Done

M2 "Probabilités et Finance" Sorbonne Université *Année 2022 – 2023*
"Introduction aux processus de diffusion" (L.Zambotti)

Chapitre VI. Formule d'Itô et applications

Exercice 1. Soient X et Y deux $(\mathscr{F}_t)$-mouvements browniens réels indépendants, et soit H un processus progressif. On pose

$$\begin{aligned} \beta_t &= \int_0^t \cos(H_s)\,\mathrm{d}X_s + \int_0^t \sin(H_s)\,\mathrm{d}Y_s, \\ \gamma_t &= \int_0^t \sin(H_s)\,\mathrm{d}X_s - \int_0^t \cos(H_s)\,\mathrm{d}Y_s\,. \end{aligned}$$

Montrer que β et γ sont des $(\mathscr{F}_t)$-mouvements browniens indépendants.

Exercice 2. (intégrale de Stratonovich). Soient X et Y deux semimartingales continues. L'intégrale de Stratonovich $\int_0^\bullet Y \circ \mathrm{d}X$ est définie par

$$\int_0^t Y_s \circ \mathrm{d}X_s := \int_0^t Y_s\,\mathrm{d}X_s + \frac{1}{2}\,\langle X,\,Y\rangle_t\,.$$

(i) Montrer que pour tout $t > 0$ et toute suite $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ de subdivisions emboîtées de $[0,\,t]$ dont le pas tend vers 0,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n-1} \frac{Y_{t_{i+1}^n} + Y_{t_i^n}}{2}(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t Y_s \circ \mathrm{d}X_s \qquad \text{en probabilité.}$$

(ii) Montrer que si $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une fonction de classe C^3, alors

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) \circ \mathrm{d}X_s.$$

Exercice 3. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien. Montrer que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{B_s=0\}}\,\mathrm{d}B_s = 0$.

Exercice 4. On note $\mathbb{P}^x$ la loi du mouvement brownien $(B_t,\ t\geq 0)$ issu de $x > 0$, et on pose $\tau := \inf\{t \geq 0 :\ B_t = 0\}$. Soit $f :\ \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue à support compact. Calculer $\mathbb{E}^x(\int_0^\tau f(B_s)\,\mathrm{d}s)$.

Exercice 5. Soit $Z = X + iY$ un mouvement brownien complexe issu de 0. On pose $\tau := \inf\{t :\ |Y_t| \geq \frac{\pi}{2}\}$. À l'aide de la martingale e^Z, déterminer la loi de X_τ.

Exercice 6. (i) Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction continue. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to]0,\,\infty[$ une fonction de classe C^2 telle que $f'' = 2gf$ sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(0) = 1$, $f'(1) = 0$. On pose

$$u(t) := \frac{f'(t)}{2f(t)}, \qquad t \geq 0.$$

Montrer que $u' + 2u^2 = g$ sur $\mathbb{R}_+$.

(ii) Soit β un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien réel standard. Soient $x_0 \geq 0$ et $a \geq 0$ des réels positifs. Soit $(X_t,\, t \geq 0)$ un processus continu et adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, tel que

$$X_t = x_0 + 2\int_0^t \sqrt{X_s}\, \mathrm{d}\beta_s + at.$$

Montrer que $u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s\, \mathrm{d}s = u(0)x_0 + \int_0^t u(s)\, \mathrm{d}X_s - 2\int_0^t u(s)^2 X_s\, \mathrm{d}s$, $t \geq 0$.

(iii) Posons $M_t := u(0)x_0 + 2\int_0^t u(s)\sqrt{X_s}\, \mathrm{d}\beta_s$, $t \geq 0$. Montrer que

$$f(t)^{-a/2} \exp\Big(u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s\, \mathrm{d}s\Big) = \mathscr{E}(M)_t.$$

(iv) Montrer que f est décroissante sur $[0,\, 1]$. Montrer que

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\int_0^1 g(s)X_s\, \mathrm{d}s\Big)\Big] = f(1)^{a/2} \mathrm{e}^{x_0 f'(0)/2}.$$

(v) Montrer que

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^1 X_s\, \mathrm{d}s\Big)\Big] = \frac{1}{(\mathrm{ch}\theta)^{a/2}} \exp\Big(-\frac{x_0}{2}\,\theta \mathrm{th}\theta\Big), \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

(vi) Soit B un mouvement brownien réel standard. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^1 (B_s + x)^2\, \mathrm{d}s\Big)\Big] = \frac{1}{(\mathrm{ch}\theta)^{1/2}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2}\,\theta \mathrm{th}\theta\Big), \qquad \forall \theta \in \mathbb{R}.$$

(vii) Soient B et $\widetilde{B}$ des mouvements browniens réels standard indépendants. Montrer que pour tout $t > 0$ fixé, $\inf\{s \geq 0 :\, |B_s| = t\}$ et $\int_0^t B_s^2\, \mathrm{d}s + \int_0^t \widetilde{B}_s^2\, \mathrm{d}s$ ont la même loi.

✓ **Exercice 7.** Soit $(B_t,\ t \in [0,1])$ un mouvement brownien issu de 0, et soit $(\mathscr{F}_t,\ t \in [0,1])$ (l'augmentation habituelle de) la tribu canonique de B. On se donne $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée, et on pose $M_t := \mathbb{E}[\,f(B_1)\,|\,\mathscr{F}_t]$, $t \in [0,1]$. Écrire explicitement une constante c et un processus progressif H tels que $M_t = c + \int_0^t H_s\, \mathrm{d}B_s$.

✓ **Exercice 8.** (troisième identité de Wald). Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard, et soit τ un temps d'arrêt tel que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{\tau/2}) < \infty$. Montrer que $\mathbb{E}[\exp(B_\tau - \frac{\tau}{2})] = 1$.

✓ **Exercice 9.** Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien, et soit $S_t := \sup_{s\in[0,\,t]} B_s$. On pose $X_t := S_t - B_t$.

(i) Montrer que $\int_0^t \mathbf{1}_{\{X_u \neq 0\}}\, \mathrm{d}S_u = 0$.

(ii) Montrer que $Y_t := X_t^2 - t$ est une (vraie) martingale.

(iii) Soit $\tau := \inf\{t \geq 0 :\ X_t = 1\}$. Calculer $\mathbb{E}(\tau)$.

✓ **Exercice 10.** Soit B un mouvement brownien issu de 0.

(i) Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité sur $\mathscr{F}_\infty$ telle que pour tout t, $\mathbb{Q}|_{\mathscr{F}_t} = \mathrm{e}^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t} \bullet \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_t}$. Soit τ un temps d'arrêt fini $\mathbb{P}$-p.s. Montrer que $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{\gamma B_\tau - \frac{\gamma^2}{2}\tau}] = 1$ si et seulement si $\tau < \infty$ $\mathbb{Q}$-p.s.

(ii) Soit $\gamma \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ des réels tels que $\gamma a \geq 0$. Si $\tau_a^{(\gamma)} := \inf\{t \geq 0 :\ B_t + \gamma t = a\}$, alors pour tout $\lambda \geq 0$, $\mathbb{E}[\mathrm{e}^{-\lambda \tau_a^{(\gamma)}}] = \mathrm{e}^{\gamma a - \sqrt{(\gamma^2 + 2\lambda)a^2}}$.

Exercice 11. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien standard, et soit H un processus progressif. On suppose qu'il existe des constantes $0 < c \le C < \infty$ telles que $c \le H_t(\omega) \le C$ pour tout $(t, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega$. Montrer que pour toute fonction mesurable $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ telle que $\int_0^\infty f^2(t)\, \mathrm{d}t < \infty$, on a

$$\exp\Big(\frac{c^2}{2}\int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t\Big) \le \mathbb{E}\Big\{\exp\Big(\int_0^\infty f(t) H_t\,\mathrm{d}B_t\Big)\Big\} \le \exp\Big(\frac{C^2}{2}\int_0^\infty f^2(t)\,\mathrm{d}t\Big).$$

Exercice 12. Soit B un mouvement brownien issu de 0, et soit $\gamma \in \mathbb{R}$. On pose $\tau := \inf\{t \ge 0 : |B_t + \gamma t| = 1\}$. Montrer que $B_\tau + \gamma\tau$ et τ sont indépendantes.

Exercice 13. Soit B un mouvement brownien standard, et soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction convexe de classe C^2 telle que $f(0) = 0$ et $b := \int_0^1 (f'(t))^2\,\mathrm{d}t < \infty$. Montrer que pour tout $x > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]} |B_t + f(t)| \le x\Big) \le \mathrm{e}^{ax-(b/2)}\,\mathbb{P}\Big(\sup_{t\in[0,1]} |B_t| \le x\Big),$$

où $a := |f'(1)| + \int_0^1 f''(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 14. Soit B un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien réel standard. Soit U une variable aléatoire réelle $\mathscr{F}_1$-mesurable indépendante de B telle que $\mathbb{E}(\mathrm{e}^{aU}) < \infty$, $\forall a \in \mathbb{R}$. On pose $f(t,x) := \mathbb{E}(\mathrm{e}^{xU - tU^2/2})$, $g(t,x) := \mathbb{E}(U\mathrm{e}^{xU-tU^2/2})$ et $h(t,x) := \frac{g(t,x)}{f(t,x)}$.

(i) Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité sur $\mathscr{F}_1$ définie par $\mathbb{Q} := f(1, B_1) \bullet \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_1}$. Montrer que $B_t - \int_0^t h(s, B_s)\,\mathrm{d}s$, $t \in [0,1]$, est un $\mathbb{Q}$-mouvement brownien.

(ii) On pose $\xi_t := B_t + tU$, $t \in [0,1]$. Montrer que pour toute $F : C([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\mathbb{E}\Big\{F(\xi_t,\ t\in[0,1])\Big\} = \mathbb{E}\Big\{f(1, B_1) F(B_t,\ t \in [0,1])\Big\}.$$

En déduire que $\xi_t - \int_0^t h(s, \xi_s)\,\mathrm{d}s$, $t \in [0,1]$, est un $\mathbb{P}$-mouvement brownien.

(iii) Soit $\mathscr{G} := \sigma(\xi_t,\ t\in[0,1])$. Calculer $\mathbb{E}(U \,|\, \mathscr{G})$.

(iv) Définissons la probabilité $\widetilde{\mathbb{Q}}$ sur $\mathscr{F}_1$ par $\widetilde{\mathbb{Q}} := \mathrm{e}^{-UB_1 - U^2/2} \bullet \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_1}$. Montrer que sous $\widetilde{\mathbb{Q}}$, $(\xi_t,\ t\in[0,1])$ et U sont indépendants, et que la loi de U est la même sous $\mathbb{P}$ et sous $\widetilde{\mathbb{Q}}$.

Exo $\lambda > 0$, $x \in \mathbb{R}$

On veut étudier l'équation

$$X_t = x - \lambda\int_0^t X_s\,ds + B_t,\quad t \geq 0$$

On cherche X parmi les semimartingales.

Rappel $Y_t = x - \lambda\int_0^t Y_s\,ds \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{Y}_t = -\lambda Y_t \\ Y_0 = x \end{cases}$

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\lambda t}Y_t\right) = \lambda e^{\lambda t}Y_t + e^{\lambda t}\underbrace{\dot{Y}_t}_{-\lambda Y_t} = 0 \Rightarrow e^{\lambda t}Y_t = x,\quad Y_t = xe^{-\lambda t}$$

$$X_t = x - \lambda\int_0^t X_s\,ds + B_s$$

$$e^{\lambda t}X_t = x + \int_0^t X_s\,\lambda e^{\lambda s}\,ds + \int_0^t e^{\lambda s}\left(-\lambda X_s\,ds + dB_s\right) + \underbrace{\langle e^{\lambda \cdot}, X\rangle_t}_{=0} = x + \int_0^t e^{\lambda s}\,dB_s$$

$$X_t = e^{-\lambda t}x + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)}\,dB_s$$

Rappel si $h \in L^2(\mathbb{R}_+, dt) \Rightarrow \int h_s\,dB_s \sim \mathcal{N}\left(0, \int h_s^2\,ds\right)$

$$X_t = e^{-\lambda t}x + \int_0^t h_s\,dB_s \sim \mathcal{N}\Big(e^{-\lambda t}x, \underbrace{\int_0^t e^{-2\lambda(t-s)}\,ds}_{\frac{1-e^{-2\lambda s}}{2\lambda}}\Big) \quad \text{où} \quad h_s = \mathbb{1}_{[0,t]}\,e^{-\lambda(t-s)}$$

$$\tilde{h}_s = \mathbb{1}_{[0,\tilde{t}]}(s)\,e^{-\lambda(\tilde{t}-s)},\quad h_s = \mathbb{1}_{[0,t]}(s)\cdot e^{-\lambda(t-s)}$$

$$\mathrm{Cov}\left(\int h_s\,dB_s, \int \tilde{h}_s\,dB_s\right) = \int h_s\tilde{h}_s\,ds = \int \mathbb{1}_{[0,t\wedge\tilde{t}]}\,e^{-\lambda(t+\tilde{t}-2s)}\,ds = e^{-\lambda(t+\tilde{t})}\,\frac{e^{2\lambda(t\wedge\tilde{t})}-1}{2\lambda}$$

$$= \frac{1}{2\lambda}\left(e^{-\lambda|t-\tilde{t}|} - e^{\lambda(t+\tilde{t})}\right)$$

Exo Le pont Brownien

$$X_t = -\int_0^t \frac{X_s}{1-s} ds + B_t, \quad t \in [0,1[$$

$$d\left(\frac{X_t}{1-t}\right) = \frac{X_t}{(1-t)^2} dt + \frac{1}{1-t}\left(-\frac{X_t}{1-t} dt + dB_t\right) + \overset{=0}{d\langle \tfrac{1}{1-\cdot}, X\rangle} = \frac{dB_t}{1-t}$$

$$\frac{X_t}{1-t} = \int_0^t \frac{dB_s}{1-s} \Rightarrow X_t = (1-t)\int_0^t \frac{dB_s}{1-s}, \quad t \in [0,1[$$

$(X_t)_{t\in[0,1]}$ est gaussien centré

$$\mathrm{Cov}(X_t, X_{\tilde{t}}) = \int_0^1 h_s \tilde{h}_s ds = \int_0^{t\wedge\tilde{t}} \frac{(1-t)(1-\tilde{t})}{(1-s)^2} ds = \left[\frac{1}{1-s}\right]_0^{t\wedge\tilde{t}} (1-t)(1-\tilde{t}) = \frac{t\wedge\tilde{t}}{1-t\wedge\tilde{t}}(1-t)(1-\tilde{t}) =$$

$$= \{t \le \tilde{t}\} = t(1-\tilde{t}) = t - t\tilde{t} = t\wedge\tilde{t} - t\tilde{t} \Rightarrow (X_t) \text{ est un pont Brownien}$$

$(B_t - tB_1)_{t\in[0,1]}$ est un gaussien centré avec même fonction de covariance

Exercice 1. Soient X et Y deux $(\mathscr{F}_t)$-mouvements browniens réels indépendants, et soit H un processus progressif. On pose

$$\beta_t = \int_0^t \cos(H_s)\, dX_s + \int_0^t \sin(H_s)\, dY_s,$$
$$\gamma_t = \int_0^t \sin(H_s)\, dX_s - \int_0^t \cos(H_s)\, dY_s.$$

Montrer que β et γ sont des $(\mathscr{F}_t)$-mouvements browniens indépendants.

$\beta_t, \gamma_t \in \mathcal{M}^c_{loc}$ Il suffit montrer que $\langle \beta\rangle_t = t$ $\langle \beta, \gamma\rangle_t = 0$ (Théorème de Lévy)

$$\langle \beta\rangle_t = \int_0^t \cos(H_s)^2 \overset{ds}{d\langle X\rangle_s} + \int_0^t \sin(H_s)^2 \overset{ds}{d\langle Y\rangle_s} + 2\int_0^t \sin H_s \cos H_s \overset{=0}{d\langle X,Y\rangle_s} =$$

$$= \int_0^t ds = t. \quad \text{La m̂ pour } \langle \gamma\rangle_t = t$$

$$\langle \beta, \gamma \rangle_t = \int_0^t \cos H_s \sin H_s \, d\langle X \rangle_s - \int_0^t \sin H_s \cos H_s \, d\langle Y \rangle_s = 0$$

with $d\langle X \rangle_s = ds$ and $d\langle Y \rangle_s = ds$.

Exercice 2. (intégrale de Stratonovich). Soient X et Y deux semimartingales continues. L'intégrale de Stratonovich $\int_0^\bullet Y \circ \mathrm{d}X$ est définie par

$$\int_0^t Y_s \circ \mathrm{d}X_s := \int_0^t Y_s \, \mathrm{d}X_s + \frac{1}{2} \langle X, Y \rangle_t \, .$$

(i) Montrer que pour tout $t > 0$ et toute suite $0 = t_0^n < t_1^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ de subdivisions emboîtées de $[0, t]$ dont le pas tend vers 0,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{p_n - 1} \frac{Y_{t_{i+1}^n} + Y_{t_i^n}}{2} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t Y_s \circ \mathrm{d}X_s \qquad \text{en probabilité.}$$

(ii) Montrer que si $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe C^3, alors

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) \circ \mathrm{d}X_s.$$

(i) $$\sum_i \frac{Y_{t_{i+1}} + Y_{t_i}}{2} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i}) = \underbrace{\sum Y_{t_i} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})}_{\downarrow \mathbb{P} \atop \int_0^t Y_s dX_s} + \underbrace{\frac{1}{2} \sum_i (Y_{t_{i+1}} - Y_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})}_{\downarrow \mathbb{P} \atop \langle X, Y \rangle_t}$$

$$Y^n = Y_{t_i} \mathbb{1}_{[t_i, t_{i+1})} \qquad \| Y^n - Y \|_{L^2} \to 0$$

(ii) $F \in C^3$

$$F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F''(X_s) d\langle X \rangle_s$$

$$\int_0^t F'(X_s) \circ dX_s = \int_0^t F'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \langle F'(X), X \rangle_s$$

$$F'(X_t) = F'(X_0) + \int_0^t F''(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t F'''(X_s) d\langle X \rangle_s$$

$$\langle F'(X), X \rangle_t = \langle F''(X) \cdot X, X \rangle_t = (F''(X) \cdot \langle X \rangle)_t = \int_0^t F''(X_s) d\langle X \rangle_s$$

Donc $F(X_t) = F(X_0) + \int_0^t F'(X_s) \circ dX_s$

√3 B_t $(\mathcal{F}_t)$-MB M.q. $\int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s=0\}}\, dB_s = 0$

$$X_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s=0\}}\, dB_s \in \mathcal{M}^c_{loc}$$

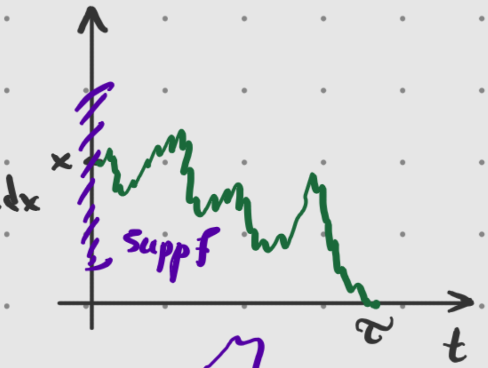
$$\langle X\rangle_t = \int_0^t \mathbb{1}_{\{B_s=0\}}\, ds \geq 0$$

$$\mathbb{E}\langle X\rangle_t = \int_0^t \mathbb{P}(B_s=0)\, ds = 0 \to \langle X\rangle_t = 0 \text{ p.s.} \to X_t = X_0 = 0 \text{ p.s.}$$

Exercice 4. On note $\mathbb{P}^x$ la loi du mouvement brownien $(B_t,\ t \geq 0)$ issu de $x > 0$, et on pose $\tau := \inf\{t \geq 0 :\ B_t = 0\}$. Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ continue à support compact. Calculer $\mathbb{E}^x(\int_0^\tau f(B_s)\,\mathrm{d}s)$.

$f \in C$ à support compact.

$$\mathbb{E}^x\left[\int_0^\tau f(B_s)\,ds\right] \qquad F(0)-F(x) = -\int_0^x\int_0^y f(u)\,du\,dx$$



$$F(x) : \quad f(x) = F''(x) \qquad F(x) = \int_0^x\int_0^u f(u)\,du\,dx$$

$$dF(B_t) = F'(B_t)\,dB_t + \frac{1}{2} f(B_t)\,dt$$

$$\underset{F(0)}{\overset{\shortparallel}{F(B_\tau)}} = F(x) + \int_0^\tau F'(B_s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^\tau f(B_s)\,ds \qquad \text{Il faut ajouter } F'(\infty) = 0$$

$\mathbb{E}^x$ $\to 0$

$\left(\int_0^t F'(B_s)\,dB_s\right)_t$ une vrai mart ?

Oui si $F'(B_s) \in L^2_T$

$$2(F(0)-F(x)) = \mathbb{E}\int_0^\tau f(B_s)\,ds$$

$F'(x) = \int_0^x f(u)\,du$ $\quad f \in C$

$|F'(x)| \leq C \cdot x$

$$\mathbb{E}\int_0^\tau f(B_s)\,ds = -2\int_0^x\int_0^y f(u)\,du\,dx$$

$$\int_0^T F'(B_s)^2\,ds \leq \int_0^T c^2 B_s^2\,ds$$ intégrable

$\Downarrow$

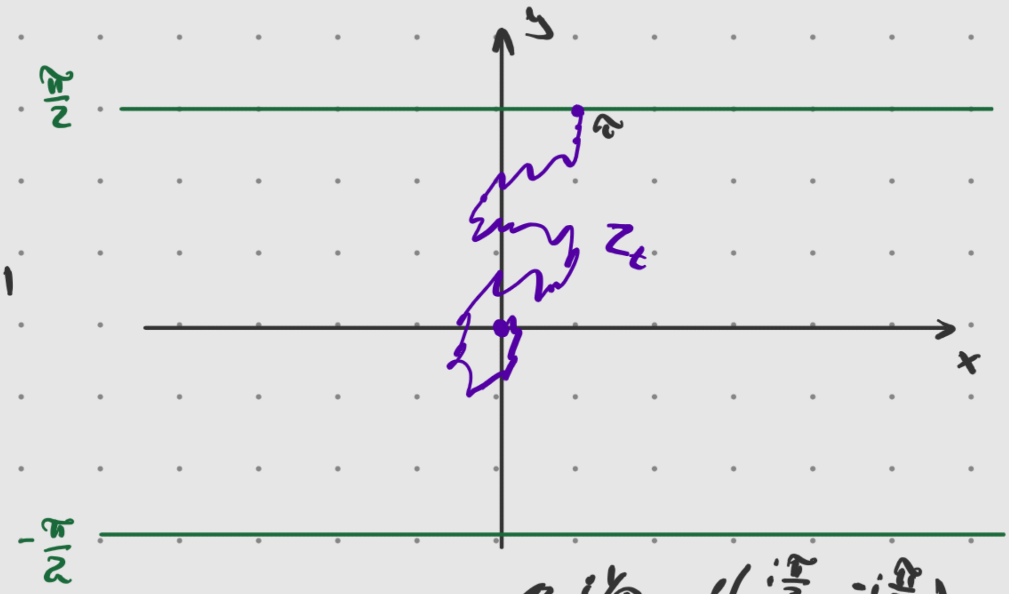
$\left(\int_0^t F'(B_s)\,dB_s\right)_{t\in[0,T]}$ est une vraie mart $\forall T$.

Exercice 5. Soit $Z = X + iY$ un mouvement brownien complexe issu de 0. On pose $\tau := \inf\{t : |Y_t| \geq \frac{\pi}{2}\}$. À l'aide de la martingale e^Z, déterminer la loi de X_τ.

$M_t = e^{X_t + iY_t}$

$\mathbb{E}[e^{X_t}]\mathbb{E}[e^{iY_t}] = e^{\frac{t}{2}} e^{-\frac{t}{2}} = 1$

$\mathbb{E}[M_t] = 1$



X_τ et Y_τ indep??

TCD $\nearrow$ $\mathbb{E} e^{iY_\tau} = \frac{1}{2}\Big(\underbrace{e^{i\frac{\pi}{2}}}_{i} + \underbrace{e^{-i\frac{\pi}{2}}}_{-i}\Big)$

$Z_0 = 1 = \mathbb{E}[Z_{t\wedge\tau}] \cancel{=} \mathbb{E} e^{X_{t\wedge\tau}} \, \mathbb{E} \underbrace{e^{iY_{t\wedge\tau}}}_{|\cdot| \le 1} \Rightarrow \mathbb{E} e^{X_{\tau\wedge t}} \to \infty$

$e^{\lambda Z}$ ✓ une mart. $\lambda \in \mathbb{R}$

$Z_t = iX_t + Y_t$

$\mathbb{E} e^{\lambda Z_{t\wedge\tau}} = 1$

$\mathbb{E} \underbrace{e^{\lambda(iX_{t\wedge\tau} + Y_{t\wedge\tau})}}_{\text{bornée car}} = 1$ $\quad |e^{\lambda Y_{t\wedge\tau}}| \le e^{\frac{\pi\lambda}{2}}$, $|e^{i\lambda X_{t\wedge\tau}}| = 1$

Donc $t \uparrow \infty$ et $1 = \mathbb{E} e^{\lambda(iX_\tau + Y_\tau)} = \mathbb{E}\Big(\overbrace{\frac{1}{2} e^{\frac{\lambda\pi}{2}} + e^{-\frac{\lambda\pi}{2}}}^{ch\,\frac{\lambda\pi}{2}}\Big) e^{i\lambda X_\tau}$

$\mathcal{L}(X_\tau \mid Y_\tau = \frac{\pi}{2}) = \mathcal{L}(X_\tau \mid Y_\tau = -\frac{\pi}{2})$

$\Rightarrow \mathbb{E}[e^{i\lambda X_\tau}] = \left(ch \frac{\lambda\pi}{2}\right)^{-1}$

$\sqrt{7}$ $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ borélienne bornée $\quad M_t = \mathbb{E}[f(B_1) \mid \mathcal{F}_t]$, $t \in [0,1]$

Écrire explicitement c et (H_t) t.q. $M_t = c + \int_0^t H_s \, dB_s$

$c = \mathbb{E}[f(B_1)]$

$$M_t = \mathbb{E}[f(B_1)\,|\,B_t] = v(t,B_t) \qquad v(1,B_t) = f(B_t)$$

$$dM_t = \underbrace{\left(\partial_t v + \frac{1}{2}\partial_{xx} v\right)}_{=0} dt + \partial_x v \, dB_t$$

$$t \mapsto s = 1-t$$

$$w(s,x) = v(1-t,x) \qquad \begin{cases} \partial_s w = \frac{1}{2}\partial_{xx} w \\ w|_{t=0} = f(x) \end{cases}$$

$$w(s,x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \varphi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2s}}\right) dy$$

$$v(t,x) = \int_{\mathbb{R}} f(y)\, \varphi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2(1-s)}}\right) dy$$

$$\partial_x v(t,x) = \frac{-1}{\sqrt{2(1-s)}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \frac{(x-y)}{\sqrt{2(1-s)}}\, \varphi\left(\frac{x-y}{\sqrt{2(1-s)}}\right) dy = \int f(y) \frac{(y-x)}{2(1-s)}\, \varphi\left(\frac{y-x}{\sqrt{2(1-s)}}\right) dy$$

$$H_t = \partial_x v(t,B_t)$$

NB B - $(\mathcal{F}_t)$-MB τ - t.a. t.q. $\mathbb{E}e^{\tau/2} < \infty$. M.q. $\mathbb{E}e^{\{B_\tau - \frac{\tau}{2}\}} = 1$

$$\mathbb{E}\, e^{B_{t\wedge\tau} - \frac{\tau\wedge t}{2}} = 1$$

$$H_t = \mathbb{1}_{[0,\tau]}(t)$$

$$e^{B_{t\wedge\tau} - \frac{\tau\wedge t}{2}} = e^{\int_0^t H_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t H_s^2 ds}$$

Condition de Novikov: $\mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}\int_0^\tau H_s^2 ds}\right] < \infty$

Théorème (Novikov modifié)

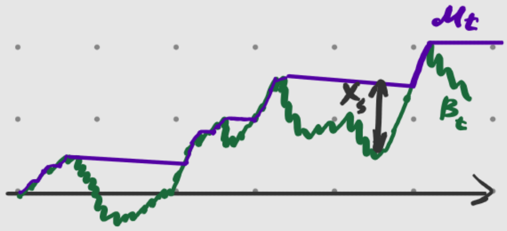
$L \in \mathcal{M}^c_{loc}$ $\quad M_0 = 0$ $\quad$ Alors

$$\mathbb{E}\, e^{\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty} < \infty \Rightarrow L \in \mathcal{M}^c \text{ u.i. et } \mathbb{E}[e^{\frac{1}{2}L_\infty}] < \infty \Rightarrow \mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_\infty] = 1$$

On a $L_t = \int_0^t H_s \, ds$

$$\mathbb{E} e^{\frac{\tau}{2}} = \mathbb{E} e^{\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty} < \infty \Rightarrow L \text{ u.i} \to \mathbb{E} e^{B_\tau - \frac{\tau}{2}} = 1$$

N9. B - $(\mathcal{F}_t)$ - MB, soit $S_t = \sup_{[0,t]} B_s$. On pose $X_t = S_t - B_t$



(i) $\int_0^t 1\!\!1_{\{X_u \neq 0\}} dS_u = 0$

$$\int_0^t 1\!\!1_{\{X_u \neq 0\}} d\langle S\rangle_u = \lim \sum_i 1\!\!1_{\{X_{t_i} \neq 0\}} \langle S\rangle_{t_i}^{t_{i+1}}$$

$\langle S\rangle_t$ est constante sur $\{M_t > B_t\} = \{X_t \neq 0\} \to$

$$\to \int_0^t 1\!\!1_{\{X_u \neq 0\}} d\langle S\rangle_u = 0 \Rightarrow \int_0^t 1\!\!1_{\{X_u \neq 0\}} dS_u = 0$$

(ii) M.q. $Y_t = X_t^2 - t$ est une vraie martingale

$(X_t)_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{=} (|W_t|)_{t\geq 0} \Rightarrow (X_t^2)_{t\geq 0} \overset{\mathcal{L}}{=} (W_t^2)_{t\geq 0} \Rightarrow X_t^2 - t$ est une vrai mart

pas nécessaire

OU: $dX_t^2 = 2X_t \, dX_t + d\langle X\rangle_t$

à variation finie car croissant

$$X_t^2 = \underbrace{2\int_0^t X_t \, d(M_t - B_t)}_{\overset{=}{(i)} 2\int X_t \, dB_t \text{ -mart}} + \langle X\rangle_t \qquad \langle X\rangle_t = \langle M - B\rangle_t = \langle B\rangle_t = t$$

$\to X_t^2 - t = 2\int_0^t X_s \, dB_s$ une vrai mart,

(iii) $\tau := \inf\{t \geq 0 \; X_t = 1\} \overset{\mathcal{L}}{=} \inf\{t \geq 0 : |W_t| \leq 1\}$

borné

$$\mathbb{E}\left[X_{t\wedge\tau}^2 - (t\wedge\tau)\right] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[\tau] = 1$$

$\downarrow$

1

$$\mathbb{E}[t\wedge\tau] = \mathbb{E}[X_{t\wedge\tau}^2]$$

TCM $\downarrow$ $\qquad \downarrow$ TCD

$$\mathbb{E}\tau = \mathbb{E}X_\tau^2 = 1$$

N°6. (i) $g \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ $\quad f \in C^2(\mathbb{R}_+,]0,\infty[)$ $\begin{cases} f'' = 2gf \\ f(0) = 1 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$

$u(t) = \dfrac{f'(t)}{2f(t)}$, $t \geq 0$. M.q. $u' + 2u^2 = g$ sur $\mathbb{R}_+$

$$u'(t) = \frac{2f''(t)f(t) - 2f'(t)^2}{4f(t)^2}$$

$$u' + 2u^2 = \frac{f''(t)}{2f(t)} = \frac{2g(t)f(t)}{2f(t)} = g(t)$$

(ii) β un $(\mathcal{F}_t)$-MB. $x_0, a \geq 0$ $\quad X_t = x_0 + 2\int_0^t \sqrt{X_s}\, d\beta_s + at$

M.q. $\quad u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s\, ds = u(0)x_0 + \int_0^t u(s)\, dX_s - 2\int_0^t u(s)^2 X_s\, ds$

$$u(t)X_t \Big|_{t=0} = u(0)x_0$$

$$d(u(t)X_t) = u'(t)X_t\, dt + u(t)dX_t = (g - 2u^2)X_t\, dt + u(t)dX_t$$

Donc $\quad u(t)X_t = u(0)x_0 + \int_0^t (g(s) - 2u^2(s))X_s\, ds + \int_0^t u(s)\, dX_s$

(iii) $M_t := u(0)x_0 + 2\int_0^t u(s)\sqrt{X_s}\, d\beta_s$ $\quad$ M.q. $\mathcal{E}(M)_t = f(t)^{-\frac{a}{2}} \exp\left\{u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s\, ds\right\}$

$$\mathcal{E}(M)_t = \exp\Big\{ \underbrace{M_t}_{2\int_0^t u(s)\sqrt{X_s}\, d\beta_s} - \frac{1}{2}\int_0^t \langle M \rangle_s\, ds \Big\}$$

$$\langle M\rangle_t = 4\int_0^t u(s)^2 X_s\,ds$$

On a montré que $u(t)X_t = u(0)x_0 + \int_0^t g(s)X_s\,ds - \underbrace{2\int_0^t u(s)^2 X_s\,ds}_{-\frac{\langle M\rangle_t}{2}} + a\int_0^t u(s)\,ds + \underbrace{2\int_0^t u(s)\sqrt{X_s}\,d\beta_s}_{M_t}$

$$M_t - \frac{\langle M\rangle_t}{2} = u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s\,ds - a\int_0^t u(s)\,ds$$

$$\mathcal{E}(M)_t = \underbrace{e^{-a\int_0^t u(s)\,ds}}\exp\left\{u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s\,ds\right\} = f(t)^{-a/2} e^{u(t)X_t - \int_0^t g(s)X_s\,ds}$$

$$\int_0^t \frac{f'(s)}{2f(s)}\,ds = \frac{1}{2}\ln(f(t)) - \frac{1}{2}\ln(\underbrace{f(0)}_{=0}) = \frac{1}{2}\ln f(t)$$

(iv) M.q. f est $\searrow$ sur $[0,1]$

M.q. $\mathbb{E}\left[e^{-\int_0^1 g(s)X_s\,ds}\right] = f(1)^{a/2} e^{x_0 f'(0)/2}$

$$\int_t^1 ds\, f''(s) = \underbrace{f'(1)}_{=0} - f'(t)$$

$$= \int_t^1 2\underbrace{g f(s)}_{\geq 0}\,ds \geq 0$$

$\Rightarrow f'(t) \leq 0$

Si $(\mathcal{E}(M)_t)_{t\geq 0}$ était une martingale, on aurait

$$\mathbb{E}[\mathcal{E}(M)_1] = \mathcal{E}(M)_0 = e^{u(0)x_0} = e^{\frac{f'(0)}{2}x_0}$$

$$f(1)^{-a/2}\,\mathbb{E}\, e^{\overset{0}{u(1)}X_1 - \int_0^1 g(s)X_s\,ds} = \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^1 g(s)X_s\,ds}\right]$$

$\Rightarrow \mathbb{E}\left[e^{-\int_0^1 g(s)X_s\,ds}\right] = f(1)^{\frac{a}{2}} e^{\frac{f'(0)}{2}x_0}$

Pourquoi $\mathcal{E}(M)_t$ est une martingale?

$u(t) = \frac{f'}{2f} \leq 0$ car $f \geq 0$ et $f' \leq 0$

Donc $\mathcal{E}(M)_t = f(t)^{-a/2} e^{\overset{\leq 0}{u(t)}\overset{\geq 0}{X_t} - \int_0^t \overset{\geq 0}{g(s)}\overset{\geq 0}{X_s}\,ds} \leq f(0)^{-a/2} \Rightarrow$ bornée $\Rightarrow$

$\Rightarrow (\mathcal{E}(M)_t)$ est une martingale U.I. sur $[0,1]$

(v) Montrer que
$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^1 X_s\,\mathrm{d}s\Big)\Big] = \frac{1}{(\mathrm{ch}\theta)^{a/2}}\exp\Big(-\frac{x_0}{2}\,\theta\mathrm{th}\theta\Big), \qquad \forall\theta\in\mathbb{R}.$$

(vi) Soit B un mouvement brownien réel standard. Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$,
$$\mathbb{E}\Big[\exp\Big(-\frac{\theta^2}{2}\int_0^1 (B_s+x)^2\,\mathrm{d}s\Big)\Big] = \frac{1}{(\mathrm{ch}\theta)^{1/2}}\exp\Big(-\frac{x^2}{2}\,\theta\mathrm{th}\theta\Big), \qquad \forall\theta\in\mathbb{R}.$$

(vii) Soient B et $\widetilde{B}$ des mouvements browniens réels standard indépendants. Montrer que pour tout $t>0$ fixé, $\inf\{s\geq 0 : |B_s| = t\}$ et $\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s + \int_0^t \widetilde{B}_s^2\,\mathrm{d}s$ ont la même loi.

(v) $$\mathbb{E}\left[e^{-\int_0^1 g(s)X_s ds}\right] = f(1)^{a/2} e^{x_0 f'(0)/2}$$

On pose $g(s) = \frac{\theta^2}{2}$ $\to \mathbb{E}\left[\exp\left\{-\frac{\theta^2}{2}\int_0^1 X_s ds\right\}\right] = f(1)^{a/2}\exp\left\{\frac{x_0}{2}f'(0)\right\}$ (*)

$$\begin{cases} f'' = \theta^2 f \\ f(0) = 1 \\ f'(1) = 0 \end{cases}$$

$f(t) = c_1 e^{\theta t} + c_2 e^{-\theta t}$

$f(0) = c_1 + c_2 = 1$

$f'(1) = c_1\theta e^{\theta} - c_2\theta e^{-\theta} = 0$

$c_2 = c_1 e^{2\theta}$

$c_1(1+e^{2\theta}) = 1 \to c_1 = \frac{1}{1+e^{2\theta}}$ $\quad c_2 = \frac{1}{1+e^{-2\theta}}$

$$f(t) = \frac{e^{\theta t}}{1+e^{2\theta}} + \frac{e^{-\theta t}}{1+e^{-2\theta}}$$

$f(1) = \frac{1}{\mathrm{ch}\theta}$ $\qquad \mathrm{th}\,\theta = \frac{e^{\theta}-e^{-\theta}}{e^{\theta}+e^{-\theta}}$

$$f'(t) = \frac{\theta}{1+e^{2\theta}}e^{\theta t} - \frac{\theta}{1+e^{-2\theta}}e^{-\theta t}$$

$$f'(0) = \theta\left(\frac{1}{1+e^{2\theta}} - \frac{1}{1+e^{-2\theta}}\right) = \theta\,\frac{e^{-2\theta}-e^{2\theta}}{2+e^{2\theta}+e^{-2\theta}} = \theta\,\frac{(e^{-\theta}-e^{\theta})\cancel{(e^{-\theta}+e^{\theta})}}{(e^{\theta}+e^{-\theta})^{\cancel{2}}} = -\theta\,\mathrm{th}\,\theta$$

En utilisant (*) on obtient le résultat

(vi) $X_t = (x+B_t)^2$ $\quad X_0 = x^2$ $\quad dX_t = 2\sqrt{X_t}\,dB_t + dt \to \underline{a=1}$

Par (v) avec $a=1$, $X_0 = x^2$ $\to$ $\square$

(vii) $\inf\{s\geq 0 : |B_s| = t\} \overset{\mathcal{L}}{=} \int_0^t B_s^2\,ds + \int_0^t \tilde{B}_s^2\,ds = Y_t$

Transformée de Laplace $\mathbb{E}\, e^{-\frac{\theta^2}{2}Y_t} = \mathbb{E}\left[e^{-\frac{\theta^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds}\right]^2 \ominus$

$$\int_0^t B_s^2\,ds = \int_0^1 B_{st}^2\, t\,ds \overset{\mathcal{L}}{=} \int_0^1 B_s^2 \cdot (\sqrt{t})^2\, t\,ds = \int_0^1 B_s^2\,ds \cdot t^2$$

$$\left(B_{at} \overset{\mathcal{L}}{=} \sqrt{a}\, B_t\right)$$

$\ominus$ $\mathbb{E}\left[e^{-\frac{(\theta t)^2}{2}\int_0^1 B_s^2 ds}\right]^2 \underset{\substack{(vi)\\ x=0}}{=} \dfrac{1}{ch(\theta t)}$

$$\tau_t = \inf\{s\geq 0 : |B_s| = t\}$$

$M_t = ch(\theta B_t)\, e^{-\frac{\theta^2}{2}t}$ une mart. $M_t^{\tau_t}$ une mart. bornée $\to$ UI $\to$

$\to$ Thm. d'arrêt $1 = \mathbb{E}[M_{\tau_t}] = ch(\theta t)\,\mathbb{E}\, e^{-\frac{\theta^2}{2}\tau_t} \Rightarrow \mathbb{E}\, e^{-\frac{\theta^2}{2}\tau_t} = \dfrac{1}{ch(\theta t)}$ $\square$

N10. (i) $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_\infty$ t.q. $\left.\dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2 t}{2}}$. Soit τ un t.a.

$\tau < \infty$ $\mathbb{P}$ p.s. M.q. $\mathbb{E}\left[e^{\gamma B_\tau - \frac{\gamma^2}{2}\tau}\right] = 1$ ssi $\tau < \infty$ $\mathbb{Q}$-p.s.

$\mathbb{Q}(\tau\leq t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}\, e^{\gamma B_t - \frac{\gamma^2 t}{2}}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}\, e^{\gamma B_{t\wedge\tau} - \frac{\gamma^2}{2}t\wedge\tau}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\{\tau\leq t\}}\, e^{\gamma B_\tau - \frac{\gamma^2}{2}\tau}\right]$

Par TCM, $\mathbb{Q}(\tau\leq t) \xrightarrow{t\to\infty} \mathbb{Q}(\tau<\infty) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\gamma B_\tau - \frac{\gamma^2}{2}\tau}\right] \Rightarrow \mathbb{Q}(\tau<\infty) = 1 \Leftrightarrow \mathbb{E}\left[e^{\gamma B_\tau - \frac{\gamma^2}{2}\tau}\right] = 1$

(ii) $\gamma\in\mathbb{R}$ $a\in\mathbb{R}$ $\gamma a\geq 0$ $\tau_a^{(\gamma)} := \inf\{t\geq 0 : B_t + \gamma t = a\}$

Alors pour tt $\lambda\geq 0$ $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\tau_a^{(\gamma)}}\right] = e^{\gamma a - \sqrt{(\gamma^2+2\lambda)a^2}}$

$\tilde{B}_t = B_t + \gamma t$ - MB sous $\mathbb{Q}$: $\left.\dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\gamma B_t - \frac{\gamma^2}{2}t}$

$\mathbb{P}^{\theta}(\tau_a^{(\gamma)}<\infty)=\mathbb{P}^{\theta}(\sup_{t\geq 0}\tilde{B}_t\geq a)=1$ On a montré dans le cours que $\tau_a^{\gamma}<\infty$ $\mathbb{P}$-p.s. si $\gamma a\geq 0$.

Donc par (i) $\mathbb{E}\left[e^{\gamma B_{\tau_a^\gamma}-\frac{\gamma^2}{2}\tau_a^\gamma}\right]=1$

Thm d'arrêt

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda\tau_a^\gamma}\mathbb{1}_{\{\tau_a^\gamma\leq T\}}\right]=\mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-\lambda\tau_a}\mathbb{1}_{\{\tau_a\leq T\}}e^{\gamma B_T-\frac{\gamma^2}{2}T}\right]\overset{\downarrow}{=}\mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-(\lambda+\frac{\gamma^2}{2})(T\wedge\tau_a)+\gamma B_{T\wedge\tau_a}}\mathbb{1}_{\{\tau_a\leq T\}}\right]$$

$$=\{\text{sur }\{\tau_a\leq T\}\ B_{T\wedge\tau_a}=a\}=\mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-(\lambda+\frac{\gamma^2}{2})\tau_a+\gamma a}\mathbb{1}_{\{\tau_a\leq T\}}\right]$$

$$\xrightarrow[T\to\infty]{\text{TCM}} e^{\gamma a}\,\mathbb{E}^{\theta}\left[e^{-(\lambda+\frac{\gamma^2}{2})\tau_a}\right]\underset{(*)}{=}e^{\gamma a-\sqrt{(\gamma^2+2\lambda)a^2}}$$

calcul pour MB sans dérive

(*) $\mathbb{E}e^{-\xi\tau_a}=?$ $\tau_a=\inf\{t\geq 0:\ B_t=a\}$

$M_t^{\tau_a}=e^{\sigma B_{t\wedge\tau_a}-\frac{\sigma^2}{2}\tau_a}$ une mart. U.I. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $1=e^{\sigma a}\,\mathbb{E}e^{-\frac{\sigma^2}{2}\tau_a}$ $\quad\xi=\frac{\sigma^2}{2}$ $\quad\sigma=\sqrt{2\xi}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}e^{-\xi\tau_a}=e^{-\sqrt{2\xi a^2}}$

Dans notre cas $\xi=\lambda+\frac{\gamma^2}{2}$ $\Rightarrow$ $\mathbb{E}e^{-(\lambda+\frac{\gamma^2}{2})\tau_a}=e^{-\sqrt{(2\lambda+\gamma^2)a^2}}$.

Ex 11

H progr. $\exists\, 0<c\leq C<\infty$ $\quad c\leq H_t\leq C$ $\quad\forall(t,\omega)$

M.q. $\forall f$ mesurable t.q. $\int_0^\infty f^2(t)dt<\infty$ on a

$$\exp\left\{\frac{c^2}{2}\int_0^\infty f^2(t)dt\right\}\leq\mathbb{E}\left[\exp\left(\int_0^\infty f(t)H_t\,dB_t\right)\right]\leq\exp\left\{\frac{C^2}{2}\int_0^\infty f^2(t)dt\right\}$$

$M_t=\int_0^t f(s)H_s\,dB_s$ une vrai mart car $\mathbb{E}\int_0^\infty f^2\underbrace{H_s^2}_{\leq C^2}ds<\infty$

$\langle M\rangle_t=\int_0^t f(s)^2H_s^2\,ds$ $\quad X_t=e^{M_t-\frac{1}{2}\langle M\rangle_t}$ une mart locale

$\mathbb{E}e^{\frac{1}{2}\langle M\rangle_\infty}=\mathbb{E}e^{\frac{1}{2}\int_0^\infty f(s)^2\overbrace{H_s^2}^{\leq C^2}ds}<\infty$ $\Rightarrow$ {Novikov} $\Rightarrow$ X_t est une vrai mart. U.I.

et $\mathbb{E}\, e^{M_\infty - \frac{1}{2}\langle M\rangle_\infty} = 1$

$$\mathbb{E}\, e^{\int_0^\infty f(s)H_s dB_s - \frac{C^2}{2}\int_0^\infty f(t)^2 dt} \leq \mathbb{E}\, e^{\int_0^\infty f(s)H_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^\infty f(s)^2 H_s^2 ds} \leq \mathbb{E}\, e^{\int_0^\infty f(s)H_s dB_s - \frac{c^2}{2}\int_0^\infty f(t)^2 dt}$$

$$\parallel$$
$$1$$

$$e^{\frac{c^2}{2}\int_0^\infty f(t)^2 dt} \leq \mathbb{E}\, e^{\int_0^\infty f(s)H_s dB_s} \leq e^{\frac{C^2}{2}\int_0^\infty f(t)^2 dt}$$

N12 $\quad \gamma \in \mathbb{R}$ On pose $\tau = \inf\{t \geq 0 : |\underbrace{B_t + \gamma t}_{\tilde{B}_t}| = 1\}$

M.q. $B_\tau + \gamma\tau \perp\!\!\!\perp \tau$.

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}(-\gamma B)_t$$

φ, ψ mesurables

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\varphi(\tilde{B}_\tau)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\psi(\tau)|\tilde{B}_\tau]] = \{\mathcal{L}(\tau|\tilde{B}_\tau = 1) = \mathcal{L}(\tau|\tilde{B}_\tau = -1)\} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\varphi(\tilde{B}_\tau)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\psi(\tau)$$

$\tilde{B}_\tau$ et τ sont indépendent

$$\mathbb{E}[\varphi(B_\tau + \gamma\tau)\psi(\tau)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\varphi(\tilde{B}_\tau)\psi(\tau)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\varphi(\tilde{B}_\tau)]\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\psi(\tau)] =$$

où $\tilde{B}_t$ est $\mathbb{Q}$-MB et $\tau = \inf\{t \geq 0\ |\tilde{B}_t| = 1\}$

$$= \mathbb{E}[\varphi(B_\tau + \gamma\tau)]\mathbb{E}[\psi(\tau)] \Rightarrow B_\tau + \gamma\tau \perp\!\!\!\perp \tau$$

N13 $\quad f : [0,1] \to \mathbb{R} \in C^2$ convexe $\quad f(0) = 0 \quad b := \int_0^1 f'(t)^2 dt < \infty$.

M.q. $\forall x > 0 \quad \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} |B_t + f(t)| \leq x) \leq e^{ax - \frac{b}{2}}\, \mathbb{P}(\sup_{t\in[0,1]} |B_t| \leq x)$ où $a = |f'(1)| + \int_0^1 f''(t)dt$

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{T=1} = \exp\left\{-\int_0^1 f'(s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(s)^2 ds\right\}$$

une vrai mart grâce à Novikov ($b < \infty \Rightarrow e^{\frac{1}{2}b} < \infty$)

$$\mathbb{P}(\sup_{[0,1]} |\underbrace{B_t + f(t)}_{\tilde{B}_t\text{ MB sous }\mathbb{Q}}| \leq x) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\int_0^1 f'(s)d\tilde{B}_s - \frac{b}{2}}\, \mathbb{1}_{\{\sup_{[0,1]}|\tilde{B}_t| \leq x\}}\right] \leq$$

On veut borner $\int_0^1 f'(s)\,d\tilde{B}_s = f'(s)\tilde{B}_s\Big|_0^1 - \int_0^1 \tilde{B}_s f''(s)\,ds = f'(1)\tilde{B}_1 - \int_0^1 \tilde{B}_s f''(s)\,ds$

$$\left|\int_0^1 f'(s)\,dB_s\right| \leq \{|\tilde{B}_s| \leq x \text{ sur } \mathbb{1}_{\{\sup|\tilde{B}_1| \leq x\}}\} \leq |f'(1)|\,x + \int_0^1 x f''(s)\,ds = ax$$

$$\Leftarrow \quad e^{ax-\frac{b}{2}}\,\mathbb{Q}\left(\sup_{[0,1]}|\tilde{B}_t| \leq x\right) = e^{ax-\frac{b}{2}}\,\mathbb{P}\left(\sup_{[0,1]}|B_t| \leq x\right)$$

Ex 14 (B_t) un $(\mathcal{F}_t)$-MB. $U \in \mathcal{F}_1$ $U \perp\!\!\!\perp B$ t.q. $\mathbb{E}e^{aU} < \infty$ $\forall a \in \mathbb{R}$

On pose $f(t,x) = \mathbb{E}\left[e^{xU - \frac{tU^2}{2}}\right]$, $g(t,x) = \mathbb{E}\left[Ue^{xU - \frac{tU^2}{2}}\right]$, $h(t,x) := \dfrac{g(t,x)}{f(t,x)}$

(i) $\left.\dfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_1} = \underbrace{f(1,B_1)}_{M_1}$. M.q. $\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t h(s,B_s)\,ds$ est un $\mathbb{Q}$-MB.

$\mathcal{E}(L)_t$

$\quad\;\;"$

On définit $M_t = \mathbb{E}[f(1,B_1)|\mathcal{F}_t]$ une martingale $\Rightarrow$ $B_t - \langle L,B\rangle_t$ un $\mathbb{Q}$-MB

$\quad\quad\quad\quad\quad\;\; "$

$\quad\quad\quad\quad v(t,B_t) \rightsquigarrow$ EDP $\rightsquigarrow$ $\underline{v = f}$

$$df(t,B_t) = (\underbrace{\partial_t f}_{} + \tfrac{1}{2}\partial_{xx}f)\,dt + \underbrace{\partial_x f(t,B_t)}_{g(t,B_t)}\,dB_t = g(t,B_t)\,dB_t = f(t,B_t)h(t,B_t)\,dB_t$$

$$\underbrace{-\mathbb{E}\,\tfrac{U^2}{2}e^{\cdots} + \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[U^2e^{\cdots}]}_{=0}$$

$\Rightarrow$ f est une vraie mart. car $f = v$

Girsanov

Donc $f(t,B_t) = \mathcal{E}(h(\cdot,B_\cdot))_{t\geq 0}$ $\Rightarrow$ $\tilde{B}_s = B_t - \int_0^t h(s,B_s)\,ds$ est un $\mathbb{Q}$-MB

(ii) $\xi_t = B_t + tU$, $t \in [0,1]$ M.q. $\forall F : C([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_+$ mesurable

$$\mathbb{E}\left[F(\xi_t, t\in[0,1])\right] \overset{*}{=} \mathbb{E}\left[f(1,B_1)F(B_t, t\in[0,1])\right]$$

$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad "$$

$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(B_t, t\in[0,1])]$$

$$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad "$$

$$\Downarrow \quad\quad\quad\quad B_t = \tilde{B}_t + \int_0^t h(s,B_s)\,ds$$

Sous $\mathbb{Q}$ $(B_t)_{t\geq 0}$ a la même loi que $(\xi_t)_{t\geq 0}$ sous $\mathbb{P}$

$B_t = \tilde{B}_t + \int_0^t h(s,B_s)\,ds$ $\rightarrow$ Sous $\mathbb{Q}$ $B_t - \int_0^t h(s,B_s)\,ds$ est un MB $\rightarrow$

sous $\mathbb{Q}$

BM sous $\mathbb{P}$ $\rightarrow$ $\xi_t - \int_0^t h(s,\xi_s)\,ds$ est un $\mathbb{P}$-MB.

(*) $\mathbb{E}[F(B_t+tU, t\geq 0)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[F(B_t+tU, t\geq 0)|U]] \ominus$

$$\mathbb{E}[F(B_t+tU, t\geq 0)|U=u] = \mathbb{E}[F(B_t+tu, t\geq 0)] = \mathbb{E}\left(F(B_t, t\geq 0)e^{uB_1-\frac{u^2}{2}}\right] =$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}\left(F(B_t, t\geq 0)\,e^{uB_1-\frac{u^2}{2}}|U=u\right]]$$

$$\ominus\ \mathbb{E}[F(B_t, t\geq 0)e^{UB_1-\frac{U^2}{2}}] = \mathbb{E}[F(B_t, t\geq 0)\,\mathbb{E}[\underbrace{e^{UB_1-\frac{U^2}{2}}|B]}_{=f(1,B_1)}] = \mathbb{E}[F(B_t, t\geq 0)f(1,B_1)]$$

(iii) Soit $\mathcal{G} = \sigma(\xi_t, t\in[0,1])$. Calculer $\underbrace{\mathbb{E}[U|\mathcal{G}]}_{X}$

$$\mathbb{E}[UF(\xi_t, t\in[0,1])] = \int_{\mathbb{R}}\mathbb{E}[uF(B_t+tu, t\in[0,1])]\,\mathbb{P}_U(du) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}}\mathbb{E}\left(u\,e^{uB_1-\frac{u^2}{2}}F(B_t, t\in[0,1])\right]\mathbb{P}_U(du) = \mathbb{E}[g(1,B_1)F(B_t, t\in[0,1])] =$$

$$= \mathbb{E}[f(1,B_1)\cdot h(1,B_1)\cdot F(B_t, t\in[0,1])] \overset{(ii)}{=} \mathbb{E}[h(1,\xi_1)F(\xi_t, t\in[0,1])]$$

$\forall F: C(0,1]\to\mathbb{R}$ mesurable $\to \mathbb{E}[U|\mathcal{G}] = h(1,\xi_1)$

(iv) $\left.\dfrac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_1} = e^{-UB_1-\frac{U^2}{2}}$ M.q. sous $\tilde{\mathbb{Q}}$, $(\xi_t)_{t\in[0,1]}$ et U sont

indépendants et que $\mathcal{L}(U)$ sous $\mathbb{P}$ et sous $\tilde{\mathbb{Q}}$ est la m̂

$$\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}[F(U)] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[F(U)e^{-UB_1-\frac{U^2}{2}}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[F(U)\,\overbrace{\mathbb{E}[e^{-UB_1-\frac{U^2}{2}}|U]}^{g(U)\text{ où } S\equiv 1}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[F(U)] \to \text{la m̂ loi}$$

Pourquoi $(\xi_t)_{t\in[0,1]}$ et U sont indépendants sous $\tilde{\mathbb{Q}}$?

$F : C[0,T] \to \mathbb{R}$ mesurables bornées

$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

On veut m.q. $\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}[F(\xi)\varphi(U)] = \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}[F(\xi)]\,\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}[\varphi(U)]$

$$\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}[F(\xi)\varphi(U)] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-UB_1-\frac{U^2}{2}}F(B_t+Ut,\, t\in[0,1])\varphi(U)\right] = \mathbb{E}\Big[\varphi(U)e^{-\frac{U^2}{2}}\underbrace{\mathbb{E}\left[e^{-UB_1}F(B_t+Ut,\, t\in[0,1])\,|\,U\right]}_{h(U)}\Big] =$$

$$\left\{\begin{array}{l} h(u) = \mathbb{E}\left[e^{-uB_1}F(B_t+ut,\, t\in[0,1])\right] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{Q}}}\left[e^{\frac{u^2}{2}}F(\hat{B}_t,\, t\in[0,1])\right] = e^{\frac{u^2}{2}}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[F(B_t,\, t\in[0,1])\right] \\ \\ \hat{B}_t = B_t + ut \text{ sous } \hat{\mathbb{Q}} = e^{-uB_1-\frac{u^2}{2}}\,\mathbb{P} \text{ sur } \mathcal{F}_1 \end{array}\right\}$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\varphi(U)]}_{\substack{\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}[\varphi(U)] \\ \text{// m̂ loi}}}\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[F(B_t,\, t\in[0,1])\right] = \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}[\varphi(U)]\,\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}\left[F(\xi_t,\, t\in[0,1])\right]$$

Maintenant, il suffit de montrer que ξ_t est un MB sous $\tilde{\mathbb{Q}}$:

Si dans le calcul précédent on prend $\varphi \equiv 1$, on obtient

$$\mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{Q}}}[F(\xi)] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[F(B)] \to \xi \text{ est un MB sous } \tilde{\mathbb{Q}}.$$