Chapitre 0 : Généralités sur les processus stochastiques

4/ Temps d'arrêt

Définition d'un temp d'arrêt

✗

- **Définition** : Soit $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Un temps d'arrêt relativement à la filtration $\{F_t\}_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup +\infty$ telle que
$$\{\tau \leq t\} \in F_t, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

- **Remarque** : par stabilité des tribus par passage au complémentaire, la définition est équivalente à
$$\{\tau > t\} \in F_t, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$
- **Remarque importante** : cette définition est valable pour temps discret ET temps continu.
- **Uniquement** en cas de temps discret :
$$\{\tau = n\} \in F_n, \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

Temps d'arrêt p.s. fini / p.s. borné

- **Définitions :**

On dit qu'un temps d'arrêt τ est **presque sûrement fini** si $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$, ou encore $\mathbb{P}(\exists M \in \mathbb{R}, \tau \leq M) = 1$, autrement dit

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega, \exists M \in \mathbb{R}, \tau(\omega) \leq M) = 1$$

On dit qu'un temps d'arrêt est **presque sûrement borné** si $\exists M\ tq\ \mathbb{P}(\tau \leq M) = 1$, ou encore

$$\exists M \in \mathbb{R}, tq\ \mathbb{P}(\omega \in \Omega, \tau(\omega) \leq M) = 1$$

- Bien saisir la différence

Exercices d'application

- **Exercices :**
- Montrer que les constantes sont des temps d'arrêt
- Montrer que si $\sigma \; et \; \tau$ sont des temps d'arrêt, alors $\sigma \wedge \tau = \min(\sigma, \tau)$ et $\sigma \vee \tau = max(\sigma, \tau)$ sont des temps d'arrêt.

Exercices - solution

- **Montrer que les constantes sont des temps d'arrêt**

Soit $T \in \mathbb{R}$.

$$\{T \leq t\} = \begin{cases} \emptyset \; si \; t \geq T \\ \Omega si \; t < T \end{cases}$$

Dont $\{T \leq t\} \in F_t, \forall t \in \mathbb{R}^+$. Donc T est un temps d'arrêt.

- **Montrer que si $\boldsymbol{\sigma}$ *et* $\boldsymbol{\tau}$ sont des temps d'arrêt, alors $\boldsymbol{\sigma \wedge \tau = \min(\sigma, \tau)}$ est un temps d'arrêt.**

σ est un temps d'arrêt donc $\{\sigma \leq t\} \in F_t, \forall t \in \mathbb{R}^+$

τ est un temps d'arrêt donc $\{\tau \leq t\} \in F_t, \forall t \in \mathbb{R}^+$

$$\{\sigma \wedge \tau \leq t\} = \underbrace{\{\tau \leq t\}}_{\in F_t} \cup \underbrace{\{\sigma \leq t\}}_{\in F_t} \in F_t$$

- **Exercice complémentaire** : montrer que $\sigma + n$ est un temps d'arrêt $\forall n \in \mathbb{N}$.

Conséquence directe

- Les constantes sont des temps d'arrêt
- Si σ et τ sont des temps d'arrêt, alors $\sigma \wedge \tau = \min(\sigma, \tau)$ et $\sigma \vee \tau = max(\sigma, \tau)$ sont des temps d'arrêt.

- **Conséquence directe :**
- L'exemple le plus simple de temps d'arrêt est un temps déterministe, une constante. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, n$ est un temps d'arrêt.
- Ainsi, pour tout temps d'arrêt τ, $\tau \wedge n$ est un temps d'arrêt, presque sûrement borné par n.

Premier temps d'atteinte

- Un exemple plus élaboré et extrêmement important de temps d'arrêt est ce qu'on appelle le premier temps d'atteinte :

- **Définition** : Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus $(F_t)_{t\geq 0}$ −adapté à valeurs dans $\mathbb{R}$, continu à droite et partant de 0 ($X_0 = 0$). Pour tout $a > 0$, le temps aléatoire
$$T_a = \inf\{t > 0, X_t > a\}$$
est un $(F_t)_{t\geq 0}$ − temps d'arrêt, appelé **premier temps d'atteinte ou de passage au seuil a.**

- **Preuve** : en effet, pour tout $t > 0$, on a l'identification suivante :
$$\{T_a > t\} = \{X_s \leq a, \forall s \leq t\} = \bigcap_{s \in \mathbb{Q}^+ \leq t} \{X_s \leq a\}$$

La 2ème égalité provenant de l'hypothèse cruciale de continuité à droite de X, qui est alors entièrement déterminé par ses évaluations sur les rationnels, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Comme X est F_t − adapté, et par stabilité des tribus par intersection dénombrable, on voit que l'événement de droite est bien dans F_t.

Temps d'atteinte

- Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus continu, on a de plus $T_a = \inf\{t > 0, X_t = a\}$ et $X_{T_a(\omega)}(\omega) = a$.
- On peut montrer de même que $T_a = \inf\{t > 0, X_t < a\}$ est également un temps d'arrêt pour tout $a < 0$.
- D'une manière générale, on peut montrer que si $(X_t)_{t\geq 0}$est un processus càd et adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et si A est un borélien de $\mathbb{R}^d$, alors $T_A = \inf\{t > 0, X_t \in A\}$, premier temps d'atteinte du borélien A, est un temps d'arrêt. *(démo beaucoup plus difficile…)*
- De même, le n-ième temps d'atteinte d'une valeur ou plus généralement d'un borélien est un temps d'arrêt
- En revanche, ATTENTION : en général, le **dernier temps de passage** en A,

$$L_A = \sup\{t > 0, X_t \in A\}$$

n'est PAS un temps d'arrêt, même dans les situations les plus simples.

Filtration arrêtée

- **Définition** : Soit $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et τ un temps d'arrêt relativement à $\{F_t, t \geq 0\}$. On appelle Filtration arrêtée en τ la σ-algèbre :

$$F_\tau = \{A \in F, A \cap \{\tau \leq t\} \in F_t, \forall t \in \mathbb{R}^+\}$$

- Pour bien comprendre l'intérêt de cette tribu, remarquons d'abord que

- **Proposition** : τ est F_τ-mesurable

Preuve : les boréliens de $\mathbb{R}^+$ étant engendrés par les intervalles de type $]-\infty; u]$, il suffit de montrer que $\{\tau \leq u\} \in F_\tau$.
C'est évident car $\forall t \in \mathbb{R}^+, \{\tau \leq u\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t \wedge u\} \in \mathrm{F}_{t\wedge u} \subset F_t$.

Propriétés – processus arrêté

- **Proposition** : Si $\sigma\ et\ \tau$ sont des temps d'arrêt tels que $\sigma \leq \tau\ p.s.$, alors $F_\sigma \subset F_\tau$.

- ***Preuve*** *: Soit $A \in F_\sigma$. Montrons que $A \in F_\tau$.*
  $\forall t \geq 0, on\ a\ A \cap \{\tau \leq t\} = A \cap \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\}$ *puisque* $\sigma \leq \tau\ p.s.$
  D'autre part, $\{\tau \leq t\} \in F_t$ car τ est un temps d'arrêt.
  Et $A \cap \{\sigma \leq t\} \in F_t$ puisque $A \in F_\sigma$.
  Donc $A \cap \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in F_t, \forall t \geq 0.$ ■

Une propriété importante, mais plus difficile à montrer :

- **Proposition** : Soit $X: \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ un processus, et τ un temps d'arrêt.
  Rappelons que le ***processus arrêté*** X_τ est défini par $X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$.
  Si le processus X est càd et adapté, alors la variable aléatoire $X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau < +\infty\}}$ est F_τ-mesurable.

Chapitre 1
MARTINGALEs

PLAN

Martingales : définition

- **Définition** : Soit $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, et $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus stochastique. On dit que X est une $\boldsymbol{(F_t)}$**-martingale** si :
  1. X est (F_t)-**adapté**
  2. X est **intégrable**, soit $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$ (autrement dit $X \in L^1(\Omega)$), $\forall t \geq 0$
  3. $\boldsymbol{\mathbb{E}(X_t | F_s) = X_s \ \ \forall s \leq t}$

Martingales : définition

Remarques :

- On peut en fait définir X martingale sur $(\Omega, F, \mathbb{P})$ sans filtration préalablement définie, il suffit de prendre la filtration naturelle engendrée par X et de montrer les points 2 et 3.
- Si X est une (F_t)- martingale, alors c'est nécessairement une (F_t^X)- martingale
- En effet, on a d'abord $F_u^X = \sigma\{X_s^{-1}(A), A \in B(\mathbb{R}), s \leq u\} \subset F_u$ puisque X est F_t-adapté et donc $X_s^{-1}(A) \in F_s \subset F_u\ \forall s \leq u$.
  D'où
  $$\mathbb{E}(X_t|F_s^X) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X_t|F_s)|F_s^X) = \mathbb{E}(X_s|F_s^X) = X_s$$
  en utilisant la propriété d'emboitement de l'espérance conditionnelle, la propriété de (F_t)-martingale de X, et la mesurabilité de X_s par rapport à F_s^X.

Martingale en temps discret

- Si l'espace de temps est $\mathbb{N}$, alors pour montrer la propriété de martingale, il suffit de montrer que

$$\mathbb{E}(X_t|F_{t-1}) = X_{t-1}\ , \forall t \in \mathbb{N}$$

Attention : valable uniquement en temps discret.

Propriété fondamentale

Propriété très utilisé en finance et en théorie du pricing :

- **Propriété** : Pour tout horizon $T > 0$, si X est une martingale, alors l'ensemble du processus $\{X_t, t \leq T\}$ est complètement déterminé par la valeur terminale X_T au sens où :

$$X_t = \mathbb{E}(X_T | F_t), \forall t \leq T$$

Martingale fermée

- **Définition** : Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ une (F_t)-martingale. On dit que c'est une martingale fermée si il existe $Z \in L^1(\Omega)$ tel que
$$X_t = \mathbb{E}(Z|F_t), \forall t \geq 0.$$
Autrement dit, l'ensemble du processus est déterminé par une valeur terminale Z à l'horizon infini.

- **Remarque** : on verra plus tard que Z est en fait la limite de X_t quand $t \to +\infty$.

Le théorème suivant caractérise les martingales fermées par leur uniforme intégrabilité :

- **Théorème** : Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ une (F_t)-martingale. C'est une martingale fermée ssi la famille de variables aléatoires $\{X_t, t \geq 0\}$ est uniformément intégrable.

Sous-martingales / sur-martingales

- Définition : Soit $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré, et $X = \{X_t, t \geq 0\}$ un processus stochastique (F_t)-adapté et X est intégrable, soit $\mathbb{E}(|X_t|) < +\infty$, $\forall t \geq 0$.
  On dit que
  - X est une $(\boldsymbol{F_t})$**-sous-martingale** si : $\mathbb{E}(\boldsymbol{X_t}|\boldsymbol{F_s}) \geq \boldsymbol{X_s}\ \ \forall \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$
  - X est une $(\boldsymbol{F_t})$**-sur-martingale** si : $\mathbb{E}(\boldsymbol{X_t}|\boldsymbol{F_s}) \leq \boldsymbol{X_s}\ \ \forall \boldsymbol{s} \leq \boldsymbol{t}$

- Par analogie, on parlera aussi de (F_t)-sous-martingale (resp. sur-martingale) fermée si il existe une variable aléatoire Z, (F)-mesurable, telle que $\mathbb{E}(Z|F_s) \geq X_s$ (resp. $\mathbb{E}(Z|F_s) \leq X_s$) $\forall t \geq 0$.

Interprétation

- Il découle facilement des définitions que :
- **Une martingale est un processus à espérance constante** :
  $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_s)$ ne dépend par de t.
  Une martingale modélise un « jeu équitable »
- Une sous-martingale est un processus à espérance croissante (jeu « favorable »)
- Une sur-martingale est un processus à espérance décroissante (jeu « défavorable »).
- **Attention** : un processus à espérance constante n'est pas nécessairement une martingale…

Exemple : fortune du joueur

- **Exemple de la fortune du joueur** : Un joueur de pile ou face début à la date 0 avec une richesse X_0. La pièce utilisée est supposée être **équilibrée**, et les résultats sont un gain de +1 si *pile* sort et -1 si *face* sort. Les jets successifs sont supposés être **indépendants**.
- T parties sont prévues. Montrer que le processus de richesse du joueur, qu'on notera X, est une martingale, en précisant l'espace probabilisé et la filtration utilisée.

Exemple : fortune du joueur

- **Exemple de la fortune du joueur** : Un joueur de pile ou face début à la date 0 avec une richesse X_0. La pièce utilisée est supposée être **équilibrée**, et les résultats sont un gain de +1 si *pile* sort et -1 si *face* sort. Les jets successifs sont supposés être **indépendants**.
- T parties sont prévues. Montrer que le processus de richesse du joueur, qu'on notera X, est une martingale, en précisant l'espace probabilisé et la filtration utilisée.
- **Solution** : Soit Y_t le résultat de la $t^{ième}$ partie. $Y_t = \begin{cases} 1 \; si \; pile \\ -1 \; si \; face \end{cases}$

L'espace d'état $\Omega = \{pile, face\}^T$ que l'on munit de la probabilité uniforme.

La richesse s'écrit $X_t = X_0 + \sum_{s=1}^{t} Y_s$, où les Y_s sont des vaiid centrées (jeu équilibré).

Soit (F^Y) la filtration naturelle de Y : $F_s^Y = \sigma(Y_u, u \leq s)$. Par construction X est F^Y-adapté.

$$\mathbb{E}(X_t|F_{t-1}) = \mathbb{E}(X_{t-1} + Y_t|F_{t-1}) = X_{t-1} + \mathbb{E}(Y_t|F_{t-1}) = X_{t-1} + \mathbb{E}(Y_t) = X_{t-1}$$

Car X_{t-1} est F_{t-1}-mesurable, car $Y_t \perp F_{t-1}$ et car Y_t centrée.

Ainsi, X_t est bien une F_t-martingale sur Ω, et on a également $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(X_{t-1}) = X_0, \forall t \geq 0$.

Décomposition de Doob-Meyer

- La manière la plus simple de construire une sous-martingale est d'ajouter à une martingale donnée une fonction croissante déterministe.
- Le théorème suivant assure que la réciproque est presque vraie (la fonction croissante étant remplacée par un processus aléatoire croissant) :
- **Théorème (décomposition de Doob-Meyer)** : Soit X une (F_t)-sous-martingale telle que la famille $\{X_T, T\ (F_t) - temps\ d'arrêt\ borné\}$ est uniformément intégrable.
  Alors il existe une (F_t)-martingale M et un processus croissant (F_t)-adapté A tels que :
  $$X_t = M_t + A_t\ , \forall t \geq 0.$$
  De plus, M et A sont uniques à une constante additive près.

Variation quadratique

- On introduit ici la notion fondamentale de **variation quadratique** (ou crochet stochastique).
- Par l'inégalité de Jenssen, on a de manière immédiate que si X est une (F_t)-martingale, alors $t \mapsto X_t^2$ est une (F_t)-sous-martingale.
  - En effet, pour toute fonction convexe f, on peut écrire par Jenssen $\mathbb{E}(f(X)|F) \geq f(\mathbb{E}(X|F))$. Et on l'applique à la fonction carrée qui est convexe, et à la propriété de martingale de X.
- Sous réserve d'uniforme intégrabilité, la décomposition de Doob-Meyer assure donc l'existence d'un processus croissant A tel que $t \mapsto X_t^2 - A_t$ soit une martingale.
- En réalité on peut se passer de l'hypothèse d'uniforme intégrabilité pour définir A.
- **Définition** : Soit X est une (F_t)-martingale. Soit A le processus croissant tel que $X_t^2 - A_t$ soit une martingale. On appelle A le **crochet stochastique** de la martingale X, ou encore la **variation quadratique** de la martingale X, et on écrit :
$$A_t = \langle X \rangle_t \, , \forall t \geq 0.$$
- Le crochet stochastique des martingales joue un rôle très important dans le chapitre sur l'intégrale stochastique.

Quelques inégalités de martingales

- On énonce maintenant, sans les démontrer, une série de résultats fondamentaux de la théorie des martingales
- **Théorème (Inégalité Maximale)**
  Soit X est une (F_t)-sur-martingale réelle continue. Alors $\forall t \geq 0, \forall \lambda > 0$,
  $$\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} |X_s| \geq \lambda\right) \leq \frac{3}{\lambda} \sup_{s \leq t} \mathbb{E}(|X_s|)$$
- L'intérêt d'une telle inégalité est de donner une vitesse de convergence (en $\frac{1}{\lambda}$) de la quantité $\mathbb{P}\left(\sup_{s \leq t} |X_s| \geq \lambda\right)$ qui tend vers 0 quand $\lambda \to +\infty$.

Quelques inégalités de martingales

- En fait, cette vitesse de convergence peut être améliorée lorsque X est une martingale ayant des moments d'ordre supérieur :
- Théorème (Inégalités dans L^P) : Soit $p \geq 1$ et X une martingale réelle continue telle que $X_t \in L^p, \forall t \geq 0$. Alors

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s\leq t}|X_s|^p\right) \leq q^p \mathbb{E}(|X_t|^p), \forall t \geq 0, \text{où } \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

- Par l'inégalité de Markov, on déduit de ce théorème que si $X_t \in L^p, \forall t \geq 0$, alors

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t}|X_s| \geq \lambda\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{s\leq t}|X_s|^p \geq \lambda^p\right) \leq \frac{q^p}{\lambda^p}\mathbb{E}(|X_t|^p)$$

  D'où une meilleure vitesse de convergence, en $\frac{1}{\lambda^p}$.

Martingale arrêtée

- **Exercice** : si τ est un temps d'arrêt et M une $(F_t)_{t\in\mathbb{N}}$-martingale, alors le processus Z définit par $Z_t = M_{t\wedge\tau}$ est une (F_t)-martingale et $\mathbb{E}(M_{t\wedge\tau}) = \mathbb{E}(M_0), \forall\, t \in \mathbb{N}$.
- Indication : décomposer Z_t de la manière suivante

$$Z_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{k\leq T}(M_k - M_{k-1})$$

Martingale arrêtée : preuve

- **Exercice** : si τ est un temps d'arrêt et M une $(F_t)_{t\in\mathbb{N}}$-martingale, alors le processus Z définit par $Z_t = M_{t\wedge\tau}$ est une (F_t)-martingale et $\mathbb{E}(M_{t\wedge\tau}) = \mathbb{E}(M_0), \forall\, t \in \mathbb{N}$.
- *Indication* : décomposer Z_t de la manière suivante

$$Z_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{k\le T}(M_k - M_{k-1})$$

- Ainsi on peut écrire

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z_n|F_{n-1}) &= \mathbb{E}\left(M_0 + \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{k\le T}(M_k - M_{k-1})\,|F_{n-1}\right)\\
&= M_0 + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{1}_{k\le T}(M_k - M_{k-1}) + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{n\le T}(M_n - M_{n-1})|F_{n-1})\\
&= Z_{n-1} + \underbrace{\mathbb{1}_{n\le T}}_{car\ \{n\le T\}\in F_{n-1}} \underbrace{\mathbb{E}((M_n - M_{n-1})|F_{n-1})}_{=0\ car\ M_n\ martingale}\\
&= Z_{n-1}
\end{aligned}$$

- Mesurabilité et intégrabilité : utiliser $M_{t\wedge T} = M_t \mathbb{1}_{t<T} + M_T \mathbb{1}_{T\le t}$.

Théorème de convergence des martingales

- **Théorème** (de convergence des martingales) :
  Soit X une martingale continue. Les assertions suivantes sont équivalentes :
  1. X est une martingale fermée par X_∞
  2. X converge p.s. et dans L^1 vers X_∞
  3. X est uniformément intégrable

- **Attention** : la limite d'une martingale $(X_t)_{t\in T}$ est une **variable aléatoire** $\boldsymbol{X}_\infty$.
- De plus, il existe des martingales qui ne sont pas uniformément intégrables, autrement dit qui ne convergent pas. Un exemple typique de martingale non convergente est le mouvement Brownien (cf chapitre 2).

Théorème d'arrêt de Doob

- Le théorème suivant est le plus important de ce chapitre :

Théorème d'arrêt de Doob :
Soit M une (F)-martingale continue et σ et τ deux temps d'arrêt tels que $\sigma \leq \tau$ p.s.
Supposons que

- M est uniformément intégrable
- **<u>Ou</u>** les temps d'arrêt σ et τ sont p.s. bornés par une constante finie déterministe K

Alors M_τ est une variable aléatoire intégrable et

$$\mathbb{E}(M_\tau | F_\sigma) = M_\sigma$$

- Autrement dit : si les hypothèses du théorème de Doob sont vérifiées, la propriété de martingale est également vraie avec des temps d'arrêt.

Exemple : Fortune du joueur - suite

- Exemple de martingale arrêtée par un temps d'arrêt + questionnement sur les hypothèses du théorème de Doob
- On reprend l'exemple de la fortune du joueur.
- **Exemple de la fortune du joueur** : Un joueur de pile ou face début à la date 0 avec une richesse X_0. La pièce utilisée est supposée être **équilibrée**, et les résultats sont un gain de +1 si *pile* sort et -1 si *face* sort. Les jets successifs sont supposés être **indépendants**.
- Cette fois au lieu de prévoir T parties, le joueur décide de s'arrêter dès que son gain est strictement positif
- **Écrire cela sous forme de temps d'arrêt τ.**
- **Que vaut $\mathbb{E}(\boldsymbol{X_\tau})$?**
- **Que pouvez-vous dire de ce résultat par rapport au théorème d'arrêt ?**

Exemple : fortune du joueur - suite

- Écrire cela sous forme de temps d'arrêt τ.

$$\tau = \inf_{t \in \mathbb{N}} \{X_t > X_0\}$$

- Que vaut $\mathbb{E}(X_\tau)$?

$$\mathbb{E}(X_\tau) = X_0 + 1 \neq X_0$$

- Que pouvez-vous dire de ce résultat par rapport au théorème d'arrêt ?

Cela contredit le théorème d'arrêt. Car les hypothèses ne sont pas vérifiées :

- Le temps d'arrêt τ n'est pas presque sûrement borné (le jeu peut durer infiniment longtemps)
- La richesse n'est pas uniformément bornée (le joueur peut subir des pertes infiniment élevées avant d'atteindre un gain strictement positif).

Théorème d'arrêt de Doob

- **Cas particulier :** $\boldsymbol{\sigma = 0}$
  si l'un des 2 temps d'arrêt est égal à 0, alors la conclusion du théorème d'arrêt donne
  $$\mathbb{E}(M_\tau | F_0) = M_0$$
  Autrement dit $\mathbb{E}(M_\tau) = M_0$. Souvent utilisé pour trouver l'espérance d'une martingale arrêtée.

Remarques :

- Quand les 2 temps d'arrêt ne sont pas bornés, l'Uniforme Intégrabilité de la martingale est une condition essentielle.
- Quand la martingale est UI, nous avons vu qu'elle était fermée par M_∞. Le théorème d'arrêt reste valable avec des valeurs infinies de τ, au sens où
  $$\mathbb{E}(M_\infty | F_\sigma) = M_\sigma$$
- Quand la martingale n'est pas UI, une technique standard consiste à utiliser les temps d'arrêt $\sigma \wedge n$ et $\tau \wedge n$, pour n fixé, qui sont alors bornés par n, d'appliquer le théorème d'arrêt, et de faire ensuite tendre $n \to \infty$. Il faut alors utiliser les théorèmes de convergence dominée ou de convergence monotone.

Caractérisation des martingales

- Une caractérisation parfois utile des martingales est donnée par la proposition suivante :

- **Proposition** : Soit X un processus (F)-adapté et intégrable tel que $\mathbb{E}(X_\tau|F_0) = X_0$ pour tout temps d'arrêt borné τ. Alors le processus X est une martingale.

- **Remarque** : sorte de réciproque au théorème d'arrêt pour le Cas particulier : $\sigma = 0$.
- **Attention** : la condition $\mathbb{E}(M_t) \ = M_0$ pour tout $t \geq 0$ n'est pas suffisante pour que X soit une martingale.
- Un contre-exemple typique est le processus $X_t = \int_0^t M_u du$ où M est une martingale d'espérance nulle : X est un processus d'espérance constante (nulle), mais n'est pas une martingale.

Irrégularité des martingales

- La proposition suivante montre que les trajectoires d'une martingale continue non constante sont très irrégulières :

- **Proposition** : Si une martingale M continue est un processus à variations finies, alors elle est constante p.s. :

$$M_t = M_0 \; p.s. \forall t \geq 0$$

- Autrement dit, une martingale continue non constante ne peut pas être à variations finies.

Martingales locales

- L'intégrabilité est une hypothèse forte dans la construction des martingales : certains processus ressemblent fortement à des martingales du point de vue du conditionnement, mais ne sont pas intégrable. On ne peut donc pas calculer leur espérance conditionnelle.
- Une manière d'alléger l'hypothèse d'intégrabilité et de contourner ce problème est de définir la notion de martingale locale

- **Définition** : Un processus càdlàg $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale pour une filtration $(F_t)_{t\geq 0}$ si il existe une suite croissante de temps d'arrêt $(\tau_n)_{n\geq 1}$ tendant vers $+\infty$ et telle que le processus $\left(M_{t\wedge\tau_n}\right)_{t\geq 0}$ est une martingale pour tout $n \geq 1$.

- On définit de manière similaire les sous-martingales et les sur-martingales locales.
- C'est une version « allégée » de la martingale, sans l'hypothèse d'intégrabilité.

Exercices : à regarder pour les TD de lundi

Voir fiche de TD1 déposée sur Moodle

- Ex.5 : **Martingale et processus prévisible** (application de l'exercice sur la martingale arrêtée)
- Ex.7 : **Ruine du joueur** (application du théorème de Doob et passage à la limite)
- Ex.8 : **Martingales et options américaines** (manipulation des martingales)