TD 1 Maths Actuarielles

Exercice 1 Soit $F_0(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{120}\right)^{\frac{1}{6}}$ *pour* $0 \leq t \leq 120$. Calculer

1. La probabilité qu'un nouveau-né vive au-delà de 30 ans
2. La probabilité qu'une personne de 30 ans décède avant l'âge de 50 ans
3. La probabilité qu'une personne de 40 ans vive au-delà de 65 ans
4. La probabilité qu'une personne de 20 ans meurt entre 90 et 100 ans
5. La force de mortalité μ_x
6. L'espérance de vie discrète à l'âge de 50 ans
7. L'espérance de vie à l'âge de 50 ans

Exercice 2 Soit $F_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ *pour* $\lambda > 0$

1. Montrer que $S_x(t) = e^{-\lambda t}$
2. Calculer sa force de mortalité μ_x
3. Montrer que $e_x = \frac{1}{e^{\lambda} - 1}$
4. Quelles conclusions pouvez-vous tirer sur le fait d'utiliser cette distribution pour modéliser la durée de vie humaine ?

Exercice 3 Soit $p_x = 0,99$, $p_{x+1} = 0,985$, ${}_3p_{x+1} = 0,95$ et $q_{x+3} = 0,02$. Calculer

1. p_{x+3}
2. ${}_2p_x$
3. ${}_2p_{x+1}$

4. ${}_3p_x$

5. ${}_{1|2}q_x$

Exercice 4 Un modèle de survie qui suit la loi de Makeham est défini par :

$$\mu_x = A + \alpha c^x \textit{ pour } A > 0, \alpha > 0 \textit{ et } c > 1$$

1. Montrer que sous la loi de Makeham,

$$ {}_tp_x = s^t g c^x (c^t - 1), $$ ${}_rp_x = s^r g^{c^x(c^r-1)}$

   où $s = e^{-A}$ et $g = e^{-\frac{\alpha}{log c}}$

2. On suppose que nous connaissons les valeurs de ${}_{10}p_{50}$, ${}_{10}p_{60}$ et ${}_{10}p_{70}$. Montrer que

$$c = \left(\frac{log({}_{10}p_{70}) - log({}_{10}p_{60})}{log({}_{10}p_{60}) - log({}_{10}p_{50})} \right)^{0,1}$$

Exercice 5 On considère la table de mortalité suivante :

Age, x	l_x
52	89 948
53	89 089
54	88 176
55	87 208
56	86 181
57	85 093
58	83 940
59	82 719
60	81 429

On rappelle également les deux hypothèses vues lors du cours :
Hypothèse 1 : On a une distribution uniforme des décès entre deux âges entiers
Hypothèse 2 : On a un taux instantané de mortalité constant entre deux âges entiers

1. Montrer que l'hypothèse 1 implique que $\forall\ x > 0$ *et* $0 \leq s \leq 1$, $l_{x+s} = s l_{x+1} + (1-s) l_x$

2. Montrer que l'hypothèse 2 implique que $\forall\ x > 0$ *et* $0 \leq s \leq s+t \leq 1$, ${}_sp_{x+t} = (p_x)^s$

3. Calculer avec l'hypothèse 1, ${}_{0,2}q_{52,4}$
4. Calculer avec l'hypothèse 1, ${}_{5,7}p_{52,4}$
5. Calculer avec l'hypothèse 1, ${}_{3,2|2,5}q_{52,4}$
6. Calculer avec l'hypothèse 2, ${}_{0,2}q_{52,4}$
7. Calculer avec l'hypothèse 2, ${}_{5,7}p_{52,4}$
8. Calculer avec l'hypothèse 2, ${}_{3,2|2,5}q_{52,4}$

Exercice 1

Soit $F_0(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{120}\right)^{1/6} \quad t \in [0, 120]$

1) $S_0(30) = 1 - F_0(30) = \left(1 - \frac{30}{120}\right)^{1/6}$

$= 0,9532$

2) $F_{30}(20) = 1 - {}_{20}p_{30} = 1 - \frac{{}_{50}p_0}{{}_{30}p_0} = 1 - \frac{\left(1 - \frac{50}{120}\right)^{1/6}}{\left(1 - \frac{30}{120}\right)^{1/6}} = 0,041$

3) $S_{40}(25) = \frac{{}_{65}p_0}{{}_{40}p_0} = \frac{\left(1 - \frac{65}{120}\right)^{1/6}}{\left(1 - \frac{40}{120}\right)^{1/6}} = 0,9395$

4) ${}_{70|10}q_{20} = {}_{70}p_{20} - {}_{80}p_{20} = {}_{80}q_{20} - {}_{70}q_{20}$

$= \frac{\left(1 - \frac{90}{120}\right)^{1/6} - \left(1 - \frac{100}{120}\right)^{1/6}}{\left(1 - \frac{20}{120}\right)^{1/6}} = \frac{{}_{90}p_0}{{}_{20}p_0} - \frac{{}_{100}p_0}{{}_{20}p_0} = 0,0535$

5) $\mu_x = -\frac{d}{dx}\left(\ln\left({}_xp_0\right)\right) = \frac{1}{6 \times 120} \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{120}\right)^{1/6}} \left(1 - \frac{x}{120}\right)^{-5/6}$

$= \frac{1}{720 - 6x}$

7) $\mathring{e}_x = \int_0^{\infty} {}_tp_x \, dt$

${}_tp_x = \frac{S_0(x+t)}{S_0(x)} = \frac{\left(1 - \frac{x+t}{120}\right)^{1/6}}{\left(1 - \frac{x}{120}\right)^{1/6}} = \left(1 - \frac{t}{120 - x}\right)^{1/6}$

$\Longrightarrow \mathring{e}_x = \int_0^{120-x} \left(1 - \frac{t}{120-x}\right)^{1/6} dt$ On note $u = 1 - \frac{t}{120-x} \Longrightarrow t = (120-x)(1-u)$

$\Longrightarrow \mathring{e}_x = (120 - x)\int_0^1 u^{1/6} \, du$

$\Longrightarrow \mathring{e}_x = \frac{6}{7}(120 - x).$

$\mathring{e}_{50} = 60$

Exercice 2 :

$$F_0(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad \lambda > 0$$

1) $S_x(t) = \frac{_{x+t}p_0}{_x p_0} = \frac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda t}$

2) $\mu_x = -\frac{d}{dx} - \lambda x = \lambda$

3) $e_x = \sum_{t=1}^{\infty} {}_t p_x = \sum_{t=1}^{\infty} e^{-\lambda t} = \frac{1}{e^{\lambda} - 1}$

Exercice 3 :

Soit $p_x = 0,99$ $p_{x+1} = 0,985$ ${}_3p_{x+1} = 0,95$ et $q_{x+3} = 0,02$

1) $p_{x+3} = 1 - q_{x+3} = 0,98$

2) ${}_2p_x = p_x \, p_{x+1} = 0,97515$

3) On a ${}_3p_{x+1} = {}_2p_{x+1} \, p_{x+3} \Rightarrow {}_2p_{x+1} = \frac{{}_3p_{x+1}}{p_{x+3}} = \frac{0,95}{0,98} = 0,96939$

4) ${}_3p_x = p_x \frac{{}_3p_{x+1}}{p_{x+3}} = 0,99 \times \frac{0,95}{0,98} = 0,95969$

5) ${}_{1|2}q_x = {}_{1+2}q_x - {}_1q_x = {}_3q_x - q_x = 1 - {}_3p_x - (1 - p_x) = p_x - {}_3p_x = 0,99 - 0,95969$
$= 0,03031$

Exercice 4 :

Loi de Makeham tq $\mu_x = A + \alpha c^x$ pour $A > 0$, $\alpha > 0$ et $c > 1$

1) ${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s} \, ds\right)$

$= \exp\left(-\int_0^t A + \alpha c^{x+s} \, ds\right)$

$= \exp\left(-At - \alpha c^x \int_0^t e^{s \ln(c)} \, ds\right)$

$= \exp\left(-At - \alpha c^x \left[\frac{1}{\ln(c)} e^{s\ln(c)}\right]_0^t\right)$

$$\Rightarrow {}_tp_x = \exp\left(-At - \alpha c^x \frac{1}{\ln(c)} \underbrace{e^{t\ln c}}_{c^t} + \alpha c^x \frac{1}{\ln(c)}\right)$$

Donc $${}_tp_x = \exp(-At)\, \exp\left[-\frac{\alpha}{\ln c}\left(c^x c^t - c^x\right)\right]$$
$$= s^t g^{c^x(c^t-1)}$$

où $\begin{cases} s = e^{-A} \\ g = e^{-\frac{\alpha}{\log c}} \end{cases}$

1) On suppose que l'on connaît ${}_{10}p_{50}$, ${}_{10}p_{60}$, ${}_{10}p_{70}$ et ${}_{10}p_{80}$

Mq $$c = \left(\frac{\log({}_{10}p_{70}) - \log({}_{10}p_{60})}{\log({}_{10}p_{60}) - \log({}_{10}p_{50})}\right)^{0,1}$$

$${}_{10}p_{50} = S^{-t}\, e^{(-\alpha/\log c)(c^{50}(c^{10}-1))} \Rightarrow \log({}_{10}p_{50}) = -At - \frac{\alpha}{\log c} c^{50}(c^{10}-1)$$

$${}_{10}p_{60} = S^{-t}\, e^{(-\alpha/\log c)(c^{60}(c^{10}-1))} \Rightarrow \log({}_{10}p_{60}) = -At - \frac{\alpha}{\log c} c^{60}(c^{10}-1)$$

$${}_{10}p_{70} = S^{-t}\, e^{(-\alpha/\log c)(c^{70}(c^{10}-1))} \Rightarrow \log({}_{10}p_{70}) = -At - \frac{\alpha}{\log c} c^{70}(c^{10}-1)$$

$${}_{10}p_{80} = S^{-t}\, e^{(-\alpha/\log c)(c^{80}(c^{10}-1))} \Rightarrow \log({}_{10}p_{80}) = -At - \frac{\alpha}{\log c} c^{80}(c^{10}-1)$$

$$\Rightarrow \frac{\log({}_{10}p_{70}) - \log({}_{10}p_{60})}{\log({}_{10}p_{60}) - \log({}_{10}p_{50})} = \frac{-\cancel{\frac{\alpha}{\log c}} c^{70}\cancel{(c^{10}-1)} + \cancel{\frac{\alpha}{\log c}} c^{60}\cancel{(c^{10}-1)}}{-\cancel{\frac{\alpha}{\log c}} c^{60}\cancel{(c^{10}-1)} + \cancel{\frac{\alpha}{\log c}} c^{50}\cancel{(c^{10}-1)}}$$

$$= \frac{-c^{70} + c^{60}}{-c^{60} + c^{50}} = \frac{c^{60}(-c^{10}+1)}{c^{50}(-c^{10}+1)} = c^{10}$$

Donc $$c = \left(\frac{\log({}_{10}p_{70}) - \log({}_{10}p_{60})}{\log({}_{10}p_{60}) - \log({}_{10}p_{50})}\right)^{0,1}$$

Exercice 5 :

Exercice 5 On considère la table de mortalité suivante :

Age, x	l_x
52	89 948
53	89 089
54	88 176
55	87 208
56	86 181
57	85 093
58	83 940
59	82 719
60	81 429

On rappelle également les deux hypothèses vues lors du cours :
Hypothèse 1 : On a une distribution uniforme des décès entre deux âges entiers
Hypothèse 2 : On a un taux instantané de mortalité constant entre deux âges entiers

1. Montrer que l'hypothèse 1 implique que $\forall\, x > 0$ *et* $0 \le s \le 1$, $l_{x+s} = s l_{x+1} + (1-s) l_x$
2. Montrer que l'hypothèse 2 implique que $\forall\, x > 0$ *et* $0 \le s \le s+t \le 1$, ${}_sp_{x+t} = (p_x)^s$

2

4. Tables de mortalité - Définitions

- En général, la table de mortalité est construite sur la base de 100 000 ou 1 million de nouveaux-nés.
- On appelle l_x avec $0 \le x \le w$ l'ordre de suivie associé à la table de mortalité
- Les probabilités viagères en fonction de l'ordre de suivie se calculent alors avec la formule :

$${}_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

- On note d_x les décréments successifs de l'ordre de suivie. On l'interprète comme le nombre attendu de décès entre les âges x et $x+1$. On a alors :

$$d_x = l_x q_x = l_x - l_{x+1}$$

3. Calculer avec l'hypothèse 1, ${}_{0,2}q_{52,4}$
4. Calculer avec l'hypothèse 1, ${}_{5,7}p_{52,4}$
5. Calculer avec l'hypothèse 1, ${}_{3,2|2,5}q_{52,4}$
6. Calculer avec l'hypothèse 2, ${}_{0,2}q_{52,4}$
7. Calculer avec l'hypothèse 2, ${}_{5,7}p_{52,4}$
8. Calculer avec l'hypothèse 2, ${}_{3,2|2,5}q_{52,4}$

3) Calculer avec H1 : ${}_{0,2}q_{52,4}$

$${}_{0,2}q_{52,4} = 1 - \frac{\ell_{52,6}}{\ell_{52,4}}$$

$$= 1 - \frac{0,6\,\ell_{53} + 0,4\,\ell_{52}}{0,4\,\ell_{53} + 0,6\,\ell_{52}} = 1 - \frac{0,6\times 89089 + 0,4\times 89948}{0,4\times 89089 + 0,6\times 89948} = 0,0019$$

4) Calculer avec H1 : ${}_{5,7}p_{52,4}$

$${}_{5,7}p_{52,4} = \frac{\ell_{58,1}}{\ell_{52,4}} = \frac{0,1\,\ell_{59} + 0,9\,\ell_{58}}{0,4\,\ell_{53} + 0,6\,\ell_{52}} = \frac{0,1\times 82719 + 0,9\times 83940}{0,4\times 89089 + 0,6\times 89948} = 0,9354$$

5) Calculer avec H1, ${}_{3,2|2,5}q_{52,4}$

$${}_{3,2|2,5}q_{52,4} = \frac{\ell_{55,6} - \ell_{58,1}}{\ell_{52,4}} = \frac{0,6\,\ell_{56} + 0,4\,\ell_{55} - (0,1\,\ell_{59} + 0,9\,\ell_{58})}{0,4\,\ell_{53} + 0,6\,\ell_{52}}$$

$$= 0,030957$$

6) Calculer avec H2 : ${}_{0,2}q_{52,4}$

$${}_{0,2}q_{52,4} = 1 - {}_{0,2}p_{52,4} = 1 - (p_{52})^{0,2} = 1 - \left(\frac{\ell_{53}}{\ell_{52}}\right)^{0,2} = 1 - \frac{89089}{89948}$$

$$= 0,00192$$

7) Calculer avec H2 : ${}_{5,7}p_{52,4}$

$${}_{5,7}p_{52,4} = {}_{0,6}p_{52,4} \times {}_{5}p_{53} \times {}_{0,1}p_{58}$$

$$= (p_{52})^{0,6} \times {}_{5}p_{53} \times (p_{58})^{0,1}$$

$$= \left(\frac{\ell_{53}}{\ell_{52}}\right)^{0,6} \times \frac{\ell_{58}}{\ell_{53}} \times \left(\frac{\ell_{59}}{\ell_{58}}\right)^{0,1}$$

$$= 0,935423$$

8) ${}_{3,2|2,5}q_{52,4} = {}_{3,2}p_{52,4}\left(1 - {}_{2,5}p_{55,6}\right)$

$$= {}_{0,6}p_{52,4} \times {}_{2}p_{53} \times {}_{0,6}p_{55}\left(1 - {}_{0,4}p_{55,6} \times {}_{2}p_{56} \times {}_{0,1}p_{58}\right)$$

$$= (p_{52})^{0,6} \times {}_{2}p_{53} \times (p_{55})^{0,6}\left(1 - (p_{55})^{0,4} \times {}_{2}p_{56} \times (p_{58})^{0,1}\right)$$

$$= \left(\frac{\ell_{53}}{\ell_{52}}\right)^{0,6} \times \frac{\ell_{55}}{\ell_{53}} \times \left(\frac{\ell_{56}}{\ell_{55}}\right)^{0,6}\left(1 - \left(\frac{\ell_{56}}{\ell_{55}}\right)^{0,4} \times \frac{\ell_{58}}{\ell_{56}} \times \left(\frac{\ell_{59}}{\ell_{58}}\right)^{0,1}\right) = 0,030957$$

$$ {}_{50|5}q_{20} = {}_{50}p_{20} - {}_{55}p_{20} = \frac{\ell_{70}}{\ell_{20}} - \frac{\ell_{75}}{\ell_{20}} $$

$$ = \frac{87010}{99274} - \frac{80998}{99274} $$

$$ = 0{,}0606 $$

$$ = 6{,}06\,\% $$