ISFA, Université Claude Bernard - Lyon 1
M2 Actuariat, TD2
Finance Mathématique

Exercice 1 Soit $(r_t, t \geq 0)$ le taux d'intérêt court dans le modèle CIR où

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, r_0 > 0$$

avec a, b et σ des constantes.

1. En écrivant l'équation différentielle ordinaire (EDO) satisfaite par $\mathbb{E}[r_t]$, calculer la moyenne $\mathbb{E}[r_t]$.
2. En applicant la formule d'Itô à r_t^2 et utilisant la méthode similaire que dans l'exercice précédente, calculer la variance $\mathrm{Var}(r_t)$.

Exercice 2 On considère le taux court dans le modèle Vasicek sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{P}^*$ comme

$$dr_t = a(\widehat{b} - r_t)dt + \sigma dW_t^*, r_0 > 0$$

avec $a, \widehat{b}$ et σ des constantes.

1. Ecrire l'équation différentielle partielle (EDP) satisfaite par le prix de l'obligation zéro-coupon $B(t, r, T)$.
2. On cherche $B(t, r, T)$ de la forme $B(t, r, T) = \exp(-A(T-t)r + C(T-t))$ avec A et C des fonctions ne dépendant que de la maturité restante $\theta = T - t$.
   (a) Ecrire les EDOs satisfaite par A et C.
   (b) Résoudre ces équations et retrouver la formule de Vasicek pour le prix d'une OZC.
3. Calculer la volatilité du prix de l'OZC.

Exercice 3 On considère le modèle Ho-Lee pour modéliser le taux forward

$$df(t, T) = \alpha(t, T)dt + \sigma(t, T)dW_t$$

où on fixe la volatilité du taux forward comme une constante

$$\sigma(t, T) = -\sigma.$$

1. En utilisant la relation entre la volatilité et le terme drift du taux forward, écrire l'EDS satisfaite par le taux forward.
2. En déduire le taux court r_t.
3. Calculer le prix $B(t, T)$ d'une obligation zéro-coupon de maturité T.

Exercice 1 : Soit $(r_t)_{t\geq 0}$ le taux d'intérêt court dans modèle CIR

$$dr_t = a(b-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t \qquad r_0>0$$

a, b, σ cts

1) $$r_t = r_0 + \int_0^t a(b-r_s)ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r_s}\,dW_s$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[r_t] = \mathbb{E}\left[r_0 + \int_0^t a(b-r_s)ds + \int_0^t \sigma\sqrt{r_s}\,dW_s\right]$$

$$= r_0 + \int_0^t a(b-\mathbb{E}[r_s])\,ds + 0$$ car les accroissements browniens sont $\perp\!\!\!\perp$

On désigne par $\phi : t \mapsto \mathbb{E}[r_t]$

$$\Rightarrow \phi(t) = r_0 + \underbrace{\int_0^t a(b-\phi(s))ds}_{abt - a\int_0^t \phi(s)\,ds}$$

$$\Rightarrow \phi'(t) = a(b-\phi(t))$$

$$\Rightarrow \phi'(t) + a\phi(t) = ab$$

$$\Rightarrow e^{at}(\phi'(t)+a\phi(t)) = ab\,e^{at}$$

$$\Rightarrow (e^{at}\phi(t))' = ab\,e^{at}$$

$$\Rightarrow e^{at}\phi(t) - \phi(0) = \int_0^t ab\,e^{as}\,ds$$

$$= ab\left[\frac{1}{a}e^{as}\right]_0^t$$

$$= b(e^{at}-1)$$

$$\Rightarrow \phi(t) = r_0 e^{-at} + b(1-e^{-at})$$

$$= b + e^{-at}(r_0-b)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[r_t] = b + e^{-at}(r_0-b)$$

2) $$dr_t^2 = \overset{2x}{2r_t}\,dr_t + \frac{1}{2}\times\overset{2}{2}\,d\langle r\rangle_t$$

Exercice 1 Soit $(r_t, t \geq 0)$ le taux d'intérêt court dans le modèle CIR où

$$dr_t = a(b-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}dW_t, r_0 > 0$$

avec a, b et σ des constantes.

1. En écrivant l'équation différentielle ordinaire (EDO) satisfaite par $\mathbb{E}[r_t]$, calculer la moyenne $\mathbb{E}[r_t]$.
2. En appliquant la formule d'Itô à r_t^2 et utilisant la méthode similaire que dans l'exercice précédente, calculer la variance $\mathrm{Var}(r_t)$.