La Copule de Clayton

Projet ERM

Master 2 Actuariat 2023/2024
12/12/2023

CHAHWANE Gretta
LEDUC Aurélie
MEILLAND Lucile

PLAN

INTRODUCTION

- Importance de la dépendance entre les variables en finance et en assurance
- Méthodes classiques vs copules

FONDEMENTS THÉORIQUES

- Généralités sur les copules avec un zoom sur les copules archimédiennes
- Généralités sur la copule de Clayton et la copule de survie de Clayton
- Mesures de dépendance

APPLICATIONS

- Application et étude de cas en assurance
- Application en finance

CONCLUSION

- Résumé sur la copule de Clayton
- Les avantages et les limites de la copule de Clayton
- Ouverture

INTRODUCTION

Projet ERM

INTRODUCTION

Importance de la dépendance entre les variables en finance et assurance

ANTICIPATION DES DÉPENDANCES

- Compréhension de l'évolution conjointe des variables
- Prédiction des évènements et résultats futurs

ÉVALUATION DES RISQUES

- Compréhension de l'intéraction entre différents facteurs
- Analyse de l'influence de ces intéractions sur le risque global
- Quantification des risques

OPTIMISATION DES PROCESSUS

- Compréhension de l'influence des variables sur le résultat d'un processus
- Amélioration de l'efficacité, la qualité et la rentabilité

INTRODUCTION

Méthodes classiques VS copules

→ Dépendance entre X et Y selon le coefficient de corrélation linéaire (sachant les distributions marginales de X et Y):

$$r(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{Var(X)Var(Y)}}$$

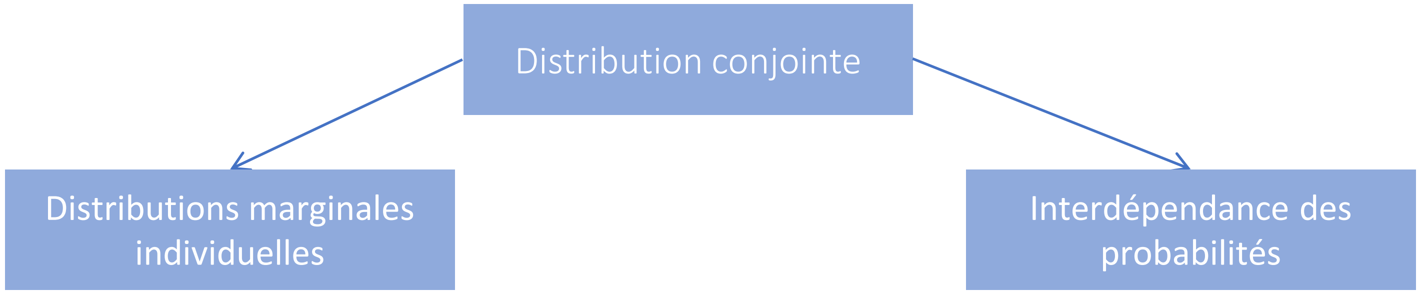
→ Mesure simple et facile mais présente des limites :

- Sensible aux valeurs aberrantes
- Capture uniquement les dépendances linéaires
- Ne détermine pas le comportement conjoint de X et Y
- Forte dépendance aux lois marginales
- Pas de sensibilité aux dépendances des extrêmes

Exemples

- Assurance vie conjointe : distribution conjointe des durées de vie.
- Finance : distribution de plusieurs variables interagissant ensemble (actifs financiers, ...).

→ Utilisation des copules pour exprimer les distributions jointes de plusieurs variables.



FONDEMENTS THEORIQUES

Projet ERM

FONDEMENTS THÉORIQUES

Généralités sur les copules

DEFINITION

- Soit C la copule bivariée :

$$\boxed{C(x,y) = P(X \leq x, \ \ Y \leq y)}$$ où X et Y sont des variables aléatoires de lois uniformes sur [0,1].

- Description de la dépendance entre les variables aléatoires sans être influencé par les caractéristiques des marginales.

THEOREME DE SKLAR

- Soit H la fonction de répartition de marges F_1 et F_2, alors il existe une copule C telle que :

$$\boxed{H(x,y) = C\big(F_1(x), F_2(y)\big)} \ \ avec\ x, y \in \mathbb{R}\ et\ où\ F_1$$ et F_2 sont les marges.

- Si F_1 et F_2 sont continues alors C est unique sinon C est déterminée sur Ran $F_1 \times$ Ran F_2.

- Inversement, si C est une copule et si F_1 et F_2 sont des fonctions de répartition alors F est une fonction de répartition bivariée avec les fonctions de répartition marginales F_1 et F_2 :

$$\boxed{F(x,y) = C\big(F_1(x), F_2(y)\big)} \ \ avec\ x, y \in \mathbb{R}.$$

FONDEMENTS THÉORIQUES

Généralités sur les copules

PROPRIETES

CONTINUITE, DIFFERENTIABILITE & INVARIANCE

- Soit C une copule bivariée, pour tout $x_1, x_2, y_1, y_2 \in [0,1]$ tels que $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$ on a :

$$\boxed{|C(x_2, y_2) - C(x_1, y_1)| \leq |x_2 - x_1| + |y_2 - y_1|}$$

  C est donc continue uniformément sur ce domaine.

- Soit C une copule bivariée, pour chaque x (respectivement y) $\in [0,1]$, la dérivée partielle $\frac{\partial C}{\partial x}(x, y)$ (respectivement $\frac{\partial C}{\partial y}(x, y)$) existe pour tout y (respectivement x) $\in [0,1]$ et est comprise entre 0 et 1.

- Les copules sont invariantes sous transformation strictement monotone des variables aléatoires.

BORNES DE FRECHET

- Soit C une copule définie sur $[0,1]^2$, alors C est encadrée par les bornes de Fréchet :

$$\boxed{max(x_1 + x_2 - 1; 0) \leq C(x_1, x_2) \leq \min(x_1, x_2)}$$

QUELQUES FAMILLES

- Copule elliptique : Gaussienne, Student
- Copule archimédienne : Clayton, Franck, Gumbel

FONDEMENTS THÉORIQUES

Zoom sur les copules archimédiennes

DEFINITION

- Soit φ (générateur de la copule) strictement décroissante et convexe de [0,1] dans [0, +∞[

$$\boxed{C(x,y) = \varphi^{-1}\big(\varphi(x) + \varphi(y)\big) avec\ x, y \in \mathbb{R}}$$

PROPRIETES

GENERATEUR DE LA COPULE

Soit φ le générateur strict :

- φ est strictement décroissante
- φ est continue
- φ(1) = 0
- $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi = +\infty$

LES PRINCIPALES COPULES ARCHIMEDIENNES

- Clayton
- Franck
- Gumbel

FONDEMENTS THEORIQUES

Généralités sur la copule de Clayton

LA COPULE DE CLAYTON

- La copule est définie sur $[0,1]^2$.
- La copule en dimension 2 est définie comme ceci :

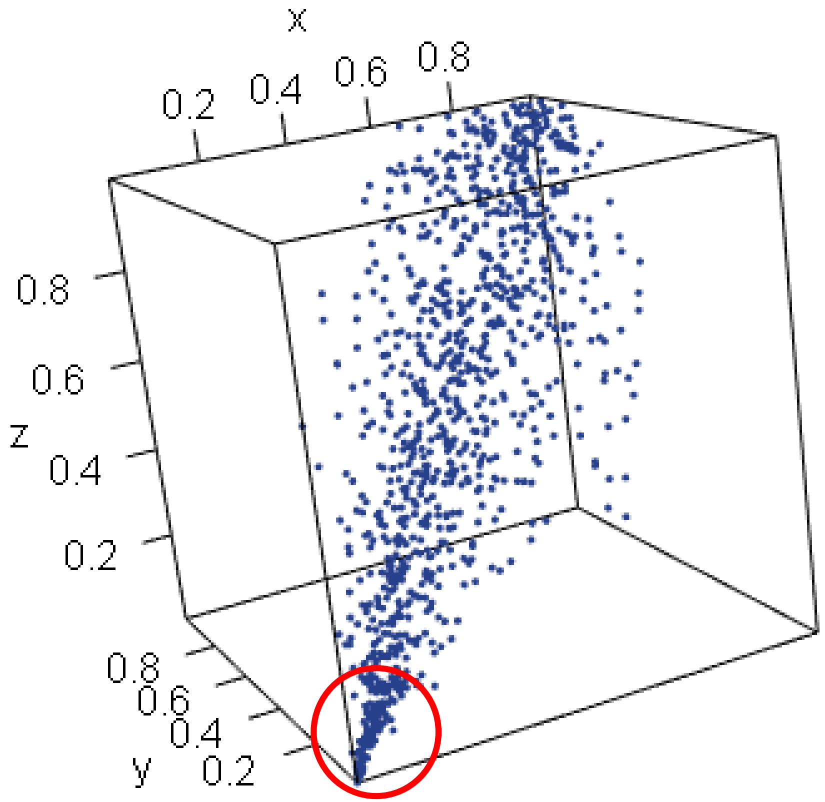
$$C_\theta(x,y) = \left(x^{-\theta} + y^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta}$$

- Cette copule est de générateur défini sur $]0,1]$ tel que :

$$\varphi(x) = \frac{1}{\theta}\left(x^{-\theta} - 1\right)$$

PROPRIETES DE LA COPULE DE CLAYTON

- Ne permet de modéliser que des dépendances positives.
- Queue de distribution lourde : importance des évènements rares, des évènements de faible intensité (extrême inférieur).
- Copule asymétrique.



Copule de Clayton pour $\theta = 5$

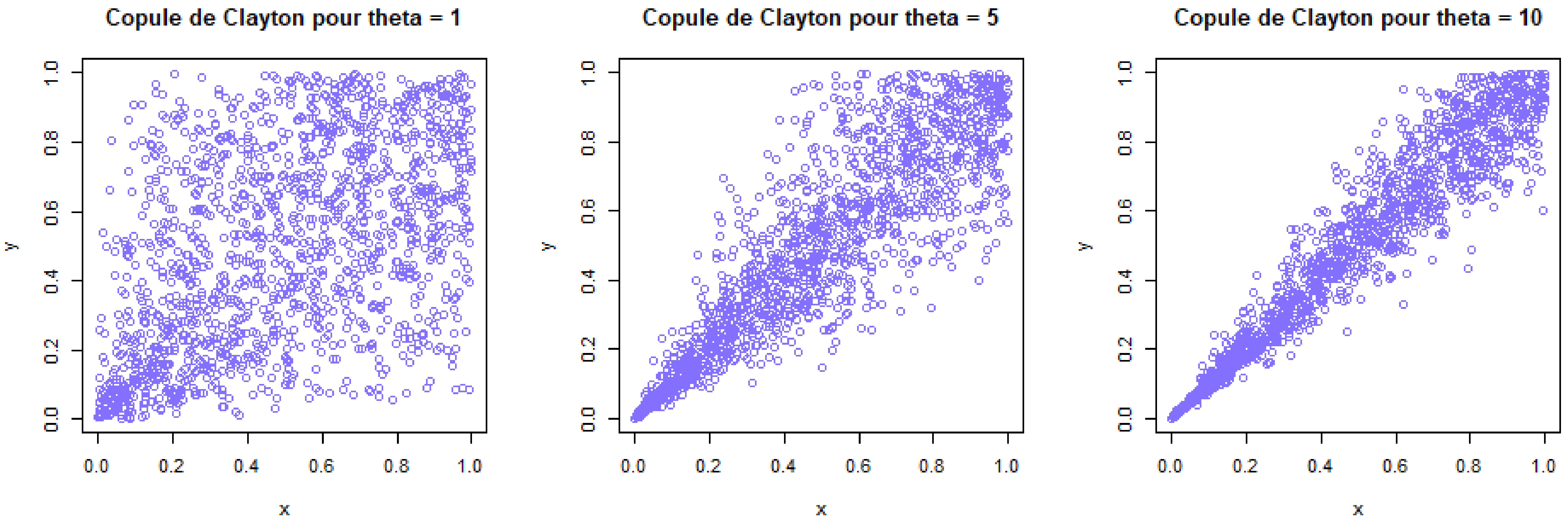
FONDEMENTS THEORIQUES

Généralités sur la copule de Clayton

$\theta \in [-1,0[\cup]0,\infty[$

$$C_\theta(x,y) = \max\left[\left(x^{-\theta} + y^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta}; 0\right]$$

Points d'attention :
Le paramètre θ permet de mesurer le degré de dépendance entre les risques. Un θ élevé implique une dépendance forte entre les variables.



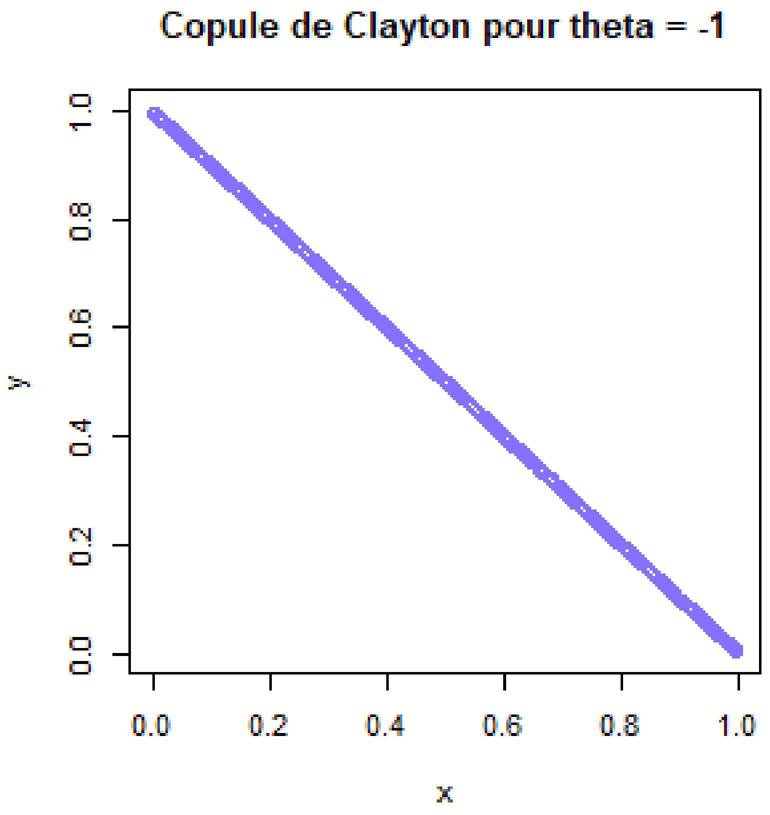
FONDEMENTS THEORIQUES

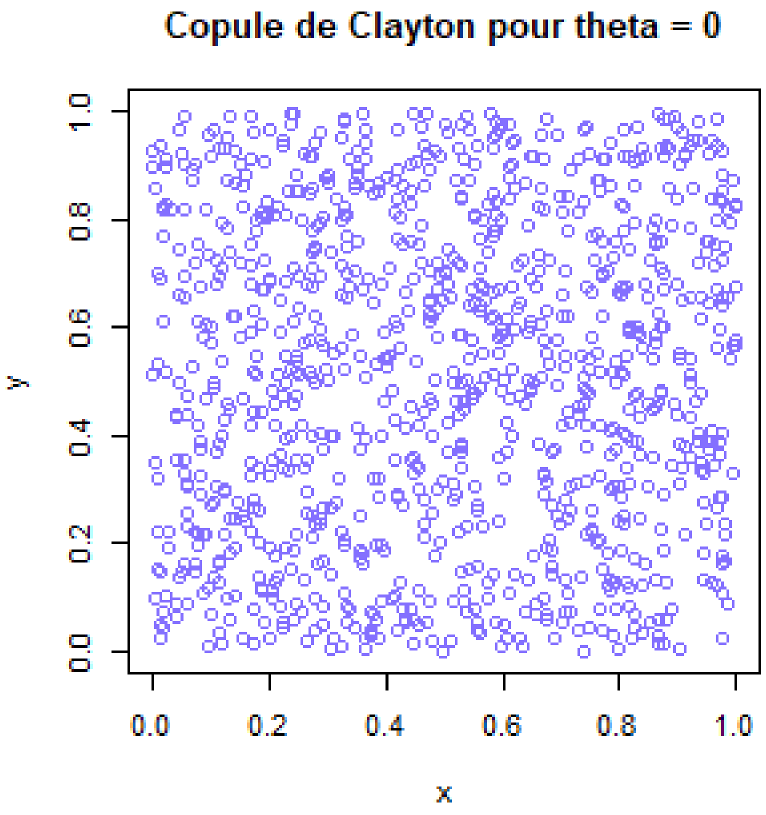
Généralités sur la copule de Clayton

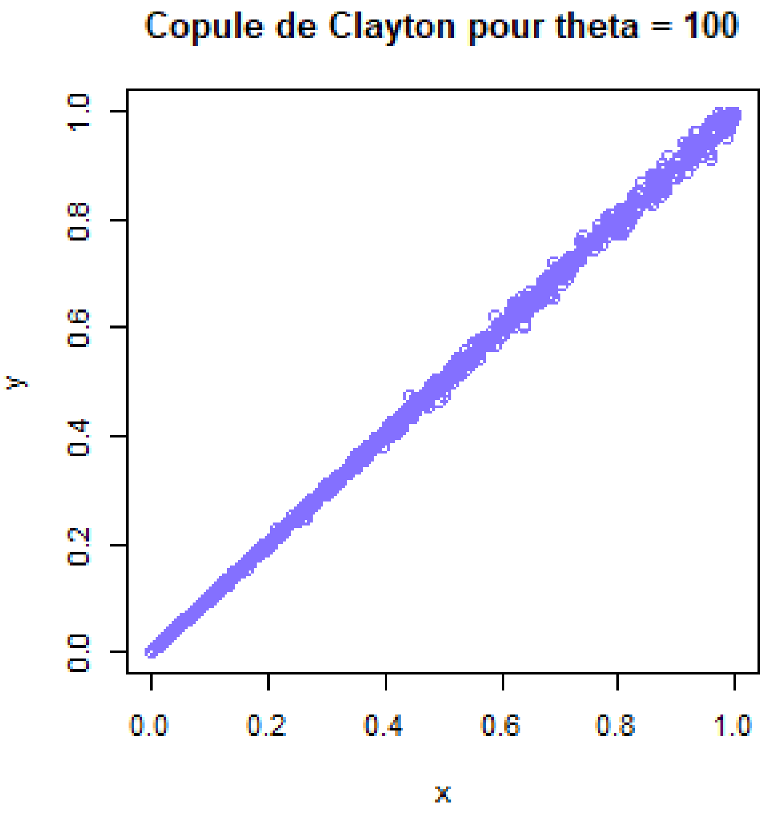
$$C_\theta(x,y) = \max\left[\left(x^{-\theta} + y^{-\theta} - 1\right)^{-1/\theta}; 0\right]$$

Limites :

$\theta \to -1$: *anticomonotone*	$\theta \to 0$: *indépendant*	$\theta \to \infty$: *comonotone*







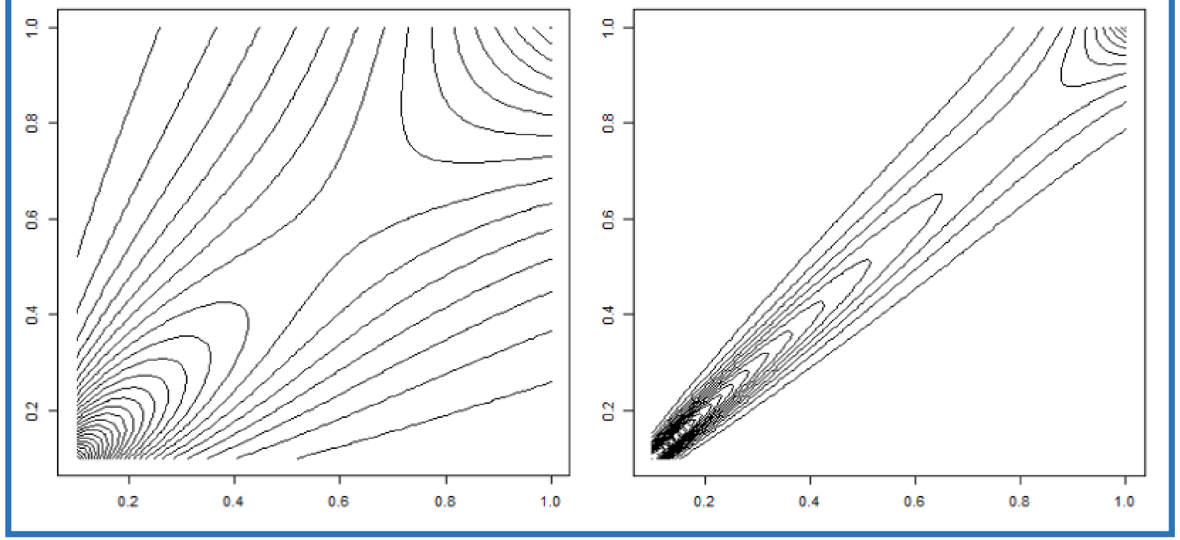
FONDEMENTS THEORIQUES

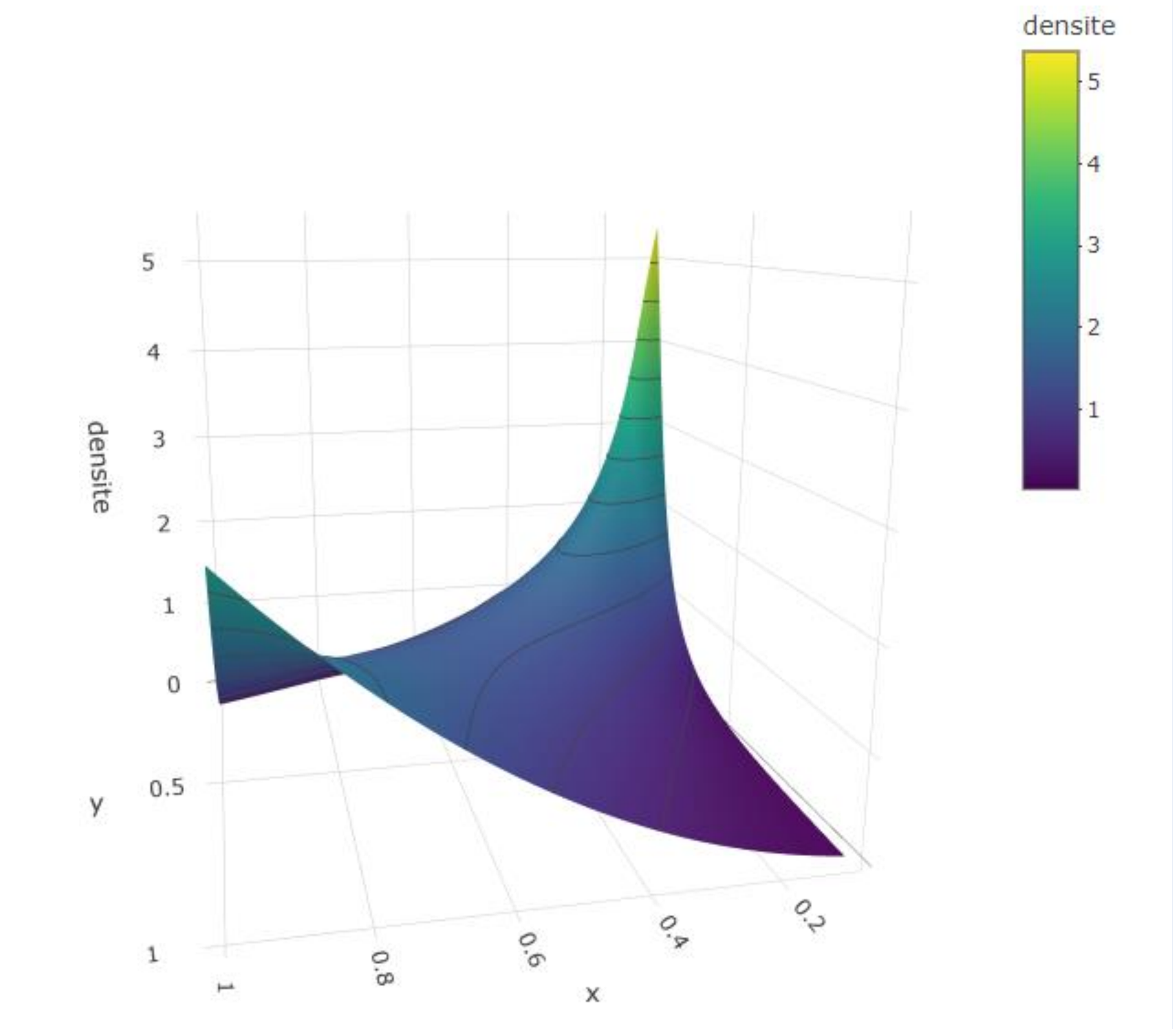
Généralités sur la copule de Clayton

Densité de la copule de Clayton :

$$c(x,y) = y^{-\theta-1}x^{-\theta-1}\,(1+\theta)\,\left(x^{-\theta}+y^{-\theta}-1\right)^{-\left(\frac{1}{\theta}+2\right)}$$

Ligne de niveau pour $\theta = 2$ et pour $\theta = 10$





Densité de la copule de Clayton pour $\theta = 2$

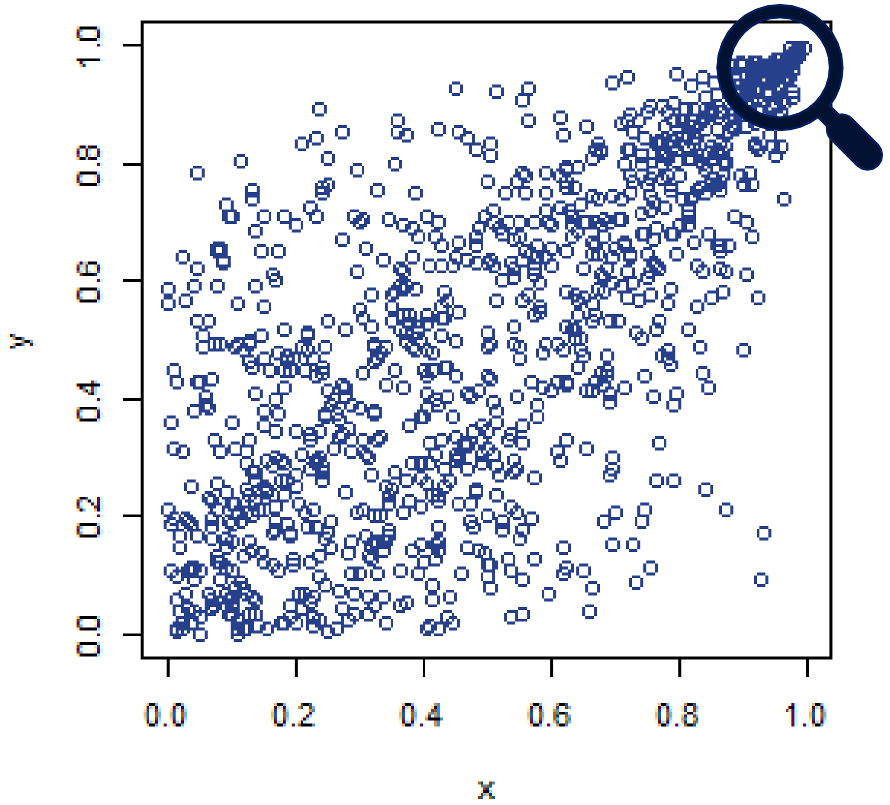
FONDEMENTS THEORIQUES

Généralités sur la copule de survie de Clayton

INFORMATIONS SUR LA COPULE DE SURVIE DE CLAYTON

- Modélise la dépendance entre deux variables aléatoires représentant des temps de survie.
- Présente des propriétés opposées aux propriétés de la copule de Clayton.
- Plus forte dépendance dans l'extrême supérieur.
- Aussi nommée la copule HRT (**H**eavy **R**ight **T**ail).

Copule de survie de Clayton pour theta = 2



Concentration importante

~ Importance des évènements de forte intensité.

LA COPULE DE SURVIE DE CLAYTON

Soit $C(u,v)$ une copule définie sur $[0,1]^2$.
On définit $\bar{C}(u,v)$ comme la copule de survie associée à la copule C :

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = \bar{C}(1-x, 1-y)$$

ISFA

Généralités sur la copule de survie de Clayton

Point d'attention :
Plus le paramètre θ est grand, plus la dépendance est forte.

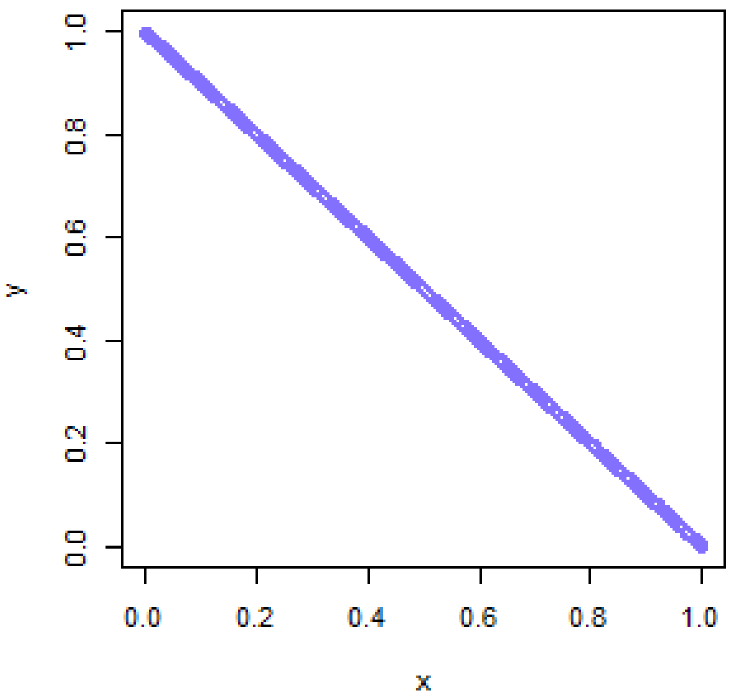
Mêmes limites que la copule de Clayton

$\theta \to -1$: *anticomonotone*

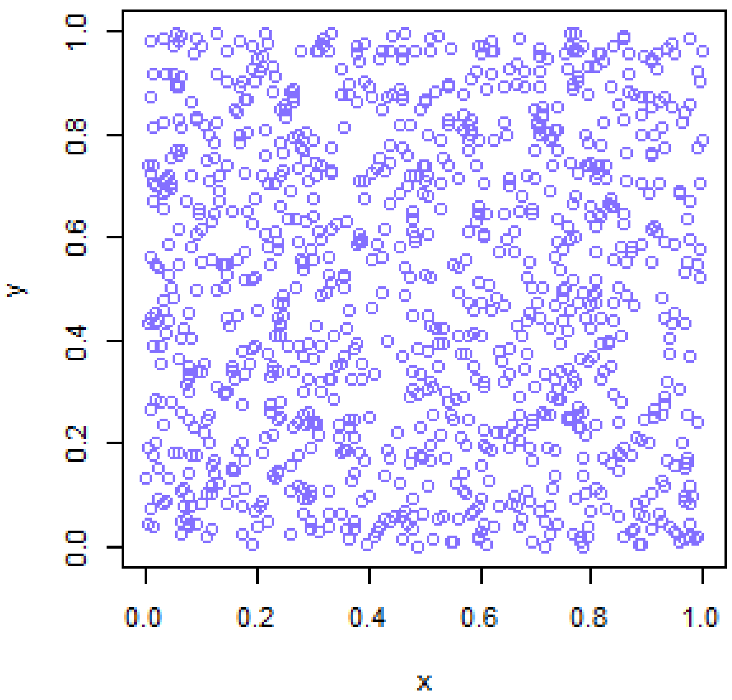
$\theta \to 0$: *indépendant*

$\theta \to +\infty$: *comonotone*

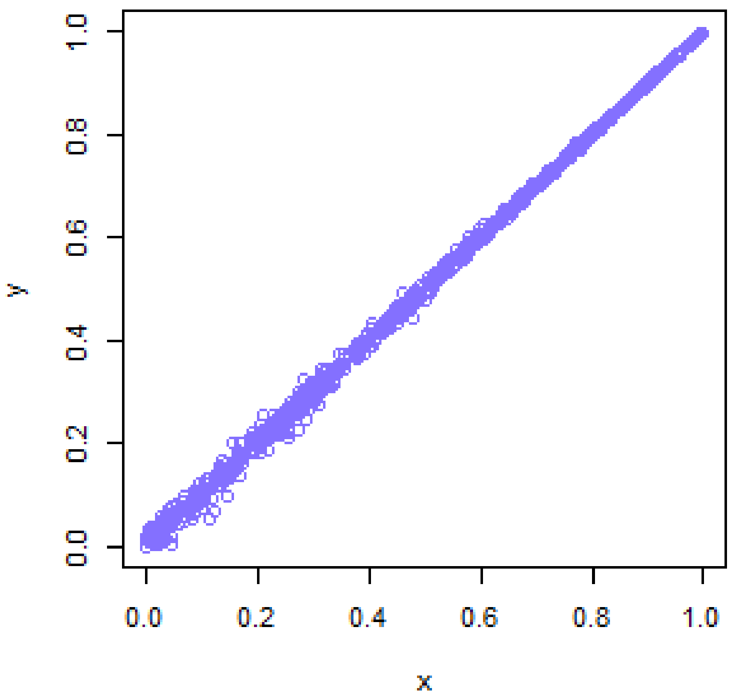
Copule de survie de Clayton pour theta = -1



Copule de survie de Clayton pour theta = 0



Copule de survie de Clayton pour theta = 100



FONDEMENTS THÉORIQUES

Mesures de dépendance

→ Inconvénients du coefficient de corrélation linéaire :

- Seulement pour les dépendances linéaires. Ne déterminent pas la distribution conjointe. Sensibles aux valeurs extrêmes et aberrantes.
- Aucune information sur la dépendance dans les queues de distribution.
- N'existe pas toujours (ex : distribution de Cauchy)
- Si r = 0, cela n'implique pas indépendance.

Dépendance basée sur les rangs

Notations

→ Pour les variables aléatoires $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$, les rangs associés sont :

$$\left(\frac{R_1}{n}, \dots, \frac{R_n}{n}\right)$$

Conditions pour une mesure de dépendance

- Symétrie : $\pi(X,Y) = \pi(Y,X)$
- Normalisation : $-1 \leq \pi(X,Y) \leq 1$
- Comonotonicité : $\pi(X,Y) = 1 \Leftrightarrow$ X et Y sont comonotones
- Anticomonotonicité : $\pi(X,Y) = -1 \Leftrightarrow$ X et Y sont anticomonotones
- Invariance pour toute fonction : $\forall\, f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

$\pi(f(X),Y) = f(X,Y)$ si f est croissante

$\pi(f(X),Y) = -f(X,Y)$ si f est décroissante

FONDEMENTS THÉORIQUES

Mesures de dépendance

→ **Rho de Spearman :** permet d'estimer à quel point la relation entre 2 variables peut être décrite par une fonction monotone

$$\rho_S(X,Y) = Cor\left(F(X), F(Y)\right)$$

→ **Tau de Kendall** : mesure la différence entre la probabilité de paires concordantes et la probabilité de paires discordantes

$$\tau(X,Y) = P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) > 0] - P[(X_1 - X_2)(Y_1 - Y_2) < 0]$$

Tel que (X1, Y1) et (X2, Y2) sont deux versions indépendantes de (X, Y)

→ Ces mesures se calculent de la manière suivante :

- $\rho_S(X,Y) = 12 \int_0^1 \int_0^1 C(x,y)dxdy$
- $\tau(X,Y) = 4 * E(C\ (X,Y)) - 1$

Pour la copule de Clayton

- $\tau = \frac{\theta}{\theta+2}$
- $\theta = \frac{2\tau}{1-\tau}$

FONDEMENTS THÉORIQUES

Coefficients de dépendance forte

Dépendance de queue

Etude de la structure de corrélation aux valeurs extrêmes du graphe.

→ À droite (queue supérieure) $\lambda_U = \lim_{u \to 1} P[X > F_X^{-1}(u) | Y > F_Y^{-1}(u)]$

→ À gauche (queue inférieure) $\lambda_L = \lim_{u \to 0} P[X < F_X^{-1}(u) | Y < F_Y^{-1}(u)]$

→ Interprétation :

- λ = 0 alors les extrêmes sont indépendants
- λ = 1 les extrêmes sont parfaitement corrélés
- 0 < λ < 1 les extrêmes sont dépendants

Attention : une indépendance implique forcément une indépendance au niveau des queues de distribution mais le contraire n'est pas toujours vrai.

→ Pour la copule de Clayton : $\lambda_L = 2^{-1/\theta}$ et $\lambda_U = 0$

→ Inversement, pour la copule de survie de Clayton : $\lambda_U = 2^{-1/\theta}$ et $\lambda_L = 0$

APPLICATIONS

Projet ERM

APPLICATIONS

Utilisation de la copule de Clayton en assurance

Pourquoi utiliser la copule de Clayton en assurance ?

Modélisation des évènements rares car queue de distribution lourde : adaptée pour modéliser la dépendance entre des évènements de faible intensité.

Assureur

Réassureur

L'intérêt pour l'assureur est de dimensionner les réserves/provisions en conséquences.
Pour le réassureur, il est question d'ajuster les contrats de réassurance en fonction des risques de leurs clients.

La modélisation de la dépendance entre différentes variables permet d'avoir une connaissance approfondie de la structure de dépendance (cf étude de cas).

APPLICATIONS

Étude de cas en assurance

Jeu de données :
- 37 758 observations
- 16 variables
- Données contrat (date d'anniversaire du contrat, nombre d'années d'assurance...)
- Données description du risque (Type de véhicule, capacité du véhicule...)
- Données sinistres (Montant de sinistres)

Mesure de dépendance entre les variables suivantes :
- ❑ **X :** Prime
- ❑ **Y :** Valeur assurée du véhicule

Contexte d'étude : Plusieurs raisons d'étudier la dépendance entre la prime d'assurance et la valeur du risque assuré.

1 Tarification

Ajuster la tarification des polices d'assurance en fonction du niveau de risque.
- Une faible dépendance amènerait à prendre davantage en compte la valeur du véhicule dans le tarif.
- Une forte dépendance confirmerait que les véhicules plus chers engendreraient des primes d'assurance plus élevées.
- Enfin, si la prime est fortement corrélée à la valeur assurée, cela peut indiquer des politiques de tarification potentiellement inefficaces ou risquées.

2 Évolution et innovation des produits d'assurance

- Développement de nouveaux produits : des offres de couvertures adaptées pour des véhicules de faible valeur.

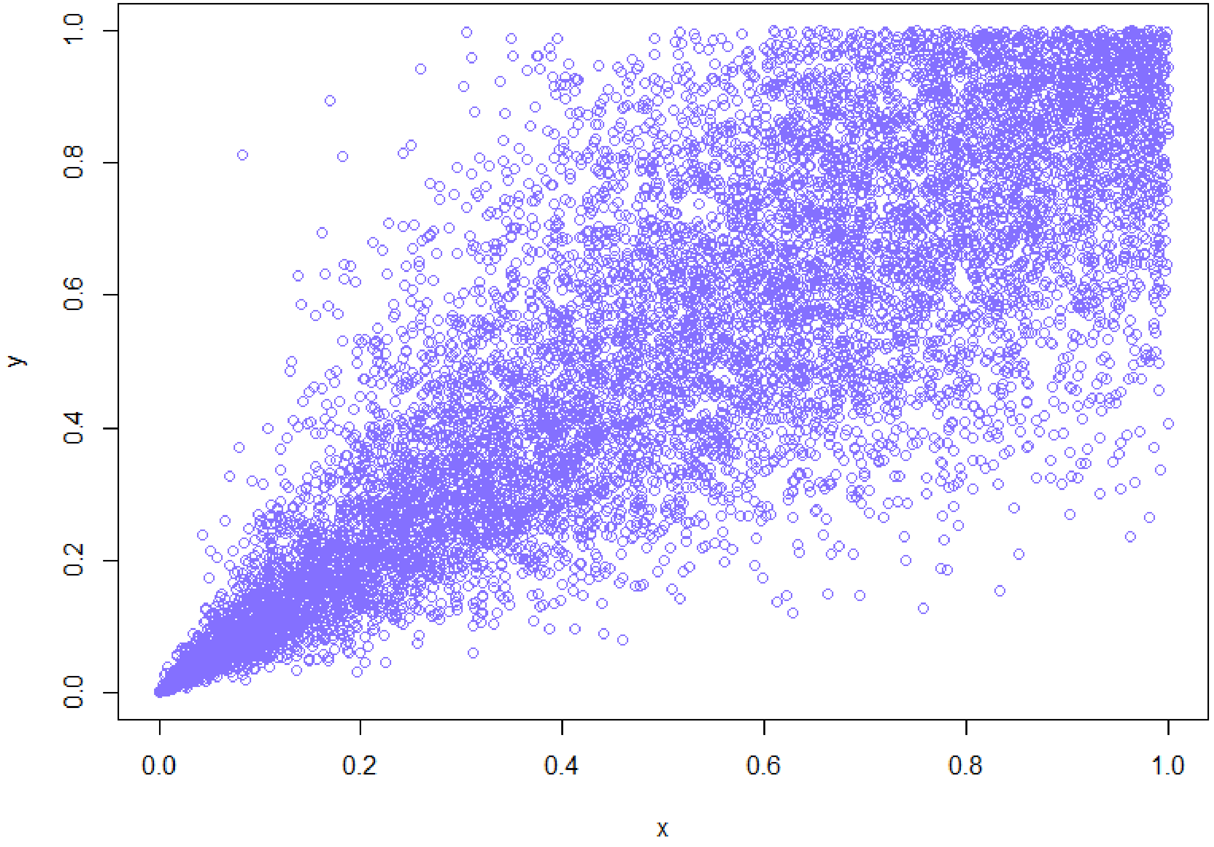
APPLICATIONS

Étude de cas en assurance

Mesure de dépendance entre les variables suivantes :
- **X :** Prime
- **Y :** Valeur assurée du véhicule

1 Visualisation des données

Primes en fonction des valeurs des véhicules



Ressemble à une copule de Clayton :
Plus forte densité dans l'extrême inférieur.

```
selectedCopula <- BiCopSelect(x,y)
selectedCopula$family
```

2 Estimation du paramètre de dépendance

3 Validation du modèle

APPLICATIONS
Étude de cas en assurance

2 Estimation du paramètre de dépendance

- Grâce à la fonction fitCopula().
- Résultat : $\theta = 3{,}78$.

3 Validation du modèle

- Simulation d'une copule de Clayton avec un $\theta = 3{,}78$.
- Modèle validé : nuage de points de la copule identique à la visualisation de Y par rapport à X.

- Tau de Kendall : $\tau \approx 0{,}66 \rightarrow$ forte relation monotone croissante.
- Rho de Spearman : $\rho_s \approx 0{,}84 \rightarrow$ corrélation positive modérée mais tout de même significative.

A retenir

- Dans ce portefeuille, la prime d'assurance semble prendre en compte la valeur assurée du véhicule (de façon modérée).
- Une forte dépendance selon une copule de Clayton permet une bonne connaissance de la structure de dépendance : les primes d'assurance tendent à être plus fortement corrélées lorsque les valeurs assurées sont basses.
- **<u>Solutions</u>** : ajuster la prime en dessous d'un certain seuil **ou** créer un nouveau produit d'assurance pour les valeurs de véhicule faibles.

APPLICATIONS

Application sur les options Rainbows

CONTEXTE

→ Traitement hors bourse des options qui sont sur plus d'un actif (option *rainbow*)

→ Indisponibilité de leurs valeurs marchandes

→ Calibration impossible des modèles de valorisation à partir des données de marché

UTILISATION DE LA COPULE DE CLAYTON

→ Prise en compte de la dépendance entre les différents sous-jacents

→ Modélisation des queues de distribution lourdes

→ Amélioration de la précision des modèles de valorisation des options

→ Indépendance entre le choix des marges et celui de la copule

→ Évolution de l'actif financier peut se faire selon des marges de lois différentes

APPLICATIONS

Application des options Rainbows

Etape 1	**Modélisation de la dépendence**
Etape 2	**Simulation des trajectoires des actifs**
Etape 3	**Calcul des paiements d'options**
Etape 4	**Actualisation des paiements futurs**
Etape 5	**Estimation du prix de l'option**

CONCLUSION

Projet ERM

CONCLUSION

Rôle de la copule de Clayton

- Séparation des marges et de leurs structures de dépendance
- Modélisation de la dépendance entre les marchés financiers ou les classes d'actifs

	Paramètre $\boldsymbol{\theta}$	Fonction génératrice	$\boldsymbol{\tau}$ de Kendall	$\boldsymbol{\rho}$ de Spearman
Clayton	[-1,0[U]0,∞[	$\varphi(x) = \frac{1}{\theta}\left(x^{-\theta} - 1\right)$	$\frac{\theta}{\theta + 2}$	$12 \iint_0^1 C(\mathrm{x}, y)dxdy$

Avantages de la copule de Clayton

- Facilité de sa simulation
- Simule bien la dépendance dans les parties inférieures des queues de distribution conjointe :
  - Gumbel simule bien la dépendance dans les parties supérieures
  - Frank simule bien la dépendance à la fois dans les parties supérieures et inférieures des distributions

Inconvénients de la copule de Clayton

- Limite dans la capture de la dépendance symétrique
- Flexibilité limitée

Ouverture

- **Copule elliptique :** utilisée pour modéliser des dépendances linéaires et non linéaires
- **Copule mixte :** utilisée pour modéliser des dépendances complexes qui ne peuvent pas être bien capturées par une seule copule

Merci pour votre attention !

BIBLIOGRAPHIE

Sources

- *Cours sur les copules*, Gwladys Mao, 2022
- *L'étude des procédés d'agrégation*, François Gélan, 2015
- *Copules : théorie et simulation*, Alexandre Popier, 2022
- *Application des copules à la finance de marché*, Pierre Bouvier, 2010
- *Modèles financiers en assurance et analyses dynamiques*, Frédéric Planchet, 2023
- *Evaluation d'options sur plusieurs sous-jacents par des modèles de copules*, Bouchra Abakarim, 2005
- *Copula based simulation procedures for pricing basket Credit Derivatives,* Fathi, Abid et Nader Naifar, 2007
- *Pricing financial and insurance products in the multivariate setting,* Alice Pignatelli di Cerchiara, 2021
- *Copules et risques corrélés, Arthur Charpentier, 2010*

Annexes

Projet ERM

FONDEMENTS THEORIQUES

Généralités sur la copule de Clayton

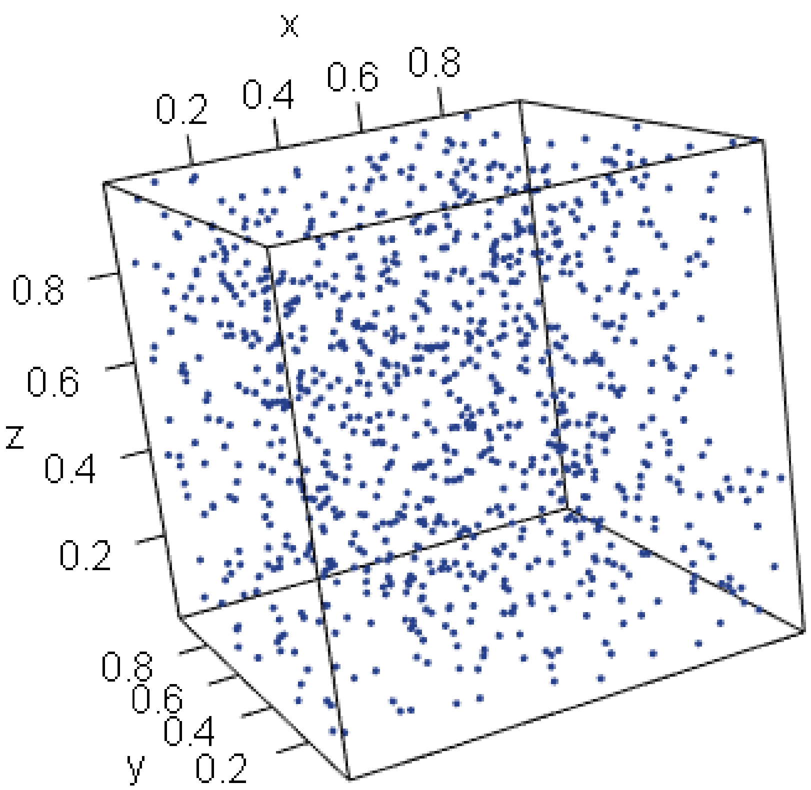
La copule en dimension d > 2 est définie comme ceci :

$$C_\theta = \left(u_1^{-\theta} + \cdots + u_d^{-\theta} - (d-1)\right)^{-1/\theta}$$

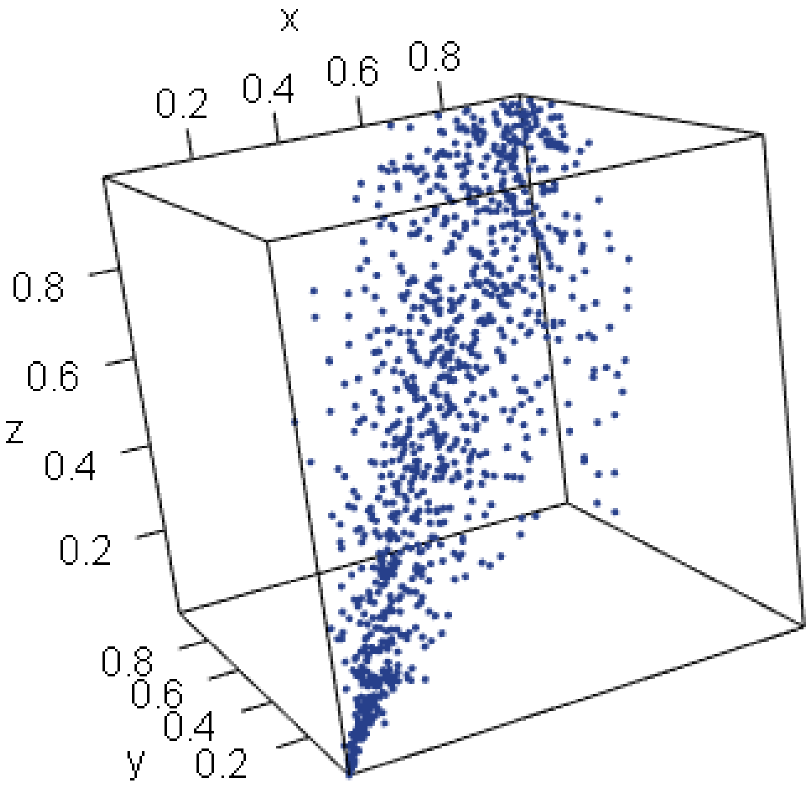
Densité de la copule de Clayton de dimension d > 2 :

$$c(u_1, \dots, u_d) = \left(1 - d + \sum_{i=1}^{d} u_i^{-\theta}\right)^{-d-\frac{1}{\theta}} \prod_{j=1}^{d} \left(u_j^{-\theta-1}(j^{\theta} - \theta + 1)\right)$$

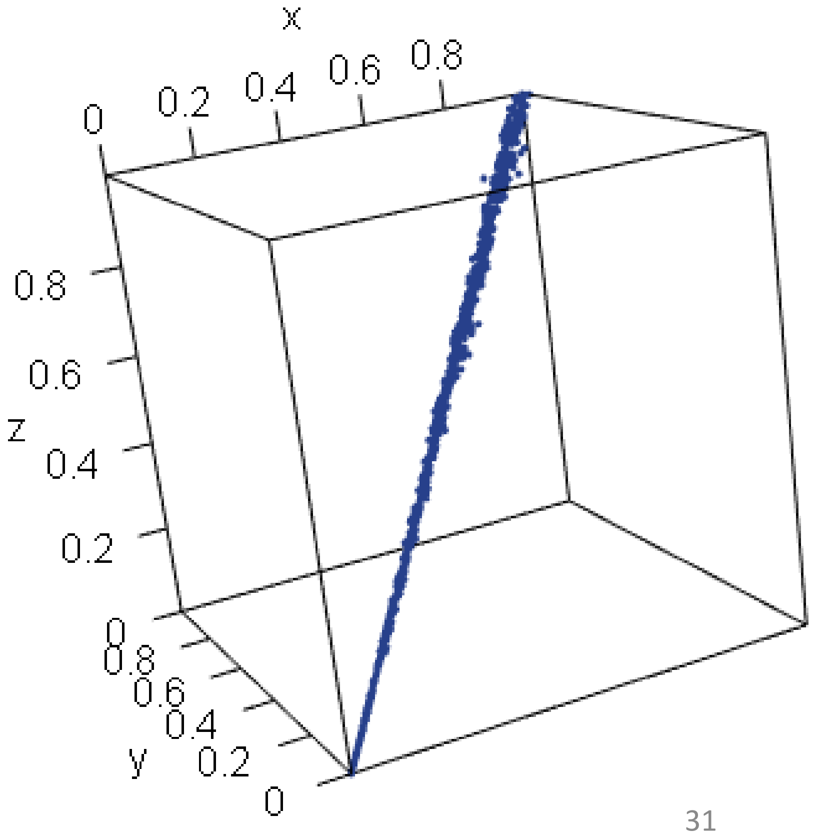
θ = 0



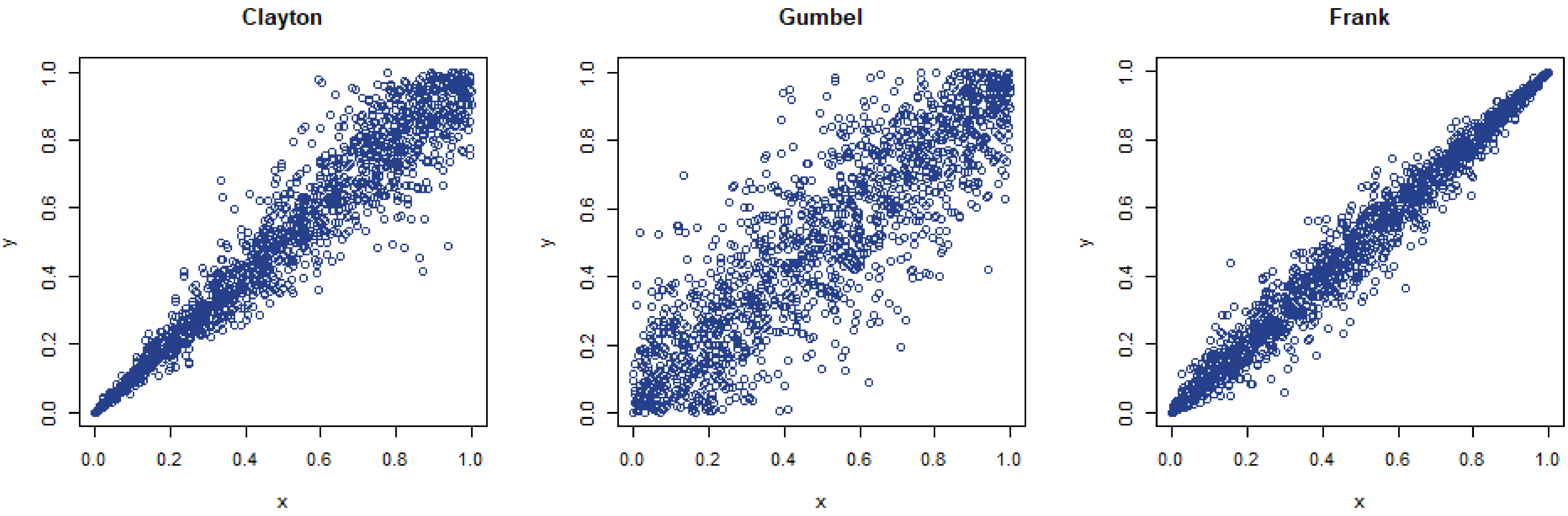
θ = 5



θ = 100



DISTINCTION CLAYTON – GUMBEL - FRANK



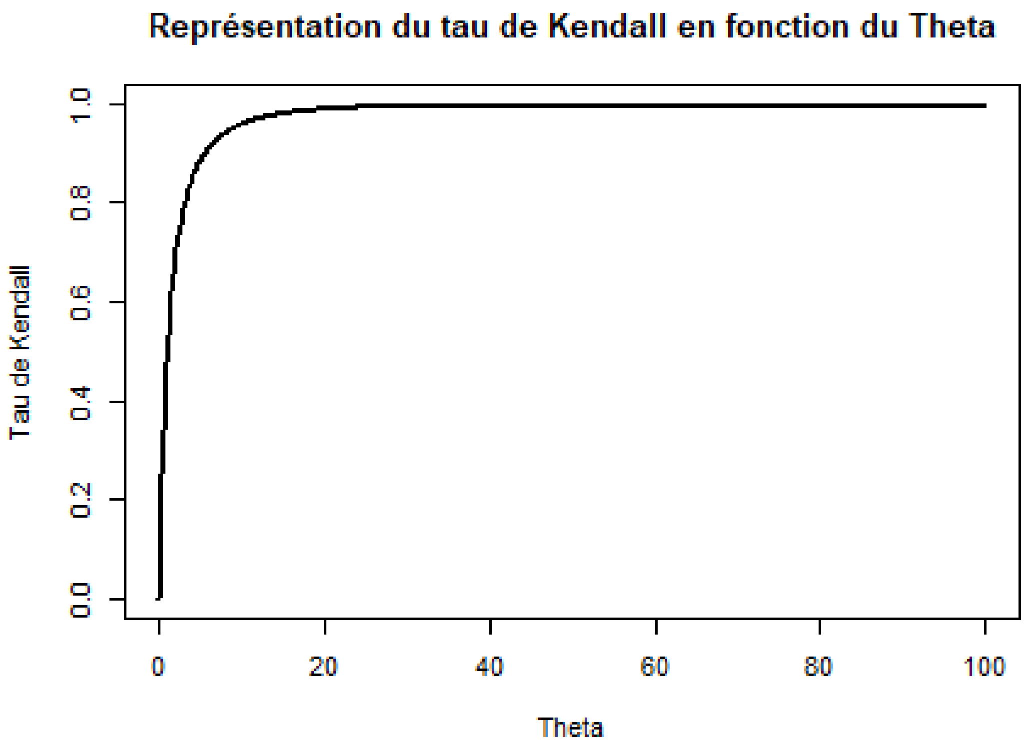
Dépendance forte dans l’extrême inférieur.

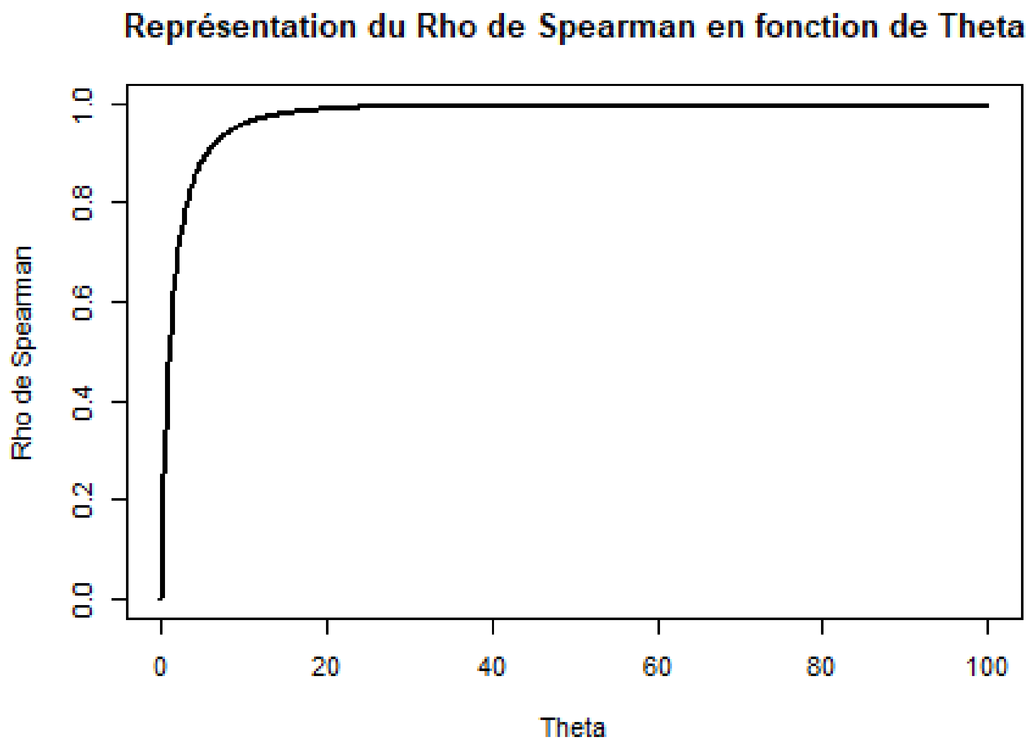
Dépendance forte dans les deux extrêmes.

Dépendance forte dans l’extrême supérieur.

FONDEMENTS THÉORIQUES

Tau de Kendall et Rho de Spearman





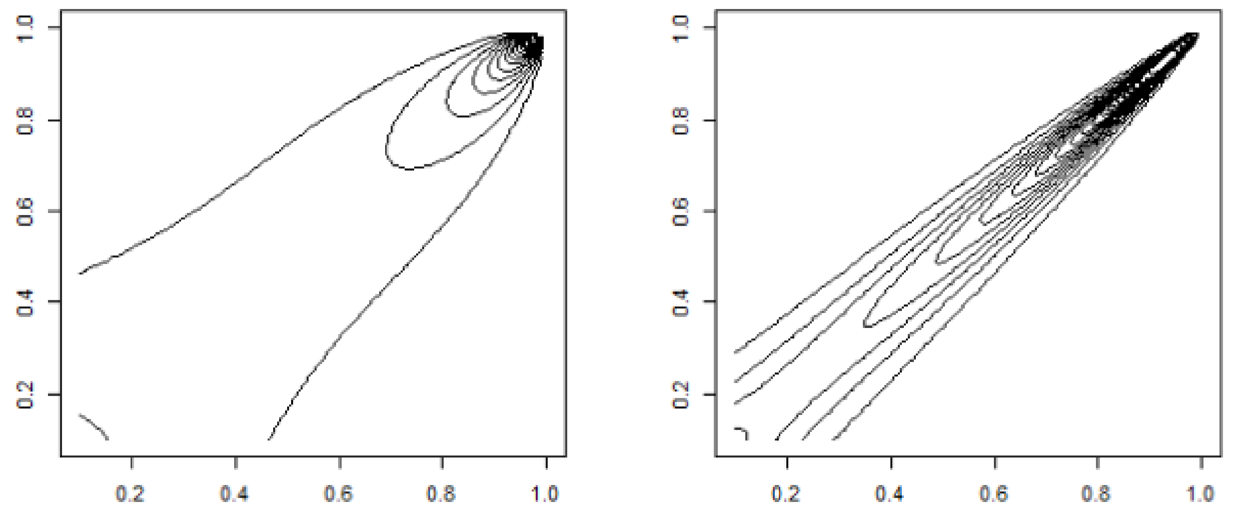
FONDEMENTS THEORIQUES

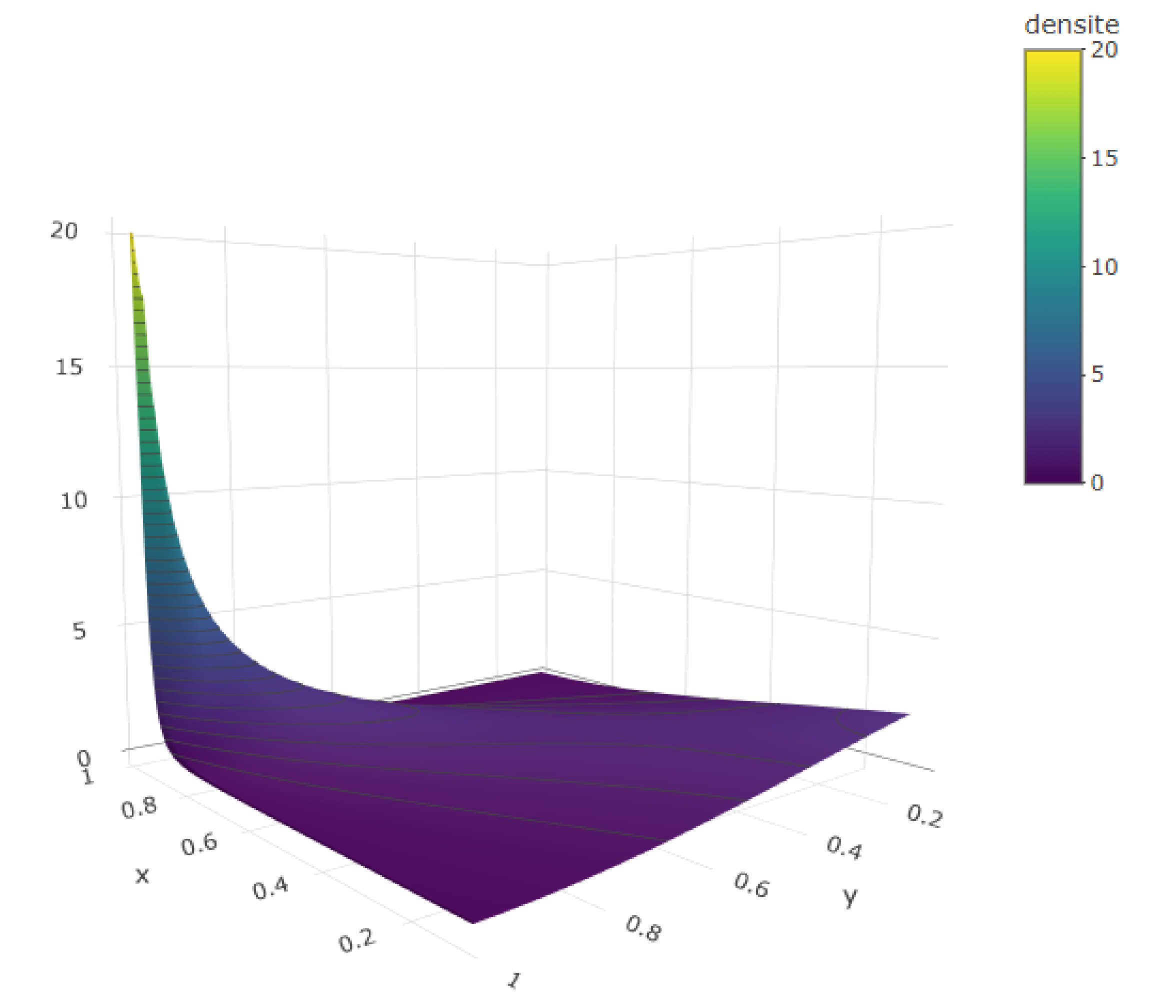
Généralités sur la copule de survie de Clayton

Densité de la copule de survie de Clayton de dimension 2 :

$$C(x,y) = (1-y)^{-\theta-1}(1-x)^{-\theta-1}\,(1+\theta)\left((1-x)^{-\theta}+(1-y)^{-\theta}-1\right)^{-\left(\frac{1}{\theta}+2\right)}$$

Ligne de niveau pour $\theta = 2$ et pour $\theta = 10$





Densité de la copule de survie de Clayton en dimension 2 pour $\theta = 2$