Théorie des Options

Anne EYRAUD-LOISEL

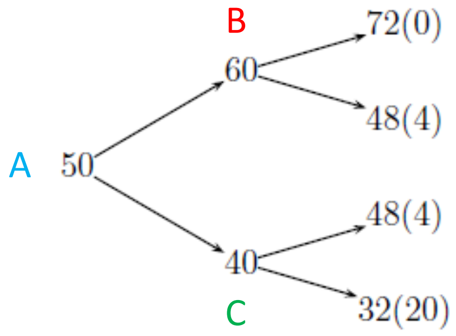
Cours numéro 9-1

23/03/2023

Exemple avec une option de vente

- Les procédures décrites dans ce chapitre sont applicables à l'évaluation de n'importe quel produit dérivé tant que le prix de l'actif sous-jacent varie de façon binomiale. On va donc appliquer ce qu'on a vu à un PUT européen.
- Considérons un put européen à 2 ans, de prix d'exercice 52€ sur une action cotée actuellement 50€. La durée de vie de l'option est divisée en 2 périodes d'un an chacune, et à chaque période, le cours de l'action augmente de 20% ou baisse de 20%. Le taux sans risque est supposé égal à 5%.
- L'arbre de cette situation est représenté sur le graphique ci-contre
- Quelle est la probabilité risque neutre q ?
- Quel est le prix de cette option ?

Graphique 3.8 : Variations du cours de l'action (valeur de l'option)



$d = 0{,}8$ et $u = 1{,}2$; $q = \dfrac{e^{0{,}05 \times 1} - 0{,}8}{1{,}2 - 0{,}8} = 0{,}628178$

$f_u = e^{-rT}\left(q f_{uu} + (1-q) f_{ud}\right) = 1{,}41475$

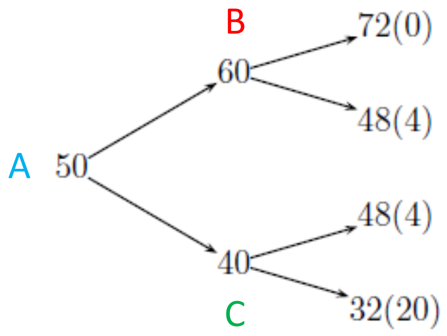
$f_d = e^{-rT}\left(q f_{du} + (1-q) f_{dd}\right) = 9{,}46393$

$f = e^{-2rT}\left(q^2 f_{uu} + 2q(1-q) f_{ud} + (1-q)^2 f_{dd}\right)$
$= 4{,}19265$ €

Exemple avec une option de vente

- Les procédures décrites dans ce chapitre sont applicables à l'évaluation de n'importe quel produit dérivé tant que le prix de l'actif sous-jacent varie de façon binomiale.
- Considérons un put européen à 2 ans, de prix d'exercice 52€ sur une action cotée actuellement 50€. La durée de vie de l'option est divisée en 2 périodes d'un an chacune, et à chaque période, le cours de l'action augmente de 20% ou baisse de 20%. Le taux sans risque est supposé égal à 5%.
- L'arbre de cette situation est représenté sur le graphique ci-contre
- La probabilité risque-neutre de hausse, q est donnée, puisque d = 0, 8 et u = 1, 2 par :

Graphique 3.8 : Variations du cours de l'action (valeur de l'option)



$$q = \frac{e^{0,05\times 1} - 0,8}{1,2 - 0,8} = 0,6282$$

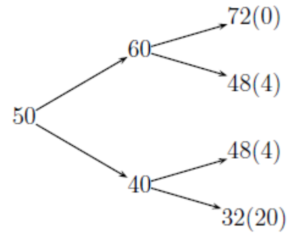
Exemple avec une option de vente

- Les valeurs finales possibles de l'action sont 72€, 48€ et 32€.
- Dans ce cas, $f_{uu} = 0$, $f_{ud} = f_{du} = 4$, et $f_{dd} = 20$.
- On déduit que

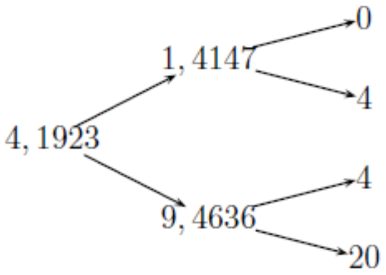
$$f = e^{-2rt}(q^2 \times f_{uu} + 2q(1-q) \times f_{ud} + (1-q)^2 f_{dd}) = \mathbf{4,1923\ €}$$

- La valeur du put est donc 4,1923€. Ce résultat peut également être obtenu en calculant les valeurs de l'option à chaque nœud, et à chaque date, en débutant par la fin (ce procédé est appelé induction arrière).
- Exercice : **retrouver le même prix par induction arrière**
- L'approche par induction/arbre permet l'obtention des valeurs intermédiaires de l'option et donc des prix de l'option dans tous les états de la nature possible.

Graphique 3.8 : Variations du cours de l'action (valeur de l'option)

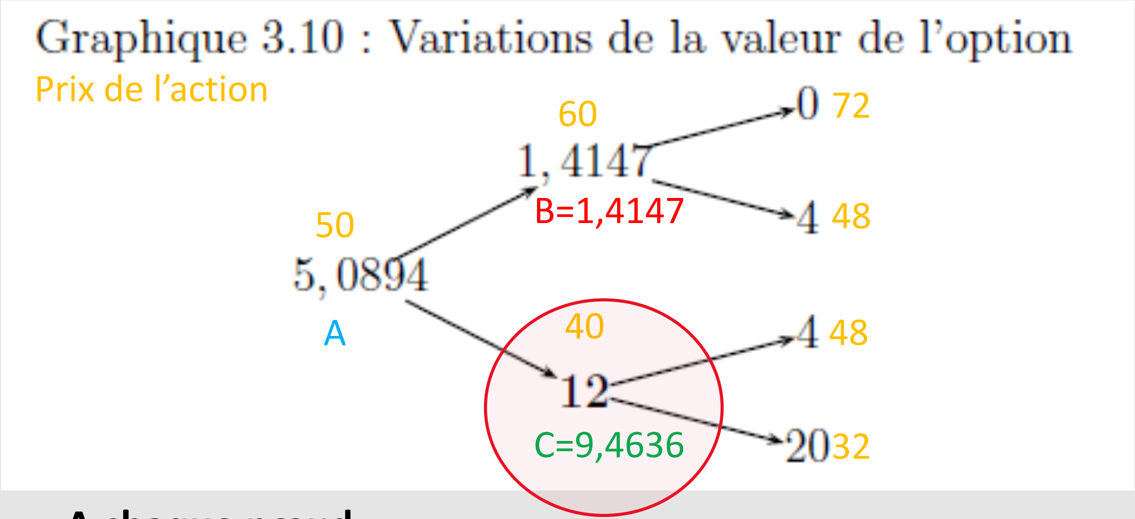


Graphique 3.9 : Variations de la valeur de l'option



Les Options américaines

- Jusqu'à présent, toutes les options considérées étaient de type européen. Nous allons maintenant aborder succinctement la façon de traiter les options de type américain à l'aide d'arbres binomiaux.
- La procédure consiste à calculer la valeur sur chaque nœud de l'arbre, par induction arrière, c'est-à-dire en partant de l'échéance et en revenant vers la date initiale, tout en **testant à chaque nœud s'il est optimal ou non d'exercer prématurément l'option.**
- La valeur de l'option sur les nœuds terminaux (à la date d'échéance) est la même que celle des options européennes, puisque à cette date il n'y a plus de différence entre ces 2 types d'options.
- Par contre, sur les nœuds intermédiaires, la valeur de l'option est le maximum entre
  - La valeur donnée par l'équation de pricing risque neutre
  - Le payoff procuré par l'exercice anticipé de l'option



A chaque nœud :
Valeur = max (valeur pricing par arbre ; valeur d'exercice)

Les Options américaines

- Reprenons l'exemple précédent en supposant que l'option de vente est a présent une **option américaine**. Ici graphique modifié pour option américaine.
- valeurs de l'action et probabilités inchangées, ainsi que valeur de l'option sur les nœuds terminaux.
- **Au nœud B**, l'équation d'évaluation risque-neutre attribue la valeur 1,4147 à l'option, tandis que le flux engendré par un exercice anticipé serait négatif (=-8), donc il n'est pas optimal d'exercer l'option au nœud B, et sa valeur est donc bien 1,4147.
- **Au nœud C** en revanche, l'équation d'évaluation risque-neutre donne 9,4636 comme valeur de l'option, tandis que le flux lié à un exercice anticipé serait de 12. Dans ce cas, un **exercice anticipé est optimal,** et la valeur de l'option au nœud C est égale à 12.
- **Au nœud A**, la valeur calculée par application de la formule d'évaluation risque-neutre est alors :

$A = e^{-0,05\times 1}(q \times 1,4147 + (1-q) \times 12) = 5,0894$ €

et le payoff d'un exercice anticipé est égal à 2. Dans ce cas, comme pour le nœud B, il n'est pas optimal d'exercer prématurément l'option et sa valeur est bien 5, 0894.

Le Delta

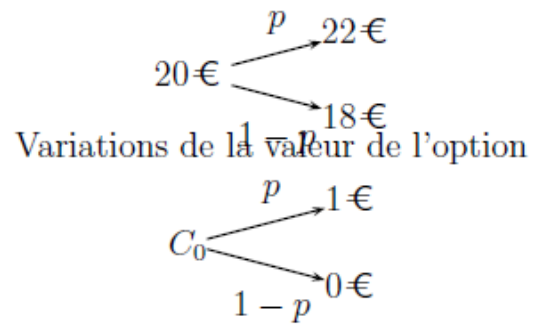
- A ce stade, nous faisons une première présentation du delta, paramètre essentiel de la gestion et la couverture des options.
- Rappel : Le delta d’une option se définit comme la variation de la valeur de l’option rapportée à la variation de prix de l’action sous-jacente.
- Il représente le nombre d’unités d’action à détenir pour chaque option vendue, afin de créer un portefeuille sans risque. Il est identique au introduit au début de ce chapitre (exemple introductif).
- La construction d’une telle couverture est parfois appelée ”couverture delta-neutre” ou delta hedging. Le delta d’un call est positif, alors que le delta d’un put est négatif, puisque le prix d’un call est une fonction croissante du prix de l’action sous-jacente, et le prix du put une fonction décroissante.

Le Delta - Exemple

- Pour l'exemple du début de chapitre, sur la graphique 3.1, la valeur du delta du call peut être calculé de la manière ci-contre
- Ce ratio traduit le fait que lorsque le cours de l'action varie de 18€ à 22€ , la valeur de l'option varie de 0€ à 1€.
- C'est la quantité d'actions qui doit être contenue dans un portefeuille de couverture de l'option.

$$\Delta = \frac{1-0}{22-18} = 0,25$$

Graphique 3.1 : Variations du cours de l'action

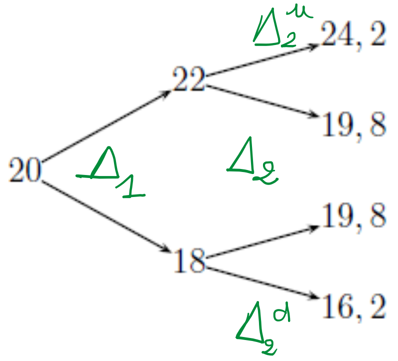


Le Delta - Exemple

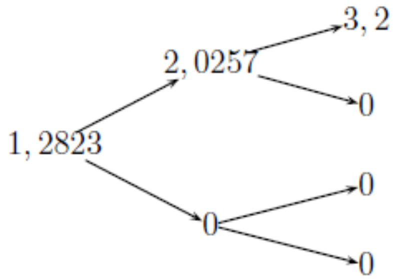
- Calculer les valeurs du delta à chaque période
- Sur les graphiques 3.3 et 3.6, le delta correspondant aux variations du cours de l'action pour la première période est
- Celui correspondant à la seconde période en cas de hausse :
- Et celui correspondant à la seconde période en cas de baisse :

$\Delta_2^u = \frac{3,2-0}{24,2-19,8} = 0,7273$; $\Delta_2^d = 0$; $\Delta_1 = \frac{2,0257-0}{22-18} = 0,506425$

Graphique 3.3 : Variations du cours de l'action



Graphique 3.6 : Variations de la valeur de l'option



Le Delta - Exemple

- Sur les graphiques 3.3 et 3.6, le delta correspondant aux variations du cours de l'action pour la première période est

$$\Delta_1 = \frac{2,0257 - 0}{22 - 18} = 0,5064$$

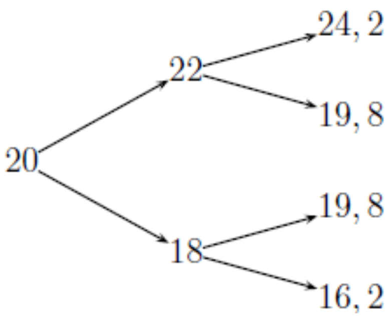
- Celui correspondant à la seconde période en cas de hausse :

$$\Delta_2 = \frac{3,2 - 0}{24,2 - 19,8} = 0,7273$$

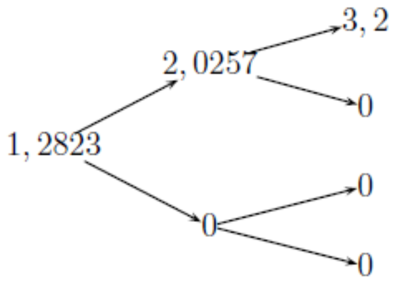
- Et celui correspondant à la seconde période en cas de baisse :

$$\Delta_2' = \frac{0 - 0}{19,8 - 16,2} = 0$$

Graphique 3.3 : Variations du cours de l'action



Graphique 3.6 : Variations de la valeur de l'option



Le Delta

- Ces quantités correspondent aux quantités d’actions qu’il est nécessaire de posséder sur la période correspondante pour couvrir l’option.
- Cet exemple à deux périodes montrent que le delta change à chaque date, pour la période suivante. C’est une couverture dite **”dynamique”** (à opposer aux stratégies dites ”statiques”).
- Dans ce cas, le delta à la date t = 1 passe de 0,5064 à 0,7273 ou à 0. Dans le but de maintenir une couverture sans risque, il faut **ajuster** le nombre d’actions détenues en portefeuille à chaque période.
- Une stratégie de couverture de l’option consiste donc à acheter 0,5064 actions à l’instant initial, sur la première période, puis sur la 2ème période réajuster sa position soit en rachetant 0,2209 actions supplémentaires afin d’en détenir 0,7273 en cas de hausse de l’action, soit en revendant toutes les actions en cas de baisse (l’option n’a plus aucune valeur, inutile donc de la couvrir).

Exercice

- **Exercice 1.1** Trouver la stratégie de delta hedging du put européen décrit dans la section 3 (graphiques 3.8 et 3.9) : PUT européen à 2 ans sur 2 périodes de strike 52€ sur une action cotant 50€.

Exercice 1.1 :

Le delta du PUT sur la 1ère période est donné par :

$$\Delta_1 = \frac{1,4147 - 9,4636}{60 - 40} = -0,4024$$

Pour la seconde période, il vaut

$$\Delta_2 = \frac{0 - 4}{72 - 48} = -0,1667 \quad \text{en cas de hausse}$$

$$\Delta_2' = \frac{4 - 20}{48 - 32} = -1 \quad \text{en cas de baisse}$$

→ **Stratégie :**

Période 1 : Vente à découvert de 0,4024 actions pour couvrir l'option de vente.

Période 2 : Réajustement de la position

* Rachat de 0,2357 actions afin de n'en détenir que −0,1667 en cas de hausse.
* Encore vente à découvert de 0,5976 actions afin d'en détenir −1 en cas de baisse.

Options portant sur d’autres sous-jacents

Comment adapter cette méthode de pricing quand le sous-jacent n’est pas une simple action ?

Options sur actif versant des dividendes

- Option sur actions payant des dividendes Considérons une action payant un dividende au taux v. La rentabilité de ce titre est la somme du taux de dividende et du gain en capital. Elle doit être égale au taux sans risque dans l'univers risque-neutre.
- En conséquence, sous la proba risque neutre, le **taux de croissance** du prix est **r – v**. S_i le prix est S_0, sa valeur espérée après un délai t est donnée par l'équation du haut
- De sorte que la probabilité risque neutre pour l'évaluation d'options avec dividende soit q ci-contre
- Comme dans le cas des actions ne versant pas de dividendes, on tient compte de la volatilité en retenant $u = e^{\sigma\sqrt{t}}$ et $d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{t}}$.
- Si on suppose que l'indice procure un taux de dividende v, l'évaluation d'une option sur indice relève alors de la même démarche que celle d'une option sur une action ayant un taux de dividende v.

Rentabilité du titre avec dividendes

$$\underbrace{\left(q S_0 u + (1-q) S_0 d\right)}_{\text{esp. de gain en capital}} \underbrace{e^{v\Delta t}}_{\text{gain div.}} = S_0 e^{r\Delta t}$$

$$qS_0u + (1-q)S_0d = S_0e^{(r-v)\Delta t}$$

$$q = \frac{e^{(r-v)\Delta t} - d}{u - d}$$

$$q = \frac{A - d}{u - d}$$

$$f = \frac{1}{R} E^{Q}(f_1)$$

Exercice

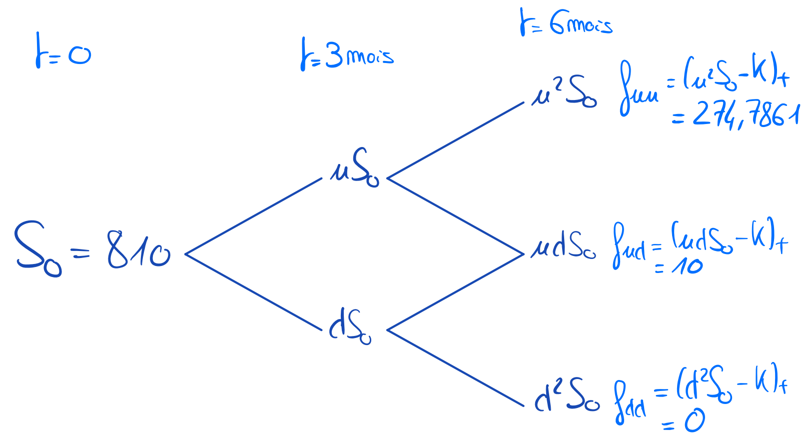
- **Exercice 1.2** Option sur indices
- Soit un indice d'actions qui vaut aujourd'hui 810 points, ayant une volatilité de 20% et un taux de dividende de 2%. Le taux sans risque est de 5% annuel. Evaluer un call à 6 mois sur cet indice au prix d'exercice de 800 à l'aide d'un arbre à 2 périodes.

$q = \frac{A - d}{u - d}$ $\quad f = \frac{1}{R^2} \mathbb{E}_Q[f_2]$

Exercice 1.2 : $S_0 = 810$ $\quad \sigma = 20\%$ $\quad V = 2\%$ $\quad r = 5\%$ $\quad T = 6$ mois $\quad K = 800$

- **Exercice 1.2** Option sur indices
- Soit un indice d'actions qui vaut aujourd'hui 810 points, ayant une volatilité de 20% et un taux de dividende de 2%. Le taux sans risque est de 5% annuel. Evaluer un call à 6 mois sur cet indice au prix d'exercice de 800 à l'aide d'un arbre à 2 périodes.

$q = \frac{A-d}{u-d}$ $\quad f = \frac{1}{R^2}\mathbb{E}_Q[f_2]$



$$u = e^{\sigma\sqrt{T/n}} = e^{0{,}2 \times \sqrt{6/12}} = 1{,}1519 \quad \text{et} \quad d = 1/u = 0{,}8681 \qquad R = e^{r\Delta t} = 1{,}0253$$

$$q = \frac{A-d}{u-d} \quad \text{avec } A = e^{(r-V)\Delta t} \implies q = \frac{e^{(0{,}05-0{,}02)\,6/12} - 0{,}8681}{1{,}1519 - 0{,}8681} = 0{,}5180$$

$$f = \frac{1}{R^2}\mathbb{E}_Q[f_2] = \frac{1}{R^2}\left[q^2 f_{uu} + 2q(1-q)f_{ud} + (1-q)^2 f_{dd}\right]$$

$$= 74{,}8858$$

La valeur du CALL est donc de 74,89 €

Options sur devises

- De la même manière, une devise peut être vue comme un actif payant un taux de dividende égal au taux sans risque étranger, r_f .
- Par analogie avec ce qui vient d'être fait pour les options sur indices, on peut évaluer les options sur devises à l'aide des équations précédentes, en posant $A = e^{(r-r_f)t}$

$$\underbrace{\left(qS_0u+(1-q)S_0d\right)}_{\text{esp. de gain en capital}}e^{q\Delta t} = S_0e^{r\Delta t}$$

↑ gain div.

- **Exercice 1.3** Option sur devises
- Le dollar australien cote 0,61 USD, et ce taux de change a une volatilité de 12%.
- Le taux sans risque australien est de 7%, alors que le taux US est de 5%. Evaluer un call américain (en USD) à 3 mois avec prix d'exercice de 0,60, et un arbre à 3 périodes.

Exercice 1.3 : $\sigma_{AUS} = 12\%$ $\quad r_{AUS} = 7\%$ $\quad r_{US} = 5\%$ $\quad T = 3$ mois $\quad K = 0{,}60$ $\quad m = 12$ mois

Taux de change actuel $\longrightarrow S = 0{,}61$

$$\underbrace{\left(q S_0 u + (1-q) S_0 d\right)}_{\text{esp. de gain en capital}} e^{r \Delta t} = S_0 e^{r \Delta t}$$

↑ gain div.

- **Exercice 1.3** Option sur devises
- Le dollar australien cote 0,61 USD, et ce taux de change a une volatilité de 12%.
- Le taux sans risque australien est de 7%, alors que le taux US est de 5%. Evaluer un call américain (en USD) à 3 mois avec prix d'exercice de 0,60, et un arbre à 3 périodes.

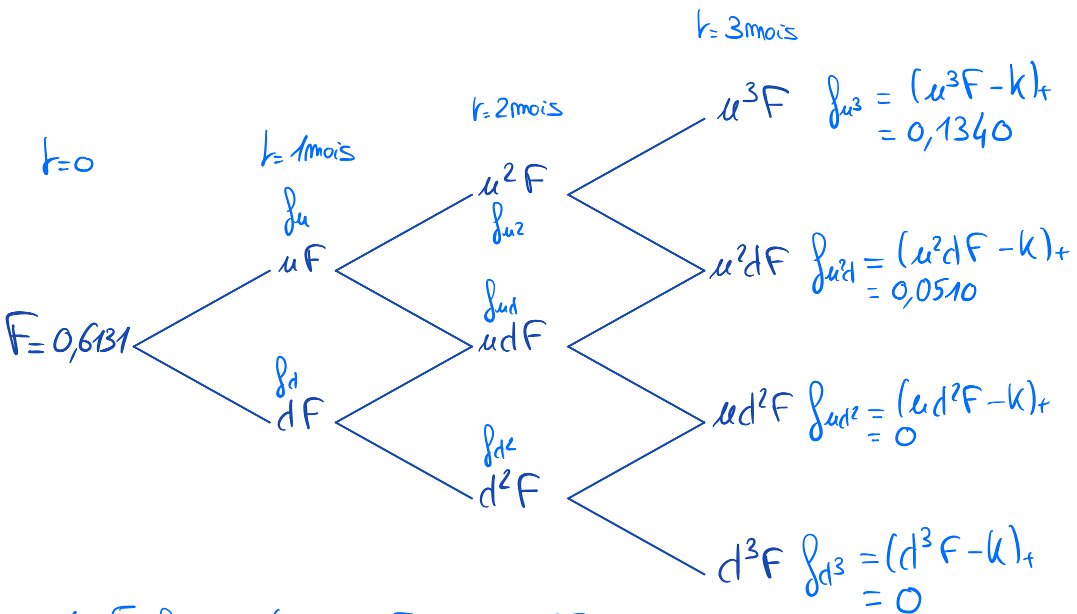
Calcul du taux de change à terme F :

$$F = S e^{(r_{AUS} - r_{US}) T/m}$$
$$= 0{,}61\, e^{(0{,}07 - 0{,}05) 3/12} = 0{,}6131 \text{ USD}$$

$$u = e^{\sigma_{AUS} \sqrt{T/m}} = e^{0{,}12 \times \sqrt{3/12}} = 1{,}0618$$

$$d = 1/u = 0{,}9418$$

$$R = e^{r_{US} \times T/m} = 1{,}0126 \qquad q = \frac{R-d}{u-d} = 0{,}5898$$



$$f_{uu} = \frac{1}{R}\left[q f_{u^3} + (1-q) f_{u^2d}\right] = 0{,}0987$$

$$f_{ud} = \frac{1}{R}\left[q f_{u^2d} + (1-q) f_{ud^2}\right] = 0{,}0297$$

$$f_{d^2} = 0$$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{R^2}\left[q^2 f_{uu} + 2q(1-q) f_{ud} + (1-q)^2 f_{d^2}\right] = 0{,}0475$$

La valeur du CALL américain est donc de 0,0475 USD

Options sur contrats Futures

- Les options sur contrat futures Cela ne coûte rien de rendre une position longue sur un contrat futures. Il s'ensuit que, dans l'univers risque-neutre, le taux de croissance espéré de la valeur d'un tel contrat est nul.
- Comme précédemment, si on note F_0 le prix future initial, le prix futur espéré est toujours le même, F_0. On en déduit les équations ci-contre.
- Et on peut à nouveau utiliser l'évaluation risque neutre du modèle binomial pour évaluer une option sur un tel contrat, avec A=1.
- **Exercice 1.4** Un prix future est aujourd'hui à 31 et a une volatilité de 30%. Le taux sans risque est de 5% annuel. Evaluer le prix d'un put américain à 9 mois sur ce contrat avec un arbre à 3 périodes et un prix d'exercice de 30.

$$quF_0 + (1-q)dF_0 = F_0$$

$A = 1$

$$q = \frac{1-d}{u-d}$$

Théorie des Options

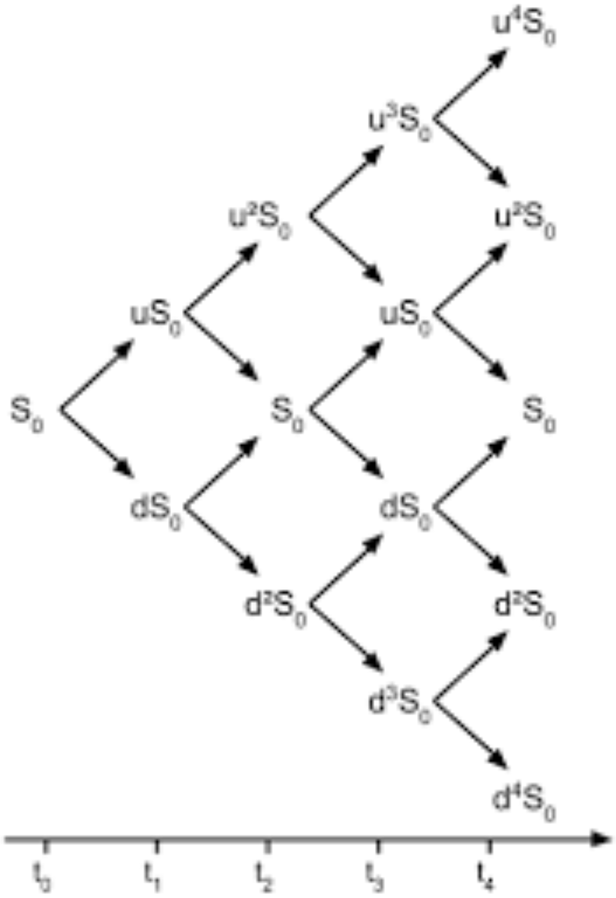
Anne EYRAUD-LOISEL

Cours numéro 9-2

24/03/2022

Arbre binomial

Modèle à n périodes



Modélisation du marché

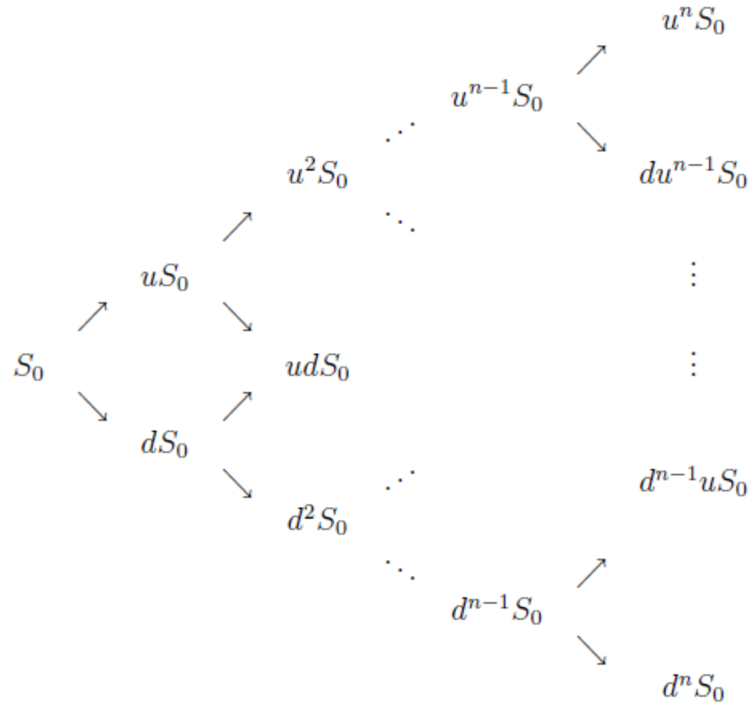
- On reprend la même modélisation que dans le chapitre précédent, mais dans un monde à **n périodes**. On considère un intervalle de temps [0, T] divisé en n périodes
- $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$.
- Le marché est composé de 2 actifs
  - un actif sans risque S^0_t :

$1 \rightarrow (1 + r) \rightarrow (1 + r)^2 \rightarrow (1 + r)^3 \rightarrow ... \rightarrow (1 + r)^n$

Ou

$1 \rightarrow e^{rt} \rightarrow e^{2rt} \rightarrow e^{3rt} \rightarrow ... \rightarrow e^{nrt}$

  - et un actif risqué S_t : voir arbre
- L'arbre est **recombinant** : à l'instant t, l'actif peut prendre i+1 valeurs différentes.



Ω: espace d'états

- Ensemble des états du monde : Ω est l'ensemble des trajectoires possibles pour l'actif risqué. C'est l'ensemble des n-uplets $(\omega_1, \dots, \omega_n)$ tels que chaque ω_i prenne deux valeurs possibles, ω^d_i ou ω^u_i.

$$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_n), \forall i \leq n, \ \ \omega_i = \omega_i^d \text{ ou } \omega_i = \omega_i^u\}$$

- On se donne une probabilité historique IP de survenance de chacun des états du monde et on suppose que la probabilité de monter et de descendre est la même dans tout nœud de l'arbre, i.e. pout tout i :

$$\mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^u) = p \text{ et } \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^d) = 1 - p$$

Hypothèse Cruciale / proba

$$S_{t_{i+1}} = Y_i S_{t_i}$$

- Les rendements Yi $=S_{ti}/S_{ti-1}$ sont indépendants.

$$Y_i = \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}$$

- Par indépendance des tirages, on en déduit donc :

$$\mathbb{P}(\omega_1, ..., \omega_n) = p^{\sharp\{j, \omega_j = \omega_j^u\}}.(1-p)^{\sharp\{j, \omega_j = \omega_j^d\}}$$

- Et on peut écrire de manière équivalente la valeur de l'actif à l'instant t_i comme :

$$S_{t_i} = S_0 \prod_{k=1}^{i} Y_k$$

- avec les Y_k des variables aléatoires indépendantes sur qui prennent la valeur u avec une probabilité p et la valeur d avec une probabilité 1−p. Alors on a bien sûr :

$$Y_i = \begin{cases} u & \text{proba } p \\ d & \text{proba } 1-p \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(Y_i = u) = \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^u) = p \text{ et } \mathbb{P}(Y_i = d) = \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^d) = 1 - p$$

Filtration

- L'information disponible à la date t_i est donnée par la filtration $(F_{ti})_{0\leq i\leq n}$:
- $F_{ti} = \sigma(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{ti}) = \sigma(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{ti}) = \sigma(S_{t1}, S_{t2}, \ldots, S_{ti})$
- Une variable aléatoire F_{ti}-mesurable est donc naturellement une variable donnée par toute l'information accumulée jusqu'au temps t_i.
- Elle s'écrit comme fonction de $(S_{t1}, S_{t2}, \ldots, S_{ti})$, ou de manière équivalente comme fonction de $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{ti})$.

$$\mathcal{F}_{t_i} = \sigma(\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n) = \sigma(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) = \sigma(S_{t_1}, S_{t_2}, \ldots, S_{t_i})$$

Produit dérivé

- Définition 1.5 Un produit dérivé (ou actif contingent) CT est une variable aléatoire FT - mesurable et s'écrit donc, avec une application borélienne, sous la forme

- On chercher comme précédemment à trouver le prix et le portefeuille de couverture d'un produit dérivé, qui seront encore donnés par le prix et la stratégie de son portefeuille de réplication. Avant de montrer que l'actif est duplicable, étudions les propriétés des stratégies de portefeuille simple dans ce modèle.

$$C_T = \phi(S_{t_1}, \dots, S_{t_n})$$

Stratégie de portefeuille

- **Définition** : Une stratégie de portefeuille simple $X^{(x,\Delta)}$ est la donnée d'un capital initial x et d'un processus discret $(\Delta_0, \ldots, \Delta_{n-1})$ qui est F-adapté.
- La stratégie consiste, à tout instant ti en l'investissement dans une quantité i d'actif risqué. Le processus est F-adapté, car la quantité d'argent à investir dans l'actif à l'instant ti est déterminée avec l'information accumule jusqu'à l'instant ti.
- Le portefeuille ne subit aucune entrée ou sortie d'argent (condition d'autofinancement). Entre les instants t_i et t_{i+1}, le portefeuille $X^{(x,\Delta)}$, est constitué d'une quantité Δi d'actif risqué et d'une quantité d'actifs sans risque.

$$\frac{X_i^{x,\Delta} - \Delta_i S_{t_i}}{(1+r)^i}$$

en continu $\dfrac{X_{t_i}^{(x,\Delta)} - \Delta_i S_{t_i}}{R^i}$

qtt d'actif sans risque dans port. en t_i

La valeur du portefeuille à l'instant t_i est donc donnée par :

$$X_{t_i}^{x,\Delta} = \Delta_i S_{t_i} + \frac{(X_{t_i}^{x,\Delta} - \Delta_i S_{t_i})}{(1+r)^i}(1+r)^i$$

Relation d'autofinancement

- Or, sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$, le portefeuille ne bénéficie d'aucune entrée ou sortie d'argent, donc :
- Donc en introduisant les processus actualisés :

$$\boxed{\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_{i+1}} - \tilde{X}^{x,\Delta}_{t_i} = \Delta_i(\tilde{S}_{t_{i+1}} - \tilde{S}_{t_i})}$$

- Ce qui donne la relation qu'on appelle relation d'autofinancement :

$$\boxed{\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_{i+1}} = x + \sum_{k=0}^{i} \Delta_k(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k}).}$$

- Remarque : Le processus valeur du portefeuille $X^{(x,\Delta)}$, est bien sûr F-adapté.

$$X^{x,\Delta}_{t_i} = \Delta_i S_{t_i} + \frac{(X^{x,\Delta}_{t_i} - \Delta_i S_{t_i})}{(1+r)^i}(1+r)^i$$

$$X_{t^{x,\Delta}_{i+1}} == \Delta_i S_{t_{i+1}} + \frac{(X^{x,\Delta}_{t_i} - \Delta_i S_{t_i})}{(1+r)^i}(1+r)^{i+1}$$

$$\boxed{\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_i} = \frac{X^{x,\Delta}_{t_i}}{(1+r)^i} \text{ et } \tilde{S}_{t_i} = \frac{S_{t_i}}{(1+r)^i}}$$

Arbitrage et Probabilité risque neutre

- Définition : Une opportunité d'arbitrage simple est une stratégie de portefeuille simple qui, partant d'une richesse nulle en t = 0 est en T = tn toujours positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive. C'est donc la donnée de Δ ∈ Rn satisfaisant

$$X_T^{0,\Delta} \geq 0 \; et \; \mathbb{P}[X_T^{0,\Delta} > 0] > 0$$

- L'Absence d'Opportunité d'Arbitrage simple (AOA') (ie sur stratégie de portefeuille simple) s'écrit donc :

$$\boxed{\forall \Delta \in \mathbb{R}, \quad \{X_T^{0,\Delta} \geq 0 \Rightarrow X_T^{0,\Delta} = 0 \mathbb{P}\text{p.s.}\}}$$

AOA’ → $d < 1 + r < u$

- **Proposition** Sous l’hypothèse d’AOA’, on a $d < 1 + r < u$.
- Preuve : cf poly
- **Remarque** : Comme dans le modèle à une période, $R > u$ signifie que l’actif sans risque a un rendement meilleur que l’actif risqué, ce qui crée un arbitrage, de même si $R < d$ et que l’actif risqué a toujours un meilleur rendement que l’actif non risqué.

- **Proposition** : En fait, sous l’hypothèses AOA’, il y a AOA’ sur tous les sous-arbres.
- Preuve : Par contraposée, s’il existe une stratégie d’arbitrage sur un sous-arbre, il faut considérer la stratégie globale qui ne fait rien si elle ne croise pas le noeud de départ du sous-arbre, et qui utilise la stratégie d’arbitrage gagnante jusqu’à la fin du sous-arbre, puis place les gains dans l’actif sans risque sur les périodes restantes. Comme la probabilité de passer par un noeud est strictement positive, cette stratégie est un arbitrage.

Probabilité risque neutre

- **Définition** : On introduit la probabilité Q sur Ω, en s'inspirant du modèle à une période, qui sera identique sur chaque sous-arbre à celle obtenue dans l'étude du modèle à une période. On définit donc la probabilité Q comme :

$$q = \frac{R - d}{u - d}$$

$$\mathbb{Q}(\omega_1, \dots, \omega_n) = q^{\sharp\{j, \omega_j = \omega_j^u\}}(1-q)^{\sharp\{j, \omega_j = \omega_j^d\}}, \ avec \ q = \frac{(1+r) - d}{u - d}$$

- **Proposition** : On a alors les relations suivantes :

$$\mathbb{Q}(S_{t_i} = uS_{t_{i-1}}) = \mathbb{Q}(Y_i = u) = q \quad et \quad \mathbb{Q}(S_{t_i} = dS_{t_{i-1}}) = \mathbb{Q}(Y_i = d) = 1 - q$$

Proba risque-neutre

$d < R < u$

- **Théorème** : Si d < 1 + r < u, alors Q ainsi définie est bien une probabilité risque-neutre (autrement dit il existe bien une probabilité risque neutre).
- Il suffit de commencer par montrer que
- **Proposition** : ˜ S est une F-martingale sous Q.
- **Proposition** : La valeur actualisée ˜X $^{(x,\Delta)}$, de toute stratégie de portefeuille simple (x, Δ) est une F-martingale sous Q.
- **Remarque** : Cela signifie que si les actifs de base actualisés sont des martingales sous une certaine probabilité, les stratégies de portefeuille simples le sont aussi. Ceci est du à la condition d'autofinancement, mais surtout au fait que la quantité d'actif risqué entre tk et tk+1 est F_{tk} -mesurable.
- Autrement dit, tout actif de base actualisé est une martingale sous une probabilité Q ssi toute stratégie de portefeuille simple actualisée est une martingale sous Q.

$$\tilde{S}_{t_{k+1}} = \frac{1}{R} Y_{t_{k+1}} \tilde{S}_{t_k}$$

$$= \frac{1}{R} E_Q\left(Y_{k+1} \tilde{S}_{t_k} \middle| \mathcal{F}_{t_k}\right)$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tilde{S}_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_{t_k}\right] = \frac{1}{1+r}\left(qu\tilde{S}_{t_k} + (1-q)d\tilde{S}_{t_k}\right)$$

$$= \frac{1}{R} \tilde{S}_{t_k} E_Q\left(Y_k \middle| \mathcal{F}_{t_k}\right)$$

$$= \frac{1}{R} \tilde{S}_{t_k} \left(qu + (1-q)d\right)$$

$$= \tilde{S}_{t_k}$$

Q - martingale

Proba risque-neutre

- Montrons enfin que si $d < 1 + r < u$, Q est bien une probabilité risque-neutre.
- Nous venons de construire Q et de montrer qu'elle rendait toute stratégie de portefeuille actualisée une **martingale**.
- De plus, c'est bien une probabilité équivalente à IP. En effet, comme $d < R < u$, q et $1 - q$ sont dans $]0, 1[$, et donc chaque $Q(\omega_1, \dots, \omega_n)$ est dans $]0, 1[$, et tous les états du monde ont une probabilité strictement positive d'arriver, donc IP et Q ont les mêmes ensembles négligeables.
- La valeur à toute date t_i d'une stratégie de portefeuille simple de valeur finale $X^{(x,\Delta)}_T$ s'écrit, puisque la valeur actualisée de cette stratégie est une martingale.
- Donc encore une fois, si on arrive à construire un portefeuille de couverture pour tout produit dérivé, en AOA, sa valeur à tout instant ti est donnée par l'espérance sous la probabilité risque neutre de son flux final actualisé.

Comme $\tilde{X}$ est une Q-mg :

$$\tilde{X}^{x,\Delta}_{t_i} = E_Q\left[\tilde{X}^{x,\Delta}_T \mid \mathcal{F}_{t_i}\right]$$

$$X^{x,\Delta}_{t_i} = \frac{1}{R^{n-i}} E_Q\left(X^{x,\Delta}_T \mid \mathcal{F}_{t_i}\right)$$

$$\boxed{X^{x,\Delta}_{t_i} = \frac{1}{(1+r)^{n-i}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X^{x,\Delta}_T \middle| \mathcal{F}_{t_i}\right]}$$

$$X^{x,\Delta}_0 = \frac{1}{R^n} E_Q\left(X^{x,\Delta}_T\right)$$

Equivalences

- Comme dans le modèle à une période, on a
- **Proposition** L’existence d’une probabilité risque neutre implique l’hypothèse AOA’.
- ***Preuve*** *: Exactement comme dans le modèle à une période.*
- On a donc, comme dans le modèle à une période :

AOA’ $\Leftrightarrow d < R < u \Leftrightarrow$ il existe une probabilité risque neutre

Duplication d’un produit dérivé

- **Théorème** : Tout produit dérivé C est duplicable par une stratégie de portefeuille simple (x,Δ). Le marché est complet.

- **Analyse du problème** : On cherche une stratégie de couverture, ie une stratégie de portefeuille simple qui duplique un produit dérivé de la forme (S_{t1} , ..., S_{tn}).
- Comme nous venons de le voir, tout stratégie de portefeuille simple est une martingale sous Q. Donc la valeur du portefeuille de duplication en t_k satisfait nécessairement :
- **Récurrence**, on suppose que
- On pose :
- Et on montre par récurrence sur k qu’à chaque instant

$$X_{t_k}^{x,\Delta} = V_k(S_{t_1}, ..., S_{t_n})$$

$$V_k(S_{t_1}, ..., S_{t_k}) = \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[X_T^{x,\Delta} | \mathcal{F}_{t_k} \right]$$

$$\Delta_k = \frac{V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) - V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k})}{uS_{t_k} - dS_{t_k}}$$

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^{x,\Delta} = V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, Y_{k+1}S_{t_k}) = V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, S_{t_{k+1}})$$

Conclusion

- **Théorème :** Tout produit dérivé est réplicable, et la valeur sous AOA à tout instant d'un produit dérivé $C_T = (S_{t1}, ..., S_{tn})$ est donnée par :

$$\boxed{C_{t_k} = \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_k}]}$$

- et en particulier son prix en 0 est donné par

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{(1+r)^n} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n})]}$$

- Proposition 1.12 Comme le marché est complet, il y a unicité de la probabilité risque neutre.

Formule générale

$$C = \frac{1}{R^n}\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j} \max\left[0, u^j d^{n-j} S_0 - K\right]\right)$$

- Généralisation de la formule obtenue pour 2 périodes.
- Il suffit de pondérer les valeurs futures possibles de l’actif contingent par les probas de survenance

- Cette formule permet d’obtenir directement le prix du call, mais seulement dans le cas d’un arbre recombinant.
- Un inconvénient peut être la grosseur du terme en factoriels, alourdissant les calculs.
- Pour des valeurs de n très grandes, souvent on préfèrera pour l’implémentation une implémentation du principe d’inférence arrière de CRR.

Conclusions

- **Remarque 1** : Comme dans le modèle à une période, le prix de l'actif ne dépend que de la forme du payoff, de u, r et d, mais pas de la probabilité réelle qu'a le prix de monter ou de descendre : le prix ne dépend pas de la probabilité historique.
- **Remarque 2** : Nous avons déterminé le portefeuille de couverture qui permet à tout instant de se couvrir contre les variations de l'option : comme dans le modèle à une période, la quantité d'actif risqué à prendre dans le portefeuille s'interprète comme la variation du prix de l'option en réponse à une variation du cours du sous-jacent. C'est le ***delta-hedging***. En temps continu, on obtiendra naturellement le portefeuille de duplication comme la dérivée de la valeur du produit dérivé par rapport à la valeur du sous-jacent.
- **Remarque 3** : Dans la pratique, si on considère un produit dérivé dont la valeur ne dépend que de la valeur finale, on peut calculer sa valeur sur chacun des nœuds à maturité. On revient alors progressivement en arrière dans l'arbre pour passer de ses valeurs aux nœuds de l'instant t_{i+1} à ses valeurs aux nœuds de l'instant t_i en actualisant sous la probabilité risque neutre.
- **Remarque 4** : L'intérêt d'utiliser un arbre recombinant à n périodes est que l'on a seulement n + 1 valeurs possible en T au lieu de 2n si l'arbre n'était pas recombinant. Pour connaître son prix en 0, on doit donc faire n! calculs au lieu de $2^n.2^{n-1}.....2 = 2^{n(n+1)/2}$. Pour n = 10 par exemple on obtient 11 valeurs possibles et $11! \sim 4.10^7$ avec un arbre recombinant, et 2048 valeurs possibles soit 7.10^{19} calculs sinon.

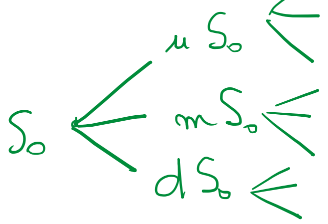
A RETENIR :

Le prix de l'actif s'écrit toujours comme l'espérance actualisée de sa valeur finale sous la probabilité risque neutre Q.

La probabilité risque neutre rend les actifs réactualisés des martingales et de manière équivalente les stratégies de portefeuille simple réactualisées sont des martingales aussi.

Modèles dérivés

- **Arbre trinomial**
- Si on généralise cette approche par arbres en supposant qu'il y a plusieurs possibilités d'augmentation ou de diminution à chaque période. On obtient plus généralement ce que l'on appelle arbre multinomial, dont le premier exemple est l'arbre trinomial (possibilité pour le prix de rester stable, c'est-à-dire de prendre 3 valeurs).
- arbre recombinant où Y est le rendement du sous-jacent (pour une action sous la probabilité risque neutre Y = r (taux d'intérêt), futures Y = 0, devises Y = (domesticinterestrate − foreigninterestrate)).
- On trouve que le modèle trinomial a des résultats similaires au modèle binomial, aussi bien quant à la précision que pour la convergence. Cependant, le modèle trinomial est plus efficace que le modèle binomial : il donne des résultats aussi précis que le modèle binomial, mais en utilisant 4 fois moins d'intervalles de temps. Donc ces deux modèles sont équivalents, mais le modèle trinomial demande moins de temps de calculs.
- **Jarrow et Rudd / Tian** : binomial mais avec autre choix de paramètres que CRR



$$
\begin{aligned}
u &= e^{\sigma\sqrt{2t}} \\
m &= 1 \\
d &= e^{-\sigma\sqrt{2t}}
\end{aligned}
$$

$$S_u = S.u \quad , \quad S_m = S \quad , \quad S_d = S.d$$

$$p_u = \left(\frac{e^{Yt/2} - d}{u - d}\right)^2$$

$$p_d = \left(\frac{u - e^{Yt/2}}{u - d}\right)^2$$

$$p_m = 1 - p_u - p_d$$

Exemple d’utilisation de l’approche binomiale en assurance : titrisation

- Actif A (sans risque) : $1€ \longrightarrow 1.03€$
- Actif B (risqué) : $1€$ → $1{,}12€$ avec $p = 1/2$; $1€$ → $0.98€$ avec $1 - p = 1/2$

- Considérons un marché complet mono-périodique avec 2 actifs, et sans opportunité d’arbitrage.
- On souhaite évaluer un produit d’assurance contre une baisse du marché actions : l’actif C (comme cat).
- L’actif C a une évolution future donnée par le graphique →
- On cherche le prix auquel il faut proposer ce produit d’assurance.
- On peut résoudre ce problème en faisant une approche financière du problème. Il suffit de considérer C comme un produit dérivé, et d’utiliser l’évaluation risque-neutre.

$? \to 103€$ hausse du marché

$? \to 106€$ baisse du marché

Exemple d'utilisation de l'approche binomiale en assurance : titrisation

- Sous la probabilité risque-neutre Q, tous les actifs ont le même rendement moyen.
- La probabilité q de hausse sous Q est donc : $1.12q + 0.98(1 - q) = 1.03$, soit $q = 0.357$.
- Le prix de l'actif C est alors donné par l'espérance sous Q du payoff actualisé :

$[103q + 106(1 - q)]/1.03 = 101.87$€

- Le portefeuille répliquant est ainsi constitué de quantités $a = 123.30$ d'actif A et $b = -21.43$ d'actif B.
- Le prix du portefeuille répliquant est donc donné par : $a+b = 101.87$€

Exemple d'utilisation de l'approche binomiale en assurance : titrisation

- Dans ce cas, une approche actuarielle peut aussi être mise en œuvre :
- On peut par ex. calculer le payoff moyen actualisé (sous IP) : $[103p + 106(1 - p)]/1.03 = 101.46€$
- et rajouter une prime de risque (ou chargement de sécurité).
- On retrouve le résultat de l'approche financière 101.87€ = 101.46€ + 0.41€
- si le taux de chargement est de 0.4%.
- Le premier terme est ce que l'on appelle le Best Estimate, et le second la Market Value Margin (ou MVM).
- **Conclusion** : dans l'approche financière, le passage à la probabilité risque-neutre contient la notion de prime de risque comme dans l'approche actuarielle.

Semaine prochaine : Black-Scholes