

Corrigé Processus stochastiques

Examen du 7 janvier 2013 – Durée : 2h30.

Exercice 1

1. Dans tous les cas, on écrit le processus demandé comme $f(t, B_t)$ et on applique la formule d'Itô.

(a) $f(t, x) = (x + t) \exp(-x - t/2)$;
 $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{(2 - x - t)}{2} \exp(-x - t/2)$;
 $\frac{\partial f}{\partial x} = (1 - x - t) \exp(-x - t/2)$;
 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (-2 + x + t) \exp(-x - t/2)$.

Soit :

$$dX_t = (1 - B_t - t) \exp(-B_t - t/2) dB_t.$$

(b) $f(t, x) = \exp(t/2) \sin(x)$;
 $\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{1}{2} \exp(t/2) \sin x$; $\frac{\partial f}{\partial x} = \exp(t/2) \cos x$; $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\exp(t/2) \sin x$.
 Soit :

$$dU_t = \exp(t/2) \cos B_t dB_t.$$

2. C'est un cas particulier d'un exercice vu en TD avec $\mu = 1/2$ et $\sigma = 1$. La solution s'écrit

$$Y_t = \exp(B_t).$$

3. On utilise à nouveau Itô avec $f(t, x) = x/(1+t)$. On trouve :

$$dZ_t = -\frac{B_t}{(1+t)^2} dt + \frac{dB_t}{1+t}.$$

Exercice 2

1. Lorsque $X_t \approx b$, le comportement de (X_t) est proche de celui d'un mouvement Brownien sans dérive, de volatilité $\sigma\sqrt{b}$. Lorsque X_t s'éloigne de b , le terme en dt agit comme une force de « rappel » vers b .

2. On utilise Itô avec $f(t, x) = e^{at}x$. On trouve :

$$dY_t = ae^{at}X_t dt + (a(b - X_t))e^{at} dt + \sigma e^{at}\sigma\sqrt{X_t} dW_t,$$

soit :

$$dY_t = abe^{at} dt + \sigma e^{at}\sigma\sqrt{X_t} dW_t.$$

3. En intégrant l'équation précédente entre 0 et u , on trouve :

$$Y_u - Y_0 = ab \int_0^u e^{at} dt + \sigma \int_0^u e^{at} \sqrt{X_t} dW_t$$

soit, après calcul de la première intégrale :

$$Y_u = Y_0 + b(e^{au} - 1) + \sigma M_u.$$

4. $(M_u)_u$ est une martingale relativement à la filtration associée à $(W_t)_t$, car il s'agit de l'intégrale d'Itô d'un « bon processus » (au sens du cours), contre les variations de (W_t) .

Comme une martingale est d'espérance constante, on en déduit que $\mathbb{E}(M_u) = \mathbb{E}(M_0) = 0$.

5. D'où :

$$\mathbb{E}(Y_u) = b(e^{au} - 1) + Y_0$$

et :

$$\mathbb{E}(X_u) = e^{-au}\mathbb{E}(Y_u) = b(1 - e^{-au}) + X_0.$$

6. Comme a et b sont non nuls, $\mathbb{E}(X_u)$ dépend de u donc le processus $(X_u)_u$ n'a pas une espérance constante. Il ne peut donc pas être une martingale.

Exercice 3

1. Fait en TD. On trouve $e^{s^2/2}$.
2. Fait en TD.
3. T est l'instant de premier passage du processus W , qui est \mathcal{F} -adapté (puisque \mathcal{F} est la filtration naturelle de W) dans le borélien $\{a\}$. C'est donc un temps d'arrêt relativement à \mathcal{F} par un théorème du cours.
4. $(Z_{t \wedge T})_t$ est la martingale (Z_t) arrêtée en T , qui est un temps d'arrêt. C'est donc encore une martingale.

Une martingale étant d'espérance constante, on a :

$$\mathbb{E}(Z_{t \wedge T}) = \mathbb{E}(Z_0) = 1 \quad \forall t \geq 0.$$

5. Soit $\omega \in \Omega$. Montrons d'abord que pour tout $0 \leq u \leq T(\omega)$, on a $W_u(\omega) \leq a$. En effet, si tel n'est pas le cas (c'est-à-dire $W_u(\omega) > a$), le théorème des valeurs intermédiaires (appliqué à la fonction $t \mapsto W_u(\omega)$ – continue d'après une propriété du cours – entre $t = 0$ et $t = u$) donne l'existence de $u'(\omega) < u$ tel que $W_{u'(\omega)}(\omega) = a$, et donc $T(\omega) \leq u'(\omega)$, ce qui est une contradiction puisque $u \leq T(\omega)$ et $u'(\omega) < u$.

Il s'ensuit que, pour tout $t \geq 0$, $W_{t \wedge T} \leq a$ puisque $W_T = a$. D'où, comme $\gamma > 0$,

$$Z_{t \wedge T} \leq \exp(\gamma a) \exp\left(-\gamma^2 \frac{t \wedge T}{2}\right) \quad \forall t \geq 0.$$

La première inégalité est donc vérifiée avec $C = \exp(\gamma a)$.

La seconde découle immédiatement du fait que $Z_{t \wedge T} \geq 0$ et que $\exp\left(-\gamma^2 \frac{t \wedge T}{2}\right) \leq 1$.

6. (a) Soit $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) = +\infty$. On a $t \wedge T(\omega) \rightarrow +\infty$ quand $t \rightarrow +\infty$ donc, par la première inégalité de la question 5., on a que $Z_{t \wedge T(\omega)}(\omega)$ est majoré par une fonction tendant vers 0 quand t tend vers $+\infty$. Par ailleurs, $Z_{t \wedge T(\omega)}(\omega)$ est minoré par 0 quelque soit $t \geq 0$. Donc, par le théorème d'encadrement, la limite demandée existe et vaut 0.
- (b) Soit $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) < +\infty$. Dans ce cas, on a $t \wedge T(\omega) \rightarrow T(\omega)$ quand $t \rightarrow +\infty$, donc $Z_{t \wedge T(\omega)}(\omega) \rightarrow Z_{T(\omega)}(\omega)$.
7. En combinant 6. (a) et 6. (b) on trouve que la limite demandée est $\mathbb{1}_{T < +\infty} Z_T$.
8. Par la question 4., on a $\mathbb{E}(Z_{t \wedge T}) = 1 \quad \forall t \geq 0$ donc d'une part :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z_{t \wedge T}) = 1. \tag{1}$$

D'autre part, la question 7. et la deuxième inégalité de 5. permettent d'appliquer le théorème de convergence dominée à $(Z_{t \wedge T})_t$ pour affirmer que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(Z_{t \wedge T}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T < +\infty} Z_T). \tag{2}$$

D'où le résultat, en égalisant les termes de droite de (1) et (2).

9. On a clairement que :

$$Z_T = \exp\left(\gamma a - \gamma^2 \frac{T}{2}\right).$$

10. On procède comme suggéré dans l'énoncé : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$1 = \mathbb{E}(V_n)$$

en posant :

$$V_n = \mathbb{1}_{T < +\infty} \exp\left(\frac{a}{n} - \frac{T}{2n^2}\right).$$

Donc, d'une part,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(V_n) = 1. \tag{3}$$

D'autre part, (V_n) est une suite de v.a. qui converge presque sûrement vers $\mathbb{1}_{T<+\infty}$, et cette suite de v.a. est clairement dominée par la constante $\exp(a)$. Donc, par le théorème de convergence dominée, on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(V_n) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T<+\infty}) = P(T < +\infty). \quad (4)$$

Donc $P(T < +\infty) = 1$ d'après (3) et (4).

11. On a donc $\mathbb{1}_{T<+\infty} Z_T = Z_T$ presque sûrement, donc $\mathbb{E}(Z_T) = 1$. On en déduit immédiatement le résultat annoncé.

12. On prend $\gamma = \sqrt{2\alpha}$ dans la formule de la question précédente et on trouve :

$$L(\alpha) = \exp(-a\sqrt{2\alpha}).$$

13. Pour tout $\alpha > 0$,

$$\frac{\partial L(\alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{a}{\sqrt{2\alpha}} \exp(-a\sqrt{2\alpha}),$$

d'où, par le résultat rappelé dans la question,

$$\mathbb{E}(T) = +\infty.$$