Valeurs extrêmes - Entraînement TD

Exercice 1 :

$(X_i) \sim \mathcal{U}([-1,0])$ iid

$M_n(X) = \max_{i\in[1,n]} (X_i)$

1) On cherche a_n et b_n tq lorsque $n\to\infty$

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n-b_n}{a_n}\le x\right) \longrightarrow \Psi_1(x) = e^{x} \quad \text{car } x\le 0$$

$$P\left(\frac{\max(X_i)-b_n}{a_n}\le x\right) = P(\max(X_i)\le a_n x + b_n) = \prod_{i=1}^n P(X_i \le a_n x+b_n) = P(X_1\le a_n x+b_n)^n = \exp(n\ln(1+a_n x+b_n))$$

$$M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = x^F \Rightarrow a_n x+b_n \longrightarrow 0 = x^F \Rightarrow \begin{cases} a_n\to0 \\ b_n\to 0\end{cases}$$

$$P(M_n\le a_n x+b_n) = F^n(a_nx+b_n) = (1+(a_nx+b_n))^n = \underbrace{\exp(n\ln(1+\underbrace{(a_nx+b_n)}_{\to0}))}_{\sim n(a_n x+b_n)} \longrightarrow \exp(x)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a_n = \frac{1}{n} \\ b_n = 0\end{cases} \text{ convient.}$$

Théorème de Fischer-Tipett :

S'il $\exists\, (c_n)>0$ et (d_n) tq lorsque $n\to\infty$

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n-d_n}{c_n}\le x\right) \longrightarrow G(x)$$

pour une distribut° non-dégénérée G, alors G est du m̂ type que l'une des 3 distribut° suivantes :

Fréchet $(\alpha>0)$: $\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x\le 0 \\ e^{-x^{-\alpha}} & \text{si } x>0\end{cases}$

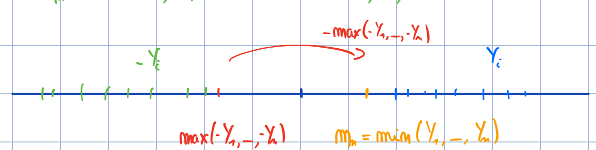
Weibull $(\alpha>0)$: $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} e^{-(-x)^{\alpha}} & \text{si } x\le 0 \\ 1 & \text{si } x>0\end{cases}$

Gumbel $\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}$ $x\in\mathbb{R}$.

2) Soient $Y_i \sim \mathcal{E}(1)$

$m_n = \min_i(Y_i)$

$m_n = \min(Y_1,\dots,Y_n) \overset{?}{=} -\max(-Y_1,\dots,-Y_n)$



Donc $-m_n = \max(-Y_1,\dots,-Y_n)$

$\mathbb{P}(-Y\le y) = \mathbb{P}(Y\ge -y) = e^{+y}$

$\Rightarrow -Y\sim\Psi_1$

Soient $(c_n)>0$ et (d_n), par max stabilité on a

$$\mathbb{P}\left(\max(-Y_1,\dots,-Y_n) \le \tfrac{1}{n}(c_n y + d_n)\right) = e^y$$

$$\Leftrightarrow P(\max(-Y_1,\dots,-Y_n) \le c'_n y + d'_n) = e^y$$

Donc comme $-m_n = \max(-Y_i)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(-m_n \le c'_n y + d'_n) = e^y$

$\Rightarrow \mathbb{P}(-Y \le c'_n y + d'_n)^n = e^y \Rightarrow \exp(c'_n y + d'_n)^n = e^y$

$\Rightarrow \exp(n c'_n y + n d'_n) = e^y \Rightarrow \begin{cases} c'_n = 1/n \\ d'_n = 0\end{cases}$ convient.

$P(-m_n)$ ok?

Distributions max-stables :

i) Soient $X, X_1,\dots,X_n$ de v.a iid $\sim$ Fréchet Φ_α,
alors $n^{-1/\alpha}\max(X_1,\dots,X_n) \overset{d}{=} X$

ii) ——— $\sim$ Weibull Ψ_α,
alors $n^{1/\alpha}\max(X_1,\dots,X_n) \overset{d}{=} X$

iii) ——— $\sim$ Gumbell Λ,
alors $\max(X_1,\dots,X_n) - \ln(n) \overset{d}{=} X$.

Rq : Si $X\sim\Phi_\alpha \Leftrightarrow X^{-1} \sim \Psi_\alpha \Leftrightarrow \ln X^{\alpha} \sim \Lambda$

Exercice 2.

(X_i) iid de fdr F et $M_n = \max(X_i)$

On a stat d'ordre tq $X_{(n)} \leq X_{(n-1)} \leq \dots \leq X_{(1)}$

et $B_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > x\}}$

1) Soit $k \in \mathbb{N}$, si $X_{(k)} \leq x \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > x\}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{(i)} > x\}} = \sum_{i=1}^{k-1} \mathbb{1}_{\{X_{(i)} > x\}} \leq k-1 < k$

et inversemt ok

2) $P(B_n(x) = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ avec $p = P(X > x) = 1 - F_X(x)$

$$P(X_{(k)} \leq x) = P(B_n(x) < k) = \sum_{j=0}^{k-1} P(B_n(x) = j)$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$$

$$= \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} (1 - F_X(x))^j F_X(x)^{n-j}$$

3) $\varphi_n(t,x) = \mathbb{E}[\exp(t B_n(x))]$

$$\underset{iid}{=} [\mathbb{E}[\exp(t \mathbb{1}_{\{X_i \geq x\}})]]^n$$

$$\mathbb{E}[\exp(t \mathbb{1}_{\{X_i \geq x\}})] = F(x) e^{t \times 0} + \bar{F}(x) e^{t \times 1}$$

$$= 1 - \bar{F}(x) + \bar{F}(x) e^t$$

$$= 1 + \bar{F}(x)(e^t - 1)$$

$$\varphi_n(t,x) = [1 + \bar{F}(x)(e^t - 1)]^n$$

4) Soit (u_n) tq $\lim_{n \to \infty} n P(X_i > u_n) = \tau$ alors

$$\lim_{n \to \infty} \ln(\varphi_n(t, u_n)) = \lim_{n \to \infty} \ln(\mathbb{E}[e^{nt \mathbb{1}_{\{X > u_n\}}}])$$

$$= \lim_{n \to \infty} \ln([1 + (e^t - 1) P(X > u_n)]^n)$$

$$= \lim_{n \to \infty} n \ln(1 + (e^t - 1) P(X > u_n))$$

Or lorsque $n \to \infty$, $\lim_{n \to \infty} P(X > u_n) = 0$ car $\lim_{n \to \infty} n P(X > u_n) = \tau$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} n \ln(1 + (e^t - 1) P(X > u_n)) = \lim_{n \to \infty} n (e^t - 1) P(X > u_n)$$

$$\Rightarrow \lim_{n \to \infty} \ln(\varphi_n(t, u_n)) = \tau (e^t - 1)$$

5) Soit $N \sim \mathcal{P}(\tau)$

$$\mathbb{E}[e^{tN}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{tk} e^{-\tau} \frac{\tau^k}{k!}$$

$$= e^{-\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\tau e^t)^k}{k!} = \tau e^t e^{-\tau}$$
$$= \tau e^{t-\tau}$$

Par égalité de $\varphi_n(t,x)$, on a $N_n = B_n(u_n)$ converge vers une loi de Poisson de paramètre τ pour $n \to \infty$.

6) Pour $\tau > 0$ et (u_n) suite de réels, lorsque $n \in \mathcal{V}(\infty)$

i) $P(M_n \leq u_n) \longrightarrow e^{-\tau}$ car $P(Max(X_i) \leq u_n) = P(X \leq u_n)^n = e^{n\ln(P(X \leq u_n))}$

ii) $n\bar{F}(u_n) \longrightarrow \tau$

$$= e^{n\ln(1 - P(X > u_n))}$$
$$\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} e^{n\ln(1-\frac{1}{n}\tau)} \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-\tau}$$

$$\Rightarrow P(X_{(k)} \leq u_n) \overset{④}{=} P(B_n \leq k-1) \underset{n\to\infty}{\overset{⑤}{\longrightarrow}} e^{-\tau} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\tau^i}{i!}$$

Comme $\exists (a_n) > 0$ et (b_n) tq $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{(1)} - b_n}{a_n} \leq x\right) = e^{-e^{-x}}$

$$\Rightarrow e^{-\tau} = e^{-e^{-x}} \Rightarrow \tau = e^{-x}$$

<u>Pour $k=2$:</u>

$$e^{-\tau} \sum_{i=0}^{2-1} \frac{\tau^i}{i!} = e^{-e^{-x}}(1 + e^{-x}) = e^{-\tau}(1+\tau)$$

$$\Rightarrow P\left(\frac{X_{(2)} - b_n}{a_n} \leq x\right) \longrightarrow e^{-e^{-x}}(1 + e^{-x}) = e^{-\tau}(1+\tau)$$

<u>Exercice 3 :</u>