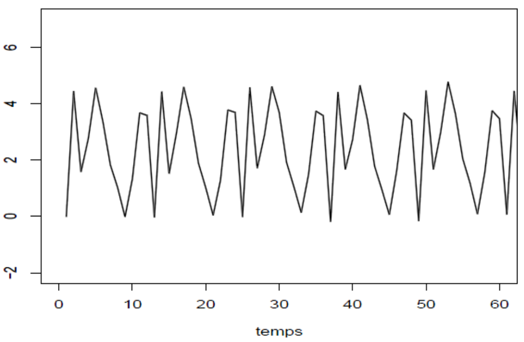
Séries temporelles - TD-TP

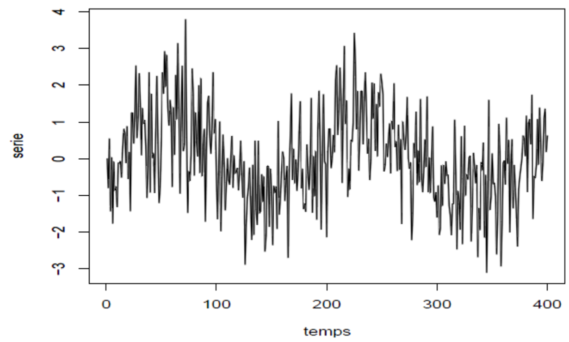
ISFA, ANNEE 2023-2024

1 Introduction aux séries temporelles

Exercice 1 :

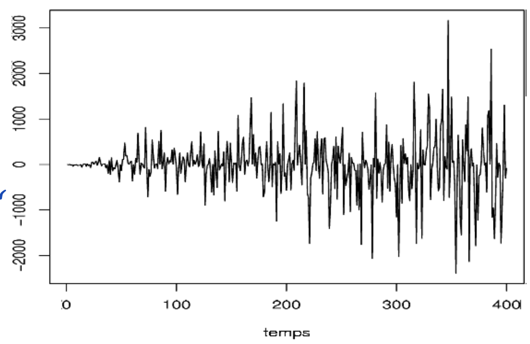
$y_t = s_t$

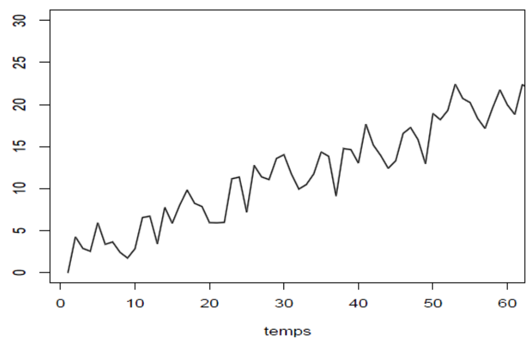




$y_t = f_t \times \varepsilon_t$

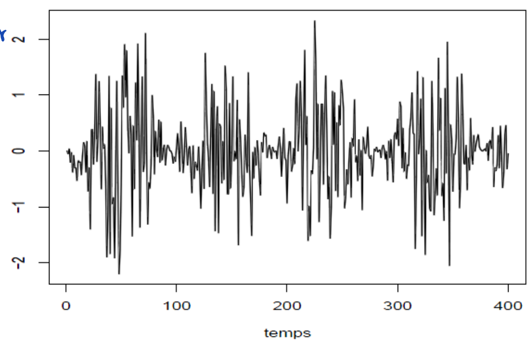
$y_t = a_t \times s_t \times \varepsilon_t$

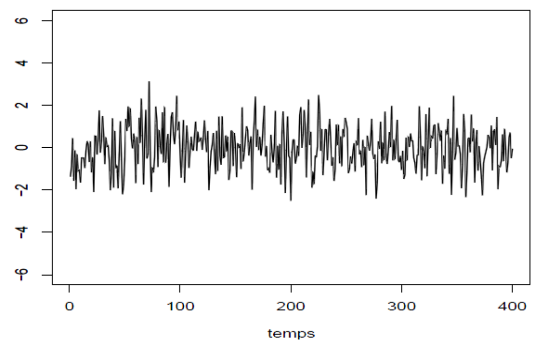




$y_t = a_t + s_t + \varepsilon_t$

$y_t = f_t + \varepsilon_t$





$y_t = \varepsilon_t$

Nous avons simulé les séries suivantes, où ε_t est un bruit aléatoire, s_t une série d'effets saisonniers, f_t une fonction sinusoïdale et a une constante positive :

$$\cancel{y_t = \varepsilon_t}, \qquad \cancel{y_t = s_t}, \qquad y_t = at + s_t + \varepsilon_t,$$
$$y_t = at \times s_t \times \varepsilon_t, \qquad \cancel{y_t = f_t} \times \varepsilon_t, \qquad \cancel{y_t = f_t + \varepsilon_t}.$$

Associer à chaque série son graphique. Justifier vos réponses.

Exercice 2 :

Soit $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc fort de variance σ_η^2. On définit

$$Y_t = (\eta_t + m)(\eta_{t-1} + m), \qquad t \in \mathbb{Z},$$

avec $m \in \mathbb{R}$.

1. Est-ce que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire faible. Donner son espérance, sa variance et ses autocorrélations.
2. Dans quel cas est-ce un bruit blanc faible?

Exercice 3 :

Pour quelles valeurs de c le processus suivant est-il stationnaire faible:

$$X_t = \varepsilon_t \cos(ct) + \varepsilon_{t-1} \sin(ct)$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc faible.

Exercice 4 : distribut° symétrique

Soit $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc faible de variance σ^2, $a \in \mathbb{R}$. Soit $\mathcal{F}_t = \sigma(\varepsilon_p, p \leq t)$. On fait les hypothèses suivantes:

- X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.
- $X_t = aX_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$.
- (X_t, ε_t) est strictement stationnaire.

1. Calculer la fonction d'autocovariance du processus $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$Y_t = X_t\varepsilon_t.$$

2. Donner la fonction d'autocovariance du processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 5 :

La somme de deux processus stationnaires faibles est-elle stationnaire faible?

Exercice 6 :

On considère le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$X_t = a + bt + s_t + u_t$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $(s_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une fonction périodique de période 4 et $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ^2.

1. Le modèle est-il correctement paramétré pour être identifié de manière unique à l'aide de ses paramètres? Proposer le cas échéant une contrainte (que l'on supposera véerifiée par la suite) portant sur $(s_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

On définit l'opérateur

$$M_4 : (Z_t)_t \to \left(\frac{1}{4}\left(Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3}\right)\right)$$

et on considère le processus $Y = M_4 X$.

2. Donner l'expression de Y_t pour $t \in \mathbb{Z}$, et justifier l'intérêt de la transformation.
3. On définit alors $Z = \Delta Y$. Montrer que Z est stationnaire et calculer sa fonction d'autocorrélation.

Structure additive $X_t = m_t + S_t + Y_t$

trend	Saisonnalité	Bruit	$\mathbb{E}[Y_t]=0$
déterministe	déterministe	aléatoire	$V(Y_t)=\sigma_Y^2$
	$S_t = S_{t+d}$ $d,t \in \mathbb{N}^*$		$Cov(Y_t, Y_{t'})=0$ $t \neq t'$

$\mathbb{E}[X_t] = m_t + S_t$

$V(X_t) = \sigma_Y^2$

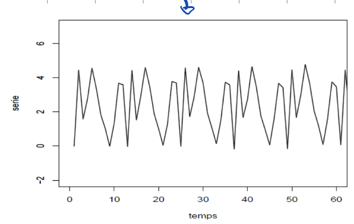
Structure multiplicative : $X_t = m_t S_t Y_t$

$\mathbb{E}[X_t] = 0$

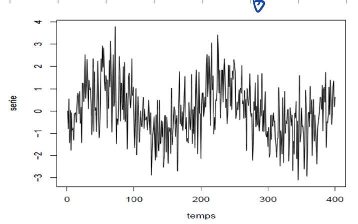
$V(X_t) = m_t^2 S_t^2 \sigma_Y^2$

Exercice 1 :

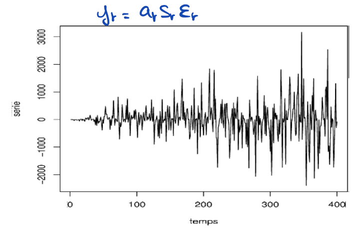
$y_t = S_t$ période 2



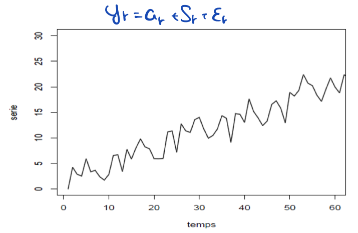
$y_t = \delta_t + \varepsilon_t$



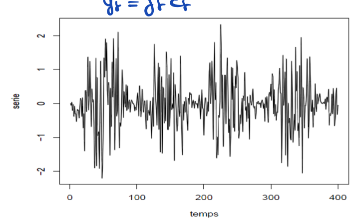
$y_t = a_t S_t \varepsilon_t$



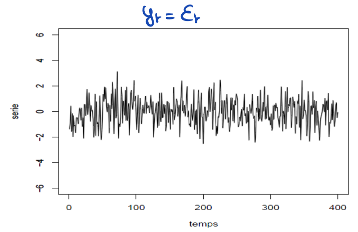
$y_t = a_t + S_t + \varepsilon_t$



$y_t = \delta_t \varepsilon_t$



$y_t = \varepsilon_t$



Exercice 2 :

Soit $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc fort de variance σ_η^2.

On définit $Y_t = (\eta_t + m)(\eta_{t-1} + m)$ $t \in \mathbb{Z}$

(Y_t) stationnaire faible si $\mathbb{E}[Y_t] = \mu_Y$ $\forall t$

$Cov(Y_t, Y_{t-h}) = \gamma_Y(h)$ $\forall t$

(η_t) est un bruit blanc faible si $\mathbb{E}[\eta_t] = 0$

$V(\eta_t) = \sigma_\eta^2$ $Cov(\eta_t, \eta_{t'}) = 0$ $t \neq t'$

$\gamma_\eta(h) = 0$ $\forall h \neq 0$

(η_t) est un bruit blanc fort si (η_t) sont iid
$\mathbb{E}[\eta_t]=0$ et $V(\eta_t)=\sigma_\eta^2$

On a $Y_t = (\eta_t + m)(\eta_{t-1}+m)$

① $\mathbb{E}[Y_t] = \overbrace{\mathbb{E}[\eta_t + m]}^{m}\overbrace{\mathbb{E}[\eta_{t-1}+m]}^{m}$ car les η_t sont iid
$= m^2$

$V(Y_t) = \underbrace{\mathbb{E}[Y_t^2]}_{\mathbb{E}[\eta_t+m]^2\mathbb{E}[\eta_{t-1}+m]^2} - \underbrace{\mathbb{E}[Y_t]^2}_{m^4}$

avec $\mathbb{E}[\eta_t+m]^2 = \sigma_\eta^2 + m^2$
$\Rightarrow V(Y_t) = (\sigma_\eta^2+m^2)^2 - m^4$
$= \sigma_\eta^4 + 2\sigma_\eta^2 m^2$

$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \mathbb{E}[Y_t Y_{t-1}] - m^4$
$= \mathbb{E}[\eta_t+m]\mathbb{E}[\eta_{t-1}+m]^2\mathbb{E}[\eta_{t-2}+m] - m^4$
$= m \times (\sigma_\eta^2+m^2)\times m - m^4$
$= m^2\sigma_\eta^2$

$Cov(Y_t, Y_{t-2}) = \mathbb{E}[Y_t Y_{t-2}] - m^4$
$= \mathbb{E}[\eta_t+m]\mathbb{E}[\eta_{t-1}+m]\mathbb{E}[\eta_{t-2}+m]\mathbb{E}[\eta_{t-3}+m] - m^4$
$= m^4 - m^4 = 0$

$$\Rightarrow Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \begin{cases} \sigma_\eta^4 + 2\sigma_\eta^2 m^2 & \text{si } k=0 \\ m^2\sigma_\eta^2 & \text{si } k=1 \\ 0 & \text{si } k\geq 2 \end{cases}$$

Donc on a
* $\mathbb{E}[Y_t] = m^2$
* $V(Y_t) = \gamma_Y(0) = \sigma_\eta^4 + 2\sigma_\eta^2 m^2$
* $Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \gamma_Y(1) = m^2\sigma_\eta^2$
* $Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$ si $k\geq 2$

Indep de t $\Rightarrow$ STATIONNAIRE FAIBLE

② C'est un bruit blanc faible ssi $m=0$.
i.e $(Y_t)\sim BB(0,\sigma_Y^2) \Leftrightarrow m=0$.

Rq : MA(1) $Y_t = m^2 + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ avec $(\varepsilon_t)\sim BB(0,\sigma_\varepsilon^2)$

$\mathbb{E}[Y_t] = m^2$
$V(Y_t) = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2$

$Cov(Y_t, Y_{t-1}) = \theta\sigma_\varepsilon^2$
$Cov(Y_t, Y_{t-k}) = 0$ $k\geq 2$

Donc Y_t a une représent° sous forme linéaire et il faudra égaliser $V(Y_t)$ avec $\sigma_\eta^4 + 2\sigma_\eta^2 m^2$ et $Cov(Y_t, Y_{t-1})$ avec $m^2\sigma_\eta^2$

Exercice 6 : On considère le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tq

$$X_t = \underbrace{a + bt}_{m_t} + \underbrace{s_t}_{s_t = s_{t-4}\ \forall t} + u_t$$

où $a, b \in \mathbb{R}$

$(s_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ fonct° périodique de période 4

$(u_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim BB(0, \sigma^2)$

① Contrainte d'identifiabilité : $\sum_{k=0}^{3} s_{t+k} = 0$

② On définit $M_4 : (Z_t)_t \longmapsto \left(\frac{1}{4}(Z_t + Z_{t-1} + Z_{t-2} + Z_{t-3})\right)$

et on considère $Y_t = M_4 X_t$

$$\Rightarrow Y_t = \frac{1}{4}(X_t + X_{t-1} + X_{t-2} + X_{t-3})$$
$$= a + b(t - \tfrac{3}{2}) + 0 + V_t$$
$$= (a - \tfrac{3}{2}b) + bt + V_t$$

où $V_t = \frac{1}{4}(u_t + u_{t-1} + u_{t-2} + u_{t-3})$

$\mathbb{E}[V_t] = 0$; $V(V_t) = \frac{1}{4}\sigma_u^2$; $Cov(V_t, V_{t-1}) = \frac{3}{16}\sigma_u^2$; $Cov(V_t, V_{t-2}) = \frac{2}{16}\sigma_u^2$

$Cov(V_t, V_{t-3}) = \frac{1}{16}\sigma_u^2$; $Cov(V_t, V_{t-4}) = 0$

et $Cov(V_t, V_{t-k}) = 0 \ \forall k \geq 4$

Intérêt : Eliminer l'effet saisonnalité

③ $Z_t = \Delta Y_t$ où Δ est l'opérateur différence

$= Y_t - Y_{t-1}$

$= 0 + b + \omega_t$ avec $\omega_t = V_t - V_{t-1} = \frac{1}{4}(u_t - u_{t-4})$

trend linéaire transformé en cte

$\mathbb{E}[\omega_t] = 0$

$V(\omega_t) = \frac{1}{8}\sigma_u^2$

$Cov(\omega_t, \omega_{t-1}) = 0$

$Cov(\omega_t, \omega_{t-2}) = 0$

$Cov(\omega_t, \omega_{t-3}) = 0$

$Cov(\omega_t, \omega_{t-4}) = -\frac{1}{16}\sigma_u^2$ et $Cov(\omega_t, \omega_{t-k}) = 0$ sinon.

Intérêt : On a éliminé le trend.

Exercice 3 : $X_t = \varepsilon_t \cos(ct) + \varepsilon_{t-1}\sin(ct)$ où $(\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$\mathbb{E}[X_t] = 0$

$V(X_t) = \cos^2(ct)\sigma_\varepsilon^2 + \sin^2(ct)\sigma_\varepsilon^2$

$= \sigma_\varepsilon^2$

$Cov(X_t, X_{t-1}) = \sin(ct)\cos(c(t-1))\sigma_\varepsilon^2$ $\quad X_{t-1} = \varepsilon_{t-1}\cos(c(t-1)) + \varepsilon_{t-2}\sin(c(t-1))$

$Cov(X_t, X_{t-2}) = 0$ ...

On a $Cov(X_t, X_{t-1}) = \sin(ct)\cos(c(t-1))\sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sin(c(2t-1)) + \sin(c)}{2}\sigma_\varepsilon^2 = cte$

$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}[\sin(a+b) + \sin(a-b)]$

(X_t) stationnaire

$\Leftrightarrow \sin(c(2t-1)) = \sin(c) \ \forall t$

$\Leftrightarrow \sin(c(2t-1)) - \sin(c) = 0$

$\Leftrightarrow c = \frac{k\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

Exercice 5 :

Rappel : $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire faible si $\begin{cases} \mathbb{E}[X_t] = \mu_X & \forall t \\ Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(h) & \forall t \end{cases}$

Quest° : $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire faible $\Rightarrow (X_t+Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire faible ?

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire faible et $Y_t = (-1)^t X_t$ — $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire faible

$\mathbb{E}[X_t] = 0$ — $\mathbb{E}[Y_t] = 0$

$Cov(Y_t, Y_{t+h}) = \mathbb{E}[Y_t Y_{t+h}] = (-1)^{2t+h}\mathbb{E}[X_t X_{t+h}]$

$= (-1)^h \gamma_X(h) \Rightarrow (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire faible.

$$X_t + Y_t = X_t + (-1)^t X_t = \begin{cases} 0 & \text{si } t \text{ pair} \\ 2X_t & \text{si } t \text{ impair} \end{cases}$$

$\rightarrow \mathbb{E}[X_t + Y_t] = 0$

$$Var(X_t+Y_t) = \begin{cases} 4V(X_t) & \text{si } t \text{ impair} \\ 0 & \text{si } t \text{ pair} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ dépend du temps.

$\Rightarrow (X_t+Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ non stationnaire faible.

Si $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire faible et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire faible. On a $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ non corrélés

i.e $Cov(X_t, Y_{t'}) = 0 \quad \forall t, t'$

$\mathbb{E}[X_t + Y_t] = \mu_X + \mu_Y$ (indep de t)

$Cov(X_t+Y_t, X_{t+h}+Y_{t+h}) = \gamma_X(h) + Cov(X_t, Y_{t+h}) + Cov(Y_t, X_{t+h}) + \gamma_Y(h)$

$= \gamma_X(h) + \gamma_Y(h)$ indep de t.

$\Rightarrow (X_t+Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire faible

Exercice 6 :

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ Bruit Blanc Fort $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ iid $\mathbb{E}[\varepsilon_t]=0$ $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$

La distribution de ε_t est symétrique

X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable $\Leftrightarrow$ "X_t est fonct° mesurable de $\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1}, \ldots$"

$\mathbb{E}[\varepsilon_t | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t | \varepsilon_t \varepsilon_{t-1} \ldots] = \varepsilon_t$

$\mathbb{E}[\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}] = \mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$

$\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_{t-1} | \mathcal{F}_{t-1}] = \varepsilon_{t-1}\mathbb{E}[\varepsilon_t | \mathcal{F}_t] = 0$

$X_t = a X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t \quad a \in \mathbb{R}$ et $a^2\sigma^2 < 1$

$Y_t = X_t \varepsilon_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable

$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[X_t\varepsilon_t] = \mathbb{E}[a X_{t-1}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t] + \mathbb{E}[\varepsilon_t^2]$

$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[a X_{t-1}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}]] + \sigma_\varepsilon^2$

$= \mathbb{E}[a X_{t-1}\varepsilon_{t-1}\underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t]}_{=0}] + \sigma_\varepsilon^2$

$= \sigma_\varepsilon^2$

$\mathbb{E}[Y_t^2] = \mathbb{E}[X_t^2\varepsilon_t^2] = \mathbb{E}[a^2 X_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2 \varepsilon_t^2 + 2a X_{t-1}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t\varepsilon_t^2 + \varepsilon_t^4]$

$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\cdot|\mathcal{F}_{t-1}]] \rightarrow = \mathbb{E}[a^2 X_{t-1}^2\varepsilon_{t-1}^2\mathbb{E}[\varepsilon_t^2]] + \mathbb{E}[2a X_{t-1}\varepsilon_{t-1}\underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t^3]}_{=0}] + \mathbb{E}[\varepsilon_t^4]$

$$= a^2\sigma_\varepsilon^2\,\mathbb{E}[Y_{t-1}^2] + \mathbb{E}[\varepsilon_t^4]$$

$$= a^2\sigma_\varepsilon^2\,\underbrace{\mathbb{E}[Y_t^2]}_{\text{par stationnarité}} + \mathbb{E}[\varepsilon_t^4] = \frac{\mathbb{E}[\varepsilon_t^4]}{1-a^2\sigma_\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow V(Y_t) = \gamma_Y(0) = \mathbb{E}[Y_t^2] - (\mathbb{E}[Y_t])^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^4}{1-a^2\sigma_\varepsilon^2} - \sigma_\varepsilon^4$$

$$\gamma_Y(1) = \mathbb{E}[Y_t Y_{t-1}] - \mathbb{E}[Y_t]^2 = \sigma_\varepsilon^4 - \sigma_\varepsilon^4 = 0$$

$$\mathbb{E}[Y_t Y_{t-1}] = \mathbb{E}[aX_{t-1}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t] + \mathbb{E}[Y_{t-1}\varepsilon_t^2]$$

$$= 0 + \mathbb{E}[Y_{t-1}\underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-1}]}_{\sigma_\varepsilon^2}]$$

$$= \sigma_\varepsilon^2\,\mathbb{E}[Y_{t-1}]$$

$$= \sigma_\varepsilon^4$$

$$\gamma_Y(h) = \mathbb{E}[Y_t Y_{t-h}] - (\mathbb{E}[Y_t])^2$$

$$= \mathbb{E}[aX_{t-h}\varepsilon_{t-h}\varepsilon_t] + \mathbb{E}[Y_{t-h}\varepsilon_t^2] - \sigma_\varepsilon^4$$

$$= 0 + \mathbb{E}[Y_{t-h}\underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t^2|\mathcal{F}_{t-h}]}_{\sigma_\varepsilon^2}] - \sigma_\varepsilon^4$$

$$= \sigma_\varepsilon^2\,\mathbb{E}[Y_{t-h}] - \sigma_\varepsilon^4$$

$$= \sigma_\varepsilon^4 - \sigma_\varepsilon^4 = 0$$

Donc $\mathbb{E}[Y_t] = \sigma^2 \qquad V(Y_t) = \frac{\mathbb{E}[\varepsilon_t^4]}{1-a^2\sigma_\varepsilon^2}$

$\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t-h}) = 0 \qquad \forall h \neq 0$

$\Rightarrow Y_t = \sigma_\varepsilon^2 + \eta_t$ avec $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un Bruit Blanc Faible.

(2) $X_t = aX_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

$\quad = aY_{t-1} + \varepsilon_t$

$$\mathbb{E}[X_t] = a\sigma_\varepsilon^2$$

$$\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{V}[aY_{t-1} + \varepsilon_t]$$

$$= a^2\,\mathbb{V}[Y_{t-1}] + \sigma_\varepsilon^2$$

$$= a^2\sigma_\varepsilon^4\left(1 - \frac{1}{1-a^2\sigma_\varepsilon^2}\right)$$

$$\gamma_X(h) = \mathrm{Cov}(X_t, X_{t-h}) = \mathrm{Cov}(aY_{t-1} + \varepsilon_t,\ aY_{t-h-1} + \varepsilon_{t-h})$$

si $h = 0$, $\gamma_X(0) = \mathbb{V}[X_t]$

$|h| = 1$, $\gamma_X(1) = \mathrm{Cov}(aY_{t-1}, \varepsilon_{t-1})$

$$= \mathbb{E}[aY_{t-1}\varepsilon_{t-1}] - 0$$

$$= a\,\mathbb{E}[X_{t-1}\varepsilon_{t-1}^2]$$

Exercice 4 :

Soit $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un BB faible de variance σ^2, $a \in \mathbb{R}$

Soit $\mathcal{F}_t = \sigma(\varepsilon_p, p \leq t)$

$\varepsilon_t \sim BB(0,\sigma^2)$
$\Rightarrow \mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0 \quad \mathbb{V}[\varepsilon_t] = \sigma^2$
$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0 \ \forall t \neq t'$

Hyp : * X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable
* $X_t = a X_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$
* (X_t, ε_t) est strictement stationnaire

① Soit $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tq $Y_t = X_t \varepsilon_t$

On veut déterminer $\gamma_Y(h) = Cov(Y_t, Y_{t-h})$

$$Cov(Y_t, Y_{t-h}) = \mathbb{E}[Y_t Y_{t-h}] - \mathbb{E}[Y_t]\mathbb{E}[Y_{t-h}]$$

$Y_t Y_{t-h} = X_t \varepsilon_t X_{t-h} \varepsilon_{t-h}$ On a $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$ et $\mathbb{E}[\varepsilon_t \varepsilon_s] = \sigma^2 \mathbb{1}_{\{t=s\}}$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Y_t Y_{t-h}] &= \mathbb{E}[X_t \varepsilon_t X_{t-h} \varepsilon_{t-h}] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[X_t \varepsilon_t X_{t-h} \varepsilon_{t-h} | \mathcal{F}_{t-h}]] \\ &= \mathbb{E}[X_t \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-h} \varepsilon_{t-h} | \mathcal{F}_{t-h}]]\end{aligned}$$

X_t est $\mathcal{F}_{t-h}$-mesurable

pour $h \neq 0$, $\varepsilon_t \perp\!\!\!\perp \varepsilon_{t-h}$ $\Rightarrow$ pour $h \neq 0$ $\mathbb{E}[Y_t Y_{t-h}] = 0$

Si $h = 0$ $\Rightarrow \mathbb{E}[Y_t Y_{t-h}] = \mathbb{E}[Y_t^2] = \mathbb{E}[X_t^2 \varepsilon_t^2]$
$= \mathbb{E}[X_t^2]\sigma^2$

Donc $\gamma_Y(h) = \mathbb{E}[X_t^2]\sigma^2 \mathbb{1}_{\{h=0\}}$

② $\gamma_X(h) = Cov(X_t, X_{t-h})$

$X_t = a X_{t-1} \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$

Déjà, $\gamma_X(0) = Var(X_t) = \mathbb{E}[X_t^2] - \underbrace{\mathbb{E}[X_t]^2}_{=0}$ car $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$

$\Rightarrow \gamma_X(0) = \mathbb{E}[X_t^2]$

$$\begin{aligned}\gamma_X(1) = Cov(X_t, X_{t-1}) &= \mathbb{E}[X_t X_{t-1}] - \underbrace{\mathbb{E}[X_t]}_{=0}\underbrace{\mathbb{E}[X_{t-1}]}_{=0} \\ &= \mathbb{E}[(a X_{t-1}\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t) X_{t-1}] \\ &= 0\end{aligned}$$

$\forall h \geq 1,\ \gamma_X(h) = 0$

$\Rightarrow \gamma_X(h) = \mathbb{E}[X_t^2]\,\mathbb{1}_{\{h=0\}}$

$X_t^2 = a^2 X_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2 + 2a X_{t-1}\varepsilon_{t-1}\varepsilon_t + \varepsilon_t^2$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X_t^2] = a^2\,\mathbb{E}[X_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2] + \underbrace{0}_{\text{car } \varepsilon_t \perp\!\!\!\perp \varepsilon_{t-1}} + \sigma^2$

Or on a considéré que (X_t, ε_t) est strictem^t stationnaire $\exists C \in \mathbb{R}$ tq $\mathbb{E}[X_{t-1}^2 \varepsilon_{t-1}^2] = C$

$\Rightarrow \exists C \in \mathbb{R}$ tq $\gamma_X(h) = a^2 C + \sigma^2$

Exercice 5:

(Y_t) stationnaire faible si $\mathbb{E}[Y_t] = \mu_Y\ \forall t$
$Cov(Y_t, Y_{t-h}) = \gamma_Y(h)\ \forall t$

On veut savoir si $Z_t = X_t + Y_t$ est stationnaire faible lorsque X_t et Y_t sont stationnaires faible.

(X_t) stationnaire faible si $\mathbb{E}[X_t] = \mu_X\ \forall t$
$Cov(X_t, X_{t-h}) = \gamma_X(h)\ \forall t$ De même pour Y_t avec μ_Y et γ_Y

Soit $Z_t = X_t + Y_t$ et supposons que les processus X et Y sont non corrélés pour tous les décalage temporels

* $\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[X_t] + \mathbb{E}[Y_t]$
$= \mu_X + \mu_Y = \mu_Z$

* Soit $h \in \mathbb{R}$, $Cov(Z_t, Z_{t-h}) = Cov(X_t + Y_t, X_{t-h} + Y_{t-h})$
$= Cov(X_t, X_{t-h}) + Cov(Y_t, Y_{t-h})$ les $Cov(X,Y)$ sont nulles
$= \gamma_X(h) + \gamma_Y(h)$ car $X \perp\!\!\!\perp Y$
$= \gamma_Z(h)$

Supposons maintenant X_t et Y_t deux processus stationnaires faibles mais tq
* $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[Y_t] = 0$
* X_t et Y_t ont des fonct^o d'autocovariance $\gamma_X(h)$ et $\gamma_Y(h)$ resp qui ne dépendent que du décalage h et pas de t
* X_t et Y_t sont corrélés tq $\mathbb{E}[X_t Y_t] = 1\ \forall t$

$\Rightarrow Z_t = X_t + Y_t$

On a bien $\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[X_t] + \mathbb{E}[Y_t]$
$= 0$

mais $\gamma_Z(h) = \mathbb{E}[(X_t + Y_t)(X_{t+h} + Y_{t+h})]$
$= \gamma_X(h) + \underbrace{\mathbb{E}[X_t Y_{t+h}]}_{\neq 0} + \underbrace{\mathbb{E}[Y_t X_{t+h}]}_{\neq 0} + \gamma_Y(h)$

$\Rightarrow Z_t$ non stationnaire faible.

2 Trend et saisonnalité

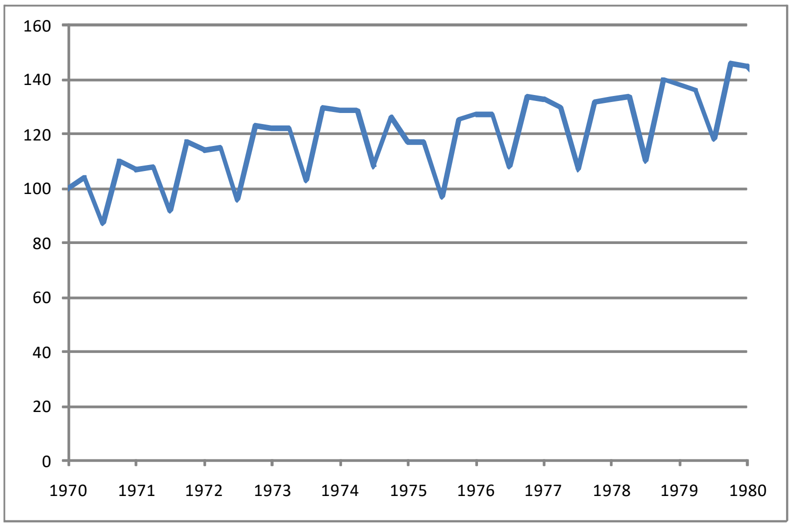
Exercice 1 :

Nous donnons dans le tableau suivant la série (y_t) des indices trimestriels de la production industrielle (base 100 en 1970) de 1970 à 1980 :

Année	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
1970	100	104	87	110
1971	107	108	92	117
1972	114	115	96	123
1973	122	122	103	130
1974	129	129	108	126
1975	117	117	97	125
1976	127	127	108	134
1977	133	130	107	132
1978	133	134	110	140
1979	138	136	118	146
1980	145	138	115	141

1. A quoi cela sert-il de désaisonnaliser la chronique étudiée ? A quel type de questions cherche-t-on à répondre lorsque l'on décompose une chronique ?

2. Au vu du graphique, quel modèle de décomposition proposez-vous pour cette série ?



3. Nous allons adopter un schéma de décomposition additif pour cette série :

$$y_t = f_t + s_t + \varepsilon_t,$$

où f_t est la tendance de la série, s_t la partie saisonnière et ε_t la perturbation aléatoire. Rappeler la signification et les hypothèses habituelles faites pour ces différentes composantes. En particulier, donner les hypothèses d'identifiabilité.

4. Estimation de la tendance par une moyenne mobile

4.1. Proposer une moyenne mobile simple pour éliminer la saisonnalité.

4.2. Calculer les valeurs manquantes du tableau suivant (année 1975).

Année	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
1970			101,125	102,500
1971	103,625	105,125	106,875	108,625
1972	110,000	111,250	113,000	114,875
1973	116,625	118,375	120,125	121,875
1974	123,375	123,500	121,500	118,500
1975	115,625	114,125	115,250	117,750
1976	120,375	122,875	124,750	125,875
1977	126,125	125,750	125,500	126,000
1978	126,875	128,250	129,875	130,750
1979	132,000	133,750	135,375	136,500
1980	136,375	135,375		

$\frac{1}{8}\times 108 + \frac{1}{4}\times 126 + \frac{1}{4}\times 117 + \frac{1}{4}\times 117 + \frac{1}{8}\times 97$

Ces données ne sont pas manquantes car la MM ne peut pas les calculer. En effet elle a besoins de 2 valeurs passées pour cela.

4.3. Calculer les valeurs manquantes du tableau suivant donnant des estimations provisoires des coefficients saisonniers (année 1979).

Année	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
1970			-14,125	7,500
1971	3,375	2,875	-14,875	8,375
1972	4,000	3,750	-17,000	8,125
1973	5,375	3,625	-17,125	8,125
1974	5,625	5,500	-13,500	7,500
1975	1,375	2,875	-18,250	7,250
1976	6,625	4,125	-16,750	8,125
1977	6,875	4,250	-18,500	6,000
1978	6,125	5,750	-19,875	9,250
1979	6,000	2,250	-19,375	9,500
1980	8,625	2,625		

Tableau 1 - Tab2

m̂ chose

4.4. Plutôt que d'utiliser une moyenne mobile pour estimer s_t, on décide de moyenner par trimestre. Compléter le tableau suivant qui donne les estimations provisoires et finales des coefficients saisonniers:

Estimation	1er trim	2eme trim	3eme trim	4eme trim
provisoire	5,400	3,763	-16,738	7,975
finale	5,300	3,663	-16,638	7,875

Provisoire car il manque la contrainte d'identifiabilité

Σ vaut 0,4 or on veut égale à 0 $\Rightarrow$ on retire 0,1 à chaque estimateur

4.5 Calculer les valeurs manquantes (année 1974) de la série corrigée des variations saisonnières.

On a enlevé $\hat{S}_t$

Année	Trimestre 1	Trimestre 2	Trimestre 3	Trimestre 4
1970	94,700	100,338	103,838	102,125
1971	101,700	104,338	108,838	109,125
1972	108,700	111,338	112,838	115,125
1973	116,700	118,338	119,838	122,125
1974	123,700	125,338	124,838	118,125
1975	111,700	113,338	113,838	117,125
1976	121,700	123,338	124,838	126,125
1977	127,700	126,338	123,838	124,125
1978	127,700	130,338	126,838	132,125
1979	132,700	132,338	134,838	138,125
1980	139,700	134,338	131,838	133,125

Exercice 2 :

On reprend les données de l'exercice précédent à partir du premier trimestre de l'année 1976 et on prolonge jusqu'à l'année 1982. Notre objectif est maintenant d'obtenir la tendance par une régression linéaire, puis d'en déduire à partir de la série corrigée les coefficients saisonniers.

1. Pourquoi a-t-on choisi la période premier trimestre 1976 - dernier trimestre 1982 pour faire la régression linéaire ?

2. On modélise l'indice trimestriel y_t de la production industrielle par : $y_t = at+b$ pour $t = 1, ..., 28$ correspondant à chacun des trimestres entre 1976 et 1982. On donne :

$$\sum_{t=1}^{28} t = 406, \quad \sum_{t=1}^{28} y_t = 3647, \quad \sum_{t=1}^{28} t^2 = 7714, \quad \sum_{t=1}^{28} y_t^2 = 478765, \quad \sum_{t=1}^{28} t y_t = 53500.$$

Calculer les estimations des moindres carrés de a et b. Calculez le coefficient de détermination R^2 de la régression. Compléter le tableau suivant

T	Y	$\widehat{Y} = \widehat{a}T + \widehat{b}$	$\widehat{\varepsilon} = Y - \widehat{Y}$	Trimestre
1	127	125,680	1,320	1
2	127	126,018	0,982	2
3	108	126,357	-18,357	3
4	134	126,695	7,305	4
5	133	127,034	5,966	1
6	130	127,372	2,628	2
7	107	127,711	-20,711	3
8	132	128,050	3,950	4
9	133	128,380	4,612	1
10	134	128,727	5,273 1ère col - 2ème col	2
11	110	129,065	-19,065	3
12	140	129,404	10,593	4
13	138	129,742	8,258	1
14	136	130,081	5,919	2
15	118	130,419	-12,419	3
16	146	130,758	15,242	4
17	145	131,096	13,904	1
18	138	131,435	6,565	2
19	115	131,773	-16,773	3
20	141	132,112	8,888	4
21	137	132,450	4,550	1
22	136	132,789	3,211	2
23	115	133,128	-18,128	3
24	143	133,466	9,534	4
25	137	133,805	3,195	1
26	136	134,143	1,857	2
27	111	134,482	-23,482	3
28	140	134,820	5,180	4

3. Comment calculer les coefficients saisonniers ? Est-ce que la contrainte d'identifiabilité est satisfaite ? Compléter le tableau suivant

Trimestres	1	2	3	4
Coefficients saisonniers		3,776	-18,419	

Comparer avec les valeurs trouvées à l'exercice précédent et avec la méthode de Buys-Ballot généralisée. Interpréter.

4. Comment utiliser les résultats précédents pour faire des prévisions ? Prévoir les valeurs de l'indice pour l'année 1983.

Exercice 3 :

Soit $M = \sum_{j=0}^{q} a_j L^{-j}$ une moyenne mobile, notée $M = (a_0, \ldots, a_q)$. Soit $P(x) = a_0 + \cdots + a_q x^q$. Caractériser les séries (X_t) telles que $M(X_t) = X_t$ dans les cas suivants :

$M = (1, -1, 1)$, $M = (2, -1, -2)$, $M = (5, -4, 1)$, $M = (2, -2, 1)$.

Exercice 4 :

Trouver les moyennes mobiles symétriques qui conservent les polynômes de dégrès 3 et qui minimisent le rapport de réduction de la variance du bruit.

Exercice 5 :

1. Charger les données `co2` donnant la concentration de CO_2 à l'observatoire de Mauna Loa.
2. De quel type d'objet R s'agit-il?
3. Tracer la série temporelle.
4. Effectuer une décomposition par moyenne mobile.
5. Tracer les autocorrélogrammes et les autocorrélogrammes partiels de la série initiale et de celle des résidus après décomposition.

Exercice 6 :

On considère la droite d'équation $m_t = at + b$ avec $a = 0,5$, $b = 1$, la fonction sinuosidale $s_t = 250 \sin(2\pi t/T)$ avec $T = 50$ et le bruit blanc fort Gaussien (ε_t) de variance $\sigma_\varepsilon^2 = 100$. Soit

$$\begin{aligned} X_t &= m_t + \varepsilon_t \\ Y_t &= s_t + \varepsilon_t \\ Z_t &= m_t + s_t + \varepsilon_t \end{aligned}$$

pour $t = 1, ..., 1000$.

1. Simuler les séries temporelles (ε_t), (X_t), (Y_t), (Z_t) et comparer les autocorrélogrammes et les autocorrélogrammes partiels de ces séries avec celles sans bruit.

2. Effectuer un filtrage (moyenne mobile arithmétique) pour éliminer la saisonnalité due à (s_t).

Les coefficients du filtre sont donnés par le code R suivant :

```
d=50
a=c(0.5,rep(1,(d-1)),0.5)/d
```

Pour filtrer une série temporelle, la commande R `filter` peut être utilisée comme suit :

```
y.f<-filter(y,a,circular=TRUE)
```

3. Comparer les autocorrélogrammes et les autocorrélogrammes partiels des séries temporelles (ε_t), (X_t), (Y_t), (Z_t) avant et après filtrage.

Exercice 1 :

1) Désaisonnaliser = enlever la saisonnalité. Pourquoi ?
→ Pour pouvoir comprendre/interpréter l'évolution du trend.

2) Structure additive. Contrainte d'identifiabilité $\sum_{i=1}^{4} S_{t+i} = 0 \quad \forall t$.

$Y_t = \underbrace{g_t}_{\text{trend "linéaire"}} + \underbrace{S_t}_{\text{Saisonnalité de période 4}} + \underbrace{\varepsilon_t}_{\text{Bruit } \mathbb{E}[\varepsilon_t]=0,\ Cov(\varepsilon_t,\varepsilon_{t'})=0}$

4) Estimation trend et saisonnalité par Moyenne Mobile.

4.1 - Moyenne Mobile qui élimine la saisonnalité.

$2m = 4 \Leftrightarrow m = 2.$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(X_{t-2}+X_{t-1}+X_t+X_{t+1})\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}(X_{t-1}+X_t+X_{t+1}+X_{t+2})\right) = \frac{1}{8}(X_{t-2}+2X_{t-1}+2X_t+2X_{t+1}+X_{t+2}) = MX_t$ Symétrique qui conserve les droites

Chaque moy élimine saisonnalité conserve cstes mais ne conserve pas les droites

Quels sont les séries temporelles dans le noyau de M ?

$\operatorname{Ker} M = \{(X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \mid MX_t = 0\}$

Équation de récurrence : $\frac{1}{8}z_m + \frac{1}{4}z_{m+1} + \frac{1}{4}z_{m+2} + \frac{1}{4}z_{m+3} + \frac{1}{8}z_{m+4} = 0$

Polynôme associé : $P(z) = \frac{1}{8} + \frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{4}z^3 + \frac{1}{8}z^4$

Racines : $P(z) = \frac{1}{8}(1+z+z^2+z^3) + \frac{1}{8}(z+z^2+z^3+z^4)$

$= \frac{1}{8}(1+z)\underbrace{(1+z+z^2+z^3)}_{\frac{1-z^4}{1-z}}$

$\Rightarrow$ Racines : $\{-1, e^{i\frac{\pi}{2}}, \underbrace{e^{i\pi}}_{=-1}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\}$ $\Rightarrow$ (-1) racine double
et $e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}$ racines simples.

Solution générale : $z_m = (\alpha+\beta m)(-1)^m + \gamma\cos(m\frac{\pi}{2}) + \delta\sin(m\frac{\pi}{2}) \qquad \alpha,\beta,\gamma,\delta \in \mathbb{R}$

$$X_t = (\alpha+\beta t)(-1)^t + \gamma\cos(t\tfrac{\pi}{2}) + \delta\sin(t\tfrac{\pi}{2})$$

4-2 Il ne reste plus que le trend. On a éliminé la saisonnalité

Tableau : $My_t = \underbrace{Mg_t}_{a+bt} + 0 + M\varepsilon_t = \hat{g}_t$

Si $g_t = a+bt$ avec la contrainte $\sum_{i=1}^{4} S_{t+i} = 0$

4-3 $y_t = g_t + s_t + \varepsilon_t$

$y_t - My_t = \underbrace{(g_t - \hat{g}_t)}_{\approx 0} + s_t + \underbrace{\varepsilon_t - M\varepsilon_t}_{\approx 0} = \hat{S}_t$

4-4 Moyenner par trimestre car les espérances des bruits sont nulles par trimestres + LGN
Pour chaque trimestre on a vraie valeur + bruit.

Exercice 2 :

1) 1976 - 1982 car rupture en 1975 dans le trend

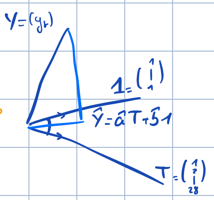
2) $y_t = at + b \qquad t \in [\![1, 28]\!]$

$$\min_{a,b} \sum_{t=1}^{28} (y_t - at - b)^2$$

Condition du 1er ordre :

a : $2\sum_{t=1}^{28} t(y_t - \hat{a}t - \hat{b}) = 0$ $\quad \langle Y - \hat{Y}, T \rangle = 0$

b : $2\sum_{t=1}^{28} 1(y_t - \hat{a}t - \hat{b}) = 0$ $\quad \langle Y - \hat{Y}, 1 \rangle = 0$



$$\hat{b} = \frac{\left(\sum_1^{28} y_t - \hat{a}\sum_1^{28} t\right)}{\sum_1^{28} 1}$$

$$\hat{a} = \frac{\sum t y_t \times \sum 1 - \sum y_t \sum t}{\sum t^2 \sum 1 - \sum 1 \sum t} = \frac{\frac{\sum t y_t}{\sum 1} - \frac{\sum y_t}{\sum 1}\frac{\sum t}{\sum 1}}{\frac{\sum t^2}{\sum 1} - \left(\frac{\sum t}{\sum 1}\right)^2} = \frac{Cov_e(T,Y)}{V_e(T)}$$

empirique

$$\Rightarrow \begin{cases} \hat{a} = 0{,}339 \\ \hat{b} = 125{,}344 \end{cases}$$

Coefficient de détermination $R^2 = \frac{\text{"Variance expliquée"}}{\text{"Variance totale"}} \in [0, 1]$

on a rien expliqué

on a tout expliqué

$$= \frac{V(\hat{Y})}{V(Y)} = (\hat{a})^2 \frac{V(T)}{V(Y)} = 5{,}59\,\%$$

😕

Il manque la saisonnalité.

3) $y_t = at + b + S_t + \varepsilon_t$

$\hat{y}_t = \hat{a}t + \hat{b} + \hat{\varepsilon}_t$

S_t ?

On moyenne par trimestre $\hat{S}_1 + \hat{S}_2 + \hat{S}_3 + \hat{S}_4 = 0$

$\hat{S}_1 = 5{,}972$

$\hat{S}_2 = 3{,}776$

$\hat{S}_3 = -18{,}419$

$\hat{S}_4 = 8{,}671$

4) Aucunes raisons d'avoir même valeurs car données $\neq$ et méthodes $\neq$

Méthode de Buys Ballot

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_{28} \end{pmatrix} = b\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + a\begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 28 \end{pmatrix} + \hat{S}_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} + \hat{S}_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \hat{S}_3\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \end{pmatrix} + \cancel{\hat{S}_4\begin{pmatrix} \vdots \end{pmatrix}}$$

modèle mal identifié $\Rightarrow \neq$

$\hat{S}_1 = 6{,}010 \quad \hat{S}_2 = 3{,}790 \quad \hat{S}_3 = -18{,}430 \quad \hat{S}_4 = 8{,}620$

$\hat{a} = 0{,}366 \quad \hat{b} = 124{,}940$

Exercice 3: Soit $M = \sum_{j=0}^{q} a_j L^{-j}$ une moy. mobile notée $M = (a_0, -, a_q)$

Soit $P(x) = a_0 + - + a_q x^q$

$$M(X_t) = \sum_{j=0}^{q} a_j X_{t+j}$$ Moyenne Mobile d'ordre $q+1$

Opérateur retard $L : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, $X_t \mapsto LX_t = X_{t-1}$; $L^{-1} : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$, $X_t \mapsto L^{-1}X_t = X_{t+1}$

$\operatorname{Ker}(M) : \{ (X_t) : MX_t = 0 \}$ $\quad \operatorname{Im}(M) : \{ (X_t) : MX_t = X_t \} = \ker(M - Id)$

$M - I$ polynôme associé $Q(x) = P(x) - x = a_0 + (a_1 - 1)x + \dots + a_q x^q$

$\longrightarrow$ Caractériser les séries (X_t) tq $M(X_t) = X_t$
où $M = (1, -1, 1)$; $M = (2, -1, -2)$; $M = (5, -4, 1)$; $M = (2, -2, 1)$

* $q = 2$ $M = (1, -1, 1)$
  $\longrightarrow M - I = (1, -2, 1)$ $\quad Q(x) = 1 - 2x + x^2 = (1-x)^2$
  $\longrightarrow$ racines $= 1$ de multiplicité 2
  $x_t = (a + bt)(1)^t$ $\leftarrow$ ensemble des séries temp invariantes (ce sont les droites)
  $a, b \in \mathbb{R}$

* $M = (2, -1, -2)$
  $\longrightarrow M - I = (2, -2, -2)$ $\quad Q(x) = 2 - 2x - 2x^2$
  $\Longrightarrow$ racines $= -\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)$ et $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

3 Processus linéaires

Exercice 1 :

On considère le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$X_t = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ_ε^2.

1. Montrer que X est stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.

2. Soient $\phi_T, \phi_{T-1}, ...\phi_1$ les coefficients de la régression linéaire $\hat{X}_{T+1}$ de X_{T+1} sur $(X_T, X_{T-1}, ..., X_1)$. Ecrire les conditions d'orthogonalité entre $(X_{T+1} - \hat{X}_{T+1})$ et $(X_T, X_{T-1}, ..., X_1)$. En déduire les T équations satisfaites par $(\phi_T, \phi_{T-1}, ...\phi_1)$.

3. Déterminer et calculer la fonction d'autocorrélation partielle de X.

Exercice 2 :

Soient $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(V_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux bruits blancs centrés de variance respective σ^2 et τ^2 et mutuellement indépendants. Soient a et b des réels non nuls. On définit un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ par

$$\begin{aligned} X_{2t} &= aU_t + bV_t, \\ X_{2t+1} &= bU_t + aV_{t+1}. \end{aligned}$$

1. Calculer $\mathbb{V}ar(X_k)$ et $\mathbb{C}ov(X_k, X_{k+1})$ pour $k \in \mathbb{Z}$.

2. Calculer $\mathbb{C}ov(X_k, X_{k+j})$ pour $j \geq 2$.

3. Montrer que X est stationnaire au second ordre si et seulement si $\sigma^2 = \tau^2$. On suppose dorénavant $\sigma^2 = \tau^2 = 1$.

4 On suppose $|b/a| < 1$ et l'on pose $\theta = b/a$ et pour $t \in \mathbb{Z}$,

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^j X_{t-j}.$$

Montrer que le processus $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance a^2.

Indication : on exprimera la fonction d'autocovariance de ε en fonction de celle de X.

5. Montrer que X admet une représentation sous la forme $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$.

6. Si $|b/a| > 1$, trouver aussi une telle représentation pour X.

Exercice 3 :

On considère le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$X_t = \sum_{i=0}^{t} \lambda^i \left(\varepsilon_{t-i} - \varepsilon_{t-i-1}\right)$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc faible.

1. Pour quelles valeurs de λ, ce processus est stationnaire faible?
2. Si $\lambda \in]-1,1[$, montrer qu'il existe un processus stationnaire faible $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ telle que

$$X_t - Y_t \xrightarrow{L^2} 0$$

quand $t \to \infty$.

3 - Processus linéaires

Exercice 1 :

$X_t = \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$ avec $(\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$ $\qquad \mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0 \quad Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0 \quad \forall t \neq t'$

$V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$

1) (X_t) stationnaire si $\mathbb{E}[X_t] = 0$

$V(X_t) = \sigma^2(1+\theta^2)$

$Cov(X_t, X_{t-1}) = Cov(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t-1} - \theta\varepsilon_{t-2})$

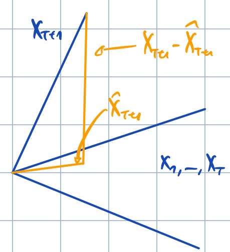
$= -\theta \sigma_\varepsilon^2$

$Cov(X_t, X_{t-k}) = 0 \qquad k > 1.$

$\Rightarrow \gamma_X(0) = (1+\theta^2)\sigma^2$

$\gamma_X(1) = -\theta\sigma_\varepsilon^2 \qquad \gamma_X$ est symétrique $\Rightarrow \gamma_X(k) = \gamma_X(-k) \ \forall k.$

$\gamma_X(k) = 0$ sinon.

2) 

$\hat{X}_{T+1} = EL[X_{T+1} \mid X_1, \ldots, X_T] = \phi_1 X_1 + \ldots + \phi_T X_T$

$k = 1, \ldots, T, \ \langle X_{T+1} - \hat{X}_{T+1} \mid X_k \rangle = 0 \iff \mathbb{E}[X_{T+1} X_k] = \mathbb{E}[\hat{X}_{T+1} X_k]$

$\iff Cov(X_{T+1}, X_k) = Cov(\hat{X}_{T+1}, X_k)$

$= \sum_{\ell=1}^{T} \phi_\ell \, Cov(X_\ell, X_k)$

$\iff \gamma_X(T+1-k) = \sum_{\ell=1}^{T} \phi_\ell \, \gamma_X(\ell - k)$

$T=1 \quad \hat{X}_2 = EL(X_2 \mid X_1) = \phi_1 X_1 \qquad \gamma_X(1) = \phi_1 \gamma_X(0) \qquad \phi_1 = \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} = \rho_X(1) = -\frac{\theta}{1+\theta^2}$

$T=2 \quad \hat{X}_3 = EL(X_3 \mid X_1, X_2) = \phi_1 X_1 + \phi_2 X_2 \qquad k=1 \quad \underbrace{\gamma_X(2)}_{=0} = \phi_1 \gamma_X(0) + \phi_2 \gamma_X(1) \Rightarrow 0 = \phi_1 + \phi_2 \rho_X(1) \qquad \rho = \rho_X(1)$

$k=2 \quad \gamma_X(1) = \phi_1 \gamma_X(-1) + \phi_2 \gamma_X(0) \Rightarrow \rho_X(1) = \phi_1 \rho_X(1) + \phi_2$

$\Rightarrow -\rho^2 = \phi_1(1-\rho^2) + 0$

$\Rightarrow \phi_1 = \frac{-\rho^2}{1+\rho^2} = \frac{-\theta^2}{1+\theta^2+\theta^4}$

$\Rightarrow \phi_2 = \frac{\rho}{1+\rho^2}$

$T \geq 2 \quad k=1 \qquad 0 = (1+\theta^2)\phi_1 - \theta\phi_2$

$k = 1, \ldots, T-1 \quad 0 = -\theta\phi_{k-1} + (1+\theta^2)\phi_k - \theta\phi_{k+1} \qquad \gamma_X(-1), \gamma_X(0)$ et $\gamma_X(1)$ non nuls.

$k = T \quad -\theta = -\theta\phi_{T-1} + (1+\theta^2)\phi_T$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\theta \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} (1+\theta^2) & -\theta & 0 & \cdots & 0 \\ -\theta & (1+\theta^2) & -\theta & 0 \cdots & 0 \\ 0 & -\theta & (1+\theta^2) & -\theta \ 0 \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ & & & & -\theta \\ 0 & \cdots & 0 & -\theta & (1+\theta^2) \end{pmatrix}}_{\Sigma} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \phi_T \end{pmatrix} \qquad \Sigma\phi = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ -\theta \end{pmatrix}$$

$Id + \Omega^{-1}$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 1 & -\theta & & \\ -\theta & 1+\theta^2 & -\theta & 0 \\ & \ddots & \ddots & \ddots \\ 0 & & 1+\theta^2 & -\theta \\ & & -\theta & 1 \end{pmatrix} \qquad \Omega^{-1} = \frac{1}{1-\theta^2} \begin{pmatrix} 1 & \theta & \theta^2 & \cdots & \theta^{T-1} \\ \theta & \ddots & & & \\ \theta^2 & & \ddots & & \\ \vdots & & & & \theta \\ \theta^{T-1} & \cdots & \theta^2 & \theta & 1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \Omega + \begin{pmatrix} \theta^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \theta^2 \end{pmatrix}$$

Ligne 1 : $\phi_1 + \theta^{T+1}\phi_T = -\theta^T \qquad \phi_1 = \frac{\theta^T(1-\theta^2)}{1-\theta^{2(T+1)}} = r_X(T) \qquad$ Si $|\theta| < 1 \quad \phi_1 \underset{T \to \infty}{\sim} (1-\theta^2)\theta^T$ décroît vers 0 exponentiellement vite !

Ligne T : $\theta^{T+1}\phi_1 + \phi_T = -\theta$

Exercice 2 : $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(V_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux Bruits Blancs indep. $\to$ $\mathbb{E}[U_t]=\mathbb{E}[V_t]=0$ $\mathbb{V}[U_t]=\sigma_u^2$ $\mathbb{V}[V_t]=\sigma_v^2$

$Cov(U_t,U_{t'})=0 \quad t\neq t'$

$Cov(V_t,V_{t'})=0 \quad t\neq t'$

$$\begin{cases} X_{2t}=aU_t+bV_t \\ X_{2t+1}=bU_t+aV_{t+1} \end{cases}$$

1) $\mathbb{E}[X_{2t}]=0 \qquad \mathbb{V}[X_{2t}]=a^2\sigma_u^2+b^2\sigma_v^2$

$\mathbb{E}[X_{2t+1}]=0 \qquad \mathbb{V}[X_{2t+1}]=b^2\sigma_u^2+a^2\sigma_v^2 \qquad \Rightarrow \mathbb{V}[X_k]$ qui dépend de k.

$Cov(X_k,X_{k+1})$ $\quad$ k pair $Cov(X_{2t},X_{2t+1})=ab\sigma_u^2$

k impair $Cov(X_{2t+1},X_{2t+2})=Cov(X_{2t-1},X_{2t})=ab\sigma_v^2$

2) $j\geq 2$ $Cov(X_k,X_{k+j})=0$

3) (X_t) est stationnaire si :

$*$ $\mathbb{E}[X_t]$ $\perp\!\!\!\perp$ du temps t

$*$ $Cov(X_t,X_{t+h})$ $\perp\!\!\!\perp$ du temps t

$\Rightarrow$ Ok pour $\mathbb{E}$

pour $h=0$ il faudrait $\overbrace{a^2\sigma_u^2+b^2\sigma_v^2}^{\mathbb{V}(X_{2t})}=\overbrace{b^2\sigma_u^2+a^2\sigma_v^2}^{\mathbb{V}(X_{2t+1})}$

$h=1$ $\qquad \underbrace{ab\sigma_u^2}_{Cov(X_{2t},X_{2t+1})}=\underbrace{ab\sigma_v^2}_{Cov(X_{2t+1},X_{2t+2})}$

$\Rightarrow \sigma_u^2=\sigma_v^2$

$\to$ On suppose $\sigma^2=\tau^2=1$

4) On suppose $\left|\frac{b}{a}\right|<1$, $\theta=\frac{b}{a}$ $\qquad \varepsilon_t=\sum_{k=0}^{\infty}(-\theta)^k X_{t-k} \qquad t\in\mathbb{Z}$

$\to$ Mq ε_t est un bruit blanc de variance a^2.

$*$ Est-ce que (ε_t) bien défini ? Oui car $\sum_{k=0}^{\infty}|-\theta|^k<\infty$

$*$ Exercice $\to$ Calculer les moments

$*$ Calcul de la densité spectrale de (ε_t)

$$f_X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{-\infty}^{\infty}\gamma_X(h)\underbrace{e^{i\omega h}}_{\cos(\omega h)\text{ en réel}}$$

Si (ε_t) bruit blanc de variance σ_ε^2, $f_\varepsilon(\omega)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \qquad \omega\in[-\pi,\pi]$

$$f_X(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{\infty}\gamma_X(h)\cos(\omega h)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\gamma_X(0)+2\gamma_X(1)\cos(\omega)\right)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left((a^2+b^2)+2ab\cos(\omega)\right)$$

$$f_\varepsilon(\omega)=\underbrace{\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-\theta)^k e^{i\omega k}\right|^2}_{\left|\frac{1}{1+\theta e^{i\omega}}\right|^2} f_X(\omega)$$

$$1+\theta e^{i\omega} = 1+\theta\cos(\omega) + i\theta\sin(\omega)$$
$$|1+\theta e^{i\omega}|^2 = 1+\theta^2 + 2\theta\cos(\omega)$$

$$\Rightarrow f_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}+2\frac{b}{a}\cos(\omega)} \times \frac{1}{2\pi}\left(a^2+b^2+2ab\cos(\omega)\right)$$

$$= \frac{1}{2\pi} a^2 \quad \Rightarrow \text{ne dépend pas de } \omega\,!$$
$$\Rightarrow (\varepsilon_t) \sim BB(0, a^2)$$

5) a) $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\theta)^k X_{t-k} + \theta \sum_{k=0}^{\infty} (-\theta)^k X_{t-k-1}$

b) $X_t = (1+\theta L)\varepsilon_t$ $\qquad L\varepsilon_t = \varepsilon_{t-1}$

$\Leftrightarrow (1+\theta L)^{-1} X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-\theta)^k X_{t-k} = \varepsilon_t$

$|\theta|<1$, $\sum_{k=0}^{\infty} (-\theta)^k L^k$

c) $\mathbb{E}[X_t]=0$

$\mathbb{V}[X_t] = a^2+b^2$

$Cov(X_t, X_{t+1}) = ab$

$Cov(X_t, X_{t+j}) = 0 \quad j\geq 2$

MA(1)

$\Leftrightarrow \exists\, \theta \in \mathbb{R}$ et $(\varepsilon_t) \sim BB(0,\sigma_\varepsilon^2)$ tq $X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$

$\rightarrow \mathbb{E}[X_t]=0$

$\mathbb{V}[X_t] = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2$

$Cov(X_t, X_{t+1}) = \theta\sigma_\varepsilon^2$

$Cov(X_t, X_{t+j}) = 0 \quad j\geq 2$

Par identificat°

$$\Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2 = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 \\ ab = \theta\sigma_\varepsilon^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{(1+\theta^2)}{\theta} = \frac{a^2+b^2}{ab} \Leftrightarrow \theta^2 - \frac{a^2+b^2}{ab}\theta + 1 = 0$$

$$\Delta = \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^2 - 4 = \frac{1}{(ab)^2}\left(a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2\right) = \frac{(a^2-b^2)^2}{(ab)^2}$$

$\begin{cases} \theta_1 = b/a \\ \theta_2 = a/b \end{cases} \Rightarrow |\theta_1|<1$ c'est donc le $\theta_1 = \theta$ à retenir $= \sigma_\varepsilon^2 = a^2$

6) Si $|\frac{b}{a}|>1 \Rightarrow |\frac{a}{b}|<1$ on pose $\theta = \frac{a}{b}$

$\mathbb{V}[\varepsilon_t] = b^2 \Rightarrow a \leftrightarrow b$

Exercice 3 :

$$X_t = \sum_{i=0}^{t} \lambda^i (\varepsilon_{t-i} - \varepsilon_{t-i-1}) \quad \text{et } (\varepsilon_t) \sim BB(0,\sigma_\varepsilon^2)$$

1) $\mathbb{E}[X_t] = \sum_{i=0}^{t} \lambda^i\, \mathbb{E}[\varepsilon_{t-i} - \varepsilon_{t-i-1}]$

$= 0$

$$X_t = \sum_{i=0}^{t} \lambda^i \varepsilon_{t-i} - \underbrace{\sum_{i=0}^{t} \lambda^i \varepsilon_{t-i-1}}_{\sum_{i=1}^{t+1} \lambda^{i-1}\varepsilon_{t-i}}$$

$$\Longrightarrow X_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{t} (\lambda^i - \lambda^{i-1})\, \varepsilon_{t-i} - \lambda^t \varepsilon_{-1} = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{t} \lambda^{i-1}(\lambda-1)\varepsilon_{t-i} - \lambda^t \varepsilon_{-1}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{V}[X_t] = \sigma_\varepsilon^2 + \sum_{i=1}^{t} (\lambda^{i-1}(\lambda-1))^2 \sigma_\varepsilon^2 + \lambda^{2t}\sigma_\varepsilon^2$$
$$= \sigma_\varepsilon^2 \left(1 + (\lambda-1)^2 \left(\frac{1-\lambda^{2t}}{1-\lambda^2}\right) + \lambda^{2t}\right)$$
$$= 2\sigma_\varepsilon^2 \left(\frac{1+\lambda^{2t+1}}{1+\lambda}\right)$$

$$\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{V}\Big[\varepsilon_t + \sum_{i=1}^{t} (\lambda^i - \lambda^{i-1})\varepsilon_{t-i} - \lambda^t \varepsilon_{-1}\Big]$$
$$= \sigma_\varepsilon^2 + \sum_{i=1}^{t} \lambda^{2(i-1)}(\lambda-1)^2\sigma_\varepsilon^2 + \lambda^{2t}\sigma_\varepsilon^2$$
$$= \sigma_\varepsilon^2 \Big(1 + (\lambda-1)^2 \underbrace{\sum_{i=1}^{t} \lambda^{2(i-1)}}_{\frac{1-\lambda^{2t}}{1-\lambda^2}} + \lambda^{2t}\Big)$$
$$= \sigma_\varepsilon^2 \Big(1 + (\lambda-1)^2 \frac{1-\lambda^{2t}}{(1+\lambda)(1-\lambda)} + \lambda^{2t}\Big)$$
$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{(1+\lambda)(1-\lambda)} \Big((1+\lambda)(1-\lambda) + (\lambda-1)^2(1-\lambda^{2t}) + \lambda^{2t}((1+\lambda)(1-\lambda))\Big)$$
$$= \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1+\lambda} \Big(1+\lambda + \underbrace{(1-\lambda)(1-\lambda^{2t}) + \lambda^{2t}(1+\lambda)}_{(1-\lambda^{2t}-\lambda+\lambda^{2t+1}) + (\lambda^{2t}+\lambda^{2t+1}) = 1-\lambda+2\lambda^{2t+1}}\Big)$$
$$1+\lambda+1-\lambda+2\lambda^{2t+1} = 2+2\lambda^{2t+1}$$
$$= \frac{2(1+\lambda^{2t+1})}{1+\lambda}\sigma_\varepsilon^2$$

$\mathbb{V}[X_t]$ si $\lambda \in \{0, 1\}$

Si $\lambda = 1 \longrightarrow X_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$ stationnaire mais pas BB

$\lambda = 0 \longrightarrow X_t = \varepsilon_t$ stationnaire

2) $|\lambda| < 1$ Mq $\exists\, Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ processus stationnaire faible tq $X_t - Y_t \xrightarrow{\mathcal{L}^2} 0$

$$X_t - Y_t \xrightarrow{\mathcal{L}^2} 0 \iff \|X_t - Y_t\|_2^2 \longrightarrow 0$$
$$\iff \mathbb{E}[(X_t - Y_t)^2] \longrightarrow 0 \iff \mathbb{V}[X_t + Y_t] + \underbrace{\mathbb{E}[X_t + Y_t]}_{=0}{}^2 \longrightarrow 0$$

$$Y_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda^i - \lambda^{i-1})\varepsilon_{t-1}$$

(Y_t) est stationnaire car $\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda^i - \lambda^{i-1}| < \infty$

$$X_t - Y_t = \sum_{i=t+1}^{\infty} \lambda^{i-1}(\lambda-1)\varepsilon_{t-i} - \lambda^t \varepsilon_{-1}$$

$$\mathbb{V}[X_t - Y_t] = \Big(\sum_{i=t+1}^{\infty} \lambda^{2(i-1)}(\lambda-1)^2 + \lambda^{2t}\Big)\sigma_\varepsilon^2$$
$$= (\lambda-1)^2 \lambda^{2t} \frac{1}{1-\lambda^2} + \lambda^{2t} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

+

Exercice: $\mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+h})$?

$\Longrightarrow \; = -(1-\lambda)^2 \lambda^{h-1} \sigma_\varepsilon^2$

$$Y_t = \varepsilon_t + \sum_{i=1}^{\infty} (\lambda^i - \lambda^{i-1})\varepsilon_{t-i}$$
$$X_t = \sum_{i=0}^{t} \lambda^i (\varepsilon_{t-i} - \varepsilon_{t-i-1})$$

4 Processus ARMA

Exercice 1 :

On considère un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifiant

$$X_t - \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} = \varepsilon_t$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ_ε^2.

1) Soit

$$\Phi(x) = 1 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}x^2.$$

Factoriser Φ et décomposer Φ^{-1} en éléments simples. Développer chaque élément simple en série entière de x ou de $1/x$ selon les cas.

2) Montrer qu'il existe $(a_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ telle que $X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k\varepsilon_{t-k}$ existe et vérifie l'équation de récurrence de départ. Vérifier que $\forall k < 0$; $a_k \neq 0$ et en déduire que $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\forall k \geq 1$ $\mathbb{C}ov(\varepsilon_t, X_{t-k}) \neq 0$. En déduire que ε n'est pas l'innovation de X.

3) Montrer qu'il existe un polynôme Φ^* de degré 2, dont toutes les racines sont hors du cercle unité, et un bruit blanc η tels que $\Phi^*(L)X_t = \eta_t$. En déduire qu'il existe $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que $X_t = \sum_{k\in\mathbb{N}} b_k\eta_{t-k}$.

4) Montrer que la régression linéaire de X_t sur son passé n'est pas

$$\frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2}.$$

Exercice 2 :

On considère un processus stationnaire du second ordre $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifiant

$$X_t = 2X_{t-1} + \varepsilon_t$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ_ε^2. On suppose que l'observation de X est imprécise et que l'on n'observe que $Y = X + \eta$, où η est un bruit blanc décorrélé de ε et de variance $\sigma_\eta^2 = \rho\sigma_\varepsilon^2$, $\rho > 0$.

1. Montrer que $\varepsilon + (Id - 2L)\eta$ est un processus $MA(1)$.
2. Montrer Y est un processus $ARMA(1,1)$, et donner sa représentation canonique.
3. Montrer qu'il existe une série absolument convergente $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$$Y_t = e_t + \sum_{k\geq 1} a_k Y_{t-k}$$

où e désigne l'innovation de Y. Justifier l'intérêt d'une telle représentation.

Exercice 3 :

On considère deux processus stationnaires faibles $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $Y = (Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifiant

$$\begin{aligned} Y_t &= \phi_1 Y_{t-1} + aX_t + U_t \\ X_t &= \phi_2 X_{t-1} + V_t \end{aligned}$$

où $U = (U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $V = (V_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont des bruits blancs faibles décorelés et de variance respectives σ_U^2 et σ_V^2. On suppose que $0 < |\phi_1|| < 1$ et $0 < |\phi_2|| < 1$.

1. Soit $W = (W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$W_t = (1 - \phi_1 L)(1 - \phi_2 L) Y_t.$$

Montrer que W est stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.

2. Montrer que Y est un processus ARMA que l'on déterminera.

4- Processus ARMA.

Exercice 1:

On considère le processus $X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tq
$$X_t - \frac{7}{2}X_{t-1} + \frac{3}{2}X_{t-2} = \varepsilon_t$$

$\varepsilon_t \sim BB(0,\sigma_\varepsilon^2)$

1) Soit $\phi(x) = 1 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}x^2$

$$\Delta = \frac{49}{4} - \frac{4\times 3}{2} = \left(\frac{5}{2}\right)^2 \qquad x_1 = \frac{\frac{7}{2}+\frac{5}{4}}{3} = 2 \qquad x_2 = \frac{\frac{7}{2}-\frac{5}{4}}{3} = \frac{1}{3}$$

$$\phi(x) = \frac{3}{2}(x-2)(x-\tfrac{1}{3}) = (1-\tfrac{1}{2}x)(1-3x)$$

$$\Rightarrow \phi^{-1}(x) = \frac{1}{(1-\frac{1}{2}x)(1-3x)} = \frac{a}{1-\frac{1}{2}x} + \frac{b}{1-3x} = \frac{a(1-3x)+b(1-\frac{1}{2}x)}{(1-\frac{1}{2}x)(1-3x)} = \frac{(a+b)-(3a+\frac{1}{2}b)x}{(1-\frac{1}{2}x)(1-3x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ 3a+\frac{1}{2}b=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{1}{5} \\ b=\frac{6}{5} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \phi^{-1}(x) = -\frac{1}{5}\frac{1}{1-\frac{1}{2}x} + \frac{6}{5}\frac{1}{1-3x}$$

Facteur en séries entières : $(|x|=1)$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}x} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k x^k \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{1}{2}L} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k x^k$$

$$\frac{1}{1-3x} = \frac{1}{-3x}\frac{1}{1-\frac{1}{3x}} = \frac{1}{-3x}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k x^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k x^{-k} \quad \Rightarrow \frac{1}{1-3L} = -\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k L^{-k}$$

$$\Rightarrow \phi^{-1}(x) = -\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k x^k - \frac{6}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k x^{-k}$$

2) On veut $X_t = \sum_{k\in\mathbb{Z}} a_k \varepsilon_{t-k}$
$\sum_{k\in\mathbb{Z}} |a_k| < \infty$

$$\phi(L)X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow X_t = \phi^{-1}(L)\varepsilon_t = -\frac{1}{5}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \varepsilon_{t-k} - \frac{6}{5}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k \varepsilon_{t+k}$$

$$\Rightarrow a_k = \begin{cases} -\frac{1}{5}\frac{1}{2^k} & k\geq 0 \\ -\frac{6}{5}\frac{1}{3^{-k}} & k<0 \end{cases}$$

On a bien $\forall k<0,\ a_k \neq 0$

Soit $t\in\mathbb{Z}$, $k\geq 1$, $Cov(\varepsilon_t, X_{t-k}) = Cov(\varepsilon_{t+k}, X_t) = Cov(\varepsilon_{t+k}, \sum_{j\in\mathbb{Z}} a_j \varepsilon_{t-j})$

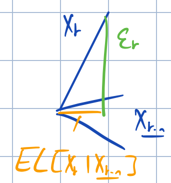
$$= \sum_j a_j \underbrace{Cov(\varepsilon_{t+k}, \varepsilon_{t-j})}_{=\begin{cases} 0 & \text{si } j\neq -k \\ \sigma_\varepsilon^2 & \text{si } j=-k\end{cases}}$$

$$= -\frac{6}{5}\left(\frac{1}{3^k}\right)\sigma_\varepsilon^2 \neq 0 \quad (*)$$

Donc $\forall t\in\mathbb{Z}, \forall k\geq 1, Cov(\varepsilon_t, X_{t-k}) \neq 0$ $\therefore$

ε_t innovat° $\Rightarrow \varepsilon_t \perp \underline{X_{t-1}}$

Or $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est l'innovat° $\Longleftrightarrow \varepsilon_t = X_t - EL[X_t \mid \underline{X_{t-1}}]$



$\Rightarrow Cov(\varepsilon_t, X_{t-k}) = 0 \quad k\geq 1$

$\Rightarrow \varepsilon_t$ n'est pas l'innovat° de X.

Car $(*) \Rightarrow Cov(\varepsilon_t, X_{t-k}) = -\frac{6}{5}\left(\frac{1}{3^k}\right)\sigma_\varepsilon^2 \neq 0$

3) $f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k\in\mathbb{Z}} \gamma_X(k) e^{i\omega k}$

$\Phi(L)X_t = \varepsilon_t$

$\Phi^*(L)X_t = \eta_t$ ← Ecriture canonique (à retenir pour prédiction / estimation)

$$= \frac{1}{|\Phi(e^{i\omega})|^2}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{|(1-3e^{i\omega})(1-\frac{1}{2}e^{i\omega})|^2}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} = \frac{1}{|1-3e^{i\omega}|^2\,|1-\frac{1}{2}e^{i\omega}|^2}\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{|3e^{i\omega}|^2\,|1-\frac{1}{3}e^{i\omega}|^2}\;\frac{1}{|1-\frac{1}{2}e^{i\omega}|^2}\;\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$$

$\Phi^*(L) = (1-\frac{1}{3}L)(1-\frac{1}{2}L)$

$\sigma_\eta^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{9}$

$$= \frac{1}{|\Phi^*(e^{i\omega})|^2} \times \frac{\sigma_\varepsilon^2/9}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{|\Phi^*(e^{i\omega})|^2} \times \frac{\sigma_\eta^2}{2\pi}$$

$\Phi^*(L) = 1 - \frac{5}{6}L + \frac{1}{6}L^2 \qquad X_t = \frac{5}{6}X_{t-1} - \frac{1}{6}X_{t-2} + \eta_t$

$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \eta_{t-k}$

$$(\Phi^*)^{-1}(L) = \frac{1}{(1-\frac{1}{3}L)(1-\frac{1}{2}L)} = \frac{-2}{1-\frac{1}{3}L} + \frac{3}{1-\frac{1}{2}L}$$

$$= -2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k L^k + 3\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k L^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\underbrace{(-2\cdot 3^{-k} + 3\cdot 2^{-k})}_{b_k} L^k$$

$\Rightarrow X_t = (\Phi^*)^{-1}(L)\eta_t$

$k\geq 0$, $Cov(X_t, \eta_{t+k}) = 0 \quad \Rightarrow \eta_t$ innovation de X_t.

4) $EL[X_t \mid \underline{X_{t-1}}]$

⚠ NE PAS FAIRE : $EL[X_t \mid \underline{X_{t-1}}] = EL[\frac{7}{2}X_{t-2} - \frac{3}{2}X_{t-2} + \varepsilon_t \mid \underline{X_{t-1}}]$

$$= \frac{7}{2}X_{t-1} - \frac{3}{2}X_{t-2} + \underbrace{EL[\varepsilon_t \mid \underline{X_{t-1}}]}_{\neq 0}$$

Il faut faire $EL[X_t \mid \underline{X_{t-1}}] = EL[\frac{5}{6}X_{t-1} - \frac{1}{6}X_{t-2} + \eta_t \mid \underline{X_{t-1}}]$

$$= \frac{5}{6}X_{t-1} - \frac{1}{6}X_{t-2} + \underbrace{EL[\eta_t \mid \underline{X_{t-1}}]}_{=0}$$ car η_t est l'innovation.

Exercice 2 : $X_t = 2X_{t-1} + \varepsilon_t$

$\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$Y = X + \eta$ où $\eta \sim BB(0, \sigma_\eta^2)$ où $\sigma_\eta^2 = \rho\sigma_\varepsilon^2$

$\phi(L) X_t = \varepsilon_t \qquad \phi(L) = 1 - 2L$

X_t stationnaire ? oui car ϕ inversible ⚠ pas la forme canonique car $|racine| < 1$

1) Mq $V_t = \varepsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}$ est un MA(1)

MA(1) processus stationnaire et $\gamma_X(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \{-1,0,1\} \\ \neq 0 & \text{sinon} \end{cases}$

$\mathbb{E}[V_t] = 0$

$\gamma_X(0) = \mathbb{V}ar(V_t) = \mathbb{V}ar(\varepsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1})$ car ε et η décorrélé

$= \sigma_\varepsilon^2 + \sigma_\eta^2 + 4\sigma_\eta^2 = \sigma_\varepsilon^2(1+5\rho)$

$\gamma_X(k) = Cov(V_t, V_{t+k}) = Cov(\varepsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1}, \varepsilon_{t+k} + \eta_{t+k} - 2\eta_{t-1+k})$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } k \notin \{-1,0,1\} \\ -2\sigma_\eta^2 = -2\rho\sigma_\varepsilon^2 & k = -1 \\ -2\sigma_\eta^2 = -2\rho\sigma_\varepsilon^2 & k = 1 \end{cases}$$

. Caractérisation d'une MA(q)

. Soit $X_t = \mu + \Theta L(\varepsilon_t)$

. On supp H vrai.

. Prop.

. La fonct d'autocovariance d'une MA(q) est donné par :

$\begin{cases} \cdot\ \gamma_X(0) = \sigma_\varepsilon^2(1 + \sum_{j=1}^{q} \theta_j^2) \\ \cdot\ \gamma_X(h) = Cov(X_t, X_{t+h}) \end{cases} = \begin{cases} \cdot\ \sigma_\varepsilon^2(-\theta_h + \sum_{j=h+1}^{q} \theta_j\theta_{j-h}) & \text{si } 1 \leq |h| < q \\ \cdot\ -\theta_q\sigma_\varepsilon^2 & \text{si } |h| = q \\ \cdot\ 0 & \text{si } |h| > q \end{cases}$

Rq : La démo est la m̂ que la prop p3.

. Théorème :

. Soit (X_t) tq : . $(X_t)_t$ stationnaire
. la densité spectral de X_t : $f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_X(h) e^{i\omega h}$ est C^0 et strictement >0

. Alors. X_t MA(q) $\iff \gamma_X(h) = \begin{cases} \cdot\ 0 & \text{si } |h| > q \\ \cdot\ \neq 0 & \text{si } |h| = q \end{cases}$

MA(1) $V_t = \mu_t - \theta\mu_{t-1} \qquad (\mu_t) \sim BB(0, \sigma_\mu^2)$

$\mathbb{E}[V_t] = 0 \qquad (\theta, \sigma_\mu^2)$?

$\gamma_V(0) = \mathbb{V}(V_t) = (1+\theta^2)\sigma_\mu^2$

$\gamma_V(1) = Cov(V_t, V_{t-1}) = -\theta\sigma_\mu^2$

$\begin{cases} (1+\theta^2)\sigma_\mu^2 = (1+5\rho)\sigma_\varepsilon^2 \\ -\theta\sigma_\mu^2 = -2\rho\sigma_\varepsilon^2 \end{cases}$

$\longrightarrow \frac{1+\theta^2}{\theta} = \frac{(1+5\rho)}{2\rho} \iff \theta^2 - \frac{1+5\rho}{2\rho}\theta + 1 = 0$

$\Delta = \left(\frac{1+5\rho}{2\rho}\right)^2 - 4 = \frac{1}{(2\rho)^2}(1+\rho)(1+9\rho) > 0$

on garde la racine < 1

$\theta = \frac{1}{4\rho}\left((1+5\rho) - \sqrt{(1+\rho)(1+9\rho)}\right) \qquad 0 < \theta < 1$

2) $Y_t = X_t + \eta_t$ ARMA(1,1) ?

$V_t = \varepsilon_t + \eta_t - 2\eta_{t-1} = X_t - 2X_{t-1} + \eta_t - 2\eta_{t-1}$

$= (X_t + \eta_t) - 2(X_{t-1} + \eta_{t-1})$

$= Y_t - 2Y_{t-1}$

$= \mu_t - \theta\mu_{t-1} \qquad BB(0, \sigma_\mu^2)$

$\phi(L) Y_t = \Theta(L)\mu_t \qquad \phi(L) = 1 - 2L \qquad$ ARMA(1,1) $\quad \theta \neq \frac{1}{2}$

$\Theta(L) = 1 - \theta L$

4- Processus ARMA(p,q)

. Déf : processus ARMA(p,q)

. Un processus stationnaire $(X_t)_t$ est un ARMA(p,q) si :

. $X_t = \mu + \phi_1 X_{t-1} + \dots + \phi_p X_{t-p} + \varepsilon_t - \theta_1\varepsilon_{t-1} - \dots - \theta_q\varepsilon_{t-q}$

ie : $\phi(L) X_t = \mu + \Theta(L)\varepsilon_t$

avec : . $\phi(L) = 1 - \phi_1 L - \dots - \phi_p L^p \quad , \phi_p \neq 0$

. $\Theta(L) = 1 - \theta_1 L - \dots - \theta_q L^q \quad , \theta_q \neq 0$

Rq : L'écriture d'un ARMA(p,q) n'est pas !

. Exemple.

. On a : . $\phi(L) X_t = \mu + \Theta(L)\varepsilon_t$ ARMA(p,q)

. $\tilde\phi(L)\tilde X_t = \mu + \tilde\Theta(L)\tilde\varepsilon_t$ ARMA(p,q).

. Ces 2 processus peuvent donner le m̂ processus (en terme de loi) avec pourtant :

. $\Theta \neq \tilde\Theta$ et $\phi \neq \tilde\phi$

. En effet : $f_X(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{|\Theta(e^{i\omega})|^2}{|\phi(e^{i\omega})|^2}$

$f_{\tilde X}(\omega) = \frac{\sigma_{\tilde\varepsilon}^2}{2\pi}\frac{|\tilde\Theta(e^{i\omega})|^2}{|\tilde\phi(e^{i\omega})|^2}$

. Or si $\frac{|\Theta(e^{i\omega})|^2}{|\phi(e^{i\omega})|^2} = \frac{|\tilde\Theta(e^{i\omega})|^2}{|\tilde\phi(e^{i\omega})|^2}$ et $\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_{\tilde\varepsilon}^2 \Rightarrow f_X(\omega) = f_{\tilde X}(\omega)$.

Représentation canonique ?

$\phi^*(L) Y_t = \Theta(L) e_t \qquad (e_t) \sim BB(0, \sigma_e^2)$

$\phi^*(L) = 1 - \frac{1}{2}L$

$$f_Y(\omega) = \frac{|\Theta(e^{i\omega})|^2}{|\phi(e^{i\omega})|^2} \, \frac{\sigma_\mu^2}{2\pi}$$

$$= \frac{|1-\theta e^{i\omega}|^2}{|1-2e^{i\omega}|^2} \, \frac{\sigma_\mu^2}{2\pi}$$

$$= \frac{1}{|2e^{i\omega}|^2} \times \frac{|1-\theta e^{i\omega}|^2}{|1-\frac{1}{2}e^{i\omega}|^2} \, \frac{\sigma_\mu^2}{2\pi}$$

$$= \frac{|1-\theta e^{i\omega}|^2}{|1-\frac{1}{2}e^{i\omega}|^2} \times \frac{\sigma_\mu^2/4}{2\pi} \qquad \sigma_e^2 = \frac{\sigma_\mu^2}{4}$$

$$= \frac{|\Theta(e^{i\omega})|^2}{|\phi^*(e^{i\omega})|^2} \, \frac{\sigma_e^2}{2\pi}$$

Fiche serie temp cours chap 3

Def : representation canonique.

7/8 . Pour avoir une representation ! (= rep canonique) d'un ARMA(p,q)

. On pose l'hyp :

(H') = { . Les racines de ϕ sont de module > 1 ; . — — — Θ — — — — ; . ϕ et Θ sont 1er entre eux.

. Sous (H'), $(\varepsilon_t)_t$ est l'innovation du processus.

. Prop :

. Sous (H') on peut réécrire un ARMA(p,q) ĉ un MA(∞) ou ĉ un AR(∞)

. MA(∞) : $X_t = m + \sum_{j=0}^{+\infty} a_j \varepsilon_{t-j}$, $(a_j) \in l^1$, $a_0 = 1$

. AR(∞) : $\varepsilon_t = m' \sum_{j=0}^{\infty} b_j X_{t-j}$, $(b_j) \in l^1$, $b_0 = 1$

Rq : Rq : Si $X_t \sim$ ARMA(p,q) et si Θ et ϕ ont s racines communes alors ont peut reduire X_t à un ARMA(p-s, q-s).

Exemple :

. Si $X_t \sim$ ARMA(1,1) avec $\varphi_1 = \Theta_1 = a$ et $\mu = 0$

. On a $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varepsilon_t - \Theta_1 \varepsilon_{t-1} = \varepsilon_t + a(X_{t-1} - \varepsilon_{t-1})$

$\Leftrightarrow X_t - aX_{t-1} = \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1}$

. On a vue que si $Y_t = \varepsilon_t - a\varepsilon_{t-1} \Rightarrow f_Y(\omega) = |1-ae^{i\omega}|^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$

. De m̂ si $Z_t = X_t - aX_{t-1} \Rightarrow f_Y(\omega) = |\sum b_j e^{i\omega j}|^2 f_X(\omega)$

$\Rightarrow f_Y(\omega) = |1-ae^{i\omega}|^2 f_X(\omega)$

. Finalem^t on a :

$|1-ae^{i\omega}|^2 f_X(\omega) = |1-ae^{i\omega}|^2 \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}$

$\Rightarrow f_X(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi} \longrightarrow$ densité spectral d'un BB

. Donc $X_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$

. Donc $X_t \sim$ ARMA(0,0)

3) $\exists (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tq $Y_t = e_t + \sum_{k=1}^{\infty} a_k Y_{t-k}$

$$EL[Y_t \mid \underline{Y_{t-1}}] = EL[\sum_{k=1}^{\infty} a_k Y_{t-k} + e_t \mid \underline{Y_{t-1}}]$$
$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k Y_{t-k} + \underbrace{EL[e_t \mid \underline{Y_{t-1}}]}_{=0 \text{ car } (e_t) \text{ innovation.}}$$

$$(1+\tfrac{1}{2}L) = (1-\theta L)e_t$$

$$e_t = (1-\theta L)^{-1}(1-\tfrac{1}{2}L)Y_t$$

$0<\theta<1$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k L^k (1-\tfrac{1}{2}L) Y_t$$

$$= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k L^k - \tfrac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty} \theta^k L^{k+1}\right) Y_t$$

$$= \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{k-1}(\theta-\tfrac{1}{2})L^k\right) Y_t$$
$$= Y_t + \sum_{k=1}^{\infty} \theta^{k-1}(\theta-\tfrac{1}{2}) Y_{t-k}$$

Donc $a_k = -\theta^{k-1}(\theta - \frac{1}{2})$

$\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = |\theta| < 1$ donc par D'Alembert $\Longrightarrow$ Absolum^t Convergent.

Exercice 3 :

On considère 2 processus faibles $X=(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $Y=(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tq

$$Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + aX_t + U_t$$
$$X_t = \phi_2 X_{t-1} + V_t$$

Où $U \sim BB(0,\sigma_U^2)$ et $V \sim BB(0,\sigma_V^2)$ décorrélés.
On suppose $0<|\phi_1|<1$ et $0<|\phi_2|<1$

1) Soit $W=(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tq

$$W_t = (1-\phi_1 L)(1-\phi_2 L) Y_t$$

Mq W est stationnaire et donner les $\gamma_W(k)$ $\rightarrow$ W_t est stationnaire car ϕ est inversible ($\phi(L) = (1-\phi_1 L)(1-\phi_2 L)$)

$$W_t = (1-(\phi_1+\phi_2)L + \phi_1\phi_2 L^2) Y_t$$
$$= Y_t - (\phi_1+\phi_2) Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2}$$

$\mathbb{E}[W_t] = 0$ car Y_t est stationnaire

$$\mathbb{V}[W_t] = \mathbb{V}[Y_t - (\phi_1+\phi_2) Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2}]$$
$$= \mathbb{V}[Y_t] + (\phi_1+\phi_2)^2 \mathbb{V}[Y_{t-1}] + \phi_1^2\phi_2^2 \mathbb{V}[Y_{t-2}] + 2\Big(\underbrace{Cov(Y_t, -(\phi_1+\phi_2)Y_{t-1})}_{=\phi_1 \times (-(\phi_1+\phi_2)) \times \mathbb{V}[Y_{t-1}]} + \underbrace{Cov(Y_t, \phi_1\phi_2 Y_{t-2})}_{=0} + \underbrace{Cov(-(\phi_1+\phi_2)Y_{t-1}, \phi_1\phi_2 Y_{t-2})}_{=\phi_1 \times (-(\phi_1+\phi_2)) \times \phi_1\phi_2 \mathbb{V}[Y_{t-2}]}\Big)$$

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[\phi_1 Y_{t-1} + aX_t + U_t]$$
$$\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{V}[\phi_2 X_{t-1} + V_t]$$
$$= \phi_2^2 \mathbb{V}[X_{t-1}] + \sigma_V^2 \quad \text{car } V \perp X$$
$$\Rightarrow \mathbb{V}[X_t] = \frac{\sigma_V^2}{1-\phi_2^2} \quad \text{car } X_t \text{ stationnaire}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \phi_1^2 \mathbb{V}[Y_{t-1}] + a^2 \mathbb{V}[X_t] + \sigma_U^2 \quad Y \perp X \perp U$$
$$= \phi_1^2 \mathbb{V}[Y_{t-1}] + a^2 \frac{\sigma_V^2}{1-\phi_2^2} + \sigma_U^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \frac{a^2\sigma_V^2 + (1-\phi_2^2)\sigma_U^2}{(1-\phi_1^2)(1-\phi_2^2)} = \sigma_Y^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}[W_t] = (1+\phi_1)(1+\phi_2)\sigma_Y^2 + 2\left(\phi_1 \times (-(\phi_1+\phi_2))\sigma_Y^2 + \phi_1 \times (-(\phi_1+\phi_2)) \times \phi_1\phi_2 \sigma_Y^2\right)$$
$$= \left((1+\phi_1)(1+\phi_2) - 2\phi_1(\phi_1+\phi_2)(1+\phi_1\phi_2)\right)\sigma_Y^2$$
$$= \left((1+\phi_1)(1+\phi_2) - 2\phi_1(\phi_1+\phi_2)(1+\phi_1\phi_2)\right)\frac{a^2\sigma_V^2 + (1-\phi_2^2)\sigma_U^2}{(1-\phi_1^2)(1-\phi_2^2)}$$

$$\gamma_W(k) = Cov(W_t, W_{t+k}) = Cov(Y_t - (\phi_1+\phi_2) Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2}, Y_{t+k} - (\phi_1+\phi_2) Y_{t+k-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t+k-2})$$

Déjà, si $|k|>2$ $\gamma_W(k) = 0$

Si $k=1$, $\gamma_W(1) = Cov(Y_t - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2}, Y_{t+1} - (\phi_1+\phi_2)Y_t + \phi_1\phi_2 Y_{t-1})$
$= -(\phi_1+\phi_2)\sigma_Y^2 - \phi_1\phi_2(\phi_1+\phi_2)\sigma_Y^2$

$k=2$, $\gamma_W(2) = Cov(Y_t - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2}, Y_{t+2} - (\phi_1+\phi_2)Y_{t+1} + \phi_1\phi_2 Y_t)$
$= \phi_1\phi_2\sigma_Y^2$

$k=-1$, $\gamma_W(-1) = Cov(Y_t - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2}, Y_{t-1} - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-2} + \phi_1\phi_2 Y_{t-3})$
$= -(\phi_1+\phi_2)\sigma_Y^2 - (\phi_1+\phi_2)\phi_1\phi_2\sigma_Y^2$

$k=-2$, $\gamma_W(-2) = Cov(Y_t - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2}, Y_{t-2} - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-3} + \phi_1\phi_2 Y_{t-4})$
$= \phi_1\phi_2\sigma_Y^2$

Donc W_t est bien stationnaire et $\gamma_W(k) = \begin{cases} ((1+\phi_1)(1+\phi_2) - 2\phi_1(\phi_1+\phi_2)(1+\phi_1\phi_2))\sigma_Y^2 & \text{si } k=0 \\ -(\phi_1+\phi_2)(1+\phi_1\phi_2)\sigma_Y^2 & \text{si } k=\pm 1 \\ \phi_1\phi_2\sigma_Y^2 & \text{si } k=\pm 2 \\ 0 & \text{si } k \notin [\![-2,2]\!] \end{cases}$

2) $Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + aX_t + U_t$
$X_t = \phi_2 X_{t-1} + V_t$

$\Rightarrow X_t = \frac{1}{a}(Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - U_t)$

$\Rightarrow \frac{1}{a}(Y_t - \phi_1 Y_{t-1} - U_t) = \phi_2 \frac{1}{a}(Y_{t-1} - \phi_1 Y_{t-2} - U_{t-1}) + V_t$

$\Rightarrow Y_t = \phi_1 Y_{t-1} + U_t + \phi_2 Y_{t-1} - \phi_1\phi_2 Y_{t-2} - \phi_2 U_{t-1} + aV_t$

$\Rightarrow Y_t = (\phi_1+\phi_2)Y_{t-1} - \phi_1\phi_2 Y_{t-2} + U_t - \phi_2 U_{t-1} + aV_t$

$\Rightarrow \underbrace{Y_t - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2}}_{(1-\phi_1 L)(1-\phi_2 L)Y_t \; = \Phi(L)Y_t} = U_t + aV_t - \phi_2 U_{t-1}$
$= Z_t - \theta_1 Z_{t-1}$
$= \Theta(L) Z_t$

$Z \sim BB(0, \sigma_Z^2)$

$\Phi(L) = (1-\phi_1 L)(1-\phi_2 L)$
$\Theta(L) = (1-\theta_1 L)$

$f_Y(\omega) = \frac{|\Theta(e^{i\omega})|^2}{|\Phi(e^{i\omega})|^2} \frac{\sigma_Z^2}{2\pi}$

5 Ajustement d'un modèle ARMA

Exercice 1 :

On considère le processus $AR(2)$, (X_t), solution de l'équation canonique:

$$X_t - \alpha X_{t-1} - \beta X_{t-2} = \varepsilon_t.$$

1. Montrer que, pour que (ε_t) soit le processus des innovations, il est nécessaire d'avoir $|\beta| < 1$.
2. Ecrire les équations de Yule-Walker reliant α, β, $\rho(1)$ et $\rho(2)$.
3. Exprimer les autocorrélations $\rho(1)$ et $\rho(2)$ en fonction de α et β.
4. Quels sont les limites de $\hat{\rho}_T(1)$ et $\hat{\rho}_T(2)$ lorsque T tend vers l'infini ?

5. Soient $\hat{\alpha}_T$ et $\hat{\beta}_T$ les estimateurs de Yule Walker de α et β. On rappelle que $\sqrt{T}(\hat{\alpha}_T - \alpha, \hat{\beta}_T - \beta)$ suit asymptotiquement la loi gaussienne bidimensionnelle centrée de matrice de covariance $\sigma_\varepsilon^2 \Gamma_2^{-1}$ où Γ_2 est la matrice

$$\Gamma_2 = \begin{pmatrix} \gamma(0) & \gamma(1) \\ \gamma(1) & \gamma(0) \end{pmatrix}.$$

6. Déterminer Γ_2^{-1} en fonction de $\gamma(0)$ et $\gamma(1)$. Déterminer la loi asymptotique de $\sqrt{T}(\hat{\beta}_T - \beta)$ en fonction de α et β.

7. En déduire un test pour valider l'hypothèse que le modèle est en réalité un $AR(1)$.

Exercice 2 :

On considère les modèles $ARMA$ suivants :

a) $X_t + 0,2X_{t-1} - 0,5X_{t-2} = \varepsilon_t$

b) $X_t = \varepsilon_t + 0,3\varepsilon_{t-1} - 0,4\varepsilon_{t-2}$

c) $X_t - 0,5X_{t-1} = \varepsilon_t + 0,4\varepsilon_{t-1}$

avec $(\varepsilon_t) \sim BBF(0,1)$ Gaussien.

Pour chacun de ces modèles :

- calculer et afficher les autocorrélogrammes et les autocorrélogrammes partiels (`ARMAacf`),
- simuler le modèle (`arima.sim`),
- estimer et afficher les autocorrélogrammes et les autocorrélogrammes partiels (`ARMAacf`),
- comparer les résultats théoriques avec les résultats obtenus par simulation en faisant évoluer le nombre de simulations.

5. Ajustement d'un modèle ARMA

Exercice 1:

AR(2) (X_t) tq

$$X_t - \alpha X_{t-1} - \beta X_{t-2} = \varepsilon_t \qquad (\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\Leftrightarrow \Phi(L) X_t = \varepsilon_t \quad \text{avec } \Phi(L) = 1 - \alpha L - \beta L^2$$

$$\tilde{\Phi}(L) = L^2 - \alpha L - \beta = \underbrace{L^2 - SL + P}$$

S : Σ racines de $\tilde{\Phi}$

P : Π racines de $\tilde{\Phi}$

1) (ε_t) innovat° $\Leftrightarrow$ racines de Φ de module >1.

(X_t) forme canonique $\Leftrightarrow$ racines de $\tilde{\Phi}$ de module <1.

$\Rightarrow |\beta| < 1$

2) Equations de Yule-Walker $X_t = \alpha X_{t-1} + \beta X_{t-2} + \varepsilon_t$ forme canonique

$$\mathbb{E}[X_t] = \alpha \mathbb{E}[X_{t-1}] + \beta \mathbb{E}[X_{t-2}]$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[X_t] \underbrace{(1-\alpha-\beta)}_{\neq 0 \text{ car } \phi(1) \neq 0} = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X_t] = 0$$

$$\begin{cases} \gamma_X(1) = \alpha \gamma_X(0) + \beta \gamma_X(1) \\ \gamma_X(2) = \alpha \gamma_X(1) + \beta \gamma_X(0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \rho_X(1) = \alpha + \beta \rho_X(1) \\ \rho_X(2) = \alpha \rho_X(1) + \beta \end{cases}$$

$\times X_{t-h}$ puis $\mathbb{E}$

3) $$\begin{cases} \rho_X(1) = \dfrac{\alpha}{1-\beta} \\ \rho_X(2) = \dfrac{\alpha^2}{1-\beta} + \beta \end{cases}$$

4) $$\hat{\rho}_T(1) = \frac{\frac{1}{T-1}\sum_{t=2}^{T} X_t X_{t-1}}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$$

$$\rho_X(1) = \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} \qquad X_1, \dots, X_T$$

$$\gamma_X(1) = Cov(X_t, X_{t-1}) = \mathbb{E}[X_t X_{t-1}]$$

$$\gamma_X(0) = \mathbb{V}[X_t] = \mathbb{E}[X_t^2]$$

$$\hat{\rho}_T(2) = \frac{\frac{1}{T-2}\sum_{t=3}^{T} X_t X_{t-2}}{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t^2}$$

Propriétés : $\hat{\rho}_T(1) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathbb{P}} \rho_X(1)$

$$\hat{\rho}_T(2) \xrightarrow[T\to\infty]{\mathbb{P}} \rho_X(2)$$

$$\sqrt{T}\begin{pmatrix} \hat{\rho}_T(1) - \rho_X(1) \\ \hat{\rho}_T(2) - \rho_X(2) \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, V)$$

5) $\hat{\alpha}_T$ et $\hat{\beta}_T$ estimateurs de Yule-Walker de α, β.

$$\begin{cases} \rho_X(1) = \alpha + \beta \rho_X(1) \\ \rho_X(2) = \alpha \rho_X(1) + \beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{\rho_X(1)(1-\rho_X(2))}{1-\rho_X^2(1)} \qquad \hat{\alpha}_T = \frac{\hat{\rho}_T(1)(1-\hat{\rho}_T(2))}{1-\hat{\rho}_T(1)^2} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathbb{P}} \alpha$$

$$\beta = \frac{\rho_X(2) - \rho_X^2(1)}{1-\rho_X^2(1)} \qquad \hat{\beta}_T = \frac{\hat{\rho}_T(2) - \hat{\rho}_T(1)^2}{1-\hat{\rho}_T(1)^2} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathbb{P}} \beta$$

$$\alpha = f(\rho_X(1), \rho_X(2)) \qquad \Rightarrow \hat{\alpha}_T \xrightarrow[\infty]{} \alpha$$

$$\beta = g(\rho_X(1), \rho_X(2)) \qquad \hat{\beta}_T \xrightarrow[\infty]{} \beta$$

car f et g continues.

$$\Rightarrow \sqrt{T}\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_T-\alpha\\ \hat{\beta}_T-\beta\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_\varepsilon^2 \underbrace{\begin{pmatrix}\gamma_X(0) & \gamma_X(1)\\ \gamma_X(0) & \gamma_X(1)\end{pmatrix}^{-1}}_{\Gamma_2}\right)$$

f, g C^1
Théorème Delta

6) $$\Gamma_2^{-1} = \begin{pmatrix}\gamma_X(0) & \gamma_X(1)\\ \gamma_X(0) & \gamma_X(1)\end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{\gamma_X^2(0)-\gamma_X^2(1)}\begin{pmatrix}\gamma_X(0) & -\gamma_X(1)\\ -\gamma_X(1) & \gamma_X(0)\end{pmatrix} = \frac{1}{\gamma_X(0)(1-\rho_X^2(1))}\begin{pmatrix}1 & -\rho_X(1)\\ -\rho_X(1) & 1\end{pmatrix}$$

$\rho_X(1) = \frac{\alpha}{1-\beta} = \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)}$ $\quad X_t = \alpha X_{t-1} + \beta X_{t-2} + \varepsilon_t$

× X_t puis $\mathbb{E}$

$\gamma_X(0) = ?$ $\quad \longrightarrow \gamma_X(0) = \alpha\gamma_X(1) + \beta\gamma_X(2) + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_t]$ $\quad$ × ε_t puis $\mathbb{E}$

$\mathbb{E}[\varepsilon_t X_t] = \sigma_\varepsilon^2$

$\Rightarrow \mathbb{V}[X_t] = \gamma_X(0) = \alpha^2\gamma_X(0) + \beta^2\gamma_X(0) + 2\alpha\beta\underbrace{\gamma_X(1)}_{\frac{\alpha}{1-\beta}\gamma_X(0)}$ $\quad$ on prend la $\mathbb{V}$

$$\Rightarrow \boxed{\gamma_X(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\alpha^2\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-\beta^2}}$$

$$\sqrt{T}(\hat{\beta}_T-\beta) \longrightarrow \mathcal{N}\left(0, \underbrace{\frac{1-\alpha^2\left(\frac{1+\beta}{1-\beta}\right)-\beta^2}{1-\frac{\alpha^2}{(1-\beta)^2}}}_{\sigma_\varepsilon^2 \times \frac{1}{\gamma_X(0)(1-\rho_X^2(1))}}\right)$$

7) (X_t) est un AR(1) $\Leftrightarrow \beta = 0$

<u>Test</u> : $H_0 : \beta = 0$ vs $H_1 : \beta \neq 0$

$H_0 : (X_t) \sim AR(1)$ $\quad H_1 : (X_t) \sim AR(2)$

Sous H_0, $\sqrt{T}(\hat{\beta}_T - 0) \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$

↳ Région de rejet : $\{\sqrt{T}|\hat{\beta}_T| > q_\alpha\}$

Erreur de première espèce : P_{H_0}(région de rejet) = 5%

$\Rightarrow q_\alpha = 1.9$

6 Prévisions

Exercice 1 :

On considère un processus X stationnaire vérifiant le modèle $ARMA(1,1)$ canonique

$$(1-\phi L)X_t = (1-\theta L)\varepsilon_t$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ_ε^2.

On s'intéresse pour $t \in \mathbb{Z}$ à la prévision linéaire optimale d'horizon 1: ${}_tX_{t+1} = EL(X_{t+1}|\underline{X_t})$.

1. Montrer qu'il existe une série absolument convergente $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que

$${}_tX_{t+1} = \sum_{k\geq 1} a_k X_{t+1-k}$$

et donner son terme général.

2. L'observation de $(X_t)_{t<0}$ étant impossible, on définit pour $t \in \mathbb{N}$ la prévision linéaire empirique

$${}_t\hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k}.$$

Exprimer ${}_t\hat{X}_{t+1}$ en fonction de X_t et ${}_{t-1}\hat{X}_t$.

3. On définit

$$e_t = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)^2\right]$$

l'erreur relative de la prévision tronquée. Exprimer e_{t+1} en fonction de e_t.

4. Calculer $\gamma_X(0)$ puis e_1. En déduire l'expression de $(e_t)_{t\in\mathbb{N}}$. Que dire de l'erreur de la prévision tronquée lorsque $t \to \infty$?

Exercice 2 :

On considère un processus X stationnaire vérifiant le modèle $ARIMA(1,1,1)$ canonique

$$(1-L)(1-\phi L)X_t = (1-\theta L)\varepsilon_t,$$

de condition initiale $Z = (X_{-1}, X_{-2}, \varepsilon_{-1})$ orthogonale à $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\geq 0}$ bruit blanc de variance σ_ε^2.

1. Montrer qu'il existe une série absolument convergente $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^3$ telles que

$$X_t = \sum_{k=1}^{t} a_k X_{t-k} + \varepsilon_t + Z' f(t).$$

Montrer qu'en outre $Z' f(t) \xrightarrow{L^2} 0$.

2 On s'intéresse pour $t \in \mathbb{N}$ à la prévision linéaire empirique

$${}_t\hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k}.$$

Exprimer ${}_t\hat{X}_{t+1}$ en fonction de X_t, X_{t-1} et ${}_{t-1}\hat{X}_t$.

3. On définit

$$e_t = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\mathbb{E}\left[\left(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t\right)^2\right]$$

l'erreur relative de la prévision tronquée. Exprimer e_{t+1} en fonction de e_t, et en déduire l'expression de e_t.

4. Que dire de l'erreur de la prévision tronquée lorsque $t \to \infty$.

Exercice 3 :

On dispose d'observations d'une série temporelle: $X_1, \ldots, X_T$. On cherche à prédire les valeurs futures. Pour tout coefficient $\alpha \in (0,1)$, appelé constante de lissage, on définit la série lissée

$$\begin{aligned}\hat{X}_t &= (1-\alpha)(X_t + \alpha X_{t-1} + \alpha^2 X_{t-2} + \ldots + \alpha^{t-1} X_1) \\ &= (1-\alpha)\sum_{j=0}^{t-1} \alpha^j X_{t-j}, \qquad t = 1, ..., T.\end{aligned}$$

1. Exprimer $\hat{X}_T$ en fonction de $\hat{X}_{T-1}$ et X_T.

2. Soit $q_\alpha(a) = \sum_{j=0}^{T-1} \alpha^j (X_{T-j} - a)^2$. Trouver $\hat{a} = \arg\min_a q_\alpha(a)$. Que retrouve-t-on pour T assez grand?

On suppose maintenant que

$$X_t = \sum_{i=0}^{t} \lambda_i \varepsilon_{t-i}$$

avec $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\geq 0}$ bruit blanc de variance σ_ε^2.

3. Le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ est-il stationnaire?

4. Montrer que l'on peut toujours supposer que $\lambda_0 = 1$ et que l'on peut mettre X_t sous la forme

$$X_t = \sum_{j=1}^{t} \varphi_j X_{t-j} + \varepsilon_t.$$

Comment peut-on calculer les φ_j en fonction des λ_i.

5. Calculer

$$EL(X_{T+1}|X_T, \ldots, X_1).$$

Pour quelles valeurs de λ_i a-t-on

$$EL(X_{T+1}|X_T, \ldots, X_1) = (1-\alpha)\sum_{j=0}^{T-1} \alpha^j X_{T-j}$$

Exercice 4 :

On considère le modèle $ARIMA(2,0,3)$ défini par

$$X_t - X_{t-1} + 0,3X_{t-2} = \varepsilon_t + 0,4\varepsilon_{t-1} + 0,2\varepsilon_{t-2} + 0,1\varepsilon_{t-3}$$

avec $(\varepsilon_t) \sim BBF(0,1)$ Gaussien.

1. Simuler une trajectoire de taille $T = 1000$ de la série temporelle.

2. Estimer sur cette série un modèle $ARIMA(1,0,0)$, $ARIMA(2,0,0)$, $ARIMA(2,0,1)$, $ARIMA(2,0,2)$, $ARIMA(2,0,3)$, $ARIMA(2,0,4)$.

3. Comparer ces modèles en termes de critères AIC, BIC et des p-values des tests de Ljung-Box.

4. Estimer sur la sous-série $(t = 1, ..., 980)$ un modèle $ARIMA(2,0,3)$. Effectuer des prévisions jusqu'à l'horizon $h = 20$, tracer les intervalles de confiance à 95% et comparer aux vraies valeurs. Recommencer pour plusieurs trajectoires.

6 – Révisions

Exercice 1 : ARMA(1,1) $(1-\phi L)X_t = (1-\theta L)\varepsilon_t$ avec $(\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$$\Leftrightarrow X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$$

* Conditions sur ϕ et θ pour avoir la représentation canonique ?

→ $|\phi| < 1$ et $|\theta| < 1$ $\Leftrightarrow$ Les racines de ϕ et θ sont de module > 1

et $\theta \neq \phi$

1) Mq $\exists (a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ tq $X_{t+1} = \varepsilon_{t+1} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_{t+1-k}$

et en déduire que $EL[X_{t+1} | \underline{X_t}] = \sum_{k\geq 1} a_k X_{t+1-k} = {}_tX_{t+1}$

$$\varepsilon_t = (1-\theta L)^{-1}(1-\phi L)X_t$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k L^k \,(1-\phi L)X_t$$
$$= \Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\theta^k L^k - \phi\sum_{k=0}^{\infty}\theta^k L^{k+1}\Big)X_t = \Big(1 + \sum_{k=1}^{\infty}\theta^k L^k - \phi\sum_{k=1}^{\infty}\theta^{k-1}L^k\Big)X_t$$

$$\Rightarrow \varepsilon_t = X_t + \sum_{k=1}^{\infty}\theta^{k-1}(\theta-\phi)X_{t-k}$$

$$\Leftrightarrow X_t = \varepsilon_t + (\phi-\theta)\sum_{k=1}^{\infty}\theta^{k-1}X_{t-k}$$

$$\Rightarrow X_{t+1} = \varepsilon_{t+1} + (\phi-\theta)\sum_{k=1}^{\infty}\theta^{k-1}X_{t-k}$$

$$\Rightarrow a_k = (\phi-\theta)\theta^{k-1}$$

${}_tX_{t+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k X_{t+1-k}$ car $EL(\varepsilon_{t+1} | \underline{X_t}) = 0$ Série des (a_k) est AC car série géom.

2) ${}_t\hat{X}_{t+1} = \sum_{k=1}^{t+1} a_k X_{t+1-k}$ ${}_{t-1}\hat{X}_t = \sum_{k=1}^{t} a_k X_{t-k}$

$$= (\phi-\theta)X_t + \sum_{k=2}^{t+1}(\phi-\theta)\theta^{k-1}X_{t+1-k}$$

$$= (\phi-\theta)X_t + \sum_{k=1}^{t}(\phi-\theta)\theta^{k}X_{t-k}$$

$$= (\phi-\theta)X_t + \theta\underbrace{\sum_{k=1}^{t}(\phi-\theta)\theta^{k-1}X_{t-k}}_{{}_{t-1}\hat{X}_t}$$

$$\Rightarrow {}_t\hat{X}_{t+1} = (\phi-\theta)X_t + \theta\,{}_{t-1}\hat{X}_t$$

3) Erreur de prédiction à la date t : $X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t$

Variance normalisée de l'erreur de prédiction à la date t :

$$e_t = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}E[(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t)^2]$$

$\mathbb{E}[X_t] = 0$

$\mathbb{E}[{}_{t-1}\hat{X}_t] = 0$

$$e_{t+1} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} \mathbb{E}[(X_{t+1} - {}_t\hat{X}_{t+1})^2]$$

$$= \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} \mathbb{E}[(\underbrace{\phi X_t + \varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t - ((\phi-\theta)X_t - \theta\, {}_{t-1}\hat{X}_t)}_{(\varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t) + \theta(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t)})^2]$$

$$\Rightarrow e_{t+1} = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} \left((1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 + \theta^2 e_t \sigma_\varepsilon^2 + 2\theta \underbrace{\mathbb{E}[(\varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t)(X_t - {}_{t-1}\hat{X}_t)]}_{-\theta \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t X_t]}_{=\sigma_\varepsilon^2}}\right)$$

on part de $X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ $\times \varepsilon_t$ puis $\mathbb{E}$

$$\Rightarrow e_{t+1} = (1+\theta^2) + \theta^2 e_t$$

$$\Rightarrow (e_{t+1} - 1) = \theta^2 (e_t - 1) = \dots = \theta^{2t}(e_1 - 1) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

$$\Leftrightarrow e_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$$

$X_{t+1} - {}_t X_{t+1} = \varepsilon_{t+1}$ $\quad \mathbb{E}[\underbrace{\varepsilon_{t+1}^2}_{\sigma_\varepsilon^2}] = 1$

4) $X_t = \phi X_{t-1} + (\varepsilon_t - \theta\,\varepsilon_{t-1})$

$$\gamma_X(0) = \mathbb{V}[X_t]$$

$$= \phi^2 \gamma_X(0) + (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 + 2\phi \underbrace{\mathrm{Cov}(X_{t-1}, \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1})}_{-\theta\sigma_\varepsilon^2}$$

$$\Rightarrow \gamma_X(0) = \left(\frac{1 - 2\phi\theta + \theta^2}{1-\phi^2} \right) \sigma_\varepsilon^2$$