Contrat en information symétrique

A. Formulation du problème.

B. La propriété d'efficience.

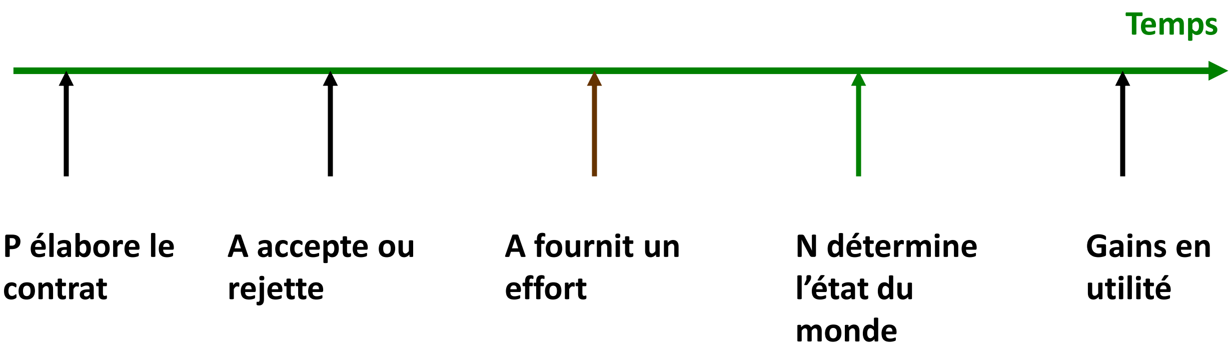
C. Les contrats type.

D. Le partage de risque.

E. L'effort optimal

A. Formulation du Problème

La relation Principal - Agent en information symétrique



A. Formulation du Problème

La relation contractuelle permet d'obtenir un certain résultat *x*.
Soit ***X*** l'ensemble des résultats possibles.

Le résultat ***x*** dépend donc

du niveau d'effort de l'agent, noté ***e***.

de la réalisation de l'un des états du monde.

Donc ***x*** est une variable aléatoire

Attention!! Le principal et l'agent ont la même distribution de probabilité a priori.

A. Formulation du Problème

$$\text{Si } X = \{x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_{n-1}, x_n\} \ (X \text{ est fini})$$

La variable aléatoire x peut donc prendre

la valeur x_i avec la probabilité suivante:

$$P[x = x_i / e] = p_i(e) \text{ pour } i \in \{1, 2, \ldots, n\}$$

On a pour tout niveau d'effort e, $\sum_{i=1}^{i=n} p_i(e) = 1$

On a pour tout niveau d'effort e et pour tout résultat possible $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$

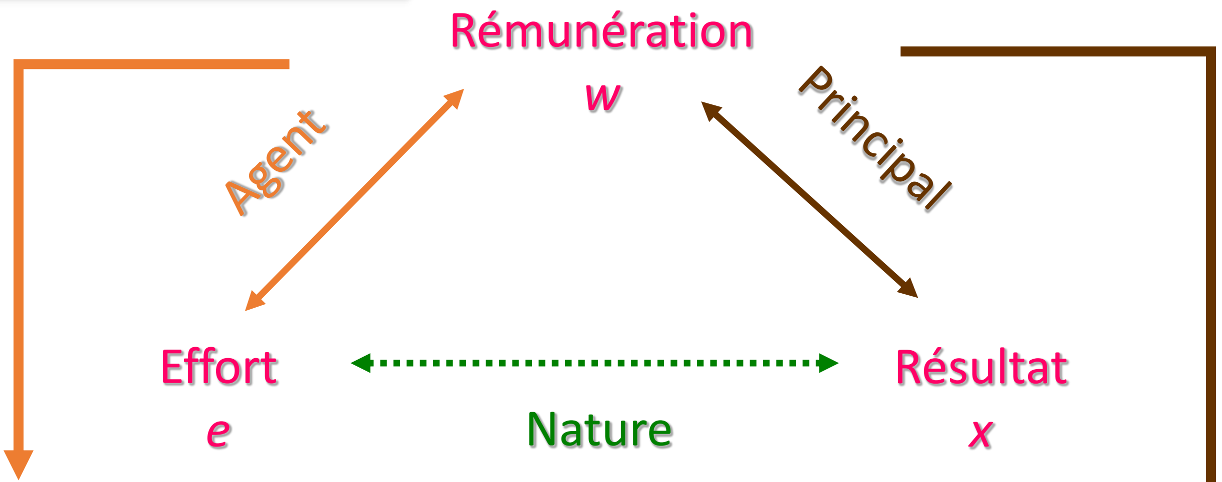
$$p_i(e) > 0$$

Soient deux résultats possibles un bon $\bar{x}$ et un mauvais $\underline{x}$

Soient deux niveaux d'effort possibles un élevé $\bar{e}$ et un faible $\underline{e}$

$$\text{Si } p_{\underline{x}}(\bar{e}) = 0 \text{ donc } p_{\bar{x}}(\bar{e}) = 1$$

A. Formulation du Problème



$$U_A(w,e) = u(w) - v(e)$$

$$u' > 0 \ et \ u'' < 0 \ ; \ v' > 0 \ et \ v'' > 0$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i(e) \cdot u(w(x_i)) - v(e) \geq \underline{U}$$

$$U_P(x-w)$$

$$U_P' > 0 \ et \ U_P'' < 0$$

A. Formulation du Problème

Caractéristiques particulières du contrat:

- Contrat « one shot » ou « spot »
- Utilité de réserve de l'agent: $\underline{U}$

Application du principe de rétroduction:

- Le principal décide conditionnellement au choix de l'agent,
  - ✓ le niveau d'effort (observable)
  - ✓ le schéma de rémunération
- L'agent accepte le contrat … donc il y a intérêt.

A. Formulation du Problème

Le choix de l'agent: *la contrainte de participation*.

$$\sum_{i=1}^{i=n} \underbrace{p_i(e)\cdot u\big(w(x_i)\big)}_{\substack{\text{Estimation d'un gain}\\ \text{aléatoire en utilité :}\\ \text{Espérance d'utilité de l'agent}\\ \text{pour le salaire}}} \underbrace{-\,v(e)}_{\substack{\text{Effort}\\ \text{certain}}} \geq \underbrace{\underline{U}}_{\substack{\text{Option}\\ \text{externe}}}$$

A. Formulation du Problème

Le choix du principal: *le problème d'agence*.

$$\underset{e,\{w(x_i)\}_{i=1,\dots,n}}{Max} \sum_{i=1}^{i=n} p_i(e) \cdot U_P\left(x_i - w(x_i)\right)$$

Sous la contrainte de participation :

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i(e) \cdot u\left(w(x_i)\right) - v(e) \geq \underline{U}$$

La résolution : *écriture du Lagrangien.*

$$L\left(e, w\left(x_1\right), \ldots, w\left(x_i\right), \ldots, w\left(x_n\right), \lambda\right) =$$

$$\left[\sum_{i=1}^{i=n} p_i\left(e\right)\cdot U_P\left(x_i - w\left(x_i\right)\right)\right] + \lambda\cdot\left[\sum_{i=1}^{i=n} p_i\left(e\right)\cdot u\left(w\left(x_i\right)\right) - v\left(e\right) - \underline{U}\right]$$

La condition nécessaire du premier ordre:

$$\forall i, i = 1, \ldots, n; \quad \frac{\delta L}{\delta w\left(x_i\right)}\left(e, w\left(x_1\right), \ldots, w\left(x_i\right), \ldots, w\left(x_n\right), \lambda\right) = 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\forall i, i = 1, \ldots, n; \quad -p_i\left(e\right)\cdot U'_P\left(x_i - w\left(x_i\right)\right) + \lambda\cdot p_i\left(e\right)\cdot u'\left(w\left(x_i\right)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad \forall i, i = 1, \ldots, n; \quad \frac{U'_P\left(x_i - w\left(x_i\right)\right)}{u'\left(w\left(x_i\right)\right)} = \lambda$$

B. La Propriété d'Efficience

La propriété d'efficience:

$$\forall i, i = 1, \ldots, n; \quad \frac{U'_P\left(x_i - w(x_i)\right)}{u'\left(w(x_i)\right)} = \lambda \text{ (constante)}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\frac{U'_P\left(x_1 - w(x_1)\right)}{u'\left(w(x_1)\right)} = \frac{U'_P\left(x_2 - w(x_2)\right)}{u'\left(w(x_2)\right)} = \ldots.. = \frac{U'_P\left(x_n - w(x_n)\right)}{u'\left(w(x_n)\right)}$$

B. La Propriété d'Efficience

La saturation de la contrainte de participation:

$$\frac{\delta L}{\delta \lambda}\left(e, w(x_1), \ldots, w(x_i), \ldots, w(x_n), \lambda\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i(e) \cdot u\left(w(x_i)\right) - v(e) = \underline{U}$$

B. La Propriété d'Efficience

Illustration à l'aide la boîte d'Edgeworth:
le cas de deux résultats possibles seulement.

Soit $X = \{x_1 ; x_2\}$ et on suppose que $x_1 \neq x_2$

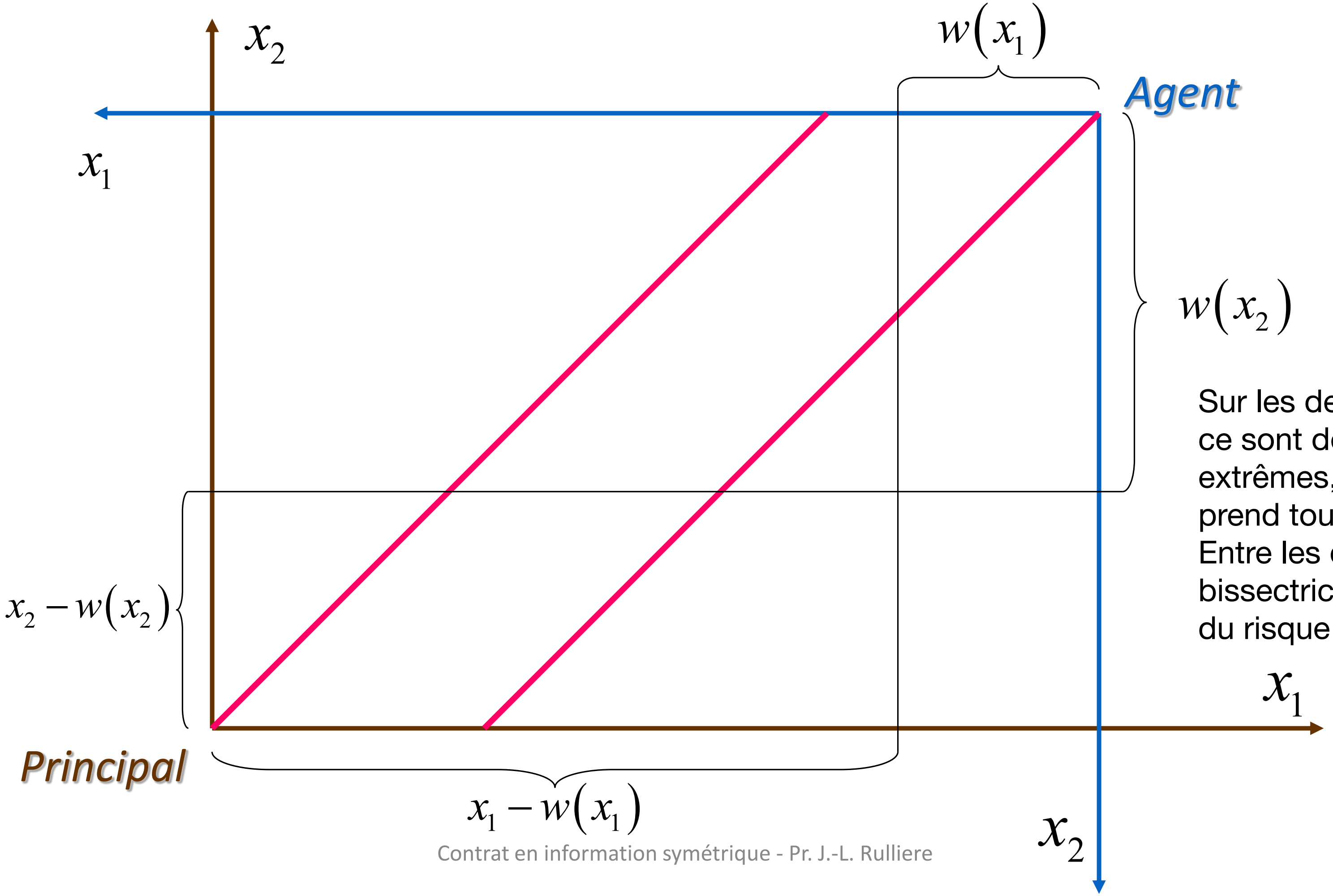
Par exemple $x_1 > x_2$

On peut réécrire la propriété d'efficience dans ce cas:

$$\forall i, i = 1,2; \quad \frac{U'_P\left(x_i - w(x_i)\right)}{u'\left(w(x_i)\right)} = \lambda \text{ (constante)}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{U'_P\left(x_1 - w(x_1)\right)}{U'_P\left(x_2 - w(x_2)\right)} = \frac{u'\left(w(x_1)\right)}{u'\left(w(x_2)\right)}$$

C. Contrats Types



Sur les deux bissectrices, ce sont des situations extrêmes, il y en a un qui prend tout le risque.
Entre les deux bissectrices, il y a partage du risque

C. Contrats Types

$$\forall i, i=1,2; \quad \frac{U'_P\left(x_i - w\left(x_i\right)\right)}{u'\left(w\left(x_i\right)\right)} = \lambda \text{ (constante)}$$

3 cas sont à considérer:

$\forall i, i=1,2;$

$U'_P\left(x_i - w\left(x_i\right)\right) = \text{constante}$

$\forall i, i=1,2;$

$u'\left(w\left(x_i\right)\right)$ constante

$$\forall i, i=1,2; \quad \frac{U'_P\left(x_i - w\left(x_i\right)\right)}{u'\left(w\left(x_i\right)\right)} = \lambda \text{ (constante)}$$

avec $U'_P\left(x_i - w\left(x_i\right)\right)$ et $u'\left(w\left(x_i\right)\right)$ variables en fonction de i

1er cas: $\forall i, i=1,2; \quad U_P'\left(x_i - w\left(x_i\right)\right) = \text{constante}$

$\Leftrightarrow U_P''(\quad) = 0 \Leftrightarrow U_P(\quad)$ linéaire

$\Leftrightarrow$ le principal est neutre au risque

La condition d'efficience dit que:

$$\forall i, i=1,2; \quad \frac{U_P'\left(x_i - w\left(x_i\right)\right)}{u'\left(w\left(x_i\right)\right)} = \lambda \text{ (constante)}$$

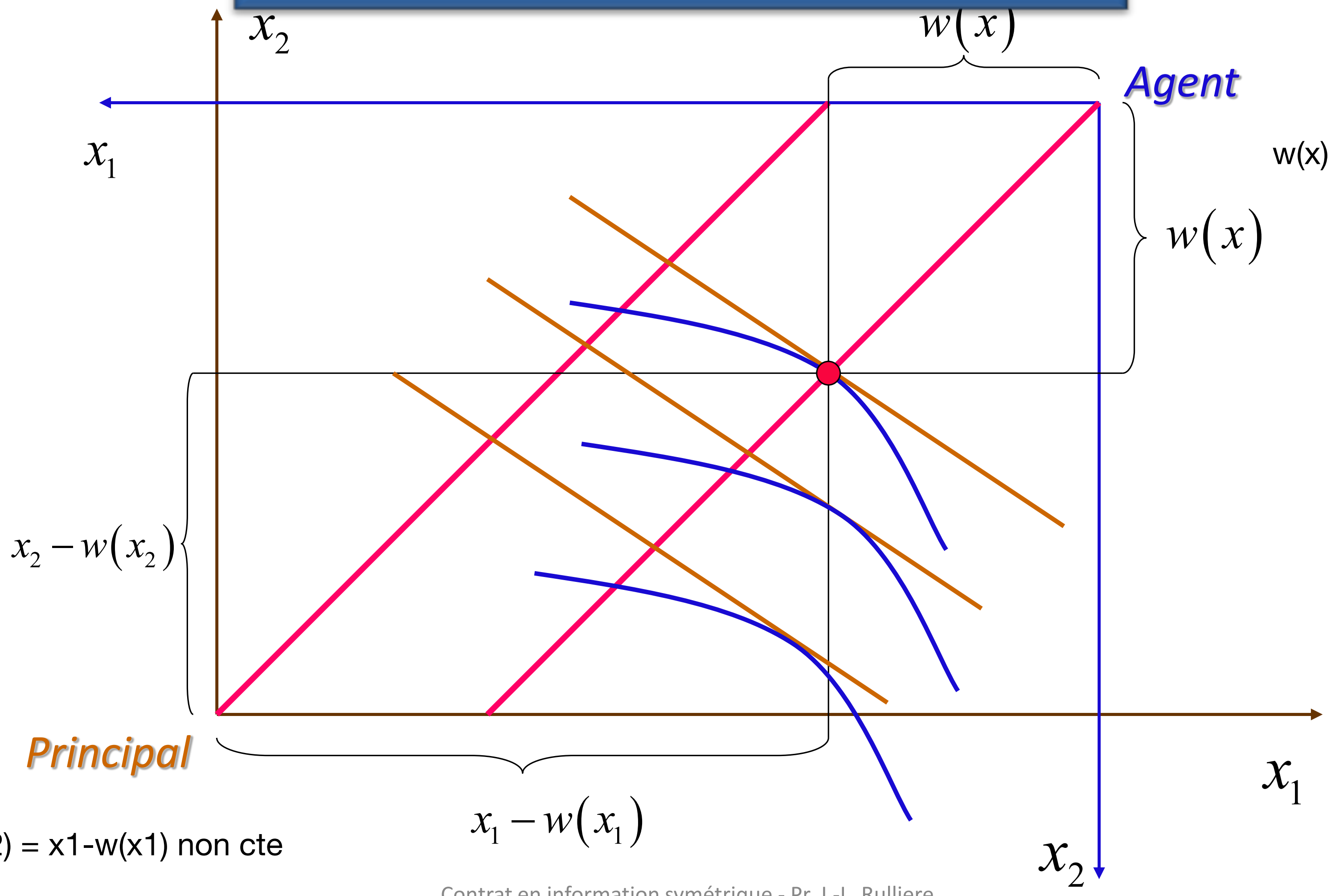
Deux possibilités logiques:

$$\begin{cases} \text{Soit } u'(\quad) \text{ constante} \Leftrightarrow u''(\quad) = 0 \\ \Leftrightarrow u \text{ linéaire} \\ \Leftrightarrow \text{l'agent est neutre au risque} \end{cases}$$

Les deux seraient neutre au risque, peu logique donc peu probable.

$$\begin{cases} \text{Soit } \forall i, i=1,2; \quad u'\left(w\left(x_i\right)\right) = \text{constante} \Leftrightarrow \\ \text{Soit } \forall i, i=1,2; \quad w\left(x_i\right) = \text{constant} \end{cases}$$

C. Contrats Types



w(x) = w(x) => cte

x2 - w(x2) = x1-w(x1) non cte

C. Contrats Types

Calcul de la rémunération fixe de l'agent, lorsque le principal est neutre au risque

- L'agent est totalement prémuni contre le risque et obtient une rémunération fixe.
- Le principal propose un salaire fixe qui soit tel que l'agent:

  ✓ Accepte le contrat (saturation de la contrainte de participation).

  ✓ Soit dédommagé de son effort (observable).

$$w(x_1) = w(x_2) = \tilde{w} = u^{-1}\left(\underline{U} + v(e)\right)$$

2éme cas: Soit $\forall i, i=1,2; \quad u'\big(w(x_i)\big) = \text{constante}$

$$\Leftrightarrow u''(\ ) = 0 \Leftrightarrow u(\ ) \text{ linéaire}$$

$$\Leftrightarrow \underline{\text{l'agent est neutre au risque}}$$

La condition d'efficience dit que:

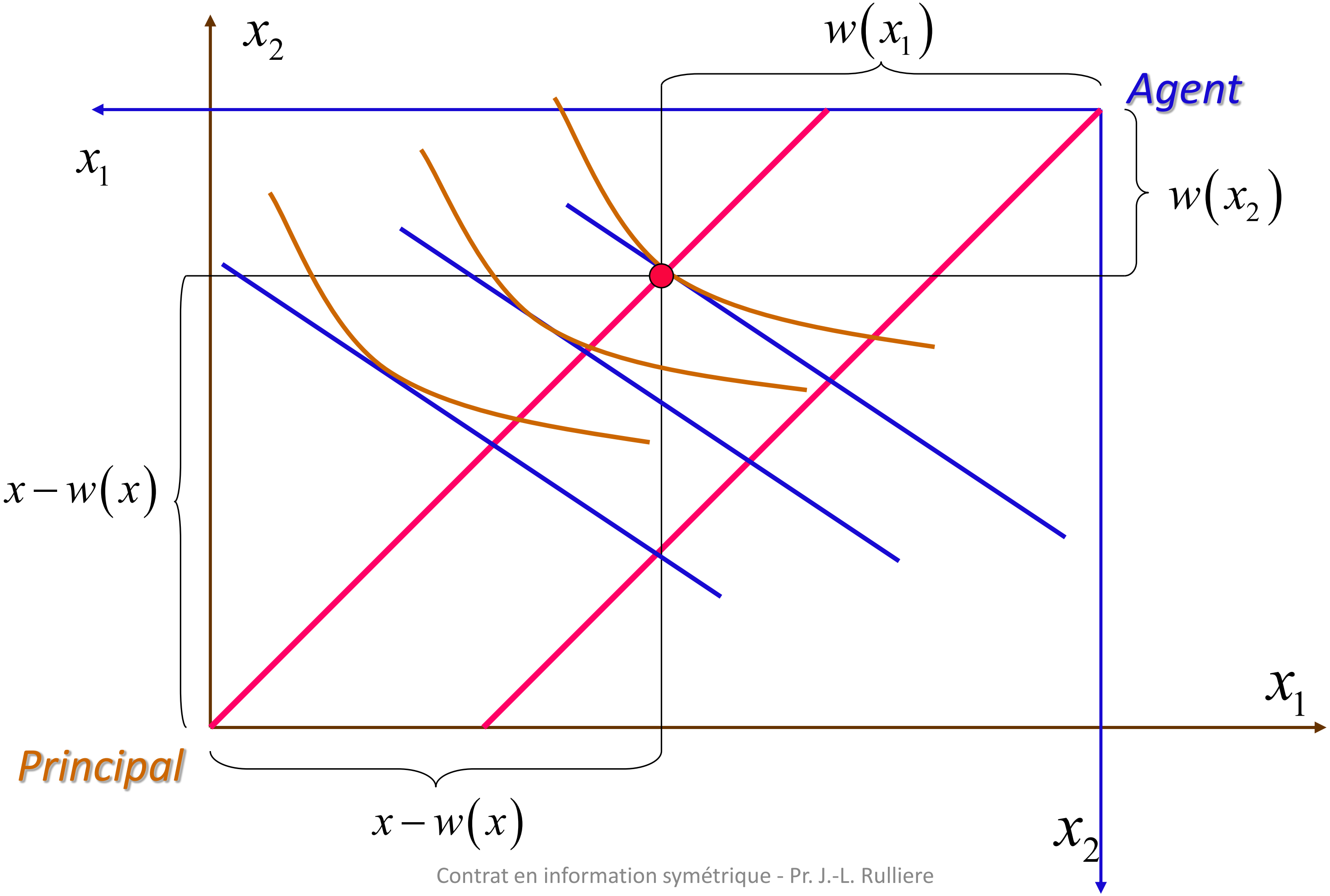
$$\forall i, i=1,2; \quad \frac{U'_P\big(x_i - w(x_i)\big)}{u'\big(w(x_i)\big)} = \lambda \text{ (constante)}$$

Deux possibilités logiques:

$$\begin{cases} \text{Soit } U'_P(\ ) \text{ constante} \Leftrightarrow U''_P(\ ) = 0 \\ \Leftrightarrow U_P(\ ) \text{ linéaire} \\ \Leftrightarrow \text{le principal est neutre au risque} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \text{Soit } \forall i, i=1,2; \quad U'_P\big(x_i - w(x_i)\big) \text{constante} \Leftrightarrow \\ \text{Soit } \forall i, i=1,2; \quad \underline{x_i - w(x_i) = \text{constant}} \end{cases}$$

C. Contrats Types



Calcul de la rémunération fixe (franchise) du principal, lorsque l'agent est neutre au risque

- Le principal est totalement prémuni contre le risque et obtient une franchise, *k*.
- Le principal propose une rémunération à l'agent tel que :

  ✓ Il s'assure une rémunération fixe pour lui-même, *k*.

  ✓ L'agent accepte le contrat (saturation de la contrainte de participation).

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i(e) \times u(x_i - k) - v(e) = \underline{U}$$

L'agent est neutre au risque donc *u()* est linéaire; soit *u(t)=t; d'où*

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_i(e) \cdot x_i - k = \underline{U} + v(e) \Leftrightarrow k = \sum_{i=1}^{i=n} p_i(e) \cdot x_i - \underline{U} - v(e)$$

3éme cas:

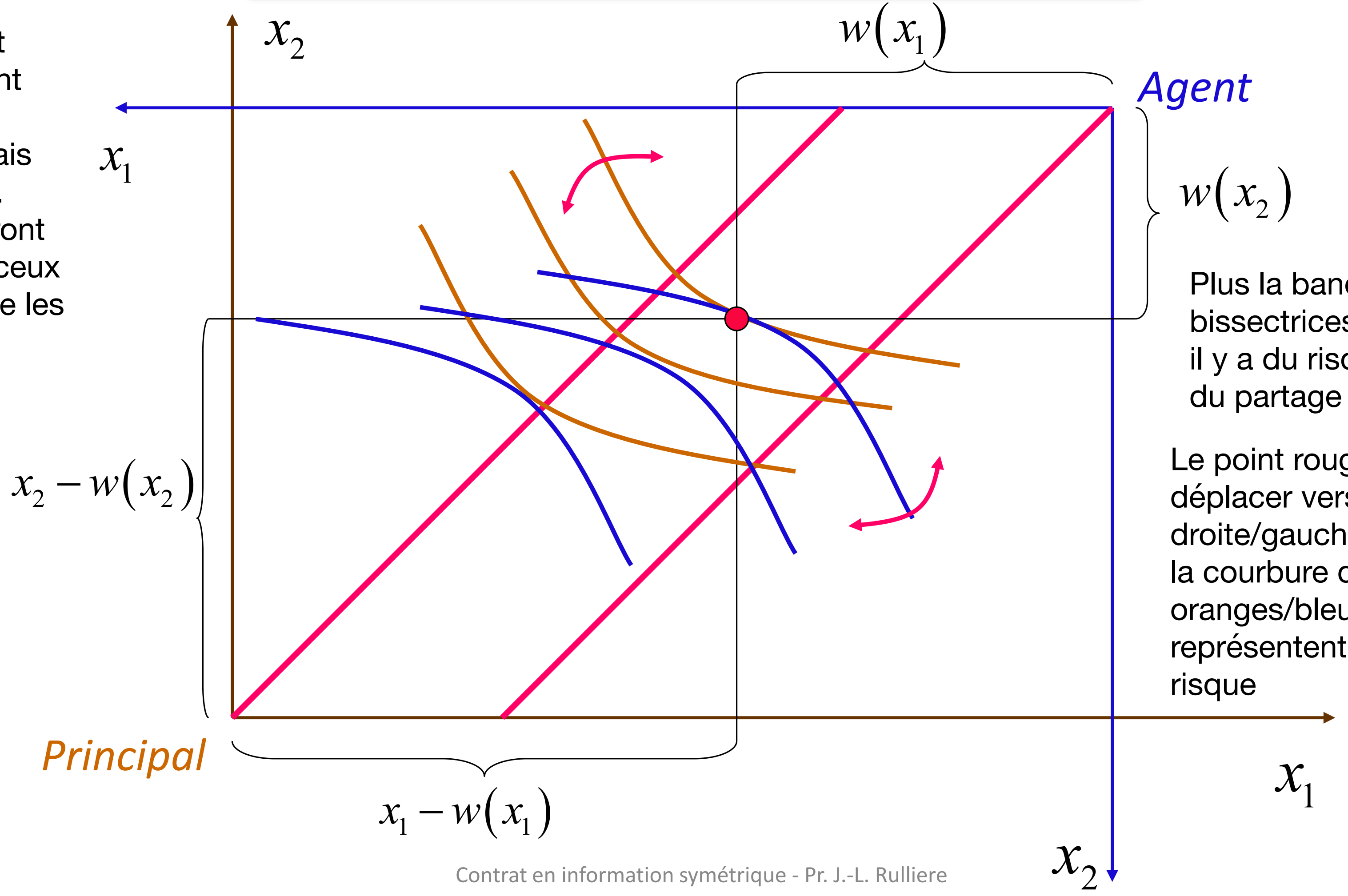
$$\begin{cases} \forall i, i = 1,2; \quad \dfrac{U_P'\left(x_i - w(x_i)\right)}{u'\left(w(x_i)\right)} = \lambda \text{ (constante)} \\ \text{avec } U_P'\left(x_i - w(x_i)\right) \text{et } u'\left(w(x_i)\right) \text{ variables en fonction de } i \end{cases}$$

$$\begin{cases} U_P'(\quad) \text{variable} \Leftrightarrow U_P''(\quad) < 0 \\ \Leftrightarrow U_P(\quad) \text{ concave} \\ \Leftrightarrow \text{le principal est averse au risque} \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(\quad) \text{variable} \Leftrightarrow u''(\quad) < 0 \\ \Leftrightarrow u(\quad) \text{ concave} \\ \Leftrightarrow \text{l'agent est averse au risque} \end{cases}$$

C. Contrats Types

Les contrats situés dans les triangles supérieurs et inférieurs sont des contrats possibles mais peu de sens. Ceux qui seront signés sont ceux qui sont entre les deux bissectrices.



Plus la bande entre les deux bissectrices est grande, plus il y a du risque => question du partage du risque.

Le point rouge pourrait se déplacer vers le haut/bas droite/gauche en fonction de la courbure des courbes oranges/bleues qui représentent l'aversion au risque

D. Partage du Risque

Comme le principal et l'agent ont tous deux de l'aversion pour le risque, chacun devra assumer une part de la variabilité du résultat.

Confrontation des aversions relatives pour le risque entre le principal et l'agent

Toutes choses égales par ailleurs,
+ l'aversion absolue face au risque de l'agent (du principal) est élevée,
+ le salaire tend à devenir rigide (variable, ie dépendre de l'aléa)

En supposant x continue, la propriété d'efficience énonce que:

$$\frac{U_P'\left(x-w(x)\right)}{u'\left(w(x)\right)}=\lambda \quad (1) \quad \Leftrightarrow \quad -U_P'\left(x-w(x)\right)+\lambda\cdot u'\left(w(x)\right)=0$$

X est supposé continue car nous allons différencier par rapport x

En différenciant par rapport à *x*, on obtient :

$$-U_P''\left(x-w(x)\right)\cdot\left[1-\frac{\delta w(x)}{\delta x}\right]+\lambda\cdot u''\left(w(x)\right)\cdot\left[\frac{\delta w(x)}{\delta x}\right]=0 \quad (2)$$

En mettant (1) dans (2), on obtient :

$$-U_P''\left(x-w(x)\right)\cdot\left[1-\frac{\delta w(x)}{\delta x}\right]+\frac{U_P'\left(x-w(x)\right)}{u'\left(w(x)\right)}\cdot u''\left(w(x)\right)\cdot\left[\frac{\delta w(x)}{\delta x}\right]=0$$

En divisant cette équation par $U_P'\left(x-w(x)\right)$, on obtient :

D. Partage du Risque

$$-\frac{U_P''\left(x-w(x)\right)}{U_P'\left(x-w(x)\right)}\cdot\left[1-\frac{\delta w(x)}{\delta x}\right]+\cdot\frac{u''\left(w(x)\right)}{u'\left(w(x)\right)}\cdot\left[\frac{\delta w(x)}{\delta x}\right]=0 \quad (3)$$

Soit $r_P=-\frac{U_P''}{U_P'}$: la mesure d'aversion absolue pour le risque du principal

Soit $r_A=-\frac{u''}{u'}$: la mesure d'aversion absolue pour le risque de l'agent

Alors l'équation (3) devient :

$$r_P\cdot\left[1-\frac{\delta w(x)}{\delta x}\right]-r_A\cdot\left[\frac{\delta w(x)}{\delta x}\right]=0 \quad (4)$$

D. Contrats Types

L'équation (4) devient:

$$r_P - r_P \cdot \frac{\delta w(x)}{\delta x} - r_A \cdot \frac{\delta w(x)}{\delta x} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\frac{\delta w(x)}{\delta x} = \frac{r_P}{r_P + r_A}}$$

L'impact de la variation du résultat sur la rémunération de l'agent dépend de manière relative de l'aversion au risque du principal.

Exemples :

$$\underbrace{\left\{\text{Si } r_P \approx \text{et si } r_A \uparrow\right\} \quad \Rightarrow \left\{\frac{\delta w(x)}{\delta x} \geq 0 \text{ mais } \frac{\delta w(x)}{\delta x} \to 0\right\}}$$

Le salaire de l'agent tend à devenir rigide

$$\underbrace{\left\{\text{Si } r_A \approx \text{et si } r_P \uparrow\right\} \quad \Rightarrow \left\{\frac{\delta w(x)}{\delta x} \geq 0 \text{ et } \frac{\delta w(x)}{\delta x} \uparrow\right\}}$$

Le salaire de l'agent dépend de plus en plus de l'aléa

Grand inconvénient : On suppose ici que l'agent et le principal se connaissent, tout est connu.

Interprétation de: $\boxed{\dfrac{\delta w(x)}{\delta x} = \dfrac{r_P}{r_P + r_A}}$

Cette équation dit comment le salaire de l'agent se modifie étant donné une amélioration du résultat.

$$\frac{r_P}{r_P + r_A} \in [0;1]$$

Lorsque les deux participants sont averses au risque l'agent ne reçoit qu'une part du résultat croissant sous forme d'accroissement de salaire. Plus l'agent est averse au risque (plus r_A est fort), moins le résultat influence son salaire.

D'un autre coté, plus le principal a de l'aversion pour le risque, plus r_P est fort, plus les variations du résultat engendrent des changements importants de salaire (puisque $\dfrac{r_P}{r_P + r_A}$ est décroissant en r_P).

Les contrats optimaux peuvent être très compliqués.
Soit le contrat linéaire (simple) suivant:

$$w(x_i) = c + bx_i$$

Quand est ce qu'un contrat linéaire est optimal?

➔Quand $\dfrac{dw}{dx_i} = b$, c.a.d. quand l'accroissement de salaire induit par un accroissement du résultat doit être constant.

➔Le principal et l'agent ont une aversion pour le risque constante

E. L'effort optimal

Quel sera le niveau d'effort choisi par l'agent?

On a supposé dans le modèle simple précédent que le niveau d'effort est imposé par le principal à l'agent (e observable). Or le résultat peut dépendre de l'effort de l'agent.

Le problème du principal devient:

$$\underset{e}{Max}\left[\sum_{i=1}^{n} p_i(e)x_i - u^{-1}[\underline{U} + v(e)]\right]$$

E. L'effort optimal

Premier cas:

- Le principal est neutre vis-à-vis du risque

$$U_p^{'}(.) = \text{ constante.}$$

- L'agent a de l'aversion pour le risque

➔ Le contrat Optimal est un salaire qui ne varie pas avec le résultat:

$$w = u^{-1}[\underline{U} + v(e)]$$

Ce contrat doit dépendre de l'effort demandé à l'agent.

E. L'effort optimal

La condition de premier ordre est:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{'}(e)x_i = (u^{-1})^{'}[\underline{U} + v(e)]v^{'}(e)$$

Profits espérés d'un accroissement de l'effort

Accroissement marginal du salaire que le principal doit payer à l'agent pour compenser son accroissement de désutilité de l'effort

E. L’effort optimal

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{'}(e)x_i = (u^{-1})^{'}[\underline{U} + v(e)]v^{'}(e)$$

Théorème sur les fonctions inverses:

L’inverse de la dérivée est égal à la dérivée de l’inverse.

➔La C.P.O. devient:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{'}(e)x_i = \frac{v^{'}(e)}{u^{'}(w)}$$

E. L'effort optimal

Sachant que:

$$\frac{d}{de}\left[-\frac{v'(e)}{u'(w)}\right]=-\frac{v''(e)}{u'(w)}+\frac{v'(e)u''(w)\frac{dw}{de}}{[u'(w)]^2}$$

$$\frac{dw}{de}=(u^{-1})'[\underline{U}+v(e)]v'(e)=\frac{v'(e)}{u'(w)}$$

$$w=u^{-1}[\underline{U}+v(e)]$$

E. L'effort optimal

La C.S.O. pour avoir un maximum est:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i''(e)x_i + \frac{u''}{(u')^3}(w)v'(e)^2 - \frac{v''(e)}{u'(w)} \leq 0$$

Cette condition est vérifiée pour tout niveau d'effort e ssi:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i''(e)x_i \leq 0$$

E. L'effort optimal

Deuxième cas:

- Le principal a de l'aversion pour le risque

- L'agent est neutre vis-à-vis du risque

$$U_a^{'}(.) = \text{ constante.}$$

➔ Le contrat Optimal est une franchise:

$$w(x_i) = x_i - k$$

E. L'effort optimal

Le problème de maximisation est:

$$\underset{e}{Max} \sum_{i=1}^{n} p_i(e) x_i - v(e)$$

La C.P.O.:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{'}(e) x_i = v'(e)$$

Gain Marginal Espéré

Coût Marginal

E. L'effort optimal

La C.P.O.:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{'}(e)x_i = v'(e)$$

La C.S.O.:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{''}(e)x_i - v''(e) \leq 0$$

➔ Comme dans le premier cas, la C.S.O. est vérifiée pour tout niveau d'effort *e* si:

$$\sum_{i=1}^{n} p_i^{''}(e)x_i \leq 0$$