Modèles de durée / Examen du 11 février 2009

Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Problème : quelques propriétés de l'espérance de vie résiduelle

On considère une variable aléatoire T décrivant une durée de vie ou de fonctionnement et on note S et h respectivement la fonction de survie et la fonction de hasard associées.

Question n°1 (0,5 point) : Rappelez le lien entre S et h.

Question n°2 (1 point) : Démontrez que $E(T) = \int_0^{+\infty} S(t)\,dt$

Question n°3 (2 point) : Donner l'expression de $E(T)$ dans le cas d'une loi de Weibull $S(t) = e^{-t^\alpha}$.

On s'intéresse à la durée de vie résiduelle, conditionnellement au fait d'avoir déjà atteint le temps $x > 0$ et on note $T_x = T | T > x$, l'égalité étant au sens des distributions.

Question n°4 (1,5 point) : Déterminez les expressions de S_x et h_x les fonctions de survie et de hasard associées à T_x. En déduire l'expression de $E(T_x)$ en fonction de S.

Question n°5 (2 points) : En notant $e_x = E(T_x)$, montrez que $\frac{de_x}{dx} = -1 + h(x)e_x$. Que peut-on en conclure lorsque $h(x)$ est petit ?

Question n°6 (1,5 points) : Proposez une définition pour l'espérance de vie partielle entre x et $x + h$.

Question n°6 (1,5 points) : On se place dans le contexte d'une table de mortalité dans lequel les âges sont discrets et mesurés en années. En discrétisant l'expression $E(T) = \int_0^{+\infty} S(t)\,dt$, justifiez l'écriture classique de l'espérance de vie à la naissance $e_0 = \frac{1}{l_0} \sum_{x>0} l_x$ avec la notation usuelle en assurance vie $l_x = l_0 \times S(x)$.

On s'intéresse maintenant à l'impact de la mortalité infantile sur l'espérance de vie à la naissance. Plus précisément, on souhaite comparer deux situations : la situation de référence dans laquelle il n'existe pas de mortalité infantile, $q_x = 0$, $x = 0,\ldots,10$ et celle où 20 % des enfants meurent avant l'âge d'un an et la moitié l'âge de 11 ans (situation prévalant au 17ème siècle).

Question n°7 (5 points) : Traduire le niveau de mortalité infantile ci-dessus en donnant des relations liant l_0, l_1 et l_{11}. Comparez dans les deux situations l'espérance de vie à la naissance et l'espérance de vie partielle entre 0 et 11 ans.

Question n°8 (5 points) : On revient maintenant dans le cadre d'un modèle continu et on cherche les lois telles que pour tout *x* réel positif on ait : $e_x = a \times x + b$ (avec $a \geq 0$ et $b > 0$) ; on demande de :

- Calculer $h(x)$.
- Vérifier que pour $x \geq 0$, $S(x) = \left(1 + \frac{a}{b}x\right)^{-(1+1/a)}$.
- Donner l'espérance de *T*.
- Montrer que si l'on suppose $a < 1$, la variance de *T* existe et est égale à $b^2 \frac{1+a}{1-a}$.