© Théo Jalabert

THÉORÈMES D'INTÉGRATION

Intégration L3– 2020
Pierre-Olivier Goffard et Colin Jahel

---

1. On définit
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\mathrm{d}t,\ \ x \in]0,\infty|$$
et
$$B(a,b) = \int_0^1 x^{a-1}(1-x)^{b-1}\mathrm{d}x,$$
où a et b sont strictement positifs.
   (a) Montrer que Γ est bien définie.
   (b) Montrer que Γ est dérivable et que
   $$\Gamma'(x) = \int_0^\infty e^{-t}t^{x-1}\log(t)\mathrm{d}t.$$
   Nous n'utiliserons pas cette question dans la suite, mais elle sert à résoudre l'exercice à la fin des notes de cours.
   (c) Montrer que $B(a,b) = B(b,a)$ et que
   $$B(a,b) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2a-1}\theta\cos^{2b-1}\theta\mathrm{d}\theta$$
   (d) Calculer $B(1/2,1/2)$ et $B(a,1)$.
   (e) Montrer que
   $$B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}.$$
   Indication : Regarder $\Gamma(a)\Gamma(b)$ comme une intégrable double et appliquer le changement de variable $(x,y)\mapsto(x,x+y)$.
   (f) En déduire que $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$, puis calculer $\Gamma(n)$ pour n un entier strictement positif.
   (g) En déduire $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$ et $\int_0^\infty e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.
2. Soit $f\colon \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une application mesurable. On note $G = \{(x,f(x)), x\in\mathbb{R}^d\}$ le graphe de f.
   (a) Montrer que $G \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{d+1})$.
   (b) Montrer que G est de mesure nulle pour la mesure de Lebesgue.
3. (a) Montrer que pour tout $z \geq 0$, $0 \leq 1 - e^{-z} \leq z$.
   (b) En déduire que pour tout $y > 0$, $x \mapsto \frac{1-e^{-x^2y}}{x^2}$ est intégrable sur $[0,+\infty]$.
   (c) On note, pour tout $y > 0$,
   $$F(y) = \int_0^\infty \frac{1-e^{-x^2y}}{x^2}.$$
   Montrer que F est dérivable sur $]0,\infty[$ et calculer $F'(y)$.
   (d) En déduire F à une constante près.
   (e) En considérant $(F(1/n))_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la constante.