Théorie des Options

Anne EYRAUD-LOISEL

Cours numéro 8-1

16/03/2023

Théorème de pricing

Théorème *Tout produit dérivé C est réplicable par une stratégie de portefeuille simple (x, Δ).*

Le marché est complet.

Démonstration : Considérons un produit dérivé C.

- En t = 1, il prend la valeur C_u^1 dans l'état "up" et C_d^1 dans l'état "down".
- On cherche un couple (x, *Δ*) vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} C_1^u & = & \Delta S_1^u + (x - \Delta S_0)R = xR + (u - R)\Delta S_0 \\ C_1^d & = & \Delta S_1^d + (x - \Delta S_0)R = xR + (d - R)\Delta S_0 \end{array} \right.$$

- C'est un système à 2 équations et 2 inconnues dont la solution est donnée par

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u-d)S_0} \left(= \frac{\phi(S_1^u) - \phi(S_1^d)}{S_1^u - S_1^d} \right) \text{ et } x = \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d} C_1^u + \frac{u-R}{u-d} C_1^d \right)$$

Prix et couverture

$$C_0 = \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d}C_1^u + \frac{u-R}{u-d}C_1^d\right)$$

Donc, sous l'hypothèse d'AOA, la définition économique du prix d'un produit dérivé en t = 0 (valeur initiale d'un portefeuille autofinancé répliquant) est donné par le corollaire :

Corollaire *Le prix du produit dérivé C donnant des flux* C_u^1 *et* C_d^1 *dans les états "up" et "down" est donc donné par la formule ci-contre*

- **Exercice** : On peut montrer ce résultat également en reproduisant le raisonnement fait dans l'exemple introductif.
  Essayez de construire un portefeuille sans risque en ayant une position longue sur *Δ* actions et 1 option. retrouver bien la formule recherchée.
  Cf poly

Remarque

- On remarque que l'espérance de rentabilité de l'action n'intervient pas dans l'évaluation. En effet la formule précédente ne fait pas intervenir les probabilités de variation du cours de l'action à la hausse ou à la baisse.
- Cela semble surprenant et contre-intuitif. On penserait plutôt intuitivement que plus la probabilité de hausse de l'action est élevée, plus la valeur du call augmente, et la valeur du put diminue. En réalité, cette probabilité de hausse ou de baisse est une information ”déjà contenue” ou incorporée dans le cours initial de l'action, dans son modèle d'évaluation et dans le taux sans risque (si on fixe les valeurs terminales et que l'on change les probabilités de hausse ou de baisse, la valeur initiale de l'action augmente, ce qui change u et d et donc le prix de l'option).
- De plus il ne faut pas oublier que l'on évalue l'option en constituant un portefeuille formé d'actions, donc la probabilité de hausse ou de baisse intervient dans l'évolution du portefeuille de couverture.

Probabilité risque neutre

- Le prix du produit dérivé s'écrit comme une **somme pondérée** de ses valeurs futures. Etudions plus en détail comment s'exprime la valeur en 0 d'une stratégie de portefeuille simple en fonction de ses valeurs finales.

$$C_0 = \frac{1}{R}\left(\underbrace{\boxed{\frac{R-d}{u-d}}}_{q} C_1^u + \underbrace{\boxed{\frac{u-R}{u-d}}}_{1-q} C_1^d\right) \overset{?}{=} \frac{1}{R} E^{Q}(C_1)$$

- Au vu de la formule d'évaluation, il est naturel de faire apparaître la variable

$$q = \frac{R-d}{u-d}$$

- L'expression est alors le payoff espéré de l'option. Grâce a cette interprétation de q, l'équation d'évaluation établit que la valeur de l'option, à la date d'aujourd'hui, est l'espérance, sous cette probabilité, de sa valeur future, actualisée au taux sans risque.

- C'est cette probabilité (qui ne dépend pas de C), sous laquelle le prix actuel de C est l'espérance de sa valeur future actualisée, qu'on appelle probabilité neutre au risque.

$$qC_1^u + (1-q)C_1^d$$

AOA → d<R<u

Proposition *L'hypothèse d'AOA implique la relation $d < R < u$.*

- **Démonstration** :
- ***Supposons $d \geq R$***. Une stratégie d'arbitrage est alors donnée par l'achat d'un actif risqué en $t = 0$ ($\Delta = 1$) et la vente de la quantité d'actif sans risque correspondant (S_0) pour avoir une valeur de portefeuille nulle à $t = 0$, car la valeur du portefeuille en $t = 1$ est
  - dans l'état "up", $X_1 = S_0(u - R) > 0$
  - dans l'état "down", $X_1 = S_0(d - R) \geq 0$.
- ***Supposons $u \leq R$***, alors une stratégie d'arbitrage est donnée par la vente d'un actif risqué en $t = 0$, et l'achat de la quantité d'actif sans risque correspondante (S_0) pour avoir une valeur de portefeuille nulle à $t = 0$. En effet la valeur du portefeuille en $t = 1$ est alors
  - dans l'état "up", $X_1 = S_0(R - u) \geq 0$
  - dans l'état "down", $X_1 = S_0(R - d) > 0$.
- ***Remarque*** : Pour créer un arbitrage, on a de nouveau acheté celui qui rapporte le plus et vendu celui qui rapporte le moins.
- Finalement, si l'une des inégalités $d < R < u$ n'était pas vérifiée, un des actifs rapporterait toujours plus que l'autre, et l'hypothèse d'AOA ne serait plus vérifiée.

Probabilité risque neutre

X : prix
$\tilde{X}$: actualisé

- **Définition** On appelle probabilité neutre au risque toute probabilité équivalente à IP qui rende martingale toute stratégie autofinancée simple actualisée, ie telle que :

$$\tilde{X}_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tilde{X}_1 | \mathcal{F}_0\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tilde{X}_1\right] \quad \textit{ou de manière équivalente } X_0 = \frac{1}{R}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_1\right]$$

- **Remarque** : Deux probabilités sont dites équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes ensembles négligeables, ie qu'elles chargent les mêmes états du monde (ie qu'elles ont une densité de Radon-Nikodym l'une par rapport à l'autre). Ici, cela signifie simplement que $Q(w_d) > 0$ et $Q(w_u) > 0$.
- **Remarque** : Ici, sur une seule période, être une martingale signifie simplement que $\mathbf{IE}_Q(X_1) = RX_0$: l'espérance actualisée des valeurs futures est égale à la valeur initiale, autrement dit le portefeuille est équilibré.

Existence d'une proba risque neutre

Proposition 1.2 *Si $d < R < u$, alors il existe une probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$, qui est donnée par*

$$q = \mathbb{Q}(\omega_u) = \frac{R-d}{u-d} \qquad (1.1)$$

- Prenons un portefeuille autofinancé de valeur initiale x et comportant Delta actifs risqués, et notons pour simplifier X_u^1 et X_d^1 ses valeurs en t=1 dans les états "up" et "down".
- Alors, comme on l'a écrit précédemment, on a les relations suivantes et le même système :

$$\begin{cases} X_1^u = \Delta S_1^u + (x - \Delta S_0)R = xR + (u-R)\Delta S_0 \\ X_1^d = \Delta S_1^d + (x - \Delta S_0)R = xR + (d-R)\Delta S_0 \end{cases}$$

- Nous obtenons le même système que précédemment et on trouve :

$$x = \frac{1}{R}\left(\underbrace{\boxed{\frac{u-R}{u-d}}}_{1-q} X_1^d + \underbrace{\boxed{\frac{R-d}{u-d}}}_{q} X_1^u\right)$$

- On introduit donc la probabilité Q définie sur Ω par

$$\mathbb{Q}(\omega_d) = \frac{u-R}{u-d} = 1-q\ , \quad \mathbb{Q}(\omega_u) = \frac{R-d}{u-d} = q$$

- Comme d < R < u, q ∈]0, 1[et Q est bien une probabilité et elle est équivalente à IP. Notre équation se réécrit alors

$$X_0 = x = \frac{1}{R}\left(\mathbb{Q}(\omega_d)X_1^d + \mathbb{Q}(\omega_u)X_1^u\right) = \frac{1}{R}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_1]$$

→ Propriété de martingale

Risque neutre

- **Remarque** : Le terme ”risque neutre” provient de la théorie économique : si les intervenants n’ont pas d’aversion au risque, ils vont s’accorder pour évaluer la valeur d’un portefeuille comme l’espérance actualisée des flux qu’il génère. L’introduction de cette probabilité permet de faire comme si les agents étaient neutres au risque...
- mais attention ce n’est pas le cas dans la réalité !

Existence proba risque neutre → AOA

***Proposition :** S'il existe une probabilité neutre au risque Q, alors il y a Absence d'Opportunité d'Arbitrage.*

- **Démonstration** :
- Soit $\Delta \in R$ tel que le portefeuille simple de valeur initiale nulle associé vérifie $X_1 \geq 0$. Comme Q est une probabilité risque neutre, on a :
- $IE_Q[X_1] = R.0 = 0$, et X_1 est une variable aléatoire positive d'espérance nulle, donc est nulle Q-p.s.
- Et comme IP et Q sont équivalentes (elles ont les mêmes négligeables), $IP(X_1 > 0) = 0$.

Equivalences

- Nous avons finalement montré que

AOA ⇒ $d < R < u$ ⇒ il existe une proba neutre au risque ⇒ AOA

- et donc toutes ces implications sont des équivalences :
- Théorème

AOA ⇔ $d < R < u$ ⇔ il existe une proba neutre au risque

Evaluation et couverture d'un produit dérivé

$$C_0 = \frac{1}{R}\left(qC_1^u + (1-q)C_1^d\right) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C_1)$$

- Comme tout produit dérivé est duplicable par une stratégie de portefeuille simple et que la valeur actualisée des stratégies de portefeuille simple sont des martingales sous la probabilité neutre au risque, en AOA, le prix d'un produit dérivé est donné par l'équation ci-contre
- **Remarque** : La probabilité risque neutre et donc le prix d'une option est indépendant de la tendance réelle p du sous-jacent.
- **Remarque** : Comme tout produit dérivé est duplicable, la valeur réactualisée de tout produit dérivé est une martingale sous la probabilité risque neutre.
- **Remarque** : On a juste besoin de connaître r, u, et d pour trouver le prix de l'actif dérivé, mais encore faut-il estimer les paramètres. Connaître u et d revient à connaître ce que l'on nommera par la suite la volatilité de l'actif.

$C_1 = \phi(S_1)$

Portefeuille de couverture

- ***Proposition*** *Le portefeuille de couverture de l'option est donné par une valeur initiale égale à la valeur initiale de l'option, et un investissement dans* Δ *actifs risqués, où la quantité d'actifs risqués est donné par :*

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u-d)S_0} = \frac{\phi(S_1^u) - \phi(S_1^d)}{S_1^u - S_1^d}$$

- cette quantité s'apparente à la variation du prix de l'option en réponse à la variation du sous-jacent

Unicité de la probabilité risque neutre

- ***Proposition*** *Comme le marché est complet (tout actif est réplicable par une stratégie de portefeuille simple), il y a unicité de la probabilité risque neutre.*
- **Démonstration** : En effet, prenons deux probabilités risque neutre Q_1 et Q_2.
- Pour tout $B \in F_1$, $\mathbf{1l}_B$ est un produit dérivé car il est F_1-mesurable, donc il est duplicable par un portefeuille autofinancé (x,Δ) et l'on a
- $Q_1(B) = \mathbb{E}_{Q_1}[\mathbf{1l}_B] = R.x = \mathbb{E}_{Q_2}[\mathbf{1l}_B] = Q_2(B)$
- Donc Q1 et Q2 sont indistinguables. cqfd.

Exercice : Pricing d'un call et d'un put à la monnaie

- Exercice : Prenons $S_0 = 100$, $r = 0,05$ **taux discret** sur la période, $d = 0,9$ et $u = 1,1$.

1. Quel est le prix et la stratégie de couverture d'un call à la monnaie, ie $K = S_0 = 100$?
2. Qu'en est-il d'un Put à la monnaie ?
3. Vérifie-t-on la relation de parité call-put ?

Exercice : Pricing d'un call et d'un put à la monnaie

- Solution : Prenons $S_0 = 100$, $r = 0,05$ **taux discret** sur la période, $d = 0,9$ et $u = 1,1$.

1. *Quel est le prix et la stratégie de couverture d'un call à la monnaie, ie $K = S_0 = 100$?*
   On construit la proba risque neutre avec
   $q = (1+r-d)/(u-d) = 0,75$
   On en déduit la valeur du call
   $\mathbf{C_0} = (0,75x10+0,25x0)/1,05 = \mathbf{7,14€}$
   et la valeur de la couverture
   $\mathbf{\Delta} = (C_1^u-C_1^d)/((u-d)S_0)=(10-0)/20 \mathbf{= 0,5}$
   Une stratégie de couverture est donc l'achat de 0,5 actifs risqués et le placement de 7,14-100x0,5=-42,86€ dans l'actif sans risque (=emprunt)

2. *Qu'en est-il d'un Put à la monnaie ?*
   $\mathbf{P_0 = 2,38€}$ et $\mathbf{\Delta} = (0-10)/20 = \mathbf{-0,5}$
   Une stratégie de couverture est donc la vente de 0,5 actifs risqués et le placement de 100x0,5-2,38=47,62€ dans l'actif sans risque

3. *Vérifie-t-on la relation de parité call-put ?* **OUI**
   $\mathbf{C_0 - P_0} = 7,5/1,05-2,5/1,05 = 5/1,05 = 100-100/1,05 \mathbf{= S_0 - K/R}$

Univers risque neutre ou univers réel ?

- ***Reprenons notre exemple introductif***. Nous allons montrer que l'évaluation risque-neutre construite dans la partie précédente apporte le même résultat que l'évaluation établie en construisant un portefeuille sans risque et en raisonnant par arbitrage, comme dans l'exemple choisi.
- Dans l'exemple, le cours de l'action est initialement à 20€, il monte à 22€ ou chute à 18€ après 3 mois. L'option considérée est un call européen à 3 mois, de prix d'exercice 21€.
- Le taux d'intérêt sans risque est de 12% par an.
- **Calculer q la probabilité risque neutre**
- **Calculer C la prime de l'option par évaluation risque neutre**

$$q = \frac{R - d}{u - d}$$

Univers risque neutre ou univers réel ?

- **Calculer q la probabilité risque neutre**

1. Notons q la probabilité de hausse du cours de l'action dans l'univers risque-neutre.

Elle est calculée à partir de l'équation ci-contre

$$q = \frac{R - d}{u - d}$$

où ici $R = e^{0,12 \times 3/12}$. Ce qui nous donne q = 0, 6523. (il suffit d'utiliser d = 18/20 et u = 22/20).

2. Pour calculer la probabilité risque-neutre, on peut aussi résoudre tout simplement l'équation correspondante au raisonnement suivant :

l'espérance de rentabilité de l'action dans l'univers risque-neutre est égale au taux sans risque, soit 12%.

La probabilité q doit donc satisfaire : $22q + 18(1 - q) = 20e^{0,12 \times 3/12}$

Et on retrouve q = 0, 6523.

Univers risque neutre ou univers réel ?

- **Calculer C la prime de l'option par évaluation risque neutre**
- A l'issu des 3 mois, l'option d'achat a une probabilité q = 0, 6523 de valoir 1€ et une probabilité 1−q= 0,3477 de valoir 0. Ainsi, sa valeur espérée à l'échéance est donc :

$$0,6523 \times 1 + 0,3477 \times 0 = 0,6523€$$

- Dans l'univers risque-neutre, cette valeur espérée doit être actualisée au taux sans risque, donc la valeur aujourd'hui est :

$$0,6523e^{0,12\times 3/12} = 0,633€$$

- On retrouve la valeur obtenue précédemment. Le raisonnement fondé sur la construction d'un portefeuille sans risque (portefeuille répliquant l'actif sans risque), qui s'apparente à un raisonnement d'arbitrage, et l'évaluation risque-neutre donnent donc la même valeur de l'option.

$$q = \frac{R-d}{u-d}$$

Univers risque neutre ou **univers réel ?**

- **Essayons de regarder p la probabilité réelle au lieu de q la probabilité risque neutre.**
- Soulignons que **q** est la probabilité de hausse dans **l'univers risque-neutre**.
- Généralement, elle n'est pas égale à la probabilité **p** de hausse dans **l'univers réel**.
- Dans notre exemple, **q = 0, 6523**. Lorsque la probabilité de hausse est de 0,6523, l'espérance de rentabilité de l'action est égale au taux sans risque, soit 12%.
- Supposons que dans l'univers réel, **l'espérance de rentabilité de l'action soit de 16%.** On a alors :
- $22p + 18(1 - p) = 20e^{0,16\times3/12}$ Donc **p = 0, 7041**.

$$p = \frac{e^{\mu t} - d}{u - d}$$

Univers risque neutre ou univers réel ?

- L'espérance de payoff de l'option dans l'univers réel est donc égal à

$$p \times 1 + (1 - p) \times 0 = 0,7041.$$

- Malheureusement, on ne sait pas quel taux d'actualisation appliquer au payoff de l'option dans l'univers réel. Une position sur une option d'achat est plus risquée qu'une position dans une action. Par conséquent, le taux d'actualisation à appliquer au payoff d'un call est bien supérieur à 16%. Sans connaître la valeur de l'option, nous ne pouvons pas savoir de combien ce taux doit être supérieur à 16% (effet de levier).
- **L'évaluation risque-neutre résout le problème : dans l'univers risque-neutre, l'espérance de rentabilité de tous les actifs, et donc le taux d'actualisation à utiliser pour tous les payoffs espérés, est le taux sans risque.**
- **Remarque** :

Ici la valeur de l'option est **0,633**, on peut en déduire le taux d'actualisation du payoff de l'option, qui vaut **42,58%**, puisque $0,633 = 0,7041e^{0,4258 \times 3/12}$.

Mais à déterminer pour chaque actif…

$$p = \frac{e^{\mu t} - d}{u - d}$$

Relation liant u, d et la volatilité

- En pratique, lorsqu'on construit un arbre binomial, pour représenter les variations du cours d'une action, **les paramètres u et d sont définis/calibrés à partir de la volatilité de l'action. Comment ?**
- Supposons que l'espérance de rentabilité de l'action (dans l'univers réel, où les investisseurs présentent de l'aversion au risque) soit égale à **μ**, et sa volatilité **σ**.
- La probabilité de hausse dans l'univers réel est notée **p**.
- On reprend le graphique d'évolution de l'actif risqué développé dans la première partie sur le modèle binomial mono-périodique, sur une période de durée t, la vale de l'action peut être multipliée par u ou par d :

$$p = \frac{e^{\mu t} - d}{u - d}$$

L'espérance de la valeur de l'action à la fin de la période est égale à $\mathbf{S_0 e^{\mu t}}$.

A partir de l'arbre, cette espérance s'écrit $\mathbf{pS_0{}^u + (1 - p)S_0{}^d}$

La correspondance entre la rentabilité espérée de l'action et les paramètres u et d s'établit par l'égalité

$$pS_0{}^u + (1 - p)S_0{}^d = S_0 e^{\mu t}$$

Soit : $\mathbf{p = (e^{\mu t} - d) / (u - d)}$

Relation liant u, d et la volatilité

La correspondance entre la rentabilité espérée de l'action et les paramètres u et d s'établit par l'égalité

$$pS_0^u + (1 - p)S_0^d = S_0e^{\mu t}$$

Soit : **$p = (e^{\mu t} - d) / (u - d)$**

- La volatilité du cours de l'action est telle que √t représente l'écart-type relatif de la rentabilité de l'action sur une courte période de durée Δt.

$$Var(S) = S_0^2\ \sigma^2\Delta t$$

- De manière équivalente, la variance de la rentabilité est égale à

$$Var(S) = E_{IP}(S^2) - E_{IP}(S)^2 = S_0^2\ (pu^2 + (1 - p)d^2 - (pu + (1 - p)d)^2)$$

Pour ajuster la volatilité, l'équation suivante doit donc être vérifiée :

$$\mathbf{pu^2 + (1 - p)d^2 - (pu + (1 - p)d)^2 = \sigma^2\Delta t}$$

- **Un choix possible de u et d** pour calibrer/ajuster/vérifier cela est le choix de calibration de Cox Ross et Rubinstein ci-contre

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$$
$$d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

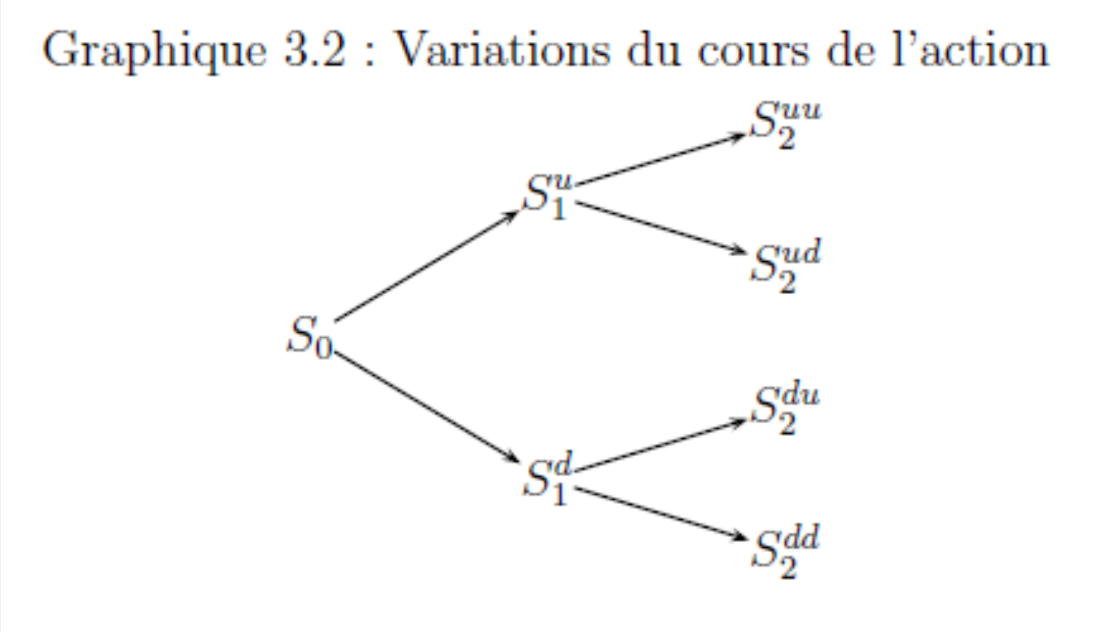
Théorie des Options

Anne EYRAUD-LOISEL

Cours numéro 8-2

16/03/2023

Modèle sur 2 périodes

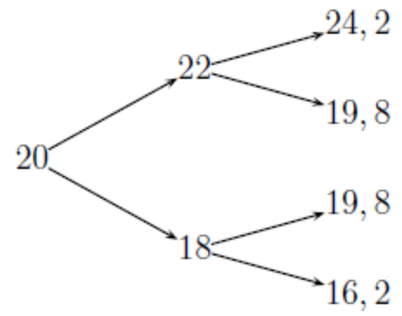


- L'analyse précédente peut être étendue à un arbre binomial à deux périodes, tel qu'il est présenté sur le graphique.
- Arbre **recombinant : $S_2^{ud}=S_2^{du}$**

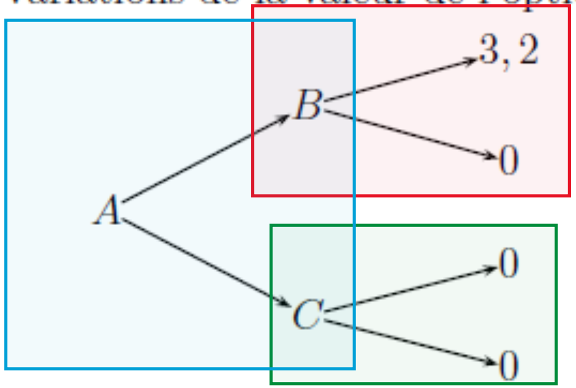
Exemple

- Ici, on présente un exemple où le cours initial de l’action est 20€, et à chacune des périodes, il peut augmenter ou baisser de 10%. Nous supposons dans l’exemple que chaque période dure 3 mois et que le taux sans risque est de 12% par an.
- Comme dans l’exemple précédent, on considère un CALL européen dont le prix d’exercice de l’option est supposé égal à 21€.
- L’objectif est de calculer la valeur de l’option au nœud initial de l’arbre.
- Pour cela, il suffit **d’itérer la méthode d’évaluation** sur une période, pour trouver tout d’abord la valeur de l’option au **nœuds B et C**, puis ensuite au **nœud A**, à partir des valeurs trouvées pour les nœuds B et C. On raisonne ainsi de manière rétrograde sur l’arbre, en partant des valeurs finales et en remontant sur les nœuds précédents.

Graphique 3.3 : Variations du cours de l’action



Variations de la valeur de l’option

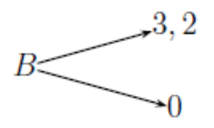


Exemple

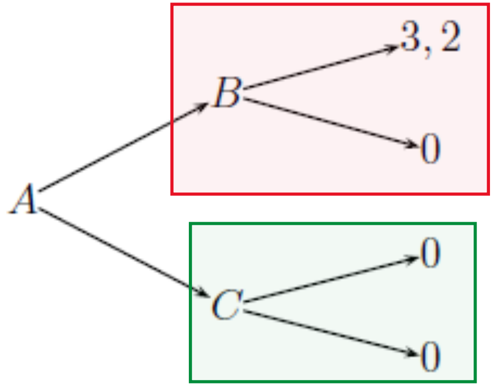
- **Au nœud C,** la valeur finale de l'option est nulle, car elle conduit à 2 nœuds possibles pour lesquels la valeur de l'option est nulle.
- La valeur de l'option au nœud B est calculée en prenant appui sur la partie de l'arbre représentée ci-contre.
- On a donc un modèle binomial à une période

  u = 1, 1, d = 0, 9, r = 0, 12, et T = 3 mois.
- Calculer la valeur au nœud B

Graphique 3.4 : Evaluation de l'option au noeud B



Variations de la valeur de l'option



Exemple

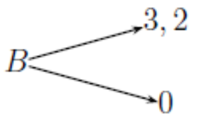
- La valeur de l'option **au nœud B** est calculée en prenant appui sur la partie de l'arbre représentée ci-contre.
- On a donc un modèle binomial à une période, u = 1,1, d = 0,9, r = 0, 12, et T = 3 mois.
- On obtient **q = (R−d)/(u−d) = 0, 6523** et donc on a la valeur de l'option au nœud B :

$B = e^{-rT}\left(q*3,2 + (1-q)0\right) = e^{-rT}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_2 \mid \mathcal{F}_1]\,\mathbb{1}_{\{\text{up à la date } 1\}}$

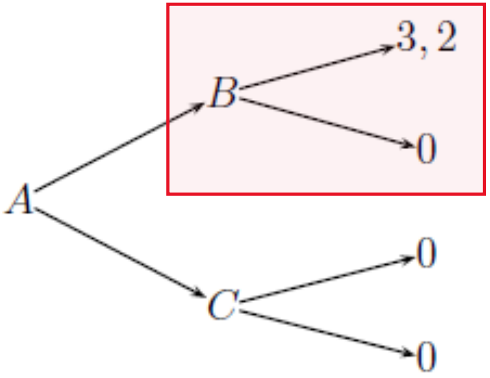
$= e^{-0{,}12\times 3/12}(0,6523 \times 3,2 + 0,3477 \times 0)$

= 2,0257€

Graphique 3.4 : Evaluation de l'option au noeud B



Variations de la valeur de l'option

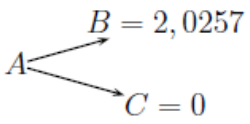


Exemple

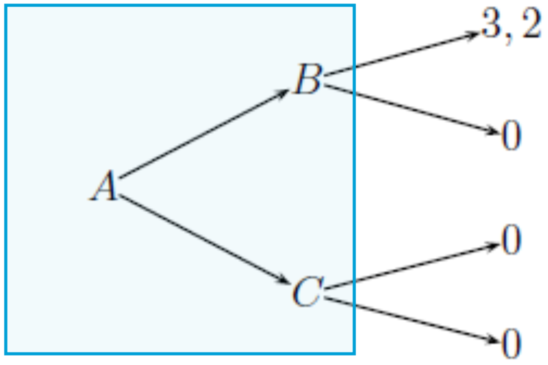
- Ensuite, il ne reste plus qu'à calculer **la valeur initiale de l'option au nœud A**, en focalisant notre attention sur la première partie de l'arbre.
- La valeur de l'option au nœud B est 2,0257€ au nœud B alors qu'elle est nulle au nœud C.
- Calculer la valeur au nœud A

$$A = e^{-rT}(qB + (1-q)C) = e^{-0,12 \times 3/12}(0,6523 \times 2,0257 + 0,3477 \times 0)$$
$$= 1,28231 \text{ €}$$

Graphique 3.5 : Evaluation de l'option au noeud A



Variations de la valeur de l'option



Exemple

- Ensuite, il ne reste plus qu'à calculer la valeur initiale de l'option au nœud A, en focalisant notre attention sur la première partie de l'arbre. La valeur de l'option au nœud B est 2,0257 au nœud B alors qu'elle est nulle au nœud C.
- L'évaluation neutre au risque nous donne encore **$q = (R-d)/(u-d) = 0,6523$**, et donc la valeur de l'option au nœud A est :

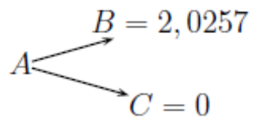
$A = e^{-rT}(qB + (1 - q)C)$

$= e^{-0,12\times 3/12}(0,6523 \times 2,0257 + 0,3477 \times 0)$

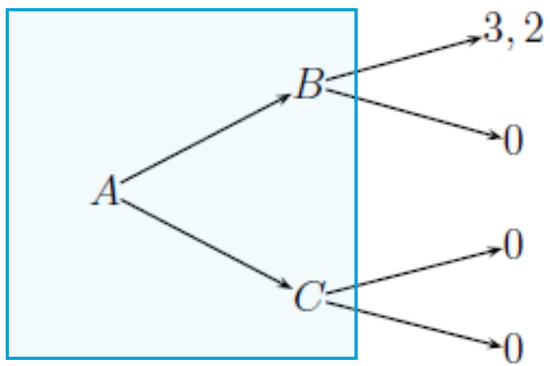
$= 1,2823€$

- La valeur de l'option est donc **1,2823€.**

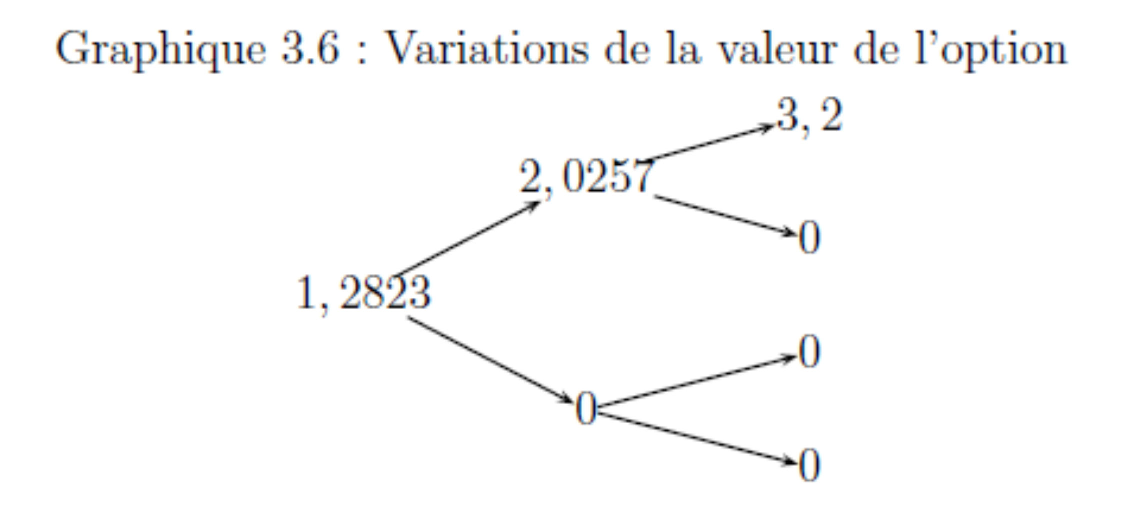
Graphique 3.5 : Evaluation de l'option au noeud A



Variations de la valeur de l'option



Exemple : pricing global

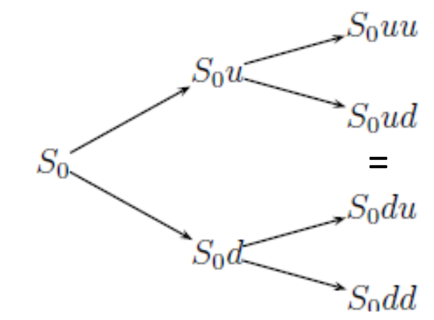


- Graphique global
- Remarque : : Il faut noter que cet exemple est construit avec des paramètres u et d (qui sont les rentabilités de l'action à la hausse et à la baisse) indépendants de la date et du nœud considéré. De plus, les périodes ont même durée. Par conséquent, la probabilité risque-neutre, q, est la même à chaque nœud. On peut bien entendu faire la même chose avec des probabilités risque-neutre différentes, en faisant attention à les recalculer à chaque nœud.

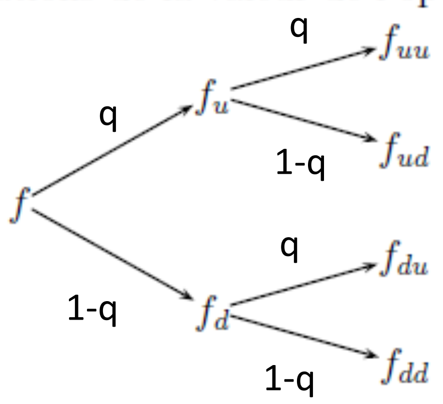
Cas Général : Arbre à 2 périodes

- On peut généraliser ce raisonnement.
- Prenons le cas d'une action dont le cours initial est S_0, et durant chaque période, le cours est multiplié par u ou d. La notation de la valeur de l'option est f_{ij} où i désigne l'évolution sur la première période et j sur la deuxième (par exemple après 2 hausses successives, l'option vaut f_{uu}). Le taux d'intérêt sans risque est noté r et chaque période dure dt années.

Graphique 3.7 : Variations du cours de l'action



Variations de la valeur de l'option



Cas Général : Arbre à 2 périodes

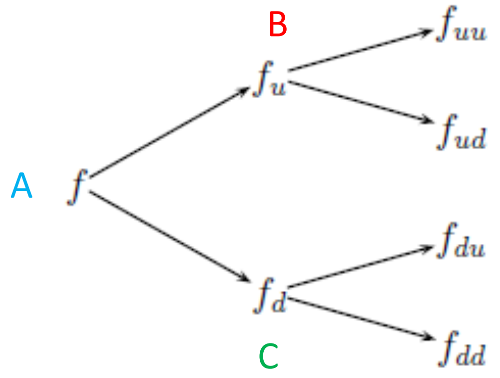
- Les équations relatives à l'évaluation sur chaque sous-période s'écrivent, en notant q la probabilité risque neutre égale à en notant R = e^{rdt} le facteur de capitalisation sur une période.

$$f_u = \frac{1}{R}[qf_{uu} + (1-q)f_{ud}] \quad \text{évaluation au noeud } B$$

$$f_d = \frac{1}{R}[qf_{du} + (1-q)f_{dd}] \quad \text{évaluation au noeud } C$$

$$f = \frac{1}{R}[qf_u + (1-q)f_d] \quad \text{évaluation au noeud } A$$

Variations de la valeur de l'option



$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{R - d}{u - d}$$

Cas Général : Arbre à 2 périodes

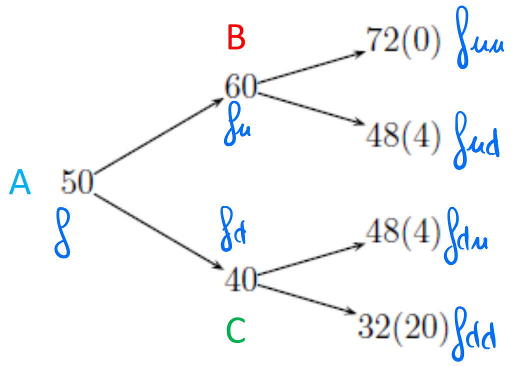
- Or ici, **si** $f_{ud} = f_{du}$ on peut donc écrire en combinant toutes ces équations une formule générale.
- Cette formulation est cohérente avec le principe d'évaluation risque-neutre mentionné plus haut.
- q^2, $2q(1-q)$ et $(1-q)^2$ sont les probabilités que les nœuds terminaux du haut, du milieu et du bas soient atteints (ou q^2, $q(1 - q)$, $q(1 - q)$ et $(1 - q)^2$ si les 4 nœuds sont distincts).
- La valeur de l'option est bien égale à son **payoff espéré dans l'univers risque-neutre, actualisé au taux sans risque.**

$$f = \frac{1}{R^2}\left[q^2 f_{uu} + \underbrace{2q(1-q)f_{ud}}_{q(1-q)f_{ud} + q(1-q)f_{du}} + (1-q)^2 f_{dd}\right]$$

Exemple avec une option de vente

- Les procédures décrites dans ce chapitre sont applicables à l'évaluation de n'importe quel produit dérivé tant que le prix de l'actif sous-jacent varie de façon binomiale.
- Considérons un put européen à 2 ans, de prix d'exercice 52€ sur une action cotée actuellement 50€. La durée de vie de l'option est divisée en 2 périodes d'un an chacune, et à chaque période, le cours de l'action augmente de 20% ou baisse de 20%. Le taux sans risque est supposé égal à 5%.
- L'arbre de cette situation est représenté sur le graphique ci-contre
- Quelle est la probabilité risque neutre q ?
- Quel est le prix de cette option ?

Graphique 3.8 : Variations du cours de l'action (valeur de l'option)



$d = 0{,}8$ et $u = 1{,}2$; $q = \dfrac{e^{0{,}05 \times 1} - 0{,}8}{1{,}2 - 0{,}8} = 0{,}628178$

$f_u = e^{-rT}\left(q f_{uu} + (1-q) f_{ud}\right) = 1{,}41475$

$f_d = e^{rT}\left(q f_{du} + (1-q) f_{dd}\right) = 9{,}46393$

$f = e^{-2rT}\left(q^2 f_{uu} + 2q(1-q) f_{ud} + (1-q)^2 f_{dd}\right)$

$= 4{,}19265$ €