ISFA Anne Eyraud-Loisel

Processus stochastiques - M1 Actuariat

Semestre automne 2021-2022

TD n° 1

Martingales discrètes et temps d'arrêts

Exercice 1 : Les martingales de la marche aléatoire simple.

Soit $(Y_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit la *marche aléaoire simple* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} Y_i, \ \forall n \geq 1 \end{cases}$$

1. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est $(\mathcal{F}_n)$-adapté.
2. Montrer que $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(S_n^2 - n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(e^{\lambda S_n - n\ln(\cosh\lambda)})_{n\in\mathbb{N}}$ sont des $(\mathcal{F}_n)$-martingales.

Exercice 2 : Martingale de Doob

Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration. On définit le processus $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $Y_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$. Montrez que $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X.

Exercice 3 : Propriétés des temps d'arrêt

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et soient S et T deux temps d'arrêt discrets par rapport à cette filtration.

1. Montrez que $S \wedge T = \min(S,T)$, $S \vee T = \max(S,T)$ et $S + T$ sont aussi des temps d'arrêt.

Revoir

2. Montrez que, si $S \leq T$, on a $\mathcal{F}_S \subset \mathcal{F}_T$.
3. * Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ un processus adapté à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Montrez que la variable $Y_T = \mathbf{1}_{T<\infty} X_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Exercice 4 : Temps d'arrêts et marche aléatoire.

Soit $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire simple définie comme dans l'exercice 1. On note $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la filtration naturelle des $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dire dans chaque cas si les variables aléatoires suivantes sont des temps d'arrêts.

1. $\tau = \inf\{n \geq 1, \ S_n = 0\}$.
2. $T = \max\{n \in \{0, ..., 4\}, \ S_n = 0\}$.

Exercice 5 : Martingale et processus prévisible

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une filtration et soit $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ un *processus prévisible* qui signifie, par définition, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, H_n est mesurable par rapport à $\mathcal{F}_{n-1}$. Soit $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$. On suppose que pour tout n, H_n est borné et on définit le processus $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de la manière suivante : $N_0 = 0$ et

$$N_n = \sum_{k=1}^{n} H_k(M_k - M_{k-1}) \text{ si } n \geq 1\,.$$

1. Montrez que $(N_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Intéressant +++

2. Soit T un temps d'arrêt. En appliquant le résultat de la question précédente avec $H_k := \mathbf{1}_{T\geq k}$, en déduire que si $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$-martingale, alors il en est de même pour le processus arrêté $(M_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 : La fortune du joueur de pile ou face

Un joueur de pile ou face débute à la date 0 avec la richesse X_0. La pièce est équilibrée, et les résultats sont $+1$ si "pile" sort et -1 si "face" sort. Les jets successifs sont supposés indépendants.

1. T parties sont prévues. Montret que le processus de richesse du joueur, noté X, est une martingale, en précisant l'espace probabilisé et la filtration utilisée.
2. Au lieu de prévoir T parties, le joueur décide de s'arrêter dès que son gain est strictement positif.
   (a) Ecrire cela sous forme de temps d'arrêt
   (b) Quelle est la valeur de $\mathbb{E}(X_\tau)$?
   (c) Le théorème d'arrêt de Doob s'applique-t-il ? pourquoi ?

Exercice 7 : La ruine du joueur.

Deux joueurs, le joueur A possédant initialement a euros et le joueur B en possédant b, jouent au jeu suivant. A chaque coup, les deux joueurs misent un euro et on lance une pièce de monnaie équilibrée. Si le résultat de la pièce est pile, le joueur A remporte la mise et si le résultat de la pièce est face, le joueur B remporte la mise. Le jeu cesse quand l'un des deux est ruiné.

1. En reprenant les notation de l'exercice 1, on note $Y_n = 1$ si le résultat du n^e lancer est pile et $Y_n = -1$ si c'est face. Soit S_n l'argent du joueur A au temps n. On a donc :

$$S_n = a + \sum_{i=1}^{n} Y_i.$$

Soit

$$T = \inf\{n,\ S_n \in \{0, a+b\}\}.$$

Justifier que T définit bien un temps d'arrêt par rapport à $(\mathcal{F}_i)_{i\in\mathbb{N}}$. Quel interprétation donner au temps d'arrêt T et aux évènements $\{S_T = 0\}$ et $\{S_T = a+b\}$?

2. On admet que $T < +\infty$ presque sûrement. En appliquant le théorème d'arrêt à $(S_{T\wedge n})_{n\in\mathbb{N}}$, calculer la probabilité que A gagne la fortune de B.

Intéressant ! 3. * Démontrer que $T < +\infty$ presque sûrement.

Exercice 8 : Martingales et Options Américaines

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé filtré tel que $card(\Omega) < +\infty$ et $\mathcal{F}_{t=0,\dots,T}$ une filtration. Soit un processus Z adapté à $\mathcal{F}$ et intégrable. On définit le processus U par :

$$\begin{aligned} U_T &= Z_T \\ U_t &= \max(Z_t; E[U_{t+1}|\mathcal{F}_t]) \end{aligned}$$

1. Montrez que U est une surmartingale adaptée à $\mathcal{F}$, et que $U_t \geq Z_t,\ \forall t$.
2. Soit Γ l'ensemble des surmartingales X telles que $X_t \geq Z_t,\ \forall t$. Montrez que $\forall X \in \Gamma$:

$$\forall t \leq T,\ X_t \geq U_t$$

Indication : raisonnez par récurrence en partant de la date T

3. Soit $\tau = \inf\{t \leq T,\ U_t = Z_t\}$. On définit Y le processus arrêté de U par $Y_t = U_{\min(t,\tau)}$.
   (a) Montrez que
   $$\forall \omega \in \{\tau \geq t+1\},\ U_t(\omega) = E(U_{t+1}|\mathcal{F}_t)(\omega).$$
   Pas simple ! (b) Déduisez que Y est une martingale.
4. Quelle interprétation financière donnez-vous aux processus Z et U.

Exercice 9 : Ordres de Bourse

La date du jour est le 5 décembre. Parmi les ordres de bourse suivants, quels sont ceux dont la date d'exécution est un temps d'arrêt ? Précisez pour chaque exemple le filtration pertinente en supposant une seule cotation par jour.

1. Achat de 10000 Alcatel à 13 € : date limite de validité le 31 décembre. Alcatel cote aujourd'hui à 13, 4 €.
2. Vente de 40000 Eurotunnel à 0, 7 € : date limite de validité le 31 décembre. Eurotunnel cote aujourd'hui à 0, 6 €.
3. Achat de 100 Air Liquide au cours minimum entre aujourd'hui et le 31 décembre. Air Liquide cote aujourd'hui à 140 €.

Exercice 10 : Processus à espérance constante et Martingales

Une urne contient un nombre de boules pair N. La moitié des boules sont blanches et les autre sont noires. A chaque tirage, on tire (sans remise) une boule au hasard. On définit Y (resp. Z) le processus comptant le nombre de boules blanches (resp. noires) tirées. On retient ici la filtration naturelle de Y (montrez que cette filtration est la même que celle engendrée par Z).
Soit $X_n = Y_n - Z_n$ l'écart entre le nombre de boules blanches et le nombre de boules noires tirées après n tirages. Montrez que le processus X a une espérance constante, mais que X n'est pas une martingale.

Exercice 11 : Processus de valeur d'une stratégie autofinancée

Sur un marché financier sont échangés K titres, dont les prix en date t sont notés $X_t = (X_t^1, .., X_t^K)$. Les cotations sont supposées être discrètes ($t \in \mathbb{N}$). On suppose que le processus de prix est une martingale. On appelle *stratégie de portefeuille* $\theta = (\theta_t^1, .., \theta_t^K)$ tout processus prévisible borné (θ représente la part détenue dans chaque actif entre $t-1$ et t).

1. Quelle est la valeur du portefeuille détenu par l'agent dont la stratégie est θ à l'instant t ?
2. Montrer que si X est une martingale et θ un processus prévisible borné, alors le processus Z défini par $Z_0 = 0$ et
$$Z_t = \sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{t} \theta_s^k (X_s^k - X_{s-1}^k)$$
est une martingale.
3. Une stratégie de portefeuille θ est dite *autofinancée* si $\forall t$:
$$\sum_{k=1}^{K} \theta_t^k X_t^k = \sum_{k=1}^{K} \theta_{t+1}^k X_t^k$$
Montrer que si X est une martingale et θ une stratégie autofinancée, alors le processus de valeur de la stratégie est une martingale. Quelle est la signification financière d'un tel résultat ?

ISFA Anne Eyraud-Loisel

Processus stochastiques - M1 Actuariat

TD n° 2

Mouvement Brownien, Martingales et Théorème d'arrêt

Exercice 1 : Martingale de Doob

Soit X une variable aléatoire intégrable et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ une filtration. On définit le processus stochastique $(Y_t)_{t\geq 0}$ par $Y_t = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$. Montrez que $(Y_t)_{t\geq 0}$ est une martingale par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. On l'appelle *martingale de Doob* de X.

Exercice 2 : Martingales du mouvement Brownien.

Soit B un mouvement Brownien issu de 0 et soit $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ la filtration naturelle associée à B. Montrer que les processus suivants sont des martingales par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

1. $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
2. $(B_t^2 - t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.
3. $(e^{\lambda B_t - \lambda^2 t/2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.

Remarque : Le deuxième point revient à dire que le mouvement Brownien a pour variation quadratique $\langle B_t \rangle = t$. Le Théorème de caractérisation de Lévy affirme que la seule martingale continue de variation quadratique t est le mouvement brownien.

Exercice 3 : Propriétés du mouvement Brownien

Soit B un mouvement Brownien, soit $c > 0$ une constante et $s \geq 0$ un nombre réel. Montrer que les processus suivants sont des mouvements Browniens.

1. $(-B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Symétrie),
2. $(B_{t+s} - B_s)_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Propriété de Markov faivle),
3. $(B_{1-t} - B_1)_{t\in[0,1]}$ (Retournement temporel),
4. $(cB_{t/c^2})_{t\in\mathbb{R}_+}$ (Auto-similarité).

Exercice 4 : un petit contre-exemple

Soit Z une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Le processus $(\sqrt{t}Z)_{t\geq 0}$ est-il un mouvement Brownien ?

Exercice 5 : Somme de deux mouvements Browniens indépendants.

Soient B^1 et B^2 deux mouvements Browniens indépendants et soit $\rho \in]0,1[$ une constante.

1. Montrez que $(\rho B_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} B_t^2)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est aussi un mouvement Brownien.

2. En déduire que B^1B^2 est une martingale.
   Indication : Que peut-on dire du processus $\left(\left(\frac{B_t^1+B_t^2}{\sqrt{2}}\right)^2 - t\right)_{t\in\mathbb{R}_+}$?

Exercice 6 : La ruine du joueur (version continue).

Soit B un mouvement brownien et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $a < 0 < b$. On définit :

$$\tau = \inf\{t \in \mathbb{R}_+ | B_t = a \text{ ou } B_t = b\}.$$

1. Justifier que τ est un temps d'arrêt.
2. En appliquant le théorème d'arrêt, montrer que
   (a) $P(B_\tau = a) = \frac{b}{b-a}$
   (b) $\mathbb{E}(\tau) = |ab|$
3. Si on remplace B par $Z = \sigma B$, un processus de Wiener de volatilité σ, que devient ce résultat ?

Exercice 7 : Des inégalités de Doob.

1. En utilisant le théorème d'arrêt pour les sous-martingales, montrez que si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une sous-martingale par rapport à une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ et si $(M_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est continue et positive, alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq t} M_s \geq \lambda\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[M_t\right]}{\lambda}.$$

2. En déduire que si $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ une martingale continue par rapport à $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ alors pour tout $\lambda > 0$ et tout $t \in \mathbb{R}_+$ on a :

$$\mathbb{P}\left[\sup_{0\leq s\leq t} |N_s| \geq \lambda\right] \leq \frac{\mathbb{E}\left[N_t^2\right]}{\lambda^2}.$$

   Comparer ce résultat avec l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

Exercice 8 : Temps d'atteinte du mouvement Brownien.

Soit $a > 0$, $(B_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ un mouvement Brownien et soit $T_a := \inf\{t \geq 0,\ B_t = a\}$ le premier temps d'atteinte du point a par un mouvement Brownien.

1. En utilisant une des martingales du mouvement Brownien , montrer que sa transformée de Laplace est égale à :

$$\mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\right] = \mathbb{E}\left[\exp(-\lambda T_a)\mathbf{1}_{T_a<+\infty}\right] = e^{-\sqrt{2\lambda}a},$$

   pour tout $\lambda > 0$.

2. En déduire que $\mathbb{P}(T_a < +\infty) = 1$ et que $\mathbb{E}[T_a] = +\infty$.

Exercice 9 : Le pont Brownien.

Soit B un mouvement Brownien. On considère le processus stochastique $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ défini pour tout $t \in [0,1]$ par $X_t = B_t - tB_1$.

1. Montrer qu'il s'agit d'un processus Gaussien.
2. Calculer sa fonction espérance ainsi que sa fonction de covariance.
3. En quel temps t la variance de X_t est-elle maximale ?
4. Est-ce $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est une martingale ?

Remarque : Ce processus stochastique s'appelle un Pont Brownien. Il s'agit d'un mouvement Brownien conditionné à revenir en 0 au temps 1 (voir Figure 1).

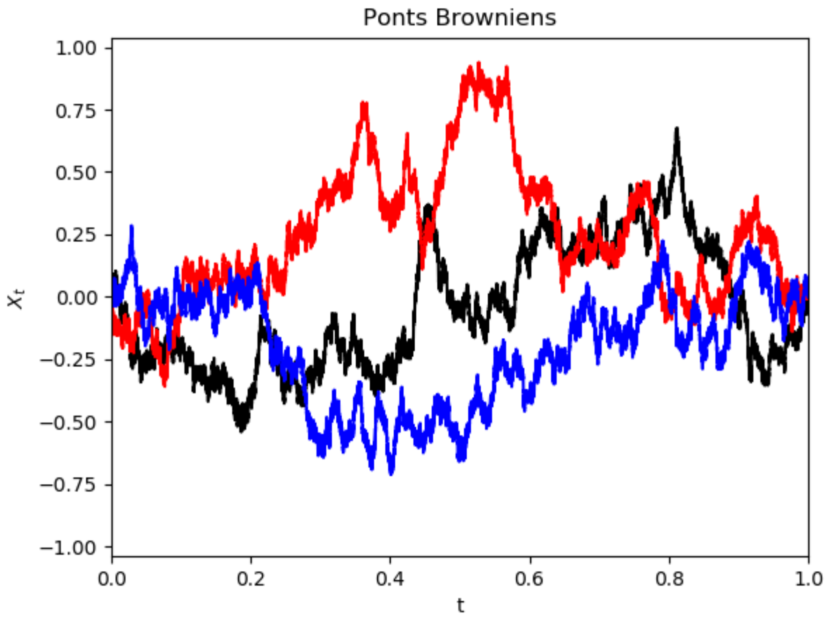

FIGURE 1 – Trois réalisations de ponts Browniens.

ISFA Anne EYRAUD-LOISEL

Processus stochastiques - M1 Actuariat

Semestre automne 2021-2022

TD n° 3

INTÉGRALE STOCHASTIQUE, FORMULE D'ITÔ ET EDS

<u>Exercice 1</u> : Variation quadratique et intégrales stochastiques.

On note $M_t = \int_0^t B_s dB_s$, $N_t = \int_0^t e^{-s} dB_s$ et $V_t = \int_0^t B_s^4 ds$.

1. Pour tout $t \geq 0$, donnez une expression de $\langle M \rangle_t$, $\langle N \rangle_t$, $\langle M, N \rangle_t$ et $\langle M + N, N + V \rangle_t$.
2. Pour tout $t \geq 0$, donnez une expression de $\mathbb{E}\left[M_t^2\right]$, $\mathbb{E}\left[N_t^2\right]$ et $\mathbb{E}\left[M_t N_t\right]$.
3. Écrire $X_t := \int_0^t B_s dM_s + \int_0^t e^{-B_s} d\langle N \rangle_s + \int_0^t B_s^2 dV_s$ comme processus d'Itô.

<u>Exercice 2</u> : Retour sur $\int_0^t B_s dB_s$.

En appliquant la formule d'Itô à B_t^2, (re)montrez que $\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}\left(B_t^2 - t\right)$.

<u>Exercice 3</u> : Processus d'Itô et martingales

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. Ecrire les processus suivants comme processus d'Itô, c'est à dire sous la forme :

$$x_0 + \int_0^t \mu(s, B_s)ds + \int_0^t \sigma(s, B_s)dB_s.$$

1. $X_t = \exp(\frac{t}{2})\sin(B_t)$
2. $Y_t = B_t^2 \exp\left(B_t + t\right)$
3. $Z_t = \left(B_t^3 - 3tB_t\right)_{t\geq 0}$
4. Le(s)quel(s) des processus précédents sont des martingales ? Justifiez votre réponse.

<u>Exercice 4</u> : Processus d'Itô et martingales

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. Ecrire les processus suivants comme processus d'Itô, c'est à dire sous la forme :

$$x_0 + \int_0^t \mu(s, B_s)ds + \int_0^t \sigma(s, B_s)dB_s.$$

1. $X_t = \exp(\frac{t}{2})\sin(B_t)$
2. $Y_t = B_t^2 \exp\left(B_t + t\right)$

3. $Z_t = \left(B_t^3 - 3tB_t\right)_{t\geq 0}$
4. Le(s)quel(s) des processus précédents sont des martingales ? Justifiez votre réponse.

Exercice 5 : Mouvement brownien géométrique

En applicant le lemme d'Itô au processus $Y_t = lnS_t$, déterminez la solution de l'équation différentielle stochastique suivante, modélisant la valeur du cours d'un actif risqué dans un modèle Black-Scholes :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

où $S_0 = 0$.

Exercice 6 : Taux de Change

Le processus stochastique

$$\{C_t = C_0 e^{\alpha W_t} : t \geq 0\},\ r_0 \geq 0$$

représente l'évolution d'un taux de change, c'est-à-dire que C_t est le nombre d'euros que l'on peut obtenir par dollar américain au temps t, où $\{W_t : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard.

1. Déterminez l'équation différentielle stochastique satisfaite par le processus $\{C_t : t \geq 0\}$.
2. Le processus $\{X_t : t \geq 0\}$ modélise l'évolution d'un actif risqué en dollars américains. Il satisfait l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t^*$$

où $\{W_t^* : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard indépendant de $\{W_t : t \geq 0\}$. Déterminez l'équation différentielle stochastique satisfaite par l'évolution $\{Y_t : t \geq 0\}$ du titre risqué en euros.

Exercice 7 : Cours du dollar

On désigne par X_t la valeur d'un dollar en euros ; c'est le cours du dollar.
On suppose que $X_0 > 0$ et que $X_t = X_0\, e^{\sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t}$, où B est un mouvement brownien standard.

1. On pose $Y_t = \sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t$.
   Appliquer la formule d'Itô pour déterminer l'équation satisfaite par $X_t = X_0\, e^{Y_t}$.
2. On pose $Z_t = \frac{1}{X_t}$ le prix d'un euro en dollars.
   En appliquant la formule d'Itô, déterminer l'équation satisfaite par Z.
3. Trouver l'équation satisfaite par $U_t = ln(X_t)$. En déduire celle satisfaite par $V_t = ln(Z_t)$.

Exercice 8 : Comportement d'une EDS

Décrivez le comportement de la solution de l'équation différentielle stochastique

$$dX_t = \left(\frac{1}{2} - X_t\right) dt + \sqrt{X_t(1 - X_t)} dW_t$$

en supposant que la valeur initiale X_0 est une variable aléatoire à valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$. Expliquez intuitivement pourquoi X_t est aussi une variable aléatoire dont les valeurs sont comprises entre 0 et 1.

Exercice 9 : Processus d'Ornstein Uhlenbeck : modèle de Vasicek de taux d'intérêt

Pour décrire la dynamique des taux courts, en particulier dans le modèle de Vasicek (1977), on modélise l'évolution du processus de taux par la différentielle stochastique suivante (avec $a, b > 0$:

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t$$

1. en appliquant le lemme d'Itô au processus $Y_t = (X_t - b)e^{at}$, déterminer la solution de cette EDS, appelée processus de Ornstein-Uhlenbeck.
2. Que pouvez-vous dire de la tendance de ce processus de taux lorsque le taux est faible ? élevé ? Justifier le terme de "force de rappel vers b".
3. Expliquez pourquoi ce processus peut prendre des valeurs négatives. Justifiez le choix de Cox, Ingersoll et Ross de modéliser plutôt les taux d'intérêt par un processus "racine carrée" :

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

4. On suppose que $X_0 = x_0 \in \mathbb{R}$. Justifiez que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus Gaussien dont on précisera la fonction espérance et la fonction de covariance. Préciser la loi de X_t, pour tout $t \geq 0$. Quelle est la limite en loi de X_t lorsque $t \to \infty$?

Exercice 10 : Probabilité neutre au risque

Soit S_t le cours d'un actif risqué dans un modèle de Black-Scholes. le taux sans risque est supposé constant égal à r.

1. Rappeler l'EDS régissant l'évolution du prix de l'actif S au cours du temps.
2. Donnez l'équation de l'évolution du cours actualisé de l'actif S : $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$.
3. En appliquant le théorème de Girsanov, explicitez le changement de probabilité et le nouveau mouvement brownien sous lequel l'équation du cours de l'actif S est :

$$dS_t = rS_tdt + \sigma S_td\tilde{B}_t$$

4. Montrer que sous ce changement de probabilité, le prix actualisé de l'actif S est une martingale. Cette probabilité est appelée *probabilité neutre au risque*.

<u>Exercice 11</u> : Modèle de Black et Scholes

On considère le modèle de Black and Scholes avec un actif sans risque de taux r.
On considère aussi un actif risqué dont le cours à l'instant t est noté S_t, de valeur initiale $S_0 = x > 0$.
La volatilité du marché est notée σ.
On se place sous la probabilité risque neutre P^*. Soit B un mouvement brownien sous P^*. On note $\tilde{S}_t$ le cours actualisé.
L'évolution de $\tilde{S}$ est donnée par l'équation :

$$d\tilde{S}_t \; = \; \sigma \tilde{S}_t \, dB_t, \tag{1}$$

Soit $a \in \mathbb{R}$. On pose $F(t,x) \; = \; e^{\sigma^2(T-t)}x^2 \; - \; 2ax \; + \; a^2$. On note $M_t = F(t, \tilde{S}_t)$.

1. En appliquant la formule d'Itô, montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale sous P^*.
2. Calculer $E^*(M_T)$ et en déduire que pour tout réel a,

$$E^*\big((\tilde{S}_T - a)^2\big) \; = \; e^{\sigma^2 T}x^2 \; - \; 2ax \; + \; a^2.$$

<u>Exercice 12</u> : Formule de Black et Scholes

Le modèle de Black et Scholes est un modèle d'économie à 2 actifs : un actif sans risque M_t, de taux d'intérèt r, suivant la dynamique $dM_t = rM_t dt$, et un actif risqué S_t, suivant une dynamique de diffusion de type brownien géométrique $dS_t = mS_t dt + \sigma S_t dW_t$. Un portefeuille est un couple (α_t, β_t) de processus aléatoires adaptés à la filtration naturelle du brownien, représentant respectivement les unités d'actif risqué et d'actif sans risques détenus à l'instant t.

1. Expliciter les solutions M_t et S_t de ces deux EDS. (on suppose $M_0 = 1$).
2. Donner une expression de la différentielle dV_t de la valeur du portefeuille détenu $V(t, S_t)$ à l'instant t, en admettant que l'hypothèse d'autofinancement standard se traduit par $d\alpha_t S_t + d\beta_t M_t = 0$.
3. En applicant le lemme d'Itô, en déduire une Equation aux dérivées partielles vérifiée par $V(t, S_t)$. Cette EDP est aussi appelée EDP de Black et Scholes.
4. Pour un problème de couverture d'option européenne, explicitez la condition terminale que doit satisfaire le portefeuille V à l'instant T. On obtient une équation différentielle parabolique avec condition terminale à résoudre. Vérifiez que la fonction suivante est bien solution :

$$V(t, S_t) = S_t \Phi(d_1(T-t, S_t)) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2((T-t), S_t)) \tag{2}$$

avec

$$\begin{aligned} d_1(T-t, S_t) \; &= \frac{ln(\frac{S_t}{K}+(r+\frac{\sigma^2}{2})(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \\ d_2(T-t, S_t) \; &= d_1(T-t, S_t) - \sigma\sqrt{T-t} \\ \Phi(x) \; &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt \end{aligned} \tag{3}$$

Exercice 13 : Mouvement d'une particule

Supposons qu'une particule se promène de façon aléatoire sur un plan de façon telle que sa position au temps t est donnée par le couple (W_t, W_t^*) où W et W^* sont des mouvements browniens indépendants. La distance de cette particule à l'origine est donnée à l'instant t par

$$B_t = \sqrt{(W_t)^2 + (W_t^*)^2}$$

Sachant que le processus de covariance quadratique de deux martingales indépendantes est nulle, utilisez le lemme d'Itô afin de démontrer que le processus B satisfait l'équation différentielle stochastique

$$dB_t = \frac{1}{2}\frac{1}{B_t}dt + \frac{W_t}{B_t}dW_t + \frac{W_t^*}{B_t}dW_t^*$$

ISFA Vincent Lerouvillois
Processus stochastiques - M1 Actuariat lerouvillois@math.univ-lyon1.fr
Semestre automne 2020-2021 math.univ-lyon1.fr/homes-www/lerouvillois/

TD n° 8

Théorème de Girsanov

Exercice 1 : Changement de Probabilité et Théorème de Girsanov.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités filtré. Soit B un mouvement Brownien standard. On pose

$$L_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)$$

pour $t < T$ et θ une fonction déterministe dans $L^2([0,t])$ pour tout $t \geq 0$ $(= L^2_{loc})$.

1. Montrer que L est une martingale.
2. Justifier comment L peut définir un changement de probabilité.
3. Calculer $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t L_T]$ en fonction de t et de θ.
4. En déduire la valeur de $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[B_t \exp(B_t)]$.

Exercice 2 : Probabilité neutre au risque.

On considère deux actifs : un **actif sans risque** $(S_t^0)_{0\leq t\leq T}$ de taux de rendement $r > 0$ et un **actif risqué** $(S_t)_{0\leq t\leq T}$ de taux de rendement $\mu > 0$ et de volatilité $\sigma > 0$. On fait l'hypothèse que le taux d'actif risqué évolue selon la formule de Black-Scholes. Autrement dit :

$$dS_t^0 = S_t^0 \, r \, dt \,,$$

et :

$$dS_t = S_t \left(\mu \, dt + \sigma \, dB_t\right) \,,$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard. On appelle actif risqué **actualisé** le processus

$$\left(\widetilde{S}_t\right)_{0\leq t\leq T} := \left(\frac{S_t}{S_t^0}\right)_{0\leq t\leq T} .$$

Pour simplifier les expressions, on suppose que $S_0^0 = S_0 = 1$.

1. Calculez S_t^0.
2. En appliquant la formule d'Itô à $\ln(S_t)$, montrez que $S_t = \exp\left((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma B_t\right)$.
3. Donnez l'équation stochastique satisfaite par $\widetilde{S}_t$.

4. On note $\mathbb{P}$ la probabilité sous-jacente (sous-laquelle $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien). Soit $\mathbb{Q}$ la probabilité définie sur $\mathcal{F}_T$ par
$$d\mathbb{Q} = \exp\left(\frac{r-\mu}{\sigma}B_T - \frac{1}{2}\left(\frac{r-\mu}{\sigma}\right)^2 T\right) d\mathbb{P}\,.$$
Que pouvez-vous dire de $(W_t := B_t - \frac{r-\mu}{\sigma}t)_{0\leq t\leq T}$ sous $\mathbb{Q}$?
5. Montrez que $(\widetilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}$ et écrire $(\widetilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ comme processus d'Itô sous $\mathbb{Q}$ (à l'aide de W_t). On appelle $\mathbb{Q}$ la **probabilité neutre au risque**.

Exercice 3 : Examen 2018

Dans cet exercice, on se propose d'estimer la probabilité qu'un mouvement Brownien reste proche d'une courbe (pas aléatoire) qu'on s'est préalablement donnée. Pour cela, on fixe tout d'abord un $\epsilon > 0$ et une fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ qui est C^2, vérifie $f(0) = 0$ et $f''(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0,1]$. Et on va vouloir estimer la probabilité suivante :
$$\mathbb{P}\left[\forall t \in [0,1],\, |B_t - f(t)| \leq \epsilon\right]\,.$$
Bien sûr, B est un mouvement Brownien (standard, issu de 0). Le but est de comparer cette quantité à la quantité (plus simple à estimer) :
$$\mathbb{P}\left[\forall t \in [0,1],\, |B_t| \leq \epsilon\right]\,.$$

1. On note $X_t = \int_0^t -f'(s)dB_s$. Expliquez pourquoi le processus $\left(Z_t = \exp(X_t - \frac{1}{2}\int_0^t f'(s)^2 ds)\right)_{t\geq 0}$ est une martingale.
2. Rappelez le théorème de Girsanov.
3. On note Q la mesure de probabilité définie sur la tribu $\mathcal{F}_1$ (la tribu de tout ce qui se passe avant le temps 1) et de densité Z_1 par rapport à $\mathbb{P}$. Que pouvez-vous dire du processus $(\widetilde{B}_t = B_t + f(t))_{t\in[0,1]}$ sous Q ?
4. En déduire que :
$$\mathbb{P}\left[\forall t \in [0,1],\, |B_t - f(t)| \leq \epsilon\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\mathbb{1}_{\{\forall t\in[0,1],\,|B_t|\leq\epsilon\}} Z_1\right]\,.$$
5. En appliquant la formule d'Itô, montrez que :
$$f'(t)B_t = -X_t + \int_0^t B_s f''(s)ds\,.$$
6. En vous rappelant que f'' est positive, déduisez-en que, sous l'événement $\{\forall t \in [0,1],\, |B_t| \leq \epsilon\}$, on a :
$$Z_1 \leq \exp\left(\epsilon\left(|f'(1)| + \int_0^1 f''(t)dt\right) - \frac{1}{2}\int_0^1 f'(t)^2 dt\right)\,.$$
7. Application dans le cas $f(t) = at^2$ pour un certain $a > 0$. Montrez que :
$$\mathbb{P}\left[\forall t \in [0,1],\, |B_t - at^2| \leq \epsilon\right] \leq \exp\left(-\frac{2a^2}{3} + 4a\epsilon\right)\mathbb{P}\left[\forall t \in [0,1],\, |B_t| \leq \epsilon\right]\,.$$