

Annale Janvier 2013 – Titrification

- OK ✓ Dans la plupart des cat-bonds, on élimine complètement le risque de taux et de contrepartie par le biais d'un collatéral. Cela permet aux investisseurs de décorrélérer leur risque de ceux des marchés financiers.

Je dirai VRAI MAIS **ATTENTION**.

Sujet 13, Slide 14

« Titrification 1 », Slide 28

Pour beaucoup de risques, la corrélation avec les risques financiers traditionnels semble très faible et il peut être tentant de supposer les risques d'assurance indépendants des risques financiers. Cela est presque vrai en régime stable, mais devient très discutable en cas de crise. Or la titrification concerne justement les grands risques. Une grande attention doit donc être portée aux scénarios extrêmes et à la corrélation cachée qui n'a pas encore pu être observée. Exemples : En risque cat, Katrina et Rita, et les bons des municipalités touchées.

« Titrification 2 », Slide 17

Transfer of insurance risk to capital markets [...] The most successful example is the cat-bond structure.

« Titrification 2 », Slide 28

Cat-bond [...] main advantages : fully collateralised

« Titrification – manuscrit », p. 3

Avantage de la titrification des risques d'assurance : produit très décorrélé des marchés

- OK ✓ Plusieurs opérations de titrification du risque de mortalité ont réussi.

Sujet 14

« Titrification 2 », Slide 13

Between 2002 and 2007, 51% of life insurance securitisation is XXX.

« Titrification 2 », Slide 32

- ? Plusieurs opérations de titrification du risque de longévité ont réussi.

« Titrification 1 »

- ✗ La titrification est un moyen de transférer des risques vers les marchés financiers.

Sujet 16, Slide 3

« Titrification 2 », Slide 6

Securitisation can be defined as the transferring of underwriting risks to the capital markets through the creation and issuance of financial securities.

- ✓ La titrification fait le plus souvent intervenir la création d'une société dédiée pour l'occasion, le SPV.

Sujet 15, Slide 17

« Titrification 1 », Slide 4 et « Titrification – manuscrit », p.1

Le point commun de la plupart des mécanismes est la création d'une société ad-hoc (créée pour l'occasion), souvent appelée SPV (Special Purpose Vehicle) ou SPR (Special Purpose Reinsurer). Cela permet au réassureur de proposer des obligations portant sur un risque spécifique et de limiter le risque de défaut des deux partis.

- ✓ L'asymétrie d'information est un problème qui peut freiner certaines tentatives de titrification.

« Titrification 1 », Slide 25

Nécessité d'un indice fiable présentant un risque faible d'asymétrie d'information (le manque de confiance des investisseurs à ce sujet avait causé l'échec des premières tentatives de cat-bonds).

« Titrification – manuscrit », p.2

L'asymétrie d'information a freiné le développement des cat-bonds au démarrage.

- ✗ La titrisation du risque automobile correspond à un cat-bond.
C'est FAUX.
- ✓ Les ouragans sur la côte Est des Etats-Unis, le tremblement de terre dans la zone de San Francisco, les tempêtes en Europe et le tsunami en Asie font partie des risques de catastrophe naturelle les plus titrisés.

« Titrification 1 », Slide 3

Sujet 13, Slide 7

- ✗ La titrisation SPARC présente un risque de base très important pour la cédante du fait de son caractère indemnitaire
Je dirais FAUX car d'après ma compréhension l'indemnité dépend du loss-ratio.
- ✓ « Titrification 2 », Slide 29
- ✓ « Titrification – manuscrit », p.3

Risque de base : risque que la compensation obtenue par l'opération de titrisation ne coïncide pas avec les pertes.

- ✓ Les cat-bonds basés sur un indice comportent un risque de base pour la cédante.
Je dirais VRAI.

« Titrification 2 », Slide 28

Cat-bond [...] Main drawbacks: Basis Risk (if not indemnity based)

« Titrification – manuscrit », p.3

- ✓ L'élément déclencheur de l'apparition des cat-bonds est l'ouragan Andrew.
- ✓ « Titrification 1 », Slide 3
- Andrew 1992

Annale Janvier 2014 – Titrification des risques d'assurance

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) ?

- ✗ La titrification du risque automobile a donné lieu à plus d'opérations dans les dix dernières années que la titrification du risque d'ouragan aux Etats-Unis.
C'est évidemment FAUX.
- ✗ Les cat-bonds basés sur un indice permettent à la cédante d'éliminer le risque de base.
« Titrification 2 », Slide 28

Cat-bond [...] Main drawbacks: Basis Risk (if not indemnity based)

« Titrification – manuscrit », p.3

- ✗ Aucun cat-bond n'a encore fait défaut.

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) ?

- ✗ RMS, EQECAT et AIR sont les trois principaux réassureurs opérant sur le marché des cat-bonds.
- ✗ Le risque de pandémie est indépendant des risques financiers.
- ✗ Dans les modèles SEIR de pandémie, la catégorie I correspond aux personnes immunisées par antiviraux. *Au contraire, dans un modèle SEIR classique, "I" représente la catégorie des individus Infectieux, c'est-à-dire des personnes qui sont actuellement infectées et capables de transmettre la maladie à d'autres. Les autres catégories typiques de ce modèle incluent S pour Susceptible, E pour Exposé, et R pour Recovered (Guéri) ou Removed.*
- ✗ Le SPV des opérations de titrification du risque de mortalité d'AXA s'appelait RGA.
- ✓ Certaines zones CRESTA correspondent à des départements français.
C'est VRAI :
Les CRESTA (Catastrophe Risk Evaluation and Standardizing Target Accumulations) :
 - ➔ Standards géographiques en termes d'expositions Cat
 - ➔ Meilleure lecture des pertes et expositions
 - ➔ Uniformisation des pratiques entre les différents acteurs (courtiers, réassureurs...)

Annale Janvier 2012

Laquelle (lesquelles) de ces affirmation est (sont) juste(s) ?

- ✗ Depuis la dernière crise, les assureurs montent des schémas de titrisation sans SPV à cause du risque de crédit.
- ✗ Quand un assureur fait plusieurs opérations de titrisation du même type à des dates successives dans des pays différents, il réutilise le plus souvent le même SPV.
C'est possible mais cela ne constitue pas une norme, je répondrai donc FAUX.
- ✓ L'ouragan Andrew en 1992 a été une des raisons de l'apparition des cat-bonds à la fin des années 1990.
- ✗ Les mortality bonds permettent à l'assureur qui en achète (et cède donc le risque) de se protéger contre une hausse de la longévité à long terme.
D'après moi ça le protège d'une hausse de la mortalité

Laquelle (lesquelles) de ces affirmation est (sont) juste(s) ?

- ✗ Les indices de prix de cat-bonds fournis par Swiss Re montrent qu'ils sont indépendants des indices de iTraxx.
Dropbox : FAUX
- ✓ Les fonds spécialisés en Insurance Linked Securities ne prennent pas trop de risque de pandémie, car ils craignent que la corrélation des extrêmes soit possible entre ce risque et les risques de marché classiques.
Dropbox : VRAI
- ✗ L'exhaustion point est le niveau à partir duquel le premier euro est perdu pour l'investisseur.
Dropbox : FAUX
- ✗ Les cat-bonds sont des actifs très liquides.

Annale Janvier 2013 – Mesures de risque et risque de modèle

Risque systémique et prise en compte de l'effet de diversification :

Soit X et Y deux risques de perte. On suppose que $X = 2Z + X_0$ et que $Y = 3Z + Y_0$ où Z représente un risque systémique. On suppose que X_0, Y_0 et Z sont mutuellement indépendants. On suppose aussi que X_0, Y_0 et Z sont positifs ou nuls et admettent une densité strictement positive sur $[0, +\infty[$. Lorsqu'on utilise la mesure de risque ρ , on définit le gain (algébrique) en besoin de capital dû à l'effet de diversification comme

$$\rho(X) + \rho(Y) - \rho(X + Y)$$

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) (attention certaines réponses concernent la VaR, d'autres la TVaR) ?

« Mesure de/du/des risques », p. 4-5

Mesure de risque cohérente :

- i. Invariance par translation : $\rho(X + c) = \rho(X) + c$
- ii. Homogénéité positive : $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$
- iii. Monotone : $X \leq Y \Rightarrow \rho(X) \leq \rho(Y)$
- iv. Sous-additivité : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$

VaR n'est pas sous-additive (sauf si X et Y sont Gaussiens/Lognormaux)

TVaR est cohérente

Axiome alternatif : $\forall (X, Y)$ comonotone $\rho(X + Y) = \rho(X) + \rho(Y)$

Propriété : VaR et TVaR sont « comonotone-additive »

i.e. corrélation 100% \Leftrightarrow bénéfice de diversification = 0

- ✗ On ne peut rien dire du signe du gain en besoin de capital dû à l'effet de diversification sans information supplémentaire si on utilise la Tail-Value-at-Risk de niveau 99% comme mesure de risque
La TVaR est sous-additive i.e. $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$
→ Si on utilise la Tail-Value-at-Risk de niveau 99% comme mesure de risque, le gain en besoin de capital dû à l'effet de diversification est **positif (ou nul)**.
- ✗ Les risques représentés par X et Y sont positivement corrélés, donc le gain en besoin de capital dû à l'effet de diversification est à coup sûr strictement négatif si on utilise la Tail-Value-at-Risk de niveau 99% comme mesure de risque

$\text{Cov}(X, Y) = \text{Cov}(2Z + X_0, 3Z + Y_0) = 6\mathbb{V}(Z)$ car X_0, Y_0, Z mutuellement indépendants.

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(2Z + X_0) = 4\mathbb{V}(Z) + \mathbb{V}(X_0)$ et $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(3Z + Y_0) = 9\mathbb{V}(Z) + \mathbb{V}(Y_0)$

X_0, Y_0 et Z sont positifs ou nuls et admettent une densité strictement positive sur $[0, +\infty[$ donc leur variance est strictement positive.

On a donc :

$$\text{Cor}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\mathbb{V}(X)\mathbb{V}(Y)}} < 100\%$$

X et Y n'étant pas comonotone, la TVaR est la VaR sont strictement sous additives i.e.

$$\rho(X + Y) < \rho(X) + \rho(Y)$$

→ Les risques représentés par X et Y sont positivement corrélés, donc le gain en besoin de capital dû à l'effet de diversification est à coup sûr strictement **positif** si on utilise la Tail-Value-at-Risk de niveau 99% comme mesure de risque

- * Les risques représentés par X et Y sont négativement corrélés, donc le gain en besoin de capital dû à l'effet de diversification est à coup sûr strictement positif si on utilise la Tail-Value-at-Risk de niveau 99% comme mesure de risque

$$\text{Cov}(X, Y) = 6\text{V}(Z) > 0$$

→ Les risques représentés par X et Y sont **positivement** corrélés

- ✓ Les risques représentés par X et Y sont positivement corrélés, et on ne peut rien dire du signe du gain en besoin de capital dû à l'effet de diversification sans information supplémentaire si on utilise la Value-at-Risk de niveau 99,5% comme mesure de risque

La VaR n'est pas sous-additive donc on ne peut rien dire si on ne connaît pas la distribution des risques.

- ✓ Les risques représentés par X et Y sont positivement corrélés, mais le gain en besoin de capital dû à l'effet de diversification est à coup sûr strictement positif si on utilise la Tail-Value-at-Risk de niveau 99% comme mesure de risque

- * Les risques représentés par X et Y sont positivement corrélés, mais le gain en besoin de capital dû à l'effet de diversification est à coup sûr strictement positif si on utilise la Value-at-Risk de niveau 99,5% comme mesure de risque

- * Les risques représentés par X et Y sont indépendants, le gain en besoin de capital dû à l'effet de diversification est à coup sûr nul si on utilise la Value-at-Risk de niveau 99,5% comme mesure de risque

→ Les risques représentés par X et Y sont **corrélés**

- * Les risques représentés par X et Y sont indépendants, le gain en besoin de capital dû à l'effet de diversification est à coup sûr nul si on utilise la Tail-Value-at-Risk de niveau

99% comme mesure de risque

→ Les risques représentés par X et Y sont **corrélés**

Soit X une variable aléatoire de perte (positive ou nulle). Vous devez calculer un capital économique additionnel pour ce risque. On définit ici le capital économique additionnel comme étant $\rho(X) - VaR_{99\%}(X)$, où ρ est une certaine mesure de distorsion et $VaR_{99\%}(X)$ est la Value-at-Risk de niveau 99% de X . Le CRO souhaite utiliser une mesure de risque cohérente. Le régulateur impose que $\rho(X) \geq VaR_{99\%}(X)$ pour toute variable aléatoire $X \geq 0$. Le CFO, le CRO et le CEO souhaitent bien sûr limiter le plus possible l'exigence en capital, tout en respectant ces conditions. Déterminer le choix optimal de la mesure de distorsion, puis calculer le capital économique additionnel obtenu avec cette mesure de risque dans le cas où $X \sim Exp(\lambda)$ avec $1/\lambda = 165$ (densité $f_X(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ pour $x \geq 0$). La partie entière de ce capital économique additionnel est égale à :

« Mesure de/du/des risques », p. 8-11

Définition : une fonction $g: [0,1] \rightarrow [0,1]$ est une fonction de distorsion (des probabilités) si g est croissante (au sens large), $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$.

Définition : la mesure de distorsion ρ_g associée à la fonction de distorsion g est la mesure de risque telle que

$$\rho_g(X) = \int_0^{+\infty} g(\mathbb{P}(X > x)) dx$$

On cherche g telle que

$$\rho_g(X) = \int_0^1 VaR_{1-\alpha}(X) dg(\alpha) \geq VaR_{99\%}(X)$$

- Cas discret : $\sum VaR_{1-\alpha_i}(X) \Delta g(\alpha_i) = VaR_{99\%}(X)$
- Cas « continu » : $\int_0^1 VaR_{1-\alpha}(X) g'(\alpha) d\alpha$

Dans le cas discret, il faut que la somme ait un unique terme et $\begin{cases} 1 - \alpha_i = 99\% \\ \Delta g(\alpha_i) = 1 \end{cases}$
 $\Rightarrow g = 1_{[1\%, 1]}$

Proposition : la TVaR est la plus petite mesure de risque plus grande que la VaR.

Cas continu, $\rho_g(X) = \int_0^1 VaR_{1-\alpha}(X) dg(\alpha) = TVaR_{99\%}(X)$

$$\begin{aligned} TVaR_{99\%}(X) &= \mathbb{E}[X | X > VaR_{99\%}(X)] \\ &= \mathbb{E}[X - VaR_{99\%}(X) | X > VaR_{99\%}(X)] + VaR_{99\%}(X) \end{aligned}$$

Perte de mémoire de la loi exponentielle : $\mathbb{E}[X - VaR_{99\%}(X) | X > VaR_{99\%}(X)] = \mathbb{E}[X]$:

$$TVaR_{99\%}(X) = \mathbb{E}[X] + VaR_{99\%}(X)$$

Capital économique additionnel :

$$\begin{aligned} \rho(X) - VaR_{99\%}(X) &= TVaR_{99\%}(X) - VaR_{99\%}(X) \\ &= \mathbb{E}[X] + VaR_{99\%}(X) - VaR_{99\%}(X) \\ &= \mathbb{E}[X] \\ &= 165 \end{aligned}$$

Annale 2014 – Mesure de risque et risque de modèle

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) (attention certaines réponses concernent la VaR, d'autres la TVaR) ?

- ✓ La TVaR à 99% est la plus petite mesure de distorsion cohérente qui est toujours plus grande que la VaR à 99%.
- ✗ La VaR est sous-additive.
→ **La VaR n'est pas sous-additive.**
- ✗ Avec la VaR de niveau 99,5%, on a un bénéfice de diversification strictement positif si et seulement si les risques sont négativement corrélés.
→ **Avec la VaR, on peut uniquement dire que le bénéfice de diversification est nul si les risques sont 100% corrélés.**
- ✗ Avec la TVaR de niveau 99,5%, on a un bénéfice de diversification strictement positif si et seulement si les risques sont négativement corrélés.
Avec la TVaR, on a un bénéfice de diversification strictement positif si et seulement si les risques ne sont pas parfaitement corrélés.

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) (attention certaines réponses concernent la VaR, d'autres la TVaR) ?

- ✗ Le Swiss Solvency Test est basé sur une TVaR à 99,7%.

« Mesure de/du/des risques – Slides », Slide 21

SCOR's risk measure for solvency is 99% TVaR [...] Full compliance with all regulatory and solvency requirements (US RBC, SST, EU S2, etc.)

Internet : SST basé sur une TVaR à 99%.

- ? Pour les lois de Pareto de moyenne infinie, la TVaR est toujours infinie mais la VaR est toujours finie.

Je dirais VRAI.

« Mesure de/du/des risques », p. 5

VaR_α est super-additive pour α assez grand quand $X, Y \sim \text{Pareto}(\beta)$ avec $\beta < 1$.

Dans ce cas, $\mathbb{E}[X] = +\infty$ et $TVaR(X) = +\infty$ aussi !

Pareto : $F_X(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^\beta \Rightarrow VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = x_0(1 - \alpha)^{-1/\beta}$ (fini sauf si $\alpha \rightarrow 1$)

- ✗ La formule standard de Solvabilité II utilise la VaR à 99,5%, le modèle interne de Solvabilité utilise la TVaR à 99%.

Par définition, le modèle interne est propre à chaque entreprise.

- ✓ Dans un modèle interne de Solvabilité, on peut utiliser la TVaR à 99% si on démontre que c'est plus prudent que la VaR à 99,5% pour son entité.

« Mesure de/du/des risques – Slides », Slide 15

SCR = VaR(99,5%)

« Mesure de/du/des risques – Slides », Slide 21

SCOR's risk measure for solvency is 99% TVaR [...] Full compliance with all regulatory and solvency requirements (US RBC, SST, EU S2, etc.)

- ✗ La formule standard de Solvabilité II utilise la TVaR à 99%, le modèle interne de Solvabilité utilise la VaR à 99,5%.

« Mesure de/du/des risques – Slides », Slide 3

S2 utilise la VaR et le SST utilise la TvaR

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) (attention certaines réponses concernent la VaR, d'autres la TVaR) ?

- ✗ La TVaR à 99% est égale à la VaR à 99%.

- ✓ Cela peut arriver que pour une certaine variable aléatoire X , $TVaR_{95\%}(X) > VaR_{99,9\%}(X)$.

- ✗ La TVaR à 99,5% est égale à la VaR à 99%.

- ✗ La TVaR à 99% est égale à la VaR à 99,5%.

- ✗ Cela peut arriver que pour une certaine variable aléatoire X , $TVaR_{99,5\%}(X) < VaR_{99\%}(X)$.

→ On a $VaR_{99\%}(X) \leq TVaR_{99\%}(X) \leq TVaR_{99,5\%}(X)$

Annale Janvier 2010

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) ?

- ✗ Dans la formule standard de Solvabilité II, le calcul du SCR (Solvency Capital Requirement) global se fait par une approche mixte: on identifie d'abord les principaux facteurs de risque et leurs corrélations pour calculer le SCR global, qu'on répartit ensuite par une méthode d'allocation de capital top-down entre les diéres classes puis sous-classes de risque
- ✗ L'autorité de contrôle pourra dans certains cas précis forcer une compagnie à utiliser un modèle interne partiel pour prendre en compte une particularité d'un de ses risques ou à constituer un capital add-on.
- ✓ Dans la formule standard de Solvabilité II, le calcul du SCR (Solvency Capital Requirement) global se fait par une approche bottom-up à plusieurs niveaux dans laquelle on calcule (par une approche bottom-up) chacun des SCR pour 5 grandes classes de risque, qu'on agrège ensuite pour obtenir le BSCR, avant de tenir compte d'un facteur d'ajustement et du SCR pour le risque opérationnel.
- ✓ Dans le référentiel Solvabilité II, les processus et le contrôle interne relèvent du pilier I.

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) ?

- ? Un modèle interne utilisé uniquement pour la détermination du capital réglementaire ne serait pas validé par le superviseur
- ✗ Le test concerne le pilier 1 de Solvabilité II
Ça concerne plutôt le pilier 2 que le pilier 1
- ✓ Le SCR correspond au niveau d'exigence absolue : c'est le plancher enretrait d'agrément par le régulateur.
- ✗ Le CP 56 définit la fonction gestion des risques comme une sous-fonction de la fonction actuarielle.
En réalité, Solvabilité II stipule que les compagnies d'assurance doivent mettre en place quatre fonctions de contrôle indépendantes et efficaces : la fonction de gestion des risques, la fonction actuarielle, la fonction de conformité, et la fonction d'audit interne.
- ✓ Le CP 33 préconise l'existence d'une fonction actuarielle exercée par des personnes justifiant de compétences suffisantes en la matière.
- ✗ Le test concerne le pilier 3 de Solvabilité II.

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) ?

- ✓ Le pilier 3 de Solvabilité 2 impose une discipline de marché à travers une information prudentielle aux autorités de tutelle et au public.
- ✓ La cartographie des risques évolue en même temps que les risques et permet aux contrôles d'évoluer.

Sujet 22, Slide 4

Évolutive : réévalué les risques de façon périodique

- ✗ Dans la cartographie des risques, on ne doit lister que des risques indépendants entre eux.
- ✗ La culture du risque doit être diffusée au sein de tout le comité de direction uniquement.

Sujet 22, Slide 31

Un document à accès privé, destiné généralement au conseil d'administration

Certaines données composant la cartographie des risques sont confidentielles

➔ C'est la cartographie pas la culture qui est confidentielle

- ✓ La cartographie des risques permet d'appliquer le principe de subsidiarité tout en conservant une vue d'ensemble.
Je dirais VRAI.
- ✓ Lorsqu'on part de rien, la méthode la plus rapide pour arriver à la première cartographie des risques en peu de temps est l'approche top-down.

<https://www.cyfor.fr/post/risques-opérationnels-approche-top-down-ou-bottom-up>

Sujet Janvier 2012

Laquelle (lesquelles) de ces affirmations est (sont) justes ?

- ✗ Le coefficient de corrélation linéaire de (X, Y) dépend uniquement de la copule.
« Corrélation des risques », Slide 7
- r_{lin} est influencé par les lois marginales et n'est donc PAS une « vraie » mesure de corrélation.
- ✗ Soit X suivant une loi normale centrée réduite et Y suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 1$. Le tau de Kendall de (X, Y) est strictement croissant en fonction de λ .
 - ✗ Soit X suivant une loi normale centrée réduite et Y suivant une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 1$. Le tau de Kendall de (X, Y) est strictement décroissant en fonction de λ .
 - ✓ Le rhô de Spearman de deux variables aléatoires indépendante est toujours nul.

Laquelle (lesquelles) de ces affirmations est (sont) justes ?

- ✗ Estimer une VaR à 99,5% de manière suffisamment précise, requiert généralement plus de simulation que pour estimer la TVaR de même niveau.
- ✗ Lorsqu'on a des risques marginaux de type Pareto avec $\alpha < 1$, il vaut mieux choisir la TVaR car la VaR n'est pas sous-additive dans ce cas là.
« Mesure de/du/des risques », p. 5

VaR_α est super-additive pour α assez grand quand $X, Y \sim \text{Pareto}(\beta)$ avec $\beta < 1$.
Dans ce cas, $\mathbb{E}[X] = +\infty$ et $TVaR(X) = +\infty$ aussi !

Dropbox : FAUX

- ✓ La TVaR est une mesure de risque sous-additive
- ✗ La Wang-transform est la plus petite mesure de risque cohérente toujours plus grande que la VaR
 ➔ C'est la TVaR

Annale Janvier 2013 – Copules

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) ?

- ✗ Lorsque le nombre de degrés de liberté de la copule de Student est égal à 1, la copule de Student correspond à une copule gaussienne.

Sujet 2, Slide 10

$$C_{v,\Sigma}^{\text{Student}} \xrightarrow[v \rightarrow +\infty]{} C_{v,\Sigma}^{\text{Gauss}}$$

(v degré de liberté)

- ✗ La copule de Student ne peut présenter que de la dépendance forte des extrêmes et pas de dépendance faible des extrêmes.

La copule de Student converge vers une copule gaussienne lorsque le degré de liberté tend vers l'infini, hors la copule gaussienne présente de la dépendance faible des extrêmes.

- ✓ La copule de Student est une copule elliptique.

« Corrélation des risques – Slides », Slide 34

Parmi les copules elliptiques : copule gaussienne et copule de Student.

- ✗ La copule de Student est un cas particulier de la copule de survie de Clayton, qui est utilisée par plusieurs réassureurs pour leur modèle interne.

- ✓ La copule de Student peut présenter de la dépendance forte des extrêmes.

« Corrélation des risques », Slide 10

La copule de Student présente de la corrélation des extrêmes à gauche et à droite.

- ✓ La copule de Student a 2 paramètres en dimension 2.

Sujet 2, Slides 11-12

Il semble y avoir deux paramètres (le degré de liberté et la matrice de corrélation) quelque soit la dimension.

Dropbox : « n paramètres en dimension n »

Mesures de dépendance. Soient X et Y deux variables aléatoires (générales). Laquelle de ces propositions est correcte ?

- ✗ Si le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est nul, alors X et Y sont indépendants.

« Corrélation des risques – Slides », Slide 6

Le coefficient de corrélation linéaire n'est pas adapté pour mesurer la dépendance entre des variables aléatoires de type log-normales ou Pareto

« Corrélation des risques », Slide 7

r_{lin} est influencé par les lois marginales et n'est donc PAS une « vraie » mesure de corrélation.

- ✗ En général, le fait que le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y soit très proche de 0 ne veut pas forcément dire que les risques sont indépendants mais par contre cela implique qu'il n'y a pas de dépendance dans les queues de distributions entre X et Y .

- ✓ En général, le fait que le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y soit très proche de 0 ne veut pas forcément dire qu'il n'y a pas de dépendance dans les queues de distributions entre X et Y .

➔ Si le tau de Kendall de X et Y est nul, alors X et Y sont indépendants.

- ✗ Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est toujours égal à celui entre e^X et e^Y .

« Corrélation des risques », Slide 7

En général, $r_{lin}(e^X, e^Y) \neq r_{lin}(X, Y)$

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) ?

- ✓ On peut combiner des copules de Gumbel pour construire des copules archimédiennes hiérarchiques, du moment qu'on respecte un ordre sur les paramètres.

Sujet 6, Slide 14

Pour une même famille de copule, la condition qui revient c'est que les paramètres soient décroissants. Autrement dit la dépendance entre variables décroît avec les niveaux. C'est le cas de la famille Gumbel, Cook-Johnson, Clayton, entre autres.

- ✓ On peut construire une copule archimédienne hiérarchique telle que les risques 1 et 2 admettent une copule de Frank, telle que les risques 3 et 4 admettent une copule de Gumbel, et telle que les risques 1 et 2 soient indépendants des risques 3 et 4.

[Dropbox : VRAI](#)

- ✓ Les copules archimédiennes sont des cas particulier des copules archimédiennes hiérarchiques.

Sujet 6, Slide 2

Les copules archimédiennes hierarchiques sont une généralisation des copules archimédiennes.

- ✗ On peut combiner différentes familles pour construire des copules archimédiennes hiérarchiques, du moment qu'on respecte un ordre pour les taux de Kendall.

[Dropbox : FAUX](#)

- ✓ On peut construire une copule archimédienne hiérarchique telle que les risques 1 et 2 admettent une copule de Gumbel, telle que les risques 3 et 4 admettent une copule de Gumbel, et telle que les risques 1 et 2 soient indépendants des risques 3 et 4.

[Dropbox : VRAI](#)

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) ?

- ✓ Si la copule C est associative et si $C(u, u) \leq u$ pour tout u , alors C est archimédienne.

Dropbox : VRAI

- ✗ Les risques admettant une copule archimédienne sont forcément indépendant ou positivement indépendants.

Je dirais FAUX car positivement indépendant ne veut rien dire.

- ✓ Pour les copules archimédiennes, le tau de Kendall se calcule par une intégrale de dimension 1.

« Corrélation des risques », Slide 31

Tau de Kendall :

$$\hat{\tau} = \frac{\text{Nb de paires concordantes} - \text{Nb de paires discordantes}}{\text{Nb de paires}}$$

$$\tau = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1$$

TP « Copules archimédiennes »

Pour une copule archimédienne :

$$\tau = 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)} dt + 1$$

- ✓ Le générateur d'une copule archimédienne est toujours décroissant.

Sujet 3, Slide 4

On appelle générateur une fonction $\phi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ telle que :

- ϕ est strictement décroissante
- ϕ est continue
- $\phi(1) = 0$

Si de plus $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = +\infty$ alors le générateur est dit strict.

- ✓ Les copules archimédiennes peuvent présenter de la dépendance forte des extrêmes.

« Corrélation des risques », Slide 33

Parmi les copules archimédiennes, Clayton (dépendance forte à gauche mais pas à droite) et Gumbel (dépendance forte à droite mais pas à gauche).

- ✗ A partir d'un générateur ϕ , on peut construire une copule archimédienne quelque soit la dimension mais elle sera toujours symétrique.

Sujet 3, Slide 5

On appelle copule archimédienne de générateur ϕ la copule $C: [0,1]^n \rightarrow [0,1]$ définie par

$$C(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} \phi^{-1}\left(\sum_{i=1}^n \phi(u_i)\right) & \text{si } \sum_{i=1}^n \phi(u_i) \leq \phi(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Si le générateur est stricte alors on a à tout moment $C(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\sum_{i=1}^n \phi(u_i))$ et la copule archimédienne est dite stricte.

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) ?

- ✓ En dimension 2, lorsque le paramètre de la copule gaussienne est strictement inférieur à 1, la copule gaussienne ne présente pas de dépendance forte des extrêmes.

« Corrélation des risques – Slides », Slide 32

La copule gaussienne ne présente PAS de dépendance FORTE des extrêmes (paramètre $=/ \neq 1$) mais elle présente de la dépendance faible des extrêmes pour paramètre $=/ \neq 0$.
Dropbox : toujours vrai.

- ✓ En dimension 2, lorsque le paramètre de la copule gaussienne est strictement entre zéro et 1, la copule gaussienne présente de la dépendance faible des extrêmes.
- ✗ La copule gaussienne est stable par mélange.
- ✗ La copule gaussienne est définie uniquement en dimension paire.
- ✗ La copule gaussienne est stable par mélange du moment qu'on se limite à une loi de mélange discrète.

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) ?

- ✓ Pour construire une vyne copula, on spécifie d'abord la dépendance présente entre toutes les paires de variables aléatoires, puis on construit un arbre avec ces copules bivariées.

Sujet 7, Slide 5

- ✗ Les vynes copula sont des cas particuliers des copules archimédienches hiérarchique.

Dropbox : FAUX

Sujet 7, Slide 4

Construction d'une copule multivariée à partir de copules bivariées classiques.

- ✗ Les copules gaussiennes sont à la fois des vynes copula et des copules archimédienches hiérarchiques.

Dropbox : FAUX

- ✓ On peut combiner différentes familles de copules pour construire des vynes copulas.

Sujet 7, Slide 13

- ✗ Les seules copules qui sont à la fois des vynes copulas et des copules archimédienches sont les copules gaussiennes et de Student.

Dropbox : FAUX

- ✗ La copule gaussienne est un cas particulier de vyne copula.

D'après ce que je comprend, n'importe quelle copule peut être un cas particulier de la Vyne Copula

Question : Soit $C = \frac{3}{4}C_1 + \frac{1}{4}C_2$, où C_1 est la borne inférieure de Fréchet et C_2 est la copule indépendante. Soit (U, V) un couple dont la restriction de la fonction de répartition jointe à $[0,1]^2$ est C . A quel intervalle de la probabilité $\mathbb{P}((U, V) \in [0.59,1]^2)$ appartient-elle ?

« Corrélation des risques – Slides », Slide 16

$$C^\perp(u, v) = uv$$

$U = V$ (corrélation 100%) → comonotones → copule : borne supérieure de Fréchet

$$\mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) = \mathbb{P}(U \leq \min(u, v)) \quad C_{\max}(u, v) = \min(u, v)$$

$U = 1 - V$ (corrélation -100%) → antimonotone → copule : borne inférieure de Fréchet

$$\mathbb{P}(U \leq u, 1 - U \leq v) \quad C_{\min}(u, v) = \max(0, u + v - 1)$$

$$C_{\min}(u, v) \leq C(u, v) \leq C_{\max}(u, v)$$

$$C(u, v) = \frac{3}{4}C_1(u, v) + \frac{1}{4}C_2(u, v) = \frac{3}{4}\max(0, u + v - 1) + \frac{1}{4}uv$$

$$\mathbb{P}((U, V) \in [0.59, 1]^2) = 1 - \mathbb{P}((U, V) \in [0, 0.59]^2) = 1 - C(0.59, 0.59)$$

$$= 1 - \left[\frac{3}{4}\max(0, 0.59 + 0.59 - 1) + \frac{1}{4}0.59^2 \right] = 0.777975$$

Dropbox : pas la même réponse 😔

Annale Janvier 2014 – Dépendance stochastique en assurance-finance

Mesures de dépendance. Soient X et Y deux variables aléatoires (générales). Laquelle de ces propositions est correcte ?

- ✗ Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est toujours égal à celui de e^X et e^Y .
- ✓ Si le tau de Kendall et le Rhô de Spearman de X et Y sont tous les deux nuls, alors X et Y sont indépendants.
- ✗ Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est toujours égal à celui entre $-3X$ et $-5Y$.
- ✗ Le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y est toujours égal à celui entre $-3X$ et $5Y$.

Laquelle (lesquelles) de ces réponses est (sont) juste(s) ?

- ✗ La copule de Clayton présente une dépendance forte des extrêmes à droite lorsque le tau de Kendall est strictement positif.

« Corrélation des risques », Slide 33

Parmi les copules archimédiennes, Clayton (dépendance forte à gauche mais pas à droite) et Gumbel (dépendance forte à droite mais pas à gauche).

- ✗ La copule gaussienne correspond au cas limite de la copule de Student lorsque le nombre de degrés de liberté est zéro.

Sujet 2, Slide 10

$$C_{\nu, \Sigma}^{\text{Student}} \xrightarrow{\nu \rightarrow +\infty} C_{\nu, \Sigma}^{\text{Gauss}}$$

(ν degré de liberté)

- ✓ En dimension 2, lorsque le paramètre de la copule gaussienne est strictement entre zéro et 1, la copule gaussienne ne présente pas de dépendance forte des extrêmes.

« Corrélation des risques – Slides », Slide 32

La copule gaussienne ne présente PAS de dépendance FORTE des extrêmes (paramètre $=/1$) mais elle présente de la dépendance faible des extrêmes pour paramètre $=/0$.

- ✗ La copule de Gumbel présente de la dépendance forte des extrêmes à gauche.

Soit $C = \frac{3}{4}C_1 + \frac{1}{4}C_2$, où C_1 est la borne supérieure de Fréchet et C_2 est la copule indépendante. Soit (U, V) un couple dont la restriction de la fonction de répartition jointe à $[0,1]^2$ est C . A quel intervalle de la probabilité $\mathbb{P}((U, V) \in [0.59,1]^2)$ appartient-elle ?

« Corrélation des risques – Slides », Slide 16

$$C^\perp(u, v) = uv$$

$U = V$ (corrélation 100%) → comonotones → copule : borne supérieure de Fréchet

$$\mathbb{P}(U \leq u, V \leq v) = \mathbb{P}(U \leq \min(u, v)) \quad C_{\max}(u, v) = \min(u, v)$$

$U = 1 - V$ (corrélation -100%) → antimonotone → copule : borne inférieure de Fréchet

$$\mathbb{P}(U \leq u, 1 - U \leq v) \quad C_{\min}(u, v) = \max(0, u + v - 1)$$

$$C_{\min}(u, v) \leq C(u, v) \leq C_{\max}(u, v)$$

$$C(u, v) = \frac{3}{4}C_1(u, v) + \frac{1}{4}C_2(u, v) = \frac{3}{4}\min(u, v) + \frac{1}{4}uv$$

$$\mathbb{P}((U, V) \in [0.59, 1]^2) = 1 - \mathbb{P}((U, V) \in [0, 0.59]^2) = 1 - C(0.59, 0.59)$$

$$= 1 - \left[\frac{3}{4}\min(0.59, 0.59) + \frac{1}{4}(0.59^2) \right] = 0.470475$$

Annale Janvier 2012

Soit (X, Y, Z) un vecteur gaussien indépendant d'une variable aléatoire gaussienne T . Laquelle de ces affirmations est juste ?

- ✗ La copule de $(X + T)$ et $(Y + T)$ est la somme de celle de X et Y et T et T .
- ✓ La copule de $(X + T)$ et $(Y + T)$ est gaussienne.
- ✗ Le tau de Kendall de $X + T$ et $Y + T$ est dans tous les cas identique à celui de X et Y .
- ✗ La copule de (X, Y) n'est pas forcément gaussienne.

La copule de Student

- ✗ Est la copule archimédienne qui présente la dépendance forte des extrêmes la plus violente.

La copule de Student n'est pas une copule archimédienne.

- ✓ Est une fonction dont les lignes de niveau sont des ellipses en dimension 2.
« Corrélation des risques – Slides », Slide 34

Parmi les copules elliptiques : copule gaussienne et copule de Student.

Sujet 2, Slide 4

Le nom elliptique provient des courbes de niveau des densités des lois elliptiques qui sont en général des ellipses.

D'après la correction de la DropBox c'est FAUX.

- ✓ Présente de la dépendance forte des extrêmes à gauche dans le cas positivement corrélé.

« Corrélation des risques », Slide 10

La copule de Student présente de la corrélation des extrêmes à gauche et à droite.

- ✗ Est la copule archimédienne qui présente la dépendance forte des extrêmes la plus violente après celle de Clayton.

Laquelle (lesquelles) de ces affirmations est (sont) juste(s) ?

- ✓ Si l'on simule 2000 points issus d'une loi jointe donnée par des marginales $\text{Unif}([0,1])$ et une copule de Clayton de paramètre 14, il est très probable d'avoir beaucoup plus de points dans le coin en bas à gauche que dans le cas indépendant.

Sujet 4, Slide 15

- ✗ La copule de Clayton de paramètre 3 présente de la dépendance forte des extrêmes à droite.
La copule de Clayton présente de la dépendance forte à gauche mais pas à droite
- ✗ La copule de Clayton est une fonction dont les lignes de niveau sont des ellipses en dimension 2.
La copule de Clayton n'est pas une copule elliptique
- ✗ Si l'on simule 2000 points issus d'une loi jointe donnée par des marginales $\text{Unif}([0,1])$ et une copule de Clayton de paramètre 14, il est très probable d'avoir beaucoup plus de points dans le coin en haut à gauche que dans le cas indépendant.

Question : Soit (X, Y, Z) admettant une copule de Gumbel hiérarchique. Laquelle (lesquelles) de ces affirmations est (sont) justes ?

- ✗ $(X, Y), (-X, -Y), (Y, Z)$ et (X, Z) admettent toujours une copule de Gumbel.
Dropbox : FAUX
- ✗ $(X, Y), (Y, Z)$ et (X, Z) admettent toujours une copule de Gumbel de même paramètre.
- ✓ $(X, Y), (Y, Z)$ et (X, Z) admettent toujours une copule de Gumbel.
Dropbox : VRAI
- ✓ $(X, Y), (Y, X), (Y, Z)$ et (X, Z) admettent toujours une copule de Gumbel.
Dropbox : VRAI

Une question en anglais : Which one(s) of the following assertions is (are) true ?

- ✗ If (X, Y) admits a vine copula, then the distributions of X and Y are identical.
- ✓ In three dimensions, any vine copula is fully nested.
Dropbox : VRAI
- ✗ Vine copulas can only be constructed using archimedean copulas.
- ✗ Vine copulas can only be constructed using elliptic copulas.

Annale Avril 2013

Laquelle (lesquelles) de ces affirmations est (sont) juste(s) ?

- ✗ Les bornes de Fréchet sont des copules de dimension supérieure ou égale à 3.
- ✗ En finance, la corrélation entre $n \geq 3$ facteurs de risques liés aux actions et aux taux d'intérêt est toujours positive.
- ✗ Les bornes de Fréchet peuvent permettre d'obtenir des inégalités en dimension supérieure ou égale à 3.
- ✗ Etudier la structure de dépendance pour toutes les paires est suffisant pour comprendre la structure de dépendance entre $n \geq 3$ variables.

Laquelle (lesquelles) de ces affirmations est (sont) juste(s) ?

- ✓ La copule de survie de Clayton peut servir à prendre en compte une forte corrélation des extrêmes pour deux variables aléatoires de pertes.
- ✗ La copule de Clayton est une copule elliptique.
- ✓ La copule de Clayton peut servir à prendre en compte une forte corrélation des extrêmes pour deux variables aléatoires de pertes.
- ✗ La copule de survie de Clayton présente de la dépendance forte des extrêmes à droite et à gauche.

Laquelle (lesquelles) de ces affirmations est (sont) juste(s) ?

- ✗ La copule de Student a six paramètres en dimension 3.
- ✓ La copule de Student peut présenter de la dépendance faible des extrêmes.
- ✓ La copule de Student a trois paramètres en dimension 3.

La notion de risk appetite n'est pas encore complètement unifiée. Néanmoins, laquelle (lesquelles) de ces affirmations est (sont) juste(s) ?

- ✗ Le risk appetite est un nouveau mode de rémunération plus éthique dans le monde de la finance et de l'assurance
- ✓ Le risk appetite est une des notions que l'on peut utiliser (parmi d'autres) dans un processus ERM dans une compagnie d'assurance
- ✓ Le risk appetite est le niveau de risk qu'une entreprise est prête à accepter pour atteindre ses objectifs
- ✗ Le risk appetite est défini dans chaque service, et le risk appetite global de la compagnie est ensuite obtenu en sommant les risk appetite de chaque service

Laquelle (lesquelles) de ces affirmations est (sont) juste(s) ?

- ✗ Le générateur d'une copule archimédienne est toujours croissant.
- ✗ Les copules archimédiennes incluent les copules elliptiques.

Laquelle (lesquelles) de ces affirmations est (sont) juste(s) ?

- ✗ Les copules gaussiennes en dimension 3 sont des copules archimédiennes.
- ✗ Le coefficient de corrélation linéaire est toujours pertinent pour mesurer la dépendance entre des variables aléatoires de Pareto X et Y qui admettent la copule gaussienne.