M1 Actuariat **Année 2018-2019**

Economie de l'Assurance

Note : Aucun document n'est autorisé. Tout type de calculatrice est autorisé.

Exercice 1 : Assurance voiture

Un individu souhaite assurer son véhicule contre le risque d'accident. Certains individus, en proportion *t,* ont une attitude prudente au volant, tandis que les autres individus ont un comportement à risque (conduite au-dessus des limitations de vitesse, etc.). Les probabilités conditionnelles d'accident sont les suivantes :

	Prudent	A risque
P(Accident) :	$P_p = 0.1$	$P_r = 0.2$

L'assureur est neutre vis-à-vis du risque. L'utilité de l'individu augmente avec son niveau de richesse : $u(w) = ln(w)$. La richesse initiale w_0 vaut 10 000, et un accident implique une perte de 8 000. Tout contrat d'assurance définit une prime d'assurance ρ et une couverture d'un montant q.

1. On considère que l'assureur connait le type de l'individu.
   a. Ecrire la contrainte de participation pour un individu de type i ?
   b. Quels sont les profits espérés par l'assureur lorsqu'il assure un individu prudent ? Un individu à risque ? Lorsqu'il ne connait pas le type de l'individu ?
   c. Montrer que ce contrat optimal en information symétrique est un contrat de couverture complète quel que soit le type de l'individu ($q_i* = 8\ 000$).
   d. Calculer le montant des primes d'assurance optimales qui seront offertes aux individus prudents et aux individus à risque sur un marché parfaitement concurrentiel.
2. On suppose maintenant que l'assureur n'observe pas le type de l'individu.
   a. Les contrats optimaux calculés précédemment seront-ils proposés en cas d'asymétrie d'information ? Expliquer intuitivement puis démontrer.
   b. Ecrire le programme que l'assureur résout en cas d'asymétrie d'information.

Exercice 2 : Relation entre employeur et employé

Un employeur neutre vis-à-vis du risque propose un contrat de travail à un demandeur d'emploi, que celui-ci peut accepter ou refuser. Si le demandeur d'emploi accepte le contrat, il choisit son niveau d'effort, qui peut être faible ($e_B = 0$) ou élevé ($e_H = 3$). La production de la firme (y) suit un processus aléatoire qui dépend du niveau d'effort du salarié. Les différents niveaux de production possibles (y_b, y_m, y_h) et leurs probabilités conditionnelles sont les suivants :

Production	$y_b = 0$	$y_m = 1000$	$y_h = 2500$
e_B	0.5	0.25	0.25
e_H	0.25	0.25	0.5

La fonction d'utilité du salarié dépend de son salaire et de son niveau d'effort, définie comme : $u(w, e) = \sqrt{w} - e^2$. Son utilité de réserve en restant au chômage est de 25.

1. L'agent est-il averse ou neutre vis-à-vis du risque ? Expliquer.
2. On suppose dans un premier temps une situation en information symétrique.
   a. Qu'est-ce que cela signifie ?
   b. Calculer les salaires optimaux dans ce cas.
   c. Quel est le contrat d'équilibre ?
3. On suppose maintenant que l'employeur n'observe pas l'effort du salarié.
   a. Montrer pourquoi l'employeur a maintenant intérêt à proposer un contrat incitatif au salarié. Quelle est la conséquence pour l'employeur s'il propose le contrat préféré en question 2.b ?
   b. Déterminer le contrat optimal qui sera proposé pour obtenir un effort élevé.
   c. Calculer le revenu espéré de l'employeur avec ce contrat.
   d. Quel est le contrat d'équilibre ? Pourquoi ?

Exercice 1 : $u(w) = \ln(w)$ $w_0 = 10\,000$

1) Assureur connaît le type de l'individu.

a) Contrainte de participation

$$\bar{u}_i = P_i \ln(w_0 - 8000) + (1-P_i)\ln(w_0) \leftarrow \text{non assuré}$$

La CP d'un agent i est donnée par $\mathbb{E}[u(W_{A_i})] \geq \bar{u}_i$ où W_{A_i} correspond à la richesse de l'agent i lorsqu'il est assuré.

$$W_{A_i} = \begin{cases} w_0 - 8000 - p_i + q_i & \text{avec proba } P_i \\ w_0 - p_i & \text{avec proba } 1-P_i \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{E}[u(W_{A_i})] = P_i \ln(w_0 - 8000 - p_i + q_i) + (1-P_i)\ln(w_0 - p_i)$$

Donc la CP_i est $P_i \ln(2000 - p_i + q_i) + (1-P_i)\ln(10000 - p_i) \geq P_i \ln(2000) + (1-P_i)\ln(10000)$ avec $i \in \{p, r\}$

b) Profits espérés de l'assureur :

* Lorsqu'il assure un individu prudent

Soit $\Pi_p = P_p(p_p - q_p) + (1-P_p)p_p$

$$\Longrightarrow \Pi_p = p_p - P_p q_p = p_p - 0{,}1 q_p$$

* Lorsqu'il assure un individu à risque

Soit $\Pi_r = P_r(p_r - q_r) + (1-P_r)p_r$

$$\Longrightarrow \Pi_r = p_r - P_r q_r = p_r - 0{,}2 q_r$$

* Lorsqu'il ne connaît pas le type $\alpha \in [0,1]$

$$\Pi = \alpha \Pi_p + (1-\alpha)\Pi_r = \alpha(p_p - 0{,}1 q_p) + (1-\alpha)(p_r - 0{,}2 q_r)$$

c) Calcul de la couverture en info symétrique.

$\forall i \in \{p, r\}$, en info. sym. le pb d'optimisat° est le suivant :

$\max\ \rho_i - P_i q_i$
$sc\ (CP_i) : P_i \ln(2000-\rho_i+q_i)+(1-P_i)\ln(10000-\rho_i) \geq P_i \ln(2000)+(1-P_i)\ln(10000)$

Le lagrangien est : $\mathcal{L}(\rho_i, q_i, \lambda) = (\rho_i - P_i q_i) + \lambda[P_i \ln(2000-\rho_i+q_i)+(1-P_i)\ln(10000-\rho_i) - P_i \ln(2000) - (1-P_i)\ln(10000)]$

Conditions KKT :

$* \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \rho_i} = 1 - \lambda P_i \dfrac{1}{2000-\rho_i+q_i} - \lambda(1-P_i)\dfrac{1}{10000-\rho_i} = 0 \quad (1)$

$* \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -P_i + \lambda P_i \dfrac{1}{2000-\rho_i+q_i} = 0 \quad (2)$

$* \lambda \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \lambda[P_i \ln(2000-\rho_i+q_i)+(1-P_i)\ln(10000-\rho_i) - P_i \ln(2000) - (1-P_i)\ln(10000)] = 0 \quad (3)$

D'après (2), on a $\dfrac{\lambda}{2000-\rho_i+q_i} = 1 \Rightarrow \lambda = 2000-\rho_i+q_i \quad (*)$ Donc la CP est saturée.

en injectant $(*)$ dans (1) $\Rightarrow 1 - P_i - (1-P_i)\dfrac{2000-\rho_i+q_i}{10000-\rho_i} = 0$

$\Rightarrow (1-P_i)\left(1 - \dfrac{2000-\rho_i+q_i}{10000-\rho_i}\right) = 0$

$\Rightarrow 10000 - \rho_i - 2000 + \rho_i - q_i = 0$ car $1-P_i \neq 0\ \forall i$.
$\Rightarrow 8000 - q_i = 0$

D'où $q_i^* = 8000 \quad \forall i$

d) Primes optimales en CPP :

En CPP, $\Pi = 0$

* Cas des individus prudents

$\Pi_p = 0 \Rightarrow \rho_p^* - 0{,}1 q_p^* = 0$ d'où $\rho_p^* = 0{,}1 q_p^* = 0{,}1 \times 8000$
$= 800$

$\Rightarrow \rho_p^* = 800$

* Cas des individus à risque

$\Pi_r = 0 \Rightarrow \rho_r^* - 0{,}2 q_r^* = 0 \Rightarrow \rho_r^* = 0{,}2 q_r^*$
$= 0{,}2 \times 8000$

$\Rightarrow \rho_r^* = 1600.$

2) Asymétrie d'information

a) Si l'assureur n'observe pas le type des individus, intuitivement nous pouvons dire que les individus à risque auront tendance à mentir sur leur type car pour une même couverture, ils paient une prime plus élevée que les individus prudents.

Démonstrat° :

Soit $u_{r,r}$ l'utilité d'un individu à risque qui ne ment pas sur son type et u_{rp} l'utilité d'un individu à risque qui ment sur son type.

$$\mathbb{E}[u_{rr}(W_A)] = 0{,}2 \ln(2000 - p_r^* + q_r^*) + 0{,}8 \ln(10000 - p_r^*)$$
$$= 0{,}2 \ln(2000 - 1600 + 8000) + 0{,}8 \ln(10000 - 1600)$$
$$= 9{,}036$$

$$\mathbb{E}[u_{rp}(W_A)] = 0{,}2 \ln(2000 - p_p^* + q_p^*) + 0{,}8 \ln(10000 - p_p^*)$$
$$= 9{,}127$$

On a donc $\mathbb{E}[u_{rp}(W_A)] > \mathbb{E}[u_{rr}(W_A)]$

L'espérance de l'utilité d'un individu à risque est + grande lorsqu'il ment sur son type.
$\Longrightarrow$ Incitat° à mentir
$\Longrightarrow$ Baisse du profit pour l'assureur.

b) $\max \ \alpha(p_p - 0{,}1 q_p) + (1-\alpha)(p_r - 0{,}2 q_r)$

$$sc \begin{cases} (CP_1) : 0{,}1 \ln(2000 - p_p + q_p) + 0{,}9 \ln(10000 - p_p) \geq 0{,}1 \ln(2000) + 0{,}9 \ln(10000) \\ (CP_2) : 0{,}2 \ln(2000 - p_r + q_r) + 0{,}8 \ln(10000 - p_r) \geq 0{,}2 \ln(2000) + 0{,}8 \ln(10000) \\ (CI_1) : 0{,}1 \ln(2000 - p_p + q_p) + 0{,}9 \ln(10000 - p_p) \geq 0{,}1 \ln(2000 - p_r + q_r) + 0{,}9 \ln(10000 - p_r) \\ (CI_2) : 0{,}2 \ln(2000 - p_r + q_r) + 0{,}8 \ln(10000 - p_r) \geq 0{,}2 \ln(2000 - p_p + q_p) + 0{,}8 \ln(1000 - p_p) \end{cases}$$

Exercice 2 : $u(w,e) = \sqrt{w} - e^2 \quad \bar{u} = 25$.

1) Soit u l'utilité de l'agent, on a :

$$u(w,e) = \sqrt{w} - e^2$$

réelle fonct° d'utilité — désutilité de l'effort

$$\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{1}{2\sqrt{w}} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 u}{\partial w^2} = \frac{-1}{4w\sqrt{w}} < 0 \quad \text{donc } u'' < 0$$

$\Rightarrow u$ concave donc l'agent est averse au risque.

Cela signifie que l'agent a tendance à privilégier des situations peu risquées comparé à certaines + risquées.

2) Info Symétrique :

a) En info symétrique, l'employeur est capable d'observer l'effort fourni par l'employé. L'employeur et l'employé ont la m̂ info sur l'effort fourni.

De plus, l'employé sait que l'employeur a la m̂ info que lui et vice-versa.

b) En info sym, pour tout type d'effort e_i $i \in \{B,H\}$, l'employeur est confronté au pb de maximisat° suivant :

$$\max \; P_i(0-w_i) + Q_i(1000-w_i) + (1-P_i-Q_i)(2500-w_i) = \pi_i$$
$$\text{sc } (CP_i) : u(w_i,e_i) = \sqrt{w_i} - e_i^2 \geq \bar{u} = 25$$

i.e l'employeur maximise son profit sous contrainte de participat° de l'employé.

Or $\frac{\partial u}{\partial w_i} > 0$ et $\frac{\partial \pi_i}{\partial w_i} < 0$ donc la contrainte de participat° est saturée.

$$\forall i \in \{H,B\}, \sqrt{w_i} - e_i^2 = 25 \implies w_i^* = (25 + e_i^2)^2$$

* Pour e_B :

$$w_B^* = 25^2 = 625$$

Salaires optimaux selon l'effort.

* Pour e_H :

$$w_H^* = (25+3^2)^2 = 1156$$

c) Contrat d'équilibre :

Calculons le profit pour chaque type d'effort :

$$* \; \pi_B = 0{,}5(0-w_B^*) + 0{,}25(1000-w_B^*) + 0{,}25(2500-w_B^*)$$
$$= 250$$

$* \ \Pi_H = 0{,}25(0-w_H^*) + 0{,}25(1000-w_H^*) + 0{,}5(2500-w_H^*)$
$= 344$

$\Rightarrow \Pi_H > \Pi_B$

On en déduit que le contrat d'équilibre est celui qui demande un effort élevé ($e_H = 3$) pour un salaire de $w_H^* = 1156$.

3) Info asym.

a) Si l'employeur n'observe pas l'effort de l'employé, celui-ci sera incité à fournir un effort faible.

Car $u(w_H^*, e_B) = \sqrt{w_H^*} = 34$
$u(w_H^*, e_H) = \sqrt{w_H^*} - 3^2 = 25$

$\Rightarrow u(w_H^*, e_B) > u(w_H^*, e_H)$

L'employeur doit donc proposé un contrat incitatif à l'employé afin de le pousser à fournir l'effort élevé e_H.
Pour cela il fera varier le salaire en fonction de la product° obtenue.

$*$ Conséquence pour l'employeur :
Si l'employeur propose le contrat de 2.b) il s'attend à un profit $\Pi_H = 344$.

Pourtant, le profit qu'il aura en raison de l'incitat° à fournir un effort faible de l'employé est :

$\Pi = 0{,}5(0-1156) + 0{,}25(1000-1156) + 0{,}25(2500-1156)$
$= -281$

L'employeur enregistrera donc des pertes s'il propose ce contrat.

b) Le programme résolu par l'employeur est :

$$\max \ 0{,}25(-w_b) + 0{,}25(1000-w_m) + 0{,}5(2500-w_H)$$
$$sc : (CP) : 0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_m} + 0{,}5\sqrt{w_H} - e_H^2 \geq \bar{u}$$
$$(CI) : 0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_m} + 0{,}5\sqrt{w_H} - e_H^2 \geq 0{,}5\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_m} + 0{,}25\sqrt{w_H} - e_B^2$$

$$\Leftrightarrow \max \ 0{,}25(-w_b) + 0{,}25(1000-w_m) + 0{,}5(2500-w_H)$$
$$sc : (CP) \ 0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_m} + 0{,}5\sqrt{w_H} \geq 34$$
$$(CI) \ -0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_H} \geq 9$$

$\Rightarrow$ Le lagrangien est : $\mathcal{L}(w_b, w_m, w_H, \lambda, \mu) = -0{,}25w_b + 0{,}25(1000-w_m) + 0{,}5(2500-w_H) + \lambda(0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_m} + 0{,}5\sqrt{w_H} - 34) + \mu(-0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_H} - 9)$

Conditions KKT :

$$* \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_b} = -0{,}25 + 0{,}25\lambda \frac{1}{2\sqrt{w_b}} - 0{,}25\mu \frac{1}{2\sqrt{w_b}} = 0 \qquad (1)$$

$* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_m} = -0{,}25 + 0{,}25\lambda \frac{1}{2\sqrt{\omega_m}} = 0 \quad (2)$

$* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \omega_H} = -0{,}5 + 0{,}5\lambda \frac{1}{2\sqrt{\omega_H}} + 0{,}25\mu \frac{1}{2\sqrt{\omega_H}} = 0 \quad (3)$

$* \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \lambda(0{,}25\sqrt{\omega_b} + 0{,}25\sqrt{\omega_m} + 0{,}5\sqrt{\omega_H} - 34) = 0 \quad (4)$

$* \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = \mu(-0{,}25\sqrt{\omega_b} + 0{,}25\sqrt{\omega_H} - 9) = 0 \quad (5)$

On a $\frac{\partial u}{\partial \omega_b} > 0$ et $\frac{\partial \pi}{\partial \omega_b} < 0$

$\frac{\partial u}{\partial \omega_m} > 0$ et $\frac{\partial \pi}{\partial \omega_m} < 0$

$\frac{\partial u}{\partial \omega_H} > 0$ et $\frac{\partial \pi}{\partial \omega_H} < 0$

$\Rightarrow$ La contrainte de particip$^{\circ}$ est saturée

$\Rightarrow 0{,}25\sqrt{\omega_b} + 0{,}25\sqrt{\omega_m} + 0{,}5\sqrt{\omega_H} = 34 \quad (*)$

Supposons que la CI n'est pas saturée, on a donc $\mu = 0$.

Donc si $\mu = 0$ dans (1) $\Rightarrow \frac{\lambda}{2\sqrt{\omega_b}} = 1 \Rightarrow \omega_b = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$

dans (2) on a $\omega_m = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$

dans (3) $\Rightarrow \omega_H = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$

$\Rightarrow \omega_b = \omega_m = \omega_H$ ce qui ne correspond pas au contrat incitatif que l'on cherche.

$\Rightarrow \mu \neq 0$ donc CI est saturée.

$\Rightarrow -0{,}25\sqrt{\omega_b} + 0{,}25\sqrt{\omega_H} = 9 \quad (**)$

De (2), on a $\lambda = 2\sqrt{\omega_m} \underset{\text{dans (1)}}{\Rightarrow} -0{,}25 + 0{,}25 \times 2\sqrt{\omega_m}\frac{1}{2\sqrt{\omega_b}} - 0{,}25\mu\frac{1}{2\sqrt{\omega_b}} = 0$

$\Rightarrow -0{,}25 + 0{,}25\frac{\sqrt{\omega_m}}{\sqrt{\omega_b}} - \frac{0{,}25\mu}{2\sqrt{\omega_b}} = 0$

$\Rightarrow \frac{-0{,}5\sqrt{\omega_b} + 0{,}5\sqrt{\omega_m} - 0{,}25\mu}{2\sqrt{\omega_b}} = 0$

$\Rightarrow -0{,}5\sqrt{\omega_b} + 0{,}5\sqrt{\omega_m} - 0{,}25\mu = 0 \quad (\mathrm{I})$

En remplaçant λ dans (3) $\Rightarrow -0{,}5 + 0{,}5\, 2\sqrt{\omega_m} \times \frac{1}{2\sqrt{\omega_H}} + 0{,}25\mu\frac{1}{2\sqrt{\omega_H}} = 0$

$\Rightarrow -0{,}5 + 0{,}5\frac{\sqrt{\omega_m}}{\sqrt{\omega_H}} + \frac{0{,}25\mu}{2\sqrt{\omega_H}} = 0$

$\Rightarrow -\sqrt{\omega_H} + \sqrt{\omega_m} + 0{,}25\mu = 0 \quad (\mathrm{II})$

$(\mathrm{I}) + (\mathrm{II}) \Rightarrow -0{,}5\sqrt{\omega_b} + 1{,}5\sqrt{\omega_m} - \sqrt{\omega_H} = 0 \quad (***)$

De (**) on a $\underset{(i)}{0{,}25\sqrt{\omega_b} = 0{,}25\sqrt{\omega_H} - 9} \underset{\text{dans }(*)}{\Rightarrow} 0{,}25\sqrt{\omega_H} - 9 + 0{,}25\sqrt{\omega_m} + 0{,}5\sqrt{\omega_H} = 34$

$\Rightarrow 0{,}75\sqrt{\omega_H} + 0{,}25\sqrt{\omega_m} = 43 \Rightarrow 0{,}25\sqrt{\omega_m} = 43 - 0{,}75\sqrt{\omega_H} \quad (ii)$

$\Rightarrow$ En remplaçant w_b et w_m par leurs expressions en fonct° de w_H (i) et (ii) dans (***) on a :

$$-0,5\left[\sqrt{w_H}-36\right]-\sqrt{w_H}+1,5\left[172-3\sqrt{w_H}\right]=0$$

$$\Rightarrow -6\sqrt{w_H}+276=0 \quad \Rightarrow \sqrt{w_H}=46$$
$$\Rightarrow w_H^*=2116$$

Or $\sqrt{w_b}=\sqrt{w_H}-36 \Rightarrow \sqrt{w_b}=10 \Rightarrow w_b^*=100$

et $\sqrt{w_m}=172-3\sqrt{w_H} \Rightarrow \sqrt{w_m}=34 \Rightarrow w_m^*=1156$.

Le contrat optimal pour effort élevé est donc

$$\begin{cases} w_b^*=100 \\ w_m^*=1156 \\ w_H^*=2116 \end{cases}$$

c) $\Pi = 0,25\times(-100)+0,25(1000-1156)+0,5(2500-2116)$
$= 128$

d) En asym d'info, pour obtenir un effort faible, l'employeur n'a pas besoin d'un contrat incitatif car l'employé ne sera pas amené à faire un effort + élevé.

Le contrat reste le m̂ qu'en info sym.
Soit $w_b^*=w_m^*=w_h^*=625$ et $\Pi_B=250$

On a donc $\Pi_B>\Pi$ car $\Pi=128$.

Le contrat d'équilibre sera donc celui qui demande un effort faible pour un salaire $w_B^*=625$.

Exercice 1 : ASSURANCE VOITURE

7/8

1a) Contrainte de participation

* utilité de réserve

Soit $\underline{U}_i$ l'utilité de réserve de l'agent i. Elle est donnée par l'~~espan~~ espérance de l'utilité de l'agent lorsqu'il n'est pas assuré. Soit $\mathbb{W}/S_i$ la richesse de l'agent i lorsqu'il n'est pas assuré.

$$\mathbb{W}/S_i \begin{cases} w_0 - 8000 = 2000 & w_0 = 10\,000 \\ P_i & 1 - P_i \end{cases}$$

D'où $\underline{U}_i = P_i \ln(2000) + (1 - P_i) \ln(10\,000)$

La contrainte de participation d'un agent i est donnée par $E[u(\mathbb{W}/A_i)] \geq \underline{U}_i$ avec $\mathbb{W}/A_i$ la richesse de l'agent i lorsqu'il est assuré.

$$W/A_i = \begin{cases} w_0 - 8000 - \rho_i + q_i = 2000 - \rho_i + q_i & w_0 - \rho_i = 10\,000 - \rho_i \\ p_i & 1 - p_i \end{cases}$$

1

D'où $E[u(W/A_i)] = p_i \ln(2000 - \rho_i + q_i) + (1-p_i) \ln(10\,000 - \rho_i)$

La contrainte de participation pour l'individu i est donc

$$p_i \ln(2000 - \rho_i + q_i) + (1-p_i) \ln(10\,000 - \rho_i) \geq p_i \ln(2000) + (1-p_i) \ln(10\,000)$$
$$\forall i \in \{p, n\}$$

1.b - Profits espérés de l'assureur

* lorsqu'il assure un individu prudent

Soit Π_p le profit. Π_p est donné par :

$\Pi_p = p_p(\rho_p - q_p) + (1 - p_p)(\rho_p)$

$\Pi_p = \rho_p - p_p q_p$

$$\boxed{\Pi_p = \rho_p - 0{,}1\, q_p}$$

* Lorsqu'il assure un individu à risque

$\Pi_n = e_n - q_n P_r$ car $\Pi_n = P_n(e_n - q_r) + (1-P_r)(e_r)$

$$\boxed{\Pi_n = e_n - 0.2 q_r}$$

* Lorsqu'il ne connait pas le type

1,5

$\Pi = t \times \Pi_p + (1-t)\,\Pi_n$

$\Pi = t\,(e_p - 0{,}1\,q_p) + (1-t)\,(e_n - 0{,}2\,q_r)$

$$\boxed{\Pi = t(e_p - 0{,}1 q_p) + (1-t)(e_n - 0{,}2 q_n)}$$

1c) Calcul de la couverture en info symétrique

$\forall i \in \{p, n\}$, en info systmétrique, le problème d'optimisation posé est le suivant :

$$\text{Max} \quad e_i - P_i q_i$$

$$\text{s.c} \quad P_i \ln(2000 - e_i + q_i) + (1-P_i)\ln(10000 - e_i) \geq P_i \ln(2000) + (1-P_i)\ln(10\,000)$$

$\mathcal{L}(e_i, q_i, \lambda) = (e_i - P_i q_i) + \lambda\left[P_i \ln(2000 - e_i + q_i) + (1-P_i)\ln(10\,000 - e_i) - P_i \ln(2000) - (1-P_i)\ln(1\right.$

avec $\mathcal{L}$ le lagrangien.

1,5

CKT :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial e_i} = 1 - \lambda P_i \times \frac{1}{2000 - e_i + q_i} - \lambda(1-P_i) \times \frac{1}{10\,000 - e_i} = 0 \quad (1)$$

il faut montrer que la CP saturée

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} = -P_i + \lambda P_i \times \frac{1}{2000 - e_i + q_i} = 0 \quad (2)$$

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \lambda\left[P_i \ln(2000 - e_i + q_i) + (1-P_i)\ln(10000 - e_i) - P_i \ln(2000) - (1-P_i)\ln(10000)\right] = 0$$

D'après (2), on a $\frac{\lambda}{2000 - e_i + q_i} = 1 \Rightarrow \underline{\lambda = 2000 - e_i + q_i}$ (*)

En ~~utilisant~~ utilisant (*) dans (1) on obtient donc

$$1 - \frac{P_i(2000 - e_i + q_i)}{2000 - e_i + q_i} - (1-P_i) \times \frac{2000 - e_i + q_i}{10\,000 - e_i} = 0$$

$$\Rightarrow 1-P_i - (1-P_i)\times \frac{2000-\ell_i+q_i}{10000-\ell_i} = 0$$

$$\Rightarrow 10000 - \ell_i - 2000 + \ell_i - q_i = 0$$

$$\Rightarrow 8000 - q_i = 0 \quad d'où \quad \boxed{q_i^* = 8000} \quad \forall i \in \{p, r\}$$

1.d) Primes optimales en CPP

En CPP ; $\Pi = 0$

* Cas des individus prudents

$\Pi_p = 0 \Rightarrow \ell_p^* - 0{,}1\, q_p^* = 0$ d'où $\ell_p^* = 0{,}1\, q_p^*$ or $q_p^* = 8000$
d'où

$$\boxed{\ell_p^* = 800}$$

* Cas des individus à risque

$\Pi_r = 0 \Rightarrow \ell_r^* - 0{,}2\, q_r^* = 0$ d'où $\ell_r^* = 0{,}2\, q_r^*$ or $q_r^* = 8000$

d'où $\boxed{\ell_r^* = 1600}$

2a) Asymétrie d'information

Si l'assureur n'observe pas le type des individus, intuitivement nous pourrions dire que les individus à risque auraient intérêt à mentir sur leur type car il paie une prime plus importante pour la même couverture qu'un individu prudent.

* démonstration

Soit u_{rr} l'utilité d'un individu qui ne ment pas sur son type et u_{rp} l'utilité d'un ~~indiv~~ individu ~~prudent~~ à risque qui ment sur son type

• $E[u_{rr}(W_A)] = 0{,}2 \ln(2000 - \ell_r^* + q_r^*) + 0{,}8 \ln(10000 - \ell_r^*)$

$= 0{,}2 \ln(2000 - 1600 + 8000) + 0{,}8 \ln(10\,000 - 1\,600)$

$E[u_{rr}(W_A)] = 9{,}036$

Exercice 1 (suite)

2a) suite

- $E[u_{np}(W_A)] = 0{,}2\ \ln(2000 - \ell_p^* + q_p^*) + 0{,}8\ \ln(10000 - \ell_p^*)$

$$= 0{,}2\ \ln(2000 - 800 + 8000) + 0{,}8\ \ln(10\,000 - 800)$$

$E[u_{np}(W_A)] = 9{,}12$

0,5

On a donc $E[u_{np}(W_A)] > E[u_{nn}(W_A)]$
L'espérance de l'utilité d'un individu à risque est plus grande lorsqu'il ment sur son type, il sera donc incité à le faire.

et donc Baisse de profit...

2b) Ecriture du programme

En cas d'asymétrie d'information, l'assureur résout le problème suivant :

1,5

$$\text{Max } t(\ell_p - 0{,}1\,q_p) + (1-t)(\ell_n - 0{,}2\,q_n)$$

$$\text{s.c } 0{,}1\ \ln(2000 - \ell_p + q_p) + 0{,}9\ \ln(10000 - \ell_p) \geq 0{,}1\ \ln(2000) + 0{,}9\ \ln(10\,000) \quad CP_1$$

$$0{,}2\ \ln(2000 - \ell_n + q_n) + 0{,}8\ \ln(10\,000 - \ell_n) \geq 0{,}2\ \ln(2000) + 0{,}8\ \ln(10\,000) \quad CP_2$$

$$0{,}1\ \ln(2000 - \ell_p + q_p) + 0{,}9\ \ln(10\,000 - \ell_p) \geq 0{,}1\ \ln(2000 - \ell_n + q_n) + 0{,}9\ \ln(10\,000 - \ell_n) \quad CI_1$$

$$0{,}2\ \ln(2000 - \ell_n + q_n) + 0{,}8\ \ln(10\,000 - \ell_n) \geq 0{,}2\ \ln(2000 - \ell_p + q_p) + 0{,}8\ \ln(10000 - \ell_p) \quad CI_2$$

12/12

Exercice 2 : Relation entre employeur et employé

1- Agent averse ou neutre vis à vis du risque ?

Soit u l'utilité de l'agent, on a

1. $u(w,e) = \sqrt{w} - e^2$; $\sqrt{w}$ représente la réelle fct° d'utilité, e^2 est la désutilité de l'effort

$\frac{\partial u}{\partial w} = \frac{1}{2\sqrt{w}}$ et $\frac{\partial^2 u}{\partial w^2} = \frac{-2 \times \frac{1}{2\sqrt{w}}}{(2\sqrt{w})^2} = -\frac{1}{\sqrt{w} \times w \times 4} < 0$

On a $u'' < 0$, donc u est concave, l'individu est averse au risque

1/2

2a) Info symétrique

0,5

En information symétrique, l'employeur est capable d'observé l'effort fourni par l'employé. L'employeur et l'employé ont la même information sur l' effort fournit. Aussi l'employé sait que l'employeur a la même information que lui et vice versa.

2b) Calcul des salaires optimaux

En information symétrique, pour tout type d'effort e_i ($i \in \{H, B\}$), l'employeur résout le programme suivant:

$$\text{Max} \quad P_i(0 - w_i) + q_i(1000 - w_i) + (1 - P_i - q_i)(2500 - w_i)$$

$$\text{sc} \qquad \sqrt{w_i} - e_i^2 \geq 25 \qquad \text{CP}$$

En d'autres termes, l'employeur maximise son profit sous contrainte de participation de l'employé.

Or $\frac{\partial U}{\partial w_i} > 0$ et $\frac{\partial \Pi}{\partial w_i} < 0$ avec Π le profit de l'employeur

donc la contraite de participation est saturé.

$\forall i \in \{H, B\}$; $\sqrt{w_i} - e_i^2 = 25 \Rightarrow \sqrt{w_i} = 25 + e_i^2$

$$\underline{w_i^* = (25 + e_i^2)^2}$$

1,5.

• <u>Pour e_B</u>

$w_B^* = (25 + 0)^2$; $\boxed{w_B^* = 625}$

• <u>pour e_H</u>

$w_H^* = (25 + 3^2)^2$; $\boxed{w_H^* = 1156}$

2.c) Contrat d'équilibre

Calculons le profit pour chaque type d'effort :

- $\Pi_B = 0{,}5 \times (-w^*_B) + 0{,}25 \times (1000 - w^*_B) + 0{,}25 \times (2500 - w^*_B)$

$\Pi_B = 0{,}5 \times (-625) + 0{,}25\ (1000-625) + 0{,}25\ (2500-625)$

$\Pi_B = 250$

- $\Pi_H = 0{,}25(-w^*_H) + 0{,}25\ (1000 - w^*_H) + 0{,}5\ (2500 - w^*_H)$

$\Pi_H = 0{,}25\ (-1156) + 0{,}25(1000-1156) + 0{,}5(2500-1156)$

1,5. $\Pi_H = 344$

$\Pi_H > \Pi_B$

On en déduit que le contrat d'équilibre est celui qui demande un effort élevé ($e_H = 3$) pour un salaire de $w^*_H = 1156$.

3a) * Pourquoi un contrat incitatif ?

Si l'employeur n'observe pas l'effort du salarié, celui-ci sera incité à fournir un effort faible.
En effet,

$u(w^*_H, e_B) = \sqrt{w^*_H} = 34$

$u(w^*_H, e_H) = \sqrt{w^*_H} - 3^2 = 25$

On $u(w^*_H, e_B) > u(w^*_H, e_H)$
l'utilité du salarié s'il fournit un effort faible au lieu d'un effort élevé est plus grande que s'il fournit un effort élevé comme demandé par l'employeur.

L'employeur doit donc proposé un contrat incitatif au salarié afin de le pousser à fournir l'effort élevé e_H. Il lui donnera donc un salaire différent en fonction de la production obtenue

* Conséquence pour l'employeur

Si l'employeur propose le contrat préféré en question 2.b., il s'attend à un profit $\pi_H = 344$.
Pourtant le profit qu'il aura à cause de l'incitation à fournir un effort bas du salarié est :

1,5.

$\pi = 0{,}5\,(-1156) + 0{,}25\,(1000 - 1156) + 0{,}25\,(2500 - 1156)$
$\pi = -28$

L'employeur enregistrera donc des pertes s'il propose ce contrat. Bien!

3b) Contrat optimal pour un effort élevé

Le programme résolu par l'employeur est le suivant :

Max $\quad 0{,}25\,(-w_b) + 0{,}25\,(1000 - w_m) + 0{,}5\,(2500 - w_h)$

sc $\quad 0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_m} + 0{,}5\sqrt{w_h} - 9 \geq 25$

$0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_m} + 0{,}5\sqrt{w_h} - 9 \geq 0{,}5\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_m} + 0{,}25\sqrt{w_h}$

Cela revient au programme suivant
Max $\quad 0{,}25\,(-w_b) + 0{,}25\,(1000 - w_m) + 0{,}5\,(2500 - w_h)$
sc $\quad 0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_m} + 0{,}5\sqrt{w_h} \geq 34$
$-0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_h} \geq 9$

Exercice 2 (suite)

3b (suite)

$$\mathcal{L}(w_b, w_m, w_h, \lambda, \mu) = -0{,}25\, w_b + 0{,}25(1000 - w_m) + 0{,}5(25000 - w_h) + \lambda\left(0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_m} + 0{,}5\sqrt{w_h} - 34\right) + \mu\left(-0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_h} - 9\right)$$

$\mathcal{L}$ est le lagrangien.

C.K.T

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_b} = -0{,}25 + \frac{0{,}25 \times \lambda}{2\sqrt{w_b}} - \frac{0{,}25 \times \mu}{2\sqrt{w_b}} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_m} = -0{,}25 + \frac{\lambda \times 0{,}25}{2\sqrt{w_m}} = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_h} = -0{,}5 + \frac{\lambda \times 0{,}5}{2\sqrt{w_h}} + \frac{\mu \times 0{,}25}{2\sqrt{w_h}} = 0 \quad (3)$$

$$\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = \lambda\left(0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_m} + 0{,}5\sqrt{w_h} - 34\right) = 0 \quad (4)$$

$$\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = \mu\left(-0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_h} - 9\right) = 0 \quad (5)$$

- On a $\frac{\partial U}{\partial w_b} > 0$ et $\frac{\partial \Pi}{\partial w_b} < 0$

  $\frac{\partial U}{\partial w_m} > 0$ et $\frac{\partial \Pi}{\partial w_m} < 0$

  $\frac{\partial U}{\partial w_h} > 0$ et $\frac{\partial \Pi}{\partial w_h} < 0$

On en déduit que la contrainte de participation est saturée d'où $\underline{0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_m} + 0{,}5\sqrt{w_h} = 34}$ $(*)$

- Sup

- Supposons que la contrainte d'incitation n'est pas saturée on a donc $\mu = 0$

Si $\mu = 0$, dans (1) on a $\frac{\lambda}{2\sqrt{w_b}} = 1 \Rightarrow w_b = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$

dans (2) on a aussi $w_m = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$

dans (3) on a $w_h = \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2$

d'où $w_b = w_m = w_h$ ce qui ne correspond pas au contrat incitatif que nous recherchons. On en déduit que la contrainte d'incitation est saturée d'où

$$-0{,}25\sqrt{w_b} + 0{,}25\sqrt{w_h} = 9 \quad (**)$$

De (2) on a $\lambda = 2\sqrt{w_m}$

En remplaçant λ dans (1) on obtient

$$-0{,}25 + 0{,}25 \times \frac{2\sqrt{w_m}}{2\sqrt{w_b}} - \frac{0{,}25\mu}{2\sqrt{w_b}} = 0 \Rightarrow -0{,}25 + 0{,}25\frac{\sqrt{w_m}}{\sqrt{w_b}} - \frac{0{,}25\mu}{2\sqrt{w_b}} = 0$$

En réduisant au même dénominateur on obtient

$$-0{,}5\sqrt{w_b} + 0{,}5\sqrt{w_m} - 0{,}25\mu = 0 \quad (I)$$

En remplaçant λ dans (3) on obtient

$$-0{,}5 + 0{,}5 \times \frac{2\sqrt{w_m}}{2\sqrt{w_h}} + \frac{0{,}25\mu}{2\sqrt{w_h}} = 0 \Rightarrow -0{,}5 + 0{,}5\frac{\sqrt{w_m}}{\sqrt{w_h}} + \frac{0{,}25\mu}{2\sqrt{w_h}} = 0$$

En réduisant au même dénominateur on a donc

$$-\sqrt{w_h} + \cancel{0{,}5}\sqrt{w_m} + 0{,}25\mu = 0 \quad (II)$$

$$(I) + (II) \Rightarrow -0{,}5\sqrt{w_b} - \sqrt{w_h} + 1{,}5\sqrt{w_m} = 0 \quad (***)$$

De $(**)$ on a $0{,}25\sqrt{w_b} = 0{,}25\sqrt{w_h} - 9$ ①

ce qui donne dans $(*)$

$0{,}25\sqrt{w_h} - 9 + 0{,}25\sqrt{w_m} + 0{,}5\sqrt{w_h} = 34$ soit

$0{,}75\sqrt{w_h} + 0{,}25\sqrt{w_m} = 43 \Rightarrow 0{,}25\sqrt{w_m} = 43 - 0{,}75\sqrt{w_h}$ ②

en remplaçant w_b et w_m par leurs expressions en fonction de w_h dans (***) on obtient :

1 et 2

$$-0,5\left[\sqrt{w_h}-36\right]-\sqrt{w_h}+1,5\left[172-3\sqrt{w_h}\right]=0$$

$$-6\sqrt{w_h}+18+258=0$$

$$-6\sqrt{w_h}=-276 \Rightarrow \sqrt{w_h}=46$$

d'où $\boxed{w_h^* = 2116}$

Or $\sqrt{w_b}=\sqrt{w_h}-36 \Rightarrow \sqrt{w_b}=46-36=10$

D'où $\boxed{w_b^* = 100}$

et $0,25\sqrt{w_m}=43-0,75\sqrt{w_h} \Rightarrow \sqrt{w_m}=172-3\sqrt{w_h}$

d'où

$$\sqrt{w_m}=172-3\times 46$$

$$\sqrt{w_m}=34$$

D'où

$$\boxed{w_m^* = 1156}$$

3.

Le contrat optimal pour effort élevé est donc

$$\begin{cases} w_b^* = 100 \\ w_m^* = 1156 \\ w_h^* = 2116. \end{cases}$$

Parfait !

3c) Calcul du revenu espéré

$$\Pi = 0,25(-100)+0,25(1000-1156)+0,5(2500-2116)$$

1.

$$\boxed{\Pi = 128}$$

3d) Contrat d'équilibre

En asymétrie d'information, pour obtenir un effort faible, l'employeur n'a pas besoin d'un contrat incitatif car le salarié ne sera pas amené à faire un effort plus élevé.
Le contrat reste le même qu'en symétrie d'information soit

$$w_S^* = w_m^* = w_R^* = 625 \quad \text{et} \quad \Pi_B = 250$$

On a donc $\Pi_B > \Pi$ car $\Pi = 128$

2 Le contrat d'équilibre sera donc celui qui demande un effort faible pour un salaire $w^*_B = 625$.

Bien!