Chapitre 1

Modèles d'évaluation par arbres

Le modèle binomial est très pratique pour les calculs, et la plus grande partie des résultats se généralise aux modèles en temps continu, comme nous le verrons dans l'étude du modèle de Black et Scholes.

I Exemple introductif

Supposons que nous cherchions à évaluer un call européen d'échéance 3 mois, et de prix d'exercice 21€ . Le cours de l'action est actuellement de 20€ . Pour simplifier, supposons que, dans 3 mois, le cours de l'action ne peut prendre que 2 valeurs : 22€ et 18€ . L'option n'a alors que 2 valeurs possibles à la fin des 3 mois : 1€ si l'action atteint 22€ , et 0€ si il tombe à 18€ .

Un raisonnement simple peut alors être utilisé pour évaluer l'option. La seule hypothèse nécessaire est l'absence d'opportunité d'arbitrage. Il suffit de construire un portefeuille comprenant l'action et l'option, de manière q u'il n'y ait aucune incertitude sur la valeur de celui-ci à la fin des trois mois. Si le portefeuille est sans risque, sa rentabilité est forcément égale au taux sans risque (ie la valeur initiale est forcément égale à la valeur actualisée de la valeur certaine du portefeuille ainsi constitué). On peut donc en déduire le coût de constitution du portefeuille, et donc par conséquent, le prix de l'option.

Graphique 3.1 : Variations du cours de l'action

$$\begin{tikzcd} & 22\text{€} \\ 20\text{€} \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\ & 18\text{€} \end{tikzcd}$$

Variations de la valeur de l'option

$$\begin{tikzcd} & 1\text{€} \\ C_0 \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\ & 0\text{€} \end{tikzcd}$$

Puisqu'il y a 2 titres (l'action et l'option) et seulement 2 états possibles de la nature, on a toujours la possibilité de constituer un portefeuille sans risque (le marché est complet, on peut répliquer l'actif sans risque).

Soit un portefeuille constitué de Δ actions achetées et d'un call vendu. La valeur de Δ est choisie de façon à ce que le portefeuille choisi soit sans risque. Si le cours progresse de 20€ à 22€ , la valeur des actions est alors 22€ et le call vaut 1€ . La valeur du portefeuille est donc $22\Delta - 1$. Si l'action baisse de 20€ à 18€ , la valeur du portefeuille est 18Δ. Le portefeuille ainsi constitué est sans risque si

$$22\Delta - 1 = 18\Delta$$

Soit

$$\Delta = 0,25$$

Un portefeuille sans risque est donc constitué de

- achat de $0,25$ actions
- vente d'une option

Si le cours atteint 22€ , la valeur du portefeuille est

$$22 \times 0,25 - 1 = 4,5€$$

Si le cours de l'action tombe à 18€ , la valeur du portefeuille est :

$$18 \times 0,25 = 0,45€$$

Que la valeur de l'action augmente ou diminue, celle du portefeuille est toujours égale à 4,5€ à l'échéance de l'option.
En l'absence d'arbitrage, un tel portefeuille a donc le même payoff que une somme investie dans l'actif sans risque. Il doit donc avoir la même valeur initiale (cf chapitre 1). Il s'en suit que la valeur du portefeuille aujourd'hui est la valeur actualisée de 4,5€ , soit

$$4,5e^{-0,12\times 3/12} = 4,367$$

La valeur de l'action aujourd'hui est connue et égale à 20€ . Si f désigne la valeur de l'option à la date 0, on a donc :

$$20 \times 0,25 - f = 5 - f = 4,367€$$

D'où

$$f = 0,633€$$

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur de l'option doit être $0,633$€ . Si elle était supérieurs, le portefeuille coûterait moins de 4,367€ à sa création et rapporterait donc + que le taux sans risque, d'où opportunité d'arbitrage, et si c'est l'inverse, une position courte sur le portefeuille équivaudrait à un emprunt à un taux inférieur au taux sans risque.

II Le modèle binomial à une période

1 le modèle

Nous présentons ici une première approche des arbres binomiaux, et leur relation avec le principe connu sous le nom d'évaluation risque-neutre. Ce modèle est aussi appelé modèle de Cox-Ross-Rubinstein (article pionnier datant de 1979).
Le raisonnement de l'exemple ci-dessus peut être généralisé en considérant une action de prix S_0 et une action sur cette action dont la valeur est f.
Considérons un marche à deux dates : $t = 0$ et $t = 1$, et deux actifs.

– Un **actif sans risque** qui vaut 1 en $t = 0$ et vaut $R = (1 + r)$ en $t = 1$, qui représente l'argent placé à la banque au taux r (dans une obligation), il est sans risque dans le sens où l'on connaît en $t = 0$ la valeur qu'il aura en $t = 1$. (notons que si le taux donné est un taux continu, il suffit d'utiliser la formule des taux continus pour avoir $R = e^{rT}$ où T est la durée de la période considérée.
– Et un **actif risqué** S, qui vaut S_0 en $t = 0$, et à l'instant 1, il peut avoir pris 2 valeurs différentes : soit il est monté et il vaut $S_u = u.S_0$, soit il est descendu et il vaut alors $S_d = d.S_0$ avec $d < u$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & u.S_0 \\ S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & d.S_0 \end{tikzcd}$$

La modélisation probabiliste du marché est la donnée de 3 choses : $\Omega, \mathcal{F}$ et $\mathbb{P}$.

Ω est l'ensemble des états du monde : 2 états possibles selon la valeur de l'actif risqué en $t = 1$, état "haut" ω_u ou "bas" ω_d. $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$.

$\mathbb{P}$ est la probabilité historique sur Ω. $\mathbb{P}(\omega_u) = p$ et $\mathbb{P}(\omega_d) = 1 - p$. Le prix a une probabilité réelle de monter et $1 - p$ de descendre. Attention : $p \in]0, 1[$ car les 2 états du monde peuvent arriver.

$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\}$ est un couple de 2 tribus représentant l'information globale disponible sur les marchés aux instants $t = 0$ et $t = 1$.
En $t = 0$, on ne dispose d'aucune information :

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

En $t = 1$, on sait si l'actif est monté ou descendu :

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_u\}, \{\omega_d\}\}.$$

Cette tribu représente l'ensemble des parties de Ω dont je puisse dire à l'instant $t = 1$ si elles sont réalisées ou non. Evidemment, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$, en effet plus on avance dans le temps plus on acquiert de l'information.

Remarque : Une va est $\mathcal{F}_1$ mesurable ssi elle est connue avec l'information donnée par F_1, ie déterminée à l'instant 1. $\mathcal{F}_1$ est la tribu engendrée par S_1.

Définition 1.1 *Un produit dérivé (ou actif contingent) est une va $\mathcal{F}_1$-mesurable.*

La valeur d'un produit dérivé dépend de l'état du monde réalisé à la date $t = 1$, et de manière équivalente, tout produit dérivé s'écrit comme fonction mesurable ϕ de S_1.

2 Evaluation du prix d'un produit dérivé

Notre problème est d'évaluer le prix à la date $t = 0$ d'un produit dérivé. On va donc essayer de créer un portefeuille de duplication de notre produit dérivé, ie une stratégie d'investissement autofinançante dans l'actif risqué et dans l'actif sans risque. L'hypothèse d'AOA nous indiquera alors que ces 2 stratégies qui ont mêmes valeurs en $t = 1$ ont même valeur en $t = 0$, ce qui nous donnera la valeur en 0 de notre produit dérivé.

Définition 1.2 *Ici, une stratégie de portefeuille simple consiste en une stratégie (x, Δ) où x désigne le capital initial, et Δ la quantité d'actif risqué.*

Le portefeuille ne subit aucune rentrée ou sortie d'argent entre 0 et 1 (il n'y a qu'une période). La stratégie de portefeuille simple consiste en l'achat à la date 0 de Δ actifs risqués, et de $x - \Delta S_0$ actifs sans risque. La valeur du portefeuille à la date 0 est donc $X_0 = x$. Sa valeur à la date 1 est

$$X_1 = \Delta S_1 + (x - \Delta S_0)R = xR + \Delta(S_1 - S_0 R).$$

On l'appelle stratégie de portefeuille simple car elle ne comporte que des actifs de base du marché : l'actif sans risque et l'actif risqué.

Théorème 1.1 *Tout produit dérivé C est duplicable par une stratégie de portefeuille simple (x, Δ). Le marché est complet.*

Démonstration : Considérons un produit dérivé C. En $t = 1$, il prend la valeur C_1^u dans l'état "up" et C_1^d dans l'état "down". On cherche un couple (x, Δ) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C_1^u & = & \Delta S_1^u + (x - \Delta S_0)R = xR + (u - R)\Delta S_0 \\ C_1^d & = & \Delta S_1^d + (x - \Delta S_0)R = xR + (d - R)\Delta S_0 \end{array} \right.$$

C'est un système à 2 équations et 2 inconnues dont la solution est donnée par :

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u-d)S_0} \left(= \frac{\phi(S_1^u) - \phi(S_1^d)}{S_1^u - S_1^d} \right) \text{ et } x = \frac{1}{R} \left(\frac{R-d}{u-d} C_1^u + \frac{u-R}{u-d} C_1^d \right)$$

Donc, sous l'hypothèse d'AOA, la définition économique du prix d'un produit dérivé en $t = 0$ (valeur initiale d'un portefeuille autofinançant répliquant) est donné par :

Corollaire 1.1 *Le prix du produit dérivé C donnant des flux C_1^u et C_1^d dans les états "up" et "down" est donc :*

$$C_0 = \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d}C_1^u + \frac{u-R}{u-d}C_1^d\right)$$

On peut montrer ce résultat également en reproduisant le raisonnement fait dans l'exemple introductif. Essayons de construire un portefeuille sans risque en ayant une position longue sur Δ actions et 1 option. En cas de hausse du cours de l'action, la valeur du portefeuille à l'échéance est :

$$S_0 u\Delta - C_1^u$$

En cas de baisse du cours de l'action, la valeur du portefeuille à l'échéance est :

$$S_0 d\Delta - C_1^d$$

Si le portefeuille est sans risque,

$$S_0 u\Delta - C_1^u = S_0 d\Delta - C_1^d$$

D'où

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{uS_0 - dS_0}$$

l'hypothèse d'AOA nous assure que la rémunération d'un tel portefeuille sans risque doit être le taux sans risque. Donc la valeur actuelle du portefeuille doit être

$$\frac{1}{R}\left(S_0 u\Delta - C_1^u\right)$$

Et son coût de constitution est

$$S_0\Delta - C_0$$

où C_0 est le prix de l'option à l'instant initial. D'où l'égalité entre le coût de constitution et la valeur actuelle du portefeuille :

$$S_0\Delta - C_0 = \frac{1}{R}\left(S_0 u\Delta - C_1^u\right)$$

D'où

$$C_0 = S_0\Delta\left(1 - \frac{u}{R}\right) + \frac{C_1^u}{R}$$

Et en remplaçant Δ par son expression :

$$C_0 = \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d}C_1^u + \frac{u-R}{u-d}C_1^d\right)$$

On retrouve bien la formule recherchée.

Remarque : On remarque que l'espérance de rentabilité de l'action n'intervient pas dans l'évaluation. En effet la formule précédente ne fait pas intervenir les probabilités de variation du cours de l'action à la hausse ou à la baisse. Cela semble surprenant et contre-intuitif. On penserait plutôt intuitivement que plus la probabilité de hausse de l'action est élevée, plus la valeur du call augmente, et la valeur du put diminue. En réalité, cette probabilité de hausse ou de baisse est une information "déjà contenue" ou incorporée dans le cours initial de l'action, et dans le taux sans risque (si on fixe les valeurs terminales et que l'on change les probabilités de hausse ou de baisse, la valeur initiale de l'action augmente, ce qui change u et d et donc le prix de l'option). De plus il ne faut pas oublier que l'on évalue l'option en constituant un portefeuille formé d'actions, donc la probabilité de hausse ou de baisse intervient dans l'évolution du portefeuille de couverture.

3 probabilité risque neutre

Le prix du produit dérivé s'écrit comme une somme pondérée de ses valeurs futures. Etudions plus en détail comment s'exprime la valeur en 0 d'une stratégie de portefeuille simple en fonction de ses valeurs finales.
Au vu de la formule d'évaluation, il est naturel de faire apparaître la variable

$$q = \frac{R-d}{u-d}$$

L'expression

$$qC_1^u + (1-q)C_1^d$$

est alors le payoff espéré de l'option. Grâce à cette interprétation de q, l'équation d'évaluation établit que la valeur de l'option, à la date d'aujourd'hui, est l'espérance, sous cette probabilité, de sa valeur future, actualisée au taux sans risque.
C'est cette probabilité (qui ne dépend pas de C), sous laquelle le prix actuel de C est l'espérance de sa valeur future actualisée, qu'on appelle **probabilité neutre au risque**.

Etudions plus pécisément le cas présent.

Proposition 1.1 *L'hypothèse d'AOA implique la relation $d < R < u$.*

Démonstration : Supposons $d \geq R$. Une stratégie d'arbitrage est alors donnée par l'achat d'un actif risqué en $t = 0$ ($\Delta = 1$) et la vente de la quantité d'actif sans risque correspondant (S_0) pour avoir une valeur de portefeuille nulle à $t = 0$, car la valeur du portefeuille en $t = 1$ est

- dans l'état "up", $X_1 = S_0(u - R) > 0$
- dans l'état "down", $X_1 = S_0(d - R) \geq 0$.

Supposons $u \leq R$, alors une stratégie d'arbitrage est donnée par la vente d'un actif risqué en $t = 0$, et l'achat de la quantité d'actif sans risque correspondante (S_0) pour avoir une valeur de portefeuille nulle à $t = 0$. En effet la valeur du portefeuille en $t = 1$ est alors

- dans l'état "up", $X_1 = S_0(R - u) \geq 0$
- dans l'état "down", $X_1 = S_0(R - d) > 0$.

Remarque : Pour créer un arbitrage, on a de nouveau acheté celui qui rapporte le plus et vendu celui qui rapporte le moins. Finalement, si l'une des inégalités $d < R < u$ n'était pas vérifiée, un des actifs rapporterait toujours plus que l'autre, et l'hypothèse d'AOA ne serait plus vérifiée.

Définition 1.3 *On appelle* **probabilité neutre au risque** *toute probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ qui rende martingale toute stratégie autofinançante simple actualisée, ie telle que :*

$$\tilde{X}_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tilde{X}_1|\mathcal{F}_0\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tilde{X}_1\right] \text{ ou de manière équivalente } X_0 = \frac{1}{R}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_1\right].$$

Remarque : Deux probabilités sont dites équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes ensembles négligeables, ie qu'elles chargent les mêmes états du monde (ie qu'elles ont une densité de Radon-Nikodym l'une par rapport à l'autre). Ici, cela signifie simplement que $\mathbb{Q}(\omega_d) > 0$ et $\mathbb{Q}(\omega_u) > 0$.

Remarque : Ici, sur une seule période, être une martingale signifie simplement que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_1) = X_0$: l'espérance des valeurs futures est égale à la valeur initiale, autrement dit le portefeuille est équilibré.

Proposition 1.2 *Si $d < R < u$, alors il existe une probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$, qui est donnée par*

$$q = \mathbb{Q}(\omega_u) = \frac{R-d}{u-d} \tag{1.1}$$

Démonstration : Prenons un portefeuille autofinançant de valeur initiale x et comportant Δ actifs risqués, et notons pour simplifier X_1^u et X_1^d ses valeurs en $t = 1$ dans les états "up" et "down". Alors, comme on l'a écrit précédemment, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} X_1^u = \Delta S_1^u + (x - \Delta S_0)R = xR + (u-R)\Delta S_0 \\ X_1^d = \Delta S_1^d + (x - \Delta S_0)R = xR + (d-R)\Delta S_0 \end{cases}$$

Nous obtenons le même système que précédemment et on trouve :

$$x = \frac{1}{R}\left(\frac{u-R}{u-d}X_1^d + \frac{R-d}{u-d}X_1^u\right)$$

On introduit donc la probabilité $\mathbb{Q}$ définie sur Ω par :

$$\mathbb{Q}(\omega_u) = \frac{u-R}{u-d} = q \text{ et } \mathbb{Q}(\omega_d) = \frac{R-d}{u-d} = 1-q$$

Comme $d < R < u$, $q \in]0,1[$ et $\mathbb{Q}$ est bien une probabilité et elle est équivalente à $\mathbb{P}$. Notre équation se réécrit alors :

$$X_0 = x = \frac{1}{R}\left(\mathbb{Q}(\omega_d)X_1^d + \mathbb{Q}(\omega_u)X_1^u\right) = \frac{1}{R}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_1]$$

Remarque : Le terme "risque neutre" provient de la théorie économique : si les intervenants n'ont pas d'aversion au risque, ils vont s'accorder pour évaluer la valeur d'un portefeuille comme l'espérance actualisée des flux qu'il génère. L'introduction de cette probabilité permet de faire comme si les agents étaient neutres au risque... mais attention ce n'es pas le cas !

Proposition 1.3 *S'il existe une probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$, alors il y a AOA.*

Démonstration : Soit $\Delta \in \mathbb{R}$ tel que le portefeuille simple de valeur initiale nulle associé vérifie $X_1 \geq 0$. Comme $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque neutre, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_1] = R.0 = 0,$$

et X_1 est une variable aléatoire positive d'espérance nulle, donc est nulle $\mathbb{Q}$-p.s. et comme $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes (elles ont les mêmes négligeables), $\mathbb{P}(X_1 > 0) = 0$.

Nous avons finalement montré que

$$\text{AOA} \Longrightarrow d < R < u \Longrightarrow \text{il existe une proba neutre au risque} \Longrightarrow \text{AOA},$$

et donc toutes ces implications sont des équivalences :

Théorème 1.2 *AOA $\Leftrightarrow d < R < u \Leftrightarrow$ il existe une proba neutre au risque*

4 Evaluation et couverture d'un produit dérivé

Comme tout produit dérivé est duplicable par une stratégie de portefeuille simple et que la valeur actualisée des stratégies de portefeuille simple sont des martingales sous la probabilité neutre au risque, en AOA, le prix d'un produit dérivé est donné par :

$$C_0 = \frac{1}{R}\left(qC_1^u + (1-q)C_1^d\right) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C_1) \tag{1.2}$$

Remarque : La probabilité risque neutre et donc le prix d'une option est indépendant de la tendance réelle p du sous-jacent.

Remarque : Comme tout produit dérivé est duplicable, la valeur réactualisée de tout produit dérivé est une martingale sous la probabilité risque neutre.

Remarque : On a juste besoin de connaître r, u, et d pour trouver le prix de l'actif dérivé, mais encore faut-il estimer les paramètres. Connaître u et d revient à connaître ce que l'on nommera par la suite la volatilité de l'actif.

Proposition 1.4 *Le portefeuille de couverture de l'option est donné par une valeur initiale égale à la valeur initiale de l'option, et un investissement dans Δ actifs risqués, où la quantité d'actifs risqués est donné par :*

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u-d)S_0} = \frac{\phi(S_1^u) - \phi(S_1^d)}{S_1^u - S_1^d}$$

cette quantité s'apparente à la variation du prix de l'option en réponse à la variation du sous-jacent

Proposition 1.5 *Comme le marché est complet (tout actif est réplicable par une stratégie de portefeuille simple), il y a* **unicité de la probabilité risque neutre***.*

Démonstration : En effet, prenons deux probabilités risque neutre $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$. Pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_1$, $\mathbb{1}_{\mathcal{B}}$ est un produit dérivé car il est $\mathcal{F}_1$-mesurable, donc il est duplicable par un portefeuille autofinançant (x, Δ) et l'on a

$$\mathbb{Q}_1(\mathcal{B}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[\mathbb{1}_{\mathcal{B}}] = R.x = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[\mathbb{1}_{\mathcal{B}}] = \mathbb{Q}_2(\mathcal{B})$$

Donc $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$ sont indistinguables. cqfd.

5 Exercice : Pricing d'un call et d'un put à la monnaie

Prenons $S_0 = 100$, $r = 0,05$,$d = 0,9$ et $u = 1,1$.

1. *Quel est le prix et la stratégie de couverture d'un call à la monnaie, ie $K = S_0 = 100$?*
   On construit la probabilité risque neutre
   $$q = \frac{1+r-d}{u-d} = 0,75$$
   On en déduit le prix et la stratégie de couverture :
   $$C_0 = \frac{0,75 \times 10 + 0,25 \times 0}{1,05} \cong 7,14 \text{ et } \Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u-d)S_0} = \frac{10-0}{20} = 0,5$$
   $\Longrightarrow$ une stratégie de couverture est donc l'achat de 0,5 actif risqué et le placement de $7,14 - 100 \times 0,5$ dans l'actif sans risque.
2. *Qu'en est-il d'un Put à la monnaie ?*
   Connaissant la proba neutre au risque, on calcule le prix et la stratégie de couverture :
   $$P_0 = \frac{0,75 \times 0 + 0,25 \times 10}{1,05} \cong 2,38 \text{ et } \Delta = \frac{P_1^u - P_1^d}{(u-d)S_0} = \frac{0-10}{20} = -0,5$$
   $\Longrightarrow$ une stratégie de couverture est donc la vente de 0,5 actif risqué et le placement de $100 \times 0,5 - 2,38$ dans l'actif sans risque.
3. *Vérifie-t-on la relation de parité call-put ?*
   $$C_0 - P_0 = \frac{7,5}{1,05} - \frac{2,5}{1,05} = \frac{5}{1,05} = 100 - \frac{100}{1,05} = 100 - \frac{100}{R} = S_0 - KB(0,T)$$

III Univers risque neutre ou univers réel ?

Reprenons notre exemple introductif. Nous allons montrer que l'évaluation risque-neutre construite dans la partie précédente apporte le même résultat que l'évaluation établie en construisant un portefeuille sans risque et en raisonnant par arbitrage, comme dans l'exemple choisi.
Dans l'exemple, le cours de l'action est initialement à 20€ , il monte à 22€ ou chute à 18€ après 3 mois. L'option considérée est un call européen à 3 mois, de prix d'exercice 21€ . Le taux d'intérêt sans risque est de 12% par an.

Notons q la probabilité de hausse du cours de l'action dans l'univers risque-neutre. Elle est calculée à partir de l'équation 1.1 :

$$q = \frac{R-d}{u-d}$$

où ici $R = e^{0,12\times 3/12}$. Ce qui nous donne $q = 0,6523$. (il suffit d'utiliser $d = 18/20$ et $u = 22/20$).
Pour calculer la probabilité risque-neutre, on peut aussi résoudre tout simplement l'équation correspondante au raisonnement suivant : l'espérance de rentabilité de l'action dans l'univers risque-neutre est égale au taux sans risque, soit 12%. La probabilité q doit donc satisfaire :

$$22q + 18(1-q) = 20e^{0,12\times 3/12}$$

Et on retrouve $q = 0,6523$.

A l'issu des 3 mois, l'option d'achat a une probabilité $q = 0,6523$ de valoir 1€ et une probabilité $1-q = 0,3477$ de valoir 0. Ainsi, sa valeur espérée à l'échéance est donc :

$$0,6523 \times 1 + 0,3477 \times 0 = 0,6523$$

Dans l'univers risque-neutre, cette valeur espérée doit être actualisée au taux sans risque, donc la valeur aujourd'hui est :

$$0,6523e^{0,12\times 3/12} = 0,633\text{€}$$

On retrouve la valeur obtenue précédemment. Le raisonnement fondé sur la construction d'un portefeuille sans risque (portefeuille répliquant l'actif sans risque), qui s'apparente à un raisonnement d'arbitrage, et l'évaluation risque-neutre donnent donc la même valeur de l'option.

Soulignons que q est la probabilité de hausse dans l'univers risque-neutre. Généralement, elle n'est pas égale à la probabilité p de hausse dans l'univers réel.
Dans notre exemple, $q = 0,6523$. Lorsque la probabilité de hausse est de 0,6523, l'espérance de rentabilité de l'action est égale au taux sans risque, soit 12%. Supposons, que dans l'univers réel, l'espérance de rentabilité de l'action soit de 16%. On a alors :

$$22p = 18(1-p) = 20e^{0,16\times 3/12}$$

Donc $p = 0,7041$.

L'espérance de payoff de l'option dans l'univers réel est donc égal à $p+(1-p)\times 0 = 0,7041$. Malheureusement, on ne sait pas quel taux d'actualisation appliquer au payoff de l'option dans l'univers réel. Une position sur une option d'achat est plus risquée qu'une position dans une action. Par conséquent, le taux d'actualisation à appliquer au payoff d'un call est bien supérieur à 16%. Sans connaître la valeur de l'option, nous ne pouvons pas savoir de combien ce taux doit être supérieur à 16%.

L'évaluation risque-neutre résout le problème : *dans l'univers risque-neutre, l'espérance de rentabilité de tous les actifs, et donc le taux d'actualisation à utiliser pour tous les payoffs espérés, est le t aux sans risque.*

Remarque : : Puisqu'ici la valeur de l'option est 0,633, on peut en déduire le taux d'actualisation du payoff de l'option, qui vaut $42,58\%$, puisque $0,633 = 0,7041e^{0,4258\times 3/12}$.

IV Relation liant u, d et la volatilité

En pratique, lorsqu'on construit un arbre binomial, pour représenter les variations du cours d'une action, les paramètres u et d sont définis par la volatilité de l'action. En effet, supposons que l'espérance de rentabilité de l'action (dans l'univers réel, où les investisseurs présentent de l'aversion au risque) soit égale à μ, et sa volatilité σ. La probabilité de hausse dans l'univers réel est toujours notée p.
On reprend le graphique d'évolution de l'actif risqué développé dans la première partie sur le modèle binomial mono-périodique, sur une période de durée Δt, la valeur de l'action peut être multipliée par u ou par d :

$$\begin{tikzcd}
 & u.S_0 \\
S_0 \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\
 & d.S_0
\end{tikzcd}$$

L'espérance de la valeur de l'action à la fin de la période est égale à $S_0e^{\mu\Delta t}$. A partir de l'arbre, cette espérance s'écrit

$$pS_0u + (1-p)S_0d$$

La correspondance entre la rentabilité espérée de l'action et les paramètres u et d s'établit par l'égalité

$$pS_0u + (1-p)S_0d = S_0e^{\mu\Delta t}$$

Soit :

$$p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u - d}$$

Comme nous l'expliquerons plus tard, la volatilité du cours de l'action est telle que $\sigma\sqrt{\Delta t}$ représente l'écart-type relatif de la rentabilité de l'action sur une courte période de durée Δt. De manière équivalente, la variance de la rentabilité est égale à $\sigma^2 S_0^2\Delta t$. Sur l'arbre, cette variance est égale à

$$Var(S) = E_{\mathbb{P}}(S^2) - E_{\mathbb{P}}(S)^2 = S_0^2(pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2)$$

Pour ajuster la volatilité, l'équation suivante doit donc être vérifiée :

$$pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 = \sigma^2\Delta t$$

en remplaçant p par son expression, on obtient :

$$e^{\mu\Delta t}(u+d) - ud - e^{2\mu\Delta t} = \sigma^2\Delta t$$

Lorsque les termes en $\Delta t^{3/2}$ ou d'ordre supérieur sont négligés, une solution à cette équation est

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \tag{1.3}$$

Ce sont les valeurs proposées par Cox, Ross et Rubinstein (1979) pour ajuster u et d.

L'analyse menée dans ce chapitre montre que l'on peut remplacer l'arbre du graphique précédent par celui-ci dans l'univers neutre au risque :

$$\begin{tikzcd} & u.S_0 \\ S_0 \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\ & d.S_0 \end{tikzcd}$$

Dans cet univers risque-neutre, la rentabilité espérée est cette fois égale à r, la probabilité associée est

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Et un calcul rapide de la variance nous donne :

$$Var(S) = S_0^2(qu^2 + (1-q)d^2 - (qu + (1-q)d)^2) = (e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t})$$

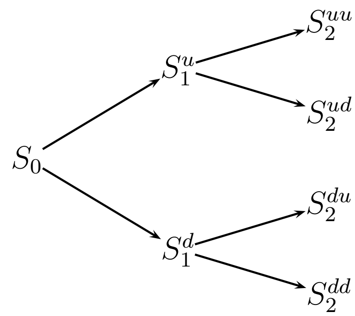
En remplaçant u et d par leurs valeurs, et en négligeant à nouveau les termes d'ordre supérieur à $\Delta t^{3/2}$, on obtient également une variance relative égale à $\sigma^2\Delta t$.

Ceci montre que lorsque l'on passe de l'univers réel à l'univers neutre au risque, l'espérance du taux de rentabilité de l'action change, mais la volatilité reste la même (du moins lorsque le pas de temps tend vers 0). C'est une illustration du théorème de Girsanov (souvenez-vous : passer d'un univers à l'autre change le drift mais pas la dérive...).

V Modèle à 2 périodes

L'analyse précédente peut être étendue à un arbre binomial à deux périodes, tel qu'il est présenté sur le graphique suivant.

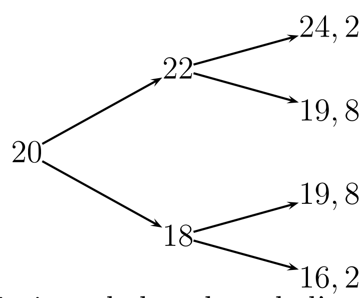
Graphique 3.2 : Variations du cours de l'action



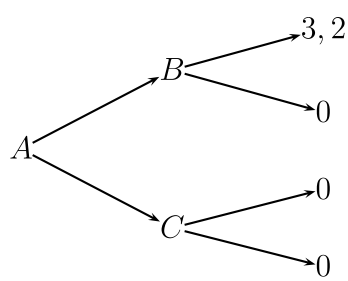
1 Exemple

Ici, on présente un exemple où le cours initial de l'action est 20€ , et à chacune des périodes, il peut augmenter ou baisser de 10%. Nous supposons dans l'exemple que chaque période dure 3 mois et que le taux sans risque est de 12% par an. Comme dans l'exemple précédent, le prix d'exercice de l'option est supposé égal à 21€ .

Graphique 3.3 : Variations du cours de l'action



Variations de la valeur de l'option



L'objectif est de calculer la valeur de l'option au noeud initial de l'arbre.
Pour cela, il suffit d'itérer la méthode d'évaluation sur une période, pour trouver tout d'abord la valeur de l'option au noeuds B et C, puis ensuite au noeud A, à partir des valeurs trouvées pour les noeuds B et C. On raisonne ainsi de manière rétrograde sur l'arbre, en partant des valeurs finales et en remontant sur les noeuds précédents.

Au noeud C, la valeur de l'option est nulle, car elle conduit à 2 noeuds possibles pour lesquels la valeur de l'option est nulle.
La valeur de l'option au noeud B est calculée en prenant appui sur la partie de l'arbre représentée ci-après. On a donc un modèle binomial à une période, $u = 1,1$, $d = 0,9$, $r = 0,12$, et $T = 3$ mois.

Graphique 3.4 : Evaluation de l'option au noeud B

$$\begin{tikzcd}
& 3,2 \\
B \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& 0
\end{tikzcd}$$

On obtient encore $q = \frac{R-d}{u-d} = 0,6523$ et donc on a la valeur de l'option au noeud B :

$$B = e^{rT}(q3,2 + (1-q)0) = e^{-0,12\times 3/12}(0,6523 \times 3,2 + 0,3477 \times 0) = 2,0257$$

Ensuite, il ne reste plus qu'à calculer la valeur initiale de l'option au noeud A, en focalisant notre attention sur la première partie de l'arbre. La valeur de l'option au noeud B est 2,0257 au noeud B alors qu'elle est nulle au noeud C.

Graphique 3.5 : Evaluation de l'option au noeud A

$$\begin{tikzcd}
& B = 2,0257 \\
A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& C = 0
\end{tikzcd}$$

L'évaluation neutre au risque nous donne encore $q = \frac{R-d}{u-d} = 0,6523$, et donc la valeur de l'option au noeud A est :

$$A = e^{rT}(qB + (1-q)C) = e^{-0,12\times 3/12}(0,6523 \times 2,0257 + 0,3477 \times 0) = 1,2823$$

La valeur de l'option est donc 1,2823€ .

Remarque : : Il faut noter que cet exemple est construit avec des paramètres u et d (qui sont les rentabilités de l'action à la hausse et à la baisse) indépendants de la date et du noeud considéré. De plus, les périodes ont même durée. Par conséquent, la probabilité risque-neutre, q, est la même à chaque noeud. On peut bien entendu faire la même chose avec des probabilités risque-neutre différentes, en faisant attention à les recalculer à chaque noeud. Cela nous donne le graphique suivant :

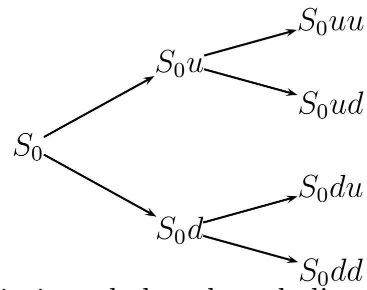
Graphique 3.6 : Variations de la valeur de l'option

$$\begin{tikzcd}
& & 3,2 \\
& 2,0257 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
1,2823 \arrow[ur] \arrow[ddr] & & 0 \\
& & 0 \\
& 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
& & 0
\end{tikzcd}$$

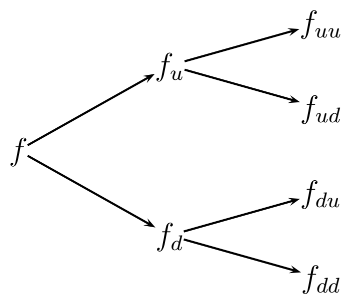
2 Cas général

On peut généraliser ce raisonnement. Prenons le cas d'une action dont le cours initial est S_0, et durant chaque période, le cours est multiplié par u ou d. La notation de la valeur de l'option est f_{ij} où i désigne l'évolution sur la première période et j sur la deuxième (par exemple après 2 hausses successives, l'option vaut f_{uu}). Le taux d'intérêt sans risque est noté r et chaque période dur Δt années.

Graphique 3.7 : Variations du cours de l'action



Variations de la valeur de l'option



Les équations relatives à l'évaluation sur chaque sous-période s'écrivent, en notant q la probabilité risque neutre égale à

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{R - d}{u - d} \tag{1.4}$$

en notant $R = e^{r\Delta t}$ le facteur de capitalisation sur une période.

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{1}{R}\left[q f_{uu} + (1-q) f_{ud}\right] \quad \text{évaluation au noeud } B \\ f_d &= \frac{1}{R}\left[q f_{du} + (1-q) f_{dd}\right] \quad \text{évaluation au noeud } C \\ f &= \frac{1}{R}\left[q f_u + (1-q) f_d\right] \quad \text{évaluation au noeud } A \end{aligned} \tag{1.5}$$

Or ici, $f_u d = f_d u$ on peut donc écrire en combinant toutes ces équations :

$$f = \frac{1}{R^2}\left[q^2 f_{uu} + 2q(1-q) f_{ud} + (1-q)^2 f_{dd}\right] \tag{1.6}$$

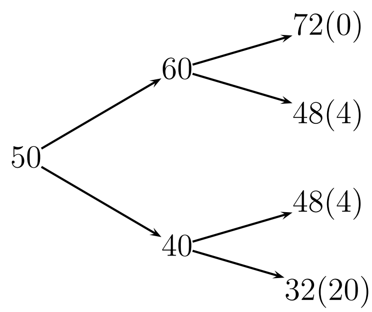
Cette formulation est cohérente avec le principe d'évaluation risque-neutre mentionné plus haut. q^2, $2q(1-q)$ et $(1-q)^2$ sont les probabilités que les noeuds terminaux du haut, du milieu et du bas soient atteints (ou q^2, $q(1-q)$, $q(1-q)$ et $(1-q)^2$ si les 4 noeuds sont distincts).
La valeur de l'option est bien égale à son payoff espéré dans l'univers risque-neutre, actualisé au taux sans risque.

3 Un exemple avec une option de vente

Les procédures décrites dans ce chapitre sont applicables à l'évaluation de n'importe quel produit dérivé tant que le prix de l'actif sous-jacent varie de façon binomiale.
Considérons un put européen à 2 ans, de prix d'exercice 52€ sur une action cotée actuellement 50€ . La durée de vie de l'option est divisée en 2 périodes d'un an chacune, et à chaque période, le cours de l'action augmente de 20% ou baisse de 20%. Le taux sans risque est supposé égal à 5%.

L'arbre de cette situation est représenté sur le graphique suivant

Graphique 3.8 : Variations du cours de l'action (valeur de l'option)



La probabilité risque-neutre de hausse, q, est donnée par l'équation 1.1, à savoir, puisque $d = 0,8$ et $u = 1,2$:

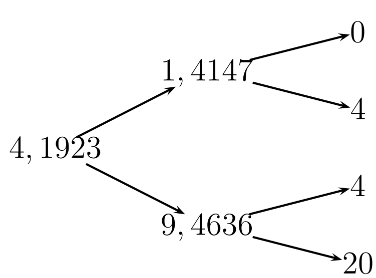
$$q = \frac{e^{0,05\times 1} - 0,8}{1,2 - 0,8} = 0,6282$$

Les valeurs finales possibles de l'action sont 72€ , 48€ et 32€ . Dans ce cas, $f_{uu} = 0$, $f_{ud} = f_{du} = 4$, et $f_{dd} = 20$. On déduit de l'équation 1.6

$$f = e^{-2r\Delta t}(q^2 \times f_{uu} + 2q(1-q) \times f_{ud} + (1-q)^2 f_{dd}) = 4,1923$$

La valeur du put est donc 4,1923€ . Ce résultat peut également être obtenu en utilisant l'équation 1.2 et en calculant les valeurs de l'option à chaque noeud, et à chaque date, en débutant par la fin (ce procédé est appelé induction arrière). Le graphique suivant donne les valeurs intermédiaires de l'option ainsi calculées :

Graphique 3.9 : Variations de la valeur de l'option



4 Les options américaines

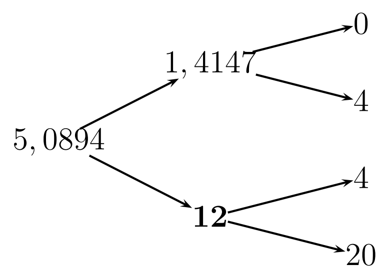
Jusqu'à présent, toutes les options considérées étaient de type européen. Nous allons maintenant aborder succinctement la façon de traiter les options de type américain à l'aide d'arbres binomiaux.
Reprenons l'exemple précédent en supposant que l'option de vente est a présent une option américaine.

La procédure consiste à calculer la valeur sur chaque noeud de l'arbre, par induction arrière, c'est-à-dire en partant de l'échéance et en revenant vers la date initiale, tout en testant à chaque noeud s'il est optimal ou non d'exercer prématurément l'option. La valeur de l'option sur les noeuds terminaux (à la date d'échéance) est la même que celle des options européennes, puisque à cette date il n'y a plus de différence entre ces 2 types d'options. Par contre, sur les noeuds intermédiaires, la valeur de l'option est le maximum entre

– La valeur donnée par l'équation 1.2
– Le payoff procuré par l'exercice anticipé de l'option

Le graphique suivant montre de quelle manière le graphique précédent est modifié si c'est une option américaine et non une option européenne qui est évaluée.

Graphique 3.10 : Variations de la valeur de l'option



Les valeurs de l'action et les probabilités des différentes branches sont inchangées, ainsi que la valeur de l'option sur les noeuds terminaux. Au noeud B, l'équation 1.2 d'évaluation risque-neutre attribue la valeur 1,4147 à l'option, tandis que le flux engendré par un exercice anticipé serait négatif (=-8), il est donc clair qu'il n'est pas optimal d'exercer l'option au noeud B, et sa valeur est donc bien 1,4147. Au noeud C en revanche, l'équation 1.2 d'évaluation risque-neutre donne 9,4636 comme valeur de l'option, tandis que le flux lié à un exercice anticipé serait de 12. Dans ce cas, un exercice anticipé est optimal, et la valeur de l'option au noeud C est égale à 12. Au noeud A, la valeur calculée par application de la formule 1.2 d'évaluation risque-neutre est alors :

$$A = e^{-0,05\times 1}(q \times 1,4147 + (1-q) \times 12) = 5,0894$$

et le payoff d'un exercice anticipé est égal à 2. Dans ce cas, comme pour le noeud B, il n'est pas optimal d'exercer prématurément l'option et sa valeur est bien $5,0894$.

VI Le delta

A ce stade, nous faisons une première présentation du *delta*, paramètre essentiel de la gestion et la couverture des options.

Définition 1.4 *Le delta d'une option se définit comme la variation de la valeur de l'option rapportée à la variation de prix de l'action sous-jacente.*

Il représente le nombre d'unités d'action à détenir pour chaque option vendue, afin de créer un portefeuille sans risque. Il est identique au Δ introduit au début de ce chapitre (exemple introductif).
La construction d'une telle couverture est parfois appelée "couverture delta-neutre" ou *delta hedging*. Le delta d'un call est positif, alors que le delta d'un put est négatif, puisque le prix d'un call est une fonction croissante du prix de l'action sous-jacente, et le prix du put une fonction décroissante.

Pour l'exemple du début de chapitre, sur la graphique 3.1, la valeur du delta du call peut être calculé de la manière suivante :

$$\Delta = \frac{1-0}{22-18} = 0,25$$

Ce ration traduit le fait que lorsque le cours de l'action varie de 18€ à 22€ , la valeur de l'option varie de 0€ à 1€ .

Sur les graphiques 3.3 et 3.6, le delta correspondant aux variations du cours de l'action pour la première période est

$$\Delta_1 = \frac{2,0257-0}{22-18} = 0,5064$$

Celui correspondant à la seconde période en cas de hausse :

$$\Delta_2 = \frac{3,2-0}{24,2-19,8} = 0,7273$$

Et celui correspondant à la seconde période en cas de baisse :

$$\Delta_2' = \frac{0-0}{19,8-16,2} = 0,7273$$

Ces quantités correspondent aux quantités d'actions qu'il est nécessaire de posséder sur la période correspondante pour couvrir l'option. Cet exemple à deux périodes montrent que le delta change à chaque date, pour la période suivante. C'est une couverture dite "dynamique" (à opposer aux stratégies dites "statiques"). Dans ce cas, le delta à la date $t = 1$ passe de 0,5064 à 0,7273 ou à 0. Dans le but de maintenir une couverture sans risque, il faut ajuster le nombre d'actions détenues en portefeuille à chaque période.
Une stratégie de couverture de l'option consiste donc à acheter 0,5064 actions à l'instant initial, sur la première période, puis sur la 2ème période réajuster sa position soit en rachetant 0,2209 actions supplémentaires afin d'en détenir 0,7273 en cas de hausse de l'action, soit en revendant toutes les actions en cas de baisse (l'option n'a plus aucune valeur, inutile donc de la couvrir).

Exercice 1.1 *Trouver la stratégie de delta hedging du put européen décrit dans la section 3 (graphiques 3.8 et 3.9).*

Solution 1.1 *Le delta du put sur la première période est donné par*

$$\Delta_1 = \frac{1,4147 - 9,4636}{60 - 40} = -0,4024$$

Pour la seconde période, il vaut

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{0 - 4}{72 - 48} = -0,1667 \quad \textit{en cas de hausse} \\ \Delta_2' &= \frac{4 - 20}{48 - 32} = -1 \quad \textit{en cas de baisse} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Il faut donc vendre à découvert 0,4024 actions sur la première période pour couvrir l'option de vente, puis réajuster sa position soit en rachetant 0,2357 actions afin de n'en détenir que -0,1667 en cas de hausse de l'action, soit en revendant à découvert encore 0,5976 actions en cas de baisse, afin d'en détenir -1 au total sur la 2ème période.

VII les options portant sur d'autres sous-jacents

Option sur actions payant des dividendes Considérons une action payant un dividende au taux v. La rentabilité de ce titre est la somme du taux de dividende et du gain en capital. Elle doit être égale au taux sans risque dans l'univers risque-neutre. En conséquence, le taux de croissance du prix est $r - v$. Si le prix est S_0, sa valeur espérée après un délai Δt est donnée par :

$$qS_0u + (1-q)S_0d = S_0e^{(r-v)\Delta t}$$

De sorte que

$$q = \frac{e^{(r-v)\Delta t} - d}{u - d}$$

c'est la probabilité risque neutre pour l'évaluation d'options avec dividende.
Comme dans le cas des actions ne versant pas de dividendes, on tient compte de la volatilité en retenant $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ et $d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$.

Si on suppose que l'indice procure un taux de dividende v, l'évaluation d'une option sur indice relève alors de la même démarche que celle d'une option sur une action ayant un taux de dividende v.

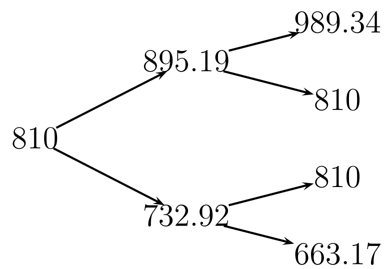
Exercice 1.2 Option sur indices
Soit un indice d'actions qui vaut aujourd'hui 810 *points, ayant une volatilité de* 20% *et un taux de dividende de* 2%. *Le taux sans risque est de* 5% *annuel. Evaluer un call à 6 mois sur cet indice au prix d'exercice de 800 à l'aide d'un arbre à 2 périodes.*

Solution 1.2 *Dans ce cas, on a :*

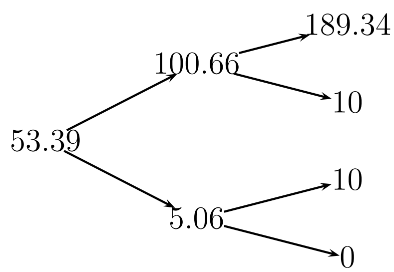
$$\begin{aligned} \Delta t = 0,25 = 3/12 &\quad R = e^{(0,05-0,02)\times 0,25} = 1,0075 \\ u = e^{0,2\sqrt{0,25}} = 1,1052 &\qquad d = 1/u = 0,9048 \\ p = \frac{R-d}{u-d} = 0,5126 & \end{aligned} \tag{1.8}$$

l'arbre correspondant à cette modélisation est :

Graphique : Variations de la valeur de l'indice



Graphique : Variations de la valeur de l'option



On obtient une valeur d'option de 53,39.

De la même manière, une devise peut être vue comme un actif payant un taux de dividende égal au taux sans risque étranger, r_f. Par analogie avec ce qui vient d'être fait pou les options sur indices, on peut évaluer les options sur devises à l'aide des équations précédentes, en posant $R = e^{(r-r_f)\Delta t}$

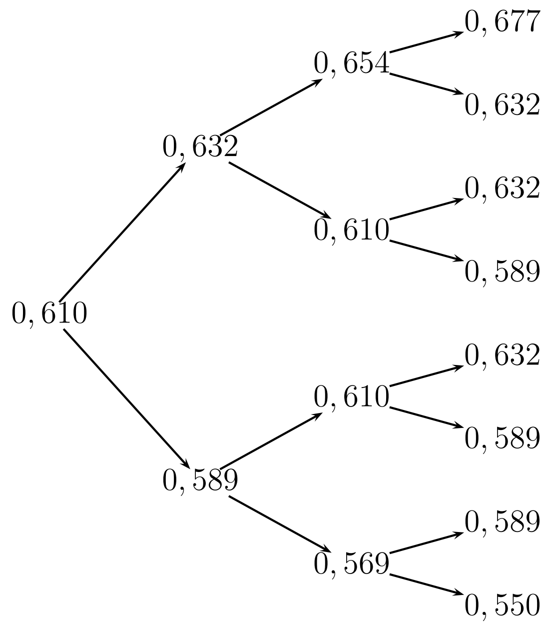
Exercice 1.3 Option sur devises
Le dollar australien cote 0,61 USD, et ce taux de change a une volatilité de 12%. Le taux sans risque australien est de 7%, alors que le taux US est de 5%. Evaluer un call américain (en USD) à 3 mois avec prix d'exercice de 0,60, et un arbre à 3 périodes.

Solution 1.3 *Dans ce cas, on a*

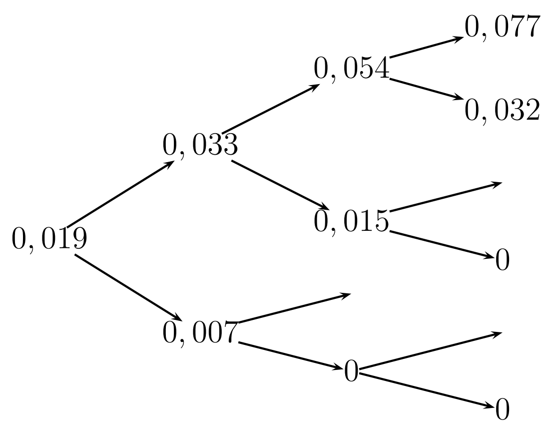
$$\begin{aligned} \Delta t = 0,0833 = 1/12 &\quad R = e^{(0,05-0,07)\times 0,0833} = 0,9983 \\ u = e^{0,12\sqrt{0,0833}} = 1,0352 &\qquad d = 1/u = 0,966 \\ p = \frac{R-d}{u-d} = 0,4673 & \end{aligned} \tag{1.9}$$

l'arbre correspondant à cette modélisation est :

Graphique : Variations de la valeur de la devise



Graphique : Variations de la valeur de l'option



On obtient une valeur d'option de 0,019.

Les options sur contrat futures Cela ne coûte rien de rendre une position longue sur un contrat futures. Il s'ensuit que, dans l'univers risque-neutre, le taux de croissance espéré de la valeur d'un tel contrat est nul. Comme précédemment,si on note F_0 le prix future initial, le prix futur espéré est toujours le même, F_0. On en déduit :

$$quF_0 + (1-q)dF_0 = F_0$$

ou encore

$$q = \frac{1-d}{u-d}$$

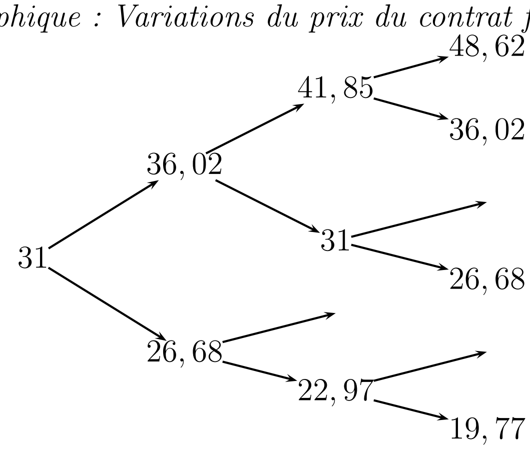
Et on peut à nouveau utiliser l'évaluation risque neutre du modèle binomial pour évaluer une option sur un tel contrat.

Exercice 1.4 *Un prix future est aujourd'hui à 31 et a une volatilité de* 30%. *Le taux sans risque est de* 5% *annuel. Evaluer le prix d'un put américain à 9 mois sur ce contrat avec un arbre à 3 périodes et un prix d'exercice de 30.*

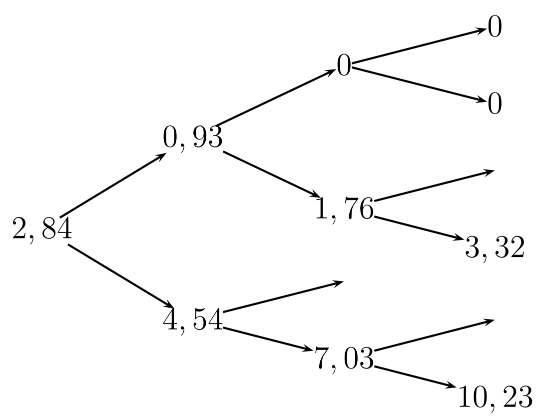
Solution 1.4 *Dans ce cas, on a*

$$\begin{aligned} \Delta t = 0,25 = 3/12 & \qquad R = 1 \\ u = e^{0,03 \times 0,25} = 1,1618 & \quad d = 1/u = 0,8607 \\ p = \frac{R-d}{u-d} = 0,4626 & \end{aligned} \tag{1.10}$$

Graphique : Variations du prix du contrat future



Graphique : Variations de la valeur de l'option



On obtient une valeur de l'option de 2,84

VIII Exercices

Exercice 1.5 Option sur indices
Soit un indice d'actions qui vaut aujourd'hui 810 points, ayant une volatilité de 20% et un taux de dividende de 2%. Le taux sans risque est de 5% annuel. Evaluer un call à 6 mois sur cet indice au prix d'exercice de 800 à l'aide d'un arbre à 2 périodes.

Exercice 1.6 Option sur devises
Le dollar australien cote 0,61 USD, et ce taux de change a une volatilité de 12%. Le taux sans risque australien est de 7%, alors que le taux US est de 5%. Evaluer un call américain (en USD) à 3 mois avec prix d'exercice de 0,60, et un arbre à 3 périodes.

Exercice 1.7 Option sur futures
Un prix future est aujourd'hui à 31 et a une volatilité de 30%. Le taux sans risque est de 5% annuel. Evaluer le prix d'un put américain à 9 mois sur ce contrat avec un arbre à 3 périodes et un prix d'exercice de 30.

Exercice 1.8 *Une action vaut aujourd'hui 25€ . Dans 2 mois, elle sera cotée soit 23€ , soit 27€ . Le taux d'intérêt sans risque est de 10% par an. Soit* S_T *le cours de l'action dans 2 mois. Quelle est la valeur d'un produit dérivé qui offrirait un payoff égal à* S_T^2 *à cette date ?*

Exercice 1.9 *Calculer les valeurs de* u, d *et* p *quand on construit un arbre d'évaluation d'une option sur devise. Chaque pas correspond à 1 mois, le taux sans risque domestique est de 5%, le taux étranger de 8% et la volatilité de 12%.*
Calculer le prix d'un call américain sur cette devise, cotant aujourd'hui 100€ , de prix d'exercice 110€ à échéance 3 mois (arbre à 3 périodes).

Exercice 1.10

IX Modèle à n périodes

1 Modélisation du marché

On reprend la même modélisation que dans le chapitre précédent, mais dans un monde à n périodes. On considère un intervalle de temps $[0, T]$ divisé en n périodes $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$.
Le marché est composé de 2 actifs,

- un **actif sans risque** S_t^0 :

$$1 \rightarrow (1+r) \rightarrow (1+r)^2 \rightarrow (1+r)^3 \rightarrow ... \rightarrow (1+r)^n$$

- et un actif risqué S_t :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & u^nS_0 \\
 & & & & & & & \nearrow & \\
 & & & & & & u^{n-1}S_0 & & \\
 & & & & & \iddots & & \searrow & \\
 & & & & u^2S_0 & & & & du^{n-1}S_0 \\
 & & & \nearrow & & \ddots & & & \\
 & & uS_0 & & & & & & \vdots \\
 & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
S_0 & & & & udS_0 & & & & \vdots \\
 & \searrow & & \nearrow & & & & & \\
 & & dS_0 & & & & & & \\
 & & & \searrow & & \iddots & & & d^{n-1}uS_0 \\
 & & & & d^2S_0 & & & & \\
 & & & & & \ddots & & \nearrow & \\
 & & & & & & d^{n-1}S_0 & & \\
 & & & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & & & d^nS_0
\end{array}$$

L'arbre est **recombinant** : à l'instant t, l'actif peut prendre $i+1$ valeurs différentes.
Ensemble des états du monde : Ω est l'ensemble des trajectoires possibles pour l'actif risqué. C'est l'ensemble des n-uplets $(\omega_1, ..., \omega_n)$ tels que chaque ω_i prenne deux valeurs possibles, ω_i^d ou ω_i^u.

$$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_n), \forall i \leq n, \ \ \omega_i = \omega_i^d \text{ ou } \omega_i = \omega_i^u\}$$

On se donne une **probabilité historique** $\mathbb{P}$ de survenance de chacun des états du monde et on suppose que **la probabilité de monter et de descendre est la même dans tout noeud de l'arbre**, i.e. pout tout i :

$$\mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^u) = p \text{ et } \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^d) = 1 - p$$

Hypothèse Cruciale

$$\boxed{\text{Les rendements } Y_i = \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \text{ sont indépendants.}}$$

Par indépendance des tirages, on en déduit donc :

$$\mathbb{P}(\omega_1, ..., \omega_n) = p^{\sharp\{j, \omega_j = \omega_j^u\}}.(1-p)^{\sharp\{j, \omega_j = \omega_j^d\}}$$

Et on peut écrire de manière équivalente la valeur de l'actif à l'instant t_i comme

$$S_{t_i} = S_0 \prod_{k=1}^{i} Y_k$$

avec les Y_k des variables aléatoires **indépendantes** sur Ω qui prennent la valeur u avec une probabilité p et la valeur d avec une probabilité $1-p$. Alors on a bien sûr :

$$\mathbb{P}(Y_i = u) = \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^u) = p \text{ et } \mathbb{P}(Y_i = d) = \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^d) = 1 - p$$

L'information disponible à la date t_i est donnée par la filtration $(\mathcal{F}_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$:

$$\mathcal{F}_{t_i} = \sigma(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) = \sigma(Y_1, Y_2, ..., Y_n) = \sigma(S_{t_1}, S_{t_2}, ..., S_{t_i})$$

Une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable est donc naturellement une variable donnée par toute l'information accumulée jusqu'au temps t_i. Elle s'écrit comme fonction de $(S_{t_1}, S_{t_2}, ..., S_{t_i})$, ou de manière équivalente comme fonction de $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$.

Définition 1.5 *Un* **produit dérivé** *(ou actif contingent) C_T est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$-mesurable et s'écrit donc, avec ϕ une application borélienne, sous la forme :*

$$C_T = \phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n})$$

On chercher comme précédemment à trouver le prix et le portefeuille de couverture d'un produit dérivé, qui seront encore donnés par le prix et la stratégie de son portefeuille de duplication. Avant de montrer que l'actif est duplicable, étudions les propriétés des stratégies de portefeuille simple dans ce modèle.

2 Stratégie de portefeuille

Définition 1.6 *Une* **stratégie de portefeuille simple** $X^{(x,\Delta)}$ *est la donnée d'un capital initial x et d'un processus discret $(\Delta_0, ..., \Delta_{n-1})$ qui est $\mathcal{F}$-adapté.*

La stratégie consiste, à tout instant t_i en l'investissement dans une quantité Δ_i d'actif risqué. Le processus Δ est $\mathcal{F}$-adapté, car la quantité d'argent à investir dans l'actif à l'instant t_i est déterminée avec l'information accumule jusqu'à l'instant t_i.

Le portefeuille ne subit aucune entrée ou sortie d'argent (**condition d'autofinancement**). Entre les instants t_i et t_{i+1}, le portefeuille $X^{x,\Delta}$ est constitué d'une quantité Δ_i d'actif risqué et d'une quantité $\frac{X_i^{x,\Delta} - \Delta_i S_{t_i}}{(1+r)^i}$ actifs sans risque. La valeur du portefeuille à l'instant t_i est donc donnée par :

$$X_{t_i}^{x,\Delta} = \Delta_i \mathrm{S_{t_i}} + \frac{(X_{t_i}^{x,\Delta} - \Delta_i S_{t_i})}{(1+r)^i} (1 + \mathrm{r})^{\mathrm{i}}$$

Or, sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$, le portefeuille ne bénéficie d'aucune entrée ou sortie d'argent, donc :

$$X_{t_{i+1}^{x,\Delta}} == \Delta_i \mathrm{S_{t_{i+1}}} + \frac{(X_{t_i}^{x,\Delta} - \Delta_i S_{t_i})}{(1+r)^i}(1+\mathrm{r})^{\mathrm{i+1}}$$

Donc en introduisant les processus actualisés :

$$\boxed{\tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} = \frac{X_{t_i}^{x,\Delta}}{(1+r)^i} \text{ et } \tilde{S}_{t_i} = \frac{S_{t_i}}{(1+r)^i}}$$

ces deux relations se réécrivent

$$\tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} = \Delta_i \tilde{\mathrm{S}_{\mathrm{t_i}}} + (\tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} - \Delta_i \tilde{S_{t_i}})1, \text{ et } \tilde{X}_{t_{i+1}}^{x,\Delta} = \Delta_i \tilde{S_{t_{i+1}}} + (\tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} - \Delta_i \tilde{S_{t_i}})$$

Ce qui donne la relation qu'on appelle **relation d'autofinancement :**

$$\boxed{\tilde{X}_{t_{i+1}}^{x,\Delta} - \tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} = \Delta_i(\tilde{S}_{t_{i+1}} - \tilde{S}_{t_i})}$$

qui se réécrit également

$$\boxed{\tilde{X}_{t_{i+1}}^{x,\Delta} = x + \sum_{k=0}^{i} \Delta_k(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k}).}$$

Remarque : Le processus valeur du portefeuille $X^{x,\Delta}$ est bien sûr $\mathcal{F}$-adapté.

3 Arbitrage et Probabilité risque neutre

Définition 1.7 *Une* **opportunité d'arbitrage simple** *est une stratégie de portefeuille simple qui, partant d'une richesse nulle en $t = 0$ est en $T = t_n$ toujours positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive. C'est donc la donnée de $\Delta \in \mathbb{R}$ satisfaisant*

$$X_T^{0,\Delta} \geq 0 \text{ et } \mathbb{P}[X_T^{0,\Delta} > 0] > 0$$

L'**Absence d'Opportunité d'Arbitrage simple (AOA')** (ie sur stratégie de portefeuille simple) s'écrit donc :

$$\boxed{\forall \Delta \in \mathbb{R}, \quad \{X_T^{0,\Delta} \geq 0 \Rightarrow X_T^{0,\Delta} = 0 \mathbb{P}\text{p.s.}\}}$$

Proposition 1.6 *Sous l'hypothèse d'AOA', on a $d < 1 + r < u$.*

Preuve : Supposons par exemple $1+r \leq d$ et considérons la stratégie de portefeuille $(0, \Delta)$, où $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_i = 0$ pour $i \geq 1$: on achète l'actif risqué en t_0, on le revend en t_1 et on place le gain dans l'actif sans risque. Cette stratégie est $\mathcal{F}$-adaptée car déterministe et la valeur du portefeuille en $T = t_n$ est donnée par :

$$X_T^{0,\Delta} = 0 + \sum_{k=0}^{i} \Delta_k (\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k}) = \tilde{S}_{t_1} - \tilde{S}_{t_0}$$

Comme S_{t_1} peut prendre 2 valeurs, la valeur du portefeuille en T peut prendre 2 valeurs qui sont :

$$(1+r)^n S_0 \left(\frac{u}{1+r} - 1 \right) > 0, \text{ et } (1+r)^n S_0 \left(\frac{d}{1+r} - 1 \right) \geq 0$$

avec respectivement des probabilités p et $1-p$, toutes deux strictement positives. Donc notre stratégie est une opportunité d'arbitrage. Le cas $u \leq 1+r$ est traité similairement en vendant l'actif risqué ($\Delta_0 = -1$).

Remarque : Comme dans le modèle à une période, $R > u$ signifie que l'actif sans risque a un rendement meilleur que l'actif risqué, ce qui crée un arbitrage, de même si $R < d$ et que l'actif risqué a toujours un meilleur rendement que l'actif non risqué.

Proposition 1.7 *En fait, sous l'hypothèses AOA', il y a AOA' sur tous les sous-arbres.*

Preuve : Par contraposée, s'il existe une stratégie d'arbitrage sur un sous-arbre, il faut considérer la stratégie globale qui ne fait rien si elle ne croise pas le noeud de départ du sous-arbre, et qui utilise la stratégie d'arbitrage gagnante jusqu'à la fin du sous-arbre, puis place les gains dans l'actif sans risque sur les périodes restantes. Comme la probabilité de passer par un noeud est strictement positive, cette stratégie est un arbitrage.

Définition 1.8 *On introduit* **la probabilité** $\mathbb{Q}$ *sur* Ω*, en s'inspirant du modèle à une période, qui sera identique sur chaque sous-arbre à celle obtenue dans l'étude du modèle à une période. On définit donc la probabilité* $\mathbb{Q}$ *comme :*

$$\mathbb{Q}(\omega_1, ..., \omega_n) = q^{\sharp\{j, \omega_j = \omega_j^u\}} (1-q)^{\sharp\{j, \omega_j = \omega_j^d\}}, \text{ avec } q = \frac{(1+r)-d}{u-d}$$

Proposition 1.8 *On a alors les relations suivantes :*

$$\mathbb{Q}(S_{t_i} = uS_{t_{i-1}}) = \mathbb{Q}(Y_i = u) = q \quad \text{et} \quad \mathbb{Q}(S_{t_i} = dS_{t_{i-1}}) = \mathbb{Q}(Y_i = d) = 1-q$$

Rappel :

Définition 1.9 *Une* **probabilité risque neutre** *est une probabilité équivalente à la probabilité historique* $\mathbb{P}$ *sous laquelle toute stratégie de portefeuille simple actualisée est une martingale.*

Théorème 1.3 *Si* $d < 1+r < u$*, alors* $\mathbb{Q}$ *ainsi définie est bien une probabilité risque neutre (autrement dit il existe bien une probabilité risque neutre).*

Commençons par montrer que

Proposition 1.9 $\tilde{S}$ *est une* $\mathcal{F}$*-martingale sous* $\mathbb{Q}$*.*

Preuve : $\tilde{S}$ est intégrable et $\mathcal{F}$-adapté, et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tilde{S}_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_{t_k}\right] &= \frac{1}{1+r}\left(qu\tilde{S}_{t_k} + (1-q)d\tilde{S}_{t_k}\right) &(1.11)\\
&= \frac{1}{1+r}\left(\right)\tilde{S}_{t_k}\\
&= \tilde{S}_{t_k} &(1.12)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\tilde{S}_{t_k}$ est bien une $\mathcal{F}$-martingale sous $\mathbb{Q}$.

Proposition 1.10 *La valeur actualisée $\tilde{X}^{x,\Delta}$ de toute stratégie de portefeuille simple (x, δ) est une $\mathcal{F}$-martingale sous $\mathbb{Q}$.*

Preuve : $\tilde{X}^{x,\Delta}$ est intégrable et $\mathcal{F}$-adapté, et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tilde{X}^{x,\Delta}_{k+1} - \tilde{X}^{x,\Delta}_{k}|\mathcal{F}_{t_k}\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta_k(\tilde{S_{t_{k+1}}} - \tilde{S}_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}\right]\\
&= \Delta_k\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(\tilde{S_{t_{k+1}}} - \tilde{S}_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}\right] = 0
\end{aligned}$$

Remarque : Cela signifie que si les actifs de base actualisés sont des martingales sous une certaine probabilité, les stratégies de portefeuille simples le sont aussi. Ceci est du à la condition d'autofinancement, mais surtout au fait que la quantité d'actif risqué entre t_k et t_{k+1} est $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable.
Autrement dit, tout actif de base actualisé est une martingale sous une probabilité $\mathbb{Q}$ ssi toute stratégie de portefeuille simple actualisée est une martingale sous $\mathbb{Q}$.

Montrons enfin que si $d < 1 + r < u$, $\mathbb{Q}$ est bien une probabilité risque-neutre. Nous venons de construire $\mathbb{Q}$ et de montrer que elle rendait toute stratégie de portefeuille actualisée une martingale. De plus, c'est bien une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$. En effet, comme $d < R < u$, q et $1-q$ sont dans $]0, 1[$, et donc chaque $\mathbb{Q}(\omega_1, ..., \omega_n)$ est dans $]0, 1[$, et tous les états du monde ont une probabilité strictement positive d'arriver, donc $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ ont les mêmes ensembles négligeables.

La valeur à toute date t_i d'une stratégie de portefeuille simple de valeur finale $X_T^{x,\Delta}$ s'écrit :

$$\boxed{X^{x,\Delta}_{t_i} = \frac{1}{(1+r)^{n-i}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_T^{x,\Delta}\mathcal{F}_{t_i}\right]}$$

puisque la valeur actualisée de cette stratégie est une martingale.
Donc encore une fois, si on arrive à construire un portefeuille de couverture pour tout produit dérivé, en AOA, sa valeur à tout instant t_i est donnée par l'espérance sous la probabilité risque neutre de son flux final actualisé.

Comme dans le modèle à une période, on a

Proposition 1.11 *L'existence d'une probabilité risque neutre implique l'hypothèse AOA'.*

Preuve : Exactement comme dans le modèle à une période,

$$X_T^{0,\Delta} \geq 0 \text{ et } \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_T^{0,\Delta}] = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(X_T^{0,\Delta} = 0) = 1$$

Donc $X_T^{0,\Delta}$ est nulle $\mathbb{Q}$-p.s. et donc $\mathbb{P}$-p.s.

On a donc, comme dans le modèle à une période :

$$\boxed{AOA' \Leftrightarrow d < R < u \Leftrightarrow \text{ il existe une probabilité risque neutre}}$$

4 Duplication d'un produit dérivé

Théorème 1.4

Tout produit dérivé C est duplicable par une stratégie de portefeuille simple (x, Δ)

Le marché est **complet**.

Analyse du problème : On cherche une stratégie de couverture, ie une stratégie de portefeuille simple qui duplique un produit dérivé de la forme $\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n})$. Comme nous venons de le voir, tout stratégie de portefeuille simple est une martingale sous $\mathbb{Q}$. Donc la valeur du portefeuille de duplication en t_k satisfait nécessairement :

$$X_{t_k}^{x,\Delta} = \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[X_T^{x,\Delta} \mathcal{F}_{t_k} \right]$$

Donc la richesse initiale x du portefeuille de duplication vérifie :

$$x = \frac{1}{(1+r)^n} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n}]$$

On remarque que $\frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[X_T^{x,\Delta} | \mathcal{F}_{t_k} \right]$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable. Elle s'écrit donc $V_k(S_{t_1}, ..., S_{t_k})$ où V_k est une fonction déterministe (non aléatoire). On pose donc :

$$V_k(S_{t_1}, ..., S_{t_k}) = \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[X_T^{x,\Delta} | \mathcal{F}_{t_k} \right]$$

Dans le modèle à une période, on avait construit le portefeuille de couverture (delta-hedging) avec une quantité d'actif risqué égal à la variation de la valeur du produit dérivé sur la variation du sous-jacent. On propose donc la même chose :

$$\Delta_k = \frac{V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) - V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k})}{uS_{t_k} - dS_{t_k}}$$

L'investissement initial x est déterministe, et Δ_k est bien $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable en tant que fonction de $(S_{t_1}, ..., S_{t_k})$. Donc Δ est bien $\mathcal{F}$-adaptée et (x, Δ) définit une stratégie de portefeuille simple.

On peut vérifier que cette stratégie duplique bien notre produit dérivé $X_T^{x,\Delta} = \phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n}) = V_n(S_{t_1}, ..., S_{t_n})$. Il faut donc vérifier, par récurrence sur k, qu'à chaque instant

$$X_{t_k}^{x,\Delta} = V_k(S_{t_1}, ..., S_{t_n})$$

Par construction, la relation est vraie pour $k = 0$. Montrons que si elle est vraie pour k, elle l'est aussi pour $k+1$.
On commence par établir que

$$\begin{aligned}
X_{t_k}^{x,\Delta} &= V_k(S_{t_1}, ..., S_{t_k}) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_k}] \\
&= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[\frac{1}{(1+r)^{n-(k+1)}} \phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n}) \middle| \mathcal{F}_{t_{k+1}} \right] \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right] \\
&= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_{k+1}}) | \mathcal{F}_{t_k}] \\
&= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) \mathbb{1}_{\{Y_{k+1}=u\}} + V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k}) \mathbb{1}_{\{Y_{k+1}=d\}} | \mathcal{F}_{t_k}] \\
&= \frac{1}{1+r} \left[\mathbb{Q}(Y_{k+1} = u) V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) + \mathbb{Q}(Y_{k+1} = d) V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k}) \right] \\
&= \frac{1}{1+r} \left[q V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) + (1-q) V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k}) \right]
\end{aligned}$$

La condition d'autofinancement du portefeuille s'écrit :

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^{x,\Delta} = \tilde{X}_{t_k}^{x,\Delta} + \Delta(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k})$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{t_{k+1}}^{x,\Delta} &= (1+r)\tilde{X}_{t_k}^{x,\Delta} + \Delta(S_{t_{k+1}} - (1+r)S_{t_k}) \\
&= q V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) + (1-q) V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k}) \\
&\quad \frac{V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) - V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k})}{uS_{t_k} - dS_{t_k}} (S_{t_{k+1}} - (1+r)S_{t_k})
\end{aligned}$$

En remplaçant $S_{t_{k+1}}$ par $Y_{k+1}S_{t_k}$ et q par $\frac{1+r-d}{u-d}$, on obtient :

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^{x,\Delta} = V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) \frac{Y_{k+1} - d}{u - d} + V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k}) \frac{u - Y_{k+1}}{u - d}$$

Et enfin, comme Y_{k+1} ne prend que les valeurs d ou u, on vérifie alors :

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^{x,\Delta} = V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, Y_{k+1}S_{t_k}) = V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, S_{t_{k+1}})$$

ce qui conclut la récurrence, et donc la preuve !

Conclusion :

Théorème 1.5 *Tout produit dérivé est réplicable, et la valeur sous AOA à tout instant d'un produit dérivé $C_T = \phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n})$ est donnée par :*

$$\boxed{C_{t_k} = \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_k}]}$$

et en particulier son prix en 0 est donné par

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{(1+r)^n}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n})]}$$

Proposition 1.12 *Comme le marché est complet, il y a unicité de la probabilité risque neutre.*

Preuve : Comme dans le modèle à une période, si on prend deux probabilités risque neutre $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$, pour tout $B \in \mathcal{F}_T$, $\mathbb{1}_B$ est un produit dérivé puisqu'il est $\mathcal{F}_T$-mesurable, donc il est duplicable par un portefeuille simple autofinançant (x, Δ) et on a

$$\mathbb{Q}_1(B) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[\mathbb{1}_B] = R^n x = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[\mathbb{1}_B] = \mathbb{Q}_2(B)$$

Donc $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$ sont indistinguables.

5 Formule générale

Généralisation de la formule obtenue pour 2 périodes.
Il suffit de pondérer les valeurs futures possibles de l'actif contingent par les probas de survenance, qui sont $\frac{n!}{j!(n-j)!}q^j(1-q)^{n-j}$ puisque la valeur finale ne dépend que du nombre de montées et de descentes, et que la proba q est la même à chaque période.
Chaque chemin a une probabilité $q^j(1-q)^{n-j}$ de survenir, et il y a $\frac{n!}{j!(n-j)!}$ chemin possibles.
Ainsi, on obtient :

$$C = \frac{1}{R^n}\left(\sum_{j=0}^{n} \frac{n!}{j!(n-j)!} q^j (1-q)^{n-j} \max\left[0, u^j d^{n-j} S_0 - K\right]\right)$$

Cette formule permet d'obtenir directement le prix du call, mais seulement dans le cas d'un arbre recombinant.
Un inconvénient peut être la grosseur du terme en factoriels, alourdissant les calculs. Pour des valeurs de n très grandes, souvent on préfèrera pour l'implémentation une implémentation du principe d'inférence arrière de CRR.

6 Conclusions

Remarque : Comme dans le modèle à une période, le prix de l'actif ne dépend que de la forme du payoff, de u, r et d, mais pas de la probabilité réelle qu'a le prix de monter ou de descendre : **le prix ne dépend pas de la probabilité historique**.

Remarque : Nous avons déterminé le portefeuille de couverture qui permet à tout instant de se couvrir contre les variations de l'option : comme dans le modèle à une période, **la quantité d'actif risqué à prendre dans le portefeuille s'interprète comme la variation du prix de l'option en réponse à une variation du cours du sous-jacent.** C'est le *delta-hedging*.
En temps continu, on obtiendra naturellement le portefeuille de duplication comme la dérivée de la valeur du produit dérivé par rapport à la valeur du sous-jacent.

Remarque : Dans la pratique, si on considère un produit dérivé dont la valeur ne depend que de la valeur finale, on peut calculer sa valeur sur chacun des noeuds à maturite. On revient alors progressivement en arrière dans l'arbre pour passer de ses valeurs aux noeuds de l'instant t_{i+1} à ses valeurs aux noeuds de l'instant t_i en actualisant sous la probabilité risque neutre. L'intérêt d'utiliser un arbre recombinant à n périodes est que l'on a seulement $n+1$ valeurs possible en T au lieu de 2^n si l'arbre n'était pas recombinant. Pour connaître son prix en 0, on doit donc faire $n!$ calculs au lieu de $2^n.2^{n-1}.....2 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Pour $n = 10$ par exemple on obtient 11 valeurs possibles et $11! \sim 4.10^7$ avec un arbre recombinant, et 2048 valeurs possibles soit 7.10^19 calculs sinon.

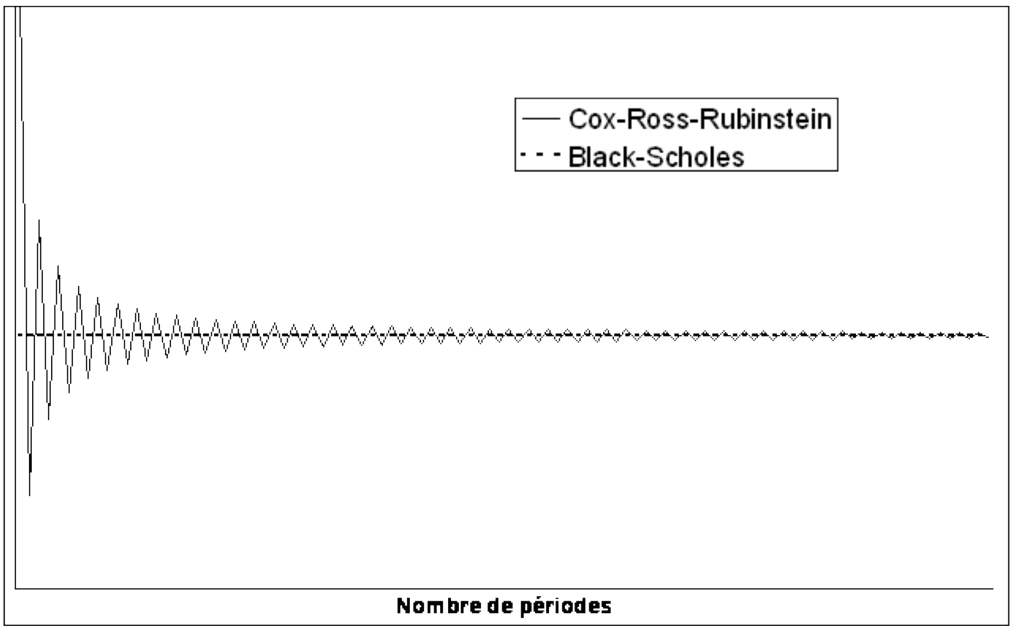
A RETENIR :
- **Le prix de l'actif s'écrit toujours comme l'espérance actualisée de sa valeur finale sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$.**
- **La probabilité risque neutre rend les actifs réactualisés des martingales et de manière équivalente les stratégies de portefeuille simple réactualisées sont des martingales aussi.**

X Résolution par procédure numérique - algorithme de CRR

1 TP sous Excel/VBA

2 Convergence du modèle de CRR

Si l'on fait tendre le nombre n de périodes vers l'infini, et pour un choix judicieux de la forme de u et d, ce modèle converge vers un modèle en temps continu appelé modèle de Black-Scholes (cf chapitre suivant).
Afin de manipuler des objets similaires en temps continu, il nous faut utiliser la théorie des processus en temps continu que l'on appelle calcul stochastique, avec l'intégrale stochastique !



n impair par au dessus
n pair par en dessous

XI Modèles dérivés

Il existe de multiples variantes de cette approche par arbre de l'évaluation d'actifs financiers, qui sont des modèles améliorés du modèle de Cox Ross et Rubinstein.

1 Arbre trinomial

Si on généralise cette approche par arbres en supposant qu'il y a plusieurs possibilités d'augmentation ou de diminution à chaque période. On obtient plus généralement ce que l'on appelle arbre multinomial, dont le premier exemple est l'arbre trinomial (possibilité pour le prix de rester stable, c'est-à-dire de prendre 3 valeurs). arbre recombinant

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{2t}} \qquad (1.13)\\ m &= 1 \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{2t}} \\ S_u = S.u \quad &, \quad S_m = S \ \ , \ \ S_d = S.d \\ p_u &= \left(\frac{e^{Yt/2}-d}{u-d}\right)^2 \\ p_d &= \left(\frac{u-e^{Yt/2}}{u-d}\right)^2 \\ p_m = 1-p_u-p_d \end{aligned}$$

où Y est le rendement du sous-jacent (pour une action sous la probabilité risque neutre $Y = r$ (taux d'intérêt), futures $Y = 0$, devises $Y = (domesticinterestrate - foreigninterestrate)$).

On trouve que le modèle trinomial a des résultats similaires au modèle binomial, aussi bien quant à la précision que pour la convergence. Cependant, le modèle trinomial est plus efficace que le modèle binomial : il donne des résultats aussi précis que le modèle binomial, mais en utilisant 4 fois moins d'intervalles de temps. Donc ces deux modèles sont équivalents, mais le modèle trinomial demande moins de temps de calculs.

2 Jarrow et Rudd

Le modèle de Jarrow et Rudd, datant de 1983, est un modèle binomial avec un autre choix de paramètres : la probabilité de monter et de descendre est fixée égale à 1/2 (proba risque-neutre). C'est une condition autre que $u = 1/d$ qui permet de fiwer d'autres paramètres. Ainsi, u et d se trouvent être modifiés en conséquence.

$$\begin{aligned} u &= e^{(Y-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}} \\ d &= e^{(Y-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t-\sigma\sqrt{\delta t}} \\ S_u &= S.u \\ S_d &= S.d \\ p_u = p_d &= \frac{1}{2} \end{aligned} \tag{1.14}$$

où Y est le rendement du sous-jacent (pour une action sous la probabilité risque neutre $Y = r$ (taux d'intérêt), futures $Y = 0$, devises $Y = (domesticinterestrate - foreigninterestrate)$).

Ce modèle est peu répandu.

3 Modèle de Tian (1993)

De même dans ce modèle binomial, les paramètres u et d sont choisis différemment :

$$\begin{aligned} u &= \frac{MV}{2}\left(V+1+\sqrt{V^2+2V-3}\right) \\ u &= \frac{MV}{2}\left(V+1-\sqrt{V^2+2V-3}\right) \\ M &= \exp\left(r\delta t\right) \\ V &= \exp\left(\sigma^2\delta t\right) \end{aligned} \tag{1.15}$$

Ce modèle est peu utilisé en pratique, et est plutôt anecdotique.

XII Exemple d'utilisation de l'approche binomiale en assurance : titrisation

Considérons un marché complet mono-périodique avec 2 actifs, et sans opportunité d'arbitrage :

- Actif A (sans risque) : $1\text{€} \longrightarrow 1.03\text{€}$
- Actif B (risqué) : $1\text{€} \begin{cases} \xrightarrow{p=1/2} 1{,}12\text{€} \\ \xrightarrow[1-p=1/2]{} 0.98\text{€} \end{cases}$

On souhaite évaluer un produit d'assurance contre une baisse du marché actions : l'actif C (comme cat).
L'actif C a une évolution future donnée par :

103€ hausse du marché
?
106€ baisse du marché

On cherche le prix auquel il faut proposer ce produit d'assurance.
On peut résoudre ce problème en faisant une approche financière du problème. Il suffit de considérer C comme un produit dérivé, et d'utiliser l'évaluation risque-neutre.

Sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, tous les actifs ont le même rendement moyen. La probabilité q de hausse sous $\mathbb{Q}$ est donc :

$$1.12q + 0.98(1-q) = 1.03, \text{ soit } q = 0.357.$$

Le prix de l'actif C est alors donné par l'espérance sous $\mathbb{Q}$ du payoff actualisé :

$$[103q + 106(1-q)]/1.03 = 101.87€$$

Ce prix est expliqué par

$$\begin{cases} 1.03a + 1.12b &= 103 \\ 1.03a + 0.98b &= 106 \end{cases}$$

Le portefeuille répliquant est ainsi constitué de quantités $a = 123.30$ d'actif A et $b = -21.43$ d'actif B. Le prix du portefeuille répliquant est donc donné par : $a + b = 101.87€$.

Dans ce cas, une approche actuarielle peut aussi être mise en oeuvre :
On peut par ex. calculer le payoff moyen actualisé (sous $\mathbb{P}$) :

$$[103q + 106(1-q)]/1.03 = 101.46€$$

et rajouter une prime de risque (ou chargement de sécurité). On retrouve le résultat de l'approche financière

$$101.87€ = 101.46€ + 0.41€$$

si le taux de chargement est de 0.4%.
Le premier terme est ce que l'on appelle le Best Estimate, et le second la Market Value Margin (ou MVM).

Conclusion : dans l'approche financière, le passage à la probabilité risque-neutre contient la notion de prime de risque comme dans l'approche actuarielle.