# TD2 - Risque de crédit

## Exercice 1

**1.** Par définition de $\tau$, on a $\{\tau > \theta\} = \{\Lambda_\theta < L\}$, donc

$$P(\tau > \theta|\mathcal{F}_t) = P(\Lambda_\theta < L|\mathcal{F}_t)$$

Quand $\theta \leq t$, alors $\Lambda_\theta$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

On a $P(\Lambda_\theta < L|\mathcal{F}_t) = G^L(\Lambda_\theta)$ avec $G^L(x) = P(L > x)$, car $L$ est indépendante de $\mathcal{F}_t$.

Quand $\theta > t$, $\mathcal{F}_\theta \supset \mathcal{F}_t$ donc $\Lambda_\theta$ n'est plus $\mathcal{F}_t$-mesurable :

$$\begin{aligned}
P(\Lambda_\theta < L|\mathcal{F}_t) &= E(\mathbf{1}_{\{\Lambda_\theta < L\}}|\mathcal{F}_t) \\
&= E(E(\mathbf{1}_{\{\Lambda_\theta < L\}}|\mathcal{F}_\theta)|\mathcal{F}_t) \\
&= E(G^L(\Lambda_\theta)|\mathcal{F}_t)
\end{aligned}$$

En résumé :

$$P(\tau > \theta|\mathcal{F}_t) = \begin{cases} E(G^L(\Lambda_\theta)|\mathcal{F}_t) & \text{si } \theta > t \\ G^L(\Lambda_\theta) & \text{si } \theta \leq t \end{cases}$$

Remarque : si $\theta = t$, $P(\tau > \theta|\mathcal{F}_\theta) = S_\theta = G^L(\Lambda_\theta)$.

**2.** D'après la question 1, on a pour $\theta \leq t < +\infty$,

$$\begin{aligned}
P(\tau > \theta|\mathcal{F}_t) &= P(\tau > \theta|\mathcal{F}_\infty) = G^L(\Lambda_\theta) \\
&= P(\tau > \theta|\mathcal{F}_\theta) = S_\theta
\end{aligned}$$

où $\mathcal{F}_\infty = \cup_{t\geq 0}\mathcal{F}_t$.

**3.** Le prix d'une obligation zéro-coupon défautable et donné par :

$$\begin{aligned}
\tilde{B}(t,T) &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\left(\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} e^{-\int_t^T r_s ds}\middle|\mathcal{G}_t\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \frac{E\left(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} e^{-\int_t^T r_s ds}\middle|\mathcal{F}_t\right)}{E\left(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\middle|\mathcal{F}_t\right)} \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \frac{E\left(\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} e^{-\int_t^T r_s ds}\middle|\mathcal{F}_t\right)}{S_t} \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \frac{E\left(E(\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} e^{-\int_t^T r_s ds}|\mathcal{F}_T)\middle|\mathcal{F}_t\right)}{S_t} \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} \frac{E\left(e^{-\int_t^T r_s ds} E(\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{F}_T)\middle|\mathcal{F}_t\right)}{S_t} \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\left(e^{-\int_t^T r_s ds}\frac{S_T}{S_t}\middle|\mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\left(e^{-\int_t^T r_s ds}\frac{G^L(\Lambda_T)}{G^L(\Lambda_t)}\middle|\mathcal{F}_t\right)
\end{aligned}$$

**4.** $G^L(x) = e^{-x}$ pour $L \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$. Donc :

$$\begin{aligned}
\tilde{B}(t,T) &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\left(e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{G^L(\Lambda_T)}{G^L(\Lambda_t)} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\left(e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{e^{-\int_0^T \lambda_s ds}}{e^{-\int_0^t \lambda_s ds}} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\left(e^{-\int_t^T r_s ds} e^{-\int_t^T \lambda_s ds} \middle| \mathcal{F}_t\right) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\left(e^{-\int_t^T (r_s+\lambda_s) ds} \middle| \mathcal{F}_t\right)
\end{aligned}$$

**5.** On a par l'EDS : $dr_t = a_1 b_1 dt - a_1 r_t dt + \sigma_1 dW_t^1$

$$\int_t^T r_s ds = b_1(T-t) - \frac{1}{a_1}(r_T - r_t) + \frac{\sigma_1}{a_1} \underbrace{\int_t^T dW_s^1}_{(W_T - W_t)}$$

Ensuite, on résout l'EDS pour obtenir la forme explicite de $r$ :

$$\begin{aligned}
d(r_t e^{a_1 t}) &= r_t e^{a_1 t} a_1 dt + e^{a_1 t} dr_t \\
&= a_1 r_t e^{a_1 t} dt + e^{a_1 t}(a_1(b_1 - r_t)dt + \sigma_1 dW_t^1) \\
&= e^{a_1 t}(a_1 b_1 dt + \sigma_1 dW_t^1)
\end{aligned}$$

En intégrant sur les deux côtés de l'égalité, on obtient :

$$\begin{aligned}
r_T e^{a_1 T} - r_t e^{a_1 t} &= \int_t^T a_1 b_1 e^{a_1 u} du + \int_t^T \sigma_1 e^{a_1 u} dW_u^1 \\
r_T = r_t e^{-a_1(T-t)} &+ \int_t^T a_1 b_1 e^{-a_1(T-u)} du + \int_t^T \sigma_1 e^{-a_1(T-u)} dW_u^1 \\
&= b_1 + (r_t - b_1) e^{-a_1(T-t)} + \sigma_1 \int_t^T e^{-a_1(T-u)} dW_u^1
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\int_t^T r_s ds = b_1(T-t) - \frac{1}{a_1}(r_T - r_t) + \frac{\sigma_1}{a_1}\int_t^T dW_s^1 = b_1(T-t) - (r_t - b_1)\frac{1 - e^{-a_1(T-t)}}{a_1} + \frac{\sigma_1}{a_1}\int_t^T (1 - e^{-a_1(T-u)}) dW_u^1 \tag{1}$$

De façon similaire, on a :

$$\int_t^T \lambda_s ds = b_2(T-t) - (\lambda_t - b_2)\frac{1 - e^{-a_2(T-t)}}{a_2} + \frac{\sigma_2}{a_2}\int_t^T (1 - e^{-a_2(T-u)}) dW_u^2 \tag{2}$$

On cherche à calculer

$$E\left(e^{-\int_t^T (r_s+\lambda_s) ds} \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

On va utiliser les équations (1) et (2) qui sont deux processus gaussiens et le fait que $r_t$ et $\lambda_t$ sont $\mathcal{F}_t$-mesurable, et que

$$\frac{\sigma_1}{a_1}\int_t^T 1 - e^{-a_1(T-u)} dW_u^1$$

et

$$\frac{\sigma_2}{a_2}\int_t^T 1 - e^{-a_2(T-u)} dW_u^2$$

sont indépendantes de $\mathcal{F}_t$.
Alors :

$$\begin{aligned}
E\left(\int_t^T r_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right) &= E\left(b_1(T-t) + (r_t - b_1)\left(\frac{1 - e^{-a_1(T-t)}}{a_1}\right) + \frac{\sigma_1}{a_1}\int_t^T 1 - e^{-a_1(T-u)} dW_u^1 \middle| \mathcal{F}_t\right) \\
&= b_1(T-t) + (r_t - b_1)\left(\frac{1 - e^{-a_1(T-t)}}{a_1}\right)
\end{aligned}$$

et

$$E\left(\int_t^T \lambda_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right) = b_2(T-t) + (\lambda_t - b_2)\left(\frac{1 - e^{-a_2(T-t)}}{a_2}\right)$$

On désigne par $m(t,T) = E(\int_t^T (r_s + \lambda_s)ds|\mathcal{F}_t)$ qui est donné par les formules au-dessus.
Ensuite, on calcule :

$$\begin{aligned}\Gamma^2(t,T) &= V\Big(\int_t^T (r_s+\lambda_s)ds\Big|\mathcal{F}_t\Big)\\ &= V\Big(\int_t^T r_s ds\Big|\mathcal{F}_t\Big) + V\Big(\int_t^T \lambda_s ds\Big|\mathcal{F}_t\Big) + 2Cov\Big(\int_t^T r_s ds, \int_t^T \lambda_s ds\Big|\mathcal{F}_t\Big)\end{aligned}$$

Par les équations (1) et (2), on a :

$$\begin{aligned}V\Big(\int_t^T r_s ds\Big|\mathcal{F}_t\Big) &= V\Big(b_1(T-t) + (r_t - b_1)\frac{1-e^{-a_1(T-t)}}{a_1} + \frac{\sigma_1}{a_1}\int_t^T 1 - e^{-a_1(T-u)}dW_u^1\Big|\mathcal{F}_t\Big)\\ &= V\Big(\frac{\sigma_1}{a_1}\int_t^T 1-e^{-a_1(T-u)}dW_u^1\Big)\\ &= \frac{\sigma_1^2}{a_1^2}\int_t^T (1-e^{-a_1(T-u)})^2 du\\ &= \frac{\sigma_1^2}{a_1^2}(T-t) - \frac{\sigma_1^2}{a_1^3}(1-e^{-a_1(T-t)}) - \frac{\sigma_1^2}{2a_1^3}(1-e^{-a_1(T-t)})^2\end{aligned}$$

De la même manière, on a :

$$V\Big(\int_t^T \lambda_s ds\Big|\mathcal{F}_t\Big) = \frac{\sigma_2^2}{a_2^2}(T-t) - \frac{\sigma_2^2}{a_2^3}(1-e^{-a_2(T-t)}) - \frac{\sigma_2^2}{2a_2^3}(1-e^{-a_2(T-t)})^2$$

et

$$\begin{aligned}2Cov\Big(\int_t^T r_s ds, \int_t^T \lambda_s ds\Big|\mathcal{F}_t\Big) &= 2Cov\Big(\frac{\sigma_1}{a_1}\int_t^T 1-e^{-a_1(T-u)}dW_u^1, \frac{\sigma_2}{a_2}\int_t^T 1-e^{-a_2(T-u)}dW_u^2\Big)\\ &= 2\frac{\sigma_1}{a_1}\frac{\sigma_2}{a_2}\int_t^T (1-e^{-a_1(T-u)})(1-e^{-a_2(T-u)})\rho du\\ &= \frac{2\sigma_1\sigma_2}{a_1a_2}\rho(T-t) - \frac{2\sigma_1\sigma_2\rho}{a_1^2a_2}(1-e^{-a_1(T-t)}) - \frac{2\sigma_1\sigma_2\rho}{a_1a_2^2}(1-e^{-a_2(T-t)})\\ &+ \frac{2\sigma_1\sigma_2\rho}{a_1a_2(a_1+a_2)}(1-e^{-(a_1+a_2)(T-t)})\end{aligned}$$

On a $\Gamma^2(t,T)$ qui est égal à la somme des trois termes calculés précédemment.

Enfin par la transformée de Laplace (conditionnelle) pour le processus gaussien, on obtient :

$$E\Big(e^{-\int_t^T (r_s+\lambda_s)ds}\Big|\mathcal{F}_t\Big) = exp\Big(-m(t,T) + \frac{1}{2}\Gamma^2(t,T)\Big)$$

où $m(t,T)$ et $\Gamma^2(t,T)$ sont calculés précédemment, et sont des fonctions déterministes.

On rappelle que la transformée de Laplace de la loi gaussienne $X \hookrightarrow \mathcal{N}(\mu,\sigma^2)$, on a $E(e^X) = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2}$.

**Remarque :** Le résultat généralise le modèle Vasicek pour le taux d'intérêt en rajoutant un composant d'intensité de crédit.