TD 1: RAPPEL D'ANALYSE RÉELLE ET DÉNOMBREMENT

Intégration L3– 2020
P.-O. Goffard & C. Jahel

---

1. Etudier la convergence des séries de terme générale u_n suivante
   (a) $u_n = \frac{(n^2+1)2^n}{(2n+1)!}$
   (b) $u_n = \left(\frac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$
   (c) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} e^{-n}$
   (d) $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}$
   (e) $u_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$
2. Soit (a_n) une suite numérique dont la suite des sommes partielles est supposées bornée. Soit (f_n) une suite décroissante de réels positifs de limite nulle. Montrer que la série de termes générale $a_n f_n$ converge. Indication: Penser au critère de Cauchy pour les suites.
3. Calculer les limites $\overline{\lim}_{n\to+\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)$ et $\underline{\lim}_{n\to+\infty} (-1)^n \left(1+\frac{1}{n}\right)$
4. Soit Ω un ensemble non vide et $(\Omega)_i \in I$ une partition de Ω avec I un ensemble fini d'indice. Montrer que $(A \cap \Omega_i)_{i\in I}$ est une partition de $A \subset \Omega$ non vide.
5. Combien d'injection $f : A \mapsto B$ peut on définir en admettant que $\text{Card}(A) = p \leq n = \text{Card}(B)$?
6. On dispose de n euros que l'on souhaite distribuer à $k < n$ personnes
   (a) En admettant que chaque personne doit recevoir au moins 1 euro, combine de répartition sont possibles?
   (b) En relachant la contrainte précédente (possibilité que quelqu'un ne reçoive rien), combien de répartition sont possibles?
7. Montrer que l'ensemble
$$\Omega = \{x \in \mathbb{R} \; ; \; \exists P \in \mathbb{Z}[x] \backslash \{0\} \text{ t.q. } P(x) = 0\}$$
   des réels algébriques est dénombrable. Indication: Commencer par étudier $\mathbb{Z}[x]$
8. Soit $f : X \mapsto \mathcal{P}(X)$ arbitraire, montrer que f n'est pas surjective en considérant $A = \{x \in X \; ; \; x \notin f(x)\}$. $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ est-il dénombrable?
9. Soit $\theta : \mathcal{P}(X) \mapsto \mathcal{P}(X)$ croissant pour l'inclusion,
   (a) Montrer que
$$\mathcal{F} = \{A \in \mathcal{P}(X) \; ; \; A \subset \theta(A)\},$$
   est non vide et stable par union arbitraire.
   (b) Montrer que $\mathcal{F}$ admet un plus grand élément E qui vérifie $\theta(E) = E$.
   (c) Soit $f : X \mapsto Y$ et $g : Y \mapsto X$ injectives, construire $h : X \mapsto Y$ bijective. Indication: Utiliser a) et b) avec $\theta : \mathcal{P}(X) \mapsto \mathcal{P}(X)$ telle que $\theta(A) = [g\,(f(A)^c)]^c$.