Exercice - Portefeuille orthogonal

On se place sur un marché à n actifs risqués. Considérons deux portefeuille P et Z optimaux au sens de Markowitz (solutions du problème d'optimisation vu en cours).

Definition 0.1 *Le portefeuille Z est dit orthogonal au portefeuille P si la covariance entre les rentabilités aléatoires $\tilde{R}_P$ et $\tilde{R}_Z$ est nulle :*

$$cov(\tilde{R}_P, \tilde{R}_Z) = 0.$$

On suppose Z et P orthogonaux.

1. Notons $\mu_P = \mathbb{E}(\tilde{R}_P)$ et $\mu_Z = \mathbb{E}(\tilde{R}_Z)$ leurs rendements espérés.Montrer que que

$$\mu_Z = \frac{B - A\mu_P}{A - C\mu_P},$$

avec A, B et C les notations du cours.

2. Soit $\sigma_P^2 = Var(\tilde{R}_P)$. Comme P est optimal au sens de Markowitz, une relation existe entre σ_P^2 et μ_P. Preciser-la.
3. Montrer que

$$\frac{\mu_P - \mu_Z}{\sigma_P^2} = \frac{A^2 - BC}{A - C\mu_P}.$$

4. Tout portefeuille I optimal au sens de Markowitz a la forme $w_I = \frac{1}{BC-A^2}(X + Y\mu_I)$. Préciser qui est X et Y.
5. Soit V un portefeuille quelconque optimal au sens de Markowitz, de rentabilité aléatoire $\tilde{R}_V$ et $\mu_V = \mathbb{E}(\tilde{R}_V)$. Ecrire $cov(\tilde{R}_V, \tilde{R}_P)$ en fonction de A, B, C, μ_V, μ_P et Σ (la matrice de variance-covariance des n actifs risqués disponibles sur le marché).
6. Montrer que tout portefeuille V optimal au sens de Markowitz vérifie :

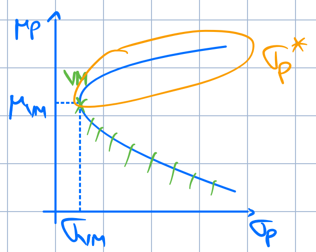
$$\mu_V - \mu_Z = \frac{cov(\tilde{R}_V, \tilde{R}_P)}{\sigma_P^2}(\mu_P - \mu_Z).$$

Rappel cours :

Modèle de Markowitz

$$\begin{cases} \min\limits_{w \in \mathbb{R}^n} w' \Sigma w \\ \text{s.c } w' 1_{\mathbb{R}^n} w = 1 \\ \qquad w' \mu = \mu_{obj} \end{cases}$$

$$w^* = \frac{1}{BC - A^2} \Big(\overbrace{B \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n} - A \Sigma^{-1} \mu}^{X} \Big) + \frac{1}{BC - A^2} \Big(\overbrace{C \Sigma^{-1} \mu - A \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n}}^{Y} \Big) \underbrace{\mu_{obj}}_{\mu_p}$$



$$w_{VM} = \frac{1}{C} \Sigma^{-1} 1_{\mathbb{R}^n}$$

$$\mu_{VM} = \frac{A}{C} \quad \text{et} \quad \sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{C}}$$

L'équat° de l'hyperbole : $\sigma_p^2 = \frac{1}{BC - A^2} (C \mu_p^2 - 2A \mu_p + B)$

équation Frontière Efficiente (FE) $\nearrow$ avec $\mu_p \geq \mu_{VM}$

$\tilde{R}_i$ = le rendement aléatoire du titre i.

$\mathbb{E}[\tilde{R}_i] = \mu_i$

$Var(\tilde{R}_i) = \sigma_i^2$

Σ = la matrice de var-cov de $\tilde{R}_i$

$\tilde{R} = (\tilde{R}_1 \text{ — } \tilde{R}_m)'$ $\qquad \mu = (\mu_1 \text{ — } \mu_m)'$

$\tilde{R}_p$ = le rendement d'un portefeuille P.

$\tilde{R}_p = w_p' \tilde{R}$ où w_p = le vecteur poids (portefeuille)

$\mathbb{E}[\tilde{R}_p] = w_p' \mu$.

Exercice :

4) I est optimal au sens de Markowitz, il a la forme ω^*

$$X = B\Sigma^{-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} - A\Sigma^{-1}\mu.$$

$$Y = C\Sigma^{-1}\mu - A\Sigma^{-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}$$

7) P, Z optimaux $\Rightarrow \begin{cases} \omega_P = \frac{1}{BC-A^2}(X + Y\mu_P) \\ \omega_Z = \frac{1}{BC-A^2}(X + Y\mu_Z) \end{cases}$

P, Z orthogonaux $\overset{\text{déf}}{\Longrightarrow} Cov(\tilde{R}_P, \tilde{R}_Z) = 0$

Or $\tilde{R}_P = \omega_P'\tilde{R}$ et $\tilde{R}_Z = \omega_Z'\tilde{R}$

$$\Rightarrow \underbrace{Cov(\omega_P'\tilde{R}, \omega_Z'\tilde{R})}_{\omega_P'\Sigma\omega_Z} = 0$$

On remplace ω_P et ω_Z et on obtient :

$$\frac{1}{BC-A^2}(X+Y\mu_P)'\Sigma\frac{1}{BC-A^2}(X+Y\mu_Z) = 0$$

$$\Rightarrow (X+Y\mu_P)'\Sigma(X+Y\mu_Z) = 0$$

scalaire

$$\Rightarrow (X' + Y'\mu_P)\Sigma(X+Y\mu_Z) = 0$$

$$\Rightarrow X'\Sigma X + \mu_P Y'\Sigma X + \mu_Z X'\Sigma Y + \mu_P\mu_Z Y'\Sigma Y = 0$$

$$\Rightarrow X'\Sigma X + \mu_P Y'\Sigma X + \mu_Z(X'\Sigma Y + \mu_P Y'\Sigma Y) = 0$$

$$\Rightarrow \mu_Z = -\frac{X'\Sigma X + \mu_P Y'\Sigma Y}{X'\Sigma Y + \mu_P Y'\Sigma Y} \quad (1)$$

scalaires

où $X'\Sigma X = (B\Sigma^{-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} - A\Sigma^{-1}\mu)'\Sigma(B\Sigma^{-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} - A\Sigma^{-1}\mu)$

$$= (B\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}'\Sigma^{-1} - A\mu'\Sigma^{-1})\Sigma(B\Sigma^{-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} - A\Sigma^{-1}\mu)$$

$$= B^2\underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}'\Sigma^{-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}}_{C} - AB\underbrace{\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}'\Sigma^{-1}\mu}_{A} - AB\underbrace{\mu'\Sigma^{-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}}_{A} + A^2\underbrace{\mu'\Sigma^{-1}\mu}_{B}$$

$$= B^2C - A^2B = B(BC-A^2)$$

De la même manière, on calcule :

$$X'\Sigma Y = Y'\Sigma X = -A(BC-A^2)$$

$$Y'\Sigma Y = C(BC-A^2)$$

On remplace dans (1) et on obtient :

$$\mu_z = -\frac{B(BC-A^2) - \mu_p A(BC-A^2)}{-A(BC-A^2) + \mu_p C(BC-A^2)} = \frac{B - A\mu_p}{A - C\mu_p}$$

2) C'est la relation d'hyperbole

L'équat° de l'hyperbole : $\sigma_p^2 = \frac{1}{BC-A^2}(C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B)$

3) On veut mq $\frac{\mu_p - \mu_z}{\sigma_p^2} = \frac{A^2 - BC}{A - C\mu_p}$

D'après 1) $\mu_z = \frac{B - \mu_p A}{A - C\mu_p}$ et d'après 2) $\sigma_p^2 = \frac{1}{BC-A^2}(C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B)$

$$\Rightarrow \frac{\mu_p - \mu_z}{\sigma_p^2} = \frac{\mu_p - \frac{B-\mu_p A}{A - C\mu_p}}{\frac{1}{BC-A^2}(C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B)} = \frac{\frac{\mu_p A - \cancel{C\mu_p^2 - B + \mu_p A}}{A - C\mu_p}}{\frac{1}{BC-A^2}(\cancel{C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B})}$$

$$= \frac{A^2 - BC}{A - C\mu_p}$$

5) $V_{optimal} \Rightarrow w_v = \frac{1}{BC-A^2}(X + Y\mu_v)$

$$Cov(\tilde{R}_v, \tilde{R}_p) = cov(w_v'\tilde{R}, w_p'\tilde{R}) = w_v'\Sigma w_p$$

$$= \frac{1}{(BC-A^2)^2}(X + Y\mu_v)'\Sigma(X + Y\mu_p)$$

$$= \frac{1}{(BC-A^2)^2}(X'\Sigma X + X'\Sigma Y\mu_p + \mu_v Y'\Sigma X + \mu_p\mu_v Y'\Sigma Y)$$

Calculés précédemment

$$= \frac{1}{(BC-A^2)^2} \times \left[B\cancel{(BC-A^2)} - \mu_v A \cancel{(BC-A^2)} - \mu_p A \cancel{(BC-A^2)} + \mu_p \mu_v C \cancel{(BC-A^2)} \right]$$

$$= \frac{1}{(BC-A^2)^2} \left(B - \mu_v A - \mu_p A + \mu_p \mu_v C \right)$$

6) Il faut mq $\mu_v = \mu_z = \dfrac{Cov(\tilde{R}_v, \tilde{R}_p)}{\sigma_p^2} (\mu_p - \mu_z)$

Or $Cov(\tilde{R}_v, \tilde{R}_p) \times \dfrac{\mu_p - \mu_z}{\sigma_p^2} \underset{5)+3)}{=} \dfrac{1}{\cancel{BC-A^2}} (B - \mu_v A - \mu_p A + \mu_p \mu_v C) \times \dfrac{\cancel{A^2 - BC}}{A - C\mu_p}$

$$= - \frac{(B - \mu_v A - \mu_p A + \mu_p \mu_v C)}{A - C\mu_p}$$

$$= \frac{-B + \mu_v (A - \mu_p C) + \mu_p A}{A - C\mu_p}$$

$$= \mu_v - \frac{B - \mu_p A}{A - C\mu_p} = \mu_v - \mu_z .$$