TD : MAD

(Modèles Aléatoires Discrets)

Formulaire :

Si $x_0, \ldots, x_n \in E$

* $\mathbb{P}(X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X_1 = x_1 \mid X_0 = x_0) = P_{x_0,x_1} \times P_{x_1,x_2} \times \ldots \times P_{x_n,x_{n-1}}$

* Si μ_0 est la loi de X_0, alors la loi de X_1 est donnée par $\mu_1 = \mu_0 P$

Thm de Chapman - Kolmogorov

Celle de X_n est donc donnée par $\mu_n = \mu_0 P^n$

Il faut <u>toujours</u> commencer par dessiner le graphe associé à la chaîne.

Rudiments :

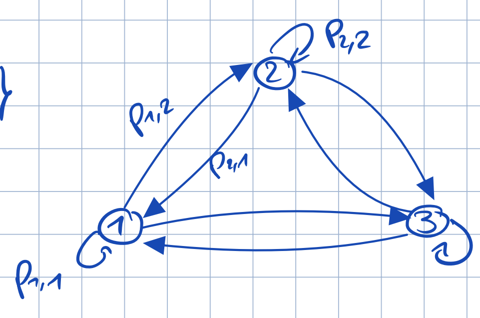
Une chaîne de Markov est une suite de v.a à valeurs dans un ensemble E (fini ici) (les états)
telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, la loi de X_{n+1} ne dépend <u>que</u> de X_n.

Ainsi, une chaîne de Markov est totalement décrite par ses probabilités de transition.

$\forall i,j \in E$, $p_{i,j} = \mathbb{P}(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$

On peut les représenter sous la forme d'une matrice de transition P, dans ce cadre les lois sont représentées par des vecteurs lignes. $\mu = (\mu(x_0), \mu(x_1), \ldots)$.

$E = \{1,2,3\}$



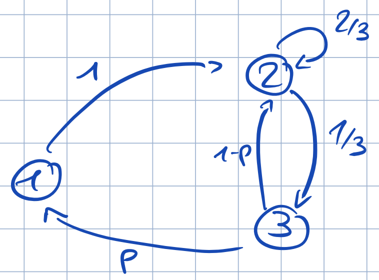
TD N°1 :

Exercice 1 :

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix}$$

1)



2) Calculer $\mathbb{P}(X_1=1 \mid X_0=1)$; $\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_0=1)$; $\mathbb{P}(X_3=1 \mid X_0=1)$

$\mathbb{P}(X_1=1 \mid X_0=1) = 0$

"nombre de pas"

$\mathbb{P}(X_2=1 \mid X_0=1) = 0$

$\mathbb{P}(X_3=1 \mid X_0=1) = \frac{p}{3}$ $\quad (= 1 \times \frac{1}{3} \times p)$

Méthodes chemins :

Pour calculer $\mathbb{P}(X_n=j \mid X_0=i)$ on peut énumérer les chemins de longueur n de i à j (dans le graphe), on calcule la probabilité de chaque chemin (produit des flèches) et on les somme.

$\mathbb{P}(X_1=2 \mid X_0=2) = \frac{2}{3}$

$\mathbb{P}(X_2=2 \mid X_0=2) = \frac{1}{3} \times (1-p) + \left(\frac{2}{3}\right)^2$

$\mathbb{P}(X_3=2 \mid X_0=2) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 + 2 \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{1}{3} \times (1-p)\right) + \frac{1}{3} \times p \times 1$

$= \frac{20-12p}{27} + \frac{p}{3} = \frac{20-3p}{27}$

3) Loi de X_1 sachant que X_0 suit une loi uniforme

$\mu_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow \mu_1 = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ p & 1-p & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{p}{3}, \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{1-p}{3}, \frac{1}{9}\right)$

$= \left(\frac{p}{3}, \frac{8-3p}{9}, \frac{1}{9}\right)$

ou avec probas totales :

$$P_{\mu_0}(X_1=1) = P(X_1=1|X_0=1)\,P(X_0=1) + P(X_1=1|X_0=2)\,P(X_0=2) + P(X_1=1|X_0=3)\,P(X_0=3)$$
$$= \dots = \frac{p}{3}$$
$$P_{\mu_0}(X_1=2) = \dots = \frac{8-3p}{9}$$
$$P_{\mu_0}(X_1=3) = \dots = \frac{1}{9}$$

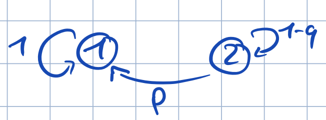
Exercice 3 : Classification des chaînes à deux états

$$P = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix} \qquad p,q \in [0;1]$$

1)

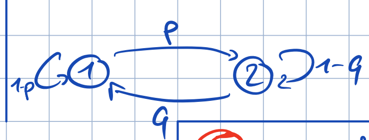
A $p=0$ et $q \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$



B $p \neq 0$ et $q \neq 0$

$$\begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$$

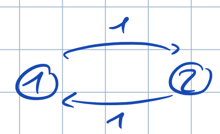


C $p=0$ et $q=0$

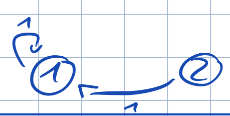
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

D $p=1$ et $q=1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$



E $p=0$ et $q=1$



*** Vocabulaire**

- Dans A, l'état 1 est absorbant (Si X_n touche 1 elle devient cte).
- Dans B, partant d'un état, il est possible d'accéder à tous les autres : la chaîne est irréductible
- Dans D, la chaîne prend les m̂ valeurs aux temps pairs : la chaîne est périodique

1.bis) Déterminer la ou les mesure invariantes.

Définition : μ est une mesure stationnaire (proba invariante, mesure d'équilibre)

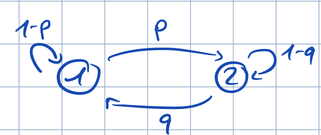
ssi : $\mu P = \mu$.

B $p \neq 0,1$; $q \neq 0,1$ $\quad \mu = (a \quad b)$, μ est stationnaire ssi

$$\begin{cases} \mu P = \mu \\ a+b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a(1-p)+bq = a \\ ap + b(1-q) = b \\ a+b=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = \dfrac{q}{p+q} \\ b = \dfrac{p}{p+q} \end{cases}$$

2) $a_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $b_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$

Déterminer une relation de récurrence.



$$a_{n+1} = (1-p)a_n + q b_n = (1-p-q)a_n + q$$

$$\mathbb{P}_{\mu_0}(X_{n+1}=1) = \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1}=1 \mid X_n=1)}_{1-p}\underbrace{\mathbb{P}_{\mu_0}(X_n=1)}_{a_n} + \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1}=1 \mid X_n=2)}_{q}\underbrace{\mathbb{P}_{\mu_0}(X_n=2)}_{b_n}$$

D'après la formule des probabilités totales. $\quad \mu_0 = (a_0, 1-a_0)$.

Résoudre : $a_{n+1} = (1-p-q)a_n + q \quad \longleftarrow$ arithmético-géométrique

Méthode du pt fixe :

On se ramène à une suite géométrique.
On va chercher $c \in \mathbb{R}$, $(a_n - c)_{n \geq 0}$ soit géométrique.

Le bon c vérifie $c = (1-p-q)c + q$

$$\Rightarrow \boxed{c = \frac{q}{p+q}}$$

Ainsi, $a_{n+1} - c = (1-p-q)(a_n - c)$

$$\Rightarrow a_n - c = (1-p-q)^n(a_0 - c)$$

$$\hookrightarrow \boxed{a_n = (1-p-q)^n(a_0 - c) + c}$$

Donc $\mathbb{P}(X_n = 1) = (1-p-q)^n(a_0 - c) + c$

3) Quels sont les limites possibles de a_n ?

Tout dépend de $1-p-q$:

$|1-p-q| \leq 1$

* Si $|1-p-q| = 1$ $\quad a_n = (\pm 1)^n (a_0 - c) + c \quad$ pas de limite si $1-p-q = -1$.
* Sinon, $|1-p-q| < 1 \Rightarrow \boxed{a_n \longrightarrow c} \longrightarrow$ Théorème ergodique (Neuman)