Examen - Finance Mathématique
M2 SAF Pro
mercredi 14 janvier 2015
Durée 2h, supports de cours et calculatrices non autorisés
La notation prendra en compte la qualité de la rédaction.

Question 1. On note $P(t,T)$ le prix en t d'une obligation ZC (zéro-coupon) de maturité T et de nominal égal à 1.

a) Montrer par un raisonnement d'AOA (absence d'opportunité d'arbitrage) que la fonction $T \mapsto P(t,T)$ est décroissante.

b) Soit $t \leq T_1 \leq T_2$. Retrouver l'expression du taux forward $F(t,T_1,T_2)$ dans la convention des intérêts composés, en fonction du prix d'obligations ZC que l'on précisera.

Question 2. On observe à la date t la cotation S d'un swap contre Euribor 6 mois de maturité 3 ans. On note R le taux variable, $T_1,\ldots,T_n$ les dates successives des flux de la jambe fixe et $t_1,\ldots,t_p$ les dates successives des flux de la jambe variable.

1. Quelles durées séparent la date courante t des instants T_i, $i=1,\ldots,n$ pour un swap classique ayant ces caractéristiques ? Même question pour les instants t_j, $j=1,\ldots,p$.
2. Pour un nominal d'une unité monétaire et une position en tant que receveur, donner l'expression des flux de la jambe fixe et de la jambe variable. Représenter sur un diagramme les flux associés à cette position.
3. Exprimer en AOA la valeur en t du flux de la jambe fixe correspondant à la date T_i et du flux de la jambe variable correspondant à la date t_j. On donnera des expressions en fonction de prix d'obligations ZC que l'on précisera.
4. En AOA, quelle relation doit vérifier en t la cotation S du swap ? Donner l'expression de S.
5. On observe à la date t les cotations $S_1,\ldots,S_q$ associées à des swaps contre Euribor 6 mois de maturités $\tau_1 < \cdots < \tau_q$.
   a) En AOA, quel système linéaire est vérifié par les prix des ZC ?
   b) Préciser dans quel cas ce système est inversible ? Pourquoi ce système n'est pas inversible en pratique ?
   c) Proposer une méthode qui, à partir des cotations $S_1,\ldots,S_q$, permet de construire une courbe de taux spot et sa courbe des taux forward associée.

Question 3. On rappelle que, dans un cadre HJM, la dynamique risque-neutre des taux forward instantanés est donnée par

$$df(t,T) = \sigma_f(t,T)\sigma^*(t,T)dt + \sigma_f(t,T)dW_t$$

où W est un mouvement brownien standard.

a) Exprimer σ^* en fonction de σ_f.

b) Soit A la fonction définie par $A(t) = f(0,t) + \int_0^t \sigma_f(u,t)\sigma^*(u,t)du$, $t \geq 0$. Donner l'expression explicite du taux court r_t en fonction de A et de σ_f .

c) On suppose que $\sigma_f(t,T) = \alpha(t)\beta(T)$ où α et β sont des fonctions déterministes du temps. Montrer que

$$dr_t = (a(t) + b(t)r_t)dt + c(t)dW_t$$

où a, b, c sont à expliciter en fonction de A, β, σ_f et de leur dérivées. Commenter.

d) On suppose que $\sigma_f(t,T) = \sigma \exp(-a(T-t))$ où σ et a sont deux paramètres positifs.

   a) Quel est l'intérêt de cette spécification de la structure de volatilité ?

   b) Donner la dynamique de r dans ce cas.

   c) A quel modèle ce choix correspond-il ?

   d) Comment faire en sorte que ce modèle soit compatible en t_0 avec une courbe de taux spot $T \mapsto R(t_0,T)$?

   e) Une fois la courbe de taux prise en compte, quels sont les paramètres restants du modèle ? Comment procéderiez-vous pour les calibrer ?

Question 4. On considère un *cap* de nominal N, de strike K, de dates de paiement $T_1 < \cdots < T_n$. On notera R le taux de référence et on suppose que ce dernier est mis à jour aux dates $T_0 < T_1 < \cdots < T_{n-1}$.

a) Donner le diagramme de flux de ce *cap.*

b) On note $(r_t)_{t\geq 0}$ le taux spot instantané qui rémunère continuement le compte épargne, $\mathbb{Q}$ la probabilité risque neutre et $\mathcal{F}$ la filtration associée à la dynamique du taux court. Donner la valeur en $t < T_0$ du *cap* en AOA.

c) Montrer que l'expression obtenue à la question précédente peut se réécrire en fonction des termes

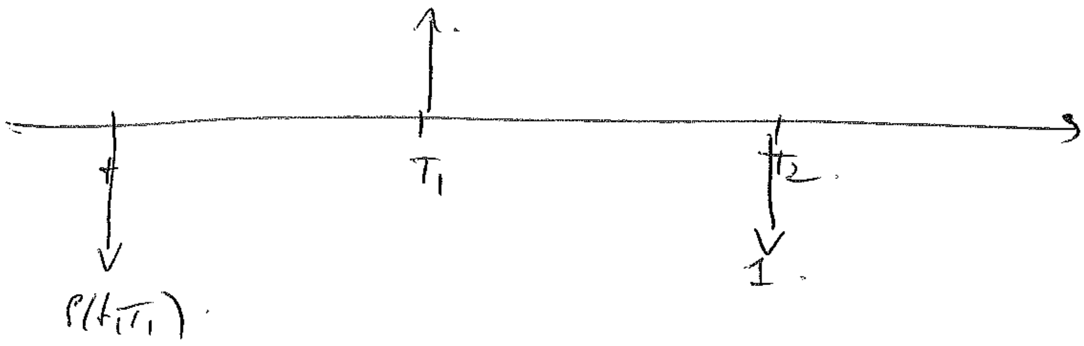
$$H_i = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left(-\int_t^{T_{i-1}} r_u du\right) P(T_{i-1},T_i)\, g\left(R(T_{i-1},T_i),K\right)\middle|\mathcal{F}_t\right],$$

pour $i = 1,\ldots,n$. La fonction g est à expliciter.

d) En exprimant le taux de référence R à l'aide du prix de ZC, montrer que le prix du *cap* correspond à la somme de prix de *put* (option de vente) sur ZC dont on précisera les caractéristiques. On rappelle que les flux d'intérêts du *cap* sont calculés dans la convention simple des intérêts.

- Correction Examen Finance Stoch.

Q1. a) Soit $T_1 < T_2$. si $P(t,T_1) < P(t,T_2)$.



. en t :
- On vend à découvert un ZC de mat T_2
- On achète ______ T_1.

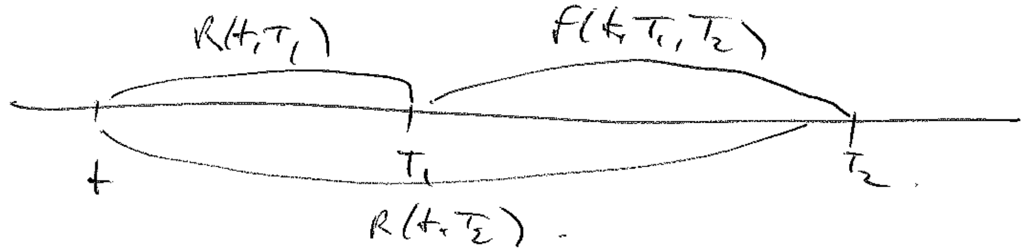
Solde en t : $P(t,T_2) - P(t,T_1) > 0$.

. en T_1 : on reçoit 1. qu'on place sur le compte épargne entre T_1 et T_2

. en T_2 : on rembourse 1. et on récupère les intérêts du placement sur le compte épargne.

$\Rightarrow$ arbitrage. $\Rightarrow$ $P(t,T_1) \geq P(t,T_2)$.

b)



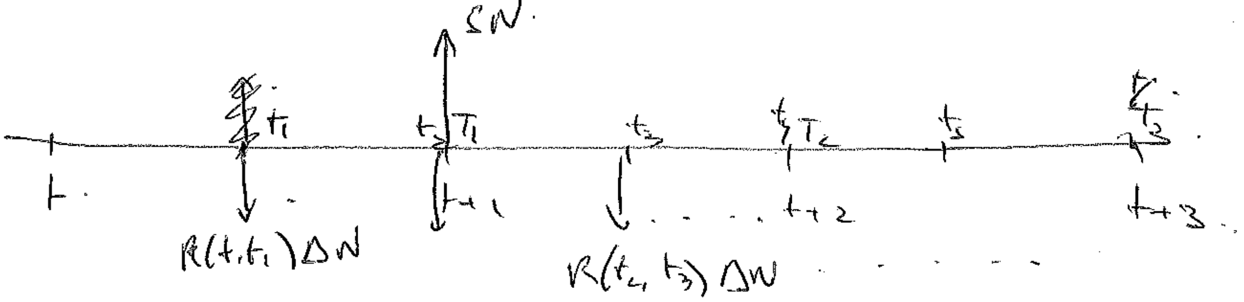
En intérêts composés $P(t,T) = \dfrac{1}{(1+R(t,T))^{T-t}}$.

$$\left(1+R(t,T_1)\right)^{T_1-t}\left(1+F(t,T_1,T_2)\right)^{(T_2-T_1)} = \left(1+R(t,T_2)\right)^{(T_2-t)}.$$

$$\Rightarrow \quad F(t,T_1,T_2) = \left[\frac{\left(1+R(t,T_2)\right)^{T_2-t}}{\left(1+R(t,T_1)\right)^{T_1-t}}\right]^{\frac{1}{T_2-T_1}} - 1.$$

$$\boxed{F(t,T_1,T_2) = \left[\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}\right]^{\frac{1}{T_2-T_1}} - 1.}$$

Q2.



$\Delta = t_{i+1} - t_i$

1. $T_i - t = i$ années.

   $t_j - t = j \times 6$ mois.

2. Jambe fixe : $S.(\overbrace{T_i - T_{i-1}}^{1\,an})$ $\quad i = 1,\dots,3$

   Jambe variable : $R(t_{j-1},t_j).\underbrace{(t_j - t_{j-1})}_{6\,mois}$ $\quad j = 1,\dots,6.$

3. . le flux en T_i : $S(T_i - T_{i-1})$.

   ↳ valeur en t : $P(t,T_i).S(T_i - T_{i-1})$.

   . le flux en t_j : $\boxed{R(t_{j-1},t_j)}(t_j - t_{j-1}) = \left[\frac{1}{P(t_{j-1},t_j)} - 1\right]$

   ↳ valeur en t : $P(t,t_{j-1}) - P(t,t_j)$.

4. s tq $s \sum_{i=1}^{3} P(t,T_i)(T_i - T_{i-1})$

$$= \sum_{j=1}^{6} P(t,t_{j-1}) - P(t,t_j).$$

$$= \underbrace{P(t,t)}_{=1} - P(t,t_6).$$

$$= 1 - P(t,T_3).$$

$$\boxed{s_t = \frac{1 - P(t,T_3)}{\sum_{i=1}^{3} P(t,T_i)(T_i - T_{i-1})}}.$$

5-a) τ_1 : $\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{\tau_1} P(t,T_i)\, s_1 (T_i - T_{i-1}) = 1 - P(t,\tau_1). \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{\tau_q} P(t,T_i)\, s_q (T_i - T_{i-1}) = 1 - P(t,\tau_q) \end{array} \right.$

τ_q :

b) ~~...~~ système inversible lorsque $\tau_1 = T_1, \dots, \tau_q = T_q$.

En pratique les dates de maturité de swap ne coïncident pas avec les dates de paiement d'intérêt fixe.

c) On utilise une méthode d'interpolation ...

Q3. a. $\sigma^*(t,T) = \int_t^T \sigma_f(t,u)\,du$.

Q3. b. $f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma_f(u,T)\,\sigma^*(u,T)\,du$

$$+ \int_0^t \sigma_f(u,T)\,dW_u.$$

$$r_t = f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \sigma_f(u,t)\,\sigma^*(u,t)\,du$$

$$+ \int_0^t \sigma_f(u,t)\,dW_u.$$

$$\Rightarrow \boxed{r_t = A(t) + \int_0^t \sigma_f(u,t)\,dW_u.}$$

Q3. c. Soit $\sigma_f(u,t) = \alpha(u)\,\beta(t)$.

$$dr_t = A'(t)\,dt + \sigma_f(t,t)\,dW_t + \left[\beta'(t)\int_0^t \alpha(u)\,dW_u\right]dt.$$

$$r_t = A(t) + \beta(t)\int_0^t \alpha(u)\,dW_u.$$

$$\Rightarrow \int_0^t \alpha(u)\,dW_u = \frac{1}{\beta(t)}\left(r_t - A(t)\right).$$

$$\Rightarrow \quad dr_t = \left[A'(t) + \frac{\beta'(t)}{\beta(t)}\left(r_t - A(t)\right)\right]dt + \sigma_f(t,t)\,dW_t.$$

$\Rightarrow \quad dr_t = (a(t) + b(t) r_t)\,dt + c(t)\,dW_t.$

avec
$$\begin{cases} a(t) = A'(t) - \dfrac{\beta'(t)}{\beta(t)} A(t). \\ b(t) = \dfrac{\beta'(t)}{\beta(t)} \\ c(t) = \sigma_f(t,t) = \alpha(t)\beta(t). \end{cases}$$

$\Rightarrow$ <u>Le taux court a une dynamique Markovienne</u>

Q3. d. $\quad \sigma_f(t,T) = \sigma e^{-a(T-t)}$

a) $\quad \sigma_f(t,T) = \underbrace{\sigma e^{+at}}_{\alpha(t)} \underbrace{e^{-aT}}_{\beta(T)}$ est à variable séparable.

$\Rightarrow$ r est Markovien d'après la Q précédente.

b) $\quad \beta'(t) = -a\beta(t) \Rightarrow \dfrac{\beta'(t)}{\beta(t)} = -a.$

$$A(t) = f(0,t) + \int_0^t \sigma_f(u,t)\,\sigma^*(u,t)\,du.$$

~~$\sigma_f(u,t)$ $\alpha(u)\beta(t)$ =~~ $\sigma^*(t,T) = \int_t^T \sigma_f(t,u)\,du.$

$$= \sigma \int_t^T e^{-a(u-t)}\,du.$$

$$= -\frac{\sigma}{a}\left[e^{-a(u-t)}\right]_t^T.$$

$$= +\frac{\sigma}{a}\left(1 - e^{-a(T-t)}\right).$$

$$\sigma_f(u,t)\cdot\sigma^*(u,t) = \sigma e^{-a(t-u)} \cdot \frac{\sigma}{a}\left(1-e^{-a(t-u)}\right).$$

$$= \frac{\sigma^2}{a}\left(e^{-a(t-u)} - e^{-2a(t-u)}\right).$$

$$\int_0^t \sigma_f(u,t)\,\sigma^*(u,t)\,du = \frac{\sigma^2}{a}\left[\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right) - \frac{1}{2a}\left(1-e^{-2at}\right)\right].$$

$$A(t) = f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(2 - 2e^{-at} - 1 + e^{-2at}\right)$$

$$= f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1 - 2e^{-at} + e^{-2at}\right)$$

$$= f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1-e^{-at}\right)^2.$$

$$A'(t) = \frac{\partial f}{\partial T}(0,t) + \frac{\sigma^2}{\cancel{2}a^2}\left(1-e^{-at}\right)\cdot a e^{-at}.$$

$$= \frac{\partial f}{\partial T}(0,t) + \frac{\sigma^2}{a}\left(e^{-at} - e^{-2at}\right).$$

$$a(t) = \frac{\partial f}{\partial T}(0,t) + \frac{\sigma^2}{a}\left(e^{-at} - e^{-2at}\right) + a f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}\left(1-e^{-at}\right)^2.$$

$$= \frac{\partial f}{\partial T}(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}\Big(\underbrace{\cancel{2e^{-at}} - 2e^{-2at} + 1 - \cancel{2e^{-at}} + e^{-2at}}_{1 - e^{-2at}}\Big) + a f(0,t)$$

$$\boxed{a(t) = \frac{\partial f}{\partial T}(0,t) + a f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}\left(1-e^{-2at}\right).}$$

$b(t) = -a$

$c(t) = \sigma_f(t,t) = \sigma$.

$$\Rightarrow \boxed{dr_t = \left[\frac{\partial f}{\partial T}(0,t) + a f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}\left(1-e^{-2at}\right) - a r_t\right]dt + \sigma\, dW_t.} \quad (*)$$

c) Il s'agit du modèle de H&W.

d) si $T \mapsto R(t_0,T)$ est suffisamment régulière.

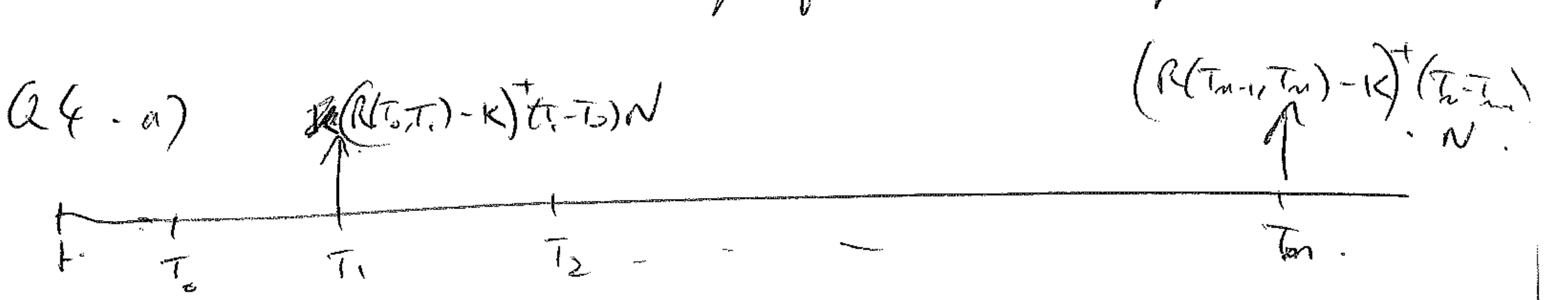
On construit $t \mapsto f(0,t)$ par $f(0,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[(t-t_0)R(t_0,t)\right]$

le modèle est tel que $R^*(t_0,T) = R(t_0,T)$.

e) $\boxed{a, \sigma}$ $\quad r_0 = f(t_0,t_0)$.

↳ calibration aux cap / floor ou swaption.

Q4. a)



b)

$$\Pi_t^{cap} = \mathbb{E}^{Q}\left[\sum_{i=1}^{n} D(t,T_i)\left(R(T_{i-1},T_i)-K\right)^+(T_i-T_{i-1})N \,\Big|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$D(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r_s\, ds\right).$$

$$\Pi_t^{cap} = N \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mathbb{E}_Q\left[D(t,T_i)\left(R(T_{i-1},T_i)-K\right)^+(T_i-T_{i-1}) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]}_{H_i}$$

$$R(T_{i-1},T_i) = \frac{1}{T_i-T_{i-1}}\left[\frac{1}{P(T_{i-1},T_i)} - 1\right].$$

$$H_i = \mathbb{E}_Q\left[\exp\left(-\int_t^{T_i} r_u\,du\right)\left(\left(R(T_{i-1},T_i)-K\right)^+(T_i-T_{i-1})\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right].$$

$$= \mathbb{E}_Q\left[\exp\left(-\int_t^{T_{i-1}} r_u\,du\right)\mathbb{E}_Q\left[\left(R(T_{i-1},T_i)-K\right)^+(T_i-T_{i-1}) \cdot \underbrace{\mathbb{E}_Q\left[\exp\left(-\int_{T_{i-1}}^{T_i} r_u\,du\right) \,\middle|\, \mathcal{F}_{T_{i-1}}\right]}_{= P(T_{i-1},T_i)}\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right].$$

$$= \mathbb{E}_Q\left[\exp\left(-\int_t^{T_{i-1}} r_u\,du\right)P(T_{i-1},T_i)\left(R(T_{i-1},T_i)-K\right)^+(T_i-T_{i-1}) \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$\cancel{g(x,y)=}$

$$g(R(T_{i-1},T_i),K) = \left(R(T_{i-1},T_i)-K\right)^+(T_i-T_{i-1}).$$

d) $$g(R(T_{i-1},T_i),K) = \left(\frac{1}{P(T_{i-1},T_i)} - 1 - K(T_i-T_{i-1})\right)^+.$$

$$\Rightarrow \quad P(T_{i-1},T_i)\, g\left(R(T_{i-1},T_i), k\right)$$

$$= \left(1 - (1+K(T_i - T_{i-1}))\, P(T_{i-1},T_i)\right)^+$$

$$= \left(1 + K(T_i - T_{i-1})\right) \left[\frac{1}{1+K(T_i-T_{i-1})} - P(T_{i-1},T_i)\right]^+$$

$$\Rightarrow H_i = \left(1+K(T_i-T_{i-1})\right) \boxed{\mathbb{E}_Q\left[D(t, T_{i-1}) \cdot \left(\frac{1}{1+K(T_i-T_{i-1})} - P(T_{i-1},T_i)\right)^+ \Big|\, \mathcal{J}_t^P\right]}$$

prix d'un put sur ZC de mat. T_i

- de maturité T_{i-1}
- de prix d'exercice $\dfrac{1}{1+K(T_i-T_{i-1})}$