ISFA Anne EYRAUD-LOISEL

Processus stochastiques - M1 Actuariat

Semestre automne 2021-2022

TD n° 3

Intégrale stochastique, Formule d'Itô et EDS

Exercice 1 : Variation quadratique et intégrales stochastiques.

On note $M_t = \int_0^t B_s dB_s$, $N_t = \int_0^t e^{-s} dB_s$ et $V_t = \int_0^t B_s^4 ds$.

1. Pour tout $t \geq 0$, donnez une expression de $\langle M \rangle_t$, $\langle N \rangle_t$, $\langle M, N \rangle_t$ et $\langle M+N, N+V \rangle_t$.
2. Pour tout $t \geq 0$, donnez une expression de $\mathbb{E}\left[M_t^2\right]$, $\mathbb{E}\left[N_t^2\right]$ et $\mathbb{E}\left[M_t N_t\right]$.
3. Écrire $X_t := \int_0^t B_s dM_s + \int_0^t e^{-B_s} d\langle N \rangle_s + \int_0^t B_s^2 dV_s$ comme processus d'Itô.

Exercice 2 : Retour sur $\int_0^t B_s dB_s$.

En appliquant la formule d'Itô à B_t^2, (re)montrez que $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right)$.

Exercice 3 : Processus d'Itô et martingales

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Ecrire les processus suivants comme processus d'Itô, c'est à dire sous la forme :

$$x_0 + \int_0^t \mu(s, B_s) ds + \int_0^t \sigma(s, B_s) dB_s.$$

1. $X_t = \exp(\frac{t}{2}) \sin(B_t)$
2. $Y_t = B_t^2 \exp(B_t + t)$
3. $Z_t = \left(B_t^3 - 3tB_t\right)_{t \geq 0}$
4. Le(s)quel(s) des processus précédents sont des martingales ? Justifiez votre réponse.

Exercice 4 : Processus d'Itô et martingales

Soit $(B_t)_{t \geq 0}$ un mouvement brownien standard. Ecrire les processus suivants comme processus d'Itô, c'est à dire sous la forme :

$$x_0 + \int_0^t \mu(s, B_s) ds + \int_0^t \sigma(s, B_s) dB_s.$$

1. $X_t = \exp(\frac{t}{2}) \sin(B_t)$
2. $Y_t = B_t^2 \exp(B_t + t)$

3. $Z_t = \left(B_t^3 - 3tB_t\right)_{t\geq 0}$
4. Le(s)quel(s) des processus précédents sont des martingales ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5 : Mouvement brownien géométrique

En applicant le lemme d'Itô au processus $Y_t = lnS_t$, déterminez la solution de l'équation différentielle stochastique suivante, modélisant la valeur du cours d'un actif risqué dans un modèle Black-Scholes :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où $S_0 = 0$.

Exercice 6 : Taux de Change

Le processus stochastique

$$\{C_t = C_0 e^{\alpha W_t} : t \geq 0\},\ r_0 \geq 0$$

représente l'évolution d'un taux de change, c'est-à-dire que C_t est le nombre d'euros que l'on peut obtenir par dollar américain au temps t, où $\{W_t : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard.

1. Déterminez l'équation différentielle stochastique satisfaite par le processus $\{C_t : t \geq 0\}$.
2. Le processus $\{X_t : t \geq 0\}$ modélise l'évolution d'un actif risqué en dollars américains. Il satisfait l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t^*$$

où $\{W_t^* : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard indépendant de $\{W_t : t \geq 0\}$. Déterminez l'équation différentielle stochastique satisfaite par l'évolution $\{Y_t : t \geq 0\}$ du titre risqué en euros.

Exercice 7 : Cours du dollar

On désigne par X_t la valeur d'un dollar en euros ; c'est le cours du dollar.
On suppose que $X_0 > 0$ et que $X_t = X_0\, e^{\sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$, où B est un mouvement brownien standard.

1. On pose $Y_t = \sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t$.
   Appliquer la formule d'Itô pour déterminer l'équation satisfaite par $X_t = X_0\, e^{Y_t}$.
2. On pose $Z_t = \frac{1}{X_t}$ le prix d'un euro en dollars.
   En appliquant la formule d'Itô, déterminer l'équation satisfaite par Z.
3. Trouver l'équation satisfaite par $U_t = ln(X_t)$. En déduire celle satisfaite par $V_t = ln(Z_t)$.

Exercice 8 : Comportement d'une EDS

Décrivez le comportement de la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \left(\frac{1}{2} - X_t\right) dt + \sqrt{X_t(1-X_t)}dW_t$$

en supposant que la valeur initiale X_0 est une variable aléatoire à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. Expliquez intuitivement pourquoi X_t est aussi une variable aléatoire dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1.

Exercice 9 : Processus d'Ornstein Uhlenbeck : modèle de Vasicek de taux d'intérêt

Pour décrire la dynamique des taux courts, en particulier dans le modèle de Vasicek (1977), on modélise l'évolution du processus de taux par la différentielle stochastique suivante (avec $a, b > 0$:

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t$$

1. en appliquant le lemme d'Itô au processus $Y_t = (X_t - b)e^{at}$, déterminer la solution de cette EDS, appelée processus de Ornstein-Uhlenbeck.
2. Que pouvez-vous dire de la tendance de ce processus de taux lorsque le taux est faible ? élevé ? Justifier le terme de "force de rappel vers b".
3. Expliquez pourquoi ce processus peut prendre des valeurs négatives. Justifiez le choix de Cox, Ingersoll et Ross de modéliser plutôt les taux d'intérêt par un processus "racine carrée" :

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

4. On suppose que $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$. Justifiez que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien dont on précisera la fonction espérance et la fonction de covariance. Préciser la loi de X_t, pour tout $t \geq 0$. Quelle est la limite en loi de X_t lorsque $t \to \infty$?

Exercice 10 : Probabilité neutre au risque

Soit S_t le cours d'un actif risqué dans un modèle de Black-Scholes. le taux sans risque est supposé constant égal à r.

1. Rappeler l'EDS régissant l'évolution du prix de l'actif S au cours du temps.
2. Donnez l'équation de l'évolution du cours actualisé de l'actif S : $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$.
3. En appliquant le théorème de Girsanov, explicitez le changement de probabilité et le nouveau mouvement brownien sous lequel l'équation du cours de l'actif S est :

$$dS_t = rS_tdt + \sigma S_t d\tilde{B}_t$$

4. Montrer que sous ce changement de probabilité, le prix actualisé de l'actif S est une martingale. Cette probabilité est appelée *probabilité neutre au risque.*

Exercice 11 : Modèle de Black et Scholes

On considère le modèle de Black and Scholes avec un actif sans risque de taux r.
On considère aussi un actif risqué dont le cours à l'instant t est noté S_t, de valeur initiale $S_0 = x > 0$.
La volatilité du marché est notée σ.
On se place sous la probabilité risque neutre P^*. Soit B un mouvement brownien sous P^*. On note $\tilde{S}_t$ le cours actualisé.
L'évolution de $\tilde{S}$ est donnée par l'équation :

$$d\tilde{S}_t \;=\; \sigma \tilde{S}_t \, dB_t, \tag{1}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $F(t,x) \;=\; e^{\sigma^2(T-t)}x^2 \;-\; 2ax \;+\; a^2$. On note $M_t = F(t, \tilde{S}_t)$.

1. En appliquant la formule d'Itô, montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale sous P^*.
2. Calculer $E^*(M_T)$ et en déduire que pour tout réel a,

$$E^*\big((\tilde{S}_T - a)^2\big) \;=\; e^{\sigma^2 T}x^2 \;-\; 2ax \;+\; a^2.$$

Exercice 12 : Formule de Black et Scholes

Le modèle de Black et Scholes est un modèle d'économie à 2 actifs : un actif sans risque M_t, de taux d'intérèt r, suivant la dynamique $dM_t = rM_t dt$, et un actif risqué S_t, suivant une dynamique de diffusion de type brownien géométrique $dS_t = mS_t dt + \sigma S_t dW_t$. Un portefeuille est un couple (α_t, β_t) de processus aléatoires adaptés à la filtration naturelle du brownien, représentant respectivement les unités d'actif risqué et d'actif sans risques détenus à l'instant t.

1. Expliciter les solutions M_t et S_t de ces deux EDS. (on suppose $M_0 = 1$).
2. Donner une expression de la différentielle dV_t de la valeur du portefeuille détenu $V(t, S_t)$ à l'instant t, en admettant que l'hypothèse d'autofinancement standard se traduit par $d\alpha_t S_t + d\beta_t M_t = 0$.
3. En applicant le lemme d'Itô, en déduire une Equation aux dérivées partielles vérifiée par $V(t, S_t)$. Cette EDP est aussi appelée EDP de Black et Scholes.
4. Pour un problème de couverture d'option européenne, explicitez la condition terminale que doit satisfaire le portefeuille V à l'instant T. On obtient une équation différentielle parabolique avec condition terminale à résoudre. Vérifiez que la fonction suivante est bien solution :

$$V(t, S_t) = S_t \Phi(d_1(T-t, S_t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2((T-t), S_t)) \tag{2}$$

avec

$$\begin{aligned} d_1(T-t, S_t) &= \tfrac{ln(\frac{S_t}{K} + (r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2(T-t, S_t) &= d_1(T-t, S_t) - \sigma\sqrt{T-t} \\ \Phi(x) &= \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt \end{aligned} \tag{3}$$

Exercice 13 : Mouvement d'une particule

Supposons qu'une particule se promène de façon aléatoire sur un plan de façon telle que sa position au temps t est donnée par le couple (W_t, W_t^*) où W et W^* sont des mouvements browniens indépendants. La distance de cette particule à l'origine est donnée à l'instant t par

$$B_t = \sqrt{(W_t)^2 + (W_t^*)^2}$$

Sachant que le processus de covariance quadratique de deux martingales indépendantes est nulle, utilisez le lemme d'Itô afin de démontrer que le processus B satisfait l'équation différentielle stochastique

$$dB_t = \frac{1}{2}\frac{1}{B_t}dt + \frac{W_t}{B_t}dW_t + \frac{W_t^*}{B_t}dW_t^*$$

Exercice 6 : Taux de Change

Le processus stochastique

$$\{C_t = C_0 e^{\alpha W_t} : t \geq 0\},\ r_0 \geq 0$$

représente l'évolution d'un taux de change, c'est-à-dire que C_t est le nombre d'euros que l'on peut obtenir par dollar américain au temps t, où $\{W_t : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard.

1. Déterminez l'équation différentielle stochastique satisfaite par le processus $\{C_t : t \geq 0\}$.
2. Le processus $\{X_t : t \geq 0\}$ modélise l'évolution d'un actif risqué en dollars américains. Il satisfait l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t^*$$

où $\{W_t^* : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard indépendant de $\{W_t : t \geq 0\}$. Déterminez l'équation différentielle stochastique satisfaite par l'évolution $\{Y_t : t \geq 0\}$ du titre risqué en euros.

Exercice 6 :

$$C_t = C_0 e^{\alpha W_t} = f(W_t)$$

$f : x \mapsto C_0 e^{\alpha x}$, $f' : x \mapsto C_0 \alpha e^{\alpha x}$ et $f'' : x \mapsto C_0 \alpha^2 e^{\alpha x}$

$$dC_t = f'(W_t)\, dW_t + \frac{1}{2} f''(W_t)\, d\langle W \rangle_t$$

$$= \alpha C_0 e^{\alpha W_t} dW_t + \frac{1}{2}\alpha^2 C_0 e^{\alpha W_t} dt$$

$$= \underbrace{\alpha C_t}_{\sigma = \alpha} dW_t + \underbrace{\frac{1}{2}\alpha^2}_{\mu = \frac{1}{2}\alpha^2} C_t\, dt.$$

modèle de Black-Scholes.

EDS : $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t^* + A\, dW_t$

EDS : $Y_t = C_t X_t = g(C_t, X_t)$

$$dY_t = C_t dX_t + X_t dC_t + d\langle C, X\rangle_t + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}}}_{=0} d\langle X \rangle_t + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial c^2}}}_{=0} d\langle C \rangle_t$$

$$= \mu X_t C_t dt + \sigma C_t X_t dW_t^* + \alpha X_t C_t dW_t + \frac{1}{2}\alpha^2 C_t X_t dt + \alpha C_t \sigma X_t \underbrace{\boxed{d\langle W, W^*\rangle_t}}_{=0 \text{ car } W \perp W^*}$$

$$\Rightarrow \boxed{dY_t = \left(\mu + \frac{1}{2}\alpha^2\right) Y_t dt + \sigma Y_t dW_t^* + \alpha Y_t dW_t}$$

Plus en détail : $\langle X, C\rangle_t = \int_0^t \sigma X_s \alpha C_t\, d\langle W^*, W\rangle_s$

$$d\langle X, C\rangle_t = \sigma X_t \alpha C_t\, d\langle W, W^*\rangle_t.$$

Exercice 8 : Comportement d'une EDS

Décrivez le comportement de la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \left(\frac{1}{2} - X_t\right) dt + \sqrt{X_t(1 - X_t)} dW_t$$

en supposant que la valeur initiale X_0 est une variable aléatoire à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. Expliquez intuitivement pourquoi X_t est aussi une variable aléatoire dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1.

Exercice 8 :

$$dX_r = \left(\frac{1}{2} - X_r\right) dr + \underbrace{\sqrt{X_r(1-X_r)}}_{\sigma_r} dW_r$$

X_0 va à valeurs dans $[0;1]$

On applique la formule d'Itô à $Y_r = (X_r - 1/2)e^r = f(r, X_r)$

$f : (r,x) \mapsto (x - 1/2)e^r$, $\frac{\partial f}{\partial r}(r,x) = (x - 1/2)e^r$, $\frac{\partial f}{\partial x}(r,x) = e^r$, $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(r,x) = 0$

Donc $dY_r = (X_r - \frac{1}{2})e^r dr + e^r dX_r$

$= \sigma_r e^r dW_r = \sqrt{X_r(1-X_r)} e^r dW_r$

Donc $Y_r = \int_0^r \sqrt{X_s(1-X_s)} e^s dW_s$

Exercice 9 : **Processus d'Ornstein Uhlenbeck : modèle de Vasicek de taux d'intérêt**

Pour décrire la dynamique des taux courts, en particulier dans le modèle de Vasicek (1977), on modélise l'évolution du processus de taux par la différentielle stochastique suivante (avec $a, b > 0$:

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t$$

1. en appliquant le lemme d'Itô au processus $Y_t = (X_t - b)e^{at}$, déterminer la solution de cette EDS, appelée processus de Ornstein-Uhlenbeck.
2. Que pouvez-vous dire de la tendance de ce processus de taux lorsque le taux est faible ? élevé ? Justifier le terme de "force de rappel vers b".
3. Expliquez pourquoi ce processus peut prendre des valeurs négatives. Justifiez le choix de Cox, Ingersoll et Ross de modéliser plutôt les taux d'intérêt par un processus "racine carrée" :

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

4. On suppose que $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$. Justifiez que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien dont on précisera la fonction espérance et la fonction de covariance. Préciser la loi de X_t, pour tout $t \geq 0$. Quelle est la limite en loi de X_t lorsque $t \to \infty$?

__Exercice 9__ : $dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t$

1) $Y_t = (X_t - b)e^{at} = f(t, X_t)$

$f : (t,x) \mapsto (x-b)e^{at}$; $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = e^{at}$

$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = a(x-b)e^{-at}$; $\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(t,x) = 0.$

Donc en appliquant la formule d'Itô à Y_t.

$$dY_t = a(X_t - b)e^{-at}dt + e^{at}dX_t + 0$$

$$= aY_t\,dt + a(-Y_t)dt + \sigma e^{at}dW_t$$ car $e^{at}dX_t = e^{at}(a(-(X_t-b)dt + \sigma dW_t)$ $= a(-Y_t)dt + \sigma e^{at}dW_t$

$$= \sigma e^{at}dW_t$$ $\Rightarrow$ Y_t une martingale locale

Donc $Y_t = Y_0 + \sigma\int_0^t e^{as}dW_s$

Ainsi il vient : $(X_t - b)e^{at} = (X_0 - b) + \sigma\int_0^t e^{as}dW_s$

$$\Rightarrow X_t = b + (X_0 - b)e^{-at} + \sigma\int_0^t e^{a(s-t)}dW_s$$

2) Si $X_t > b$, tendance négative $\searrow$ $\Rightarrow$ tendance au retour vers b

$X_t < b$, tendance positive $\nearrow$ $\Rightarrow$ tendance au retour vers b

a : vitesse de convergence

$\Rightarrow$ force de rappel en b.

Car en 0 : $dX_t = ab\,dt + \sigma dW_t$

__HS__ : pour empêcher les valeurs négatives on remplace σdW_t par $\sigma\sqrt{X_t}dW_t$

Si on veut pas dépasser 2b, $\sigma\sqrt{X_t(2b - X_t)}dW_t$

Exo 6 :

$$dX_r = \mu X_r\,dr + \sigma X_r\,dB_r$$

$$dZ_r = (\sigma^2 - \mu) Z_r\,dr - \sigma Z_r\,dB_r$$

$$dY_r = \sigma\,dB_r + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)dr$$

Exercice 1 : On note $M_t = \int_0^t B_s \, dB_s$, $N_t = \int_0^t e^{-s} dB_s$, $V_t = \int_0^t B_s^4 ds$

1) D'après la théorie de l'intégrale Stochastique , $t \geq 0$.

$* \langle M \rangle_t = \int_0^t B_s^2 \, ds \quad \left(= \langle \int_0^\cdot B_s^2 dB_s \rangle_t \right)$

$* \langle N \rangle_t = \langle \int_0^\cdot (e^{-s})^2 dB_s \rangle_t = \int_0^t e^{-2s} ds = \boxed{\frac{1-e^{-2t}}{2}}$

$* \langle M, N \rangle_t = \frac{1}{2} \left(\langle M+N \rangle_t - \langle M \rangle_t - \langle N \rangle_t \right)$

$= \frac{1}{2} \left(\langle \int_0^\cdot (B_s + e^{-s})^2 dB_s \rangle_t - \langle \int_0^\cdot B_s^2 dB_s \rangle_t - \langle \int_0^\cdot e^{-2s} dB_s \rangle_t \right)$

$= \boxed{\int_0^t B_s e^{-s} ds}$

Le crochet de deux processus d'Itô (ou plus généralement de 2 semi-martingales) est égal au crochet des parties des martingales.

$$\langle M + A, M' + A' \rangle_t := \langle M, M' \rangle_t$$

Or $M+N$ est déjà une martingale locale et la partie martingale de $N+V$ est égale à N (V est un processus à variation finie)

Donc

$* \langle M+N, N+V \rangle_t = \langle M+N, N \rangle_t$

$= \langle M, N \rangle_t + \underbrace{\langle N, N \rangle_t}_{= \langle N \rangle_t}$

$= \int_0^t B_s e^{-s} ds + \frac{1-e^{-2t}}{2}$

D'où $\boxed{\langle M+N, N+V \rangle_t = \int_0^t B_s e^{-s} ds + \frac{1-e^{-2t}}{2}}$

2) Soit $t \geq 0$,

D'après le cours, si $\mathbb{E}[\langle M \rangle_t] < \infty \ \forall t \Rightarrow M^2 - \langle M \rangle$ est une vraie martingale.

Donc $\mathbb{E}[M_t^2 - \langle M \rangle_t] = \mathbb{E}[M_0^2 - \langle M \rangle_0] = 0$

$\rightarrow$ Mq $\mathbb{E}[\langle M \rangle_t]$ a du sens :

Par Fubini, $\mathbb{E}[\langle M \rangle_t] = \mathbb{E}[\int_0^t B_s^2 \, ds]$

$= \int_0^t \mathbb{E}[B_s^2] ds = \int_0^t s \, ds = \frac{t^2}{2} < \infty$

$\Longrightarrow \mathbb{E}[M_r^2 - \langle M \rangle_r] = 0 \Longrightarrow \boxed{\mathbb{E}[M_r^2] = \mathbb{E}[\langle M \rangle_r] = \frac{r^2}{2}}$

De façon analogue, $\mathbb{E}[\langle N \rangle_r] = \mathbb{E}[\frac{1-e^{-2r}}{2}] = \frac{1-e^{-2r}}{2} < \infty$

$$\Longrightarrow \boxed{\mathbb{E}[N_r^2] = \mathbb{E}[\langle N \rangle_r] = \frac{1-e^{-2r}}{2}}$$

D'après le cours, $\mathbb{E}[\langle M \rangle_r] < \infty$, $\mathbb{E}[\langle N \rangle_r] < \infty$ et $\mathbb{E}[\langle M, N \rangle_r] < \infty$ $\forall r \geq 0$

alors $MN - \langle M, N \rangle$ est une vraie martingale donc

$$\mathbb{E}[M_r N_r - \langle M, N \rangle_r] = \mathbb{E}[M_0 N_0 - \langle M, N \rangle_0] = 0$$

On a $\mathbb{E}[\langle M, N \rangle_r] = \mathbb{E}[\int_0^r B_s e^{-s} ds]$

$$= \int_0^r \mathbb{E}[B_s e^{-s}] ds = 0.$$

et $\mathbb{E}[|\langle M, N \rangle_r|] \leq \mathbb{E}[\int_0^r |B_s| e^{-s} ds] = \int_0^r \mathbb{E}[|B_s|] e^{-s} ds$

$= \int_0^r \mathbb{E}[\sqrt{s}|Z|] e^{-s} ds$ avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$= \mathbb{E}[|Z|] \int_0^r e^{-s} ds < \infty$

Donc $\mathbb{E}[M_r N_r] = \mathbb{E}[\langle M, N \rangle_r] = 0$

3) On a $dM_s = B_s dB_s$, $d\langle N \rangle_s = e^{-2s} ds$ et $dV_s = B_s^4 ds$

Donc $X_r := \int_0^r B_s dM_s + \int_0^r e^{-B_s} d\langle N \rangle_s + \int_0^r B_s^2 dV_s$

$$= \int_0^r B_s^2 dB_s + \int_0^r e^{-B_s} e^{-2s} ds + \int_0^r B_s^6 ds$$

$$= \int_0^r \underbrace{(e^{-B_s - 2s} + B_s^6)}_{\mu(s, B_s)} ds + \int_0^r \underbrace{B_s^2}_{\sigma(s, B_s)} dB_s$$

Exercice 2 :

En appliquant la ($1^{ère}$) formule d'Itô à $f(X_t)$ avec $f : x \mapsto x^2$ qui est bien C^2 (avec $f'(x) = 2x$ et $f''(x) = 2$) et $X_t = B_t$ (d'où $\langle X \rangle_s = s$), on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,d\langle X \rangle_s$$

$$\Leftrightarrow B_t^2 = 0 + \int_0^t 2B_s\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 2\,ds.$$

$$\Leftrightarrow B_t^2 = 2\int_0^t B_s\,dB_s + t.$$

Donc $\displaystyle\int_0^t B_s\,dB_s = \frac{B_t^2 - t}{2}$

Exercice 3

1) $X_t = \exp\left(\frac{t}{2}\right)\sin B_t$

On applique la (2^e) formule d'Itô à $f(B_t, t)$ avec $f(x,t) = \exp\left(\frac{t}{2}\right)\sin x$ qui est C^1 p/r à t et C^2 p/r à x

On a $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(t,x) = \exp\left(\frac{t}{2}\right)\cos x \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = -\exp\left(\frac{t}{2}\right)\sin x \\ \dfrac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\exp\left(\frac{t}{2}\right)\sin x \end{cases}$

Par la formule d'Itô, on a :

$$\exp\left(\tfrac{t}{2}\right)\sin B_t = \exp\left(\tfrac{0}{2}\right)\sin B_0 + \int_0^t e^{\frac{s}{2}}\cos B_s\,dB_s + \int_0^t \frac{1}{2}e^{\frac{s}{2}}\sin B_s\,ds + \frac{1}{2}\int_0^t -e^{\frac{s}{2}}\sin B_s\,d\langle B \rangle_s$$

$$= 0 + \int_0^t e^{\frac{s}{2}}\cos B_s\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{\frac{s}{2}}\sin B_s\,ds - \frac{1}{2}\int_0^t e^{\frac{s}{2}}\sin B_s\,ds$$

$$= \int_0^t e^{\frac{s}{2}}\cos B_s\,dB_s$$

Donc $\boxed{X_t = \int_0^t \underbrace{\exp\left(\tfrac{s}{2}\right)\cos(B_s)}_{\sigma(s, B_s)}\,dB_s}$

2) $Y_t = B_t^2\exp(B_t + t)$

On applique la 2^e formule d'Itô à $f(B_t, t)$ avec $f(x,t) = x^2\exp(x+t)$ qui est C^1 p/r à t et C^2 p/r à x.

On a $\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (2x + x^2)\exp(x+t) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = (x^2+4x+2)\exp(x+t) \\ \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = x^2\exp(x+t) \end{cases}$

Par la formule d'Itô on a :

$$B_t^2\exp(B_t+t) = B_0^2\exp(B_0+0) + \int_0^t B_s^2\exp(B_s+s)ds + \int_0^t (2B_s+B_s^2)\exp(B_s+s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t (2+4B_s+B_s^2)\exp(B_s+s)\,d\langle B\rangle_s$$

$$= 0 + \int_0^t B_s^2 e^{B_s+s}ds + \int_0^t (2B_s+B_s^2)e^{B_s+s}dB_s + \int_0^t (1+2B_s+\tfrac{1}{2}B_s^2)e^{B_s+s}ds$$

$$= \int_0^t \underbrace{(1+2B_s+\tfrac{3}{2}B_s^2)e^{B_s+s}}_{\mu(s,B_s)}ds + \int_0^t \underbrace{(2B_s+B_s^2)e^{B_s+s}}_{\sigma(s,B_s)}dB_s$$

3) $Z_t = (B_t^3 - 3tB_t)_{t\geq 0}$

On applique la 2e formule d'Itô à $f(B_t,t)$ avec $f(x,t) = x^3 - 3tx$

qui est C^1 p/r à t et C^2 p/r à x

On a : $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = 3x^2 - 3t$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 6x$

$\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = -3x$

Par la formule d'Itô, on a :

$$B_t^3 - 3tB_t = B_0^3 - 3\times 0\times B_0 + \int_0^t -3B_s ds + \int_0^t (3B_s^2-3s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 6B_s\,d\langle B\rangle_s$$

$$= \int_0^t \underbrace{3(B_s^2-s)}_{\sigma(s,B_s)}dB_s$$

4) * $X_t = \int_0^t \exp(\frac{s}{2})\cos(B_s)\,dB_s$ est une martingale locale (car son drift est nul)

* $Y_t = \int_0^t (2B_s + (B_s)^2)\exp(B_s+s)\,dB_s + \int_0^t (1+2B_s+\frac{3}{2}B_s^2)\exp(B_s+s)ds$ n'est pas

une martingale locale (car son drift n'est pas nul)

$* \; Z_t = 3\int_0^t (B_s^2 - s)\,dB_s$ est une martingale locale (car son drift est nul).

X_t est en fait une vraie martingale car $\mathbb{E}[\langle X\rangle_t] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \left(\exp\left(\frac{s}{2}\right)\cos B_s\right)^2 ds\right]$

$$= \int_0^t \exp(s)\, \underbrace{\mathbb{E}[\cos(B_s)^2]}_{\leq 1}\, ds$$

$$\leq \int_0^t \exp(s)\,ds < \infty$$

De m̂, Z_t est aussi une vraie martingale car,

$$\mathbb{E}[\langle Z\rangle_t] = \mathbb{E}\left[\int_0^t (B_s^2 - s)^2\, ds\right]$$

$$= \int_0^t \mathbb{E}[(B_s^2 - s)^2]\, ds$$

$$= \int_0^t \mathbb{E}[((\sqrt{s}\,Z)^2 - s)^2]\, ds \quad \text{avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$= \int_0^t s^2\, \mathbb{E}[(Z^2 - 1)^2]\, ds$$

$$= \mathbb{E}[(Z^2-1)^2] \int_0^t s^2\, ds < \infty$$

Exercice 5 :

$Y_t = \ln(S_t)$ $\qquad dS_t = \mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t$

On applique la 1ère formule d'Itô à $f(S_t)$ où $f(x) = \ln(x)$ de classe C^2 p/r à x

$f'(x) = \frac{1}{x}$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$

Par la formule d'Itô, $d(\ln S_t) = \frac{1}{S_t}\,dS_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{S_t^2}\right)(\sigma S_t)^2\,dt$

$$= \frac{1}{S_t}(\mu S_t\,dt + \sigma S_t\,dB_t) - \frac{1}{2}\sigma^2\,dt$$

$$= \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)dt + \sigma\,dB_t$$

Exercice 6 :

$\{C_t = C_0 e^{\alpha W_t}, t \geq 0\}, x_0 \geq 0$

1) $C_t = C_0 e^{\alpha W_t} = f(W_t)$ avec $f(x) = C_0 e^{\alpha x}$

On applique la $1^{ère}$ formule d'Itô à $f(W_t)$ qui est C^2 p/r à x

$f'(x) = \alpha C_0 e^{\alpha x}$ et $f''(x) = \alpha^2 C_0 e^{\alpha x}$

$$\underset{\text{formule d'Itô}}{\Rightarrow} dC_t = \alpha C_0 e^{\alpha W_t} dW_t + \frac{1}{2}\alpha^2 C_0 e^{\alpha W_t} d\langle W\rangle_t$$

$$= \alpha C_t \, dW_t + \frac{1}{2}\alpha^2 C_t \, dt$$

2) $Y_t = X_t C_t = g(X_t, C_t)$ $\quad g : (x,y) \mapsto xy$

$$dY_t = X_t dC_t + C_t dX_t + d\langle C, X\rangle_t + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}}}_{=0} d\langle X\rangle_t + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}}}_{=0} d\langle C\rangle_t$$

$$= X_t\left(\frac{1}{2}\alpha^2 C_t dt + \alpha C_t dW_t\right) + C_t(\mu X_t dt + \sigma X_t dW_t^*) + \alpha\sigma C_t X_t \underbrace{d\langle W, W^*\rangle_t}_{\substack{=0 \\ \text{car } W \perp W^*}}$$

$$= \left(\mu + \frac{1}{2}\alpha^2\right) X_t C_t dt + \alpha X_t C_t dW_t + \sigma X_t C_t dW_t^*$$

$$= \left(\mu + \frac{1}{2}\alpha^2\right) Y_t dt + \alpha Y_t dW_t + \sigma Y_t dW_t^*$$

Exercice 7 :

$$X_t = X_0 e^{\sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t}$$

1) $Y_t = \sigma B_t + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t \Rightarrow dY_t = (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt - \sigma dB_t$

$X_t = X_0 e^{Y_t} = f(x)$ où $f : x \mapsto X_0 e^x$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = X_0 e^x$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = X_0 e^x$

On applique la $1^{ère}$ formule d'Itô avec f qui est bien C^2 p/r à x

$$dX_t = X_0 e^{Y_t} dY_t + \frac{1}{2} X_0 e^{Y_t} d\langle Y\rangle_t$$

$$= X_t\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt - \sigma dB_t\right) + \frac{1}{2} X_t \sigma^2 dt$$

$$= \mu X_t dt - \sigma X_t dB_t$$

$$\Rightarrow dX_r = X_r(\mu dr - \sigma dB_r)$$
$$\Rightarrow X_r = X_0 + \int_0^r \mu X_s ds - \int_0^r \sigma X_s dB_s$$

2) On pose $Z_r = \frac{1}{X_r}$ prix d'1€ en \$

$Z_r = f(X_r)$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{x}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{1}{x^2}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = +\frac{2}{x^3}$

On applique la 1ère formule d'Itô à f qui est bien C^2 p/r à x (sur $\mathbb{R}_+^*$)

$$dZ_r = -\frac{1}{X_r^2} dX_r + \frac{1}{2} \times \frac{2}{X_r^3} d\langle X \rangle_r$$
$$= -\frac{1}{X_r^2} \times X_r(\mu dr + \sigma dB_r) + \frac{1}{X_r^3}\sigma^2 X_r^2 dr$$
$$= -\mu Z_r dr - \sigma Z_r dB_r + \sigma^2 Z_r dr.$$
$$= Z_r\left((\sigma^2 - \mu)dr + \sigma dB_r\right)$$
$$\Rightarrow Z_r = \underset{= \frac{1}{X_0}}{Z_0} \int_0^r (\sigma^2 - \mu) Z_s ds + \int_0^r \sigma Z_s dB_s$$

3) $U_r = \ln X_r$

Or $X_r = X_0 e^{Y_r} \Rightarrow \ln X_r = \ln X_0 + Y_r$
$$\Rightarrow U_r = \ln X_0 + \sigma B_r + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) r$$

et $dU_r = \sigma dB_r + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dr$

$V_r = \ln Z_r = \ln\left(\frac{1}{X_r}\right) = -\ln(X_r) = -U_r$
$$\Rightarrow V_r = -\ln X_0 - \sigma B_r - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) r$$

et $dV_r = -\sigma dB_r - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) dr$

Exercice 8 :

$$dX_t = \left(\frac{1}{2} - X_t\right) dt + \sqrt{X_t(1-X_t)}\, dW_t$$

Exercice 9 : $dX_t = a(b-X_t)dt + \sigma dW_t$

1) Appliquons la 2e formule d'Itô avec $f(x,t) = (x-b)e^{at}$ qui est bien C^1 p/r à t et C^2 p/r à x.

Avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{at}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = a(x-b)e^{at}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0$

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t e^{as}\, dX_s + \int_0^t a(X_s - b)e^{as}\, ds + \int_0^t 0 \, d\langle X \rangle_s$$

En remplaçant dX_t par $a(b-X_t)dt + \sigma dW_t$, on obtient

$$Y_t = (X_0 - b) \int_0^t e^{as} a(b-X_s)ds + \int_0^t e^{as}\sigma dW_s + \int_0^t a(X_s-b)e^{as} ds$$

$$= X_0 - b + \int_0^t e^{as}\sigma dW_s$$

Donc, $X_t = b + (X_0 - b)e^{-at} + \sigma e^{-at}\int_0^t e^{as} dW_s$

2) Si $X_t > b$, tendance négative $\searrow$ $\Rightarrow$ tendance au retour vers b

$X_t < b$, tendance positive $\nearrow$ $\Rightarrow$ tendance au retour vers b

a : vitesse de convergence

$\Rightarrow$ force de rappel en b.

Cas $a = 0$: $dX_t = abdt + \sigma dW_t$

HS : pour empêcher les valeurs négatives on remplace σdW_t par $\sigma\sqrt{X_t}\, dW_t$

Si on veut pas dépasser $2b$, $\sigma\sqrt{X_t(2b-X_t)}\, dW_t$

3)

4) La fonct° $s \mapsto e^{as}$ étant déterministe et de carré intégrable, l'intégrale stochastique $\int_0^t e^{as} dW_s$ est une intégrale de Wiener

Par conséquent, le processus stochastique associé $(\int_0^t e^{as} dW_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus Gaussien.

Maintenant, si on prend un ensemble de temps croissants $0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_n$ et un ensemble de réels $(a_1, \ldots, a_n)$, on a :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i (b + (x_0 - b) e^{-at_i}) + \sum_{i=1}^{n} a_i \sigma e^{-at_i} \int_0^{t_i} e^{as} dW_s.$$

peut se réécrire sous la forme :

$$\sum a_i X_{t_i} = C + \sum_{i=1}^{n} a_i' \int_0^{t_i} e^{as} dW_s$$

Or, le processus $(\int_0^t e^{as} dW_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ étant Gaussien, on a que $\sum_{i=1}^{n} a_i' \int_0^{t_i} e^{as} dW_s$ suit une loi normale.

Or, une va Gaussienne + cte est encore une loi Gaussienne.

Par conséquent, $\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}$ suit une loi normale.

On a donc montré que le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ était Gaussien.

La fonct° espérance est donnée par

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[b + (x_0 - b)e^{-at} + \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s].$$
$$= b + (x_0 - b)e^{-at} + \sigma e^{-at}\, \mathbb{E}[\int_0^t e^{as} dW_s]$$
$$= b + (x_0 - b)e^{-at}$$

Car $\int_0^t e^{as} dW_s$ est une intégrale de Wiener donc processus centré.

Donc, $\mathbb{E}[X_t] = b + (x_0 - b)e^{-at}$

La fonction de covariance est donnée $\forall\, 0 < s < t$ par :

$$Cov(X_s, X_t) = \mathbb{E}[(X_s - \mathbb{E}[X_s])(X_t - \mathbb{E}[X_t])]$$
$$= \mathbb{E}[(\sigma e^{-as} \int_0^s e^{au} dW_u)(\sigma e^{-at} \int_0^t e^{au} dW_u)]$$
$$= \sigma^2 e^{-a(t+s)}\, \mathbb{E}[\int_0^s e^{au} dW_u \int_0^t e^{au} dW_u]$$
$$= \sigma^2 e^{-a(t+s)} \int_0^{s\wedge t} e^{2au} du \qquad \text{(Covariance pour l'intégrale de Wiener)}$$
$$= \sigma^2 e^{-a(t+s)} \frac{e^{2as} - 1}{2a} \qquad (\text{car } s \leq t)$$
$$= \frac{\sigma^2}{2a}(e^{-a(t-s)} - e^{-a(t+s)})$$

Donc $\forall\, 0 \leq s \leq t$, $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = \frac{\sigma^2}{2a}\left(e^{-a(t-s)} - e^{-a(t+s)}\right)$

En particulier,

$$X_t \sim \mathcal{N}\left(b + (x_0 - b)e^{-at}, \frac{\sigma^2(1-e^{-2at})}{2a}\right).$$

Donc $X_t \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(b, \frac{\sigma^2}{2a}\right)$.

Exercice 10:

1) $dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dB_t)$ où $(B_t)_{t\geq 0}$ un mvt Brownien standard.

2) $\tilde{S}_t = e^{-rt} S_t$

On applique la 2e formule d'Itô avec $f(x,t) = x e^{-rt}$ qui est bien C^1 p/r à t et C^2 p/r à x.

Avec $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = e^{-rt}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial t} = -rxe^{-rt}$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = 0$

Donc il vient:

$$\begin{aligned} d\tilde{S}_t &= e^{-rt} dS_t - r S_t e^{-rt} dt \\ &= e^{-rt} S_t(\mu dt + \sigma dB_t) - r S_t e^{-rt} dt \\ &= (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma \tilde{S}_t dB_t \\ &= \sigma \tilde{S}_t\left(\frac{\mu - r}{\sigma} dt + dB_t\right) \end{aligned}$$

3) $d\tilde{S}_t = (\mu - r) e^{-rt} S_t dt + \sigma e^{-rt} S_t dB_t$

$\Rightarrow dS_t = (\mu - r) S_t dt + \sigma S_t dB_t$

Supposons $dS_t = r S_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t$

$\Rightarrow (\mu - r) S_t dt + \sigma S_t dB_t = r S_t dt + \sigma S_t d\tilde{B}_t$

$\Rightarrow d\tilde{B}_t = \left(\frac{\mu - 2r}{\sigma}\right) dt + dB_t$

Montrons que sous une probabilité $\mathbb{Q}$, $\widehat{B}_t$ est un mouvement Brownien.

Par le théorème de Cameron-Martin, en posant $m = \frac{\mu - 2r}{\sigma}$, il existe une proba $\mathbb{Q}$ tq $\widehat{B}_t$ est un mvt Brownien

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left(-\frac{\mu-2r}{\sigma} dB_t - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-2r}{\sigma}\right)^2 t\right)$$

D'où $dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,d\widetilde{B}_t$

4) On a donc $dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,d\widetilde{B}_t$ avec $\widetilde{B}_t$ mvt Brownien sous $\mathbb{Q}$

mais $d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t\left(\frac{\mu - r}{\sigma}dt + dB_t\right)$ ⊛

Or par 3) on a $dS_t = rS_t\,dt + \sigma S_t\,d\widetilde{B}_t$

avec $d\widehat{B}_t = \left(\frac{\mu-2r}{\sigma}\right)dt + dB_t$

$\Rightarrow dB_t = d\widetilde{B}_t - \left(\frac{\mu-2r}{\sigma}\right)dt$

$$\underset{⊛}{\Rightarrow} d\widetilde{S}_t = \sigma\widetilde{S}_t\left(\frac{\mu-r}{\sigma}dt + d\widetilde{B}_t - \left(\frac{\mu-2r}{\sigma}\right)dt\right)$$

$$= \sigma\widetilde{S}_t\left(\frac{r}{\sigma}dt + d\widetilde{B}_t\right)$$

$$= r\widetilde{S}_t\,dt + \sigma\widetilde{S}_t\,d\widetilde{B}_t$$

Exercice 11 : Modèle de Black et Scholes

On considère le modèle de Black and Scholes avec un actif sans risque de taux r.
On considère aussi un actif risqué dont le cours à l'instant t est noté S_t, de valeur initiale $S_0 = x > 0$.
La volatilité du marché est notée σ.
On se place sous la probabilité risque neutre P^*. Soit B un mouvement brownien sous P^*. On note $\tilde{S}_t$ le cours actualisé.
L'évolution de $\tilde{S}$ est donnée par l'équation :

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t \, dB_t, \tag{1}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $F(t,x) = e^{\sigma^2(T-t)}x^2 - 2ax + a^2$. On note $M_t = F(t, \tilde{S}_t)$.

1. En appliquant la formule d'Itô, montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale sous P^*.
2. Calculer $E^*(M_T)$ et en déduire que pour tout réel a,

$$E^*\left((\tilde{S}_T - a)^2\right) = e^{\sigma^2 T}x^2 - 2ax + a^2.$$

Exercice 11 :

$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t dB_t$ $\quad$ B un Brownien sur $\mathbb{P}^*$.

Soit $a \in \mathbb{R}$, $F(t,x) = e^{\sigma^2(T-t)}x^2 - 2ax + a^2$

On note $M_t = F(t, \tilde{S}_t) = e^{\sigma^2(T-t)}\tilde{S}_t^2 - 2a\tilde{S}_t + a^2$

1) On applique la 2e formule d'Itô avec $f : (t,x) \mapsto e^{\sigma^2(T-t)}x^2 - 2ax + a^2$

qui est bien C^1 p/r à t et C^2 p/r à x

avec $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{\sigma^2(T-t)} - 2a$ $\quad$ $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2e^{\sigma^2(T-t)}$

$\dfrac{\partial f}{\partial t} = -\sigma^2 x^2 e^{\sigma^2(T-t)}$

Donc on a :

$dM_t = \left(2\tilde{S}_t e^{\sigma^2(T-t)} - 2a\right) d\tilde{S}_t + \frac{1}{2} \times 2e^{\sigma^2(T-t)} d\langle \tilde{S} \rangle_t - \sigma^2 \tilde{S}_t^2 e^{\sigma^2(T-t)} dt.$

$= \left(2\tilde{S}_t e^{\sigma^2(T-t)} - 2a\right) d\tilde{S}_t + e^{\sigma^2(T-t)} \sigma^2 \tilde{S}_t^2 dt - \sigma^2 \tilde{S}_t^2 e^{\sigma^2(T-t)} dt$

$= \left(2\tilde{S}_t e^{\sigma^2(T-t)} - 2a\right) \sigma \tilde{S}_t dB_t$

$= 2\sigma \tilde{S}_t \left(\tilde{S}_t e^{\sigma^2(T-t)} - a\right) dB_t$.

$\Rightarrow M_t = M_0 + \int_0^t 2\sigma \tilde{S}_s \left(\tilde{S}_s e^{\sigma^2(T-s)} - a\right) dB_s$

Drift nul $\Rightarrow$ semi martingale

et $\mathbb{E}[\langle M \rangle_t] = \int_0^t 4\sigma^2 \tilde{S}_s^2 \left(\tilde{S}_s e^{\sigma^2(T-s)} - a\right)^2 ds < \infty$ donc vraie martingale sous $\mathbb{P}^*$.

2) $\mathbb{E}^*[M_T] = \mathbb{E}^*[M_0 + \int_0^T 2\sigma \tilde{S}_s(\tilde{S}_s e^{\sigma^2(T-s)} - a)\, dB_s]$

$= M_0 = e^{\sigma^2 T} x^2 - 2ax + a^2$

$\mathbb{E}^*[(\tilde{S}_T - a)^2] = \mathbb{E}^*[\tilde{S}_T^2 - 2a\tilde{S}_T + a^2]$

Or $M_T = \tilde{S}_T^2 - 2a\tilde{S}_T + a^2 = F(T, \tilde{S}_T)$

$\Rightarrow \mathbb{E}^*[(\tilde{S}_T - a)^2] = \mathbb{E}^*[M_T] = e^{\sigma^2 T} x^2 - 2ax + a^2.$

Exercice 12

$dM_t = r M_t \, dt$

$dS_t = m S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t$

1) Rappel : EDS de Black-Scholes : $dX_t = \mu X_t + \sigma X_t dB_t \quad X_0 = x$

$\to$ Appliquer la 2^e formule d'Itô à $Y_t = f(t, X_t) = e^{-\mu t} X_t$ puis la $1^{ère}$ formule d'Itô à $Z_t = \ln Y_t$

$\Rightarrow X_t = X_0 \exp(\mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$

Donc ici, $M_t = e^{rt}$

et $S_t = S_0 \exp(mt + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t)$

2) $V(t, S_t) = \alpha_t S_t + \beta_t M_t$

$dV_t = d\alpha_t S_t + \alpha_t dS_t + d\beta_t M_t + \beta_t dM_t$

$= \alpha_t dS_t + \beta_t dM_t$ car on se place sous l'hypothèse d'autofinancem^t standard i.e $d\alpha_t S_t + d\beta_t M_t = 0$

3) $V(t, S_t) = \alpha_t S_t + \beta_t M_t$

On applique la 3^e formule d'Itô à $f : (x,y) \mapsto \alpha x + \beta y$ qui est C^2 p/r^t à x et y

$\frac{\partial f}{\partial x} = \alpha \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = \beta \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$

et $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

Donc la formule d'Itô nous donne :

$dV_t = \alpha(t) \, dS_t + \beta(t) \, dM_t$

$= \alpha(t) (m S_t \, dt + \sigma S_t \, dW_t) + \beta(t) r M_t \, dt$

$= (m \alpha(t) S_t + r \beta(t) M_t) \, dt + \sigma \alpha(t) S_t \, dW_t$

$(S_T - K)^+$

4) A l'instant T, $V(T, S_T) = (S_T - K)^+$ (Condit° terminale)

$$V(t,S_t) = S_t\,\phi\big(d_1(T-t,S_t)\big) - K e^{-r(T-t)}\,\phi\big(d_2(T-t,S_t)\big)$$

avec $$d_1(T-t,S_t) = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2(T-t,S_t) = d_1(T-t,S_t) - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt.$$

$$\Rightarrow V(T,S_T) = \underbrace{S_T\,\underbrace{\phi\big(\underbrace{d_1(0,S_T)}_{\to\infty}\big)}_{\to 1}}_{\to S_T} - \underbrace{K\,\underbrace{\phi\big(\underbrace{d_2(0,S_T)}_{\to\infty}\big)}_{\to 1}}_{\to K}$$

$$= S_T - K.$$

Exercice 13 :

$$B_r = \sqrt{(W_r)^2 + (W_r^*)^2} = f(W_r, W_r^*)$$

On applique la 3^e formule d'Itô à $f : (x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$

qui est C^2 p/r à x et y

avec $\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$

et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -\dfrac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}$

D'où on obtient avec la formule d'Itô :

$$dB_r = \frac{W_r}{B_r} dW_r + \frac{W_r^*}{B_r} dW_r^* + \frac{1}{2}\frac{(W_r^*)^2}{B_r^3} d\langle W\rangle_r + \frac{1}{2}\frac{(W_r)^2}{B_r^3} d\langle W^*\rangle_r + -\frac{W_r W_r^*}{B_r^3} d\langle W, W^*\rangle_r$$

Or W et W^* mvt Browniens $\perp\!\!\!\perp \Rightarrow d\langle W, W^*\rangle_r = 0$

Donc $dB_r = \dfrac{W_r}{B_r} dW_r + \dfrac{W_r^*}{B_r} dW_r^* + \dfrac{1}{2}\dfrac{(W_r^*)^2}{B_r^3} dr + \dfrac{1}{2}\dfrac{(W_r)^2}{B_r^3} dr$

$$= \frac{W_r}{B_r} dW_r + \frac{W_r^*}{B_r} dW_r^* + \frac{1}{2B_r^3} B_r^2 \, dr$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{B_r} dr + \frac{W_r}{B_r} dW_r + \frac{W_r^*}{B_r} dW_r^*$$