

Feuille d'exercices n°6 – Obligations à taux fixe

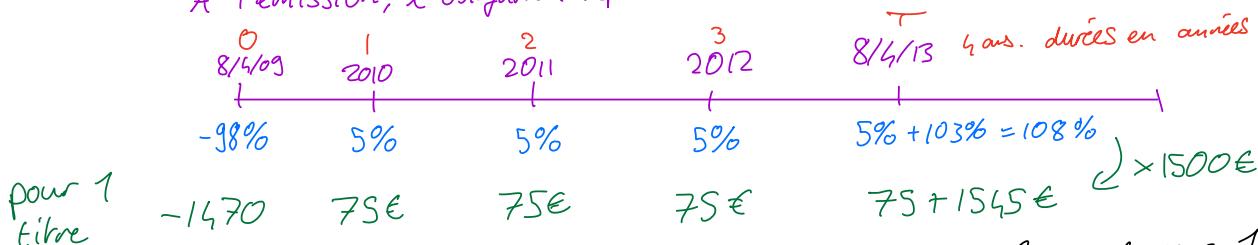
Exercice 1 :

On considère une obligation dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Nominal : 1 500 €
- Prix d'émission : 98 %
- Date d'émission : 8 avril 2009
- Durée : 4 ans
- Intérêt annuel : 5% soit 75 € par titre, payable en une seule fois le 8 avril de chaque année et pour la première fois le 8 avril 2010.
- Amortissement : en totalité le 8 avril 2013 par remboursement à 103%.

- 1) Calculer le rendement actuel de l'obligation à l'émission.
- 2) Le 8 avril 2010, le taux d'intérêt sur le marché est de 4,5%.
Quelle est alors la valeur de l'obligation ?
Calculer sa sensibilité et sa duration.
- 3) Indiquer le cours (en %) et le coupon couru (en %) de l'obligation le 10 mars 2011, le taux d'intérêt sur le marché étant de 4,25%.

A l'émission, l'obligation représente l'investissement suivant



Il est équivalent ici de raisonner en % du nominal, en € pour 1 titre, en flux globaux en € pour N titres (N n'est pas donné dans l'énoncé) car tous les titres ont les mêmes échéances

1) le calcul du rendement actuel à l'émission revient à calculer le TRI de l'investissement au 8/4/09

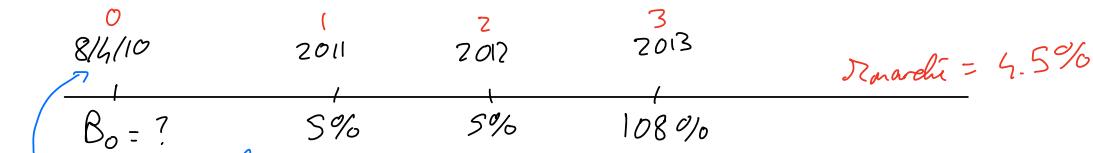
On cherche y_e tq $98 = \frac{5}{1+y_e} + \frac{5}{(1+y_e)^2} + \frac{5}{(1+y_e)^3} + \frac{108}{(1+y_e)^4}$
existe et est unique.

on trouve $y_e = 6.26\%$ qui porte aussi le nom de taux de rendement actuel brut à l'émission
ne tient pas compte de la fiscalité

Quelle est la duration à l'émission ?

$$D = \frac{\sum_t \frac{t \cdot F_t}{(1+y_e)^t}}{\sum_t \frac{F_t}{(1+y_e)^t}} = \frac{1}{98} \times \left(\frac{1 \times 5}{1+y_e} + \frac{2 \times 5}{(1+y_e)^2} + \frac{3 \times 5}{(1+y_e)^3} + \frac{4 \times 108}{(1+y_e)^4} \right) = 3.72 \text{ ans} < 4 \text{ ans}$$

2) 1 an après l'émission, le 8/4/10, on a



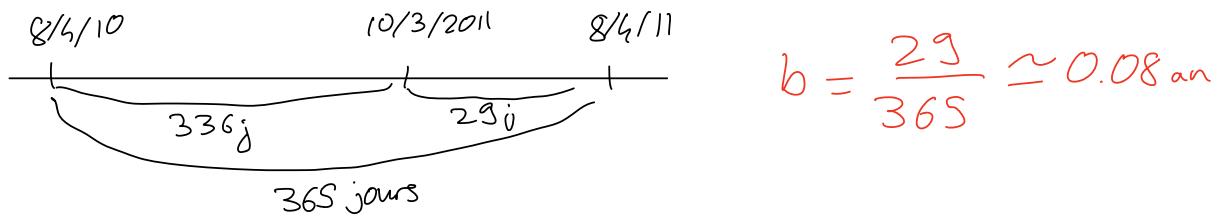
on suppose que le coupon de 5% vient d'être versé

$$B_0 = \frac{S}{1.045} + \frac{5}{1.045^2} + \frac{108}{1.045^3} = 104\% \text{ soit } 1560,05 \text{ €}$$

$$\text{Duration} = \frac{1}{104} \times \left[\frac{1 \times 5}{1.045} + \frac{2 \times 5}{(1.045)^2} + \frac{3 \times 108}{(1.045)^3} \right] = 2,86 \text{ ans (< 3)}$$

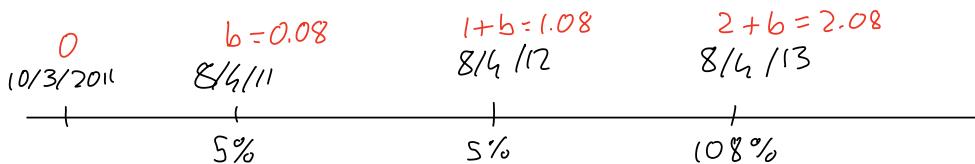
$$\text{Sensibilité} = \frac{D}{1+r} = \frac{2,86}{1.045} = 2,74 \text{ (sans unité)}$$

3) calcul du coupon couru au 10/3/11



$$\text{coupon couru} = \frac{336}{365} \times 5\% = 4,6\% \quad a = \frac{336}{365} = 0,98 \text{ an}$$

Calcul de la valeur de l'obligation au 10/3/2011 $r_{marché} = 4,25\%$

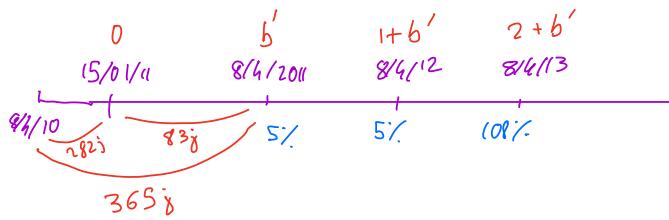


$$\text{au } 10/3/2011, \quad B_0 = \frac{5\%}{1.0425^b} + \frac{5\%}{1.0425^{1+b}} + \frac{108\%}{1.0425^{2+b}} = 108,81\% \quad (\text{soit } 1632,15 \text{ €})$$

$$\text{On en déduit que cours}_{10/3/11} = 108,81 - 4,6 = 104,21\%$$

Rem: Un acheteur devra payer le 10/03/11: $104,21 + 4,6 = 108,81\%$
cours + coupon couru ou 1632,15 € par titre

Pour la prochaine fois: éléments de cotation au 15/01/11, $r_2 = 4,25\%$
+ duration



$$b' = \frac{82}{365} = 0.227 \text{ an}$$

Valeur de l'obligation au 15/01/2011 :

$$B_0 = \frac{5\%}{1,0425^{b'}} + \frac{5\%}{1,0425^{1+b'}} + \frac{108\%}{1,0425^{2+b'}} = 108,14\% \text{ soit } 1622,12 \text{ €}$$

Rem : $B_{10/3/11} = 108,81\%$

Coupon couru = $\frac{282}{365} \times 5\% = 3,86\%$ (^{Rum: coupon couru au 10/3/11}
 $= 6,6\%$)

On en déduit le cours $_{15/1/2011} = 108,14 - 3,86\% = 104,28\%$
ou 1564,2 €

Au 15/01/2011, on constate les éléments

cours = 104,28 %	+ = 108,14 %	soit un prix d'achat ou de vente de 1622,12 € par titre
coupon couru = 3,86 %		

permet de comparer des obligations entre elles
(par exemple pour un même émetteur)

Duration au 15/01/11 $\approx 2,09$ ans < 2,277 ans (2+b') maturité de l'oblig

$$D = \frac{1}{108,14} \times \left[\frac{b' \times 5\%}{1,0425^{b'}} + \frac{(1+b') \times 5\%}{1,0425^{1+b'}} + \frac{(2+b') \times 108\%}{1,0425^{2+b'}} \right]$$

Sensibilité $S = \frac{D}{1+r} = \frac{2,09}{1,0425} = 2$ (sans unité)

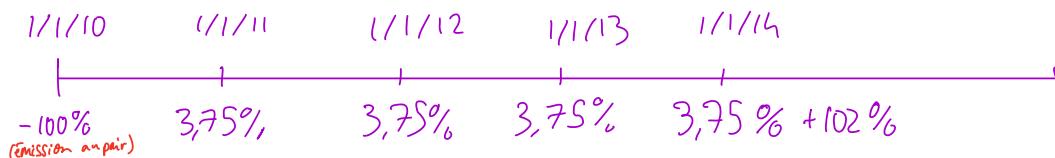
Exercice 2 :

On considère une obligation du secteur privé dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Nominal : 500 €
- Emission au pair
- Date de jouissance : 1^{er} janvier 2010
- Date de règlement : 1^{er} janvier 2010
- Durée : 4 ans
- Intérêt annuel : 3,75 % soit 18,75 € par titre, payable en une seule fois le 1^{er} janvier de chaque année et pour la première fois le 1^{er} janvier 2011.
- Amortissement : en totalité le 1^{er} janvier 2014 par remboursement à 102 %.

- 1) Calculer le rendement actuel de l'obligation à l'émission (essayer les taux 4% et 4,5%).
- 2) Le 1^{er} janvier 2011, le taux d'intérêt sur le marché est de 4%.
Quelle est alors la valeur de l'obligation (en euros et en %)?
Calculer sa sensibilité et sa duration.
- 3) Indiquer le cours (en %) et le coupon couru (en %) de l'obligation le 30 avril 2011, le taux d'intérêt sur le marché étant de 4,5%.
Quel prix devriez-vous payer pour acquérir l'obligation le 30 avril 2011 ?
- 4) Une obligation zéro-coupon se caractérise par l'absence de versement d'intérêt pendant toute la durée de vie du titre. Le rendement est en fait produit par la différence entre le capital effectivement versé à l'émission et celui remboursé à l'échéance.
On considère une obligation zéro-coupon émise par l'Etat le 1^{er} janvier 2010 à 660 €. Cette obligation est remboursée à 750 € le 1^{er} janvier 2014. Quel est son taux actuel ? En le comparant au taux actuel à l'émission de l'obligation précédente, déduisez-en la notation de l'obligation du secteur privé à partir du barème Standard & Poor's suivant :

Ecarts de rendement à l'émission entre les obligations du secteur privé classées selon leur notation, et les émissions d'Etat	
AAA	0 à 0,47%
AA	0,48 à 0,81%
A	0,82 à 1,08%
BBB	1,09 à 1,77%
BB	1,78 à 3,05%
B	3,06 à 4,09%
CCC	4,1 à 7,07%



Émission au pair

le rendement actuel à l'émission - y_c doit vérifier

$$100 = \frac{3,75}{1+y_c} + \frac{3,75}{(1+y_c)^2} + \frac{3,75}{(1+y_c)^3} + \frac{105,75}{(1+y_c)^4}$$

$$y_c = 4,22\% \text{ (interpolation linéaire)}$$

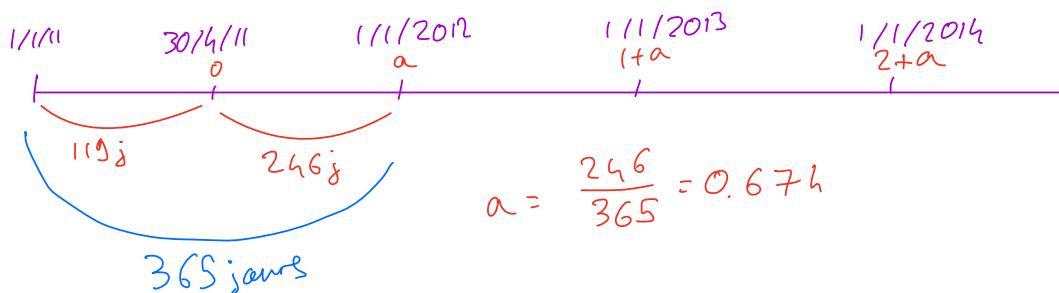
$$2) B_1 = \frac{3,75}{1,04} + \frac{3,75}{(1,04)^2} + \frac{105,75}{(1,04)^3} = 101.08 \% \text{ soit } 505,42 \text{ €}$$

Duration :

$$D = \frac{1}{101.08} \left(\frac{3,75}{1,04} + \frac{2 \times 3,75}{(1,04)^2} + \frac{3 \times 105,75}{(1,04)^3} \right) = 2.87 \text{ ans}$$

$$S = \frac{D}{1+r} = \frac{2.87}{1.04} = 2.75$$

3) Le 30/06/2011, trouver le cours de l'obligation. $r_{marché} = 0.045$



$$B_0 = \frac{3,75}{1,045^1} + \frac{3,75}{1,045^{1+a}} + \frac{105,75}{1,045^{2+a}} = 101.13 \%$$

Prix à payer par titre : $101.13 \% \times 500 = 505,66 \text{ €}$

Coupon Couru : $\frac{119}{365} \times 3,75 \% = 1.22 \%$

Cours : $101.13 - 1.22 = 99,91 \%$

$$b) \quad \begin{array}{c} 1/1/12 \\ + \\ 660 \text{ €} \\ \hline 750 \text{ €} \end{array}$$

Le taux actuel y doit vérifier $660 = \frac{750}{(1+y)^4}$ (ou $750 = 660 \times (1+y)^4$)

$$y = \sqrt[4]{\frac{750}{660}} - 1 = 3.25 \% \quad \text{taux sans risque (émission par l'Etat) de maturité 4 ans}$$

Pour l'obligation du secteur privé de même maturité (émise à la même date 1/1/2010), on a trouvé à la question 1 un taux actuel de 4,22 %

L'écart (Spread) de taux actuel à l'émission est donc $4,22 \% - 3,25 \% = 0,97 \%$

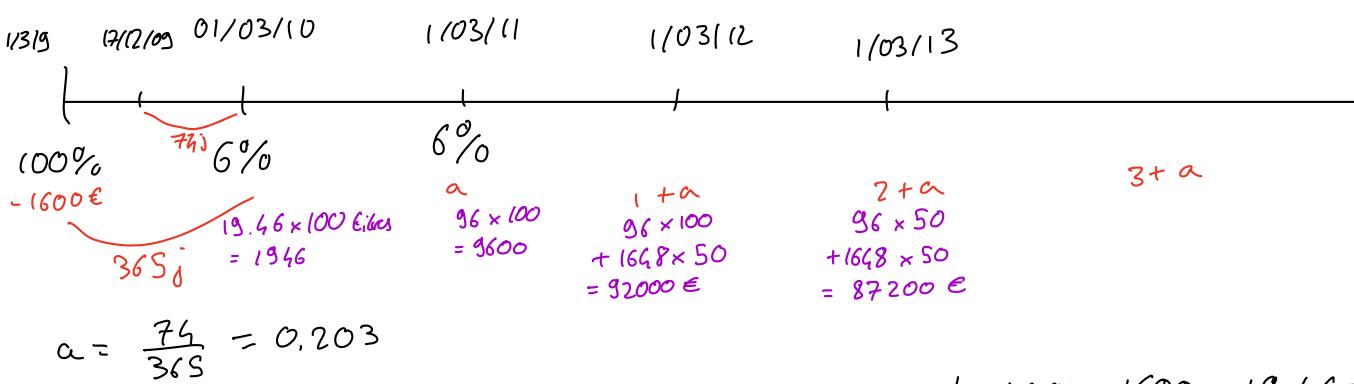
Ce spread est entre 0,82 % et 1,08 % ce qui correspond à une note A

Exercice 3 :

Une société émet un emprunt dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Nominal : 1 600 €.
- Nombre de titres émis : 100.
- Émission au pair
- Date de jouissance et de règlement : 17 décembre 2009
- Intérêt annuel : 6 % payable le 1^{er} mars de chaque année et pour la première fois le 1^{er} mars 2010.
- Amortissement : en deux tranches égales, l'une le 1^{er} mars 2012, l'autre le 1^{er} mars 2013, par remboursement à 103%.

- 1) Quel est le montant du coupon versé le 1^{er} mars 2010 ?
- 2) Quel est le taux actuairel brut à l'émission de la totalité de cet emprunt ?
- 3) Quel est le taux actuairel brut à l'émission d'une obligation remboursée le 1^{er} mars 2012 ?
- 4) Même question pour une obligation remboursée le 1^{er} mars 2013 ?
- 5) L'émetteur de l'emprunt doit verser des frais d'émission égaux à 2 % du montant de l'émission. Il amortit ces frais à parts égales en 2010 et 2011. L'amortissement de la prime de remboursement s'effectue en quatre parts égales. En considérant un taux d'imposition sur les sociétés de 35 % et en admettant que l'émetteur fasse suffisamment de bénéfices, quel est le coût de l'émission de cet emprunt ?



1) Coupon n°1 = $6\% \times \frac{74}{365} = 1,216\%$ soit $1,216\% \times 1600 = 19,46 \text{ € par titre}$

Rem : - Coupon annuel = 6% soit $0.06 \times 1600 = 96 \text{ € par titre}$

- Prix de remboursement = 103% soit $103\% \times 1600 = 1648 \text{ € par titre}$

- remboursement en 2 tranches égales soit $\frac{100 \text{ titres}}{2} = 50 \text{ titres remboursés le 1/3/2012}$
et $50 \text{ titres remboursés le 1/3/2013}$

- On ne sait pas lors de l'émission si un titre sera remboursé en 2012 ou en 2013. Le choix d'un titre pour le remboursement à l'une des dates (2012) se fait par tirage au sort

- lorsque un titre est remboursé, il l'est en totalité (pas de rompus)

2) Un investisseur paie le pair à l'émission, soit $1600 \times 100 = 160000€$.
 Yc, le taux actuariel pour la totalité de l'emprunt vérifie

$$160000 = \frac{1946}{(1+Y_c)^a} + \frac{9600}{(1+Y_c)^{1+a}} + \frac{92000}{(1+Y_c)^{2+a}} + \frac{87200}{(1+Y_c)^{3+a}} \quad \text{soit } Y_c = 7,06\%$$

3) Si on est remboursé en 2012, on peut raisonner pour 50 titres,
 1 titre ou en % du nominal. On est en fait ramené au cas
 d'un remboursement final

0	a	$1+a$	$2+a$
-100 %	1,216 %	6 %	$6\% + 103\% = 109\%$
(-1600 €)	19,46 €	96 €	$96 + 1648 = 1744 € \times 50$

les 50 titres qui sont remboursés en 2012

On cherche y_1 tel que

$$100 = \frac{1,216}{(1+y_1)^a} + \frac{6}{(1+y_1)^{1+a}} + \frac{109}{(1+y_1)^{2+a}} \quad \text{soit } y_1 = 7,32 \xrightarrow{\substack{\text{pour un investissement} \\ \text{de 2+} \\ \text{années}}}$$

On définit la marge actuarielle comme l'écart entre le taux actuariel et le taux nominal.

Ici, pour la tranche 1, la marge actuarielle vaut $7,32 - 6 = 1,32\%$.
 Cette marge actuarielle, pour le cas particulier de cette tranche et cette obligation, s'explique par la présence d'une prime de remboursement de 3% (rbi à 103% pour une émission au pair) dans 2+a années.

Une rapide approximation permet de calculer $\frac{3\%}{2+a} = 1,36\%$ majorant de $1,32\%$
 Calcul prorata temporis marge actuarielle calculée par actualisation

4) Pour la tranche 2, on calcule y_2 tq

$$100 = \frac{1,216}{(1+y_2)^a} + \frac{6}{(1+y_2)^{1+a}} + \frac{6}{(1+y_2)^{2+a}} + \frac{109}{(1+y_2)^{3+a}}$$

$$y_2 = 6,88\% \quad \text{pour investissement de 3+a années}$$

$$\text{marge actuarielle} = 0,88\% < \frac{3\%}{3+a} = 0,94\%$$

5) Peut-être plus tard

Question subsidiaire : Duration à l'émission pour la totalité de l'emprunt ?

$$D = \frac{1}{160\ 000} \times \left[\frac{\alpha \times 1946}{(1+y_e)^a} + \frac{(1+a) \times 9600}{(1+y_e)^{1+a}} + \frac{(2 \times a) \times 92000}{(1+y_e)^{2+a}} + \frac{(3 \times a) \times 87200}{(1+y_e)^{3+a}} \right]$$

$$= 2,56 \text{ ans} \quad \text{ou} \quad y_e = 7,06 \%$$