Exo 1 (Cours)

1/ Processus stationnaire faible (ie à l'ordre 2) X_t :

→ moyenne/espérance et autocovariance sont invariantes par translation

→ $t \mapsto \mathbb{E}[X_t] = \mu_X(t) = \mu$ où $\mu \in \mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{Z}$

→ $t \mapsto cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(t, t+h) = \gamma_X(h)$ $\forall h \in \mathbb{Z}, \forall t \in \mathbb{Z}$

$= cste, \forall h$

2/ Méthodes pour identifier chacun des termes : $X_t = m_t + S_t + Y_t$.

① Méthodes par regression.

1. Méthode Buys-Ballot généralisée : effectuer une regression sur l'ens. des données

⊕ · possibilité de projeter m_t et $\hat{S}_t$ au-delà de l'horizon T
· estimateurs convergents (mais pas forcément optimaux)

⊖ · manque de flexibilité (représentation linéaire et stable dans le temps)
· si m_t et $\hat{S}_t$ erronés, alors erreurs dans estimations des coef et des projections

2. Méthode STL : effectuer des regressions linéaires localement

⊕ · possibilité d'ajuster le modèle plus finement autour du point étudié
· ajustement de la fenêtre d'observation où on effectue localem^t la regression
· possibilité de pondérer les observations (⊕ proche du point étudié, ⊕ pondéré)
· la saisonnalité peut évoluer au cours du temps.

⊖ · ne traite pas automatiquement les variations journalières ou récurrentes
· seulement utilisable pour décomposition additive (pas multiplicative)

② Moyennes Mobiles

techniques :
- AR(p)
- MA(q)
- ARMA(p,q)

on suppose pas de saisonnalité

- arithmétique [2m+1] → annule saisonnalité 2m
- ARIMA(p,d,q)
- SARIMA[(p,d,q)(P,D,Q)]

S → on travaille avec saisonnalité

⊕ · on peut travailler sur le terme d'erreur /aléatoire Y_t
· on peut annuler / conserver tendance cste/linéaire/exp/géo, les composantes saisonnières

⊖ on ne peut pas projeter (≠ par regression), c'est à l'utilisateur de construire le modèle.

3. Cadres modèles SARIMA et ARIMA

ARIMA → permet de stationnariser un processus X_t et on tend asymptotiquement vers un processus ARMA car il ne commence pas en $-\infty$.

SARIMA → généralisation des modeles ARIMA contenant une partie saisonnière de nature aléatoire

Comment savoir à partir de données s'il vaut mieux utiliser un modèle plutôt que l'autre ?

On se base sur 3 critères pour départager les modeles

1. Critère de parcimonie : minimisation du nb de paramètres (p+q min)
2. Critère de pouvoir prédictif :
   - $\hat{\sigma}_T$ à min
   - R^2
   - $\bar{R}^2$
   - stat. de Fisher

   } à max.
3. Critère d'information
   - variance résiduelle
   - AIC et AICC
   - BIC
   - Hannan - Quinn

   } à min

Exo 2

$\eta_t \sim BBF(0, \sigma_\eta^2)$

0. Définitions BBF et BB

* Bruit Blanc fort $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$
  - $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ iid
  - $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0, \forall t$
  - $\mathbb{V}[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2, \forall t$

* Bruit Blanc (faible) $(\varepsilon'_t)_{t\in\mathbb{Z}}$
  - (ε_t) centrées, variance cste et non corrélées
  - $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$
  - $cov(\varepsilon'_t, \varepsilon'_{t'}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & \forall t = t' \\ 0, & \forall t \neq t' \end{cases}$

On pose $Y_t = (\eta_t + m)(\eta_{t-1} + m)$, $t \in \mathbb{Z}$ et $m \in \mathbb{R}$

1. Mq $Y_t \sim MA(1)$, non centré (avec $\mathbb{E}$, Var et $\gamma_x(h)$)

$Y_t \sim MA(1)$, alors $Y_t = \Theta(L)\varepsilon_t + \mu = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1} + \mu$ où $(\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$Y_t = (\eta_t + m)(\eta_{t-1} + m) = X_t X_{t-1}$ où $X_t = \eta_t + m \sim BBF(m, \sigma_\eta^2)$ FAUX car $\mathbb{E}[BBF] = 0$

$= m^2 + m(\eta_t + \eta_{t-1}) + \eta_t\eta_{t-1} \rightarrow$ Ecriture difficile à exploiter $= BBF$ (cf partiel janv. 2013-2014)

Ecriture canonique de Y_t si (ε_t) est l'innovation (racines de Θ >1 en mod) module >1.

- $\mathbb{E}[Y_t] = m^2 + m(0+0) + \underbrace{cov(\eta_t, \eta_{t-1})}_{=0 \text{ car } \eta_t \sim BB(0,\sigma_\eta^2)}$ $= \mathbb{E}[\eta_t + m]\mathbb{E}[\eta_{t-1} + m] = m^2$ car $X \perp Y \Rightarrow \mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$ et $X \perp Y + f\ C^0$ et $\in \mathbb{R}$, $g\ C^0$ et $\in \mathbb{R}$ $f(X) \perp f(Y)$

- $\mathbb{V}[Y_t] = 2m\sigma_\eta^2 + \mathbb{V}[\eta_t\eta_{t-1}] + cov(m^2 + m(\eta_t + \eta_{t-1}), \eta_t\eta_{t-1})$ inutile

  $\mathbb{V}[\eta_t\eta_{t-1}] = \mathbb{V}[\eta_t]\mathbb{V}[\eta_{t-1}] = (\sigma_\eta^2)^2$ $+ \mathbb{V}[\eta_t]\mathbb{E}[\eta_{t-1}]^2 = 0$ $+ \mathbb{V}[\eta_{t-1}]\mathbb{E}[\eta_t]^2 = 0$

  $= 0$: $cov(m\eta_t, \eta_t\eta_{t-1}) + cov(m\eta_{t-1}, \eta_t\eta_{t-1}) = 0$

- $cov(Y_t, Y_{t-1}) = \boxed{cov(\cancel{m^2} + m(\eta_t + \eta_{t-1}) + \eta_t\eta_{t-1}, \cancel{m^2} + (\eta_{t-1} + \eta_{t-1})m + \eta_{t-1}\eta_{t-2})}$ inutile

  $= cov(X_t X_{t-1}, X_{t-1} X_{t-2})$

on utilise la propriété $\perp^{ce}$: (η_t) iid $\rightarrow f(\eta_t)$ iid si f continue

- $Var(Y_t) = Var(X_t X_{t-1}) = V(X_t)V(X_{t-1}) + V(X_t)\mathbb{E}[X_{t-1}]^2 + V(X_{t-1})\mathbb{E}[X_t]^2$

  $= (\sigma_\eta^2)^2 + 2m^2\sigma_\eta^2$

inutile
$= \underbrace{cov(m(\eta_t + \eta_{t-1}), m(\eta_{t-1} + \eta_{t-2}))}_{m^2\sigma_\eta^2} + \underbrace{cov(m(\eta_t + \eta_{t-1}), \eta_{t-1}\eta_{t-2})}_{= cov(m\eta_t, \eta_{t-1}\eta_{t-2}) + cov(m\eta_{t-1}, \eta_{t-1}\eta_{t-2})}$

$+ cov(\eta_t\eta_{t-1}, \eta_{t-1}\eta_{t-2}) + cov(\eta_t\eta_{t-1}, m(\eta_{t-1} \cdot \eta_{t-2}))$

$*$ $\text{cov}(X_t X_{t-1}, X_{t-1}X_{t-2}) = ?$ $\quad \left(\text{cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] \right)$

$= \mathbb{E}[X_t \underbrace{(X_{t-1}X_{t-1})}_{X_{t-1}^2} X_{t-2}] - \mathbb{E}[X_t X_{t-1}]\mathbb{E}[X_{t-1}X_{t-2}]$, Or : X_t iid

$= \mathbb{E}[X_t]\mathbb{E}[X_{t-2}]\mathbb{E}[X_{t-1}^2] - m^2 \times m^2$

$= m^2 \times \sigma_\eta^2 - m^2 \times m^2 = m^2(\sigma_\eta^2 - m^2) \neq 0$

$*$ $\text{cov}(X_t X_{t-1}, X_{t-2}X_{t-3})$

$= \mathbb{E}[X_t X_{t-1} X_{t-2} X_{t-3}] - \mathbb{E}[X_t X_{t-1}]\mathbb{E}[X_{t-2}X_{t-3}]$

$= \mathbb{E}[X_t]\mathbb{E}[X_{t-1}]\mathbb{E}[X_{t-2}]\mathbb{E}[X_{t-3}] - \dots$

$= 0$

$\hookrightarrow \text{cov}(X_t X_{t-1}, X_{t-h}X_{t-h-1}) = 0, \ \forall h > 1.$

On a bien
$$\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}[Y_t] = m^2 \\ \mathbb{V}[Y_t] = \sigma_\eta^2(2m^2 + \sigma_\eta^2) \\ \gamma_Y(h) = \begin{cases} \sigma_\eta^2(2m^2+\sigma_\eta^2) & , h=0 \\ m^2(\sigma_\eta^2 - m^2) & , h = \pm 1 \\ 0 & , |h|>1 \end{cases} \end{array}\right\} \text{ soit un } MA(1)$$

2. L'écriture canonique de Y_t est $Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$, où $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$.
On cherche μ, θ et σ_ε^2.

$$\begin{cases} \mu = m^2 \\ \sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2) = \sigma_\eta^2(2m^2+\sigma_\eta^2) \\ \theta\sigma_\varepsilon^2 = m^2(\sigma_\eta^2 - m^2) \end{cases} \Rightarrow \text{donne } \mu, \theta \text{ et } \sigma_\varepsilon^2 \text{ par identification}$$

Exo 3

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t \quad \text{où } (\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2) \qquad \nearrow AR(2)$$

$$\phi(x) = 1 - \varphi_1 x - \varphi_2 x^2$$

$$\overline{\phi}(x) = x^2 - \varphi_1 x - \varphi_2 = x^2 \phi\left(\frac{1}{x}\right) = x^2 \left(1 - \varphi_1 \frac{1}{x} - \varphi_2 \frac{1}{x^2}\right)$$

1. Conditions sur racines de ϕ et $\overline{\phi}$ qu'$\exists$ une solution stationnaire

$\begin{cases} (X_t)_{t \in \mathbb{Z}} \text{ stationnaire} \\ (X_t) \sim AR(2) \end{cases} \Leftrightarrow \phi^{-1}$ existe

$\Leftrightarrow$ racines de ϕ et $\overline{\phi}$ de module $\neq 1$.

2. Conditions sur φ_1 et φ_2 pour que l'écriture soit canonique

a) Conditions sur racines de $\overline{\phi}$ pour que l'écriture soit canonique

$\rightarrow$ racines de $\overline{\phi}$ de module < 1 (car ϕ doit avoir racines de module > 1 et $\overline{\phi}(x) = x^2 \phi\left(\frac{1}{x}\right)$).

b) En déduire : $|\varphi_2| < 1$

$$\overline{\phi}(x) = x^2 - \varphi_1 x - \varphi_2 \quad \text{et soit } \lambda_1 \text{ et } \lambda_2 \text{ les 2 racines de } \overline{\phi}$$

$$= x^2 - Sx + P$$

où $\begin{cases} S = \lambda_1 + \lambda_2 \\ P = \lambda_1 \lambda_2 \end{cases}$

Comme $\lambda_1 < 1$ et $\lambda_2 < 1$ et par identification $-\varphi_2 = \lambda_1 \lambda_2$,

on a $|\varphi_2| < 1$

c) Mq : racines complexes conjuguées $\Rightarrow -\varphi_2 < 1$ est suffisante

$\hookrightarrow$ cas où $\varphi_1^2 + 4\varphi_2 < 0$

On calcule le discriminant de $\overline{\phi}$: $\Delta = b^2 - 4ac = (-\varphi_1)^2 - 4 \times 1 \times (-\varphi_2)$

$$= \varphi_1^2 + 4\varphi_2$$

Par hypo : $\Delta < 0$, donc nos 2 solutions sont complexes conjuguées.

Soit λ_1 et λ_2 ces solutions conjuguées. Alors $\lambda_1 = \overline{\lambda_2}$

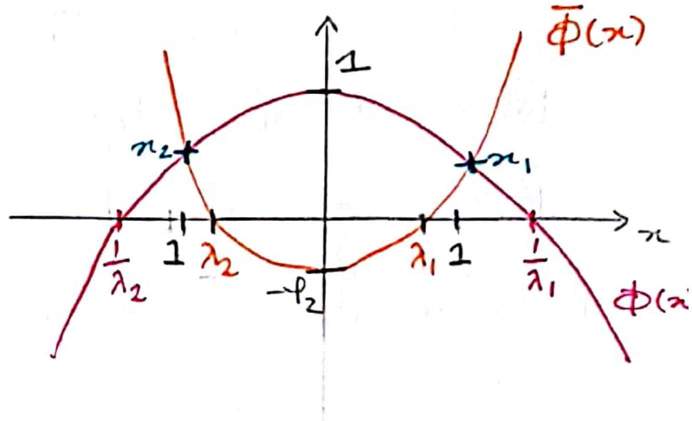
Par identification : $-\varphi_2 = \lambda_1 \lambda_2 = \lambda_1 \overline{\lambda_1} = |\lambda_1|^2 < 1$

$\lambda_1 + \overline{\lambda_1} = 2 \, \mathrm{Re}(\lambda_1)$

d) Mq : racines réelles $\Rightarrow \begin{cases} 1-\varphi_1-\varphi_2>0 \\ 1+\varphi_1-\varphi_2>0 \end{cases}$ suffisantes (graphiquement)

↳ cas $\varphi_1^2+4\varphi_2 \geq 0$

On suppose λ_1 et λ_2 les racines de $\overline{\Phi}$, alors $\frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{1}{\lambda_2}$ sont les racines de Φ.
Graphiquement, en ces points, les courbes $x \mapsto \Phi(x)$ et $x \mapsto \overline{\Phi}(x)$ s'annulent.



On sait aussi que $|\lambda_1|$ et $|\lambda_2| < 1$,
donc $\left|\frac{1}{\lambda_1}\right|$ et $\left|\frac{1}{\lambda_2}\right| > 1$.

Par construction, il est clair que pour $x \in \{x_1, x_2\}$: $\Phi(x) = \overline{\Phi}(x) \geq 0$.

De plus, comme racines $\neq$ ~~± 1~~ (i.e. $\frac{1}{\lambda_1} \neq \lambda_1$ et $\frac{1}{\lambda_2} \neq \lambda_2$), on a que $x_1 > \lambda_1$ et $x_2 < \lambda_2$ (afin que $\forall x > \lambda_1$, $\overline{\Phi}(x) > 0$) sinon le point d'intersection serait sur la droite des abscisses !

On cherche x tq $\Phi(x) = \overline{\Phi}(x)$.

$$\begin{aligned}
\Phi(x) = \overline{\Phi}(x) &\iff 1 - \cancel{\varphi_1 x} - \varphi_2 x^2 = x^2 - \cancel{\varphi_1 x} - \varphi_2 \\
&\iff x^2(1+\varphi_2) = 1+\varphi_2 \\
&\iff x^2 = 1 \\
&\iff x \in \{-1; 1\} = \{x_2; x_1\}
\end{aligned}$$

Comme en $x \in \{x_1, x_2\}$, $\Phi(x) = \overline{\Phi}(x) > 0$, on a

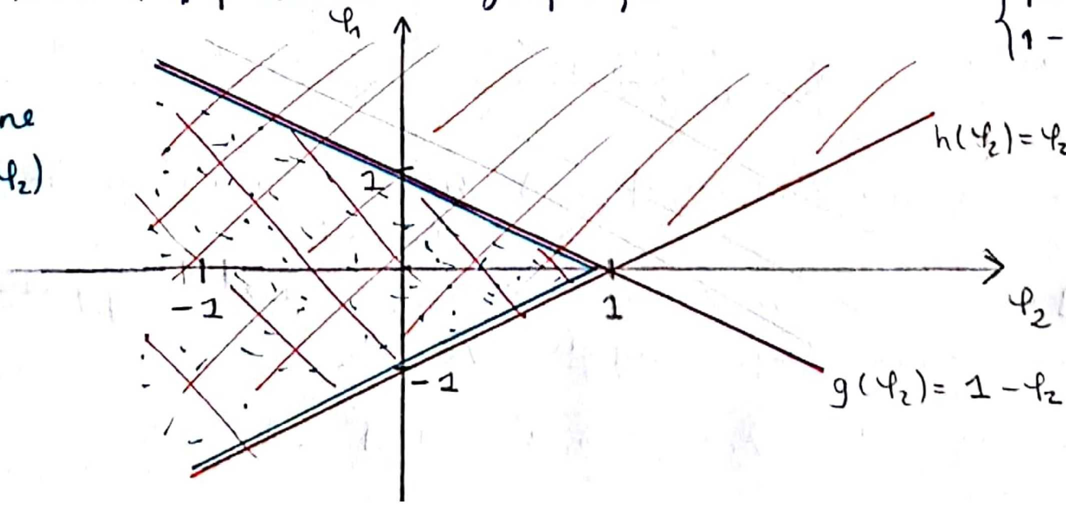
$$\begin{cases} \overline{\Phi}(1) = 1 - \varphi_1 - \varphi_2 > 0 \\ \overline{\Phi}(-1) = 1 + \varphi_1 - \varphi_2 > 0 \end{cases}$$

e) Domaine d'existence du couple (φ_1, φ_2) pour écriture canonique

↳ sur une représentation graphique

$\begin{cases} 1-\varphi_2 > \varphi_1 \\ 1-\varphi_2 > -\varphi_1 \end{cases}$

domaine de (φ_1, φ_2)



$h(\varphi_2) = \varphi_2 - 1$ $\begin{cases} 1-\varphi_2 > \varphi_1 \\ \varphi_1 > \varphi_2 - 1 \end{cases}$

$g(\varphi_2) = 1 - \varphi_2$

3 Représentation MA(∞) de X_t

← on suppose $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$ canonique => racines > 1 (pour Φ)

a) Propriétés de (ε_t)

$\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$

=> • $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$

• $Var(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$

• $cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0, \forall t \neq t'$

$\Phi X_t = \varepsilon_t$

$X_t = \Phi^{-1}(L)\varepsilon_t$

$= \sum_{k=0}^{+\infty} a_k \varepsilon_{t-k}$ car racines > 1

b) MA(∞) de X_t

On suppose λ_1 et λ_2, racines de Φ, sont réelles ($\varphi_1^2 + 4\varphi_2 \geq 0$)

Décomposition en él. simp.

$$\Phi(L) = 1 - \varphi_1 L - \varphi_2 L^2 = (1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)$$

$$\frac{1}{\Phi(L)} = \frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} = \frac{a}{1-\lambda_1 L} + \frac{b}{1-\lambda_2 L} = \Phi^{-1}(L)$$

$L=1 \quad \dfrac{1}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)} = \dfrac{a(1-\lambda_2)+b(1-\lambda_1)}{(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}$ et $L=0 \Rightarrow 1 = a+b$

$\Rightarrow 1 = a(1-\lambda_2) + b(1-\lambda_1)$

$\Rightarrow a = \dfrac{1-b(1-\lambda_1)}{1-\lambda_2}$ et $a = b-1$

$\Rightarrow b = 1 + \dfrac{1}{1-\lambda_2} - b\dfrac{1-\lambda_1}{1-\lambda_2} \Rightarrow b\left(1 + \dfrac{1-\lambda_1}{1-\lambda_2}\right) = \dfrac{2-\lambda_2}{1-\lambda_2}$

$\Rightarrow b \dfrac{2-\lambda_1-\lambda_2}{1-\lambda_2} = \dfrac{2-\lambda_2}{1-\lambda_2} \Rightarrow b(2-\lambda_1-\lambda_2) = 2-\lambda_2$

$\Rightarrow b = \dfrac{2-\lambda_2}{2-\lambda_1-\lambda_2}$ et $a = \dfrac{2-\lambda_2-2+\lambda_1+\lambda_2}{2-\lambda_1-\lambda_2} = \dfrac{\lambda_1}{2-\lambda_1-\lambda_2}$

• $\dfrac{a}{1-\lambda_1 L} = a(1-\lambda_1 L)^{-1} = a\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda_1)^k L^k$ car $|\lambda_1| < 1$ (représentat° can.)

• $\dfrac{b}{1-\lambda_2 L} = b(1-\lambda_2 L)^{-1} = b\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda_2)^k L^k$ car $|\lambda_2| < 1$ (représentat° can.)

Donc $X_t = \Phi^{-1}(L)\varepsilon_t = a\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda_1)^k \varepsilon_{t-k} + b\sum_{k=0}^{+\infty}(\lambda_2)^k \varepsilon_{t-k} = \sum_{k=0}^{+\infty}(a\lambda_1^k + b\lambda_2^k)\varepsilon_{t-k}$

41.

a) $\gamma_X(0) = Var(X_t)$

$$= \varphi_1^2 \gamma_X(0) + \varphi_2^2 \gamma_X(0) + \sigma_\varepsilon^2 + 2\varphi_1\varphi_2 \gamma_X(1)$$

$$= Var\left(\sum_{k=0}^{+\infty} a\lambda_1^k \varepsilon_{t-k} + \sum_{k=0}^{+\infty} b\lambda_1^k \varepsilon_{t-k}\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{+\infty} a^2 \lambda_1^{2k} \sigma_\varepsilon^2 + \sum_{k=0}^{+\infty} b^2 \lambda_2^{2k} \sigma_\varepsilon^2 + 2cov\left(\sum a\lambda_1^k \varepsilon_{t-k}, \sum b\lambda_2^k \varepsilon_{t-k}\right.$$

$$= a^2\sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{1-\lambda_1^2} + b^2\sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{1-\lambda_2^2} + \underbrace{2\sum a\lambda_1^k \lambda_2^k b\, \sigma_\varepsilon^2}_{2ab\sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{1-\lambda_1\lambda_2}}$$

$$= \left(a^2 \frac{1}{1-\lambda_1^2} + b^2 \frac{1}{1-\lambda_2^2} + 2ab\frac{1}{1-\lambda_1\lambda_2}\right)\sigma_\varepsilon^2$$

4)

a) $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$

Yule-Walker :

$$\gamma_X(k) = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \gamma_X(k-j) \quad \forall k \geq 0$$

$$\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} = \sum_{j=1}^{p} \varphi_j \rho_X(k-j)$$

* $\gamma_X(0) = \varphi_1 \gamma_X(1) + \varphi_2 \gamma_X(2) + \sigma^2$
* $\gamma_X(1) = \varphi_1 \gamma_X(0) + \varphi_2 \gamma_X(1) \implies \gamma_X(1) = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\gamma_X(0)$
* $\gamma_X(2) = \varphi_1 \gamma_X(1) + \varphi_2 \gamma_X(0) \implies \gamma_X(2) = \left(\frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2} + \varphi_2\right)\gamma_X(0)$

$$\implies \gamma_X(0) = \varphi_1 \gamma_X(1) + \varphi_2 \gamma_X(2) + \sigma^2$$

$$= \varphi_1 \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\gamma_X(0) + \varphi_2\left(\frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2} + \varphi_2\right)\gamma_X(0) + \sigma_\varepsilon^2$$

$$= \frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2}(1+\varphi_2)\gamma_X(0) + \varphi_2^2 \gamma_X(0) + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\frac{\varphi_1^2(1+\varphi_2) + \varphi_2^2(1-\varphi_2)}{1-\varphi_2}\gamma_X(0) + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\implies \left(1 - \frac{\varphi_1^2(1+\varphi_2) + \varphi_2^2(1-\varphi_2)}{1-\varphi_2}\right)\gamma_X(0) = \sigma_\varepsilon^2$$

$$\implies \gamma_X(0) = \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi_1^2(1+\varphi_2) + \varphi_2^2(1-\varphi_2)}{1-\varphi_2}\right)^{-1}}_{*} \sigma_\varepsilon^2$$

$$* = \left(\frac{1-\varphi_2 - \left(\varphi_1^2(1+\varphi_2) + \varphi_2^2(1-\varphi_2)\right)}{1-\varphi_2}\right)^{-1}$$

$$= \frac{1-\varphi_2}{(1-\varphi_2)\underbrace{(1-\varphi_2^2)}_{(1-\varphi_2)(1+\varphi_2)} - \varphi_1^2(1+\varphi_2)}$$

$$= \frac{1-\varphi_2}{(1+\varphi_2)\left((1-\varphi_2)^2 - \varphi_1^2\right)}$$

$$\implies \gamma_X(0) = \frac{1-\varphi_2}{(1+\varphi_2)\left((1-\varphi_2)^2 - \varphi_1^2\right)}\sigma_\varepsilon^2$$

$$\rho_X(1) = \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} = \frac{\frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\gamma_X(0)}{\gamma_X(0)} = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}$$

$$\rho_X(2) = \frac{\gamma_X(2)}{\gamma_X(0)} = \frac{\varphi_1^2}{1-\varphi_2} + \varphi_2 = \frac{\varphi_1^2 + \varphi_2(1-\varphi_2)}{1-\varphi_2} = \frac{\varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \varphi_2}{1-\varphi_2}$$

b) Démo Yule-Walker :

$Cov(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[X_t X_{t+h}] - \mathbb{E}[X_t]\mathbb{E}[X_{t+h}]$

Or $\mathbb{E}[X_t] = 0$

$\implies Cov(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[X_t X_{t+h}]$

Si $h=0$:

$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{V}[X_t] = \gamma_X(0) = \varphi_1 \mathbb{E}[X_{t-1}X_t] + \varphi_2 \mathbb{E}[X_{t-2}X_t] + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_t]$

$= \varphi_1 \gamma_X(1) + \varphi_2 \gamma_X(2) + \mathbb{E}[\varepsilon_t X_t]$

Calcul de $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_t]$:

$\mathbb{E}[\varepsilon_t X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] + \varphi_1 \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-1}] + \varphi_2 \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-2}]$

Or comme $(\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et X_t a une écriture $MA(\infty) \implies \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-h}] = 0 \ \forall h > 0$

Donc $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_t] = \sigma_\varepsilon^2$

$\implies \gamma_X(0) = \varphi_1 \gamma_X(1) + \varphi_2 \gamma_X(2) + \sigma_\varepsilon^2$

$\implies \mathbb{E}[X_{t-1}X_t] = \gamma_X(1) = \varphi_1 \gamma_X(0) + \varphi_2 \gamma_X(1) + \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-1}]}_{=0}$

$\mathbb{E}[X_{t-2}X_t] = \gamma_X(2) = \varphi_1 \gamma_X(1) + \varphi_2 \gamma_X(0) + \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-2}]}_{=0}$

D'où on obtient $\forall h \geq 2$, $\gamma_X(h) = \varphi_1 \gamma_X(h-1) + \varphi_2 \gamma_X(h-2)$

$\implies \forall h \geq 2$, $\rho_X(h) = \varphi_1 \rho_X(h-1) + \varphi_2 \rho_X(h-2)$

c) $\underline{\varphi_1^2+4\varphi_2<0}$:

$\Rightarrow -\varphi_2<1$

et $\lambda_1, \bar{\lambda}_1$ racines de Φ

$\Rightarrow \forall h\geq 2,\ \rho_X(h) = 2\mathrm{Re}(\lambda_1)\rho_X(h-1) + \lambda_1\bar{\lambda}_1\,\rho_X(h-2)$

$$\rho_X(1) = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2} = \frac{2\mathrm{Re}(\lambda_1)}{1-\lambda_1\bar{\lambda}_1}$$

$$\rho_X(2) = \frac{\varphi_1^2-\varphi_2^2+\varphi_2}{1-\varphi_2} = \frac{4(\mathrm{Re}(\lambda_1))^2-\lambda_1^2\bar{\lambda}_1^2+\lambda_1\bar{\lambda}_1}{1-\lambda_1\bar{\lambda}_1}$$

$\underline{\varphi_1^2+4\varphi_2>0}$:

λ_1, λ_2 racines $\forall h\geq 2,\ \rho_X(h) = (\lambda_1+\lambda_2)\rho_X(h-1) + \lambda_1\lambda_2\,\rho_X(h-2)$

$$\rho_X(1) = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2} = \frac{\lambda_1+\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2}$$

$$\rho_X(2) = \frac{\varphi_1^2-\varphi_2^2+\varphi_2}{1-\varphi_2} = \frac{(\lambda_1+\lambda_2)^2-\lambda_1^2\lambda_2^2+\lambda_1\lambda_2}{1-\lambda_1\lambda_2}$$