Annales (2022-2023)

Partie II

Exo 1 $\mathcal{D}(G)$ - domaine d'attraction

(1) Un exemple de $G \in \mathcal{D}(G)$, Préciser $a_n > 0$, b_n

Il suffit de trouver $a_n > 0$, $b_n \in \mathbb{R}$

$$G(a_n x + b_n)^n \to G(x)$$

$$G(a_n x + b_n)^n =$$

$$= \exp\{- n e^{-a_n x - b_n}\} \overset{?}{=} G(x)$$

$$n e^{-a_n x - b_n} \overset{?}{=} e^{-x}$$

$$\Downarrow$$

$$a_n = 1, \; b_n = \log n$$

$$\Downarrow$$

égalité.

Catégories

Fréchet $\Phi_\alpha(x) = e^{-x^{-\alpha}} \mathbb{1}_{\{x>0\}}, \; \alpha > 0$

Weibull $\Psi_\alpha(x) = e^{-(-x)^\alpha} \mathbb{1}_{\{x\leq 0\}} + \mathbb{1}_{\{x>0\}}, \; \alpha > 0$

Gumbel $\Lambda(x) = e^{-e^{-x}}, \; x \in \mathbb{R}$

(2) $(u_n(\cdot))$ t.q. $n\bar{G}(u_n(x)) \longrightarrow -\log G(x)$

Donner une expression pour $u_n(x)$

On a montré que $G(a_n x + b_n)^n \to G(x)$

$$\Downarrow$$

$$-n \log G(a_n x + b_n) \to -\log G(x)$$

$$-n \log(1 - \underbrace{\bar{G}(a_n x + b_n)}_{\to 0}) \underset{n\to\infty}{\sim} n \bar{G}(a_n x + b_n) \to$$

$\rightarrow \quad u_n(x) = x + \log n$

(3) Exemple de $F \in \mathcal{D}(G)$ $F \neq G$. Préciser $c_n > 0$, d_n.

$F(x) = 1 - e^{-x}$ $\quad \bar{F}(x) = e^{-\lambda x}$ - loi exp.

$$F(a_n x + b_n)^n \rightarrow \exp\{-e^{-x}\}$$
$$\parallel$$
$$\left(1 - e^{-a_n x} \cdot e^{-b_n}\right)^n \underset{\uparrow}{=} \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to \infty]{} \exp\{-e^{-x}\}$$

$a_n = 1, \; b_n = \log n$

(4) $(v_n(\cdot))_{n \geq 1}$ $\qquad n\bar{F}(v_n(x)) \rightarrow -\log G(x)$

On a $\quad F(x + \log n)^n \rightarrow G(x) \in (0,1) \quad \rightarrow F(x + \log n) \rightarrow 1$

$$-n \log(1 - \underbrace{\bar{F}(x + \log n)}_{\rightarrow 0}) \rightarrow -\log G(x)$$
$$\sim$$
$$n\bar{F}(\underbrace{x + \log n}_{v_n(x)}) \rightarrow -\log G(x)$$

Intuition pour les limites:

- supp F est bornée à supérieur $\rightarrow$ Weibull
- Queue "épaisse" $\rightarrow$ Fréchet
- Queue "légère" $\rightarrow$ Gumbel

Exo 2 $\quad (V_k^{(n)})_{k=1}^n$ stat d'ordre d'une loi de Pareto(1) $\sim \underset{\substack{\uparrow \\ \text{dénsité}}}{\frac{1}{x^2}} \mathbb{1}_{x \geq 1}$

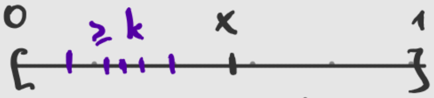
(1) Quelle est la loi de $\dfrac{1}{V^{(n)}_{n+1-k}}$?

Si : $U\sim\mathcal{U}([0,1]) \to \frac{1}{U}\sim$ Pareto (1) : $\mathbb{P}(\frac{1}{U}>x)=\frac{1}{x}$ ← fct de survie de Pareto (1)

Pour l'echantillon $(U_1,\dots,U_n) \rightsquigarrow (U_1^{(n)},\dots,U_n^{(n)}) \overset{\mathcal{L}}{=} (V_n^{(n)},\dots,V_1^{(n)}) \to$

car $x\mapsto \frac{1}{x}$ est décroissante

$\to \frac{1}{V^{(n)}_{n+1-k}} \overset{\mathcal{L}}{\sim} U_k^{(n)}$



$$\mathbb{P}(U_k^{(n)}\le x) = \mathbb{P}(\xi\ge k) = \sum_{j=k}^{n} \binom{n}{j} x^{j} (1-x)^{n-j}, \quad \xi\sim Bi(n,x)$$

(2) M.q. la statistique d'ordre $(V_1^{(n)},\dots,V_n^{(n)}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_n},\dots,\frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_1}\right)$ où

$\Gamma_k = E_1+E_2+\dots+E_k$, où $E_i\sim\mathcal{E}(1)$ i.i.d.

On a montré que $(V_1^{(n)},\dots,V_n^{(n)}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\frac{1}{U_n^{(n)}},\dots,\frac{1}{U_1^{(n)}}\right)$

Donc il suffit de montrer que $(U_1^{(n)},\dots,U_n^{(n)}) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_{n+1}},\dots,\frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n+1}}\right)$

Soit $h\in C_b^\infty$ une fonction test

$$\mathbb{E}\left[h\left(\frac{\Gamma_1}{\Gamma_{n+1}},\dots,\frac{\Gamma_n}{\Gamma_{n+1}}\right)\right] = \int_{\mathbb{R}_+^{n+1}} h\left(\frac{y_1}{\sum^{n+1} y_k},\dots,\frac{\sum^{n} y_k}{\sum^{n+1} y_k}\right) e^{-\sum^{n+1} y_k}\, dy_1\dots dy_{n+1} =$$

$$= \left\{ x_\ell = \sum_{k=1}^{\ell} y_k,\ \det\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)=1\right\} = \int_{0\le x_1\le x_2\le\dots\le x_{n+1}} h\left(\frac{x_1}{x_{n+1}},\dots,\frac{x_n}{x_{n+1}}\right) e^{-x_{n+1}}\, dx_1\dots dx_{n+1} =$$

$$= \left\{\begin{array}{l} u_k = \frac{x_k}{x_{n+1}} \\ u_{n+1} = x_{n+1}\end{array}\right. \quad \det\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(\frac{1}{x_{n+1}}\right)^n \Bigg\} = \int_{\substack{0\le u_1\le u_2\le\dots\le u_n\le 1 \\ u_{n+1}\ge 0}} h(u_1,\dots,u_n)\, e^{-u_{n+1}}\, u_{n+1}^{n}\, du_1\dots du_n\, du_{n+1} =$$

$$= \left\{\int_0^\infty u_{n+1}^{n} e^{-u_{n+1}} du_{n+1} = \Gamma(n+1) = n! \right\} = \underset{\text{constante de normalization}}{n!} \int_{0\le u_1\le u_2\le\dots\le u_n\le 1} h(u_1,\dots,u_n)\, du_1\dots du_n =$$

$$= \mathbb{E}[h(U_1^{(n)},\dots,U_n^{(n)})]$$

(3) $k_n \in \{1, \dots, [\frac{n}{2}]\}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} k_n = +\infty$. Étudier la convergence en proba de $\frac{k_n}{n} V^{(n)}_{n+1-2k_n}$ lorsque $n \uparrow +\infty$.

Par (2) on a
$$\frac{k_n}{n} V^{(n)}_{n+1-2k_n} \overset{\mathcal{L}}{\sim} \frac{k_n}{n} \frac{\Gamma_{n+1}}{\Gamma_{2k_n}} = \frac{1}{2} \underbrace{\frac{2k_n}{E_1 + \dots + E_{2k_n}}}_{\xrightarrow[LGN]{\mathbb{P}} \frac{1}{\mathbb{E} E_1}} \cdot \underbrace{\frac{E_1 + \dots + E_{n+1}}{n+1}}_{\xrightarrow[LGN]{\mathbb{P}} \mathbb{E} E_1} \cdot \underbrace{\frac{n+1}{n}}_{\to 1}$$
$$\xrightarrow{\mathbb{P}} \frac{1}{2}.$$

Exo 3

Gré à gré = OTC. b-banque, c-client.

La banque assure une somme $\mathcal{D}_t$ de flux sur $t \in [0,T]$. (Banque $\xrightarrow{\mathcal{D}_t}$ Client)

(π, ξ) - prix, couverture du contrat incluant le défaut τ^b et τ^c, $\tau = \tau^b \wedge \tau^c$

$\bar{\tau} = T \wedge \tau$, qui vérifie

$$\begin{cases} \pi_{\bar{\tau}} = \mathbb{1}_{\tau < T} R, \qquad R = R^c - \mathbb{1}_{\{\tau = \tau^b\}} R^f \\ d\pi_t = -\mathbb{1}_{\{\tau > t\}} d\mathcal{D}_t + (r_t \pi_t + g_t(\pi_t, \xi_t))dt + dm_t^{\xi}, \quad t \in [0, \bar{\tau}]. \end{cases}$$

une mart. locale (m^{ξ})

(1) Deux raisons rendant la stratégie de couverture moins usuelle

- Plusieurs de placem. à variation finie car
    - Par toujours on a l'accès aux certains placements
    - Placement avec taux élevé reflète le risque de défaut
- Une asymétrie qui favorise les banques : disposition d'un regulateure qui joue le rôle d'une source de fonds.

$t \in [0, \bar{\tau}]$ $\quad \Theta_t = p_t - \pi_t$ où $(p_t)_{0 \le t \le T}$ le prix mark-to-market (excluant les défauts associé à $\mathcal{D}$)

(2) p en fonction de $\mathcal{D}$ et β avec $\beta_t = \exp\{-\int_0^t r_s ds\}$

$$p_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T \frac{\beta_s}{\beta_t} d\mathcal{D}_s \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$$

(3) Vérifier que $\begin{cases} \theta_{\bar\tau} = p_{\bar\tau} - \mathbb{1}_{\{\tau < T\}} R \\ d(\beta_t \theta_t) + \beta_t g_t(p_t - \theta_t, \xi_t) dt = d\tilde{m}_t \end{cases}$

$$\theta_{\bar\tau} = p_{\bar\tau} - \tilde{\pi}_{\bar\tau} = p_{\bar\tau} - \mathbb{1}_{\{\tau < T\}} R$$

$$d(\beta_t \theta_t) = d(\beta_t(p_t - \tilde{\pi}_t)) = -r_t \beta_t (p_t - \tilde{\pi}_t) dt + \beta_t dp_t - \beta_t d\tilde{\pi}_t$$

$$= r_t \beta_t \cancel{\tilde{\pi}_t} dt + d(p_t \beta_t) + \beta_t \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} dD_t - r_t \cancel{\tilde{\pi}_t} \beta_t dt - g_t(p_t - \theta_t, \xi_t) \beta_t dt$$

$$- \beta_t dm_t^{\xi}$$

une mart.

$$d(\beta_t \theta_t) + \beta_t g_t(p_t - \theta_t, \xi_t) dt = d(p_t \beta_t) + \beta_t \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} dD_t - \beta_t dm_t^{\xi} \ (=)$$

$$p_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T \frac{\beta_s}{\beta_t} dD_s \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right] \cdot \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$$

$$\beta_t p_t = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T \beta_s dD_s \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right] \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} = \left(\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T \beta_s dD_s \,\middle|\, \mathcal{F}_t \right]}_{\tilde{m}_t \text{ mart. de Lévy}} - \int_0^t \beta_s dD_s \right) \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}$$

$$d(\beta_t p_t) = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} d\tilde{m}_t - \beta_t \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} dD_t$$

$$(=) \quad \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} d\tilde{m}_t - \beta dm_t^{\xi} =: d\hat{m}_t$$

une martingale

2021-2022

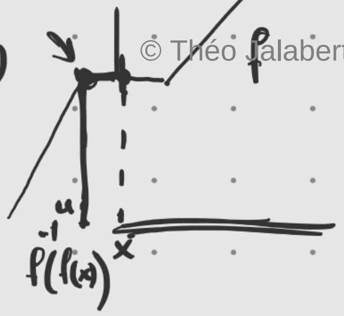
Exo 1 $f \nearrow$, càd. $f^{-1}(y) := \inf\{x : f(x) \geq y\}$. $g(x) = f\left(\frac{x}{a} + b\right) - c$, $a > 0$

En supposant que $f^{-1} \in \mathcal{C}$ justifier que $f^{-1}(f(x)) = x$ puis que

$g^{-1}(f(x)-c) = a(x-b)$

car $f(x) \geq f(x)$

$f^{-1}(f(x)) = \inf\{y : f(y) \geq f(x)\} \leq x$



$f^{-1}(f(x)+\varepsilon_n) \geq x \quad \forall \varepsilon_n$ car $f(x) < f(x)+\varepsilon_n$

f^{-1} cont. $\downarrow$ $\varepsilon_n \downarrow 0$

$f^{-1}(f(x)) \geq x \quad \to \quad f^{-1}(f(x)) = x$

$$g^{-1}(f(x)-c) = \inf\{y : g(y) \geq f(x)-c\} = \inf\{y : f(\underbrace{\tfrac{y}{a}+b}_{z}) \geq f(x)\} =$$

$$= \inf\{a(z-b) : f(z) \geq f(x)\} = a(f^{-1}(f(x))-b) = a(x-b)$$

Exo 2 $\quad G$ - max-stable. $G(x) \in]0,1[\rightsquigarrow U(x) = \big(\underbrace{-\log(-\log(G))}_{f(x)}\big)^{-1}$

(1) M.q. $\exists a(s) > 0 : [U(y+\log s) - U(\log s)]/a(s) = U(y) - U(0)$

Par la déf. de max-stable,

$\exists a_n, b_n : \quad G(a_n x + b_n)^n = G(x)$

On peut considérer la version continue : $\exists a(s), b(s)$:

$$G(a(s)x+b(s))^s = G(x) \in (0,1) \qquad (G(a(s)x+b(s)) \to 1)$$

$$-s\log G(a(s)x+b(s)) = -\log G(x)$$

$$-\log s - \log(-\log(G(a(s)x+b(s)))) = -\log(-\log G(x))$$

$$\underbrace{-\log s}_{c} + f(\underbrace{a(s)}_{1/a}x + \underbrace{b(s)}_{b}) = f(x) = g(x)$$

$\downarrow U = f^{-1}$ continue

$$f(a(s)x+b(s)) = f(x) + \log(s)$$

$$\Big\downarrow U\circ$$

$$a(s)x+b(s) = U(\underbrace{f(x)}_{y\in\mathbb{R}}+\log s) \qquad (f(\mathbb{R})=\mathbb{R})$$

$$f(x)=y \to x=U(y)$$

$$\left.\begin{aligned} &a(s)U(y)+b(s) = U(y+\log s) \\ &\text{Pour } y=0 \quad a(s)U(0)+b(s) = U(\log s)\end{aligned}\right\} \to \frac{U(y+\log s)-U(\log s)}{a(s)} = U(y)-U(0)$$

(2) Si $a(s)\neq 1$, m.q. G est soit Fréchet soit Weibull

$$U(y+\underbrace{\log s}_{z}) - U(\log s) = a(s)\,(\underbrace{U(y)-U(0)}_{v(y)}) \quad (1)$$

$$\to \begin{cases} v(y+z)-v(z) = \tilde{a}(z)\,v(y) \\ v(y+z)-v(y) = \tilde{a}(y)\,v(z)\end{cases}$$

$$v(y)-v(z) = \tilde{a}(z)v(y) - \tilde{a}(y)v(z)$$

$$v(y)(1-\tilde{a}(z)) = v(z)(1-\tilde{a}(y))$$

$$\frac{v(y)}{v(z)} = \frac{1-\tilde{a}(y)}{1-\tilde{a}(z)}$$

Sinon $U\equiv 0\ \forall y$ cas dégénéré

On prend z : $\tilde{a}(z)\neq 1 \to v(y) = \underbrace{\frac{v(z)}{1-\tilde{a}(z)}}_{c\neq 0}(1-\tilde{a}(y)) = c(1-\tilde{a}(y))$

$$v(y) = c(1-\tilde{a}(y)) \rightsquigarrow (1)$$

$$\cancel{c}(1-\tilde{a}(y+z)) - \cancel{c}(1-\tilde{a}(z)) = \left(\cancel{c}(1-\tilde{a}(y))\right)\tilde{a}(z)$$

$$-\tilde{a}(y+z)+\tilde{a}(z) = \tilde{a}(z) - \tilde{a}(y)\tilde{a}(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{a}(y+s) = \tilde{a}(y)\tilde{a}(s)$$

$$\tilde{a}(y) = e^{\lambda y} \to \vartheta(y) = c(1-e^{\lambda y})$$

$$U(y) = U(0) + c(1-e^{\lambda y}) \to \{y = f(x)\} = x = U(0) + c(1-e^{\lambda f(x)}) =$$

$$= \{ f(x) = -\log(-\log G(x)) \} = U(0) + c(1-(-\log G(x))^{-\lambda})$$

$$1-(-\log G(x))^{-\lambda} = \frac{x-U(0)}{c}$$

$$-\log G(x) = \left(1 - \frac{x-U(0)}{c}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}$$

$$G(x) = e^{-\left(1-\frac{x-U(0)}{c}\right)^{-\frac{1}{\lambda}}} \in]0,1[$$

$$e^{-(1+\beta x)^{-\frac{1}{\lambda}}} \overset{\text{scaling}}{\rightsquigarrow} e^{-x^{-\alpha}} \to \text{Fréchet}$$

Si $x>0 \to \alpha>0$ (fonction de répartition)

$x \downarrow 0 \to x^{-\alpha} \uparrow \infty$ $G \downarrow 0$

$\to G=0$ sur $\{x<0\}$

Si $x<0$ $\quad G(x) = e^{-(-x)^{\alpha}} \to \alpha>0$ pour $G(x) \underset{x\to-\infty}{\downarrow} 0$ $\to$ Weibull

$G(0) = e^{0} = 1 \to G(x) = 1$ sur $\{x>0\}$

(2019-2020)

Le cas $a(s) = 1$ On a donc dans (1)

$$\vartheta(y+s) = \vartheta(y) + \vartheta(s) \to \vartheta(y) = \lambda y \quad \lambda \neq 0$$

$$U(y) = U(0) + \lambda y \to \{y = f(x)\} \to x = U(0) - \lambda \log(-\log G(x))$$

$$\log(-\log G(x)) = \frac{U(0)-x}{\lambda} \qquad \log G = -e^{\frac{U(0)-x}{\lambda}}$$

$$G(x) = e^{-e^{\frac{U(0)-x}{\lambda}}} \to \{\text{scaling}\} \to G(x) = e^{-e^{-x}}$$

$\lambda > 0$ pour avoir $G(x) \underset{x\to\infty}{\to} 1$

Exo 3 Déjà fait

Exo 4 Non-contradiction de l'existence de plusieurs actifs sans-risque avec l'absence d'AOA.

1) Pas forcément accès aux différents placements
2) Un actif avec un taux élevé reflète le risque de défaut de l'institution qui l'assure.

2019-2020 Condition nécessaire pour vérifier le principe d'attraction

Exo 2

$$\lim_{x \to x_S} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x^-)} = 1.$$

M.q. Geom(p) ne vérifie pas le principe d'attraction

Loi discrète → il faut vérifier juste que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\bar{F}(n)}{\bar{F}(n-1)} = 1$
$(x_S = +\infty)$

$$\bar{F}(n) = \mathbb{P}(\underset{\sim \text{Geom}}{\xi} > n) = (1-p)^n$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{(1-p)^n}{(1-p)^{n-1}} = \lim_{x \to +\infty} (1-p) = 1-p \neq 1$$

Exo 3 $\alpha, \beta > 0$

Gamma (α, β)

$$f_\Gamma(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{1}_{\{x>0\}}$$

$$f_{\log\Gamma}(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} [\log x]^{\alpha-1} x^{-\beta-1} \mathbb{1}_{\{x>1\}}$$

(1) M.q. $\frac{\bar{F}_\Gamma(x)}{f_\Gamma(x)} \longrightarrow \beta^{-1}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\int_x^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} dt}{x^{\alpha-1} e^{-\beta x}} \underset{\text{l'Hôpital}}{=} \lim_{x \to \infty} \frac{-x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}{(\alpha-1) x^{\alpha-2} e^{-\beta x} - \beta x^{\alpha-1} e^{-\beta x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-1}{\underbrace{\frac{\lambda-1}{\log x}}_{\to 0} - \beta} = \beta^{-1}$$

$$f'_{\log\Gamma}(x) = (\lambda-1)\frac{f_{\log\Gamma}(x)}{x\log x} - (1+\beta)\frac{f_{\log\Gamma}(x)}{x}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\bar F_{\log\Gamma}(x)}{x\, f_{\log\Gamma}(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{-f_{\log\Gamma}(x)}{f_{\log\Gamma}(x)+x f'_{\log\Gamma}(x)} = \lim \frac{-1}{1+\frac{\lambda-1}{\log x}-1-\beta} = \beta^{-1}$$

(2) Justifier $\Gamma amma(\lambda,\beta)\in \mathcal{G}(\Lambda)$. Préciser $c_n>0$, d_n.

$$\mathcal{G}(x) = e^{-e^{-x}}$$

$$F_\Gamma(c_nx+d_n)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathcal{G}(x)$$

$$n\bar F_\Gamma(\overbrace{c_nx+d_n}^{\nearrow\infty,\ n\to\infty}) \to -\log \mathcal{G}(x) = e^{-x}$$

$\wr$ (1)

$$n\beta^{-1}f_\Gamma(c_nx+d_n) = \frac{n\beta^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}(c_nx+d_n)^{\lambda-1}e^{-\beta(c_nx+d_n)} =$$

$$\left\{c_n=\frac{1}{\beta}\right\} = \underbrace{\frac{n}{\Gamma(\lambda)}(x+\beta d_n)^{\lambda-1}e^{-\beta d_n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \text{ (choix de } d_n?)} e^{-x}$$

$$\log n - \log\Gamma(\lambda) + (\lambda-1)\underbrace{\log(x+\beta d_n)}_{\wr_{n\to+\infty}\ \log\beta+\log d_n} - \beta d_n \to 0$$

$$\frac{\beta d_n}{\log n} \to 1$$

$$\log\beta + \log d_n - \log\log n \to 0 \to \log d_n = \underbrace{\log\log n - \log\beta + \bar o(1)}$$

$$\log n - \log\Gamma(\lambda) + (\lambda-1)\log\beta + (\lambda-1)\log d_n - \beta d_n + \bar o(1) \to 0$$

$$d_n = \frac{\log n}{\beta} + \frac{(\lambda-1)}{\beta}\log\log n - \frac{1}{\beta}\log\Gamma(\lambda) + \cancel{\bar o}(1)$$

---

(3) $\text{Log}\Gamma amma(\lambda,\beta)\in \mathcal{D}(\Phi_\lambda)$ Préciser $c_n>0$ $(d_n=0)$

Fréchet $G(x) = e^{-x^{-2}}$ $(x > 0)$

$$\underbrace{n\overline{F_{\log\Gamma}}(c_n x)}_{\sim \beta^{-1} x f_{\log\Gamma}(c_n x)} \to x^{-\gamma} \quad \gamma > 0$$

$$\underbrace{\frac{n}{\Gamma(\alpha)} (\beta \log(c_n x))^{\alpha-1} c_n^{-\beta-1} x^{-\beta}}_{\to 1} \quad \underbrace{\gamma=\beta}$$

$$\log n + \underbrace{-\log\Gamma(\alpha) + (\alpha-1)\log\beta}_{\tilde{c}} + (\alpha-1)\log(\underbrace{\log c_n + \log x}) - (\beta+1)\log c_n \to 0 \quad = \log\log c_n + \bar{o}(1)$$

$$\frac{1}{\log c_n} \to \frac{\log n}{(\beta+1)\log c_n} \to 1 \to \log\log n - (\beta+1)\log\log c_n \to 0$$

$$\log\log c_n = \frac{1}{\beta+1}\log\log n$$

$$\frac{1}{\beta+1}\left(\log n + \tilde{c} + \frac{\alpha-1}{\beta+1}\log\log n + \bar{o}(1)\right) = \log c_n$$

$$c_n = \exp\left\{\frac{1}{\beta+1}\left(\log n + \frac{\alpha-1}{\beta+1}\log\log n + \tilde{c}\right)\right\}$$

On aurait pu aussi utiliser Thm. 4 : $L = \overline{F_{\log\Gamma}}(x)\, x^{\beta} \sim \frac{\beta^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}[\log x]^{\alpha-1}$ à variation lente : $\forall t > 0$: $\frac{L(tx)}{L(x)} = \left[\frac{\log t + \log x}{\log x}\right]^{\alpha-1} \xrightarrow[x\to\infty]{} 1 \to F_{\log\Gamma} \in \mathcal{D}(\varphi_\alpha)$ et $c_n = F^{-1}_{\log\Gamma}(1-\frac{1}{n})$

(with $\overline{F_{\log\Gamma}}(x) \sim \beta^{-1} x f_{\log\Gamma}(x)$)

2018-2019

Exo 1 $X_i \sim F$ i.i.d. M.q. $\max_{1\leq i\leq n} X_i \xrightarrow{p.s.} x_F = \sup\{x : F(x) < 1\}$

$Y_n = \max_{1\leq i\leq n} X_i$ est croissante $\to \exists \lim Y_n = Y_\infty$ p.s. $Y_\infty \leq x_F$
(et bornée par x_F)

On peut montrer que $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} x_F$: $\mathbb{P}(|Y_n - x_F| > \varepsilon) = \mathbb{P}(X_i \leq x_F - \varepsilon \ \ i=1\dots n) =$

$$= \mathbb{P}(\underbrace{X_1 \leq x_S - \varepsilon}_{<1 \text{ par déf de } x_S})^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0. \quad \to \text{limite en } \mathbb{P} = \text{limite p.s.} \Rightarrow Y_\infty = x_S.$$

Exo 2 f non-dégénérée est max-stable ssi $\exists (f_n)$ et $(b_n), (a_n) > 0$

t.q. $\quad f_n(b_{nk} + x/a_{nk}) \xrightarrow[n\to\infty]{} f^{1/k}(x)$,

M.q. G non-dégénérée est max-stable ssi $\mathcal{D}(G) \neq \emptyset$ avec $G \in \mathcal{D}(G)$

$\Rightarrow$ G est max stable $\to$ par déf. $\exists a_n > 0, b_n$ t.q.

$$G\left(\frac{x}{a_n} + b_n\right)^n = G(x) \to G \in D(G)$$

$\Leftarrow$ $\mathcal{D}(G) \neq \emptyset \Rightarrow \exists F : \exists a_n > 0, b_n : F^n\left(\frac{x}{a_n} + b_n\right) \to G(x)$

$$F\left(\frac{x}{a_{nk}} + b_{nk}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} G(x)^{1/k} \qquad f_n = F^n \to G \text{ est max stable.}$$

Exo 3

G fonction de répartition d'une loi max-stable

Théorème

(Φ_α) $F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha)$ ssi $L(X) = x^\alpha \bar{F}(x)$ est à variation lente

Si $F \in \mathcal{D}(\Phi_\alpha) \to c_n = \left[F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^{-1}$ et $d_n = 0$

(Ψ_α) $F \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha)$ ssi $x_S < \infty$ et $x^\alpha \bar{F}\left(x_S - \frac{1}{x}\right)$ est à variation lente. Si $F \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha)$ alors $c_n = \left[x_S - F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)\right]^{-1}$ et $d_n = x_S$

(Λ) $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ ssi $\exists x_0 < x_S$ t.q. $\forall x \in]x_0, x_S[$

$\bar{F}(x) = \lambda(x) \exp\left\{-\int_{x_0}^{x} \frac{g(t)}{a(t)} dt\right\}$ $\lambda(x) \xrightarrow[x\to x_S]{} \lambda > 0$, $g(x) \xrightarrow[x\to x_S]{} 1$

$a \geq 0$ est absolument continue avec $a'(x) \xrightarrow[x\to x_S]{} 0$

On peut choisir $d_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ et $c_n = a(d_n)^{-1}$

(1) Si $F \in \mathcal{D}(G) \Rightarrow x_S < +\infty \quad G - ?$

Weibull : on sait que $F \in \mathcal{D}(\Psi_\alpha) \Leftrightarrow x_S < \infty$.

En plus, on n'a que 3 catégories : $\varphi_\alpha, \Psi_\alpha, \Lambda$.

Pour φ_α et Λ il existe
- $F \in \mathcal{D}(\varphi_\alpha)$ t.q. $x_F = +\infty$ (Pareto)
- $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$ t.q. $x_F = +\infty$ ($\mathcal{E}xp(\lambda)$)

(2) $F(x) = \frac{1}{\pi}\arctan(x) + \frac{1}{2} \in \mathcal{D}(G)$. Catégorie de G ?

$$x\bar{F}(x) = x\Big(\frac{1}{2} - \frac{1}{\pi}\underbrace{\arctan(x)}_{\underset{x\to\infty}{\sim} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{x}}\Big) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\pi}$$ à variation lente $\to F \in \mathcal{D}(\varphi_1)$

(3) $F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \in \mathcal{D}(G)$ $(\lambda > 0)$. Catégorie de G

$$F\left(\frac{x}{c_n} + d_n\right)^n = \left(1 - e^{-\lambda d_n} e^{-\frac{\lambda x}{c_n}}\right)^n = \left\{\begin{matrix} c_n = \lambda \\ d_n = \frac{\log n}{\lambda}\end{matrix}\right\} = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-e^{-x}} = \Lambda(x) \to$$

$\to$ par définition, $F \in \mathcal{D}(\Lambda)$

Exo 4

$(\xi, \beta) \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \times (0, +\infty)$, $x \in D_{\xi,\beta} = \begin{cases} [0, \infty) & \text{si } \xi > 0 \\ [0, -\frac{\beta}{\xi}] & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$

Pareto généralisée $\quad \bar{G}_{\xi,\beta}(x) = \left(1 + \frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}}$

$X_i \sim F$ i.i.d. avec $x_F = +\infty$

On sait que $\exists \beta : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ borélienne t.q. $\bar{F}_u(y) = \mathbb{P}(X > u+y \mid X > u)$ vérifie

$$\lim_{u\to\infty} \sup_{y\geq 0} |\bar{F}_u(y) - \bar{G}_{\xi,\beta(u)}(y)| = 0$$

Utiliser ce résultat pour proposer l'estimateur de

$q_\alpha = \inf\{x : F(x) \geq \alpha\}$.

$$\bar{F}(u+y) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(y)$$

u assez grand $\to \bar{F}_u \approx \bar{G}_{\hat{\xi}, \hat{\beta}(u)}$ estimateurs de $\xi, \beta(u)$ (qui maximisent vraisemblance pour $X_i : X_i > u$)

$$\bar{F}_n(u) \approx \frac{1}{n}\sum \mathbb{1}_{\{X_n > u\}} = \frac{N_u}{n} \quad \text{(proba empirique)}$$

$$\bar{F}_n(u+y) = \bar{F}_n(u)\bar{F}_u(y) \approx \frac{N_u}{n}\bar{G}_{\hat{\xi},\hat{\beta}(u)}(y) = \frac{N_u}{n}\left(1+\frac{\hat{\xi}y}{\hat{\beta}(u)}\right)^{-1/\hat{\xi}}$$

$$y = \hat{q}_\alpha - u \rightarrow \frac{N_u}{n}\left(1+\frac{\hat{\xi}y}{\hat{\beta}(u)}\right)^{-1/\hat{\xi}} = 1-\alpha$$

$$1+\frac{\hat{\xi}(\hat{q}_\alpha-u)}{\hat{\beta}(u)} = \left(\frac{n}{N_u}(1-\alpha)\right)^{-\hat{\xi}} \rightarrow \hat{q}_\alpha = u + \frac{\hat{\beta}(u)}{\hat{\xi}}\left(\left(\frac{n}{N_u}(1-\alpha)\right)^{-\hat{\xi}}-1\right)$$

Exo 5

$$\tau = \underbrace{\tau_b}_{\text{défaut de la banque}} \wedge \underbrace{\tau_c}_{\text{défaut du client}} \qquad \bar{\tau} = \tau \wedge T \qquad dC_t = \mathbb{1}_{\{t>\tau\}} dD_t$$

$R^c \leftarrow$ cash-flow qui doit être transféré en cas de défaut ($\mathcal{F}_\tau$-mes.) précisé par CSA

$$R^f = (1-K)\left(-\left(V_{\tau^b-} - \Gamma_{\tau^b-} - \xi_{\tau^b} S_{\tau^b-}\right)\right)^+$$

$\{\tau = \tau_b\} \rightarrow$ la banque rembourse une fraction $K \in [0,1]$

$$R = R^c - \mathbb{1}_{\{\tau=\tau_b\}} R^f$$

Portefeuille autofinançant

Action: $dS_t + \underbrace{dC_t^S}_{\text{les dividends}}$

Deux actifs sans risque : $dB_t^0 = (r_t + b_t) B_t^0 dt$ pour collat. posté par la banque
$d\bar{B}_t^0 = (r_t + \bar{b}_t)\bar{B}_t^0 dt$ —"— par client

Actif de rénumération induits par le régulateur
$dB_t^f = (r_t + \lambda_t) B_t^f dt$ par la banque
$d\bar{B}_t^f = (r_t + \bar{\lambda}_t)\bar{B}_t^f dt - (1-K)\bar{B}_t^f \delta_{\tau^b}(dt)$ par régulateur !
la perte de régulat. en cas de défaut de b.

Pf de la banque $\bar{V}_t$:

$$d\bar{V}_t = -\overset{\swarrow \text{flux au client}}{dC_t} + \xi_t(dS_t + dC_t^s) + (r_t^o + b_t)\Gamma_t^+ dt - (r_t + \bar{b}_t)\Gamma_t^- dt +$$

$$+ (r_t + \lambda_t)\big(\underbrace{\bar{V}_t - \Gamma_t - \xi_t S_t}_{\text{position en cash}}\big)^+ dt - (r_t + \bar{\lambda}_t)(\bar{V}_t - \Gamma_t - \xi_t S_t)^- dt + (1-K)(\bar{V}_{t-} - \Gamma_{t-} - \xi_{t-} S_{t-})^- \delta_{\tau_c}(dt)$$

$$= -dC_t + \xi_t dC_t + \eta_t^o dB_t^o + \bar{\eta}_t^o dB_t^o + \eta_t^f dB_t^f + \bar{\eta}_t^f d\bar{B}_t^f$$

où $\eta_t^o = \dfrac{\Gamma_t^+}{B_t^o}$ $\quad \bar{\eta}_t^o = \dfrac{-\Gamma_t^-}{B_t^o}$ $\quad \eta_t^f = \dfrac{(\bar{V}_t - \Gamma_t - \xi_t S_t)^+}{B_t^f}$ $\quad \bar{\eta}_t^f = \dfrac{-(\bar{V}_t - \Gamma_t - \xi_t S_t)^-}{\bar{B}_t^f}$

$$V_t = \bar{V}_t - \mathbb{1}_{\{\tau_b \le t\}} \underbrace{(1-K)(V_{\tau_b -} - \Gamma_{\tau_b} - \xi_{\tau_b -} S_{\tau_b -})^-}_{R_f}$$

$$\bar{V}_{\bar{\tau}} = R_c \rightarrow V_{\bar{\tau}} = R - \mathbb{1}_{\{\tau_c < \tau_b\}} R_f$$

2017 - 2018

Exo 1 $\quad$ F inversible. ($\swarrow$ fct. de répartition)

$$F(ax+b) = F(\lambda x + \beta) \quad \forall x$$

$$\downarrow F^{-1}(.)$$

$$ax + b = \lambda x + \beta \quad \forall x$$

$$x = 0 \rightarrow b = \beta \qquad ax = \lambda x \rightarrow a = \lambda$$

Exo 2 $\quad$ (1) $F \in \mathcal{C}$

$$F(F^{-1}(y)) = F(\inf\{x : F(x) \ge y\}) \overset{F\in\mathcal{C}}{=} \inf_{x : F(x) \ge y} F(x) \overset{F\in\mathcal{C}}{=} y$$

(2) $x^{\lambda}\bar{F}(x)$ à variation lente. M.q. $F \in \mathcal{D}(\varphi_\lambda)$ avec $d_n = 0$ et $c_n = F^{-1}(1 - \frac{1}{n})$: $F^n(c_n x + d) \rightarrow \exp\{-x^{-\lambda}\}$

$$n\bar{F}(c_n x) \overset{?}{\rightarrow} x^{-\lambda}$$

$$n\bar F(c_n x) = n x^{-2}\frac{(c_n x)^2 \bar F(c_n x)}{c_n^2 \bar F(c_n)}\cdot \bar F(c_n) = n x^{-2}\underbrace{\frac{L(c_n x)}{L(c_n)}}_{\to 1}\cdot\left(1-F\left(F^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)\right)\right)^{1/n} \to x^{-2}$$

Exo 3

$F_N \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\quad F_L \sim \log\mathcal{N}$

$$F_N^n\left(\frac{x}{c_n^N}+d_n^N\right)\to\Lambda(x) \qquad F_L^n\left(\frac{x}{c_n^L}+d_n^L\right)\to\Lambda(x)$$

$$e_n^N = \sqrt{2\log n}$$

$$d_n^N : \quad \frac{n F_N'(d_n^N)}{d_n^N}\longrightarrow 1$$

(1) d_n^N asymp? $\quad \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\dfrac{n}{d_n^N}e^{-\frac{(d_n^N)^2}{2}}\to 1$

$$\log n - \frac{1}{2}\log 2\pi - \log d_n - \frac{d_n^2}{2}\to 0$$

$$\frac{\log n}{d_n^2/2}\longrightarrow 1 \;\to\; \log\log n + \log 2 - 2\log d_n = \bar o(1)$$

$$\log d_n = \frac{1}{2}\log\log n + \frac{1}{2}\log 2 + \bar o(1)$$

$$d_n^2 = 2\left(\log n - \frac{1}{2}\log\log n - \frac{1}{2}\log 2 - \frac{1}{2}\log 2\pi\right) = 2\log n\left(1-\frac{1}{2}\,\frac{\log\log n + \log 4\pi}{\log n}\right)+\bar o(1)$$

$$d_n = \sqrt{2\log n}\left(1-\frac{1}{4}\,\frac{\log\log n + 4\pi}{\log n}\right)$$

(2) $\mu,\sigma>0 \qquad M_n = \max\limits_{i=1,\dots,n} e^{\mu+\sigma X_i} \qquad X_i\sim\mathcal{N}(0,1)$ i.i.d.

Utiliser le fait que $\mathbb{P}\left(M_n \le e^{\mu+\sigma d_n^N + \frac{\sigma x}{c_n^N}}\right)\to\Lambda(x) \rightsquigarrow d_n^L,\ c_n^L$?

$$F_L\left(\frac{x}{c_n^L}+d_n^L\right)^n = \mathbb{P}\left(M_n\le\frac{x}{c_n^L}+d_n^L\right)\to\Lambda(x)$$

$$e^{\mu+\sigma d_n^N+\frac{\sigma x}{c_n^N}} = \underbrace{e^{\mu+\sigma d_n^N}}_{d_n^L}\left(1+\frac{\sigma}{c_n^N}\cdot x\right) \qquad c_n^L = \frac{c_n^N}{\sigma}e^{-\mu-\sigma d_n^N}$$

$$\Downarrow$$

$$e^{\mu+\sigma d_n^N+\frac{\sigma x}{c_n^N}} \sim e_n^L x + d_n^L$$

Exo 4

$X_i \sim G_{\xi,\beta}$ i.i.d. $\quad \overline{G}_{\xi,\beta}(x) = \left(1+\frac{\xi x}{\beta}\right)^{-1/\xi} \mathbb{1}_{\xi\neq 0} + e^{-x/\beta}\mathbb{1}_{\xi=0}$

$$\mathcal{D}_{\xi,\beta} = \begin{cases} [0,\infty) & \text{si } \xi \geq 0 \\ [0, -\beta/\xi] & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

Lorsque $\xi < 1$ et $\mathbb{E}[X_1 - u \mid X_1 > u] = \underbrace{\frac{\beta + \xi u}{1-\xi}}_{=\ell(u)}$ expliquer le choix de u

et l'estimation de (ξ,β)

$N_u = \text{Card}\{i : X_i > u\}$

Analogue empirique de $\ell(u)$: $\ell_n(u) = \frac{1}{N_u}\sum (X_i - u)\mathbb{1}_{\{X_i > u\}}$

On choisi u t.q. $\ell_n(a)$ soit à peu près linéaire quand $a \geq x$

(β,ξ) - maximisation de log-vraisemblence

$$p_{\xi,\beta}(x) = -\frac{d}{dx}\overline{G}_{\xi,\beta}(x) = \frac{1}{\beta}\left(1+\frac{\xi x}{\beta}\right)^{-\frac{1}{\xi}-1}\mathbb{1}_{\xi\neq 0} + \frac{1}{\beta}e^{-\frac{x}{\beta}}\mathbb{1}_{\xi=0}$$

$$\log p_{\xi,\beta}(x) = \begin{cases} -\left(\frac{1}{\xi}+1\right)\log\left(1+\frac{\xi x}{\beta}\right) - \log\beta, & \xi \neq 0 \\ -\frac{x}{\beta} - \beta, & \xi = 0 \end{cases}$$

$$\{Y_k\}_{k=1}^{N_u} = \{X_i : X_i > u\}$$

$$L = \text{Log-Vraisemlence} = \begin{cases} -\left(\frac{1}{\xi}+1\right)\sum_1^{N_u}\log\left(1+\frac{\xi Y_i}{\beta}\right) - N_u\log\beta, & \xi\neq 0 \\ -\frac{1}{\beta}\sum Y_i - N_u\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0 \end{cases} \longrightarrow \begin{matrix} \hat{\beta} = \ldots \\ \hat{\xi} = \ldots \end{matrix}$$

à resoudre numériquement

2016-2017

Exo 2

$X_i \sim \overline{F}$ $\quad M_n = \max_{1 \ldots n} X_i$. Pour $\tau > 0$ et (u_n) m.q.

$$\lim_{n\to\infty} n\overline{F}(u_n) = \tau \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(M_n \leq u_n) = e^{-\tau}$$

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n) = (1-\bar{F}(u_n))^n \to e^{-\tau} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \bar{F}(u_n) \to 0)$$

$$\Leftrightarrow \quad -n\log(1-\bar{F}(u_n)) \to \tau$$

$$\lim_{n\to\infty} -n\log(1-\bar{F}(u_n)) = \lim_{n\to\infty} -n(-F(u_n)) + \bar{o}(nF(u_n)) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} nF(u_n) + \bar{o}(\overset{\nearrow 0}{n\bar{F}(u_n)}) = \lim_{n\to\infty} nF(u_n)$$

2015-2016

Exo 3 $\quad \mathcal{P}ois(\theta) \qquad \mathbb{P}(\xi = k) = \dfrac{\theta^k}{k!}e^{-\theta}$

Principe d'attraction $\longrightarrow \displaystyle\lim_{x\to x_\xi} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x^-)} = 1$

$$x_\xi = \infty \qquad \frac{\bar{F}(n)}{\bar{F}(n-1)} = \frac{\sum_{k=n+1}^{\infty} \theta^k/k!}{\sum_{k=n}^{\infty}\theta^k/k!} = 1 - \frac{\theta^n/n!}{\sum_{k=n}^{\infty}\theta^k/k!} = 1 - \frac{1}{\underbrace{\sum_{k=n}^{\infty}\theta^{k-n}/(k!/n!)}_{\leq \sum\left(\frac{\theta}{n}\right)^k = \frac{1}{1-\theta/n}}} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\sum_{\ell=0}^{\infty}\theta^\ell / \frac{(\ell+n)!}{n!}} \leq 1-e^{-\theta} < 1$$

$$\sum \frac{\theta^\ell n!}{(\ell+n)!} \leq e^\theta$$

Exo 4
$$\bar{G}_{\xi,\beta} = \begin{cases} \left(1+\dfrac{\xi x}{\beta}\right)^{-1/\xi} & \xi \neq 0 \\ e^{-x/\beta} & \xi = 0 \end{cases}$$

$\xi < 1$

$$e(u) = \mathbb{E}[X_1 - u \mid X_1 > u] = \frac{-1}{\bar{G}_{\xi,\beta}(u)}\int_u^{x_\xi}(x-u)\,d\bar{G}(u) = \frac{1}{\bar{G}(u)}\int_u^{x_\xi}\bar{G}(x)\,dx =$$

$$= \begin{cases} \underbrace{\dfrac{-1}{\cancel{\bar{G}(u)}}\left(-\dfrac{1}{\xi}+1\right)^{-1}}_{\frac{\xi}{1-\xi}}\dfrac{\beta}{\xi}\cancel{\bar{G}(u)}\left(1+\dfrac{\xi u}{\beta}\right) = \dfrac{\beta+\xi u}{1-\xi} & \xi \neq 0 \\ \dfrac{1}{\bar{G}(u)}\beta\bar{G}(u) = \beta & \xi = 0 \end{cases}$$

$$= \frac{\beta+\xi u}{1-\xi}$$