Gestion de portefeuille, Actuariat, mai 2019, durée 2h

Documents interdits, calculatrice autorisée

On reprend ici les notations utilisées en cours.

1. On considère un marché à deux actifs $A_1(\mu_1, \sigma_1)$ et $A_2(\mu_2, \sigma_2)$ avec $\mu_1 < \mu_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$ (avec μ_i le rendement espéré de l'actif A_i et σ_i son écart-type). Supposons que le coefficient de corrélation entre les rendements aléatoires de ces actifs est $\rho = 1$ et que les ventes à découvert sont interdites.
   (a) Considérons le portefeuille $P = (\alpha, 1-\alpha)'$. Quelle contrainte doit-on avoir sur α ? Ecrire le rendement espéré μ_P et la variance σ_P^2 du portefeuille P.
   (b) Ecrire un problème d'optimisation permettant de trouver le portefeuille le moins risqué sur ce marché. Déterminer ce portefeuille.
2. On considère un marché avec n actifs risqués. On s'intéresse aux portefeuilles optimaux au sens du critère espérance-variance ($\mathbb{E}(R_p) - \frac{k}{2}Var(R_p)$). Comme dans le cours, le vecteur des rendements espérés est μ et la matrice de variance-covariance des rendements est Σ.
   (a) Soit le portefeuille w. Rappeler quel est le rendement espéré et la variance de ce portefeuille (en fonction de μ, Σ et w).
   (b) Préciser quel est le problème d'optimisation selon le critère espérance-variance.
   (c) Quel est le portefeuille optimal ? Calculer également son rendement espéré.
3. Soit un marché avec 6 actifs A, B, C, D, E et F. Considérons les vues suivantes :
   -L'actif A sur-performera l'actif F de 2%. La confiance dans cette vue est de 25%.
   -L'actif B aura un rendement de 5%. L'agent est certain de cette vue.
   -L'action D sur-perfomera la somme de A et C de 3%. L'agent est incertain à 18% de cette vue.
   Ecrire P, q et Ω.
4. On se place sous les hypothèses du MEDAF. Vous disposez des informations suivantes :

Actif	r_f	μ_M	$\mu_i = \mathbb{E}(\tilde{R}_i)$	β_i
A	10%	20%	10%	
B	10%	30%		1.5
C	10%		20%	2

   Remplir le tableau (détailler tous vos calculs).
5. On considère deux portefeuilles A et B dont les rendements aléatoires sont décrits par les relations suivantes

$$\tilde{R}_A = \beta_{AF}F + \varepsilon_A$$
$$\tilde{R}_B = \beta_{BF}F + \varepsilon_B$$

   avec $F, \varepsilon_A, \varepsilon_B$ indépendants et $\beta_{iF} = \frac{cov(\tilde{R}_i, F)}{\sigma_F^2}$, $i = A, B$.
   (a) Construisez un portefeuille combinant A et B et de telle manière à ce que son exposition au facteur F soit nulle (i.e. non-corrélé avec le facteur).
   (b) Peut-on envisager une stratégie combinant les deux titres et permettant une meilleure réduction des risques ?

I. MODELE DE MARKOWITZ

1. *Marché à n actifs risqués :* $w^* = \frac{1}{BC-A^2}(B\Sigma^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} - A\Sigma^{-1}\mu) + \frac{1}{BC-A^2}(C\Sigma^{-1}\mu - A\Sigma^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n})\mu_{obj}$ où $A = \mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\mu,\ B = \mu'\Sigma^{-1}\mu$ et $C = \mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$.

   FE : $\sigma_p^2 = \frac{1}{BC-A^2}(C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B)$

   VM : $w_{VM} = \frac{1}{C}\Sigma^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$, $\mu_{VM} = \frac{A}{C}$ et $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{C}}$.

2. *Introduction de l'actif sans risque :* $w^* = \frac{\mu_{obj} - r_f}{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\Sigma^{-1}\pi$ où $\pi = \mu - r_f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$.

   FE : $\mu_p = \sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\,\sigma_p + r_f, \quad \mu_p \geq r_f$.

   Portefeuille du marché : $w_m = \frac{\mu_m - r_f}{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\Sigma^{-1}\pi$, $\mu_m = \frac{\mu'\Sigma^{-1}\pi}{\mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\pi}$, $\sigma_m = \frac{\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}}{\mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\pi}$.

II. MODELE DE BL

$P\tilde{\pi} = q + \epsilon$ où ϵ est une v.a. $\mathcal{N}(O_k, \Omega)$.

$\tilde{\pi}_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q] = \Pi + \tau\Sigma P'(\Omega + P\tau\Sigma P')^{-1}(q - P\Pi)$ et $w_{BL} = (k\Sigma)^{-1}\tilde{\pi}_{BL}$.

III. MEDAF

$CML:\quad \mu_P = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_P$ où P est un portefeuille efficient.

MEDAF général : $\mu_i = \lambda + \beta_i(\mu_M - \lambda)$ où $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ où i est un titre quelconque. Si l'on trace le graphe de cette relation dans le plan $[\beta_i,\ \mu_i]$ on obtien la SML.

MEDAF standard : $\mu_i = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f)$

MEDAF + modèle de marché : $\tilde{R}_i = r_f + \beta_i(\tilde{R}_M - r_f) + \varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i \approx \mathcal{N}(0, \sigma_{\varepsilon_i}^2)$

Ration Sharpe : $S = \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$

Ratio de Treynor : $T = \frac{\mu_P - r_f}{\beta_P}$

Indice de Jensen : $\alpha_P = \mu_P - r_f - \beta_P(\mu_M - r_f)$

APT à n facteurs $\tilde{R}_i = r_f + \sum_{k=1}^n \beta_{ki}(F_k - r_f) + \varepsilon_i = \mu_i + \sum_{k=1}^n \beta_{ki}(F_k - \mathbb{E}(F_k) + \varepsilon_i$ où β_{ki} est le beta entre le titre i et le facteur k, les facteurs F_k ne sont ni corrélés entre eux, ni corrélés avec ε_i

Exercice 1:

On suppose $p=1$

a) $P : (\alpha \ \ 1-\alpha)'$

Déjà on a $\alpha \in [0,1]$ car ventes à découvert non permises.

$$\mu_P = \mathbb{E}[\alpha A_1 + (1-\alpha) A_2] = \alpha \mu_1 + (1-\alpha)\mu_2$$

$$\sigma_P^2 = Var(\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2) = \alpha^2 \sigma_1^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_2^2 + 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2$$

$$= (\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2)^2$$

b) Port. le moins risqué tq $\min_{\alpha \in [0,1]} \sigma_P^2 = (\alpha\sigma_1 + (1-\alpha)\sigma_2)^2$

$$\longrightarrow \frac{\partial \sigma_P^2}{\partial \alpha} = 2\alpha\sigma_1^2 - 2(1-\alpha)\sigma_2^2 + 2\sigma_1\sigma_2 - 4\alpha\sigma_1\sigma_2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow 2\alpha(\sigma_1 - \sigma_2)^2 = 2\sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2$$

$$\Longrightarrow \alpha^* = \frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2}$$

On a bien $\alpha \in [0,1]$ car $\sigma_1 < \sigma_2$ donc respect de la contrainte.

Donc le port. le moins risqué est $P^* : \left(\frac{\sigma_2^2 - \sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1-\sigma_2)^2} \ \ \frac{\sigma_1^2 - \sigma_1\sigma_2}{(\sigma_1 - \sigma_2)^2} \right)'$

Exercice 2:

a) $\mu_P = \omega'\mu \longleftarrow$ Rendement espéré

$\sigma_P^2 = \omega'\Sigma\omega \longleftarrow$ Variance.

b) Le problème d'optimisation selon le critère espérance-Variance est :

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}^n} \ \omega'\mu - \frac{k}{2}\omega'\Sigma\omega$$
$$s.c \ \ \omega' 1_{\mathbb{R}^n} = 1$$

c) Le lagrangien du pb est : $\mathcal{L}(\omega, \lambda) = \omega'\mu - \frac{k}{2}\omega'\Sigma\omega - \lambda(1 - \omega' 1_{\mathbb{R}^n})$

$$\nabla_\omega \mathcal{L}(\omega,\lambda) = 0 \Longleftrightarrow \mu - k\Sigma\omega + \lambda 1_{\mathbb{R}^n} = 0 \Longleftrightarrow \omega = (k\Sigma)^{-1}(\mu + \lambda 1_{\mathbb{R}^n}) \ *$$

$$\nabla_\lambda \mathcal{L}(\omega,\lambda)=0 \iff 1-\omega' 1_{\mathbb{R}^m}=0$$

$$\overset{*}{\Longrightarrow} \left(\lambda 1'_{\mathbb{R}^m}+\mu'\right)(k\Sigma)^{-1}1_{\mathbb{R}^m}=1$$

$$\Longrightarrow \left(\lambda + \mu' 1_{\mathbb{R}^m}\right)(k\Sigma)^{-1}=1$$

Exercice 3 :

$$P=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 0 & -1/2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad q=\begin{pmatrix} 2\% \\ 5\% \\ 3\% \end{pmatrix} \quad \Omega=\begin{pmatrix} 75\% & & \\ & 0\% & \\ & & 18\% \end{pmatrix}$$

Exercice 4 :

Actif	r_f	μ_M	$\mu_i=\mathbb{E}[\tilde R_i]$	β_i
A	10%	20%	10%	0
B	10%	30%	40%	1,5
C	10%	15%	20%	2

Nous sommes sous les hypothèses du MEDAF (i.e $\mu_i = r_f+\beta_i(\mu_M-r_f)$)

$$* \ \mu_B = r_f + \beta_B(\mu_M^B - r_f) = 0,1+1,5(0,3-0,1) = 0,4 = 40\%$$

$$* \ \beta_A = \frac{\mu_A - r_f}{\mu_M^A - r_f} = \frac{0,1-0,1}{0,3-0,1} = 0$$

$$* \ \mu_M^C = \frac{1}{\beta_C}(\mu_C - r_f)+r_f = \frac{1}{2}(0,2-0,1)+0,1 = 0,15 = 15\%$$

Exercice 5 :

$\tilde R_A = \beta_{AF}F+\varepsilon_A \qquad \tilde R_B=\beta_{BF}F+\varepsilon_B \qquad F \perp\!\!\!\perp \varepsilon_A \perp\!\!\!\perp \varepsilon_B$ et $\beta_{iF} = \frac{Cov(\tilde R_i,F)}{\sigma_F^2} \quad i\in\{A,B\}$

a) On cherche ω tq $Cov(\omega \tilde R_A+(1-\omega)\tilde R_B;F)=0$

$$\iff \omega\, Cov(\tilde R_A;F)+(1-\omega)\,Cov(\tilde R_B;F)=0$$

$$\iff \omega \beta_{AF}\sigma_F^2 + (1-\omega)\beta_{BF}\sigma_F^2=0$$

Donc $\omega(\beta_{AF}-\beta_{BF}) = -\beta_{BF} \Longrightarrow \omega = \frac{\beta_{BF}}{\beta_{BF}-\beta_{AF}}$

Donc le portefeuille serait : $\left(\frac{\beta_{BF}}{\beta_{BF}-\beta_{AF}} ; \frac{\beta_{AF}}{\beta_{BF}-\beta_{AF}}\right)$

b)