3 Exercices

Exercice 1. Rappeler et démontrer la relation de parité put-call. A partir de cette dernière, montrer que détenir une OC ZC convertible de type européen (sous-jacent ne versant pas de dividende) est au terme économiquement équivalent au fait de détenir C_r actions sous-jacentes et une option de vente européenne sur cette position de prix d'exercice le nominal de l'OC (ie, strike $= N = V_R$).

Exercice 2. On considère une OC ZC remboursée au pair dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Nominal, N =100 ;
- Echéance, T=1.5 ans ;
- Spread, $r_s = 0\%$;
- Ratio de conversion, $C_r = 7$;
- Option call émetteur, $K = 100$;
- Option put porteur, $P_v = 100$;

On dispose en outre des éléments suivants :

- Cours de l'action en $t = 0$, $S_0 = 13.5$;
- Volatilité de l'action, $\sigma = 45\%$;
- L'action ne verse pas de dividende entre $t = 0$ et $t = 1.5$;
- Taux sans risque (continu), $r_f = 2\%$

a) A l'aide du modèle binomial de pas de temps $\Delta t = 0.5$, calculer la valeur de l'OC dans le cas suivants (on prendra $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = 1/u$ et $q = \frac{e^{r_f \Delta t} - d}{u-d}$) :

a1) - OC sans clause particulière de type call émetteur ou put porteur ;
a2) - Soft call émetteur ;
a3) - Hard call émetteur ;
a4) - Put porteur ;
a5) - Hard call émetteur + put porteur ;

b) En supposant que l'OC ne soit exerçable qu'à l'échéance, vérifier vos réponses à la question a1) en appliquant le modèle de Black-Scholes aux deux expressions de la valeur de l'OC obtenues à partir de la relation de parité put-call rappelée à l'exercice 1. On rappelle que pour une option européenne (call ou put) ne versant pas de dividende de prix d'exercice K sur un sous-jacent S on a :

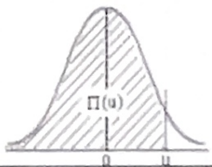
$$C_0 = S_0.\mathcal{N}_{(0,1)}(d_1) - Ke^{-r_f T}.\mathcal{N}_{(0,1)}(d_2)\,;\; P_0 = Ke^{-r_f T}.\mathcal{N}_{(0,1)}(-d_2) - S_0.\mathcal{N}_{(0,1)}(-d_1)\,;$$

$$\text{où } d_1 = \frac{ln\frac{S_0}{K} + (r_f + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\,;\; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Exercice 3. Construction d'une obligation synthétique. Un gérant de fonds obligataire souhaite acquérir une exposition sur les actions d'Apple. Son mandat lui interdit clairement un investissement direct en actions ou en warrant mais une acquisition d'OC est possible. Des OC sur Apple ne sont toutefois pas disponibles sur le marché à cette date ; le banquier observe qu'il existe sur le marché des warrants call (européens) émis par Société Générale (SG) qui correspondent aux besoins exprimés par le gérant et dont les caractéristiques sont : prix = \$1.85 ; strike =\$500 ; échéance = 217 jours ; nombre d'actions obtenues par conversion d'un warrant = 0.025. Pour la partie obligataire de l'obligation synthétique le gérant sélectionne une obligation ZC de nominal \$100 remboursée au pair dans 217 jours (date de l'échéance des options). Le taux du ZC est de 1.06% (taux à composition annuel). Calculer le C_r de l'OC synthétique ZC de nominal \$100 remboursée au pair constituée des warrants call SG de strike \$500 ci-dessus et en déduire son prix d'émission.

ANNEXE

Table de Loi Normale
P(x<u)



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	6,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9998	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

Exercice 1 :

Relation de parité Call-Put (euro sans dividendes)

$C_t - P_t = S_t - K e^{-r_c(T-t)}$ opt° sur S, d'échéance T, de strike K

Montrer ça puis appliquer cette relat° au payoff de l'OC en T

Etape 1 : montrer que c'est vrai en T

Etape 2 : Appliquer un raisonnement d'arbitrage.

① $C_T - P_T = (S_T - K)_+ - (K - S_T)_+$

$= S_T - K$ ∀ état de la nature

② On veut montrer que si $C_t - P_t \neq S_t - K e^{-r_c(T-t)}$ une opportunité d'arbitrage est possible.

Prenons le cas $S_t - K e^{-r_c(T-t)} > C_t - P_t$

Quel est l'arbitrage ?

En t : On achète le CALL et on vend le PUT

On vend le sous-jacent et on place $K e^{-r_c(T-t)}$ au taux sans-risque r_c

En t, on réalise un gain > 0

En T, on fait 0 car $\forall \omega$, $C_T - P_T = S_T - K$.

De m̂ si $S_t - K e^{-r_c(T-t)} < C_t - P_t$

Valeur terminale de l'OC, $V_R = N$

$P_T^{oc} = \max(C_r \times S_T, N) = \underbrace{C_r \times S_T + \max(N - S_T \times C_r, 0)}_{\text{Put}} \overset{?}{=} \underbrace{N + C_r \max(S_T - C_p, 0)}_{\text{CALL}}$

?

$P_T^{oc} = N + C_r \underbrace{\max(S_T - C_p, 0)}_{\text{relat° de parité appliquée au CALL}}$

$= N + C_r [P_T + S_T - C_p] = N + C_r(\max(C_p - S_T, 0) + S_T - C_p)$ $\qquad C_p \times C_r = N$

$= N + \max(N - S_T \times C_r, 0) + S_T \times C_r - N$

$C_r \times C_p = N$

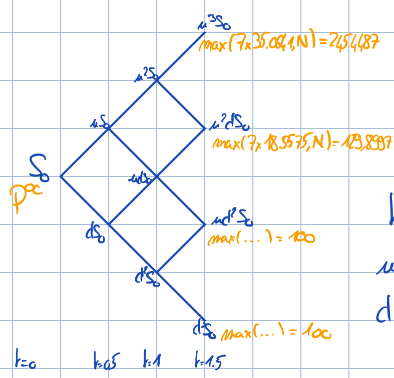
$= S_T \times C_r + \max(N - S_T \times C_r, 0)$

Exercice 2 : Une CC ZC remboursée au pair

Nominal : $N = 100$	Ratio de convers° : $C_r = 7$	$S_0 = 13.5$	
$T = 1.5$ ans	Option CALL émetteur $K = 100$	$\sigma = 45\%$	Pas de dividende entre $t=0$ et $t=1.5$.
Spread : $r_s = 0\%$	Option PUT porteur $P_r = 100$	$r_g = 2\%$	

a) $\Delta t = 0.5 \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad q = \dfrac{e^{r_f \Delta t} - d}{u - d}$

Etape 1 : Calculer les paramètres du modèle CRR et d'en déduire l'arbre



$u = 1,3746$

$d = 0,7275$

$q = 0,4366$

$t = 0.5$	$t = 1$	$t = 1.5$
$uS_0 = 18,5571$	$u^2S_0 = 25,5086$	$u^3S_0 = 35,0641$
$dS_0 = 9,8213$	$udS_0 = 13,5003$	$u^2dS_0 = 18,5575$
	$d^2S_0 = 7,1450$	$ud^2S_0 = 9,8215$
		$d^3S_0 = 5,1980$

Etape 2 : Calculer le prix de l'OC à chaque noeud en partant de la fin

en T, $P_T^{oc} = \max(C_r \times S_T, N)$ $\qquad$ Aux dates $t < T$, $P_t^{oc} = \max(\underbrace{C_r \times S_t}_{\text{Parité}}, \underbrace{P_c}_{\text{Prix de "Continuation"}})$

Prix de "Continuation" = Prix si pas convertie en t.

$R = e^{r\Delta t} = 1,01005$

$\tilde{f}_{uu} = \max\left(C_r \times S_t, \frac{1}{R}\left[q f_{u^3} + (1-q) f_{u^2d}\right]\right) = 178,5539$ $\qquad$ (Si on convertit $C_r \times S_t = 150,56$)

$\tilde{f}_{ud} = \max\left(94,5021, \frac{1}{R}\left[q f_{u^2d} + (1-q) f_{ud^2}\right]\right) = 111,9293$

$\tilde{f}_{d^2} = \max\left(50,015, \frac{1}{R}\left[q f_{ud^2} + (1-q) f_{d^3}\right]\right) = 99,005$

$\tilde{f}_{u} = \max\left(129,8997, \frac{1}{R}\left[q f_{u^2} + (1-q) f_{ud}\right]\right) = 139,6145$

$f_{d} = \max\left(68,7491, \frac{1}{R}\left[q f_{ud} + (1-q) f_{d^2}\right]\right) = 103,6065$

$f = \max\left(94,5, \frac{1}{R}\left[q f_{u} + (1-q) f_{d}\right]\right) = 118,1403$