© Théo Jalabert

Théorie des Options

Anne EYRAUD-LOISEL

Cours numéro 1

19/01/2023

© Théo Jalabert

Généralités – 2ème année actuariat

- **Point Examens**
  - Processus Stochastiques : très bons résultats
  - Etudiants en échange : bien rattraper les cours que vous n’avez pas eu à l’étranger.
  - Réunions pédagogiques de 1er semestre : jeudi 26 février. Notes disponibles à partir du 30 janvier.
- **Déroulement du semestre** :
  - Ne pas hésiter à me solliciter en cas de problème : mail, rdv tel/webex.
  - Vacances de février : du 11 au 19 février 2023
  - Vacances d’avril : du 8 au 16 avril 2023
  - TOEIC : séances de préparation TOEIC spécifiques
  - **Fin semestre** :
    - pour l’instant pas/peu de cours sur ADE les 2 semaines du 02/05/22 et du 09/05/2023
    - mais ATTENTION il pourrait y en avoir
    - Semaines de révisions si possible mais aussi marge pour des déplacements de cours… ou soutenances de TER ?
  - **Examens : 15 au 26 mai 2022**
  - **Stages, TER, UE Projet pro -> slides suivants**

© Théo Jalabert

Conventions de stage : tout dématérialisé

- **Contact** : service de scolarité
  scolarite.isfa@univ-lyon1.fr
- Consulter votre adresse mail @etu.univ-lyon1.fr
- ELIPSE : demande de convention -> je valide pédagogiquement ensuite
  Conventions de stage à valider : **me relancer si pas de validation rapide**
- Puis édition et recueil des signatures par mail.
- Convention envoyée par mail aux entreprises
- Début 29/05/2022 minimum (fin des examens) - Fin 31/08/2022 **maximum**
- code UE ACT1108M (ancien code ACT1141M non valide car changement accréditation)

A SAVOIR SUR LES STAGES

© Théo Jalabert

Plateforme de demande de convention
elipse.univ-lyon1.fr

Date limite de fin de stage
31 août 2023

Date de début de stage possible
29 mai 2023 (Attention Pentecôte)

Signature des conventions **par voie électronique de préférence**

Plus d'infos sur la procédure
p. 21 de votre livret des études

Anticiper la demande de convention de stage (**3 semaines avant la date de début** du stage de préférence)

© Théo Jalabert

TER : Travail d'Etudes et de Recherche

- Instructions précises à venir par mail (Cahier des charges)
- Constituer un groupe de 3
- Chercher un enseignant-tuteur et un sujet pour février
  - Réfléchir à thème d'intérêt pour vous et solliciter un enseignant
- **Rapport** (en anglais, en LaTeX) à rendre pour fin avril (outil : overleaf)
- **Soutenance** (en anglais) : à voir – années dernières vidéo. Ou soutenances semaine du 02/05 ou 09/05.
- **Objectif** : approfondir un sujet théorique, se l'approprier, développer une application numérique/informatique
  - Approfondir les connaissances vues en cours
  - Mettre en œuvre une méthodologie d'analyse, de réflexion et d'application sur un sujet en lien avec la formation
  - Travailler en groupe

© Théo Jalabert

TER – sujets à encadrer

Liste non exhaustive des sujets que je peux vous proposer d'encadrer :

- Finance : modèles avancés, pricing, produits dérivés
- Modélisation stochastique en finance ou en assurance
- Modélisation pandémique/Impact du covid
- Produits financiers ou assuranciels climatiques – impact du changement climatique en actuariat
- Asymétrie d'information en finance et en assurance
- Sujet en partenariat avec GENERALI :
  - Exploitation des bases DSN sur le périmètre prévoyance / santé

© Théo Jalabert

UE Insertion professionnelle et Réseau

- Travailler autour de votre projet professionnel
- Rendre un **document de synthèse**, avant la fin du mois de mars (deadline 31 mars minuit)
- Objectifs :
  - présenter votre projet professionnel actuel
  - présenter la manière dont ce projet a évolué, depuis le début de votre scolarité, ce que votre stage a apporté à votre projet pro
  - faire un débrief de ce que vous avez mis en œuvre lors du forum et pourquoi, quels stands, quelles conférences, et pourquoi, ce que le forum a apporté à votre projet pro
  - décrire vos démarches de recherche de stage et d'alternance et leur place dans votre projet pro
  - Décrire la manière dont vous vous projeter à horizon 5 ans et la manière dont vous espérez le mettre en œuvre
- N'hésitez pas à venir échanger avec moi sur votre projet et le document demandé.
- Séances spécifiques ?

ACTUARIAL WEEK

DU 30 JAN. AU 3 FEV. 2023

À 18 HEURES

© Théo Jalabert

5 JOURS

SUR LES MÉTIERS DE L'ACTUARIAT

Rendez-vous **chaque soir à 18 heures**
pour découvrir les différents métiers de l'actuariat
grâce aux **interventions d'actuaires aux missions variées**

- Lundi 30 janvier – Assurance de personnes
- Mardi 31 janvier – Assurance IARD
- Mercredi 1er février – Réassurance
- Jeudi 2 février – Finance & gestion d'actifs
- Vendredi 3 février – Carrières internationales

Inscriptions ICI

www.institutdesactuaires.com

Lien d'inscription ci-dessous !

SCAN ME

© Théo Jalabert

Théorie des Options

Anne EYRAUD-LOISEL

Cours numéro 1

19/01/2023

© Théo Jalabert

Cours de Théorie des Options

- **Cours :** tous les jeudis 9h45-13h
- **Chargé de TD** : Pierre MONTESINOS (TD1 : 30/01/23)
- **Objectif du cours** : savoir utiliser et évaluer des produits financiers de type optionnel, avec plusieurs types de modèles d'évaluation
- **Méthodologie** : pour savoir faire, il faut essayer… pas seulement de la théorie, il faut savoir **faire** ce qu'on voit en cours et en TD.
- **Modalités de cours**
  - Espace d'activité spécifique sur Moodle ***« Cours de Théorie des Options – ISFA 2 »***
  - Tous les documents seront mis en ligne, avant ou après le cours selon les cas
- **Evaluation** : ***Examen terminal*** + DM intermédiaire ? (ou TP noté) + note/points de participation/assiduité (Cours + TD).

© Théo Jalabert

Plan Cours Théorie des Options

1. Généralités sur les marchés financiers (Arbitrage, réplication, probabilité risque neutre)
2. Généralités sur les options (Définition, marché d’options, facteurs d’influence, valeur des options, stratégies statiques d’options, relations d’arbitrage)
3. Sensibilité des options : les grecques
4. Modèle d’évaluation discret : Arbre binomial
5. Modèle d’évaluation continu : Modèle de Black et Scholes
6. Extensions du modèle de Black et Scholes

© Théo Jalabert

Bibliographie

- AUROS, J.C., Finance - Options et obligations convertibles
- AUGROS, J.C. et NAVATTE, Bourse : les options négociables
- HULL, J., Options, Futures et autres Actifs Dérivés
- LAMBERTON, D. et LAPEYRE, B. Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance
- PONCET, P., PORTAIT, R., HAYAT, S., Mathématiques financières. Evaluation des actifs et analyse du risque
- BLACK, F., , SCHOLES, M., 1973, The pricing of Options and Corporate Liabilities, The Journal of Political Economy
- COX, ROSS, RUBINSTEIN, 1979 "Option Pricing : A Simplified Approach." Journal of Financial Economics

© Théo Jalabert

Chapitre 1
Généralités sur les marchés financiers

- Qu’est-ce qu’une opportunité d’arbitrage ?
- Comment utilise-t-on les arbitrages en finance ?
- Qu’est-ce qu’un portefeuille de réplication
- Qu’est-ce qu’un marché complet ?
- Que signifie : étudier les options ?

→ Evaluation (pricing) et couverture (hedging) des options.

© Théo Jalabert

Partie 1
Opportunités d’arbitrages
Définition

- *On dit qu’un marché présente une* ***opportunité d’arbitrage*** *lorsqu’on peut mettre en œuvre une stratégie d’achat et de vente de différents titres qui ne coûte rien, et rapporte un gain strictement positif (aujourd’hui ou à une date future) avec probabilité strictement positive*.
- On appelle souvent *arbitrage de type 1* une stratégie où l’on n’investit aucun argent à la date 0 et où on a un gain strictement positif à la date finale, et *arbitrage de type 2* une stratégie qui rapporte à la date 0 une somme d’argent strictement positive, avec des flux futurs nuls.
- Remarque : En réalité, ce deuxième type d’arbitrage peut toujours se ramener à un arbitrage de type 1.
  Pourquoi ?

© Théo Jalabert

Opportunité d'arbitrage : définition

- En réalité, ce deuxième type d'arbitrage peut toujours se ramener à un arbitrage de type 1.
  Réponse
  → en investissant la somme disponible à l'instant initial dans l'actif sans risque jusqu'à la date finale.

Opération	t=0	t=1
Stratégie X : OA de type 2	$X_0>0$	$X_1=0$
Achat actif sans risque	$-X_0$	X_0*R ($R=(1+r)$ ou $R=X_0e^r$)
Total	0	$X_0*R>0$

© Théo Jalabert

Opportunités d’arbitrage sur le marché obligataire

© Théo Jalabert

Exemple d'arbitrages sur le marché obligataire

- **Exemple 1**

Supposons que sur un marché coexistent, au même prix de 99€ :

- un zéro-coupon CHER à 6 mois, de nominal 100€
- un autre zéro-coupon PASCHER à 6 mois également, de nominal 110€

Comment peut-on s'enrichir facilement en mettant en œuvre une stratégie d'arbitrage ?

→ Vente du zéro-coupon CHER
Achat du Zéro-coupon PAS CHER

© Théo Jalabert

Exemple d'arbitrages sur le marché obligataire

- **Exemple 1**

Si sur un marché coexistaient, au même prix de 99€

- un zéro-coupon CHER à 6 mois, de nominal 100€
- un autre zéro-coupon PASCHER à 6 mois également, de nominal 110€

Il est clair que l'on pourrait s'enrichir facilement en mettant en œuvre la stratégie d'arbitrage suivante :

C'est une opportunité d'arbitrage : on achète ce qui est pas cher et on vend ce qui est cher.

***Question** : que se passerait-il si cette situation existait réellement ?*

Opération	Aujourd'hui	6 mois
Vente de CHER	99€	-100€
Achat de PASCHER	-99€	110€
Total	0€ (cette stratégie ne coûte rien)	+10€ (gain >0 certain)

© Théo Jalabert

Hypothèse d'AOA

- Si de telles opportunités existaient, tout le monde voudrait en acheter et il y aurait une demande infinie. En tout état de cause, une opportunité d'arbitrage ne peut se présenter que sur un laps de temps très court : si nous supposons que PASCHER et CHER coexistent au même prix, tous les acteurs achèteraient PASCHER de sorte que son prix monterait, et vendraient CHER de sorte que son prix baisserait (équilibrage naturel des marchés).
- C'est la raison pour laquelle on fait l'hypothèse d'**Absence d'Opportunité d'Arbitrage** (AOA) sur les marchés financiers. Le raisonnement est le suivant : s'il existait un arbitrage, quelqu'un en aurait déjà profité ! Sachant qu'il y a dans les banques beaucoup d'arbitragistes, cette hypothèse apparaît cohérente sur les marchés, du point de vue d'un petit investisseur.
  C'est aussi (et surtout) car on cherche une situation d'équilibre, stable dans le temps, afin de pouvoir trouver des prix d'équilibre, relativement stables également. Donc pas une situation instable présentant des arbitrages.
- C'est cette hypothèse qui permet d'entreprendre des raisonnements par arbitrage (semblables à des raisonnements par l'absurde en mathématiques). C'est ce qui va permettre d'évaluer (pricer) les produits sur le marché (obligations, produits dérivés).

© Théo Jalabert

Ventes à découvert

- Une **vente à découvert** (*short selling* en anglais) est une opération qui consiste à vendre un titre que l'on ne possède pas en espérant le racheter à une date ultérieure (à un cours moins élevé...) afin de le livrer à l'acheteur à cette date.
  Le vendeur s'engage à livrer le titre ou le contrat à une certaine échéance sans les posséder. Il devra, pour tenir son engagement, se les procurer en les achetant sur le marché au jour de l'échéance sauf s'il décide de déboucler sa position plus tôt.
- Autrement dit, vendre à découvert = s'engager à verser les flux futurs correspondants.
- On autorisera les ventes à découvert sans limitation (c'est une hypothèse assez forte sur les marchés)

© Théo Jalabert

Exemple d'arbitrages sur le marché obligataire

- **Exemple 2**

On considère 2 obligations émises par l'Etat français, de maturité 2 ans, de même nominal 1000€. L'obligation **A** verse un coupon de 100€ chaque année, alors que l'obligation **B** verse un seul coupon de 1000€ au bout de la première année. On suppose que ces 2 obligations ont un prix de 1000€ et 1735€ respectivement.

On suppose également qu'il existe 2 zéro-coupons **C** et **D** de maturité 1 et 2 ans, de prix 95€ et 80€ pour 100€ de nominal.

Les obligations A et B sont-elles intéressantes ? Laquelle des deux vaut-il mieux acheter ?

$$\begin{cases} A = 1C + 11D \\ B = 10C + 10D \end{cases}$$

Prix A : 1000€ => Sur-coté

Prix B : 1735€ => Sous-coté

Car Prix de réplication de $A = 1 \times 95 + 11 \times 80 = 975$

$B = 10 \times 95 + 10 \times 80 = 1750$

=> justes prix de A et B.

© Théo Jalabert

Exemple d'arbitrages sur le marché obligataire

- **Exemple 2**

On considère 2 obligations émises par l'Etat français, de maturité 2 ans, de même nominal 1000€. L'obligation **A** verse un coupon de 100€ chaque année, alors que l'obligation **B** verse un seul coupon de 1000€ au bout de la première année. On suppose que ces 2 obligations ont un prix de 1000€ et 1735€ respectivement.

On suppose également qu'il existe 2 zéro-coupons **C** et **D** de maturité 1 et 2 ans, de prix 95€ et 80€ pour 100€ de nominal.

Les obligations A et B sont-elles intéressantes ? Laquelle des deux vaut-il mieux acheter ?

→ 10/15 minutes pour réfléchir à ce problème de gestion obligataire. 1 marché, 4 produits obligataires

Quizz à la fin des 10 minutes avec 4 questions :

1. *l'obligation A est-elle surcotée, sous-cotée ou proposée au prix de marché ?*
2. *l'obligation B est-elle surcotée, sous-cotée ou proposée au prix de marché ?*
3. *Quel devrait être selon vous le juste prix de A ?*
4. *Quel devrait être selon vous le juste prix de B ?*

© Théo Jalabert

Exemple d'arbitrages sur le marché obligataire

- **Exemple 2**

On considère 2 obligations émises par l'Etat français, de maturité 2 ans, de même nominal 1000€. L'obligation A verse un coupon de 100€ chaque année, alors que l'obligation B verse un seul coupon de 1000€ au bout de la première année. On suppose que ces 2 obligations ont un prix de 1000€ et 1735€ respectivement.

On suppose également qu'il existe 2 zéro-coupons C et D de maturité 1 et 2 ans, de prix 95€ et 80€ pour 100€ de nominal.

Les obligations A et B sont-elles intéressantes ? Laquelle des deux vaut-il mieux acheter ?

Le tableau des cash flows est le suivant :

Produit	Prix (t=0)	t=1	t=2
A	1000	100	1100
B	1735	1000	1000
C	95	100	0
D	80	0	100

© Théo Jalabert

Exemple d’arbitrages sur le marché obligataire

- **Exemple 2 – Réponses Obligation A**

Les obligations A et B sont-elles intéressantes ? Laquelle des deux vaut-il mieux acheter ?

Le tableau des cash flows est le suivant :

Dans cette situation, on peut ***répliquer*** l’obligation A (=répliquer ses flux) en constituant un portefeuille A’ contenant 1 zéro-coupon C et 11 zéro-coupons D. Le ***coût de constitution*** de ce portefeuille est :

1*95+11*80=975€

L’obligation A proposée au prix de 1000€ est donc **sur-cotée** sur le marché.

Son prix d’équilibre (=prix de réplication) est 975€.

Produit	Prix (t=0)	t=1	t=2
A	1000	100	1100
B	1735	1000	1000
C	95	100	0
D	80	0	100
1 C + 11 D	975	100	1100

© Théo Jalabert

Exemple d’arbitrages sur le marché obligataire

- **Exemple 2 – Réponses Obligation B**

Les obligations A et B sont-elles intéressantes ? Laquelle des deux vaut-il mieux acheter ?

Le tableau des cash flows est le suivant :

Dans cette situation, on peut ***répliquer*** l’obligation B (=répliquer ses flux) en constituant un portefeuille B’ contenant 10 zéro-coupon C et 10 zéro-coupons D. Le ***coût de constitution*** de ce portefeuille est :

10*95+10*80=1750€

L’obligation B proposée au prix de 1735€ est donc **sous-cotée** sur le marché.

Son prix d’équilibre (=prix de réplication) est 1750€.

Produit	Prix (t=0)	t=1	t=2
A	1000	100	1100
B	1735	1000	1000
C	95	100	0
D	80	0	100
10 C + 10 D	1750	1000	1000

© Théo Jalabert

Exemple d'arbitrages sur le marché obligataire

- **Exemple 2**

Il existe des opportunités d'arbitrage sur ce marché.

Exercice : *En expliciter 2 différentes.*

Rappel : Achat de ce qui est pas cher et vente de ce qui est cher.

On met en œuvre la stratégie suivante :

Cette stratégie permet de gagner 25€ à t=0 sans perdre d'argent plus tard. C'est une OA.

Exercice *: réaliser une opportunité d'arbitrage de manière similaire avec B.*

Produit	Prix (t=0)	t=1	t=2
Vente de A	1000	-100	-1100
Achat du portefeuille de réplication de A : 1C+11D	-975	100	1100
Total	25	0	0

© Théo Jalabert

Valorisation par arbitrage sur le marché obligataire

Structure par terme des taux

Pour un zéro-coupon d'échéance T et de nominal N, de prix de marché P_T, on a :

- Le taux de rentabilité à l'échéance T : $r_T = (N - P_T)/P_T$
- et le taux annuel équivalent :

$$z(T) = (1 + r_T)^{1/T} - 1 = (N/P_T)^{1/T} - 1$$

Si l'on dispose de suffisamment de zéro-coupons sur le marché, on peut construire la courbe de z en fonction de leur échéance T, appelée ***courbe des zéro-coupons par terme*** ou courbe des taux purs (*yield curve* ou *zero-rate curve*).

© Théo Jalabert

Valorisation par arbitrage sur le marché obligataire

- La présence de zéro-coupons sur le marché fournit un moyen de savoir si les obligations sont sur- ou sous-cotées. A l'inverse, si on fait l'hypothèse d'AOA, et si on a suffisamment de zéros-coupons, on a un moyen de valoriser les emprunts obligataires. C'est ce qu'on appelle *le principe de valorisation par arbitrage*.

- Remarque : Il existe autant de courbes des zéro-coupons que de structure de défaut correspondant : à chaque obligation correspond un niveau de rating qui évalue le risque de défaut de l'obligation, et il faut prendre la structure par terme correspondant à la notation de l'obligation considérée.

© Théo Jalabert

Valorisation par arbitrage sur le marché obligataire

Proposition (Prix de non-arbitrage)

En l’absence d’opportunités d’arbitrage, le prix de marché P_{A0A} de tout titre financier versant une suite de n cash flows F_t certains aux échéances futures $t_1, t_2, ..., t_n$ doit être égal à la valeur actuelle des flux du titre, en choisissant pour taux d’actualisation les taux zéro-coupons adéquats (correspondant à la structure de défaut de l’obligation considérée) à échéances $t_1, t_2, ..., t_n$

$$P_{AOA} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{ti}}{(1+z(ti))^{ti}}$$

$$P_{AOA} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{t_i}}{\left(1 + z\left(t_i\right)\right)^{t_i}}$$

© Théo Jalabert

Preuve de la Proposition :

On utilise un raisonnement par arbitrage. Soit A le titre, de flux F1, F2, F3 aux dates 1, 2, 3 (pour simplifier, on suppose n = 3 et les flux annuels, mais un raisonnement identique peut être adapte au cas général). On désigne par X, Y et Z les zéro-coupons à 1, 2, 3 ans respectivement, de nominal 1.

Le prix de Y est par exemple donné par $P^Y = \frac{1}{(1+z(2))^2}$. Supposons que $P_{AOA} > \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{ti}}{(1+z(ti))^{ti}}$ $P_{AOA} > \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{t_i}}{(1+z(t_i))^{t_i}}$

Alors on peut mettre en œuvre la stratégie suivante :

Opérations	t=0	t=1	t=2	t=3
Acheter F_1 titres X	$-F_1 * \frac{1}{(1+z(1))^1}$	F_1	0	0
Acheter F_2 titres Y	$-F_2 * \frac{1}{(1+z(2))^2}$	0	F_2	0
Acheter F_3 titres Z	$-F_3 * \frac{1}{(1+z(3))^3}$	0	0	F_3
Vendre A	P_A	$-F_1$	$-F_2$	$-F_3$
Total	>0	0	0	0

Ainsi on construit une opportunité d’arbitrage, ce qui est absurde compte tenu de l’hypothèse d’AOA sur le marché.
De même on montre que si PA<PAOA, on peut construire une OA, en faisant les opérations inverses des précédentes.

Donc $P_A=P_{AOA}$

© Théo Jalabert

Valorisation par arbitrage sur le marché obligataire

- D'où l'importance, pour valoriser les obligations, de
  - l'hypothèse d'AOA
  - la présence de "suffisamment" de zéro-coupons sur le marché, pour pouvoir "répliquer" les produits à valoriser
- Cette dernière propriété est ce que l'on appelle la ***complétude du marché*** (nous le verrons un peu plus tard). Elle est liée en partie à la liquidité du marché, c'est-à-dire à la grande disponibilité des produits financiers échangeables sur le marché. Attention à ne pas confondre ces deux notions : liquidité et complétude sont liées mais ne sont pas équivalentes.

© Théo Jalabert

Opportunités d’arbitrage sur le marché boursier

© Théo Jalabert

Opportunités d’arbitrage sur le marché boursier

- **Exemple 1**

Considérons un marché avec 2 actions échangées, A et B. Il y a 2 dates, t=0 et t=1 (modèle mono-périodique).

La grande différence avec le marché obligataire est le fait que les flux futurs ne sont pas certains, mais aléatoires.

A t = 1, 2 états possibles de la nature : hausse ou baisse (souvent notés u et d pour up and down).

Les payoffs à t = 1 des 2 actifs sont donnés par le tableau suivant :

Imaginons que le prix actuel de A est de 50€, et celui de B est de 57€ .

Comment peut-on construire une stratégie qui nous fasse gagner de l’argent en t = 0 sans en perdre en t = 1 ?

→ On vend ce qui est cher et on achète ce qui n'est pas cher.

Actif	A	B
w_1 : état hausse	80	80
w_2 : état baisse	35	35

© Théo Jalabert

Opportunités d'arbitrage sur le marché boursier

- **Exemple 1**

Imaginons que le prix actuel de A est de 50€, et celui de B est de 57€ .

Comment peut-on construire une stratégie qui nous fasse gagner de l'argent en t = 0 sans en perdre en t = 1 ?

Réponse *:* On vent à découvert B et on achète A (on vend ce qui est cher et on achète ce qui est pas cher…)

A t = 0, on gagne 7€ . Et à t = 1, on utilise les flux reçus de la revente de A pour acheter B (ou livrer les flux à l'acheteur à découvert).

Une telle opportunité de profit certain est une opportunité d'arbitrage. De même que sur le marché obligataire, sur un marché boursier, les investisseurs s'empresseraient d'acheter A (la moins chère), le prix de A monterait, et de vendre B, dont le prix baisserait, jusqu'à obtenir un équilibre.

Donc sur un marché financier équilibré, il ne devrait pas y avoir d'opportunité d'arbitrage (équilibre ⇒ AOA).

Actif	A	B
w_1 : état hausse	80	80
w_2 : état baisse	35	35

© Théo Jalabert

Opportunités d’arbitrage sur le marché boursier

Une des conséquences majeures de l’absence d’opportunité d’arbitrage sur les marchés financiers est la loi du prix unique (*law of one price*) :

***Proposition** (Loi du prix unique)*
Sous l’hypothèse d’AOA, 2 actifs qui ont exactement les mêmes payoffs ont le même prix.

C’est cette loi qui est la base de l’évaluation des produits financiers.

En effet, un corollaire de la loi précédente est :

Corollaire
*Pour évaluer un actif, on peut utiliser une combinaison d’actifs existants, qui donnerait exactement les mêmes payoffs que notre actif. Une telle combinaison est appelée **portefeuille de réplication** (replicating portfolio).*

© Théo Jalabert

Opportunités d'arbitrage sur le marché boursier

- **Exemple 2**
- Considérons 3 actifs C, D et E de flux futurs à t = 1 :

Actif	C	D	E
w_1 : état hausse	60	75	105
w_2 : état baisse	20	40	50

- Le prix de marché de C et D est respectivement 36€ et 50€.
  Quel est le prix de E?

$$\begin{cases} m_C \times 60 + m_D \times 75 = 105 \\ m_C \times 20 + m_D \times 40 = 50 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m_C = 1/2 \\ m_D = 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Prix } E = 1/2 \times 36 + 1 \times 50 = 68€$$

Exercice

10 minutes

Quizz à la fin

© Théo Jalabert

Opportunités d’arbitrage sur le marché boursier

- **Exemple 2**
- Le prix de marché de C et D est respectivement 36€ et 50€. ***Quel est le prix de E?***
- ***Solution :*** Construisons un portefeuille avec C et D qui réplique les flux futurs (cash flows) de E. Supposons qu’il contienne n_C unités de C et n_D unités de D.

Alors :

$105 = 60 \times n_C + 75 \times n_D$

$50 = 20 \times n_C + 40 \times n_D$

Ce système a une solution : $n_C = 0{,}5$ et $n_D = 1$.

Donc un portefeuille avec 0,5 unités de C et 1 unité de D réplique E. Donc par non-arbitrage, E doit avoir le même prix que ce portefeuille réplicant :

$P_E = 0{,}5 \times 36 + 1 \times 50 = 68€.$

Actif	C	D	E
w_1 : état hausse	60	75	105
w_2 : état baisse	20	40	50

© Théo Jalabert

Opportunités d’arbitrage sur le marché boursier

- Oui, on peut trouver le prix de n’importe quel actif sur ce marché = on dit que n’importe quel actif est **réplicable** sur ce marché
- Cela est dû au fait que le système d’équations suivant a une **unique solution** :

$$x = 60 \times n_C + 75 \times n_D$$

$$y = 20 \times n_C + 40 \times n_D$$

- Autrement dit, la matrice formée des prix de marché de C et D est **inversible**
- On dit que le marché est **complet**

Actif	C	D	Actif
w_1 : état hausse	60	75	x
w_2 : état baisse	20	40	y

© Théo Jalabert

Partie 2 : Formalisation des marchés financiers

Hypothèses sur le marché

- Les actifs sont divisibles à l’infini
- Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant
- On autorise les ventes à découvert
- Les échanges ont lieu sans coût de transaction
- On autorise les emprunts et les prêts illimités pour tous les agents au même
- taux constant r (accès à l’actif sans risque)