ISFA Anne Eyraud-Loisel

Processus stochastiques - M1 Actuariat

Correction TD n° 2

MOUVEMENT BROWNIEN, MARTINGALES ET THÉORÈME D'ARRÊT

Exercice 1 : Martingale de Doob

Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. On définit le processus stochastique $(Y_t)_{t\geq 0}$ par $Y_t = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$. Montrez que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X.

Exercice 2 : Martingales du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien issu de 0 et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à B. Montrer que les processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

1. $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
2. $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
3. $(e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le deuxième point revient à dire que le mouvement Brownien a pour variation quadratique $\langle B_t \rangle = t$. Le Théorème de caractérisation de Lévy affirme que la seule martingale continue de variation quadratique t est le mouvement brownien.

Correction exercice 4 : points 1 et 2. vus en cours.
correction point 3.
$Z_t = e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2}$ suit une loi lognormale car B suit une loin normale. Donc Z est intégrable et mesurable par rapport à la filtration naturelle du mouvement Brownien.

$$E(Z_t|\mathcal{F}_s) = e^{(\lambda\frac{t}{2})}E(e^{\lambda(B_t-B_s)}|\mathcal{F}_s)e^{\lambda B_s} = e^{(\lambda\frac{t}{2})}E(e^{\lambda(B_t-B_s)})e^{\lambda B_s}$$

en introduisant l'accroissement du Brownien et par indépendance. Or l'espérance d'une loi lognormale de paramètres m et σ^2 est $e^m e^{\frac{\sigma^2}{2}}$. Et $E(e^{\lambda(B_t-B_s)})$ suit une loi lognormale de paramètres 0 et $\lambda^2(t-s)$ car $\lambda(B_t - B_s)$ suit une loi normale de paramètres 0 et $\lambda^2(t-s)$. Donc :

$$E(Z_t|\mathcal{F}_s) = e^{(\lambda\frac{t}{2})}e^{\lambda B_s}e^{\lambda^2(t-s)} = e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2 s}{2}} = Z_s$$

Donc Z_s est bien une martingale.

Exercice 3 : Propriétés du mouvement Brownien

Soit B un mouvement Brownien, soit $c > 0$ une constante et $s \geq 0$ un nombre réel. Montrer que les processus suivants sont des mouvements Browniens.

1. $(-B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Symétrie),
2. $(B_{t+s}-B_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Propriété de Markov faivle),
3. $(B_1-B_{1-t})_{t\in[0,1]}$ (Retournement temporel),
4. $(cB_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Auto-similarité).

Correction exercice 3 : On doit vérifier à chaque fois la nullité en 0, l'indépendance des accroissements, qu'ils suivents une loi normale centrée de variance $t-s$, et la continuité des trajectoires.

1. $\{Y_t, t\geq 0\} = \{-B_t : t\geq 0\}$
   (a) $Y_0 = -W_0 = 0$
   (b) $Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}} = B_{t_{k-1}} - B_{t_k}$. Or $\forall 0\leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les v.a. $B_{t_1}-B_{t_0}, B_{t_2}-B_{t_1}, ..., B_{t_k}-B_{t_{k-1}}$ sont indépendantes, donc les v.a. $B_{t_0}-B_{t_1}, B_{t_1}-B_{t_2}, ..., B_{t_{k-1}}-B_{t_k}$ sont indépendantes, donc les $Y_{t_1}-Y_{t_0}, Y_{t_2}-Y_{t_1}, ..., Y_{t_k}-Y_{t_{k-1}}$ sont indépendantes.
   (c) $\forall s<t$, on a $Y_t - Y_s = B_s - B_t \sim \mathcal{N}(0, t-s)$.
   (d) $\forall \omega\in\Omega$, $t\mapsto Y_t(\omega) = -B_t(\omega)$ continu par continuité des trajectoires de B.
2. Soit $s>0$, et soit $\{Z_t, t\geq 0\} = \{B_{t+s}-B_s : t\geq 0\}$
   (a) $Z_0 = B_s - B_s = 0$
   (b) $B_{t_k} - B_{t_{k-1}} = (B_{t_k+s}-B_s) - (B_{t_{k-1}+s}-B_s) = B_{t_k+s} - B_{t_{k-1}+s}$ et comme $\forall 0\leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les v.a. $B_{t_1+s}-B_{t_0+s}, B_{t_2+s}-B_{t_1+s}, ..., B_{t_k+s}-B_{t_{k-1}+s}$ sont indépendantes, alors $\forall 0\leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, les v.a. $Z_{t_1}-Z_{t_0}, Z_{t_2}-Z_{t_1}, ..., Z_{t_k}-Z_{t_{k-1}}$ sont aussi indépendantes.
   (c) $\forall u,t\geq 0$ tels que $u<t$, $Z_t - Z_u = B_{t+s} - B_{u+s} \sim \mathcal{N}(0, (t+s)-(u+s)) = \mathcal{N}(0, t-s)$
   (d) les trajectoires $t\mapsto Z_t(\omega) = B_{t+s}-B_s$ sont continues car les trajectoires $t\mapsto B_t(\omega)$ sont continues pour tout t.
   (e) $\{\hat{W}_t^T = B_T - B_{T-t}\}$ sur $[0,T]$
   (a) $\hat{W}_0^T = B_T - B_T = 0$
   (b) $\hat{W}_{t_k}^T - \hat{W}_{t_{k-1}}^T = (B_T - B_{T-t_k}) - (B_T - B_{T-t_{k-1}}) = B_{T-t_{k-1}} - B_{T-t_k}$. Soit $t'_k = T - t_k$. Alors $\forall 0\leq t_0 < t_1 < ... < t_k$, on a $T\leq t'_k < t'_{k-1} < ... < t'0$. Donc $B_{t'_j} - B_{t'_i}$ est ind2pendant de $B_{t'_{j'}} - B_{t'_{i'}}$.
   (c) $u>t$, $\hat{W}_t^T - \hat{W}_u^T = B_{T-t} - B_{T-u} \sim \mathcal{N}(0, (T-t)-(T-u)) = \mathcal{N}(0, u-t)$
   (d) par continuit2 des trajectoires de B, les trajectoires de $\hat{W}$ sont continues aussi.
3. $\{X_t, t\geq 0\} + \{cB_{t/c^2} : t\geq 0\}$
   (a) $X_0 = cB_0 = 0$
   (b) $X_{t_k} - X_{t_{k-1}} = cB_{t_k/c^2} - cB_{t_{k-1}/c^2}$. Les v.a. $B_{t_k/c^2} - B_{t_{k-1}/c^2}$ sont indépendantes donc les $X_{t_k} - X_{t_{k-1}}$ aussi.

(c) Comme B suit une loi normale, $\forall s < t$, $X_t - X_s = cB_{t/c^2} - cB_{s/c^2}$ est de disrtibution normale d'espérance $E(X_t - X_s) = cE(B_{t/c^2} - B_{s/c^2}) = 0$ et de variance $Var(X_t - X_s) = c^2Var(B_{t/c^2} - B_{s/c^2}) = c^2(t/c^2 - s/c^2) = t - s$.

(d) $t \mapsto B_{t/c^2}$ continue donc $t \mapsto cB_{t/c^2}$ continue.

Exercice 4 : un petit contre-exemple

Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Le processus $X_t = (\sqrt{t}Z)_{t\geq 0}$ est-il un mouvement Brownien ?

Correction exercice 4 : NON, le processus X_t n'est pas un mouvement brownien. En effet, même si $X_t \sim \mathcal{N}(0,t)$ puisque $X_t = \sqrt{t}Z$, on a $X_t - X_s = (\sqrt{t} - \sqrt{s})Z \sim \mathcal{N}(0, (\sqrt{t} - \sqrt{s})^2)$ et $(\sqrt{t} - \sqrt{s}) \neq t - s$. De plus, on peut également remarquer que les accroissements ne sont pas indépendants : $X_t - X_s = (\sqrt{t} - \sqrt{s})Z$ n'est pas indépendant de $X_s = \sqrt{s}Z$...

Exercice 5 : Somme de deux mouvements Browniens indépendants.

Soient B^1 et B^2 deux mouvements Browniens indépendants et soit $\rho \in]0,1[$ une constante.

1. Montrez que $(\rho B^1_t + \sqrt{1-\rho^2}B^2_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est aussi un mouvement Brownien.
2. En déduire que B^1B^2 est une martingale.
   Indication : Que peut-on dire du processus $\left(\left(\frac{B^1_t + B^2_t}{\sqrt{2}}\right)^2 - t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$?

Correction exercice 5 :

1. Il s'agit d'un processus Gaussien car pour tout $0 \leq t_1 \leq \cdots t_n$ et $(a_1, \cdots, a_n) \in \mathbb{R}^n$
$$\sum_{i=1}^n a_i(\rho B^1_{t_i} + \sqrt{1-\rho^2}B^2_{t_i}) = \sum_{i=1}^n a_i\rho B^1_{t_i} + \sum_{i=1}^n a_i\sqrt{1-\rho^2}B^2_{t_i},$$
où chaque terme de la somme est une variable aléatoire Gaussienne car B^1 et B^2 sont des processus Gaussiens. Par ailleurs, ces deux termes sont des v.a indépendantes car B^1 et B^2 sont indépendants. Or la somme de deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes est une variable aléatoire gaussienne (de moyenne la somme des moyennes et de variance la somme des variances). On en déduit que $\sum_{i=1}^n a_i(\rho B^1_{t_i} + \sqrt{1-\rho^2}B^2_{t_i})$ est une v.a gaussienne.
Le processus est évidemment centré.
Enfin,
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}\left(\rho B^1_s + \sqrt{1-\rho^2}B^2_s, \rho B^1_t + \sqrt{1-\rho^2}B^2_t\right)\\
&= \rho^2\mathrm{Cov}\left(B^1_s, B^1_t\right) + \sqrt{1-\rho^2}^2\mathrm{Cov}\left(B^2_s, B^2_t\right) + 0 + 0 \quad \text{car } B^1 \text{ et } B^2 \text{ sont indépendants}\\
&= \rho^2(s\wedge t) + (1-\rho^2)(s\wedge t)\\
&= s\wedge t.
\end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Le processus } (\rho B_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} B_t^2)_{t\in\mathbb{R}_+} \text{ est un mouvement Brownien.}}$$

2. On sait que la variation quadratique du mouvement Brownien au temps t est t (c.f Exo 3, question 2). Comme, $\frac{B_t^1+B_t^2}{\sqrt{2}}$ est un mouvement brownien d'après la question 1 avec $\rho = 1/\sqrt{2}$, on en déduit que $\left(\left(\frac{B_t^1+B_t^2}{\sqrt{2}}\right)^2 - t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$, $\left((B_t^1)^2 - t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et $\left((B_t^2)^2 - t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$ sont des martingales. Or,

$$\begin{aligned} B_t^1 B_t^2 &= \left(\frac{B_t^1 + B_t^2}{\sqrt{2}}\right)^2 - \frac{1}{2}(B_t^1)^2 - \frac{1}{2}(B_t^2)^2 \\ &= \left(\left(\frac{B_t^1 + B_t^2}{\sqrt{2}}\right)^2 - t\right) - \frac{1}{2}\left((B_t^1)^2 - t\right) - \frac{1}{2}\left((B_t^2)^2 - t\right) \end{aligned}$$

qui est une combinaison linéaire de martingales donc est une martingale.

$$\boxed{B^1 B^2 \text{ est une martingale}}$$

<u>Exercice 6</u> : La ruine du joueur (version continue).

Soit B un mouvement brownien et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < 0 < b$. On définit :

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | B_t = a \text{ ou } B_t = b\}.$$

1. Justifier que τ est un temps d'arrêt.
2. En appliquant le théorème d'arrêt, montrer que
   (a) $P(B_\tau = a) = \frac{b}{b-a}$
   (b) $\mathbb{E}(\tau) = |ab|$
3. Si on remplace B par $Z = \sigma B$, un processus de Wiener de volatilité σ, que devient ce résultat ?

<u>Correction exercice 6</u> : Prouvons tout d'abord le résultat pour B mouvement brownien standard.
Montrons d'abord que $E(\tau)$ est finie.
D'après la propriété du cours, $X_t = B_t^2 - t$ est une martingale. Donc d'après un exercice antérieur, $X_t^{\tau^*}$ le processus arrêté par $\tau^* = \tau \wedge s$ avec $s \in \mathbb{R}_+$ est encore une martingale.
Donc son espérance est constante : $E(X_t^{\tau^*}) = E(X_0^{\tau^*}) = 0$.
De plus, τ^* est un temps d'arrêt borné ($\leq s$). D'où en applicant le théorème d'arrêt de Doob à cette martingale, et au temps d'arrêt $t \wedge \tau^*$, on a

$$E(B_{t\wedge\tau^*}) = E(t \wedge \tau^*)$$

Or $\forall t' = t \wedge \tau^* = t \wedge \tau \wedge s$, $a \leq B_{t'} \leq b$, car B est entre a et b avant τ. D'où $|B_{t'}| \leq b + |a| = b - a$. Soit $B_{t'}^2 \leq (b-a)^2$.

Donc $E(t \wedge \tau^*) \leq (b-a)^2$, $\forall s,\ \forall t$.
Or $E(\tau) = \lim_{s \to +\infty} E(\tau *) = \lim_{s,t \to +\infty} E(t \wedge \tau^*) \leq (b-a)^2$.
Donc τ est un temps d'arrËt d'espérance finie, donc presque sûrement fini.
Quitte à borner τ par $\tau \wedge t$, et à appliquer le théorème de convergence dominée, on peut appliquer le théorème d'arrêt de Doob et on obtient :

$$E(B_\tau) = E(B_0) = 0 = aP(B_\tau = a) + b(1 - P(B_\tau = a))$$

D'où

$$P(B_\tau = a) = \frac{b}{b-a}$$

De même, on trouve

$$E(X_t^\tau) = 0 = E(B_\tau^2 - \tau)$$

D'où

$$E(\tau) = E(B_\tau^2) = a^2 \left(\frac{b}{b-a}\right) + b^2 \left(\frac{-a}{b-a}\right) = -ab$$

Pour $Z_t = \sigma B_t$, on en déduit le résultat cherché.

$$P(Z_t = a) = P(W_t = a/\sigma) = \frac{b/\sigma}{b/\sigma - a/\sigma} = \frac{b}{b-a}$$

et $E(\sigma^2 \tau) = E(Z_\tau^2) = -ab$ donc

$$E(\tau) = \frac{-ab}{\sigma^2}$$

Exercice 7 : Des inégalités de Doob.

1. En utilisant le théorème d'arrêt pour les sous-martingales, montrez que si $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ et si $(M_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ est continue et positive, alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq s \leq t} M_s \geq \lambda\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[M_t\right]}{\lambda}.$$

2. En déduire que si $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ une martingale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0 \leq s \leq t} |N_s| \geq \lambda\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[N_t^2\right]}{\lambda^2}.$$

   Comparer ce résultat avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

<u>Correction exercice 7</u> :

1. Introduisons la variable aléatoire suivante :

$$T = \inf\{t \geq 0,\ M_t \geq \lambda\}.$$

Il s'agit bien d'un temps d'arrêt car c'est un temps d'atteinte et car le processus $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue. Ce temps d'arrêt a été choisi pour que

$$\sup_{s\in[0,t]} M_s \geq \lambda \iff T \leq t.$$

Appliquons alors le théorème d'arrêt pour les sous-martingales aux temps d'arrêts <u>bornés</u> $T \wedge t$ et t (on a bien que $T \wedge t \leq t$) :

$$\mathbb{E}[M_t \,\big|\, \mathcal{F}_{T\wedge t}] \geq M_{T\wedge t},$$

et donc en passant à l'espérance :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[M_t] \geq \mathbb{E}[\mathbb{E}[M_t \,\big|\, \mathcal{F}_{T\wedge t}]] &= \mathbb{E}[M_{T\wedge t}] \\
&= \mathbb{E}[M_T \mathbf{1}_{T\leq t}] + \mathbb{E}[M_t \mathbf{1}_{T>t}] \\
&= \mathbb{E}[\lambda \mathbf{1}_{T\leq t}] + \mathbb{E}[M_t \mathbf{1}_{T>t}],\ (\text{car } M_T = \lambda \text{ par continuité}) \\
&\geq \lambda \mathbb{P}(T \leq t),\ \ (\text{car } M_t \geq 0) \\
&= \lambda \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} M_s \geq \lambda).
\end{aligned}$$

On obtient l'inégalité voulue :

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} M_s \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[M_t]}{\lambda}.$$

2. Par l'inégalité de Jensen, si $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale continue, alors $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+} = (N_t^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale continue et positive. On peut donc appliquer le résultat de l'inégalité précédente à un $\lambda' = \lambda^2$:

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} N_s^2 \geq \lambda^2) \leq \frac{\mathbb{E}[N_t^2]}{\lambda^2},$$

et donc

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} |N_s| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[N_t^2]}{\lambda^2}.$$

Avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebitchev, nous aurions obtenu l'inégalité

$$\mathbb{P}(|N_t| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[N_t^2]}{\lambda^2},$$

qui ne donne un contrôle que sur la valeur terminale N_t et non pas sur le sup des valeurs de N_s sur l'ensemble de l'intervalle $[0,t]$. L'hypothèse que $(N_t^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale est ici crucial.

Remarque : Dans le cours, vous avez vu une inégalité de Doob qui se généralise pour tout espace L^p avec $p > 1$:

$$\mathbb{E}[\sup_{s\in[0,t]} |N_s|^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|N_t|^p],$$

qui implique, par l'inégalité de Markov, que :

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} |N_s| \geq \lambda) \leq \frac{\mathbb{E}[\sup_{s\in[0,t]} |N_s|^p]}{\lambda^p} \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \frac{\mathbb{E}[|N_t|^p]}{\lambda^p}.$$

<u>Exercice 8</u> : Temps d'atteinte du mouvement Brownien.

Soit $a > 0$, $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien et soit $T_a := \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}$ le premier temps d'atteinte du point a par un mouvement Brownien.

1. En utilisant une des martingales du mouvement Brownien , montrer que sa transformée de Laplace est égale à :

$$\mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\right] = \mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\mathbf{1}_{T_a<+\infty}\right] = e^{-\sqrt{2\lambda}a},$$

pour tout $\lambda > 0$.

2. En déduire que $\mathbb{P}\left(T_a < +\infty\right) = 1$ et que $\mathbb{E}\left[T_a\right] = +\infty$.

<u>Correction exercice 8</u> :

1. On utilise le fait que pour tout $\lambda > 0$, le processus stochastique $\left(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}\right)_{t\geq 0}$ est une martingale.

Par ailleurs, T_a est un temps d'arrêt car $\{T_a \geq t\} = \{\sup\{B_s,\ s \in [0,t]\} \geq a\} \in \mathcal{F}_t$.

On peut donc appliquer le **théorème d'arrêt** aux temps d'arrêts bornés $0 \leq t \wedge T_a$.

On obtient l'égalité :

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}t\wedge T_a} \,\middle|\, \mathcal{F}_0\right] = 1,$$

puis en prenant l'espérance

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}t\wedge T_a}\right] = 1.$$

Nous voulons maintenant réaliser la limite $t \to +\infty$. Pour cela, on va utiliser le **théorème de convergence dominée**. D'une part, on a la convergence presque sûre :

$$\begin{aligned} e^{\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}t\wedge T_a} &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbf{1}_{T_a<+\infty} e^{\lambda B_{T_a} - \frac{\lambda^2}{2}T_a} \\ &= \mathbf{1}_{T_a<+\infty} e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}T_a} \qquad \text{(car } B_{T_a} = a \text{ par continuité du mouvement Brownien).} \end{aligned}$$

D'autre part, on a la domination suivante :

$$e^{\lambda B_{t\wedge T_a} - \frac{\lambda^2}{2}t\wedge T_a} \leq e^{\lambda a}, \qquad \text{(car } B_{t\wedge T_a} \leq a\text{)}$$

qui est bien intégrable comme variable aléatoire constante. On en déduit par le théorème de convergence dominée que :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[e^{\lambda B_{t\wedge T_a}-\frac{\lambda^2}{2}t\wedge T_a}\right] &\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a<+\infty}e^{\lambda a-\frac{\lambda^2}{2}T_a}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[e^{\lambda a-\frac{\lambda^2}{2}T_a}\right].\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda a-\frac{\lambda^2}{2}T_a}\right]=1,$$

puis

$$\mathbb{E}\left[e^{-\frac{\lambda^2}{2}T_a}\right]=e^{-\lambda a}.$$

Posons, $\lambda'=\frac{\lambda^2}{2}$, on obtient $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda' T_a}\right]=e^{-\sqrt{2\lambda'}a}$. On a montré que :

$$\boxed{\forall\lambda>0,\ \mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right]=e^{-\sqrt{2\lambda}a}.}$$

2. On a que $\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right]=\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a<\infty}e^{-\lambda T_a}\right]$. De plus,

$$\mathbf{1}_{T_a<\infty}e^{-\lambda T_a}\underset{\lambda\to0}{\longrightarrow}\mathbf{1}_{T_a<\infty},$$

et on a la domination $\mathbf{1}_{T_a<\infty}e^{-\lambda T_a}\le 1$ donc par le **théorème de convergence dominée**,

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right]=\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a<\infty}e^{-\lambda T_a}\right]\underset{\lambda\to0}{\longrightarrow}\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{T_a<\infty}\right]=\mathbb{P}\left[T_a<\infty\right].$$

D'où,

$$\boxed{\mathbb{P}\left[T_a<\infty\right]=\lim_{\lambda\to0}e^{-\sqrt{2\lambda}a}=1.}$$

Ensuite, pour tout $\lambda>0$, on a par le **théorème de dérivation sous l'intégrale** que :

$$\frac{d\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right]}{d\lambda}=\mathbb{E}\left[-T_ae^{-\lambda T_a}\right].$$

Or, par théorème de convergence monotone :

$$\mathbb{E}\left[T_a\right]=\lim_{\lambda\to0}\mathbb{E}\left[T_ae^{-\lambda T_a}\right].$$

On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[T_a\right]&=\lim_{\lambda\to0}\mathbb{E}\left[T_ae^{-\lambda T_a}\right]\\ &=\lim_{\lambda\to0}-\frac{d\mathbb{E}\left[e^{-\lambda T_a}\right]}{d\lambda}\\ &=\lim_{\lambda\to0}-\frac{d}{d\lambda}\left(e^{-\sqrt{2\lambda}a}\right)\\ &=\lim_{\lambda\to0}\frac{a}{\sqrt{2\lambda}}e^{-\sqrt{2\lambda}a}\\ &=+\infty.\end{aligned}$$

En conclusion,

$$\boxed{\mathbb{E}\left[T_a\right] = +\infty.}$$

Exercice 9 : Le pont Brownien.

Soit B un mouvement Brownien. On considère le processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini pour tout $t \in [0,1]$ par $X_t = B_t - tB_1$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un processus Gaussien.
2. Calculer sa fonction espérance ainsi que sa fonction de covariance.
3. En quel temps t la variance de X_t est-elle maximale ?
4. Est-ce $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale ?

Remarque : Ce processus stochastique s'appelle un Pont Brownien. Il s'agit d'un mouvement Brownien conditionné à revenir en 0 au temps 1 (voir Figure 1).

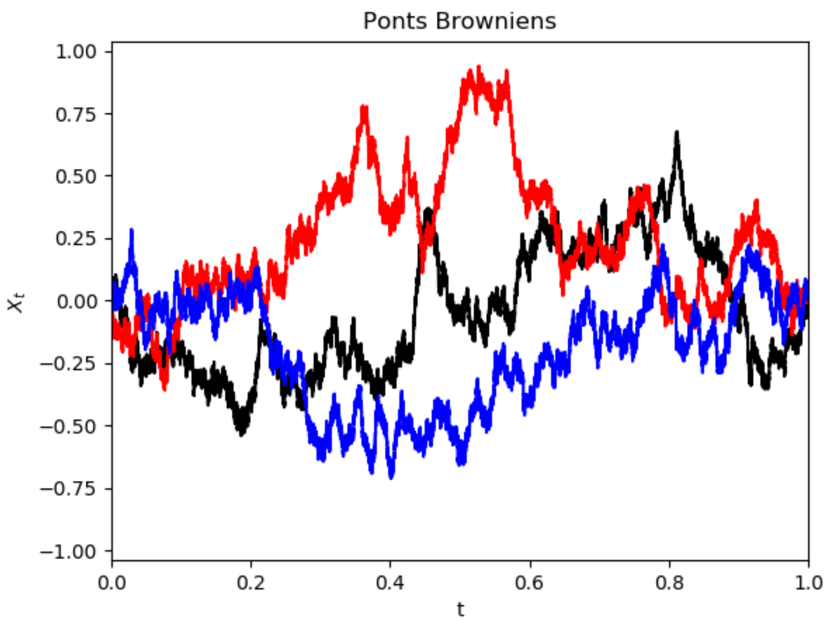

FIGURE 1 – Trois réalisations de ponts Browniens.

Correction exercice 9 :

1. Prenons une suite quelconque de temps croissants $0 \leq t_1 \leq ... \leq t_n \leq 1$ et un ensemble de n réels $a_1, ..., a_n$. Montrons que $\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i}$ est une variable aléatoire Gaussienne. On a que :
$$\sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i B_{t_i} + (\sum_{i=1}^{n} -a_i t_i) B_1,$$
est de la forme
$$\sum_{i=1}^{m} a_i' B_{t_i'}.$$

Comme $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus Gaussien, il s'agit donc d'une variable aléatoire Gaussienne.

On en conclut que $(X_t)_{t\in[0,1]}$ est une processus Gaussien.

2. Pour tout $t \in [0,1]$, $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[B_t] - t\mathbb{E}[B_1] = 0$, donc il s'agit d'un processus Gaussien centré.

   Pour tout $0 \leq s \leq t \leq 1$, on a que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_s X_t] &= \mathbb{E}[B_s B_t] - s\mathbb{E}[B_1 B_t] - t\mathbb{E}[B_s B_1] + st\mathbb{E}\left[B_1^2\right] \\ &= s - st - ts + st \\ &= s(1-t).\end{aligned}$$

   Donc $\mathrm{Cov}(X_s, X_t) = s(1-t)$, $\forall 0 \leq s \leq t \leq 1$.

3. D'après la question précédente, on a que :

$$\mathbb{V}(X_t) = \mathrm{Cov}(X_t, X_t) = t(1-t),$$

   qui est donc maximale en $t = 1/2$ et qui vaut $\mathbb{V}(1/2) = 1/4$.

4. Même si l'espérance est identiquement nulle, il ne s'agit pas d'une martingale car par exemple :

$$\mathbb{E}\left[X_1 \,\middle|\, \mathcal{F}_{1/2}\right] = \mathbb{E}\left[0 \,\middle|\, \mathcal{F}_{1/2}\right] = 0,$$

   alors que $X_{1/2}$ est une variable aléatoire Gaussienne centré de variance $1/4$ donc n'est pas identiquement nulle.