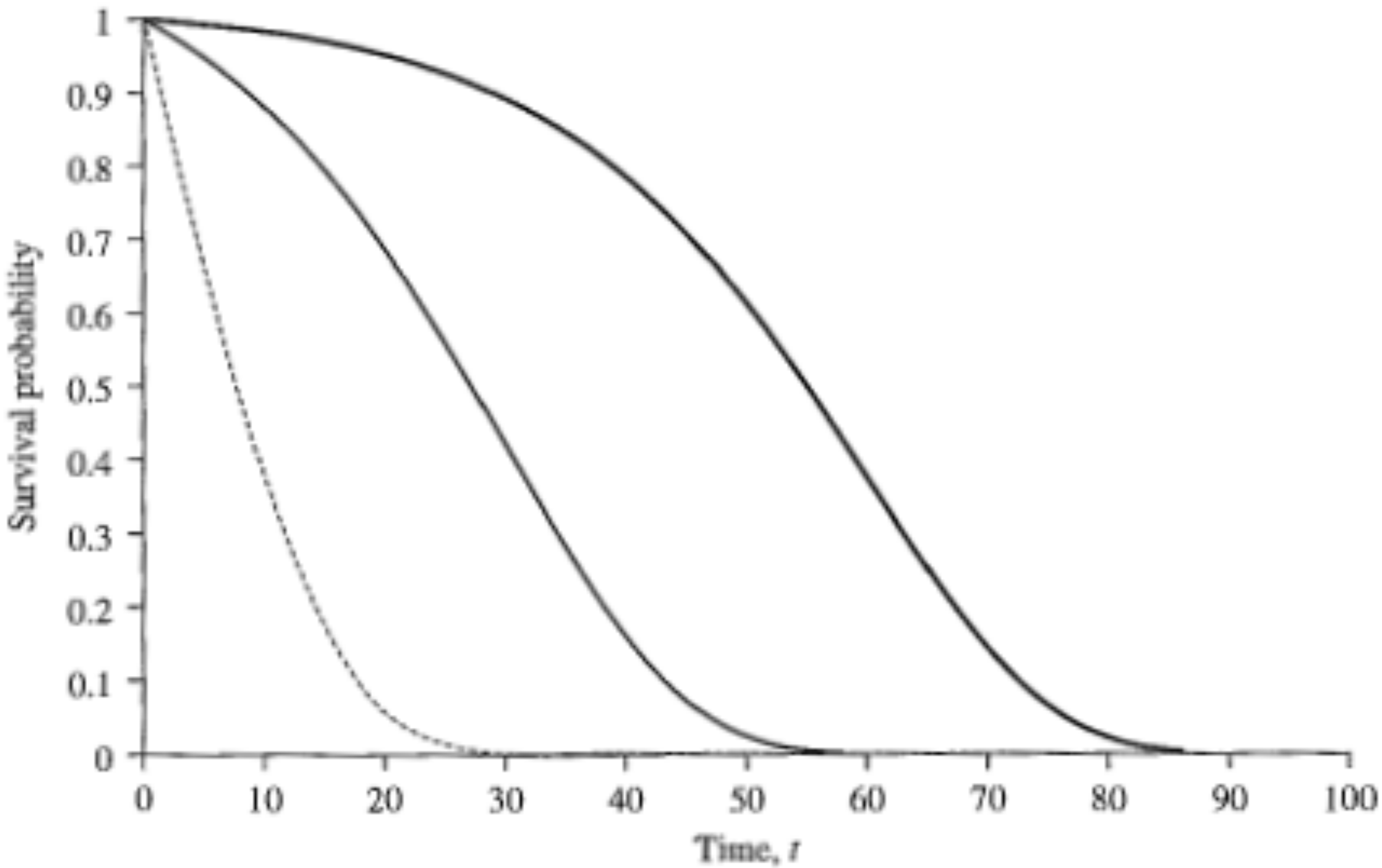



Figure – Probabilité de survie selon la loi de Gompertz pour $x = 20$ (gras), $x = 50$ (solide) et $x = 80$ (pointillé) avec $\alpha = 0.0003$ et $c = 1.07$.

# Lois paramétriques

**La loi de Gompertz-Makeham (1860)** : Makeham modifia la loi de Gompertz en ajoutant au taux instantané de mortalité un terme indépendant de l'âge :

$$\mu_x = A + \alpha c^x \quad (A > 0, \alpha > 0, c > 1)$$

Le taux instantané de mortalité a ainsi deux composantes :

- Composante mortalité par accident.
- Composante mortalité par vieillesse.

Le modèle de Makeham donne une bonne estimation de la mortalité entre 30 et 80 ans mais n'arrive pas à capturer la mortalité infantile et la "bosse des accidents" (accident hump) des 20-25 ans.

# Probabilités de décès dans une fraction d'année



**Problème :**

- En pratique, souvent l'ordre de survie $\{l_0, l_1, l_2, \dots\}$ est la seule information disponible.
- alors que l'on souhaite calculer ${}_tp_x$ pour des $x$ et $t$ non-entiers.

**Solution :**

- Faire une hypothèse sur la distribution des décès au cours de l'année.
- Les deux hypothèses les plus courantes sont :
  - Distribution uniforme des décès.
  - Taux instantané de mortalité constant.

# Probabilités de décès dans une fraction d'année



Appelons $K_x$ le nombre d'années entières de survie d'une personne ayant atteint l'âge $x$ :

$$K_x = [T_x] = \max\{n \in \mathbb{N} : n \leq T_x\}$$

et $S_x$ la fraction d'année que vivra cette personne au-delà de ces $K_x$ années :

$$S_x = T_x - K_x$$

On trouve facilement que

$$\begin{aligned} P[S_x \leq t \mid K_x = k] &= \frac{P[k < T_x \leq k+t]}{P[k < T_x \leq k+1]} \\ &= \frac{{}_k p_x \left(1 - {}_t p_{x+k}\right)}{{}_k p_x \left(1 - p_{x+k}\right)} \\ &= \frac{{}_t q_{x+k}}{q_{x+k}} \quad (x, k \in \mathbb{N}, 0 \leq t \leq 1) \end{aligned} \tag{3}$$

# Probabilités de décès dans une fraction d'année



**Hypothèse 1 : Décès distribués uniformément sur l'année**

On suppose que pour toute valeur entière de $x$, ${}_tq_x$ est une fonction linéaire de $t$ sur $[0,1]$ :

$$\begin{cases} {}_tq_x = tq_x \\ {}_tp_x = 1 - tq_x \end{cases} \quad (x \in \mathbb{N}, 0 \leq t \leq 1) \tag{4}$$

On en déduit les taux instantanés de mortalité :

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} \log {}_tp_x = \frac{q_x}{1 - tq_x} \quad (x \in N, 0 \leq t < 1)$$

La relation (3) devient

$$P\left[S_x \leq t \mid K_x = k\right] = P\left[S_x \leq t\right] = t \quad (x \in N, 0 \leq t \leq 1)$$

On voit que l'hypothèse (4) revient à supposer que les variables $K_x$ et $S_x$ sont indépendantes et que $S_x$ est distribuée uniformément sur [0,1] .

# Probabilités de décès dans une fraction d'année



**Hypothèse 2 : Taux instantané constant**

On suppose que le taux instantané de mortalité reste constant entre deux âges entiers successifs :

$$\mu_{x+t} = \mu_x \quad \forall x \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$$

Il vient alors :

$$\begin{cases} {}_tp_x = e^{-t\mu_x} = p_x^t \\ {}_tq_x = 1 - p_x^t = 1 - (1-q_x)^t \end{cases} \quad \forall x \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$$

Sous cette hypothèse, les variables $S_x$ et $K_x$ ne sont pas indépendantes. En effet (3) devient ici :

$$P\left[S_x \leq t \mid K_x = k\right] = \frac{1 - p_{x+k}^t}{1 - p_{x+k}}$$

Etant donné $K_x = k, S_x$ a donc une distribution exponentielle tronquée en $t = 1$ dont le paramètre $p_{x+k}$ dépend de $k$.

# Espérance de vie



## Espérance de vie

On appelle espérance de vie à l'âge $x$ et on note $\mathring{e}_x$ la moyenne de la distribution $G_x(t) = {}_tq_x$, i.e. $\mathring{e}_x = \mathbb{E}\left[T_x\right]$

Par définition de l'espérance, on a :

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= \int_0^\infty t dG_x(t) \\
&= \int_0^\infty \left[1 - G_x(t)\right] dt \\
&= \int_0^\infty {}_tp_x dt
\end{aligned}$$

# Espérance de vie

On obtient une approximation de $\mathring{e}_x$ en supposant que les décès surviennent en moyenne aux âges entiers plus 6 mois (ce qui correspond à l'hypothèse des décès uniformes dans l'année). Il vient ainsi :

$$\begin{aligned}
\mathring{e}_x &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_n p_x q_{x+n} \left(n + \frac{1}{2}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left({}_n p_x - {}_{n+1} p_x\right) \left(n + \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\omega - x} {}_n p_x
\end{aligned}$$

# Espérance de vie



Table – Evolution de l'espérance de vie en France [2]

| | Espérance de vie à la naissance | | Espérance de vie à 65 ans | |
|---|---|---|---|---|
| Année | Hommes | Femmes | Hommes | Femmes |
| 2008 | 77,6 | 84,4 | 18,3 | 22,5 |
| 2009 | 77,8 | 84,5 | 18,4 | 22,6 |
| 2010 | 78,0 | 84,7 | 18,6 | 22,7 |
| 2011 | 78,4 | 85,0 | 18,9 | 23,0 |
| 2012 | 78,5 | 84,8 | 18,8 | 22,8 |
| 2013 | 78,8 | 85,0 | 19,0 | 23,0 |
| 2014 | 79,3 | 85,4 | 19,3 | 23,3 |
| 2015 | 79,0 | 85,1 | 19,1 | 23,0 |
| 2016 | 79,3 | 85,3 | 19,3 | 23,2 |
| 2017 | 79,5 | 85,4 | 19,4 | 23,2 |
| 2018 | 79,6 | 85,5 | 19,5 | 23,4 |
| 2019 | 79,8 | 85,7 | 19,6 | 23,5 |

2. Source : `https://www.ined.fr/fr/tout-savoir-population/chiffres/france/mortalite-cause-deces/esperance-vie/`

# Taux d'intérêt

# Introduction



- Un taux d'intérêt est toujours défini avec une unité de temps, par exemple annuelle ou mensuelle.
- En mathématiques d'assurance vie, les investissements de l'assureur sont supposés fournir un rendement constant. Le taux annuel d'intérêt est dénoté par $i$ et nous utilisons la capitalisation **composée**.

# Introduction : Capitalisation annuelle

- Considérons le placement d'un capital $C_0$ au taux d'intérêt $i$
- On définit le facteur de capitalisation $u$ et le facteur d'actualisation $v$ correspondant à $i$ comme suit :

$$u = 1 + i \quad , \quad v = \frac{1}{1+i} = u^{-1}$$

- La valeur acquise par le capital après $n$ années est donné par :

$$\begin{aligned} C_n &= C_{n-1} + C_{n-1} i = C_{n-1} u \\ &= C_0 u^n = C_0 (1+i)^n \quad (n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

# Introduction : Capitalisation fractionnée



- Considérons le placement d'un capital $C_0$ avec un taux d'intérêt $\frac{i^{(m)}}{m}$ à la fin de chaque fraction de $1/m$ d'année (e.g. $m = 12$ si mensuelle).
- On obtient après $k$ périodes :

$$C_{\frac{k}{m}} = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^k \quad (k \in \mathbb{N})$$

- $i^{(m)}$ le taux annuel **nominal** du placement.
- Le taux annuel **effectif** correspondant est donné par

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

ou

$$i^{(m)} = m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

# Introduction : Capitalisation fractionnée

## Example

Un taux annuel de 6% avec une capitalisation trimestrielle signifie que 6%/4=1.5% est crédité chaque trimestre. Etant donné que $(1 + 1.5\%)^4 = 1.06136$, le taux effectif est de 6.136%. $\longrightarrow i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m - 1 = (1 + 1{,}5\%)^4 - 1 = 6{,}136\%$

| $i^{(m)}$ | $i$: $m = 2$ | $m = 4$ | $m = 12$ | $m = \infty$ |
|---|---|---|---|---|
| 2% | 2,0100% | 2,01505% | 2,01844% | 2,02013% |
| 4% | 4,0400% | 4,06040% | 4,07415% | 4,08108% |
| 6% | 6,0900% | 6,13636% | 6,16778% | 6,18365% |
| 8% | 8,1600% | 8,24322% | 8,29995% | 8,32871% |
| 10% | 10,2500% | 10,38129% | 10,47131% | 10,51709% |
| 12% | 12,3600% | 12,55088% | 12,68250% | 12,74969% |

Table – Taux annuels effectifs et nominaux

# Introduction : Capitalisation continue

- Considérons un capital $C_0$ placé au taux continu $\delta$ ($\delta > 0$). Intuitivement, sur une période $(t, t + dt]$, le capital produit un intérêt $\delta C(t)dt$.
- L'évolution temporelle est décrite par l'équation différentielle

$$\frac{dC(t)}{dt} = \delta C(t) \tag{5}$$

qui par intégration avec la condition initiale $C(0) = C_0$ donne

$$C(t) = C_0 e^{\delta t}$$

- Le taux d'intérêt annuel effectif $i$ correspondant à $\delta$ est donné par $e^{\delta} = 1 + i$ d'où :

$$i = e^{\delta} - 1 \quad , \quad \delta = \ln(1 + i)$$

# Introduction : Taux d'escompte



- L'intérêt peut aussi être versé en début de période. Le taux d'intérêt est appelé le taux d'escompte et est noté $d$.
- Une personne qui investit $C$ reçoit un intérêt $dC$ versé immédiatement, le capital $C$ étant remboursé en fin d'année.
- Le taux annuel effectif $i$ est donné par

$$C(1-d)(1+i) = C$$

d'où

$$i = \frac{d}{1-d}$$

# Annuités

# Annuités

- Une annuité est une série de payements effectués périodiquement à des échéances équidistantes (l'intervalle de temps séparant deux échéances successives n'étant pas nécessairement d'une année).

## Annuité temporaire

Annuité temporaire (immédiate à terme échu) : suite de $n$ payements unitaires effectués à la fin des $n$ premières années.
La valeur actuelle, notée $a_{\overline{n}|}$ est donnée par

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots v^n = v\frac{1 - v^n}{1 - v} = \frac{1 - v^n}{i}.$$

# Annuités

| | $a_{\overline{n}\rceil}$ | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n$ | $i = 2.5\%$ | $i = 5\%$ | $i = 10\%$ | $i = 15\%$ |
| 1 | 0.97561 | 0.95238 | 0.90909 | 0.86957 |
| 2 | 1.92742 | 1.85941 | 1.73554 | 1.62571 |
| 3 | 2.85602 | 2.72325 | 2.48685 | 2.28323 |
| 4 | 3.76197 | 3.54595 | 3.16987 | 2.85498 |
| 5 | 4.64583 | 4.32948 | 3.79079 | 3.35216 |
| 10 | 8.75206 | 7.72173 | 6.14457 | 5.01877 |
| 15 | 12.38138 | 10.37966 | 7.60608 | 5.84737 |
| 20 | 15.58916 | 12.46221 | 8.51356 | 6.25933 |
| 30 | 20.93029 | 15.37245 | 9.42691 | 6.56598 |
| 40 | 25.10278 | 17.15909 | 9.77905 | 6.64178 |

Table – Valeur actuelle d'une annuité temporaire

# Annuités



## Annuité temporaire fractionnée

Annuité temporaire fractionnée (immédiate à terme échu) : annuité unitaire (càd 1 € par an), mais payable par fractions de $1/m$ à la fin de chaque fraction d'un $m$-ème d'année pendant $n$ années.
La valeur actuelle, notée $a_{\overline{n}|}^{(m)}$ est donnée par

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{nm} v^{\frac{k}{m}} = \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} \frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}} = \frac{1}{m}\frac{1-v^n}{u^{\frac{1}{m}}-1} \\
&= \frac{1-v^n}{i^{(m)}}
\end{aligned}
$$

où $i^{(m)}$ est le taux annuel nominal en capitalisation fractionnée équivalent au taux annuel effectif $i$

# Perpétuités



## Perpétuité

Une perpétuité ou annuité perpétuelle est une annuité illimitée dans le temps. La valeur actuelle d'une perpétuité unitaire, notée $a_{\overline{\infty}|}$, est

$$a_{\overline{\infty}|} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}$$

La valeur actuelle d'une perpétuité unitaire payable par fractions de $\frac{1}{m}$ à la fin de chaque fraction d'un $m$-ème d'année est donnée par

$$a_{\overline{\infty}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} = \frac{v^{\frac{1}{m}}}{m\left(1 - v^{\frac{1}{m}}\right)} = \frac{1}{m\left(u^{\frac{1}{m}} - 1\right)} = \frac{1}{i^{(m)}}$$

## Annuités différées

Considérons une annuité de $n$ termes payable annuellement à terme échu, mais dont le premier payement est différé de $p$ années et échoit donc en $t = p + 1$.

La valeur actuelle, notée ${}_{p|}a_{\overline{n}|}$, est donnée par

$$ {}_{p|}a_{\overline{n}|} = \sum_{k=p+1}^{p+n} v^k = v^p \sum_{k=1}^{n} v^k = v^p a_{\overline{n}|} $$

## Annuités payables par anticipation

- Une annuité est dite payable par anticipation si les payements ont lieu en début de période.
- On désignera ainsi par $\ddot{a}_{\overline{n}|}$ la valeur actuelle en $t = 0$ d'une suite de $n$ payements de 1 euro effectués au début des $n$ premières années et $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)}$ l'équivalent en payements fractionnés :

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k = \frac{1 - v^n}{1 - v}$$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{nm-1} v^{\frac{k}{m}} = \frac{1 - v^n}{m\left(1 - v^{\frac{1}{m}}\right)}.$$

# Annuités continues



- On considère une annuité de 1 € par an payable de façon continue pendant $n$ années : pour un intervalle infinitésimal $[t, t+dt)(0 \leq t < n)$, un montant $dt$ est payé.
- La valeur actuelle d'une annuité continue est

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t dt = \frac{v^n - 1}{\ln v} = \frac{1 - v^n}{\ln(1+i)} = \frac{1 - v^n}{\delta}$$

- La valeur actuelle d'une perpetuité continue est donnée par

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|} = \int_0^\infty v^t dt = \lim_{n \to \infty} \bar{a}_{\overline{n}|} = \frac{1}{\delta}.$$

# Assurances de capitaux

# Principes de calcul des primes

- Par le contrat d'assurance, le risque économique (ici la mortalité) est transféré de l'assuré à l'assureur.
- Pour un portefeuille de $n$ polices similaires, dénotons la valeur actualisée du paiement (qui a lieu à un moment aléatoire, donc un paiement aléatoire) par $Z_i$ pour $i = 1, \ldots, n$ et $Z_i \sim Z$.
- Le risque total pour l'assureur est la somme d'un grand nombre de risques indépendants. Dès lors, par la loi des grands nombres, le risque total est bien plus prévisible qu'un risque individuel et devrait être proche de son espérance.

# Principes de calcul des primes



## Loi des grands nombres

La loi (forte) des grands nombres affirme que la moyenne empirique $\bar{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$ converge presque sûrement vers l'espérance

$$\bar{Z}_n \overset{p.s.}{\to} \mathbb{E}(Z) \quad \text{quand } n \to \infty$$

Autrement dit, $P\left(\lim_{n\to\infty} \bar{Z}_n = \mu\right) = 1$

Comme $\sum_{i=1}^{n} Z_i \approx n\mathbb{E}(Z)$, la prime $P$ devrait être égale à $\mathbb{E}(Z)$. Si $\mathbb{V}(Z) < \infty$, la probabilité de ne pas couvrir le risque total peut être estimée par l'inégalité de Chebyshev :

$$P\left(\left|\bar{Z}_n - \mathbb{E}(Z)\right| \geq \varepsilon\right) \leq \frac{\sigma^2}{n\varepsilon^2}$$

# Principes de calcul des primes - Exemple

- Considérons une assurance décès de 1000€ sur un individu avec probabilité de décès de 0.01.
- La prime est la valeur espérée avec un chargement de 25%.
- La prestation étant la variable

$$X = \begin{cases} 0 \text{ avec la probabilité} & 0,99 \\ 1.000 \text{ avec la probabilité} & 0,01 \end{cases}$$

- Ainsi, $P = 1.000 \times 0,01 \times 1,25 = 12.5$€.

# Principes de calcul des primes - Exemple



- Le résultat de ce contrat pour la compagnie est la variable

$$B = P - X = \begin{cases} 12.5 & \text{avec la probabilité} \quad 0,99 \\ -987.5 & \text{avec la probabilité} \quad 0,01 \end{cases}$$

- $\mathbb{E}(B) = 2.5$ et coefficient de variation :

$$CV(B) = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(B)}}{\mathbb{E}(B)} = \frac{\sqrt{9.900}}{2.5} = 39,8.$$

# Principes de calcul des primes - Exemple



- Considérons maintenant $n$ contrats $X_i$ indépendants et distribués comme $X$.
- La prime totale est donnée par $P_n = 12.5n$ €.
- Soit $N$ le nombre de décès parmi les $n$ assurés. On a :

$$\mathbb{P}[N = k] = \binom{n}{k} \times 0,01^k \times 0,99^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

  On a : $\mathbb{E}(N) = 0,01n$ et $\mathrm{Var}(N) = 0,0099n$.
- Le résultat total pour le portefeuille est la v.a.

$$B = P_n - \sum_{i=1}^{n} X_i = 12.5 \times n - 1.000 \times N$$

# Principes de calcul des primes - Exemple



- La probabilité de ruine est donnée par :

$$\mathbf{P}[B < 0] = \mathbb{P}[N > 0,0125 \times n]$$

- Cette probabilité est importante lorsque $n$ est peu élevé. Par exemple, si $n = 75$ il suffit d'un seul décès pour que $B < 0$ et

$$\mathbf{P}[B < 0] = P[N > 0,9375] = \mathbf{P}[N \geq 1] = 1 - 0,99^{75} = 0,529$$

- Mais lorsque $n$ croît, cette probabilité décroît ; elle tend vers 0 lorsque $n$ tend vers $\infty$. En effet, en vertu du théorème Central-Limite :

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[N > 0,0125n] &= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[\frac{N - 0,01n}{\sqrt{0,99 \times 0,01n}} > 0,0025\sqrt{\frac{n}{0,0099}}\right] \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(1 - \Phi\left(0,0025\sqrt{\frac{n}{0,0099}}\right)\right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

où $\Phi$ est la fonction de distribution de la loi normale centrée réduite.

# Principes de calcul des primes - Exemple



- Il est important d'inclure un **chargement de sécurité strictement positif** pour éviter la ruine.
- Sans chargement de sécurité, $P_n = 10n$ € et on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbf{P}[B<0] &= \mathbb{P}[N>0,01n] \\ &= \mathbb{P}\left[\frac{N-0,01n}{\sqrt{0,0099n}}>0\right] \\ &\to_{n\to\infty} 1-\Phi(0) = 1/2\end{aligned}$$

- Même si $n$ est grand, la compagnie a une chance sur deux de faire défaut !

# Assurances de capitaux

- Une assurance de capital est un contrat par lequel un assureur s'engage à payer un capital déterminé
  - soit en cas de décès de l'assuré au cours d'une période fixée.
  - soit en cas de vie de l'assuré à l'expiration d'une période fixée.
- On note $\mathcal{X}$ la valeur actuelle à l'origine du contrat des prestations assurées.
- Pour chaque type de contrat, on cherche à calculer la prime pure donnée par

$$P = \mathbb{E}[\mathcal{X}]$$

# Assurance vie-entière

## Assurance vie-entière

L'assurance vie-entière (en anglais : "whole life insurance") est un contrat par lequel l'assureur s'engage à payer au décès de l'assuré, quel que soit le moment de ce décès, le capital assuré à un bénéficiaire désigné.

Trois possibilités pour le paiement du capital :

- Capital payable à la fin de l'année du décès.
- Capital payable au moment du décès.
- Capital payable en fin de fraction d'année.

# Assurance vie-entière



## Assurance vie-entière (en fin d'année)

Pour une assurance d'un capital de 1€ payable à la fin de l'année du décès d'une tête d'âge $x$, la prime pure est donnée par

$$A_x = \sum_{n=0}^{\infty} {}_n p_x q_{x+n} v^{n+1}.$$

**Preuve.** La valeur actuelle $\mathcal{X}$ des prestations assurées s'écrit

$$\mathcal{X} = v^{K_x+1}$$

où $K_x = \sup\{n \in N : n \leq T_x\}$ est le nombre d'années entières de survie d'une tête d'âge $x$. On déduit que

$$\begin{aligned} A_x = \mathbb{E}(\mathcal{X}) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}\left[K_x = n\right] v^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_n p_x q_{x+n} v^{n+1} \end{aligned}$$

# Assurance vie-entière



- La variance est donnée par

$$\mathrm{Var}(\mathcal{X}) = \mathbf{E}\left(\mathcal{X}^2\right) - \mathbf{E}^2(\mathcal{X}) = \mathbf{E}\left(v^{2(K_x+1)}\right) - A_x^2$$

- On trouve une formule de récurrence pour $A_x$ :

$$\begin{aligned} A_x &= q_x v + p_x v \sum_{n=1}^{\infty} {}_{n-1}p_{x+1} q_{x+n} v^n \\ &= q_x v + p_x v \sum_{n=0}^{\infty} {}_{n}p_{x+1} q_{x+1+n} v^{n+1} \\ &= q_x v + p_x v \; A_{x+1} \end{aligned}$$

# Assurance vie-entière

## Assurance vie-entière (au moment du décès)

Pour une assurance d'un capital de 1€ payable au moment du décès d'une tête d'âge $x$, la prime pure est donnée par

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt$$

**Preuve.** On trouve directement que

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &= \int_0^\infty v^t d\mathbb{P}\left[T_x \leq t\right] = \int_0^\infty v^t dG_x(t) \\ &= \int_0^\infty v^t {}_t p_x \mu_{x+t} dt \end{aligned}$$

# Assurance vie-entière



Sous l'hypothèse de décès uniformes dans l'année, on a

$$\mu_{x+t} = \frac{1}{{}_tp_x}\frac{d}{dt}{}_tq_x = \frac{q_x}{{}_tp_x} \quad \forall x \in \mathbb{N}, t \in [0,1)$$

Il vient alors

$$\begin{aligned}
\bar{A}_x &= \sum_{n=0}^{\infty} v^n {}_np_x \int_n^{n+1} v^{t-n} {}_{t-n}p_{x+n}\mu_{x+t}dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} v^n {}_np_x \int_0^{1} v^z {}_zp_{x+n}\mu_{x+n+z}dz \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} v^n {}_np_x \ q_{x+n} \int_0^1 v^z dz = \frac{1-v}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty} v^n {}_np_x \ q_{x+n} \\
&= \frac{i}{\delta}\sum_{n=0}^{\infty} v^{n+1} {}_np_x \ q_{x+n} = \frac{i}{\delta} A_x
\end{aligned}$$

# Assurance vie-entière



En dépit de la simplicité de cette formule, les compagnies utilisent généralement en pratique une formule qui s'en déduit par l'approximation $\int_0^1 v^z dz \approx v^{1/2}$. Il vient ainsi

$$\begin{aligned} \bar{A}_x &\approx \sum_{n=0}^{\infty} {}_n p_x \; q_{x+n} v^{n+\frac{1}{2}} \\ &\approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} v^{n+\frac{1}{2}} \\ &\approx \sqrt{1+i} A_x \end{aligned} \tag{6}$$

Cette formule serait exacte si les décès survenaient toujours en milieu d'année. On peut vérifier numériquement que l'erreur d'approximation est négligeable pour la pratique.

# Assurance vie-entière

## Assurance vie-entière (en fin de fraction d'année)

Pour une assurance d'un capital de 1€ payable à la fin de la fraction de $1/m$-ème d'année d'une tête d'âge $x$, la prime pure est donnée par

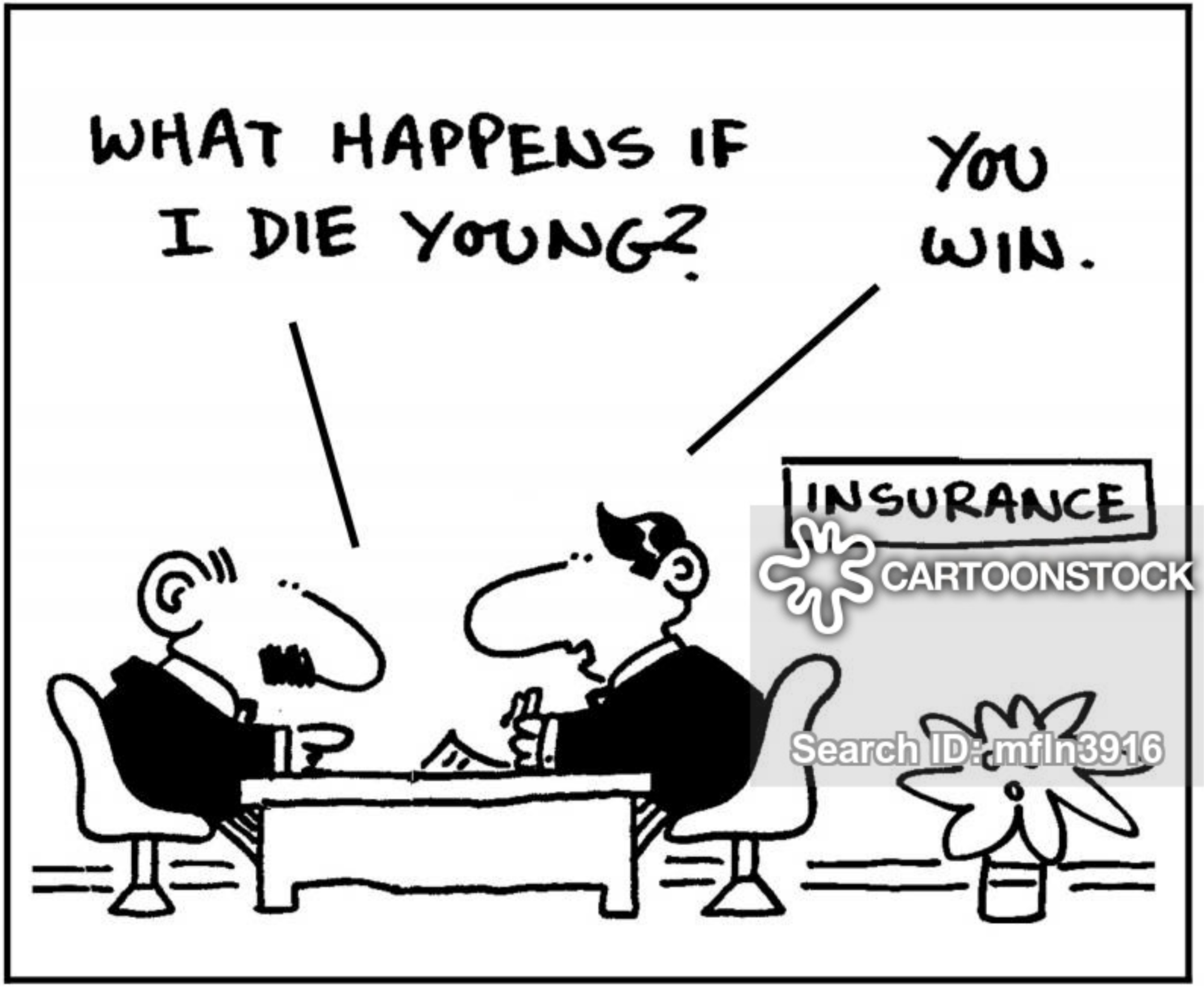
$$A_x^{(m)} = \sum_{r=0}^{\infty} {}_{\frac{r}{m}}p_x \, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{r}{m}} \, v^{\frac{r+1}{m}}$$

**Exercise :** Sous l'hypothèse des décès uniformes dans l'année, montrer que

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x$$

# Assurance vie-entière





# Assurance vie-entière



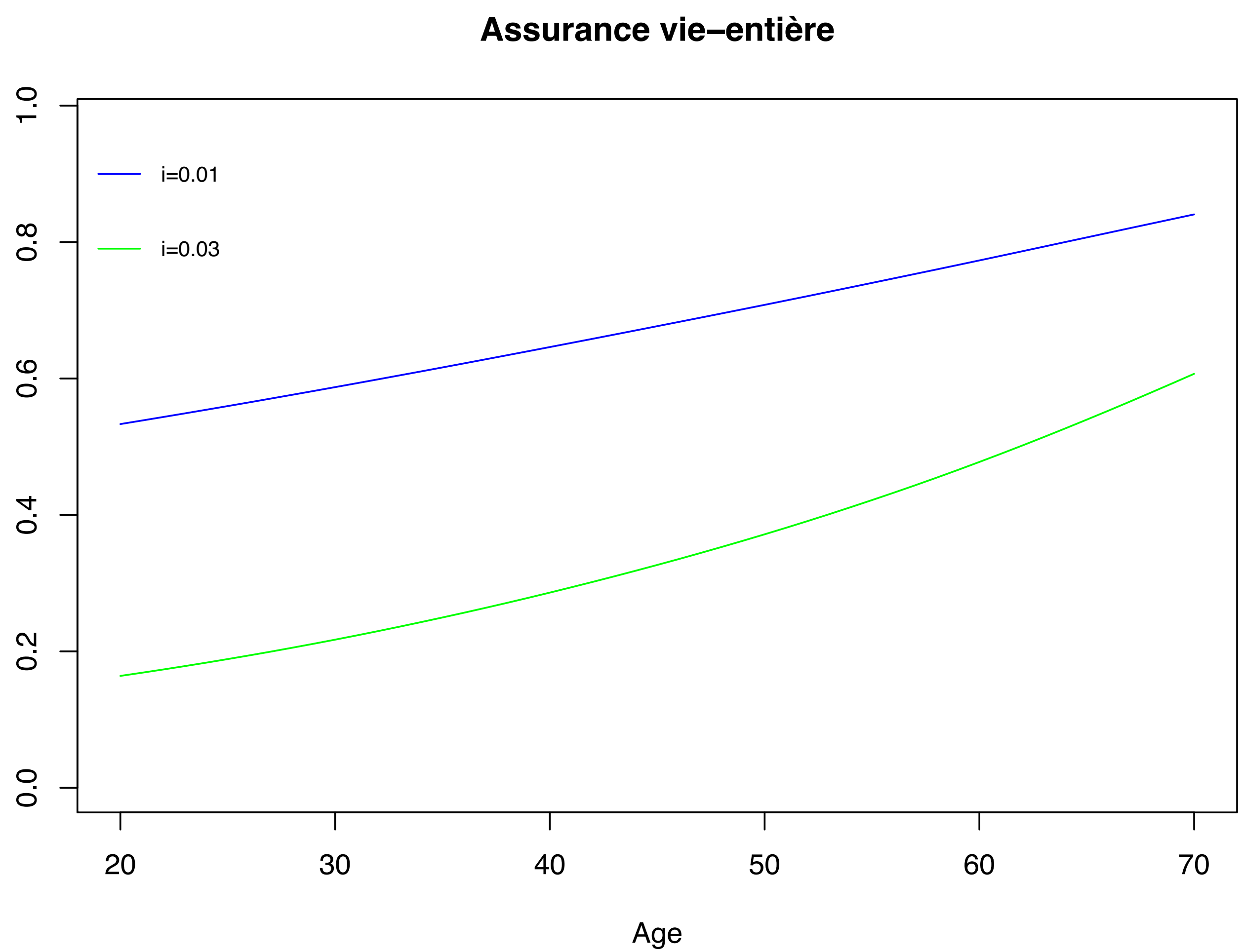



Figure – Prime pure pour une assurance vie-entière en fonction de l'âge à la souscription du contrat (calculé avec la table TF00-02 décès).

# Assurance temporaire

## Assurance temporaire

L'assurance temporaire (en anglais "term insurance") garantit le payement d'un capital déterminé en cas de décès de la tête assurée avant un terme fixé.

Deux possibilités pour le paiement du capital :

- Capital payable à la fin de l'année du décès.
- Capital payable au moment du décès.

# Assurance temporaire

## Assurance temporaire (fin d'année)

Pour une assurance temporaire d'un capital de 1€ payable à la fin de l'année du décès d'une tête d'âge $x$ si ce décès survient avant $n$ années, la prime pure est donnée par

$$A^{1}_{x\,\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t}p_{x}\, q_{x+t}\, v^{t+1}$$

**Preuve.** La valeur actuelle $\mathcal{X}$ des prestations assurées s'écrit

$$\mathcal{X} = \left\{ \begin{array}{ll} v^{K_x+1} & \text{si } T_x < n \\ 0 & \text{si } T_x \geq n \end{array} \right\} = v^{K_x+1} 1_{[T_x<n]}$$

On déduit que

$$A^{1}_{x\,\overline{n}|} = \mathbf{E}(\mathcal{X}) = \sum_{t=0}^{n-1} \mathbf{P}\left[K_x = t\right] v^{t+1} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t}p_{x}\, q_{x+t}\, v^{t+1}$$

# Assurance temporaire

- La variance est donnée par

$$\mathrm{Var}(\mathcal{X}) = \mathbf{E}\left(v^{2(K_x+1)} 1_{[L_x<n]}\right) - \left(A^1_{x\overline{n}|}\right)^2$$

- Assurance temporaire en termes d'assurance vie-entière :

$$\begin{aligned} A^1_{x\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{\infty} {}_t p_x q_{x+t} v^{t+1} - {}_n p_x v^n \sum_{t=n}^{\infty} {}_{t-n} p_{x+n} q_{x+t} v^{t-n+\frac{1}{2}} \\ &= A_x - {}_n p_x v^n \sum_{s=0}^{\infty} {}_s p_{x+n} q_{x+n+s} v^{s+\frac{1}{2}} \\ &= A_x - {}_n p_x v^n A_{x+n} \end{aligned} \quad (7)$$

# Assurance temporaire

## Assurance temporaire (au moment du décès)

Pour une assurance temporaire d'un capital de 1€ payable au moment du décès d'une tête d'âge $x$ si ce décès survient avant $n$ années, la prime pure est donnée par

$$\bar{A}^{1}_{x\,\overline{n}|} = \int_0^n {}_tp_x \mu_{x+t} v^t dt$$

**Preuve.** On trouve directement que

$$\begin{aligned}\bar{A}^{1}_{x\,\overline{n}|} &= \int_0^n v^t d\mathbb{P}\left[T_x \leq t\right] = \int_0^n v^t dG_x(t) \\ &= \int_0^n v^t {}_tp_x \mu_{x+t} dt\end{aligned}$$

# Assurance temporaire



- La variance est donnée par

$$\mathrm{Var}(\mathcal{X}) = \mathbf{E}\left(v^{2T_x} 1_{[T_x<n]}\right) - \left(\bar{A}^1_{x\,\overline{n}|}\right)^2$$

- Comme pour l'assurance vie-entière, sous l'hypothèse des décès uniformes, on trouve la relation :

$$\bar{A}^1_{x\,\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} A^1_{x\,\overline{n}|}$$

- En pratique, on utilise :

$$\begin{aligned}\bar{A}^1_{x\,\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x q_{x+t} v^{t+\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} v^{t+\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

# Commutations



- Les primes uniques pures des assurances temporaires dépendent de deux variables : l'âge de l'assuré à la souscription et la durée du contrat. Les actuaires ont introduit des “commutations” permettant le calcul de ces primes à l'aide de tables à une entrée, ce qui était appréciable à l'époque où les calculs devaient être effectués manuellement.
- Définissons pour $x \in \mathbb{N}$ les commutations

$$\begin{aligned}
D_x &= l_x v^x \\
C_x &= \left(l_x - l_{x+1}\right) v^{x+1} \\
M_x &= \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t} \\
\overline{C}_x &= \left(l_x - l_{x+1}\right) v^{x+\frac{1}{2}} \\
\overline{M}_x &= \sum_{t=0}^{\infty} \overline{C}_{x+t}
\end{aligned}$$

# Commutations



- Les primes uniques pures des assurances vie-entières et temporaires s'expriment simplement à l'aide de ces commutations. On trouve facilement que

$$\bar{A}^{1}_{x\,\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{\left(l_{x+t} - l_{x+t+1}\right) v^{t+x+\frac{1}{2}}}{l_x v^x}$$

$$= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{\overline{C}_{x+t}}{D_x}$$

$$= \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{D_x}$$

- De même, on a

$$A^{1}_{x\,\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}, \bar{A}_x = \frac{\overline{M}_x}{D_x}, A_x = \frac{M_x}{D_x}$$

# Assurance temporaire



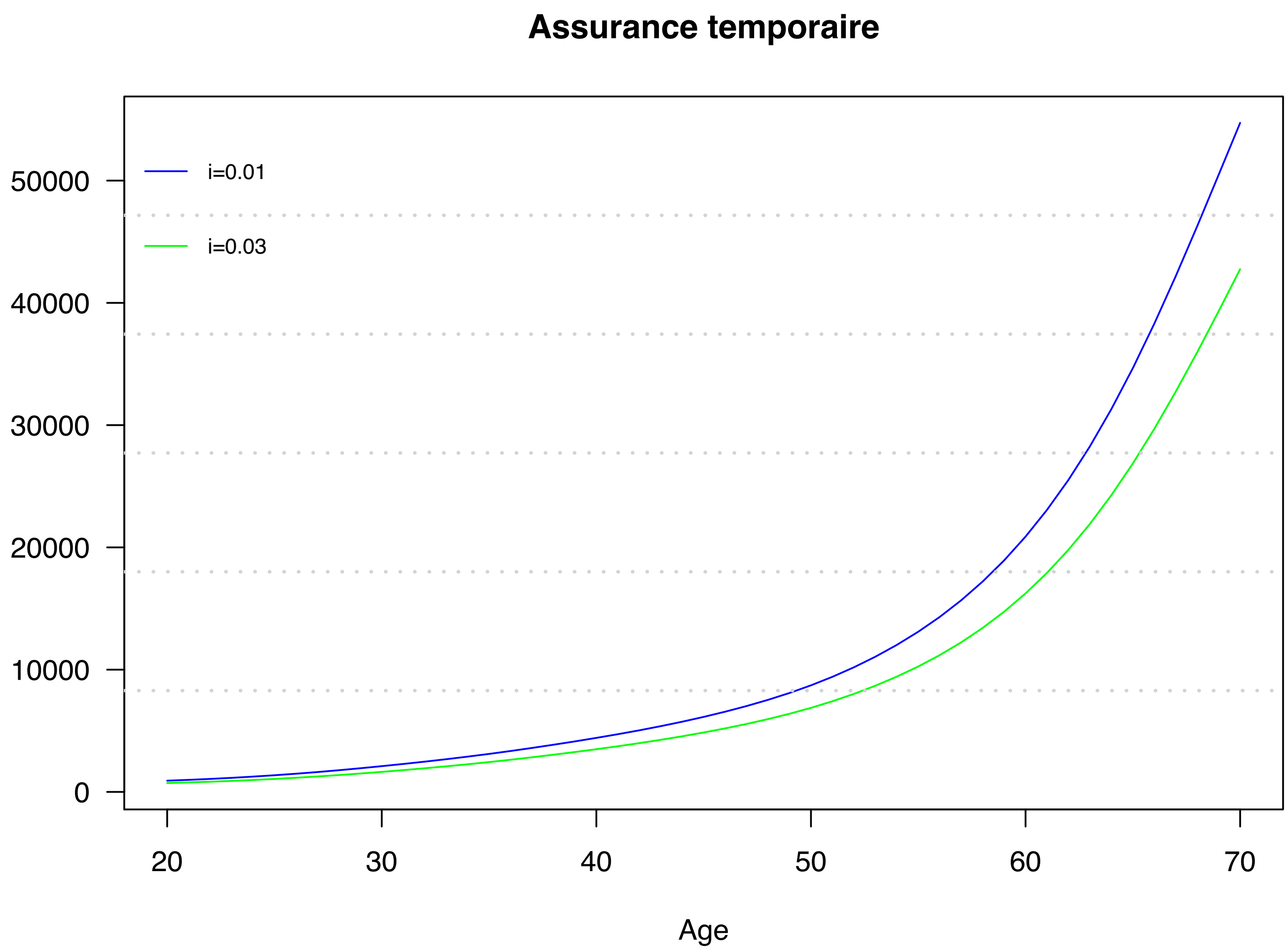



Figure – Prime pure pour une assurance temporaire de 20 ans en fonction de l'âge à la souscription du contrat (calculé avec la table TF00-02 décès). Capital : 100.000 €.

# Assurances à capital variable



Certains contrats d'assurances proposent le remboursement des primes payés si l'assuré décède avant l'expiration du contrat. Dès lors, le capital assuré varie dans le temps et croît de manière arithmétique.

**Assurance à capital variable**

Il s'agit d'assurances pour lesquelles le capital payable en cas de décès de l'assuré dépend du moment auquel survient le décès.

Ci-après on considère

- Le cas général.
- Capital croissant en progression arithmétique.
- Capital décroissant en progression arithmétique.

# Assurances à capital variable - Cas général

- Considérons une assurance sur une tête d'âge $x$ garantissant le payement d'un capital $C(t)$ en cas de décès de l'assuré à l'âge $x+t$.
- Si le capital est payable au moment du décès, la valeur actuelle de la prestation assurée s'écrit :

$$\mathcal{X} = C\left(T_x\right) v^{T_x}$$

- La prime pure est donnée par

$$\mathbf{E}(\mathcal{X}) = \int_0^\infty v^t \,{}_t p_x \mu_{x+t} C(t) dt$$

# Assurances à capital variable - Cas général



Sous l'hypothèse des décès uniformes dans l'année (${}_tq_x = tq_x$ pour $x \in \mathbb{N}, 0 \leq t \leq 1$), il vient :

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}(\mathcal{X}) &= \sum_{k=0}^{\infty} v^k \;{}_kp_x \int_0^1 v^s \;{}_sp_{x+k}\; \mu_{x+k+s} C(k+s)ds \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \;{}_kp_x\; q_{x+k} \int_0^1 u^{1-s} C(k+s)ds \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} \;{}_kp_x\; q_{x+k} C_{k+1}
\end{aligned}$$

où on a posé

$$C_{k+1} = \int_0^1 u^{1-s} C(k+s)ds$$

On voit que la prime unique pure du contrat est égale à la prime unique pure d'une assurance garantissant le payement d'un capital $C_k$ à la fin de la $k$-ème année si l'assuré décède dans cette année.

# Assurances à capital variable



## Assurance temporaire (capital croissant en progression arithmétique)

Pour une assurance temporaire de $n$ années sur une tête d'âge $x$ garantissant le payement d'un capital $k$ en cas de décès de l'assuré au cours de la $k$-ème année ($k = 1, \ldots, n$), la prime pure est donnée par

$$(IA)^1_{x\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t} = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) \frac{C_{x+t}}{D_x}$$

Si le capital se paie au moment du décès, la prime pure se note $(I\bar{A})^1_{x\overline{n}|}$. Sous l'hypothèse des décès uniformes dans l'année, on trouve

$$\begin{aligned}(I\bar{A})^1_{x\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) \int_t^{t+1} {}_s p_x \mu_{x+s} v^s ds \\ &= \frac{i}{\delta} (IA)^1_{x\overline{n}|}\end{aligned}$$

# Assurances à capital variable

- En pratique, on utilise l'approximation obtenue en supposant que les décès surviennent en milieu d'année :

$$
\begin{aligned}
(I\bar{A})^{1}_{x\,\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) v^{t+\frac{1}{2}} \, {}_t p_x q_{x+t} \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) v^{t+\frac{1}{2}} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} \\
&= \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) \frac{\bar{C}_{x+t}}{D_x}
\end{aligned}
$$

- Lorsque $n = \infty$ (en fait dès que $n > \omega - x$ ), on obtient une assurance vie-entière à capital croissant en progression arithmétique. On note sa prime unique pure $(I\bar{A})_x$ si le capital est payable au moment du décès et $(IA)_x$ si le capital est payable à la fin de l'année du décès.

# Assurances à capital variable

## Assurance temporaire (capital décroissant en progression arithmétique)

Pour une assurance temporaire de $n$ années sur une tête d'âge $x$ garantissant le payement d'un capital $n-k$ à la fin de la $(k+1)$ -ème année $(k=0,\ldots,n-1)$ si l'assuré décède dans cette année, la prime pure est donnée par

$$(DA)^{1}_{x\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_x q_{x+k}(n-k)v^{k+1}$$

Si le capital se paie au moment du décès, la prime pure se note $(D\bar{A})^{1}_{x\,\overline{n}|}$. On a évidemment

$$(DA)^{1}_{x\,\overline{n}|} = (n+1)A^{1}_{x\,\overline{n}|} - (IA)^{1}_{x\,\overline{n}|}$$

# Capitaux différés



## Capitaux différés

Une assurance de capital différé (en anglais "*pure endowment*") est un contrat par lequel la compagnie s'engage à payer le capital assuré après un terme fixé si l'assuré est toujours vivant à ce moment. Pour l'assurance d'un capital unitaire différé de $n$ années sur une tête d'âge $x$, la prime pure est donné par

$$ {}_nE_x = v^n {}_np_x $$

La variance de $\mathcal{X}$ est donnée par

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\mathcal{X}) &= \mathbf{E}\left(\mathcal{X}^2\right) - \mathbf{E}^2(\mathcal{X}) \\ &= v^{2n} {}_np_x - v^{2n} \left({}_np_x\right)^2 \\ &= v^{2n} {}_np_x {}_nq_x \end{aligned}$$

# Capitaux différés



Pour des durées et des âges entiers les primes uniques des capitaux différés peuvent être calculées à l'aide de la seule table à une entrée des commutations $D_x = v^x l_x$. On a en effet :

$$ {}_nE_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

On a aussi la relation suivante :

$$ \begin{aligned} {}_{n+k}E_x &= v^{n+k} \ {}_{n+k}p_x \\ &= v^n v^k \ {}_np_x \ {}_kp_{x+n} \\ &= {}_nE_x \cdot {}_kE_{x+n} \end{aligned} $$

# Capitaux différés



Si on se rappelle que ${}_t p_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$ et $v^t = e^{-\int_0^t \delta ds}$, alors la prime pour un capital différé satisfait

$${}_t E_x = e^{-\int_0^t (\delta + \mu_{x+s}) ds} \leq e^{-\int_0^t \delta ds} = v^t$$

Le rendement instantané d'un capital différé est donc égal à $\delta + \mu_{x+s}$, qui est supérieur à celui d'une capitalisation pure, $\delta$.

**Important**

L'assuré reçoit un rendement supérieur en échange du risque de non-paiement en cas de décès. Ce rendement est exactement égal à la force de mortalité.

# Capital différé

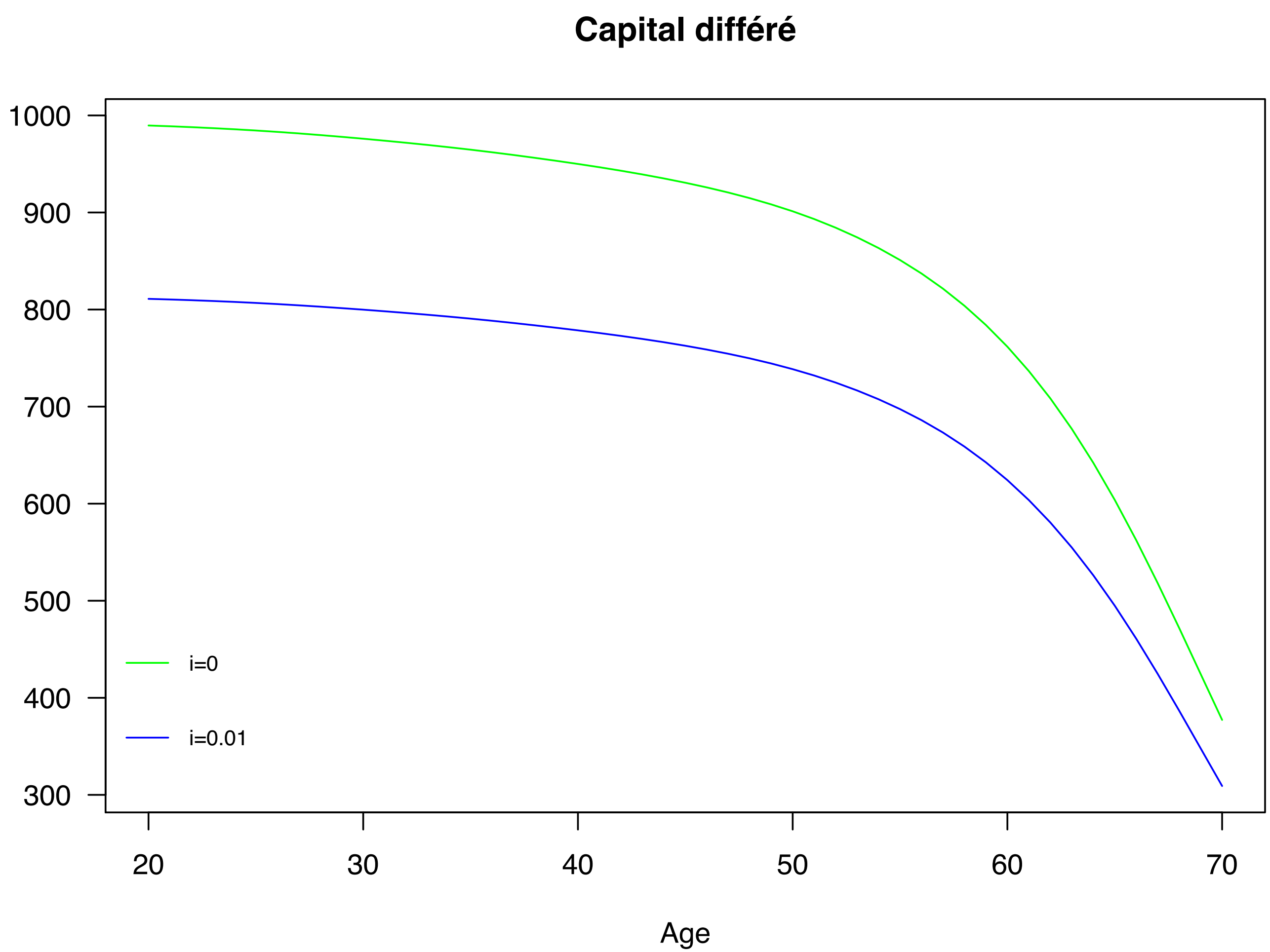



Figure – Prime pure pour un capital différé de 20 ans en fonction de l'âge à la souscription du contrat (calculé avec la table TF00-02 vie). Capital : 1000 €.

# Assurances mixtes

## Assurances mixtes

Par une assurance mixte (en anglais : *endowment*), la compagnie d'assurances s'engage à payer le capital assuré lors du décès de l'assuré si ce décès survient avant un terme fixé, et à l'expiration de ce terme si l'assuré est encore en vie à ce moment. Cette assurance s'obtient donc par l'adjonction à une assurance temporaire d'un capital différé de même durée.

Ci-après on considère deux cas :

- Capital payable à la fin de l'année du décès.
- Capital payable au moment du décès.

# Assurances mixtes

## Assurances mixtes (fin d'année)

Pour une assurance mixte de $n$ années sur une tête d'âge $x$, la prime pure est donnée par

$$A_{x\overline{n}|} = A^{1}_{x\overline{n}|} + {}_{n}E_{x}$$

En termes de commutations :

$$A_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

# Assurances mixtes

Notons $\mathcal{X}_1$ la valeur actuelle des prestations en cas de décès avant le terme (assurance temporaire) et $\mathcal{X}_2$ la valeur actuelle de la prestation en cas de vie au terme (capital différé). Comme $\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2 = 0$, on a :

$$\operatorname{Cov}\left(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2\right) = \mathbf{E}\left(\mathcal{X}_1\mathcal{X}_2\right) - \mathbf{E}\left(\mathcal{X}_1\right)\mathbf{E}\left(\mathcal{X}_2\right) = -A^1_{x\overline{n}|}\ {}_nE_x$$

et il vient :

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(\mathcal{X}) &= \operatorname{Var}\left(\mathcal{X}_1 + \mathcal{X}_2\right) \\
&= \operatorname{Var}\left(\mathcal{X}_1\right) + \operatorname{Var}\left(\mathcal{X}_2\right) + 2\operatorname{Cov}\left(\mathcal{X}_1, \mathcal{X}_2\right) \\
&= \operatorname{Var}\left(\mathcal{X}_1\right) + \operatorname{Var}\left(\mathcal{X}_2\right) - 2A^1_{x\overline{n}|}\ {}_nE_x.
\end{aligned}$$

$\rightarrow$ On voit que la souscription d'une assurance mixte présente donc un risque moindre pour l'assureur que la souscription d'une temporaire par un assuré et la souscription d'un capital différé par un autre assuré, les durées de vie de ces deux assurés étant indépendantes.

# Assurances mixtes



## Assurances mixtes (au moment du décès)

Pour une assurance mixte de $n$ années sur une tête d'âge $x$, la prime pure est donnée par

$$\bar{A}_{x\overline{n}|} = \bar{A}^{1}_{x\overline{n}|} + {}_nE_x$$

En supposant que les décès surviennent en milieu d'année, on a

$$\begin{aligned}\bar{A}_{x\overline{n}|} &= \sum_{k=0}^{n} v^{k+1/2}\,{}_kp_x q_{x+k} + v^n\,{}_np_x \\ &= \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}\end{aligned}$$

# Assurances mixtes généralisés

- Soit le capital $C_D$ en cas de décès et $C_V$ en cas de vie.
- On appelle *mixte* $10/X$ une telle assurance mixte avec $C_D/C_V = 10/X$.
- Si le capital est payable au moment du décès, la prime unique pure est

$$\mathbf{E}(\mathcal{X}) = C_D \bar{A}^1_{x\,\overline{n}|} + C_V\,{}_nE_x$$

- Les combinaisons les plus courantes sont les $10/5, 10/10, 10/20, 10/30$.

# Rentes viagères

# Rentes viagères

- Une rente viagère (en anglais : "*life annuity*") est une suite de payements effectués à des échéances périodiques et prenant fin au plus tard au décès de leur bénéficiaire (le rentier).
- Engagement de l'assureur en contrepartie d'un capital versé avant que la rente ne prenne cours : "*le capital constitutif de la rente*".
- Les rentes peuvent être payées annuellement ou fractionnées (par exemple mensuellement).

# Rentes viagères

## Rente viagère immédiate payable annuellement à terme échu

Considérons une rente viagère de 1 EUR par an payable à la fin de chaque année tant que le rentier est vivant. La prime pure pour une tête d'age $x$ est donnée par

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x q_{x+k} a_{\overline{k}|} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_x v^k$$

**Preuve.** La valeur actuelle $\mathcal{X}$ des prestations assurées s'écrit

$$\mathcal{X} = v + v^2 + \cdots + v^{K_x} = a_{\overline{K_x}|}$$

où $K_x = \sup\{n \in N : n \leq T_x\}$ est le nombre d'années entières de survie d'une tête d'âge $x$. On en déduit directement les relations étant donné que $P(K_x = k) = {}_k p_x q_{x+k}$ and $P(K_x > k) = {}_k p_x$.

# Rentes viagères



- Notons $\mathcal{X}_1$ la valeur actuelle d'une assurance vie-entière d'âge $x$. On trouve alors

$$i\mathcal{X} = 1 - v^{K_x} = 1 - uv^{K_x+1} = 1 - u\mathcal{X}_1$$

- On trouve une relation entre rentes viagères et assurance vie-entière :

$$ia_x = 1 - uA_x$$

- Relation de récurrence :

$$\begin{aligned} a_x &= vp_x \left(1 + vp_{x+1} + v^2{}_2p_{x+1} + \ldots + v^n{}_np_{x+1} + \ldots\right) \\ &= vp_x \left(1 + a_{x+1}\right) \end{aligned}$$

# Rentes viagères



- En termes de commutations, la rente viagère s'écrit

$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + \frac{D_{x+2}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+n}}{D_x} + \cdots$$

- Si on définit les commutations

$$N_x = \sum_{k=0}^{\infty} D_{x+k}$$

il vient

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

## Rente viagère payable annuellement par anticipation

Considérons une rente viagère de 1 EUR par an payable au début de chaque année tant que le rentier est vivant. La prime pure pour une tête d'age $x$ est donnée par

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_x q_{x+k} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \\ &= 1 + v\,{}_1p_x + v^2\,{}_2p_x + \cdots + v^n\,{}_np_x + \cdots \end{aligned}$$

**Preuve.** La valeur actuelle $\mathcal{X}$ des prestations assurées s'écrit

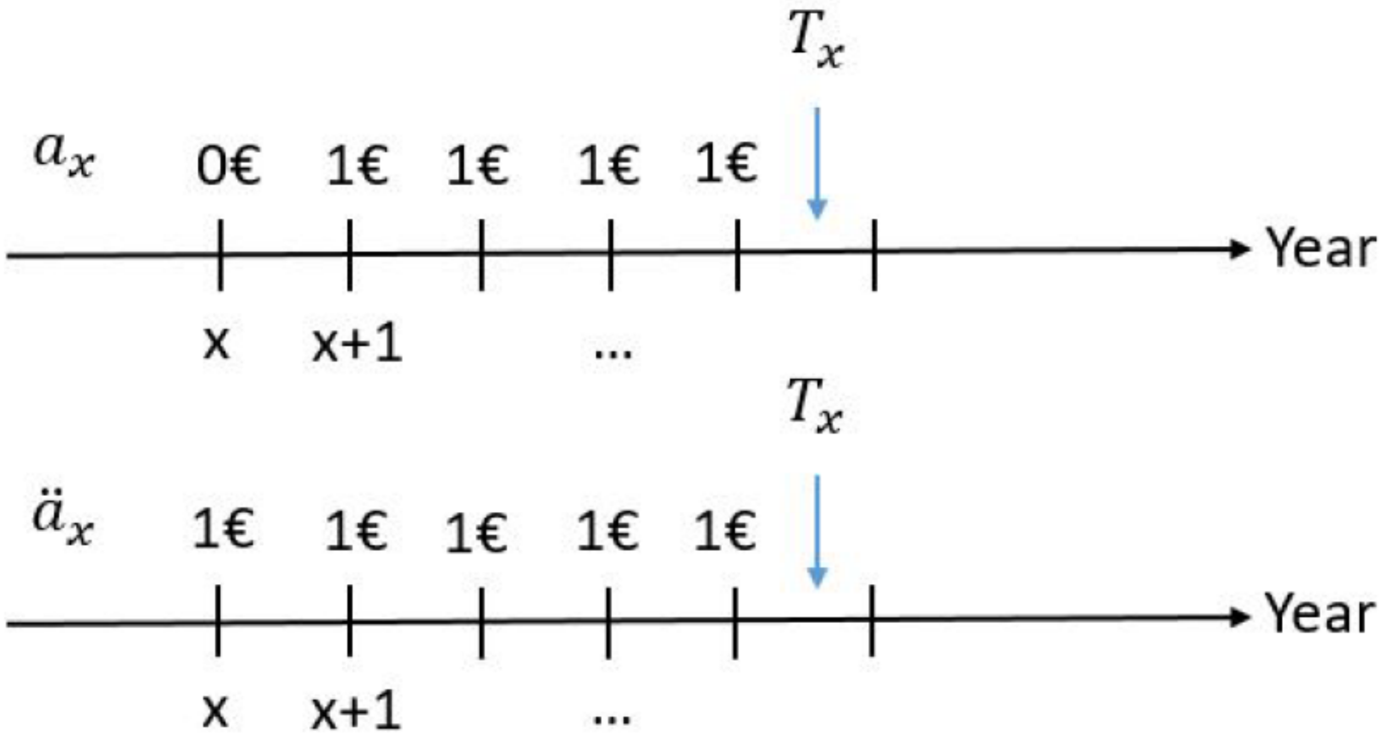
$$\mathcal{X} = 1 + v + \cdots + v^{K_x} = \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|} = 1 + a_{\overline{K_x}|}$$

On en déduit directement la prime pure.

# Rentes viagères

- Etant donné que
$$(1-v)\mathcal{X} = 1 - v^{K_x+1}$$
on en déduit la relation avec l'assurance vie-entière :
$$(1-v)\ddot{a}_x = 1 - A_x$$
- De même, on a
$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$
$$\ddot{a}_x = 1 + v\ p_x\ \ddot{a}_{x+1}$$
- En termes de commutations, la rente viagère par anticipation s'écrit
$$\ddot{a}_x = 1 + \frac{D_{x+1}}{D_x} + \cdots + \frac{D_{x+n}}{D_x} + \cdots = \frac{N_x}{D_x}$$

# Rentes viagères



# Rentes viagères



## Rente temporaire payable annuellement à terme échu

Considérons une rente de 1 EUR par an payable annuellement à terme échu tant que le rentier est vivant mais au plus pendant $n$ années. La prime pure pour une tête d'age $x$ est donnée par

$$\begin{aligned} a_{x\overline{n}|} &= v\,{}_1p_x + v^2\,{}_2p_x + \cdots + v^n\,{}_np_x \\ &= v\frac{l_{x+1}}{l_x} + v^2\frac{l_{x+2}}{l_x} + \cdots + v^n\frac{l_{x+n}}{l_x} \end{aligned}$$

La valeur actuelle des engagements est donnée par

$$\mathcal{X} = a_{\overline{n \wedge K_x}|} = \min\left\{a_{\overline{n}|}, a_{\overline{K_x}|}\right\}$$

# Rentes viagères

Les primes uniques des rentes temporaires peuvent s'exprimer à l'aide des primes uniques des rentes vie-entière :

$$\begin{aligned}
a_{x\overline{n}|} &= \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x v^k - \sum_{k=n+1}^{\infty} {}_kp_x v^k \\
&= a_x - {}_np_x v^n \sum_{k=n+1}^{\infty} {}_{k-n}p_{x+n} v^{k-n} \\
&= a_x - {}_np_x v^n \sum_{t=1}^{\infty} {}_tp_{x+n} v^t \\
&= a_x - {}_np_x v^n a_{x+n}
\end{aligned}$$

# Rentes viagères



## Rente temporaire payable annuellement par anticipation

Considérons une rente de 1 EUR par an payable annuellement par anticipation tant que le rentier est vivant mais au plus pendant $n$ années La prime pure pour une tête d'age $x$ est donnée par

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = 1 + v\ {}_1p_x + v^2{}_2p_x + \cdots + v^{n-1}{}_{n-1}p_x$$

# Rentes viagères



La valeur actuelle des engagements est donnée par

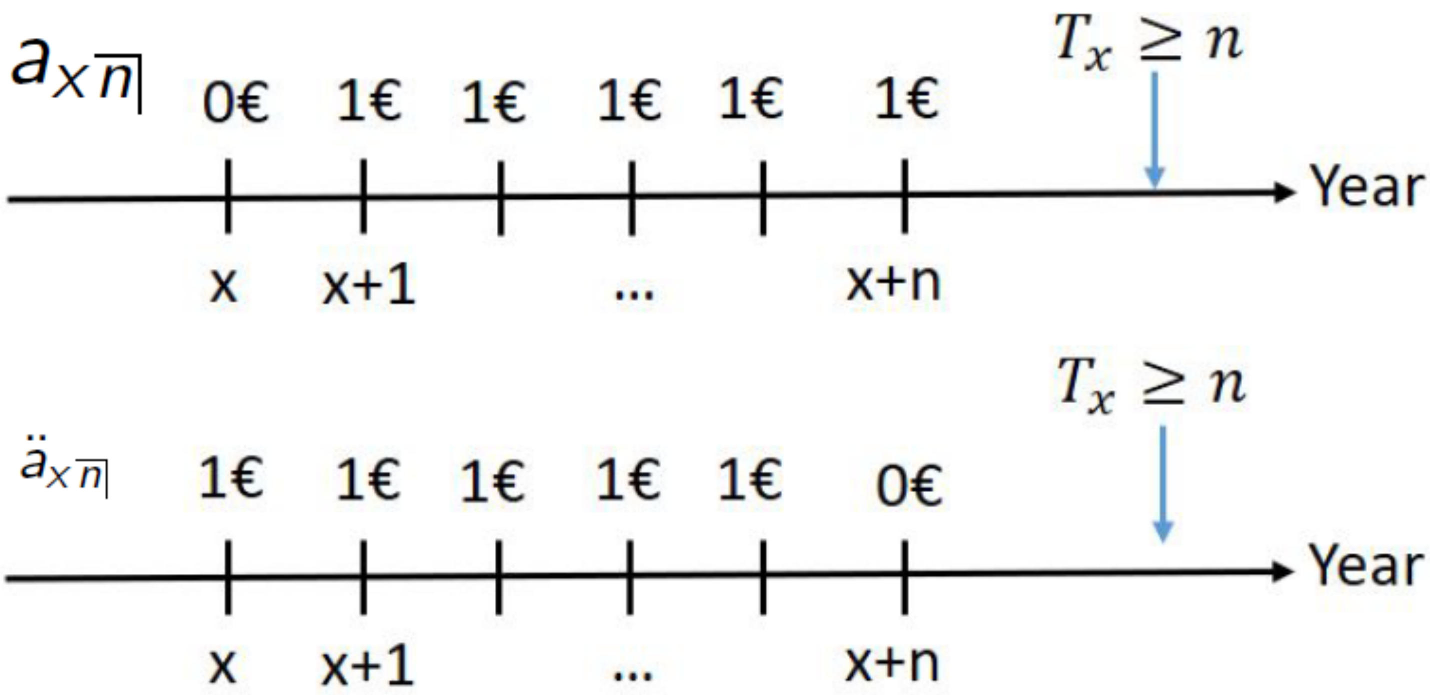
$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= 1 + v + v^2 + \cdots + v^{\min\{n-1,K_x\}} \\ &= \min\left\{\ddot{a}_{\overline{n}|}, \ddot{a}_{\overline{K_x+1}|}\right\} \\ &= \frac{1-\max\left\{v^n, v^{K_x+1}\right\}}{1-v} \qquad (8)\end{aligned}$$

Dès lors, on trouve

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x\overline{n}|}}{1-v} \qquad (9)$$

# Rentes viagères





# Rentes viagères différées



## Rentes viagères différées

Considérons une rente viagère sur une tête d'âge $x$ mais dont le premier payement est différé de $n$ années. Si payable annuellement à terme échu, la prime pure pour une tête d'age $x$ est donnée par

$$\begin{aligned} {}_{n|}a_x &= v^{n+1}{}_{n+1}p_x + v^{n+2}{}_{n+2}p_x + \cdots \\ &= v^n{}_np_x \left( v\ {}_1p_{x+n} + v^2{}_2p_{x+n} + \cdots \right) \\ &= v^n{}_np_x a_{x+n} \end{aligned}$$

On trouve la relation :

$$\begin{aligned} {}_{n|}a_x &= \sum_{k=1}^{\infty} v^k{}_kp_x - \sum_{k=1}^{n} v^k{}_kp_x \\ &= a_x - a_{x\overline{n}|} \end{aligned}$$

# Rentes viagères différées



Par anticipation, la prime pure est donnée par

$$
\begin{aligned}
{}_{n|}\ddot{a}_x &= v^n\, {}_np_x + v^{n+1}\, {}_{n+1}p_x + \cdots \\
&= v^n\, {}_np_x \sum_{k=0}^{\infty} v^k\, {}_kp_{x+n} \\
&= v^n\, {}_np_x\, \ddot{a}_{x+n}
\end{aligned}
$$

# Rentes différées



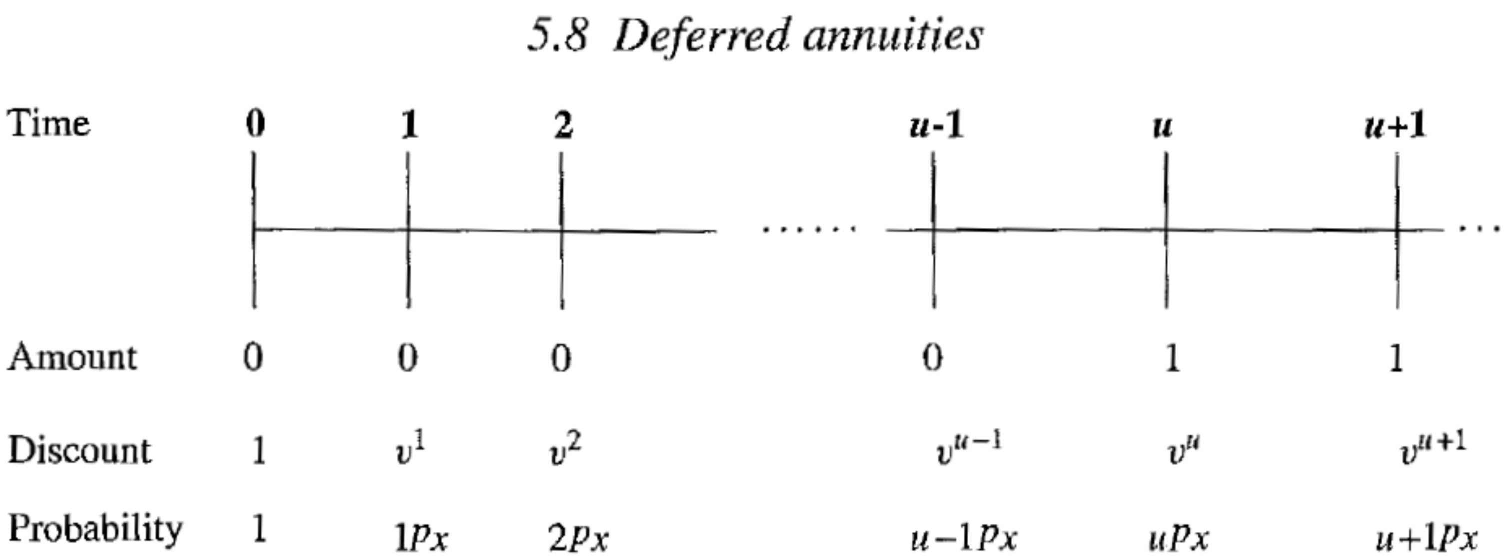



Figure – Rentes différées de $u$ années payable annuellement par anticipation.

# Rentes différées

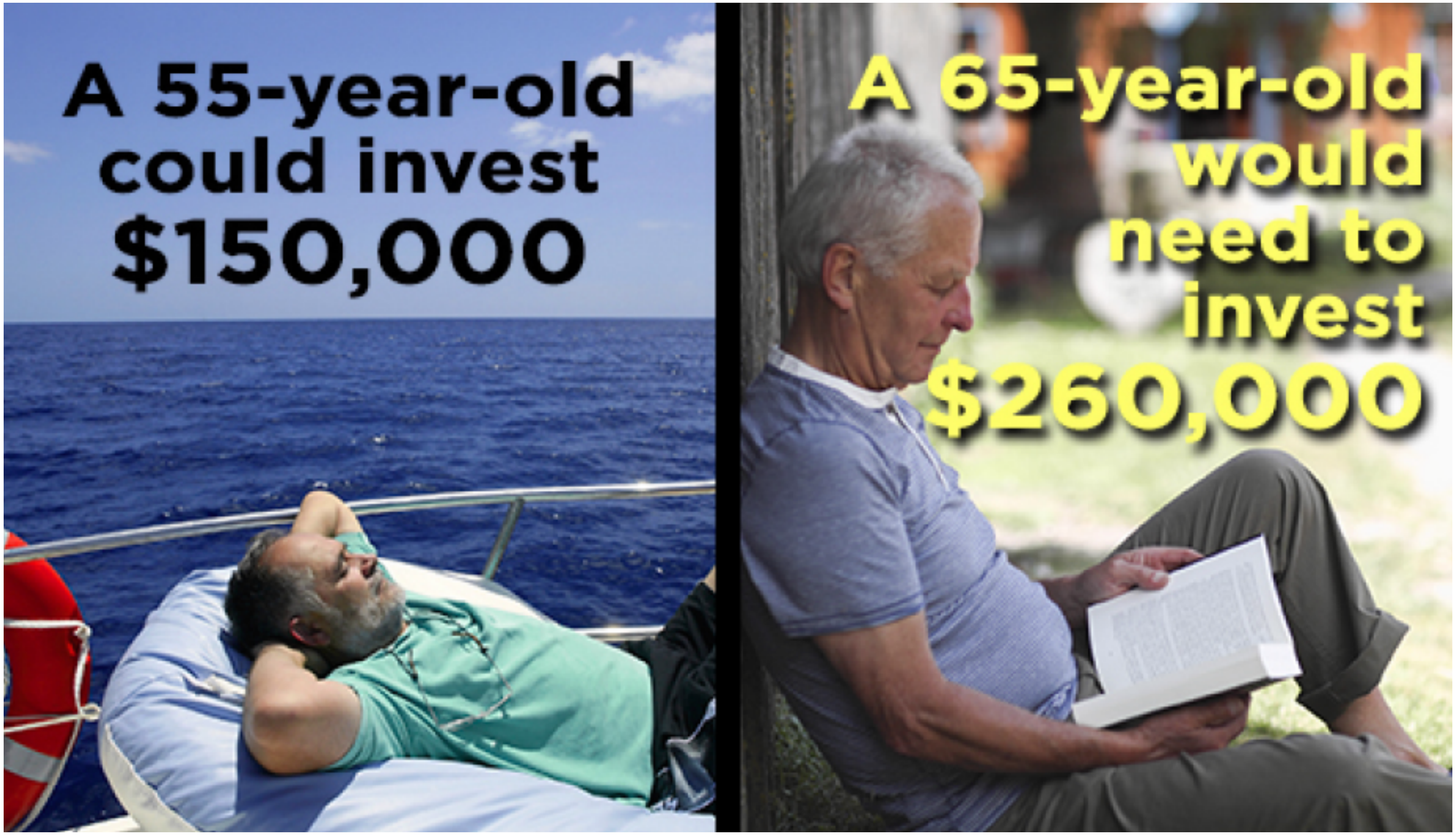



Figure – Valeurs standards pour 17000 ${}_{10|}\ddot{a}_{55}$ et 17000 $\ddot{a}_{65}$ .

# Rentes viagères temporaires différées



**Une rente temporaire différée à terme échu** garantit le paiement de 1 EUR par an payable en fin d'année tant que le rentier est vivant mais au plus $n$ années. Les paiements sont différés et commencent en $x + d$. La prime pure se note par

$$_{d|}a_{x\overline{n}|}$$

Remarque : on trouve aussi la notation $_{d|n}a_x$.
**Une rente temporaire différée par anticipation** garantit le paiement de 1 EUR par an payable en début d'année tant que le rentier est vivant mais au plus $n$ années. Les paiements sont différés et commencent en $x + d$. La prime pure se note par

$$_{d|}\ddot{a}_{x\overline{n}|}$$

Remarque : on trouve aussi la notation : $_{d|n}\ddot{a}_x$.
**Exercice :** Trouver une expression pour les primes pures.

# Rentes viagères fractionnées



## Rente fractionnée payable à terme échu

Considérons une rente de 1 EUR par an sur une tête d'âge $x$ payable par fractions de $1/m$ à la fin de chaque $m$-ème d'année tant que le rentier est en vie. La prime pure pour une tête d'age $x$ est donnée par

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} \, {}_{\frac{k}{m}}p_x$$

La valeur actuelle de cette rente s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{X} &= \frac{1}{m}\left(v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v^{\frac{\Theta}{m}}\right) \\ &= \frac{1 - v^{\frac{\Theta}{m}}}{i^{(m)}} \end{aligned} \tag{10}$$

où

$$\Theta = [mT_x] = m\left(K_x + S_x^{(m)}\right) - 1$$

est le nombre de $m$-èmes d'année entiers de survie du rentier.

# Rentes viagères fractionnées

## Rente fractionnée payable par anticipation

Considérons une rente de 1 EUR par an payable par fractions de $1/m$ au début de chaque $m$-ème d'année tant que le rentier est en vie. La prime pure pour une tête d'age $x$ est donnée par

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{\infty} v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_x \\ &= \frac{1}{m} + a_x^{(m)}\end{aligned}$$

La valeur actuelle de cette rente s'écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{X} &= \frac{1}{m}\left(1 + v^{\frac{1}{m}} + v^{\frac{2}{m}} + \cdots + v^{\frac{\Theta}{m}}\right) \\ &= u^{\frac{1}{m}}\frac{1}{i^{(m)}}\left(1 - v^{\frac{\Theta+1}{m}}\right) \qquad (11)\end{aligned}$$

# Rentes viagères fractionnées

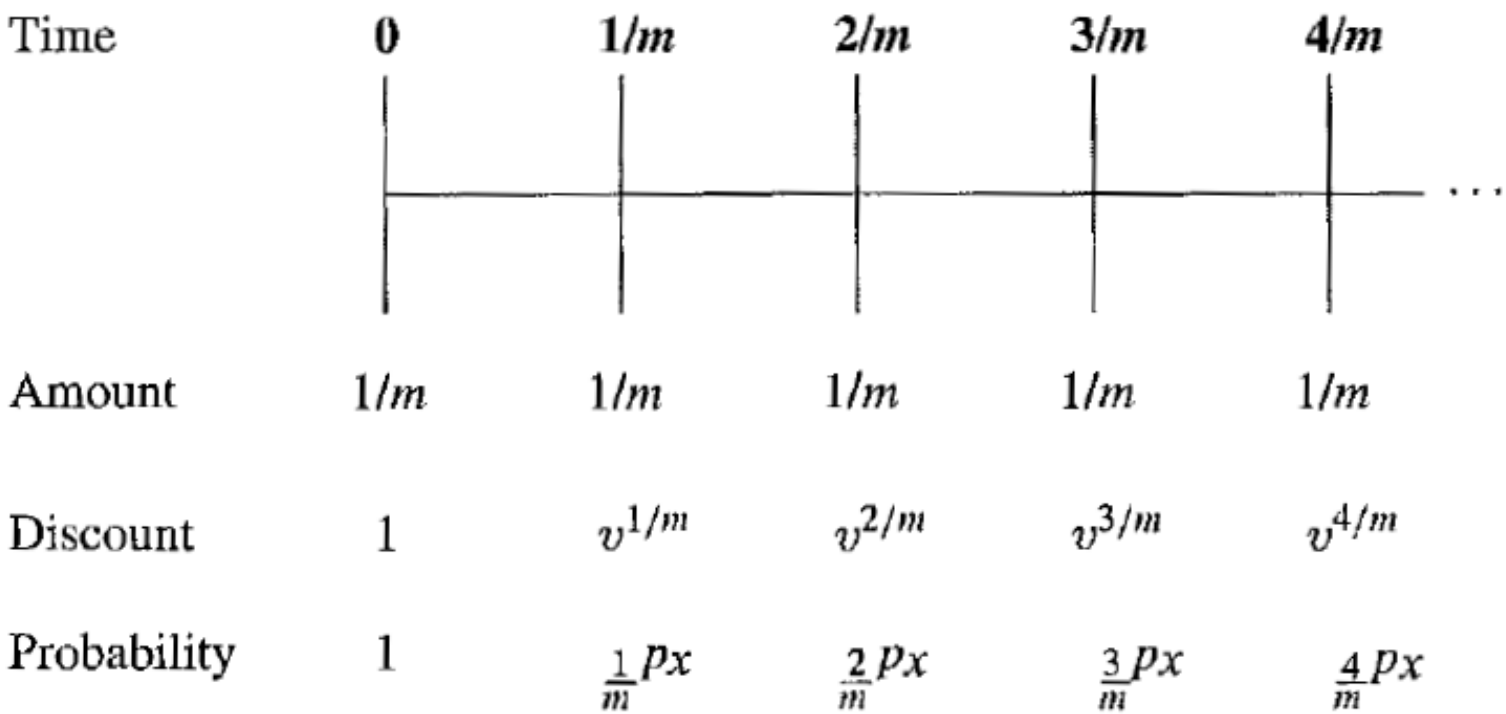



Figure – Rente viagère fractionnée payable par anticipation.

# Rentes viagères fractionnées - Approximations



- En pratique, on utilise souvent une valeur approchée de $a_x^{(m)}$ obtenue par interpolation comme suit.
- La rente viagère fractionnée peut s'écrire

$$a_x^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{m} {}_{k+\frac{t}{m}}E_x \tag{12}$$

- On utilise alors l'interpolation linéaire :

$${}_{k+\frac{t}{m}}E_x \approx \left(1 - \frac{t}{m}\right) {}_kE_x + \frac{t}{m} {}_{k+1}E_x$$

# Rentes viagères fractionnées - Approximations

On a :

$$\sum_{t=1}^{m} {}_{k+\frac{t}{m}}E_x \approx {}_kE_x \sum_{t=1}^{m} \frac{m-t}{m} + {}_{k+1}E_x \sum_{t=1}^{m} \frac{t}{m}$$
$$= \frac{m-1}{2} {}_kE_x + \frac{m+1}{2} {}_{k+1}E_x$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} a_x^{(m)} &\approx \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{\infty} \left( \frac{m-1}{2} {}_kE_x + \frac{m+1}{2} {}_{k+1}E_x \right) \\ &= \frac{1}{m} \sum_{k=1}^{\infty} \left( \frac{m-1}{2} + \frac{m+1}{2} \right) {}_kE_x + \frac{m-1}{2m} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} {}_kE_x + \frac{m-1}{2m} \\ &= a_x + \frac{m-1}{2m} \end{aligned} \tag{13}$$

# Rentes viagères fractionnées - Approximations

- La formule précédente permet de calculer les prix des rentes fractionnées sur base de la table de mortalité $\{q_x; x \in \mathbb{N}\}$
- De même, pour les rentes fractionnées par anticipation, on trouve :

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{m} + a_x^{(m)} \\ &\approx a_x + \frac{m+1}{2m} \\ &= \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}. \end{aligned}$$

- On trouve par exemple

$$\begin{array}{ll} a_x^{(2)} \approx a_x + \frac{1}{4} & \ddot{a}_x^{(2)} \approx \ddot{a}_x - \frac{1}{4} \\ a_x^{(4)} \approx a_x + \frac{3}{8} & \ddot{a}_x^{(4)} \approx \ddot{a}_x - \frac{3}{8} \\ a_x^{(12)} \approx a_x + \frac{11}{24} & \ddot{a}_x^{(12)} \approx \ddot{a}_x - \frac{11}{24} \end{array} \tag{14}$$

# Rentes fractionnées temporaires

La prime unique pure pour la rente fractionnée temporaire à terme échu est

$$
\begin{aligned}
a_{x\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{nm} v^{\frac{t}{m}}\,{}_{\frac{t}{m}}p_x \\
&= \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{\infty} v^{\frac{t}{m}}\,{}_{\frac{t}{m}}p_x - v^n p_x \frac{1}{m}\sum_{t=nm+1}^{\infty} v^{\frac{t}{m}-n}\,{}_{\frac{t}{m}-n}p_{x+n} \\
&= a_x^{(m)} - {}_nE_x \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty} v^{\frac{k}{m}}\,{}_{\frac{k}{m}}p_{x+n} \\
&= a_x^{(m)} - {}_nE_x\, a_{x+n}^{(m)}
\end{aligned}
$$

et par anticipation :

$$
\begin{aligned}
\ddot{a}_{x\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{1}{m}\sum_{t=0}^{nm-1} v^{\frac{t}{m}}\,{}_{\frac{t}{m}}p_x \\
&= \ddot{a}_x^{(m)} - {}_nE_x\, \ddot{a}_{x+n}^{(m)}
\end{aligned}
$$

# Rentes fractionnées temporaires - Approximations



Des approximations obtenues pour les rentes vie-entière se déduisent immédiatement les approximations analogues pour les rentes temporaires :

$$
\begin{aligned}
a^{(m)}_{x\overline{n}|} &= a^{(m)}_{x} - {}_{n}E_x a^{(m)}_{x+n} \\
&\approx a_{x\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_{n}E_x) \\
\ddot{a}^{(m)}_{x\overline{n}|} &= \ddot{a}^{(m)}_{x} - {}_{n}E_x \ddot{a}^{(m)}_{x+n} \\
&\approx \ddot{a}_{x\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_{n}E_x)
\end{aligned}
$$

**Remark**

*La rente fractionnée temporaire différé de $d$ années se note*

$$
{}_{d|}a^{(m)}_{x\overline{n}|}
$$

# Rentes viagères continues

- Considérons une rente viagère de 1 EUR par an payable de façon continue : tant que le rentier est vivant, tout intervalle de temps de longueur $dt$ donne lieu à un payement de montant $dt$.
- La prime pure est donnée par

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty {}_t p_x \mu_{x+t} \bar{a}_{\overline{t}|} dt$$

- De manière équivalente (**exercice**), on a

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty {}_s p_x v^s ds$$

# Rentes viagères continues

En prenant la limite de (13) lorsque $m \to \infty$, on trouve la valeur approchée :

$$\bar{a}_x \approx a_x + \frac{1}{2} = \ddot{a}_x - \frac{1}{2} \tag{15}$$

Si on se rappelle que ${}_tp_x = e^{-\int_0^t \mu_{x+s} ds}$ et $v^t = e^{-\int_0^t \delta ds}$,, alors la prime pour une rente continue satisfait

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty e^{-\int_0^t (\delta + \mu_{x+s}) ds} dt \leq \bar{a}_{\overline{\infty}|} = \int_0^\infty \underbrace{e^{-\int_0^t \delta ds}}_{v^t} dt$$

**Important**

Comme pour les capitaux différés, le rendement instantané d'une rente continue est donc égal à $\delta + \mu_{x+s}$, qui est croissant avec l'âge et plus élevé que le rendement d'une capitalisation pure (i.e. $\delta$).

# Rentes viagères



*5.7 Comparison of annuities by payment frequency*

Table 5.1 *Values of* $a_x$ , $a_x^{(4)}$, $\bar{a}_x$ , $\ddot{a}_x^{(4)}$ *and* $\ddot{a}_x$.

| $x$ | $a_x$ | $a_x^{(4)}$ | $\bar{a}_x$ | $\ddot{a}_x^{(4)}$ | $\ddot{a}_x$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 20 | 18.966 | 19.338 | 19.462 | 19.588 | 19.966 |
| 40 | 17.458 | 17.829 | 17.954 | 18.079 | 18.458 |
| 60 | 13.904 | 14.275 | 14.400 | 14.525 | 14.904 |
| 80 | 7.548 | 7.917 | 8.042 | 8.167 | 8.548 |

On observe que

$$a_x < a_x^{(4)} < \bar{a}_x < \ddot{a}_x^{(4)} < \ddot{a}_x$$

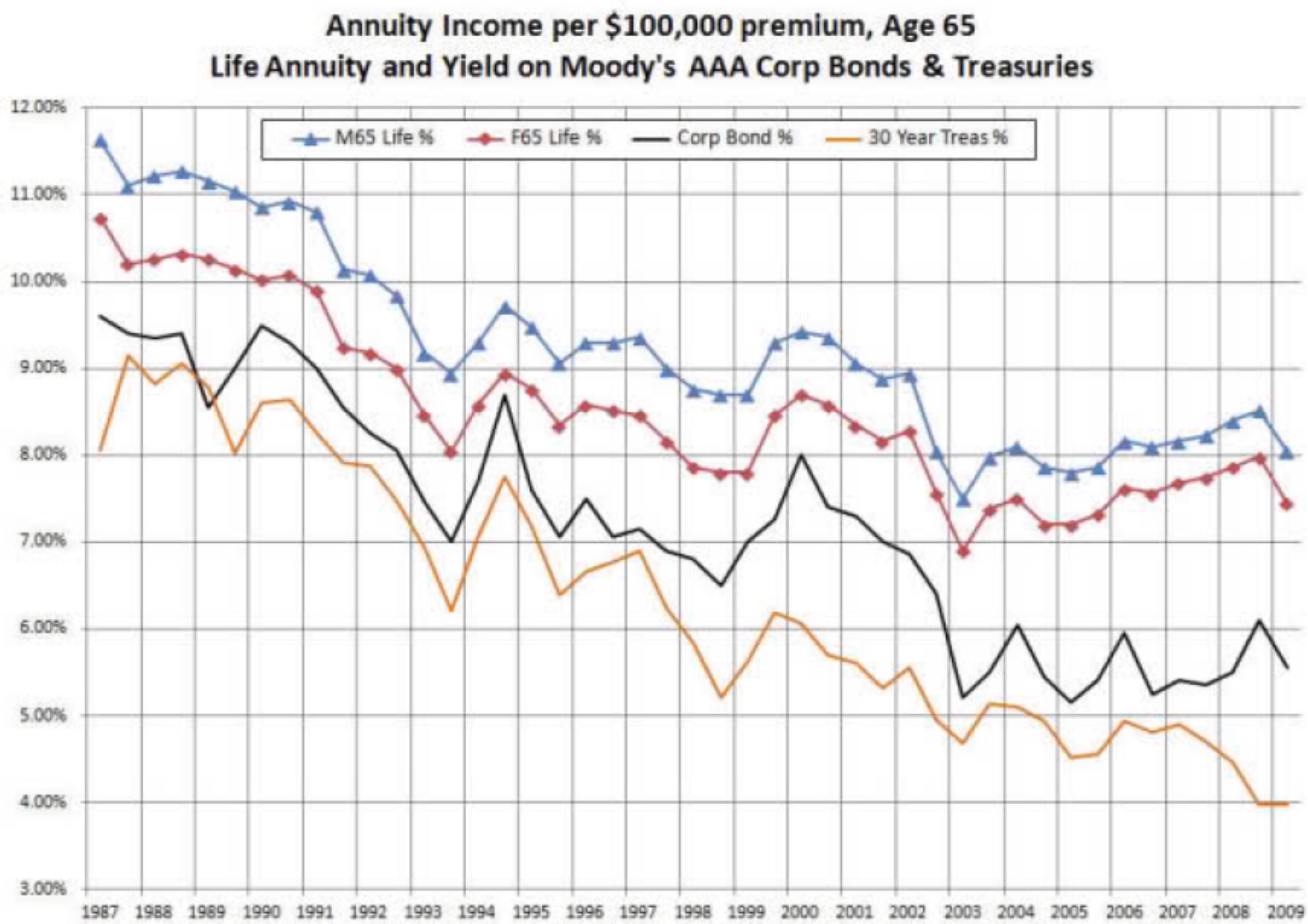



Figure – Facteurs influençant la valeur actuarielle d'une annuité.

# Rentes variables



Considérons une rente viagère sur une tête d'âge $x$ payable annuellement à terme échu, dont l'arrérage peut varier d'année en année. Notons $z_k$ l'arrérage payable à l'instant $k$. La valeur actuelle de cette rente s'écrit :

$$\mathcal{X} = \sum_{k=1}^{\infty} z_k v^k 1_{[K_x \geq k]}$$

et la prime unique pure, que nous noterons $\alpha$, est donnée par

$$\alpha = \mathbf{E}(\mathcal{X}) = \sum_{k=1}^{\infty} z_k v^k \, {}_k p_x$$

# Rentes variables



Deux exemples importants :

- Rentes croissant en progression arithmétique. La prime pure est donnée par

$$(Ia)_x = \sum_{k=1}^{\infty} k \ v^k \ {}_kp_x = \sum_{k=0}^{\infty} v^k \, {}_kp_x a_{x+k}$$

- Rentes croissant en progression arithmétique par anticipation. La prime pure est donnée par

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) v^k \ {}_kp_x$$

# Rentes variables



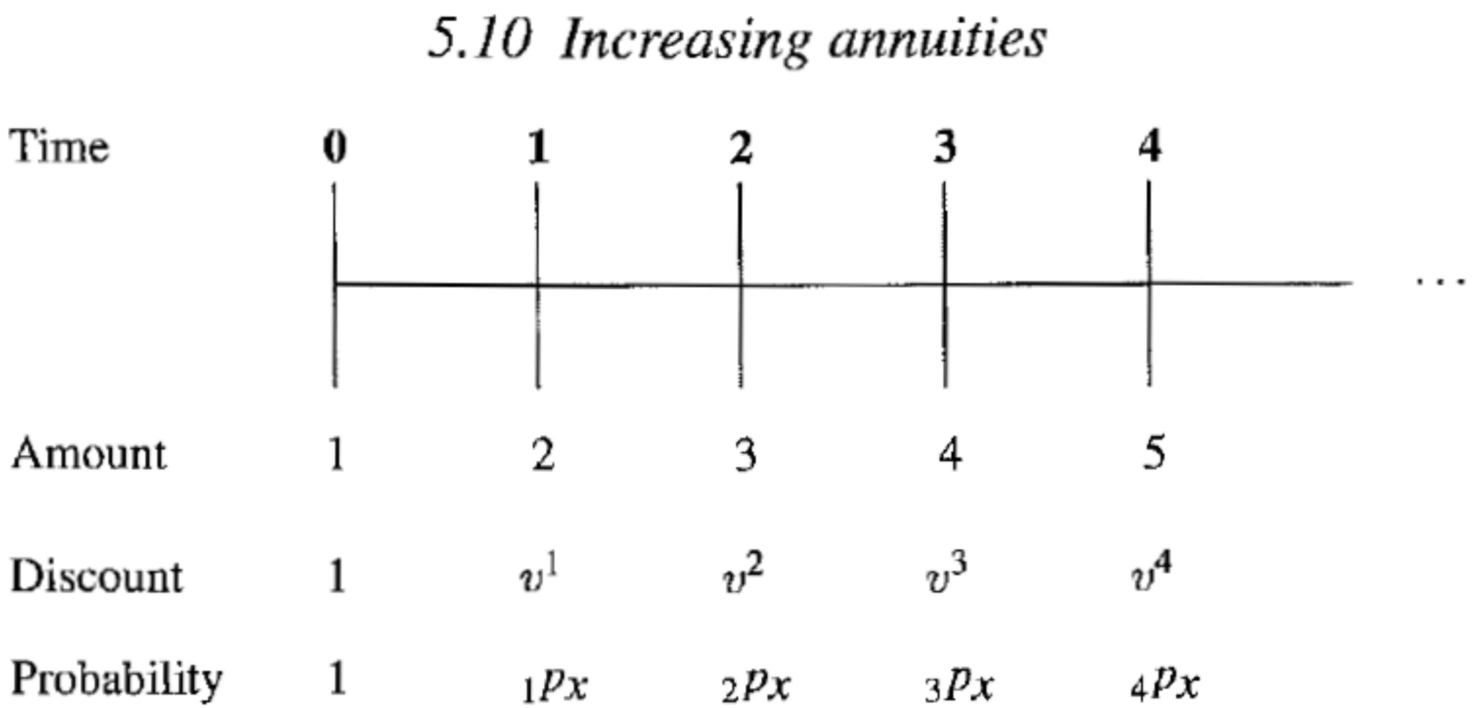



Figure – Rente croissant en progression arithmétique payable par anticipation

# Remarque



- Les produits d'assurance vie contiennent de nombreuses garanties financières. Le risque financier est totalement supporté par l'assureur car le taux d'intérêt est fixe. L'assureur doit aussi supporter les risques de mortalité et longévité.
- Pour limiter le risque de faillite, le régulateur impose que l'assureur calcule les primes avec des hypothèses conservatrices. En France, les assureurs utilisent les tables réglementaires TH 00-02 et TF 00-02 pour les assurances vie et décès. Des tables par génération réglementaires TGH 05 – TGF 05 sont utilisés pour les rentes viagères.

# Remarque

- Le taux d'intérêt est réglementé par le code de l'assurance. Pour les opérations d'assurance vie : *maximum de 60% du TME moyen des 6 derniers mois* (TME est le taux de rendement sur le marché secondaire des emprunts d'État à taux fixe supérieurs à 7 ans).
- Dans le cas de taux d'intérêt négatif, il est limité à 0% par l'article 4 de l'arrêté du 26 décembre 2019.[3]
- TME disponible sur le site de la Banque de France :

| | sept- 2020 | oct- 2020 | nov- 2020 | déc- 2020 | janv- 2021 |
|---|---|---|---|---|---|
| TME | -0,18 | -0,26 | -0,28 | -0,29 | -0,26 |

Figure – Source : `www.banque-france.fr/statistiques/taux-et-cours/les-indices-obligataires`

3. `www.legifrance.gouv.fr/loda/id/LEGIARTI000039796524/2020-01-01/`

# Remarque

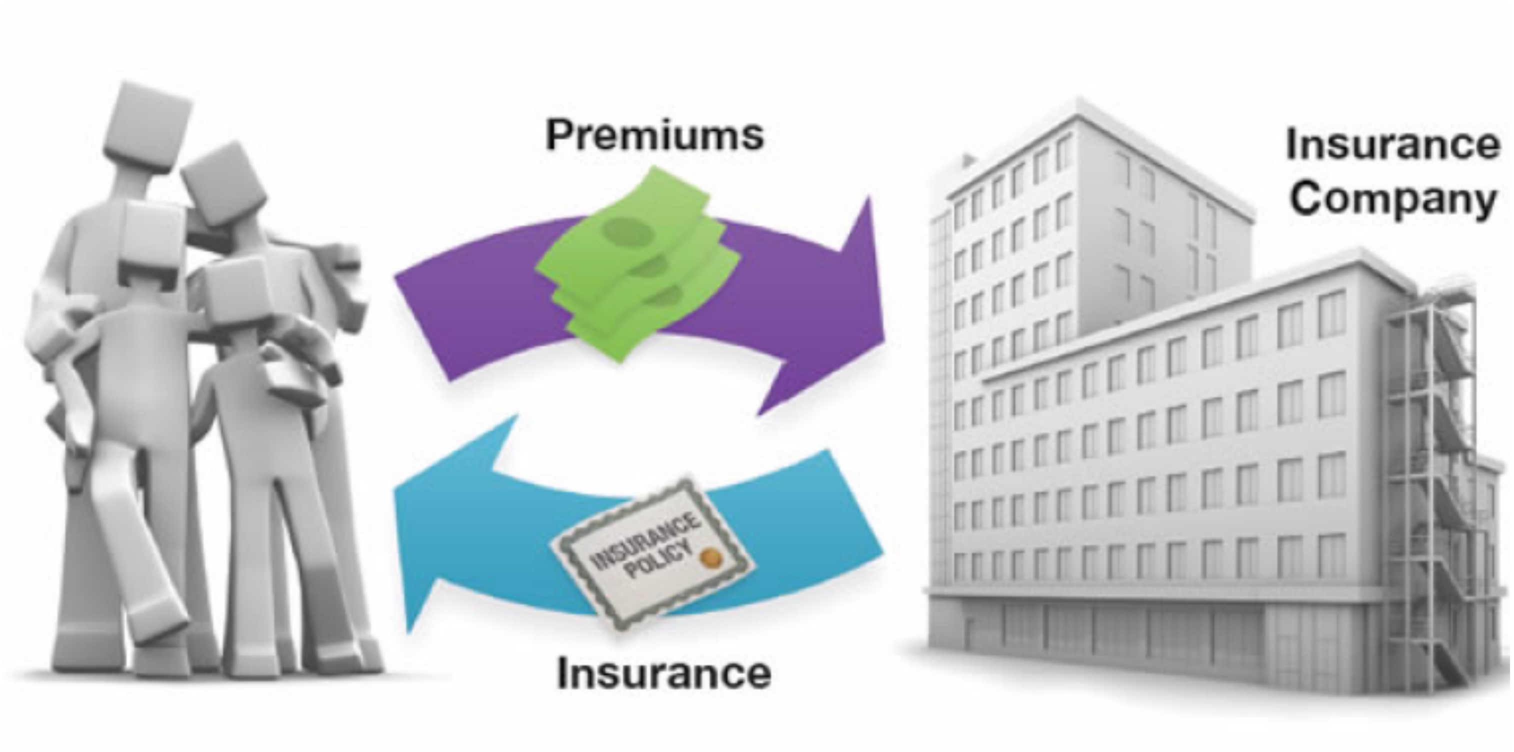


- Les contrats en unités de compte (UC) sont des assurances dans lesquelles le risque d'investissement est porté par l'assuré.
- Exemples d'UC : SICAV, FCP, ETF, etc. Les fonds en UC sont typiquement divisés en unités. Pour déterminer le prix de chaque part, il suffit de diviser la valeur totale du fonds d'actifs par le nombre d'unités.
- Pour ces contrats, il n'y a pas de garantie de capital mais l'assuré peut espérer un rendement plus élevé car l'argent est investi sur les marchés financiers.
- Solution mixte : possibilité d'assurance vie multisupport où une partie du capital est garantie.

# Primes et chargements

# Introduction

Un contrat d'assurance vie est un transfert compliqué :



# Introduction



- Un contrat d'assurance précise toujours d'une part les prestations auxquelles s'engage l'assureur, et d'autre part les primes que le preneur d'assurance s'engage a payer en contrepartie.
- La plupart des contrats prévoient
  - soit une prime unique à l'origine du contrat.
  - soit le payement de primes périodiques constantes pendant une période fixée, généralement égale à la durée du contrat, mais *au plus tard* jusqu'au décès de l'assuré.
- Le paiement des primes commence toujours *avant* la période de couverture.

# Primes pures - Principe d'équivalence

- Notons $L$ la perte totale de l'assureur définie comme la différence entre la valeur actuelle des engagements futures et des primes futures.
- Les primes sont dites *pures* si elles satisfont le *principe d'équivalence* :

$$\mathbb{E}[L] = 0.$$

- Primes :
  - *Primes pures* : couvrent les engagements.
  - *Primes chargées* : couvrent les engagements et frais divers.
  - *Primes uniques* vs. *primes périodiques*.

# Primes pures - Principe d'équivalence



- Considérons un contrat d'assurance-vie souscrit en $t = 0$ pour une durée de $n$ années ($n = \infty$ si la durée du contrat est illimitée, par exemple dans le cas d'une assurance vie-entière).
- On note $P(t)$ le cumul des primes à payer dans $[0, t]$ si l'assuré ne décede pas avant $t$ $(0 \leq t \leq n)$.
- On supposera toujours que $P(t)$ est une fonction continue à droite et non décroissante de $t$ ayant au plus un nombre fini de discontinuités sur $[0, n]$.

# Primes pures - Principe d'équivalence

- Les primes n'étant dues que pour autant que l'assuré soit vivant au moment où elles viennent à échéance, l'espérance de la valeur actuelle en $t = 0$ de toutes les primes que percevra l'assureur est donnée par

$$\mathcal{P} = \int_0^n v^t {}_t p_x dP(t)$$

(*x* désignant l'âge de l'assuré lors de la souscription du contrat).

- Dans le cas d'un contrat à prime unique de montant $PU$ due à l'origine, on a

$$P(t) = PU \quad \forall t \geq 0$$

On a donc

$$\mathcal{P} = P(0) = PU$$

# Primes pures - Principe d'équivalence



- Dans le cas d'un contrat avec des primes annuelles de montant constant $PA$ payables annuellement par anticipation jusqu'au terme, mais au plus tard jusqu'au décès de l'assuré, on a

$$P(t) = \begin{cases} ([t]+1)PA & \forall t \in [0, n-1) \\ nPA & \forall t \geq n-1 \end{cases}$$

et

$$\mathcal{P} = PA \sum_{t=0}^{n-1} {}_t p_x v^t = PA \; \ddot{a}_{x\overline{n}|}$$

- Soit $\mathcal{X}$ la valeur actuelle des prestations assurées.
- Les primes sont *pures* si elles satisfont au *principe d'équivalence* :

$$\mathcal{P} = E(\mathcal{X}) \tag{16}$$

# Primes pures - Cas général



De façon générale, considérons un contrat d'assurance-vie d'une durée de $n$ années sur une tête d'âge $x$ avec les prestations suivantes :

- en cas de décès de l'assuré à l'instant $t$ $(0 < t < n)$ payement immédiat d'un capital de montant $C(t)$, où $C(t)$ est une fonction intégrable sur $[0, n]$.
- en cas de vie de l'assuré à l'instant $t$ $(0 < t \leq n)$, le montant cumulé des prestations payées dans $[0, t]$ est $L(t)$ où $L(t)$ est une fonction continue à droite et non décroissante sur $[0, n]$.

# Primes pures - Cas général



La valeur actuelle à l'origine du contrat des prestations est alors donnée par

$$\mathcal{X} = \int_0^n v^t 1_{[T_x > t]} dL(t) + C\left(T_x\right) v^{T_x} 1_{[T_x \leq n]}$$

Le principe d'équivalence (16) s'écrit donc comme suit :

$$\int_0^n v^t {}_t p_x dP(t) = \int_0^n {}_t p_x v^t dL(t) + \int_0^n {}_t p_x \mu_{x+t} v^t C(t) dt$$

# Primes pures - Exemples

## Assurance vie-entière

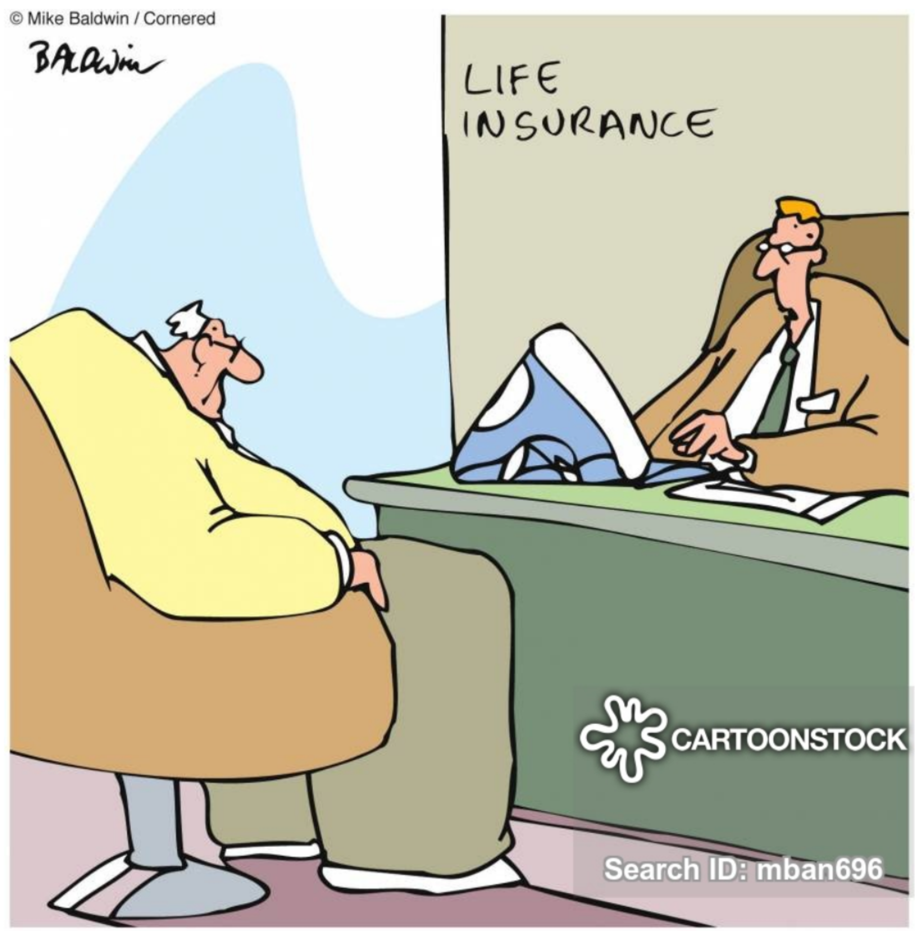
Considérons une assurance vie-entière de capital $C$ sur une tête d'âge $x$, le capital assuré étant payable au moment du décès.

1. Si le contrat est financé par une prime annuelle pure constante $PA$ payable annuellement par anticipation jusqu'au décès de l'assuré, il vient :
$$PA = C\frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}$$
2. Si le contrat est financé par des primes annuelles pures constantes $PA$ payables annuellement par anticipation pendant $n$ années, on a $\mathcal{P} = PA\ddot{a}_{x\overline{n}|}$, d'où :
$$PA = C\frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}$$

# Primes pures - Exemples

## Assurance vie-entière

Notons que la prime annuelle est une fonction croissante de l'âge $x$ :



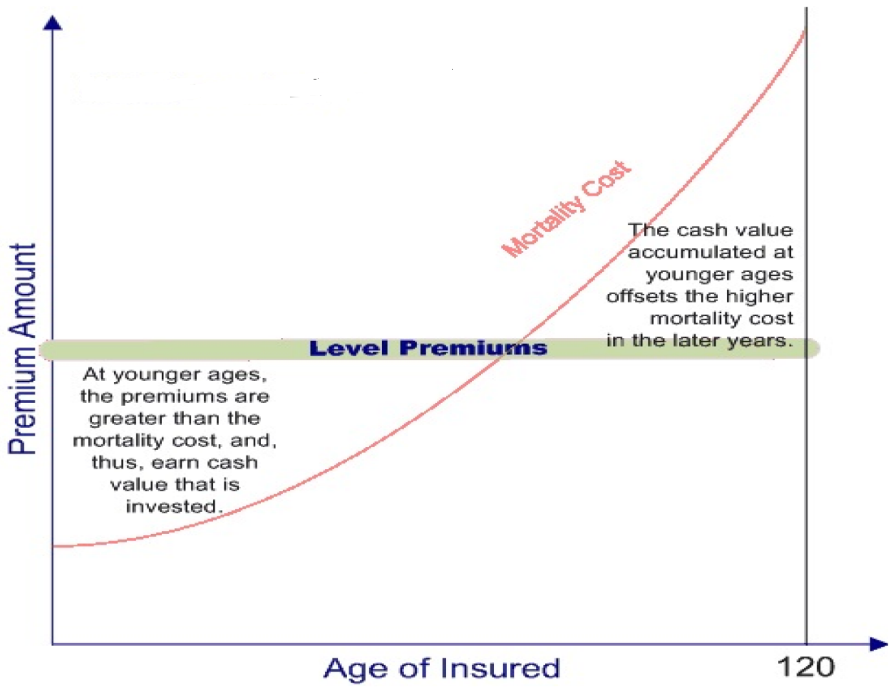

"For someone your age, the yearly premium on a \$5,000 policy is \$8,000."

# Primes pures - Exemples

## Assurance vie-entière

- Primes annuelles vs. coût de la couverture annuelle :

$$\boxed{PA = C\frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_x}} \quad \text{vs} \quad \boxed{\text{Coût sur l'année } (k, k+1] = C\bar{A}^1_{x+k:\overline{1}|}}$$



# Primes pures - Exemples

## Assurance vie-entière

- Engagements : $50000\bar{A}_{25}$ Primes : $PA\ddot{a}_{25}$
- Bases techniques :
  - Table de mortalité réglementaire : TF 00-02.
  - Taux technique : 1%.
- Prime pure annuelle :

$$PA = 50000\frac{\bar{A}_{25}}{\ddot{a}_{25}} \approx 632 \rightarrow \text{Moins de 2 EUR par jour}$$

# Primes pures

## Capital sous risque

Pour les assurances vie, l'exposition au risque de mortalité est mesuré par le capital sous risque.

### Capital sous risque

Si l'assuré décède (milieu d'année) à l'âge $x + t$, la perte, appelée, capital sous risque est

$$R(t) = C - PA\ddot{a}_{\overline{t+1}|}(1+i)^{t+\frac{1}{2}}$$

Ce capital décroît avec le temps $t$ et peut être éventuellement réassuré.

# Primes pures - Exemples

## Assurance temporaire



**Assurance temporaire** de capital $C$ sur une tête d'âge $x$, le capital assuré étant payable au moment du décès s'il survient avant $n$ années. La prime annuelle $PA$ est payable annuellement par anticipation pendant $n$ années. La prime annuelle est

$$PA = C\frac{A^{1}_{x\,\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\,\overline{n}|}}$$

# Primes pures - Exemples

## Assurance temporaire

| | C A^1_xn | | ä_xn | | C A^1_xn / ä_xn | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Age | **n=10 , i=0%** | **n=10 , i=4%** | **n=10 , i=0%** | **n=10 , i=4%** | **n=10 , i=0%** | **n=10 , i=4%** |
| 30,00 | 1.818,16 | 1.477,93 | 9,93 | 8,38 | 183,17 | 176,41 |
| 40,00 | 3.580,44 | 2.890,84 | 9,86 | 8,33 | 363,10 | 347,16 |
| 50,00 | 8.324,51 | 6.702,83 | 9,68 | 8,19 | 859,78 | 818,56 |
| 60,00 | 20.327,88 | 16.409,55 | 9,21 | 7,82 | 2.206,98 | 2.097,81 |
| 70,00 | 46.033,74 | 37.591,86 | 8,08 | 6,94 | 5.699,11 | 5.419,10 |

Figure – Prime pure annuelle pour une assurance temporaire, durée 10 ans, en fonction de l'âge à la signature du contrat et du taux d'intérêt technique (mortalité belge), capital : 100 000 €

# Primes pures - Exemples

## Assurance temporaire

- Engagements : $100000 A^{1}_{45\overline{20}|}$ Primes : $PA\ddot{a}_{45\overline{20}|}$
- Bases techniques :
  - Table de mortalité réglementaire : TF 00-02.
  - Taux technique : 1%.
- Prime pure annuelle :

$$PA = 100000 \frac{A^{1}_{45\overline{20}|}}{\ddot{a}_{45\overline{20}|}} \approx 345$$

# Primes pures - Exemples

## Capital différé

**Capital différé** de capital $C$ sur une tête d'âge $x$ d'une durée $n$, le capital assuré étant payable si l'assuré est vivant après $n$ années. La prime annuelle $PA$ est payable annuellement par anticipation pendant $n$ années. La prime annuelle est donc

$$PA = C \frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x\,\overline{n}|}}$$

# Primes pures - Exemples

## Capital différé

| | C nEx | | ä_xn | | C nEx/ä_xn | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Age | **n=10 , i=0%** | **n=10 , i=4%** | **n=10 , i=0%** | **n=10 , i=4%** | **n=10 , i=0%** | **n=10 , i=4%** |
| 30,00 | 990,40 | 669,08 | 9,96 | 8,40 | 99,43 | 79,61 |
| 40,00 | 981,59 | 663,13 | 9,93 | 8,38 | 98,87 | 79,14 |
| 50,00 | 957,95 | 647,16 | 9,84 | 8,31 | 97,35 | 77,87 |
| 60,00 | 896,25 | 605,47 | 9,61 | 8,13 | 93,31 | 74,48 |
| 70,00 | 747,14 | 504,74 | 9,01 | 7,66 | 82,96 | 65,87 |

Figure – Prime pure annuelle pour un capital différé, durée 10 ans, en fonction de l'âge à la signature du contrat et du taux d'intérêt technique (mortalité belge), capital : 1000 €

# Primes pures - Exemples

## Capital différé

- Engagements : $1000\ {}_{20}E_{45}$ Primes : $PA\ \ddot{a}_{45\overline{20}|}$
- Bases techniques :
  - Table de mortalité réglementaire : TF 00-02.
  - Taux technique : 1%.
- Prime pure annuelle :

$$PA = 1000 \frac{{}_{20}E_{45}}{\ddot{a}_{45\overline{20}|}} \approx 438$$

# Primes pures - Exemples

## Capital différé avec remboursement des primes

# Primes pures - Exemples

## Capital différé avec remboursement des primes

- **Contre-assurance** (ou réassurance de primes). Plusieurs contrats d'assurance proposent le remboursement des primes payées si l'assuré décède avant l'expiration du contrat.
- Exemple : Capital différé avec contre-assurance décès : capital différé ${}_nE_x$ avec primes annuelles, capital $C$ et primes remboursées en cas de décès.
- Engagements : $C\ {}_nE_x + PA\ (IA)^1_{x\,\overline{n}|}$ Primes : $PA\ \ddot{a}_{x\,\overline{n}|}$
- Prime pure annuelle :

$$PA = C\frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x\,\overline{n}|} - (IA)^1_{x\,\overline{n}|}} > C\frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x\,\overline{n}|}}$$

Evidemment, la contre-assurance augmente la prime annuelle.

# Primes pures - Exemples



## Assurance mixte

Considérons une assurance mixte de capital unitaire sur une tête d'âge $x$ et de durée $n$, le capital assuré en cas de décès étant payable au moment du décès.

1. Si le contrat est financé par des primes annuelles pures constantes $PA$ payables par douzièmes au début de chaque mois jusqu'au terme, on a $\mathcal{P} = PA\ddot{a}^{(12)}_{x\overline{n}|}$, d'où :

$$PA = \frac{\bar{A}_{x\overline{n}|}}{\ddot{a}^{(12)}_{x\overline{n}|}}$$

# Primes pures - Exemples

## Assurance mixte

2. Si le contrat est financé par des primes annuelles pures payables en début d'année de montant $PA/2$ pendant les 5 premières années et de montant $PA$ pendant les $n-5$ dernières années, on a

$$\mathcal{P} = PA\left(\frac{\ddot{a}_{x\overline{5}|}}{2} + {}_5p_x v^5 \ddot{a}_{x+5:\overline{n-5}|}\right)$$

dès lors

$$PA = \frac{\bar{A}_{x\overline{n}|}}{\frac{1}{2}\ddot{a}_{x\overline{5}|} + {}_5p_x v^5 \ddot{a}_{x+5:\overline{n-5}|}}$$

# Primes pures - Exemples



## Rente viagère différée

Considérons une rente viagère payable trimestriellement à terme échu, différée de $n$ années, sur une tête d'âge $x$, et financée par des primes annuelles constantes $PA$ payables mensuellement à terme échu pendant le terme différé. Il vient :

$$PA = \frac{{}_{n|}a_x^{(4)}}{a_{x\,\overline{n}|}^{(12)}}$$

Sous l'hypothèse d'interpolation, on trouve :

$$PA \approx \frac{{}_n p_x \, v^n \ a_{x+n}^{(4)}}{a_{x\,\overline{n}|} + \frac{11}{24}\left(1 - {}_nE_x\right)} = \frac{{}_{n|}a_x + \frac{3}{8}\,{}_nE_x}{a_{x\,\overline{n}|} + \frac{11}{24}\left(1 - {}_nE_x\right)}$$

# Primes pures - Exemples

## Rente viagère différée

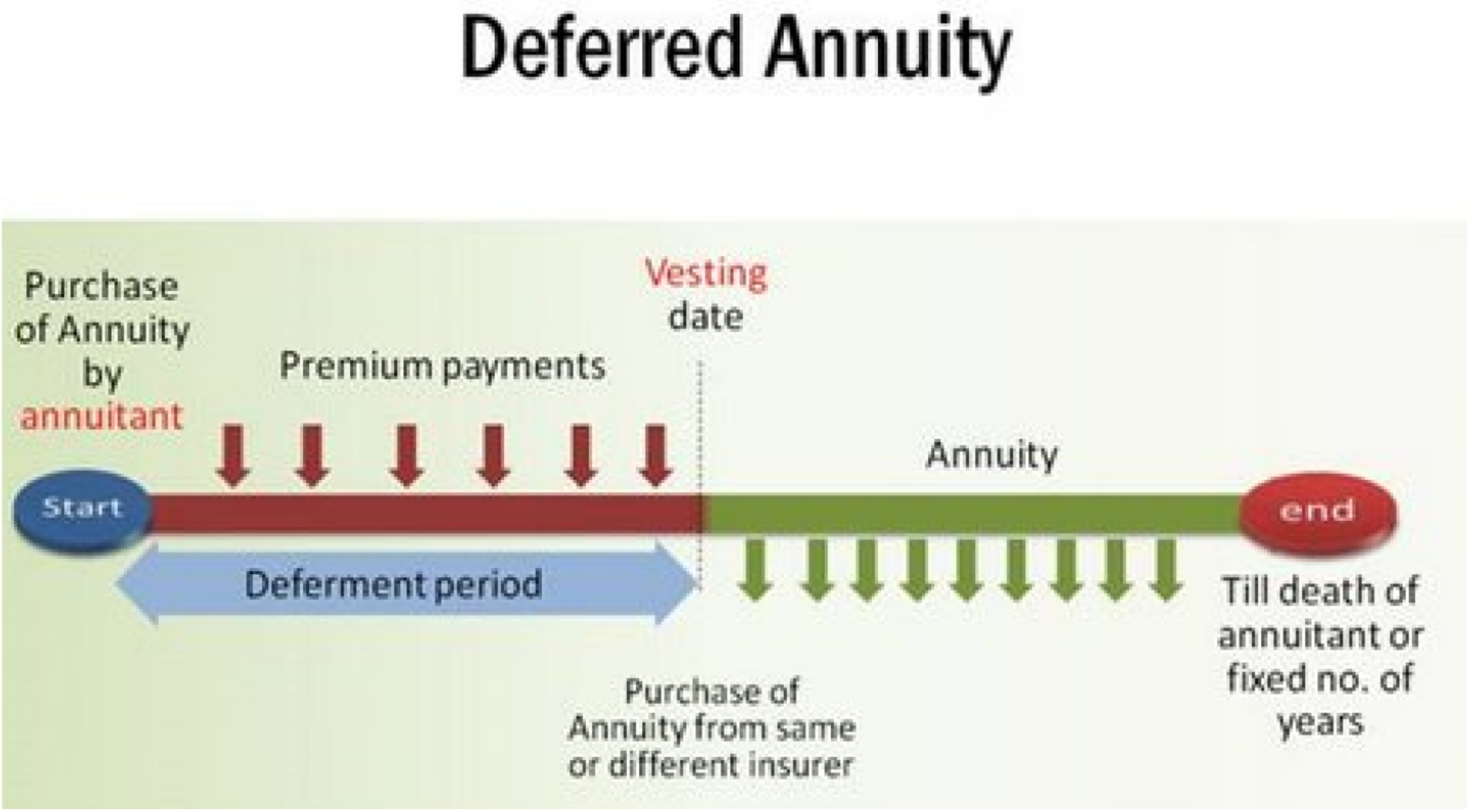



Figure – Périodes d'accumulation et de versement d'une rente différée.

# Primes pures - Exemples

## Rente viagère différée

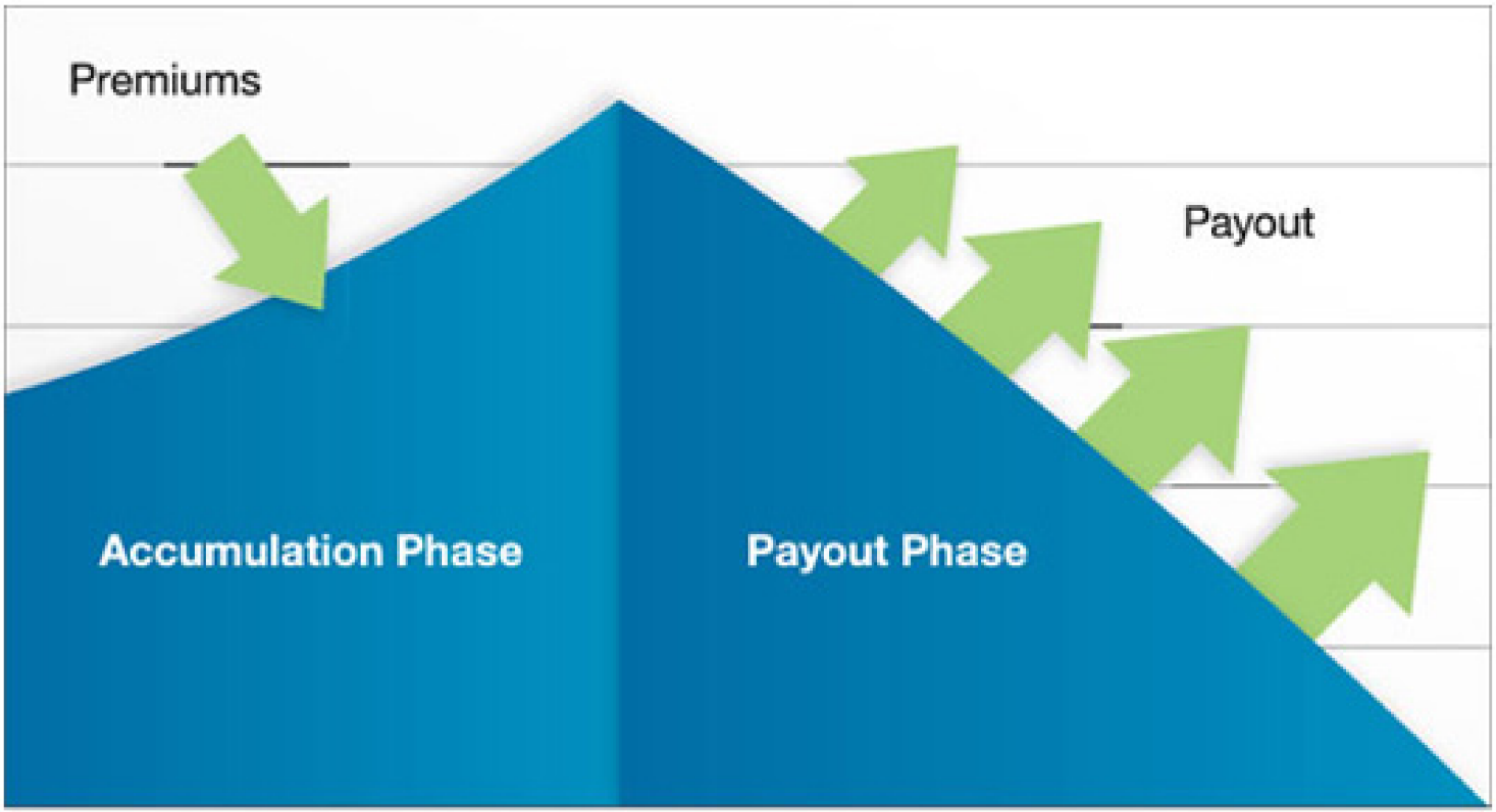



Figure – Périodes d'accumulation et de versement d'une rente différée.

# Chargements

- Les primes pures couvrent l'espérance de la valeur actuelle des prestations assurées.
- L'émission et la gestion des contrats entraînent des frais de natures diverses.
- Pour couvrir ces frais, les assureurs collectent des recettes sous forme de chargements qui s'ajoutent aux primes pures.

# Chargements

On classe habituellement les frais encourus par la compagnie en trois types :

1. les **frais de gestion** encourus tout au long de la durée de vie des contrats : calcul annuel des réserves mathématiques, calcul et attribution des participations bénéficiaires, gestion financière des actifs représentant les réserves mathématiques, émission des avenants au contrat...
2. les **frais d'acquisition** encourus à l'occasion ou avant la souscription des contrats : impression des brochures présentant les assurances proposées, campagnes publicitaires, rémunération des intermédiaires qui apportent les contrats, coût des examens médicaux pour les opérations en cas de décès...
3. les **frais d'encaissement** des primes : confection et expédition des avis d'échéance, commissions payées aux intermédiaires sur les primes perçues.

A ces trois catégories de frais on fait classiquement correspondre trois types de chargements.

# Chargements

## Chargements de gestion ou d'inventaire

**Les chargements de gestion ou d'inventaire** peuvent prendre différentes formes :

- Chaque année des frais de gestion d'un montant constant $b$ (valeur en début de chaque année d'assurance). Pour un contrat de $n$ années sur une tête d'âge $x$ on obtient ainsi un chargement de montant $b\ddot{a}_{x\overline{n}|}$ qui s'ajoute à la prime unique pure du contrat. Généralement, $b$ est soit forfaitaire (exemple : 50 EUR par an) soit proportionnel aux capitaux assurés en cas de vie ($L$) et en cas de décès ($K$) (exemple : $b = b_1 L + b_2 K$).

# Chargements

## Chargements de gestion ou d'inventaire

Autres formes :

- Pour les rentes viagères, on suppose généralement que la compagnie encourt lors de chaque payement des frais proportionnels au montant du payement. Si $\rho$ est le taux de ces frais, on obtient un chargement d'inventaire égal à $\rho$ fois la prime unique pure de la rente. Le taux de chargement $\rho$ dépend souvent du fractionnement de la rente (exemple : 2% en fractionnement annuel, 3% en fractionnement trimestriel, 4% en fractionnement mensuel).
- Frais proportionnels à la valeur de rachat théorique du contrat, encourus de façon continue dans le temps tout au long de la vie du contrat. On verra que le chargement correspondant s'exprime par une **diminution du taux d'intérêt technique**. On distingue alors le taux d'intérêt technique *pur* du contrat (c'est le taux utilisé pour calculer les primes pures) et le taux d'intérêt technique d'*inventaire* (c-à-d. après chargements d'inventaire).

# Chargements

## Chargements de gestion ou d'inventaire

Autre forme :

- Frais proportionnels au capital sous risque du contrat (c'est-à-dire au capital assuré en cas de décès diminué de la valeur de rachat théorique), encourus de façon continue tout au long de la vie du contrat. Nous verrons plus loin que le chargement correspondant s'exprime par une **augmentation des taux instantanés de mortalité** utilisés pour le calcul des primes. On distingue dans ce cas la table de mortalité pure et la table de mortalité d'inventaire. Ce chargement est plus de la nature d'un chargement de sécurité que d'un chargement de gestion.

La prime unique pure augmentée des chargements d'inventaire est appelée *prime unique d'inventaire.*

# Chargements

## Chargements d'acquisition

- **Le chargement d'acquisition** est destiné à couvrir les frais encourus lors de la souscription des contrats.
- Prime unique d'inventaire + chargement d'acquisition = *Prime unique de réduction*.
- Différentes formes :
  - chargement proportionnel aux capitaux assurés ($A = a_1 L + a_2 K$).
  - chargement proportionnel à la prime unique de réduction.
  - chargement proportionnel à la prime annuelle du contrat (par exemple 120% de la prime annuelle).

# Chargements

## Chargements d'encaissement

- **Les chargements d'encaissement** représentent une quotité fixée de chaque prime payée.
- La prime unique de réduction augmentée du chargement d'encaissement est la *prime unique commerciale*.

# Chargements

En résumé :

| | |
|---|---|
| Prime unique d'inventaire | $PU' = PU + \mathcal{B}$ |
| Prime unique de réduction | $\widehat{PU} = PU' + A = PU + \mathcal{B} + A$ |
| Prime unique commerciale | $PU'' = \frac{\widehat{PU}}{1-c} = \frac{PU+\mathcal{B}+A}{1-c}$ |

où

- $PU$ est la prime unique pure.
- $\mathcal{B}$ le montant total des chargements d'inventaire.
- $A$ le montant du chargement d'acquisition.
- $c$ le taux du chargement d'encaissement exprimé par rapport à la prime commerciale.

# Chargements - Primes échelonnées



- Considérons un contrat d'une durée de $n$ années souscrit sur une tête d'âge $x$.
- Notons $P'(t)$, $\hat{P}(t)$ et $P''(t)$ le total des primes respectivement d'inventaire, de réduction et commerciales sur l'intervalle $[0, t]$.
- Les primes échelonnées doivent satisfaire :

$$\int_{[0,n]} v^t {}_tp_x dP'(t) = PU' = PU + \mathcal{B}$$

$$\int_{[0,n]} v^t {}_tp_x d\hat{P}(t) = \widehat{PU} = PU + \mathcal{B} + A$$

$$P''(t) = \hat{P}(t)/(1-c)$$

# Primes chargées - Exemples



**Exemple 1**

Considérons une assurance mixte de capitaux unitaires et d'une durée de $n$ années sur une tête d'âge $x$, financée par des primes annuelles constantes payables par anticipation pendant $k$ ($k \leq n$) années. Le tarif comporte les chargements suivants :

- inventaire : $0,1\%$ du capital assuré au début de chaque année d'assurance.
- acquisition : frais de $1,25\%$ du capital assuré à l'origine du contrat.
- encaissement : $8\%$ de chaque prime commerciale payée.

# Primes chargées - Exemples



## Exemple 1 - Suite

Notons $PA$, $PA'$, $\widehat{PA}$, $PA''$ les primes annuelles respectivement pures, d'inventaire, de réduction et commerciales. Il vient

$$PU = \bar{A}^{1}_{x\overline{n}|} + {}_nE_x \qquad PA = PU/\ddot{a}_{x\overline{k}|}$$

$$PU' = PU + 0,001\ddot{a}_{x\overline{n}|} \qquad PA' = PU'/\ddot{a}_{x\overline{k}|} = PA + \frac{0,001\ddot{a}_{x\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\overline{k}|}}$$

$$\widehat{PU} = PU + 0,001\ddot{a}_{x\overline{n}|} + 0.0125 \qquad \widehat{PA} = \widehat{PU}/\ddot{a}_{x\overline{k}|}$$

$$PU'' = \widehat{PU}/0.92 \qquad PA'' = \widehat{PA}/0.92$$

**Exemple 2**

Considérons une assurance vie-entière de capital unitaire sur une tête d'âge $x$, financée par des primes annuelles constantes payables annuellement par anticipation pendant les $n$ premières années d'assurance. Le tarif comporte les chargements suivants :

- inventaire :
  1. $0,05\%$ du capital assuré au début de chaque année.
  2. réduction du taux d'intérêt technique de $i$ (taux technique pur) à $i$ * (taux technique d'inventaire, $0 < i^* < i$ ).
  3. majoration des taux instantanés de mortalité de $\mu_x$ (taux instantanés purs) à $\mu_x^*$ (taux instantanés d'inventaire).
- acquisition : 8% de la prime unique de réduction.
- encaissement : 7% de chaque prime payée.

# Primes chargées - Exemples

## Exemple 2 - Suite

Les primes uniques pures calculées dans les bases techniques d'inventaire (i.e. taux d'intérêt technique $i^*$, taux instantanés de mortalité $\mu_x^*$ ) seront désignées par les notations introduites précédemment pour ces mêmes primes uniques calculées dans les bases techniques pures $(i, \mu_x)$ mais affectées d'un indice supérieur $*$. Il vient alors

$$
\begin{aligned}
&PU = \bar{A}_x && PA = \bar{A}_x / \ddot{a}_{x\overline{n}|} \\
&PU' = \bar{A}_x^* + 0,0005\ddot{a}_x^* && PA' = PU' / \ddot{a}^*_{x\overline{n}|} \\
&\widehat{PU} = PU'/0,92 && \widehat{PA} = \widehat{PU} / \ddot{a}^*_{x\overline{n}|} = PA'/0,92 \\
&PU'' = \widehat{PU}/0,93 && PA'' = PU'' / \ddot{a}^*_{x\overline{n}|} = \widehat{PA}/0,93 \\
& && = \frac{\bar{A}_x^* + 0,0005\ddot{a}_x^*}{0,92 \times 0,93\ddot{a}^*_{x\overline{n}|}}
\end{aligned}
$$

# Primes chargées - Exemples



**Exemple 3**

On considère le même contrat que dans l'exemple 2, mais financé par des primes payables mensuellement à terme échu dont le montant reste constant pendant les cinq premières années, double la sixième année et reste ensuite constant jusqu'au décès de l'assuré. Notons $PA''$ la prime annuelle (12 fois la prime mensuelle) à partir de la sixième année. L'espérance de la valeur actuelle des primes commerciales qui seront encaissées est donnée par

$$\begin{aligned}\mathcal{P}'' &= \left(0,5a_{x\overline{5}|}^{(12)*} + {}_5E_x a_{x+5}^{(12)*}\right) PA'' \\ &= \left(a_x^{(12)*} - 0,5a_{x\overline{5}|}^{(12)*}\right) PA''\end{aligned}$$

**Exemple 3 - Suite**

Il vient :

$$PU = \bar{A}_x \qquad PA = \frac{PU}{a_x^{(12)} - 0,5a_{x\,\overline{5}|}^{(12)}}$$

$$PU' = \bar{A}_x^* + 0,0005\ddot{a}_x^* \qquad PA' = \frac{PU'}{a_x^{(12)*} - 0,5a_{x\,\overline{5}|}^{(12)*}}$$

$$\widehat{PU} = PU'/0,92 \qquad \widehat{PA} = \frac{\widehat{PU}}{a_x^{(12)*} - 0,5a_{x\,\overline{5}|}^{(12)*}} = PA'/0,92$$

$$PU'' = \widehat{PU}/0,93 \qquad PA'' = \frac{PU''}{a_x^{(12)*} - 0,5a_{x\,\overline{5}|}^{(12)*}} = \widehat{PA}/0,93$$

# Réserves mathématiques pures

# Introduction

- En assurance vie, à la souscription du contrat, l'espérance de la valeur actuelle (VA) des primes futures égale à l'espérance de la valeur actuelle des engagements futurs. La perte espérée est donc nulle en $t = 0$.
- L'équivalence entre primes futures et engagements futures ne tient pas en général au cours du contrat.
- On note $L_t$ la différence au temps $t$ entre la VA des engagements futurs et des primes futures.

**Réserve mathématique pure**

La réserve mathématique pure notée $V(t)$ est l'espérance conditionnelle de $L_t$, sachant que l'assuré est toujours vivant en $t$.

# Introduction



- La réserve mathématique est le montant détenu par l'assureur envers l'assuré pour s'assurer que les engagements futurs soient bien respectés.
- Element très important au passif du bilan des assureurs vie. Ce poste représente la dette de l'assureur vis-à-vis des assurés.
- Au temps $t$, les primes futures ne sont en général pas suffisantes pour couvrir les engagements futurs. Le montant nécessaire pour couvrir la différence est exactement la réserve mathématique au temps $t$, $V(t)$

## Réserves mathématiques pures : Cas général



Considérons un contrat d'assurance-vie souscrit en $t = 0$ sur une tête d'âge $x$, et d'une durée de $n$ années. Pour un intervalle de temps $T \subset [0, \infty)$ d'origine $s$, on note

- $\mathcal{E}_T$ : l'espérance de la valeur actuelle en $s$ des prestations payables dans l'intervalle de temps $T$ sachant que l'assuré est vivant en $s$.
- $\mathcal{P}_T$ : l'espérance de la valeur actuelle en $s$ des primes pures échéant dans l'intervalle de temps $T$ sachant que l'assuré est vivant en $s$.

On a :

$$\mathcal{E}_{[s,t]} = \int_s^t {}_{y-s}p_{x+s}\mu_{x+y} C(y) v^{y-s} dy + \int_{s-}^t {}_{y-s}p_{x+s} v^{y-s} dL(y)$$

$$\mathcal{P}_{[s,t]} = \int_{s-}^t {}_{y-s}p_{x+s} v^{y-s} dP(y)$$

où $C(y)$ est le capital décès, $L(y)$ est le cumul des prestations en cas de vie et $P(y)$ est la fonction de prime (cf. Section sur les primes).

# Réserves mathématiques pures : Cas général



- La réserve mathématique pure du contrat est donnée par

$$V(t) = \mathcal{E}_{[t,n]} - \mathcal{P}_{[t,n]} \quad (0 \leq t \leq n)$$

- On notera

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_{[0,n]} \quad \text{et} \quad \mathcal{P} = \mathcal{P}_{[0,n]}$$

- Les primes pures satisfaisant le principe d'équivalence, on a

$$V(0) = \mathcal{E} - \mathcal{P} = 0$$

- Si payement d'un capital $L$ au terme $n$ et s'il n'y a pas de prime échéant en $n$, on a

$$V(n) = L$$

# Réserves mathématiques pures : Cas général

- Si $x$ est l'âge de l'assuré à l'origine du contrat, la réserve mathématique à l'âge $x+t$, $V(t)$, est souvent notée ${}_tV_x$.

Convention :

- On suppose que si une prime vient à échéance ou une prestation est payable à la fin de la $k$-ème année, la réserve mathématique en $k$ sera calculée en supposant cette prime déjà payée ou cette prestation déjà liquidée.
- On suppose que si une prime vient à échéance ou une prestation est payable au début de la $(k+1)$-ème année, la réserve mathématique en $k$ sera calculée en supposant cette prime ou cette prestation non encore payée.

# Réserves mathématiques - Exemples

**Exemple 1**

Considérons une assurance vie-entière de capital unitaire sur une tête d'âge $x$. Si l'assuré vit en $t$, l'espérance de la valeur actuelle en $t$ des prestations assurées dans $[t, \infty)$ est égale à la prime unique pure d'une assurance vie-entière sur une tête d'âge $x + t$ :

$$\mathcal{E}_{[t,\infty)} = \int_0^{\infty} {}_s p_{x+t} \mu_{x+t+s} v^s ds = \bar{A}_{x+t}$$

- Si le contrat est financé par une prime unique payable à la souscription, il vient :

$$\mathcal{P}_{[t,\infty)} = 0 \quad \forall t > 0$$

et donc :

$$_tV_x = \bar{A}_{x+t} \quad \forall t > 0$$

# Réserves mathématiques - Exemples

## Exemple 1 - Suite

- Si le contrat est financé par des primes annuelles constantes de montant $PA$ payables annuellement par anticipation pendant $k$ années, on a

$$PA = \frac{\bar{A}_x}{\ddot{a}_{x\overline{k}|}}$$

et

$$\mathcal{P}_{[t,\infty)} = \begin{cases} PA\ \ddot{a}_{x+t:\overline{k-t}|} & \text{si } t = 0, 1, \ldots, k-1 \\ 0 & \text{si } t = k, k+1, \ldots \end{cases}$$

Par conséquent :

$${}_tV_x = \begin{cases} \bar{A}_{x+t} - PA\ \ddot{a}_{x+t:\overline{k-t}|} & \text{si } t = 0, 1, \ldots, k-1 \\ \bar{A}_{x+t} & \text{si } t = k, k+1, \ldots \end{cases}$$

# Réserves mathématiques - Exemples

## Assurance temporaire

Considérons une assurance temporaire d'un capital de 100.000 € sur une tête d'âge 40 ans de durée 10 ans payable annuellement par anticipation jusqu'au terme.

- Engagements : $100000\bar{A}^1_{40:\overline{10}|}$ Primes : $PA\ddot{a}_{40:\overline{10}|}$
- Réserves mathématiques :

$$V(t) = 100000\bar{A}^1_{40+t:\overline{10-t}|} - PA\ \ddot{a}_{40+t:\overline{10-t}|}$$

# Réserves mathématiques - Exemples

## Assurance temporaire - Suite

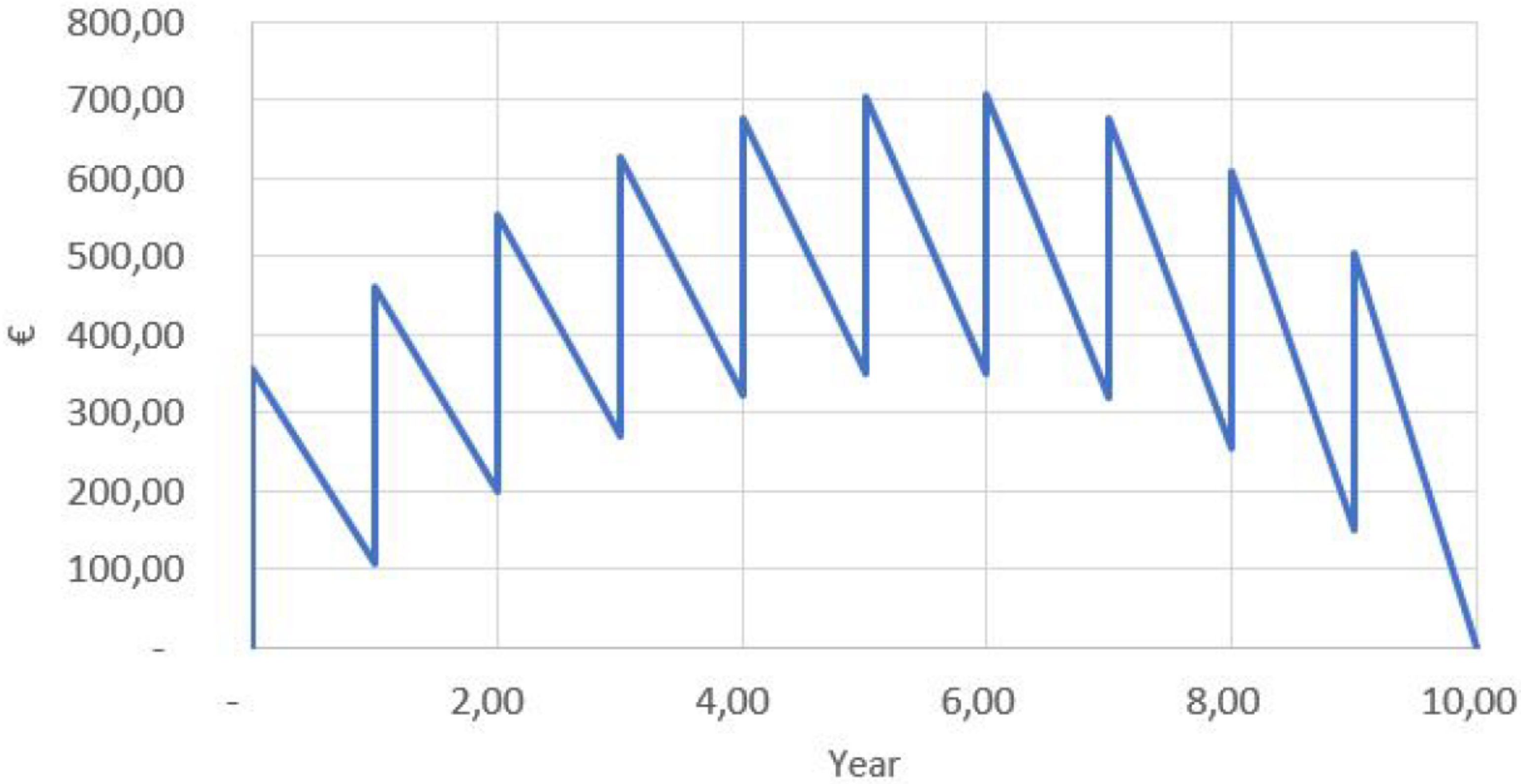



Figure – Evolution de la réserve mathématique d'une assurance temporaire, $x = 40$, $n = 10$, $i = 0.02$. Capital : 100.000 € (mortalité belge).

N.B : Saut chaque année due à la prime : $V(t+) = V(t) + PA$ et interpolation lineaire dans l'année.

# Réserves mathématiques - Exemples

## Assurance temporaire - Suite

| $t$ | $C\bar{A}^1_{x+t:\overline{n-t}\rvert}$ | $PA\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}\rvert}$ | $V(t)$ | $V(t+)$ | $C\bar{A}^1_{x+t:\overline{1}\rvert}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 3.208,80 | 3.208,80 | 0 | 354,96 | 249,93 |
| 1 | 3.025,69 | 2.918,29 | 107,40 | 462,37 | 268,17 |
| 2 | 2.820,31 | 2.621,69 | 198,62 | 553,58 | 288,33 |
| 3 | 2.590,16 | 2.318,81 | 271,35 | 626,31 | 310,54 |
| 4 | 2.332,52 | 2.009,43 | 323,09 | 678,05 | 335,27 |
| 5 | 2.044,12 | 1.693,29 | 350,82 | 705,79 | 362,67 |
| 6 | 1.721,38 | 1.370,12 | 351,26 | 706,22 | 393,01 |
| 7 | 1.360,33 | 1.039,58 | 320,75 | 675,71 | 426,56 |
| 8 | 956,57 | 701,33 | 255,24 | 610,20 | 463,84 |
| 9 | 504,95 | 354,96 | 149,99 | 504,95 | 504,95 |
| 10 | – | – | – | – | – |

Table – Evolution de la réserve mathématique d'une assurance temporaire, $x = 40$, $n = 10$, $i = 0.02$. Capital : C=100.000 € (mortalité belge).

# Réserves mathématiques - Exemples

**Exemple 2**

Considérons une assurance mixte de capitaux assurés unitaires et d'une durée de $n$ années sur une tête d'âge $x$. On a pour $k = 0, 1, \ldots, n-1$ :

$$\mathcal{E}_{[k,n]} = \sum_{j=0}^{n-k-1} {}_j p_{x+k} q_{x+k+j} v^{j+1/2} + v^{n-k} {}_{n-k} p_{x+k} = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|}$$

- Si le contrat est financé par une prime unique payable à la souscription, il vient :

$$ {}_k V_x = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} \quad (k = 1, \ldots, n)$$

**Exemple 2 - Suite**

- Si le contrat est financé par des primes annuelles constantes de montant $PA$ payables annuellement par anticipation jusqu'au terme, on a
$$PA = \frac{\bar{A}_{x\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}$$
et
$${}_kV_x = \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - PA\ \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

# Réserves mathématiques - Exemples

- Engagements : $500000\bar{A}_{50:\overline{20|}}$ Primes : $PA\ddot{a}_{50:\overline{20|}}$

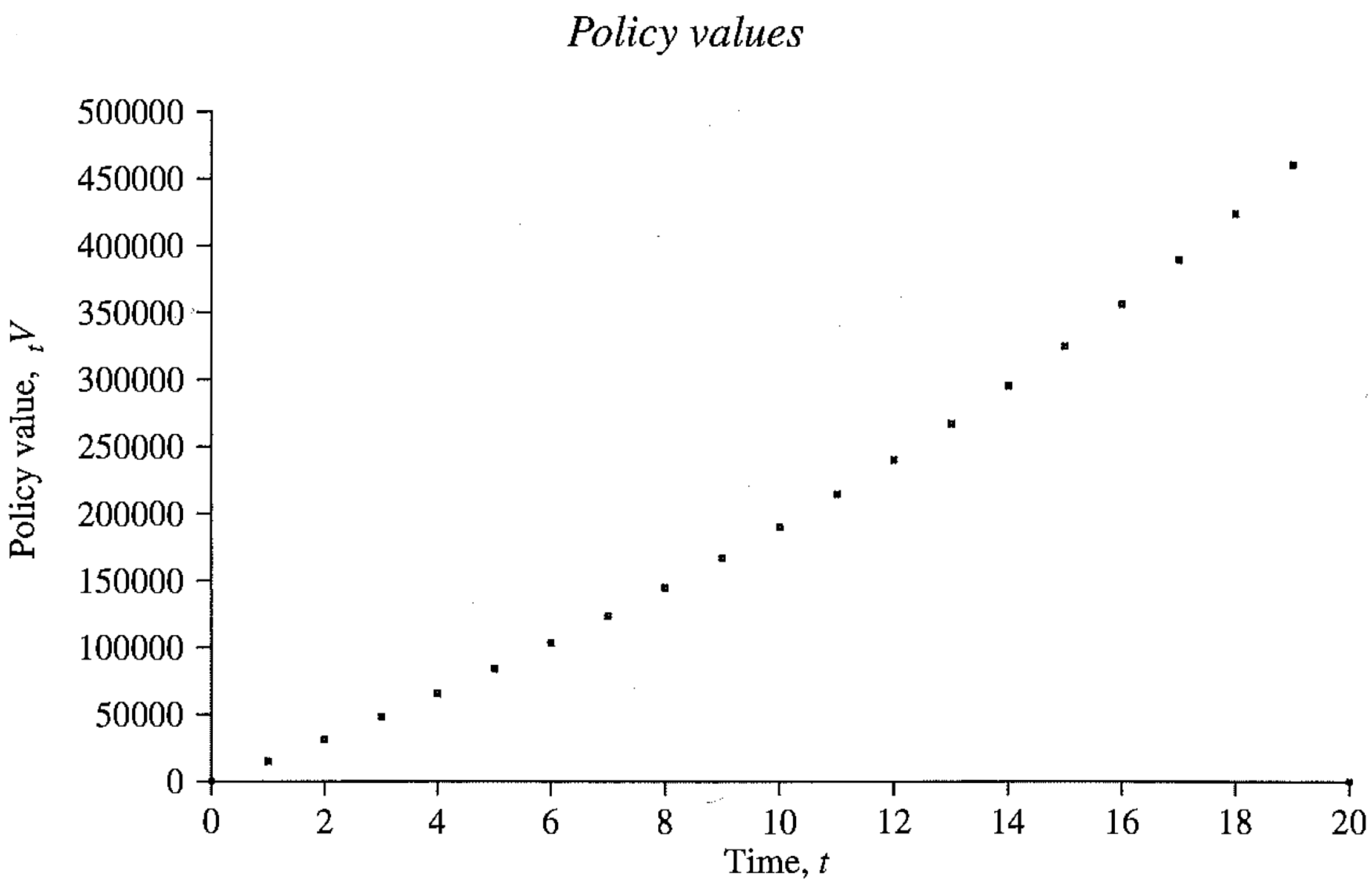



Figure 7.3 Policy values for each year of a 20-year endowment insurance, sum insured \$500 000, issued to (50).

**Exemple 2 - Suite**

- Supposons que le contrat soit financé par des primes payables annuellement par anticipation, dont le montant est constant pendant les cinq premières années, double la sixième année pour rester ensuite constant jusqu'au terme du contrat. Il vient en notant $PA$ la prime annuelle à partir de la sixième année :

$$\mathcal{P}_{[k,\infty)} = \begin{cases} PA \ \left(\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} - \ddot{a}_{x+k:\overline{5-k}|}/2\right) & \text{si } k = 0, 1, \ldots, 4 \\ PA \ \ \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} & \text{si } k = 5, \ldots, n \end{cases}$$

Dès lors :

$${}_kV_x = \begin{cases} \bar{A}_{x+k:\overline{n-k}|} - PA \ \left(\ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} - \ddot{a}_{x+k:\overline{5-k}|}/2\right) & \text{si } k = 0, 1, \ldots, 4 \\ \bar{A}_{x+k:n-k} - PA \ \ddot{a}_{x+k:\overline{n-k}|} & \text{si } k = 5, \ldots, n \end{cases}$$

# Réserves mathématiques - Exemples

## Capital différé

Considérons un capital différé de 1000 € sur une tête d'âge 50 ans de durée 10 ans payable annuellement par anticipation jusqu'au terme.

- Engagements : $1000 \; {}_{10}E_{50}$ Primes : $PA \; \ddot{a}_{50:\overline{10}|}$
- Réserves mathématiques :

$$V(t) = 1000 \; {}_{10-t}E_{50+t} - PA \; \ddot{a}_{50+t:\overline{10-t}|}$$

# Réserves mathématiques - Exemples

## Capital différé - Suite

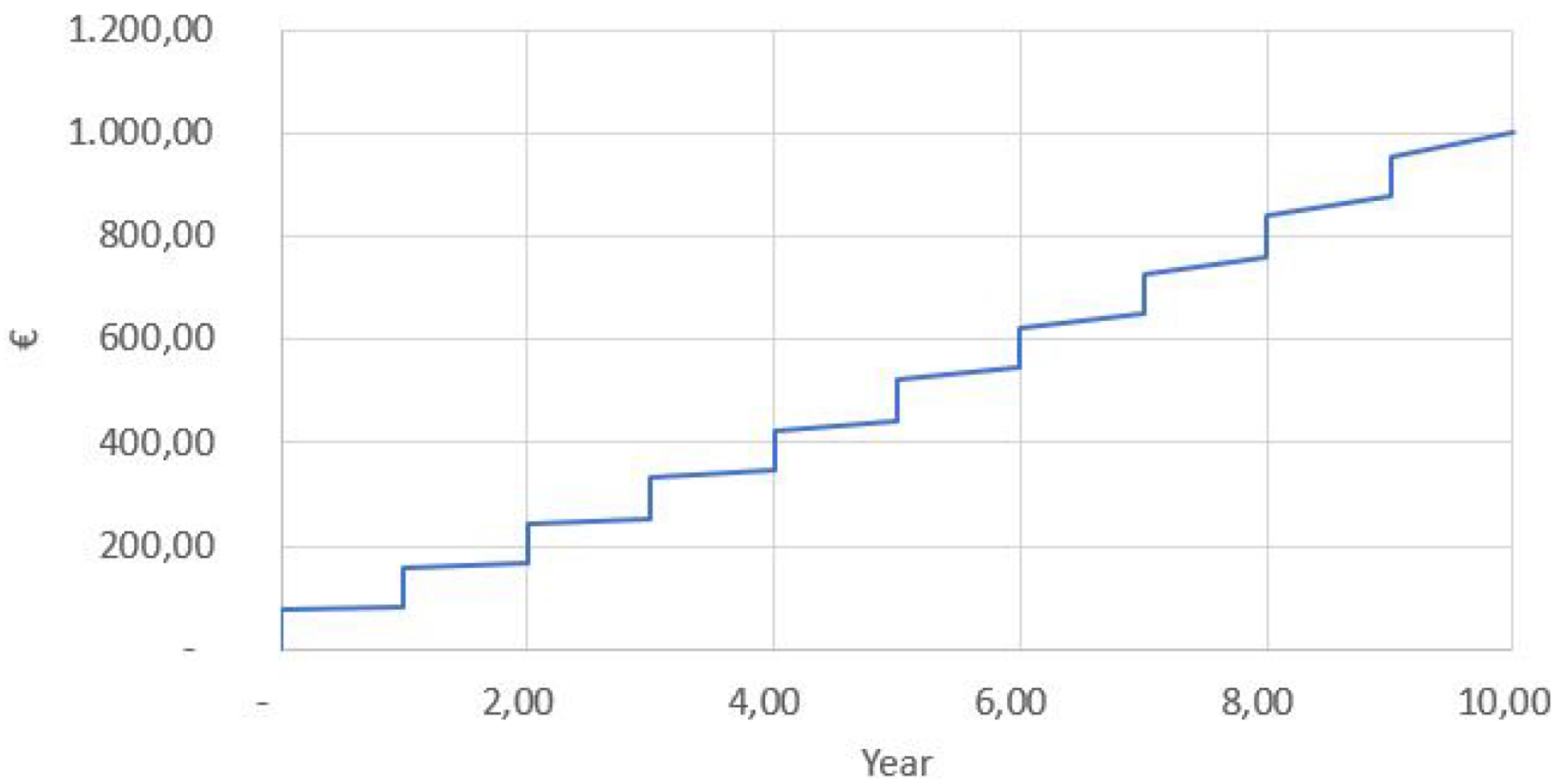



Figure – Evolution de la réserve mathématique d'un capital différé, $x = 50$, $n = 10$, $i = 0.04$. Capital : 1000 € (mortalité belge).

N.B : Saut chaque année due à la prime : $V(t+) = V(t) + PA$ et interpolation lineaire dans l'année.

# Réserves mathématiques - Exemples



## Capital différé - Suite

| $t$ | $C\ _{10-t}E_{50+t}$ | $PA\ \ddot{a}_{50+t:\overline{10-t}\rvert}$ | $V(t)$ | $V(t+)$ |
|---:|---:|---:|---:|---:|
| 0 | 647,16 | 647,16 | 0 | 77,87 |
| 1 | 674,93 | 593,72 | 81,21 | 159,07 |
| 2 | 704,07 | 538,13 | 165,94 | 243,81 |
| 3 | 734,67 | 480,26 | 254,40 | 332,27 |
| 4 | 766,83 | 420,01 | 346,82 | 424,68 |
| 5 | 800,67 | 357,24 | 443,42 | 521,29 |
| 6 | 836,31 | 291,81 | 544,49 | 622,36 |
| 7 | 873,89 | 223,56 | 650,33 | 728,19 |
| 8 | 913,58 | 152,31 | 761,27 | 839,13 |
| 9 | 955,55 | 77,87 | 877,68 | 955,55 |
| 10 | 1.000,00 | – | 1.000,00 | 1.000,00 |

Table – Evolution de la réserve mathématique d'un capital différé, $x = 50$, $n = 10$, $i = 0.04$. Capital : C=1000 € (mortalité belge).

**Exemple 3**

Considérons une rente temporaire de 1 euro par an payable mensuellement à terme échu sur une tête d'âge $x$ et d'une durée de $n$ années. La rente est financée par une prime unique payable à l'origine. Si le rentier est encore vivant à la fin de la $t$ -ème année $(t = 1, 2, \ldots, n)$, l'espérance de la valeur actuelle en $t$ des prestations futures de la compagnie est la prime unique pure d'une rente temporaire de $(n - t)$ années sur une tête d'âge $x + t$ :

$$ {}_tV_x = a^{(12)}_{x+t:\overline{n-t}|} \quad (t = 1, 2, \ldots, n) $$

# Réserves mathématiques - Exemples



**Exemple 4**

Considérons une rente viagère de 1 euro par an payable annuellement à terme échu et différée de $n$ années, souscrite par une tête d'âge $x$.

- Si la rente est financée par une prime unique payable à la souscription :

$$
{}_tV_x = \begin{cases} {}_{n-t|}a_{x+t} & \text{si } t = 1, 2, \ldots, n \\ a_{x+t} & \text{si } t = n+1, n+2, \ldots \end{cases}
$$

# Réserves mathématiques - Exemples

**Exemple 4 - Suite**

- Si la rente est financée par une prime annuelle constante $PA$ payable trimestriellement par anticipation pendant le terme différé, on a

$$PA = \frac{{}_{n|}a_x}{\ddot{a}^{(4)}_{x\overline{n}|}}$$

et

$${}_tV_x = \begin{cases} {}_{n-t|}a_{x+t} - PA\ \ddot{a}^{(4)}_{x+t:\overline{n-t}|} & \text{si } t = 0, 1, 2, \ldots, n \\ a_{x+t} & \text{si } t = n+1, n+2, \ldots \end{cases}$$

# Forme rétrospective des réserves

- La définition de la réserve mathématique est prospective car exprimée en termes de primes et prestations futures.
- Cependant, il existe une formule rétrospective qui exprime la réserve mathématique en termes de valeurs acquises des primes et prestations passées.

## Formule rétrospective

La formule rétrospective des réserves est donnée par

$$ {}_t p_x \, {}_t V_x = \left[ \mathcal{P}_{[0,t)} - \mathcal{E}_{[0,t)} \right] u^t $$

## Forme rétrospective des réserves



**Preuve :** Pour ce faire, partons de la formule prospective générale :

$$ {}_tV_x = \mathcal{E}_{[t,n]} - \mathcal{P}_{[t,n]} \tag{17} $$

Pour $t \in [0, n]$ on a

$$ \mathcal{E}_{[0,n]} = \mathcal{E}_{[0,t)} + v^t {}_tp_x \mathcal{E}_{[t,n]} $$
$$ \mathcal{P}_{[0,n]} = \mathcal{P}_{[0,t)} + v^t {}_tp_x \mathcal{P}_{[t,n]} $$

En injectant $\mathcal{E}_{[t,n]}$ et $\mathcal{P}_{[t,n]}$ dans (17), il vient

$$ v^t {}_tp_x {}_tV_x = \mathcal{E}_{[0,n]} - \mathcal{E}_{[0,t)} - \mathcal{P}_{[0,n]} + \mathcal{P}_{[0,t)} $$

Le contrat satisfaisant au principe d'équivalence, on a $\mathcal{E}_{[0,n]} = \mathcal{P}_{[0,n]}$, d'où

$$ {}_tp_x {}_tV_x = \left[\mathcal{P}_{[0,t)} - \mathcal{E}_{[0,t)}\right] u^t $$

qui est la formule rétrospective annoncée.

# Forme rétrospective des réserves



Interprétation :

$$\underbrace{\mathcal{P}_{[0,t)}u^t}_{\text{Recettes attendues en } t} = \underbrace{\mathcal{E}_{[0,t)}u^t + {}_t p_x\, {}_t V_x}_{\text{Charges attendues en } t}$$

**Recettes :** $\mathcal{P}_{[0,t)}u^t$ est l'espérance de la valeur capitalisée en $t$ des primes payées dans l'intervalle $[0, t)$.

**Charges :**

- $\mathcal{E}_{[0,t)}u^t$ est l'espérance de la valeur capitalisée en $t$ des prestations à payer dans l'intervalle $[0, t)$.
- Si l'assuré est vivant en $t$, l'assureur doit constituer en $t$ une réserve ${}_tV_x$ égale à la valeur actuelle moyenne de ses engagements nets futurs au titre du contrat considéré. ${}_t p_x\, {}_t V_x$ est donc l'espérance de la réserve à constituer en $t$.

# Formule de récurrence des réserves

## Formule de récurrence

Les réserves mathématiques en $t+1$ et en $t$ sont liées par

$$v\ p_{x+t} V(t+1) = V(t) + \mathcal{P}_{[t,t+1)} - \mathcal{E}_{[t,t+1)}$$

**Preuve :** Par définition des réserves, on a :

$$V(t) = \mathcal{E}_{[t,n]} - \mathcal{P}_{[t,n]} \tag{18}$$

$$V(t+1) = \mathcal{E}_{[t+1,n]} - \mathcal{P}_{[t+1,n]} \tag{19}$$

De même, on a :

$$\mathcal{E}_{[t,n]} = \mathcal{E}_{[t,t+1)} + v\ p_{x+t}\mathcal{E}_{[t+1,n]}$$

$$\mathcal{P}_{[t,n]} = \mathcal{P}_{[t,t+1)} + v\ p_{x+t}\mathcal{P}_{[t+1,n]}$$

# Formule de récurrence des réserves

**Preuve (suite) :** On reporte dans (19) les valeurs de $\mathcal{E}_{[t+1,n]}$ et $\mathcal{P}_{[t+1,n]}$, il vient :

$$V(t+1) = \frac{1}{p_{x+t}} \left(\mathcal{E}_{[t,n]} - \mathcal{E}_{[t,t+1)} - \mathcal{P}_{[t,n]} + \mathcal{P}_{[t,t+1)}\right) u$$

d'où par (18) :

$$v \ p_{x+t} V(t+1) = V(t) + \mathcal{P}_{[t,t+1)} - \mathcal{E}_{[t,t+1)}$$

# Formule de récurrence des réserves

Interprétation :

$$\underbrace{V(t) + \mathcal{P}_{[t,t+1)}}_{\text{Recettes attendues sur } [t,t+1)} = \underbrace{\mathcal{E}_{[t,t+1)} + v\ p_{x+t} V(t+1)}_{\text{Charges attendues sur } [t,t+1)}$$

**Recettes :**

- $V(t)$ est la réserve dont doit déjà disposer la compagnie à l'instant $t$.
- $\mathcal{P}_{[t,t+1)}$ est l'espérance de la valeur actuelle en $t$ des primes échéant dans $[t, t+1)$.

**Charges :**

- $\mathcal{E}_{[t,t+1)}$ est l'espérance de la valeur actuelle en $t$ des prestations à payer dans $[t, t+1)$
- La réserve à constituer en $t+1$ est $V(t+1)$ si l'assuré vivant en $t$ survit en $t+1$ (probabilité $p_{x+t}$) et est nulle sinon. $v\ p_{x+t} V(t+1)$ est donc l'espérance de la valeur actuelle en $t$ de la réserve mathématique à constituer en $t+1$.

# Réserves mathématiques

## Rente viagère temporaire

Considérons une rente viagère temporaire payable par anticipation. Si $x = 60$, $n = 10$, $i = 0.01$, un capital de 100.000 € donne droit à une rente annuelle de $c = 10656$€ (TF 00-02 vie). La réserve prospective est

$$V(t) = c\ddot{a}_{x+t:\overline{n-t}|}$$

La réserve rétrospective est égale à

$$V(t) = \frac{100000 - c\ddot{a}_{x:\overline{t}|}}{{}_tp_x}u^t$$

Bien sûr, les valeurs par la méthode prospective ou rétrospective sont identiques.

# Réserves mathématiques

## Rente viagère temporaire - Suite

**Formule de récurrence :** La réserve peut être calculée de manière récursive par

$$V(t+1) = \frac{(V(t) - c)(1+i)}{p_{x+t}}$$

de $t = 0$ à $n$ avec $V(0) = 100.000$.

# Réserves mathématiques

## Rente viagère temporaire - Suite

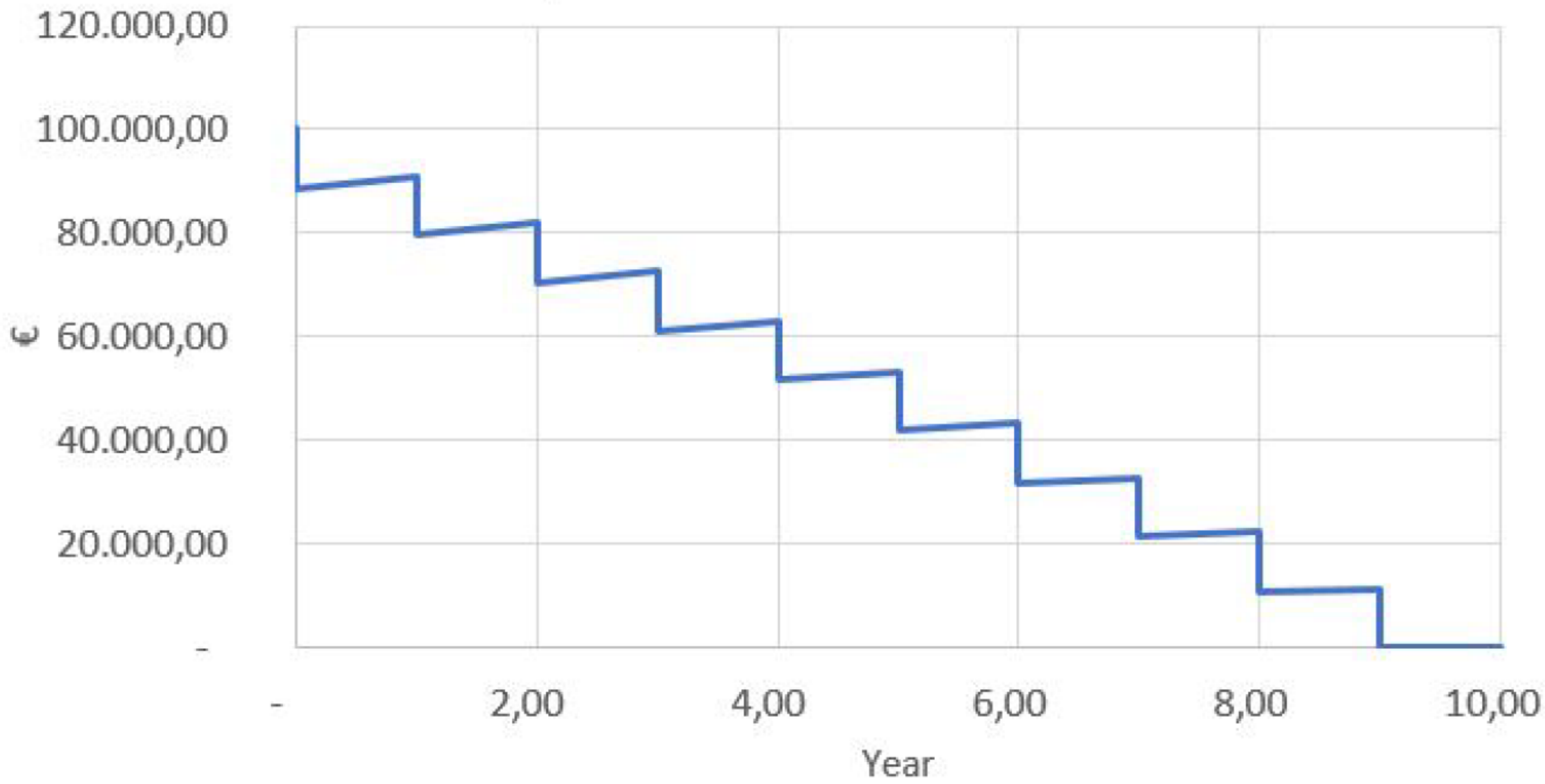



Figure – Evolution de la réserve mathématique d'une rente viagère temporaire, $x = 60$, $n = 10$, $i = 0.01$.

N.B : La réserve décroît jusqu'au terme mais augmente au taux d'intérêt $i$ entre deux paiements successifs.

# Prime de risque et prime d'épargne



On peut décomposer la prime annuelle d'un contrat d'assurance vie en deux parties :

- la *prime d'épargne* qui finance la croissance de la réserve mathématique entre le début et la fin de l'année.
- la *prime de risque* qui couvre le cout net du risque de décès dans l'année.

# Prime de risque et prime d'épargne

## Assurance mixte

Considérons une assurance mixte sur une tête d'âge $x$ et d'une durée de $n$ années.

- Soit $C_k$ le capital assuré en cas de décès de l'assuré dans la $k$ -ème année.
- Soit $L$ le capital assuré en cas de vie au terme.
- Contrat financé par des primes annuelles par anticipation $\Pi_k$ en $k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$.

La formule de récurrence donne :

$$p_{x+k} V(k+1) = \left(V(k) + \Pi_k - q_{x+k} v C_{k+1}\right) u \quad (k = 0, \ldots, n-1)$$

# Prime de risque et prime d'épargne



## Assurance mixte

On peut la réécrire comme suit :

$$\Pi_k = \underbrace{(vV(k+1) - V(k))}_{\Pi_k^e} + \underbrace{q_{x+k}\left(C_{k+1} - V(k+1)\right)v}_{\Pi_k^r}$$

- Le premier terme est la *prime d'épargne* pour l'année $k+1$. Sa capitalisation permet de financer exactement l'accroissement de la réserve mathématique : $(V(k) + \Pi_k^e)\, u = V(k+1)$.
- Le second terme est la *prime de risque* pour l'année $k+1$. Le cout net que représenterait pour l'assureur le décès de l'assuré dans l'année $k+1$ est la différence entre le capital décès assuré et la réserve mathématique à constituer en fin d'année si l'assuré survit, i.e. $C_{k+1} - V(k+1)$. On appelle cette différence le *capital-risque* de l'année.

# Prime de risque et prime d'épargne

## Assurance mixte

- On voit que la prime de risque est la prime d'une assurance temporaire d'un an assurant en cas de décès le payement en fin d'année du *capital-risque*.
- Les primes d'épargne capitalisées financièrement jusqu'au terme du contrat permettent de payer le capital en cas de vie $L$ :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1} \Pi_k^e u^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n-1} [vV(k+1) - V(k)]u^{n-k} \\ &= V(n) - V(0)u^n = V(n) \\ &= L\end{aligned}$$

# Prime de risque et prime d'épargne

## Assurance mixte

Une partie des primes est épargnée chaque année pour garantir le capital en cas de vie.

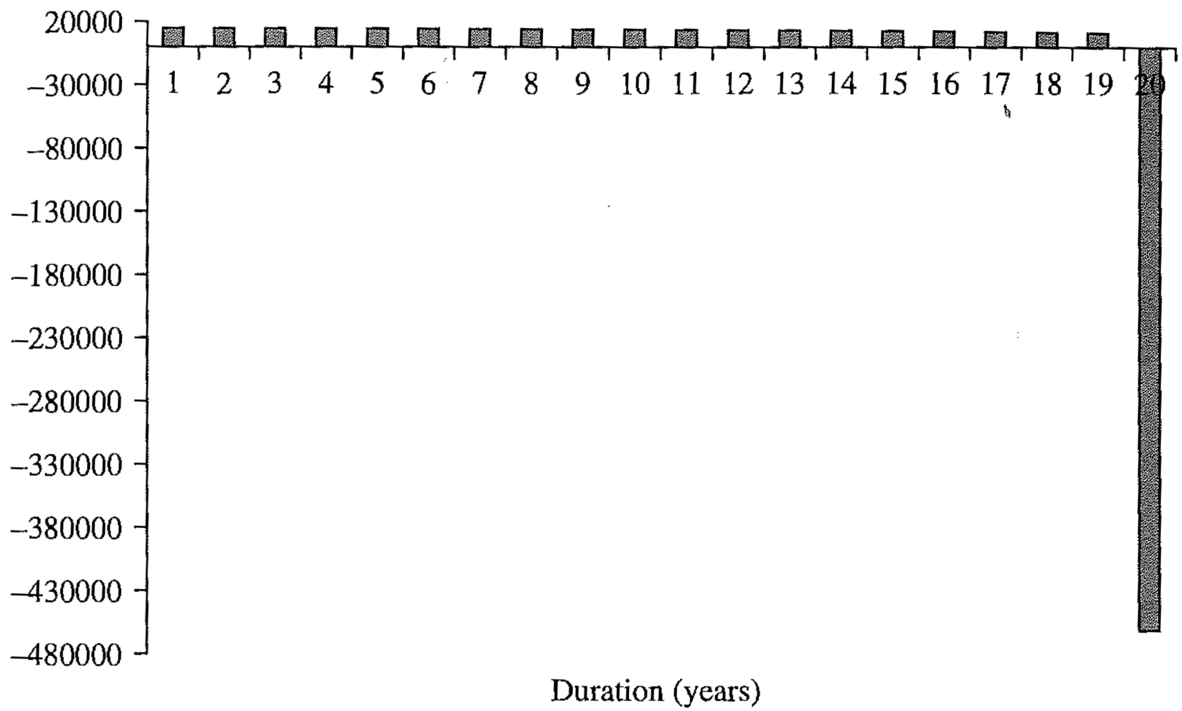



Figure – Surplus de la prime annuelle par rapport au coût annuel $C\ v\ q_{x+k}$ pour un capital $C = 500.000$ sur une tête d'âge 50 ans.

# Prime de risque et prime d'épargne

## Assurance temporaire

- Les surplus de primes des premières années sont épargnées pour constituer la réserve mathématique.
- Cette réserve est ensuite utilisée les années suivantes quand la prime est insuffisante pour couvrir les engagements.

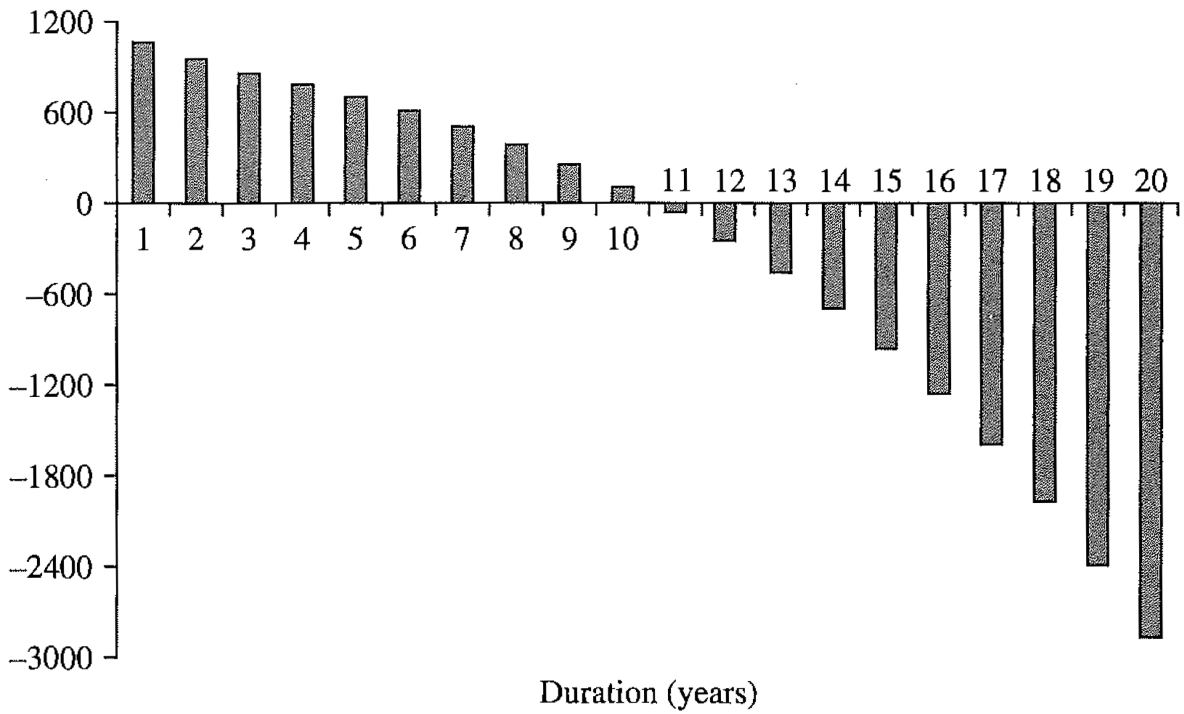



Figure – Surplus de la prime annuelle par rapport au coût annuel $C\ v\ q_{x+k}$ pour un capital $C = 500.000$ sur une tête d'âge 50 ans.

# Réserves mathématiques d'inventaire, Valeurs de rachat et transformations

# Réserves mathématiques d'inventaire

- Pour évaluer la situation réelle d'une compagnie, il convient d'inclure les frais de gestion des contrats d'assurance.
- En contrepartie, il faut inclure les chargements d'inventaire en plus des primes pures, çad les primes d'inventaire.
- On note $L'_t$ la différence au temps $t$ entre la VA des engagements et frais de gestion futurs et des primes d'inventaire futurs.

**Réserves mathématiques d'inventaire**

La réserve mathématique d'inventaire notée $V'(t)$ est l'espérance conditionnelle de $L'_t$, sachant que l'assuré est toujours vivant en $t$.

# Réserves mathématiques d'inventaire

## Cadre réglementaire : Code des assurances - Article R343-3



1° **Provision mathématique** : différence entre les valeurs actuelles des engagements respectivement pris par l'assureur et par les assurés. Pour des contrats faisant intervenir une table de survie ou de mortalité, **les montants des provisions mathématiques doivent inclure une estimation des frais futurs de gestion** qui seront supportés par l'assureur pendant la période de couverture au-delà de la durée de paiement des primes ou de la date du prélèvement du capital constitutif ; **l'estimation de ces frais est égale au montant des chargements de gestion prévus dans les conditions tarifaires de la prime** ou du capital constitutif et destinés à couvrir les frais de gestion ;

# Réserves mathématiques d'inventaire - Cas général

Considérons un contrat d'assurance-vie souscrit en $t = 0$ sur une tête d'âge $x$, et d'une durée de $n$ années. On note $B(t)$ les frais de gestion cumulés sur $[0, t]$. $B(t)$ est une fonction non-décroissante de $t$. On note

- $\mathcal{B}_{[s,t]}$ : l'espérance de la valeur actuelle en $s$ des frais de gestion qui seront encourus dans l'intervalle de temps $[s, t]$ :

$$\mathcal{B}_{[s,t]} = \int_{[s,t]} v^{h-s}{}_{h-s}p_{x+s} dB(h)$$

- $\mathcal{P}'_{[s,t]}$ : l'espérance de la valeur actuelle en $s$ des primes d'inventaire échéant dans l'intervalle $[s, t]$ :

$$\mathcal{P}'_{[s,t]} = \int_{[s,t]} v^{h-s}{}_{h-s}p_{x+s} dP'(h)$$

- $\mathcal{E}'_{[s,t]}$ : l'espérance de la valeur actuelle en $s$ de la somme des prestations et des frais de gestion encourus dans l'intervalle $[s, t]$ :

$$\mathcal{E}'_{|s,t]} = \mathcal{E}_{[s,t]} + \mathcal{B}_{[s,t]}$$

# Réserves mathématiques d'inventaire

- La réserve mathématique d'inventaire en $t$, notée $V'(t)$, est définie par
$$V'(t) = \mathcal{E}'_{[t,n]} - \mathcal{P}'_{[t,n]} \quad (0 \leq t \leq n)$$
On utilisera aussi la notation ${}_xV'_t$.
- L'écart entre la réserve d'inventaire et la réserve pure est une réserve pour frais de gestion futurs. Cette réserve est égale à l'espérance de la valeur actuelle des frais de gestion futurs diminuée de la valeur actuelle des chargements de gestion contenus dans les primes d'inventaire futures :
$$\begin{aligned} V'(t) - V(t) &= \mathcal{E}'_{[t,n]} - \mathcal{P}'_{[t,n]} - \mathcal{E}_{[t,n]} + \mathcal{P}_{[t,n]} \\ &= \mathcal{B}_{[t,n]} - \left(\mathcal{P}'_{|t,n]} - \mathcal{P}_{|t,n]}\right) \end{aligned}$$

**Exemple 1**

Considérons une assurance vie-entière sur une tête d'âge $x$ de capital unitaire. Les frais de gestion chargés en inventaire dans le tarif s'élèvent à $0,075\%$ du capital assuré pour chaque année d'assurance (valeur en début d'année).

- Si le contrat est financé par une prime unique payable à la souscription, il vient

$$ {}_tV'_x = \begin{cases} 0 & (t=0) \\ \bar{A}_{x+t} + 0,00075\ddot{a}_{x+t} & (t=1,2,\dots) \end{cases} $$

# Réserves d'inventaire - Exemples

**Exemple 1 - Suite**

- Si le contrat est financé par des primes annuelles constantes payables par anticipation pendant $k$ années, on a

$$PA' = \frac{\bar{A}_x + 0,00075\ddot{a}_x}{\ddot{a}_{x\overline{k}|}}$$

et

$$_tV'_x = \begin{cases} \bar{A}_{x+t} + 0,00075\ddot{a}_{x+t} - PA'\ddot{a}_{x+t:\overline{k-t}|} & (t = 0, 1, \dots, k-1) \\ \bar{A}_{x+t} + 0,00075\ddot{a}_{x+t} & (t = k, k+1, \dots) \end{cases}$$

# Réserves d'inventaire - Exemples

**Exemple 2**

Considérons une assurance mixte de capitaux assurés unitaires et d'une durée de $n$ années sur une tête d'âge $x$. Le tarif comporte les chargements d'inventaire suivants :

1. $0,05\%$ du capital assuré au début de chaque année.
2. réduction du taux d'intérêt technique de $i$ (taux technique pur) à $i^*$ (taux technique d'inventaire, $0 < i^* < i$ ).
3. majoration des taux instantanés de mortalité de $\mu_x$ (taux instantanés purs) à $\mu_x^*$ (taux instantanés d'inventaire).

**Exemple 2 - Suite**

- Si le contrat est financé par une prime unique payable à l'origine, on a ${}_0V'_x = 0$ ainsi que

$$ {}_kV'_x = \bar{A}^*_{x+k:\overline{n-k}|} + 0,0005\ddot{a}^*_{x+k:\overline{n-k}|} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) $$

- Si le contrat est financé par des primes annuelles constantes payables par anticipation jusqu'au terme, on a

$$ {}_kV'_x = \bar{A}^*_{x+k:\overline{n-k}|} + 0,0005\ddot{a}^*_{x+k:\overline{n-k}|} - PA'\ddot{a}^*_{x+k:\overline{n-k}|} \quad (k = 1, 2, \ldots, n) $$

# Equation différentielle de Thiele pour la réserve d'inventaire



Considérons un contrat de forme générale sur une tête d'âge $x$ et d'une durée $n$. La réserve d'inventaire est donnée par

$$V'(t) = \int_t^n v^{s-t}{}_{s-t}p_{x+t}\mu_{x+s}C(s)ds + \int_t^n v^{s-t}{}_{s-t}p_{x+t}dL(s) + \int_t^n v^{s-t}{}_{s-t}p_{x+t}dB(s) - \int_t^n v^{s-t}{}_{s-t}p_{x+t}dP'(s)$$

Par différentiation, on trouve l'équation différentielle de Thiele.

## Equation différentielle de Thiele

L'évolution des réserves d'inventaire sur un temps infinitesimal est donnée par

$$dV'(t) = \delta V'(t)dt + dP'(t) - \mu_{x+t}\left[C(t) - V'(t)\right]dt - dL(t) - dB(t)$$

# Equation différentielle de Thiele pour la réserve d'inventaire

L'équation de Thiele exprime en temps continu l'évolution des réserves et l'équilibre locale des récettes et dépenses moyennes de la compagnie. La variation des réserves est la somme de

- $\delta V'(t)$ : intérêts sur réserve constituée en $t$.
- $dP'(t)$ : Primes échéant dans $[t, t+dt)$.
- $\mu_{x+t} V'(t)dt$ : Libération de la réserve constituée en cas de décès.
- $-\mu_{x+t} C(t)dt$ : Capital à liquider en cas de décès.
- $-dL(t)$ : Prestations en cas de vie.
- $-dB(t)$ : Frais de gestion.

# Réserves d'inventaire entre deux échéances anniversaires

- En pratique, le calcul des réserves entre deux échéances anniversaires se fait par interpolation linéaire.
- Considérons un contrat de durée $n$ sur une tête d'âge $x$ à primes annuelles constantes $PA'$ payables par anticipation.
- Soit $k \in \{0, \ldots, n-1\}$ et $t \in (k, k+1]$. La réserve mathématique d'inventaire en $t$ est approchée par

$$
\begin{aligned}
V'(t) &= (k+1-t)V'(k+) + (t-k)V'(k+1) \\
&= (k+1-t)V'(k) + (t-k)V'(k+1) + (k+1-t)PA'
\end{aligned}
$$

où $V'(k+) = V'(k) + PA'$.

# Valeur de rachat théorique



- Considérons un contrat d'assurance-vie sur une tête d'âge $x$ et d'une durée de $n$ années.
- On note $\hat{\mathcal{P}}_{[t,n]}$ l'espérance de la valeur actuelle en $t$ des primes de réduction échéant dans l'intervalle $[t,n]$ :

$$\hat{\mathcal{P}}_{[t,n]} = \int_{[t,n]} v^{s-t}{}_{s-t}p_{x+t} d\hat{P}(s)$$

- Si les frais d'acquisition portés en chargement dans le tarif s'élèvent à $A$, on a

$$\hat{\mathcal{P}}_{[0,n]} = \mathcal{E}'_{[0,n]} + A$$

- Cette relation traduit encore l'équivalence entre les charges de la compagnie et les primes dues par l'assuré *compte tenu cette fois également des frais d'acquisition*.

# Valeur de rachat théorique



- La **valeur de rachat théorique du contrat** à l'instant $t$, notée $W(t)$, est définie comme la valeur nette en cet instant des engagements futurs de la compagnie, lorsqu'on inclut dans le calcul les frais de gestion et d'acquisition et les chargements qui couvrent ces frais.
- Les frais d'acquisition étant par définition encourus à l'origine du contrat, il vient :

$$W(0) = \mathcal{E}'_{[0,n]} + A - \hat{\mathcal{P}}_{[0,n]} = 0$$
$$W(t) = \mathcal{E}'_{[t,n]} - \hat{\mathcal{P}}_{[t,n]} \quad (0 < t \leq n)$$

# Rachat et réduction d'un contrat



- Si l'assuré ne paye pas sa prime dans les 10 jours, l'assureur envoie une lettre recommandée avec accusé de réception pour notification de non-paiement.
- Si après 40 jours l'assuré n'a toujours pas payé, l'assureur peut :
  - soit résilier le contrat et payer la valeur de rachat à l'assuré (moyennant une indemnité).
  - soit maintenir le contrat avec des garanties réduites. On parle de *mise en réduction* du contrat.[4]

4. Article L132-20 du code des assurances.

# Réduction d'un contrat



- Si le preneur met fin au payement des primes et l'assureur opte pour le maintien en vigueur du contrat jusqu'au terme initialement prévu, les nouvelles garanties assurées seront déterminées en utilisant la valeur de rachat théorique du contrat au jour de la première échéance de prime impayée comme prime unique d'inventaire à l'âge atteint et pour la durée restante.
- Certains contrats d'assurance vie prévoient une possibilité de *mise en réduction* par le preneur d'assurances.

# Réduction d'un contrat

## Exemple

Considérons un contrat d'assurance mixte de capital assuré $C$ souscrit le 17 juillet 2002 sur une tête de 28 ans pour une durée de 37 ans.

- Payement d'une prime annuelle payable par anticipation jusqu'au terme (dernière échéance de prime le 17 juillet 2038)
- Le 1er juillet 2016 le preneur demande la réduction du contrat.
- On calculera alors la valeur de rachat théorique du contrat au 17 juillet 2016 :

$$W(14) = C\bar{A}'_{42:\overline{23}|} - \widehat{PA}\ddot{a}^*_{42:\overline{23}|}$$

  où $\bar{A}'_{x\overline{n}|}$ désigne la prime unique d'inventaire d'une mixte de durée $n$ sur une tête d'âge $x$.

# Réduction d'un contrat

## Exemple - Suite



- Le nouveau capital $C_n$ assuré à partir du 17 juillet 2016 est donné par

$$C_n = \frac{W(14)}{\bar{A}'_{42:\overline{23}|}}$$

- Plus aucune prime n'est due à partir du 17 juillet 2016 : le contrat est dit "libéré" du payement des primes.
- A partir du 17 juillet 2016 et jusqu'au terme du contrat, on aura à tout moment $t$ $(14 < t < 37)$ :

$$W(t) = V'(t) = \bar{A}'_{28+t:\overline{37-t}|} \cdot C_n$$

# Rachat d'un contrat

- Pour certains contrats, le preneur peut mettre fin au contrat et recevoir la valeur de rachat net.
- La valeur de rachat net est la valeur de rachat théorique diminuée d'une indemnité de rachat (plafonnée à 5%).
- Les capitaux différés et les rentes viagères n'autorisent pas le rachat pour éviter l'anti-sélection.[5]

5. Code des assurances - Article L132-23.

# Transformation d'un contrat



- Le preneur d'une assurance-vie peut à tout moment demander une transformation de son contrat.
- Si cette transformation consiste à majorer les garanties assurées, il suffit de calculer l'augmentation de prime permettant, à l'âge atteint par l'assuré, de financer la majoration demandée des garanties.
- Une transformation peut également être une modification de la durée du contrat, de la combinaison de garanties, etc.

# Transformation d'un contrat

En général, on procède de la façon suivante :

1. On calcule la valeur de rachat théorique du contrat $W(t)$ à la date d'effet $t$ de la transformation.
2. On calcule la prime unique d'inventaire $\mathcal{E}'^{+}_{[t,n]}$ pour la nouvelle combinaison d'assurance à l'âge $x+t$ atteint par l'assuré.
3. Deux situations possibles :
   - Si $W(t) > \mathcal{E}'^{+}_{[t,n]}$, la différence fera l'objet d'un rachat partiel (la valeur de rachat net sera versée au preneur) ; plus aucune prime ne sera due après transformation.
   - Si $W(t) < \mathcal{E}'^{+}_{[t,n]}$, on calcule les primes d'inventaire qui permettent de financer la différence.

# Exemple : Prime, valeur de rachat et transformation

Une personne de 40 ans souscrit une assurance vie garantissant :

- en cas de décès avant 60 ans, le payement immédiat d'un capital de 1.000.
- une rente viagère différée de 25 ans d'un montant de 100 par an payable par quarts trimestriellement à terme échu.

Le contrat prévoit des primes constantes payables mensuellement par anticipation pendant les 25 premières années. Le tarif est calculé sur les bases techniques suivantes :

- taux d'intérêt technique : $3,50\%$
- table de mortalité : voir ci-dessous.
- chargements :
  1. inventaire : $0,1\%$ du capital décès au début de chaque année et $2\%$ sur tous les arrérages de rente.
  2. acquisition : $4\%$ de la prime unique de réduction.
  3. encaissement : $4\%$ de chaque prime payée.

# Exemple : Prime, valeur de rachat et transformation



Calculez

1. les primes uniques d'inventaire et de réduction,
2. les primes annuelles d'inventaire, de réduction et commerciale,
3. la valeur de rachat théorique du contrat à la fin de la 20 ème année.

A la fin de la 20ème année, l'assuré demande que la couverture décès soit prolongée jusqu'à 65 ans. Les primes des cinq dernières années restant inchangées, la prolongation de la couverture décès est compensée par une diminution de la rente assurée en cas de vie à 65 ans. Calculez le nouveau montant de la rente.

# Exemple : Prime, valeur de rachat et transformation

| | Table | 3,5 % | |
|---|---|---|---|
| $x$ | $D_x$ | $N_x$ | $\overline{M}_x$ |
| 40 | 238175 | 4591678 | 84339 |
| 50 | 160875 | 2576553 | 75025 |
| 60 | 101680 | 1245621 | 60591 |
| 65 | 76528 | 788508 | 50728 |

Figure – Commutations pour l'exercice.

# Exemple : Prime, valeur de rachat et transformation

## Exemple : Solution

Pour le point a. on a :

$$a_{65}^{(4)} = \frac{N_{66}}{D_{65}} + \frac{3}{8} = \frac{N_{65}}{D_{65}} - \frac{5}{8} = 9,67852$$

$$\begin{aligned} PU' &= 1000 \cdot \bar{A}^{1}_{40,\overline{20}|} + 102 \cdot {}_{25}E_{40} a_{65}^{(4)} + \ddot{a}_{40,\overline{20}|} \\ &= 1000 \cdot \frac{\bar{M}_{40} - \bar{M}_{60}}{D_{40}} + 102 \cdot \frac{D_{65}}{D_{40}} a_{65}^{(4)} + \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} \\ &= 430,957 \end{aligned}$$

$$\widehat{PU} = \frac{PU'}{0,96} = 448,914$$

## Exemple : Solution

Pour le point b. on a :

$$\ddot{a}^{(12)}_{40,\overline{25}|} = \frac{N_{40} - N_{65}}{D_{40}} - \frac{11}{24}\left(1 - \frac{D_{65}}{D_{40}}\right) = 15,65690$$

Dès lors, on a :

$$PA' = \frac{PU'}{\ddot{a}^{(12)}_{40,\overline{25}|}} = 27,525$$

$$\widehat{PA} = \frac{\widehat{PU}}{\ddot{a}^{(12)}_{40,\overline{25}|}} = 28,672$$

$$PA'' = \frac{\widehat{PA}}{0,96} = 29,867$$

# Exemple : Prime, valeur de rachat et transformation

## Exemple : Solution

Pour le point c. on a :

$$\ddot{a}^{(12)}_{60,\overline{5}|} = \frac{N_{60} - N_{65}}{D_{60}} - \frac{11}{24}\left(1 - \frac{D_{65}}{D_{60}}\right) = 4,38223$$

Pour la valeur de rachat théorique, on trouve

$$\begin{aligned} W(20) &= 102 \cdot {}_5E_{60}\, a^{(4)}_{65} - \widehat{PA} \cdot \ddot{a}^{(12)}_{60,\overline{5}|} \\ &= 102 \cdot \frac{D_{65}}{D_{60}} a^{(4)}_{65} - \widehat{PA} \cdot \ddot{a}^{(12)}_{60,\overline{5}|} \\ &= 617,362 \end{aligned}$$

# Exemple : Prime, valeur de rachat et transformation

## Exemple : Solution

Soit $R$ le montant de la rente après transformation du contrat. La valeur de rachat du contrat n'étant pas modifiée, il vient :

$$W(20) = 1000 \cdot \bar{A}^{1}_{60,\overline{5}|} + 1,02R \cdot {}_5E_{60}\, a^{(4)}_{65} + \ddot{a}_{60,\overline{5}|} - \widehat{PA} \cdot \ddot{a}^{(12)}_{60,\overline{5}|}$$

En isolant $R$, on trouve :

$$\begin{aligned} R &= 100 - \frac{1000 \cdot \bar{A}^{1}_{60,\overline{5}|} + \ddot{a}_{60,\overline{5}|}}{1,02 \cdot {}_5E_{60}\, a^{(4)}_{65}} \\ &= 100 + \frac{1000\left(\bar{M}_{60} - \bar{M}_{65}\right) + \left(N_{60} - N_{65}\right)}{1,02 \cdot D_{65}\, a^{(4)}_{65}} \\ &= 86,340 \end{aligned}$$

# Opérations sur plusieurs têtes

# Opérations sur plusieurs têtes

- Certains contrats d'assurance-vie font intervenir deux assurés, voire davantage.
- E.g. une rente de survie : l'assureur s'engage à servir à partir du décès de $X$ une rente viagère à $Y$ si $Y$ survit à $X$.
- On considère $r$ têtes d'âges respectifs $x_1, x_2, \ldots, x_r$. Leurs durées de vie restantes sont des variables aléatoires dénotées par $T_k$ pour $k = 1, \ldots, r$.
- Le temps de premier décès du groupe est

$$T = \min\left(T_1, T_2, \ldots, T_r\right)$$

- On notera aussi :

$$K_{\min} = \min\left\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_r}\right\}$$
$$K_{\max} = \max\left\{K_{x_1}, \ldots, K_{x_r}\right\}$$

où $K_{x_i} = [T_{x_i}]$ le nombre d'années entières de survie de la $i$-ème tête.

# Opérations sur plusieurs têtes

- Sous l'hypothèse que $T_1, \ldots, T_r$ sont indépendantes, la probabilité de survie conjointe des $r$ têtes après un temps $t$ est

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{x_1,\ldots,x_r} &:= P(T > t) \\
&= P\left(T_1 > t, T_2 > t, \ldots T_r > t\right) \\
&= \prod_{k=1}^{r} P\left(T_k > t\right) = \prod_{k=1}^{r} {}_tp_{x_k}
\end{aligned}
$$

- On notera que l'hypothèse d'indépendance est simplificatrice mais facilite les dérivations (*broken heart syndrom*).

# Opérations sur plusieurs têtes

On définit le taux instantané de mortalité

$$\mu_{x_1 \dots x_r} = \lim_{h \to 0} \frac{1 - {}_h p_{x_1 \dots x_r}}{h} = -\left[\frac{d}{dh} {}_h p_{x_1 \dots x_r}\right]_{h=0}$$

Il vient

$$\begin{aligned} \mu_{x_1 \dots x_r} &= -\left[\frac{d}{dh} \prod_{j=1}^{r} {}_h p_{x_j}\right]_{h=0} \\ &= -\sum_{j=1}^{r} \left[\left(\frac{d}{dh} {}_h p_{x_j}\right) \prod_{k \neq j} {}_h p_{x_k}\right]_{h=0} \\ &= \sum_{j=1}^{r} \mu_{x_j} \end{aligned}$$

# Opérations sur plusieurs têtes



- On a
$$ {}_tp_{x_1\ldots x_r} = e^{-\int_0^t \mu_{x_1+s:\ldots:x_r+s}ds} \tag{20}$$
- Probabilité pour qu'une au moins des $r$ têtes survive après un temps $t$ :
$$ {}_tp_{\overline{x_1\ldots x_r}} = \Pr\left[\bigcup_{i=1}^{r}(T_{x_i} > t)\right] \tag{21}$$
- Pour deux et trois têtes, on obtient en particulier :

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{\overline{xy}} &= {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy}\\
{}_tp_{\overline{xyz}} &= {}_tp_x + {}_tp_y + {}_tp_z - \left({}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} + {}_tp_{yz}\right) + {}_tp_{xyz}
\end{aligned}
$$

# Capitaux différés



Capital payable en cas de vie au terme de toutes les têtes

- Soient $r$ têtes d'âges respectifs $x_1, x_2, \ldots, x_r$.
- Considérons l'assurance d'un capital unitaire payable dans $n$ années si toutes les têtes sont encore en vie.
- La valeur actuelle de la prestation s'écrit

$$\mathcal{X} = \begin{cases} v^n & \text{si } T_{\min} > n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- La prime unique pure est donnée par

$${}_nE_{x_1 x_2 \ldots x_r} = {}_np_{x_1 x_2 \ldots x_r} v^n$$

# Capitaux différés



Capital payable au terme si l'une au moins des $r$ têtes est encore en vie

- Considérons l'assurance d'un capital unitaire payable dans $n$ années si une au moins des $r$ têtes est encore en vie.
- La valeur actuelle de la prestation s'écrit

$$\mathcal{X} = \begin{cases} v^n & \text{si } T_{\text{max}} \geq n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

- La prime unique pure est donnée par

$${}_nE_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_r}} = {}_np_{\overline{x_1 x_2 \ldots x_r}} v^n$$

# Capitaux différés

## Example 1

- Considérons un capital différé de $n$ années sur deux têtes d'âges respectifs $x$ et $y$.
- Le capital est 1 si les deux têtes survivent à l'échéance, de 0,7 si une seule tête survit à l'échéance.
- Ce capital différé peut se voir comme la combinaison d'un capital différé de 0,7 payable en cas de survie d'un tête au moins et d'un capital différé de 0,3 payable en cas de survie conjointe des deux têtes.
- La prime unique pure est donc donnée par

$$0,7\,{}_nE_{\overline{xy}} + 0,3\,{}_nE_{xy}$$

# Capitaux différés

## Example 2

- Considérons un capital différé de $n$ années sur deux têtes d'âges respectifs $x$ et $y$.
- Le capital est 1 si les deux têtes survivent à l'échéance, de 0,75 si seule la tête $x$ survit, de 0,5 si seule la tête $y$ survit.
- La prime unique pure vaut

$$
\begin{aligned}
&{}_nE_{xy} + 0,75\left({}_nE_x - {}_nE_{xy}\right) + 0,5\left({}_nE_y - {}_nE_{xy}\right) \\
&= 0,75{}_nE_x + 0,5{}_nE_y - 0,25{}_nE_{xy}
\end{aligned}
$$

# Assurance vie-entière

- Considérons une assurance sur $r$ têtes d'âges $x_1, x_2, \ldots, x_r$ garantissant le payement d'un capital unitaire
  - à la fin d'année du premier décès : la valeur actuelle de la prestation est donc
  $$\mathcal{X} = v^{K_{\text{min}}+1}$$
  et la prime unique pure s'écrit
  $$A_{x_1 \ldots x_r} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_t p_{x_1 \ldots x_r} \left(1 - p_{x_1+t:\ldots:x_r+t}\right)$$
  - à la fin de l'année du dernier décès :
  $$\mathcal{X} = v^{K_{\text{max}}+1}$$
  et la prime unique pure s'écrit
  $$A_{\overline{x_1 \ldots x_r}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} \left({}_t p_{\overline{x_1 \ldots x_r}} - {}_{t+1} p_{\overline{x_1 \ldots x_r}}\right)$$

# Assurance temporaire

- Dans le cas des assurances temporaires, l'indice se note à gauche et on a
$$_{|n}A_{x_1\ldots x_r} = \sum_{t=0}^{n-1} v^{t+1} {}_tp_{x_1\ldots x_r}\left(1 - p_{x_1+t:\ldots:x_r+t}\right)$$
- Pour les primes payables au moment du décès, on a
$$_{|n}\bar{A}_{x_1\ldots x_r} = \int_0^n {}_tp_{x_1\ldots x_r}\mu_{x_1+t:\ldots:x_r+t} v^t dt \tag{22}$$

# Assurances de rente



Rentes payables jusqu'au premier décès

- Considérons une rente unitaire payable annuellement à terme échu tant que les $r$ têtes sont toutes vivantes.
- La valeur actuelle des prestations s'écrit

$$\mathcal{X} = a_{\overline{K_{\min}}|}$$

- La prime unique pure est donnée par

$$a_{x_1 x_2 \dots x_r} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{x_1 x_2 \dots x_r} v^k$$

# Assurances de rente



## Autres types de rente

Avec des notations prolongeant celles à une seule tête, il vient :

$$\ddot{a}_{x_1 x_2 \ldots x_r} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_{x_1 x_2 \ldots x_r} v^k = 1 + a_{x_1 x_2 \ldots x_r}$$

$$_{n|}a_{x_1 \ldots x_r} = \sum_{k=n}^{\infty} {}_k p_{x_1 x_2 \ldots x_r} v^k = {}_n E_{x_1 \ldots x_r} a_{x_1+n; \ldots x_r+n}$$

$$a_{x_1 \ldots x_r \overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_k p_{x_1 x_2 \ldots x_r} v^k = a_{x_1 \ldots x_r} - {}_n E_{x_1 \ldots x_r} a_{x_1+n: \ldots :x_r+n}$$

$$\ddot{a}_{x_1 \ldots x_r \overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_{x_1 x_2 \ldots x_r} v^k = \ddot{a}_{x_1 \ldots x_r} - {}_n E_{x_1 \ldots x_r} \ddot{a}_{x_1+n: \ldots :x_r+n}$$

Rentes fractionnées

Pour les rentes fractionnées, on obtiendra les approximations suivantes :

$$
\begin{aligned}
a^{(m)}_{x_1\ldots x_r} &\approx a_{x_1\ldots x_r} + \frac{m-1}{2m} \\
\ddot{a}^{(m)}_{x_1\ldots x_r} &\approx \ddot{a}_{x_1\ldots x_r} - \frac{m-1}{2m} \\
a^{(m)}_{x_1\ldots x_r\,\overline{n}|} &\approx a_{x_1\ldots x_r\,\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_nE_{x_1\ldots x_r}\right) \\
\ddot{a}^{(m)}_{x_1\ldots x_r\,\overline{n}|} &\approx \ddot{a}_{x_1\ldots x_r\,\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}\left(1 - {}_nE_{x_1\ldots x_r}\right)
\end{aligned}
\qquad (23)
$$

# Assurances de rente



Rentes payables jusqu'au dernier décès

Les primes pures pour les rentes jusqu'au dernier décès sont données par

$$a_{\overline{x_1 \ldots x_r}} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{\overline{x_1 \ldots x_r}} v^k$$

$$\ddot{a}_{\overline{x_1 \ldots x_r}} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_{\overline{x_1 \ldots x_r}} v^k = 1 + a_{\overline{x_1 \ldots x_r}}$$

$$a_{\overline{x_1 \ldots x_r}\,\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_k p_{\overline{x_1 \ldots x_r}} v^k$$

$$\ddot{a}_{\overline{x_1 \ldots x_r}\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_{\overline{x_1 \ldots x_r}} v^k$$

# Rentes sur deux têtes



On trouve en particulier les relations suivantes :

$$a_{\overline{xy}} = a_x + a_y - a_{xy}$$

$$a_{\overline{xyz}} = a_x + a_y + a_z - a_{xy} - a_{xz} - a_{yz} + a_{xyz}$$

$$a_{\overline{xy}\,\overline{n}|} = a_{x\,\overline{n}|} + a_{y\,\overline{n}|} - a_{xy\,\overline{n}|}$$

$$_{n|}a_{\overline{xy}} = {}_{n|}a_x + {}_{n|}a_y - {}_{n|}a_{xy}$$

# Rentes de survie

- Une opération sur plusieurs têtes est une opération de survie lorsque les prestations ne sont payables que si les décès surviennent dans un ordre stipulé par le contrat.
- Le cas le plus classique : Rentes de survie ou *rente de réversion*.
- Example : Rente viagère payable à $y$ à partir du décès de $x$ si $y$ survit à $x$.
- La prime unique est donnée par la prime unique :

$$\begin{aligned} a_{x|y} &= \sum_{t=1}^{\infty} (1 - {}_t p_x) \ {}_t p_y v^t \\ &= a_y - a_{xy} \end{aligned}$$

# Rentes de survie



- Rente temporaire de survie :

$$a_{x|y\overline{n}|} = \sum_{t=1}^{n} (1 - {}_tp_x)\, {}_tp_y\, v^t = a_{y\overline{n}|} - a_{xy\overline{n}|}$$

- Assurance temporaire d'une rente de survie : rente viagère payable à $y$ sa vie durant à partir du décès de $x$, si ce décès survient avant $n$ années :

$$PU = \sum_{t=1}^{n} (1 - {}_tp_x)_t\, p_y\, v^t + (1 - {}_np_x) \sum_{t=n+1}^{\infty} {}_tp_y\, v^t$$

$$= a_y - a_{xy\overline{n}|} - {}_np_x\, {}_np_y\, v^n \sum_{t=n+1}^{\infty} {}_{t-n}p_{y+n}\, v^{t-n}$$

$$= a_y - a_{xy\overline{n}|} - {}_nE_{xy}\, a_{y+n}$$

$$= a_y - a_{xy} - {}_nE_{xy} \left(a_{y+n} - a_{x+n:y+n}\right)$$

# Exercice

- Un homme agé de 55 ans et sa femme agé de 50 ans souscrivent à une rente différée sur deux têtes.
- Les primes sont payables mensuellement par anticipation pendant au plus 10 ans mais seulement si les deux sont en vie.
- Si un des deux décède endéans 10 ans, un capital de 200.000 € est payé en fin d'année du décès.
- En cas de survie des deux dans 10 ans, une rente de 50.000 € par an payable mensuellement par anticipation est payé tant que les deux sont en vie mais réduite à 30.000 € s'il n'y a plus qu'un survivant.
- La rente cesse au décès du dernier survivant.

Calculez la prime mensuelle en termes de notations actuarielles.

# Solution



- Comme les vies sont supposées indépendantes, la probabilité que les deux survivent $t$ années est

$$ {}_tp_{55}\,{}_tp_{50} $$

- La valeur actuelle des primes est

$$ PU = \ddot{a}^{(12)}_{55:50:\overline{10}|} PA $$

- La valeur actuelle de la garantie décès est

$$ 200.000\,{}_{|10}A_{55:50} = \mathbb{E}\left[\chi_1\right] $$

# Solution



- Pour le calcul de la valeur actuelle de la rente, si les deux sont vivants dans 10 ans, on a

$$30000\ddot{a}^{(12)}_{\overline{65:60}} + 20000\ddot{a}^{(12)}_{65:60}$$
$$= 30000\ddot{a}^{(12)}_{65} + 30000\ddot{a}^{(12)}_{60} - 10000\ddot{a}^{(12)}_{65:60}$$

- La valeur actuelle à la souscription est donc

$$v^{10}{}_{10}p_{55}{}_{10}p_{50}\left(30000\ddot{a}^{(12)}_{65} + 30000\ddot{a}^{(12)}_{60} - 10000\ddot{a}^{(12)}_{65:60}\right) = \mathbb{E}\left[\chi_2\right]$$

- La prime mensuelle, $PA/12$ est égale à

$$PA/12 = \frac{\mathbb{E}\left[\chi_1 + \chi_2\right]}{\ddot{a}^{(12)}_{55:50:\overline{10}|}}$$

# Espérance de vie jointe



- On peut aussi définir l'espérance de vie jointe jusqu'au premier décès par

$$\mathring{e}_{xy} = \mathrm{E}\left[T_{\min}\right] = \int_0^\infty {}_tp_x\, {}_tp_y\, dt \tag{24}$$

**Exemple :** Supposons que

$${}_tq_x^{\text{non-fumeur}} = \frac{70 - x + t}{80 - x}$$

soit valide pour $0 \leq x \leq 70$ et $0 \leq t \leq 10$, et que l'intensité de mortalité pour les fumeurs est deux fois celle des non-fumeurs. Calculez le temps moyen de premier décès pour un fumeur de (70) et un non-fumeur de (70).

# Solution



On cherche :

$$\mathring{e}_{70:70} = \int_0^{10} {}_tp_{70:70}\,dt = \int_0^{10} {}_tp_{70}^{f}\,{}_tp_{70}^{n-f}\,dt$$

Soit $\mu_x$ l'intensité de mortalité des non-fumeurs, alors :

$$\begin{aligned}
{}_tp_x^f &= \exp\left(-\int_0^t 2\mu_{x+r}dr\right) \\
&= \left[\exp\left(-\int_0^t \mu_{x+r}dr\right)\right]^2 \\
&= \left({}_tp_x^{n-f}\right)^2 \\
&= \left(\frac{10-t}{10}\right)^2
\end{aligned}$$

# Solution



La probabilité des non-fumeurs est donnée par

$$ {}_tp_x^{n-f} = 1 - \left( \frac{70 - 70 + t}{80 - 70} \right) = \frac{10 - t}{10} $$

On trouve alors que l'espérance de vie jointe jusqu'au premier décès est donnée par

$$ \mathring{e}_{70:70} = \int_0^{10} \left[ \frac{10 - t}{10} \right]^3 dt = 2.5 \text{ ans} $$

# Exercice : Rente de réversion



Un assuré $(x)$ souscrit à une rente de réversion à un assuré $(y)$ avec les modalités suivantes :

- Il verse une rente à terme échu de montant $P$ au plus jusqu'à une date $n$.
- Pendant les $m$ années qui suivent le décès de $(x)$, l'assureur verse à $(y)$ une rente de montant $R$, au plus tard jusqu'à la date $n$.
- Aucun versement n'a donc lieu si $(x)$ décède après la date $(n)$. Les versement cessent au décès de $(y)$.
- On suppose $m, n$ entiers positifs, $m < n$.

# Exercice : Rente de réversion



**Questions :**

1. Donner pour chaque date entière $t, t \leq n$, la condition pour que $(y)$ perçoive un versement à cette date.
2. Déterminer les engagements respectifs de l'assuré et l'assureur. Donner une relation liant $R$ et $P$.
3. Soit une date entière $k, k \leq n$, donner les provisions mathématiques prospectives à cette date si $(x)$ et $(y)$ sont tous deux vivants.

# Gains techniques et réassurance (Hors examen)

# Gains techniques



Pour de nombreux contrats, les termes du contrat sont fixées pour toute la durée du contrat. En particulier :

- la compagnie ne peut pas modifier le taux d'intérêt technique, même si les taux d'intérêt du marché subissent une forte fluctuation,
- la compagnie ne peut pas modifier la table de mortalité du tarif dans un sens défavorable aux assurés (c.à-d. provoquant une hausse de tarif), même si la mortalité réelle a fortement évolué depuis la souscription des contrats.

# Gains techniques

Les contrats sont donc tarifés avec des hypothèses conservatrices :

1. Le taux d'intérêt technique est plus bas que le taux d'intérêt sur les marchés financiers. Si le taux sur les marchés est constant et noté $i^*$, on a en moyenne $i \leq i^*$.
2. Les tables de mortalité incluent une marge de sécurité. Si on dénote par $\mu^*_{x+t}$ le taux de mortalité réel, en pratique, on a
   - $\mu^*_{x+t} > \mu_{x+t}$ pour les contrats avec une garantie vie (capital différé, rente,...).
   - $\mu^*_{x+t} < \mu_{x+t}$ pour les contrats avec une garantie décès (assurance temporaire, vie-entière, ...).
3. Dans une moindre mesure, les frais du contrat sont légèrement surestimés.

# Gains techniques

La différence entre les taux d'intérêt et de mortalité réels et les hypothèses utilisées pour la tarification génère en moyenne un profit appelé *gain technique*. Les gains sur les frais du contrat sont souvent négligeables.

Les compagnies d'assurances sont tenues de redistribuer une partie importante de ces gains sous forme de *participations aux bénéfices*.

# Equation différentielle de Thiele

Considérons un contrat d'assurance-vie durant l'intervalle de temps infinitésimal $[t, t + dt)$ :

- $\mu_z$ : le taux instantané de mortalité du tarif à l'âge $z$,
- $\tilde{\mu}_z$ le taux instantané de mortalité réelle à l'âge $z$ pour la population des assurés,
- $\delta$ : le taux instantané d'intérêt technique,
- $\tilde{\delta}(t)$ : le taux instantané de rendement réel obtenu par la compagnie sur l'intervalle $[t, t + dt)$,
- $d\hat{P}(t)$ : les primes de réduction échéant dans $[t, t + dt)$,
- $dB(t)$ : les frais de gestion chargés dans le tarif pour l'intervalle $[t, t + dt)$,
- $C(t)$ : le capital payable en cas de décès de l'assuré dans $[t, t + dt)$,
- $dL(t)$ : la prestation en cas de survie de l'assuré en $t$.

# Equation différentielle de Thiele



L'équation de Thiele est donnée par

$$\delta W(t)dt + d\hat{P}(t) = dW(t) + \mu_{x+t}[C(t) - W(t)]dt + dL(t) + dB(t)$$

- Un taux d'intérêt réel plus élevé résulte en un accroissement des recettes :
$$[\tilde{\delta}(t) - \delta]W(t)dt$$
- Un écart entre les taux de mortalité du tarif et les taux de mortalité réelle engendre une diminution de la charge nette :
$$[\mu_{x+t} - \tilde{\mu}_{x+t}]\,[C(t) - W(t)]dt$$

# Gains techniques



Considérons un contrat d'assurance vie de maturité $n$ avec

- Un flux de capital décès $(d_k)_{k=0,\dots n-1}$,
- Un flux de capital vie $(c_k)_{k=0,\dots n-1}$
- Des primes pures $(\Pi_k)_{k=0,\dots n-1}$.
- Des frais de gestion d'un montant annuel fixe $g$ payable par anticipation.

La formule de récurrence pour les réserves d'inventaire est donnée par

$$p_{x+k\,k+1-}V' = \left({}_{k-}V' + \Pi'_k - c_k - g\right)(1+i) - d_k(1+i)^{\frac{1}{2}} q_{x+k}$$

où

- ${}_{k+1-}V'$ est la réserve d'inventaire en $k+1$ avant payement de prime.
- $\Pi'_k$ est la prime d'inventaire annuelle.

# Gains techniques

- Les réserves représentent la dette de l'assureur (vis-à-vis des assurés) et sont couvertes par des actifs au bilan. Considérons l'évolution du bilan entre $k$ et $k+1$ pour une police d'assurance :
- Si
  - Les actifs ont un rendement égal au taux technique $i$,
  - La granularité du portefeuille est infinie.
  - La mortalité réelle suit les hypothèses utilisées pour le calcul des primes.
- Alors, en cas de survie de l'assuré, **les actifs sont égaux au passif en** $k+1$ (pas de perte ni de gain).

# Gains techniques

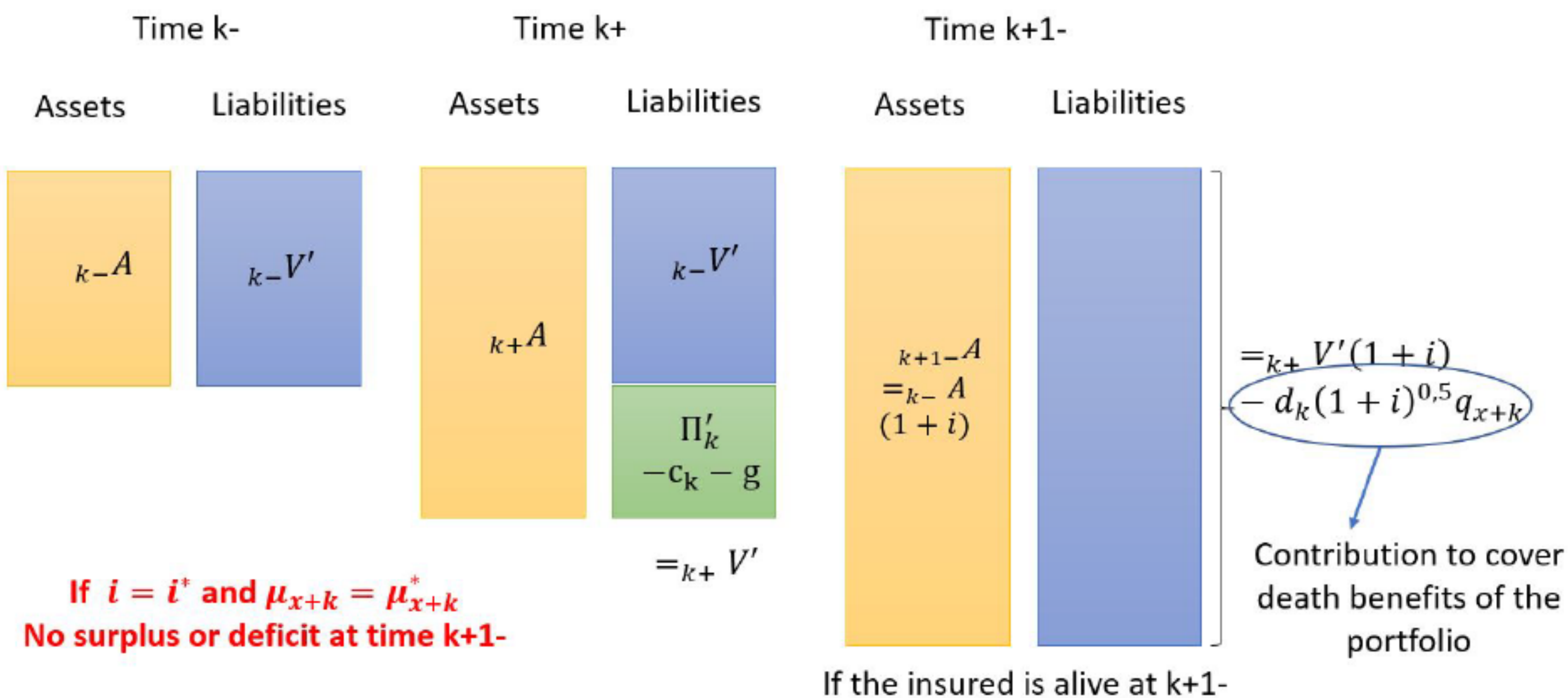



Figure – Evolution du bilan entre $k$ et $k+1$ si les taux d'intérêt et de mortalité suivent les hypothèses.

# Gains techniques



Quand on prend des hypothèses conservatrices sur la mortalité et le taux d'intérêt, on observe un gain (ou une perte parfois) à la fin de l'année $k$. Le gain technique peut être décomposé en

- Un **bénéfice financier** résultant de la différence entre $i$ et $i^*$.
- Un **bénéfice de mortalité** résultant de la différence entre $\mu_{x+t}$ et $\mu^*_{x+t}$.

On peut estimer ce gain technique en $k+1$ en calculant la réserve d'inventaire avec des hypothèses réelles non-conservatrices $(i^*, \mu^*_{x+t})$. On note cette réserve ${}_{k+1-}V^{*'}$ et elle satisfait

$$p^*_{x+k}\,{}_{k+1-}V^{*'} = \left({}_{k-}V^{*'} + \Pi'_k - c_k - g\right)(1+i^*) - d_k(1+i^*)^{\frac{1}{2}}q^*_{x+k}$$

# Gains techniques

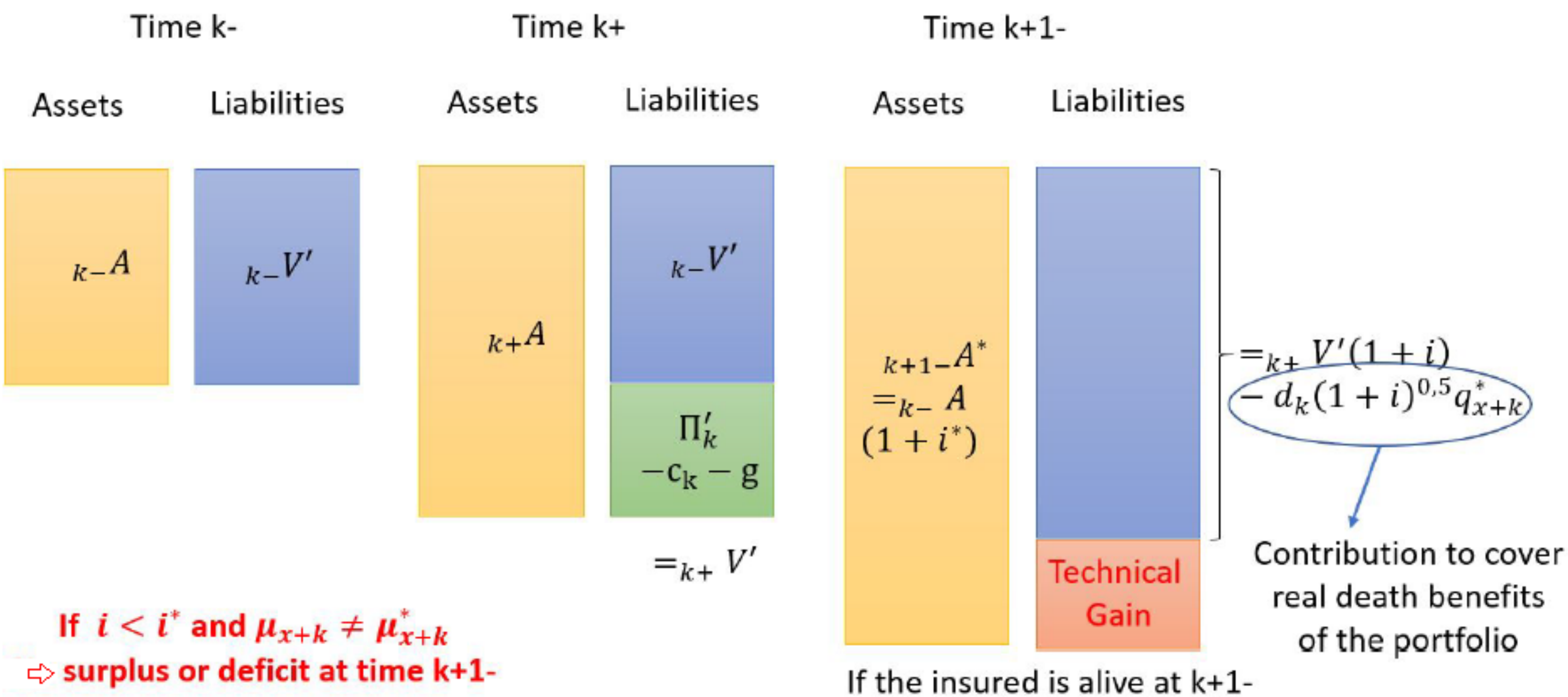



Figure – Gain technique entre $k$ et $k+1$ si les taux d'intérêt et de mortalité **ne suivent pas** les hypothèses.

# Gains techniques

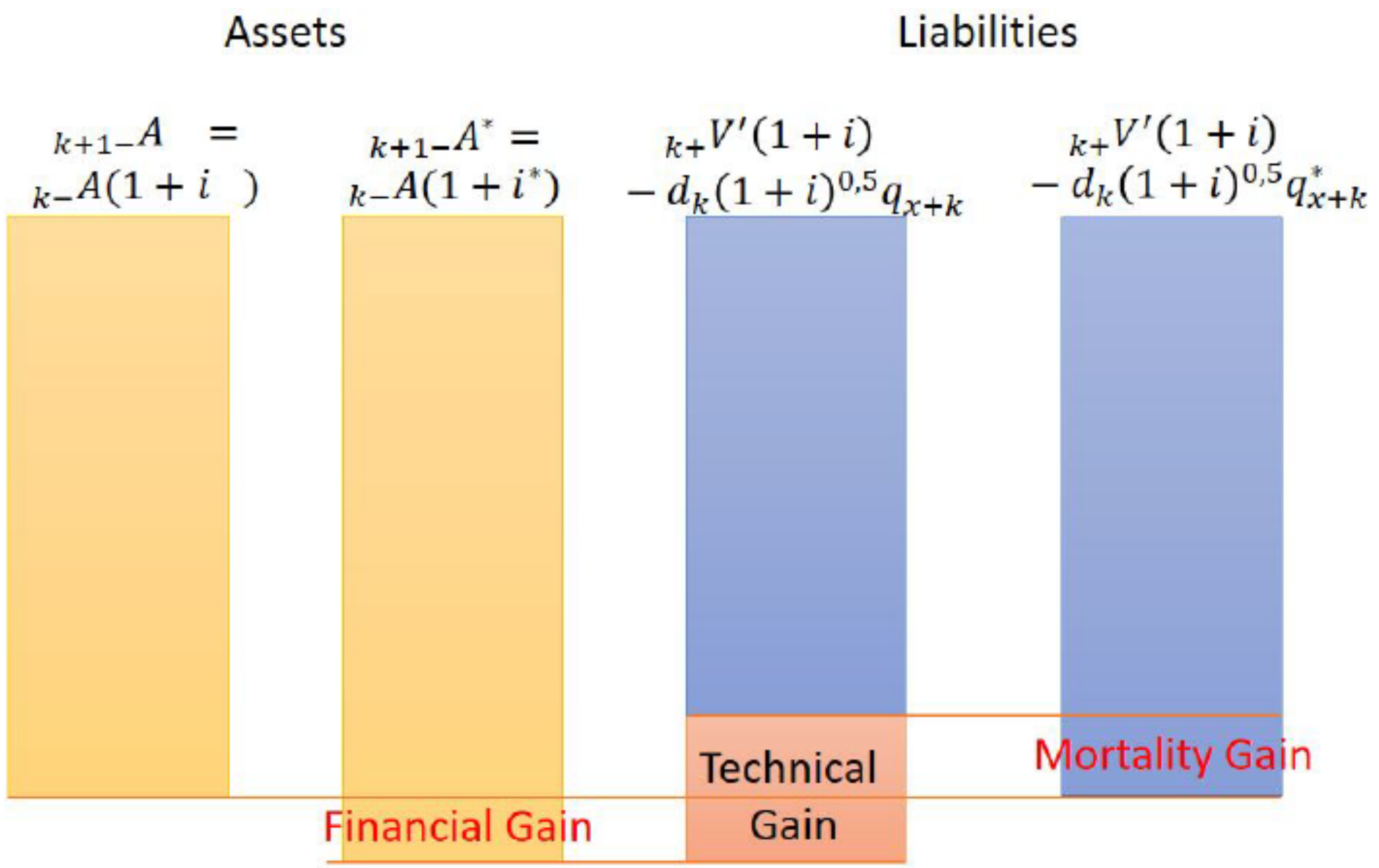



Figure – Décomposition du gain technique en bénéfice financier et bénéfice de mortalité.

# Gains techniques

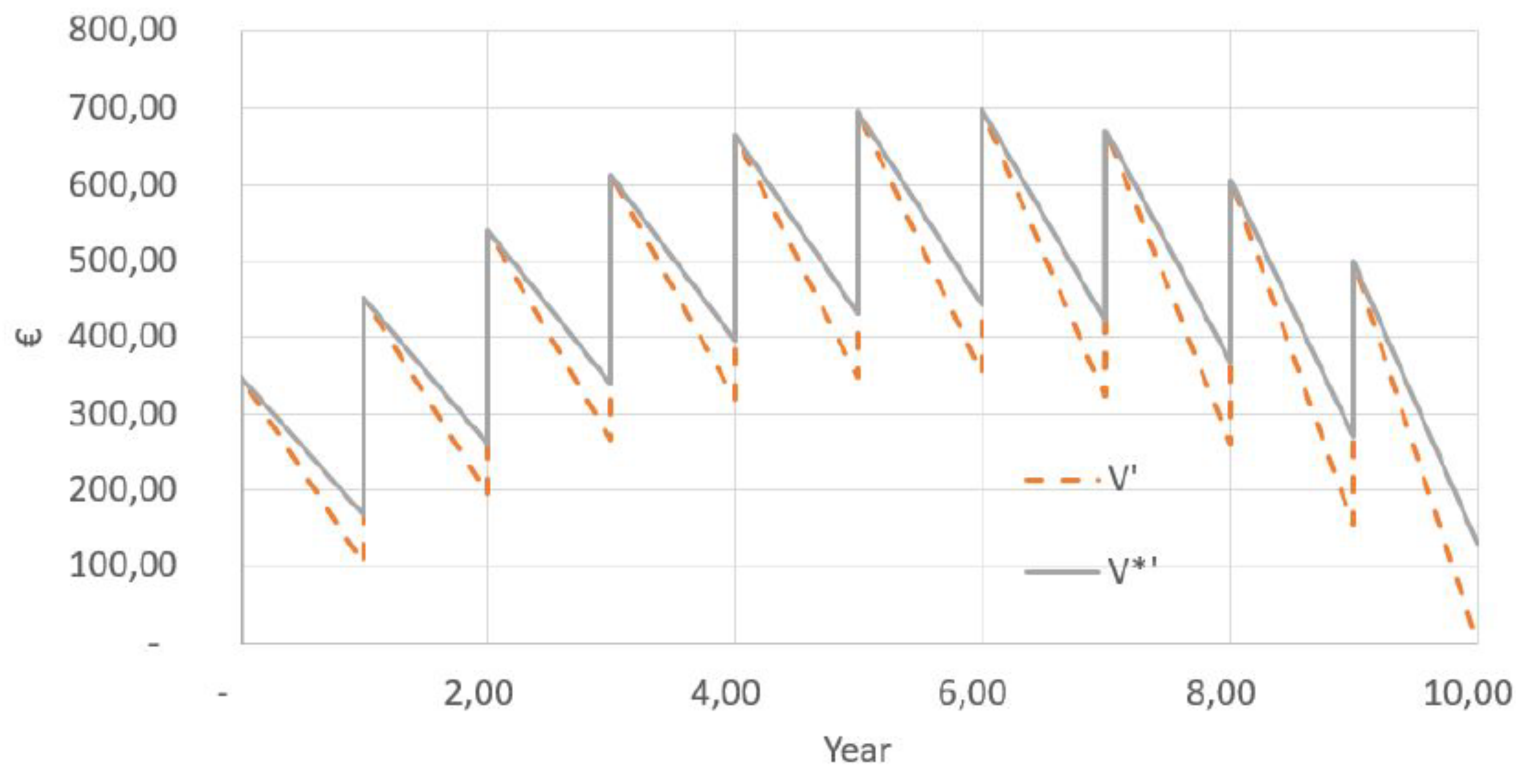



Figure – Illustration : Assurance temporaire de capital 100.000 €, $x = 40$, $n = 10$. Gain technique car la mortalité observée est plus faible que celle utilisée pour la tarification.

# Participations aux bénéfices



L'assureur est tenu, par le code des assurances, de redistribuer la majeure partie de ces bénéfices aux assurés (Article L331-3) :

- Au moins 85% du bénéfice financier.
- Au moins 90% des bénéfices de mortalité et de gestion des contrats.

La redistribution peut prendre plusieurs formes :

- Versement cash.
- Réduction de la prime.
- Augmentation des garanties.

Les conditions de redistribution varient fortement d'un pays à l'autre.

# Réassurance



Les contrats d'assurance avec une garantie décès sont souvent réassurés pour réduire l'exposition à un risque trop important.

## Réassurance

La réassurance est l'opération par laquelle les assureurs transfèrent une partie de leurs risques à d'autres parties pour réduire la probabilité de payer des engagements conséquents suite à l'occurence d'un sinistre. La partie qui transfert le risque est appelée la *cédante*. La partie qui accepte une portion du risque est appelée le *réassureur*.

En transférant une partie du risque, l'assureur améliore sa situation de solvabilité.

# Réassurance

Il y a typiquement deux types de réassurance :

- Réassurance proportionnelle : le réassureur reçoit un pourcentage de toutes les primes de l'assureur. Pour chaque sinistre, le réassureur porte une portion des pertes basée sur ce pourcentage.
- Réassurance non-proportionnelle : le réassureur couvre les pertes de l'assureur si celles-ci dépassent un montant spécifié, appelé la **rétention**. En conséquence, le réassureur n'a pas une portion proportionnelle dans les primes et pertes de l'assureur.

**Example :** Excess-of-loss est un type de réassurance où le réassureur couvre toutes les pertes qui dépassent "la rétention". Ce contrat couvre typiquement les risques de catastrophe et ce soit par occurence ou par pertes cumulées dans une période donnée.

# Réassurance

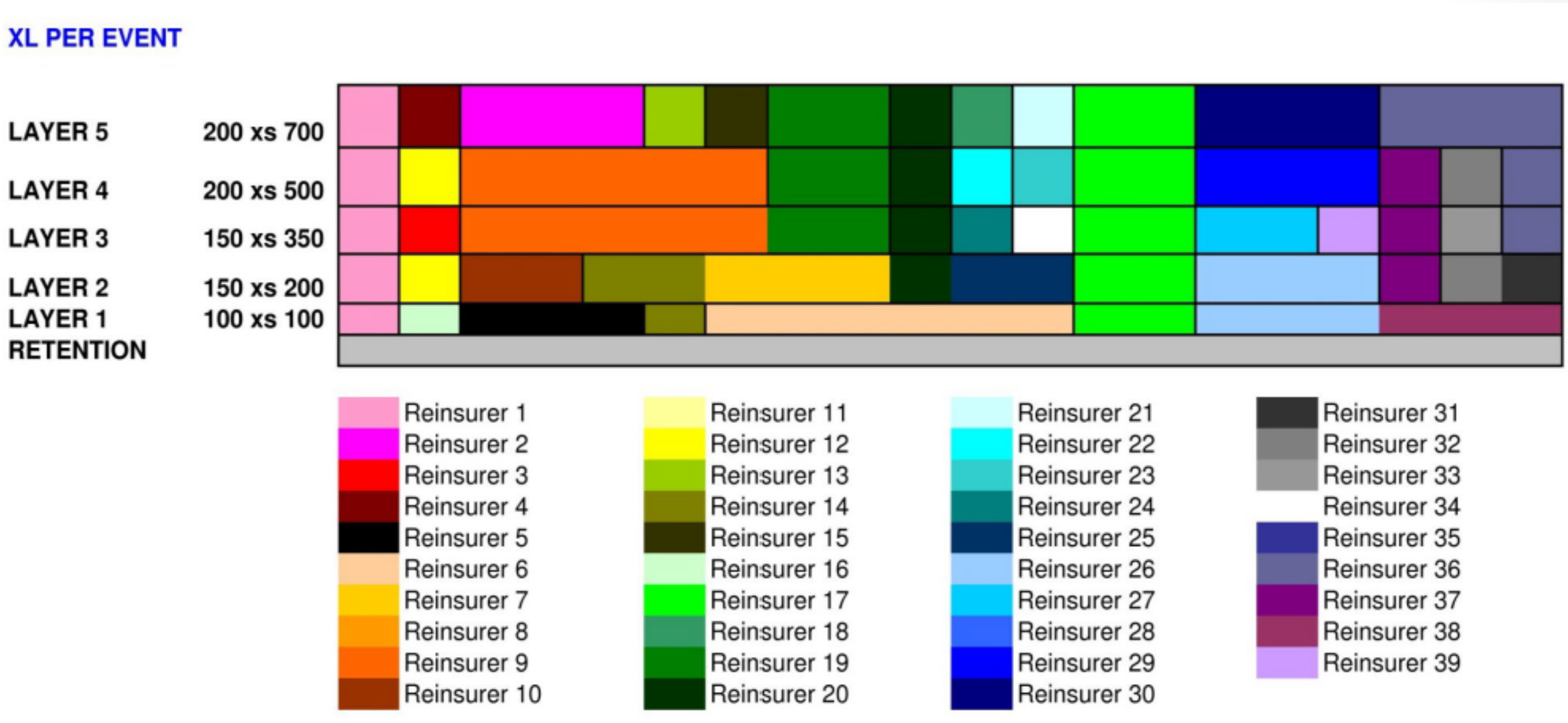



Figure – Répartition des risques de catastrophe. Excess-of-loss.

# Réassurance

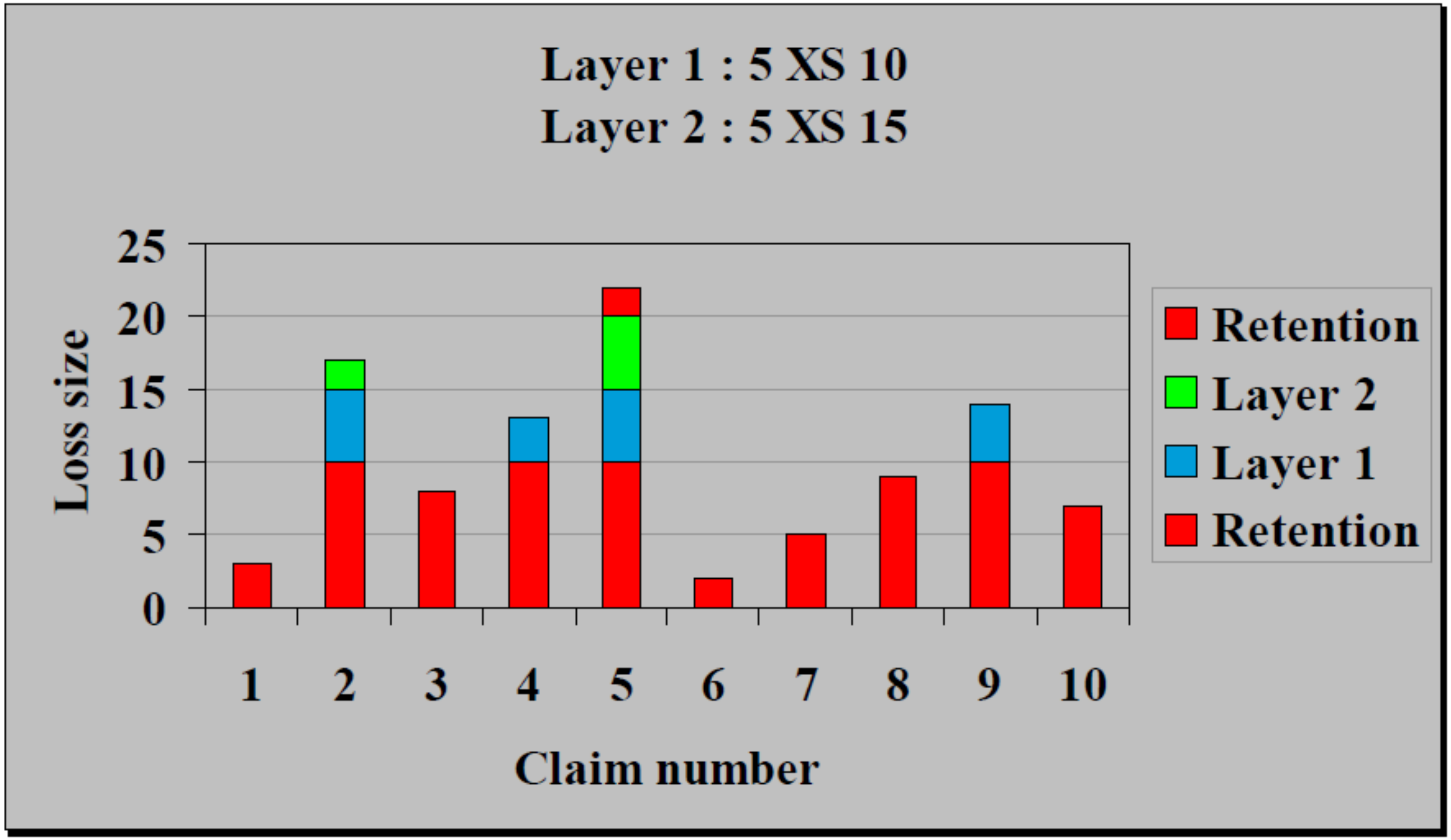



Figure – Exemple : Excess-of-loss.

Ranked by unaffiliated gross premiums written in 2019.
(USD Millions)[1]

| | | Reinsurance Premiums Written | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Life & Non-Life | | Non-Life only | |
| **Ranking** | **Company Name** | **Gross** | **Net** | **Gross** | **Net** |
| 1 | Swiss Re Ltd. | 42,228 | 39,649 | 26,095 | 25,135 |
| 2 | Munich Reinsurance Company | 37,864 | 35,282 | 24,742 | 23,455 |
| 3 | Hannover Ruck SE[4] | 25,309 | 22,096 | 16,555 | 14,333 |
| 4 | SCOR S.E. | 18,302 | 16,176 | 8,005 | 6,826 |
| 5 | Berkshire Hathaway Inc. | 16,089 | 16,089 | 11,112 | 11,112 |
| 6 | Lloyd's[5, 6] | 14,978 | 10,433 | 14,978 | 10,433 |
| 7 | China Reinsurance (Group) Corporation | 13,161 | 12,196 | 5,218 | 4,820 |
| 8 | Reinsurance Group of America Inc. | 12,150 | 11,297 | N/A | N/A |
| 9 | Great West Lifeco | 10,149 | 10,055 | N/A | N/A |
| 10 | PartnerRe Ltd. | 7,285 | 6,909 | 5,792 | 5,439 |

Figure – Classement des réassureurs (2019). Source : AM Best.

# Réassurance



Reprenons le cas d'une assurance décès. Nous avons vu que le capital sous risque est donné par

$$C_k^{(r)} = C(k+1) - W(k+1)$$

où

- $C(k+1)$ est le capital en cas de décès entre $k$ et $k+1$.
- $W(k+1)$ est la valeur de rachat théorique en $k+1$.

**Réassurance proportionnelle :** L'assureur transfert une proportion $\alpha$ du capital sous-risque au réassureur. Ainsi le risque résiduel est

$$(1-\alpha)\left(C(k+1) - W(k+1)\right)$$

# Réassurance



**Réassurance non-proportionnelle :** si le niveau de rétention est fixé à $m$, le réassureur couvre $C_k^{(r)} - m$ si l'assuré décède entre $k$ et $k+1$. La prime de réassurance payé en $k$ est

$$P = v \; q_{x+k}(1+\gamma)\left(C_k^{(r)} - m\right),$$

où $\gamma > 0$ est un chargement pour le réassureur. La perte de l'assureur est donc

$$\begin{aligned} L &= \mathbb{1}_{\{K_x=k\}} C_k^{(r)} - \mathbb{1}_{\{K_x=k\}}\left(C_k^{(r)} - m\right) + P \\ &= \mathbb{1}_{\{K_x=k\}} m + P. \end{aligned}$$

Réduction de la variance de la perte avec réassurance :

$$\mathbb{V}(L) = m^2\left(q_{x+k} - q_{x+k}^2\right)$$

Example of non proportional reinsurance:

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Term life insurance** | | | |
| Age x | 40 | Single net Premium | 28.908,38 |
| interest | 4% | Single inventory Premium | 31.406,54 |
| n | 10 | Single Commercial Premium | 47.353,62 |
| Death Capital | 1.000.000,00 | Annuity due | 8,33 |
| Inventory fee | 0,03% | Periodic net Premium | 3.471,56 |
| Acquisition fee | 1,50% | Periodic inv Premium | 3.771,56 |
| Collection fee | 2,00% | Periodic com Premium | 5.686,62 |

| | Non proportional reinsurance | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| t | Capital at risk | Reins. ret. 750000 | E(Z*) ret. 750000 | Std(Z*) ret. 750000 | Std(Z*) Without reins. |
| 0 | 996.460 | 610 | 2.503 | 37.633 | 50.178 |
| 1 | 995.400 | 652 | 2.683 | 38.979 | 51.972 |
| 2 | 994.487 | 698 | 2.882 | 40.413 | 53.884 |
| 3 | 993.747 | 750 | 3.102 | 41.936 | 55.915 |
| 4 | 993.208 | 808 | 3.347 | 43.569 | 58.092 |
| 5 | 992.906 | 872 | 3.620 | 45.308 | 60.410 |
| 6 | 992.878 | 945 | 3.922 | 47.157 | 62.876 |
| 7 | 993.168 | 1.027 | 4.258 | 49.121 | 65.494 |
| 8 | 993.823 | 1.120 | 4.633 | 51.213 | 68.283 |
| 9 | 994.900 | 1.225 | 5.049 | 53.423 | 71.230 |
| 10 | | | | | |

Figure – Niveau de rétention : 750.000€.