Provisionnement non vie

22 mai 2018

M1 Actuariat, année 2017-2018

Durée : 2h

La calculatrice est autorisée ainsi qu'une feuille manuscrite *seulement recto.*

Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.

Exercice 1 Nous considérons le triangle de paiements de sinistres incrémentaux, effectués par une compagnie d'assurance en RC automobile au titre des exercices de 1988 à 1997 :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1988	233	654	1661	1805	1857	1332	591	44	118	411
1989	142	686	1930	1654	1648	1388	760	347	67	
1990	189	738	2377	2715	1444	1479	424	140		
1991	142	901	1256	1465	1035	581	462			
1992	98	1186	2529	2182	1122	729				
1993	164	660	1899	1367	2126					
1994	164	1074	1772	1593						
1995	285	942	1922							
1996	213	645								
1997	163									

À l'aide du logiciel R, nous avons estimé plusieurs modèles. Les résultats sont présentés ci-dessous.

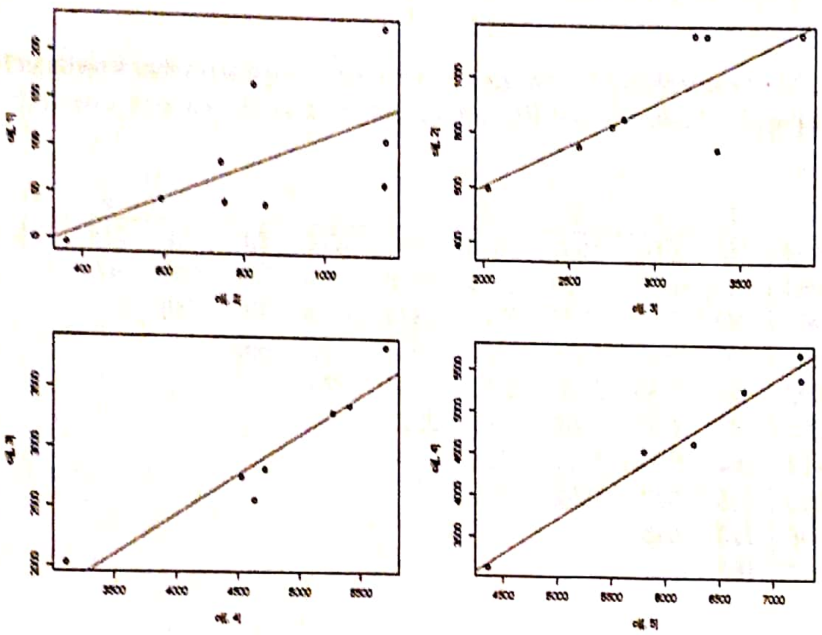
1) Modèle de Mack. Nous présentons, dans l'ordre, le tableau issu de la commande *MackChainLadder* en R (*dans lequel les colonnes f_j et σ_j^2 ont été rajoutées*), le d-triangle avec le coefficient de variation par colonnes et les C-C plots pour les premières colonnes avec la droite de régression estimée.

```
  Latest  Dev.To.Date  Ultimate  IBNR Mack.S.E  CV(IBNR)       f_j      sigma^2_j
1  8,706        1.000     8,706   0.0      0.0       NaN  5.592638  1059.6396050
2              0,9527     9.050
3  9,506       0,9424    10,087   581     80.2     0.138  1.624835    37.8501331
4  5,842       0.9233     6,327   485    166.4     0.343  1.322425    75.4519451
5  7,846       0.8578     9,146 1,300    306.5     0.236  1.174066    20.7013965
6  6,216       0.7307     8,507 2,291    543.2     0.237  1.076317     4.3066419
7  4,603       0.5525     8,331 3,728  1,021.3     0.274  1.020656     3.0160865
8  3,149       0.3400     9,261 6,112  1,276.5     0.209  1.011057     0.1820657
9    858       0.1190     7,212 6,354  1,761.2     0.277  1.049548     0.1655696
10   163       0.0213     7,663 7,500  4,091.7     0.546  1.000000
               Totals
Latest:     55,511.00
Dev:             0.66
Ultimate:   84,290.32
```

```
IBNR:        28,779.32
Mack.S.E      5,110.46
CV(IBNR):         0.18
```

Mack

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3.8068	2.8726	1.7083	1.4266	1.2144	1.0783	1.0054	1.0144	1.0495
2	5.8309	3.3309	1.5997	1.3735	1.2290	1.1020	1.0422	1.0078	
3	4.9047	3.6641	1.8217	1.2309	1.1981	1.0474	1.0149		
4	7.3450	2.2042	1.6372	1.2749	1.1210	1.0858			
5	13.1020	2.9696	1.5722	1.1871	1.1024				
6	5.0243	3.3046	1.5020	1.5198					
7	7.5487	2.4313	1.5292						
8	4.3052	2.5664							
9	4.0281								
CV	0.4694	0.1651	0.0681	0.0937	0.0489	0.0212	0.0187	0.0046	



i) Compléter la ligne 2 du premier tableau tout en expliquant ce que chaque quantité représente.

ii) Commenter l'applicabilité de la méthode de Mack sur ce triangle en s'appuyant sur les éléments de validation présentés.

iii) Quelle solution proposeriez-vous ?

2) Modélisation Log Poisson surdispersée (loi de Poisson surdispersée et fonction lien ln). Pour ce modèle, nous avons calculé les quantités suivantes :

	CV(R_i)
1	NaN
2	0.41
3	0.35
4	0.39
5	0.25
6	0.20
7	0.18
8	0.17

9	0.29
10	0.84

et avons également obtenu $sep(R) = 8189.215$.

i) Définir la loi de Poisson surdispersée et en expliquer l'utilité.
ii) Calculer $CV(R)$.

3) Modèle Lognormale. Nous avons obtenu les estimations ci-dessous :

```
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  5.12363    0.17408  29.436  < 2e-16 ***
anF2         0.14308    0.16989   0.842   0.4052
anF3         0.12527    0.17768   0.705   0.4853
anF4        -0.24190    0.18618  -1.299   0.2021
anF5        -0.03758    0.19628  -0.191   0.8492
anF6        -0.01280    0.20910  -0.061   0.9515
anF7         0.03868    0.22649   0.171   0.8654
anF8         0.25529    0.25233   1.012   0.3184
anF9         0.02023    0.29669   0.068   0.9460
anF10       -0.02988    0.40023  -0.075   0.9409
devF2        1.54283    0.16989   9.081 7.64e-11 ***
devF3        2.38204    0.17768  13.407 1.45e-15 ***
devF4        2.35815    0.18618  12.666 7.90e-15 ***
devF5        2.18640    0.19628  11.139 3.22e-13 ***
devF6        1.81572    0.20910   8.684 2.34e-10 ***
devF7        1.16987    0.22649   5.165 9.06e-06 ***
devF8       -0.35469    0.25233  -1.406   0.1684
devF9       -0.70748    0.29669  -2.385   0.0225 *
devF10       0.89496    0.40023   2.236   0.0316 *
---
Signif. codes:  0 *** 0.001 ** 0.01 * 0.05 . 0.1   1

Residual standard error: 0.3604 on 36 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.9233,Adjusted R-squared:  0.885
F-statistic: 24.08 on 18 and 36 DF,  p-value: 7.171e-15
```

$$Var(Y_{ij}) = \exp(2m_{ij} + \sigma^2)(e^{\sigma^2} - 1)$$

ce qui nous a permis de calculer les quantités suivantes :

	R_i	sep(R_i)	CV(R_i)
1	0	NaN	NaN
2	1507.64	327.52	0.22
3	444.84	321.74	0.72
4	1050.86	222.87	0.21
5	609.41	273.39	0.45
6	2451.55	280.25	0.11
7	4522.44	295.05	0.07
8	8183.47	366.41	0.04
9	8100.59	289.66	0.04
10	8357.78	275.50	0.03

```
R   35301.79
sep(R) 935.6478
CV(R) 0.03
```

i) Détailler le calcul de la provision pour l'année d'origine 3.
ii) Comment avons-nous calculé $sep(R_i)$? Et $sep(R)$?

4) modèle Log Gamma (loi de Gamma et fonction lien ln). Nous avons calculé :

	R_i	sep(R_i)	CV(R_i)
1	0	NaN	NaN
2	1077.53	236.49	0.22
3	-258.24	234.37	-0.91
4	750.08	182.01	0.24

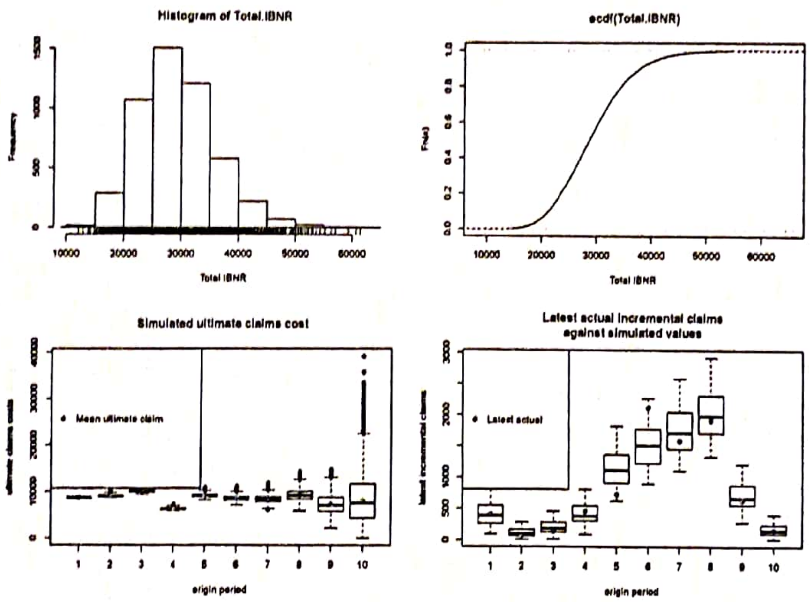
5	610.66	356.43	0.58
6	2103.18	623.32	0.30
7	4049.57	1062.68	0.26
8	7645.21	1994.38	0.26
9	7682.44	2284.47	0.30
10	7764.52	3026.69	0.39

R	31314.78
sep(R)	7183.385
CV(R)	0.28

Nous avons ensuite effectué un Bootstrap sur ce modèle ($B=5000$) et nous avons obtenu :

	Latest	Mean Ultimate	Mean IBNR	IBNR.S.E	IBNR 75%	IBNR 95%
1	8,706	8,706	0	0	0	0
2	8,622	9,051	429	265	581	903
3	9,506	10,084	578	305	756	1,144
4	5,842	6,331	489	240	627	945
5	7,846	9,151	1,305	406	1,554	2,035
6	6,216	8,526	2,310	545	2,651	3,258
7	4,603	8,349	3,746	766	4,219	5,092
8	3,149	9,252	6,103	1,236	6,904	8,234
9	858	7,295	6,437	2,077	7,817	10,078
10	163	8,047	7,884	5,743	11,245	18,445

	Totals
Latest:	55,511
Mean Ultimate:	84,791
Mean IBNR:	29,280
IBNR.S.E	6,641
Total IBNR 75%:	33,267
Total IBNR 95%:	41,210



a) Comparer ces derniers résultats aux résultats obtenus par le modèle Log Gamma sans Bootstrap. Le Bootstrap permet-il d'améliorer les résultats ?

b) Au vu des graphiques, pouvons-nous considérer cette méthode satisfaisante ?

c) Donner la provision suffisante dans 95% des cas dans le modèle Log Gamma avec Bootstrap. Et pour le modèle de Mack qu'obtenons-nous ?

5) Au vu des résultats obtenus pour la provision globale par les différentes méthodes (modèle de Mack, modèle Log Poisson surdispersé, modèle lognormale, modèle Log Gamma, Bootstrap avec modèle Log Gamma) quelle méthode privilegeriez-vous ? Pourquoi ? Si vous le souhaitez, vous pouvez résumer les résultats dans un tableau afin de faciliter la comparaison entre les méthodes.

6) Nous disposons à présent d'une information complémentaire donnée par les primes ultimes :

1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
8800	9675	9134	6600	8230	8100	8560	10700	8500	7687

a) Calculer le montant de provision globale par la méthode Cape Cod en justifiant le choix effectué pour les groupes d'années d'origine semblables. *N.B. Le vecteur des cadences de règlement est celui estimé par Chain-Ladder.*

b) Quelle méthode proposeriez-vous afin de prendre en compte dans le calcul de la provision un avis d'expert sur le développement futur des loss-ratios ?

Exercice 1:

1) i) Sur la ligne 2,

$$\text{Latest} = C_{2,9} = \sum_{h=1}^{9} x_{2h} = 8622$$

Cela correspond au dernier montant connu pour les sinistres survenus l'année 2 (ici 1989).

$$\text{Dev.To.Date} = \frac{\text{Latest}}{\text{Ultimate}} = 0{,}9528$$

Cela correspond au vecteur des cadences de règlement

$$\text{Ultimate} = C_{2,10} = C_{2,10-2} f_9 = 9049$$

Cela correspond au vecteur des charges ultimes estimées par le modèle de Mack.

$$\text{IBNR} = \text{Ultimate} - \text{Latest} = 427$$

Cela correspond au vecteur des provis° estimées par année d'origine.

$$\text{MackSE} = \sqrt{MSEP(\hat{R}_i)} = \sqrt{C_{2\,10}^2 \frac{\sigma_9^2}{f_9^2}\left[\frac{1}{C_{29}} + \frac{1}{C_{19}}\right]} = 53{,}96$$

$$\widehat{MSEP}(\hat{R}_i) = \hat{C}_{in}^2 \sum_{j=n-i+1}^{n-1} \frac{\hat{\sigma}_j^2}{\hat{f}_j^2}\left[\frac{1}{\hat{C}_{ij}} + \frac{1}{\sum_{k=1}^{n-j} C_{kj}}\right]$$

$$CV(\text{IBNR}) = \frac{\text{MackSE}}{\text{IBNR}} = 0{,}126$$

$$f_2 = \frac{\sum_{i=1}^{8} f_{i2} C_{i2}}{\sum_{i=1}^{8} C_{i2}} = 2{,}88$$

$$C_{ij} = \sum_{h=1}^{j} x_{ih}$$

$C_{12} = \sum_{1}^{2} x_{1h} = 887$ $\quad C_{22} = 828$ $\quad C_{32} = 927$ $\quad C_{42} = 1043$

$C_{52} = 1284$ $\quad C_{62} = 824$ $\quad C_{72} = 1227$ $\quad C_{82} = 858$

$\sum = 7878$

$$\sigma_2^2 = \frac{1}{7}\sum_{i=1}^{8} C_{i2}\left(\frac{C_{i3}}{C_{i2}} - f_2\right)^2 = 229{,}07.$$

ii) Les coefficients du d-triangle ne sont pas constants par colonne.

et concernant les C-C plots, les points ne sont globalem^t pas alignés sur une droite passant par l'origine.

$\Longrightarrow$ On ne valide pas la méthode de Mack.

iii) On peut réécrire le modèle avec : $C_{i,j+1} = f_j C_{ij} + \sigma_j^2 \sqrt{C_{ij}}\, \varepsilon_{ij}$ avec ε_{ij} iid centrés et de variance unitaire.

2) i) Utile si surdispersion des données puisque $\mathbb{E}[X] \neq Var(X)$ pour cette loi :

$$X \sim \mathcal{P}_{surd}(\lambda, \phi) \text{ ssi } \frac{X}{\phi} \sim \mathcal{P}\left(\frac{\lambda}{\phi}\right)$$

ii) On a $sep(R) = 8189{,}215$ et le R du modèle de Mack $R = 28\,779{,}32$ car Mack et log Poisson dispersé donne le m̂ R.

$$\Longrightarrow CV(R) = \frac{sep(R)}{R} = 0{,}285$$

3) i) $\hat{R}_3 = e^{\hat{\mu}+\frac{\hat{\sigma}^2}{2}+\hat{\alpha}_3}\left[e^{\hat{\beta}_9}+e^{\hat{\beta}_{10}}\right] = \sum_{i+j-1>m} \dots = \sum_{3+j-1>10} \dots = \sum_{j>8} \dots$

$= e^{5.12363+\frac{0.3604^2}{2}+0.12527}\left[e^{-0.70748}+e^{0.85495}\right]$

$= 597.23 \neq 444.84$ ⟶ Erreur sujet.

ii) $Sep(\hat{R}_i) = \sqrt{Var(R_i)} = \sqrt{Var(\sum X_{ij})}$

$\underset{X_{ij} \perp\!\!\!\perp}{=} \sqrt{\sum Var(X_{ij})}$ et $Var(X_{ij}) = Var(LN)$ ⟶ qu'on a dans le tableau

$= exp(2m_{ij}+\sigma^2)(e^{\sigma^2}-1) = exp(2(\mu+\alpha_i+\beta_j+\frac{\sigma^2}{2}))(e^{\sigma^2}-1)$

Idem pour $Sep(R)$.

4) a) Sans bootstrap : $R = 31314{,}78$ $\quad CV(R) = 0{,}28$

Avec bootstrap : $R = 29280$ $\quad CV(R) = 0{,}227$

On améliore le coeff de variat° ⟹ + petite dispersion donc bien.

⟹ amélioration

b) Oui sauf pour années 5 et 6 pour le lest actual incremental claims

c) $R_{95\%} = 41210$ ⟵ Log Gamma avec bootstrap

$R_{95\%} = \mathbb{E}[R] + 1{,}96\, Var(R)$
$= 28779{,}32 + 1{,}96 \times 5110{,}46$
$= 38795{,}82.$

5) On choisi la méthode avec la + petite dispersion pour se rapproche de la réalité.

6) c) $R_i = (1-p_{m-i})\, L_{A_i} P_i$ $\quad$ avec $L_{A_i} = \dfrac{\sum_{k \in A_i} C_{k,m-k}}{\sum_{k \in A_i} p_{m-k} P_k}$ $\quad p_{m-i} = \dfrac{C_{i,m-i}}{C_{im}}$ $\quad L_A = \dfrac{\sum_{k=2}^{6} C_{k,m-k}}{\sum_{k=2}^{6} p_{m-k} P_k} = 1{,}033127$

Groupe A $\quad$ Dem, $L_B = 0{,}919354$

Les cadences de réglement pour les années 2 à 6 sont $> 0{,}6$ donc on les regroupe
Pour les années 7 à 10 $< 0{,}55$ ⟹ on regroupe.
Groupe B

Groupe A
$$\begin{cases} R_2 = \left(1-\frac{C_{2,m-2}}{C_{2,m}}\right) L_A P_2 = \left(1-\frac{8622}{9050}\right) \times L_A \times 9675 = 472{,}7154 \\ R_3 = \left(1-\frac{9566}{10087}\right) \times L_A \times 9134 = 543{,}5365 \\ R_4 = \left(1-\frac{5842}{6327}\right) \times L_A \times 6600 = 522{,}6867 \\ R_5 = \left(1-\frac{7846}{9146}\right) \times L_A \times 8230 = 1208{,}5527 \\ R_6 = \left(1-\frac{6216}{8507}\right) \times L_A \times 8100 = 2253{,}6543 \end{cases}$$

$$\text{Groupe B}\begin{cases} R_7 = \left(1-\frac{4603}{8331}\right)\times L_B \times 8560 = 3521{,}5625 \\ R_8 = \left(1-\frac{3149}{9261}\right)\times L_B \times 10700 = 6492{,}2032 \\ R_9 = \left(1-\frac{858}{7212}\right)\times L_B \times 8500 = 6884{,}8310 \\ R_{10} = \left(1-\frac{163}{7663}\right)\times L_B \times 7687 = 6916{,}7517 \end{cases}$$

$$\Rightarrow R = \sum R_i = 28\,816{,}4940$$

b) Pour prendre en compte l'avis d'un expert sur le dvp^t futur des Loss-Ratios, il faudrait utiliser la méthode de Bornhuetter-Ferguson

$$R_i^{BF} = (1-\hat{p}_{n-i})\hat{S}_i \qquad \text{avec } \hat{S}_i = \underline{\phi_i} P_i$$

$\hat{S}_i$: Charge ultime a priori $\qquad$ ϕ_i : avis d'expert.

6) Nous disposons à présent d'une information complémentaire donnée par les primes ultimes :

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1988	1989	1990	1991	1992	1993	1994	1995	1996	1997
8800	9675	9134	6600	8230	8100	8560	10700	8500	7687

a) Calculer le montant de provision globale par la méthode Cape Cod en justifiant le choix effectué pour les groupes d'années d'origine semblables. *N.B. Le vecteur des cadences de règlement est celui estimé par Chain-Ladder.*

b) Quelle méthode proposeriez-vous afin de prendre en compte dans le calcul de la provision un avis d'expert sur le développement futur des loss-ratios ?