SÉRIES TEMPORELLES, CONTRÔLE CONTINU.

ISFA3, ANNÉE 2009-2010

Durée 1h, documents distribués en cours et notes de cours autorisés (à l'exclusion de tout autre document).

Dans la suite, L désigne l'opérateur de décalage : $L(X_t) = X_{t-1}$ et pour $s \in \mathbb{N}^\star$, Δ_s désigne l'opérateur de différence d'ordre s : $\Delta_s(X_t) = (1 - L^s)(X_t) = X_t - X_{t-s}$.
On dira que $(s_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une saisonalité de période p si : pour tout t, $s_{t+p} = s_t$ et

$$\sum_{t=1}^{p} s_t = 0.$$

Exercice 1. *Démontrer que le filtre* $\sum_{j=-q}^{q} a_j L^{-j}$ *avec les coefficients* $(a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2) = \frac{1}{9}(-1, 4, 3, 4, -1)$ *laisse les polynômes du troisième degré invariants et élimine les saisonnalités de période* 3.

Exercice 2. *Soit* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un processus faiblement stationnaire de fonction d'auto-covariance* γ_X. *Pour* $s \in \mathbb{N}^\star$, *on considère*

$$Y_t = \Delta_s(X_t).$$

1. *Exprimer la fonction d'auto-covariance de* $(Y_t)_{y\in\mathbb{Z}}$ *en fonction de* γ_X.
2. *On considère un processus auto-régressif :*

$$X_t = \alpha X_{t-1} + \varepsilon_t,$$

avec $|\alpha| < 1$ *et* $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *un bruit blanc faible.*
2.a *Montrer que cette équation admet une unique solution stationnaire causale.*
2.b *Déterminer la fonction d'auto-covairance de* $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ *puis celle de* $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
3. *Dans le cas où* $s = 1$, $Y_t = \Delta(X_t)$, *déterminer pour quelles valeurs de* α *la variance de* Y_t *est plus petite que celle de* X_t.

Date: 8 janvier 2010.