Correction de l'examen du 11 janvier 2006

ISFA 2° année
Processus Stochastiques
Examen du 11 janvier 2006
Correction

Questions de cours

1. Voir les définitions dans le cours.
2. – $g(M_t) = g(M_0)+\int_0^t g'(M_s)dM_s+\frac{1}{2}\int_0^t g''(M_s)d<M>_s$. La partie martingale est $g(M_0)+\int_0^t g'(M_s)dM_s$ et la partie à variations bornées est $\frac{1}{2}\int_0^t g''(M_s)d<M>_s$.

$$<g(M)>_t = \int_0^t g'(M_s)^2 d<M>_s$$

$$<g(M),h(N)>_t = \int_0^t g'(M_s)h'(N_s)d<M,N>_s$$

   – La formule d'Itô en dimension 2 s'écrit :

$$\begin{aligned} f(M_t,N_t) &= f(M_0,N_0)+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(M_s,N_s)dM_s+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(M_s,N_s)dN_s+\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M_s,N_s)d<M>_s \\ &\quad +\frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M_s,N_s)d<N>_s+\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(M_s,N_s)d<M,N>_s \end{aligned}$$

   Et ainsi,

$$\begin{aligned} <f(M,N)>_t &= \int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial x}(M_s,N_s)\right]^2 d<M>_s+\int_0^t \left[\frac{\partial f}{\partial y}(M_s,N_s)\right]^2 d<N>_s \\ &+ 2\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(M_s,N_s)\frac{\partial f}{\partial y}(M_s,N_s)d<M,N>_s \end{aligned}$$

   – Et en appliquant la formule d'Itô précédente à la fonction produit $f(x,y)=xy$, on obtient :

$$M_tN_t - M_0N_0 = \int_0^t N_s dM_s + \int_0^t M_s dN_s + \int_0^t d<M,N>_s$$

3. On vérifie facilement la mesurabilité et l'intégrabilité, d'après l'intégrabilité et la mesurabilité de M_t et N_t et par indépendance. Puis on écrit, pour $t \geq s \geq 0$,

$$\begin{aligned} E(M_tN_t|\mathcal{F}_s) &= M_sN_s + E\left((M_t-M_s)(N_t-N_s)|\mathcal{F}_s\right)+E\left(M_s(N_t-N_s)|\mathcal{F}_s\right)+E\left(N_s(N_t-N_s)|\mathcal{F}_s\right) \\ &= M_sN_s + E\left((M_t-M_s)(N_t-N_s)|\mathcal{F}_s\right)+M_sE\left((N_t-N_s)|\mathcal{F}_s\right)+N_sE\left((N_t-N_s)|\mathcal{F}_s\right) \\ &\quad \text{puisque } M_s \text{ et } N_s \text{ sont } \mathcal{F}_s\text{-adaptées} \\ &= M_sN_s + E\left((M_t-M_s)(N_t-N_s)|\mathcal{F}_s\right) \\ &\quad \text{puisque } M \text{ et } N \text{ sont des } \mathcal{F}\text{-martingales} \end{aligned}$$

   Or $\mathcal{F}_s$ est la tribu engendrée par $M_u, N_u, u \leq s$, les évènements A de la tribu $\mathcal{F}_s$ s'écrivent $A = N_u^{-1}(C)$ ou $A = M_u^{-1}(C)$ pour un borélien C. Et on peut écrire alors :

$$E(\mathbf{1}_A(M_t-M_s)(N_t-N_s)) = E(M_t-M_s)E(\mathbf{1}_A(N_t-N_s)) = 0$$

   par indépendance et car M est une martingale, pour $A = N_u^{-1}(C)$, et on fait de même pour $A = M_u^{-1}(C)$. Ceci prouve que $\forall A \in \mathcal{F}_s, E(\mathbf{1}_A(M_t-M_s)(N_t-N_s)) = 0$ et donc $E(\mathbf{1}_A(M_t-M_s)(N_t-N_s)|\mathcal{F}_s) = 0$ Donc M_tN_t est bien une $\mathcal{F}_t$-martingale et ainsi $<M,N>t = 0$.

Exercice 1 :

1. D'après le théorème de renouvellement,

$$\lim_{t\to+\infty} P(S_{R_t+1} - t \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{P(X_1 \geq y)}{E(X_1)} dy = \int_{0}^{x} \frac{P(X_1 \geq y)}{E(X_1)} dy$$

Donc

$$P(Y \geq x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{P(X_1 \geq y)}{E(X_1)} dy$$

2. $R_t = \text{card}\{n \geq 1, S_n \leq t\}$. Or S_n est croissante, donc $S_{R_t} \leq t$ et $S_{R_t+1} \geq t$. Donc $\forall t$, $P(S_{R_t+1} - t \geq 0) = 1$. Et donc $P(Y \geq 0) = 1$

3.
$$E(Y^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} y^k \frac{P(X_1 \geq y)}{E(X_1)} dy = \int_{-\infty}^{+\infty} y^k \frac{(1 - F_{X_1}(y))}{E(X_1)} dy$$

Une intégration par parties nous donne

$$E(Y^k) = \frac{1}{E(X_1)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{k+1} y^{k+1} f_{X_1}(y) dy + \left[\frac{1}{EX_1} (1 - F_{X_1}(y)) \frac{y^{k+1}}{k+1} \right]_{-\infty}^{+\infty}$$

Soit

$$E(Y^k) = \frac{E(X_1^{k+1})}{(k+1)E(X_1)}$$

4. Or $E(X_1^{k+1}) < +\infty$ par hypothèse, donc $E(Y^k) < +\infty$ et $X_1 \geq 0$ et $E(X_1) > 0$ donc $E(X_1^{k+1}) > 0$, donc $E(Y^k) > 0$.

5. Supposons ici que X_1 suit une loi uniforme sur $[0,1]$. Alors $f_{X_1}(x) = \mathbf{1}_{[0,1]}(x)$, $E(X_1) = \frac{1}{2}$, donc Y a pour fonction de répartition $x \mapsto (2x - x^2)\mathbf{1}_{[0,1]}(x) + \mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x)$. De plus, $E(X_1^{k+1}) = \int_0^1 x^{k+1} dx = \left[\frac{x^{k+2}}{k+2} \right]_0^1 = \frac{1}{k+2}$.
Ainsi,

$$E(Y^k) = \frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

6. Supposons ici X_1 suit une loi exponentielle de paramètre $1/m = \lambda$. Alors $E(X_1) = m$. Et on a :

$$P(Y \geq x) = \int_{x}^{+\infty} \frac{P(X_1 \geq y)}{E(X_1)} dy = \int_{x}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda y} dy = e^{-\lambda x}$$

Et par conséquent Y suit une loi exponentielle de même paramètre $\lambda = 1/m$ et de même moyenne m.

Exercice 2 :

1. Soient τ et σ deux temps d'arrêt. Alors, $\forall t \geq 0$,

$$\{\min(\tau, \sigma) \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$$

puisque $\{\tau \leq t\}$ et $\{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ puisque τ et σ sont des temps d'arrêt, et car $\mathcal{F}_t$ est une tribu.
Donc $\min(\tau, \sigma)$ est bien un temps d'arrêt. Ainsi, $T = \min(\tau_+, \tau_-)$ est bien un temps d'arrêt.

2. Montrons que $P(|B_t| \leq a) \longrightarrow_{t\to+\infty} 0$.

$$\begin{aligned} P(|B_t| \leq a) &= P(-a \leq B_t \leq a) \\ &= P(-a \leq \sqrt{t}X \leq a) \text{ où } X \sim \mathcal{N}(0,1) \\ &= P(-\frac{a}{\sqrt{t}} \leq X \leq \frac{a}{\sqrt{t}}) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \lim_{t\to+\infty} P(|B_t| \leq a) = P(X = 0) = 0$$

$$\text{D'où } \lim_{t\to+\infty} P(|B_t| > a) = 1$$

Ainsi, par définition de τ_+ et τ_-, on peut en déduire que, partant de 0 et avec des trajectoires continues, puisque p.s. $|B_t|$ prendra des valeurs supérieurs à a, c'est que p.s. en temps fini, B_t prendra la valeur a ou $-a$, soit

$$P(\tau_+ < +\infty \text{ ou } \tau_- < +\infty) = 1$$

Et donc

$$P(T < +\infty) = P(\min(\tau_+, \tau_-) < +\infty) = 1$$

T est bien un temps d'arrêt presque sûrement fini.
B_T peut prendre deux valeurs, selon que $T = \tau_+$ ou τ_-, $B_T \in \{-a, a\}$.

3.

$$\begin{aligned}
P(\tau_+ \leq t) &= 1 - P(\tau_+ > t) = 1 - P(\forall s \leq t, B_t < a) \\
&= 1 - P(\forall s \leq t, -B_t > -a) \\
&= 1 - P(\forall s \leq t, \tilde{B}_t > -a) \text{ avec } \tilde{B}_t = -B_t \\
&= 1 - P(\forall s \leq t, B_t > -a) \text{ puisque } \tilde{B}_t \text{ est un MB standard, donc suit la même loi que } B_t \\
&= 1 - P(\tau_- > t) = P(\tau_- \leq t)
\end{aligned}$$

Donc τ_+ et τ_- suivent la même loi.
De plus, soit $t \geq 0$,

$$P(T \leq t, B_T = a) = P(T \leq t, \tilde{B}_T = -a) = P(T \leq t, B_T = -a) = \frac{1}{2}P(T \leq t)$$

car l'évènement $\{T \leq t\}$ est la réunion disjointe de $\{T \leq t\} \cap \{B_T = a\}$ et $\{T \leq t\} \cap \{B_T = -a\}$. Donc

$$P(T \leq t, B_T = a) = P(T \leq t)P(B_T = a)$$

4. Pour montrer que M_t est une martingale, appliquons la formule d'Itô à $M_t = f(t, B_t) = \exp\left(\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right)$ qui est bien $\mathcal{C}^2$.

$$dM_t = \lambda M_t dB_t - \frac{\lambda^2}{2} M_t dt + \frac{1}{2}\lambda^2 M_t d < B >_t = \lambda M_t dB_t$$

Ainsi, M_t est bien une $\mathcal{F}_t$-martingale. Cela peut aussi se retrouver directement en calculant $E(M_t|\mathcal{F}_s) = M_s$.

5. La martingale $M_{t\wedge T}$ est uniformément intégrable puisque majorée par $\exp(\lambda a)$. Donc M_T est intégrable. De plus, T est presque sûrement fini. Et

$$liminf_t E(|M_t|\mathbf{1}_{T \geq t}) \leq liminf_t E(\exp(\lambda a - \lambda^2 t/2)) = 0.$$

On peut donc appliquer le théorème de Doob, en prenant M_t comme martingale et 0 et T comme temps d'arrêt. On obtient le résultat suivant :

$$E(\exp(\lambda B_T - \frac{\lambda^2 T}{2})) = 1$$

6. On en déduit que

$$E(\exp(\lambda B_T))E(\exp(-\lambda^2 T/2)) = 1$$

puisque l'on a montré que B_T et T sont indépendants. Or B_T vaut a ou $-a$ de manière équiprobable. Donc

$$E(\exp(\lambda B_T)) = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda a} + e^{-\lambda a}\right) = ch(\lambda a).$$

Cela permet d'en déduire :

$$E(\exp(-\lambda^2 T/2)) = \frac{1}{ch(\lambda a)}$$

La transformée de Laplace de T vaut donc :

$$E(\exp(-sT)) = \frac{1}{ch\left(a\sqrt{2s}\right)}$$

7. Pour calculer l'espérance et la variance de T, il suffit de dériver et de prendre la valeur en 0, au signe $-$ près. On a le résultat suivant :

$$E(T) = -\left.\frac{d}{ds}E(\exp(-sT))\right|_{s=0}$$

Soit dans notre cas :

$$E(T) = -\left.\frac{-\frac{a}{\sqrt{2s}}sh(a\sqrt{2s})}{ch(a\sqrt{2s})^2}\right|_{s=0} = a^2$$

Et pour la variance, on dérive deux fois et on prend la limite en 0 pour trouver finalement $E(T^2)$ et en déduire la variance :

$$Var(T) = \frac{5}{3}a^4 - a^4 = \frac{2}{3}a^4$$

8. D'après ce qui précède,

$$E(\exp(-sa^\gamma T)) = \frac{1}{ch(\sqrt{2sa^\gamma}a)}$$

Donc pour $\gamma = -2$, on obtient :

$$E(\exp(-sa^{-2}T) = \frac{1}{ch(\sqrt{2s})}$$

Et donc la loi de T/a^2 ne dépend pas de a. Ce n'est pas surprenant, c'est l'une des propriétés du scaling du mouvement Brownien.

9. La propriété de Markov forte du mouvement Brownien montre que $\hat{B}_t = B_{T(a)+t} - B_{T(a)}$ est indépendant de $\tilde{F}_{T(a)}$, donc de $T(a)$. Comme $b > 0$, on a

$$T(a+b) = \inf\{t \geq T(a), B_t = b+a\} = T(a) + \int\{t \geq 0, \hat{B}_t = b\}$$

On en déduit que la v.a. $T(a+b) - T(a)$ est indépendante de $T(a)$, et que $T(a+b) - T(a)$ est égal en loi à $T(b)$. Le processus $T(a)$ est à accroissements indépendants et stationnaires. On peut donc en déduire la transformée de Laplace de $T(a+b) - T(a)$, puisque c'est la même que celle de $T(b)$:

$$E\left(\exp\left(-s(T(a+b) - T(a))\right)\right) = E\left(\exp\left(-sT(b)\right)\right) = \frac{1}{ch\left(b\sqrt{2s}\right)}$$

Exercice 3 :

1. Le minimum entre deux temps d'arrêt est un temps d'arrêt. En effet :

$$\{T_n \leq t\} = \underbrace{\{n \leq t\}}_{=\emptyset \text{ ou } \Omega} \cup \underbrace{\{T \leq t\}}_{\in \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$$

Donc pour tout $n \geq 0$, T_n est un temps d'arrêt. C'est donc bien une suite de temps d'arrêt.

2. $\tau = T_n \leq n$ est un temps d'arrêt borné par n. Ainsi, on a bien $limiinf_t E(|M_t|\mathbf{1}_{\tau \leq t}) = 0$. De plus, M_τ est intégrable puisque, comme $T_n \leq n$, et $T_n \leq T$, alors $B_{T_n} = a + bT_n$ devient $a - bn \leq B_{T_n} \leq a$ si $b \leq 0$ et $a \leq B_{T_n} \leq a + bn$ si $b \geq 0$. On peut donc en déduire lamajoration suivante, toujours valable :

$$|M_{T_n}| = \exp(\theta B_{T_n} - \theta^2 T_n/2) \leq \exp(\theta B_{T_n}) \leq \max\left(e^{\theta a}, e^{\theta(a+bn)}, e^{\theta(a-bn)}\right) < +\infty$$

Et M_τ est bien intégrable. Les conditions du théorème de Doob sont donc bien satisfaites, et on en conclut :

$$E(M_{T_n}) = E(M_0) = 1.$$

3. Pour pouvoir passer à la limite, il faut pouvoir utiliser le théorème de convergence dominée ou le théorème de convergence monotone. Ici, on a

$$|M_{T_n}| = exp\left(\theta B_{T_n} - \frac{\theta^2 T_n}{2}\right)$$

Si $\theta \geq 0$, $b \leq 0$, alors $|M_{T_n}| \leq e^{\theta a}$ est bien borné et on peut appliquer le théorème de convergence monotone pour passer à la limite sous l'intégrale.
Si $b > 0$ et $\theta \geq 2b$, alors la fonction $f(x) = e^{\theta(a+bx)-\theta^2 x/2}$ est croissante (sa dérivée $f'(x) = \left(\theta b - \frac{\theta^2}{2}\right) e^{\theta(a+bx)-\theta^2 x/2} \geq 0$). On peut dans ce cas utiliser le théorème de convergence monotone puisque alors $(M_{T_n})_{n\geq 0}$ est une suite croissante.
Dans les deux cas, on peut passer à la limite sous l'intégrale, et on conclut :

$$E(M_T) = E(\lim_{t\to+\infty} M_{T_n}) = \lim_{t\to+\infty} E(M_{T_n}) = 1.$$

4. Ainsi, on obtient

$$E(M_T) = E(\exp\left(\theta B_T - \theta^2 T/2\right) = E(\exp\left(\theta(a+bT) - \theta^2 T/2\right) = 1.$$

Soit en posant $\theta = b + \sqrt{b^2 + 2\lambda}$, on est dans l'un des deux cas, quel que soit $\lambda \geq 0$, et on calcule en remplaçant θ par son expression

$$E\left(\exp(\theta(a+bT) - \theta^2 T/2)\right) = E\left(\exp\left(ab + a\sqrt{b^2+2\lambda}\right)\exp\left(-\lambda T\right)\right) = 1$$

On ainsi :

$$E\left(\exp(-\lambda T)\right) = \exp(-ab - a\sqrt{b^2+2\lambda}) = \exp(-\theta a)$$

5. On trouve pour transformée de Laplace de T (pour $\lambda > 0$) : $\mathbf{E}(exp(-\lambda T) = exp(-(b + \sqrt{b^2+2\lambda})a)$.
Si $b > 0$, lorsque λ tend vers 0, l'exposant tend vers $-a(2b)$, donc

$$\mathbf{P}(T < \infty) = exp(-2ab).$$

Si $b \leq 0$, ça tend vers $-(b + \sqrt{b^2})a) = 0$, et donc

$$\mathbf{P}(T < \infty) = 1.$$

6. Si on derive, on trouve

$$\mathbf{E}(T) = a\exp(-2ab)/b.$$

Exercice 4 : Chacune des deux chaînes de Markov ainsi définies sont irréductibles, à espace d'états fini, donc chacune admet une unique mesure stationnaire. On résoud les deux systèmes afin de trouver ces mesures stationnaires :

– Pour la couverture élevée

$$\begin{cases} 0,2\pi_1 + 0,1\pi_2 + 0,1\pi_3 = \pi_1 \\ 0,5\pi_1 + 0,5\pi_2 + 0,2\pi_3 = \pi_2 \\ 0,3\pi_1 + 0,4\pi_2 + 0,7\pi_3 = \pi_3 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1 \end{cases}$$

qui a pour solution $\pi_1 = \frac{1}{9}, \pi_2 = \frac{1}{3}, \pi_3 = \frac{5}{9}$.

– Pour la couverture moyenne

$$\begin{cases} 0,6\mu_1 + 0,4\mu_2 + 0,4\mu_3 = \mu_1 \\ 0,4\mu_1 + 0,5\mu_2 + 0,5\mu_3 = \mu_2 \\ 0,1\mu_2 + 0,1\mu_3 = \mu_3 \\ \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = 1 \end{cases}$$

qui a pour solution $\mu_1 = \frac{1}{2}, \mu_2 = \frac{9}{20}, \mu_3 = \frac{1}{20}$.

Sur une longue période de temps, la mesure de probabilité de la chaîne de Markov va tendre vers la mesure stationnaire (convergence des chaînes de Markov). Donc sur le long terme, le comportement de la chaîne va être celui décrit par la mesure stationnaire. Ainsi, le bénéfice moyen va être l'espérance du bénéfice suivant la mesure stationnaire, auquel on retranche le coût de la publicité. Soit

– Pour une couverture élevée, le bénéfice moyen est

$$B_e = 9000\pi_1 + 12000\pi_2 + 18000\pi_3 - 5000 = 10000$$

– Pour une couverture moyenne, le bénéfice moyen est

$$B_m = 9000\mu_1 + 12000\mu_2 + 18000\mu_3 - 1000 = 9800$$

Finalement, c'est avec une couverture médiatique élevée que les bénéfices moyens sont les meilleurs. Donc il est plus rentable de choisir la couverture médiatique élevée.