Chapitre 2 : Le Mouvement Brownien

Histoire, Définitions et Construction

Historique du Mouvement Brownien

Avant d'être un objet mathématique rigoureux, le Mouvement Brownien a été étudié en Botanique, en Physique et en Finance.

- **1828** : le botaniste R. Brown observe le mouvement irrégulier de particules de pollen en suspension dans l'eau.
- **1877** : Delsaux explique les changements incessants de direction de trajectoires par les chocs entre les particules de pollen et les molécules d'eau.

Un mouvement de ce type est alors appelé **mouvement au hasard,** et sera plus tard appelé **mouvement Brownien.** Il faudra attendre le début du Xxème siècle pour une étude mathématique plus approfondie de ce processus.

Historique du Mouvement Brownien

- **1900 :** L. Bachelier, en vue d'étudier les cours de la Bourse de Paris dans sa thèse « Théorie de la Spéculation », mets en évidence le **caractère markovien** du mouvement Brownien : la position d'une particule à l'instant $t + s$ dépend de sa position en t et ne dépend pas de sa position avant t.
- **1905 :** A. Einstein détermine la **densité de transition** du mouvement Brownien par l'intermédiaire de l'équation de la chaleur.
  Smoluchowski décrit le mouvement Brownien comme une **limite de promenades aléatoires.**
- **1923** : La première étude mathématique rigoureuse du mouvement Brownien est faite par N. Wiener, qui construit une **mesure de probabilités** sur l'espace des fonctions continues sous laquelle le **processus canonique** est un mouvement Brownien.
- **1948** : P. Levy mène ensuite des recherches d'une influence considérable. Il s'intéresse aux **propriétés fines des trajectoires** du mouvement Brownien. Il étendra les concepts aux processus de Levy.
- Ces objets ont pas la suite été étudiés en profondeur par l'école américaine avec J.L. Doob, puis systématisés par l'école française, avec des spécialistes de la Théorie Générale des Processus avec P-A. Meyer.

Définitions

- **Définition** : Soit $X = \{X_t, t \geq 0\} = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus issu de 0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X est un **mouvement Brownien standard** si il vérifie l'une des 2 conditions suivantes équivalentes :

1. X est un processus gaussien centré de fonction de covariance

$$\mathbb{E}(X_s X_t) = s \wedge t$$

2. X est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS) gaussiens, c'est-à-dire tels que

$$X_t \sim \mathcal{N}(0, t), \forall t \geq 0$$

Définition

- La définition implique que **le mouvement Brownien est à trajectoires continues**.
- La propriété **d'indépendance des accroissements** signifie que
$$\forall s \leq t, \qquad (X_t - X_s)\ est\ \ indépendante\ \ de\ \ \sigma\{X_u, u \leq s\}$$
ou encore que
$$\forall s' \leq t' \leq s \leq t, \qquad (X_t - X_s) \perp (X_{t'} - X_{s'})$$
- La propriété de **stationnarité des accroissements** signifie que la loi de $(X_t - X_s)$ ne dépend que de $t - s$, autrement dit que
$$\forall s \leq t, \qquad (X_t - X_s) =^d \ X_{t-s}$$
- Ainsi, les **accroissements sont gaussiens** :
$$\forall s \leq t, \qquad (X_t - X_s) =^d \ X_{t-s} \sim \mathcal{N}(0, t-s)$$

PAIS

- Les Processus à Accroissements Indépendants et Stationnaires (PAIS) portent le nom de Processus de Levy. Leur structure a été caractérisés dans les années 30 par De Finetti, Khintchine et Levy. Ces processus sont très importants et de plus en plus utilisés en finance. Ce sont majoritairement des processus à sauts, i.e. à trajectoires non continues.
- Le mouvement Brownien est un PAIS particulier, où les accroissements sont gaussiens, et dont les trajectoires sont continues.
- Le mouvement Brownien est souvent noté $(B_t)_{t \geq 0}$ comme *Brownien* ou $(W_t)_{t \geq 0}$ comme *Wiener*. On l'appelle aussi processus de Wiener.

Construction théorique

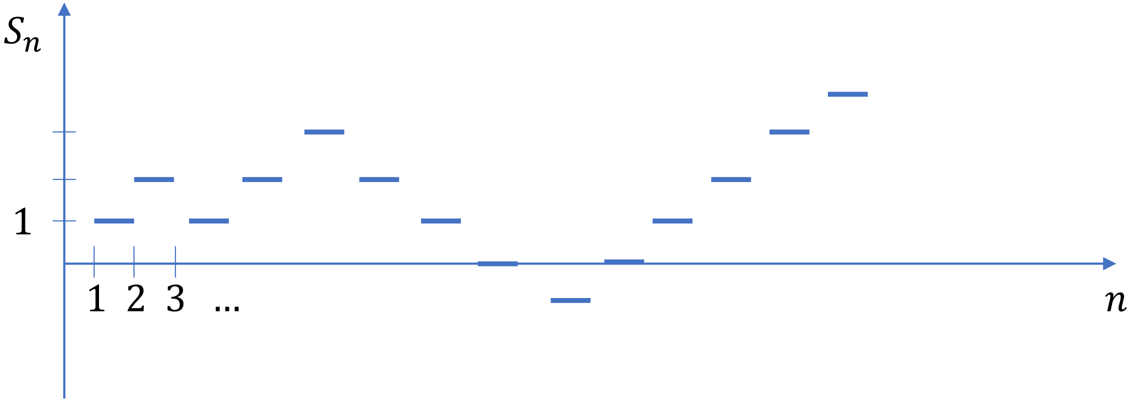
- La preuve rigoureuse de l'existence du mouvement Brownien repose sur la construction d'une mesure de probabilités sur l'espace des trajectoires, appelée **mesure de Wiener**.
- Plus précisément, on prend comme espace de probabilités sous-jacent l'espace $\Omega = \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ des fonctions continues de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$, et on note et on appelle processus canonique :
$$X_t(\omega) = \omega(t), \forall t \geq 0$$
où ici, $\omega \in \Omega$ est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$.
- $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{X_s, s \leq t\}$ est appelée filtration canonique, et on note $\mathcal{F} = \mathcal{F}_\infty$.
- La mesure de Wiener est une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t^X\})$ sous laquelle X est un mouvement Brownien au sens de la définition précédente.
- Preuve : très difficile !

Référence : I. Karatzas et S.E. Shreve « *Brownian Motion and Stochastic Calculus* », Springer 1991

Construction comme limite

- Une autre manière de construire plus simplement le mouvement Brownien est de le construire comme **limite de promenades aléatoires renormalisées**.
- Cette propriété est notamment exploitée pour les simulations.
- Soit X une v.a. de Bernouilli, $\mathbb{P}(X=1)=\mathbb{P}(X=-1)=\frac{1}{2}$, et soit $\{X_n, n \geq 0\}$ une suite de v.a. indépendantes et identiquement distribuées de même loi que X.
- On considère $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ la marche aléatoire symétrique simple. On voit facilement que

$$\mathbb{E}(S_n) = 0 \ \ et \ Var(S_n) = n$$

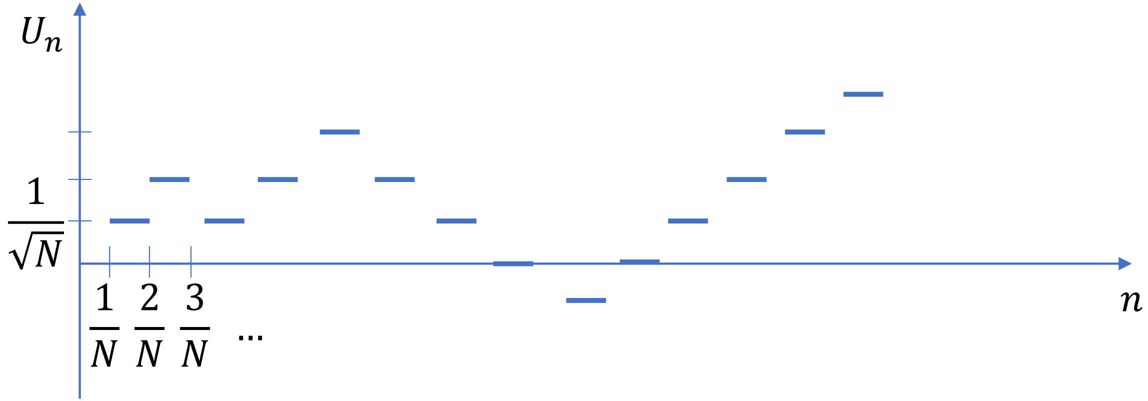


Construction comme limite

- On procède ensuite à une double renormalisation en temps et en espace, en fixant N et en considérant

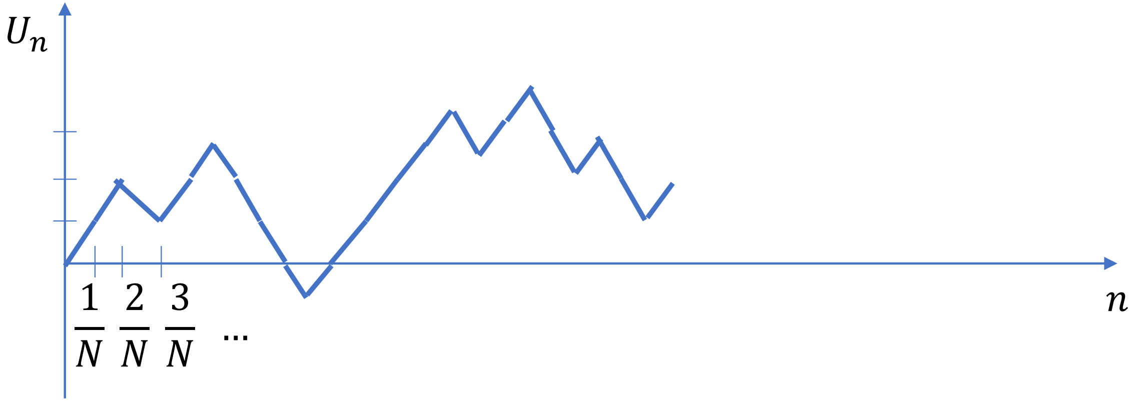
$$U_{\frac{k}{N}} = \frac{1}{\sqrt{N}} S_k \,, \qquad pour\ k = 0, \dots, N.$$

- On remarque que pour $k = 0,1, \dots, N$, $\frac{k}{N} = 0, \frac{1}{N}, \dots, 1$, et que $\mathbb{E}\left(U_{\frac{k}{N}}\right) = 0$ et $\mathrm{Var}\left(U_{\frac{k}{N}}\right) = \frac{k}{N}$.



Construction comme limite

- On définit ensuite un processus à temps continu $\{U_t^N, t \in [0,1]\}$ à partir de $U_{\frac{k}{N}}$ en imposant à la fonction $t \mapsto U_t^N$ d'être affine entre $\frac{k}{N}$ et $\frac{k+1}{N}$:



Construction comme limite

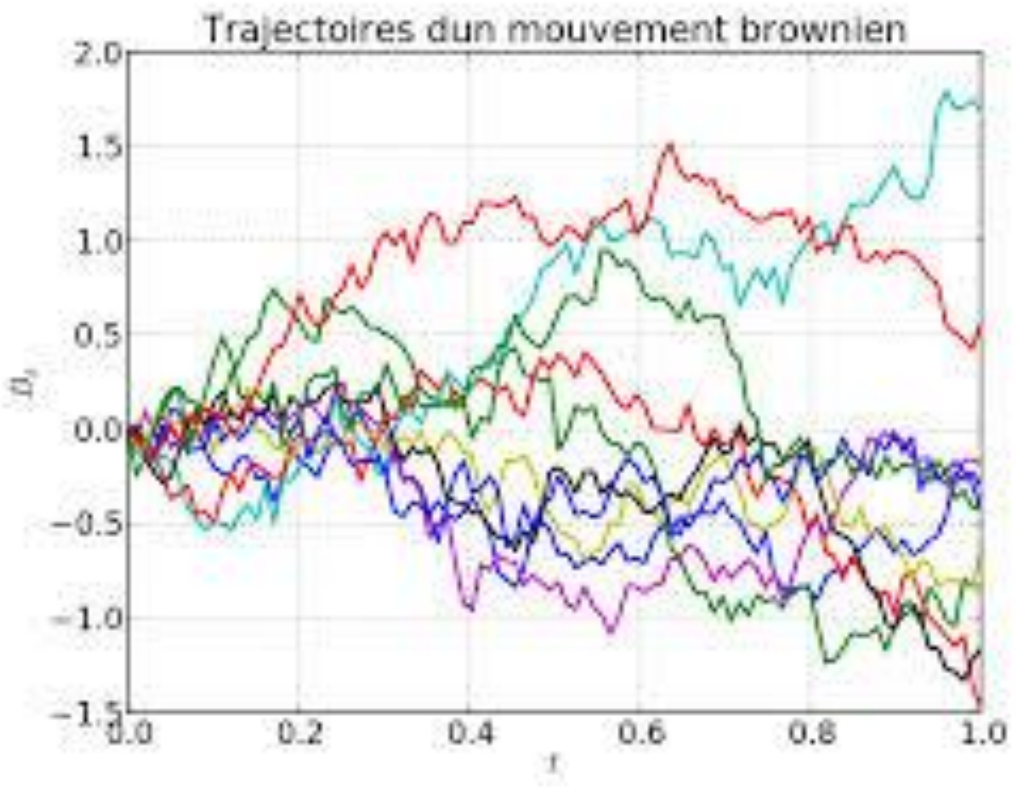
- Pour $t = 1$, on a :

$$U_1^N = \frac{S_N - N\mathbb{E}(X_1)}{\sqrt{NVar(X_1)}}$$

- Ainsi, par le Théorème Central Limite, $U_1^N \to_{N\to+\infty} \mathcal{N}(0,1)$ en loi.
- De même on a $U_t^N \to_{N\to+\infty} \mathcal{N}(0,t)$ en loi, $\forall t \in [0,1]$.
- On peut alors montrer (difficile) que **toute la trajectoire du processus U^N converge en loi vers celle du mouvement Brownien**. Cette convergence en loi de processus porte aussi le nom de principe d'invariance de Donsker, et utilise de façon cruciale la notion de tension d'une famille de probabilités.

Exemples de trajectoires

- Exemples de trajectoires de mouvement Brownien



Exemples de trajectoires

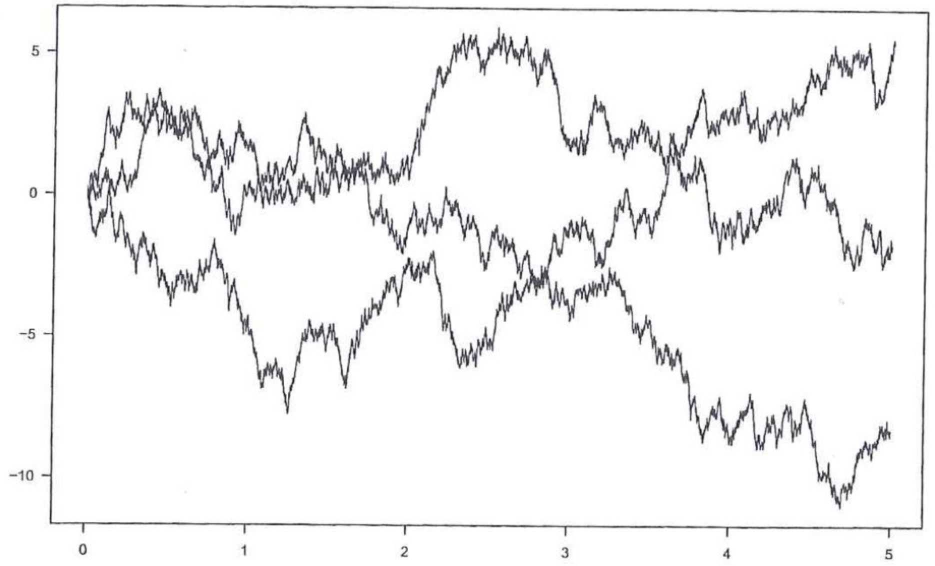


FIG. 3.1 – Trajectoires Browniennes

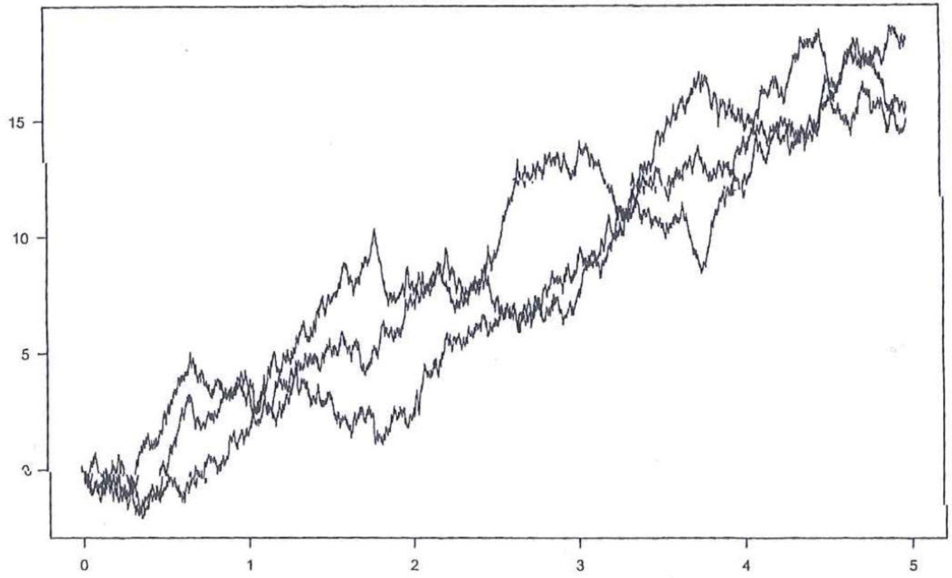


FIG. 3.2 – Mouvement Brownien avec drift

Equivalence des 2 définitions

- **Définition** : Soit $X = \{X_t, t \geq 0\} = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus issu de 0 et à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que X est un **mouvement Brownien standard** si il vérifie l'une des 2 conditions suivantes équivalentes :

1. X est un processus gaussien centré de fonction de covariance

$$\mathbb{E}(X_s X_t) = s \wedge t$$

2. X est un processus à accroissements indépendants et stationnaires (PAIS) gaussiens, c'est-à-dire tels que

$$X_t \sim \mathcal{N}(0, t), \forall t \geq 0$$

Equivalence des 2 définitions

- **Supposons que la définition 1. soit vraie** (processus gaussien centré de covariance $\mathbb{E}(X_s X_t) = s \wedge t$) et fixons $r \leq s \leq t$. On a :

$$\mathbb{E}\big(X_r(X_t - X_s)\big) = \mathbb{E}(X_r X_t) - \mathbb{E}(X_r X_s) = r \wedge t - r \wedge s = r - r = 0$$

Donc l'espace vectoriel $H = Vect\{X_r, r \leq s\}$ est orthogonal à $X_t - X_s$ dans L^2.

Comme X est un processus gaussien par hypothèse, l'espace vectoriel est égal à la tribu engendrée, et cela entraîne que $\sigma(H) = \sigma\{X_r, r \leq s\}$ est indépendante de $X_t - X_s$, et donc que $\boldsymbol{X}$ **est à accroissements indépendants**.

Enfin, on sait que $X_t - X_s$ est une gaussienne centrée, comme combinaison linéaire d'éléments d'un processus gaussien centré, et il suffit de calculer sa variance pour déterminer sa loi :

$$\boldsymbol{Var(X_t - X_s)} = \mathbb{E}[(X_t - X_s)^2] = \mathbb{E}(X_t^2) - 2\mathbb{E}(X_s X_t) + E(X_s^2) = t - 2t \wedge s + s = t - 2s + s = \boldsymbol{t - s}$$

D'où $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, ce qui complète la définition 2. (PAIS gaussien)

Equivalence des 2 définitions

- **Supposons maintenant que la définition 2. soit vraie** (PAIS gaussien)

Soient $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n \in \mathbb{R}^+$. On peut écrire :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} = \sum_{i=1}^{n} (a_i + \cdots + a_n)(X_{t_i} - X_{t_{i-1}})$$

Si on écrit la somme comme cela, on voit que le terme de droite est une somme de gaussiennes indépendantes (par indépendance des accroissements), donc une gaussienne.

Ainsi on peut déduire directement que le processus $\boldsymbol{X}$ **est un processus gaussien**. On voit aussi immédiatement qu'il est **centré**. Il reste à calculer sa covariance : $\forall s \leq t$

$$\mathbb{E}(X_s X_t) = \mathbb{E}(X_s(X_s + X_t - X_s)) = \mathbb{E}(X_s^2) + \mathbb{E}\big(X_s(X_t - X_s)\big) = s + 0 = s = s \wedge t$$

En utilisant à la fois l'indépendance des accroissements et leur loi $X_t - X_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.

Ainsi, la définition 1. est bien vérifiée.

Chapitre 2 : Le Mouvement Brownien

Propriétés du Mouvement Brownien

Propriété de Martingale

- La première propriété remarquable est que **le mouvement Brownien est une martingale** ! Et pas seulement.

Propriété de martingale : Soit $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ un mouvement Brownien standard. Alors :

1. $(B_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale
2. $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale
3. $(\exp(\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2})_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale

- Remarque : Le point 3 sera utilisé dans le théorème de Girsanov entre autres.

Preuve de la propriété de martingale

1. $(\boldsymbol{B_t})_{t\in\mathbb{R}^+}$ est une martingale

D'abord spécifier la filtration par rapport à laquelle c'est une martingale : on prend la filtration naturelle engendrée par le MB. Plus exactement la filtration continue complétée des ensembles de mesure nulle.

$$F_t^B = \bigcap_{\epsilon \searrow 0} \overline{\sigma(B_s, s \leq t+\epsilon)}.$$

Il est clair que les (F_t^B) forment une filtration complète et continue à droite (continue), et que B_t est F_t^B-**mesurable**. Il est également **intégrable** (car $B_s \sim \mathcal{N}(0,t)$).

Il reste à montrer la propriété de martingale, c'est-à-dire que $\forall t \geq s \geq 0, \mathbb{E}(B_t|F_s^B) = B_s$.

$$\mathbb{E}(B_t|F_s^B) = \mathbb{E}(B_t - B_s + B_s|F_s^B) = \underbrace{\mathbb{E}(B_t - B_s|F_s^B)}_{\substack{=\mathbb{E}(B_t - B_s)\, par\ indépendance \\ de\ B_t - B_s | F_s^B \\ et\ \mathbb{E}(B_t - B_s) = 0}} + \underbrace{\mathbb{E}(B_s|F_s^B)}_{\substack{=B_s \\ car\ B_s est\ F_s - mesurable}} = 0 + B_s$$

Preuve de la propriété de martingale

2. $\boldsymbol{(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}^+}}$ **est une martingale**

On va prendre la même filtration F_t^B filtration naturelle engendrée par le MB.

Mesurabilité : en tant que fonction mesurable d'un processus mesurable, $B_t^2 - t$ est F_t^B-mesurable.

Intégrabilité : B_t suivant une loi normale, B_t^2 est intégrable et $B_t^2 - t$ aussi.

Propriété de martingale : $\forall t \geq s \geq 0$,

$$\mathbb{E}(B_t^2 - t|F_s^B) = \mathbb{E}((B_t - B_s + B_s)^2 - t|F_s^B)$$

$$= \underbrace{\mathbb{E}((B_t - B_s)^2|F_s^B)}_{\substack{=\mathbb{E}((B_t - B_s)^2) \\ par\ indépendance \\ =t-s}} + 2\underbrace{\mathbb{E}((B_t - B_s)B_s|F_s^B)}_{\substack{on\ peut\ sortir\ B_s \\ car\ F_s^B-mesurable \\ =2B_s\mathbb{E}(B_t - B_s|F_s^B)=0 \\ par\ indép\ et\ centrée}} + \underbrace{\mathbb{E}((B_s)^2|F_s^B)}_{\substack{=B_s^2\ car \\ F_s^B-mesurable}} - \underbrace{t}_{constante}$$

$$= t - s - t + B_s^2 = B_s^2 - s$$

Donc $\mathbb{E}(B_t^2 - t|F_s^B) = B_s^2 - s$, c'est une martingale

Preuve de la propriété de martingale

3. $\left(\exp\left(\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2}\right)\right)_{t\in\mathbb{R}^+}$ **est une martingale**

Il suffit de calculer l'espérance d'une loi lognormale.

A faire en exercice. Correction en TD.

Si $Y = \ln(X) \sim \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

$\Rightarrow X \sim \text{Log-}\mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$

$\mathbb{E}[X] = e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}$

$V(X) = (e^{\sigma^2}-1)e^{2\mu+\sigma^2}$

Ici, $\mathbb{E}\left[e^{\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2}} \middle| \mathcal{F}_s^B\right]$

$= e^{-\frac{\theta^2 t}{2}} \mathbb{E}\left[e^{\theta B_t} \middle| \mathcal{F}_s^B\right]$

$= e^{-\frac{\theta^2 t}{2}} e^{\theta B_s} \mathbb{E}\left[e^{\theta(B_t-B_s)} \middle| \mathcal{F}_s^B\right]$

Or $\theta(B_t - B_s) \sim \mathcal{N}(0, \theta^2(t-s))$

$\Rightarrow \mathbb{E}\left[e^{\theta B_t - \frac{\theta^2 t}{2}} \middle| \mathcal{F}_s^B\right] = e^{-\frac{\theta^2 t}{2}} e^{\theta B_s} e^{\frac{\theta^2(t-s)}{2}}$

$= e^{\theta B_s - \frac{\theta^2 s}{2}}$

Théorème de caractérisation de P. Lévy

- Une réciproque célèbre à ces propriétés de martingales du Mouvement Brownien :

Théorème de caractérisation de P. Lévy :

Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus continu issu de 0. Alors X est un mouvement Brownien s'il il vérifie **l'une des 2 conditions suivantes** :

1. Les processus X et $(X_t^2 - t)_{t\geq 0}$ sont des martingales
2. Les processus $(\exp\left(\theta X_t - \frac{\theta^2 t}{2}\right))_{t\geq 0}$ sont des martingales $\forall \theta \in \mathbb{R}$.

- **A retenir** : Peut s'avérer un outil intéressant pour montrer qu'un processus est un mouvement Brownien.

Variation quadratique du Mouvement Brownien

- Remarque importante : le point 2 de la propriété de martingale implique

Corollaire : La variation quadratique du mouvement Brownien est t : $< B >_t = t$

- Le mouvement Brownien est la seule martingale continue, issue de 0, de carré intégrable et de variation quadratique t.
- Martingale de L2 d'espérance nulle + variation quadratique =t → mouvement Brownien

Produit de 2 Browniens indépendants

Proposition : si B^1 et B^2 sont 2 Browniens indépendants, alors le produit B^1B^2 est une martingale.

- **Preuve** : On peut le voir de 2 façons :

a. En utilisant le fait que si $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont 2 tribus et X, Y deux v.a. telles que $\mathcal{F} \vee \sigma(X)$ et $\mathcal{G}$ sont indépendantes, ainsi que $\mathcal{G} \vee \sigma(Y)$ et $\mathcal{F}$, alors on peut écrire :

$$\mathbb{E}(XY|\mathcal{F} \vee \mathcal{G}) = \mathbb{E}(X|\mathcal{F})\mathbb{E}(Y|\mathcal{G})$$

Cela permet d'écrire la propriété de martingale de B^1B^2 à partir des propriétés de martingales de B^1 et B^2 :

$$\mathbb{E}(B_t^1B_t^2|\mathcal{F}_s \vee \mathcal{G}_s) = \mathbb{E}(B_t^1|\mathcal{F}_s)\mathbb{E}(B_t^2|\mathcal{G}_s) = B_s^1B_s^2$$

b. En remarquant que $\frac{B^1+B^2}{\sqrt{2}}$ est un processus gaussien de covariance $t \wedge s$, donc un Brownien.

Donc $\frac{\left(B_t^1+B_t^2\right)^2}{2} - t$ est une martingale. Donc si on écrit :

$$B_t^1B_t^2 = \left(\frac{(B_t^1 + B_t^2)^2}{2} - t\right) - \frac{1}{2}[(B_t^1)^2 - t] - \frac{1}{2}[(B_t^2)^2 - t]$$

C'est bien une martingale comme somme de 3 martingales.

Transformations du Brownien

- **Proposition** (Transformations du Brownien) : Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard, alors les processus suivants sont aussi des mouvements Brownien :
  1. $t \mapsto -B_t$ (processus symétrique),
  2. $t \mapsto \frac{1}{c}B_{c^2 t}, c \in \mathbb{R}$ (processus rééchelonné ou scaling),
  3. $t \mapsto tB_{\frac{1}{t}}\ si\ t \neq 0, t \mapsto 0\ si\ t = 0$ (processus inversé).

- **Preuve** : Exercices en TD. Essayer de le montrer. Il suffit de vérifier que ces processus sont bien gaussiens, et de calculer leurs espérances et leur covariances.
- **Remarque** : L'invariance du processus 2. porte aussi le nom d'invariance par scaling et signifie que le Brownien est un processus autosimilaire (cf cours sur les séries temporelles en 3A).

Propriétés des trajectoires du Brownien

- Les premières propriétés des trajectoires du Brownien peuvent facilement être comprises grâce à la construction que nous en avons détaillé au début de ce chapitre. Elles sont les suivantes :

Proposition :

1. Un mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ est un **processus presque sûrement continu**,

Autrement dit il existe un ensemble négligeable N tel que, $\forall\omega \notin N$, la trajectoire $t \mapsto B_t(\omega)$ est continue

2. Les trajectoires d'un mouvement Brownien $(B_t)_{t\geq 0}$ sont **nulle part dérivables**,

Autrement dit il existe un ensemble négligeable N tel que, $\forall\omega \notin N$, la trajectoire $t \mapsto B_t(\omega)$ est nulle part dérivable

Remarque : il n'est pas évident de construire de telles fonctions sans faire appel aux probabilités. C'est le cas des fractales par exemples, ou de la fonction de Weierstrass $f(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^k cos\beta^k t$ qui est continue partout nulle part dérivable dès que $\alpha\beta > 1 + \frac{3\pi}{2}$.

Propriétés trajectorielles du Brownien

- On se pose la question de « à quoi ressemble la courbe d'une trajectoire du Brownien », et on cherche un équivalent déterministe.

Proposition : Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard. Alors p.s.

1. $\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} B_t = \limsup_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t}} B_t = +\infty$
2. $\liminf_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} B_t = \liminf_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t}} B_t = -\infty$
3. $\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} B_t = 0$

- Remarque : $\frac{1}{t}$ est « trop fort » et écrase la courbe Brownienne, et $\frac{1}{\sqrt{t}}$ ne l'est pas assez…

Loi du logarithme itéré

- En réalité on peut trouver 2 fonctions ψ et ϕ qui « approximent » le mieux la courbe Brownienne, l'une en 0 et l'autre en $+\infty$.

Théorème (Loi du logarithme itéré) : Soit $\{B_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien. Alors p.s.

1. $\limsup_{t\to0^+} \frac{B_t}{\phi(t)} = 1 \; et \; \liminf_{t\to0^+} \frac{B_t}{\phi(t)} = -1$
2. $\limsup_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\psi(t)} = 1 \; et \; \liminf_{t\to+\infty} \frac{B_t}{\psi(t)} = -1$

Où $\psi(t) = \sqrt{2t \ln\ln\frac{1}{t}}, \forall t < \frac{1}{e}$ et $\phi(t) = \sqrt{2t\ln\ln t}, \forall t > \frac{1}{e}$.

- **Remarque** : les fonctions ψ et ϕ « ressemblent » beaucoup à $t \mapsto \sqrt{t}$ car

$\frac{\psi(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to0}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{\psi(t)}{t^\alpha} \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0, \forall\alpha < \frac{1}{2}$, et $\frac{\phi(t)}{\sqrt{t}} \underset{t\to0}{\longrightarrow} +\infty$ et $\frac{\phi(t)}{t^\alpha} \underset{t\to0}{\longrightarrow} 0, \forall\alpha > \frac{1}{2}$.

A retenir : ainsi, une bonne image déterministe de la courbe brownienne, aussi bien localement que globalement, sont les fonctions $t \mapsto \sqrt{t}$ et $t \mapsto -\sqrt{t}$.

Longueur quadratique de la courbe Brownienne

- Le théorème suivant sera utilisé dans la construction de l'intégrale stochastique. Il met une nouvelle fois en évidence le caractère « quadratique » de la courbe Brownienne, ainsi que le lien entre B_t^2 et t.

Théorème : Fixons $t > 0$ et posons $t_j = \frac{jt}{2^n}, \forall n \in \mathbb{N}, j = 1, \dots, 2^n$. Alors :

$$Z_t^n = \sum_{j=1}^{2^n} \left|B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right|^2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} t \quad p.s. \text{ et dans } L^2$$

- **Preuve** : On peut remarquer déjà que $\mathbb{E}(Z_t^n) = t$ (somme télescopique de carrés d'accroissements du Brownien).
- Pour la convergence dans L^2, il faut montrer que $\mathbb{E}(|Z_t^n - t|^2) \to 0$, soit $Var(Z_t^n) \to 0$.

$$Var(Z_t^n) = \sum_{j=1}^{2^n} Var\left(B_{t_j} - B_{t_{j-1}}\right)^2 = \sum_{j=1}^{2^n} 2\left(\frac{t}{2^n}\right)^2 = 2^{1-n}t^2 \to 0$$

Où la 2ème égalité vient de si $X \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$, alors $Var(X^2) = 2\sigma^4$.

- Pour la convergence p.s., on peut écrire :

$$\mathbb{E}\left(\sum_{n=1}^{+\infty} |Z_t^n - t|^2\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}(|Z_t^n - t|^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} Var(Z_t^n) = 2t^2 \sum_{n=1}^{+\infty} 2^{-n} < +\infty$$

D'où $\sum_{n=1}^{+\infty} |Z_t^n - t|^2 < +\infty$ p.s. (une v.a. d'espérance finie est finie), et donc le terme général de la série, $|Z_t^n - t|^2$ converge p.s. vers 0.

Chapitre 2 : Le Mouvement Brownien

Propriété de Markov du Mouvement Brownien et ses conséquences

Propriété de Markov simple

- La propriété de Markov du mouvement Brownien est une conséquence de l'indépendance de ses accroissements.
- On commence par une première proposition préalable :

- **Proposition** : Soit W un mouvement Brownien. Le processus $\{W_u^s = W_{u+s} - W_s, u \geq 0\}$ est un mouvement Brownien indépendant de F_s^W.

- **Preuve** : W_u^s est un processus gaussien car toute combinaison linéaire de W_u^s est une combinaison linéaire de W_t donc gaussienne. Centré. $W_u^s \sim \mathcal{N}(0, u)$

Calcul de la covariance : supposons $u \leq z$

$$Cov(W_u^s, W_z^s) = \mathbb{E}(W_u^s W_z^s) = \mathbb{E}\big((W_{u+s} - W_s)(W_{z+s} - W_s)\big) = \mathbb{E}\big((W_{u+s} - W_s)(W_{z+s} - W_{u+s} + W_{u+s} - W_s)\big)$$
$$= \mathbb{E}\big((W_{u+s} - W_s)(W_{z+s} - W_{u+s})\big) + \mathbb{E}\big((W_{u+s} - W_s)^2\big)$$
$$= 0 + u = u$$

Enfin, $W_u^s = W_{u+s} - W_s$ est bien indépendant de F_s^W pour tout u, par indépendance des accroissements.

Propriété de Markov simple

- La proposition précédente entraîne le théorème suivant :

Théorème (Propriété de Markov simple) : Soit W un mouvement Brownien. Alors pour toute fonction f borélienne bornée et pour tout $s \leq t$:

$$\mathbb{E}(f(W_t)|\mathcal{F}_s^W) = \mathbb{E}(f(W_t)|W_s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(y-W_s)^2}{2(t-s)}} dy$$

- **Rappel** : f borélienne signifie f fonction réelle mesurable par rapport à la tribu borélienne (toute image réciproque d'un ouvert est un borélien).

Propriété de Markov simple

- **Preuve** :

On utilise les propriétés élémentaires de l'espérance conditionnelle :

$$\mathbb{E}(f(W_t)|\mathcal{F}_s^W) = \mathbb{E}(f(W_t - W_s + W_s)|\mathcal{F}_s^W) = \mathbb{E}(f(x + W_t - W_s)|W_s = x) = \mathbb{E}\big(f(x + W_t - W_s)\big)\Big|_{\{W_s = x\}},$$

puisque W_s est $\mathcal{F}_s^W$-mesurable et $W_t - W_s$ est indépendant de $\mathcal{F}_s^W$.

Comme $W_t - W_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$, on peut calculer :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(f(x + W_t - W_s)\big) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} f(x+y) e^{-\frac{(y)^2}{2(t-s)}} dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int_{\mathbb{R}} f(y) e^{-\frac{(y-x)^2}{2(t-s)}} dy.\end{aligned}$$

Après un changement de variables.

Une autre façon de décrire cette propriété est de dire que pour tout $t \geq s$, conditionnellement à $\mathcal{F}_s^W$, la v.a. W_t est de loi gaussienne d'espérance W_s et de variance $t - s$.

Propriété de Markov forte

- La propriété de Markov simple peut s'étendre aux temps aléatoires :

Théorème (Propriété de Markov forte) : Soit W un mouvement Brownien, et T un $(\mathcal{F}_t^W)$-temps d'arrêt à valeurs finies . Alors pour toute fonction f borélienne bornée et pour tout $0 \leq t$:

$$\mathbb{E}(f(W_{T+t})|\mathcal{F}_T^W) = \mathbb{E}(f(W_{T+t})|W_T) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t)}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-\frac{(x-W_T)^2}{2t}} dx.$$

En particulier, pour tout temps d'arrêt fini T, le processus $\{W_t^T = W_{T+t} - W_T, t \geq 0\}$ est un Brownien indépendant de $\mathcal{F}_T^W$.

- Propriété essentielle du mouvement Brownien, beaucoup plus difficile à montrer.

Théorie des Fluctuations

On appelle **Théorie des fluctuations** la théorie qui s'intéresse à la loi jointe du processus bivarié $\{(W_t, S_t)\}_{t\geq 0}$ où S_t est le **processus** (croissant) du **supremum**

$$S_t = \sup_{s\leq t} W_s$$

On a vu que $\limsup_{t\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}} W_t = +\infty$, ce qui entraîne clairement que $S_t \to +\infty$ p.s. quand $t \to +\infty$

Notons $T_a = \inf\{t > 0, W_t = a\}$ le **temps d'atteinte du Brownien au seuil $\boldsymbol{a > 0}$.**

Alors pour tout $M > 0, \{T_a < M\} = \{S_M > a\}$.

Comme $\mathbb{P}(S_M > a) \to 1$ quand $M \to +\infty$, on voit que p.s. $T_a < +\infty$.

Autrement dit T_a est un temps d'arrêt p.s. fini.

Attention, T_a n'est pas un temps d'arrêt p.s. borné, en effet $\mathbb{E}(T_a) = +\infty$.

Théorie des Fluctuations

- Le théorème suivant, utilisé en Finance pour évaluer les options à barrières, précis la loi jointe du couple de v.a. (W_t, S_t) :

Théorème (Désiré André) : Pour tout $t, x \geq 0$ et pour tout $y \leq x$

$$\mathbb{P}(S_t \geq x, W_t \leq y) = \mathbb{P}(W_t \geq 2x - y)$$

Théorie des Fluctuations

Montrons que pour tout $t, x \geq 0$ et pour tout $y \leq x$, $\mathbb{P}(S_t \geq x, W_t \leq y) = \mathbb{P}(W_t \geq 2x - y)$

- **Preuve** : On écrit d'abord :

$$\mathbb{P}(S_t \geq x, W_t \leq y) = \mathbb{P}(T_x \leq t, W_t \leq y) = \mathbb{P}\left(T_x \leq t, W_{t-T_x+T_x} - W_{T_x} \leq y - W_{T_x}\right)$$

D'une part, $W_{T_x} = x$, par continuité de W.

D'autre part, $W_s^x = W_{s+T_x} - W_{T_x}$ est un Brownien indépendant de $\mathcal{F}_{T_x}$ (donc de T_x).

On en déduit que

$$\mathbb{P}(S_t \geq x, W_t \leq y) = \mathbb{P}\left(T_x \leq t, W_{t-T_x}^x \leq y - x\right) = \mathbb{P}\left(T_x \leq t, W_{t-T_x}^x \geq x - y\right)$$

Où la 2ème égalité vient de la symétrie du processus W^x sachant T_x.

On déduit aussi que :

$$\mathbb{P}\left(T_x \leq t, W_{t-T_x}^x \geq x - y\right) = \mathbb{P}(T_x \leq t, W_t - x \geq x - y) = \mathbb{P}(W_t \geq 2x - y)$$

Car $\{W_t \geq 2x - y\} \subset \{T_x \leq t\}$, puisque $\{2x - y \geq 0\}$. ■

Théorie des Fluctuations

- On vient de trouver la fonction de répartition jointe de (W_t, S_t) pour tout $y \leq x$,
$$\mathbb{P}(S_t \geq x, W_t \leq y) = \mathbb{P}(W_t \geq 2x - y)$$
- En dérivant par rapport à x puis par y, on obtient la densité jointe du couple de v.a (W_t, S_t) :

$$f_{S_t,W_t}(x, y) = \frac{2(2x - y)}{\sqrt{2\pi \mathrm{t}^3}} e^{-\frac{(2x-y)^2}{2t}} \mathbb{1}_{\{x \geq y, x \geq 0\}}, \qquad \forall t \geq 0$$

- On peut également calculer la loi de S_t, soit en intégrant l'expression précédente par rapport à y, soit en écrivant pour tout $x \geq 0$:
$$\mathbb{P}(S_t \geq x) = \mathbb{P}(S_t \geq x, W_t \geq x) + \mathbb{P}(S_t \geq x, W_t \leq x)$$
$$= \mathbb{P}(W_t \geq x) + \mathbb{P}(W_t \geq 2x - x) = 2\mathbb{P}(W_t \geq x) = \mathbb{P}(|W_t| \geq x).$$

Par égalité des fonctions de répartition :
$$S_t =_d |W_t|, \qquad \forall t \geq 0.$$

Théorie des Fluctuations

- Cela permet de calculer la loi de T_a, pour $a > 0$:

$$\mathbb{P}(T_a \leq t) = \mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(|W_t| \geq a) = \mathbb{P}(W_t^2 \geq a^2)$$
$$= \mathbb{P}(tW_1^2 \geq a^2) = \mathbb{P}(a^2 W_1^{-2} \leq t)$$

D'où

$$T_a =_d \frac{a^2}{W_1^2}.$$

On a alors directement la densité

$$f_{T_a}(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi \mathrm{t}^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}} \mathbb{1}_{\{t \geq 0\}}$$

Théorie des Fluctuations

- On peut montrer également le résultat suivant :

Théorème : Les processus $\{S_t - W_t, t \geq 0\}$, $\{|W_t|, t \geq 0\}$ et $\{S_t, t \geq 0\}$ ont la même loi.

- **Remarque** : l'égalité en loi entre processus est bien plus forte que ce qu'on a montré quand on a montré $S_t =_d |W_t|, \quad \forall t \geq 0$.

Mouvement Brownien multidimensionnel

- **Définition** : Soit $\{B_t = (B_t^1, B_t^2, \ldots, B_t^n), t \geq 0\}$ un processus n-dimensionnel. On dit que B est un **mouvement Brownien multidimensionnel** si les processus $B^i, i \leq n$ sont des Browniens réels indépendants.

- **Proposition** : B est un processus à accroissements indépendants et stationnaires gaussiens, et un processus gaussien de fonction de covariance

$$\mathbb{E}(< B_t, B_s >) = n(s \wedge t)$$

Où $<.,.>$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^n$.

Mouvement Brownien multidimensionnel

On a également le résultat suivant :

- **Proposition (Caractérisation de type Lévy)** : Un processus n-dimensionnel B est un mouvement Brownien si et seulement si tous les processus B^i et $(B_t^i B_t^j - \delta_{i,j} t, t \geq 0)$ sont des martingales. (avec la notation de Kronecker $\delta_{i,j} = 0$ si $i \neq j$ et $\delta_{i,i} = 1$).

- Pour tous $a_1, \dots, a_n$, il est facile de vérifier en calculant son espérance et sa covariance que le processus W défini par

$$W_t = \frac{1}{\sqrt{a_1^2 + \cdots + a_n^2}} (a_1 B_t^1 + \cdots + a_n B_t^n)$$

est un mouvement Brownien réel.

Mouvement Brownien multidimensionnel

- On dira que 2 mouvements Browniens réels B^1 et B^2 sont **corrélés** avec un **coefficient de corrélation** ρ si le processus $t \mapsto B_t^1 B_t^2 - \rho t$ est une martingale.
- On peut alors **décorréler** B^1 et B^2 en introduisant le processus

$$B_t^3 = \frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}(B_t^2 - \rho B_t^1)$$

B_t^3 est une martingale. On peut montrer que (B_t^3)^2 $- t$ est aussi une martingale, de sorte que B_t^3 est un mouvement Brownien.

B_t^3 est indépendant de B_t^2, de sorte que $B_t^3 B_t^2$ est une martingale.

Preuve : le faire en exercice.

Mouvement Brownien

- Fin du chapitre sur le mouvement Brownien.
- Travailler la fiche de TD2 sur le mouvement Brownien.
- **IMPORTANT** : bien comprendre les notions autour du mouvement Brownien et savoir travailler avec en vue du chapitre sur l'intégrale stochastique !