Assurance non-vie - Théorie de la crédibilité

Année universitaire 2005-2006 - Première session

6 avril 2006 - Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé.

Exercice n°1

Soit N_j le nombre de sinistres causés par un assuré pendant l'année j. Conditionnellement à $\Theta = \theta$, les N_j sont supposées i.i.d. de loi de Poisson de paramètre θ, i.e.

$$\Pr\left[N_j = k | \Theta = \theta\right] = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}, \text{ pour } k \in \mathbf{N}.$$

La distribution *a priori* de Θ est une loi Gamma de paramètres γ et β, i.e. de densité

$$u(\theta) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\theta^{\gamma-1}e^{-\beta\theta}, \text{ pour } \theta \geq 0.$$

Les montants de sinistres sont constants égaux à 1.

1. Quelle prime pure réclameriez-vous à un nouvel assuré ?

La prime collective : $\mathrm{E}[N] \times 1 = \mathrm{E}[\mathrm{E}[N|\Theta]] = \mathrm{E}[\Theta] = \frac{\alpha}{\beta}$

2. Montrez que les familles des lois de Poisson et des lois Gamma sont conjuguées. Qu'en déduisez-vous sur l'intérêt de ce modèle dans la cadre de la révision des primes ?

D'après la règle de Bayes, on a :

$u\left(\theta | N_1 = k_1, ..., N_n = k_n\right) \propto u(\theta) \Pr\left(N_1 = k_1, ..., N_n = k_n|\theta\right)$

$u\left(\theta | N_1 = k_1, ..., N_n = k_n\right) \propto \theta^{\gamma-1}e^{-\beta\theta}\prod_{j=1}^{n} e^{-\theta}\theta^{k_j} \propto \theta^{\gamma+\sum_{j=1}^{n} k_j - 1} e^{-(\beta+n)\theta}.$

On reconnaît là la densité d'une loi gamma de paramètres $\gamma + \sum_{j=1}^{n} k_j$ et $\beta + n$.

3. Donnez la densité *a posteriori* de Θ pour un assuré qui a causé $k_1, ..., k_n$ sinistres durant les n premières années. Déduisez-en la prime de Bayes pour la $(n+1)$-ème année.

Cf. question précédente, on a : $u\left(\theta | N_1 = k_1, ..., N_n = k_n\right) \propto \theta^{\gamma + \sum\limits_{j=1}^{n} k_j - 1} e^{-(\beta+n)\theta}$.

Donc $P^{Bayes} = \frac{\gamma + \sum\limits_{j=1}^{n} k_j}{\beta+n}$

4. Donnez la prime de Bühlmann pour la $(n+1)$-ème année pour un assuré qui a causé $k_1, ..., k_n$ sinistres durant les n premières années. Commentez.

On a : $P^{cred} = \alpha \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} k_j + (1-\alpha)\mu_0$

$P^{cred} = \frac{n}{n+\beta} \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} k_j + (1 - \frac{n}{n+\beta})\frac{\gamma}{\beta} = \frac{\gamma + \sum\limits_{j=1}^{n} k_j}{\beta+n} = P^{Bayes}$.

Rappel : Si $Y \sim Gamma(\gamma, \beta)$, alors $\mathrm{E}[Y] = \frac{\gamma}{\beta}$ et $\mathrm{Var}[Y] = \frac{\gamma}{\beta^2}$.

Exercice n°3

Considérons la famille des distributions de Pareto

$$\mathcal{F} = \left\{ F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\theta, \theta > 0 \right\}.$$

Trouvez la famille $\mathcal{U}$ conjuguée à $\mathcal{F}$.

Avec les notations du cours, $f_\theta(x) = \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta+1}$

$u_{\mathrm{x}}(\theta) \propto f_\theta(\mathrm{x}) = \prod\limits_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) \propto \theta^n \exp\left(-\theta \sum\limits_{j=1}^{n} \ln \frac{x_j}{x_0} \right)$.

Donc les distributions de $\mathcal{U}'$ sont des distributions Gamma. La famille $\mathcal{U}$ des distributions Gamma est fermée sous l'opérateur produit, c'est donc une extension naturelle à $\mathcal{U}'$.

Exercice n°2

Un portefeuille de 40 assurés a produit 20 déclarations de vol au cours de la première année. La répartition des sinistres est la suivante :

Nombre de sinistres	Nombre d'assurés
0	26
1	9
2	4
3	1

Le montant de sinistre moyen a été estimé à 10. En faisant l'hypothèse classique d'indépendance entre nombre et montants de sinistres et en supposant que le nombre de sinistres déclarés par un assuré suit une loi de Poisson dont le paramètre peut varier d'un assuré à l'autre,

1. déterminez le facteur de crédibilité (selon le modèle de Bühlmann) pour un assuré de ce portefeuille ;

Avec les notations du cours, $\alpha = \frac{n}{n+\sigma^2/\tau^2}$,
$n = 1, \sigma^2 = \mathrm{E}\left[\mathrm{Var}(N|\Theta)\right] = \mathrm{E}\left[\Theta\right]$,
$\tau^2 = \mathrm{Var}\left[\mathrm{E}(N|\Theta)\right] = \mathrm{Var}\left[N\right] - \sigma^2$,
$\hat{\sigma}^2 = \frac{20\times0+9\times1+4\times2+1\times3}{40} = \frac{1}{2}$ est une estimation de $\hat{\sigma}^2$
$s^2 == \frac{20\times0+9\times1^2+4\times2^2+1\times3^2}{40} = \frac{3}{5}$ est une estimation de $\mathrm{Var}\left[N\right]$.
Donc $s^2 - \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{10}$ est une estimation de τ^2.
Au final, on a $\alpha = \frac{1}{1+5} = \frac{1}{6}$.

2. donnez la prime que vous réclameriez à un nouvel assuré ;

$\hat{\mu}_0 = \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$.

3. donnez la prime de Bühlmann d'un assuré qui aurait déclaré deux sinistres la première année.

$P^{cred} = \frac{1}{6} \times 2 + \frac{5}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}$.

• Exercice (exercice 3.2 du poly)

Une société d'assurance couvre deux contrats depuis 3 ans. Elle dispose des montant annuels de sinistres suivants :

Contrat	Année 1	Année 2	Année 3
1	5	8	11
2	11	13	12

Selon le modèle de Bühlmann, quelle primes réclameriez vous à ces deux assurés pour la 4e année ?

$\bar{X}_1 = 8$
$\bar{X}_2 = 12$
$\bar{X} = 10$
$\sigma^2(\theta) = \mathbb{V}(X_j | \Theta = \theta) \longrightarrow \sigma^2 = \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]$
$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{I(n-1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$
$= \frac{1}{2(3-1)} \left[(5-8)^2 + (8-8)^2 + (11-8)^2 + (11-12)^2 + (13-12)^2 + (12-12)^2\right]$
$= 5$