ISFA - Lyon | **Semestre de printemps 2021-2022**
L3 Actuariat | UE : Probabilités avancées

Devoir maison n° 1
PROBABILITÉS AVANCÉES

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités séparément. On veillera à justifier chaque réponse par un raisonnement clair et détaillé.

Exercice 1. On note $U \sim \mathcal{U}\left(]0,1[\right)$.

1. Quelle est la loi de $V = -\ln(U)$. En déduire celle de $W = -\ln(1-U)$.
2. Montrer que $R = \sqrt{-\ln(U)}$ suit une loi de Rayleigh $\mathcal{R}(\alpha)$ dont on précisera le paramètre α. On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi de Rayleigh $\mathcal{R}(\alpha)$ si elle admet une densité de la forme : $f(x) = \left(\frac{x}{\alpha^2}\right) e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$.
3. Soient $X = R\cos(\Theta)$ et $Y = R\sin(\Theta)$ où $R \sim \mathcal{R}(\alpha)$ et $\Theta \sim \mathcal{U}\left([0,2\pi[\right)$ sont indépendantes. Déterminer la loi conjointe de (X,Y). En déduire une méthode pour générer deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

Exercice 2. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi $\mathcal{U}(]0,1[)$ et soit $\lambda > 0$. On note $E_n = \dfrac{-\ln(U_n)}{\lambda}$ pour tout $n \geq 1$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E_k$.

1. Identifier la loi des E_k puis celle de S_n.
2. On pose $N = \min\{n \geq 0, U_1U_2\cdots U_{n+1} \leq e^{-\lambda}\}$. Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

   Hint : on pourra commencer par montrer que $\{N = n\}$ est le même évènement que $\{S_1 \leq 1, S_2 \leq 1, \cdots, S_n \leq 1, S_{n+1} > 1\}$ puis utiliser le théorème de transfert.

Exercice 3. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires iid de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la convergence

$$\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\lambda}$$

a lieu en probabilité.

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et $\alpha > 0$. Calculer la limite suivante

$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

en utilisant la loi forte des grands nombres.

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$.

1. Justifier que $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq e^{-\frac{1}{2}t^2}$.

   Hint : On pourra commencer par étudier $\mathbb{P}(X \geq t)$.
3. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$, on a $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s}} 0$.

Exercice 6. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour $\alpha > 0$, on pose $Y_\alpha = X\mathbb{1}_{|X|<\alpha} - X\mathbb{1}_{|X|\geq\alpha}$.

1. Montrer que $Y_\alpha \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. Montrer qu'il existe un unique α_0 tel que $\mathrm{cov}(X, Y_{\alpha_0}) = 0$.
3. Les variables X et Y_{α_0} sont-elles indépendantes ? Le vecteur (X, Y_{α_0}) est-il gaussien ?