• Calcul obligataire

- principal : Montant global emprunté
- Durée : T
- Nombre de titres N
- Valeur par titre : $\frac{\text{principal}}{N} = F$ = Valeur nominal ou faciale
- Taux nominal k : % du nominal versé au détenteur d'un titre par période
- Coupon : Montant de l'interêt périodique
- Prix d'émission : (en général $\leq F$) PE est exprimé en % de F.
  - Si $PE = F = 100\%$ on dit alors que l'emprunt est émis au pair
  - Si $PE = 99\%$, le prix d'émmission d'un titre est égale à $99\% \times F$
- Prix de remboursement PR_t ($t \leq T$ ou $t=0$ correspond à la date d'émission)
  - Si $PR = F$ le remboursement est dit au pair
  - Si $PR = 102\%$, le titre sera remboursé à $102\% \times F$
  - Si la seule date de remboursement est d'échéance T, le remboursement est dit "in fine"

Valeur de l'obligation en temps t et taux d'actualisation r

$$B_t = kF \times \frac{1-(1+r)^{-(T-t)}}{r} + \frac{PR}{(1+r)^{T-t}}$$

ou

$$B_t = \frac{k}{(1+r)^b} + \frac{k}{(1+r)^{1+b}} + \dots + \frac{k}{(1+r)^{(T-1)+b}} + \frac{k+PR}{(1+r)^{T+b}}$$

$$= \sum_{t}^{T} \frac{F_t}{(1+r)^t}$$ où F_t est le flux versé à la date t

Exemple : émission au pair. Remboursement in fine au pair

$F = 1000$ €, $k = 6\%$ $T = 10$ ans

Pour $r = 7\%$, calculer B_0 et B_6

$$B_0 = 0.06 \times 1000 \times \frac{1-(1+0.07)^{-10}}{0.07} + \frac{1000}{(1.07)^{10}} = 922 \text{ €}$$

$$B_6 = 0.06 \times 1000 \times \frac{1-(1+0.07)^{-4}}{0.07} + \frac{1000}{(1.07)^4} = 966 \text{ €}$$

Quand les taux d'actualisation r augmentent les B_t diminuent

Le taux d'actualisation r correspond au TRI de l'investissement

$$PE = \frac{k}{1+r} + \frac{k}{(1+r)^2} + \frac{k}{(1+r)^3} + \dots + \frac{k}{(1+r)^{T-1}} + \frac{k+PR_t}{(1+r)^T}$$

- Variation relative de la valeur des obligations

$$\frac{B_{r+\Delta r} - B_r}{B_r} \text{ en } \%$$

où $\dfrac{\dfrac{B_{r+\Delta r} - B_r}{B_r}}{\Delta r} < 0$ car $B_{r+\Delta r} < B_r$

- Duration : Définition

Version 1

$$D_t = \frac{1}{B_t} \times \left[\frac{1 \times k}{(1+r)} + \frac{2 \times k}{(1+r)^2} + \dots + \frac{(T-1)k}{(1+r)^{(T-1)}} + \frac{T(k+PR)}{(1+r)^{(T)}} \right]$$

$$= \frac{1}{P} \times \sum_{k=1}^{T} \frac{F_{t_k}}{(1+r)^{t_k}} \times t_k$$

Version 2

$$D = \frac{1}{P} \times \sum_{k=1}^{T} F_{t_k} \times e^{-y_{0,t_k} \times t_k} \times t_k$$

où $y_{0,t_k} = \dfrac{-1}{t_k} \ln(B(0, t_k))$

et $B(t_0, t_k)$ est le prix à la date t_0 d'un zéro-coupon remboursant une unité monétaire à la date t_k

et $B(t_0, t_k) = \frac{1}{(1+r_{t_0,t_k})^{t_k - t_0}}$

- Sensibilité : Duration modifiée (D^*)

$$S = D_1^* = \frac{D_1}{1+r}$$

- Propriétés de la duration

  - L'invariance : Soit $(F_{t_k})_{k=1,\dots,T}$ un échéancier.
    Soit D_1 et D_2 les durations versions 1 et 2 de cet échéancier.
    Les durations V1 et V2 de l'actif d'échéancier $(\lambda F_{t_k})_{k=1,\dots,T}$ sont également D_1 et D_2 pour $\forall \lambda \in \mathbb{R}_+^*$

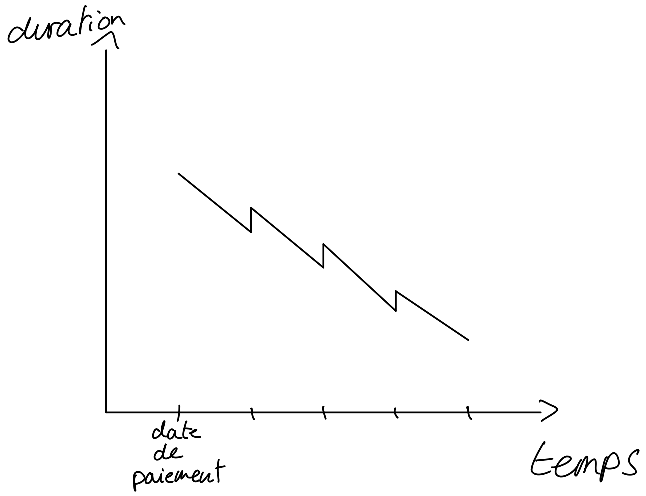
    ↳ Preuve évidente. Le risque est le même si on achète 1 ou 100 titres

  - Linéarité de la duration version 2 : Le portefeuille constitué des créances a et b a pour duration version 2

$$D_{2,a+b} = \frac{P_a}{P_a + P_b} \times D_{2,a} + \frac{P_b}{P_a + P_b} \times D_{2,b}$$

  - $D_1(y)$ est une fonction décroissante de y $(y = \ln(1+r))$
    $D_1(r)$ .... du taux d'actu° r

- Evolution de la duration au cours du temps



- $$\frac{1}{P(r)} \times \frac{dP}{dr} = -D_1^*(r) = \frac{-D(r)}{1+r}$$

$$\frac{1}{P(y)} \times \frac{dP}{dy} = -D(y)$$

- <u>Convexité</u>

Rappel : $(y,t) \in \mathbb{R} \times]-\infty, 1]$ la fonction prix s'écrit :

$$P(y,t) = \sum_{k=1}^{T} F_k \, e^{-y(t_k - t)}$$

Pour $(r,t) \in]-1, +\infty[\times]-\infty, t_1[$

$$P(r,t) = \underbrace{\sum_{k=1}^{T} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k - t}}}_{\text{actualisation}}$$

plus l'oblig est convexe, à sensibilité égale, plus elle sera performante pour des changements de taux d'intérêt.

$$P(r,t) = \underbrace{(1+r)^t}_{\text{capitalisation jusqu'à } t} \underbrace{\sum_{k=1}^{T} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k}}}_{\text{Somme actualisé sur } t_k}$$

Définition : Convexité

$$\frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = \sum_{k=1}^{T} t_k^2 F_k e^{-y t_k}$$

Exemple :

Soit un zéro-coupon payant 1 à son échéance dans T années.
Calculer la duration et la convexité dans le cas discret et continu

$\Rightarrow$ Duration discrète = Duration continu = T (maturité)

$\Rightarrow$ Convexité continue (C_c) :

$$C_c(y) = T^2 \times F_k \times e^{-yT} = T^2 \times e^{-yT}$$

Convexité discrète (C_d) :

$$\frac{d^2 B_r(0,T)}{dr^2} = (T^2+T)\frac{1}{(1+r)^T}\frac{1}{(1+r)^2}$$

$$\frac{d^2 B_y(0,T)}{dy^2} = T^2 B_y(0,T) = D_1^2 \times B_y(0,T)$$

Rappel : $y = \ln(1+r)$

Définition : La Convexité représente la façon dont le prix de la créance évolue au cours du temps, à taux d'actualisation fixé.

- Immunisation

On s'intéresse à la valeur d'un portefeuille obligataire qui réinvestit les coupons

Il existe 2 risques opposés présent sur la rentabilité du portefeuille :

- Le risque de moins-value lorsque les taux montent :
  - -> Valeur de l'obligation baisse
  - -> Coupons peuvent être réinvestis à un taux plus élevé

On regarde l'influence sur la valeur du portefeuille d'un choc initial sur le taux du placement, celui-ci restant constant jusqu'à l'horizon d'investissement noté T.

En économie, on parle parfois de choc auto-entretenu ou d'effet permanent

Soit la date du choc = 0

Immédiatement après le choc, en 0^t, le taux d'actualisation passe au niveau r et reste constant entre 0 et T

Pour $0 \leq t \leq T$, la valeur du portefeuille est appelée fonction d'accumulation, notée $V(r)$

$$V_t(r) = \underbrace{\sum_{t_k < t}^{t} F_k (1+r)^{t-t_k}}_{\text{flux passées réinvestis}} + \underbrace{\sum_{t_k > t}^{T} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k - t}}}_{\text{fluxs futurs actualisés}}$$

en notant F_k les flux, qui seront réinvestis, versés en t_k

$$V_t(r) = \sum_{k=1}^{T} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k-t}} = (1+r)^t \sum_{k=1}^{T} \frac{F_k}{(1+r)^{t_k}}$$

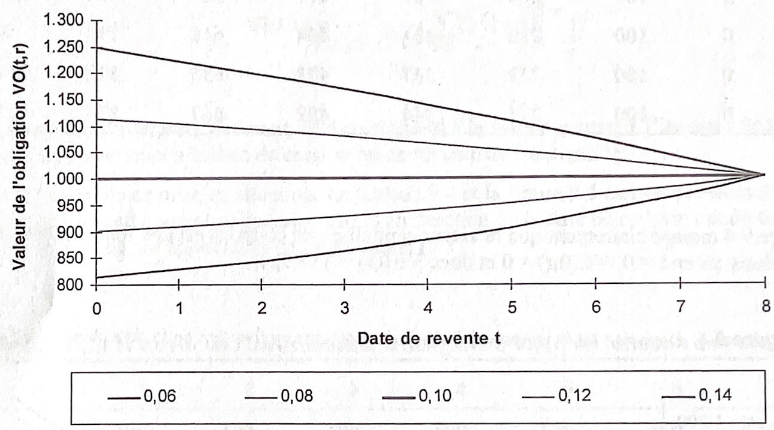
$$V_t(r) = (1+r)^t \, V_0(r)$$

Propriétés : La fonction d'accumulation $V_t(r)$ est une fonction convexe de r et y

- Lorsque le taux d'interêt r est inférieur au taux de coupon, alors la valeur de l'obligation est décroissante et converge vers sa valeur de remboursement.

- Lorsque le taux d'intérêt r est inférieur au taux de coupon, alors la valeur de l'obligation est croissante et converge vers sa valeur de remboursement

Figure 9.3 *Evolution de la valeur actualisée de l'obligation en fonction de la date de revente t et du taux r*



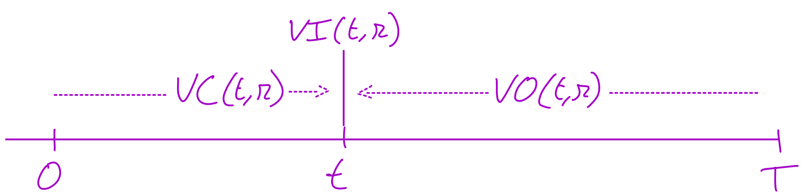
$$VO(t,r) = \frac{F_{t+1}}{(1+r)^1} + \frac{F_{t+2}}{(1+r)^2} + L + \frac{F_{T-1}}{(1+r)^{T-t-1}} + \frac{F_T}{(1+r)^{T-t}}$$

- Valeur Capitalisée $(VC(t,r))$

$$VC(t,r) = F_1(1+r)^{t-1} + F_2(1+r)^{t-2} + L + F_{t-1}(1+r)^1 + F_t$$

- Valeur Investissement Obligataire $(VI(t,r))$

$$VI(t,r) = VO(t,r) + VC(t,r)$$



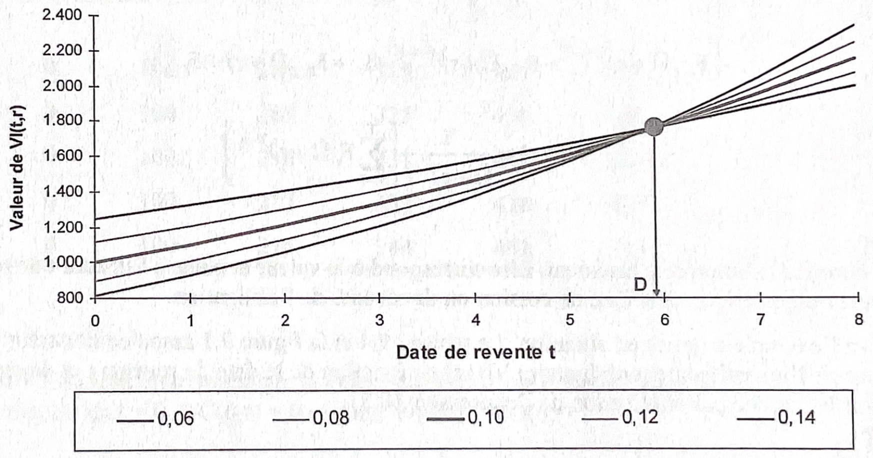
En développant,

$$VI(t,r) = \frac{1}{(1+r)^{T-t}} \left[\sum_{K=1}^{T} F_K (1+r)^{T-K} \right]$$

Il existe un instant de convergence noté D de la valeur de $VI(t,r)$ quel que soit le taux r. Ce point de convergence se situe graphiquement et porte le nom de <u>Duration</u>

En ce point D, les deux risques inhérents à un placement obligataire s'annulent parfaitement

Figure 9.5 *Evolution de la valeur de l'investissement obligataire en fonction de la date de revente t et du taux r*



- Elément de la structure par terme des taux d'interêts

On s'intéresse à la courbe des taux, c'est à dire la mise en relation des taux de rendement obligataires d'un émmetteur donné (typiquement l'État pour obtenir ce qu'on appelle la courbe des taux sans risque) avec leurs maturités.

Trois raisons principales pour prendre cette référence :

1) Les États (en général) émmèttent suffisamment de titres pour que l'on dispose de nombreuses maturités (et donc de points pour établir la courbe)

2) Les émmissions d'emprunts d'États sont fréquentes et en grande quantité ce qui guarantit normalement une bonne liquidité.

3) En temps normal, l'État ne présente pas de risque de défault

Donc, pas de prime de liquidité et pas de marge (spread) de crédit dans le taux d'actualisation des emprunts

Determination de taux zéro-coupon :

En t_0, le prix d'une oblig s'écrit

$$P_{t_0} = \sum_{k=1}^{T} \frac{F_k}{(1+r_{t_T})^{t_k - t_0}}$$

r_T = rdt actuariel (TRI) pour le titre de maturité $t_T - t_0$

Pour un ZC élémentaire entre t_0 et t_k (payant 1 en t_k)

$$B(t_0, t_k) = \frac{1}{(1+r_{t_0,t_k})^{t_k - t_0}}$$

$$P_{t_0} = \sum_{k=1}^{T} F_k \times B(t_0, t_k)$$

Exemple numérique :

Considérons 4 obligations du Trésor (OAT) à taux fixe, de coupons annuels, le 1er coupon étant payable dans 1 an, remboursable au pair.

Maturité	Taux Nominal	Valeur de Marché
1 an	3 %	101,50 %
2 ans	2.5 %	100 %
3 ans	3.25 %	100 %
4 ans	3.5 %	99 %

Déterminer les taux ZC sans risque $r_{0,1}$, $r_{0,2}$, $r_{0,3}$, $r_{0,4}$

$$101.5 = \frac{103}{(1+r_{0,1})^1} \qquad \frac{1}{(1+r_{0,1})} = \frac{101.5}{103} \qquad r_{0,1} = \frac{103}{101.5} - 1$$

$$r_{0,1} = 1.478\%$$

$$100 = \frac{2.5}{(1+r_{0,1})^1} + \frac{102.5}{(1+r_{0,2})^2}$$

$$= \frac{2.5}{(101.47\%)} + \frac{102.5}{(1+r_{0,2})^2}$$

$$97.536 = \frac{102.5}{(1+r_{0,2})^2} \qquad \sqrt[2]{\frac{102.5}{97.536}} - 1 = 2,513\%$$

$$r_{0,2} = 2,513\%$$

$$100 = \frac{3.25}{(101.47\%)} + \frac{3.25}{(102.51\%)^2} + \frac{103.25}{(1+r_{0,3})^3}$$

$$100 = 3.2 + 3.09 + \frac{103.25}{(1+r_{0,3})^3}$$

$$93.71 = \frac{103.25}{(1+r_{0,3})^3}$$

$$r_{0,3} = \sqrt[3]{\frac{103.25}{93.71}} - 1 \qquad r_{0,3} = 3.28\%$$

$$99 = \frac{3.5}{(101.47\%)} + \frac{3.5}{(102.51\%)^2} + \frac{3.5}{(103.28\%)^3} + \frac{103.5}{(1+r_{0,4})^4}$$

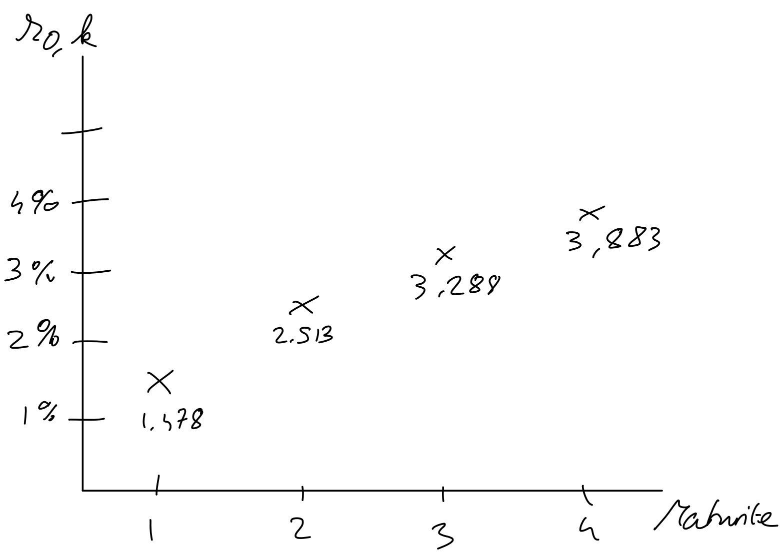
$$99 = 3.45 + 3.33 + 3.177 + \frac{103.5}{(1+r_{0,4})^4}$$

$$89 = \frac{103.5}{(1+r_{0,4})^4} \qquad r_{0,4} = \sqrt[4]{\frac{103.5}{89}} - 1 = 3.833\%$$

Remarque : extraire des taux ZC n'est pas toujours aussi simple. Il peut s'agir de résoudre un système d'équations.

Il faut autant d'obligations que de taux à extraire avec les "bonnes" maturités pour obtenir des solutions. Financièrement, on parle de marché complet

- Courbe des taux sans risque (émetteur : État)



Remarque : On cherche à interpoler une courbe pour disposer de tous les (r_0, t_k). Ex : Méthode des spline cubiques

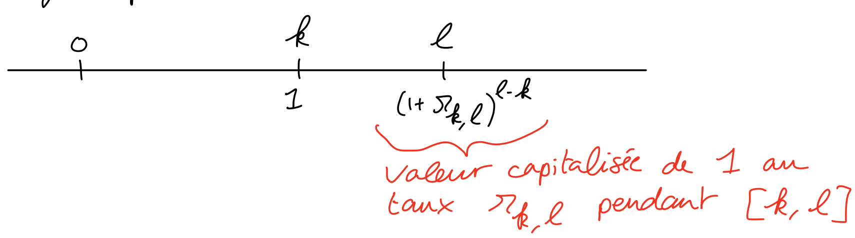
- Pour simplifier, on notera $r(k) = r_{0,k}$

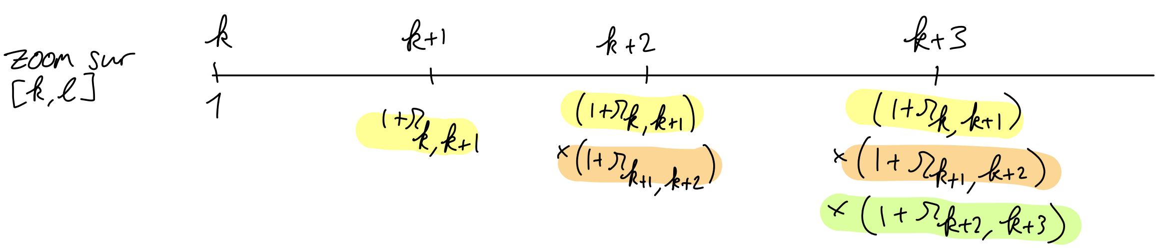
  Ce taux est aussi appellé le taux spot

• Taux Forward ou taux à terme implicite

Notons $r_{k,\ell}$ le taux forward actuel pour la période $[k,\ell]$

i.e le taux (vue d'aujourd'hui = date 0) d'un placement effectué en k et ayant pour échéance ℓ





Cela revient à effectuer un "roll over" de placements :

- On place 1 en k
- On récupère $(1+r_{k,k+1})$ en $k+1$ que l'on place jusqu'à $k+2$
- On récupère $(1+r_{k,k+1})(1+r_{k+1,k+2})$ en $k+2$ que l'on place à nouveau etc...

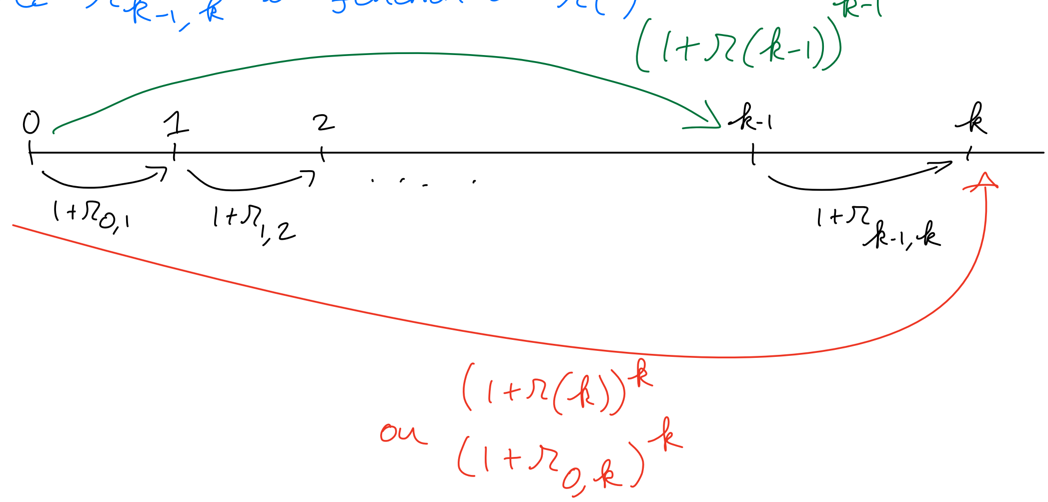
Sous l'hypothèse d'Absence d'opportunité d'Arbitrage (AOA) on écrit

$$(1+r_{k,\ell})^{\ell-k} = \prod_{i=k}^{\ell-1} (1+r_{i,i+1})$$

Remarque : Une opportunité d'Arbitrage est une stratégie d'investissement sans mise initiale permettant de dégager un résultat (financier) strictement positif avec une probabilité non nulle

Ici, AOA signifie qu'il est équivalent de placer directement entre k et ℓ ou de faire le roll-over de placements (aucune stratégie domine l'autre)

Exprimez $r_{k-1,k}$ en fonction de $r(\cdot)$



$$\left.\begin{aligned} (1+r(k))^k &\overset{AOA}{=} \prod_{i=0}^{k-1} (1+r_{i,i+1}) \\ (1+r(k-1))^{k-1} &\overset{AOA}{=} \prod_{i=0}^{k-2} (1+r_{i,i+1}) \end{aligned}\right\} \frac{(1+r(k))^k}{(1+r(k-1))^{k-1}} = 1+r_{k-1,k}$$

On connait les $r_{k,\ell}$ à partir des $r_{i,i+1}$ qui se déduisent des $r(i)$ et $r(i+1)$

<u>Exemple</u> : calculer les taux forward à partir de la courbe des taux spot tirée des OAT du début du cours.

$r(1) = 1,478\%$ $\quad r(2) = 2,513\%$ $\quad r(3) = 3,286\%$ $\quad r(4) = 3,833\%$

$f_{1,1} = r_{1,2} = 3,56\%$ $\quad f_{1,2} = r_{1,3} = 4,2\%$

$f_{2,1} = r_{2,3} = 4,85\%$ $\quad f_{1,3} = r_{1,4} = 4,6\%$

$f_{3,1} = r_{3,4} = 5,5\%$ $\quad f_{2,2} = r_{2,4} = 5,2\%$

$$(1+r_{1,2}) = \frac{(1+r(2))^2}{1+r(1)} = \frac{1,02513^2}{1,01478} = 1,0356$$

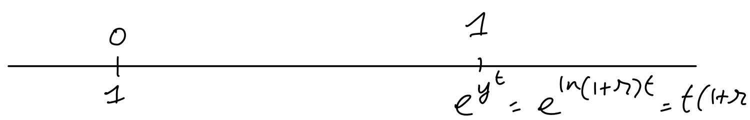
$$(1+r_{2,3}) = \frac{(1+r(3))^3}{(1+r(2))^2} = 1,0485$$

Rem : on note aussi $r_{1,2} = f_{1,1}$ taux forward dans 1 an pour 1 an

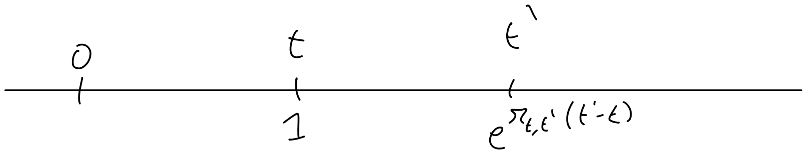
$$(1+r_{1,3})^2 = (1+r_{1,2}) \times (1+r_{2,3}) \qquad r_{1,3} = \sqrt{1,0356 \times 1,0485} - 1$$

- Taux instantanés

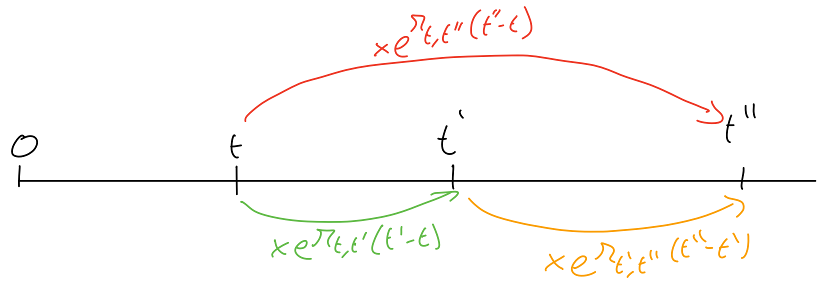
Rappel : Capitalisation avec un taux continue y entre les dates 0 (ajd) et T



On définit le taux forward annuel continu $r_{t,t'}$ comme le taux d'intérêt continue vu en date 0 qui prévoit pour un placement entre les dates futurs t et t'



Pour les dates $0 \leq t < t' < t''$, sous l'hypothèse d'AOA, on peut écrire une relation entre $r_{t,t''}$, $r_{t,t'}$, et $r_{t',t''}$



On écrit $e^{r_{t,t''}(t''-t)} \underset{AOA}{=} e^{r_{t,t'}(t'-t)} \times e^{r_{t',t''}(t''-t')}$

$$\text{Soit} \quad (t''-t)\, r_{t,t''} = (t'-t)\, r_{t,t'} + (t''-t')\, r_{t',t''}$$

Notons $r(t) = r_{0,t}$ pour $t \geq 0$ (version continue). La fonction $r(\cdot)$ est appellée courbe des taux continues

Comme pour les taux discrets on cherche à exprimer $r_{t,t'}$ en fonction de $r(\cdot)$

$$r_{t,t'} = r(t) + t' \, \frac{r(t') - r(t)}{t' - t}$$

Si l'on suppose $r(\cdot)$ dérivable, en faisant tendre t' vers t on définit

$$r_F(t) = r(t) + t\, r'(t)$$ appellé taux forward annuel instantané

• Synthétisation d'un zero coupon

Soit 2 obligations à coupons annuels de maturités respectives 1 an et 2 ans

Elles sont remboursées au pair

On note F_1 et F_2 leurs valeurs nominales

k_1 et k_2 leurs taux nominaux

On veut synthétiser un Z.C de maturité 2 ans à partir de ces 2 obligations (i.e le Z.C n'existe pas déjà)

Pour faire cela, on réalise la stratégie suivante :

- Achat de l'obligation de durée 2 ans (long)
- Vente à découvert d'une certaine quantité x de l'obligation de durée 1 an (court)

	Flux dans 1 an	Flux dans 2 ans
Achat oblig 2	$k_2 \times F_2$ (coupon)	$k_2 \times F_2 + F_2 = (k+1) F_2$
Vente de x oblig 1	$-x \times (k_1 + 1) \times F_1$	0
	0	$(k_2+1) F_2$

F_2 : rbsmt au pair

On trouve $x = \dfrac{k_2 F_2}{(k_1+1) F_1}$

• Contrats à terme ferme

Consiste a fixer aujourd'hui les conditions d'une transaction effectué à une date future.
Contrat signé à la date 0 entre un acheteur et un vendeur.
Constitue pour son acheteur l'obligation d'acheter à l'échéance T un actif sous-jacent (ou support) à un prix déterminé et convenu à la date 0

Symmétriquement, le vendeur du contrat aura l'obligation de vendre le support au prix convenu.

a) Support ou sous-jacents

- actifs physique (commodity contracts)
  * Marchandise ou matières premières
  * Métaux
- actifs financiers
  * Actions, taux d'intérêt, Devises (FX), cryptos, indices...

b) Marchés

On distingue : - Les marchés organisés où les contrats à terme sont appelés Futures (chambre de compensation)
- Les marchés de gré à gré (OTC) où l'on parle de Forwards

Les marchés organisés sont standardisés et règlementés avec des appels de marge dans le cadre de chambres de compensation.
Ces marchés offrent plus de liquidité et plus de sécurité en "éliminant" le risque de contrepartie via les appels de marge
Les marchés de gré à gré offrent plus de souplesse quant aux caractéristiques des contrats

- Caractéristiques d'un contrat

  - Le sous-jacent et notamment sa qualité s'il ne s'agit pas d'actif financier
  - La taille du contrat (le nb d'unités de l'actif sous-jacent par contrat)
  - Le lieu de livraison (pour un actif physique)
  - La date de livraison (confondue ici avec l'échéance du contrat)

Aucun échange financier à lieu entre l'acheteur et le vendeur à la création du contrat.

- Notations

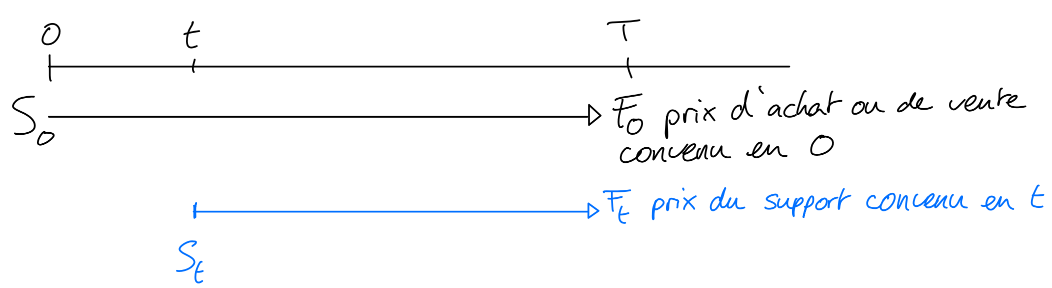
On note $F_0 = F(0,t)$ le prix sous-jacent vu de 0 et déterminé pour une livraison et un paiement en T. On appelle ce prix le prix à terme du sous jacent ou encore le prix du contrat (par abus de language)

De manière générale, on écrira $F_t = F(t,T)$ le prix à terme en $t \in [0,T]$. Soit S_t le prix spot (au comptant) du sous-jacent en t, c'est à dire le prix du support qu'il faudrait payer en t pour un paiement et une livraison en t du support.

En règle générale, $F_t \neq S_t$ et on définit $B_t = F_t - S_t$

Rem: en T, $F_T = S_T$. La base converge vers 0 quand on se rapproche de l'échéance du contrat. $F_T = F(T,T) = S_T$

⚠ Attention à ne pas confondre le contrat (i.e l'obligation de vendre ou d'acheter le support) et le support lui même.



⚠ Attention à ne pas confondre la valeur du contrat V et le prix F appelé pourtant abusivement prix du contrat. V est nul au départ du contrat qui peut être acheté ou vendu sans mise de fonds (excepté un éventuel dépôt de guarantie).

- Comparaison futures et forwards

a) Forwards

Il n'y a aucun flux financier échangé entre l'acheteur et le vendeur du contrat avant l'échéance T

En T, la différence $\underset{(S_T - F_0)}{F_T - F_0}$, appelée marge, est règlée par le "perdant":

- Soit par livraison effective (physical delivery) du sous-jacent valant S_T $(= F_T)$ contre le paiement de F_0
- Soit par règlement en liquide (cash settlement) de :
  - $F_T - F_0$ si $F_T > F_0$ (i.e le vendeur du contrat perd)
  - $F_0 - F_T$ si $F_T < F_0$ (i.e l'acheteur du contrat perd)

⚠ Attention, $S_T = F_T$ doit pouvoir être observé/calculé sans ambiguité ni contestation ou manipulation possible

b) Futures

Dans ce cas la marge $F_T - F_0$ est versée progressivement chaque jour j entre O et T. Tous les jours j, on constate une différence ou marge quotidienne $\underbrace{F_j}_{F(j,T)} - \underbrace{F_{j-1}}_{F(j-1,T)}$ qui est versée par l'acheteur (si elle est négative) ou par le vendeur si elle est positive).

On appelle ces versements des appels de marge (margin calls); ils sont collectés par la chambre de compensation (clearing house) du marché organisé (EUREX, CBOE, ..). À priori, les acheteurs et les vendeurs ne se connaissent pas.

En T, la situation est la même que pour les forwards

c) Tableau Comparatif des flux

Jour	0	1	....	j	...	T	TOTAL
Forward	0	0	....	0	...	$F_T - F_0$	$F_T - F_0$
Futures	0	$F_1 - F_0$	....	$F_j - F_{j-1}$	...	$F_T - F_{T-1}$	$F_T - F_0$

Remarques:

- Le système des appels de marge des contrats futures leur offre une guarantie beaucoup plus forte contre le risque de défaillance d'une contrepartie, les autorités de marchée peuvent annuler la position d'une contrepartie défaillante
- En T, la valeur capitalisée des marges d'un Forward est égale à $F_T - F_0$ alors que pour un Future on obtient $\sum_{j=1}^{T} e^{(T-j) r_{j,T}} \left[F_j - F_{j-1}\right]$ en considérant $r_{j,T}$ le taux forward continu qui prévaut entre j et T. Cette différence est souvent négligée en pratique car les écarts sont faibles

d) Débouclage d'une position avant terme

Il est possible, le soir du jour j, de vendre (position courte) au prix F_j un contrat d'échéance T, superposant ainsi à la position longue initiale (achat du contrat en 0) une nouvelle position courte de signe contraire, cette nouvelle opération n'impliquant aucun flux en j.

Pour le vendeur, l'opération serait symétrique.

* Pour un contrat Futures

Jour	j	$j+1$	...	$T-1$	T
Contrat acheté en 0	$F_j - F_{j-1}$	$F_{j+1} - F_j$	...	$F_{T-1} - F_{T-2}$	$F_T - F_{T-1}$
Contrat vendu en j	0	$F_j - F_{j+1}$	...	$F_{T-2} - F_{T-1}$	$F_{T-1} - F_T$
Total	$F_j - F_{j-1}$	0	...	0	0

La position longue est exactement annulée à partir de $j+1$ par la vente du contrat en j. Une position peut donc être annulée/débouclée/dénouée à toute date, simplement et sans aucun coût (ou presque)

* Pour un contrat Forward, la chronique des flux est

Jour	j	$j+1$	...	$T-1$	T
Contrat acheté en 0	0	0	...	0	$F_T - F_0$
Contrat vendu en j	0	0	...	0	$-(F_T - F_j)$
Total		0	...	0	$F_j - F_0$

La vente du contrat en j n'annule pas le flux à venir à l'échéance mais fixe sa valeur au niveau $F_j - F_0$ connu en j. En pratique le débouclage avant terme est plus compliqué pour un Forward que pour un Future

- Valeur d'un contrat à terme

Il faut vraiment pas confondre le prix à terme du sous-jacent F que l'on appelle aussi le prix du contrat et la Valeur du contrat lui même qui donne l'obligation de payer F pour obtenir le sous-jacent à l'échéance.

La Valeur d'un contrat Futures est constamment nulle car on à en effet la possibilité de réaliser un débouclage à tout moment et sans coût.

La Valeur $V_0(t)$ en t d'un contrat Forward d'échéance T émis en 0 pour un prix à terme du sous-jacent F_0 est égale à

$$V_0(t) = \underbrace{(F_t - F_0)}_{\text{valeur fixé par le débouclage de la position en } t} e^{-(T-t)r_{t,T}}$$

où $r_{t,T}$ = taux forward continu entre t et T

- Relation entre prix au comptant et prix à terme

Nous allons examiner ici une relation de parité dite cash and carry sous l'hypothèse d'AOA. Cette relation s'applique aux Forward et aux Futures, en univers déterministes. Elle est utilisée lorsque les supports sont des indices boursiers, des taux d'intérêts, des taux de change...

L'arbitrage cash and carry consiste à :

- Acheter le support au comptant (cash) au prix S_0
- Détenir ce support en 0 et T (carry)

Cet achat est financé par l'emprunt de S_0. On note I les intérêts de cet emprunt entre 0 et T. L'emprunt est remboursé en T. Parallèlement, on réalise la vente à terme du support au prix à terme F_0. Cette opération se conclut en T par la livraison du support contre le paiement de F_0

	0	T
Achat du support	$-S_0$	$0 + R$
Vente à terme du support	0	$+F_0$
Emprunt	$+S_0$	$-(S_0+I)$
TOTAL	0	$F_0 - S_0 - (I-R)$

Rémunération supposée connue dès 0 et capitalisée en T

Mise de fonds nulle, donc en T, sous AOA, $F_0 - S_0 = I - R$

$F_0 - S_0 = \text{base}$

$I - R = \text{coût de portage (cost of carry)}$

$F_0 - S_0 = I - R$ est la relation de parité comptant-terme (spot-forward)

La base est donc positive ou négative en fonction de ce coût de portage.

- Si la base est positive ($F > S$), on dit que le prix à terme est en report (premium) par rapport au prix comptant.

- Si la base est négative, on dit que le prix à terme est en dépot (discount) par rapport au prix comptant.

La relation de parité comptant-terme permet de voir qu'on peut synthétiser en 0 un contrat Forward :

$$\underbrace{S_T + R - S_0 - I}_{\text{portefeuille contenant support et un emprunt de durée } T} = \underbrace{F_T - F_0}_{\text{Valeur du Forward à l'échéance}} \quad (\text{car } S_T = F_T)$$

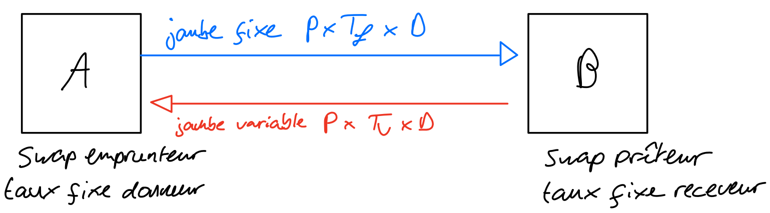
• Les Swaps de taux

Swap : Contrat entre 2 parties à partir d'un principal P donné

- L'un des contreparties s'engage à payer les intérêts calulés à taux fixe T_f à partir du principal

- L'autre contrepartie s'engage à payer les intérêts calculés à taux variable T_v (Euribor, Libor, ...) à partir du principal

À une date t



Flux net en t :

pour A : $P(T_v(t) - T_f) \times D$

pour B : $P(T_f - T_v(t)) \times D$

Un swap taux fixe contre taux variable est favorable en cas de hausse des taux car le flux net sera positif : $T_v(t) > T_f$

Comme il est rare d'avoir 2 contreparties avec des positions parfaitement symétrique, des institutions financières jouent le rôle de Market Makers