ISFA Anne Eyraud-Loisel
Processus stochastiques - M1 Actuariat
Semestre automne 2021-2022

TD n° 1

MARTINGALES DISCRÈTES ET TEMPS D'ARRÊTS

Exercice 1 : Les martingales de la marche aléatoire simple.

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit la *marche aléaoire simple* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_n)$-adapté.
2. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e^{\lambda S_n - n\ln(\cosh\lambda)})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des $(\mathcal{F}_n)$-martingales.

Exercice 2 : Martingale de Doob

Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. On définit le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Y_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$. Montrez que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X.

Exercice 3 : Propriétés des temps d'arrêt

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et soient S et T deux temps d'arrêt discrets par rapport à cette filtration.

1. Montrez que $S \wedge T = \min(S, T)$, $S \vee T = \max(S, T)$ et $S + T$ sont aussi des temps d'arrêt.

Revoir

2. Montrez que, si $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
3. * Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrez que la variable $Y_T = \mathbf{1}_{T<\infty} X_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Exercice 4 : Temps d'arrêts et marche aléatoire.

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple définie comme dans l'exercice 1. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dire dans chaque cas si les variables aléatoires suivantes sont des temps d'arrêts.

1. $\tau = \inf\{n \geq 1, \ S_n = 0\}$.
2. $T = \max\{n \in \{0, ..., 4\}, \ S_n = 0\}$.

Exercice 5 : Martingale et processus prévisible

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un *processus prévisible* qui signifie, par définition, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que pour tout n, H_n est borné et on définit le processus $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : $N_0 = 0$ et

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(M_k - M_{k-1}) \text{ si } n \geq 1\,.$$

1. Montrez que $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Intéressant +++

2. Soit T un temps d'arrêt. En appliquant le résultat de la question précédente avec $H_k := \mathbf{1}_{T\geq k}$, en déduire que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale, alors il en est de même pour le processus arrêté $(M_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 : La fortune du joueur de pile ou face

Un joueur de pile ou face débute à la date 0 avec la richesse X_0. La pièce est équilibrée, et les résultats sont $+1$ si "pile" sort et -1 si "face" sort. Les jets successifs sont supposés indépendants.

1. T parties sont prévues. Montret que le processus de richesse du joueur, noté X, est une martingale, en précisant l'espace probabilisé et la filtration utilisée.
2. Au lieu de prévoir T parties, le joueur décide de s'arrêter dès que son gain est strictement positif.
   (a) Ecrire cela sous forme de temps d'arrêt
   (b) Quelle est la valeur de $\mathbb{E}(X_\tau)$?
   (c) Le théorème d'arrêt de Doob s'applique-t-il ? pourquoi ?

Exercice 7 : La ruine du joueur.

Deux joueurs, le joueur A possédant initialement a euros et le joueur B en possédant b, jouent au jeu suivant. A chaque coup, les deux joueurs misent un euro et on lance une pièce de monnaie équilibrée. Si le résultat de la pièce est pile, le joueur A remporte la mise et si le résultat de la pièce est face, le joueur B remporte la mise. Le jeu cesse quand l'un des deux est ruiné.

1. En reprenant les notation de l'exercice 1, on note $Y_n = 1$ si le résultat du n^{e} lancer est pile et $Y_n = -1$ si c'est face. Soit S_n l'argent du joueur A au temps n. On a donc :

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Soit

$$T = \inf\{n,\ S_n \in \{0, a+b\}\}.$$

Justifier que T définit bien un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Quel interprétation donner au temps d'arrêt T et aux évènements $\{S_T = 0\}$ et $\{S_T = a+b\}$?

2. On admet que $T < +\infty$ presque sûrement. En appliquant le théorème d'arrêt à $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la probabilité que A gagne la fortune de B.

Intéressant ! 3. * Démontrer que $T < +\infty$ presque sûrement.

Exercice 8 : Martingales et Options Américaines

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé filtré tel que $card(\Omega) < +\infty$ et $\mathcal{F}_{t=0,\dots,T}$ une filtration. Soit un processus Z adapté à $\mathcal{F}$ et intégrable. On définit le processus U par :

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T \\ U_t &= \max(Z_t; E[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]) \end{aligned}$$

1. Montrez que U est une surmartingale adaptée à $\mathcal{F}$, et que $U_t \geq Z_t,\ \forall t$.
2. Soit Γ l'ensemble des surmartingales X telles que $X_t \geq Z_t,\ \forall t$. Montrez que $\forall X \in \Gamma$:

$$\forall t \leq T,\ X_t \geq U_t$$

Indication : raisonnez par récurrence en partant de la date T

3. Soit $\tau = \inf\{t \leq T,\ U_t = Z_t\}$. On définit Y le processus arrêté de U par $Y_t = U_{\min(t,\tau)}$.
   (a) Montrez que
   $$\forall \omega \in \{\tau \geq t+1\},\ U_t(\omega) = E(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega).$$
   Pas simple ! (b) Déduisez que Y est une martingale.
4. Quelle interprétation financière donnez-vous aux processus Z et U.

Exercice 9 : Ordres de Bourse

La date du jour est le 5 décembre. Parmi les ordres de bourse suivants, quels sont ceux dont la date d'exécution est un temps d'arrêt ? Précisez pour chaque exemple le filtration pertinente en supposant une seule cotation par jour.

1. Achat de 10000 Alcatel à 13 € : date limite de validité le 31 décembre. Alcatel cote aujourd'hui à 13, 4 €.
2. Vente de 40000 Eurotunnel à 0, 7 € : date limite de validité le 31 décembre. Eurotunnel cote aujourd'hui à 0, 6 €.
3. Achat de 100 Air Liquide au cours minimum entre aujourd'hui et le 31 décembre. Air Liquide cote aujourd'hui à 140 €.

Exercice 10 : Processus à espérance constante et Martingales

Une urne contient un nombre de boules pair N. La moitié des boules sont blanches et les autre sont noires. A chaque tirage, on tire (sans remise) une boule au hasard. On définit Y (resp. Z) le processus comptant le nombre de boules blanches (resp. noires) tirées. On retient ici la filtration naturelle de Y (montrez que cette filtration est la même que celle engendrée par Z).

Soit $X_n = Y_n - Z_n$ l'écart entre le nombre de boules blanches et le nombre de boules noires tirées après n tirages. Montrez que le processus X a une espérance constante, mais que X n'est pas une martingale.

Exercice 11 : Processus de valeur d'une stratégie autofinancée

Sur un marché financier sont échangés K titres, dont les prix en date t sont notés $X_t = (X_t^1, .., X_t^K)$. Les cotations sont supposées être discrètes ($t \in \mathbb{N}$). On suppose que le processus de prix est une martingale. On appelle *stratégie de portefeuille* $\theta = (\theta_t^1, .., \theta_t^K)$ tout processus prévisible borné (θ représente la part détenue dans chaque actif entre $t-1$ et t).

1. Quelle est la valeur du portefeuille détenu par l'agent dont la stratégie est θ à l'instant t ?
2. Montrer que si X est une martingale et θ un processus prévisible borné, alors le processus Z défini par $Z_0 = 0$ et
$$Z_t = \sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{t} \theta_s^k (X_s^k - X_{s-1}^k)$$
est une martingale.
3. Une stratégie de portefeuille θ est dite *autofinancée* si $\forall t$:
$$\sum_{k=1}^{K} \theta_t^k X_t^k = \sum_{k=1}^{K} \theta_{t+1}^k X_t^k$$
Montrer que si X est une martingale et θ une stratégie autofinancée, alors le processus de valeur de la stratégie est une martingale. Quelle est la signification financière d'un tel résultat ?

Exercice 1 : Les martingales de la marche aléatoire simple.

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit la *marche aléaoire simple* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i, \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_n)$-adapté.
2. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e^{\lambda S_n - n\ln(\cosh\lambda)})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des $(\mathcal{F}_n)$-martingales.

1) Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des (Y_n) : $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_i, i\leq n)$.

Par construct°, S_n est $\mathcal{F}_n$-adapté.

2) Nous sommes dans le cas où l'espace de temps est $\mathbb{N}$, donc pour montrer la prop de martingale il suffit de mq $\mathbb{E}[\ _r | \mathcal{F}_{r-1}] = \ _{r-1}$, $\forall r \in \mathbb{N}$.

$*$ $\mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] \overset{S_n \perp\!\!\!\perp Y_{n+1}}{=} \underbrace{\mathbb{E}[S_n | \mathcal{F}_n]}_{= S_n \text{ car } S_n \text{ est } \mathcal{F}_n\text{-mesurable}} + \underbrace{\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n]}_{= \mathbb{E}[Y_{n+1}] \text{ par indep}}$

$$= S_n + \mathbb{E}[Y_{n+1}]$$

$$= S_n + (-1)\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} = S_n$$

Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingales.

$*$ $\mathbb{E}[S_{n+1}^2 - (n+1) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - (n+1)$ indep et $n+1$ cte

$$= \mathbb{E}[(S_n + Y_{n+1})^2 | \mathcal{F}_n] - (n+1)$$

$$= \mathbb{E}[S_n^2 + 2Y_{n+1}S_n + Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - (n+1)$$

$$\overset{\text{indep}}{=} \mathbb{E}[S_n^2 | \mathcal{F}_n] + 2\mathbb{E}[Y_{n+1}S_n | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - (n+1)$$

$$= \underbrace{S_n^2}_{\text{car } S_n^2\ \mathcal{F}_n\text{-mesurable}} + \underbrace{2S_n\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n]}_{S_n \text{ est } \mathcal{F}_n \text{ mes et indep}} + \underbrace{\mathbb{E}[Y_{n+1}^2]}_{Y_{n+1}^2 \text{ indep de } \mathcal{F}_n} - (n+1)$$

$$= S_n^2 + 2S_n \underbrace{\mathbb{E}[Y_{n+1}]}_{Y_{n+1} \text{ indep de } \mathcal{F}_n} + 1 - (n+1)$$

$$= S_n^2 - n \qquad \text{car } \mathbb{E}[Y_{n+1}] = 0$$

Donc $(S_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

$*$ $\mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda S_{n+1}}}{\cosh(\lambda)^{n+1}} \Big| \mathcal{F}_n\right] = \mathbb{E}\left[\underbrace{\frac{e^{\lambda S_n}}{\cosh(\lambda)^n}}_{\text{indep de } \mathcal{F}_n} \frac{e^{\lambda Y_{n+1}}}{\cosh(\lambda)} \Big| \mathcal{F}_n\right] = \frac{e^{\lambda S_n}}{\cosh(\lambda)^n}\mathbb{E}\left[\frac{e^{\lambda Y_{n+1}}}{\cosh(\lambda)} \Big| \mathcal{F}_n\right]$

$$= \frac{e^{\lambda S_n}}{\cosh(\lambda)^n} \times \frac{1}{\cosh(\lambda)} \mathbb{E}[e^{\lambda Y_{n+1}} | \mathcal{F}_n]$$

Or $Y_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n \underset{\text{par composée}}{\Rightarrow} e^{\lambda Y_{n+1}} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[e^{\lambda Y_{n+1}} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[e^{\lambda Y_{n+1}}] = e^{\lambda\times(-1)}\times\frac{1}{2} + e^{\lambda\times(+1)}\times\frac{1}{2}$$

$$= \frac{e^{\lambda} + e^{-\lambda}}{2} = \cosh(\lambda)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\cosh(\lambda)}\mathbb{E}[e^{\lambda Y_{n+1}} | \mathcal{F}_n] = 1$$

D'où $\mathbb{E}[e^{\lambda S_{n+1} - (n+1)\ln(\cosh(\lambda))} | \mathcal{F}_n] = e^{\lambda S_n - n\ln(\cosh(\lambda))}$

Donc $e^{\lambda S_n - n\ln(\cosh(\lambda))}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

Exercice 2 : Martingale de Doob

Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. On définit le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Y_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$. Montrez que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X.

* Nous sommes dans $\mathbb{N}$ il suffit de mq $\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = Y_n \ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n]$$

Or $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_{n+1}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{n+1}]|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n] = Y_n$$

Donc $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale p/r à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 3 : Propriétés des temps d'arrêt

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et soient S et T deux temps d'arrêt discrets par rapport à cette filtration.

1. Montrez que $S \wedge T = \min(S,T)$, $S \vee T = \max(S,T)$ et $S+T$ sont aussi des temps d'arrêt.
2. Montrez que, si $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
3. * Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrez que la variable $Y_T = \mathbf{1}_{T<\infty} X_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

1) S et T sont deux temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n & \forall n \in \mathbb{N} \\ \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n & \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Donc,

* $\{S \wedge T \leq n\} = \underbrace{\{S \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cup \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n \quad n \in \mathbb{N}$

Donc $S \wedge T$ est un temps d'arrêt

* $\{S \vee T \leq n\} = \underbrace{\{S \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

Donc $S \vee T$ est un temps d'arrêt.

* $\{S+T \leq n\} \subset \underbrace{\{S \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \cup \underbrace{\{T \leq n\}}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

Donc $S+T$ est un temps d'arrêt.

ou $\{S+T \leq n\} = \bigcup_{i=0}^{n} \{S=i\} \cap \{T=n-i\}$

2) Soit $A \in \mathcal{F}_S$. $A \cap \{T \leq n\} = A \cap \{S \leq T \leq n\}$ car $S \leq T$

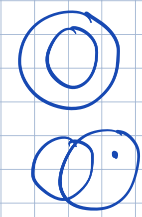
$= A \cap \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ car $A \in \mathcal{F}_S$ donc $A \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ et $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ car T temps d'arrêt

Donc $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$

3) Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Mq $\{Y_T \in A\} \in \mathcal{F}_T$ en montrant que :

- $\{Y_T \in A\} \in \mathcal{F}$ (où $\mathcal{F}$ tribu sous-jacente de l'espace de proba qui contient en particulier ttes les tribus $\mathcal{F}_n$ de la filtrat°).
- $\{Y_T \in A\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

$\mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$



Exercice 5 : Martingale et processus prévisible

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un *processus prévisible* qui signifie, par définition, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que pour tout n, H_n est borné et on définit le processus $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : $N_0 = 0$ et

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(M_k - M_{k-1}) \text{ si } n \geq 1\,.$$

1. Montrez que $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. Soit T un temps d'arrêt. En appliquant le résultat de la question précédente avec $H_k := \mathbf{1}_{T\geq k}$, en déduire que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale, alors il en est de même pour le processus arrêté $(M_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$.

1) $N_n = \sum_{k=1}^{n} H_k (M_k - M_{k-1})$ si $n \geq 1$

$n \in \mathbb{N}^*$ $\mathbb{E}[N_n \mid \mathcal{F}_{n-1}] = \mathbb{E}\left[\sum_{k=1}^{n} H_k (M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}\right]$

$= \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{E}[H_k (M_k - M_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}] + \mathbb{E}[H_n (M_n - M_{n-1}) \mid \mathcal{F}_{n-1}]$

$= \sum_{k=1}^{n-1} H_k \mathbb{E}[M_k - M_{k-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}] + \underbrace{H_n\big(\underbrace{\mathbb{E}[M_n \mid \mathcal{F}_{n-1}]}_{= M_{n-1}} - \underbrace{\mathbb{E}[M_{n-1} \mid \mathcal{F}_{n-1}]}_{= M_{n-1}}\big)}_{=0}$

H_k mesurable p/r à $\mathcal{F}_{k-1}$ donc p/r à $\mathcal{F}_{n-1}$ par extens°

$\mathcal{F}_n$ mesurable

$= \sum_{k=1}^{n-1} H_k (M_k - M_{k-1})$ car les M_k sont des martingales p/r à $\mathcal{F}_k$ donc p/r à $\mathcal{F}_{n-1}$

$= N_{n-1}$

Donc $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale.

2)

- **Exercice** : si τ est un temps d'arrêt et M une $(F_t)_{t\in\mathbb{N}}$-martingale, alors le processus Z définit par $Z_t = M_{t\wedge\tau}$ est une (F_t)-martingale et $\mathbb{E}(M_{t\wedge\tau}) = \mathbb{E}(M_0), \forall\, t \in \mathbb{N}$.
- *Indication* : décomposer Z_t de la manière suivante
$$Z_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{k\leq T}(M_k - M_{k-1})$$
- Ainsi on peut écrire
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n|F_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(M_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{k\leq T}(M_k - M_{k-1})\,|F_{n-1}\right) \\
&= M_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{k\leq T}(M_k - M_{k-1}) + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{n\leq T}(M_n - M_{n-1})|F_{n-1}) \\
&= Z_{n-1} + \underbrace{\mathbb{1}_{n\leq T}}_{car\ \{n\leq T\} \in F_{n-1}} \underbrace{\mathbb{E}((M_n - M_{n-1})|F_{n-1})}_{=0\ car\ M_n\ martingale} \\
&= Z_{n-1}
\end{aligned}$$
- Mesurabilité et intégrabilité : utiliser $M_{t\wedge T} = M_t \mathbb{1}_{t<T} + M_T \mathbb{1}_{T\leq t}$.

Exercice 7 :

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

$$T = \inf\{n,\ S_n \in \{0, a+b\}\}.$$

1) T définit bien un temps d'arrêt car :

* 0 correspond au moment où le joueur A est ruiné
* $a+b$ correspond au moment où le joueur B est ruiné.

2) $T \wedge n$ et 0 sont deux temps d'arrêts p.s bornés
(car $T < \infty$ p.s $\Rightarrow$ $T \wedge n$ p.s borné)

$$\underset{\text{Thm de Doob}}{\Longrightarrow} \quad \mathbb{E}[S_{T\wedge n} \mid \mathcal{F}_0] = S_0 = a.$$

$$\mathbb{P}(S_T = a+b) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{T} Y_i = b\right)$$

$$= \binom{T}{\lfloor b \rfloor} \left(\frac{1}{2}\right)^T$$