Modèles de durée / Examen du 10 février 2009

Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Problème : modèle Pareto censuré

On considère une situation de censure aléatoire droite :

$$T_i = X_i \wedge C_i \text{ et } D_i = \begin{cases} 1 \text{ si } X_i \leq C_i \\ 0 \text{ si } X_i > C_i \end{cases}$$

dans laquelle on suppose les censures C_i indépendantes des durées X_i et on rappelle que la log-vraisemblance de l'échantillon $(T_1, D_1), \ldots, (T_n, D_n)$ s'écrit, à une constante additive près et avec des notations évidentes :

$$\ln L(\theta) = \sum_{i=1}^{n} \ln S_\theta(T_i) + \sum_{i=1}^{n} D_i \ln h_\theta(T_i).$$

On fait l'hypothèse qu'il existe $\theta > 0$ tel que $S_\theta(x) = \frac{1}{(1+x)^\theta}$, pour tout $x \geq 0$.

Question n°1 (2,5 points) : Calculer la fonction de hasard h_θ et la densité f_θ du modèle. Que dire du comportement de la fonction de hasard en fonction de $x \geq 0$? Calculer également l'information de Fisher pour une observation.

Question n°2 (3 points) : Calculer l'espérance de vie résiduelle $e_\theta(x) = \mathbf{E}_\theta(X - x | X > x)$. Donner la condition sur $\theta > 0$ pour que cette espérance existe.

Question n°3 (3 points) : On fait l'hypothèse qu'on observe un échantillon issu de la loi f_θ sur un intervalle de temps $[0, c]$, $c > 0$ fixé et connu. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ ainsi que l'information de Fisher dans le modèle censuré.

Question n°4 (2,5 points) : Donner un intervalle de confiance asymptotique au niveau $1-\alpha$ pour $\hat{\theta}$.

Question n°5 (2 points) : Calculer le quantile d'ordre q de la loi f_θ et en déduire une méthode graphique pour vérifier l'adéquation du modèle aux données.

Question n°6 (4 points) : On suppose maintenant que la censure a pour loi $S_{\beta\theta}(x)$ pour un paramètre $\beta > 0$ inconnu. En se souvenant que la vraisemblance du modèle est de la forme

$$L(\pi) = \prod_{i=1}^{n} \left[f_X(T_i,\pi) S_C(T_i,\pi) \right]^{D_i} \left[f_C(T_i,\pi) S_X(T_i,\pi) \right]^{1-D_i} ,$$

calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre (θ,β) ; comment s'appelle ce type de censure ? Que devient l'estimateur de θ si β est connu ?

Question n°7 (3 points) : Calculer la probabilité qu'une observation soit censurée.