Chapitre 9

Thinning, superposition et conditionnement

9.1 Thinning et superposition

Théorème II.5 *Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson composé défini à partir d'un processus de Poisson homogène de paramètre λ et d'une suite de v.a. i.i.d. $(W_i)_{i\geq 1}$. Soit $k \geq 1$, et $A_1, \ldots, A_k$ une partition de $\mathbb{R}$. Pour $1 \leq j \leq k$, soit $(N_j(t))_{t\geq 0}$ le processus de comptage défini pour $t \geq 0$ par*

$$N_j(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} 1_{\{W_i \in A_j\}},$$

et $N_j(t) = 0$ si $N(t) = 0$.
Alors les $(N_j(t))_{t\geq 0}$ sont des processus de Poisson homogènes indépendants de paramètres respectifs $\lambda.P\left(W_1 \in A_j\right)$.

En particulier, en assurance non-vie, en prenant $A_1 = \{0\}$, $A_2 =]0, +\infty[$, et $A_3 =]-\infty, 0[$, comme $P(W_1 \in A_3) = 0$, si le processus décrivant le nombre de sinistres (nuls et non nuls) jusqu'au temps t est un processus de Poisson homogène d'intensité λ, alors celui décrivant le nombre de sinistres non nuls jusqu'au temps t est un processus de Poisson de paramètre $\lambda(1 - P(W_1 = 0))$. Séparer un processus de Poisson d'une telle manière se dit **thinning**. Le contraire, l'addition de processus de Poisson indépendants s'appelle **superposition**.

Théorème II.6 *Soit $k \geq 2$, et $(N_j(t))_{t\geq 0}$, $1 \leq j \leq k$ des processus de Poisson homogènes d'intensité $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Alors $(N(t))_{t\geq 0}$ défini pour $t \geq 0$ par*

$$N(t) = N_1(t) + \cdots + N_k(t)$$

est un processus de Poisson d'intensité $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k$.

Ce théorème se généralise sans peine à des processus de Poisson inhomogènes.

9.2 Conditionnement

Dans cette section, on s'intéresse à la position des instants de sauts sachant qu'il y en a n entre 0 et T. On commence par le cas le plus facile, celui d'un processus homogène, et on généralise ensuite les résultats pour un processus de Poisson inhomogène.

9.2.1 Cas d'un processus de Poisson homogène

Soit $U_1, \ldots, U_n, \ldots$ des variables aléatoires indépendantes et uniformément distribuées sur un intervalle de temps fini et fixé $[0, T]$. Soit $S_1, \ldots, S_n, \ldots$ les instants de sauts d'un processus de Poisson homogène d'intensité λ.

Théorème II.7 *Conditionnellement à $\{N(T) = n\}$, l'ensemble des instants de sauts $\{S_1, \ldots, S_n\}$ a la même loi que $\{U_1, \ldots, U_n\}$.*

En d'autres termes, le vecteur aléatoire $(S_1, \ldots, S_n)$ a la même loi que n-ème statistique d'ordre sur $[0, T]$, i.e. sa densité est donnée pour $0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq T$ par

$$f_{(S_1,\ldots,S_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{T^n/n!} = \frac{n!}{T^n}.$$

Rappelons que si $U_1, \ldots, U_n$ sont des variables indépendantes uniformément distribuées sur $[0, T]$, les $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$ définis à partir des U_i en les rangeant par ordre croissant forment la n-ème statistique d'ordre sur $[0, T]$. Les U_i ont pour densité jointe

$$f_{(U_1,\ldots,U_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \frac{1}{T^n} 1_{\{\forall i, 0 \leq t_i \leq T\}},$$

alors que les V_i ont pour densité

$$f_{(V_1,\ldots,V_n)}(t_1, \ldots, t_n) = \frac{n!}{T^n} 1_{\{0 \leq t_1 \leq \cdots \leq t_n \leq T\}}.$$

Le théorème II.7 permet de démontrer directement le résultat suivant, qui pourrait aussi être obtenu à partir de l'indépendance de $N(s)$ et de $N(t) - N(s)$ pour $s < t$.

Théorème II.8 *Soit $(N(t))_{t \geq 0}$ un processus de Poisson homogène. Pour $s < t$ et pour tous $0 \leq m \leq n$, la loi de $N(s)$ sachant que $N(t) = n$ est une loi binômiale de paramètres $(n, s/t)$:*

$$P\left(N(s) = m \mid N(t) = n\right) = C_n^m \left(\frac{s}{t}\right)^m \left(1 - \frac{s}{t}\right)^{n-m}.$$

Remarquons que les lois conditionnelles obtenues dans les théorèmes II.7 et II.8 ne dépendent pas de λ. L'homogénéité est synonyme de symétrie, qui est brisée dès que l'intensité n'est plus constante. Les généralisations des deux théorèmes précédents au cas inhomogène feront donc apparaître cette dissymétrie en faisant intervenir la fonction d'intensité et la fonction d'intensité cumulée.

9.2.2 Cas d'un processus de Poisson inhomogène

Lorsque $\lambda(t)$ n'est plus constant, sachant qu'il y a n sauts, la probabilité qu'un saut soit au voisinage d'un point $u \in [0, T]$ est d'autant plus élevée que l'intensité $\lambda(u)$ à ce point est élevée. En fait, on a le même résultat que précédemment en tenant compte proportionnellement de la fonction d'intensité.

Théorème II.9 *Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson inhomogène de fonction d'intensité $\lambda(t)$, et de fonction d'intensité cumulée $\mu(t) = \int_0^t \lambda(u)du$. Pour une date $T > 0$ fixée, soit h_T la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie pour $x \in \mathbb{R}$ par*

$$h_T(x) = \frac{\lambda(x)}{\mu(T)}.1_{[0,T]}(x),$$

et soit $U_1, \ldots, U_n$ des variables aléatoires indépendantes de densité h_T. Alors, sachant que $N(t) = n$, l'ensemble des instants de sauts $\{S_1, \ldots, S_n\}$ a la même loi que l'ensemble des $\{U_1, \ldots, U_n\}$.

On obtient aussi l'analogue du théorème II.8 :

Théorème II.10 *Soit $(N(t))_{t\geq 0}$ un processus de Poisson inhomogène de fonction d'intensité $\lambda(t)$, et de fonction d'intensité cumulée $\mu(t) = \int_0^t \lambda(u)du$. Pour $s < t$ et pour tous $0 \leq m \leq n$, la loi de $N(s)$ sachant que $N(t) = n$ est une loi binômiale de paramètres $(n, \mu(s)/\mu(t))$:*

$$P\left(N(s) = m \mid N(t) = n\right) = C_n^m \left(\frac{\mu(s)}{\mu(t)}\right)^m \left(1 - \frac{\mu(s)}{\mu(t)}\right)^{n-m}.$$