ISFA- M1
STATISTIQUE INFRENTIELLE

Fiche de TD N^o 5 : TESTS

Exercice 1.(Test d'quilibrage d'une pice de monnaie)

On dcide de tester l'hypothse qu'une pice de monnaie est parfaitement quilibre, avec la rgle de dcision suivante : si le nombre de "face" obtenu dans un chantillon de 100 lancers est compris entre 40 et 60, l'hypothse de perfection est admise. Sinon, on dira que la pice est biaise.

1. Formuler les hypothses H_0 contre H_1 tester. Prciser la rgion de rejet du test.
2. Calculer l'erreur de premire espce α (niveau du test). On pourra faire un calcul approch en utilisant le TCL et la table de statistique de la loi normale an annexe.
3. Calculer la puissance du test $\beta(0.7)$ dans le cas o la probabilit d'obtenir un "face" est $p = 0.7$.
4. Donner l'allure du graphe de la puissance en fonction de p.
5. On observe 57 faces et accepte donc H_0. Calculer la p-value et vrifier qu'elle est suprieure au niveau du test calcul la question 2.

Exercice 2. (Test de Neyman-Pearson)

Soit $X = (X_1, ..., X_n)$ un n-chantillon de loi exponentielle de paramtre $\lambda > 0$. On rappelle que $2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2(2n))$.

1. On dsire tester l'hypothse $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda = \lambda_1$, avec $0 < \lambda_0 < \lambda_1$. En utilisant le lemme de Neyman-Pearson, construire un test uniformment plus puissant (u.p.p) de niveau $\alpha = 0.05$.
2. On veut maintenant tester l'hypothse $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda > \lambda_0$. Trouver une statistique exhaustive T. Calculer la fonction rapport de vraisemblance et montrer que c'est une fonction strictement monotone par rapport T. En dduire un test u.p.p de niveau $\alpha = 0.05$.
3. Établir un test de niveau $\alpha = 0.05$ pour tester $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda \neq \lambda_0$.

Fonction de répartition de la loi normale standard

$$\Phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-x^2/2}\, dx$$

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999

Exercice 1 : (Test d'équilibrage d'une pièce de monnaie).

Rappel : $X_1, \dots, X_n$ iid tq $X_i \sim \mathbb{P}_\theta$

Définition : On veut choisir entre 2 hypothèses sur θ.

Hypothèse privilégiée i.e celle qu'on pense ou veut être la vraie. $\longrightarrow$ $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contre $H_1 : \theta \in \Theta_1$

Un test est une aide à la décision pour choisir entre H_0 et H_1

C'est une fonction $\phi : \mathbb{R}^n \longrightarrow \{0;1\}$

(1 : on accepte H_1 ; 0 : on accepte H_0)

La zone de rejet est $R = \{\phi(X_1, \dots, X_n) = 1\}$

Si on a déjà une zone de rejet R alors $\phi = \mathbb{1}_R$

Le niveau ou sensibilité du test est :

on le choisit et à partir de α, on détermine la région R. $\longrightarrow$ $\alpha = \underbrace{\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_n) \in R)}$

$\approx$ la probabilité de rejeter H_0 alors que H_0 est vraie.

La puissance du test est la fonction $\beta : \Theta_1 \longrightarrow [0,1]$

$\theta \longmapsto \underbrace{\mathbb{P}_\theta((X_1, \dots, X_n) \in R)}$

Proba de rejeter H_0 i.e accepter H_1 alors que $\theta \in H_1$ est vraie.

Test le plus puissant : Si ϕ_1 et ϕ_2 sont deux tests et $\forall \theta \in \Theta_1$,

$\beta_1(\theta) \geq \beta_2(\theta)$ alors ϕ_1 est uniformément plus puissant (que ϕ_2).

On veut savoir si une pièce est équilibrée i.e $\mathbb{P}(\text{pile}) = \mathbb{P}(\text{face}) = \frac{1}{2}$.

On lance la pièce 100 fois et on regarde le nombre de "face" obtenu puis on détermine si la pièce est équilibrée i.e si le nombre de face $\in [40;60]$.

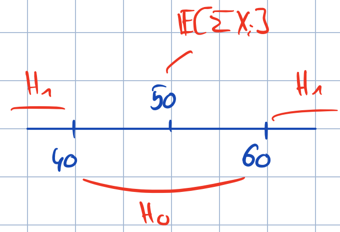
1) Soit $X_1, \dots, X_n$ iid tq $X_i \sim \mathcal{B}er(p)$ avec $\begin{cases} X_i = 1 \text{ si face} \\ X_i = 0 \text{ si pile} \end{cases}$

On veut tester $H_0 : p = \frac{1}{2}$ contre $H_1 : p \neq \frac{1}{2}$.

On rejette H_0 si le nb de face $\notin [40;60]$

i.e $R = \{\sum^{100} X_i < 40$ ou $\sum^{100} X_i > 60\}$ Région de rejet de H_0.

$= \{|\sum X_i - 50| > 10\}$



ou $R^c = \{40 \leq \sum X_i \leq 60\}$

On a $\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$

2) On souhaite calculer α.

Rappel : $\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(R)$

Ici, $\Theta_0 = \{\frac{1}{2}\}$

Donc $\alpha = \mathbb{P}(\sum X_i < 40$ ou $\sum X_i > 60 \mid p = \frac{1}{2})$ = proba de rejeter H_0 alors que H_0 vraie

$= \mathbb{P}(\mathcal{B}(100,\frac{1}{2}) < 40$ ou $\mathcal{B}(100,\frac{1}{2}) > 60)$

$= \mathbb{P}(\mathcal{B}(100,\frac{1}{2}) < 40) + \mathbb{P}(\mathcal{B}(100,1/2) > 60)$

$= \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{B}(100,\frac{1}{2}) \leq 39)}_{\text{f.d.r d'une } \mathcal{B}(100,\frac{1}{2}) \text{ calculée en } 39} + 1 - \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{B}(100,1/2) \leq 60)}_{\text{'' en } 60}$

$= \sum_{k=0}^{39} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{100} + 1 - \sum_{k=0}^{60} \binom{100}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{100}$

$= 0,0352$

$\Rightarrow$ Le risque α est $\simeq 3,52\%$.

3) Rappel : Puissance

$\beta : \Theta_1 \longrightarrow [0,1]$
$\theta \longmapsto \underbrace{\mathbb{P}_\theta((X_1,\dots,X_n) \in R)}$

c'est le m̂ calcul que pour α
sauf qu'on le fait pour $\theta \in \Theta_1$
(alors que pour α c'est $\theta \in \Theta_0$).

Ici, $\beta(p) = \mathbb{P}(\sum X_i < 40$ ou $\sum X_i > 60 \mid p)$

$= \mathbb{P}(\mathcal{B}(100,p) < 40) + \mathbb{P}(\mathcal{B}(100,p) > 60)$

$= \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{B}(100,p) \leq 39) + 1 - \mathbb{P}(\mathcal{B}(100,p) \leq 60)}$

proba de rejeter H_0 si $p \neq \frac{1}{2}$ est le paramètre de la $\mathcal{B}em(p)$
i.e on est sous (H_1).

En particulier, $\beta(0.7)$ = proba de rejeter H_0 si la proba d'obtenir face vaut 0.7.

$$= \mathbb{P}(\mathcal{B}(100,0.7) \leq 39) + 1 - \mathbb{P}(\mathcal{B}(100,0.7) \leq 60)$$

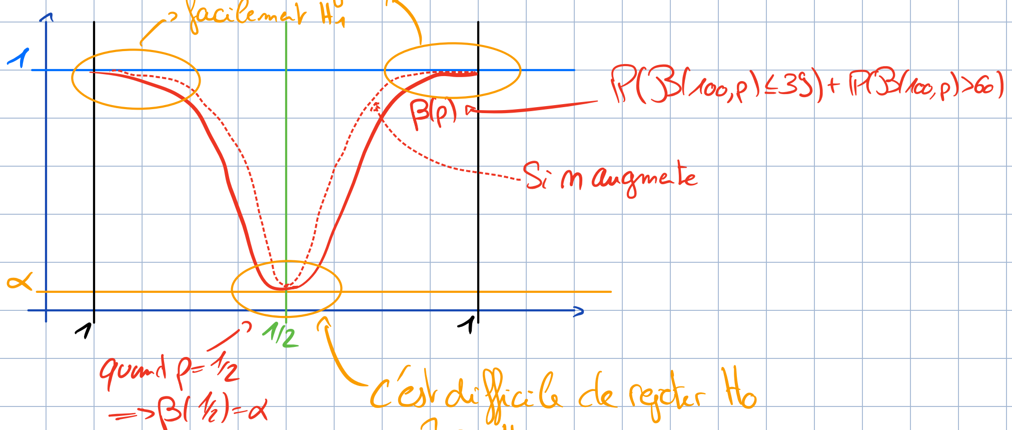
$$= \sum_{i=0}^{39} \binom{100}{i} 0.7^i \, 0.3^{100-i} + 1 - \sum_{i=0}^{60} \binom{100}{i} 0.7^i \, 0.3^{100-i}$$

$$= 0.979$$

Donc le test est puissant car si on a une pièce ayant une proba 0.7 d'obtenir face, on a $\simeq 98\%$ de chances de rejeter H_0.

4) Sous R, on peut tracer le graphe de β avec :

$\underbrace{\text{curve}}_{\text{trace une fct}^{\circ}} (\underbrace{\text{pbinom}(39, 100, x) + 1 - \text{pbinom}(60, 100, x)}_{\text{expression de la fct}^{\circ} \text{ de la variable } x})$



5) On a obtenu 57 faces $\Rightarrow$ on accepte H_0.

La p.value est le plus petit niveau ou sensibilité du test tq on rejetterait H_0.

Rappel : D'habitude on a une stat de test T_n et on rejette si $T_n > k$.

On observe t la p.value est $\mathbb{P}_{H_0}(T_n \geq t)$

$\Rightarrow$ Si la p.value est $\geq \alpha \Rightarrow$ on accepte H_0
Si la p.value est $\leq \alpha \Rightarrow$ on rejette H_0.

Ici la région de rejet est : $R = \{ |\underbrace{\sum X_i - 50}_{\substack{\text{la stat de test} \\ \text{i.e le Tn du rappel}}}| > \underbrace{10}_{\text{le k du rappel}} \}$

Ici, $p.value = \mathbb{P}(|\sum X_i - 50| > 7 \mid p = 1/2)$

$$= \mathbb{P}(\sum X_i > 57 \text{ ou } \sum X_i < 43 \mid p = 1/2)$$

$$= \mathbb{P}(\mathcal{B}(100, 1/2) > 57) + \mathbb{P}(\mathcal{B}(100, 1/2) < 43)$$

$$= 1 - \sum_{i=0}^{57} \binom{100}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{100-i} + \sum_{i=0}^{42} \binom{100}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^i \left(\frac{1}{2}\right)^{100-i}$$

$$= 0,1332.$$

La p.value est $\simeq 13\%$ i.e pour rejeter H_0 avec 57 faces, il aurait fallu faire un test avec un $\alpha > 13,32\%$ (par ex : 15%)

<u>ou alors</u> on utilise l'approx par la loi normale

$$\frac{\sum X_i - np}{\sqrt{np(1-p)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

pour $n = 100$ et $p = 1/2$ on a $\frac{\sum X_i - 50}{\sqrt{25}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow p.value = \mathbb{P}(\mathcal{B}(100, \tfrac{1}{2}) < 43) + \mathbb{P}(\mathcal{B}(100, 1/2) > 57)$$

$$\simeq \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) < \frac{43-50}{\sqrt{25}}\right) + \mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) > \frac{57-50}{\sqrt{25}}\right)$$

$$= \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) < -\tfrac{7}{5}) + 1 - \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \leq \tfrac{7}{5}) = 1 - 2\,\mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \in [0, \tfrac{7}{5}])$$

$$= 1 - 2 \int_0^{1.4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \, dx$$

$$= 0.1615$$

Exercice 2 : (Test de Neyman-Pearson).

Soit $X = (X_1, \_\_, X_n)$ un n-échantillon de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$.

Rappel : $2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i \sim \chi^2_{2n}$

Rappel : Neyman-Pearson : Si on veut tester $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda = \lambda_1$

$$V_{\lambda_0,\lambda_1} = \frac{L(\_\_, \lambda_1)}{L(\_\_, \lambda_0)}$$

alors le test basé sur la région de rejet $\{V_{\lambda_0,\lambda_1} > k_\alpha\}$ est un test plus puissant.

1) $$V_{\lambda_0,\lambda_1} = \frac{L(\_\_,\lambda_1)}{L(\_\_,\lambda_0)} = \frac{\lambda_1^n \exp(-\lambda_1 \sum_{i=0}^{n} x_i)}{\lambda_0^n \exp(-\lambda_0 \sum_{i=0}^{n} x_i)} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n \exp\left(-(\lambda_1 - \lambda_0)\sum_{i=1}^{n} x_i\right)$$

On rejette H_0 si $\{V_{\lambda_0,\lambda_1} > k_\alpha\}$

1ère Méthode :

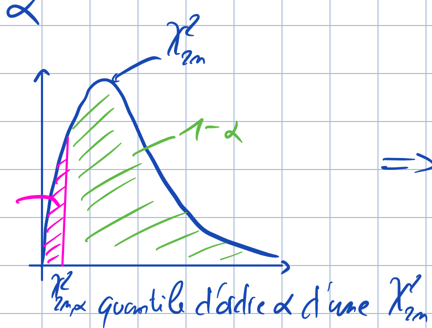
Rappel : $\alpha = \mathbb{P}(\text{rejeter } H_0 \text{ si } H_0 \text{ vraie})$

Ici, on cherche k_α tq $\mathbb{P}_{\lambda_0}(V_{\lambda_0,\lambda_1} > k_\alpha) = \alpha$

i.e on cherche k_α tq $\mathbb{P}_{\lambda_0}\left(\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n \exp(-(\lambda_1 - \lambda_0)\sum X_i) > k_\alpha\right) = \alpha$

$$\iff \mathbb{P}_{\lambda_0}\Big(\underbrace{-(\underbrace{\lambda_1 - \lambda_0}_{>0})}_{<0} \sum X_i > \ln\Big(\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n k_\alpha\Big)\Big) = \alpha$$

$$\implies \mathbb{P}_{\lambda_0}\left(\underbrace{\lambda_0 \sum X_i}_{\text{Sous } H_0 \sim \chi^2_{2n}} < \underbrace{\frac{2\lambda_0 \ln\left(\left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1}\right)^n k_\alpha\right)}{\lambda_0 - \lambda_1}}_{\chi^2_{2n,\alpha}}\right) = \alpha$$

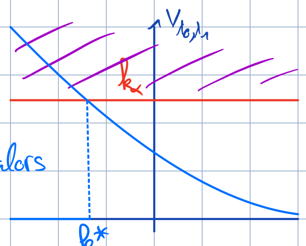


$\implies$ on rejette H_0 si $2\lambda_0 \sum x_i < \chi^2_{2n,\alpha}$.

2ème Méthode :

On essaye d'écrire V_{λ_0,λ_1} comme une fonction monotone en une stat t.

Ici, $V_{\lambda_0,\lambda_1} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)^n \exp\left(-(\lambda_1 - \lambda_0)\sum_{i=1}^{n} x_i\right) = \text{fonct}^\circ \searrow$ en $t = \sum_{i=1}^{n} x_i$



Zone où $V_{\lambda_0,\lambda_1} > k_\alpha$ = ZONE DE REJET

$\{V_{\lambda_0,\lambda_1} > k_\alpha\} \iff \{T_n < k^*\}$

Si $t < k^*$, alors $V_{\lambda_0,\lambda_1} > k_\alpha$ $\implies$ on rejette H_0.

De la même façon, on détermine k^* tq $\mathbb{P}(T_n < k^*) = \alpha$
i.e k^* tq $\mathbb{P}_{\lambda_0}(\sum X_i < k^*) = \alpha$.

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}_{\lambda_0}(\underbrace{2\lambda_0 \sum_{i=0}^{n} X_i}_{\text{Sous } H_0 \sim \chi^2_{2n}} < \underbrace{2\lambda_0 k^*}_{\chi^2_{2n,\alpha} = \text{quantile d'ordre } \alpha \text{ d'une } \chi^2_{2n}}) = \alpha.$$

On rejette H_0 si $2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i < \chi^2_{2n,\alpha}$.

2) On veut un test upp pour tester $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda_1 > \lambda_0$

Rappel : On veut tester $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda_1 > \lambda_0$, on a une stat T_n exhaustive, de vraisemblance $g(t,\lambda)$, si

$$V_{\lambda_0,\lambda} = \frac{g(t,\lambda)}{g(t,\lambda_0)} \searrow \text{ en } t. \qquad (\nearrow \text{ en } t)$$

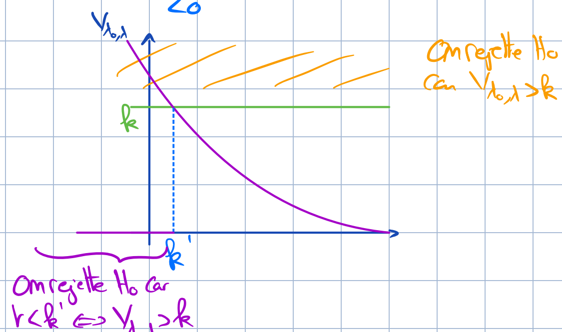
alors le test basé sur la région de rejet $\{T_n < k_\alpha\}$ est upp
$\{T_n > k_\alpha\}$

Si on a $X_1, \dots, X_n$ iid tq $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ alors $T_n = \sum X_i$ exhaustive car

$$L(\_, \lambda) = \underbrace{\lambda^n \exp(-\lambda T_n)}_{\varphi(t,\lambda)} \cdot \underbrace{1}_{\psi(x_1,\dots,x_n)}$$

$$V_{\lambda_0,\lambda} = \frac{L(\_,\lambda)}{L(\_,\lambda_0)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_0}\right)^n \exp(\underbrace{-(\underbrace{\lambda-\lambda_0}_{>0})}_{<0} t) \qquad \text{car } \lambda > \lambda_0$$

$\Rightarrow V_{\lambda_0,\lambda}$ est $\searrow$ en t.



$\Rightarrow$ On rejette H_0 si $\{\sum X_i \leq k'\}$ avec k' tq $\mathbb{P}_{H_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq k') = \alpha$

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq k')$$
$$= \mathbb{P}_{H_0}(2\lambda_0 \sum_{i=1}^{n} X_i \leq 2\lambda_0 k')$$
$$= \mathbb{P}(\chi^2_{2n} \leq \underbrace{2\lambda_0 k'}_{\text{quantile d'ordre } \alpha \text{ d'une } \chi^2_{2n,\alpha}})$$

ou alors

$$\alpha = \mathbb{P}_{H_0}(\sum X_i \leq k')$$
$$= \mathbb{P}(\Gamma(n,\lambda_0) \leq \underbrace{k'}_{\text{quantile d'ordre } \alpha \text{ d'une } \Gamma(n,\lambda_0)})$$

Remarque : On a exactement la m̄ zone de rejet que pour la questⁿ 1. La forme de la région ne change pas suivant la valeur de l'hypothèse H_1 (pourvu que $\lambda_1 > \lambda_0$) (il n'y a que la puissance qui change).

3) On veut un test $\alpha = 0.05$ pour $H_0 : \lambda = \lambda_0$ contre $H_1 : \lambda_1 \neq \lambda_0$

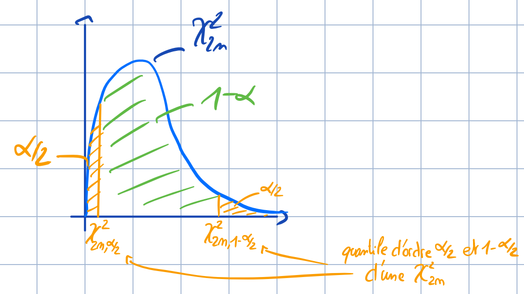
On rejette H_0 si $\{\sum X_i < k_1$ ou $\sum X_i > k_2\}$

i.e on accepte H_0 si $\{k_1 \leq \sum X_i \leq k_2\}$

(c'est comme si l'on faisait 2 tests avec $H_1 : \lambda > \lambda_0$ et $H_1 : \lambda < \lambda_0$)

On a $\mathbb{P}_{H_0}\left(k_1 \leq \sum_{i=1}^{m} X_i \leq k_2\right) = 1 - \alpha$

$$\mathbb{P}_{H_0}\Big(2\lambda_0 k_1 \leq \underbrace{2\lambda_0 \sum_{i=1}^{m} X_i}_{\chi^2_{2m}} \leq 2\lambda_0 k_2\Big) = 1 - \alpha$$



On rejette H_0 si $2\lambda_0 \sum X_i < \chi^2_{2m,\alpha/2}$,

ou $2\lambda_0 \sum X_i > \chi^2_{2m,1-\alpha/2}$

On accepte H_0 si $\chi^2_{2m,\alpha/2} < 2\lambda_0 \sum X_i < \chi^2_{2m,1-\alpha/2}$