EXAMEN 5 janvier 2023
Introduction aux processus de diffusion
M2 Probabilités et Finance

Durée 3h.

Dans tout le sujet, nous considérons un mouvement brownien standard $B = (B_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$.

Exercice 1. Pour $s, t \geq 0$ calculer

$$\mathbb{E}\left[B_s \,|\, B_t\right], \qquad \mathbb{E}\left[B_s^2 \,|\, B_t\right], \qquad \mathbb{E}\left[e^{B_s} \,|\, B_t\right].$$

Exercice 2. Soit $X_0 > 0$ et $(X_t)_{t\geq 0}$ la solution forte de l'EDS

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu X_s \,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma X_s \,\mathrm{d}B_s,$$

avec $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$ des constantes.

(1) Soit $Y_t := \frac{1}{X_t}$, $t \geq 0$. Montrer que p.s. Y_t est bien défini pour tout $t \geq 0$.
(2) Écrire l'EDS satisfaite par $(Y_t)_{t\geq 0}$.
(3) Pour quelles valeurs de μ, σ les deux processus X et Y sont-ils simultanément des sous-martingales ?

Exercice 3. Soient (X, Y) deux mouvements browniens réels standards indépendants et définis sur le même espace de probabilités. On définit

$$F_t := e^{X_t} \int_0^t e^{-X_s} \,\mathrm{d}Y_s, \qquad G_t := \sinh(X_t).$$

Montrer que les processus $(F_t)_{t\geq 0}$ et $(G_t)_{t\geq 0}$ ont la même distribution. On pourra utiliser le fait que la fonction $\mathbb{R} \ni x \mapsto \sinh(x) \in \mathbb{R}$ est inversible avec inverse explicite $g(x) = \log\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 4. Soit $T_1^* := \inf\{s \geq 0 : |B_s| = 1\}$. Montrer par un argument de scaling que $\frac{1}{\sqrt{T_1^*}}$ a même loi que $\sup_{0\leq s\leq 1} |B_s|$.

Tourner la page ⟶

Exercice 5. Soit

$$Z_t := \frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{B_t^2}{2(1-t)}}, \qquad t \in [0, 1[.$$

(1) Montrer que $Z = \mathcal{E}(M)$, c'est à dire Z est la martingale (locale) exponentielle d'une autre martingale locale $M = (M_t)_{t\in[0,1[}$.

(2) Calculer $\mathbb{E}[Z_t]$ pour tout $t \in [0, 1[$.

(3) Montrer que $(Z_t)_{0\le t<1}$ est une martingale qui converge vers 0 p.s. quand $t \to 1$.

Exercice 6. On considère l'EDS dans $\mathbb{R}$

$$X_t = X_0 - \int_0^t X_s \,\mathrm{d}s + \sqrt{2} B_t, \qquad t \geq 0.$$

(1) Discuter existence et unicité de solutions de cette équation.

(2) En considérant la semimartingale $(e^t X_t)_{t\ge0}$ calculer une formule explicite pour $(X_t)_{t\geq0}$.

(3) En supposant X_0 déterministe montrer que $(X_t)_{t\ge0}$ est un processus gaussien et calculer la loi de X_t pour tout $t \geq 0$.

(4) On suppose **dorénavant** que X_0 a loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et que X_0 est indépendant de B. Montrer que $(X_t)_{t\ge0}$ est un processus gaussien et calculer la loi de X_t pour $t \geq 0$.

(5) Calculer la fonction de covariance du processus $(X_t)_{t\geq0}$.

(6) Montrer que $(X_t)_{t\ge0}$ et $(e^{-t} B_{e^{2t}})_{t\geq0}$ ont même loi.

Exercice 1.

$\star$ $\mathbb{E}[B_s | B_t] = \underbrace{\mathbb{E}[B_s]}_{0} + \frac{\overbrace{Cov(B_s,B_t)}^{s\wedge t}}{\underbrace{V[B_t]}_{t}} (B_t - \underbrace{\mathbb{E}[B_t]}_{0})$ car B_s et B_t MB donc gaussiens

$\Rightarrow \mathbb{E}[B_s|B_t] = (\frac{s}{t}\wedge 1) B_t$

Donc si $s \geq t$, $\mathbb{E}[B_s|B_t] = B_t$

$s<t$, $\mathbb{E}[B_s|B_t] = \frac{s}{t} B_t$

Tout cela revient à chercher α tq $Cov(B_s - \alpha B_t, B_t) = 0$

$\Rightarrow s\wedge t - \alpha t = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{s}{t}\wedge 1$

Si $Cov = 0 \Leftrightarrow \perp\!\!\!\perp$ car gaussien $\Rightarrow B_s - \alpha B_t \perp\!\!\!\perp B_t$

$\Rightarrow \mathbb{E}[B_s|B_t] = \mathbb{E}[B_s - \alpha B_t + \alpha B_t | B_t]$

$= \underbrace{\mathbb{E}[B_s - \alpha B_t]}_{=0} + \alpha B_t = (\frac{s}{t}\wedge 1) B_t$

$\star$ $\mathbb{E}[B_s^2|B_t] = \mathbb{E}[(B_s - \alpha B_t + \alpha B_t)^2 | B_t]$

$= \mathbb{E}[(B_s - \alpha B_t)^2] + \alpha^2 B_t^2$ car $B_s - \alpha B_t \perp\!\!\!\perp B_t$ $\Rightarrow \mathbb{E}[(B_s - \alpha B_t)(\alpha B_t)|B_t] = 0$

$= \mathbb{E}[B_s^2 - 2\alpha B_s B_t + \alpha^2 B_t^2] + \alpha^2 B_t^2$

$= s - 2\alpha(s\wedge t) + \alpha^2 t + \alpha^2 B_t^2$

$= s - 2\frac{(s\wedge t)^2}{t} + \alpha^2 t + \alpha^2 B_t^2$

$\star$ $\mathbb{E}[e^{B_s}|B_t] = \mathbb{E}[e^{B_s - \alpha B_t + \alpha B_t} | B_t] = e^{\alpha B_t}\mathbb{E}[e^{B_s - \alpha B_t}]$

$= e^{\alpha B_t}\mathbb{E}[e^{Z}]$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0, s + \alpha^2 t - 2\frac{(s\wedge t)^2}{t})$

$= e^{\alpha B_t} e^{\frac{1}{2}(s - 2\frac{(s\wedge t)^2}{t} + \alpha^2 t)}$

fct° génératrice de $Z = \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ est $\mathbb{E}[e^{tZ}] = e^{\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$

Exercice 2 :

$X_t = X_0 + \int_0^t \mu X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dB_s$ $\quad \mu, \sigma \in \mathbb{R}$ ctes $\quad X_0 > 0$

1) $X_t = X_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t} > 0$ ps $\forall t \geq 0$

Donc $(Y_t)_{t\geq 0}$ tq $Y_t := \frac{1}{X_t}$ est bien défini

2) $d f(X_t) = dY_t = \frac{-1}{X_t^2} dX_t + \frac{1}{2}\frac{2}{X_t^3} d\langle X\rangle_t$

$f : x \mapsto \frac{1}{x}$

$= -Y_t(\mu dt + \sigma dB_t) + \sigma^2 Y_t dt$

$\Rightarrow Y_t = Y_0 - \int_0^t Y_s(\mu - \sigma^2) dt - \int_0^t \sigma Y_s dB_s$

3) On a $X_t = X_0 + \int_0^t \mu X_s ds + \int_0^t \sigma X_s dB_s$ $\qquad \mathbb{E}[M_s|M_t] \geq M_t$

et $Y_t = Y_0 - \int_0^t Y_s(\mu - \sigma^2) ds - \int_0^t \sigma Y_s dB_s$

Pour que X soit un ss-mart il faut

$\forall s<t$, $\int_s^t \mu X_u du \geq 0 \Rightarrow \mu \geq 0$

Et pour Y il faut que $-\int_s^t Y_u(\mu-\sigma^2)du \geq 0$

$\Rightarrow \mu-\sigma^2 \leq 0$

Donc pour que X et Y soient simultanément des ss-mart il faut que $\begin{cases} \mu \geq 0 \\ \mu-\sigma^2 \leq 0 \end{cases}$ i.e $0 \leq \mu \leq \sigma^2$

Exercice 3 :

$F_t := e^{X_t}\int_0^t e^{-X_s}dY_s \qquad G_t = \sinh(X_t)$

$$dG_t = ch(X_t)dX_t + \frac{1}{2}sh(X_t)dt \qquad ch^2 - sh^2 = 1$$
$$= \sqrt{1+sh(X_t)^2}\, dX_t + \tfrac{1}{2}sh(X_t)dt$$
$$= \sqrt{1+G_t^2}\, dX_t + \tfrac{1}{2}G_t dt$$

$$dF_t = \underbrace{(de^{X_t})}_{de^{X_t} = e^{X_t}dX_t + \frac{1}{2}e^{X_t}dt}\left(\int_0^t e^{-X_s}dY_s\right) + e^{X_t}\cdot e^{-X_t}dY_t + \underbrace{d\left\langle e^{X}, \int_0^{\cdot} e^{-X_s}dY_s\right\rangle_t}_{=0 \text{ car } X \perp\!\!\!\perp Y}$$

$$\Rightarrow dF_t = \left(e^{X_t}dX_t + \tfrac{1}{2}e^{X_t}dt\right)\left(\int_0^t e^{-X_s}dY_s\right) + dY_t$$
$$= F_t dX_t + \tfrac{1}{2}F_t dt + dY_t$$
$$= \frac{1}{2}F_t dt + F_t dX_t + dY_t$$

$d\langle F\rangle_t = ?$

$$d\langle F\rangle_t = (dF_t)^2$$
$$= \frac{1}{4}F_t^2 \underbrace{dt^2}_{0} + F_t^2 dt + dt + 2\times\frac{1}{2}F_t F_t \underbrace{dX_t dt}_{0} + 2\times\frac{1}{2}F_t \underbrace{dt dY_t}_{0} + 2F_t \underbrace{dX_t dY_t}_{0}$$ ← muls en calcul sto
$$= (1+F_t^2)dt = \gamma_t dt$$
$$\Rightarrow dF_t = \tfrac{1}{2}F_t dt + \sqrt{\gamma_t}\, dZ_t \quad \text{avec } dZ_t = \frac{F_t}{\sqrt{\gamma_t}}dX_t + \frac{1}{\sqrt{\gamma_t}}dY_t \qquad Z_0 = 0$$

Z_t est une mart locale continue et $d\langle Z\rangle_t = 1$ donc c'est un MB par le Thm de Levy

D'où $dF_t = \sqrt{1+F_t^2}\, dZ_t + \tfrac{1}{2}F_t dt$

Puisque $\begin{cases} u \mapsto \sqrt{1+u^2} \\ u \mapsto \tfrac{1}{2}u \end{cases}$ sont Lipschitz et homogène

On a unicité faible de l'EDS $\forall u \in \mathbb{R}$ $dU_t = \sqrt{1+U_t^2}\, dB_t + \tfrac{1}{2}U_t dt \qquad U_0 = u$

donc $F \overset{loi}{=} G$

Exercice 4 :

$$T_1^* = \inf\{s \geq 0, |B_s| = 1\}$$
$$= \inf\{s \geq 0\ |\tfrac{1}{a}B_{sa^2}| = 1\}$$
$$= \inf\{\tfrac{sa^2}{a^2} \geq 0, |B_{sa^2}| = a\}$$
$$= \frac{1}{a^2}\inf\{s' \geq 0, |B_{s'}| = a\}$$
$$= \frac{1}{a^2}T_a^*$$
$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{T_1^*}} \leq a\right) = \mathbb{P}(1 \leq a^2 T_1^*) = \mathbb{P}(1 \leq T_a^*) = \mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq 1}|B_s| \leq a\right)$$

Exercice 5 : $Z_t = \frac{1}{\sqrt{1-t}} e^{-\frac{B_t^2}{2(1-t)}}$ $\quad t \in G_1 C$

1) On veut trouver M_t une mart locale telle que $Z_t = e^{M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t}$

$\ln(Z_t) = -\frac{1}{2}\ln(1-t) - \frac{B_t^2}{2(1-t)}$

Donc par Itô :

$$d\ln(Z_t) = \left(\frac{\partial \ln(Z_t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \ln(Z_t)}{\partial W_t^2}\right)dt + \frac{\partial \ln(Z_t)}{\partial W_t} dW_t$$

$$\frac{\partial \ln(Z_t)}{\partial t} = \frac{1}{2(1-t)} - \frac{B_t^2}{2(1-t)^2} \qquad \frac{\partial \ln(Z_t)}{\partial W_t} = -\frac{B_t}{1-t} \qquad \frac{\partial^2 \ln(Z_t)}{\partial W_t^2} = \frac{-1}{1-t}$$

$$\Rightarrow d\ln(Z_t) = \left(\frac{1}{2(1-t)} - \frac{B_t^2}{2(1-t)^2} - \frac{1}{2(1-t)}\right)dt - \frac{B_t}{1-t}dB_t$$

$$= -\frac{B_t^2}{2(1-t)^2}dt - \frac{B_t}{1-t}dB_t$$

et $d\langle \ln(Z.)\rangle_t = d(\ln(Z_t))^2 = +\frac{B_t^2}{(1-t)^2}dt$

Soit $M_t = -\int_0^t \frac{B_s}{1-s}dB_s \Rightarrow \langle M \rangle_t = \int_0^t \frac{B_s^2}{(1-s)^2}ds$

On a $d\ln(Z_t) = -\frac{B_t^2}{2(1-t)^2}dt - \frac{B_t}{1-t}dB_t$

$$\Rightarrow \ln(Z_t) = -\int_0^t \frac{B_s^2}{2(1-s)^2}ds - \int_0^t \frac{B_s}{1-s}dB_s$$

$$= -\frac{1}{2}\langle M \rangle_t + M_t$$

$$\Rightarrow Z_t = \exp\left(M_t - \frac{1}{2}\langle M \rangle_t\right)$$

2) $\mathbb{E}[\langle Z \rangle_t] \leq \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{B_s^2}{(1-s)^2}ds\right] = \int_0^t \frac{s}{(1-s)^2}ds < \infty \Rightarrow Z_t$ est une vraie mart et donc $\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_0] = Z_0 = 1$.

3) Quand $t \to 1^-$, $B_t^2 \to B_1^2 > 0$ ps

Donc par croissance comparée $Z_t \xrightarrow[\substack{t\to 1 \\ t<1}]{} 0$ car lorsque $t \in V(1^-)$, $Z_t \sim (1-t)^{-1/2} e^{-\frac{B_1^2}{2(1-t)}}$

Or $(1-t)^{-1/2} e^{-\frac{B_1^2}{2(1-t)}} \xrightarrow[t\to 1^-]{} 0$ puisque $\forall a>0, b>0$, $\lim_{x\to 0^+} x^{-a} e^{-\frac{b}{x}} = 0$

Exercice 6 :

EDS : $X_t = X_0 - \int_0^t X_s\,ds + \sqrt{2}B_t \quad t \geq 0$

1) $\begin{cases} b : (t,x) \mapsto -x \\ \sigma : (t,x) \mapsto \sqrt{2} \end{cases}$ Sont Lipschitz et homogène donc $\exists!$ solut° de cette EDS (unicité faible et trajectorielle)

2) $dX_t = X_t\,dt + \sqrt{2}\,dB_t$

$d(e^t X_t) = e^t X_t\,dt + e^t dX_t$

$= e^t X_t\,dt - e^t X_t\,dt + \sqrt{2}e^t dB_t$

$\Rightarrow d(e^t X_t) = \sqrt{2}e^t dB_t$

$\Rightarrow e^t X_t = X_0 + \sqrt{2}\int_0^t e^s dB_s$

$\Rightarrow X_t = e^{-t}X_0 + \sqrt{2}e^{-t}\int_0^t e^s dB_s$

3) On suppose X_0 déterministe

On a par Q2 $X_t = e^{-t}X_0 + \sqrt{2}e^{-t}\int_0^t e^s dB_s$

Or $\int_0^t e^s dB_s = \lim_{m\to\infty} \frac{t}{m}\sum_{k=0}^{m-1} e^{\frac{kt}{m}} \underbrace{\left(B_{\frac{(k+1)t}{m}} - B_{\frac{kt}{m}}\right)}_{\text{gaussien}}$

$\Rightarrow \int_0^t e^s dB_s$ est gaussien

$\Rightarrow X_t$ gaussien

et $\int_0^t e^s dB_s \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{2}(e^{2t}-1)) \Rightarrow \sqrt{2}e^{-t}\int_0^t e^s dB_s \sim \mathcal{N}(0, e^{-2t}(e^{2t}-1))$

$\Rightarrow X_t \sim \mathcal{N}(e^{-t}\mathbb{E}(X_0), 1 - e^{-2t})$

4) On suppose $X_0 \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $X_0 \perp\!\!\!\perp B$

$\Rightarrow X_t$ reste gaussien par Σ de gaussien $\perp\!\!\!\perp$.

et $\mathbb{E}[X_t] = 0$

$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}[e^{-2t}X_0^2] + \mathbb{E}[(\sqrt{2}e^{-t}\int_0^t e^s dB_s)^2]$

$= e^{-2t} + (1 - e^{-2t}) = 1$

$\Rightarrow X_t \sim \mathcal{N}(0,1)$

5) $s \leq t$, $\mathbb{E}[X_t X_s] = \mathbb{E}[e^{-(t+s)}X_0^2] + 2e^{-t}e^{-s}\,\overbrace{\mathbb{E}[\int_0^t e^u dB_u \int_0^s e^v dB_v]}^{=\int_0^{t\wedge s} e^{2u}du}$

$= e^{-(t+s)} + 2e^{-(t+s)}\left(\int_0^s e^{2u}\,du\right)$

$= e^{-(t+s)} + 2e^{-(t+s)}\left(\frac{1}{2}(e^{2s}-1)\right)$

$= e^{-(t-s)}$

6) $s \leq t$ $\underbrace{\mathbb{E}[(e^{-t}B_{e^{2t}})(e^{-s}B_{e^{2s}})]}_{= \mathrm{Cov}(e^{-t}B_{e^{2t}},\, e^{-s}B_{e^{2s}})} = e^{-(t+s)}(e^{2t} \wedge e^{2s})$ $\quad$ exp $\nearrow \Rightarrow (s \leq t \Rightarrow e^{2s} \leq e^{2t})$

Car $\mathbb{E}[e^{-t}B_{e^{2t}}] = 0$

$= e^{-(t+s)}e^{2s} = e^{-(t-s)}$

$= \underbrace{\mathbb{E}[X_t X_s]}_{\mathrm{Cov}(X_t, X_s) \text{ car } \mathbb{E}[X_t]=0}$

$\Rightarrow (X_t)_{t\geq 0} \overset{\text{Loi}}{=} (e^{-t}B_{e^{2t}})_{t\geq 0}$