© Théo Jalabert

Quasi-Monte Carlo

Définition $f\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}$ est *à variation finie au sens de la mesure* s'il existe une mesure signée ν sur $([0,1]^d, \mathcal{B}([0,1]^d))$ telle que $\nu(\{0\}) = 0$ et pour tout $x \in [0,1]^d$ on a $f(x) = (1) + \nu(\llbracket 0, \mathbf{1} - x \rrbracket)$.

Définition On appelle *discrépance à l'origine* de $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in [0,1]^d$ la valeur

$$D_n^*(\xi) = \sup_{x \in [0,1]^d} \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{1}_{[0,x]}(\xi_k) - \mathrm{Vol}(\llbracket 0, x \rrbracket) \right|.$$

Théorème (Koksma–Hlawka) Soit $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in [0,1]^d$ et $f\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}$ à variation finie au sens de la mesure de variation $V(f) = |\nu|([0,1]^d)$. Alors

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) - \int_{[0,1]^d} f(u) du \right| \leq V(f) D_n^*(\xi).$$

Théorème (borne inférieure, Roth) Soit $d \geq 1$. Alors il existe $C_d \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in ([0,1]^d)^n$ on a

$$D_n^*(\xi) \geq C_d \frac{(\log n)^{\frac{d-1}{2}}}{n}$$

et il existe $c_d \in \mathbb{R}_+^*$ tel que pour tout $n \geq 1$ et pour tout $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in ([0,1]^d)^n$ on a

$$D_n^*(\xi) \geq c_d \frac{(\log n)^{\frac{d}{2}}}{n} \quad \text{infiniment souvent.}$$

Théorème (borne supérieure) Il existe $(\xi_n)_{n \geq 1}$ telle que

$$D_n^*(\xi) = O\left(\frac{(\log n)^d}{n} \right).$$

De plus, il existe $C_d > 0$ telle que pour tout $n \geq 1$ il existe $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in ([0,1]^d)^n$ tel que

$$D_n^*(\xi) \leq C_d \frac{(\log n)^{d-1}}{n}.$$

© Théo Jalabert

Théorème (Proinov) Soit $f\colon [0,1]^d \to \mathbb{R}$ est continue et $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in ([0,1]^d)^n$, alors il existe $C_d > 0$ tel que

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) - \int_{[0,1]^d} f(u)du \right| \leq C_d w_{l^\infty} \left(f, D_n^*(\xi)^{1/d} \right),$$

où $w_{l^\infty}(f,\delta) = \sup_{|u-v|_\infty \leq \delta} |f(u) - f(v)|$. En particulier, si f est Lipschitz, alors

$$\left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) - \int_{[0,1]^d} f(u)du \right| \leq C_d [f]_{Lip,l^\infty} D_n^*(\xi)^{1/d}.$$