ISFA, Université Claude Bernard - Lyon 1
M2 Actuariat, TD1
Finance Mathématique

Exercice 1 La courbe de taux à la date $t = 0$ est comme la suite :

	6 mois	1 an	18 mois	2 ans
r	5,0%	5,8%	6,4%	6,8%

1. On considère une obligation zéro-coupon de maturité $T = 1$ an, quel est son prix à $t = 0$?
2. Quel est le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité $T = 2$ ans ?
3. On considère maintenant une obligation standard de maturité $T = 2$ ans. Le taux de coupon est égal à $c = 6\%$ et les coupons sont payés semestriellement 2 fois par an. Écrire les flux de cette obligation.
4. Calculer le prix de cette obligation à $t = 0$.
5. Après le premier paiement de coupon à $t = 6$ mois, On suppose que la valeur de l'intensité reste unchangée et que la courbe de taux du marché devient

	6 mois	1 an	18 mois	2 ans
r	5,3%	5,7%	6,0%	6,5%

Quelle est la valeur de l'obligation à $t = 6$ mois ?

Exercice 2 On considère un modèle de taux d'intérêt court où $(r_t, t \geq 0)$ suit l'EDS suivante

$$dr_t = \mu dt + \sigma dW_t, \quad r_0 > 0$$

avec μ et σ des constantes. Soit $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration engendrée par le mouvement brownien $(W_t, t \geq 0)$, i.e. $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$. On définit la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = e^{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}.$$

1. Donner l'EDS satisfaite par r_t sous la probabilité $\mathbb{Q}$.
2. Calculer le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité T à la date $t \leq T$ par

$$B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t].$$

Exercice 1

La courbe des taux à $t=0$ est donnée comme

	6 mois	1 an	18 mois	2 ans
r	5.0%	5.8%	6.4%	6.8%

1) On considère une OZC de maturité 1 an. Prix à $t=0$?

$$B(0,T) = e^{-rT} = \frac{1}{(1+r)^T} \text{ en discret}$$

Si $T = 1$ an, $B(0,T=1) = e^{-r_{1an}} = e^{-5.8\%} = 0{,}9436$

2) $T = 2$ an

$B(0,T) = e^{-rT}$

$B(0,2) = e^{-r_{2a} \times 2} = e^{-6.8\% \times 2} = 0{,}8728$

3) Le taux de coupon 6% payé 2 fois par an

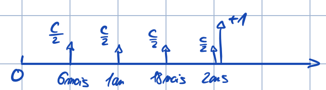
Ecrire le flux de cette obligat°

→ Le taux de coupon est $c = 6\%$

Comme c'est payé 2 fois par an.

On reçoit à chaque date de paiement de coupon

$\frac{c}{2} = 3\%$



4) Valeur à $t=0$?

$$V_0^c = \sum_{i=1}^{4} c\, B(0,t_i) + B(0,T) \quad \text{avec } t_i = \frac{i}{2}$$

$$= \sum_{i=1}^{4} 3\%\, e^{-r_{(i)} t_i} + e^{-r_{(2)} \times 2} = 3\% \left(e^{-5\% \times 1/2} + e^{-5.8\%} + e^{-6.4\% \times 3/2} + e^{-6.8\% \times 2} \right) + e^{-6.8\% \times 2} = 0.9838$$

5) La courbe de taux à $t = 6$ mois donnée comme

	6 mois	1 an	18 mois	2 ans
r	5.3%	5.7%	6.0%	6.5%

Après 1er paiement à $t = 6$ mois, valeur de l'obligat° ?

Pour les prochains taux on choisit le nouveau 6 mois, 1 an, 18 mois car on a reçu le 1er coupon à 6 mois et on change courbe de taux.

→ Après le 1er paiement, il reste encore 3 coupons + le rbt du nominal dans 18 mois.

Donc la valeur de l'obligat° $V_{0,5}^c = \sum_{i=1}^{3} \frac{c}{2} B(0.5, 0.5+t_i) + B(0.5, 2) \qquad t_i = \frac{i}{2}$

$$= 3\% \left(e^{-5.3\% \times 1/2} + e^{-5.7\%} + e^{-6\% \times 3/2} \right) + e^{-6\% \times 3/2} = 0{,}9989$$

Exercice 2 :

$dr_t = \mu dt + \sigma dW_t \qquad r_0 > 0$

$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$

1) Par Girsanov, $W_t^* = W_t - \lambda t$ est un $\mathbb{Q}$-MB

$\Rightarrow dr_t = \mu dt + \sigma dW_t$

$= \mu dt + \sigma dW_t^* + \sigma\lambda dt$

$= (\mu + \sigma\lambda) dt + \sigma dW_t^*$

$= \hat{\mu} dt + \sigma dW_t^*$ avec $\hat{\mu} = \mu + \sigma\lambda$

2) $B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t]$

① r_t

② $\int_t^T r_s ds$

③ $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\int_t^T r_s ds | \mathcal{F}_t] = m(t,T)$

$Var_{\mathbb{Q}}[\int_t^T r_s ds | \mathcal{F}_t] = \Gamma^2(t,T)$

$\Big\} \; B(t,T) = e^{-m(t,T) + \frac{1}{2}\Gamma^2(t,T)}$

① $r_t = r_0 + \hat{\mu} t + \sigma W_t^*$

② $r_s = r_t + \hat{\mu}(s-t) + \sigma \int_t^s dW_t^*$

$= r_t + \hat{\mu}(s-t) + \sigma(W_s^* - W_t^*)$

$\Rightarrow \int_t^T r_s ds = \int_t^T (r_t + \hat{\mu}(s-t) + \sigma(W_s^* - W_t^*)) ds$

$= r_t(T-t) + \frac{1}{2}\hat{\mu}\left[(s-t)^2\right]_t^T + \sigma\int_t^T (W_s^* - W_t^*) ds$

$= r_t(T-t) + \frac{1}{2}\hat{\mu}(T-t)^2 + \sigma\int_t^T (W_s^* - W_t^*) ds$

$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\int_t^T r_s ds | \mathcal{F}_t] = r_t(T-t) + \frac{1}{2}\hat{\mu}(T-t)^2 + \underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\sigma\int_t^T (W_s^* - W_t^*) ds | \mathcal{F}_t]}_{=0 \text{ par } \perp\!\!\!\perp}$

$= r_t(T-t) + \frac{1}{2}\hat{\mu}(T-t)^2$

$Var_{\mathbb{Q}}[\int_t^T r_s ds | \mathcal{F}_t] = Var_{\mathbb{Q}}[\sigma\int_t^T (W_s^* - W_t^*) ds | \mathcal{F}_t]$

Fubini $\rightarrow$ $= \sigma^2 \int_t^T Var_{\mathbb{Q}}[W_s^* - W_t^* | \mathcal{F}_t] ds$

$= \sigma^2 \int_t^T Var_{\mathbb{Q}}[W_s^* - W_t^*] ds$ car accroissem^t brownien $\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t$

$= \sigma^2 \int_t^T (s-t) ds$

$= \frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2 = \Gamma^2(t,T)$

$\Rightarrow B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t]$ car $-\int_t^T r_s ds$ est un processus gaussien d'espérance $m(t,T)$ et de variance $\Gamma^2(t,T)$

$= e^{-m(t,T) + \frac{1}{2}\Gamma^2(t,T)}$ $\Rightarrow \mathbb{E}[e^{-X}] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$ transformée de Laplace.

$= \exp\left(-(r_t(T-t) + \frac{1}{2}\hat{\mu}(T-t)^2) + \frac{1}{2}\frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2\right)$