
Gestion actif passif

Table des matières

1 Introduction à l'ALM	3
1.1 Les fondamentaux	3
1.1.1 L'assurance	3
1.1.2 Les investissements et les engagements	3
1.1.3 Bilan comptable d'un assureur	3
1.1.4 Les flux d'actif	3
1.1.5 Les flux de passif	4
1.1.6 Besoin de gestion des flux	4
1.2 La gestion actif-passif	5
1.2.1 Les rôles de l'ALM	5
1.2.2 Rappel sur les contrats d'assurance vie	6
1.2.3 Rappel sur le résultat d'un assureur	6
1.3 Les gaps actif-passif	6
1.3.1 Combler les écarts de flux	6
1.3.2 Rappel sur la duration et la sensibilité	7
1.3.3 Gap de duration	8
1.4 La vision économique	8
1.4.1 Bilan lvl 2	8
1.4.2 Fonds propres économiques	10
2 Les options financières	12
2.1 Principe	12
2.2 Bilan level 3	14
2.2.1 Expression de l'option de PB	15
2.2.2 Expression du BEL	15
2.2.3 Prix d'un call	16
2.2.4 Evaluation des options	16
3 L'univers de valorisation	17
3.1 Le paradigme risque neutre et market consistente	17
3.2 La courbe de référence	17
3.2.1 Les taux swap	17
3.2.2 Le Credit Risk Adjustment	17
3.2.3 La méthode Smith-Wilson	18
3.2.4 Bilan	18
3.3 Le rendement d'un actif	19
3.4 La marge pour risque	19
3.5 Le traitement du risque	19
3.6 Les GSE	20
3.7 Les modèles de taux	20
3.8 Les modèles indicuels	21
3.9 Vérifier la cohérence des scénarios	21
4 Les modèles ALM	24
4.1 Indicateurs ALM	24
4.2 Présentation	24
4.3 Les usages et usagers	25
4.4 Les inputs	26
4.5 Schéma	26
4.6 Les modèles et les entités	26
4.6.1 Approche directe ou Flexing	27
4.6.2 Temps de calcul	29

4.6.3	Architecture des modèles	29
5	Modélisation ALM	31
5.1	Les tables historiques	31
5.2	Les rachats conjoncturels	31
5.3	La revalorisation	32
5.3.1	Algorithme de revalorisation	32
5.4	Allocation d'actif	33
6	Convergence	34
6.1	Fuite économique dans le monde	34
6.2	Martingalité	34
6.3	Ecart de convergence	35
6.4	Loi des grands nombres	35
L'an dernier examen d'une heure avec des questions de cours un peu plus poussée et application numérique, et exercices de type TD (sur claroline, c'était qcm ou questions ouvertes mais avec réponses courtes).		

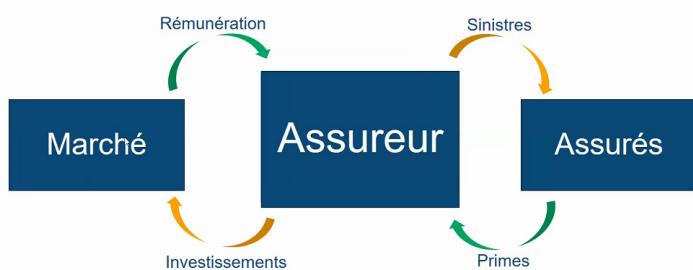
Chapitre 1

Introduction à l'ALM

1.1 Les fondamentaux

1.1.1 L'assurance

Principe de base de l'assurance : l'assureur accepte une prime de l'assuré et le couvre en cas de sinistre. L'assureur investit la prime des dans actifs financiers qui offrent une rémunération.



1.1.2 Les investissements et les engagements

Les investissements peuvent être des obligations, des actions, de l'immobilier, des fonds (OPCVM, SCI, ...), des produits dérivés (Vanille, Swap), des produits structurés, des futures, exotiques, créances, etc.
 Engagements de l'assureur : assurance vie (épargne, retraite, traditionnelle (capital, mixte...)), prévoyance santé (emprunteur, complémentaire santé, dépendance), automobile, MRH, dépôts (banque), réassurance, dettes.

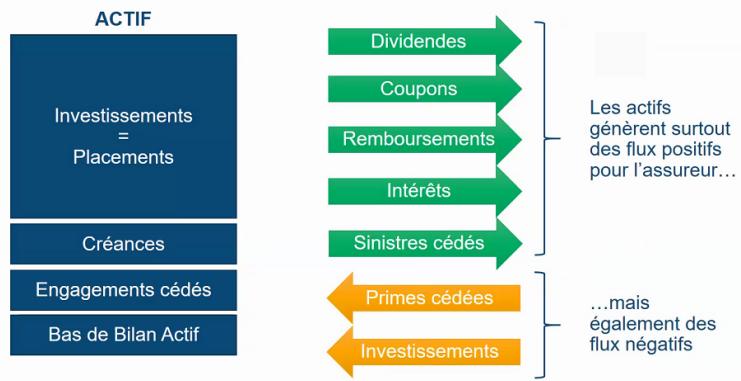
1.1.3 Bilan comptable d'un assureur

ACTIF	PASSIF
Investissements = Placements	Fonds Propres
Créances	Engagements = Provisions d'assurances
Engagements cédés	Dettes
Bas de Bilan Actif	Bas de Bilan Passif

Quand on est en vision comptable, les passifs sont ce que l'assureur doit aux différents interlocuteurs, et les actifs sont les ressources dont il bénéficie. Les fonds propres d'un assureur sont une dette : c'est de l'argent que les actionnaires ont donné à l'assureur, et ce dernier est engagé à rendre cet argent aux actionnaires.

1.1.4 Les flux d'actif

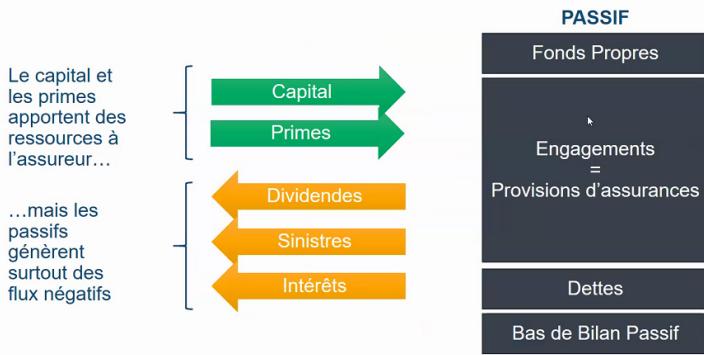
Ce n'est pas parce que quelque chose est à l'actif qu'il génère des flux positifs :



Si on a un engagement envers un réassureur, on va lui céder des primes, ce qui constitue un flux négatif.

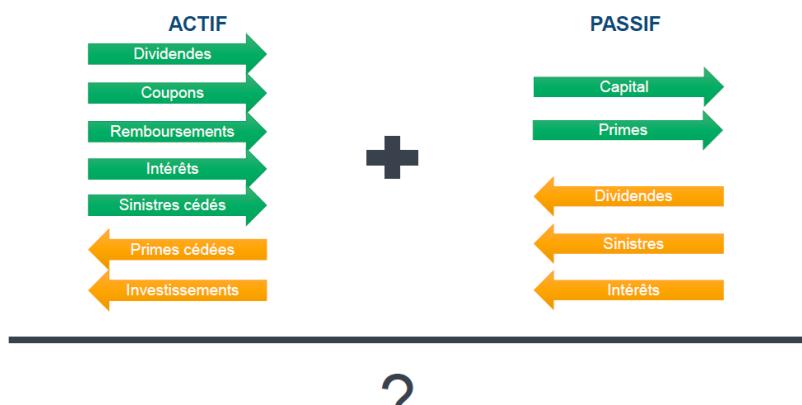
1.1.5 Les flux de passif

On a le même schéma pour les flux au passif : ce n'est pas parce qu'un poste est au passif qu'il génère un flux négatif pour l'assureur.



1.1.6 Besoin de gestion des flux

En résumé, l'assureur a un actif, un passif, des engagements, des investissements, ce qui génère des flux de trésorerie dans les deux sens. Comment gère-t-on ces mouvements de trésorerie ? C'est l'intérêt de la gestion actif-passif.

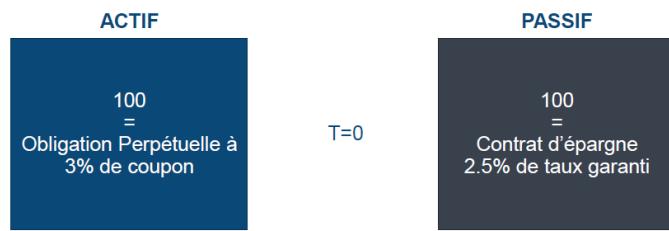


Certains flux sont prévisibles, par exemple pour une obligation à taux fixe, on sait combien de coupon on va recevoir, idem pour un arrérage par exemple. En revanche, beaucoup de flux ne sont pas prévisibles : un sinistre auto, un décès, ou même un versement de dividendes (on ne sait pas de combien il va être). A chaque flux, l'assureur s'interroge sur son niveau de "cash" : a-t-il assez de trésorerie pour régler les créanciers ? La deuxième question est de savoir est-ce qu'il peut avoir de la visibilité pour les jours à venir ? Est-ce qu'il pourra payer ses créanciers les jours à venir ?

Quel sera l'impact de ces flux sur le résultat de la société ?

Bilan lvl 1

On détient à notre actif une obligation perpétuelle, et à notre passif, on est engagé vis à vis d'un assuré.



On se pose deux questions :

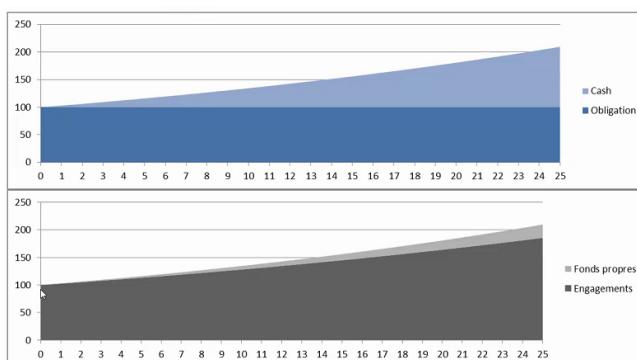
1. Aurais-je assez de trésorerie pour régler mes engagements à la fin de la période ?
Oui, car on n'a aucun flux sortant
2. Combien vais-je dégager de bénéfices/pertes ?
Ici, le résultat va être la différence entre les produits financiers et la variation des provisions, soit $3 - 2.5 = 0.5$, car comme on garantit un taux de 2.5%, on doit provisionner non plus 100 mais 102.5.

A la fin de la période, le bilan se comporte de la façon suivante :



A la fin de la période, les engagements sont revalorisés selon les termes du contrat, et les coupons de l'obligation sont réinvestis en cash, qui rapporte le taux d'actualisation.

On stocke le résultat en fonds propres.



Au fil du temps, l'obligation vaut toujours 100, le cash prend une part de plus en plus importantes. Pour le passif, les engagements augmentent, tout comme les fonds propres comme on l'a vu.

1.2 La gestion actif-passif

1.2.1 Les rôles de l'ALM

Les rôles sont souvent différents selon les assureurs :

- Détermination des gaps actif-passif : c'est le niveau de trésorerie anticipé futur
- Calcul de provisions réglementaires (PAF, PGG) : ces provisions nécessitent de projeter les interactions entre l'actif et le passif
- Définition de l'allocation stratégique d'actifs : trouver la bonne stratégie d'investissement pour respecter toutes les contraintes

- Maintenance/paramétrage des modèles actif-passif : les flux vont être projetés par modélisation
- Calcul du coût des options et des garanties (MCEV)
- Calcul de stress tests
- Calcul du capital économique
- Calcul de capital réglementaire (Solva 2)
- Suivi de la rentabilité des produits
- Détermination des taux de revalorisation
- ...

En ALM, on a une grande diversité d'interlocuteurs : investissements, gestion d'actifs, actuariat produit, marketing, inventaire, comptabilité (Sociale, IFRS), valeur (EEV, MCEV), reporting, gestion des risques, contrôle de gestion, contrôle et audit interne, réassureur, IT (problématique de data très importante), etc.

1.2.2 Rappel sur les contrats d'assurance vie

Sur les contrats en euros, la garantie est exprimée en euros. Cette garantie en capital correspond pour l'assureur à un engagement de taux. Les taux d'intérêt technique sont supérieurs ou égaux à 0. Le taux de revalorisation (incluant les intérêts techniques et la participation aux bénéfices) est connu en fin d'exercice. Des taux minimum peuvent être garantis pour l'année en cours.

Pour les contrats en unités de compte, la garantie est exprimée en nombre d'unités de compte. La valeur des unités de compte n'est pas garantie.

Il existe des contrats multi-supports : ils permettent un investissement diversifié : sur des supports en euros, sur des supports en unités de compte. Ces contrats sont souples : l'assuré a la possibilité de réaliser différentes opérations (rachats, arbitrages, etc.).

1.2.3 Rappel sur le résultat d'un assureur

Le compte de résultat rend compte des tous les mouvements ayant affecté le patrimoine de l'entreprise au cours de cet exercice. Il est présenté sous la forme de produits (classe 7 - en vert) et de charges (classe 6 - en orange). L'assurance vie et l'assurance non-vie font l'objet d'un compte de résultat séparé.



1.3 Les gaps actif-passif

1.3.1 Combler les écarts de flux

Sur la base des flux connus, et en construisant des modèles de prévisions pour les flux contenant de l'aléa, le gestionnaire ALM détermine les échéances sur lesquelles investir la trésorerie.

De nombreuses méthodes existent pour estimer les flux aléatoires du passif :

- Décès : Tables de mortalité ou modèles de mortalité (TD1)
- Rachats : Tables de rachats ou loi de rachats (TD3)
- Sinistres : Chain ladder

Et également de l'actif :

- Taux variables : utilisation des taux forward (TD1)
- Inflation : utilisation de la courbe d'inflation break even (TD1)
- Dividendes : Considérer un modèle basé sur les taux ou l'inflation

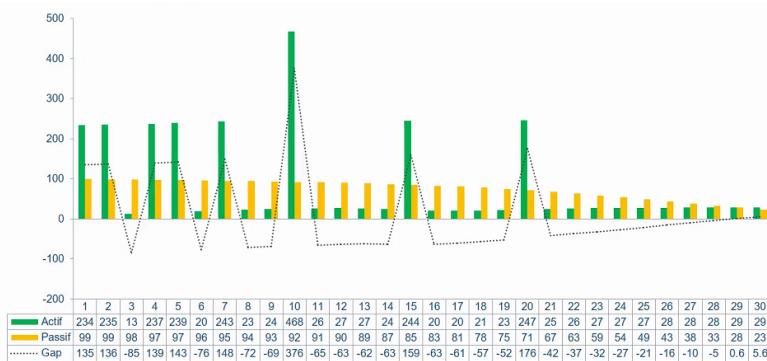
Une fois que l'on a les modèles, on peut peut dresser un échéancier actif et un échéancier passif, on fait la différence entre les deux pour chaque période.

Exemple :

TD1

Actif	Passif
<ul style="list-style-type: none"> Obligation 1 : taux fixe 0.013 %, maturité 1 Obligation 2 : taux fixe 0.022 %, maturité 2 Obligation 3 : taux fixe 0.052 %, maturité 4 Obligation 4 : taux fixe 0.086 %, maturité 5 Obligation 5 : taux fixe 0.212 %, maturité 7 Obligation 6 : taux fixe 0.673 %, maturité 10 Obligation 7 : taux fixe 1.013%, maturité 15 Obligation 8 : taux fixe 10 ans - 0.641 % maturité 20 Structuré : inflation + 0.66%, maturité 10 Actions : taux 1 an + 2.23% 	<ul style="list-style-type: none"> 1 contrat de rente viagère Assuré de 60 ans 100 € d'arréagement annuel $a_x = 22.28$ (TT : 0.25%, TV-00)
• 2228 € équirépartis	• 2228 €

On prend un actif fictif qui contient 8 obligations, un produit structuré et une action. Au passif, on a un contrat de rente viagère pour un assuré de 60 ans, on lui a promis un arréagement annuel de 100€, ce qui donne une PM de 2227€ ($=a_x * 100$).



Les deux premières années, on a beaucoup plus de flux d'actifs que de passif, mais la 3ème année, on voit que le gap est négatif puisqu'on n'a pas prévu beaucoup d'entrée.

Comment peut-on minimiser les gaps négatifs ? Soit on place en trésorerie l'excédent des années bénéficiaires, soit on réinvestit cet excédent.

- Sur la situation initiale :
 - On garde la prime initiale en cash
 - On répartit les investissements sur plus de maturité
 - On change l'allocation d'actif
- En cours de projection
 - Réinvestir les remboursements et les flux sur les maturités adéquates
 - Techniques avancées (CPPI, LDI)
- Certains flux sont incertains, qu'en est-il des gaps ?
 - Nécessité de faire des sensibilités et d'analyser différents scénarios
 - Indicateur toujours pertinent ?

1.3.2 Rappel sur la duration et la sensibilité

On définit la duration comme la durée moyenne de versement des flux d'un instrument financier de VAN des flux P :

$$\text{Duration} = \frac{1}{P} \sum_{t=1}^M t \frac{F_t}{(1+r)^t}$$

On définit la sensibilité comme l'opposé de la variation unitaire du prix à une variation unitaire des taux :

$$\text{Sensibilité} = -\frac{1}{P} \frac{dP}{dr} = \frac{\text{Duration}}{1+r}$$

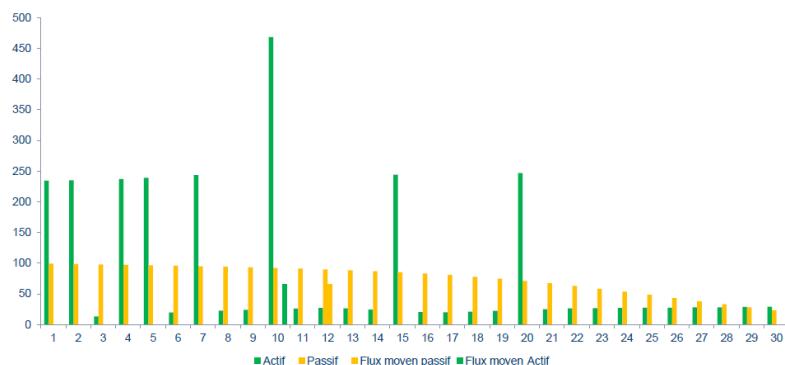
On peut ensuite utiliser le développement limité suivant :

$$P_{r+\epsilon} = P_r \times (1 - \epsilon \times \text{Sensibilité})$$

1.3.3 Gap de duration

Pour l'instant, on a réfléchi en flux : est-ce suffisant pour prendre des décisions ? Pas forcément, il faut ajouter le gap de duration, qui permet de suivre la différence entre la duration de l'actif et celle du passif. Cela permet de coordonner le timing des versements : l'assureur essaiera généralement d'avoir une duration à l'actif plus courte, afin de se garantir la meilleure réactivité. En effet, en cas d'augmentation imprévue des prestations, le gap de duration négatif assurera une plus grande liquidité de l'actif. L'étude du gap permet également d'estimer de manière approximative les variations de son actif et de son passif aux mouvements de taux.

Dans notre exemple précédent, le gap de duration est de $9.6 - 12 = -2.4$. L'objectif de l'assureur n'est pas forcément de matcher ces flux, il peut y avoir des opportunités.



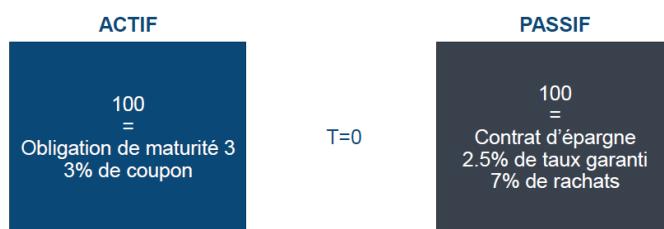
Dans notre exemple, la duration de l'actif est de 9.6, donc approximativement, si les taux d'intérêt augmentent de 1%, la valeur de l'actif va diminuer de 9.6%. De la même manière, la duration du passif est de 12, donc si les taux augmentent de 1%, le passif va diminuer de 12%.

Une duration plus courte à l'actif permet d'offrir à l'assureur une couverture naturelle contre la hausse des taux. Réciproquement, cela expose l'assureur à la baisse des taux.

L'intégralité des assureurs se sont mis depuis 15-20 ans dans une situation de duration plus courte à l'actif qu'au passif, alors que les taux n'ont fait que baisser. Tous les assureurs voulaient se protéger en cas de remonter des taux, mais ils se sont trompés.

1.4 La vision économique

1.4.1 Bilan lvl 2

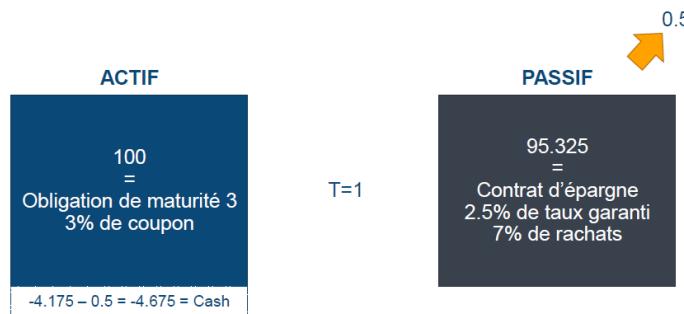


On a une obligation de maturité 3 qui verse 3% de coupon. Au passif, on est dans la même configuration que dans l'exemple précédent, avec un contrat d'épargne à taux garanti 2.5%, mais on suppose que chaque année on a 7% de rachat.

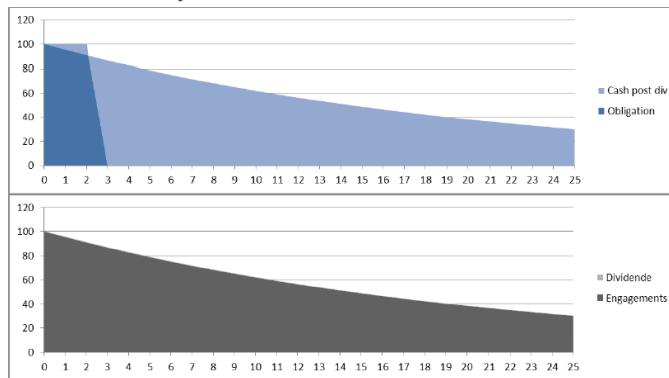
Les questions à se poser :

1. Aurais-je assez de trésorerie pour régler mes engagements à la fin de la période ?
L'actif va payer un coupon de 3, et le passif vaut $7 \times (1 + 2.5\%)$ soit 7.175. Le niveau de trésorerie à la fin de la période sera donc de -4.175.
Ce résultat négatif n'est pas forcément grave puisque les taux actuels sont négatifs, donc l'assureur va devoir rembourser moins que ce qu'il doit.
2. D'un point de vue du résultat, combien vais-je dégager de bénéfices/pertes ?
Le résultat se calcule à l'aide de : Résultat = Produits financiers - Variations provisions - Rachats = $3 - (-4.675) - 7.175 = 0.5$.
En effet, on revalorise les rachats, car on suppose que les personnes qui rachètent le font en fin d'année pour maximiser leur rachat, donc $7 \times (1 + 2.5\%) = 7.175$.
Concernant les variations de provisions, en début d'année 0, on a provisionné 100, puis on enlève

7 de rachats, soit 93, que l'on revalorise $93 \times (1 + 2.5\%) = 95.325$, soit une variation de provision de $95.325 - 100 = -4.675$.



A la fin de la période, les engagements sont revalorisés selon les termes du contrat, les coupons et les sorties alimentent la trésorerie qui finit ici négative. Le résultat est versé en dividende.



En vision économique, à l'actif on a l'obligation avec au début le montant de la trésorerie négative, en année 3, la vente de l'obligation vient augmenter la trésorerie. Au passif, on a l'échéancier du contrat d'épargne qui est diminué de 7% par an et revalorisé de 2.5%.

Expression du résultat

Le résultat dans notre cas simple s'exprime comme la variation de l'actif diminuée de la variation des provisions techniques.

$$\text{Résultat}_i = \underbrace{PM_{i-1} \times r}_{\text{Produits financiers}} - PM_{i-1} \times Tx_{rachats} \times (1 + TMG) - (PM_i - PM_{i-1})$$

Comme le bilan est équilibré à chaque date, et que les résultats sont automatiquement versés aux actionnaires, l'actif équivaut les provisions techniques à la fin de chaque période.

La Value of In-Force (VIF) est la valeur actualisée des résultats futurs générés par le portefeuille. Dans notre modèle, c'est la valeur pour l'actionnaire du portefeuille. Cela correspond au pris de l'action de la société d'assurance. C'est également un indicateur de la profitabilité du portefeuille : en effet, on peut avoir un résultat négatif une année, et positif l'année suivante, or ce qui nous intéresse c'est le résultat global.

Expression du BEL

Le BEL (Best Estimate of Liabilities) est constitué de l'espérance des flux de l'assuré, actualisés :

$$BEL = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{CF_i^{\text{assuré}}}{(1+r)^i}$$

Les flux à destination de l'assuré sont constitués uniquement des rachats, on a donc :

$$CF_i^{\text{assuré}} = PM_{i-1} \times Tx_{rachats} \times (1 + TMG)$$

On peut également écrire l'expression de la provision mathématique :

$$PM_i = PM_0 \times (1 - Tx_{rachats})^i \times (1 + TMG)^i$$

Relation BEL-VIF

On peut réécrire le résultat comme suit :

$$\text{Résultat}_i = PM_{i-1} \times r - PM_{i-1} \times Tx_{rachats} \times (1+TMG) - (PM_{i-1} \times (1-Tx_{rachats}) \times (1+TMG) - PM_{i-1})$$

Le résultat s'exprime comme la marge financière de l'assureur :

$$\text{Résultat}_i = PM_{i-1} \times (r - TMG)$$

On peut établir une relation entre le BEL et la VIF :

$$VIF + BEL = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{PM_{i-1} \times (1+r) - PM_i}{(1+r)^i} = PM_0 = VM$$

Le montant de richesse initial est partagé entre l'actionnaire et l'assuré.

1.4.2 Fonds propres économiques

On appelle Actif net (NAV) la différence entre la valeur de marché et la valeur économique des passifs qui revient aux assurés. Dans notre cas simple, on obtient l'égalité entre la NAV et la VIF.

En réalité, il existe de nombreux postes de Fonds Propres (report à nouveau), qui sont de facto inclus dans la NAV, mais pas nécessairement dans la VIF.

L'Actif net est souvent considéré comme la valeur économique des fonds propres

Solvabilité 2

La NAV est l'indicateur clé de la réglementation Solvabilité 2, qui vise à limiter le risque de faillite économique ($NAV < 0$) à 1 an à une occurrence tous les 200 ans.

Le SCR, ou Solvency Capital Requirement, se définit comme le capital minimum à immobiliser pour limiter les risques de faillite à cette occurrence.

En formule standard, on agrège des risques sous modulaires constitués de la variation entre une NAV et une NAV dans un scénario choqué pour obtenir le SCR.

En modèle interne, le SCR est calculé par approche directe, c'est-à-dire en estimant directement le quantile à 99.5% de la distribution des NAV dans 1 an.

EV

L'embedded Value, ou valeur intrinsèque, est un indicateur de marché de la valeur d'une société d'assurance en run off. Elle prend en compte la VIF issue du contrat, mais également le capital ainsi que les contraintes réglementaires :

$$EV = ANAV + VIF - CoC$$

Run-off veut dire qu'on prend en photo la valeur du portefeuille à un instant donné, et on ne prend pas en compte ce qui va se passer après.

Le Cost of Capital est le coût des impôts sur les produits financiers des fonds propres. On considère que les actionnaires attendent un revenu égalant le taux sans risque, toutefois la société doit payer des impôts sur les produits financiers liés à cette performance.

L'Adjusted net asset value, ANAV représente la valeur de marché des actifs ne couvrant pas les engagements. Cette valeur se sépare en Required Capital et le Free Surplus. Le capital requis correspond à la valeur de marché des actifs en représentation des fonds propres que l'assureur doit bloquer au titre de son activité et dont la distribution aux actionnaires est réduite (~ SCR).

Chaque business a ses normes prudentielles et doit immobiliser son capital, et ce capital à un coût d'immobilisation, donc quand on calcule l'EV, on vient retirer ce coût d'immobilisation du capital, car c'est un élément complémentaire pénalisant.

NBV et Appraisal Value

NBV = NB = Nouveau business : c'est la sous-valeur du portefeuille liée à la dernière année du chiffre d'affaire du portefeuille.

La valeur de la production nouvelle, ou NBV, est un indicateur clé de profitabilité d'une année de chiffre d'affaires d'un assureur.

La NBV peut se calculer de deux façons :

- Stand-alone : on calcule la valeur d'un portefeuille constitué uniquement du CA de l'année. L'avantage est que c'est une méthode intuitive, pas d'effets croisés avec le stock. En revanche, la production nouvelle bénéficie des ressources passées, les décisions sont souvent prises au global
- Marginale : on calcule la différence de MCEV avec ou sans affaires nouvelles : cette différence est appelée la méthode marginale. L'avantage est que cette méthode est cohérente avec les décisions du management, et intégration dans un portefeuille plus large. En revanche, la compréhension des effets croisés entre le stock et les affaires nouvelles est difficile.

On constitue l' Appraisal Value (=valeur d'achat), en ajoutant à la valeur intrinsèque plusieurs générations d'affaires nouvelles : l'Appraisal Value est la valeur du stock des contrats, + un nombre N d'affaires nouvelles multiplié par la valeur de production nouvelle :

$$\text{Appraisal Value} = EV + N \times NBV$$

C'est l'indicateur clé utilisé dans le cadre de M&A.

Chapitre 2

Les options financières

2.1 Principe

La plupart des produits d'assurance Vie contiennent des options financières « cachées » : parmi les plus connues, on trouve :

- La réglementation impose aux assureurs un partage des résultats financiers avec les assurés, on parle de participation aux bénéfices.
- Par ailleurs, les produits offrent le plus souvent une garantie en capital.

En prenant ces deux options, on peut écrire la revalorisation d'un contrat d'assurance Vie sous la forme suivante :

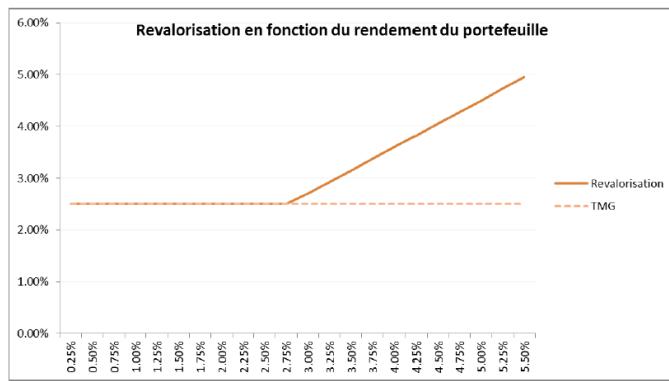
$$PM_i = PM_{i-1} \times (1 + \max(x\% \times r, TMG))$$

Le TMG représente donc le Strike d'une option sur le taux de rendement de l'actif du portefeuille.

La possibilité de rachat d'un contrat d'assurance Vie constitue également une option, dans le sens où elle raccourcit la durée du passif (cf obligation callable : le remboursement peut se faire à une date différente de la maturité).

Si on prend un actif financier dont le payoff d'une valeur de 100€ est soit à $T = 1$, soit à $T = 2$. On attribue une probabilité de 0.5 au paiement l'année 1, et 0.5 pour l'année 2. Le prix de l'actif va être l'espérance des cash-flows actualisés, donc va être différent du flux certain que l'on va recevoir, ce qui caractérise le prix de l'option.

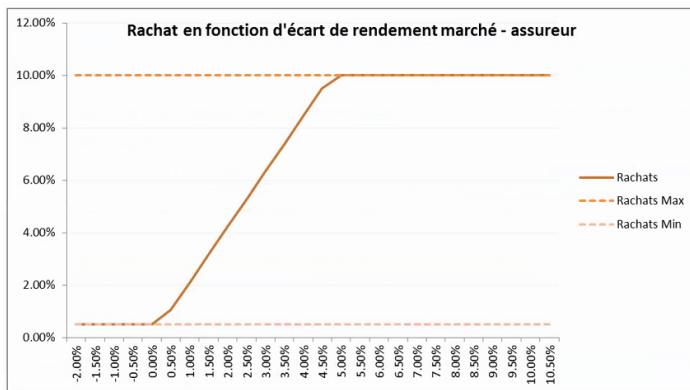
La revalorisation du portefeuille en fonction du rendement du portefeuille d'actifs donne un profil typique d'option :



On donne une proportion du rendement du portefeuille sous-jacent (inflexion de la pente), tout en garantissant un taux (ici de 2.75%).

Pour mettre en évidence le fait que ça puisse être une option, on représente la manière dont les assurances modélisent le rachat en fonction du taux de rendement des marchés.

Différentes études montrent que les assurés rachètent d'autant plus que le rendement de leur épargne est éloigné du rendement disponible sur le marché :



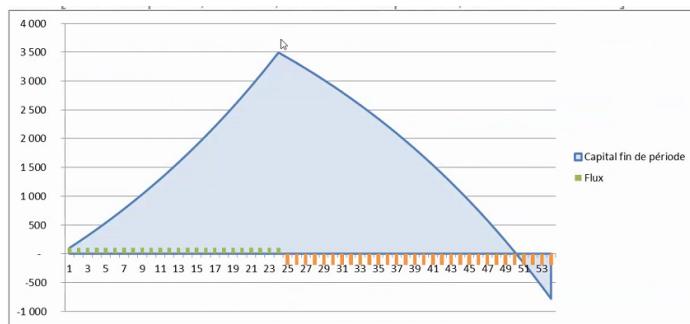
Les assureurs considèrent que plus il existe un écart entre le taux que l'assureur va donner aux assurés et la revalorisation qu'un assuré peut attendre du marché, plus les assurés vont racheter. S'il n'y a pas d'écart avec le marché ou si l'assureur fournit une prestation supérieure au marché, on est dans la partie négative à gauche c'est-à-dire qu'il n'y a pas de rachat dynamique, les assurés vont rester dans le portefeuille. Mais dès lors qu'il y a un écart, les assurés vont racheter (de manière proportionnelle) ce que l'on voit quand on se déplace vers la droite.

On est sur quelque chose qui a un profil de corridor, quelque chose de dynamique.

Les rachats, ou la décision d'un assuré de passer de la phase de capitalisation à une phase de restitution, constitue des événements assez imprévisibles qui modifient la chronique des flux.

Il n'y a pas forcément que les rachats qui modifient la durée d'un portefeuille, mais aussi la décision d'un assuré de sortir en rente. On est sur un contrat d'épargne retraite où l'assuré capitalise son épargne avec des versements, puis décide de liquider. Cette date à laquelle il décide de liquider sa rente peut aussi être à la main des assurés, donc il y a une incertitude. En fonction de la date à laquelle l'assuré va partir en retraite, on va avoir une incertitude sur les cash-flows, et ça va changer leur chronique et donc la chronique des provisions.

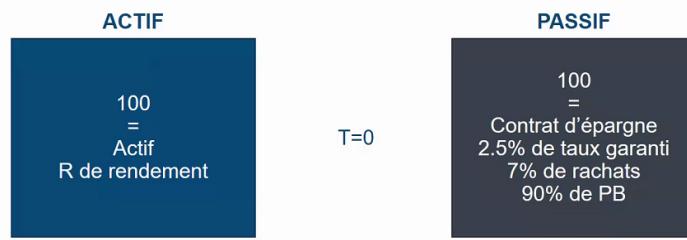
Par exemple, ci-dessous le montant d'encours d'un assuré ayant souscrit un contrat de retraite (100€ de prime, 40 ans, taux technique de 3% et retraite à 65 ans) :



Au moment où l'assuré liquide sa retraite, la rente qu'il va recevoir est dépendante des hypothèses techniques qui ont été retenues, et en fonction de l'âge auquel il va réellement décéder, cela peut avoir un coût supplémentaire pour l'assureur (si les tables disent qu'il va décéder à 100 ans, et qu'il meurt en réalité à 105 ans, cela va augmenter les rentes versées). Il faut être en mesure d'anticiper et de tarifer au mieux ces incertitudes dans le cadre de l'ALM.

On a donc vu les 3 options financières les plus visibles : l'option de revalorisation, l'option de rachat et l'option de conversion en rente. Il y en a d'autres mais ce sont celles qui ont le plus de "chance" d'avoir un impact sur l'embedded value par exemple.

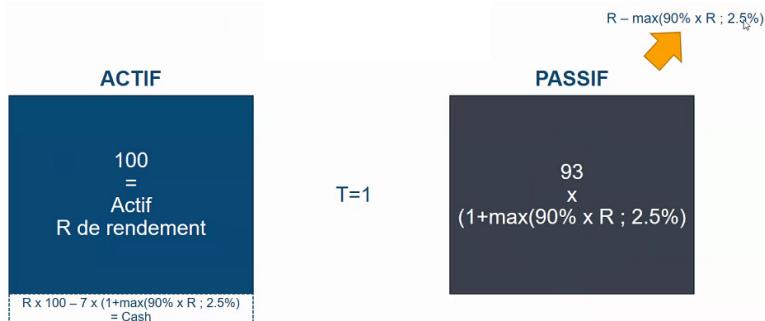
2.2 Bilan level 3



On prend un actif qui vaut 100, il va toujours rapporter R de rendement (incertain). Par rapport à la dernière fois, on ajoute au passif les 90% de participation aux bénéfices. Ce 90% est un taux que l'on observe souvent chez les assureurs, il varie entre 90 et 95% quand il est déclaré dans la plupart des cas. La réglementation impose un partage minimum de 85% des produits financiers.

- Aurais-je assez de trésorerie pour régler mes engagements à la fin de la période ?
Le niveau de trésorerie est de $R - 7 \times (1 + \max(90\% \times R; 2.5\%)$, donc on ne va pas avoir assez de trésorerie.
- D'un point de vue résultat, combien vais-je dégager de bénéfices/pertes ?
On rappelle que le niveau de trésorerie est indépendant du résultat que l'on va dégager.
Le résultat est les produits financiers - Variation provisions - Rachats, soit $100 \times (R - \max(90\% \times R; 2.5\%)$)

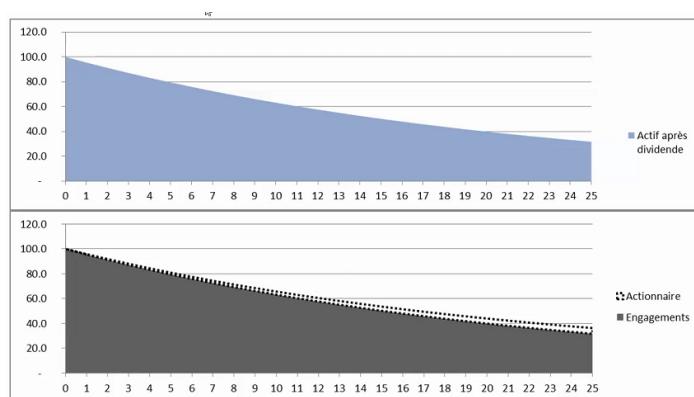
On réécrit le bilan à la fin de la période :



A la fin de la période, les engagements sont revalorisés selon les termes du contrat, les coupons et les sorties alimentent la trésorerie dont le niveau dépend de R .
Le résultat est versé en dividende pour équilibrer l'actif et le passif.

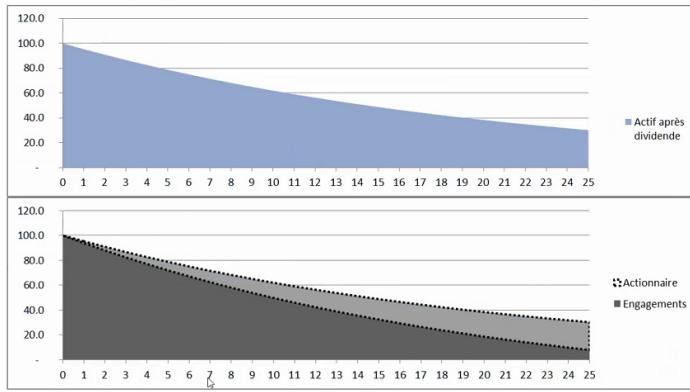
R est une incertitude, on va prendre deux exemples :

Pour $R = 3\%$:



On constate que la richesse de l'actionnaire augmente légèrement dans le temps. Si on a un taux de rendement d'actif de 3%, selon les calculs précédents le résultat vaut 0.3% par an.

Pour $R = 1\%$:



$R = 1\%$ est bien inférieur au taux minimum garanti aux assurés, donc on voit que par rapport au niveau de passif, l'aire est en dessous donc négative : si on a un rendement d'actif de 1%, on ne peut pas dégager de résultat.

A partir de $r = \frac{TMG}{PB} = 2.8\%$, les engagements ne varient plus à la baisse du rendement, ils sont garantis par l'assureur, qui doit se financer auprès de l'actionnaire, c'est le point d'équilibre.

2.2.1 Expression de l'option de PB

(Ces formules sont souvent en examen).

Les flux à destination de l'assuré sont constitués uniquement des rachats, on a donc :

$$CF_i^{\text{assuré}} = PM_{i-1} \times Tx_{\text{rachats}} \times (1 + \max(90\% \times R; TMG))$$

Les cash flow à destination de l'assuré sont bien l'encours initial, multiplié par le taux de rachat et par le taux de revalorisation.

On peut également écrire l'expression du résultat comme la marge financière de l'assureur :

$$\text{résultat}_i = PM_{i-1} \times (R - \max(90\% \times R; TMG))$$

Le résultat s'écrit comme l'encours au début de la période, fois l'écart entre le rendement de l'actif et le rendement fourni aux assurés.

Ces éléments peuvent également se réécrire sous la forme :

$$CF_i^{\text{assuré}} = PM_{i-1} \times Tx_{\text{rachats}} \times (1 + TMG + (90\% \times R - TMG)_+)$$

$$\text{résultat}_i = PM_{i-1} \times (R - TMG - (90\% \times R - TMG)_+)$$

Les assurés ont donc, en plus de la garantie de taux, une option d'achat (call) sur le rendement des actifs, s'ils sont supérieurs au TMG.

2.2.2 Expression du BEL

Les prestations payées aux assurés dépendent donc du rendement futur du portefeuille, qui est inconnu à la date d'évaluation.

Pour déterminer la valeur économique des prestations, on considère le rendement comme une variable aléatoire R_t . Le BEL se considère alors comme une espérance :

$$BEL = E \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{PM_{i-1} \times Tx_{\text{rachats}} \times (1 + TMG + (90\% \times R_i - TMG)_+)}{(1+r)^i} \right)$$

C'est la somme des cash-flows à destination des assurés actualisés.

On peut séparer la partie déterministe et la partie optionnelle en écrivant :

$$BEL = BEL_{\text{det}} + E \left(\sum_{i=1}^{+\infty} \frac{PM_{i-1} \times Tx_{\text{rachats}} \times 90\% \times (R_i - \frac{TMG}{90\%})_+}{(1+r)^i} \right)$$

La partie du BEL déterministe ne dépend pas de R donc peut être sortie de l'espérance. Cela n'est pas tout à fait vrai, car la partie que l'on sort de l'espérance est en réalité $PM_{i-1} \times (1 + TMG)$, or PM_{i-1}

est la PM de fin de période qui dépend de la revalorisation du pas de temps précédent ($i - 1$) qui dépend de R_{i-1} . Dans cette partie déterministe, on considère donc R égal à 0.

Dans la réalité, on peut séparer le BEL entre le best estimate garanti (qui est donc la première formule avec $R = 0$, soit la partie déterministe) et le FDB (Future Discretionary Benefits) qui est la partie optionnelle.

2.2.3 Prix d'un call

Dans le cas où on imagine que chaque pas de temps est indépendant du pas de temps précédent, on peut écrire les best estimate sous la forme de prix d'option avec la formule de black & Scholes. Si ça ne marche pas sur des contrats d'épargne en France, ça peut marcher sur d'autres contrats d'assurance où on aurait PM_{i-1} indépendant de R : on pourrait donc calculer les best estimate avec des formules fermées.

On reconnaît l'expression du prix d'un call :

$$BEL = BEL_{det} + \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i \times C(i, r, R_i, \frac{TMG}{90\%})$$

Lorsque R_i suit un mouvement brownien géométrique de volatilité σ et centré sur le taux sans risque r , on exprime le prix des call comme :

$$C(i, r, R_i, \frac{TMG}{90\%}) = R_0 \times \mathcal{N}(d_1) - \frac{TMG}{90\%} \times P_i \times \mathcal{N}(d_2)$$

avec $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{i}} \left(\ln(\frac{R_0 \times 90\%}{TMG}) + (r + \frac{1}{2}\sigma^2) \times i \right)$ et $d_2 = d_1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{i}}$.

Le problème ici est que les α_i dépendent des payoffs précédant...

2.2.4 Evaluation des options

Les options financières sont souvent trop complexes pour être évaluées par des formules fermées. De plus, ces formules nécessitent des hypothèses très restrictives (ex : taux sans risque non stochastique pour B&S).

Les assureurs valorisent les portefeuilles de contrat par des techniques Monte Carlo.

Les réglementations encadrent cependant l'univers de valorisation :

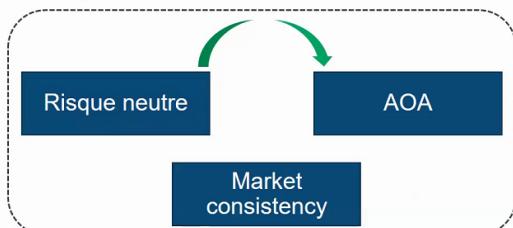
- Univers Risque Neutre
- Absence d'opportunité d'arbitrage
- Market Consistency (cohérence avec les marchés)

Ces éléments concernent principalement la détermination des scénarios économiques et le traitement des actifs dans les modèles.

Chapitre 3

L'univers de valorisation

3.1 Le paradigme risque neutre et market consistent



La risque-neutralité implique que tous les actifs, et toutes les stratégies d'investissements, rapportent (en espérance) exactement le taux sans risque.

Le caractère risque neutre impose naturellement l'absence d'opportunité d'arbitrage : peu importe comment on va combiner nos actifs, en espérance ça nous rapportera toujours la même chose.

Le caractère market consistent est respecté s'il est possible de retrouver les prix de marché dans l'univers de valorisation : cela veut dire que le prix de l'actif sur le marché doit valoir la même chose que la somme des flux futurs actualisés.

Ce sont les 3 piliers de l'univers de valorisation.

3.2 La courbe de référence

3.2.1 Les taux swap

La réglementation Solvabilité 2 précise que lorsque le marché des taux swaps est suffisamment liquide, profond et transparent (DTL), la courbe des taux swap doit servir de base à la courbe des taux sans risque. Les taux swap sont définis comme la jambe fixe qu'il faut payer (ou que l'on reçoit) annuellement ou semi-annuellement, contre le paiement d'un taux très court, variable (Euribor par exemple) sur une certaine durée. Les taux swap correspondent donc à l'anticipation du marché des évolutions des taux courts. Le marché des swaps de taux pour l'euro est le 3ème marché de taux après les govies et les futures sur govies.

C'est une courbe couponnée ! Il faut la découponner pour pouvoir actualiser avec (cf. TD n°1).

Selon le régulateur européen (EIOPA), le marché des taux swap respecte le critère DLT (liquide, profond et transparent) jusqu'à 20 ans.

3.2.2 Le Credit Risk Adjustment

Les taux swap sont considérés par EIOPA comme la meilleure estimation du taux sans risque Euro. Sur un horizon de 20 ans, les taux swaps sont les taux qui contiennent le minimum de risque de crédit : l'EURIBOR cote tous les jours pendant l'ouverture des marchés financiers : il est mis à jour chaque jour, mais une contrepartie pourrait faire défaut pendant la nuit. En revanche, l'EONIA cote en continu donc il existe une petite prime de risque du côté de l'EURIBOR comparé à un taux qui cote en continu.

On peut en déduire que les taux courts contiennent un risque de crédit, le CRA permet justement de le corriger.

Lorsque les marchés des swaps sont liquides, transparents et profonds, la formule suivante s'applique :

$$CRA = \min\left(35bps; \max\left(10bps; 50\% \frac{\sum_{i=1}^{n=1an} (EUR3M_i - EONIA3M_i)}{n}\right)\right)$$

où $EUR3M$ est le taux Euribor 3 mois, et $EONIA3M$ est le taux 3 mois sur l'indice EONIA.
La moyenne est faite sur 1 an.

3.2.3 La méthode Smith-Wilson

La méthode S-W permet à la fois d'extrapoler et d'interpoler une courbe des taux ; l'extrapolation n'est pas faite sur les taux spot mais sur les taux forwards. Si l'on considère des maturités manquantes avant le LLP (Last Liquid Point), la méthode les calculera.

L'extrapolation se fait à partir du LLP, et converge en taux forward vers l'ultimate forward rate (UFR) en un nombre défini d'années.

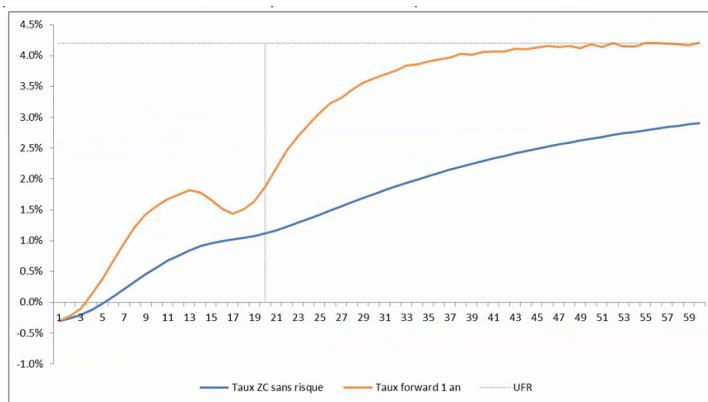
Les inputs de la méthodes sont soit des taux couponnés, soit des zéro-coupon, la méthode produira les facteurs d'actualisation.

Cette méthode fournit une courbe passant par l'intégralité des points renseignés en input (parfois au détriment de la dérivabilité).

En conclusion, on construit donc la courbe risque neutre en partant des taux swaps (les plus liquides), on en déduit l'ajustement pour risque de crédit (pour se mettre sur le swap avec une jambe flottante la plus minimaliste en terme de quantification du risque possible), puis on extrapole et on obtient une courbe des taux.

3.2.4 Bilan

La courbe de référence sans risque se déduit à partir des taux swap, corrigés du risque de défaut résiduel, découponnés et interpolés en forward :



Avant le point 20, la courbe en bleu représente les taux swaps corrigés du CRA et découponné (ce sont donc des valeurs issues du marché). La courbe jaune est la courbe des taux forward, qui sont calculés à partir des taux swaps : par exemple pour calculer le taux forward au point 20, on regarde l'évolution des taux swaps entre 19 et 20 ans.

A partir du point 20, l'idée de Smith-Wilson est de faire converger la courbe des taux forward vers l'UFR (donc de 1.75% à 4.25%). Comme il y a une bijection entre la courbe des taux swaps et la courbe des taux forward, on peut recalculer la suite de la courbe des taux swaps à partir de la courbe des taux forward. En résumé, pour calculer les taux swaps, on part de la courbe bleue pour avoir la courbe jaune, puis on extrapole pour avoir la suite de la courbe bleue.

3.3 Le rendement d'un actif

On définit le rendement d'un actif comme le taux d'actualisation unique IRR qui permet de retrouver la valeur de marché de l'actif :

$$VM = \sum_{i=1}^M \frac{CF_i^{\text{actif}}}{(1 + IRR)^i}$$

Attention à ne pas confondre le taux de coupon d'un actif avec son rendement !

Exemple : Obligation Pernod Ricard, de maturité 2024 et de taux de coupon 2.125%, est cotée 108% au 31/12/2016 a un rendement de 1.1%. Or, on constate que le taux sans risque pour une maturité de 8 ans est de 0.341%. Intuitivement, on estime la marge pour risque à $1.1\% - 0.341\% = 0.76\%$. Le marché fait payer à Pernod Ricard 0.76% de plus que le taux sans risque parce qu'il y a un risque qu'il fasse défaut. En conclusion, on calcule le rendement d'une obligation, on la compare au taux sans risque, la différence est le spread, ou marge pour risque. Plus le spread est élevé, plus la vision du risque lié à cette obligation est élevée.

3.4 La marge pour risque

On définit la marge pour risque, ou spread, la prime de risque sur le taux d'actualisation sans risque qui permet d'obtenir la valeur de marché :

$$VM = \sum_{i=1}^M \frac{CF_i^{\text{actif}}}{(1 + r_i + \text{spread})^i}$$

Dans le cas de l'obligation Pernod Ricard, on obtient 0.75%. Il faut noter que c'est une convention de pricing, il existe d'autres approches pour mesurer le risque d'une obligation.

Le spread mesure deux éléments : le risque défaut de l'émetteur (soit qu'il ne paie ni les coupons ni le remboursement), et le risque d'illiquidité de l'obligation, c'est-à-dire l'impossibilité du détenteur de vendre l'obligation sur les marchés. Par exemple si j'ai une obligation que je cherche à vendre à 100€, mais personne veut l'acheter à ce prix, je vais baisser mon prix à 90€ par exemple et je vais peut-être réussir à la vendre. Si je trouve un acheteur à ce prix, ça veut dire que son prix vaut bien 90 et non pas 100, et je vais donc corriger la valeur de marché en augmentant le spread (on augmente donc le spread pour pouvoir la vendre).

3.5 Le traitement du risque

Dans les projections risque-neutres, il est nécessaire d'avoir la valeur actualisée des flux égale à la valeur de marché (Market Consistency) et le rendement des obligations égal au taux sans risque de maturité équivalente.

Deux traitements existent pour retraitier les caractéristiques de l'obligation pour qu'elle soit compatible avec l'univers risque-neutre : la risque-neutralisation ou la projection des spreads et des défauts.

La risque neutralisation consiste à annuler le spread en modifiant autre chose : on ne pas bouger R_i puisqu'on est risque-neutre, on ne peut pas changer les valeurs de marchés car on est market consistent, donc la seule chose que l'on peut moduler est les cash flow d'actifs. On modifie le remboursement et/ou les coupons de telle manière à obtenir :

$$VM = \sum_{i=1}^M \frac{CF_i^*}{(1 + r_i)^i}$$

et donc considérer un spread à 0. On considère que l'émetteur a immédiatement fait défaut d'une partie de l'obligation.

Dans notre exemple précédent, le 0.75% représentait la probabilité que l'émetteur fasse défaut. Ici, on considère qu'il a fait défaut tout de suite (partiellement).

Simon, une autre solution consiste à modifier les cash-flow petit à petit dans le temps en projetant spreads et défauts, de manière cohérente (on ajoute un élément compensateur au numérateur qui est la probabilité de défaut), et on obtient la formule suivante :

$$VM = \sum_{i=1}^M \frac{CF_i \times (1 - def_i)}{(1 + r_i + \text{spread})^i}$$

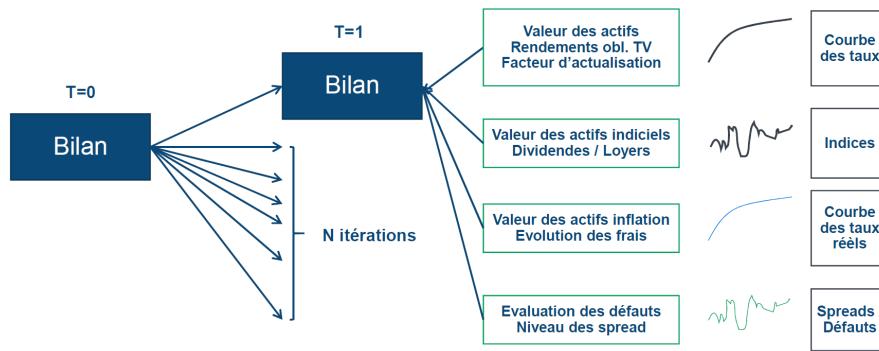
Pour être risque-neutre, market consistent, ..., si on veut conserver la notion de spread à l'actualisation, il faut compenser par l'introduction d'un taux de défaut prospectif dans la projection de flux d'actifs.

3.6 Les GSE

Dans notre univers de valorisation, on utilise la méthode MC pour calculer les valeurs qui vont à l'actionnaire et les valeurs qui vont à l'assuré, car dans notre contrat de passif, sont présentes des options financières cachées que l'on ne peut pas valoriser de manières différentes. On s'est donné un cadre pour valoriser ces options (risque neutre, etc) et on a vu comme on va projeter les actifs dans ce cadre de valorisation.

Il faut ensuite projeter ces prix dans toutes les trajectoires données par MC, et on projette à l'aide scénario économique. Ces GSE vont générer les éléments nécessaires à la valorisation et à la projection des actifs, et à l'actualisation des flux de passif.

Afin de projeter le rendement des portefeuilles d'actifs, et ainsi déterminer la participation aux bénéfices reversée aux assurés, il est nécessaire d'estimer de manière stochastique un certain nombre d'éléments.



Pour calculer le bilan sur les n itérations, on va devoir calculer des rendements d'actifs, des valeurs de marché, des flux et tout actualiser, et on utilise des courbes des taux, des indices de marchés, des courbes de taux réels pour avoir de l'inflation, et les couples spread/défauts qui vont être projetés pour chacun des actifs qui ont une prime de risque déjà tarifée dans sa valeur. Pour cela, on utilise un outil appelé générateur de scénario économique.

3.7 Les modèles de taux

Les ESG permettent de construire des courbes des taux à chaque pas de temps et pour un nombre défini d'itération. Il existe 3 grandes familles de modèle de diffusion :

- Les modèles de taux court, qui est directement modélisé. Par exemple, le modèle de Vasicek :

$$dr(t) = a(b - r(t))dt + \sigma dW^Q(t)$$

Pour chacune des simulations, il y a un phénomène de retour à la moyenne et un aléa.

- Les modèles fondés sur l'absence d'opportunité d'arbitrage où l'on modélise les prix ZC. Par exemple, les modèles de Heath-Jarrow-Morton :

$$dP(t, T) = P(t, T)(r(t)dt + \Gamma_\Theta(t, T)dW^Q(t))$$

On fait évoluer les prix ZC, centrés sur le taux sans risque, et avec une structure de volatilité représentée par le brownien.

- Les modèles de marché, comme le Libor Market Model, qui est basé sur une projection des taux forward :

$$dF_k(t) = \sigma_\Theta^k(t)F_k(t)dW^{Q^{T_{k+1}}}(t)$$

Dans ce modèle, W est un mouvement brownien sous la probabilité forward neutre associée à la matyrité T_{k+1} . Pour les changements de numéraire, cf cours de mathématiques financières.

Pourquoi fait-on des modèles de taux ? Pour obtenir des courbes des taux, pour permettre de valoriser des actifs financiers, qui vont nous permettre de déterminer des rendement d'actifs et donc des prix d'engagements de passif, et donc des valeurs de fonds propres par différence.

3.8 Les modèles indicuels

Pour projeter les actifs indicuels dans un univers risque neutre et market consistent, il existe deux modèles qui sont largement utilisés :

- Le modèle de Black & Scholes à volatilité déterministe (TVDV), où l'indice suite un processus log-normal :

$$dS(t) = S(t)(r(t)dt + \sigma_t dW^Q(t))$$

La variation est centrée sur le taux sans risque, plus une structure de volatilité fois un aléa.

- Le modèle à saut de type SVJD, qui introduit une volatilité stochastique ainsi qu'un processus de saut dans la diffusion :

$$dS(t) = S(t)((r(t) - \lambda\mu_J)dt + \sigma_t dW(t) + J_t dN(t))$$

où $J_t dN(t)$ est un processus de poisson représentant les sauts LN

$$d\sigma^2(t) = k(\theta - \sigma(t))dt + \sigma^\nu \sigma(t)dW^\nu(t)$$

$$d < dW(t)|dW^\nu(t) > = \rho dt$$

La plupart des approches en pratique utilise l'un de ces deux modèles, bien que l'un soit très simple (B&S) et l'autre très compliqué.

3.9 Vérifier la cohérence des scénarios

Il est très important de vérifier que le modèle est bien calibré, si ce n'est pas le cas on peut avoir des écarts de l'ordre de quelques points de pourcentage ce qui peut mener à des montants colossaux.

Pour vérifier la risque neutralité des scénarios économiques, on met en place des tests de martingalité sur les scénarios :

On vérifie tout d'abord que les déflateurs sont bien centrés sur la chronique des prix ZC initiaux, c'est-à-dire on actualise en moyenne au taux sans risque :

$$E^Q(D(t)) = P_n(0, t)$$

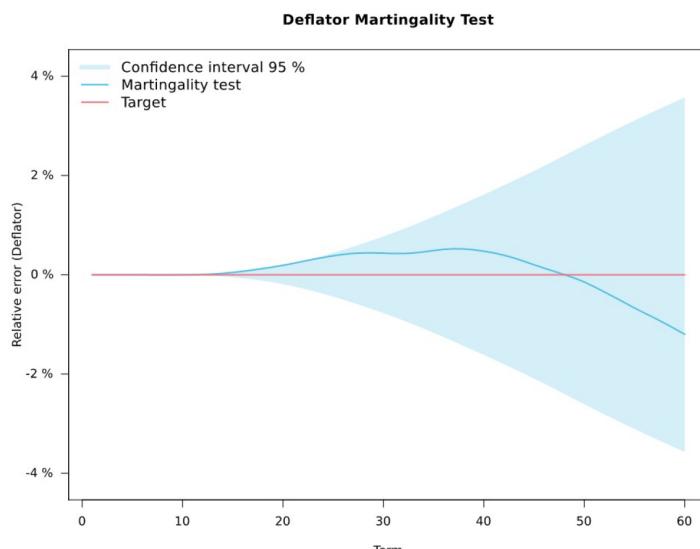
Ensuite, on vérifie que toute stratégie de taux de maturité M revient à avoir investi directement dans un ZC de maturité M (critères RN et AOA). Dit autrement, on vérifie que n'importe quelle stratégie à l'instant t et de maturité m revient au même qu'acheter à $t = 0$ un actif d'une maturité $t + m$:

$$\forall m \in [|1, M|], E^Q(D(t)P_n(t, t + m)) = P_n(0, t + m)$$

Enfin, il convient de vérifier qu'en moyenne, les actifs indicuels ont rapporté le taux sans risque :

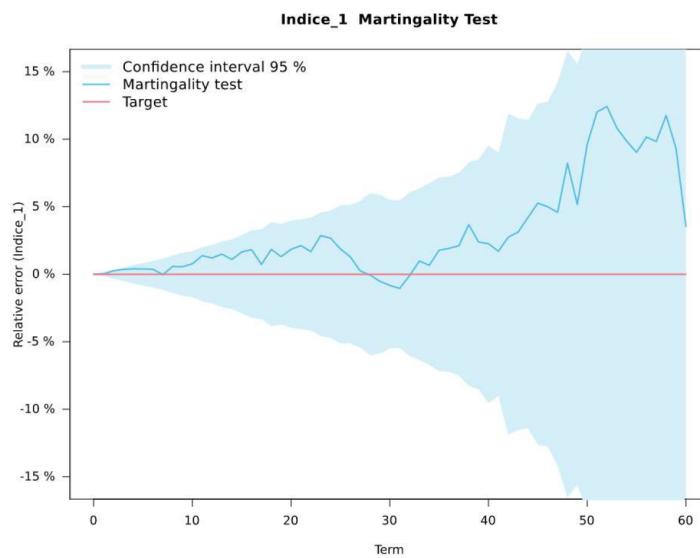
$$E^Q(D(t)S(t)) = S(0)$$

Test de martingalité déflateur sur Milliman CHESS :



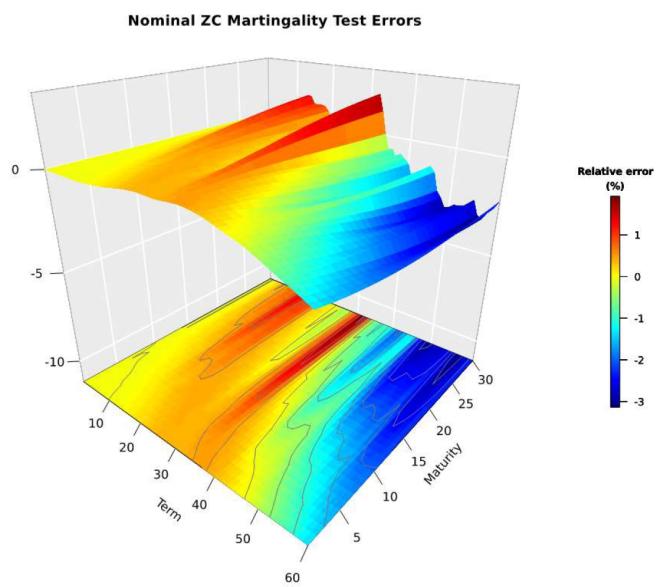
Sur le test déflateur, on peut dire qu'on est dans l'intervalle de confiance, donc nos tables sont à peu près fiables à 95%.

Test de martingalité action sur Milliman CHESS :



De la même manière on peut valider ce scénario économique.

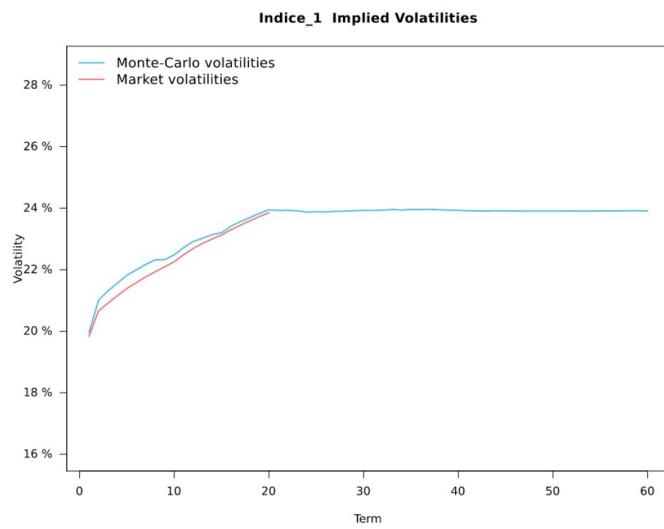
Test de martingalité PZC sur Milliman CHESS :



Sur les prix ZC, on peut le faire par maturité et par pas de temps et on obtient alors des surfaces. Les nappes d'intervalle de confiance ne sont pas représentées sur ce graphique.

Ces tests permettent de vérifier la risque neutralité et l'AOA.

Pour vérifier la market consistency des scénarios économiques, on s'assure que les volatilités recalculés à partir des scénarios sont cohérentes avec les volatilités de marché. On prend des actifs plus complexes (des options par exemple) pour vérifier qu'on est capable de reproduire les prix de ces options (prix ou volatilité implicite, peu importe).



Chapitre 4

Les modèles ALM

L'objectif de ce cours est de voir comment on modélise les cash-flows dans le simulations, de comprendre les enjeux d'un modèle ALM ainsi que son architecture.

On verra ensuite les limites de ce modèle.

Le TD3 traite de l'aspect risque-neutre et stochastique, ainsi que l'utilisation de la formule de rachat dynamique.

4.1 Indicateurs ALM

Le calcul des postes du bilan économique doit se faire sous la proba risque-neutre, en AOA et dans un univers market-consistent.

En plus de ça, le référentiel solvabilité 2 impose l'utilisation d'hypothèses Best-estimate dans le calcul des provisions : ça doit être au plus proche de la réalité. Le régulateur et le superviseur font très attention à ce que les hypothèses utilisées soient au plus juste de ce qui a été constatée. On ne parle plus ici de l'univers économique, mais en particulier des autres hypothèses (taux de rachat, sinistralité, ...). L'ACPR ne veut pas forcément des hypothèses trop prudentes, mais veut la meilleure estimation. (Cela est valable également dans le cadre d'IFRS 17). Pour obtenir une information la plus faible possible, on utilise des données historiques (observation de la sinistralité, calibration des hypothèses de rachat, construction des stratégies d'allocation d'actifs). Il faut que les modèles soient au plus proche de la pratique historique des assureurs.

A partir de ça, on remarque que le best-estimate est une espérance sous une probabilité croisée, à la fois historique et risque-neutre :

$$BEL = E^{\mathbb{Q} \times \mathbb{P}} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} D_i \times CF_i \right)$$

Le facteur d'actualisation est une hypothèse économique, donc on va se référer à la probabilité risque-neutre. Les cash-flows dépendent d'une part des revalorisations futures donc en lien avec l'environnement économique, donc ils vont être impactés par la proba risque-neutre, et d'autre part d'une volonté d'avoir la meilleure estimation possible, donc ils vont également être impactés par la proba historique.

Avec Monte-Carlo, on peut estimer le BEL :

$$BEL = \frac{1}{N} \sum_{S=1}^N \sum_{i=1}^{+\infty} D_i^S \times CF_i^S$$

Chaque flux est actualisé avec son déflateur, de sa simulation S et de son pas de temps i .

Pour la VIF, c'est exactement la même chose, mais en remplaçant les cash-flows assurés par les cash-flows assureurs :

$$VIF = E^{\mathbb{Q} \times \mathbb{P}} \left(\sum_{i=1}^{+\infty} D_i \times rsultat_i \right)$$

4.2 Présentation

Un modèle ALM est un outil informatique qui permet de projeter des flux de trésorerie et des mouvements comptables d'une institution financière. On en trouve dans toutes les institutions financières (banque, assurance, caisse de retraite, etc). Ce modèle va modéliser et projeter :

- L'actif de l'entité (dans un banque par exemple, on y trouve les crédits souscrits par les clients) : valeur de marché, valeur comptable, flux ;
- Son passif (dans une banque par exemple, on trouve au passif les comptes courants des clients) : primes, prestations/sinistres, rachats, provisions, frais ;
- La stratégie financière : allocation d'actif, achats/ventes de titre, règles d'investissement
- La politique de revalorisation : taux servi, gestion de la PPE (réserve mise de côté pour rémunérer les contrats futurs, pouvant être soumise à certaines règles), PB minimum réglementaire ;
- Les fonds propres de l'entreprise : résultats, dividendes, capitaux, titres subordonnés

La banque va utiliser l'argent des comptes courants (qui sont rarement rémunérés car c'est de l'argent à court terme) pour prêter aux gens qui souhaitent emprunter sur du long terme : c'est ce qu'on appelle la transformation, c'est ce qui lui permet d'obtenir une rémunération. Cette gestion des flux est de l'ALM, c'est à peu près le même système dans une société d'assurance et une banque.

Les modèles peuvent être utilisés en déterministe (sur une trajectoire) ou en stochastique (sur plusieurs trajectoires), et en univers risque-neutre (pour répondre aux exigences comptables, prudentielles, etc) et/ou réel en fonction de l'étude à réaliser. En ALM, il est intéressant de se placer dans des univers différents (des univers où on a des primes de risque par exemple, cad pas en univers risque-neutre) pour essayer d'observer des écarts-types, quantiles qui sont également des indicateurs pertinents.

Les approches et les outils sont divers, mais permettent toujours d'obtenir les éléments ci-dessus.

4.3 Les usages et usagers

Equipes	Travaux
ALM	<ul style="list-style-type: none"> • EV / VIF / Valorisations • BEL / NAV • Gaps actifs / Passif • SCR / Capital économique
Actuariat / Technique	<ul style="list-style-type: none"> • Tarification • Provisionnement
Pilotage	<ul style="list-style-type: none"> • Rentabilité • Budget • ORSA
Investissements	<ul style="list-style-type: none"> • Rendement • Allocation d'actif • Couvertures

Les modèles ALM sont aussi utilisés par des équipes Actuariat ou des équipes techniques pour faire de la tarification ou du provisionnement. Pour le pilotage comptable d'une entreprise, on utilise des modèles ALM pour estimer la rentabilité de l'entreprise, effectuer des projections budgétaires ou un ORSA. Sur les investissements, les modèles ALM peuvent servir pour estimer le rendement comptable ou le rendement économique futur de l'actif d'un portefeuille, faire des études d'allocation d'actif ou des études d'adéquation de couverture financière.

Les risques et les couvertures

Admettons qu'on ait un portefeuille d'actifs donnés avec des obligations, des actions, etc, si on veut se protéger contre une hausse des taux, on peut utiliser des swaps, des swaptions (plus efficaces que les swaps puisque ça coutera moins cher), des cap (call sur taux d'intérêt), des futures (donnent l'obligation d'achat à une date future à un prix déterminé d'un actif : si on vend un future sur taux d'intérêt, on s'engage à vendre 100 dans 3 mois une obligation, en cas de hausse des taux, l'obligation vaudra 90).

Si on veut se protéger contre une baisse des marchés actions, on peut utiliser des valeurs refuges (comme le bitcoin sur mars 2020), des puts, ou encore mettre en place des stratégies long-short (se mettre vendeur de certaines positions actions pour gagner en cas de baisse des marchés actions).

Si on veut se protéger contre de la volatilité (plus une option est volatile, plus elle va coûter chère), on peut se mettre en jambe variable, ou de manière générale acheter n'importe quel dérivé qui va gagner de la valeur en cas de hausse de volatilité. Il existe également des indices de volatilité : la valeur de l'indice est la volatilité, donc plus la volatilité augmente, plus on gagne de l'argent (par exemple le VSTOXX 360).

Risque	Couvertures
Hausse des taux • Moins values à l'actif • Rachats car inertie des rendements	• Swap/Swaption • Cap • Bond Future (vente)
Baisse des taux • Dilution des rendements • Rachats	• Floor • Bond Future (achat)
Baisse des actions	• Put • Future
Spreads / Défaits • Moins values à l'actif	• CDS • Indice Spread (e.g. Iboxx)
Volatilité • Hausse du coût des options	• Indice volatilité (e.g. Vstoxx) • Corridor • Future

4.4 Les inputs

Alimenter en données un modèle, de manière cohérente avec les techniques de projection, est déjà un challenge :

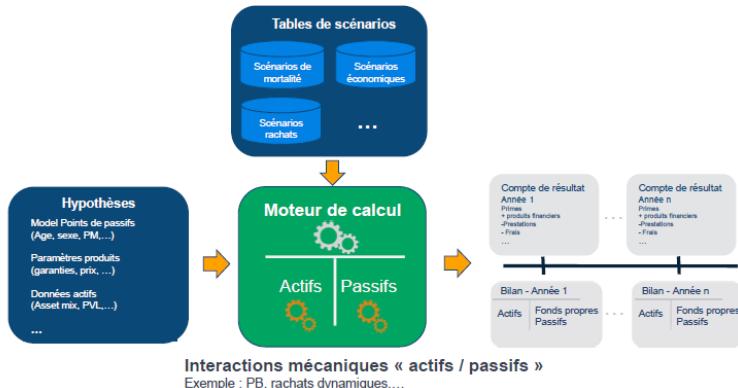
- Les tables de scénarios : économiques, mortalité, rachats ;
- Les Model Points d'actif : pour chaque titre, VM, VNC, rendement, maturité, périodicité des flux, etc...
- L'allocation d'actif cible ;
- Les Model Points de passif : pour chaque contrat, PM, prime, âge, taux garanti...
- Les caractéristiques des produits : chargements, commissionnement, frais, rétrocessions..
- Le niveau des provisions générales : PRE, PGG, RC...
- Les données historiques potentiellement utilisées dans le modèle ;
- Le paramétrage des lois comportementales (rachats, revalorisations, stratégie financière...) ;
- Les informations réglementaires : taux d'impôts, règle de PB minimum, condition de PRE.
- ...

En effet, on va projeter le bilan d'une compagnie d'assurance, et pour cela il nous faut des informations sur chacun des postes du bilan ce qui requiert une quantité très importante de données.

La maille de projection des hypothèses peut avoir un impact très significatif sur les résultats obtenus (données agrégées ou en ligne à ligne).

4.5 Schéma

un modèle prend en entrée des inputs et des scénarios, puis restitue les résultats issus des mécaniques modélisées :



Le modèle va souvent gérer l'actif et le passif un peu indépendamment l'un de l'autre, et va avoir une surcouche pour gérer les interactions entre les deux (possiblement dans un autre service).

4.6 Les modèles et les entités

Il existe plusieurs plateformes de modélisation. En France, on utilise surtout :

- Prophet, édité par Sungard ;
- MoSes, édité par Willis Towers Watson ;

- Addactis Modelling, édité par Addactis ;
- DEVent (SunRise), édité par Dynascys / Axa ;
- MatLab, Excel, SAS...

A l'international, MG-ALFA, édité par Milliman, est un outil très répandu.

Un peu moins de la moitié des acteurs utilise la méthode du flexing, tandis que les autres sont en approche ALM directe.

4.6.1 Approche directe ou Flexing

L'approche directe est une mécanique un peu intuitive, on connaît chacune des mécaniques usuelles d'un actif et on les projette telles quelles (l'actif verse des coupons, le passif va avoir son rachat, son décès, donc on modélise tout individuellement) au sein d'un même modèle.

Les mécaniques ALM peuvent être modélisées directement, on projetant les actifs et les passifs, à chaque pas de temps, et au sein d'un même modèle.

Le Flexing propose une approche différente :

- Cela consiste à projeter le passif jusqu'à maturité d'une part, sans prise en compte d'une revalorisation autre que celle garantie. Ces flux sont ensuite agrégés.
- Ensuite, un second modèle va projeter l'actif et ajuster les flux de passif issus du premier modèle, en tenant compte de la revalorisation.

Cela consiste à projeter tout ce qui est déterministe d'une part (tout ce qui ne dépend pas des conditions économiques) puis à l'agréger (par exemple on projette tous les CF de passif en considérant qu'il n'y a pas de revalorisation, puis on les agrège). Ensuite on projette les actifs (rendement financier) dans chacune des simulations et on en déduit la revalorisation de la chronique de passif.

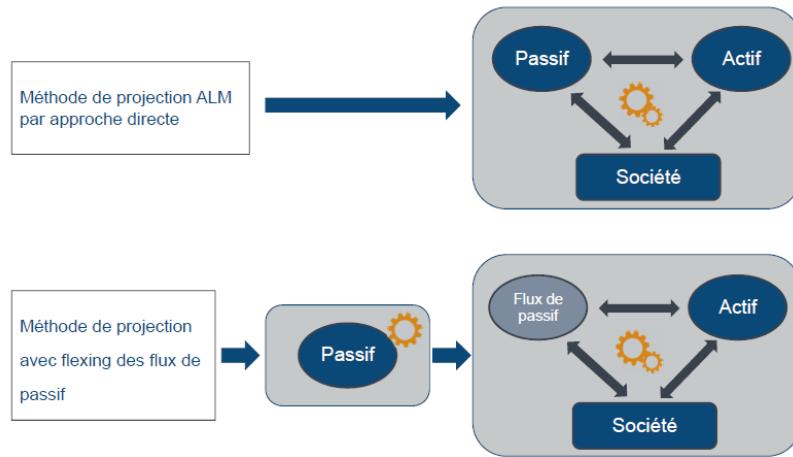
Par exemple, si on a un contrat sans aucune revalorisation, on va lui payer 100 pendant les prochaines années donc les cash-flows sont tous de 100. Si on revalorise la première année de 1%, les CF vont devenir 101 : il y a une règle de proportionnalité. On n'est pas obligé de calculer la mécanique qui fait avoir des CF de 100 à chacune des simulations puisqu'on sait qu'il y a une histoire de proportionnalité : c'est sur ce postulat que repose le flexing. Le flexing consiste à tout projeter, puis ne jouer que sur la proportionnalité en fonction du rendement de l'actif.

Approche directe	Flexing
- Temps de calculs long	+ Très rapide
+ Parfaite compréhension du code et de la mécanique	- Mécanismes ALM moins abordables
+ même maille de projection des passif dans toute la projection	- Pas d'analyse à une maille fine au niveau du passif
- Nécessité d'agréger les données	+ projection au TMG police par police

En faisant du flexing, on va grandement accélérer les calculs puisque tout ce qui est proportionnel n'est calculé qu'une seule fois, et ensuite on fait des produits en croix en fonction du rendement attendu par chacune des simulations. En revanche en calcul direct, on calcule tous les flux dans chacune des simulations.

En revanche, les mécanismes ALM sont masqués sous des produits en croix, et donc moins faciles à lire. Pour une police donnée, on n'aura pas toujours la possibilité d'avoir une maille d'analyse puisqu'on a fait une agrégation avant d'ajouter les hypothèses économiques.

Pour résumer les deux méthodes :



Principe du flexing

Le flexing repose sur le fait que les interactions Actif-Passif se font exclusivement par l'intermédiaire de deux mécanismes : la participation aux bénéfices et le comportement dynamique des assurés (rachats dynamiques, arbitrages, versements).

Concernant la participation aux bénéfices : pour chaque période et chaque trajectoire :

- Définition d'un taux de PB cible (par exemple, le taux sans risque de maturité 10 ans).
- Selon la production financière de la période, incorporation d'un taux de PB compris entre 0 et le taux de PB cible.

Pour les rachats dynamiques (comportement dynamique le plus souvent modélisé) : pour chaque période et chaque trajectoire :

- Comparaison du taux servi à la période précédente avec un taux de référence (par ex., un taux basé sur l'historique du TME).
- Si la différence entre le taux servi et le taux de référence dépasse un certain seuil, déclenchement des rachats dynamiques (qui viennent s'ajouter aux rachats structurels).

Etapes du flexing

Constitution de poches de passif (groupes de polices) homogènes au niveau de la clause de PB et des paramètres intervenant dans la clause de PB (TMG, chargements sur encours).

Pour chacune de ces poches, génération d'une table de cash-flows à l'aide d'un modèle classique de projection des passifs (Moses, Prophet, ...).

Pour chaque poche, la table contient le déroulé des variables suivantes :

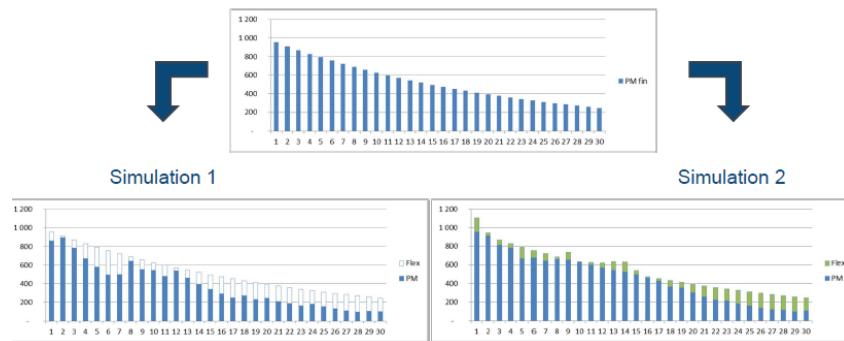
- PM, Nombre de polices
- Prestations par nature (décès, rachats, maturités, ...)
- Intérêts crédités ...

Incorporation de ces flux de passif, non revalorisés, dans le modèle ALM.

Pour chaque simulation et chaque période, ajustement (flexing) de ces flux à l'aide de « ratios de flexing » pour tenir compte de la participation aux bénéfices, et du comportement dynamique des assurés qui sont calculés dans le modèle ALM et fonction de l'actif.

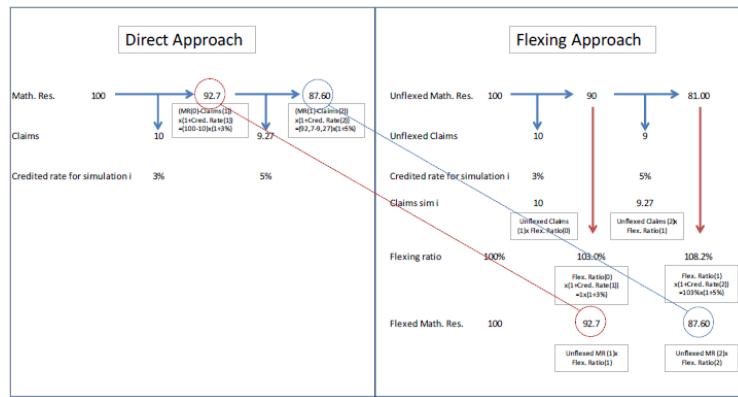
Illustration du flexing

A partir d'une chronique de référence des CF de passif, et en fonction des rendements d'actif de chacune des simulations et des pas de temps, on va venir modifier la chronique :



Dans ce cas, on calcule 30 CF, puis dans chacune des simulations on applique 30 produits en croix pour avoir les CF revalorisés.

Les deux approches renvoient des résultats équivalents :



Le flexing introduit des formules un peu plus complexes à appréhender mais produit exactement les mêmes résultats en gagnant du temps.

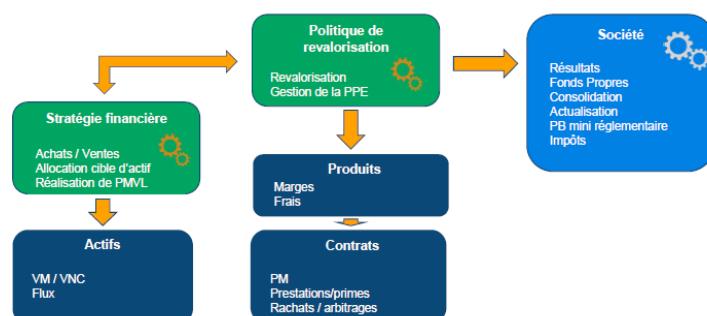
4.6.2 Temps de calcul

Le flexing permet, dans la plupart des situations, d'améliorer significativement le temps de calcul (exemple indicatif, 32 workers, 1000 simulations) :

Approche directe	Flexing
Pas de simulation de passif	Simulation de passif : 1min30
Simulation 1 : 1min30 ... Simulation 1000 : 1min30	Simulation 1 : 15sec ... Simulation 1000 : 15sec
Total : $1\text{min}30 \times 1000 / 32 = 47\text{min}$	Total : $1\text{min}30 + 0.25 \times 1000 / 32 = 10\text{min}$

4.6.3 Architecture des modèles

Les modèles ont souvent des modules spécifiques liés aux stratégies et politiques, qui impactent le cours de la projection.





Il y a souvent un bloc qui calcule les valeurs des actifs et les flux, un bloc qui calcule les flux des contrats (éventuellement en faisant des agrégations au niveau des produits), et les blocs au-dessus interviennent après : c'est le cas de la stratégie financière qui va gérer quelle ligne d'actif on achète/vend à chaque pas de temps, qui fait éventuellement des réalisations de plus-value latente pour piloter le résultat financier de l'entreprise. On trouve également un module qui fait des revalorisations de contrat en utilisant les résultats de la stratégie financière pour en déduire les taux de rendement d'actifs et donc les revalorisations de contrats. Enfin on a un dernier module pour tout agréger.

En résumé, un modèle c'est : d'une part un actif, d'une part un passif, des interactions entre les deux qui sont codées. Il y a deux manières de projeter tout cela, à savoir l'approche directe (chacun des flux est modéliser dans toutes les simulations) et le flexing (qui consiste à modéliser une trajectoire centrale qui va servir de référence, puis faire une modification de ces flux pour chacune des simulations).

Chapitre 5

Modélisation ALM

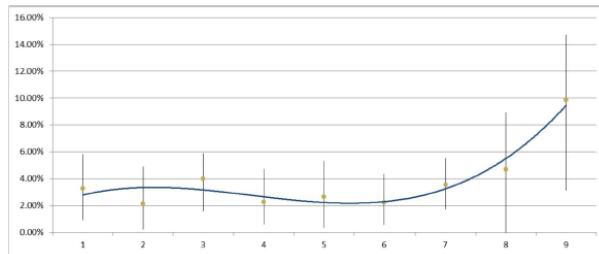
5.1 Les tables historiques

Les projections des prestations, des rachats ou des arbitrages doivent être cohérentes avec les flux constatés historiquement.

En réalité, la probabilité historique est un peu un mensonge puisqu'on l'utilise en amont des modèles ; on ne projette pas des choses sous la probabilité historique, ce sont les hypothèses utilisées en amont qui sont déjà des moyennes par exemple.

La mortalité est souvent projetée à l'aide de tables réglementaires ou d'expérience. Certains acteurs utilisent également des modèles stochastiques (Lee-Carter...) mais dans de rares cas, quand la mortalité a une influence très notable sur le cadencement des sinistres (produits très particuliers comme les *variable annuities* ou les produits de garantie plancher particulier à l'étranger).

Les rachats font souvent l'objet d'une projection par ancienneté pour des raisons fiscales. On regarde dans notre historique quels ont été les taux de rachat constatés sur les contrats qui avait une ancienneté de T années, et ça nous donne une boîte à moustaches.



On essaie ensuite de faire correspondre une loi de rachat par ancienneté qui statistiquement est raisonnable par rapport à la boîte à moustaches de la dimension historique.

Par exemple, chain-ladder repose sur le même principe puisqu'on fait un produit en croix sur une moyenne de sinistralité (on regarde l'historique, on calcule une statistique sur cet historique, et on l'utilise pour nos projections).

5.2 Les rachats conjoncturels

La deuxième option financière que l'on avait défini dans le cours précédent est les rachats conjoncturels. Ils reposent sur le principe qu'un épargnant, s'il n'est pas satisfait de la rémunération qu'on lui propose, il va aller voir chez le concurrent, et éventuellement racheter son contrat (s'en aller avec son épargne). Il a été montré que les assurés rachètent d'une manière corrélée avec la situation économique.

En ALM, on choisit de modéliser ces comportements conjoncturels relativement à la modélisation d'une satisfaction estimée des assurés, modélisée par le(s) précédent(s) taux qu'on a octroyé aux assurés et le(s) taux que pourraient leur servir la concurrence. En effet, en raison du portefeuille d'actif, investi sur de longues maturités, il existe une inertie de rendement au sein de l'actif des assureurs.

Le taux concurrentiel peut prendre en compte plusieurs éléments :

Satisfaction = Taux servi – taux concurrentiel	
Moyenne X années des taux longs	Estimation du rendement des autres assureurs
Taux long année N	Estimation du rendement d'un nouvel assureur
Taux court année N	Rendement bancaire / Livret A
Rendement marché action	Rendement PEA / des produits UC

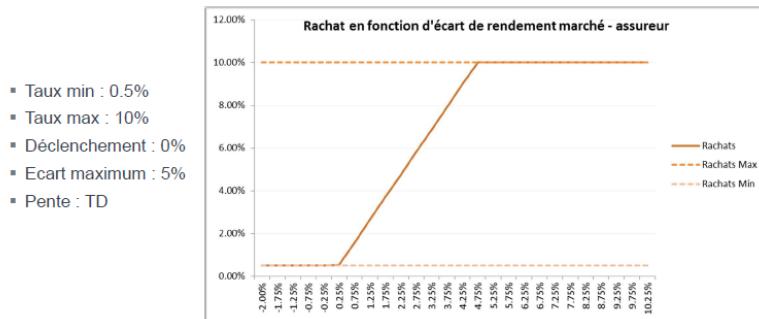
Pour avoir les taux que va donner la concurrence, on se base sur des estimations historiques : par exemple on prend un panier de rémunération passée des assureurs compétiteurs que l'on essaie de rapprocher aux rémunérations que l'on a offerte dans le passé avec des indicateurs que l'on va avoir dans les modèles ALM. Ca peut être une moyenne mobile des taux longs, les rendements du marché actions par exemple. On utilise ces indicateurs car de manière générale, un assureur va avoir un portefeuille obligataire qu'il a investi sur un laps de temps donné dans le passé, ce qui veut dire qu'il a bénéficié du taux obligataire des années n-2, n-3 et n-4 si il a constitué son portefeuille obligataire il y a 2 à 4 ans par exemple. Le rendement composite de ce portefeuille obligataire va être la moyenne mobile des taux longs ces années-là.

Si on cherche à estimer le rendement d'un nouvel assureur qui ouvrirait un fonds immédiatement sur le marché, qui va donc bénéficier des taux long terme de l'année du moment, on prendrait alors ce taux long.

Si on observe le taux court (entre 1 et 3 ans), c'est souvent le taux sur lequel un livret A ou un livret bancaire est indexé. Un liA peut être un concurrent de l'assurance-vie : si on regarde sur l'année 2020, certains assureurs ont servi 0,75% (très peu) alors qu'un liA propose entre 0,75 et 0,5% de rendement. A quoi bon ouvrir un contrat d'assurance vie si un liA rapporte la même chose ?

Le rendement des marchés actions peut aussi être utile si l'on souhaite modéliser ce qu'un PEA ou des unités de compte peuvent offrir comme rendement.

En considérant les paramètres suivants, on obtient la forme introduite dans le cours n°2 :



On peut ainsi construire des lois de rachat suivant la satisfaction client.

5.3 La revalorisation

Rappels :

- L'assureur ne peut pas donner moins que le TMG
- Contractuellement ou réglementairement, l'assureur doit distribuer X% des produits financiers
- L'assureur choisit de revaloriser immédiatement ou de doter la provision pour excédent
- Afin d'éviter les rachats dynamiques, l'assureur doit « battre le marché »

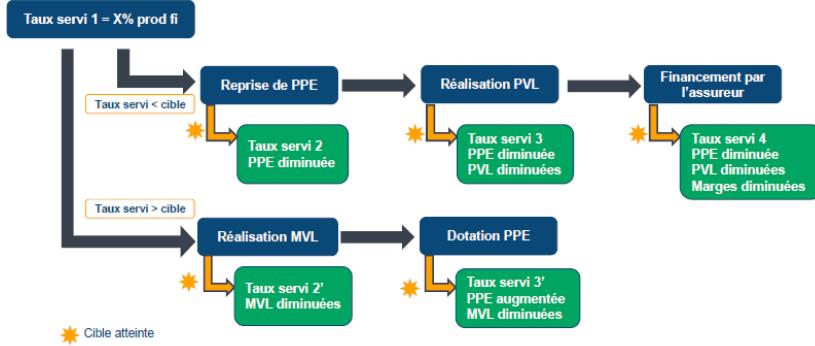
L'assureur se fixe une cible à atteindre (par exemple : le taux de marché). Ensuite, l'assureur peut moduler à la hausse le taux servi en :

- Reprenant de la provision pour excédent
- Réalisant des plus values (hors obligataires, car passent par la réserve de capitalisation)
- Diminuant ses marges financières (= en distribuant plus que X% des produits financiers)

Egalement, si X% des produits financiers sont supérieurs à la cible, l'assureur peut distribuer la cible, et doter la différence en PPE, ou bien réaliser des moins-values pour diminuer la distribution.

5.3.1 Algorithme de revalorisation

Sur la base des conditions précédemment définies, après avoir versé le TMG, on peut construire un algorithme :



En ALM, on modélise sur plusieurs dizaines d'années le comportement d'un assureur. Un assureur-vie ou une banque va fixer une rémunération à ses clients, et donc on construit des algorithmes, des arbres de décision afin de modéliser les futurs comportements des assureurs.

Ceci peut être fait en plusieurs étapes : par exemple on peut partir en se disant qu'on va simplement redistribuer x% de ma production financière. Mais peut-être que c'est en dessous d'une cible qu'on aurait pu se fixer pour satisfaire les assurés, auquel cas on peut essayer de relever le taux servi en reprenant de la provision pour participation (si l'on en a doté dans le passé). On peut également réaliser des plus-values latentes : si on vend un actif qui a un instant donné vaut plus sur le marché que ce que l'on avait réalisé donc nos comptes, on va réaliser un gain qui va augmenter les produits financiers et donc le taux que l'on va pouvoir servir.

En dernier recours, on peut aussi diminuer les marges que l'on fait sur le contrat.

C'est ce genre d'algorithme qui sont intégrés dans les modèles ALM, et qui ont in fine un impact très important sur la valeur actuelle des prestations futures (le BEL) ou la valeur actuelle des résultats futurs de l'assureur.

Par exemple, on peut ne jamais autoriser le modèle à abandonner les marges de l'assureur : peut être que les assurés ne seront pas satisfaits, mais ça devrait augmenter les résultats futurs, et donc la VIF. C'est un des cas sur lequel les gérants ALM se pose la question de savoir à partir de quand on doit abandonner des marges dans la modélisation.

5.4 Allocation d'actif

Les flux financiers impactent la trésorerie à chaque période, des algorithmes sont mis en place pour définir les réinvestissements/désinvestissements.

Il y a énormément de stratégies qui existent sur l'allocation d'actifs, et pour optimiser les rendements d'actifs observés dans les modèles ALM.

L'allocation cible peut être définie en valeur comptable ou en valeur de marché.

La stratégie d'investissement peut s'effectuer soit en flux, auquel cas seul le cash en fin de période est alloué de manière à atteindre la cible, soit en montant et dans ce cas le portefeuille est rebalancé en fin de période afin d'atteindre parfaitement la cible.

Les désinvestissements (trésorerie négative), peuvent s'effectuer au pro rata des classes d'actifs (on maintient donc l'allocation) ou par priorité (un ordre de classe d'actifs lesquels désinvestir est établi, souvent en fonction de leur liquidité).

D'autres algorithmes plus élaborés peuvent être mis en place.

Chapitre 6

Convergence

Cette partie consiste à étudier les limites de ces modèles : en effet il y a toujours des biais dans la conception il faut en être conscient.

6.1 Fuite économique dans le monde

Les modèles ALM récents contiennent plusieurs milliers de lignes de code, il peut arriver qu'une fuite de valeur économique survienne. Il faut donc considérer les erreurs humaines, dans ces milliers de lignes de code, il y aura forcément des coquilles.

Il faut s'assurer de la bonne prise en compte de la capitalisation de chacun des flux, en s'assurant du timing du versement (les flux tombent au jour près dans la vraie vie, dans les modèles parfois, et donc il faut être sûr de bien capitaliser l'argent relatif à ces flux pour bien tenir compte de la valeur temps de l'argent). A chaque flux financier projeté dans le modèle, il faut lui attribuer une valeur économique.

Lors de l'application des taux de rachats / décès / arbitrages, un soin doit être porté à l'application des taux sur les assiettes. Est-ce qu'on va prendre le parti d'affecter un ordre ou pas à l'occurrence de ces évènements ? Est-ce que tout arrive en même temps, ou est-ce qu'il y a un cadencement ? En effet, veut-on :

- PM fin = PM début x [1 – taux de rachat – taux de décès – taux d'arbitrage]
- PM fin = PM début x [1 – taux de rachat] x [1 – taux de décès] x [1 – taux d'arbitrage]

Aussi, les flux issus des actifs doivent être cohérents avec ceux considérés lors de la valorisation.

Ces points ne sont que des exemples courant conduisant à une sur ou sous-estimation de la richesse projetée.

6.2 Martingalité

En environnement risque-neutre, on va utiliser une technique MC et des scénarios économiques. Comme vu dans le TD précédent, les GSE ne sont pas parfaits. Dans la plupart des situations, on a donc :

$$E^{\mathbb{Q}}(D(t)S(t)) \neq S(0)$$

Dès lors, la valeur de marché des actifs ne peut pas être retrouvée à partir des flux des actifs :

$$MV \neq \frac{1}{N} \sum_{S=1}^N \sum_i i = 1^{+\infty} D_i^S \times CF_i^S$$

(C'est également valable sur la VIF et le BEL).

Néanmoins, l'approche peut être délicate à interpréter, notamment du fait des réinvestissements/désinvestissements qui peuvent être réalisés, on exprime le plus souvent l'écart de convergence à l'aide la VIF et du BEL.

Par exemple, si nos scénarios sont faux à 1% (l'espérance de la valeur actualisée de notre actif ne vaut pas 100 mais 101), ça ne semble pas important, mais on a 1% d'erreur sachant que le chiffre que l'on vient de produire sur la valeur du ptf représente 0,5% : on produit un chiffre dont l'intervalle de confiance, l'erreur possible vaut le double du montant auquel on aboutit. Notre rôle dans ce cas est de dire que la valeur donnée n'est qu'indicative puisqu'elle peut varier du simple au double.

6.3 Ecart de convergence

On cherche à quantifier la non-convergence de nos indicateurs, que l'on appelle l'écart de convergence :

$$EC = (VIF + BEL) - MV$$

C'est la différence entre la valeur que l'on projette pour l'assureur et la valeur que l'on projette pour les assurés, diminuée de la valeur initiale que l'on a dans notre portefeuille. Si tout est parfait, on avait dit qu'en espérance, l'écart de convergence était nul. En réalité, il ne vaut pas 0 et on le quantifie (on l'appelle écart de convergence ou fuite économique) et on essaie de l'analyser et de le répartir entre l'assureur et l'assuré.

En d'autres termes, c'est l'écart entre la richesse projetée et la richesse initiale, il regroupe les deux éléments de fuite vus précédemment.

Afin de s'assurer la projection du bon niveau de richesse, l'écart de convergence est le plus souvent réalisable entre la VIF et le BEL.

Suite à des remarques de l'ACPR, les assureurs réallouent systématiquement l'écart de convergence dans le sens d'une augmentation du BEL (pour pénaliser l'assureur) :

- Si $EC > 0$, c'est-à-dire trop de richesse est projetée, alors $BEL^{EC} = BEL$ et $VIF^{EC} = VIF - EC$.
- Si $EC < 0$, c'est-à-dire pas assez de richesse est considérée, alors $BEL^{EC} = BEL - EC$ et $VIF^{EC} = VIF$.

Si on sait qu'on a un erreur, l'ACPR veille à ce que cette erreur soit prise en compte en pénalisant l'assureur systématiquement.

6.4 Loi des grands nombres

La loi des grands nombres assure la convergence presque sûrement des indicateurs estimés avec leur espérance.

Néanmoins, cela nécessite un grand nombre de simulations, parfois trop pour être supportable opérationnellement.

Par exemple, pour un contrat, avec une garantie de capital et des rachats dynamiques, le BEL n'est stationnaire qu'à partir de 50 simulations :

