Théorie des Valeurs Extrêmes - TD2

ISFA3, ANNEE

Examen Théorie de valeurs extrêmes 2010-2011 - Master II SAF Pro - Sans document - Sans calculatrice - Durée 2h00

Ce examen est un questionnaire à choix multiples constitué de 16 questions. Plusieurs réponses sont proposées pour chaque question. Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses.

Les réponses sont à inscrire sur la feuille jointe, en cochant pour chaque question la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Toute réponse exacte entraîne une bonification de 1 point, toute erreur est pénalisée de 0,5 point.

Q 1) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. Il est possible de trouver une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} P(M_n \le u_n) = e^{-\tau}$ si

A) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_i > u_n) = \ln(\tau)$
B) $\lim_{n\to\infty} n \Pr(X_i > u_n) = \ln(\tau)$
C) $\lim_{n\to\infty} \ln(n) \Pr(X_i > u_n) = \tau$
D) $\lim_{n\to\infty} n \Pr(X_i > u_n) = \tau$

Q 2) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. et $\bar{X}_n = n^{-1} \sum_{i=1}^n X_i$. Alors

$$\Pr\left(\bar{X}_n \le \sigma_n x + m_n\right) \to \Phi(x) \text{ quand } n \to \infty,$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite si

A) $m_n = \mathbb{E}(\bar{X}_n)$, $\sigma_n^2 = Var(\bar{X}_n)$
B) $m_n = n\mathbb{E}(\bar{X}_n)$, $\sigma_n^2 = Var(\bar{X}_n)$
C) $m_n = \mathbb{E}(X_1)$, $\sigma_n = Var(\bar{X}_n)$
D) $m_n = \mathbb{E}(\bar{X}_n)$, $\sigma_n^2 = nVar(\bar{X}_n)$

Q 3) S'il existe deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\right) = H(x),$$

et si $\tilde{a}_n = ca_n$ et $\tilde{b}_n = b_n + d^{-1}a_n$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{M_h - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \leq x\right) =$$

A) $H(cx+d)$
B) $H(c^{-1}x+d)$
C) $H(cx+d^{-1})$
D) $H(c^{-1}x+d^{-1})$

Q 4) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d.et une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} n\Pr(X_i > u_n) = \tau$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\mathbb{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i > u_n\}}\right)\right]\right) =$$

A) τe^t
B) τt
C) $\tau(t-1)$
D) $\tau(e^t - 1)$

Q 5) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. de loi $G_\xi = GEV(0,1,\xi)$

$$G_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(-[1+\xi x]_+^{-1/\xi}\right) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, alors $(M_n - b_n)/a_n$ a la même loi que X_1 si

A) $a_n = n^\xi$ et $b_n = (n^\xi - 1)/\xi$
B) $a_n = (n^\xi - 1)\xi$ et $b_n = n^{-\xi}$
C) $a_n = (n^\xi - 1)/\xi$ et $b_n = n^\xi$
D) $a_n = n^{-\xi}$ et $b_n = (n^\xi - 1)\xi$

On définit les lois de

$$\text{Fréchet } (\alpha > 0): \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

$$\text{Weibull } (\alpha > 0): \quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\} & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

$$\text{Gumbel}: \quad \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Q 6) Si $X \sim \Phi_\alpha$, alors

A) $\alpha \ln(X) \sim \Lambda$

B) $\ln(X) \sim \alpha^{-1}\Phi_\alpha$

C) $-X \sim \Psi_\alpha$

D) $X^\alpha \sim \Lambda$

Q 7) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. de loi $N(0,1)$ et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. On définit les suites a_n et b_n par

$$\begin{aligned} a_n &= (2\log n)^{-1/2} \\ b_n &= (2\log n)^{1/2} - \frac{1}{2}(2\log n)^{-1/2}[\log(\log n) + \log(4\pi)] \end{aligned}$$

telles que, quand $n \to \infty$,

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{L} \Lambda.$$

Soient $Y_i = \exp(\mu + \sigma X_i)$ et $\tilde{M}_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$. Alors

$$\frac{\tilde{M}_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \xrightarrow{L} \Lambda$$

si

A) $\tilde{a}_n = \sigma a_n \exp(\mu + b_n)$ et $\tilde{b}_n = \exp(\mu + b_n)$

B) $\tilde{a}_n = \mu a_n \exp(\mu + \sigma b_n)$ et $\tilde{b}_n = \exp(\mu + \sigma b_n)$

C) $\tilde{a}_n = \exp(\mu + \sigma b_n)$ et $\tilde{b}_n = \sigma a_n \exp(\mu + \sigma b_n)$

D) $\tilde{a}_n = \sigma a_n \exp(\mu + \sigma b_n)$ et $\tilde{b}_n = \exp(\mu + \sigma b_n)$

Q 8) La distribution logistique,

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

A) appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel

B) appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet

C) appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull

D) n'appartient à aucun domaine d'attraction

Q 9) Soit X une variable aléatoire de distribution log-gamma de densité

$$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}.$$

Sa fonction de répartition

A) appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel
B) appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet
C) appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull
D) n'appartient à aucun domaine d'attraction.

Q 10) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. de loi absolument continue et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, alors

$$\Pr(M_n > M_{n-1}) =$$

A) $\mathbb{E}\left[\bar{F}^n(X_1)\right]$
B) $\mathbb{E}\left[\bar{F}^{n-1}(X_1)\right]$
C) n^{-1}
D) $1/\ln(n)$

Q 11) Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition F telle que

$$\lim_{u \to x^F} \frac{\bar{F}\left(u + xa\left(u\right)\right)}{\bar{F}\left(u\right)} = \begin{cases} [1+\xi x]_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ e^{-x} & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{n \to \infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \begin{cases} \exp\left(-[1+\xi x]_+^{-1/\xi}\right) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp\left(-\exp\left(-x\right)\right) & \text{si } \xi = 0, \end{cases},$$

si

A) $a_n = a(b_n)$ et $b_n = F^{-1}(1 - n^{-1})$
B) $b_n = a(a_n)$ et $a_n = F^{-1}(1 - n^{-1})$
C) $b_n = a(a_n)$ et $b_n = F^{-1}(n^{-1})$
D) $a_n = a(b_n)$ et $b_n = 1 - F^{-1}(n^{-1})$

Q 12) Pour détecter qu'une distribution empirique a une queue de distribution (pour ses grandes valeurs) de type Pareto, il faut considérer le graphique quantile-quantile suivant

A) $\left\{\ln(\ln X_{(i)}), -\ln(i/n)\right\}$
B) $\left\{X_{(i)}, -\ln(i/n)\right\}$
C) $\left\{\ln X_{(i)}, -\ln(i/n)\right\}$
D) $\left\{\ln X_{(i)}, \ln(-\ln(i/n))\right\}$

Remarque: si X a une distribution de Pareto, alors $\ln(X)$ a une distribution Exponentielle.

Q 13) Soit e la fonction d'espérance de vie résiduelle d'une variable aléatoire X

$$e(u) = \mathbb{E}(X - u | X > u).$$

Si X a une distribution Exponentielle de paramètre λ, alors

A) $\forall u \ e(u) = \lambda$.

B) $\forall u \ e(u) = \lambda^{-1}$.

C) $\lim_{u \to \infty} e(u) = \lambda$.

D) $\lim_{u \to \infty} e(u) = \lambda^{-1}$.

Q 14) Soit G la fonction de répartition telle que

$$G(x) = \exp\left(-\exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Alors le niveau z_p de période de retour $1/p$ est donnée par

A) $\mu - \sigma \log(-\log(1-p)$

B) $\mu - \log(-\log(1-\sigma p)$

C) $-\log(-\log(\mu - \sigma p)$

D) $\mu - \sigma \log(1-p)$

Q 15) Supposons que Y a une distribution Pareto Généralisée GPD(σ, ξ) telle que

$$P(Y < y) = 1 - \left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}.$$

Alors $Y - v | Y > v$ a une distribution

A) GPD(σ, ξ)

B) GPD$(\sigma, v\xi)$

C) GPD$(\sigma + v, \xi)$

D) GPD$(\sigma + \xi v, \xi)$

Q 16) Soient (X_i) une suite de variables i.i.d. de loi F et et une suite (u_n) telle que $\lim_{n \to \infty} n(1 - F(u_n)) = \tau$. On définit $Y_i = \max(X_i, X_{i-2})$ alors

$$\lim_{n \to \infty} P(\max(Y_1, \ldots, Y_n) \le u_n) =$$

A) $\exp(-\tau)$

B) $\exp(-\tau/2)$

C) $\exp(-2\tau)$

D) $\lim_{n \to \infty} P(\max(X_1, \ldots, X_n) \le u_n)$

TD2

Q1) (X_i) iid $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

Il est possible de trouver (u_n) tq $\mathbb{P}(M_n \leqslant u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\tau}$ si

$$\mathbb{P}(M_n \leqslant u_n) = [F(u_n)]^n = \exp\{n \ln F(u_n)\} = \exp\{n \ln\{1 - \overline{F}(u_n)\}\}$$
$$= \exp\{-n\overline{F}(u_n)\}$$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leqslant u_n) = e^{-\tau} \iff \lim_{n\to\infty} \exp\{-n\overline{F}(u_n)\} = e^{-\tau}$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} n\overline{F}(u_n) = \tau$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} n\,\mathbb{P}(X_i > u_n) = \tau \implies D$$

Q2) (X_i) iid $\overline{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^n X_i$

$\mathbb{P}(\overline{X}_n \leqslant \sigma_n x + m_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$ si

$$\mathbb{P}(\overline{X}_n \leqslant \sigma_n x + m_n) = \mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - m_n}{\sigma_n} \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$$

TCL : $\mathbb{P}\left(\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}(X_i)}{\sqrt{\mathbb{V}(X_i)/n}}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Phi(x)$

Par identication : $m_n = \mathbb{E}(X_i) = \mathbb{E}(\overline{X}_n)$

$\sigma_n^2 = \mathbb{V}(X_i)/n$

$$\mathbb{V}(\overline{X}_n) = \mathbb{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n \mathbb{V}(X_i) = \frac{1}{n}\mathbb{V}(X_i) = \sigma_n^2$$

$\implies A$

Q3) Si $\exists (a_n), (b_n)$ tq $\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} H(x)$

Si $\tilde{a}_n = c a_n$ et $\tilde{b}_n = b_n + d^{-1} a_n$, alors $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \leqslant x\right) =$

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n - d^{-1}a_n}{c a_n} \leqslant x\right) = \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant c\cdot x + d^{-1}\right)$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} H(c\cdot x + d^{-1}) \implies C$$

Q4) (X_i) iid et (u_n) tq $n\mathbb{P}(X_i > u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau$

alors $\lim_{n\to\infty} \ln\left\{\mathbb{E}\left[\exp\left\{t \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i > u_n\}}\right\}\right]\right\} =$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\exp\left\{t \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i>u_n\}}\right\}\right] &= \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^n \exp\left\{t\, \mathbb{1}_{\{X_i>u_n\}}\right\}\right] \\
&= \prod_{i=1}^n \mathbb{E}\left[\exp\left\{t\, \mathbb{1}_{\{X_i>u_n\}}\right\}\right] \\
&= \left[\mathbb{E}\left[\exp\left\{t\, \mathbb{1}_{\{X_i>u_n\}}\right\}\right]\right]^n \\
&= \left[\exp\{t\cdot 0\}\left[1-\mathbb{P}(X_i>u_n)\right] + \exp\{t\}\,\mathbb{P}(X_i>u_n)\right]^n \\
&= \left[1-\mathbb{P}(X_i>u_n)(1-e^t)\right]^n \\
&= \exp\left\{n \ln\left\{1-\mathbb{P}(X_i>u_n)(1-e^t)\right\}\right\} \\
&\underset{n\to\infty}{\sim} \exp\left\{-n\,\mathbb{P}(X_i>u_n)(1-e^t)\right\} = \exp\left\{n\,\mathbb{P}(X_i>u_n)(e^t-1)\right\}
\end{aligned}$$

$$\ln\left\{\mathbb{E}\left[\exp\left\{t \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{X_i>u_n\}}\right\}\right]\right\} \underset{n\to\infty}{\sim} n\,\mathbb{P}(X_i>u_n)(e^t-1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau(e^t-1) \Rightarrow D_{//}$$

Q5) (X_i) iid $\sim G_\xi = GEV(0,1,\xi)$ $\qquad G_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left\{-[1+\xi x]_+^{-1/\xi}\right\} & \xi \neq 0 \\ \exp\{-\exp\{-x\}\} & \xi = 0 \end{cases}$

$M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

$(M_n - b_n)/a_n$ a la même loi que X_1 si

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n-b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(M_n \leqslant a_n x + b_n) = \left[G_\xi(a_n x+b_n)\right]^n$$

$$= \begin{cases} \exp\left\{-n\left[1+\xi(a_n x+b_n)\right]_+^{-1/\xi}\right\} & \xi\neq 0 \\ \exp\left\{-n\exp\{-(a_n x+b_n)\}\right\} & \xi = 0\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{M_n-b_n}{a_n} \leqslant x\right) = G_\xi(x) &\Leftrightarrow n\left[1+\xi(a_n x+b_n)\right]^{-1/\xi} = \left[1+\xi x\right]^{-1/\xi} \\
&\Leftrightarrow n^{-\xi}\left[1+\xi(a_n x+b_n)\right] = 1+\xi x \\
&\Leftrightarrow n^{-\xi} + \xi b_n + n^{-\xi} a_n \xi x = 1+\xi x \\
&\Leftrightarrow \begin{cases} n^{-\xi}+\xi b_n = 1 \\ n^{-\xi} a_n = 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b_n = (n^\xi - 1)/\xi \\ a_n = n^\xi \end{cases} \Rightarrow A_{//}
\end{aligned}$$

Fréchet $(\alpha > 0)$: $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & x > 0 \end{cases}$

Weibull $(\alpha > 0)$: $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\} & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$

Gumbel : $\Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\}$ $\quad x \in \mathbb{R}$

Q6) Si $X \sim \Phi_\alpha$, alors

$$\mathbb{P}(\alpha \ln X \leq x) = \mathbb{P}(\ln X \leq x/\alpha) = \mathbb{P}(X \leq e^{x/\alpha}) = \Phi_\alpha(e^{x/\alpha})$$
$$= \exp\{-(e^{x/\alpha})^{-\alpha}\} = \exp\{-e^{-x}\} = \Lambda(x)$$

$\Rightarrow$ A //

$$\mathbb{P}(\ln(X) \leq x) = \mathbb{P}(X \leq e^{x}) = \Phi_\alpha(e^{x})$$
$$= \exp\{-(e^{x})^{-\alpha}\} \neq \alpha^{-1}\Phi_\alpha(x)$$

$$\mathbb{P}(-X \leq x) = \mathbb{P}(X \geq -x) = 1 - \mathbb{P}(X \leq -x) = 1 - \Phi_\alpha(-x)$$
$$= 1 - \exp\{-(-x)^{-\alpha}\} = \Psi_{-\alpha}(x) \neq \Psi_\alpha(x)$$

$$\mathbb{P}(X^\alpha \leq x) = \mathbb{P}(X \leq x^{1/\alpha}) = \Phi_\alpha(x^{1/\alpha})$$
$$= \exp\{-(x^{1/\alpha})^{-1/\alpha}\} = \exp\{-x^{-1}\} = \Phi_1(x) \neq \Lambda(x)$$

Q7) (X_i) iid $\sim \mathcal{N}(0,1)$ $\quad M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

$a_n = (2 \ln n)^{-1/2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$b_n = (2 \ln n)^{1/2} - \frac{1}{2}(2 \ln n)^{-1/2}\left[\ln\{\ln n\} - \ln\{4\pi\}\right]$

tq $\dfrac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \Lambda$

$Y_i = \exp\{\mu + \sigma X_i\}$ $\quad \tilde{M}_n = \max(Y_1, \dots, Y_n)$

Alors $\dfrac{\tilde{M}_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \Lambda$ si

$$\mathbb{P}\left(\frac{\tilde{M}_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(M_n \leqslant \tilde{a}_n x + \tilde{b}_n) = [\mathbb{P}(Y \leqslant \tilde{a}_n x + \tilde{b}_n)]^n$$

$$\mathbb{P}(Y \leqslant y) = \mathbb{P}\left(\exp\{\mu + \sigma X\} \leqslant y\right) = \mathbb{P}(\mu + \sigma X \leqslant \ln y) = \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{1}{\sigma}[\ln y - \mu]\right)$$

$$\ln\{\tilde{a}_n x + \tilde{b}_n\} = \ln\{\tilde{a}_n x\} \cdot \ln\{\tilde{b}_n\} \underset{\substack{n \to \infty \\ (a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0)}}{\sim} (\tilde{a}_n x - 1) \ln \tilde{b}_n$$

$$\mathbb{P}(Y \leqslant \tilde{a}_n x + \tilde{b}_n) \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{1}{\sigma}\left[(\tilde{a}_n x - 1)\ln \tilde{b}_n - \mu\right]\right) = \mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{\tilde{a}_n \ln \tilde{b}_n}{\sigma} x - \frac{\ln \tilde{b}_n + \mu}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(M_n \leqslant a_n x + b_n) = [\mathbb{P}(X \leqslant a_n x + b_n)]^n$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\tilde{M}_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \leqslant x\right) \underset{n\to\infty}{\sim} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) \Rightarrow \left[\mathbb{P}\left(X \leqslant \frac{\tilde{a}_n \ln \tilde{b}_n}{\sigma} x - \frac{\ln \tilde{b}_n + \mu}{\sigma}\right)\right]^n = [\mathbb{P}(X \leqslant a_n x + b$$

Par identification,

$$a_n = \frac{\tilde{a}_n \ln \tilde{b}_n}{\sigma} \Rightarrow \tilde{a}_n = \frac{\sigma}{\ln \tilde{b}_n} a_n$$

$$b_n = -\frac{\ln \tilde{b}_n + \mu}{\sigma} \Rightarrow \ln \tilde{b}_n + \mu = -\sigma b_n \Rightarrow \tilde{b}_n = \exp\{-(\mu + \sigma b_n)\}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{\sigma a_n}{-(\mu + \sigma b_n)}$$

$\Rightarrow D$ // avec qq pb

Q8) $F(x) = \dfrac{1}{1 + e^{-x}}$, $x \in \mathbb{R}$

$$F(x) = \frac{1}{1 + e^{-x}} = [1 + e^{-x}]^{-1} = \exp\{\ln\{[1 + e^{-x}]^{-1}\}\}$$

$$= \exp\{-\ln\{1 + e^{-x}\}\} \underset{x\to\infty}{\sim} \exp\{-e^{-x}\}$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(M_n \leqslant a_n x + b_n) = [F(a_n x + b_n)]^n$$
$$\underset{n\to\infty}{\sim} [\exp\{-\exp\{-(a_n x + b_n)\}\}]^n$$
$$\exp\{-n \exp\{-(a_n x + b_n)\}\}$$
$$\exp\{-\exp\{-a_n x - b_n + \ln n\}\}$$

$\Rightarrow a_n = 1$ et $b_n = \ln n$ $\Rightarrow$ $a_n x + b_n = x + \ln n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\{-\exp\{-x\}\} = \Lambda(x)$$

$\Rightarrow F \in D(\Lambda) \Rightarrow A$ //

Q9) $f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$

Sa fonction de répartition

Q10) (X_i) iid de loi continue $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

Alors $\mathbb{P}(M_n > M_{n-1}) =$

$$\mathbb{P}(M_n > M_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n > M_{n-1}) = \mathbb{P}(X_n > \max(X_1, \dots, X_{n-1})) = \mathbb{P}(X_n > X_1, \dots, X_n > X_{n-1})$$
$$= \mathbb{P}(X_n > X_1) \dots \mathbb{P}(X_n > X_{n-1}) = [\mathbb{P}(X_n > X_1)]^{n-1} = \mp^n(X_n > X_1)$$
$$\mathbb{P}(M_n > M_{n-1}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x_1) \mp^n(X_n > x_1)\, dx_1 = \mathbb{E}[\mp^{n-1}(X_1)]$$

Q11) $$\lim_{u \to x_F} \frac{\mp(u + x a(u))}{\mp(u)} = \begin{cases} [1+\xi x]_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0 \\ e^{-x} & \text{si } \xi = 0 \end{cases}$$

Alos $$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \begin{cases} \exp(-1[1+\xi x]_+^{-1/\xi}) & \xi \neq 0 \\ \exp(-\exp(-x)) & \xi = 0 \end{cases}$$

si

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(M_n \leqslant a_n x + b_n) = [\mp(a_n x + b_n)]^n$$
$$= \exp\{n \ln \mp(a_n x + b_n)\}$$
$$= \exp\{n \ln 1 - \mp(a_n x + b_n)\}$$
$$\underset{n\to\infty}{\sim} \exp\{-n \mp(a_n x + b_n)\}$$

- Pour $\xi \neq 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \exp\{-1[1+\xi x]_+^{-1/\xi}\} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n \mp(a_n x + b_n) = [1+\xi x]_+^{-1/\xi}$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n \mp(a_n x + b_n) = \lim_{u \to x_F} \frac{\mp(u + x a(u))}{\mp(u)}$$

On pose $u = b_n$: $n \mp(a_n x + b_n) = \frac{\mp(b_n + x a(b_n))}{\mp(b_n)}$

Par identification, $a_n = a(b_n)$ et $\mp(b_n) = \frac{1}{n} \Rightarrow b_n = \mp^{-1}(1 - 1/n)$

- Pour $\xi = 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \exp(-\exp(-x)) \Rightarrow \lim_{n\to\infty} n \mp(a_n x + b_n) = \exp(-x)$$

$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} n \mp(a_n x + b_n) = \lim_{u \to x_F} \frac{\mp(u + x a(u))}{\mp(u)} \Rightarrow \text{comme avant}$$

$\Rightarrow A_{//}$

Q12) Pour détecter qu'une distribution empirique a une queue de distribution de type Pareto, il faut considérer le graphique quantile-quantile suivant

Q-Q plot : $\{X_{(i)}, F^{-1}(1-i/n) : i = 1, ..., n\}$

Remarque : si $X \sim$ Pareto $\Rightarrow \ln X \sim$ Exp

$X \sim Exp(1)$ $\quad F(x) = 1 - \exp(-x)$

$F(x) = p \Leftrightarrow 1 - \exp(-x) = p \Leftrightarrow \exp(-x) = 1-p \Leftrightarrow x = -\ln(1-p)$
$\Rightarrow F^{-1}(p) = -\ln(1-p)$
$\Rightarrow F^{-1}(1-i/n) = -\ln(1-[1-i/n]) = -\ln(i/n)$

$\Rightarrow$ QQ plot : $\{\ln X_{(i)}, -\ln(i/n)\} \Rightarrow C$ //

Q13) $e(u) = \mathbb{E}(X-u \mid X > u)$
Si $X \sim Exp(\lambda)$, alors

Loi exponentielle sans mémoire : $e(u) = \mathbb{E}(X-u \mid X > u) = \mathbb{E}(X) = \lambda^{-1} \Rightarrow$ B et D

$X \sim Exp(\lambda)$ $\quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $\quad \mathbb{E}(X) = 1/\lambda$
$\quad F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ $\quad \mathbb{V}(X) = 1/\lambda^2$

Q14) $G(x) = \exp\{\exp\{-(\frac{x-\mu}{\sigma})\}\}$, $x \in \mathbb{R}$

Alors le niveau z_p de la période de retour est donné par

Le niveau de retour de période p^{-1} est le quantile d'ordre $1-p$ de la GEV.

$G(z_p) = 1-p \Leftrightarrow \exp\{\exp\{-(\frac{z_p-\mu}{\sigma})\}\} = 1-p \Leftrightarrow \frac{z_p-\mu}{\sigma} = -\ln\{\ln\{1-p\}\}$

$\Rightarrow z_p = -\sigma \ln\{-\ln\{1-p\}\} + \mu \Rightarrow A$ //

Q15) $\mathbb{P}(Y \leq y) = 1 - \left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}$ $\quad Y \sim GPD(\sigma, \xi)$

Alors $Y - v \mid Y > v$ a une distribution

$$\mathbb{P}(Y - v \leq y \mid Y > v) = \frac{\mathbb{P}(Y - v \leq y, Y > v)}{\mathbb{P}(Y > v)} = \frac{\mathbb{P}(v < Y \leq y + v)}{\mathbb{P}(Y > v)}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(v < Y \leq y + v) &= \mathbb{P}(Y \leq y + v) - \mathbb{P}(Y \leq v) \\ &= \cancel{1} - \left[1 + \xi\, \frac{y+v}{\sigma}\right]_+^{-1/\xi} - \left[\cancel{1} - \left[1 + \xi\left(\frac{v}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}\right] \\ &= \left[1 + \xi\left(\frac{v}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi} - \left[1 + \xi\, \frac{y+v}{\sigma}\right]_+^{-1/\xi}\end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(Y > v) = 1 - \mathbb{P}(Y \leq v) = \left[1 + \xi\left(\frac{v}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(Y - v \leq y \mid Y > v) = 1 - \left[\frac{1 + \xi\left(\frac{y+v}{\sigma}\right)}{1 + \xi\left(\frac{v}{\sigma}\right)}\right]_+^{-1/\xi} = 1 - \left[\frac{1 + \xi\left(\frac{v}{\sigma}\right) + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)}{1 + \xi\left(\frac{v}{\sigma}\right)}\right]_+^{-1/\xi}$$

$$= 1 - \left[1 + \frac{\xi y}{\sigma + \xi v}\right]_+^{-1/\xi} = 1 - \left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma + \xi v}\right)\right]_+^{-1/\xi}$$

$$= GPD(\sigma + \xi v, \xi) \Rightarrow D$$

Q16) (X_i) iid $\sim F$, (u_n) tq $n(1 - F(u_n)) \xrightarrow[n \to \infty]{} \tau$

$Y_i = \max(X_i, X_{i-2})$

Alors $\mathbb{P}(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leq u_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} ?$

$$\max(Y_1, \dots, Y_n) = \max(\max(X_1, X_{-1}), \dots, \max(X_n, X_{n-2})) = \max(X_1, \dots, X_n)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\max(Y_1, \dots, Y_n) \leq u_n) &= \mathbb{P}(\max(X_1, \dots, X_n) \leq u_n) \\ &= [F(u_n)]^n \\ &= \exp\{n \ln F(u_n)\} \\ &= \exp\{n \ln\{1 - \bar{F}(u_n)\}\} \\ &\underset{n \to \infty}{\sim} \exp\{-n \bar{F}(u_n)\} \\ &\xrightarrow[n \to \infty]{} \exp\{-\tau\} \Rightarrow A \text{ et } D\end{aligned}$$

Q9)

$F \in D(\Phi_\alpha) \iff \overline{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$ L à variations lentes

i.e. $\forall x > 0 \ \dfrac{L(tx)}{L(t)} \xrightarrow[t \to \infty]{} 1$

$$\overline{F}(x) = x^{-\alpha} L(x) \iff 1 - F(x) = x^{-\alpha} L(x)$$
$$\iff -f(x) = -\alpha x^{-(\alpha+1)} L(x) + x^{-\alpha} L'(x)$$
$$\iff f(x) = \alpha x^{-(\alpha+1)} L(x) - x^{-\alpha} L'(x)$$
$$= [\alpha L(x) - x L'(x)] x^{-\alpha-1}$$

$$P(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1}$$

$$P'(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\beta-1) \frac{1}{x} (\ln x)^{\beta-1} = \frac{\beta-1}{x} P(x)$$

$$\alpha P(x) - x P'(x) = \alpha P(x) - \cancel{x} \frac{\beta-1}{\cancel{x}} P(x) = (\alpha-\beta+1) P(x)$$

$$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}$$
$$= (\alpha-\beta+1)^{-1} P(x) x^{-\alpha-1}$$
$$= (\alpha-\beta+1)^{-1} [\alpha P(x) - x P'(x)] x^{-\alpha-1}$$

$$L(x) = (\alpha-\beta+1)^{-1} P(x)$$

$$\Rightarrow f(x) = [\alpha L(x) - x L'(x)] x^{-\alpha-1}$$

$$\frac{L(tx)}{L(t)} = \frac{P(tx)}{P(t)} = \frac{(\ln tx)^{\beta-1}}{(\ln t)^{\beta-1}} = \left(\frac{\ln t + \ln x}{\ln t}\right)^{\beta-1} = \left(1 + \frac{\ln x}{\ln t}\right)^{\beta-1}$$

$\xrightarrow[t \to \infty]{} 1 \Rightarrow$ L est à variations lentes

$\Rightarrow F \in D(\Phi_\alpha) \Rightarrow$ B //