Séries temporelles, examen.

Master 2 SAF professionnel, ISFA3, année 2009-2010

Mercredi 31 mars 2010.

Durée 2h, notes de cours et de TD, calculatrices autorisées.
Vous veillerez à justifier soigneusement vos réponses.

Dans toute la suite, L désigne l'opérateur de décalage $L(X_t) = X_{t-1}$ et $\Delta_d = (1 - L^d)$ l'opérateur de différence d'ordre d, on note Δ pour Δ_1.

Exercice 1 Estimation de la moyenne d'un AR(1) : intervalle de confiance.
On considère un modèle autorégressif d'ordre 1 défini par :

$$X_t - a_1 X_{t-1} = c_0 + \varepsilon_t,$$

avec $c_0 \in \mathbb{R}$, $|a_1| < 1$, $a_1 \in \mathbb{R}$ et où ε_t est un processus i.i.d. de moyenne nulle et de variance $\sigma^2 \neq 0$. On note

$$\widehat{\mu}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k$$

la moyenne empirique.
0. Montrer que l'équation ci-dessus admet une unique solution stationnaire.
1. Déterminer, en fonction de c_0 et a_1 , la moyenne $\mu = \mathbb{E}[X_t]$ du processus X_t. En déduire l'expression de $\mathbb{E}[\widehat{\mu}_n]$.
2. Déterminer la densité spectrale $f(\omega)$ du processus centré $X_t^c = X_t - \mu$.
3. Déterminer l'expression de

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} n \cdot \mathrm{Var}(\widehat{\mu}_n)$$

en fonction de $f(0)$. On admettra dans la suite que $\widehat{\mu}_n$ est asymptotiquement gaussien, c'est à dire :

$$\sqrt{n}(\widehat{\mu}_n - \mu) \xrightarrow{\text{Loi}}_{n\to\infty} \mathcal{N}(0, \gamma).$$

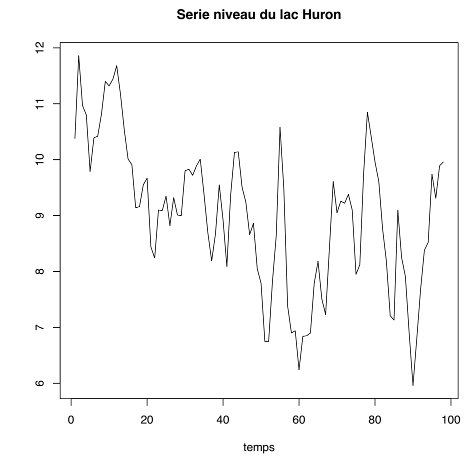
4. On suppose que $a_1 = 0.6$ et que $\sigma^2 = 2$. Lors d'une observation de $n = 100$ valeurs, on obtient $\widehat{\mu}_n = 0.271$. Construire un intervalle de confiance asymptotique à 95% pour μ. L'observation suggère t-elle que $\mu = 0$?

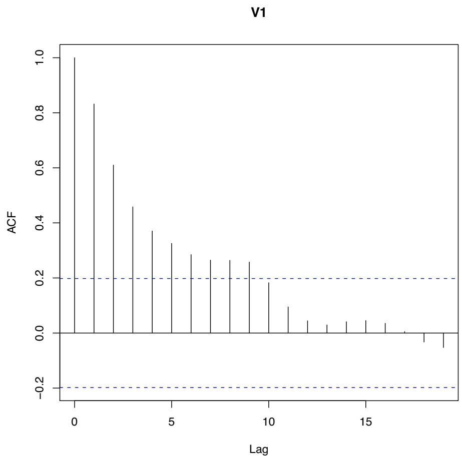
Exercice 2 Classer chacun des modèles ci-dessous parmi la famille des processus ARIMA(p, d, q) (i.e. identifier p, d et q). Dans tous les cas, $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible.

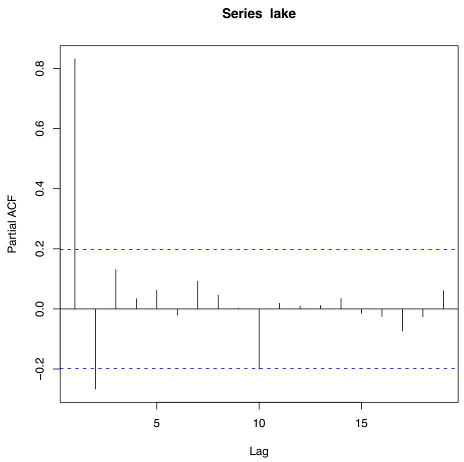
1. $X_t - 0,5X_{t-1} = Zt,$
2. $X_t = Z_t - 1,3Z_{t-1} + 0,4Z_{t-2},$
3. $X_t - 0,5X_{t-1} = Z_t - 1,3Z_{t-1} + 0,4Z_{t-2},$
4. $X_t - 1,2X_{t-1} + 0,2X_{t-2} = Zt - 0,5Z_{t-1}.$

Dans chaque cas, présicer s'il existe une solution stationnaire, causale et inversible.

Exercice 3 La série *Huron* donne le niveau du Lac Huron moins 570 pieds, entre 1875 et 1972, elle est notée X_t.
Les graphiques ci-dessous représentent la série, sa fonction d'auto-corrélation et sa fonction d'auto-corrélation partielle.





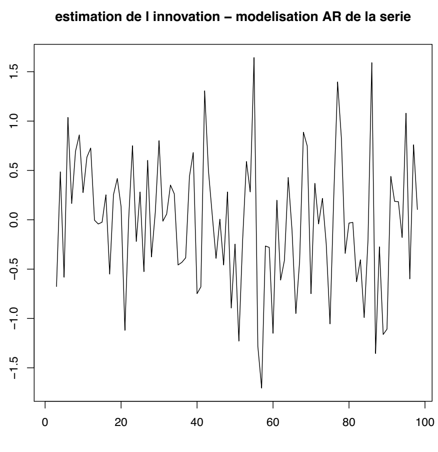


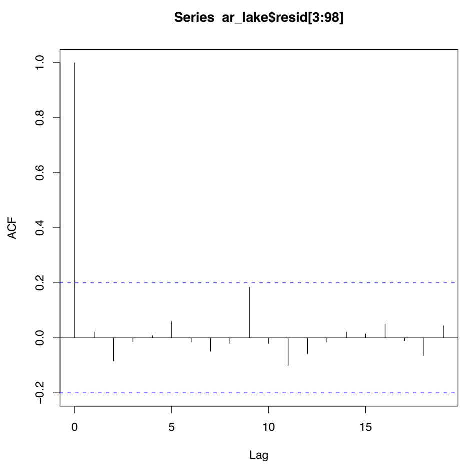
On applique ensuite la fonction `ar` de `R` qui sélectionne le meilleur modèle AR (au sens du critère AIC) pour la série X_t. On obtient les résultats :

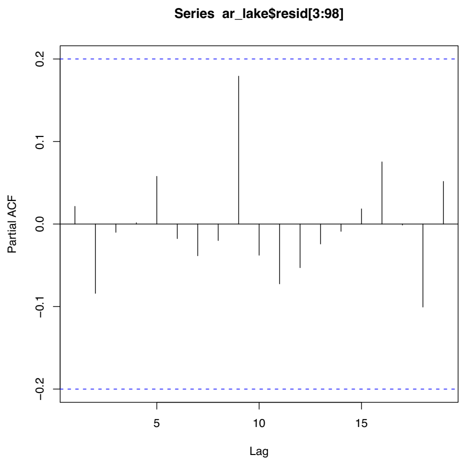
```
Call :
ar(x = lake)

Coefficients :
    1          2
 1.0538    −0.2668
Order selected 2, σ² estimated as
0.5075.
```

Les graphiques ci-dessous représentent l'estimateur de l'innovation pour le modèle AR retenu ainsi que sa fonction d'auto-corrélation et sa fonction d'auto-corrélation partielle.





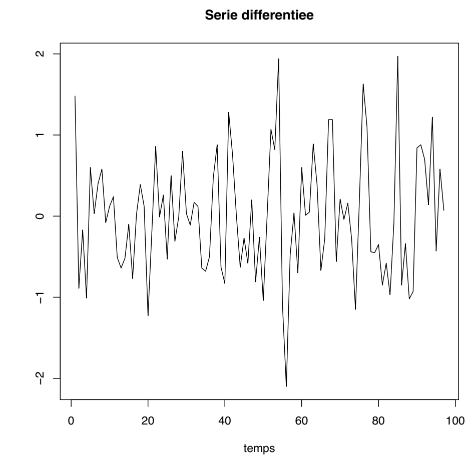


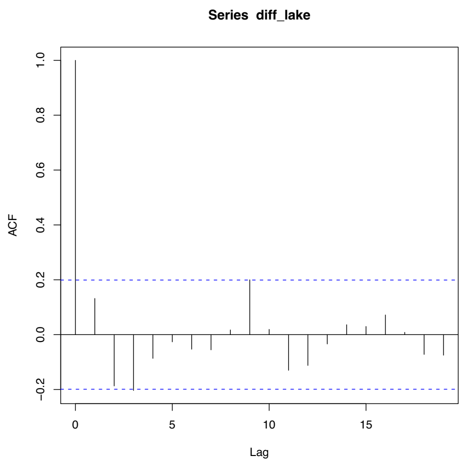
On procède ensuite à un test de Shapiro sur l'estimation de l'innovation du modèle retenu :

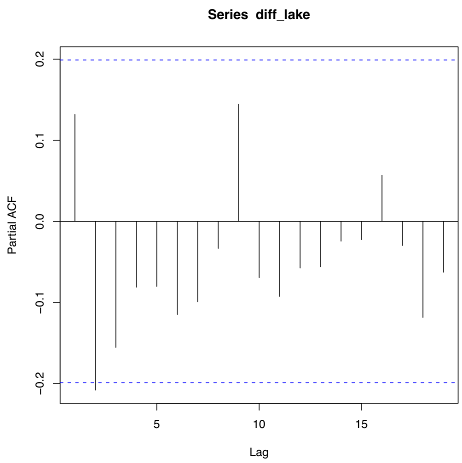
```
Shapiro-Wilk normality test

data : ar_lake$resid
W = 0.9937, p-value = 0.937
```

On considère maintenant la série différenciée $Y_t = \Delta(X_t)$. Les graphiques ci-dessous représentent la série Y_t, sa fonction d'auto-corrélation et sa fonction d'auto-corrélation partielle.





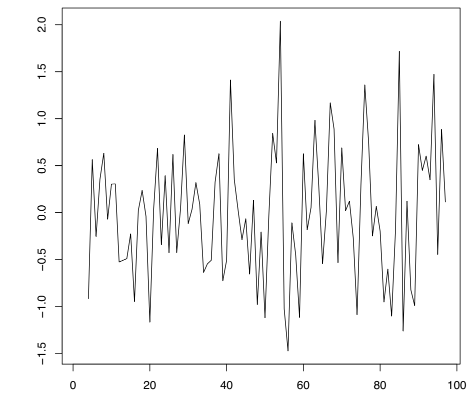


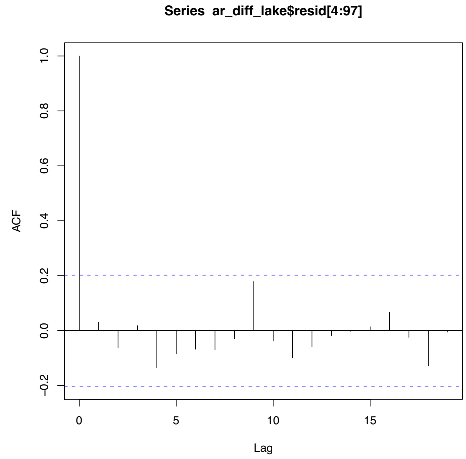
On applique la fonction `ar` à la série Y_t.

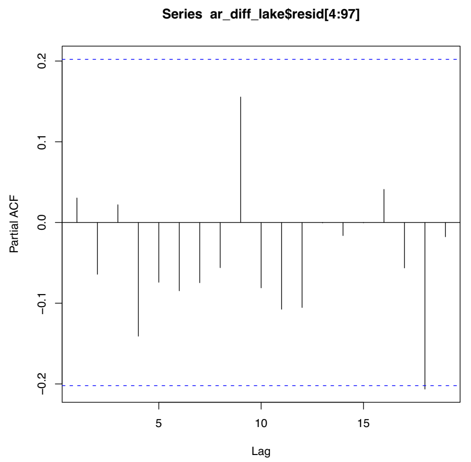
```
Call :
ar(x = diff(lake[, 1]))

Coefficients :
     1          2          3
 0.1270    -0.1833    -0.1555
Order selected 3, σ^2 estimated as
0.5313.
```

Les graphiques ci-dessous représentent l'estimateur de l'innovation pour le modèle AR retenu ainsi que sa fonction d'auto-corrélation et sa fonction d'auto-corrélation partielle.







On procède ensuite à un test de Shapiro sur l'estimation de l'innovation du modèle retenu :

`Shapiro-Wilk normality test`

`data : ar_diff_lake$resid`
`W = 0.9857, p-value = 0.4005`

Commenter les graphiques et les résultats numériques. Quel modèle peut-on proposer pour la série X_t ?

Exercice 2 Classer chacun des modèles ci-dessous parmi la famille des processus ARIMA(p, d, q) (i.e. identifier p, d et q). Dans tous les cas, $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible.

1. $X_t - 0,5X_{t-1} = Zt$,
2. $X_t = Z_t - 1,3Z_{t-1} + 0,4Z_{t-2}$,
3. $X_t - 0,5X_{t-1} = Z_t - 1,3Z_{t-1} + 0,4Z_{t-2}$,
4. $X_t - 1,2X_{t-1} + 0,2X_{t-2} = Zt - 0,5Z_{t-1}$.

Dans chaque cas, présicer s'il existe une solution stationnaire, causale et inversible.

1) $X_t - \frac{1}{2} X_{t-1} = Z_t$

$\Rightarrow p = 1$ (côté gauche mq dépendance en X_{t-1})

$d = 0$ (pas de différenciat° impliquée das le modèle)

$q=0$

$\rightarrow$ ARIMA$(1,0,0) \rightarrow$ AR(1)

Coeff $-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$ processus stationnaire $\Rightarrow$ Causal $\Rightarrow$ inversible car stationnaire.
$|\cdot|<1$

2) $X_t = Z_t - 1{,}3 Z_{t-1} + 0{,}4 Z_{t-2}$

$= (1 - 1{,}3L + 0{,}4L^2) Z_t$

$\Delta = 1{,}3^2 - 4\times 0.4$

$= 1{,}69 - 1{,}6 = 0{,}09$

$\Rightarrow x = \frac{1{,}3 \pm \sqrt{0.09}}{2\times 0.4} = \frac{1{,}3 \pm 0.3}{0.8} \Rightarrow x_1 = 1.25$, $x_2 = 2$

$\Rightarrow X_t = (1 - \frac{4}{5}L)(1 - \frac{1}{2}L) Z_t$

$\Rightarrow p = 0$

$d = 0$

$q = 2$ $\rightarrow$ ARIMA$(0,0,2) \leftrightarrow$ MA(2)

stationnaire car dépend que des termes actuels et retardés du BB qui sont eux mê statio.

Causale ok

inversible si racines $|\cdot|>1$ ici les racines sont $\frac{5}{4}$ et 2 $\Rightarrow$ inversible

3) $X_t - \frac{1}{2} X_{t-1} = Z_t - 1.3 Z_{t-1} + 0.4 Z_{t-2}$

$\Rightarrow (1 - \frac{1}{2}L) X_t = (1 - \frac{4}{5}L)(1 - \frac{1}{2}L) Z_t \Leftrightarrow X_t = (1 - \frac{4}{5}L) Z_t$

$\rightarrow p = 0$

$d = 0$

$q = 1$ $\rightarrow$ ARIMA$(0,0,1) \leftrightarrow$ AR(1)

stationnaire car $|\frac{4}{5}| < 1$

stationnaire $\Rightarrow$ causale

inversibilité oui car $|\frac{4}{5}| < 1$

4) $X_t - 1.2 X_{t-1} + 0.2 X_{t-2} = Z_t - \frac{1}{2} Z_{t-1}$

$\Delta = 1.2^2 - 4\times 0.2$ $\Rightarrow x = \frac{1.2 \pm \sqrt{\Delta}}{2\times 0.2} = \frac{1.2 \pm 0.8}{0.4} \Rightarrow x_1 = 1$, $x_2 = 5$

$= 0.64$

$\Rightarrow (1 - L)(1 - \frac{1}{5}L) X_t = (1 - \frac{1}{2}L) Z_t$

$\Rightarrow p = 1$

$d = 1$

$q = 1$ $\rightarrow$ ARIMA$(1,1,1)$

$d \geq 1 \Rightarrow$ non stationnaire

non causale

et non inversible.