

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty[}(T_x)$$

[ressources-actuarielles.net](http://ressources-actuarielles.net)



# MODÈLES FINANCIERS EN ASSURANCE ET ANALYSES DYNAMIQUES

**Support de cours 2020-2021**

## Introduction

**Frédéric PLANCHET**

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty[} (T_x)$$

## SOMMAIRE

<b>1. Préambule .....</b>	<b>3</b>
1.1. Contexte et objectif .....	3
1.2. Organisation du cours.....	5
<b>2. Le contexte classique d'évaluation actuarielle et l'approche financière.....</b>	<b>6</b>
2.1. Position du problème.....	8
2.2. Analyse du surplus.....	9
<b>3. Rappel sur les méthodes issues de la théorie financière .....</b>	<b>9</b>
3.1. Portefeuille d'arbitrage autofinancé.....	10
3.2. Probabilité risque-neutre .....	11
3.3. Changement de numéraire .....	12
3.4. Changement de temps.....	14
<b>4. Lecture optionnelle des contrats d'assurance vie .....</b>	<b>14</b>
4.1. Exemple introductif .....	15
4.2. Contrat à taux garanti, sans participation aux bénéfices, ni clause de rachat .....	16
4.2.1. Résolution.....	17
4.2.2. Conclusion.....	17
4.3. Contrat à taux garanti avec participation aux bénéfices, sans clause de rachat .....	18
4.4. Contrat à taux garanti avec clause de rachat .....	18
4.4.1. Exemple .....	19
4.4.2. Évaluation .....	20
4.4.3. Conclusion.....	23
<b>5. Introduction aux problématiques d'analyse dynamique .....</b>	<b>23</b>
5.1. Niveau du capital cible .....	23
5.2. Allocation stratégique.....	24
5.2.1. Modélisation simplifiée .....	24
5.2.2. Exemple .....	25
5.2.3. Généralisation.....	26
5.3. Détermination d'une marge de risque sur un risque mutualisable .....	27
5.3.1. Approximation de la VaR pour un contrat en cas de décès.....	27
5.3.2. Application au calcul d'une marge pour risque .....	28
<b>6. Choix de modèle : une introduction.....</b>	<b>30</b>
6.1. Présentation du modèle .....	30
6.2. Ajustement d'un modèle à sauts sur des cours boursiers .....	31
6.2.1. Statistiques descriptives .....	32
6.2.2. Ajustement du modèle.....	33
6.2.3. Commentaires .....	34
6.3. Prix d'une option d'achat européenne .....	34
6.4. Solvabilité 2 : impact sur le capital cible.....	37
6.4.1. Absence de sauts.....	38
6.4.2. Prise en compte des sauts .....	39
6.4.3. Application numérique.....	40
<b>7. Références.....</b>	<b>42</b>

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

## 1. Préambule

### 1.1. Contexte et objectif

Les modèles usuels utilisés en assurance, que ce soit pour la tarification ou le provisionnement, reposent souvent sur le calcul d'une espérance (notions de prime pure, de valeur actuelle probable, etc.), approche légitimée par le « principe d'équivalence » : la valeur du contrat est évaluée comme la valeur d'une loterie pour un joueur neutre au risque<sup>1</sup>; cette approche présente deux inconvénients majeurs :

- ✓ elle rend délicats les calculs associés à des clauses non linéaires (comme, par exemple, un excédent de plein en réassurance) ;
- ✓ elle escamote le risque associé à tout calcul actuariel en fournissant, pour un jeu d'hypothèses, une valeur unique à la place de la distribution.

Sous l'impulsion des travaux menés en finance sur la valorisation d'actifs complexes, d'une part, et des progrès des puissances de calcul des ordinateurs, d'autre part, une approche alternative, orientée vers l'utilisation de la loi du phénomène observé, et non plus seulement de l'espérance ou d'un moment d'ordre 2, se développe depuis quelques années.

Par ailleurs, les évolutions des normes comptables internationales (IFRS) introduisant dans la méthode de valorisation les concepts de « juste valeur » (« fair value ») et de « valeur à risque » (« value at risk » ou « VaR ») renforcent l'intérêt pour ces méthodes d'évaluations stochastiques. Le dispositif prudentiel « Solvabilité 2 » conduit également à s'intéresser à ces approches.

#### **Les évolutions comptables**

L'entrée en application des normes IFRS<sup>2</sup> a en premier lieu conduit les entreprises à évaluer et à comptabiliser de manière systématique la charge associée aux régimes de retraite supplémentaire (norme IAS 19) ; les organismes assureurs sont quant à eux directement concernés par la norme IFRS « assurance » en cours de refonte et qui a des conséquences directes sur l'évaluation des clauses optionnelles des contrats d'épargne et de prévoyance qu'ils assurent. On peut noter qu'au travers de la norme 13 de la comptabilité publique, l'Etat connaît une évolution comparable à celle des entreprises, avec la nécessité d'évaluer les engagements de retraite au titre des régimes de fonctionnaires.

#### **Les évolutions réglementaires**

Le dispositif prudentiel est harmonisé au niveau européen dans le cadre de la directive<sup>3</sup> « Solvabilité 2 » ; les nouvelles règles ont conduit à revoir en profondeur les méthodes de

<sup>1</sup> Voir BERNARD [2000].

<sup>2</sup> International Financial Reporting Standard.

<sup>3</sup> cf. COMMISSION EUROPÉENNE [2003], [2004], AAI [2004] et CEIOPS [2006].

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty[}(T_x)$$

provisionnement et de détermination des fonds propres (« capital de solvabilité », ou SCR<sup>4</sup>).

On retiendra que, tant pour l'IFRS « assurance » que pour Solvabilité 2, le contexte d'évaluation des engagements est passé d'une logique de calcul de provisions sur la base d'hypothèses prudentes auxquelles s'ajoutent des fonds propres directement proportionnels (par exemple égaux à 4 % du montant des provisions mathématiques en assurance-vie) à une logique dans laquelle les provisions sont évaluées sur la base d'hypothèses « réalistes » avec une quantification explicite des marges de risque, que ce soit au niveau de la provision ou au niveau des fonds propres<sup>5</sup>.

Au surplus, le principe de base posé par la directive Solvabilité 2 pour la détermination du niveau des fonds propres est le contrôle d'une probabilité de ruine (à un an) ; ainsi, les événements « extrêmes », tant au passif qu'à l'actif, prennent une importance qu'ils n'avaient pas jusqu'à présent. On sera donc conduit à s'interroger sur la prise en compte d'événements tels que les discontinuités observées dans l'évolution du cours des actifs :



Fig. 1 : Évolution discontinue du titre Marsh au mois d'octobre 2004

On peut ajouter à ces évolutions, pour ce qui concerne les organismes d'assurance, des évolutions parallèles sur le plan de la communication externe avec la Loi sur la Sécurité Financière<sup>6</sup> (LSF) et sur le plan de la communication financière avec la démarche<sup>7</sup> *Market Consistent Embedded Value* (MCEV). Les évolutions sur les différents registres, prudentiel, comptable, de communication externe et de communication financière sont bien entendu interconnectées. L'un des apports sans doute majeur tant de la norme IFRS pour les contrats d'assurance (au moins dans sa phase 2) que de Solvabilité 2 est d'avoir contribué à structurer la réflexion autour de la segmentation des risques d'une activité d'assurance (et donc en particulier d'une activité d'assurance-vie).

L'analyse des risques est dorénavant déclinée selon quatre catégories principales :

#### ***<sup>4</sup> Solvency Capital Requirement.***

<sup>5</sup> cf. PLANCHET et al. [2011].

<sup>6</sup> Voir par exemple l'article de F. Lusson dans la Tribune du 01/07/2006 sur « Le contrôle interne » et le décret du 13/03/2006.

<sup>7</sup> Voir le site du CFO Forum à l'origine de ces démarches <http://www.cfoforum.nl/>.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty]}(T_x)$$

- Le risque de marché (*market risk*) modélise l'incertitude associée au rendement et à la valeur des actifs financiers,
- Le risque de souscription (*underwriting risk*) concerne essentiellement l'incertitude associée à la mesure des engagements pris par l'assureur,
- Le risque de crédit (*credit risk*) s'attache à prendre en compte le risque de défaut des contreparties (dont réassureurs et émetteurs d'obligations),
- Le risque opérationnel (*operational risk*) prend enfin en considération les risques associés aux procédures de gestion internes de l'assureur et aux conséquences d'un dysfonctionnement à ce niveau.

Le présent cours aborde le risque de marché pour ce qui concerne les placements effectués par le régime et le risque de souscription pour ce qui concerne l'analyse du passif du régime.

Le risque de crédit fait l'objet d'une approche générique qui n'est pas propre aux problématiques d'assurance, il ne sera pas abordé ici en détails<sup>8</sup>; il en est de même pour le risque opérationnel. En ce qui concerne le risque de crédit on pourra noter que les techniques utilisées dans le cadre des modèles à intensité présentent de nombreuses similitudes avec la construction d'une table de mortalité, le défaut pouvant être analysé comme l'étude du temps d'attente avant le défaut.

L'objet du présent cours est de présenter, de manière unifiée et cohérente, les principes théoriques et les outils pratiques permettant de concevoir et de mettre en œuvre des modélisations stochastiques issues de la finance de marché en assurance.

Ces modélisations seront plus particulièrement développées au travers des deux approches suivantes :

- l'application des méthodes financières à l'assurance dans le domaine des contrats d'épargne ;
- la mise en œuvre des modélisations de type ORSA ou ALM stochastique dans le cadre des réflexions issues du dispositif Solvabilité 2.

Ainsi, on s'intéresse dans la suite aux développements de ces deux thèmes : la valorisation de clauses optionnelles d'une part, la mesure du risque porté par l'assureur d'autre part. Ces deux démarches sont, on le verra, de nature sensiblement différente, même si elles partagent un certain nombre de points techniques, et notamment le recours intensif aux modèles stochastiques et à la simulation.

## 1.2. Organisation du cours

L'ensemble du matériel associé au cours (supports et codes informatiques) est disponible en ligne<sup>9</sup>. Le cours aborde les thèmes suivants :

- Une [introduction générale](#), constituée du présent document, sur le thème de l'utilisation des modèles financiers en assurance ; cette introduction est

<sup>8</sup> LE PAGE [2000] propose une synthèse assez complète sur ce sujet. On pourra aussi consulter JEANBLANC et RUTOWSKI [1999].

<sup>9</sup> <http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/o/826DoD13E38C0614C1256F130067C177>

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty]}(T_x)$$

complétée de [rappels de finance](#), indispensables pour comprendre les problématiques spécifiques à l'assurance.

- Le cas particulier des [garanties planchers sur les contrats en unité de compte](#) et, plus généralement, des [annuités variables](#), est utilisé pour illustrer l'interaction entre un contrat d'assurance et les logiques de valorisation issues de la finance de marché.
- Le calcul des provisions *best estimate* de contrats d'épargne en € est ensuite abordé au travers de la [construction de scénarios économiques](#).

Ces points fournissent le cadre de base permettant de construire un bilan économique à la date d'inventaire. La seconde partie du cours est ensuite consacrée à des approfondissements, selon deux axes :

- L'introduction de la dimension prospective, dans le cadre de l'[ORSA](#) ;
- Une réflexion sur le sens de l'utilisation de la probabilité risque neutre, qui s'appuie sur différentes réflexions (par exemple sur le [modèle de taux](#)) sans support structuré.

Enfin, [une synthèse](#) avec des pistes de réflexion pour l'amélioration des calculs de valeurs économiques rassemble les points essentiels du cours.

## 2. Le contexte classique d'évaluation actuarielle et l'approche financière

Dès lors qu'il s'agit de valoriser un passif d'assurance, on ne peut éviter aujourd'hui de se trouver confronté à des assertions péremptoires contenant le terme « risque neutre » ; le recours à la « probabilité risque neutre » est devenu le gage de crédibilité et de sérieux des actuaires intervenant sur les problématiques de détermination de la valeur intrinsèque (*embedded value*), d'IFRS et de Solvabilité 2. Mais que recouvre cette notion ? Sa pertinence est-elle toujours avérée ?

### Une démarche financière de valorisation...

Les financiers devant faire face à une échéance fixée, connue ou non à l'avance, à un paiement de montant inconnu (aléatoire) exprimé en fonction de l'évolution d'un actif financier (le « sous-jacent ») ont démontré que, moyennant une certaine idéalisation du fonctionnement du marché, il était possible, en investissant une somme fixée à l'origine dans un portefeuille bien choisi et en gérant ensuite ce portefeuille, de s'affranchir du risque en étant certain de disposer à l'échéance de la somme nécessaire au paiement et ce quelle que soit la réalisation de l'aléa qui lui est attaché. Cette technique dite de couverture ou de réPLICATION a permis le développement des marchés de produits dérivés (options). On soulignera à ce stade qu'elle est en pratique utilisée dans des situations très diverses, mais toujours sur des marchés liquides et pour des engagements de durée en général courte (de quelques jours à quelques semaines, à l'exception de certains dérivés de taux) et que la gestion active par les arbitragistes des portefeuilles de couverture est quotidienne.

### également appliquée en assurance...

Depuis quelques années, l'analyse des contrats d'épargne de plus en plus sophistiqués commercialisés par les assureurs a mis en évidence que certaines garanties, telles que les

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty]}(T_x)$$

garanties de taux ou les « garanties plancher » sur les contrats en unités de compte, pouvaient être exprimées formellement comme des flux d'options, et cela a bien entendu conduit à vouloir utiliser les modèles de valorisation développés par les financiers.

Ainsi ces garanties se voient valorisées en pratique comme l'espérance actualisée sous la probabilité risque neutre et non plus sous la probabilité historique des flux qu'elles engendrent. L'exemple classique d'une telle méthode de valorisation est la formule dite des « puts moyens pondérés » pour provisionner les garanties plancher sur les contrats en unités de compte.

### Cette application est-elle légitime ?

Si, de prime abord, cela peut sembler légitime de valoriser ainsi ce type d'engagements, un examen plus attentif conduit à mettre en avant deux points en particulier :

- en premier lieu, dans le contexte d'un engagement d'assurance, l'évaluation financière doit être menée conditionnellement à une certaine réalisation de l'aléa démographique (par exemple pour une garantie plancher, on fait l'hypothèse que la date de décès est connue), le résultat final consistant à prendre la valeur moyenne des résultats ainsi déterminés. Compte tenu de la mutualisation imparfaite d'un portefeuille réel, le « coût » de la garantie optionnelle n'est *in fine* qu'une approximation de la valeur véritable ;

- en second lieu, on est fondé à s'interroger sur la légitimité de l'évaluation d'un engagement sous la forme de la détermination d'un prix sur un marché. En effet, la question pour l'assureur n'est pas tant de donner un « prix » à un portefeuille (sauf bien entendu dans le contexte du calcul de la valeur intrinsèque) que de provisionner à un niveau suffisant pour lui garantir une maîtrise satisfaisante des risques auxquels il est exposé.

On peut alors reformuler le problème posé en observant que l'assureur doit faire face à deux types de risques :

- des risques mutualisables : ce sont les risques dont la prise en charge fonde l'activité d'assurance ;

- des risques non mutualisables, tels que ceux que l'on vient d'évoquer. Parmi ces risques on sera conduit à distinguer les risques répliables (que l'on peut couvrir) et les autres.

Les risques non mutualisables sont souvent d'origine financière mais il en existe également qui sont directement associés aux engagements d'assurance, comme la mortalité stochastique ou, plus généralement, tous les phénomènes qui conduisent à remettre en cause l'indépendance entre les assurés (attentats, risques environnementaux, etc.).

Pour l'assureur, la question est donc de fixer une méthode techniquement fondée (au sens de la maîtrise du risque) pour le calcul de la provision pour les risques non mutualisables.

Dans ce but, l'assureur se doit de déterminer avec autant de précision que possible la distribution du passif auquel il fait face. Cette distribution est bien entendu déterminée (et n'a de sens) que sous la probabilité historique. A partir de cette distribution il peut prendre des décisions de gestion pertinentes. C'est bien dans cette logique que s'inscrit le projet

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

[ressources-actuarielles.net](http://ressources-actuarielles.net)

Solvabilité 2, en fixant comme critère de référence le contrôle de la probabilité de ruine à horizon un an.

Par contre, un engagement (ou une marge de risque) déterminé par les techniques financières transposées directement n'a pas de sens autre que conventionnel (au sens d'imposé par la norme) puisque la gestion du portefeuille d'arbitrage n'est pas mise en œuvre et, quand bien même elle le serait, les imperfections diverses et la durée des engagements rendent la couverture bien approximative.

### Fixer un prix et mesurer un risque sont deux activités distinctes

Il convient donc de bien distinguer les problématiques dont l'objectif est la fixation d'un prix qui, en l'absence d'un marché organisé, relève d'une démarche conventionnelle et les problématiques de contrôle des risques dans le cadre de la gestion technique.

Si dans le premier cas, dont relèvent *in fine* les approches de calcul de la valeur intrinsèque et de la norme IFRS assurance, l'utilisation des techniques de couverture (pour lesquelles la probabilité risque neutre fournit un moyen de calcul simple) peut être acceptée, il n'en va pas de même pour l'appréciation et la quantification des risques portés par l'assureur, dont l'évaluation se fera quoi qu'il en soit dans le monde réel, et donc avec la probabilité historique. Cela n'empêche pas d'utiliser la probabilité risque neutre lors d'étapes intermédiaires de valorisation, mais signifie simplement que la mesure du risque associé à la clause correspondante nécessite le recours à la probabilité historique. Les deux approches ne sont donc pas exclusives l'une de l'autre, elles concernent des problématiques différentes.

En résumé, l'actuaire ne doit pas perdre de vue que le métier de l'assurance ne consiste pas à neutraliser des risques *via* des techniques de couverture mais à gérer des risques en contrôlant le niveau d'incertitude qui leur est attaché. Si le recours à des méthodes financières basées sur une condition d'absence d'opportunité d'arbitrage apparaît légitime lorsqu'il s'agit de fixer un prix dans un cadre normatif (IFRS et MCEV notamment), l'analyse de la solvabilité ne peut être effectuée que dans le cadre de la prise en compte des lois de probabilité réelles des éléments en jeu. L'application des méthodes financières en assurance doit donc être conduite avec discernement.

#### 2.1. Position du problème

En assurance vie, à chaque date, on est amené à déterminer les valeurs de 3 séquences de flux:

- les primes,
- les prestations,
- les revenus du portefeuille.

Si on désigne par X, Y et Z respectivement ces suites de flux, et si V() désigne le mécanisme permettant d'associer à une suite de flux futurs son "équivalent capital" actuel, on a donc d'un coté:

- A(t)=V(t, Z) la valeur du portefeuille financier,
- V(t)=V(t, Y-X) la valeur nette du contrat.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

La différence  $S=A-V$  est par définition le surplus à la date  $t$ . Dans certains contextes, les prestations peuvent être fonction de la valeur du portefeuille, au travers notamment de clauses de participation aux bénéfices.

## 2.2. Analyse du surplus

Une décomposition classique du surplus consiste à l'écrire sous la forme  $S=M+E$ , avec, si  $R$  désigne le montant des provisions :

$$- M(t) = A(t) - R(t)$$

$$- E(t) = R(t) - V(t)$$

$E$  est la « VBIF » (Value of Business In Force).

La décomposition présentée ci-dessus coïncide avec la séparation entre les services actuariels et financiers: typiquement  $A$  est valorisé selon des méthodes d'inspiration financières (prix de marché et modélisation *ad hoc*), alors que  $E$  est valorisé avec des techniques actuarielles classiques, basées sur l'actualisation de l'espérance des flux futurs.

On voit que cela peut engendrer des incohérences, spécialement lorsque  $X$  et  $Y$  sont liés à  $Z$  (par exemple dans des contrats d'épargne) et/ou que les contrats contiennent des « options cachées ».

L'idée est alors de rechercher des méthodes de valorisation cohérentes pour les aspects actuariels et financiers : on va utiliser pour cela des instruments de la théorie économique classique, notamment les notions de prix d'équilibre dans un marché complet et d'absence d'opportunité d'arbitrage.

## 3. Rappel sur les méthodes issues de la théorie financière

La « juste valeur » (*fair value*) est par définition le montant pour lequel un actif pourrait être échangé, ou un passif réglé, entre des parties bien informées et consentantes dans le cadre d'une transaction effectuée dans des conditions de concurrence normale.

La notion centrale qui sous-tend les méthodes de valorisation en « juste valeur » est l'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA).

Les travaux de HARRISON et KREPS [1979] et HARRISON et PLISKA [1981] ont montré que, sous l'hypothèse de marché complet<sup>10</sup> et d'AOA, il existe une unique mesure de probabilité équivalente à la probabilité historique telle que les prix actualisés soient, sous cette probabilité, des martingales.

Ce résultat ramène le calcul du prix d'un actif à un calcul d'espérance.

Plus généralement on notera qu'actualiser les prix au taux sans risque revient à changer de numéraire : au lieu d'exprimer la valeur d'un actif en unité monétaire courante, on l'exprime dans une unité particulière, constituée par un bon de capitalisation au taux sans

<sup>10</sup> Dans le cadre idéalisé du marché les titres sont parfaitement divisibles et les ventes à découvert permises. Les opérateurs sont rationnels et disposent de la même capacité à traiter l'information. Ils ne peuvent, par une action individuelle, faire bouger les prix. Il n'y a pas de barrière aux emprunts. Les taux de prêt et d'emprunt sont identiques. Il n'y a pas de frais de transaction ni de fiscalité.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

[ressources-actuarielles.net](http://ressources-actuarielles.net)

risque. Cette approche a été généralisée par GEMAN, EL KAROUI et ROCHET [1995] qui montrent qu'on peut associer à tout numéraire (processus mesurable strictement positif) une mesure de probabilité sous laquelle les prix des actifs sont des martingales.

Dans la suite de ce paragraphe, on illustre les concepts introduits ci-dessus dans le cas classique de l'évaluation d'une option d'achat européenne avec un sous-jacent modélisé par un brownien géométrique.

On considère donc un sous-jacent dont la dynamique dans l'univers historique est définie par l'EDS :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz.$$

Le taux d'intérêt sans risque instantané  $r(t)$  est supposé constant égal à  $r$ . On s'intéresse à la valorisation d'une option d'achat européenne de prix d'exercice  $K$  et de maturité  $T$ , le flux à l'échéance étant défini par :

$$C_T = [S_T - K]^+.$$

### 3.1. Portefeuille d'arbitrage autofinancé<sup>11</sup>

L'idée est de construire un portefeuille autofinancé répliquant les flux d'un placement sans risque ; la valeur d'un portefeuille composé de  $n(t)$  options et  $q(t)$  actions s'écrit :

$$V_t = n(t)C_t + q(t)S_t.$$

La propriété de Markov pour les diffusions assure que le prix de l'option  $C$  ne dépend de la valeur du sous-jacent qu'au travers de  $S_t$ , ie  $C = C(t, S_t)$ . On rappelle alors que par la formule d'Itô on a :

$$dC(t, S_t) = \frac{\partial C}{\partial t} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} d\langle S, S \rangle_t,$$

avec ici le processus de variation quadratique qui vaut  $d\langle S, S \rangle_t = \sigma^2 S^2 dt$ , ce qui implique finalement :

$$dC = \frac{1}{2} \sigma^2 S_t^2 \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} dt + \frac{\partial C}{\partial S} dS + \frac{\partial C}{\partial t} dt.$$

Par ailleurs, la condition d'autofinancement assure que  $dV_t = n(t)dC_t + q(t)dS_t$ ; le choix de  $n = -1$  et  $q = \frac{\partial C}{\partial S}$  annule dans l'expression de  $dV_t = n(t)dC_t + q(t)dS_t$  le terme aléatoire (en  $dz$ ), ce qui indique que le portefeuille est alors sans risque. Par la condition d'AOA, il doit avoir le rendement du sans-risque, ce qui conduit à  $dV = rV dt$ .

On obtient ainsi l'EDP de Black et Scholes que doit satisfaire le prix de l'option :

<sup>11</sup> cf. HULL [1999] J. C., Options, Futures & Other Derivatives, Prentice-Hall, 4<sup>ème</sup> édition, 1999.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

[ressources.actuarielles.net](http://ressources.actuarielles.net)

$$\frac{\sigma^2 S^2}{2} \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} + rS \frac{\partial C}{\partial S} - rC + \frac{\partial C}{\partial t} = 0,$$

avec la condition limite :  $C(S_T, T) = [S_T - K]^+$ .

La résolution de l'équation ci-dessus n'est pas simple : elle nécessite un changement de variable peu intuitif (cf. BLACK et SCHOLES [1973]) qui permet de se ramener à l'équation de conservation de la chaleur. L'idée est alors de rechercher une méthode « probabiliste » pour résoudre le problème de valorisation.

### 3.2. Probabilité risque-neutre

L'un des résultats de base de la finance est que les conditions d'AOA et de marché complet assurent l'existence et l'unicité d'une mesure de probabilité sous laquelle le processus de prix actualisé est une martingale.

La modélisation en temps continu utilisée ici fait appel à des processus de diffusion, et ceux-ci ont une propriété remarquable, qui est qu'il existe une probabilité sous laquelle ils deviennent des martingales. C'est ce qu'exprime le théorème de Girsanov, que l'on peut énoncer de la manière suivante :

#### Théorème de Girsanov<sup>12</sup>

Soient  $Z$  un mouvement brownien pour un espace filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, P)$  et  $\lambda$  un processus adapté vérifiant  $E \left[ \exp \left( \frac{1}{2} \int_0^T \lambda^2(u) du \right) \right] < \infty$  (condition de Novikov).

On définit le processus  $Z'$  et la mesure  $Q$  par :

$$Z'_t = Z_t + \int_0^t \lambda(s) ds \quad \text{et} \quad \frac{dQ}{dP} = \exp \left\{ - \int_0^t \lambda(u) dZ_u - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2(u) du \right\}$$

Alors  $Z'$  est un  $Q$ -mouvement brownien.

En appliquant ce résultat avec  $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ , et en appliquant le lemme d'Itô au processus de prix actualisé  $S'(t) = S(t)e^{-rt}$ , on obtient que  $S'$  est une martingale sous  $Q$ . De même  $C'(t) = C(t)e^{-rt}$  est une  $Q$ -martingale, ce qui permet de conclure que :

$$\exp(-rt) \times C(t) = E^Q \left[ \exp(-rT) \times [S_T - K]^+ | F_t \right]$$

On a ainsi ramené le problème de la valorisation de l'option à un calcul d'espérance, *a priori* plus simple que la résolution de l'EDP issue du raisonnement d'arbitrage direct.

<sup>12</sup> cf. LAMBERTON D., LAPEYRE B., *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance*, 2<sup>nde</sup> édition, ellipses, 1997.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

En effet, la variable  $S'(T)$  est log-normale sous  $Q$ , ce qui conduit aisément à la formule de Black et Scholes<sup>13</sup> :

$$C(0) = S_0 \times N(d_1) - K \times e^{-rT} \times N(d_2)$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

$N$  désignant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Les deux approches sont liées par le théorème de représentation de Feynman-Kac qui permet d'exprimer la solution de certaines équations différentielles stochastiques (e.d.s.) sous la forme d'un calcul d'espérance et réciproquement.

#### Théorème de Feynman-Kac<sup>14</sup>

Soit  $f$  une fonction de classe  $C^{2,1}$ . Si  $\mu(x,t)$ ,  $\sigma(x,t)$  et  $r(x,t)$  sont deux fonctions lipschitziennes, bornées sur  $\mathbb{R} \times [0, T]$ . Considérons l'EDP :

$$\frac{1}{2} \sigma^2(x,t) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \mu(x,t) \frac{\partial f}{\partial x} + r(x,t) f = 0$$

avec la condition limite :  $f(x, T) = \Phi(x)$

En supposant que,  $\forall t \leq T$ ,  $\int_0^t E \left[ \left( \sigma(X_s, s) \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, s) \right)^2 \right] ds < \infty$

alors :

$$f(x, t) = E_t^N \left[ \exp \left( \int_t^T r(X_s, s) ds \right) \Phi(X_T) \right]$$

où  $X$  suit l'e.d.s.  $dX_t = \mu(X, t) dt + \sigma(X, t) d\hat{z}$  et  $\hat{z}$  est un mouvement brownien pour la mesure  $N$ .

#### 3.3. Changement de numéraire

Cette méthode due à GEMAN, EL KAROUI et ROCHE [1995] est très efficace pour évaluer les prix de produits dérivés.

<sup>13</sup> cf. HULL J. C., Options, Futures & Other Derivatives, Prentice-Hall, 4<sup>ème</sup> édition, 1999.

<sup>14</sup> cf. KARATZAS et SHREVE [1988].

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

### Théorème d'évaluation par changement de numéraire

Soit  $Q$  la probabilité risque-neutre et  $B(t) = \exp\left(\int_0^t r(u)du\right)$ . On se donne un nouveau numéraire  $X$  tel que  $X(t)/B(t)$  soit une  $Q$ -martingale.

Il existe alors une mesure de probabilité  $Q_X$  sur  $\mathcal{F}$  sous laquelle les actifs financiers de base exprimés dans ce nouveau numéraire sont des martingales, qui est définie par la densité de Radon-Nikodym :

$$\frac{dQ_X}{dQ}|_{\mathcal{F}_T} = \frac{X(T)}{X(0)B(T)}$$

La valeur d'équilibre  $f(S, t) = H(t)$  de l'actif dérivé de cours  $S$ , de payoff  $H(T)$  en  $T$  s'écrit alors :

$$f(S, t) = X(t) E_{Q_X} \left[ \frac{H(T)}{X(T)} | \mathcal{F}_t \right]$$

On suppose pour démontrer cette égalité, sans perte de généralité, que  $H(0) = 1$ . Par définition de la probabilité risque neutre, on sait que, comme les prix actualisés sont des  $Q$ -martingales :

$$\frac{H(t)}{B(t)} = E_t^Q \left[ \frac{H(T)}{B(T)} \right]$$

On en déduit  $\frac{H(t)}{B(t)} = E_t^Q \left[ \frac{H(T)}{X(T)} \frac{X(T)}{B(T)} \right] = E_t^Q \left[ \frac{H(T)}{X(T)} \frac{dQ_T^X}{dQ} \right]$  et en appliquant le théorème de Bayes, on trouve :

$$\frac{H(t)}{B(t)} = E_t^{Q_T^X} \left[ \frac{H(T)}{X(T)} \right] E_t^Q \left[ \frac{dQ_T^X}{dQ} \right] = E_t^{Q_T^X} \left[ \frac{H(T)}{X(T)} \right] \times \frac{X(t)}{B(t)}.$$

Par exemple avec  $X(t) = P(t, T)$  on obtient la probabilité forward-neutre :

$$\frac{dQ_t}{dQ} = \frac{\exp\left(-\int_0^t r(s)ds\right)}{P(0, t)} = \frac{\delta(t)}{P(0, t)}$$

en posant  $P(0, t) = E_Q(\delta(t))$  le prix du zéro-coupon de maturité  $t$ . On a alors pour toute variable aléatoire  $X_t$  :

$$E_Q \left[ \frac{dQ_t}{dQ} \times X_t \right] = E_{Q_t} [X_t].$$

On peut observer que cette égalité peut s'écrire sous la forme :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

$$E_Q[\delta(t) \times X_t] = P(0,t) E_Q[X_t] = E_Q[\delta(t)] E_Q[X_t].$$

Ainsi, le calcul de l'espérance du membre de gauche (qui est la valeur en 0 de l'actif dérivé  $X$ ) est ramené au calcul du produit de deux espérances, que l'on peut espérer plus simple. L'utilisation de la probabilité forward-neutre sera ainsi particulièrement utile en présence de taux d'intérêt stochastique<sup>15</sup>.

### 3.4. Changement de temps

Ce théorème va intervenir notamment dans l'évaluation du prix d'une option lorsque la structure par terme des taux d'intérêts est stochastique et plus généralement lorsque plus d'un mouvement brownien est en jeu. En effet ce changement de temps va nous permettre, à partir d'une martingale dont la dynamique est régie par deux browniens, de se ramener à un seul brownien.

Considérons la martingale  $M$  définie par l'e.d.s. :

$$dM = x_1(t) dz_1 + x_2(t) dz_2$$

où  $x_1$  et  $x_2$  sont déterministes et  $z_1$  et  $z_2$  sont deux browniens indépendants. Posons  $\tau(t) = \int_0^t (x_1^2(u) + x_2^2(u)) du$ . On a alors :

#### Théorème de changement de temps

*Si  $\tau$  est strictement croissante, alors il existe un unique mouvement brownien  $B$  tel que l'on puisse écrire :*

$$\frac{dM(t)}{M(t)} = B(\tau(t)) dt$$

*et alors :*

$$M(t) = M(0) \exp\left(B(\tau(t)) - \frac{1}{2}\tau(t)\right)$$

On trouvera dans QUITTARD-PINON [2002] une démonstration de ce résultat.

## 4. Lecture optionnelle des contrats d'assurance vie

Après avoir rappelé dans la section précédente les outils utilisés, l'objectif de la présente section est de fournir une illustration des méthodes de calculs issues de la finance dans un cas concret, celui des contrats d'assurance vie de type « contrat d'épargne » ou de certains contrats de prévoyance.

En effet, de nombreuses clauses rattachées aux contrats d'assurance vie, telles que la clause permettant le rachat du contrat, l'obligation de rémunérer un contrat libellé en euros à un taux minimum ou la participation aux bénéfices, peuvent être interprétées

<sup>15</sup> Sur ces points on pourra se reporter à la synthèse présentée dans DEVOLDER [2001] qui détaille les domaines d'application et les principales caractéristiques des probabilités « risque neutre » et « forward neutre ».

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty]}(T_x)$$

comme des options. On trouvera dans MERLUS et PEQUEUX [2002] une typologie de ces différentes garanties. Ces options ont un coût pour l'entreprise. De ce fait, les sociétés d'assurance vie sont confrontées à l'identification et l'évaluation des ces options en vue de déterminer la juste valeur de leurs engagements.

Dans ce paragraphe, nous considérerons une société anonyme d'assurance vie et nous verrons les conséquences des engagements de celle-ci sur les assurés et les actionnaires. On rappelle la disposition réglementaire selon laquelle, si le montant des fonds propres de la société passe en dessous de 50 % de son capital social, l'assemblée générale des actionnaires peut décider de la liquidation de la compagnie ou de la poursuite de l'activité. Dans ce dernier cas, le capital social devra être reconstitué dans les deux années suivantes.

Nous considérerons dans ce paragraphe que les hypothèses classiques assurant les conditions d'AOA sont vérifiées, et en particulier que le marché est parfait.

#### 4.1. Exemple introductif

La valorisation des options « financières » sur des contrats d'assurance repose sur le principe de la détermination de leur prix au sens du prix d'un actif financier sur un marché.

Supposons à titre d'exemple que, dans l'univers risque-neutre, l'actif de l'assureur produit sur une période :

- un rendement de 20 % avec une probabilité de 75 %,
- un rendement de -20 % avec une probabilité de 25 %.

La condition d'AOA implique que le taux sans risque sur cette période s'élève à 10 % (soit l'espérance de rendement de l'actif risqué).

Considérons un contrat d'épargne avec un taux garanti de 0 % (capital garanti) et une clause de participation aux bénéfices financiers à hauteur de 50 %.

Avec une épargne valant 100 en début de période, le résultat de l'assureur en fin de période vaut :

$$\begin{cases} 100 \times (1 + 20\%) - 100 - 50\% \times [100 \times (1 + 20\%) - 100] = 10, & \pi = 75\%, \\ 100 \times (1 - 20\%) - 100 = -20, & \pi = 25\%. \end{cases}$$

La valeur de ce contrat financier est donc égale à  $\frac{75\% \times 10 + 25\% \times -20}{1 + 10\%} = 2,27$ .

Dans un contexte « économique » il est requis de distinguer le coût des options et garanties. L'égalité ci-dessous donne le prix du contrat global. Par convention, on posera que le coût des options et garanties est fourni par la différence entre la valeur déterminée ci-dessus et la valeur obtenue dans une approche *best estimate* dans laquelle l'actif procure par hypothèse le rendement du sans risque.

Dans ce scénario *best estimate* (l'actif procure le sans-risque), le résultat de l'assureur vaut, au terme :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

$$\frac{100 \times (1+10\%) - 100 - 50\% \times [100 \times (1+10\%) - 100]}{1+10\%} = 4,54.$$

Dans un contexte d'AOA, le coût des options et garanties de ce contrat vaut ainsi :

$$2,27 - 4,54 = -2,27.$$

#### 4.2. Contrat à taux garanti, sans participation aux bénéfices, ni clause de rachat

Désignons par :

- $S_t$  la valeur de l'actif à l'instant  $t$ ,
- $K_t$  la valeur des fonds propres en  $t$ ,
- $PM_t$  la valeur des provisions mathématiques en  $t$ ,
- $P(t,T)$  le prix en  $t$  d'un zéro-coupon sans risque d'échéance  $T$ ,
- $\Pi$  le montant de la prime unique demandée aux assurés en  $o$ .

Supposons que la société émette un contrat d'épargne de  $n$  années dont le prix initial est  $S_o$ . Imaginons que son seul engagement soit de garantir aux assurés au taux  $r_g$  (i.e. pas de participation aux bénéfices, ni de clause de rachat pour l'instant). Pendant les  $n$  années, la société investit son capital et ses provisions sur le marché.

Bilan en o		Bilan en T	
ACTIF	PASSIF	ACTIF	PASSIF
$S_o$	$K_o$	$S_T$	$K_T$
	$PM_o = P(o,T) \times (1+r_g)^T \times \Pi$		$PM_T = (1+r_g)^T \times \Pi$

Date	Flux des assurés	Flux des actionnaires
o	$-\Pi$	$-K_o$
T	$\text{Min}(PM_T, S_T)$	$[S_T - PM_T]^+$

À la date de signature du contrat, on connaît déjà  $PM_T$ , la seule variable inconnue est la valeur finale des placements  $S_T$  dont on va déduire  $K_T$ .

Observons le flux de trésorerie en T des assurés :

$$\text{Min}(PM_T, S_T) = PM_T + S_T - \text{Max}(PM_T, S_T)$$

$$\text{Min}(PM_T, S_T) = PM_T - (PM_T - S_T)^+$$

Ce flux est celui d'une obligation zéro-coupon, sans risque de défaut, d'échéance T et de la vente d'un Put européen de sous-jacent  $S$ , de prix d'exercice  $PM_T$  et d'échéance T.

De même le flux à l'échéance des actionnaires correspond à celui d'un Call européen de sous-jacent  $S$ , de prix d'exercice  $PM_T$  et d'échéance T.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

#### 4.2.1. Résolution

En exploitant les conséquences de l'absence d'opportunité d'arbitrage :

- Il existe une probabilité  $Q$  dite risque-neutre, sous laquelle les prix actualisés sont des martingales.
- Du point de vue de l'assuré, le fait qu'il n'y ait pas d'opportunité d'arbitrage signifie que payer  $\square$  en  $o$  pour souscrire le contrat lui laisse espérer le même rendement à terme que de prêter  $\square$  au taux sans risque :

$$\Pi \times e^{rT} = E^Q \left( PM_T - [PM_T - S_T]^+ \right)$$

- De même du point de vue de l'actionnaire<sup>16</sup> :

$$K_0 = e^{-rT} E^Q [S_T - PM_T]^+$$

$r$  est le taux d'intérêt instantané sans risque. Sous l'hypothèse de Black et Scholes, selon laquelle la valeur des placements suit un mouvement brownien géométrique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dz$$

où  $z$  est un mouvement brownien standard, on obtient les valeurs de  $\Pi$  et de  $K_0$  :

$$\begin{aligned} K_0 &= S_0 N(d_1) - PM_T e^{-rT} N(d_2) \\ \Pi &= PM_T e^{-rT} (1 - N(d_2)) + S_0 N(-d_1) \end{aligned}$$

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / PM_T) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ et } d_2 = \frac{\ln(S_0 / PM_T) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

$N$  désignant la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

#### 4.2.2. Conclusion

Ce contrat peut être décomposé en :

- une obligation zéro-coupon sans risque émise,
- un call européen détenu par les actionnaires sur les actifs de la société,
- un put européen vendu par les assurés sur les actifs de la société.

On peut aussi analyser les flux du point de vue de l'entreprise. En effet la vente de ce contrat en  $o$ , revient pour l'entreprise à :

<sup>16</sup> Le législateur impose aux sociétés d'assurance de disposer d'un capital social minimum fixé réglementairement. On n'en tient pas compte ici.  $K_0$  désignant le capital économique nécessaire à la société pour commercialiser ce type de contrats.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty]}(T_x)$$

[ressources-actuarielles.net](http://ressources-actuarielles.net)

- vendre le call aux actionnaires,
- acheter le put aux assurés,
- acheter le sous-jacent  $S$  sur le marché,
- vendre aux assurés le zéro-coupon sans risque d'échéance  $T$ .

La relation de parité *put-call* nous permet de vérifier que la vente du *call* et du zéro-coupon lui permet l'achat de l'actif  $S$  et du *put* :

$$C + K e^{-rT} = P + S$$

#### 4.3. Contrat à taux garanti avec participation aux bénéfices, sans clause de rachat

Au contrat présenté précédemment, la société a rajouté une clause de participation aux bénéfices de  $b$ . On rappelle que le législateur oblige les sociétés d'assurance à faire participer aux bénéfices les assurés à un taux supérieur à 85 %. Cette participation aux bénéfices intervient à l'échéance du contrat. On va donc retrouver les flux suivants :

Date	Flux des assurés	Flux des actionnaires
0	- $\Pi$	- $K_0$
T	$\text{Min}(PM_T, S_T) + b \times [S_T - PM_T]^+$	$(1-b) \times [S_T - PM_T]^+$

Le *call* qui dans le contrat précédent était détenu par les actionnaires est à présent partagé entre les actionnaires et les assurés.

#### 4.4. Contrat à taux garanti avec clause de rachat

La clause de rachat permet aux assurés, de demander à tout instant, le remboursement de la provision mathématique constituée. Nous considérerons ici qu'il n'y a pas de participation aux bénéfices, ni de pénalité en cas de rachat. Le rachat aura lieu en cas de hausse des taux significative et durable permettant à l'assuré de saisir une opportunité d'arbitrage. Le rachat aura aussi lieu lorsque le souscripteur du contrat décède. La possibilité de racheter le contrat à tout instant  $t$  ( $0 < t < T$ ) s'apparente à un *put* américain dont le sous-jacent est le contrat et le prix d'exercice le minimum entre la valeur de l'actif en  $t$  et le montant de la provision mathématique à la date de l'exercice de l'option. Toutefois, il nous faut remarquer qu'à la signature du contrat, on ne connaît pas le futur prix d'exercice, puisque  $S$  est une variable aléatoire.

Bilan en  $t$

ACTIF	PASSIF
$S_t$	$K_t$
	$PM_t = P(t,T) \times (1+r_g)^T \times \Pi$

Il y a rachat en  $t$  si :

$$u \{ \text{Min}(PM_t, S_t) * e^{r(T-t)} \} > E[u \{ \text{Min}(PM_T, S_T) \} | F_t]$$

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

où  $F_t$  représente toute l'information disponible en  $t$  et  $u$  est la fonction d'utilité<sup>17</sup> de l'assuré. La clause de rachat a un coût non négligeable pour l'assureur comme l'illustre l'exemple suivant :

#### 4.4.1. Exemple

L'assureur garantit un taux minimum de 3 % par an. Le contrat a une durée de 8 ans. La prime demandée à l'assuré en 0 s'élève à 100. Les fonds propres de la société sont de 20. Supposons enfin qu'en 0, le taux sans risque à 8 ans soit de 3 %.

L'assureur cherche à immuniser son portefeuille à l'horizon de 8 ans et achète des zéro-coupons sans risque d'échéance 8 ans avec la prime reçue.

Le prix en 0 d'un zéro-coupon versant 1 dans 8 ans est :

$$P(0,8) = \frac{1}{(1+3\%)}^8 = 0,7894$$

Bilan en 0

ACTIF	PASSIF	
Placement des fonds propres : 20	Fonds propres	20
Zéro-coupons ( $126,68 * 0,7894$ ) 100	Provisions	100

Au bout de 2 ans de vie du contrat, la courbe des taux a évolué et le taux sans risque à 6 ans est de 5 %. Il y a une opportunité d'arbitrage pour les assurés, puisque s'ils investissent sur le marché obligataire, ils seront mieux servis que s'ils continuent leur contrat jusqu'à l'échéance. Ils exercent donc leur clause de rachat et la société leur verse le montant de la provision associée au contrat :

$$PM(2) = (1+3\%)^2 \times 100 = 106,09$$

Or la valeur des zéro-coupons achetés en 0 est significativement réduite du fait de la hausse des taux, ils valent en 2 :

$$\text{Zéro-coupons}(2) = 126,68 \times \frac{1}{(1+5\%)}^6 = 94,53$$

L'assureur doit donc puiser dans ses fonds propres pour honorer ses engagements.

Cet exemple nous montre qu'il est indispensable pour l'assureur d'évaluer les impacts financiers de la clause de rachat.

<sup>17</sup> On rappelle les propriétés suivantes concernant les fonctions d'utilité :

- ✓  $u$  est une fonction croissante de la richesse
- ✓  $u$  est concave : l'utilité marginale est décroissante de la richesse.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

#### 4.4.2. Évaluation

La méthode d'évaluation présentée *infra* provient de PRUDENT [1996].

Nous considérerons un contrat de capitalisation de taux garanti  $r_g$ , de prime unique  $\Pi$  versée en 0 et d'échéance  $T$ . En cas de sortie anticipée en  $t$ , l'assureur verse au détenteur du contrat le capital et les intérêts capitalisés jusqu'en  $t$ . Nous supposerons que l'assuré a un horizon de gestion de durée la durée du contrat. On notera dans la suite  $F(t)$  le flux associé à l'option de rachat anticipé lorsqu'elle est exercée en  $t$ . Le flux associé à l'exercice de l'option de rachat est égal à la valeur de rachat du contrat diminuée de la valeur de marché du contrat. De plus, nous supposerons que le montant des fonds propres est élevé de sorte que la valeur de l'actif soit toujours supérieure à celle des engagements techniques.

Étape 1: Détermination du flux associé à l'exercice de l'option de rachat

$$F(t) = PM_t - E_Q \left[ PM_T \times \exp \left( - \int_t^T r(u) du \right) \middle| F_t \right]$$

où  $Q$  est la probabilité risque-neutre. L'exercice de l'option de rachat à la date  $t$  est rationnel dès lors que  $F(t) > 0$ .

Vu en 0, le rachat aura lieu à une date aléatoire  $\tau$  ou n'aura pas lieu. On notera ORA la valeur de l'option de rachat en 0. On remarque que  $\tau$  est un temps d'arrêt par rapport à la filtration  $F$ .

$$ORA = E_Q [F(\tau) \times \delta(\tau) \mid F_0]$$

où  $\delta(t) = \exp \left( - \int_0^t r(u) du \right)$  désigne le facteur d'actualisation.

$$ORA = E_Q \left[ \left( PM_\tau - E_Q \left[ PM_T \times \exp \left( - \int_\tau^T r(u) du \right) \middle| F_\tau \right] \right) \times \delta(\tau) \mid F_0 \right]$$

or,

$$\exp \left( - \int_\tau^T r(u) du \right) \times \delta(\tau) = \delta(T)$$

donc,

$$ORA = E_Q [PM_\tau \times \delta(\tau) - PM_T \times \delta(T) \mid F_0]$$

puisque  $F_0 \subset F_\tau (\tau > 0)$ .

Étape 2: Décomposition de l'option de type américain en somme d'options européennes

Pour évaluer cette option de type américaine, nous allons, dans un premier temps, la décomposer en options européennes de dates d'exercice  $t \in [0, T]$ . L'exercice d'une de ces

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

options européennes s'accompagne de l'abandon de celles dont l'échéance est postérieure. On peut donc écrire<sup>18</sup> ORA sous la forme :

$$ORA = E_Q \left[ \int (PM_t \times \delta(t) - PM_T \times \delta(T)) dp_\tau(t) \right]$$

avec  $p_\tau(dt) = \Pr(\tau \in [t, t+dt] | F_t)$  qui est donc une variable aléatoire. Nous verrons dans la suite (étape 5) comment modéliser la loi (conditionnelle) du temps d'arrêt  $\tau$ .

Étape 3 : Détermination d'une formule probabiliste du prix de l'option dans l'univers forward-neutre

Notons  $Q_t$  la probabilité forward-neutre relative à l'instant  $t$ . On rappelle que cette probabilité est équivalente à la probabilité risque-neutre  $Q$ .

$$\frac{dQ_t}{dQ} = \frac{\exp\left(-\int_0^t r(s) ds\right)}{P(0,t)} = \frac{\delta(t)}{P(0,t)}$$

et, pour toute variable aléatoire  $X_t$ ,

$$E_Q \left[ \frac{dQ_t}{dQ} \times X_t \right] = E_{Q_t} [X_t]$$

Comme on a par ailleurs l'expression :

$$ORA = \int_0^T \int (PM_t \times \delta(t) - PM_T \times \delta(T)) dp_\tau(t) dQ$$

en faisant l'hypothèse que  $dP_\tau(t) = p_\tau(t) dt$ , c'est à dire que la répartition des dates d'exercice possède une densité, on obtient avec Fubini :

$$ORA = \int_0^T dt \left( \int PM_t \times \delta(t) \times p_\tau(t) \frac{dQ}{dQ_t} dQ_t - \int PM_T \times \delta(T) \times p_\tau(t) \frac{dQ}{dQ_T} dQ_T \right)$$

En utilisant alors la définition de la probabilité forward-neutre on trouve :

$$ORA = \int_0^T (PM_t \times P(0,t) \times E_{Q_t}[p_\tau(t)] - PM_T \times P(0,T) \times E_{Q_T}[p_\tau(t)]) dt$$

À présent nous allons modéliser un certain nombre de paramètres afin de pouvoir établir des formules analytiques de la valeur de l'option de rachat.

Étape 4 : Modélisation de la dynamique des zéro-coupons

<sup>18</sup> La notation  $dp_\tau(t)$  désigne la loi (aléatoire) du temps d'exercice à  $\omega$  fixé, et  $P(0,t)$  désigne le prix du zéro-coupon

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Nous allons utiliser le modèle de Cox, INGERSOLL et Ross (CIR) pour la dynamique du taux court terme  $r$ . Ce modèle, en racine carrée, contient un retour à une tendance de long terme et ne peut conduire à des taux négatifs.

$$dr = a(b - r)dt + \sigma \sqrt{r} dZ$$

Sous ce modèle, les zéro-coupons ont la forme suivante :

$$P(t, T) = A(t, T)^* e^{-B(t, T)r}$$

où :

$$B(t, T) = \frac{2(e^{\gamma(T-t)} - 1)}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma}, \quad A(t, T) = \left[ \frac{2\gamma e^{(a+\gamma)(T-t)/2}}{(\gamma + a)(e^{\gamma(T-t)} - 1) + 2\gamma} \right]^{2ab/\sigma^2} \text{ et } \gamma = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}.$$

#### Étape 5 : Modélisation du comportement du souscripteur vis à vis de l'option de rachat

Pour obtenir une formule analytique de la valeur de l'option de rachat, il nous faut modéliser la loi de la variable aléatoire  $\tau$ . Il s'agit en fait de modéliser le comportement des souscripteurs de contrat. Nous proposons ici deux modèles. Le premier est entièrement fondé sur les données historiques et ne tient pas compte du contexte économique (fluctuations de la courbe des taux, inflation, etc.) ni de la situation personnelle de l'assuré (âge). Le deuxième tiendra compte d'un certain nombre de variables extérieures au contrat.

#### Premier modèle

Ce modèle se fonde sur les données historiques des dates d'exercice de clause de rachat. L'objectif est d'obtenir des taux instantanés de rachat  $v_t$ . Le taux de rachat à la date  $t$  représentant le rapport entre le nombre de contrats rachetés à la date  $t$  et de ceux non encore rachetés juste avant cette date. Les données dont on dispose sont, par essence, discrètes (annuelles ou mensuelles) il va donc falloir les transformer en variables continues.

On pourra alors estimer  $dp_\tau(t)$  par  $p_t dt$ , avec :

$$p_t = v_t \times \exp\left(-\int_0^t v_s ds\right)$$

#### Deuxième modèle

L'idée est d'exprimer le taux de rachat comme une fonction de variables explicatives observables influençant les souscripteurs dans leur décision de rachat. Considérons un modèle à une variable explicative  $X(t)$  et une relation fonctionnelle  $f$  telle que :

$$v_t = f[X(t)]$$

Le souscripteur a un horizon d'investissement limité à  $T$  années donc le souscripteur effectue le rachat du contrat à la date  $t$  si le gain procuré par ce rachat est supérieur à la valeur de marché du contrat conservé jusqu'à son échéance  $T$ . On a donc :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty]}(T_x)$$

[ressources-actuarielles.net](http://ressources-actuarielles.net)

$$X(t) = \frac{PM_t \times \beta_t}{PM_T \times P(t, T)}$$

où  $\beta_t$  représente l'effet cumulé des taxes, pénalités et droits d'entrée (supposés nuls jusqu'à présent)

Dès lors que  $X(t) > 1$ , le souscripteur a intérêt à racheter son contrat. Par conséquent le taux de rachat instantané devra être une fonction croissante de  $X(t)$ . Choisissons pour  $f$  une forme log-linéaire du type :

$$f(x) = -\ln(A) + p \ln(x)$$

où  $A$  et  $p$  sont des constantes telles que  $0 < A < 1$  et  $p > 0$ . Alors :

$$\nu_t = -\ln(A) + p \ln(X(t))$$

Avec un choix approprié des paramètres  $A$  et  $p$  (déterminé par régression sur les données historiques par exemple), les valeurs obtenues pour le taux de rachat sont réalistes. Le coefficient  $A$  représente la proportion des souscripteurs qui gardent leur contrat lorsqu'il est équivalent de le racheter ou de le garder.  $p$  représente la sensibilité croissante des souscripteurs à l'évolution des taux.

Dans un modèle plus élaboré, on pourra choisir  $A$  et  $p$  en fonction de diverses variables, l'âge du souscripteur par exemple. En effet plus l'âge sera avancé, plus on choisira  $A$  petit car la probabilité de rachat « non volontaire » (dû au décès) augmente indépendamment de l'évolution des taux.

#### 4.4.3. Conclusion

Cette méthode permet d'évaluer le prix de la clause de rachat d'un contrat d'épargne via une formule analytique si l'on a décidé de modéliser les taux d'intérêt et le comportement des souscripteurs face à l'exercice de l'option de rachat. De nombreux autres choix sont possibles que ce soit pour modéliser la structure des taux d'intérêt ou pour modéliser le comportement des souscripteurs de contrat. Ces modèles ne permettent pas tous d'aboutir à une formule analytique pour la valeur de l'option de rachat. On aura alors recours à des techniques de simulation pour évaluer le prix de la clause de rachat.

### 5. Introduction aux problématiques d'analyse dynamique

L'objectif des exemples ci-dessous est d'illustrer la démarche de détermination du niveau du capital cible (SCR) dans le dispositif Solvabilité 2. On s'attache notamment à montrer que l'allocation d'une partie du capital en actif risqué reste la solution optimale malgré le « prix » de cette allocation qui conduit à un SCR plus élevé.

#### 5.1. Niveau du capital cible

On considère un passif certain qui conduira à devoir payer une prestation égale à  $K$  à horizon un an ; on cherche le capital qui, investi dans un actif  $S$  donné permet de faire face au passif avec une probabilité supérieure à  $1-\alpha$ . En faisant l'hypothèse que l'actif est modélisé par :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t,$$

il s'agit de résoudre :

$$P(S_1 < K) = \alpha.$$

où l'inconnue est le montant du capital investi  $S_0$ . Comme  $S_1 = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) + \sigma \varepsilon\right)$

avec  $\varepsilon$  une variable aléatoire normale centrée réduite,

$$P(S_1 < K) = P\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \times \varepsilon < \ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right) = P\left(\varepsilon < \frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma}\right),$$

soit  $\Pr(S_1 < K) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{K}{S_0}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma}\right)$ . On en déduit le montant du capital à investir :

$$S_0 = K \times e^{-\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \phi^{-1}(\alpha)\right)}$$

## 5.2. Allocation stratégique

### 5.2.1. Modélisation simplifiée

On suppose maintenant que l'on peut investir dans l'actif  $S$  de rendement instantané  $\mu$  et de volatilité  $\sigma$  et dans un actif sans risque de rendement  $r < \mu$ . Un portefeuille de valeur initiale  $W_0$  constitué d'une part  $\pi$  d'actif risqué et  $1-\pi$  d'actif sans risque a une valeur au terme égale à  $W_1 = W_0 \times (\pi S_1 + (1-\pi) e^r)$ . On suppose sans perte de généralité que  $S_0 = 1$ .

Si l'objectif de l'investisseur est de maximiser la valeur espérée du portefeuille en respectant la contrainte sur la probabilité de ruine, il va fixer  $\pi$  en résolvant le programme :

$$\begin{cases} \max_{\pi} E(W_1) = \pi \exp(\mu) + (1-\pi) \exp(r) \\ P(W_1 < K) \leq \alpha \end{cases}$$

On calcule facilement :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

$$P(W_1 < K) = N\left(\frac{\ln\left(\frac{K/W_0 - (1-\pi)e^r}{\pi}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma}\right)$$

On note que si  $\mu \leq r$  l'investisseur place tout sur le support sans risque ; en effet pour que des placements sur le support risqué soient effectués il faut que  $E(S_1) = e^\mu > e^r$ . On suppose donc  $\mu > r$  ; dans ce cas, s'il existe une solution non triviale, la contrainte du programme d'optimisation doit être saturée, ce qui conduit à :

$$\alpha = N\left(\frac{\ln\left(\frac{K/W_0 - (1-\pi)e^r}{\pi}\right) - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)}{\sigma}\right)$$

et donc à l'égalité  $\exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \times N^{-1}(\alpha)\right) = \frac{K/W_0 - (1-\pi)e^r}{\pi}$  d'où il vient :

$$\pi = \frac{\frac{K}{W_0} - e^r}{\exp\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \times N^{-1}(\alpha)\right) - \exp(r)}$$

L'existence d'une solution optimale non triviale dépend donc essentiellement du taux de couverture initial des engagements  $\tau = \frac{W_0}{Ke^{-r}}$  et du rendement instantané du support risqué ajusté au risque.

Remarque : avec des valeurs usuelles de paramètres, comme  $N^{-1}(\alpha) < 0$  on a  $\mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma \times N^{-1}(\alpha) < r$  et donc le dénominateur de la fraction déterminant  $\pi$  est négatif, ce qui permet de conclure que la fonction  $\tau \rightarrow \pi(\tau)$  est croissante.

### 5.2.2. Exemple

On fixe à titre d'illustration :

Taux de couverture des engagements (W/K)	100%
Taux d'intérêt sans risque	4%
Support risqué :	

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

Taux de rendement instantané	8%
Volatilité	25%
Probabilité de ruine cible	0,50%

On obtient alors en fonction du taux de couverture des engagements le graphique suivant :

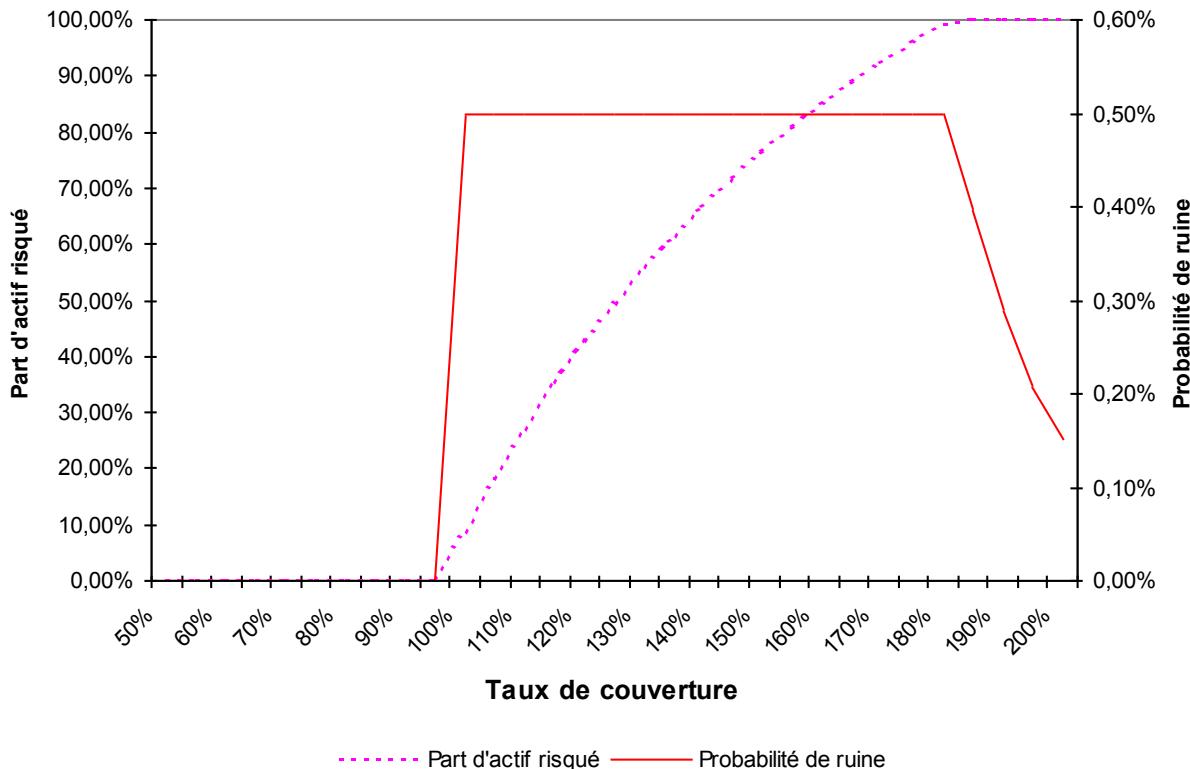


Fig. 2 : Evolution de la part d'actif risqué en fonction du taux de couverture

### 5.2.3. Généralisation

On considère maintenant que le taux d'intérêt est aléatoire, de sorte que :

$$W_1 = W_0 \times \left( \pi S_1 + (1-\pi) e^{\int_0^1 r(u) du} \right)$$

On suppose que la dynamique du taux court est  $dr_t = k(b - r_t)dt + \sigma dW_t$ . Afin de préserver une certaine généralité, on suppose également les mouvements browniens des différentes dynamiques corrélés et on note  $\rho$  le coefficient de corrélation. Le programme à résoudre est inchangé :

$$\begin{cases} \max_{\pi} E(W_1) \\ P(W_1 < K) \leq \alpha \end{cases}$$

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Le calcul de  $E(W_1)$  est simple (cf. les rappels ci-après sur le processus d'Ornstein-Uhlenbeck) car  $W_1$  est la somme de deux variables log-normales. On trouve finalement, avec les notations ci-dessous :

$$E(W_1) = \pi \times e^\mu + (1 - \pi) \exp\left(m(0,1) + \frac{1}{2}v(0,1)\right).$$

Le calcul de  $P(W_1 < K)$  n'est quant à lui pas possible analytiquement (du moins pas autrement qu'avec des intégrales) car la loi de  $W_1$  n'a pas d'expression simple. Au surplus, comme  $\alpha$  est petit ( $\alpha = 0,5\%$ ), le nombre de tirages nécessaire pour atteindre un niveau de précision fixé à l'avance pour les allocations utiles est élevé.

Ainsi, la résolution du programme ci-dessus n'est-elle plus possible analytiquement ; on peut se tourner vers des solutions approchées en approximant<sup>19</sup> la loi de  $W_1$  par une loi log-normale dont les moments sont égaux à ceux de  $W_1$ .

### Rappels<sup>20</sup> : propriétés du processus d'Ornstein-Uhlenbeck

On a  $r_t = r_0 e^{-kt} + b(1 - e^{-kt}) + \sigma \int_0^t e^{-k(t-s)} dW(s)$  et les intégrales  $Z(t, T) = \int_t^T r_u du$  sont gaussiennes. On en déduit que :

$$E_s \left( \exp \left( \int_s^t r(u) du \right) \right) = \exp \left( m(s, t) + \frac{1}{2} v(s, t) \right)$$

avec :

$$m(s, t) = b(t - s) + (r_0 - b) \frac{e^{-ks}}{k} (1 - e^{-k(t-s)})$$

$$v(s, t) = \frac{\sigma^2}{2k^3} (1 - e^{-k(t-s)})^2 + \frac{\sigma^2}{k^2} \left( (t - s) - \frac{1 - e^{-k(t-s)}}{k} \right)$$

## 5.3. Détermination d'une marge de risque sur un risque mutualisable

### 5.3.1. Approximation de la VaR pour un contrat en cas de décès

On considère un ensemble  $I$  de têtes ; on note  $x_i$  l'âge de la tête  $i \in I$ , supposée assurée pour un capital au cas de décès de  $K_i$ .

<sup>19</sup> Sur les approximations de la loi d'une somme de variables log-normales, on pourra consulter EL FAOUZI et MAURIN [2006].

<sup>20</sup> cf. [http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/72EE1310B7EBC2A2C1256FD2002E9C76/\\$FILE/Séance3-02.pdf?OpenElement](http://www.ressources-actuarielles.net/C1256F13006585B2/0/72EE1310B7EBC2A2C1256FD2002E9C76/$FILE/Séance3-02.pdf?OpenElement)

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

La charge sinistre du portefeuille est  $S = \sum_{i \in I} K_i 1_{\{T_{x_i}=0\}}$  avec  $T_x$  la durée de survie au-delà de  $x$  de la tête d'âge  $x$ .

On commence par considérer le cas simplifié où  $K_i = 1$  pour tout  $i$ . En notant  $I(x)$  le sous-ensemble de  $I$  composé des têtes d'âge  $x$ , on a avec des notations évidentes :

$$S_x = \sum_{i \in I(x)} 1_{\{T_{x_i}=0\}}$$

qui est approximativement gaussienne d'espérance  $N_x \times q_x$  et de variance  $N_x \times q_x \times (1-q_x)$ . En sommant pour tous les âges on trouve avec le théorème central limite que  $S$  peut être approchée par la loi normale d'espérance  $\sum N_x \times q_x$  et de variance  $\sum N_x \times q_x \times (1-q_x)$ .

La VaR au niveau  $\alpha$  est donc approchée par

$$VaR_\alpha(S) \approx V_\alpha = \sum N_x \times q_x + \phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum N_x \times q_x \times (1-q_x)}.$$

En d'autres termes  $\Pr(S \geq V_\alpha) \approx 1-\alpha$ .

Cette approche se généralise au cas où les capitaux sous risque  $K_i$  sont différents en utilisant des versions affaiblies du TCL (condition de Lindberg) :

$$VaR_\alpha(S) \approx V_\alpha = \sum K_i \times q_{x_i} + \phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum K_i \times q_{x_i} \times (1-q_{x_i})}$$

### 5.3.2. Application au calcul d'une marge pour risque

Les flux associés à un risque financier sont (notamment dans un cadre MCEV) actualisés au taux sans risque.

On peut par ailleurs montrer par un argument d'absence d'opportunité d'arbitrage que le taux d'actualisation que l'on doit utiliser pour des flux associés à un risque mutualisable est le taux sans risque, autrement dit que la prime de risque est nulle dans ce contexte.

Toutefois ceci n'est vrai que si la mutualisation est suffisante, et dans le cas d'une mutualisation partielle, l'investisseur peut exiger une telle prime.

La justification est alors que du fait d'obligations réglementaires ou d'une règle de gouvernance<sup>21</sup> le capital immobilisé est supérieur à l'évaluation *best estimate* que l'investisseur en ferait *a priori*.

Supposons par exemple, pour fixer les idées, que dans le cas d'une mutualisation imparfaite le montant de la provision soit fixé en référence au quantile à 75% de la distribution des sinistres (supérieur donc à l'espérance du coût des sinistres). En pratique on détermine alors la prime de risque en écrivant :

<sup>21</sup> Par exemple on peut imaginer que le capital soit fixé à un niveau tel qu'il permette une notation AA par les organismes spécialisés.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+r)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

$$\frac{E(S)}{1+r} = \frac{VaR(S; 75\%)}{1+\rho}$$

avec  $r$  le taux sans risque et  $S$  la charge des sinistres. Autrement dit, la rémunération du capital effectivement immobilisé attendue par l'actionnaire est déterminée de sorte qu'investir, pour le même risque, le capital « best estimate » rémunéré au taux sans risque ou le capital effectivement immobilisé au taux intégrant la prime de risque soit indifférent à la date initiale.

On se place dans le cas simple d'un contrat temporaire décès de durée un an. On a vu que  $S = \sum S_x$  peut être approchée par la loi normale d'espérance  $\sum N_x \times q_x$  et de variance  $\sum N_x \times q_x \times (1-q_x)$ . La VaR au niveau  $\alpha$  est donc approchée par :

$$VaR_\alpha(S) \approx V_\alpha = \sum N_x \times q_x + \phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum N_x \times q_x \times (1-q_x)}$$

En d'autres termes  $P(S \geq V_\alpha) \approx 1 - \alpha$ . On en déduit une expression explicite pour  $\rho$  :

$$\rho = \frac{\sum N_x \times q_x + \phi^{-1}(\alpha) \sqrt{\sum N_x \times q_x \times (1-q_x)}}{\sum N_x \times q_x} (1+r) - 1$$

Numériquement, en prenant un portefeuille constitué d'assurés âgés de 20 à 70 ans, avec 10 000 assurés par âge, un capital décès identique pour tous et la table de mortalité TFOO-02 on trouve :

Effectif	510 000
Charge espérée (Qx moyen)	0,2801%
Charge provisionnée (Quantile 75%)	0,2835%
Marge en % du best estimate	1,76%
Taux sans risque	4,00%
Taux incluant la prime de risque	5,27%

Remarque : il est important ici de bien considérer l'effet de mutualisation global au niveau du portefeuille pour apprécier la marge de risque. L'agrégation « ligne à ligne » de marges de risques déterminées sur chaque âge conduirait à :

$$\rho = \frac{\sqrt{\sum N_x \times q_x + \phi^{-1}(\alpha) \sum N_x \times q_x \times (1-q_x)}}{\sum N_x \times q_x} (1+r) - 1$$

Cette approche conduirait alors à :

Effectif	510 000
Charge espérée (Qx moyen)	0,2801%
Charge provisionnée (Quantile 75%)	0,3099%
Marge en % du best estimate	10,13%
Taux sans risque	4,00%
Taux incluant la prime de risque	15,07%

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

On majorerait ainsi largement le montant de la provision et de la prime de risque, dans une mesure difficilement justifiable.

## 6. Choix de modèle : une introduction

Dès lors que les critères de décisions, par exemple pour fixer le niveau du capital cible, font référence à une propriété de la queue de distribution, la modélisation de celle-ci devient particulièrement sensible.

On illustre dans cette section l'impact d'un faible écart de modélisation sur ce point dans le cas de la modélisation de l'actif. Dans un contexte Solvabilité 2, cette problématique se retrouve de manière symétrique au passif.

Nous décrivons ci-après un modèle alternatif à Black et Scholes et trois applications simples<sup>22</sup>. L'objectif est d'illustrer à la fois la simplicité de mise en œuvre du modèle proposé, à peine plus complexe que celui de Black et Scholes dont il constitue une variante, et l'intérêt de son utilisation dans les problèmes d'assurance que ce soit pour le provisionnement de certaines garanties dans les contrats d'épargne (exemple 6.3 ci-dessous) ou pour la détermination du capital cible dans le référentiel Solvabilité 2 (exemple 6.4 ci-dessous).

### 6.1. Présentation du modèle

Nous reprenons le modèle proposé par MERTON [1976]. Nous considérons ainsi que le prix de l'actif  $S_t$  présente des sauts log-normaux  $V_1, \dots, V_j$  à des instants aléatoires  $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_j$  qui sont les instants de saut d'un processus de Poisson. Entre deux instants de saut on suppose que la dynamique du cours respecte le modèle de Black et Scholes.

Cela conduit après quelques manipulations<sup>23</sup> à l'expression suivante du cours :

$$S(t) = S(0) \exp \left\{ \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\},$$

où :

- $B = (B_t)_{(t \geq 0)}$  est un mouvement brownien.
- $N = (N_t)_{(t \geq 0)}$  est un processus de Poisson homogène d'intensité  $\lambda$ .
- $U = (U_k)_{(k \geq 1)}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi une loi normale  $N(0, \sigma_u)$ .
- Les processus  $B$ ,  $N$  et  $U$  sont mutuellement indépendants.

Les sauts sont ici, dans un souci de simplicité, supposés symétriques et en moyenne nuls ; des modèles plus élaborés à sauts dissymétriques peuvent également être proposés,

<sup>22</sup> Voir PLANCHET et THÉROND [2005] dont une partie du texte est reprise ici pour une description détaillée de ce modèle.

<sup>23</sup> On pourra se reporter pour la démonstration à LAMBERTON et LAPEYRE [1997].

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

comme dans RAMEZANI et ZENG [1998]. Nous ne les considérerons pas ici, l'objectif étant d'obtenir au modèle d'un niveau de simplicité proche de celui de Black et Scholes.

Le modèle ainsi obtenu permet d'ores et déjà de représenter les différentes situations auxquelles nous nous intéressons :  $\sigma_u = 0$  ramène au modèle classique de Black et Scholes,  $\sigma = 0$  nous donne une évolution purement discontinue, et dans les autres cas le modèle intègre les deux composantes.

### 6.2. Ajustement d'un modèle à sauts sur des cours boursiers

Pour les applications numériques, nous utilisons des observations quotidiennes des cours du titre Alcatel, obtenues sur <http://www.yahoo.fr>. A partir de ces cotations, nous recalculons le rendement quotidien de la manière suivante :

$$x_i = x(t_i) = \ln \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}$$

Nous obtenons ainsi un échantillon i.i.d. à partir duquel nous calculons les estimateurs empiriques des quatre moments nécessaires à l'estimation initiale des paramètres : espérance empirique et les trois premiers moments centrés.

Nous disposons d'observations quotidiennes des cours pour la période du 25 juin 2002 au 21 janvier 2005, soit 659 cours, dont l'allure générale est la suivante :



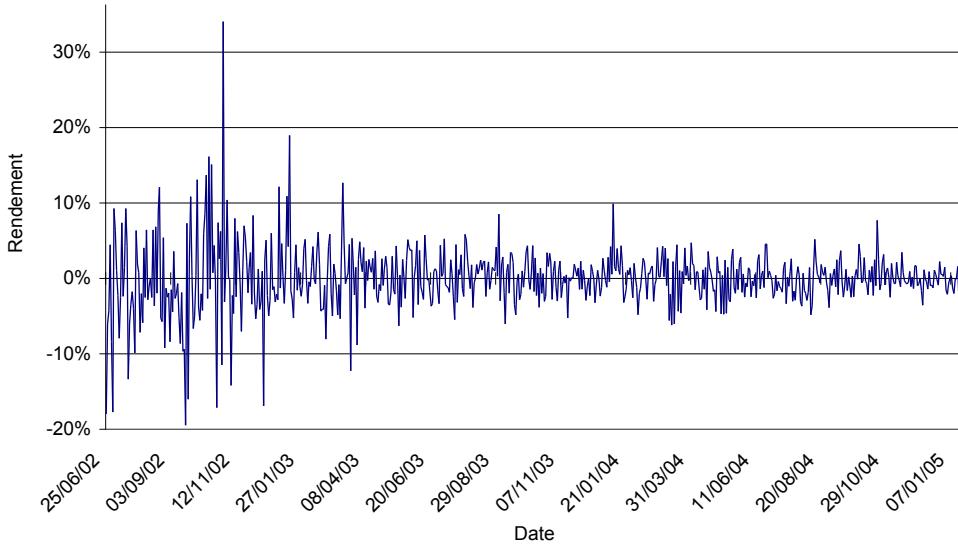
Fig. 3 : Cours à la clôture du titre Alcatel

Le rendement quotidien évolue de la manière suivante :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

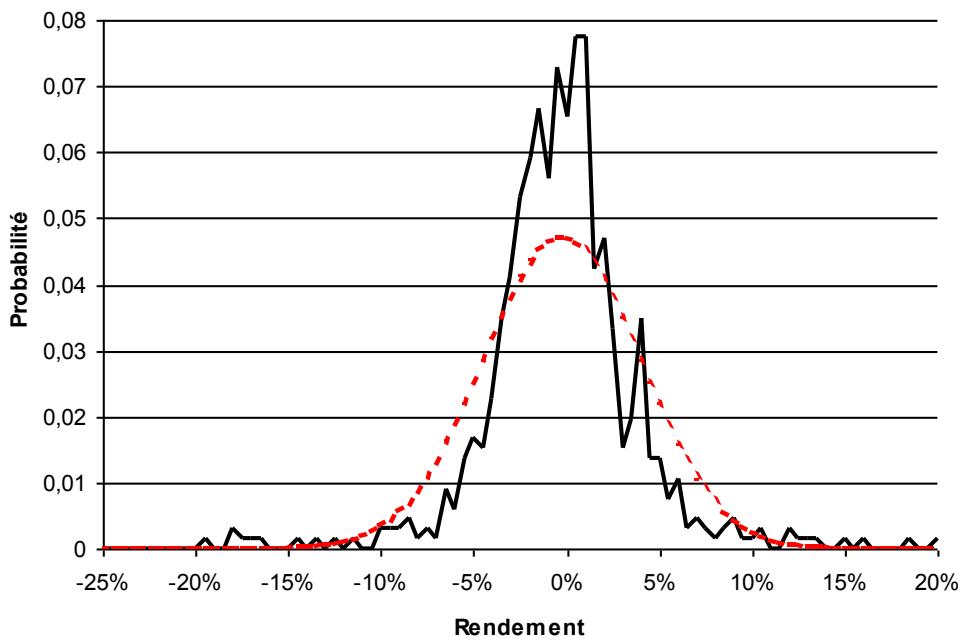
ressources-actuarielles.net

## Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

Fig. 4 : Evolution du rendement quotidien**6.2.1.Statistiques descriptives**

Le cours moyen du titre précédent est de 9,07 €, pour un écart-type de 2,97. Le coefficient de variation vaut 32,70. Le rendement (quotidien) moyen du titre est de 0,000194695, pour un écart-type de 0,042257214 pour la période étudiée.

Le coefficient d'asymétrie du rendement du titre est de 0,527 (à comparer à 0 pour celui d'une loi normale) et le coefficient d'aplatissement de la variable rendement vaut 9,76. Ces premières statistiques sur le rendement nous permettent de penser que l'échantillon ne suit pas une loi normale. Le caractère non gaussien des rendements apparaît d'ailleurs clairement sur le graphe ci-dessous, sur lequel on a représenté la distribution empirique et la distribution gaussienne ajustée par le maximum de vraisemblance :

Fig. 5 : Distribution du rendement

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

### 6.2.2. Ajustement du modèle

Les moments centrés empiriques valent sur cet exemple :

$$\begin{aligned} m &= 0,000194695 & m_2 &= 0,001784135 \\ m_4 &= 4,05434 * 10^{-5} & m_6 &= 2,83631 * 10^{-6} \end{aligned}$$

Les estimateurs de la méthode des moments et ceux du maximum de vraisemblance sont présentés dans le tableau suivant<sup>24</sup> :

	Méthode des moments	Maximum de vraisemblance
$\mu$	0,00067364	0,00060628
$\sigma^2$	0,03095012	0,02785511
$\lambda$	0,99328746	0,89395872
$\sigma_u^2$	0,02884728	0,03173200

(En considérant qu'une année comporte 250 jours ouvrés, le rendement annuel moyen du titre est d'environ 5 % et la variance globale est égale à 45 %).

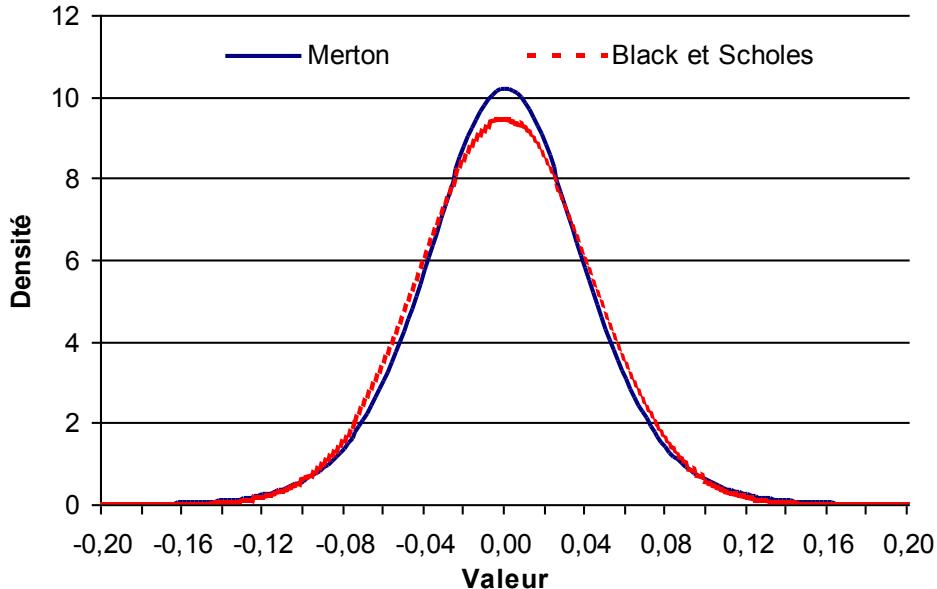
On constate qu'environ 50 % de la variance du rendement est expliquée par la composante à sauts, qui n'est donc pas négligeable. Au surplus, le passage des estimateurs par la méthode des moments aux estimateurs du maximum de vraisemblance augmente ici légèrement le poids de la composante à sauts. En comparant la distribution avec les sauts et la distribution log-normale, on trouve :

---

<sup>24</sup> L'unité utilisée est le jour.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Fig. 6 : Densité des deux modèles de rendement

### 6.2.3. Commentaires

L'analyse statistique se conclut par de faibles p-valeur pour les tests d'adéquation de l'échantillon au modèle proposé. Par conséquent, et comme on pouvait s'y attendre, l'adéquation du modèle aux données est imparfaite.

Toutefois, notre but étant d'améliorer le modèle de Black et Scholes, il nous paraît intéressant de comparer les statistiques du Khi-2 pour le modèle de Merton et pour le modèle de Black et Scholes. Nous constatons que la statistique est dans le cas de Black et Scholes nettement supérieure à celle dans le cas de Merton. Cela corrobore le fait que la part de variance expliquée par la composante à sauts n'est pas négligeable.

### 6.3. Prix d'une option d'achat européenne

Afin d'illustrer sur un cas simplifié l'impact du choix du modèle d'actif sur les résultats obtenus, nous nous intéressons ci-après à la valorisation d'une option d'achat européenne avec d'une part le modèle classique de Black et Scholes et d'autre part le modèle de Merton. Nous évaluons également la probabilité d'exercice de l'option.

Dans le cas du modèle de Merton la mesure martingale n'est plus unique et le marché est donc en situation d'incomplétude. Différentes approches peuvent être retenues pour justifier le choix de la mesure utilisée pour tarifer l'option (voir BALLOTTA [2004] qui détaille ce point). Nous retenons ici la solution initiale de Merton consistant à considérer que le risque associé à la composante à sauts est non systématique (propre au titre) et donc diversifiable : on ne lui associe pas de prime de risque. Cela conduit donc à évaluer simplement l'espérance des flux associés.

On rappelle que dans le modèle de B&S on a pour une volatilité donnée :

$$C(S, K, r, \sigma) = S_0 \times N(d_1) - K \times e^{-rT} \times N(d_2)$$

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

avec :

$$d_1 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r + \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0 / K) + (r - \sigma^2 / 2)T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Dans le cas du modèle de Merton, on obtient une formule fermée en conditionnant par le nombre de sauts du processus de Poisson sur la durée de vie de l'option, ce qui conduit à écrire :

$$C = E^Q \left[ \exp(-rT) \times [S_T - K]^+ \right] = E \left[ E^Q \left[ \exp(-rT) \times [S_T - K]^+ \right] | N_T \right]$$

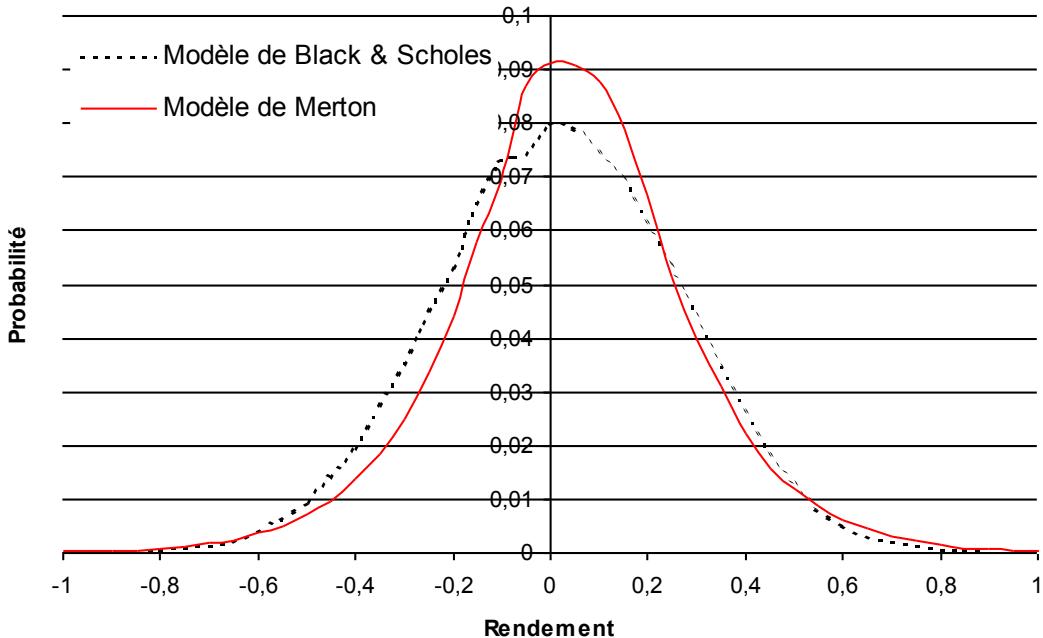
Après quelques calculs, en notant  $S_n = S \times \exp \left( \frac{n\sigma_u^2}{2} - \lambda T \left( \exp \left( \frac{\sigma_u^2}{2} \right) - 1 \right) \right)$  et

$\sigma_n = \sqrt{\sigma^2 + \frac{n\sigma_u^2}{T}}$  on trouve que le prix de l'option est donné par :

$$C = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-\lambda T} \frac{(\lambda T)^n}{n!} C(S_n, K, r, \sigma_n).$$

Afin de réaliser une comparaison entre les deux approches, nous imposons  $\lambda = 1$  et contraignons la variance des rendements dans les deux modèles à être égale, ce qui conduit à imposer  $\sigma_{BS}^2 = \sigma^2 + \lambda\sigma_u^2$ . Avec une espérance de rendement de 8 % (en taux discret), une volatilité globale de 25 % (i. e.  $\sigma_{BS} = 0,25$ ), et une décomposition de la volatilité des rendement avec sauts de  $\sigma = 0,15$  et  $\sigma_U = 0,2$ , on obtient les lois des rendements dans les deux modèles qui ont l'allure suivante :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

Fig. 7 : Densité du rendement

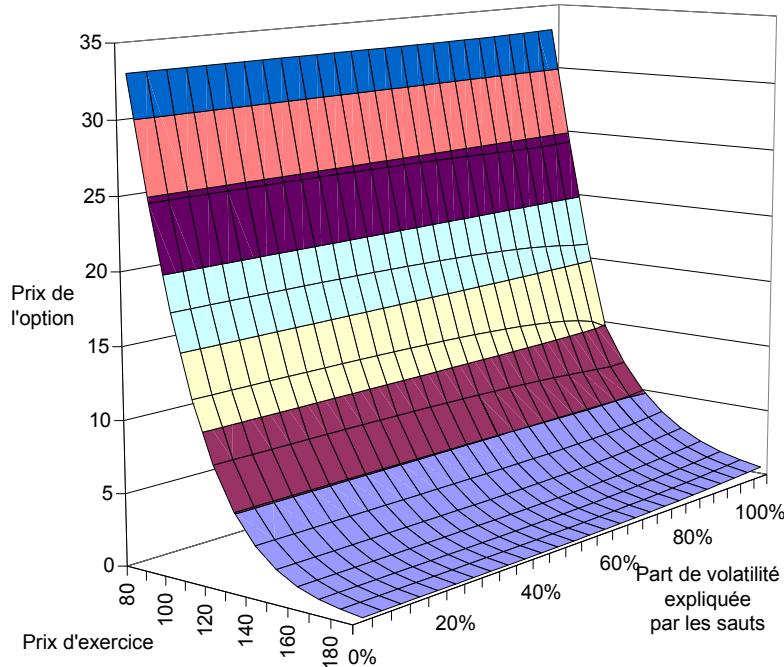
On remarque notamment la queue de distribution plus épaisse obtenue avec le modèle de Merton.

On considère un titre coté 100 à l'origine, le prix d'exercice est égal à 110 et la maturité de l'option est  $T = 1$ .

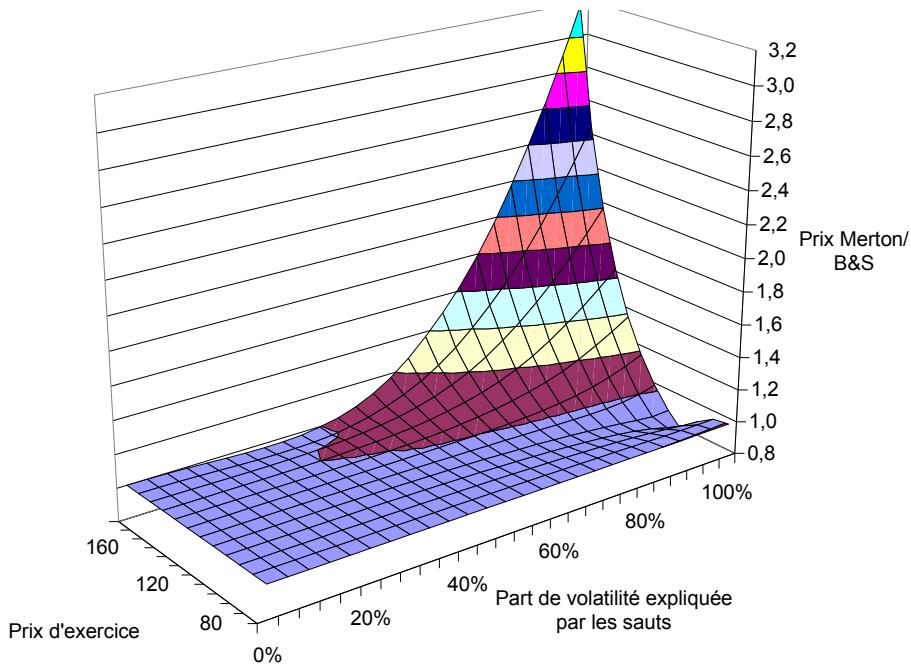
On constate alors que la probabilité d'exercice est quasiment identique dans les deux modèles, égale à 42 % ; le prix de l'option est par contre de 9,15 dans le modèle de Black et Scholes et de seulement 9,76 dans le modèle de Merton. Plus généralement, lorsque l'on fait varier la part de variance associée à la composante à sauts, la probabilité d'exercice reste stable, alors que le prix de l'option varie (et est d'autant plus proche de celui donné par Black et Scholes que la part de volatilité associée aux sauts est faible).

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Fig. 8 : Prix de l'option en fonction du poids des sauts

L'écart par rapport au modèle de Black et Scholes apparaît très variable en fonction des caractéristiques de l'option :

Fig. 9 : Comparaison du prix de l'option dans les modèles de B&S et Merton

On mesure ainsi l'incidence potentielle sur le provisionnement et la tarification des garanties plancher des contrats en unités de compte du choix du modèle d'actif.

#### 6.4. Solvabilité 2 : impact sur le capital cible

Le référentiel de solvabilité européen (Solvabilité 2) impose aux sociétés d'assurance de disposer d'un niveau de fonds propres directement lié aux risques qu'elles supportent. Il

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

s'agit donc pour les sociétés de modéliser tous les risques auxquels elles sont soumises et de calculer par le biais d'une mesure de risque le besoin en capital.

Dans un tel contexte, les modèles d'actifs retenus ont un impact sur l'exigence de fonds propres. En particulier, nous allons voir qu'avec des caractéristiques de rendement similaires, modéliser les cours par un brownien géométrique ou par le modèle de Merton a des conséquences importantes sur le capital cible.

Pour illustrer cela, nous reprenons le modèle de DEELSTRA et JANSSEN [1998] qui proposent de modéliser une société d'assurance de manière agrégée par deux processus : un pour l'actif  $(A_t)_{t \geq 0}$  et un autre pour le passif  $(L_t)_{t \geq 0}$ . Dans certains cas, par exemple lorsque ces deux processus sont des mouvements browniens géométriques, cette modélisation permet d'obtenir des résultats explicites concernant les probabilités de ruine de la société. Dans ce modèle, la richesse de la société à la date  $t$  est égale à  $A_t - L_t$  et la société est en ruine à cette date si cette richesse est négative.

Pour illustrer l'impact de la prise en compte des sauts, nous allons modéliser le passif par un mouvement brownien géométrique :

$$L_t = L_0 \exp \left\{ \left( \mu_L - \frac{\sigma_L^2}{2} \right) t + \sigma_L B_t^L \right\},$$

et allons successivement étudier les situations où le processus d'actif intègre ou pas des sauts.

#### 6.4.1. Absence de sauts

Dans cette situation, on se trouve dans la situation standard de Black et Scholes où l'actif évolue selon le processus A :

$$A_t = A_0 \exp \left\{ \left( \mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A B_t^A \right\}.$$

Intéressons-nous dans un premier temps à la ruine à l'instant  $T$ . La société est en ruine en  $T$  si sa richesse est négative ou, de manière équivalente, si

$$a_t = \ln \frac{A_t}{L_t} < 0.$$

Dans notre situation (absence de saut), le processus d'adéquation actif-passif  $a_t$  est un mouvement brownien avec dérive ; en effet :

$$a_t = a_0 + \left( \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \sigma_A B_t^A - \sigma_L B_t^L.$$

En faisant l'hypothèse courante, en assurance non-vie notamment, que les mouvements browniens  $B^A$  et  $B^L$  sont indépendants, on peut écrire :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

$$a_t = a_0 + \left( \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t.$$

De cette expression, vient le calcul de la probabilité d'être en ruine en t :

$$\Pr[a_t < 0] = \Pr\left[a_0 + \left( \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t < 0\right].$$

Comme à la date t,  $B_t \sim N(0, \sqrt{t})$ , il vient :

$$\Pr[a_t < 0] = \Phi\left[\frac{-a_0}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}} \frac{1}{\sqrt{t}} - \frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}} \sqrt{t}\right].$$

Les « bonnes propriétés » du mouvement brownien font que l'on dispose d'une formule explicite de la probabilité d'être en ruine entre 0 et t. En effet, en remarquant que

$$\Pr[\exists s \in [0, t] | a_s < 0] = \Pr\left[\inf_{0 \leq s \leq t} a_s < 0\right] = \Pr\left[\sup_{0 \leq s \leq t} -a_s > 0\right],$$

il est possible d'utiliser la relation suivante démontrée dans REVUZ et YOR [1999] :

$$\Pr\left[\sup_{0 \leq s \leq t} (B_s - \beta s) > \alpha\right] = \begin{cases} 1 - \Phi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{t}} + \beta\sqrt{t}\right) + e^{-2\beta\alpha} \Phi\left(\beta\sqrt{t} - \frac{\alpha}{\sqrt{t}}\right) & \text{pour } \alpha > 0 \\ 1 & \text{pour } \alpha \leq 0. \end{cases}$$

Dans notre cas,  $\alpha = \frac{a_0}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}}$  et  $\beta = \frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}}$ . En supposant que la richesse initiale est strictement positive soit  $A_0 > L_0$  (le cas contraire correspondant à la ruine en 0), il vient donc

$$\begin{aligned} \Pr\left[\inf_{0 \leq s \leq t} a_s < 0\right] &= 1 - \Phi\left(\frac{a_0}{\sqrt{(\sigma_A^2 + \sigma_L^2)t}} + \frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}} \sqrt{t}\right) \\ &\quad + e^{-2\frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} a_0} \Phi\left(\frac{\mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2}}{\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}} \sqrt{t} - \frac{a_0}{\sqrt{(\sigma_A^2 + \sigma_L^2)t}}\right) \end{aligned}$$

#### 6.4.2. Prise en compte des sauts

À présent nous allons voir l'impact de la prise en compte des sauts sur le niveau de la probabilité de ruine. L'actif est maintenant modélisé par le processus suivant :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

$$A_t = A_0 \exp \left\{ \left( \mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2} \right) t + \sigma_A B_t^A + \sum_{k=1}^{N_t} U_k \right\}.$$

où  $N$  est un processus de Poisson d'intensité  $\lambda$  et où les variables aléatoires  $U_1, U_2, \dots$  sont mutuellement indépendantes et distribuées selon une loi  $N(0, \sigma_U^2)$ .

En supposant toujours l'indépendance entre le risque du passif modélisé par  $B^L$  et les risques d'actif modélisés par les processus  $N, B^A$  et la suite  $U_1, U_2, \dots$ , le processus d'adéquation actif-passif a la forme :

$$a_t = a_0 + \left( \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t + \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k.$$

La probabilité de ruine à la date  $t$  est :

$$\Pr[a_t < 0] = \Pr \left[ \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t + \sum_{k=1}^{N_t} U_k < -a_0 - \left( \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t \right],$$

dont une expression est donnée par la proposition suivante :

**Proposition 1:** Lorsque  $N, B^A, B^L$  et  $U$  sont mutuellement indépendants, on a :

$$\Pr[a_t < 0] = \sum_{n=0}^{+\infty} \Phi \left( -\frac{a_0 + \mu_a t}{\sqrt{\sigma_a^2 t + n \sigma_U^2}} \right) e^{-\lambda t} \frac{(\lambda t)^n}{n!}, \text{ où } \mu_a = \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \text{ et } \sigma_a = \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2}.$$

**Démonstration :** Le résultat provient de l'application du théorème des probabilités totales :

$$\Pr[a_t < 0] = \sum_{n=0}^{+\infty} \Pr \left[ \sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t + \sum_{k=1}^n U_k < -a_0 - \left( \mu_A - \mu_L - \frac{\sigma_A^2 - \sigma_L^2}{2} \right) t \right] \Pr[N_t = n], \quad \text{en}$$

remarquant que  $\sqrt{\sigma_A^2 + \sigma_L^2} B_t + \sum_{k=1}^n U_k \sim N(0, \sqrt{(\sigma_A^2 + \sigma_L^2)t + n\sigma_U^2})$ .  $\square$

La probabilité d'avoir été en ruine sur l'intervalle  $[0, t]$  n'a pas d'expression explicite, et doit être évaluée numériquement. En pratique, on pourra utiliser des méthodes de simulation pour estimer cette quantité.

#### 6.4.3. Application numérique

Dans un contexte de type Solvabilité 2, une société d'assurance devra disposer d'un niveau de fonds propres (le capital cible) qui contrôle le risque global de la société à un horizon prédéterminé. Considérons ici que la mesure du risque global de la société est la probabilité de ruine qu'il s'agit de contrôler à horizon 1 an avec une probabilité de 1 %.

Nous avons supposé qu'au bout d'une année, la société devait avoir un actif assez important pour venir en contrepartie d'un passif qui vaudra, de manière certaine, 100. L'assureur dispose en o de ce même montant en provisions, il s'agit donc de déterminer le montant du capital cible  $\gamma$  tel que :

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

$$\Pr \left[ (100 + \gamma) \exp \left\{ \mu - \frac{\sigma^2}{2} + \sigma B_1 + \sum_{k=1}^{N_1} U_k \right\} \leq 100 \right] \leq 0,01.$$

Par ailleurs, nous avons utilisé les paramètres suivants :

$$\mu = \ln 1,08 \quad \lambda = 1,5 \quad \sigma^2 + \lambda \sigma_U^2 = 0,16,$$

Le rendement discret du titre est donc de 8 %, il y a en moyenne 1,5 sauts par an et l'écart-type du rendement est égal à 40 %. Nous nous intéressons à la variation du capital cible en fonction de la part de la variance expliquée par la composante à sauts ( $\alpha$  avec les notations introduites supra).

Selon que le risque est modélisé uniquement par la composante à sauts ( $\alpha = 1$ ) ou uniquement par le mouvement brownien ( $\alpha = 0$ ), les distributions du cours du titre en 1 sont très différentes (pour un prix d'achat de 100 en 0) comme le montre le graphique suivant.

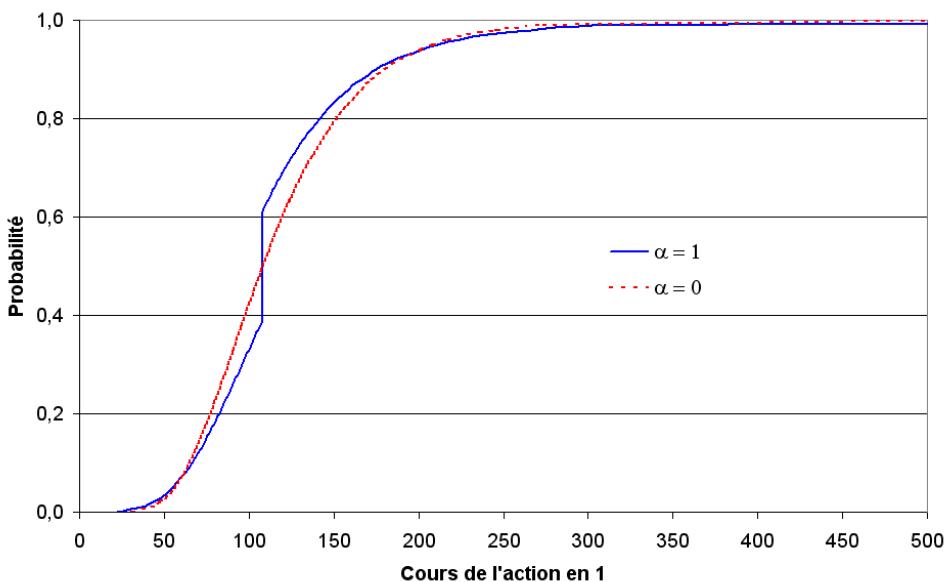
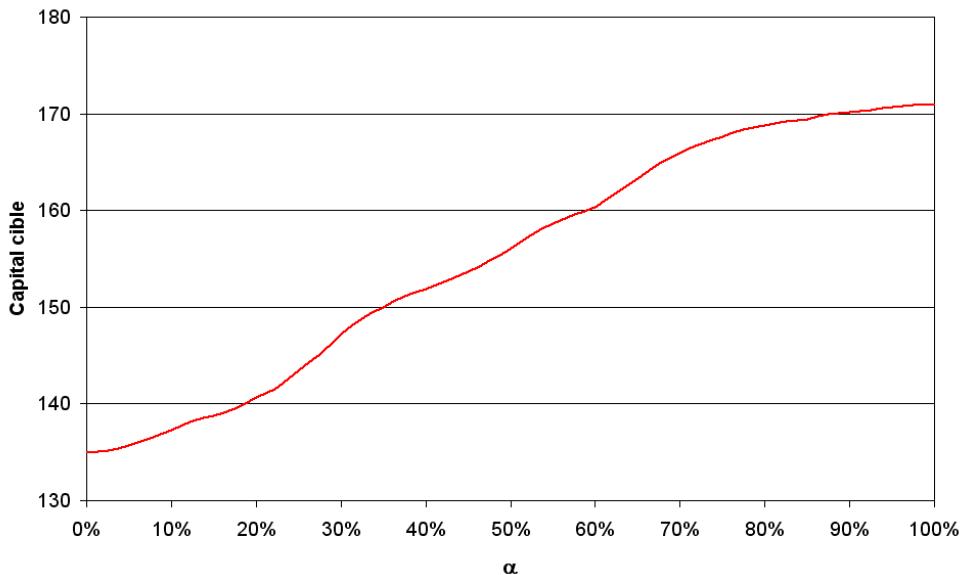


Fig. 10 : Distributions du cours de l'action en 1 pour  $\alpha = 1$  et  $\alpha = 0$

Lorsque toute la variabilité est représentée par les sauts, on remarque qu'une partie de la courbe est plate. Cette partie de la fonction de répartition correspond à la probabilité qu'il n'y ait pas de saut  $\Pr[N_1 = 0] = e^{-\lambda} \approx 0,22$  auquel cas le rendement est de 8 %. Le graphique suivant nous indique le montant du capital cible en fonction de la part de la variabilité représentée par la composante brownienne. Rappelons que nous travaillons à variance du rendement constante et que la variabilité qui n'est pas représenté par le brownien l'est par la composante à sauts.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Fig. 11 : Niveau du capital cible  $\gamma$  en fonction de  $\alpha$ 

Il ressort de cette illustration, que l'utilisation d'un modèle de type Black et Scholes conduit à sous-estimer le niveau du capital cible dans une proportion qui peut être importante. Ainsi si la moitié de la variabilité globale est expliquée par les sauts, le capital cible issu du modèle de Black et Scholes sous-estime de 13,5 % le vrai besoin en capital.

## 7. Références

- ANDREATTA G., CORRADIN S. [2003] "Fair Value of Life Liabilities with Embedded Options : an Application to a Portfolio of Italian Insurance Policies", AFIR Colloquium.
- AUGROS J. C., MORENO M. [2002] *Les dérivés financiers et d'assurance*, Economica.
- BACINELLO A.R. [2001] "Fair pricing of life insurance participating policies with a minimum interest rate guaranteed", ASTIN Bulletin, 31 (2), pp. 275-297.
- BACINELLO A.R. [2001] "Fair valuation of the surrender option embedded in a guaranteed life insurance participating policy", papier de recherche, Università degli Studi di Trieste.
- BACINELLO A.R. [2002] "Pricing guaranteed life insurance participating policies with periodical premiums and surrender option", papier de recherche, Università degli Studi di Trieste.
- BERNARD P. [2000] *La décision dans l'incertain: préférences, utilité et probabilités*, EURISCO, Support de cours.
- BERNSTEIN P. [1996] *Against the Gods: The Remarkable Story of Risk*, New York : John Wiley & Sons.
- BLACK F., SCHOLES M. [1973] "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", Journal of Political Economy, 81 (3), pp. 637-654.
- BOUWKNEGT P., PELSSER A. [2001] "Market Value of Insurance Contracts with Profit Sharing", AFIR Colloquium.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t;\infty]}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

BRENNAN M.J., SCHWARTZ E.S. [1976] "The Pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee", *Journal of Financial Economics*, 3, pp. 195-213.

DE FELICE M., MORICONI F., "A course on Finance of Insurance", Groupe Consultatif Actuarial Européen, vol. 1, 2002.

DEMERLÉ E., FÉLIX J.P [2003] « [Méthodes d'évaluation des options contenues dans les contrats d'épargne en euros](#) », séminaire scientifique de l'Institut des Actuaires.

DEVOLDER P. [2001] « [Les univers virtuels de la finance](#) », *Belgian Actuarial Bulletin*, Vol. n°1.

DOUARD H. [2000] "Normes IAS : Une nouvelle donne comptable pour les sociétés européennes cotées, un enjeu pour les actuaires", *Bulletin Français d'Actuariat*, 4 (8), pp.141-151.

DUPIN G., MONFORT A., VERLE J.P. [2003] "[Robust Inference in Rating Models](#)", ASTIN Colloquium.

EL FAOUI N.E.; MAURIN M. [2006] « [Sur la loi de la somme de variables log-normales : application à la fiabilité de temps de parcours routiers](#) », INREST, Working Paper.

FARGEON L., NISSAN K. [2003] "Recherche d'un modèle actuariel d'analyse dynamique de la solvabilité d'un portefeuille de rentes viagères", rapport d'un groupe de travail ENSAE.

FFSA, *L'assurance française en 2002*, rapport annuel, juin 2003.

GEMAN H., EL KARoui N., ROCHEt J.C. [1995] "Changes of numeraire, changes of probability measures and pricing options", *Journal of Applied Probability*, pp. 433-458.

GIET L. [2003] « [Estimation par inférence indirecte des équations de diffusion : l'impact du choix du procédé de discréétisation](#) », papier de recherche, GREQAM-CNRS.

GROSEN A., JORGENSEN P.L. [2000] "Fair valuation of life insurance liabilities: The impact of interest rate guarantees, surrender options and bonus policies", *Insurance: Mathematics and Economics*, 26, pp. 37-57.

HANSEN M. [2002] "[Applying Financial Economics to Life and Pension Insurance](#)", thèse, University of Southern Denmark.

HARRISON J.M., KREPS D. [1979] "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory*, 20.

HARRISON J.M., PLISKA S. [1981] "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and their Applications*, 11.

HULL J.C. [1999] Options, Futures & Other Derivatives, 4<sup>ème</sup> édition, Prentice-Hall.

KARATZAS I., SHREVE S.E. [1988] Brownian motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag.

LAMBERTON D., LAPEYRE B. [1997] *Introduction au calcul stochastique appliquée à la finance*, 2<sup>nde</sup> édition, ellipses.

MERLUS S., PEQUEUX O. [2000] « [Les garanties plancher des contrats d'assurance-vie en unités de compte: tarification et couverture](#) », mémoire d'actuaire, ENSAE.

PETAUTON P., Théorie et pratique de l'assurance vie, Dunod, 1991.

$$\Lambda_x = \sum_{t=1}^{\infty} \frac{1}{(1+i)^t} I_{[t; \infty[}(T_x)$$

ressources-actuarielles.net

Modèles financiers et analyses de risque dynamiques

PLANCHET F. [2006] « [Le risque neutre](#) », la Tribune de l'Assurance (rubrique « le mot de l'actuaire »), n°107 du 04/12/2006.

PLANCHET F., JACQUEMIN J. [2003] « L'utilisation de méthodes de simulation en assurances », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 6, n°11, 3-69.

PLANCHET F., THÉRONDE P.E. [2005] « L'impact de la prise en compte des sauts boursiers dans les problématiques d'assurance », *Proceedings of the 15<sup>th</sup> AFIR Colloquium*.

PLANCHET F., THÉRONDE P.E., JUILARD M. [2011] *Modèles financiers en assurance. Analyses de risques dynamiques* – seconde édition, Paris : Economica.

PRUDENT C. [1996] « [La clause de rachat anticipé évaluée comme une option](#) », séminaire FFSA.

QUITTARD-PINON F. [2002] *Mathématiques financières*, Paris : EMS.

SAPORTA G., *Probabilités, analyse des données et statistique*, Technip, 1990.