ISFA, Université Claude Bernard - Lyon 1
Modélisation de risque de crédit, TD1

Exercice 1 On considère une obligation standard de maturité $T = 2$ ans. Le taux de coupon est égal à $c = 6\%$ et les coupons sont payés semestriellement 2 fois par an. La courbe de taux à la date $t = 0$ est comme la suite :

	6 mois	1 an	18 mois	2 ans
r	5,0%	5,8%	6,4%	6,8%

1. Écrire les flux de cette obligation et calculer sa valeur à $t = 0$.

On suppose maintenant que l'émetteur de l'obligation est soumis au risque de défaut. Dans ce cas là, l'acheteur de l'obligation ne reçoit plus de coupon, ni de montant nominal. Le temps de défaut est modélisé comme le premier instant de saut d'un processus de Poisson de l'intensité $\lambda = 3\%$.

2. Quelle est la valeur de l'obligation défautable ?

Après le premier paiement de coupon à $t = 6$ mois, On suppose que la valeur de l'intensité reste unchangée et que la courbe de taux du marché devient

	6 mois	1 an	18 mois	2 ans
r	5,3%	5,7%	6,0%	6,5%

3. Quelle est la valeur de l'obligation sans/avec le risque de défaut à $t = 6$ mois ?

Exercice 2 (Modèle de Merton) On considère un modèle de défaut qui est provoqué quand une entreprise n'arrive pas à rembourser ses dettes. On suppose que la valeur de l'entreprise est modélisée comme dans le modèle de Black-Scholes

$$dV_t = V_t(\mu dt + \sigma dW_t), \quad t \geq 0 \tag{1}$$

où μ et σ sont constantes et W est un mouvement brownien. Le défaut de l'entreprise se produit à la maturité de dette T si sa valeur à T ne permet pas de rembourser le montant nominal de remboursement L.

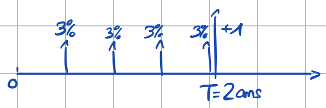
1. Les créanciers reçoivent un remboursement partiel V_T (au lieu de L) si le défaut a lieu. Expliciter le temps de défaut τ et le payoff de dette D de l'entreprise dans ce modèle.
2. Montrer que nous pouvons utiliser la formule de Black-Scholes d'une option Européne pour calculer la valeur de dette. Calculer sa valeur D_t à la date $t = 0$ et $t \in]0, T[$ respectivement.
3. Quelle est la valeur d'equity de l'entreprise qui est définie comme $E_t = V_t - D_t$?
4. Calculer la probabilité de défaut $\mathbb{P}(\tau \leq T)$ et la probabilité de défaut conditionnelle $\mathbb{P}(\tau \leq T | \mathcal{F}_t)$ où $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$.

Exercice 1 : Obligat° standard et défautable

Obligat° maturité $T=2$
Taux de Coupon 6% payé 2 fois par an

		6 mois	1 an	18 mois	2 ans
Courbe de taux	r	5%	5.8%	6.4%	6.8%

1) Ecrire les flux et calculer la valeur de l'obligation à $t=0$.

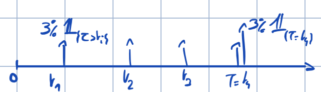


$$V_0 = \sum_{i=1}^{4} 3\% \, e^{-r_{t_i} \cdot t_i} + e^{-r_T \cdot T} \qquad \text{avec } t_i = \frac{i}{2}$$
$$= 0.9838$$

2) L'emetteur de l'obligation peut faire faillite auquel cas l'investisseur ne reçoit plus de coupons ni remboursement de nominal.

Le temps de défaut est modélisé comme le 1er instant de saut d'un processus de Poisson de l'intensité $\lambda = 3\%$.

→ Ecrire les flux et calculer la valeur de l'obligat° défautable à $t=0$.



Exercice 2 : Modèle de Merton

$$dV_t = V_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

Barrière de défaut L
maturité T

1) Le défaut a lieu (seulement) à T si $V_T < L$ (sinon il n'y a pas de défaut) avec un rbt partiel V_T au lieu de L.

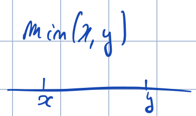
→ Expliciter le temps de défaut τ et le payoff de dette D_T.

$$\tau = T \mathbb{1}_{\{V_T < L\}} + \infty \mathbb{1}_{\{V_T \geq L\}}$$

$$\begin{aligned} D_T &= V_T \mathbb{1}_{\{\tau = T\}} + L \mathbb{1}_{\{\tau = +\infty\}} \\ &= V_T \mathbb{1}_{\{V_T < L\}} + L \mathbb{1}_{\{V_T \geq L\}} \\ &= \min(V_T, L) \end{aligned}$$

2) Calculer la valeur dynamique de la dette D_t en utilisant la formule B&S

L'idée est de faire un lien entre D_T et le payoff de l'option CALL / PUT
$(S_T - K)_+$ $\quad (K - S_T)_+$
$S_T \longleftrightarrow V_T$ $\quad K \longleftrightarrow L$



$$\begin{aligned} \min(x,y) = x &= y - (y-x) = y - (y-x)^+ \\ &= x - 0 \neq x - (x-y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_T &= \min(V_T, L) \\ &= \begin{cases} V_T - (V_T - L)_+ \\ L - (L - V_T)_+ \end{cases} \end{aligned}$$

position longue de L ZC maturité T
+ posit° short d'une option PUT de maturité T et de strike L

$$\Rightarrow D_t = L B(t,T) - P_t$$

3) Calculer la valeur equity $E_t = V_t - D_t$

$$E_T \longrightarrow E_t$$

$$\begin{aligned} E_T = V_T - D_T &= V_T - (V_T - (V_T - L)_+) \\ &= (V_T - L)_+ \end{aligned}$$

$$\Rightarrow E_t = C_t$$

4) $\mathbb{P}(\tau \leq T) = \mathbb{P}(\tau = T) = \mathbb{P}(V_T < L)$

$$= \mathbb{P}\left(V_0 \, e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T} < L\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(W_T < \ln\left(\frac{L}{V_0}\right) - (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T\right)$$

$$= \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{L}{V_0}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

$$\mathbb{P}(\tau \leq T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(V_T < L \mid \mathcal{F}_t)$$

$$= \mathbb{P}\left(V_t \, e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t) + \sigma(W_T - W_t)} < L \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \mathcal{N}\left(\frac{\ln\left(\frac{L}{V_t}\right) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$