Done

M2 "Probabilités et Finance" Sorbonne Université *Année 2022 – 2023*
"Introduction aux processus de diffusion" (L.Zambotti)

Chapitre II. Mouvement brownien et propriété de Markov

Dans tous les exercices, $B = (B_t,\ t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

√ **Exercice 1** Soient (X, Y) un couple aléatoire défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $E \times F$. Soit $\mathcal{A} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu telle que X soit $\mathcal{A}$-mesurable et Y soit indépendant de $\mathcal{A}$. Prouver que si $\varphi : E \times F \to \mathbb{R}$ est mesurable bornée, alors

$$\mathbb{E}[\varphi(X, Y) \,|\, \mathcal{A}] = \Phi(X),$$

où $\Phi : E \to \mathbb{R}$ est donnée par $\Phi(x) := \mathbb{E}[\varphi(x, Y)]$, $x \in E$.

√ **Exercice 2** On définit $d_1 := \inf\{t \geq 1 :\ B_t = 0\}$ et $g_1 := \sup\{t \leq 1 :\ B_t = 0\}$.

(i) Les variables aléatoires d_1 et g_1 sont-elles des temps d'arrêt ?

(ii) Calculer la loi de d_1 et celle de g_1 (indication : utiliser la propriété de Markov au temps 1 et une formule obtenue dans le cours pour la loi de τ_x, $x \in \mathbb{R}$).

√ **Exercice 3** On pose $\tau_1 := \inf\{t > 0 :\ B_t = 1\}$ et $\tau := \inf\{t \geq \tau_1 :\ B_t = 0\}$. Calculer la loi de τ à l'aide de la propriété de Markov forte.

√ **Exercice 4** (i) Étudier la convergence en loi et probabilité de $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}$ (quand $t \to \infty$).

(ii) Étudier la convergence p.s. de $\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}$.

√ **Exercice 5** (i) Soient $[a, b]$ et $[c, d]$ deux intervalles disjoints de $\mathbb{R}_+$. Montrer que presque sûrement, $\sup_{t\in[a,b]} B_s \neq \sup_{t\in[c,d]} B_s$.

(ii) En déduire que p.s., chaque maximum local de B est un maximum local au sens strict.

√ **Exercice 6** En utilisant la propriété de scaling, montrer que $(\int_0^t e^{B_s}\, ds)^{1/t^{1/2}} \to e^{|N|}$ en loi lorsque $t \to \infty$, où N suit la loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\, 1)$.

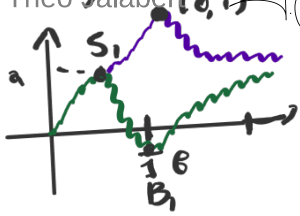
√ **Exercice 7** (i) Soit $a > 0$ et soit $\tau_a := \inf\{t \geq 0 :\ B_t = a\}$. Nous avons vu dans le chapitre 2 du poly la densité explicite de τ_a, qui permet de montrer que $\mathbb{E}[e^{-\lambda\tau_a}] = e^{-a\sqrt{2\lambda}}$, $\forall \lambda \geq 0$ (on donnera une preuve alternative dans le chapitre 3). En déduire que $\mathbb{P}(\tau_a \leq t) \leq \exp(-\frac{a^2}{2t})$, pour tout $t > 0$.

(ii) Montrer que si ξ est une variable aléatoire suivant la loi gaussienne $\mathscr{N}(0,\, 1)$, alors $\mathbb{P}(\xi \geq x) \leq \frac{1}{2}e^{-x^2/2}$, $\forall x > 0$ (à comparer avec l'exercice 1 de la feuille n. 0).

$S_2 - S_1$ $\quad S_1 \overset{(d)}{=} |\mathcal{N}(0,1)|$ $\quad S_2 = \max\{S_1, \max_{[1,2]} B_u\} = \max\{S_1, B_1 + \max_{[0,1]} \tilde{B}_u\}$

$S_2 - S_1 = \max\{0, \underbrace{\max_{[0,1]} \tilde{B}_u}_{\overset{d}{=} \tilde{S}_1 \overset{d}{=} |N|} - (S_1 - B_1)\}$

$\boxed{S_1 - B_1 \overset{(d)}{=} \tilde{\tilde{S}}_1 \, ?}$



Exercice 8 Soit $S_t := \sup_{s\in[0,t]} B_s$, $t \geq 0$. Montrer que $S_2 - S_1$ a la même loi que $\max\{|N| - |\widetilde{N}|, 0\}$, où N et $\widetilde{N}$ désignent deux variables aléatoires indépendantes suivant la même loi gaussienne $\mathscr{N}(0, 1)$. $(B_1 - B_{1-t})_{t\in[0,1]}$ - BM $\quad S_1 - B_1 = \sup_{t\in[0,1]}\{B_t - B_1\} = \sup_{[0,1]}\{-\underbrace{(B_1 - B_{1-s})}_{\text{BM}}\} = \sup_{[0,1]}\{\tilde{\tilde{W}}_t\} \overset{d}{=} |\tilde{N}|$

Exercice 9 Montrer que p.s. $\int_0^\infty \sin^2(B_t)\,\mathrm{d}t = \infty$ en utilisant une suite $(\tau_i)_{i\geq 0}$ de temps aléatoires définis par récurrence : $\tau_0 := 0$, $\tau_{2i+1} := \inf\{t > \tau_{2i} : |B_t| = 1\}$ et $\tau_{2i+2} := \inf\{t > \tau_{2i+1} : B_t = 0\}$ pour $i \geq 0$.

Exercice 10 (loi du logarithme itéré) On pose $S_t := \sup_{s\in[0,t]} B_s$, $h(t) := \sqrt{2t \log\log t}$.

(i) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{S_{t_{n+1}} \geq (1+\varepsilon)h(t_n)\}$ est convergente, où $t_n = (1+\varepsilon)^n$. En déduire que $\limsup_{t\to\infty} \frac{S_t}{h(t)} \leq 1$, p.s.

(ii) Montrer que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{s\in[0,t]} |B_s|}{h(t)} \leq 1, \qquad \text{p.s.}$$

(iii) Soit $\theta > 1$, et soit $s_n = \theta^n$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, \sqrt{1-\theta^{-1}}[$, la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{B_{s_n} - B_{s_{n-1}} > \alpha\, h(s_n)\}$ est divergente. En déduire que $\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} \geq \alpha - \frac{2}{\sqrt{\theta}}$, p.s.

(iv) Montrer que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1, \qquad \text{p.s.}$$

(v) Soient $X_1(t) := |B_t|$, $X_2(t) := S_t$, et $X_3(t) := \sup_{s\in[0,t]} |B_s|$. Que peut-on dire de $\limsup_{t\to\infty} \frac{X_i(t)}{h(t)}$ pour $i = 1$, 2, ou 3 ?

(vi) Que peut-on dire de $\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)}$? Et de $\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}}$?

$\sqrt{2}$

$$d_t = \inf\{s>t : B_s = 0\}$$

$$g_t = \sup\{s<t : B_s = 0\}$$

(i) d_t, g_t sont-ils temps d'arrêt?

(ii) Loi de d_t, g_t.

$$d_t = \inf\{s>t : B_s = 0\} \overset{d}{=} \inf\{s>t : \sqrt{t}\, B_{s/t} = 0\} = \inf\{ut > t : B_u = 0\} = t d_1$$

$$(d_t, g_t) \overset{(d)}{=} t\,(d_1, g_1)$$

si $t>1$

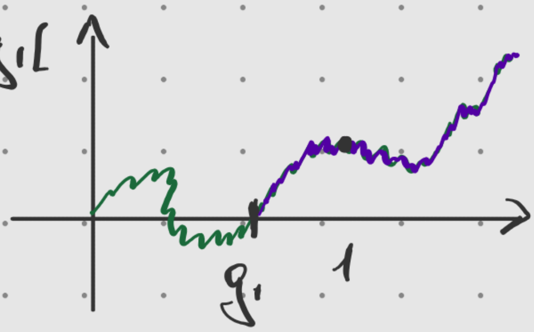
(i) $\{d_1 \leq t\} = \{d_1 > t\}^c = \left\{\inf_{u\in]1,t[} |B_u| > 0\right\}^c \in \mathcal{F}_t$

$\rightarrow$ d_1 est un temps d'arrêt.

g_1 n'est pas un temps d'arrêt

Si g_1 est un temps d'arrêt, on peut applique le propriété de Markov forte: $(B_{t+g_1} - \underset{0}{\underset{\shortparallel}{B_{g_1}}})_{t\geq 0}$ est un MB

Mais $\tilde{B}_t = B_{t+g_1}$ ne s'annule pas sur $]0, 1-g_1[$ p.s. Cela est impossible pour un MB.



(ii) $\mathbb{P}(d_1 \leq t) = 0$ si $t<1$

Si $t \geq 1$ $\quad \mathbb{P}(d_1 \leq t) = \mathbb{P}(\tilde{\tau}_{-B_1} \leq t-1) =$

$\tilde{B} = (B_{t+1} - B_1)_{t \geq 0}$ est un MB $\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_1$

Ici $\tilde{\tau}_a = \inf\{s > 0 : \tilde{B}_s = a\}$

<u>Rappel</u> $\quad \tau_a \overset{(d)}{=} \frac{a^2}{Z^2}$, $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\longrightarrow$

$$\tilde{\tau}_{-B_1} \overset{(d)}{=} \frac{B_1^2}{\tilde{B}_1^2} = \frac{Z^2}{\tilde{Z}^2}$$ avec $Z \perp\!\!\!\perp \tilde{Z}$, $Z, \tilde{Z} \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}(0,1)$

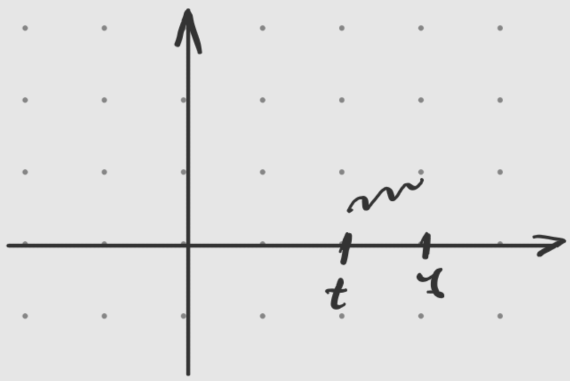
$$= \mathbb{P}\left(\frac{Z^2}{\tilde{Z}^2} \leq t-1\right) \qquad d_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} 1 + \frac{Z^2}{\tilde{Z}^2}$$

Avec des calculs on trouve la densité $\frac{1}{\pi} \frac{\mathbb{1}_{\{t>1\}}}{t\sqrt{t-1}}$

$(\mathbb{E} d_1 = +\infty)$

$\mathbb{P}(g_1 \leq t) = 1$ si $t > 1$

si $t \leq 1$



$$\mathbb{P}(g_1 < t) = \mathbb{P}(d_t > 1) =$$

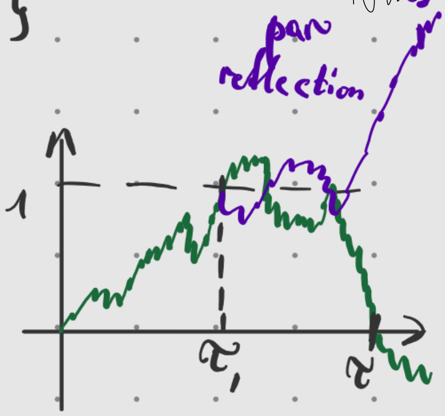
$$= \mathbb{P}(t d_1 > 1) = \mathbb{P}\left(d_1 > \frac{1}{t}\right) = \mathbb{P}\left(1 + \frac{Z^2}{\tilde{Z}^2} > \frac{1}{t}\right) = \mathbb{P}\left(\frac{\tilde{Z}^2}{Z^2 + \tilde{Z}^2} < t\right)$$

Donc $\quad g_1 \overset{\mathcal{L}}{\sim} \frac{\tilde{Z}^2}{Z^2 + \tilde{Z}^2}$

Densité: $\mathbb{P}(g_1 \leq t) = \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t})$ $\quad$ (loi de l'arcsinus)

N°3

$\tau_1=\inf\{t>0,\ B_t=1\}$ $\quad \tau=\inf\{t>\tau_1,\ B_t=0\}$



$\tau=\tau_1+\tilde{\tau}_{-1}$, $\quad \tau_1 \perp\!\!\!\perp \tilde{\tau}_{-1}$

$\tilde{B}_t = B_{t+\tau_1}-B_{\tau_1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{\tau_1}$

$$\tau = \tau_1+\tilde{\tau}_{-1} \overset{d}{=} \tau_1+\tilde{\tau}_1 \overset{d}{=} \tau_2 \overset{d}{=} 4\tau_1$$

$\tau_{a+b}=\tau_a+\tilde{\tau}_b$, $\quad a,b>0$

N°4

$$X_t=\frac{\log(1+B_t^2)}{\log t}, \quad t\to+\infty$$

(i) Cvg. en loi?
$\Uparrow$ $\quad \Downarrow$ si cvg vers const.
(ii) Cvg. en proba?
$\Uparrow$ $\quad \Downarrow$ sous-suite
(iii) Cvg. p.s.?

$$\mathbb{E}X_t \geq \frac{\log(1+\mathbb{E}B_t^2)}{\log t}\to 1$$

$$X_t \overset{d}{=} \frac{\log(1+tB_1^2)}{\log t}=Y_t$$

$$Y_t = 1+\frac{\log\left(B_1^2+\frac{1}{t}\right)}{\underbrace{\log t}_{\to\infty,\ t\to\infty}} \xrightarrow{p.s.} 1 \Rightarrow Y_t \xrightarrow{loi} 1 \Rightarrow X_t \xrightarrow{loi} 1$$

Car 1 est const., $X_t\to 1$ en probabilité.

Si $X_t\to X_\infty$ p.s. $\Rightarrow$ $X_\infty=1$ p.s.

Si $B_t=0$, on a $X_t=0$.

Mais $\{t\geq 0\ \ B_t=0\}$ est non-borné p.s. $\Rightarrow$

$\Rightarrow \exists (t_n)\ t_n \to \infty$ t.q. $B_{t_n} = 0$ et $X_{t_n} = 0$ - cela exclut cvg p.s. vers 1.

N6

$$\left(\int_0^t e^{B_s}\,ds\right)^{1/\sqrt{t}} \xrightarrow[t\to\infty]{} e^{|Z|} \text{ a loi, } Z \sim N(0,1)$$

$$(B_s)_{s\geq 0} = \left(\sqrt{t}\, B_{\frac{s}{t}}\right)_{s \geq 0}$$

$$\int_0^t e^{B_s}\,ds = \int_0^t \exp\{\sqrt{t}\, B_{\frac{s}{t}}\}\,ds = t \int_0^1 \exp\{\sqrt{t}\, B_u\}\,du$$

$$\left(t \int_0^1 \exp\{\sqrt{t}\, B_u\}\,du\right)^{1/\sqrt{t}}$$

$$t^{1/\sqrt{t}} = e^{\frac{1}{\sqrt{t}} \ln t} \to \text{p.s.}$$

$$\left(\int_0^1 \exp\{\sqrt{t}\, B_u\}\,du\right)^{1/\sqrt{t}} = \{p = \sqrt{t}\} = \left(\int_0^1 (\underbrace{e^{B_u}}_{f(u)})^p\,du\right)^{1/p} = \|f\|_{L^p} \to$$

$$\to \|f\|_\infty = e^{\sup_{[0,1]} B_u} \overset{(d)}{=} e^{|B_1|} \overset{d}{=} e^{|Z|}, \quad Z \sim N(0,1)$$

N7

$$\mathbb{E}\, e^{-\lambda \tau_a} = e^{-a\sqrt{2\lambda}} \qquad \tau_a = \frac{a^2}{Z^2},\ Z \sim N(0,1)$$

$$\mathbb{P}(\tau_a \leq t) \leq \exp\left\{-\frac{a^2}{2t}\right\} \quad \forall t$$

$$\mathbb{P}(|X| \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}|X|}{a} \qquad \mathbb{E}|X| = \underbrace{\mathbb{E}|X| 1\!\!1_{|X|<a}}_{\geq 0} + \underbrace{\mathbb{E}|X| 1\!\!1_{|X| \geq a}}_{\geq a\mathbb{P}(X \geq a)}$$

$$\mathbb{P}\left(e^{-\lambda\tau_a} \geq e^{-\lambda t}\right) \leq \frac{\mathbb{E}\, e^{-\lambda \tau_a}}{e^{-\lambda t}} = e^{-a\sqrt{2\lambda} + \lambda t} = e^{-\frac{a^2}{t} + \frac{a^2}{2t}} = e^{-\frac{a^2}{2t}}$$

$$-a\sqrt{2}\sqrt{\lambda} + \lambda t \to \min_\lambda \to \sqrt{\lambda} = \frac{a}{\sqrt{2}t} \Rightarrow \lambda = \frac{a^2}{2t^2}$$

(ii) $\mathbb{P}(\overset{\sim N(0,1)}{\xi} \geq x) \leq \frac{1}{2} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$\mathbb{P}(\xi \geq x) = \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\frac{a^2}{\xi^2} \leq \frac{a^2}{x^2}\right) \overset{(d)}{=} \frac{1}{2}\mathbb{P}\left(\tau_a \leq \frac{a^2}{x^2}\right) \overset{(i)}{\leq} \frac{1}{2}\exp\left\{-\frac{a^2}{2a^2}x^2\right\} = \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\mathbb{P}(|\xi| \geq x)$$

$$\boxed{\mathbb{P}(\xi \geq x) \leq \frac{1}{2}e^{-\frac{x^2}{2}}}$$

N5 $\quad [a,b] \cap [c,d] = \emptyset \Rightarrow \sup_{[a,b]} B_s \neq \sup_{[c,d]} B_s$

Soit $b < c$

BM, ⫫ $\mathcal{F}_b$

$$\sup_{[c,d]} B_s = B_b + \sup_{s \in [c,d]}(B_s - B_b) = B_b + \sup_{s \in [c-s,d-s]} \tilde{B}_s$$

$$\mathcal{L}\left(\sup_{[c,d]} B_s \,\middle|\, \mathcal{F}_b\right) = \text{loi continue} \Rightarrow \mathbb{P}\left(\sup_{[c,d]} B_s = \sup_{[c,d]} B_s\right) = 0$$

Max. locale $\Rightarrow$ Max locale stricte

x^* - max sur $[x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon]$

$x_n \uparrow x^*$

$\in$

$[x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon]$

$$B_{x_n} \leq \sup_{[x^*-\varepsilon, x^*+\varepsilon]} B_s$$

$<$

p.s. par le raisonnement précédent

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists x_n \in (x^*-\varepsilon, x^*]$:

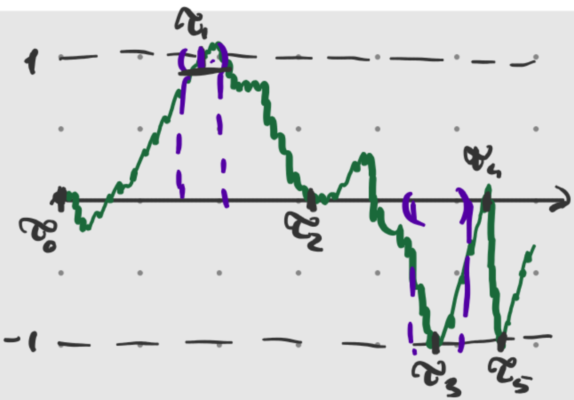
$B_{x_n} < B_{x^*}$

$\Rightarrow$ Max locale stricte

Exercice 9 Montrer que p.s. $\int_0^\infty \sin^2(B_t)\,\mathrm{d}t = \infty$ en utilisant une suite $(\tau_i)_{i\geq 0}$ de temps aléatoires définis par récurrence : $\tau_0 := 0$, $\tau_{2i+1} := \inf\{t > \tau_{2i} : |B_t| = 1\}$ et $\tau_{2i+2} := \inf\{t > \tau_{2i+1} : B_t = 0\}$ pour $i \geq 0$.

M.q. $\int_0^\infty \sin^2(B_t)\,dt$

$\tau_n < \infty$ p.s. $\forall n \geq 0$



$$\int_0^{+\infty} \sin^2(B_t)\,dt \geq \sum_{i\geq 1} \underbrace{\int_{t_{2i}}^{t_{2i+1}} \sin^2(B_t)\,dt}_{X_i} \qquad X_i \text{ i.i.d. indépend.}$$

$X_i > 0$ p.s. $\mathbb{E}X_i > 0$

$$\frac{1}{n}\sum_i X_i \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}X_i > 0 \Rightarrow \sum X_i \to +\infty$$

Exercice 10 (loi du logarithme itéré) On pose $S_t := \sup_{s\in[0,t]} B_s$, $h(t) := \sqrt{2t\log\log t}$.

√(i) Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{S_{t_{n+1}} \geq (1+\varepsilon)h(t_n)\}$ est convergente, où $t_n = (1+\varepsilon)^n$. En déduire que $\limsup_{t\to\infty} \frac{S_t}{h(t)} \leq 1$, p.s. $\exists N : \forall n > N \quad \frac{S_{t_n}}{h(t_n)} < (1+\varepsilon)$

Borel-Cantelli

N (ii) Montrer que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{s\in[0,t]} |B_s|}{h(t)} \leq 1, \qquad \text{p.s.}$$

√(iii) Soit $\theta > 1$, et soit $s_n = \theta^n$. Montrer que pour tout $\alpha \in]0, \sqrt{1-\theta^{-1}}[$, la série numérique $\sum_n \mathbb{P}\{\underbrace{B_{s_n} - B_{s_{n-1}} > \alpha\, h(s_n)}_{A_n}\}$ est divergente. En déduire que $\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} \geq \alpha - \frac{2}{\sqrt{\theta}}$, p.s.

A_n indépendants $\Rightarrow \exists n_k \to \infty : \frac{B_{s_{n_k}}}{h(s_{n_k})} > \frac{B_{s_{n_k-1}}}{h(s_{n_k})} + 2$

√(iv) Montrer que

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)} = 1, \qquad \text{p.s.}$$

√(v) Soient $X_1(t) := |B_t|$, $X_2(t) := S_t$, et $X_3(t) := \sup_{s\in[0,t]} |B_s|$. Que peut-on dire de $\limsup_{t\to\infty} \frac{X_i(t)}{h(t)}$ pour $i = 1, 2,$ ou 3? Par (ii) on a $\limsup_{t\to\infty} \frac{X_i(t)}{h(t)} \leq 1 \ \forall i = 1,2,3$ $\limsup \frac{X_i(t)}{h(t)} \geq$

√(vi) Que peut-on dire de $\liminf_{t\to\infty} \frac{B_t}{h(t)}$? Et de $\limsup_{t\to 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t\log\log(1/t)}}$? $\geq \limsup \frac{|B_t|}{h(t)} \geq$

$\liminf \frac{B_t}{h(t)} = -\limsup \frac{-B_t}{h(t)} = -1$ $\quad -B_t \overset{\mathcal{L}}{\sim} \tilde{B}_t$

$\geq \limsup \frac{B_t}{h(t)} = 1$

$$S_t = \sup_{[0,t]} B_s \qquad h(t) := \sqrt{2t\log\log t}$$

(i) Soit $\varepsilon > 0$. M.q. $\sum \mathbb{P}(S_{t_{i+1}} \geq (1+\varepsilon)h(t_n))$ est convergente où $t_n = (1+\varepsilon)^n$

$$\mathbb{P}(S_{t_{i+1}} \geq \underbrace{(1+\varepsilon)\sqrt{2t_n\log\log t_n}}_{y_n}) = \mathbb{P}\left(|Z| \geq \frac{1}{\sqrt{t_{n+1}}} y_n\right) \leq e^{-\frac{y_n^2}{2t_{n+1}}}$$

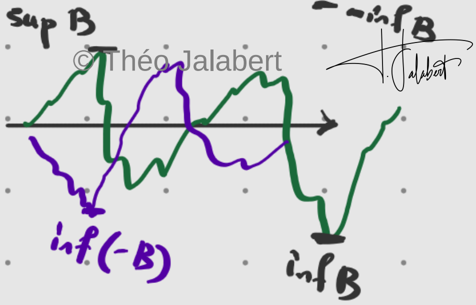
$S_{t_{i+1}} \overset{\mathcal{L}}{\sim} |W_{t_{i+1}}|$

$$\exp\left\{-\frac{y_n^2}{2t_{n+1}}\right\} = \exp\left\{-\underbrace{\frac{t_n}{t_{n+1}}}_{\frac{1}{1+\varepsilon}}(1+\varepsilon)^2 \log\log t_n\right\} = \exp\left\{-(1+\varepsilon)\log(n\log(1+\varepsilon))\right\} =$$

$$= (n\log(1+\varepsilon))^{-(1+\varepsilon)} = C \cdot \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} \qquad \sum \frac{1}{n^{1+\varepsilon}} < \infty \text{ converge}$$

On a montré que $\limsup_{t\to\infty} \frac{\sup_{[0,t]} B_s}{h(t)} \leq 1$

(ii) $$\frac{\sup_{[0,t]}|B_s|}{h(t)} = \max\Bigg(\underbrace{\frac{\sup B_s}{h(t)}}_{\xi}, \underbrace{\frac{-\inf B_s}{h(t)}}_{\eta}\Bigg) \qquad \xi \overset{\mathcal{L}}{\sim} \eta$$



$$\left.\begin{array}{l}\limsup \xi \leq 1 \\ \limsup \eta \leq 1\end{array}\right\} \Rightarrow \limsup(\xi \vee \eta) \leq 1$$

(iii) $\theta > 1$ $\quad s_n = \theta^n \quad \forall \alpha \in \left]0, \sqrt{1-\theta^{-1}}\right[$

$\sum \mathbb{P}(B_{s_n} - B_{s_{n-1}} > \alpha h(s_n))$ diverge?

$$\mathbb{P}(\underbrace{B_{s_n} - B_{s_{n-1}}}_{\mathcal{N}(0, \theta^n(1-\theta^{-1}))} > \alpha h(s_n)) = \mathbb{P}(Z \cdot \theta^{n/2}(1-\theta^{-1})^{1/2} > \alpha h(s_n)) =$$

$$= \mathbb{P}\left(Z > \underbrace{\frac{\alpha}{\sqrt{1-\theta^{-1}}}}_{<1} \cdot \frac{h(s_n)}{\theta^{n/2}}\right) \geq \mathbb{P}\left(Z \geq \frac{h(s_n)}{\theta^{n/2}}\right) = \mathcal{N}\left(-\frac{h(s_n)}{\theta^{n/2}}\right) \geq \{\text{TD of} \geq$$

$$y = \frac{h(s_n)}{\theta^{n/2}} = \left(\frac{2\cancel{\theta^n} \log\log \theta^n}{\cancel{\theta^n}}\right)^{1/2} = \sqrt{2\log(n\log\theta)}$$

$$\mathcal{N}(y) \geq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\underbrace{\left(\frac{1}{y} - \frac{1}{y^3}\right)}_{\sim \frac{c}{\sqrt{\log n}}} e^{-\log(n\log\theta)} \sim \frac{c}{\sqrt{\log n}} \cdot \frac{1}{n} \quad \text{diverges}$$

Donc $\exists n_k \to \infty : B_{s_{n_k}} - B_{s_{n_{k-1}}} > \alpha h(s_n)$

$$\frac{B_{s_{n_k}}}{h(s_n)} > \alpha + \underbrace{\frac{B_{s_{n_{k-1}}}}{h(s_n)}}_{> -\frac{2}{\sqrt{\theta}}}$$

$$\frac{|B_{s_{n_{k-1}}}|}{h(s_{n_k})} \overset{(ii)}{\leq} \frac{h(s_{n_{k-1}})}{h(s_{n_k})} = \frac{1}{\sqrt{\theta}}\overbrace{\sqrt{\frac{\log((n-1)\log\theta)}{\log(n\log\theta)}}}^{\leq 2} \leq \frac{2}{\sqrt{\theta}}$$

$\exists N : \forall n \geq N$

$$\Rightarrow \frac{B_{s_{n_{k-1}}}}{h(s_n)} \geq -\frac{2}{\sqrt{\theta}} \quad \forall n \geq N(\omega)$$

(iv) Donc $\limsup \frac{B_t}{h(t)} \geq \alpha - \frac{2}{\sqrt{\theta}}$ $\quad \forall \alpha \in]0, \sqrt{1-\theta^{-1}}[$

$$\Big\downarrow \; \theta \to \infty \quad \alpha \to 1$$

$$\limsup \frac{B_t}{h(t)} \geq 1$$

Or $\limsup \frac{B_t}{h(t)} \leq \limsup \frac{\sup |B_t|}{h(t)} \leq 1 \to \limsup_{t} \frac{B_t}{h(t)} = 1$

(vi) On a montré que $\limsup_{t\to\infty} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log t}} = 1$

Que peut-on dire de $\limsup_{t\downarrow 0} \frac{B_t}{\sqrt{2t \log\log 1/t}}$ ⊖

$s \leq t$

$$\mathbb{E}\left[f(t) B_{\frac{1}{t}} f(s) B_{\frac{1}{s}}\right] = \frac{1}{t} \underbrace{f(t)}_{t} \underbrace{f(s)}_{s} = s$$

$tB_{1/t}$ est aussi un BM

Donc ⊖ $\limsup_{t\downarrow 0} \frac{\overset{\tilde{B}_{1/t}}{1/t\, B_t}}{\sqrt{2/t \log\log 1/t}} = \{s = 1/t\} = \limsup_{s\uparrow\infty} \frac{\tilde{B}_s}{\sqrt{2s \log\log s}} = 1$