Correction de la fin du TD de théorie des jeux

Exercice 3 Partie 2

Question 3

Le follower (désavantage de coût/ leader) produit un niveau de production strictement positif à l'équilibre :

$$q_F^* \, 0\rangle \quad ssi$$

$$\frac{1-3c_F+2c_L}{4}\rangle 0$$

que l'on va résoudre pour c_L tel que:

$$c_L\rangle -\frac{1}{2}+\frac{3}{2}c_F$$

De même pour le leader :

$$q_L^*\rangle 0 \text{ ssi}$$

$$\frac{1+c_F-2c_L}{2}\rangle 0$$

$$d'où \; c_L\langle \frac{1}{2}+\frac{3}{2}c_F$$

Question 4 Niveau de production d'équilibre et prix d'équilibre dans le jeu de Stackelberg

$$\left(q_L^*,q_F^*\right)=\left(\frac{1+c_F-2c_L}{2},\frac{1-3c_F+2c_L}{4}\right)$$

$$c_F=c_L=c$$

$$Q^S=q_L^*+q_F^*=\frac{1+c\;\;-2c}{2}+\frac{1-3c\;\;+2c}{4}=\frac{3(1-c)}{4}$$

$$P(Q^S)=1-Q^S=1-\frac{3(1-c)}{4}=\frac{1+3c}{4}$$

<u>Comparaison avec Cournot</u> (jeu simultané non coopératif en quantités cf cours)
Chaque firme i =1,2 maximise son profit

$$\underbrace{Max}_{q_i}(1-q_i-q_j)q_i - c\ q_i$$

CPO

$$\frac{\delta\Pi}{\delta q_i} = 0 \Leftrightarrow 1-2q_i-q_j-c = 0$$

$$\Rightarrow q_i(q_j) = \frac{1-c}{2} - \frac{1}{2}q_j \quad (1)$$

$$et\, q_j(q_i) = \frac{1-c}{2} - \frac{1}{2}q_i \ (2)$$

$où(1)et(2)$ sont les fonctions de meilleure réponse de i et j

on trouve la production d'équilibre en insérant la fonction de meilleure réponse $q_j(q_i)$ dans $q_i(q_j)$

D'où (2) dans (1)

$$q_1^* = q_2^* = \frac{1-c}{3}$$

La quantité totale sur le marché et le prix de marché :

$$Q^{Cournot} = q_1^* + q_2^* = \frac{2(1-c)}{3}$$

$$P(Q^{Cournot}) = 1 - Q^{Cournot} = 1 - \frac{2(1-c)}{3} = \frac{1+2c}{3}$$

<u>Comparaison avec Duopole de Bertrand</u> (simultané en prix) et avec coûts identiques pour un bien homogène : les 2 biens sont identiques pour les consommateurs (cf cours)
L'équilibre de Nash « prescrit » pour les deux firmes un ensemble de prix qui correspond à leur coût marginal $p_1=p_2=c$
D'où c = 1- Q , la quantité de Bertrand $Q^{Bertrand}$ = 1-c
On se retrouve avec un niveau de production et de prix qui correspond à une situation de concurrence parfaite (paradoxe)

Rq hors exercice: Bien entendu si les 2 firmes (1 et 2)vendaient à des consommateurs qui ont une mauvaise information sur les prix où qui seraient attachés à une marque on aurait dans le cas d'un duopole de Bertrand deux fonctions de demande (une pour le produit 1 et l'autre pour l'autre produit (2)) . Chacune de ces fonctions dépendant du prix du produit 1 et du prix 2. Dans ce cas on procède comme on a pu le faire mais en établissant les fonctions de réaction comme les meilleures réponses mais en prix .

<u>Comparaison avec le monopole</u> :
Le monopole est en indépendance stratégique, il va maximiser son profit sur l'ensemble de la demande sans tenir compte d'une concurrence quelconque (≠ oligopole = interdépendance stratégique)

Il choisit donc le niveau de niveau de production Q qui lui permet de maximiser son profit :
Q tel que

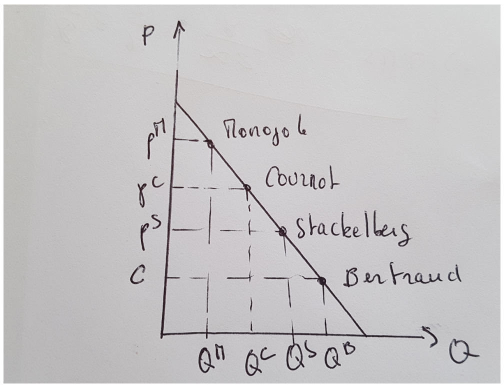
$$\max_{Q\geq 0}(1-Q)Q-cQ$$

CPO :

$$\frac{\delta\Pi}{\delta Q}=0 \Leftrightarrow 1-2Q-c =\Rightarrow 0$$

$$\Rightarrow Q^{Monopole}=\frac{1-c}{2}$$

qui implique un prix de monopole $\mathrm{P}(Q^{Monopole})=1-\frac{1-c}{2}=\frac{1+c}{2}$



Exercice 4

Les stratégies que nous avons utilisées jusqu'à présent sont des stratégies pures, c'est-à-dire ce sont les options qui se présentent aux joueurs.

<u>les stratégies mixtes :</u>

l'espace de stratégies fini de chaque joueur i

$$S_i=\{s_1,s_2,..,s_m\}$$

où m représente le nombre d'éléments de l'espace de stratégies

Une stratégie mixte σ_i est une distribution de probabilité sur l'ensemble des stratégie pures.
L'ensemble des stratégies pures utilisées par une stratégie mixte σ_i est appelé le support de la stratégie mixte.

$\sigma_i(s_k)$ représente la probabilité que le joueur i joue la stratégie k
et satisfait :

$\sigma_i(s_k) \geq 0$ pour tout k et $\sum_{k=1}^{m} \sigma_i(s_k) = 1$

On peut définir un équilibre de Nash en stratégies mixtes (ENSM)

Soit un profil de stratégie $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, ..., \sigma_N)$

où σ_i dénote une stratégie mixte pour un joueur i

On peut dire alors que σ est un équilibre de Nash en stratégie mixte ssi:

$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) \geq u_i(s_i, \sigma_{-i})$ pour tout $s_i \in S_i$

σ_i est la meilleure réponse de i au profil de stratégie σ_{-i} sélectionné par les autres joueurs

Théorème [Nash, 1950] :Tout jeu fini possède au moins un un équilibre de Nash en stratégies mixtes si elles sont autorisées.

1)- <u>Equilibre de Nash en Stratégies Pures (ENSP)</u>

Joueur 1
BR1(L) c'est D car 7>6
BR1(R) c'est U car 2>0

Joueur 2
BR2(U) c'est R car 7>6
BR2(D) c'est L car 2>0

Joueur 2

	L	R
U	6,6	2,7
D	7,2	0,0

On a 2 ENSP (U,R) et (D,L) les paiements associés sont (2,7) et (7,2)

2-<u>Equilibre de Nash en stratégies mixtes ENSM</u>

La prise en compte des SM pourrait faire apparaitre d'autres possibilités de meilleures réponses
On dénote par p resp(1-p) que le joueur 1 joue U (respD) et par q(resp 1-q) que le joueur 2 joue L (resp R)

la stratégie mixte du joueur 1 est (p, 1-p) et celle du joueur est (q,1-q) avec p et q $\in [0,1]$:

Joueur 2

		q	1-q
Joueur 1		L	R
p	U	6,6	2,7
1-p	D	7,2	0,0

Le joueur 2 est indifférent à jouer L ou R si son espérance d'utilité est identique c'est-à-dire si $EU_2(L)= EU_2(R)$
6p +2(1-p) = 7p + 0(1-p) (avec p probabilité que 1 joue U et 1-p qu'il joue D)
On trouve que p= 2/3

$EU_2(L) > EU_2(R)$ si p< 2/3 (si le joueur 1 joue moins deux fois sur trois la stratégie U ; il jouera alors tout le temps la stratégie L avec q=1)
$EU_2(L) < EU_2(R)$ si p>2/3 (si le joueur 1 joue plus deux fois sur trois la stratégie U ; il jouera alors tout le temps la stratégie R avec q=0

Le joueur 1 est indifférent à jouer U ou D si son espérance d'utilité est identique c'est-à-dire si $EU_1(U)= EU_1(D)$
6.q +2.(1-q)= 7.q+0.(1-q) avec (q probabilité que 2 joue L et 1-q qu'il joue R)
On trouve q= 2/3

ENSM = $\left\{(\frac{2}{3}U,\frac{1}{3}D),(\frac{2}{3}L,\frac{1}{3}R\right\}$

Les paiements espérés (gains) dans cet ENSM symétrique sont pour le joueur 1:

$$EU_1(p^*,q^*)=\underbrace{\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}.6+\frac{1}{3}.7\right]}_{\text{joueur 2 joue L}}+\underbrace{\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}.2+\frac{1}{3}.0\right]}_{\textit{Joueur}\text{ 2 joue R}}=\frac{38}{9}+\frac{4}{9}=\frac{14}{3}$$

Et de la même façon pour le joueur 2 son paiement espéré

$$EU_2(p^*,q^*)=\underbrace{\frac{2}{3}\left[\frac{2}{3}.6+\frac{1}{3}.7\right]}_{\text{joueur 1 joue U}}+\underbrace{\frac{1}{3}\left[\frac{2}{3}.2+\frac{1}{3}.0\right]}_{\textit{Joueur}\text{ 1 joue D}}=\frac{38}{9}+\frac{4}{9}=\frac{14}{3}$$

$EU_i(p^*,q^*)$ =14/3 pour i= 1,2

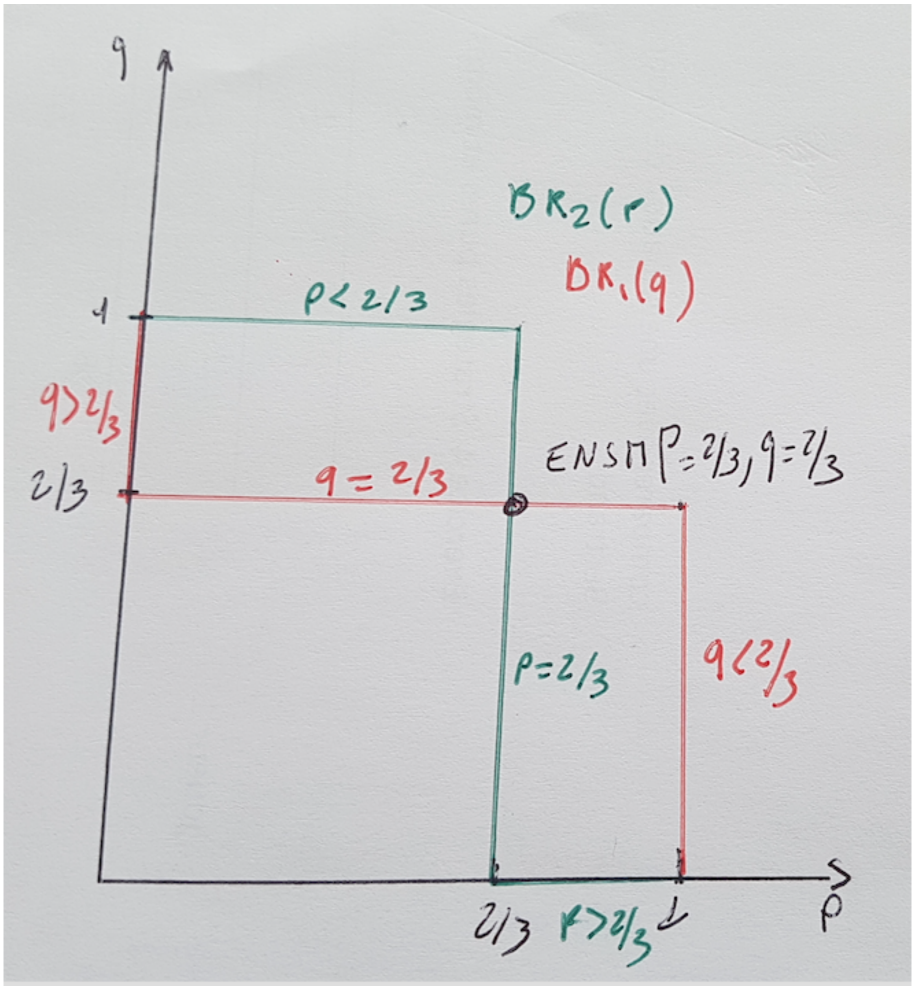
Les fonctions de meilleures réponses :
Joueur 1 :

$BR_1(q)=p^*(q)$

si $q< 2/3$: $BR_1(q)$= U qui implique p= 1
si $q= 2/3$: Il « randomise » entre U et D ; p =[0,1]
si $q> 2/3$: $BR_1(q)$= D qui implique que p= 0

joueur 2 :
$BR_2(p)=q^*(p)$
si $p< 2/3$: $BR_2(p)$= L qui implique q= 1
si $p= 2/3$: Il « randomise » entre L et R ; q =[0,1]
si $p> 2/3$: $BR_2(p)$= R qui implique que q= 0

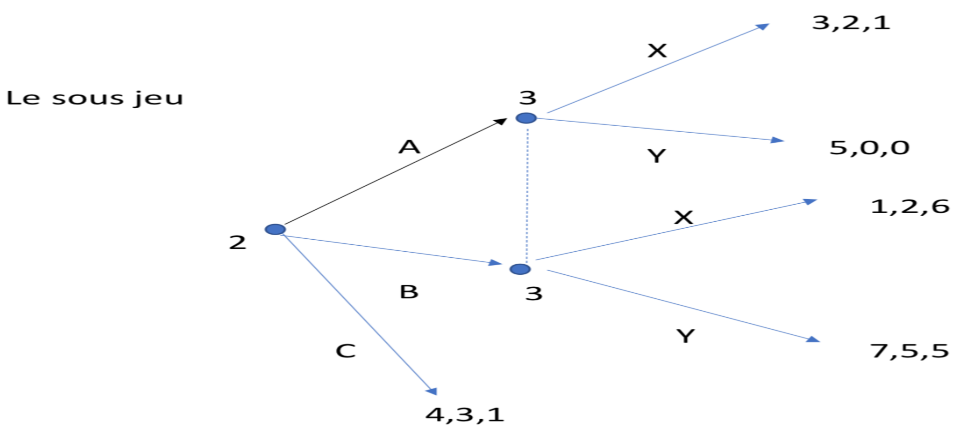
Les fonctions de meilleures réponses graphiquement:



.

Exercice 5 Backward induction

En partant des nœuds terminaux (backward induction)on peut identifier le plus petit sous-jeu propre
Un sous-jeu :c'est une portion de l'arbre du jeu que vous pouvez « entourer, encercler » sans casser un ensemble d'information
Dans l'exercice si on entoure la portion du jeu après que le joueur 2 ait choisit A ou B on casse l'information du joueur 3. On doit élargir « l'encerclement » jusqu'à ce que nous ne « cassons » pas les ensembles d'information
Ici le sous jeu se trouve donc après que le joueur 1 ait choisi de rentrer « In »



Dans le sous-jeu (SJ) on a seulement le joueur 2 (J2)et le joueur 3 (J3) qui interagissent ; le J3 choisit son action (X ou Y) sans pouvoir observer le choix de J2 (ligne hachuré).
En conséquence l'interaction entre J2 et J3 dans ce sous-jeu peut être modélisée comme un jeu simultané . Afin de trouver l'équilibre de Nash de ce SJ on va le représenter dans une forme normale (matrice) :

	X	Y
A	3,2,1	5,0,0
B	1,2,6	7,5,5
C	4,3,1	4,3,1

<u>Plus petit sous-jeu propre ci-dessus(forme normale)</u>

<u>On cherche les meilleures réponses (BR) de J2 et J3</u>
Le premier nombre de chaque cas correspond au gain du Joueur 1

Pour le joueur 2
BR2 (X) meilleure réponse de J2 quand J3 joue X c'est C car 3>2
BR2(Y) : B car 5>3>0
Je les écris en rouge

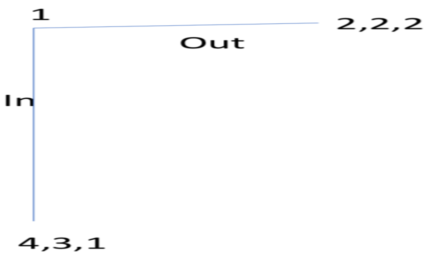
Pour le Joueur 3
Je les écris en vert

BR3(A) : X car 1>0
BR3(B) : X car 6>5
BR3(C) : X ou Y où il obtient 1 dans les 2 cas

En (C, X) chaque joueur a joué mutuellement sa BR à la stratégie de l'autre.
Par ailleurs on n'a pas besoin d'examiner le J1 si seulement les J2 et J3 sont appelés à bouger dans ce sous-jeu. Par conséquent l'équilibre de Nash de ce sous-jeu prédit que J2 et J3 choisiront le profil de stratégies (C,X)
On peut désormais insérer le triple paiement (4,3,1)qui résulte de l'équilibre de Nash de ce sous jeu au bout de la branche qui indique que le joueur 1 est entré (qui était le nœud initiateur du plus petit sous jeu propre)

Maintenant on remonte l'arbre du jeu et on peut bien voir que si le joueur 1 n'entre pas (out) il obtient un gain de 2 ; s'il entre (In) il obtient 4 donc le joueur 1 va rentrer. Donc l'équilibre de Nash du sou-jeu propre est (In, C ,X)

La forme extensive du jeu devient :



Le concept d'équilibre parfait en sous-jeux a été développé par richard Selten en 1975. Il s'agit d'un raffinement de l'équilibre de Nash dynamique dont l'idée consiste à supprimer les équilibres fondés sur des menaces non crédibles. Cela signifie qu'à l'équilibre parfait un joueur n'est pas en mesure de menacer les autres joueurs d'adopter dans certaines circonstances un comportement non optimal étant données les stratégies des autres joueurs.

Un sous jeu : l'ensemble formé par un nœud de décision du jeu original et tous les nœuds qui en découlent directement

Quand le sous-jeu est différent du jeu original on parle de sous jeu propre

Tout jeu en forme extensive possède au moins un sous jeu (SJ)à savoir lui-même

Pour trouver les équilibre parfait de sous -jeu on utilise la rétroduction (backward induction) :

On commence par chercher les EN des sous-jeux les plus proches des neuds terminaux et on remplace ces SJ par les résultats d'équilibre correspondants et on remonte vers les sous jeux qui contiennent ces sous jeux terminaux et ainsi de suite jusqu'à atteindre l'EN du sous jeu intial

On peut donc généraliser l'idée de base qui exige l'optimalité des choix chaque fois qu'un joueur doit jouer en introduisant le concept de sous jeu et le combiner avec le principe de rétroduction .