ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2020-2021 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 8
THÉORÈME DE GIRSANOV

Exercice 1 : Changement de Probabilité et Théorème de Girsanov.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités filtré. Soit B un mouvement Brownien standard. On pose

$$L_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

pour $t < T$ et θ une fonction déterministe dans $L^2([0,t])$ pour tout $t \geq 0$ $(= L^2_{loc})$.

1. Montrer que L est une martingale.
2. Justifier comment L peut définir un changement de probabilité.
3. Calculer $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t L_T]$ en fonction de t et de θ.
4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t \exp(B_t)]$.

Exercice 2 : Probabilité neutre au risque.

On considère deux actifs : un **actif sans risque** $(S_t^0)_{0\leq t\leq T}$ de taux de rendement $r > 0$ et un **actif risqué** $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ de taux de rendement $\mu > 0$ et de volatilité $\sigma > 0$. On fait l'hypothèse que le taux d'actif risqué évolue selon la formule de Black-Scholes. Autrement dit :

$$dS_t^0 = S_t^0\, r\, dt\,,$$

et :

$$dS_t = S_t\, (\mu\, dt + \sigma\, dB_t)\ ,$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard. On appelle actif risqué **actualisé** le processus

$$\left(\widetilde{S}_t\right)_{0\leq t\leq T} := \left(\frac{S_t}{S_t^0}\right)_{0\leq t\leq T}.$$

Pour simplifier les expressions, on suppose que $S_0^0 = S_0 = 1$.

1. Calculez S_t^0.
2. En appliquant la formule d'Itô à $\ln(S_t)$, montrez que $S_t = \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\right)$.
3. Donnez l'équation stochastique satisfaite par $\widetilde{S}_t$.

4. On note $\mathbb{P}$ la probabilité sous-jacente (sous-laquelle $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien). Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité définie sur $\mathcal{F}_T$ par
$$d\mathbb{Q} = \exp\left(\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 T\right) d\mathbb{P}\,.$$
Que pouvez-vous dire de $(W_t := B_t - \frac{r-\mu}{\sigma}\,t)_{0\leq t\leq T}$ sous $\mathbb{Q}$?
5. Montrez que $(\widetilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$ et écrire $(\widetilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ comme processus d'Itô sous $\mathbb{Q}$ (à l'aide de W_t). On appelle $\mathbb{Q}$ la **probabilité neutre au risque**.

Exercice 3 : Examen 2018

Dans cet exercice, on se propose d'estimer la probabilité qu'un mouvement Brownien reste proche d'une courbe (pas aléatoire) qu'on s'est préalablement donnée. Pour cela, on fixe tout d'abord un $\epsilon > 0$ et une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui est C^2, vérifie $f(0) = 0$ et $f''(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Et on va vouloir estimer la probabilité suivante :
$$\mathbb{P}\left[\forall t \in [0,1],\, |B_t - f(t)| \leq \epsilon\right]\,.$$
Bien sûr, B est un mouvement Brownien (standard, issu de 0). Le but est de comparer cette quantité à la quantité (plus simple à estimer) :
$$\mathbb{P}\left[\forall t \in [0,1],\, |B_t| \leq \epsilon\right]\,.$$

1. On note $X_t = \int_0^t -f'(s)dB_s$. Expliquez pourquoi le processus $\left(Z_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t f'(s)^2 ds)\right)_{t\geq 0}$ est une martingale.
2. Rappelez le théorème de Girsanov.
3. On note Q la mesure de probabilité définie sur la tribu $\mathcal{F}_1$ (la tribu de tout ce qui se passe avant le temps 1) et de densité Z_1 par rapport à $\mathbb{P}$. Que pouvez-vous dire du processus $(\widetilde{B}_t = B_t + f(t))_{t\in[0,1]}$ sous Q ?
4. En déduire que :
$$\mathbb{P}\left[\forall t \in [0,1],\, |B_t - f(t)| \leq \epsilon\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\{\forall t\in[0,1],\,|B_t|\leq\epsilon\}} Z_1\right]\,.$$
5. En appliquant la formule d'Itô, montrez que :
$$f'(t)B_t = -X_t + \int_0^t B_s f''(s)ds\,.$$
6. En vous rappelant que f'' est positive, déduisez-en que, sous l'événement $\{\forall t \in [0,1],\, |B_t| \leq \epsilon\}$, on a :
$$Z_1 \leq \exp\left(\epsilon\left(|f'(1)| + \int_0^1 f''(t)dt\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2 dt\right)\,.$$
7. Application dans le cas $f(t) = at^2$ pour un certain $a > 0$. Montrez que :
$$\mathbb{P}\left[\forall t \in [0,1],\, |B_t - at^2| \leq \epsilon\right] \leq \exp\left(-\frac{2a^2}{3} + 4a\epsilon\right)\mathbb{P}\left[\forall t \in [0,1],\, |B_t| \leq \epsilon\right]\,.$$

Exercice 1 : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré. B un mvt Brownien standard

On pose $L_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s \, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \, ds\right)$.

1) $L_t = \mathcal{E}_t(\theta * B)$ est l'exponentielle de Doléans-Dade de $\theta * B$ i.e solution de $dL_t = L_t \theta_t dB_t$

Il s'agit donc d'une martingale locale.

Pour montrer que c'est une vraie martingale, on peut utiliser la condition de Novikov

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)\right] = \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right) \quad \text{car } \theta \text{ déterministe}$$

$$< \infty \quad \text{car } \theta \in \mathcal{L}^2_{loc}$$

Comme ceci est valable $\forall t \geq 0$, on a alors $\underline{(L_t)_{t\geq 0} \text{ est une martingale}}$

2) L peut définir un changement de proba en définissant la mesure $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_T$ par

$$\forall A \in \mathcal{F}_T, \ \mathbb{Q}(A) = \int_A L_T(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}_\mathbb{P}[1_A L_T]$$

(on note $d\mathbb{Q} = L_T d\mathbb{P}$)

Justifions qu'il s'agit bien d'une mesure de proba.

* $\mathbb{Q}$ est bien positive car $L_T = \exp\left(\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right) > 0$

* $\mathbb{Q}(\Omega) = \mathbb{E}_\mathbb{P}(L_T) \underset{\substack{\text{car } L_t \text{ est une} \\ \text{martingale}}}{=} \mathbb{E}_\mathbb{P}(L_0) = \mathbb{E}[\exp(0)] = 1$.

* Pour tous évènements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 2 à 2 disjoints, on a

$$\mathbb{Q}\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} 1_{A_n} L_T\right) \underset{\substack{\text{Thm de CV} \\ \text{Monotone}}}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{E}_\mathbb{P}(1_{A_n} L_T) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{Q}(A_n)$$

Donc $\mathbb{Q}$ définit bien un changement de probabilité

Remarques : $\forall A \in \mathcal{F}_T, \ \mathbb{Q}(A) = \int_A L_T(\omega) \, d\mathbb{P}(\omega) = \mathbb{E}_\mathbb{P}[1_A L_T]$

Cela est équivalent à dire que pour toute va Z $\mathcal{F}_T$-mesurable, $\mathbb{E}_\mathbb{Q}(Z) = \mathbb{E}_\mathbb{P}(L_T Z)$.

De plus, comme $(L_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, on a que $\forall t \in [0,T]$, pour toute va Z $\mathcal{F}_t$-mesurable

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[Z] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[L_t Z]$$

En effet, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(L_T Z)$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T Z | \mathcal{F}_T]]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T | \mathcal{F}_T] Z] \quad \text{car } Z \text{ est } \mathcal{F}_T\text{-mesurable}$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_t Z] \quad \text{car } L \text{ est une } \mathcal{F}_t \text{ martingale.}$$

En particulier, on a donc que si on prend un autre horizon de temps $T' < T$, la mesure $\mathbb{Q}'$ définie par $d\mathbb{Q}' = L_{T'} d\mathbb{P}$ coïncide avec la mesure restreinte $\mathbb{Q}_{|\mathcal{F}_{T'}}$.

3) Théorème de Girsanov :

Pour tout θ bon processus local qui vérifie la condition de Novikov, le processus

$$\tilde{B} := \left(B_t - \int_0^t \theta_s \, ds\right)_{0 \le t \le T} \quad \text{est un mvt Brownien sous la mesure } \mathbb{Q}$$

définie par le changement de probabilité $d\mathbb{Q} = L_T d\mathbb{P}$ avec $L_T = \exp\left(\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right)$

On a donc

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t L_T] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_t]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[B_t - \int_0^t \theta_s ds\right] + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^t \theta_s ds\right]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{B}_t] + \int_0^t \theta_s ds \quad \text{car } \theta \text{ est déterministe}$$

D'après le thm de Girsanov, $\tilde{B}$ est un $\mathbb{Q}$-MB donc $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{B}_t] = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t L_T] = \int_0^t \theta_s ds.$$

4) D'après les remarques, comme $(L_t)_{0 \le t \le T}$ est une martingale, on a $\forall t \le T$, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t L_T] = \mathbb{E}[B_t L_t]$

D'après la quest° 3, on en déduit que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[B_t \exp\left(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)\right] = \int_0^t \theta_s ds.$$

Prenons $\theta \equiv 1$. On obtient $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t \exp(B_t - \frac{1}{2}t)] = t$

Donc $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t \exp(B_t)] = t \exp(\frac{t}{2})$

Exercice 2 :

$$dS_t^0 = S_t^0 r\,dt$$

et $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$

$(\tilde{S}_t)_{0\leq t\leq T} := \left(\dfrac{S_t}{S_t^0}\right)_{0\leq t\leq T}$ On suppose $S_0^0 = S_0 = 1$

1) $\begin{cases} dS_t^0 = S_t^0 r\,dt \\ S_0^0 = 1 \end{cases}$

Il s'agit d'une ED linéaire d'ordre 1 dont la solut° est donnée par :

$$S_t^0 = e^{rt}$$

Rappel : Les solut° de l'équat° homogène $(H) : y' + a(x)y = 0$ avec a fact° continue sur I sont $\{\lambda e^{-A} \mid \lambda \in \mathbb{K}\}$ A primitive de a

Donc ici $(H) : dS_t^0 + (-r)S_t^0\,dt = 0$

$$\Rightarrow S_t^0 = \lambda e^{rt}$$ Comme $S_0^0 = 1$
$$\Rightarrow S_t^0 = e^{rt}.$$

2) On applique la $1^{ère}$ formule d'Itô à $f(S_t)$ avec $f(x) = \ln(x)$ qui est C^2.

On a $\dfrac{\partial f(x)}{\partial x} = \dfrac{1}{x}$ et $\dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} = \dfrac{-1}{x^2}$

De plus, comme $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dB_t)$, on en déduit que

$$d\langle S\rangle_t = S_t^2 \sigma^2 dt$$

Par la formule d'Itô, on a

$$\begin{aligned}
\ln(S_t) &= \ln(S_0) + \int_0^t \frac{1}{S_u}\,dS_u + \frac{1}{2}\int_0^t -\frac{1}{S_u^2}\,d\langle S\rangle_u \\
&= 0 + \int_0^t \frac{1}{S_u} S_u(\mu du + \sigma dB_u) - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{S_u^2} S_u^2 \sigma^2 du \\
&= \mu t + \sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}
\end{aligned}$$

On en déduit que la solut° de l'EDS est donnée par :

$$S_t = e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t}$$

3) On applique la 2e formule d'Itô à $\tilde{S}_t = f(S_t, t)$ avec $f(x,t) = xe^{-rt}$ qui est C^1 p/r à t et C^2 p/r à x.

On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-rt}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0$

$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -rx\,e^{-rt}$

Par la formule d'Itô, on a

$$d\tilde{S}_t = e^{-rt} dS_t - rS_t e^{-rt} dt$$

$$= e^{-rt} S_t(\mu dt + \sigma dB_t) - rS_t e^{-rt} dt$$

$$= \tilde{S}_t(\mu dt + \sigma dB_t) - r\tilde{S}_t dt$$

D'où $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t)$

4) On effectue le changement de variable $dQ = L_T dP$ avec

$L_T = \exp\left(\frac{r-\mu}{\sigma} B_T - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 T\right)$ (ce qui correspond à $\theta_s \equiv \frac{r-\mu}{\sigma}$ qui satisfait bien la condit° de Novikov)

On en déduit, d'après le théorème de Girsanov que

$$\left(W_t := B_t - \frac{r-\mu}{\sigma} t\right)_{0 \le t \le T} \text{ est un mouvement Brownien sous } Q.$$

5) D'après la question 3, on a

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t((\mu - r)dt + \sigma dB_t)$$

$$= \sigma\tilde{S}_t\left(dB_t - \frac{r-\mu}{\sigma} dt\right)$$

$$= \sigma\tilde{S}_t\, dW_t$$

Or, d'après la question 4, W est un mouvement Brownien sous Q

On en déduit que le drift de $\tilde{S}_t$ sous la mesure Q est nul et donc

$$\tilde{S} \text{ est une martingale locale sous } Q$$

Son écriture comme processus d'Itô est donnée par

$$\tilde{S}_t = 1 + \int_0^t \sigma\tilde{S}_u dW_u = 1 + \int_0^t \sigma \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2}u + \sigma W_u\right) dW_u$$

Car la solut° de $d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dW_t$ est donnée par $\exp(-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma W_t)$ d'après 2)

On peut montrer que $\tilde{S}$ est une vraie martingale car $\tilde{S}_t = \mathcal{E}(\sigma * W)$ est une martingale de Doléans-Dade avec un processus $\theta \equiv \sigma$ qui vérifie la condition de Novikov sous la mesure $\mathbb{Q}$.

$(\tilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$.

$\tilde{S}$ $\mathbb{Q}$ martingale $\Leftrightarrow$ en moyenne, actif risqué et sans risque se valent
$\Leftrightarrow$ probabilité neutre au risque.

Exercice 3:

1) On note $X_t = \int_0^t -f'(s) dB_s$ où $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ C^2 qui vérifie $\begin{cases} f(0) = 0 \\ f''(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0,1]. \end{cases}$

$\left(Z_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t f'(s)^2 ds\right)\right)_{t \geq 0}$

On a que $Z_t = \mathcal{E}_t(X)$ est une exponentielle de Doléans-Dade avec $X = (-f') * B$.
donc est une martingale locale.

D'après le théorème de Novikov, il suffit de mq $\mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2}\int_0^t f'(s)^2 ds)] < \infty$ $\forall t$ pour mq Z_t est une martingale.

Or, f' est déterministe, donc cela revient seulement à dire que $\int_0^t f'(s)^2 ds < \infty$ $\forall t$, ce qui est le cas par exemple car $(f')^2$ est continue.

Donc $\underline{Z \text{ est une martingale}}$.

2) **Théorème de Girsanov:**

Soit T un horizon fini et soit $(\theta_t)_{t \in [0,T]}$ un bon processus local vérifiant la condition de Novikov.

Soit Z la martingale définie par $Z_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$ $\forall t \in [0,T]$ et soit $\mathbb{Q}_T$ la mesure de probabilité définie sur $\mathcal{F}_T$ par $\mathbb{Q}_T(\omega) = Z_T(\omega) \mathbb{P}(d\omega)$ (où $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ est la filtrat° naturelle de B).

Alors, $\left(B_t - \int_0^t \theta_s ds\right)_{0 \leq t \leq T}$ est un mvt Brownien sous la mesure $\mathbb{Q}_T$.

3) D'après le thm de Girsanov avec $T=1$ et $(\theta_r = -f'(r))_{r\in[0,1]}$ (qui est bien un bon processus local vérifiant la condit° de Novikov d'après la quest° 1),

le processus $\left(B_r - \int_0^r (-f'(s))ds\right)_{0\le r\le 1}$ est un mouvement Brownien sous la mesure $\mathbb{Q}$

Or, le théorème fondamental de l'analyse implique que

$$-\int_0^r (-f'(s))ds = f(r) - f(0) = f(r) \quad (\text{car } f(0)=0)$$

Donc, $(\widetilde{B}_r = B_r + f(r))_{r\in[0,1]}$ est un mouvement Brownien sur $\mathbb{Q}$.

4) Comme B sous $\mathbb{P}$ a la m̂ loi que $\widetilde{B}$ sous $\mathbb{Q}$, on a

$$\mathbb{P}(\forall r\in[0,1], |B_r - f(r)| \le \varepsilon] = \mathbb{Q}(\forall r\in[0,1], |\widetilde{B}_r - f(r)| \le \varepsilon)$$

Or $\widetilde{B}_r - f(r) = B_r$ et $\mathbb{Q}$ a pour densité Z_1 par rapport à $\mathbb{P}_{|\mathcal{F}_1}$ donc :

$$\begin{aligned}\mathbb{Q}(\forall r\in[0,1], |\widetilde{B}_r - f(r)| \le \varepsilon) &= \mathbb{Q}(\forall r\in[0,1], |B_r| \le \varepsilon) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\{\forall r\in[0,1], |B_r|\le\varepsilon\}}] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{\{\forall r\in[0,1], |B_r|\le\varepsilon\}} Z_1]\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{P}(\forall r\in[0,1], |B_r - f(r)| \le \varepsilon) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{\{\forall r\in[0,1], |B_r|\le\varepsilon\}} Z_1]$

5) On va applique la 2e formule d'Itô à $g : (x,r) \mapsto x f'(r)$ et au couple de processus d'Itô (r, B_r) (ce qui est possible car g est C^1 sur $\mathbb{R}\times[0,1]$ et C^2 en la 1ère coordonnée).

En utilisant que $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$ on obtient

$$\begin{aligned} d(f'(r)B_r) &= \frac{\partial g}{\partial r}(r,B_r)dr + \frac{\partial g}{\partial x}(r,B_r)dB_r \\ &= f''(r)B_r dr + f'(r)dB_r \end{aligned}$$

Et donc, $f'(r)B_r = f'(0)B_0 + \int_0^r f''(s)B_s ds + \int_0^r f'(s)dB_s$

$$= \int_0^r f''(s)B_s ds - X_r \qquad \left(X_r = \int_0^r -f'(s)dB_s\right)$$

6) D'après la quest° précédente on a :

$$Z_1 = \exp\left(\int_0^1 f''(t) B_t dt - f'(1)B_1 - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2 dt\right).$$

Car $Z_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t f'(s)^2 ds\right)$
$= \exp\left(\underbrace{\int_0^t B_s f''(s) ds - f'(t)B_t}_{X_t} - \frac{1}{2}\int_0^t f'(s)^2 ds\right)$

Or, exp est croissante, donc

$$Z_1 \leq \exp\left(\left|\int_0^1 f''(t) B_t dt - f'(1)B_1\right| - \frac{1}{2}\int_0^t f'(t)^2 dt\right)$$
$$\leq \exp\left(\int_0^1 f''(t)|B_t| dt + |f'(1)||B_1| - \frac{1}{2}\int_0^t f'(t)^2 dt\right)$$

(on a utilisé ici que $f'' \geq 0$). Et donc, sur l'événement $\{\forall t \in [0,1], |B_t| \leq \varepsilon\}$,

$$Z_1 \leq \exp\left(\varepsilon\left(\int_0^1 f''(t) dt + |f'(1)|\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2 dt\right).$$

7) D'après les questions précédentes (et comme on a bien f C^2, et vérifiant $f''_{|[0,1]} \geq 0$ et $f(0)=0$)

$$\mathbb{P}(\forall t \in [0,1], |B_t - f(t)| \leq \varepsilon) \leq \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\{\forall t \in [0,1], |B_t| \leq \varepsilon\}} \exp\left(\varepsilon\left(\int_0^1 f''(t)dt + |f'(1)|\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2 dt\right)\right]$$

Or ici $f(t) = at^2$ $(a>0)$

$$\Rightarrow \int_0^1 f''(t) dt + |f'(1)| = f'(1) - f'(0) + |f'(1)| = 2a - 0 + 2a = 4a$$

et $\frac{1}{2}\int_0^t f'(t)^2 dt = 2a^2 \int_0^1 t^2 dt = \frac{2a^2}{3}$

D'où

$$\mathbb{P}(\forall t \in [0,1], |B_t - at^2| \leq \varepsilon) \leq \exp\left(-\frac{2a^2}{3} + 4a\varepsilon\right)\mathbb{P}(\forall t \in [0,1], |B_t| \leq \varepsilon).$$