

CATALOGUE

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

QCM

← Codez votre numéro d'étudiant ci-contre en noircissant (ne pas entourer ni cocher) au stylo l'intérieur des cases correspondantes (ligne 1 ⇔ 1 chiffre, etc), et écrivez vos nom et prénom ci-dessous.

Nom et prénom :

.....

M1 ISFA - Analyse de données et Clustering

Examen du 9/01/2017

Documents de cours et TD autorisés

Durée 3h

Toutes les feuilles sont à rendre en fin d'épreuve.

Les questions faisant apparaître le symbole ☺ peuvent présenter une ou plusieurs bonnes réponses.
Les autres ont une unique bonne réponse.

Dans tout ce support, le seuil de rejet de l'hypothèse d'indépendance est fixé à 5%.

Exercice

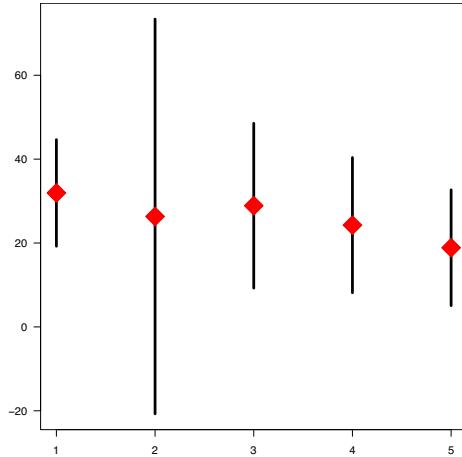
Nous étudions la qualité de l'air à la station permanente de Lyon Centre située rue du Lac dans le troisième arrondissement. Les données ont été prélevées au cours du premier semestre universitaire (du 12 septembre au 17 décembre 2016). Elles sont toutes exprimées en $\mu\text{g}/\text{m}^3$:

1. le dioxyde d'azote (NO_2),
2. le monoxyde d'azote (NO),
3. l'ozone (O_3),
4. les particules en suspension dans l'air dont le diamètre est inférieur à 10 micromètres (PM_{10}),
5. les particules fines, particules en suspension dans l'air dont le diamètre est inférieur à 2,5 micromètres ($\text{PM}_{2.5}$).

```
library(ade4)
lyonc <- read.table("Lyon2016c.txt", h=TRUE)
head(lyonc)
  Date  NO2   NO   O3   PM10   PM2.5     Jour     Mois
1 13/09/16   22    1  95   38     20     mardi  septembre
2 14/09/16   38    3  71   39     24    mercredi  septembre
3 15/09/16   25    4  56   11      8     jeudi  septembre
4 16/09/16   35    7  35   10      8    vendredi  septembre
5 17/09/16   13    1  34     8      6    samedi  septembre
6 18/09/16   12    1  28     5      4   dimanche  septembre
dim(lyonc)
[1] 88 8
```

Nous représentons sur la figure 1 les variables par leur moyenne (\pm deux écarts-types).

CATALOGUE

FIGURE 1 – Moyennes (± 2 écarts-types)

Question [pol11a] En vous aidant de la représentation graphique de la figure 1, expliquez en quoi il est plus judicieux de réaliser une analyse en composantes principales normée qu'une analyse en composantes principales centrée.

 F P A B

La réduction permet d'assurer une comparaison entre les variables en donnant une importance identique à chaque variable. Les données étant dispersées, on préfère alors une ACP normée. Dans la mesure où celles-ci sont centrées et réduites, leurs poids sont comparables.

Question [pol11b] Proposez un code permettant de réaliser une ACP sur les variables centrées et réduites. Les résultats seront renvoyés dans une variable NR.

 F P A B

```
NR <- dudi.pca(lyonc[, 2:6], center=TRUE, scale=TRUE, scannf=FALSE, nf=2)
```

Question [pol11c] Qu'est-ce que l'inertie totale ? Combien vaut-elle dans l'analyse précédente ?

 F P A B

L'inertie totale d'un jeu de donnée correspond à l'information (ou la variance) qu'il contient.

ou

L'inertie mesure la dispersion totale du nuage de points.

ou

L'inertie est égale à la somme des variances des variables étudiées.

Dans l'analyse précédente (ACP normée) les variables sont centrées réduites. Dans ce cas, la variance de chaque variable vaut 1. Ainsi, l'inertie totale est égale au nombre de variable. Ici, I=5.

Les pourcentages d'inertie conservée sur chacun des deux premiers axes valent respectivement 73,27% et 13,57%.

CATALOGUE

Question [pol11d] A partir de quelles informations sont-ils calculés ?

F P A B

A partir des valeurs propres.

Les valeurs propres nous renseignent sur la fraction d'inertie totale prise en compte par chaque axe.

Question [pol11e] Proposez un code permettant d'afficher ces deux pourcentages (selon le même format, i.e. la valeur arrondie à deux chiffres après la virgule).

F P A B

```
pve <- 100 * NR$eig / sum(NR$eig)
round(pve, 2)    73,27   13,57
```

Question [pol11f] Calculez la valeur de l'inertie conservée dans le premier plan factoriel et encodez sa valeur tronquée à la deuxième décimale après la virgule :

0	1	2	3	■	5	6	7	8	9
.									
0	1	2	■	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	■	5	6	7	8	9

Le 1er plan factoriel est formé par les 2 premiers axes contenant le maximum d'inertie : 73,27% et 13,57% .

Ici, le 1 plan factoriel contient $73,27 + 13,57 = 86,84\%$ inertie totale.
La valeur d'inertie conservée dans le 1er plans factoriel est égale :
Inertie totale * Inertie contenu dans le 1 plan factoriel.

Ici : $Ip = 5 * 0,8684 = 4,342$

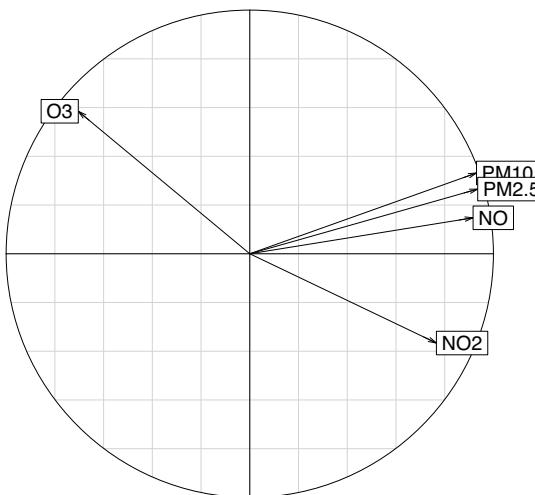


FIGURE 2 – Cercle des corrélations - Axes 1 & 2

CATALOGUE

Question [pol11g] ☺ Parmi les propositions suivantes, cochez celles qui sont vraies :

- L'ozone est inversement corrélée aux autres variables sur l'axe 1.
- L'ozone intervient dans l'interprétation des deux axes.
- L'axe 1 définit un axe de pollution : de la moins élevée (à gauche) à la plus élevée (à droite).
- D L'axe 1 est caractérisé par un effet taille.
- E Le monoxyde d'azote est corrélé à l'axe 2.
- F L'axe 2 est caractérisé par le monoxyde d'azote et les particules fines.
- G Aucune de ces réponses n'est correcte.

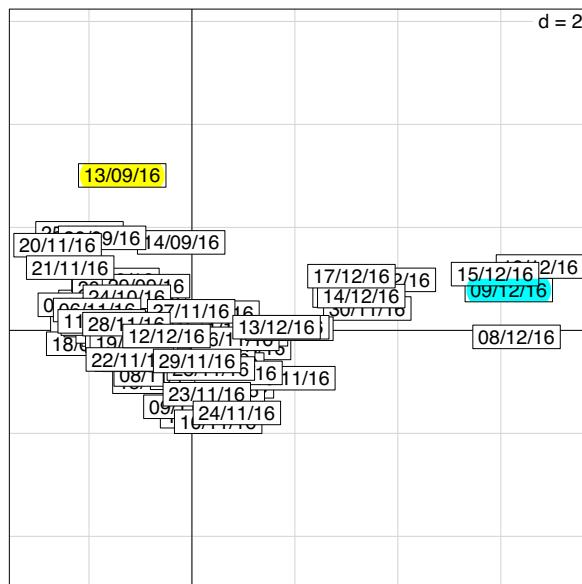


FIGURE 3 – Représentation de la carte factorielle des jours concernés par l'étude

Question [pol11h] En se basant sur la figure 3 et les résultats précédents, expliquez ce qu'il s'est passé le **13 septembre 2016**?

F P A B

L'axe 1 est un axe niveau de pollution. Le 13 est situé sur la partie négative de cet axe. Donc, le 13 septembre 2016 était un jour marqué par un faible niveau de pollution.

CATALOGUE

Question [pol11i] Le préfet du Rhône a imposé la circulation alternée le 9 décembre. Si l'analyse le permet, explicitez les raisons de sa décision.

F P A B

L'axe 1 est un axe niveau de pollution. Le 9 a de très grandes valeurs pour l'axe 1. Ainsi, le 9 décembre 2016 était un jour marqué par un niveau élevé de pollution avec un fort niveau de particules en suspension dans l'air. La décision du préfet semble judicieuse.

Nous souhaitons déterminer s'il existe un lien entre la première composante principale et les jours de la semaine (resp. les mois).

À partir des valeurs de la première composante principale, six classes sont formées, notées C1 (valeurs les plus basses) à C6 (valeurs les plus hautes). En associant chaque individu à la classe à laquelle correspond sa valeur pour la première composante principale, nous formons une variable qualitative notée CP1Qual.

Nous nous intéressons dans un premier temps à l'existence de dépendance entre CP1Qual et les jours de la semaine. Pour cela, nous utilisons la fonction `chisq.test` qui renvoie la valeur 38,95 pour la distance du χ^2 .

Question [pol11j] Pouvons-nous rejeter l'hypothèse d'indépendance ?

non B oui

Question [pol11k] Selon le seuil de rejet fixé et l'annexe fournie, quelle est la plus petite valeur du χ^2 qui permettrait de rejeter l'hypothèse d'indépendance ?

<input checked="" type="checkbox"/>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	<input checked="" type="checkbox"/>	5	6	7	8	9
0	1	2	<input checked="" type="checkbox"/>	4	5	6	7	8	9
.									
0	1	2	3	4	5	6	<input checked="" type="checkbox"/>	8	9
0	1	2	3	4	5	6	<input checked="" type="checkbox"/>	8	9

Recherche de lien :

- 1ère composante principale : On forme 6 classes à partir de la 1ere composante principale, ainsi on obtient 6 variables (en colonne).

- Jours de la semaine : 7 lignes

>ddl = (I-1)*(J-1) = (7-1)*(6-1) = 30

>Chi2 à 5% donc : 1-P= 0,95

>Par lecture de table : 43,77

Nous nous intéressons à présent à l'existence de dépendance entre CP1Qual et le mois de la mesure. Cette fois, nous utilisons la fonction `dudi.coa` qui renvoie une inertie totale de 0,7086003.

Question [pol11l] Calculez la distance du χ^2 correspondante et encodez sa valeur tronquée à la deuxième décimale après la virgule :

<input checked="" type="checkbox"/>	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	5	<input checked="" type="checkbox"/>	7	8	9
0	1	<input checked="" type="checkbox"/>	3	4	5	6	7	8	9
.									
0	1	2	<input checked="" type="checkbox"/>	4	5	6	7	8	9
0	1	2	3	4	<input checked="" type="checkbox"/>	6	7	8	9

Inertie totale = Khi2 / n

Ainsi : Khi2=0,7086003 * 88 =62,356

I = 4 car 4 mois

ddl = (I-1)*(J-1) = (4-1)*(6-1) = 15

Chi2 à 5% = 25

Khi2 > Chi2, RHO.

CATALOGUE

Question [poll1m] Pouvons-nous rejeter l'hypothèse d'indépendance ?

non oui

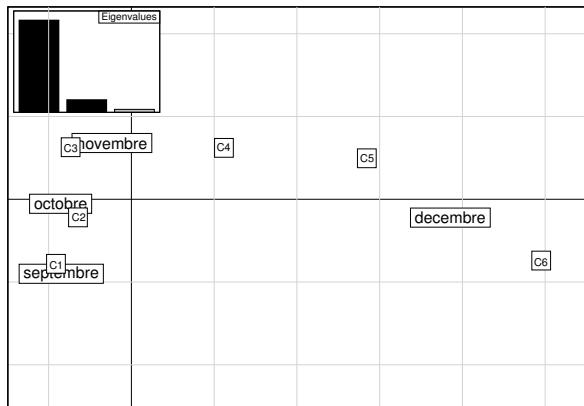


FIGURE 4 – Projection des modalités dans le premier plan factoriel

Question [poll1n] Interprétez la figure 4.

F P A B

L'axe 1 est un axe niveau de valeur de la CP1 (valeurs faibles à élevées). Les mois de septembre, octobre et novembre semblent avoir des valeurs plutôt faibles contrairement au mois de décembre dont les valeurs sont élevées.

Exercice

Nous étudions la qualité de l'air à la station permanente de Vaulx-en-Velin située rue Maurice Audin à l'ENTPE. Les données ont été prélevées au cours du premier semestre universitaire (du 12 septembre au 17 décembre 2016). Seuls les jours où les données étaient complètes ont été conservées. Elles sont toutes exprimées en $\mu\text{g}/\text{m}^3$:

1. le dioxyde d'azote (NO_2),
2. le monoxyde d'azote (NO),
3. l'ozone (O_3),
4. les particules en suspension dans l'air dont le diamètre est inférieur à 10 micromètres (PM_{10}),
5. les particules fines, particules en suspension dans l'air dont le diamètre est inférieur à 2,5 micromètres ($\text{PM}_{2.5}$).

```
library(ade4)
Vaulxc <- read.table("Vaulxc.txt", h=TRUE)
head(Vaulxc)
```

CATALOGUE

Question [poll1m] Pouvons-nous rejeter l'hypothèse d'indépendance ?

- non oui

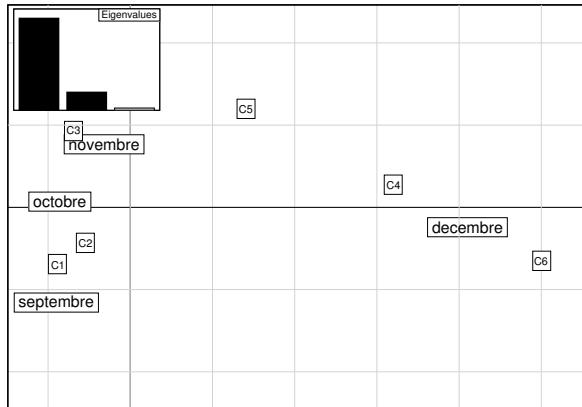


FIGURE 8 – Projection des modalités dans le premier plan factoriel

Question [poll1n] Interprétez la figure 8.

- F P A B

Exercice

Nous considérons un groupe de neuf individus, notés e_1 à e_9 , dont les données sont fournies par la table 1. Nous souhaitons réaliser une classification ascendante hiérarchique basée sur la distance de Tchebychev et le saut minimal.

	V_1	V_2	V_3
e_1	7	4.5	3
e_2	9	1.5	3.5
e_3	4.5	9	8
e_4	5.5	6	3.5
e_5	9.5	3	2.5
e_6	5.5	9.5	8.5
e_7	10	0.5	3.5
e_8	6.5	3.5	3
e_9	9.5	1.5	4

TABLE 1 – Valeurs des individus

CATALOGUE

Question [cha-1-1] ☺ Notons d_∞ la distance de Tchebychev, d_{Man} la distance de Manhattan et d^2 le carré de la distance euclidienne standard. Cochez toutes les propositions vraies :

- A $d_\infty(e_2, e_3) = 7,5$ B $d_\infty(e_2, e_4) = 8$ C $d_{\text{Man}}(e_7, e_8) = 7$
 D $d_{\text{Man}}(e_6, e_3) = 2$ E $d^2(e_2, e_7) = 2$ F $d^2(e_8, e_9) = 14$
 G *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question [cha-1-2] Reportez dans la table 2 les distances de e_8 à tous les autres points. Faites de même pour e_9 .

F P A M N L

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_8	1.12	3.24	7.70	2.74	3.08	8.20	4.64	
e_9	4.03	0.71	9.86	6.04	2.12	10.01	1.22	3.74

TABLE 2 – Tableau des distances

Question [cha-1-3] Nous nous plaçons dans le contexte du logiciel R. Supposons que les données soient contenues dans le dataframe C :

```
> head(C, n=2L)
. V1 V2 V3
1 7 4.5 3.0
2 9 1.5 3.5
```

Proposez un ensemble de commandes permettant de placer dans une variable D la matrice des distances de Tchebychev entre les individus de C, de construire et d'afficher le dendrogramme permettant de représenter la CAH à partir de D selon la stratégie indiquée ci-dessus : F P A B

```
X = matrix( c(7, 4.5, 3, 9, 1.5, 3.5), ncol = 3, byrow = T)
colnames(X) = c("V1", "V2", "V3")
```

ou

```
X = head(C, n=2L)

D = dist(X, method= "maximum")
# method = c( "euclidean", "maximum", "manhattan", "canberra", "binary" or "minkowski")

plot( hclust(D, "single") )
```

Question [cha-1-4] Reportez dans la table 3 les valeurs de l'ultramétrique correspondant à la CAH construite. Pour accélérer vos calculs, vous pourrez vous aider du dendrogramme de la figure 9.

F P A M N L

Exercice

Nous considérons un groupe de neuf individus, notés e_1 à e_9 , dont les données sont fournies par la table 4. Nous souhaitons réaliser une classification ascendante hiérarchique basée sur la distance de Tchebychev et le saut minimal.

CATALOGUE

	e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
e_2	4							
e_3	5	5						
e_4	3	4	5					
e_5	4	3	5	4				
e_6	5	5	2	5	5			
e_7	4	2	5	4	3	5		
e_8	2	4	5	3	4	5	4	
e_9	4	1	5	4	3	5	2	4

TABLE 3 – Ultramétrique associée

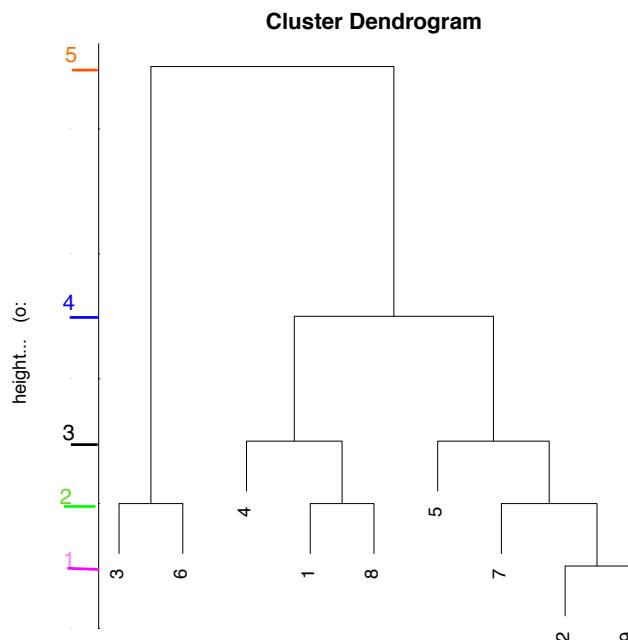


FIGURE 9 – Dendrogramme

	V_1	V_2	V_3
e_1	9	2.5	11.5
e_2	1.5	9	5.5
e_3	0.5	2	4.5
e_4	1.5	0	3.5
e_5	11	5	12.5
e_6	-1.5	1.5	3.5
e_7	2	9	4.5
e_8	11	4.5	10.5
e_9	9	5	11.5

TABLE 4 – Valeurs des individus

Question [cha-2-1] ☺ Notons d_∞ la distance de Tchebychev, d_{Man} la distance de Manhattan et d^2 le carré de la distance euclidienne standard. Cochez toutes les propositions vraies :

- [A] $d_\infty(e_2, e_3) = 7$ [B] $d_\infty(e_2, e_4) = 8$ [C] $d_{\text{Man}}(e_7, e_5) = 21$
 [D] $d_{\text{Man}}(e_6, e_3) = 3$ [E] $d^2(e_2, e_3) = 51$ [F] $d^2(e_7, e_9) = 113$
 [G] Aucune de ces réponses n'est correcte.

CATALOGUE

Cluster Dendrogram

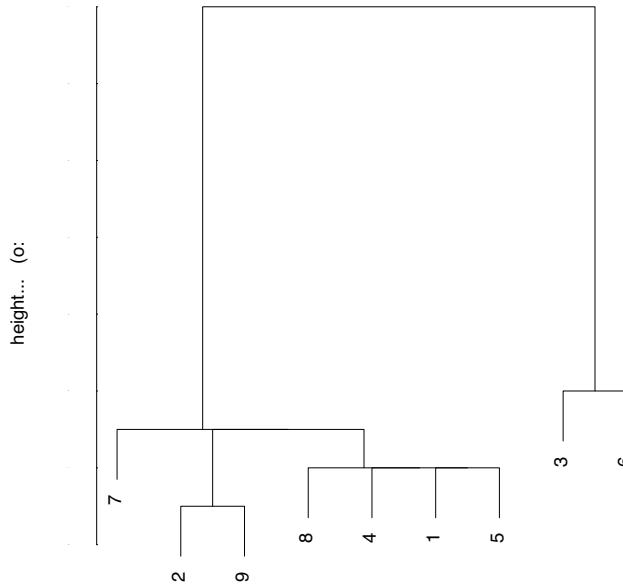


FIGURE 14 – Dendrogramme

Question [theo1] Explicitez deux critères pouvant être mobilisés afin de justifier le choix d'un nombre de classes lors d'une classification ascendante hiérarchique.

F P A B

Critère du coude

Une approche simple consiste à appliquer le critère du coude aux hauteurs découlant du dendrogramme et servant à construire l'ultramétrique. Considérant ces valeurs énumérées en ordre décroissant, on recherche un coude sur une représentation graphique de ces valeurs. On s'arrête au 1^{er} point d'inflexion.

R² ou coefficient de corrélation multiple

Il est fréquent de calculer le ratio de l'inertie interclasse sur l'inertie totale pour juger de la qualité d'une partition. Cette grandeur devrait être idéalement proche de 1 tout en correspondant à une partition moins fine que la partition discrète.

CATALOGUE

Question [theo2] Explicitez deux critères pouvant être employés pour justifier le choix du nombre d'axes retenus lors d'une analyse factorielle.

F P A B

→ Si **NRHO** (Non rejet hypothèse d'indépendance : les 2 variables sont indépendantes) : Méthodes de l'ACP

Critère de Kaiser : on ne garde que les axes qui ont des valeurs propres supérieur à la valeur propre moyenne.

OU

Critère du coude ou d'inflexion : sur l'histogramme des valeurs propres, on observe un décrochement (coude) suivi d'une décroissance régulière. On sélectionne les axes avant le décrochement.

→ Si **RHO** (Les 2 variables sont liées) : Test d'indépendance des axes. On grade les **p-valueAXE < α** :

Avec : α = seuil de significativité fixé et $p\text{-value} = \text{pchisq}()$

```
pchisq(AFC$eig*sum(X), df=(I-1)*(J-1), lower.tail = FALSE)
```

Question [theo3] De quelle limite souffre la classification ascendante hiérarchique ? Décrivez une contre-mesure à cette limitation ?

F P A B

La classification ascendante hiérarchique fait intervenir des calculs qui peuvent nécessiter, dans leurs implémentations naïves, jusqu'à un facteur cubique du nombre d'observations. La complexité en temps calculatoire de cette méthode n'est pas très bonne et la fonction `hclust` n'est pas adaptée pour traiter des volumes de données importants.

Question [theo4] Quelles réserves doivent accompagner les résultats d'une classification obtenue à l'issue d'une procédure de type k-means ?

F P A B

CATALOGUE

Question [theo5] Décrivez une procédure permettant d'exploiter à la fois des variables quantitatives et des variables qualitatives sur une population, et cela dans un objectif de classification.

F P A B

L'Analyse Factorielle des Données Mixtes (AFDM) est une méthode destinée à analyser un jeu de données contenant à la fois des variables quantitatives et qualitatives . Elle permet d'analyser la similitude entre les individus en prenant en compte des variables mixtes. De plus, on peut explorer l'association entre toutes les variables, tant quantitatives que qualitatives.

Pour faire simple, l'algorithme AFDM peut être considéré comme mixte entre l'ACP et l'ACM. En d'autres termes, il agit comme l'ACP concernant les variables quantitatives et comme l'ACM concernant les variables qualitatives.

Question [code1] Considérons deux vecteurs de valeurs quantitatives A et B et de même taille dans R. Proposez un ensemble de commandes permettant de construire un vecteur de couleurs de taille identique et pour lequel la ième couleur est `green` si la ième valeur de A est supérieure à la ième valeur de B et `red` sinon.

F P A B

CATALOGUE

Question [code2] On souhaite réaliser une classification ascendante hiérarchique (avec la distance euclidienne et la stratégie de Ward) sur un dataframé D comportant 15 variables quantitatives, à l'issue de laquelle on souhaite en plus construire une représentation graphique de cette classification. Proposez un ensemble de commandes pour cela :

 F P A B

```
X = dist(D)

cah = hclust(d = X, method = "ward.D2" )
plot( cah, main = "Dendrogramme", xlab = "")
```

Question [code3] On dispose d'un dataframé T1 correspondant aux données du premier tour d'une élection, et comportant les variables **Abs** (le nombre d'abstentions), **B1N1** (le nombre de bulletins blancs ou nuls), **X** (le nombre de voix pour le candidat X) et **Y** (idem pour le candidat Y). On dispose d'un dataframé T2 contenant les données analogues pour le second tour de l'élection (**X** et **Y** sont bien présents aux deux tours). On souhaite construire un dataframé T contenant :

- la progression du nombre d'abstentions entre les deux tours ;
- les variables **X** et **Y** pour les deux tours ;
- un facteur contenant les valeurs **X_gagnant** et **Y_gagnant** selon que X est vainqueur au second tour ou non.

Proposez un ensemble de commande permettant de construire T :

 F P A B

CATALOGUE

Question [code4] Nous disposons d'un objet `acp` contenant les résultats renvoyés par la fonction `dudi.pca` appliquée à des variables centrées et réduites. L'analyse a été limitée aux résultats des 4 premiers axes principaux. Proposez un ensemble de commandes permettant de rassembler la contribution à l'inertie totale et la contribution à l'inertie de chacune des quatre composantes principales pour chaque individu.

F P A B

```
library(factoextra)  
  
ind = get_pca_ind(acp)  
  
#Contribution à l'inertie de chacune des 4 CP pour chaque individu  
ind$contri  
  
#Contribution à l'inertie totale pour chaque individu  
apply(ind$contri, 1, sum)
```

CATALOGUE

Annexe - Table de valeurs du χ^2

La table ci-dessous donne, en fonction de la valeur du nombre de degré de liberté (abrégé par ddl dans la suite) et en fonction de P , la valeur du χ^2 telle que la probabilité pour une variable aléatoire suivant une loi du χ^2 de dépasser cette valeur est P .

ddl	1 - P													
	0.005	0.010	0.025	0.050	0.100	0.250	0.500	0.750	0.900	0.950	0.975	0.990	0.995	0.999
1	0.000	0.000	0.001	0.004	0.016	0.102	0.455	1.323	2.706	3.841	5.024	6.635	7.879	10.83
2	0.010	0.020	0.051	0.103	0.211	0.575	1.386	2.773	4.605	5.991	7.378	9.210	10.60	13.82
3	0.072	0.115	0.216	0.352	0.584	1.213	2.366	4.108	6.251	7.815	9.348	11.34	12.84	16.27
4	0.207	0.297	0.484	0.711	1.064	1.923	3.357	5.385	7.779	9.488	11.14	13.28	14.86	18.47
5	0.412	0.554	0.831	1.145	1.610	2.675	4.351	6.626	9.236	11.07	12.83	15.09	16.75	20.51
6	0.676	0.872	1.237	1.635	2.204	3.455	5.348	7.841	10.64	12.59	14.45	16.81	18.55	22.46
7	0.989	1.239	1.690	2.167	2.833	4.255	6.346	9.037	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28	24.32
8	1.344	1.647	2.180	2.733	3.490	5.071	7.344	10.22	13.36	15.51	17.53	20.09	21.95	26.12
9	1.735	2.088	2.700	3.325	4.168	5.899	8.343	11.39	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59	27.88
10	2.156	2.558	3.247	3.940	4.865	6.737	9.342	12.55	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19	29.59
11	2.603	3.053	3.816	4.575	5.578	7.584	10.34	13.70	17.28	19.68	21.92	24.73	26.76	31.26
12	3.074	3.571	4.404	5.226	6.304	8.438	11.34	14.85	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30	32.91
13	3.565	4.107	5.009	5.892	7.041	9.299	12.34	15.98	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82	34.53
14	4.075	4.660	5.629	6.571	7.790	10.17	13.34	17.12	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32	36.12
15	4.601	5.229	6.262	7.261	8.547	11.04	14.34	18.25	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80	37.70
16	5.142	5.812	6.908	7.962	9.312	11.91	15.34	19.37	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27	39.25
17	5.697	6.408	7.564	8.672	10.09	12.79	16.34	20.49	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72	40.79
18	6.265	7.015	8.231	9.390	10.86	13.68	17.34	21.60	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16	42.31
19	6.844	7.633	8.907	10.12	11.65	14.56	18.34	22.72	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58	43.82
20	7.434	8.260	9.591	10.85	12.44	15.45	19.34	23.83	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00	45.31
21	8.034	8.897	10.28	11.59	13.24	16.34	20.34	24.93	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40	46.80
22	8.643	9.542	10.98	12.34	14.04	17.24	21.34	26.04	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80	48.27
23	9.260	10.20	11.69	13.09	14.85	18.14	22.34	27.14	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18	49.73
24	9.886	10.86	12.40	13.85	15.66	19.04	23.34	28.24	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56	51.18
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	19.94	24.34	29.34	34.38	37.65	40.65	44.31	46.93	52.62
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	20.84	25.34	30.43	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29	54.05
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	21.75	26.34	31.53	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65	55.48
28	12.46	13.56	15.31	16.93	18.94	22.66	27.34	32.62	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99	56.89
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	23.57	28.34	33.71	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34	58.30
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	24.48	29.34	34.80	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67	59.70
31	14.46	15.66	17.54	19.28	21.43	25.39	30.34	35.89	41.42	44.99	48.23	52.19	55.00	61.10
32	15.13	16.36	18.29	20.07	22.27	26.30	31.34	36.97	42.58	46.19	49.48	53.49	56.33	62.49
33	15.82	17.07	19.05	20.87	23.11	27.22	32.34	38.06	43.75	47.40	50.73	54.78	57.65	63.87
34	16.50	17.79	19.81	21.66	23.95	28.14	33.34	39.14	44.90	48.60	51.97	56.06	58.96	65.25
35	17.19	18.51	20.57	22.47	24.80	29.05	34.34	40.22	46.06	49.80	53.20	57.34	60.27	66.62
36	17.89	19.23	21.34	23.27	25.64	29.97	35.34	41.30	47.21	51.00	54.44	58.62	61.58	67.98
37	18.59	19.96	22.11	24.07	26.49	30.89	36.34	42.38	48.36	52.19	55.67	59.89	62.88	69.35
38	19.29	20.69	22.88	24.88	27.34	31.81	37.34	43.46	49.51	53.38	56.90	61.16	64.18	70.70
39	20.00	21.43	23.65	25.70	28.20	32.74	38.34	44.54	50.66	54.57	58.12	62.43	65.48	72.06
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	33.66	39.34	45.62	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77	73.40
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	42.94	49.33	56.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49	86.66
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	52.29	59.33	66.98	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95	99.61
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	61.70	69.33	77.58	85.53	90.53	95.02	100.4	104.2	112.3
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	71.14	79.33	88.13	96.58	101.9	106.6	112.3	116.3	124.8
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	80.62	89.33	98.65	107.6	113.1	118.1	124.1	128.3	137.2
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	90.13	99.33	109.1	118.5	124.3	129.6	135.8	140.2	149.4
120	83.85	86.92	91.57	95.70	100.6	109.2	119.3	130.1	140.2	146.6	152.2	159.0	163.6	173.6
140	100.7	104.0	109.1	113.7	119.0	128.4	139.3	150.9	161.8	168.6	174.6	181.8	186.8	197.4
160	117.7	121.3	126.9	131.8	137.5	147.6	159.3	171.7	183.3	190.5	196.9	204.5	209.8	221.0
180	134.9	138.8	144.7	150.0	156.2	166.9	179.3	192.4	204.7	212.3	219.0	227.1	232.6	244.4
200	152.2	156.4	162.7	168.3	174.8	186.2	199.3	213.1	226.0	234.0	241.1	249.4	255.3	267.5
240	187.3	192.0	199.0	205.1	212.4	224.9	239.3	254.4	268.5	277.1	284.8	293.9	300.2	313.4
300	240.7	246.0	253.9	260.9	269.1	283.1	299.3	316.1	331.8	341.4	349.9	359.9	366.8	381.4
400	330.9	337.2	346.5	354.6	364.2	380.6	399.3	418.7	436.6	447.6	457.3	468.7	476.6	493.1