Théorie des Valeurs Extrêmes
ISFA - 2022 - 2023

Examen Théorie de valeurs extrêmes - Master II SAF Pro - Sans document - Sans calculatrice – Durée 1h30.

Cet examen est un questionnaire à choix multiples constitué de 12 questions. Plusieurs réponses sont proposées pour chaque question. Il peut y avoir plusieurs bonnes réponses.
Les réponses sont à inscrire sur la feuille jointe, en cochant pour chaque question la (ou les) bonne(s) réponse(s).
Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse.
Toute réponse exacte entraîne une bonification de 1 point, toute erreur est pénalisée de 0,5 point.

Q 1) Soit $X_1, X_2, \dots$ une suite de variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre $\lambda = 2$ et $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$.
Dans ce cas, $(M_n - b_n)/a_n$ converge en loi vers une distribution de Gumbel quand $n \to \infty$ en choisissant

A) $a_n = \ln(n)/2$ et $b_n = 1/2$

B) $a_n = 1/2$ et $b_n = \ln(n)/2$

C) $a_n = 2\ln(n)$ et $b_n = 2$

D) $a_n = 2$ et $b_n = 2\ln(n)$

On rappelle la formule d'une Gumbel : $\Lambda(x) = exp(-exp(-x))$

Q 2) Soit $N_n = \sum_{i=1}^{n} 1_{\{X_i > u_n\}}$ le nombre de dépassements du seuil u_n par $X_1, \dots, X_n$.
S'il existe une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} nP(X_i > u_n) = \tau$, alors N_n converge en loi vers N de loi

A) Exponentielle de paramètre τ

B) de Poisson de paramètre $1/\tau$

C) Exponentielle de paramètre $1/\tau$

D) de Poisson de paramètre τ

Q 3) *On rappelle la formule de la loi de Weibull ($\alpha > 0$) :*

$$\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} exp(-(-x)^\alpha) & si\ x \leq 0 \\ 1 & si\ x > 0 \end{cases}$$

Et d'une loi G des extrêmes généralisée (GEV)

$$G(\mu, \sigma, \xi) = \begin{cases} exp\left(-\left[1 + \xi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right]_+^{-\frac{1}{\xi}}\right) & si\ \ \xi \neq 0 \\ exp\left(-\,exp\left(-\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\right)\right) & si\ \xi = 0 \end{cases}$$

Une loi de Weibull unitaire, $\Psi_1(x)$ correspond à une loi G des extrêmes généralisée en choisissant les paramètres suivants

A) $G(\ \ 0,\ \ 1, -1)$

B) $G(-1,\ \ 1, -1)$

C) $G(\ \ 0, -1, -1)$

D) $G(\ \ 1, -1, -1)$

Q 4) Soit $X_1, \ldots, X_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de distribution F.
On pose $\bar{F} = 1 - F$ et $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.
S'il existe deux suites (a_n) et (b_n) et une fonction de répartition H telles que :

$$\lim_{n\to\infty} P(M_n \leq a_n x + b_n) = H(x)$$

Alors, on peut aussi vérifier que

A) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,\bar{F}(a_n x + b_n) = \exp\big(-H(x)\big)$

B) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\bar{F}(a_n x + b_n) = \exp\big(-H(x)\big)$

C) $\lim\limits_{n\to\infty} n\,\bar{F}(a_n x + b_n) = -\ln H(x)$

D) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\bar{F}(a_n x + b_n) = -\ln H(x)$

Q 5) Avec les mêmes notations que la question précédente, soit N une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ, indépendante des X_i.

On peut montrer que

A) $P(M_N \leq x) = \exp\left(-\lambda\, F(x)\right)$

B) $P(M_N \leq x) = \exp\left(-\frac{F(x)}{\lambda}\right)$

C) $P(M_N \leq x) = \exp\left(-\lambda(1 - F(x)\right)$

D) $P(M_N \leq x) = \exp\left(-\frac{1-F(x)}{\lambda}\right)$

On rappelle que $P(N = n) = \frac{exp(-\lambda)\lambda^n}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$.

Q 6) On définit la loi de Fréchet ($\alpha > 0$) :

$$\Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}) & si\ x > 0 \end{cases}$$

Soient $X,\ X_1, \dots, X_n$ des variables IID de Fréchet de paramètre $\alpha = 3$.

On peut montrer que

A) $n^{-3} \quad \max(X_1, \dots, X_n) =^d$ X

B) $n^{3} \quad \max(X_1, \dots, X_n) =^d$ X

C) $n^{1/3} \quad \max(X_1, \dots, X_n) =^d$ X

D) $n^{-1/3} \max(X_1, \dots, X_n) =^d$ X

Q 7) Soit X une variable aléatoire exponentielle de fonction de survie :

$$\bar{F}(x) = \exp\left(-\frac{x}{3}\right), \quad x \geq 0\,.$$

Sa fonction de répartition

A) appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel.

B) appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet.

C) appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull.

D) n'appartient à aucun domaine d'attraction.

Q 8) Soit X une variable aléatoire exponentielle de fonction de survie :

$$\bar{F}(x) = \exp\left(-\frac{x}{3}\right), \quad x \geq 0 .$$

Sa fonction de dépassements moyens est

A) linéaire décroissante.

B) linéaire croissante.

C) logarithmique.

D) constante.

Q 9) Soit X une variable aléatoire de Pareto de fonction de survie :

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^3, \quad x \geq 1 .$$

Sa fonction de répartition

A) appartient au domaine d'attraction de la loi de Fréchet.

B) appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel.

C) appartient au domaine d'attraction de la loi de Weibull.

D) n'appartient à aucun domaine d'attraction.

Q 10) Soit X une variable aléatoire de Pareto de fonction de survie :

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{1}{x}\right)^3, \quad x \geq 1 .$$

Sa fonction de dépassements moyens est

A) linéaire décroissante.

B) linéaire croissante.

C) constante.

D) logarithmique.

Q 11) Soit X une variable aléatoire de fonction de répartition $F(x)$ qui modélise la charge annuelle de la garantie grêle d'un assureur.

Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont correctes ?

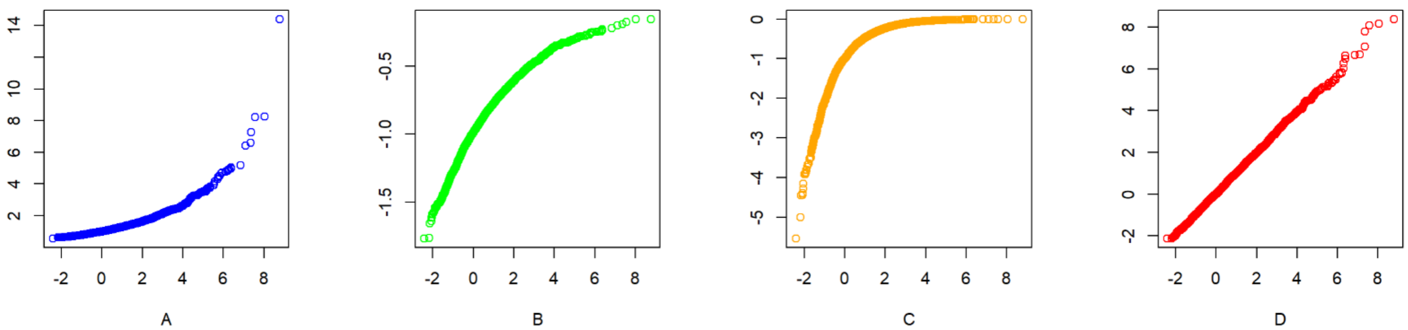
A) Le quantile d'ordre 0.98 correspond à la charge que l'on peut atteindre pour la période de retour de 200 ans.

B) Le quantile d'ordre 0.995 correspond à la charge que l'on peut atteindre pour la période de retour de 200 ans.

C) Le niveau de retour z, pour lequel le temps d'attente moyen de dépassement est de T années vérifie la relation : $1 - F(z) = 1/T$

D) Le niveau de retour z, pour lequel le temps d'attente moyen de dépassement est de T années vérifie la relation : $1 - F\left(\frac{1}{z}\right) = T$

Q 12) Sur les 4 graphiques ci-dessous, nous avons représenté des graphiques quantiles-quantiles (QQ-plots) avec en **abscisses** une Gumbel et en **ordonnées** …



A) une Weibull de paramètre $\alpha = 4$ sur le graphique A

B) une Fréchet de paramètre $\alpha = 4$ sur le graphique B

C) une Weibull de paramètre $\alpha = 4$ sur le graphique C

D) une Gumbel sur le graphique D

Nom : Prénom :

N° étudiant :

Réponses aux questions :

Q 1 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

Q 2 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

Q 3 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

Q 4 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

Q 5 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

Q 6 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

Q 7 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

Q 8 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

Q 9 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

Q 10 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

Q 11 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

Q 12 : ☐ A ☐ B ☐ C ☐ D