Finance mathématique

Chapitre 3 : Modélisation des taux d'intérêt

I - Modélisation des taux courts

On considère un marché financier sous les hypothès suivantes :

1. L'évolution de la courbe des taux $(T \to R(t,T))$ est entièrement décrite par les taux spot instantanné r_t

2. L'évolution du taux spot est gouvernée par des mouvement browniens.

3. Les produits disponibles sur ce marché sont les suivants :
   - Le cash / actif sans risque $(B_t)_{t \geq 0}$
   $$dB_t = r_t B_t dt$$
   - Les zéro-coupons $P(t,T)$, $\forall\, T > t$.

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}, \mathbb{F})$, dans lequel le taux spot instantanné est solution de l'équation aux dérivés stochastiques suivante

$$dr_t = \mu(r_t, t)\,dt + \sigma(r_t, t)\,dW_t \quad \text{avec } (W_t)_{t \geq 0} \text{ un MB standard}$$

μ et σ deux fonctions déterministes, et $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration naturelle $\mathcal{F}_t = \sigma\{W_s, s \leq t\}$

a. Dynamique des Z.C

L'hypothèse ① implique qu'il existe une fonction déterministe

$$P(t,T) = P(t,T,r_t) = P_T(t,r_t)$$

Autrement, le prix ZC dépend uniquement de la valeur du taux spot à la date t.

Proposition

Le prix ZC est solution de l'EDS suivante :

$$\frac{dP_T(t,r_t)}{P_T(t,r_t)} = \mu_p(r_t,t)dt - \sigma_p(r_t,t)dW_t$$

avec . $\mu_p(r_t,t) = \frac{1}{P_T(t,r_t)}\left\{\frac{\partial P_T}{\partial t} + \frac{\partial P_T}{\partial x}\mu(r_t,t) + \frac{1}{2}\sigma^2(r_t,t)\frac{\partial^2 P_T}{\partial x^2}\right\}$

. $\sigma_p(r_t,t) = -\frac{1}{P_T(t,r_t)}\sigma(r_t,t)\frac{\partial P_T}{\partial x}$

Preuve : on applique la formule d'Ito

$$dP_T(t, r_t) = \frac{\partial P_T}{\partial t} dt + \frac{\partial P_T}{\partial x} dr_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_T}{\partial x^2} d\langle r_t \rangle$$

on sait que $dr_t = \mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)\, dW_t$

$$d P_T(t, r_t) = \frac{\partial P_T\, dt}{dt} + \frac{\partial P_T}{\partial x}\left(\mu(r_t, t)dt + \sigma(r_t, t)dW_t\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_T}{\partial x^2}\sigma^2(r_t, t)\, dt$$

$$= \left(\frac{\partial P_T}{\partial t} + \frac{\partial P_T}{\partial x}\mu(r_t, t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P_T}{\partial x^2}\sigma^2(r_t, t)\right)dt + \frac{\partial P_T}{\partial x}\sigma(r_t, t)\, dW_t$$

$$= P(t, r_t)\left[\mu_p(r_t, t)dt - \sigma_p(r_t, t)dW_t\right]$$

b. Existence d'un unique prix du marché du risque

Pour déterminer le prix du marché on constate que la dynamique de Z.C dépend du même facteur de risque $(W_t)_{t \geq 0}$.
Donc on peut constituer un portefeuille autofinancé tout en annulant le risque. Ce portefeuille sera composé d'une combinaison de Z.C de différente maturité.

En l'occurence, on considère deux Z.C de maturité T_1 et T_2 $(T_1 \neq T_2)$ et on note

$$\begin{cases} P_i = P_{T_i}(t, r_t) \\ \mu_i = \mu_P(t, T_i, r_t) \qquad i = 1,2 \\ \sigma_i = \sigma_P(t, T_i, r_t) \end{cases}$$

et un portefeuille Π qui consiste en

- l'achat de ZC de maturité T
- La vente de θ de ZC T_2

La valeur Π_t de ce portefeuille

$$\Pi_t = P_1 - \theta P_2$$

Donc $d\Pi_t = dP_1 - \theta \, dP_2$

$$= P_1 \mu_1 dt - P_1 \sigma_1 dW_t - \theta (P_2 \mu_2 dt - P_2 \sigma_2 dW_t)$$

$$= (P_1 \mu_1 - \theta P_2 \mu_2) dt + (\theta P_2 \sigma_2 - P_1 \sigma_1) dW_t$$

Donc si $\theta = \dfrac{P_1 \sigma_1}{P_2 \sigma_2}$ alors le portefeuille est sans risque

Alors le portefeuille

$$d\Pi_t = (P_1\mu_1 - \sigma P_2\mu_2)dt$$

$$= \left(P_1\mu_1 - \frac{P_1\sigma_1}{P_2\sigma_2} P_2\mu_2\right)dt$$

$$= P_1\left(\mu_1 - \mu_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)dt$$

Le rendement de ce portefeuille est donné par

$$\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \frac{P_1\left(\mu_1 - \mu_2\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)}{P_1 - \frac{P_1\sigma_1}{P_2\sigma_2}P_2} dt$$

ie $$\boxed{\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = \underbrace{\frac{\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1}}_{= r_t} dt}$$

Par AOA, $\frac{d\Pi_t}{\Pi_t} = r_t dt \Rightarrow \frac{\mu_1\sigma_2 - \mu_2\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} = r_t \quad \forall t$

$$\Leftrightarrow \frac{\mu_1 - r_t}{\sigma_1} = \frac{\mu_2 - r_t}{\sigma_2}$$

Cette égalité est vérifié $\forall T_1 \neq T_2$

Donc (**) $\lambda(t, r_t) = \frac{\mu_p(t, r_t) - r_t}{\sigma_p(t, r_t)}$ ne dépend pas de la maturité

Cette fonction λ est appelé le prix du marché du risque et représente le supplément de rendement par unité de risque.

NB : . En considérant la définition de λ (11)

$$\lambda(t, r_t)\,\sigma_p(t, r_t) = \mu_p(t, r_t) - r_t$$

. En remplaçant μ_p et σ_p par leur définition (proposition)

$$\frac{\partial P_T(t, r_t)}{\partial t} + \left[\lambda(t, r_t)\,\sigma(t, r_t) + \mu(t, r_t)\right] \frac{\partial P_T}{\partial x} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 P_T}{\partial x^2} \sigma^2(t, r_t) = r_t\, P_T$$

Donc en AOA, le prix ZC $(t, x) \mapsto P_T(t, x)$ est solution de l'EDP.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P_T}{\partial t}(t, x) + \left(\mu(t, x) + \lambda(t, x)\,\sigma(t, x)\right) \dfrac{\partial P_T}{\partial x}(t, x) + \dfrac{1}{2}\sigma^2(t, x)\, \dfrac{\partial^2 P_T(t, x)}{\partial x^2} = x \cdot P_T(t, x) \\ P_T(T, n) = 1 \end{cases}$$

appelée l'EDP de Vasicek.

c. Caractérisation des prix ZC sous forme d'espérance

Rappel (Théorème de Girsanov)

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien standard sous une mesure de probabilité $\mathbb{P}$ avec $\mathbb{F}$ la filtration naturelle

① On considère $(\alpha_t)_{t \geq 0}$ un processus adapté à $\mathbb{F}$

② On considère une mesure $\mathbb{Q}$ équivalente à $\mathbb{P}$, défini par sa densité de Radon-Nykodim

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \alpha_s \, dW_s - \frac{1}{2} \int_0^t \alpha_s^2 \, ds \right)$$

③ Le processus $(W_t^{\mathbb{Q}})_{t \geq 0}$ défini par $dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t - \alpha_t \, dt$ est un mouvement Brownien sous la mesure $\mathbb{Q}$.

Application

Sous $\mathbb{P}$ $$\frac{dP_T(t,r_t)}{P_T(t,r_t)} = \mu_P(t,r_t)\,dt - \sigma_P(t,r_t)\,dW_t$$

et on a $\mu_P(t,r_t) = \lambda(t,r_t)\,\sigma_P(t,r_t) + r_t$

Donc

$$\frac{dP_T(t,r_t)}{P_T(t,r_t)} = (r_t + \lambda(t,r_t)\,\sigma_P(t,r_t))\,dt - \sigma_P(t,r_t)\,dW_t$$

En considérant la mesure de proba $\mathbb{Q}$ défini par

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left[\int_0^t \lambda(s,r_s)\,dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda^2(s,r_s)\,ds\right]$$

sous laquelle le processus $dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t - \lambda(t,r_t)\,dt$ est un mouvement brownien.

mesure de proba risque-neutre

La dynamique des ZC sous $\mathbb{Q}$ s'écrit :

$$\frac{dP_T(t,r_t)}{P_T(t,r_t)} = r_t\,dt - \sigma_P(t,r_t)\,dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Proposition

Les prix de ZC actualisés sont des martingales sous $\mathbb{Q}$.

Preuve :

On note $\tilde{P}_T(t,r_t) = D(t)P_T(t,r_t)$ avec D le facteur d'actualisation $D(t) = e^{-\int_0^t r_s\,ds}$ et on montre que c'est une martingale.

Pour montrer que $(\tilde{P}(t))_{t\geq 0}$ est une martingale, cad écrire sa dynamique $\frac{d\tilde{P}(t)}{\tilde{P}(t)} = \alpha_t\,dW_t^{\mathbb{Q}}$ avec $(\alpha_t)_{t\geq 0}$ un processus $\mathbb{F}$-adapté,

i.e. $\mathbb{E}[\tilde{P}(t)\mid\mathcal{F}_s] = \tilde{P}(s)$ pour $s<t$, on cherche la dynamique de $\tilde{P}$ sous $\mathbb{Q}$.

$$d\tilde{P}(t) = d(D(t)P(t,T))$$
$$= P(t,T)\,dD(t) + D(t)\,dP(t,T)$$

<u>Questions</u> : On note $I(t) = \int_0^t r_s\,ds$ donc $D(t) = e^{-I(t)} = f(I_t)$

① Donner la dynamique de $I(t)$?

$$dI_t = r_t\,dt$$

② En déduire celle de $D(t)$

$$dD(t) \overset{\text{Ito}}{=} \frac{\partial f}{\partial t}\underbrace{dt}_{=0} + \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x}}_{-e^{-I(t)}} dI_t + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\,d\langle I\rangle_t}_{=0}$$

$$= -D(t)\,r_t\,dt$$

$$d\tilde{P}(t) = D(t)\,P_T(t,r_t)\left[\cancel{r_t\,dt} - \sigma_p(t,r_t)\,dW_t^{Q}\right] - \cancel{P(t,r_t)D(t)\,r_t\,dt}$$

i.e. $\boxed{d\tilde{P}(t) = -\tilde{P}(t)\,\sigma_p(t,r_t^*)\,dW_t^{Q}}$

Donc $(\tilde{P}(t))_{t\geq 0}$ est une martingale.

<u>Proposition</u>

Le prix ZC s'écrit $P(t,T) = \mathbb{E}_Q\left[e^{-\int_t^T r_s\,ds} \mid \mathcal{F}_t\right]$

Preuve :

$\tilde{P}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$

$$\tilde{P}(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{P}(T,T) \mid \mathcal{F}_t] \quad t < T$$

et

$$D(t)\,P(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[D(T).P(T,T) \mid \mathcal{F}_t]$$

$$\text{ie} \quad P(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{D(T)}{D(t)} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

car $D(t)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

$$P(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s dr} \mid \mathcal{F}_t\right] \quad \text{car } D(t) = e^{-\int_0^t r_s ds}$$

Remarque

La caractérisation des prix ZC (détermination des formules explicites) passe par la détermination de la loi de $\int_t^T r_s ds$ qui dépend du modèle des taux spots instantané.

Exemple de dynamique de taux

* Vasicek : $dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma dW_t$

où
$$\begin{cases} k : \text{force de retour à la moyenne} \\ \theta : \text{le taux moyen à long terme} \\ \sigma : \text{la volatilité} \end{cases}$$

* **Cox - Ingersoll - Ross** (CIR) $dr_t = k(\theta - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t$

* **Hull - White** $dr_t = (b(t) - a r_t)\,dt \quad \sigma dW_t$

[Black - Karasinsky, G2++ ...]

* **Modèles à plusieurs facteurs**

$$dr_t = dx_t + dy_t$$ avec $(x_t)_{t \geq 0}$ et $(y_t)_{t \geq 0}$ sol° d'EDS

d. Modèles à structure affine et prix Z.C

Définition

Un modèle de taux court est dit affine si les taux spot $R(t,T)$ sont affines en r_t

ie. (1) $R(t,T) = \alpha(t,T) + \beta(t,T)\,r_t$ où α et β sont des fc affines

NB: Un modèle est affine lorsqu'on peut écrire

$$P(t,T) = e^{A(t,T) + B(t,T) r_t}$$

avec A et B deux fonctions déterministes

Cette fonction est équivalente à (*) car on a

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t} \log P(t,T)$$

Autrement,
$$\begin{cases} A(t,T) = -\alpha(t,T)(T-t) \\ B(t,T) = -\beta(t,T)(T-t) \end{cases}$$

<u>Proposition</u>

On considère un modèle de taux court, sous la mesure de proba risque neutre $\mathbb{Q}$, comme suit

$$dr_t = \mu(t, r_t)\,dt + \sigma(t, r_t)\,dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

Le modèle est affine ssi
$$\begin{cases} \mu(t,r_t) = a_t + b_t r_t \\ \sigma^2(t,r_t) = c_t + d_t r_t \end{cases}$$

avec a_t, b_t, c_t, d_t sont des fonctions déterministes.

Exemples (de modèles affines)

* Vasicek : $dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$

$$\begin{cases} \mu(t,x) = a(b-x) \\ \sigma^2 = \sigma^2 \end{cases}$$

* CIR : $dr_t = a(b-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\, dW_t$

$$\begin{cases} \mu(t,x) = a(b-x) \\ \sigma^2(t,x) = \sigma^2 x \end{cases}$$

NB : Le caractère affine d'un modèle de taux court dépend de la mesure de probabilité.
Par exemple, si la proposition précédente est vérifiée sous $\mathbb{P}$. $dr_t = \mu(t,r_t)dt + \sigma(t,r_t)dW_t^{\mathbb{P}}$ alors le modèle n'est pas nécessairement affine car

$$dr_t = \left(\mu(t,r_t) + \lambda(t,r_t)\sigma(t,r_t)\right)dt + \sigma(t,r_t)\, dW_t^{\mathbb{Q}}$$

avec $\lambda(t,r_t)$ est le prix du risque de marché.

e. Les prix zéro-coupon comme solution d'EDP

Exemple

On considère le modèle de taux suivant

$$dr_t = a\,dt + \sigma\, dW_t^{Q}$$

sous la mesure risque neutre

1. Ecrire l'EDP vérifié par $P(t,T)$

2. Résoudre cette EDP, en utilisant la propriété affine du modèle ①

1) L'EDP vérifiée par $P(t,T,x) = P_T(t,x)$ est donnée

$$\begin{cases} \dfrac{\partial P}{\partial t} + a\dfrac{\partial P}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2 \dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = x \cdot P \\ P(T,x) = 1 \end{cases}$$

2) Le modèle ① est affine donc

$$P(t,T) = e^{A(t,T) + B(t,T) r_t}$$

avec A et B deux fonctions à déterminer.

- $\dfrac{\partial P}{\partial t} = (A'(t,T) + B'(t,T) r_t) P(t,T)$

- $\dfrac{\partial P}{\partial x} = B(t,T) P(t,T)$ et $\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = B(t,T)^2 P(t,T)$

On remplace dans l'EDP.

ie $(A' + B' r_t) P + a B P + \frac{1}{2} \sigma^2 B^2 P = r_t P$

ie $B' r_t P + A' P + a B P + \frac{1}{2} \sigma^2 B^2 P = r_t P$

On identifie

$$\Rightarrow \begin{cases} B' = 1 \\ A' P + a B P + \frac{1}{2} \sigma^2 B^2 P = 0 \end{cases} \quad \text{car } P > 0$$

Pour résoudre l'équation, on a la condition suivante

$\forall x, \quad P(T, x) = e^{A(T,T) + B(T,T)x} = 1$

$\log P(T,x) = A(T,T) + B(T,T)x = 0$

$\Rightarrow A(T,T) = B(T,T) = 0$

Donc : $\begin{cases} B' = 1 \\ A' = -aB - \frac{1}{2} \sigma^2 B^2 , \quad A(T,T) = 0 \end{cases}$

$\frac{\partial B}{\partial t}(t,T) = 1, \quad B(T,T) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} B(t,T) = t + \text{cte} \\ B(T,T) = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{cte} = -T$$

ie $\boxed{B(t,T) = -(T-t)}$

Donc $\begin{cases} A' = a(T-t) - \frac{1}{2}\sigma^2 (T-t)^2 \\ A(T,T) = 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} A(t,T) = -\frac{a}{2}(T-t)^2 + \frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3 \\ B(t,T) = -(T-t) \end{cases}$

Proposition

Si le taux court est affine.

càd : $\begin{cases} dr_t = \mu(t,r_t)\,dt + \sigma(t,r_t)\,dW_t^{\mathbb{Q}} \\ \mu(t,x) = \lambda(t)\,x + \eta(t) \\ \sigma^2(t,x) = \gamma(t)\,x + \delta(t) \end{cases}$

Alors le prix zéro-coupon : s'écrit de la façon suivante

$$P(t,T) = e^{A(t,T) + B(t,T) r_t}$$

avec A et B deux fonctions déterministes solutions du système d'équations différentielles ordinaires suivant.

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \eta(t) B + \frac{1}{2}\delta(t) B^2 = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \lambda(t) B + \frac{1}{2}\gamma(t) B^2 + 1 = 0 \\ A(T,T) = B(T,T) = 0 \end{cases}$$

avec

Le système d'EDO est appelé le système de KICATI.

Preuve :

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\lambda(t)x + \eta(t))\frac{\partial P}{\partial} + \frac{1}{2}(\gamma(t)x + \delta(t))\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} = x.P$$

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \eta(t)B + \frac{1}{2}\delta(t)B^2 + x\left(\frac{\partial B}{\partial t} + \lambda(t)B + \frac{1}{2}\delta(t)B^2 - 1\right) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \eta(t)B + \frac{1}{2}\delta(t)B^2 = 0 \\ \frac{\partial B}{\partial t} + \lambda(t)B + \frac{1}{2}\gamma(t)B^2 - 1 = 0 \\ A(T,T) = B(T,T) = 0 \end{cases}$$

Exercice

On considère le modèle de taux spot

$$dr_t = a\,dt + \sigma\,dW_t^Q$$

avec $P(t,T) = e^{A(t,T) + B(t,T)r_t}$

Déterminer :

① La dynamique de ZC $P(t,T)$

② La dynamique du taux forward instantané $f(t,T)$

1) $\partial P_T(t,r_t) = \frac{\partial P}{\partial t}(t,r_t)\,dt + \frac{\partial P}{\partial x}(t,r_t)\,\partial r_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}(t,r_t)\,\partial \langle r \rangle_t$

On écrit

A pour A(t,T)

$$= (A' + B' r_t) P_T(t,T)\,dt$$
$$+ B P_T(t,r_t)(a\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}})$$
$$+ \frac{\sigma^2}{2} B^2 P_T(t,r_t)\,dt$$

Abrégés précéd

$$= \left(A' + B' r_t + aB + \frac{\sigma^2}{2}B^2\right) P_T(t,r_t)\,dt + \sigma B P_T(t,r_t)\,dW_t^{\mathbb{Q}}$$

$$\frac{dP_T(t,r_t)}{P_T(t,r_t)} = \left(a(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2 + r_t - a(T-t) + \cancel{\frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2}\right)dt$$
$$+ \sigma B\,dW_t^{\mathbb{Q}}$$

$$= r_t\,dt + \sigma B(t,T)\,dW_t^{\mathbb{Q}}$$

2)

$\cdot\ f(t,T) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T} = -\frac{\partial (A + B) r_t}{\partial T}$

$$= a(T-t) - \frac{\sigma^2}{2}(T-t)^2 + r_t = g(t,r_t)$$

On applique Ito

$$df(t,T) = \frac{\partial g}{\partial t}\,dt + \frac{\partial g}{\partial x}\,\partial r_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\,\partial\langle r_t\rangle$$

$$= (-a + \sigma^2(T-t))\,dt + dr_t$$

$$\boxed{df(t,T) = \sigma^2(T-t)\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}}}$$

NB : Sous la probabilité risque neutre on a

$$df(t,T) = \sigma^2(T-t) + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Donc la dynamique du taux forward pour ce cas est caractérisé par une relation entre le drif et la volatilité.

II – Modélisation des taux forward instantanné (HJM)

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathbb{P}, \mathbb{F})$ dans lequel le taux forward instantanné suit la dynamique suivante

$$df(t,T) = \alpha_f(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW_t$$

avec $\alpha_f(t,T)$ et $\sigma(t,T)$ sont deux processus $\mathbb{F}$-adapté

Proposition

La dynamique des zéro-coupons sous la probabilité $\mathbb{P}$.

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = \left(r_t - \alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t,T)\right)dt - \sigma^*(t,T)\,dW_t$$

$$\alpha^*(t,T) = \int_t^T \alpha_f(t,u)\,du \quad \text{et} \quad \sigma^*(t,T) = \int_t^T \sigma(t,u)\,du$$

et on a

$$r_t = f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \alpha_f(u,t)\,du + \int_0^t \sigma(u,t)\,dW_u$$

<u>Preuve</u>

On considère la définition du prix 2.c

$$P(t,T) = e^{-\int_t^T f(t,u)\,du}$$

Notons $I_t = \int_t^T f(t,u)\,du$

$$P(t,T) = g(I_t) = e^{-I_t}$$

$$dP(t,T) = \frac{\partial g}{\partial x}\,dI_t + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}\,d\langle I_t\rangle$$

$$= -P(t,T)\,dI_t + P(t,T)\,d\langle I\rangle$$

L'objectif est de déterminer la dynamique de $(I_t)_{t\geq 0}$

Rappel : (Formule de Leibniz)

On considère la fonction suivante

$$G(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} g(x,t)\,dt$$

:

$$G'(t) = g(b(t),t)\,b'(t) - g(a(t),t)\,a'(t) + \int_{a(t)}^{b(t)} g'(x,t)\,dx$$

En appliquant cette règle / formule en $I_t = \int_t^T f(t,u)\,du$

$$dI_t = f(t,T).0 - f(t,t).1 + \int_t^T d\,f(t,u)\,du$$

$$= -r_t\,dt + \left(\int_t^T d\,f(t,u)\,du\right)dt + \left(\int_t^T \sigma(t,u)\,du\right)dW_t$$

$$= -r_t\,dt + \alpha^*(t,T)\,dt + \sigma^*(t,T)\,dW_t$$

À partir de cette dynamique

$$d\langle I, I\rangle_t = (\sigma^*(t,T))^2\,dt$$

Donc

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = -dI_t + \frac{1}{2}\,d\langle I, I\rangle_t$$

$$= (r_t - \alpha^*(t,T))\,dt - \sigma^*(t,T)\,dW_t + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2\,dt$$

$$= (r_t - \alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2\,dt - \sigma^*(t,T)\,dW_t$$

2/ Condition d'AOA

On sait que le marché est sans arbitrage s'il existe une mesure de probabilité Q^{λ} (un processus $\mathbb{F}$-adapté $\lambda = (\lambda_t)_{t \geq 0}$ tel que les prix actualisés au taux sans risque sont des martingales.

En d'autres termes. On cherche Q^{λ} tel que sous cette probabilité

$$P(t,T) \cdot e^{-\int_0^t r_s ds}$$

soit une martingale.

Donc, on cherche la dynamique de

$$Z(t,T) = P(t,T) \cdot e^{-\int_0^t r_s ds}$$

$$= e^{-\int_t^T f(t,u)\,du - \int_0^t r_s ds}$$

$$= e^{-(J_t + I_t)}$$

1. Donner la dynamique de I et J.

2. En déduire la dynamique de Z

① $$\begin{cases} dI_t = (-r_t + \alpha^*(t,T))dt + \sigma^*(t,T)\, dW_t \\ \\ dJ_t = r_t\, dt \end{cases}$$

$$\Rightarrow d(I_t + J_t) = \alpha^*(t,T)\, dt + \sigma^*(t,T) dW_t$$

② $Z(t,T) = e^{-X_t}$ où $X_t = I_t + J_t$

$$dZ(t,T) = -Z(t,T)\, dX_t + \frac{1}{2} Z(t,T)\, d\langle X, X\rangle_t$$

$$\Rightarrow \frac{dZ(t,T)}{Z(t,T)} = -\alpha^*(t,T)dt - \sigma^*(t,T)dW_t + \frac{1}{2}(\sigma^*(t,T))^2\, dt$$

$$= \left(-\alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t,T)^2\right)dt - \sigma^*(t,T)\, dW_t$$

On considère un changement de mesure de probabilité Q^λ défini par la densité de Radon-Nykodim de la façon suivante.

$$\left.\frac{dQ^\lambda}{dP}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left\{ \int_0^t \lambda_u\, dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_u^2\, du \right\}$$

avec $\lambda = (\lambda_t)_{t\geq 0}$ un processus adapté à $\mathbb{F}$

Sous Q^λ : $W_t^{Q} = W_t - \int_0^t \lambda_u du$ est un MVT brownien et la dynamique de $Z(t,T)$ sous $\mathbb{Q}^{\lambda}$

$$\frac{dZ(t,T)}{Z(t,T)} = \left\{ -\alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t,T)^2 - \lambda_t \sigma^*(t,T) \right\} dt$$

$$- \sigma^*(t,T)\, dW_t^{\mathbb{Q}}$$

Pour que Z soit une martingale on choisit $(\lambda_t)_{t \geq 0}$ tel que le drift de Z s'annule.

$$\Rightarrow \forall t,T \quad -\alpha^*(t,T) + \frac{1}{2}\sigma^*(t,T)^2 - \lambda_t \sigma^*(t,T) = 0$$

et donc on aura :

$$\frac{dZ(t,T)}{Z(t,T)} = \sigma(t,T)\, dW_t^{\mathbb{Q}} \text{ , sous la proba } \mathbb{Q}$$

3 / AOA et modèle de taux forward (Heath-Jarrow-Merton)

En AOA, la mesure $\mathbb{Q}^{\lambda}$ doit être la même pour tous les actifs du marché.

En d'autres termes, le processus λ ne dépend pas de T.

ie $\lambda(t,T) = \lambda(t,T')$, $\forall\, T \neq T'$

En d'autres terme sur ① en dérivant par rapport à T.

$$\lambda_t\, \sigma(t,T) - \sigma^*(t,T)\,\sigma(t,T) + \alpha(t,T) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda_t = \sigma^*(t,T) - \frac{\alpha_f(t,T)}{\sigma(t,T)} \quad , \forall T \qquad \leftarrow (**)$$

car $\begin{cases} \dfrac{\partial \sigma^*(t,T)}{\partial T} = \sigma(t,T) \\[2ex] \dfrac{\partial \alpha^*(t,T)}{\partial T} = \alpha_f(t,T) \end{cases}$

Proposition

Sous la mesure Q^λ (risque neutre)

$$df(t,T) = \alpha_f(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW_t$$

est la mesure risque neutre Q^{-1} sous laquelle

$$dW_t^Q = dW_t - \lambda_t\, dt$$

Donc la dynamique des taux forward sous Q^{-1}

$$df(t,T) = (\alpha_f(t,T) + \lambda_t\, \sigma(t,T))\,dt + \sigma(t,T)\, d$$

$$\overset{(**)}{=} \left(\alpha_f(t,T) + \sigma(t,T)\left[\sigma^*(t,T) - \frac{\alpha_f(t,T)}{\sigma(t,T)}\right]\right)dt + \sigma(t,T)\,dW_t^Q$$

$$= \sigma^*(t,T)\,\sigma(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW_t^Q$$

NB : Pour construire un modèle de taux forward sous la
① mesure risque, on a une contrainte sur le choix du drift

Sous $\mathbb{Q}$:

$$df(t,T) = \mu(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW_t^{\mathbb{Q}}$$

avec $\mu(t,T) = \int_t^T \sigma(t,u)\,du \;\sigma(t,T)$

Cette AOA sur le taux forward s'écrit

$$\boxed{\int_t^T \mu(t,u)\,du = \frac{1}{2}\left(\int_t^T \sigma(t,u)\,du\right)^2} \quad (*)$$

② En pratique, autant de modèle que de choix de fonction $(t,T) \mapsto \sigma(t,T)$ par exemple

- Modèle de Ho-LEE $\sigma(t,T) = \sigma = cte$
- Modèle de HULL & WHITE $\sigma(t,T) = \sigma e^{-a(T-t)}$

avec σ et a sont deux constantes positives

càd la volatilité qui décroit en fonction de la maturité

Exercice On considère le modèle de Ho-LEE sous la mesure risque neutre

① Ecrire la dynamique du taux $f(t,T)$

② En déduire la dynamique des taux courts r_t

1) $df(t,T) = \alpha_f(t,T)\,dt + \sigma\, dW_t$

Sous $\mathbb{Q}$ $dW_t^{\mathbb{Q}} = dW_t - \lambda_t dt$

donc $df(t,T) = \alpha_f(t,T)dt + \sigma(dW_t^{\mathbb{Q}} + \lambda_t\, dt)$

$$= \left[\alpha_f(t,T) + \sigma\left[\sigma^* - \frac{\alpha_f(t,T)}{\sigma}\right]\right]dt + \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}}$$

$$= \sigma\sigma^* dt + \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}} \quad \text{or} \quad \sigma^* = \int_t^T \sigma\, dt = \sigma(T-t)$$

Donc $\boxed{df(t,T) = \sigma^2(T-t)dt + \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}}}$

2) $\int_0^t df(s,T) = f(t,T) - f(0,T)$

$$= \left[\sigma^2 T s - \frac{\sigma^2}{2}s^2\right]_0^t + \int_0^t \sigma\, dW_s^{\mathbb{Q}}$$

$$= \sigma^2 Tt - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \sigma[W_t^{\mathbb{Q}} - \underbrace{W_0^{\mathbb{Q}}}_{0}]$$

On prend $t = t$

$f(t,t) = r_t = (\sigma t)^2 - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + \sigma W_t^{\mathbb{Q}} f(0,t) - f(0,t) + \frac{\sigma^2 t^2}{2} + \sigma W_t^{\mathbb{Q}}$

$r_t = g(t, W_t)$

$$dr_t = \left(\frac{\partial f}{\partial T}(0,t) + \sigma^2 t\right)dt + \sigma dW_t^Q + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2 g}{\partial W^2}}_{0} d\langle W\rangle_t$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial T}(0,t) + \sigma^2 t\right)dt + \sigma dW_t^Q$$