Exam MAD 2019-2020

2ème Session

1) (1) a) $(A_n)_{n\geq 0}$ est bien une chaîne de Markov homogène puisque les probabilités de transition ne sont fonct° que de l'état du système à l'instant précédent.

On a $\mathbb{P}(A_n = y \mid A_{n-1} = x) = \begin{cases} \frac{N-x}{N} & \text{si } y = x+1 \\ \frac{x}{N} & \text{si } y = x-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

(1) b) (A_n) est une chaîne de Markov dans un espace fini (Existence) et la chaîne est irréductible (Unicité)

Pour déterminer la loi stationnaire, on recherche une loi réversible tq

$$\lambda(x)\,\frac{N-x}{N} = \lambda(x+1)\,\frac{x+1}{N}$$

$\lambda : x \mapsto \binom{N}{x}$ convient en tant que mesure réversible, une loi de proba μ est obtenu en normalisant avec $\mu(x) = \binom{N}{x} 2^{-N}$

2) (1) a) $Q_X = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$ $E = \{0, 1\}$

aucun sinistre reporté (0) ; sinistre reporté (1)

(1) b) $Y_n = (X_{n-2}, X_{n-1})$ $n \geq 2$.

$E_Y = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$

$$Q_Y = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

C'est une chaîne de Markov homogène car ne dépend pas des résultats précédents mais seulement d'un couple

c) (Y_n) est une CMH dans un espace d'états fini (Existence)
Cette chaîne est irréductible (unicité)

$\pi Q_y = \pi \qquad (\pi = (a\ b\ c\ d))$

$\frac{1}{10}\ \frac{10}{9}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.9a + 0.9c = a \\ 0.1a + 0.1c = b \\ 0.8b + 0.8d = c \\ 0.2b + 0.2d = d \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0.1a = 0.9c \\ b = c \\ 0.2c = 0.8d \\ 0.8d = 0.2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 9c \\ b = c \\ c = c \\ d = \frac{c}{4} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi = \left(9c, c, c, \frac{c}{4}\right)$$

$$\Rightarrow c = \frac{1}{9+2+1/4} = \frac{4}{45}$$

$(0,0)\ (0,1)\ ,(1,0)\ (1,1)$

$$\Rightarrow \pi = \left(\frac{4}{5}, \frac{4}{45}, \frac{4}{45}, \frac{1}{45}\right)$$

d) $p = \frac{4}{5} \times 450 + 2 \times \frac{4}{45} \times 900 + \frac{1}{45} \times 1350$
$= 550\ \$$

3) $S_0 = x > 0$ et $S_n = S_{n-1} + \sigma \varepsilon_n S_{n-1} \quad n \geq 1$ avec $\begin{cases} \sigma \in \mathbb{R} \text{ tq } |\sigma| < 1 \\ (\varepsilon_n) \text{ suite de va iid tq} \\ \mathbb{P}(\varepsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon_1 = -1) = 1/2 \end{cases}$

1 a) Nous sommes en cas discret où $n \in \mathbb{N}^*$.
Donc il suffit de mq $\mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] = S_n$

Soit $\mathcal{F}_n$ la filtration naturelle associée à S_n

$$\mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + \sigma \varepsilon_{n+1} S_n | \mathcal{F}_n]$$
$$= S_n + \sigma S_n \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1} | \mathcal{F}_n]$$

Car S_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable et $S_n \perp\!\!\!\perp \varepsilon_{n+1}$

$$= S_n + \sigma S_n \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}] \quad \text{car } \varepsilon_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$$
$$= S_n \quad \text{car } \mathbb{E}[\varepsilon_{n+1}] = 1 \times \frac{1}{2} + (-1) \times \frac{1}{2} = 0.$$

Donc $(S_n)_{n \geq 0}$ est bien une martingale.

1 b) On a $\begin{cases} S_0 = x \\ S_n = S_{n-1} + \sigma \varepsilon_n S_{n-1} \end{cases}$

Init $S_0 = x > 0$ et $S_1 = x + \sigma \varepsilon_1 x > 0$ car $|\sigma \varepsilon_1| < 1$.
$= x(1+\sigma\varepsilon_1)$

Hérédité : Soit l'HR ok au rang n i.e $S_n > 0$

$$S_{n+1} = S_n + \sigma \varepsilon_{n+1} S_n$$
$$= S_n (1 + \sigma \varepsilon_{n+1})$$

Or $|\sigma \varepsilon_{n+1}| < 1 \Rightarrow 1 + \sigma \varepsilon_{n+1} > 0$

$$\Rightarrow S_{n+1} = \underbrace{S_n}_{\substack{>0 \\ HR}} \underbrace{(1+\sigma\varepsilon_{n+1})}_{>0} > 0$$

cl : $\forall n \geq 0, \ S_n > 0$

c) $Z_n = \log S_n$

$$S_0 = x$$
$$S_1 = x(1+\sigma\varepsilon_1)$$
$$S_2 = x(1+\sigma\varepsilon_1) + \sigma\varepsilon_2 x(1+\sigma\varepsilon_1)$$
$$= x(1+\sigma\varepsilon_1)(1+\sigma\varepsilon_2)$$

$\Rightarrow n \geq 1 \quad S_n = x \prod_{i=1}^{n} (1+\sigma\varepsilon_i)$

Donc $Z_n = \log S_n = \log x + \sum_{k=1}^{n} \log(1+\sigma\varepsilon_k)$

d) Par la loi forte des grands nombres

$$\frac{Z_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{n} \mathbb{E}[\log S_n]$$

Or $\frac{1}{n}\mathbb{E}[\log S_n] = \frac{1}{n} \mathbb{E}\left[\log x + \sum_{k=1}^{n} \log(1+\sigma\varepsilon_k)\right]$

$$= \frac{\log x}{n} + \underbrace{\mathbb{E}[\log(1+\sigma\varepsilon_1)]}_{\frac{1}{2}\log(1+\sigma) + \frac{1}{2}\log(1-\sigma)}$$

Donc $\frac{Z_n}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{\log x}{n} + \frac{1}{2}\log((1+\sigma)(1-\sigma))$

4) a) (1) $\mathbb{P}(Y_t = \ell \mid X_t = k) = ?$ $\ell, k > 0$

$$\mathbb{P}(Y_t = \ell \mid X_t = k) = \begin{cases} \binom{k}{\ell} p^\ell (1-p)^{k-\ell} & \ell \leq k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(1) b) Soit $\ell > 0$, $\mathbb{P}(Y_t = \ell) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y_t = \ell \mid X_t = k)\mathbb{P}(X_t = k)$

$$= \sum_{k=\ell}^{\infty} \binom{k}{\ell} p^\ell (1-p)^{k-\ell} \frac{(\lambda t)^k}{k!} e^{-\lambda t}$$

$$= \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{\cancel{k!}}{\ell!\,(k-\ell)!} p^\ell (1-p)^{k-\ell} \frac{(\lambda t)^k}{\cancel{k!}} e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{p^\ell}{\ell!} e^{-\lambda t} \sum_{k=\ell}^{\infty} \frac{1}{(k-\ell)!} (1-p)^{k-\ell} (\lambda t)^k$$

$$= \frac{p^\ell}{\ell!} e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (1-p)^k (\lambda t)^{k+\ell}$$

$$= \frac{p^\ell}{\ell!} e^{-\lambda t} (\lambda t)^\ell \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda t(1-p))^k}{k!}}_{e^{\lambda t(1-p)}}$$

$$= \frac{(p\lambda t)^\ell}{\ell!} e^{-p\lambda t}$$

(1) c) Il reste à mq $(Y_t)_{t \geq 0}$ est à accroissements indépendants et stationnaires.

Posant $Y_t = \sum_{k=1}^{X_t} I_k$ où $I_k \sim Ber(p)$

D'où avec $(t_i)_{i \in [\![1,n]\!]} \in \mathbb{R}^n$ tq $0 < t_1 < \dots < t_n$ on a bien $Y_{t_1}, Y_{t_2} - Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n} - Y_{t_{n-1}}$ indep. (car $Y_t \sim Ber(p)$)

et $\mathbb{P}(Y_{t-s} + Y_s = m) = \sum_{k=0}^{m} \mathbb{P}(Y_{t-s} = k)\mathbb{P}(Y_s = m-k)$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{(p\lambda(t-s))^k e^{-p\lambda(t-s)}}{k!} \frac{(p\lambda s)^{m-k}}{(m-k)!} e^{-p\lambda s}$$

$$= \frac{1}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (p\lambda(t-s))^k (p\lambda s)^{m-k} e^{-p\lambda t}$$

$$= \frac{e^{-p\lambda t}}{m!} \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} (p\lambda(t-s))^k (p\lambda s)^{m-k}$$

$$= \frac{(p\lambda t)^m}{m!} e^{-p\lambda t} = \mathbb{P}(Y_t = m)$$

Binôme de Newton

Donc $(Y_n)_{n\geq 0} \sim PPP(p\lambda)$

5) Soit $(N_r)_{r\geq 0} \sim PPP(\lambda)$

a) $Cov(N_r, N_s) = \mathbb{E}[(N_s - \mathbb{E}[N_s])(N_r - \mathbb{E}[N_r])]$

⚠ On suppose $s \leq r$ $= \mathbb{E}[(N_s - \lambda s)(N_r - \lambda r)]$

$= \mathbb{E}[N_r N_s - \lambda r N_s - \lambda s N_r + \lambda^2 s r]$

$= \mathbb{E}[N_r N_s] - \lambda^2 rs \cancel{- \lambda^2 sr} \cancel{+ \lambda^2 sr}$

Or $N_r N_s = \dfrac{N_r^2 + N_s^2 - (N_r - N_s)^2}{2}$

On sait que $(N_r - N_s) \sim \mathcal{P}(\lambda(r-s))$

$\Rightarrow \mathbb{E}[N_r N_s] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[N_r^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[N_s^2] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(N_r - N_s)^2]$

$= \frac{1}{2}(\cancel{\lambda r} + \cancel{(\lambda r)^2}) + \frac{1}{2}(\lambda s + (\lambda s)^2) - \frac{1}{2}\underbrace{(\lambda(r-s) + (\lambda(r-s))^2)}_{(\cancel{\lambda r} - \lambda s + \cancel{\lambda^2 r^2} - 2\lambda^2 rs + \cancel{\lambda^2 s^2})}$

$= \lambda s + \lambda^2 rs$

$\Rightarrow Cov(N_r, N_s) = \lambda s + \lambda^2 rs - \lambda^2 rs$
$= \lambda s$

D'où $Cov(N_r, N_s) = \lambda \min(s, r)$ Car au-dessus on a supposé $s \leq r$.

b) $Z_r = Z_0 (-1)^{N_r}$ $r \geq 0$ $\mathbb{P}(Z_0 = -1) = p$
$\mathbb{P}(Z_0 = 1) = 1-p$.

$\mathbb{E}[Z_r] = \mathbb{E}[Z_0 (-1)^{N_r}]$

$= \mathbb{E}[Z_0]\,\mathbb{E}[(-1)^{N_r}]$ car $Z_0 \perp\!\!\!\perp (-1)^{N_r}$

$= (1-2p)\,\mathbb{E}[(-1)^{N_r}]$

Or $\mathbb{E}[(-1)^{N_r}] = (+1) \times \mathbb{P}(N_r = 2k \mid k \in \mathbb{N}) + (-1)\underbrace{\mathbb{P}(N_r = 2k+1 \mid k \in \mathbb{N})}_{1 - \mathbb{P}(N_r = 2k \mid k \in \mathbb{N})}$

$= 2\,\mathbb{P}(N_r = 2k \mid k \in \mathbb{N}) - 1.$

$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(N_r = 2k) - 1$

$$= 2\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda r)^{2k}}{(2k)!} e^{-\lambda r} - 1$$

On reconnaît en $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda r)^{2k}}{(2k)!}$ le DSE de $\cosh(\lambda r)$

$$= 2e^{-\lambda r}\left(\frac{e^{\lambda r}+e^{-\lambda r}}{2}\right) - 1$$

$$= 1 + e^{-2\lambda r} - 1$$

$$= e^{-2\lambda r}$$

$$\int_0^T$$

D'où $\mathbb{E}[(-1)^{N_r}] = e^{-2\lambda r}$

Donc $\mathbb{E}[Z_r] = (1-2p)e^{-2\lambda r}$ $\quad r \geq 0$

c) $$\mathrm{Cov}(Z_s, Z_r) = \mathbb{E}[(Z_s - \mathbb{E}[Z_s])(Z_r - \mathbb{E}[Z_r])]$$

$$= \mathbb{E}[(Z_s - (1-2p)e^{-2\lambda s})(Z_r - (1-2p)e^{-2\lambda r})]$$

$$= \mathbb{E}[Z_s Z_r] - (1-2p)e^{-2\lambda r}\mathbb{E}[Z_s] - (1-2p)e^{-2\lambda s}\mathbb{E}[Z_r] + (1-2p)^2 e^{-2\lambda(r+s)}$$

$$\mathbb{E}[Z_s Z_r] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_s^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[Z_r^2] - \frac{1}{2}\mathbb{E}[(Z_r - Z_s)^2].$$

$$Z_r = Z_0 (-1)^{N_r} \Rightarrow \begin{cases} Z_s^2 = Z_0^2 \\ Z_r^2 = Z_0^2 \end{cases} \quad \text{car } ((-1)^{N_r})^2 = 1 \quad \forall r$$

et $$(Z_r - Z_s)^2 = (Z_0((-1)^{N_r} - (-1)^{N_s}))^2$$

$$= Z_0^2 \Big(\underbrace{(-1)^{2N_r}}_{=1} + \underbrace{(-1)^{2N_s}}_{=1} - \underbrace{2(-1)^{N_r+N_s}}_{=2\times(-1)^{N_{r+s}}} \Big)$$

Car N_r est un processus de Poisson.

$$= 2Z_0^2 (1 - (-1)^{N_r+N_s})$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(Z_r - Z_s)^2] = 2(1 - \mathbb{E}[(-1)^{N_{r+s}}]) \quad \text{car } \mathbb{E}[Z_0^2] = 1.$$

$$= 2(1 - e^{-2\lambda(r+s)})$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Z_s Z_r] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \times 2(1 - e^{-2\lambda(r+s)})$$

$$= e^{-2\lambda(r+s)}$$

$$\Rightarrow \mathrm{Cov}(Z_s, Z_r) = e^{-2\lambda(r+s)} - (1-2p)e^{-2\lambda r} \times (1-2p)e^{-2\lambda s} - (1-2p)e^{-2\lambda s}(1-2p)e^{-2\lambda r} + (1-2p)^2 e^{-2\lambda(r+s)}$$

$$= e^{-2\lambda(r+s)} - (1-2p)^2 e^{-2\lambda(r+s)}$$

6. Supposons que je dispose de 4 parapluies qui peuvent se trouver dans deux endroits, soit chez moi, soit à l'ISFA. A chaque pas de temps je me déplace d'un endroit à l'autre, je prends un parapluie s'il pleut et je n'en prends pas s'il ne pleut pas. Le nombre de parapluies à un endroit fluctue ainsi entre 0 et 4. On définie la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ égale au nombre de parapluie à l'endroit où je me trouve.

Par exemple, je suis chez moi à l'instant initial et la répartition des parapluies est 2 parapluies à la maison et 2 parapluies à l'ISFA alors $X_0 = 3$. A l'instant suivant je vais de la maison à l'ISFA et il pleut, j'emporte un parapluie et donc $X_1 = 2$ (puisque je suis à l'ISFA ou il y avait un parapluie et j'en ai pris un avec moi pour mon déplacement) Supposons que la probabilité qu'il pleuve lors d'une transition est $p \in (0, 1)$.

(a) Donner la matrice des transitions de $(X_n)_{n\geqslant 0}$

6) a)

$$Q = \begin{array}{c|ccccc} & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1-p & p \\ 2 & 0 & 0 & 1-p & p & 0 \\ 3 & 0 & 1-p & p & 0 & 0 \\ 4 & 1-p & p & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Pourquoi???

b) Loi Stationnaire existe et est unique car Espace d'états fini et chaîne irréductible.

$\pi = ($

$$\begin{cases} (1-p)e = a \\ (1-p)d + pe = b \\ (1-p)c + pd = c \\ (1-p)b + pc = d \\ a + pb = e \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = (1-p)b \\ b = b \\ c = b \\ d = b \\ e = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow b = \frac{1}{1-p+4} = \frac{1}{5-p}$$

$$\Rightarrow \pi = \left(\frac{1-p}{5-p}, \frac{1}{5-p}, \frac{1}{5-p}, \frac{1}{5-p}, \frac{1}{5-p} \right)$$

$\mathbb{P}(\text{"Pierre-O se fait tremper"}) = p \times \frac{1-p}{5-p}$

Proba qu'il pleuve × Proba que je n'ai plus de parapluie à prendre.

c) Soit N le nbr de parapluie $\Rightarrow \mathbb{P}(E) = p\frac{1-p}{N+1-p}$

$$\Rightarrow p\frac{(1-p)}{N+1-p} < 0.05 \iff N > p-1+p\frac{(1-p)}{0.05} = 4,2$$

avec $p = 0.4$

$$\Rightarrow N = 5 \text{ parapluies.}$$