Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2019-2020 - Première session
24 janvier 2020 - Durée : 2 heures
Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

Problème

Considérons le système bonus-malus avec le fonctionnement suivant :

- un sinistre ou plus au cours de l'année conduit à payer une prime c l'année suivante ;
- pas de sinistre au cours de l'année et un sinistre ou plus l'année précédente conduit à payer c pour l'année suivante ;
- pas de sinistre les deux dernières années conduit à payer a l'année suivante.

Dans tout l'exercice, le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres causé par un assuré.

Considérons un assuré qui produit un nombre de sinistres annuel selon une loi de Poisson de paramètre θ.

1. Donnez la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours de cet assuré dans l'échelle bonus-malus.

2. Donnez la distribution stationnaire de cette chaîne.

3. Au bout de combien de temps est-elle atteinte ?

4. Quelle est la valeur espérée de la prime en régime stationnaire ? Commentez.

5. Mesurez l'élasticité de l'échelle.

6. Supposons que cet assuré n'a pas eu de sinistre au cours des deux précédentes années. En se rendant au réveillon du jour de l'an, il cause un sinistre le 31 décembre à 23h59. Il n'avait précédemment pas causé de sinistre au cours de l'année. À partir de quel montant de sinistre a-t-il intérêt à déclarer le sinistre à son assureur (on supposera que l'assuré connaît son profil de risque θ et qu'il raisonne avec une actualisation nulle) ?

Question de cours

Avec les notations habituelles du cours, montrez que l'estimateur de Bayes $\widetilde{\mu(\Theta)} = \mathrm{E}\left[\mu(\Theta)|\mathbf{X}\right]$ est le meilleur estimateur de $\mu(\Theta)$, au regard du critère de l'erreur quadratique moyenne.

Exercice 1

Considérons un assuré dont le nombre annuel de sinistres est distribué selon une loi de Poisson de paramètre Θ. Les montants de sinistres sont constants. La distribution *a priori* de Θ est une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Donnez la prime de Bayes de cet assuré.

2. Lors de la première année d'observation, l'assuré n'a pas causé de sinistre. Quelle prime lui réclameriez-vous pour la seconde année ?

3. Utilisez le modèle de Bühlmann pour estimer le nombre de sinistres espéré que va engendrer cet assuré pour la deuxième année.

4. Comparez les résultats des questions 2. et 3. et commentez

Exercice 2

Considérons la famille des distributions Pareto :

$$\mathcal{F} = \left\{ F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x}{x_0}\right)^{-\theta}, \text{ pour } x \geq x_0 \ ; \ \theta > 0 \right\}.$$

Déterminez la famille $\mathcal{U}$ conjuguée à $\mathcal{F}$.

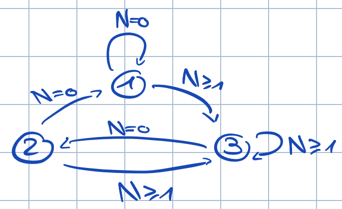
Problème

3 états

① $N_r = 0, N_{r-1} = 0 \longrightarrow a$

② $N_r = 0, N_{r-1} \geq 1 \longrightarrow c$

③ $N_r \geq 1 \longrightarrow c$



1) $P(N=0 \mid \Theta = \theta) = e^{-\theta}$

$P(N \geq 1 \mid \Theta = \theta) = 1 - e^{-\theta}$

$P[L_2 = 1 \mid L_1 = 1, \Theta = \theta] = P[N=0 \mid \Theta = \theta] = e^{-\theta}$

$P(L_2 = 2 \mid L_1 = 1, \Theta = \theta] = 0$

$$P_\theta = \begin{pmatrix} e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ 0 & e^{-\theta} & 1-e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

2) On cherche π_θ tq $\begin{cases} \pi_\theta' P_\theta = \pi_\theta \\ \pi_\theta' e = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = (a+b)e^{-\theta} \\ b = (1-a-b)e^{-\theta} \\ 1-a-b = 1-e^{-\theta} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = e^{-2\theta} \\ b = (1-e^{-\theta})e^{-\theta} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_\theta = \begin{pmatrix} e^{-2\theta} \\ (1-e^{-\theta})e^{-\theta} \\ 1-e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

3) $rg(P_\theta) = 2 \Rightarrow$ temps d'atteinte $= 2$

4) $\pi_\theta' \begin{pmatrix} a & c & c \end{pmatrix} = a e^{-2\theta} + c(1-e^{-\theta})e^{-\theta} + c(1-e^{-\theta})$

$= a e^{-2\theta} + c(1 - e^{-2\theta})$

5)

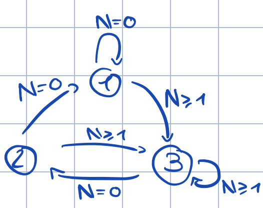
Problème :

1) $N \sim \mathcal{P}(\theta)$

$$\mathbb{P}_\theta = \begin{pmatrix} e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ 0 & e^{-\theta} & 1-e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

l'es en 3 tu vas en 2

	m-1	m	Prime
1	0	0	a
2	1	0	c
3	0	1	c
3	1	1	c



1: prime = a

2: prime = c sans accid^r en n

3: prime = c avec ——

$P(N=0) = e^{-\theta}$

$P(N\geq 1) = 1-e^{-\theta}$

$P(N=k) = \dfrac{\theta^k e^{-\theta}}{k!}$

2) $\pi_\theta' = (a \quad b \quad c)$

π_θ distrib stationnaire si $\begin{cases} \pi_\theta' \mathbb{P}_\theta = \pi_\theta' \\ \pi_\theta' e = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow (p_1 \quad p_2 \quad p_3) \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & \quad e_2 & \quad e_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ 0 & e^{-\theta} & 1-e^{-\theta} \end{pmatrix} \end{array} = \left((p_1+p_2)e^{-\theta} \quad p_3 e^{-\theta} \quad (1-e^{-\theta})(p_1+p_2+p_3) \right)$$

$\pi_\theta' e = 1 \Rightarrow p_1 + p_2 + p_3 = 1$

et $\pi_\theta' \mathbb{P}_\theta = \pi_\theta' \Rightarrow \begin{cases} p_1 = (p_1+p_2)e^{-\theta} \\ p_2 = p_3 e^{-\theta} \\ p_3 = 1-e^{-\theta} \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} p_1 = e^{-2\theta} \\ p_2 = e^{-\theta}(1-e^{-\theta}) \\ p_3 = 1-e^{-\theta} \end{cases}$

3) Afin de déterminer le temps d'atteinte i.e la puissance k tq $\mathbb{P}_\theta^k = \mathbb{P}_\theta$ il faut déterminer le rang de la matrice $\mathbb{P}_\theta$.

$rg(\mathbb{P}_\theta) = 2$ car $e_1 + e_2 + e_3 = 1_3$, e_i représentant les élém^{ts} de la $i^{ème}$ colonne de $\mathbb{P}_\theta$.

4) $P_{\text{Stationnaire}} = \pi_\theta \, (\underbrace{a}_{\text{prime de l'état 1}} \quad \underbrace{c}_{\text{prime de l'état 1}} \quad \underbrace{c}_{\text{prime de l'état 1}}) = a e^{-2\theta} + c(1-e^{-\theta})e^{-\theta} + c(1-e^{-\theta})$

$= e^{-2\theta} a + (1-e^{-2\theta}) c$

$= c + (a-c) e^{-2\theta}$

On remarque que la prime en régime stationnaire est linéaire en $e^{-2\theta}$ et donc décroissante en θ.

5) Élasticité $= \dfrac{\frac{dP_{\text{Statio}}(\theta)}{P_{\text{Statio}}(\theta)}}{\frac{d\theta}{\theta}} = \dfrac{d\ln(P_{\text{Statio}}(\theta))}{d\ln(\theta)}$

$= \dfrac{dP_{\text{Statio}}(\theta)}{d\theta} \times \dfrac{\theta}{P_{\text{Statio}}(\theta)}$

2) Mesure d'efficacité

Soit un assuré de p.d.r θ

↳ $\pi(\theta)$ $\quad b(\theta) = \pi(\theta)p$ ← prime de risque pour un assuré de p.d.r θ.

$Eff = \dfrac{\frac{db(\theta)}{b(\theta)}}{\frac{d\theta}{\theta}} = \dfrac{d\ln(b(\theta))}{d\ln(\theta)}$ $\quad$ idéalement on aimerait que Eff vaille 1 pour que la prime varie linéairement avec θ.

aussi: Élasticité

ici: $b(\theta) = \pi_{\text{rég. stationnaire}}$

$\dfrac{d\pi_{\text{Statio}}}{d\theta} = -2(a-c)e^{-2\theta}$

$\Rightarrow$ Élasticité $= \dfrac{-2(a-c)\theta e^{-2\theta}}{c+(a-c)e^{-2\theta}} = \dfrac{2\theta(c-a)}{ce^{2\theta}-(c-a)} = \dfrac{2\theta(c-a)}{a-c(1-e^{2\theta})}$

6) Si l'assuré ne déclare pas le sinistre il va supporter lui même le coût du sinistre et paiera, a priori, un montant a de prime pour les années $n+1$ et $n+2$ à condition qu'il n'ai pas de sinistre en année $n+2$.

Si ce dernier décide de déclarer son sinistre, il ne supportera pas le coût de celui-ci mais il verra sa prime d'assurance passer de c à a pour les années $n+1$ et $n+2$ (a priori).

	N	N+1		N+2	
		D	$\bar{D}$	D	$\bar{D}$
Classe	1	3	1	2 ou 3	1 ou 3
Paye	a	c	$a+x$	c	$ae^{-\theta}+c(1-e^{-\theta})$

il déclare si $2c < a+x+ae^{-\theta}+c(1-e^{-\theta})$ $\Rightarrow$ si $x > (c-a)(1+e^{-\theta})$

Il tire donc un avantage à déclarer son sinistre dès lors que Coût du sinistre $> 2(c-a)$

Question de cours.

$\rightarrow$ Avec les notations habituelles, montrez que l'estimateur de Bayes $\widetilde{\mu(\Theta)} = \mathbb{E}[\mu(\Theta)|X]$ est le meilleur estimateur de $\mu(\Theta)$, au regard du critère de l'erreur quadratique moyenne.

Soit $\widehat{\mu(\theta)}$ un estimateur de $\mu(\theta)$

$$\mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)}-\mu(\theta))^2] = \mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)}-\widetilde{\mu(\theta)}+\widetilde{\mu(\theta)}-\mu(\theta))^2]$$
$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)}-\widetilde{\mu(\theta)})^2+(\widetilde{\mu(\theta)}-\mu(\theta))^2+2(\widehat{\mu(\theta)}-\widetilde{\mu(\theta)})(\widetilde{\mu(\theta)}-\mu(\theta))\,|\,\underline{X}]]$$
$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)}-\widetilde{\mu(\theta)})^2|\underline{X}]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\widetilde{\mu(\theta)}-\mu(\theta))^2|\underline{X}]] + 2\,\mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)}-\widetilde{\mu(\theta)})(\widetilde{\mu(\theta)}-\mu(\theta))\,|\,\underline{X}]}]$$

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}\tilde{\mu}-\hat{\mu}\mu-\tilde{\mu}^2+\tilde{\mu}\mu\,|\,\underline{X}] = \underbrace{\tilde{\mu}\,\mathbb{E}[\hat{\mu}]-\underbrace{\mathbb{E}[\hat{\mu}]\tilde{\mu}}_{\mathbb{E}[\hat{\mu}\mu|\underline{X}]}-\tilde{\mu}^2+\tilde{\mu}\cdot\tilde{\mu}}_{=0}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)}-\mu(\theta))^2] > \mathbb{E}[(\widetilde{\mu(\theta)}-\mu(\theta))^2] \quad \text{pour tout estimateur } \hat{\mu} \text{ de } \tilde{\mu}$$

Donc au regard du critère de l'erreur quadratique moyenne, l'estimateur de Bayes $\widetilde{\mu(\Theta)} = \mathbb{E}[\mu(\Theta)|X]$ est le meilleur estimateur de $\mu(\Theta)$

Exercice 1:

$N | \Theta = \theta \sim \mathcal{P}(\theta)$
$\Theta \sim \mathcal{U}([0,1])$

1) On ne connait rien de cet assuré

$\Rightarrow P^{Bayes} = P^{Coll} = \mathbb{E}[N_1] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N_1|\Theta]] = \mathbb{E}[\Theta] = 1/2$

2) On suppose $N_1 = 0$

$\rightarrow P^{Bayes} = \mathbb{E}[N_2 | N_1 = 0]$
$= \int_\Theta \underbrace{\mathbb{E}[N_2|\Theta=\theta]}_{=\theta}\, u(\theta|N_1=0)\,d\theta$

On a $u(\theta|N_1=0) = \dfrac{P(N_1=0|\Theta=\theta)}{P(N_1=0)}\,u(\theta)$

De plus, $u(\theta) = 1$ car $\Theta \sim \mathcal{U}([0,1])$

$P(N_1=0|\Theta=\theta) = e^{-\theta}$ car $N_1|\Theta=\theta \sim \mathcal{P}(\theta)$

$P(N_1=0) = \int_\Theta e^{-\theta}\,d\theta = [-e^{-\theta}]_0^1 = 1-e^{-1}$

Exercice 1

Considérons un assuré dont le nombre annuel de sinistres est distribué selon une loi de Poisson de paramètre Θ. Les montants de sinistres sont constants. La distribution *a priori* de Θ est une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$.

1. Donnez la prime de Bayes de cet assuré.

2. Lors de la première année d'observation, l'assuré n'a pas causé de sinistre. Quelle prime lui réclameriez-vous pour la seconde année ?

3. Utilisez le modèle de Bühlmann pour estimer le nombre de sinistres espéré que va engendrer cet assuré pour la deuxième année.

4. Comparez les résultats des questions 2. et 3. et commentez

$$\Rightarrow u(\theta \mid N_1 = 0) = \frac{e^{-\theta}}{1 - e^{-1}} = \frac{e}{e-1} e^{-\theta}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[N_2 \mid N_1 = 0] = \int_{\Theta} \frac{e}{e-1} \theta e^{-\theta} d\theta = \frac{e}{e-1} \left[-\theta e^{-\theta} - e^{-\theta} \right]_0^1$$

$$= \frac{e}{e-1} \left(-2e^{-1} + 1 \right)$$

$$= \frac{e}{e-1} \frac{e-2}{e} = \frac{e-2}{e-1} \approx 0.418$$

3) Rappels : Bühlmann : $\widehat{\mu(\theta_i)}^{hom} = \alpha \bar{X}_i + (1-\alpha)\bar{X}$ où $\alpha = \frac{m}{m + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[\mathbb{V}[N \mid \Theta]]$ $\tau^2 = \mathbb{V}[\mathbb{E}[N \mid \Theta]]$

De plus, $\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{I(m-1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{m} (X_{ij} - \bar{X}_i)^2$ $\hat{\tau}^2 = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^{I} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \frac{\hat{\sigma}^2}{m}$

(I risques et m obs. par risque).

Ici $\sigma^2 = \mathbb{E}[\mathbb{V}[N \mid \Theta]] = \mathbb{E}[\Theta] = 1/2$

$\tau^2 = \mathbb{V}[\mathbb{E}[N \mid \Theta]] = \mathbb{V}[\Theta] = 1/12$

nb sinistres / nb années

$$\alpha = \frac{1}{1 + \frac{1/2}{1/12}} = \frac{1}{7} \Rightarrow P^{Bühlmann} = \alpha \bar{N}_1 + (1-\alpha)\mu_0 = \frac{1}{7} \times \frac{1}{2} + \frac{6}{7} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{7}$$

4) On remarque donc que $P^{Bayes} = 1/2 \neq \frac{3}{7} = P^{Bühlmann}$

Les valeur ne coïncident pas car ce ne sont pas des loi conjuguées appartenant à la $\mathcal{F}_{exp}$.

car sinon linéaire dans les obs $\Rightarrow$ Prime de Bühlmann.

Exercice 2 :

Avec les notations du cours, $f_\theta(x) = \frac{\theta}{x_0} \left(\frac{x_0}{x} \right)^{\theta+1}$

$\frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-\lambda x}$

$$u_x(\theta) \propto f_\theta(x) = \prod_{i=1}^{m} f_\theta(x_i) \propto \theta^m \exp\left(-\theta \sum_{j=1}^{m} \ln\left(\frac{x_j}{x_0} \right) \right)$$

Donc les distribution de $\mathcal{U}'$ sont des distributions Gamma

De plus, la famille $\mathcal{U}$ des distributions Gamma est fermée sous l'operateur produit, c'est donc une extension naturelle à $\mathcal{U}'$.

Exercice supplémentaire :

Considerons la famille des distributions géométriques

$$\mathcal{F} = \{ f_\theta(x) = (1-\theta)^x \theta \quad , x \in \mathbb{N}, \theta \in [0,1] \}$$

Trouvez la famille $\mathcal{U}$ conjuguée à $\mathcal{F}$.

$$\mathcal{L}(f_\theta(x)) = \prod_{i=1}^{m} f_\theta(x_i)$$

$$= \prod_{i=1}^{m} ((1-\theta)^{x_i} \theta)$$

$$= \theta^m (1-\theta)^{\sum_{i=1}^{m} x_i}$$

$$\rightarrow u(\theta \mid \underline{X}) \propto \mathcal{L}(f_\theta(x))$$

$$\Rightarrow \Theta \mid \underline{X} \sim \text{Beta}$$

On vérifie $\Theta \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$

$$u(\theta \mid \underline{x}) \propto \mathcal{L}(f_\theta(x))\, u(\theta)$$

$$\propto \theta^{n}(1-\theta)^{\sum_{i=1}^{n} x_i} \times \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}$$
$$\propto \theta^{(\alpha+n)-1}(1-\theta)^{(\beta+\sum_{i=1}^{n} x_i)-1}$$

$\Rightarrow \Theta \mid \underline{X} \sim \text{Beta}(\alpha', \beta')$ avec $\alpha' = \alpha + n$

$$\beta' = \beta + \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Exercice supp. (Exemple cours):

Considérons une suite de n v.a de Bernoulli $N_1, \dots, N_n$ qui ont toutes la même proba de succès Θ.
Le nb total de succès observés est donc distribué selon une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \Theta)$.
Connaissant Θ, la proba d'observer r succès lors de n tirages vaut :

$$P(N_1 + \dots + N_n = r \mid \Theta) = \binom{n}{r} \Theta^{r} (1-\Theta)^{n-r}$$

Supposons que la distribut° a priori de Θ soit une loi $\mathcal{B}(a,b)$ qui admet donc pour densité

$$f(\theta) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \qquad \theta \in [0,1]$$

D'après la règle de Bayes, la densité de la loi a posteriori de Θ est donnée par

$$f(\theta \mid n_1, \dots, n_n) \propto f(\theta) f(n_1, \dots, n_n \mid \theta) = f(\theta) \prod_{i=1}^{n} f(n_i \mid \theta)$$

$$\rightarrow \prod_{l=1}^{k} P(N_l = n_l \mid \Theta = \theta) = \theta^{r}(1-\theta)^{n-r} \quad \text{où } r = \sum_{l=1}^{k} n_l$$

$$\propto \theta^{a-1}(1-\theta)^{b-1} \times \theta^{r}(1-\theta)^{n-r}$$
$$\propto \theta^{a+r-1}(1-\theta)^{b+n-r-1}$$

La distribution a posteriori de Θ est une loi $\mathcal{B}(a+r, b+n-r)$
Ainsi, la famille des lois bêta est conjuguée à la famille des lois Bernoulli.

$$\mathcal{U}' = \left\{ u_x : u_x(\theta) = f_\theta(x) \left(\int f_\theta(x) d\theta \right)^{-1} \quad x \in A \right\}$$

Si $\mathcal{U}'$ fermée sous l'opérat° produit $\rightarrow$ $\mathcal{U}'$ conjuguée à $\mathcal{F}$ sinon on lui cherchera une extension naturelle qui l'est.

$$f_\theta(x_i) = \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_0}{x_i}\right)^{\theta+1}$$

$$f_\theta(x) = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_0}{x_i}\right)^{\theta+1} = \left(\frac{\theta}{x_0}\right)^{n} x_0^{n(\theta+1)} e^{-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}$$

$$u_x(\theta) \propto \theta^{n} x^{n\theta} e^{-(\theta+1)\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)}$$

Exercice n°3

Considérons la famille des distributions de Pareto

$$\mathcal{F} = \left\{ F_\theta(x) = 1 - \left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta}, \theta > 0 \right\}.$$

Trouvez la famille $\mathcal{U}$ conjuguée à $\mathcal{F}$.

Avec les notations du cours, $f_\theta(x) = \frac{\theta}{x_0}\left(\frac{x_0}{x}\right)^{\theta+1}$

$u_x(\theta) \propto f_\theta(x) = \prod_{j=1}^{n} f_\theta(x_j) \propto \theta^{n} \exp\left(-\theta \sum_{j=1}^{n} \ln \frac{x_j}{x_0}\right)$.

Donc les distributions de $\mathcal{U}'$ sont des distributions Gamma. La famille $\mathcal{U}$ des distributions Gamma est fermée sous l'opérateur produit, c'est donc une extension naturelle à $\mathcal{U}'$.