Théorie des options Examen M1 Actuariat 2017-2018
2 heures

Documents et calculette interdits. Le barême est indiqué à titre indicatif. Tous les exercices sont indépendants. Bon courage !

Questions de cours (5 pts)

1. En utilisant l'approche par absence d'opportunités d'arbitrage, montrer la relation de parité Call-Put.
2.a Rappeler les définitions et les significations du delta (Δ), du gamma (Γ), du thêta (θ) et du rhô (ρ).
2.b Existe-t-il une relation entre $\Delta(Call)$ et $\Delta(Put)$? Et entre $\rho(Call)$ et $\rho(Put)$? Si oui, monter le.
2.c Montrer quelle relation relie le delta, le gamma et le thêta.

Exercice : Complétude et marché discret (5 pts)

On considère un marché monopériodique avec 3 états de la nature possibles. 4 actifs sont échangeables sur ce marché, leurs payoffs dans tous les états de la nature possibles sont donnés par la matrice suivante (actifs en colonnes, états en lignes) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Le marché est-il complet ? Justifier votre réponse.
2. On suppose que les prix, à $t = 0$, des 4 actifs sont $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = \frac{5}{6}$ et $p_4 = \frac{2}{3}$. Y a-t-il des opportunités d'arbitrage sur ce marché ? Si oui en exhiber une.
3. Quel devrait être le prix de l'actif 2 pour qu'il n'y ait pas d'opportunités d'arbitrage ? On prendra ce prix par la suite.
4. Donner le taux d'intérêt sans risque (discret sur cette période). 20%
5. Soit X un actif quelconque, de payoffs (x, y, z) dans chacun des états de la nature. Donner la formule donnant son prix en fonction des prix, notés a_1, a_2 et a_3, des trois actifs d'Arrow-Debreu de ce marché.
En déduire une expression liant les probabilités risque-neutre de chacun des états, les prix des actifs d'Arrow-Debreu, et le taux d'intérêt sans risque r.
6. Donnez les prix des 3 actifs d'Arrow-Debreu dans ce marché. En déduire les valeurs des probabilités risque-neutre de chacun des 3 états.

Problème : option Call sur zéro-coupon (10 pts)

On considère une obligation zéro-coupon d'échéance T et on suppose que son cours en t, noté $P(t,T)$, admet dans l'univers risque neutre la dynamique suivante :

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = rdt - \sigma(t,T)dW_t. \tag{1}$$

La structure de volatilité σ est supposée déterministe, et r est constant. De plus, W est un mouvement brownien standard sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$, et on note $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle.

Partie 1: expression de $P(t,T)$
L'objectif de cette première partie est d'obtenir une expression fermée du prix en t du zéro-coupon de maturité T.

1.a Que vaut $P(t,t)$?
1.b En procédant au changement de variable adéquate et en appliquant le lemme d'Itô, trouver la solution de l'équation (1).
1.c A l'aide des questions précédentes, montrer que

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t))du - \int_0^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t))dW_u\right). \quad (2)$$

Que remarquez-vous ?

Partie 2: passage à l'univers $s-$forward neutre
L'objectif dans cette seconde partie est de procéder à un changement de probabilité, puis d'obtenir le prix du zéro-coupon dans ce nouvel univers.

On rappelle que l'univers $s-$forward neutre est associé au zéro-coupon d'échéance s, et admet une mesure de probabilité $\mathbb{Q}^s$ définie par le changement de probabilité suivant :

$$\eta_t^s = \frac{d\mathbb{Q}^s}{\mathbb{Q}}\bigg|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\delta(t)P(t,s)}{P(0,s)}, \quad 0 \leq t \leq s, \quad (3)$$

avec $\delta(t) = e^{-rt}$ est le facteur d'actualisation à la date t.

2.a En utilisant la solution de l'équation (1) trouvée en **1.b**, calculer η_t^s.
2.b A l'aide du théorème de Girsanov, donner l'expression du nouveau mouvement brownien W^s sous $\mathbb{Q}^s$.
2.c En repartant de l'equation (2), exprimer le prix $P(t,T)$ dans les univers $t-$forward neutre et $T-$forward neutre.

Partie 3: pricing de l'option Call
L'objectif dans cette dernière partie est de donner le prix du Call.

On considère un Call européen de maturité t sur un zéro-coupon d'échéance $T > t$ et de prix d'exercice K.
3.a Montrer que

$$C(0,t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\delta(t)P(t,T)\mathbb{1}_{P(t,T)>K}\right] - K\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\delta(t)\mathbb{1}_{P(t,T)>K}\right].$$

3.b En utilisant la question précédente, montrer que

$$C(0,t) = P(0,T)\mathbb{Q}^T(P(t,T) > K) - KP(0,t)\mathbb{Q}^t(P(t,T) > K),$$

où $\mathbb{Q}^T$ est la probabilité $T-$forward neutre, et $\mathbb{Q}^t$ est la probabilité $t-$forward neutre.

3.c Pour finir, déterminer $\mathbb{Q}^T(P(t,T) > K)$ et $\mathbb{Q}^t(P(t,T) > K)$ et en déduire $C(0,t)$.

Question de Cours :

1) Parité CALL-PUT : $C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$

Portefeuille X : CALL + placement de Ke^{-rT}

Portefeuille Y : PUT + Sous jacent

Opération	$t=0$	$t=T$
Achat de X	$-(C_0 + Ke^{-rT})$	$(S_T-K)_+ + K$
Vente de Y	$P_0 + S_0$	$-((K-S_T)_+ + S_T)$
Total	$-X_0 + Y_0$	0

Par AOA, on a $-X_0 + Y_0 = 0 \Rightarrow X_0 = Y_0$

$$\Rightarrow P_0 + S_0 = C_0 + Ke^{-rT}$$

D'où $C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$

2) a) $\Delta = \dfrac{\partial C}{\partial S}$ Le Δ mesure la sensibilité de la valeur de l'option par rapport aux variations du prix du sous-jacent

$\Gamma = \dfrac{\partial^2 C}{\partial S^2}$ Le Γ mesure la sensibilité du prix de l'option aux variations du Δ.

$\theta = \dfrac{\partial P}{\partial t} = -\dfrac{\partial P}{\partial \tau}$ Le θ mesure la sensibilité d'une option par rapport au temps qui reste jusqu'à l'échéance.

$\nu = \dfrac{\partial C}{\partial \sigma}$ Le ν mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations de la volatilité

$\rho = \dfrac{\partial C}{\partial r}$ Le ρ mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations du taux d'intérêt.

2) b) Oui, * $\Delta_{CALL} - \Delta_{PUT} = 1$

* $\rho_{CALL} - \rho_{PUT} = \tau K e^{-r\tau}$

3) $\Delta = \frac{\partial P}{\partial S}$ $\Gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2} = \frac{\partial \Delta}{\partial S}$ et $\theta = \frac{\partial P}{\partial t}$

$\Rightarrow \partial P = \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma (dS)^2 + \theta dt.$

Exercice :

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) On a $4A_3 = A_1 + A_2 + A_4 \Rightarrow rg\, A \leq 3$

De plus A_1, A_2 et A_4 sont linéairement indep car $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{matrix} = 4 \neq 0$

$\Rightarrow rg\, A = 3$ donc marché complet.

2) à $t=0$ $p_1 = 1$; $p_2 = 2$; $p_3 = 5/6$ et $p_4 = 2/3$

OA ? Oui car si on achète $4A_3$ et on vend A_1, A_2 et A_4

$\Rightarrow$ en $t=1$ on a 0 peu importe l'état
or en $t=0$ on a $+1/3$

$\Rightarrow$ OA de type 2

3) Pour qu'il n'y ai pas d'OA on doit avoir $4p_3 = p_1 + p_2 + p_4$

$\Rightarrow p_2 = 4p_3 - p_1 - p_4$

$\Rightarrow p_2 = 4 \times \frac{5}{6} - 1 - \frac{2}{3} = 5/3$

4) L'actif A_3 est sans risque (car cte pour tous les états)

$\Rightarrow$ Par AOA, il doit avoir le même rendement que l'actif sans risque.

$\Rightarrow p_3(1+r) = 1 \Rightarrow r = \frac{1}{p_3} - 1 = \frac{6}{5} - 1 = 1/5 = 0{,}2$

Donc taux d'intérêt sans risque $= 20\%$.

5) * L'actif d'Arrow-Debreu pour l'état 1 a pour payoff $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et prix a_1

* L'actif d'Arrow-Debreu pour l'état 2 a pour payoff $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et prix a_2

* L'actif d'Arrow-Debreu pour l'état 3 a pour payoff $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et prix a_3

Par AOA, on a que le prix de X respecte $p_X = a_1 x + a_2 y + a_3 z$

Soient q_1, q_2 et q_3 les probas risque-neutre associées aux états 1, 2 et 3

Alors, par définition de la proba risque neutre, on a :

$$p_x(1+r) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\text{payoff de } X]$$

$$\iff (1+r)(a_1 x + a_2 y + a_3 z) = q_1 x + q_2 y + q_3 z$$

6) On a $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 5/6 \\ a_1 + a_2 = 2/3 \\ a_1 + 2a_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a_1 = 1/3 \\ a_2 = 1/3 \\ a_3 = 1/6 \end{cases}$

$\implies q_1 = 0{,}4$
$q_2 = 0{,}4$
$q_3 = 0{,}2$

Problème :

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r\,dt - \sigma(t,T)\,dW_t$$

Partie 1 :

1) a) $P(t,t)$ correspond au prix d'un ZC de maturité 1.
Donc de façon évidente $P(t,t) = 1$.

b) Posons $Y(t,T) = \ln(P(t,T))$

$f : x \mapsto \ln(x)$ est bien C^2 p/r à x avec $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$

$$\underset{\text{Itô}}{\implies} dY(t,T) = \frac{1}{P(t,T)}dP(t,T) - \frac{1}{2}\frac{1}{P(t,T)^2}d\langle P\rangle_t$$
$$= r\,dt - \sigma(t,T)\,dW_t - \frac{1}{2}\sigma^2(t,T)\,dt$$
$$= \left(r - \frac{\sigma^2(t,T)}{2}\right)dt - \sigma(t,T)\,dW_t$$

$$\Longrightarrow P(t,T) = P(0,T)\exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2(u,T)}{2}\right)du - \int_0^t \sigma(u,T)\, dW_u\right)$$

c) Par b) $\Longrightarrow P(t,t) = P(0,t) \exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2(u,t)}{2}\right) du - \int_0^t \sigma(u,t)\, dW_u\right)$

De plus, par a) on a $P(t,t) = 1$

$$\Longrightarrow P(t,T) = P(0,T)\exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2(u,T)}{2}\right)du - \int_0^t \sigma(u,T)\,dW_u\right) \times \left[P(0,t)\exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2(u,t)}{2}\right)du - \int_0^t \sigma(u,t)\,dW_u\right)\right]^{-1}$$

$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t))\,du - \int_0^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t))\,dW_u\right)$$

On remarque que le paramètre r a disparu.
$\Longrightarrow$ Le prix du ZC ne dépend que de sa volatilité.

Partie 2 :

2) a) $P(t,T) = P(0,T)\exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2(u,T)}{2}\right)du - \int_0^t \sigma(u,T)\, dW_u\right)$

$$\Longrightarrow \eta_t^S = e^{-rt}\frac{P(t,S)}{P(0,S)} = e^{-rt}\frac{1}{P(0,S)} \times P(0,S)\exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2(u,S)}{2}\right)du - \int_0^t \sigma(u,S)\,dW_u\right)$$

$$= e^{-rt}\exp\left(\int_0^t \left(r - \frac{\sigma^2(u,S)}{2}\right)du - \int_0^t \sigma(u,S)\,dW_u\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\sigma^2(u,S)}{2}\,du - \int_0^t \sigma(u,S)\,dW_u\right)$$

b) $(\sigma(t,T))_{t\in[0,T]}$ est un processus local vérifiant la condition de Novikov

et $\left.\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\int_0^t \sigma(u,S)\,dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,S)\,du}$

D'où en appliquant le théorème de Girsanov, on a :

Sous la mesure $\mathbb{Q}^S$, le processus $W^S : t \mapsto W_t + \int_0^t \sigma(u,S)\,du$ est un mouvement brownien.

c) En t-forward mesure, $+\sigma(t,s)\,dt$

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t))\,du - \int_0^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t))\,dW_u^t + \int_0^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t))\sigma(u,t)\,du\right)$$

$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t) - 2\sigma(u,T)\sigma(u,t) + 2\sigma^2(u,t))\,du - \int_0^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t))\,dW_u^t\right)$$

$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^2(u,T) - 2\sigma(u,T)\sigma(u,t) + \sigma^2(u,t))\,du - \int_0^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t))\,dW_u^t\right)$$

$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma(u,T)-\sigma(u,t))^2 du - \int_0^t (\sigma(u,T)-\sigma(u,t))\, dW_u^t\right)$$

En T-forward neutre,

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^2(u,T)-\sigma^2(u,t))du - \int_0^t (\sigma(u,T)-\sigma(u,t))\, dW_u^T + \int_0^t (\sigma^2(u,T) - \sigma(u,t)\sigma(u,T))\, du\right)$$

$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^2(u,T)-\sigma^2(u,t) - 2\sigma^2(u,T) + 2\sigma(u,t)\sigma(u,T))du - \int_0^t (\sigma(u,T)-\sigma(u,t))\, dW_u^T\right)$$

$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma(u,T)-\sigma(u,t))^2 du - \int_0^t (\sigma(u,T)-\sigma(u,t))\, dW_u^T\right)$$

Partie 3 :

3) a) $$C(0,t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\underbrace{(P(t,T)-k)_+ \,\delta(t)}_{\text{payoff actualisé}}]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(P(t,T)-k)\,\mathbb{1}_{P(t,T)>k}\,\delta(t)]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\delta(t)P(t,T)\mathbb{1}_{P(t,T)>k}] - k\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\delta(t)\mathbb{1}_{P(t,T)>k}]$$

b) On effectue le changement de proba de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{Q}^S$ en utilisant η_t^S

$$\Rightarrow C(0,t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\frac{1}{\eta_t^T}\delta(t)P(t,T)\mathbb{1}_{P(t,T)>k}\right] - k\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^t}\left[\frac{1}{\eta_t^t}\delta(t)\,\mathbb{1}_{P(t,T)>k}\right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[P(0,T)\mathbb{1}_{P(t,T)>k}] - k\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^t}[P(0,t)\,\mathbb{1}_{P(t,T)>k}]$$

Car $\eta_t^S = \dfrac{\delta(t)P(t,S)}{P(0,S)}$

Car de + $P(t,t)=1$

$$= P(0,T)\,\mathbb{Q}^T(P(t,T)>k) - k\,P(0,t)\,\mathbb{Q}^t(P(t,T)>k)$$

c) Calcul de $\mathbb{Q}^t(P(t,T)>k)$:

Soit $\overline{\Delta\sigma_t}^2 = \frac{1}{t}\int_0^t [\sigma(u,T)-\sigma(u,t)]^2 du$ et $\overline{\Delta\sigma_t}\sqrt{t}\,U^T = \int_0^t [\sigma(u,T)-\sigma(u,t)]\,dW_u^T$

en T-forward, on peut donc écrire :

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left(\frac{1}{2}t\,\overline{\Delta\sigma_t}^2 - \overline{\Delta\sigma_t}\sqrt{t}\,\underbrace{U^T}_{\mathcal{N}(0,1) \text{ sous } \mathbb{Q}^T}\right)$$

donc

$$\mathbb{Q}^T(P(t,T)>k) = \mathbb{Q}^T\left(\ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right) + \frac{1}{2}t\,\overline{\Delta\sigma_t}^2 - \overline{\Delta\sigma_t}\sqrt{t}\,U^T > \ln(k)\right)$$

$$= \mathbb{Q}^T\Bigg(U^T < \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right) - \ln(k) + \frac{1}{2}t\,\overline{\Delta\sigma_t}^2}{\overline{\Delta\sigma_t}\sqrt{t}}}_{d_1}\Bigg) = \mathcal{N}(d_1)$$

↳ f.d.r d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Calcul de $\mathbb{Q}^t(P(t,T)>k)$:

en t-forward, on peut écrire :

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{1}{2}t\,\overline{\Delta\sigma_t}^2 - \overline{\Delta\sigma_t}\sqrt{t}\,U^t\right)$$

↳ $\mathcal{N}(0,1)$ sous $\mathbb{Q}^t$

$$\Rightarrow \mathbb{Q}^t(P(t,T)>k) = \mathbb{Q}^t\left(\ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right) - \frac{1}{2}t\,\overline{\Delta\sigma_t}^2 - \overline{\Delta\sigma_t}\sqrt{t}\,U^t > \ln(k)\right)$$

$$= \mathbb{Q}^t\Bigg(U^t < \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right) - \ln(k) - \frac{1}{2}t\,\overline{\Delta\sigma_t}^2}{\overline{\Delta\sigma_t}\sqrt{t}}}_{d_2}\Bigg) = \mathcal{N}(d_2)$$

↳ f.d.r d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Ainsi, on obtient $C(0,t) = P(0,T)\,\mathcal{N}(d_1) - k\,P(0,t)\,\mathcal{N}(d_2)$