5 mai 2010 **M2 pro SAF**

EXAMEN DE "VALEURS EXTRÊMES" - DURÉE 1H

EXERCICE 1 :

1. On considère la loi de Pareto de paramètre $\alpha > 0$, de fonction de répartition définie pour tout $x \geq 1$ par $F(x) = 1 - 1/x^{\alpha}$. Montrer que F est dans le domaine d'attraction pour les maxima d'une loi que l'on explicitera. On pourra pour cela utiliser les suites de normalisation $b_n = 0$ et $a_n = n^{1/\alpha}$.

2. Montrer de même que la loi uniforme sur $[0, 1]$ est dans le domaine d'attraction pour les maxima d'une loi que l'on explicitera, en choisissant les suites de normalisation $b_n = 1$ et $a_n = 1/n$.

EXERCICE 2 : On considère des données de sinistres automobiles survenus entre 1988 et 2001 dont le montant dépassait 1.2 millions d'euros (371 observations). Ces données ont été fournies par la compagnie "Secura Belgian Re" et ont été corrigées par rapport au facteur d'inflation. Un contrat de réassurance de type "excédent de sinistre, de priorité R", est en place : si X est le montant d'un sinistre, de fonction de répartition F et de borne supérieure du support $x^{\star}$, le réassureur s'engage à intervenir pour le remboursement du montant aléatoire $(X - R)_+$.

On note $\bar{F}$ la fonction de survie associée à F, soit $\bar{F}(x) = 1 - F(x)$. L'objectif est de proposer plusieurs façons d'estimer la prime nette individuelle

$$\Pi(R) := \mathbb{E}(X - R)_+ \,.$$

1. *Investigation sans modèle, purement non paramétrique* :

(1.1) Donner l'expression de l'estimateur empirique de $\Pi(R)$. Montrer que

$$\Pi(R) = \int_R^{x^\star} \bar{F}(x)\, dx \,.$$

(1.2) Soit $e(R) := \mathbb{E}(X - R | X > R)$ l'espérance-vie résiduelle de X. Donner l'estimateur empirique de $e(R)$. Montrer de plus que

$$\Pi(R) = e(R)\bar{F}(R) \,.$$

2. *Investigation sous l'hypothèse d'un modèle de type Pareto* :

(2.1) Le "Pareto quantile plot" sur l'échantillon des montants de sinistres est donné dans la partie gauche de la Figure 0.1. Commenter.

(2.2) Proposer une estimation de γ, en motivant le choix fait. On pourra pour cela s'aider de la partie droite de la Figure 0.1, dont on donnera la signification.

(2.3) Soit $\bar{F}$ une fonction de survie à variation régulière d'indice $-1/\gamma$, avec $0 < \gamma < 1$ et e son espérance-vie résiduelle. On admet que, pour u au voisinage de l'infini, on a

$$e(u) \sim \frac{\gamma u}{1 - \gamma} \,.$$

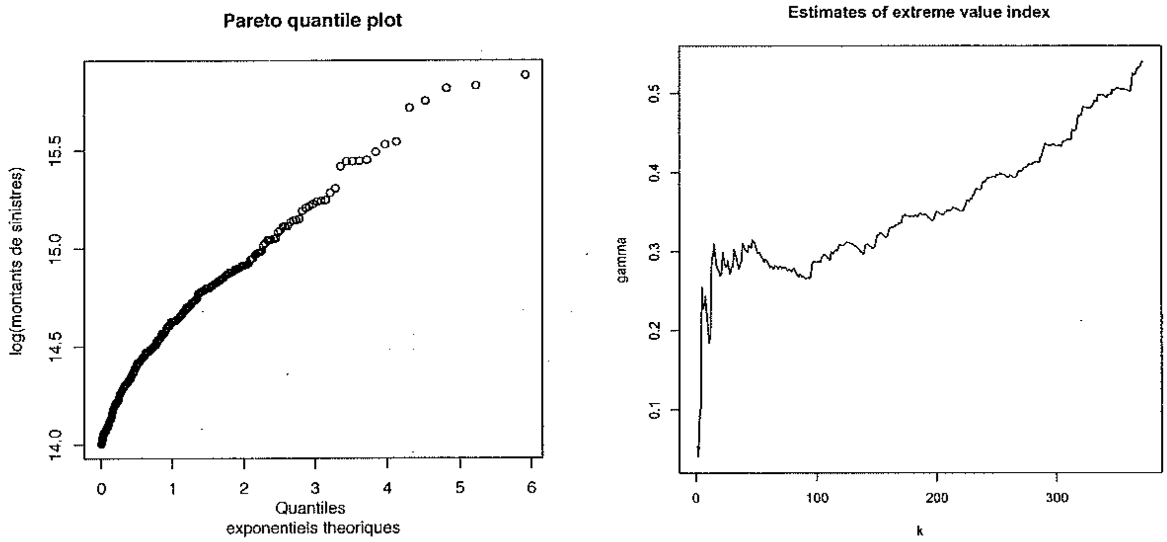

FIGURE 0.1. Pareto quantile plot (à gauche) et Hill plot (à droite) pour l'échantillon des montants de sinistres (en euros).

Comment cette propriété est-elle utilisée en pratique ? En déduire une estimation de $\Pi(R)$ sous l'hypothèse d'un modèle de type Pareto. On distinguera le cas où R est dans l'échantillon, et le cas où R est une valeur plus grande que le maximum de l'échantillon.

3. *Investigation sous l'hypothèse d'un modèle Pareto généralisé* :

(3.1) Justifier que pour u assez grand et $x > u$, on a :

$$\bar{F}(x) \sim \bar{F}(u)\left(1+\gamma\frac{x-u}{\tau}\right)^{-1/\gamma}.$$

(3.2) En déduire (heuristiquement) que si $0 < \gamma < 1$ et u assez grand, on a, pour tout $t > u$,

$$e(t) \sim \frac{\tau}{1-\gamma}\left(1+\gamma\frac{t-u}{\tau}\right).$$

(3.3) En utilisant (3.1) et (3.2), proposer un estimateur de $\Pi(R)$.