© Théo Jalabert

Exercice 3. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires iid de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la convergence

$$\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\lambda}$$

a lieu en probabilité.

Définition IV.1 *— On dit qu'une suite de vecteurs aléatoires X_n converge presque sûrement vers X ($X_n \xrightarrow{p.s.} X$) si*

$$\mathbb{P}(\omega \ : \ X_n(\omega) \to X(\omega)) = 1$$

Autrement dit, $X_n \xrightarrow{p.s.} X$ si l'ensemble des états ω pour lesquels X_n ne converge pas est de mesure nulle.

— On dit qu'une suite de vecteurs aléatoires X_n converge en probabilité vers X ($X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$) si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$$

Donc $\frac{1}{\ln(n)} \max X_k \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\lambda}$

$$\iff \forall \varepsilon > 0, \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\max_{1\leq k\leq n} X_k}{\ln(n)} - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) = 0$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\max X_k}{\ln(n)} - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) = 1 - \mathbb{P}\left(\left|\frac{\max X_k}{\ln(n)} - \frac{1}{\lambda}\right| < \varepsilon\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\left[-\varepsilon < \frac{\max X_k}{\ln(n)} - \frac{1}{\lambda}\right] \cup \left[\frac{\max X_k}{\ln} - \frac{1}{\lambda} < \varepsilon\right]\right)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(\qquad) - \mathbb{P}(\qquad)$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(\max X_k > \ln(n)\left(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right)\right) - \mathbb{P}\left(\max X_k < \left(\varepsilon + \frac{1}{\lambda}\right)\ln\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\max X_k > \ln(n)\left(\frac{1}{\lambda} - \varepsilon\right)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et $\mathbb{P}\left(\max X_k < \left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right)\ln(n)\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}\left(X_k < \left(\frac{1}{\lambda} + \varepsilon\right)\ln(n)\right)$

$$= \prod_{k=1}^{n} \int_0^{\left(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right)\ln(n)} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = \left(\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{\left(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon\right)\ln(n)}\right)^n$$

© Théo Jalabert

$$= \left(-e^{-\lambda(\frac{1}{\lambda}+\varepsilon)\ln(n)} + 1\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^{1+\lambda\varepsilon}}\right)^n$$

$$e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n^{1+\lambda\varepsilon}}\right)} \sim e^{-\frac{1}{n^{\lambda\varepsilon}}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$$

Donc $\lim\limits_{n\to\infty} 1 - \mathbb{P}(\;) - \mathbb{P}(\;) = 0$ *

D'où $\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\left|\frac{\max X_k}{\ln(n)} - \frac{1}{\lambda}\right| > \varepsilon\right) = 0$

Donc $\frac{\max X_k}{\ln(n)} \xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{\lambda}$

* La limite d'une somme de fonct° ayant une limite finie et la somme des limites.

$$\left(\int_{\ln(n)(\frac{1}{\lambda}-\varepsilon)}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\right)^n = \left(\left[-e^{-\lambda x}\right]_{\ln(n)(\frac{1}{\lambda}-\varepsilon)}^{\infty}\right)^n$$

$$= \left(+e^{-\lambda(\frac{1}{\lambda}-\varepsilon)\ln(n)}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{n^{1-\lambda\varepsilon}}\right)^n$$

$$= e^{-n \ln\left(n^{1-\lambda\varepsilon}\right)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

par croissances comparées

© Théo Jalabert