Finance mathématique

Chapitre 4 : Evaluation des produits de taux d'intérêts

I - Changement de numéraire

Définition (Numéraire)

Un numéraire est un actif qui ne verse pas de dividende ni de coupon avant sa maturité et dont le prix est strictement positif.

Exemple

Le prix ZC, $P(t,T)$ est un numéraire ainsi que le compte épargne, c-à-d $B_t = e^{\int_0^t r_s ds}$

- Le numéraire permet d'exprimer les prix d'actifs en fonction d'unité de numéraire / actif

Proposition (Changement de numéraire)

S'il existe un numéraire $N = (N_t)_{t \geq 0}$ et une mesure de probabilité Q_N N.P sous laquelle tous les prix exprimés en ce numéraire N, càd $\frac{X}{N}$ avec X un prix, sont dans Q_N martingales.

$$\frac{X_t}{N_t} = \mathbb{E}_{Q_N}\left[\frac{X_T}{N_T} \mid \mathcal{F}_t\right], \quad t < T$$

Alors, pour tout autre numéraire $\Pi = (\Pi_t)_{t \geq 0}$ il existe une autre mesure $Q_\Pi \sim \mathbb{P}$ pour laquelle les prix exprimés (actualisés) en numéraire Π sont des martingales

$$\frac{X_t}{\Pi_t} = \mathbb{E}_{Q_\Pi}\left[\frac{X_T}{\Pi_T} \mid \mathcal{F}_t\right], \quad t < T$$

La mesure Q_Π est définie par sa densité de Radon-Nykodim

$$\left.\frac{dQ_\Pi}{dQ_N}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\Pi_t}{N_t} \cdot \frac{N_0}{\Pi_0} = \rho_t$$

<u>Démonstration</u>

① On montre que $\Pi = (\Pi_t)_{t \geq 0}$ est bien une densité

1.1 Π est une Q_N-martingale

1.2 $\mathbb{E}_{Q_N}(\Pi_t) = 1 \quad \forall t$

1.3 Processus à valeur positive

1.3) Le processus $\rho_t = \frac{\Pi_t}{N_t} \cdot \frac{N_0}{\Pi_0}$ est à valeurs positives car les numéraires le sont.

1.1) η est une martingale $(\mathbb{Q}_N)$ ssi :

$$\eta_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N}[\eta_T \mid \mathcal{F}_t] \quad t<T$$

or $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N}[\eta_T \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N}\left[\frac{\Pi_T}{N_T} \cdot \frac{N_0}{\Pi_0} \mid \mathcal{F}_t\right]$

$$= \frac{N_0}{\Pi_0} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N}\left[\frac{\Pi_T}{N_T} \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{N_0}{\Pi_0} \cdot \frac{\Pi_t}{N_t} = \eta_t$$

1.2) η est une $\mathbb{Q}_N$-martingale

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N}(\eta_t) = \eta_0 = \frac{\Pi_0}{N_0} \cdot \frac{N_0}{\Pi_0} = 1$$

Donc η est bien une densité et $\mathbb{Q}_\Pi$ bien une mesure de probabilité.

2) On montre que pour un actif $X = (X_t)_{t\geq 0}$, $\frac{X}{\Pi}$ est une $\mathbb{Q}_\Pi$-martingale.

Autrement dit : on montre $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\Pi}\left(\frac{X_T}{\Pi_T} \mid \mathcal{F}_t\right] = \frac{X_t}{\Pi_t}$

<u>Rappels</u> (Formule de Bayes abstraite)

Si $\mathbb{Q}_\Pi$ est définit par $\frac{d\mathbb{Q}_\Pi}{d\mathbb{Q}_N}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \eta_t$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_\Pi}[Y_T \mid \mathcal{F}_t] = \frac{1}{\eta_t} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N}[Y_T \eta_T \mid \mathcal{F}_t)$$

En utilisant ce résultat, on peut écrire

$$\mathbb{E}_{Q_\Pi}\left[\frac{X_T}{\Pi_T} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{\eta_t}\,\mathbb{E}_{Q_N}\left(\frac{X_T}{\Pi_T}\cdot\eta_T \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \frac{N_t}{\Pi_t}\cdot\frac{\cancel{\Pi_0}}{N_0}\,\mathbb{E}_{Q_N}\left[\frac{X_T}{\cancel{\Pi_T}}\cdot\frac{\cancel{\Pi_T}}{N_T}\cdot\frac{N_0}{\cancel{\Pi_0}} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$= \frac{N_t}{\Pi_t}\,\mathbb{E}_{Q_N}\left[\frac{X_T}{N_T} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right] = \frac{\cancel{N_t}}{\Pi_t}\cdot\frac{X_t}{\cancel{N_t}} = \frac{X_t}{\Pi_t}$$

Donc les prix exprimés en Π sont des martingales sous Q_Π.

<u>Proposition</u>

Soit $h(X_T)$ un payoff sur un sous-jacent X.
En AOA, son prix Π_t est invariant par changement de numéraire.

$$\Pi_t = \mathbb{E}_{Q}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} h(X_T) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right] \to \mathbb{E}_{Q}\left[\frac{N_t}{N_T}\, h(X_T) \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$= \mathbb{E}_{Q_\Pi}\left[h(X_T)\,\frac{\Pi_t}{\Pi_T} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$$

avec $N_t = e^{\int_0^t r_s ds}$

Démonstration :

Sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$, $\frac{\Pi_t}{N_t}$ $\left(N_t = e^{\int_0^t r_s ds}\right)$

est une martingale.

$$\frac{\Pi_t}{N_t} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\Pi_T}{N_T} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$$

En AOA, $\Pi_T = h(X_T)$, $\Pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[h(X_t)\cdot\frac{N_t}{N_T} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$

Si on applique la formule de Bayes abstraite

avec $\eta_t = \frac{M_t}{N_t}\cdot\frac{N_0}{M_0}$

$$\Pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[h(X_T)\underbrace{\frac{N_t}{N_T}}_{e^{-\int_t^T r_s ds}} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right] \quad (*)$$

$$\frac{\eta_T}{\eta_t} = \frac{M_T}{N_T}\,\frac{N_t}{M_t}$$

$$\Rightarrow \quad \Pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^M}\left[h(X_T)\,\frac{M_t}{M_T} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$(*)\quad \Pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[h(X_T)\cdot\frac{\eta_T}{\eta_t}\cdot\frac{M_t}{M_T} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[h(X_T)\cdot\frac{M_t}{M_T}\,\boxed{\frac{\eta_T}{\eta_t}} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^M}\left(h(X_T)\cdot\frac{M_t}{M_T} \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right)$$

Exemples

① Formule de Black & Scholes

On considère l'option d'achat de type Européen de maturité T et de strike K suivant :

$$\Pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} (S_T - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

avec Π_t le prix en t.

$$\Pi_t = -\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} K \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right] + \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} S_T \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right]}_{(2)}$$

L'objectif est d'utiliser un changement de mesure de probabilité pour simplifier le calcul des deux espérances

Par exemple, on considère l'espérance conditionnelle (2) qu'on écrit de la façon suivante

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} S_T \mathbb{1}_{\{S_T > K\}} \mid \mathcal{F}_t \right] = A \, \mathbb{Q}^M (S_T > K \mid \mathcal{F}_t)$$

On considère le numéraire $\eta_t = S_t$

$$\frac{dQ^\eta}{dQ}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\eta_t}{N_t} \cdot \frac{N_0}{\eta_0} = \frac{S_t}{S_0} e^{-\int_0^t r_s ds} = \eta_t \Rightarrow \frac{\eta_T}{\eta_t} = \frac{S_T}{S_t} e^{-\int_t^T r_s ds}$$

$$\mathbb{E}_Q\left[e^{-\int_t^T r_s ds} S_T \mathbb{1}_{\{S_T > k\}} \mid \mathcal{F}_t\right] \qquad \left(\mathbb{E}_{Q^\eta}\left[X_T \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_Q\left[\frac{\eta_T}{\eta_t} X_T \mid \mathcal{F}_t\right]\right)$$

$$= \mathbb{E}_Q\left[\frac{N_t}{N_T} \cdot S_T \mathbb{1}_{\{S_T > k\}} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= S_t \mathbb{E}_Q\left[\frac{\eta_T}{\eta_t} \cdot \mathbb{1}_{\{S_T > k\}} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= S_t \mathbb{E}_{Q^\eta}\left[\mathbb{1}_{\{S_T > k\}} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$= S_t Q^\eta(S_T > k \mid \mathcal{F}_t)$$

Ici, il reste à déterminer la dynamique de S sous cette nouvelle mesure de probabilité.

(b) Caplet

Le caplet est un produit optionnel de taux qui permet d'échanger un taux variable contre un taux fixe.

$$\left((U-T)\left(F(T,U)-k\right)\right)^+ = CFRA)^+$$

payeur $\longrightarrow$ receveur

Le prix de ce caplet, noté Π_t s'écrit de la façon suivante :

$$\Pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^U r_s ds} (U-T)\underbrace{(F(T,U)-K)^+}_{\mathcal{F}_T\text{-mesurable}} \,|\, \mathcal{F}_t \right)$$

avec $F(T,U)$ le taux constaté en T et échangé en U
$\Rightarrow$ $\mathcal{F}_T$ - mesurable

<u>Exercice</u> (Tarificateur du caplet)

① Mq $\Pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} (U-T) B(T,U)(F(T,U)-K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t \right]$

② En appliquant un changement de mesure de probabilité on montre

$$\Pi_t = A \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left((F(T,U)-K)^+ \,|\, \mathcal{F}_t \right)$$

i) <u>Indice / Etape intermédiaire :</u>

Ecrire l'espérance $X_T = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^U r_s ds} (U-T)(F(T,U)-K)^+ \,|\, \mathcal{F}_T \right]$

(entre autre) en fonction de $B(T,U) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_T r_s ds} \,|\, \mathcal{F}_T \right]$

(i) $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^U r_s ds}(U-T)(F(T,U)-K)^+ \mid \mathcal{F}_T\right]$

$= [U-T](F(T,U)-K)^+ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} e^{-\int_T^U r_s ds} \mid \mathcal{F}_T\right]$

$= e^{-\int_t^T r_s ds}(U-T)(F(T,U)-K)^+ \; P(T,U)$

1) $\pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\text{payoff}(U) \mid \mathcal{F}_t\right]$

$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\text{payoff}(U) \mid \mathcal{F}_T\right] \mid \mathcal{F}_t\right]$

$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}(U-T)P(T,U)(F(T,U)-K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$

2) $\pi_t \overset{P(t,U)}{=} (U-T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\underbrace{\frac{N_t}{N_T}\frac{\overbrace{P(T,U)}^{\eta_T}}{P(t,U)}}_{\frac{\eta_T}{\eta_t}}(F(T,U)-K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$

$= P(t,U)(U-T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^\eta}\left[(F(T,U)-K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$

avec $\mathbb{Q}^\eta$ la mesure de proba associée au numéraire (zéro-coupon) $M_t = P(t,U)$ et définie par :

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^\eta}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{P(t,U)}{P(0,U)} e^{-\int_0^t r_s ds}$$

Définition

Lorsqu'on utilise un zéro-coupon de maturité T comme numéraire $N_t = B(t,T)$, la mesure de probabilité associée est appelé " mesure T-forward neutre ", notée $\mathbb{Q}^T$ et est définie par

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)}{B(0,T)} e^{-\int_0^t r_s ds}$$

ⓒ Évaluation de la swaption

On considère le prix d'une swaption de maturité T_i (option) et T_j (swap)

Le payoff en T_i de cette swaption

$$g(T_i, T_i, T_j) = \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) B(T_i, T_{k+1}) (S(T_i) - K)^+$$

(voir TD2)

et son prix en t est donné par

$$\Pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} g(T_i, T_i, T_j) \mid \mathcal{F}_t\right]$$

Pour écrire le prix de cette swaption sous forme

$$\Pi_t = A \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^n}\left[(S(T_i) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$

(On considère un changement de mesure de probabilité Q^n associé au numéraire $\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1})$

$$\frac{dQ^n}{dQ} = \frac{n_t}{n_0} e^{-\int_0^t r_s ds}$$ est bien une martingale

En appliquant ce changement de mesure de proba on peut écrire Π_t.

$$\Pi_t = M_t \mathbb{E}_{Q^n} \left[(S(T_i) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Il reste à déterminer la dynamique du taux S sous Q^n. (voir correction Ex. Partiel 2019/2020)