PROPOSITION DE CORRECTIONS

ANNALES TVE

Exercices

E4 ; E5 ; E6 ; E7 ; E8 ; E9 ;
E10 ; E12 ; E13 ; E14 ; E15 ; E16

PILOU, PIERRE, ALICIA, AYMERIC

Exercice 4

0_ $F(x) = \exp(-1/x) = F(a_n x + b_n)^n = \exp\left(-1/a_n x + b_n\right)^n$

ssi $\frac{1}{x} = \frac{n}{a_n x + b_n}$ ssi $a_n = n$ et $b_n = 0$

1_ $Y_{i+1} = \max(\alpha Y_i ; (1-\alpha) X_{i+1})$

$= \max(\alpha \max_{j \geq 0} (1-\alpha)\alpha^j X_{i-j} ; (1-\alpha) X_{i+1})$

$= (1-\alpha) \max(\alpha \max_{j\geq 0} \alpha^j X_{i-j} ; X_{i+1})$

$= (1-\alpha) \max(\max_{j \geq 0} \alpha^{j+1} X_{i-j} ; \alpha^{(-1)+1} X_{i-(-1)})$

$= (1-\alpha) \max_{j \geq -1} (\alpha^{j+1} X_{i-j})$

$= (1-\alpha) \max_{j\geq 0} (\alpha^j X_{i+1-j})$

$P(Y_i \leq y) = P[(1-\alpha) \max_{j\geq 0} (\alpha^j X_{i-j}) \leq y]$

$= P[\max_{j\geq 0} (\alpha^j X_{i-j}) \leq \frac{1}{1-\alpha} y]$

$= P\left[\bigcap_{j \geq 0} \left(\alpha^j X_{i-j} \leq \frac{1}{1-\alpha} y\right)\right]$

$= \prod_{j\geq 0} P\left[X_{i-j} \leq \frac{1}{(1-\alpha)\alpha^j} y\right]$

$= \exp\left\{ \frac{-1}{y} \underbrace{(1-\alpha) \sum_{j \geq 0} \alpha^j}_{=1} \right\}$

$= \exp\{-1/y\}$ donc $Y_i \sim \Phi_1$

3_ $\max(Y_i ; Y_{i+1}) = \max(Y_i ; \max(\alpha Y_i ; (1-\alpha) X_{i+1}))$

$\max(Y_i ; Y_{i+1}) = \max(Y_i ; (1-\alpha) X_{i+1})$

donc $\max\limits_{1 \leq i \leq n} (Y_i) = \max(\max\limits_{1 \leq i \leq n-1} (Y_i) ; Y_n)$

$= \max(\max\limits_{1\leq i \leq n-1} (Y_i) ; (1-\alpha) X_n)$

recurence sur $1 \leq i \leq n-i$ $= \max(Y_1 ; \max\limits_{2 \leq i \leq n} (1-\alpha) X_i)$

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n}(Y_i)\leq y\right)=\mathbb{P}\left(\max\left(Y_1\,;\,\max_{2\leq i\leq n}(1-\alpha)X_i\right)\leq y\right)$$

$$\underset{\text{INDEP}}{=}\mathbb{P}(Y_1<y)\prod_{i=2}^{n}\mathbb{P}\left(X_i\leq\frac{1}{1-\alpha}y\right)$$

$$=\exp\left\{\frac{-1}{y}\right\}\exp\left(-\frac{1-\alpha}{y}\right)^{n-1}$$

$$=\exp\left(-\left[1+(n-1)(1-\alpha)\right]/y\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\max_{1\leq i\leq n}(Y_i)\leq y\right)=\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n}(Y_i)\leq ny\right)\xrightarrow[n\to\infty]{}\exp\left(-1/y\right)^{\alpha-1}$$

Exercice 5

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & x > 0 \end{cases} \quad \text{Frechet}$$

1 – $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \sup\{x \in \mathbb{R} ; F(x) < 1\} = +\infty$.

2 – $\mathbb{P}(n^{-1/\alpha} M_n \leq x) = \mathbb{P}(M_n \leq x n^{1/\alpha}) = F(x n^{1/\alpha})^n = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \exp(-x^{\alpha}) & x > 0 \end{cases}$

donc $\exists a_n > 0, \exists b_n,\ \frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Phi_\alpha$

donc Φ_α est max-stable.

Exercice 6

$(X_i)_{1 \le i \le n}$ iid de fdr F

$M_n = \max(X_i)_{1\le i\le n}$ et $X_{(n)} \le \dots \le X_{(1)} := M_n$ $\quad B_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > x\}}$

1- $\{X_{(k)} \le x\} = \{\forall j \in [\![k;n]\!],\ X_{(j)} \le x\}$

$\{X_{(k)} \le x\} = \{\sum_{j=k}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{(j)} > x\}} = 0\}$

$\{X_{(k)} \le x\} = \{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{(j)} > x\}} < k\}$

2- $B_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > x\}} \sim \mathcal{B}(n; \mathbb{P}(X_i > x))$ par indépendance des indicatrices

donc $\mathbb{P}(X_{(k)} \le x) = \sum_{r=0}^{k-1} \binom{n}{r} [\bar{F}(x)]^r [F(x)]^{n-r}$

3- $\varphi_n(t; x) = \mathbb{E}(\exp(t B_n(x)))$

$= \sum_{r=0}^{n} \exp(tr)\, \mathbb{P}(B_n(x) = r)$

$= \sum_{r=0}^{n} \exp(tr) \binom{n}{r} \bar{F}(x)^r F(x)^{n-r}$

$= \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} [e^t \bar{F}(x)]^r F(x)^{n-r}$

$= [\bar{F}(x) e^t + F(x)]^n$ par Binome Newton.

4- $\exists u_n,\ \lim_{n\to\infty} n\, \mathbb{P}(X_1 > u_n) = \tau$

$\ln(\varphi_n(t; u_n)) = n \ln[\bar{F}(u_n) e^t + F(u_n)] = n \ln[1 + \bar{F}(u_n)(e^t - 1)]$.

$\ln(1+x) \underset{x\to 0}{=} x + o(x)$ donc $\ln(\varphi_n(t; u_n)) \underset{n\to\infty}{\sim} \underbrace{n \bar{F}(u_n)}_{\tau} (e^t - 1)$

donc $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(t; u_n) = \exp\{\tau(e^t - 1)\}$

5- Pour $N \sim \mathcal{P}(\tau)$

$\mathbb{E}(e^{tN}) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{tn} e^{-\tau} \frac{\tau^n}{n!} = e^{-\tau} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(e^t \tau)^n}{n!} = \exp\{\tau(e^t - 1)\}.$

6- La transformée de Laplace caractérise la loi.

$\exists a_n > 0, \exists b_n,\ \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\frac{X_{(1)} - b_n}{a_n} \le x\right) = \Lambda(x)$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_{(1)} \leq a_n x + b_n) = \Lambda(x)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(B_n(a_n x + b_n) = 0) = \Lambda(x)$$

$= e^{-\tau(x)}$ par la loi de Poisson donc $\tau(x) = -\ln \Lambda(x)$

$$\mathbb{P}(X_{(k)} \leq a_n x + b_n) = \mathbb{P}(B_n(a_n x + b_n) < k) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\tau(x)} \frac{\tau(x)^k}{k!}$$

et en particulier,

$$\mathbb{P}(X_{(2)} \leq a_n x + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-\tau(x)} - e^{-\tau(x)} \tau(x)$$

$$= \Lambda(x)\left[1 - \ln \Lambda(x)\right].$$

Exercice 7

1_ $\bar{F}^{n-1}(X_1) = \mathbb{P}(X > X_1)^{n-1} = \mathbb{P}\left[\bigcap_{i=1}^{n-1} (X > X_i)\right] = \mathbb{P}\left[\forall i \in [\![1; n-1]\!],\ X > X_i\right]$

$\bar{F}^{n-1}(X_1) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n-1} (X_i) < X\right) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n-1} (X_i) < \max_{1 \leq i \leq n-1} (X_i ; X)\right)$

Comme $(X_i)_{1 \leq i \leq n-1}$ iid et $X_n := X \perp\!\!\!\perp X_i)_{1 \leq i \leq n-1}$

alors $\mathbb{E}(\bar{F}^{n-1}(X_1)) = \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n-1} (X_i) < \max_{1 \leq i \leq n} (X_i)\right)$

$= \mathbb{P}(\theta_{n-1} < \theta_n)$ $\underline{\text{OK}}$

$= \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} (X_i) = X_n\right)$

$= \frac{1}{n}$ car $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ iid.

2_ $\mathbb{P}(X_L = y \mid X_1 = x) = \sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(X_k > y \mid X_1 = x, L = k)\, \mathbb{P}(L = k).$

$\mathbb{P}(X_k > y \mid X_1 = x, L = k)$

$= \mathbb{P}(X_k > y \mid X_1 = x,\ X_2 < x;\ X_3 < x, -;\ X_{k-1} < x;\ X_k > x)$

$= \mathbb{P}(X_k > y \mid X_k > x)$ car les $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ sont iid.

$= \dfrac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)}$

donc $\mathbb{P}(X_L = y \mid X_1 = x) = \dfrac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)} \cdot \underbrace{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbb{P}(L = k)}_{=1} = \dfrac{\bar{F}(y)}{\bar{F}(x)}.$

Exercice 8

$Y \sim GPD(\sigma; \xi)$

1 - $\xi > 0$ alors $\mathbb{P}(Y>y) = \left[1 + \frac{1}{\sigma}\xi y\right]^{-1/\xi}$ pour $y \in [0; +\infty[$

$\xi < 0$ alors $\mathbb{P}(Y>y) = \left[1 - \frac{1}{\sigma}(-\xi) y\right]^{+1/-\xi}$ pour $y \in [0; \frac{1}{\sigma}(-\xi)]$

$\xi = 0$ alors $\mathbb{P}(Y>y) = \exp(-y/\sigma)$ pour $y \in [0; +\infty[$ -

2 - $\xi = -1$ alors $\mathbb{P}(Y>y) = \left(1 - \frac{1}{\sigma}y\right) \mathbb{1}_{[0;\sigma]}(y)$

ou $\mathbb{P}(Y \leq y) = \frac{1}{\sigma} y \, \mathbb{1}_{[0;\sigma]}(y)$ donc $Y \sim \mathcal{U}[0;\sigma]$

$\xi = 0$ alors $Y \sim \mathcal{E}(1/\sigma)$ immédiat.

3 - $f(x) = \frac{d}{dx} P(Y < x) = \frac{1}{\sigma}\left[1 + \xi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi - 1}$

la densité ne permet pas une expression explicite de l'estimateur de vraisemblance maximale.

4 - $U \sim \mathcal{U}[0;1]$

$$\mathbb{P}\left(\sigma\left(\frac{U^{-\xi}-1}{\xi}\right) \leq x\right) = \mathbb{P}\left(U^{-\xi} - 1 \leq \xi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right) = \mathbb{P}\left(U \geq \left(1 + \xi\left(\frac{x}{\sigma}\right)\right)^{-1/\xi}\right)$$

donc si $U \sim \mathcal{U}[0;1]$

alors $\sigma\left(\frac{U^{-\xi}-1}{\xi}\right) \sim GPD(\sigma; \xi)$

Exercice 9

$(X_i)_{1\le i\le n}$ iid selon $\Phi_1(x) = \exp(-1/x)$ si $x \ge 0$.

$M_n^X = \max(X_i)_{1\le i\le n}$

0) $\dfrac{M_n^X - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Phi_1$ ssi $\begin{cases} a_n = n \\ b_n = 0 \end{cases}$

$$\mathbb{P}(M_n^X \le a_n x + b_n) = F(a_n x + b_n)^n = \left[\exp\left(-\frac{n}{a_n x + b_n}\right)\right] \longrightarrow \Phi_1(x)$$

1) $Y_n = \frac{1}{3}\max(X_n ; X_{n+1} ; X_{n+3})$

$$\mathbb{P}\left(\frac{Y_n}{3} \le x\right) = \mathbb{P}(Y_n \le 3x) = \Phi_1(3x)^3 = \exp(-1/3x)^3 = \Phi_1(x).$$

donc $Y_n \overset{\mathcal{L}}{=} \Phi_1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) $M_n^Y = \max(Y_i)_{1\le i\le n}$

$\dfrac{M_n^Y - b_n}{a_n} = \dfrac{1}{n} M_n^Y$

Il s'agit ici de la propriété maxstabilité.

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n^Y - b_n}{a_n} \le x\right) = \mathbb{P}(M_n^Y \le nx) = \Phi_1(nx)^n = \Phi_1(x).$$

3) Question bonus : Les dynamiques de dépassement de seuil

$\{i/n ; X_i > a_n x + b_n\}_{1\le i\le n} = \{i/n ; Y_i > a_n x + b_n\}_{1\le i\le n}$

est une loi de Poisson $\left(\lim\limits_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) = \tau\right)$.

Exercice 10

1_ Comme $X_1 \geq 0$ et $X_2 \geq 0$

$$X_1 > x \text{ ou } X_2 > x \Rightarrow X_1 + X_2 > x \text{ ou } X_1 + X_2 > x \Rightarrow X_1 + X_2 > x$$

$$\{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\} \subset \{X_1 + X_2 > x\}$$

Donc $\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \geq \mathbb{P}[(X_1 > x) \cup (X_2 > x)]$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \geq 2\mathbb{P}(X_1 > x) - \mathbb{P}[(X_1 > x) \cap (X_2 > x)]$$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \geq 2\mathbb{P}(X_1 > x) - \mathbb{P}(X_1 > x)^2$$

Mais $2\mathbb{P}(X_1 > x) - \mathbb{P}(X_1 > x)^2 \underset{x \to +\infty}{=} \mathbb{P}(X_1 > x)\left[2 \underbrace{- \mathbb{P}(X_1 > x)}_{\underset{\infty}{=} o(1)}\right]$

et donc $\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \underset{x \to +\infty}{\geq} \mathbb{P}(X_1 > x)(2 + o(1))$

$A(x) \underset{\infty}{=} o(B(x)) \Leftrightarrow \lim\limits_{x \to \infty} \frac{A(x)}{B(x)} = 0.$

2_ Soit $\delta \in]0; \frac{1}{2}[$ _ Montrer que $A \subset B$ ssi $B^c \subset A^c$

$$\begin{cases} A = \{X_1 + X_2 > x\} \\ A^c = \{X_1 + X_2 \leq x\} \\ B = \{X_1 > (1-\delta)x\} \cup \{X_2 > (1-\delta)x\} \cup \{X_1 > \delta x, X_2 > \delta x\} \\ B^c = \{X_1 \leq (1-\delta)x\} \cap \{X_2 \leq (1-\delta)x\} \cap [(X_1 \leq \delta x) \cup (X_2 \leq \delta x)\} \end{cases}$$

$$B^c = \{X_1 \leq (1-\delta)x, X_2 \leq (1-\delta)x, X_1 \leq \delta x)$$
$$\cup \{X_1 \leq (1-\delta)x, X_2 \leq (1-\delta)x, X_2 \leq \delta x)$$

$$B^c = \{X_1 \leq \delta x, X_2 \leq (1-\delta)x\} \cup \{X_1 \leq (1-\delta)x, X_2 \leq \delta x\}$$

Or $\{X_1 \leq \delta x, X_2 \leq (1-\delta)x\} \subset \{X_1 + X_2 \leq x\} = A^c$

$\{X_1 \leq (1-\delta)x, X_2 \leq \delta x\} \subset \{X_1 + X_2 \leq x\} = A^c$

donc $B^c \subset A^c \Rightarrow A \subset B$

$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(B \cap C) - \mathbb{P}(C \cap A) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C)$

d'où $\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \leq 2\mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)x) + \mathbb{P}(X_1 > \delta x)^2$

$$\cancel{-\mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)x)^2} - \mathbb{P}(X_1 > \delta x)\mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)x)$$
$$-\mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)x)\mathbb{P}(X_1 > \delta x) + \cancel{\mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)x)^2}$$

$$\mathbb{P}(X_1 + X_2 > x) \leq 2\mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)x)\left[1 \underbrace{- \mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)x) + \frac{\mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)x)^2}{2\mathbb{P}(X_1 > \delta x)}}_{\underset{\infty}{=} o(1) \text{ calcul de la limite à faire}}\right]$$

donc $\mathbb{P}(X_1 + X_2 \geq x) \underset{+\infty}{\leq} 2\mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)x)(1 + o(1))$

3_ On a donc $2\mathbb{P}(X_1 > x)(1+o(1)) \leq \mathbb{P}(X_1+X_2 > x) \leq 2\mathbb{P}(X_1 > (1-\delta)x)(1+o(1))$

donc $1+o(1) \leq \dfrac{\mathbb{P}(X_1+X_2>x)}{2\mathbb{P}(X_1>x)} \leq \dfrac{\mathbb{P}(X_1>(1-\delta)x)}{2\mathbb{P}(X_1>x)}(1+o(1))$

mais $\dfrac{\mathbb{P}(X_1>(1-\delta)x)}{\mathbb{P}(X_1>x)} = \dfrac{\overline{F}((1-\delta)x)}{\overline{F}(x)} = (1-\delta)^{-\alpha} \underbrace{\dfrac{L((1-\delta)x)}{L(\delta x)}}_{\text{variations lentes}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} (1-\delta)^{-\alpha} \underset{\delta\to 0}{\longrightarrow} 1$

donc par la limite lorsque $x \to +\infty$ et $\delta \to 0$

$\dfrac{\mathbb{P}(X_1+X_2>x)}{2\mathbb{P}(X_1>x)} \sim 1$ ainsi $\mathbb{P}(X_1+X_2>x) \sim 2\mathbb{P}(X_1>x)$

4- Par récurrence pour $n \geq 2$.

* Initialisation : déjà effectuée.
* Hérédité : supposons $\mathbb{P}(S_n > x) \underset{x\to\infty}{\sim} n\mathbb{P}(X_1>x)$

?

$\mathbb{P}(M_n > x) = 1 - \mathbb{P}(M_n \leq x) = 1-(1-\overline{F}(x))^n = 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k \overline{F}(x)^k$

$\mathbb{P}(M_n > x) = 1 - 1 + n\overline{F}(x) + o(n\overline{F}(x)) \underset{x\to\infty}{\sim} n\overline{F}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \mathbb{P}(S_n>x)$

En terme de risque extrêmes $(x\to\infty)$
et pour un échantillon de données assez large $(n\to+\infty)$
la loi du max peut être approximé par la loi de la somme.

Exercice 12

0) Pour $x \in [0;1]$; $P(X>x) = \exp\left(\frac{-x}{1-x}\right)$

$$\lim_{n\to\infty} n\bar{F}(u_n) = \lim_{n\to\infty} n\exp\left\{\frac{-u_n}{1-u_n}\right\} = \tau$$

ssi $\frac{u_n}{1-u_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \ln\left(\frac{n}{\tau}\right)$

ssi $\frac{1}{1-u_n} \underset{n\to\infty}{\sim} 1 + \ln\left(\frac{n}{\tau}\right)$

ssi $u_m \underset{n\to\infty}{\sim} 1 - \frac{1}{\ln\left(\frac{n}{\tau}\right)+1}$: est une suite de seuils non linéaires

1) $P(M_n \leq a_n x + b_n) = F(a_n x + b_n)^n = \left[1 - \exp\left\{-\frac{a_n x + b_n}{1 - a_n x - b_n}\right\}\right]^n$

et $n \times \exp\left\{-\frac{a_n x + b_n}{1 - a_n x - b_n}\right\}$

$$= \exp\left\{\ln(n) - \frac{x + \ln(n)(1+\ln(n))}{(1+\ln(n))^2 - x - \ln(n)(1+\ln(n))}\right\}$$

$$= \exp\left\{\ln(n) - \frac{x + \ln(n)(1+\ln(n))}{-x + (1+\ln(n))}\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{-x\ln(n) + \cancel{\ln(n)(1+\ln(n))} - x - \cancel{\ln(n)(1+\ln(n))}}{-x + 1 + \ln(n)}\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{-x(1+\ln(n))}{-x + 1 + \ln(n)}\right\} \underset{n\to\infty}{\sim} \exp\left\{\frac{-x\ln(n)}{\ln(n)}\right\} \underset{n\to\infty}{\sim} \exp(-x)$$

De cette manière,

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n \leq a_n x + b_n) = \lim_{n\to\infty} \left[1 - \frac{n\exp\left\{-\frac{a_n x + b_n}{1 - a_n x - b_n}\right\}}{n}\right]^n = \exp\{-\exp(-x)\}$$
$$= \Lambda(x)$$

Posons $(E_i)_{1\leq i\leq n}$ iid $\mathcal{E}(1)$ et $M_n^E = \max(E_i)_{1\leq i\leq n}$

2) Pour rappel, $F_E(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 1-e^{-x} & x\geq 0 \end{cases}$

$$\mathbb{P}(M_n^E \leq a_n^E x + b_n^E) = F_E(a_n^E x + b_n^E)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \Lambda(x) = \exp(-\exp(-x$$

ainsi $\lim\limits_{n\to\infty} (1-e^{-a_n^E x - b_n^E})^n =: \Lambda(x)$

ssi $\lim\limits_{n\to\infty} n e^{-a_n^E x - b_n^E} =: \exp(-x)$ car $\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{X}{n})^n = e^{-X}$

ssi $\lim\limits_{n\to\infty} \ln n - a_n^E x - b_n^E =: -x$

En posant $a_n^E := 1$ et $b_n^E = \ln(n)$ l'équation est vérifiée.

3) On considère $g(x) = \frac{x}{1+x}$ $x>0$.

a) $F_{g(E_1)}(x) := \mathbb{P}\left(\frac{E_1}{1+E_1} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(E_1 \leq \frac{x}{1-x}\right) = 1-\exp\left(\frac{-x}{1-x}\right) = F(x)$

donc $g(E_1) \overset{\mathcal{L}}{=} X_1$

$g'(x) = 1/(1+x)^2$

et $\mathbb{P}\left(\frac{g(M_n^E) - g(\ln n)}{g'(\ln n)} \leq x\right) \overset{\mathcal{L}}{=} \mathbb{P}\left(g(M_n^E) \leq \frac{1}{(1+\ln n)^2} x + \frac{\ln n}{1+\ln n}\right)$

mais g croissante bijective donc $g(M_n^E) = \max(g(E_i))_{1\leq i\leq n}$

or $\forall i \in [\![1;n]\!]$, $g(E_i) \overset{\mathcal{L}}{=} X_i$

donc $\mathbb{P}\left(\frac{g(M_n^E) - g(\ln(n))}{g'(\ln n)} \leq x\right) = \mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n)$

et ainsi $\frac{g(M_n^E) - g(\ln n)}{g'(\ln n)} \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{M_n - b_n}{a_n}$.

b) Il s'agit ici d'appliquer le <u>Théorème des Valeurs Intermédiaire</u>

$\rightarrow$ $f \in \mathcal{C}^1[a;b]$

$\forall (x;y) \in [a;b]$

$\exists c \in]a;b[$ tel que

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} = f'(c).$$

Prenons $f := g$ et $n \in \mathbb{N}$

$x = \ln n$ et $y = M_n^E$ alors

$\exists \xi_n$ tel que $\ln n \leq \xi_n \leq M_n^E$

$$\frac{g(M_n^E) - g(\ln n)}{M_n^E - \ln n} = g'(\xi_n)$$

c) $\mathbb{P}\left(\frac{M_n^E}{\ln n} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(M_n^E \leq x\ln n\right) = \left(1 - e^{-x\ln n}\right)^n : F_n(x)$

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \left(1 - \frac{1}{n^x}\right)^n & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$$

Par ailleurs,

$$\lim_{n\to\infty} F_n(1) = e^{-1}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n^x}\right)^n = \exp\left\{n\ln\left(1 - \frac{1}{n^x}\right)\right\} = \exp\left\{n\left[\frac{-1}{n^x} + o\left(\frac{1}{n^x}\right)\right]\right\}$$

donc $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\frac{-1}{n^{x-1}} + o\left(\frac{1}{n^{x-1}}\right)\right\} = \begin{cases} 0 & x < 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$

pour $x \neq 1$

donc $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F : x \longmapsto \begin{cases} 0 & x < 1 \\ e^{-1} & x = 1 \\ 1 & x > 1 \end{cases}$ fonction de répartition de la masse $X = 1$

donc $\frac{M_n^E}{\ln n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 1$

Supposons de plus que $\ln(n) \leq \xi_n \leq M_n^E$

alors $g'(\ln n) \geq g'(\xi_n) \geq g'(M_n^E)$

alors $1 \geq \frac{g'(\xi_n)}{g'(\ln n)} \geq \frac{g'(M_n^E)}{g'(\ln n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 1$ par continuité la dérivée

donc $\frac{g'(\xi_n)}{g'(\ln n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} 1$ et de suite

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{g(M_n^E) - g(u_n)}{g'(u_n)} \overset{\mathcal{L}}{=} \underbrace{(M_n^E - u_n)}_{\hookrightarrow \Lambda(x)} \frac{g'(\xi_n)}{\underbrace{g'(u_n)}_{\hookrightarrow 1}}$$

donc $\dfrac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda$.

Exercice 13

1) Nous avons montré en cours que par la règle de l'Hopital lorsque X suit une loi normale,

i) $h(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x}$

ii) $b_n \underset{n\to\infty}{\sim} \sqrt{2\ln(n)}$

$\frac{M_n}{b_n} - \frac{b_n}{b_n} \sim \frac{a_n}{b_n} \Lambda$

or $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{b_n} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\ln(n)}}$

donc $\frac{a_n}{b_n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ et donc $\frac{M_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$.

2) $\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda$ donc $\frac{M_n^2 - b_n^2}{a_n} \times \frac{1}{M_n + b_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda$

cependant $M_n \underset{n\to\infty}{\sim} b_n$ car $\frac{M_n}{b_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$

De cette manière nous obtenons $\frac{M_n^2 - b_n^2}{2a_n b_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda$

En posant $\begin{cases} d_n = b_n^2 \\ c_n = 2a_n b_n \end{cases}$ $\frac{M_n^2 - d_n}{c_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda$

Exercice 14

1) $\exists a_n > 0, \exists b_n, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\max(-X_i)_{1\le i\le n} \le a_n x + b_n] = H(x)$

alors $\lim_{n\to\infty} 1 - \mathbb{P}[\max(-X_i)_{1\le i\le n} > a_n x + b_n] = H(x)$

alors $\lim_{n\to\infty} 1 - \mathbb{P}[-\min(X_i)_{1\le i\le n} > a_n x + b_n] = H(x)$

alors $\lim_{n\to\infty} 1 - \mathbb{P}[\min(X_i)_{1\le i\le n} < -a_n x - b_n] = H(x)$

alors $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[\min(X_i)_{1\le i\le n} < a_n x - b_n] = 1 - H(-x)$

on retrouve alors $c_n := a_n$ et $d_n = -b_n$.

2) $G_\xi(x) = \exp\{-(1+\xi x)_+^{-1/\xi}\}$ pour $\xi \in \mathbb{R}$

donc $1 - G_\xi(-x) = 1 - \exp\{-(1-\xi x)_+^{-1/\xi}\}$

3) Soit $\xi \in \mathbb{R}$ et $(X_i)_{1\le i\le n}$ iid de fonction répartition $1 - G_\xi(-x)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[\min(X_i)_{1\le i\le n} > x] &= \mathbb{P}[\forall i \in [\![1,n]\!], X_i > x] \\
&= G_\xi(-x)^n \\
&= \exp\{-(1-\xi x)_+^{-1/\xi}\}^n \\
&= \exp\{-n(1-\xi x)_+^{-1/\xi}\} \\
&= \exp\left\{-\left[1-\xi\left(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi n^{1/\xi}} + x\frac{1}{n^{1/\xi}}\right)\right]_+^{-1/\xi}\right\} \\
&= \exp\left\{-\left[1-\xi\left(\underbrace{\frac{n^{1/\xi} + 1 + \xi x}{\xi n^{1/\xi}}}_{\text{par translation et homothétie}}\right)\right]_+^{-1/\xi}\right\}
\end{aligned}$$

la loi est de même type donc max-stable.

Exercice 15

0) $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n) = H(x)$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} F(a_n x + b_n)^n = H(x)$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \exp\{n \ln[1 - \bar{F}(a_n x + b_n)]\}^n = H(x)$

$\ln(1-x) \underset{x\to 0}{\sim} -x$ donc $\ln(1 - \bar{F}(a_n x + b_n)) \underset{n\to\infty}{\sim} -\bar{F}(a_n x + b_n)$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \exp\{-n\bar{F}(a_n x + b_n)\} = H(x)$

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} n\bar{F}(a_n x + b_n) = -\ln H(x)$.

1) a) $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$ et $N \perp\!\!\!\perp X_i$

$\mathbb{P}(M_N \leq x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(M_n \leq x) \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

$\mathbb{P}(M_N \leq x) = \sum_{n=0}^{+\infty} F(x)^n \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$

$\mathbb{P}(M_n \leq x) = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{[F(x)\lambda]^n}{n!}$

$\mathbb{P}(M_n \leq x) = e^{-[1-F(x)]\lambda}$

b) Soit $N_n \sim \mathcal{P}(\lambda_n)$

Si $\frac{M_{N_n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} H$ avec $\mathbb{P}(M_{N_n} \leq a_n x + b_n) = e^{-[1-F(a_n x + b_n)]\lambda_n}$

alors $\lim_{n\to\infty} \exp\{-\lambda_n \bar{F}(a_n x + b_n)\} = H(x)$

ssi $\lambda_n \underset{n\to\infty}{\sim} n$

2) a) $N \sim \mathcal{G}(q)$ et $N \perp\!\!\!\perp X_i$

$\mathbb{P}(M_N \leq x) = \sum_{n=1}^{+\infty} F(x)^n q(1-q)^{n-1} = F(x)q \sum_{n=1}^{+\infty} (F(x)[1-q])^{n-1}$

$\mathbb{P}(M_N \leq x) = \frac{F(x)q}{1-(1-q)F(x)}$

Scanned with CamScanner

2) b) $N_n \sim \mathcal{G}(q_n)$

si $\dfrac{M_{N_n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} H$ avec $P(M_n \leq x) = \dfrac{q_n F(x)}{1-(1-q_n)F(x)}$

alors $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{q_n F(a_n x+b_n)}{1-(1-q_n)F(a_n x+b_n)} = H(x)$

Exercice 16

A_ $F(x) = \begin{cases} 1 - e^{1/x} & x < 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

1) $u_n := \dfrac{1}{\ln \tau - \ln n}$

alors $n\bar{F}(u_n) = n\bar{F}\left(\dfrac{1}{\ln\tau - \ln(n)}\right) = n\exp\{\ln\tau - \ln n\} = n\exp\left(\ln\left(\frac{\tau}{n}\right)\right) = \tau$

donc immédiatement $n\bar{F}(u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau$ donc $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leq u_n) = e^{-\tau}$.

2) On pose $\tau = \exp(-x)$ et on souhaite $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leq u_n) = e^{-\tau}$

De cette manière $u_n = -[x + \ln(n)]^{-1} = \dfrac{-1}{\ln(n)}\left[1 + x\ln(n)\right]^{-1}$

$$u_n = \frac{-1}{\ln n}\left[1 - \frac{x}{\ln n} + \theta\left(\frac{1}{\ln n}\right)\right]$$ donc linéaire en x par application du 1)

donc $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leq u_n) = \exp(-\exp(-x))$

B_ $F(x) = k(1 - e^{-x})\mathbb{1}_{[0,x^F]}(x)$

1) $F'(x) = f(x) = ke^{-x}\mathbb{1}_{[0,x^F]}(x)$

donc $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx = k\int_0^{x^F} e^{-x}\,dx = k\left[-e^{-x}\right]_0^{x^F} = k(1 - e^{-x^F}) = 1$

donc $k = \dfrac{1}{1 - e^{-x^F}}$

2) Pour $x < 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}(M_n \leq a_n x + x^F) = \lim\limits_{n\to\infty} F(a_n x + x^F)^n = \exp(x)$

$F(a_n x + x^F)^n = \exp\{n\ln[k(1 - e^{-a_n x - x^F})]$

$$= \exp\left\{n\ln\left[\frac{1 - \exp\{-(a_n x + x^F)\}}{1 - \exp(-x^F)}\right]\right.$$

$$= \exp\left\{-n\ln\left[1-\exp(-x^F)\right] + n\ln\left[1-\exp(-a_n x - x^F)\right]\right\}$$

$$\frac{1-e^{-a_n x - x^F}}{1-e^{-x^F}} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{x/n} \quad \text{donc} \quad \frac{1-ye^{-a_n x}}{1-y} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{x/n}$$

ssi $e^{-x/n} - ye^{-a_n x - x/n} \underset{n\to\infty}{\sim} 1-y$

ssi $-a_n x - \frac{x}{n} \underset{n\to\infty}{\sim} 1$

ssi $a_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.