Théorie des Options
Anne EYRAUD-LOISEL

Cours numéro 11

01/04/2021

Généralités - ISFA

- Si vous changez d'avis et voulez revenir (ou inverse), signalez-vous à la scolarité scolarite.isfa@univ-lyon1.fr
- **Reconfinement** total annoncé hier soir avec fermeture des établissements scolaires – **pas de fermeture des Universités** = maintien des cours en présentiel au même rythme.
- **Prochaines séances prévues** (pour l'instant) :
  - Vendredi 2/04 : Cours Maths actu
  - Mercredi 7/04 : TD Economie de l'Assurance // TD MLG
  - Vendredi 09/04 : Cours Maths actu
  - Mardi 13/04 : TD MLG
  - Mercredi 14/04 : TD Economie de l'Assurance // TD Théorie des Options
  - Vendredi 16/04 : TD Maths actu
  - Lundi 26/4 : TD Théorie des Options
  - Mardi 27/04 : TD Economie de l'Assurance
- **Remarques : prévoir impérativement d'être présents sur Lyon pour les semaines d'examen.**
- **Point conventions de stage : ATTENTION bien poser demander de convention en M1 Actuariat et non DU2**

Questionnaire Webex de présence

Plan Cours Black-Scholes

- Distributions normales et lognormales en temps continu
- Modélisation de Black-Scholes
- EDP de Black et Scholes
- Formule de BS par les martingales, AOA, proba risque neutre, valeur du call
- Feynman Kac
- Changement de proba / changement de numéraire sous BS
- Volatilité implicite / volatilité historique

Modèle de Black et Scholes

RESUME

- **Théorème** *L'EDS de Black et Scholes* $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ *admet une unique solution qui est donnée par :*

$$S_t = S_0 e[(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t], \text{ IP-}p.s.$$

- $d\underline{S}_t = 1/S^0{}_t dS_t + S_t d(1/S^0{}_t) + d<S, 1/S^0{}_t> = \underline{S}_t[(\mu - r)dt + \sigma dW_t]$
- $\lambda := (\mu - r)/\sigma$ **prime de risque**.
- processus défini pout $t \in [0, T]$, $\underline{W}t = Wt + \lambda t$
- alors dynamique de $\underline{S}$ donnée par : $d\underline{S}t = \sigma\, \underline{S}_t d\underline{W}_t$
- ***Girsanov*** : il existe $\underline{\mathbf{IP}}$, équivalente à **IP**, sous laquelle $\underline{W}_t = W_t + \lambda t$ est un mouvement Brownien,

Méthode de pricing

Comme dans le cas du modèle discret, nous allons chercher à donner un prix en t à un produit dérivé connu en T et trouver une manière pour dupliquer exactement ce produit dérivé. La méthode similaire à celle utilisée dans le cas discret :

- *On va chercher à* ***construire une probabilité risque-neutre*** *qui rende l'actif de base réactualisé une martingale.*
- On va définir ce que l'on appelle une **stratégie de portefeuille simple autofinancée**.
- On va vérifier que **toute stratégie de portefeuille simple autofinancée réactualisée reste une martingale** sous la probabilité risque-neutre.
- On en déduira **l'absence d'opportunités d'arbitrage** entre stratégies de portefeuille simple (AOA').
- Nous allons chercher à **répliquer tout produit dérivé** par une stratégie de portefeuille simple.
- On en déduira que la définition économique naturelle du prix de l'option en t s'écrit comme **l'espérance actualisée sous cette proba risque neutre du flux final.**
- Le portefeuille de **réplication** nous donnera la stratégie de **couverture** de l'option.

Portefeuilles autofinancés

- Après avoir modélisé la dynamique du sous-jacent, nous avons à formaliser mathématiquement l'évolution de la valeur liquidative d'un portefeuille géré dynamiquement de manière autofinancée, c'est à dire sans modification de la valeur du portefeuille aux dates de renégociation.
- Une stratégie de portefeuille consiste a l'investissement à tout instant $t \in [0, T]$ dans une quantité notée φ_t d'actif risqué S et d'une quantité $\varphi^0{}_t$ d'actif sans risque S^0. La valeur du portefeuille est donc donnée par

$$X_t = \varphi^0{}_t S^0{}_t + \varphi_t S_t$$

- La condition d'autofinancement dans le cas continu s'écrit :

$$dX_t = \varphi^0{}_t dS^0{}_t + \varphi_t dS_t$$

Condition d'autofinancement

- **Définition 1.3** *Une* **stratégie de portefeuille simple autofinancée** $X^{x,\varphi}$ *est la donnée d'un capital de départ x et d'une stratégie continue φ d'investissement dans l'actif risqué, c'est-à-dire un processus F-adapté* $(\varphi_t)_{0\leq t\leq T}$ *qui doit vérifier certaines conditions d'intégrabilité*

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T |\phi_t \tilde{S}_t|^2 dt\right] < +\infty$$

- A chaque instant *t*, la quantité φ^0_t est déterminée à l'aide de la condition d'autofinancement du portefeuille. Cette condition se lit simplement "La variation de la valeur du portefeuille est égale à la variation de la valeur des actifs multipliée par la quantité d'actifs détenus".

Numéraire

- **Définition** *On appelle* **numéraire** *tout processus d'Itô Y F-adapté, qui ne s'annule pas.*
- Un numéraire est une ”monnaie”. Un changement de numéraire correspond à un changement de monnaie, ou d'unité de compte (autre monnaie, normalisé par S^0, par S). Changer de numéraire revient à normaliser l'actif considéré suivant un autre.
- Intuitivement, que les actifs soient écrits dans n'importe quel numéraire , tant que ce numéraire est bien déterminé à l'instant t par l'information F_t dont l'on dispose sur le marché en t, la condition d'autofinancement devrait être vérifiée. En effet, **la condition d'autofinancement est stable par changement de numéraire**, et la formulation mathématique de ce résultat est la suivante :

Proposition 1.1 *Pour tout* **numéraire** Y*, la condition d'autofinancement se réécrit :*

$$d\left(\frac{X^{x,\phi}}{Y}\right)_t = \phi_t^0 d\left(\frac{S^0}{Y}\right)_t + \phi_t d\left(\frac{S}{Y}\right)_t$$

Condition autofinancement stable par changement de numéraire

- Preuve : cf poly. Formule d'Itô
- Remarque : Le résultat indiquant que la condition d'autofinancement est stable par changement de numéraire est très utile. Dans notre cas, nous resterons dans le numéraire cash, mais selon le problème auquel on est confronté, il peut être judicieux de changer de numéraire. Nous avons prouvé l'existence d'une proba risque neutre qui rend les actifs écrits dans le numéraire cash martingales mais on pourrait ´également choisir de rendre les actifs écrits dans un numéraire différent martingale. En particulier, lorsque les taux ne sont plus supposés constants, le numéraire cash n'est pas toujours le plus adapté, il est plus pratique d'écrire les actifs dans le numéraire Zéro-coupon, on parle alors de **Probabilité forward neutre**. L'article introduisant le concept de changement de numéraire est du à El-Karoui - Geman - Rochet (1995).

Condition d'autofinancement dans numéraire S^0

- En particulier la relation d'autofinancement écrite dans le numéraire *S0* (appelé parfois numéraire cash) donne :
- et donc la dynamique de la valeur réactualisée de mon portefeuille $\underline{X}_t^{x,\varphi}$ sous la probabilité IP est
- ce qui justifie d'une part la forme que l'on a donnée a notre condition d'intégrabilité pour rendre $\underline{X}$ martingale, et d'autre part le fait que la probabilité IP rend bien le prix actualisé de tout portefeuille autofinancé une martingale, et est donc bien une probabilité risque neutre.

$$d\,\frac{X_t^{x,\varphi}}{Y_t} = \phi_t^0\, d\,\frac{S_t^0}{Y_t} + \phi_t\, d\,\frac{S_t}{Y_t}$$

$$d\tilde{X}_t^{x,\varphi} = \phi_t^0\, \underbrace{\cancel{d(1)}}_{=0} + \phi_t\, d\tilde{S}_t$$

Sous $\hat{\mathbb{P}}$ $\quad d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t\, d\hat{W}_t \qquad \tilde{S}$ $\hat{\mathbb{P}}$-mg

$$d\tilde{X}_t^{x,\phi} = \phi_t d\tilde{S}_t = \sigma\phi_t\tilde{S}_t d\hat{W}_t$$

$$d\tilde{X}_t^{x,\phi} = \phi_t d\tilde{S}_t \Rightarrow \tilde{X}_t^{x,\phi} = x + \int_0^t \phi_r d\tilde{S}_r$$

$\to \tilde{X}_t^{x,\varphi}$ est une $\hat{\mathbb{P}}$-mg

Toute stratégie de portefeuille simple actualisée est une martingale

- Le résultat est donc comme dans le cas discret : ”Si l’actif risqué réactualisé est un processus d’Ito martingale sous IP, toute stratégie de portefeuille autofinancée réactualisée l’est également”.

Proposition 1.2 *La probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ construite précédemment est une probabilité risque neutre.*
La valeur en t de toute stratégie autofinançante (x,ϕ) de flux final $X_T^{x,\phi} = h_T$ est :

$$X_t^{x,\phi} = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[h_T|\mathcal{F}_t\right]$$

$$\tilde{X}_t^{x,\varphi} = e^{-rt} X_t = E^{\hat{\mathbb{P}}}\left[e^{-rT} h_T | \mathcal{F}_t\right] = e^{-rT} E^{\hat{\mathbb{P}}}\left[h_T | \mathcal{F}_t\right]$$

Existence Proba RN → AOA

Proposition 1.3 *L'existence d'une probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$ implique l'AOA entre stratégies de portefeuille simple autofinançantes.*

- Preuve : cf poly – idem cas discret
- Nous venons donc de voir que l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage est bien vérifiée dans le cadre du modèle de Black-Scholes.
- La valeur en *t* de toute stratégie de portefeuille simple s'écrit comme l'espérance sous la proba risque neutre IP de son flux terminal actualisé, donc, si un produit dérivé est duplicable, pour éviter les arbitrages, on définit économiquement son prix comme l'espérance sous IP de son flux terminal actualisé.

$$x = X_0^{x,\varphi} = e^{-rT} E^{\hat{\mathbb{P}}}[h_T]$$

Dynamiques des actifs - résumé

- Il est important de bien visualiser la dynamique de l'actif risqué réactualisé ou non sous les différentes probabilités :

	Probabilité historique $\mathbb{P}$	Probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$
Actif risqué	$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$	$dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\hat{W}_t$
Actif risqué réactualisé	$d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dW_t$	$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\hat{W}_t$

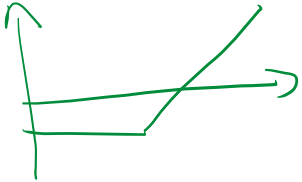
Caractère Markovien

- Tout d'abord, remarquons le caractère Markovien du processus *S et de* $e^{-r(T-t)}E[h(S_T)|Ft]$
- ***Preuve*** *:* Expression de la solution du modèle de Black-Scholes. *Produit dérivé* $h(S_T)$ *pour h mesurable.*
- S_t est F_t-mesurable et la variable aléatoire $W_T - W_t$ est indépendante de F_t + propriétés de l'espérance conditionnelles.

$$S_T = S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)-\sigma(W_T-W_t)}$$

Proposition 1.4 *Considérons un produit dérivé de la forme* $h(S_T)$*. Alors il existe une fonction* $v : [0,T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ *telle que*

$$v(t, S_t) := e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$



Prix et EDP de Black et Scholes

Théorème 1.4 (Prix et EDP de Black Scholes)
Si l'on suppose que $v \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^+)$, *alors il existe une stratégie autofinançante* (x, ϕ) *qui duplique le produit dérivé, i.e. telle que* $\forall t \in [0,T], X_t^{x,\phi} = v(t, S_t)$ *et les quantités* x *et* ϕ *sont données par :*

$$x := e^{-rT}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)] \quad \phi_t := \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t)$$

En AOA, le prix en t *du profuit de flux final* $h(S_T)$ *est donc* $e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$.
De plus, le prix de l'option $v(t, S_t)$ *est solution de l'équation aux dérivées partielles :*

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) + v_t(t,x) - rv(t,x) = 0 \quad \text{et} \quad v(T,x) = h(x)$$

Réciproquement, si l'EDP précédente admet une solution $v^\star$ *(dont la dérivée partielle* $\partial_x v^\star(t,x)$ *est bornée, alors* $v^\star(t, S_t)$ *est le prix de l'option de flux terminal* $h(S_T)$.

p. 12 - 14 poly

Prix et EDP de Black-Scholes

- Preuve
- Considérons le processus défini sur [0, *T*] par :

$$U_t := e^{-rt} v(t, S_t) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[e^{-rT} h(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

- Par construction, ce processus est une martingale sous IP,
- c'est une martingale sous IP, alors dUt=*dWt (terme en dt=0). Or on peut exprimer U en fonction de v

$$U_t = u(t, \tilde{S}_t) \quad \text{avec } u : (t, x) \mapsto e^{-rt} v(t, e^{rt} x)$$

EDP sur u grâce à $dU_t = \underbrace{0}\, dt + * \, dW_t$ Itô

- Dérivation composée→ terme en dt =exprimé en fonction des dérivées de v

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t, x) + r x v_x(t, x) + v_t(t, x) - r v(t, x) = 0 \quad \text{et} \quad v(T, x) = h(x)$$

Couverture et EDP de Black-Scholes

- Considérons maintenant la stratégie de portefeuille donnée par :

$$x := U_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_t)] \text{ et } \phi_t := u_x(t, \tilde{S}_t) = v_x(t, S_t)$$

- Par construction, *U* est une martingale, donc (*x, φ*) est une stratégie de portefeuille, et grâce à la condition d'autofinancement, la valeur actualisée de ce portefeuille est bien Ut et (*x, φ*) est bien un portefeuille de duplication

Réciproquement

- Toute solution de l'EDP est bien solution du problème de couverture et d'évaluation. (cf démo poly)

Formule de Feynman-Kac

- Le résultat indiquant que le prix Black-Scholes de payoff *h*(*ST*), donné par

$$v(t,x) := e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|S_t = x]$$

- est solution de l'EDP ci-avant, est un résultat très important connu sous le nom plus général de **Formule de Feynman-Kac**. Une espérance conditionnelle sur un processus Markovien peut se réécrire comme solution d'une EDP, créant ainsi des liens entre le monde déterministe et le monde probabiliste. Il y a ainsi des méthodes déterministes ou probabilistes de résoudre un même problème.

Unicité de la probabilité RN

- Tout produit dérivé est bien duplicable. Ceci est du au fait que la dimension du Brownien est égale à celle de l'actif risqué : il y a autant d'aléa sur le marché que d'actifs possibles pour le couvrir.
- Pour la même raison qu'auparavant, la complétude du marché (ie tout actif est réplicable) implique que la proba risque neutre est unique.
- Preuve : cf poly

Proposition 1.5 *La probabilité risque neutre est unique.*

Formule de BS

- D'après ce que l'on vient de voir, le prix d'une option de type européen de payoff $h(S_T)$ est donc de la forme $v(t, S_t)$
- avec et de plus, la fonction v est solution de l'EDP :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) + v_t(t,x) - rv(t,x) = 0 \quad \text{et} \quad v(T,x) = h(x)$$

Il "suffit" donc de résoudre cette EDP pour avoir le prix de l'option...

- Cette EDP n'est généralement pas facile à résoudre, sans solution explicite. Mais **pour certains payoffs**, il existe des formules explicites qui donnent leur prix en t.
- C'est en particulier le cas du Call européen et du Put européen.

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t] = v(t, S_t)$$

Cas du CALL européen

$$h(S_T) = (S_T - K)_+$$

Formule de BS

Proposition 1.6 *Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le prix du call de maturité T et de strike K est :*

$$C_t = S_t \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \cancel{d} N(d_2)$$

avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, d_1 et d_2 donnés par :

$$d_1 := \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad et \ d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

La formule de parité Call-Put s'acrit

$$C_t - P_t = S_t - K e^{-r(T-t)}$$

Et donc le prix du Put est donné par

$$P_t = K e^{-r(T-t)} \cancel{d} N(-d_2) - S_t \mathcal{N}(-d_1)$$

EDS sous $\hat{\mathbb{P}}$: $dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\hat{W}_t$

Preuve Formule de BS

- On a montré que sous la probabilité risque neutre IP, les prix actualisés sont des martingales, donc le prix du call en 0 est C(0,T)

- Il nous faut donc calculer ces deux termes.
- Le premier se calcule simplement

$$C(0,T) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(e^{-rT}\underbrace{(S_T - K)\mathbb{1}_{S_T \geq K}}_{(S_T-K)_+}\right)$$

$$= e^{-rT}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_T \mathbb{1}_{S_T\geq K}\right) - Ke^{-rT}\underbrace{\hat{\mathbb{P}}(S_T \geq K)}_{E^{\hat{\mathbb{P}}}(\mathbb{1}_{S_T \geq K})}$$

$Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$

$$\hat{\mathbb{P}}(S_T \geq K) = \hat{\mathbb{P}}\left(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\hat{W}_T} \geq K\right)$$

$$= \hat{\mathbb{P}}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma\hat{W}_T \geq ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right)$$

$$= \hat{\mathbb{P}}\left(-\frac{\hat{W}_T}{\sqrt{T}} \leq \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$-\frac{W_T}{\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\hat{\mathbb{P}}(S_T \geq K) = \mathcal{N}(d_2), \text{ où } d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Preuve Formule de BS

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K}\right) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma \hat{W}_T} \mathbb{1}_{S_T \geq K}\right)$$
$$= S_0 e^{rT} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(e^{-\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma \hat{W}_T} \mathbb{1}_{S_T \geq K}\right)$$

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K}\right) = S_0 e^{rT} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left(\mathbb{1}_{S_T \geq K}\right) = S_0 e^{rT} \mathbb{P}^*\left(S_T \geq K\right)$$

Le deuxième terme

- Si on définit alors la nouvelle probabilité IP* par sa dérivée de Radon Nikodym

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma \hat{W}_t}$$

- sous IP* c'est $W^*_t = \underline{W}_t - \sigma t$ qui est un IP*-Brownien (Girsanov)

$$W_t^* = \hat{W}_t - \sigma t$$

$$\mathbb{P}^*(S_T \geq K) = \mathbb{P}^*\left(-\frac{W_T^*}{\sqrt{T}} \leq d_1\right)$$

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K}\right) = S_0 e^{rT} \mathcal{N}(d_1).$$

$$\mathbb{P}^*(S_T \geq K) = \mathbb{P}^*\left(-\frac{\hat{W}_T}{\sqrt{T}} \leq d_2\right) = \mathbb{P}^*\left(-\frac{W_T^* - \sigma T}{\sqrt{T}} \leq d_2\right) = \mathbb{P}^*\left(-\frac{W_T^*}{\sqrt{T}} \leq \underbrace{d_2 + \sigma\sqrt{T}}_{d_1}\right)$$

$$C(0,T) = S_0 \mathcal{N}(d_1) - K e^{rT} \mathcal{N}(d_2)$$

Méthodes d'évaluation

Il existe 3 grandes méthodes pour l'évaluation financière des produits dérivés :

- Résolution d'EDP (c'est l'approche "officielle" dans le papier de *B&S*, bien qu'ils ne résolvent pas l'EDP directement...)
- Approches probabilistes
  - (a) Changement de mesure de probabilité
  - (b) Changement de numéraire
- Approche utilisant la mesure d'Esscher (travaux de Gerber et Shiu 1994) → cf cours de M2

- Nous avons vu l'approche EDP, il suffit de résoudre l'EDP pour avoir le prix, ce qui n'est pas toujours aisé.
- Nous venons de voir une méthode par changement de mesure de probabilité pour résoudre ce problème.
- Il existe aussi l'approche changement de numéraire équivalente.

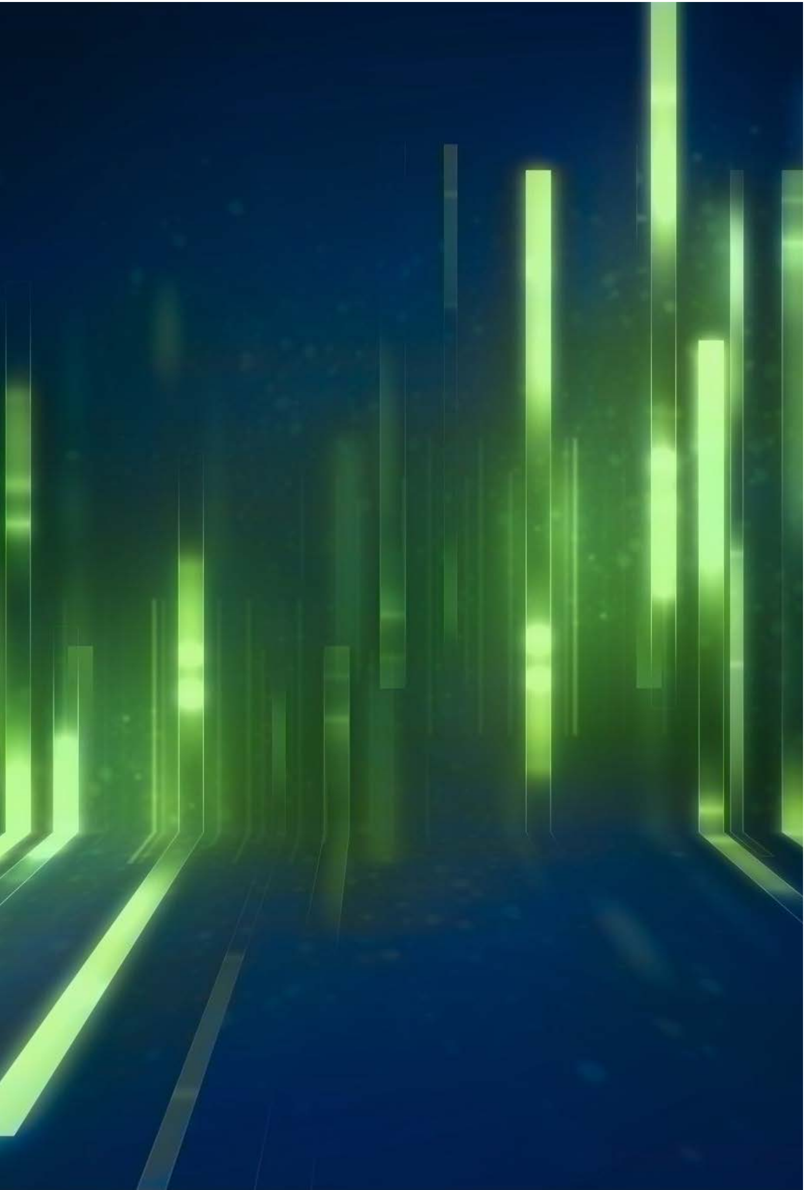
Volatilité implicite

- **Remarque** : absence de μ dans le résultat (idem modèle binomial), donc le prix ne dépend que de σ, et donc si on connait le prix, on peut en déduire la volatilité implicite.
- Cela consiste à inverser la formule de BS, ie à trouver la volatilité qui donne ces prix dans le modèle de BS. Elle ne correspond généralement pas à la volatilité historique ! Grosse question financière depuis des années.

$$C(0,T) = S_0\mathcal{N}(d_1) - Ke^{rT}\mathcal{N}(d_2)$$

$$d_1 := \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$



Semaine prochaine :
dernier cours

Extensions du modèle de Black-Scoles

- Dividendes
- Options sur Matières premières
- Options sur Taux de change
- Options sur Contrats à termes
- Volatilité variable