AIDE RÉVISIONS GESTION DE PORTEFEUILLE

TD 1 partie 1 Markowitz

3. Considérons un marché comprenant 4 actifs risqués C, D, N, V et un actif sans risque. Vous avez rassemblé les données suivantes :

Actif	μ_i	σ_i	Poids dans le port. de marché
C	0.13	0.25	0.3618
D	0.10	0.20	0.2754
N	0.06	0.15	0.245
V	0.12	0.30	0.1178
Marché		0.1171	1

Le taux sans risque est égal à 3%.

(a) Les actifs C, D, N, V sont-ils indépendants ?

(b) La banque X vous propose d'investir votre argent dans un de ses nouveaux produits : le portefeuille A (composé des 5 actifs du marché) dont les facilités sont importantes. La rentabilité attendue de ce portefeuille est de 13.3% et son écart type 17.5%. Le gestionnaire garantit qu'il s'agit bien d'un portefeuille efficient au sens de Markowitz. Que pensez-vous de l'offre de la banque ?

1. Considérons deux actions A et B et imaginons les trois cas suivants :

Cas 1 : $\mu_A > \mu_B$ et $\sigma_A = \sigma_B$

Cas 2 : $\mu_A = \mu_B$ et $\sigma_A > \sigma_B$

Cas 3 : $\mu_A < \mu_B$ et $\sigma_A < \sigma_B$

Imaginons que vous ne pouvez investir que dans 1 seul actif. Quel serait votre choix d'investissement dans chacun des cas ci-dessus si :

(a) Vous êtes averse au risque.

(b) Vous êtes preneur de risque (vous aimez le risque).

Expliquer votre décision.

TD 1 partie 2 Markowitz

1. On se place sous les hypothèses du modèle de Markowitz, sur un marché à n actifs risqués. Montrer que la covariance entre le portefeuille VM et un actif quelconque k est constante (ne dépend pas de k).

1) suite du TD cours

(d) **Application numérique** Vous devez aider un ami qui a gagné au Loto à investir son argent. Votre ami est un investisseur de type espérance-variance (fonction d'utilité de la forme $U(\mathbb{E}(R_p), Var(R_p)) = \mathbb{E}(R_p) - \frac{k}{2}Var(R_p))$ avec un coefficient d'aversion au risque $k = 5$. Cinq banques différentes lui proposent d'investir dans leurs fonds de placement. Vous avez accès aux rendements espérés et aux volatilités des différents fonds

Fonds	A	B	C	D	E
μ_i (%)	15	14	20	21	25
σ_i(%)	10	12	15	26	20

i. Représenter ces fonds dans le plan $(\sigma_p,\ \mu_p)$. Identifier les fonds qui sont clairement inefficients.

ii. Supposons que le taux sans risque est de 10% et que votre ami peut repartir sa richesse comme il le souhaite entre l'actif sans risque et un unique fonds. Quel fonds choisira-t-il ? Quel est le poids de ce fonds et celui de l'actif sans risque ?

TD 2 Black-Litterman

1. **Sujet examen 2020**

On s'intéresse aux vues correspondantes aux matrices suivantes : $q = (12\%\ \ 2\%\ \ 3\%)'$ et

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 30\% & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 15\% \end{pmatrix}$$

Compléter les phrases suivantes :

Soit un marché avec actifs risqués notés et un actif sans risque de rendement $r_f = 2\%$. L'investisseur a une vue et deux vues sur ces actifs :
-L'actif aura un rendement de . L'agent est confiant à de cette vue.
-L'action sur-perfomera de .
L'agent est de cette vue.
-L'actif sur-performera de . L'agent est incertain à de cette vue.

TD 3 MEDAF

3. On considère 2 actifs dont les rendements annuels sont $\tilde{R}_1$ et $\tilde{R}_2$. On suppose que

$$\begin{pmatrix} \tilde{R}_1 \\ \tilde{R}_2 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}\right)$$

   (a) Rappeler quelle est la ration de Sharpe notée ici Sh_i pour l'actif i ($i = 1$ ou $i = 2$).

   (b) Soit $(w, 1-w)$ le portefeuille composé des 2 actifs. Quelle est la ration de Sharpe Sh_P du portefeuille ?

   (c) Supposons que le deuxième actif est l'actif sans risque. Montrer que

$$Sh_P = \begin{cases} -Sh_1 & si \quad w < 0 \\ Sh_1 & si \quad w > 0 \end{cases}$$

4. On considère un portefeuille équipondéré de n actifs. Soit $\tilde{R} = (\tilde{R}_1 ... \tilde{R}_n)$ le vecteur des rendements annuels. On suppose que les rendements aléatoires des actifs (donc les v.a. $\tilde{R}_i$ avec $i = 1, ...n$) sont indépendants et que que $\tilde{R}$ est un vecteur aléatoire de vecteur moyenne $\mu = (\mu_1 ... \mu_n)$ et de matrice de variance-covariance $\Sigma = (\sigma_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$.

   (a) Donnez l'expression du ratio de Sharpe du portefeuille.

   (b) Montrez alors que le ratio de Sharpe du portefeuille est une combinaison linéaire des ratios de Sharpe des actifs :

$$Sh = \sum_{i=1}^{n} p_i sh_i.$$

   (c) Vérifiez alors que $0 < p_i < 1$.

4.suite

(b) On étudie maintenant le cas où la corrélation est uniforme ($\rho_{ij} = \rho$ si $i \neq j$) et les actifs présentent la même volatilité ($\sigma_i = \sigma$).

   i. Donnez l'expression du ratio de Sharpe du portefeuille.

   ii. Montrez alors que le ratio de Sharpe du portefeuille est proportionnel au ratio de Sharpe moyen des actifs $Sh = p\bar{sh}$ où $\bar{sh} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} sh_i$.

   iii. On pose $\rho = 50\%$. Combien faut-il d'actifs pour que le ratio de Sharpe du portefeuille soit supérieur de 25% au ratio de Sharpe moyen ?

   iv. Même question si $\rho = 80\%$.

5. On considère deux portefeuilles A et B dont les taux de rentabilité sont décrits par les relations suivantes

$$\tilde{R}_A = \beta_A \tilde{R}_M + \varepsilon_A$$
$$\tilde{R}_B = \beta_B \tilde{R}_M + \varepsilon_B$$

avec ε_A, ε_B et $\tilde{R}_M$ indépendants.

   (a) Construisez un portefeuille combinant A et B et de telle manière à ce que son exposition au risque de marché soit nulle (portefeuille immunisé dit market neutral).

   (b) Peut-on envisager une stratégie combinant les deux titres et permettant une meilleure réduction des risques ?

TD1 – Partie 1 Markowitz

Exercice 3 :

a) Si C, D, N, V indep $\Rightarrow \sigma^2_{marché} = w_C^2\sigma_C^2 + w_D^2\sigma_D^2 + w_N^2\sigma_N^2 + w_V^2\sigma_V^2$

$\Rightarrow \sigma^2_{marché} = 0{,}0167286$

$\Rightarrow \sigma_{marché} = 0{,}129339 \neq 0{,}1171$

Donc non, les actifs C, D, N et V ne sont pas indep.

b) On a $\mu_A = 13{,}3\%$ et $\sigma_A = 17{,}5\%$

On doit vérifier si $A \in FE$ i.e $\mu_A = r_f + \sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\,\sigma_A$

où $\pi = \mu_A - r_f \mathbb{1}_{\mathbb{R}^5}$

$M : (w_C \; w_D \; w_N \; w_V)'$

Comme $M \in FE$: $\mu_M = \underbrace{r_f}_{3\%} + \sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}\,\underbrace{\sigma_M}_{=11{,}71\%}$

Or $\mu_M = w_C\mu_C + w_D\mu_D + w_N\mu_N + w_V\mu_V$

$= 0{,}1034$

$\Rightarrow \sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi} = \frac{1}{\sigma_M}(\mu_M - r_f)$

$= 0{,}6269$

Or $\underbrace{3\%}_{r_f} + \underbrace{0{,}6269}_{\sqrt{\pi'\Sigma^{-1}\pi}} \times \underbrace{17{,}5\%}_{\sigma_A} = 0{,}1397 = 13{,}97\% \neq 13{,}3\% = \mu_A$

$\Rightarrow A \notin FE$

Donc offre mensongère car le port. proposé n'est pas efficient au sens de Markowitz.

Exercice 1 :

a) Averse au risque

→ Cas 1 : On choisit l'act° A car l'action B est inefficiente p/r à A.
Cas 2 : On choisit l'act° B car l'act° A est ineff. p/r à B.
Cas 3 : On choisit l'act° A car le risque de l'act° B est supérieur à celui de l'act° A. On rejette l'investissem^t + risqué

b) Preneur de risque :

→ Cas 1 : On choisit l'act° A car l'action B est inefficiente p/r à A.
Cas 2 : On choisit l'act° B car l'act° A est ineff. p/r à B.
Cas 3 : On choisit l'act° B car le rendement de B est > à celui de A et $\sigma_B > \sigma_A$. On accepte l'investissem^t + risqué

TD1 Partie 2 – Markowitz

Exercice 1:

Soit $\tilde{R}_k$ rendement aléatoire de l'actif k.
" $\tilde{R}_{VM}$ ——— du port. VM

On veut mq $Cov(\tilde{R}_k ; \tilde{R}_{VM}) = \beta \quad \beta \in \mathbb{R}$.

VM est le port le moins risqué sur le marché
$\Rightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, \ \min_\alpha Var(\alpha \tilde{R}_k + (1-\alpha)\tilde{R}_{VM}) \geq \sigma_{VM}^2$

Or $\min_\alpha Var(\alpha \tilde{R}_k + (1-\alpha)\tilde{R}_{VM}) = \min_\alpha \alpha^2 \sigma_k^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_{VM}^2 + 2\alpha(1-\alpha) Cov(\tilde{R}_k ; \tilde{R}_{VM})$

$$= \min_\alpha \alpha^2 \underbrace{(\sigma_k^2 - 2 Cov(\tilde{R}_k ; \tilde{R}_{VM}) + \sigma_{VM}^2)}_{= Var(\tilde{R}_k - \tilde{R}_{VM}) \geq 0} + 2\alpha (Cov(\tilde{R}_k ; \tilde{R}_{VM}) - \sigma_{VM}^2) + \sigma_{VM}^2$$

$\Rightarrow$ le min existe

Notons $a = Var(\tilde{R}_k - \tilde{R}_{VM})$
$b = 2(Cov(\tilde{R}_k ; \tilde{R}_{VM}) - \sigma_{VM}^2)$
$c = \sigma_{VM}^2$

Donc le min existe et est atteint en $\alpha^* = \frac{-b}{2a}$

$$\Rightarrow \alpha^* = \frac{\sigma_{VM}^2 - Cov(\tilde{R}_k ; \tilde{R}_{VM})}{\sigma_{VM}^2 + \sigma_k^2 - 2Cov(\tilde{R}_k ; \tilde{R}_{VM})}$$

$$\Rightarrow \min = \frac{4ac - b^2}{4a} = \frac{\cancel{4}(\sigma_{VM}^2 + \sigma_k^2 - 2Cov())\sigma_{VM}^2 - \cancel{4}(Cov() - \sigma_{VM}^2)^2}{\cancel{4}(\sigma_{VM}^2 + \sigma_k^2 - 2Cov(\cdot;\cdot))} \geq \sigma_{VM}^2$$

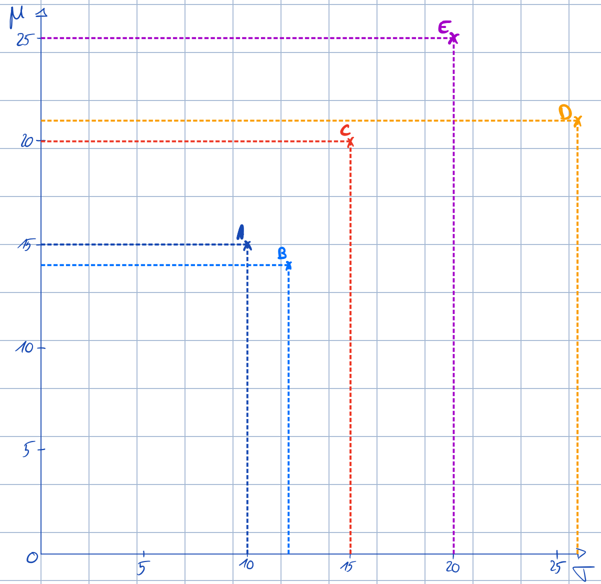
$$= \frac{\cancel{\sigma_{VM}^4} + \sigma_k^2 \sigma_{VM}^2 - \cancel{2\sigma_{VM}^2 Cov()} - Cov^2 + \cancel{2 Cov \sigma_{VM}^2} - \cancel{\sigma_{VM}^4}}{\sigma_{VM}^2 + \sigma_k^2 - 2Cov} \geq \sigma_{VM}^2$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_k^2 \sigma_{VM}^2 - Cov^2}{\sigma_{VM}^2 + \sigma_k^2 - 2Cov} \geq \sigma_{VM}^2$$

$\Rightarrow \sigma_k^2 \sigma_{VM}^2 - Cov^2 \geq \sigma_{VM}^4 + \sigma_k^2 \sigma_{VM}^2 - 2Cov\sigma_{VM}^2$
$\Rightarrow Cov^2 - 2Cov\sigma_{VM}^2 + \sigma_{VM}^4 \leq 0$
$\Rightarrow (Cov - \sigma_{VM}^2)^2 \leq 0$
$\Rightarrow Cov - \sigma_{VM}^2 = 0$
$\Rightarrow Cov = \sigma_{VM}^2$

Donc $Cov(\tilde{R}_k ; \tilde{R}_{VM}) = \underbrace{\sigma_{VM}^2}_{\in \mathbb{R} \text{ cte}}$

d) i)



B clairement inefficient
D clairement inefficient.

ii) On a vu (exo 1 du TD1.2 sur Markowitz) que $w^* = (k\Sigma)^{-1}\pi$

$w^*_{rf} = 1 - w^{*'}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n}$

* <u>Fond A</u> : $w_A^* = (5\sigma_A^2)^{-1}(\mu_A - r_f)$
$= 1$

$\Longrightarrow$ Utilité est max en investissant tout dans A

et $U(A) = \mathbb{E} - \frac{5}{2} Var = w_A^* \mu_A + w_{rf}^* r_f - \frac{k}{2} w_A^{*2} \sigma_A^2$
$= 0{,}125$

* <u>Fond C</u> : $w_C^* = (5\sigma_C^2)^{-1}(\mu_C - r_f)$
$= 0{,}89$

et $w_{rf}^* = 0{,}11$

$\Rightarrow U(C) = 0{,}89 \times 0{,}2 + 0{,}11 \times 0{,}1 - \frac{5}{2} \times 0{,}89^2 \times 0{,}20^2$
$= 0{,}110$

* <u>Fond E</u> : $w_E^* = 0{,}75 \Rightarrow w_{rf}^* = 0{,}25$

$\Rightarrow U(E) = 0{,}75 \times 0{,}25 + 0{,}25 \times 0{,}10 - \frac{5}{2} \times 0{,}75^2 \times 0{,}20^2$
$= 0{,}156$

$\Longrightarrow$ Il va choisir d'investir dans $r_f + E$.

TD 2 – Black Litterman

Exercice 1:

* 6
* A, B, C, D, E
* certaine
* relatives

* A
* 14% ← pas sûr
* 70%

* E
* les actifs B et C
* 2%
* certain

* D
* l'actif A
* 3%
* 15%

Exercice 3:

a) $Sh_i = \dfrac{\mu_i - r_f}{\sigma_i} \qquad i = \{1, 2\}$

b) $Sh_p = \dfrac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} = \dfrac{\omega\mu_1 + (1-\omega)\mu_2 - r_f}{\sqrt{\omega^2\sigma_1^2 + (1-\omega)^2\sigma_2^2 + 2\omega(1-\omega)\sigma_1\sigma_2}}$

c) Si le 2e actif est l'actif sans risque $\Rightarrow \mu_2 = r_f$ et $\sigma_2 = 0$

$$\Rightarrow Sh_p = \frac{\omega\mu_1 - \omega r_f}{\sqrt{\omega^2\sigma_1^2}} = \frac{\omega(\mu_1 - r_f)}{|\omega|\sigma_1} = \frac{\omega}{|\omega|}\underbrace{\frac{\mu_1 - r_f}{\sigma_1}}_{Sh_1}$$

Signe de ω

4) a) $Sh_p = \dfrac{\mu_p - r_f}{\sigma_p} = \dfrac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\mu_i - r_f}{\frac{1}{m}\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2}} = \dfrac{\sum_{i=1}^{m}(\mu_i - r_f)}{\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sigma_i^2}}$

b) $Sh = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{(\mu_i - r_f)}{\sigma_i} \times \dfrac{\sigma_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{m}\sigma_j^2}}$

$$= \sum_{i=1}^{m} p_i \, Sh_i$$

c) $\rho_i > 0$ car $\forall i$ $\sigma_i > 0$

$$\sigma_i^2 < \sum_{j=1}^{m} \sigma_j^2 \Rightarrow \sigma_i < \sqrt{\sum \sigma_j^2} \Rightarrow \rho_i < 1$$

4- Suite

b) $\rho_{ij} = \rho$ $i \neq j$ $\quad \sigma_i = \sigma$ $\quad P: \left(\frac{1}{m} \text{ — } \frac{1}{m}\right)'$

i) $\mu_P = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mu_i$ $\qquad \sigma_P^2 = \frac{1}{m^2} Var\left(\sum \tilde{R}_i\right)$

$$= \frac{1}{m^2}\left(m\sigma^2 + 2\sum_{i<j}^{m} Cov(\tilde{R}_i, R_j)\right)$$

$$= \frac{1}{m^2}\left(m\sigma^2 + 2\,\frac{m(m-1)}{2}\rho\sigma^2\right)$$

$$= \frac{1}{m}\sigma^2 + \frac{(m-1)}{m}\rho\sigma^2 = \sigma^2\left(\frac{1}{m} + \left(1-\frac{1}{m}\right)\rho\right) = \sigma^2\left(\rho + \frac{1}{m}(1-\rho)\right)$$

ii) $Sh_P = \left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(\mu_i - r_f)\right)\left[\sigma\sqrt{\rho + \frac{1}{m}(1-\rho)}\right]^{-1}$

$$= \underbrace{\frac{1}{\sqrt{\rho + \frac{1}{m}(1-\rho)}}}_{P} \; \underbrace{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \underbrace{\frac{\mu_i - r_f}{\sigma}}_{Sh_i}}_{\overline{Sh}}$$

iii) $\rho = 50\%$

On cherche m tq $P = 1{,}25$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{\rho + \frac{1}{m}(1-\rho)}\right)^{-1} = 1{,}25$$

$$\Rightarrow m = \frac{1-\rho}{\frac{1}{1{,}25^2} - \rho} = 3{,}57 \longrightarrow \text{à partir de 4 actifs.}$$

iv) $\rho = 80\%$ $\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{\rho + \underbrace{\frac{1}{m}(1-\rho)}_{>0}}} < \dfrac{1}{\sqrt{\rho}} = 1{,}12$

$\Rightarrow$ impossible.