PNV. 2016-2017.

Exercice 1

a. Les éléments de chaque colonne du d-triangle ne sont pas constants : on ne valide pas cette méthode.

b.

w_{ij}	0	...	6
0	1	...	7
⋮	⋮		
6	7		

Avec le d-triangle on obtient :

$f_j = (4,9495 ; 1,5131 ; 1,085 ; 1,0316 ; 1,0354 ; 1,0164 ; 1,006)$

ie $f_j = \sum_{i=0}^{n-j-1} w_{ij} f_{ij} \Big/ \sum_{i=0}^{n-j-1} w_{ij}$

On obtient

C_{in}	R_i
11291	0
13405	80
20072	442
29378	1629
34106	2878
70176	10955
89593	40209
94433	83792

$R = 139985$.

On obtient une provision plus grande. Utilisation de la pondération calendaire pour donner plus de poids aux années récentes. On aurait pu prendre le dernier f_j ou la moyenne des 2 derniers.

c. Utilisation de Verbeek-Taylor : arithmétique : $X_{ij} = y_j \lambda_{i+j}$, $\sum_{j=0}^{n} y_j = 1$

$d_k = \lambda_k \sum_{j=0}^{k} y_j = \sum_{i=0}^{k} x_{i,k-i}$ $\quad v_j = \sum_{i=0}^{n-j} x_{ij} = y_j \sum_{k=j}^{n} \lambda_k$

géométrique : $\prod_{j=0}^{n} y_j = 1$ $\quad e_k = \prod_{i=0}^{k} x_{i,k-i} = \lambda_k \prod_{j=0}^{k} y_j$ $\quad w_j = \prod_{i=0}^{n-j} x_{ij} = y_j \prod_{k=j}^{n} \lambda_k$.

↳ on peut améliorer la méthode en utilisant un ajustement exponentiel des λ_h plutôt qu'un linéaire

d. On privilégie la méthode avec le plus grand R par principe de prudence.

Exercice 2.

1i. Latest : $C_{2,7}$: somme de la 2e ligne du triangle.

Ultimate : $C_{2,8} = C_{2,7} \times f_6$. charge ultime

Dev. to date = Latest / Ultimate

IBNR = R_i = Ultimate - Latest

Mack SE = $\sqrt{MSEP(\hat{R}_2)}$

$$= \sqrt{C_{2,8}^2 \times \frac{\sigma_7^2}{f_7^2}\left(\frac{1}{C_{2,7}} + \frac{1}{C_{1,7}}\right)} = 32,3$$

$CV(IBNR) = \frac{\text{Mack S.E}}{IBNR}$

ii. Normale : $[\hat{R} - 2sep(\hat{R}) ; \hat{R} + 2sep(\hat{R})] = (71302.59, 196197.67)$

LogNormale : $[\exp(\mu - 2\sigma) ; \exp(\mu + 2\sigma)]$ avec $\mu = \ln(R) - \frac{\sigma_i^2}{2} = 11.77$

$= [116285.08, 143803.06]$ $\sigma^2 = \ln\left(1 + \frac{se(R)^2}{R^2}\right) = 0.0531$

iii. Normale $R_{95\%} = E(R_i) + Var(R) * q_{0.95}$ $q_{0.95}$: quantile loi normale 95%.

Comme on ne le connait pas (à l'exam), on l'estime par 2 donc on prend la borne sup. de l'intervalle trouvé en ii soit $R_{95\%} = 196197.67$

LogNormale : $R_{95\%} = 143803.06$ $q_{0.95}$: quantile loi normale $(E(R), Var(R))$ 95%.

2a. $MSEP(\hat{R}_i) = MSE(\hat{R}_i) + Var(\hat{R}_i)$

$$= \sum_{j \in \Delta i} Var(\mu_{ij}) + 2 \sum_{j_1, j_2 \in \Delta i} cov(\mu_{ij_1}, \mu_{ij_2}) + \phi Var(\mu_{ij})$$

$Var(\alpha(B)) \approx Var(\alpha(b) + \alpha'(b)(\varepsilon - b)] \approx Var[\alpha(b)B] \approx \alpha(b)^2 Var(B)$ dvp^t Taylor

$\hat{\mu}_{ij} = exp(\hat{\eta}_{ij}) \quad Var(\hat{\mu}_{ij}) = \left(\frac{\partial \hat{\mu}_{ij}}{\partial \hat{\eta}_{ij}}\right) Var(\eta_{ij}) = \hat{\mu}_{ij} Var(\eta_{ij})$

$Cov(\mu_{ij_1}, \mu_{ij_2}) = \left|\frac{\partial \mu_{ij_1}}{\partial \eta_{ij}}\right| \left|\frac{\partial \mu_{ij_2}}{\partial \eta_{ij}}\right| cov(\eta_{ij_1}, \eta_{ij_2})$

$MSEP(\hat{R}_i) = \sum \phi \hat{\mu}_{ij} + \hat{\mu}_{ij}^2 Var(\eta_{ij}) + 2 \sum \hat{\mu}_{ij_1} \hat{\mu}_{ij_2} cov(\eta_{ij_1}, \eta_{ij_2})$

2b. L'année 5 correspond à l'année 4 dans le triangle des paiements incrémentaux donc la formule à appliquer est $E[\hat{R}_{i+1}] = \sum_{j=m-i+2}^{m+1} \hat{\mu}_{i+1,j}$ avec $m = 7$, $i = 4$

soit $E[\hat{R}_5] = \sum_{j=5}^{8} e^{\hat{\mu} + \hat{\alpha}_5 + \hat{\beta}_j} = e^{7.2447 + 1.1035}(e^{-1.5229} + e^{-1.3090} + e^{-2.0434} + e^{-3.04})$

$= 2810,5 \approx 2811.$

2c. $sepboot = \sqrt{MSE_{boot} + VAR_{boot}}$ et MSE boot: risque estimation = 564676602

$= 23765,79$ Var boot: $\hat{R} = \hat{\phi} \sum V(\hat{\mu}_{ij}) = 136042.9$

$CV = \frac{sepboot}{R} = 0,1747.$

↳ meilleure estimation car sep et CV plus petit par bootstrap.

3a. Latest: $C_{i,n-i}$: dernière valeur réelle pour l'année d'origine i

Mean ultimate: moyenne charge ultime

Mean IBNR: provision moyenne

IBNR s.e.: sepboot $(\hat{R}_i)$: erreur sur provision

IBNR 75%: provision suffisante dans 75% des cas.

IBNR 95%: ________ 95% des cas.

b. $CV(\hat{R}_i) = \frac{\text{sepboot}(\hat{R}_i)}{\hat{R}_i}$ => pour i de 2 à 8 :

(6.767 ; 2.258 ; 1.109 ; 0.8202 ; 0.435 ; 0.249 ; 0.344)

$CV(\hat{R}) = \frac{\text{sepboot}(\hat{R})}{\hat{R}} = \frac{33281}{136648} = 0.244$.

c. On remarque que le bootstrap ne marche pas bien sur les années récentes car le latest actual (point rouge) est hors des boxplots (bootstrap prévoit mal).

4. Choix de celle avec la + petite dispersion pour se rapprocher de la réalité.