Contrôle Partiel : Jeux et Information

ISFA

Jeudi 15 Décembre

1h30

Le sujet est recto-verso.
Il est attendu que les réponses soient justifiées de façon rigoureuse sauf en cas d'indication contraire.
Le barême est donné à titre indicatif.

Questions de cours (3 pts)

1. Donnez la définition d'une stratégie dominante. (1pt)
2. Que signifie pour un jeu d'être à information parfaite? Que signifie pour un jeu d'être à information complète? (1 pt)
3. En général, un équilibre de Nash est-il la meilleure chose à faire pour les joueurs d'un jeu simultané? Sera-t-il toujours joué? Justifiez brièvement.(1 pt)

Exercice 1: Jeu d'achat d'un appartement (4 pts)

Un couple décide d'acheter un appartement avec place de parking dans un nouveau bâtiment. Quatre options sont possibles : premier ou second étage pour l'appartement et gauche ou droite pour la place de parking. Chaque membre du couple envoie un message à l'agent immobilier de manière simultanée et indépendante : le partenaire 1 choisit l'étage de l'appartement et le partenaire 2 choisit la position de la place de parking. Les paiements sont donnés par la matrice suivante :

$J1$ \ $J2$	Gauche (G)	Droite (D)
Premier étage (Pr)	(0,6)	(10,10)
Second étage (S)	(9,6)	(4,0)

1. Trouvez les équilibres de Nash en stratégie pure. (1 pt)
2. Indiquez l'ensemble des stratégies mixtes des deux joueurs. (1 pt)
3. Trouvez l'équilibre de Nash en stratégie mixte. (2 pts)

Exercice 2: Le choix des vacances (4 pts)

Soit un jeu séquentiel à deux joueurs ($J1$ et $J2$). $J1$ est le premier à appeler l'agence de voyage pour décider de la destination de ses vacances, soit il choisit d'aller à la plage (P) soit au ski (S). Ensuite c'est $J2$ qui appelle l'agence.

- Chaque joueur ignore où part l'autre joueur.
- $J2$ ne veut pas partir seul, il ajoutera 1 à son utilité si il est avec $J1$.
- $J1$ ne veut absolument pas partir avec $J2$, ainsi, si ils sont ensemble en vacances, $J1$ aura une utilité de -1. Peu importe si il est à la plage ou la montagne.
- $J1$ préfère la plage, anisi il ajoutera 1 à son utilité si il va à la plage sans $J2$.
- $J2$ adore la montagne mais est allergique à l'eau de mer ainsi il ajoutera 1 à son utilité si il va au ski et soustraiera 1 à son utilité si il va à la plage.

1. Dessinez la forme extensive du jeu. (2 pts)

2. Trouvez l'équilibre de Nash en sous-jeu parfait (une justification graphique claire sera suffisante). (1 pt)

3. Supposons que c'est l'agence qui choisit la destination du $J2$ avec probabilité p pour la plage et $1-p$ pour le ski. Éxiste-t-il un équilibre de Nash Bayésien pour tout $p \in [0,1]$? Si oui, le donner en fonction de p ? Est-ce qu'il est parfait? (1 pt)

Exercice 3: Relation d'emploi (9 pts + 1 Bonus)

On considère une relation contractuelle entre un agent et un principal, dans laquelle deux résultats sont réalisables : 100 (succès) ou 50 (échec). Les probabilités de succès ($p_S(e)$) ou d'échec ($p_E(e)$) dépendent du niveau d'effort fourni par l'agent, qui peut prendre 2 valeurs : $e = 1$ ou 2

Effort(e)	100 ($p_S(e)$)	50 ($p_E(e)$)
1	1/3	2/3
2	2/3	1/3

La fonction d'utilité de l'agent dépend de son salaire et de son effort, et est telle que :

$$u(w,e) = \sqrt{w} - v(e) \text{ , où } v(e) = e^2$$

Son utilité de réserve $\bar{u}$ vaut 5.

1. Supposons que l'information est symétrique, le principal connait l'effort de l'agent . Dans ce cas, le principal est averse au risque avec comme utilité $B(w) = ln(1+w)$.
   (a) Donnez le programme de maximisation du contrat optimal pour tout niveau d'effort. (2 pts)
   (b) Calculez le profit espéré pour chaque niveau d'effort, et identifiez le contrat d'équilibre.(penser à la saturation des contraintes) (2 pts)

2. On suppose maintenant qu'il y a asymétrie d'information : l'employeur n'observe pas l'effort de l'agent. Dans ce cas, le principal est neutre au risque.
   (a) Justifiez pourquoi nous pouvons remplacer B par l'identité dans le programme de maximisation. (1 pt)
   (b) Donnez le programme de maximisation du contrat optimal pour les deux niveaux d'effort en indiquant le nom des conditions. (2 pts)
   (c) Résolvez le programme de maximisation du contrat optimal pour le niveau d'effort $e = 2$. (2 pts)
   (d) Comment choisir le contrat d'équilibre? Qui va le choisir? Pouvons nous savoir l'effort que va fournir l'agent après signature du contrat? (ici on suppose que $B(w) = 2w$) (1pt)

Question de cours :

1) Une stratégie dominante $s_i^* \in S_i$ est tq $\forall s_i \in S_i, \forall s_{-i} \in S_{-i}, u(s_i^*, s_{-i}) > u(s_i, s_{-i})$

2) Info parfaite : Savoir ce que l'autre joue

3) Non

Exercice 1: Jeu d'achat d'un appartement (4 pts)

Un couple décide d'acheter un appartement avec place de parking dans un nouveau bâtiment. Quatre options sont possibles : premier ou second étage pour l'appartement et gauche ou droite pour la place de parking. Chaque membre du couple envoie un message à l'agent immobilier de manière simultanée et indépendante : le partenaire 1 choisit l'étage de l'appartement et le partenaire 2 choisit la position de la place de parking. Les paiements sont donnés par la matrice suivante :

J1 \ J2	Gauche (G)	Droite (D)
Premier étage (Pr)	(0,6)	(10,10)
Second étage (S)	(9,6)	(4,0)

1. Trouvez les équilibres de Nash en stratégie pure. (1 pt)
2. Indiquez l'ensemble des stratégies mixtes des deux joueurs. (1 pt)
3. Trouvez l'équilibre de Nash en stratégie mixte. (2 pts)

Exercice 1 :

1)

J1 \ J2	Gauche (G)	Droite (D)
Pr	0, 6	10, 10
S	9, 6	4, 0

2 EN car dans les 2 cas

2) $S_1 = \{ p\,Pr + (1-p) S \mid p \in [0,1] \}$

$S_2 = \{ q\,G + (1-q) D \mid q \in [0,1] \}$

3) Pour le J1 :

$* \; u_1(Pr, qG + (1-q)D) = q \times 0 + (1-q) \times 10 = 10 - 10q$

$* \; u_1(S, qG + (1-q)D) = q \times 9 + (1-q) \times 4 = 5q + 4$

$10 - 10q < 5q + 4 \Rightarrow \frac{2}{5} < q$

$$MR_1(q) = \begin{cases} 0 & q > \frac{2}{5} \\ [0,1] & q = \frac{2}{5} \\ 1 & q < \frac{2}{5} \end{cases}$$

$u_2(p\,Pr + (1-p)S, G) = p \times 6 + (1-p) \times 6$
$= 6$

$u_2(p\,Pr + (1-p)S, D) = p \times 10 + (1-p) \times 0$
$= 10p$

$$MR_2(p) = \begin{cases} 0 & p > \frac{3}{5} \\ [0,1] & p = \frac{3}{5} \\ 1 & p < \frac{3}{5} \end{cases}$$

Donc $ENSM = \{ \frac{3}{5} P + \frac{2}{5} S \, ; \, \frac{2}{5} G + \frac{3}{5} D \}$.

Exercice 3:

1) a) $\max \mathbb{E}[B(W_e)]$

$$\begin{cases} W_e = \begin{cases} 100 - w \text{ avec } p_S(e) \\ 50 - w \text{ avec } p_E(e) \end{cases} \\ sc \ u(w,e) \geq \bar{u} \end{cases}$$

$\longrightarrow$ Va. richesse

b) $\frac{\partial u(w,e) - \bar{u}}{\partial w} > 0$ et $\frac{\partial \mathbb{E}[B(W_e)]}{\partial w} < 0$

Donc la contrainte est saturée à l'équilibre $\Rightarrow u(w,e) - \bar{u} = 0$.

$\Rightarrow \sqrt{w} - e^2 - 5 = 0$

$\Rightarrow w = (e^2 + 5)^2$

Donc $w^*(1) = 36 \longrightarrow \Pi^*(1) = \frac{92}{3}$

et $w^*(2) = 81 \longrightarrow \Pi^*(2) = \frac{7}{3}$

2) a) $B'' = 0$

$\Rightarrow \mathbb{E}[B(X)] = B(\mathbb{E}[X])$

$\Rightarrow \underset{\theta}{\text{argmax}} \, \mathbb{E}[B(W_\theta)] \underset{B'>0}{=} \underset{\theta}{\text{argmax}} \, \mathbb{E}[W_\theta]$

b) $W_p = \begin{cases} 100 - w_S & \text{avec } p_S(e) \\ 50 - w_E & \text{avec } p_E(e) \end{cases}$

$W_A = \begin{cases} w_S & p_S(e) \\ w_E & p_E(e) \end{cases}$

$\underset{w_S, w_E}{\max} \, \mathbb{E}[W_p]$

$$sc \begin{cases} \mathbb{E}[u(W_A, e)] \geq \bar{u} \\ \mathbb{E}[u(W_A, e)] \geq \mathbb{E}[u(W_A, \underline{e})] \quad (CI) \end{cases}$$

c) Long

d) C'est le principal qui choisit le contrat d'équilibre, donc

Exercice 3: Relation d'emploi (9 pts + 1 Bonus)

On considère une relation contractuelle entre un agent et un principal, dans laquelle deux résultats sont réalisables : 100 (succès) ou 50 (échec). Les probabilités de succès ($p_S(e)$) ou d'échec ($p_E(e)$) dépendent du niveau d'effort fourni par l'agent, qui peut prendre 2 valeurs : $e = 1$ ou 2

Effort(e)	100 ($p_S(e)$)	50 ($p_E(e)$)
1	1/3	2/3
2	2/3	1/3

La fonction d'utilité de l'agent dépend de son salaire et de son effort, et est telle que :

$$u(w, e) = \sqrt{w} - v(e) \text{ , où } v(e) = e^2$$

Son utilité de réserve $\bar{u}$ vaut 5.

1. Supposons que l'information est symétrique, le principal connait l'effort de l'agent . Dans ce cas, le principal est averse au risque avec comme utilité $B(w) = ln(1 + w)$.
   (a) Donnez le programme de maximisation du contrat optimal pour tout niveau d'effort. (2 pts)
   (b) Calculez le profit espéré pour chaque niveau d'effort, et identifiez le contrat d'équilibre.(penser à la saturation des contraintes) (2 pts)
2. On suppose maintenant qu'il y a asymétrie d'information : l'employeur n'observe pas l'effort de l'agent. Dans ce cas, le principal est neutre au risque.
   (a) Justifiez pourquoi nous pouvons remplacer B par l'identité dans le programme de maximisation. (1 pt)
   (b) Donnez le programme de maximisation du contrat optimal pour les deux niveaux d'effort en indiquant le nom des conditions. (2 pts)
   (c) Résolvez le programme de maximisation du contrat optimal pour le niveau d'effort $e = 2$. (2 pts)
   (d) Comment choisir le contrat d'équilibre? Qui va le choisir? Pouvons nous savoir l'effort que va fournir l'agent après signature du contrat? (ici on suppose que $B(w) = 2w$) (1pt)