Finance Mathématique

Yahia Salhi | M2 Actuariat - ISFA

Durée : 2h — Documents autorisés : Aucun

Problème 1 : Évaluation des Swaptions

Forward Rate Agreement (FRA). Soit $t < T_k < T_{k+1}$. On note $P(t, T_k)$ le prix en t d'une obligation zéro-coupon de maturité T_k et $F(t, T_k, T_{k+1})$ le taux forward à la date t pour la période future (T_k, T_{k+1}), dans la convention simple de calculs des intérêts.

1. Par un argument d'AOA appliqué à un FRA, retrouver l'expression de $F(t, T_k, T_{k+1})$ en fonction du prix d'obligations zéro-coupon que l'on précisera.

Swap. On considère un swap payeur (échange d'un taux fixe contre un taux variable) de nominal N qui a pour taux fixe C et pour taux variable R. On suppose que les intérêts fixes et variables sont versés aux mêmes dates $T_{i+1} < \cdots < T_j$. Le taux d'intérêt variable est révisé aux dates $T_i < T_{i+1} < \cdots < T_{j-1}$. Le swap est donc émis à la date T_i et a la maturité T_j.

Dans la suite on considère un swap payeur et on note $\pi^{P-Swap}(t, T_i, T_j)$ son prix en $t < T_i$.

2. En considérant le flux de ce swap en une date $T_{k+1} < T_j$, déterminer par AOA la valeur de ce flux en $t < T_i$. En déduire ensuite le prix du swap $\pi^{P-Swap}(t, T_i, T_j)$ en $t < T_i$.

3. En AOA, déterminer le taux swap forward $S(t, T_i, T_j)$ en fonction des prix zéro-coupons et des taux forward $F(t, T_k, T_{k+1})$. Le taux swap est le taux qui rend le contrat équitable swap, c'est-à-dire $\pi^{P-Swap}(t, T_i, T_j) = \pi^{R-Swap}(t, T_i, T_j)$.

4. En déduire la valeur $\pi^{P-Swap}(t, T_i, T_j)$ en $t < T_0$ du swap payeur en fonction du taux swap $S(t, T_i, T_j), C, N$ et les prix zéro-coupon.

Swaption. Une call swaption est une option sur swap de maturité T_j donnant le droit d'acheter à une maturité fixée T_i, à un prix K fixé à l'avance. Le taux variable échangé est le taux forward $F(T_i, T_k, T_{k+1})$. Rappelons que le payoff de cette swaption en T_i est donné par

$$g(T_i, T_i, T_j) = \left(\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(T_i, T_{k+1}) \Big(F(T_i, T_k, T_{k+1}) - K \Big) \right)^+$$

5. Montrer que $g(T_i, T_i, T_j)$ peut s'écrire en fonction du taux swap forward $S(T_i, T_i, T_j)$ de la façon suivante :

$$g(T_i, T_i, T_j) = \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(T_i, T_{k+1}) \Big(S(T_i, T_i, T_j) - K \Big)^+.$$

L'objectif de la suite est de proposer un prix pour cette swaption. Nous considérons le processus $P(t, T_i, T_j)$, appelé *numéraire annualisé*, donné par

$$P(t, T_i, T_j) = \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}).$$

6. Montrer que le processus $e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T_i, T_j)$, où $(r_t)_{t \geq 0}$ est le taux spot instantané, est une martingale sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$.

7. Que peut-on dire du processus $Z_{T_i} = e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} P(T_i, T_i, T_j)/P(t, T_i, T_j)$ pour tout $0 \leq t \leq T_{i+1}$?

Pour pouvoir *pricer* la swaption en $t \leq T_i$, dont le prix est donné sous la mesure risque-neutre $\mathbb{Q}$ par

$$\pi^{\text{swaption}}(t, T_i, T_j) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} g(T_i, T_i, T_j) \middle| \mathcal{F}_t \right],$$

nous avons besoin d'introduire la *mesure forward-swap*. notée $\mathbb{Q}_{i,j}$, définie par sa densité de Radon-Nikodym par rapport à la mesure $\mathbb{Q}$ de la façon suivante :

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}_{i,j}}{d\mathbb{Q}} \right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \frac{P(T_i, T_i, T_j)}{P(t, T_i, T_j)}, \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T_{i+1}.$$

8. Montrer que le taux swap $S(t, T_i, T_j)$ est une martingale sous $\mathbb{Q}_{i,j}$. Que peut-on dire de sa dynamique ?

9. Montrer que le prix de la swaption en t $\pi^{\text{swaption}}(t, T_i, T_j)$ peut se réécrire comme un call européen sur le taux swap forward $S(T_i, T_i, T_j)$ sous la mesure forward-swap $\mathbb{Q}_{i,j}$.

Supposons que le taux swap forward $S(t, T_i, T_j)$ est modélisé par un mouvement Brownien géométrique sous la mesure forward-swap $\mathbb{Q}_{i,j}$, c.-à-d.

$$dS(t, T_i, T_j) = S(t, T_i, T_j) \sigma(t) dW_t^{i,j},$$

avec $(\sigma(t))_{t \in \mathbb{R}}$ une fonction déterministe et $W^{i,j} = (W_t^{i,j})_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien standard sous $\mathbb{Q}_{i,j}$.

10. Montrer alors que le prix de la swaption s'écrit sous la forme suivante

$$\pi^{\text{swaption}}(t, T_i, T_j) = \Big(P(t, T_i) - P(t, T_j) \Big) \phi(d_+) - K \phi(d_-) \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1}),$$

avec ϕ la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et d_+ et d_- sont des constantes à déterminer en fonction des paramètres du problème.

Exercice : Framework de Heath-Jarrow-Morton et Modèle de Ho-Lee

On rappelle que, dans le cadre HJM à un facteur, la dynamique risque-neutre des taux forward instantanés est donnée par

$$df(t, T) = \sigma_f(t, T) \sigma^*(t, T) dt + \sigma_f(t, T) dW_t,$$

où W est un mouvement Brownien standard.

1. Quel est l'intérêt pratique d'un cadre HJM pour la modélisation des taux d'intérêt ?

2. Exprimer $\sigma^*(t, T)$ en fonction de $\sigma_f(t, T)$

3. Donner l'expression explicite du taux court r_t en fonction de la courbe des taux forward initiale $f(0, t)$ et de la structure de volatilité $\sigma_f(t, T)$

4. En déduire la dynamique dr_t des taux courts $(r_t)_{t \geq 0}$

5. Considérons la forme suivante pour la volatilité $\sigma_f(t, T) = \sigma$, montrer que la dynamique des taux spots r_t s'écrit

$$dr_t = \left(\frac{\partial f}{\partial t}(0, t) + \sigma^2 t \right) dt + \sigma dW_t.$$