- L'estimateur de Bayes $\tilde{\mu}(\theta) = \mathbb{E}[\mu(\Theta)|\underline{X}]$ est le meilleur estimateur de $\mu(\theta)$ au regard de l'erreur quadratique moyenne.

Soit $\widehat{\mu(\theta)}$ un estimateur de $\mu(\theta)$

$$\mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)} - \mu(\theta))^2] = \mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)} - \widetilde{\mu(\theta)} + \widetilde{\mu(\theta)} - \mu(\theta))^2]$$
$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)} - \widetilde{\mu(\theta)})^2 + (\widetilde{\mu(\theta)} - \mu(\theta))^2 + 2(\widehat{\mu(\theta)} - \widetilde{\mu(\theta)})(\widetilde{\mu(\theta)} - \mu(\theta))|\underline{X}]]$$
$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)} - \widetilde{\mu(\theta)})^2|\underline{X}]] + \mathbb{E}[\mathbb{E}[(\widetilde{\mu(\theta)} - \mu(\theta))^2|\underline{X}]]$$
$$+ 2\,\mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)} - \widetilde{\mu(\theta)})(\widetilde{\mu(\theta)} - \mu(\theta))|X]}]$$

$$\mathbb{E}[\hat{\mu}\tilde{\mu} - \hat{\mu}\mu - \tilde{\mu}^2 + \tilde{\mu}\mu|\underline{X}]$$
$$= \tilde{\mu}\,\cancel{\mathbb{E}[\hat{\mu}]} - \mathbb{E}[\hat{\mu}]\tilde{\mu} - \cancel{\tilde{\mu}^2} + \cancel{\tilde{\mu}\,\tilde{\mu}}$$
$$= 0$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[(\widehat{\mu(\theta)} - \mu(\theta))^2] > \mathbb{E}[(\widetilde{\mu(\theta)} - \mu(\theta))^2]$$

pour tout estimateur $\hat{\mu}$ différent de $\tilde{\mu}$

- Trouver le meilleur estimateur linéaire en $\underline{X} = (X_1, \dots, X_n)'$ de $\mu(\theta) = \mathbb{E}(X_{n+1}|\theta)$
(H1) $X_1, \dots, X_n | \Theta = \theta \sim^{iid} F_\theta$ avec $\mu(\theta) = \mathbb{E}(X_j|\Theta = \theta)$ et $\sigma^2(\theta) = \mathbb{V}(X_j|\Theta = \theta)$
(H2) $\Theta \sim U(\theta)$

On note $\widehat{\widehat{\mu(\theta)}}$ le meilleur estimateur linéaire en $\underline{X}$ de $\mu(\theta)$.
Cet estimateur est de la forme : $\widehat{\widehat{\mu(\theta)}} = \hat{a}_0 + \sum_{j=1}^n \hat{a}_j X_j = \hat{a} + \hat{b}\bar{X}$ car $X_1, \dots, X_n$ iid
où $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont solutions de : $(\hat{a}, \hat{b}) = \arg\min \mathbb{E}[(\mu(\theta) - a - b\bar{X})^2]$
On a les EDP :
$$\mathbb{E}[\mu(\theta) - a - b\bar{X}] = 0$$
$$Cov(\bar{X}, \mu(\theta)) - b\mathbb{V}(\bar{X}) = 0$$

On a
$$Cov(\bar{X}, \mu(\theta)) = \mathbb{E}\left(\mu(\theta)\frac{\Sigma X_j}{n}\right) - \mathbb{E}(\mu(\theta))\mathbb{E}\left(\frac{\Sigma X_j}{n}\right) = \mathbb{E}(\mu(\theta)^2) - \mathbb{E}(\mu(\theta))^2 = \mathbb{V}(\mu(\theta)) = \tau^2$$
$$\mathbb{V}(\bar{X}) = \mathbb{E}\left[\mathbb{V}\left(\frac{\Sigma X_j}{n}\right)\right] + \mathbb{V}\left[\mathbb{E}\left(\frac{\Sigma X_j}{n}\right)\right] = \frac{\mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]}{n} + \mathbb{V}[\mu(\theta)] = \frac{\sigma^2}{n} + \tau^2$$
$$\mathbb{E}[\mu(\Theta)] = \mu_0$$

Les EDP deviennent :
$$\begin{cases} \mu_0 - a - b\mu_0 = 0 \\ \tau^2 - b\left(\frac{\sigma^2}{n} + \tau^2\right) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \mu_0(1-b) = \mu_0(1-\alpha) \\ b = \dfrac{\tau^2}{\frac{\sigma^2}{n} + \tau^2} = \dfrac{n}{n + \sigma^2/\tau^2} = \alpha \end{cases}$$

$$\widehat{\widehat{\mu(\theta)}} = \alpha\bar{X} + (1-\alpha)\mu_0$$