Processus Stochastiques : Memento

* Une famille de tribu est une filtration si :

$$\forall s \leq t, \ \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$$

* Une filtration est normale si :

- $\mathbb{P}(A) = 0 \implies A \in \mathcal{F}_0$ (i.e les négligeables sont dans tous les $\mathcal{F}_t$)
- elle est continue à droite i.e $\mathcal{F}_t = \mathcal{F}_{t^+} := \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$

* Un processus stochastique est une famille de VA sur Ω

* Le processus X est $\mathcal{F}_t$-adapté si X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable $\forall t$

(on utilise souvent $\mathcal{F}_t^X = \sigma(\underbrace{\sigma(X_s, s \leq t)}_{\text{filtrat° naturelle}}, \mathcal{N})$) ← négligeable

* Un processus X est croissant, cadlag, C^2 ... si $t \mapsto X_t(\omega)$ l'est p.s.

* Un processus est à variation finie (VF) sur $[0,t]$ si $\sup_{0 \leq t_0 < \dots < t_m \leq t} \left(\sum_{k=0}^{m} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}| \right) < \infty$

en particulier, X dérivable $\implies X$ VF
et sur $\mathbb{R}$, X VF $\implies X$ est la $\neq$ entre 2 processus croissants.

* Un processus est stationnaire si $\forall s \in \mathbb{R}$, $\{X_{t+s}, t \geq 0\} \overset{d}{=} \{X_t, t \geq 0\}$ (X_t m loi)

On remarque que $\forall t$, $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[X_0]$ et $\underbrace{\Gamma(s,t)}_{\mathbb{E}[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])]}$ dépend seulement de $(s-t)$

* Un Mouvement Brownien (MB) est un processus gaussien centré tq

$$\forall s,t \qquad \Gamma(s,t) = \inf(s,t) \qquad \text{i.e } \mathbb{E}[B_s B_t] = s \wedge t$$

* Un temps d'arrêt relativement à $\mathcal{F}_t$ est une VA τ à valeur dans $\mathbb{R}^+ \cup \{\infty\}$ tq

$$\{\tau \leq t\} \subset \mathcal{F}_t \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

* X est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale si :

$$\begin{cases} \cdot\ X \text{ est } (\mathcal{F}_t)\text{-adapté} \\ \cdot\ \mathbb{E}[|X_t|] < \infty \quad t \geq 0 \quad (\text{i.e } X_t \in \mathcal{L}^1(\Omega)) \\ \cdot\ \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = X_s \quad s \leq t \end{cases}$$

X est une $(\mathcal{F}_t)$-sous-martingale si $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \geq X_s$ $\qquad$ $X_s \leq \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$

X est une $(\mathcal{F}_t)$-sur-martingale si $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] \leq X_s$ $\qquad$ $X_s \geq \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$

Si une martingale M continue est un processus à VF, alors elle est cte i.e $M_t = M_0$ p.s

Relation Mouvement Brownien – Martingales

* Si B_t est un MB, alors

  - B_t est une martingale $\qquad$ $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[X_t - X_s | \mathcal{F}_s] + \mathbb{E}[X_s | \mathcal{F}_s]$
  - $B_t^2 - t$ est une martingale $\qquad$ $(\langle B \rangle_t = t)$
  - $\exp(\theta B_t - \theta^2 \frac{t}{2})$ est une martingale.

* Si B^1 et B^2 sont 2 MB $\perp\!\!\!\perp$, alors $B^1 B^2$ est une martingale.

* Un MB est un processus continu p.s mais nulle part dérivable.

* Si B_t est un MB alors :

  - $t \mapsto -B_t$ est un MB
  - $t \mapsto \frac{1}{c} B_{c^2 t}$ est un MB
  - $t \mapsto t B_{\frac{1}{t}}$ (si $t \neq 0$, 0 sinon) est un MB

* Un processus d'Itô est un processus s'écrivant :

$$X_t = x + \int_0^t b_s \, ds + \int_0^t \sigma_s \, dB_s$$

$$\iff \text{(EDS)} : \begin{cases} X_0 = x \\ dX_t = b_t \, dt + \sigma_t \, dB_t \end{cases}$$

la dérive / le drift $\qquad$ coeff de diffusion / la volatilité / bruit

drift $= 0 \implies$ martingale locale

$\oplus$ martingale locale unif intégrable
i.e $\mathbb{E}[\langle M \rangle_t] < \infty$

$\implies$ vraie martingale.

$\implies d\langle X \rangle_t = \sigma_t^2 \, dt$

* X est une semi-martingale si :

$$X_t = M_t + A_t$$

M_t : martingale locale ; A_t : processus à variat° bornée

Intégrale de Wiener

$$I_T(f_n) = \int_0^T f_n(s)\, dB_s \overset{\text{où}}{=} \sum_{i=1}^{p_n} \alpha_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) \quad \text{est gaussienne}$$

f_n : déterministe et de carré intégrable

Les processus associés sont gaussiens

- $\mathbb{E}[I_T(f_n)] = 0$
- $\mathbb{E}[I_T(f_n) B_T] = \int_0^T f_n(s)\, ds$
- $V(I_T(f_n)) = \int_0^T f_n^2(s)\, ds$
- $Cov(I_t(f_n); I_s(f_n)) = \mathbb{E}[I_t(f_n) I_s(f_n)] = \int_0^{t \wedge s} f_n^2(s)\, ds$

Bon processus local :

On dira que $\{\theta_s, s \geq 0\}$ est un bon processus local si :

- $(\mathcal{F}_t^B)$-adapté
- càd - làg
- $\mathbb{E}[\int_0^t \theta_s^2\, ds] < \infty \quad \forall t$

Martingale exponentielle

Soit θ un bon processus local et Z_0 une cte.

$$dZ_t = \theta_t Z_t\, dB_t \longrightarrow Z_t = Z_0 \exp\left(\int_0^t \theta_s\, dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds\right)$$

Z_t est noté $\mathcal{E}_t(\theta * B)$

Condition de Novikov :

Si $\mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds)] < \infty \quad \forall t \geq 0$

alors

$t \longmapsto \mathcal{E}_t(\theta * B)$ est une vraie martingale

Si X est une semi-martingale, l'exponentielle stochastique $\mathcal{E}(X)$ est l'unique solut° de :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s\, dX_s \quad \text{où} \quad dZ_s = Z_s\, dX_s \qquad \text{qui s'explicite } Z_t(X) = \exp(X_t - \tfrac{1}{2}\langle X \rangle_t)$$

$$\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y \rangle)$$

$$\mathcal{E}_t^{-1}(X) = \mathcal{E}_t(-X + \langle X \rangle)$$

$$d(X_t Y_t) = X_t\, dY_t + Y_t\, dX_t + d\langle X, Y \rangle_t$$

Crochet Stochastique / Variation Quadratique.

Si Z est une martingale locale, $\langle Z \rangle$ est l'unique processus $\mathcal{F}_t$-adapté tq $Z_t^2 - \langle Z \rangle_t$ soit une martingale (locale)

$\langle M,N \rangle_t = \frac{1}{2}\left(\langle M+N \rangle_t - \langle M \rangle_t - \langle N \rangle_t\right)$

$\langle M,N \rangle = 0 \iff M \perp N \iff M$ et N orthogonales.

Si $X_t = \int a_s \, dB_s + \int b_s \, ds$ alors $d\langle X \rangle_t = a_t^2 \, dt$.

Formule d'Itô

Soit $f : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonct° à 2 variables de classe C^2 à dérivés bornées, et X, Y 2 processus d'Itô,

Alors,

$$f(X_t, Y_t) = f(X_0, Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s)\, dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s)\, dY_s$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s)\, d\langle X \rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s, Y_s)\, d\langle Y \rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s)\, d\langle X, Y \rangle_s$$

Sous forme différentielle, cette formule s'écrit :

$$df(X_t, Y_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, Y_t)\, dX_t + \frac{\partial f}{\partial y}(X_t, Y_t)\, dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, Y_t)\, d\langle X \rangle_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_t, Y_t)\, d\langle Y \rangle_t + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_t, Y_t)\, d\langle X, Y \rangle_t$$

Cas de la 2^e formule d'Itô : On fait intervenir le temps

$\Rightarrow f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ avec f C^1 p/r à t et C^2 p/r à x (les 2 derniers termes n'apparaissent pas)

Changement de Proba

Si $\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t^\omega} = Z_t$, X_t une VA $(\mathcal{F}_t^\omega)$-mesurable, alors $\mathbb{E}_P[X_t Z_t] = \mathbb{E}_Q[X_t]$

martingale exp

$P \xrightarrow{1/Z_t} Q : \mathbb{E}_P[XZ] = \mathbb{E}_Q[X]$

$Q \xrightarrow{Z_t} P : \mathbb{E}_Q[Y] = \mathbb{E}_P[YZ_t]$

Théorème de Girsanov :

Sous Q, le processus $\tilde{W} : t \mapsto W_t - \int_0^t \theta_s \, ds$ est un MB

MB sous P

$Z_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 \, ds\right)$