M1 Actuariat, économétrie et statistiques, année 2022–2023

NOM, Prénom :

Statistique Inférentielle
Contrôle continu

Mercredi 9 Décembre

Durée 1h30, documents, téléphone, calculatrice interdits

Le barème (indicatif) prévu est le suivant : 12-8(on tiendra compte (grave) de la présentation et de la clareté des explications):

Début ~ 11h30

On rappelle que la densité d'une loi $\Gamma(\alpha, \beta)$ vaut :

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Exercice 1

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon de variables aléatoires de même loi X, où X admet pour densité

$$f(x) = a \exp\left(-a(x-b)\right) \mathbb{1}_{\{x \geq b\}}$$

1. Calculer l'espérance et la variance de X. $\underline{a > 0}$

$$\mathbb{E}[X] = \int x\, a \exp(-a(x-b))\, \mathbb{1}_{\{x \geq b\}}(x)\, dx$$

$$= \int_b^\infty a x e^{-a(x-b)} dx \qquad \underline{\text{IPP}} : u = ax \quad u' = a \quad v' = e^{-a(x-b)} \quad v = -\frac{1}{a} e^{-a(x-b)}$$

$$= \left[-x e^{-a(x-b)}\right]_b^\infty + \int_b^\infty e^{-a(x-b)} dx = b + \left[-\frac{1}{a} e^{-a(x-b)}\right]_b^\infty$$

$$= b + \frac{1}{a}$$

$$V(X) = \int_b^\infty x^2 a \exp(-a(x-b))\, dx - \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 \qquad \underline{\text{IPP}} : u = ax^2 \quad u' = 2ax \quad v' = e^{-a(x-b)} \quad v = -\frac{1}{a} e^{-a(x-b)}$$

$$= \underbrace{\left[-x^2 e^{-a(x-b)}\right]_b^\infty}_{= b^2} + \underbrace{\int_b^\infty 2x e^{-a(x-b)} dx}_{\frac{2}{a}\mathbb{E}[X]} - \left(b + \frac{1}{a}\right)^2$$

$$= b^2 + \frac{2}{a}\left(b + \frac{1}{a}\right) - \left(b + \frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a^2}$$

2. On suppose dans un premier temps que <u>b est connu</u>. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{a}_n$ de a ?

$$L = \prod_{i=1}^{n} a e^{-a(x_i-b)} \mathbb{1}_{x_i \geq b} = a^n e^{\sum_{i=1}^{n} -a(x_i-b)} \mathbb{1}_{\min x_i \geq b}$$

Indep du Support

$$\Rightarrow \ln L = n \ln a - \sum_{i=1}^{n} a(x_i - b)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{n}{a} - \sum_{i=1}^{n} (x_i - b) \quad \Rightarrow \hat{a}_n \text{ est tq } \frac{n}{\hat{a}_n} - \sum_{i=1}^{n} (x_i - b) = 0$$

$$\Rightarrow \hat{a}_n = \frac{n}{\sum_{1}^{n} (x_i - b)}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial a^2} = -\frac{n}{a^2} < 0$$

Donc l'EMV $\hat{a}_n$ de a est $\hat{a}_n = \dfrac{n}{\sum_{1}^{n} (X_i - b)}$

3. Calculer le biais et la variance $\hat{a}_n$. $\hat{a}_n$ est-il convergent ?

$$B_a(\hat{a}_n) = \mathbb{E}[\hat{a}_n] - a$$

$$\mathbb{E}[\hat{a}_n] = \mathbb{E}\left[\frac{n}{\sum (X_i - b)}\right] = n \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sum (X_i - b)}\right]$$

On remarque $X_i - b \sim \mathcal{E}(a) \Rightarrow \sum (X_i - b) \sim \Gamma(n, a)$

$\Rightarrow \dfrac{1}{\sum (X_i - b)}$ suit une loi inverse gama de paramètre n et a

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sum (X_i - b)}\right] = \frac{a}{n-1}$$

ou par le calcul $\mathbb{E}\left[\frac{1}{\Gamma(n,a)}\right] = \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{a^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-ax} dx$

$$= \int_0^\infty \frac{a^n}{\Gamma(n)} x^{n-2} e^{-ax} dx = \frac{a}{n-1} \int_0^\infty \frac{a^{n-1}}{\Gamma(n-1)} x^{n-1-1} e^{-ax} dx$$

$$= \frac{a}{n-1} \underbrace{\int f_{\Gamma(n-1,a)} dx}_{=1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{a}_n] = \frac{na}{n-1} - a = \frac{a}{n-1} \xrightarrow[\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ asympt SB

$$\text{et } V(\hat{a}_n) = n^2 V\left(\frac{1}{\Gamma(n,a)}\right) = n^2 \times \frac{a^2}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{n^2 a^2}{(n-1)^2(n-2)} \xrightarrow[\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ Convergent

4. $\hat{a}_n$ est-il efficace ?

Efficace si $V(\hat{a}_n) = \frac{g'(a)^2}{I_n(a)}$

$g : x \mapsto \frac{n}{n-1} x \quad g'(x) = \frac{n}{n-1}$

$I_n(a) = -\mathbb{E}[\frac{\partial^2 \ell L}{\partial a^2}] = \frac{n}{a^2}$

$$\frac{g'(a)^2}{I_n(a)} = \frac{\frac{n^2}{(n-1)^2}}{\frac{n}{a^2}} = \frac{n^2 a^2}{n(n-1)^2} = \frac{n a^2}{(n-1)^2} \neq \frac{n^2 a^2}{(n-1)^2 (n-2)}$$

$\Rightarrow$ non efficace

5. Calculer l'estimateur $\hat{a}_M$ par la méthode des moments de a.

Dimens° 1 : $\Rightarrow$ 1 équat°

$\mathbb{E}[X_i] = b + \frac{1}{a}$

$\underset{\text{Moments}}{\Rightarrow} b + \frac{1}{\hat{a}_M} = \bar{X}_n \Rightarrow \hat{a}_M = \frac{1}{\bar{X}_n - b} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum(X_i - b)} = \frac{n}{\sum(X_i - b)}$

On rq $\hat{a}_M = \hat{a}_n$

6. Calculer le biais et la variance de $\hat{a}_M$. Est-il convergent ?

$B_a(\hat{a}_M) = \mathbb{E}[\hat{a}_M] - a$

$\mathbb{E}[\hat{a}_M] = \mathbb{E}\left[\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - b)}\right]$ Comme $\hat{a}_M$ et $\hat{a}_n$ ont la m̂ expressᵒ cela revient à refaire la Q3

$= n \frac{a}{n-1} \Rightarrow B_a(\hat{a}_M) = \frac{a}{n-1} \xrightarrow[\infty]{} 0$ asympt SB

$V(\hat{a}_M) \underset{Q3}{=} \frac{n^2 a^2}{(n-1)^2(n-2)} \longrightarrow 0$

$\Rightarrow$ Convergent

7. Calculer la normalité asymptotique de $\hat{a}_M$.

On va appliquer la méthode Delta au TCL avec $g : x \mapsto \frac{1}{x-b}$

$\Rightarrow \sqrt{n}\left(g(\bar{X}_n) - g\left(b+\frac{1}{a}\right)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, V(\bar{X}_n)\left(g'\left(b+\frac{1}{a}\right)\right)^2\right)$ $g(\bar{X}_n) = \hat{a}_M$ $g\left(b+\frac{1}{a}\right) = a$

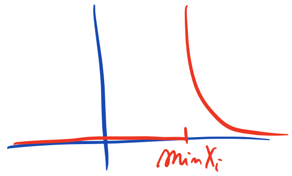
$g'(x) = -\frac{1}{(x-b)^2}$ $\left(g'\left(b+\frac{1}{a}\right)\right)^2 = a^4$

$\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{a}_M - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \underbrace{\frac{n^2a^2}{(n-1)^2(n-2)} \times a^4}_{\frac{n^2 a^8}{(n-1)^2(n-1)}}\right)$

8. On suppose maintenant que <u>a est connu</u> et que b est le paramètre inconnu. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{b}_n$ de b ?

$$L = a^n e^{-\sum a(x_i - b)} \mathbb{1}_{\min X_i \geq b}$$

On maximise la vraisemblance



$$\Rightarrow \hat{b}_n = \min_{i \in [1,n]} X_i$$

9. Calculer le biais et la variance $\hat{b}_n$. $\hat{b}_n$ est-il convergent ?

$$B_b(\hat{b}_n) = \mathbb{E}[\min X_i] - b$$

$$\mathbb{E}[\min X_i] = ?$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\min X_i \leq x) = 1 - \mathbb{P}(\min X_i > x) &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)^n \\
&= 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x))^n \\
&= 1 - \left(1 - \int_b^x a e^{-a(t-b)} dt\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - \left[-e^{-a(t-b)}\right]_b^x\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - \left(-e^{-a(x-b)} + 1\right)\right)^n \\
&= 1 - e^{-na(x-b)}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow f_{\min X_i}(x) = na e^{-na(x-b)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\min X_i] = \int_b^\infty x na e^{-na(x-b)} dx = \left[-x e^{-na(x-b)}\right]_b^\infty + \int_b^\infty e^{-na(x-b)} dx = b + \left[-\frac{1}{na} e^{-na(x-b)}\right]_b^\infty$$

$$= b + \frac{1}{na} \xrightarrow[\infty]{} b$$

$\Rightarrow$ asympt SB

IPP

$u = x \quad u' = 1$

$v' = na e^{-na(x-b)} \quad v = -e^{-na \dots}$

$$V(\hat{b}_n) = \underbrace{\int x^2 na e^{-na(x-b)}}_{= b^2 + \frac{2}{na}\left(b + \frac{1}{na}\right)} - \left(b + \frac{1}{na}\right)^2$$

$$= b^2 + \frac{2}{na}\left(b + \frac{1}{na}\right) - \left(b + \frac{1}{na}\right)^2 = b^2 + \frac{2}{na} b + \frac{2}{(na)^2} - b^2 - \frac{2b}{na} - \frac{1}{(na)^2} = \frac{1}{(na)^2} \xrightarrow[\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ Convergent

10. $\hat{b}_n$ est-il exhaustif ?

$$L(\_,b) = a^n e^{-\sum a(x_i - b)} \mathbb{1}_{\min x_i \geq b}$$

$$= \underbrace{a^n e^{nab} \mathbb{1}_{\hat{b}_n \geq b}}_{\varphi(b,\hat{b}_n)} \underbrace{e^{-a\sum x_i}}_{\psi(x_1,\_,x_n)}$$

$\Rightarrow$ exhaustif

11. Calculer l'estimateur $\hat{b}_M$ par la méthode des moments de b.

1Dim° : $\mathbb{E}[X_i] = b + \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow \hat{b}_M + \frac{1}{a} = \overline{X}_n \Rightarrow \hat{b}_M = \overline{X}_n - \frac{1}{a}$$

12. Calculer le biais et la variance de $\hat{b}_M$. Est-il convergent ?

$B_b(\hat{b}_M) = \mathbb{E}[\hat{b}_M] - b$

$\mathbb{E}[\hat{b}_M] = \mathbb{E}[\bar{X}_n - \frac{1}{a}] = \mathbb{E}[\bar{X}_n] - \frac{1}{a}$

$= \frac{1}{n} \times n \, \mathbb{E}[X_n] - \frac{1}{a}$

$= \mathbb{E}[X] - 1/a = b + 1/a - 1/a = b \Rightarrow SB$

$V(\hat{b}_M) = V(\bar{X}_n - \frac{1}{a}) = V(\bar{X}_n) = V(X) = \frac{1}{a^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{a^2}$ Q1

$\Rightarrow$ non CV

13. Calculer la normalité asymptotique de $\hat{b}_M$.

On va appliquer la méthode delta avec $g : x \mapsto x - \frac{1}{a}$ $g(b + \frac{1}{a}) = b$

$g(\bar{X}_n) = \hat{b}_M$ $g'(x) = 1$

$\Rightarrow \sqrt{n} \left(g(\bar{X}_n) - g(b + \frac{1}{a}) \right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V(X)(g'(b + 1/a))^2)$

$\Rightarrow \sqrt{n} (\hat{b}_M - b) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, a^{-2})$

14. Quel estimateur entre $\hat{b}_n$ et $\hat{b}_M$ est préférable au sens du risque quadratique.

$$R(\hat{b}_n, b) = B_b(\hat{b}_n)^2 + V(\hat{b}_n) = \left(b + \frac{1}{na}\right)^2 + \frac{1}{(na)^2} = b^2 + \frac{2}{na}\left(b + \frac{1}{na}\right)$$

$$R(\hat{b}_M, b) = B_b(\hat{b}_M)^2 + V(\hat{b}_M) = 0 + \frac{1}{a^2}$$

$$\frac{R(\hat{b}_n, b)}{R(\hat{b}_M, b)} = a^2\left(b^2 + \frac{2}{na}\left(b + \frac{1}{na}\right)\right) = a^2b^2 + \frac{2a}{n}\left(b + \frac{1}{na}\right)$$

$$= a^2b^2 + \frac{2ab}{n} + \frac{2}{n^2}$$

Si $ab > 1 \Rightarrow R(\hat{b}_n, b) \geq R(\hat{b}_M, b) \Rightarrow \hat{b}_M$ préférable (n grand tq $\frac{2}{n}$ (ab>1) négligeable devant a^2b^2)

Sinon $\hat{b}_n$ préférable

15. On suppose maintenant que a et b sont inconnus i. e. ce sont des paramètres. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $(\hat{a}_n^*, \hat{b}_n^*)$ de (a, b).

16. Calculer l'estimateur des moments $(\hat{a}_M^*, \hat{b}_M^*)$ de (a, b).

17. Calculer la normalité asymptotique de $(\hat{a}_M^*, \hat{b}_M^*)$

Exercice 1 :

On considère un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2 \right)$$

avec $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

1. On suppose dans un premier temps que μ est connu. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\sigma}^2$ de σ^2

2. Calculer l'information de Fisher pour σ^2 du modèle.

3. $\hat{\sigma}^2$ est-il convergent? Efficace?

4. On suppose maintenant que μ et σ^2 sont inconnus. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ de (μ, σ^2)

5. Calculer la matrice d'information de Fisher du modèle pour (μ, σ^2)

6. Calculer l'estimateur des moments $(\hat{\mu}_{MM}, \hat{\sigma}^2_{MM})$ de (μ, σ^2)

7. Calculer la loi limite de $(\hat{\mu}_{MM}, \hat{\sigma}^2_{MM})$.