

Modèles de durée / Examen du 23 mai 2006

Durée 1h – aucun document n'est autorisé

Estimation de taux de décès par maximum de vraisemblance discret

Dans le cadre de la construction d'une table d'expérience pour des contrats en cas de décès, on s'intéresse ici à l'ajustement de taux de mortalité bruts \hat{q}_x par un modèle paramétrique $q_x(\theta)$ pour $\theta \in R^P$.

Question n°1

On note D_x le nombre de décès observés à l'âge x et N_x l'effectif soumis au risque à cet âge.

Quelle est la loi de D_x ?

Question n°2

Déduire de la question précédente la log-vraisemblance du nombre de décès pour une plage d'âges x_0, \dots, x_1 .

Question n°3

En supposant les effectifs suffisamment grands indiquez la forme de l'approximation normale de la loi du nombre de décès ; on rappellera les conditions d'application de cette approximation.

En déduire la forme de la log-vraisemblance dans ce cas.

Question n°4

Proposez une approximation de la log-vraisemblance déterminée ci-dessus qui ramène le problème de maximisation de la vraisemblance à un problème de moindres carrés pondérés.

Question n°5

Proposez une statistique permettant de tester la qualité de l'adéquation du modèle. Vous donnerez la loi limite de cette statistique.

Question n°6

On se propose d'appliquer la démarche ci-dessus avec un modèle de Makham dont la fonction de hasard est définie par $\mu_x = a + b \times c^x$.

Donnez l'expression de $q_x(\theta)$ dans ce cas et écrivez la log-vraisemblance du modèle.