Examen Théorie des Valeurs Extrêmes 2016-2017
Seconde session

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice

Question de cours (8 points):

1. On rappelle que les lois "max-stables" sont définies par

$$\text{Fréchet } (\alpha > 0): \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{Weibull } (\alpha > 0): \quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{\alpha}\} & \text{si } x \le 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{Gumbel}: \quad \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que: $X \sim \Phi_\alpha \Leftrightarrow \ln(X^\alpha) \sim \Lambda \Leftrightarrow -\Psi^{-1} \sim \Phi_\alpha$.

2. Qu'est-ce que le domaine d'attraction d'une loi max-stable? Quelles sont les conditions qui définissent le domaine d'attraction de la loi de Fréchet?

3. Quel lien relie les distributions GEV (Generalised Extreme Value distibutions) et les distributions GPD (Generalised Pareto distributions)?

4. Quelles sont les procédures statistiques à utiliser pour estimer les paramètres des distributions GEV (discuter suivant la nature des observations)?

Exercice 1 (6 points):

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution de Fréchet de paramètre 1, i.e. $\Pr(X_1 \le x) = \exp(-x^{-1})$.

0. Donner les constantes a_n et b_n telles que

$$\frac{\max(X_1, ..., X_n) - b_n}{a_n} \overset{L}{=} X_1.$$

On définit le processus max-autoregressif de la manière suivante:

$$Y_i = \max(\alpha Y_{i-1}, (1-\alpha) X_i)$$

avec $0 \le \alpha < 1$.

1. Montrer que si $Y_i = \max_{j\geq 0} \alpha^j (1-\alpha) X_{i-j}$ alors Y_{i+1} a la même distribution que Y_i. Il s'agit de la distribution stationnaire. Montrer que cette distribution est la distribution de Fréchet de paramètre 1.

2. Montrer que

$$\Pr\left(\max(Y_1, ..., Y_n) \leq x\right) = \Pr\left(Y_1 \leq x, (1-\alpha) X_2 \leq x, \ldots, (1-\alpha) X_n \leq x\right).$$

3. En déduire que

$$\Pr\left(\max(Y_1, ..., Y_n) \leq x\right) = \exp\left(-\left[1 + (1-\alpha)(n-1)\right]/x\right)$$

et que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{\max(Y_1, ..., Y_n) - b_n}{a_n} \leq x\right) = \exp\left(-(1-\alpha) x^{-1}\right).$$

4. Pour quelle valeur de α les lois asymptotiques des maxima des X_i et des Y_i normalisés coïncident?

Exercice 2 (6 points):

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution F et soit $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. On note la statistique d'ordre la manière suivante

$$X_{(n)} \leq X_{(n-1)} \leq \ldots \leq X_{(1)}$$

et $B_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i > x\}}$.

1. Montrer que $X_{(k)} \leq x$ si et seulement si $B_n(x) < k$.
2. Donner la loi de $B_n(x)$. En déduire que

$$P\left(X_{(k)} \leq x\right) = \sum_{r=0}^{k-1} C_n^r \left(F(x)\right)^{n-r} \left(1 - F(x)\right)^r.$$

3. Calculer la transformée de Laplace de $B_n(x)$:

$$\varphi_n(t, x) = \mathbb{E}\left(\exp\left(t B_n(x)\right)\right).$$

4. Montrer que s'il existe une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} n \Pr(X_i > u_n) = \tau$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \ln \varphi_n(t, u_n) = \tau(e^t - 1).$$

5. Donner la transformée de Laplace d'une loi de Poisson de paramètre τ (Rappel: si N suit une loi de Poisson de paramètre τ, alors $P(N = n) = e^{-\tau}\tau^n/n!$).

6. Déduire des questions précédentes l'expression analytique de la loi limite de $X_{(2)}$ si l'on peut trouver deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{(1)} - b_n}{a_n} \leq x\right) = \exp\left(-\exp(-x)\right).$$