TD 1 Maths Actuarielles

Exercice 1 Soit $F_0(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{120}\right)^{\frac{1}{6}}$ *pour* $0 \leq t \leq 120$. Calculer

1. La probabilité qu'un nouveau-né vive au-delà de 30 ans
2. La probabilité qu'une personne de 30 ans décède avant l'âge de 50 ans
3. La probabilité qu'une personne de 40 ans vive au-delà de 65 ans
4. La probabilité qu'une personne de 20 ans meurt entre 90 et 100 ans
5. La force de mortalité μ_x
6. L'espérance de vie discrète à l'âge de 50 ans
7. L'espérance de vie à l'âge de 50 ans

Exercice 2 Soit $F_0(t) = 1 - e^{-\lambda t}$ *pour* $\lambda > 0$

1. Montrer que $S_x(t) = e^{-\lambda t}$
2. Calculer sa force de mortalité μ_x
3. Montrer que $e_x = \frac{1}{e^{\lambda} - 1}$
4. Quelles conclusions pouvez-vous tirer sur le fait d'utiliser cette distribution pour modéliser la durée de vie humaine ?

Exercice 3 Soit $p_x = 0,99$, $p_{x+1} = 0,985$, ${}_3p_{x+1} = 0,95$ et $q_{x+3} = 0,02$. Calculer

1. p_{x+3}
2. ${}_2p_x$
3. ${}_2p_{x+1}$

4. ${}_3p_x$
5. ${}_{1|2}q_x$

Exercice 4 Un modèle de survie qui suit la loi de Makeham est défini par :

$$\mu_x = A + \alpha c^x \; pour \; A > 0, \alpha > 0 \; et \; c > 1$$

1. Montrer que sous la loi de Makeham,
$$ {}_tp_x = s^t g c^x (c^t - 1), $$ ${}_rp_x = s^r g^{c^x(c^r-1)}$

   où $s = e^{-A}$ et $g = e^{-\frac{\alpha}{log c}}$

2. On suppose que nous connaissons les valeurs de ${}_{10}p_{50}$, ${}_{10}p_{60}$ et ${}_{10}p_{70}$. Montrer que
$$c = \left(\frac{log({}_{10}p_{70}) - log({}_{10}p_{60})}{log({}_{10}p_{60}) - log({}_{10}p_{50})} \right)^{0,1}$$

Exercice 5 On considère la table de mortalité suivante :

Age, x	l_x
52	89 948
53	89 089
54	88 176
55	87 208
56	86 181
57	85 093
58	83 940
59	82 719
60	81 429

On rappelle également les deux hypothèses vues lors du cours :
Hypothèse 1 : On a une distribution uniforme des décès entre deux âges entiers
Hypothèse 2 : On a un taux instantané de mortalité constant entre deux âges entiers

1. Montrer que l'hypothèse 1 implique que $\forall\ x > 0 \; et \; 0 \leq s \leq 1$, $l_{x+s} = s l_{x+1} + (1-s) l_x$
2. Montrer que l'hypothèse 2 implique que $\forall\ x > 0 \; et \; 0 \leq s \leq s+t \leq 1$, ${}_sp_{x+t} = (p_x)^s$

3. Calculer avec l'hypothèse 1, ${}_{0,2}q_{52,4}$
4. Calculer avec l'hypothèse 1, ${}_{5,7}p_{52,4}$
5. Calculer avec l'hypothèse 1, ${}_{3,2|2,5}q_{52,4}$
6. Calculer avec l'hypothèse 2, ${}_{0,2}q_{52,4}$
7. Calculer avec l'hypothèse 2, ${}_{5,7}p_{52,4}$
8. Calculer avec l'hypothèse 2, ${}_{3,2|2,5}q_{52,4}$

Exercice 1 :

$$F_0(t) = 1 - \left(1 - \frac{t}{120}\right)^{1/6} \qquad 0 \le t \le 120$$

1) $S_0(30) = 1 - F_0(30) = 1 - \left(1 - \left(1 - \frac{30}{120}\right)^{1/6}\right)$
$= 0,9532 = 95,32\ \%$

2) $F_{30}(20) = \dfrac{F_0(30+20) - F_0(30)}{1 - F_0(30)} = \dfrac{0,0859 - 0,0468}{1 - 0,0468}$

$= 0,0410 = 4,10\%$

3) ${}_{25}p_{40} = 1 - F_{40}(25) = 1 - \dfrac{F_0(40+25) - F_0(40)}{1 - F_0(40)}$

$= 1 - \dfrac{0,1219 - 0,0653}{1 - 0,0653}$

$= 0,9395 = 93,95\%$

4) ${}_{70|10}q_{20} = {}_{80}q_{20} - {}_{70}q_{20} = F_{20}(80) - F_{20}(70)$

$= \dfrac{F_0(100) - F_0(20)}{1 - F_0(20)} - \dfrac{F_0(90) - F_0(20)}{1 - F_0(20)}$

$= \dfrac{0,2582 - 0,0299}{1 - 0,0299} - \dfrac{0,2063 - 0,0299}{1 - 0,0299}$

$= 0,2353 - 0,1818$

$= 0,0535 = 5,35\%$

5) $\mu_x = -\dfrac{d}{dx}\left(\ln\left({}_xp_0\right)\right) = \dfrac{1}{6} \times \dfrac{1}{120} \times \dfrac{1}{\left(1 - \frac{x}{120}\right)^{1/6}} \left(1 - \dfrac{x}{120}\right)^{-5/6}$

$= \dfrac{1}{720 - 6x}$

6) $e_{50} = \displaystyle\sum_{k=1}^{120-50} {}_kp_{50} = \sum_{k=1}^{120-50} \left(1 - {}_kq_{50}\right)$

$= 70 - \displaystyle\sum_{k=1}^{70} F_{50}(k) = 70 - \sum_{k=1}^{70} \dfrac{F_0(50+k) - F_0(50)}{1 - F_0(50)}$

$= 70 - \displaystyle\sum_{k=1}^{70} \dfrac{\left(1 - \frac{50+k}{120}\right)^{1/6} - \left(1 - \frac{50}{120}\right)^{1/6}}{\left(1 - \frac{50}{120}\right)^{1/6}}$

$= 80,6824$

7) $\mathring{e}_{50} = \displaystyle\int_0^{120} {}_tp_{50}\, dt$

${}_tp_x = \dfrac{S_0(x+t)}{S_0(x)} = \dfrac{\left(1 - \frac{x+t}{120}\right)^{1/6}}{\left(1 - \frac{x}{120}\right)^{1/6}} = \left(1 - \dfrac{t}{120 - x}\right)^{1/6}$

$$\Longrightarrow \mathring{e}_{50} = \int_0^{120-50} \left(1-\frac{t}{120-50}\right)^{1/6} dt \qquad u = 1-\frac{t}{120-50} \Rightarrow t = (120-50)(1-u)$$

$$\Longrightarrow \mathring{e}_x = (120-50)\int_0^1 u^{1/6}\, du$$
$$= \frac{6}{7}(120-50) = 60$$

Exercice 2: $F_0(t) = 1-e^{-\lambda t} \quad \lambda>0$

1) $S_x(t) = \dfrac{{}_{x+t}p_0}{{}_xp_0} = \dfrac{e^{-\lambda(x+t)}}{e^{-\lambda x}} = e^{-\lambda t}$

2) $\mu_x = -\dfrac{d}{dx}\log {}_xp_0 = -\dfrac{d}{dx} -\lambda x = \lambda$

3) $e_x = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\lambda k} = \frac{e^{-\lambda}-0}{1-e^{-\lambda}} = \frac{1}{e^{\lambda}-1}$

4) espérance de vie indep de l'âge x $\longrightarrow$ Peu de sens.

Exercice 3: $p_x = 0{,}99 \quad p_{x+1} = 0{,}985, \; {}_3p_{x+1} = 0{,}95, \; q_{x+3} = 0{,}02.$

1) $p_{x+3} = 1-q_{x+3} = 0{,}98$

2) ${}_2p_x = p_x\, p_{x+1} = 0{,}99\times 0{,}985$
$= 0{,}97515$

$p_{x+1}\, p_{x+2}\, p_{x+3}$

3) ${}_2p_{x+1} = \dfrac{{}_3p_{x+1}}{p_{x+3}} = \dfrac{0{,}95}{0{,}98}$

$= 0{,}96939$

4) ${}_3p_x = p_x\, p_{x+1}\, p_{x+2} = p_x\, {}_2p_{x+1}$
$= 0{,}99\times 0{,}96939$
$= 0{,}95969$

5) ${}_{1|2}q_x = {}_3q_x - {}_1q_x$

$= (1-{}_3p_x) - (1-p_x)$
$= -0{,}95969 + 0{,}99$
$= 0{,}03031.$

Exercice 4 : $\mu_x = A + \alpha c^x \qquad A>0,\ \alpha>0,\ c>1$

1) $${}_tp_x = \exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}\, ds\right)$$
$$= \exp\left(-\int_0^t A + \alpha c^{x+s}\, ds\right)$$
$$= \exp\left(-At - \alpha c^x \int_0^t c^s\, ds\right)$$
$$= \exp\left(-At - \alpha c^x \left[\frac{1}{\ln(c)} c^s\right]_0^t\right)$$
$$= e^{-At}\, e^{-\frac{\alpha}{\ln c} c^x (c^t - 1)}$$
$$= (e^{-A})^t \left(e^{-\frac{\alpha}{\ln c}}\right)^{c^x(c^t-1)}$$
$$= s^t g^{c^x(c^t-1)}$$

2) Chiant.

Exercice 5 :

1) H1 : $\forall x \in \mathbb{N},\ 0 \le t \le 1$ on a $\begin{cases} {}_tq_x = t q_x \\ {}_tp_x = 1 - t q_x \end{cases}$

$$\Rightarrow {}_sp_x = \frac{\ell_{x+s}}{\ell_x} = 1 - s q_x$$
$$= 1 - s\left(1 - \frac{\ell_{x+1}}{\ell_x}\right)$$

$$\Rightarrow \ell_{x+s} = \ell_x - s(\ell_x - \ell_{x+1})$$
$$= s\ell_{x+1} + (1-s)\ell_x$$

2) H2 : $\forall x > 0$ et $0 \le s \le s+t \le 1$ on a $\begin{cases} {}_tp_x = p_x^t \\ {}_tq_x = 1 - (1-q_x)^t \end{cases}$

Pour $0 \le s < 1$, $\mu_{x+s} = \mu_x$

$$\Rightarrow {}_sp_x = \exp\left\{-\int_0^s \mu_x\, du\right\} = e^{-\mu_x s} = (p_x)^s$$

$$\Rightarrow \text{avec } 0 \le s \le s+t < 1 \Rightarrow {}_sp_{x+t} = \exp\left\{-\int_0^s \mu_x\, du\right\} = (p_x)^s$$

3) Avec H1 : $${}_{0,2}q_{52,4} = 1 - \frac{\ell_{52,6}}{\ell_{52,4}} = 1 - \frac{0,6\ell_{53} + 0,4\ell_{52}}{0,4\ell_{53} + 0,6\ell_{52}}$$
$$= 0,001917$$

4) H1 : $${}_{5,7}p_{52,4} = \frac{\ell_{58,1}}{\ell_{52,4}} = \frac{0,1\ell_{59} + 0,9\ell_{58}}{0,4\ell_{53} + 0,6\ell_{52}} = 0,93542$$

5) H1 : $${}_{3,2|2,5}q_{52,4} = {}_{5,7}q_{52,4} - {}_{3,2}q_{52,4} = 1 - \frac{\ell_{58,1}}{\ell_{52,4}} - 1 + \frac{\ell_{55,6}}{\ell_{52,4}} = -\frac{0,1\ell_{59} + 0,9\ell_{58}}{0,4\ell_{53} + 0,6\ell_{52}} + \frac{0,6\ell_{56} + 0,4\ell_{55}}{0,4\ell_{53} + 0,6\ell_{52}}$$
$$= 0,03096$$

6) H2 :

$$ {}_{0,2}q_{52,4} = 1 - {}_{0,2}p_{52,4} = 1 - p_{52}^{0,2} $$
$$ = 1 - \left(\frac{\ell_{53}}{\ell_{52}}\right)^{0,2} = 0{,}001917 $$

7) H2 :

$$ {}_{5,7}p_{52,4} = {}_{0,6}p_{52,4} \times {}_{5}p_{53} \times {}_{0,1}p_{58} $$
$$ = (p_{52})^{0,6} \times \frac{\ell_{58}}{\ell_{53}} \times (p_{58})^{0,1} $$
$$ = \left(\frac{\ell_{53}}{\ell_{52}}\right)^{0,6} \times \frac{\ell_{58}}{\ell_{53}} \times \left(\frac{\ell_{59}}{\ell_{58}}\right)^{0,1} $$
$$ = 0{,}93542. $$

8) H2 :

$$ {}_{3,2|2,5}q_{52,4} = {}_{5,7}q_{52,4} - {}_{3,2}q_{52,4} $$
$$ = (1 - {}_{5,7}p_{52,4}) - (1 - {}_{3,2}p_{52,4}) $$
$$ = -{}_{5,7}p_{52,4} + {}_{3,2}p_{52,4} $$
$$ = -0{,}93542 + {}_{0,2}p_{52,4} \times {}_{3}p_{53} = -0{,}93542 + \left(\frac{\ell_{53}}{\ell_{52}}\right)^{0,2} \times \frac{\ell_{56}}{\ell_{53}} $$
$$ = 0{,}03008 $$