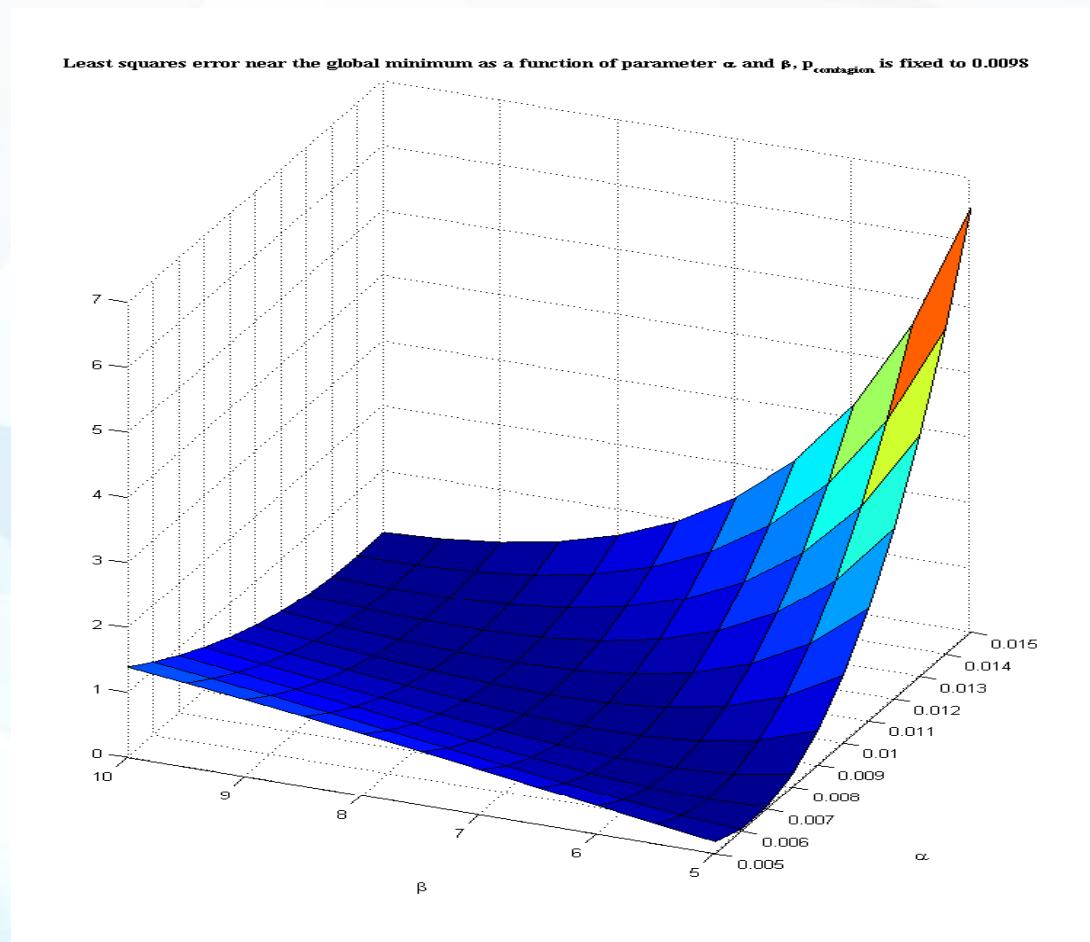


Techniques numériques en finance et actuariat

Armand Bernou - armand.bernou@univ-lyon1.fr



Année 2023-2024

Plan

© Théo Jalabert



Organisation du cours et références générales

Chapitre 1: Motivations

Chapitre 2: Approximation d'équations aux dérivées partielles

Organisation du cours et modalités d'évaluation

© Théo Jalabert



- ▶ Cours magistral: théorie et présentations des méthodes;
- ▶ 4 TPs: mises en application.

Évaluation par projet : groupe de 2 ou 3 + éventuellement un étudiant de formation continue.

Références complémentaires

- Bienvenüe, A., 2009, *Techniques de simulation*, notes de cours, ISFA
- Kolf, R., Korn, E., Kroisandt, G., 2010, *Monte Carlo methods and models in finance and insurance*, CRC Press
- Glasserman, P., 2002, *Monte Carlo methods in financial engineering*, Springer
- Jackel, P., 2002, *Monte Carlo methods in finance*, Wiley Finance
- Lapeyre, B., Pardoux, E., Sentis, R., 1998, *Méthodes de Monte-Carlo pour les équations de transport et de diffusion*, Springer
- Press, W.H., Teukolsky, S.A., Vetterling, W.T., Flannery, B.P., 2007, *Numerical recipes 3rd edition: The art of scientific computing*, Cambridge University Press
- Quarteroni, A., Riccardo, S., Saleri, F., 2004, *Méthodes Numériques*, Springer
- G. Pagès, 2018, *Numerical Probability, An Introduction with Applications to Finance*, Springer.

Plan

© Théo Jalabert



Organisation du cours et références générales

Chapitre 1: Motivations

Chapitre 2: Approximation d'équations aux dérivées partielles

Motivations générales

- Pour gérer le risque en assurance et en finance → besoin de mise en place de modèles d'évaluation;
- **en assurance** : tarification, provisionnement, tables de mortalité prospective, gestion actif-passif;
- **en finance** : pricing de produits dérivés, détermination de stratégies de couverture, allocation de portefeuille, gestion actif-passif.
- Nouvelles normes réglementaires → importance renforcée des méthodes quantitatives pour l'évaluation des risques.



Normes IFRS: comptabilisation des actifs en *fair value* (**mark-to-market**)

- IAS 32 et 39, IFRS 9 pour les instruments financiers, IFRS 4 pour les contrats d'assurance.
- Recours au **mark-to-model** pour les actifs non négociables (par exemple IFRS 2 pour les rémunérations en bons de souscription d'actions, stock-options) ou en cas de problème de liquidité.



- ▶ Bâle 2;
- ▶ Bâle 3;
- ▶ Depuis 2016: Solvabilité 2.

Extrait de la page de l'ACPR dédiée à Solvabilité II:

“Le plan de contrôle intègre la revue de l'évaluation des provisions techniques [...]. Pour apprécier la cohérence du modèle interne avec les méthodes de valorisation retenues par l'organisme, une bonne compréhension des approches retenues pour la valorisation du bilan prudentiel est indispensable.”



1. Calcul d'espérance;
2. problème d'optimisation;
3. problème d'interpolation.

Dans ce cours → calcul d'espérance, par différentes méthodes issues de deux grandes familles:

- ▶ Méthodes pour la résolution numérique d'EDP;
- ▶ Méthodes de Monte-Carlo;

Le problème général, dans plusieurs contextes

© Théo Jalabert



Estimation numérique de

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [f(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})]$$

où $(X_t)_{t \geq 0}$ processus stochastique de \mathbb{R}^d , où $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, et où \mathbb{Q} désigne la probabilité risque neutre, $(r_s)_{s \in [0, T]}$ le taux sans risque

Quelques exemples en finance:

- **Call européen :**

$$f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = e^{-\int_0^T r_s ds} (X_{t_n} - K)^+$$

- **Call européen sur indice boursier:** $X_s = (X_s^1, \dots, X_s^d)$ pour tout $s \in \{t_0, \dots, t_n\}$:

$$f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = e^{-\int_0^T r_s ds} \left(\sum_{k=1}^d X_{t_n}^k - K \right)^+$$

- **Put asiatique:**

$$f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = e^{-\int_0^T r_s ds} \left(K - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_{t_i} \right)^+$$

Estimation numérique de

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [f(X_{t_0}, \dots, X_{t_n})]$$

où $(X_t)_{t \geq 0}$ processus stochastique de \mathbb{R}^d , où $t_0 < t_1 < \dots < t_n = T$, et où \mathbb{Q} désigne la probabilité risque neutre.

Exemples (suite):

- **Call de type américain:**

$$C_0 = \sup_{\tau \leq T} \mathbb{E} \left[e^{-\int_0^\tau r_s ds} (X_\tau - K)^+ \right]$$

- **Probabilité de ruine à horizon fini:**

$$f(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) = \mathbf{1}_{\min(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \leq u}$$

Exemple 1: Provision pour Dépréciation Durable (PDD)

© Théo Jalabert



L'assureur est légalement obligé de provisionner toute moins-value “durable” sur ses titres, actions (cotées ou non) comme obligations (souveraines ou d'entreprises).

Pour un sous-jacent $(X_t)_{t \geq 0}$, on dira par exemple qu'une dépréciation se produit au temps 1 (an) si

- ▶ $X_1 < X_0$,
- ▶ $\max_{s \in [\frac{1}{2}, 1]} X_s < 0.8X_0$.

Pour évaluer la probabilité d'apparition d'un événement de dépréciation, on prendra

Exemple 1: Provision pour Dépréciation Durable (PDD)

© Théo Jalabert



L'assureur est légalement obligé de provisionner toute moins-value “durable” sur ses titres, actions (cotées ou non) comme obligations (souveraines ou d'entreprises).

Pour un sous-jacent $(X_t)_{t \geq 0}$, on dira par exemple qu'une dépréciation se produit au temps 1 (an) si

- ▶ $X_1 < X_0$,
- ▶ $\max_{s \in [\frac{1}{2}, 1]} X_s < 0.8X_0$.

Pour évaluer la probabilité d'apparition d'un événement de dépréciation, on prendra

$$f((X_s)_{s \in [0,1]}) = \mathbf{1}_{\{\sup_{s \in [\frac{1}{2}, 1]} X_s < 0.8X_0\}}.$$

Objectif abstrait

Objectif du cours → calcul/approximation de prix de contrat:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[g(X)] = \int_{\mathbb{R}} g(x) f_X(x) dx$$

où

- ▶ g fonction du sous-jacent à maturité;
- ▶ f_X densité du sous-jacent à maturité.

Exemple 2: Prestation de décès minimale garantie

© Théo Jalabert



Soit un contrat d'épargne avec garantie plancher. On considère un actif risqué $(X_t)_{t \geq 0}$ et on prend $X_0 = K$ le versement initial. Le reversement en fin de contrat est de $\max(K, X_T)$, avec

$$T = \min(\tau_1, \tau_2, \tau_\infty),$$

où τ_∞ est la date de maturité du contrat, τ_2 la date de décès sur lequel s'exerce la garantie plancher, τ_1 la date de rachat.

Notons que ces les instants τ_1 , τ_2 peuvent être modélisés par des variables aléatoires (indépendantes... ou non).

Exemple 2 (ct.)

Si l'actif risqué suit un mouvement Brownien géométrique, on a

$$dX_t = X_t(r_t dt + \sigma dW_t),$$

avec

- ▶ $(r_t)_{t \geq 0}$ taux d'intérêt sans risque. Prenons $r_t = r > 0$ pour tout t pour simplifier.
- ▶ σ volatilité instantanée;
- ▶ $(W_t)_{t \geq 0}$ mouvement Brownien.

Prix du contrat actualisé

$$g(X_T) = e^{-rT} \left(K + (X_T - K)_+ \right)$$

On a $g(x) = e^{-rT} \left(K + (x - K)_+ \right)$ la fonction indiquant le montant perçu en fin de contrat, et

$$X_T =$$

Exemple 2 (ct.)

Si l'actif risqué suit un mouvement Brownien géométrique, on a

$$dX_t = X_t(r_t dt + \sigma dW_t),$$

avec

- ▶ $(r_t)_{t \geq 0}$ taux d'intérêt sans risque. Prenons $r_t = r > 0$ pour tout t pour simplifier.
- ▶ σ volatilité instantanée;
- ▶ $(W_t)_{t \geq 0}$ mouvement Brownien.

Prix du contrat actualisé

$$g(X_T) = e^{-rT} \left(K + (X_T - K)_+ \right)$$

On a $g(x) = e^{-rT} \left(K + (x - K)_+ \right)$ la fonction indiquant le montant perçu en fin de contrat, et

$$X_T = X_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma W_T \right).$$

Exemple 2 (ct.)

Sachant que $W_T \sim \mathcal{N}(0, T)$, pour coller au cadre de départ, on pose, pour $x \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{g}(x) = \left[K + \left(X_0 \exp \left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma x \right) - K \right)_+ \right],$$

et

$$f_{W_T}(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{2T}}}{\sqrt{2\pi T}}.$$

On a donc transformé le calcul du prix du contrat en calcul/approximation de la quantité

$$\mathbb{E}[g(X_T)] = \mathbb{E}\left[e^{-rT} (K + (X_T - K)_+)\right] = e^{-rT} \int_{\mathbb{R}} \tilde{g}(x) f_{W_T}(x) dx.$$

Exemple 3: un problème de contrôle

Théorie du contrôle : outil essentiel en finance (allocation d'actifs, durée de conservation, etc...)

Supposons que l'on cherche à optimiser une fonction H avec

$$H(z) = \mathbb{E}[g(X, z)] = \int_{\mathbb{R}} g(x, z) f_X(x) dx$$

avec X actif risqué, z variable de **contrôle**.

Quelques exemples d'applications

1. H espérance des rendements d'un portefeuille, avec z la part investie en actifs risqués.
2. On cherche alors z_{\max} tel que $H(z_{\max}) = \sup_{z \in D} H(z)$, avec D domaine des valeurs admissibles pour le paramètre z .
3. H actif, sensible à un paramètre de contrôle.
4. Typiquement, calcul des "Grecques" pour mettre en oeuvre des stratégies de couverture.

Plan

© Théo Jalabert



Organisation du cours et références générales

Chapitre 1: Motivations

Chapitre 2: Approximation d'équations aux dérivées partielles

Plan

© Théo Jalabert



Organisation du cours et références générales

Chapitre 1: Motivations

Chapitre 2: Approximation d'équations aux dérivées partielles
EDS et théorie de Feynman-Kac
Schémas numériques

Générateur associé à une EDS

Soit X un processus d'Itô (processus de Markov continu) vérifiant l'EDS suivante :

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$$

$(W_t)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard et les coefficients b et σ vérifient une condition de type Lipschitz garantissant l'existence et l'unicité de la solution (cf. Oksendal).

Comment peut-on simuler directement une solution (trajectoire) de cette EDS ?

Soit Φ une fonction de $C^2(\mathbb{R})$. On définit l'opérateur L^X par :

$$L^X \cdot \Phi(x) = \lim_{h \downarrow 0} \mathbb{E} \left[\frac{\Phi(X_{t+h}) - \Phi(X_t)}{h} \mid X_t = x \right]$$

ou, de façon équivalente:

$$L^X \cdot \Phi(x) = b(t, x) \frac{\partial \Phi}{\partial_x} + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \frac{\partial^2 \Phi}{\partial_x^2}$$

Théorème de Feynman-Kac

Théorème

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable et r une constante. Soient $T > 0$ et b, σ tels que la solution l'EDP suivante sur $[0, T] \times \mathbb{R}$:

$$\partial_t u(t, x) + b(t, x)\partial_x u(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)\partial_{xx}^2 u(t, x) = ru(t, x)$$

avec la condition terminale :

$$u(T, x) = f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R},$$

existe. On la note $u(\cdot, \cdot)$. Alors u est donnée sur $[0, T] \times \mathbb{R}$ par la formule explicite:

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} f(X_T) \mid X_t = x \right],$$

avec, sur $[0, T]$,

$$dX_t = b(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t$$

Preuve: formule d'Itô.

Sous la probabilité risque neutre, supposons que l'on a

$$\frac{dX_t}{X_t} = rdt + \sigma dW_t$$

Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction **à croissance au plus polynomiale** et r une constante. Soit $T > 0$ et $u(t, x)$ la fonction définie par:

$$u(t, x) = \mathbb{E} \left[e^{-r(T-t)} f(X_T) \mid X_t = x \right]$$

Alors $u(t, x)$ vérifie l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + rx\partial_x u(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial_{xx}^2 u(t, x) = ru(t, x) & \text{pour } (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ u(T, x) = f(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}_+^* \end{cases}$$

Remarque : lorsque $f(x) = (x - K)^+$, il s'agit de l'EDP de Black-Scholes.

À ce stade

On a transformé le calcul d'une **espérance dépendant de la solution de l'EDS** en une résolution **d'EDP** avec condition terminale.

Cette dernière est entièrement **déterministe**.

Dans la suite du chapitre, on va s'intéresser à la résolution numérique de l'EDP.

Plan

© Théo Jalabert



Organisation du cours et références générales

Chapitre 1: Motivations

Chapitre 2: Approximation d'équations aux dérivées partielles
EDS et théorie de Feynman-Kac
Schémas numériques

Étapes de résolution

Suite de la section → plan de résolution de l'EDP correspondant au MB géométrique.

Quels problèmes pour la résolution du problème précédent ?

Étapes de résolution

© Théo Jalabert



Suite de la section → plan de résolution de l'EDP correspondant au MB géométrique.

Quels problèmes pour la résolution du problème précédent ?

- ▶ l'EDS du mouvement Brownien géométrique fait intervenir $x \mapsto x\sigma$ qui n'est pas borné;

Étapes de résolution

© Théo Jalabert



Suite de la section → plan de résolution de l'EDP correspondant au MB géométrique.

Quels problèmes pour la résolution du problème précédent ?

- ▶ l'EDS du mouvement Brownien géométrique fait intervenir $x \mapsto x\sigma$ qui n'est pas borné;
- ▶ la variable espace vit dans \mathbb{R}_+ ou \mathbb{R} tout entier;

Étapes de résolution

© Théo Jalabert



Suite de la section → plan de résolution de l'EDP correspondant au MB géométrique.

Quels problèmes pour la résolution du problème précédent ?

- ▶ l'EDS du mouvement Brownien géométrique fait intervenir $x \mapsto x\sigma$ qui n'est pas borné;
- ▶ la variable espace vit dans \mathbb{R}_+ ou \mathbb{R} tout entier;
- ▶ pas d'accès aux “vraies” dérivées: il va falloir approximer;

Étapes de résolution

© Théo Jalabert



Suite de la section → plan de résolution de l'EDP correspondant au MB géométrique.

Quels problèmes pour la résolution du problème précédent ?

- ▶ l'EDS du mouvement Brownien géométrique fait intervenir $x \mapsto x\sigma$ qui n'est pas borné;
- ▶ la variable espace vit dans \mathbb{R}_+ ou \mathbb{R} tout entier;
- ▶ pas d'accès aux “vraies” dérivées: il va falloir approximer;
- ▶ en numérique on ne sait faire que du discret, l'EDP est continue. Il faut choisir une façon de **discrétiser**;

Étapes de résolution

© Théo Jalabert



Suite de la section → plan de résolution de l'EDP correspondant au MB géométrique.

Quels problèmes pour la résolution du problème précédent ?

- ▶ l'EDS du mouvement Brownien géométrique fait intervenir $x \mapsto x\sigma$ qui n'est pas borné;
- ▶ la variable espace vit dans \mathbb{R}_+ ou \mathbb{R} tout entier;
- ▶ pas d'accès aux “vraies” dérivées: il va falloir approximer;
- ▶ en numérique on ne sait faire que du discret, l'EDP est continue. Il faut choisir une façon de **discrétiser**;
- ▶ on a plusieurs schémas numériques à disposition. Lesquels, et sur quels critères choisir ?

Nos réponses

- ▶ l'EDS du mouvement Brownien géométrique fait intervenir $x \mapsto x\sigma$ qui n'est pas borné → **Passage à une EDP en variable logarithmique.**

Nos réponses

- ▶ l'EDS du mouvement Brownien géométrique fait intervenir $x \mapsto x\sigma$ qui n'est pas borné → **Passage à une EDP en variable logarithmique.**
- ▶ la variable espace vit dans \mathbb{R}_+ ou \mathbb{R} tout entier → **Compactification en espace;**

Nos réponses

- ▶ l'EDS du mouvement Brownien géométrique fait intervenir $x \mapsto x\sigma$ qui n'est pas borné → **Passage à une EDP en variable logarithmique.**
- ▶ la variable espace vit dans \mathbb{R}_+ ou \mathbb{R} tout entier → **Compactification en espace;**
- ▶ pas d'accès aux “vraies” dérivées: il va falloir approximer → **Approximation des dérivées;**

Nos réponses

- ▶ l'EDS du mouvement Brownien géométrique fait intervenir $x \mapsto x\sigma$ qui n'est pas borné → **Passage à une EDP en variable logarithmique.**
- ▶ la variable espace vit dans \mathbb{R}_+ ou \mathbb{R} tout entier → **Compactification en espace;**
- ▶ pas d'accès aux “vraies” dérivées: il va falloir approximer → **Approximation des dérivées;**
- ▶ en numérique on ne sait faire que du discret, l'EDP est continue. Il faut choisir une façon de **discrétiser** → **Discrétisation en temps et en espace et conditions au bord;**



- ▶ l'EDS du mouvement Brownien géométrique fait intervenir $x \mapsto x\sigma$ qui n'est pas borné → **Passage à une EDP en variable logarithmique.**
- ▶ la variable espace vit dans \mathbb{R}_+ ou \mathbb{R} tout entier → **Compactification en espace;**
- ▶ pas d'accès aux “vraies” dérivées: il va falloir approximer → **Approximation des dérivées;**
- ▶ en numérique on ne sait faire que du discret, l'EDP est continue. Il faut choisir une façon de **discrétiser** → **Discrétisation en temps et en espace et conditions au bord;**
- ▶ on a plusieurs schémas numériques à disposition. Lesquels, et sur quels critères choisir ? → **Schémas explicites et implicites, θ -schémas.**

Plan de la section

- EDP en variable logarithmique
- Restriction de l'espace des variables à un compact
- Approximation des dérivées
- Discrétisation de l'EDP en temps et en espace
- Condition aux bords
- Schémas explicites
- Schémas implicites
- θ -Schémas

EDP en variable logarithmique

$$dX_t = X_t r dt + X_t \sigma(t, X_t) dW_t$$

Problème : Même si σ est une fonction bornée, le coefficient de volatilité $x \mapsto x\sigma(t, x)$ n'est pas borné: \rightarrow difficile de définir une solution de l'EDS, et donc ambiguïté dans la définition de u .

Pour la résolution numérique de l'EDP vérifiée par u , on va contourner cette difficulté en considérant $Y_t = \log X_t$.

Proposition

Soit $T > 0$. Soit $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ la solution de l'EDS définie sur $[0, T]$ par

$$dY_t = \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2(t, X_t) \right) dt + \sigma(t, X_t) dW_t, Y_0 = y_0$$

où $r > 0$ constante, σ fonction Lipschitz, $y_0 \in \mathbb{R}$ et $(W_t)_{t \in [0, T]}$ mouvement Brownien.

Alors, le processus $(X_t)_{t \in [0, T]}$ défini pour tout $t \geq 0$ par $X_t = e^{Y_t}$ est solution de l'équation

$$dX_t = X_t r dt + X_t \sigma(t, X_t) dW_t,$$

De plus, pour tout $t \geq 0$, $X_t \geq 0$ et $Y_t = \ln(X_t)$.



Revenons à l'EDP. On a, pour l'équation originale pour u dépendant de X_T (et non de Y_T):

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) + rx\partial_x u(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2(t, x)x^2\partial_{xx}^2 u(t, x) = ru(t, x), & (t, x) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \\ u(T, x) = f(x), & x \in]0, \infty[\end{cases}$$

On considère le changement de variable suivant :

$$u(t, x) = v(\tau, y)$$

avec

- $\tau = T - t;$
- $y = \log(x).$

On considère le changement de variable suivant :

$$u(t, x) = v(\tau, y)$$

avec

- $\tau = T - t;$
- $y = \log(x).$

et on prend σ constant pour simplifier.

La fonction v vérifie l'EDP suivante :

$$\begin{cases} \partial_\tau v(\tau, y) - [r - \frac{1}{2}\sigma^2] \partial_y v(\tau, y) - \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{yy}^2 v(\tau, y) = -rv(\tau, y), & (\tau, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \\ v(0, y) = u(T, e^y) = f(e^y), & y \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

Restriction à un compact

Pour résoudre numériquement cette EDP, on se ramène à un intervalle borné:

$$(\tau, y) \in [0, \infty[\times \mathbb{R} \rightarrow (\tau, y) \in [0, T] \times [y_{\min}, y_{\max}]$$

où y_{\min} et y_{\max} sont deux réels choisis de sorte que :

$$\begin{cases} v(\tau, y_{\min}) \approx v(\tau, -\infty) \\ v(\tau, y_{\max}) \approx v(\tau, +\infty) \end{cases}$$

Exemple :

1. Cas $f(x) = (K - x)^+$, $v(\tau, y) = \mathbb{E}[e^{-r\tau}(K - X_T)^+ \mid X_\tau = e^y]$

$$\begin{cases} v(\tau, y_{\min}) \approx v(\tau, -\infty) = e^{-r\tau} K \\ v(\tau, y_{\max}) \approx v(\tau, +\infty) = 0 \end{cases}$$

2. Cas $f(x) = K - (x - K)_+$,
 $v(\tau, y) = \mathbb{E}[e^{-r\tau}(K - (X_T - K)_+) \mid X_\tau = e^y]$

$$\begin{cases} v(\tau, y_{\min}) \approx v(\tau, -\infty) = 0 \\ v(\tau, y_{\max}) \approx e^{-r\tau} y_{\max} \end{cases}$$

Restriction à un compact II: nouvelle EDP

© Théo Jalabert



L'EDP vérifiée par v se réécrit alors sur $[0, T] \times [y_{\min}, y_{\max}]$:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_\tau v(\tau, y) - \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \partial_y v(\tau, y) - \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{yy}^2 v(\tau, y) \\ \qquad\qquad\qquad = -rv(\tau, y), & \forall (\tau, y) \in]0, T] \times]y_{\min}, y_{\max}[\\ v(0, y) = u(T, e^y) = f(e^y), & \forall y \in [y_{\min}, y_{\max}] \\ v(\tau, y_{\min}) = v(\tau, -\infty), & \forall \tau \in]0, T] \\ v(\tau, y_{\max}) = v(\tau, +\infty), & \forall \tau \in]0, T] \end{array} \right.$$

Approximation des dérivées

Proposition

Soit $u : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, $a < b$ deux réels. Pour $x, x + h, x - h \in [a, b]$, on a:

- si $u \in C^2$, alors $\left| \frac{u(x+h) - u(x)}{h} - u'(x) \right| \leq \frac{h}{2} \sup_{y \in [a,b]} |u^{(2)}(y)|$.
- Si $u \in C^3$, alors $\left| \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h} - u'(x) \right| \leq \frac{h^2}{6} \sup_{y \in [a,b]} |u^{(3)}(y)|$.
- Si $u \in C^4$, alors $\left| \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2} - u''(x) \right| \leq \frac{h^2}{12} \sup_{y \in [a,b]} |u^{(4)}(y)|$.

Preuve: par formule de Taylor-Lagrange.

Discrétisation en temps et en espace

La résolution numérique de l'EDP se fait sur un sous-ensemble discret de $[0, T] \times [y_{\min}, y_{\max}]$.

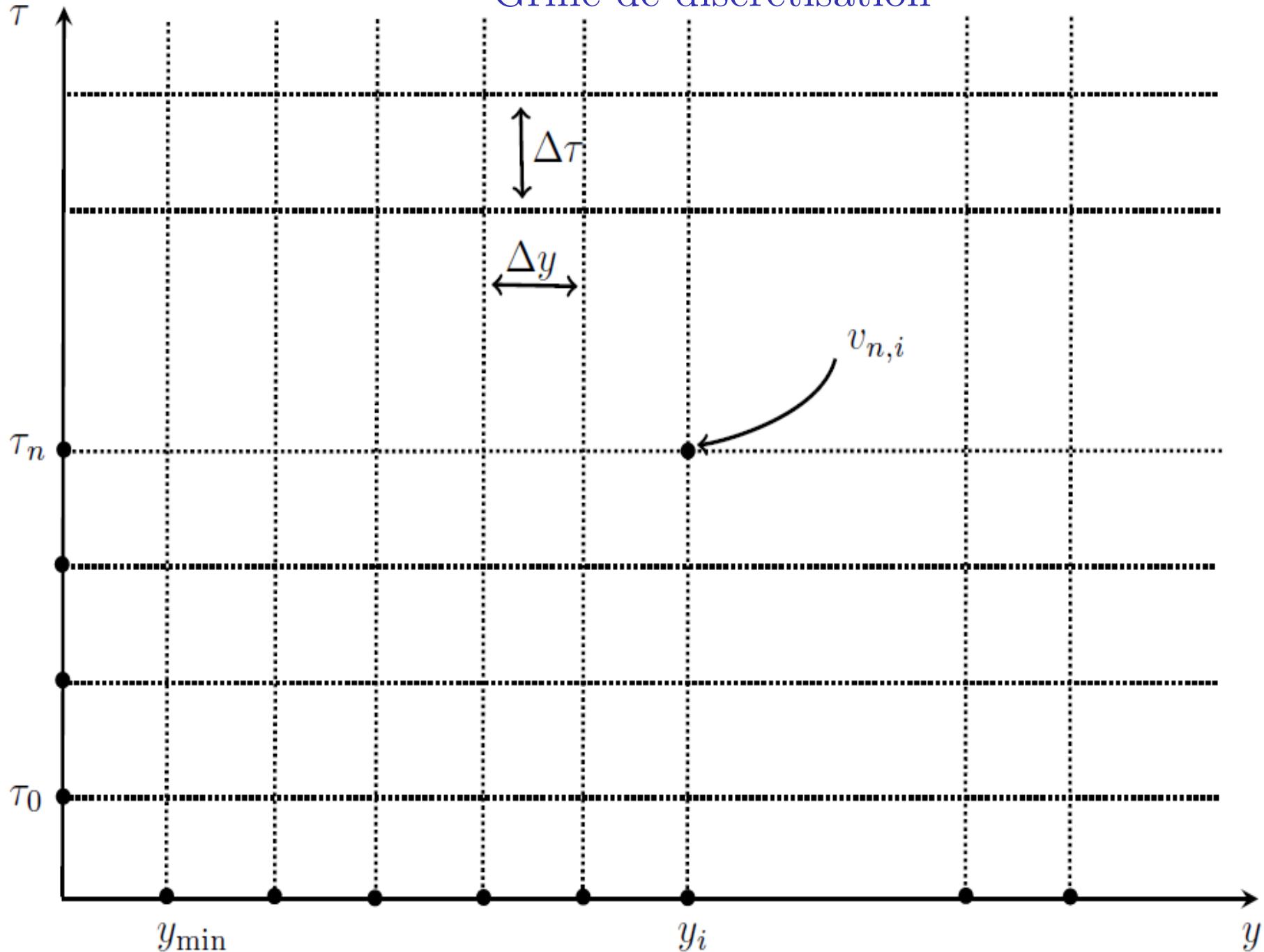
- Discrétisation en temps sur $[0, T]$, en N pas:

$$\tau_n = n\Delta\tau, \quad n = 0, \dots, N, \quad \Delta\tau = \frac{T}{N}$$

- Discrétisation en espace sur $[y_{\min}, y_{\max}]$, en M pas

$$y_i = y_{\min} + i\Delta y, \quad i = 0, \dots, M + 1, \quad \Delta y = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{M + 1}$$

Grille de discrétilsation



On note $v_{n,i}$ l'approximation numérique de $v(\tau_n, y_i)$. Les conditions aux bords s'écrivent (cas $f(x) = (K - x)_+$):

- $v_{0,i} = v(0, y_i) = f(e^{y_i})$, pour tout $i = 0, \dots, M + 1$;
- $v_{n,0} = v(\tau_n, y_{\min}) = e^{-r\tau_n} K$, pour tout $n = 0, \dots, N$;
- $v_{n,M+1} = v(\tau_n, y_{\max}) = 0$, pour tout $n = 0, \dots, N$.

Schémas numériques

On va voir trois schémas, et comparer leur coût et leur convergence. Les schémas diffèrent par la **façon d'approximer les dérivées**.

- ▶ Schéma explicite;
- ▶ schéma implicite;
- ▶ θ -schéma.

Schéma explicite

On cherche toujours à résoudre numériquement l'EDP :

$$\partial_\tau v(\tau, y) - \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \partial_y v(\tau, y) - \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{yy}^2 v(\tau, y) = -rv(\tau, y).$$

Dans le schéma explicite, les dérivées partielles sont approchées au noeud (n, i) par :

$$\begin{cases} \partial_\tau v(\tau_n, y_i) \approx \frac{v_{n+1,i} - v_{n,i}}{\Delta\tau}, \\ \partial_y v(\tau_n, y_i) \approx \frac{v_{n,i+1} - v_{n,i-1}}{2\Delta y}, \\ \partial_{yy}^2 v(\tau_n, y_i) \approx \frac{v_{n,i+1} - 2v_{n,i} + v_{n,i-1}}{\Delta y^2}. \end{cases}$$

Schéma explicite II

© Théo Jalabert



En introduisant ces approximations, on obtient l'algorithme suivant:

Algorithme (schéma explicite)

Pour $n \in \{1, \dots, N\}$, $i \in \{1, \dots, M - 1\}$, l'algorithme du schéma explicite est donné par le système suivant

$$\begin{aligned} v_{n+1,i} &= v_{n,i} + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} (v_{n,i+1} - 2v_{n,i} + v_{n,i-1}) \\ &\quad + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} (v_{n,i+1} - v_{n,i-1}) - r\Delta\tau v_{n,i} \end{aligned}$$

En posant $V_n = (v_{n,0}, \dots, v_{n,M+1})'$ pour tout $n \in \{0, \dots, N\}$, le système d'équation précédent se réécrit sous forme matricielle $V_{n+1} = AV_n$ où $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq M+1}$ est une matrice tridiagonale telle que

$$\left\{ \begin{array}{l} a_{i,i-1} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} \\ a_{i,i} = 1 - r\Delta\tau - \sigma^2 \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} \\ a_{i,i+1} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} \end{array} \right.$$

Schéma explicite III

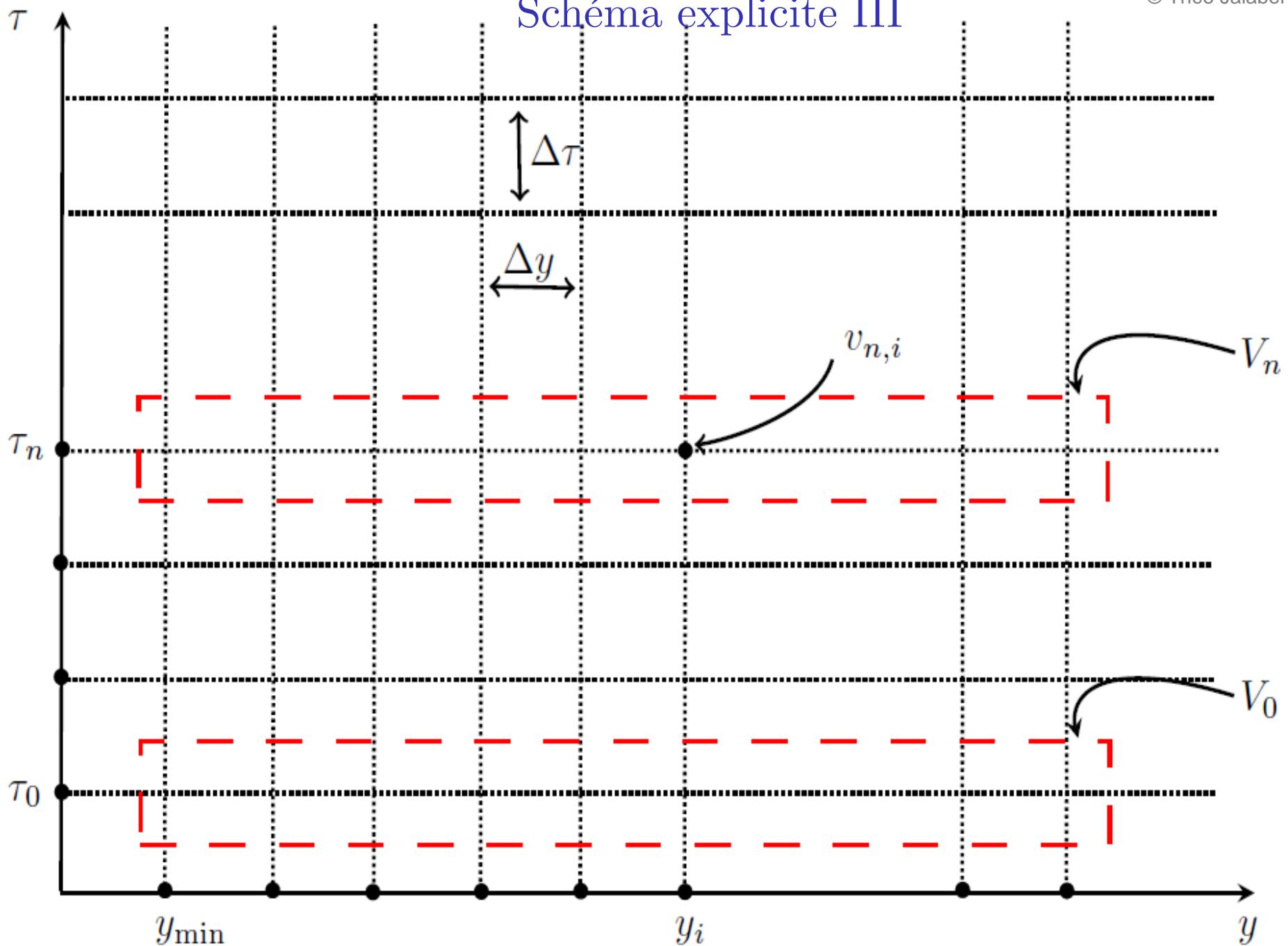


Schéma explicite IV

© Théo Jalabert



Inconvénients : on peut montrer que le schéma est stable et donc convergent seulement si $\Delta\tau \leq C\Delta y^2$ pour une constante $C > 0$:

- Impose une discrétisation en temps très fine.
- Adapté si les variations de v sont rapides en temps et lentes en espace (rarement le cas en pratique).

Avantage : pas de matrice à inverser, donc le coût de chaque itération est faible.

Schéma implicite

EDP à résoudre numériquement:

$$\partial_\tau v(\tau, y) - \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \partial_y v(\tau, y) - \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{yy}^2 v(\tau, y) = -rv(\tau, y).$$

Dans le schéma implicite, les dérivées partielles sont approchées au noeud (n, i) par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_\tau v(\tau_n, y_i) \approx \frac{v_{n,i} - v_{n-1,i}}{\Delta\tau}, \\ \partial_y v(\tau_n, y_i) \approx \frac{v_{n,i+1} - v_{n,i-1}}{2\Delta y}, \\ \partial_{yy}^2 v(\tau_n, y_i) \approx \frac{v_{n,i+1} - 2v_{n,i} + v_{n,i-1}}{\Delta y^2}. \end{array} \right.$$

Schéma implicite II

En introduisant ces approximations, on obtient l'algorithme suivant:

Algorithme (schéma explicite)

Pour $n \in \{1, \dots, N\}$, $i \in \{1, \dots, M - 1\}$, l'algorithme du schéma explicite est donné par le système suivant

$$\begin{aligned} v_{n-1,i} &= v_{n,i-1} \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} \right] \\ &+ v_{n,i} \left[1 + r\Delta\tau + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} \right] \\ &+ v_{n,i+1} \left[- \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} \right]. \end{aligned}$$

Soit $V_n = (v_{n,0}, \dots, v_{n,M+1})'$, le système d'équations précédent se réécrit sous forme matricielle $AV_n = V_{n-1}$

où $A = (a_{i,j})_{0 \leq i,j \leq M+1}$ est une matrice tridiagonale telle que

$$\begin{cases} a_{i,i-1} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} \\ a_{i,i} = 1 + r\Delta\tau + \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} \\ a_{i,i+1} = - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} - \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} \end{cases}$$



Inconvénients :

- Nécessite l'inversion d'une matrice à chaque étape;
- Cependant, l'inversion n'est pas trop coûteuse car les matrices sont tridiagonales.

Avantages :

- lorsque les paramètres de la dynamique du sous-jacent sont constants:
 A ne dépend pas de n et l'inversion se fait une seule fois;
- Inconditionnellement stable.
- Précision en $O(\Delta\tau + \Delta y^2)$ si v est régulière.

θ -schémas

EDP à résoudre numériquement:

$$\partial_\tau v(\tau, y) - \left[r - \frac{1}{2}\sigma^2 \right] \partial_y v(\tau, y) - \frac{1}{2}\sigma^2 \partial_{yy}^2 v(\tau, y) = -rv(\tau, y).$$

Dans les θ -schémas, les dérivées partielles sont approchées au noeud (n, i) par :

$$\begin{cases} \partial_\tau v(\tau_n, y_i) \approx \frac{v_{n+1,i} - v_{n,i}}{\Delta\tau}, \\ \partial_y v(\tau_n, y_i) \approx (1 - \theta) \frac{v_{n,i+1} - v_{n,i-1}}{2\Delta y} + \theta \frac{v_{n+1,i+1} - v_{n+1,i-1}}{2\Delta y}, \\ \partial_{yy}^2 v(\tau_n, y_i) \approx (1 - \theta) \frac{v_{n,i+1} - 2v_{n,i} + v_{n,i-1}}{\Delta y^2} + \theta \frac{v_{n+1,i+1} - 2v_{n+1,i} + v_{n+1,i-1}}{\Delta y^2}, \\ v(\tau_n, y_i) \approx (1 - \theta)v_{n,i} + \theta v_{n+1,i}. \end{cases}$$

avec $\theta \in [0, 1]$ un paramètre à choisir.

Ces schémas **généralisent** les deux précédents. En effet, on a

- $\theta = 0 \implies$ schéma explicite
- $\theta = 1 \implies$ schéma implicite

Le cas $\theta = \frac{1}{2}$ est appelé **schéma de Crank-Nicolson**.

Avantages :

- Inconditionnellement stable si $\theta \geq \frac{1}{2}$.
- Dans le schéma de Crank-Nicolson : précision en $O(\Delta\tau^2 + \Delta y^2)$.

Inconvénients:

- ▶ Inversion de matrices nécessaire.



1. J. Printems, Méthodes numériques d'EDP dans le cadre d'évaluation d'engagements de contrats d'épargne [mémoire d'actuaire, sep. 2015]
2. E. Biffis.
Affine processes for dynamic mortality and actuarial valuations.
Insurance : Mathematics and Economics, 37(3) :443–468, 2005.
3. E. Biffis and P. Millossovich.
The fair value of guaranteed annuity options. Scandinavian Actuarial Journal, 2006(1) :23–41, January 2006.