M1 Actuariat & Econométrie et Statistiques, année 2020–2021.

Numéro copie (obligatoire) :

Statistique Inférentielle
Contrôle terminal

Jeudi 7 janvier

Durée 1h30, documents, téléphone, calculatrice interdits

Veuillez soigner la présentation et bien justifier les résultats

Vous rédigez directement sur le sujet, vous notez le numéro de la copie sur le sujet (si il n'y a pas de numéro vous en inventez un que vous notez sur la copie et sur le sujet) et à la fin de l'épreuve, vous glissez le sujet dans la copie et vous rendez le tout.

Le barême (indicatif) prévu est le suivant : 12-8

Rappel :

- La densité d'une loi Gamma de paramètre (n, a) est :

$$f_{(a,b)}(x) = \frac{a^n}{\Gamma(n)} e^{-ax} x^{n-1} \quad \text{pour } x > 0$$

- Une loi exponentielle de paramètre $\lambda >$ est une loi Gamma$(1, \lambda)$
- Une loi du χ^2_n à n degrés de liberté est une loi Gamma $(n/2, 1/2)$
- Si Z suit une loi Gamma (r, λ) alors $Y = 2\lambda Z$ suit une loi du χ^2_{2r}.

Exercice 1 :
Une petite devinette pour détendre l'atmosphère :
Mon premier est l'acronyme du week end festif permettant l'intégration des nouveaux étudiants à l'Isfa.
Mon second est taureau en anglais.
Mon tout est la loi que nous allons étudier dans cette exercice.

Une variable aléatoirre X suit une loi de Weibull de paramètre $\alpha > 0$ et $\lambda > 0$ si sa densité s'écrit :

$$f(x) = \alpha\lambda x^{\lambda-1}e^{-\alpha x^{\lambda}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}+}(x)..$$

On s'intérresse au paramètre $\theta = \frac{1}{\alpha}$. Soit $(X_1, ..., X_n)$ un échantillon aléatoire indṕendant de même loi que X.

1. On suppose que λ est connu. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_{MV}$ de θ.

Les hypothèses sont vérifiées

$$L(-,\theta) = \prod_{1}^{n} \theta^{-1}\lambda x_i^{\lambda-1} e^{-\theta^{-1}x_i^{\lambda}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x_i) = \theta^{-n}\lambda^{n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda}\right) \mathbb{1}_{\min x_i \geq 0}$$

$$\ln L = -n\ln\theta + n\ln\lambda + \sum_{i=1}^{n}(\lambda-1)\ln x_i - \frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda} \qquad x_i \geq 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = -\frac{n}{\theta} + \frac{1}{\theta^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda} \;\; \hookrightarrow \hat{\theta}_{MV} \text{ est tq } -\frac{n}{\hat{\theta}_{MV}} + \frac{1}{\hat{\theta}_{MV}^2}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda} = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_{MV} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda}}{n} = \overline{X_n^{\lambda}}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\theta^2} = \frac{n}{\theta^2} - \frac{2}{\theta^3}\sum_{i=1}^{n} x_i^{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 \ln L(\hat{\theta}_{MV})}{\partial\theta^2} < 0$$

Donc $\hat{\theta}_{MV}$ est bien l'EMV de θ.

2. Déterminer la loi de X^{λ}. Quelle est son espérance $\mathbb{E}(X^{\lambda})$.

$u = x^{\lambda}$
$du = \lambda x^{\lambda-1}dx$

Loi de X^{λ} ?

$$\mathbb{E}[X^{\lambda}] = \int x^{\lambda}\frac{1}{\theta}\lambda x^{\lambda-1}e^{-\frac{1}{\theta}x^{\lambda}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}^+}(x)\,dx = \int u\frac{1}{\theta}e^{-\frac{u}{\theta}}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(u)\,du$$

changement de var

$$\Rightarrow X^{\lambda} \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$$

$$\mathbb{E}[X^{\lambda}] = \theta$$

3. Calculer le biais de $\hat{\theta}_{MV}$.

$$B_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] - \theta \quad \text{et } \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum X_i^\lambda\right] = \mathbb{E}[X_1^\lambda] = \theta$$

$$\Longrightarrow B_\theta(\hat{\theta}_{MV}) = 0$$

$\hat{\theta}_{MV}$ est SB pour θ.

4. Cet estimateur est-il exhaustif ? Efficace ?

$$L(\_,\theta) = \theta^{-n}\lambda^n \prod_{i=1}^n x_i^{\lambda-1} \exp\left(-\frac{1}{\theta}\sum_{i=1}^n x_i^\lambda\right) \mathbb{1}_{\min x_i \geq 0}$$

$$= \underbrace{\theta^{-n}\lambda^n \exp\left(-\frac{n\hat{\theta}_{MV}}{\theta}\right)}_{\varphi(\theta,\hat{\theta}_{MV})} \underbrace{\prod_{i=1}^n x_i^{\lambda-1} \mathbb{1}_{\min x_i \geq 0}}_{\psi(x_1,\_,x_n)}$$

Donc oui cet estimateur est exhaustif

Efficace si $V(\hat{\theta}_{MV}) = \dfrac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)}$

$V(\hat{\theta}_{MV}) = \dfrac{1}{n^2} \times n\theta^2 = \dfrac{\theta^2}{n}$ et $g : x \mapsto x$ $\quad g(\theta) = \theta$ $\qquad I_n(\theta) = -\mathbb{E}\left[\dfrac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2}\right]$

$$= -\frac{n}{\theta^2} + \frac{2}{\theta^3} \times n\theta = \frac{n}{\theta^2}$$

Donc $V(\hat{\theta}_{MV}) = \dfrac{\theta^2}{n} = \dfrac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)} = \dfrac{\theta^2}{n}$

Donc efficace

5. Calculer l'information de Fisher $I_X(\theta)$.

$$I_X(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln(f(X,\theta))\right] = \theta^2$$

6. Quelle est l'erreur quadratique moyenne de $\hat{\theta}_{MV}$.

$$MSE = \mathbb{E}[(\hat{\theta}_{MV}-\theta)^2] = \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}^2 - 2\theta\hat{\theta}_{MV} + \theta^2]$$

$$= \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}^2] - 2\theta\, \underbrace{\mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}]}_{=\theta} + \theta^2$$

$$= \mathbb{E}[\hat{\theta}_{MV}^2] - \theta^2$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\lambda}\right)^2\right] - \theta^2$$

$$= \frac{1}{n^2}\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{\lambda}\right)^2\right] - \theta^2 = \frac{n(n+1)\theta^2}{n^2} - \theta^2$$

$$= \theta^2 + \frac{\theta^2}{n} - \theta^2$$

$$= \frac{\theta^2}{n}$$

Or $X_i^{\lambda} \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\theta}\right)$

$$\Rightarrow \sum X_i^{\lambda} \sim \Gamma\left(n, \frac{1}{\theta}\right)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\left(\sum X_i^{\lambda}\right)^2\right] = \int_0^{\infty} x^2 \frac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^n}{\Gamma(n)} e^{-\left(\frac{1}{\theta}\right)x} x^{n-1}\, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{\theta}\right)^n}{\Gamma(n)} e^{-\left(\frac{1}{\theta}\right)x} x^{n+1}\, dx = n(n+1)\theta^2$$

Donc $MSE = \frac{\theta^2}{n}$

7. On rappelle (ou pas) que la fonction caractéristique d'une loi du Khi-deux à k degrés de liberté est $\phi_k(t) = (1-2it)^{-k/2}$. Quelle est la loi de $\frac{2}{\theta}X^\lambda$ et de $\frac{2}{\theta}\sum_{i=1}^n X_i^\lambda$.

$$\mathbb{E}[e^{it\frac{2}{\theta}X^\lambda}] = \int e^{it\frac{2}{\theta}x} \frac{1}{\theta} e^{-\frac{x}{\theta}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)dx$$

$$= \int_0^\infty \frac{1}{\theta} e^{(-\frac{1}{\theta}+it\frac{2}{\theta})x} dx = \frac{1}{\theta}\left[\frac{1}{-\frac{1}{\theta}+it\frac{2}{\theta}} e^{(-\frac{1}{\theta}+it\frac{2}{\theta})x}\right]_0^\infty$$

$$= \frac{1}{\theta}\frac{1}{\frac{1}{\theta}-it\frac{2}{\theta}} = \frac{1}{1-2it}$$

$$\Longrightarrow \frac{2}{\theta}X^\lambda \sim \chi_2^2$$

$\sum X_i^\lambda \sim \Gamma(n,\theta)$ car $X_i^\lambda \sim \mathcal{E}(1/\theta)$

$$\Longrightarrow 2 \times \frac{1}{\theta} \times \sum X_i^\lambda \sim \chi_{2n}^2$$

8. Proposer un intervalle de confiance pour le paramètre θ de niveau $1-\alpha$ pour un α fixé.

$$\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum X_i^\lambda$$

On a $\frac{2}{\theta}\sum X_i^\lambda \sim \chi_{2n}^2$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{2}{\theta}\sum X_i^\lambda \leq \chi^2_{2n,1-\alpha}\right) = 1-\alpha$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(\frac{2}{\theta}n\hat{\theta}_n \leq \chi^2_{2n,1-\alpha}\right) = 1-\alpha$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(\theta \geq \frac{2n\hat{\theta}_n}{\chi^2_{2n,1-\alpha}}\right) = 1-\alpha$$

Donc le paramètre $\theta \in \left[\frac{2n\hat{\theta}_n}{\chi^2_{2n,1-\alpha}} ; +\infty\right[$ avec une proba de $1-\alpha$.

9. On considère le test d'hypothèse

$$H_0 \ : \ \theta = \theta_0 \qquad \text{contre} \qquad H_1 \ : \ \theta = \theta_1$$

avec $\theta_1 > \theta_0 > 0$.
Déterminer la région critique W du test le plus puissant de sensibilité α en fonction d'un quantile d'une loi du χ^2.

$$V_{\theta_1,\theta_0} = \frac{L(\_,\theta_1)}{L(\_,\theta_0)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{-n} \frac{\exp\left(-\frac{1}{\theta_1}\sum X_i^\lambda\right)}{\exp\left(-\frac{1}{\theta_0}\sum X_i^\lambda\right)} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{-n} \exp\left(\underbrace{\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}\right)}_{>0}\sum X_i^\lambda\right)$$

$$= \left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{-n} \exp\left(\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}\right) n\hat{\theta}_n\right)$$

↗ fn $\hat{\theta}_n$ qui est exhaustive

On rejette H_0 si $\hat{\theta}_n \geq k_\alpha$
avec k_α tq $\mathbb{P}_{H_0}(\hat{\theta}_n \geq k_\alpha) = \alpha$

Sous H_0, $\frac{2}{\theta_0}\sum X_i^\lambda \sim \chi^2_{2n}$, or $\hat{\theta}_n = \frac{1}{n}\sum X_i^\lambda$

$\Rightarrow$ Sous H_0 $\frac{2n}{\theta_0}\hat{\theta}_n \sim \chi^2_{2n}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{H_0}\left(\frac{2n\hat{\theta}_n}{\theta_0} \geq \underbrace{\frac{2n k_\alpha}{\theta_0}}_{\chi^2_{2n,1-\alpha}}\right) = \alpha \Rightarrow k_\alpha = \frac{\theta_0 \chi^2_{2n,1-\alpha}}{2n}$$

quantile d'ordre $1-\alpha$ d'une χ^2_{2n}

$$\Rightarrow W = \left\{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \sum_{i=1}^n x_i^\lambda \geq \frac{\theta_0 \chi^2_{2n,1-\alpha}}{2}\right\}$$

10. Exprimer la puissance de ce test en fonction d'un quantile d'une loi du χ^2 et de θ_0 et θ_1.

$\beta(\theta) = \mathbb{P}_\theta((X_1, \ldots, X_n) \in W)$

Puissance du test

En Q9 on a basé W avec $\{\hat{\theta}_n \geq k_\alpha\}$ mais cela $\Leftrightarrow$ à $\{V_{\theta_1,\theta_0} \leq k'_\alpha\}$
où k'_α est tq $\mathbb{P}_{H_0}(V_{\theta_1,\theta_0} \leq k'_\alpha) = \alpha$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{H_0}\left(\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{-n} \exp\left(\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_1}\right) n\hat{\theta}_n\right) \leq k'_\alpha\right) = \alpha$$

Or Sous H_0, $\frac{2n\hat{\theta}_n}{\theta_0} \sim \chi^2_{2n}$ $\Rightarrow \mathbb{P}_{H_0}\left(\frac{2n\hat{\theta}_n}{\theta_0} \leq \underbrace{\frac{2}{1-\frac{\theta_0}{\theta_1}} \ln\left(\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^n k'_\alpha\right)}_{\chi^2_{2n,1-\alpha}}\right) = \alpha$

$$\Rightarrow \frac{2}{1-\frac{\theta_0}{\theta_1}} \left(n\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right) + \ln(k'_\alpha)\right) = \chi^2_{2n,1-\alpha}$$

$$\Rightarrow k'_\alpha = \exp\left(\chi^2_{2n,1-\alpha} - \frac{2}{1-\frac{\theta_0}{\theta_1}} n\ln\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \beta(\theta) = \mathbb{P}_\theta\left(\left(\frac{\theta_1}{\theta_0}\right)^{-n} \exp\left(\left(\frac{1}{\theta_0}-\frac{1}{\theta_0}\right)\sum X_i^\lambda\right) \leq \exp\left(\chi^2_{2n,1-\alpha}\right.\right.$$

11. Déterminer un test uniformément plus puissant de sensibilité α pour les nouvelles hypothèses

$$H_0 \ : \ \theta = \theta_0 \qquad \text{contre} \qquad H_1 \ : \ \theta > \theta_0.$$

$$V_{\theta,\theta_0} = \frac{L(x_1,\dots,x_n,\theta)}{L(x_1,\dots,x_n,\theta_0)} = \frac{\theta^{-m}\exp(-\frac{1}{\theta}\sum x_i^\lambda)}{\theta_0^{-m}\exp(-\frac{1}{\theta_0}\sum x_i^\lambda)}$$

$$= \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{-m}\exp\left(\frac{1}{2}\left(1-\frac{\theta_0}{\theta}\right)T_m\right) \quad \nearrow \text{ en } T_m$$

Or sous H_0, $\frac{2}{\theta_0}\sum X_i^\lambda \sim \chi^2_{2m}$

On pose $T_m = \frac{2}{\theta_0}\sum_{i=1}^m X_i^\lambda$ Stat exhaustive

$\Rightarrow$ On rejette si $\{T_m \geq k_\alpha\}$ avec k_α tq $\mathbb{P}_{H_0}(T_m \geq k_\alpha) = \alpha$

$\mathbb{P}_{H_0}(T_m \geq k_\alpha) = \alpha \implies k_\alpha = \chi^2_{2m,1-\alpha}$

Donc $\underset{\text{région de rejet}}{W} = \left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \frac{2}{\theta_0}\sum X_i^\lambda \geq \chi^2_{2m,1-\alpha}\right\} \iff W = \left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n, \sum X_i^\lambda \geq \frac{\theta_0}{2}\chi^2_{2m,1-\alpha}\right\}$

12. Déterminer la puissance de ce test.

$$\beta(\theta) = \mathbb{P}_\theta((x_1,\dots,x_m)\in W) = \mathbb{P}_\theta\left(\sum X_i^\lambda \geq \frac{\theta_0}{2}\chi^2_{2m,1-\alpha}\right)$$

Or on a mq $\frac{2}{\theta}\sum X_i^\lambda \sim \chi^2_{2m}$ (avec les X_i qui suivent une loi de Weibull de paramètres $\underbrace{\frac{1}{\theta}}_{=\alpha}$ et λ)

$$\implies \beta(\theta) = \mathbb{P}_\theta\Big(\underbrace{\frac{2}{\theta}\sum X_i^\lambda}_{\sim\chi^2_{2m}} \geq \frac{\theta_0}{\theta}\chi^2_{2m,1-\alpha}\Big)$$

$\chi^2_{2m} \sim \Gamma(m, 1/2)$

$$\implies \beta(\theta) = 1 - F_{\chi^2_{2m}}\left(\frac{\theta_0}{\theta}\chi^2_{2m,1-\alpha}\right)$$

fdr d'une χ^2_{2m}

$$= 1 - \frac{\gamma\left(m, \frac{1}{2}\times\frac{\theta_0}{\theta}\chi^2_{2m,1-\alpha}\right)}{\Gamma(m)}$$

où γ est la fonct° gamma incomplète

i.e $\gamma : (a,x) \mapsto \int_0^x t^{a-1}e^{-t}\,dt$.

Exercice 2

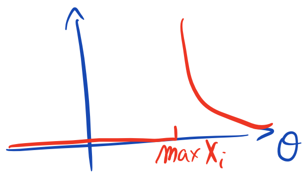
Considérons un échantillon de v.a.i.i.d. $X_1, ..., X_n$ de loi uniforme $\mathcal{U}[0, \theta]$ avec $\theta > 0$.

1. Trouver l'estimateur $\hat{\theta}_n$ du maximum de vraisemblance pour le paramètre θ.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\theta} & \text{si } x \in [0, \theta] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\Rightarrow L = \theta^{-n} \mathbb{1}_{\min X_i \geq 0} \mathbb{1}_{\max X_i \leq \theta}$$

Nous n'avons pas l'indep du support $\Rightarrow$ On maximise directem^t la vraisemblance



$$\Rightarrow \hat{\theta}_n = \max_{i \in [1, n]} X_i$$

2. Calculer la loi de $\hat{\theta}_n$.

$$\hat{\theta}_n = \max_{i \in [1,n]} X_i$$

Soit $x \in [0, \theta]$, $\mathbb{P}(\hat{\theta}_n \leq x) = \mathbb{P}(\max X_i \leq x)$

$$= \mathbb{P}(X_1 \leq x)^n$$

$$= \left(\int_0^x \frac{1}{\theta} dt\right)^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n$$

$$\Rightarrow f_{\hat{\theta}_n}(x) = n\theta^{-n} x^{n-1} \mathbb{1}_{[0,\theta]}(x)$$

3. Calculer le biais de $\hat{\theta}_n$. $\hat{\theta}$ est-il convergent ? Exhaustif ?

$$B_\theta(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] - \theta = \int_0^\theta x\, n\theta^{-n} x^{n-1} dx - \theta$$
$$= \int_0^\theta n\theta^{-n} x^{n} dx - \theta$$
$$= n\theta^{-n}\left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^\theta - \theta = n\theta^{-n}\left(\frac{\theta^{n+1}}{n-1}\right) - \theta$$
$$= \frac{n\theta}{n-1} - \theta = \frac{\theta}{n-1} \xrightarrow[\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ asympt SB (1)

$$V(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n^2] - \mathbb{E}[\hat{\theta}_n]^2 = \int_0^\theta x^2 n\theta^{-n}x^{n-1}dx - \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2}$$
$$= \int_0^\theta n\theta^{-n}x^{n+1}dx - \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2} = n\theta^{-n}\frac{\theta^{n+2}}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2}$$
$$= \frac{n\theta^2}{n+2} - \frac{n^2\theta^2}{(n-1)^2}$$
$$\Rightarrow V(\hat{\theta}_n) = \frac{\left(n(n-1)^2 - n^2(n+2)\right)\theta^2}{(n-1)^2(n+2)} = \frac{n(1-4n)\theta^2}{(n-1)^2(n+2)} \xrightarrow[\infty]{} 0 \quad (2)$$

$\Rightarrow$ Convegent (1)+(2)

$$L = \theta^{-n} 1_{\max X_i \le \theta} 1_{\min X_i \ge 0} = \underbrace{\theta^{-n} 1_{\hat{\theta}_n \le \theta}}_{\varphi(\theta, \hat{\theta}_n)} \underbrace{1_{\min X_i \ge 0}}_{\varphi(x_1, \dots, x_n)}$$ Donc exhaustif

4. Calculer l'estimateur des moments $\tilde{\theta}$ de θ.

Dimens° 1

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{\theta}{2}$$

$$\Rightarrow \frac{\tilde{\theta}}{2} = \overline{X_n} \quad \Rightarrow \tilde{\theta} = 2\overline{X_n}$$

5. Calculer le biais de $\tilde{\theta}$.

$$B_\theta(\tilde{\theta}) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta = \mathbb{E}[2\overline{X}_n] - \theta$$
$$= 2\,\mathbb{E}[\overline{X}_n] - \theta$$
$$= 2 \times \frac{\theta}{2} - \theta = 0$$

Donc $\hat{\theta}$ estimateur SB.

6. $\tilde{\theta}$ est-il convergent ?

$$V(\hat{\theta}) = V(2\overline{X}_n) = 4\,V(\overline{X}_n) = 4 \times \frac{1}{n^2} V\left(\sum X_i\right) = \frac{4}{n^2} \sum V(X_i)$$
$$= \frac{4}{n^2}\, n\, V(X_1) = \frac{4}{n} \times \frac{\theta^2}{12} = \frac{\theta^2}{3n} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

Donc convergent car SB et $V(\hat{\theta}) \to 0$

7. Quel estimateur est préférable au sens du risque quadratique ?

$$R(\theta,\hat{\theta}_n) = B_\theta(\hat{\theta}_n)^2 + V(\hat{\theta}_n)$$
$$= \frac{\theta^2}{(n-1)^2} + \frac{n(1-4n)\theta^2}{(n-1)^2(n+2)} = \frac{(n+2+n(1-4n))\theta^2}{(n-1)^2(n+2)}$$

$$R(\theta,\hat{\theta}) = B_\theta(\hat{\theta})^2 + V(\hat{\theta}) = \frac{\theta^2}{3n}$$

$$\frac{R(\theta,\hat{\theta}_n)}{R(\theta,\hat{\theta})} = \frac{\frac{(-4n^2+2n+2)\theta^2}{(n-1)^2(n+2)}}{\frac{\theta^2}{3n}} = \frac{3n(-4n^2+2n+2)}{(n-1)^2(n+2)}$$

$\hat{\theta}$ est préférable au sens du risque quadratique.

8. Construire le test $H_0 : \theta = 1$ contre $H_1 : \theta = 2$.

$$V_{2,1} = \frac{L(x_1,\dots,x_n,2)}{L(x_1,\dots,x_n,1)} = \frac{2^{-n}\,1_{\min X_i \geq 0}\,1_{\max X_i \leq 2}}{1^{-n}\,1_{\min X_i \geq 0}\,1_{\max X_i \leq 1}} = \frac{1}{2^n}\,1_{\max X_i \leq 1}$$ Sinon pas de sens au dénominateur

On rejette si $V_{2,1} \geq k_\alpha$ avec k_α tq $P_{H_0}(V_{2,1} \geq k_\alpha) = \alpha$

Sous H_0, $X_i \sim \mathcal{U}[0,1]$

$$\Rightarrow P_{H_0}(V_{2,1} \geq k_\alpha) = \alpha$$
$$\Rightarrow P(1_{\hat{\theta}_n \leq 1} \geq 2^n k_\alpha) = \alpha$$

$$P(1_{\hat{\theta}_n \leq 1} = 1) = 1 \times P(\hat{\theta}_n \leq 1)$$
$$=$$

$$P(1_{\hat{\theta}_n \leq 1} \geq x) = 1 - \underbrace{P(1_{\hat{\theta}_n \leq 1} \leq x)}$$

Bizarre