XV TD CC

Statistique Inférentielle
Contrôle continu

Mercredi 7 Novembre

Durée 2h, documents, téléphone, calculatrice interdits

Le barême (indicatif) prévu est le suivant : 10-10 (on tiendra compte (grave) de la présentation et de la clareté des explications):

Rappel : La densité d'une loi Gamma (a,b) est :

$$f(x) = \frac{x^{a-1}b^a}{\Gamma(a)}e^{-bx} \quad \text{d'espérance } \frac{a}{b} \text{ et de variance } \frac{a}{b^2}$$

Exercice 1 (vu en cours) :

On considère un échantillon $(X_1, ..., X_n)$ de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de densité

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$

avec $\theta = (\mu, \sigma^2)$.

1. On suppose dans un premier temps que μ est connu. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\sigma}^2$ de σ^2
2. Calculer l'information de Fisher pour σ^2 du modèle.
3. L'estimateur $\hat{\sigma}^2$ est-il exhautif ?
4. Calculer le biais de $\hat{\sigma}^2$.
5. $\hat{\sigma}^2$ est-il convergent? Efficace?
6. Calculer la loi limite de $\hat{\sigma}^2$.
7. On suppose maintenant que μ et σ^2 sont inconnus. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ de (μ, σ^2)
8. Calculer la matrice d'information de Fisher du modèle pour (μ, σ^2)
9. L'estimateur $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ est-il exhautif ?
10. L'estimateur $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$ est-il sans biais ?

11. Calculer la loi limite de $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2)$.
12. Calculer l'estimateur des moments $(\hat{\mu}_{MM}, \hat{\sigma}^2_{MM})$ de (μ, σ^2)
13. Calculer la loi limite de $(\hat{\mu}_{MM}, \hat{\sigma}^2_{MM})$.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire continue de fonction de répartition :

$$F_\theta(x) = (1 - \exp(-\theta x^c))$$

pour $x > 0$, avec $c > 0$ une constante connue. Le paramètre de la loi est $\theta > 0$. Considérons un échantillon $X_1, ..., X_n$ de même loi que X.

1. Calculer la densité X.
2. Calculer la loi de θX^c.
3. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ.
4. Calculer l'Information de Fisher pour θ du modèle.
5. $\hat{\theta}$ est-il exhaustif ?
6. $\hat{\theta}$ est-il sans biais ?
7. Calculer la variance de $\hat{\theta}$. Est-il efficace ?
8. Calculer la loi limite de $\hat{\theta}$.
9. Calculer l'estimateur des moments $\hat{\theta}_{MM}$ de θ.
10. Calculer l'estimateur par moindre carrés $\hat{\theta}_{MC}$ de θ.

Exercice 1 :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right) \qquad \theta = (\mu, \sigma^2)$$

1) (H1) à (H4) vérifiées

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$= (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2\right)$$

$$\Rightarrow \ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

$\hookrightarrow \hat{\sigma}^2$ est tq $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L = 0$

$$\Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial (\sigma^2)^2} \ln L = -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 < 0$$

$\Rightarrow \hat{\sigma}^2$ est bien EMV de σ^2

2) $$I_n(\sigma^2) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial(\sigma^2)^2} \ln L\right] = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} + \frac{1}{(\sigma^2)^3} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[(X_i-\mu)^2]}$$

$\mathbb{E}[X_i^2 - 2\mu X_i + \mu^2]$
$= \mathbb{E}[X_i^2] - \mu^2$
$= \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2$
$= \sigma^2$

Or $\mathbb{E}[X_i^2] = V(X_i) + \mathbb{E}[X_i]^2$
$= \sigma^2 + \mu^2$

$$= \frac{n}{2(\sigma^2)^2} + \frac{n}{(\sigma^2)^2}$$

$$= \frac{3n}{2(\sigma^2)^2}$$

3) Oui exhaustif car $L = \underbrace{(2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} n\hat{\sigma}^2\right)}_{f(\hat{\sigma}^2, \sigma^2)}$

$\times\ \varphi(x_1, \dots, x_n)$
$\varphi : (x_1, \dots, x_n) \mapsto 1$.

4) $$B_{\hat{\sigma}^2}(\sigma^2) = \mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] - \sigma^2$$

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2\right] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}[(X_i-\mu)^2]}_{=\sigma^2} = \frac{1}{n} \times n\sigma^2 = \sigma^2$$

$\Rightarrow B_{\hat{\sigma}^2}(\sigma^2) = 0$ Sans biais.

5) $V(\hat{\sigma}^2) = V\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu)^2\right)$

$$= \frac{1}{m^2} V\left(\sum_{i=1}^{m} \sigma^2 \left(\frac{X_i-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{m^2}\sigma^4 V\left(\sum_{i=1}^{m}\Big(\underbrace{\frac{X_i-\mu}{\sigma}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)}\Big)^2\right)$$

$$V\left(\sum_{i=1}^{m} Y_i^2\right)$$

$Y_i = \frac{X_i-\mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m} Y_i^2 \sim \chi_m^2$

$\Rightarrow V\left(\sum_{i=1}^{m} Y_i^2\right) = 2m$

$$= \frac{1}{m^2}\sigma^4\, 2m$$

$$= \frac{2\sigma^4}{m} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ Convergent

$I_m(\hat{\sigma}^2) = \frac{3m}{2\sigma^4} \Rightarrow I(\hat{\sigma}^2) = \frac{3}{2\sigma^4}$

Or $\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2 \Rightarrow g = Id$

Donc si $\hat{\sigma}^2$ efficace $\Rightarrow V(\hat{\sigma}^2) = I_m^{-1}(\hat{\sigma}^2)$

Or $V(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{m} \neq I_m^{-1}(\hat{\sigma}^2) = \frac{2\sigma^4}{3m}$

6) Comme $\hat{\sigma}^2$ est l'EMV de σ^2 et (H1) à (H7) ok

On a $\sqrt{m}\,(\hat{\sigma}^2 - \sigma^2) \longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \frac{2\sigma^4}{3}\right)$

7) (H1) à (H4) ok

$$L(x_1, \dots, x_m, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$= (2\pi)^{-m/2}(\sigma^2)^{-m/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$\Rightarrow \ln L = -\frac{m}{2}\ln(2\pi) - \frac{m}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-\mu)^2$$

$$* \frac{\partial}{\partial \mu} \ln L = + \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)$$

$\hookrightarrow \hat{\mu}$ est tq $\frac{1}{\sigma^2} \sum x_i - \frac{n\hat{\mu}}{\sigma^2} = 0$

$\Rightarrow \boxed{\hat{\mu} = \bar{X}_n}$

$$* \frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2$$

$\hookrightarrow \hat{\sigma}^2$ est tq $\frac{\partial}{\partial \sigma^2} \ln L = 0$

$\Rightarrow \boxed{\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2}$

$$* \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma^2} \ln L = -\frac{1}{(\sigma^2)^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)$$

$$* \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln L = -\frac{n}{\sigma^2} < 0$$

$$* \frac{\partial^2}{\partial (\sigma^2)^2} \ln L = -\frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu)^2 < 0$$

$X_i \rightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

$$\Rightarrow H(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = \begin{pmatrix} -\frac{n}{\sigma^2} & -\frac{1}{(\sigma^2)^2} \\ & \end{pmatrix}$$

def pos ok

8) $$I_n(\mu, \sigma^2) = \begin{pmatrix} -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln L\right] & -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma^2} \ln L\right] \\ & -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} \ln L\right] \end{pmatrix}$$

$$-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln L\right] = \frac{n}{\sigma^2}$$

$$-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial (\sigma^2)^2} \ln L\right] = \mathbb{E}\left[\frac{n}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6} \sum (X_i - \mu)^2\right]$$
$$= \frac{n}{2\sigma^4} + \frac{1}{\sigma^6} n\sigma^2$$
$$= \frac{n}{2\sigma^4} + \frac{n}{\sigma^4} = \frac{3n}{2\sigma^4}$$

$$-\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma^2} \ln L\right] = \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E}\left[\sum (X_i - \mu)\right] = 0$$

$$\cancel{= \frac{1}{\sigma^4} \mathbb{E}[n}$$

$$I_n(\mu, \sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{n}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{3n}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow I(\mu, \sigma^2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma^2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2\sigma^4} \end{pmatrix}$$

9) $L = (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum (x_i - \mu)^2\right)$

$= (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2} \hat{\sigma}^2\right)$

10) $B_{(\mu,\sigma^2)}(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) = \begin{pmatrix} \mathbb{E}[\hat{\mu}] \\ \mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mu \\ \sigma^2 \end{pmatrix}$

$\mathbb{E}[\hat{\mu}] = \mathbb{E}[\bar{X}_n]$

$= \frac{1}{n} \sum \mathbb{E}[X_i]$

$= \mu$

$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ SB

11) $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}^2) \in$ MV de (μ, σ^2) et (H1) à (H7) ok

donc $\sqrt{n}\begin{pmatrix} \hat{\mu} & \mu \\ \hat{\sigma}^2 & \sigma^2 \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 \\ 0 & \frac{2\sigma^4}{3} \end{pmatrix}\right)$

12) Dimens° $= 2$

$M_1(\mu) = \mathbb{E}[X]$ $\quad m_1 = \bar{X}_n$

$= \mu.$

$M_2(\sigma^2) = \mathbb{E}[X^2]$ $\quad m_2 = \overline{X^2_n}$

$= V(X) + \mathbb{E}[X]^2$

$= \sigma^2 + \mu^2$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu}^{MM} = \bar{X}_n \\ \hat{\sigma}^2_{MM} + \hat{\mu}^2_{MM} = \overline{X^2_n} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu}_{MM} = \bar{X}_n \\ \hat{\sigma}^2_{MM} = \overline{X^2_n} - \bar{X}_n^{\,2} \end{cases}$

On applique la méthode Delta au TCL bidim appliqué à $(\hat{\mu}_{MM}, \hat{\sigma}^2_{MM})$ et $g : (x,y) \longmapsto (x, y - x^2)$

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\mu}_{MM}-\mu\\ \hat{\sigma}^2_{MM}-\sigma^2\end{pmatrix}\longrightarrow \mathcal{N}\Big(0,\underbrace{\sigma^2(\mu,\sigma^2)\,(g'(\mu,\sigma))^2}_{\Sigma}\Big)$$

$$\Sigma=\begin{pmatrix}V(\hat{\mu}_{MM}) & Cov(\mu,\sigma^2)\\ Cov(\sigma^2,\mu) & V(\hat{\sigma}^2_{MM})\end{pmatrix}$$

$x \to (1,-2x)$

$y \to (0,1)$

$D_g\,\Sigma\,D_g'$

<u>Exercice 2</u> : $F_\theta(x)=1-\exp(-\theta x^c)$

1) $f_X(x)=\theta c x^{c-1}e^{-\theta x^c}$

2) $\mathbb{P}(\theta X^c\leq x)=\mathbb{P}(X^c\leq \frac{x}{\theta})$

$=\mathbb{P}(X\leq (\frac{x}{\theta})^{1/c})$

$=1-e^{-x}$ $\Rightarrow \theta X^c\sim\mathcal{E}(1)$

3) $L(X_1,\dots,X_n,\theta)=\prod\limits_{i} \theta c x_i^{c-1}e^{-\theta x_i^c}$

$=\theta^n c^n\prod x_i^{c-1}e^{-\theta x_i^c}$

(H_1) à (H_4) ok

$\ln L=n\ln\theta+n\ln c+(c-1)\sum\ln x_i-\theta\sum\limits_{i=1}^n x_i^c$

$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L=\frac{n}{\theta}-\sum\limits_{i=1}^n x_i^c$ <0 $\hat{\theta}$ ... ...

$\hat{\theta}=\frac{n}{\sum x_i^c}$

$\frac{\partial}{\partial\theta^2}\ln L=-\frac{n}{\theta^2}<0$

ok

4) $I_n(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln L\right] = \frac{n}{\theta^2} \Rightarrow I(\theta) = \frac{1}{\theta^2}$

5) $L = \theta^n c^n \prod x_i^{c-1} e^{-\theta x_i^c}$

$$\left(\prod x_i^{c-1}\right) \times \exp\left(-\theta \sum x_i^c\right)$$

$$\underbrace{\theta^n c^n \exp\left(-\frac{n\theta}{\hat{\theta}}\right)}_{\varphi} \underbrace{\left(\prod x_i^{c-1}\right)}_{\psi}$$

Ok

6) $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \mathbb{E}\left[\frac{n}{\sum x_i^c}\right]$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{\theta n}{\sum \theta x_i^c}\right]$$

On rq $\sum \theta X_i^c \sim \Gamma(n,1)$

Soit $Y \sim \Gamma(n,1)$ On cherche à calculer $\mathbb{E}\left[\frac{1}{Y}\right]$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{Y}\right] = \int_\Omega \frac{1}{y} \frac{1}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-y} dy$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{(n-1)!} y^{n-2} e^{-y} dy$$

$$= \frac{1}{(n-1)} \int_\Omega \underbrace{\frac{1}{(n-2)!} y^{n-2} e^{-y}}\, dy$$

On reconnait $f_{\Gamma(n-1,1)} \Rightarrow \int \ldots = 1$

$$= \frac{1}{n-1}$$

Donc $\left[Y = \frac{1}{\sum \theta x_i^c} \text{ ici}\right]$, $\mathbb{E}\left[\frac{\theta n}{\sum \theta x_i^c}\right] = \theta n \times \frac{1}{n-1} = \frac{n\theta}{n-1}$

$$\Rightarrow B_{\hat{\theta}}(\theta) = \frac{n\theta}{n-1} - \theta = \frac{\theta}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

asympt SB.

7) $$V(\hat{\theta}) = V\left(\frac{n}{\sum x_i^c}\right) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{n}{\sum x_i^c}\right)^2\right] - \left(\frac{n\theta}{n-1}\right)^2$$

$$= \mathbb{E}\left[\left(\frac{\theta n}{\sum \theta x_i^c}\right)^2\right] - \left(\frac{n\theta}{n-1}\right)^2$$

$$= \frac{n^2\theta^2}{(n-1)(n-2)} - \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2}$$

$$= \frac{n^2(n-1)\theta^2 - n^2(n-2)\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

$$= \frac{(n^3 - n^2 - n^3 + 2n^2)\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

$$V(\hat{\theta}) = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)}$$

Efficace si $V(\hat{\theta}) = \frac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$ $\qquad g : x \mapsto \frac{nx}{n-1} \Rightarrow g'(x) = \frac{n}{n-1}$

$$\frac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)} = \frac{\left(\frac{n}{n-1}\right)^2}{\frac{n}{\theta^2}} = \frac{n\theta^2}{(n-1)^2} \neq V(\hat{\theta}) = \frac{n^2\theta^2}{(n-1)(n-2)}$$

$\Rightarrow$ Non efficace.

8) $$\sqrt{n}\,(\hat{\theta} - \theta) \longrightarrow \mathcal{N}\Big(0, \underbrace{\sigma^2(\theta)(g'(\theta))^2}_{\frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2(n-2)} \times \frac{n^2}{(n-1)^2}}\Big)$$

g) 1 dimens° $\longrightarrow$ $M_1(\theta) = \mathbb{E}[X]$ $\quad m_1 = \bar{X}_n$

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x\,\theta c\, x^{c-1} e^{-\theta x^c}\, dx = \int_0^\infty \left(\frac{u}{\theta}\right)^{1/c} e^{-u}\, du$$

$u = \theta x^c \qquad x = \left(\frac{u}{\theta}\right)^{1/c}$

$du = \theta c\, x^{c-1} dx$

$\frac{1}{\theta c x^{c-1}} du = dx$

$$= \left(\frac{1}{\theta}\right)^{1/c} \int_0^\infty u^{1/c} e^{-u}\, du$$