



Intégration L3 Actuariat

Chapitre II: Intégration

Pierre-Olivier Goffard

Université de Lyon 1
ISFA
pierre-olivier.goffard@univ-lyon1.fr

ISFA
October 7, 2020



Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Nous allons définir l'intégrale d'une fonction $f : \Omega \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ mesurable. On note \mathcal{M} l'ensemble des fonctions mesurables de (Ω, \mathcal{A}) dans $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$.

I. Intégrale par rapport à une mesure

On note \mathcal{M}^+ l'ensemble des fonctions mesurables positives. Soit $f \in \mathcal{M}^+$. On définit l'intégrale de f , notée $\int f d\mu$ ou $\int f(\omega) d\mu$ par

$$\int f d\mu = \sup \sum_{i \in I} \inf\{f(\omega) ; \omega \in \Omega_i\} \mu(\Omega_i),$$

où le supremum est pris sur l'ensemble des partitions $(\Omega_i)_{i \in I}$ de Ω et I est un ensemble fini d'indice. On note

$$I((\Omega_i)_{i \in I}, f) = \sum_{i \in I} \inf\{f(\omega) ; \omega \in \Omega_i\} \mu(\Omega_i)$$

Remarque 1

Soit $(\Omega_i)_{i \in I}$ et $(\Omega'_j)_{j \in J}$ deux partitions de Ω . $(\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j) \in I \times J}$ est encore une partition de Ω telle que $I((\Omega_i \cap \Omega'_j)_{(i,j) \in I \times J}, f) \geq I((\Omega_i)_{i \in I}, f)$



1. Intégrale des fonctions étagées positives

Le passage de la mesure d'un ensemble à la mesure d'une fonction (ou intégrale d'une fonction) procède d'une idée simple. Pour $A \subset \Omega$, on attribue la mesure $\mu(A)$ à la fonction indicatrice

$$\mathbb{I}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Definition 1 (Intégrale de la fonction indicatrice)

L'intégrale de la fonction \mathbb{I}_A par rapport à μ est définie par

$$\int_{\Omega} \mathbb{I}_A d\mu = \int_{\Omega} \mathbb{I}_A(\omega) d\mu(\omega) = \mu(A)$$

Plus généralement, si $B \in \mathcal{A}$, l'intégrale de $f = \mathbb{I}_A$ sur B par rapport à μ est définie par

$$\int_B \mathbb{I}_A d\mu = \int_{\Omega} \mathbb{I}_B \mathbb{I}_A d\mu = \int_{\Omega} \mathbb{I}_B(\omega) \mathbb{I}_A(\omega) d\mu(\omega) = \mu(A \cap B).$$



Definition 2 (Fonction étagées positives)

On appelle fonction étagée positive une fonction $f : \Omega \mapsto \overline{\mathbb{R}}$, définie par

$$f(\omega) = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega),$$

où A_1, A_2, \dots, A_n est une partition de Ω de \mathcal{A} , et $a_1, \dots, a_n \geq 0$ des coefficients réels et positifs. On note \mathcal{E}^+ l'ensemble des applications étagées positives.

Definition 3 (Intégrale d'une fonction étagée positive)

Soit $f \in \mathcal{E}_+$, l'intégrale de f par rapport à μ est donnée par

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \int \mathbb{1}_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i),$$

L'intégrale de f sur $B \in \mathcal{A}$ par rapport à μ est donnée par

$$\int_B f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \int_B \mathbb{1}_{A_i} d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i \cap B),$$



Supposons l'existence d'une autre écriture de f sous la forme

$$\sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j},$$

où B_1, \dots, B_m forme une partition de Ω . Les b_j ne sont pas forcément distincts. En supposant que les a_i sont disjoints alors chaque A_i est la réunion disjointe $\cup_{j \in J} B_j$ telle que $b_j = a_i$ pour $j \in J$. On a alors

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^n a_i \sum_{\{j : b_j = a_i\}} \mu(B_j) = \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j).$$

La représentation sous la forme d'une fonction étagée positive n'est pas unique mais chaque représentation mène à la même valeur de l'intégrale.



Exemple 1 (Variable aléatoire discrète)

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $X : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (E, \mathcal{P}(E))$ une variable aléatoire discrète, avec $E = \{x_1, \dots, x_n\}$. X peut s'écrire

$$X = \sum_{i=1}^n x_i \mathbb{I}_{A_i}, \text{ avec } A_i = \{X = x_i\}.$$

On a

$$\int X d\mathbb{P} = \sum x_i \mathbb{P}(A_i) = \sum x_i \mathbb{P}(X = x_i) = \mathbb{E}(X).$$



Proposition 1

Soit $f, g \in \mathcal{E}^+$ et $\alpha > 0$.

① $f + g \in \mathcal{E}^+$ et

$$\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

②

$$\int (\alpha f) d\mu = \alpha \int f d\mu.$$

③

$$f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu.$$

preuve:



① Soient

$$f = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} \text{ et } f = \sum_{j=1}^m b_j \mathbb{1}_{B_j}$$

L'ensemble $\{A_i \cap B_j ; i = 1, \dots, n, \text{ et } j = 1, \dots, m\}$ forme une partition. On a donc

$$f + g = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) \mathbb{1}_{A_i \cap B_j}.$$

puis

$$\begin{aligned} \int f + g d\mu &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m (a_i + b_j) \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m a_i \mu(A_i \cap B_j) + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m b_j \mu(A_i \cap B_j) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i) + \sum_{j=1}^m b_j \mu(B_j) \\ &= \int f d\mu + \int g d\mu. \end{aligned}$$

② Immédiat

③ On note que $g - f \in \mathcal{E}^+$ puis on conclut en intégrant $g = f + (g - f)$.



□

Proposition 2 (Beppo-Lévi 1^{re} partie)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante de \mathcal{E}^+ qui converge simplement vers $f \in \mathcal{E}^+$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

preuve:

On a

$$f_n \leq f \Rightarrow \int f_n d\mu \leq \int f d\mu, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*.$$

donc $\lim \int f_n d\mu \leq \int f d\mu$. D'autre part, on pose $A_n = \{f_n \geq c \times f\}$, où $c \in]0,1[$. Comme la suite des f_n est croissante alors la suite des A_n est croissante pour l'inclusion et de réunion Ω . Comme $f \in \mathcal{E}^+$ alors $f = \sum_{i=1}^k \beta_i \mathbb{I}_{B_i}$ et

$$\mathbb{I}_{A_n} \cdot f = \sum_{i=1}^k b_i \mathbb{I}_{B_i \cap A_n}.$$

On a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \mathbb{I}_{A_n} \cdot f = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k b_i \mu(A_n \cap B_i) = \sum_{i=1}^k b_i \mu(B_i) = \int f d\mu$$



Comme $f_n \geq c.f.\mathbb{1}_{A_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq c \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \int f \cdot \mathbb{1}_{A_n} d\mu = c \cdot \int f d\mu.$$

En choisissant c arbitrairement proche de 1, il vient

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \int f d\mu.$$

□

Le lien entre fonctions mesurables positives et étagées se concrétisent avec les résultats suivants. On note \mathcal{M}_+ l'ensemble des fonctions mesurables de Ω vers $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Theoreme 1

Toute fonction $f \in \mathcal{M}_+$ est limite simple d'une suite croissante de fonction de \mathcal{E}_+ .



preuve:
Posons

$$f_n = n \mathbb{I}_{\{f \geq n\}} + \sum_{k=0}^{n2^n-1} \frac{k}{2^n} \mathbb{I}_{\left\{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\right\}}, \quad n \geq 1.$$

Par exemple,

$$f_1 = \mathbb{I}_{\{f \geq 1\}} + \frac{1}{2} \mathbb{I}_{\left\{\frac{1}{2} \leq f < 1\right\}}, \quad n \geq 1.$$

et

$$f_2 = 2 \mathbb{I}_{\{f \geq 2\}} + \frac{1}{4} \mathbb{I}_{\left\{\frac{1}{4} \leq f < \frac{1}{2}\right\}} + \frac{1}{2} \mathbb{I}_{\left\{\frac{1}{2} \leq f < \frac{3}{4}\right\}} + \dots, \quad n \geq 1.$$

Voici une visualisation, pour un $\omega \in \Omega$, on a $f(\omega) \in \mathbb{R}_+$ et

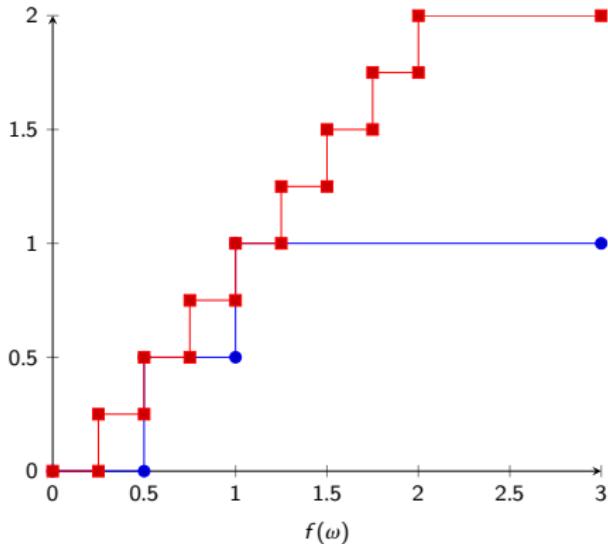


Figure: (bleu) f_1 ; (rouge) f_2

La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions étagées positives.

- qui converge vers f . En effet,
 - Si $\omega \in \{f = +\infty\}$ alors $f(\omega) = +\infty$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} n = +\infty$



- Si $\omega \in \{f < +\infty\}$ alors pour $\epsilon > 0$, il existe N tel que $\frac{1}{2^N} < \epsilon$ et $f(x) < N$ donc pour $n \geq N$ il existe $k \in \{0, 1, \dots, n2^n - 1\}$ pour lequel $\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}$. Par suite

$$0 \leq f(\omega) - f_n(\omega) = f(\omega) - \frac{k}{2^n} < \frac{1}{2^n} < \frac{1}{2^N} < \epsilon.$$

- qui est croissante, c'est à dire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $\omega \in \Omega$, $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$

- Si $f_n(\omega) = 0$ alors le résultat est trivial,
- Si $f_n(\omega) > 0$ alors

- Si $\omega \in \{f = \infty\}$ alors $f_n(\omega) = n < n+1 = f_{n+1}(\omega)$

- Si $\omega \in \{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\}$ pour un $k \in \{0, 1, 2, \dots, n2^n - 1\}$ alors

$$f_n(\omega) = \frac{k}{2^n} \begin{cases} = f_{n+1}(\omega), & \text{si } \omega \in \left\{ \frac{k}{2^n} \leq f < \frac{2k+1}{2^{n+1}} \right\} \\ < \frac{2k+1}{2^{n+1}} = f_{n+1}(\omega), & \text{si } \omega \in \left\{ \frac{2k+1}{2^{n+1}} \leq f < \frac{k+1}{2^n} \right\}. \end{cases}$$

□



2. Intégrale des fonctions mesurables positives

L'introduction des fonctions étagées permet de donner une définition alternative à l'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{M}_+$.

Definition 4 (Par les fonctions étagées positives)

L'intégrale d'une fonction $f \in \mathcal{M}_+$ par rapport à μ sur $B \subset \Omega$ est définie par

$$\int_B f d\mu = \sup \left\{ \int_B g d\mu ; g \in \mathcal{E}^+ , g \leq f \right\}$$

Proposition 3

Soit $f \in \mathcal{M}^+$ et $(h_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite croissante d'éléments de \mathcal{E}^+ , telle que $\lim h_n = f$.
Alors

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\mu.$$

preuve:

Soit $h \in \mathcal{E}^+$ telle que $h \leq f$. On définit

$$g_n = \min(h_n, h), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$



On remarque que $(g_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de fonctions étagées positives qui converge vers h , donc d'après Beppo-Lévi

$$\int f d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu = \int h d\mu$$

et ce pour tout $h \leq f$. Par définition de $\int f d\mu$, on a bien

$$\int f d\mu \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \int h_n d\mu \geq \sup \left\{ \int h d\mu; h \in \mathcal{E}^+, h \leq f \right\} = \int f d\mu$$

□

Proposition 4

Soit $f, g \in \mathcal{M}_+$ et $a, b > 0$

①

$$\int (af + bg) d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$$

② $f \leq g \Rightarrow \int f d\mu \leq \int g d\mu$

Preuve:



- ① Soient $(f_n)_{n \geq 1}$ et $(g_n)_{n \geq 1}$ deux suites croissantes de \mathcal{E}^+ qui convergent respectivement vers f et g . On en déduit que la suite définie par $af_n + bg_n$ pour $n \geq 1$ converge vers $af + bg$. De plus, on a

$$\int (af_n + bg_n)d\mu = a \int f_n d\mu + b \int g_n d\mu$$

ce qui est équivalent à

$$\int (af + bg)d\mu = a \int f d\mu + b \int g d\mu$$

après passage à la limite.

- ② Si $f \leq g$ alors $h \leq f \Rightarrow h \leq g$ pour toutes fonction $h \in \mathcal{E}^+$ et

$$\int f d\mu = \sup \left\{ \int h d\mu; h \in \mathcal{E}^+, h \leq f \right\} \leq \sup \left\{ \int h d\mu; h \in \mathcal{E}^+, h \leq f \right\} = \int g d\mu$$

□



Theoreme 2 (Beppo-Lévi)

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de fonctions mesurables positives convergeant simplement (μ -p.p.) vers f alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

preuve:

Soit $g \in \mathcal{E}^+$ telle que $f \geq g$, par exemple

$$g = \sum_{i \in I} \inf\{f(\omega) ; \omega \in A_i\} \mathbb{I}_{A_i},$$

où $(A_i)_{i \in I}$ forme une partition de Ω . Soit

$$E_n = \{f_n \geq \alpha g\}, \quad n \in \mathbb{N},$$

avec $\alpha \in [0, 1]$. $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante d'éléments de \mathcal{A} . Comme $\lim f_n = f \geq \alpha g$ alors on peut trouver n assez grand tel que $\omega \in E_n$ et donc $\cup_{n \in \mathbb{N}} E_n = \Omega$. On en déduit que $(\mathbb{I}_{E_n} \alpha g)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de fonction étagées positives telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{I}_{E_n} \alpha g = \alpha g$ et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \mathbb{I}_{E_n} \alpha g d\mu = \int \alpha g d\mu,$$



par application de la Proposition 2. On a

$$f_n \geq f_n \mathbb{1}_{E_n} \geq \mathbb{1}_{E_n} \alpha g$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu \geq \alpha \int \mathbb{1}_{E_n} \alpha g d\mu = \alpha \int g d\mu$$

On obtient

$$\lim \int f_n d\mu \geq \int f d\mu$$

en faisant tendre α vers 1 et en prenant le sup sur les fonction étagées positives.



Definition 5

Une propriété Π est vraie μ -presque partout si et seulement si l'ensemble $\{\omega \in \Omega ; \Pi(\omega) \text{ est fausse}\}$ est μ -négligeable au sens où

$$\exists B \in \mathcal{A}, \{\omega \in \Omega ; \Pi(\omega) \text{ est fausse}\} \subset B \text{ et } \mu(B) = 0.$$

Exemple 2

Soit f et g deux applications mesurables. Dire que $f \leq g$ μ -presque partout est équivalent à

$$\mu(\{\omega \in \Omega ; f(\omega) > g(\omega)\}) = \mu(f > g) = 0$$

Proposition 5

Soit f une application mesurable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}^+$. Alors

$$\int f d\mu = 0 \Leftrightarrow f = 0 \text{ } \mu\text{-p.p.}$$

preuve:

Supposons que $f \in \mathcal{E}^+$ alors si $f = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mathbb{1}_{A_i} = 0$ μ -pp, cela signifie que soit $\alpha_i = 0$ ou $\mu(A_i) = 0$ pour $i = 1, \dots, k$ puis

$$\int f d\mu = \sum_{i=1}^k \alpha_i \mu(A_i) = 0.$$

Si $f \in \mathcal{M}^+$ alors f est limite d'une suite croissante de fonctions étagées positives $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, nulles μ -pp. on a

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = 0$$

par Beppo-Lévi.

⇒ Supposons que $\int f d\mu = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\mathbb{1}_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} \leq n.f,$$

et

$$0 \leq \mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = \int \mathbb{1}_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} d\mu \leq n \cdot \int f d\mu = 0.$$

En remarquant que

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\},$$

puis $\mu(\{f \neq 0\}) \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) = 0$.

□



3. Intégrale des fonctions mesurables

On note \mathcal{M} l'ensemble des applications mesurables de (Ω, \mathcal{A}) vers $(\overline{\mathbb{R}}, \mathcal{B}_{\overline{\mathbb{R}}})$ et μ une mesure sur (Ω, \mathcal{A}) . Pour tout $f \in \mathcal{M}$, on a

$$\{f \geq 0\}, \{f < 0\} \in \mathcal{A}$$

et

$$f^+ = \mathbb{I}_{\{f \geq 0\}} \cdot f, \quad f^- = -\mathbb{I}_{\{f < 0\}} \cdot f$$

sont des applications mesurables positives. Il ne faut pas oublier que

$$f = f^+ - f^- \text{ et } |f| = f^+ + f^-.$$

On peut donc définir

$$\int f^+ d\mu \text{ et } \int f^- d\mu$$

et par suite introduire le concept de fonction μ -intégrable.



Definition 6 (Fonction intégrable)

Une application $f \in \mathcal{M}$ est μ -intégrable si et seulement si

$$\int f^+ d\mu < \infty \text{ et } \int f^- d\mu < \infty$$

et on pose

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

On note $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu) := \mathcal{L}^1(\mu)$ l'ensemble des fonctions intégrables.

Remarque 2 (Critère important)

$f \in \mathcal{M}$ est μ -intégrable si et seulement si $|f|$ est μ -intégrable, avec

$$\int |f| d\mu < \infty.$$

Proposition 6

$\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ est un espace vectoriel sur \mathbb{R} , et l'application $f \mapsto \int f d\mu$ est une forme linéaire.



Proposition 7

Soient $f, g \in \mathcal{M}$.

①

$$\left| \int g d\mu \right| \leq \int |g| d\mu$$

② Si $|f| \leq g$ alors f est μ -intégrable.

preuve:

- ① Inégalité triangulaire
- ② On a $f^+ \leq g$ et $f^- < g$, ce qui implique que

$$\int f^+ d\mu < \infty \text{ et } \int f^- d\mu < \infty$$

puis f est μ -intégrable



Exemple 3 (Intégration par rapport à la mesure de Dirac)

Soit (Ω, \mathcal{A}) un espace mesurable, la mesure de Dirac en $x \in \Omega$ est définie par

$$\delta_x(A) = \mathbb{I}_A(x), \text{ pour tout } A \in \mathcal{A}.$$

On veut montrer que toute fonction $f \in \mathcal{M}$ est δ_x -intégrable.

Pour une fonction étagée positive $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}$, où A_1, \dots, A_n forment une partition de Ω , on a

$$\int f d\delta_x = \sum_{i=1}^n \alpha_i \delta_x(A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbb{I}_{A_i}(x) = f(x).$$

Pour une fonction mesurable positive, on peut définir une suite croissante $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de fonction étagées positives qui converge vers f alors

$$\int f d\delta_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\delta_x = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x)$$

Pour une application mesurable $f \in \mathcal{M}$, on écrit $f = f^+ - f^-$ et

$$\int f d\delta_x = \int f^+ d\delta_x - \int f^- d\delta_x = f^+(x) - f^-(x) = f(x)$$

cela prouve l'intégrabilité de f .



Exemple 4 (Intégration par rapport à la mesure de comptage)

Si $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$ est un ensemble dénombrable, la mesure de comptage est donnée par

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} p_i \delta_{\omega_i}(A), \quad A \in \mathcal{A}.$$

D'après l'exemple précédente, l'application $f \in \mathcal{M}$ est μ -intégrable si et seulement si

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i f^+(\omega_i) < \infty \quad \sum_{i=1}^{\infty} p_i f^-(\omega_i) < \infty$$

ce qui est équivalent à

$$\sum_{i=1}^{\infty} p_i |f(\omega_i)| < \infty.$$

Il faut que la série de terme général $(p_i f(\omega_i))_{i \geq 1}$ soit absolument convergente.

Proposition 8

Soit f une application mesurable, si $\mu(A) = 0$ alors

$$\int_A f d\mu = 0.$$



preuve:

On a $\{f \cdot \mathbb{1}_A \neq 0\} \subset A$ et $\mu(A) = 0$. Ainsi $f \cdot \mathbb{1}_A = 0$ μ -p.p. ce qui implique $|f| \cdot \mathbb{1}_A = 0$ μ -p.p.
puis

$$\int |f| \cdot \mathbb{1}_A d\mu = 0$$

Ce qui implique que

$$\int f^+ \cdot \mathbb{1}_A d\mu = 0 \text{ et } \int f^- \cdot \mathbb{1}_A d\mu = 0$$

et finalement

$$\int_A f d\mu = \int f \cdot \mathbb{1}_A d\mu = 0.$$

□

Proposition 9

Soient f et g deux applications mesurables à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$, égales μ - presque partout. Si f est intégrable, alors g aussi et $\int f d\mu = \int g d\mu$.

preuve:

Soit $A = \{f \neq g\}$ alors

$$\int f d\mu = \int_A f d\mu + \int_{A^c} f d\mu = \int_{A^c} g d\mu = \int g d\mu$$



Proposition 10

Toute application μ -intégrable à valeurs dans $\overline{\mathbb{R}}$ est finie μ -pp.

preuve:

On peut montrer que $|f|$ est finie, soit $M = \{|f| = \infty\}$. On note que

$$f \geq n \cdot \mathbb{I}_M \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

, il vient alors

$$n\mu(M) \leq \int f d\mu < \infty,$$

ce qui implique que $\mu(M) = 0$.



4. Intégrale de fonctions à valeurs complexes

Nous avons vu qu'une application $f : (\Omega, \mathcal{A}) \rightarrow (\mathbb{C}, \mathcal{B}_{\mathbb{C}})$ est mesurable si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont mesurables.

Definition 7

f est dite intégrable si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont intégrables et dans ce cas

$$\int f d\mu = \int \Re(f) d\mu + i \int \Im(f) d\mu.$$

On note

$$|f| = \sqrt{\Re(f)^2 + \Im(f)^2}.$$

Proposition 11

$|f|$ est intégrable si et seulement si $\Re(f)$ et $\Im(f)$ sont intégrables.

preuve:

On a $|\Re(f)| \leq |f|$ et $|\Im(f)| \leq |f|$ mais aussi $|f| \leq |\Re(f)| + |\Im(f)|$.

Proposition 12

L'ensemble $\mathcal{L}_{\mathbb{C}}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ des fonctions à valeurs complexes intégrables est un espace vectoriel sur \mathbb{C} , et l'application $f \mapsto \int f d\mu$ est une forme linéaire.



Proposition 13

Pour $f \in \mathcal{L}_\mathbb{C}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$, on a

$$\left| \int f d\mu \right| \leq \int |f| d\mu$$

preuve:

Posons $\int f d\mu = re^{i\theta}$, on note que

$$\left| \int f d\mu \right| = r = e^{-i\theta} \int f d\mu = \int e^{-i\theta} f d\mu.$$

Or

$$\int e^{-i\theta} f d\mu = \int \Re(e^{-i\theta} f) d\mu + i \int \Im(e^{-i\theta} f) d\mu$$

puis

$$\int \Im(e^{-i\theta} f) d\mu = 0$$

On en déduit que

$$\left| \int f d\mu \right| = \left| \int \Re(e^{-i\theta} f) d\mu \right| \leq \int |e^{-i\theta} f| d\mu = \int |f| d\mu.$$



II. Théorèmes de convergence

Lemme 1 (Lemme de Fatou)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}_+$, on a

$$\int \varliminf_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu.$$

preuve:

On pose $g_n = \inf_{k \geq n} f_k$, pour $n \in \mathbb{N}$, ce qui définit une suite croissante de fonctions positives dont la limite est $\varlimsup_{n \rightarrow +\infty} f_n$, on a

$$f_n \geq g_n \Rightarrow \int f_n d\mu \geq \int g_n d\mu$$

d'où

$$\varliminf_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu \geq \varliminf_{n \rightarrow +\infty} \int g_n d\mu$$

puis par le théorème de Beppo-Lévi, il vient

$$\varliminf_{n \rightarrow +\infty} \int g_n d\mu = \lim \int g_n d\mu = \int \varlimsup_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu.$$



Remarque 3 (Moyen Mnémotechnique)

Soit

$$f_n(x) = \mathbb{I}_{[n, n+1]}, \text{ pour } n \geq 0,$$

alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = 0$ et $\int f_n(x) d\lambda(x) = 1$ donc

$$0 = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda < \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\lambda = 1.$$

Exemple 5

Soit

$$f_n(x) = n \sin^2\left(\frac{\sqrt{x}}{n^{1/3}}\right), \text{ pour } n \geq 0 \text{ et } x \in]0, 1[$$

On a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n = +\infty$ puis

$$+\infty = \int \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda < \lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\lambda$$

puis $\lim \int f_n d\mu = \infty$



Theoreme 3 (Théorème de convergence dominée)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{M}$ convergeant presque partout vers f , et telle qu'il existe une fonction $g \in \mathscr{L}^1(\mu)$ vérifiant $|f_n| \leq g$, pour tout $n \in \mathbb{N}$ alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu = \int f d\mu.$$

preuve:

Les fonctions f_n sont intégrables car dominées par g . Par suite, les fonctions $g + f_n$ et $g - f_n$ sont intégrables et positives: On peut leur appliquer le lemme de Fatou, ce qui donne

$$\int \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (g + f_n) d\mu \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int (g + f_n) d\mu \Leftrightarrow \int g d\mu + \int \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \int g d\mu + \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu.$$

d'une part et

$$\int \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} (g - f_n) d\mu \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int (g - f_n) d\mu \Leftrightarrow \int g d\mu - \int \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} f_n d\mu \leq \int g d\mu + \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \left(- \int f_n d\mu \right).$$

d'autre part. On en déduit que

$$\int f d\mu \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu \text{ et } \int f d\mu \geq \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \int f_n d\mu$$



puis

$$\int f_n d\mu \rightarrow \int f d\mu.$$

□

Exemple 6

Soit

$$f_n(x) = \frac{\sin^n(x)}{x^2}, \text{ pour } n \in \mathbb{N} \text{ et } x \in]1, +\infty[.$$

On a $|f_n(x)| \leq g(x) = \frac{1}{x^2}$ intégrable. Soit $N = \pi/2 + \pi\mathbb{N}$, pour $x \in]1, +\infty[/ N$ on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = 0$, comme N est de mesure nulle alors on a convergence de (f_n) vers 0 λ presque partout. Puis par application du théorème de convergence dominée, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{]1, +\infty[} f_n d\lambda = \int_{]1, +\infty[} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n d\lambda = 0.$$



III. Intégrale et série d'applications

Proposition 14 (Intégrale d'une série de fonctions mesurables positives)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions de \mathcal{M}_+ et soit $f = \sum_{n \in \mathbb{N}} f_n$. Alors

$$\int f d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \int f_n d\mu.$$

preuve: examen.

Proposition 15

Supposons que pour tout ω , $(f_n(\omega))_{n \in \mathbb{N}^*}$ soit une suite alternée tel que $(|f_n(\omega)|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décroisse vers 0. Si f_1 est intégrable alors

$$\int \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int f_n d\mu.$$

preuve: Par hypothèse, $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ converge (Critère de convergence des série alternée).
On a également

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k \right| \leq |f_1|, \quad n \geq 1.$$



On applique ensuite le théorème de convergence dominée sur la suite $\left(\sum_{k=1}^n f_k\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

□

Proposition 16

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite d'applications intégrables qui vérifient

$$\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int |f_n| d\mu < \infty.$$

Alors la série $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n$ converge μ -pp, sa somme f est intégrable et

$$\int \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int f_n d\mu.$$

preuve:

La suite $(|f_n|)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de fonction mesurable positives, par application de la Proposition 14 on a

$$\int \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |f_n| d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int |f_n| d\mu.$$

On en déduit que $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} |f_n|$ est fini μ -p.p. (Proposition 10) et que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est absolument convergente. Sa somme, f , vérifie

$$|f| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |f_n|$$



et est donc intégrable. On vérifie également que

$$\left| \sum_{k=1}^n f_k \right| \leq \sum_{n \in \mathbb{N}^*} |f_n|$$

puis il vient

$$\int \sum_{n \in \mathbb{N}^*} f_n d\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}^*} \int f_n d\mu,$$

par application du théorème de convergence dominée.

Proposition 17

Si $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^}$ est une suite d'applications mesurables dont la série converge μ -p.p., on a l'inégalité suivante*

$$\int \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| d\mu \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| d\mu$$

preuve:
Soit

- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| d\mu = \infty$ et l'inégalité est vérifiée



- $\sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| d\mu < \infty$ alors comme $\left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |f_n| < \infty$ et

$$\int \left| \sum_{n=0}^{+\infty} f_n \right| d\mu \leq \int \sum_{n=0}^{+\infty} |f_n| d\mu = \sum_{n=0}^{+\infty} \int |f_n| d\mu.$$



IV. Intégrale de Lebesgue et de Riemann

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}, \lambda)$ où λ désigne la mesure de Lebesgue. Soit $f : (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}}) \rightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ mesurable. Nous allons examiner le lien entre intégrale de Riemann et de Lebesgue.

L'intégrale de Riemann étudie les fonctions continues sur un intervalle compact. Soit f une fonction continue par morceaux sur un intervalle fermé $[a, b]$. Soit P une partition de $[a, b]$: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. On pose

$$S_P = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) M_i \text{ et } s_P = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) m_i,$$

où

$$M_i = \sup_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x) \text{ et } m_i = \inf_{x \in [x_{i-1}, x_i]} f(x).$$

f est intégrable sur $[a, b]$ si pour tout $\epsilon > 0$ il existe une partition P telle que

$$S_P - s_P < \epsilon.$$

Si f est Riemann intégrable alors $\inf_P S_P = \sup_P s_P$.

Soit f une application définie sur $[a, b[$, on dit que $\int_a^b f(x) dx$ est convergente, pour tout $c < b$, l'intégrale $\int_a^c f(x) dx$ est convergente et si $\lim_{c \rightarrow b^-} \int_a^c f(x) dx$ existe. On note



alors $\int_a^b f(x)dx$ et on l'appelle intégrale impropre de Riemann. On procède de la même manière pour définir l'intégrale impropre sur $]a, b[$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Remarque 4 (Fonction Riemann intégrable mais pas Lebesgue intégrable)

Soit

$$f = \mathbb{I}_{\mathbb{Q}_1},$$

où \mathbb{Q}_1 désigne l'ensemble des nombres rationnels dans $[0, 1]$. f est Lebesgue intégrable, avec

$$\int f(x)d\lambda(x) = \int \mathbb{I}_{\mathbb{Q}_1}(x)d\lambda(x) = \mu(\mathbb{Q}_1) = 0.$$

mais pas Riemann intégrable puisque

$$S_P = 1 \text{ et } s_P = 0,$$

pour toute partition P de $[0, 1]$

Theoreme 4

Si f est Riemann intégrable sur $[a, b]$, elle est Lebesgue intégrable sur $[a, b]$, et les deux intégrales coincident.

preuve:



Soit P une partition quelconque de $[a, b]$, on pose

$$g = \sum_{i=1}^{n-1} M_i \mathbb{I}_{[x_{i-1}, x_i]} + M_n \mathbb{I}_{[x_{n-1}, x_n]} \text{ et } h = \sum_{i=1}^{n-1} m_i \mathbb{I}_{[x_{i-1}, x_i]} + m_n \mathbb{I}_{[x_{n-1}, x_n]}.$$

On note que g et h sont des fonctions étagées qui vérifient $h \leq f \leq g$ et

$$S_P = \int_{[a,b]} g d\lambda \text{ et } s_P = \int_{[a,b]} h d\lambda$$

si f est mesurable, alors $\int_{[a,b]} f d\lambda$ existe et coincide avec $\int_a^b f d\lambda = \sup_P s_P$.

Theoreme 5

Soit $]a, b[$ un intervalle ouvert ($-\infty \leq a < b \leq \infty$). Si $\int_a^b f(x) dx$ est absolument convergente, alors f est Lebesgue intégrable sur $]a, b[$ et les deux intégrales coincident.

preuve:

$\forall a, b, c, d$ tels que $-\infty \leq a < c < d < b \leq +\infty$, on a d'après le Théorème 4,

$$\int_{[c,d]} |f| d\lambda = \int_c^d |f(x)| dx < \int_a^b |f(x)| dx < \infty$$



D'autre part, en vertu du théorème de Beppo-Lévi

$$\int_{[a,b]} |f| d\lambda = \lim_{\substack{c \rightarrow a \\ d \rightarrow b}} \int_{[c,d]} |f| d\lambda(x)$$

puis $\int_{[a,b]} |f| d\lambda = \int_a^b |f(x)| dx.$



Bibliographie

Mes notes se basent sur les documents suivants [1, 3, 2]



[Michel Carbon.](#)

Probabilités 1 et 2.

Note de cours ENSAI, 2009.



[Olivier Garet and Aline Kurtzmann.](#)

De l'intégration aux probabilités, volume 470.

Ellipses, 2011.



[Jean-François Le Gall.](#)

Intégration, probabilités et processus aléatoires.

Ecole Normale Supérieure de Paris, 2006.