Feuille d'exercices n°8 – Eléments sur la STTI

Exercice 1 :

On considère 4 obligations (A, B et C sont des obligations couponnées à coupon annuel) :

- Obligation A remboursée au pair dans 2 ans, taux nominal 3 %, cotée à 91,16 %
- Obligation B remboursée au pair dans 2 ans, taux nominal 6 %, cotée à 96,59 %
- Obligation C remboursée au pair dans 3 ans, taux nominal 5 %, cotée à 88,00 %
- Zéro-coupon D de montant nominal 105 € dans 4 ans, coté à 70,50 €.

1) Extraire 4 points r(1), r(2) r(3) et r(4) de la courbe des taux comptant discrets à partir de ces obligations.
2) En déduire les points de la courbe des taux à terme implicites (taux *forward*) d'échéance 4 ans ($r_{0,4}$, $r_{1,4}$, $r_{2,4}$ et $r_{3,4}$).
3) Tracez les points obtenus dans les questions précédentes sur un même graphique.

Exercice 2 :

On est en présence de quatre obligations émises sur le marché obligataire et présentant les caractéristiques reprises dans le tableau ci-dessous :

Caractéristiques	Obligation A	Obligation B	Obligation C	Obligation D
Coupon	0	0	4.5%	6%
Détachement			Annuel	Annuel
Remboursement	100	100	100	100
Durée (en années)	1	2	3	4
Prix	95.4654	90.7029	98.6104	101.7526

1) Calculer la gamme des taux au comptant pour des obligations zéro coupon de maturité de 1 à 4 ans.
2) Calculer la gamme des taux à terme à 1 an, $r_{T-1,T}$ avec $T = 1, \dots, 4$.
3) Représenter graphiquement ces taux.

Exercice 3 :

On a vu dans le cours que le taux *forward*, $r_{t,T}$ peut être calculé en fonction du taux *spot*, $R(0,T)$ et $R(0,t)$.

1) Montrer que le taux *spot*, $R(0,T)$ peut aussi être calculé en fonction des taux *forward*, $r_{t-1,t}, t \in \{1, \dots, T\}$, i.e. montrer que :

$$R(0,T) = \left[\big(1 + R(0,1)\big)\big(1 + r_{1,2}\big) \dots \big(1 + r_{T-1,T}\big)\right]^{\frac{1}{T}} - 1.$$

2) A partir de la gamme des taux *forward*, $r_{T-1,T}, T \in \{1, \dots, 10\}$ suivante, en déduire la gamme des taux *spots*.

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux	4.00%	4.40%	4.50%	5.10%	5.50%	5.60%	5.91%	7.02%	6.61%	6.40%

Exercice 4 :

Montrer que si les taux au comptant $R(0,T)$ sont croissants, le taux forward $r_{T,T+1}$ est supérieur au taux comptant qui le précède.

Exercice 1 :

On considère 4 obligations (A, B et C sont des obligations couponnées à coupon annuel) :

- Obligation A remboursée au pair dans 2 ans, taux nominal 3 %, cotée à 91,16 %
- Obligation B remboursée au pair dans 2 ans, taux nominal 6 %, cotée à 96,59 %
- Obligation C remboursée au pair dans 3 ans, taux nominal 5 %, cotée à 88,00 %
- Zéro-coupon D de montant nominal 105 € dans 4 ans, coté à 70,50 €.

1) Extraire 4 points r(1), r(2) r(3) et r(4) de la courbe des taux comptant discrets à partir de ces obligations.
2) En déduire les points de la courbe des taux à terme implicites (taux *forward*) d'échéance 4 ans ($r_{0,4}$, $r_{1,4}$, $r_{2,4}$ et $r_{3,4}$).
3) Tracez les points obtenus dans les questions précédentes sur un même graphique.

Obligation A et B

$$91.16 = \frac{3}{(1+r_{0,1})} + \frac{103}{(1+r_{0,2})^2}$$

$$96.59 = \frac{6}{(1+r_{0,1})} + \frac{106}{(1+r_{0,2})^2}$$

$$\cancel{\frac{3}{(1+r_{0,1})}} + \frac{103}{(1+r_{0,2})^2} - \cancel{\frac{3}{(1+r_{0,1})}} - \frac{53}{(1+r_{0,2})^2} = 42.865$$

$$\frac{50}{(1+r_{0,2})^2} = 42.91$$

$$\sqrt{\frac{50}{42.88}} - 1 = 8\% \qquad r_{0,2} = 8\%$$

$$96.59 = \frac{6}{(1+r_{0,1})} + \frac{106}{(1.08)^2}$$

$$r_{0,1} = 4.94\%$$

Obligation C

$$88 = \frac{5}{(1+r_1)} + \frac{5}{(1+r_2)^2} + \frac{105}{(1+r_3)^2}$$

$r(3) = 9.97\%$

Z.C :

$$70.5 = \frac{105}{(1+r_4)^4} \qquad r_4 = 10.47\%$$

Taux Forward

$$(1+r_{a,b})^{b-a} = \frac{(1+r(b))^b}{(1+r(a))^a}$$

$$(1+r_{a,b})^{b-a} = \prod_{k=a}^{b} (1+r_{k,k+1})$$

$$(1+r_{3,4}) = \frac{(1+r(4))^4}{(1+r(3))^3} = 1.1198$$

$$r_{3,4} = 11.98\%$$

$$(1+r_{0,4})^4 = (1+r(4))^4 = \sqrt[4]{1.1047^4}$$

$$r_{0,4} = 10.47\%$$

$$(1+r_{1,4})^3 = \frac{(1+r(4))^4}{(1+r(1))} = 1.4189$$

$$r_{1,4} = \sqrt[3]{1.4189} - 1 = 12.37\%$$

$$(1+r_{2,4})^2 = \frac{(1+r(4))^4}{(1+r(2))^2} = 1.27682$$

$$r_{2,4} = \sqrt[2]{1.27682} - 1 = 13\%$$

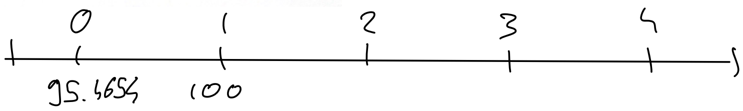
Exo 2

Exercice 2 :

On est en présence de quatre obligations émises sur le marché obligataire et présentant les caractéristiques reprises dans le tableau ci-dessous :

Caractéristiques	Obligation A	Obligation B	Obligation C	Obligation D
Coupon	0	0	4.5%	6%
Détachement			Annuel	Annuel
Remboursement	100	100	100	100
Durée (en années)	1	2	3	4
Prix	95.4654	90.7029	98.6104	101.7526

1) Calculer la gamme des taux au comptant pour des obligations zéro coupon de maturité de 1 à 4 ans.
2) Calculer la gamme des taux à terme à 1 an, $r_{T-1,T}$ avec $T = 1, \dots, 4$.
3) Représenter graphiquement ces taux.



$$95.4654 = \frac{100}{(1+r_{0,1})} \Rightarrow r_{0,1} = \frac{100}{95.4654} - 1 = 4.7\%$$

$$90.7029 = \frac{100}{(1+r_{0,2})^2}$$

$$r_{0,2} = \sqrt{\frac{100}{90.7029}} - 1 = 5\%$$

$$98{,}6104 = \frac{4.5}{(1.047)} + \frac{4.5}{(1.05)^2} + \frac{104.5}{(1+r_{0,3})^3}$$

$$r_{0,3} = \sqrt[3]{\frac{104.5}{90.23077308}} - 1 = 5.01\%$$

$$101.7526 = \frac{6}{1.047} + \frac{6}{(1.05)^2} + \frac{6}{(1.051)^3} + \frac{106}{(1+r_{0,4})^4}$$

$$r_{0,4} = \sqrt[4]{\frac{106}{85.41151899}} - 1 = 5.55\%$$

2)

$$1 + r_{0,1} = (1+r(1))^1 \qquad r_{0,1} = 4.75\%$$

$$1+r_{1,2} = \frac{(1+r(2))^2}{(1+r(1))} = \frac{1.05^2}{1.0475}$$

$$r_{1,2} = 5.25\%$$

$$1+r_{2,3} = \frac{(1+r(3))^3}{(1+r(2))^2} \qquad r_{2,3} = 5.03$$

$$1+r_{3,4} = \frac{(1+r(4))^4}{(1+r(3))^3}$$

$$r_{3,4} = 7.19\%$$

Exercice 3 :

On a vu dans le cours que le taux *forward*, $r_{t,T}$ peut être calculé en fonction du taux *spot*, $R(0,T)$ et $R(0,t)$.

1) Montrer que le taux *spot*, $R(0,T)$ peut aussi être calculé en fonction des taux *forward*, $r_{t-1,t}, t \in \{1, \ldots, T\}$, i.e. montrer que :

$$R(0,T) = \left[(1+R(0,1))(1+r_{1,2}) \ldots (1+r_{T-1,T})\right]^{\frac{1}{T}} - 1.$$

2) A partir de la gamme des taux *forward*, $r_{T-1,T}, T \in \{1, \ldots, 10\}$ suivante, en déduire la gamme des taux *spots*.

T	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Taux	4.00%	4.40%	4.50%	5.10%	5.50%	5.60%	5.91%	7.02%	6.61%	6.40%

1) En AOA, $[1+r(0,T)]^T = (1+R(0,1)) \times (1+r_{0,1}) \times (1+r_{1,2}) \times \ldots (1+r_{T-1,T})$

$r_{0,T} = [\ldots \text{---} \text{---} \text{———}]^{1/T} - 1$

$R(0,1) = r(1) = 4\% = r_{0,1}$

$R(0,2) = r(2) = \sqrt{1.04 \times 1.44} - 1 = 4.2\%$

Exercice 4 :

Montrer que si les taux au comptant $R(0,T)$ sont croissants, le taux forward $r_{T,T+1}$ est supérieur au taux comptant qui le précède.

Si les taux spot sont croissants on a

$1 + R(0,T+1) > 1 + R(0,T)$

$(1+R(0,T+1))^{T+1} > (1+R(0,T))^{T+1}$

$(1+R(0,T))^T \times (1+r_{T,T+1}) > (1+R(0,T))^{T+1}$

$r_{T,T+1} > R(0,T)$

et pour le vérifier dans l'exo 2

$r_{0,1} > r_{0,2} > r_{0,3} > r_{0,4}$

4,75% 5% 5,01% 5.55%

$r_{1,2} = 5,25\% > r_{0,1} = 4,75\%$

$r_{2,3} = 5,03\% > r_{0,2} = 5\%$

$r_{3,4} = 7.19\% > r_{0,3} = 5,01\%$