EXAMEN DE DEUXIÈME SESSION

Modèles Aléatoires Discrets– 2019-2020

Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils éléctroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.

Question:	1	2	3	4	5	6	Total
Points:	2	2	1	3	0	0	8
Score:							

1. Soient deux urnes A et B dans lesquelles sont répartis boules numérotées de 1 à N . A chaque pas de temps, un numéro est tiré uniformément dans l'ensemble d'indices $\{1, \ldots, N\}$. La boule associée au numéro tiré change d'urne, on note $(A_n)_{n\in\geqslant 0}$ le nombre de boule dans l'urne A.

   (a) (1 point) Montrer que $(A_n)_{n\geqslant 0}$ est une chaine de Markov homogène et expliciter ses probabilités de transitions.

   Solution: Les probabilités de transitions ne sont fonction que de l'état du système à l'instant précédent. On a

$$\mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x) = \begin{cases} \frac{N-x}{N}, & y = x+1 \\ \frac{x}{N}, & y = x-1 \\ 0, & \text{Sinon.} \end{cases} \tag{1}$$

   (b) (1 point) Après avoir justifié de son existence et de son unicité, donner la loi stationnaire de $(A_n)_{n\geqslant 0}$.

   Solution: Chaine de Markov sur un espace d'état fini (Existence) et irréductible (unicité). Pour déterminer la loi stationaire, on recherche une loi réversible qui vérifie

$$\lambda(x)\frac{N-x}{N} = \lambda(x+1)\frac{x+1}{N}$$

il apparait que $\lambda(x) = \binom{N}{x}$ convient en tant que mesure reversible, une loi de probabilité μ est obtenu en normalisant avec

$$\mu(x) = \binom{N}{x} 2^{-N}$$

2. Une compagnie d'assurance s'est aperçu (en faisant des statistiques) que

- Un assuré n'ayant reporté aucun sinistre l'année $n-1$ reportera un sinistre l'année $n$avec probabilité 0.1
- Un assuré qui a reporté au moins un sinistre durant l'année $n-1$ reportera un sinistre l'année n avec probabilité 0.2.

On définit une chaine de Markov homogène $(X_n)_{n\geqslant 0}$ telle que

$$X_n = \begin{cases} 0, & \text{si aucun sinistre n'est reporté.} \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(a) (1 point) Donner la matrice des transition de (X_n)

Solution: L'espace d'état est donné par $E = \{0, 1\}$, La matrice des transitions est donnée par

$$Q_X = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

(b) (1 point) Soit le processus définie par

$$Y_n = (X_{n-2}, X_{n-1}),\ n \geqslant 2.$$

Quel est l'espace d'état de ce processus? S'agit-il d'une chaine de Markov homogène? (Justifier). S'il s'agit d'une chaine de Markov, donner sa matrice des transitions.

Solution: L'espace d'état est donné par $E_Y = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$ et la matrice des transition est donnée par

$$Q_Y = \begin{pmatrix} 0.9 & 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \\ 0.9 & 0.1 & 0 & 0. \\ 0 & 0 & 0.8 & 0.2 \end{pmatrix}$$

(c) Discuter l'existence et l'unicité de la loi stationnaire du processus Déterminer cette loi stationaire (si elle existe).

Solution: Y_n est une CMH sur un espace d'état fini (existence de la loi stationaire) irréductible (loi stationnaire unique). On résout $\pi Q_Y = \pi$ et il vient

$$\pi = (4/5, 4/45, 4/45, 1/45)\,.$$

(d) La compagnie d'assurance adapte son tarif π_n pour la couverture de l'année n d'un assuré en fonction de sa sinistralité sur les deux années précédentes de la façon suivante

- \$450 si aucun sinistre au cours des deux années précédentes
- \$900 si au moins un sinistre est reporté au cours de l'une des deux années précédentes
- \$1350 si au moins un sinistre a été reporté au cours de chacune des deux années précédentes

Déterminer la prime moyenne payée par un assuré en portefeuille depuis un certain nombre d'année. Faite l'application numérique.

Solution: La prime moyenne s'élève alors à \$550

3. Soit un processus défini par $S_0 = x > 0$ et $S_n = S_{n-1} + \sigma \cdot \epsilon_n \cdot S_{n-1},\ n \geqslant 1$, où

- σ est un réel tel que $|\sigma| < 1$
- $(\epsilon_n)_{n \geqslant 1}$ est une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi de probabilité

$$\mathbb{P}(\epsilon_1 = 1) = \mathbb{P}(\epsilon_1 = -1) = \frac{1}{2}.$$

(a) (1 point) Montrer que le processus $(S_n)_{n \geqslant 0}$ est une Martingale.

Solution: $\mathbb{E}(S_n | S_{n-1}) = S_{n-1}$

(b) Montrer par récurrence que $S_n > 0$ pour tout $n \geqslant 0$.

Solution: La propriété est vérifiée au rang 0 puisque $S_0 = x > 0$. Supposons la propriété vérifié au rang $n > 0$ qu'en est-il au rang $n+1$?

On a $S_{n+1} = S_n(1 + \sigma \cdot \epsilon_{n+1}) > 0$ car $1 + \sigma \cdot \epsilon_{n+1} > 0$.

(c) Soit pour tout $Z_n = \log(S_n)$. Montrer que

$$Z_n = \log(x) + \sum_{k=1}^{n} \log(1 + \sigma\epsilon_k).$$

Solution: $Z_n = \log(S_{n_1}(1 + \sigma \cdot \epsilon_n)) = \log(x \prod_{k=1}^n (1 + \sigma \cdot \epsilon_k)) = \log(x) + \sum_{k=1}^n (1 + \sigma \cdot \epsilon_k)$

(d) Calculer la limite de Z_n/n lorsque$n \to \infty$ (convergence presque sûre)

Solution: Par la loi forte des grands nombres

$$Z_n/n \to \frac{x}{n} + \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+\sigma}{1-\sigma}\right)$$

4. Soit $(X_t)_{t \geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité λ qui décompte le nombre de saumon sauvage passant devant un détecteur placé sur un cours d'eau. Le détecteur n'est pas infaillible et on estime qu'un saumon passant devant le détecteur est effectivement détecté avec probabilité $p \in (0, 1)$. Soit $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ le nombre de saumon détectés jusqu'à l'instant $t \geqslant 0$.

(a) (1 point) Calculer la probabilité conditionnelle

$$\mathbb{P}(Y_t = l | X_t = k), \text{ pour } l, k \geqslant 0.$$

Solution:

$$\mathbb{P}(Y_t = l | X_t = k) = \begin{cases} \binom{k}{l} p^l (1-p)^{k-l} & \text{si } j \geqslant k \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

(b) (1 point) Calculer la loi de probabilité de Y_t, c'est à dire $\mathbb{P}(Y_t = l)$ pour tout $l \geqslant 0$. Détaillez vos calculs.

Solution:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Y_t = l) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(Y_t = l | X_t = k) \mathbb{P}(X_t = k) \\ &= \frac{e^{-p\lambda}(p\lambda)^l}{l!} \end{aligned}$$

(c) (1 point) Montrer que le processus est un processus de Poisson dont on précisera l'intensité.

Solution: On montre que $(Y_t)_{t \geqslant 0}$ est à accroissement indépendants et stationnaires. Le plus simple est d'observer que $Y_t = \sum_{k=1}^{X_t} I_k$, où les I_k sont iid de loi Ber(p).

5. Soit $(N_t)_{t \geqslant 0}$ un processus de Poisson d'intensité .

(a) Calculer la covariance du processus

$$\text{Cov}(N_t, N_s), \ s, t \geqslant 0.$$

Solution:

$$\text{Cov}(N_t, N_s) = \min(s, t).$$

(b) Soit le processus défini par

$$Z_t = Z_0 \cdot (-1)^{N_t}, \ t \geqslant 0$$

où Z_0 est une variable aléatoire discrète de loi de probabilité,

$$\mathbb{P}(Z_0 = -1) = p \text{ et } \mathbb{P}(Z_0 = 1) = 1 - p,$$

avec $p \in (0, 1)$. Calculer $\mathbb{E}(Z_t)$ pour tout $t \geqslant 0$.

Solution:

$$\mathbb{E}(Z_t) = (1 - 2p)e^{-2\lambda t}$$

(c) Calculer la covariance $\text{Cov}(Z_s, Z_t), \ s, t \geqslant 0$ du processus $(Z_t)_{t \geqslant 0}$.

Solution: $\text{Cov}(Z_s, Z_t) = e^{-2|t-s|} - (1-2p)^2 e^{-2\lambda(t+s)}$.

6. Supposons que je dispose de 4 parapluies qui peuvent se trouver dans deux endroits, soit chez moi, soit à l'ISFA. A chaque pas de temps je me déplace d'un endroit à l'autre, je prends un parapluie s'il pleut et je n'en prends pas s'il ne pleut pas. Le nombre de parapluies à un endroit fluctue ainsi entre 0 et 4. On définie la chaîne de Markov $(X_n)_{n\geqslant 0}$ égale au nombre de parapluie à l'endroit où je me trouve.

   Par exemple, je suis chez moi à l'instant initial et la répartition des parapluies est 2 parapluies à la maison et 2 parapluies à l'ISFA alors $X_0 = 3$. A l'instant suivant je vais de la maison à l'ISFA et il pleut, j'emporte un parapluie et donc $X_1 = 2$ (puisque je suis à l'ISFA ou il y avait un parapluie et j'en ai pris un avec moi pour mon déplacement) Supposons que la probabilité qu'il pleuve lors d'une transition est $p \in (0, 1)$.

   (a) Donner la matrice des transitions de $(X_n)_{n\geqslant 0}$

   Solution:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1-p & p \\ 0 & 0 & 1-p & p & 0 \\ 0 & 1-p & p & 0 & 0 \\ 1-p & p & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   (b) Si je me trouve à un endroit où il n'y a pas de parapluie et que je doive me rendre à l'autre endroit alors qu'il pleut alors fatalement je me fait trempé. En supposant que ce petit système a été mis au point il y a un certain temps, quelle est la probabilité que je me fasse trempé?

   Solution: La loi stationnaire est donnée par $\pi_1 = \ldots, = \pi_4 = \frac{1}{5-p}$ et $\pi_0 = \frac{1-p}{5-p}$. La probabilité que je me fasse trempé est que je sois dans un endroit sans parapluie et qu'il pleuve dehors, donc

$$\mathbb{P}(\text{"Pierre-O se fait trempé"}) = \frac{p(1-p)}{5-p}$$

   (c) Sachant que $p = 0.04$ à Lyon (Expérience personnelle i, à partir de combien de parapluie la probabilité que je me fasse trempé passe-t-elle en dessous de 0.05?

   Précisément, si on note E l'évènement "Pierre-O se fait trempé", on recherche le plus petit entier (nombre de parapluie) tel que $\mathbb{P}(E) < 0.05$.

   Solution: On a, pour un nombre N de parapluie, $\mathbb{P}(E) = \frac{p(1-p)}{N-p}$, on en déduit que

$$\frac{p(1-p)}{N-p} < 0.05 \Leftrightarrow N > p + \frac{p(1-p)}{0.05} = 5.2$$

FORMULAIRE

Nom	abbrev.	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\mathrm{Var}(X)$	FGM
Binomial	$\mathrm{Bin}(n,p)$	$\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$[(1-p)+pe^t]^n$
Poisson	$\mathrm{Pois}(\lambda)$	$e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp(\lambda(e^t-1))$
Geometric	$\mathrm{Geom}(p)$	$(1-p)^{k-1}p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ pour $t<-\ln(1-p)$
Uniform	$\mathrm{Unif}(a,b)$	$\begin{cases}\frac{1}{b-a} & a\leqslant t\leqslant b\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponential	$\mathrm{Exp}(\lambda)$	$\begin{cases}\lambda e^{-\lambda t} & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ pour $t<\lambda$
Normal	$\mathrm{N}(\mu,\sigma^2)$	$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right)\exp\left(\frac{-(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2	$e^{\mu t}e^{\sigma^2t^2/2}$