Copule de Student

GREVILLOT JEANNE, LE GOFF YOHANN

Plan

- Définitions
- Propriétés autour de la copule de Student
- Estimation des paramètres
- Application

Loi de Student univariée

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes, où $U \sim \mathcal{N}(0,1)$ et $V \sim \chi^2(k)$,

Alors, en posant $T_k = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{k}}}$, T_k suit une loi de Student de degré de liberté $k \in \mathbb{R}_+^*$.

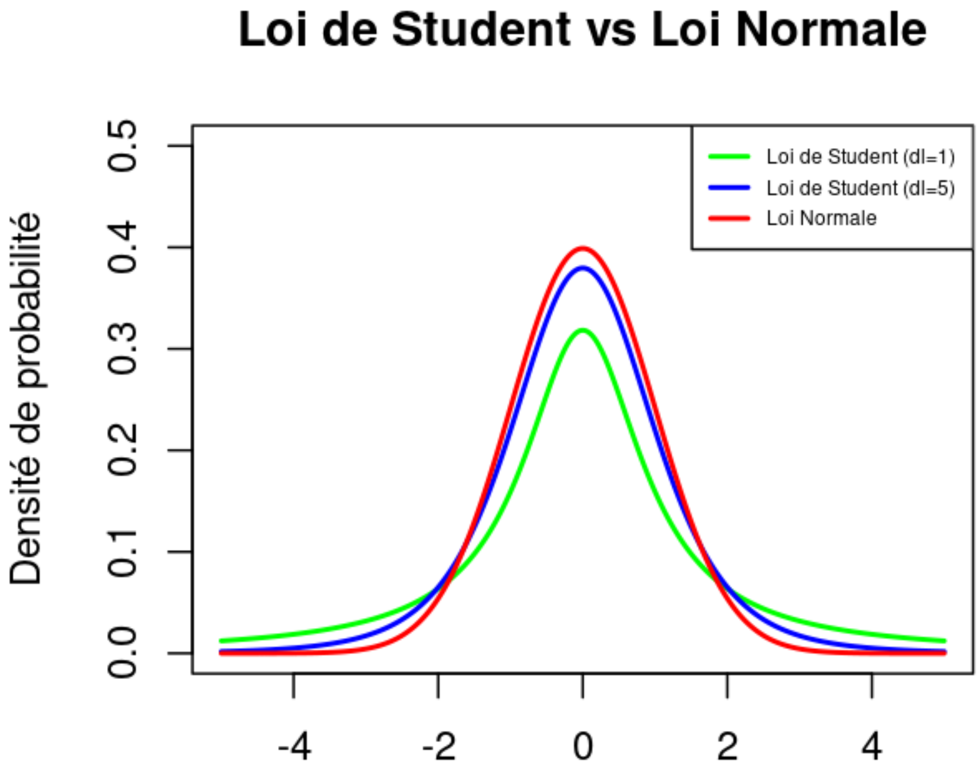
Sa fonction densité t_k s'écrit alors :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} : \ t_k(x) = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left(1 + \frac{x^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}}$$

Propriétés notables :

- $\lim_{k \to +\infty} T_k \sim \mathcal{N}(0,1)$
- La loi de Student est symétrique et à queue lourde

Caractéristiques de la loi de Student



Loi de Student multivariée

Soient $(d,\Sigma) \in \mathbb{N}^* \times \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$,

Soient U et V deux variables aléatoires indépendantes, où $U \sim \mathcal{N}_d(0,\Sigma)$ et $V \sim \chi^2(k)$,

Alors, en posant $T_{\Sigma,k} = \frac{U}{\sqrt{\frac{V}{k}}}$, $T_{\Sigma,k}$ suit une loi de Student multivariée de degré de liberté $k \in \mathbb{R}_+^*$ et de matrice de variance-covariance Σ .

Sa fonction densité $t_{k,\Sigma}^d$ s'écrit alors :

$$\boxed{\forall\, x \in \mathbb{R}^2 : t_{k,\Sigma}^d(x) = \frac{1}{\sqrt{(k\pi)^d}\ |\Sigma|} \frac{\Gamma(\frac{k+d}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left(1 + \frac{x'\,\Sigma^{-1}\,x}{k}\right)^{-\frac{k+d}{2}}}$$

Théorème de SKLAR et corolaire

Si F est une fonction de répartition de dimension d ayant comme lois marginales F_1 , … , F_d des fonctions de répartition, alors il existe une copule C telle que :

$$\boxed{\forall\ (\mathbf{x_1}\ , \dots , \mathbf{x_d}) \in \mathbb{R}^{\mathbf{d}}, \mathbf{F}(\mathbf{x_1}\ , \dots , \mathbf{x_d}) = \mathrm{C}(\mathbf{F_1}(\mathbf{x_1}), \dots , \mathbf{F_d}(\mathbf{x_d}))}$$

Si les distributions marginales F_1 , … , F_d sont toutes continues, cette copule C est unique.

<u>Corolaire :</u>

En posant la fonction quantile de F_i, F_i^{-1}, telle que, $\forall$ u $\in [0,1]^d$, $F_i^{-1}(u) = \inf\{ x \mid F(x) = u\}$, cette copule s'écrit :

$$\boxed{\forall\ (\mathbf{u_1}\ , \dots , \mathbf{u_d}) \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]^{\mathbf{d}}, \mathbf{C}(\mathbf{u_1}\ , \dots , \mathbf{u_d}) = \mathbf{F}(\mathbf{F_i^{-1}}(\mathbf{u_1}), \dots , \mathbf{F_d^{-1}}(\mathbf{u_d}))}$$

Copule de Student

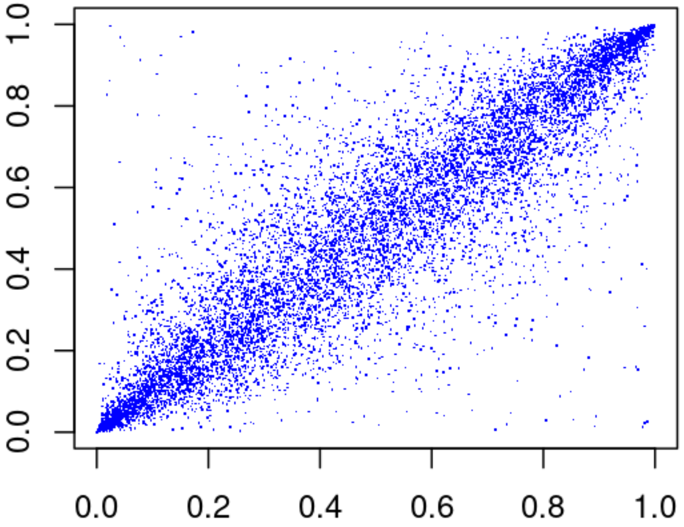
Par application du théorème de SKLAR, la copule de Student en dimension $d \in \mathbb{N}^*$, de paramètres $k \in \mathbb{R}_+^*$ et $\Sigma \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ est définie par l'équation suivante:

$$\boxed{\forall\, (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_d}) \in [\mathbf{0}, \mathbf{1}]^{\mathbf{d}}, C_{\mathbf{k},\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_d}) = \mathbf{T_{k,\Sigma}}(\mathbf{T_k^{-1}}(\mathbf{u_1}), \dots, \mathbf{T_k^{-1}}(\mathbf{u_d}))}$$

Avec :

- $T_{\Sigma,k}$ la fonction de répartition de la loi de Student multivariée de degré de liberté $k \in \mathbb{R}_+^*$ et de matrice de corrélation Σ
- T_k la fonction de répartition de la loi de Student univariée de degré de liberté $k \in \mathbb{R}_+^*$

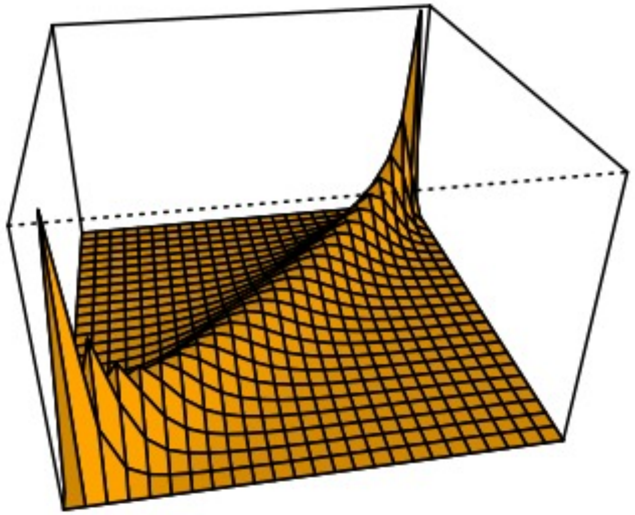
Représentation de la copule de Student



En 2 dimensions

$\rho = 0{,}92$

k=2,36



En 3 dimensions

$\rho = 0{,}92$

k=2,36

Distributions elliptiques

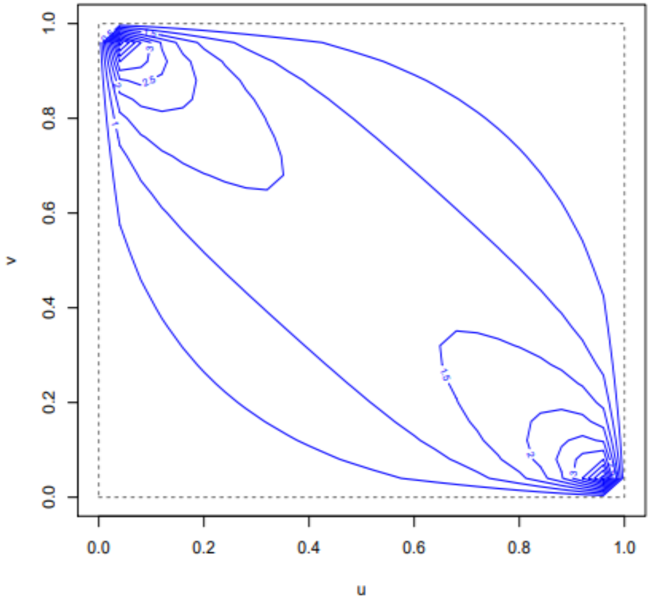
La copule de Student est dite elliptique car associée à une distribution elliptique. Cela se caractérise par une fonction de densité f, en dimension $n \in \mathbb{N}^*$,de la forme:

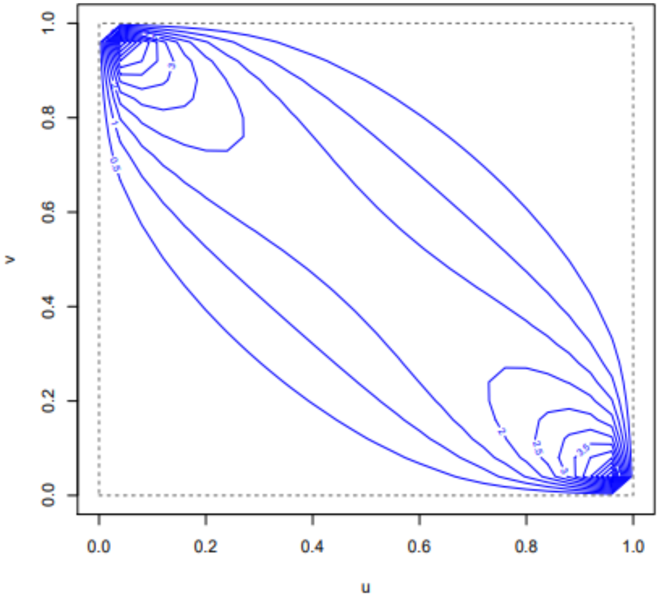
$$\boxed{\forall\, x \in R^n, f(x) = |\Sigma|^{-\frac{1}{2}}\, g[(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu)]}$$

Avec :

- $g : \begin{array}{l} \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+ \\ x \longmapsto g(x) \end{array}$
- Σ la matrice de variance − covariance
- μ la moyenne (si elle existe)

Distributions elliptiques





Contour de la copule de Student et gaussienne

Dépendance de queue

Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires continues de fonction de répartition F_{X_1}, F_{X_2} et de copule C

Lower tail dependence :

$$\boxed{\lambda_L = \lim_{x \longrightarrow 0} \mathbb{P}[X_1 \leq {F_{X_1}}^{-1}(x) | X_2 \leq {F_{X_2}}^{-1}(x)] = \lim_{x \longrightarrow 0} \frac{C(x,x)}{x}}$$

Upper tail dependence :

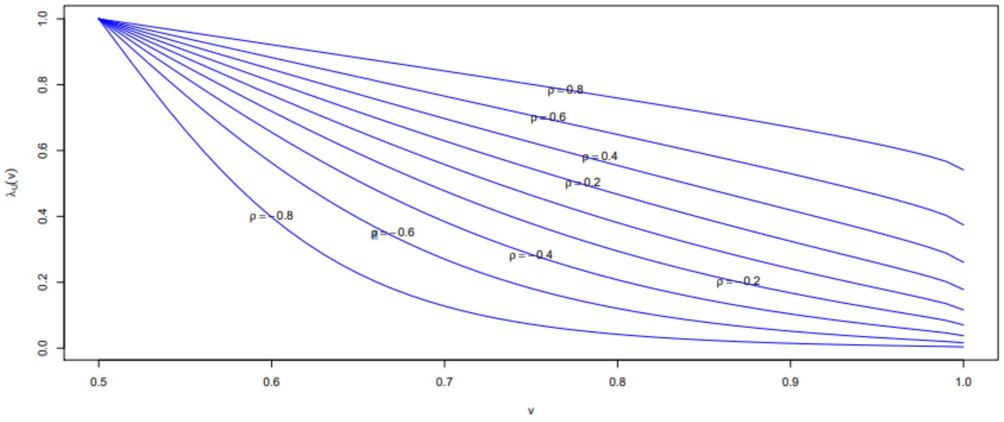
$$\boxed{\lambda_U = \lim_{x \longrightarrow 1} \mathbb{P}[X_1 > {F_{X_1}}^{-1}(x) | X_2 > {F_{X_2}}^{-1}(x)] = \lim_{x \longrightarrow 1} \frac{\bar{C}(x,x)}{1-x}}$$

Où $\bar{C}$ correspond à la fonction de survie conjointe

Dépendance de queue d'une copule bivariée de Student

La loi de Student étant symétrique, les coefficients de dépendance de queue inférieurs et supérieurs sont égaux et l'on obtient:

$$\boxed{\lambda_U = \lambda_L = 2\left(1 - t_{k+1}\right)\sqrt{\frac{(1+k)(1-\rho)}{1-\rho}}}$$



Les mesures de dépendance

Il existe trois principales mesures de la dépendance entre deux variables aléatoires :

Soient $(X_i)_{i \leq n}, (Y_i)_{i \leq n}$ deux variables aléatoires

- Rho de Spearman

$$\boxed{\rho = \frac{\mathrm{cov}(X, Y)}{\sqrt{V(X)V(Y)}}}$$

- Coefficient de corrélation linéaire de Pearson

$$\boxed{r = \frac{\sum (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y})}{\sqrt{\sum (X_i - \overline{X})^2 \sum (Y_i - \overline{Y})^2}}}$$

Les mesures de dépendance

- Tau de Kendall

Dans un échantillon de n points de coordonnées (X_i, Y_j), il existe $\frac{n\,(n-1)}{2}$ paires de points $((X_i, Y_i), (X_j, Y_j))$.

Une paire $((X_i, Y_i), (X_j, Y_j))$ est $\begin{cases} concordante\ si\ (X_i, X_j)-(Y_i, Y_j)\ > 0 \\ discordante\ sinon \end{cases}$

$$\boxed{\tau = \frac{2(c-d)}{n\,(n-1)}}$$

en posant c (respectivement d) le nombre de paires concordantes (discordantes)

Propriétés notables:

Soient X,Y deux variables aléatoires de loi elliptique,

$$\boxed{\tau = \frac{2}{\pi}\arcsin(r)}$$

$avec\ r\ le\ coefficient\ de\ corrélation\ linéaire\ de\ Pearson$

Lien avec la copule Gaussienne

Convergence de la copule de Student :

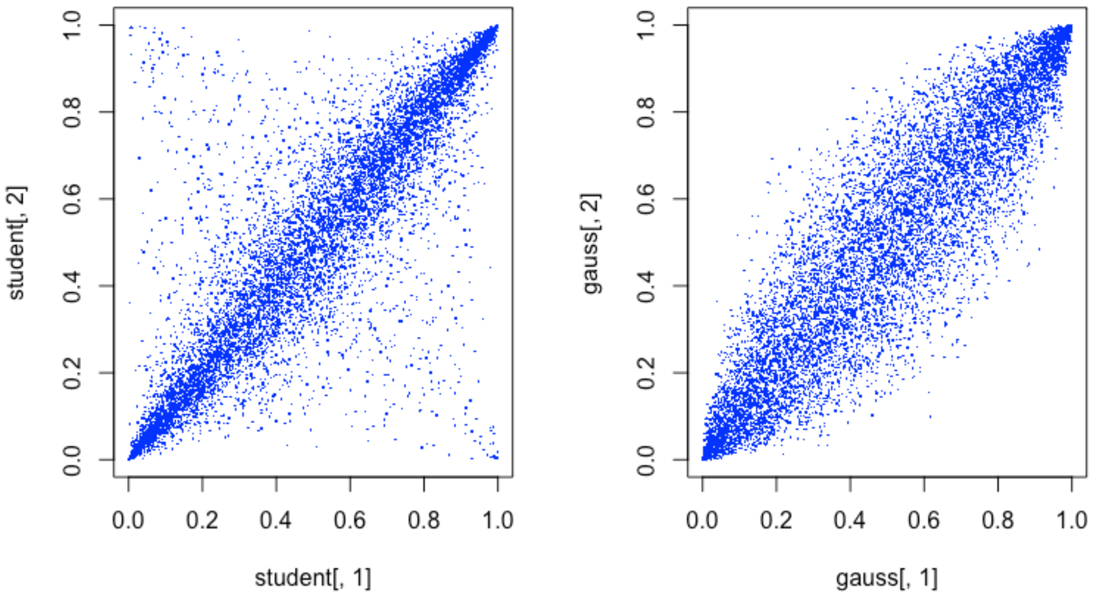
$$\boxed{C_{\nu,\Sigma}^{Student} \xrightarrow[\nu \to +\infty]{} C_{\Sigma}^{Gauss}}$$

Similarités :

- Les deux copules sont elliptiques
- Formules du tau de Kendall identiques

Différences :

- La copule de Student permet de mesurer la **dépendance forte des extrêmes**, elle possède un coefficient de dépendance de queue contrairement à la copule gaussienne.



Estimation des paramètres

En présence d'un ensemble $(x_1^k,\dots, x_d^k)_{1\leq k\leq n}$ d'observations de la variable aléatoire X, il est possible d'estimer les paramètres de la copule.

- 1) Calculer les τ de Kendall empiriques

$$\boldsymbol{\hat{\tau}(x_i, x_j) = \frac{2(c-d)}{n(n-1)}}$$

- 2) En déduire les estimations des coefficients grâce à la **méthode des moments** :

$$\boldsymbol{\widehat{\Sigma_{i,j}} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\hat{\tau}(x_i, x_j)\right)}$$

Dans le cas univarié, on a $\hat{\rho} = \sin\left(\frac{\pi}{2}\hat{\tau}\right)$

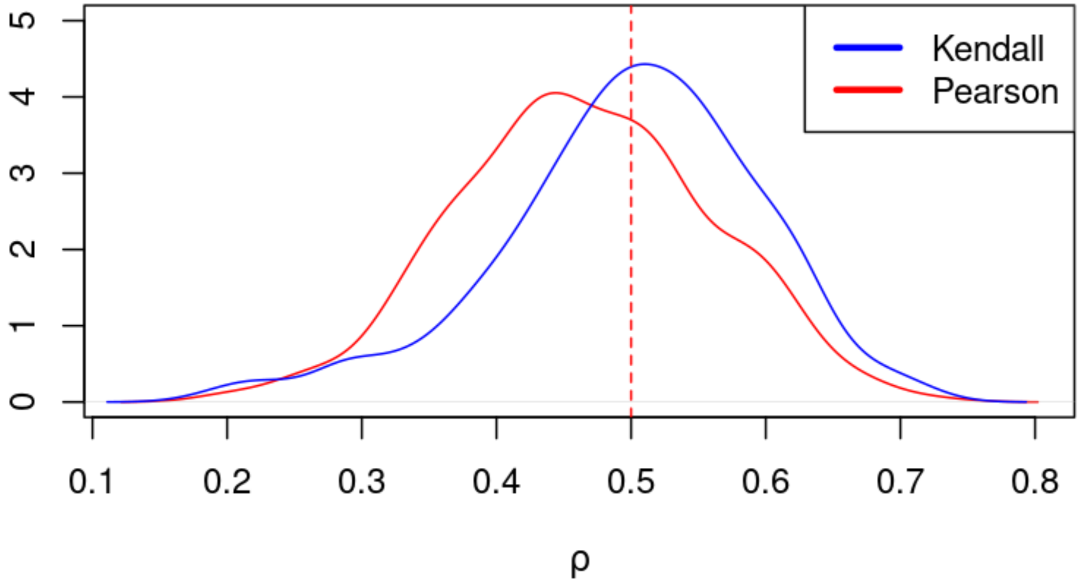
- 3)Une fois $\hat{\Sigma}$ estimée, on peut estimer le degré de liberté ν à l'aide de la **méthode du maximum de vraisemblance :**

$$\boldsymbol{\hat{\nu} = \arg\max_{\nu\in\mathbb{N}^*} \sum_{k=1}^{n} \ln\left(c_{\nu,\hat{\Sigma}}(x_1^k, \dots, x_d^k)\right)}$$

Où $c_{\nu,\hat{\Sigma}}$ est la densité de la copule de formule : $C_{k,\hat{\Sigma}}(u_1, \dots, u_d) = T_{k,\Sigma}(T_k^{-1}(u_1), \dots, T_k^{-1}(u_d))$

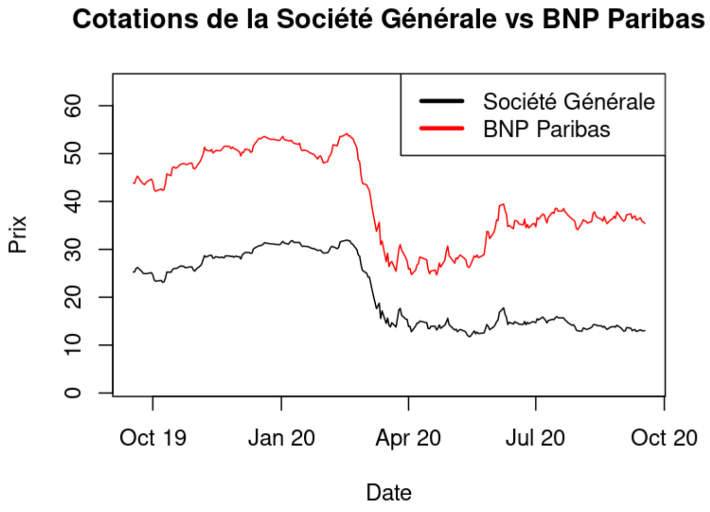
Estimation des paramètres

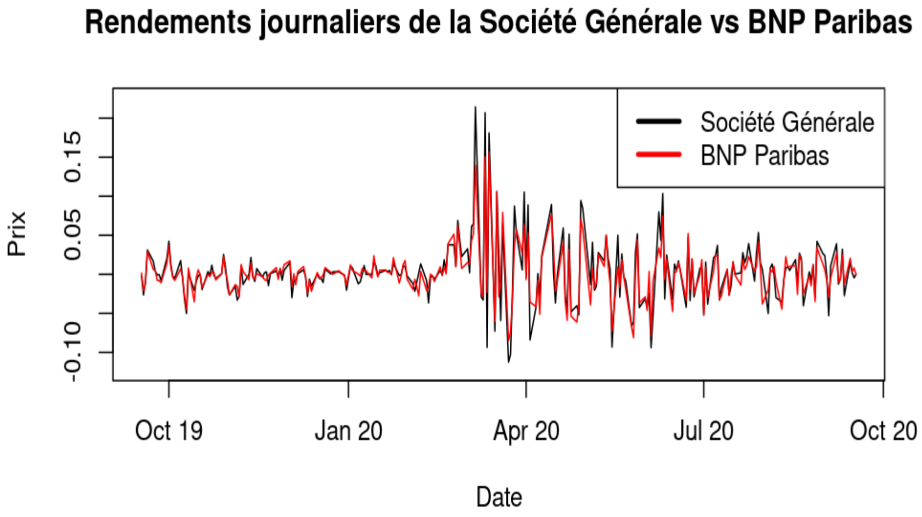
Estimation du coefficient de corrélation ρ



	Kendall	Pearson
Moyenne	0,498	0,464
Ecart-type	0,0964	0,0937

Application



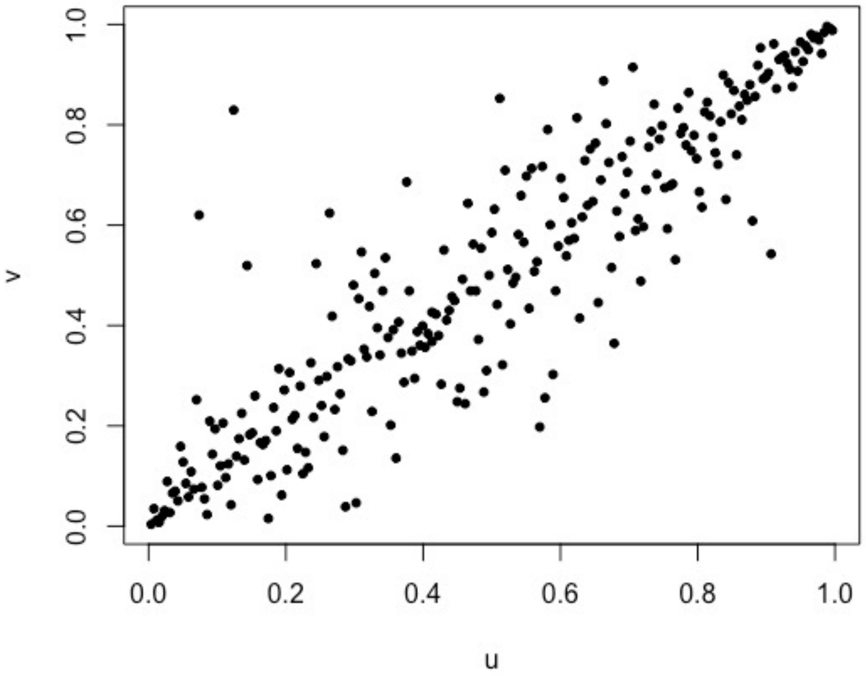


Etude de la dépendance entre les rendements journaliers de la Société Générale et Bnp Paribas entre septembre 2019 et septembre 2020

Estimation de la VaR journalière de ce portefeuille

Application

- Pseudo-observations :



- Mesures de corrélation empiriques :

Pearson	Spearman	Kendall
92%	90%	75%

- Hypothèse de normalité des marges :

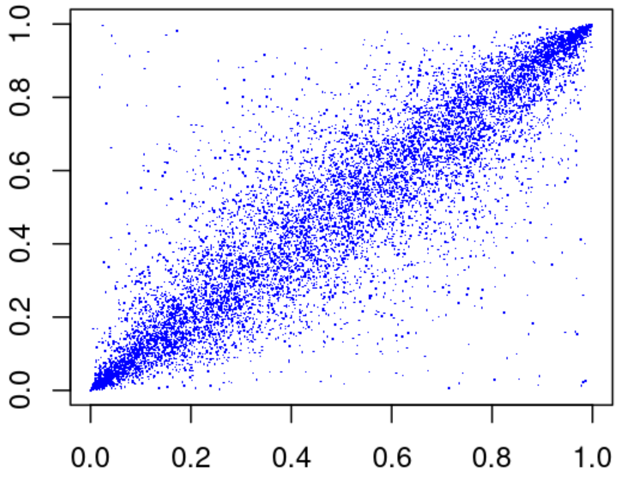
	Moyenne	Ecart-type
Société Générale	0.00335	0.0319
BNP Paribas	0.00133	0.0401

Application

- Sélection de la famille de copule par les critères AIC et BIC :

	Student	Gaussienne
AIC	6943	7038
BIC	7071	7170

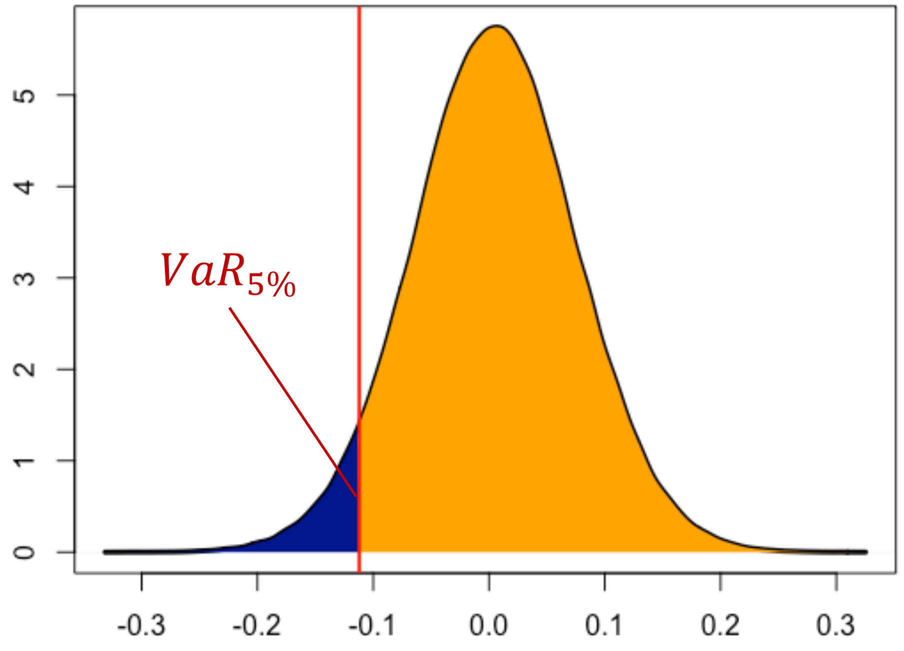
- On retient la copule de Student dont les paramètres estimés sont : $\hat{\rho}= 0.92$ et $\hat{\nu} = 2.32$



Dépendance des valeurs extrêmes :
$\lambda^U = \lambda^L = 73\%$

Application

- Estimation de la VaR à partir de la simulation de 100 000 couples de rendements :



Value at Risk

	Student	Gaussienne
$VaR_{5\%}$	-0.1113	-0.1110
$VaR_{1\%}$	-0.1618	-0.1586
$VaR_{0.5\%}$	-0.1801	-0.1264

Bibliographie

Mémoires et rapports:

- « Utilisation des copules pour analyser l'impact des dépendances sur un portefeuille de crédits » , **KABLA Yohan**
- « Sur la dépendance des queues de distributions **», ALEIYOUKA Mohalilou**

Site Internet :

- ABC Bourse pour les Cotations boursières des banques utilisées

Cours :

- Estimation de copules, **MASIELLO Esterina**
- Introduction à la théorie des copules, **PLANCHET Frédéric**