Chapitre 1 : Différents types de taux d'intérêt

- Taux simple $C \mapsto C(1+r\tau)$
- Taux continu $C \mapsto Ce^{r\tau}$
- Taux d'intérêt simplement composé : $L(t,T) = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{B_t(T)} - 1\right)$
- Taux d'intérêt continument composé $R(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln B_t(T)$
- Zero-coupon Forward $B_t(T,S) = \frac{B_t(S)}{B_t(T)}$ Prix que je fixe en t et que je paye en T pour recevoir 1€ en S
- Taux d'intérêt forward $L(t,T,S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{B_t(T)}{B_t(S)} - 1\right)$
- Taux d'intérêt forward instantané $f(t,T) = -\partial_T \ln B_t(T) \iff B_t(T) = e^{-\int_t^T f(t,u)\,du}$

Rq [1] Taux d'intérêt forward $\Rightarrow$ modélisation HJM
[2] $r_t = f(t,t)$: Taux court $\Rightarrow$ Vasicek, CIR...

Chapitre 2 : Produits dérivés de taux

[1] Forward Rate Agreement

[1] Payoff du FRA $N \times (S-T) \times (L(T,S) - K)$ payé en S

[2] Prix du FRA $\boxed{\pi^{FRA}(t,T,S,K,N) = N B_t(S)(S-T)\left(L(t,T,S) - K\right)}$

[3] Taux Forward du FRA Le taux FRA à l'instant t, noté K_t est défini comme la valeur du taux fixe K qui annule le prix du FRA en $t \Rightarrow \boxed{K_t = L(t,T,S)}$

[2] Swap de taux d'intérêt

- Jambe fixe : À chaque date T_i, le montant $N \times (T_i - T_{i-1}) \times R$ est payé
- Jambe variable : À chaque date T_i, le montant $N \times (T_i - T_{i-1}) \times L(T_{i-1}, T_i)$ est payé

[1] Prix du swap : $\pi^{sw}(t, T_0, T_m, R, N) = \sum_{i=1}^{m} \pi^{FRA}(t, T_{i-1}, T_i, R, N) = \sum_{i=1}^{m} N B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})\left(L(t, T_{i-1}, T_i) - R\right)$

Flux de la jambe variable : $N \sum_{i=1}^{m} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})\, L(t, T_{i-1}, T_i) = N \sum_{i=1}^{m} \left(B_t(T_{i-1}) - B_t(T_i)\right) = N\left(B_t(T_0) - B_t(T_m)\right)$

$$\Rightarrow \boxed{\pi^{sw}(t, T_0, T_m, R, N) = N\left(B_t(T_0) - B_t(T_m) - \sum_{i=1}^{m} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1}) R\right)}$$

[2] Taux swap : Le taux swap à l'instant t, noté $S(t) = S(t, T_0, T_m)$ est défini comme la valeur du taux fixe R qui annule le prix du swap en t.

$$\Rightarrow \boxed{S(t, T_0, T_m) = \frac{B_t(T_0) - B_t(T_m)}{\sum_{i=1}^{m} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})}}$$

[3] Autre expression du prix du swap
$$\boxed{\pi^{sw}(t, T_0, T_m, R, N) = N\, LVL(t)\,(S(t) - R) \quad \text{où } LVL(t) = \sum_{i=1}^{m} B_t(T_i)(T_i - T_{i-1})}$$

Rq : Un swap payeur voit sa valeur augmenter si le marché des taux monte et diminuer s'il baisse.

3 Cap et Floor

- Un cap permet de s'assurer contre une hausse des taux ⇒ chaîne de caplet
- Un floor permet de s'assurer contre une baisse des taux ⇒ chaîne de floorlet

1 Définition du cap : À chaque date T_i : $N \times (T_i - T_{i-1})(L(T_{i-1}, T_i) - K)^+$

Un caplet est donc une option call avec le taux d'intérêt variable comme sous jacent

2 Parité Caplet-Floorlet : $\boxed{\Pi^{Caplet}(t, T, T+\delta, K, 1) - \Pi^{Floorlet}(t, T, T+\delta, K, 1) = \Pi^{FRA}(t, T, T+\delta, K, 1)}$

3 Parité Cap-Floor : $\boxed{\Pi^{Cap}(t, T_0, T_m, K, 1) - \Pi^{Floor}(t, T_0, T_m, K, 1) = \Pi^{sw}(t, T_0, T_m, K, 1)}$

4 Définition (ATM) : Le cap et le floor sont à la monnaie s'ils ont la même valeur $\Leftrightarrow$ $\boxed{K_{ATM} = S(t, T_0, T_m)}$

5 Transformation des payoff des caplets : On considère un caplet d'échéance $T+\delta$ sur un taux simplement composé $L(T, T+\delta)$ fixé en T pour la période $T+\delta$

$$\delta(L(T,\delta) - K)^+ \text{ payé en } T+\delta \Leftrightarrow \delta\left(\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{B_T(T+\delta)} - 1\right) - K\right)^+ \text{ payé en } T+\delta$$

$$\Leftrightarrow \left(\underbrace{\frac{1}{B_T(T+\delta)}}_{\mathcal{F}_T\text{-mesurable}} - (1+\delta K)\right)^+ \text{ payé en } T+\delta$$

$$\Leftrightarrow B_T(T+\delta)\left(\frac{1}{B_T(T+\delta)} - \tilde{K}\right)^+ \text{ payé en } T$$

$$\Leftrightarrow \tilde{K}\left(\frac{1}{\tilde{K}} - B_T(T+\delta)\right)^+ \text{ payé en } T$$

$\boxed{\Rightarrow \text{Payoff du caplet } \delta(L(T,T+\delta) - K)^+ \text{ payé en } T+\delta \Leftrightarrow \text{pay-off de } \tilde{K} \text{ options put d'échéance } T \text{ et de strike } \frac{1}{\tilde{K}} \text{ sur le ZC } B_T(T+\delta)}$

4 Swaption

1 Définition Une swaption est une option dont l'actif sous-jacent est un swap de taux d'intérêt commençant à une date future. Une swaption permet de rentrer dans un swap à une date T et à un taux fixe R, fixé à l'avance.

2 Pay-off de la swaption : Swaption d'échéance T_0, son payoff à l'échéance est donnée par

$$\boxed{N\left(\sum_{i=1}^{m} B_{T_0}(T_i)(T_i - T_{i-1})(L(T_0, T_{i-1}, T_i) - R)\right)^+}$$

$$\Leftrightarrow N\left(B_{T_0}(T_0) - B_{T_0}(T_m) - \sum_{i=1}^{m} B_{T_0}(T_i)(T_i - T_{i-1})R\right)^+$$

$$\Leftrightarrow \boxed{N\left(1 - \sum_{i=1}^{m} c_i\, B_{T_0}(T_i)\right)^+ \text{ où } \begin{array}{l} c_i = (T_i - T_{i-1})R \\ c_m = 1 + (T_m - T_{m-1})R \end{array}}$$

Le payoff de la swaption est donc équivalent au payoff d'une option put de strike 1 et d'échéance T_0 sur une obligation avec des coupons c_i

Chapitre 3 : Changement de numéraire

Numéraire = Actif financier ne distribuant pas de dividendes et dont le processus de prix est strictement positif.

Probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$: Numéraire $= B_t = e^{\int_0^t r_u du}$ $\Rightarrow$ Sous $\mathbb{Q}$, le processus actualisé du prix ZC $\left(\frac{B_t(T)}{B_t}\right)_{t\leq T}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale

Probabilité Forward $\mathbb{Q}^T$: Numéraire $\Rightarrow$ ZC d'échéance T

- $$\left.\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_T} = \frac{B_T(T)}{B_0(T)\,B_T} = \frac{1}{B_0(T)} e^{-\int_0^T r_u du}$$

- $$\left.\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B_T(T)}{B_0(T)B_T}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right] = \frac{B_t(T)}{B_0(T)\,B_t}$$

- Pour chaque échéance S, le prix du ZC d'échéance S actualisé par le ZC d'échéance T : $\left(\frac{B_t(S)}{B_t(T)}\right)_t$ est une $\mathbb{Q}^T$-martingale

ZC forward : $B_t(T,S)$

- $$\left.\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}^T}\right|_{\mathcal{F}_t} = \left.\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} \times \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{Q}^T}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B_t(S)}{B_0(S)B_t} \times \frac{B_0(T)B_t}{B_t(T)} = \frac{B_t(S)\,B_0(T)}{B_t(T)\,B_0(S)}$$

Formule de Bayes Soient $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$ deux probabilités équivalentes : $\left.\frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{Q}_1}\right|_{\mathcal{F}_t} := Z_t$. $(Z_t)_{t\geq 0}$ is a $\mathbb{Q}_1$-martingale

Alors $\forall t \geq s$, $$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}[X|\mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[XZ_t|\mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[Z_t|\mathcal{F}_s]} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[XZ_t|\mathcal{F}_s]}{Z_s} \iff \boxed{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[XZ_t|\mathcal{F}_s] = Z_s\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}[X|\mathcal{F}_s]}$$

Pricing sous la probabilité forward $$\boxed{\pi^X(t) = B_t(T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[X|\mathcal{F}_t]}$$

Chapitre 4 : Modèle de taux court

Rq : $B_t(T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du}\,\middle|\,\mathcal{F}_t\right]$

① Modèle de Vasicek

1 Le modèle
$dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$

- $k(\theta - r_t)$: effet de retour à la moyenne
- θ : moyenne de long terme
- k : vitesse de retour à la moyenne
- σ : volatilité du taux court

2 Solution
$$\forall 0\leq s\leq t,\quad \boxed{r_t = r_s e^{-k(t-s)} + \theta\left(1 - e^{-k(t-s)}\right) + \sigma\int_s^t e^{-k(t-u)}dW_u}$$

3 Moments
$$\boxed{\begin{aligned}\mathbb{E}[r_t|\mathcal{F}_s] &= r_s e^{-k(t-s)} + \theta\left(1-e^{-k(t-s)}\right)\\ \mathrm{Var}(r_t|\mathcal{F}_s) &= \frac{\sigma^2}{2k}\left(1-e^{-2k(t-s)}\right)\end{aligned}}$$

- $\lim_{t\to+\infty} \mathbb{E}[r_t] = \theta$
- $\lim_{t\to+\infty} \mathrm{Var}(r_t) = \frac{\sigma^2}{2k}$

4 Loi de $I_{t,T} := \int_t^T r_u du$
$$\boxed{I_{t,T} = \theta(T-t) + (r_t - \theta)\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k} + \sigma\int_t^T \frac{1-e^{-k(T-u)}}{k}dW_u}$$

$\Rightarrow$ la variable aléatoire $I_{t,T} = \int_t^T r_u du$ conditionnellement à $\mathcal{F}_t$ est gaussienne de moyenne et variance donnée par

$\cdot \mathbb{E}\left[\int_t^T r_u du \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \theta(T-t) + (r_t - \theta)\dfrac{1-e^{-k(T-t)}}{k}$

$\cdot \mathrm{Var}\left(\int_t^T r_u du \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) = \dfrac{\sigma^2}{k^2}\left((T-t) - 2\dfrac{1-e^{-k(T-t)}}{k} + \dfrac{1-e^{-2k(T-t)}}{2k}\right)$

$\boxed{5}$ Prix du ZC : $\boxed{B_t(T) = e^{m(t,T) - m(t,T) r_t}}$ avec $m(t,T)$ et $m(t,T)$ des fonctions déterministes $\Rightarrow$ modèle à structure affine

$\boxed{6}$ Dynamique du prix ZC : $dB_t(T) = B_t(T)\left(r_t dt - \sigma\dfrac{1-e^{-k(T-t)}}{k} dW_t\right)$

$\boxed{7}$ Prix d'une option put sur ZC : Put d'échéance T sur un ZC d'échéance $S \Rightarrow H_T = (B_T(S) - K)^+$

$\Pi_{put}(0,T,S,K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_u du}(K - B_T(S))^+\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_u du}(K - B_T(S))\mathbb{1}_{K \geq B_T(S)}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[K e^{-\int_0^T r_u du}\mathbb{1}_{r_T \geq r^*}\right] - \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_u du} B_T(S)\mathbb{1}_{r_T \geq r^*}\right]$

$B_T(S) = e^{m(T,S) - m(T,S) r_T} \geq K \Leftrightarrow m(T,S) - m(T,S) r_T \geq \ln(K) \Leftrightarrow r_T \leq \dfrac{1}{m(t,T)}\left(m(T,S) - \ln(K)\right) := r^*$

$E_1 := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[K e^{-\int_0^T r_u du}\mathbb{1}_{r_T \geq r^*}\right] = K B_0(T)\, \mathbb{Q}^T(r_T \geq r^*)$

$E_2 := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^T r_u du} B_T(S)\mathbb{1}_{r_T \geq r^*}\right] = B_0(S)\, \mathbb{Q}^S(r_T \geq r^*)$

$\left.\dfrac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_T} = \dfrac{B_T(S)}{B_0(S) B_T}$

D'où $\boxed{\Pi_{put}(0,T,S,K) = K B_0(T)\mathbb{Q}^T(r_T \geq r^*) - B_0(S)\mathbb{Q}^S(r_T \geq r^*)}$

$\boxed{8}$ Pricing d'un caplet Utiliser la transformation du pay-off d'un caplet en pay off d'une option put

$\Rightarrow \boxed{\Pi_{caplet}(0,T,T+\delta,K) = \tilde{K}\,\Pi^{Put}\left(0,T,T+\delta,\dfrac{1}{\tilde{K}}\right)}$

② Modèle de Hull-White

$\boxed{1}$ Le modèle : $\boxed{dr_t = (\theta(t) - k r_t)dt + \sigma dW_t}$
$\cdot\ \theta(t)$ fonction déterministe du temps

$\boxed{2}$ Objectifs du modèle Déterminer $\theta(\cdot)$ pour avoir une calibration parfaite des prix observés sur le marché : $B_0(T) = \hat{B}_0(T),\ \forall T \geq 0$

Rq : Le modèle de Hull-White est aussi un modèle à structure affine i.e $B_t(T) = e^{m(t,T) - m(t,T) r_t}$

Le modèle de HW reproduit la courbe initiale des prix ZC $\Leftrightarrow$ $\boxed{\theta(t) = \partial_t \hat{f}(0,t) + k\hat{f}(0,t) + \dfrac{\sigma^2}{2k}\left(1 - e^{-2kt}\right)}$

$\boxed{3}$ Résumé :

- Taux court gaussien $\Rightarrow r_t$ peut prendre des valeurs positives ou négative
- Distributions facile à manipuler + Formules explicites pour les taux / obligations ZC
- Calibration à la courbe initiale des prix ZC

④ CIR

I Modèle $\boxed{dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t}$

- Si $r_0 > 0$ et $2k\theta \geq \sigma^2$ (condition de Feller) alors $r > 0$

⑤ Modèle avec shift déterministe

I Le modèle

$$\boxed{\begin{aligned} dx_t^d &= \mu^d(t, x_t^d)dt + \sigma^d(t, x_t^d)dW_t \\ r_t &= x_t^d + \underbrace{\varphi(t,d)} \end{aligned}}$$

Fonction déterministe qui va permettre la calibration à la courbe initiale des taux ZC observés sur le marché

2 Exemple (CIR++)

$$\boxed{\begin{aligned} dx_t &= k(\theta - x_t)dt + \sigma\sqrt{x_t}\,dW_t \\ r_t &= x_t + \varphi(t) \end{aligned}}$$

⑥ Modèle affine à 1 facteur

I Le modèle :

$$\boxed{\begin{aligned} dr_t &= \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t \\ \mu(t, r) &= b(t) + \beta(t)r \\ \sigma(t, r)^2 &= a(t) + \alpha(t)r \end{aligned}}$$

Chapitre 5 : Modèle de HJM

Point de départ = Courbe des prix ZC observés sur le marché. On modélise simultanément les prix ZC / taux forward instantanés pour toute échéance T.

I Le modèle

$$\boxed{\begin{aligned} df(t,T) &= \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW_t \\ dB_t(T) &= B_t(T)\left(\left(r_t - A(t,T) + \frac{1}{2}\|\Sigma(t,T)\|^2\right)dt - \Sigma(t,T)dW_t\right) \end{aligned}}$$

où

$$\boxed{\begin{aligned} A(t,T) &= \int_t^T \alpha(t,u)\,du \\ \Sigma(t,T) &= \int_t^T \sigma(t,u)\,du \end{aligned}}$$

2 Condition de drift de HJM $\boxed{AOA \iff A(t,T) = \frac{1}{2}\|\Sigma(t,T)\|^2}$

$\Rightarrow$ En dérivant par rapport à T : $\boxed{\alpha(t,T) = \langle \sigma(t,T), \Sigma(t,T) \rangle}$ Condition de drift du taux forward

3 Modèle avec condition de drift

$$\boxed{\begin{aligned} df(t,T) &= \langle \sigma(t,T), \Sigma(t,T) \rangle dt + \sigma(t,T)dW_t \\ dB_t(T) &= B_t(T)\left(r_t\,dt - \Sigma(t,T)dW_t\right) \end{aligned}}$$

4 Expression des prix ZC

$$\boxed{B_t(T) = B_0(T)\exp\left(\int_0^t \left(r_u - \frac{1}{2}\|\Sigma(u,T)\|^2\right)du - \int_0^t \Sigma(u,T)dW_u\right)}$$

Rq : On peut éliminer le taux court dans l'expression précédente : $B_t(t) = 1 = B_0(t)\exp\left(\int_0^t \left(r_u - \frac{1}{2}\|\Sigma(u,t)\|^2\right)du - \int_0^t \Sigma(u,t)dW_u\right)$

$$\Rightarrow \boxed{B_t(T) = \frac{B_0(T)}{B_0(t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\|\Sigma(u,T)\|^2 - \|\Sigma(u,t)\|^2\right)du - \int_0^t \left(\Sigma(u,T) - \Sigma(u,t)\right)dW_u\right)}$$

6 Expression de la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$

- $\left.\dfrac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \dfrac{B_t(T)}{B_0(T)\, B_t} = \exp\left(-\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \|\Sigma(u,T)\|^2 du - \int_0^t \Sigma(u,T)\cdot dW_u\right)$
- $W_t^{\mathbb{Q}^T} = W_t^{\mathbb{Q}} + \displaystyle\int_0^t \Sigma(u,T)du$ est un MB sous $\mathbb{Q}^T$

7 Expression des prix ZC Forward

$$B_t(T,S) = \frac{B_t(S)}{B_t(T)} = \frac{B_0(S)}{B_0(T)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \|\Sigma(u,T,S)\|^2 du - \int_0^t \Sigma(u,T,S)\cdot dW_u^{\mathbb{Q}^T}\right)$$

$$\Sigma(u,T,S) := \Sigma(u,S) - \Sigma(u,T) = \int_T^S \sigma(u,v)\,dv$$

7 Pricing d'un Call sur un ZC : Call d'échéance T sur un ZC d'échéance S

- Payoff : $H_T = (B_T(S) - K)^+$

$$\Pi_t^{Call}(T,S,K) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_u du}(B_T(S)-K)^+ \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$= B_t(T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[(B_T(S)-K)^+ \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

Problème : $B_T(S)$ n'est pas une martingale sous $\mathbb{Q}^T$

$$= B_t(T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\left(\frac{B_T(S)}{B_T(T)} - K\right)^+ \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

Astuce : Introduire le ZC forward qui, lui, est une $\mathbb{Q}^T$-martingale

$$= B_t(T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[(B_T(T,S) - K)^+ \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$= B_t(T)\left(\frac{B_t(S)}{B_t(T)} N(d_1) - K N(d_2)\right)$$

$$\boxed{\Pi_t^{Call}(T,S,K) = B_t(S)\,N(d_1) - K\,B_t(T)\,N(d_2)}$$

où

$$\boxed{d_{1,2} = \frac{\ln\left(\dfrac{B_t(S)}{K B_t(T)}\right) \pm \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^t \|\Sigma(u,T,S)\|^2 du}{\sqrt{\displaystyle\int_t^T \|\Sigma(u,T,S)\|^2 du}}}$$

8 Cas particulier du cadre HJM

HJM recouvre un grand nombre de modèles, chacun d'entre eux étant associé à une forme spécifique de la volatilité du taux forward $\sigma(\cdot,\cdot)$

1 Modèle de Ho-Lee

1 Volatilité de type Ho-Lee : $\boxed{\sigma(t,T) = \sigma}$: Vol constante du taux forward

$\Rightarrow \Sigma(t,T) = \displaystyle\int_t^T \sigma(t,u)du = \sigma(T-t)$ Vol du prix ZC $\Rightarrow \langle \Sigma(t,T), \sigma(t,T)\rangle = \sigma^2(T-t)$

2 Expression du taux forward : $\boxed{f(t,T) = f(0,T) + \displaystyle\int_0^t \sigma^2(T-u)du + \sigma W_t}$

3 Expression du taux court : $\boxed{r_t = f(t,t) = f(0,t) + \dfrac{1}{2}\sigma^2 t^2 + \sigma W_t}$

4 Dynamique du taux court : $\boxed{dr_t = \left(\partial_t \hat{f}(0,t) + \sigma^2 t\right) dt + \sigma\, dW_t = \theta(t)\, dt + \sigma\, dW_t}$

② Modèle de Vasicek

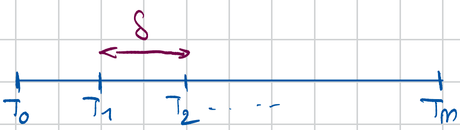
1 Volatilité de type Vasicek : $\boxed{\sigma(t) = \sigma e^{a(T-t)}}$ Vol du taux forward

$$\Rightarrow \Sigma(t,T) = \int_t^T \sigma(t,v)\,dv = \sigma \int_t^T e^{a(v-t)}\,dv \Leftarrow \boxed{\Sigma(t,T) = \frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right)}$$ Vol du prix ZC

2 Taux forward : $f(t,T) = \hat{f}(0,T) + \int_0^t \frac{\sigma^2}{a^2} e^{-a(T-v)}\left(1 - e^{a(T-v)}\right) dv + \int_0^t \sigma e^{-a(T-v)}\, dW_v$

3 Taux court : $r_t = m(t) + \sigma \int_0^t e^{-a(T-v)}\, dW_v$ où $m(t) = \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - e^{-at}\right)^2$

9 Pricing des swaptions - Décomposition de Jamshidian



- We consider a swap defined on this set of dates and a related swaption with exercise date $T = T_0$ and strike rate R
- Payoff de la swaption : $\left(\Pi_{swap}(T_0, T_0, T_m, R)\right)^+ = \left(1 - B_{T_0}(T_m) - R\delta \sum_{k=1}^m B_{T_0}(T_k)\right)^+ = \left(1 - \sum_{k=1}^m c_k B_{T_0}(T_k)\right)^+$ où $c_k = \delta R,\ k = 1,..,m-1$; $c_m = 1 + \delta R$

$\Rightarrow$ To price a swaption, it is enough to know how to price put options on coupon-bearing bonds

- We now consider a put option with exercise date T_0 and strike R on this coupon bearing bond $\Rightarrow$ Payoff at T_0 : $\left(K - \sum_{k=1}^m c_k B_{T_0}(T_k)\right)^+$
- Gaussian HJM model : $B_t(T) = \frac{B_0(T)}{B_0(t)} \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\|\Sigma(v,T)\|^2 - \|\Sigma(v,t)\|^2\right) dv - \int_0^t \left(\Sigma(v,T) - \Sigma(v,t)\right) dW_v\right)$

$\Rightarrow$ one can write $\boxed{B_t(T) = \exp\left(\mu(t,T) + Y_t^T\right)}$

- $\mu(t,T) = \ln B_0(T) - \ln B_0(t) - \frac{1}{2}\int_0^t \left(\|\Sigma(v,T)\|^2 - \|\Sigma(v,t)\|^2\right) dv$
- $Y_t^T = -\int_0^t \left(\Sigma(v,T) - \Sigma(v,t)\right) dW_v$

$\Rightarrow B_t(T)$ is a Gaussian random variable

- Using the $\mathbb{Q}^{T_0}$ forward measure $\Rightarrow$ $\boxed{\Pi_{put}(t, T_0, K) = B_t(T_0)\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_0}}\left[\left(K - \sum_{k=1}^m c_k e^{\mu(T_0,T_k) + Y_{T_0}^{T_k}}\right)^+ \Big| \mathcal{F}_t\right]}$

1 Assumption 1 (Separable volatility assumption) : $\boxed{\sigma(t,T) = \xi(t)\psi(T)}$ vol of the forward rate

Hence • $\Sigma(v,T) - \Sigma(v,t) = \int_t^T \sigma(v,u)\,du = \int_t^T \xi(v)\psi(u)\,du = \xi(v)\int_t^T \psi(u)\,du := \xi(v)\,\psi(t,T)$

• $Y_t^T = -\int_0^t \left(\Sigma(v,T) - \Sigma(v,t)\right) dW_v = -\int_0^t \xi(v)\psi(t,T)\, dW_v = -\psi(t,T)\underbrace{\int_0^t \xi(v)\, dW_v}_{\text{Gaussian r.v which does not depend on } T} := -\psi(t,T)\, Y_t$

Hence we obtain : $\boxed{B_t(T) = \exp\left(\mu(t,T) - \varphi(t,T) Y_t\right)}$

and $\quad \Pi_{put,\{c_k\}}(t,T_0,K) = B_t(T_0)\, \mathbb{E}^{Q^{T_0}}\left[\left(K - \sum_{k=1}^{m} c_k\, e^{\mu(T_0,T_k) - \varphi(T_0,T_k) Y_{T_0}}\right)^+ \Big| \mathcal{F}_t\right]$

This integral is calculated with respect to the probability law of only one random variable Y_{T_0} => the dimension of integration is reduced to 1.

Define $f(y) = \sum_{k=1}^{m} c_k\, e^{\mu(T_0,T_k) - \varphi(T_0,T_k) y}$ and assume that $\varphi(t,T) > 0 \quad \forall t,T$

- f is continuous and strictly decreasing
- $\lim_{y \to +\infty} f(y) = 0$ and $\lim_{y \to -\infty} f(y) = +\infty$

$\Rightarrow \exists!\, \bar{y}$ such that $f(\bar{y}) = K \Rightarrow f(y) \leq K \Leftrightarrow f(y) \leq f(\bar{y}) \Leftrightarrow y \geq \bar{y}$

Hence $\boxed{\left(K - \sum_{k=1}^{m} c_k\, e^{\mu(T_0,T_m) - \varphi(T_0,T_m) y}\right)^+ = \left(K - \sum_{k=1}^{m} c_k\, e^{\mu(T_0,T_m) - \varphi(T_0,T_k) y}\right) \mathbb{1}_{y \geq \bar{y}}}$

Lets define for each $k = 1,..,m$, $g_k(y) = c_k\, e^{\mu(T_0,T_m) - \varphi(T_0,T_m) y}$ and $K_k = c_k\, e^{\mu(T_0,T_m) - \varphi(T_0,T_m)\bar{y}}$

We note that $\sum_{k=1}^{m} K_k = K$.

As above each function g_k is continuous and st. decreasing in $y \Rightarrow g_k(y) \leq K_k \Leftrightarrow g_k(y) \leq g_k(\bar{y}) \Leftrightarrow y \geq \bar{y}$

Hence we finally obtain that

$$\left(K - \sum_{k=1}^{m} c_k\, e^{\mu(T_0,T_m) - \varphi(T_0,T_m) y}\right)^+ = \left(K - \sum_{k=1}^{m} c_k\, e^{\mu(T_0,T_k) - \varphi(T_0,T_k) y}\right) \mathbb{1}_{y \geq \bar{y}}$$

$$= \left(\sum_{k=1}^{m} K_k - \sum_{k=1}^{m} c_k\, e^{\mu(T_0,T_k) - \varphi(T_0,T_k) y}\right) \mathbb{1}_{y \geq \bar{y}}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left(K_k - c_k\, e^{\mu(T_0,T_k) - \varphi(T_0,T_k) y}\right) \mathbb{1}_{y \geq \bar{y}}$$

$$\boxed{\left(K - \sum_{k=1}^{m} c_k\, e^{\mu(T_0,T_m) - \varphi(T_0,T_m) y}\right)^+ = \sum_{k=1}^{m} \left(K_k - c_k\, e^{\mu(T_0,T_k) - \varphi(T_0,T_k) y}\right)^+}$$

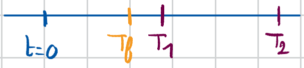
The payoff of a put options with strike K on a coupon-bearing bond can be written as a sum of payoff put options with strike K on a zero-coupon bond with maturity T_k

Remark : To use the Jamshidian decomposition, the bond prices must be written as exponentially-affine functions
-> in all affine short rate models we have that $B_t(T) = \exp\left(m(t,T) - n(t,T) r_t\right)$

Chapitre 6 : Ajustement de convexité

Définition : Ajustement de convexité $\Leftrightarrow$ dès qu'un taux de référence sera payé d'une façon non standard

1 FRA standard vs in arrear



- **FRA :** Paye $L(T_f,T_1,T_2)-R_A$ en T_2 $\rightarrow L(t,T_1,T_2)$ est une martingale sous $\mathbb{Q}^{T_2}$
- **FRA in arrear :** Paye $L(T_f,T_1,T_2)-R_B$ en T_1 $\rightarrow L(t,T_1,T_2)$ n'est pas une martingale sous $\mathbb{Q}^{T_1}$

Pour qu'il n'y ait pas d'arbitrage, il faut que $R_B > R_A \Rightarrow$ C'est ce qu'on appelle un ajustement de convexité

Calcul de R_B dans le cas d'un FRA in arrear :

$$0 = B(t,T_1)\,\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{T_1}}\left[\left(L(T_f,T_1,T_2)-R_B\right)\right] \Leftrightarrow R_B = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_1}}\left[L(T_f,T_1,T_2)\mid\mathcal{F}_t\right],\quad L(T_f,T_1,T_2)=\frac{1}{T_2-T_1}\left(\frac{B(T_f,T_1)}{B(T_f,T_2)}-1\right)$$

Idée : Changer de numéraire et passer de $\mathbb{Q}^{T_1}$ à $\mathbb{Q}^{T_2}$: $M_t\,\mathbb{E}^M\left[\frac{G}{M_T}\mid\mathcal{F}_t\right]=N_t\,\mathbb{E}^N\left[\frac{G}{N_T}\mid\mathcal{F}_t\right]$

$$R_B=\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_1}}\left[L(T_f,T_1,T_2)\mid\mathcal{F}_t\right]=\frac{B(t,T_1)}{B(t,T_1)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_1}}\left[\frac{L(T_f,T_1,T_2)\,B(T_f,T_1)}{B(T_f,T_1)}\mid\mathcal{F}_t\right]$$

$$=\frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_2}}\left[\frac{L(T_f,T_1,T_2)\,B(T_f,T_1)}{B(T_f,T_2)}\mid\mathcal{F}_t\right]$$

$$=\frac{1}{1+\delta L(t,T_1,T_2)}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_2}}\left[L(T_f,T_1,T_2)\left(1+\delta L(T_f,T_1,T_2)\right)\mid\mathcal{F}_t\right]$$

$$=\frac{L(t,T_1,T_2)+\delta\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_2}}\left[L(T_f,T_1,T_2)^2\mid\mathcal{F}_t\right]}{1+\delta L(t,T_1,T_2)}$$

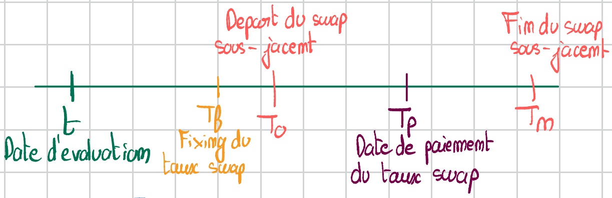
Ajustement de convexité

Rq : Par Jensen $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_2}}\left[\left(L(T_f,T_1,T_2)\right)^2\mid\mathcal{F}_t\right]\geq\left(\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_2}}\left[L(T_f,T_1,T_2)\mid\mathcal{F}_t\right]\right)^2=L(t,T_1,T_2)^2 \Rightarrow \boxed{R_B \geq L(t,T_1,T_2)=R_A}$

2 Swaps CMS

Définition : On parle de produit CMS lorsqu'un produit dépend de fixings futurs d'un ou plusieurs taux swap.

Exemple : la jambe variable paye tous les 6 mois le taux swap 10 ans fixé deux jours ouvrés avant le début de la période d'intérêt correspondante $\Leftrightarrow$ le taux Libor est remplacé par le taux swap 10 ans



$$PV_{CMS}(t)=B(t,T_p)\,\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{T_p}}\left[S(T_f,T_0,T_m)\right]$$

⚠ $S(t)=\frac{B(t,T_0)-B(t,T_m)}{LVL(t)}$ est une $\mathbb{Q}^{LVL}$ martingale et non pas une $\mathbb{Q}^{T_p}$ martingale

$$=LVL(t,T_0,T_m)\,\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{LVL}}\left[\left(\frac{B(T_f,T_p)}{LVL(T_f,T_0,T_m)}\right)S(T_f,T_0,T_m)\right]$$

$\mathbb{Q}^{LVL}$ martingale

Le taux CMS est défini comme l'espérance du taux swap sous la mesure forward associée à la date de paiement T_p

$$\hookrightarrow \boxed{CMS(t, T_0, T_m, T_p) = \mathbb{E}_t^{Q^{T_p}}\left[S(T_p, T_0, T_m)\right]}$$

3 Cap et Floor CMS

Définition : Un cap CMS est composé de m caplets payant chacun en fin de période le payoff $\delta(CMS - K)^+$

$$\Rightarrow PV_{\text{Caplet CMS}}(t) = \delta B(t, T_p)\, \mathbb{E}_t^{Q^{T_p}}\left[(S(T_p, T_0, T_m) - K)^+\right]$$

Pour répliquer un caplet CMS → sur-réplication via un panier de swaptions cash-settled

Rq : Payoff swaption cash-settled : $LVL_{CASH}(T_p, T_0, T_m)(S(T_p, T_0, T_m) - K)^+$ où $LVL_{CASH}(T_p, T_0, T_m) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\delta_i}{(1 + \delta_i S(T_p, T_0, T_m))^i}$
i.e on a remplacé les ZC par les facteurs d'actualisation calculés à partir du taux swap

Chapitre 7 : Modèle SABR

I Le modèle : Model the forward price

$$\boxed{\begin{aligned} dF_t &= \alpha_t F_t^{\beta}\, dW_t^1 \\ \frac{d\alpha_t}{\alpha_t} &= \nu\, dW_t^2 \\ d\langle W^1, W^2\rangle_t &= \rho\, dt \end{aligned}}$$

- α_0 : Initial vol <=> Average volatility level
- $\beta \in [0, 1]$ Backbone <=> Skew + Smile's dynamics
- ν : volatility of volatility <=> Smile convexity
- ρ : Correlation factor <=> Implied vol's skew

- Accurately fit the implied volatility curves
- It predict the correct dynamics of the implied volatility curves
- Easy to implement

Backbone : How the ATM volatility evolve as F varies. It is essentially $\sigma_B(F, F) = \frac{\alpha}{F^{1-\beta}}$
=> The backbone is entirely determined by the exponent β.

Vanna skew : Skew caused by the correlation between the volatility and the asset price

Fitting market data

- Data quality issue as K moves away from f because there are less options quoted
- β can be determined from historical observations or selected from aesthetic considerations
- With β given, fitting the SABR model is a straightforward procedure

Managing smile risk

- Vega risk <=> Differentiating with respect to α <=> Risk to overall changes in volatility
- Vanna risk <=> Risk to ρ changing <=> Risk to the skew increasing
- Volga risk <=> Risk to ν changing <=> Risk to the convexity of the smile