Probabilités 2
L3 mathématiques, parcours SAF.

Partiel du 9 mars 2015

Durée 2h.
Documents et calculatrices interdits. On attachera une attention particulière à la qualité de la rédaction.
Barème indicatif (susceptible de varier légèrement) : 1. sur 5 ; 2. sur 7 ; 3. sur 8.
Les différentes questions des exercices sont relativement indépendantes.

1 QCM.

Répondre sur les 2 feuilles séparées ci-jointes.

2 Exercice : Vecteurs gaussiens

1. Les matrices ci-dessous sont-elle des matrices de covariance d'un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^2$? (justifier vos réponses).

$$\Sigma_1 = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \ \Sigma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \ \Sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

On considère un vecteur $X = (X_1, X_2, X_3, X_4, X_5)$ gaussien de $\mathbb{R}^5$ dont la matrice de covariance est donnée par :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

On note $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_5)^T$ le vecteur d'espérance de X.
2. Quelle est la loi de X_1, celle de X_4 ?
3. Quelle est la loi du vecteur (X_3, X_4) ? Montrer que (X_4, X_3) a la même loi que (X_3, X_4). Est-ce que $(X_1, X_2) \stackrel{\mathcal{L}}{=} (X_2, X_1)$?

Quelle est la loi du vecteur (X_3, X_4, X_5) ?

4. Montrer que (X_1, X_2), (X_3, X_4) et X_5 sont indépendants.

5. Montrer que $Y_1 = X_3 + X_4$ et $Y_2 = X_3 - X_4$ sont indépendants.

6. On suppose que $\mu_3 = \mu_4 = \mu_5 = 0$.

6.a Quelle est la loi de $X_3 + X_4$?

6.b Montrer que $Z = \frac{(X_3+X_4)^2}{3} + \frac{X_5^2}{4}$ suit une loi $\chi^2(2)$. $f(t) = e^{-|t|}$

3 Exercice : Convergences stochastiques

$e^{\left|-\frac{t}{n}\right|}$

1. On rappelle que X suit une loi de Cauchy si sa densité est $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}$, la fonction caractéristique d'une loi de Cauchy est $\varphi(t) = \exp[-|t|]$. $e^{-\frac{|t|}{n} \times n}$

On considère $(X_1, \ldots, X_n, \ldots)$ une suite de variables aléatoires indépendantes et toutes de même loi de Cauchy. On note $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

1.a Montrer que $E(|X_1|) = +\infty$.

1.b Déterminer la fonction caractéristique de $\overline{X}_n$. Quelle est la loi de $\overline{X}_n$?

1.c Montrer que $\overline{X}_n$ converge en loi vers une loi de Cauchy.

1.d Comparer ce résultat avec la convergence de $\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$ dans le cas où les Y_i sont indépendants, de même loi et $\mathbb{E}(|Y_1|) < \infty$.

2. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et admettant toutes un moment d'ordre 2.

2.a Montrer que pour tout $n \geq 1$ et tout $a \in \mathbb{R}$,

$$\mathbb{E}((X_n - a)^2) = (\mathbb{E}(X_n) - a)^2 + \mathrm{Var}(X_n).$$

2.b En déduire que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge dans L^2 vers a si et seulement si

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(X_n) = a \text{ et } \lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}(X_n) = 0.$$

3. Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et admettant toutes un moment d'ordre 2. On note : on tous la même loi

$$\mu = \mathbb{E}(X_1),\ \sigma^2 = \mathrm{Var}(X_1),\ \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \text{ et } V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_n)^2.$$

3.a Rappeler pourquoi $\overline{X}_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \mu$. Montrer que

$$V_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2 - (\overline{X}_n)^2.$$

3.b Montrer que $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^2$ converge presque sûrement vers une limite que l'on déterminera.

Montrer que $V_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \sigma^2$.