Correction Exercices Modèle de Black et Scholes

Corrigé Exercice 1 cf cours

Corrigé Exercice 2 *(Option sur minimum de 2 actifs : Modèle de Stulz (1982))*

Partie A : Préliminaires

1. W_t, $\bar{W}_t$ et W'_t sont des mouvements Browniens, donc suivent une loi normale centrée de variance t. De plus, Toute combinaison linéaire de W_t et $W't$ s'écrit comme combinaison libéaire de W'_t et $\bar{W}_t$, qui sont indépendants. Donc toute combinaison linéaire suit une loi normale centrée (somme de 2 lois normales centrées. indépendantes). Ainsi, (W_t, W'_t) est bien un vecteur gaussien, centré, de matrice de variance-covariance :
$$\begin{pmatrix} t & \frac{t}{2} \\ \frac{t}{2} & t \end{pmatrix}$$
Puisque Cov $(W_t, W'_t) =$ Cov $(\frac{1}{2}W'_t + \frac{\sqrt{3}}{2}\bar{W}_t, W'_t) = \frac{1}{2}Var(W'_t) = \frac{t}{2}$
2. Le domaine d'exercice peut s'écrire :
$$D = \{\min(S_T, U_T) > K\} = \{S_T > K\} \cap \{U_T > K\} = \{K < U_T \leq S_T\} \cap \{K < S_T < U_T\}$$
3. $$\begin{aligned} C &= e^{-tT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[(\min(U_T, S_T) - K)_+\right] \\ &= e^{-tT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[(U_T - K)\,\mathbb{1}_{K<U_T<S_T} + (S_T - K)\,\mathbb{1}_{K<S_T<U_T}\right] \\ &= e^{-tT}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(U_T\mathbb{1}_{K<U_T<S_T}\right) + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(S_T\mathbb{1}_{K<S_T<U_T}\right) - K\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_{K<U_T<S_T} + \mathbb{1}_{K<S_T<U_T}\right)\right] \\ &= e^{-tT}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(U_T\mathbb{1}_{K<U_T<S_T}\right) + \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(S_T\mathbb{1}_{K<S_T<U_T}\right) - K\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left(\mathbb{1}_{\{S_T>K\}\cap\{U_T>K\}}\right)\right] \end{aligned}$$
4. Les solutions des EDS (1) et (2) s'écrivent :
$$\begin{aligned} S_t &= xe^{\left(r - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)t + \sigma_S W_t} \\ U_t &= xe^{\left(r - \frac{\sigma_U^2}{2}\right)t + \sigma_U W'_t} \end{aligned}$$

Partie B : Calcul de la prime

1. $$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}\cap\{U_T\geq K\}} &= \mathbb{P}\left(S_T \geq K, U_T \geq K\right) \\ &= \mathbb{P}\left[xe^{\left(r-\frac{\sigma_S^2}{2}\right)t+\sigma_S W_t} > K, xe^{\left(r-\frac{\sigma_U^2}{2}\right)t+\sigma_U W'_t} > K\right] \\ &= \mathbb{P}\left[\frac{ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma_S^2}{2})t}{\sigma_S\sqrt{T}} \geq -\frac{W_T}{\sqrt{T}}, \frac{ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma_U^2}{2})t}{\sigma_U\sqrt{T}} \geq -\frac{W'_T}{\sqrt{T}}\right] \end{aligned}$$
Autrement dit, on a
$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_{\{S_T\geq K\}\cap\{U_T\geq K\}} = \mathcal{N}_2(d_S, d_U, \frac{1}{2})$$

Avec

$$d_S = \frac{ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma_S^2}{2})t}{\sigma_S\sqrt{T}},\ d_U = \frac{ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma_U^2}{2})t}{\sigma_U\sqrt{T}}.$$

Car Cov $(\frac{W_T}{\sqrt{T}}, \frac{W'_T}{\sqrt{T}}) = \frac{1}{T}$Cov $(W_T, W'_T) = \frac{1}{T} \times \frac{T}{2} = \frac{1}{2}$.

2. On veut maintenant calculer $\mathbb{E}\left(U_T 1\!\!1_{K \leq U_T \leq S_T}\right)$.

   (a) La formule d'Itô appliquée à $f(S_t, U_t) = \frac{U_t}{S_t} = X_t$ nous donne :

$$\begin{aligned} dX_t &= df(S_t,U_t) = \frac{\partial f}{\partial S_t}dS_t + \frac{\partial f}{\partial U_t}dU_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2}d\langle S\rangle_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial U_t^2}d\langle U\rangle_t + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial U_t}d\langle S,U\rangle_t \\ &= -U_t^2\frac{1}{S_t}dS_t + \frac{1}{S_t}dU_t + \frac{U_t}{S_t^3}\sigma_S^2 S_t^2 dt - \frac{1}{S_t^2}S_t U_t \sigma_S\sigma_U d\langle W, W'\rangle_t \\ &= -X_t(rdt + \sigma_S dW_t) + X_t(rdt + \sigma_U dW'_t) + \sigma_S^2 X_t dt - X_t\sigma_S\sigma_U\frac{1}{2}dt \\ &= X_t\left(\left(\sigma_S^2 - \frac{\sigma_S\sigma_U}{2}\right)dt + \sigma_U dW'_t - \sigma_S dW_t\right) \end{aligned}$$

   (b) On veut écrire $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[U_T 1\!\!1_{K \leq U_T \leq S_T}\right]$ sous la forme $\mathbb{P}^*(K \leq U_T \leq S_T)$.
   On utilise le théorème de Girsanov, qui assure que si on utilise le changement de probabilité

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t = \exp\left(\sigma_U W_t - \frac{\sigma_U^2}{2}t\right)$$

   Alors $W_t^* = W'_t - \sigma_U t$ est un mouvement Brownien, et d'autre part, l'espérance cherchée s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[U_T 1\!\!1_{K \leq U_T \leq S_T}\right] &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[xe^{\left(r - \frac{\sigma_U^2}{2}\right)T + \sigma_U W_T} 1\!\!1_{K \leq U_T \leq S_T}\right] \\ &= xe^{rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{-\frac{\sigma_U^2}{2}T + \sigma_U W_T} 1\!\!1_{K \leq U_T \leq S_T}\right] \\ &= xe^{rT}\mathbb{P}^*\left(K \leq U_T \leq S_T\right) \end{aligned}$$

   (c) Sous cette nouvelle probabilité, réécrivons la dynamique de X_t (sous la nouvelle probabilité, $\bar{W}_t$ et $W_t^* = W'_t - \sigma_U t$ sont toujours indépendants, et on a :

$$\begin{aligned} dX_t &= X_t\left(\left(\sigma_S^2 - \frac{\sigma_S\sigma_U}{2}\right)dt + \sigma_U dW'_t - \sigma_S dW_t\right) \\ &= X_t\left(\left(\sigma_S^2 - \frac{\sigma_S\sigma_U}{2}\right)dt + \sigma_U dW'_t - \sigma_S\frac{1}{2}dW'_t + \frac{\sqrt{3}}{2}d\bar{W}_t\right) \\ &= X_t\left((\sigma_S^2 - \sigma_S\sigma_U + \sigma_U^2)dt + (\sigma_U - \frac{\sigma_S}{2})dW_t^* + \frac{\sigma_S\sqrt{3}}{2}d\bar{W}_t\right) \\ &= X_t\left(\sigma^2 dt + \sigma dZ_t\right) \end{aligned}$$

   où

$$\sigma^2 = \sigma_S^2 - \sigma_S\sigma_U + \sigma_U^2$$

   et

$$Z_t = \frac{1}{\sigma}\left((\sigma_U - \frac{\sigma_S}{2})W_t^* + \frac{\sigma_S\sqrt{3}}{2}\bar{W}_t\right)$$

comme somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois normales centrées, Z_t suit une loi normale centrée. L'indépendance des accroissements provient de l'indépendance des accroissements de W^* et $\bar{W}$. Il reste à montrer que la variance de Z_t est bien égale à t.

$$\begin{aligned} \text{Var }(Z_t) &= \frac{1}{\sigma^2}\left((\sigma_U - \frac{\sigma_S}{2})^2 t + \frac{3\sigma_S^2}{4}\right) \\ &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sigma_S^2 - \sigma_S\sigma_U + \sigma_U^2\right) t = t. \end{aligned} \tag{1}$$

Z ainsi défini est bien un mouvement Brownien.

(d) On peut écrire la probabilité cherchée :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}^*\left(K \leq U_T \leq S_T\right) &= \mathbb{P}^*\left(U_T \geq K, \frac{U_T}{S_T} \leq 1\right) \\ &= \mathbb{P}^*\left(U_T \geq K, X_t \leq 1\right) \end{aligned}$$

Or

$$U_T \geq K \Leftrightarrow -\frac{W_T^*}{\sqrt{T}} \leq d_U + \sigma_U\sqrt{T}$$

où $-\frac{W_T^*}{\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.
De même,

$$X_T \leq 1 \Leftrightarrow \frac{Z_T}{\sqrt{T}} \leq -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$$

Or

$$\text{Cov }\left(\frac{Z_T}{\sqrt{T}}, -\frac{W_T^*}{\sqrt{T}}\right) = \frac{\frac{\sigma_S}{2} - \sigma_U}{\sigma}$$

D'où

$$\mathbb{P}^*\left(K \leq U_T \leq S_T\right) = \mathcal{N}_2\left(d_U + \sigma_U\sqrt{T}, -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \frac{\frac{\sigma_S}{2} - \sigma_U}{\sigma}\right)$$

(e) Ainsi, l'espérance cherchée vaut :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[U_T \mathbb{1}_{K \leq U_T \leq S_T}\right] = xe^{rT}\mathcal{N}_2\left(d_U + \sigma_U\sqrt{T}, -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \frac{\frac{\sigma_S}{2} - \sigma_U}{\sigma}\right)$$

3. De manière identique,

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[S_T \mathbb{1}_{K \leq S_T \leq U_T}\right] = xe^{rT}\mathcal{N}_2\left(d_S + \sigma_S\sqrt{T}, -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \frac{\frac{\sigma_U}{2} - \sigma_S}{\sigma}\right)$$

4. Finalement on peut écrire la prime de cette option avec la formule :

$$\begin{aligned} C &= x\mathcal{N}_2\left(d_U + \sigma_U\sqrt{T}, -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \frac{\frac{\sigma_S}{2} - \sigma_U}{\sigma}\right) + x\mathcal{N}_2\left(d_S + \sigma_S\sqrt{T}, -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \frac{\frac{\sigma_U}{2} - \sigma_S}{\sigma}\right) \\ &\quad - Ke^{-rT}\mathcal{N}_2\left(d_S, d_U, \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

où

$$d_S = \frac{ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma_S^2}{2})t}{\sigma_S\sqrt{T}},\ d_U = \frac{ln(\frac{x}{K}) + (r - \frac{\sigma_U^2}{2})t}{\sigma_U\sqrt{T}} \text{ et } \sigma = \sqrt{\sigma_S^2 + \sigma_U^2 - \sigma_S\sigma_U}$$

Corrigé Exercice 3 : Modèle de Merton d'évaluation d'options versant des dividendes

1. En utilisant le lemme d'Itô, appliqué à $V_t = C(t, S_t) - \alpha S_t$, et en considérant que ce portefeuille est autofinançant (les variations de valeur du portefeuille sur une période de temps dt sont uniquement dues aux variations de valeur des actifs, et non aux variations de la répartition du portefeuille, on obtient :

$$dV_t = \frac{\partial C(t,S_t)}{\partial t}dt + \frac{\partial C(t,S_t)}{\partial S_t}dS_t + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C(t,S_t)}{\partial S_t^2}dt - \alpha dS_t$$

soit

$$dV_t = \left(\frac{\partial C(t,S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C(t,S_t)}{\partial S_t^2}\right)dt + \left(\frac{\partial C(t,S_t)}{\partial S_t} - \alpha\right)dS_t$$

ou encore, en remplaçant la dynamique de S_t :

$$dV_t = \left(\frac{\partial C(t,S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C(t,S_t)}{\partial S_t^2} + \left(\frac{\partial C(t,S_t)}{\partial S_t} - \alpha\right)\mu S_t dt\right)dt + \left(\frac{\partial C(t,S_t)}{\partial S_t} - \alpha\right)\sigma S_t dW_t.$$

2. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, pour que $\mathcal{P}_t$ soit un portefeuille localement sans risque (c'est-à-dire pour que la variation totale de la valeur du portefeuille soit sans risque sur une petite période de temps dt), $dV(t)$ doit-il être égal à

$$dV_t = rV_t dt + \alpha q S_t dt = (rVt + \alpha q S_t)dt)$$

En effet, pour que le portefeuille $\mathcal{P}_t$ soit un portefeuille localement sans risque, il faut qu'il rapporte le taux sans risque r sur une période de temps dt. Or sur une période de temps dt, ce portefeuille rapporte $dV_t - \alpha q S_t dt$: il faut tenir compte que le portefeuille $\mathcal{P}_t$ contient la vente à découvert de α actions S_t, et donc doit verser sur une période de temps dt le dividende $\alpha q S_t dt$. Ainsi, pour être sans risque, $dV_t - \alpha q S_t dt$ doit être égal à $rV_t dt$, d'où l'équation annoncée ci-avant.

3. Il suffit alors d'identifier (ou tout simplement de dire qu'un portefeuille est sans risque si sa partie martingale est nulle... ce que l'on observe en identifiant) et on en déduit que le coefficient de dW_t doit être nul pour que le portefeuille soit sans risque, ce qui donne :

$$\alpha = \frac{\partial C}{\partial S_t}$$

Ce coefficient α correspond au Delta de couverture du call considéré : ratio des variations possibles du call sur les variations possibles du sous-jacent. Il nous donne le nombre d'actions à utiliser pour couvrir une option.

4. Toujours en identifiant, mais cette fois la partie en facteur de dt, on obtient :

$$\frac{\partial C(t,S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C(t,S_t)}{\partial S_t^2} = rVt + \alpha q S_t$$

Ce qui nous permet de déduire l'EDP de C_t dans ce modèle, en remplaçant α par sa valeur :

$$\frac{\partial C(t,S_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C(t,S_t)}{\partial S_t^2} + (r-q)S_t\frac{\partial C(t,S_t)}{\partial S_t} - rC_t = 0$$

La seule différence entre cette EDP et celle de Black-Scholes est le terme en $(r-q)$ qui se substitue à r devant $S_t\frac{\partial C(t,S_t)}{\partial S_t}$.

5. *On se place désormais sous la probabilité risque-neutre Q.*
Sous la probabilité risque neutre, le taux de rendement moyen de l'actif risqué doit être égal au taux sans risque. Or sur une période de temps dt, l'action rapporte dS_t mais aussi les dividendes, soit qS_tdt. Ce qui doit donc nous donner :
$$dS_t + qS_tdt = rS_tdt + \sigma S_tdB_t$$
D'où
$$dS_t = (r-q)S_tdt + \sigma S_tdB_t$$
On a donc :
$$\mu S_tdt + \sigma S_tdW_t = (r-q)S_tdt + \sigma S_tdB_t$$
Le nouveau mouvement Brownien sous cette probabilité risque-neutre s'exprime donc comme :
$$B_t = W_t - \frac{(r-q)-\mu}{\sigma}t.$$
6. La densité de Radon-Nikodym permettant de passer de la probabilité historique P à la probabilité risque neutre Q est donnée par le théorème de Girsanov :
$$\left.\frac{dQ}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\lambda W_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$$
où $\lambda = \frac{\mu-(r-q)}{\sigma}$.
7. La prime de risque de ce modèle est donc $\lambda = \frac{\mu-(r-q)}{\sigma}$.
8. En appliquant Itô à $\ln(S_t)$, on obtient de manière classique que l'EDS a une unique solution, donnée par :
$$S_t = S_0 e^{\left((r-q)-\frac{\sigma^2}{2}\right)t+\sigma B_t}, \;\; Q-p.s.$$
S_t suit une loi log-normale.
9. Sous la probabilité risque neutre Q, les prix actualisés sont des martingales, donc
$$C(t,S_t) = E_Q\left(e^{-r(T-t)}(S_T-K)1\!\!1_{S_T\geq K}|\mathcal{F}_t\right)$$
Ce qui nous donne bien, en séparant :
$$C(t,S_t) = e^{-r(T-t)}E_Q\left(S_T 1\!\!1_{S_T\geq K} \mid \mathcal{F}_t\right) - Ke^{-r(T-t)}E_Q\left(1\!\!1_{S_T\geq K} \mid \mathcal{F}_t\right),$$
10. Commençons par calculer $E_Q\left(1\!\!1_{S_T\geq K} \mid \mathcal{F}_t\right)$.
On a : $S_T = S_t e^{((r-q)-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(B_T-B_t)}$ Donc le terme cherché vaut :
$$\begin{aligned}
Q_{\mathcal{F}_t}(S_T\geq K) &= Q_{\mathcal{F}_t}\left(S_t e^{((r-q)-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(B_T-B_t)}\right)\\
&= Q_{\mathcal{F}_t}\left((r-q-\frac{\sigma^2}{2})(T-t)+\sigma(B_T-B_t)\geq \ln\left(\frac{K}{S_t}\right)\right)\\
&= Q_{\mathcal{F}_t}\left(\frac{B_T-B_t}{\sqrt{T-t}} \geq \frac{\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)-\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)\\
&= Q_{\mathcal{F}_t}\left(-\frac{B_T-B_t}{\sqrt{T-t}} \leq \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-q-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)
\end{aligned}$$

Or $-\frac{B_T-B_t}{\sqrt{T-t}} \sim \mathcal{N}(0,1)$.

$$\text{Donc } E_Q\left(\mathbb{1}_{S_T\geq K} \mid \mathcal{F}_t\right) = N(d_2)$$

$$\text{où } d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$\text{et } N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy.$$

Calculons maintenant $E_Q\left(S_T\mathbb{1}_{S_T\geq K} \mid \mathcal{F}_t\right)$. De manière identique à ce que l'on vient de faire, on a :

$$E_Q\left(S_t\mathbb{1}_{S_T\geq K} \mid \mathcal{F}_t\right) = S_t e^{(r-q)(T-t)} E_Q\left(e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma(B_T-B_t)} \times \mathbb{1}_{-\frac{B_T-B_t}{\sqrt{T-t}}\leq d_2} \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

On veut trouver Q^* tel que

$$E_Q\left(e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma(B_T-B_t)} \times \mathbb{1}_{-\frac{B_T-B_t}{\sqrt{T-t}}\leq d_2} \middle| \mathcal{F}_t\right) = E_{Q^*}\left(\mathbb{1}_{-\frac{B_T-B_t}{\sqrt{T-t}}\leq d_2} \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

Donc on veut

$$\frac{dQ^*}{dQ}|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\frac{\sigma^2}{2}(T-t)+\sigma(B_T-B_t)}.$$

Sous cette nouvelle proba, c'est $B_t^* = B_t - \sigma_t$ qui est un mouvement Brownien, et non plus B_t (d'après le théorème de Girsanov). Ainsi,

$$\begin{aligned} E_{Q^*}\left(\mathbb{1}_{-\frac{B_T-B_t}{\sqrt{T-t}}\leq d_2} \middle| \mathcal{F}_t\right) &= Q^*_{\mathcal{F}_t}\left(\frac{B_T-B_t}{\sqrt{T-t}} \leq d_2\right) \\ &= Q^*_{\mathcal{F}_t}\left(-\frac{(B_T-B_t)-\sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}} \leq d_2 + \sigma\sqrt{T-t}\right) \\ &= N(d_1). \end{aligned}$$

avec $d_1 = d_2 + \sigma T - t$, puisque sous Q^*, $-\frac{(B_T-B_t)-\sigma(T-t)}{\sqrt{T-t}} \sim \mathcal{N}(0,1)$. Finalement :

$$E_Q\left(S_T\mathbb{1}_{S_T\geq K} \mid \mathcal{F}_t\right) = S_t e^{(r-q)(T-t)} N(d_1).$$

11. Finalement, on obtient la formule donnant le prix à l'instant $t \in [0,T]$, du call européen sur l'action dans le modèle de Merton.

$$C(S_t,t) = S_t e^{-(r-q)(T-t)} N(d_1) - K e^{-r(T-t)} N(d_2)$$

où

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - q - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

et

$$d_1 = d_2 + \sigma\sqrt{T-t}.$$

12. En prenant $q = 0$, on retrouve la formule de Black et Scholes !