Probas Avancées 2 : Notes

I / Vecteurs aléatoires

$$\mathbb{P}_{X|Y=y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$ densité de proba conditionnelle

$$m_k = \mathbb{E}(X^k) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)\,dx & \text{si } X \text{ admet une densité} \\ \sum_{i=1}^{\infty} x_i^k \mathbb{P}(X=x_i) & \text{si } X \text{ discrète} \end{cases}$$

Moment d'ordre k d'une VAR

$$\overline{m}_k = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))^k]$$ Moment centré d'ordre k

Si X admet un mom^t d'ordre 1 → X admet une espérance et $X \in \mathcal{L}^1$

2 → " variance et $X \in \mathcal{L}^2$

$X, Y \in \mathcal{L}^2$ Covariance de X et Y : $Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}(X))(Y-\mathbb{E}(Y))]$

Coeff de corrélat° lin. : $\rho(X,Y) = \frac{Cov(X,Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}$

* $\rho \in [-1,1]$
* $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \rho = 0$
* Si $\rho = 1$ (resp -1) $\Rightarrow \exists$ une relat° linéaire entre X et Y de pente positive (resp négative)

$\mathcal{L}^{\infty}(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ev des VAR tq $\sup\{x \mid \mathbb{P}(|X|>x)>0\} < \infty$

$$\Rightarrow \|X\|_\infty = \sup\{x \mid \mathbb{P}(|X|>x)>0\}$$

* $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P} : \mathbb{R}^n)$ $\quad \bar{X} = \mathbb{E}(X) = \mathbb{E}[(X_1, \ldots, X_n)] = (\mathbb{E}(X_1), \ldots, \mathbb{E}(X_n))$

$\bar{X} = (\bar{X}_1, \ldots, \bar{X}_n)$ tq $\forall i \;\; \bar{X}_i = \mathbb{E}(X_i)$

$X - \bar{X}$ est appelé vecteur aléatoire centré associé à X

Matrice de variances-covariances de $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P} : \mathbb{R}^n)$

$$\Gamma_X = V(X) = \mathbb{E}[(X - \bar{X}) \cdot {}^t(X - \bar{X})]$$

$$V_{i,j}(X) = \mathbb{E}(\bar{X}_i \bar{X}_j) = Cov(X_i X_j)$$

Cas bivarié :

$X = (X_1, X_2)$ VA de loi continue

$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = g(X) = \begin{pmatrix} g_1(X_1, X_2) \\ g_2(X_1, X_2) \end{pmatrix}$ où

le système d'équat° $\begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = h_1(y_1, y_2) \\ x_2 = h_2(y_1, y_2) \end{cases}$

Les fonct° g_1 et g_2 sont continuement différentiable et de matrice jacobienne

$$J(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

alors $f_{Y_1, Y_2}(y_1, y_2) = f_{X_1, X_2}(x_1, x_2) \, |J(x_1, x_2)|^{-1} \Big|_{(x_1, x_2) = h(y_1, y_2)}$

Cas multivarié :

$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \, |\det J(y)|^{-1}|$

Sommes de VA indep :

Soient X et Y 2 VA indep et $S = X+Y$

$$\Rightarrow f_S(s) = f_X * f_Y(s) = \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(s-x)\,dx & \text{si } X \text{ et } Y \text{ continues} \\ \sum_{x \in Supp(X,Y)} f_X(x) f_Y(s-x) & \text{si } X \text{ et } Y \text{ discrètes} \end{cases}$$

Généralisat° dimension n :

$X_1, \ldots, X_n$ vecteurs aléatoires indep, $S = \sum_{i=1}^{n} X_i$

$$\Rightarrow f_S(s) = f_{X_1} * \ldots * f_{X_n}(s)$$

II / Fonction Caractéristique

On appelle transformée de Fourier de la mesure $\mathbb{P}$ fonction $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tq $\phi(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx}\, d\mathbb{P}(x)$

Fonction Caractéristique :

Cas univarié : X une VAR, $\phi_X(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx} dP_X(x)$
$= \mathbb{E}_P(e^{itX})$

Cas multivarié : $X = (X_1, \dots, X_n)$
$\forall t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, $\phi_X(t) = \mathbb{E}(e^{i\langle t, X\rangle}) = \mathbb{E}_P(e^{i\sum_{k=1}^{n} t_k X_k})$

* $\phi_X(t) = \phi_Y(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ $P_X = P_Y$ (m̂ loi)

* $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$ ssi $\forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^{d_1} \times \mathbb{R}^{d_2}$, $\phi_{(X_1, X_2)}(t_1, t_2) = \phi_{X_1}(t_1) \cdot \phi_{X_2}(t_2)$

* $\forall t_2 \in \mathbb{R}^{d_1}$, $\phi_{X_2}(t_2) = \phi_X(0, t_2)$

$X_1 \perp\!\!\!\perp \dots \perp\!\!\!\perp X_n \Rightarrow \phi_{X_1 + \dots + X_n}(t) = \phi_{X_1}(t) \dots \phi_{X_n}(t)$ $\forall t \in \mathbb{R}^d$

* Si X admet un moment d'ordre m $\Rightarrow$ ϕ_X est C^m et $\forall k$ tq $1 \leq k \leq m$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \ \phi_X^{(k)}(t) = i^k \int_{\mathbb{R}} x^k e^{itx} dP_X(x)$$

en particulier : $\phi_X^{(k)}(0) = i^k \mathbb{E}(X^k)$

Exemples de fonctions caractéristiques de lois usuelles

Loi discrètes	*probabilités*	$\phi_X(t)$
Bernouilli $b(p)$	$p\delta_1 + (1-p)\delta_0$	$(1-p) + pe^{it}$
Binomiale $B(n,p)$	$C_n^k p^k q^{(n-k)}$	$\left((1-p) + pe^{it}\right)^n$
Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	$\exp\left(\lambda e^{it} - 1\right)$
Lois continues	*densités*	$\phi_X(t)$
Uniforme	$\mathbb{1}_{[0,1]}(x)$	$\frac{e^{it}-1}{it}$
Normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$	$e^{i\mu t - \sigma^2\frac{t^2}{2}}$
Exponentielle $\mathcal{E}(\theta)$	$\theta e^{-\theta x}$	$\frac{\theta}{\theta - it}$
Gamma $\Gamma(\theta,p)$	$\frac{\theta^p}{\Gamma(p)}e^{-\theta x}x^{p-1}$	$\left(\frac{\theta}{\theta-it}\right)^p$
Cauchy	$\frac{1}{\pi(x^2+1)}$	$e^{-\lvert t\rvert}$
Laplace	$\frac{1}{2}e^{-\lvert x\rvert}$	$\frac{1}{1+t^2}$

Rappel :

* Soient $X_1, \dots, X_n$ VAR $\perp\!\!\!\perp$ et $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$
$\Rightarrow X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(n, \lambda)$

* Loi de Cauchy n'a aucun moment

* $X \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $Y \sim \mathcal{N}(\ell, \rho^2)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$
$\Rightarrow X + Y \sim \mathcal{N}(m+\ell, \sigma^2+\rho^2)$

III / Vecteurs Gaussiens

Une VAR X est dite normale / gaussienne si densité de la forme :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}} \qquad \mu \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}_+^*$$

Si $\mu = 1$ et $\sigma = 0$, la VA est dite gaussienne centrée réduite

* Thm changem^t de var : $X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow aX+b \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

* Moment d'une VA gaussienne centrée réduite :
$X \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $r \in \mathbb{N}$
- Si r impair, $\mathbb{E}(X^r) = 0$
- Si r pair, $\mathbb{E}(X^r) = 2^{r/2} \dfrac{\Gamma\left(\frac{r+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}}$

* $X \sim \mathcal{N}(0,1) \Rightarrow \Phi_X(t) = e^{-\frac{t^2}{2}}$
$X \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2) \Rightarrow \Phi_X(t) = e^{it\mu} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Stabilité par C-L : $\alpha X + \beta Y \sim \mathcal{N}(\alpha\mu_X + \beta\mu_Y \,;\, \alpha^2\sigma_X^2 + \beta^2\sigma_Y^2)$

$X = (X_1, \dots, X_n)$ est un vecteur gaussien (non dégénéré) s'il admet une densité p/r^t à la mes de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ de la forme :

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{\det \Sigma}} e^{-\frac{{}^t(x-\mu)\Sigma^{-1}(x-\mu)}{2}}$$

où $\mu \in \mathbb{R}^n$ et $\Sigma \in S_n^+$

* X vecteur gaussien ssi $\forall \alpha \in \mathbb{R}^n$, ${}^T\alpha X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i X_i$ est une VA gaussienne

* Les VA ctes sont les variables gaussiennes dégénérées ($\sigma = 0$)

* X vecteur gaussien ssi $\exists \Sigma \in S_n^+(\mathbb{R})$ (qui est la matrice variance-cov de X) et $\mu \in \mathbb{R}^n$ (égal à $\mathbb{E}(X)$) tq $\Phi_X(t) = e^{i\langle t,\mu\rangle - \frac{{}^Tt \cdot \Sigma \cdot t}{2}}$

* Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ vecteur aléatoire gaussien (non dégén.)
Les X_i sont $\perp\!\!\!\perp$ ssi les X_i sont non corrélées : $Cov(X_j, X_k) = 0$
ssi $\Gamma(X)$ est diagonale

⚠ Vecteur Gaussien $\Rightarrow$ $X_i \perp\!\!\!\perp \Leftrightarrow Cov(X_j, X_k) = 0$
En temps normal ce n'est pas vrai !
Même s'il s'agit de VA gaussiennes.

Loi du χ^2 : X_i VA gaussiennes centrées réduites indep

$$\Rightarrow U_n = X_1^2 + \ldots + X_n^2 \sim \Gamma\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

$$f(u) = \frac{(1/2)^{n/2}}{\Gamma(n/2)} \exp\left(-\frac{u}{2}\right) u^{\frac{n}{2}-1} \qquad u > 0$$

$$\mathbb{E}(U_n^r) = 2^r \frac{\Gamma(n/2 + r)}{\Gamma(n/2)}$$

avec $\mathbb{E}(U_n) = n$ et $V(U_n) = 2n$

Loi de Student : $Y \perp\!\!\!\perp Z$, $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $Z \sim \chi^2(n)$

$$T_n = \frac{Y}{\sqrt{\frac{Z}{n}}}$$ suit une loi de Student à n deg de liberté

$$f(u) = \frac{1}{\sqrt{n\pi}} \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \left(1 + \frac{u^2}{n}\right)^{-\frac{n+1}{2}} \qquad \forall u \in \mathbb{R}$$

Loi de Fischer-Snedecor : $X \perp\!\!\!\perp Y$ et $X \sim \chi^2(n)$
$Y \sim \chi^2(m)$

$$F = \frac{X/n}{Y/m} \sim \mathcal{F}(n,m) \qquad B = \frac{X}{Y} \sim \mathcal{B}\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)$$

avec :

$$f_F(x) = \frac{1}{B\left(\frac{n}{2}, \frac{m}{2}\right)} n^{\frac{n}{2}} m^{\frac{m}{2}} \frac{x^{\frac{n}{2}-1}}{(m+nx)^{\frac{n+m}{2}}} \qquad f_B(x) = \frac{1}{B(p,q)} \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} \qquad \forall x > 0$$

avec $B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$

Théorème de Cochran :

$(X_1, \ldots, X_n)$ un échantillon gaussien de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

$$\overline{X_n} = \frac{X_1 + \ldots + X_n}{n}$$

Moyenne empirique de l'échantillon

$$\overline{V_n} = \frac{1}{n}\left[(X_1 - \overline{X_n})^2 + \ldots + (X_n - \overline{X_n})^2\right]$$

Variance empirique

Alors :

1. $\overline{X_n} \sim \mathcal{N}(m, \frac{\sigma^2}{n})$
2. $\left(\frac{n}{\sigma^2}\overline{V_n}\right) \sim \chi^2_{n-1}$
3. $\overline{X_n} \perp\!\!\!\perp \overline{V_n}$
4. $\dfrac{\overline{X_n} - m}{\sqrt{\overline{V_n}/(n-1)}} \sim T_{n-1}$

IV / Convergence de suites de variables aléatoires.

* On dit qu'une suite de vect. aléat. X_n CV p.s. vers X $(X_n \xrightarrow{p.s.} X)$ si $\mathbb{P}(\omega : X_n(\omega) \longrightarrow X(\omega)) = 1$

$X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si l'ensemble des ω tq X_n ne CV pas est de mesure nulle

* " X_n CV en proba vers X $(X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X)$ si $\forall \varepsilon > 0, \lim_{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$

Borel - Cantelli :

(X_n) suite de VA et X une VA sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Si $\forall \varepsilon > 0, \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) < \infty \Longrightarrow X_n \xrightarrow{p.s.} X$

Si $X_n \perp\!\!\!\perp$ alors :

$$X_n \xrightarrow{p.s.} 0 \Longleftrightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) < \infty \quad \forall \varepsilon > 0$$

* X une VAR et (X_n) suite de VAR, une CNS de $X_n \xrightarrow{p.s.} X$:

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega, \sup_{m \geq n} |X_m(\omega) - X(\omega)| > \varepsilon\right\}\right) \longrightarrow 0$$

ou $\mathbb{P}\left(\bigcup_{k \geq n} (|X_n - X| > \varepsilon)\right) \longrightarrow 0$

* (X_n) suite de va dans $\mathbb{R}^k$ alors

$$X_n \xrightarrow{p.s.} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$$

! Réciproque fausse

* $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Leftrightarrow$ toute sous-suite de (X_n) contient une sous-suite qui CV p.s. vers X
* Pour $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ il faut et il suffit que X_n soit de Cauchy pour la CV en proba

i.e $\forall \varepsilon > 0, \lim_{n,m} \mathbb{P}(|X_n - X_m| > \varepsilon) = 0$

* Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$ $\quad f$ mes. continue

Inégalités classiques:

* **Inégalité de Markov:** $\forall \alpha > 0, \mathbb{P}(|X| \geq \alpha) \leq \frac{1}{\alpha^k} \mathbb{E}[|X|^k]$

* **Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev:** Soit $X \in \mathcal{L}^2$

$$\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X - m| \geq \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon^2} \sigma^2$$

* **Inégalité de Jensen:** Soit φ convexe sur I et X une VA à valeurs dans I tq X et $\varphi(X)$ $\mathcal{L}^1$

$$\varphi(\mathbb{E}(X)) \leq \mathbb{E}(\varphi(X))$$

* **Inégalité de Hölder:** Soient p et q tq $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$

$$\mathbb{E}[|XY|] \leq \mathbb{E}[|X|^p]^{1/p} + \mathbb{E}[|Y|^q]^{1/q}$$

* **Inégalité de Schwartz:** $\mathrm{Cov}(X,Y) \leq \sqrt{V(X)V(Y)}$

* **Inégalité de Lyapounov:** Soient $0 < \alpha < \beta$

$$\mathbb{E}[|X|^\alpha]^{1/\alpha} \leq \mathbb{E}[|X|^\beta]^{1/\beta}$$

Convergence dans $\mathcal{L}^p$: (X_n) et X des va de $\mathbb{R}^k$. X_n CV dans $\mathcal{L}^p$ vers X si : $|X|^p$ intégrable et si $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[|X_n - X|^p] = 0$

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X$ ssi $\begin{cases} X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \\ \text{et} \\ X_n \text{ uniformément intégrable} \end{cases}$ i.e $\forall \varepsilon>0, \exists k>0, \forall n\in\mathbb{N}, \mathbb{E}[|X_n| \mathbb{1}_{|X_n|\geq k}] < \varepsilon$

Convergence en loi :

* $\mathbb{P}_n \xrightarrow{e} \mathbb{P}$ si $\forall$ fonction réelle de $\mathbb{R}^k$ c° bornée on a $\int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,d\mathbb{P}_n(x) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_{\mathbb{R}^k} f(x)\,d\mathbb{P}(x)$

* Si $F_n \to F$ $\forall x$ de continuité de F, on dit que F_n CV complètement vers F
$F_n \xrightarrow{c} F$

* (X_n) vect aléat de $\mathbb{R}^k$. On dit que X_n CV en loi vers X
$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ si $\mathbb{P}_{X_n} \xrightarrow{e} \mathbb{P}_X$

CV en proba $\Rightarrow$ CV en loi

Thm Portmanteau : Il y a $\Leftrightarrow$ entre

* $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$
* Pour toute fonct° réelle continue et bornée, $\mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)]$
* $\forall$ borélien de A de $\mathbb{R}$ tq $\mathbb{P}(X_n \in \partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A}) = 0$,
$\mathbb{P}(X_n \in A) \longrightarrow \mathbb{P}(X \in A)$

Si $a = $ cte, $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} a \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$

Cas gaussien :

Soit (X_n) suite de va centrées de loi Normale

Alors il y a équivalence entre :

* $\sum X_n$ CV p.s.
* $\sum X_n$ CV en proba
* $\sum X_n$ CV dans $\mathcal{L}^2$
* $\sum X_n$ CV en loi

Théorème Limite

Loi faible des grands nombres / Thm de Khintchine :

X_n suite de va $\perp\!\!\!\perp$, de m̂ loi, intégrables et $\mathbb{E}(X_i)=\mu$, alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$$

Loi forte des grands nombres / Thm de Kolmogorov :

X_n suite de VA de $\mathbb{R}^d$ $\perp\!\!\!\perp$ de m̂ loi, intég et $\mathbb{E}(X_i)=\mu$, alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{p.s.} \mu$$

Loi faible des grands nombres dans $\mathcal{L}^2$

(X_n) va dans $\mathbb{R}^d$, non corrélées, $\mathcal{L}^2$ et d'espérance μ / variance σ^2

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k = \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}^p} \mu$$

Troisième loi faible des grands nombres :

X_n suite de VA admettant un moment d'ordre 2, 2 à 2 non corrélées.

On suppose $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbb{E}(X_i) \longrightarrow m$ et $\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_i) \longrightarrow 0$ alors $\overline{X} \xrightarrow{\mathbb{P}} m$

TCL unidimensionnel :

(X_n) suite de VAR ⫫ de m̂ loi, de carré intég. d'espérance μ et var σ^2

Soit $\overline{X_n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

Alors :

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} \frac{X_i - \mu}{\sigma} = \sqrt{n}\, \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

TCL multidimensionnel :

(X_n) suite de VA de $\mathbb{R}^d$ ⫫, m̂ loi de carré intég.

On note μ et Γ le vecteur moyenne et matrice de cov-var.

Alors :

$$\sqrt{n}\,(\overline{X} - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Gamma)$$

Limite Central Poissonien :

Soit $S_n \sim \mathcal{B}(n, p_n)$

Si $\lim np_n = \lambda > 0$ $\quad S_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ avec $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Approximat° de la loi Binomiale par la loi Normale

(X_n) suite de VAR tq $X_n \sim \mathcal{B}(n,p)$. Alors :

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{npq}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Convergence de la loi de Poisson :

(X_n) Suite de VA tq $X_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n)$ avec $\lambda_n \longrightarrow \infty$. Alors :

$$\frac{X_n - \lambda}{\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

V / Théorème de Radon-Nikodym

Rappel : * $Q \ll \mathbb{P}$ si $\forall A \in \mathcal{A}$, $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow Q(A) = 0$

Q est absolumᵗ continue p/rᵗ à $\mathbb{P}$

* $Q \sim \mathbb{P}$ si $Q \ll \mathbb{P}$ et $\mathbb{P} \ll Q$
* $\mathbb{P} \perp Q$ si $\exists A \in \mathcal{A}$ tq $\mathbb{P}(A) = 0$ et $Q(A) = 1$

Thm de Radon-Nikodym :

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisé et Q mesure de proba sur $(\Omega, \mathcal{A})$ absᵗ continue p/rᵗ à $\mathbb{P}$. Alors $\exists$ une classe unique de VAR X positives d'espérance 1 sous $\mathbb{P}$ tq

$$\forall A \in \mathcal{A}, \; Q(A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[X \mathbb{1}_A]$$

$X = \frac{dQ}{d\mathbb{P}}$ densité de probabilité de Q p/rᵗ à $\mathbb{P}$
dérivée de Radon-Nikodym de Q p/rᵗ à $\mathbb{P}$

3 Probabilités équivalentes dans les modèles gaussiens

Soit U une variable aléatoire gaussienne de moyenne $m_{\mathbb{P}}$ et de variance $\sigma_{\mathbb{P}}^2 > 0$. Posons

$$Y = \exp\left(\lambda(U - m_{\mathbb{P}}) - \frac{\lambda^2}{2}\sigma_{\mathbb{P}}^2\right).$$

Alors Y est une variable aléatoire strictement positive, d'espérance 1, qui définit une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle U est également une variable aléatoire gaussienne.

$$m_{\mathbb{Q}} = m_{\mathbb{P}} + \lambda\sigma_{\mathbb{P}}^2, \; \sigma_{\mathbb{Q}}^2 = \sigma_{\mathbb{P}}^2$$

La variable aléatoire $U + \lambda\sigma_{\mathbb{P}}^2$ sous $\mathbb{P}$ est gaussienne, de variance $\sigma_{\mathbb{P}}^2$ et de moyenne $m_{\mathbb{Q}} = m_{\mathbb{P}} + \lambda\sigma_{\mathbb{P}}^2$. Elle a la même loi que U sous la probabilité $\mathbb{Q}$.

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(f\left(U + \lambda\sigma_{\mathbb{P}}^2\right)\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(f(U)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\exp\left(\lambda(U - m_{\mathbb{P}}) - \frac{\lambda^2}{2}\sigma_{\mathbb{P}}^2\right) f(U)\right)$$

VI / Conditionnement

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = \mathbb{P}(A_1)\,\mathbb{P}(A_2|A_1)\,\mathbb{P}(A_3|A_1\cap A_2) \;\text{—}\; \mathbb{P}(A_n|A_1\cap - \cap A_{n-1})$$

Formule Probas totales : $(A_i)_{i\in I\subset\mathbb{N}}$ partit° de Ω

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i\in I} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)$$

Formule de Bayes : $$\mathbb{P}(A_i|B) = \frac{\mathbb{P}(B|A_i)\,\mathbb{P}(A_i)}{\sum_{i\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(B|A_i)\mathbb{P}(A_i)}$$

X va sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(\Omega', \mathcal{A}')$. B ev^t de $\mathcal{A}'$ $(\mathbb{P}(B)\neq 0)$

$$\mathbb{P}_{X|B}(A') = \mathbb{P}(X^{-1}(A')|B) = \mathbb{P}(X\in A'|B)$$

Fonction de répartition et densité conditionnelle

$*$ $\forall x\in\mathbb{R},\ F_{X|B}(x) = \mathbb{P}(X<x|B) = \mathbb{P}_{X|B}(]-\infty, x[)$

$*$ $\forall A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}),\ \mathbb{P}_{X|B}(A) = \mathbb{P}(X\in A|B) = \int_A f_{X|B}(x)\,dx$

Espérance d'une variable aléatoire conditionnelle à un evt :

$$\mathbb{E}(X|B) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}(\cdot|B)}(X) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}_{X|B}}(x) = \int_{\mathbb{R}} x\, dF_{X|B}(x)$$

Si existence d'une densité conditionnelle $f_{X|B}$.

$$\mathbb{E}(X|B) = \int_{\mathbb{R}} x\, f_{X|B}(x)\,dx.$$

Espérance conditionnelle sachant une sous-tribu :

$\mathcal{F}$ sous-tribu de $\mathcal{A}$. X var sur $(\Omega, \mathcal{A})$ $\mathbb{P}$ intégrable

$Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})$

1. Y est mesurable p/r à $\mathcal{F}$, càd $\forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, $Y^{-1}(B) \in \mathcal{F}$
2. $\forall A \in \mathcal{F}$, on a $\int_A X d\mathbb{P} = \int_A Y d\mathbb{P}$

$\iff \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(X 1_A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Y 1_A)$

$X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\mathcal{F}$ sous-tribu de $\mathcal{A}$.

* Linéarité : $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $\mathbb{E}(aX+bY|\mathcal{F}) = a\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) + b\mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ p.s
* Positivité : Si $X \geq 0$ alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \geq 0$ $\mathbb{P}$-p.s
* Croissance : Si $X \leq Y$ $\mathbb{P}$-p.s alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{F}) \leq \mathbb{E}(Y|\mathcal{F})$ $\mathbb{P}$-p.s.
* On a : $(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))^+ \leq \mathbb{E}(X^+|\mathcal{F})$

  et $(\mathbb{E}(X|\mathcal{F}))^- \leq \mathbb{E}(X^-|\mathcal{F})$

Espérance conditionnelle p/r à une variable aléatoire :

Lemme de Doob : $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ espace probabilisable et $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, Y une v.a. alors $\mathbb{E}[X|Y]$ est une fonct° mesurable de Y

(X,Y) couple de VAR. φ fonct° mes sur $\mathbb{R}^2$ et h fonct° mes. sur $\mathbb{R}$.
Alors si $\varphi(X,Y)$ et $\varphi(X,Y)h(Y)$ sont intégrable :

1. $\mathbb{E}[\mathbb{E}[\varphi(X,Y)|Y]] = \mathbb{E}[\varphi(X,Y)]$
2. $\mathbb{E}[h(Y)\varphi(X,Y)|Y] = h(Y)\mathbb{E}[\varphi(X,Y)|Y]$

Variance Conditionnelle

X VAR de carré $\mathcal{L}^1$ et $\mathcal{F}$ sous-tribu de $\mathcal{A}$, Y VA

$$V(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|\mathcal{F}])^2|\mathcal{F}]$$

$$V(X|Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X|Y])^2|Y]$$

$$V(X|\mathcal{F}) = \mathbb{E}[X^2|\mathcal{F}] - \mathbb{E}[X|\mathcal{F}]^2$$

(X,Y) couple de VAR, $V(X) = \mathbb{E}[V(X|Y)] + V(\mathbb{E}[X|Y])$

Lois de probas conditionnelles

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_Y(y)}$$ et $g \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ $\mathbb{E}[g(X,Y)|Y=y] = \int_{\mathbb{R}} g(X,Y) f_{X|Y}(x|y)dx$

Lois normales conditionnelles :

$X = (X_1, X_2)$ vect aléat à valeur dans $\mathbb{R}^n$ (X_1 dans $\mathbb{R}^p$, X_2 $\mathbb{R}^{n-p}$)

On suppose $\mathbb{P}_{X_1} \sim \mathcal{N}(\mu_1, Q_1)$ $\quad \mu_1 \in \mathbb{R}^p, Q_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$

$\mathbb{P}_{X_2|X_1=x_1} \sim \mathcal{N}(\mu_2 + M(x_1-\mu_1), Q_2)$ $\quad \mu_2 \in \mathbb{R}^{n-p}, Q_2 \in \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$

Alors,

$\mathbb{P}_X = \mathbb{P}_{X_1,X_2}$ loi gaussienne $\mathcal{N}\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, Q\right)$ $\quad Q = \begin{pmatrix} Q_1 & {}^TQ_1M \\ MQ_1 & Q_2 + M^TQ_1M\end{pmatrix}$

Martingales

* Filtrat° : $(\mathcal{F}_n)_n$ sous-tribus de $\mathcal{A}$. $(X_n)_n$ processus adapté si X_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable $\forall n$

prévisible si X_n est $\mathcal{F}_{n-1}$ mesurable

X_n est une martingale si : $\forall n$ X_n est $\mathbb{P}$-intégrable

et si $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] = X_n$

avec $(\mathcal{F}_n)_n$ filtrat°
et $(X_n)_n$ processus adapté.

Si $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \geq X_n$ (resp $\leq$), c'est une sous-martingale (resp sur-martingale)

Jensen : (X_n) une (sous) martingale, ϕ cvx (croissante) tq $\phi(X_n) \in \mathcal{L}^1$ alors $(\phi(X_n))_n$ sous-martingale

(X_n) et (Y_n) 2 martingales, alors $(X_n \vee Y_n)$ est une sous-martingale
$(X_n \wedge Y_n)$ " sur-martingale.

(X_n) une sous martingale, Alors $\forall \alpha > 0$, $\mathbb{P}(\max_{0 \leq i \leq n} X_i > \alpha) \leq \frac{\mathbb{E}[X_i]}{\alpha}$