Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2015-2016 - Première session
13 janvier 2016 - Durée : 2 heures
Aucun document n'est autorisé.

Exercice 1

Considérons le système bonus-malus avec le fonctionnement suivant :

— un sinistre ou plus au cours de l'année conduit à payer une prime c l'année suivante ;

— pas de sinistre au cours de l'année et un sinistre ou plus l'année précédente conduit à payer c pour l'année suivante ;

— pas de sinistre les deux dernières années conduit à payer a l'année suivante.

Dans tout l'exercice, le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres causé par un assuré.

Considérons un assuré qui produit un nombre de sinistres annuel selon une loi de Poisson de paramètre θ.

1. Donnez la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours de cet assuré dans l'échelle bonus-malus.

2. Donnez la distribution stationnaire de cette chaîne.

3. Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?

4. Quelle est la valeur espérée de la prime en régime stationnaire ? Commentez.

5. Supposons que cet assuré n'a pas eu de sinistre au cours des deux précédentes années. En se rendant au réveillon du jour de l'an, il cause un sinistre le 31 décembre à 23h59. Il n'avait précédemment pas causé de sinistre au cours de l'année. À partir de quel montant de sinistre a-t-il intérêt à déclarer le sinistre à son assureur (on supposera que l'assuré connaît son profil de risque θ et qu'il raisonne avec une actualisation nulle) ?

Exercice 2

Considérant les hypothèses (H1) et (H2) ci-dessous, trouvez le meilleur estimateur, linéaire en $\mathbf{X} = (X_1, ..., X_n)'$, de $\mu(\Theta) = \mathrm{E}[X_{n+1}|\Theta]$.

— (H1) Les variables aléatoires X_j $(j = 1, ..., n)$ sont, conditionnellement à $\Theta = \theta$, indépendantes et identiquement distribuées selon une loi F_θ avec les moments conditionnels

$$\mu(\theta) = \mathrm{E}[X_j|\Theta = \theta],$$
$$\sigma^2(\theta) = \mathrm{Var}[X_j|\Theta = \theta].$$

— Θ est une variable aléatoire de distribution $U(\theta)$.

Exercice 3

Considérons un portefeuille d'assurance dont on modélise l'hétérogénéité (non observée *a priori* par l'assureur) par la variable aléatoire Θ. Un assuré de profil de risque $\theta \in [0, 1]$ produit un nombre de sinistres par an avec la distribution :

$$\Pr[N = k|\Theta = \theta] = \theta(1-\theta)^k, k \in \mathbb{N}.$$

Le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres et l'espérance mathématique du coût d'un sinistre est normalisée à 1.

1. Quelle est la prime individuelle correcte d'un assuré de profil de risque θ ?

2. Ne disposant pas d'information supplémentaire sur la distribution des profils de risque dans le portefeuille, déterminez la famille de lois conjuguée à la famille des distributions du nombre annuel de sinistres.

Dans la suite on se place dans le modèle défini par la famille des distributions du nombre annuel de sinistres et sa famille de lois conjuguées déterminée à la question 2.

3. Déterminez la prime collective.

On se place à présent après n années d'observations $(k_1, ..., k_n)$.

4. Déterminez la densité *a posteriori* de Θ.

5. Calculez la prime de Bayes pour la $(n + 1)$-ème année.

6. Calculez la prime de Bühlmann $(n + 1)$-ème année.

7. Comparez les primes de Bayes et de Bühlmann et commentez.

Annexe : Paramétrisation des lois de probabilité

A.1. Distributions discrètes

Distribution	Paramètres	Fonction de probabilité	Domaine
Binomiale	$0 \leq \theta \leq 1$	$\Pr[X = x] = C_n^k \theta^x (1-\theta)^{n-x}$	$x \in \mathbb{N}$
Binomiale négative	$0 \leq \theta \leq 1, r > 0$	$\Pr[X = x] = C_{r-1}^{x+r-1} \theta^r (1-\theta)^x$	$x \in \mathbb{N}$
Poisson	$\lambda > 0$	$\Pr[X = x] = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}$	$x \in \mathbb{N}$

A.2. Distributions continues

Distribution	Paramètres	Densité	Domaine
Bêta	$\alpha > 0, \beta > 0$	$f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1}$	$0 < x < 1$
Gamma	$\alpha > 0, \lambda > 0$	$f(x) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x}$	$x > 0$
Gaussienne	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma^2 > 0$	$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(\mu-x)^2}{2\sigma^2}\right\}$	$x \in \mathbb{R}$
Pareto	$\alpha > 0, \lambda > 0$	$f(x) = \frac{\alpha\lambda^\alpha}{(x+\lambda)^{\alpha+1}}$	$x > 0$