Ex 1

* On cherche α tq $\mathrm{cov}(B_s - \alpha B_t, B_t) = 0$

$\Rightarrow s \wedge t - \alpha t = 0 \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{s \wedge t}{t} = 1 \wedge \frac{s}{t}}$

* ~~...~~ $(B_t, t \geq 0)$ processus gaussien $\Rightarrow$ (cov nulle $\Leftrightarrow \perp\!\!\!\perp$)

* $E[B_s | B_t] = E[B_s - \alpha B_t + \alpha B_t | B_t] = \alpha B_t$

* $E[B_s^2 | B_t] = E[(B_s - \alpha B_t)^2] + \alpha^2 B_t^2$

$= s - 2\alpha (s \wedge t) + \alpha^2 t + \alpha^2 B_t^2$

$= s - 2 \frac{(s \wedge t)^2}{t} + \alpha^2 t + \alpha^2 B_t$

* $E[e^{B_s} | B_t] = E[e^{B_s - \alpha B_t} e^{\alpha B_t} | \mathcal{F}_t] = e^{\alpha B_t} E[e^{Z}]$ avec $Z \sim \mathcal{N}\left(0, s + \alpha^2 t - \frac{2(s \wedge t)^2}{t}\right)$

$= e^{\alpha B_t} e^{\frac{1}{2}\left(s - 2\frac{(s \wedge t)^2}{t} + \alpha^2 t\right)}$

Ex 2

(1) $X_t = X_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t} > 0$ p.s $\forall t \geq 0$

donc $_{p.s}$ $(Y_t)_{t \geq 0}$ bien défini

(2) D'après (1), on peut appliquer Itô :

$dY_t = -\frac{1}{X_t^2} dX_t + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{X_t^3} d\langle X \rangle_t$

$= -\frac{1}{X_t}(\mu\, dt + \sigma\, dB_t) + \frac{\sigma^2}{X_t} dt$

alors $Y_t = Y_0 - \int_0^t Y_s(\mu - \sigma^2)\, ds - \int_0^t \sigma Y_s\, dB_s$

3) D'après 1) $X_t > 0$ ps et $Y_t > 0$ ps

donc pour que X soit une sous-martingale, il faut que

$\forall s \leq t,\quad \int_s^t \mu X_s \, ds \geq 0 \Rightarrow \mu \geq 0$

et concernant Y, il faut que $-\int_s^t Y_s(\mu - \sigma^2) \geq 0$

$\Rightarrow \mu - \sigma^2 \leq 0$

donc Enfin $\boxed{0 \leq \mu \leq \sigma^2}$

Ex 3

$\cancel{* \; dF_t = F_t \, dX_t + dY_t + \underbrace{\langle e^{X}, \int_0 e^{-X_s} dY_s \rangle_t}_{=0 \text{ car } X \perp\!\!\!\perp Y}}$

$* \quad dG_t = ch(X_t) \, dX_t + \frac{1}{2} sh(X_t) \, dt$

$= \sqrt{1 + sh(X_t)^2} \, dX_t + \frac{1}{2} sh(X_t) \, dt$

$= \sqrt{1 + G_t^2} \, dX_t + \frac{1}{2} G_t \, dt$

$* \quad dF_t = \left(\int_0^t e^{-X_s} dY_s \right) de^{X_t} + e^{X_t} e^{-X_t} dY_t + \underbrace{d\langle e^{X}, \int_0 e^{-X_s} dY_s \rangle_t}_{=0 \text{ car } X \perp\!\!\!\perp Y}$

$= F_t \, dX_t + dY_t + \frac{1}{2} F_t \, dt$

$d\langle F \rangle_t = (F_t^2 + 1) \, dt := \gamma_t \, dt$

donc $dF_t = \sqrt{\gamma_t} \, dZ_t + \frac{1}{2} F_t \, dt$

avec $dZ_t = \frac{F_t}{\sqrt{\gamma_t}} dX_t + \frac{1}{\sqrt{\gamma_t}} dY_t$, $Z_0 = 0$

Z_t est une mg local continue et $d\langle Z\rangle_t = 1$ donc c'est un MB par le Théorème de Levy.

d'où $\boxed{dF_t = \sqrt{1+F_t^2}\, dZ_t + \frac{1}{2} F_t\, dt}$

puisque $\begin{cases} x \longrightarrow \sqrt{1+x^2} \\ x \longrightarrow \frac{1}{2}x \end{cases}$ sont Lipsch et b, σ sont homogènes,
pour tout $x \in \mathbb{R}$

On a $\exists$ unicité faible de l'EDS

$$dU_t = \sqrt{1+U_t^2} + \frac{1}{2} U_t\, d\underbrace{B_t}_{MBS} \quad , U_0 = x$$

donc $F \overset{loi}{=} G$

Ex 4

$$T_1^* = \inf\{ s \geq 0 : |B_s| = 1\}$$
$$\overset{loi}{=} \inf\{ s \geq 0 \ \frac{1}{a}|B_{sa^2}| = 1\}$$
$$= \inf\{ \frac{sa^2}{a^2} \geq 0 \ |B_{sa^2}| = a\}$$
$$= \frac{1}{a^2} T_a^*$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{T_1^*}} \leq a\right) = \mathbb{P}\left(1 \leq a^2 T_1^*\right) = \mathbb{P}\left(1 \leq T_a^*\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq 1} |B_s| \leq a\right)$$

Ex 5

1) application d'Itô :

$$dZ_t = \frac{1}{2}(1-t)^{-3/2} e^{-\frac{B_t^2}{2(1-t)}} dt + \frac{1}{\sqrt{1-t}} \Bigg(\frac{-2B_t}{2(1-t)} e^{-\frac{B_t^2}{2(1-t)}} dB_t - \frac{B_t^2}{2(1-t)^2} e^{-\frac{B_t^2}{2(1-t)}} dt + \left(\frac{2B_t}{2(1-t)}\right)^2 e^{-\frac{B_t^2}{2(1-t)}} dt - \frac{2}{2(1-t)} e^{-\frac{B_t^2}{2(1-t)}} dt \Bigg)$$

$$= \frac{-B_t}{(1-t)\sqrt{1-t}} e^{-\frac{B_t^2}{2(1-t)}} dB_t$$

donc Z est une mg local, et c'est continue et st. positive sur $[0,1[$, donc il existe une unique mg locale continue M telle que

$Z = \mathcal{E}(M)$, M est donné par :

$$M_t = \log(Z_0) + \int_0^t \frac{dZ_s}{Z_s} = -\int_0^t \frac{B_s}{1-s} dB_s$$

2) $E[\langle Z \rangle_t] \leq E\left[\int_0^t \frac{B_s^2}{(1-s)^3} ds\right] = \int_0^t \frac{s}{(1-s)^3} ds < +\infty \quad \forall t < 1$

Donc Z_t est une vraie Mg et $E[Z_t] = E[Z_0] = 1$

3) quand $t \to 1^-$, $B_t^2 \to B_1^2 > 0$ p.s., donc par croissance comparée

$$Z_t \xrightarrow[t \to 1^-]{} 0$$

Ex 6

1) $\begin{cases} b : (x,t) \longrightarrow -x \\ \sigma : (x,t) \longrightarrow \sqrt{2} \end{cases}$ Lipsch et homogène donc $\exists$ solution unique de cette EDS (unicité faible et trajectorielle)

2) $d(e^t X_t) = e^t X_t \, dt + e^t dX_t$

$= e^t X_t \, dt - e^t X_t \, dt + \sqrt{2} e^t dB_t$

$\Rightarrow e^t X_t = X_0 + \sqrt{2} \int_0^t e^s dB_s$

$$\boxed{X_t = e^{-t} X_0 + \sqrt{2} e^{-t} \int_0^t e^s dB_s}$$

3) $\int_0^t e^s dB_s = \lim_n \frac{t}{n} \sum_{k=1}^n e^{t \cdot \frac{k-1}{n}} \left(B_{\frac{tk}{n}} - B_{\frac{t(k-1)}{n}} \right)$ donc

$(X_t)_{t \geq 0}$ est un processus gaussien

$\int_0^t e^s dB_s \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2}(e^{2t} - 1)\right)$

$X_t \sim \mathcal{N}\left(e^{-t} X_0, 1 - e^{-2t}\right)$

4) $X_0 \perp\!\!\!\perp B$, donc $(X_t)_{t \geq 0}$ reste un processus gaussien avec

$E[X_t] = 0 \quad Var(X_t) = e^{-2t} + 1 - e^{-2t} = 1$

donc $(X_t)_{t \geq 0}$ processus gaussien stationnaire, $X_t \sim \mathcal{N}(0,1)$

5) $t \geq s$, $E[X_t X_s] = E[e^{-(t+s)} X_0^2] + 2 e^{-t} e^{-s} E\left[\int_0^t e^r dB_r \int_0^s e^r dB_r\right]$

$= e^{-(t+s)} + 2 e^{-(t+s)} \left(\int_0^s e^{2r} dr \right)$

$= e^{-|t-s|}$

6) $\left(e^{-t} B_{e^{2t}}\right)_{t\geq 0}$ aussi un processus gaussien donc il suffit de vérifier que ils ont la même covariance, même que $E\left[e^{-t} B_{e^{2t}}\right] = 1 = E[X_t]$

$t \geq s$, $\mathrm{cov}\left(e^{-t} B_{e^{2t}}, e^{-s} B_{e^{2s}}\right) = e^{-(t+s)} e^{2s} = e^{-|t-s|}$

donc $(X_t)_{t\geq 0} \overset{loi}{=} \left(e^{-t} B_{e^{2t}}\right)$

<u>2ème méthode</u>

vérifions que $\left(e^{-t} B_{e^{2t}}\right)_{t\geq 0}$ est une solution de l'EDS :

On pose $M_t = B_{g(t)}$ avec $g(t) = e^{2t}$. M_t est un proc gaussien centré à acc $\perp$, donc c'est une mg. En plus $\langle M \rangle_t = g(t)$ $\forall t \geq 0$. alors par le Theorem de Levy, $W_t = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{g'(s)}} dM_s$ est un MB. En effet c'est une mg loc continue, tq $\langle W \rangle_t = t$.

d'où la representation $M_t = \int_0^t \sqrt{g'(s)}\, dW_s$

$$-e^{-t} B_1 + e^{-t} B_{e^{2t}} = e^{-t} \int_0^t \sqrt{2}\, e^{s} dW_s = \sqrt{2}\, e^{-t} \int_0^t e^{s} dW_s$$

$$\Rightarrow e^{-t} B_{e^{2t}} = \underbrace{e^{-t} B_1}_{= e^{-t}\left(e^{-0} B_{e^{0}}\right)} + \sqrt{2}\, e^{-t} \int_0^t e^{s} dW_s$$

donc les deux processus vérifie la même EDS, d'où l'égalité en loi par unicité faible.