Entraînement TD1 Pro-Sto

Exercice 1 :

1) $(\mathcal{F}_n)$ filtrat° naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}} \Rightarrow \mathcal{F}_n = \sigma(Y_i,\ i\le n)$

Donc par construct° de $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est tq $\begin{cases} S_0=0 \\ S_n=\sum_{i=1}^{n} Y_i & n\geq 1\end{cases}$

est $(\mathcal{F}_n)$-adapté [car $(\mathcal{F}_n)$ mesurable.]

2) Nous sommes dans le cas discret (ici $\mathbb{N}$), pour montrer la propriété de martingale, il suffit de mq $\mathbb{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n]=X_n$.

* $$\mathbb{E}[S_{n+1}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$
$$= \mathbb{E}[S_n|\mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]$$
$$= S_n + \mathbb{E}[Y_{n+1}]$$

car $(S_n)_{\mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_n)$ adapté ; car $Y_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$

$$= S_n$$

$\mathbb{E}[Y_{n+1}] = -1\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{1}{2} = 0$

Donc $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)$ martingale

* $$\mathbb{E}[S_{n+1}^2 - (n+1)|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - (n+1)$$
$$= \mathbb{E}[S_n^2 + 2S_nY_{n+1} + Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n] - (n+1)$$
$$= \underbrace{\mathbb{E}[S_n^2|\mathcal{F}_n]}_{\substack{S_n^2 \\ \text{car } (S_n) \text{ est } \mathcal{F}_n \text{ mesurable}}} + 2\underbrace{\mathbb{E}[S_nY_{n+1}|\mathcal{F}_n]}_{=S_n\mathbb{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n]=0} + \underbrace{\mathbb{E}[Y_{n+1}^2|\mathcal{F}_n]}_{=1} - (n+1)$$
$$= S_n^2 + 1 - (n+1) = S_n^2 - n$$

Donc $(S_n^2 - n)$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.

* $$\mathbb{E}[e^{\lambda S_{n+1} - (n+1)\ln(\cosh(\lambda))}|\mathcal{F}_n] = \cosh(\lambda)^{-(n+1)}\,\mathbb{E}[e^{\lambda S_{n+1}}|\mathcal{F}_n]$$

Or $\mathbb{E}[e^{\lambda S_{n+1}}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[e^{\lambda(S_n+Y_{n+1})}|\mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[e^{\lambda S_n}e^{\lambda Y_{n+1}}|\mathcal{F}_n]$

$= e^{\lambda S_n}\,\mathbb{E}[e^{\lambda Y_{n+1}}|\mathcal{F}_n]$ car (S_n) est $(\mathcal{F}_n)$ mes

$= e^{\lambda S_n}\,\mathbb{E}[e^{\lambda Y_{n+1}}]$ car $Y_{n+1} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n \Rightarrow e^{\lambda Y_{n+1}} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_n$ par composé

$= e^{\lambda S_n} \times \underbrace{\left(e^{\lambda}\times\frac{1}{2} + e^{-\lambda}\times\frac{1}{2}\right)}_{\cosh(\lambda)}$

Donc $\mathbb{E}[e^{\lambda S_{n+1}-(n+1)\ln\cosh\lambda} | \mathcal{F}_n] = \cosh(\lambda)^{-(n+1)} e^{-\lambda S_n} \cosh(\lambda)$

$= e^{-\lambda S_n} \cosh(\lambda)^{-n}$

$= e^{-\lambda S_n - n\ln(\cosh(\lambda))}$

Donc $\left(e^{\lambda S_n - n\ln(\cosh(\lambda))}\right)_{\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)$ martingale

Exercice 2 :

On prend $(\mathcal{F}_n)_{\mathbb{N}}$ une filtrat° et X une v.a $\mathcal{L}^1$

$Y_n = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n]$

* Y_n est $(\mathcal{F}_n)$ adapté car la va $\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ est $(\mathcal{F}_n)$ mesurable
* Soit $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[|Y_n|] = \mathbb{E}[|\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]|]$

$\leq \mathbb{E}[\mathbb{E}[|X| | \mathcal{F}_n]]$

$= \mathbb{E}[|X| | \mathcal{F}_n] < \infty$ car X $\mathcal{L}^1$

$\Rightarrow Y_n$ $\mathcal{L}^1$

* $\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{F}_{n+1}] | \mathcal{F}_n]$

$= \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_n]$ car $\mathcal{F}_n \subseteq \mathcal{F}_{n+1}$

$= Y_n$

Donc (Y_n) est une $(\mathcal{F}_n)$ martingale.

Exercice 3 : $(\mathcal{F}_n)$ une filtrat° et S, T 2 temps d'arrêt discrets.

1) * Mq $S \wedge T$ temps d'arrêt

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(S \wedge T \leq n) = \underbrace{(S \leq n)}_{\in \mathcal{F}_n} \cup \underbrace{(T \leq n)}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

Donc $S \wedge T$ temps d'arrêt

* Mq $S \vee T$ temps d'arrêt

Soit $n \in \mathbb{N}$, $(S \vee T \leq n) = \underbrace{(S \leq n)}_{\in \mathcal{F}_n} \cap \underbrace{(T \leq n)}_{\in \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

$\Rightarrow S \vee T$ temps d'arrêt

* Mq $S+T$ temps d'arrêt.

$n \in \mathbb{N}$ $(S+T=n) = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{(S=k)}_{\mathcal{F}_n \text{ mes}} \cap \underbrace{(T=n-k)}_{\mathcal{F}_n \text{ mes}}$ $(\mathcal{F}_n)$ mes.

2) Soit $A \in \mathcal{F}_S$

Il faut mq $A \in \mathcal{F}_T$. On va donc mq $\forall n \in \mathbb{N}$, $A \cap (T \leq n) \in \mathcal{F}_n$

$A \cap \{T \leq n\} = A \cap \{S \leq T \leq n\}$ (car $S \leq T$)

$= A \cap \{S \leq n\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

Car $A \in \mathcal{F}_S$, donc $A \cap \{S \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

et $\{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$ $\Rightarrow A \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

$\Rightarrow A \in \mathcal{F}_T$

Donc $\mathcal{F}_S \subseteq \mathcal{F}_T$

3) Soit $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Mq $\{Y_T \in A\} \in \mathcal{F}_T$, pour cela montrons que :

- $\{Y_T \in A\} \in \mathcal{F}$ $\qquad Y_T = \mathbb{1}_{T<\infty} X_T$
- $\{Y_T \in A\} \cap \{T \leq n\} \in \mathcal{F}_n$

* $\{Y_T \in A\} = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{Y_T \in A\} \cap \{T=k\} \cup \{Y_T \in A\} \cap \{T=+\infty\}$

$= \bigcup_{k=0}^{\infty} \{X_k \in A\} \cap \{T=k\} \cup \{0 \in A\} \cap \{T=+\infty\} \in \mathcal{F}$

Car les X_k et T sont mesurables p/r à la tribu $\mathcal{F}$ (union dénombrable)

* $\{Y_T \in A\} \cap \{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \{X_k \in A\} \cap \{T=k\} \in \mathcal{F}_n$

Car X_k est $\mathcal{F}_k$-mesurable de m̂ pour $\{T=k\}$

donc $\{X_k \in A\} \cap \{T=k\}$ est $(\mathcal{F}_n)$ mes

$\Rightarrow \{Y_T \in A\} \cap \{T \leq n\}$ $(\mathcal{F}_n)$-mesurable.

Exercice 4 : (S_n) v.q $\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i \quad n \geq 1 \end{cases}$ $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$

1) $\tau = \inf\{n \geq 1, S_n = 0\}$

$n \in \mathbb{N}$, si $n = 0$ $\{\tau \leq n\} = \emptyset$

si $n \geq 1$ $\{\tau \leq n\} = \{\exists k \in [\![1, n]\!], S_k = 0\}$

$$= \bigcup_{k=1}^{n} \{S_k = 0\}$$

$$= \bigcup_{k=1}^{n} \{Y_1 + \dots + Y_k = 0\}$$

Or $\forall k \in [\![1, n]\!]$, les Y_k sont des v.a.r mesurables p/r à $(\mathcal{F}_n)$ par def de $(\mathcal{F}_n)$

Donc $Y_1 + \dots + Y_k$ est mesurable p/r à $\mathcal{F}_n$

$$\Rightarrow \bigcup_{k=0}^{n} \{S_k = 0\} \in \mathcal{F}_n$$

Donc τ temps d'arrêt.

2) $T = \max\{n \in \{0, \dots, 4\}, S_n = 0\}$

Par l'absurde, si T est un temps d'arrêt $\Rightarrow \{T = 2\}$ mesurable p/r à $\mathcal{F}_2$

Or $\mathcal{F}_2 \perp\!\!\!\perp \sigma(Y_3, Y_4) \Rightarrow \{T = 2\} \perp\!\!\!\perp \{Y_3 + Y_4 = 0\}$ et on a que :

$$\mathbb{P}(T = 2 \text{ et } Y_3 + Y_4 = 0) = \mathbb{P}(T = 2)\,\mathbb{P}(Y_3 + Y_4 = 0)$$

Or $\mathbb{P}(T = 2 \text{ et } Y_3 + Y_4 = 0)$ est nécessairement nul car si $T = 2$ alors $S_2 = 0$ et $S_4 \neq 0$

$\Rightarrow Y_3 + Y_4 \neq 0$

De plus $\mathbb{P}(T = 2)\,\mathbb{P}(Y_3 + Y_4 = 0) > 0$

Car $\mathbb{P}(T = 2) = \mathbb{P}(Y_1 = -Y_2) = 1/2$

et $\mathbb{P}(Y_3 + Y_4 = 0) = 1/2 \rightarrow 0 = 1/4$ ∡

Exercice 5 : $\begin{cases} N_0 = 0 \\ N_n = \sum_{k=1}^{n} H_k (M_k - M_{k-1}) \quad n \geq 1. \end{cases}$

1) * Si $n = 0 \Rightarrow N_0$ est une cte donc mesurable p/r à n'importe quelle tribu

* $n \in \mathbb{N}^*$, $N_n = \sum_{k=1}^{n} H_k (M_k - M_{k-1})$

On a que $\forall k$, H_k et M_{k-1} sont $\mathcal{F}_{k-1}$ mesurable
et M_k est $\mathcal{F}_k$ mesurable.

Par croissance de la filtrat°, H_k, M_{k-1} et M_k sont $\mathcal{F}_n$ mesurable

Donc $\forall n \in \mathbb{N}^*$, N_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable par somme et produit finis de va $\mathcal{F}_n$ mesurables.

$*$ Mq N_n est $\mathcal{L}^1$

- $n=0$, $N_0 = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[N_0] = 0 < \infty$
- $n \geq 1$, $\mathbb{E}[N_n] = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{n} H_k (M_k - M_{k-1})]$

Il suffit de mq $H_k(M_k - M_{k-1})$ $\mathcal{L}^1$ car $\sum \mathcal{L}^1 = \mathcal{L}^1$

On sait que H_k est bornée $\Rightarrow \exists B \in \mathbb{N}, \forall k \; H_k \leq B$

$\Rightarrow H_k(M_k - M_{k-1}) \leq B(M_k - M_{k-1})$

(M_n) est une $(\mathcal{F}_n)$ martingale $\Rightarrow M_n$ est $\mathcal{L}^1$

$\Rightarrow M_k - M_{k-1}$ $\mathcal{L}^1$ par différence de $\mathcal{L}^1$

$\Rightarrow B(M_k - M_{k-1})$ $\mathcal{L}^1$

$\Rightarrow H_k(M_k - M_{k-1})$ $\mathcal{L}^1$ par dominat°

$\Rightarrow N_n$ est $\mathcal{L}^1$

$*$ $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}[N_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[N_n + H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n]$

$= N_n + \mathbb{E}[H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n]$

car N_n est $\mathcal{F}_n$ mesurable

Or $\mathbb{E}[H_{n+1}(M_{n+1} - M_n) | \mathcal{F}_n] = H_{n+1} \mathbb{E}[M_{n+1} - M_n | \mathcal{F}_n] = H_{n+1}(M_n - M_n) = 0$

car H_{n+1} est mesurable p/r à $\mathcal{F}_n$

car $\mathbb{E}[M_{n+1} | \mathcal{F}_n] = M_n$ car M_n martingale et $\mathbb{E}[M_n | \mathcal{F}_n] = M_n$ car $\mathcal{F}_n$ mes.

$\Rightarrow \mathbb{E}[N_{n+1} | \mathcal{F}_n] = N_n$

$\Rightarrow (N_n)$ est une $(\mathcal{F}_n)$ martingale.

2) $H_k := 1_{T \geq k}$

Déjà $\{T \geq k\} = \{T \leq k-1\}^c \in \mathcal{F}_{k-1}$ $\forall k \in \mathbb{N}^*$

$\Rightarrow H_k = 1_{T \geq k}$ est un processus prévisible.

* Si $T \leq n$,

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{T \geq k} (M_k - M_{k-1})$$
$$= \sum_{k=1}^{T} M_k - M_{k-1} = M_T - M_0$$

* Si $T > n$,

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} 1_{T \geq k} (M_k - M_{k-1})$$
$$= \sum_{k=1}^{n} (M_k - M_{k-1}) = M_n - M_0$$

Donc $N_n = M_{T \wedge n} - M_0$

Par la question précédente on a que (N_n) est une $(\mathcal{F}_n)$ martingale

$\Rightarrow N_n + M_0$ est également une $(\mathcal{F}_n)$ martingale

Or $N_n + M_0 = M_{T \wedge n}$ $\Rightarrow M_{T \wedge n}$ est une $(\mathcal{F}_n)$ martingale.

<u>Exercice 6</u>:

1) Soit (Y_n) suite de va iid tq $\mathbb{P}(Y_i = -1) = \mathbb{P}(Y_i = +1) = 1/2$

On note X_n la richesse du joueur à l'instant n

$n \in \mathbb{N}$, $X_n = X_0 + \sum_{i=0}^{n} Y_i$

* L'espace d'état est $\Omega = \{\text{pile}, \text{face}\}^T$ muni de la proba uniforme.

* Soit $(\mathcal{F}^Y)$ la filtrat° naturelle de Y: $\mathcal{F}_n^Y = \sigma(Y_i, i \leq n)$

Par construct°, X est $\mathcal{F}^Y$ adapté

X_n est intégrable comme somme de $\mathcal{L}^1$ car X_0 $\mathcal{L}^1$ et Y_i $\mathcal{L}^1 \Rightarrow X_0 + \sum Y_i$ $\mathcal{L}^1$

et $\mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[X_n + Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] \underset{\perp\!\!\!\perp}{=} \mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n]$

Or $\mathbb{E}[X_n | \mathcal{F}_n] = X_n$ car X_n est $(\mathcal{F}_n)$ mes
et $\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] \underset{\perp}{=} \mathbb{E}[Y_{n+1}] = 0$

$\Rightarrow \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] = X_n \quad \Rightarrow (X_n)$ et $(\mathcal{F}_n)$ martingale.

2) a) $\tau = \inf\{n \geq 1, X_n > X_0\}$

b) $\mathbb{E}[X_\tau] = X_0 + 1 \neq X_0$

c) Ce qui contredit le thm d'arrêt c'est que τ n'est pas p.s borné (le jeu peut durer infiniment) et la richesse n'est pas unif bornée (le joueur peut subir des pertes ∞^{mt} élevées avant d'atteindre un gain >0)

Exercice 7.

1) $S_n = a + \sum_{i=0}^{n} Y_i$ et $T = \inf\{n, S_n \in \{0, a+b\}\}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $\{T \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\{S_k \in \{0, a+b\}\}}_{\in \mathcal{F}_k \subseteq \mathcal{F}_n} \in \mathcal{F}_n$

Donc T est un temps d'arrêt

On peut interpréter T comme l'arrêt du joueur lorsqu'il est ruiné ou lorsque sa fortune atteint $a+b$ (gain de b).

$\{S_T = 0\}$ le jeu s'est arrêté car le joueur est ruiné

$\{S_T = a+b\}$ le jeu s'est arrêté car le joueur a accumulé une fortune de $a+b$.

2) On admet $T < \infty$ p.s.

Soit $T \wedge n$ et 0 deux temps d'arrêts ($0 \leq T \wedge n$ p.s)

On a 0 et $T \wedge n$ p.s bornés (car $T < \infty$ p.s)

$\Rightarrow S_{T \wedge n}$ est une va $\mathcal{L}^1$ et $\mathbb{E}[S_{T \wedge n} | \mathcal{F}_0] = S_0 = a$

On utilise mtn le Thm de CV dominé et faire tendre n vers l'∞.

Comme $T < \infty$ p.s, $S_{T \wedge n} \xrightarrow[n \to \infty]{p.s} S_T$

De plus on a la dominat° $\forall n \in \mathbb{N}$, $|S_{T\wedge n}| \leq a+b$ car $S_n \in [0, a+b]$ $\forall n \leq T$

$$\underset{\text{Thm de CV dominée}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[S_{T\wedge n}] = \mathbb{E}[S_T] = a$$

De +, $S_T \in \{0, a+b\}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[S_T] = (a+b)\,\mathbb{P}(S_T = a+b)$$

$$\Rightarrow (a+b)\,\mathbb{P}(S_T = a+b) = a$$

Donc $\mathbb{P}(S_T = a+b) = \frac{a}{a+b}$

3) Si $\{T = \infty\}$ $\Rightarrow$ la fortune reste entre 1 et $a+b-1$ $\forall n$.

$\Rightarrow$ On ne peut pas monter de 1 pdt $a+b$ temps.

On va montrer que p.s il arrive un instant tq on monte de 1 pdt $a+b$

$$A_k := \bigcap_{i=1}^{a+b} \{Y_{(a+b)k+i} = 1\}$$

Si 1 des A_k est réalisé $\Rightarrow$ on est monté de 1 entre les temps $(a+b)k$ et $(a+b)(k+1)$
$\Rightarrow$ S_n ne peut rester bornée entre 1 et $a+b-1$ et donc $T<\infty$.

Donc $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \subseteq \{T < \infty\}$

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = 1 - \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k^c\Big)$$

$$= 1 - \prod_{k\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(A_k^c) \qquad \text{Car les } A_k \text{ sont } \perp\!\!\!\perp.$$

$$= 1 - \prod_{k\in\mathbb{N}} (1 - \mathbb{P}(A_k))$$

$$= 1 - \prod_{k\in\mathbb{N}} \Big(1 - \prod_{i=1}^{a+b} \mathbb{P}(Y_{(a+b)k+i} = 1)\Big) \qquad \text{Car les } Y_i \text{ sont } \perp\!\!\!\perp.$$

$$= 1 - \prod_{k\in\mathbb{N}} \Big(\underbrace{1 - \frac{1}{2^{a+b}}}_{<1}\Big)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = 1$$

Donc $\mathbb{P}(T<\infty) \geq \mathbb{P}\Big(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\Big) = 1$

$\Rightarrow \mathbb{P}(T<\infty) = 1$ Donc $T < \infty$ p.s.

Exercice 8 : $U_T = Z_T \quad U_t = \max(Z_t ; \mathbb{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t])$

1) $- \forall t \in [0,T]$, Z_t est $\mathcal{F}_t$ mesurable et intégrable car Z_t et $\mathbb{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t]$ le sont

$- \forall t \in [0,T]$, $U_t \geq Z_t$ et $U_t \geq \mathbb{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t]$

$\Rightarrow \mathbb{E}[U_{t+1} | \mathcal{F}_t] \leq U_t$ Sur-martingale.

2) Par récurrence descendante sur $[0,T]$:

$- X_T \geq Z_T = U_T$

$-$ HR : $\exists t \in [1,T]$ tq $X_t \geq U_t$

Mq $X_{t-1} \geq U_{t-1}$.

Déjà on a $X_{t-1} \geq Z_{t-1}$.

Il suffit donc de mq $X_{t-1} \geq \mathbb{E}[U_t | \mathcal{F}_{t-1}]$

Or $\mathbb{E}[U_t | \mathcal{F}_{t-1}] \underset{HR}{\leq} \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_{t-1}] \underset{X \text{ sur-martingale}}{\leq} X_{t-1}$

Donc $X_{t-1} \geq U_{t-1} = \max(Z_{t-1}, \mathbb{E}[U_t | \mathcal{F}_{t-1}])$

Donc $\forall X \in \Gamma, \forall t \leq T, X_t \geq U_t$.

3) $\tau = \inf\{t \leq T, U_t = Z_t\} \quad Y_t = U_{\min(t,\tau)}$

a) Soit $\omega \in \{\omega, \tau \geq t+1\}$

$\min(t, \tau(\omega)) = t$ et $\min(t+1, \tau(\omega)) = t+1$

alors $Y_t(\omega) = U_t(\omega)$ et $Y_{t+1}(\omega) = U_{t+1}(\omega)$

De τ, $U_t(\omega) \geq Z_t(\omega)$ donc $U_t(\omega) = \mathbb{E}[U_{t+1}(\omega) | \mathcal{F}_t]$

b) $\forall t \in [0,T]$, Y_t est $\mathcal{F}_t$ mes car U_t l'est et $\min(t,\tau)$ est un temps d'arrêt et $\mathcal{L}^1$ car U_t l'est.

D'après a) $\forall \omega \in \{\omega, \tau > t+1\}$, $Y_t(\omega) = \mathbb{E}[Y_{t+1}(\omega) | \mathcal{F}_t]$

et $\forall \omega \in \{\omega, \tau \leq t\}$, $Y_t(\omega) = Y_{t+1}(\omega) = U_\tau(\omega)$ donc Y_{t+1} est $\mathcal{F}_t$ mes sur $\{\omega, \tau \leq t\}$

d'où $Y_r(\omega) = \mathbb{E}[Y_{t+1} | \mathcal{F}_r](\omega)$

$\Rightarrow$ Y martingale

4) ?

Cours:

Mq τ est $\mathcal{F}_\tau$ - mesurable

Les boréliens de $\mathbb{R}_+$ sont engendrés par les intervalles de type $]-\infty, u]$.
Il suffit de mq $\{\tau \leq u\} \in \mathcal{F}_\tau$

C'est évident car $\forall t \in \mathbb{R}_+$, $\{\tau \leq u\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t \wedge u\} \in \mathcal{F}_{t \wedge u} \subset \mathcal{F}_t$

Inégalités :

Thm Inégalité Maximale :

X une $(\mathcal{F}_t)$ sur-martingale réelle continue : $\forall t \geq 0$, $\forall \lambda > 0$

$$\mathbb{P}(\sup_{s \leq t} |X_s| \geq \lambda) \leq \frac{3}{\lambda} \sup(\mathbb{E}[|X_s|])$$

Inégalités dans $\mathcal{L}^p$:

$p \geq 1$, X une martingale réelle continue tq $X_t \in \mathcal{L}^p$, $\forall t \geq 0$

$$\mathbb{E}[\sup_{s \leq t} |X_s|^p] \leq q^p \, \mathbb{E}[|X_t|^p] \qquad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$