

TD 3

## EVALUATION DES BONS DE SOUSCRIPTION D'OBLIGATIONS CONVERTIBLES (BSOC)

Une entreprise financée jusqu'à ce jour ( $t_0$ ) uniquement par  $N$  actions ( $V = NS$ ) émet  $n$  bons d'OC au prix  $W$  par bon.

Chaque bon permet de souscrire, pendant une durée  $\tau_1$ ,  $\gamma$  obligations convertibles en échange d'un prix d'exercice égal à  $E$  par obligation souscrite.

Le produit de l'émission des bons, après constitution d'une réserve de trésorerie  $D_1$  destinée au règlement des dividendes pendant la durée de vie des bons, est immédiatement investi dans des actifs risqués assimilables à ceux de la firme existants avant l'émission.

On pose :  $\hat{V} = V - D_1 + nW$ .

En cas d'exercice des bons à  $t_1$ , date d'échéance des bons, une seconde réserve de trésorerie,  $T_2$ , est constituée par prélèvement sur le produit de l'émission des convertibles.  $T_2$  est destinée au règlement des dividendes ( $D_2$ ) et des coupons ( $I$ ) de  $t_1$  jusqu'en  $t_2$ , date d'échéance des obligations :  $T_2 = D_2 + I$ .

On pose :  $\hat{V}' = \hat{V}_1 - T_2 + n\gamma E$ .

Le reste du produit de l'émission des convertibles est investi dans des actifs risqués assimilables à ceux de la firme existants avant l'émission.

$V, \hat{V}, \hat{V}'$  suivent le même mouvement brownien géométrique caractérisé par une volatilité  $\sigma_{\hat{V}}$ .

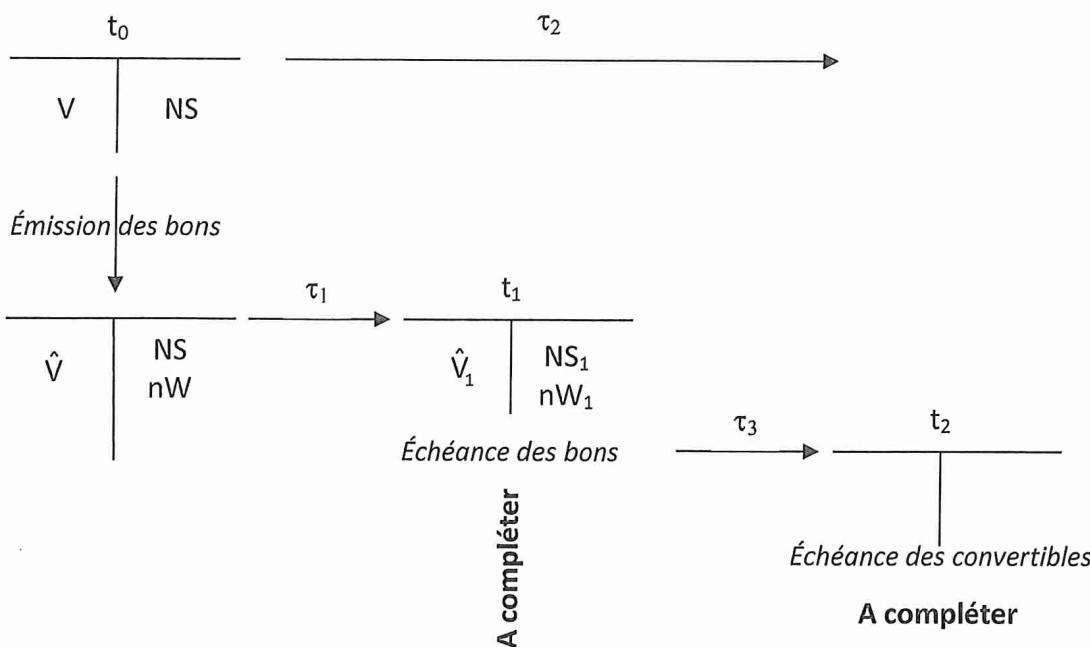
Les obligations convertibles arrivent à échéance en  $t_2$ .

On pose :  $\tau_3 = t_2 - t_1$  et  $\tau_2 = t_2 - t_0$ .

En cas de non conversion en  $t_2$ , les obligations sont remboursables au prix  $K$  par obligation.

Chaque obligation peut être convertie en  $\omega$  actions.

### 1) Compléter le schéma d'évolution suivant :



2) En détaillant votre raisonnement, montrez que

$$NS_1 = C(\hat{V}_1, \tau_3, n\gamma K) - \frac{n\gamma\omega}{N+n\gamma\omega} C\left[\hat{V}_1, \tau_3, \frac{(N+n\gamma\omega)K}{\omega}\right] + D_2 = C_1 - \frac{n\gamma\omega}{N+n\gamma\omega} C_2 + D_2$$

En déduire l'expression de  $n\gamma Q_1$ , valeur des obligations convertibles en  $t_1$  en cas d'exercice des bons.

3) Etablissez le tableau des valeurs en  $t_1$  des actions et des bons :

|         | En $t_0$ | Valeur en $t_1$                                    |   |
|---------|----------|--|---|
|         |          | Condition d'abandon des bons<br><i>A compléter</i> | Condition d'exercice des bons<br><i>A compléter</i> |
| Actions | NS       | $\hat{V}_1$  | $A$ compléter                                       |
| Bons    | $nW$     | 0  | $A$ compléter                                       |

4) Application numérique (les calculs seront arrondis à l'euro) :

$$\hat{V} = 100 000 \text{ €}$$

$$\sigma_{\hat{V}} = 0,30 \text{ en base annuelle}$$

$$N = 1 000$$

$$\begin{cases} n=1000 \\ \gamma=0,3 \end{cases} \Rightarrow n\gamma = 300$$

$$E = 95 \text{ €}$$

$$\begin{cases} \tau_1 = 2 \text{ ans} \\ \tau_3 = 2 \text{ ans} \end{cases} \Rightarrow \tau_2 = 4 \text{ ans}$$

$$K = 100 \text{ €}$$

$$\omega = 1$$

$$r = 10\% \text{ en taux annuel continu constant}$$

L'émission a lieu un 1<sup>er</sup> janvier.

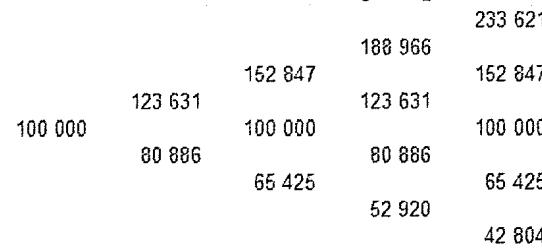
Les obligations rapportent un coupon annuel de 4 € le 1<sup>er</sup> janvier.

Tous les ans, début juin, les actions reçoivent un dividende dont le montant actualisé est équivalent à 2 € le 1<sup>er</sup> janvier qui précède la distribution. Le diagramme des flux de coupons et de dividendes est donc le suivant :

|            | 1 <sup>er</sup> janvier ( $t_0$ ) | 1 <sup>er</sup> janvier | 1 <sup>er</sup> janvier ( $t_1$ ) | 1 <sup>er</sup> janvier   | 1 <sup>er</sup> janvier ( $t_2$ ) |
|------------|-----------------------------------|-------------------------|-----------------------------------|---------------------------|-----------------------------------|
| Dividendes | 2                                 | 2                       | 2                                 | 2                         | 2                                 |
|            | Pris en compte pour $D_1$         |                         |                                   | Pris en compte pour $D_2$ |                                   |
| Coupons    |                                   |                         |                                   | 4                         | 4                                 |

a) Calculez  $D_1$ ,  $D_2$  et  $I$ . (indication :  $T_2 = 7 515 \text{ €}$ )

Avec un pas semestriel, l'arbre d'évolution de  $\hat{V}$  entre  $t_0$  et  $t_1$  est le suivant :



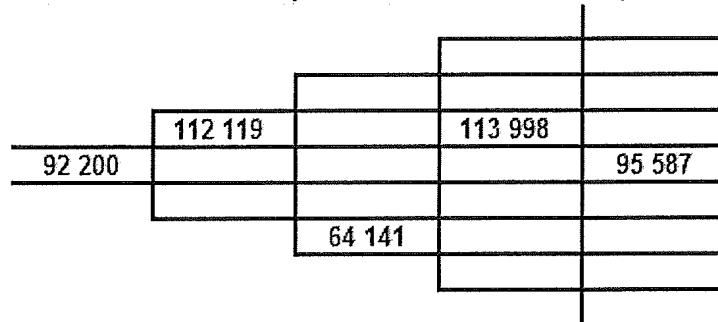
b) Précisez les paramètres  $u$  et  $d$  permettant d'établir l'arbre précédent.

On donne en plus le tableau de valeurs suivant, dans lequel les valeurs des options d'achat sont obtenues à partir de la formule de Black & Scholes :

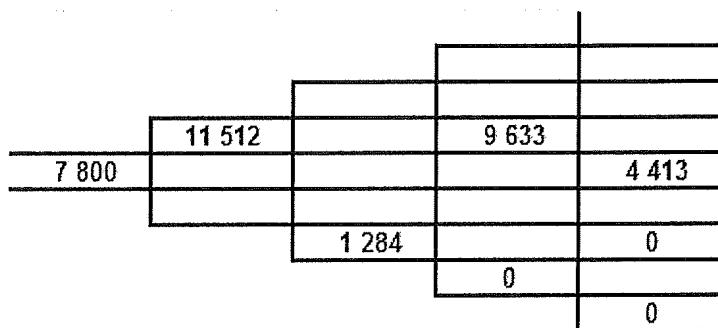
| $\hat{V}_1$ | $\hat{V}'_1$ | $C_1 = C(\hat{V}_1, \tau_3, n\gamma K)$ | $C_2 = C\left[\hat{V}_1, \tau_3, \frac{(N+n\gamma\omega)K}{\omega}\right]$ | Exercice  | $C_1 - \frac{n\gamma\omega}{N+n\gamma\omega} C_2$ |
|-------------|--------------|---|--|-----------|---|
| 233 621     | 254 605      | 230 043                                 | 148 671  | OUI/NON ? | 195 734   |
| 152 847     | 173 831      | 149 269                                 | 70 883   | OUI/NON ? | 132 912   |
| 100 000     | 120 985      | 96 423                                  | 27 228   | OUI/NON ? | 90 140  |
| 65 425      | 86 410       | 61 856                                  | 8 065  | OUI/NON ? | 59 995  |
| 42 804      | 63 789       | 39 297                                  | 1 905  | OUI/NON ? | 38 857  |

c) Justifiez vos réponses quant à l'exercice ou non des bons.

d) A l'aide de schémas binomiaux à pas semestriel, montrez que  $NS = 96\ 010$  et  $nW = 7\ 800$ .



$$NS = \boxed{96\ 010}$$



$$nW = \boxed{7\ 800}$$

Vous préciserez les paramètres  $p$  et  $\hat{r}$  nécessaires à la construction de ces arbres.

e) Quel est le taux actuariel des obligations convertibles en cas de non conversion ?