Gestion de portefeuille
Actuariat, mai 2020, durée 1h30

On reprend ici les notations utilisées en cours.

1. On considère un marché à deux actifs $A_1(\mu_1, \sigma_1)$ et $A_2(\mu_2, \sigma_2)$ avec $\mu_1 < \mu_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$ (avec μ_i le rendement espéré de l'actif A_i et σ_i son écart-type). Supposons que le coefficient de corrélation entre les rendements aléatoires de ces actifs est $\rho = -1$. Sur ce marché les ventes à découvert sont interdites.
   (a) Donner l'équation de frontière efficiente.
   (b) Quel est le portefeuille le moins risqué sur le marché ?
   (c) Tracer la frontière efficiente. Placer A_1 et A_2 sur cette frontière.
2. (a) On se place sous les hypothèses du modèle de Black-Litterman. On s'intéresse aux vues correspondantes aux matrices suivantes : $q = (12\% \;\; 2\% \;\; 3\%)'$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 30\% & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15\% \end{pmatrix}$$

   Compléter les phrases suivantes :

   Soit un marché avec 6 *actifs risqués notés* A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 et A_6 *et un actif sans risque de rendement $r_f = 2\%$. L'investisseur a une vue* absolue *et deux vues* relatives *sur ces actifs :*
   -L'actif A_1 *aura un rendement de* 14% *. L'agent est confiant à* 70% *de cette vue.*
   -L'action A_5 *sur-perfomera* les actions A_2 et A_3 *de* 2% *.*
   L'agent est certain *de cette vue.*
   -L'actif A_4 *sur-performera* l'actif A_1 *de* 3% *. L'agent est incertain à* 15% *de cette vue.*

   (b) Supposons qu'un investisseur souhaite investir dans l'unique actif risqué du marche. L'investisseur est certain que la prime de risque de l'actif sera de 3%. Trouvez P, q, Ω et Π_{BL}. *(Je vous rappelle que dans le TD2 nous avons montré que* $\Pi_{BL} = \Pi + \tau\Sigma P'(\Omega + P\tau\Sigma P')^{-1}(q - P\Pi)$.*)*
3. On considère un marché avec n actifs risqués et un actif sans risque. On s'intéresse aux portefeuilles optimaux au sens du critère espérance-variance $(\mathbb{E}(R_p) - \frac{k}{2}Var(R_p))$.
   (a) Préciser quel est le problème d'optimisation selon le critère espérance-variance.
   (b) Quel est le portefeuille optimal ?
   (c) Calculer le rendement espéré et le risque du portefeuille optimal. En déduire que le portefeuille optimal au sens du critère espérance-variance appartient à la frontière efficiente de Markowitz.

4. On se place sous les hypothèses du modèle MEDAF.
   (a) Rappeler la différence entre le risque systématique et le risque spécifique d'un actif.
   (b) Vous disposez des informations suivantes concernant les trois titres contenus dans le portefeuille P :

Titre	Poids	Bêta	Ecart type (risque spécifique σ_ε)
Action 1	20%	1.2	11%
Action 2	40%	0.9	14%
Action 3	40%	1	20%

L'écart type du facteur commun (le marché) est $\sigma_M = 15\%$. En utilisant le MEDAF + modèle diagonal, trouver σ_P le risque du portefeuille. [1]

1. Rappel : les risques spécifiques des titres sont en général indépendants

I. MODELE DE MARKOWITZ

1. *Marché à n actifs risqués :* $w^* = \frac{1}{BC-A^2}(B\Sigma^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n} - A\Sigma^{-1}\mu) + \frac{1}{BC-A^2}(C\Sigma^{-1}\mu - A\Sigma^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n})\mu_{obj}$ où $A = \mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\mu,\ B = \mu'\Sigma^{-1}\mu$ et $C = \mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$.
   FE : $\sigma_p^2 = \frac{1}{BC-A^2}(C\mu_p^2 - 2A\mu_p + B)$
   VM : $w_{VM} = \frac{1}{C}\Sigma^{-1}\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$, $\mu_{VM} = \frac{A}{C}$ et $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{C}}$.

2. *Introduction de l'actif sans risque :* $w^* = \frac{\mu_{obj} - r_f}{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\Sigma^{-1}\pi$ où $\pi = \mu - r_f\mathbf{1}_{\mathbb{R}^n}$.
   FE : $\mu_p = \sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\,\sigma_p + r_f, \quad \mu_p \geq r_f$.
   Portefeuille du marché : $w_m = \frac{\mu_m - r_f}{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\Sigma^{-1}\pi$, $\mu_m = \frac{\mu'\Sigma^{-1}\pi}{\mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\pi}$, $\sigma_m = \frac{\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}}{\mathbf{1}'_{\mathbb{R}^n}\Sigma^{-1}\pi}$.

II. MODELE DE BL

$P\tilde{\pi} = q + \epsilon$ où ϵ est une v.a. $\mathcal{N}(O_k, \Omega)$.

$\tilde{\pi}_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q] = \Pi + \tau\Sigma P'(\Omega + P\tau\Sigma P')^{-1}(q - P\Pi)$ et $w_{BL} = (k\Sigma)^{-1}\tilde{\pi}_{BL}$.

III. MEDAF

$CML :\quad \mu_P = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_P$ où P est un portefeuille efficient.

MEDAF général : $\mu_i = \lambda + \beta_i(\mu_M - \lambda)$ où $\beta_i = \frac{\sigma_{iM}}{\sigma_M^2}$ où i est un titre quelconque. Si l'on trace le graphe de cette relation dans le plan $[\beta_i,\ \mu_i]$ on obtien la SML.

MEDAF standard : $\mu_i = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f)$

MEDAF + modèle de marché : $\tilde{R}_i = r_f + \beta_i(\tilde{R}_M - r_f) + \varepsilon_i$ avec $\varepsilon_i \approx \mathcal{N}(0, \sigma^2_{\varepsilon_i})$

Ration Sharpe : $S = \frac{\mu_P - r_f}{\sigma_P}$

Ratio de Treynor : $T = \frac{\mu_P - r_f}{\beta_P}$

Indice de Jensen : $\alpha_P = \mu_P - r_f - \beta_P(\mu_M - r_f)$

APT à n facteurs $\tilde{R}_i = r_f + \sum_{k=1}^n \beta_{ki}(F_k - r_f) + \varepsilon_i = \mu_i + \sum_{k=1}^n \beta_{ki}(F_k - \mathbb{E}(F_k) + \varepsilon_i$ où β_{ki} est le beta entre le titre i et le facteur k, les facteurs F_k ne sont ni corrélés entre eux, ni corrélés avec ε_i

Gestion de portefeuille
Actuariat, mai 2020, durée 1h30

On reprend ici les notations utilisées en cours.

1. On considère un marché à deux actifs $A_1(\mu_1, \sigma_1)$ et $A_2(\mu_2, \sigma_2)$ avec $\mu_1 < \mu_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$ (avec μ_i le rendement espéré de l'actif A_i et σ_i son écart-type). Supposons que le coefficient de corrélation entre les rendements aléatoires de ces actifs est $\rho = -1$. Sur ce marché les ventes à découvert sont interdites.
   (a) Donner l'équation de frontière efficiente.
   (b) Quel est le portefeuille le moins risqué sur le marché ?
   (c) Tracer la frontière efficiente. Placer A_1 et A_2 sur cette frontière.

Exercice 1: $\rho = -1$

1) Soit $P : (\alpha \;\; 1-\alpha)'$ $\quad Cov(A_1, A_2) = -\sigma_1\sigma_2$

a) $\mu_P = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 \implies \alpha = \frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$ et $1-\alpha = \frac{\mu_1 - \mu_P}{\mu_1 - \mu_2}$

et
$$\begin{aligned}
\sigma_P^2 &= Var(\alpha A_1 + (1-\alpha)A_2) \\
&= \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 + 2\rho\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 \\
&= \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 \\
&= (\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_2)^2
\end{aligned}$$

$$\implies \sigma_P = |\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_2|$$

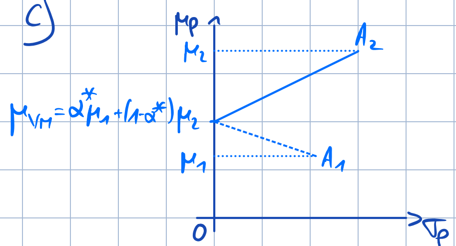
$$= \left| \frac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\sigma_1 - \frac{\mu_1 - \mu_P}{\mu_1 - \mu_2}\sigma_2 \right|$$

b) $P : (\alpha \;\; 1-\alpha)'$

$$\begin{aligned}
\min_{\alpha \in [0,1]} \sigma_P^2 &= \min_{\alpha} \alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2 \\
&= \min_{\alpha} (\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_2)^2 \\
&= 0 \quad \text{avec } \alpha^* = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \text{ et } 1-\alpha^* = \frac{\sigma_1}{\sigma_1 + \sigma_2}
\end{aligned}$$

$\longrightarrow$ Port sans risque

c)



En particulier $\mu_1 < \mu_{VM} < \mu_2$

2) a) Voir sujet ↑

b) $P = 1$
$q = 3\%$
$\Omega = 0$

$$\Pi_{BL} = \Pi + \tau\Sigma(0 + \tau\Sigma)^{-1}(3\% - \Pi)$$
$$= 3\%$$

Exercice 3 :

a) Le pb d'opti selon espérance-variance est

$$\max_{(\omega,\omega_{mon})\in\mathbb{R}^m\times\mathbb{R}} \omega'\mu + \omega_{mon} r_f - \frac{k}{2}\omega'\Sigma\omega$$
$$sc \quad \omega'\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} = 1-\omega_{mon}$$

On se débarasse de la contrainte

$$\Rightarrow \max_{\omega\in\mathbb{R}^m} \omega'\mu + r_f(1-\omega'\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}) - \frac{k}{2}\omega'\Sigma\omega = \max_{\omega\in\mathbb{R}^m} \omega'\overbrace{\Pi}^{\mu - r_f\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}} + r_f - \frac{k}{2}\omega'\Sigma\omega$$

Donc le lagrangien du pb est : $\mathcal{L}(\omega) = \omega'\Pi + r_f - \frac{k}{2}\omega'\Sigma\omega$

$$\nabla_\omega \mathcal{L}(\omega) = \Pi - k\Sigma\omega = 0 \Rightarrow \omega^* = \frac{1}{k}\Sigma^{-1}\Pi$$

$$\text{et } \omega^*_{mon} = 1-\omega^{*\prime}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m} = 1-\frac{1}{k}\Sigma^{-1}\Pi\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}$$

De plus, $\nabla_\omega(\nabla_\omega\mathcal{L}(\omega)) = -k\Sigma \Rightarrow \omega \mapsto \mathcal{L}(\omega)$ est concave $\Rightarrow$ max existe.

Donc ici le portefeuille optimal est $(\omega^*, \omega^*_{mon})$.

c) $\mu^* = \omega^{*\prime}\mu + \omega^*_{mon} r_f$

$$= \frac{1}{k}\Pi'\Sigma^{-1}\mu + (1-\frac{1}{k}\Pi'\Sigma^{-1}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m})r_f$$

$$= \frac{1}{k}\Pi'\Sigma^{-1}(\mu - r_f\mathbb{1}_{\mathbb{R}^m}) + r_f$$

$$= \frac{1}{k}\Pi'\Sigma^{-1}\Pi + r_f$$

$$\sigma^{2*} = \omega^{*\prime}\Sigma\omega^*$$
$$= (\frac{1}{k}\Pi'\Sigma^{-1})\Sigma(\frac{1}{k}\Sigma^{-1}\Pi)$$
$$= \frac{1}{k^2}\Pi'\Sigma^{-1}\Pi$$

$$\Rightarrow \sigma^* = \frac{1}{k}\sqrt{\Pi'\Sigma^{-1}\Pi}$$

Exercice 4 :

a) Le risque d'une action se compose de 2 risques :

* Le risque systématique : risque qui ne peut pas être éliminé par diversification.
* Le risque spécifique : risque propre à l'instrument financier considéré

Facteurs : mauvaise gestion des ressources humaines de l'entreprise, qualité du management..

Les risques spécifiques des différentes entreprises sont, en général, indépendants les uns des autres et peuvent donc disparaître par diversification.

b) Ici, $P = (20\% \quad 40\% \quad 40\%)'$

$$\beta_P = \sum_{i=1}^{3} w_i \beta_i = 0{,}2\beta_1 + 0{,}4\beta_2 + 0{,}4\beta_3$$
$$= 1.$$

Donc par MEDAF + modèle diagonal, $\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \underbrace{\sigma_{\varepsilon_P}^2}_{\sum_{i=1}^{3} w_i^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2}$

$$\Rightarrow \sigma_P^2 = 0{,}15^2 + (0{,}2^2 \times 0{,}11^2 + 0{,}4^2 \times 0{,}14^2 + 0{,}4^2 \times 0{,}2^2)$$
$$= 0{,}03252$$
$$= 3{,}252\,\%$$

Exercice 4 :

a) Le risque d'une action se compose de 2 risques :

* Le **risque systématique** : risque qui ne peut pas être éliminé par diversification.
* Le **risque spécifique** : risque propre à l'instrument financier considéré

Facteurs : mauvaise gestion des ressources humaines de l'entreprise, qualité du management...

Les risques spécifiques des différentes entreprises sont, en général, indépendants les uns des autres et peuvent donc disparaître par diversification.

b) Rappel :

Le MEDAF + modèle diagonal

MEDAF : $\mu_i = r_f + \beta_i(\mu_M - r_f)$

Modèle diagonal : $\tilde{R}_i = \alpha_i + \beta_i \tilde{R}_M + \varepsilon_i \overset{\mathbb{E}}{\Longrightarrow} \mu_i = \alpha_i + \beta_i \mu_M$

$\Longrightarrow \alpha_i = r_f(1-\beta_i)$ et β_i le m̂

$$\sigma_i^2 = \underbrace{\beta_i^2 \sigma_M^2}_{\text{risque Syst.}} + \sigma_{\varepsilon_i}^2$$

Ici, $P : (20\% \quad 40\% \quad 40\%)'$

$$\beta_P = \sum_{i=1}^{3} w_i \beta_i = 0{,}2\,\beta_1 + 0{,}4\,\beta_2 + 0{,}4\,\beta_3 = 1$$

Donc par MEDAF + modèle diagonal : $\sigma_P^2 = \beta_P^2 \sigma_M^2 + \underbrace{\sigma_{\varepsilon_P}^2}_{\sum_{i=1}^{3} w_i^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2}$

$$\Longrightarrow \sigma_P^2 = 0{,}15^2 + 0{,}2^2 \times 0{,}11^2 + 0{,}4^2 \times 0{,}14^2 + 0{,}4^2 \times 0{,}2^2$$
$$= 0{,}03252 = 3{,}252\ \%$$