TD Modèle de Markowitz - partie 2

Dans tout ce TD on se place sur un marché à n actifs risqués et un actif sans risque.

1. Monsieur X a une fonction d'utilité de type espérance-variance ($\mathbb{E} - \frac{k}{2}Var$ où $k > 0$ est le paramètre d'aversion au risque). Il souhaite investir sa richesse afin de maximiser sa fonction d'utilité. Il est donc amené à résoudre le problème d'optimisation suivant appelé "le critère espérance-variance" :

$$\begin{aligned} &max_{(w,w_{n+1})\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}} \quad w'\mu + r_f w_{n+1} - \frac{k}{2}w'\Sigma w \\ &\text{sous la contrainte} \quad w'\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} = 1 - w_{n+1} \end{aligned}$$

   (a) Quel est le portefeuille dans lequel l'agent investira ?

   (b) Calculer le rendement espéré de ce portefeuille ainsi que sa volatilité.

   (c) Montrer que le portefeuille de l'agent appartient à la frontière efficiente de Markowitz. [1]

2. Supposons maintenant que madame Y souhaite investir sa richesse dans un portefeuille qui a un risque σ_{obj}. Plusieurs portefeuilles sur le marché ont ce risque.

   (a) Comment choisira-t-elle son portefeuille, quel critère pourrait-elle se donner ?

   (b) Ecrire un problème d'optimisation qui lui permettra de trouver le portefeuille optimal.

   (c) Montrer que la frontière efficiente correspondante à ce problème est la même que la frontière efficiente de Markowitz.

---

1. **Remarque 0.1** *On peut également démontrer l'équivalence entre les portefeuilles optimaux de Markowitz et ceux au sens du critère espérance-variance dans le cas où sur le marché il y a n actifs risqués (donc en absence d'actif sans risque). Le problème d'optimisation s'écrit*

$$\begin{aligned} &max_{w\in\mathbb{R}^n} \quad w'\mu - \frac{k}{2}w'\Sigma w \\ &\textit{sous la contrainte} \quad w'\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} = 1 \end{aligned}$$

$$\omega^* = \frac{1}{BC - A^2}\left(B\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^n} - A\Sigma^{-1}\mu\right) + \frac{1}{BC - A^2}\left(C\Sigma^{-1}\mu - A\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^n}\right)\mu_{obj}$$

I. MODELE DE MARKOWITZ

1. *Marché à n actifs risqués :* $w^* = \frac{1}{BC-A^2}(B\Sigma^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} - A\Sigma^{-1}\mu) + \frac{1}{BC-A^2}(C\Sigma^{-1}\mu - A\Sigma^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n})\mu_{obj}$
   où $A = \mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\mu,\ B = \mu'\Sigma^{-1}\mu$ et $C = \mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$.
   FE : $\sigma_p^2 = \frac{1}{BC-A^2}(C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B)$
   VM : $w_{VM} = \frac{1}{C}\Sigma^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$, $\mu_{VM} = \frac{A}{C}$ et $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{C}}$.

2. *Introduction de l'actif sans risque :* $w^* = \frac{\mu_{obj} - r_f}{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\Sigma^{-1}\pi$ où $\pi = \mu - r_f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$.
   FE : $\mu_p = \sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\sigma_p + r_f,\quad \mu_p \geq r_f$.
   Portefeuille du marché : $w_m = \frac{\mu_m - r_f}{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\Sigma^{-1}\pi$, $\mu_m = \frac{\mu'\Sigma^{-1}\pi}{\mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\pi}$, $\sigma_m = \frac{\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}}{\mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\pi}$.

II. MODELE DE BL

$P\tilde{\pi} = q + \epsilon$ où ϵ est une v.a. $\mathcal{N}(O_k, \Omega)$.

$\tilde{\pi}_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q]$ et $w_{BL} = (k\Sigma)^{-1}\tilde{\pi}_{BL}$.

III. MEDAF

CML : $\mu_P = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_P$ où P est un portefeuille efficient.

MEDAF général : $\mu_i = \lambda + \beta_i(\mu_M - \lambda)$ où $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ où i est un titre quelconque. Si l'on trace le graphe de cette relation dans le plan $[\beta_i,\ \mu_i]$ on obtient la SML.

MEDAF standard : $\mu_i = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f)$

MEDAF + modèle de marché : $\tilde{R}_i = r_f + \beta_i(\tilde{R}_M - r_f) + \varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i \approx \mathcal{N}(0, \sigma^2_{\varepsilon_i})$

Ration Sharpe : $S = \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$

Ratio de Treynor : $T = \frac{\mu_P - r_f}{\beta_P}$

Indice de Jensen : $\alpha_P = \mu_P - r_f - \beta_P(\mu_M - r_f)$

APT à n facteurs $\tilde{R}_i = r_f + \sum_{k=1}^n \beta_{ki}(F_k - r_f) + \varepsilon_i = \mu_i + \sum_{k=1}^n \beta_{ki}(F_k - \mathbb{E}(F_k) + \varepsilon_i$ où β_{ki} est le beta entre le titre i et le facteur k, les facteurs F_k ne sont ni corrélés entre eux, ni corrélés avec ε_i

1)

$$\max_{(\omega,\omega_{mel})\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}} \mathbb{E} - \frac{k}{2}\text{Var}$$

rendemt espéré

$\omega'\Sigma\omega$

$\omega'\mu + \omega_{mel}\, r_g$

$$\text{s.c } \omega' 1_{\mathbb{R}^m} + \omega_{mel} = 1 \implies \omega_{mel} = 1 - \omega' 1_{\mathbb{R}^m}$$

a) On se débarasse de la contrainte

$$\max_{\omega\in\mathbb{R}^m} \omega'\mu + r_g(1-\omega' 1_{\mathbb{R}^m}) - \frac{k}{2}\omega'\Sigma\omega = \max_{\omega\in\mathbb{R}^m} \omega'(\mu - r_g 1_{\mathbb{R}^m}) + r_g - \frac{k}{2}\omega'\Sigma\omega$$

$$= \max_{\omega\in\mathbb{R}^m} \omega'\Pi + r_g - \frac{k}{2}\omega'\Sigma\omega$$

On écrit le Lagrangien du pb.

$$\mathcal{L}(\omega) = \omega'\Pi + r_g - \frac{k}{2}\omega'\Sigma\omega$$

$$\nabla_\omega \mathcal{L}(\omega) = \Pi - k\Sigma\omega = 0 \implies \omega^* = \frac{1}{k}\Sigma^{-1}\Pi$$

$$\text{et } \omega^*_{mel} = 1 - \omega^{*\prime} 1_{\mathbb{R}^m} = 1 - \frac{1}{k}\Pi'\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^m}$$

$$(*)\ \nabla_\omega(\nabla_\omega \mathcal{L}(\omega)) = -k\Sigma \implies \text{fonction } \omega \longmapsto \mathcal{L}(\omega) \text{ est concave}$$

$$\implies \text{le max existe.}$$

Donc le portefeuille optimal est $(\omega^*\ \omega^*_{mel})$

b)

$$\underbrace{\mu^*}_{\text{rendemt espéré optimal}} = \omega^{*\prime}\mu + \omega^*_{mel} r_g = \frac{1}{k}\Pi'\Sigma^{-1}\mu + \left(1 - \frac{1}{k}\Pi'\Sigma^{-1}1_{\mathbb{R}^m}\right) r_g$$

$$= \frac{1}{k}\Pi'\Sigma^{-1}(\mu - r_g 1_{\mathbb{R}^m}) + r_g$$

$$= \frac{1}{k}\Pi'\Sigma^{-1}\Pi + r_g.$$

$$\text{Donc } \mu^* = r_g + \frac{1}{k}\Pi'\Sigma^{-1}\Pi$$

$$\underbrace{\sigma^{2*}}_{\text{Volatilité espéré optimal}} = \omega^{*\prime}\Sigma\omega^* = \left(\frac{1}{k}\Pi'\Sigma^{-1}\right)\Sigma\left(\frac{1}{k}\Sigma^{-1}\Pi\right)$$

$$\implies \sigma^{2*} = \frac{1}{k^2}\Pi'\Sigma^{-1}\Pi$$

$$\text{Donc } \sigma^* = \frac{1}{k}\sqrt{\Pi'\Sigma^{-1}\Pi}$$

c) Equat° de la FE de Markowitz : $\mu_p = \sqrt{\Pi'\Sigma^{-1}\Pi}\,\sigma_p + r_g$

On a $\mu^* = r_g + \frac{1}{k}\Pi'\Sigma^{-1}\Pi = r_g\sqrt{\Pi'\Sigma^{-1}\Pi}\underbrace{\times\frac{1}{k}\sqrt{\Pi'\Sigma^{-1}\Pi}}_{=\sigma^*}$

$\mu^* = r_f + \sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\,\sigma^* \Rightarrow$ le portefeuille appartient à la FE de Markowitz.

2) a) maximisation du rendement.

b)

$$\max_{(\omega,\omega_{m+1})\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}} \omega'\mu + r_f\,\omega_{m+1} \qquad = \max_{\omega\in\mathbb{R}^m} \omega'\mu + r_f(1-\omega' 1_{\mathbb{R}^m})$$

$$\text{s.c} \begin{cases} \omega'\Sigma\omega = \sigma^2_{obj} \\ \omega' 1_{\mathbb{R}^m} = 1-\omega_{m+1} \Rightarrow \omega_{m+1} = 1-\omega' 1_{\mathbb{R}^m} \end{cases} \qquad \text{s.c } \omega'\Sigma\omega = \sigma^2_{obj}$$

$$= \max_{\omega\in\mathbb{R}^m} \omega'\pi + r_f \quad \text{s.c } \omega'\Sigma\omega = \sigma^2_{obj}$$

c) $\mathcal{L}(\omega,\lambda) = \omega'\pi + r_f - \lambda(\omega'\Sigma\omega - \sigma^2_{obj})$

$$\nabla_\omega(\mathcal{L}(\omega,\lambda)) = 0 \Rightarrow \pi - 2\lambda\Sigma\omega = 0 \Rightarrow \omega = \frac{1}{2\lambda}\Sigma^{-1}\pi \qquad (1)$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\omega,\lambda)}{\partial\lambda} = 0 \Rightarrow \omega'\Sigma\omega = \sigma^2_{obj}$$

On remplace ω dans cette équat° :

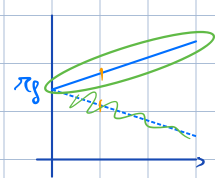
$$\frac{1}{4\lambda^2}(\pi'\Sigma^{-1})\Sigma(\Sigma^{-1}\pi) = \sigma^2_{obj}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4\lambda^2}\pi'\Sigma^{-1}\pi = \sigma^2_{obj} \qquad \Rightarrow \sigma_{obj} = \frac{1}{2|\lambda|}\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}$$

Donc $\mu_p = r_f + \omega'\pi \underset{(1)}{=} r_f + \underbrace{\frac{1}{2\lambda}\pi'\Sigma^{-1}\pi}_{\omega'} = r_f + \sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi} \times \underbrace{\frac{1}{2\lambda}\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}}_{\pm\sigma_{obj}}$

$\mu_p = r_f \pm \sigma_p\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}$

relat° vérifiée par tous les port. optimaux



$\mu_p = r_f + \sigma_p\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}$ l'équat° de la FE de Markowitz.

Ici, la frontière efficiente est $\mu_p = r_f + \sigma_p\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}$

Le cas $\mu_p = r_f - \sigma_p\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}$ n'est pas efficient puisque pour le même risque nous pouvons obtenir un rendement élevé.

De plus $\mu_p = r_f + \sigma_p\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}$ est égale à la FE de Markowitz.