

## Évaluation des obligations convertibles en ABSAR (OCABSAR) en l'absence de dividendes et de coupons

Nous considérons une firme qui n'était financée que par  $N$  actions ordinaires cotées  $S$ , le total des actifs de la firme étant égal à  $V = NS$ .

En  $t_0$ , l'entreprise émet  $m$  obligations convertibles en actions à bons de souscription d'actions remboursables (OCABSAR), au prix  $Q$  par titre, choisi de telle sorte que, toutes choses égales par ailleurs, le cours des actions ne soit pas modifié par l'émission. Il est supposé que le produit de l'émission est aussitôt investi dans des actifs risqués assimilables à ceux de la firme.

On pose  $\hat{V} = V + mQ$  et  $\sigma_{\hat{V}} = \sigma_V$ .

La durée de vie des obligations convertibles est égale à  $\tau_1$ .

En  $t_1$ , date d'échéance des obligations convertibles, les souscripteurs peuvent :

- soit convertir leurs titres en ABSAR,
- soit en demander le remboursement au prix  $K$  par obligation.

La conversion d'une obligation convertible permet d'obtenir 1 action et 1 bon de souscription d'actions remboursable dont la valeur unitaire est notée  $W_1$ .

Les bons de souscription arrivent à échéance en  $t_2$ .

On pose  $\tau_2 = t_2 - t_0$  et  $\tau_3 = t_2 - t_1$ , d'où  $\tau_2 = \tau_1 + \tau_3$ .

On notera  $\hat{V}_1$  la valeur de la firme en  $t_1$ ,  $\hat{V}_2$  en  $t_2$ . De même, les valeurs des différents actifs seront indiquées par 1 ou 2 en fonction de la date ( $S_1, S_2, Q_1, Q_2, W_1, W_2$ ).

L'exercice d'un bon de souscription remboursable donne droit à  $\gamma$  actions en échange du règlement d'un prix d'exercice fixé à  $E$  par action.

S'il n'est pas exercé, le bon peut être remboursé au prix  $F$  par bon.

On suppose l'absence de clause de remboursement anticipé, l'absence de coupon et de dividende, l'absence de frais d'émission, l'existence d'une structure des taux plate et stable.

On admet que la politique optimale de conversion des obligations convertibles consiste à ne convertir celles-ci qu'à leur échéance, et que la politique optimale d'exercice des bons consiste à attendre également leur échéance.

1) Illustrer par un schéma l'évolution du pseudo-bilan de la firme en  $t_0, t_1$  et  $t_2$ .

### 2) Valeur des bons

- Quelle est la condition d'exercice des bons en  $t_2$  exprimée en fonction de  $\hat{V}_2$  ?
- En  $t_2$ , exprimez en fonction de  $\hat{V}_2$  la valeur des bons, notée  $W_2$ , en cas d'exercice.
- Déduisez-en la valeur des bons  $W_1$  en  $t_1$  en utilisant une option d'achat et une option de vente sur  $\hat{V}_1$  (vous pourrez faire un tableau récapitulatif). Vous noterez respectivement  $C$  et  $P$  ces options et vous en préciserez clairement les paramètres.
- Proposez une expression alternative de  $W_1$  toujours sous la forme d'un portefeuille d'options.

Portefeuille call Put

### 3) Valeur des obligations convertibles

- En  $t_1$ , quelle est la condition de conversion des obligations convertibles (en fonction de  $\hat{V}_1$  et de  $W_1$  pour faire simple) ?
- Remarque : on peut également exprimer cette condition de conversion en utilisant les options

définies dans la question 2) mais ce n'est pas nécessaire pour la suite de l'exercice car cela alourdit inutilement les expressions.

- b. Résumez dans un tableau les différentes valeurs prises par les actions et les obligations convertibles en  $t_1$  en précisant les conditions sur  $\hat{V}_1$ .

**4) Application numérique :**

$$\hat{V} = 100\ 000 \quad \sigma_{\hat{V}} = 0,3 \quad N = 1000 \quad K = 150 \quad m = 500 \quad E = 100 \quad F = 70 \quad \gamma = 0,2$$

$$\tau_1 = 3 \text{ ans} \quad \tau_2 = 5 \text{ ans d'où } \tau_3 = 2 \text{ ans} \quad r = 0,1 \text{ (taux d'intérêt annuel continu).}$$

Cela signifie que la conversion d'une obligation convertible en ABSAR dans 3 ans donne droit à une action et à un bon de souscription remboursable. L'exercice de 5 bons de souscription permet, 2 ans plus tard, d'obtenir une action contre le règlement d'un prix d'exercice égal à 100 ou d'être éventuellement remboursé à 70. Si elle n'est pas convertie, une obligation convertible peut donner lieu à un remboursement à 150.

Le modèle utilisé pour l'application numérique entre  $t_0$  et  $t_1$ , nous utiliserons le modèle binomial de Cox Ross et Rubinstein avec un pas semestriel.

Précisez les différents paramètres de ce modèle ( $u$ ,  $d$ ,  $p$ , et  $\hat{r}$ ). Vous en détaillerez les calculs.

Pour réaliser cette application numérique, vous réaliserez les différents arbres binomiaux complétés des pages suivantes.

En particulier les calculs des cellules dont le fond est grisé.

- 5) Dans le cadre d'une émission, quelle procédure mettriez-vous en place pour trouver un prix d'émission (prix d'équilibre) des obligations convertibles qui satisfasse les actionnaires ?

		V1	C(V1.2ans.710000)	P(V1.2ans.35000)	V1	Situation pour l'obligation
		357 081		11 860	0	
		288 828		868	0	
		233 621				
		188 966				
		152 847				
100 000	123 631	123 631	233 621	868	0	
	100 000	100 000	188 966			
	80 886	80 886	152 847	28	0	
	65 425	65 425	123 631			
		52 920	100 000	0	10	
		42 804	100 000	0		
		34 623	100 000	0	177	
			100 000	0	1 352	
			100 000	0	5 092	

				138 625
		114 729		
		96 158		27 013
		82 455		75000
	72 210	74 269		75000
64 031	67 340	71 342		mQ
56 350	60 901	66 239		
54 417	59 678	67 399		
	52 368	58 150		
	48 995	52 920		
	42 804	42 804		
		34 623		98 025
Q =	114			

				818456
		174 098		
	137 463		136	
	106 511			
59 600	80 637	78 578		
	56 291		52 289	
	39 099	33 761		
26 469	21 208			NS
	13 057	7 275		
	3 925			
S =	43			