Modèles de durée / Examen du 1^er^ juin 2005

Durée 1h – aucun document n'est autorisé

Exercice n°1 (hétérogénéité)

Il arrive souvent en pratique que les durées que l'on observe résultent de l'agrégation de sous-populations ayant chacune un comportement spécifique, souvent inobservable. On parle alors d'hétérogénéité. On suppose ici que la fonction de survie dépend d'un paramètre aléatoire ν, ce paramètre étant distribué à l'origine selon une loi π. D'un point de vue heuristique, on se trouve en présence de sous-populations à l'intérieur desquelles la loi de survie est homogène et décrite par la loi de survie conditionnelle au fait que la valeur du paramètre soit ν, $S(t,\nu)$, la loi π décrivant le poids respectif de chaque sous-population dans la population totale à la date initiale. On notera de même $h(t,\nu)$ la fonction de hasard de la sous-population de caractéristique ν.

Question n°1 (1 point): Quelle est l'expression de la fonction de survie initiale de la population totale en fonction de $S(t,\nu)$ et π ?

Question n°2 (2 points): Quelle est la distribution d'hétérogénéité π_t à la date t ? Comment exprimez-vous la fonction de hasard du groupe en fonction de $h(t,\nu)$ et de π_t ?

Question n°3 (4 points): On suppose maintenant que $S(t,\nu) = \mathbf{exp}(-\lambda(\nu)t)$; Que signifie cette hypothèse ? Montrez que la fonction de hasard agrégée est décroissante. Comment expliquez-vous ce phénomène ?

Question n°4 (3 points): La durée est ici une v.a. exponentielle de paramètre λ_1 avec la probabilité p et λ_2 avec la probabilité *1-p*. Exprimez la fonction de survie agrégée et représentez graphiquement la fonction de hasard. Quelle conclusion en tirez-vous ?

Exercice n°2 (Processus de Poisson) :

Question n°1 (2 points) : Rappelez la définition d'un processus de Poisson $N(t)$ d'intensité $\lambda > 0$.

Question n°2 (5 points) : Montrez que les processus $M_t = N_t - \lambda t$ et $M_t^2 - \lambda t$ sont des martingales relativement à la filtration $\sigma(N_s\ , s \le t)$. Montrez également que pour $\theta > 0$, le processus $\chi_t = \mathbf{exp}\left(-\theta N_t + \lambda t\left(1 - e^{-\theta}\right)\right)$ est une martingale relativement à la filtration $\sigma(N_s\ , s \le t)$.

Question n°3 (3 points) : Montrez que si T_n désigne l'instant du $n^{\text{ième}}$ saut, alors les v.a. $T_n - T_{n-1}$ sont iid de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.