ISFA 2e année – Processus Stochastiques
Examen du 10 janvier 2012
Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. Les calculatrices sont interdites. Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées. La qualité de la rédaction sera prise en compte dans la notation.

Questions de cours

1. Écrire la formule de Ito pour le processus $(Z_t) = (f(X_t, Y_t, t))$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et (X_t) et (Y_t) sont deux semi-martingales continues de carré intégrable. Donner une expression de $d\langle Z\rangle_t$ et de $d\langle X, Z\rangle_t$.
2. Soient (X_t) une $\mathbf{P}$-martingale (continue) et $b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne bornée b. Sous quelle mesure $\mathbf{Q}$ absolument continue par rapport à $\mathbf{P}$, le processus $(X_t - \int_0^t b(X_s)\ d\langle X\rangle_s)$ est-il une $\mathbf{Q}$-martingale ? Que doit vérifier, sous la mesure $\mathbf{P}$, un processus (Y_t) pour être une martingale sous la mesure $\mathbf{Q}$?
3. Dans un processus de file d'attente $M/M/1$ de taux d'entrée λ et de temps de service moyen $1/\mu$, dans quel cas existe-t-il un régime stationnaire ? Sous ces hypothèses, quelle est la probabilité qu'il y ait n personnes présentes dans le système en régime stationnaire ?

Exercice 1 :

1. Soient $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard et (M_t) une martingale continue et de carré intégrable (attention, on ne suppose pas que (M) est indépendante de (B) ou s'écrit comme une intégrale stochastique par rapport à (B)). On considère les processus (X_t), (Y_t) et (Z_t) définis comme suit : pour tout $t \geq 0$,

$$X_t = (B_t + t)e^{-B_t - \frac{t}{2}}\ , \qquad Y_t = \frac{B_t}{1+t}\ , \qquad Z_t = tB_t^2 M_t^2$$

   Écrire les équations différentielles stochastiques (EDS) vérifiées par ces processus.
   Déterminer $d\langle X\rangle_t$, $d\langle Z\rangle_t$, $d\langle Z, B\rangle_t$ et $d\langle Z, M\rangle_t$ ainsi que $d\langle X, Z\rangle_t$.
2. Trouver la solution de l'EDS suivante :

$$dN_t = \frac{1}{2}N_t dt + N_t dB_t, \text{ avec } N_0 = 1$$

Exercice 2 :

Partie A : Exponentielle stochastique

Soit (X_t) une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. On cherche à étudier l'équation différentielle stochastique suivante (E) :

$$(E) \qquad Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dX_s$$

1. Ecrire l'EDS vérifiée par (Z_t) lorsque le processus (X_t) suit une diffusion de style Black-Scholes : $dX_s = bX_s ds + \sigma_s dB_s$, où (B_s) désigne un mouvement brownien, b une constante et σ_s un processus càd-làg adapté.
2. (a) En utilisant la formule d'Itô, montrer que le processus (Z_t) défini par

$$Z_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t\right)$$

   est bien solution de (E)

(b) Justifier que (Z_t) est une semi-martingale. Quand est-ce une martingale ?

On admettra que cette solution est l'unique solution de (E).

On notera désormais $\mathcal{E}(X) = (\mathcal{E}(X)_t)_{t\geq 0}$ ce processus, qui s'appelle exponentielle stochastique, ou exponentielle de Doléans-Dade de X.

3. Soit $X = aB$ où a est un réel et B le mouvement brownien standard. Exprimer $\mathcal{E}(aB)_t$ en fonction de a, B_t et t.
4. Soient X et Y deux semi-martingales continues, $X_0 = Y_0 = 0$. Montrer que :
$$\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y\rangle)$$
5. Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. Montrer que l'inverse de l'exponentielle stochastique de X vérifie :
$$(\mathcal{E}(X)_t)^{-1} = \mathcal{E}(-X + \langle X\rangle)_t$$
6. Soit H un processus mesurable adapté, de carré intégrable. Montrer que
$$\mathcal{E}\left(\int_0^t H_s dB_s\right)_t = \exp\left(\int_0^t H_s dB_s - \frac{1}{2}H_s^2 ds\right)$$
est une surmartingale.

Partie B : généralisation

Soient Y et H deux semi-martingales continues, $Y_0 = 0$. Soit (E') l'équation différentielle stochastique suivante :
$$(E') \qquad X_t = H_t + \int_0^t X_s dY_s$$
On veut montrer que le processus $\mathcal{E}_H(Y)$ défini par
$$\mathcal{E}_H(Y)_t = \mathcal{E}(Y)_t \left(H_0 + \int_0^t (\mathcal{E}(Y)_s)^{-1}\,(dH_s - d\langle H, Y\rangle_s)\right)$$
est solution de (E').

Dans ce but, on écrit (X_t) sous la forme $(X_t) = (\mathcal{E}(Y)_t C_t)$ et on cherche à déterminer (C_t).

1. Exprimer dX_t en fonction de dY_t, dC_t et $d\langle Y, C\rangle_t$.
2. Si X_t est solution de (E'), montrer que $dH_t = \mathcal{E}(Y)_t\,[dC_t + d\langle Y, C\rangle_t]$.
3. En réutilisant la formule obtenue à la question B.1, calculer $d\langle X\rangle_t$ et en déduire
$$d\langle Y, C\rangle_t = (\mathcal{E}(Y)_t)^{-1} d\langle H, Y\rangle_t$$
4. Déduire $dC_t = (\mathcal{E}(Y))_t^{-1}\,[dH_t - d\langle H, Y\rangle_t]$.
5. Conclure.

Exercice 1 :

1) $X_t = (B_t + t) e^{-B_t - t/2} = f(t, B_t)$ où $f : (t,x) \mapsto (x+t) e^{-x-t/2}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-x-t/2} - (x+t) e^{-x-t/2}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial t} = e^{-x-t/2} + (x+t) \times -\frac{1}{2} e^{-x-t/2}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -e^{-x-t/2} - e^{-x-t/2} + (x+t) e^{-x-t/2}$

$$dX_t = \left(e^{-B_t - t/2} - (B_t+t) e^{-B_t - t/2}\right) dB_t + \frac{1}{2}\left(-2e^{-B_t-t/2} + (B_t+t)e^{-B_t-t/2}\right) dt$$
$$+ \left(e^{-B_t-t/2} - \frac{1}{2}(B_t+t)e^{-B_t-t/2}\right) dt$$
$$= \left(e^{-B_t-t/2} - X_t\right) dB_t$$

et $X_0 = 0$

Donc EDS_1 : $\begin{cases} X_0 = 0 \\ dX_t = (e^{-B_t - t/2} - X_t) dB_t \end{cases}$

$Y_t = \frac{B_t}{1+t} = f(t, B_t)$ où $f : (t,x) \mapsto \frac{x}{1+t}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+t}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-x}{(1+t)^2}$

$$dY_t = \frac{1}{1+t} dB_t - \frac{B_t}{(1+t)^2} dt$$
$$= -\frac{Y_t}{1+t} dt + \frac{1}{1+t} dB_t = \frac{1}{1+t}\left(-Y_t dt + dB_t\right)$$

EDS_2 : $\begin{cases} Y_0 = 0 \\ dY_t = \frac{-1}{1+t}(Y_t dt - dB_t) \end{cases}$

$Z_t = t B_t^2 M_t^2$

Notons $A_t = B_t M_t = f(B_t, M_t)$

$dA_t = B_t dM_t + M_t dB_t$

$Z_t = t A_t^2 = f(t, A_t)$ $\qquad f : (t,x) \mapsto t x^2$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = 2tx$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2t$ $\quad \frac{\partial f}{\partial t} = x^2$

$$dZ_t = 2tA_t\, dA_t + \frac{1}{2}2t\, d\langle A\rangle_t + A_t^2\, dt$$
$$= 2tB_tM_t(B_t dM_t + M_t dB_t) + tM_t^2 dt + B_t^2M_t^2 dt$$

$$d\langle X\rangle_t = (e^{2(-B_t - t/2)} - 2X_t e^{-B_t - t/2} + X_t^2)\,dt$$
$$d\langle Z\rangle$$

2) $dN_t = \frac{1}{2}N_t\,dt + N_t\,dB_t \qquad N_0 = 1 \qquad e^{-\mu t}X_t$ $\ln$

Posons $Y_t = e^{-t/2}N_t \qquad f:(t,x)\mapsto xe^{-t/2}$

$$dY_t = e^{-t/2}dN_t - \frac{1}{2}N_t e^{-t/2}dt$$
$$= e^{-t/2}\left(\frac{1}{2}N_t\,dt + N_t\,dB_t\right) - \frac{1}{2}N_t e^{-t/2}dt$$
$$= e^{-t/2}N_t\,dB_t = Y_t\,dB_t$$

Posons $Z_t = \ln Y_t \qquad f: x\mapsto \ln x \qquad f'(x) = \frac{1}{x} \qquad f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

$$dZ_t = \frac{1}{Y_t}dY_t - \frac{1}{2}\frac{1}{Y_t^2}d\langle Y_t\rangle_t$$
$$= dB_t - \frac{1}{2}dt$$
$$\Rightarrow Z_t - Z_0 = -\frac{1}{2}t + B_t \qquad Z_0 = \ln Y_0 = \ln N_0 = 0$$
$$\Rightarrow Z_t = -\frac{1}{2}t + B_t \quad \Rightarrow Y_t = \exp\left(-\frac{1}{2}t + B_t\right)$$

Or $Y_t = e^{-\frac{t}{2}}N_t \Rightarrow N_t = e^{t/2}Y_t$

$$\Rightarrow Y_t = \exp(B_t)$$

Exercice 2 :

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s\,dX_s$$

1) On suppose $dX_s = bX_s\,ds + \sigma_s\,dB_s$

$$Z_t = 1 + \int_0^t Z_s(bX_s\,ds + \sigma_s\,dB_s)$$

$$\Rightarrow Z_t = 1 + \int_0^t b X_s Z_s \, ds + \int_0^t \sigma_s Z_s \, dB_s$$

$$dZ_t = b X_t Z_t \, dt + \sigma_t Z_t \, dB_t \quad (1)$$

2) a) $Z_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t\right) = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)$

$f : (t,x) = \exp\left(x - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) \qquad Z_t = f(t, X_t)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp\left(x - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} = -\frac{1}{2}\sigma_t^2 \exp\left(x - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)$$

$$dZ_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) dX_t + \frac{1}{2}\exp\left(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) d\langle X\rangle_t - \frac{1}{2}\sigma_t^2 \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) dt$$

Or $dX_t = b X_t \, dt + \sigma_t \, dB_t$

$$\Rightarrow dZ_t = b X_t \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) dt + \sigma_t \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) dB_t$$
$$+ \frac{1}{2}\exp\left(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) \sigma_t^2 dt - \frac{1}{2}\sigma_t^2 \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right) dt$$
$$= b X_t Z_t \, dt + \sigma_t Z_t \, dB_t$$

Donc $Z_t = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t\right)$ Satisfait (1)

Donc Z_t est bien solut° de (E)

b) $Z_t = 1 + \int_0^t Z_s \, dX_s \qquad dZ_t = Z_t \, dX_t$

X_t est une semi martingale continue et $X_0 = 0$

Donc Z_t est une semi martingale (Z_t est l'exponentielle de Doléans-Dade pour $\theta = 1$ p.s)

Pour que Z_t soit une vraie martingale il faut qu'elle satisfasse la condit° de Novikov

i.e $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \sigma_s^2 ds\right)\right] < \infty \quad \forall t > 0$.

3) $X = aB$

$$\mathcal{E}(aB)_r = \exp\left(aB_r - \frac{1}{2}a^2 r\right) \quad \text{car } \langle X\rangle_r = a^2 r$$

4) On pose $U_r = \mathcal{E}_r(X)$ et $V_r = \mathcal{E}_r(Y)$

On utilise la formule d'Itô pour le produit $U_r V_r$

$$dU_rV_r = V_r\,dU_r + U_r\,dV_r + d\langle U,V\rangle_r \implies U_rV_r = 1 + \int_0^r U_s\,dV_s + V_s\,dU_s + d\langle U,V\rangle_s$$

Or $dU_r = U_r\,dX_r$ et $dV_r = V_r\,dY_r$

$$d\langle U,V\rangle_r = U_rY_r\,d\langle X,Y\rangle_r$$

Donc $dU_rV_r = V_rU_r\,dX_r + U_rV_r\,dY_r + U_rV_r\,d\langle X,Y\rangle_r$

$$= U_rV_r\left(dX_r + dY_r + d\langle X,Y\rangle_r\right)$$

Ce qui est la définition de $\mathcal{E}(X+Y+\langle X,Y\rangle)$

Car $U_rV_r = 1 + \int_0^r U_sV_s\left(dX_s + dY_s + d\langle X,Y\rangle_s\right)$

$$= 1 + \int_0^r \underbrace{U_sV_s}_{Z_s}\,\underbrace{d(X_s + Y_s + \langle X,Y\rangle_s)}_{dX_s}$$

Donc $U_rV_r = \mathcal{E}_r(X)\mathcal{E}_r(Y) = \mathcal{E}_r(X+Y+\langle X,Y\rangle)$

5) On a mq $\mathcal{E}(X)\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X+Y+\langle X,Y\rangle)$

Considérons $Y = -X + \langle X\rangle$

$$\implies \mathcal{E}(X)\,\mathcal{E}(-X+\langle X\rangle) = \mathcal{E}(X - X + \langle X\rangle + \langle X, -X+\langle X\rangle\rangle)$$

$$= \mathcal{E}(X - X + \langle X\rangle - \langle X\rangle)$$

$$= \mathcal{E}(0) = 1$$

$$\implies \mathcal{E}(-X+\langle X\rangle) = \mathcal{E}(X)^{-1}$$

6) On note $Z_r = \mathcal{E}_r\left(\int_0^r H_s\,dB_s\right) = \exp\left(\int_0^r H_s\,dB_s - \frac{1}{2}H_s^2\,ds\right)$

Partie B :

(E') $X_r = H_r + \int_0^r X_s \, dY_s$

On suppose $X_r = \mathcal{E}_r(Y) C_r = \exp\left(Y_r - \frac{1}{2}\langle Y \rangle_r\right) C_r$

Notons $Z_r = \mathcal{E}_r(Y) \Rightarrow Z_r = 1 + \int_0^r Z_s \, dY_s \qquad dZ_r = Z_r \, dY_r$

$X_r = Z_r C_r$

$dX_r = C_r \, dZ_r + Z_r \, dC_r + d\langle Z, C \rangle_r$

$= C_r Z_r \, dY_r + Z_r \, dC_r + Z_r \, d\langle Y, C \rangle_r$

$= C_r \exp\left(Y_r - \frac{1}{2}\langle Y \rangle_r\right) dY_r + \exp\left(Y_r - \frac{1}{2}\langle Y \rangle_r\right) dC_r + \exp\left(Y_r - \frac{1}{2}\langle Y \rangle_r\right) d\langle Y, C \rangle_r$

2) X_r sol° de (E') $\Rightarrow dX_r = dH_r + X_r \, dY_r$

Or $dX_r = \mathcal{E}_r(Y) \left(C_r \, dY_r + dC_r + d\langle Y, C \rangle_r\right)$

$= X_r \, dY_r + \mathcal{E}_r(Y) \, dC_r + \mathcal{E}_r(Y) \, d\langle Y, C \rangle_r$

$\Rightarrow dH_r + X_r \, dY_r = X_r \, dY_r + \mathcal{E}_r(Y) \, dC_r + \mathcal{E}_r(Y) \, d\langle Y, C \rangle_r$

$\Rightarrow dH_r = \mathcal{E}_r(Y) \left(dC_r + d\langle Y, C \rangle_r\right)$

3) En B1 on a $dX_r = \mathcal{E}_r(Y) \left(dC_r + C_r \, dY_r + d\langle Y, C \rangle_r\right)$

$d\langle X \rangle_r =$

4) On a $d\langle Y, C\rangle_r = (\mathcal{E}_r(Y))^{-1} d\langle H, Y\rangle_r$

$$\Rightarrow dH_r = \mathcal{E}_r(Y)(dC_r + d\langle Y, C\rangle_r)$$

$$\Rightarrow dH_r = \mathcal{E}_r(Y)(dC_r + \mathcal{E}_r(Y)^{-1} d\langle H, Y\rangle_r)$$

$$\Rightarrow dH_r - d\langle H, Y\rangle_r = \mathcal{E}_r(Y)\, dC_r$$

$$\Rightarrow dC_r = \mathcal{E}_r(Y)^{-1}(dH_r - d\langle H, Y\rangle_r)$$

5) $\mathcal{E}_H(Y)_r = \mathcal{E}(Y)_r \left(H_0 + \int_0^r dC_s\right)$

$$= \mathcal{E}(Y)_r (H_0 + C_r - C_0)$$

$$= X_r + (H_0 - C_0)\mathcal{E}(Y)_r$$

$$H_r + \int_0^r \mathcal{E}_H(Y)_s\, dY_s = H_r + \int_0^r (X_s + (H_0 - C_0)\mathcal{E}(Y)_s)\, dY_s$$

$$= H_r + \int_0^r X_s\, dY_s + \int_0^r (H_0 - C_0)\mathcal{E}(Y)_s\, dY_s$$

$$= X_r + \int_0^r (H_0 - C_0)\mathcal{E}(Y)_s\, dY_s$$

$$= X_r + (H_0 - C_0)\mathcal{E}(Y)_r = \mathcal{E}_H(Y)_r$$

$\Rightarrow$ Donc $\mathcal{E}_H(Y)_r$ est bien solut° de (E')