Mathématiques financières 2

VI - Calcul obligataire à taux fixe.

Il diffère des emprunts indivis car, ici, l'emprunteur (une grande entreprise, l'État...) fait appel à de multiples prêteurs (par exemple via un marché boursier) en émettant des produits financiers de dettes appelés obligations.

VI - 1 - Principales caractéristiques d'un emprunt obligataire.

* Montant global emprunté 100 M€ ← exemple (on parle aussi de « principal »)

* Durée de l'emprunt (souvent > 5 à 7 ans) (des emprunts d'États peuvent être très long)

* Nombres de titres financiers émis qui portent le nom d'obligations (bond en anglais).

  N = 100 000 titres. Les 100 M€ sont divisés en N titres de valeur unitaire $\frac{10^8}{10^5} = 1000$ € qui sont proposés individuellement à l'émission sur le marché primaire.

* Valeur nominale (ou faciale) $F = \frac{\text{Montant global}}{N} = 1000$ €

* Taux nominal (ou facial) k qui permet de calculer les intérêts (annuels ou + fréquents, par exemple semestriels ou trimestriels) qui seront versés au détenteur d'un titre.

  $k = 5\%$ par an soit $5\% \times 1000 = 50$ € par titre et par an.

* Coupon = montant de l'intérêt périodique. coupon annuel de 50 €

* date de souscription = date limite à laquelle les prêteurs (investisseurs) se déclarent intéressés par un certain nombre de titres (ils sont prêts à prêter un multiple de F)

  ⚠ on doit prêter un nb entier de titres.

On supposera ces dates confondues dans le reste du cours.

* date de règlement = date à laquelle les prêteurs versent effectivement l'argent à l'emprunteur

* date de jouissance = date à partir de laquelle les intérêts sont calculés

* Prix d'émission d'un titre : PE (en général ≤ F). PE est exprimé en % de F.
  Si PE = F (= 100 %), on dit alors que l'emprunt est émis au pair.

Si $PE = 99\%$, le prix d'émission d'1 titre est 990 € réglé à la date de règlement

⚠ Le coupon n'est pas modifié, il reste égal à $k \times F$

$\underbrace{\frac{50}{990}}$ = 5.05 % et $k = 5\%$

ne concerne pas le prêteur initial qui apporte l'argent à l'emprunteur

* <u>Le(s) prix de remboursement</u> PR_t à la date t ($t \leq T$ durée de l'emprunt, en notant 0 la date d'émission)
  PR_t s'exprime en % de F (en général $\geq F$)

  Si $PR_t = F$, le remboursement est dit au pair.
  Si $PR_t = 102\%$, le titre sera remboursé à 1200€.

  Si la seule date de remboursement est T, le remboursement est dit "in fine"

* On définit (contractuellement) le <u>nombre de titres n_t qui sera remboursé à la date t</u> (au prix PR_t)
  Les titres remboursés à la date t (au prix PR_t). Les titres remboursés le sont par tirage au sort à la date de remboursement.

  Par exemple, remboursement en 2 tranches égales de $\frac{100\,000}{2} = 500\,000$ titres aux deux dernières dates.

<u>Remarque</u> : Condition de remboursement de l'emprunt obligataire $N = \sum_{t=1}^{T} n_t$ (n_t entier)
i.e on a remboursé (amorti) l'emprunt obligataire lorsque tous les titres sont amortis.

Le remboursement est en général différé i.e on ne paye pas que les coupons pendant plusieurs échéances avant de commencer à rembourser les titres.

VI - 2 - Les principaux risques associés à une émission obligataire

* <u>Risque de crédit / Risque de défaut</u> : l'emprunteur n'assume pas tout (faillite → liquidation) ou partie de ses engagements financiers (intérêts et/ou remboursement)

<u>Remarque</u> : Dans le cas où l'émetteur est un Etat, on parle de debt sans risque comme si l'Etat ne pouvait pas faire défaut mais en réalité, il y a toujours un risque de défaut (politique, financier) qui est qualifié de risque souverain.
Par exemple : Grèce, Argentine, Emprunts russes (1917).

Les entreprises / Etats sont, ou non, notés (rating) pour rendre compte de leur solidité financière (aujourd'hui et évolution future).

→ notation des agences indépendantes
- → Standard and Poors
- → Moodys
- → Fitch

Les émissions obligataires (dettes) ont des rangs qui peuvent définir les priorités à être indemnisé en cas de faillite. Certains créanciers peuvent être prioritaires sur d'autres, l'État arrivant en premier.

Dettes SENIOR (indemnisé si faillite)
Dettes JUNIOR

En l'absence de priorités, les créanciers sont dit chirographaires.

* Risque de taux : risque de variation de la valeur de l'obligation dû au mouvement des taux d'intérêts (paramètres macro-économiques, santé financière de l'entreprise (émetteur)...)
  Variation à la hausse ou à la baisse. Impact pour le marché secondaire.

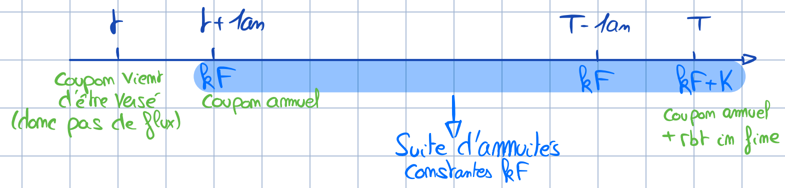
* Risque de liquidité : Risque de ne pas pouvoir revendre ses titres car il n'y a pas d'acheteur

* Pleins d'autres risques en fonction du produit financier :
  - risque législatif
  - risque de change
  - ...

VI - 3 - Illustration du risque de taux

Cas d'une obligation échéant à la date T, percevant un coupon annuel $k \times F$ remboursable in fine au prix K.

Considérons, t, une date d'anniversaire (date de versement du coupon et éventuellement de remboursement)



La valeur de l'obligation à la date t s'obtient en actualisant les flux futurs au "taux de marché" r.
Schématiquement r représente le taux auquel l'émetteur pourrait se financer en t pour une durée d'emprunt (= maturité) T-t.
(maturité : durée de vie résiduelle de l'emprunt.)

r prend en compte la santé financière de l'émetteur en t, le(s) niveau(x) des taux d'intérêts globaux (y compris l'inflation) etc...

* r est supposé constant dans le temps pour ce chapitre.

Valeur de l'obligation en t, $B_t = kF \times \dfrac{1-(1+r)^{-(T-t)}}{r} + \dfrac{K}{(1+r)^{T-t}}$

Remarque : Si $r = k$ et $K = F$ (remboursement in fine au pair), alors $B_t = F$.

Application numérique : émission au pair. rbt in fine au pair

$F = 1000$ € $k = 6\%$ $T = 10$ ans

a) Calcul de B_0 pour $r = 7\%, 6\%, 5\%$ (à l'émission)
b) Calcul de B_6 pour $r = 7\%, 6\%, 5\%$

a) * $r = 7\%$

$$B_0 = 0,06 \times 1000 \times \frac{1-1,07^{-10}}{0,07} + \frac{1000}{1,07^{10}} = 922 €$$

* $r = 6\%$ on a $r = k \Rightarrow B_0 = F = 1000$ i.e le TRI à l'émission est de 6%
(montant de l'investissement = 1000 € = somme actualisée des CF futurs).

* $r = 5\%$

immédiatement après l'émission le taux de rentabilité baisse de 1%

$$B_0 = 0,06 \times 1000 \times \frac{1-1,05^{-10}}{0,05} + \frac{1000}{1,05^{10}} = 1077 €$$

b) 4 coupon kF + rbt à 1000 €.

* $r = 7\%$

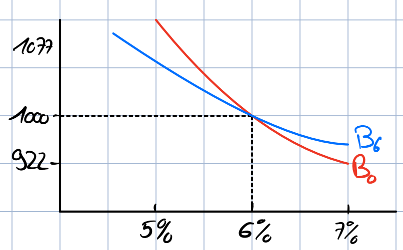
$$B_6 = 0,06 \times 1000 \times \frac{1-1,07^{-4}}{0,07} + \frac{1000}{1,07^{4}} = 966 €$$

* $r = 6\%$ $r = k$ donc $B_6 = F = 1000$

* $r = 5\%$

$$B_6 = 0,06 \times 1000 \times \frac{1-1,05^{-4}}{0,05} + \frac{1000}{1,05^{4}} = 1035 €$$

Quand les taux d'actualisation augmentent les B_t diminuent.



VI - 4 - Première approche du risque de taux

En cas de hausse des taux, la variation relative de la valeur des obligations s'écrit :

$$\frac{B_{r+\Delta r} - B_r}{B_r} \text{ en } \%$$

$B_{r+\Delta r}$ = Valeur de l'obligation au taux de marché $r + \Delta r$ pour une variation (absolue en %) Δr des taux.

On s'intéresse à $\dfrac{B_{r+\Delta r}-B_r}{\frac{B_r}{\Delta r}} < 0$ car $B_{r+\Delta r} < B_r$

Avec l'exemple numérique ($\Delta r = 1\%$) entre 6% et 7% (r, $r+\Delta r$)

en 0 : $\dfrac{B_{0;7\%}-B_{0;6\%}}{\frac{B_{0;6\%}}{1\%}} = \dfrac{932-1000}{\frac{1000}{1\%}} = -7{,}8$

en 6 : $\dfrac{B_{6;7\%}-B_{6;6\%}}{\frac{B_{6;6\%}}{1\%}} = \dfrac{966-1000}{\frac{1000}{1\%}} = -3{,}4$

Symétriquement, en cas de baisse des taux $-\Delta r$, on calcule $\dfrac{B_{r-\Delta r}-B_r}{\frac{B_r}{-\Delta r}} < 0$ et sans unité

en 0 cela vaut $-7{,}7$
et en 6, $-3{,}5$.

Pour étudier la variation de valeur de l'obligation en fonction du taux (d'actualisation) et pour comparer ces variations entre obligations, on s'intéresse à

$$\left|\frac{\frac{\Delta B}{B}}{\Delta r}\right|$$

rappelle le concept d'élasticité

on va s'intéresser à la limite quand $\Delta r \to 0$

On définit la sensibilité (ou duration modifiée) par : $S_{r_{marché}} = -\dfrac{\partial B}{\partial r} \times \dfrac{1}{B}$

Calcul en 0 et 6 avec $r_{marché} = 6\%$

* en 0 : $B_{r_{marché}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{10} \frac{60}{(1+r)^i} + \frac{1000}{(1+r)^{10}} \Rightarrow B_{6\%} = 1000$

$$-\frac{\partial B_r}{\partial r}\Big|_{r_{marché}} = \sum_{i=1}^{10} \frac{60 \times i}{(1+r)^{i+1}} + \frac{10 \times 1000}{(1+r)^{11}} = 7360$$

$$S = \frac{7360}{1000} = 7{,}36$$

* en 6 : $B_{r_{marché}} = \displaystyle\sum_{i=1}^{10-6} \frac{60}{(1+r)^i} + \frac{1000}{(1+r)^{10-6}} \Rightarrow B_{6\%} = 1000$

$$-\frac{\partial B_r}{\partial r}\Big|_{r_{marché}} = \sum_{i=1}^{10-4} \frac{60 \times i}{(1+r)^{1+i}} + \frac{(10-4) \times 1000}{(1+r)^{10-4+1}} = 3465$$

$$S = \frac{3465}{1000} = 3{,}465$$

De manière générale, si on note F_t le flux versé à la date t par une obligation (Coupon et/ou versement), on peut écrire en 0 (aujourd'hui) la valeur de l'obligation $B_0 = \sum_t \frac{F_t}{(1+r)^t}$

$$S = \frac{1}{B_0} \times \sum_t \frac{t F_t}{(1+r)^{t+1}} = \frac{1}{\sum_t \frac{F_t}{(1+r)^t}} \times \sum_t \frac{t F_t}{(1+r)^{t+1}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1+r} \, \frac{\sum_t t \frac{F_t}{(1+r)^t}}{\sum_t \frac{F_t}{(1+r)^t}}$$

$$\Rightarrow S = \frac{1}{1+r} \frac{\sum_t t\,\omega_t}{\sum_t \omega_t} \qquad \text{avec } \omega_t = \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

Donc $S = \frac{1}{1+r} D$ où D est la Duration qui a comme unité l'année.

en 0 : $D = 1{,}06 \times 7{,}36 = 7{,}8$ ans
en 6 : $D = 1{,}06 \times 3{,}465 = 3{,}67$ ans

D est toujours inférieur à la maturité de l'obligat° ou égale.

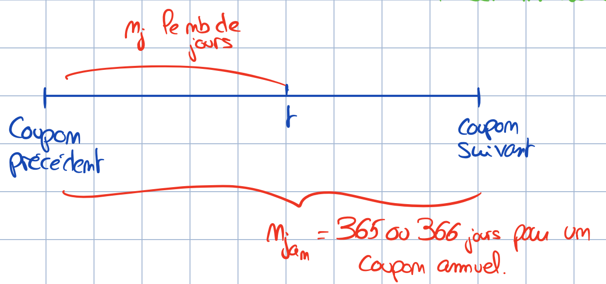
VI - 5 - Éléments de Cotation

On distingue :

* le coupon couru
* le cours (pied de coupon) = Valeur de l'obligat° - Coupon couru

Le Coupon Couru$_t$ = $k \times a$ où a représente la durée écoulée depuis le versement du coupon précédent, calculée prorata temporis

$\hookrightarrow a = \frac{n_j}{n_{jan}}$



Les différentes normes de calcul peuvent être lues dans les documents du CNO (Comité de Normalisat° Obligataire)
→ cno.france.org

VII - Duration

VII - Actifs à taux fixe (typiquement les obligations à taux fixe).

* Les flux de trésorerie sont supposés non aléatoires.

* On suppose que les flux futurs F_{t_k} $k \in [1, T]$ associés à l'échéancier sont positifs ou nuls et que au moins un des flux est non nul.
(i.e au moins un zéro-coupon dans le cas des obligations).

* On note 0 ou t_0 la date courante.

* Notons P le prix (la valeur) de l'actif à la date courante. Le flux associé est alors $-P$.

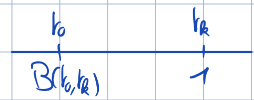
On suppose que l'on peut acheter ou vendre à la date courante des zéro coupons de maturités t_k $k \in [1, T]$
c'est-à-dire des obligations dont l'unique flux est versé à l'échéance t_k.

On peut alors synthétiser (ou dupliquer) l'échéancier $(F_{t_k})_{k\in[1;T]}$ de manière statique à partir de ces zéro-coupons.

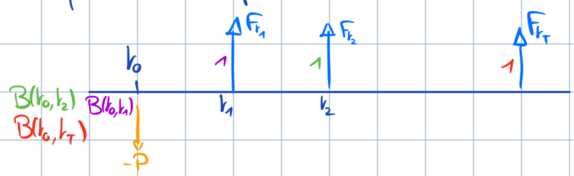
On dit alors que le marché est complet. On est sous l'hypothèse d'AOA. Cela signifie ici qu'il est équivalent financièrement de considérer l'échéancier d'origine ou l'échéancier dupliqué.

Notons $B(t_0, t_k)$ le prix à la date t_0 d'un zéro-coupon remboursement d'une manière certaine d'1 unité monétaire à la date t_k.

(ZC élémentaire car payant 1)



Le prix de duplication de l'échéancier est donné par $P = \sum_{k=1}^{T} F_{t_k} B(t_0, t_k)$



$P = \sum_k$ valeur actualisée de F_{t_k} $\qquad F_{t_k} \times B(t_0, t_k) = F_{t_k} \times$ (Valeur actualisée de 1 payée en t_k)

$P = \sum_k F_{t_k} B(t_0, t_k)$ ← $F_{t_k} B(t_0,t_k) =$ Valeur actualisée de F_{t_k}

On peut voir que $B(t_0, t_k)$ joue le rôle d'un facteur d'actualisation.

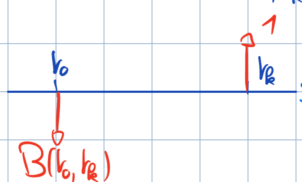
Le TRI discret r et le TRI continu noté y vérifient :

t_0 date courante $\qquad P = \sum_{k=1}^{T} \frac{F_{t_k}}{(1+r)^{t_k - t_0}} = \sum_{k=1}^{T} F_{t_k} \times e^{-y(t_k - t_0)}$ $\qquad$ On rappelle que $y = \ln(1+r)$

$$P = \sum_{k=1}^{T} \frac{F_{t_k}}{(1+r)^{t_k-t_0}} \overset{AOA}{=} \sum_{k=1}^{T} F_{t_k} B(t_0, t_k)$$

On considère les taux $y_{t_0,t_k} = \frac{-1}{t_k - t_0} \ln(B(t_0,t_k))$ le taux actuariel continu à la date t_0 du zéro-coupon élémentaire ($B(t_0,t_k)$ payant 1 en t_k) d'échéance t_k. Cette écriture est équivalente à $B(t_0,t_k) = \underbrace{e^{-y_{t_0,t_k}(t_k - t_0)}}$

actualisation en temps continu de 1 pour la durée $t_0 - t_k$



→ temps continu

→ temps discret $\quad B(t_0,t_k) = \frac{1}{(1+r_{t_0,t_k})^{t_k - t_0}}$ $\quad$ en notant r_{t_0,t_k} l'équivalent discret de $y_{t_0,t_k} = \ln(1 + r_{t_0,t_k})$