© Théo Jalabert

Modèles de durée / Examen du 11 février 2009

Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Corrigé

Problème : quelques propriétés de l'espérance de vie résiduelle

On considère une variable aléatoire T décrivant une durée de vie ou de fonctionnement et on note S et h respectivement la fonction de survie et la fonction de hasard associées.

Question n°1 (0,5 point) : Rappelez le lien entre S et h.

Question n°2 (1 point) : Démontrez que $E(T) = \int_0^{+\infty} S(t)\,dt$

On utilise la démonstration vue en cours en écrivant que $E(T) = \int_0^{\infty} t\,dF(t) = \lim_{u \to +\infty} \int_0^{u} t\,dF(t)$; en intégrant par parties on peut écrire $\int_0^u t\,dF(t) = -\int_0^u t\,dS(t) = -uS(u) + \int_0^u S(t)\,dt$; on voit alors que pour que l'intégrale converge il faut que $\lim_{t \to \infty} tS(t) = 0$ et en passant à la limite on obtient le résultat attendu.

Question n°3 (2 point) : Donner l'expression de $E(T)$ dans le cas d'une loi de Weibull $S(t) = e^{-t^{\alpha}}$.

D'après le résultat ci-dessus $E(T) = \int_0^{+\infty} e^{-x^{\alpha}}\,dx$; on pose $x = u^{1/\alpha}$, $dx = \frac{1}{\alpha} u^{1/\alpha - 1}\,du$, ce qui conduit à $E(T) = \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} u^{\frac{1}{\alpha}-1} e^{-u}\,dx = \frac{1}{\alpha}\Gamma\left(\frac{1}{\alpha}\right)$.

On s'intéresse à la durée de vie résiduelle, conditionnellement au fait d'avoir déjà atteint le temps $x > 0$ et on note $T_x = T \,|\, T > x$, l'égalité étant au sens des distributions.

Question n°4 (1,5 point) : Déterminez les expressions de S_x et h_x les fonctions de survie et de hasard associées à T_x. En déduire l'expression de $E(T_x)$ en fonction de S.

A noter que l'on peut ici préférer travailler avec la définition $T_x = T - x \,|\, T > x$, les résultats ne changent pas fondamentalement, à une translation de x près. En retenant

© Théo Jalabert

cette définition on a $S_x(t) = P(T > x+t | T > x) = \frac{P(T > t+x)}{P(T > x)} = \frac{S(x+t)}{S(x)}$; en revenant à la définition de la fonction de hasard on trouve que $h_x(t) = h(x+t)$. On obtient $E(T_x) = \frac{1}{S(x)} \int_x^{+\infty} S(u)\,du$.

Question n°5 (2 points) : En notant $e_x = E(T_x)$, montrez que $\frac{de_x}{dx} = -1 + h(x)e_x$. Que peut-on en conclure lorsque $h(x)$ est petit ?

On a $\frac{d}{dx}e_x = \frac{-S(x)^2 - \left(\frac{d}{dx}S(x)\right)\int_x^{+\infty} S(u)\,du}{S(x)^2}$, et comme $h(x) = -\frac{d}{dx}\mathbf{ln}\,S(x)$, on a bien l'égalité ci-dessus.

Question n°6 (1,5 points) : Proposez une définition pour l'espérance de vie partielle entre x et $x+h$.

On propose $E(T_{x,h}) = \frac{1}{S(x)} \int_x^{x+h} S(u)\,du$, qui comptabilise le nombre d'année vécues entre x et $x+h$.

Question n°6 (1,5 points) : On se place dans le contexte d'une table de mortalité dans lequel les âges sont discrets et mesurés en années. En discrétisant l'expression $E(T) = \int_0^{+\infty} S(t)\,dt$, justifiez l'écriture classique de l'espérance de vie à la naissance $e_0 = \frac{1}{l_0}\sum_{x>0} l_x$ avec la notation usuelle en assurance vie $l_x = l_0 \times S(x)$.

On a $e = \int_0^{+\infty} S(t)\,dt = \sum_{x=0}^{\infty} \int_x^{x+1} S(u)\,du$; on fait l'hypothèse que la fonction de survie est constante entre deux âges entiers. En choisissant $S(t) = S(x+1)$ sur l'intervalle $[x, x+1[$, on obtient le résultat.

On s'intéresse maintenant à l'impact de la mortalité infantile sur l'espérance de vie à la naissance. Plus précisément, on souhaite comparer deux situations : la situation de référence dans laquelle il n'existe pas de mortalité infantile, $q_x = 0$, $x = 0, \ldots, 10$ et celle où 20 % des enfants meurent avant l'âge d'un an et la moitié l'âge de 11 ans (situation prévalant au 17ème siècle).

© Théo Jalabert

Question n°7 (5 points) : Traduire le niveau de mortalité infantile ci-dessus en donnant des relations liant l_0, l_1 et l_{11}. Comparez dans les deux situations l'espérance de vie à la naissance et l'espérance de vie partielle entre 0 et 11 ans.

La première condition se traduit par $l_1 = 0{,}8 \times l_0$ et la seconde par $l_{11} = 0{,}5 \times l_0$. Sous l'hypothèse de linéarité de la fonction de survie entre ces deux âges, on a $l_{1+x} = \left(0{,}8 - \frac{0{,}8-0{,}5}{10} \times x\right) \times l_0$ et donc :

$$e_{0,11} = \frac{1}{l_0}\sum_{x=1}^{11} l_x = \sum_{x=0}^{10}\left(0{,}8 - 0{,}03 \times x\right) = 11 \times 0{,}8 - 0{,}03 \times \frac{10 \times 11}{2} = 7{,}15$$

alors qu'en l'absence de mortalité infantile on a $e_{0,11} = \frac{1}{l_0}\sum_{x=1}^{11} l_x = \frac{1}{l_0}\sum_{x=1}^{11} l_0 = 11$. Pour mesurer l'impact sur l'espérance de vie totale, il reste à examiner le terme $\frac{1}{l_0}\sum_{x=12}^{\infty} l_x$; comme les taux à partir de 12 ans sont identiques dans les 2 hypothèses, en présence de mortalité infantile, ce terme est égal à la moitié de ce qu'il est en l'absence de cette mortalité.

Question n°8 (5 points) : On revient maintenant dans le cadre d'un modèle continu et on cherche les lois telles que pour tout x réel positif on ait : $e_x = a \times x + b$ (avec $a \geq 0$ et $b > 0$) ; on demande de :

- Calculer $h(x)$.
- Vérifier que pour $x \geq 0$, $S(x) = \left(1 + \frac{a}{b}x\right)^{-(1+1/a)}$.
- Donner l'espérance de T.
- Montrer que si l'on suppose $a < 1$, la variance de T existe et est égale à $b^2 \frac{1+a}{1-a}$.

On trouve facilement $h(x) = \frac{1+a}{ax+b}$. Pour le second point, on pose $\psi(x) = \left(1 + \frac{a}{b}x\right)^{-(1+1/a)}$ pour $x \geq 0$ et on vérifier que $\psi'(x) = -\frac{a+1}{b}\left(1 + \frac{a}{b}x\right)^{-(2+1/a)}$ d'où l'on déduit que $\Rightarrow \frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = -\frac{a+1}{b}\left(1 + \frac{a}{b}x\right)^{-1} = -\frac{a+1}{ax+b} = -h(x)$, ce qui prouve que $S = \psi$.

L'espérance de T s'obtient immédiatement par $E[T] = e(0) = b$. Le calcul de la variance est le suivant : $V[T] = 2\int_0^{\infty} t\,S(t)\,dt - \left\{\mathbf{E}[T]\right\}^2$ et :

© Théo Jalabert

$$\begin{aligned}\int_0^{\infty} t\,S(t)\,dt &= \int_0^{\infty} t\left(1+\frac{a}{b}t\right)^{-(1+1/a)} dt = \int_1^{\infty} \frac{b}{a}(x-1)\,x^{-(1+1/a)}\,\frac{b}{a}\,dx \\ &= \frac{b^2}{a^2}\int_1^{\infty} x^{-1/a} - x^{-1-1/a} dx < +\infty \text{ si } a>1 \\ &= \frac{b^2}{a^2}\left(\frac{a}{1-a}-a\right) = \frac{b^2}{1-a}\end{aligned}$$

d'où l'on déduit $V[X] = 2\frac{b^2}{1-a} - b^2 = b^2\frac{1+a}{1-a}$.

.