M1 Actuariat & Econométrie et Statistiques, année 2016–2017.

Numéro copie (obligatoire) :

Statistique Inférentielle
Contrôle terminal

Vendredi 6 janvier

Durée 2h, documents, téléphone, calculatrice interdits
Veuillez soigner la présentation
et bien justifier les résultats

Le barème (indicatif) prévu est le suivant : 10-5-5

Exercice 1

On considère le modèle exponentiel translaté

$$\left(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+^*}, \mathcal{P}_\theta, \theta = (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\right)$$

de densité

$$f(x, \theta) = \lambda \exp\left(-\lambda(x-\beta)\right) \mathbb{1}_{[\beta,\infty[}(x).$$

1. Calculer les moments d'ordre 1 et 2.

Rq : $X - \beta \sim \mathcal{E}(\lambda)$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X-\beta] = \frac{1}{\lambda} \Rightarrow M_1 = \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda} + \beta$

$\mathbb{E}[(X-\beta)^2] = \frac{2}{\lambda^2} \Rightarrow M_2 = \mathbb{E}[X^2] = \frac{2}{\lambda^2} - \beta^2 + 2\beta\left(\frac{1}{\lambda} + \beta\right)$

$x^2 - 2\beta x + \beta^2$

$= \frac{2}{\lambda^2} + \frac{2\beta}{\lambda} + \beta^2$

2. Déterminer l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MM}$ par la méthode des moments.

Rappel : $\begin{cases} M_r = \mathbb{E}[X^r] & m_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^r \\ \bar{M}_r = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^r] & \bar{m}_r = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^r \end{cases}$

dépendant de θ

On pose autant d'équat° que la dim de $\theta \in \mathbb{R}^p$

$\hat{\theta}_n^{MM}$ est tq $\begin{cases} M_1(\hat{\theta}^{MM}) = m_1 \\ \vdots \\ M_p(\hat{\theta}^{MM}) = m_p \end{cases}$ ou $\begin{cases} M_1(\hat{\theta}^{MM}) = m_1 \\ \vdots \\ \bar{M}_p(\hat{\theta}^{MM}) = \bar{m}_p \end{cases}$

On a $M_1(\theta) = \mathbb{E}[X] = \beta + \frac{1}{\lambda}$

$\bar{M}_2(\theta) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])^2] = V(X)$
$= V(X-\beta) = \frac{1}{\lambda^2}$

$\hat{\theta}_n^{MM} = (\hat{\beta}_n, \hat{\lambda}_n)$ est tq

$$\begin{cases} \hat{\beta} + \frac{1}{\hat{\lambda}_n} = \bar{x} \\ \frac{1}{\hat{\lambda}_n^2} = \bar{x^2} - \bar{x}^2 = S_n^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\lambda}_n = S_n^{-1} \\ \hat{\beta}_n = \bar{x} - S_n \end{cases}$$

3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{MV}$.

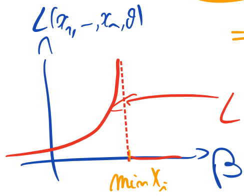
(H1) n'est pas vérifié (non indépendance du support)

$$L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \lambda e^{-\lambda(x_i - \beta)} \mathbb{1}_{[\beta, +\infty[}(x_i)$$

$$= \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum_{i=1}^{n}(x_i - \beta)\right) \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{[\beta,+\infty[}(x_i)}_{= \mathbb{1}_{(\min_{i\in[1,n]}(X_i) \geq \beta)}}$$

$\Rightarrow$ On obtient l'EMV en maximisant directe^t L

Soit $x_1, \dots, x_n$ fixés et on s'intéresse à β



L est $\nearrow$ sur $]-\infty, \beta]$, L indep de λ et nulle sur $]\beta, +\infty[$.

$$\Rightarrow \hat{\beta}_n = \min_{i \in [1,n]} X_i$$

Le max de vraisemblance est obtenu en $\hat{\beta}_n$ indep de λ. On le réinjecte dans L puis on maximise

$$\underset{(\lambda, \hat{\beta}_n)}{L(x_1, \dots, x_n, \theta)} = \lambda^n \exp(-n\lambda(\bar{x} - \hat{\beta}_n))$$

$\Rightarrow \hat{\beta}_n$ est fixé donc plus vraiment un paramètre.

$\ln(L) = n\ln(\lambda) - n\lambda(\bar{x} - \hat{\beta}_n)$

$\frac{\partial}{\partial \lambda}\ln(L) = \frac{n}{\lambda} - n(\bar{x} - \hat{\beta}_n)$ $\Rightarrow \hat{\lambda}_n$ est tq $\frac{n}{\hat{\lambda}_n} - n(\bar{x} - \hat{\beta}_n) = 0 \Rightarrow \hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{x} - \hat{\beta}_n}$ (1)

$\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2}\ln(L) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$ (2)

(1) + (2) $\Rightarrow \hat{\theta}_n^{MV} = (\hat{\lambda}_n, \hat{\beta}_n) = \left(\frac{1}{\bar{x} - \hat{\beta}_n}, \min_{i\in[1,n]}(X_i)\right)$

4. On note $\hat{\theta}_n^{MV} = (\hat{\lambda}_n, \hat{\beta}_n)$, montrer que $\hat{\beta}_n - \beta \sim \mathcal{E}(n\lambda)$

$$\mathbb{P}(\hat{\beta}_n - \beta \leq x) = \mathbb{P}(\hat{\beta}_n \leq x + \beta)$$
$$= \mathbb{P}(\min X_i \leq x + \beta)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(\min X_i > x + \beta)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x + \beta, \ldots, X_n > x + \beta)$$
$$\text{Va indep} = 1 - \mathbb{P}(X_1 > x + \beta)^n$$
$$= 1 - (1 - \mathbb{P}(\underbrace{X_1 - \beta}_{\sim \mathcal{E}(\lambda)} \leq x))^n$$
$$= 1 - (1 - [1 - e^{-\lambda x}])^n$$
$$= 1 - e^{-\lambda n x} \quad \text{f.d.r de } \mathcal{E}(n\lambda)$$

5. Calculer le risque quadratique de $\hat{\beta}_n$ et montrer que $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

<u>Rappel</u> : $\mathcal{R}(\hat{\theta}_n, \theta) = \mathbb{E}[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = \mathcal{B}_\theta(\hat{\theta}_n)^2 + \mathbb{V}(\hat{\theta}_n)$

Ici, $\mathcal{R}(\hat{\beta}_n, \beta) = \mathbb{E}[(\hat{\beta}_n - \beta)^2]$ Or $\hat{\beta}_n - \beta \sim \mathcal{E}(n\lambda)$
$$= \mathbb{V}[\hat{\beta}_n - \beta] + \mathbb{E}[\hat{\beta}_n - \beta]^2$$
$$= \frac{1}{(n\lambda)^2} + \left(\frac{1}{n\lambda}\right)^2 = \frac{2}{(n\lambda)^2} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Donc le risque quadratique de $\hat{\beta}_n$ est nul.

<u>Rappel</u> : $X_n \xrightarrow{p.s} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Longrightarrow X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

$X_n \xrightarrow{L^p} X \Rightarrow X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

$\mathbb{E}[|X_n - X|^p] \to 0$; $\forall \varepsilon > 0, \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) \to 0$

$$\mathbb{E}[(\hat{\beta}_n - \beta)^2] \longrightarrow 0$$
$$\mathbb{E}[(\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta))^2] = \frac{2}{n\lambda^2} \longrightarrow 0 \qquad \text{Donc } \sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

6. En utilisant le Théorème Centrale Limite sur $(X_i - \beta)_{i\in\mathbb{N}}$, déterminer la loi asymptotique de $\overline{X} - \hat{\beta}_n$.

On a $\mathbb{E}[X_i - \beta] = \frac{1}{\lambda}$ et $\mathbb{V}(X_i - \beta) = \frac{1}{\lambda^2}$

$$\underset{TCL}{\Longrightarrow} \sqrt{n}\,(\overline{X - \beta} - \tfrac{1}{\lambda}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \tfrac{1}{\lambda^2})$$

$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \beta) = \overline{X} - \beta$

On veut la loi asymptotique de $\overline{X} - \hat{\beta}_n$

On a $\sqrt{n}\,(\overline{X} - \beta - \frac{1}{\lambda}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \frac{1}{\lambda^2})$ et $\sqrt{n}\,(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

$$\Longrightarrow \sqrt{n}\,(\overline{X} - \beta - \tfrac{1}{\lambda}) + \sqrt{n}\,(\beta - \hat{\beta}_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \tfrac{1}{\lambda^2})$$

$$\Longrightarrow \sqrt{n}\,(\overline{X} - \hat{\beta}_n - \tfrac{1}{\lambda}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \tfrac{1}{\lambda^2})$$

Rappel: Slutsky:
Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} a$
Alors, $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} aX$
$X_n + Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X + a$

7. En déduire que $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2)$.

Rappel: Si on a un estimateur T_n de θ tq
$\sqrt{n}\,(T_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\theta))$ et $g \in \mathcal{C}^1$ alors
$\sqrt{n}\,(g(T_n) - g(\theta)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (g'(\theta))^2\sigma^2(\theta))$

On a $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\overline{X} - \hat{\beta}_n}$

On applique la méthode Delta à:

$$\sqrt{n}\,(\underbrace{\overline{X}_n - \hat{\beta}_n}_{T_n} - \underbrace{\tfrac{1}{\lambda}}_{\theta}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \underbrace{\tfrac{1}{\lambda^2}}_{\sigma^2(\theta)})$$

et on prend $g : x \mapsto \frac{1}{x}$
$\Rightarrow g'(x) = -\frac{1}{x^2}$

$g(\overline{X}_n - \hat{\beta}_n) = \hat{\lambda}_n$; $g(\frac{1}{\lambda}) = \lambda$; $g'(\frac{1}{\lambda}) = -\lambda^2$

On a donc $\sqrt{n}\,(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2)$

ou

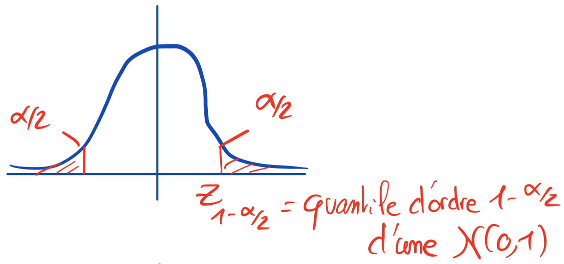
$$\sqrt{n}\,\frac{\hat{\lambda}_n - \lambda}{\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

ou

$$\sqrt{n}\,\left(\frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda} - 1\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

8. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $[\hat{\lambda}_n/a, \hat{\lambda}_n/b]$ soit un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1 - \alpha$ pour λ.

On a $\sqrt{n}\left(\frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda} - 1\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$



$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-z_{1-\alpha/2} \le \sqrt{n}\left(\frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda} - 1\right) \le z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \longrightarrow 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{\hat{\lambda}_n}{\underbrace{1 + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}}_{a}} \le \lambda \le \frac{\hat{\lambda}_n}{\underbrace{1 - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}}_{b}}\right) \longrightarrow 1-\alpha$$

Donc $\left[\frac{\hat{\lambda}_n}{a} ; \frac{\hat{\lambda}_n}{b}\right]$ un IC de niveau asympt. $1-\alpha$.

9. Déterminer $C > 0$ tel que le test de zone de rejet $R_n = \{\hat{\lambda}_n > C\}$ soit de niveau asymptotique α pour le problème $H_0 : \lambda \le 1$ contre $H_1 : \lambda > 1$.

On pose $R_n = \{\hat{\lambda}_n > C\}$ et on veut un test de niveau asympt α.

$$\mathbb{P}_\theta(R_n) = 1 - \mathbb{P}_\theta(\hat{\lambda}_n \le C)$$
$$= 1 - \mathbb{P}_\theta\Big(\underbrace{\sqrt{n}\left(\frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda} - 1\right)}_{\mathcal{N}(0,1)} \le \sqrt{n}\left(\frac{C}{\lambda} - 1\right)\Big) \longrightarrow 1 - \underbrace{\phi}_{\text{f.d.r d'une } \mathcal{N}(0,1)}\left(\sqrt{n}\left(\frac{C}{\lambda} - 1\right)\right)$$

Rappel : Si on a un test ϕ pour $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contre $H_1 : \theta \in \Theta_1$, de région de rejet W alors,

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(W)$$

On cherche α tq $\sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(R_n) \longrightarrow \alpha$

Or $\mathbb{P}_\theta(R_n) \longrightarrow 1 - \phi\left(\sqrt{n}\left(\frac{C}{\lambda} - 1\right)\right)$ est une fonct° ↗ en λ, donc $\sup\left\{1 - \phi\left(\sqrt{n}\left(\frac{C}{\lambda} - 1\right)\right)\right\} = 1 - \phi(\sqrt{n}(C-1))$

$$\Rightarrow \phi(\sqrt{n}(C-1)) = 1-\alpha$$
$$\Rightarrow \sqrt{n}(C-1) = z_{1-\alpha}$$
$$\Rightarrow C = 1 + \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$$

10. Ce test est-il convergent?

Un test est convergent si $\forall \theta \in \Theta_1$, on a $\beta(\theta) \longrightarrow 1$

$$\beta(\theta) = 1 - \phi\left(\sqrt{n}\left(\frac{1 + \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}}{\lambda} - 1\right)\right)$$

$$= 1 - \phi\Bigg(\frac{z_{1-\alpha}}{\lambda} + \underbrace{\sqrt{n}\,\underbrace{\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)}_{<0}}_{\longrightarrow -\infty}\Bigg) \quad \text{pour } \lambda > 1$$

$\Longrightarrow \beta(\theta) \longrightarrow 1$

$\Longrightarrow$ Le test est convergent

Exercice 2

Soit X_1,...,X_n un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de même loi que X. X suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2, i.e. admettant pour densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$

1. On suppose μ inconnu. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de (μ, σ^2).

Les hypothèses sont vérifiées. $X_1, \dots, X_n$ va iid tq $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$L(x_1, \dots, x_n, \mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} f_X(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$
$$= (2\pi)^{-n/2} (\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2\right)$$

$$\ln(L) = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$* \frac{\partial}{\partial \mu} \ln L = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \mu) \qquad * \frac{\partial}{\partial (\sigma^2)} \ln L = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^{n} (x_i-\mu)^2$$

$$\Rightarrow (\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}^2_n) \text{ est tq : } \begin{cases} \frac{1}{\hat{\sigma}^2_n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu}_n)^2 = 0 \\ -\frac{n}{2\hat{\sigma}^2_n} + \frac{1}{2\hat{\sigma}^2_n} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{\mu}_n)^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{\mu}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i \\ \hat{\sigma}^2_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu}_n)^2 \end{cases}$$

$n\,\hat{\sigma}_n^2 \quad \times \frac{1}{\sigma^8}$

$$* \frac{\partial^2}{\partial \mu^2} \ln L = -\frac{n}{\sigma^2} \qquad * \frac{\partial^2}{\partial (\sigma^2)^2} \ln L = \frac{n}{2\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^8} \sum (x_i - \mu)^2 \qquad * \frac{\partial^2}{\partial \mu \partial \sigma^2} \ln L = -\frac{1}{\sigma^4} \sum (x_i - \mu)$$

La matrice Hessienne de $\ln L$ en $(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}^2_n)$ vaut : $\begin{pmatrix} -\frac{n}{\hat{\sigma}^2_n} & 0 \\ 0 & -\frac{n}{2\hat{\sigma}^2_n} \end{pmatrix}$

$$\underbrace{\frac{n}{2\hat{\sigma}^4_n} - \frac{1}{\hat{\sigma}^8_n} \underbrace{\sum (x_i - \hat{\mu}_n)^2}_{= n\hat{\sigma}^2_n}}_{-\frac{n}{\hat{\sigma}^4_n}}$$

$\Rightarrow$ La matrice Hessienne est définie négative

$\Rightarrow$ On est bien à un max.

$$(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}^2_n) = \left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \hat{\mu}_n)^2\right)$$

$g:(t,\mu)\mapsto \exp\left(-\frac{1}{2m\sigma^2}(\mu^2-2\mu t)\right)$

2. Construire le test $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$.

$$V_{\mu_0,\mu} = \frac{L(\_,\mu)}{L(\_,\mu_0)} = \frac{(2\pi)^{-m/2}(\sigma^2)^{-m/2}\exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2\right)}{(2\pi)^{-m/2}(\sigma^2)^{-m/2}\exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu_0)^2\right)} = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum(x_i-\mu)^2-\sum(x_i-\mu_0)^2\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(m(\mu^2-\mu_0^2)-2(\mu-\mu_0)\sum x_i\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2m\sigma^2}\left((\mu^2-\mu_0^2)-2(\mu-\mu_0)\bar{x}_m\right)\right) = \frac{g(t,\mu)}{g(t,\mu_0)}$$

Comme $\mu>\mu_0$, $V_{\mu_0,\mu}$ est ↗ en $t=\bar{x}$

$\Longrightarrow$ On rejette si $\bar{x}_m > k$ avec $\mathbb{P}_{\mu_0}(\bar{X}_m > k_\alpha)=\alpha$

Sous H_0, $\bar{X}_m \sim \mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{m})$

On a : $\sqrt{m}\,\frac{\bar{X}_m-\mu_0}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$. On remplace σ^2 par $S_m^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X}_m)^2$

Car ce sont des X_i ~Normale

On sait que $\sigma^{-2}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\bar{X}_m)^2 \sim \chi^2_{m-1}$ et $\bar{X}_m$ est indep de $\sum_{1}^{m}(X_i-\bar{X}_m)^2$

Rappel : Si :
- $Z\sim\mathcal{N}(0,1)$
- $W\sim\chi^2_a$
- $Z\perp W$

$\Longrightarrow \frac{Z}{\sqrt{W/a}}\sim t_a$

Donc $\sqrt{m}\,\frac{\bar{X}_m-\mu_0}{\sqrt{S_m^2}} \sim t_{m-1}$. Donc cherche k_α tq $\mathbb{P}_{\mu_0}(\bar{X}_m > k_\alpha)=\alpha \iff \mathbb{P}_{\mu_0}\left(\sqrt{m}\,\frac{\bar{X}_m-\mu_0}{\sqrt{S_m^2}} > \tilde{k}_\alpha\right)=\alpha$

$\Longrightarrow \tilde{k}_\alpha = t^{1-\alpha}_{m-1}$.

On rejette donc H_0 si $\sqrt{m}\,\frac{\bar{x}_m-\mu_0}{\sqrt{S_m^2}} > t^{1-\alpha}_{m-1}$ i.e si $\bar{X}_m > \mu_0 + \frac{\sqrt{S_m^2}\,t^{1-\alpha}_{m-1}}{\sqrt{m}}$

3. Construire le test $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu < \mu_0$.

Rappel : Si T est une stat exhaustive et $V_{\theta_0,\theta} = \frac{L(\_,\theta)}{L(\_,\theta_0)}$ ↗ en t

alors on rejette si $\{T>k\}$

$\Longrightarrow$ Test UPP

Ici, on a

$x_i^2-2x_i\mu+\mu^2$

$$V_{\mu_0,\mu} = \frac{L(x_1,\dots,x_m,\mu)}{L(x_1,\dots,x_m,\mu_0)} = \frac{(2\pi)^{-m/2}(\sigma^2)^{-m/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2\right)}{(2\pi)^{-m/2}(\sigma^2)^{-m/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu_0)^2\right)}$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\Big(\underbrace{\sum(x_i-\mu)^2-\sum(x_i-\mu_0)^2}_{\sum x_i^2-2\mu\sum x_i+m\mu^2-\sum x_i^2+2\mu_0\sum x_i-m\mu_0^2}\Big)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2(\mu-\mu_0)\sum x_i+m(\mu^2-\mu_0^2)\right)\right)$$

$$= \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\Big(m\underbrace{(\mu^2-\mu_0^2)}_{<0}-2\underbrace{(\mu-\mu_0)}_{<0}\sum x_i\Big)\right] = \exp\left[\frac{-1}{2m\sigma^2}\left((\mu^2-\mu_0^2)-2(\mu-\mu_0)\bar{x}_m\right)\right]$$

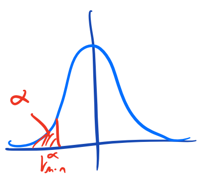
Comme $\mu<\mu_0$, c'est une fonct° ↘ en $\bar{x}_m$ qui est une stat exhaustive

$\Longrightarrow$ On rejette si $\{\bar{X}_m<k\}$

On détermine k tq $\mathbb{P}_{H_0}(\bar{X}_m<k)=\alpha$

Sous H_0, $\sqrt{m}\,\frac{\bar{X}_m-\mu_0}{S_m} \sim t_{m-1}$

Donc on prend k tq $\mathbb{P}_{H_0}\left(\sqrt{m}\,\frac{\bar{X}_m-\mu_0}{\sqrt{S_m^2}} < \underbrace{\sqrt{m}\,\frac{k-\mu_0}{\sqrt{S_m^2}}}_{t^{\alpha}_{m-1}\ \text{quantile d'ordre } \alpha \text{ de } t_{m-1}}\right)=\alpha$



Donc on rejette quand

$\sqrt{m}\,\frac{\bar{x}_m-\mu_0}{\sqrt{S_m^2}} < t^{\alpha}_{m-1}$ i.e si $\bar{X}_m < \mu_0 + \frac{\sqrt{S_m^2}\,t^{\alpha}_{m-1}}{\sqrt{m}}$

4. Construire le test $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contre $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.

$$V_{\sigma_0^2,\sigma^2} = \frac{L(\_,\sigma^2)}{L(\_,\sigma_0^2)} = \frac{(2\pi)^{-m/2}(\sigma^2)^{-m/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2\right]}{(2\pi)^{-m/2}(\sigma_0^2)^{-m/2}\exp\left[-\frac{1}{2\sigma_0^2}\sum(x_i-\mu)^2\right]} = \left(\frac{\sigma_0}{\sigma_1}\right)^m \exp\left[-\frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{\sigma_0^2}\right)}_{<0}\sum(x_i-\mu)^2\right]$$

Comme $\sigma^2 > \sigma_0^2$, c'est une fact° $\nearrow$ en $t = \sum(x_i-\mu)^2$ qui est une stat exhaustive. (car $\sum B(X_i)$ famille expo)

Donc on rejette H_0 si $\{\sum(X_i-\mu)^2 > k_\alpha\}$

On cherche donc k_α tq $\mathbb{P}_{\sigma_0}\left(\sum(X_i-\mu)^2 > k_\alpha\right) = \alpha$

$\Rightarrow \mathbb{P}_{\sigma_0}\left(\sum\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 > \frac{k_\alpha}{\sigma_0^2}\right) = \alpha$

$X_i \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma_0^2)$

$\Rightarrow X_i-\mu \sim \mathcal{N}(0,\sigma_0^2)$

$\Rightarrow \frac{X_i-\mu}{\sigma_0} \sim \mathcal{N}(0,1)$ Donc $\sum^m\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2_m$

Sous H_0, $\sum\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2_m \Rightarrow \frac{k_\alpha}{\sigma_0^2} = \chi^2_{m,\alpha}$

$\Rightarrow k_\alpha = \sigma_0^2\chi^2_{m,\alpha}$

Donc on rejette H_0 si, $\sum(X_i-\mu)^2 > \sigma_0^2\,\underline{\chi^2_{m,\alpha}}$

quantile d'ordre α d'une χ^2_m

5. Construire le test $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

$H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$ (c'est comme si l'on faisait 2 tests celui de la Q2 et de la Q3)

Donc on rejette H_0 si $\{ \overline{X}_n < k_{Q3}$ ou $\overline{X}_n > k_{Q2} \}$ avec $k_{Q3} = \mu_0 + \frac{\sqrt{S_n^2}\, t_{n-1}^{\alpha}}{\sqrt{n}}$ et $k_{Q2} = \mu_0 + \frac{\sqrt{S_n^2}\, t_{n-1}^{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$

i.e on accepte H_0 si $\{ k_{Q3} \leq \overline{X}_n \leq k_{Q2} \}$

On a $\mathbb{P}_{H_0}(k_{Q3} \leq \overline{X}_n \leq k_{Q2}) = 1 - \alpha$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{H_0}\Big(t_{n-1}^{\alpha} \leq \underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}}}_{\sim t_{n-1} \text{ sous } H_0} \leq t_{n-1}^{1-\alpha} \Big) = 1 - \alpha$$

Donc on rejette H_0 si $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}} < t_{n-1}^{1-\alpha/2}$

ou $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}} > t_{n-1}^{\alpha/2}$

On accepte H_0 si $t_{n-1}^{\alpha/2} < \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}} < t_{n-1}^{1-\alpha/2}$

Exercice 3

Soit $X_1,...,X_n$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de même loi que X. X suit une loi Gamma $\Gamma(\theta, k)$ de densité :

$$f(x) = \frac{\theta^k x^{k-1}}{\Gamma(k)} \exp(-\theta x)$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X^i)$ pour $i = 1, ..., 4$.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^\infty x \frac{\theta^k x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\theta x} dx = \int_0^\infty \frac{\theta^k x^k}{\Gamma(k)} e^{-\theta x} dx = \frac{k}{\theta} \int_0^\infty \underbrace{\frac{\theta^{k+1} x^k e^{-\theta x}}{\Gamma(k+1)}}_{\text{densité d'une } \Gamma(\theta, k+1)} dx = \frac{k}{\theta}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_0^\infty x^2 \frac{\theta^k x^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\theta x} dx = \int_0^\infty \frac{\theta^k x^{k+1}}{\Gamma(k)} e^{-\theta x} dx$$
$$= \frac{k(k+1)}{\theta^2} \int_0^\infty \frac{\theta^{k+2} x^{k+1}}{\Gamma(k+2)} e^{-\theta x} dx = \frac{k(k+1)}{\theta^2}$$

De même, $\mathbb{E}[X^3] = \frac{k(k+1)(k+2)}{\theta^3}$

$$\mathbb{E}[X^4] = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{\theta^4}$$

2. Calculer l'estimateur des moments de (θ, k).

L'estimateur des moments $(\hat{\theta}_n^{MM}, \hat{k}_n^{MM})$ est tq :

$$\begin{cases} \dfrac{\hat{k}_n^{MM}}{\hat{\theta}_n^{MM}} = \overline{X}_n \\[2ex] \dfrac{\hat{k}_n^{MM}(\hat{k}_n^{MM}+1)}{{\hat{\theta}_n^{MM}}^2} = \overline{X^2_n} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \hat{k}_n^{MM} = \dfrac{\overline{X}_n^2}{\overline{X_n^2} - \overline{X}_n^2} \\[2ex] \hat{\theta}_n^{MM} = \dfrac{\overline{X}_n}{\overline{X_n^2} - \overline{X}_n^2} \end{cases}$$

3. Ecrire le Théorème Central Limite pour les vecteurs aléatoires (X_i, X_i^2)

On applique le TCL bidimensionnel à (X_i, X_i^2) avec $g : (x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{y-x^2}, \frac{x^2}{y-x^2}\right)$

$$\Longrightarrow \sqrt{n}\begin{pmatrix} \overline{X}_n & -\frac{k}{\theta} \\ \overline{X}_n^2 & -\frac{k(k+1)}{\theta^2} \end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X, X^2) \\ Cov(X^2, X) & V(X^2) \end{pmatrix}$$

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{k(k+1)}{\theta^2} - \frac{k^2}{\theta^2} = \frac{k}{\theta^2}$$

$$Cov(X, X^2) = \mathbb{E}[X^3] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[X^2] = \frac{k(k+1)(k+2)}{\theta^3} - \frac{k}{\theta}\frac{k(k+1)}{\theta^2} = \frac{2k^2+2k}{\theta^3}$$

$$V(X^2) = \mathbb{E}[X^4] - \mathbb{E}[X^2]^2 = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{\theta^4} - \frac{k^2(k+1)^2}{\theta^4} = \frac{4k^3+10k^2+6k}{\theta^4}$$

$$\sqrt{n}\begin{pmatrix} \overline{X}_n - \frac{k}{\theta} \\ \overline{X}_n^2 - \frac{k(k+1)}{\theta^2} \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} \frac{k}{\theta^2} & \frac{2k^2+2k}{\theta^3} \\ \frac{2k^2+2k}{\theta^3} & \frac{4k^3+10k^2+6k}{\theta^4} \end{pmatrix}\right)$$

$$\frac{(g'(\theta,k))^2}{I_n(\theta,k)}$$

4. Calculer la loi asymptotique de l'estimateur de moments de $\theta, k)$.

On a $g : (x,y) \longmapsto \left(\frac{x}{y-x^2}, \frac{x^2}{y-x^2}\right)$

On applique la Méthode Delta au TCL bidimensionnel avec g.

$$\Rightarrow \sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\theta}_n^{MM} - \theta \\ \hat{k}_n^{MM} - k\end{pmatrix} \longrightarrow \mathcal{N}(0, D_g \Sigma D_g^{-1})$$

$$\begin{pmatrix}\theta \\ k\end{pmatrix} = g\left(\frac{k}{\theta}, \frac{k(k+1)}{\theta^2}\right)$$

$$\frac{\frac{k}{\theta}}{\frac{k(k+1)}{\theta^2} - \frac{k^2}{\theta^2}} = \frac{\frac{k}{\theta}}{\frac{k}{\theta^2}} = \theta$$

et $$\frac{k^2/\theta^2}{\frac{k(k+1)}{\theta^2} - \frac{k^2}{\theta^2}} = \frac{\frac{k^2}{\theta^2}}{\frac{k}{\theta^2}} = k$$

$$\frac{\partial g}{\partial x} = \left(\frac{y+x^2}{(y-x^2)^2}, \frac{2xy}{(y-x^2)^2}\right)$$

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \left(\frac{-x}{(y-x^2)^2}, \frac{-x^2}{(y-x^2)^2}\right)$$

θ, k

$$D_g = \begin{pmatrix}\frac{k+\theta^2}{(k-\theta^2)^2} & \frac{-\theta}{(k-\theta^2)^2} \\ \frac{2\theta k}{(k-\theta^2)^2} & \frac{-\theta^2}{(k-\theta^2)^2}\end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix}\frac{k}{\theta^2} & \frac{2k^2+2k}{\theta^3} \\ \frac{2k^2+2k}{\theta^3} & \frac{4k^3+10k^2+6k}{\theta^4}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\begin{pmatrix}\hat{\theta}_n^{MM} - \theta \\ \hat{k}_n^{MM} - k\end{pmatrix} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, D_g \Sigma D_g')$$

$\theta = x \quad k = y$

5. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ et k existe.

Hypothèses vérifiées $\Rightarrow L(x_1, \dots, x_n, \theta, k) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^k x_i^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{-\theta x_i}$

$$= \frac{\theta^{nk}}{\Gamma(k)^n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{k-1} e^{-\theta x_i}$$

$$\ln(L) = nk\ln(\theta) - n\ln(\Gamma(k)) + \sum_{i=1}^{n} (k-1)\ln(x_i) - \theta x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\ln(L) = \frac{nk}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial}{\partial k}\ln(L) = n\ln(\theta) - n\frac{\Gamma'(k)}{\Gamma(k)} + \sum_{i=1}^{n}\ln(x_i)$$

L'EMV $(\hat{\theta}_n, \hat{k}_n)$ est tq

$$\begin{cases} \frac{n\hat{k}_n}{\hat{\theta}_n} - \sum x_i = 0 \\ n\ln(\hat{\theta}_n) - n\frac{\Gamma'(\hat{k}_n)}{\Gamma(\hat{k}_n)} + \sum \ln(x_i) = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{n\hat{k}_n}{\sum x_i}$$

Pb : On n'a pas de formules explicites pour les estimateurs mais on peut avoir des estimat° quand on observe $x_1, \dots, x_n$.