TD2

L'objectif du TD est de trouver une forme analytique du ZC à partir de la relation suivante

$$P(t,T) = \mathbb{E}_Q\left[e^{-\int_t^T r_s\,ds} \mid \mathcal{F}_t \right]$$

avec le taux spot instantané solution de l'EDS suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)\,dt + \sigma\, dW_t$$

sous la probabilité "risque neutre" $\mathbb{Q}$

Question 1 :

On pose $Y_t = r_t e^{at}$

$$dY_t = \frac{\partial Y}{\partial t} dt + \frac{\partial Y}{\partial r} dr + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} d\langle r, r\rangle$$

$$= a Y_t\, dt + e^{at} \left(a(b-r)\,dt + \sigma\, dW_t\right]$$

$$= ab e^{at}\, dt + \sigma e^{at}\, dW_t$$

On intègre :

$$\int_t^T dY_s = ab \int_t^T e^{as}\, ds + \sigma \int_t^T e^{as}\, dW_s$$

$$Y_T - Y_t = b\left(e^{aT} - e^{at}\right) + \sigma \int_t^T e^{as}\, dW_s$$

"$r_t e^{at}$"

Donc $r_T = r_t e^{-a(T-t)} + b(1 - e^{-a(T-t)}) + \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)}\, dW_s$

Pour $T = t$, $t = 0$:

$$r_t = \underbrace{b + (r_0 - b)e^{-at}}_{\text{det}} + \underbrace{\sigma \int_0^t e^{-a(t-s)}\, dW_s}_{\text{Alea}} \qquad (2)$$

Question supplémentaire : Quelle est la loi de r_t ?

Rappel : (Intégrale de Wiener)

$Z = \int_0^t g(s)\, dW_s$ est appelé intégrale de Wiener

et $\mathbb{E}[Z] = 0$ et $\mathbb{V}[Z] = \mathbb{E}[Z^2] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t g(s)\, dW_s\right)^2\right]$

$= \int_0^t g^2(s)\, ds$

Donc $Z \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t g^2(s)\, ds\right)$

$$r_t \sim \mathcal{N}\left(b + (r_0 - b)e^{-at}, \sigma^2 \int_0^t e^{-2a(t-s)}\, ds\right)$$

Le modèle de Vasicek est appelé modèle à facteur gaussien

Question 2

(a) $$\int_t^T dr_s = \int_t^T a(b-r_s)ds + \int_t^T \sigma dW_s$$

Donc $$\int_t^T r_s ds = \frac{1}{a}\left(-r_T - r_t - ab\int_t^T ds - \int_t^T \sigma dW_s\right)$$

$$= -\frac{1}{a}(r_T - r_t) + b[T-t] + \frac{\sigma}{a}\int_t^T dW_s$$

(b) On veut montrer que

$$(1) = b(T-t) + (r_t - b)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{\sigma}{a}\int_t^T dW_s - \frac{\sigma}{a}\int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s$$

$$\Leftrightarrow r_T - r_t = -(r_t - b)\left(1-e^{-a(T-t)}\right) + \sigma\int_t^T e^{-a(T-s)} ds$$

or d'après (2) on a bien l'égalité

donc $$\int_t^T r_s ds = \underbrace{b(T-t) + (r_t-b)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}}_{m(t,T)} + \sigma\int_t^T \frac{1-e^{-a(T-s)}}{a} dW_s$$

(c) Conditionnellement à $\mathcal{F}_t$ (Wiener)

$$\int_t^T r_s ds \mid \mathcal{F}_t \sim \mathcal{N}\left(m(t,T), \Sigma(t,T)\right)$$

avec $$\Sigma(t,T) = \sigma^2\int_t^T \left(\frac{1-e^{-a(T-s)}}{a}\right)^2 ds$$

(d) En déduire $P(t,T)$

$$P(t,T) = \mathbb{E}_Q\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[e^{-X}\right)$$

avec $X \sim \mathcal{N}(m(t,T), \Sigma(t,T))$

Donc $P(t,T)$ est l'espérance d'une loi log-normale

$$P(t,T) = e^{-m(t,T) + \frac{1}{2}\Sigma(t,T)}$$

(e) $$\log P(t,T) = r_t\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) + b(T-t) - b\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right. + \sigma^2\int_0^t\left(\frac{1-e^{-a(T-s)}}{a}\right)ds$$

Donc $\log P(t,T) = A(t,T)\, r_t + C(t,T)$

Donc $\log P(t,T)$ est une fonction affine de r_t

" $\log P(t,T,r_t)$

Question 3

Taux spot :

$$P(t,T) = e^{-(T-t)R(t,T)}$$

$$R(t,T) = \frac{\ln P(t,T)}{-(T-t)} = \frac{A(t,T)r_t + C(t,T)}{-(T-t)}$$

Taux forward

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,s)\,ds}$$

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\log P(t,T) = -\frac{\partial A(t,T)}{\partial T} r_t + \frac{\partial C}{\partial T}(t,T)$$