ISFA 2° année
Processus Stochastiques
Examen du 7 janvier 2016

Durée : 2 heures

Aucun document autorisé - calculatrices interdites

Les 3 exercices sont indépendants et peuvent être traités séparément

Exercice 1

Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien standard.

1. Écrire les processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(U_t)_{t\geq 0}$ donnés ci-dessous comme processus d'Itô, c'est-à-dire sous la forme :
$$\int_0^t \mu(s, B_s)ds + \int_0^t \sigma(s, B_s)dB_s$$
en précisant leur drift μ et leur terme de diffusion σ
   (a)
$$X_t = \exp(t + B_t)$$
   (b)
$$U_t = B_t^3 - 3tB_t$$
2. Trouver la solution de l'EDS suivante :
$$dY_t = a(b(t) - Y_t)dt + \sigma dB_t$$
On pourra appliquer la formule d'Itô au processus $Z_t = e^{at}Y_t$.
3. Donner une EDS satisfaite par le processus suivant :
$$W_t = \frac{B_t}{1+t}$$

Exercice 2 Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ le processus continu solution de

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t, \quad \text{avec } X_0 = x$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard, μ et σ sont des constantes.

1. En utilisant la formule d'Itô au processus $Y_t = e^{-\mu t}X_t$, calculer X_t.
2. Répondez aux questions suivantes en justifiant vos réponses :
   (a) Est-ce que X_t est une martingale ? √
   (b) Est-ce que X_t est de carré intégrable ?
   (c) Est-ce que X_t est un processus d'Itô ? Si oui déduire $\langle X\rangle_t$. ✓
   (d) Est-ce que X_t est un processus gaussien ? Si oui donner $E(X_t)$ et $Cov(X_t, X_s)$.
3. Calculer $E(X_t \mid \mathcal{F}_s)$ et $Var(X_t \mid \mathcal{F}_s)$ pour tout $t > s$.
4. Montrer que X_t converge en loi vers une variable X_∞ lorsque t tend vers l'infini. Spécifier la loi de X_∞.

5. Soit ϕ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$. Ecrire la formule d'Itô pour $Z_t = \phi(X_t)$. En déduire que si $\phi(z) = \int_0^z \exp(-\mu \frac{y^2}{\sigma^2}) dy$, alors

$$Z_t = \sigma \int_0^t \exp(-\mu \frac{X_s^2}{\sigma^2}) dB_s + \phi(x)$$

6. Z est-elle une martingale de carré intégrable ?

Exercice 3 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien défini sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ où $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est la filtration naturelle du mouvement brownien. Soit $(\mu_t)_{t\geq 0}$ un processus continu, borné et $\mathcal{F}_t$-adapté.

1. Vérifier que le processus M défini par

$$M_t := \exp\left(\int_0^t \mu_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu_s^2 ds\right)$$

pour $t \in \mathbb{R}_+$ est une $\mathbb{P}$-martingale.

2. Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité définie sur $\mathcal{F}_T$, $t \leq T$ par $d\mathbb{Q}$=$M_T d\mathbb{P}$. Donner un nouveau mouvement brownien sous la probabilité $\mathbb{Q}$.
3. Soit $(\phi_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté, continu et borné. On pose $L_t = \int_0^t \phi_s dB_s - \int_0^t \phi_s \mu_s ds$. Montrer que L est une $\mathbb{Q}$-martingale.
4. On considère $Z_t = M_t L_t$, calculer dZ_t et montrer que Z_t est une $\mathbb{P}$-martingale

Exercice 1

Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien standard.

1. Écrire les processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(U_t)_{t\geq 0}$ donnés ci-dessous comme processus d'Itô, c'est-à-dire sous la forme :
$$\int_0^t \mu(s, B_s)ds + \int_0^t \sigma(s, B_s)dB_s$$
en précisant leur drift μ et leur terme de diffusion σ
   (a)
$$X_t = \exp(t + B_t)$$
   (b)
$$U_t = B_t^3 - 3tB_t$$
2. Trouver la solution de l'EDS suivante :
$$dY_t = a(b(t) - Y_t)dt + \sigma dB_t$$
On pourra appliquer la formule d'Itô au processus $Z_t = e^{at}Y_t$.
3. Donner une EDS satisfaite par le processus suivant :
$$W_t = \frac{B_t}{1+t}$$

Exercice 1 :

1) a) $X_t = \exp(t + B_t) = f(t, B_t)$ $\quad f:(x,t) = \exp(t+x)$

On applique la 2e formule d'Itô à $f:(x,t) \mapsto \exp(t+x)$ qui est C^1 p/r à t et C^2 p/r à x

avec $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{t+x}$ $\qquad \dfrac{\partial f}{\partial t} = e^{t+x}$

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^{t+x}$

Avec la formule d'Itô on a
$$X_t = X_0 + \int_0^t e^{s+B_s} dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t e^{s+B_s} d\langle B\rangle_s + \int_0^t e^{s+B_s} ds$$
$$= 1 + \frac{3}{2}\int_0^t e^{s+B_s} ds + \int_0^t e^{s+B_s} dB_s$$

Donc
$$X_t = \int_0^t \underbrace{\left(\frac{1}{t} + \frac{3}{2} e^{s+B_s}\right)}_{\mu(s,B_s)} ds + \int_0^t \underbrace{e^{s+B_s}}_{\sigma(s,B_s)} dB_s$$

b) $U_t = B_t^3 - 3tB_t = f(t, B_t)$ où $f : (x,t) \mapsto x^3 - 3tx$

On applique la 2e formule d'Itô à U_t avec f qui est bien C^1 p/r à t et C^2 p/r à x

Avec $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3t$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$

$\frac{\partial f}{\partial t} = -3x$

Avec la formule d'Itô on a

$$U_t = U_0 + \int_0^t (3B_s^2 - 3s)\,dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t 6B_s\,d\langle B_s\rangle + \int_0^t -3B_s\,ds$$

$$= \int_0^t (3B_s^2 - 3s)\,dB_s$$

Donc $U_t = \int_0^t \underbrace{(3B_s^2 - 3s)}_{\sigma(s,B_s)}\,dB_s$ $\quad \mu(s, B_s) = 0.$

2) $dY_t = a(b(t) - Y_t)\,dt + \sigma\,dB_t$

$Z_t = e^{at} Y_t$

On applique la 2e formule d'Itô avec $f : (x,t) \mapsto e^{at}x$ qui est bien C^1 p/r à t et C^2 p/r à x

Avec $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{at}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial t} = axe^{at}$

Donc la formule d'Itô nous donne,

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t e^{as}\,dY_s + \frac{1}{2}\int_0^t 0\,d\langle Y\rangle_s + \int_0^t aY_s e^{as}\,ds$$

$$\Rightarrow Z_t = Y_0 + \int_0^t e^{as}\left[(a(b(s)-Y_s)ds + \sigma dB_s\right] + \int_0^t a e^{as} Y_s \, ds$$

$$= Y_0 + \int_0^t a b(s) e^{as} Y_s \, ds + \int_0^t \sigma e^{as} dB_s$$

Or $Z_t = e^{at} Y_t$

$$\Rightarrow Y_t = Y_0 e^{-at} + \int_0^t a b(s) e^{a(s-t)} Y_s \, ds + \int_0^t \sigma e^{a(s-t)} dB_s$$

3) $W_t = \dfrac{B_t}{1+t} = f(t, B_t)$ avec $f : (x,t) \mapsto \dfrac{x}{1+t}$

qui est bien C^1 p/r à t et C^2 p/r à x

avec $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{1}{1+t}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial t} = -\dfrac{x}{(1+t)^2}$

On obtient avec la formule d'Itô,

$$dW_t = \frac{1}{1+t} dB_t - \frac{B_t}{(1+t)^2} dt$$

Exercice 2 : $dX_r = \mu X_r dr + \sigma dB_r$ avec $X_0 = x$.

1) Soit $Y_r = e^{-\mu r} X_r$

On applique la 2e formule d'Itô avec $f : (x,r) \mapsto e^{-\mu r} x$ qui est bien C^1 p/r à r et C^2 p/r à x

avec $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-\mu r}$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x^2} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial r} = -\mu x e^{-\mu r}$

On obtient :

$$dY_r = e^{-\mu r} dX_r - \mu X_r e^{-\mu r} dr$$
$$= e^{-\mu r}(\mu X_r dr + \sigma dB_r) - \mu X_r e^{-\mu r} dr$$
$$= \sigma e^{-\mu r} dB_r$$

Or $Y_r = e^{-\mu r} X_r \Rightarrow X_r = e^{\mu r} Y_r$

$\Rightarrow Y_r - Y_0 = \int_0^r \sigma e^{-\mu s} dB_s \quad \Rightarrow Y_r = Y_0 + \int_0^r \sigma e^{-\mu s} dB_s \quad Y_0 = x$

$\Rightarrow X_r = x e^{\mu r} + \int_0^r \sigma e^{-\mu(s-r)} dB_s$

2) a) Non car l'espérance de X_r n'est pas constante, en effet $\mathbb{E}[X_r] = x e^{\mu r} \neq 0$ a priori

b) $\mathbb{E}[X_r^2] = \mathbb{E}[(x e^{\mu r} + \int_0^r \sigma e^{-\mu(s-r)} dB_s)^2]$

$$= \underbrace{x^2 e^{2\mu r}}_{<\infty} + \underbrace{\int_0^r \sigma^2 e^{-2\mu(s-r)} ds}_{<\infty \text{ par a)}} < \infty$$ Donc X_r est $\mathcal{L}^2$

c) $X_r = x e^{\mu r} + \int_0^r \sigma e^{-\mu(s-r)} dB_s$

X_r est bien un processus d'Itô avec

$$\begin{cases} \mu(s, B_s) = \frac{x e^{\mu r}}{r} \\ \varphi(s, B_s) = \sigma e^{-\mu(s-r)} \end{cases} \qquad X_r = \int_0^r \mu(s, B_s) ds + \int_0^r \varphi(s, B_s) dB_s$$

$$\langle X \rangle_r = \int_0^r \sigma e^{-2\mu(s-r)} ds = \sigma e^{2\mu r} \int_0^r e^{-2\mu s} ds = \sigma e^{2\mu r} \left[-\frac{1}{2\mu} e^{-2\mu s}\right]_0^r = \sigma e^{2\mu r}\left(-\frac{1}{2\mu} e^{-2\mu r} + \frac{1}{2\mu}\right)$$
$$= \frac{\sigma}{2\mu}(e^{2\mu r} - 1)$$

d) $X_t = xe^{\mu t} + \int_0^t \sigma e^{-\mu(s-t)} dB_s$

$= xe^{\mu t} + \sigma \sum_{i=0}^{m(t)-1} \alpha_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \alpha_{m(t)} (B_t - B_{m(t)})$

où $m(t)$ est l'unique entier naturel tq $t_{m(t)} \leq t < t_{m(t)+1}$

Donc X_t est une CL de B_{t_i} et B est un proc. gaussien

$\Rightarrow X_t$ est un processus gaussien.

$\mathbb{E}[X_t] = xe^{\mu t}$

$Cov(X_t, X_s) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}[X_t])(X_s - \mathbb{E}[X_s])]$

$= \mathbb{E}[X_t X_s - xe^{\mu s} X_t - xe^{\mu t} X_s + x^2 e^{\mu(t+s)}]$

$= \mathbb{E}[X_t X_s] - xe^{\mu s} \mathbb{E}[X_t] - xe^{\mu t} \mathbb{E}[X_s] + x^2 e^{\mu(t+s)}$

$= \mathbb{E}[X_t X_s] - x^2 e^{\mu(t+s)}$

$= \mathbb{E}[(xe^{\mu t} + \int_0^t \sigma e^{-\mu(u-t)} dB_u)(xe^{\mu s} + \int_0^s \sigma e^{-\mu(u-s)} dB_u)] - x^2 e^{\mu(t+s)}$

$= \int_0^{t \wedge s} \sigma^2 e^{\mu(t+s-2u)} du$ par isométrie car $t \mapsto \sigma e^{-\mu(u-t)} \in \mathcal{L}^2_{loc}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$

Ici on suppose $s \leq t$

$\Rightarrow Cov(X_t, X_s) = \sigma^2 e^{\mu(t+s)} \int_0^t e^{-2\mu u} du$

$= \sigma^2 e^{\mu(t+s)} \left[\frac{-1}{2\mu} e^{-2\mu u} \right]_0^t = \sigma^2 e^{\mu(t+s)} \left(\frac{1}{2\mu} (1 - e^{-2\mu t}) \right)$

$= \frac{\sigma^2 e^{\mu(t+s)}}{2\mu} (1 - e^{-2\mu t})$

3) $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s]$

$Y_t = x + \sigma \int_0^t e^{-\mu s} dB_s$ et $dY_t = \sigma e^{-\mu t} dB_t$ $\quad Y_t$ est un $\mathbb{P}$ martingale locale et $\mathbb{E}[\langle Y \rangle_t] = \sigma^2 \frac{1}{2\mu}(1 - e^{-2\mu t}) < \infty$

$\Rightarrow Y_t$ est une $\mathbb{P}$ matingale $\Rightarrow \mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_s] = Y_s$

$X_t = e^{\mu t} Y_t \Rightarrow \mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[e^{\mu t} Y_t | \mathcal{F}_s] = e^{\mu t} \mathbb{E}[Y_t | \mathcal{F}_s] = e^{\mu t} Y_s$
$= e^{\mu(t-s)} X_s$

Donc $\mathbb{E}[X_t | \mathcal{F}_s] = e^{\mu(t-s)} X_s$.

3) $V(X_r|\mathcal{F}_s) = \mathbb{E}[(X_r - \mathbb{E}[X_r|\mathcal{F}_s])^2|\mathcal{F}_s]$

$= \mathbb{E}[(X_r - e^{\mu(r-s)}X_s)^2|\mathcal{F}_s]$

$= \mathbb{E}[(e^{\mu r}Y_r - e^{\mu(r-s)}e^{\mu s}Y_s)^2|\mathcal{F}_s^B]$

$= \mathbb{E}[e^{2\mu r}(Y_r - Y_s)^2|\mathcal{F}_s^B] = e^{2\mu r}\mathbb{E}[(Y_r - Y_s)^2|\mathcal{F}_s^B]$

Or $Y_r = x + \sigma\int_0^r e^{-\mu s}dB_s$

$\Rightarrow (Y_r - Y_s)^2 = \left(\sigma\int_0^r e^{-\mu u}dB_u - \sigma\int_0^s e^{-\mu u}dB_u\right)^2$

$\Rightarrow \mathbb{E}[(Y_r - Y_s)^2|\mathcal{F}_s^B] = \sigma^2\,\mathbb{E}[(\int_0^r e^{-\mu u}dB_u)^2 - (\int_0^s e^{-\mu u}dB_u)^2|\mathcal{F}_s^B] = \sigma^2\,\mathbb{E}[\int_s^r e^{-2\mu u}du|\mathcal{F}_s^B]$

prop de cours

$\mathbb{E}[(I_r(\theta) - I_s(\theta))^2|\mathcal{F}_s^B]$
$= \mathbb{E}[I_r(\theta)^2 - I_s(\theta)^2|\mathcal{F}_s^B]$
$= \mathbb{E}[\int_s^r \theta_u^2 du|\mathcal{F}_s^B]$

$\Rightarrow \mathbb{E}[(Y_r - Y_s)^2|\mathcal{F}_s^B] = \sigma^2\left[-\frac{1}{2\mu}e^{-2\mu u}\right]_s^r$

$= \frac{\sigma^2}{2\mu}\left(e^{-2\mu s} - e^{-2\mu r}\right)$

$\Rightarrow Var(X_r|\mathcal{F}_s) = e^{2\mu r} \times \frac{\sigma^2}{2\mu}\left(e^{-2\mu s} - e^{-2\mu r}\right)$

$= \frac{\sigma^2}{2\mu}\left(e^{2\mu(r-s)} - 1\right)$

4) On a mq X_r est un processus Gaussien et $\mathbb{E}[X_r] = xe^{\mu r}$ et $Var(X_r) = \frac{\sigma^2}{2\mu}(e^{2\mu r} - 1)$

$\Rightarrow X_r \sim \mathcal{N}\left(xe^{\mu r}, \frac{\sigma^2}{2\mu}(e^{2\mu r} - 1)\right)$

4)

5) Soit ϕ C^2.

Ecrire la formule d'Itô pour $Z_r = \phi(X_r)$

$$Z_r = \phi(X_0) + \int_0^r \phi'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^r \phi''(X_s)d\langle X\rangle_s$$

et $dZ_r = \phi'(X_r)dX_r + \frac{1}{2}\phi''(X_r)d\langle X\rangle_r$.

$$\Rightarrow Z_r = \phi(x) + \int_0^r \phi'(X_s)(\mu X_s ds + \sigma dB_s) + \frac{1}{2}\int_0^r \phi''(X_s)\sigma^2 ds$$

$$= \phi(x) + \mu\int_0^r \phi'(X_s)X_s ds + \sigma\int_0^r \phi'(X_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^r \phi''(X_s)\sigma^2 ds$$

Si $\phi : z \mapsto \int_0^z \exp(-\mu\frac{y^2}{\sigma^2})dy \Rightarrow \phi'(X_s) = \frac{d}{dz}\left(\int_0^z e^{-\mu\frac{y^2}{\sigma^2}}dy\right)(X_s) = e^{-\mu\frac{X_s^2}{\sigma^2}}$

car si $g(x) = \int_0^x f(t)dt$ et F primitive de f
alors $g(x) = F(x) - F(0) \Rightarrow g'(x) = f(x)$

$$\Rightarrow Z_r = \phi(x) + \mu\int_0^r X_s e^{-\mu\frac{X_s^2}{\sigma^2}}ds + \sigma\int_0^r e^{-\mu\frac{X_s^2}{\sigma^2}}dB_s + \frac{\sigma^2}{2}\int_0^r \phi''(X_s)ds$$

Or $\phi'(X_s) = e^{-\mu\frac{X_s^2}{\sigma^2}} \Rightarrow \phi''(X_s) = -\frac{\mu}{\sigma^2}2X_s e^{-\mu\frac{X_s^2}{\sigma^2}}$

$$\Rightarrow Z_r = \phi(x) + \mu\int_0^r X_s e^{-\mu\frac{X_s^2}{\sigma^2}}ds + \sigma\int_0^r e^{-\mu\frac{X_s^2}{\sigma^2}}dB_s - \mu\int_0^r X_s e^{-\mu\frac{X_s^2}{\sigma^2}}ds$$

D'où $Z_r = \phi(x) + \sigma\int_0^r e^{-\mu\frac{X_s^2}{\sigma^2}}dB_s$

6) $Z_t = \phi(x) + \sigma \int_0^t e^{-\mu \frac{X_s^2}{\sigma^2}} dB_s$

Drift nul $\Longrightarrow$ martingale locale

De +, $\mathbb{E}[\langle Z\rangle_t] = \int_0^t \sigma^2 e^{-2\mu \frac{X_s^2}{\sigma^2}} ds < \infty$ donc unif intég

Donc Z est une martingale

Or on veut savoir si Z est une martingale de carré intégrable.

$$\mathbb{E}[|Z_t^2|] = \mathbb{E}\Big[\Big|\big(\phi(x) + \sigma \underbrace{\int_0^t \underbrace{\exp\big(-\mu \tfrac{X_s^2}{\sigma^2}\big)}_{\leq 1} dB_s}_{\leq B_t \sim \mathcal{N}(0,t)}\big)^2\Big|\Big]$$

$$\leq \underbrace{\mathbb{E}[|\phi(x)^2 + 2\phi(x)\sigma B_t + \sigma^2 B_t^2|]}$$

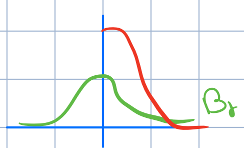
$$\leq \underbrace{\mathbb{E}[\phi(x)^2 + 2\phi(x)|\sigma B_t| + \sigma^2 B_t^2]}_{= \phi(x)^2 + 2\phi(x)\underbrace{\mathbb{E}[|\sigma B_t|]}_{=0} + \sigma^2 \underbrace{\mathbb{E}[B_t^2]}_{V(B_t) + \mathbb{E}[B_t]^2 = t}}$$

$$\leq \phi(x)^2 + \sigma^2 t < \infty$$

Donc Z_t martingale de carré intég.

$|B_t|$

$\Rightarrow \mathbb{E}[|B_t|] = 0$



Exercice 3

$$dM_t = (\mu_t dB_t - \frac{1}{2}\mu_t^2 dt) M_t =$$

1) Soit le processus M défini par :

$$M_t := \exp\left(\int_0^t \mu_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \mu_s^2 ds\right) \qquad t \in \mathbb{R}_+.$$

où $(\mu_t)_{t\geq 0}$ est un processus continu, borné et $\mathcal{F}_t$-adapté

On sait alors que $(\mu_t)_{t\geq 0}$ est un bon processus local (car $(\mathcal{F}_t)$-adapté, càglàd et $\int_0^t \mu_s^2 ds < \infty$ p.s).

Donc le processus M_t est une exponentielle de Doléans-Dade noté $\mathcal{E}_t(\mu * B)$

De plus la condition de Novikov est respectée.

En effet, $\mathbb{E}[\exp(\frac{1}{2}\int_0^t \mu_s^2 ds)] < \infty \quad \forall t$ (car μ continu, bornée)

Donc le théorème lié à la condition de Novikov nous assure que

$\mathcal{E}_t(\mu * B)$ est une vraie martingale.

<u>Cl</u> : M_t est une $\mathbb{P}$-martingale

2) Soit $\mathbb{Q}$ la proba définie sur $\mathcal{F}_T$, $t \leq T$ par $d\mathbb{Q} = M_T d\mathbb{P}$.

On fait appel au Théorème de Girsanov :

Sous $\mathbb{Q}$, le processus $\tilde{B} : t \longmapsto B_t - \int_0^t \mu_s ds$ est un MB

3) Soit $(\phi_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté, continu et borné.

On pose $L_t = \int_0^t \phi_s dB_s - \int_0^t \phi_s \mu_s ds$.

$$dL_t = \phi_t dB_t - \phi_t \mu_t dt$$

Or par 2) on a $dB_t = d\tilde{B}_t + \mu_t dt$

$$\Longrightarrow dL_t = \phi_t(d\tilde{B}_t + \mu_t dt) - \phi_t \mu_t dt = \phi_t d\tilde{B}_t$$

$\Longrightarrow$ Sous $\mathbb{Q}$, drift nul donc martingale locale.

De plus, $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\langle L\rangle_r] = \int_0^r \phi_s^2 ds < \infty$ car ϕ est continu, borné

Donc L est une $\mathbb{Q}$-martingale.

4) On considère $Z_r = M_r L_r$

$$dZ_r = M_r dL_r + L_r dM_r + d\langle M, L\rangle_r$$
$$= M_r(\phi_r dB_r - \phi_r \mu_r dr) + L_r \mu_r M_r dB_r + d\langle M, L\rangle_r$$

$$\langle M, L\rangle_r = \langle (\int_0^\cdot \mu_s M_s dB_s), (\int_0^\cdot \phi_s dB_s)\rangle_r = \int_0^r \mu_s M_s \phi_s ds$$

$$\Rightarrow d\langle M, L\rangle_r = \mu_r \phi_r M_r dr$$

$$\Rightarrow dZ_r = \phi_r M_r dB_r - \mu_r \phi_r M_r dr + \mu_r L_r M_r dB_r + \mu_r \phi_r M_r dr$$
$$= (\phi_r M_r + \mu_r M_r L_r) dB_r$$
$$= (\phi_r M_r + \mu_r Z_r) dB_r.$$

Drift nul $\Rightarrow$ martingale locale

De plus, $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\langle Z\rangle_r] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\int_0^r (\phi_s M_s + \mu_s Z_s)^2 dB_s]$

$< \infty$ car ϕ et μ sont continues et bornées

B est un $\mathbb{P}$-MB

M est une $\mathbb{P}$ martingale donc intégrable

et $Z_r = M_r L_r$ est aussi intégrable par produit

D'où Z_r est une martingale locale uniformément intégrable

Donc Z_r est une $\mathbb{P}$-martingale.