Exercices

	E1	E2	E3	E4	E5	E6	E7	E8	E9	E10	E11	E12	E13	E14	E15	E16	E17
2018 RABAT																	
2018 ENSAE																	
2017																	
2017 S2																	
2017 ENSAE																	
2016																	
2016 ENSAE																	
2015																	
2014																	
2013																	
2013 S2																	
2012																	
2012 S2																	

E1

On rappelle qu'une distribution F appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel Λ, si et seulement si il existe une fonction positive g telle que :

$$\lim_{x \to x^F} \frac{\bar{F}(x + tg(x))}{\bar{F}(x)} = \exp(-t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

et qu'un choix possible pour la fonction g est donnée par

$$g(x) = \frac{\int_x^{x^F} \bar{F}(t)dt}{\bar{F}(x)} = \mathbb{E}(X - x | X > x).$$

Les coefficients a_n et b_n tels que

$$\Pr(M_n \leq a_n x + b_n) \to \Lambda(x) = \exp(-\exp(-x)), \qquad x \in \mathbb{R},$$

ont alors la forme suivante : $b_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$, $a_n = g(b_n)$.

1. Supposons que X soit une variable aléatoire positive de distribution F telle que $x^F = \infty$.

- Donner quelques éléments d'explication (sans trop de détails mathématiques) pour justifier que l'on a $\lim_{x\to\infty} g(x)/x = 0$.

- Montrer que si $F \in D(\Lambda)$ où Λ est la distribution de Gumbel, alors la distribution de $-X^{-1}$ appartient aussi au domaine d'attraction de la distribution de Gumbel. On partira de l'écriture de la condition $F \in D(\Lambda)$ en fonction de M_n, le maximum, pour en déduire la réponse.

2. On considère une transformation croissante T, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on suppose que le point extremal $x^F < \infty$ est fini. Montrer que $F \circ T^{-1}$ appartient au domaine d'attraction de la distribution de Gumbel et donner les coefficients de normalisation.

Indication: on utilisera un développement limité au voisinage de x^F.

E2

Supposons que les variables (X_i) sont des variables iid de distributions F. Posons $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $m_n = \min(X_1, ..., X_n)$ et supposons qu'il existe des constantes $a_n > 0$, $\alpha_n > 0$, b_n, β_n telles que

$$P(M_n \leq a_n x + b_n) \to G_1(x) \qquad \text{et} \qquad P(-m_n \leq \alpha_n x + \beta_n) \to G_2(x).$$

1. Montrer la convergence

$$P(M_n \leq a_n x + b_n, -m_n \leq \alpha_n y + \beta_n) \to G_1(x)G_2(y).$$

Qu'en concluez-vous?

2. On considère le cas où les (X_i) sont des variables aléatoires Gaussiennes centrées et réduites. On rappelle que dans ce cas

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \Lambda$$

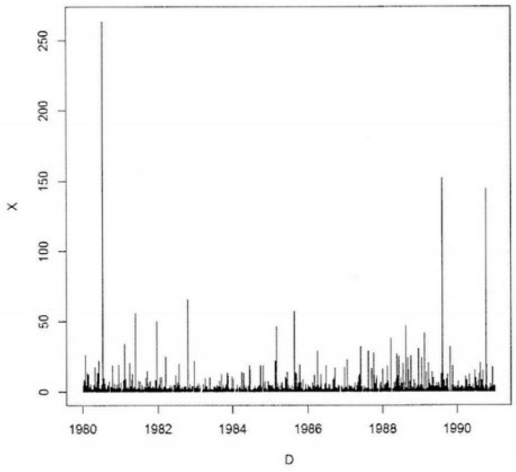
où Λ a une distribution de Gumbel et

$$\begin{aligned} a_n &= (2\ln(2n))^{-1/2} \\ b_n &= (2\ln(2n))^{1/2} - \frac{1}{2}(2\ln(2n))^{-1/2}[\ln(\ln(2n)) + \ln(4\pi)]. \end{aligned}$$

Montrer que $(M_n + m_n)/a_n$ converge en distribution et caractériser sa loi.

E3

Un réassureur dispose des données de sinistres suivantes pour tarifier un excédent de sinistres de priorité 100 et de portée illimitée.



Quelle méthodologie lui proposez-vous? Donner une réponse la plus littérale possible en décrivant la formule que vous allez utiliser, les paramètres dont vous avez besoin, les procédures d'estimation que vous allez utiliser.

E4

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution de Fréchet de paramètre 1, i.e. $\Pr(X_1 \leq x) = \exp\left(-x^{-1}\right)$.

0. Donner les constantes a_n et b_n telles que

$$\frac{\max(X_1, ..., X_n) - b_n}{a_n} \stackrel{L}{=} X_1.$$

On définit le processus max-autoregressif de la manière suivante:

$$Y_i = \max\left(\alpha Y_{i-1}, (1-\alpha) X_i\right)$$

avec $0 \leq \alpha < 1$.

1. Montrer que si $Y_i = \max_{j \geq 0} \alpha^j (1-\alpha) X_{i-j}$ alors Y_{i+1} a la même distribution que Y_i. Il s'agit de la distribution stationnaire. Montrer que cette distribution est la distribution de Fréchet de paramètre 1.

2. Montrer que

$$\Pr\left(\max(Y_1, ..., Y_n) \leq x\right) = \Pr\left(Y_1 \leq x, (1-\alpha) X_2 \leq x, \ldots, (1-\alpha) X_n \leq x\right).$$

3. En déduire que

$$\Pr\left(\max(Y_1, ..., Y_n) \leq x\right) = \exp\left(-\left[1 + (1-\alpha)(n-1)/x\right]\right)$$

et que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{\max(Y_1, ..., Y_n) - b_n}{a_n} \leq x\right) = \exp\left(-(1-\alpha) x^{-1}\right).$$

4. Pour quelle valeur de α les lois asymptotiques des maxima des X_i et des Y_i normalisés coïncident?

E5

On définit la loi de

$$\text{Fréchet } (\alpha > 0): \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & \text{si } x > 0, \end{cases} \quad .$$

Soient $X, X_1, \ldots, X_n$ des variables i.i.d. de Fréchet de paramètre α.

1. Quelle est la limite de $\max(X_1, \ldots, X_n)$ quand $n \to \infty$?
2. Montrer que

$$n^{-1/\alpha} \max(X_1, \ldots, X_n) \stackrel{d}{=} X.$$

Qu'en concluez vous?

E6

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution F et soit $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. On note la statistique d'ordre la manière suivante

$$X_{(n)} \leq X_{(n-1)} \leq \ldots \leq X_{(1)}$$

et $B_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i > x\}}$.

1. Montrer que $X_{(k)} \leq x$ si et seulement si $B_n(x) < k$.
2. Donner la loi de $B_n(x)$. En déduire que

$$P\left(X_{(k)} \leq x\right) = \sum_{r=0}^{k-1} C_n^r \left(F(x)\right)^{n-r} \left(1 - F(x)\right)^r .$$

3. Calculer la transformée de Laplace de $B_n(x)$:

$$\varphi_n(t, x) = \mathbb{E}\left(\exp\left(tB_n(x)\right)\right).$$

4. Montrer que s'il existe une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} n \Pr(X_i > u_n) = \tau$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \ln \varphi_n(t, u_n) = \tau(e^t - 1).$$

5. Donner la transformée de Laplace d'une loi de Poisson de paramètre τ (Rappel: si N suit une loi de Poisson de paramètre τ, alors $P(N = n) = e^{-\tau}\tau^n/n!$).

6. Déduire des questions précédentes l'expression analytique de la loi limite de $X_{(2)}$ si l'on peut trouver deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{(1)} - b_n}{a_n} \leq x\right) = \exp\left(-\exp\left(-x\right)\right).$$

E7

Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. de loi absolument continue et $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.

1. Montrer que

$$\Pr(M_n > M_{n-1}) = \mathbb{E}\left[\bar{F}^{n-1}(X_1)\right] = n^{-1}.$$

2. On définit le temps du premier record de la manière suivante :

$$L = \inf\{j > 1 : M_j > X_1\}.$$

Montrer que si $y > x$

$$\Pr(X_L > y | X_1 = x) = \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)}.$$

Indication: décomposer la probabilité par rapport aux valeurs possibles de L.

E8

Supposons que Y a une distribution Pareto Généralisée GPD(σ, ξ) $(\xi \neq 0)$ telle que

$$P(Y < y) = 1 - \left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}.$$

1. Donner le domaine de définition de Y, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de réalisation possibles de la variable aléatoire Y.

2. De quelle loi connue s'agit-il lorsque $\xi = -1$? Est-il possible de définir une loi si $\xi = 0$?

3. Donner la densité de cette loi. Peut-on trouver des expressions analytiques pour l'estimateur du maximum de vraisemblance de (σ, ξ).

4. Montrer que si $U \sim U[0, 1]$, alors

$$Y \sim \sigma\left(\frac{U^{-\xi} - 1}{\xi}\right).$$

Donner une procédure pour simuler une loi GPD(σ, ξ).

5. Donner l'expression de la médiane, de la moyenne $(\xi < 1)$ et de la variance $(\xi < 1/2)$ d'une loi GPD(σ, ξ). Donner un estimateur simple de ξ basé sur les deux premiers moments lorsque $\xi < 1/2$.

6. Montrer que $Y - v | Y > v$ a une distribution GPD$(\sigma + \xi v, \xi)$. A partir du calcul de l'espérance de $Y - v | Y > v$, en déduire une procédure simple pour estimer ξ.

7. Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution F et soit $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Montrer que si, lorsque $u \to x^F = \sup\{x : F(x) < 1\}$

$$\frac{X - u}{a(u)} | X > u \xrightarrow{L} GPD(1, \xi),$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \begin{cases} \exp\left(-[1 + \xi x]_+^{-1/\xi}\right) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp\left(-\exp(-x)\right) & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

avec $a_n = a(b_n)$ et $b_n = F^{-1}(1 - n^{-1})$.

E9

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de distribution $\Phi_1(x) = \exp(-1/x)$, $x \geq 0$. On note $M_n^X = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

0. Donner a_n et b_n pour que

$$\frac{M_n^X - b_n}{a_n} \sim_d \Phi_1.$$

On définit

$$Y_n = \frac{1}{3}\max(X_n, X_{n+1}, X_{n+3}).$$

1. Donner la distribution de Y_n.

2. Soit $M_n^Y = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$. Quelle est la loi limite de

$$\frac{M_n^Y - b_n}{a_n}$$

quand $n \to \infty$?

Interpréter ce résultat par rapport à celui de la question 0.

3. (Question bonus) Quelle est la dynamique asymptotique de l'arrivée des dépassements de seuils $\{i/n : X_i > a_n x + b_n\}_{i=1,\ldots,n}$ et celle des dépassements de seuils $\{i/n : Y_i > a_n x + b_n\}_{i=1,\ldots,n}$ quand $n \to \infty$?

E10

On rappelle qu'une fonction L mesurable et positive sur $]0,\infty[$ est *à variations lentes*, si, pour tout $x > 0$, $\lim_{t\to\infty} L(tx)/L(t) = 1$. De plus un distribution F appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet Φ_α $(\alpha > 0)$, si et seulement si $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$, pour une fonction à variations lentes L.

Soient X_1 et X_2 deux variables positives, indépendantes, identiquement distribuées de distribution caractérisée par $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$.

1. Montrer que

$$\{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\} \subset \{X_1 + X_2 > x\}.$$

En déduire que

$$P(X_1 + X_2 > x) \geq 2P(X_1 > x)(1 + o(1))$$

quand $x \to \infty$.

2. Montrer que, pour $0 < \delta < 1/2$

$$\{X_1 + X_2 > x\} \subset \{X_1 > (1-\delta)x\} \cup \{X_2 > (1-\delta)x\} \cup \{X_1 > \delta x, X_2 > \delta x\}.$$

En déduire que

$$P(X_1 + X_2 > x) \leq 2P(X_1 > (1-\delta)x)(1 + o(1))$$

quand $x \to \infty$.

3. En jouant sur δ, montrer que

$$P(X_1 + X_2 > x) \sim 2P(X_1 > x).$$

4. Soient $X_1, ..., X_n$ n variables positives, indépendantes, identiquement distribuées de distribution caractérisée par $\bar{F}(x) = x^{-\alpha}L(x)$. On note $S_n = X_1 + ... + X_n$. Montrer que

$$P(S_n > x) \sim nP(X_1 > x)$$

quand $x \to \infty$. En déduire que

$$P(S_n > x) \sim P(M_n > x)$$

quand $x \to \infty$, où $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Utiliser la formule du binôme de Newton.

Interpréter ce résultat en terme de gestion des risques extrêmes.

E11

Quelles sont les domaines d'attraction des distributions suivantes (justifier):

- Benktander de type I:

$$\bar{F}(x) = (1 + 2\,(\beta/\alpha)\ln x)\exp\left\{-\left(\beta\,(\ln x)^2 + (\alpha+1)\ln x\right)\right\}, \quad x \geq 1, \quad \alpha, \beta > 0,$$

- Benktander de type II:

$$\bar{F}(x) = x^{-(1-\beta)}\exp\left\{-\frac{\alpha}{\beta}(x^\beta - 1)\right\}, \quad x \geq 1, \quad \alpha > 0, 0 < \beta < 1,$$

- Personne de type I:

r − 1

$$\bar{F}(x) = \exp\left(-\frac{x}{1-x}\right), \quad 0 \leq x < 1.$$

- Personne de type II:

$$\bar{F}(x) = \frac{1}{(\ln\ln(x))^{\ln\ln(x)}}, \quad x \geq e.$$

Vous pourrez utiliser la fonction $h(x) = \bar{F}(x)/f(x)$ ou discuter l'épaisseur de la queue de distribution.

E12

On considère la distribution donnée par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - \exp\left(-\frac{x}{1-x}\right) & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Soient $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires IID de distribution F et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

0. Est-ce que M_n peut avoir une distribution non dégénérée avec une suite de seuils non-linéaires?

1. En choisissant

$$a_n = \frac{1}{(1+\ln n)^2} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{\ln n}{1+\ln n},$$

trouver la loi limite de $a_n^{-1}(M_n - b_n)$.

Soient $E_1, \ldots, E_n$ une suite de variables aléatoires IID de distribution exponentielle de paramètre 1 et $M_n^E = \max(E_1, \ldots, E_n)$.

2. Donner les constantes de normalisation a_n^E et b_n^E telles que $\left(a_n^E\right)^{-1}\left(\overset{\epsilon}{M_n} - b_n^E\right)$ converge en distribution vers la loi de Gumbel.

3. On considère la fonction

$$g(x) = \frac{x}{1+x}, \quad x > 0.$$

a. Montrer que $X_1 \stackrel{d}{=} g(E_1)$. En déduire que

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \stackrel{d}{=} \frac{g\left(M_n^E\right) - g(\ln n)}{g'(\ln n)}.$$

b. Montrer qu'il existe ζ_n tel que

$$g\left(M_n^E\right) - g(\ln n) = \left(M_n^E - \ln n\right) g'\left(\zeta_n\right)$$

avec $\ln n \leq \zeta_n \leq M_n^E$ si $\ln n \leq M_n^E$ et inversement.

c. Montrer que

$$\frac{M_n^E}{\ln n} \xrightarrow{P} 1,$$

et en déduire que

$$\frac{g'\left(\zeta_n\right)}{g'(\ln n)} \xrightarrow{P} 1.$$

Retrouver le résultat de la question 1.

E13

Soient $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi Gaussienne centrée et réduite, et $M_n = \max(|X_1|, ..., |X_n|)$. On a dans ce cas là:

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \Lambda$$

où Λ a une distribution de Gumbel et

$$\begin{aligned} a_n &= (2\ln(2n))^{-1/2} \\ b_n &= (2\ln(2n))^{1/2} - \frac{1}{2}(2\ln(2n))^{-1/2}[\ln(\ln(2n)) + \log(4\pi)]. \end{aligned}$$

1. Montrer que

$$\frac{M_n}{b_n} \xrightarrow{P} 1.$$

On cherche à caractériser la loi asympotique du maximum de variables aléatoires indépendantes avec une distribution du Khi-deux à un degrès de liberté.

2. En utilisant une identité remarquable, montrer que si

$$\frac{\max(|X_1|, ..., |X_n|) - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \Lambda,$$

alors

$$\frac{\max(X_1^2, ..., X_n^2) - b_n^2}{2a_n b_n} \xrightarrow{d} \Lambda.$$

En déduire les constantes de normalisation pour la convergence du maximum de variables aléatoires indépendantes avec une distribution du Khi-deux à un degrès de liberté.

E14

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID.

1. Montrer que s'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} \text{Pr}\left(\max\left(-X_1, \ldots, -X_n\right) \leq a_n x + b_n\right) = H(x)$$

pour une fonction de distribution H non-dégénérée, alors il existe deux suites (c_n) et (d_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} \text{Pr}\left(\min\left(X_1, \ldots, X_n\right) \leq c_n x + d_n\right) = 1 - H(-x).$$

Quelles relations existe-t-il entre les suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n)?

2. On rappelle que les distributions des extrêmes généralisées (GEV) sont caractérisées par les fonctions de répartition

$$G_\xi(x) = \exp\left(-(1+\xi x)_+^{-1/\xi}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Caractériser alors les distributions limites possibles pour le minimum de variables aléatoires indépendantes.

3. Montrer qu'elles sont min-stables et donner les coefficients de normalisation.

E15

Soient $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID, $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

0. Soit $\bar{F} = 1 - F$. Montrer que, pour deux suites (a_n) et (b_n), et une fonction de répartition H, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{ll} 1) & \lim_{n\to\infty} \Pr\left(M_n \le a_n x + b_n\right) = H(x), \\ 2) & \lim_{n\to\infty} n\bar{F}\left(a_n x + b_n\right) = -\ln H(x). \end{array}$$

1. Soit N une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ, indépendante des X_i.

(a) Montrer que

$$\Pr\left(M_N \le x\right) = \exp\left(-\lambda\left(1 - F(x)\right)\right).$$

On rappelle que $\Pr\left(N = n\right) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Supposons que N_n une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ_n. Quelle condition faut-il mettre sur λ_n pour que

$$\frac{M_{N_n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{L} H$$

quand $n \to \infty$?

2. Soit N une variable aléatoire Géométrique de paramètre q, indépendante des X_i.

(a) Montrer que

$$\Pr\left(M_N \le x\right) = \frac{qF(x)}{1 - (1 - q)F(x)}.$$

On rappelle que $\Pr\left(N = n\right) = q(1 - q)^{n-1}$, $n \ge 1$.

(b) Supposons que N_n une variable aléatoire Géométrique de paramètre q_n. Est-il possible de trouver q_n telle que

$$\frac{M_{N_n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{L} H$$

quand $n \to \infty$?

3. Quelle conclusion tirez-vous de cet exercice?

E16

A. On considère la distribution $F(x) = 1 - e^{1/x}$ pour $x < 0$, et $F(x) = 1$ pour $x \ge 0$.

1. Montrer que la suite

$$u_n = \frac{1}{\ln \tau - \ln n}$$

assure que la condition $n\bar{F}(u_n) \to \tau > 0$ est satisfaite. En déduire la limite de $P(M_n \le u_n)$ si $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$ avec (X_i) i.i.d. de loi F quand $n \to \infty$.

2. En prenant $\tau = e^{-x}$ et en utilisant un développement limité, en déduire qu'il existe $(a_n) > 0$ et (b_n) tel que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(M_n \le a_n x + b_n\right) = \exp\left(-\exp(-x)\right).$$

B. On considère la distribution $F(x) = K(1 - e^{-x})$ pour $0 < x < x_F$.

1. Donner la valeur de K en fonction de x_F.

2. Trouver $(a_n) > 0$ tel que, pour $x < 0$,

$$\lim_{n\to\infty} P\left(M_n \le a_n x + x_F\right) = \exp(x).$$

Que concluez-vous de cet exercice?

E17

Soit (X_i) des variables aléatoires i.i.d. de loi F. On suppose qu'il existe deux suites $(u_n^{(1)})$ et $(u_n^{(2)})$ telles que pour $i = 1, 2$

$$n\bar{F}(u_n^{(i)}) \to \tau_i$$

avec $0 < \tau_1 \leq \tau_2$.

1. On définit $N_n^{(i)} = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i \leq u_n^{(i)}\}}$. Il est possible alors de montrer que

$$\lim_{n \to \infty} P\left(N_n^{(1)} = k_1, N_n^{(2)} = k_1 + k_2\right) = \frac{\tau_1^{k_1}}{k_1!} \frac{(\tau_2 - \tau_1)^{k_2}}{k_2!} e^{-\tau_2}.$$

Quel résultat retrouve-t-on si $\tau_1 = \tau_2$.

2. Exprimer l'évènement

$$\{X_{(1)} \leq u_n^{(1)}, X_{(2)} \leq u_n^{(2)}\}$$

en fonction de $N_n^{(1)}$ et $N_n^{(2)}$. On rappelle que $X_{(1)}$ et $X_{(2)}$ sont les deux plus grandes statistiques d'ordre de $(X_i)_{i=1,\ldots,n}$.

3. En supposant que F appartient au domaine d'attraction de G pour deux suites $(a_n) > 0$ et (b_n), montrer que pour $x_1 > x_2$

$$\begin{aligned} & \lim_{n \to \infty} P\left(X_{(1)} \leq a_n x_1 + b_n, X_{(2)} \leq a_n x_2 + b_n\right) \\ = \; & G(x_2)\{\ln G(x_1) - \ln G(x_2) + 1\}. \end{aligned}$$

Quel est l'intérêt de cette distribution?

Exercice 1 :

Exercice 4 :

Soient $X_1, \ldots, X_m \overset{iid}{\sim} \Phi_1$ i.e $\forall i \in [\![1,m]\!], P(X_i \leq x) = e^{-x^{-1}}$

0) $F(x) = e^{-1/x} = F(a_m x + b_m)^m$

$= \exp\left(-\frac{1}{a_m x + b_m}\right)^m$ ssi $\frac{1}{x} = \frac{m}{a_m x + b_m}$ ssi $a_m = m$ et $b_m = 0$

Soit $Y_i = \max(\alpha Y_{i-1}, (1-\alpha)X_i)$ $\quad 0 \leq \alpha < 1$.

1) $Y_{i+1} = \max(\alpha Y_i, (1-\alpha) X_{i+1})$

$= \max(\alpha \max_{j\geq 0}(\alpha^j (1-\alpha) X_{i-j}), (1-\alpha) X_{i+1})$

$= (1-\alpha) \max(\max_{j\geq 0}(\alpha^{j+1} X_{i-j}), \alpha^{(-1)+1} X_{i-(-1)})$

$= (1-\alpha) \max_{j\geq -1}(\alpha^{j+1} X_{i-j})$

$= (1-\alpha) \max_{j \geq 0}(\alpha^j X_{i+1-j})$

$P(Y_{i+1} \leq y) = P((1-\alpha) \max_{j\geq 0}(\alpha^j X_{i+1-j}) \leq y)$

$= P(\max_{j\geq 0}(\alpha^j X_{i-j}) \leq \frac{1}{1-\alpha} y)$

$= \prod_{j\geq 0} P(X_{i-j} \leq \frac{1}{\alpha^j(1-\alpha)} y)$

$= \exp(-\frac{1}{y}(1-\alpha)\sum_{j\geq 0} \alpha^j)$

$= \exp(-\frac{1}{y}) \quad \Rightarrow Y_i \sim \Phi_1$

2) $\{\max(Y_1, \ldots, Y_m) \leq x\} = \{\max(Y_1, Y_2 = \max(\alpha Y_1, (1-\alpha)X_2), \ldots, Y_m = \max(\alpha Y_{m-1}, (1-\alpha)X_m) \leq x\}$

$= \{Y_1 \leq x, Y_2 = \max(\alpha Y_1, (1-\alpha)X_2) \leq x, \ldots, Y_m = \max(\alpha Y_{m-1}, (1-\alpha)X_m) \leq x\}$

Comme $0 \leq \alpha < 1 \Rightarrow \{Y_1 \leq x\} \Rightarrow \{Y_2 = \max(\alpha Y_1, (1-\alpha)X_2) \leq x\} = \{(1-\alpha)X_2 \leq x\}$ et ainsi de suite

car les αY_i sont $\leq x$ de proche en proche
il faut donc regarder les $(1-\alpha)X_i$

3) Donc $P(\max_{i\in[\![1,m]\!]}(Y_i) \leq y) = P(\max(Y_1, \max_{2\leq i\leq m}((1-\alpha)X_i) \leq y)$

$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} P(Y_1 \leq y) F_X(\frac{y}{1-\alpha})^{m-1}$

$= e^{-\frac{1}{y}} \times \exp(-\frac{(1-\alpha)}{y})^{m-1}$

$= \exp(-[1 + (m-1)(1-\alpha)]/y)$

$a_m = m$ et $b_m = 0$

$\Rightarrow P(\frac{1}{m}\max_{i\in[\![1,m]\!]}(Y_i) \leq y) = P(\max_{1\leq i\leq m}(Y_i) \leq my) \xrightarrow[m\to\infty]{} \exp(-\frac{(1-\alpha)}{y})$

4)

Exercice 5 :

Fréchet $(\alpha>0)$: $\phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ e^{-x^{-\alpha}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

Soient $X, X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \phi_\alpha$

1) $M_n = \max(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} x^F = \sup\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) < 1\} = +\infty$

2) $P(n^{-1/\alpha} M_n \le x) = P(M_n \le n^{1/\alpha} x)$

$= F_X(n^{1/\alpha} x)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ \exp(-(n^{1/\alpha} x)^{-\alpha})^n = \exp(-n \times n^{-1} x^{-\alpha}) & \text{si } x > 0 \end{cases}$

$= e^{-x^{-\alpha}}$

donc $\exists (a_n) > 0, b_n$ tq $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \phi_\alpha$

Donc ϕ_α est max stable.

Exercice 6 :

1) $\{X_{(k)} \le x\} = \{\forall j \in [\![k, n]\!], X_{(j)} \le x\}$

$= \{\sum_{j=k}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{(j)} > k\}} = 0\}$

$= \{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{(j)} > k\}} < k\} = \{B_n(x) < k\}$

2) $B_n(x) \sim \mathcal{B}(n, P(X_i > x))$ par $\perp\!\!\!\perp$ des $\mathbb{1}$

$\Rightarrow P(X_{(k)} \le x) = P(B_n(x) < k)$

$= \sum_{r=0}^{k-1} \binom{n}{r} \bar{F}(x)^r F(x)^{n-r}$

3) $\varphi_n(t, x) = \mathbb{E}[\exp(t B_n(x))]$

$= \sum_{r=0}^{n} \exp(tr) P(B_n(x) = r)$

$= \sum_{r=0}^{n} e^{tr} \binom{n}{r} F(x)^{n-r} (1 - F(x))^r$

$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} F(x)^{n-r} ((1 - F(x)) e^t)^r$

$= [\bar{F}(x) e^t + F(x)]^n$

4) $\exists u_n, \lim_{n\to\infty} n P(X_i > u_n) = \tau$

$\ln(\varphi_n(t, u_n)) = n \ln(\bar{F}(u_n) e^t + F(x))$

$= n \ln(1 + \bar{F}(u_n)(e^t - 1))$

$\bar{F}(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \ln(\varphi_n(t, u_n)) = \lim_{n\to\infty} n \bar{F}(u_n)(e^t - 1)$

$= \tau(e^t - 1)$

5) $N \sim \mathcal{P}(\tau)$

$\mathbb{E}[e^{tN}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{tn} e^{-\tau} \frac{\tau^n}{n!} = e^{-\tau} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^t \tau)^n}{n!} = e^{-\tau} e^{\tau e^t} = e^{\tau(e^t - 1)}$

6) $\exists (a_n)>0, (b_n)$ $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{(1)}-b_n}{a_n}\le x\right)=\Lambda(x)$

$\lim_{n\to\infty} P(X_{(1)}\le a_n x+b_n)=\Lambda(x)$

$= \lim_{n\to\infty} P(B_n(a_n x+b_n)=0)=\Lambda(x)$

$= e^{-\tau(x)}$ donc $\tau(x)=-\ln(\Lambda(x))$

$P(X_{(k)}\le a_n x+b_n) = P(B_n(a_n x+b_n)<k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\tau(x)}\frac{\tau(x)^k}{k!}$

et en particulier

$P(X_{(2)}\le a_n x+b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\tau(x)}-e^{-\tau(x)}\tau(x)$

$=\Lambda(x)[1-\ln(\Lambda(x))]$

Exercice 7:

1) $\bar{F}^{n-1}(X_1) = P(X>X_1)^{n-1} = P\left(\bigcap_{i=1}^{n-1}(X>X_i)\right)$

$= P(\forall i \in [\![1,n-1]\!], X>X_i)$

Les X_i sont $\perp$

$\bar{F}^{n-1}(X_n) = P(\max(X_i)<X)$

$= P\left(\max_{1\le i\le n-1}(X_i) < \max_{1\le i\le n-1}(X_i, X)\right)$

$= P(M_{n-1}<M_n)$

$= P(X_n = M_n)$

$= \frac{1}{n}$ car les X_i iid.

2) $P(X_L=y \mid X_1=x, L=k) = P(X_k>y \mid X_1=x, X_2<x, X_3<x, \dots, X_{k-1}<x, X_k>x)$

$= P(X_k>y \mid X_k>x)$ car X_i iid

$= \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)}$

Donc $P(X_L=y \mid X_1=x) = \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)}\sum_{k=2}^{\infty} P(L=k) = \frac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)}$

Exercice 8: $Y\sim GPD(\sigma,\xi)$

1)

Exercice 9:

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \Phi_1$

0) $\mathbb{P}(M_n^X \leq a_n x + b_n) = F(a_n x + b_n)^n$

$$= \exp\left(-\frac{n}{a_n x + b_n}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} \Phi_1(x) \quad \underline{\text{ssi}} \quad \begin{cases} a_n = n \\ b_n = 0 \end{cases}$$

1) $Y_n = \frac{1}{3} \max(X_n, X_{n+1}, X_{n+3})$

$$\mathbb{P}(Y_n \leq x) = \mathbb{P}(\max(X_n, X_{n+1}, X_{n+3}) \leq 3x)$$
$$= F(3x)^3 = \Phi_1(3x)^3$$
$$= e^{-\frac{1}{x}} = \Phi_1(x)$$
$$\Rightarrow Y_n \sim \Phi_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2) $M_n^Y = \max(Y_1, \dots, Y_n)$

$$\frac{M_n^Y - b_n}{a_n} = \frac{1}{n} M_n^Y$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n^Y - b_n}{a_n} \leq x\right) = \mathbb{P}(M_n^Y \leq nx)$$
$$= \Phi_1(nx)^n$$
$$= \Phi_1(x)$$

3) Les dynamiques du dépassem^t de seuil

$\left\{\frac{i}{n}, X_i > a_n x + b_n\right\}_{1 \leq i \leq n} = \left\{\frac{i}{n}; Y_i > a_n x + b_n\right\}_{1 \leq i \leq n}$ est une loi de Poisson $\left(\lim\limits_{n \to \infty} \bar{F}(u_n) = \tau\right)$

Exercice 10:

1) X_1 et X_2 sont deux variable positives

Pour $x > 0$, il est clair que $\{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\} \subset \{X_1 + X_2 > x\}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}((X_1 > x) \cup (X_2 > x)) \leq \mathbb{P}(X_1 + X_2 > x)$$

$X_1 \perp X_2$

$$\Rightarrow \mathbb{P}((X_1 > x) \cup (X_2 > x)) = \mathbb{P}(X_1 > x) + \mathbb{P}(X_2 > x)$$ X_1 et X_2 identiq^t distrib et distrib $\bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$
$$= 2\mathbb{P}(X_1 > x)$$

De +, $\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \geq \mathbb{P}(X_1 > x) + \mathbb{P}(X_2 > x) - \mathbb{P}((X_1 > x) \cap (X_2 > x))$

$$\geq \mathbb{P}(X_1 > x)(2 - \underbrace{\mathbb{P}(X_1 > x)}_{= o(1) \text{ lorsqu } x \to \infty})$$

2)