Exercices: Mathématiques actuarielles
Assurances de capitaux et rentes viagères

Karim Barigou

1 Assurances de capitaux

1. On vous donne le tableau suivant avec les valeurs de l_x et A_x, et on suppose un taux d'intérêt effectif de 6% par an.

x	l_x	A_x
35	100 000.00	0.151375
36	99 737.15	0.158245
37	99 455.91	0.165386
38	99 154.72	0.172804
39	98 831.91	0.180505
40	98 485.68	0.188492

Calculer:

a. ${}_5E_{35}$
b. $A^1_{35:\overline{5}|}$
c. ${}_{5|}A_{35}$
d. $\bar{A}_{35:\overline{5}|}$ en supposant que les décès sont uniformes dans l'année.

Solution:

a. ${}_5E_{35} = v^5 l_{40}/l_{35} = 0.735942$
b. $A^1_{35:\overline{5}|} = A_{35} - {}_5E_{35}A_{40} = 0.012656$
c. ${}_{5|}A_{35} = {}_5E_{35}A_{40} = 0.138719.$
d. $\bar{A}_{35:\overline{5}|} = (i/\delta)A^1_{35:\overline{5}|} + {}_5E_{35} = 0.748974$

2. En supposant une distribution uniforme des décès dans l'année, montrer que

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x$$

Solution: La prime pure peut s'écrire sous la forme:

$$\begin{aligned} A_x^{(m)} &= \sum_{r=0}^{\infty} {}_{\frac{r}{m}}p_x \, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{r}{m}} v^{\frac{r+1}{m}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_n p_x \sum_{k=0}^{m-1} {}_{\frac{k}{m}}p_{x+n} \, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+n+\frac{k}{m}} v^{n+\frac{k+1}{m}} \end{aligned} \tag{1.1}$$

En utilisant l'hypothèse des décès uniformes dans l'année, on a

$$\begin{aligned} {}_{t|h}q_x = {}_tp_x \, {}_hq_{x+t} &= {}_{t+h}q_x - {}_tq_x \\ &= (t+h)q_x - tq_x \\ &= hq_x \quad (x \in \mathbb{N}, 0 \leq t < t+h < 1) \end{aligned}$$

On a en particulier dans (1.1):

$${}_{\frac{k}{m}}p_{x+n} \, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+n+\frac{k}{m}} = \frac{1}{m} q_{x+n}$$

d'où

$$\begin{aligned} A_x^{(m)} &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_np_x q_{x+n} v^n \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{m-1} v^{\frac{k+1}{m}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} {}_np_x \; q_{x+n} v^n \frac{1-v}{i^{(m)}} \\ &= \frac{i}{i^{(m)}} \sum_{n=0}^{\infty} {}_np_x q_{x+n} v^{n+1} \end{aligned}$$

Par conséquent:

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x \tag{1.2}$$

3. On vous donne $A_x = 0.25$, $A_{x+20} = 0.40$, $A_{x:\overline{20}|} = 0.55$ et $i = 0.03$. Calculer $10000\bar{A}_{x:\overline{20}|}$ en supposant que
   a. les décès sont uniformes dans l'année.
   b. les décès surviennent en milieu d'année.

Solution: On commence par la relation

$$A_x - {}_{20}E_x A_{x+20} = A^1_{x:\overline{20}|}$$

En ajoutant ${}_{20}E_x$ de chaque côté, on a

$$A_x - {}_{20}E_x \left(A_{x+20} - 1\right) = A_{x:\overline{20}|}$$

de sorte que

$${}_{20}E_x = \frac{A_{x:\overline{20}|} - A_x}{1 - A_{x+20}} = \frac{0.55 - 0.25}{1 - 0.4} = 0.5$$

et donc $A^1_{x:\overline{20}|} = A_{x:\overline{20}|} - {}_{20}E_x = 0.05$.

a. Sous l'hypothèse des décès uniformes,

$$10000\bar{A}_{x:\overline{20}|} = 10000\left(\frac{i}{\delta} A^1_{x:\overline{20}|} + {}_{20}E_x\right) = 5507.46$$

b. Sous l'hypothèse des décès en milieu d'année:

$$10000\bar{A}_{x:\overline{20|}} = 10000\left((1+i)^{1/2}A^1_{x:\overline{20|}} + {}_{20}E_x\right) = 5507.44$$

4. Calculer A_{70} sachant que

$$A_{50:\overline{20|}} = 0.42247, A^1_{50:\overline{20|}} = 0.14996, A_{50} = 0.31266$$

Solution: On sait que

$$A_{50} = A^1_{50:\overline{20|}} + {}_{20}E_{50}A_{70}$$

et

$${}_{20}E_{50} = A_{50:\overline{20|}} - A^1_{50:\overline{20|}} = 0.27251$$

Donc,

$$A_{70} = \frac{A_{50} - A^1_{50:\overline{20|}}}{{}_{20}E_{50}} = 0.59704$$

2 Rentes viagères

5. Décrivez en mots les engagements avec les valeurs actuelles ci-dessous et écrire une expression en termes de fonctions actuarielles pour l'espérance de la valeur actuelle.

a. $Y_1 = \begin{cases} \bar{a}_{\overline{T_x|}} & \text{if } T_x \leq 15 \\ \bar{a}_{\overline{15|}} & \text{if } T_x > 15 \end{cases}$

b. $Y_2 = \begin{cases} a_{\overline{15|}} & \text{if } 0 < K_x \leq 15 \\ a_{\overline{K_x|}} & \text{if } K_x > 15 \end{cases}$

Solution:

a. L'engagement est une annuité de montant 1 par an payable continuellement sur une tête d'âge x pendant au plus 15 ans, avec des paiements tant que x est toujours vivant. La prime pure est $\bar{a}_{x:\overline{15|}}$.

b. L'engagement est une annuité de montant 1 par an payable à terme échu sur une tête d'âge x avec des paiements garantis les 15 premières années et paiements suivants uniquement si x est en vie. La prime pure est

$$a_{\overline{15|}} + {}_{15}E_x a_{x+15}$$

6. Etant donné que $\ddot{a}_{50:\overline{10|}} = 8.2066, a_{50:\overline{10|}} = 7.8277$ et ${}_{10}p_{50} = 0.9195$, quel est le taux d'intérêt effectif annuel ?

Solution: On sait que

$$\ddot{a}_{50:\overline{10|}} = 1 + v\,p_{50} + v^2{}_2p_{50} + \cdots + v^9{}_9p_{50}$$

et

$$a_{50:\overline{10|}} = v\,p_{50} + v^2{}_2p_{50} + \cdots + v^9{}_9p_{50} + v^{10}{}_{10}p_{50}$$

Dès lors,

$$\ddot{a}_{50:\overline{10}|} - a_{50:\overline{10}|} = 1 - v^{10}\,{}_{10}p_{50}$$

Les valeurs dans la question donnent $v^{10} = 0.675476$, donc $i = 4.0014\%$.

7. En utilisant la table de commutations ci-dessous avec un taux technique de 4.75%, calculez la valeur actuelle d'une rente viagère immédiate payable mensuellement par anticipation pendant 20 ans à un rentier âgé de 40 ans à l'origine, le montant de la rente étant de 1000 € par mois pendant les 10 premières années et de 1500 € par mois pendant les 10 dernières années. (Rappel: $a_x^{(m)} \approx a_x + (m-1)/(2m)$)

x	D_x	N_x	$\overline{M}_x$
40	147349	2432717	37905
50	88268	1246350	32947
60	49478	551011	25067

Solution:

$$\begin{aligned}
PU &= 12000\,\ddot{a}^{(12)}_{40\overline{10}|} + 18000\,{}_{10}E_{40}\,\ddot{a}^{(12)}_{50\overline{10}|} \\
&= \left\{\ddot{a}_{40\overline{10}|} - \frac{11}{24}\left(1 - {}_{10}E_{40}\right) + 1,5\,{}_{10}E_{40}\left[\ddot{a}_{50\overline{10}|} - \frac{11}{24}\left(1 - {}_{10}E_{50}\right)\right]\right\} \cdot 12 \cdot 10^3 \\
&= \left\{\frac{N_{40} - N_{50}}{D_{40}} + 1,5\frac{N_{50} - N_{60}}{D_{40}} - \frac{11}{24}\left[\frac{D_{40} - D_{50}}{D_{40}} + 1,5\frac{D_{50} - D_{60}}{D_{40}}\right]\right\} \cdot 12 \cdot 10^3 \\
&= \frac{N_{40} + 0,5N_{50} - 1,5N_{60} - \frac{11}{24}\left(D_{40} + 0,5D_{50} - 1,5D_{60}\right)}{D_{40}} \cdot 12 \cdot 10^3 \\
&= 177182 \text{ €}
\end{aligned}$$

8. Une personne de 40 ans souscrit une assurance mixte d'une durée de 25 ans avec exclusion du décès par accident (il n'y a donc aucune prestation en cas de décès accidentel). Le capital assuré en cas de décès est payable au moment du décès. On note μ_x le taux instantané de décès toutes causes confondues et $\mu_x^{(a)}$ le taux instantané de décès par accident.

   a. Donnez la formule de la prime unique pure du contrat pour un capital assuré de 1 €.

   b. Calculez cette prime unique pure à l'aide des données suivantes
      - taux annuel d'intérêt technique : $4,75\%$,
      - taux instantané de décès par accident : $\mu_x^{(a)} = 0.001 \quad \forall x \geq 0$,
      - Prime unique pure du contrat mixte habituel couvrant toutes les causes de décès : $\bar{A}_{40\overline{25}|} = 0,12211$.

   Indication: utilisez la relation liant la rente continue temporaire et l'assurance mixte donnée par

$$1 = \delta \bar{a}_{x\overline{n}|} + \bar{A}_{x\overline{n}|}$$

Solution:

$$\begin{aligned}
PU &= \int_0^{25} {}_tp_{40}\left(\mu_{40+t} - 0,001\right) v^t dt + {}_{25}p_{40} v^{25} \\
&= \bar{A}_{40\overline{25}|} - 0,001 \times \bar{a}_{40\overline{25}|}
\end{aligned}$$

En utilisant la relation
$$1 = \delta \bar{a}_{x\overline{n}|} + \bar{A}_{x\overline{n}|}$$
où $\delta = \ln(1+i)$, il vient
$$PU = \bar{A}_{40\overline{25}|}\left(1 + \frac{0,001}{\ln 1,0475}\right) - \frac{0,001}{\ln 1,0475} = 0,10319.$$

9. On suppose un taux d'intérêt technique de $3,5\%$ et les données suivantes:
$$a_{40:\overline{24}|} = 14,96798 \quad ; \quad a_{40:\overline{25}|} = 15,28929$$
   a. Calculez ${}_{25}E_{40}$.
   b. Calculez $A_{40:\overline{25}|}$.
   c. Calculez une valeur approchée de $\bar{A}_{40:\overline{25}|}$.

Solution:

a. ${}_{25}E_{40} = a_{40\overline{25}|} - a_{40\overline{24}|} = 0,321309$

b. $A_{40:\overline{25}|} = \frac{1-ia_{40\overline{24}|}}{1+i} = 0,46002.$

c. $A^1_{40\overline{25}|} = A_{40\overline{25}|} - {}_{25}E_{40} = 0,13871$
$\bar{A}^1_{40\overline{25}|} = \frac{i}{\ln(1+i)} A^1_{40\overline{25}|} = 0,141125$
$\bar{A}_{40\overline{25}|} = \bar{A}^1_{40\overline{25}|} + {}_{25}E_{40} = 0,46243$

10. Supposons qu'un individu a souscrit à un plan de pension qui lui garantit une rente viagère par anticipation avec un paiement de 1000 € par mois à partir de 65 ans. L'assureur lui propose une annuité garantie pendant les 10 premières années en échange d'une réduction du paiement mensuel. Le nouveau montant mensuel est calculé de sorte que la prime pure avant et après révision soit égale. Calculez le nouveau montant mensuel de pension avec l'annuité garantie en utilisant les données suivantes:
$$i = 0.05, \ddot{a}_{65} = 13.55, \ddot{a}_{75} = 10.318, {}_{10}E_{65} = 0.55305.$$

Solution: Soit B le montant de pension mensuel après révision. Pour déterminer B, on égalise la prime pure avant et après révision, ce qui donne
$$12000\ddot{a}^{(12)}_{65} = 12B\left(\ddot{a}^{(12)}_{\overline{10}|} + {}_{10}p_{65}v^{10}\ddot{a}^{(12)}_{75}\right)$$
où le membre de droite comporte deux termes: d'une part, l'annuité garantie de 10 ans et d'autre part, le rente viagère à 75 ans qui n'a lieu que si l'assuré est toujours vivant à 75 ans. On peut dès lors calculer les différents termes:
$$\ddot{a}^{(12)}_{65} = \ddot{a}_{65} - \frac{11}{24} = 13.09167$$
$$\ddot{a}^{(12)}_{\overline{10}|} = \frac{1-v^{10}}{i^{(12)}} = 7.8972$$
$$\ddot{a}^{(12)}_{75} = \ddot{a}_{75} - \frac{11}{24} = 9.8597.$$

Dès lors, on trouve que

$$B = \frac{12000\ddot{a}_{65}^{(12)}}{12\left(\ddot{a}_{\overline{10}|}^{(12)} + {}_{10}p_{65}v^{10}\ddot{a}_{75}^{(12)}\right)} \approx 980$$

Ainsi, l'assuré peut avoir une annuité garantie pendant 10 ans moyennant une réduction de 20 € par mois dans sa pension.