Thomas Duquesne

19/01/2024

Modèles de sauts

Nuage de Poisson

3 chapitres :

- Etude déterministe
  $y'(t) = f(t)y(t)$ solution à variation bornée
- Nuages de Poisson
- Modèle avec sauts

Chapitre I Étude déterministe

But $\quad F(t) = \int_{[0,1]} v(t)\, d f(t) = \lim \sum v(t_i)(f(t_{i+1}) - f(t_i))$

I.1. Rappel sur les mesures signées

I.1.a. Définitions et premiers résultats

Déf E espace $(\neq \emptyset)$ muni d'une tribu $\mathcal{E}$. Une fct $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}$ est une **mesure signée** si $\forall A_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$ $A_n \cap A_m = \emptyset$ $n \neq m$ on a $\sum |\mu(A_n)| < \infty$ et

$$\mu\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_n \mu(A_n)$$

Faits :

1) $\mu(\emptyset) = 0$: $A_n = \emptyset$ $\quad \sum |\mu(\emptyset)| < \infty \Rightarrow \mu(\emptyset) = 0$

2) Si $A, B \in \mathcal{E}$ t.q. $A \cap B = \emptyset$ alors $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ $\quad \begin{pmatrix} A_0 = A & \\ A_1 = B & A_k = \emptyset \end{pmatrix}$

3) Si $A, B \in \mathcal{E}$ $\quad A \subset B$ on n'a pas nécessairement que $\mu(A) \leq \mu(B)$

4) Soient $\mu_1, \mu_2 : \mathcal{E} \to \mathbb{R}^+$ mesures positives de masse finie $(\mu_i(E) < \infty)$

$\mu(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A_2)$ $\quad \forall A \in \mathcal{E} \Rightarrow \mu$ est une mesure signée

5) Imposer que $\sum |\mu(A_n)| < \infty$ est rédondant. On voudrait plutôt une définition : $\forall A_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, 2-à-2 disjoint, la serie de terme $(\mu(A_n))_{n \in \mathbb{N}}$ soit convergente et $\mu\big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n\big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n)$

Dans ce cas soit $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijection $(\mu(A_{\sigma(n)}))_{n \in \mathbb{N}}$ est le terme general d'une série convergente et $\bigcup A_{\sigma(n)} = \bigcup A_n$ on a

$$\mu\Big(\bigcup_n A_n\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_{\sigma(n)}) = \sum \mu(A_n) \Rightarrow \sum |\mu(A_n)| < \infty$$

Proposition Soit μ mesure signée. Soient $A_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$

① Si $A_n \subset A_{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$, alors $\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mu(A_n)$

② Si $A_{n+1} \subset A_n$, $n \in \mathbb{N}$, alors $\mu\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim \mu(A_n)$

Preuve $B_0 = A_0$, $B_n = A_n \setminus A_{n-1} = A_n \cap (E \setminus A_{n-1})$

$B_n \in \mathcal{E}$ et (B_n) 2-à-2 disjoints $\quad A_n = \bigcup_{0\le k\le n} B_k \quad \bigcup A_n = \bigcup B_n$

$$\mu\left(\bigcup A_n\right) = \mu(B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_n \underbrace{\sum_{0\le k\le n} \mu(B_k)}_{\mu(A_n)}$$

□

Théorème Soit $\mathcal{P} \subset \mathcal{E}$ un π-système $\left(\begin{array}{l} A, B \in \mathcal{P} \to A \cap B \in \mathcal{P} \\ E \in \mathcal{P} \end{array} \right)$.

On suppose que $\sigma(\mathcal{P}) = \mathcal{E}$. Si μ et μ' sont deux mesures signées sur $\mathcal{E}$ telles que $\forall A \in \mathcal{P}$ $\mu(A) = \mu'(A)$. Alors $\mu = \mu'$.

Théorème (décomposition de Jordan) Soit μ une mesure signée. Alors il existe A^+ et A^- deux ensembles dans $\mathcal{E}$ tels que $A^+ \cup A^- = E$ et $A^+ \cap A^- = \emptyset$ qui satisfont : $\mu_+(B) = \mu(A^+ \cap B)$, $\mu_-(B) = -\mu(A^- \cap B)$, $B \in \mathcal{E}$ alors μ_+ et μ_- sont deux mesures positives de masses finies et $\mu = \mu_+ - \mu_-$

On a $\mu_+(B) = \sup\{\mu(C),\ C \in \mathcal{E},\ C \subset B\}$

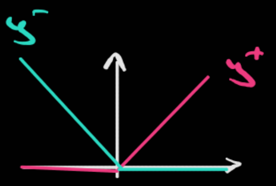
$\mu_-(B) = -\inf\{\mu(C),\ C \in \mathcal{E},\ C \subset B\}$

Si μ_1, μ_2 sont deux autres mesures positives t.q. $\mu = \mu_2 - \mu_1$

alors $\mu_+(B) \le \mu_2(B)$ et $\mu_-(B) \le \mu_1(B)$.

Analogie $y \in \mathbb{R}$ $\quad y^+ = \max(0, y)$

$y^- = \max(0, -y)$



$y = y^+ - y^-$

Si $y = z_2 - z_1$, $z_1, z_2 \ge 0$ $\quad z_1 + y = z_2 \ge 0$

$y^+ \le (z_1 + y)^+ = z_2$, $y^- \le z_1$

Déf Soit μ une mesure signée. On note μ_+ et μ_- sa décomposition de Jordan.

Vocabulaire $\quad \mu_+$ variation positive de μ

μ_- variation négative de μ

On pose $|\mu| := \mu_+ + \mu_-$ variation totale de μ.

$|\mu|(A) \geq |\mu(A)|$

Intégrale contre une mesure signée

Soit μ une mesure signée.

$$\mathcal{L}^1(E,\mathcal{E},|\mu|) = \{u : E \to \mathbb{R} : \int |u| \, d|\mu| < \infty\}$$

$$\int |u| \, d|\mu| = \int |u| \, d\mu_+ + \int |u| \, d\mu_-$$

C vrai pour toutes fct élementaires → approximation + TCM → $\forall u \in \mathcal{L}^1$

Donc $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{E},|\mu|) = \mathcal{L}^1(E,\mathcal{E},\mu_+) \cap \mathcal{L}^1(E,\mathcal{E},\mu_-)$

$u \in \mathcal{L}^1(E,\mathcal{E},|\mu|)$. On peut poser $\int u \, d\mu = \int u \, d\mu_+ - \int u \, d\mu_-$

Prop 1) $\mathcal{L}^1(E,\mathcal{E},|\mu|)$ est un espace vectoriel. Si $u, v \in \mathcal{L}^1$ et $\lambda, \vartheta \in \mathbb{R}$ alors $\lambda u + \vartheta v \in \mathcal{L}^1$ et $\int (\lambda u + \vartheta v) \, d\mu = \lambda \int u \, d\mu + \vartheta \int v \, d\mu$

2) $\left|\int u \, d\mu\right| \leq \int |u| \, d|\mu|$

Preuve 1) Exo

2) $\left|\int u \, d\mu\right| \leq \left|\int u \, d\mu_+\right| + \left|\int u \, d\mu_-\right| \leq \int |u| \, d\mu_+ + \int |u| \, d\mu_- = \int |u| \, d|\mu|$ $\square$

Atomes, mesure diffuse

On suppose que $\{x\} \in \mathcal{E}$ $\forall x \in E$.

Déf Soit μ une mesure signée. Soit $x \in E$. μ admet un atome en x si $\mu(\{x\}) \neq 0$ et la taille de cet atome est $\mu(\{x\})$.

Notation $Ato(\mu) = \{x \in E : \mu(\{x\}) \neq 0\}$

Lemme $Ato(\mu)$ est un ensemble dénombrable

Preuve $Ato(\mu) = Ato(\mu_+) \cup Ato(\mu_-)$

On se ramène au x mesures finies positives.

$A_n = \{x \in E : \mu_+(\{x\}) \geq 2^{-n}\}$

$Ato(\mu_+) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

Si $x_1, \dots, x_p \in A_n$ distincts $\quad p 2^{-n} \leq \sum_{i=1}^{p} \mu_+(\{x_i\}) \leq \mu_+(E) < \infty \Rightarrow p \leq 2^n \mu_+(E)$

Donc A_n est fini → $Ato(\mu_+)$ est dénombrable. $\square$

Lemme Soit μ mesure signée. $\mu(\{x\})_+ = \mu_+(\{x\})$, $\mu(\{x\})_- = \mu_-(\{x\})$

$|\mu(\{x\})| = |\mu|(\{x\})$, $x\in E$. $Ato(\mu_+) \cap Ato(\mu_-) = \emptyset$, $Ato(\mu_+) \cup Ato(\mu_-) = Ato(\mu) = Ato(|\mu|)$

et on $\sum_{x\in Ato(\mu)} |\mu(\{x\})| \le |\mu|(E)$ (*)

Preuve (*) $\sum_{x\in Ato(\mu)} |\mu(\{x\})| = \sum_{x\in Ato(\mu)} |\mu|(\{x\}) = |\mu|(Ato(\mu)) \le |\mu|(E)$ □

Décomposition en partie atomique / partie diffuse

Soit μ mesure signée et on pose $\mu_{at} = \sum_{x\in Ato(\mu)} \mu(\{x\})\delta_x$ **partie atomique** de μ

$\mu_{diff} = \mu - \mu_{at}$ **partie diffuse**. $Ato(\mu_{diff}) = \emptyset$

Une mesure sans atome est dite **diffuse**

Une mesure signée est **purement atomique** si $\nu = \nu_{at}$

Lemme Tout commute $(\mu_{at})_{+/-} = (\mu_{+/-})_{at}$ $\quad |\mu_{at}| = (|\mu|)_{at}$

$(\mu_{diff})_{+/-} = (\mu_{+/-})_{diff}$ $\quad |\mu_{diff}| = (|\mu|)_{diff}$

I.2. Fonctions à variation bornée

Fonctions ↗ et mesures de Stiltjes

On fixe $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$. On munit $[a,b]$ de la tribu de boréliens de $[a,b]$ notée $\mathcal{B}([a,b])$. Soit $\mu : \mathcal{B}([a,b]) \to \mathbb{R}_+$ une mesure positive de masse finie

On note $F_\mu : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ sa **fonction de répartition** $F_\mu(t) = \mu([a,t])$

F_μ est ↗ et c.à.d. $\quad F_\mu(t-) = \sup_{s\in[a,t[} F_\mu(s) = \mu([a,t[)$

$J_{F_\mu} = \{t\in[a,b] : F_\mu(t) > F_\mu(t-)\} = Ato(\mu)$

Théorème (Lebesgue-Stiltjes) Soit F ↗ c.à.d. Alors $\exists!$ mesure finie positive μ t.q. $\mu(\{a\}) = 0$ et $F(t) - F(a) = \mu([a,t])$, $t\in[a,b]$. On note μ par dF.

C'est la mesure de Stiltjés associée à μ

Preuve Deduit de la mesure de Lebesgue

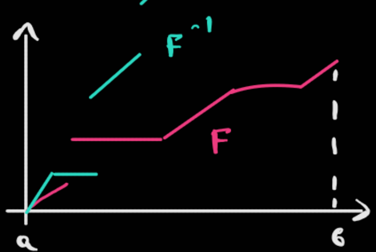
$M = F(b) - F(a)$. On pose $F^{-1}(y) = \inf\{x\in[a,b],\ F(x) - F(a) > y\}$ si $y < M$

$F^{-1}(y) = b$ si $y \ge M$

Si F continue est stt croissante alors

F^{-1} est reciproque de F

$\mu(B) := Leb(\{y\in[0,M] : F^{-1}(y) \in B\})$



$\mu([a,t]) = \text{Leb}(\{y \in [0,M] : \underbrace{F^{-1}(y) \in [a,t]}_{\subset [F(a),F(t)]}\}) = F(b) - F(a)$

Soit $u : [a,b] \to \mathbb{R}_+$ borel mesurable

$$\int_{[a,b]} u(s)\, dF(s) \text{ a un sens}$$

Si u continue $\displaystyle\int_{[a,b]} u\,dF = \lim_{pas(\sigma) \to 0} \sum_i u(s_i)(F(s_{i+1}) - F(s_i))$ $\quad \sigma_n = \{a = s_0 < \dots < s_N = b\}$

Lemme Soit $T > 0$. Soit $F : [0,T] \to \mathbb{R}$ $\nearrow$ c.à.d. t.q. $F(0) = 0$.

$$\int_{[0,t]} \frac{1}{(n-1)!} F(s-)^{n-1} dF(s) \leq \frac{F(t)^n}{n!} \leq \int_{[0,t]} \frac{F(s)^{n-1}}{(n-1)!} dF(s), \quad t \in [0,T]$$

Preuve pas si simple

I.2.6. Fonction à variation bornée

Def $F : [a,b] \to \mathbb{R}$. Une subdivision $\sigma = \{a = s_0 < \dots < s_n = b\}$. On note $\mathcal{S}([a,b])$ l'ensemble de subdivisions de $[a,b]$. $pas(\sigma) = \max_{0 \leq i \leq n} (s_{i+1} - s_i)$

a) $\displaystyle V(\sigma, F) = \sum_{0 \leq i \leq n} |F(s_{i+1}) - F(s_i)|$

$$V^+(\sigma, F) = \sum_{0 \leq i \leq n} (F(s_{i+1}) - F(s_i))^+$$

$$V^-(\sigma, F) = \sum_{0 \leq i \leq n} (F(s_{i+1}) - F(s_i))^-$$

F est **à variation bornée** sur $[a,b]$ si $\displaystyle\sup_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} V(\sigma, F) = var_F([a,b]) < \infty$

On introduit aussi $\displaystyle var_F^{+/-}([a,b]) = \sup_{\sigma \in \mathcal{S}([a,b])} V^{+/-}(\sigma, F)$

Exemple 1) $F \in C^1 \to |F(s_{i+1}) - F(s_i)| = \displaystyle\int_{s_i}^{s_{i+1}} |F'(s)|\, ds$

$$V(\sigma, F) \leq \int_a^b |F'(s)|\, ds \qquad var_F([a,b]) \leq \int_a^b |F'(s)|\, ds$$

2) $F = \mathbb{1}_{\mathbb{Q} \cap [a,b]}$ n'est pas à variation bornée

3) $\mathbb{P}$-p.s. $\forall a, b \in \mathbb{R}_+$ $a < b$ $\quad var_{\text{Brownien}}([a,b]) = \infty$

Théorème $a < b$ et F à variation bornée. $var_F(t) = var_F([a,t])$, $var_F^{+/-}(t) = var_F^{+/-}([a,t])$

1) var_F^+, var_F^-, var_F sont $\nearrow$ et $F(t) - F(a) = var_F^+(t) - var_F^-(t)$

$$var_F(t) = var_F^+(t) + var_F^-(t) \qquad t \in [a,b]$$

2) Soient $g_1, g_2 \nearrow$ on pose $G = g_2 - g_1$. Alors G est à variation bornée

et $var^+_G(t) \leq g_2(t) - g_2(a)$

$var^-_G(t) \leq g_1(t) - g_1(a)$

Preuve 1) $F(t) - F(a) = \sum_{0 \leq i < n} F(s_{i+1}) - F(s_i)$ si $\sigma = \{a = s_0 < s_1 < \dots < s_n = t\}$ $\sigma \in \mathcal{S}([a,b])$

$$= V^+(\sigma, F) - V^-(\sigma, F)$$

$$0 \leq V^{+/-}(\sigma, F) \leq V(\sigma, F) \leq var_F(t)$$

$$F(t) - F(a) \leq var^+_F(t) - V^-(\sigma, F)$$

$$\Big\downarrow \inf_\sigma$$

$$F(t) - F(a) \leq var^+_F(t) - var^-_F(t)$$

De même, $F(t) - F(a) \geq V^+(\sigma, F) - var^-_F(t)$

$\geq var^+_F(t) - var^-_F(t)$

$\rightarrow F(t) = F(a) + var^+_F(t) - var^-_F(t)$

Pour $var_F = var^+_F + var^-_F$ même idée.

2) Soit $G = g_1 - g_2$ $\quad V^+(\sigma, G) = \sum_i \left(g_1(s_{i+1}) - g_2(s_{i+1}) - g_1(s_i) + g_2(s_i)\right)^+ =$

$$= \sum \left(g_1(s_{i+1}) - g_1(s_i) - (g_2(s_{i+1}) - g_2(s_i))\right)^+ \leq \sum \left(g_1(s_{i+1}) - g_1(s_i)\right)^+ = g_1(t) - g_1(a)$$

$\rightarrow var^+_F(t) \leq g_1(t) - g_1(a)$

$\square$

Constatation Une fonction $\nearrow$ g a toujours une limite à gauche et à droite.

$$g(t-) = \lim_{s \uparrow t} g(s) = \sup_{s \in [a,t[} g(s) \qquad g(t-) \leq g(t) \leq g(t+)$$

$$g(t+) = \lim_{s \downarrow t} g(s) = \inf_{s \in]t,b]} g(s)$$

$J_g = \{t \in [a,b] : g(t-) < g(t+)\}$ est dénombrable (car les intervalles $]g(t-), g(t+)[$ sont disjoints 2-à-2)

Lemme Soit F à variation bornée càd. Elle admet une limite à gauche partout et $var_F, var_F^{+/-}$ sont également continues à droite.

Notation $\Delta G(t) = G(t) - G(t-)$ si G est càdlàg

$$\Delta var_F(t) = |\Delta F(t)|$$

$$\Delta var_F^{+/-}(t) = (\Delta F(t))^{+/-}$$

Preuve Exo

Théorème $a<b$; F à variation bornée c.à.d. Il existe une unique mesure signée $\mu : \mathcal{B}([a,b[) \to \mathbb{R}$ t.q. $F(t)-F(a)=\mu([a,t])$, $t\in[a,b[$ $(\mu(\{a\})=0)$

On note $dF=\mu$, qui est la mesure de Stieltjès de F.

$$\mathrm{var}_F(t)=|\mu|([a,t]),\quad \mathrm{var}_F^{+/-}(t)=\mu_{+/-}([a,t]),\ t\in[a,b[$$

$$d\,\mathrm{var}_F=|\mu| \qquad d\,\mathrm{var}_F^{+/-}=\mu_{+/-}$$

Preuve $\nu_1=d\,\mathrm{var}_F^+$ $\quad \nu_2=d\,\mathrm{var}_F^-$

$$\nu_1([a,t])=\mathrm{var}_F^+(t) \quad \nu_2([a,t])=\mathrm{var}_F^-(t)$$

On pose $\mu=\nu_1-\nu_2$ $\quad\mu$ est donc une mesure signée

$$\mu([a,t])=\mathrm{var}_F^+(t)-\mathrm{var}_F^-(t)=F(t)-F(a).$$

Unicité : Soit $\mu'([a,t])=F(t)-F(a)=\mu([a,t])$

$\mathcal{P}=\{[a,t]\}_{t\in[a,b[}$ est un π-système, $\sigma(\mathcal{P})=\mathcal{B}([a,b[)$

μ et μ' coincident sur $\mathcal{P}$ $\Rightarrow$ $\mu=\mu'$.

On note μ_+ et μ_- la décomposition de Jordan de μ

$$\mu([a,t])=\mu_+([a,t])-\mu_-([a,t])$$

$$\mathrm{var}_F^+([a,t])\leq\mu_+([a,t])$$

$$\mathrm{var}_F^-([a,t])\leq\mu_-([a,t])$$

$$\underset{\forall \nu_1,\nu_2 :}{\mu=\nu_2-\nu_1} \qquad \begin{matrix}\mu_+\leq\nu_1\\ \mu_-\leq\nu_2\end{matrix} \quad \to \quad \begin{matrix}\mu_+=\mathrm{var}_F^+\\ \mu_-=\mathrm{var}_F^-\end{matrix}$$

$\square$

Intégrale contre une fonction à variation bornée c.à.d.

F càd à VB. $u\in\mathcal{L}^1([a,b[,\mathcal{B}([a,b[),|dF|)$

On peut définir $\displaystyle\int_{[a,b[}u\,dF=\int_{[a,b[}u(dF)_+-\int_{[a,b[}u(dF)_-$

$$u\mapsto\int u\,dF \text{ est linéaire}$$

Si u est continue $\displaystyle\int u\,dF=\lim_n\sum_i u(s_i^{(n)})\left(F(s_{i+1}^{(n)})-F(s_i^{(n)})\right)$ où $\sigma_n=\{a=s_0^{(n)}<\dots<s_{N_n}^{(n)}=b\}$

Proposition F à VB càd. $u\in\mathcal{L}(|dF|)$ On pose $G(t)=\int_{[a,t]}u\,dF$, $t\in[a,b[$

Alors G est à VB càd et $\mathrm{var}_G(t) = \int_{[a,t]} |u|\,|dF|$

$$\mathrm{var}^+_G(t) = \int_{[a,t]} u^+ (dF)^+ + \int_{[a,t]} u^- (dF)^-$$

$$\mathrm{var}^-_G(t) = \int_{[a,t]} u^+ (dF)^- + \int_{[a,t]} u^- (dF)^+$$

$$(dG)^+ = u^+(dF)^+ + u^-(dF)^- \qquad dG = u\,dF$$

$$(dG)^- = u^+(dF)^- + u^-(dF)^+ \qquad |dG| = |u|\cdot|dF|$$

Si μ est une mesure positive sur $\mathcal{E}$ et f $\mathcal{E}$-mesurable, $d\nu = f\,d\mu$ signifie que $\nu(A) = \int_A f\,d\mu$

Preuve vérification (exo)

Notation $dH = v\,dG = (u\cdot v)\,dF$ vrai (lemme)

$F : [a,b] \to \mathbb{R}$ VB càd

$$\sum_{s\in\mathcal{J}_F} |\Delta F(s)| \leq \mathrm{var}_F([a,b]) \quad \text{où} \quad \mathcal{J}_F = \{ s\in[a,b] : \Delta F(s) \neq 0 \}$$

$F_a(t) = \sum_{s\in\mathcal{J}_F\cap[a,t]} \Delta F(s)$ c'est une fonction bien définie et càd.

$$|F_a(t+\varepsilon) - F_a(t)| \leq \sum_{s\in\mathcal{J}_F} \mathbb{1}_{]t,t+\varepsilon]}\,|\Delta F(s)| \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \text{par convergence dominée}$$

$$F_a(t) = \underbrace{\sum_{s\in\mathcal{J}_F\cap[a,t]} (\Delta F(s))_+}_{\nearrow \text{ en } t} - \underbrace{\sum_{s\in\mathcal{J}_F\cap[a,t]} (\Delta F(s))_-}_{\nearrow \text{ en } t} \qquad F_a \text{ est VB càd.}$$

F_a est appelée la partie purement discontinue de F ou encore la partie "atomique" de F.

On pose $F_d(t) = F(t) - F_a(t)$ càd et VB comme différence de telles fonctions.

$$\forall t\in[a,b] \quad \Delta F(t) = 0 \implies F_d \text{ est continue.}$$

F_d est appelée la partie continue (ou diffuse) de F.

$$F = F_d + F_a$$

dF_d = la partie diffuse de dF
dF_a = la partie atomique de dF

$$dF_a = \sum_{s \in \mathcal{J}_F} \Delta F(s)\, \delta_s \qquad (dF_a)^{+/-} = \sum_{s \in \mathcal{J}_F} (\Delta F(s))^{+/-} \delta_s$$

$$|dF_a| = \sum_{s \in \mathcal{J}_F} |\Delta F(s)| \cdot \delta_s$$

Exo

Proposition $F : [a, b[\to \mathbb{R}$ VB càd. Soit $u \in \mathcal{L}^1(|dF|)$.

On pose $G(t) = \int_{[a,t]} u(s)\, dF(s)$, $t \in [a, b[$

G est VB càd On $G_d(t) = \int_{[a,t]} u(s)\, dF_d(s)$,

$$G_a(t) = \int_{[a,t]} u(s)\, dF_a(s) = \sum_{s \in \mathcal{J}_F \cap [a,t]} u(s)\, \Delta F(s) \quad (\to \mathcal{J}_G \subset \mathcal{J}_F)$$

Preuve Exo

I.3. Application à un problème de calcul différentiel

I.3.a. Une formule de type "Itô" pour les fonctions VB.

Théorème Soit $T > 0$ et $F : [0, T] \to \mathbb{R}$ VB, càd. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\Phi \in C^1$.

On définit une "pseudo-dérivée"

$$\frac{\delta \Phi \circ F}{\delta F} : [0, T] \to \mathbb{R} \qquad s \in [0,T] \mapsto \begin{cases} \Phi'(F(s)) & \text{si } \Delta F(s) = 0 \\ \dfrac{\Phi(F(s)) - \Phi(F(s-))}{\Delta F(s)} & \text{si } \Delta F(s) \neq 0 \end{cases}$$

Alors $\frac{\delta \Phi \circ F}{\delta F}$ est bornée sur $[0, T]$ et on a

$$\Phi(F(t)) = \Phi(F(0)) + \int_{[0,t]} \frac{\delta \Phi \circ F}{\delta F}(s)\, dF(s) = \Phi(F(0)) + \int_{[0,t]} \Phi'(F(s))\, dF_d(s) + \int_{[0,t]} \frac{\overbrace{\Delta(\Phi \circ F)(s)}^{\Phi(F(s)) - \Phi(F(s-))}}{\Delta F(s)}\, dF_a(s)$$

Remarque À partir de cette expression on calcule $d\Phi\circ F$, $(d\Phi\circ F)^{+/-}$, $|d\Phi\circ F|$, ...

Preuve

Cas 1 On suppose F continue. On pose

$$w_F(\eta) = \max\{|F(s)-F(t)|,\ s,t\in[0,T],\ |s-t|\le\eta\}$$

On pose $K = |F(0)| + var_F([0,T])$ et $|F(t)| \le |F(0)| + \underbrace{|F(t)-F(0)|}_{\le var_F([0,T])} \le K$

$$w_{\varphi'}(\eta) = \max\{|\Phi'(x)-\Phi'(y)|,\ x,y\in[-K,K],\ |x-y|\le\eta\}$$

Comme F et Φ' sont continues, elles le sont uniformément sur $[0,T]$ et $[-K,K]$ donc $\lim\limits_{\eta\downarrow 0} w_F(\eta) = \lim\limits_{\eta\downarrow 0} w_{\varphi'}(0) = 0$

On procède par approximation. On pose $[t]_n = 2^{-n}\lfloor 2^n t\rfloor \xrightarrow[n\to\infty]{} t$

$$\Phi(F([t]_n)) - \Phi(F(0)) = \sum_{0\le k< 2^n[t]_n} \left(\Phi\left(F\left(\tfrac{k+1}{2^n}\right)\right) - \Phi\left(F\left(\tfrac{k}{2^n}\right)\right)\right)$$

Par accroissements finis il existe θ entre $F\left(\frac{k+1}{2^n}\right)$ et $F\left(\frac{k}{2^n}\right)$ tel que

$$\Phi\left(F\left(\tfrac{k+1}{2^n}\right)\right) - \Phi\left(F\left(\tfrac{k}{2^n}\right)\right) = \Phi'(\theta)\left(F\left(\tfrac{k+1}{2^n}\right) - F\left(\tfrac{k}{2^n}\right)\right) = \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} \Phi'(\theta)\,dF(s) =$$

$$= \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} \Phi'(F(s))\,dF(s) + \int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} \underbrace{(\Phi'(\theta)-\Phi'(F(s)))}\,dF(s)$$

$$|\dots| \le w_{\varphi'}\left(\left|F\left(\tfrac{k+1}{2^n}\right)-F\left(\tfrac{k}{2^n}\right)\right|\right) \le w_{\varphi'}(w_F(2^{-n}))$$

$$\left|\Phi\left(F\left(\tfrac{k+1}{2^n}\right)\right) - \Phi\left(F\left(\tfrac{k}{2^n}\right)\right) - \int_{]k2^{-n},(k+1)2^{-n}]} \Phi'(F(s))\,dF(s)\right| \le w_{\varphi'}(w_F(2^{-n}))\int_{k2^{-n}}^{(k+1)2^{-n}} |dF(s)|$$

$$\left|\Phi(F([t]_n)) - \Phi(F(0)) - \int_{]0,[t]_n]}\Phi'(F(s))\,dF(s)\right| \le w_{\varphi'}(w_F(2^{-n}))\cdot\int_{]0,[t]_n]}|dF|$$

De même,

$$\left|\Phi(F(t)) - \Phi([t]_n) - \int_{][t]_n,t]}\Phi'(F(s))\,dF(s)\right| \le w_{\varphi'}(w_F(2^{-n}))\cdot\int_{][t]_n,t]}|dF|$$

et donc $\Phi(F(t)) = \Phi(F(0)) + \int_{]0,t]}\Phi'(F(s))\,dF(s)$ si F est continue VB, $t\in[0,T]$.

Cas 2 On suppose que $\mathcal{T}_F = \{s \in [0,T] : \Delta F(s) \neq 0\}$ est un ensemble fini

On fixe $t \in]0,T]$ et on énumère $\mathcal{T}_F \cap [0,t] = \{0 < t_1 < \dots < t_{n-1}\}$ $t_n = t$

Pour éviter les trivialités on suppose que $n \geq 2$

$$F(t) = S_1 + S_2 \text{ où}$$

$$S_1 = \Phi(F(t_1^-)) + (\Phi(F(t_2^-)) - \Phi(F(t_1))) + \dots + (\Phi(F(t_n^-)) - \Phi(F(t_{n-1})))$$

$$S_2 = \frac{\Phi(F(t_1)) - \Phi(F(t_1^-))}{\Delta F(t_1)} \cdot \Delta F(t_1) + \dots + \underbrace{\frac{\Phi(F(t_n)) - \Phi(F(t_n^-))}{\Delta F(t_n)} \cdot \Delta F(t_n)}_{(=0 \text{ si } \Delta F(t_n) = 0)}$$

Sur $[t_i, t_{i+1}[$ $\Delta F = 0$ $\rightarrow$ F est continue là

$\forall r \in [t_i, t_{i+1}[$ on a $\Phi(F(r)) = \Phi(F(t_i)) + \int_{]t_i, r]} \Phi'(F(s))\, dF(s)$

$$\Phi(F(t_{i+1}^-)) - \Phi(F(t_i)) = \int_{]t_i, t_{i+1}[} \Phi'(F(s))\, \underbrace{dF(s)}_{\approx\, dF_d(s)} \quad \text{lorsque } r \uparrow t_n$$

$$S_1 = \Phi(F(0)) + \int_{[0,t]} \Phi'(F(s))\, dF_d(s)$$

$$S_2 = \int_{[0,t]} \frac{\delta \Phi \circ F}{\delta F}(s)\, dF_a(s)$$

On obtient la formule voulue dans les cas 2.

Cas 3 Cas général. On rappelle que $\sum_{s \in \mathcal{T}} |\Delta F(s)| \leq \mathrm{var}_F([0,T]) < \infty$

On pose $S(\eta) = \sum_{s \in \mathcal{T}_F} \mathbb{1}_{[0,\eta]}(|\Delta F(s)|) \cdot |\Delta F(s)|$

Par TCD, $\lim_{\eta \downarrow 0} S(\eta) = 0$

On pose $\mathcal{T}_F(\eta) = \{s \in \mathcal{T}_F : |\Delta F(s)| \leq \eta\}$

$$F^{(\eta)}(t) = F(t) - \sum_{s \in \mathcal{T}_F(\eta) \cap [0,t]} \Delta F(s)$$

F^η est VB càd $\mathcal{T}_{F^\eta} = \{s \in [0,T] : |\Delta F(s)| > \eta\}$

$$\mathrm{Card}\, \mathcal{T}_{F^\eta} \leq \frac{\mathrm{var}_F([0,T])}{\eta} < \infty$$

Le cas 2 s'applique et on obtient $\Phi(F^\eta(t)) = \Phi(F(0)) + \int_{[0,t]} \Phi'(F^\eta(s))\, dF_d^\eta(s) +$

$$+ \int_{[0,t]} \frac{\delta \Phi \circ F^\eta}{\delta F^\eta}(s)\, dF_a^\eta(s)$$

Remarques: 1) $F_d = F_d^\eta$

2) $dF_a^\eta(s) = \mathbb{1}_{\mathcal{J}_F \setminus \mathcal{J}_F(\eta)}(s)\, dF_a(s)$

$$\varphi(F^\eta(t)) = \varphi(F(0)) + \int_{[0,t[} \varphi'(F^\eta(s))\,dF_d(s) + \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{]\eta,\infty[}(|\Delta F(s)|) \frac{\delta \varphi \circ F^\eta}{\delta F^\eta} dF_a(s)$$

$$|F^\eta(t) - F(t)| \leq \sum_{s \in \mathcal{J}_F} |\Delta F(s)| \cdot \mathbb{1}_{\{|\Delta F(s)| \leq \eta\}} = S(\eta) \to 0$$

$$\|F^\eta - F\|_\infty \leq S(\eta)$$

$$\left| \int_{[0,t]} \varphi'(F^\eta(s))\,dF_d(s) - \int_{[0,t]} \varphi'(F(s))\,dF_d(s) \right| \leq w_{\varphi'}(S(\eta)) \int_{[0,t]} |dF_a|(s) \leq C w_{\varphi'}(S(\eta)) \underset{\eta \downarrow 0}{\longrightarrow} 0$$

$$\frac{\delta \varphi \circ F^\eta}{\delta F^\eta}(s) - \frac{\delta \varphi \circ F}{\delta F}(s) = \begin{cases} \underbrace{\dfrac{\varphi(F^\eta(s)) - \varphi(F^\eta(s-))}{\Delta F^\eta(s)} - \dfrac{\varphi(F(s)) - \varphi(F(s-))}{\Delta F(s)}}_{A(s,\eta)} \\ 0 \quad \text{si} \quad |\Delta F(s)| < 0 \end{cases}$$

On pose $h(s) = \Delta F(s)$

$$\frac{\varphi(x+h) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{|h|} \int_0^{|h|} \varphi'(x + \varepsilon y)\,dy$$

ε : signe

$$A(s,\eta) = \frac{1}{|h|} \int_0^{|h|} \underbrace{\left(\varphi'(F^\eta(s-) + \varepsilon y) - \varphi'(F(s-) + \varepsilon y)\right)}_{\leq w_{\varphi'}(|F^\eta(s-) - F(s-)|) \leq w_{\varphi'}(S(\eta)) \to 0} dy$$

$$|A(s,\eta)| \leq w_{\varphi'}(S(\eta)) \to 0$$

$$\left| \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{]\eta,\infty[}(|\Delta F(s)|) \frac{\delta \varphi \circ F^\eta}{\delta F^\eta}(s)\,dF_a(s) - \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{]\eta,\infty[}(|\Delta F(s)|) \frac{\delta \varphi \circ F}{\delta F}(s)\,dF_a(s) \right| \leq$$

$$\leq w_{\varphi'}(S(\eta)) \int_{[0,t]} |dF_a|(s) \leq C w_{\varphi'}(S(\eta))$$

Si $\Delta F(s) = 0$, $\quad \left| \dfrac{\delta \varphi \circ F}{\delta F}(s) \right| \leq \max\limits_{[-K,K]} |\varphi'|$

Si $\Delta F(s) \neq 0$, $\quad \dfrac{\delta \varphi \circ F}{\delta F}(s) = \dfrac{1}{|\Delta F(s)|} \displaystyle\int_0^{|\Delta F(s)|} \varphi'(F(s-) + \varepsilon y)\,dy$

$$|\cdots| \leq \max_{[-K,K]} |\Phi'|$$

$$\forall s \in [0,T], \quad \left| \frac{\delta \Phi \circ F}{\delta F}(s) \right| \leq \max_{[-K,K]} |\Phi'|$$

Par cvg dominée on a

$$\lim_{\eta \downarrow 0} \int_{[0,t]} \mathbb{1}_{]\eta,\infty[}(|\Delta F(s)|) \frac{\delta \Phi \circ F}{\delta F}(s) \, dF_a(s) = \int_{[0,t]} \frac{\delta \Phi \circ F}{\delta F}(s) \, dF_a(s)$$

$\square$

I.3.6. La formule de Doleans-Dade dans le cas déterministe

$$dX(s) = X(s-) u(s) \, dF(s)$$

Inconnue est $X(\cdot)$ càd VB

Données $F(\cdot)$ càd VB et $u \in \mathcal{L}^1(|dF|)$

Supposons que $F(t) = \int_{[0,t]} F'(s) \, ds$, F est Lebesgue-p.p. dérivable

$$F(t) = \int_{[0,t]} (F'(s))^+ ds - \int_{[0,t]} (F'(s))^- ds \quad F \text{ est continue}$$

On peut resoudre $X'(s) = X(s-) u(s) F'(s)$

Solution $X(s) = X(0) \exp\left\{ \int_{[0,t]} u(s) F'(s) \, ds \right\}$

Théorème (de Dolean-Dade VB déterministe)

Soit $F : [0,T] \to \mathbb{R}$ càd VB. Soit $u \in \mathcal{L}^1(|dF|)$. On suppose que

$$\inf_{s \in [0,T]} \{ u(s) \Delta F(s) \} > -1.$$

Alors pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$, il existe une unique solution $X : [0,T] \to \mathbb{R}^+$ càd VB t.q. $X(t) = x_0 + \int_{[0,t]} X(s-) u(s) \, dF(s)$

De plus, X s'exprime explicitement

$$X(t) = x_0 \cdot \exp\left\{ \int_{[0,t]} u(s) \, dF_d(s) \right\} \prod_{s \in \mathcal{T}_F \cap [0,t]} (1 + u(s) \Delta F(s))$$

Pour le produit, il est sous-entendu que $\sum_{s\in\mathcal{T}_F}|\log(1+u(s)\Delta F(s))|<\infty$

<u>Preuve</u> On pose $K(x)=\begin{cases}\frac{\log(1+x)}{x} & \text{si } x>-1 \text{ et } x\neq 0\\ 1 & \text{si } x=0\end{cases}$

K est $C^\infty(]-1,\infty[)$

$\eta>0$. Si $x>\eta-1$ $\quad K(x)=\frac{1}{x}\int_0^x\frac{dy}{1+y}$, $\quad K(x)\overset{\exists\theta \text{ par thm d'accroissements finis}}{=}\frac{1}{1+\theta}$, $|K(x)|\leq\frac{1}{\eta}$

On pose $\eta=\inf_{s\in\mathcal{T}_F}(1+u(s)\Delta F(s))>0$ $\quad\forall s\in[0,T]$ $\quad u(s)\Delta F(s)\geq\eta-1$

Donc $|K(u(s)\Delta F(s))|\leq\frac{1}{\eta}$

$$\int_{[0,T]}|u(s)K(u(s)\Delta F(s))|\cdot|dF|(s)\leq\frac{1}{\eta}\int|u(s)|\cdot|dF|(s)<\infty$$

$s\in[0,T]\mapsto u(s)K(u(s)\Delta F(s))$ est dans $\mathcal{L}^1(|dF|)$

On peut définir une fonction càd VB en posant

$$\forall t\in[0,T],\ V(t)=\int_{[0,t]}u(s)K(u(s)\Delta F(s))\,dF(s)$$

On sait que $\mathcal{T}_V\subset\mathcal{T}_F$

Si $\Delta F(s)=0$ $\quad K(u(s)\Delta F(s))=1$

$$V(t)=\int_{[0,t]}u(s)\,dF_d(s)+\int_{[0,t]}u(s)K(u(s)\Delta F(s))\,dF_a(s)=\int_{[0,t]}u(s)\,dF_d(s)+\sum_{s\in\mathcal{T}_F\cap[0,t]}u(s)K(u(s)\Delta F(s))\Delta F(s)=$$

$$=\{xK(x)=\log(1+x)\}=\int_{[0,t]}u(s)\,dF_d(s)+\sum_{s\in\mathcal{T}_F\cap[0,t]}\log(1+u(s)\Delta F(s))$$

On observe que $\Delta V(s)=\log(1+u(s)\Delta F(s))$ $\forall s\in[0,T]$

On pose $X(t)=x_0e^{V(t)}$ et on veut vérifier que X est solution de notre équation à l'aide de la formule de type Itô appliquée à $\Phi(x)=x_0\cdot e^x$

$$X(t)=x_0+\int_{[0,t]}\frac{\delta\Phi\circ V}{\delta V}(s)\,dV(s)$$

$$dV(s)=u(s)K(u(s)\Delta F(s))dF(s)$$

$$X(t)=x_0+\int_{[0,t]}\frac{\delta\Phi\circ V}{\delta V}(s)u(s)K(u(s)\Delta F(s))\,dF(s)=$$

$$= x_0 + \underbrace{\int_{[0,t]} \frac{\delta \Phi\circ V}{\delta V}(s)\, u(s)\, dF_d(s)}_{(I)} + \underbrace{\int_{[0,t]} \frac{\delta \Phi\circ V}{\delta V}(s)\, u(s)\, K(u(s)\Delta F(s))\, dF_a(s)}_{(II)}$$

Si $\Delta F(s) = 0$, $\Delta V(s) = 0$ et $\frac{\delta \Phi\circ V}{\delta V}(s) = \Phi'(V(s)) = x_0 e^{V(s)} = X(s) = X(s-)$

$$(I) = \int_{[0,t]} X(s-)\, u(s)\, dF_d(s)$$

$$\Phi(V(s)) - \Phi(V(s-)) = x_0 e^{V(s)} - x_0 e^{V(s-)} = x_0 e^{V(s-)}(e^{\Delta V(s)} - 1) = X(s-)(\underbrace{e^{\Delta V(s)} - 1}_{u(s)\Delta F(s)})$$

$\Delta V(s) \nearrow$

$$\Phi(V(s)) - \Phi(V(s-)) = X(s-)\,[u(s)\Delta F(s)]$$

$$\frac{\delta \Phi\circ V}{\delta V}(s) \cdot u(s)\, K(u(s)\Delta F(s)) = \frac{X(s-)\, u(s)\, \cancel{\Delta F(s)}}{\cancel{\Delta V(s)}} \quad \frac{\cancel{u(s)}\, \cancel{\ln(1+u(s)\Delta F(s))}}{\cancel{u(s)}\, \cancel{\Delta F(s)}} = X(s-)\, u(s)$$

$$(II) = \int_{[0,t]} X(s-)\, u(s)\, dF_a(s)$$

$$(I) + (II) = X(t) = x_0 + \int_{[0,t]} X(s-)\, u(s)\, \underbrace{(dF_d(s) + dF_a(s))}_{dF(s)}$$ $\to$ on a prouvé l'existence.

<u>Unicité</u> On se donne deux solutions $X(t)$ et $X^*(t)$

$$X(t) - X^*(t) = \int_{[0,t]} (X(s-) - X^*(s-))\, u(s)\, dF(s) \to |X(t) - X^*(t)| \leq M(t) \underbrace{\int_{[0,t]} |u(s)|\, dF(s)}_{\beta(t)}$$

$\nearrow \sup_{s\in[0,t]} |X(s) - X^*(s-)|$

$$\tilde{M}(t) = \sup_{s\in[0,t]} |X(s) - X^*(s-)|$$

$$M(t) = \sup_{s\in[0,t[} |X(s) - X^*(s)| \leq \tilde{M}(t)$$

$$\forall t \in [0,T] \quad M(t) \leq \tilde{M}(T)\, \beta(t-) \quad \text{ou} \quad \tilde{M}(t) \leq \tilde{M}(T)\, \beta(t)$$

$$|X(t) - X^*(t)| \leq \int_{[0,t]} \tilde{M}(T)\beta(s-) \cdot |u(s)|\, |dF|(s) \leq \tilde{M}(T) \int_{[0,t]} \beta(s-) \underbrace{|u(s)| \cdot |dF|(s)}_{d\beta(s)}$$

$$|X(t) - X^*(t)| \overset{\text{exo}}{\leq} \tilde{M}(T) \cdot \frac{1}{2} \beta(t)^2$$

Par recurrence on montre que $|X(t) - X^*(t)| \leq \tilde{M}(T) \cdot \frac{1}{n!} \beta(t)^n$

$$\sup_{t\in[0,T]} |X(t) - X^*(t)| \leq \tilde{M}(T) \frac{\beta(T)^n}{n!} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\square$

Chapitre II. Nuages de Poisson

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilité

II.1. Le processus sur $\mathbb{R}_+$ homogène

La phrase "on choisit un réel uniformément au hasard" n'a pas de sens. Si c'était possible $X : \Omega \to \mathbb{R}$ de la loi "uniforme"

$$\mathbb{P}(X \in [n, n+1[) = \mathbb{P}(X \in [0,1[) = a$$

Or $$1 = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \underbrace{\mathbb{P}(X \in [n, n+1[)}_{a}$$

En revanche on peut donner un sens à une suite de points uniformément répartis sur $\mathbb{R}$ et totalement chaotique.

II.1.a. Rappel sur la loi de Poisson et d'autres lois annexes

Loi de Poisson $X : \Omega \to \mathbb{N}$ de paramètre $\theta > 0$ $\mathbb{P}(X=k) = \frac{\theta^k}{k!} e^{-\theta}$

$$\mathbb{E}[r^X] = \exp\{-\theta(1-r)\}, \quad \mathbb{E}[X] = \theta, \quad \mathbb{V}\mathrm{ar}[X] = \theta$$

On étend cette définition en disant X suit une loi de Poisson de paramètre $\theta = +\infty$ (resp. $\theta = 0$) si $\mathbb{P}$-p.s. $X = \infty$ ($\mathbb{P}$-p.s. $X = 0$)

Lemme Soit $X_n : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $n \in \mathbb{N}$, des variables indépendants suivant des lois de Poisson généralisées. Le paramètre de X_n est noté $\theta_n \in [0, \infty]$

On pose $X = \sum_{n \in \mathbb{N}} X_n : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. X suit une loi de Poisson généralisée de paramètre $\theta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \theta_n$ **Preuve** Exo

Théorème (approximation "binomiale"- Poisson)

Soient $(\xi_{n,k})_{1 \le k \le n}$, un tableau de variables de Bernoulli à n fixé $\xi_{n,1}, \dots, \xi_{n,n}$ sont indépendants

$$\mathbb{P}(\xi_{n,k} = 1) = p_{n,k} = 1 - \mathbb{P}(\xi_{n,k} = 0)$$

On pose $X_n = \xi_{n,1} + \dots + \xi_{n,k}$

$\theta_n = \mathbb{E}[X_n] = p_{n,1} + \dots + p_{n,n}$

Alors $\forall \theta \in]0,\infty[$ $\quad \sum_{k=0}^{\infty} \left|\mathbb{P}(X_n=k) - \frac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}\right| \le 2|\theta-\theta_n| + 2\sum_{k=1}^{n} p_{n,k}^2$

En particulier, si $\theta_n \to \theta$ et $\max_k p_{n,k} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ alors $X_n \xRightarrow[n\to\infty]{} \mathrm{Pois}(\theta)$

Preuve Exo de poly

Lois exponentielles

Déf $X:\Omega\to\mathbb{R}_+$ suit une loi exp. de paramètre $c\in]0,\infty[$ si

$$\mathbb{E}[f(X)] = \int_0^\infty f(t)\, c e^{-ct}\, dt \quad f \text{ mes. bornée}$$

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda X}] = \frac{c}{c+\lambda}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{c}$$

Proposition Soient $\xi_1,\dots,\xi_n:\Omega\to\mathbb{R}_+$ n variables exponentielles de m̂ paramètre c. Alors $X=\xi_1+\dots+\xi_n$ suit une loi d'Erlang(n,c) c'est-à-dire $\mathbb{E}[f(X)] = \int_0^\infty f(t)\frac{c^n t^{n-1} e^{-ct}}{(n-1)!}dt$

Statistique d'ordre

On fixe $t\in]0,\infty[$ et $U_n:\Omega\to[0,t]$, $n\in\mathbb{N}$ des variables uniformes indépendants $\mathbb{P}(U_n\in B) = \frac{\ell(B\cap[0,t])}{t}$ ← mesure de Lebesgue

$\Delta = \{(x,x),\ x\in[0,t]\}$

$\mathbb{P}$-p.s. dès que $k\neq n$ $U_k\neq U_n$ $\left(\mathbb{P}(U_k=U_n) \le \frac{\ell^{\otimes 2}(\Delta)}{t^2} = 0\right)$

On pose $\Omega_0 = \{\omega\in\Omega\ \forall k\neq n\ U_n(\omega)\neq U_k(\omega)\}\in\mathcal{F}$, $\mathbb{P}(\Omega_0)=1$

$\forall n\in\mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ il existe une unique permutation

$\Sigma^n:\Omega\to\mathfrak{S}_n = \{$bijections de $\{1,\dots,n\}\to\{1,\dots,n\}\}$

t.q. $U_{\Sigma_1^n(\omega)}(\omega) < \dots < U_{\Sigma_n^n(\omega)}(\omega)$

Si $\omega\in\Omega\setminus\Omega_0$ on choisit $\Sigma_n = \mathrm{Id}$

On pose $U_k^{(n)} = U_{\Sigma_k^n}$ = le $k^{\text{ème}}$ plus grand terme dans l'ensemble $\{U_1,\dots,U_n\}$

Lemme ① Σ_n et $(U_k^{(n)})_{1\le k\le n}$ sont indép.

② $\mathbb{P}(\Sigma^n=\sigma) = \frac{1}{n!}$, $\sigma\in\mathfrak{S}_n$

③ $\mathbb{E}[F(U_1^{(n)},\dots,U_n^{(n)})] = \frac{n!}{t^n}\iint_{\{0\le s_1\le\dots\le s_n\}} F(s_1,\dots,s_n)\,ds_1\dots ds_n$

II.1.6. Un modèle heuristique

But Construire sur $\mathbb{R}_+$, un nuage de points Π (un ensemble dénombrable infini) totalement chaotique et uniformément réparti.

On choisit un pas $h>0$ (moralement $h \ll 1$)

On discrétise $\mathbb{R}_+$: $I_n(h) = [nh, (n+1)h[$

$$\xi_{n,h} = \begin{cases} 1 & \text{si } \Pi \cap I_n(h) \neq \emptyset \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Pi_h = \{nh,\ n \in \mathbb{N},\ \xi_{n,h} = 1\}$$

Heuristique, comme on pense que Π a des points bien séparés

$\mathrm{card}(\Pi \cap I_n(h)) = 0$ ou 1 avec proba ≈ 1

$\mathrm{card}(\Pi_h \cap [a,b]) \simeq \mathrm{card}(\Pi \cap [a,b])$ avec proba ≈ 1

Totalement chaotique $\Rightarrow$ $(\xi_{n,h})_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendants

Uniformément réparti $\Rightarrow$ $\xi_{n,h}$ sont des Bernoulli de $\hat{m}$ paramètre $p(h) \in]0,1[$

$$\mathbb{E}[\mathrm{card}(\Pi \cap [0,1])] = \theta \approx \mathbb{E}[\mathrm{card}(\Pi_h \cap [0,1])] \simeq \mathbb{E}\Big[\sum_{0 \leq n \leq \frac{1}{h}} \xi_{n,h}\Big] \approx \frac{1}{h} \cdot p(h)$$

$$p(h) \sim \theta \cdot h$$

Binomiale $\rightarrow$ Poisson

① $\mathrm{card}(\Pi \cap [a,b]) = \sum_{\frac{a}{h} \leq n \leq \frac{b}{h}} \xi_{n,h} \simeq \mathrm{Pois}(\theta \cdot (b-a))$

② $\mathrm{card}(\Pi \cap]a_i, b_i])$ sont des variables indépendantes où $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 < \dots$

On note $T_k(h)$ le "numéro" du $k^{\text{ème}}$ intervalle ayant un point de Π_h

$$T_1(h) = \inf\{n \in \mathbb{N} : \xi_{n,h} = 1\}$$

$$\dots$$

$$T_{k+1}(h) = \inf\{n > T_k(h) : \xi_{n,h} = 1\}$$

$T_1(h), T_2(h) - T_1(h), \dots, T_{k+1}(h) - T_k(h), \dots$ sont indépendants et de loi géométrique $\mathbb{P}(T_{k+1}(h)-T_k(h)\geq m) = (1-p(h))^m$

$$\Pi \approx \Pi_h = \{h\cdot T_k(h) : k\in\mathbb{N}^*\}$$

$$\mathbb{P}(h(T_{k+1}(h)-T_k(h))>t) \simeq (1-\vartheta h)^{\frac{t}{h}} \xrightarrow[h\to 0]{} e^{-\vartheta t}$$

$(hT_k(h))_{k\in\mathbb{N}^*} \to (T_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ où $T_k = \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_k$ où $(\mathcal{E}_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}xp(\vartheta)$. $\Pi = \{T_k,\ k\in\mathbb{N}^*\}$

II. 1. c. Construction du nuage homogène sur $\mathbb{R}_+$

Déf On se donne une suite i.i.d. $(\mathcal{E}_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de v.a. $\mathcal{E}xp(\vartheta)$, $\vartheta\in]0,\infty[$.

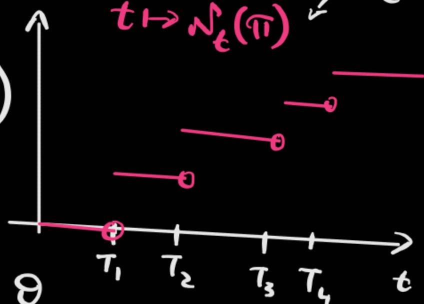
On pose $T_n = \sum_{k=1}^n \mathcal{E}_k$ et $\Pi = \{T_n : n\in\mathbb{N}^*\}$

On pose pour tout $t\in\mathbb{R}_+$ $N_t(\Pi) = \mathrm{Card}(\Pi\cap[0,t])$

$\mathbb{P}$-p.s. $N_t(\Pi) = \sum_{n\in\mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{[0,t]}(T_n)$, $t\in\mathbb{R}_+$

$(N_t(\Pi))_{t\in\mathbb{R}_+}$ est **le processus de Poisson** d'intensité ϑ.

càd $t\mapsto N_t(\Pi)$



$\Pi = \{t\in\mathbb{R}_+ : \Delta N_t = 1\}$

Théorème Même notation

(1) $\forall s<t$ $N_t(\Pi)-N_s(\Pi)$ suit une loi $\mathrm{Pois}(\vartheta(t-s))$

(2) $\forall t_1<t_2<\dots<t_p$ $N_{t_1}(\Pi), N_{t_2}(\Pi)-N_{t_1}(\Pi), \dots, N_{t_p}(\Pi)-N_{t_{p-1}}(\Pi)$ sont des variables indépendantes.

(3) $\forall t>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$ $\Pi\cap[0,t]$ sous $\mathbb{P}(\cdot\,|N_t(\Pi)=n) \overset{\text{loi}}{=} \{U_1,\dots,U_n\}$ où $U_1,\dots,U_n$ i.i.d. $\mathcal{U}([0,t])$

(4) $\forall p\in\mathbb{N}^*$ $A_1,\dots,A_p\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$, 2-à-2 disjoints. $\mathrm{Card}(\Pi\cap A_1),\dots,\mathrm{Card}(\Pi\cap A_p)$ sont des variables indépendantes et $\mathrm{Card}(\Pi\cap A_k) \overset{\text{loi}}{=} \mathrm{Pois}(\vartheta\cdot \ell(A_k))$

mesure de Lebesgue

Notation $N_A(\Pi) := \mathrm{Card}(\Pi\cap A)$

Preuve 4 $\Rightarrow$ 1 et 2

Plan de preuve on montre que

(a) $N_t(\pi) \overset{loi}{=} \mathrm{Pois}(\theta t)$

(b) On montre (3) qui implique (4).

$$\mathbb{P}(N_t(\pi)=n) = \mathbb{P}(T_n \leq t < T_n + \mathcal{E}_{n+1}) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{T_n \leq t < T_n+\mathcal{E}_n\}} \middle| T_n\right]\right] =$$

$$= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{T_n\leq t\}} \cdot \underbrace{e^{-\theta(t-T_n)}}_{\mathbb{P}(\mathcal{E}_{n+1}>t-T_n \mid T_n)}\Big] = e^{-\theta t}\int_0^t ds\, \frac{\theta^n s^{n-1}}{(n-1)!} \cancel{e^{-\theta s}} \cdot \cancel{e^{\theta s}} = \frac{(\theta t)^n}{n!} e^{-\theta t}$$

<u>Montrons (3)</u> On fixe $t>0$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On se donne une fonction $F:\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ mesurable bornée. On calcule

$$a = \mathbb{E}\left[F(T_1,\dots,T_n)\mathbb{1}_{\{N_t(\pi)=n\}}\right] = \mathbb{E}\left[F(T_1,\dots,T_n)\mathbb{1}_{\{T_n\leq t\}}\mathbb{1}_{\{\mathcal{E}_{n+1}>t-T_n\}}\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[F(T_1,\dots,T_n)\mathbb{1}_{\{T_n\leq t\}} e^{\theta T_n}\right] e^{-\theta t} = e^{-\theta t}\int_0^\infty\!\!\cdots\!\int_0^\infty ds_1\dots ds_n\, \theta^n \cancel{e^{-\theta(s_1+\dots+s_n)}} F(s_1, s_1+s_2,\dots,s_1+\dots+s_n)\cdot$$

$$\cdot \mathbb{1}_{\{s_1+\dots+s_n\leq t\}} \cancel{e^{\theta(s_1+\dots+s_n)}} =$$

$$= \theta^n e^{-\theta t}\int_0^\infty\!\!\cdots\!\int_0^\infty ds_1\dots ds_n\, F(\underbrace{s_1}_{t_1}, \underbrace{s_1+s_2}_{t_2},\dots,\underbrace{s_1+\dots+s_n}_{t_n})\mathbb{1}_{\{s_1+\dots+s_n\leq t\}} =$$

$$= \theta^n e^{-\theta t}\int\!\!\cdots\!\int_{0\leq t_1\leq\dots\leq t_n\leq t} dt_1\dots dt_n\, F(t_1,\dots,t_n) = \frac{\theta^n t^n}{n!} e^{-\theta t}\, \mathbb{E}\left[F(U_1^{(n)},\dots,U_n^{(n)})\right]$$

$$\mathbb{E}\left[F(T_1,\dots,T_n) \mid T_n = n\right] = \mathbb{E}\left[F(U_1^{(n)},\dots,U_n^{(n)})\right]$$

Donc $\pi\cap[0,t]$ sous $\mathbb{P}(\cdot \mid N_t(\pi))$ égale en loi à $\{U_1,\dots,U_n\}$

<u>Montrons que (3) ⇒ (4)</u> On se donne $A_1,\dots,A_p\in\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 2-à-2 disjoints

On fixe $t\in\,]0,\infty[$ et dans un premier temps on montre (4) sous l'hypothèse que $A_k\subset[0,t]$, $1\leq k\leq p$.

On pose $A_{p+1} = [0,t]\setminus(A_1\cup\dots\cup A_p)$

$A_1, A_2,\dots, A_{p+1}$ est une partition de $[0,t]$

On pose $\pi_n = \{U_1,\dots,U_n\}$ $\quad N_{A_k}(\pi_n) = \mathrm{Card}(\pi_n\cap A_k)$

On veut calculer la loi du vecteur $(N_{A_1}(\pi_n),\dots,N_{A_p}(\pi_n))$ via sa fonction caractéristique $\underline{u} = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$

On calcule $\mathcal{C}_n(\underline{u}) = \mathbb{E}\left[e^{iu_1 N_{A_1}(\pi_n) + \dots + iu_p N_{A_p}(\pi_n)} \right]$

On pose $Z_j = e^{iu_1} \mathbb{1}_{A_1}(U_j) + e^{iu_2} \mathbb{1}_{A_2}(U_j) + \dots + e^{iu_p} \mathbb{1}_{A_p}(U_j) + \mathbb{1}_{A_{p+1}}(U_j)$

$Z_1, \dots, Z_n$ sont i.i.d. de m̂ loi

$$Z_1 \cdot Z_2 \cdot \dots \cdot Z_n = e^{iu_1 N_{A_1}(\tilde{\pi}_n) + \dots + iu_p N_{A_p}(\tilde{\pi}_n)}$$

$$\mathcal{C}_n(\underline{u}) = \mathbb{E}[Z_1 \cdot \dots \cdot Z_n] = \mathbb{E}[Z_1]^n$$

Donc on montre par (3) que

$$\mathbb{E}\left[e^{iu_1 N_{A_1}(\pi) + \dots + iu_p N_p(\pi)} \middle| N_t = n \right] = \mathcal{C}_n(\underline{u}) = \mathbb{E}[Z_1]^n$$

$$\mathbb{E}\left[e^{iu_1 N_{A_1}(\pi) + \dots + iu_p N_p(\pi)} \right] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{P}(N_t(\pi) = n) \mathbb{E}\left[e^{iu_1 N_{A_1}(\pi) + \dots + iu_p N_{A_p}(\pi)} \middle| N_t(\pi) = n \right] =$$

$$= \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\vartheta t)^n}{n!} e^{-\vartheta t} \mathbb{E}[Z_1]^n = \exp\{ -\vartheta t (1 - \mathbb{E}[Z_1]) \}$$

$$\mathbb{E}[Z_1] = e^{iu_1} \mathbb{P}(U_1 \in A_1) + \dots + e^{iu_p} \mathbb{P}(U_1 \in A_p) + \mathbb{P}(U_1 \in A_{p+1})$$

Or $\mathbb{P}(U_1 \in A_{p+1}) = 1 - \sum_{j=1}^{p} \mathbb{P}(U_1 \in A_j)$, $1 - \mathbb{E}[Z_1] = \sum_{j=1}^{p} (1 - e^{iu_j}) \mathbb{P}(U_1 \in A_j)$

$$\mathbb{P}(U_1 \in A_j) = \frac{\ell(A_j)}{t}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{iu_1 N_{A_1}(\pi) + \dots + iu_p N_{A_p}(\pi)} \right] = \exp\left\{ -\vartheta \left((1 - e^{iu_1}) \ell(A_1) + \dots + (1 - e^{iu_p}) \ell(A_p) \right) \right\} =$$

$= \mathbb{E}\left[e^{iu_1 Y_1 + \dots + iu_p Y_p} \right]$ où $Y_j \sim \mathrm{Pois}(\vartheta \ell(A_j))$ et $Y_1, \dots, Y_p$ sont indép.

Donc $(N_{A_1}(\pi), \dots, N_{A_p}(\pi)) \overset{\text{loi}}{=} (Y_1, \dots, Y_p)$ qui est (4) sous l'hypothèse $A_k \subset [0, t]$ $1 \leq k \leq p$.

<u>Cas général</u> $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$ 2-à-2 disjoints.

$(N_{A_1 \cap [0,t]}(\pi), \dots, N_{A_p \cap [0,t]}(\pi))$ Poisson indépendants et

$$N_{A_j \cap [0,t]}(\pi) = \mathrm{Pois}(\vartheta \ell(A_j \cap [0,t]))$$

$N_{A_j \cap [0,t]}(\pi) \uparrow N_{A_j}(\pi)$

$\mathrm{card}(\pi \cap A_j \cap [0,t]) \uparrow \mathrm{card}(\pi \cap A_j)$

(X_n, Y_n) indép. $X_n \to X_\infty$, $Y_n \to Y_\infty$. Alors X_∞ et Y_∞ sont indépendants

$$\mathbb{E}\left[r^{N_{A_j \cap [0,t]}(\pi)}\right] = e^{-\theta \ell(A_j \cap [0,t])(1-r)} \to e^{-\theta \ell(A_j)(1-r)} = \mathbb{E}\left[r^{N_{A_j}(\pi)}\right] \quad \square$$

II.2 Nuages de points Poissonniens

II.2.a Définition

But: définir nuages de points chaotiques sur un espace générale E.
↳ ensemble dénombrable

$(\Omega, \mathcal{F})$ $\qquad \omega \mapsto \mathrm{Machin}(\omega) \in$ Espace de machins

On doit munit cet espace d'une tribu.

Déf Soit E un espace muni d'une tribu $\mathcal{E}$. On note $\$ = \{\pi \subset E : \pi \text{ est dénombrable}\}$

(1) On fixe $A \in \mathcal{E}$ et on note $N_A : \$_E \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$
$\pi \in \$_E \mapsto \mathrm{card}(\pi \cap A)$

N_A est une **fonction de comptage** en A.

(2) On note $\mathcal{S}_E$ la tribu sur $\$_E$ engendrée par les fonctions de comptage ($\mathcal{S}_E$ est la tribu engendrée par les sous-ensembles de nuages de la forme $\{\pi \in \$_E : N_A(\pi) \geq k\}$, $A \in \mathcal{E}$, $k \in \mathbb{N}$.

(3) Soit $(\Omega, \mathcal{F})$, un espace mesurable. Un **nuage aléatoire** $\mathcal{F}$-mesurable est une fonction $\Pi : \Omega \to \$_E$ qui est $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$-mes. c'est à dire que $\forall A \in \mathcal{E}$ $N_A(\pi) : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ est $\mathcal{F}$-mesurable.

Exemple $(\Omega, \mathcal{F})$, un espace mesurable. Soient $X_n : \Omega \to E$, $n \in \mathbb{N}^*$ des v.a. $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-mesurables.

On suppose que $\forall \omega \in \Omega$, $(n \neq m) \to (X_n(\omega) \neq X_m(\omega))$ $\forall n, m \in \mathbb{N}^*$

Soit $M : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, une v.a. $\mathcal{F}$-mesurable

On pose $\Pi = \begin{cases} \emptyset & \text{si } M = 0 \\ \{X_1, \dots, X_n\} & \text{si } M = n \in \mathbb{N}^* \\ \{X_n\}_{n \in \mathbb{N}^*} & \text{si } M = \infty. \end{cases}$

Alors $\Pi : \Omega \to \$_E$ est un nuage $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-mesurable car pour tout A, $N_A(\Pi) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mathbb{1}_{\{M \geq m\}} \cdot \mathbb{1}_{\{X_m \in A\}}$ est $\mathcal{F}$-mesurable.

Lemme Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, un espace de probabilité et soit $\Pi : \Omega \to \$_E$, un nuage de points $(\mathcal{F}, \mathcal{G}_E)$-mesurable. $\forall B \in \mathcal{E}$ on pose $\mu(B) = \mathbb{E}[N_B(\Pi)]$. Alors $\mu : \mathcal{E} \to [0, \infty]$ est une mesure positive appelée l'intensité de M.

Preuve $\mu(\emptyset) = \mathbb{E}[N_\emptyset(\Pi)] = 0$

Soient $A_n \in \mathcal{E}$, $n \in \mathbb{N}$, 2-à-2 disjoints. On pose $A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n$

$$N_A(\Pi) = \mathrm{Card}(A \cap \Pi) = \mathrm{Card}\Big(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\Pi \cap A_n)\Big) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{Card}(\Pi \cap A_n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} N_{A_n}(\Pi)$$

$$\mu(A) = \mathbb{E}[N_A(\Pi)] = \mathbb{E}\Big[\sum_{n \in \mathbb{N}} N_{A_n}(\Pi)\Big] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E}[N_{A_n}(\Pi)] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(A_n).$$ $\square$

Déf (nuages de Poisson) Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité. Soit $\Pi : \Omega \to \$_E$ un nuage aléatoire $(\mathcal{F}, \mathcal{G}_E)$ mesurable. C'est un **nuage de Poisson** si

(a) (Chaos) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ 2-à-2 disjoints $N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)$ sont des variables indépendantes.

(b) (Poisson) $\forall B \in \mathcal{E}$ $N_B(\Pi)$ suit une loi de Poisson généralisée.
(nécessairement de paramètre $\mu(B)$ où μ est l'intensité de Π)

Lemme Soit $\Pi : \Omega \to \$_E$ un nuage de Poisson dont l'intensité est notée μ. Alors μ est diffuse c'est-à-dire que $\mu(\{x\}) = 0$, $x \in E$
(On suppose que les singletons $\{x\} \in \mathcal{E}$, $x \in E$)

Preuve $N_{\{x\}}(\Pi) \overset{loi}{=} \mathrm{Pois}(\mu\{x\})$. Si $\mu(\{x\})>0$

$$\mathbb{P}(N_{\{x\}}(\Pi) \geq 2) = 1 - e^{-\mu(\{x\})} - \frac{\mu(\{x\})}{1!} e^{-\mu(\{x\})}$$

Or $N_{\{x\}}(\Pi) = \mathrm{card}(\Pi \cap \{x\}) \leq 1$ partout sur Ω

Donc $\mu(\{x\}) = 0$ $\square$

Remarque $\forall x \in E$, $\mathbb{P}$-p.s. $N_{\{x\}}(\Pi) = 0$. En revanche $\mathbb{P}$-p.s. $\exists x \in E$ $N_{\{x\}}(\Pi) = 1$.

II.2.6. Lois et indépendance de nuages de points
Théorème de restriction de nuages poissonniens

Sauf mention du contraire tout est défini sur le même espace de proba $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $\Pi : \Omega \to \$_E$ un nuage $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-mes. On le voit comme la famille de variables $(N_A(\Pi))_{A \in \mathcal{E}}$

Déf On note $\mathcal{C}_E \subset \mathcal{S}_E$ la classe des sous-ensembles de nuages sur E de la forme $C = \{\pi \in \$_E : N_{B_1}(\pi) \geq k_1, \dots, N_{B_q}(\pi) \geq k_q\}$ où $q \in \mathbb{N}^*$, $B_1, \dots, B_q \in \mathcal{E}$ et $k_1, \dots, k_q \in \mathbb{N}$.

$\mathcal{C}_E$ contient $\$_E$ et est stable par intersection simple. C'est un π-système et $\sigma(\mathcal{C}_E) = \mathcal{S}_E$.

Lemme (atomisation) Soient $B_1, \dots, B_q \in \mathcal{E}$. Alors il existe $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ 2-à-2 disjoints ($p < 2^q$) tels que B_k est une union de certains A_j.
C'est-à-dire $\forall k \in \{1, \dots, q\}$, $\exists J_k \subset \{1, \dots, p\}$ t.q. $B_k = \bigcup_{j \in J_k} A_j$.

Preuve $B_k^{(1)} = B_k$, $B_k^{(0)} = E \setminus A_k$

Les $A_1, \dots, A_p$ sont les ensembles $\bigcap_{1 \leq k \leq q} B_k^{(\varepsilon_k)}$ où $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_q \in \{0,1\}$ $\square$

Proposition Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P}')$ deux espaces de proba.
Soient $\Pi : \Omega \to \$_E$ et $\Pi' : \Omega' \to \$_E$ deux nuages respectivement $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$- et $(\mathcal{F}', \mathcal{S}_E)$-mesurables. Il y a équivalence entre

(a) Π sous $\mathbb{P}$ $\overset{loi}{=}$ Π' sous $\mathbb{P}'$

(b) $\forall p \in \mathbb{N}^*$, $\forall A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ 2-à-2 disjoints
$(N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi))$ sous $\mathbb{P}$ $\overset{loi}{=}$ $(N_{A_1}(\Pi'), \dots, N_{A_p}(\Pi'))$ sous $\mathbb{P}'$.

Preuve (b) → (a) Soient $B_1, \dots, B_q \in \mathcal{E}$

Par le lemme d'atomisation, il existe $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ 2-à-2 disjoints t.q. $B_k = \bigcup_{j \in I_k} A_j$. $N_{B_k}(\pi) = \sum_{j \in I_k} N_{A_j}(\pi)$, $N_{B_p}(\pi') = \sum_{j \in I_k} N_{A_j}(\pi')$

Matrice $\mathcal{M}$: $\mathcal{M} \cdot (N_{A_j}(\pi))_{1 \leq j \leq p} = (N_{B_k}(\pi))_{1 \leq k \leq p}$

$$\mathcal{M} \cdot (N_{A_j}(\pi'))_{1 \leq j \leq p} = (N_{B_k}(\pi'))_{1 \leq k \leq p}$$

Par (b) on déduit que

$$\underset{\text{sous } \mathbb{P}}{(N_{B_1}(\pi), \dots, N_{B_q}(\pi))} \overset{\text{loi}}{=} \underset{\text{sous } \mathbb{P}'}{(N_{B_1}(\pi'), \dots, N_{B_q}(\pi'))}$$

Soit $C \in \mathcal{C}_E$ de la forme $C = \{\pi \in \$_E : N_{B_1}(\pi) \geq k_1, \dots, N_{B_q}(\pi) \geq k_q\}$

$$\mathbb{P}(\pi \in C) = \mathbb{P}(N_{B_1}(\pi) \geq k_1, \dots, N_{B_q}(\pi) \geq k_q) = \mathbb{P}'(N_{B_1}(\pi') \geq k_1, \dots, N_{B_q}(\pi') \geq k_q) =$$
$$= \mathbb{P}'(\pi \in C).$$

Λ loi de π sous $\mathbb{P}$ → mesure de proba sur $(\$_E, \mathcal{S}_E)$

Λ' loi de π' sous $\mathbb{P}'$ → mesure de proba sur $(\$_E, \mathcal{S}_E)$

telles que $\Lambda(D) = \mathbb{P}(\pi \in D)$, $D \in \mathcal{S}_E$
$\Lambda'(D) = \mathbb{P}'(\pi \in D)$

On a montré que $\forall C \in \mathcal{C}_E \quad \Lambda(C) = \Lambda'(C)$

Par l'unicité du prolongement des mesures de proba

$\forall D \in \sigma(\mathcal{C}_E) = \mathcal{S}_E$ on a $\Lambda(D) = \Lambda'(D)$ c'est-à-dire (a). $\square$

Proposition Un nuage de Poisson est caractérisé en loi par son intensité μ.

Preuve π et π' nuages de Poisson sur E.

Ils sont de m̂ intensité : $\mathbb{E}[N_A(\pi)] = \mathbb{E}[N_A(\pi')] = \mu(A)$, $A \in \mathcal{E}$

$$N_A(\pi) \text{ sous } \mathbb{P} \overset{\text{loi}}{=} \mathrm{Pois}(\mu(A)) \overset{\text{loi}}{=} N_A(\pi') \text{ sous } \mathbb{P}'$$

Soient $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ 2-à-2 disjoints.

$$\underset{\text{sous } \mathbb{P}}{(N_{A_1}(\pi), \dots, N_{A_p}(\pi))} \overset{\text{loi}}{=} \mathrm{Pois}(\mu(A_1)) \otimes \dots \otimes \mathrm{Pois}(\mu(A_p)) = \underset{\text{sous } \mathbb{P}'}{(N_{A_1}(\pi'), \dots, N_{A_p}(\pi'))}$$

Donc Π et Π' satisfont (b) de la proposition $\to$ (a)

Π sous $\mathbb{P} \overset{loi}{=} \Pi'$ sous $\mathbb{P}'$. $\square$

Proposition Soient $\Pi_i : \Omega \to \$_E$, $i \in I$, une famille de nuages aléatoires $(\mathcal{F}, \mathcal{G}_E)$-mesurables. Il y a équivalence entre

(a) Les Π_i, $i \in I$ sont mutuellement indépendant sous $\mathbb{P}$

(b) $\forall p \in \mathbb{N}^*$ $\forall A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$, 2-à-2 disjoints. Les vecteurs aléatoires $(N_{A_k}(\Pi_i))_{1 \leq k \leq p}$, $i \in I$ sont mutuellement indépendents sous $\mathbb{P}$.

Preuve voir poly. (exo)

Théorème de restriction Soit $\Pi : \Omega \to \$_E$ un nuage de Poisson d'intensité μ.

(1) Soient $B_1, B_2 \in \mathcal{E}$ t.q. $B_1 \cap B_2 = \emptyset$. Alors $\Pi \cap B_1$ et $\Pi \cap B_2$ sont deux nuages de Poisson indépendants d'intensités respectives $\mu(\cdot \cap B_1)$ et $\mu(\cdot \cap B_2)$.

(2) Plus généralement, soient $B_i \in \mathcal{E}$, $i \in I$ une famille d'ensembles 2-à-2 disjoints. Alors les nuages $\Pi \cap B_i$, $i \in I$ sont des nuages de Poisson indépendants d'intensités respectives $\mu(\cdot \cap B_i)$

Preuve Soient $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$, 2-à-2 disjoints. On note $\Pi_i = \Pi \cap B_i$

$N_{A_k}(\Pi_i) = \mathrm{Card}(\Pi_i \cap A_k) = \mathrm{Card}(\Pi \cap B_i \cap A_k) = N_{B_i \cap A_k}(\Pi)$ est $\mathcal{F}$-mesurable.

Π_i sont des nuages $(\mathcal{F}, \mathcal{G}_E)$-mesurables. $B_i \cap A_1, \dots, B_i \cap A_p$ sont 2-à-2 disjoints et $N_{B_i \cap A_1}(\Pi), \dots, N_{B_i \cap A_p}(\Pi)$ sont de v.a. de Poisson indépendantes.

Donc Π_i satisfont l'hypothèse de Chaos et de Poisson $\to$ Π_i est donc un nuage de Poisson. $\mathbb{E}[N_{A_k}(\Pi_i)] = \mathbb{E}[N_{B_i \cap A_k}(\Pi)] = \mu(B_i \cap A_k) \to$
$\to$ L'intensité de Π_i est $\mu(B_i \cap \cdot)$

Les ensembles $B_i \cap A_k$, $i \in I$ et $k \in \{1, \dots, p\}$ sont 2-à-2 disjoints
Donc les variables $N_{B_i \cap A_k}(\Pi)$, $i \in I$ $k \in \{1, \dots, p\}$ sont indépendants mutuellement.

$(N_{B_i \cap A_k}(\Pi))_{1 \leq k \leq p} = (N_{A_k}(\Pi_i))_{1 \leq k \leq p}$ $\to$ Donc Π_i, $i \in I$ satisfont le point (b) de la proposition précédente et donc ils sont indépendants.

□

II.3 Propriétés

Hypothèse sur l'espace $(E,\mathcal{E})$. On suppose toujours que l'espace est **séparé** : $\forall x,y \in E$, $x \neq y$ $\exists A,B \in \mathcal{E}$ t.q. $A \cap B = \emptyset$ et $x \in A$ et $y \in B$.

On supposera toujours également que cet espace mesurable est **séparable** $\mathcal{E} = \sigma(A_n, n \in \mathbb{N})$

Si $(E,\mathcal{E})$ est séparable et séparé alors

1) $\forall x \in E$ $\{x\} \in \mathcal{E}$
2) $\Delta = \{(x,x), x \in E\} \in \mathcal{E}^{\otimes 2}$
3) Il existe $C \subset [0,1]$ (pas forcément borélien) et une bijection $\varphi : E \to C$ t.q. φ est $(\mathcal{E}, \mathcal{B}(C))$-mesurable et t.q. sa réciproque $\varphi^{-1} : C \to E$ est également $(\mathcal{B}(C), \mathcal{E})$-mesurable.

Du point de vue de mesurabilité $(E,\mathcal{E})$ est la même chose que $(C, \mathcal{B}(C))$

$\mathcal{B}(C) = \{B \cap C : B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\}$ = tribu engendrée par la topologie usuelle induite sur C. $= \sigma(\mathcal{T}_C)$ où $\mathcal{T}_C = \{O \cap C : O \text{ ouvert}\}$

Conséquence sur les nuages de points

Soit $\Pi : \Omega \to \mathcal{S}_E$, un nuage $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$-mesurable d'intensité μ supposé de masse finie $\mu(E) = \mathbb{E}[\underbrace{N_E(\Pi)}_{\mathrm{card}(\Pi)}] < \infty$

Il existe des fonctions $Y_p : \mathcal{S}_E \to E$ $(\mathcal{S}_E, \mathcal{E})$-mesurable t.q. p.s. $\Pi = \{Y_p(\Pi) : 1 \leq p \leq \mathrm{card}(\Pi)\}$

Explication On envoie Π dans $C\subset[0,1]$ par la bijection φ :
on indexes les points de $\varphi(\Pi)$ en croissant. On obtient des v.a. mesurables et on revient dans E par φ^{-1}.

Dans la suite on ne considérera la plupart du temps que des nuages $\Pi : \Omega \to \$_E$, $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$-mesurable d'intensité σ-finie : il existe une partition $(B_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ de E telle que $\mu(B_p) < \infty$, $p \in \mathbb{N}^*$. Alors $\Pi = \{ Y_p(\Pi\cap B_q) : 1 \leq p \leq N_{B_q}(\Pi), q\in\mathbb{N}^* \}$

Proposition Soient $(E,\mathcal{E})$, $(E',\mathcal{E}')$ espaces mesurables séparables et séparés et $\Pi : \Omega \to \$_E$ et $\Pi' : \Omega \to \$_{E'}$ deux nuages mesurables d'intensités σ-finies μ et μ'.

Alors 1) $\Pi\times\Pi' : \Omega \to \$_{E\times E'}$ où $E\times E'$ est muni de la tribu $\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}'$ est un nuage

2) Si Π et Π' sont indépendants alors l'intensité du $\Pi\times\Pi'$ est $\mu\otimes\mu'$.

Preuve 1) $B\in\mathcal{E}\otimes\mathcal{E}'$ et $N_B(\Pi\times\Pi') = \sum_{p,q,p',q'} \mathbb{1}_{\{N_{B'_{q'}}(\Pi')\geq p'\}} \cdot \mathbb{1}_{\{N_{B_q}(\Pi)\geq p\}} \cdot$

$\cdot\, \mathbb{1}_B \cdot \big(\underbrace{Y_p(\Pi\cap B_q)}_{\text{mesurable}}, Y_{p'}(\Pi'\cap B'_{q'}) \big)$ – mesurable. $\quad B_q : \mu(B_q) < \infty$, $B'_{q'} : \mu'(B'_{q'}) < \infty$

2) $A\in\mathcal{E}$, $A'\in\mathcal{E}'$

$$N_{A\times A'}(\Pi\times\Pi') = N_A(\Pi)\, N_{A'}(\Pi') \qquad \begin{pmatrix} 0\cdot\infty = 0 \\ n\cdot\infty = \infty \end{pmatrix}$$

$$\nu(A\times A') = \mathbb{E}[N_{A\times A'}(\Pi\times\Pi')] = \mathbb{E}[N_A(\Pi)\, N_{A'}(\Pi')] \underset{\text{indép}}{=} \mathbb{E}[N_A(\Pi)]\,\mathbb{E}[N_{A'}(\Pi')] =$$

$$= \mu(A)\mu'(A) = (\mu\otimes\mu')(A\times A')$$

$\mu\otimes\mu'$ est l'unique mesure sur $(E\times E', \mathcal{E}\otimes\mathcal{E}')$ t.q. $\mu\otimes\mu'(A\times A') = \mu(A)\mu'(A')$. Donc $\nu = \mu\otimes\mu'$ $\square$

Proposition Soient Π et $\Pi' : \Omega \to \$_E$ $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$-mes d'intensités σ-finies

μ et μ'. Alors

1) $\Pi \cap \Pi'$ est un nuage $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$-mesurable

2) Si Π et Π' sont indépendants et si μ ou μ' est diffuse alors p.s. $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$

Preuve 1) On écrit les nuages à l'aide des variables $Y_p(\Pi \cap B_q)$ etc

2) $\mu(\{x\}) = 0 \ \forall x \in E$. L'intensité de $\Pi \times \Pi'$ est $\mu \otimes \mu'$

$$N_\Delta(\Pi \times \Pi') = \operatorname{card}(\Pi \times \Pi')$$

$$\mathbb{E}[N_\Delta(\Pi \times \Pi')] = (\mu \otimes \mu')(\Delta) \overset{\text{Fubini}}{=} \int \mu'(dx') \underbrace{\int \mu(dx) \mathbb{1}_\Delta(x, x')}_{\mu(\{x'\}) = 0} = 0$$

$\square$

Théorème de disjonction Soient Π et $\Pi' : \Omega \to \$_E$ deux nuages de Poisson d'intensités σ-finies. Si Π et Π' sont indépendants, alors p.s. $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$.

Théorème de superposition Soient $\Pi_n : \Omega \to \$_E$, $n \in \mathbb{N}$ une suite de nuages de Poisson d'intensités μ_n, $n \in \mathbb{N}$ supposées toutes σ-finies

1) $\Pi = \bigcup_n \Pi_n$ est un nuage aléatoire $(\mathcal{F}, \mathcal{S}_E)$-mesurable (pas forcément poissonnien)

2) On suppose que $\forall n \ \Pi_n \subset \Pi_{n+1}$. Alors Π est un nuage Poissonnien d'intensité $\mu = \lim \uparrow \mu_n$

3) On suppose que $\Pi_n, n \in \mathbb{N}$ sont mutuellement indépendants. Alors Π est un nuage poissonnien d'intensité μ donnée par $\mu(A) = \sum_n \mu_n(A)$, $A \in \mathcal{E}$ et on a $\mathbb{P}$-p.s. $\forall A \in \mathcal{E}$ $N_A(\Pi) = \sum_n N_A(\Pi_n)$

Preuve 1) Exo

2) $A \in \mathcal{E}$ $\quad N_A(\Pi) = \operatorname{card}\left(\bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n \cap A\right) \qquad \Pi_n \cap A \subset \Pi_{n+1} \cap A$

$\exists \Omega_0 \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ $\quad \forall \omega \quad \forall n \quad \Pi_n(\omega) \subset \Pi_{n+1}(\omega)$

et donc $\forall A \in \mathcal{E}$ $\quad \lim_n \operatorname{card}(\Pi_n(\omega) \cap A) = \operatorname{card}(\Pi(\omega) \cap A)$

$\mathbb{P}$ p.s. $\quad \forall A \quad N_A(\Pi) = \lim_n \uparrow N_A(\Pi_n)$

Si $p \geq 2$ et $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ disjoints 2-à-2

$(N_{A_1}(\Pi_n), \dots, N_{A_p}(\Pi_n))$ sont indépend.

$\Downarrow$

$(N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi))$ sont aussi indép.

$$\mathbb{E}[r^{N_A(\Pi)}] \overset{TCD}{=} \lim \mathbb{E}[r^{N_A(\Pi_n)}] = \lim e^{-\mu_n(A)(1-r)} = e^{-\mu(A)(1-r)}$$

$$\mu_n(A) = \mathbb{E}[N_A(\Pi_n)] \xrightarrow{TCM} \mu(A)$$

$N_A(\Pi)$ donc $\sim \mathrm{Pois}(\mu(A))$.

3) $m \neq n \to \Pi_m \cap \Pi_n = \emptyset$. $\exists \Omega_0$ $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ $\forall \omega \in \Omega_0$ $\forall m \neq n$ $\Pi_n(\omega) \cap \Pi_m(\omega) = \emptyset$

Donc $\forall A \in \mathcal{E}$, $N_A(\Pi(\omega)) = \sum_{n \in \mathbb{N}} N_A(\Pi_n(\omega))$ c'est-à-dire p.s.

$\forall A \in \mathcal{E}$ $N_A(\Pi) = \sum_n N_A(\Pi_n)$

$\forall A \in \mathcal{E}$ $\mu(A) = \mathbb{E}[N_A(\Pi)] = \sum_n \mathbb{E}[N_A(\Pi_n)] = \sum \mu_n(A)$

Soient $(A_1, \dots, A_p)$ 2-à-2 disjoints

$(N_{A_1}(\Pi_n), \dots, N_{A_p}(\Pi_n)) = V_n$ sont indép.

p v.a. poissonniennes indép

Donc $(N_{A_j}(\Pi_n))_{n,j}$ sont mutuellement indépendants.

Donc $(N_{A_1}(\Pi_n))_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (N_{A_p}(\Pi_n))_{n \in \mathbb{N}}$ sont de suites mutuellement indép.

Donc $\sum_n N_{A_1}(\Pi_n), \dots, \sum_n N_{A_p}(\Pi_n)$ sont indép. de lois Pois. généralisés

Donc $N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)$ sont des v.a. de Poisson indép. $\square$

Théorème de l'image Soient $(E, \mathcal{E})$ et $(E', \mathcal{E}')$ deux espaces mes. séparables et séparés. Soit $\varphi : E \to E'$ qui est $(\mathcal{E}, \mathcal{E}')$-mesurable. Soit $\Pi : \Omega \to \$_E$ un nuage de Poisson d'intensité μ supposée σ-finie. On pose $\varphi(\Pi) = \Pi' : \Omega \to \$_{E'}$.
On suppose que la mesure image de μ par φ, notée μ' $(\mu'(A') = \mu(\varphi^{-1}(A')))$ est diffuse. Alors Π' est un nuage de Poisson d'intensité μ' et $\mathbb{P}$-p.s. $\forall X, Y \in \Pi$ $(X \neq Y) \Rightarrow (\varphi(X) \neq \varphi(Y))$

Preuve partielle. On se restreint au cas où φ est injective.

Alors $\forall \omega \in \Omega\ \forall A' \in \mathcal{E}'$ $N_{A'}(\pi') = \{x \in \pi'(\omega) : \varphi(x(\omega)) \in A'\} = N_{\varphi^{-1}(A')}(\pi(\omega))$

φ injective !

Soient $A'_1, \dots, A'_p \in \mathcal{E}'$ sont 2-à-2 disjoints.

Donc $(N_{A'_1}(\pi'), \dots, N_{A'_p}(\pi')) = (N_{\varphi^{-1}(A'_1)}(\pi'), \dots, N_{\varphi^{-1}(A'_p)}(\pi'))$ sont des v.a. pois. indép.

Donc π' est de Poisson.

Intensité $\mu'(A') = \mathbb{E}[N_{A'}(\pi')] = \mu(\varphi^{-1}(A'))$

$\square$

Théorème Soit $\pi : \Omega \to \$_E$, un nuage d'intensité μ supposée σ-finie et diffuse. On suppose que

(Chaos) $\forall p \geq 2\ \forall A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ 2-à-2 disjoints $N_{A_1}(\pi), \dots, N_{A_p}(\pi)$ sont des v.a. indép.

Alors π est un nuage de Poisson.

II-4. Constructions

Données

1) $(E, \mathcal{E})$ espace mesurable séparable séparé et une mesure $\mu : \mathcal{E} \to \mathbb{R}_+$ mesure positive finie.

2) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de proba sur lequel sont définis des v.a. $X_n : \Omega \to E$ $(\mathcal{F}, \mathcal{E})$-mesur. supposées indép. de loi $\dfrac{\mu(\cdot)}{\mu(E)}$

3) Soit $M : \Omega \to \mathbb{N}$ $\mathcal{F}$-mesurable suivant la loi de Poisson $\mathrm{Pois}(\mu(E))$ est $M \perp\!\!\!\perp (X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$

Proposition On pose $\pi = \begin{cases} \{X_1, \dots, X_M\} & \text{si } M \geq 1 \\ \emptyset & \text{si } M = 0 \end{cases}$

Alors π est un nuage de Poisson d'intensité μ.

Preuve Soient $p \geq 2$ et $A_1, \dots, A_p \in \mathcal{E}$ 2-à-2 disjoints

On veut calculer $\mathcal{C}(\underline{u}) = \mathbb{E}[e^{iu_1 N_{A_1}(\pi) + \dots + iu_p N_{A_p}(\pi)}]$ $\underline{u} = (u_1, \dots, u_p) \in \mathbb{R}^p$

On pose $A_{p+1} = E \setminus (A_1 \cup \dots \cup A_p)$

On note $Z_n = e^{iu_1} \mathbb{1}_{A_1}(X_n) + \dots + e^{iu_p} \mathbb{1}_{A_p}(X_n) + \mathbb{1}_{A_{p+1}}(X_n)$

$\mathcal{C}$ sont indép. de $\hat{m}$ loi.

$$Z_1 \cdot \ldots \cdot Z_M = \exp\{ iu_1 N_{A_1}(\pi) + \dots + iu_p N_{A_p}(\pi) \}$$

$$\mathcal{C}(\underline{u}) = \mathbb{E}[Z_1 \cdot \ldots \cdot Z_M] = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{P}(M=m)\, \mathbb{E}[Z_1 \cdot \ldots \cdot Z_m] = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mu(E)^m}{m!} e^{-\mu(E)} \mathbb{E}[Z_1]^m =$$

$$= e^{-\mu(E)(1 - \mathbb{E}Z_1)}$$

$$\mathbb{E}[Z_1] = e^{iu_1} \frac{\mu(A_1)}{\mu(E)} + \dots + \frac{\mu(A_{p+1})}{\mu(E)}$$

et en utilisant $\mu(E) = \mu(A_1) + \dots + \mu(A_p) + \mu(A_{p+1})$ on conclut que $\mathcal{C}(\underline{u}) = \exp\{ -\mu(A_1)(1 - e^{iu_1}) - \dots - \mu(A_p)(1 - e^{iu_p}) \} =$

$= \mathbb{E}[e^{iu_1 Y_1 + \dots + iu_p Y_p}]$ où la loi de $(Y_1, \dots, Y_p)$ est $\mathrm{Pois}(\mu(A_1)) \otimes \dots \otimes \mathrm{Pois}(\mu(A_p))$ $\square$

Cas de nuages σ-finis

Soit μ σ-finie. $E = \sqcup B_p$ $\mu(B_p) < \infty$ $X_n^{(p)} \overset{\text{loi}}{\sim} \frac{\mu(\cdot \cap B_p)}{\mu(B_p)}$ $M_p \sim \mathrm{Pois}(\mu(B_p))$

On suppose $X_n^{(p)}, M_p$ sont indép.

On pose $\pi_p = \{ X_n^{(p)},\ 1 \leq n \leq M_p \} \sim \mathrm{Pois}(\mu(\cdot \cap B_p))$

$\pi = \bigcup_p \pi_p \sim \mathrm{Pois}(\mu)$

cas précédent.

Remarque que les π_p sont indép puis on utilise le thm. de superposition.

II.5 Formules de Palm-Mecke et formules exponentielles

Théorème (Palm-Mecke) Soit $\pi : \Omega \to \$_E$ un image de Poisson d'intensité σ-finie μ. Soit $F : E \times \$_E \to [0, \infty]$, $\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}_E$-mesurable

Alors $Z = \sum_{X \in \pi} F(X, \pi \backslash \{X\}) : \Omega \to [0, \infty]$ est $\mathcal{F}$-mesurable et

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{X \in \pi} F(X, \pi \backslash \{X\})\Big] = \int_E \mu(dx)\, \mathbb{E}[F(x, \pi)]$$

On a aussi un énoncé où $F : E \times \$_E \to \mathbb{C}$ $\mathcal{E} \otimes \mathcal{S}_E$-mes. sous l'hypothèse que $\int \mu(dx)\, \mathbb{E}[|F(x, \pi)|] < \infty$

Preuve On peut se ramener au cas où $\mu(E) < \infty$ et au cas où

$\Pi = \{X_1, \dots, X_M\}$ comme dans la construction précédente. Z mesurable

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}[Z \mathbb{1}_{\{M=m\}}]$$

$$u_m = \mathbb{E}[Z \mathbb{1}_{\{M=m\}}] = \mathbb{E}\Big[\sum_{k=1}^{m} F(X_k, \{X_1, \dots, X_m\} \setminus \{X_k\}) \mathbb{1}_{\{M=m\}}\Big] =$$

$$= \mathbb{P}(M=m)\Big(\sum_{k=1}^{m} \underbrace{\mathbb{E}[F(X_k, \dots)]}_{v_{m,k}}\Big)$$

$\forall \sigma$ permutation $(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(m)}) \overset{\text{loi}}{=} (X_1, \dots, X_m) \to v_{m,k} = v_{m,m} =$ $\forall k$

$$= \mathbb{E}[F(X_m, \{X_1, \dots, X_{m-1}\})] = \int \frac{\mu(dx)}{\mu(E)} \mathbb{E}[F(x, \{X_1, \dots, X_{m-1}\})]$$

$$u_m = e^{-\mu(E)} \frac{\mu(E)^m}{m!} \cdot m \cdot \int \frac{\mu(dx)}{\mu(E)} \mathbb{E}[F(x, \{X_1, \dots, X_{m-1}\})] =$$

$$= \int \underbrace{e^{-\mu(E)} \frac{\mu(E)^{m-1}}{(m-1)!} \mathbb{E}[F(x, \{X_1, \dots, X_{m-1}\})]}_{\mathbb{E}[F(x,\Pi)\mathbb{1}_{M=m-1}]} \mu(dx) =$$

Si $m=0$, $\Pi = \emptyset$ et donc $Z=0$

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{m \geq 1} \int \mu(dx) \mathbb{E}[F(x,\Pi) \mathbb{1}_{\{M=m-1\}}] = \int \mu(dx) \mathbb{E}[F(x,\Pi)]$$

$\square$

Interpretation $\mathbb{E}\Big[\sum_{X \in \Pi} g(X) G(\Pi \setminus \{X\})\Big] = \Big(\int_E g(x) \mu(dx)\Big) \mathbb{E}[G(\Pi)]$

selon la mesure de comptage

On choisit "au hasard uniformément" un point X de Π.
Il est $\perp\!\!\!\perp$ de $\Pi \setminus \{X\}$ et $\Pi \setminus \{X\} \overset{\text{loi}}{=} \Pi$

Théorème (formule exp. positive)

Soit $f : E \to [0, \infty]$ $\mathcal{E}$-mesurable. Soit Π un nuage de Poisson sur E d'intensité μ. On note $N_f(\Pi) = \sum_{X \in \Pi} f(X) : \Omega \to [0, \infty]$

$N_f(\Pi)$ est $\mathcal{F}$-mesurable et

$$(*) \quad \mathbb{E}[e^{-N_f(\Pi)}] = \exp\Big\{-\int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx)\Big\}$$

Preuve $f = \mathbb{1}_A \to N_f(\Pi) = N_A(\Pi)$ donc $(*)$ est vrai

Soit $f = \lambda_1 \mathbb{1}_{A_1} + \dots + \lambda_p \mathbb{1}_{A_p}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$ et $A_1, \dots, A_p$ 2-à-2 disj.

$$N_f(\Pi) = \sum_{X \in \Pi} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \mathbb{1}_{A_j}(X) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \sum_{X \in \Pi} \mathbb{1}_{A_j}(X) = \sum \lambda_j N_{A_j}(\Pi)$$

$$\mathbb{E}[e^{-N_f(\Pi)}] = \mathbb{E}[e^{-\sum \lambda_j N_{A_j}(\Pi)}] = \prod_j \mathbb{E}[e^{-\lambda_j N_{A_j}(\Pi)}] = \exp\{-\sum_j \mu(A_j)(1-e^{-\lambda_j})\} =$$
$$= \exp\{-\int \mu(dx)(1-e^{-f(x)})\}$$

Soit $f : E \to [0,\infty]$

On pose $B_n = \{x \in E : f(x) \geq n\}$ et $A_{n,k} = \{x \in E,\ k2^{-n} \leq f(x) < (k+1)2^{-n}\}$

À n fixé $A_{n,0}, \dots, A_{n,2^n-1}$ sont 2-à-2 disjoints

On pose $f_n = n \mathbb{1}_{B_n} + \sum_{0 \leq k < n2^n} k2^{-n} \mathbb{1}_{A_n}$

On a donc $\mathbb{E}[e^{-N_{f_n}(\Pi)}] = e^{-\int_E \mu(dx)(1-e^{-f_n(x)})}$

$0 \leq f_n(x) \leq f_{n+1}(x)$ et $\lim f_n(x) = f(x)$

Par TCM $\lim \int \mu(x)(1-e^{-f_n(x)}) = \int \mu(dx)(1-e^{-f(x)})$

On pose $\vartheta(dx) = \sum_{X(\omega) \in \Pi(\omega)} \delta_{X(\omega)}(dx)$ mesure empirique de Π

On fixe $\omega \in \Omega$

$$N_f(\Pi) = \int f\, d\vartheta \qquad N_{f_n}(\Pi) = \int f_n\, d\vartheta \xrightarrow{TCM} \int f\, d\vartheta = N_f(\Pi)$$

C'est-à-dire $\lim_{n \uparrow \infty} N_{f_n}(\Pi) = N_f(\Pi)$

Par TCD $\lim_{n \uparrow \infty} \mathbb{E}[e^{-N_{f_n}(\Pi)}] = \mathbb{E}[e^{-N_f(\Pi)}]$ $\square$

Proposition Soit $\Pi : \Omega \to \$_E$ un nuage de points d'intensité μ diffuse.
On suppose que $\forall f : E \to [0,\infty]$, $\mathcal{E}$-mesurable, on a
$$\mathbb{E}[e^{-N_f(\Pi)}] = \exp\{-\int \mu(dx)(1-e^{-f(x)})\}$$
Alors Π est poissonnien

Preuve Exo

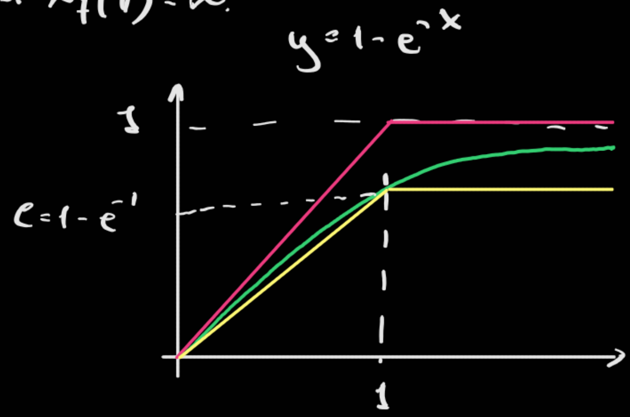
On cherche à donner un sens (robuste) à $N_f(\Pi) = \sum_{X \in \Pi} f(X)$ où $f : E \to \mathbb{R}$

Il faut assurer que $\sum_{X \in \Pi} |f(X)| < \infty$

Proposition (alternative) Soit $\Pi : \Omega \to \$_E$ un nuage de Poisson
d'intensité μ. Soit $f : E \to \mathbb{R}_+$ $(<\infty)$ qui est $\mathcal{E}$-mesurable. Alors on a l'alternative suivante :

(a) Ou bien $\int (1 \wedge f(x)) \mu(dx) < \infty$ est on a p.s. $\mathcal{N}_f(\Pi) < \infty$

(b) Ou bien $\int_E (1 \wedge f(x)) \mu(dx) = \infty$ est on a p.s. $\mathcal{N}_f(\Pi) = \infty$.



Preuve $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+$

$$c \int (1 \wedge \lambda f(x)) \mu(dx) \leq \int (1 - e^{-\lambda f(x)}) \mu(dx) \leq$$

$$\leq \int (1 \wedge \lambda f(x)) \mu(dx)$$

$$c \cdot (x \wedge 1) \leq 1 - e^{-x} \leq (1 \wedge x)$$

On suppose que $\mathbb{P}(\mathcal{N}_f(\Pi) < \infty) > 0$

Par la formule exponentielle,

$$\mathbb{E}[e^{-\mathcal{N}_f(\Pi)}] = \exp\{-\int \mu(dx)(1 - e^{-f(x)})\} > 0 \Rightarrow \int (1 - e^{-f(x)}) d\mu < \infty \Rightarrow \int (1 \wedge f(x)) d\mu < \infty$$

Réciproquement on suppose que $\int (1 \wedge f(x)) \mu(dx) < \infty$

$\forall \lambda \in]0,1]$ on a $\quad 0 \leq 1 - e^{-\lambda f(x)} \leq 1 \wedge \lambda f(x) \leq 1 \wedge f(x)$ - μ-intégrable

$\forall x \in E$ $\forall \lambda \in]0,1]$ $\lim_{\lambda \downarrow 0} |1 - e^{-\lambda f(x)}| = 0$ car f ne prend que des vals finies

Par TCD $\lim_{\lambda \downarrow 0} \int (1 - e^{-\lambda f(x)}) \mu(dx) = 0$

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \mathcal{N}_f(\Pi)}] = \mathbb{E}[e^{-\mathcal{N}_{\lambda f}(\Pi)}] = \exp\{-\int \mu(dx)(1 - e^{-\lambda f(x)})\} \to 1$$

Or $\mathbb{E}[e^{-\lambda \mathcal{N}_f(\Pi)}] = \mathbb{E}[e^{-\lambda \mathcal{N}_f(\Pi)} \mathbb{1}_{\{\mathcal{N}_f < \infty\}}] \to \mathbb{P}(\mathcal{N}_f < \infty) = 1$.

Donc $\int (1 \wedge f(x)) \mu(dx) < \infty \Rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{N}_f(\Pi) < \infty) = 1$ $\square$

Théorème (formule exponentielle réelle)

Soit $\Pi \sim \mathrm{Pois}(\mu)$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ mesurable. On suppose que $\int (1 \wedge |f(x)|) \mu(dx) < \infty$

Alors p.s. $\mathcal{N}_{f_+}(\Pi) < \infty$, $\mathcal{N}_{f_-}(\Pi) < \infty$ et $\mathcal{N}_{|f|}(\Pi) < \infty$ et on pose

$$\mathcal{N}_f(\Pi) = \mathcal{N}_{f^+}(\Pi) - \mathcal{N}_{f^-}(\Pi)$$

On a $\mathbb{E}[e^{i \mathcal{N}_f(\Pi)}] = \exp\{-\int_E \mu(dx)(1 - e^{i f(x)})\}$

De plus, si $\int |f(x)| \mu(dx) < \infty$ alors $\mathcal{N}_f(\Pi)$ est intégrable et

$\mathbb{E}[N_f(\Pi)] = \int f(x)\mu(dx)$.

Enfin si $\int |f(x)|\mu(dx) < \infty$ et $\int (f(x))^2 \mu(dx) < \infty$ alors $N_f(\Pi)$ est de carré intégrable et $\mathrm{Var}[N_f(\Pi)] = \int f(x)^2 \mu(dx)$

II. 6. Nuages de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times E$

$(E,\mathcal{E})$ espace séparable et séparé. On muni $\mathbb{R}_+$ de $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$.
μ mesure σ-finie sur E (pas forcément diffuse) et ℓ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$
On regarde des nuages sur $\mathbb{R}_+ \times E$ muni de la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathcal{E}$ qui est séparable et separé, d'intensité $\ell\otimes\mu$ qui est diffuse

Proposition Soit $\theta \in]0,\infty[$ et on suppose $\mu : \mathcal{E} \to [0,1]$ mesure de proba
On se donne des variables indép. $\mathcal{E}_n, X_n, n \geq 1$ où $\mathcal{E}_n \sim \mathcal{E}xp(\theta)$ et $X_n \sim \mu$. On pose $T_n = \mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n$ et $\Pi = \{(T_n, X_n), n \geq 1\}$.
Π est un nuage de Poisson sur $\mathbb{R}_+ \times E$ d'intensité $\theta\ell\otimes\mu$.

Preuve Soit $f : \mathbb{R}_+ \times E \to \mathbb{R}_+$ mesurable. Il suffit de m.q.

$$\mathbb{E}[e^{-N_f(\Pi)}] = \exp\left\{-\theta \int_{\mathbb{R}_+} \ell(dt) \int \mu(dx)(1-e^{-f(t,x)})\right\}$$

On fixe $t>0$ et on pose $f_t(s,x) = \mathbb{1}_{[0,t]}(s) f(s,x)$
On note $\Pi_0 = \{T_n : n \geq 1\} \sim \mathrm{Pois}(\theta\ell)$

$$\mathbb{E}[e^{-N_{f_t}(\Pi)} \mid N_{[0,t]}(\Pi_0) = n] = \mathbb{E}[e^{-f_t(U_1,X_1)}]^n$$

$$\mathbb{E}[e^{-N_{f_t}(\Pi)}] = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(N_{[0,t]}(\Pi_0)=n)\, \mathbb{E}[e^{-f_t(U_1,X_1)}]^n = \exp\{-\theta t(1-\mathbb{E}[e^{-f_t(U_1,X_1)}])\} =$$

$$= \exp\left\{-\theta \int_0^t ds \int \mu(dx)(1-e^{-f(s,x)})\right\} = \exp\left\{-\theta \int \ell(ds) \int \mu(dx)(1-e^{-f_t(s,x)})\right\}$$

Puis on fait tendre $t \to \infty$ $\square$

On utilise ensuite le lemme de mesurabilité suivant:

Lemme On note $R = \{\pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$ de la forme $\{(t_n,x_n), n\geq 1\}$ avec $t_n < t_{n+1}, t_n \uparrow \infty\}$
alors $R \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$
De plus, $\exists\, \mathcal{E}_n : \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+\times E} \to]0,\infty[$ et $X_n : \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+\times E} \to E$, mesurables, $n \geq 1$ qui satisfait les propriétés suivantes:

- Si $T_n(\cdot) = \mathcal{E}_1(\cdot) + \dots + \mathcal{E}_n(\cdot)$ alors $\pi \in \$_{\mathbb{R}_+ \times E}$ $T_n(\pi) \to +\infty$
- Si $\pi \in R$, on a $\pi = \{(T_n(\pi), X_n(\pi))\}$

$\square$

Preuve technique...

On en déduit la représentation suivante:

Théorème Soit Π, un nuage sur $\mathbb{R}_+ \times E$ d'intensité $\ell \otimes \mu$ où $\mu(E) < \infty$ alors $\mathbb{P}(\Pi \in R) = 1$ et $\Pi = \{(T_n(\Pi), X_n(\Pi)), n \geq 1\}$ où

$T_n(\Pi) = \mathcal{E}_1(\Pi) + \dots + \mathcal{E}_n(\Pi)$ avec $\mathcal{E}_j(\Pi) \sim \mathcal{E}xp(\mu(E))$

et $(X_n(\Pi))_{n \geq 1}$ i.i.d. $\sim \frac{\mu(\cdot)}{\mu(E)}$ et $(\mathcal{E}_n(\Pi))_{n\geq 1}$ et $(X_n(\Pi))_{n \geq 1}$ indép.

Preuve $\Pi' = \{(T_n', X_n'), n \geq 1\}$ où $T_n = \mathcal{E}_1' + \dots + \mathcal{E}_n'$ et $\mathcal{E}_n'$, X_n' indépend.

$X_n' \overset{loi}{=} \frac{\mu(\cdot)}{\mu(E)}$ $\quad \mathcal{E}_n' = \mathcal{E}xp(\mu(E))$

On sait $\Pi' = \mathrm{Pois}\left(\mu(E)\, \ell \otimes \frac{\mu(\cdot)}{\mu(E)}\right)$

$\Pi' \overset{loi}{=} \Pi \to F(\Pi) \overset{loi}{=} F(\Pi')$ $\quad F(\Pi) = (\mathcal{E}_n(\Pi), X_n(\Pi)) \to$

$(\mathcal{E}_n', X_n') \overset{loi}{=} (\mathcal{E}_n(\Pi), X_n(\Pi))$

$\square$

Proposition Il existe $\mathcal{E}_n : \$_{\mathbb{R}_+ \times E} \to]0, \infty[$ et $X_n : \$_{\mathbb{R}_+^* \times E} \to E$ des fcts mesurables t.q. $\forall \pi \in \$_{\mathbb{R}_+ \times E}$, $T_n(\pi) = \mathcal{E}_1(\pi) + \dots + \mathcal{E}_n(\pi) \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$\forall \pi \in R$, $\pi = \{(T_n(\pi), X_n(\pi)), n \geq 1\}$

Si $\Pi : \Omega \to \$_{\mathbb{R}_+ \times E}$, un nuage de Poisson d'intensité $\ell \otimes \mu$ avec $\mu(E) < \infty$. alors

1) Les v.a. $\mathcal{E}_n(\Pi), X_n(\Pi), n \geq 1$ sont indép.

2) $\mathcal{E}_n(\Pi) \sim \mathcal{E}xp(\mu(E))$

3) $X_n(\Pi) \overset{loi}{=} \mu(\cdot)/\mu(E)$

Proposition Soit $\Pi : \Omega \to \$_{\mathbb{R}_+ \times E}$ un nuage de Poisson d'intensité $\ell \otimes \mu$ où μ sigma-finie. On se donne $B_p \in \mathcal{E}$ une part. de E t.q. $0 < \mu(B_p) < \infty$, $p \in \mathbb{N}^*$

Pour tous $p, n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$\begin{cases} \mathcal{E}_n^{B_p} = \mathcal{E}_n(\Pi \cap (\mathbb{R}_+ \times B_p)) \\ X_n^{B_p} = X_n(\Pi \cap (\mathbb{R}_+ \times B_p)) \\ T_n^{B_p} = \mathcal{E}_1^{B_p} + \dots + \mathcal{E}_n^{B_p} \end{cases}$$

Alors

1) Les v.a. $\mathcal{E}_n^{B_p}, X_n^{B_p}$; n, p sont indép.

2) $\mathcal{E}_n^{B_p} \overset{\text{loi}}{=} \mathcal{E}xp(\mu(B_p))$

3) $X_n^{B_p} \overset{\text{loi}}{=} \mu(\cdot \cap B_p)/\mu(B_p)$

4) p.s. $\Pi \cap (\mathbb{R}_+ \cap B_p) = \{(T_n^{B_p}, X_n^{B_p}), n \geq 1\}$ et $\Pi = \{(T_n^{B_p}, X_n^{B_p})\} = \bigcup_{p \in \mathbb{N}} \Pi \cap B_p$

Preuve par le principe de restriction les $\Pi \cap (\mathbb{R}_+ \times B_p) = \Pi_p$ sont des Pois. indép. et Π_p a pour intens. $\ell \otimes \mu(\cdot \cap B_p)$ et on lui applique la proposition précédente.

Rem Si $\Pi \sim \text{Pois}(\ell \otimes \mu)$, μ sigma-finie alors $\mathbb{P}$-p.s. $\forall t \in \mathbb{R}_+$

$$N_{\{t\} \times E}(\Pi) = 0 \text{ ou } 1.$$

Proposition Soit $\Pi \sim \text{Pois}(\ell \otimes \mu)$, μ sigma-finie. On pose

$\tau(\Pi) = \{T \in \mathbb{R}_+ : \exists X \in E \ (T, X) \in \Pi\}$

Si $\mu(E) = \infty$ alors $\mathbb{P}$-p.s. $\tau(\Pi)$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Preuve $a, b \in \mathbb{R}_+$, $a < b$ $\quad N_{[a,b] \times E}(\Pi) \approx \text{Pois}(\underbrace{(b-a)\mu(E)}_{=\infty})$

$\mathbb{P}$-p.s. $N_{[a,b] \times E}(\Pi) = \infty \Rightarrow \mathbb{P}$-p.s. $\forall a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$ $\tau(\Pi) \cap]a, b[\neq \emptyset$ $\square$

II. 7 Formule de compensation

On veut une version de la formule de Mecke pour les nuages sur $\mathbb{R}_+ \times E$ d'intensité $\ell \otimes \mu$ avec une filtration. On veut regarder des calculs du type

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{(T,X) \in \Pi} H(\Pi \cap ([0,T[\times E)) \, G(T,X)\Big] = \int_0^\infty dt \int_E \mu(dx) \, \mathbb{E}\big[H(\Pi \cap ([0,t[\times E))\big] \, G(t,x)$$

Pour cela on introduit un autre point de vue (celui de Itô) sur le nuage Poissonnien.

On fixe $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $(\mathcal{G}_t)$ une filtration

On fixe $(E, \mathcal{E})$ un espace séparable et séparé et $\partial \notin E$ un point cimetère. On pose $E_\partial = E \cup \{\partial\}$ et $\mathcal{E}_\partial = \{B, B \cup \{\partial\} : B \in \mathcal{E}\}$

Déf (Processus ponctuel de Poisson relativement à $\mathcal{G}_t$)

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on se donne une fct $V_t : \Omega \to E_\partial$ c'est un $(\mathcal{G}_t)$-proc. de Poisson d'intensité μ si

(1) $\mathbb{P}$-p.s. $\{t \in \mathbb{R}_+ : V_t \neq \partial\}$ est dénombrable

(2) $\Pi = \{(t, V_t) : t \in \mathbb{R}_+ \ V_t \neq \partial\}$ est un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}_+ \times E$ d'intensité $\ell \otimes \mu$

(3) $\forall s,t \in \mathbb{R}_+$ $\forall B \in \mathcal{E}$, $N_{[0,t] \times B}(\Pi)$ est $\mathcal{G}_t$-mesurable et $N_{]t, t+s] \times B}(\Pi) \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_t$.

3 points de vue sur les processus

(1) Collection de v.a. $X_t : \Omega \to S$ $(\mathcal{F}, \mathcal{S})$-mesurables, $t \in \mathbb{R}_+$

$\underline{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}_+} : \Omega \to S^{\mathbb{R}_+}$ est $(\mathcal{F}, \mathcal{S}^{\otimes \mathbb{R}_+})$ mesurable

(2) $\left.\begin{array}{l} C^0(\mathbb{R}_+, S) \\ \mathcal{D}(\mathbb{R}_+, S) \end{array}\right\}$ espaces polonais

$\underline{X} = (X_t)_{t \in \mathbb{R}} : \Omega \to$ espace des fct regulières

(3) $\underline{X} : (t, \omega) \in \underbrace{\mathbb{R}_+ \times \Omega} \mapsto X_t(\omega) \in S$

on considère les tribus différentes là

en lien avec une filtration sur $(\Omega, \mathcal{F})$

Déf La tribu des événement $(\mathcal{G}_t)$-prévisible

a) On note $\mathcal{G}_{prev}$ les sous-ensembles de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ de la forme

- $]t, t+s] \times A$ avec $A \in \mathcal{G}_t$
- $\{0\} \times A$ avec $\mathcal{G}_0$
- $\mathbb{R}_+ \times \Omega \in \mathcal{G}_{prev}$

$\mathcal{G}_{prev}$ est stable par $\cap$ $\to$ π-système.

b) La tribu des évenements prévisibles est la tribu engendrée par $\mathcal{G}_{prév} = \sigma(\mathcal{G}_{prév})$

c) Une famille des fcts $X_t : \Omega \to E$, $t \in \mathbb{R}_+$ est un processus $(\mathcal{G}_t)$-prévisible si $(t,\omega) \mapsto X_s(\omega)$ est $(\mathcal{G}_{prév}, \mathcal{E})$-mesurable

Proposition 1) $\mathcal{G}_{prev}$ est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ qui rendre mesurable les processus $X_t : \Omega \to \mathbb{R}$ qui sont $(\mathcal{G}_t)$-adapté et càg.

2) Si E est un espace métrique séparable, et si $X_t : \Omega \to E$ est $(\mathcal{G}_t, \mathcal{B}(E))$-mesurable et si $\forall \omega \in \Omega$ $t \mapsto X_t(\omega)$ est càg alors (X_t) est $(\mathcal{G}_t)$-prévisible.

3) (X_t) est $(\mathcal{G}_t)$-prévisible $\Rightarrow$ il est $(\mathcal{G}_t)$-adapté.

Preuve Exo

Notation (V_t) un proc ponctuel de Poisson. Soit $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E_\partial \to \mathbb{R}$ ou $[0,\infty]$

On supposera toujours $H_s(\omega, \partial) = 0$

Si on pose $\Pi = \{(t, V_t) : t \in \mathbb{R}_+, V_t \neq \partial\}$ $\sum_{s \in [0,t]} H_s(\omega, V_s)$ signifie $\sum_{(T,X) \in \Pi} \mathbb{1}_{[0,t]}(T) H_T(\omega, X)$ et cela a un sens dès que $\sum_{s \in [0,t]} |H_s(\omega, V_s)| < \infty$

Théorème (Formule de compensation). Soit (V_t) un proc ponctuel de Poisson d'intensité μ relativement à $(\mathcal{G}_t)$

(1) Soit $H : (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \times E_\partial \to [0,\infty]$ une fct $\mathcal{G}_{prév} \otimes \mathcal{E}_\partial$-mesurable. Alors

$t \mapsto \sum_{s \in [0,t]} H_s(\cdot, V_s)$ et $t \mapsto \int_0^t ds \int_E \mu(dx) H_s(\cdot, x)$ sont deux processus càdlàg $(\mathcal{G}_t)$-adaptés et

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{s \in [0,t]} H_s(\cdot, V_s)\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^t ds \int \mu(dx) H_s(\cdot, x)\Big]$$

(2) $H : (\mathbb{R}_+ \times \Omega) \times E_\partial \to \mathbb{R}$, $(\mathcal{G}_{prév}) \otimes \mathcal{E}_\partial$-mes. t.q. $\int_0^t ds \int \mu(dx) \mathbb{E}[|H_s(\cdot, x)|] < \infty$

Alors $M_t = \sum_{s \in [0,t]} H(\cdot, V_s) - \int_0^t ds \int \mu(dx) H_s(\cdot, x)$ est une $(\mathcal{G}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$-mart càdlàg

(3) Si on a de plus $\int_0^t ds \int_E \mu(dx) \mathbb{E}[H_s(\cdot, x)^2] < \infty$ alors $\mathbb{E}[M_t^2] = \int_0^t ds \int \mu(dx) \mathbb{E}[H_s(\cdot, x)^2]$

Preuve Fait pour $H_s(\omega,x) = \mathbb{1}^{(s)}_{]t_0,t_0+s]} \mathbb{1}_A(\omega)\mathbb{1}_B(x)$ $A\in \mathcal{G}_{t_0}$ $\nu(B)<\infty$

puis on l'étend par classe monotone. $\square$

Chapitre III. Modèle d'actifs avec sauts

Le modèle $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$

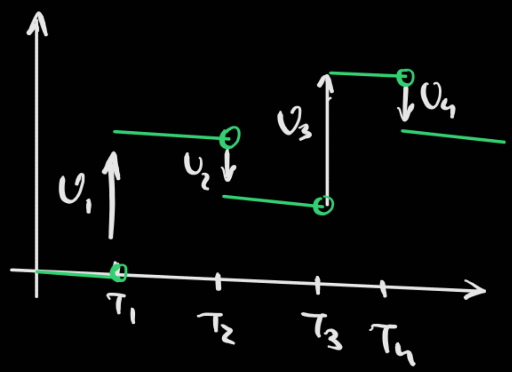
2 sources d'aléa :

a) Un nuage de Poisson sur $\mathbb{R}_+\times]-1,\infty[$ Π d'intensité $\theta\ell\otimes\nu$

ν mesure de proba sur $]-1,\infty[$

$\Pi=\{(T_n,U_n) : n\geq 1\}$. Ici $T_n=\mathcal{E}_1+\dots+\mathcal{E}_n$ et $(\mathcal{E}_n,U_n)$ indép.

$\mathcal{E}_n\sim \mathcal{E}xp(\theta)$ et $U_n\overset{\text{loi}}{=}\nu$



$N_t=\sum_{n\geq 1}\mathbb{1}_{[0,t]}(T_n) = \operatorname{Card}\left(\Pi\cap([0,t]\times]-1,\infty[)\right)$

On s'intéresse à $X_t=\sum_{n\geq 1} U_n\mathbb{1}_{[0,t]}(T_n) = \sum_{1\leq n\leq N_t} U_n$

$\mathcal{F}^1_t=\sigma(\Pi\cap([0,t]\times]-1,\infty[))$

b) (B_t) un MBS, $d=1$ issu de 0.

On note $\mathcal{F}^2_t=\sigma(B_{\cdot\wedge t})$ et on pose $\mathcal{F}_t=\sigma(\mathcal{F}^1_t,\mathcal{F}^2_t)$

On fixe $\sigma\in]0,\infty[$ volatilité

$\hookrightarrow T_n$ représente des instants où le marché une modification imprévisible qui fait varier instantanément le cours d'un actif risqué

On note $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ l'évolution du prix d'un actif risqué et

$S^0_t=S^0_0e^{rt}$ le cours d'un actif non-risqué.

Équation pour $(S_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$

$$\begin{cases} dS_t=\mu S_t dt+S_{t-}dX_t+\sigma S_t dB_t \\ \text{solution} \geq 0 \text{ issue de } S_0=s_0\end{cases}$$

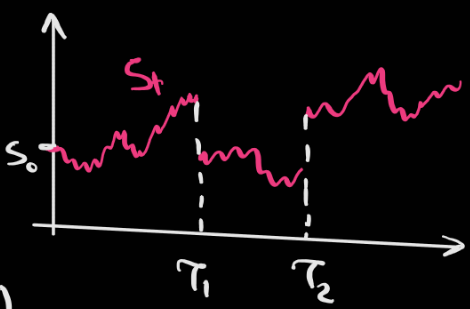
Résolution entre T_n et T_{n+1} : on a évolution selon une EDS classique dont la solution est explicite.

$$S_t=S_{T_n}\exp\left\{\mu(t-T_n)+\sigma(B_t-B_{T_n})-\frac{\sigma^2}{2}(t-T_n)\right\},\ t\in[T_n,T_{n+1}[$$

Au temps de saut

$$\Delta S_{T_n} = S_{T_n^-}\cdot U_n = S_{T_n} - S_{T_n^-} \longrightarrow S_{T_n} = (1-U_n)\cdot S_{T_n^-}$$

Donc $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}\cdot e^{\sigma B_t}\cdot \prod_{1\le n\le N_t}(1+U_n)$



$\tilde S_t = e^{-rt} S_t$

$$E[\tilde S_{t+t_0}|\mathcal F_{t_0}] = \tilde S_{t_0} e^{-t(r-\mu+\frac{\sigma^2}{2})} E\Big[e^{\sigma(B_{t_0+t}-B_{t_0})}\cdot \prod_{N_{t_0}<n\le N_{t+t_0}}(1+U_n)\,\Big|\,\mathcal F_{t_0}\Big] =$$

$$= \tilde S_{t_0} e^{-t(r-\mu+\frac{\sigma^2}{2})}\underbrace{E\big[e^{\sigma(B_{t_0+t}-B_{t_0})}\big]}_{e^{\frac{\sigma^2}{2}t}} E\Big[\prod_{N_{t_0}<n\le N_{t+t_0}}(1+U_n)\Big]$$

$$E\Big[\prod_{N_{t_0}\le n\le N_{t_0+t}}(1+U_n)\Big] = E\Big[\exp\Big\{-\sum_{(T,X)\in\pi} -\log(1+X)\,\mathbb 1_{[t_0,t_0+t]}(T)\Big\}\Big] =$$

$$= \exp\Big\{-\theta\int_0^\infty ds\int_{-1}^\infty \nu(dx)\big(1-e^{\log(1+x)\mathbb 1_{(t_0,t_0+t]}(s)}\big)\Big\} = \exp\Big\{-\theta t\int_{-1}^\infty \nu(dx)\big(\underbrace{1-e^{+\log(1+x)}}_{-x}\big)\Big\} =$$

$= e^{\theta t m_1}$ où on pose $m_1 = \int_{]-1,\infty[} x\,\nu(dx)$

On obtient $E[\tilde S_{t_0+t}|\mathcal F_{t_0}] = \tilde S_{t_0} e^{-t(r-\mu-\theta m_1)}$ ← martingale si $r-\theta m_1=\mu$

On supposera que c'est le cas.

On pose $\bar X_t = X_t - \theta m_1 t$ c'est une $(\mathcal F_t)$-martingale

On a $d\tilde S_t = \tilde S_{t^-}\, d\bar X_t + \sigma \tilde S_t\, dB_s$

On utilisera un lemme

Lemme · $(M_t)_{t\ge0}$ une $(\mathcal F_t)$-martingale continue de carré intégrable.

· Soit $(\Delta_t)_{t\ge0}$ une $(\mathcal F_t)$-martingale càdlàg et à variation bornée de carré intégrable.

Alors $(M_t\Delta_t)$ est une $(\mathcal F_t)$-martingale

Preuve Exo

$$\mathbb{E}[(M_{t_{i+1}}-M_{t_i})(\Lambda_{t_{i+1}}-\Lambda_{t_i})|\mathcal{F}_{t_i}] = \mathbb{E}[M_{t_{i+1}}\Lambda_{t_{i+1}}|\mathcal{F}_{t_i}] - M_{t_i}\Lambda_{t_i}$$

② Stratégie autofinancée

Investisseur investit une part H_t^0 du portefeuille dans l'actif non-risqué et une part H_t dans l'actif risqué.

On note V_t la valeur du pf

$$V_t = e^{rt}H_t^0 + S_t H_t$$

$$\tilde{V}_t = H_t^0 + H_t \cdot \tilde{S}_t$$

$$e^{rt}\Delta H_t^0 = -S_t \Delta H_t$$

$$dV_t = re^{rt}H_t^0\,dt + \cancel{e^{rt}dH_t^0} + H_t dS_t + \cancel{S_t dH_t}$$

$$dV_t = re^{rt}H_t^0\,dt + H_t dS_t$$

$$d\tilde{V}_t = H_t d\tilde{S}_t$$

$$\tilde{V}_t - V_0 = \int_0^t H_s d\tilde{S}_s \qquad (\tilde{V}_s - V_0)_{s\in[0,t]} \leftrightarrow (H_s)_{0\leq s\leq t}$$

$(\tilde{V}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale. Exo

③ Pricing d'une option européenne en minimisant le risque quadratique

Cas d'un Call europeen d'échéance T et de prix d'exercice K

L'acheteur gagne $f(S_T) = (S_T - K)^+$

La stratégie de couverture (H_t^0, H_t)

$t \mapsto H_t$ est continu à gauche

Il faut pour le vendeur $f(S_T) - V_T$

<u>Prix</u> $V_0 = \text{Prix}(0)$ minimise $\mathbb{E}[(f(S_T) - V_T)^2]$ c'est-à-dire que $\mathbb{E}[(e^{-rT}f(S_T) - \tilde{V}_T)^2]$. On note $C = \mathbb{E}[e^{-rT}f(S_T)]$

$$\mathbb{E}[(e^{-rT}f(S_T) - \tilde{V}_T)^2] = \mathbb{E}[(e^{-rT}f(S_T) - C + \underbrace{(\tilde{V}_T - V_0)}_{\text{dépend de } (H_s) \text{ et du bruit}})^2] + (C - V_0)^2$$

$$V_0 = \mathbb{E}[e^{-rT}f(S_T)] = \text{Prix}(0)$$

En raisonnement en temps t on a

$$\text{Prix}(t) = \mathbb{E}[e^{-r(T-t)}f(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

$$\widetilde{Prix}(t) = \mathbb{E}\Big[e^{-rT} f(S_T) \Big| \mathcal{F}_t\Big] = \mathbb{E}\Big[e^{-rT} f\big(\tilde{S}_t e^{rt} e^{\sigma(B_T - B_t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)} e^{-\theta m_1 (T-t)}$$

$$\prod_{N_t < n \leq N_T} (1+U_n) \Big| \mathcal{F}_t\Big] = C(t, \tilde{S}_t)$$ — peut être explicitée et elle est très régulière.

$\widetilde{Prix}(t)$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale

$$C(t,\tilde{S}_t) = \int_0^t \partial_s C(s,\tilde{S}_s)ds + \int_0^t \partial_x C(s,\tilde{S}_s)(-\theta m_1 ds) + \int_0^t \partial_x C(s,\tilde{S}_s)\sigma \tilde{S}_s dB_s +$$

$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \partial^2_{xx} C(s,\tilde{S}_s)\sigma^2 ds + \sum_{1\leq n\leq N_t} C(T_n, \tilde{S}_{T_n-}(1+U_n)) - C(T_n, \tilde{S}_{T_n-}) =$$

$$= \int_0^t (\dots) ds + \int_0^t \partial_x C(s,\tilde{S}_s)\sigma \tilde{S}_s dB_s + \sum_{1\leq n\leq N_t} C(T_n, \tilde{S}_{T_n-}(1+U_n)) - C(T_n,\tilde{S}_{T_n-}) -$$

$$- \theta \int_0^t ds \int_{]-1,\infty[} \vartheta(dx)\Big(C(s,\tilde{S}_{s-}(1+x)) - C(s,\tilde{S}_{s-})\Big)$$

$$\underbrace{\widetilde{Prix}(t) - (\tilde{V}_t - V_0)}_{=R_t} \qquad \tilde{V}_t = \int_0^t H_s d\tilde{S}_s = \int_0^t H_s \tilde{S}_{s-} d\bar{X}_s + \int_0^t H_s \sigma \tilde{S}_s dB_s$$

$$R_t = \underbrace{\int_0^t \big(\partial_x C(s,\tilde{S}_s) - H_s\big)\sigma\tilde{S}_s dB_s}_{M_t} + \sum_{1\leq n\leq N_t} C(T_n, \tilde{S}_{T_n-}(1+U_n)) - C(T_n,\tilde{S}_{T_n-}) - H_{T_n-}\tilde{S}_{T_n-}U_n -$$

$$- \theta\int_0^t ds \int_{]-1,\infty[} \vartheta(dx)\Big(C(s,\tilde{S}_{s-}(1+x)) - C(s,\tilde{S}_{s-}) - H_{s-}\tilde{S}_{s-}x\Big)$$

(the jump terms together: Λ_t)

On cherche $(H_s)_{s\in[0,T]}$ minimisant

$$\mathbb{E}\Big[\big(\widetilde{Prix}(T) - (\tilde{V}_T - V_0)\big)^2\Big] = \mathbb{E}[R_T^2] = \mathbb{E}\big[(M_T + \Lambda_T)^2\big] = \mathbb{E}[M_T^2] + \mathbb{E}[\Lambda_T^2]$$

car $\mathbb{E}[M_T\Lambda_T] = \mathbb{E}[M_0\Lambda_0] = 0$ par le lemme

$$\mathbb{E}[R_T^2] = \int_0^T \big(\partial_x C(s,\tilde{S}_s) - H_s\big)^2 \sigma^2 \tilde{S}_s^2 ds + \int_0^T ds \int_{]-1,\infty[} \vartheta(dx)\,\theta\Big(C(s,\tilde{S}_{s-}(1+x)) - C(s,\tilde{S}_{s-}) -$$

$$- H_{s-}\tilde{S}_{s-}x\Big)^2$$

H_s minimise le polynôme du 2^d degré (en H_s)

$$\big(\partial_x C(s,\tilde{S}_s) - H_s\big)^2\sigma^2\tilde{S}_s^2 + \theta\int_{]-1,\infty[}\vartheta(dx)\Big(C(s,\tilde{S}_s(1+x)) - C(s,\tilde{S}_s) - H_s\tilde{S}_s x\Big)^2$$

En prenant le (H_s) optimale on a neanmoins $\mathbb{E}[R_T^2] > 0$.