ISFA Anne Eyraud-Loisel

Processus stochastiques - M1 Actuariat

TD n° 2

Mouvement Brownien, Martingales et Théorème d'arrêt

Exercice 1 : Martingale de Doob

Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. On définit le processus stochastique $(Y_t)_{t\geq 0}$ par $Y_t = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$. Montrez que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X.

Exercice 2 : Martingales du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien issu de 0 et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à B. Montrer que les processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

1. $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
2. $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
3. $(e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le deuxième point revient à dire que le mouvement Brownien a pour variation quadratique $\langle B_t \rangle = t$. Le Théorème de caractérisation de Lévy affirme que la seule martingale continue de variation quadratique t est le mouvement brownien.

Exercice 3 : Propriétés du mouvement Brownien

Soit B un mouvement Brownien, soit $c > 0$ une constante et $s \geq 0$ un nombre réel. Montrer que les processus suivants sont des mouvements Browniens.

1. $(-B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Symétrie),
2. $(B_{t+s} - B_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Propriété de Markov faivle),
3. $(B_{1-t} - B_1)_{t\in[0,1]}$ (Retournement temporel),
4. $(cB_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Auto-similarité).

Exercice 4 : un petit contre-exemple

Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Le processus $(\sqrt{t}Z)_{t\geq 0}$ est-il un mouvement Brownien ?

Exercice 5 : Somme de deux mouvements Browniens indépendants.

Soient B^1 et B^2 deux mouvements Browniens indépendants et soit $\rho \in]0,1[$ une constante.

1. Montrez que $(\rho B_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} B_t^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est aussi un mouvement Brownien.

2. En déduire que B^1B^2 est une martingale.
   Indication : Que peut-on dire du processus $\left(\left(\frac{B_t^1+B_t^2}{\sqrt{2}}\right)^2 - t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$?

Exercice 6 : La ruine du joueur (version continue).

Soit B un mouvement brownien et $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ tels que $a<0<b$. On définit :

$$\tau = \inf\{t\in\mathbb{R}_+ | B_t = a \text{ ou } B_t = b\}.$$

1. Justifier que τ est un temps d'arrêt.
2. En appliquant le théorème d'arrêt, montrer que
   (a) $P(B_\tau = a) = \frac{b}{b-a}$
   (b) $\mathbb{E}(\tau) = |ab|$
3. Si on remplace B par $Z=\sigma B$, un processus de Wiener de volatilité σ, que devient ce résultat ?

Exercice 7 : Des inégalités de Doob.

1. En utilisant le théorème d'arrêt pour les sous-martingales, montrez que si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue et positive, alors pour tout $\lambda>0$ et tout $t\in\mathbb{R}_+$ on a :
$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le t} M_s \ge \lambda\right] \le \frac{\mathbb{E}[M_t]}{\lambda}.$$
2. En déduire que si $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ alors pour tout $\lambda>0$ et tout $t\in\mathbb{R}_+$ on a :
$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le t} |N_s| \ge \lambda\right] \le \frac{\mathbb{E}\left[N_t^2\right]}{\lambda^2}.$$
   Comparer ce résultat avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 8 : Temps d'atteinte du mouvement Brownien.

Soit $a>0$, $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien et soit $T_a := \inf\{t\ge 0,\ B_t = a\}$ le premier temps d'atteinte du point a par un mouvement Brownien.

1. En utilisant une des martingales du mouvement Brownien , montrer que sa transformée de Laplace est égale à :
$$\mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\right] = \mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\mathbf{1}_{T_a<+\infty}\right] = e^{-\sqrt{2\lambda}a},$$
   pour tout $\lambda>0$.

2. En déduire que $\mathbb{P}(T_a < +\infty) = 1$ et que $\mathbb{E}[T_a] = +\infty$.

Exercice 9 : Le pont Brownien.

Soit B un mouvement Brownien. On considère le processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini pour tout $t \in [0, 1]$ par $X_t = B_t - tB_1$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un processus Gaussien.
2. Calculer sa fonction espérance ainsi que sa fonction de covariance.
3. En quel temps t la variance de X_t est-elle maximale ?
4. Est-ce $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale ?

Remarque : Ce processus stochastique s'appelle un Pont Brownien. Il s'agit d'un mouvement Brownien conditionné à revenir en 0 au temps 1 (voir Figure 1).

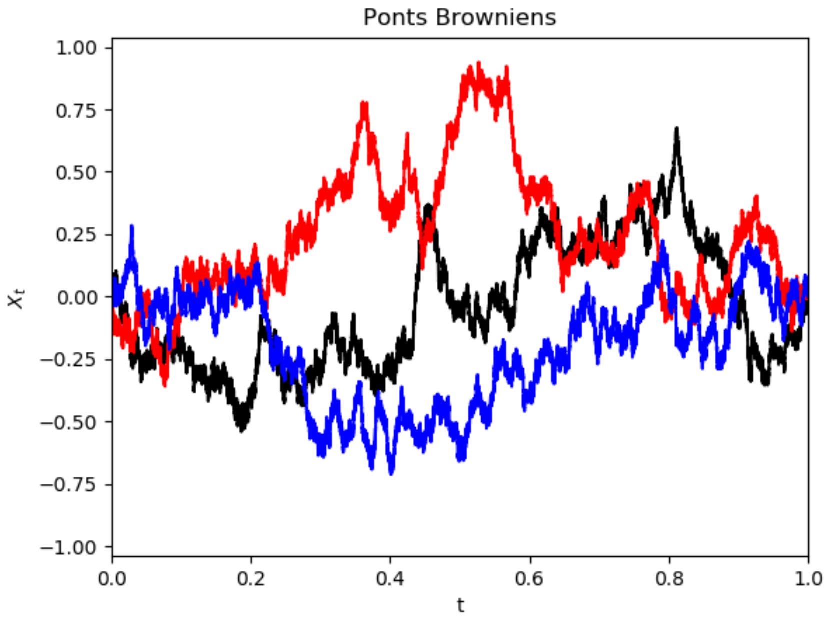

FIGURE 1 – Trois réalisations de ponts Browniens.

Exercice 2 : Martingales du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien issu de 0 et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à B. Montrer que les processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

1. $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
2. $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
3. $(e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le deuxième point revient à dire que le mouvement Brownien a pour variation quadratique $\langle B_t \rangle = t$. Le Théorème de caractérisation de Lévy affirme que la seule martingale continue de variation quadratique t est le mouvement brownien.

1) $B_r = B_s + B_r - B_s \qquad s<r$

On remarque que $B_r - B_s$ est centrée indep de $\mathcal{F}_s$

$\Rightarrow \mathbb{E}[B_r - B_s | \mathcal{F}_s] = 0$

$\Rightarrow \mathbb{E}[B_r | \mathcal{F}_s] = B_s. \qquad \Rightarrow (B_r)_{r\in\mathbb{R}_+}$ martingale p/r à $(\mathcal{F}_r)_{r\in\mathbb{R}_+}$

2) $B_r^2 = B_s^2 + 2B_s(B_r - B_s) + (B_r - B_s)^2$

$* \ \mathbb{E}[B_s(B_r - B_s) | \mathcal{F}_s] = B_s \mathbb{E}[B_r - B_s | \mathcal{F}_s] = 0$

$* \ \mathbb{E}[(B_r - B_s)^2 | \mathcal{F}_s] = r - s$ Car $B_r - B_s$ gaussienne centrée.

$\Rightarrow \mathbb{E}[B_r^2 | \mathcal{F}_s] = B_s^2 + r - s$

D'où $\mathbb{E}[B_r^2 - r | \mathcal{F}_s] = B_s^2 - s.$

3) $\mathbb{E}[e^{\lambda B_r} | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[e^{\lambda(B_s + B_r - B_s)} | \mathcal{F}_s]$

$= e^{\lambda B_s} \underbrace{\mathbb{E}[e^{\lambda(B_r - B_s)} | \mathcal{F}_s]}_{e^{\frac{\lambda^2}{2}(r-s)}}$

Car si X une gaussienne centrée de variance σ^2 $\Rightarrow \mathbb{E}[e^{\alpha X}] = e^{\frac{\alpha^2\sigma^2}{2}}$

$= e^{\lambda B_s} e^{-\frac{\lambda^2 s}{2}} e^{\frac{\lambda^2 r}{2}}$

$= \mathbb{E}[e^{\lambda B_r - \frac{\lambda^2 r}{2}} | \mathcal{F}_s] = e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}}$

Exercice 3 : Propriétés du mouvement Brownien

Soit B un mouvement Brownien, soit $c > 0$ une constante et $s \geq 0$ un nombre réel. Montrer que les processus suivants sont des mouvements Browniens.

1. $(-B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Symétrie),
2. $(B_{t+s} - B_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Propriété de Markov faivle),
3. $(B_{1-t} - B_1)_{t\in[0,1]}$ (Retournement temporel),
4. $(cB_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Auto-similarité).

1) B_r mvt Brownien $\Rightarrow B_r \sim \mathcal{N}(0,r) \quad r\geq 0$

$\Rightarrow -B_r \sim \mathcal{N}(0,r) \quad r \geq 0$

Car $\begin{cases} V(-B_r) = V(B_r) = r. \\ \mathbb{E}[-B_r] = -\mathbb{E}[B_r] = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow -B_r$ mvt Brownien

2) $B_{r+s} - B_s \sim B_{r+s-s} = B_r \sim \mathcal{N}(0,r)$

Accroissen^t indep et stationnaires

$X_r - X_s \sim X_{r-s} \sim \mathcal{N}(0, r-s)$

$X_r \sim \mathcal{N}(0,r)$
$\hookrightarrow X_{r-s} \sim \mathcal{N}(0,r-s)$
$\hookrightarrow X_r - X_s \sim \mathcal{N}(0,r-s)$

$X_r \rightsquigarrow \mathcal{N}(0,r)$
$\mathbb{E}[e^{\lambda X} | \mathcal{F}] = e^{\frac{\lambda^2 r^2}{2}}$

3) $(B_{1-r} - B_1)_{r\in[0,1]} \sim (B_{1-r-1})_{r\in[0,1]} \sim (B_{-r})_{r\in[0,1]} \underset{\text{Symétrie}}{=} (B_r)_{r\in[0,1]}$.

4) $B_{\frac{r}{c^2}} \sim \mathcal{N}(0, \frac{r}{c^2})$

$V(c B_{r/c^2}) = c^2 V(B_{r/c^2}) = r$

$\Rightarrow c B_{r/c^2} \sim \mathcal{N}(0,r)$

Exercice 6 : La ruine du joueur (version continue).

Soit B un mouvement brownien et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < 0 < b$. On définit :

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | B_t = a \text{ ou } B_t = b\}.$$

1. Justifier que τ est un temps d'arrêt.
2. En appliquant le théorème d'arrêt, montrer que
   (a) $P(B_\tau = a) = \frac{b}{b-a}$
   (b) $\mathbb{E}(\tau) = |ab|$
3. Si on remplace B par $Z = \sigma B$, un processus de Wiener de volatilité σ, que devient ce résultat ?

$$\tau = \inf\{ r \in \mathbb{R}_+ | B_r = a \text{ ou } B_r = b\}$$

1) $\forall r \geq 0$, $\{\tau \leq r\} = \{ (\inf\{ r \in \mathbb{R}_+ | B_r = a \text{ ou } B_r = b) \leq r\}$

$= \{ \exists k \in [0,r], B_k \in \{a;b\}\}$

$= \bigcup_{k=0}^{r} \underbrace{\{B_k \in \{a;b\}\}}_{\in \mathcal{F}_k} \in \mathcal{F}_r$ où $(\mathcal{F}_r)$ filtrat$^°$ naturelle de B

Or $\forall k \in [0,r]$, $\{B_k \in \{a;b\}\} \in \mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_r$ i.e c'est bien un temps d'arrêt.

2) a) On applique le théorème d'arrêt aux temps d'arrêt 0 et $\tau \wedge r$ avec $r \geq 0$ fixé.

$\Rightarrow \mathbb{E}[B_{\tau\wedge r} | \mathcal{F}_0] = B_0 = 0$

$\underset{\text{en passant à l'espérance}}{\Rightarrow} \mathbb{E}[B_{\tau \wedge r}] = 0$

Comme $\tau < \infty$ p.s, $B_{\tau\wedge r} \xrightarrow[r\to\infty]{p.s} B_\tau$

Par définit$^°$ de τ, lorsque $r \leq \tau$ on a $a < B_r < b$ donc

$|B_{\tau\wedge t}| \leq \max(|a|, b) \in \mathcal{L}^1(\Omega)$ car les cles sont $\mathcal{L}^1$

Par le thm de CV Dominée on a que

$$\mathbb{E}[B_{\tau\wedge t}] \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{E}[B_\tau]$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[B_\tau] = 0$$

$$\Rightarrow a\,\mathbb{P}(B_\tau = a) + b\,\underbrace{\mathbb{P}(B_\tau = b)}_{1-\mathbb{P}(B_\tau=a)} = 0$$

$$\Rightarrow (a-b)\mathbb{P}(B_\tau = a) + b = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B_\tau = a) = \frac{b}{b-a}$$

b) On s'intéresse à la martingale $B_t^2 - t$ et on applique le thm d'arrêt aux temps d'arrêt 0 et $\tau\wedge t$.

$$\mathbb{E}[B_{\tau\wedge t}^2 - \tau\wedge t \,|\, \mathcal{F}_0] = B_0^2 - 0 = 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[B_{\tau\wedge t}^2 - \tau\wedge t] = 0 \quad \text{puis} \quad \mathbb{E}[B_{\tau\wedge t}^2] = \mathbb{E}[\tau\wedge t]$$

en passant à l'espérance

Comme $\tau < \infty$ p.s on a que $B_{\tau\wedge t}^2 \xrightarrow[t\to\infty]{p.s} B_\tau$ et $\tau\wedge t \xrightarrow[t\to\infty]{p.s} \tau$

On a de plus la dominat° $B_{\tau\wedge t}^2 \leq \max(|a|, b)^2 \in \mathcal{L}^1(\Omega)$

donc d'après le Thm de CV dominée,

$$\mathbb{E}[B_{\tau\wedge t}^2] \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{E}[B_\tau^2]$$

De + la fonct° $t \mapsto \tau\wedge t$ est croissante donc par Thm de CV monotone

$$\mathbb{E}[\tau\wedge t] \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{E}[\tau]$$

On a donc $\mathbb{E}[\tau] = \mathbb{E}[B_\tau^2]$

Or $\underbrace{\mathbb{E}[B_\tau^2]}_{\mathbb{E}[\tau]} = a^2\,\mathbb{P}(B_\tau = a) + b^2\,\mathbb{P}(B_\tau = b)$

$$= a^2 \frac{b}{b-a} + b^2\left(\frac{-a}{b-a}\right) = \frac{a^2 b - ab^2}{b-a} = \frac{ab(a-b)}{b-a} = -ab = |ab|$$

D'où $\mathbb{E}[\tau] = |ab|$

3) On remplace B par $Z = \sigma B$.

Exercice 7 : Des inégalités de Doob.

1. En utilisant le théorème d'arrêt pour les sous-martingales, montrez que si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue et positive, alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :
$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le t} M_s \ge \lambda\right] \le \frac{\mathbb{E}[M_t]}{\lambda}.$$
2. En déduire que si $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :
$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\le s\le t} |N_s| \ge \lambda\right] \le \frac{\mathbb{E}[N_t^2]}{\lambda^2}.$$
Comparer ce résultat avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

1) Soit $T_\lambda = \inf\{t \geq 0, M_t \geq \lambda\}$

T_λ est bien un théorème d'arrêt car c'est un temps d'atteinte et le processus (M_t) est continu.

$$\Longrightarrow \sup_{s\in[0,t]} M_s \geq \lambda \Longleftrightarrow T_\lambda \leq t$$

On applique alors le thm d'arrêt aux sous martingales aux temps d'arrêt bornés $T_\lambda \wedge t$ et t. (on a bien que $T_\lambda \wedge t \leq t$)

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_{T_\lambda\wedge t}] \geq M_{T_\lambda \wedge t} \qquad \text{(Sous-martingale)}$$

$$\underset{\text{en passant à l'espérance}}{\Longrightarrow} \quad \mathbb{E}[M_t] \geq \mathbb{E}[M_{T_\lambda\wedge t}]$$

Ainsi $\mathbb{E}[M_r] \geq \mathbb{E}[M_{T_\lambda \wedge r}] = \mathbb{E}[M_{T_\lambda} \mathbb{1}_{T_\lambda \leq r}] + \mathbb{E}[M_r \mathbb{1}_{T_\lambda > r}]$

$= \mathbb{E}[\lambda \mathbb{1}_{T_\lambda \leq r}] + \mathbb{E}[M_r \mathbb{1}_{T_\lambda > r}]$ car $M_{T_\lambda} = \lambda$ par continuité

$\geq \underbrace{\lambda \mathbb{P}(T_\lambda \leq r)}_{\lambda \mathbb{P}(\sup_{s \in [0,r]} M_s \leq r)}$ car $M_r \geq 0$

Donc $\mathbb{P}(\sup_{s \in [0,r]} M_s \leq r) \leq \frac{\mathbb{E}[M_r]}{\lambda}$ $r \geq 0$.

2) Par inégalité de Jensen, Si $(N_r)_{r \in \mathbb{R}_+}$ est une martingale continue alors $(M_r)_{r \in \mathbb{R}_+} = (N_r^2)_{r \in \mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale continue et positive

On peut appliquer alors le resultat de la quest° précédente quitte à reparamétriser $\lambda' = \lambda^2$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\sup_{s \in [0,r]} N_s^2 \geq \lambda^2) \leq \frac{\mathbb{E}[N_r^2]}{\lambda^2}$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\sup_{s \in [0,r]} |N_s| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[N_r^2]}{\lambda^2}$

Avec l'Inégalité de Bienaymé-Tchebitchev on aurait

$$\mathbb{P}(|N_r| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[N_r^2]}{\lambda^2}$$

On a contrôle que sur la valeur finale de (N_r) et pas sur le sup de N_s

Exercice 8 : Temps d'atteinte du mouvement Brownien.

Soit $a > 0$, $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien et soit $T_a := \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}$ le premier temps d'atteinte du point a par un mouvement Brownien.

1. En utilisant une des martingales du mouvement Brownien , montrer que sa transformée de Laplace est égale à :

$$\mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\right] = \mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\mathbf{1}_{T_a<+\infty}\right] = e^{-\sqrt{2\lambda}a},$$

pour tout $\lambda > 0$.

2. En déduire que $\mathbb{P}\left(T_a < +\infty\right) = 1$ et que $\mathbb{E}\left[T_a\right] = +\infty$.

1) $T_a := \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}$