© Théo Jalabert

ISFA- M1

STATISTIQUE INFÉRENTIELLE

Fiche de TD N° 4 : NORMALITÉ ASYMPTOTIQUE ET INTERVALLES DE CONFIANCE

Exercice 1.

Soit $X = (X_1, ..., X_n)$, un n-échantillon issu d'une loi exponentielle de paramètre inconnu $\lambda > 0$. On rappelle que l'estimateur du maximum de vraisemblance est : $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\overline{X}_n}$.

1. En utilisant les propriétés asymptotiques de l'EMV vues en cours, montrer que $\hat{\lambda}_n$ est asymptotiquement normal et préciser la variance asymptotique.
2. Retrouver le résultat de la question précédente en utilisant la δ-méthode.
3. En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour λ.
4. En se basant sur le pivot $2\lambda \sum_{i=1}^{n} X_i$, déterminer un intervalle de confiance exacte de niveau α pour λ. (Indication : les lois $\chi^2(n)$ et $\Gamma(n/2, 1/2)$ sont les mêmes).

Application Numérique : Calculer les intervalles de confiance de niveau 90% des questions précédentes pour un échantillon de durée de vie de téléphones portables (en mois) :

$$X = (4, 3, 34, 41, 54, 10, 28, 39, 31, 50, 6, 27, 14, 25, 16).$$

Exercice 2.

On considère un échantillon de taille n issu d'une loi à densité paramétrée par $\theta > 0$ définie par :

$$f_\theta(x) = \theta x^{\theta - 1} \mathbb{1}_{x \in]0,1[}$$

1. Déterminer l'estimateur T_1 de θ obtenu par la méthode des moments.
2. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance T_2.
3. Montrer que T_1 et T_2 sont asymptotiquement normaux. Comparer leur variances asymptotiques. Sont-ils asymptotiquement efficaces ?
4. Déterminer un intervalle de confiance asymptotique de niveau 99% pour θ basé sur T_2.

Exercice 3.

Un institut de sondages souhaite estimer le pourcentage p de la population qui va voter pour le Maire actuel à la prochaine élection avec une précision de 1%. Pour cela, on interroge un échantillon de n personnes et on note F_n la fréquence empirique des intentions de vote pour le Maire.

1. En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, déterminer le nombre n de personnes qu'il suffit d'interroger pour avoir un intervalle de confiance de précision 1% et de niveau 95% :

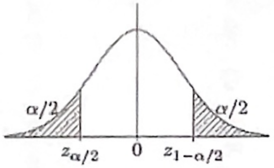
$$\mathbb{P}(|F_n - p| \geq 0.01) \leq 0.05$$

2. Même question en utilisant le théorème central limite.

© Théo Jalabert

Quantiles de la loi Normale centrée réduite.

Si Z est une variable aléatoire suivant la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, la table suivante donne, pour α fixé, la valeur $z_{1-\alpha/2}$ telle que $\mathbb{P}(|Z| \geq z_{1-\alpha/2}) = \alpha$. Ainsi, $z_{1-\alpha/2}$ est le quantile d'ordre $1-\alpha/2$ de la loi normale centrée réduite.

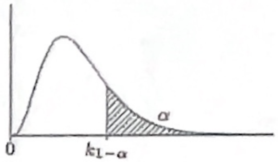


α	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	∞	2,5758	2,3263	2,1701	2,0537	1,9600	1,8808	1,8119	1,7507	1,6954
0,1	1,6449	1,5982	1,5548	1,5141	1,4758	1,4395	1,4051	1,3722	1,3408	1,3106
0,2	1,2816	1,2536	1,2265	1,2004	1,1750	1,1503	1,1264	1,1031	1,0803	1,0581
0,3	1,0364	1,0152	0,9945	0,9741	0,9542	0,9346	0,9154	0,8965	0,8779	0,8596
0,4	0,8416	0,8239	0,8064	0,7892	0,7722	0,7554	0,7388	0,7225	0,7063	0,6903
0,5	0,6745	0,6588	0,6433	0,6280	0,6128	0,5978	0,5828	0,5681	0,5534	0,5388
0,6	0,5244	0,5101	0,4959	0,4817	0,4677	0,4538	0,4399	0,4261	0,4125	0,3989
0,7	0,3853	0,3719	0,3585	0,3451	0,3319	0,3186	0,3055	0,2924	0,2793	0,2663
0,8	0,2533	0,2404	0,2275	0,2147	0,2019	0,1891	0,1764	0,1637	0,1510	0,1383
0,9	0,1257	0,1130	0,1004	0,0878	0,0753	0,0627	0,0502	0,0376	0,0251	0,0125

α	10^{-3}	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
$z_{1-\alpha/2}$	3,2905	3,8906	4,4172	4,8916	5,3267	5,7307	6,1094

Quantiles de la loi du χ^2.

Si X suit la loi du χ^2, à ν degrés de liberté, la table suivante donne la valeur $k_{1-\alpha}(\nu)$ telle que $\mathbb{P}(X \geq k_{1-\alpha}(\nu)) = \alpha$. Ainsi, $k_{1-\alpha}(\nu)$ est le quantile d'ordre $1-\alpha$ de la loi du χ^2 à ν degrés de liberté.



ν \ α	0,990	0,975	0,950	0,900	0,100	0,050	0,025	0,010	0,001
1	0,0002	0,0010	0,0039	0,0158	2,7055	3,8415	5,0239	6,6349	10,8276
2	0,0201	0,0506	0,1026	0,2107	4,6052	5,9915	7,3778	9,2103	13,8155
3	0,1148	0,2158	0,3518	0,5844	6,2514	7,8147	9,3484	11,3449	16,2662
4	0,2971	0,4844	0,7107	1,0636	7,7794	9,4877	11,1433	13,2767	18,4668
5	0,5543	0,8312	1,1455	1,6103	9,2364	11,0705	12,8325	15,0863	20,5150
6	0,8721	1,2373	1,6354	2,2041	10,6446	12,5916	14,4494	16,8119	22,4577
7	1,2390	1,6899	2,1673	2,8331	12,0170	14,0671	16,0128	18,4753	24,3219
8	1,6465	2,1797	2,7326	3,4895	13,3616	15,5073	17,5345	20,0902	26,1245
9	2,0879	2,7004	3,3251	4,1682	14,6837	16,9190	19,0228	21,6660	27,8772
10	2,5582	3,2470	3,9403	4,8652	15,9872	18,3070	20,4832	23,2093	29,5883
11	3,0535	3,8157	4,5748	5,5778	17,2750	19,6751	21,9200	24,7250	31,2641
12	3,5706	4,4038	5,2260	6,3038	18,5493	21,0261	23,3367	26,2170	32,9095
13	4,1069	5,0088	5,8919	7,0415	19,8119	22,3620	24,7356	27,6883	34,5282
14	4,6604	5,6287	6,5706	7,7895	21,0641	23,6848	26,1189	29,1412	36,1233
15	5,2293	6,2621	7,2609	8,5468	22,3071	24,9958	27,4884	30,5779	37,6973
16	5,8122	6,9077	7,9616	9,3122	23,5418	26,2962	28,8454	31,9999	39,2524
17	6,4078	7,5642	8,6718	10,0852	24,7690	27,5871	30,1910	33,4087	40,7902
18	7,0149	8,2307	9,3905	10,8649	25,9894	28,8693	31,5264	34,8053	42,3124
19	7,6327	8,9065	10,1170	11,6509	27,2036	30,1435	32,8523	36,1909	43,8202
20	8,2604	9,5908	10,8508	12,4426	28,4120	31,4104	34,1696	37,5662	45,3147
21	8,8972	10,2829	11,5913	13,2396	29,6151	32,6706	35,4789	38,9322	46,7970
22	9,5425	10,9823	12,3380	14,0415	30,8133	33,9244	36,7807	40,2894	48,2679
23	10,1957	11,6886	13,0905	14,8480	32,0069	35,1725	38,0756	41,6384	49,7282
24	10,8564	12,4012	13,8484	15,6587	33,1962	36,4150	39,3641	42,9798	51,1786
25	11,5240	13,1197	14,6114	16,4734	34,3816	37,6525	40,6465	44,3141	52,6197
26	12,1981	13,8439	15,3792	17,2919	35,5632	38,8851	41,9232	45,6417	54,0520
27	12,8785	14,5734	16,1514	18,1139	36,7412	40,1133	43,1945	46,9629	55,4760
28	13,5647	15,3079	16,9279	18,9392	37,9159	41,3371	44,4608	48,2782	56,8923
29	14,2565	16,0471	17,7084	19,7677	39,0875	42,5570	45,7223	49,5879	58,3012
30	14,9535	16,7908	18,4927	20,5992	40,2560	43,7730	46,9792	50,8922	59,7031

© Théo Jalabert

Rappel (ou pas) :

Def : T_n est asympt normal si $\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ variance asymptotique

Méthodes :

1- Si (H1) à (H7) vérifiées, si $\hat{\theta}_n$ est l'EMV de θ alors
$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I^{-1}(\theta))$.

2- Si on a $T_n = g(\bar{X}_n)$ avec $g \in \mathcal{C}^1$, $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, $V(X_i) = \sigma^2$ et $g(\mu) = \theta$.

On écrit le TCL pour $\bar{X}_n$

$$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

ou

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2)$$

On applique la méthode Delta au TCL et à g.

$$\sqrt{n}(g(\bar{X}_n) - g(\mu)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (g'(\mu))^2\sigma^2)$$

$$\sqrt{n}(T_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, (g'(\mu))^2\sigma^2)$$

Exercice 1 :

1) On a (H1) à (H7) vérifiées et $\hat{\lambda}_n = \frac{1}{\bar{X}_n}$ l'EMV de θ

alors $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I^{-1}(\lambda))$

où $I(\lambda) = V\left(\frac{\partial}{\partial\theta} \ln f(x)\right) = V\left(\frac{1}{\lambda} - x\right) = \frac{1}{\lambda^2}$

$\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1)$.

2) **Méthode des moments :**

On a des lois $\mathcal{E}(\lambda)$, λ de dimension 1.

On a $m_1(\lambda) = \mathbb{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$

L'estimateur des moments $\hat{\lambda}_M$ est tq
$m_1(\hat{\lambda}_M) = \frac{1}{\hat{\lambda}_M} = \bar{X}_n \Rightarrow \hat{\lambda}_M = \frac{1}{\bar{X}_n}$

Soit $g : x \mapsto \frac{1}{x} \Rightarrow g' : x \mapsto -\frac{1}{x^2}$ On a $\hat{\lambda}_M = g(\bar{X}_n) = \frac{1}{\bar{X}_n}$

On écrit le TCL pour la loi $\mathcal{E}(\lambda)$:
$\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n - 1/\lambda}{\sqrt{1/\lambda^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ ou $\sqrt{n}(\bar{X}_n - \frac{1}{\lambda}) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1/\lambda^2)$

© Théo Jalabert

On applique la méthode Delta au TCL càd g :

$$\sqrt{n}\left(\frac{1}{\bar{X}_n} - \lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \lambda^4 \times \frac{1}{\lambda^2}\right)$$

Donc $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2)$.

3) Rappel : Intervalle de confiance

Def : Un IC de niveau $1-\alpha$ est A_n et B_n tq $\mathbb{P}(A_n \leq \theta \leq B_n) = 1-\alpha$

——— asympt $1-\alpha$ ——— $\mathbb{P}(A_n \leq \theta \leq B_n) \to 1-\alpha$.

Méthodes :

⊛ IC exact On prend une fonct° pivot $k(X_1, \dots, X_n, \theta)$ dont la loi $\mathbb{P}$ ne dépend pas de θ.

$\Rightarrow$ On a $\mathbb{P}(\underbrace{k_{\frac{\alpha}{2}}}_{} \leq k(x_1, \dots, x_n, \theta) \leq k_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha \to \mathbb{P}(A_n \leq \theta \leq B_n) = 1-\alpha$.

quantiles d'ordre $\frac{\alpha}{2}$ et $1-\frac{\alpha}{2}$ de la loi $\mathbb{P}$

⊛ IC asympt : On prend la normalité asympt de $\hat{\theta}_n$

$$\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\sigma_\theta^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Variance asympt.

Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$\mathbb{P}(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\sigma_\theta^2}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \to 1-\alpha.$$

Si on a $\hat{\sigma}_\theta^2$ un estimateur convergent de σ_θ^2 (souvent $\sigma_{\hat{\theta}_n}^2$) alors Slutsky dit que

Si $Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$ et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} Y$

$\rightarrow$ On a $\sqrt{\frac{\sigma_\theta^2}{\hat{\sigma}_\theta^2}} \to 1$ et donc $\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\hat{\sigma}_\theta^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

ne dépend plus de θ.

$$\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\hat{\sigma}_\theta^2}} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \to 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\hat{\theta}_n - z_{1-\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\theta^2}{n}} \leq \theta \leq \hat{\theta}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\sigma}_\theta^2}{n}}\right) \to 1-\alpha$$

Ici on a, $\sqrt{n}(\hat{\lambda}_n - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2) \Rightarrow \sqrt{n}\,\frac{\hat{\lambda}_n - \lambda}{\lambda} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

On a $\hat{\lambda}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda$ donc $\frac{\lambda}{\hat{\lambda}_n} \to 1$ donc par Slutsky

$$\sqrt{n}\,\frac{\hat{\lambda}_n - \lambda}{\hat{\lambda}_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

© Théo Jalabert

Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ on a $\mathbb{P}(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq Z \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}) = 1-\alpha$

donc $\mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}\, \frac{\hat{\lambda}_n - \lambda}{\hat{\lambda}_n} \leq z_{1-\alpha/2}\right) \longrightarrow 1-\alpha$

$$\mathbb{P}\left(\hat{\lambda}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\lambda}_n}{\sqrt{n}} \leq \lambda \leq \hat{\lambda}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \frac{\hat{\lambda}_n}{\sqrt{n}}\right) \longrightarrow 1-\alpha.$$

⊛ IC asympt

On prend la normalité asympt de $\hat{\theta}_n$

$$\sqrt{n}\, \frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\sigma_\theta^2}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Variance asympt