Exercice : Evaluation d'une dette risquée
(adapté d'un article de Robert C. Merton "*On the Pricing of Corporate Debt : The Risk Structure of Interest Rate*", Journal of Finance, 29, May 1974, 449-70)

A l'instar des modèles d'évaluation des bons de souscription d'actions et les obligations convertibles étudiés dans ce cours, le sous-jacent est la valeur de la firme (*firm value* notée *V*).
On utilise ici les hypothèses classiques du modèle de Black & Scholes. En particulier on suppose l'existence d'un taux sans risque continu *r* et la valeur de la firme $V=(V_t)_{t\in[0,\tau]}$ suit un processus de diffusion vérifiant l'EDS $\frac{dV_t}{V_t}=\mu dt+\sigma dz_t$

où $\mu \in R$ est le *drift* du processus (i.e. le taux de rendement espéré instantané)
$\sigma \in R^{+*}$ est son écart-type instantané (volatilité)
z_t est un processus de Wiener standard.

On admet en outre la proposition de Modigliani-Miller (MM1 - 1958) qui établit, dans le cadre d'un marché parfait à l'équilibre, que la valeur d'une entreprise est indépendante de la structure de son financement (en dette ou en actions).

Examinons le cas d'une firme financée en 0 par N actions de valeur S_0 et par une dette zéro-coupon[1] de valeur B_0.
Soit $V_0 = NS_0 + B_0$.
La dette doit être remboursée pour une valeur totale *K* en τ à condition que V_τ la valeur de la firme à cette date, soit suffisante pour effectuer le remboursement ; dans le cas contraire, la firme fait faillite et les créanciers, prioritaires sur les actionnaires, récupèrent alors V_τ (au lieu de *K*).

1) En récapitulant les différentes situations possibles en τ, vous complèterez le tableau suivant

	En 0	En τ	
		Remboursement partiel si …	Remboursement total si …
Actions	NS_0		
Dette	B_0		

2) Montrez que $B_0 = Ke^{-r\tau} - P(V_0,\tau,K)$ où $P(x_1,x_2,x_3)$ désigne la valeur d'un put européen de sous-jacent x_1, de durée de vie x_2 et de prix d'exercice x_3.

3) Proposez une expression alternative pour B_0.

4) En utilisant le modèle de Black & Scholes, on peut montrer que $B_0 = Ke^{-r\tau}N(d_2)+V_0N(-d_1)$ où *N*(.) est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

$$B_0 = e^{-r\tau}\left[K-(1-N(d_2))\times\left(K-V_0e^{r\tau}\frac{1-N(d_1)}{1-N(d_2)}\right)\right]$$

Rapprochons ce calcul de l'évaluation classique des obligations en termes de taux actuariel ; on peut écrire que $B_0 = Ke^{-R(\tau)\times\tau}$ où $R(\tau)$ représente le taux actuariel du zéro-coupon de maturité τ.
Déduisez-en alors le *spread* de taux (i.e. $R(\tau)-r$) de la dette risquée.

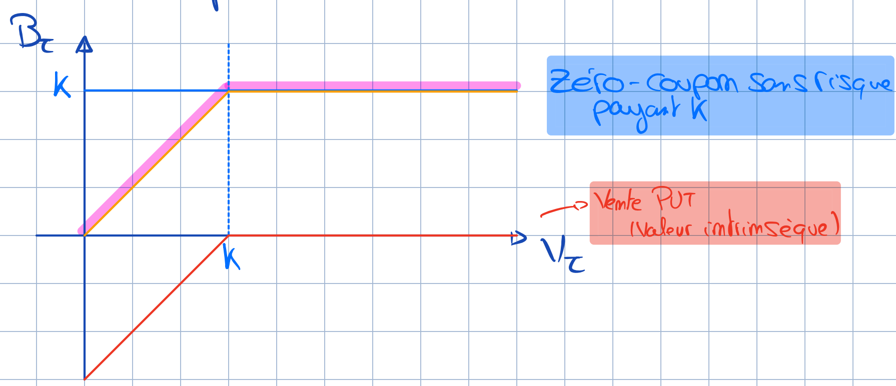
[1] Il s'agit ici d'une seule classe homogène de dette, toute de même rang, arrivant à échéance à la même date et ne versant pas de coupon.

Exercice : Évaluation d'une dette risquée.

1)

	En 0	En τ	
		Remboursement partiel si $V_\tau < K$	Remboursement total si $V_\tau \geq K$
Actions	NS_0	0	$V_\tau - K$
Dettes	B_0	V_τ	K
Σ	V_0	V_τ	V_τ

2) En τ on peut dresser le schéma suivant :



On décompose le Zéro-Coupon risqué en → ZC sans risque / → Vente du PUT de défaut

Donc en 0, sous AOA, $B_0 = Ke^{-r\tau} - Put(V_0, \tau, K)$

3) En utilisant la relation de parité CALL-PUT : $B_0 = V_0 - CALL(V_0, \tau, K)$

4) Le modèle de Black et Scholes nous permet d'écrire :

$$P(V_0, \tau, K) = Ke^{-r\tau} N(-d_2) - V_0 N(-d_1)$$

En reprenant l'expression de la question 1, on a :

$$B_0 = Ke^{-r\tau} - Ke^{-r\tau} N(-d_2) + V_0 N(-d_1) = Ke^{-r\tau}[1 - N(-d_2)] + V_0 N(-d_1)$$

$$= Ke^{-r\tau} N(d_2) + V_0 N(-d_1)$$

puisque $N(\cdot)$ est la fonct° de répartition de la loi normale centrée réduite.

On peut également écrire

$$B_0 = e^{-r\tau}\left[K \times N(d_2) + \frac{V_0}{e^{-r\tau}}(1-N(d_1))\right]$$

$$= e^{-r\tau}\left[K \times N(d_2) + K - K + \frac{1-N(d_2)}{1-N(d_2)} \times V_0 e^{r\tau} \times (1-N(d_1))\right]$$

$$= e^{-r\tau}\left[K - K \times (1-N(d_2)) + (1-N(d_2)) \times V_0 e^{r\tau} \times \frac{1-N(d_1)}{1-N(d_2)}\right]$$

Soit finalement :

$$B_0 = e^{-r\tau}\left[K - (1-N(d_2)) \times \left(K - V_0 e^{r\tau}\frac{1-N(d_1)}{1-N(d_2)}\right)\right]$$

On remarque que $(1-N(d_2))$ représente la probabilité de faire défaut $K - V_0 e^{r\tau}\frac{1-N(d_1)}{1-N(d_2)}$ la perte espérée en cas de défaut c'est-à-dire la perte (K) si rien n'est récupéré en cas de défaut moins la valeur espérée récupérée en cas de défaut $\left(V_0 e^{r\tau}\frac{1-N(d_1)}{1-N(d_2)}\right)$

5) Ecrivons $B_0 = Ke^{-R(\tau)\times\tau}$. D'après le début de la quest° 4, on a alors :

$$e^{-R(\tau)\times\tau} = \frac{B_0}{K} = e^{-r\tau}\left[N(d_2) + \frac{V_0}{Ke^{-r\tau}}N(-d_1)\right]$$

ou encore

$$e^{-[R(\tau)-r]\times\tau} = \left[N(d_2) + \frac{V_0}{Ke^{-r\tau}}N(-d_1)\right]$$

On obtient donc

$$[R(\tau)-r]\times\tau = \ln\left[N(d_2) + \frac{V_0}{Ke^{-r\tau}}N(-d_1)\right]$$

Finalement, le spread de taux de la dette risquée s'écrit :

$$R(\tau) - r = \frac{1}{\tau}\ln\left[N(d_2) + \frac{V_0}{Ke^{-r\tau}}N(-d_1)\right]$$