

## EXAMEN DE DEUXIÈME SESSION

Modélisation Charge-Sinistre- 2019-2020  
Pierre-O Goffard

**Instructions:** On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils électroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.
- Document autorisé: Une feuille recto-verso manuscrite.

Question:	1	2	3	Total
Points:	0	6	6	12
Score:				

### Une loi binomiale mélange beta

1. Sur une période d'exercice donnée, le nombre de sinistres est modélisé par une variable aléatoire de loi  $N \sim \text{Binomial}(n, \Theta)$  où  $\Theta \sim \text{Beta}(a, b)$ . On rappelle que la loi de probabilité d'une variable aléatoire N de loi binomiale  $\text{Binomial}(n, p)$  est donnée par

$$\mathbb{P}(N = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad k = 0, \dots, n.$$

On rappelle que la loi de probabilité d'une variable aléatoire  $\Theta \sim \text{Beta}(a, b)$  admet une densité

$$f_{\Theta}(\theta) = \frac{\theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}}{B(a, b)} \mathbb{I}_{[0,1]}(\theta),$$

par rapport à la mesure de Lebesgue. La fonction beta est définie par

$$B(a, b) = \int_0^1 u^{a-1} (1-u)^{b-1} du.$$

- (a) Donner la loi de probabilité de  $N$  en fonction de la fonction beta.

**Solution:**

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N = k) &= \int_0^1 \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k} \frac{\theta^{a-1} (1-\theta)^{b-1}}{B(a,b)} d\theta \\ &= \binom{n}{k} \frac{B(k+a, n-k+b)}{B(a,b)}\end{aligned}$$

pour  $k = 0, \dots, n$ .

- (b) Donner une expression de
- $\mathbb{E}(N)$
- en fonction de
- $a, b$
- , et
- $n$
- .

Indications: La fonction beta s'exprime en fonction de la fonction gamma de la façon suivante

$$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$$

On rappelle que la fonction gamma est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad z > 0.$$

et vérifie en particulier  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ .**Solution:**  $\mathbb{E}(N) = \mathbb{E}\mathbb{E}(N|\Theta)) = n\mathbb{E}(\Theta) = n\frac{a}{a+b}$ 

- (c) Calculer la variance
- $V(N)$
- .

**Solution:**

$$\begin{aligned}V(N) &= E(V(N|\Theta)) + V(E(N|\Theta)) \\ &= nE(\Theta(1-\Theta)) + n^2V(\Theta) \\ &= n \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)} + n^2 \frac{ab}{(a+b+1)(a+b)^2} \\ &= \frac{nab(a+b+n)}{(a+b+1)(a+b)^2}.\end{aligned}$$

- (d) Donner une méthode d'estimation pour les paramètres de
- $N$
- , en supposant que le paramètre
- $n$
- soit connu. Détailler la mise en oeuvre.

**Solution:** Comme on vient de calculer la moyenne et la variance, on propose d'estimer  $a$  et  $b$  via la méthode des moments. On obtient

$$\hat{a} = \frac{\bar{N}(n-\bar{N}) - S_N^2}{n(S_N^2/\bar{N} - 1) + \bar{N}}, \hat{b} = \frac{(\bar{N}(n-\bar{N}) - S_N^2)(n-\bar{N})}{\bar{N}(n(S_N^2/\bar{X} - 1) + \bar{N})}$$

où  $\bar{N}$  et  $S_N^2$  désigne la moyenne et la variance empirique respectivement.

- (e) La loi de
- $N$
- appartient-elle à la famille de Panjer?

**Solution:** Non, il ne s'agit ni de la loi binomial, binomial négative ou Poisson.

2. Sur une période d'exercice donnée, la charge totale de sinistres est modélisée via un modèle collectif

$$X = \sum_{k=1}^N U_k,$$

où le nombre de sinistres est une variable aléatoire de comptage de fonction de masse donnée par

$$\mathbb{P}(N = k) = p(1 - p)^{k-1}, \quad k \geq 1$$

et les montants de sinistres sont iid de loi exponentielle de densité de probabilité

$$f_U(x) = \frac{e^{-x/\beta}}{\beta} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x).$$

- (a) (2 points) Donner la moyenne et la variance de  $X$ .

**Solution:**

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(N)\mathbb{E}(U) = \frac{\beta}{p}.$$

et

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(N)\mathbb{V}(U) + \mathbb{V}(N)\mathbb{E}(U)^2 = \frac{\beta^2}{p^2}.$$

- (b) (1 point) Donner la fonction génératrice des moments de  $X$ . Vous devez détailler les calculs.

**Solution:**

$$M_X(s) = \mathbb{E}(e^{sX}) = G_N(M_U(s)) = \frac{1}{1 - \frac{\beta s}{p}}$$

- (c) (2 points) Donner la loi de probabilité de  $X$ .

**Solution:** Il s'agit d'une loi exponentielle de paramètre  $\beta/p$  par identification avec la fonction génératrice des moments calculer à la question précédente. Si on ne remarque pas ça, alors la densité de  $X$  s'écrit

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1 - p)^{k-1} f_U^{*k}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} p(1 - p)^{k-1} \frac{e^{-x/\beta} x^{k-1}}{\beta^k k!} = \frac{p}{\beta} e^{-xp/\beta},$$

ou  $f_U^{*k}$  est le produit de convolution de rang  $k$  de  $f_U$  avec elle-même, il s'agit donc de la densité de la loi gamma de paramètres  $k$  et  $\beta$ .

- (d) (1 point) Supposons que nous n'observons que les charges totales de sinistres  $x_1, \dots, x_t$  et les nombres de sinistres  $n_1, \dots, n_t$  associées à  $t$  périodes d'exercice. Proposer une méthode d'estimation des paramètres  $p$  et  $\beta$  basée sur les observations  $x_1, \dots, x_t$  et  $n_1, \dots, n_t$ . Expliquer la mise en oeuvre, donner l'expression des estimateurs si possible.

**Solution:** Le plus simple est de commencer par estimer  $p$  en utilisant les nombres de sinistre  $n_1, \dots, n_t$ , avec la méthode des moments, il vient  $\hat{p} = \left(\frac{1}{t} \sum_{s=1}^t n_s\right)^{-1}$ , puis estimer  $\beta$  via la méthode des moments avec  $\hat{\beta} = \hat{p} \frac{1}{t} \sum_{s=1}^t x_s$ .

3. Les montants de sinistres sont modéliser par une loi gamma  $\text{Gamma}(k, m)$ ,  $k, m > 0$  de densité de probabilité

$$f_{\text{Gam}}(x) = \frac{e^{-x/m} x^{k-1}}{m^k \Gamma(k)} \mathbb{I}_{(0,+\infty)}(x),$$

On rappelle que la fonction gamma est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{z-1} dx.$$

et vérifie en particulier  $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ .

- (a) (1 point) Donner l'espérance et la variance des montants de sinistres en fonction de  $k$  et  $m$ .

**Solution:**  $\mathbb{E}(U) = km$  et  $\mathbb{V}(U) = km^2$

- (b) (1 point) Donner la fonction génératrice des moments de la loi des sinistres.

**Solution:**  $M_U(s) = \left(\frac{1}{1-ms}\right)^k$

- (c) (2 points) Proposer une méthode d'estimation pour les paramètres  $k$  et  $m$ . Donner l'expression des estimateurs pour un échantillon de montant de sinistres  $u_1, \dots, u_n$ .

**Solution:** On utilise la méthode des moments

$$\hat{k} = \frac{\bar{U}^2}{S_U^2}, \quad \hat{m} = \frac{S_U^2}{\bar{U}}$$

où  $\bar{U}$  et  $S_U^2$  désigne la moyenne et la variance empirique de l'échantillon de montants de sinistres

- (d) (2 points) Pour affiner la modéliser du montant des sinistres, on associe à la loi gamma une loi de Pareto de densité

$$f_{\text{Par}}(x) = \begin{cases} \frac{\theta^\alpha \alpha}{x^{\alpha+1}}, & x > \theta, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

pour modéliser les sinistres plus conséquents dans le cadre d'un modèle composite. Les conditions de régularité de la densité  $f$  du modèle composite impose de fixer la valeur de certains paramètres. Donner l'expression du paramètre  $m$  (de la loi gamma) et du paramètre de mélange  $r$  du modèle composite en fonction des autres paramètres  $k, \alpha$  et  $\theta$ , de la fonction de répartition  $F_{\text{Gam}}$  d'une loi gamma de paramètres  $k$  et  $m$  et la fonction gamma  $\Gamma$ .

**Solution:** La densité du modèle composite Gamma-Pareto est donnée par

$$f(x) = \begin{cases} r \frac{f_{\text{gam}}(x)}{F_{\text{Gam}}(\theta)} & x \leq \theta \\ (1-r)f_{\text{Par}}(x) & x > \theta \end{cases}$$

les conditions de régularité  $f(\theta^-) = f(\theta^+)$  et  $f'(\theta^-) = f'(\theta^+)$  entraîne

$$\frac{r}{1-r} = \frac{f_{\text{Par}}(\theta)F_{\text{Gam}}(\theta)}{f_{\text{Gam}}(\theta)}$$

de plus  $f'_{Gam}(x) = f_{\text{Gam}}(x) \left[ \frac{k-1}{x} - \frac{1}{m} \right]$  et  $f'_{Par}(x) = -\frac{\alpha+1}{x} f_{\text{Par}}(x)$ . On en déduit que

$$m = \frac{\theta}{k + \alpha}, \quad r = \frac{\alpha \Gamma(k) F_{\text{Gam}}(\theta) e^{k+\alpha} (k + \alpha)^{-k}}{1 + \alpha \Gamma(k) F_{\text{Gam}}(\theta) e^{k+\alpha} (k + \alpha)^{-k}}.$$

## FORMULAIRE

Nom	abbrev.	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(X)$	FGM
Binomiale	Bin( $n, p$ )	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ pour $k = 0, \dots, n$	$np$	$np(1-p)$	$[(1-p) + pe^t]^n$
Poisson	Pois( $\lambda$ )	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour $k = 0, 1, 2, \dots$	$\lambda$	$\lambda$	$\exp(\lambda(e^t - 1))$
Binomiale Négative	$\mathcal{NB}(\alpha, p)$	$\frac{\Gamma(\alpha+k)}{\Gamma(k+1)\Gamma(\alpha)} (1-p)^\alpha p^k$	$\frac{\alpha p}{1-p}$	$\frac{\alpha p}{(1-p)^2}$	$\left(\frac{1-p}{1-pe^t}\right)^\alpha$ pour $t < -\ln(p)$
Uniforme	Unif( $a, b$ )	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponentielle	Exp( $\lambda$ )	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ pour $t < \lambda$
Gamma	Gamma( $\alpha, \beta$ )	$\begin{cases} \frac{\beta^\alpha t^{\alpha-1} e^{-\beta t}}{\Gamma(\alpha)} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{\alpha}{\beta}$	$\frac{\alpha}{\beta^2}$	$\left(\frac{\beta}{\beta-t}\right)^\alpha$ pour $t < \beta$
Normale	N( $\mu, \sigma^2$ )	$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	$\mu$	$\sigma^2$	$e^{\mu t} e^{\sigma^2 t^2/2}$

On rappelle la définition de la fonction Gamma avec

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} x^{z-1} e^{-x} dx.$$

On note que pour  $z \in \mathbb{N}$  alors  $\Gamma(z) = (z-1)!$ .