Risque de Crédit
M2 Actuariat, ISFA
Université Claude Bernard - Lyon 1
17/05/2021

Tout document et tout appareil électronique sont interdits

Exercice 1. On modélise le marché financier par un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ fourni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On suppose que le taux d'intérêt court $r = (r_t, t \geq 0)$ est un processus $\mathbb{F}$-adapté et que $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque-neutre d'évaluation.

1. Préciser l'information observable concernant l'événement de défaut $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t\geq 0}$ et l'information globale du marché $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$.
2. On considère une obligation défautable de maturité $T = 5$ dont le taux de coupon annuel est $c > 0$ et le taux de recouvrement au défaut est une variable aléatoire R indépendante qui est à valeurs dans $[0, 1]$.
   (a) Préciser le triplet (C, G, Z) de cette obligation où C est le paiement à la maturité $T > 0$ si le défaut τ est après T, $G = (G_t, t \geq 0)$ est le paiement continue accumulé et Z est le paiement au défaut si τ arrive avant T ;
   (b) Calculer la valeur de cette obligation à la date $t < T \wedge \tau$ sous forme de l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{G}_t$;
   (c) En utilisant la formule Jeulin-Yor, calculer la valeur de l'obligation en terme de l'espérance conditionelle par rapport à $\mathcal{F}_t$.
   (d) Soit $S_t = \mathbb{P}(\tau > t|\mathcal{F}_t)$. Montrer que $S = (S_t, t \geq 0)$ est une $\mathbb{F}$-surmartingale.
   (e) Soit $S_t = M_t - A_t$ la décomposition Doob-Meyer de S où M est une $\mathbb{F}$-martingale et A un procesus croissant $\mathbb{F}$-prévisible avec $A_0 = 0$. Montrer que le processus
   $$\left(1_{\{\tau\leq t\}} - \int_0^t \lambda_s 1_{\{\tau>s\}} ds, t \geq 0\right) \text{ est une } \mathbb{G} - \text{martingale}$$
   où
   $$\lambda_t dt = \frac{dA_t}{S_t}.$$
   (f) Préciser S_t dans le modèle de Cox et calculer la valeur de l'obligation dans ce cas-là.
3. On généralise la notation de triplet pour décrire les produits multi-sousjacents et considère le dérivé de crédit *First-to-default Swap* (FtD) écrit sur une famille de défauts $\tau_1, \cdots, \tau_n$.

(a) Préciser l'information observable concernant les événements de défauts et l'information globale du marché.

(b) Préciser le triplet (C, G, Z) du FtD Swap ;

(c) Ecrire le flux du FtD Swap et donner sa valeur à la date t en terme de l'espérance conditionnelle par rapport à l'information globale ;

(d) Calculer la valeur de FtD Swap sous forme de l'espérance conditionelle par rapport à $\mathcal{F}_t$.

Exercice 2. On considère un modèle de multi-facteur pour modéliser les temps de défaut de n sous-jacents dans un portefeuille d'actifs. On suppose qu'il y a deux facteurs communs Y and $\overline{Y}$ pour tous les sous-jacents et un facteur individuel Y_i où $i = 1, \cdots, n$ pour chaque sous-jacent. Les facteurs Y, $\overline{Y}$ et Y_i sont des variables aléatoires i.i.d. ayant la moyenne μ et la variance σ^2.

1. On définit les variables aléatoires
$$V_i = \sqrt{\rho_{i,1}}Y + \sqrt{\rho_{i,2}}\overline{Y} + \sqrt{1 - \rho_{i,1} - \rho_{i,2}}Y_i, \quad i = 1, \cdots, n$$
où $\rho_{i,1}$, $\rho_{i,2}$ sont des nombres réels positifs tels que $\rho_{i,1} + \rho_{i,2} < 1$. Donner la matrice de variance-covariance du vecteur $(V_1, \cdots, V_n)$.
2. Soit $U_i = F(V_i)$ où F est la fonction de répartition de Y. Quelle est la loi de U_i ?
3. On définit
$$\tau_i = \inf\{t \geq 0 : U_i \leq p_i(t)\}$$
où $p_i(t)$ est la probabilité de défaut du $i^{\text{ème}}$ sous-jacent avant l'instant t, qui est une fonction croissante et calibrée à partir des données du marché à l'instant 0. Calculer la probabilité conditionnelle de défaut $p_i(t, y, \overline{y}) = \mathbb{P}(\tau_i \leq t | Y = y, \overline{Y} = \overline{y})$.
4. On suppose que Y admet la densité de probabilité f. Déduire la probabilité $\mathbb{P}(\tau_i \leq t)$ à partir de la question précédente.
5. On suppose que le portefeuille est homogène, c-à-d, $p_i(t) = p(t)$, $\rho_{i,1} = \rho_1$ et $\rho_{i,2} = \rho_2$ pour tout $i = 1, \cdots, n$. Calculer la probabilité d'avoir k défauts, $k \leq n$, avant l'instant t parmi le portefeuille de taille n.