Les lois exponentielles

$X \sim \mathcal{E}(\lambda),\ \lambda > 0$ $\quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}\ \mathbb{1}_{\{x \in \mathbb{R}^+\}}$

$F(x) = (1 - e^{-\lambda x})\ \mathbb{1}_{\{x \in \mathbb{R}^+\}}$

$\mathbb{E}(X) = 1/\lambda$

$\mathbb{V}(X) = 1/\lambda^2$

- Absence de mémoire : $\mathbb{P}(X > t+s \mid X > s) = \mathbb{P}(X > t) \quad t, s > 0$

- Mimum de lois exponentielles

$$\min(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right)$$

$$\mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) = X_k) = \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^n \lambda_i} \quad \forall 1 \leq k \leq n$$

- Somme de lois exponentielles

$$\sum_{i=1}^n X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$$

Les lois de Poisson

$X \sim \mathcal{P}(\lambda),\ \lambda > 0$ $\quad \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}\ \mathbb{1}_{\{k \in \mathbb{N}\}}$

$\mathbb{E}(X) = \lambda$

$\mathbb{V}(X) = \lambda$

$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX}) = e^{\lambda(e^t - 1)}$

- Somme de lois de Poisson

$$X_1 + X_2 \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$$

Les processus de comptage

- ne peut qu'augmenter
- commence à 0
- augmente uniquement de 1 en 1

Processus stochastique $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est processus de comptage si :

(i) $N_0 = 0$
(ii) N croissant
(iii) N continu à droite
(iv) N est constant entre 2 sauts consécutifs
(v) si N n'est pas continu en un point T, $N_T - N_{T^-} = 1$

$(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$: suite croissante des temps d'arrivées des sauts

$N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$

- Processus de comptage à accroissements stationnaires

  $N_t - N_s \sim N_{t-s} \quad \forall\, 0 \leq s < t$

  $\mathbb{E}(N_t) = q\cdot t \quad q\in\mathbb{R}$

- Processus de comptage à accroissements indépendants

  $(N_{t_1} - N_{t_0}), (N_{t_2} - N_{t_1}), \dots, (N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$ indépendants

  $\exists\, \alpha$ tq $\mathbb{E}(e^{\alpha N_t}) < \infty$

Un processus à accroissements indépendants a donc toujours un nb d'accroissement "relativement" faible i.e. il existe toujours un seuil à partir duquel les moments exponentiels existent

$$N_t \sim \mathcal{P}(\mathbb{E}(N_t)) \longrightarrow N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\mathbb{E}(N_t) - \mathbb{E}(N_s))$$

Tout processus de comptage indépendant est lié à une loi de Poisson

Les processus de Poisson homogènes

① $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ iid $\mathcal{E}(\lambda)$

$T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i \sim \Gamma(n, \lambda)$

$$N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{T_n \leq t\}}$$

= processus de comptage dont les temps inter-arriveé (les W_i) sont iid $\mathcal{E}$

$\Updownarrow$

② (i) $N_0 = 0$

(ii) $N_t - N_s \sim \mathcal{P}(\lambda(t-s)) \longrightarrow$ accroissements stationnaires $\longrightarrow N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$

(iii) N_t est un processus à accroissements indépendants

$\Updownarrow$

Sur un intervalle de temps suffisament court, la proba d'avoir ≥ 2 sinistres est négligeable

③ (i) $N_0 = 0$

(ii) $\mathbb{P}(N_t = 0) \xrightarrow{h\to 0} 1 - \lambda h + o(h)$

(iii) $\mathbb{P}(N_t = 1) \xrightarrow{h\to 1} \lambda h + o(h)$

$\Big\}\ \mathbb{P}(N_t \geq 2) \xrightarrow{h\to 0} o(h)$

(iv) N_t est un processus à accroissements indep. et stationnaires

Les processus de Poisson (inhomogène)

(i) $N_0 = 0$

(ii) N_t est un processus à accroissement indépendants

(iii) $N_t - N_s \sim \mathcal{P}\left(\int_s^t \lambda(u)\,du\right) \quad \forall t > s$

↳ les accroissements ne sont pas stationnaires

↳ les temps inter-arrivés ne sont pas iid et pas $\mathcal{E}$

$$f_{(T_1,\dots,T_n)}(t_1,\dots,t_n) = e^{-\int_0^{t_n} \lambda(u)\,du} \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i)$$

Les ordres stochastiques usuels

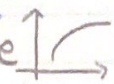
- Premier ordre stochastique

$$X \leq_1 Y \iff F_Y(z) \leq F_X(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$$
$$\iff \mathbb{E}[u(X)] \leq \mathbb{E}[u(Y)] \quad \forall u(\cdot) \nearrow$$

Théorie de l'utilité espérée : confronté à un choix dont les effets sont incertains, l'agent économique visera à maximiser l'espérance mathématique de l'utilité du gain.

- Second ordre stochastique

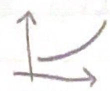
$$X \leq_2 Y \iff \int_{-\infty}^{z} F_Y(t)\,dt \leq \int_{-\infty}^{z} F_X(t)\,dt \quad \forall z \in \mathbb{R}$$
$$\iff \mathbb{E}[u(X)] \leq \mathbb{E}[u(Y)] \quad \forall u(\cdot) \nearrow \text{ et concave}$$



$$(X \leq_1 Y) \Rightarrow (X \leq_2 Y)$$

- Ordre convexe

$$X \leq_{cx} Y \iff \mathbb{E}[u(X)] \leq \mathbb{E}[u(Y)] \quad \forall u(\cdot) \text{ convexe}$$



$\Rightarrow \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ et $\mathbb{V}(X) \leq \mathbb{V}(Y)$

(comparaison de la variance de 2 va de même moyenne)

$$X \leq_{cx} Y \iff \begin{cases} (i) & \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) \\ (ii) & \int_{z}^{\infty} 1 - F_X(t)\,dt \leq \int_{z}^{\infty} 1 - F_Y(t)\,dt \quad \forall z \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Si - $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$

- $\exists j$ tq $\forall z < j \quad \mathbb{P}(X > z) \geq \mathbb{P}(Y > z)$

$\forall z \geq j \quad \mathbb{P}(X > z) \leq \mathbb{P}(Y > z)$

$\Rightarrow X \leq_{cx} Y$

Les transformées usuelles

- Fonction génératrice des moments (transformée de Laplace)
  $$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

- Fonction génératrice des probabilités
  $$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$$

- Transformée de Laplace
  $$L_X(t) = \mathbb{E}(e^{-tX})$$

- Transformée de Laplace - Stieltje
  $$LS_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} \, dF_X(t)$$

Les martingales

- Processus adapté
  $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ adapté à $\mathcal{F}_n$ si X_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable $\forall n\in\mathbb{N}$

- Martingale
  - $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est adapté à $\mathcal{F}_n$
  - $\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = X_n \quad \forall n\in\mathbb{N}$

- Caractérisation d'un processus de Poisson
  N_t est un processus de Poisson de paramètre λ
  $\iff N_t - \lambda t$ est une martingale (N_t processus de comptage)

Le modèle de Poisson composé

u : montant de réserve initiale
c : primes gagnées par unité de temps
supposés $\perp$ N_t : processus de Poisson supposé homogène de paramètre λ
(X_i) va iid $\mu = \mathbb{E}(X_i) < \infty$: montant de sinistre
$\Rightarrow$ sinistralité à l'instant t : $\sum_{i=1}^{N_t} X_i$
$\to$ le risque est assurable

Processus des réserves : $R_t(u) = u + c \cdot t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i$
La ruine : $T_r = \inf\{t > 0 \text{ tq } R_t < 0\}$

Probabilité de non ruine ultime $\quad \varphi(u) = \mathbb{P}(\forall t > 0,\ R_t > 0)$
ruine ultime $\quad \psi(u) = 1 - \varphi(u)$
non ruine en temps fini $\quad \varphi(u,T) = \mathbb{P}(\forall\, 0 < t < T,\ R_t > 0$

- Changement d'échelle de temps
  $k > 0$ et $N_t^* \sim \mathcal{P}(\lambda k)$
  $$\left.\begin{aligned} R_t(u) &= u + c \cdot t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i \\ R_t^*(u) &= u + (ck) \cdot t - \sum_{i=1}^{N_t^*} X_i \end{aligned}\right\} \text{ même probabilité de ruine}$$

- Chargement de sécurité
  (i) si $c \leq \lambda\mu \Rightarrow \psi(u) = 1 \quad \forall u \geq 0$
  (ii) si $c > \lambda\mu \Rightarrow \psi(u) < 1 \quad \forall u \geq 0$
  (iii) si $c > \lambda\mu \Rightarrow \lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0$
  $E[R_t(0)] = t(c - \lambda\mu) \to$ si l'espérance des réserves sans provision initiale est négative, la ruine est certaine.

$c = \lambda\mu(1+\theta)$ chargement de sécurité / prime pour risque

$S_t = \sum_{i=1}^{N_t} X_i \qquad \mathbb{E}[S_t] = \lambda\mu t \qquad \mathbb{E}[S_1] = \lambda\mu$

$$\begin{aligned}
\{T_r = \infty\} &= \{\inf_{t \geq 0} R_t > 0\} \\
&= \{\inf_{t \geq 0} u + ct - \textstyle\sum_{i=1}^{N_t} X_i > 0\} \\
&= \{\inf_{n \geq 1} u + cT_n - \textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i > 0\} \\
&= \{\sup_{n \geq 1} cT_n - \textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i > -u\} \\
&= \{\sup_{n \geq 1} \textstyle\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\{X_i - cW_i\}}_{Y_i} > u\}
\end{aligned}$$

$Y_i \xrightarrow{\mathbb{E}} \mu - \frac{c}{\lambda} \qquad \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n} \xrightarrow{n \to \infty} \mu - \frac{c}{\lambda}$

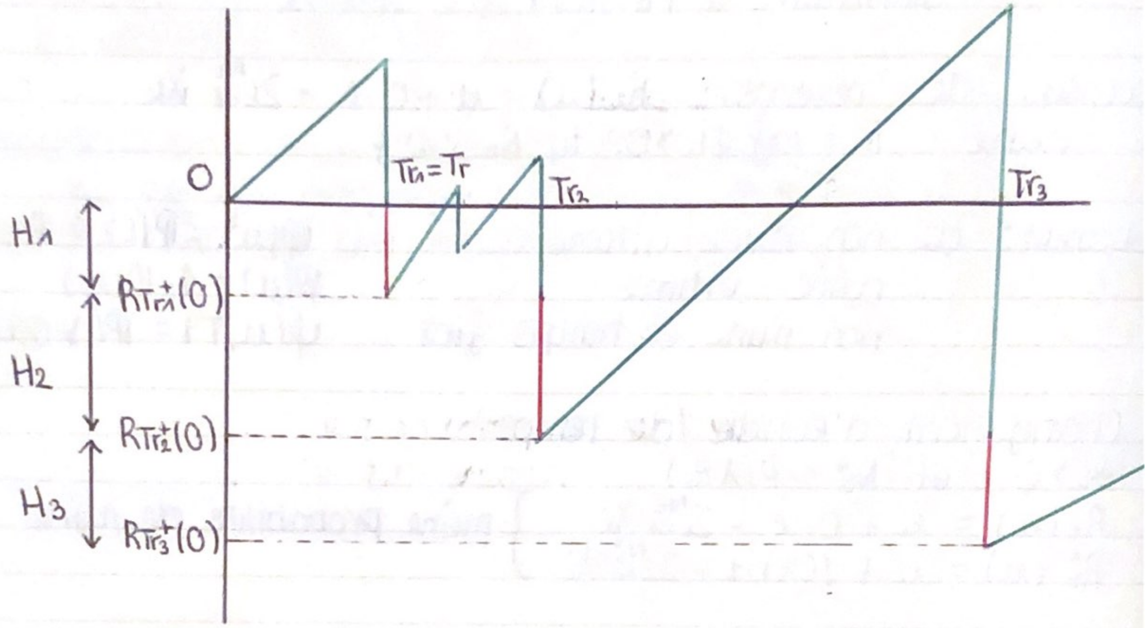
La distribution « ladder height »

$\underset{\overset{\|}{u}}{}$ $\quad \underset{\overset{\|}{H_1}}{}$

$M_0, M_1, M_2, \ldots$: suite des minimums atteints pas R_t (avec $M_0 = u$, $M_1 = H_1$)

$H_i = M_i - M_{i-1}$: ladder height , $i > 0$

Si $u = 0$ et H_1 existe, H_1 est appelé sévérité de la ruine



$$\mathbb{P}(H_1 \leq x) = \mathbb{P}(M_1 \leq x) \overset{\overset{u=0}{\downarrow}}{=} \mathbb{P}(R_{T_r^+}(0) \leq x, T_r^+ \leq \infty)$$

Fonction de répartition de H_1 : $G(x) = \mathbb{P}(R_{T_r^+}(0) \leq x, T_r^+ \leq \infty)$

(1er ladder height) $\overset{\uparrow}{u=0}$

Fonction de répartition de $H_1 \mid T_r^+ \leq \infty$: $F_e(x) = \mathbb{P}(R_{T_r^+}(0) \leq x \mid T_r^+ \leq \infty)$

(sévérité de la ruine) $\overset{\uparrow}{u=0}$

- Distribution des ladder height
  - (i) Modèle de Poisson composé $\Rightarrow H_i$ iid
  - (ii) $g(x) = G'(x) = \psi(0) \dfrac{1 - F_X(x)}{\mu}$
  - (iii) $F_e(x) = \dfrac{1}{\mu} \displaystyle\int_0^x [1 - F_X(s)]\, ds$

Formule explicite de la probabilité de la ruine

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\, dF_X(x)$$

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\left[1 - F_X(x)\right] dx$$

$$\varphi(0) = 1 - \underbrace{\frac{\lambda\mu}{c}}_{S/P}$$: la probabilité de ruine ne dépend que du S/P

$$\psi(0) = 1 - \varphi(0) = \frac{\lambda\mu}{c}$$

- Formule de Pollaczeck-Kinchine

$$\varphi(u) = \varphi(0) \sum_{n=1}^{\infty} (1-\varphi(0))^n F_e^{*n}(u)$$

$$F_e(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^u [1 - F_X(x)]\, dx$$: la proba de ruine dépend de la loi complète des sinistres

- Lien avec les ordres stochastiques

Si $X \leq_{cx} Y \Rightarrow$ (i) $X_e \leq_1 Y_e$

(ii) $\psi_X(u,c,\lambda) \leq \psi_Y(u,c,\lambda) \quad \forall u,c,\lambda$

$\varphi(u) = \mathbb{P}(\forall t, R_t(u) > 0)$

$= \mathbb{P}(M_0 \text{ existe}, M_0 > 0, \forall t > T_r, R_t(u) > M_0)$

$+ \mathbb{P}(M_1 \text{ existe}, M_1 > 0, \forall t > T_r, R_t(u) > M_1)$

$+ \mathbb{P}(M_2 \text{ existe}, M_2 > 0, \forall t > T_r, R_t(u) > M_0)$

$= \varphi(0) + (1-\varphi(0))\varphi(0) F_e(u) + (1-\varphi(0))^2 \varphi(0) F_e^{*2}(u) + \dots$

$= \varphi(0) \sum_{i=1}^{\infty} (1-\varphi(0))^n F_e^{*n}(u)$

Cas de sinistres de loi à queue légère

X à queue légère $\Leftrightarrow$ $\exists s>0$ tq $M_X(s) \doteq \mathbb{E}(e^{sX}) < \infty$

i.e. il existe un intervalle fermé pour lequel la fonction génératrice des moments existe.

<u>Ex</u> : $\mathcal{E}$, Γ, loi bornée

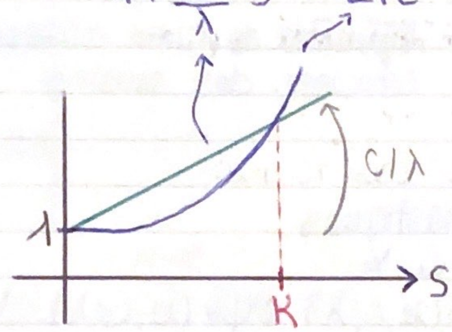
inégalité de Markov

$$\Rightarrow \mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(e^{sX} > e^{sx}) \leqslant \frac{\mathbb{E}(e^{sX})}{e^{sx}} = \frac{M_X(s)}{e^{sx}}$$

i.e. $S_X(x) \xrightarrow{x \to \infty} 0$ à une vitesse au moins exponentielle

- Coefficient d'ajustement (K)
  Solution de l'équation d'inconnu s :

$$1 + \frac{c}{\lambda} s = \mathbb{E}(e^{sX})$$



3 cas :

(i) $\forall s > 0$, $\mathbb{E}(e^{sX}) < \infty$ → K existe toujours

(ii) $\exists \sigma$ tq $\forall s < \sigma$, $\mathbb{E}(e^{sX}) < \infty$ → K existe toujours
$\forall s \geqslant \sigma$, $\mathbb{E}(e^{sX}) = \infty$

(iii) $\exists \sigma$ tq $\forall s \leqslant \sigma$, $\mathbb{E}(e^{sX}) < \infty$ → K n'existe pas toujours
$\forall s > \sigma$, $\mathbb{E}(e^{sX}) = \infty$

- Inégalité de Lundberg : $\psi(u) \leqslant e^{-Ku}$ *(X queue légère)*
  ↳ la proba. de ruine décroit exponentiellement avec les réserves
  ↳ coef d'ajustement (K) : mesure d'efficacité des réserves

- Approximation de Cramer Lundberg

$$\psi(u) \sim \frac{c - \lambda\mu}{\lambda M_X'(K) - c} e^{-Ku}$$

Cas des sinistres sous-exponentiels

X sous-exponentielle si $\lim_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i > x)}{\mathbb{P}(\max_{i \in [1,n]} X_i > x)} = 1 \quad \forall n, \; X_i \overset{iid}{\sim} F_X$

ex: Pareto, Weibull, LogN

- Queue lourde : $\lim_{x \to \infty} e^{sx} \, \mathbb{P}(X > x) = \infty$

  i.e. la queue de X est trop épaisse pour contrebalancer une croissance exponentielle

  i.e. la queue de X décroit moins vite qu'exponentiellement

- Approximation dans le cas où la sévérité de la ruine $\sim F_e$ et F_e est sous exponentielle :

$$\psi(u) \sim \frac{\lambda\mu}{c - \lambda\mu} \underbrace{[1 - F_e(u)]}_{\text{non négligeable} \to \text{ruine toujours possible}}$$

⚠ $X \sim$ sous exp. $\Longrightarrow$ F_e sous exp.
la plupart du temps mais pas toujours

Modélisation de la réassurance

h : fonction qui joue le rôle d'un traité de réassurance

Pour un sinistre X > le réassureur paie $h(X)$

> l'assureur paie $X - h(X)$

Ex : réass proportionnelle $\rightarrow h(X, \alpha) = \alpha X$

réass XS $\rightarrow h(X, \beta) = \max(X - \beta, 0)$

Prime du réassureur : $C_R = \underbrace{(1 + \theta_R)}_{\text{chargement de sécurité}} \overbrace{\lambda}^{\text{fréquence de sinistre}} \underbrace{\mathbb{E}(h(X))}_{\text{montant moyen de sinistre}}$

↳ l'assureur touche $C - C_R$

$$\lambda\mu(1+\theta) - (1+\theta_R)\lambda\,\mathbb{E}(h(X))$$

réass à 100%.

$$= \lambda\mu(1+\theta) - (1+\theta_R)\lambda\mu$$

$$= \lambda\mu(\theta - \theta_R)$$

=> il faut prendre $\theta_R > \theta$ sinon se réassurer à 100% créer une opportunité d'arbitrage pour l'assureur

- Réassurance optimale : $0 < s^{cible} < \mu$

(i) $\exists\, \beta^{cible}$ tq $h_{\beta^{cible}}(X) = \max(X - \beta^{cible}, 0)$ et $\mathbb{E}(h_{\beta^{cible}}(X)) = s^{cible}$

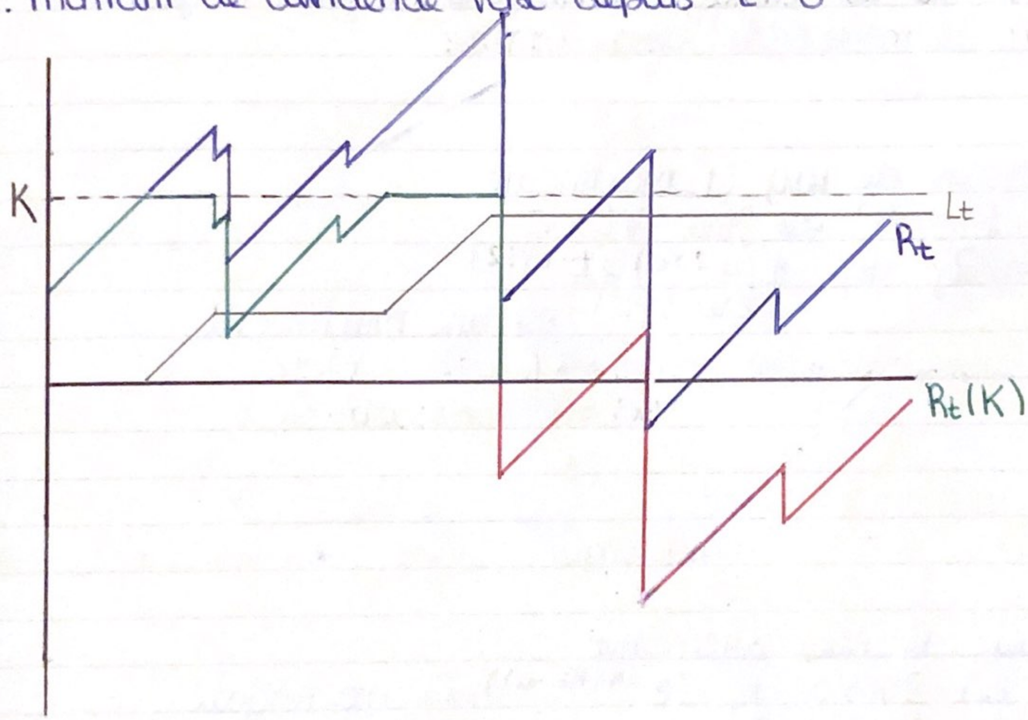
(ii) $\forall h$ tq $\mathbb{E}(h(X)) = s^{cible}$, $X - h_{\beta^{cible}}(X) \leq_{cx} X - h(X)$

Pour une prime donnée, le contrat qui minimise le risque de l'assureur (au sens convexe) est un contrat de type XS.

Les dividendes : modèle à barrière

- On suppose que les réserves ne peuvent pas dépasser une limite $K(t)$ auquel cas le surplus est versé en dividende

barrière constante : $K(t) = K \longrightarrow$ ruine certaine
L_t : montant de dividende versé depuis $t = 0$



$P_t = \sum_{n=1}^{N(t)} X_i - ct$: montant de la perte à l'instant t

$L_t = \sup\limits_{0 \leq s \leq t} \max(u - P_s - K, 0)$

$R_t = u - P_t - L_t$

- Probabilité de ruine avant de verser des dividendes
$$\delta(u, K) = \frac{\psi(u) - \psi(K)}{1 - \psi(K)}$$

- Dividendes moyens
$$\mathbb{E}(L_T) = \frac{(1 - \delta(u, K))\, c}{\lambda(1 - r)} \qquad r = \mathbb{P}(T > \inf\limits_{t > T_1}\{R_t = K\} \mid 0 < T_1 < T)$$

T : temps où se produit la ruine
T_1 : premier temps pour lequel la barrière est atteinte

Les martingales

- Processus de Lévy $(X_t)_{t\geq 0}$
  (i) $X_0 = 0$
  (ii) X_t est à accroissements indépendants
  (iii) $X_{t-s} \sim X_t - X_s \quad \forall s<t$
  (iv) X_t est cadlag (continu à droite limite à gauche)

↳ $R_t(0)$ du modèle de Poisson composé
↳ MB

- Processus de Lévy et martingale
  Si $\mathbb{E}(e^{zX_t})$ est finie $\forall t \geq 0$
  $\Rightarrow \exists f$ tq $\mathbb{E}(e^{zX_t}) = e^{tf(z)}$
  $e^{zX_t - tf(z)}$ est une martingale

→ $R_t(0)$ Poisson composé : $f(z) = \lambda \mathbb{E}(e^{-zX}) - \lambda + zc$
$f(K) = 0$ car solution de $1 + \frac{c}{\lambda} s = \mathbb{E}(e^{sX})$

→ MB de drift μ et variance σ^2 : $f(z) = z\mu + \frac{z^2\sigma^2}{2}$

- Formule de ruine alternative
  Si (i) $\exists K > 0$ tq $(e^{-K(R_t - u)})_{t\geq 0}$ martingale
  (ii) $\lim_{t\to\infty} R_t = \infty$
  Alors $\psi(u) = \dfrac{e^{-Ku}}{\mathbb{E}(e^{R_{T_r} K} \mid T_r < \infty, R_0 = u)}$

  Si K existe le modèle de Poisson composé vérifie les hypothèses

- Formule de ruine dans le cas du Brownien $W_t(\mu, \sigma^2)$, $W_0 = u \geq 0$

$$\delta(u,K) = \begin{cases} \dfrac{e^{-2\mu\frac{u}{\sigma^2}} - e^{-2\mu\frac{K}{\sigma^2}}}{1 - e^{-2\mu\frac{K}{\sigma^2}}} & \mu \neq 0 \\[2ex] \dfrac{K-\mu}{K} & \mu = 0 \end{cases}$$

$$\psi(u) = \begin{cases} e^{-2\mu\frac{u}{\sigma^2}} & \mu > 0 \\ 1 & \mu \leq 0 \end{cases}$$

$$\psi(u,T) = 2\Phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{T}}\right) \qquad \mu = 0$$

(a) Mq $\varphi(u)$ est de la forme $c_1 e^{r_1 u} + c_2 e^{r_2 u}$. $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\, \underbrace{dF_X(x)}_{f(x) = \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu}}$$

$X \sim \mathrm{Exp}(1/\mu)$

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\, e^{-x/\mu}\, dx$$

$$= \frac{\lambda}{c}\Big[\varphi(u) - \frac{1}{\mu}\underbrace{\int_0^u \varphi(y) e^{-(u-y)/\mu}\, dy}_{(*)}\Big]$$

$y = u - x \Rightarrow x = u - y$

Rappel : Leibniz

$$\frac{d}{dx}\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\,dt = f(x, b(x)).\frac{d}{dx} b(x) - f(x, a(x)).\frac{d}{dx} a(x) + \int_{a(x)}^{b(x)} \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)\,dt$$

$f(x,t) = \varphi(t) e^{-(x-t)/\mu}$ $\quad \partial/\partial x\, f(x,t) = -\frac{1}{\mu}\varphi(t) e^{-(x-t)/\mu}$

$a(x) = 0$ $\quad d/dx\, a(x) = 0$

$b(x) = x$ $\quad d/dx\, b(x) = 1$

$$(*) = \varphi(u) \overbrace{e^{-(u-u)/\mu}}^{1} + \int_0^u \left(-\frac{1}{\mu}\right)\varphi(y) e^{-(u-y)/\mu}\, dy$$

$$= -\frac{1}{\mu}\int_0^u \varphi(y) e^{-(u-y)/\mu}\, dy + \varphi(u)$$

$$\varphi''(u) = \frac{\lambda}{c}\Big[\varphi'(u) + \frac{1}{\mu^2}\int_0^u \varphi(y) e^{-(u-y)/\mu}\, dy - \frac{1}{\mu}\varphi(u)\Big]$$

$$= \frac{\lambda}{c}\varphi'(u) + \frac{1}{\mu}\underbrace{\frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(y) e^{-(u-y)/\mu}\, dy}_{\frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \varphi'(u)} - \frac{\lambda}{c\mu}\varphi(u)$$

$$= \frac{\lambda}{c}\varphi'(u) + \frac{1}{\mu}\Big[\frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \varphi'(u)\Big] - \frac{\lambda}{c\mu}\varphi(u)$$

$$= \frac{\lambda}{c}\varphi'(u) - \frac{1}{\mu}\varphi'(u) = \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right)\varphi'(u)$$

Méthode n°1 (Le prof)

On a $\varphi''(u) = \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right)\varphi'(u) \Leftrightarrow \varphi''(u) - \varphi'(u)\left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right) = 0$ (*)

On pose $r^2 - r\left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right) = 0$ (**)

Rappel : Equation Différentielle Ordinaire (EDO)
Si (**) admet 2 racines distinctes (r_1, r_2)
Alors la solution de (*) est de la forme $\varphi(u) = a e^{r_1 u} + b e^{r_2 u}$

$r_1 = 0$
$r_2 - \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right) = 0 \Rightarrow r_2 = \frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}$

Donc $\varphi(u) = c_1 e^{0 \times u} + c_2 e^{\left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right)u} = c_1 + c_2 e^{-\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}\right)u}$ (1)

On sait que $\varphi(u) \xrightarrow[u \to \infty]{} 1 \Leftrightarrow c_1 \xrightarrow[u \to \infty]{} 1 \Rightarrow c_1 = 1$

De plus, $\varphi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} \Leftrightarrow 1 + c_2 = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} \Leftrightarrow c_2 = -\frac{\lambda\mu}{c}$

Ainsi, $\varphi(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} e^{-\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}\right)u}$

Méthode n°2 (M Clavier)

On a $\varphi''(u) = \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right)\varphi'(u) \Leftrightarrow \frac{\varphi''(u)}{\varphi'(u)} = \left(\frac{\lambda}{c} - \frac{1}{\mu}\right) \Leftrightarrow \frac{d}{du} \ln \varphi'(u) = \frac{\lambda}{C} - \frac{1}{\mu} = R$

$\Rightarrow \ln \varphi'(u) = + R \times u + \underset{\text{cnte d'intégration}}{a} \Rightarrow \varphi'(u) = e^{+R \times u} \cdot e^{a}$

$\Rightarrow \varphi(u) = + \frac{1}{R} e^{+R \times u} \cdot e^{a} + \underset{\text{cnte d'intégration}}{b}$

$= c_1 + c_2 e^{Ru}$ avec $c_1 = b$ et $c_2 = \frac{1}{R} a$

$= c_1 + c_2 e^{-\left(\frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}\right)u}$ (1)

Coefficient d'ajustement dans le cas des sinistres exponentiels

$X \sim \mathcal{E}(1/\mu)$

$$1 + \frac{c}{\lambda} s = \mathbb{E}(e^{sX})$$

$$\mathbb{E}(e^{sX}) = \int_0^\infty e^{sx} \cdot \frac{1}{\mu} e^{-x/\mu} \, dx$$
$$= \frac{1}{\mu} \int_0^\infty e^{-x\left(\frac{1}{\mu} - s\right)} dx$$
$$= \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{\mu} - s\right]^{-1} \underbrace{\int_0^\infty \left(\frac{1}{\mu} - s\right) e^{-x\left(\frac{1}{\mu}-s\right)} dx}_{\to 1}$$
$$= \frac{1}{\cancel{\mu}} \left[\frac{1 - s\mu}{\cancel{\mu}}\right]^{-1} = \frac{1}{1 - s\mu}$$

$$1 + \frac{c}{\lambda} s = \frac{1}{1 - s\mu} \iff \lambda[1 - s\mu] + cs[1 - s\mu] = \lambda$$
$$\iff \cancel{\lambda} - \lambda\mu \cdot s + c \cdot s - c\mu \cdot s^2 = \cancel{\lambda}$$
$$\iff -\lambda\mu + c - c\mu \cdot s = 0$$
$$\iff s = -\frac{\lambda\mu + c}{c\mu} = \frac{\lambda}{c} + \frac{1}{\mu} = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}$$

$$X \sim \mathcal{E}(1/\mu) \Rightarrow K = \frac{1}{\mu} - \frac{\lambda}{c}$$

Proba d'être ruiné par les k premiers sinistres $\psi_k(u)$

$$\psi_1(u) = \mathbb{P}[T_1 \leq \infty , \overbrace{R_{T_1^+}(u) < 0}^{u+c\cdot t - X < 0 \iff X > u+ct}]$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^{+\infty} dF_X(x)\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t}\, \mathbb{P}(X > u + c\,t)\, dt$$

⚠ sinistres à queue légère
Inégalité de Markov :
$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}(e^{sX} > e^{sx}) \leq \frac{E(e^{sX})}{e^{sx}}$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \frac{\mathbb{E}(e^{KX})}{e^{(u+ct)K}}\, dt$$

$$= \lambda \mathbb{E}(e^{KX}) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t - K(u+ct)}\, dt$$

$$= \lambda \mathbb{E}(e^{KX}) e^{-Ku} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t - Kct}\, dt$$

$$= \lambda\, E(e^{KX}) e^{-Ku} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+Kc)t}\, dt$$

$$= \lambda\, E(e^{KX}) e^{-Ku} \left[-\frac{1}{\lambda+Kc} e^{-(\lambda+Kc)t}\right]_0^{+\infty}$$

$$= \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda+Kc}}_{\left[\frac{\lambda+Kc}{\lambda}\right]^{-1} = \left[1+\frac{c}{\lambda}K\right]^{-1} = \left[\mathbb{E}(e^{KX})\right]^{-1}} e^{-Ku}\, \mathbb{E}(e^{KX}) = e^{-Ku}$$

définition du coef. d'ajustement

$$\Rightarrow \psi_1(u) \leq e^{-Ku}$$

On suppose $\psi_k(u) \leq e^{-Ku}$

$$\psi_{k+1}(u) = \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \cdot \left[\int_{u+ct}^{+\infty} dF_X(x) + \int_0^{u+ct} \psi_k(u+ct-x)\, dF_X(x)\right] dt$$

Proba ruiné au 1er + Proba non ruiné au premier ($x < u+ct$)
$\times$ Proba ruiné aux k suivants $\psi_k(u+ct-x)$

$$\leq \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_{u+ct}^{+\infty} e^{-K(u+ct-x)}\, dF_X(x) + \int_0^{u+ct} e^{-K(u+ct-x)}\, dF_X(x)\, dt$$

$u+ct \leq x \Rightarrow u+ct-x \leq 0 \Rightarrow e^{-K(u+ct-x)} \geq 1$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} \int_0^{+\infty} e^{-K(u+ct-x)}\, dF_X(x)\, dt$$

$$= \int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda t} e^{-K(u+ct)} \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{Kx}\, dF_X(x)}_{E(e^{KX})}\, dt$$

$$= \lambda \mathbb{E}(e^{KX}) e^{-Ku} \int_0^{+\infty} e^{-(\lambda+Kc)t}\, dt$$

$$= e^{-Ku} \quad //$$

Par récurrence, $\psi_k(u) \leq e^{-Ku} \quad \forall k \geq 0$ //

TD - Démonstration de la formule de Pollaczeck-Kinchine

Modélisation d'une compagnie d'ass :
- Montant de réserve initial : u
- Collecte des primes à un rythme c
- Sinistre aléatoire suivant $N(t) \sim \mathcal{P}(\lambda)$
- Montant de sinistres X_i iid et $\mathbb{E}(X_i) = \mu$

Réserves en date t : $R_t = u + c \cdot t - \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$

Proba qu'un jour la compagnie d'ass soit ruinée i.e. ses réserves passent sous 0.

$\varphi(u) = 1 - \mathbb{P}(\inf_{t \geq 0} R_t < 0 \mid R_0 = u)$

Si $1 - \frac{\lambda \mu}{c} \leq 0 \Rightarrow$ ruine certaine : $\varphi(u) = 0$

On suppose donc $1 - \frac{\lambda\mu}{c} > 0$.

(a) En s'intéressant à l'intervalle $[0, dt]$ puis en faisant tendre dt vers 0, mq

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\, dF_X(x)$$

Méthode MClavier

$$\varphi(u) = \underbrace{\mathbb{P}(T_1 > h)}_{1-\mathbb{P}(T_1<h)} \varphi(u + c \cdot h) + \int_0^h f_{T_1}(t) \int_0^{u+ct} \varphi(u+ct-x) F_X(x)\, dt$$

① ②

Cas ① : $T_1 > h \Rightarrow$ le processus des réserves repart après un temps h de la position $u + c \cdot h$

Cas ② : $T_1 < h \Rightarrow$ le processus des réserves repart après un temps aléatoire T_1 de la position $u + c \cdot T_1 - X_1$

$$\frac{\varphi(u+c\cdot h) - \varphi(u)}{c \cdot h} = \frac{\mathbb{P}(T_1<h)}{c \cdot h}\varphi(u+ch) - \frac{1}{c \cdot h}\int_0^h f_{T_1}(t) \int_0^{u+ct} \varphi(u+ct-x) F_X(x)\, dt$$

$$\xrightarrow{ch \to 0} \frac{1}{c} \underbrace{\lim_{h\to 0}\left\{\frac{1-e^{-\lambda h}}{h}\right\}}_{\overset{\uparrow}{=} \lim_{h\to 0} \lambda e^{-\lambda h} = \lambda} \varphi(u) - \frac{1}{c}\underbrace{\lim_{h\to 0}\left\{\int_0^h \frac{f_{T_1}(t)}{h}\int_0^{u+ch}\varphi(u+ch-x)F_X(x)\,dt\right\}}_{\underbrace{\lim_{h\to 0}\left\{\frac{\int_0^h f_{T_1}(t)\,dt}{h}\right\}}_{\lambda}\int_0^u \varphi(u-x) F_X(x)}$$

L'Hospital

$$\varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x) F_X(x)$$

Methode prog

(a) Déf. Processus de Poisson homogène

(1) $N_0 = 0$

(2) $\mathbb{P}(N_h = 0) \xrightarrow[h\to 0]{} 1 - \lambda h + O(\cdot)$

(3) $\mathbb{P}(N_h = 1) \xrightarrow[h\to 0]{} \lambda h + O(h)$

(4) accroissements indépendants stationnaires

$h \to 0$:

$$\varphi(u) = \mathbb{P}(N_h = 0)\,\varphi(u+ch) + \mathbb{P}(N_h = 1)\int_0^{u+ch} \varphi(u+ch-x)\,dF_X(x)$$

$$= [1-\lambda h]\,\varphi(u+ch) + \lambda h \int_0^{u+ch} \varphi(u+ch-x)\,dF_X(x)$$

$$\to \frac{\varphi(u+ch)-\varphi(u)}{ch} = \frac{\lambda}{c}\varphi(u+ch) - \frac{\lambda}{c}\int_0^{u+ch}\varphi(u+ch-x)\,dF_X(x)$$

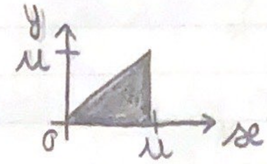
$$\xrightarrow[h\to]{} \varphi'(u) = \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^{u}\varphi(u-x)\,dF_X(x)$$

(b) En intégrant l'équation précédente, mq

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)(1 - F_X(x))\,dx$$

$$\int_0^u \varphi'(y)\,dy = [\varphi(y)]_0^u = \varphi(u) - \varphi(0)$$

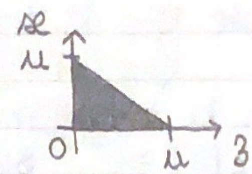
$$\varphi(u) - \varphi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(y)\,dy - \frac{\lambda}{c}\underbrace{\int_0^u\int_0^y \varphi(y-x)\,dF_X(x)\,dy}_{(*)}$$



$$(*) = \int_{y=0}^{y=u}\int_{x=0}^{x=y} \varphi(y-x)\,dF_X(x)\,dy$$

$$= \int_{x=0}^{x=u}\int_{y=x}^{u} \varphi(y-x)\,dy\,dF_X(x)$$

$$z = y - x \Rightarrow y = z + x$$



$$(*) = \int_{x=0}^{x=u}\int_{z=0}^{z=u-x} \varphi(z)\,dz\,dF_X(x)$$

$$= \int_{z=0}^{z=u}\int_{x=0}^{x=u-z} \varphi(z)\,dF_X(x)\,dz$$

$$= \int_{z=0}^{z=u} \varphi(z)\int_{x=0}^{x=u-z} dF_X(x)\,dz$$

$$= \int_{z=0}^{z=u} \varphi(z)\,[F_X(x)]_{x=0}^{x=u-z}\,dz$$

$$= \int_0^u \varphi(z)\,F_X(u-z)\,dz$$

$$= \int_0^u \varphi(y)\,F_X(u-y)\,dy$$

$$\varphi(u) - \varphi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(y)\,dy - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(y)\,F_X(u-y)\,dy$$

$$= \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(y)\,[1 - F_X(u-y)]\,dy$$

$x = u - y \Rightarrow y = u - x \Rightarrow dy = -dx$

$\Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = u$

$\Rightarrow y = u \Rightarrow x = 0$

$$\varphi(u) - \varphi(0) = \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\,[1 - F_X(x)]\,dx$$

$$\varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\,[1 - F_X(x)]\,dx \;//$$

(c) En déduire une expression simple pour $\varphi(0)$.

$$\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = \lim_{u\to\infty}\left[1 - \mathbb{P}(\inf_{t\geq 0} R_t < 0 \mid R_0 = u)\right]$$
$$= 1 - \lim_{u\to\infty} \mathbb{P}(\inf_{t\geq 0} R_t < 0 \mid R_0 = u)$$
$$= 1 - 0$$
$$= 1$$

$$\lim_{u\to\infty} \int_0^u \varphi(u-x)\left[1 - F_X(x)\right] dx = \int_0^\infty S_X(x)\, dx = \mathbb{E}(X) = \mu$$

$$\underset{\uparrow\,(b)}{1} = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\mu \Rightarrow \varphi(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} \;//$$

(d) On note φ_{LS} la transformée de Laplace Stieltjes de φ
$$\varphi_{LS}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su}\, d\varphi(u)$$
et φ_L la transformée de Laplace de φ
$$\varphi_L(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su} \varphi(u)\, du$$
Mq
$$\varphi_{LS}(s) = s\,\varphi_L(s)$$

$$d\varphi(u) = \varphi'(u) \underset{\uparrow\,(a)}{=} \frac{\lambda}{c}\varphi(u) - \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\, dF_X(x)$$

$$\varphi_{LS}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su}\, d\varphi(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-su} \varphi'(u)\, du$$

<u>Rappel</u> : $\int (f'g)\, dx = fg - \int (fg')\, dx$

$$\varphi_{LS}(s) = \left[\varphi(u) e^{-su}\right]_{-\infty}^{+\infty} - \left[-s\int_{-\infty}^{\infty} e^{-su}\varphi(u)\, du\right]$$
$$= 0 - 0 + s\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-su}\varphi(u)\, du$$
$$= s\,\varphi_L(s) \;//$$

(e) On note $F_e(u) = \frac{1}{\mu}\int_0^u (1 - F_X(t))dt$.

Mq

$$\varphi_L(s) = \frac{1 - \frac{\lambda\mu}{c}}{s} + \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)\,\varphi_L(s)$$

$$dF_e(u) = \frac{1}{\mu}\left[1 - F_X(t)\right]_0^u = \frac{1}{\mu}\left[1 - F_X(u) - \cancel{1} + \cancel{1}\right] = \frac{1}{\mu}\left[1 - F_X(u)\right]$$

$$(b) \Rightarrow \varphi(u) = \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\left[1 - F_X(x)\right]dx$$

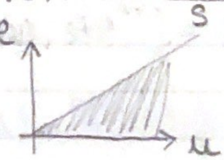
$$= \varphi(0) + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\,\mu\, dF_e(x)$$

$$(d) \Rightarrow \varphi_L(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-su}\varphi(u)\,\mathbb{1}_{\{u \geq 0\}}\,du$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-su}\left[\varphi(0) + \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^u \varphi(u-x)\,dF_e(x)\right]du$$

$$= \underbrace{\int_0^{+\infty} e^{-su}\varphi(0)\,du}_{A} + \underbrace{\frac{\lambda\mu}{c}\int_0^{+\infty} e^{-su}\int_0^u \varphi(u-x)\,dF_e(x)\,du}_{B}$$

$$A = \int_0^{+\infty} e^{-su}\varphi(0)\,du = \varphi(0)\left[-\frac{1}{s}e^{-su}\right]_0^{+\infty} = \varphi(0)/s \overset{(c)}{=} \frac{1 - \frac{\lambda\mu}{c}}{s}$$



$$B = \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^{+\infty} e^{-su}\int_0^u \varphi(u-x)\,dF_e(x)\,du$$

$$= \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-su}\varphi(u-x)\,du\,dF_e(x)$$

$$= \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^{+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-s(u-x)}e^{-sx}\varphi(u-x)\,du\,dF_e(x) \qquad y = u - x \Rightarrow u = y + x$$

$$= \frac{\lambda\mu}{c}\int_0^{+\infty} e^{-sx}\int_0^{+\infty} e^{-sy}\varphi(y)\,dy\,dF_e(x)$$

$$= \frac{\lambda\mu}{c}\left[\int_0^{+\infty} e^{-sx}\,dF_e(x)\right]\left[\int_0^{+\infty} e^{-sy}\varphi(y)\,dy\right]$$

$$= \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)\,\varphi_L(s)$$

$$\Rightarrow \varphi_L(s) = \frac{1 - \frac{\lambda\mu}{c}}{s} + \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)\,\varphi_L(s) \quad //$$

(f) Mq

$$\varphi(u) = \varphi(0) \sum_{n=0}^{\infty} (1-\varphi(0))^n \, F_e^{*n}(u)$$

(e) $\Rightarrow \varphi_L(s) = \dfrac{\varphi(0)}{s} + \dfrac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s) \varphi_L(s)$

$$\varphi_L(s) \left[1 - \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)\right] = \frac{\varphi(0)}{s}$$

$$s\varphi_L(s) \left[1 - \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)\right] = \varphi(0)$$

(d)

$$\varphi_{LS}(s) \left[1 - \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)\right] = \varphi(0)$$

$$\varphi_{LS}(s) = \varphi(0) \left[1 - \frac{\lambda\mu}{c} F_{e,LS}(s)\right]^{-1}$$

Rappel $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \dfrac{1}{1-r}$

$$\Rightarrow \varphi_{LS}(s) = \varphi(0) \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\left(\frac{\lambda\mu}{c}\right)}_{(c) \Rightarrow 1-\varphi(0)}^n F_{e,LS}^{*n}(s)$$

$$\varphi_{LS}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varphi(u) = \varphi(u)$$

$$F_{e,LS}(0) = \int_0^{+\infty} dF_e(u) = F_e(u)$$

$$\Rightarrow \varphi(u) = \varphi(0) \sum_{n=0}^{\infty} (1-\varphi(0))^n \, F_e^{*n}(u)$$