MFA - Mai 2021

Question 1 Meilleure estimation des provisions à la date t, $BE(t)$ pour une séquence de flux $F(t)$ avec un processus d'actualisation $\delta(t) = e^{-\int_0^t r(u)du}$

Détaillez les probabilités et leur lien avec la nature des risques.

Exemple risque ni mutualisable ni réplicable + Prise en compte risque dans les provisions techniques prudentielles. Risque de modèle / risque d'estimation

Pris en compte via la marge de risque.

La moyenne pondérée par leur proba des flux de trésorerie futurs (valeur actuelle attendue)

$$BE(t) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}\left(\sum_{u>t} F_u \frac{\delta(u)}{\delta(t)}\right)$$

assurance classique

★ $\mathbb{P}^a$ probabilité historique pour modéliser les risques non réplicables et mutualisables

★ $\mathbb{Q}^f$ probabilité risque neutre modélisant les risques réplicables (couvrables) et non mutualisables.

Finance de marché

$$\underset{\text{linéarité}}{=} \sum_{u>t} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}\left[\frac{\delta(u)}{\delta(t)} F_u\right]$$

on suppose Flux $\perp\!\!\!\perp$ risque financier ($\perp\!\!\!\perp$ $\mathbb{Q}^f$)

$$BE(t) = \sum_{u>t} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}[F_u] \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}\left[\frac{\delta(u)}{\delta(t)}\right]}_{= P(t,u)}$$

= absence d'interactions actif / passif.

$= P(t,u)$ Prix ZC sans risque maturité u, vu en t.

NB Actualisation par ZC seulement en $\perp\!\!\!\perp$

Question 2 Écrire Λ_c $\sum$ flux actualisés de cotisations
Λ_p $\sum$ flux actualisés de prestations

en $t=0$ un individu âgé x_c entre dans le dispositif.
Hyp représentat° C° du temps, T_{x_c} durée de vie résiduelle

Engagements assureur

$d = x_R - x_c$

Flux :
* K si décès individu entre x_c et x_R
* R sinon (individu décède après x_R)

$$\Lambda_p = \underbrace{K}_{\text{capital versé si DC}} \underbrace{\delta(T_{x_c})}_{\substack{\text{on actualise à partir du DC} \\ \text{(facteur d'actualisat°)}}} \underbrace{\mathbb{1}_{T_{x_c} \leq d}}_{\substack{\text{individu décède} \\ \text{entre } x_c \text{ et } x_R}} + \int_d^{+\infty} R\, \underbrace{\delta(t)}_{} \underbrace{\mathbb{1}_{T_{x_c} > t}}_{\substack{\text{individu vit au moins} \\ \text{plus longtemps que la durée } t}} dt$$

rente versée après x_R

rép C° du temps.

Individu meurt après une durée d

on actualise pour chaque durée $t > d$ où individu est en vie

Engagements assuré

Flux : * c si pas de DC et entre x_c et x_R

$$\Lambda_c = \int_0^d \underbrace{\mathbb{1}_{T_{x_c} > t}}_{\substack{\text{tant que l'assuré} \\ \text{est en vie}}} c\, \delta(t)\, dt$$

c : cotisation

$\delta(t)$: facteur d'actualisation

La cotisation sera payée sur une durée entre 0 et d
on "additionne" tous les cas possibles

Calculer $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[\Lambda_c]$

$\{$ $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[\Lambda_p]$

Question 3 Valeurs économiques des 2 composantes en utilisant fonction de hasard μ décrivant la survie et prix ZC $P(0,t)$.

(le + simple)

Pour Λ_c

$$\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[\Lambda_c]}_{V_c} \underset{\text{linéarité}}{=} c\int_0^d \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}\left[\underbrace{\mathbb{1}_{T_{x_c} > t}}\ \underbrace{\delta(t)}\right] dt$$

$\perp\!\!\!\perp$

NB $\perp\!\!\!\perp$

$\Rightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[XY]$

$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[X]$

$\times \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[Y]$

puis on regarde par quelle proba X et Y sont modélisés

$$= c\int_0^d \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}[\mathbb{1}_{T_{x_c} > t}]\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta(t)]\, dt$$

on regarde ici si l'assuré est en vie au delà de t
$\Rightarrow$ risque de mortalité
$\Rightarrow$ associé à $\mathbb{P}^a$ modélisé par

facteur d'act valisat°
$\Rightarrow$ risque financier modélisé par $\mathbb{Q}^f$

$$= c\int_0^d \mathbb{P}^a(T_{x_c} > t)\, \overbrace{P(0,t)}^{\text{par déf}}\, dt$$

$$= c\int_0^d S_{x_c}(t)\, P(0,t)\, dt.$$

Pour Λ_p on fait les 2 termes séparément

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}\left[\int_d^{+\infty} R\,\delta(t)\,\mathbb{1}_{T_{x_c} > t}\, dt\right] \underset{\text{linéarité}}{=} R\int_d^{+\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[\delta(t)\,\mathbb{1}_{T_{x_c} > t}]\, dt$$

$$\underset{\perp\!\!\!\perp}{=} R\int_d^{+\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta(t)]\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}[\mathbb{1}_{T_{x_c} > t}]\, dt$$

$$= R\int_d^{+\infty} P(0,t)\, S_{x_c}(t)\, dt$$

Pour l'autre terme, on va utiliser

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[g(T_x)] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[g(T_x) \mid T_x]\right]$$

on conditionne par rapport à la loi de T_x (on connait la date du DC)

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[K\delta(T_{x_c})\underbrace{\mathbb{1}_{T_{x_c} \leq d}}_{\substack{\text{fonction de}\\ T_{x_c} \Rightarrow \\ \text{mesurable}}} \mid T_{x_c}] = \mathbb{1}_{T_{x_c} \leq d}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[K\underbrace{\delta(T_{x_c})}_{\perp\!\!\!\perp\, T_{x_c}} \mid T_{x_c}]$$

logique car risque financier $\perp\!\!\!\perp$ mort d'un assuré lambda.

$$= K\,\mathbb{1}_{T_{x_c} \leq d}\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta(T_{x_c})]$$

on applique ensuite $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}$

$$K\,\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left(\mathbb{1}_{T_{x_c}\leq d}\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}\left[g(T_{x_c})\right]\right)$$

Thm de Transfert

$$= K\int_0^d \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}\left[g(u)\right]\underbrace{f_{T_{x_c}}}_{\text{densité } T_{x_c}}(u)\,du$$

Rappel $f_{T_{x_c}} = \mu\, S_{x_c}$

$$= K\int_0^d P(0,u)\,\mu(u)\,S_{x_c}(u)\,du$$

Mis ensemble, on a finalement

$$\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a\otimes\mathbb{Q}^f}\left[\Lambda_p\right]}_{V_p} = K\int_0^d P(0,u)\mu(u)S_{x_c}(u)\,du + R\int_d^{+\infty} P(0,u)\,S_{x_c}(u)\,du$$

Question 4 $\mu(t)=\lambda$, $r(t)=r$ et $\omega=\lambda+r$

Calculer V_c et V_p

Par définition, $S_{x_c}(t) = e^{-\int_0^t \mu(u)\,du} = e^{-\lambda t}$ ici

$$P(0,t) = e^{-\int_0^t r(u)\,du} = e^{-rt}$$

$$V_c = c\int_0^d e^{-\lambda t}e^{-rt}\,dt = c\int_0^d e^{-\omega t}\,dt = c\left[-\frac{1}{\omega}e^{-\omega t}\right]_0^d$$

$$= c\left[-\frac{1}{\omega}\left(e^{-\omega d}-1\right)\right]$$

$$= \frac{c}{\omega}\left(1-e^{-\omega d}\right)$$

$$V_p = K\int_0^d e^{-\omega t}\lambda\,dt + R\int_d^{+\infty} e^{-\omega t}\,dt = K\lambda\left[-\frac{1}{\omega}e^{-\omega t}\right]_0^d + R\left[-\frac{1}{\omega}e^{-\omega t}\right]_d^{+\infty}$$

$$= K\lambda\left[-\frac{1}{\omega}\left(e^{-\omega d}-1\right)\right] + R\left[-\frac{1}{\omega}\left(0-e^{-\omega d}\right)\right]$$

$$= \frac{K\lambda}{\omega}\left(1-e^{-\omega d}\right) + \frac{R}{\omega}e^{-\omega d}$$

Question 5 cotisation d'équilibre fonction de λ, R, K et $\rho = e^{-\omega d}$

il faut que engagement assureur = engagement assuré

$$\Leftrightarrow \quad V_\rho = V_c$$

$$\Leftrightarrow K\lambda \frac{1-e^{-\omega d}}{\omega} + R\frac{e^{-\omega d}}{\omega} = C\frac{1-e^{-\omega d}}{\omega}$$

$$\Leftrightarrow K\lambda + \frac{\cancel{\omega}}{1-e^{-\omega d}} R \frac{e^{-\omega d}}{\cancel{\omega}} = C$$

$$\Leftrightarrow K\lambda + R\frac{\rho}{1-\rho} = C.$$

Question 6

Revalorisation de la rente sur la base de performance de l'actif

Adapter les formules question 3 si R est revalorisé sur une fraction $0 \leq \alpha < 1$ du taux court

On revalorise R sur la base $\alpha r(t)$

d'où $\underset{\text{tps } t^{\circ}}{R(t)} = R e^{\alpha \int_0^t r_u du}$ on capitalise sur toutes les dates entre 0 et t

D'où la valeur économique de l'engagement de l'assureur

En se concentrant seulement sur le terme de ~~rente~~ change

$$\Lambda_R = \int_d^{+\infty} \underbrace{R e^{\alpha\int_0^t r_v du}}_{= R(t)} \underbrace{e^{-\int_0^t r_v du}}_{= \delta(t)} \mathbb{1}_{T_{x_c} > t} dt$$

$$= \int_d^{+\infty} R \underbrace{e^{(\alpha-1)\int_0^t r_v du}}_{= \delta(t)^{1-\alpha}} \mathbb{1}_{T_{x_c} > t} dt$$

En appliquant $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}$ par linéarité et $\perp\!\!\!\perp$ entre $\delta(t)^{1-\alpha}$ et $\mathbb{1}_{T_{x_c} > t}$

$$V_R = R\int_d^{+\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}\left[\delta(t)^{1-\alpha}\right] \mathbb{P}^a(T_{x_c} > t) dt = R\int_d^{+\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}\left[\delta(t)^{1-\alpha}\right] S_{x_c}(t) dt$$