



# Titrisation des risques d'assurance

Mécanismes, méthodes d'évaluation  
et stratégies de couverture partielle.

# Plan de l'exposé

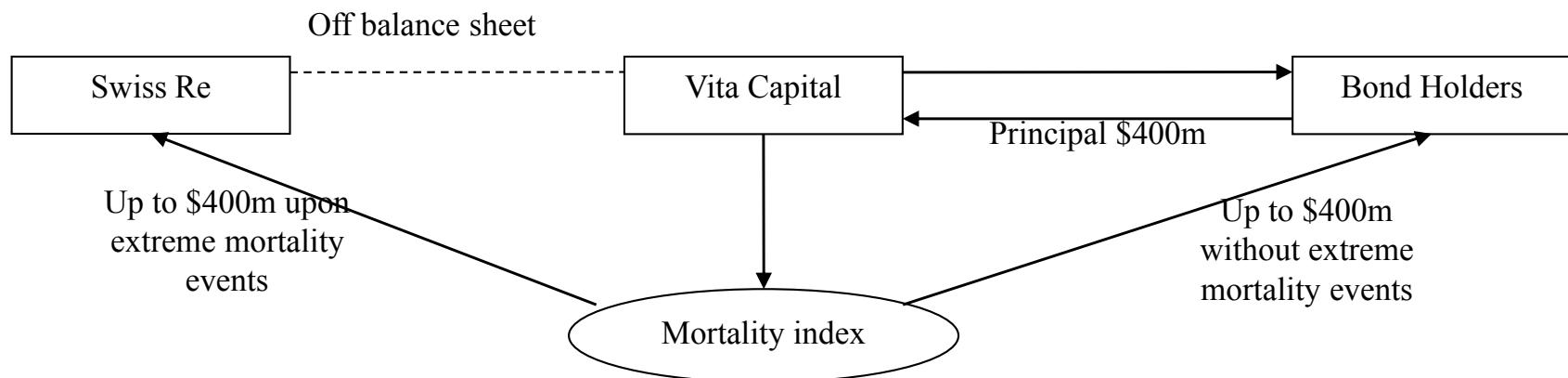
- Mécanismes
- Réassurance et titrisation
- Méthodes d'évaluation actuarielles et financières
- Incomplétude du marché et conséquences
- Spécificités des risques sous-jacents (long terme vs court terme, risque de décorrélation)
- Comportement des agents, besoin en capital économique et en liquidité
- Smile de corrélation
- Conclusion dans une perspective ERM

# Mécanismes de titrisation

- En assurance, des types de risques très différents, et un marché en développement depuis l'ouragan Andrew en 1992:
  - Catastrophes naturelles (ouragans sur la côte est des USA (USAA-Residential Re, etc...), séismes dans la région de San Francisco, tempêtes en Europe, etc...).
  - Risque de mortalité :
    - Swiss Re : Vita Capital I, II, III,
    - Scottish Re,
    - Axa: Osiris Capital.
  - Risque automobile (Axa, opérations 1 et 2 (Sparc avec Natixis)).
  - Bientôt risque de longévité ? (tentative BNP Paribas-EIB-Partner Re)
  - Bientôt les risques dits émergents ?
- En finance, un marché plus développé, mais encore de nombreuses questions sur les méthodes d'évaluation.
- Passage d'une évaluation *marked-to-model* à une évaluation *marked-to-market*.
- Des mécanismes très complexes, avec des similitudes fortes, et des spécificités.

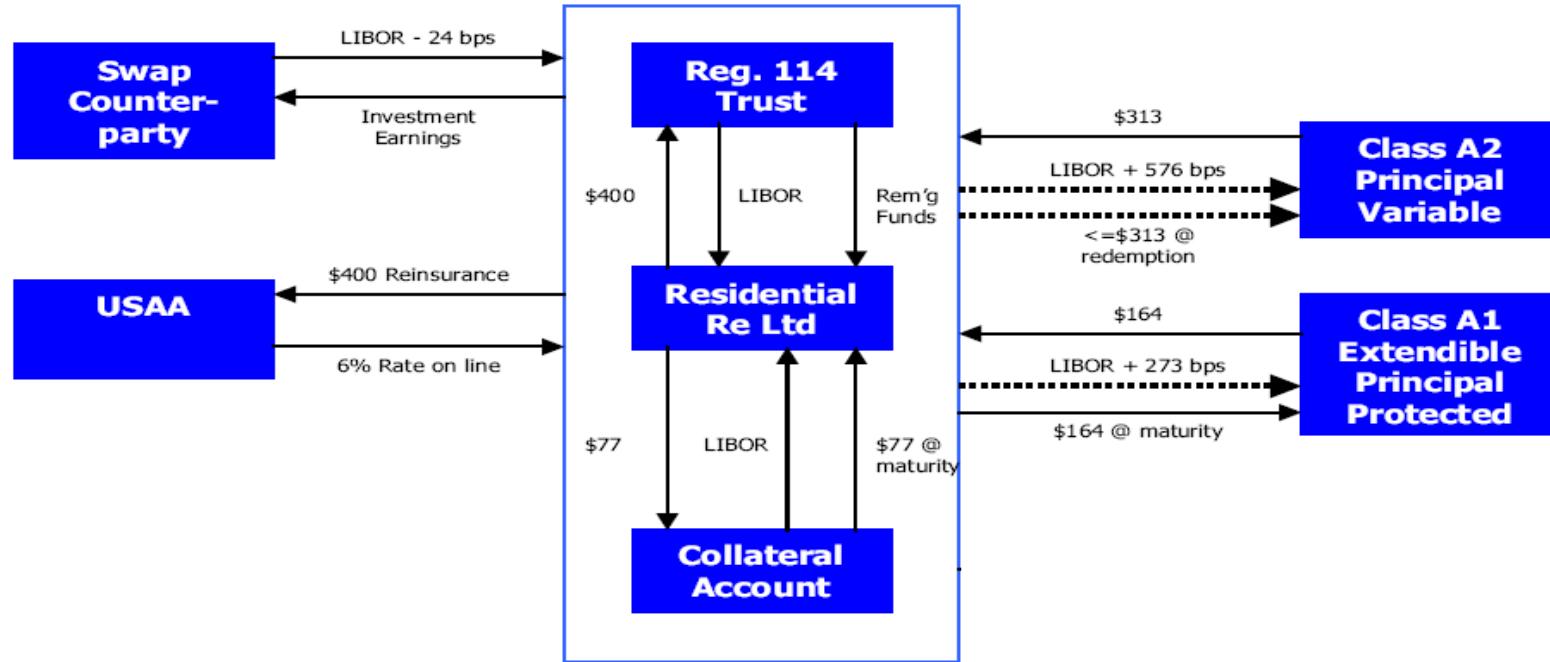
# Mécanismes de titrisation

- Le point commun de la plupart des mécanismes est la création d'une société ad-hoc (créeée pour l'occasion), souvent appelée SPV (Special Purpose Vehicle) ou SPR (Special Purpose Reinsurer).
- En réalité le schéma est bien plus complexe : de nombreuses contreparties sont chargées de garantir certains taux, rendements ou notations. Il ne faut pas oublier les contrôles et les intermédiaires.



Source: Cairns, Blake & Dowd: Structure simplifiée du Mortality Bond de Swiss Re.

# Mécanismes de titrisation

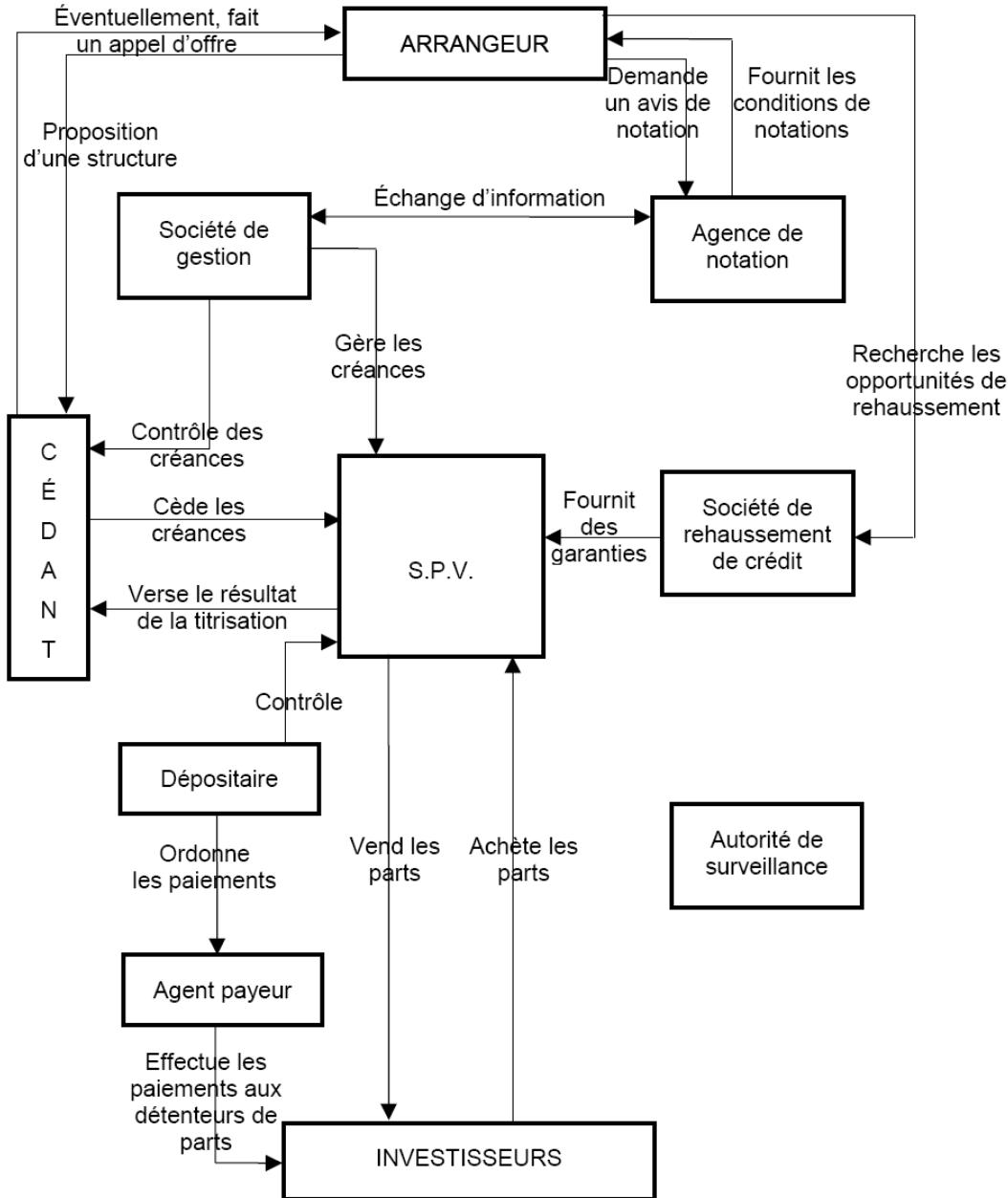


Source: cours ENSAE d'Arthur Charpentier.

USAA-Residential Re (1997): titrisation du risque d'ouragan sur la côte est des USA.

Intermédiaires: Goldman Sachs, Meryll Lynch, Lehman Brothers, 62 investisseurs. Le schéma commence à se compliquer.

## Mécanisme général selon François Leroux (HEC Montréal)



# Mécanismes

Le montage d'une opération de titrisation est très complexe et comporte une composante juridique importante, le SPV étant souvent dans un pays qui présente certains avantages (Irlande, Bermudes, Lux., etc...).

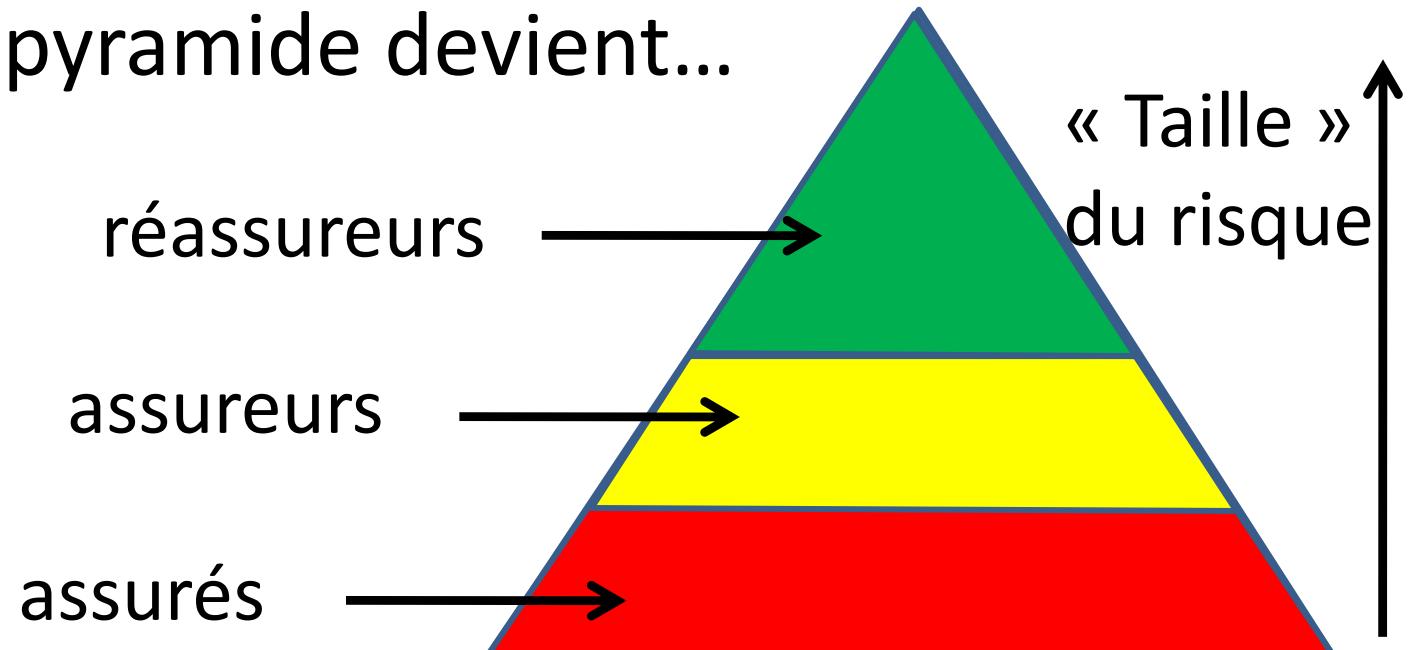
# Mécanismes et évaluation

- La complexité de ces mécanismes rend l'évaluation des Insurance-Linked Securities (ILS) dépendante de la confiance des investisseurs dans tous les aspects du montage.
- Le prix résultera non seulement d'un modèle d'évaluation, mais aussi de contraintes comptables, de notations, d'aspects juridiques, du risque d'asymétrie d'information, d'évaluation de gain en capital économique, etc...
- L'indice qui détermine si les coupons seront versés et quelle partie du principal à risque sera remboursée est également très important.

# Réassurance vs titrisation

La réassurance traditionnelle  
peut avoir tendance à  
concentrer les grands risques.

Titrisation: La pyramide devient...

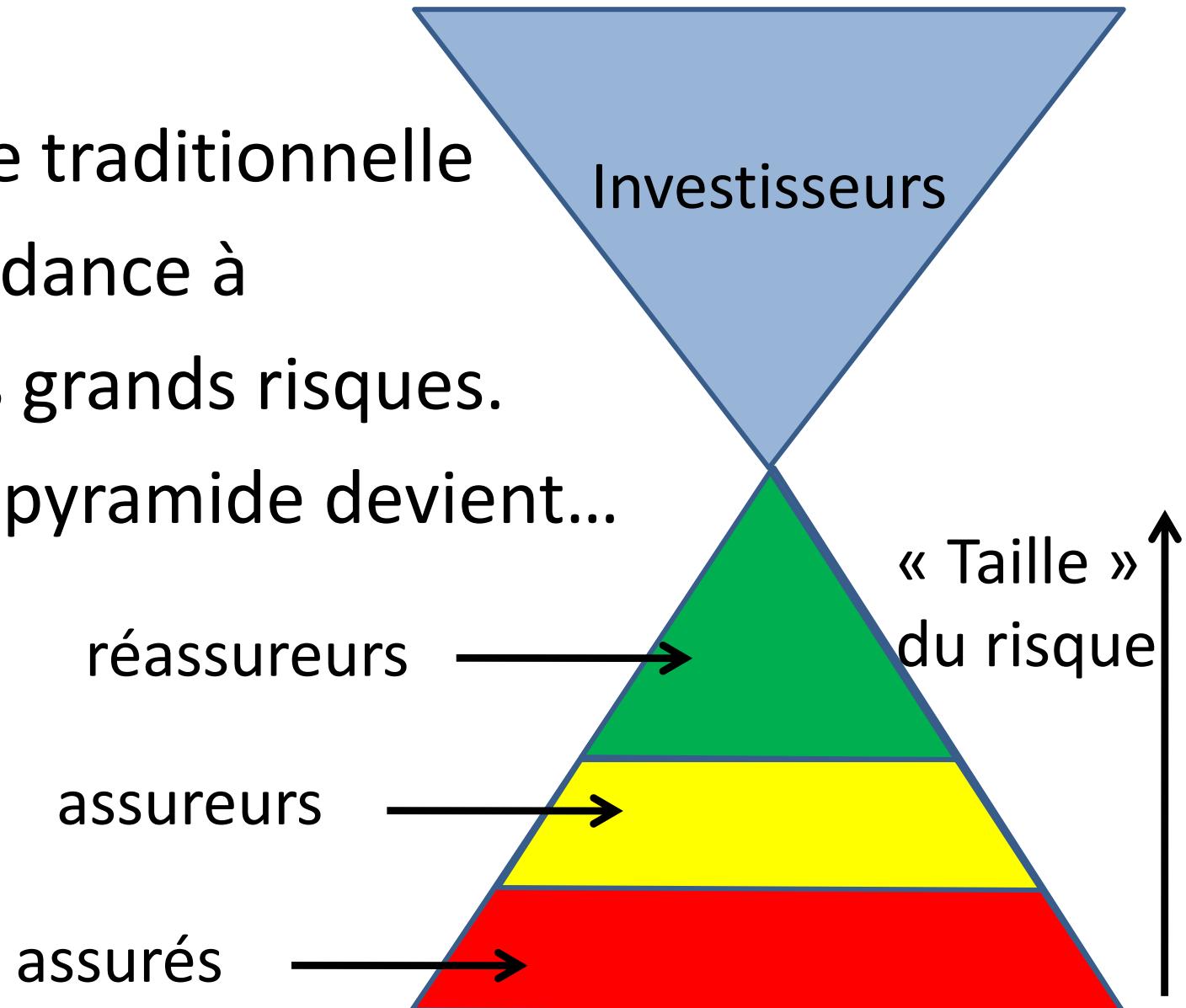


# Réassurance vs titrisation

La réassurance traditionnelle  
peut avoir tendance à  
concentrer les grands risques.

Titrisation: La pyramide devient...

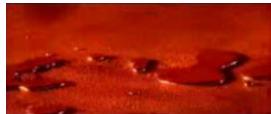
... un sablier!



# Titrisation: atomisation du risque ?



# Titrisation: atomisation du risque ?



Attention, le risque ne disparaît jamais !  
Il se transfère ou se recompose (par ex.  
en tranches equity, mezzanine et senior).  
Risque de corrélation des extrêmes.



# Méthodes d'évaluation financières et actuarielles

- Méthodes actuarielles basées sur le choix d'une mesure de risque:
  - Value-at-Risk, Tail-Value-at-Risk, Wang-transform, autres mesures de distorsion cohérentes, pricing par écart-type, etc...
  - Chargement de sécurité: le prix est en général égal à l'espérance plus une prime de risque (la Market Value Margin dans Solvabilité II par ex.).
  - Diversification possible sous certaines conditions
  - Approche coût du capital pour déterminer la MVM dans Solvabilité II: la prime de risque est obtenue en actualisant les capitaux à mettre dans le futur en face de ces risques.

# Méthodes d'évaluation financières et actuarielles

- Méthodes financières basées sur l'évaluation en univers risque-neutre:
  - Changement de mesure de probabilité: la mesure de probabilité dite historique  $P$  est remplacée par la mesure de probabilité risque-neutre notée  $Q$ .
  - Le prix d'un produit financier est alors l'espérance des flux futurs actualisés sous  $Q$ .
  - En marché complet, en absence d'opportunité d'arbitrage, dans les modèles classiques,  $Q$  existe et est unique\*.
  - Le prix d'un contrat est obtenu en fonction de la stratégie de couverture à mettre en place pour répliquer les flux futurs.

\* En général il faut l'hyp. d'Harrison et Pliska (1981)

# Convergence des deux méthodes

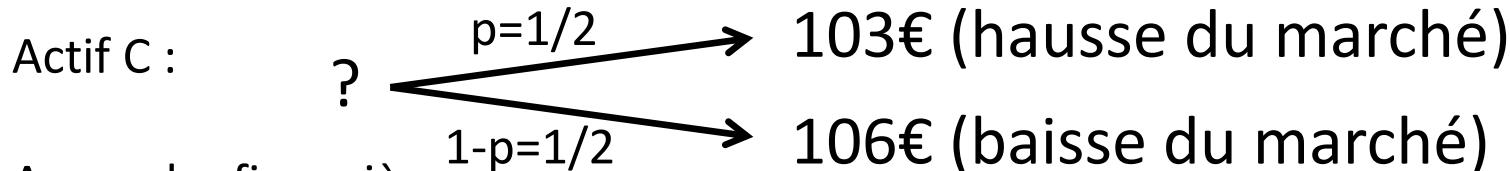
- Ces deux méthodes ne sont déjà pas si différentes initialement:
- Considérons un marché complet monopériodique avec 2 actifs, et sans opportunité d'arbitrage:

– Actif A (sans risque) : 1€  $\longrightarrow$  1.03 €

– Actif B (risqué) : 1€  $\begin{array}{c} \xrightarrow{p=1/2} 1.12\text{€ (hausse)} \\ \xrightarrow{1-p=1/2} 0.98\text{€ (baisse)} \end{array}$

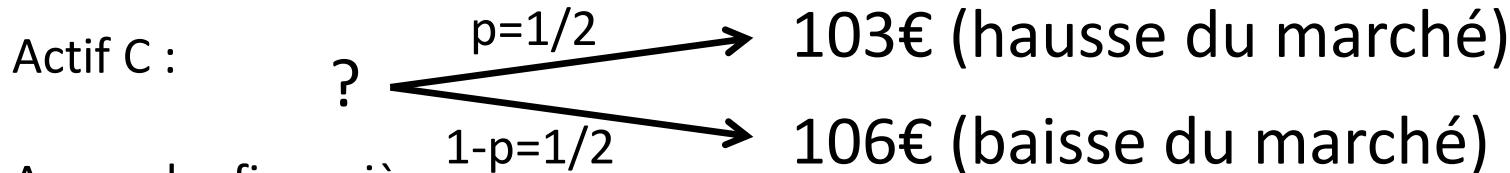
– On souhaite évaluer un produit d'assurance contre une baisse du marché actions : l'actif C (comme cat).

# Convergence des deux méthodes



- Approche financière:
  - sous la probabilité risque-neutre  $Q$ , tous les actifs ont le même rendement moyen. La probabilité  $q$  de hausse sous  $Q$  est donc:  
 $1.12q+0.98(1-q)=1.03$ , soit  $q=0.357$ .
  - Le prix de l'actif C est alors donné par l'espérance sous  $Q$  du payoff actualisé:  
 $[103q+106(1-q)]/1.03 = 101.87\text{€}$
  - Prix expliqué par  $\begin{cases} 1.03a+1.12b=103 \\ 1.03a+0.98b=106 \end{cases}$
  - Le portefeuille répliquant est constitué de quantités  $a=123.30$  d'actif A et  $b=-21.43$  d'actif B. Prix du portefeuille répliquant:  $a+b=101.87\text{€}$ .
- Approche actuarielle:
  - On peut par ex. calculer le payoff moyen actualisé (sous  $P$ ):  
 $[103p+106(1-p)]/1.03 = 101.46\text{€}$  et rajouter une prime de risque (ou chargement de sécurité).
  - On retrouve  $101.87\text{€} = \textcolor{red}{101.46\text{€}} + \textcolor{green}{0.41\text{€}}$  si le taux de chargement est de 0.4%.

# Convergence des deux méthodes



- Approche financière:
  - sous la probabilité risque-neutre Q, tous les actifs ont le même rendement moyen. La probabilité q de hausse sous Q est donc:  
 $1.12q+0.98(1-q)=1.03$ , soit  $q=0.357$ .
  - Le prix de l'actif C est alors donné par l'espérance sous Q du payoff actualisé:  
 $[103q+106(1-q)]/1.03 = 101.87\text{€}$
  - Prix expliqué par  $\begin{cases} 1.03a+1.12b=103 \\ 1.03a+0.98b=106 \end{cases}$
  - Le portefeuille répliquant est constitué de quantités  $a=123.30$  d'actif A et  $b=-21.43$  d'actif B. Prix du portefeuille répliquant:  $a+b=101.87\text{€}$ .
- Approche actuarielle:
  - On peut par ex. calculer le payoff moyen actualisé (sous P):  
 $[103p+106(1-p)]/1.03 = 101.46\text{€}$  et rajouter une prime de risque (ou chargement de sécurité). Best estimate MVM
  - On retrouve  $101.87\text{€} = 101.46\text{€} + 0.41\text{€}$  si le taux de chargement est de 0.4%.

# Convergence des deux méthodes

- Dans l'approche financière, le passage à la probabilité risque-neutre contient la notion de prime de risque comme dans l'approche actuarielle.
- IFRS et Solvabilité II: risques diversifiables vs risques non diversifiables. Seuls les risques non diversifiables doivent donner lieu à une prime de risque supplémentaire.
- La notion de diversification:
  - Correspond à la sous-additivité de la mesure de risque en méthode d'évaluation actuarielle
  - Est contenue dans la théorie du portefeuille de Markovitz: l'introduction d'ILS (rendements potentiellement élevés et faible corrélation avec les marchés financiers traditionnels) a un impact positif et fait bouger la frontière efficiente favorablement. Plus la corrélation est faible, plus l'impact est significatif. Cela explique l'intérêt de certains investisseurs pour les ILS. Attention toutefois à la définition et la calibration de la corrélation !

# Convergence des deux méthodes

- La convergence des méthodes résulte de la convergence générale entre assurance et finance.
- Les marchés financiers portent déjà les risques d'assurances (actionnaires des compagnies d'assurances et de réassurance) : il y a déjà un « tranchage » du risque puisque les actionnaires supportent les premières pertes.
- Une autre approche financière est celle du MEDAF : la valeur d'un flux  $\Phi$  à la date t est donnée par

où  $r_f$  est le taux sans risque,

$$V_t(\Phi) = \frac{E_p(\Phi)}{1 + r_f + \beta(E(\tilde{r}_m) - r_f)}$$

$\tilde{r}_m$  est lié au rendement moyen sur le marché (aléatoire) et  $\beta$  est une mesure de la corrélation entre l'actif considéré et le marché.

- On modifie les taux d'actualisation pour inclure une prime de risque ; ceci joue au numérateur, les espérances sont prises sous probabilité réelle, contrairement à l'approche risque neutre, où l'on actualise au taux sans risque, mais on modifie la loi des flux de trésorerie au numérateur.

# Incomplétude du marché

- Dans l'exemple que nous avons vu, le marché est supposé complet (tous les actifs sont répliquables). Cela n'est évidemment pas le cas pour les ILS.
- Dans ce cas, en absence d'opportunité d'arbitrage\*, l'existence d'une probabilité risque-neutre est préservée, mais le problème est qu'elle n'est plus unique.
- Le problème consiste alors à choisir la probabilité risque-neutre la plus pertinente:
  - Soit en cherchant à calibrer les prix sur le marché (problème: il est souvent embryonnaire ou peu liquide).
  - Soit en utilisant des prix de produits financiers existants qui ont des caractéristiques relativement proches (par ex. ratio de Sharpe).
- La notion de complétude est évolutive.
- Grâce aux ILS, le marché se complète petit à petit. On passera bientôt de prix *marked-to-model* à des prix *marked-to-market*.

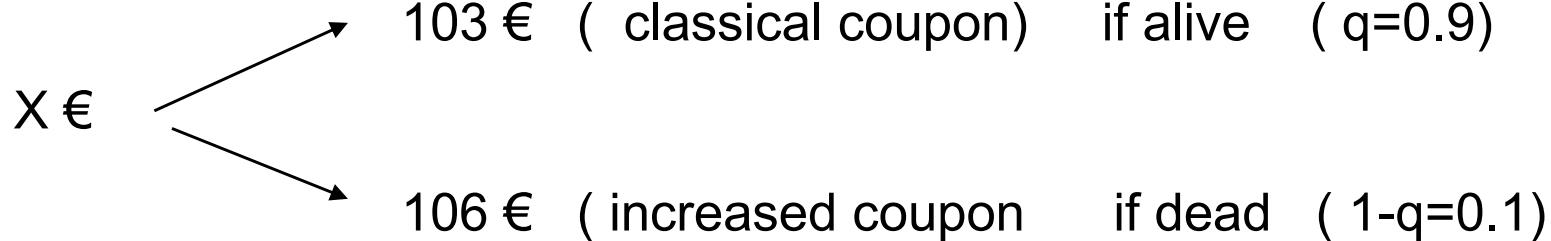
# Incomplétude du marché

- En effet, la titrisation peut dans certains cas renverser la problématique de l'évaluation.
- Quand le marché devient liquide pour certains produits standardisés, ils complètent le marché.
- Le prix qui résulte de la confrontation de l'offre et de la demande devient un input de calibration pour les modèles, puisque le *marked-to-market* va primer le *marked-to-model* quand les produits sont liquides (ce qui n'est pas le cas si les produits sont trop spécifiques et au début du marché).
- Exemple : dans la titrisation des crédits *corporate*, les tranches sur indices iTraxx et CDX sont des classes d'actif à part entière. *Quid* pour les ILS ?

# Ex. de marché incomplet: les mortality-linked securities

- Ajout d'un risque de mortalité systémique : taux de mortalité annuel futur pour une personne d'âge  $x$  aléatoire :  
 $(qx=0.05 \text{ avec probabilité } r=0.5 \text{ et } 0.15 \text{ avec probabilité } 1-r=0.5)$ .
- On suppose que le risque de mortalité est indépendant du risque précédent (financier).
- Prix obtenu par le choix d'une certaine probabilité risque-neutre globale, produit de deux probabilités risque-neutre (une pour le risque de mortalité et celle pour le risque financier).
- La probabilité risque neutre pour le risque de mortalité existe en absence d'opportunité d'arbitrage mais n'est plus unique.
- On l'obtient en choisissant une probabilité risque-neutre  $r^*$  que  $qx=0.05$ . Cette nouvelle probabilité  $r^*$  doit être comprise entre 0 et  $r=0.5$ .
- Si le risque était diversifiable, alors il n'y aurait pas de prime de risque en théorie.
- Limite: la taille d'un portefeuille d'assurance ou de réassurance n'est pas infinie. Comment tenir compte de cette diversification imparfaite?

CAT- Bond :

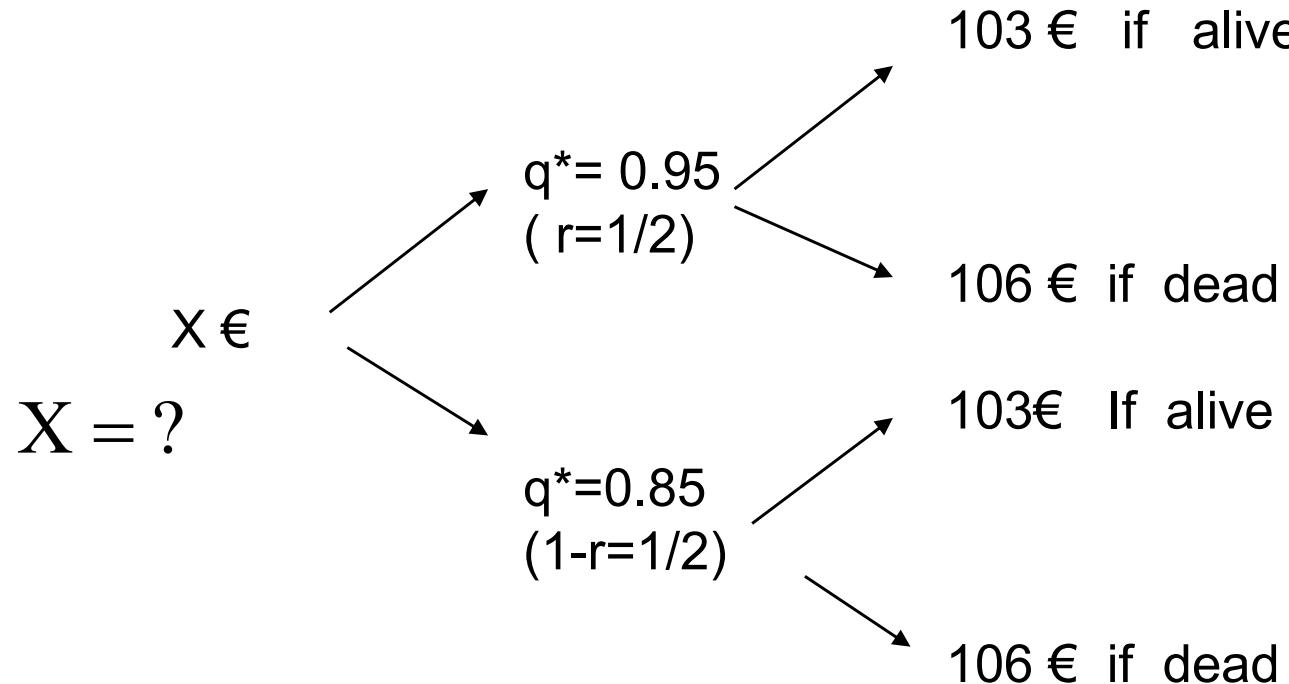


Actuarial answer (... correct...):

$$X = \frac{1}{1.03} (0.9 \cdot 103€ + 0.1 \cdot 106€) = 100.29€$$

- no possible hedging on the market ( ... real risk...)
- diversifiable risk ( assumption :  $q$  is sure !!)
- no safety margin in the financial pricing because can be completely diversified ( by selling a big number of such contracts)
- unique price based on the real probability measure

## 4° optional bond – undiversifiable mortality risk



- With the mean value, we would obtain the same price as in the diversifiable case
- But the new risk introduced :
  - ***cannot be hedged***
  - ***cannot be eliminated or mitigated by diversification***
- This means that this part of the risk must be remunerated !!

$$X > 100.29$$

- One possible tool is to change the measure of  $q$  (risk neutral value of  $r$ )
- But no unique possibility for that !!

# Marché incomplet: risque de longévité

- Littérature abondante mais pas de marché pour l'instant.
- Méthodes financières:
  - Devolder (2006),
  - Cairns, Blake et Dowd (2007), ...
  - analogie entre le taux d'intérêt instantané et le taux de hasard de mortalité.
- Méthodes actuarielles basées sur une Wang-transform à 1 puis à 2 paramètres (faisant intervenir la loi de Student):
- Lin et Cox (2006), Lin (2006).
- Calibrer une Wang-transform à 1 paramètre semble difficile, cela devient possible avec un 2<sup>ème</sup> paramètre.
- Double échelle de temps: oscillations autour des tables prospectives puis autour des prévisions à long terme des démographes (très variables d'un démographe à l'autre).

# Spécificités des risques sous-jacents

- Nécessité d'un indice fiable présentant un risque faible d'asymétrie d'information (le manque de confiance des investisseurs à ce sujet avait causé l'échec des premières tentatives de cat-bonds).
- Le risque portant sur l'indice est différent du risque de base: risque de décorrélation entre les pertes réelles et les indemnisations obtenues par la titrisation.
- Fort risque de modèle et risques très spécifiques (risque cat parfois évalué en externe (*black box*)).
- Exemple: risque de pandémie grippale (cf Chenut et al (2008)).
  - Importance de la prise en compte des vagues d'épidémie (corrélation temporelle sur 3 ans)
  - Importance du choix du pas de temps
  - Importance du profil de contamination par âge (en U, en W, plat, ...).
  - Corrélation avec les risques financiers ?

# Spécificités des risques sous-jacents

- Risque de longévité:
  - corrélations inter-âges (Loisel et Serant (2007)) et effet cohorte dans certains pays (Haberman et Renshaw (2006)).
  - Théorie des options longues pour la partie financière du risque.
- Risques demandant la synthèse de nombreux domaines.
- Risques de court terme: titrisations réussies.
- Risques de long terme : titrisations non abouties jusqu'à présent même si la demande est là (risque de longévité UK par exemple).
- Standardisation des produits sans doute nécessaire pour ces risques de long terme.

# Besoin en capital et en liquidité

- Il faut parfois revenir aux mécanismes de formation des prix eux-mêmes.
- Méthodes dérivées de l'économie du risque, lien avec les équilibres Pareto optimaux (cf Barrieu et El Karoui (2004a, 2004b)).
- Evaluation par indifférence d'utilité ou par indifférence d'utilité locale.
- La titrisation peut être vue comme un moyen de rendre liquides des produits qui ne l'étaient pas, et comme un moyen de limiter ses besoins en capital économique (titrisation partielle du risque auto par AXA).
- Une autre méthode d'évaluation consiste à évaluer le prix qu'un assureur est prêt à payer pour céder un risque et gagner en besoins de capital.

# Smile de corrélation

- Pour beaucoup de risques, la corrélation avec les risques financiers traditionnels semble très faible et il peut être tentant de supposer les risques d'assurance indépendants des risques financiers.
- Cela est presque vrai en régime stable, mais devient très discutable en cas de crise. Or la titrisation concerne justement les grands risques. Une grande attention doit donc être portée aux scénarios extrêmes et à la corrélation cachée qui n'a pas encore pu être observée. Exemples :
- En risque cat, Katrina et Rita, et les bons des *municipalities* touchées.
- En risque de crédit, smile de corrélation : en régime moyen, peu de corrélation entre les indicatrices de défaut de différents noms, mais en cas de crise ou d'embellie le marché devient le driver principal (cf Burstchell, Grégory et Laurent (2007), et Biard, Cousin, Laurent et Loisel (2008)).
- En risque de mortalité : des experts prédisent une chute du PNB de 5% et une chute des actions de 15 à 25% en cas de pandémie de grippe aviaire.

# Stratégies de couverture partielle

- Cette corrélation peut donner l'idée d'une stratégie de couverture partielle (ou croisée) du risque de mortalité
- Par l'achat de put options sur les actions les plus susceptibles d'être touchées en cas de pandémie
- Et par l'achat de produits dérivés de crédit pour se protéger contre le défaut de l'institution vendeuse du put.
- Pour plus de détails sur la détermination de la quantité optimale de puts à détenir, voir Chenut, Lefèvre, Loisel et Toureille (2008).

# Stratégies de couverture partielle

- Pour les risques financiers modélisés grâce à des mouvements Browniens corrélés, cette idée correspond à la notion de cross-hedging étudiée par Ankirchner et al (2007).
- Couverture mutuelle partielle des risques de mortalité et de longévité: quelle composition de portefeuille ? Dans quelle mesure cela est-il possible ?
- Attention au risque de décorrélation : de la même manière, en principe, le risque de crédit pourrait se couvrir avec des puts sur actions ; en pratique, c'est loin d'être clair : exemple, le décalage récent entre l'évolution du cours de bourse des banques et l'augmentation du risque de crédit.

# Conclusion: titrisation et ERM

- La titrisation des risques d'assurance est en plein essor.
- Ce développement ira de pair avec la standardisation des produits de type ILS, la réduction de l'incomplétude du marché et l'évolution des méthodes d'évaluation.
- Les ILS sont utiles pour maîtriser besoins en liquidité et en capital économique.
- Encore des interrogations théoriques sur la notion de valeur, sur les corrélations, etc...
- Tout ceci renvoie aux problématiques générales de l'Enterprise Risk Management (ERM).



# Merci pour votre attention !

Pour toute question, pour un feedback ou pour une référence bibliographique,

[stephane.loisel@univ-lyon1.fr](mailto:stephane.loisel@univ-lyon1.fr)