Done

M2 "Probabilités et Finance" Sorbonne Université *Année 2022 – 2023*
"Introduction aux processus de diffusion" (L.Zambotti)

Chapitre V. Intégrale stochastique

Exercice 1 (Intégrale de Wiener) Soit H un espace d'Hilbert séparable, $(e_k)_k$ une base hilbertienne de H et $(\xi_k)_k$ une suite iid définies sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ telle que $\xi_k \sim \mathscr{N}(0,1)$. On définit pour tout $h \in H$

$$W^n(h) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \langle e_k, h \rangle_H, \qquad n \geq 1.$$

1. Montrer que $W^n(h)$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers une v.a. $W(h)$ quand $n \to +\infty$.
2. Montrer que $W(h) \sim \mathscr{N}(0, \|h\|_H^2)$ et $\mathbb{E}(W(h_1)W(h_2)) = \langle h_1, h_2 \rangle_H$. L'application $H \ni h \mapsto W(h)$ est une immersion isométrique de H dans un sous-espace de variables gaussiennes dans $L^2(\Omega)$.
3. Soit $H = L^2(\mathbb{R}_+, dt)$. On rappelle que dans le Théorème 1.2.7 du polycopié nous avons construit $W(\mathbb{1}_{[0,t]})$ et nous l'avons appelé B_t. Par analogie avec cette notation nous notons
$$\int_{\mathbb{R}_+} h_u \, dB_u := W(h), \qquad h \in L^2(\mathbb{R}_+, dt),$$
et nous appelons cette variable l'intégrale de Wiener de h.

   Soit $E_n \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ avec $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $E := \cup_n E_n$. Si $|E| < +\infty$, $|E|$ est la mesure de Lebesgue de E, montrer que $W(\mathbb{1}_E) = \sum_n W(\mathbb{1}_{E_n})$, où la série converge dans $L^2(\Omega)$.

Exercice 2 (Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck) Soit $\lambda > 0$ et $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. Soit $x \in \mathbb{R}$. On veut construire un processus $(X_t, t \geq 0)$ p.s. continu et solution de

$$X_t = x - \lambda \int_0^t X_s \, \mathrm{d}s + B_t, \qquad t \geq 0. \tag{0.1}$$

1. Appliquer la formule d'intégration par parties à $(e^{\lambda t} X_t)_{t\geq 0}$ pour obtenir une expression explicite pour $(X_t)_{t\geq 0}$. En déduire existence et unicité de solutions de (**??**).
2. Montrer que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus gaussien et que la loi de X_t est gaussienne de moyenne $e^{-\lambda t} x$ et variance $\frac{(1-e^{-2\lambda t})}{2\lambda}$ pour tout $t \geq 0$.

cf cours & TD 6

3. Pour toute fonction $f \in C_b(\mathbb{R})$ soit
$$P_t f(x) := \int f(y)\, \mathscr{N}\left(e^{-\lambda t}x, \frac{(1-e^{-2\lambda t})}{2\lambda}\right), \qquad t \geq 0, x \in \mathbb{R}.$$
Montrer que $P_t P_s = P_{t+s}$. En prenant la limite $s \to +\infty$, montrer que, si $\mu := \mathscr{N}(0,(2\lambda)^{-1})$, alors
$$\int P_t f \,\mathrm{d}\mu = \int f \,\mathrm{d}\mu.$$
4. Soit $B_t := W(\mathbb{1}_{[0,t]})$ un mouvement brownien construit comme dans l'exercice 1. Soit $t \geq 0$ et $f^t(s) := \exp(-\lambda(t-s))\mathbb{1}_{[0,t]}(s)$. Montrer que p.s. $X_t = e^{-\lambda t}x + W(f^t)$.

Exercice 3 (Le pont brownien) Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un MB standard et $(X_t, t \in [0,1])$ un processus continu adapté solution de
$$X_t = -\int_0^t \frac{X_s}{1-s}\,\mathrm{d}s + B_t, \qquad t \in [0,1]. \tag{0.2}$$

1. Appliquer la formule d'intégration par partie à $(\frac{X_t}{1-t})_{t\in[0,1[}$ et obtenir une expression explicite pour $(X_t, t \in [0,1[)$.
2. Montrer que $(X_t, t \in [0,1[)$ a même loi que le pont brownien $(b_t, t \in [0,1[)$ où $b_t := B_t - tB_1$ et en déduire que p.s. $X_t \to X_1 := 0$ si $t \to 1$.
3. Soit $y \in \mathbb{R}$. Avec les mêmes arguments, montrer que la seule solution de l'équation
facile
$$X_t^y = -\int_0^t \frac{X_s^y - y}{1-s}\,\mathrm{d}s + B_t, \qquad t \in [0,1], \tag{0.3}$$
$-t(B_1-y)$
a même loi que $(b_t^y, t \in [0,1])$, où $b_t^y := B_t - tB_1 + ty$, $t \in [0,1]$.
4. Montrer que $(b_t^y, t \in [0,1])$ est indépendant de B_1. En déduire que pour tous $0 < t_1 < \cdots < t_n < 1$ la loi de $(b_{t_1}^y, \ldots, b_{t_n}^y)$ est $\Leftarrow \mathrm{cov}(b_t^y, B_1) = 0$
$$\frac{p_{t_1}(x_1)\, p_{t_2-t_2}(x_2-x_1) \cdots p_{t_n-t_{n-1}}(x_n - x_{n-1})\, p_{1-t_n}(y-x_n)}{p_1(y)}\,\mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_n,$$
où $p_t(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$, $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.
5. Montrer que pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}^n)$ et $E \in \mathscr{B}(\mathbb{R})$
$$\int \mathbb{P}((B_{t_1},\ldots,B_{t_n}) \in A \mid B_1 = y)\, p_1(y)\,\mathrm{d}y$$
$$\mathbb{P}((B_{t_1},\ldots,B_{t_n}) \in A, B_1 \in E) = \int_E p_1(y)\,\mathbb{P}((b_{t_1}^y,\ldots,b_{t_n}^y) \in A)\,\mathrm{d}y.$$
Donc la loi de $(b_t^y, t \in [0,1])$ donne une version de la loi conditionnelle de $(B_t, t \in [0,1])$ sachant $\{B_1 = y\}$ (où l'on remarque que $\mathbb{P}(B_1 = y) = 0$).

$$(b^y_{t_1},\dots,b^y_{t_n}) \perp\!\!\!\perp B_1$$

$$\Downarrow$$

$$p(b^y_{t_1},\dots,b^y_{t_n}) = p(b^y_{t_1},\dots,b^y_{t_n} \mid B_1 = y)$$

$$\mathbb{P}(b^y_{t_1}\in dx_1,\dots,b^y_{t_n}\in dx_n \mid B_1=y) = \mathbb{P}(B_{t_i}\in dx_i \mid B_1=y) = \frac{p_{B_{t_1},\dots,B_{t_n},B_1}(x_1,\dots,x_n,y)}{p_{B_1}(y)}\,dx_1\dots$$

$$= \frac{p_{t_1}(x_1)\,p_{t_2-t_1}(x_2-x_1)\cdots p_{1-t_n}(y-x_n)}{p_1(y)}\,dx_1\dots dx_n.$$

Exercice 1 (Intégrale de Wiener) Soit H un espace d'Hilbert séparable, $(e_k)_k$ une base hilbertienne de H et $(\xi_k)_k$ une suite iid définies sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P})$ telle que $\xi_k \sim \mathscr{N}(0,1)$. On définit pour tout $h \in H$

$$W_t = \sum_i \xi_k \sin(\pi k t) + \dots$$

$$W^n(h) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \langle e_k, h\rangle_H, \qquad n \geq 1.$$

$$h = \mathbb{1} \qquad \langle e_k, h\rangle = \int_0^t \underbrace{\sin \pi k t}_{f_k'}\, dt = -\underbrace{\frac{\cos \pi k t}{\pi k}}_{f_k}$$

✓ 1. Montrer que $W^n(h)$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers une v.a. $W(h)$ quand $n \to +\infty$.

✓ 2. Montrer que $W(h) \sim \mathscr{N}(0, \|h\|_H^2)$ et $\mathbb{E}(W(h_1)W(h_2)) = \langle h_1, h_2\rangle_H$. L'application $H \ni h \mapsto W(h)$ est une immersion isométrique de H dans un sous-espace de variables gaussiennes dans $L^2(\Omega)$.

✓ 3. Soit $H = L^2(\mathbb{R}_+, dt)$. On rappelle que dans le Théorème 1.2.7 du polycopié nous avons construit $W(\mathbb{1}_{[0,t]})$ et nous l'avons appelé B_t. Par analogie avec cette notation nous notons

$$\int_{\mathbb{R}_+} h_u\, dB_u := W(h), \qquad h \in L^2(\mathbb{R}_+, dt),$$

et nous appelons cette variable l'intégrale de Wiener de h.

Soit $E_n \subset \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$ avec $E_i \cap E_j = \emptyset$ si $i \neq j$ et $E := \cup_n E_n$. Si $|E| < +\infty$, $|E|$ est la mesure de Lebesgue de E, montrer que $W(\mathbb{1}_E) = \sum_n W(\mathbb{1}_{E_n})$, où la série converge dans $L^2(\Omega)$.

$$W^n(h) = \sum_{k=1}^{n} \xi_k \langle e_k, h\rangle_H$$

1) M.q. $W^n(h)$ converge dans L^2

Égalité de Parseval

$$\|W^n(h)\|^2_{L^2} = \sum_{k=1}^{n} \langle e_k, h\rangle_H^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} \sum_{k=1}^{\infty} \langle e_k, h\rangle_H^2 = \|h\|_H^2 < \infty$$

Donc $\|W^{n+p}(h)-W^n(h)\|^2_{L^2}=\sum_{k=n+1}^{n+p}\langle e_k,h\rangle^2 \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \Rightarrow$ par le critère de Cauchy

$$W^n(h)\xrightarrow{L^2}W(h) \text{ t.q. } \|W(h)\|_{\mathbb{H}}=\|h\|_{\mathbb{H}}$$

2) $$\mathbb{E}\left[W^n(h_1)W^n(h_2)\right]=\sum_{k=1}^{n}\langle e_k,h_1\rangle\langle e_k,h_2\rangle \xrightarrow{n\to\infty}\langle h_1,h_2\rangle_{\mathbb{H}}$$

$$W^n(h_1)\xrightarrow{L^2}W(h_1)$$
$$W^n(h_2)\xrightarrow{L^2}W(h_2)$$

$$W^n(h_1)W^n(h_2)\xrightarrow{L^1}W(h_1)W(h_2)$$

$$\mathbb{E}\,|W^n(h_1)W^n(h_2)-W(h_1)W(h_2)|=\mathbb{E}|W^n(h_1)W^n(h_2)-W^n(h_1)W(h_2)$$
$$+W^n(h_1)W(h_2)-W(h_1)W(h_2)|\leq$$

$$\leq\Big(\underbrace{\mathbb{E}|W^n(h_1)|^2}_{\to\,\mathbb{E}|W(h_1)|^2}\,\mathbb{E}|W^n(h_2)-W(h_2)|^2\Big)^{1/2}+\Big(\mathbb{E}|W(h_2)|^2\,\mathbb{E}|W^n(h_1)-W(h_1)|^2\Big)^{1/2}\to 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\,W(h_1)W(h_2)=\langle h_1,h_2\rangle$$

3) $\mathbb{H}=L^2(\mathbb{R}_+,dt)$

$$\int_{\mathbb{R}_+}h_u\,dB_u:=W(h)\;;\;\{E_n\}\quad E_i\cap E_j=\emptyset\qquad E=\sqcup|E_n|$$
$$\Rightarrow \mathbb{1}_E=\sum\mathbb{1}_{E_n}$$

Si $|E|<\infty$ m.q. $W(\mathbb{1}_E)=\sum_{n=1}^{\infty}W(\mathbb{1}_{E_n})$ cvge dans $L^2(\Omega)$

$$\|W(\mathbb{1}_E)-\sum_{n=1}^{N}W(\mathbb{1}_{E_n})\|_2\xrightarrow[N\to\infty]{?}0$$

$$\|W(\mathbb{1}_{E_n})W(\mathbb{1}_{E_m})\|_2=\langle\mathbb{1}_{E_n},\mathbb{1}_{E_m}\rangle=\delta_{nm}|E_n|$$

$$\|W(\mathbb{1}_E)W(\mathbb{1}_{E_n})\|_2=|E_n|$$

$$\|W(\mathbb{1}_E) - \sum_{n=1}^{N} W(\mathbb{1}_{E_n})\|_2^2 = |E| - 2\sum_{n=1}^{N} \underbrace{\mathbb{E}[W(\mathbb{1}_E)W(\mathbb{1}_{E_n})]}_{|E_n|} + \sum_{n=1}^{N} |E_n| =$$

$$= |E| - \sum_{n=1}^{N} |E_n| = |\bigsqcup_{n=N+1}^{\infty} E_n| \xrightarrow[N\to\infty]{} 0 \quad \to \quad \sum_{n=1}^{N} W(\mathbb{1}_{E_n}) \xrightarrow{L^2} W(\mathbb{1}_E)$$