

Modèles de durée / Examen du 21 janvier 2014

Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Sur le modèle *Accelerated Failure Time* (AFT)

La qualité de la rédaction, des justifications apportées et de la présentation de la copie seront prises en compte dans la notation.

Question n°1 (2 points) : On suppose que X satisfait la relation $\ln(X) = -\ln(\theta) + u$ avec u une variable aléatoire et θ un paramètre (modèle dit « AFT »). Ecrire la fonction de hasard du modèle à l'aide de celle de $\exp(u)$.

Question n°2 (2 points) : Rappelez la définition d'un modèle à hasard proportionnel (PH). Le modèle ci-dessus est-il à hasard proportionnel ? Vous donnerez un exemple pour justifier la réponse.

Question n°3 (2 points) : On suppose que $h_0(x) = \alpha x^{\alpha-1}$, quelle est la loi de X ? Le modèle AFT est-il dans ce cas à hasard proportionnel ?

Question n°4 (4 points) : Quelle forme doit avoir $h_0(x)$ pour que le modèle AFT vérifie l'hypothèse PH ? Quelle est alors la loi de X ? Vous pourrez utiliser le fait qu'il doit exister des fonctions k et l telles que $k(x) \times l(\theta) = h_0(\theta \times x) \times \theta$ puis en déduire que la fonction $g(u) = u \times \frac{h'_0(u)}{h_0(u)}$ doit être constante et conclure.

Question n°5 (2 points) : On suppose que X est censurée dans le cadre d'une censure aléatoire droite non informative C . Rappelez le sens de cette définition. Donnez l'expression des variables observables T et D en fonction de X et C . Dans quelle situation pratique rencontre-t-on ce type de censure ?

Question n°6 (4 points) : Rappelez l'expression générale de la log-vraisemblance dans ce contexte et écrivez les équations de vraisemblance dans le cas particulier du modèle de Weibull. Comment résolvez-vous ces équations ?

Question n°7 (2 point) : l'expression de la log-vraisemblance rappelée à la question précédente est-elle valide si la loi de la censure est définie par $S_C(x) = S_X(x)^\beta$? Pourquoi ?

Question n°8 (2 points) : On suppose que le paramètre θ est déterminé par des variables explicatives exogènes via $\theta = \sum_{j=1}^p \beta_j \times Z_j = \beta'Z$. En supposant que la fonction de hasard de base du modèle h_0 est de type Weibull et que $\alpha = 1$, proposez une méthode d'estimation alternative pour β .