# Examen Théorie de valeurs extrêmes 2010-2011

Master II SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice - Durée 2h00

Questionnaire B

Ce examen est un questionnaire à choix multiples constitué de 16 questions. Plusieurs réponses sont proposées pour chaque question. Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses.

Les réponses sont à inscrire sur la feuille jointe, en cochant pour chaque question la (ou les) bonne(s) réponse(s).

Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.

Toute réponse exacte entraîne une bonification de 1 point, toute erreur est pénalisée de 0,5 point.

**Q 1)** Soient $(X_i)$ une suite de variables i.i.d. et $\bar{X}_n = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} X_i$. Alors

$$\Pr\left(\bar{X}_n \le \sigma_n x + m_n\right) \to \Phi(x) \text{ quand } n \to \infty,$$

où $\Phi$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée et réduite si

A) $m_n = \mathbb{E}(\bar{X}_n)$, $\sigma_n^2 = Var(\bar{X}_n)$
B) $m_n = n\mathbb{E}(\bar{X}_n)$, $\sigma_n^2 = Var(\bar{X}_n)$
C) $m_n = \mathbb{E}(X_1)$, $\sigma_n = Var(\bar{X}_n)$
D) $m_n = \mathbb{E}(\bar{X}_n)$, $\sigma_n^2 = nVar(\bar{X}_n)$

**Q 2)** S'il existe deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \le x\right) = H(x),$$

et si $\tilde{a}_n = ca_n$ et $\tilde{b}_n = b_n + d^{-1}a_n$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{M_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \le x\right) =$$

A) $H(cx + d)$
B) $H(c^{-1}x + d)$
C) $H(cx + d^{-1})$
D) $H(c^{-1}x + d^{-1})$

**Q 3)** Soient $(X_i)$ une suite de variables i.i.d. et $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Il est possible de trouver une suite $(u_n)$ telle que $\lim_{n\to\infty} P(M_n \leq u_n) = e^{-\tau}$ si

A) $\lim_{n\to\infty} \Pr(X_i > u_n) = \ln(\tau)$
B) $\lim_{n\to\infty} n \Pr(X_i > u_n) = \ln(\tau)$
C) $\lim_{n\to\infty} \ln(n) \Pr(X_i > u_n) = \tau$
D) $\lim_{n\to\infty} n \Pr(X_i > u_n) = \tau$

**Q 4)** Soient $(X_i)$ une suite de variables i.i.d. de loi $G_\xi = GEV(0, 1, \xi)$

$$G_\xi(x) = \begin{cases} \exp\left(-[1+\xi x]_+^{-1/\xi}\right) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{si } \xi = 0, \end{cases}$$

et $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$, alors $(M_n - a_n)/b_n$ a la même loi que $X_1$ si

A) $a_n = n^\xi$ et $b_n = (n^\xi - 1)/\xi$
B) $a_n = (n^\xi - 1)\xi$ et $b_n = n^{-\xi}$
C) $a_n = (n^\xi - 1)/\xi$ et $b_n = n^\xi$
D) $a_n = n^{-\xi}$ et $b_n = (n^\xi - 1)\xi$

On définit les lois de

$$\text{Fréchet } (\alpha > 0): \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

$$\text{Weibull } (\alpha > 0): \quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\} & \text{si } x \leq 0, \\ 0 & \text{si } x > 0, \end{cases}$$

$$\text{Gumbel}: \quad \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} \quad x \in \mathbb{R}.$$

**Q 5)** Si $X \sim \Phi_\alpha$, alors

A) $\alpha \ln(X) \sim \Lambda$
B) $\ln(X) \sim \alpha^{-1}\Phi_\alpha$
C) $-X \sim \Psi_\alpha$
D) $X^\alpha \sim \Lambda$

?

**Q 6)** Soit $X$ une variable aléatoire de distribution log-gamma de densité

$$f(x) = \frac{\alpha^\beta}{\Gamma(\beta)} (\ln x)^{\beta-1} x^{-\alpha-1}.$$

Sa fonction de répartition

A) appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel
B) appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet
C) appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull
D) n'appartient à aucun domaine d'attraction.

**Q 7)** La distribution logistique,

$$F(x) = \frac{1}{1+e^{-x}}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

A) appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel
B) appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet
C) appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull
D) n'appartient à aucun domaine d'attraction

**Q 8)** Soient $(X_i)$ une suite de variables i.i.d. de loi $N(0,1)$ et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$. On définit les suites $a_n$ et $b_n$ par

$$\begin{aligned} a_n &= (2\log n)^{-1/2} \\ b_n &= (2\log n)^{1/2} - \frac{1}{2}(2\log n)^{-1/2}[\log(\log n) + \log(4\pi)] \end{aligned}$$

telles que, quand $n \to \infty$,

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{L} \Lambda.$$

Soient $Y_i = \exp(\mu + \sigma X_i)$ et $\tilde{M}_n = \max(Y_1, \ldots, Y_n)$. Alors

$$\frac{\tilde{M}_n - \tilde{b}_n}{\tilde{a}_n} \xrightarrow{L} \Lambda$$

si

A) $\tilde{a}_n = \sigma a_n \exp(\mu + b_n)$ et $\tilde{b}_n = \exp(\mu + b_n)$
B) $\tilde{a}_n = \mu a_n \exp(\mu + \sigma b_n)$ et $\tilde{b}_n = \exp(\mu + \sigma b_n)$
C) $\tilde{a}_n = \exp(\mu + \sigma b_n)$ et $\tilde{b}_n = \sigma a_n \exp(\mu + \sigma b_n)$
D) $\tilde{a}_n = \sigma a_n \exp(\mu + \sigma b_n)$ et $\tilde{b}_n = \exp(\mu + \sigma b_n)$

**Q 9)** Soient $(X_i)$ une suite de variables i.i.d.et une suite $(u_n)$ telle que $\lim_{n\to\infty} n \Pr(X_i > u_n) = \tau$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \ln\left(\mathbb{E}\left[\exp\left(t\sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i > u_n\}}\right)\right]\right) =$$

A) $\tau e^t$
B) $\tau t$
C) $\tau(t-1)$
D) $\tau(e^t - 1)$

**Q 10)** Soient $(X_i)$ une suite de variables i.i.d. de loi absolument continue et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$, alors $\Pr(M_n > M_{n-1}) =$

A) $\mathbb{E}\left[\bar{F}^n(X_1)\right]$
B) $\mathbb{E}\left[\bar{F}^{n-1}(X_1)\right]$
C) $n^{-1}$
D) $1/\ln(n)$

**Q 11)** Soit $X$ une variable aléatoire de fonction de répartition $F$ telle que

$$\lim_{u\to x^F} \frac{\bar{F}(u + xa(u))}{\bar{F}(u)} = \begin{cases} [1+\xi x]_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi \neq 0, \\ e^{-x} & \text{si } \xi = 0. \end{cases}$$

Alors

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \begin{cases} \exp\left(-[1+\xi x]_+^{-1/\xi}\right) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp(-\exp(-x)) & \text{si } \xi = 0, \end{cases},$$

si

A) $a_n = a(b_n)$ et $b_n = F^{-1}(1-n^{-1})$
B) $b_n = a(a_n)$ et $a_n = F^{-1}(1-n^{-1})$
C) $b_n = a(a_n)$ et $b_n = F^{-1}(n^{-1})$
D) $a_n = a(b_n)$ et $b_n = 1 - F^{-1}(n^{-1})$

**Q 12)** Soit $G$ la fonction de répartition telle que

$$G(x) = \exp\left(-\exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\right), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Alors le niveau $z_p$ de période de retour $1/p$ est donnée par

A) $\mu - \sigma \log(-\log(1-p)$
B) $\mu - \log(-\log(1-\sigma p)$
C) $-\log(-\log(\mu - \sigma p)$
D) $\mu - \sigma \log(1-p)$

**Q 13)** Soit $e(u) = \mathbb{E}(X - u | X > u)$ la fonction d'espérance de vie résiduelle d'une variable aléatoire $X$. Si $X$ a une distribution Exponentielle de paramètre $\lambda$, alors

expo sans mémoire.

A) $\forall u \; e(u) = \lambda$.
B) $\forall u \; e(u) = \lambda^{-1}$.
C) $\lim_{u\to\infty} e(u) = \lambda$.
D) $\lim_{u\to\infty} e(u) = \lambda^{-1}$.

**Q 14)** Pour détecter qu'une distribution empirique a une queue de distribution (pour ses grandes valeurs) de type Pareto, il faut considérer le graphique quantile-quantile suivant

A) $\{\ln(\ln X_{(i)}), -\ln(1 - i/n)\}$
B) $\{X_{(i)}, -\ln(1 - i/n)\}$
C) $\{\ln X_{(i)}, -\ln(1 - i/n)\}$
D) $\{\ln X_{(i)}, \ln(-\ln(1 - i/n))\}$

Remarque: si $X$ a une distribution de Pareto, alors $\ln(X)$ a une distribution Exponentielle.

**Q 15)** Supposons que $Y$ a une distribution Pareto Généralisée GPD$(\sigma, \xi)$ telle que

$$P(Y < y) = 1 - \left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}.$$

Alors $Y - v | Y > v$ a une distribution

A) GPD$(\sigma, \xi)$
B) GPD$(\sigma, v\xi)$
C) GPD$(\sigma + v, \xi)$
D) GPD$(\sigma + \xi v, \xi)$

**Q 16)** Soient $(X_i)$ une suite de variables i.i.d. de loi $F$ et et une suite $(u_n)$ telle que $\lim_{n\to\infty} n(1 - F(u_n)) = \tau$. On définit $Y_i = \max(X_i, X_{i-2})$ alors

$$\lim_{n\to\infty} P(\max(Y_1, \ldots, Y_n) \leq u_n) =$$

A) $\exp(-\tau)$
B) $\exp(-\tau/2)$
C) $\exp(-2\tau)$
D) $\lim_{n\to\infty} P(\max(X_1, \ldots, X_n) \leq u_n)$

**QCM** **Assurance-non-vie**

**ISFA 3**
**Examen d'avril 2011**

Nom et prénom :

..................................................

*Il faut rendre uniquement le formulaire de réponses pour la partie de Stéphane Loisel. Il faut donc détacher le formulaire de réponse, sans abîmer les quatre gros points noirs de ce formulaire. Seules les réponses saisies sur le formulaire de réponse (dernière feuille) seront prises en compte. Attention, pas de rature ou de case partiellement noircie: les cases non cochées ne doivent pas présenter de trace, et les cases cochées doivent être complètement noircies. Ne pas oublier de mettre votre nom sur le formulaire de réponse et d'y noircir les cases correspondant à votre numéro étudiant.*
*L'usage de la calculatrice est autorisé. Une feuille recto-verso (2 pages) de notes manuscrites et personnelles est autorisée. La feuille avec les lois usuelles est autorisée. Pas d'autre document.*
*Les questions sont indépendantes. Les trois dernières questions sont bien sûr des questions bonus.*
*Le sujet est long, soyez efficaces.*
*Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.*
*Des points négatifs seront souvent affectés à de mauvaises réponses.*
*Les étudiants en formation continue doivent demander une feuille d'information supplémentaire.*

**Question 1 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] Les bornes de Fréchet sont des copules en dimension supérieure ou égale à 3.
- [B] En finance, la corrélation entre $n \geq 3$ facteurs de risques liés aux actions et aux taux d'intérêt est toujours positive.
- [C] Les bornes de Fréchet peuvent permettre d'obtenir des inégalités en dimension supérieure ou égale à 3.
- [D] Etudier la structure de dépendance pour toutes les paires est suffisant pour comprendre la structure de dépendance entre $n \geq 3$ variables aléatoires.
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 2 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] La copule de survie de Clayton peut servir à prendre en compte une forte corrélation des extrêmes pour deux variables aléatoires de pertes.
- [B] La copule de Clayton est une copule elliptique.
- [C] La copule de Clayton peut servir à prendre en compte une forte corrélation des extrêmes pour deux variables aléatoires de pertes.
- [D] La copule de Clayton présente de la dépendance fortes des extrêmes à droite et à gauche.
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 3** Considérons le modèle collectif en assurance non-vie:

$$S = \sum_{k=1}^{N} W_k,$$

où $N$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.53$ et où les $W_k$, $k \geq 1$ sont indépendants, identiquement distribués et indépendants de $N$, avec $S = 0$ si $N = 0$.
De plus on suppose que $P(W_1 = 1456) = P(W_1 = 2912) = 0.5$. Dans quel intervalle la probabilité $P(S > 1856)$ se trouve-t-elle?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A [0, 0.05[ | E [0.2, 0.25[ | I [0.4, 0.45[ | M [0.6, 0.65[ | Q [0.8, 0.85[ |
| B [0.05, 0.1[ | ☒ F [0.25, 0.3[ | J [0.45, 0.5[ | N [0.65, 0.7[ | R [0.85, 0.9[ |
| C [0.1, 0.15[ | G [0.3, 0.35[ | K [0.5, 0.55[ | O [0.7, 0.75[ | S [0.9, 0.95[ |
| D [0.15, 0.2[ | H [0.35, 0.4[ | L [0.55, 0.6[ | P [0.75, 0.8[ | T [0.95, 1[ |

**Question 4** ♣ Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- A En général, le risque lié au comportement des assurés est plus important dans les contrats de type GMWB que dans les contrats de type GMIB.
- B Les variable annuities permettent de rendre le marché de l'assurance complet.
- C Les contrats de type variable annuities sont plus faciles à gérer que les contrats traditionnels
- D Les garanties de roll-up et de cliquet peuvent être présentes dans certains contrats de type variable annuities, même après le passage en phase de versement de rente
- ☒ E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 5** Soit $N$ une variable aléatoire de Poisson-mélange de paramètres $\lambda = 348$ et de loi de mélange $\Theta$ de loi uniforme sur l'intervalle $[0.56, 1.44]$. Dans quel intervalle la proportion de la variance de $N$ qui ne provient pas de l'hétérogénité créée par le mélange se trouve-t-elle?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| ☒ A [0, 0.05[ | E [0.2, 0.25[ | I [0.4, 0.45[ | M [0.6, 0.65[ | Q [0.8, 0.85[ |
| B [0.05, 0.1[ | F [0.25, 0.3[ | J [0.45, 0.5[ | N [0.65, 0.7[ | R [0.85, 0.9[ |
| C [0.1, 0.15[ | G [0.3, 0.35[ | K [0.5, 0.55[ | O [0.7, 0.75[ | S [0.9, 0.95[ |
| D [0.15, 0.2[ | H [0.35, 0.4[ | L [0.55, 0.6[ | P [0.75, 0.8[ | T [0.95, 1[ |

**Question 6** Mesures de dépendance. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires (générales). Laquelle de ces propositions est correcte ?

- A Si le tau de Kendall de $X$ et $Y$ est nul, alors $X$ et $Y$ sont indépendants.
- B En général, le fait que le coefficient de corrélation linéaire entre $X$ et $Y$ soit très proche de 0 ne veut pas forcément dire que les risques sont indépendants mais par contre cela implique qu'il n'y a pas de dépendance dans les queues de distributions entre $X$ et $Y$.
- C Le coefficient de corrélation linéaire entre $X$ et $Y$ est toujours égal à celui entre $e^X$ et $e^Y$.
- D En général, le fait que le coefficient de corrélation linéaire entre $X$ et $Y$ soit très proche de 0 ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas de dépendance dans les queues de distributions entre $X$ et $Y$.
- E Si le coefficient de corrélation linéaire entre $X$ et $Y$ est nul, alors $X$ et $Y$ sont indépendants.

**QCM** **Assurance-non-vie**

**ISFA 3**
**Examen d'avril 2011**

Nom et prénom :

.............................................

*Il faut rendre uniquement le formulaire de réponses pour la partie de Stéphane Loisel. Il faut donc détacher le formulaire de réponse, sans abîmer les quatre gros points noirs de ce formulaire. Seules les réponses saisies sur le formulaire de réponse (dernière feuille) seront prises en compte. Attention, pas de rature ou de case partiellement noircie: les cases non cochées ne doivent pas présenter de trace, et les cases cochées doivent être complètement noircies. Ne pas oublier de mettre votre nom sur le formulaire de réponse et d'y noircir les cases correspondant à votre numéro étudiant.*
*L'usage de la calculatrice est autorisé. Une feuille recto-verso (2 pages) de notes manuscrites et personnelles est autorisée. La feuille avec les lois usuelles est autorisée. Pas d'autre document. Les questions sont indépendantes. Les trois dernières questions sont bien sûr des questions bonus.*
*Le sujet est long, soyez efficaces.*
*Les questions faisant apparaître le symbole ♣ peuvent présenter zéro, une ou plusieurs bonnes réponses. Les autres ont une unique bonne réponse.*
*Des points négatifs seront souvent affectés à de mauvaises réponses.*
*Les étudiants en formation continue doivent demander une feuille d'information supplémentaire.*

**Question 1 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- ~~A~~ Les bornes de Fréchet sont des copules en dimension supérieure ou égale à 3.
- B En finance, la corrélation entre $n \geq 3$ facteurs de risques liés aux actions et aux taux d'intérêt est toujours positive.
- C Les bornes de Fréchet peuvent permettre d'obtenir des inégalités en dimension supérieure ou égale à 3.
- ~~D~~ Etudier la structure de dépendance pour toutes les paires est suffisant pour comprendre la structure de dépendance entre $n \geq 3$ variables aléatoires.
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 2 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- ~~A~~ La copule de survie de Clayton peut servir à prendre en compte une forte corrélation des extrêmes pour deux variables aléatoires de pertes.
- ~~B~~ La copule de Clayton est une copule elliptique.
- C La copule de Clayton peut servir à prendre en compte une forte corrélation des extrêmes pour deux variables aléatoires de pertes.
- ~~D~~ La copule de Clayton présente de la dépendance fortes des extrêmes à droite et à gauche.
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

$\lambda_L > 0$ pr Clayton
$\lambda_U = 0$

$\lambda_L = 0$ pr Survie
$\lambda_U > 0$

**Question 3** Considérons le modèle collectif en assurance non-vie:

$$S = \sum_{k=1}^{N} W_k,$$

où $N$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda = 0.53$ et où les $W_k$, $k \geq 1$ sont indépendants, identiquement distribués et indépendants de $N$, avec $S = 0$ si $N = 0$.
De plus on suppose que $P(W_1 = 1456) = P(W_1 = 2912) = 0.5$. Dans quel intervalle la probabilité $P(S > 1856)$ se trouve-t-elle?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A [0, 0.05[ | E [0.2, 0.25[ | I [0.4, 0.45[ | M [0.6, 0.65[ | Q [0.8, 0.85[ |
| B [0.05, 0.1[ | F [0.25, 0.3[ | J [0.45, 0.5[ | N [0.65, 0.7[ | R [0.85, 0.9[ |
| C [0.1, 0.15[ | G [0.3, 0.35[ | K [0.5, 0.55[ | O [0.7, 0.75[ | S [0.9, 0.95[ |
| D [0.15, 0.2[ | H [0.35, 0.4[ | L [0.55, 0.6[ | P [0.75, 0.8[ | T [0.95, 1[ |

**Question 4 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

A En général, le risque lié au comportement des assurés est plus important dans les contrats de type GMWB que dans les contrats de type GMIB.

B Les variable annuities permettent de rendre le marché de l'assurance complet.

C Les contrats de type variable annuities sont plus faciles à gérer que les contrats traditionnels

D Les garanties de roll-up et de cliquet peuvent être présentes dans certains contrats de type variable annuities, même après le passage en phase de versement de rente

E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 5** Soit $N$ une variable aléatoire de Poisson-mélange de paramètres $\lambda = 348$ et de loi de mélange $\Theta$ de loi uniforme sur l'intervalle $[0.56, 1.44]$. Dans quel intervalle la proportion de la variance de $N$ qui ne provient pas de l'hétérogénité créee par le mélange se trouve-t-elle?

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A [0, 0.05[ | E [0.2, 0.25[ | I [0.4, 0.45[ | M [0.6, 0.65[ | Q [0.8, 0.85[ |
| B [0.05, 0.1[ | F [0.25, 0.3[ | J [0.45, 0.5[ | N [0.65, 0.7[ | R [0.85, 0.9[ |
| C [0.1, 0.15[ | G [0.3, 0.35[ | K [0.5, 0.55[ | O [0.7, 0.75[ | S [0.9, 0.95[ |
| D [0.15, 0.2[ | H [0.35, 0.4[ | L [0.55, 0.6[ | P [0.75, 0.8[ | T [0.95, 1[ |

**Question 6** Mesures de dépendance. Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires (générales). Laquelle de ces propositions est correcte ?

A Si le tau de Kendall de $X$ et $Y$ est nul, alors $X$ et $Y$ sont indépendants.

B En général, le fait que le coefficient de corrélation linéaire entre $X$ et $Y$ soit très proche de 0 ne veut pas forcément dire que les risques sont indépendants mais par contre cela implique qu'il n'y a pas de dépendance dans les queues de distributions entre $X$ et $Y$.

C Le coefficient de corrélation linéaire entre $X$ et $Y$ est toujours égal à celui entre $e^X$ et $e^Y$.

D En général, le fait que le coefficient de corrélation linéaire entre $X$ et $Y$ soit très proche de 0 ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas de dépendance dans les queues de distributions entre $X$ et $Y$.

E Si le coefficient de corrélation linéaire entre $X$ et $Y$ est nul, alors $X$ et $Y$ sont indépendants.

**Question 10 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] On peut construire une copule archimédienne hiérarchique telle que les risques 1 et 2 admmettent une copule de Frank de paramètre 1/2, telle que les risques 3 et 4 admmettent une copule de Gumbel de paramètre 4, et telle que les risques 1 et 2 soient indépendants des risques 3 et 4.
- [B] On peut construire une copule archimédienne hiérarchique telle que les risques 1 et 2 admmettent une copule de Gumbel de paramètre 2, telle que les risques 3 et 4 admmettent une copule de Gumbel de paramètre 4, et telle que les risques 1 et 2 soient indépendants des risques 3 et 4.
- [C] Les copules archimédiennes sont des cas particuliers des copules archimédiennes hiérarchiques.
- [D] On peut combiner différentes familles pour construire des copules archimédiennes hiérarchiques, du moment qu'on respecte un ordre pour les tau de Kendall.
- [E] On peut combiner des copules de Gumbel pour construire des copules archimédiennes hiérarchiques, du moment qu'on respecte un ordre sur les paramètres.
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 11 ♣** La notion de risk appetite n'est pas encore complètement unifiée. Néanmoins, laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] Le risk appetite est un nouveau mode de rémunération plus éthique dans le monde de la finance et de l'assurance.
- [B] Le risk appetite est une des notions que l'on peut utiliser (parmi d'autres) dans un processus ERM dans une compagnie d'assurance.
- [C] Le risk appetite est le niveau de risque qu'une entreprise est prête à accepter pour atteindre ses objectifs.
- [D] Le risk appetite est défini dans chaque service, et le risk appetite global de la compagnie est ensuite obtenu en sommant les risk appetite de chaque service.
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 12 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] Le générateur d'une copule archimédienne est toujours croissant.
- [B] Les copules archimédiennes incluent les copules elliptiques.
- [C] Les risques admettant une copule archimédienne sont forcément indépendants ou positivement dépendants.
- [D] A partir d'un générateur $\phi$, on peut construire une copule archimédienne quelle que soit la dimension mais elle sera toujours symmétrique
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 7 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] On ne peut pas combiner différentes familles de copules pour construire des vyne copulas.
- [B] Les seules copules qui sont à la fois des vyne copulas et des copules archimédiennes sont les copules gaussiennes et de Student
- [C] Les vyne copulas sont des cas particuliers des copules archimédiennes hiérarchiques.
- [D] Pour construire une vyne copula, on spécifie d'abord la dépendance présente entre toutes les paires de variables aléatoires, puis on construit un arbre avec ces copules bivariées.
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 8 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] Lorsque le nombre de degrés de liberté de la copule de Student est égal à 1, la copule de Student correspond à une copule gaussienne.
- [B] La copule de Student ne peut présenter que de la dépendance forte des extrêmes et pas de dépendance faible des extrêmes.
- [C] La copule de Student a six paramètres en dimension 3.
- [D] La copule de Student peut présenter de la dépendance faible des extrêmes.
- [E] La copule de Student a trois paramètres en dimension 3.
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 9 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] La méthode des simulations dans les simulations est souvent très coûteuse en temps, et la méthode des replicating portfolios plus rapide.
- [B] Dans la méthode des simulations dans les simulations, toutes les simulations sont effectuées en univers risque neutre.
- [C] La méthode des replicating portfolios consiste à répliquer exactement les cash-flows d'un portefeuille d'assurance avec un panier d'actifs financiers.
- [D] Les replicating portfolios et la méthode des simulations dans les simulations sont utilisées pour calculer des capitaux économiques en assurance-vie.
- [E] Les replicating portfolios ne changent que très peu d'un semestre à l'autre pour un portefeuille d'assurance donné et sont donc toujours très stables dans le temps.
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 10 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- A On peut construire une copule archimédienne hiérarchique telle que les risques 1 et 2 admmettent une copule de Frank de paramètre 1/2, telle que les risques 3 et 4 admmettent une copule de Gumbel de paramètre 4, et telle que les risques 1 et 2 soient indépendants des risques 3 et 4.
- B On peut construire une copule archimédienne hiérarchique telle que les risques 1 et 2 admmettent une copule de Gumbel de paramètre 2, telle que les risques 3 et 4 admmettent une copule de Gumbel de paramètre 4, et telle que les risques 1 et 2 soient indépendants des risques 3 et 4.
- C Les copules archimédiennes sont des cas particuliers des copules archimédiennes hiérarchiques.
- D On peut combiner différentes familles pour construire des copules archimédiennes hiérarchiques, du moment qu'on respecte un ordre pour les tau de Kendall.
- E On peut combiner des copules de Gumbel pour construire des copules archimédiennes hiérarchiques, du moment qu'on respecte un ordre sur les paramètres.
- F *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 11 ♣** La notion de risk appetite n'est pas encore complètement unifiée. Néanmoins, laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- A Le risk appetite est un nouveau mode de rémunération plus éthique dans le monde de la finance et de l'assurance.
- B Le risk appetite est une des notions que l'on peut utiliser (parmi d'autres) dans un processus ERM dans une compagnie d'assurance.
- C Le risk appetite est le niveau de risque qu'une entreprise est prête à accepter pour atteindre ses objectifs.
- D Le risk appetite est défini dans chaque service, et le risk appetite global de la compagnie est ensuite obtenu en sommant les risk appetite de chaque service.
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 12 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- A Le générateur d'une copule archimédienne est toujours croissant.
- B Les copules archimédiennes incluent les copules elliptiques.
- C Les risques admettant une copule archimédienne sont forcément indépendants ou positivement dépendants.
- D A partir d'un générateur $\phi$, on peut construire une copule archimédienne quelle que soit la dimension mais elle sera toujours symmétrique
- E *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 7** ♣ Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] On ne peut pas combiner différentes familles de copules pour construire des vyne copulas.
- [B] Les seules copules qui sont à la fois des vyne copulas et des copules archimédiennes sont les copules gaussiennes et de Student
- [C] Les vyne copulas sont des cas particuliers des copules archimédiennes hiérarchiques.
- [D] Pour construire une vyne copula, on spécifie d'abord la dépendance présente entre toutes les paires de variables aléatoires, puis on construit un arbre avec ces copules bivariées.
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 8** ♣ Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] Lorsque le nombre de degrés de liberté de la copule de Student est égal à 1, la copule de Student correspond à une copule gaussienne.
- [B] La copule de Student ne peut présenter que de la dépendance forte des extrêmes et pas de dépendance faible des extrêmes.
- [C] La copule de Student a six paramètres en dimension 3.
- [D] La copule de Student peut présenter de la dépendance faible des extrêmes.
- [E] La copule de Student a trois paramètres en dimension 3.
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 9** ♣ Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] La méthode des simulations dans les simulations est souvent très coûteuse en temps, et la méthode des replicating portfolios plus rapide.
- [B] Dans la méthode des simulations dans les simulations, toutes les simulations sont effectuées en univers risque neutre.
- [C] La méthode des replicating portfolios consiste à répliquer exactement les cash-flows d'un portefeuille d'assurance avec un panier d'actifs financiers.
- [D] Les replicating portfolios et la méthode des simulations dans les simulations sont utilisées pour calculer des capitaux économiques en assurance-vie.
- [E] Les replicating portfolios ne changent que très peu d'un semestre à l'autre pour un portefeuille d'assurance donné et sont donc toujours très stables dans le temps.
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 13 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] Plusieurs mortality bonds ont été émis avec succès.
- [B] Plusieurs longevity bonds ont été émis avec succès.
- [C] Depuis la crise, quasiment toutes les opérations de titrisation ne font plus intervenir la création d'une société dédiée pour l'occasion, le SPV, à cause du risque de contrepartie.
- [D] Dans la plupart des cat-bonds, on élimine complètement le risque de taux et de contrepartie par le biais d'un collatéral. Cela permet aux investisseurs de décorréler leur risque de ceux des marchés financiers.
- [E] La titrisation est un moyen de transférer des risques vers les marchés financiers.
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 14 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] Les copules gaussiennes en dimension 3 sont des copules archimédiennes.
- [B] La copule gaussienne est stable par mélange.
- [C] En dimension 2, lorsque le paramètre de la copule gaussienne est strictement entre zéro et 1, la copule gaussienne présente de la dépendance faible des extrêmes.
- [D] Le coefficient de corrélation linéaire est toujours pertinent pour mesurer la dépendance entre des variables aléatoires de Pareto $X$ et $Y$ qui admettent la copule gaussienne.
- [E] En dimension 2, lorsque le paramètre de la copule gaussienne est strictement inférieur à 1, la copule gaussienne ne présente pas de dépendance forte des extrêmes.
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

JOLIC

**Question 15 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] En grande dimension, la corrélation réelle entre les risques est forcément symmétrique.
- [B] En finance, plus la fenêtre de mesure est petite, plus la corrélation mesurée risque d'être instable.
- [C] Le pas de temps ne joue pas de rôle dans l'estimation de la volatilité ou des corrélations en finance.
- [D] En grande dimension, le seul modèle pour modéliser les corrélations est le modèle gaussien à $n$ facteurs.
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 16** Sur l'île de Pâques se trouvent des statues célèbres, restes d'une civilisation aujourd'hui disparue. Dans quel intervalle le numéro dans notre alphabet de la quatrième lettre du nom des statues ($A = 1$, $B = 2$, etc...) se trouve-t-il? MOAI

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| [A] [1, 2[ | [E] [5, 6[ | [I] [9, 10[ | [M] [13, 14[ | [Q] [17, 18[ |
| [B] [2, 3[ | [F] [6, 7[ | [J] [10, 11[ | [N] [14, 15[ | [R] [18, 19[ |
| [C] [3, 4[ | [G] [7, 8[ | [K] [11, 12[ | [O] [15, 16[ | [S] [19, 20[ |
| [D] [4, 5[ | [H] [8, 9[ | [L] [12, 13[ | [P] [16, 17[ | [T] [20, 21[ |

**Question 17** Dans le clip de Martin Solveig qui se déroule à Roland Garros, qui finit par abandonner la partie en jetant sa raquette par dépit amoureux?

- [A] Gaël Monfils
- [B] David Guetta
- [C] Jo-Wilfried Tsonga
- [D] Bob Sinclar
- [E] Martin Solveig

**Question 17** Dans le clip de Martin Solveig qui se déroule à Roland Garros, qui finit par abandonner la partie en jetant sa raquette par dépit amoureux?

- [A] Gaël Monfils
- [B] David Guetta
- [C] Jo-Wilfried Tsonga
- [D] Bob Sinclar
- [E] Martin Solveig

**Question 13 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] Plusieurs mortality bonds ont été émis avec succès.
- [B] Plusieurs longevity bonds ont été émis avec succès.
- [C] Depuis la crise, quasiment toutes les opérations de titrisation ne font plus intervenir la création d'une société dédiée pour l'occasion, le SPV, à cause du risque de contrepartie.
- [D] Dans la plupart des cat-bonds, on élimine complètement le risque de taux et de contrepartie par le biais d'un collatéral. Cela permet aux investisseurs de décorréler leur risque de ceux des marchés financiers.
- [E] La titrisation est un moyen de transférer des risques vers les marchés financiers.
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 14 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] Les copules gaussiennes en dimension 3 sont des copules archimédiennes.
- [B] La copule gaussienne est stable par mélange.
- [C] En dimension 2, lorsque le paramètre de la copule gaussienne est strictement entre zéro et 1, la copule gaussienne présente de la dépendance faible des extrêmes.
- [D] Le coefficient de corrélation linéaire est toujours pertinent pour mesurer la dépendance entre des variables aléatoires de Pareto $X$ et $Y$ qui admettent la copule gaussienne.
- [E] En dimension 2, lorsque le paramètre de la copule gaussienne est strictement inférieur à 1, la copule gaussienne ne présente pas de dépendance forte des extrêmes.
- [F] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 15 ♣** Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s)?

- [A] En grande dimension, la corrélation réelle entre les risques est forcément symmétrique.
- [B] En finance, plus la fenêtre de mesure est petite, plus la corrélation mesurée risque d'être instable.
- [C] Le pas de temps ne joue pas de rôle dans l'estimation de la volatilité ou des corrélations en finance.
- [D] En grande dimension, le seul modèle pour modéliser les corrélations est le modèle gaussien à $n$ facteurs.
- [E] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

**Question 16** Sur l'île de Pâques se trouvent des statues célèbres, restes d'une civilisation aujourd'hui disparue. Dans quel intervalle le numéro dans notre alphabet de la quatrième lettre du nom des statues ($A = 1$, $B = 2$, etc...) se trouve-t-il? MoAI

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| [A] [1, 2[ | [E] [5, 6[ | [I] [9, 10[ | [M] [13, 14[ | [Q] [17, 18[ |
| [B] [2, 3[ | [F] [6, 7[ | [J] [10, 11[ | [N] [14, 15[ | [R] [18, 19[ |
| [C] [3, 4[ | [G] [7, 8[ | [K] [11, 12[ | [O] [15, 16[ | [S] [19, 20[ |
| [D] [4, 5[ | [H] [8, 9[ | [L] [12, 13[ | [P] [16, 17[ | [T] [20, 21[ |

La loi GEV a été ajustée à la série des durées tandis que pour la série des hauteurs de pluie, la loi de Burr XII a été adoptée.

*Rappel : Si* $X \sim GEV(\mu,\sigma,\xi)$, $F(x) = \exp(-(1+\xi(\frac{x-\mu}{\sigma}))^{-\frac{1}{\xi}})$, *avec* $1+\xi(\frac{x-\mu}{\sigma}) > 0$ *et* $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $\xi \in \mathbb{R}$. *Si* $Y \sim Burr(\eta,\tau,\alpha)$, $1 - G(y) = \left(\frac{\eta}{\eta+y^{\tau}}\right)^{\alpha}$, $y > 0$ *et* $\eta,\tau,\alpha > 0$.

La copule dans notre étude est la copule de Gumbel avec paramètre $\theta$ ($\theta \geq 1$) :

$$C_\theta(u,v) = exp\Big(-\big((-\ln u)^\theta + (-\ln v)^\theta\big)^{1/\theta}\Big)$$

c) Donner l'expression de la densité de la copule de Gumbel.

d) Proposer un estimateur pour les paramètres des marges et le paramètre de la copule par la méthode qui vous semble la plus appropriée.

e) Dans un deuxième temps, les distributions marginales de $X$ et $Y$, notées respectivement $F$ et $G$, sont supposées inconnues. Proposer un estimateur du paramètre $\theta$ de la copule par la méthode CML (*canonical maximum likelihood*).
Quels sont les avantages / inconvénients de cette méthode ?

*N.B. Si les estimateurs ne présentent pas de forme explicite, se limiter à présenter la procédure d'estimation.*

# EXAMEN D'ASSURANCE NON-VIE

Esterina Masiello

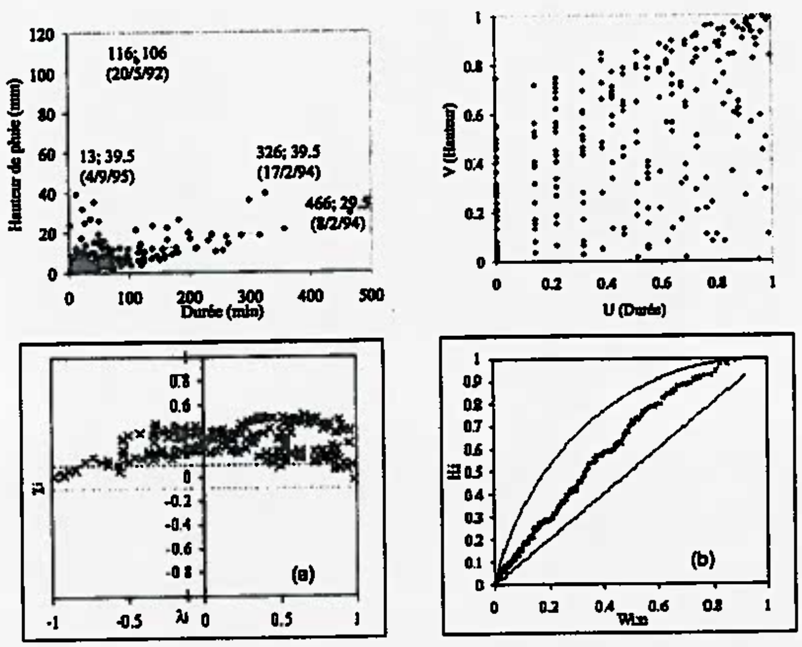
ISFA3, 22 avril 2011

**Durée : environ 30 minutes**
**Les questions sont indépendantes.**
**Seules les réponses soigneusement justifiées seront prises en compte.**

**Exercice** L'objet de cet exercice est la mise en évidence de la structure de dépendance entre deux variables hydrologiques : la hauteur (ou volume) de pluie ($X$) en millimètres et sa durée ($Y$) en minutes. Le nombre d'événements pluvieux enregistrés, pendant la période d'observation, est $n = 245$.

En effet, dans le cadre de l'étude des risques climatiques, la variable de durée des événements pluvieux est assez bien connue alors que la quantité de précipitation l'est moins alors que c'est elle qui va provoquer les inondations. La connaissance de la structure de dépendance entraîne donc une meilleure gestion de ces risques climatiques.

On a representé ci-dessous le scatter-plot des données, le rank-rank plot, le khi-plot et le k-plot.




a) Commenter chacun des graphiques en expliquant ce qu'il représente et les conclusions que l'on peut en tirer.
b) Comment construit-on un khi-plot ? Et un k-plot ? Détailler les procédures.

# Modèles linéaires généralisés

5 mai 2010

ISFA3, année 2009-2010

*Durée : 3h.*

*La calculatrice est autorisée ainsi qu'une seule feuille recto-verso manuscrite.*

**Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.**

**Exercice 1** Nous considérons le modèle de régression linéaire simple

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

***Pour les questions suivantes, on ne demande pas uniquement la formule du cours qui donne le résultat : il faut présenter une preuve des résultats.***

1) Déterminer les estimateurs des moindres carrés des paramètres $\beta_0$ et $\beta_1$. Vous préciserez au préalable les hypothèses du modèle.
2) Sous quelles hypothèses détermine-t-on les estimateurs du maximum de vraisemblance de $\beta_0$ et $\beta_1$ ? Calculez ces estimateurs.
3) Définir les résidus $\epsilon$ et en calculer l'espérance et la variance. Quel autre type de résidus connaissez-vous ? Les définir et en présenter les caractéristiques.

**Exercice 2 (Questions de cours)**

a) Comment vérifiez-vous que les résidus de régression sont homoscédastiques ? Et quels remèdes proposeriez-vous en cas de résidus de régression hétéroscédastiques ?
b) Qu'est-ce que la matrice de projection $H$ ? ~~Comment détecter un point~~ levier ?
c) Quel type de modèle proposeriez-vous afin d'expliquer l'occurrence d'un sinistre (type de loi pour la variable réponse, fonction lien) ?

**Exercice 3** Nous considerons un portefeuille d'assurance RC Automobile en Australie. On dispose du nombre de sinistres (`claims`) observées durant une période de 12 mois entre 1984 et 1986 en chacune des 176 zones géographiques dans la Nouvelle-Galles du Sud, Australie. Les zones géographiques sont groupées en 13 départements (`sd`). On dispose aussi du nombre d'accidents (`accidents`) ainsi que de la population (`population`) pour chaque zones géographiques.
On a observé les résultats suivants :



| | Nombre d'accidents | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | 0–138 | 139–267 | 268–596 | 597–1810 | ≥1811 | Totale |
| Moyenne | 30 | 68 | 178 | 497 | 2176 | 587 |
| Variance | 397 | 1206 | 25622 | 31751 | $1.8\times10^6$ | $1.0\times10^6$ |
| Coefficient de variation | 0.66 | 0.51 | 0.90 | 0.36 | 0.62 | 1.73 |
| $n$ | 36 | 35 | 35 | 35 | 35 | 176 |

La procédure PROC GENMOD de SAS nous a permis d'estimer deux modèles linéaires généralisés en prenant comme variables explicatives le logarithme de la variable `accidents` (`L_accidents`) et le département (`sd`) . `L_population` est le logarithme de la variable `population`. Les résultats sont présentés dans les Tableaux ci-dessous.

**Modèle 1** :

```
Distribution                    Poisson
Link Function                       Log
Dependent Variable               claims
Offset Variable            L_population

Number of Observations Read         176
Number of Observations Used         176

Critere                DF        Valeur      Valeur/DF
Deviance              162     7780.6510        48.0287
Scaled Deviance       162     7780.6510        48.0287
Pearson Chi-Square    162     8052.0681        49.7041
Scaled Pearson X2     162     8052.0681        49.7041
Log Likelihood              648393.7230

                                      Erreur      Wald 95Limites
Parametre        DF  Estimation   standard     de confiance %      Khi 2   Pr > Khi 2
Intercept         1     -3.1082     0.0445   -3.1954   -3.0210   4877.89     <.0001
L_accidents       1      1.8043     0.0119    1.7809    1.8276   22998.8     <.0001
sd           1    1     -1.1792     0.0341   -1.2461   -1.1124   1194.01     <.0001
sd           2    1     -1.2014     0.0357   -1.2714   -1.1316   1133.27     <.0001
sd           3    1     -1.1818     0.0350   -1.2503   -1.1132   1143.03     <.0001
sd           4    1     -1.2897     0.0363   -1.3608   -1.2188   1264.88     <.0001
sd           5    1     -1.3049     0.0402   -1.3837   -1.2260   1061.37     <.0001
sd           6    1     -1.0316     0.0366   -1.1033   -0.9599    796.46     <.0001
sd           7    1     -1.3728     0.0403   -1.4517   -1.2939   1162.92     <.0001
sd           8    1     -0.9237     0.0741   -1.0690   -0.7784    155.18     <.0001
sd           9    1     -1.0024     0.0358   -1.0726   -0.9322    784.75     <.0001
sd          10    1     -1.1912     0.0386   -1.2669   -1.1156    951.15     <.0001
sd          11    1     -1.0199     0.0391   -1.0967   -0.9432    679.12     <.0001
sd          12    1     -1.2957     0.0447   -1.3832   -1.2082    842.00     <.0001
sd          13    0      0.0000     0.0000    0.0000    0.0000         .          .
Scale             0      1.0000     0.0000    1.0000    1.0000

NOTE: The scale parameter was held fixed.

Statistiques LR pour Analyse de Type 1
Source               Ecart       DF       Khi 2    Pr > Khi 2
Intercept       80527.5498
L_accidents      9092.0384        1     71435.5        <.0001
sd               7780.6510       12     1311.39        <.0001

Statistiques LR pour Analyse de Type 3
Source          DF       Khi 2    Pr > Khi 2
L_accidents      1     26506.1        <.0001
sd              12     1311.39        <.0001
```

**Modèle 2** :

| | |
|---|---|
| Distribution | Negative Binomial |
| Link Function | Log |
| Dependent Variable | Claims |
| Offset Variable | L_population |

| Critere | DF | Valeur | Valeur/DF |
|---|---|---|---|
| Deviance | 162 | 193.3861 | 1.1937 |
| Scaled Deviance | 162 | 193.3861 | 1.1937 |
| Pearson Chi-Square | 162 | 196.9715 | 1.2159 |
| Scaled Pearson X2 | 162 | 196.9715 | 1.2159 |
| Log Likelihood | | 651922.4547 | |

| Parametre | | DF | Estimation | Erreur standard | Wald 95Limites de confiance % | | Khi 2 | Pr > Khi 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | | 1 | -3.4710 | 0.2687 | -3.9976 | -2.9443 | 166.86 | <.0001 |
| L_accidents | | 1 | 1.7837 | 0.0769 | 1.6329 | 1.9345 | 537.58 | <.0001 |
| sd | 1 | 1 | -0.7321 | 0.2097 | -1.1431 | -0.3211 | 12.19 | 0.0005 |
| sd | 2 | 1 | -0.7179 | 0.2444 | -1.1970 | -0.2388 | 8.63 | 0.0033 |
| sd | 3 | 1 | -0.6551 | 0.2118 | -1.0703 | -0.2399 | 9.56 | 0.0020 |
| sd | 4 | 1 | -0.7174 | 0.2422 | -1.1922 | -0.2426 | 8.77 | 0.0031 |
| sd | 5 | 1 | -0.7167 | 0.2267 | -1.1610 | -0.2725 | 10.00 | 0.0016 |
| sd | 6 | 1 | -0.5972 | 0.2143 | -1.0172 | -0.1772 | 7.77 | 0.0053 |
| sd | 7 | 1 | -1.0323 | 0.2053 | -1.4347 | -0.6298 | 25.27 | <.0001 |
| sd | 8 | 1 | -0.5441 | 0.3009 | -1.1339 | 0.0457 | 3.27 | 0.0706 |
| sd | 9 | 1 | -0.6357 | 0.2008 | -1.0293 | -0.2422 | 10.03 | 0.0015 |
| sd | 10 | 1 | -0.7474 | 0.2073 | -1.1537 | -0.3411 | 13.00 | 0.0003 |
| sd | 11 | 1 | -0.5552 | 0.2103 | -0.9673 | -0.1430 | 6.97 | 0.0083 |
| sd | 12 | 1 | -0.7978 | 0.2125 | -1.2143 | -0.3813 | 14.10 | 0.0002 |
| sd | 13 | 0 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | 0.0000 | . | . |
| Dispersion | | 1 | 0.1001 | 0.0122 | 0.0762 | 0.1239 | | |

NOTE: The negative binomial dispersion parameter was estimated by maximum likelihood.

Statistiques LR pour Analyse de Type 1

| Source | 2*Log-vraisemblance | DF | Khi 2 | Pr > Khi 2 |
|---|---|---|---|---|
| Intercept | 1303417.16 | | | |
| L_accidents | 1303808.54 | 1 | 391.38 | <.0001 |
| sd | 1303844.91 | 12 | 36.37 | 0.0003 |

Statistiques LR pour Analyse de Type 3

| Source | DF | Khi 2 | Pr > Khi 2 |
|---|---|---|---|
| L_accidents | 1 | 257.51 | <.0001 |
| sd | 12 | 36.37 | 0.0003 |

1) Écrire les deux modèles. Est-ce que l'un des deux modèles n'est pas adapté ? Si oui, comment l'expliqueriez-vous ?
2) Indiquez clairement (et commentez à la fois) ce que chaque élément de la sortie SAS du modèle retenu représente.
3) Commentez à la fois le signe du coefficient obtenu et sa significativité.
4) Qu'est-ce qu'une variable *offset* ?
5) Quel est le nombre moyen de sinistres de l'assuré de référence ? Quel est le nombre moyen de sinistres d'un assuré appartenant au département 10 ?
6) Expliciter la déviance pour le cas de variable réponse Poisson.

# Modèles linéaires généralisés

23 juin 2010

ISFA3, année 2009-2010

*Durée : 2h.*

*La calculatrice est autorisée ainsi qu'une seule feuille recto-verso manuscrite.*

<u>**Toutes les réponses doivent être soigneusement justifiées.**</u>

**Exercice 1** Nous considérons le modèle linéaire généralisé

$$g(\mu) = x'\beta$$

1) Obtenir les équations de vraisemblance. Quel interprétation peut-on donner aux equations de vraisemblance lorsqu'on utilise la fonction lien canonique ?
2) Définir les différents types de résidus que l'on peut calculer et en présenter les caractéristiques.
3) Quel type de modèle proposeriez-vous afin d'expliquer dans les études de mortalité le nombre de décès (type de loi pour la variable réponse. fonction lien) ?

**Exercice 2 (Questions de cours)**

a) Montrer la décomposition de la somme des carrées des écarts à la moyenne (somme des carrées totale (SCT)) dans le modèle de régression linéaire simple

$$Y = \beta_0 + \beta_1 x + \epsilon$$

b) Définir la transformée de Box-Cox. Décrire la procédure d'estimation du paramètre $\lambda$ de la transformée.

**Exercice 3** Nous considèrons un portefeuille d'assurance RC Automobile. On dispose de la charge sinistre (**charge**) observée durant une période donnée. De plus, pour chaque police on dispose de la classe du véhicule (**classe**) ainsi que de l'ancienneté du véhicule (entre 37 et 1000 mois) (**anc**).

La procédure PROC GENMOD de SAS nous a permis d'estimer un modèle linéaire généralisé en prenant comme variables explicatives les variables **anc** et **classe**. Une partie des résultats obtenus sont présentés dans le Tableau ci-dessous.



| | |
|---|---|
| Distribution | Gamma |
| Link Function | Log |
| Dependent Variable | charge |

| Critere | DF | Valeur | Valeur/DF |
|---|---|---|---|
| Deviance | 10676 | 16364 | 1.5472 |
| Scaled Deviance | 10676 | 16364 | 1.5472 |
| Pearson Chi-Square | 10676 | 16369 | 1.5477 |
| Scaled Pearson X2 | 10676 | 16369 | 1.5477 |

| Parametre | | DF | Estimation | Erreur standard | Khi 2 | Pr > Khi 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | | 1 | 7.8957 | 0.0534 | 143.98 | <.0001 |
| anc | | 1 | -0.0027 | 0.0002 | 120.68 | <.0001 |
| classe | 1 | 1 | 0.0778 | 0.0436 | 12.78 | 0.0746 |
| classe | 2 | 1 | -0.7179 | 0.0484 | 11.63 | 0.0917 |
| classe | 3 | 1 | -0.6551 | 0.0521 | 13.56 | 0.0707 |
| classe | 4 | 1 | -0.7174 | 0.0690 | 3.77 | 0.3421 |
| classe | 5 | 1 | -0.7187 | 0.0753 | 10.00 | 0.0004 |
| classe | 6 | 1 | -0.5972 | 0.0940 | 7.77 | 0.0002 |
| classe | 7 | 1 | -1.0323 | 0.1304 | 25.27 | 0.0424 |
| classe | 8 | 1 | -0.5441 | 0.1278 | 8.27 | 0.2264 |
| classe | 9 | 1 | -0.6357 | 0.1536 | 10.03 | 0.0002 |
| classe | 10 | 1 | -0.7474 | 0.2779 | 2.00 | 0.6531 |
| classe | 11 | 1 | -0.5662 | 1.7560 | 0.97 | 0.8297 |
| classe | 12 | 0 | 0.0000 | 0.0000 | . | . |
| Dispersion | | 1 | 2.2840 | 0.0122 | | |

NOTE: The gamma dispersion parameter was estimated by maximum likelihood.

1) Écrire le modèle.
2) Indiquez clairement (et commentez à la fois) ce que chaque élément de la sortie SAS du modèle représente.
3) Est-ce qu'il est raisonnable de garder toutes les variables dans le modèle ? Justifier la réponse.

Dans une deuxième étape nous essayons de regrouper les classes de véhicule. On retient finalement le modèle suivant dans lequel les classes 5, 6, 7 et 8 ont été regroupées en une seule classe que l'on appellera "5678".

| | |
|---|---|
| Distribution | Gamma |
| Link Function | Log |
| Dependent Variable | charge |

| Critere | DF | Valeur | Valeur/DF |
|---|---|---|---|
| Deviance | 10676 | 16389 | 1.5496 |
| Scaled Deviance | 10676 | 16389 | 1.5496 |
| Pearson Chi-Square | 10676 | 16389 | 1.5496 |
| Scaled Pearson X2 | 10676 | 16389 | 1.5496 |

| Parametre | | DF | Estimation | Erreur standard | Khi 2 | Pr > Khi 2 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Intercept | | 1 | 7.7757 | 0.0370 | 148.98 | <.0001 |
| anc | | 1 | -0.0029 | 0.0002 | 61.60 | <.0001 |
| classe | 5678 | 1 | 0.2076 | 0.0482 | 11.16 | <.0001 |
| classe | 9 | 1 | 0.5054 | 0.1504 | 9.63 | 0.0007 |
| Dispersion | | 1 | 2.2830 | 0.0122 | | |

NOTE: The gamma dispersion parameter was estimated by maximum likelihood.

4) Commenter les nouveaux résultats.
5) Quelle est la charge sinistre moyenne de l'assuré de référence ? Quelle est la charge sinistre moyenne d'un assuré possédant un véhicule appartenant à la classe 9 ?

# Crédibilité - Systèmes bonus-malus

**Année universitaire 2010-2011 - Première session**
**17 janvier 2011 - Durée : 2 heures**
**Aucun document n'est autorisé.**

### Exercice n°1

Considérons un portefeuille d'assurés au sein duquel, les assurés produisent des sinistres dont la charge annuelle $S$ est donnée par :

$$\Pr(S = x|\Theta = \theta) = e^{-\theta}\frac{\theta^x}{x!}, x = 0, 1, \ldots.$$ poisson

La répartition des profils de risques $\theta$ au sein du portefeuille est donnée par la densité :

$$u(\theta) \propto \theta^2 e^{-4\theta}, \theta > 0.$$

1. Calculer la prime collective.
2. Au cours des deux premières années, un assuré engendre des sinistres de charge annuelle $S_1 = 4$ et $S_2 = 1$, calculer la prime de crédibilité de cet assuré pour la troisième année. (linéaire en les obs.)

### Exercice n°2

Soit $N_j$ le nombre annuel de sinistres causés par un conducteur du portefeuille. Supposons que, conditionnellement à $\Theta$, les $N_j$ soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que :

$$\Pr(N_j = 1|\Theta = \theta) = 1 - \Pr(N_j = 0|\Theta = \theta) = \theta,$$

avec

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{ll} 0,1, & \text{avec la probabilité 0,8 ;} \\ 0,2, & \text{avec la probabilité 0,2.} \end{array} \right\}$$

1. Si un assuré n'a déclaré aucun sinistre au cours des 3 premières années de couverture, estimez la probabilité qu'il cause 1 sinistre durant la quatrième année.

2. Afin de corriger l'hétérogénéité du portefeuille induite par $\Theta$, la société d'assurance met en place un système bonus-malus à trois degrés $(0; 1; 2)$. L'entrée se fait au niveau 1 puis :

- chaque année sans sinistre est gratifiée d'une descente d'un degré dans l'échelle ;
- chaque sinistre est pénalisé par une remontée d'un niveau.

a. Donnez la matrice de transition sachant $\Theta = 0,1$.

b. En régime stationnaire, quelle est la répartition des assurés entre les trois degrés de l'échelle ?

c. Quelle prime relative associer aux différents échelons ?

**Exercice n°3**

Un actuaire doit tarifer un traité de réassurance en excédent de sinistre. Des études statistiques l'ont conduit à modéliser le coût des sinistres de montant supérieur à $x_0$ par des variables aléatoires de type Pareto

$$F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0.$$

1. Donnez l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre $\theta$.

2. Montrez que la famille des distributions Gamma est conjuguée à la famille des distributions Pareto

$$\mathcal{F} = \left\{ F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0 \; ; \; \theta > 0 \right\}.$$

Dans la suite, on se place dans le modèle Pareto-Gamma.

3. *A priori* $\Theta \sim \Gamma(\gamma, \beta)$, quelle est la valeur espérée du paramètre si l'on ne dispose pas d'observation ?

4. Pour un contrat particulier, on a observé durant la première période un échantillon de $n$ sinistres dépassant le montant $x_0$. Donnez l'estimateur bayesien de $\Theta$ pour ce contrat. Exprimez-le en fonction de l'e.m.v (lorsque l'on ne dispose pas d'information *a priori*) et de l'estimation *a priori* (lorsque l'on ne dispose pas d'observations). Commentez.

**Rappel :** Une variable aléatoire distribuée selon une loi Gamma de paramètre $(\gamma, \beta)$ a pour densité $u(\theta) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)} \theta^{\gamma-1} \exp(-\beta\theta)$.

## Modèles de durée / Examen du 14 janvier 2011

**Durée 2h – aucun document n'est autorisé**

### Problème : prise en compte de la sélection médicale

On considère une variable aléatoire $T$ décrivant une durée de vie et on note $S$ et $h$ respectivement la fonction de survie et la fonction de hasard associées. On cherche à prendre en compte l'effet de la sélection médicale, dont on se dit *a priori* que cela conduit à minorer temporairement les taux de décès conditionnels et que l'effet s'atténue rapidement avec le temps. On rappelle que dans un modèle paramétrique avec une censure aléatoire droite non informative la log-vraisemblance a la forme suivante :

$$\ln L(\theta) = cste + \sum_{i=1}^{n} \left\{ d_i \ln\left(h_\theta(t_i)\right) + \ln S_\theta(t_i) \right\}.$$

On suppose qu'en plus de la censure, les observations sont tronquées à ~~droite~~ gauche : en pratique l'individu $i$ est observé à partir de l'instant $e_i \leq t_i$.

**Question n°1 (2 points)** : Donner en la justifiant la forme de la log-vraisemblance du modèle tronqué et censuré.

On veut introduire dans le modèle le fait que lorsqu'un individu entre dans la population à risque, sa probabilité conditionnelle de sortie se trouve diminuée temporairement du fait de la sélection médicale à l'entrée. Pour cela on propose d'utiliser le modèle suivant :

$$h_{\tilde{\theta}}(t|e) = \left(1 - \pi \times e^{-\delta(t-e)}\right) \times h_\theta(t),\ \tilde{\theta} = (\pi, \delta, \theta).$$

**Question n°2 (2 point)** : Donnez une interprétation des paramètres $\pi$ et $\delta$. Que dire du cas particulier $\delta = 0$ ? Quelles conditions faut-il imposer aux paramètres $\pi$ et $\delta$ ?

On suppose que la fonction de hasard de base est donnée par $h_\theta(t) = \gamma + \alpha e^{\beta t}$ (Makeham, 1860).

**Question n°3 (1,5 point)** : Donner une interprétation du modèle $h_\theta(t) = \gamma + \alpha e^{\beta t}$.

**Question n°4 (4 points)** : Déterminer la log-vraisemblance du modèle avec sélection médicale.

**Question n°5 (2,5 points)** : Décrire la procédure à suivre pour estimer les paramètres $(\pi, \delta, \alpha, \beta, \gamma)$.

On rappelle que plutôt que de chercher directement le maximum de la vraisemblance dans le cas général, il est souvent considéré la solution approchée obtenue en minimisant le critère de moindres carrés pondérés suivant :

$$\varphi(\theta)=\sum_x \frac{E_x}{\hat{q}_x(1-\hat{q}_x)}\left(q_x(\theta)-\hat{q}_x\right)^2$$

**Question n°6 (3 points)** : Que désignent les quantités $E_x$ et $\hat{q}_x$ ? Rappeler le raisonnement permettant d'obtenir $\varphi(\theta)$ et préciser comment est calculé $q_x(\theta)$ à partir de la fonction de hasard sous-jacente.

**Question n°7 (3 points)** : On se propose d'adapter l'approche simplifiée rappelée ci-dessus au modèle dont on a calculé la log-vraisemblance à la question 4. Comment faire ?

**Question n°8 (2 points)** : Montrer que dans le cas où la fonction de hasard de base est constante (*ie* $\alpha=0$) on a l'expression simple :

$$q_{x,e}=1-\exp\left(-\gamma\times(1-\pi)\times e^{-\delta(x-e)}\times g_\delta(1)\right)$$

$$g_\delta(x)=\frac{1-e^{-\delta \cancel{x}}}{\delta}$$

$$-\gamma\ (1-\pi e^{-\delta(x-e)}\ \frac{1-e^{-\delta \cancel{x}}}{\delta}$$

3ème année ISFA - M2 Pro SAF
1ère session

26 mai 2011
1h30

# ACTIFS DÉRIVÉS D'ACTIONS

(1 feuille de notes personnelles et la calculatrice sont autorisées)

## Évaluation des obligations à bons de souscription d'actions (OBSA)

Une entreprise financée jusqu'à ce jour ($t_0$) uniquement par N actions (V = NS) émet n obligations à bons de souscription d'actions. Chacune de ces obligations est en fait la juxtaposition d'une obligation classique, notée B, et d'un bon de souscription d'actions ordinaire, noté W.
On suppose qu'à chaque obligation est associée un bon donnant droit à une action contre le paiement d'un prix d'exercice E.
K désigne le prix de remboursement de chaque obligation.
On admet que la structure des taux est plate et stable au cours du temps.
Dans un premier temps, afin de faciliter l'analyse, on suppose que l'entreprise ne verse pas de dividende ni de coupon et que le produit de l'émission est immédiatement investi dans des actifs risqués assimilables à ceux de la firme.
A l'émission, on pose : $\hat{V} = V + n(B+W)$.

**Les bons de souscription arrivent à échéance avant les obligations.**

Soit $\tau_1$ la durée de vie des bons et $\tau_2$ celle des obligations avec $\boxed{\tau_1 < \tau_2}$. Désignons par $\tau_3$ le laps de temps compris entre l'échéance des bons et celle des obligations, tel que $\tau_3 = \tau_2 - \tau_1$.
Soit $\hat{V}_1$, $S_1$, $B_1$ et $W_1$ les valeurs respectives de la firme, des actions, des obligations et des bons en $t_1$, date d'échéance des bons.

a. Montrez que la condition d'exercice des bons en $t_1$ en fonction de $\hat{V}_1$ s'écrit $\hat{V}_1 > NE + nB_1$. Déduisez-en la valeur des bons $nW_1$ dans ce cas.

b. Établissez le tableau des différentes situations en $t_1$ pour les valeurs des actions, obligations et bons selon le modèle suivant :

| | Valeur en $t_1$ | |
|---|---|---|
| | *Condition 1* | *Condition 2* |
| Actions | | |
| Obligations | | |
| Bons | | |

c. En cas d'exercice des bons, on note $\hat{V}_1'$ la valeur totale des actifs de la firme en $t_1$ (on suppose ici que les fonds récupérés sont immédiatement investis dans des actifs risqués assimilables à ceux de la firme). Soit alors $\hat{V}_2'$ la valeur des actifs de la firme en $t_2$, date d'échéance des obligations.
Dressez le tableau des **valeurs en $t_2$** et des **expressions en $t_1$ en termes d'options sur $\hat{V}_1'$** pour les actions et les obligations à partir du modèle de tableau suivant :

| | En $t_1$ | Valeur en $t_2$ | | Expressions en $t_1$ en termes d'options |
|---|---|---|---|---|
| | | *Condition 1* | *Condition 2* | |
| Actions | $(N+n)S_1$ | $0$ | $V_2' - nK$ | |
| Obligations | $nB_1$ | $V_2'$ | $nK$ | |

d. Déduisez-en une nouvelle écriture de la condition d'exercice des bons en $t_1$.

$C > (N+n)E$

e. <u>En cas d'abandon des bons</u>, dressez le tableau des **valeurs en $t_2$** et des **expressions en $t_1$ en termes d'options sur** $\hat{V}_1$ pour les actions et les obligations.

| | En $t_1$ | Valeur en $t_2$ | | Expressions en $t_1$ en termes d'options |
|---|---|---|---|---|
| | | *Condition 1* | *Condition 2* | |
| Actions | $NS_1$ | | | |
| Obligations | $nB_1$ | | | |

f. A l'aide des questions c., d. et e., écrivez la nouvelle forme du tableau de la question b. en utilisant les options introduites dans les questions d. et e.
Commentez.

g. Si l'on veut tenir compte de versements de dividendes et de coupons par la méthode de la réserve de trésorerie, quelle précaution préconisez-vous de prendre ?

**Examen Techniques Numériques**
**ISFA 3A**
**Mardi 24 Mai 2011**
Durée 1h30, Supports de cours non autorisés
La notation prendra en compte la qualité de la rédaction.

**Exercice 1 Evaluation d'une option composée par intégration numérique.**

On cherche à évaluer à la date $t = 0$ une option d'achat de maturité $T_1$, de prix d'exercice $K_1$ et dont le sous-jacent est une option de vente de maturité $T_2$ ($T_1 < T_2$) et de prix d'exercice $K_2$. Cette option de vente est écrite sur une action dont le cours $S$ suit un mouvement brownien géométrique. Ainsi, sous la probabilité risque-neutre, la dynamique du prix de l'action est décrite par l'EDS suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = rdt + \sigma dW_t\,,$$

où $r$ est le rendement instantané de l'actif sans risque, $\sigma$ la volatilité instantanée et $W$ un mouvement brownien standard. On note $P(t,x) = \mathbb{E}[e^{-r(T_2-t)}(K_2 - S_{T_2})^+ \mid S_t = x]$ la valeur du *put* à l'instant $t$ ($t < T_2$) lorsque $S_t = x$.

1. En l'absence d'opportunité d'arbitrage, exprimer la valeur $C$ du *call* en $t = 0$ comme une espérance. Donner en justifiant la valeur du *call* lorsque $K_1 > K_2$.
2. On suppose que la fonction $P$ a été implémentée au préalable à l'aide de la formule de Black & Scholes. Proposer une méthode numérique pour trouver $x^*$ tel que $P(t, x^*) = K$ où $K$ est une constante positive fixée.
3. Montrer que l'on peut mettre en oeuvre une quadrature de Gauss-Hermite pour obtenir une approximation du prix du *call*. Expliquer pourquoi l'emploi du *root-solver* introduit à la question précédente est utile à ce calcul. Vous détaillerez soigneusement les étapes de votre raisonnement.

**Exercice 2 Contrôle antithétique.**

Soit $W$ un mouvement brownien standard. En exploitant la propriété de symétrie du mouvement brownien, i.e., $W \overset{\text{loi}}{=} -W$, il est possible dans certains cas de réduire la variance de l'estimateur de Monte Carlo. On définit les quantités aléatoires $X_T$ et $X_T^-$ par :

$$X_T = X_0 \exp((r - \sigma^2/2)T + \sigma W_T)$$

et

$$X_T^- = X_0 \exp((r - \sigma^2/2)T - \sigma W_T)\,,$$

où $X_0$, $r$, $\sigma$ et $T$ sont des paramètres positifs. Soit $g$ une fonction croissante. On cherche à évaluer la quantité $\mathbb{E}[g(X_T)]$ par simulations de Monte-Carlo.

1. On définit la fonction $h$ par $h(\omega) = g\left(X_0 \exp((r - \sigma^2/2)T + \sigma\omega)\right)$. Soit $m$ un réel tel que la quantité $c$ définie par $c = \inf\{\omega \in \mathbb{R} \mid h(\omega) \geq m\}$ existe. Montrer que, pour tout $m$ et tout $\omega$, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$(h(\omega) - m)\,(h(-\omega) - h(-c)) \leq 0.$$

2. Montrer que $\mathrm{Cov}\left(g(X_T), g(X_T^-)\right) \leq 0$.
3. Vérifier que

$$\mathbb{E}\left[\frac{g(X_T) + g(X_T^-)}{2}\right] = \mathbb{E}[g(X_T)]$$

et que

$$\mathrm{Var}\left(\frac{g(X_T) + g(X_T^-)}{2}\right) \leq \frac{\mathrm{Var}\left(g(X_T)\right)}{2}.$$

4. En déduire que l'on peut obtenir une meilleure précision en simulant quatre fois moins de fois $W_T$.

**Exercice 3** **Simulation de trajectoires dans le modèle de Heston.**

On cherche à simuler des trajectoires du processus $S$ défini par la dynamique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sqrt{V_t} dW_t\,,$$

où $V$ est lui-même un processus stochastique défini par :

$$dV_t = \kappa(\theta - V_t)dt + \sigma\sqrt{V_t} dB_t.$$

Les paramètres $\mu$, $\kappa$, $\theta$ et $\sigma$ sont des réels positifs ; $W$ et $B$ sont deux mouvements browniens standard de corrélation instantanée égale à $\rho$, i.e., $d\langle W, B\rangle_t = \rho dt$.

1. Expliquer comment simuler les accroissements des browniens $W$ et $B$ ?
2. On se donne $S_0$ et $V_0$ et on souhaite simuler ce modèle aux instants $0 < t_1 < \cdots < t_n$. Comment procéder ?
3. Montrer que, dans le modèle discrétisé, la volatilité peut être négative avec une probabilité non nulle. Proposer une solution à ce problème.

# Modèles financiers en assurance / Examen du 23 mai 2011

**Durée 3h – aucun document n'est autorisé**

## Problème : Calculs du *best estimate* d'un contrat d'épargne

On considère un assureur qui commercialise un contrat d'épargne à prime unique dont la provision mathématique pour un assuré d'âge $x$ à la souscription évolue selon :

$$PM(x,t) = PM(x,0) \times \exp\left(\int_0^t (r_s(u) - \mu_x(u))\,du\right)$$
$$= PM(x,0) \times S_x(t) \times \exp\left(\int_0^t r_s(u)\,du\right)$$

$e^{\int_0^t -\mu_x(u)} = S_x(t)$

avec $r_s(t)$ le taux servi instantané (aléatoire) et $\mu_x(t)$ (déterministe) la fonction de hasard en $t$ décrivant les sorties du portefeuille. Le contrat est souscrit pour une durée de $T$ années et l'assuré peut racheter son contrat avant le terme sans pénalité.

Dans la suite du problème, sauf mention explicite du contraire, $x$ et T sont fixés.

**Question n°1** : Rappeler les principes de calcul des provisions dans le référentiel Solvabilité 2 en fonction de la nature du risque.

**Question n°2** : Comment s'interprète $PM(x,0)$ ?

**Question n°3** : Justifiez dans l'expression de la provision mathématique le fait que $r_s(t)$ soit aléatoire et $\mu_x(t)$ déterministe. Que décrit $\mu_x(t)$ ?

On note maintenant $\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t r(u)\,du\right)$ le facteur d'actualisation et $BEL^F(x,T)$ la somme des flux de prestations actualisés sur le durée de vie du contrat, conditionnellement à un état du monde financier.

**Question n°4** : Donnez l'expression de $BEL^F(x,T)$ en fonction de $PM(x,.)$, $\mu_x$ et $\delta$. Vous pourrez distinguer les flux sur l'intervalle $[0,T[$ et le flux en $T$.

**Question n°5 :** Comment calculez-vous le *best estimate* du contrat en fonction de $BEL^F(x,T)$ ?

**Question n°6** : Quelle condition soit satisfaire $PM(x,t)$ pour que dans le *best estimate* le coefficient d'actualisation du flux servi en $t$ soit égal au prix du zéro-coupon d'échéance $t$, $P(0,t)$ ?

**Question n°7** : On se place dans le cas simple où $r_s(t)=r(t)=r$ supposé constant. Montrez qu'alors $BEL^F(x,T)=PM(x,0)$ ; qu'en pensez-vous ?

On suppose maintenant que le taux servi est égal au taux sans risque majoré d'une prime, $r_s(t)=r(t)+\tau$, la prime étant supposée constante.

**Question n°8** : calculez $BEL^F(x,T)$ dans ce cas et vérifiez que si $\tau=0$ vous retrouvez le résultat de la question précédente. Que pouvez-vous dire de la loi de la variable $BEL^F(x,T)$ ?

**Question n°9** : Rappelez comment le taux servi $r_s(t)$ est relié en général au taux de rendement de l'actif, que l'on notera $r_A(t)$. Existe-t-il une relation mathématique simple entre ces deux taux ? Vous décrirez avec soin la logique de calcul du *best estimate* du contrat dans le cas général.

On introduit maintenant un fonds de stabilisation destiné à limiter les fluctuations de la charge de service des revalorisations en fonction du temps. En notant $PM(t)=\int PM(x,t)\pi(dx)$ où $\pi(dx)$ décrit la répartition par âge des souscripteurs on pose :

$$dF(t)=\max\left\{PM(t)\left(r_A(t)-r_s(t)\right);-F(t)\right\}dt$$

**Question n°10** : En vous appuyant sur la forme de l'équation le définissant, indiquez l'intérêt et les caractéristiques du fonds $F$.

**Question n°11** : Comment utiliseriez-vous ce fonds pour introduire de la participation aux bénéfices dans le modèle proposé ? Que pouvez-vous dire alors si le taux servi est défini comme à la question n°7 ?

**Question n°12** : Que suggéreriez-vous pour améliorer le modèle décrit ci-dessus ?

# Normes IFRS et Solvabilité 2

**Année universitaire 2010-2011 - Première session**
**lundi 23 mai 2011 - Durée : 2 heures**
**Aucun document n'est autorisé.**

## Normes IFRS

1. Quel sont les principaux objectifs des normes IFRS ?

2. Quels sont les deux principes d'évaluation des instruments financiers présents dans la norme IAS 39 ? Ces principes sont-ils identiques à ceux prévus par le Plan Comptable des Assurances ? Commentez.

3. Pourquoi, au titre de la norme IFRS 4, les assureurs publiant en IFRS doivent procéder à un "test de suffisance du passif" ?

4. Expliquez la notion de "participation aux bénéfices différée". Pourquoi, au 31/12/2008, constate-t-on une "participation aux bénéfices différée active" ? Que représente-t-elle ?

5. Dans le projet de norme assurance phase 2, il est question d'intégrer à la provision d'assurance une "marge résiduelle". Dans quel but ? Quel principe est sous-jacent à l'introduction d'une telle marge en plus du *best estimate* et de l'ajustement pour risque ?

## Solvabilité 2

1. Qu'est-ce que Solvabilité 2 ? (5 lignes au maximum)

2. Donnez la définition du SCR.

3. La société Casimir est une société d'assurance non-vie qui commercialise et assure des contrats d'assurance responsabilité civile. Son actif est composé exclusivement de placements financiers (obligations et actions). Elle a établi

son bilan prudentiel au 31/12/2010. Elle dispose de placements financiers pour 100, de provisions techniques pour 85 et de fonds propres pour 15. Elle a procédé au calcul du SCR par la formule standard est obtient 24. Ses fonds propres éligibles en couverture du SCR s'élèvent au montant de ses fonds propres. Proposez trois alternatives qui permettraient de couvrir davantage le SCR. Expliquez comment. Détaillez leurs intérêts et limites.

# 4.1. COMPTES CONSOLIDÉS

## 4.1.1. Bilan consolidé

### ACTIF

| *En millions d'euros* | Notes | 31.12.2009 | 31.12.2008 | 31.12.2007 |
|---|---|---|---|---|
| Écarts d'acquisition | 7 | 775,6 | 712,2 | 659,2 |
| Portefeuille de contrats des sociétés d'assurance | 7 | 70,2 | 169,2 | 186,4 |
| Autres immobilisations incorporelles | 7 | 31,8 | 29,2 | 28,1 |
| **Total actifs incorporels** | | 877,6 | 910,6 | 873,7 |
| Immobilier de placement | 8 | 1 284,1 | 1 555,8 | 1 499,3 |
| Titres conservés jusqu'à échéance | 9 | 1 209,9 | 958,8 | 1 112,9 |
| Titres disponibles à la vente | 9 | 216 839,2 | 187 906,4 | 180 910,8 |
| Titres de transaction | 9 | 62 631,5 | 58 122,3 | 74 981,0 |
| Prêts et avances | 9 | 2 451,4 | 2 230,0 | 2 068,4 |
| Instruments dérivés | 9 | 2 661,0 | 2 234,4 | 1 972,7 |
| **Placements des activités d'assurances** | | 287 077,1 | 253 007,7 | 262 565,1 |
| **Placements des activités du secteur bancaire et autres activités** | | 71,7 | 83,8 | 272,4 |
| **Investissements dans les entreprises associées** | 5 | 0,0 | 426,3 | 422,6 |
| **Parts des cessionnaires et rétrocessionnaires dans les provisions techniques et les passifs financiers** | 10 | 6 879,4 | 6 305,3 | 6 139,3 |
| Créances nées des opérations d'assurance ou de réassurance | 11 | 3 034,9 | 3 339,3 | 3 499,8 |
| Créance d'impôt exigible | | 419,8 | 371,5 | 324,7 |
| Autres créances | 11 | 1 228,6 | 2 180,4 | 968,4 |
| Immeubles d'exploitation et autres immobilisations corporelles | 8 | 179,8 | 206,8 | 195,6 |
| Autres actifs d'exploitation à long terme | | 270,1 | 226,5 | 208,7 |
| Participation aux bénéfices différée active | 10 | 0,0 | 1 175,3 | 0,0 |
| Impôts différés actifs | 12 | 127,7 | 73,5 | 26,3 |
| **Autres actifs** | | 5 280,9 | 7 573,1 | 5 223,5 |
| **Actifs destinés à la vente et abandons d'activités** | | 571,1 | 0,0 | 0,0 |
| **Trésorerie et équivalents de trésorerie** | | 1 138,8 | 1 267,7 | 1 176,3 |
| **TOTAL ACTIF** | | 301 876,7 | 269 564,6 | 276 672,1 |





### PASSIF

| *En millions d'euros* | Notes | 31.12.2009 | 31.12.2008 | 31.12.2007 |
|---|---|---|---|---|
| Capital | | 594,2 | 594,2 | 594,2 |
| Primes d'émission, de fusion et d'apport | | 981,5 | 981,5 | 981,5 |
| Réserve de réévaluation | | 1 382,7 | 496,8 | 1 972,6 |
| Titres super subordonnés | 4 | 2 143,0 | 2 143,0 | 2 143,0 |
| Résultats cumulés | | 5 319,9 | 5 100,3 | 4 383,2 |
| Résultat consolidé | | 1 004,1 | 730,6 | 1 221,8 |
| Écarts de conversion | | 172,9 | - 8,4 | 109,0 |
| **Capitaux propres du Groupe** | | 11 548,3 | 10 037,9 | 11 405,3 |
| Intérêts minoritaires | | 877,1 | 562,0 | 566,9 |
| **Capitaux propres totaux** | | 12 425,5 | 10 599,9 | 11 972,2 |
| Provisions techniques brutes - contrats d'assurance hors UC | 10 | 79 957,8 | 63 201,6 | 54 347,1 |
| Provisions techniques brutes - contrats d'assurance en UC | 10 | 27 135,6 | 23 094,7 | 27 306,0 |
| **Passifs relatifs à des contrats d'assurance** | | 107 093,3 | 86 296,3 | 81 653,1 |
| Passifs relatifs à des contrats financiers hors UC avec participation discrétionnaire | 10 | 147 370,2 | 144 073,7 | 139 148,7 |
| Passifs relatifs à des contrats financiers hors UC sans participation discrétionnaire | 10 | 787,7 | 465,0 | 516,3 |
| Passifs relatifs à des contrats financiers en UC | 10 | 9 455,7 | 10 678,0 | 14 200,3 |
| **Passifs relatifs à des contrats financiers** | | 157 613,6 | 155 216,7 | 153 865,3 |
| Instruments dérivés séparés sur contrats | | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| Participation aux bénéfices différée passive | 10 | 6 889,8 | 356,7 | 8 675,0 |
| **Passifs relatifs aux contrats** | | 271 596,8 | 241 869,7 | 244 193,4 |
| **Provisions pour risques et charges** | 13 | 148,8 | 329,9 | 112,5 |
| Dettes subordonnées | 10 | 1 492,0 | 1 881,0 | 1 926,4 |
| **Dettes de financement** | | 1 492,0 | 1 881,0 | 1 926,4 |
| Dettes d'exploitation représentées par des titres | | 3 459,3 | 5 016,8 | 4 319,7 |
| Dettes d'exploitation envers les entreprises du secteur bancaire | | 139,5 | 63,8 | 69,9 |
| Dettes nées des opérations d'assurance ou de réassurance | 14 | 2 318,5 | 2 101,9 | 2 199,1 |
| Dettes d'impôts exigibles | | 255,3 | 312,3 | 251,3 |
| Comptes courants créditeurs | | 317,1 | 309,5 | 324,6 |
| Dettes envers les porteurs de parts d'OPCVM contrôlés | | 2 852,6 | 2 687,1 | 4 336,4 |
| Instruments dérivés passifs | 9 | 1 970,7 | 1 268,3 | 1 456,1 |
| Impôts différés passifs | 12 | 1 132,7 | 620,7 | 1 641,8 |
| Autres dettes | 14 | 3 294,6 | 2 503,7 | 3 868,7 |
| **Autres passifs** | | 15 740,3 | 14 884,1 | 18 467,6 |
| **Passifs des activités destinées à être cédées ou abandonnées** | | 478,4 | 0,0 | 0,0 |
| **TOTAL PASSIF** | | 301 876,7 | 269 564,6 | 276 672,1 |

## 4.1.2. Compte de résultat

| En millions d'euros | Notes | 31.12.2009 | 31.12.2008 | 31.12.2007 |
|---|---|---|---|---|
| Primes émises | | 32 531,5 | 28 277,9 | 31 504,3 |
| Variation des primes non acquises | | - 8,5 | - 3,4 | - 4,9 |
| **Primes acquises** | 15 | 32 523,1 | 28 274,4 | 31 499,4 |
| **Chiffre d'affaires ou produits des autres activités** | 15 | 168,6 | 158,4 | 161,9 |
| Autres produits d'exploitation | | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| Produits des placements | | 10 100,3 | 10 181,0 | 9 753,7 |
| Plus et moins-values de cession des placements nettes des reprises de dépréciation et d'amortissement | | 1 303,6 | 1 490,0 | 1 707,9 |
| Variation de juste valeur des placements comptabilisés à la juste valeur par résultat | | 3 982,5 | - 10 798,5 | 16,1 |
| Variation des dépréciations sur placements | | - 194,5 | - 3 014,4 | 17,7 |
| **Produits financiers hors coût de l'endettement** | 19 | 15 191,8 | - 2 141,8 | 11 495,4 |
| **Total des activités ordinaires** | | 47 883,5 | 26 291,0 | 43 156,7 |
| Charges des prestations des contrats | 16 | - 42 295,2 | - 21 086,4 | - 37 168,8 |
| Charges des placements et autres dettes financières hors coût de l'endettement | 19 | - 515,7 | - 559,0 | - 597,1 |
| Charges ou produits nets des cessions en réassurance | 18 | - 27,7 | - 86,5 | - 18,1 |
| Charges des autres activités | | - 6,2 | - 7,1 | - 11,9 |
| Frais d'acquisition des contrats | 17 | - 3 046,3 | - 2 977,1 | - 2 989,1 |
| Amortissement des valeurs de portefeuille et assimilés | 7 | - 149,8 | - 14,4 | - 19,6 |
| Frais d'administration | 17 | - 351,0 | - 370,4 | - 349,8 |
| Autres produits et charges opérationnels courants | 17 | 236,1 | - 130,5 | - 16,7 |
| **Total des autres produits et charges courants** | | - 46 157,9 | - 25 211,3 | - 41 171,1 |
| **Résultat opérationnel courant** | | 1 725,5 | 1 079,8 | 1 985,6 |
| Autres produits et charges opérationnels non courants | | - 1,3 | 1,9 | 1,7 |
| **Résultat opérationnel** | | 1 724,3 | 1 081,7 | 1 987,3 |
| Charges de financement | 19 | - 85,4 | - 108,5 | - 106,5 |
| Variations de valeurs des actifs incorporels | 7 | - 104,0 | 0,0 | 0,0 |
| Quote-part dans les résultats des entreprises associées | 5 | 31,7 | 29,1 | 46,0 |
| Impôts sur les résultats | 20 | - 444,2 | - 187,9 | - 547,8 |
| Résultat après impôt des activités discontinues | | 0,0 | 0,0 | 0,0 |
| **Résultat net de l'ensemble consolidé** | | 1 122,3 | 814,4 | 1 379,0 |
| Intérêts minoritaires | | - 118,2 | - 83,8 | - 157,2 |
| **Résultat net (part du Groupe)** | | 1 004,1 | 730,6 | 1 221,8 |
| Résultat par action | | 6,8 | 4,9 | 8,2 |
| Résultat dilué par action | | 6,8 | 4,9 | 8,2 |





## 4.1.3. État du résultat net et des gains et pertes comptabilisés directement en capitaux propres

**ÉTAT DU RÉSULTAT NET ET DES GAINS ET PERTES COMPTABILISÉS DIRECTEMENT EN CAPITAUX PROPRES AU 31 DÉCEMBRE 2009**

| En millions d'euros | Total Part du Groupe | Part des minoritaires | Total des capitaux propres |
|---|---|---|---|
| **Résultat net de la période** | 1 004,1 | 118,2 | 1 122,3 |
| **Gains et pertes comptabilisés directement en capitaux propres** | | | |
| Actifs disponibles à la vente | | | |
| Variation de la réserve de réévaluation sur la période | 8 729,6 | 82,8 | 8 812,5 |
| Reclassement en résultat relatif aux cessions | - 987,8 | - 7,0 | - 994,9 |
| Reclassement des impairments au résultat net | 570,2 | 9,3 | 579,4 |
| *Sous-total brut de participation et d'impôts différés* | *8 312,0* | *85,0* | *8 397,0* |
| Participation aux bénéfices différée brute d'impôts différés | - 6 985,6 | - 38,3 | - 7 023,9 |
| Impôts différés | - 492,6 | - 14,5 | - 507,1 |
| *Sous-total net de participation et d'impôts différés* | *833,8* | *32,2* | *866,0* |
| Incidence des écarts de conversion | 181,4 | 115,2 | 296,6 |
| Écarts actuariels | - 2,8 | - 0,1 | - 2,8 |
| Autres variations | - 9,7 | 1,7 | - 8,0 |
| **Total des gains et pertes comptabilisés directement en capitaux propres** | 1 002,7 | 149,1 | 1 151,8 |
| **TOTAL DU RÉSULTAT NET ET DES GAINS ET PERTES COMPTABILISÉS DIRECTEMENT EN CAPITAUX PROPRES** | 2 006,8 | 267,3 | 2 274,1 |

# Examen de Réassurance 2011
## (Documents interdits / calculatrice autorisée)

1) On considère le programme suivant:

- **Excédent de Plein :**
  Plein de rétention : 4'000'000 Euros
  Capacité de l'Excédent de Plein : 12'000'000 Euros (= 3 pleins de rétention)

- **Excédent de sinistres (XS)** par risque ET par évènement sur rétention de l'Excédent de Plein :
  3'000'000 XS 1'500'000 AAD 2'000'000
  2 reconstitutions : 1ère à 50%, 2ème à 100%, les deux prorata capita
  Prime de réassurance de l'XS : 4'500'000 Euros
  Clause horaire pour la définition des évènements naturels : 72h (c.a.d un évènement est limité à 72h).

On supposera dans cet exercice que tout risque affecté par un sinistre est réparé instantanément. Ceci implique entre autre que le même risque peut être affecté par des sinistres plusieurs fois durant l'année de couverture.

On considèrera par la suite les risques suivants :

| Risque | SMP | Prime originale |
|---|---:|---:|
| 1 | 5'000'000 | 6'000 |
| 2 | 20'000'000 | 25'000 |
| 3 | 6'000'000 | 9'000 |
| 4 | 3'000'000 | 4'000 |
| 5 | 12'000'000 | 15'000 |
| 6 | 8'000'000 | 8'000 |
| 7 | 10'000'000 | 10'000 |

Et la sinistralité suivante (On considèrera que tous les sinistres surviennent à la même heure de la journée):

| Date | Nature | Sinistre | Risque affecté |
|---|---|---|---|
| 17 Janvier | Incendie | 3'000'000 | 1 |
| 07 Février | Incendie | 12'000'000 | 2 |
| 20 Février | Tempête | 6'000'000 | 2 |
| 20 Février | Tempête | 750'000 | 3 |
| 22 Février | Tempête | 1'200'000 | 4 |
| 23 Février | Tempête | 5'000'000 | 6 |
| 24 Mars | Incendie | 2'100'000 | 3 |
| 16 Juin | Incendie | 1'700'000 | 4 |
| 12 Août | Incendie | 9'000'000 | 5 |
| 02 Septembre | Incendie | 7'000'000 | 6 |
| 25 Décembre | Incendie | 6'000'000 | 7 |

a) Calculez les primes cédées à l'Excédent de Plein pour les risques considérés.

b) Calculez les sinistres à charge de l'Excédent de Plein et de l'XS sur rétention ainsi que les primes de reconstitutions.

2) Considérons le Stop Loss suivant :

60% XS 140% sur rétention de l'XS : 30'000'000 XS 20'000'000, EPI : 100'000'000

Sinistralité de l'année : 10 sinistres de 5'000'000 chacun
6 sinistres de 10'000'000 chacun
1 sinistre de 25'000'000
1 sinistre de 60'000'000

Quelle est la charge du Stop-Loss pour la période considérée (détailler votre calcul) ?

# Examen Séries temporelles 2010-2011

Master 2 SAF Pro

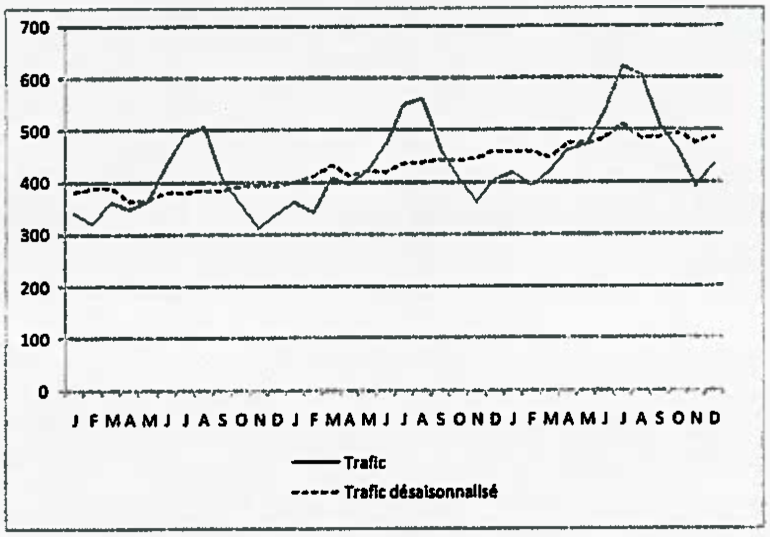
Sans document - Avec calculatrice - 2 heures

**Exercice 1 : (6 points)**

Le tableau suivant donne le trafic de voyageurs de janvier 1958 à décembre 1960 et la série corrigée des variations saisonnières.

| Mois | Trafic | | | | | Trafic désaisonnal |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Janvier | 340 | | | | | 380,1215 |
| Février | 318 | | | | | 384,9549 |
| Mars | 362 | | | | | 387,2257 |
| Avril | 348 | | | | | 361,5174 |
| Mai | 363 | | | | | 362,8090 |
| Juin | 435 | | | | | 380,9549 |
| Juillet | 491 | 381,833 | 109,167 | 113,229 | 114,0451 | 376,9549 |
| Août | 505 | 383,667 | 121,333 | 122,604 | 123,4201 | 381,5799 |
| Septembre | 404 | 386,500 | 17,500 | 21,396 | 22,2118 | 381,7882 |
| Octobre | 359 | A 390,33 | -31,333 | -32,646 | -31,8299 | 390,8299 |
| Novembre | 310 | 394,708 | -84,708 | -84,271 | -83,4549 | 393,4549 |
| Décembre | 337 | 398,625 | -61,625 | C -53,625 | -52,8090 | 389,8090 |
| Janvier | 360 | 402,542 | B -42,52 | -40,938 | -40,1215 | 400,1215 |
| Février | 342 | 407,167 | -65,167 | -67,771 | -66,9549 | 408,9549 |
| Mars | 406 | 411,875 | -5,875 | -26,042 | -25,2257 | 431,2257 |
| Avril | 396 | 416,333 | -20,333 | -14,333 | D -13,517 | 409,5174 |
| Mai | 420 | 420,500 | -0,500 | -0,625 | 0,1910 | 419,8090 |
| Juin | 472 | 425,500 | 46,500 | 53,229 | 54,0451 | 417,9549 |
| Juillet | 548 | 430,708 | 117,292 | | | 433,9549 |
| Août | 559 | 435,125 | 123,875 | | | 435,5799 |
| Septembre | 463 | 437,708 | 25,292 | | | E 440,7882 |
| Octobre | 407 | 440,958 | -33,958 | | | 438,8299 |
| Novembre | 362 | 445,833 | -83,833 | | | 445,4549 |
| Décembre | 405 | 450,625 | -45,625 | | | 457,8090 |
| Janvier | 417 | 456,333 | -39,333 | | | 457,1215 |
| Février | 391 | 461,375 | -70,375 | | | 457,9549 |
| Mars | 419 | 465,208 | -46,208 | | | 444,2257 |
| Avril | 461 | 469,333 | -8,333 | | | 474,5174 |
| Mai | 472 | 472,750 | -0,750 | | | 471,8090 |
| Juin | 535 | 475,042 | 59,958 | | | 480,9549 |
| Juillet | 622 | | | | | 507,9549 |
| Août | 606 | | | | | 482,5799 |
| Septembre | 508 | | | | | 485,7882 |
| Octobre | 461 | | | | | 492,8299 |
| Novembre | 390 | | | | | 473,4549 |
| Décembre | 432 | | | | | 484,8090 |
| | | | | -9,792 | 0,000 | |

Le graphique représente le trafic de voyageurs et la série corrigée des variations saisonnières en fonction du temps.




La série désaisonnalisée a été obtenue à partir d'une méthode de type moyenne mobile.

1. Expliquer la méthodologie et donner la moyenne mobile utilisée.
2. Donner les valeurs A, B, C, D, E.
3. Quelles méthodes proposeriez-vous pour estimer la tendance?

**Exercice 2 : (5 points)**

Soit $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc faible. On definit

$$X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k}, \qquad t \in \mathbb{Z},$$

où $0 < |\phi| < 1$.

1. Rappeler la définition d'un processus stationnaire faible et montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire faible.

2. Montrer que

$$X_t = \frac{1}{\phi} X_{t-1} + \eta_t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

3. Calculer $\mathbb{E}[X_t \eta_{t+1}]$ et en déduire que $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ n'est pas le processus d'innovation de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

4. Soit

$$\varepsilon_t = X_t - \phi X_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible et que $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] < \mathbb{E}[\eta_t^2]$.

5. Montrer que $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est le processus d'innovation de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

**Exercice 3 : (3 points)**

On considère un processus stationnaire du second ordre $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifiant

$$X_t = \varepsilon_t + \eta_t - \eta_{t-1}$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance $\sigma_\varepsilon^2$ et $\eta$ est un bruit blanc décorrélé de $\varepsilon$ et de variance $\sigma_\varepsilon^2$.

Donner la représentation canonique de ce processus.

**Exercice 4 : (6 points)**

On considère l'équation de récurrence

$$X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1},$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance $\sigma_\varepsilon^2$.

1. Existe-t-il une représentation canonique pour ce processus?

2. Montrer qu'il existe une solution qui admet la représentation $X_t = \sum_{j=0}^\infty \psi_j \varepsilon_{t-j}$, avec des coefficients $\psi_j$ (qu'on ne cherchera pas à déterminer) qui vérifient $\psi_0 = 1$ et $\sum_{j=0}^\infty |\psi_j| < \infty$.

3. Montrer que $\psi_1 = 2$.

4. Montrer que pour $k \geq 2$, on a

$$\gamma_X(k) - \gamma_X(k-1) + \frac{1}{4}\gamma_X(k-2) = 0.$$

Donner la forme générale de l'équation de récurrence linéaire.

5. Montrer que l'on a aussi

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) - \gamma_X(1) + \frac{1}{4}\gamma_X(2) &= 3\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_X(1) - \gamma_X(0) + \frac{1}{4}\gamma_X(1) &= \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$

**Université de Lyon, université Lyon 1**

ISFA 3A

Examen de Finance

François Quittard -Pinon

9 Mai 2011

Documents non autorisés.
Les notations sont celle du cours.

Durée : 3 heures.

**Exercise 1 Changement de numéraire**

*Expliquez en quoi consiste la technique de changement de numéraire. Donnez deux exemples d'application de cette technique. (Pas plus de deux pages.)*

**Exercise 2 HJM et Vasicek généralisé**

*Dans le modèle de Heath Jarrow Morton, le taux instantané $r$ est donné dans l'univers risque-neutre par :*

$$r(t) = f(0,t) + \int_0^t \sigma_f(s,t)\sigma(s,t)ds + \int_0^t \sigma_f(s,t)d\hat{z}(s) \tag{1}$$

*$f(0,t)$ est le taux forward instantané à l'origine et $\sigma_f(s,t)$ la volatilité forward, $\hat{z}$ un mouvement brownien standard pour la mesure risque-neutre. Rappel : $\sigma(s,t) = \int_s^t \sigma_f(s,u)du$. Le but de cet exercice est de montrer qu'un choix particulier de volatilité forward conduit au modèle de Vasicek généralisé. Ce choix est : $\sigma_f(s,t) = \sigma e^{-a(t-s)}$ avec $a$ et $\sigma$ constantes positives.*

1. *Montrez que dans ce cas :*

$$r(t) = f(0,t) + A(t) + \int_0^t \sigma_f(s,t)d\hat{z}(s) \tag{2}$$

*avec une fonction $A(t)$ que vous identifierez.*

2. *Différentiez l'équation (2).*
3. *Différentiez $\int_0^t \sigma_f(s,t)d\hat{z}(s)$.*

4. *En utilisant l'équation (1) et la précédente différentiation, montrez que :*
   $dr = B(t)dt + \sigma d\hat{z}$.
   *Donnez* $B(t)$ *et conclure.*

**Exercise 3 Evaluation de produit dérivé d'inflation**

*Le but de cet exercice est d'évaluer une option d'achat sur inflation. Soit* $I(t)$, *l'indice des prix à la consommation (IPC). On appelle Zéro Coupon protégé de l'inflation pour une échéance* $T$, *l'actif financier versant en* $T$ *un flux unique de* $I(T)$ *unités monétaire. On note* $P_{IP}(t,T)$, *le prix de cet actif en* $t$. *On appelle Zéro Coupon réel d'échéance* $T$, *l'actif qui verse en* $T$ *une unité de prix à la consommation. On note* $P_r(t,T)$ *son prix en* $t$. *Donc* $P_r(t,T) = \frac{P_{IP}(t,T)}{I(t)}$. *C'est donc un prix relatif exprimé en unité d'IPC, en outre* $P_r(T,T) = 1$ *et* $P_{IP}(t,T) = I(t)P_r(t,T)$. *Cette relation suggère une analogie entre IPC et taux de change. On distinguera ainsi univers réel et univers nominal. Dans ce dernier, on note* $P_n(t,T)$ *le prix en* $t$ *d'un ZC déchéance* $T$ *qui verse une unité monétaire à cette date. On admettra que dans l'univers risque-neutre nominal, les ZC déchéance* $T$ *et l'IPC obéissent à :*

$$\frac{dP_n}{P_n} = (...)dt - \Gamma_n(t,T)dW^n \tag{3}$$

$$\frac{dP_r}{P_r} = (...)dt - \Gamma_r(t,T)dW^r \tag{4}$$

$$\frac{dI}{I} = (...)dt + \sigma(t)dW^I \tag{5}$$

*Les fonctions* $\Gamma, \sigma$ *sont déterministes et les* $W^k$ *pour* $k = n, r, I$ *sont des mouvements browniens corrélés :* $dW^I dW^n = \rho_{I,n}dt$ ; $dW^I dW^r = \rho_{I,r}dt$ ; $dW^r dW^n = \rho_{n,r}dt$.

*On note* $C(t,T)$, *le prix en* $t$ *de l'option d'echéance* $T$, *versant en* $T$ : $[I(T) - K]^+$. *Le but de l'exercice est d'évaluer cette option en 0.*

1. *Montrez que* $C(T,T) = [P_{IP}(T,T) - K]^+$.
2. *Dans l'univers nominal T-forward-neutre les prix relatifs exprimés en ZC d'échéance* $T$ *sont des martingales pour la mesure T-forward-neutre. Il en résulte :*

$$C(0,T) = P_n(0,T)E_{Q_T^n}\left[\frac{P_{IP}(T,T)}{P_n(T,T)} - K\right]^+.$$

   *On note* $W^{T,k}$, *les mouvements browniens standard dans cet univers,* $k = n, r, I$.
   *Montrez que :*

$$\frac{d\left(I(t)P_r(t,T)\right)}{I(t)P_r(t,T)} = (...)dt + \sigma_I(t)dW^{T,I} - \Gamma_r(t,T)dW^{T,r}.$$

3. *On note* $Z(t) = \frac{I(t)P_r(t,T)}{P_n(t,T)}$. *Montrez que :*

$$\frac{dZ}{Z} = \Gamma_n(t,T)dW^{T,n} + \sigma_I(t)dW^{T,I} - \Gamma_r(t,T)dW^{T,r}. \tag{6}$$

4. *Calculez var* $\left(\frac{dZ}{Z}\right)$.
5. *Vous admettrez que la solution de l'équation* (4) *s'écrit :*

$$Z(t) = Z(0)exp\left(B(\tau(t)) - \frac{1}{2}\tau(t)\right).$$

*La fonction aléatoire* $B$ *est un brownien standard et* $\tau$ *est définie par :*

$$\begin{aligned}\tau(t) &= \int_0^t (\Gamma_n^2(s,T) + \Gamma_r^2(s,T) + \sigma_I^2(s) \\ &+ 2\sigma_I(s)\Gamma_n(s,T)\rho_{n,I} - 2\Gamma_r(s,T)\Gamma_n(s,T)\rho_{n,r} - 2\sigma_I(s)\Gamma_r(s,T)\rho_{I,r})ds.\end{aligned}$$

*En déduire la valeur de l'option en 0. Vous pourrez utiliser le lemme suivant :*

*Lemme : Si* $Y$ *est gaussienne* $N(m, \sqrt{v})$ *et* $K > 0$, *alors*
$E[e^Y - K]^+ = e^{m+\frac{1}{2}v}N(d) - KN(d-\sqrt{v})$ $d = \frac{m+v-\ln K}{\sqrt{v}}$

Examen de 3ème année : la retraite

**Sujet d'examen 2010-2011**
Durée : 2 heures
Documents et calculatrices non autorisés.

1. Décrire les trois piliers de la retraite (au sens européen) (3 points)

2. Répartition/capitalisation : définition succincte (3 points)

3. Décrire le calcul de la pension de la CNAV : une équation (3 points).

4. Calcul d'une pension ARRCO-AGIRC : Je suis cadre, et j'ai touché un salaire de 85 000 € bruts annuels et un bonus de 7 500 € bruts. Je cotise (moi et mon employeur) à 7,50 % à l'ARRCO et 20% à l'AGIRC. Combien d'euros de pension ai-je acquis cette année là (sans abattement ni majoration) auprès de l'ARRCO et de l'AGIRC ? <u>Poser les opérations (4 points) et calculer (1 point)</u>
   Paramètres fictifs à utiliser :

| | |
|---|---|
| Plafond annuel de la Sécurité Sociale : | 30 000 € |
| Prix d'achat du point ARRCO : | 18,00 € |
| Valeur du point ARRCO : | 1,50 € |
| Prix d'achat du point AGIRC : | 5,00 € |
| Valeur du point AGIRC : | 0,40 € |

5. Expliquer ce que veux dire un assureur lorsqu'il parle d'un « article 39 », « article 82 », « article 83 » ou « article 115 » (2 points)

6. Définir la dette actuarielle, la charge normale, le coût des services et la charge de l'exercice dans le cadre d'une évaluation d'engagements réalisée sous la norme IAS 19. (5 points)

7. Euros courants/euros constants : définition et illustration par un exemple original – merci d'éviter de reproduire ceux du cours (3 points).

Merci de vous limiter à une copie double au maximum (un dizaine de lignes pour les questions les plus longues !).

**COURS DE COMPTABILITE DES ASSURANCES**
**Examen de AVRIL 2011**
**Durée de l'épreuve : 2 heures**
**Enseignant : Jean-Pierre Boutard**

**Question 1** : Définir et décrire succinctement les provisions techniques non-vie définies réglementairement ?

**Question 2 -** Vous définirez la marge de solvabilité tant pour les entreprises vie que non-vie. Vous indiquerez la méthode de calcul à appliquer actuellement pour chacune de ces entreprises d'assurance. Pourquoi la marge de solvabilité est-elle calculée ?

**Question 3** – Quels sont les types de réassurance existantes. Vous donnerez leurs caractéristiques techniques.
Comment sont comptabilisés les primes et sinistres dans le cas d'une cédante ?

ISFA 3
Le 21 avril 2011

# Examen de Théorie de la ruine

*Le deux parties sont indépendantes et devront être rédigées sur* **deux copies séparées** *– indiquez bien "partie A" et "partie B" sur ces copies.*

## PARTIE A (Claude Lefèvre)

Durée: 1 heure - sans notes de cours ; avec calculatrice -
Bonne réussite !

### QUESTION 1

Considérons le modèle de risque de Poisson composé où les réserves initiales valent $u$, le taux de prime par unité de temps vaut $c$, les sinistres surviennent selon un processus de Poisson de paramètre $\lambda$ et les montants des sinistres successifs sont des v.a. $X_i$ qui sont i.i.d. de fonction de répartition $F(x)$, $x \geq 0$, avec $F(0) = 0$.

Notons $R(t)$ les réserves de la compagnie à l'instant $t$, et soit $T(u)$ l'instant de ruine éventuelle de la compagnie. Introduisons maintenant la fonction $l(u)$ suivante:

$$l(u) = E\left\{R[T(u)_-]\, I_{[T(u)<\infty[} \mid R(0) = u\right\},$$

l'indicateur $I_{[T(u)<\infty]}$ signifiant qu'on considère le cas où il y a effectivement ruine. Cette fonction représente donc le niveau moyen des réserves à l'instant, noté $T(u)_-$, qui précède immédiatement la ruine - par comparaison, $|R[T(u)]|$ représenterait la sévérité de la ruine qui a été vue au cours -.

En faisant un bilan de probabilité sur l'intervalle de temps $(0, dt)$, démontrer que

$$\frac{dl(u)}{du} = \frac{\lambda}{c}\left\{l(u) - \int_0^u l(u-x)\, dF(x) - u\,[1 - F(u)]\right\}.$$

### QUESTION 2

Reprenons à nouveau le modèle de risque de Poisson composé. Examinons maintenant le cas où le chargement de sécurité vaut $\theta = 1/4$ et les sinistres successifs $X_i$ sont cette fois de loi discrète $\{f_k \equiv P(X_i = k),\ k = 0, 1, 2\}$ avec

$$f_0 = 0,70, \quad f_1 = 0,20, \quad f_2 = 0,10.$$

Déterminer la probabilité de ruine éventuelle $\psi(1)$, càd partant d'un capital initial $u = 1$ (utiliser 2 décimales):

$$\psi(1) = ?$$

*Premier rappel*: On a vu au cours que

$$\psi(u) = P(\sum_{i=1}^{G} Y_i > u),$$

où les $Y_i$ sont des v.a. i.i.d. de fonction de répartition

$$F_e(x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x [1 - F(y)] dy,$$

avec $\mu = E(X_i)$ (on utilisera ici le fait que les sinistres sont de montant discret), où $\sum_{i=1}^{0} = 0$ par convention, et où $G$ est une v.a. de loi géométrique avec

$$P(G = n) = \frac{\theta}{1+\theta}(\frac{1}{1+\theta})^n, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

*Deuxième rappel*: La récurrence de Panjer. Soient $Y_i$ des v.a. i.i.d. de loi discrète $\{h_k \equiv P(Y_i = k),\ k = 0, 1, 2, \ldots\}$. Si $N$ est une v.a. de comptage de loi $\{p_n \equiv P(N = n),\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ telles que

$$p_n = (a + \frac{b}{n})\, p_{n-1}, \quad n = 1, 2, \ldots,$$

alors la somme composée $S_N \equiv \sum_{i=1}^{N} Y_i$ est de loi $\{g_n \equiv P(S_N = n),\ n = 0, 1, 2, \ldots\}$ avec

$$\begin{aligned} g_0 &= E(h_0^N), \\ g_n &= \frac{1}{1 - a h_0} \sum_{k=1}^{n} (a + \frac{bk}{n})\, h_k\, g_{n-k}, \quad n = 1, 2, \ldots \end{aligned}$$

## QUESTION 3

Considérons un modèle de risque de Poisson composé où le paramètre de Poisson vaut $\lambda = 1$, les montants des sinistres successifs $X_i$ sont des v.a. i.i.d. de loi Uniforme sur $(0, 1)$ et le chargement de sécurité demandé par la compagnie vaut $\theta = 0,2$.

Cette compagnie procède à une réassurance de ses risques selon le principe de la règle proportionnelle, càd que pour tout sinistre $X_i$, elle couvrira uniquement la partie $Y_i \equiv a\, X_i$ avec $0 < a < 1$, tout en cédant à la réassurance la partie restante $(1 - a)\, X_i$. Le chargement de sécurité demandé par la réassurance vaut $\xi = 0, 3$.

Pour la compagnie cédante, écrire l'équation implicite qui fournit son coefficient d'ajustement (bien indiquer son taux de prime réel après réassurance).

*Rappel*: On a vu au cours qu'en cas de non-réassurance, le coefficient d'ajustement est la solution positive de l'équation implicite

$$\lambda + cs = \lambda\, E(e^{sX_i}), \quad s \geq 0.$$

## QUESTION 4

Supposons que deux compagnies, 1 et 2, gèrent chacune, indépendamment, un modèle de risque de Poisson composé de paramètres de Poisson respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$, de montants de sinistres i.i.d. distribués respectivement comme deux variables $Y_1$ de moyenne $\mu_1$ et $Y_2$ de moyenne $\mu_2$, et de chargements de sécurité respectifs $\theta_1$ et $\theta_2$.

Soient $S_1(t)$ et $S_2(t)$ les montants totaux des sinistres jusqu'en $t$ pour les deux compagnies. Etablir que
(i) la transformée de Laplace-Stieltjes de $S_1(t)$ (par exemple) est donnée par

$$E[e^{-sS_1(t)}] = e^{-\lambda_1 t[1-E exp(-sY_1)]}, \quad s \geq 0.$$

Ces deux compagnies décident de fusionner, sans modifier leurs primes. Soit $S(t)$ le montant total des sinistres jusqu'en $t$ après fusion, càd $S(t) = S_1(t) + S_2(t)$. En utilisant la transformée de Laplace-Stieltjes de $S(t)$, démontrer que le modèle de risque fusionné est encore un modèle de Poisson composé, et spécifier pour ce processus
(ii) le paramètre de Poisson,
(iii) la loi commune des montants de sinistre.
En déduire
(iv) l'expression du chargement de sécurité obtenu après fusion.

## PARTIE B (Esterina Masiello)

Durée: 20 minutes - sans notes de cours.

a) Rappeler les hypothèses du modèle de Cramér-Lundberg et proposer un estimateur du coefficient d'ajustement (après en avoir donné la définition).

b) **Question bonus** : montrer la normalité asymptotique de l'estimateur trouvé en a).

c) Par une simple application de la méthode Delta, proposer un intervalle de confiance pour la borne de Cramér-Lundberg.

**Examen Risque de Crédit**
**ISFA 3A**
**Mardi 24 Mai 2011**
Durée 1h30, Supports de cours non autorisés
La notation prendra en compte la qualité de la rédaction.

## Exercice 1 Courbe de crédit inversée

1. On considère une entité de référence dont la structure par terme des spreads de CDS (courbe de crédit) est décrite à l'aide du tableau ci-dessous.

| Term | 6M | 1Y | 2Y | 3Y | 5Y | 7Y | 10Y |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Spreads (bps) | 800 | 600 | 450 | 300 | 200 | 200 | 200 |

Montrer que l'on peut construire un arbitrage.

2. Décrire brièvement les principales différences entre les modèles structurels et les modèles à intensité.

3. On suppose que l'instant de défaut $\tau$ de l'entité de référence est décrit dans un modèle à intensité où l'intensité est supposée être une fonction déterministe du temps constante par morceaux. A chaque maturité standard $T_1, \ldots, T_p$, on associe une constante $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

   a) Comment simuler l'instant de défaut $\tau$ dans ce modèle.

   b) Expliciter la loi de survie $\mathbb{P}(\tau > t)$ pour $0 \leq t \leq T_p$.

   c) On note $\delta$ le taux de recouvrement que l'on suppose constant. On considère des paiements de primes trimestriels. En négligeant le taux d'intérêt et le coupon couru, donner en fonction de $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ l'expression du spread de crédit $S_1, \ldots, S_p$ pour les CDS-s de maturité $T_1, \ldots, T_p$.

   d) Montrer que, pour $k = 1, \ldots, p$, $S_k$ est une fonction croissante de $\lambda_k$ toute chose égale par ailleurs.

   e) En déduire que, pour $k = 2, \ldots, p$,

$$\frac{DL_{k-1}}{PL^u_{k-1} + (T_k - T_{k-1})\mathbb{P}(\tau > T_{k-1})} \leq S_k \leq \frac{1-\delta}{PL^u_{k-1}},$$

   où $DL_{k-1}$ (resp. $PL^u_{k-1}$ ) est la valeur actuelle de la jambe de défaut (resp. jambe de prime pour un spread d'un bp) d'un CDS de maturité $T_{k-1}$ pour un montant nominal égal à une unité monétaire.

   f) Décrire la procédure de bootstrap que l'on peut mettre en oeuvre pour calibrer les intensités $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$.

   g) Etant donné la courbe de crédit décrite dans la table ci-dessus, montrer que cette dernière procédure peut générer des intensités négatives.

**Exercice 2 Distribution de la perte d'un portefeuille de crédit**

On considère un portefeuille de crédit equipondéré de taille $n$. On note $(\tau_1, \ldots, \tau_n)$ le vecteur des temps de défaut et on suppose que les taux de recouvrement $\delta_1, \ldots, \delta_n$ correspondants aux noms $1, \ldots, n$ sont constants. La perte unitaire du portefeuille de référence en $t$ s'écrit :

$$L_t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (1 - \delta_i) \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}.$$

Pour décrire la dépendance entre les temps de défaut, on se place dans un modèle à facteur où les variables latentes $V_1, \ldots, V_n$ sont telles que :

$\bar{V}_i \perp\!\!\!\perp$

$$V_i = \min\left(V, \bar{V}_i\right), \; i = 1, \ldots, n.$$

On suppose que $V$ est une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\alpha$ ($\mathbb{P}(V > x) = \exp(-\alpha x)$, pour $x \geq 0$) et $\bar{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$, sont des variables aléatoires de loi exponentielle de paramètre $1 - \alpha$, $0 \leq \alpha \leq 1$. De plus, les variables aléatoires $V$ et $\bar{V}_i$, $i = 1, \ldots, n$ sont supposées être indépendantes. Les fonctions de survie $S_i(t) = \mathbb{P}(\tau_i > t)$, pour $i = 1, \ldots, n$, ont été préalablement calibrées sur la courbe de crédit des CDS-s du portefeuille sous-jacent. Dans ce modèle, les temps de défaut sont définis par :

$$\tau_i = S_i^{-1}(\exp(-V_i)), \; i = 1, \ldots, n.$$

a) A quelles situations correspondent les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ ?

b) Donner l'expression des probabilités conditionnelles de survie $\vec{q}_t^{\,i} = \mathbb{P}(\tau_i > t \mid V)$, $i = 1, \ldots, n$ ?

c) Exprimer en fonction de $\vec{q}_t^{\,i}$, $\delta_i$, $i = 1, \ldots, n$ et $n$ l'expression de la fonction caractéristique de la perte agrégée. Décrire brièvement une méthode numérique permettant de calculer la loi de la perte sans effectuer de simulations. Proposer une méthode alternative.

d) On suppose que les marginales des temps de défaut sont les mêmes. Montrer que la probabilité que deux défauts surviennent simultanément est non nulle.