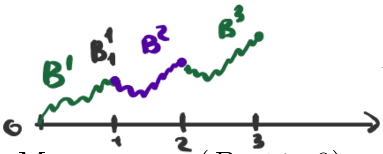
Done

M2 “Probabilités et Finance” Sorbonne Université *Année 2022 – 2023*
“Introduction aux processus de diffusion” (L.Zambotti)

Chapitre I. Construction du mouvement brownien

✓ **Exercice 1** Soit $(B^m_t,\, t \in [0,1])$, pour $m \geq 0$, une suite de mouvements browniens indépendants définis sur $[0,1]$. On pose

gaussien centré, indépendants



$$B_t := B^{\lfloor t\rfloor}_{t-\lfloor t\rfloor} + \sum_{0\leq m<\lfloor t\rfloor} B^m_1, \qquad t \geq 0.$$

$$\mathbb{E}[B_tB_s] = \mathbb{E}\Big[\Big(B^{\lfloor t\rfloor}_{t-\lfloor t\rfloor} + \sum_{m<\lfloor t\rfloor} B^m_1\Big)\cdot\Big(B^{\lfloor s\rfloor}_{s-\lfloor s\rfloor} + \sum_{m<\lfloor s\rfloor} B^m_1\Big)\Big] = \sum_{m<\lfloor t\wedge s\rfloor} 1 + (t\wedge s - \lfloor t\wedge s\rfloor) = t\wedge s$$

Montrer que $(B_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

Dans les exercices suivants, $(B_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

✓ **Exercice 2** Soit $T := \inf\{t \geq 0 : B_t = 1\}$ (avec la convention $\inf \varnothing := \infty$). Montrer que[1] $\mathbb{P}(T < \infty) \geq \frac{1}{2}$. (On pourra comparer $\mathbb{P}(B_t \geq 1)$ et $\mathbb{P}(T \leq t)$.)

$$\mathbb{P}(T\leq t) \geq \mathbb{P}(B_t \geq 1) = \mathcal{N}\Big(-\frac{1}{\sqrt{t}}\Big)$$
$$\downarrow t\to\infty \qquad\qquad \downarrow t\to\infty$$
$$\mathbb{P}(T<\infty) \quad \geq \quad 1/2$$

✓ **Exercice 3** Soit $\xi := \int_0^1 B_t\,\mathrm{d}t$. Quelle est la loi de ξ ?

✓ **Exercice 4** Soit $\eta := \int_0^2 B_t\,\mathrm{d}t$. Calculer l’espérance conditionnelle $\mathbb{E}(B_1 \,|\, \eta)$.

✓ **Exercice 5** Montrer que $B_7 - B_2$ est indépendante de $\sigma(B_s,\, s \in [0,1])$.

✓ **Exercice 6** Soit $\mathscr{F}_1 := \sigma(B_s,\, s \in [0,1])$. Calculer les espérances conditionnelles $\mathbb{E}(B_5 \,|\, \mathscr{F}_1)$ et $\mathbb{E}(B_5^2 \,|\, \mathscr{F}_1)$.

$$\mathbb{E}[B_5|\mathscr{F}_1] = B_1 \qquad \mathbb{E}[B_5^2|\mathscr{F}_1] = \mathbb{E}[B_5^2 - 5|\mathscr{F}_1] + 5 = B_1^2 - 1 + 5 = B_1^2 + 4$$

✓ **Exercice 7** (i) Montrer que pour tout $t > 0$, $\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s$ a la même loi que $t^2\int_0^1 B_s^2\,\mathrm{d}s$.

(ii) Montrer que les processus $(\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s,\, t \geq 0)$ et $(t^2\int_0^1 B_s^2\,\mathrm{d}s,\, t \geq 0)$ n’ont pas la même loi.

✓ **Exercice 8** Soit T une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre 1, indépendante de B. Quelle est la loi de B_T ?

✓ **Exercice 9** Montrer que $\int_0^1 \frac{B_s}{s}\,\mathrm{d}s$ est bien définie p.s.

✓ **Exercice 10** Soit $\beta_t := B_t - \int_0^t \frac{B_s}{s}\,\mathrm{d}s$. Montrer que $(\beta_t,\, t \geq 0)$ est un mouvement brownien.

1. Plus tard, on verra que $T < \infty$ p.s.

Exercice 11 Montrer que $\int_0^\infty |B_s|\,\mathrm{d}s = \infty$ p.s. (indication : étudier d'abord $X_t := \int_0^t |B_s|\,\mathrm{d}s$ et $\mathbb{P}(X_t \geq x)$ en utilisant la propriété de scaling).

Exercice 12 Soit $B := (B_t,\, t \in [0,\, 1])$ un mouvement brownien standard indexé par $[0,\, 1]$. Pour tout $t \in [0,\, 1]$, on pose

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_t &:= \sigma(B_s,\ s \in [0,\, t]), \\ \mathscr{G}_t &:= \mathscr{F}_t \vee \sigma(B_1) = \sigma(\{C;\ C \in \mathscr{F}_t \text{ ou } C \in \sigma(B_1)\}). \end{aligned}$$

(i) Soient $0 \leq s < t \leq 1$. Montrer que la v.a.

$$\frac{1-t}{1-s}\,(B_t - B_s) - \frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_t)$$

est indépendante de $\mathscr{G}_s$. En déduire que

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)\,|\,\mathscr{G}_s] = \frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_s).$$

(ii) Considérons le processus $\beta := (\beta_t,\, t \in [0,\, 1])$ défini par

$$\beta_t := B_t - \int_0^t \frac{B_1 - B_s}{1-s}\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,\, 1].$$

Montrer que pour $0 \leq s < t \leq 1$, $\mathbb{E}(\beta_t\,|\,\mathscr{G}_s) = \beta_s$ p.s.

(iii) Montrer que

$$\beta_t = B_t - tB_1 + \int_0^t \frac{B_s - sB_1}{1-s}\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,\, 1].$$

(iv) Montrer que $(B_t - tB_1)_{t\in[0,1]}$ et $(\beta_t)_{t\in[0,1]}$ sont indépendants de B_1.

(v) Montrer que $(\beta_t)_{t\in[0,1]}$ est un mouvement brownien. En déduire que le pont brownien défini par $b_t := B_t - tB_1$, $t \in [0, 1]$, satisfait

$$b_t = -\int_0^t \frac{b_s}{1-s}\,\mathrm{d}s + \beta_t, \qquad t \in [0,\, 1].$$

$\boxed{3}$ $\xi = \int_0^1 B_t dt = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n B_{i/n}}_{\xi_n}$

ξ_n est gaussienne, $E\xi_n = 0$, $Var[\xi_n] = \frac{1}{n^2}\sum_{i,j} cov(B_{i/n}, B_{j/n}) =$

$= \frac{1}{n^2}\sum \frac{i\wedge j}{n} \to \int_0^1\int_0^1 (x\wedge y)\,dx\,dy = 2\int_0^1 dx \int_0^x y\,dy = \frac{1}{3} \Rightarrow \int_0^1 B_t dt \sim \mathcal{N}(0, 1/3)$

$\boxed{4}$ $\xi = \int_0^2 B_t dt$ $\quad E[B_1|\xi] = ?$

$$E[X|Y] = E[X] + \frac{Cov(X,Y)}{Var[Y]}(Y - EY)$$

$Var[\xi] = \frac{8}{3}$ $\quad cov(X,Y) = \int_0^2 EB_t B_1 ds = \int_0^1 t\,dt + 1 = \frac{3}{2}$

$\boxed{5}$ $B_7 - B_2 \perp\!\!\!\perp \sigma(B_s, s\in[0,2])$

$B_7 - B_2 \perp\!\!\!\perp B_s,\ s\in[0,2]$ car $(B_7 - B_2, B_2 - B_s, B_s)$

$cov(B_7 - B_2, B_s) = 0 \Rightarrow B_7 - B_2 \perp\!\!\!\perp (B_s, s\in[0,2]) \Rightarrow$
(Gaussien)

$\Rightarrow B_7 - B_2 \perp\!\!\!\perp \sigma(B_s, s\in[0,2])$

Si X, Y deux v.a. qui ont la même loi alors $\forall F$ mes. $F(X) \overset{d}{=} F(Y)$

$\boxed{7}$ 1) $X_t = \int_0^t B_s^2 ds \longrightarrow$ (scaling)

$\overset{(d)}{=}$

$t^2 \int_0^1 B_s^2 ds$

$X_t \overset{d}{=} \int_0^t (\sqrt{t} B_{\frac{s}{t}})^2 ds = t\int_0^1 B_r^2\, t\, dr = t^2 \int_0^1 B_s^2 ds$

2) M.q. $(\underbrace{\int_0^t B_s^2 ds}_{X_t}, t\geq 0) \overset{d}{\neq} (\underbrace{t^2 \int_0^1 B_s^2 ds}_{Y_t})$

Si on accepte que $(B_t)_{t\geq 0}$ n'est p.s. pas différent.

$(Y_t, t\geq 0)$ est p.s. C^∞.

$(X_t, t \geq 0)$ n'est pas mieux que e^1 p.s.

$\boxed{9}$ Montrer que $\int_0^t \frac{B_s}{s} ds$ est

1) p.s. $|B_s| \leq C s^{1/2 - \varepsilon}$ $\forall s \in [0,t]$ avec $C < +\infty$ p.s. et $\varepsilon > 0$ fixé

Trajs Hölder $\rightarrow$ $\frac{|B_s|}{s} \leq C \cdot s^{-1/2 - \varepsilon}$ $\Rightarrow \int_0^t \left|\frac{B_s}{s}\right| ds \leq C \int_0^t s^{-\frac{1}{2} - \varepsilon} ds < \infty$

2) Fubini $\mathbb{E}\left[\int_0^t \left|\frac{B_s}{s}\right| ds\right] \leq C \int_0^t s^{-1/2} ds < +\infty$

$\mathbb{E}|B_s| = \sqrt{s}\, \mathbb{E}|B_1| = C\sqrt{s}$

$\boxed{10}$ $\beta_t = B_t - \underbrace{\int_0^t \frac{B_s}{s} ds}_{X_t}$ $\qquad (\beta_t)$ est un BM

β gaussien centré $\rightarrow$ on étudie la fct de covariance

$s \leq t$

$\mathbb{E}[X_t B_s] = \int_0^t \frac{\mathbb{E} B_s B_s}{s} ds = s + \int_s^t \frac{s}{u} du = s + s \ln \frac{t}{s}$

$\mathbb{E}[X_s B_t] = s$

$\mathbb{E}[X_s X_t] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \frac{B_u}{u} du \int_0^s \frac{B_r}{r} dr\right] = \int_0^s du \underbrace{\int_0^t dr}_{\int_0^u + \int_u^t} \frac{u \wedge r}{ur} = \int_0^s du \left(\int_0^u \frac{1}{u} dr + \int_u^t \frac{dr}{r}\right) =$

$= \int_0^s \left(1 + \ln \frac{t}{u}\right) du = s(1 + \ln t) - \int_0^s \ln u \, du = 2s + s \ln \frac{t}{s}$

$\frac{d}{ds}(s \ln s) = \ln s + 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(s \ln s - s) = \ln s$

$\mathbb{E}[\beta_s \beta_t] = \mathbb{E}[(B_s - X_s)(B_t - X_t)] = \ldots = s$

$\boxed{8}$ $T \sim \mathrm{Exp}(1) \perp\!\!\!\perp B$ $\rightarrow$ calculer la loi de B_T

$$\mathbb{P}(B_T<x) = \int_0^\infty e^{-t}\,\mathbb{P}(B_t<x)\,dt = \int_0^\infty e^{-t}\,\phi\left(\frac{x}{\sqrt{t}}\right)dt = ?$$

$$\mathbb{E}\left[e^{i\lambda B_T}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[e^{i\lambda B_T}\,|\,T\right]\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\frac{\lambda^2}{2}T}\right] = \int_0^\infty e^{-\frac{\lambda^2}{2}t}e^{-t}\,dt = \frac{1}{1+\lambda^2/2}$$

On peut vérifier que $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|x|}$ a cette transformée de Fourier:

loi de Laplace

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\int_{\mathbb{R}} e^{i\lambda x-\sqrt{2}|x|}\,dx = \frac{1}{1+\lambda^2/2} \quad \forall \lambda\in\mathbb{R}$$

<u>Rappel</u> $B_t \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-\frac{x^2}{2t}} \rightsquigarrow B_T \sim \frac{1}{\sqrt{2}}e^{-\sqrt{2}|x|}$

$\boxed{11}$ $X_\infty = \int_0^\infty |B_s|\,ds$ M.q. $\mathbb{P}(X_\infty = 1)$

Soit $X_t = \int_0^t |B_s|\,ds$ $\quad \mathbb{P}(X_t>x) = \mathbb{P}\left(\int_0^t |B_s|\,ds > x\right) = \mathbb{P}\left(\int_0^t \sqrt{t}\,|B_{s/t}|\,ds > x\right) =$

$$= \mathbb{P}\left(\int_0^1 |B_s|\,ds > \frac{x}{t^{3/2}}\right) \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathbb{P}\left(\int_0^1 |B_s|\,ds > 0\right) = 1$$

car $\sup_{[0,1]} B_s > 0$ p.s.

Exercice 12 Soit $B := (B_t,\, t \in [0,\, 1])$ un mouvement brownien standard indexé par $[0,\, 1]$. Pour tout $t \in [0,\, 1]$, on pose

$$\begin{aligned} \mathscr{F}_t &:= \sigma(B_s,\ s \in [0,\, t]), \\ \mathscr{G}_t &:= \mathscr{F}_t \vee \sigma(B_1) = \sigma(\{C;\ C \in \mathscr{F}_t \text{ ou } C \in \sigma(B_1)\}). \end{aligned}$$

(i) Soient $0 \le s < t \le 1$. Montrer que la v.a.

$$\frac{1-t}{1-s}\,(B_t - B_s) - \frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_t)$$

est indépendante de $\mathscr{G}_s$. En déduire que

$$\mathbb{E}[(B_t - B_s)\,|\,\mathscr{G}_s] = \frac{t-s}{1-s}\,(B_1 - B_s).$$

$\mathscr{G}_s$-mes.

(ii) Considérons le processus $\beta := (\beta_t,\, t \in [0,\, 1])$ défini par

$$\beta_t := B_t - \int_0^t \frac{B_1 - B_s}{1-s}\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,\, 1].$$

Montrer que pour $0 \le s < t \le 1$, $\mathbb{E}(\beta_t\,|\,\mathscr{G}_s) = \beta_s$ p.s.

(iii) Montrer que

$$\beta_t = B_t - tB_1 + \int_0^t \frac{B_s - sB_1}{1-s}\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,\, 1].$$

évident

(iv) Montrer que $(B_t - tB_1)_{t\in[0,1]}$ et $(\beta_t)_{t\in[0,1]}$ sont indépendants de B_1.

(v) Montrer que $(\beta_t)_{t\in[0,1]}$ est un mouvement brownien. En déduire que le pont brownien défini par $b_t := B_t - tB_1$, $t \in [0, 1]$, satisfait

$$b_t = -\int_0^t \frac{b_s}{1-s}\,\mathrm{d}s + \beta_t, \qquad t \in [0,\, 1].$$

$A \in \mathscr{G}_s$; Il suffit de vérifier pour

$A \in \{C : C \in \mathscr{F}_s \text{ ou } C \in \sigma(B_1)\}$

$$\mathrm{cov}\Big(\underbrace{\frac{1-t}{1-s}(B_t - B_s) - \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_t)}_{\xi}, B_1\Big) = \frac{1-t}{1-s}(t-s) - \frac{t-s}{1-s}(1-t) = 0$$

$\to$ {Gaussien} $\Rightarrow$ ξ est indépend. de B_1 $\to$ $\xi \perp\!\!\!\perp \sigma(B_1)$

Si $A \in \mathscr{F}_s$, $s<t$ $(B_t - B_s) \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_s$, $(B_1 - B_t) \perp\!\!\!\perp \mathscr{F}_t \supseteq \mathscr{F}_s$ $\to$

$\rightarrow \xi \perp\!\!\!\perp \mathcal{B}_s$. Donc $\xi \perp\!\!\!\perp \mathcal{C}_s$

Donc $\mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{C}_s] = \mathbb{E}[\xi] = 0$ $\qquad \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s)$

$$\xi = \frac{1-t}{1-s}(B_t - B_s) - \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_t) =$$

$$= (B_t - B_s) - \frac{t-s}{1-s}(B_t - B_s) - \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_t) =$$

$$= (B_t - B_s) - \underbrace{\frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s)}_{\mathcal{C}_s\text{-mesurable}} \rightarrow \mathbb{E}[\xi \mid \mathcal{C}_s] = 0 \rightarrow \mathbb{E}[B_t - B_s \mid \mathcal{C}_s] = \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s)$$

(ii)

$$\beta_t = B_t - \int_0^t \frac{B_1 - B_u}{1-u}\,du \qquad \mathbb{E}[\beta_t \mid \mathcal{C}_s] = \beta_s \,? \qquad 0 \leq s < t \leq 1.$$

$$\beta_t = B_s + \underbrace{(B_t - B_s)}_{\downarrow \mathbb{E}_{\mathcal{C}_s} \; \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s)} - \underbrace{\int_0^s \frac{B_1 - B_u}{1-u}\,du}_{\mathcal{C}_s\text{-mes}} - \int_s^t \frac{B_1 - B_v}{1-v}\,dv$$

Il suffit de démontrer que $\mathbb{E}_{\mathcal{C}_s}\left[\int_s^t \frac{B_1 - B_v}{1-v}\,dv\right] = \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s)$

$v > s$

$$B_1 - B_v = B_1 - B_s - \underbrace{(B_v - B_s)}_{\xrightarrow{\mathbb{E}_{\mathcal{C}_s}} \frac{v-s}{1-s}(B_1 - B_s)} \xrightarrow{\mathbb{E}_{\mathcal{C}_s}} (B_1 - B_s)\left(\frac{1-s-v+s}{1-s}\right) = \frac{1-v}{1-s}(B_1 - B_s)$$

$$\mathbb{E}_{\mathcal{C}_s}\left[\int_s^t \frac{B_1 - B_v}{1-v}\,dv\right] = \int_s^t dv\, \frac{1}{1-s}(B_1 - B_s) = \frac{t-s}{1-s}(B_1 - B_s)$$

(iii)

$$\beta_t \stackrel{?}{=} B_t - \underbrace{tB_1 + \int_0^t \frac{B_s - sB_1}{1-s}\,ds}_{\int_0^t \frac{-(1-s)B_1 + B_s - sB_1}{1-s}\,ds = -\int_0^t \frac{B_1 - B_s}{1-s}\,ds}$$

(iv)

$$\operatorname{cov}(\beta_t, B_1) = \operatorname{cov}(B_t - \cancel{tB_1}^{\,0}, B_1) + \operatorname{cov}\left(\int_0^t \frac{B_s - sB_1}{1-s}\,ds, B_1\right) = \int_0^t \underbrace{\frac{\mathbb{E}B_sB_1 - s\mathbb{E}B_1^2}{1-s}}_{=0}\,ds = 0$$

Mq β_t est un MB. $\left(\Rightarrow \underbrace{B_t - tB_1}_{b_t} = \beta_t - \int_0^t \frac{b_s}{1-s} ds \right)$

$$\beta_t = b_t + \int_0^t \frac{b_s}{1-s} ds \quad \text{- gaussien centré}$$

$$\mathrm{cov}(b_t, b_s) = t \wedge s - ts$$

$(t > s)$ $\quad (\beta_t)$ est $\mathcal{F}_t$-mart

$$\mathrm{cov}(\beta_t, \beta_s) = \mathrm{cov}(\beta_t - \beta_s + \beta_s, \beta_s) = \mathbb{V}\mathrm{ar}[\beta_s]$$

$$\mathbb{E}\beta_t^2 = \mathbb{E}\left[b_t^2 + 2\int_0^t \frac{b_t b_s}{1-s} ds + \left(\int_0^t \frac{b_s}{1-s} ds\right)^2\right] = t - t^2 + 2\underbrace{\int_0^t \frac{s(1-t)}{1-s} ds}_{y_t} + \underbrace{\int_0^t\int_0^t \frac{s \wedge u - su}{(1-s)(1-u)} ds\, du}_{2\int_0^t ds \int_0^s du \left(\frac{u(\cancel{1-s})}{(\cancel{1-s})(1-u)}\right)}$$

$$y_t = \int_0^t \frac{s}{1-s} ds$$

$$X_t = (1-t) y_t + \int_0^t y_s ds$$

$$X_t' = -\cancel{y_t} + (1-t)\frac{t}{1-t} + \cancel{y_t} = t \Rightarrow X_t = \frac{t^2}{2} \Rightarrow \mathbb{E}\beta_1^2 = t.$$

$$X_0 = 0$$