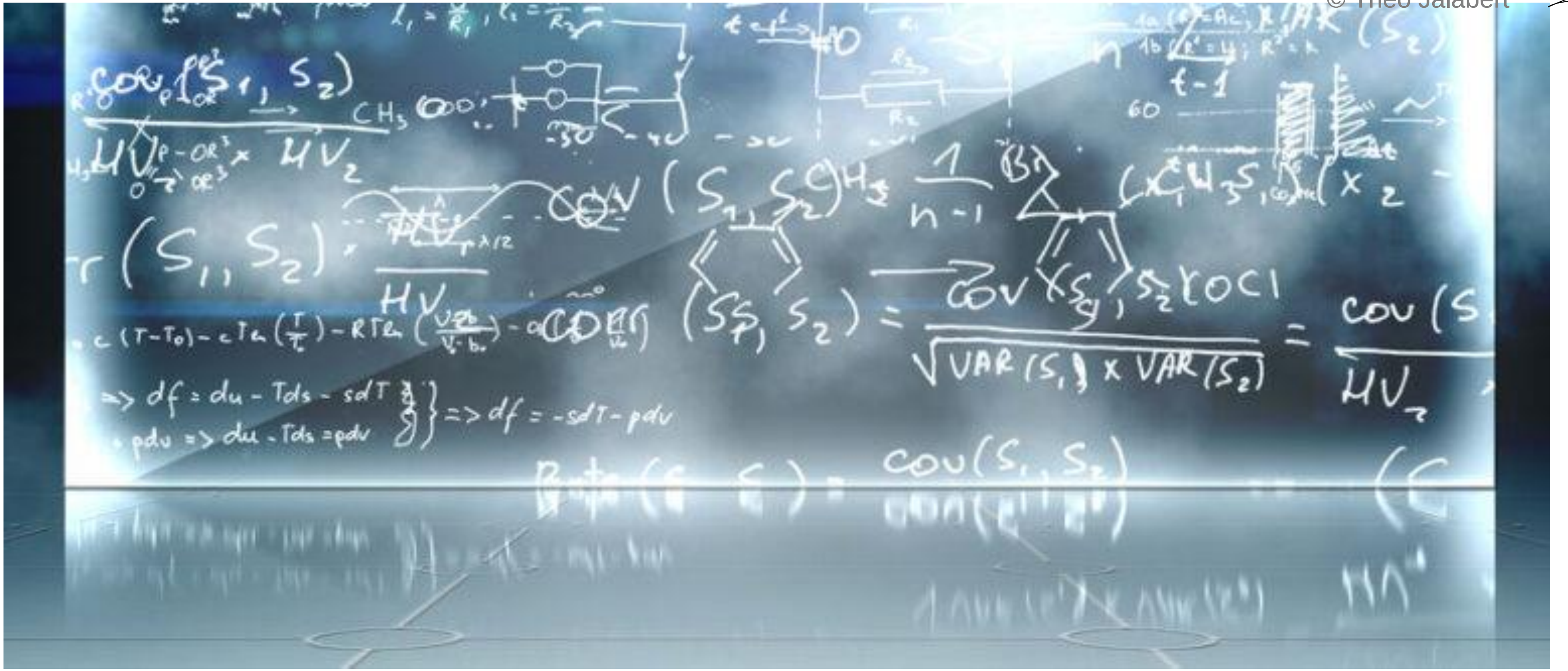
Théorie des Options

Anne EYRAUD-LOISEL

Cours numéro 7

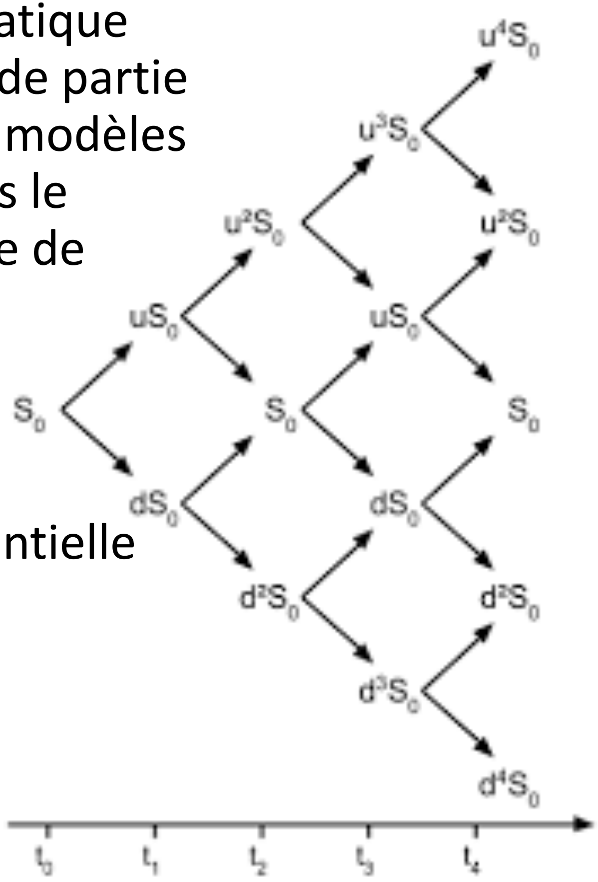
10/03/2022



Modèles d’évaluation

Le modèle binomial

- Le modèle binomial est très pratique pour les calculs, et la plus grande partie des résultats se généralise aux modèles en temps continu, comme nous le verrons dans l'étude du modèle de Black et Scholes.
- Modèle d'évaluation par arbre
- Modèle en temps discret
- Méthode d'évaluation incrémentielle



- Modèle à 1 période
- Modèle à 2 périodes
- Généralisation modèle à n périodes

$t=0$ $t = 3$ mois

$S_0 = 20€$ $S_1^u = 22€$, $C_1^u = 1€$

$S_1^d = 18€$, $C_1^d = 0€$

actif sans risque

$t=0$ $t = 3$ mois.

$1 \longrightarrow e^{rT}$

On considère un portefeuille formé de α actions achetées et d'1 CALL vendu.

up $\Rightarrow$ Valeur portefeuille $= 22 \times \alpha - 1$

down $\Rightarrow$ Valeur portefeuille $= 18\alpha$

Pour être dans une situation sans risque $\Rightarrow 22\alpha - 1 = 18\alpha$

$\Rightarrow 4\alpha - 1 = 0 \Rightarrow \alpha = 0{,}25$

Donc en up et down, la valeur du portefeuille est : $4{,}5€$

$\Rightarrow$ Valeur du port. aujd = Valeur actualisée $4{,}5 \times e^{-0{,}12 \times 3/12} = 4{,}367€$

Donc aujd, si a est la valeur du CALL on a :

$$20 \times 0{,}25 - a = 4{,}367$$

$$\Rightarrow a = 20 \times 0{,}25 - 4{,}367 = 0{,}633€$$

VALEUR DU CALL à $\underline{t=0}$: $0{,}633€$

Exemple introductif

- Supposons que nous cherchions à évaluer un CALL européen d’échéance 3 mois, et de prix d’exercice 21€.
- Le cours de l’action est actuellement de 20€. Pour simplifier, supposons que, dans 3 mois, le cours de l’action ne peut prendre que 2 valeurs : 22€ et 18€. Le taux sans risque est constant égale à 12% annuel.
- L’option n’a alors que 2 valeurs possibles à la fin des 3 mois
  - 1€ si l’action atteint 22€ ,
  - et 0€ si il tombe à 18€
- Dessin de l’arbre

$t=0$ $\quad$ $t=3$ mois

$S_0 = 20€$ $\rightarrow$ $22€ = S_1^u$; $18€ = S_1^d$

C_0 $\rightarrow$ $1€$; $0€$

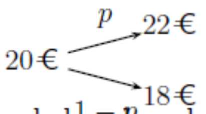
Exemple introductif

- Un raisonnement simple peut alors être utilisé pour évaluer l'option. La seule hypothèse nécessaire est l'absence d'opportunité d'arbitrage.
- Il suffit de construire un portefeuille comprenant l'action et l'option, de manière à ce qu'il n'y ait aucune incertitude sur la valeur de celui-ci à la fin des trois mois. Si le portefeuille est sans risque, sa rentabilité est forcément égale au taux sans risque (ie la valeur initiale est forcément égale à la valeur actualisée de la valeur certaine du portefeuille ainsi constitué). On peut donc en déduire le coût de constitution du portefeuille, et donc par conséquent, le prix de l'option.
- Puisqu'il y a 2 titres (l'action et l'option) et seulement 2 états possibles de la nature, on a toujours la possibilité de constituer un portefeuille sans risque (le marché est complet, on peut répliquer l'actif sans risque).
- Exercice : faites le et trouvez le prix du CALL !

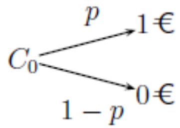
Quel est le prix du CALL ?

- Supposons que nous cherchions à évaluer un CALL européen d'échéance 3 mois, et de prix d'exercice 21€.
- Taux sans risque = 12% annuel
- Le cours de l'action est actuellement de 20€.
  Pour simplifier, supposons que, dans 3 mois, le cours de l'action ne peut prendre que 2 valeurs : 22€ et 18€.
- L'option n'a alors que 2 valeurs possibles à la fin des 3 mois :
  - 1€ si l'action atteint 22€ ,
  - et 0€ si il tombe à 18€

Graphique 3.1 : Variations du cours de l'action



Variations de la valeur de l'option



Calcul du prix du CALL

- Soit un portefeuille constitué de **Δ actions achetées** et d'**un call vendu**. La valeur de Δ est choisie de façon à ce que le portefeuille choisi soit sans risque.
- Si le cours progresse de 20€ à 22€, la valeur des actions est alors 22€ et le call vaut 1€. La valeur du portefeuille est donc 22 Δ − 1.
- Si l'action baisse de 20€à 18€, la valeur du portefeuille est 18 Δ.
- Le portefeuille ainsi constitué est sans risque si

  22 Δ − 1 = 18 Δ, Soit Δ = 0, 25
- Un **portefeuille sans risque** est donc constitué de
  - achat de 0, 25 actions
  - vente d'une option

Calcul du prix du CALL

- Que la valeur de l’action augmente ou diminue, celle du portefeuille sans risque ainsi construit est toujours égale à 4,5€ à l’échéance de l’option.
  - Si le cours atteint 22€, la valeur du portefeuille est $22 \times 0,25 - 1 = 4,5$€
  - Si le cours tombe à 18€, la valeur du portefeuille est : $18 \times 0,25 = 4,5$€
- En l’absence d’arbitrage, un tel portefeuille dont la valeur est toujours égale à 4,5€ à l’échéance a donc le **même payoff** que une somme investie dans l’actif sans risque. Il doit donc avoir la **même valeur initiale** (cf chapitre 1).
- Donc la valeur du portefeuille en 0 est la valeur actualisée de 4,5€

$$4,5e^{-0,12\times 3/12} = 4,367€$$

- La valeur de l’action aujourd’hui est connue et égale à 20€.
- Si f désigne la valeur de l’option à la date 0, on a donc :

$$20 \times 0,25 - f = 5 - f = 4,367€$$

- D’où **f = 0, 633€**

Modèle général

Nous présentons ici une première approche des arbres binomiaux, et leur relation avec le principe connu sous le nom d'évaluation risque-neutre. Ce modèle est aussi appelé modèle de Cox-Ross-Rubinstein (article pionnier datant de 1979).

Le raisonnement de l'exemple précédent peut être généralisé en considérant une action de prix S0 et une action

Considérons un marche à deux dates : t = 0 et t = 1, et deux actifs.

- **Un actif sans risque** qui vaut 1 en t = 0 et vaut R = (1 + r) en t = 1, qui représente l'argent placé à la banque au taux r, il est sans risque dans le sens où l'on connaît en t = 0 la valeur qu'il aura en t = 1. (si taux continu, il suffit d'utiliser la formule des taux continus pour avoir $R = e^{rT}$ où T est la durée de la période considérée).
- **Et un actif risqué S**, qui vaut S_0 en t = 0, et à l'instant 1, il peut avoir pris 2 valeurs différentes : soit il est monté et il vaut $S_u = u.S_0$, soit il est descendu et il vaut alors $S_d = d.S0$ avec d < u.

$$
\begin{tikzcd}
 & u.S_0 = S_1^u \\
S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & d.S_0 = S_1^d
\end{tikzcd}
$$

Le modèle

La modélisation probabiliste du marché est la donnée de 3 choses : **Ω ,F et IP.**

- **Ω**= $\{w_u, w_d\}$ est l'ensemble des états du monde : 2 états possibles selon la valeur de l'actif risqué en t=1, état "haut" w_u (up) ou "bas" w_d (down)
- **IP** est la probabilité historique sur Ω. $IP(w_u) = p$ et $IP(w_d) = 1 - p$. Le prix a une probabilité réelle p de monter et $1-p$ de descendre. Attention : $p \in]0, 1[$ car les 2 états du monde peuvent arriver.
- **F** = $\{F_0,F_1\}$ est un couple de 2 tribus représentant l'information globale disponible sur les marchés aux instants t=0 et t=1.

En t=0, on ne dispose d'aucune information : $F_0 = \{\emptyset, \Omega\}$

En t = 1, on sait si l'actif est monté ou descendu : $F_1 = P(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{w_u\}, \{w_d\}\}$.

Cette tribu représente l'ensemble des parties de Ω dont je puisse dire à l'instant t=1 si elles sont réalisées ou non. Evidemment, $F_0 \subset F_1$, en effet plus on avance dans le temps plus on acquiert de l'information.

Produit dérivé

- ***Définition*** *Un produit dérivé (ou actif contingent) est une variable aléatoire F_1-mesurable.*
- La valeur d'un produit dérivé dépend de l'état du monde réalisé à la date t = 1, et de manière équivalente, tout produit dérivé s'écrit comme fonction mesurable de S_1.
- Notre problème est **d'évaluer le prix à la date t = 0 d'un produit dérivé**.
- On va donc essayer de créer un **portefeuille de réplication** de notre produit dérivé, ie une stratégie d'investissement autofinancée dans l'actif risqué et dans l'actif sans risque.
- **L'hypothèse d'AOA** nous indiquera alors que ces 2 stratégies qui ont **mêmes valeurs en t=1 ont même valeur en t=0**, ce qui nous donnera la valeur en 0 de notre produit dérivé.

Evaluation d’un produit dérivé

Définition *Ici, une* ***<u>stratégie de portefeuille simple</u>*** *consiste en une stratégie (x,Δ) où x désigne le capital initial, et Δ la quantité d’actif risqué.*

- Le portefeuille ne subit aucune rentrée ou sortie d’argent entre 0 et 1 (il n’y a qu’une période).
- La stratégie de portefeuille simple consiste en l’achat à la date 0 de **Δ** actifs risqués, et de $\mathbf{x - \Delta S_0}$ actifs sans risque. La valeur du portefeuille à la date 0 est donc $X_0 = x$.
- Sa valeur à la date 1 est $X_1 = \Delta S_1 + (x - \Delta S_0)R = xR + \Delta(S_1 - S_0R)$.
- On l’appelle **stratégie de portefeuille simple** car elle ne comporte que des actifs de base du marché : l’actif sans risque et l’actif risqué.

$$X_1^{(x,\Delta)} = \Delta S_1 + (x - \Delta S_0)R$$
$$= xR + \Delta(S_1 - S_0 R)$$

Théorème de pricing

Théorème *Tout produit dérivé C est réplicable par une stratégie de portefeuille simple (x, Δ). Le marché est complet.*

Démonstration : Considérons un produit dérivé C.

- En t = 1, il prend la valeur C_u^1 dans l'état "up" et C_d^1 dans l'état "down".
- On cherche un couple (x, *Δ*) vérifiant :

$$\begin{cases} C_1^u = \Delta S_1^u + (x - \Delta S_0)R = xR + (u - R)\Delta S_0 \\ C_1^d = \Delta S_1^d + (x - \Delta S_0)R = xR + (d - R)\Delta S_0 \end{cases}$$

- C'est un système à 2 équations et 2 inconnues dont la solution est donnée par :

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u-d)S_0} \left(= \frac{\phi(S_1^u) - \phi(S_1^d)}{S_1^u - S_1^d} \right) \text{ et } x = \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d} C_1^u + \frac{u-R}{u-d} C_1^d \right)$$