Modèles de durée / Examen du 13 mai 2005

Durée 2h – tous les documents sont autorisés

Exercice n°1 (loi exponentielle)

Sous l'hypothèse d'une arrivée aléatoire des patients dans un laboratoire d'analyses médicales, le temps passé à attendre avant d'être pris en charge est distribué selon une loi exponentielle de paramètre λ, ie telle que la fonction de hasard soit constante égale à λ.

1- Un patient a attendu 10 minutes. Donner la vraisemblance de cette observation, et la représenter graphiquement en fonction du paramètre.

2- A la fin de la journée, on tire au sort un échantillon de 10 patients parmi ceux de la journée. Les temps d'attente observés sont (en minutes) : 1; 13; 4; 4; 3; 6; 23; 1; 16; 3. Donner la vraisemblance de cet échantillon. Quelle est l'estimation naturelle du temps moyen passé dans ce service ?

3- Dans un groupe de 10 patients tirés au hasard, le plus petit temps d'attente est de 10 minutes. Que peut-on dire de plus ? (vraisemblance, temps moyen d'attente ?)

Exercice n°2 (modèle à risques concurrents)

Dans cet exercice on utilise la paramétrisation suivante des lois exponentielles et de Weibull :

- ✓ loi exponentielle : $h(t) = \dfrac{1}{\lambda_e}$,
- ✓ loi de Weibull : $h(t) = \dfrac{\beta}{\lambda_w}\left(\dfrac{t}{\lambda_w}\right)^{\beta-1}$.

On considère pour modéliser le fonctionnement d'un appareil jusqu'à sa défaillance le modèle de durée $T = \mathbf{min}(E,W)$ où les variables aléatoires E et W sont indépendantes, E suivant une loi exponentielle et W une loi de Weibull définies comme ci-dessus.

1- Déterminez la fonction de hasard, la densité, et la fonction de survie de T.

2- On suppose $\beta = 2$ et on veut déterminer la probabilité que la défaillance provienne de E ; montrez que $\mathbf{Pr}(B = E) = \dfrac{\lambda_w}{\lambda_e}\dfrac{\sqrt{\pi}}{2} erfc\left(\dfrac{\lambda_w}{2\lambda_e}\right)$ avec $erfc(x) = e^{x^2}\dfrac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{+\infty} e^{-u^2} du$ la fonction d'erreur complémentaire. On pourra conditionner par la durée exponentielle, puis faire le changement de variable $y = \dfrac{x}{\lambda_w}$.

3- Ecrivez la vraisemblance des données observées dans le cas d'un modèle censuré à droite ; vous rappelerez l'ensemble des notations avec précision. Quelle méthode proposez-vous pour résoudre les équations de vraisemblance ?