Théorie des options

TD4 - Modèles discrets

Dans le cadre des modèles discrets, le théorème fondamental à retenir est le suivant :

Théorème 0.1 *AOA $\Leftrightarrow$ il existe une probabilité risque-neutre.*

1. On considère un modèle binomial à trois étapes. On suppose que $S_0 = 20$ euros et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1.1$ et $d = 0.9$. Le taux sans risque est $r = 2\%$.
   (a) Décrire la dynamique de S à l'aide d'un arbre.
   (b) Donner la probabilité risque-neutre.
   (c) Un trader vend un CALL européen de prix d'exercice $K = 20$ euros et commence ses opérations de couverture. Déterminer le prix du CALL à la date $t = 0$.
   (d) On suppose que l'actif sous-jacent subit deux hausses consécutives puis une baisse. Détailler les opérations effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture.
   (e) Quelle serait la prime d'un PUT européen de même prix d'exercice et de même échéance ? S'il s'agissait d'un PUT américain, l'acheteur aurait-il intérêt à exercer son PUT de manière anticipée ?
   (f) A $t = 2$ un trader a acheté le PUT européen précédent et le finance en vendant le portefeuille de couverture (correspondant au PUT). A la dernière étape la volatilité du sous-jacent a soudain augmenté : le facteur de hausse est maintenant $u' = 1.4$ et le facteur de baisse $d' = 0.6$. Ce mouvement de volatilité est-il favorable à l'acheteur du PUT ?
   Attention : La couverture est constituée sous la volatilité initiale du sous-jacent.

2. On considère un marché financier à une période où sont échangés un actif sans risque et un actif risqué. On note r le taux sans risque. La dynamique de S est décrite par un arbre binomial : il y a deux états du monde possibles ω_1 et ω_2 de probabilités strictement positives. L'évolution de l'actif risqué est donnée par :
   - état de hausse : S_1 (noté $S_1(\omega_1)) = uS_0$,
   - état de baisse : S_1 (noté $S_d(\omega_2)) = dS_0$,
   où $u > d > 0$ sont deux réels donnés. On dit qu'il n'existe pas d'arbitrage si pour tout $\Delta \geq 0$,
   $$\begin{pmatrix} \Delta(S_1(\omega_1) - (1+r)S_0) \\ \Delta(S_1(\omega_2) - (1+r)S_0) \end{pmatrix} \geq 0 \Rightarrow \Delta(S_1 - (1+r)S_0) = 0 \tag{1}$$
   (a) Soit x la richesse initiale. Si Δ représente le nombre d'actifs risqués achetés, écrire la dynamique de la richesse (sachant que le reste de la richesse est investi dans l'actif sans risque). En quoi la définition d'absence d'arbitrage (1) diffère de la définition classique étudiée en cours ?
   (b) Prenons $x = 0$. Montrer que si la condition (1) est vérifiée, alors $d < 1 + r$.

(c) En déduire que si (1) est vérifiée, alors il existe un réel π tel que

$$0 < \pi < 1 \quad \text{et} \quad \pi u + (1-\pi)d \leq 1 + r.$$

(d) Considérons la nouvelle probabilité $\tilde{\mathbb{P}}(\omega_1) = \pi$ et $\tilde{\mathbb{P}}(\omega_2) = 1 - \pi$. Montrer que la richesse actualisée est une sur-martingale sous la probabilite $\tilde{\mathbb{P}}$.

(e) Réciproquement, supposons qu'il existe un réel π vérifiant les conditions de la question (c). Montrer que la condition (1) est vérifiée.

(f) On suppose maintenant $d < 1+r < u$. Rappeler la stratégie de couverture d'un CALL de prix d'exercice $K \in]dS_0,\ uS_0[$. Cette stratégie est-elle compatible avec le marché défini ci-dessus (i.e. $\Delta \geq 0$) ? Même question pour un PUT.

3. Considérons un marché à cinq états du monde $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_5\}$, trois dates $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$ et trois actifs : un actif sans risque S^0 de taux d'intérêt nul ($r = 0$, $S_0^0 = 1$) et deux actions S^1 et S^2 dont la suite des prix est décrite comme suit

ω	$S_0^1(\omega)$	$S_1^1(\omega)$	$S_2^1(\omega)$
ω_1	6	5	3
ω_2	6	5	4
ω_3	6	5	8
ω_4	6	7	6
ω_5	6	7	8

ω	$S_0^2(\omega)$	$S_1^2(\omega)$	$S_2^2(\omega)$
ω_1	3.75	3	2
ω_2	3.75	3	3
ω_3	3.75	3	4
ω_4	3.75	4.5	4
ω_5	3.75	4.5	5

(a) Représenter l'évolution des prix des actifs sous forme d'arbre.

(b) Les suites des prix des actions vérifient-elles l'hypothèse AOA ? *Indication : Montrer qu'il existe une probabilité risque-neutre et utiliser le Théorème 0.1*

(c) Considérons un nouvel actif X. Sachant que le marché est complet, replir le tableau suivant :

ω	$X_0(\omega)$	$X_1(\omega)$	$X_2(\omega)$
ω_1			0
ω_2			0.25
ω_3			4.25
ω_4			1.5
ω_5			3.5

Quelle est la stratégie de couverture de l'actif X entre la date $t = 0$ et la date $t = 1$?

4. On considère un marché financier à une période où sont échangés deux actifs de base et une option :
- un actif sans risque de rendement r,
- un actif risqué S dont la dynamique est décrite par un arbre trinomial : il y a trois états du monde possibles ω_1, ω_2 et ω_3 de probabilités strictement positives. L'évolution de l'actif risqué est donnée par :

$$S_1(\omega_1) = uS_0, \quad S_1(\omega_2) = mS_0 \quad \text{et} \quad S_1(\omega_3) = dS_0$$

où $u > m > d > 0$ sont trois réels donnés vérifiant $d < 1 + r < u$,
- une option d'achat européenne sur l'actif risqué, de prix d'exercice $K \in [S_0 m,\ S_0 u[$ et de prime C_0.

On autorise les investisseurs à construire des stratégies de portefeuille sur les actifs de base et l'option d'achat. On notera $X_1^{x,\Delta,\beta}$ la richesse à la date $t = 1$ induite par un capital initial x investi dans l'achat de Δ actifs risqués, β options et le reste en actifs sans risque.

(a) Ecrire $X_1^{x,\Delta,\beta}$ en fonction de C_0, S_0, S_1 et K. Mettre ensuite le résultat sous la forme $Ax + \Delta B + \beta C$.

(b) Montrer que le marché est complet.

(c) Soit Y_0 le prix d'un actif Y. Exprimer Y_0 sous la forme

$$Y_0 = \frac{1}{1+r}\left(q_u Y_u + q_m Y_m + q_d Y_d\right).$$

(d) Montrer que la condition

$$C_0 > 0 \ \text{ et } \ \frac{1+r-m}{u-m}(S_0 u - K) < (1+r)C_0 < \frac{1+r-d}{u-d}(S_0 u - K)$$

est nécessaire et suffisante pour que $q_u,\ q_m,\ q_d > 0$ et $q_u + q_m + q_d = 1$.

(e) Ecrire la condition AOA sur ce marché. Montrer que la condition établie dans la question précedente implique AOA.

5. On considère un marché financier à une période où sont échangés un actif sans risque et un actif risqué. On note r le taux sans risque. La dynamique de l'actif risqué est décrite par un arbre analogue à celui de l'exercice 2.

   Les échanges d'actif risqué sont soumis à des coûts de transaction proportionnels. Plus précisément, l'achat d'une unité d'actif risqué coûte $(1+\lambda)S_0$ et la vente d'une unité rapporte $(1-\lambda)S_0$ où λ est un paramètre quelconque dans $]0,\ 1[$.

   Un portefeuille est décrit par un couple (x, Δ), où x est le capital initial et Δ est le nombre d'unités d'actif risqué détenues pendant la période.

   (a) On note par $X_1^{x,\Delta}$ la richesse à la date 1. Exprimer $X_1^{x,\Delta}$ en fonction de x, Δ et la fonction définie par

   $$\tau(x) = (1+\lambda)x \ \text{ si } \ x \geq 0 \ \text{ et } \ \tau(x) = (1-\lambda)x \ \text{ si } \ x < 0.$$

   (b) Montrer que la fonction τ vérifie la condition

   $$\forall \ \ y \in [1-\lambda,\ \ 1+\lambda] \ \text{ et } \ \Delta \in \mathbb{R} \ \text{ on a } \ : \ -\tau(-\Delta) \leq y\Delta \leq \tau(\Delta).$$

   (c) Formuler une condition d'absence d'arbitrage qui prend en compte la présence de coûts de transaction.

   (d) On désigne par $\mathcal{M}_\lambda$ le sous-ensemble de $\mathbb{R}^4$ constitué des couples $(q,\ \rho_0,\ \rho_1^u,\ \rho_1^d)$ tels que :
   - $0 < q < 1$,
   - $(1-\lambda) \leq \psi \leq (1+\lambda)$ pour tout $\psi \in \{\rho_0,\ \rho_1^u,\ \rho_1^d\}$,
   - $(1+r)\rho_0 = qu\rho_1^u + (1-q)d\rho_1^d$.

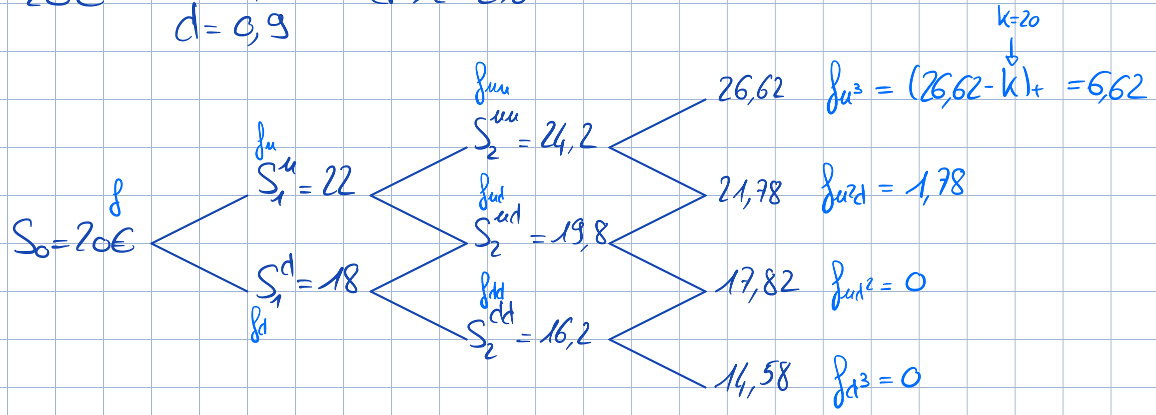
   Montrer que si $\mathcal{M}_\lambda \neq \emptyset$, alors le marché avec coûts de transaction n'admet pas d'arbitrage (on utilisera la propriété de la fonction τ établie dans la question b).

   (e) Supposons que $d < 1+r < u$. En utilisant la condition établie dans la question précédente, montrer que le marché avec coûts de transaction n'admet pas d'arbitrage.

Exercice 1:

$S_0 = 20€$ $\quad u = 1{,}1$ $\quad d = 0{,}9$ $\quad$ et $r = 2\%$

a)



b) On se place en proba risque neutre avec :

$$q = \frac{R-d}{u-d} \quad \text{où } R = e^{r\Delta t} \qquad \text{ici } r = 2\% \text{ et } \Delta t = \frac{12}{3} = 4 \text{ mois}$$

$$\Rightarrow q = \frac{e^{2\% \times 4/12} - 0{,}9}{1{,}1 - 0{,}9} = 0{,}5334$$

c) $K = 20€$

Donc avec les formules du cours on a :

$$f_{uu} = \frac{1}{R}\left[q \times 6{,}62 + (1-q) \times 1{,}78\right] = 4{,}3328$$

$$f_{ud} = \frac{1}{R}\left[q \times 1{,}78 + (1-q) \times 0\right] = 0{,}9432$$

$$f_{dd} = \frac{1}{R}\left[q \times 0 + (1-q) \times 0\right] = 0$$

$$\Rightarrow f_u = \frac{1}{R}\left[q f_{uu} + (1-q) f_{ud}\right] = 2{,}7330$$

$$f_d = \frac{1}{R}\left[q f_{ud} + (1-q) f_{dd}\right] = 0{,}4998.$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{R}\left[q f_u + (1-q) f_d\right] = 1{,}6799$$

d) Les stratégies de couverture correspondent aux qté d'act° qu'il est nécessaire de posséder sur la période correspondante pour couvrir l'option. La couverture en delta est une couverture dite dynamique car il faut ajuster le nbr d'act° détenues en portefeuille à chaque période. Le delta calculé pour la période i donne

le nbr d'act° à déterminer à l'instant $i-1$.
Donc la baisse en période 3 est anecdotique.

$$\Delta_1 = \frac{f_u - f_d}{22-18} = 0{,}5583$$

$$\Delta_2 = \frac{f_{uu} - f_{ud}}{24{,}2-19{,}8} = 0{,}7704$$

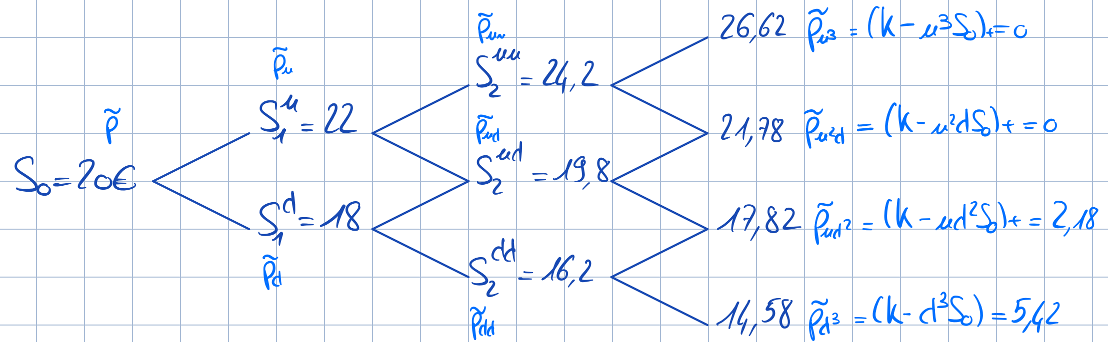
$$\Delta_3 = \frac{f_{u^3} - f_{u^2d}}{26{,}62-21{,}78} = 1$$

Donc en $t=0$, achat de 0,5583 actions
en $t=1$, achat de $0{,}7704-0{,}5583$ actions
en $t=2$, achat de $1-0{,}7704$ actions.

e) On utilise la parité CALL-PUT : $C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$

$$\Rightarrow P_0 = C_0 - S_0 + Ke^{-rT} = 1{,}6799 - 20 + 20\,e^{-0{,}02\times 1}$$
$$= 1{,}2839$$

Dans le cas d'un PUT américain,



$$\tilde{P}_{uu} = \max\left(20-24{,}2\,;\ \frac{1}{R}\left[q\tilde{P}_{u^3} + (1-q)\tilde{P}_{u^2d}\right]\right) = 0$$

$$\tilde{P}_{ud} = \max\left(20-19{,}8\,;\ \frac{1}{R}\left[q\tilde{P}_{u^2d} + (1-q)\tilde{P}_{ud^2}\right]\right) = \max\left(20-19{,}8\,;\ e^{-0{,}02\times 4/12}\left[q\tilde{P}_{u^2d} + (1-q)\tilde{P}_{ud^2}\right]\right)$$
$$= 1{,}0104$$

$$\tilde{P}_{d^2} = \max\left(20-16{,}2\,;\ \frac{1}{R}\left[q\tilde{P}_{ud^2} + (1-q)\tilde{P}_{d^3}\right]\right) = 3{,}8 \longrightarrow \text{on exerce.}$$

$$\tilde{P}_u = \max\left(20-22\,;\ \frac{1}{R}\left[q\tilde{P}_{uu} + (1-q)\tilde{P}_{ud}\right]\right) = 0{,}4683$$

$$\tilde{P}_d = \max\left(20-18\,;\ \frac{1}{R}\left[q\tilde{P}_{ud} + (1-q)\tilde{P}_{d^2}\right]\right) = 2{,}2967$$

$$\tilde{P} = \frac{1}{R}\left[q\tilde{P}_u + (1-q)\tilde{P}_d\right] = 1{,}3113$$

Donc le prix du PUT américain est de 1,3113 et il est optimal de l'exercer en d^2.

Vérification : on a bien $\tilde{P}_0 > P_0$