Théorie de la ruine

Stéphane Loisel

Contexte

Étendre le cadre statique du cours de modélisation charges-sinistres à une vision dynamique :

- Solvabilité 2 (th. Ruine à la base de plusieurs réglementations prudentielles (notamment en Scandinavie)
- ORSA
  - Conformité permanente (pilier II S2) *Sinon les compagnies pourraient prendre des positions notamment à l'actif moins risquées au moment de la rédaction du rapport*
  - Horizon 3-5 ans d'un business plan

Remarque sur le SCR

- Augmentation : peut signifier que tous les clients partes
- Baisse : peut signifier que l'on est en développement.

Ce n'est pas binaire, ne permet pas de conclure.

Calcul pilier I de solvabilité II

MCS loi Poisson-composé : sur 1 an :

$$S = \sum_{\{k=1\}}^{N} W_k$$

Modèle collectif $(W_k)_{k\geq 1}$ iid et idpt de N.

Les années où il y a plus de sinistralité, les coûts de réparation baisse par rapport à celles où il y en a plus car le garagiste à toujours les mêmes coûts et donc si il augmente ces tarifs si son nombre de client baisse.

Concepts clés

Pour N on utilise généralement Poisson ou Poisson-mélange (binomiale négative)

En théorie de la ruine : on utilise un **processus de Poisson** composé. $(N_t)_{t\geq 0}$ processus de poisson.

Fonctionne très bien car la loi de poisson est stable par paramètre.

La th

Définition (Processus de Poisson)

Un processus de comptage $(N_t)_{t\geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité λ si ses temps inter-arrivée Δ_n^T)

Proposition (Superposition)

Si X et Y deux va idpt suivant une loi de poisson de paramètre λ_1 et λ_2 alors $X + Y$ suit une loi de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

Proposition (Thinning)

Cf polycopié du chapitre 1

Processus compte le nombre de sinistres

Si ils sont idpt, je vais pouvoir obtenir le nombre de sinistre responsable à partir du nb global en regardant ceux qui sont nuls

Attention N_t est le nombre cumulé de sinistres jusqu'à la date t.

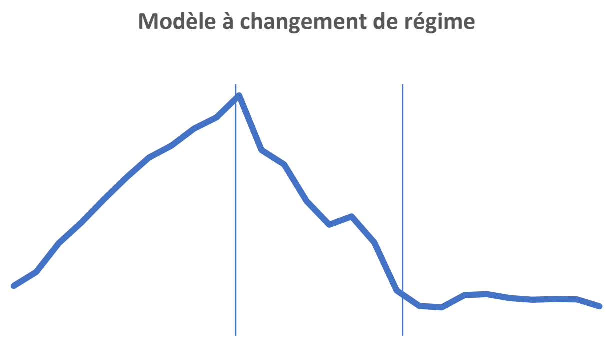
Modèle à changement de régime : modèle de HARDY

Risque d'actif échoué

En anglais : stranded assets

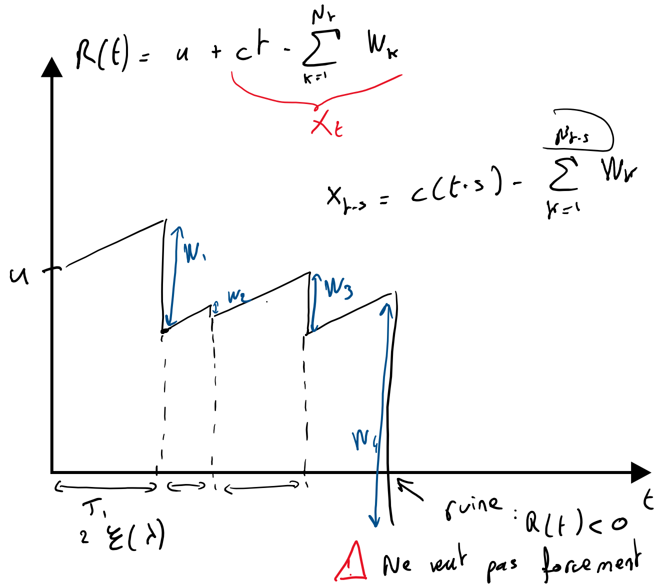
Différentes catégories :

- Green assets
- Brown assets (ex : Total)
- Vice funds (très rentable, type tabac… craint au bilan, niveau ESG)



- Transition ordonnée
- Transition brutale retardée
- Transition accéléré (moins violente que retardée)

Modèle de départ en théorie de la ruine



Ne veut pas forcément dire ruine économique

Ex : réglementaire. Non respect d'un seuil de taux de couverture du SCR dérivé de l'appétence au risque.

Dans de nombreux articles, on suppose que u est très grand. Correct pour l'étude du risque de ruine économique (proba < 0.5% à 1 an) mais pas forcément pour l'étude du respect permanent de l'appétence au risque. (proba de non respect entre 10 et 40%)

On s'intéresse à la probabilité de ruine

$$\psi(u) = P(\exists\, t > 0, R(t) < 0 | R(0) = u)$$

La probabilité de ruine (en temps infini) en partant de u.

$$\psi(u,T) = P(\exists\, t \in]0,T], R(t) < 0 \mid R(0) = u)$$

Probabilité de ruine en temps fini en partant de u avec réserve initiale u.

De plus, souvent en pratique, si la ruine survient dans le modèle classique, elle a de fortes chances de survenir rapidement.

Toutefois les assureurs sont plus intéressés par $\phi(u,5)$ ou $\phi(u,3)$.

$(N_t)_{t\geq 0}$ processus de Poisson d'intensité λ idpt de $(W_k)_{k\geq 1}$ va iid ≥ 0 de moyenne μ

Net profit condition :

$$ct > E[S_t] = \lambda\mu t$$

Rappel(Processus de poisson)

Si N suit un processus de poisson alors :

- N(0) = 0
- Accroissement indépendant
- $N_t - N_s \sim Poisson(\lambda(t-s))$ pour $s < t$

Chargement de sécurité (safety loading) : $\rho = c - \lambda\mu$

Définition (Probabilité de survie)

La probabilité de non-ruine (ou de survie) s'écrit :

$$\phi(u) = 1 - \psi(u) = P(\forall\, t > 0, u + X(t) \geq 0)$$

Où X_t la flux cotisations/sinistres

Rappel de la séance précédente

$\varphi(u) = 1 - \psi(u) \Rightarrow \psi(u) \xrightarrow[u \to \infty]{} 0$

$\Rightarrow$ résultat asymptotique

« À quelle vitesse » $\psi(u) \to 0$ qd $u \to +\infty$?

décroissance exponentielle (cas « light tailed »)

en puissance du u (+ lente) dans le cas à variation régulière (Pareto)

$\varphi(u) = C_1 + C_2 e^{-Ru}$. p60 du poly

Méthode de martingales

But : appliquer le théorème d'arrêt optimal de Doob à la martingale $(M_t)_{t\geq 0}$ définie pour $t \geq 0$ par

$$M_t = \frac{e^{-r(u+X_t)}}{E[e^{-rX_t}]}$$

Et au temps d'arrêt $\tau = \inf\{t > 0, R(t) < 0\}$

Pb : τ n'est pas borné ps.

Astuce : appliquer le théorème d'arrêt de Doob à min (τ, T) et passer à la limite quand $T \to +\infty$

Exercice

1. Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est bien une martingale
2. Appliquer le théorème d'arrêt de Doob à $(M_t)_{t\geq 0}$ et min (τ, T) puis passer à la limite

1) Soit $\Lambda_t = \frac{e^{-r(u+X_t)}}{\mathbb{E}[e^{-rX_t}]}$

- X_t est $\mathcal{F}_t$-adapté donc Λ_t l'est aussi
- $\mathbb{E}[\Lambda_t] = \mathbb{E}[e^{-ru}] < \infty$
- Soit $s<t$

$$\mathbb{E}[\Lambda_t - \Lambda_s \mid \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\left[\frac{e^{-r(u+X_s+(X_t-X_s))}}{\mathbb{E}[e^{-rX_t}]} \mid \mathcal{F}_s\right]$$

$$= \frac{e^{-r(u+X_s)}\,\mathbb{E}[e^{-r(X_t-X_s)} \mid \mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}[e^{-rX_t}]}$$

indpt de $\mathcal{F}_s$

$\mathcal{F}_s$-mesurable

$$= \Lambda(s)\,\frac{\mathbb{E}[e^{-rX_s}]\,\mathbb{E}[e^{-r(X_t-X_s)}]}{\mathbb{E}[e^{-rX_t}]}$$

$= 1$

$$= \Lambda_s$$

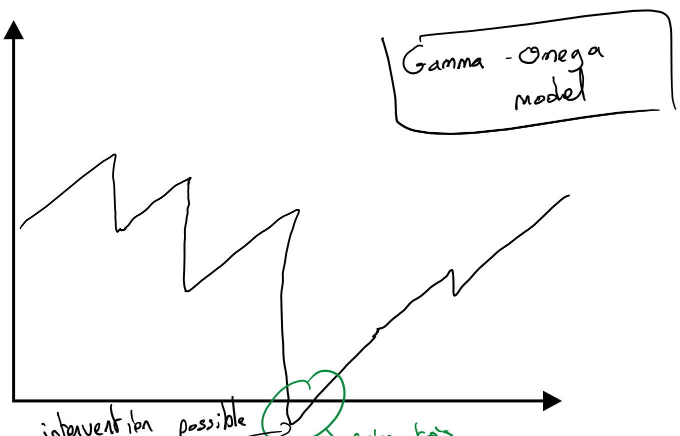
Calcul de $\psi(u)$

Calcul de $\psi(u)$ dans le cas où $W_1 \sim Exp(\frac{1}{\mu})$ borne de $\psi(u)$ dans le cas light-tailed.

Comportement asymptotique $\psi(u)$ qd $u \to +\infty$

- light-tailed $\psi(u) \underset{u\to+\infty}{\sim} C e^{-Ru}$ ← coeff de Cramer-Lundberg
- Pareto $\psi(u) \underset{u\to\infty}{\sim} K u^{-\alpha+1}$ décroissance trop + lente que dans le cas light-tailed

1. Concept de ruine souvent jugé trop « binaire »



intervention possible du superviseur qui déclarerait la ruine. En pratique ORSA Exceptionnel

ruine très éphémère ignorée par le superviseur.

Dividendes

Slide p.17

Fourchettes de taux de couverture du SCR.

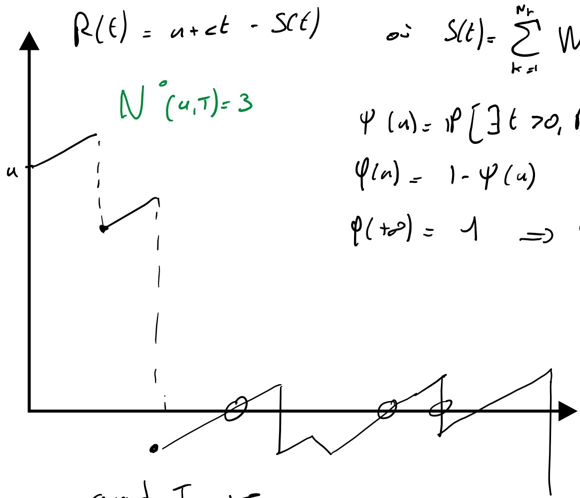
- Cible à 180%
- Fourchette : 150% - 210% (difficile à tenir sur le long terme

Fonctionnement réel : par dividende annuel ou exceptionnel contrôle impulsionnel (plus compliqué que la version dividendes versés continuellement contrôle optimal/contrôle stochastique)

Dans le modèle classique de théorie de la ruine avec dividendes, $\psi(u) = 1$.

Le problème n'est plus de savoir si on va être ruiné, mais quand, et combien de dividendes (ou redistribution aux sociétaires) auront pu être versés avant la ruine.

$R(t) = u + ct - S(t)$ où $S(t) = \sum_{k=1}^{N_t} W_k$



$\psi(u) = \mathbb{P}[\exists t > 0, R(t) < 0 \mid R(0) = u]$

$\varphi(u) = 1 - \psi(u)$

$\varphi(+\infty) = 1 \Rightarrow \psi(u) \underset{+\infty}{\to} 0$

quand $T = +\infty$

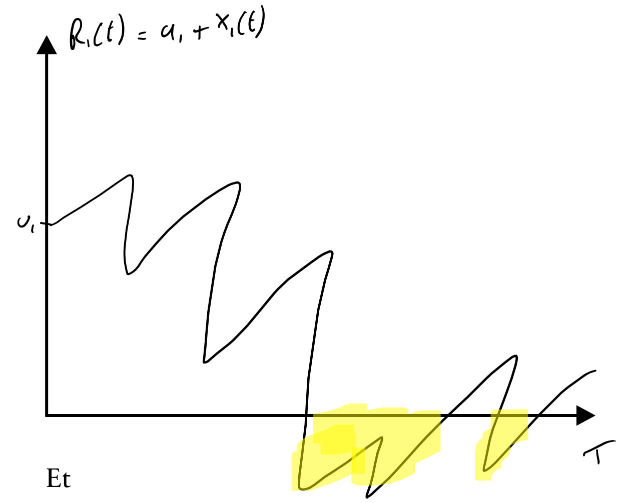
$P(N^\circ(u,+\infty)=1) = \psi(u)(1-\psi(0))$

proba d'être ruiné en partant de u

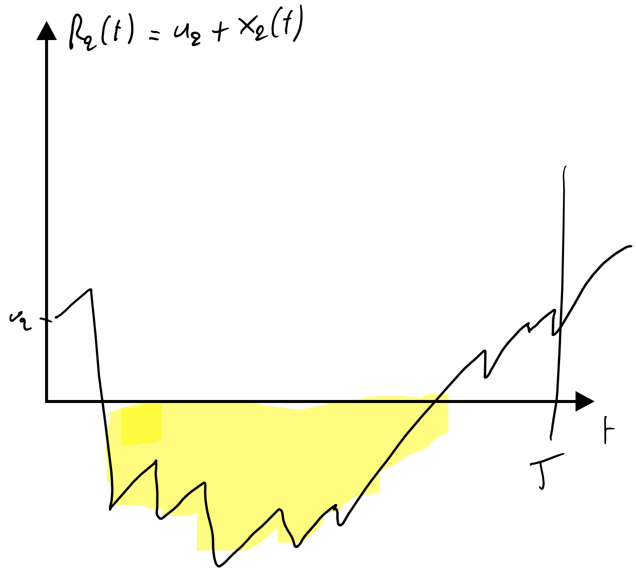
proba de ne pas retourner à 0 en partant de 0

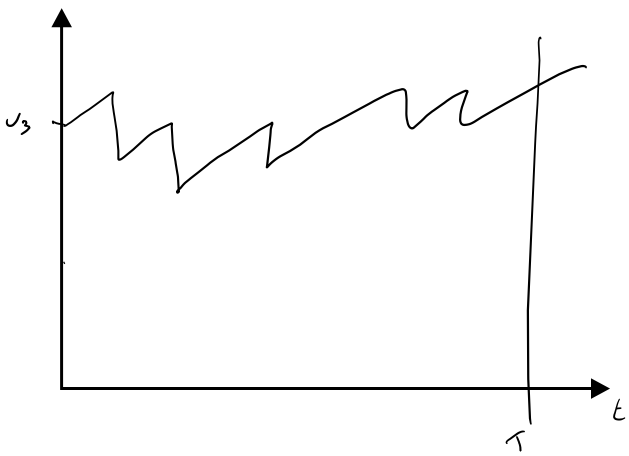
$\mathbb{P}(N^\circ(u,+\infty)=2) = \psi(u)(1-\psi(0))\,\psi(0)$

$\mathbb{P}(N^\circ(u,+\infty)=3) = \psi(u)(1-\psi(0))\,\psi(0)^2$



Et





$u = u_1 + u_2 + u_3$

absence de fongibilité du capital

Notes sur l'article

Idée : l'hypothèse de l'indépendance de N et des W ainsi que les W entre eux est très forte.

Objectif : introduire une structure de dépendance entre ces variables.

Etape 1 : Loi de poisson composé avec des sinistres complètement monotone et une copule archimédienne