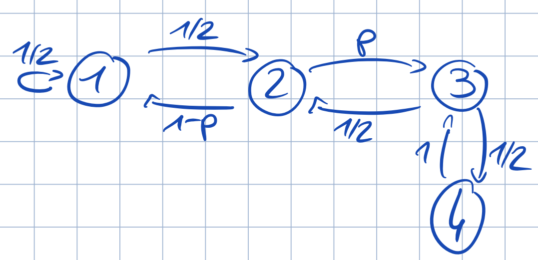
Exam MAD 2018-2019

2ème Session

1) $E = \{1,2,3,4\}$

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad 0 \leq p \leq 1.$$

1 a)



3 b) $* \; p=0 \implies$ 2 classes de communications $F_1 = \{1,2\}$ fermée et $O_1 = \{3,4\}$ ouverte

$* \; p=1 \implies$ 2 classes de communications $F_1 = \{2,3,4\}$ fermée et $O_1 = \{1\}$ ouverte.

$* \; p \in]0,1[\implies$ 1 classe de communications $F_1 = \{1,2,3,4\}$ fermée.

3 c) Espace d'états fini $\implies$ Il existe au moins une mesure stationnaire dans chaque cas.

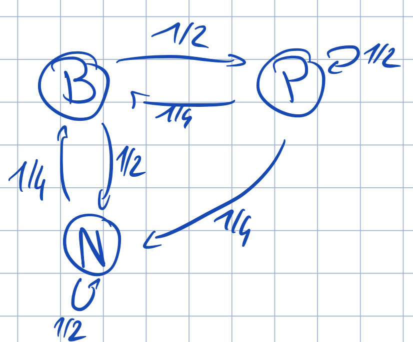
Dans le cas où $p \in]0,1[$, chaîne irréductible $\implies$ unique mesure stationnaire

Dans les cas $p=0$ et $p=1$, il n'y a qu'une seule classe fermée $\implies$ unicité

2) a) $E = \{B, P, N\}$

2 La chaîne de Markov indique la météo d'un jour indépendamment de celle du jour précédent.

Graphe :



$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(2) b) Tous les états communiquent $\Rightarrow$ chaîne irréductible

Comme le nbr d'état est fini, les états sont tous récurrents.

Ils ont donc tous m̃ période égale à 1 (car P $\to$ P ok).

(2) c) Il en existe une unique car irréductible et E fini

$$\pi = (a\ b\ c) \text{ tq } \begin{cases} \pi Q = \pi \\ \pi 1_3 = 1_3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{b}{4} + \frac{c}{4} = a \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{2} + \frac{c}{4} = b \\ \frac{a}{2} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b/4 + c/4 \\ b = a + c/2 \\ c = a + b/2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = b/4 + c/4 \\ b = a + a/2 + b/4 = \frac{3a}{2} + b/4 \\ c = a + b/2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = b/4 + c/4 \\ \frac{3b}{4} = \frac{3a}{2} \Rightarrow b = 2a \\ c = 2a \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi = (a, 2a, 2a)$$

$$\pi 1_3 = 1_3 \Rightarrow a = \frac{1}{5} \qquad \Rightarrow \pi = \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{2}{5}\right).$$

(1) d) $\mathbb{P}(X_{n+2} = B \mid X_n = B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$

(1) e) On considère $X_n \sim \pi$.

$A = \{$Il neige 2 jours de suite sur 3 jours$\}$

$$\mathbb{P}(A) = \sum_{i \in \{B,N,P\}} \mathbb{P}(A \mid X_n = i)\, \pi_i$$

On a donc

$$\mathbb{P}(A \mid X_n = N) = \mathbb{P}(X_{n+1} = N \mid X_n = N) = 1/2$$

$$\mathbb{P}(A \mid X_n = B) = \mathbb{P}(X_{n+2} = N, X_{n+1} = N \mid X_n = B) = 1/4$$

$$\mathbb{P}(A \mid X_n = P) = \mathbb{P}(X_{n+2} = N, X_{n+1} = N \mid X_n = P) = 1/8$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(A) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{5} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{10}$$

2 g) $\mathbb{E}(\tau_B \mid X_0 = B) = \frac{1}{\pi_B} = 5$ par applicat° du résultat du cours.

3) $X_n = X_{n-1} + \xi_n$ avec $\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p$
$\mathbb{P}(\xi_i = -1) = 1-p$ $i \geq 1$
$p \in]0,1[$.

1 a) $\mathbb{E}[X_{n+1} \mid X_n] = \mathbb{E}[X_n + \xi_{n+1} \mid X_n] = X_n + \mathbb{E}[\xi_{n+1}]$

$= X_n + 2p - 1.$

1 b) $\mathbb{P}(X_2 = -2, X_5 = -1 \mid X_0 = 0) = ?$ Revoir

$$\mathbb{P}(X_2 = -2, X_5 = -1 \mid X_0 = 0) = \mathbb{P}(X_5 = -3 \mid X_2 = -2, X_0 = 0)\,\mathbb{P}(X_2 = -2 \mid X_0 = 0)$$

$$= \mathbb{P}(X_5 = -3 \mid X_2 = -2)\,\mathbb{P}(X_2 = -2 \mid X_0 = 0)$$

$$= \binom{3}{2} p^2 q \binom{2}{0} q^2$$

$$= \binom{3}{2} p^2 q^3 = 3p^2q^2$$

1 c) $T_5 = \inf\{n \geq 0, X_n = 5\}$, $\mathbb{P}(T_5 > 5 \mid X_0 = 0) = ?$ Revoir

Conditionnellem^t à $X_0 = 0$, l'év^t $T_5 < 5$ est impossible.
L'év^t $T_5 = 5$ correspond à 5 saut vers le haut consécutif et correspond exactem^t à $X_5 = 5$

Donc, $\mathbb{P}(T_5 > 5 \mid X_0 = 0) = 1 - \mathbb{P}(T_5 \leq 5 \mid X_0 = 0)$

$$= 1 - \mathbb{P}(T_5 = 5 \mid X_0 = 0)$$
$$= 1 - \mathbb{P}(X_5 = 5 \mid X_0 = 0)$$
$$= 1 - p^5.$$