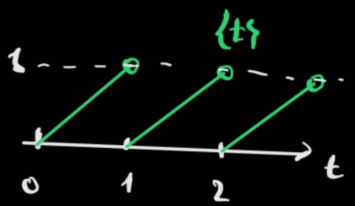
Exam 14 février 2023

Exo 1. $F(t) = t \cdot \{t\}$



(1) $f \in C^1 \Rightarrow f \in VB$

$$\mathrm{var}_f[a,b] = \sup_\sigma \sum \underbrace{|f(t_{i+1}) - f(t_i)|}_{|f'(\xi_i)|\cdot(t_{i+1}-t_i)} \overset{|f'| \text{ continue}}{=} \int_a^b |f'(\xi)|\,d\xi$$

ξ_i entre t_i et t_{i+1}

$$\mathrm{var}_f^{+/-}[a,b] = \sup_\sigma \sum \underbrace{\left(f(t_{i+1}) - f(t_i)\right)^{+/-}}_{f'(\xi_i)^{+/-}\cdot(t_{i+1}-t_i)} = \int_a^b (f'(\xi))^{+/-} d\xi$$

ξ_i entre t_i et t_{i+1}

(2) M.q. $F \in VB([0,T])$ $\quad dF_d, dF_a = ?$

$F(t) = t(t - \lfloor t \rfloor) = t^2 - t\lfloor t \rfloor$ – diff de 2 fcts $\nearrow$ → à VB.

Sauts en $t = n$, $n \in \mathbb{N}^*$ (sur $(n, n+1)$ $\{t\}$ est cont.)

$$dF_a([0,t]) = \sum_{\substack{n \leq t \\ n \in \mathbb{N}^*}} \Delta F(n) = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N}^* \\ n \leq t}} (-n)$$

$$\boxed{dF[a,t] = F(t) - F(a)}$$

$$F_a(t) = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \left(-n \mathbb{1}_{\{n \leq t\}}\right)$$

$F_d(t) = F(t) - F_a(t)$ et continue sur $[0,T]$ et C^1 sur $[n, n+1)$ $\forall n \in \mathbb{N}^*$ →

→ par (1) → $dF_d[0,t] = F_d(t) = t\{t\} + \sum_{n \leq \lfloor t \rfloor} n$

(3) M.q. $\exists X : [2, \infty[\to \mathbb{R}_+$ à VB t.q. $X(t) = 1 + \int X(s-) \lfloor s \rfloor^{-2} dF(s)$ calculable à l'aide de $h_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$ et $a_n = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2}$

On veut appliquer le thm de Doolean-Dade déterministe

$$\boxed{X(t) = x_0 + \int_{[0,t]} X(s-) u(s)\, dF(s) \Rightarrow X(t) = x_0\, e^{\int_{[0,t]} u(s) dF_d(s)} \cdot \prod_{s \in J_F \cap [0,t]} (1 + u(s) \Delta F(s))}$$

Pour l'appliquer, il faut vérifier que :

- $F : [2,T] \to \mathbb{R}^+$ c.a.d. VB ✓
- $u \in \mathcal{L}^1(|dF|)$
- $\inf_{s\in[0,T]} \{u(s)\Delta F(s)\} > -1$

- $u(s) = \lfloor s \rfloor^{-2}$ $\quad \int_2^T u\,|dF| = \int_2^T \lfloor s\rfloor^{-2}|dF_d|(s) + \int_2^T \lfloor s\rfloor^{-2}|dF_a|(s) =$

$$= \int_2^T \lfloor s\rfloor^{-2}\cdot(2s - \lfloor s\rfloor)ds + \sum_{2\leq n\leq T} n^{-2}\cdot n = \sum_{k=2}^{\lfloor T\rfloor -1}\int_k^{k+1} \frac{2s}{k^2} - \frac{1}{k}\,ds + \int_{\lfloor T\rfloor}^{T} \frac{2s}{\lfloor T\rfloor^2} - \frac{1}{\lfloor T\rfloor}ds + h_{\lfloor T\rfloor} =$$

$F_d \in \mathcal{C}^1$ sur $[n, n-1[$ et

$F_d'(s) = \{s\} + s = 2s - \lfloor s \rfloor$ $\quad (\lfloor T\rfloor + \{T\})^2$

$$= \sum_{k=2}^{\lfloor T\rfloor-1}\Big\{ \underbrace{\frac{(k+1)^2 - k^2}{k^2}}_{\frac{2k+1}{k^2} = \frac{2}{k} + \frac{1}{k^2}} - \frac{1}{k}\Big\} + \frac{T^2 - \lfloor T\rfloor^2}{\lfloor T\rfloor^2} - \frac{\{T\}}{\lfloor T\rfloor} + h_{\lfloor T\rfloor} =$$

$$= h_{\lfloor T\rfloor-1} + a_{\lfloor T\rfloor-1} + \frac{\{T\}}{\lfloor T\rfloor} + \frac{\{T\}^2}{\lfloor T\rfloor^2} + h_{\lfloor T\rfloor} = 2h_{\lfloor T\rfloor} + a_{\lfloor T\rfloor} + \frac{\{T\}-1}{\lfloor T\rfloor} + \frac{\{T\}^2 - 1}{\lfloor T\rfloor^2}$$

$\to u \in \mathcal{L}^1(|dF|)$

- $\inf_{s\in[0,T]}\{u(s)\,\Delta F(s)\} = \inf_{n\in\mathbb{N}^*, n\leq T}\left\{\frac{-n}{n^2}\right\} = -\frac{1}{2} > -1$

On a déjà calculé $\int_0^T u(s)dF_d(s) = h_{\lfloor T\rfloor-1} + a_{\lfloor T\rfloor-1} + \frac{\{T\}}{T} + \frac{\{T\}^2}{\lfloor T\rfloor^2}$

Donc

$$\boxed{X(T) = \exp\left\{h_{\lfloor T\rfloor-1} + a_{\lfloor T\rfloor-1} + \frac{\{T\}}{T} + \frac{\{T\}^2}{\lfloor T\rfloor^2}\right\}\cdot\prod_{n\in\mathbb{N}^*,\,2\leq n\leq T}\left(1 - \frac{1}{n}\right)}$$

Exo 2

$\ell_3(B(x,r)) = \frac{4}{3}\pi r^3$

Π nuage Poissonnien $\Pi : \Omega \to \$_{\mathbb{R}^3}$ d'intensité ℓ_3.

On pose $\Pi_0 = \{\|X\|, X\in\Pi\}$

(1) $\forall\beta > 0$ $\quad Y_\beta = \sum_{X\in\Pi}\|X\|^{-\beta}$ - v.a. Trouver $\beta > 0$ t.q. $\mathbb{E}[Y_\beta] = \infty$

$$\boxed{\text{Palm-Meche : } \mathbb{E}\Big[\sum_{X\in\Pi} F(X, \Pi\setminus\{X\})\Big] = \int \mathbb{E}[F(x,\Pi)]\,\mu(dx)}$$

intensité σ-finie

On auroit pu aussi utiliser le thm. de la formule exp qui donne $\mathbb{E}\,N_f(\Pi) = \int f\,d\mu$

Dans notre cas, $F(X, A) = \|X\|^{-\beta}$ en donc

$$\mathbb{E}\, Y_\beta = \int_{\mathbb{R}^3} \|x\|^{-\beta} dx < \infty \text{ si } \beta > 3 \, ?$$

$$\| \qquad \int_0^\infty r^{-\beta} \cdot r^2 dr \cdot \underbrace{\int_0^\pi \sin\varphi \, d\varphi}_{2} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta}_{2\pi} = 4\pi \int_0^\infty r^{2-\beta} dr$$

converge en ∞ ssi $\underline{\beta > 3}$

converge en 0 ssi $\underline{\beta < 3}$

$\mathbb{E}[Y_\beta] = \infty$ pour $\underline{\text{tous } \beta > 0}$

(2) Trouver $\beta > 0$ t.q. $\mathbb{P}(Y_\beta < \infty) > 0$

C'est le cas pour $\beta > 3$: $\mathbb{E}[Y_\beta] < \infty \Rightarrow Y_\beta < \infty$ p.s.

On note $f(x) = \|x\|^{-\beta}$ $\quad Y_\beta = N_f(\pi)$

Par le thm. d'alternative $\nearrow \int (1 \wedge f(x)) \mu(dx) < \infty$ et $N_f(\pi) < \infty$ p.s.

$\searrow \int (1 \wedge f(x)) \mu(dx) = \infty$ et $N_f(\pi) = \infty$

$$\int_{\mathbb{R}^3} 1 \wedge \|x\|^{-\beta} dx \text{ converge ssi } \int_0^\infty c \wedge r^{2-\beta} dr < \infty \quad (\text{ssi } \beta > 3)$$

Donc $\mathbb{P}(Y_\beta < \infty) > 0$ ssi $\underline{\beta > 3}$

(3) Calculer à une cste multiplicative près la fct. $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ t.q.

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda Y_{7/2}}] = e^{-\varphi(\lambda)}, \quad \lambda > 0$$

Formule exponentielle : $f : E \to [0, \infty]$ $\mathcal{E}$-mes. $\boxed{\mathbb{E}[e^{-N_f(\pi)}] = \exp\{-\int_E (1 - e^{-f(x)}) \mu(dx)\}}$

$f(x) = \lambda \|x\|^{-\beta}$ $\qquad$ $\left(c(1 \wedge \lambda f) \leq 1 - e^{-\lambda f} \leq 1 \wedge \lambda f \to \underset{\lambda \neq 0}{\text{alternative}} \right)$

$$\varphi(\lambda) = \int_{\mathbb{R}^3} (1 - e^{-\lambda \|x\|^{-\beta}}) dx = 4\pi \int_0^\infty (1 - e^{-\lambda r^{-\beta}}) r^2 dr = \left\{ \begin{array}{l} u = \lambda r^{-\beta}, \ \beta > 0 \\ du = -\lambda \beta r^{-\beta - 1} dr \\ r = \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{-1/\beta} \end{array} \right\} =$$

$$= 4\pi \int_0^\infty (1 - e^{-u}) \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{-\frac{2}{\beta}} \frac{1}{\lambda \beta} \left(\frac{u}{\lambda}\right)^{-\frac{\beta+1}{\beta}} du = \frac{4\pi}{\beta} \lambda^{3/\beta} \underbrace{\int_0^\infty (1 - e^{-u}) u^{-1 - \frac{3}{\beta}} du}_{\text{ne dépend plus de } \lambda} = \underline{C \cdot \lambda^{3/\beta}}$$

$-1 - \frac{3}{\beta}$

(4) Π_0 est p.s. égal à un nuage Poissonien sur $\mathbb{R}_+$

$f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad x \mapsto \|x\|$ $\qquad \Pi_0 = f(\pi)$

Mesure image $\mu' = \ell^3 \circ f^{-1}$ est diffuse :

$\forall a \geq 0 \quad \mu'(\{a\}) = \ell^3(\{x \in \mathbb{R}^3 : \|x\| = a\}) = 0$

sphère

Alors, on peut appliquer le théorème de l'image : Π_0 est un nuage de Poisson d'intensité μ' et $\mathbb{P}$-p.s. $\forall X, Y \in \Pi$ $(X \neq Y) \to (\varphi(X) \neq \varphi(Y))$

(5) $h(r) = q r^\alpha$. Pour quelles valeurs de q et α, $h(\Pi_0)$ est un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}$ d'intensité ℓ_1 ?

$\alpha \neq 0$ Sinon $\mu' \circ h^{-1}$ n'est pas diffuse

On veut que $\ell_1 = \mu' \circ h^{-1} = \mu \circ f^{-1} \circ h^{-1}$

$(h \circ f)(x) = q \|x\|^\alpha$

$\forall (a, b) \qquad (\mu' \circ h^{-1})(a, b) = \ell^3(\{x : q\|x\|^\alpha \in (a, b)\}) \overset{?}{=} b - a$

$\ell^3(\{x : q\|x\|^\alpha \in (a,b)\}) = \ell^3(\{x : \|x\| \text{ est entre } (\frac{a}{q})^{\frac{1}{\alpha}} \text{ et } (\frac{b}{q})^{\frac{1}{\alpha}}\})$

$$\int_{r_1 \leq \|x\| \leq r_2} d\ell^3 = 4\pi \int_{r_1}^{r_2} r^2 dr = \frac{4}{3}\pi (r_2^3 - r_1^3) = \frac{4}{3}\pi \left| \left(\frac{a}{q}\right)^{\frac{3}{\alpha}} - \left(\frac{b}{q}\right)^{\frac{3}{\alpha}} \right| =$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \alpha = 3 \\ q = \frac{4}{3}\pi \end{array} \right\} = b - a \Rightarrow \underline{\alpha = 3,\ q = \frac{4}{3}\pi}$$

(6) $\exists X_n$ une suite de v.a. $\mathcal{F}$-mesurables t.q. $0 < \|X_n\| < \|X_{n+1}\|$ $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Pi = \{X_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ p.s.

$\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+ \times \underbrace{S^{d-1}}_{E} \quad x \mapsto \left(\frac{4}{3}\|x\|^3, \frac{x}{\|x\|}\right)$ uniforme sur S^{d-1} (pour les détails et $\sqrt{3.1}$, (3) au-dessous)

i.i.d. $Exp(1)$

$\psi(\Pi)$ est le nuage d'intensité $\ell_1 \otimes \nu$

Par le thm. vu dans le cours $T_n(\Pi) = \mathcal{E}_1(\Pi) + \dots + \mathcal{E}(\Pi)$ et

$Z_n(\Pi) \in S^{d-1}$ i.i.d. $\sim \frac{\mathcal{H}(\cdot)}{\mathcal{H}(S^{d-1})}$ $\quad \mathcal{E}_n, Z_n$ mutuellement indép

et $\psi(\Pi) = \{(T_n, Z_n), n \geq 1\}$

On $T_n = \frac{4}{3}\|X_n\|^3$, $Z_n = \frac{X_n}{\|X_n\|}$

$\|X_n\| = \left(\frac{3}{4} T_n\right)^{1/3} \quad \underline{X_n = \left(\frac{4}{3} T_n\right)^{1/3} Z_n}$

(7) M.q. $\exists$ des const. $c>0$ et $K>0$ t.q. $\mathbb{P}$-p.s. $\lim_{n\to\infty} n^{-c}\|X_n\| = K$

$\frac{4}{3}\|X_n\|^3$ est un nuage de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $\ell_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists\, \mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2, \dots \sim \mathcal{E}xp(1)$: $\frac{4}{3}\|X_n\|^3 = T_n = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k$

$$\|X_n\| = \left(\frac{3}{4} T_n\right)^{1/3}$$

Par LFGN, $n^{-1} T_n \xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}\,\mathcal{E}_1 = 1$

Alors, $n^{-1/3}\|X_n\| = \left(\frac{3}{4}\cdot\frac{T_n}{n}\right)^{1/3} \longrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{1/3} = K$

Exo 3

$T_n = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k$ $\quad \Pi = \{(T_n, Z_n)\}$ $\quad Z_n : \Omega \to [-1,1]$ $\quad (\mathcal{E}_n), (Z_n)$ sont indép

$a \in \mathbb{R}$ $t \geq 0$ $\quad N_t = N_{[0,t]\times\mathbb{R}}(\Pi)$ $\quad U_t = \sum_{1\leq n\leq N_t} Z_n - at$

$\mathcal{E}_n \sim \mathcal{E}xp(\theta)$, $Z_n \sim \rho$

$\varsigma_2 = \int z^2 \rho(dz) < \infty$ $\quad \varsigma_1 = \int z \rho(dz)$

$$\begin{cases} dS_t = m S_{t-}\, dt + S_{t-}\, dU_t \\ S_0 = s_0 > 0 \end{cases} \qquad \tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$$

(1) M.q. $\exists\, c \in \mathbb{R}$: $(U_t - ct)_{t\geq 0}$ est $\mathcal{F}_t$-mart.

Formule de compensation: $\boxed{\mathbb{E}\Big[\sum_{s\in[0,t]} H_s(\cdot, Z_s)\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^t ds \int_E H_s(\cdot, x)\mu(dx)\Big]}$

En plus, $\sum_{s\in[0,t]} H_s(\cdot, Z_s) - \int_0^t ds \int_E \mathbb{E}[H_s(\cdot,x)]\mu(dx)$ est une $(\mathcal{F}_t)$-mart càdlàg

$\sum_{s\in[0,t]} H_s(\cdot, Z_s) = \sum_{s\in[0,t]} Z_s \rightsquigarrow \mathbb{E}\Big[\sum_{1\leq n\leq N_t} Z_n\Big] = \mathbb{E}\Big[\int_0^t ds \underbrace{\int_E z\rho(dz)}_{\varsigma_1}\Big] = \varsigma_1 t$

Alors $\sum_{s\in[0,t]} Z_s - at - \varsigma_1 t + at = U_t - \underbrace{(\varsigma_1 - a)}_{c}\, t$ est une mart.

(2) $\mathbb{E} U_t^2 < \infty$? M.q. $\exists\, b$: $((U_t - ct)^2 - bt)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-mart.

$\mathcal{C}$ $\theta\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}} z^2 \rho(dz) < \infty$

formule de compens.

$$\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[(U_t - ct)^2] = \theta\int_0^t ds \int_{\mathbb{R}_+} z^2 \rho(dz) = \varsigma_2 \theta t$$

$$\overset{"}{=}\mathbb{E}U_t^2 - 2ct\,\underbrace{\mathbb{E}[U_t]}_{(\xi_1-a)t} + c^2t^2 \;\to\; \underline{\mathbb{E}U_t^2 = \theta\xi_2 t + 2c(\xi_1-a)t^2 - c^2t^2}$$

$(U_t-ct)^2 - \theta\xi_2 t$ est une martingale $\to \underline{b = \xi_2\theta}$

(3) $S_t = ?$ $\tilde{S}_t = ?$ $\mathbb{E}[\tilde{S}_{t+t_0}|\mathcal{F}_{t_0}] = ?$ $\mathbb{E}[S_t^2] = ?$

$$dS_t = mS_{t-}\,dt + S_{t-}\,dU_t$$

Entre T_n et T_{n+1}, $S_t = S_{T_n} e^{m(t-T_n) - a(t-T_n)}$

$$\Delta S_{T_n} = S_{T_n-}\cdot Z_n = S_{T_n} - S_{T_n-} \to S_{T_n} = S_{T_n-}(1+U_n)$$

$$S_t = s_0 \exp\{(m-a)t\}\cdot\prod_{N_{t_0}<n\le N_t}(1+Z_n)$$

$$\tilde{S}_t = s_0\exp\{(m-a-r)t\}\cdot\prod_{N_{t_0}<n\le N_t}(1+Z_n)$$

$$\mathbb{E}\Big[\prod_{N_{t_0}<n\le N_{t_0+t}}(1+Z_n)\Big] = \mathbb{E}\Big[\exp\{-\underbrace{\sum_n -\log(1+Z_n)\mathbb{1}_{[t_0,t_0+t]}(T_n)}_{N_f(\pi)}\}\Big] = \exp\Big\{-\int_{t_0}^{t_0+t}\theta\,ds\int_{\mathbb{R}}(1-\underbrace{e^{\log(1+x)}}_{-x})\rho(dx)\Big\} =$$

$$= e^{\theta\xi_1 t}$$

$$f(x) = \log(1+x)\mathbb{1}_{[t_0,t_0+t]}(T)$$

$$\mathbb{E}[S_{t+t_0}|\mathcal{F}_{t_0}] = S_{t_0}\exp\{(m-a)t\}\cdot e^{\theta\xi_1 t} = S_{t_0}\cdot e^{(m-a+\theta\xi_1)t}$$

$$\mathbb{E}(\tilde{S}_{t+t_0}|\mathcal{F}_{t_0}) = \tilde{S}_{t_0}e^{(m-a-r+\theta\xi_1)t}$$

$$\mathbb{E}[S_t^2] = s_0 e^{2(m-a)t}\,\underbrace{\mathbb{E}\prod_{N_0<n\le N_t}(1+Z_n)^2}\cdot s_0 e^{(2m-2a+2\theta\xi_1+\theta\xi_2)t}$$

$$\mathbb{E}\big[e^{-\sum -2\log(1+Z_n)}\big] = e^{-\int_0^t\theta\,ds\int(1-\overbrace{(1+x)^2}^{-2x-x^2})\rho(dx)} = e^{\theta(2\xi_1+\xi_2)t}$$

(4) Équation pour $\tilde{S}_t$?

$$d\tilde{S}_t = (m-r)\tilde{S}_{t-}\,dt + \tilde{S}_{t-}\,dU_t$$

(5) $\Psi :]-1,1[\to]-1,\infty[$ mesurable $M_t = e^{-\beta t}\prod_{1\le n\le N_t}(1+\Psi(Z_n))$

M_t est $\mathcal{F}_t$ martingale. $\beta = ?$

$$\mathbb{E}\Big[\prod(1+\Psi(Z_n))\Big] = \mathbb{E}\exp\{-\sum -\log(1+\Psi(Z_n))\} = e^{-\int_0^t\theta\,ds\int(1-e^{\log(1+\Psi(z))})\rho(dz)}$$

$$= e^{\vartheta t \cdot \underbrace{\int \psi(\zeta)\rho(d\zeta)}_{\xi_\psi}} = e^{\vartheta \xi_\psi t}$$

Martingale si $\beta = \vartheta \cdot \xi_\psi$.

(6) $\mathbb{Q}'_T(B) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B M_T]$. M.q. $\mathbb{Q}'_T \sim \mathbb{P}$

$\psi > -1 \Rightarrow M_T > 0$ p.s.

Si $\mathbb{P}(B) = 0$, alors $\mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_B \cdot M_T}_{\substack{=0 \\ \mathbb{P}\text{-p.s.}}}] = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}'_T \ll \mathbb{P}$

Si $\mathbb{Q}'_T(B) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_B M_T] = 0$, $\mathbb{P}(B) = 0$ sinon $\mathbb{1}_B \cdot M_T > 0$ sur $B \Rightarrow \mathbb{Q}'_T(B) > 0$?!

(7) Π_T sous $\mathbb{Q}'_T$ est $\mathrm{Pois}(\varkappa \cdot \mathcal{L}(\cdot \cap [0,T]) \otimes \vartheta(dz))$. Préciser $\varkappa$ et ϑ.

Intensité de Π_T sous $\mathbb{Q}'_T$?

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}'_T}[e^{-N_f(\Pi_T)}] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\underbrace{M_T}_{e^{-\vartheta\xi_\psi T} \cdot \prod_{1 \le n \le N_T}(1+\psi(z_n))} e^{-N_f(\Pi_T)}] = e^{-\vartheta\xi_\psi \int_0^T ds}\, e^{-\int_0^T \vartheta ds \int (1-e^{\log(1+\psi(\zeta)) - f(s,\zeta)})\rho(d\zeta)} =$$

$$= \exp\left\{-\int_0^T \vartheta\, ds \int \left(1+\psi(\zeta) - (1+\psi(\zeta))e^{-f(s,\zeta)}\right)\rho(d\zeta)\right\} =$$

$$= \exp\left\{-\int_0^T \underbrace{\vartheta(1+\xi_\psi)}_{\varkappa} ds \int (1-e^{-f(s,\zeta)}) \underbrace{\frac{(1+\psi(\zeta))\rho(d\zeta)}{1+\xi_\psi}}_{\vartheta(dz)}\right.$$

proba

le nuage est caractérisé par son intensité qui peut être obtenue par la formule exponentl (partie réciproque)

(8) Conditions sur ψ : sous $\mathbb{Q}'_T$ $(\tilde{S}_t)$ soit une $(\mathcal{F}_t)$-mart.

Sous $\mathbb{Q}'_T$, $\Pi_T \sim \mathrm{Pois}(\varkappa \mathcal{L} \otimes \vartheta)$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}'_T}(\tilde{S}_{t+t_0} | \mathcal{F}_{t_0}) \overset{\text{m̂ raisonnement que en (3).}}{=} S_{t_0} e^{\left(m-a-r+\vartheta\int \zeta\vartheta(d\zeta)\right)dt}$$

Il faut que $\int \zeta(1+\psi(\zeta))\rho(d\zeta) = \frac{r+a-m}{\vartheta}$

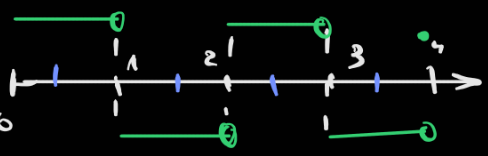
$$\int \zeta\psi(\zeta)\rho(d\zeta) = \frac{r+a-m}{\vartheta} - \xi.$$

Exos de poly

N 1.2 $\quad F(s) = (-1)^{\lfloor s \rfloor} + \sin(\pi s),\ t \in \mathbb{R}_+$

M.q. elle est VB ?

à VB comme C^1



$F_a(s) = (-1)^{\lfloor s \rfloor} \qquad dF_a([0,t]) = \sum_{1 \le n \le \lfloor t \rfloor} \underbrace{(-1)^n \cdot 2}_{\Delta F_a(n)}$

$F_d(s) = \sin(\pi s) \in C^1 \leadsto dF_d = \pi \cos(\pi s)\, ds$

$|dF_d| = \pi |\cos(\pi s)|\, ds$

$$V(\sigma, F) = \sum_i \left| (-1)^{\lfloor s_{i+1} \rfloor} - (-1)^{\lfloor s_i \rfloor} + \sin(\pi s_{i+1}) - \sin(\pi s_i) \right| \le \underbrace{\sum_i \left| (-1)^{\lfloor s_{i+1} \rfloor} - (-1)^{\lfloor s_i \rfloor} \right|}_{\le\, 2 \lfloor t \rfloor} + \underbrace{\sum_i \left| \sin \pi s_{i+1} - \sin \pi s_i \right|}_{\le\, \pi \int_0^t |\cos \pi s|\, ds}$$

on prend σ t.q. $\forall\, [n, n+1)$: $[n, n+1) \cap [0,t] \neq \emptyset$ $\exists\, s_i \in [n, n+1)$

$\Rightarrow \mathrm{var}_F [0,t] \le 2 \lfloor t \rfloor + \pi \int_0^t |\cos \pi s|\, ds$

en fait, égalité:

$dF = dF_a + dF_d$

$|dF| = |dF_a| + |dF_d|$ car les mesures sont singulaires

$$\mathrm{var}_F [0,t] = \int_{[0,t]} |dF_d| + \sum_{s \in \mathcal{J}_F \cap [0,t]} \underbrace{|\Delta F(s)|}_{2} = 2 \lfloor t \rfloor + \pi \int_{[0,t]} |\cos \pi s|\, ds$$

Trouver une solution de $X(t) = 1 + \int_{[0,t]} X_{s-} \underbrace{\cos(\pi s)}_{u(s)}\, dF(s)$

On doit montrer que:

- F est càd à VB - on a déjà montré
- $u \in \mathcal{L}^1(|dF|)$
- $\inf_{s \in [0,t]} \{ (1 + \underbrace{u(s)}_{\cos(\pi n) = (-1)^n} \underbrace{\Delta F(s)}_{2 \cdot (-1)^n}) \} = \min\{1, 3\} = 1 > 0$

$$\int |u(s)|\, |dF|(s) = \sum_{1 \le n \le \lfloor t \rfloor} |\cos(\pi n)| \cdot 2 + \int_0^t \pi \cos(\pi s)^2\, ds = 2 \lfloor t \rfloor + \pi \int_0^t \cos(\pi s)^2\, ds < \infty$$

Alors on peut appliquer Doléan-Dade:

$$X(t) = \exp\left\{ \int_0^t u(s)\, dF_d(s) \right\} \prod_{1 \le n \le \lfloor t \rfloor} (1 + \underbrace{u(n) \cdot \Delta F_a(n)}_{= 2}) = 3^{\lfloor t \rfloor} \cdot e^{\pi \int_0^t \cos(\pi s)^2\, ds}$$

$$\int_0^t \cos(\pi s)^2 ds = \int_0^t \frac{1+\cos(2\pi s)}{2} ds = \frac{t}{2} + \frac{\sin(2\pi t)}{4\pi}$$

$$\cos(2\pi s) = 2\cos^2(\pi s) - 1$$

$$X(t) = 3^{\lfloor t \rfloor} \exp\left\{ \frac{\pi t}{2} + \frac{1}{4}\sin(2\pi t) \right\}$$

N3.1. v_d est le volume de la boule unité

$$\int_{\mathbb{R}_d} f(\|x\|)\, \ell_d(dx) = d \cdot v_d \int_{\mathbb{R}_+} f(r) r^{d-1} \ell_1(dr)$$

$$\Pi = \mathrm{Pois}(\ell_d)$$

$$\Pi_0 = \{\|x\|,\ x \in \Pi\}$$

(1) $f : \mathbb{R}_d \to \mathbb{R}_+$ $x \mapsto \|x\|$ $\Pi_0 = f(\Pi)$ par le thm. d'image il suffit de montrer que $\mu_0 = \ell_3 \circ f^{-1}$ est diffuse.

On a déjà montré ça pour 2023.

(2) $\varphi(r) = b r^\beta$. Trouver b, β : $\varphi(\Pi_0) \sim \mathrm{Pois}(\ell_1)$

$$\ell_3 \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1} = \ell_1$$

Il suffit de montrer l'égalité sur les intervalles $[a_1, a_2]$ $0 \leq a < b$.

$$\ell_3 \circ f^{-1} \circ \varphi^{-1})(a,b) = \ell_3 \{x \in \mathbb{R}^d : a_1 \leq b\|x\|^\beta \leq a_2\} =$$

$$= \ell_3\{x \in \mathbb{R}^d : \underbrace{\left(\frac{a_1}{b}\right)^{1/\beta}}_{r_1} \leq \|x\| \leq \underbrace{\left(\frac{a_2}{b}\right)^{1/\beta}}_{r_2}\} = v_d \cdot (r_2^d - r_1^d) = a_2 - a_1$$

On veut $\forall a_1, a_2$

$$a_2 - a_1 = v_d\left(\left(\frac{a_2}{b}\right)^{\frac{d}{\beta}} - \left(\frac{a_1}{b}\right)^{d/\beta}\right) \to \text{il faut prendre } \beta = d \quad b = v_d$$

et $\varphi(r) = v_d \cdot r^d$

(3) $\exists X_n : 0 < \|X_n\| < \|X_{n+1}\|$ et $\Pi = \{X_n,\ n \in \mathbb{N}^*\}$

La fonction de répartition de $\|X_n\|$?

$$\Psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+ \times S^{d-1} \quad x \mapsto \left(v_d \|x\|^d, \frac{x}{\|x\|}\right)$$

On veut appliquer le thm. de l'image

La mesure image $\ell_d \circ \Psi^{-1} = \ell_1 \otimes \mu$ est diffuse

μ uniforme sur S^{d-1}

/

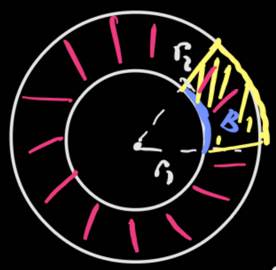
$\ell_d\circ\Psi^{-1} \overset{?}{=} \ell_1\otimes\varsigma$

$(r_2^d - r_1^d)\cdot v_d \cdot \frac{\varsigma(B)}{\varsigma(S^{d-1})}$

- Pour $(a_1,a_2]\times B$ où $B\in \mathrm{Borel}(S^{d-1})$

$$\ell_d\circ\Psi^{-1}((a_1,a_2]\times B) = \ell_d\left\{x\in\mathbb{R}^d : a_1\le v_d\|x\|^d\le a_2,\ \frac{x}{\|x\|}\in B\right\} =$$

$$= \frac{\varsigma(B)}{\varsigma(S^{d-1})}\left(\left(\frac{a_2}{v_d}\right)^{d/d} - \left(\frac{a_1}{v_d}\right)^{d/d}\right)\cdot v_d = \frac{\varsigma(B)}{\varsigma(S^{d-1})}\cdot(a_2-a_1)$$



$\mathrm{Vol}(\ ) = \mathrm{Vol}(\ )\cdot\frac{\varsigma(B)}{\varsigma(S^{d-1})}$

Alors $\ell_d\circ\Psi^{-1}=\ell_1\otimes\varsigma$ $\quad \varsigma(S^{d-1})=1$ □

Donc $\Psi(\Pi)$ est un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}_+\times S^{d-1}$ ->

-> on peut appliquer le thm. vu en cours pour trouver

$E_n\sim \mathcal{E}xp(1)$, $Z_n\sim\varsigma$ i.i.d. t.q. $\Psi(\Pi)=\{(T_n,Z_n): n\in\mathbb{N}^*\}$

$$(T_n,Z_n)=\left(v_d\|X_n\|^d, \frac{X_n}{\|X_n\|}\right) \to X_n = \left(\frac{T_n}{v_d}\right)^{1/d} Z_n$$

$T_n = E_1+\dots+E_n$

$$\|X_n\| = \left(\frac{T_n}{v_d}\right)^{1/d} \qquad T_n = E_1+\dots+E_n \sim \Gamma(n,1)$$

fct de répartition de la loi Erlang$(n,1) = \Gamma(n,1)$

$$\mathbb{P}(\|X_n\|\le x) = \mathbb{P}(T_n\le v_d x^d) = \Gamma(v_d x^d)$$

on peut le calculer par l'IPP

(4) $$n^{-c_d}\|X_n\| = n^{-c_d}\left(\frac{T_n}{v_d}\right)^{1/d} = \{c_d = 1/d\} = \Big(\underbrace{\frac{T_n}{n}}_{\substack{\to 1\\ LFGN}}\cdot\frac{1}{v_d}\Big)^{1/d} \xrightarrow[p.s.]{} v_d^{-1/d} = C_d$$

(5) Densité de X_n: $$\frac{d}{dx}\Gamma(v_dx^d) = v_d\, d\, x^{d-1}\cdot\gamma(v_dx^d) =$$

densité de Erlang$(n,1)$

$$\gamma(z)=\frac{1}{(n-1)!}e^{-x}x^{n-1}$$

$$=\frac{d\cdot v_d^d}{(n-1)!}x^{d(n-1)}e^{-v_dx^d}$$

(6) μ loi uniforme sur $\mathbb{S}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$

$Z : \Omega \to B(0,1)$ $\quad (v_d)^{-1} \ell_d(\cdot \cap B(0,1)) \to \frac{Z}{\|Z\|} \sim \mu$

M.q. $\exists\, \mathcal{E}_n \sim \mathcal{E}xp(1)$ $\quad Z_n \sim \mu$ indéps.

$\mathbb{P}$-p.s. $\quad \Pi = \{a_d(\mathcal{E}_1 + \dots + \mathcal{E}_n)^{\gamma_d} Z_n : n \in \mathbb{N}^*\}$

$\mu(B(0,1)) = 1 \to$ on peut appliquer le thm.

$X_n = \left(\frac{T_n}{v_d}\right)^{1/d} \cdot Z_n$ – on a vu dans (3)

$\gamma_d = \frac{1}{d}$ $\quad a_d = v_d^{-1/d} \leftarrow$ cf (3).

$\mathcal{N}$ 3.2. $\quad \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $\quad \mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^*$

$\mu_\beta(dt) = \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t) \cdot t^{-\beta} \cdot \ell_1(dt)$

$\forall \pi \in \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+}$ $\quad \forall c \in \mathbb{R}_+^*$, $\quad \forall a \in \mathbb{R}^*$

$c \cdot \pi = \{cx,\ x \in \pi\}$ $\quad \pi^a = \{x^a : x \in \pi\}$

$\beta \in \mathbb{R}_+^*$ $\quad \Pi_\beta : \Omega \to \mathcal{S}_{\mathbb{R}_+^*}$ $\quad \mathrm{Pois}(\mu_\beta)$

On pose $S_\beta = \sum_{X \in \Pi_\beta} X = \mathcal{N}_f(\Pi_\beta)$ où $f = Id$

(1) $\beta_1, \beta_2 > 0$ $\quad$ M.q. $\exists\, c \in \mathbb{R}_+^*,\ \lambda \in \mathbb{R}^*$: $\quad \Pi_{\beta_1} \overset{\text{loi}}{=} c \cdot (\Pi_{\beta_2})^{\lambda}$

Il suffit de montrer que les intensités son égales car elles décrivent complètement la loi du nuage

Intensité de $c \cdot (\Pi_{\beta_2})^\lambda = f(\Pi_{\beta_2})$ où $f : x \mapsto c x^\lambda$

On veut utiliser le thm. de l'image

$\mu_{\beta_2} \circ f^{-1}$ est diffuse (facile à vérifier car f est bijective)

$$(\mu_{\beta_2}\circ f^{-1})([\varepsilon,t]) = \mu_{\beta_2}\{x : cx^\lambda \leq t\} = \begin{cases} \mu_{\beta_2}([0,(\frac{t}{c})^{1/\lambda}]) & \text{si } \lambda>0 \\ \mu_{\beta_2}(\,](\frac{t}{c})^{1/\lambda},+\infty[) & \text{si } \lambda<0 \end{cases}$$

$\Big\downarrow d/dt$ On veut

$$\frac{d}{dt}(\mu_{\beta_2}\circ f^{-1})([\varepsilon,t]) = \underbrace{\frac{d}{dt}\mu_{\beta_2}([0,(\tfrac{t}{c})^{1/\lambda}])}_{(\frac{t}{c})^{-\frac{\beta_2}{\lambda}}}\cdot\frac{\text{sign}(\lambda)}{\lambda}\left(\frac{t}{c}\right)^{\frac{1}{\lambda}-1}\cdot\frac{1}{c} = \left(\frac{t}{c}\right)^{\frac{1-\beta_2}{\lambda}-1}\cdot\frac{1}{|\lambda| c} \overset{\downarrow}{=} t^{-\beta_1}$$

$$|\lambda|\, c^{\frac{1-\beta_2}{\lambda}} = 1$$

$$\frac{1-\beta_2}{\lambda}-1=-\beta_1 \to \lambda=\frac{1-\beta_2}{1-\beta_1} \qquad c=\left|\frac{1-\beta_1}{1-\beta_2}\right|^{\frac{1}{1-\beta_1}}$$

(2) Pour quels $\beta\in\mathbb{R}^*$ $\mathbb{P}(S_\beta<\infty)=1$? $\mathbb{P}(S_\beta<\infty)$ si $\mathbb{P}(S_\beta<\infty)<1$?

$$\mathbb{E}[e^{-N_f(\Pi_\beta)}] = \exp\{-\int_{\mathbb{R}_+^*}(1-e^{-f(x)})\mu_\beta(dx)\}$$

Par le thm. de l'alternative,

soit $\int(1\wedge f(x))\mu_\beta(dx)=+\infty$ et $S_\beta=+\infty$ p.s.

soit $\int(1\wedge f(x))\mu_\beta(dx)<+\infty$ et $S_\beta<+\infty$ p.s.

$$\int_0^\infty(1\wedge x)x^{-\beta}dx \sim \begin{cases} x^{1-\beta} & \text{en } 0 \\ x^{-\beta} & \text{en } +\infty \end{cases}. \quad \text{Il faut } \begin{cases} 1-\beta>-1 \\ \beta>1 \end{cases} \to \beta\in]1,2[$$

(3) On suppose que $S_\beta<\infty$ p.s. i.e. $\beta\in]1,2[$

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda S_\beta}] \underset{\text{formule exp}}{=} \exp\{-\int_0^\infty(1-e^{-\lambda x})x^{-\beta}dx\} \Leftrightarrow$$

$$\int_0^\infty(1-e^{-\lambda x})x^{-\beta}dx = \frac{1}{1-\beta}\int_0^\infty(1-e^{-\lambda x})dx^{1-\beta} = \underbrace{\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}(1-e^{-\lambda x})\Big|_0^\infty}_{\text{en } 0\ \sim\ \lambda x^{2-\beta}\to 0} - \frac{1}{1-\beta}\int_0^\infty x^{1-\beta}d(1-e^{-\lambda x}) =$$

$$= \frac{-1}{1-\beta}\int_0^\infty e^{-\lambda x}x^{(2-\beta)-1}d(\lambda x) = -\frac{\lambda^{\beta-1}}{1-\beta}\Gamma(2-\beta)$$

$$\Leftrightarrow e^{\frac{\lambda^{\beta-1}}{1-\beta}\Gamma(2-\beta)}$$

(4) $\beta>0$ fixé $\forall a\in\mathbb{R}^*$ $S_{a,\beta}=\sum_{X\in\Pi_\beta}X^a$. Pour quels a $\mathbb{P}(S_{a,\beta}<\infty)=1$

$$\mathbb{P}(S_{0,\beta}<\infty) \underset{\substack{\text{Thm. de} \\ \text{l'alternative}}}{\Leftrightarrow} \int_{\mathbb{R}_+^*}(1\wedge x^a)\,\xi_\beta(dx) = \int_{\mathbb{R}_+^*}(1\wedge x^a)\,x^{-\beta}dx$$

Si $a>0$ il faut que $\begin{cases} a-\beta>-1 \\ \beta>1\end{cases} \to \begin{cases} a>\beta-1 \\ \beta>1\end{cases}$

Si $a<0$, $\begin{cases} \beta<1 \\ \beta-a>1\end{cases} \to \begin{cases} \beta<1 \\ a<\beta-1\end{cases}$

Alors, si $\beta\in]0,1[\to a<\beta-1$

si $\beta>1 \to \underline{a>\beta-1}$ (on a supposé que $\beta\in]1,2[$)

(5) Trouver $(c,a)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}^*$ t.q. $c\cdot(\Pi_\beta)^a$ soit Pois(ℓ_1)

$f: x\mapsto cx^a$ $\quad\xi_\beta\circ f^{-1}$ diffuse $\to$ thm. de l'image

D'après (1),

$$\frac{d}{dt}(\xi_\beta\circ f^{-1})[\varepsilon,t] = \frac{d}{dt}\underbrace{\xi_\beta\left(\left[0,\left(\frac{t}{c}\right)^{1/a}\right]\right)}_{\left(\frac{t}{c}\right)^{-\frac{\beta}{a}}}\cdot\frac{1}{|a|}\left(\frac{t}{c}\right)^{\frac{1}{a}-1}\cdot\frac{1}{c} = \left(\frac{t}{c}\right)^{\frac{1-\beta}{a}-1}\cdot\frac{1}{|a|c} \underset{\text{on choisit } a,\, c}{=} 1$$

$$\begin{cases} |a|c^{\frac{1-\beta}{a}} = 1 \\ \frac{1-\beta}{a} = 1\end{cases} \qquad \begin{cases} a = 1-\beta \\ c = \frac{1}{|1-\beta|} = \frac{1}{\beta-1}\end{cases}$$

(6) M.q. $\exists X_n$: $X_n>X_{n+1}$ $\quad\lim X_n=0 \quad \Pi_\beta=\{X_n,\, n\in\mathbb{N}^*\}$

On sait que pour $f: x\mapsto\frac{x^{1-\beta}}{1-\beta}$ $\quad f(\Pi_\beta)\sim$ Pois(ℓ_1)

En plus, d'après (2), $\beta>1 \to f$ est $\downarrow$. $\quad\Psi: x\mapsto(f(x),0)$

Par le thm. pour les nuages sur $\mathbb{R}_+\times\{0\}$, $\exists(\mathcal{E}_n)$ i.i.d. $\mathcal{E}xp(1)$

t.q. $\Psi(\Pi_\beta)\sim$ Pois$(\ell_1\otimes\delta_0)$, $\exists\, T_n=\mathcal{E}_1+\dots+\mathcal{E}_n$, $T_{n+1}>T_n$ p.s.

$(\xi_\beta\circ\Psi^{-1}=\ell_1\otimes\delta_0$ diffuse. $\delta_0(\{0\})=1)$

$$T_n = \frac{X_n^{1-\beta}}{\beta-1} \to \underline{X_n = \left((\beta-1)T_n\right)^{\frac{1}{1-\beta}}}$$

$f\downarrow \to f^{-1}\downarrow \to X_n>X_{n+1}$ p.s.

En plus, $T_n\to+\infty$ p.s. $\to T_n^{\frac{1}{1-\beta}}\to 0$ p.s. $\to X_n\to 0$ p.s.

(7) Trouver $\mathbb{P}(X_n \leq x)$, densité et m.q $\exists\, c, C$: $\lim\limits_{n\to\infty} n^c X_n = C$ p.s.

$$\mathbb{P}(X_n \leq x) = \mathbb{P}\left(T_n \geq \frac{1}{\beta-1} x^{1-\beta}\right) = 1 - \rho\left(\frac{x^{1-\beta}}{\beta-1}\right)$$

↑ CDF de Erlang(n)

Densité : $$\frac{d}{dx}\mathbb{P}(X_n \leq x) = -\rho'\left(\frac{x^{1-\beta}}{\beta-1}\right)\frac{1-\beta}{\beta-1}x^{-\beta} = x^{-\beta}\rho'\left(\frac{x^{1-\beta}}{\beta-1}\right) =$$

• $\left\{\rho'(y) = \frac{1}{(n-1)!}e^{-y}y^{n-1}\right\} = \frac{1}{(n-1)!}x^{-\beta}e^{-\frac{x^{1-\beta}}{\beta-1}} \cdot \frac{x^{(1-\beta)(n-1)}}{(\beta-1)^{n-1}} =$

$$= \frac{1}{(n-1)!}e^{-\frac{x^{1-\beta}}{\beta-1}} \cdot \frac{x^{(1-\beta)n-1}}{(\beta-1)^{n-1}}$$

$$X_n = \left[(\beta-1)T_n\right]^{\frac{1}{1-\beta}}$$

$$n^{-\frac{1}{1-\beta}}X_n = \Big[(\beta-1)\underbrace{\frac{T_n}{n}}_{\to 1}\Big]^{\frac{1}{1-\beta}} \to (\beta-1)^{1/1-\beta}$$

(*) Fonction de répartition de la loi Erlang(n) :

$$F(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x t^{n-1}e^{-t}\,dt = -\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x} + \frac{1}{(n-2)!}\int_0^x t^{n-2}e^{-t}\,dt =$$

$n > 2$

$$= -\frac{1}{(n-1)!}x^{n-1}e^{-x} - \dots - \frac{1}{1!}xe^{-x} + \underbrace{\int_0^x e^{-t}\,dt}_{1-e^{-x}} = 1 - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{x^k}{k!}e^{-x}$$

N°4.1. $U_n \sim \vartheta$ $\quad \Pi = \{(T_n, U_n)\}$ $\quad E_n \sim \mathcal{E}xp(\theta)$

$N_t = N_{[0,t]\times\mathbb{R}}(\Pi)$ $\quad Z_t = \sum\limits_{1\leq n\leq N_t} U_n - ct$

(1) $Z_t = \sum\limits_{1\leq n\leq N_t} U_n - ct = \{(T_n, U_n) \in [0,t]\times\mathbb{R} \Leftrightarrow T_n \leq t \Leftrightarrow N_t \geq n \quad (T_1 < T_2 < \dots)\} =$

$$= \sum_{(S,U)\in\Pi} \mathbb{1}_{[0,t]}(S)\cdot U_n - ct$$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda Z_t}\right] = e^{-\lambda ct}\exp\left\{-\lambda\int_0^\infty \theta\, ds \int \mathbb{1}_{[0,t]}(s)\, u\, \vartheta(du)\right\} = e^{-\lambda ct - \lambda\theta m_1 t}$$

où $m_k = \int u^k \vartheta(du)$

(2) $\int |z|\nu(dz) < \infty$. Z_t est intégrable ssi $\sum_{1\le n\le N_t} U_n$ est intégrable

c'est le cas par la formule de compensation

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{(s,U)\in\Pi} \mathbb{1}_{[0,t]}(s)U_n\Big] = \int_0^t \theta\, ds \underbrace{\int x\nu(dx)}_{<\infty} = m_1\theta t < \infty$$

$$\mathbb{E}[Z_t] = (m_1\theta - c)t$$

$\exists a$ t.q. $Z_t - at$ est une $\mathcal{F}_t$-mart.

Formule de compensation: $M_t = \sum_{1\le n\le N_t} U_n - m_1\theta t = Z_t - (m_1\theta - c)t$

est une $\mathcal{F}_t$-martingale $\Rightarrow$ $a = m_1\cdot\theta - c$

(3) $\int |z|^2\nu(dz) < \infty$

$$\mathbb{E}[Z_t^2] = \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{1\le n\le N_t} U_n\Big)^2 \underbrace{- 2ct\sum_{1\le n\le N_t} U_n + (ct)^2}_{\text{intégrable}}\Big]$$

Par la formule de compensation,

$$\mathbb{E}[M_t^2] = \int_0^t \theta\, ds \int z^2\nu(dz) = m_2\theta t < \infty$$

$$\mathbb{E}\big[(\sum U_n)^2 - 2at\sum U_n + (at)^2\big] < \infty \to \mathbb{E}\, Z_t^2 < \infty$$

$$M_t = Z_t - at$$

$$\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}[Z_t^2] - 2at\,\underbrace{\mathbb{E}[Z_t]}_{at} + a^2t^2 = m_2\theta t$$

$$\mathbb{E}[Z_t^2] = a^2t^2 + m_2\theta t = (m_1\theta - c)^2 t^2 + m_2\theta t$$

M.q. $\exists b$: $(M_t^2 - bt)$ est une martingale*

Par le calcul précédent, $b = m_2\theta$

* $$\mathbb{E}[(M_t - M_s)^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - 2M_tM_s - M_s^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_t^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s]$$

$$\quad\quad = \mathbb{E}[\tilde{M}_{t-s}^2]$$

$\tilde{\Pi} = \Delta_s(\Pi \cap]s,\infty[\times\mathbb{R}) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ nuage Pois. sur $\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}$ de $\hat{m}$

$\Delta_s : (t,x) \mapsto (t-s,x)$ intensité.

On peut appliquer le calcule de (2) pour

Obtenir $\mathbb{E}[\tilde{M}_{1-s}^2] = m_2 \vartheta(t-s) = \mathbb{E}[M_1^2 - M_s^2 | \mathcal{F}_s]$

$$\mathbb{E}[M_1^2 - m_2 \vartheta t | \mathcal{F}_s] = M_s^2 - m_2 \vartheta s$$

N4.2. $\begin{cases} dS_t = \mu S_{t-} dt + S_{t-} dZ_t \\ S_0 = s_0 \end{cases}$ $\quad Z_t = \underbrace{\sum_{1 \leq n \leq N_t} U_n}_{Y_t} - ct$

$= (\mu - c) S_{t-} dt + S_{t-} dY_t$

$$\begin{cases} dL_t = -\rho L_{t-} dZ_t \\ L_0 = 1 \end{cases}$$

(1) Entre T_{n-1} et T_n $\quad S_t = S_{T_{n-1}} e^{(\mu - c)(t - T_{n-1})}$

En T_n : $\Delta S_{T_n} = S_{T_{n-}} \cdot U_n \rightarrow S_{T_n} = S_{T_{n-}}(1 + U_n)$

$\rightarrow \forall t \in [0, T]$ $\quad S_t = S_{t_0} e^{(\mu - c)(t - t_0)} \prod_{N_{t_0} < n \leq N_t} (1 + U_n)$

on compte que les sauts entre t_0 et t.

$$\tilde{S}_t = \tilde{S}_{t_0} e^{(\mu - c - r)(t - t_0)} \prod_{N_{t_0} < n \leq N_t} (1 + U_n)$$

Pour L: $\Delta L_{T_n} = L_{T_n} - L_{T_{n-}} = -\rho L_{T_{n-}} \cdot U_n \rightarrow L_{T_n} = L_{T_{n-}}(1 - \rho U_n)$

Donc $\quad L_t = L_{t_0} \prod_{N_{t_0} < n \leq N_t} (1 - \rho U_n)$

$$\mathbb{E}[\tilde{S}_{t+t_0} | \mathcal{F}_{t_0}] = \tilde{S}_{t_0} e^{(\mu - c)t} \cdot \mathbb{E}\Big[\prod_{N_{t_0} < n \leq N_1} (1 + U_n)\Big] = \tilde{S}_{t_0} e^{(\mu + \vartheta m_1 - c)t}$$

$$\mathbb{E}\Big[\prod (1+U_n)\Big] = e^{\vartheta \cdot t \cdot \underbrace{\int u \nu(du)}_{m_1}}$$

$$\mathbb{E}[L_{t+t_0} | \mathcal{F}_{t_0}] = L_{t_0} e^{-\rho \vartheta m_1 t}$$

(2) Equa-dif pour $\tilde{S}_t$: $\quad \underline{= \tilde{S}_{t-} dt}$

$$d\tilde{S}_t = d[e^{-rt} S_t] = -r \tilde{S}_t dt + \mu \tilde{S}_{t-} dt + \tilde{S}_{t-} dZ_t = (\mu - r) \tilde{S}_{t-} dt + \tilde{S}_{t-} dZ_t$$

On peut trouver la solution comme dans (1) et vérifier qu'elle est égale à $\tilde{S}$.

(3) $L_t^* = \frac{L_t}{\mathbb{E}[L_t]}$ une $(\mathcal{F}_t)$-mart. stt positive.

$$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{P}} = L_T^*$$

M.q. $\mathbb{Q}_T \sim \mathbb{P}$ ↙ comme dans les annales 2023

D'après (1), $\mathbb{E}[L_t] = L_0 e^{-\rho\theta m_1 t}$ et $\mathbb{E}[L_{t_0+t} | \mathcal{F}_{t_0}] = L_{t_0}\cdot e^{-\rho\theta m_1 t} =$

$$= L_{t_0}\cdot \frac{\mathbb{E}L_{t+t_0}}{\mathbb{E}L_{t_0}} \to \mathbb{E}\left[\frac{L_{t_0+t}}{\mathbb{E}[L_{t_0+t}]}\middle|\mathcal{F}_{t_0}\right] = \frac{L_{t_0}}{\mathbb{E}[L_{t_0}]} \to L_t^* \text{ est une } (\mathcal{F}_t)\text{-mart.}$$

(4) $f : [0,T]\times]-1,1[\to \mathbb{R}$ mesurable $\Pi_T = \Pi \cap ([0,T]\times]-1,1[)$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}[e^{-S_f(\Pi_T)}] = \mathbb{E}[L_T^* e^{-S_f(\Pi_T)}] = \mathbb{E}\Big[\prod_{1\le n\le N_T}(1-\rho U_n)\, e^{-\sum f(T_n,U_n)}\cdot e^{\rho\theta m_1 T}\Big]$$

$$= \mathbb{E}\Big[e^{-\sum_{(T_n,X_n)\in\Pi_T}[\underbrace{f(T_n,X_n)-\log(1-\rho U_n)}_{g(T_n,U_n)}]}\Big]\cdot e^{\rho\theta m_1 T} = \{\text{formule expon.}\} =$$

$$= \exp\Big\{-\int_0^T \theta\, ds\int_{-1}^1 (1-e^{-g(s,z)})\nu(dz) + \rho\theta m_1 T\Big\} =$$

$$\exp\Big\{-\int_0^T \theta\, ds\int_{-1}^1 (1-(1-\rho z)e^{-f(s,z)})\nu(dz) - \int_0^T \theta\, ds\int_{-1}^1 -\rho z\,\nu(dz)\Big\} =$$

$$= \exp\Big\{-\int_0^T \theta(1-\rho m_1)\,ds\int_{-1}^1 (1-e^{-f(s,z)})\,\frac{(1-\rho z)\nu(dz)}{1-\rho m_1}\Big\}$$

donc l'intensité est $\theta\,\ell\otimes\nu^*$ où $\nu^*(dz) = \frac{(1-\rho z)\nu(dz)}{1-\rho m_1}$, $\theta^* = (1-\rho m_1)\theta$

(5) Pour quels ρ $(\tilde{S}_t)$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale sous $\mathbb{Q}_T$?

Il est nécessaire que

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}[\tilde{S}_t] = \tilde{S}_0 \quad \forall t \le T$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_T}[\tilde{S}_t] = \tilde{S}_0\, e^{(\mu-c-r)t}\,\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\Big[\prod_{1\le n\le N_t}(1+U_n)\Big]}_{} =$$

$$\exp\Big\{-\int_0^t \theta\, ds\int_{-1}^1 (\underbrace{1-(1+z)}_{-z})(1-\rho z)\nu(dz)\Big\} =$$

$$= \exp\{\theta t(m_1-\rho m_2)\}$$

$$= \tilde{S}_0 \exp\{(\mu-c-r+\theta m_1-\rho\theta m_2)t\}$$

Donc $\rho = \frac{u-c-r}{\theta m_2} + \frac{m_1}{m_2}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[X_T|\mathcal{F}_t] = \frac{\mathbb{E}\Big[X_T \underbrace{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_T}_{L_T^*} \Big| \mathcal{F}_t\Big]}{\underbrace{\mathbb{E}\Big[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_T \Big| \mathcal{F}_t\Big]}_{L_t^*}} = \mathbb{E}\Big[X_T \frac{L_T^*}{L_t^*}\Big|\mathcal{F}_t\Big]$$

on utilise ça pour montrer la martingalité rigoureusement, le calcul est le même.

(6) $\varphi :]-1,1[\to]-1,\infty[$ mesurable

$$\Lambda_t = e^{-qt}\prod_{1\le n\le N_t}(1+\varphi(U_n)) \quad q \text{ t.q. } \Lambda_t \text{ est } (\mathcal{F}_t)\text{-martingale?}$$

Condition nécessaire:

$$\mathbb{E}\Lambda_t = \Lambda_0 = 1$$

$$\mathbb{E}\Lambda_t = e^{-qt}\exp\Big\{-\int_0^t \theta\, ds \int_{-1}^1 -\varphi(\zeta)\nu(d\zeta)\Big\} = e^{-qt+\theta\mu_\varphi t}$$

où $\mu_\varphi = \int \varphi(\zeta)\nu(d\zeta)$

Donc $q = \theta\mu_\varphi$

(7) $\frac{d\mathbb{Q}'_T}{d\mathbb{P}} = \Lambda_T$ $\quad \mathbb{Q}'_T \sim \mathbb{P}$ comme toujours

(8) Sous $\mathbb{Q}'_T$ $\quad \Pi_T \sim \mathrm{Pois}(\theta'\ell(\cdot\cap[0,T])\otimes\nu'(d\zeta))$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}'_T}\Big[e^{-N_f(\Pi_T)}\Big] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[e^{-\theta\mu_\varphi T} e^{-\sum_{1\le n\le N_t}(f(T_n,U_n) - \log(1+\varphi(U_n)))}\Big] =$$

$$= \exp\Big\{-\underbrace{\theta\mu_\varphi T}_{-\int_0^T \theta ds \int \varphi(u)\nu(du)} - \int_0^T \theta\, ds \int \big(1-(1+\varphi(u))e^{-f(s,u)}\big)\nu(du)\Big\} =$$

$\nu'(du) = \frac{(1+\varphi(u))\nu(du)}{1+\mu_\varphi}$, $\theta' = \theta(1+\mu_\varphi)$

$$= \exp\Big\{\int_0^T \theta(1+\mu_\varphi)\, ds \int \big(1-e^{-f(s,u)}\big)\underbrace{\frac{(1+\varphi(u))\nu(du)}{1+\mu_\varphi}}_{\nu'(du)}$$

← pour avoir une proba

(9) Sous quelles conditions sur φ $\tilde{S}$ est $(\mathcal{F}_t)$-mart sous $\mathbb{Q}'_T$

Condition nécessaire :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}'_T}[\tilde{S}_t] = \tilde{S}_0 \quad \forall t$$

$$\tilde{S}_0 e^{(\mu-c-r)t}\, \mathbb{E}_i^{\mathbb{Q}'_T}\Big[\prod_{1\le n\le N_t}(1+U_n)\Big] = \tilde{S}_0 \exp\{(\mu-c-r)t\} \exp\{-\underbrace{\int_0^t \theta ds \int -\zeta(1+\varphi(\zeta))\nu(d\zeta)}_{\theta t(m_1 + m_{1,\varphi})}\}$$

où $m_{1,\varphi} = \int \zeta\varphi(\zeta)\nu(d\zeta)$

$$\mu - c - r + \theta m_1 + \theta m_{1,\varphi} = 0$$

$$m_{1,\varphi} = \frac{r+c-\mu}{\theta} - m_1$$

(10) $\nu(d\zeta) = \frac{1}{2}\delta_{-\frac{1}{2}}(d\zeta) + \frac{1}{2}\delta_{1/2}(d\zeta)$, $\mu = c$

M.q. $\exists$ plusieurs probas $\sim \mathbb{P}$ t.q. $\tilde{S}$ est une $(\mathcal{F}_t)$-mart sous chaque.

On a déjà trouvé la mesure $\mathbb{Q}'_T \sim \mathbb{P}$ satisfait cette condition. On peut varier φ pour trouver des mesures différentes :

$$\Lambda_t = e^{-\theta m_\varphi \cdot t} \prod_{1\le n\le N_t}(1+\varphi(U_n))$$

Il faut que $\int \zeta\varphi(\zeta)\nu(d\zeta) = \frac{r}{\theta} - m_1 = \frac{r}{\theta}$

$$m_1 = \int \zeta\nu(d\zeta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = 0$$

$$\int \zeta\varphi(\zeta)\nu(d\zeta) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\varphi\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)\varphi\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\left(\varphi\left(\frac{1}{2}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{r}{\theta}$$

$\varphi\left(\frac{1}{2}\right) = \varphi\left(-\frac{1}{2}\right) + 4\frac{r}{\theta}$ Il faut que $\varphi > -1$

$\varphi_y\left(-\frac{1}{2}\right) = y$ $\varphi_y\left(\frac{1}{2}\right) = y + 4\frac{r}{\theta}$ satisfont les conditions $\forall y > -1 \to$

$\to$ on construit $\Lambda_{y,t} = e^{-\theta\underbrace{(y + 2\frac{r}{\theta})}_{m_{\varphi_y}}t} \cdot \prod_{1\le n\le N_t}(1+\varphi_y(U_n))$

et $\frac{d\mathbb{Q}'_{y,T}}{d\mathbb{P}} = \Lambda_{y,T} \to$ nombre infini de mesures paramétrisées par $y > -1$ t.q. $\tilde{S}$ est $\mathcal{F}_t$-mart sous $\tilde{\mathbb{Q}}_{y,T}$ $\forall y > -1$.