Examen Théorie des Valeurs Extrêmes 2017-2018

ENSAE

Sans document - Sans calculatrice - 2h00

Questions de cours et exercices d'applications du cours (10 points):

1. Expliquer ce que veut dire "F appartient au domaine d'attraction d'un loi max-stable G ($F \in D(G)$)".

Quel est le domaine d'attraction de la loi logistique définie par

$$P(Y \leq y) = \frac{1}{1+e^{-y}}, \quad y \in \mathbb{R}.$$

2. Quelles sont les assertions vraies? Justifier vos réponses.

A) Si une distribution F appartient au domaine d'attraction de la $GEV(\mu, \sigma, \xi)$, alors la distribution limite de ses dépassements seuils (correctement normalisés) convergent en loi vers une loi $GPD(\beta, \xi)$.

B) Si une distribution F appartient au domaine d'attraction de la $GPD(\beta, \xi)$, alors la distribution limite de ses dépassements seuils (correctement normalisés) convergent en loi vers une loi $GEV(\mu, \sigma, \xi)$.

C) La loi conditionnelle d'une $GPD(\beta, \xi)$ sachant qu'elle dépasse un niveau x est une $GPD(\beta, \xi)$.

D) La loi Uniforme sur $[0, \beta]$ appartient à la famille des lois $GPD(\beta, \xi)$.

E) Les lois $GPD(\beta, \xi)$ sont utilisées en réassurance pour tarifer des Quote-parts.

3. On suppose que deux distributions F et G ont le même point extrêmal ($x^F = x^G$) et

$$\lim_{x \to x^F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = c \in (0, \infty).$$

Montrer que F et G appartiennent au même domaine d'attraction (disons celui de la GEV$(0,1,\xi)$) et donner le lien entre les constantes de normalisation. On rappelle que la fonction de répartition d'une GEV$(0,1,\xi)$ est

$$\exp\left(-(1+\xi x)_+^{-\frac{1}{\xi}}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement supposons que F et G ont le même point extrêmal et appartiennent au domaine d'attraction de la Gumbel ($\Lambda(x) = \exp(-(\exp(-x)))$) telles qu'il existe $c_n > 0$ et d_n vérifiant

$$\lim_{n \to \infty} F^n(c_n x + d_n) = \Lambda(x) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to +\infty} G^n(c_n x + d_n) = \Lambda(x + b).$$

Montrer que

$$\lim_{x \to x^F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = c \in (0, \infty)$$

et caractériser c.

4. Quelles sont les procédures statistiques à utiliser pour estimer les paramètres des distributions GEV (discuter suivant la nature des observations)?

Exercice 1 (7 points):

On considère la distribution donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{1-x}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq 1. \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Soient $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de distribution F et $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

0. Est-ce que M_n peut avoir une distribution non dégénérée avec une suite de seuils non-linéaires?

1. En choisissant

$$a_n = \frac{1}{(1 + \ln n)^2} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\ln n}{1 + \ln n},$$

trouver la loi limite de $a_n^{-1}(M_n - b_n)$.

Soient $E_1, ..., E_n$ une suite de variables aléatoires IID de distribution exponentielle de paramètre 1 et $M_n^E = \max(E_1, ..., E_n)$.

2. Donner les constantes de normalisation a_n^E et b_n^E telles que $(a_n^E)^{-1}\left(M_n^E - b_n^E\right)$ converge en distribution vers la loi de Gumbel.

3. On considère la fonction

$$g(x) = \frac{x}{1 + x}, \quad x > 0.$$

a. Montrer que $X_1 \stackrel{d}{=} g(E_1)$. En déduire que

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \stackrel{d}{=} \frac{g\left(M_n^E\right) - g(\ln n)}{g'(\ln n)}.$$

b. Montrer qu'il existe ζ_n tel que

$$g\left(M_n^E\right) - g(\ln n) = \left(M_n^E - \ln n\right) g'\left(\zeta_n\right)$$

avec $\ln n \leq \zeta_n \leq M_n^E$ si $\ln n \leq M_n^E$ et inversement.

c. Montrer que

$$\frac{M_n^E}{\ln n} \xrightarrow{P} 1,$$

et en déduire que

$$\frac{g'\left(\zeta_n\right)}{g'(\ln n)} \xrightarrow{P} 1.$$

Retrouver le résultat de la question 1.

Exercice 2 (3 points):

Supposons que les variables (X_i) sont des variables iid de distributions F. Posons $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $m_n = \min(X_1, ..., X_n)$ et supposons qu'il existe des constantes $a_n > 0$, $\alpha_n > 0$, b_n, β_n telles que

$$P(M_n \leq a_n x + b_n) \to G_1(x) \qquad \text{et} \qquad P(-m_n \leq \alpha_n x + \beta_n) \to G_2(x).$$

1. Montrer la convergence

$$P(M_n \leq a_n x + b_n, -m_n \leq \alpha_n y + \beta_n) \to G_1(x)G_2(y).$$

Qu'en concluez-vous?

2. On considère le cas où les (X_i) sont des variables aléatoires Gaussiennes centrées et réduites. On rappelle que dans ce cas

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \Lambda$$

où Λ a une distribution de Gumbel et

$$\begin{aligned} a_n &= (2\ln(2n))^{-1/2} \\ b_n &= (2\ln(2n))^{1/2} - \frac{1}{2}(2\ln(2n))^{-1/2}[\ln(\ln(2n)) + \ln(4\pi)]. \end{aligned}$$

Montrer que $(M_n + m_n)/a_n$ converge en distribution et caractériser sa loi.