Université Lyon 1

UNIVERSITE LYON 1

Année universitaire : /

Diplôme :

Epreuve :

Date :

Nom (de jeune fille pour les femmes mariées) et prénoms.

Numéro de la carte d'étudiant :

Signature :

NOTE :

Mai 2011 MFA

Numéro à reporter sur les intercalaires : 262822

Nombre d'intercalaires :

Question 1

$$PT = BE + RM = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}\left[\sum_t \delta(t) F(t)\right] + RM$$

BE : moyenne des flux futurs probables de trésorerie qui prend en compte les risques non réplicables et mutualisables (risques d'assurance) modélisés par $\mathbb{P}^a$ et les risques réplicables et non mutualisables (risques financiers) modélisés par $\mathbb{Q}^f$, dans le cadre de l'AOA.
Les risques ni mutualisables ni financiers sont pris en compte via la marge de risque calculée dans une logique de coût du capital.

Question 2

$PM(x, 0)$ Prime initiale nette des chargements

Question 3

$r_s(t)$ est aléatoire car il rend compte de l'incertitude sur le rendement de l'actif (dépend performances des marchés financiers)

$\mu_x(t)$ est déterministe car comme il décrit les sorties anticipées (essentiellement rachats structurels) on suppose implicitement que le risque d'assurance est complètement mutualisé $\Rightarrow$ il n'y a plus d'aléa / de risque

Question 4

Prestations payées en $t < T$: $\underbrace{PM(x,t)}_{\text{ce qui est versé à l'assuré}}\ \underbrace{\mu_x(t)}_{\text{sortie anticipée}}\ \overbrace{dt}^{\text{tps que sa prend pour sortir}}$?

on peut définir $BEL^F(x,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\sum \text{flux} \mid F]$ prestat° actualisés avec $\mathbb{P}$ une proba historique qui modélise les risques d'assurances.

Prestations payées en T : le montant PM est versé à l'assuré vivant.

d'où $\sum$ prestations actualisées sur $[0,T]$ conditionnellement à un état du monde financier est

$$BEL^F(x,T) = \int_0^T PM(x,t)\mu_x(t)\delta(t)\,dt + \delta(T)PM(x,T)$$

Question 5

$$BEL(x,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[BEL^F(x,T)\right] = \int_0^T \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[PM(x,t)\mu_x(t)\delta(t)\right]dt + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\delta(T)PM(x,T)\right]$$

avec $\mathbb{Q}$ proba risque neutre modélisant le risque financier

Question 6

On veut expliquer quelle est la condition pour que $\delta(t)$ devienne $P(0,t)$

Il faut que $PM(x,t) \perp\!\!\!\perp \delta(t)$ ie $r_s(t) \perp\!\!\!\perp r(t)$

Dans ce cas on a

$$BEL(x,T) = \int_0^T \overbrace{\mu_x(t)}^{\text{déterministe}} \mathbb{E}^Q[PM(x,t)] \overbrace{\mathbb{E}^Q[\delta(t)]}^{=P(0,t)} dt + \underbrace{\mathbb{E}^Q[\delta(T)]}_{=P(0,T)} \mathbb{E}^Q[PM(x,T)]$$

$$= \int_0^T \mu_x(t) \mathbb{E}^Q[PM(x,t)] P(0,t) dt + P(0,T) \mathbb{E}^Q[PM(x,T)]$$

Question 7

$$BEL^F(x,T) = \int_0^T PM(x,0) S_x(t) \cancel{e^{rt}} \cancel{e^{-rt}} \mu_x(t) dt + \cancel{e^{-rT}} PM(x,0) S_x(T) \cancel{e^{rT}}$$

on a $S_x(t) = e^{-\int_0^t \mu_x(u) du}$

$$S'_x(t) = -\mu_x(t) e^{-\int_0^t \mu_x(u) du} = -\mu_x(t) S_x(t)$$

$$\Rightarrow BEL^F(x,T) = PM(x,0) \left[-S_x(t) \right]_0^T + PM(x,0) S_x(T)$$

$$= PM(x,0) \left[-S_x(T) + 1 \right] + PM(x,0) \times S_x(T)$$

$$= PM(x,0)$$

Logique car on actualise au même taux que l'on revalorise donc on retombe sur la prime initiale.

Question 8

$r_S(t) = r(t) + \tau$ — on n'a plus de r_S ni de r !

$PM(x,t)\delta(t) = PM(x,0) S_x(t) e^{\tau t}$

$$BEL^F(x,T) = \int_0^T PM(x,0) S_x(t) e^{\tau t} \mu_x(t) dt + e^{\tau T} PM(x,0) S_x(T)$$

CDV $u = S_x(t)$ $\quad du = -\mu_x(t) S_x(t) dt$

$$BEL^F(x,T) = \int_{\underbrace{S_x(0)}_{=1}}^{S_x(T)} PM(x,0) e^{\tau S_x^{-1}(u)} du + e^{\tau T} PM(x,0) S_x(T)$$

si $\tau = 0$ $\quad BEL^F(x,T) = PM(x,0) [S_x(T) - 1 + S_x(T) = PM(x,0)$

on retrouve bien le résultat question 7

Comme remarqué précédemment, $PM(x,t)S(t)$ ne dépend pas de l'environnement financier

De plus comme supposé précédemment $\mu_x(t)$ et donc $S_x(t)$ sont déterministes donc on n'a plus d'aléatoire. $BEL^F(x,T)$ est une variable déterministe

$$BEL(x,T) = \mathbb{E}^{Q}\left[BEL^F(x,T)\right] = BEL^F(x,T).$$

Question 9

Tx servi obtenu en tenant compte
- performance de marché (r_A)
- des règles comptables
- de la gestion des provisions financières
- de la participation aux bénéfices

Dans le cas général on calcule

$$BEL(x,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[\Lambda_p]$$

$\mathbb{P}^a$: proba historique qui modélise les risques d'assurance

$\mathbb{Q}^f$: proba risque neutre qui modélise les risques financiers

Λ_p : Σ flux de prestat° actualisés.

On pose T_x la date de rachat
1) on calcule $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\Lambda_p \mid T_x]$
2) on applique $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\Lambda_p \mid T_x]\right]$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}(\Lambda_p) = BEL(x,T)$$

on utilise le thm de transfert avec la loi de T_x

$f_{T_x} = \mu_x S_x$

Numéro de la feuille d'examen
à reporter ci-dessous :
N°

Question 10

F est un fond global (non affecté à une tête en particulier)

$\underbrace{PM(t)}_{\text{prov moyenne}} [r_A(t) - r_S(t)]$ = produits financiers

- F(t) compense une perte en cas d'insuffisance du rendement obtenu par les actifs.

Mutualisation temporelle du rendement

Question 11

l'assureur restitue à l'assuré F(T) le montant du fond au terme T du contrat. au prorata des provisions

$$BEL^F(x,T) = \int_0^T PM(x,t)\mu_x(t)\delta(t)\,dt + \delta(T)PM(x,T)\left(1+\frac{F(T)}{PM(T)}\right)$$

Question n° 7 $\Rightarrow$ $PM(x,t)\delta(t) = PM(x,0)e^{\tilde{c}t}S_x(t)$ on n'a pas d'aléa

$$BEL(x,T) = PM(x,0)\left[\int_0^T e^{\tilde{c}t}S_x(t)\mu_x(t)\,dt + e^{\tilde{c}T}S_x(T)\left(1+\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{F(T)}{PM(T)}\right]}_{\text{peut s'interpréter comme un taux de PB au terme.}}\right)\right]$$

Question 12

Réponse personnelle : peut être faire dépendre du temps la prime qui complète le tx sans risque $r_S(t) = r(t) + \tilde{c}(t)$.