ERM
M2A, année 2020 – 2021

TD3 : COPULES ARCHIMÉDIENNES

Exercice 1
Soit C une copule archimédienne de générateur ϕ deux fois différentiable.

(1) Montrer que la densité de C est :

$$c(u_1, u_2) = -\frac{\phi''(C(u_1, u_2))\phi'(u_1)\phi'(u_2)}{[\phi'(C(u_1, u_2))]^3}$$

(2) En déduire que le tau de Kendall d'une copule archimédienne vaut :

$$\tau = 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt \ + 1$$

On pourra effectuer le changement de variable : $v_1 = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)$, $v_2 = u_1$

Exercice 2
Soient Z, X_1 et X_2 trois variables aléatoires réelles. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes conditionnellement à Z. Soient B_1 et B_2 deux fonctions de répartition telles que pour $i \in \{1, 2\}$, on a : $\mathbb{P}(X_i \leq x_i \mid Z = z) = (B_i(X_i))^z$.

(1) Montrer que le couple $(X_1, X_2) = X$ admet pour fonctions de répartition marginales les fonctions $F_i(x_i) = L_Z(-\ln B_i(x_i))$.
(2) En déduire que X admet comme copule une copule archimédienne de générateur $\phi^{-1} = L_Z$.
(3) Etudier le cas où la variable aléatoire Z suit une loi gamma de paramètre $1/\alpha$.

Exercice 3

(1) On rappellle que la copule de Clayton est définie pour $\alpha > 0$ par :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$$

  (a) Montrer que cette copule est archimédienne de générateur $\phi(t) = \frac{t^{-\alpha}-1}{\alpha}$
  (b) En déduire, en fonction de α, la valeur de τ.

(2) De même, on rappelle que le copule de Gumbel est définie pour $\alpha \geq 1$ par :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \exp[-((-\ln u_1)^\alpha + (-\ln u_2)^\alpha)^{1/\alpha}]$$

  (a) Montrer que cette copule est archimédienne de générateur $\phi(t) = (-\ln t)^\alpha$
  (b) En déduire, en fonction de α, la valeur de τ.

Exercice 4
Donner l'expression de la fonction de Kendall $K(t)$ dans le cas de la copule indépendante.