Economie de l'assurance
Interaction stratégique

Exercice 1 : Dilemme du prisonnier

Deux cambrioleurs, appelés Joueur 1 et Joueur 2 sont arrêtés par la police et placés en garde à vue dans des cellules différentes. Les preuves sont insuffisantes pour les inculper et la police leur propose la solution suivante. S'ils avouent tous les deux, chacun sera condamné à 3 ans de prison et dans ce cas l'utilité de chacun est égale à 1. Si seulement l'un des deux avoue, il sera libéré et servira de témoin contre l'autre et dans ce cas, l'utilité de celui qui avoue est égale à 4 et celle de l'autre à 0. Si aucun des deux n'avoue, ils seront inculpés pour un délit mineur et condamnés à 1 an de prison et dans ce cas, l'utilité de chacun est égale à 3.

1. Après avoir identifié les différentes composantes de ce jeu stratégique, donnez la forme normale et extensive de ce jeu.
2. Déterminez l'équilibre en stratégies dominantes et l'équilibre de Nash résultant.

Exercice 2 : Bataille des sexes et coordination

Un couple femme-homme désire sortir ensemble, mais ils ne sont pas d'accord sur le spectacle. Monsieur désire assister à un match de boxe, Madame à un spectacle de danse. S'ils vont à la danse, Monsieur (resp. Madame) a une utilité égale à 1 (resp. égale à 2) ; et s'ils vont au match de boxe, Monsieur (resp. Madame) a une utilité égale à 2 (resp. égale à 1). S'ils sont séparés, ils ont tous les deux une utilité nulle.

1. Après avoir identifié les différentes composantes de ce jeu stratégique, donnez la forme normale de ce jeu et représentez ce jeu sous forme extensive.
2. Les joueurs peuvent-ils se coordonner ?
3. Déterminez l'équilibre en stratégies dominantes.
4. Répondre aux questions 1 et 2 dans le cas où ils décident d'aller au match de boxe (resp . spectacle de danse) et l'utilité est égale à 2 (resp. égale à 1) pour chacun.

Exercice 1 :

1) $N = 2$

Jeu non coopératif

Jeu simultané, non répété

Information complète

Information imparfaite

$N = \{1, 2\}$

$S_1 = S_2 = \{\text{nier}, \text{avouer}\}$

$S = S_1 \times S_2 = \{(n,n); (n,a); (a,n); (a,a)\}$ profils des stratégies possibles

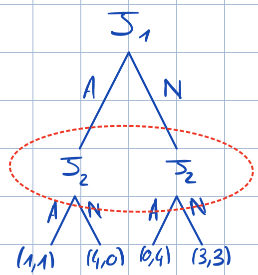
$U_1(n,n) = U_2(n,n) = 3$

$U_1(a,a) = U_2(a,a) = 1$

$U_1(a,n) = U_2(n,a) = 4$

$U_1(n,a) = U_2(a,n) = 0$

J_1 \ J_2	A	N
A	(1,1)	(4,0)
N	(0,4)	(3,3)



2) Pour J_1, on a $s^* \in S_1$

Stratégie dominante :

$$\forall s_2 \in S_2, \forall s_1 \in S_1 / \{s^*\}, \; U_1(s^*, s_2) \geq U_1(s_1, s_2)$$

$*$ J_1 :

Si J_2 joue A, alors J_1 joue A car $U_1(A,A) > U_1(N,A)$

Si J_2 joue N, alors J_1 joue A car $U_1(A,N) > U_1(N,N)$

Donc $\{A\}$ est une stratégie dominante pour les 2 joueurs.

Donc l'équilibre en stratégie dominante est $\{A, A\}$

L'équilibre de Nash est $\{A, A\}$, il est parfait.

Exercice 2 :

1) $N = 2$

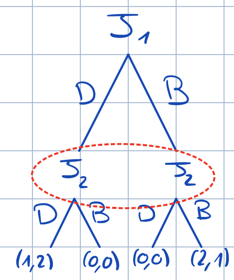
* Jeu équilibré, non répété, non coopératif
* Information complète, imparfaite

$N = \{1, 2\}$

$S_1 = S_2 = \{Danse, Boxe\}$

J_1 \ J_2	D	B
D	(1,2)	(0,0)
B	(0,0)	(2,1)

J_1 = Homme
J_2 = Danse



2) Le plus important pour les 2 joueurs est de se coordonner mais chacun d'eux a une préférence contrastée avec celle de l'autre. Bien que les 2 souhaitent se coordonner, ils arrivent toujours à des résultats conflictuels (problème de coordination). Ainsi, aucune stratégie n'est strictement dominée ou dominante.

3) Pour J_1 :

Si J_2 joue D, $S_1^*(D) = D$
Si J_2 joue B, $S_1^*(B) = B$

Pour J_2 :

Si J_1 joue D, $S_2^*(D) = D$
Si J_1 joue B, $S_2^*(B) = B$

Ainsi, pas de stratégie dominante

On a 2 équilibres de Nash
$EqN = \{(D,D) ; (B,B)\}$

En stratégie mixte :

* Soit $p \in [0,1]$ (resp $q \in [0,1]$) les poids sur les stratégies pures du J_1 (resp J_2)

* $S_1 = \{pD + (1-p)B \,/\, p \in [0,1]\}$

* $S_2 = \{qD + (1-q)B \,/\, q \in [0,1]\}$

Pour le J_1 :

$u_1(D,B)=(0,0)$

* Si J_2 joue D avec proba q : $u_1(D,q) = q + (1-q) \times 0 = q$
* Si J_2 joue B avec proba q : $u_1(B,q) = 0 \times q + (1-q) \times 2 = 2-2q$

$D \geq B \Leftrightarrow q \geq 2-2q \Leftrightarrow q \geq \frac{2}{3}$ i.e $B \geq D \Leftrightarrow q \leq 2/3$

$$S_1^*(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q < 2/3 \\ [0,1] & \text{si } q = 2/3 \\ 1 & \text{si } q > 2/3 \end{cases}$$ ← fonct° de meilleure réponse

$= p^*(q)$

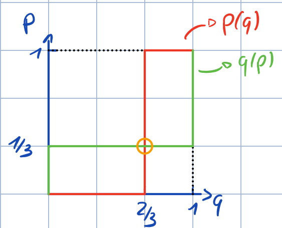
Pour le J_2 :

* Si J_1 joue D avec proba p : $u_2(p,D) = p \times 2 + (1-p) \times 0 = 2p$
* Si J_1 joue B avec proba p : $u_2(p,B) = p \times 0 + (1-p) \times 1 = 1-p$

$B \geq D \Leftrightarrow u_2(p,B) \geq u_2(p,D) \Leftrightarrow 1-p \geq 2p \Leftrightarrow p \leq 1/3$

$$S_2^*(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 1/3 \\ [0,1] & \text{si } p = 1/3 \\ 1 & \text{si } p > 1/3 \end{cases}$$

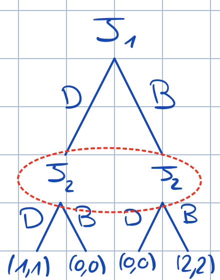
Graphiquement :



$\underbrace{ENSM}_{\text{Eq de Nash en Strat. mixtes}} = \{(\frac{1}{3}D + \frac{2}{3}B \,;\, \frac{2}{3}D + \frac{1}{3}B) ; (D,D) ; (B,B)\}$

4)

J_1 \ J_2	D	B
D	(1,1)	(0,0)
B	(0,0)	(2,2)



Les joueurs peuvent coopérer en choisissant (B,B), les intérêts ne sont pas conflictuels.