Théorie des Options
Anne EYRAUD-LOISEL

Cours numéro 10

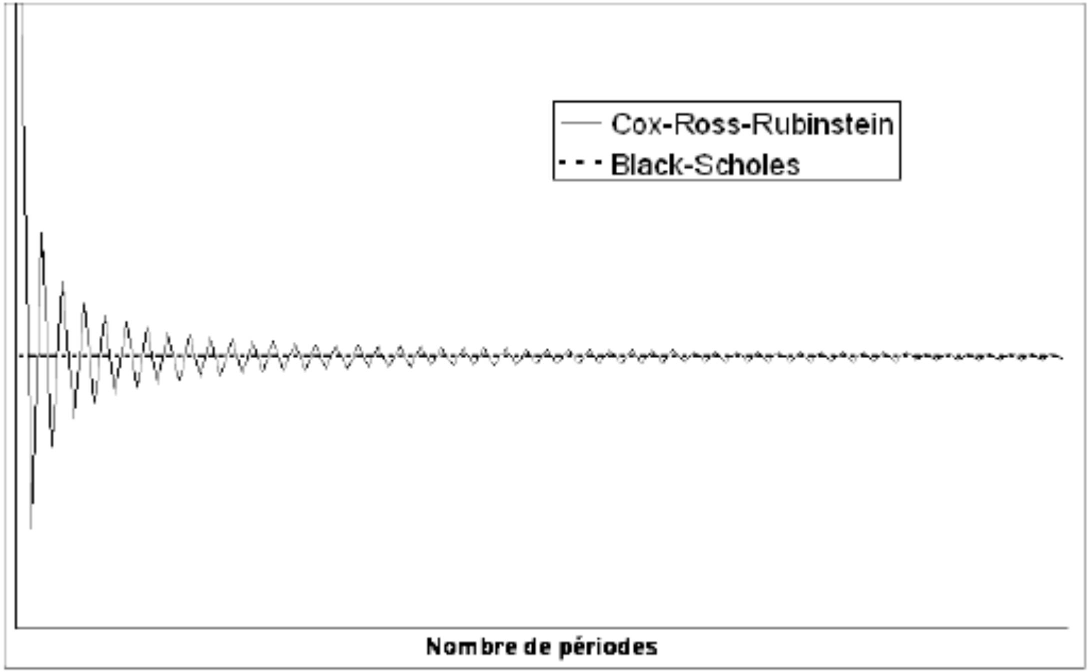
25/03/2021

Généralités - ISFA

- Si vous changez d'avis et voulez revenir (ou inverse), signalez-vous à la scolarité scolarite.isfa@univ-lyon1.fr
- **Reconfinement** ce soir (?) du Rhône avec interdiction de sortir du département (et de s'éloigner de plus de 10km) pour 4 semaines (?) – Conditions d'enseignement pour les universités maintenues pour l'instant.
- **Prochaines séances prévues** (pour l'instant) :
  - Vendredi 26/03 : TD Maths actu // TD PNV
  - Mardi 30/03 : TD Théorie des options
  - Mercredi 31/03 : TD Economie de l'Assurance // TD MLG
  - Mercredi 7/04 : TD Economie de l'Assurance // TD MLG
  - Mardi 13/04 : TD MLG
  - Mercredi 14/04 : TD Economie de l'Assurance // TD Théorie des Options
  - Vendredi 16/04 : TD Maths actu
  - Lundi 26/4 : TD Théorie des Options
  - Mardi 27/04 : TD Economie de l'Assurance
- **Remarques : prévoir impérativement d'être présents sur Lyon pour les semaines d'examen**

Questionnaire Webex de présence

Limite de CRR: Black-Scholes



Plan Cours Black-Scholes

- Distributions normales et lognormales en temps continu
- Modélisation de Black-Scholes
- EDP de Black et Scholes
- Formule de BS par les martingales, AOA, proba risque neutre, valeur du call
- Feynman Kac
- Changement de proba / changement de numéraire sous BS
- Volatilité implicite / volatilité historique

Introduction

Le premier modèle d'évolution des actif financiers a été proposé par Louis Bachelier dans sa thèse en 1900. Les actifs risqués étaient supposés Gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs.

Ce modèle a le nom de **modèle de Black-Scholes**. En effet, en 1973, Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes proposent l'idée de **définir le prix d'un produit dérivé comme celui de son portefeuille de couverture** et l'appliquent à ce modèle Log-normal. Ils ont obtenus le prix nobel d'économie en 1997 pour ces travaux, ce qui n'a pas empêché leur fond d'investissement "Long Term Capital Market" de faire faillite en 1998…

Formalisation du modèle de Black-Scholes Les hypothèses sur le marché

Nous reprenons ici le même type d'hypothèses faites au début du chapitre sur la modélisation des marchés financiers et les notions d'arbitrage :

- Les actifs sont divisibles à l'infini
- Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant
- On autorise les ventes à découvert
- Les échanges ont lieu sans coût de transaction
- On autorise les emprunts et les prêts illimités pour tous les agents au même taux constant r (accès à l'actif sans risque)
- ***Le marché fonctionne en continu***

Hypothèse fondamentale
Rendements normaux / prix lognormaux

- L'incertain est modélisé à travers les trajectoires futures du titre risqué, vues comme des scenarii possibles d'évolution. En général, on suppose que ce sont des fonctions continues (ω_t), définies sur R+. Afin de prendre en compte le caractère très erratique des cours des actifs financiers, **Bachelier** les modélise à l'aide d'un **mouvement Brownien avec tendance**. Une telle modélisation conduit à des prix qui peuvent être négatifs. Aussi, Samuelson (1960) propose de retenir cette **modélisation pour les rendements**, plutôt que pour les cours eux-mêmes. C'est ce type de modélisation que choisiront Black, Scholes et Merton.
- Il y a plusieurs définitions possibles des rendements, qui en général sont équivalentes lorsque les phénomènes étudiés sont déterministes, mais qui diffèrent dans le cas stochastique. La différence est explicable par la formule d'Itô. Nous supposons ici que **les rendements entre deux périodes sont mesurés par la différence des logarithmes des cours**.

Hypothèse fondamentale

Rendements normaux / prix lognormaux

- On fait l'hypothèse que les rendements entre 0 et t suivent un mouvement Brownien de tendance $\mu - ½\,\sigma^2$ et de coefficient de diffusion σ, autrement dit que les rendements suivent une normale. Cela se traduit par les propriétés suivantes du processus des prix $\{St,\ t \in [0, T]\}$:
  - $S0 = x$
  - Les rendements $Log(S_t) - Log(S_s)$ suivent une loi gaussienne de moyenne $(\mu - ½\,\sigma^2)(t - s)$ et de variance $\sigma^2(t - s)$
  - $\forall 0 < t1 < \ldots < tn$, les accroissements relatifs $\{S_{t_{i+1}}/S_{t_i};\ 0 \leq i \leq n - 1\}$ sont indépendants, et de même loi.
- En d'autres termes, il existe un mouvement Brownien W tel que :

$$St = f(t,Wt) = x \exp\,(\mu t + \sigma Wt - ½\,\sigma^2 t)$$

$$S_t = x \exp\left(\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right)$$

Résolution EDS

- *St = f(t,Wt) = x* exp (*μt + σWt* – ½ *σ*²*t)*
- Par application de la formule d'Itô avec la fonction *f(t, z) = x (*exp *μt + σz* – ½ *σ*²*t)*, dont les dérivées valent :
- *ft*(*t, z*) = *f*(*t, z*)*μ* – ½ *σ*², *fz*(*t, z*) = *f*(*t, z*)*σ*, *fzz* = *f*(*t, z*)*σ*²
- On trouve la solution de l'EDS
- L'hypothèse principale à la base du modèle de Black-Scholes est donc la modélisation de la dynamique du sous-jacent par un mouvement brownien géométrique (modélisation des actifs par des lois lognormales). L'EDS de Black-Scholes s'écrit

$$S_t = f(t, W_t) = x \exp\left(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Existence de solution

- Comme la fonction exponentielle n’est pas bornée, pour justifier l’écriture différentielle et l’utilisation de la formule d’Itô, nous avons besoin de propriétés d’intégrabilité, que l’on vérifie facilement grâce aux propriétés des exponentielles de variables gaussiennes.
- **Cf page 3 du poly**. Rappels.

Interprétation financière des paramètres

- S'il n'y a pas de bruit, ($\sigma = 0$), μ représente le rendement annualisé du titre.
- Un simple argument d'arbitrage montre qu'en absence d'alea sur le titre, son rendement doit être le même que celui d'un placement à la banque, dont le taux est désigné ici par r. On désignera par S^0_t la valeur en t de la capitalisation d'un Euro à la banque.

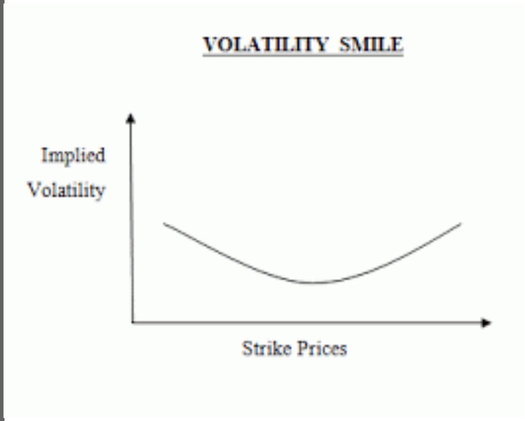
$$dS^0_t = S^0_t \, rdt$$

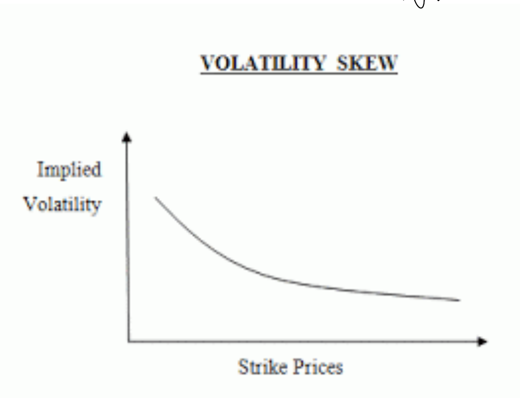
- Un ordre de grandeur de ce taux est [2%, 12%]. Voire moins…
- **Lorsque le titre est risqué**, μ représente le rendement annualisé du titre espéré par unité de temps. Le marché le compare en général à celui d'un placement sans risque. Le paramètre $\mu - r$ est donc en général un paramètre de référence.
- Le ratio de Sharpe par unité de temps des excès de rendements par rapport au cash prend en compte la volatilité du titre. Il est considéré comme **la prime de risque** λ que le marché affecte à la source de risque W.
- Il sera utile d'écrire $\boldsymbol{dS_t = S_t[rdt + \sigma(dW_t + \lambda dt)]} = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$
- Dans cette représentation, nous voyons apparaître l'importance du paramètre clé dans la caractérisation des titres financiers à savoir la volatilité σ. L'ordre de grandeur de ce paramètre dépend énormément de la nature du titre support : dans les marchés d'actions, il varie entre 20 et 70%, dans les marchés de change entre 10 et 30%, dans les marchés de taux d'intérêt entre 8 et 30%.

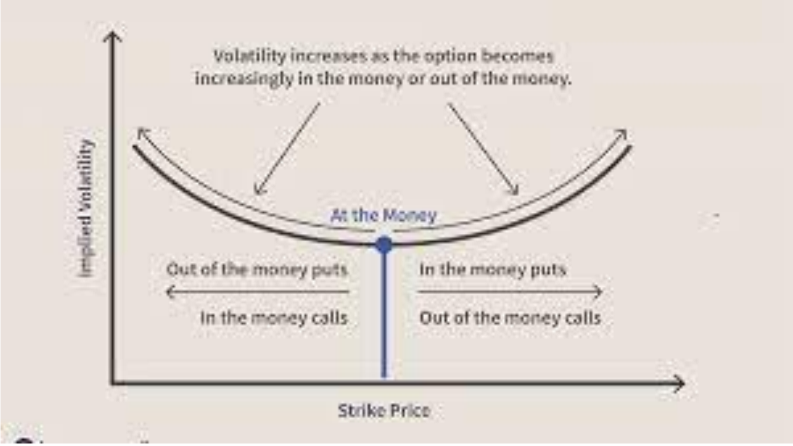
$$\text{prime de risque} = \lambda = \frac{\frac{1}{dt}\mathbb{E}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] - r}{\sqrt{\frac{1}{dt}Var\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)}} = \frac{\mu - r}{\sigma}$$

Limites de la modélisation

- Dans le monde de Black et Scholes**, <u>tous les paramètres sont supposés constants</u>**. Il est clair que ce n'est pas très réaliste, dans aucun marché. En fait, on pourra sans grande modification des modèles supposer les paramètres déterministes. Mais cela pose évidemment des problèmes d'identification (calibration) des paramètres importants.
- En pratique, on observe en général un **smile**/**skew** de volatilité : elle est **<u>non constante</u>**. En effet, la volatilité implicite aux options fortement hors de la monnaie ou largement dans la monnaie est plus élevée que la volatilité implicite recalculée à partir des options à la monnaie. On appelle ce phénomène "**smile de volatilité**" (le graphe de la volatilité en fonction du prix d'exercice est en forme de sourire). Pour un prix d'exercice donné, la différence entre la volatilité implicite observée et celle à la monnaie qui s'appelle **le skew**.
- La surface de volatilité d'un sous-jacent évolue également dans le temps. Les acteurs du marché la réévaluent sans cesse, modifiant leur anticipation de la probabilité, pour chaque prix d'exercice et maturité, qu'une option ne finisse dans la monnaie. La volatilité en pratique n'est donc pas constante.
- Il existe des modèles plus poussés qui supposent les paramètres du modèle aléatoires/stochastiques (**modèles à volatilité stochastique**). Nous les citerons à la fin de ce cours, et vous les verrez l'an prochain, en particulier pour les modèles de taux d'intérêt.







Limites de la modélisation

- Dans leur papier de 1973, Black et Scholes ne cherchent pas tant à modéliser avec exactitude la dynamique du sous-jacent qu'à essayer de voir si le point de vue très nouveau qu'ils proposent dans le domaine des options est prometteur, quitte à revenir sur les questions de modélisation dans la suite. A cette époque, Mandelbrot (1963) avait déjà montré que les rendements des actifs financiers à un jour, ou une semaine n'étaient **clairement pas statistiquement gaussiens**, en particulier **que la probabilité de grands mouvements de ces rendements était plus grande que celle que le monde gaussien quantifiait**. Cette question "**des queues épaisses**" des distributions des rendements et de son implication dans la mesure des risques et la couverture des produits financiers est au coeur de la recherche actuelle.
- Document intéressant sur les limites du modèle de Black et Scholes (sous-evaluationBS.pdf) → Claroline.
- Mais comme nous le verrons, bien qu'**imparfait** le modèle de Black et Scholes est encore **très efficace** et très utilisé dans toutes les salles de marché.
- Un des grands messages de la finance mathématique est que la **prime de risque** n'est pas **spécifique** du titre mais **de la source de bruit W_t**. C'est une caractéristique du marché au même titre que le taux d'intérêt, du moins dans un monde sans arbitrage et très liquide. Cela sert beaucoup lors de l'étude des multi-sous-jacents. Cette hypothèse joue en particulier un rôle déterminant dans les marchés de taux.

Modélisation probabiliste du marché

- Nous considérons un marché constitué
  - d'un actif sans risque S^0 et d'un actif risqué S sur la période $[0, T]$. On considère donc un **actif sans risque** évoluant selon l'équation suivante :

  $dS^0_t = rS^0_t\, dt$ et $S^0_0 = 1 \Rightarrow S^0_t = e^{rt}$
  - L'actif risqué a la dynamique donnée par l'EDS de Black-Scholes où $\sigma > 0$: $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$
- Ce modèle est le modèle le plus simple que l'on puisse imaginer pour modéliser l'évolution d'un actif risqué tout en imposant qu'il soit positif. Comme nous l'avons vu plus haut, cela revient à supposer que les rendements des actifs sont normaux.
- Cet actif a une **tendance μ** et une **volatilité σ** toutes les deux **constantes**.
- Décrivons maintenant $(\Omega, F,$ IP) : L'ensemble des états du monde Ω est un sous-ensemble de $R_+ \times]0, T]$.
- Pour tout $t \in [0, T]$, la tribu F représente l'information disponible à la date t, l'aléa provient seulement de S, donc $F_t := \sigma(S_s, s \leq t)$
- La probabilité historique IP est la probabilité de survenance de chaque état du monde, elle est telle que W soit un Mouvement Brownien sous IP.

Modèle de Black et Scholes

Si on part dans le sens inverse, et que l'on essaie de résoudre l'EDS de Black et Scholes, on a

- **Théorème** *L'EDS de Black et Scholes* $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ *admet une unique solution qui est donnée par :*

$$S_t = S_0 e[(\mu - ½\, \sigma^2)t + \sigma W_t], \text{ IP-}p.s.$$

- *Preuve : cf poly*
- **Remarque :** Comme nous avons suppose $\sigma > 0$, la fonction g telle que $S_t = g(W_t)$ est inversible, et donc les aléas du marché sont complètement décrits par le mouvement Brownien W :
- $F_t = \sigma(S_r, r \leq t) = \sigma(W_r, r \leq t)$

Méthode de pricing

Définition *Un produit dérivé (ou actif contingent) est une v.a.* F_T*-mesurable.*

Comme dans le cas du modèle discret, nous allons chercher à donner un prix en *t* à un produit dérivé connu en *T* et trouver une manière pour dupliquer exactement ce produit dérivé. La méthode va être similaire à celle utilisée dans le cas discret :

- On va chercher à **construire une probabilité risque-neutre** qui rende tout actif de base réactualisé une martingale.
- On va définir ce que l'on appelle une **stratégie de portefeuille simple autofinancée**.
- On va vérifier que **toute stratégie de portefeuille simple autofinancée réactualisée reste une martingale** sous la probabilité risque-neutre.
- On en déduira **l'absence d'opportunités d'arbitrage** entre stratégies de portefeuille simple (AOA').
- Nous allons chercher à **répliquer tout produit dérivé** par une stratégie de portefeuille simple.
- On en déduira que la définition économique naturelle du prix de l'option en *t* s'écrit comme **l'espérance actualisée sous cette proba risque neutre du flux final.**
- Le portefeuille de **réplication** nous donnera la stratégie de **couverture** de l'option.

Probabilité risque neutre

Rappels sur Radon-Nikodym

Rappels sur Girsanov

Cf poly pages 7-8

Probabilité risque neutre

- Comme dans le cas discret, on notera $\underline{Y}$, la valeur actualisée d'un processus Y définie donc par

$$\underline{Y}_t = Y_t/S^0_t = e^{-rt}Y_t$$

- Déterminons la dynamique des actifs risqués et sans risque réactualisés sous la probabilité historique IP.
- L'actif sans risque réactualisé $\underline{S}^0_t$ est constant égal à 1 donc $d\underline{S}^0_t = 0$
- Pour l'actif risqué réactualisé, il faut appliquer la formule d'Ito :

$$d\underline{S}_t = 1/S^0_t dS_t + S_t d(1/S^0_t) + d\langle S, 1/S^0_t\rangle = \underline{S}_t[(\mu - r)dt + \sigma dW_t] = \sigma \underline{S}_t[dW_t + \lambda dt]$$

- **Définition 1.2** *Dans le modèle de Black Scholes, $\lambda := (\mu - r)/\sigma$ est ce que l'on appelle la* **prime de risque**.
- Donc, si l'on introduit le processus défini pout $t \in [0, T]$, $\underline{W}t = Wt + \lambda t$
- alors la dynamique de $\underline{S}$ est donnée par : $d\underline{S}t = \sigma\, \underline{S}_t d\underline{W}_t$
- Donc, si l'on arrive à construire une probabilité **$\underline{\mathrm{IP}}$**, équivalente à **IP**, sous laquelle $\underline{W}_t = W_t + \lambda t$ est un mouvement Brownien, cette probabilité rendra l'actif risqué réactualisé une martingale, et sera un très bon candidat pour notre probabilité risque neutre.

Théorème de Girsanov

Théorème 1.3 Théorème de Girsanov
Il existe une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$, équivalente à la probabilité historique $\mathbb{P}$, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ par :

$$\left.\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_T} = Z_T = e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2}T}$$

sous laquelle le processus $\hat{W}_t$ défini par $\hat{W}_t = W_t + \lambda t$ est un mouvement Brownien sur $[0, T]$.

Semaine prochaine

- EDP de Black-Scholes
- Formule de Black-Scholes
- Changement de numéraire
- Volatilité implicite