Examen Séries temporelles 2013-2014

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice - 2 heures

Questions de cours : (6 points)

1. Qu'est-ce qu'un processus stationnaire fort et un processus stationnaire faible? A partir de données, comment procédez-vous pour savoir si un processus est stationnaire (fort ou faible)?

2. Quel est l'intérêt des processus ARMA par rapport aux processus AR ou MA? Quelles sont les difficultés statistiques rencontrées pour identifier les ordres des processus ARMA par rapport à l'identification des ordres des processus AR ou MA?

3. Dans quel cadre utilise-t-on un modèle SARIMA plutôt qu'ARIMA? Comment savoir à partir de données s'il vaut mieux utiliser un modèle plutôt que l'autre?

Exercice 1 : (4 points)

Soit $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc fort de variance σ_η^2.

0. Rappeler la définition d'un bruit blanc fort et d'un bruit blanc faible.

On definit

$$X_t = \eta_t\eta_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

1. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible et donner sa variance.

On définit

$$Y_t = (\eta_t + m)(\eta_{t-1} + m), \qquad t \in \mathbb{Z},$$

avec $m \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $MA(1)$ non centré (donner son espérance, sa variance et ses autocorrélations).

3. Ecrire la représentation canonique de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 2 : (10 points)

On considère le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant:

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$. On définit les polynômes

$$\begin{aligned}\Phi(x) &= 1 - \varphi_1 x - \varphi_2 x^2 \\ \bar{\Phi}(x) &= x^2 - \varphi_1 x - \varphi_2\end{aligned}$$

1. Donner les conditions sur les racines de Φ et $\bar{\Phi}$ pour qu'il existe une solution stationnaire.

2. On cherche les conditions sur les coefficients φ_1 et φ_2 pour que l'écriture du processus soit l'écriture canonique.

a) Donner les conditions sur les racines de $\bar{\Phi}$ pour que ce soit le cas.

b) En considérant le produit des racines, en déduire qu'une condition nécessaire est $|\varphi_2| < 1$.

c) Montrer que, si les racines sont complexes conjuguées ($\varphi_1^2 + 4\varphi_2 < 0$), alors la condition $-\varphi_2 < 1$ est suffisante.

d) Montrer à l'aide d'un graphique que, si les racines sont réelles ($\varphi_1^2 + 4\varphi_2 \geq 0$), alors les conditions suivantes sont suffisantes

$$1 - \varphi_1 - \varphi_2 > 0, \qquad 1 + \varphi_1 - \varphi_2 > 0.$$

e) En déduire sur une représentation graphique, le domaine d'existence du couple (φ_1, φ_2) pour que l'écriture du processus soit l'écriture canonique.

On suppose dorénavant qu'il s'agit de la représentation canonique.

3. On cherche une réprésentation $MA(\infty)$ de X_t.

a) Donner les propriétés de (ε_t).

b) On suppose que les racines, λ_1 et λ_2, de Φ sont réelles ($\varphi_1^2 + 4\varphi_2 > 0$). Donner la représentation $MA(\infty)$ de X_t (indication: utiliser une décomposition en éléments simples).

4. On cherche à déterminer les autocorrélations du processus.

a) Montrer que

$$\begin{aligned}
\gamma_X(0) &= \frac{(1-\varphi_2)}{(1+\varphi_2)\left((1-\varphi_2)^2 - \varphi_1^2\right)} \sigma_\varepsilon^2 \\
\rho_X(1) &= \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2} \\
\rho_X(2) &= \frac{\varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \varphi_2}{1-\varphi_2}
\end{aligned}$$

b) Montrer que pour $h \geq 2$

$$\rho_X(h) = \varphi_1 \rho_X(h-1) + \varphi_2 \rho_X(h-2).$$

c) Donner suivant le signe de $\varphi_1^2 + 4\varphi_2$, la forme générale de $\rho_X(h)$.

Quest° de cours :

1) * Processus stationnaire fort $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

→ (X_t) est invariant par translation, i.e $(X_1, \dots, X_k) \overset{\mathcal{L}}{=} (X_{k+1}, \dots, X_{k+h}) \quad \forall k, h \in \mathbb{Z}$

* Processus stationnaire faible $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

→ moyenne et autocovariance stables par translat°

↳ * $t \mapsto \mu_X(t) = \mu \in \mathbb{R} \quad \forall t$

* $t \mapsto \gamma_X(t, t+h) = \gamma_X(h) \quad \forall t$

* Reconnaître si processus est stationnaire fort / faible ?

→ Tracé l'autocorrélogramme et observer une ↘ exponentielle

2) Intérêt ARMA p/r aux AR ou MA

→ moins de paramètres que les modèle AR ou MA

→ ARMA peut s'écrire comme MA(∞) et AR(∞) si racines de modules > 1.

Difficultés statistiques pour identifier les ordres d'un ARMA p/r à MA ou AR

→ ARMA peut s'écrire comme AR ou MA, donc paramètres très reliés

→ racines des Φ et Θ doivent être de module > 1

...

3) Cadre SARIMA plutôt qu'ARIMA

ARIMA → permet de stationnariser un processus afin d'avoir un processus asympt ARMA

SARIMA → généralisat° des modèles ARIMA contenant une partie saisonnière de nature aléatoire.

Quel modèle à partir des données ?

3 critères : * parcimonie : nb de paramètres minimal

* prédict° : 1- R^2 coeff de détermination°) max

2- $\overline{R}^2$

3- σ^2 variance) min

4- Fisher) max

* informat°: 1- variance résiduelle
2- AIC et AICC
3- BIC
4- Hannan-Quinn

} min

Exercice 1 :

0) $X_t \sim BBF(0,\sigma^2) \Rightarrow$ Les X_t sont iid et $\mathbb{E}[X_t]=0$

$\mathbb{V}[X_t]=\sigma^2$

$\gamma_X(h)=\begin{cases}\sigma^2 & si\ h=0\\ 0 & si\ |h|>0\end{cases}$

$X_t \sim BB(0,\sigma^2) \Rightarrow \mathbb{E}[X_t]=0$

$\mathbb{V}[X_t]=\sigma^2$

$\gamma_X(h)=\begin{cases}\sigma^2 & si\ h=0\\ 0 & si\ |h|>0\end{cases}$

On définit $X_t=\eta_t\eta_{t-1}$ $t\in\mathbb{Z}$ avec $\eta_t\sim BBF(0,\sigma_\eta^2)$

1) $\mathbb{E}[X_t]=\mathbb{E}[\eta_t\eta_{t-1}]=\mathbb{E}[\eta_t]\mathbb{E}[\eta_{t-1}]$ car (η_t) iid

$=0$ car $(\eta_t)\sim BBF(0,\sigma_\eta^2)$

$\mathbb{V}[X_t]=\mathbb{V}[\eta_t\eta_{t-1}]=\mathbb{V}[\eta_t]\mathbb{V}[\eta_{t-1}]$ car $(\eta_t)\sim BBF(0,\sigma_\eta^2)$

$=\sigma_\eta^2\sigma_\eta^2$

$=\sigma_\eta^4$

$\gamma_X(h)=Cov(\eta_t\eta_{t-1},\eta_{t-h}\eta_{t-h-1})$

$=\mathbb{E}[(\eta_t\eta_{t-1}-\underbrace{\mathbb{E}[\eta_t\eta_{t-1}]}_{0})(\eta_{t-h}\eta_{t-h-1}-\underbrace{\mathbb{E}[\eta_{t-h}\eta_{t-h-1}]}_{0})]$

$=\mathbb{E}[\eta_t\eta_{t-1}\eta_{t-h}\eta_{t-h-1}]=\begin{cases}\sigma_\eta^4 & si\ h=0\\ 0 & si\ |h|>0\ car\ (\eta_t)\sim BBF(0,\sigma_\eta^2)\end{cases}$

$\Rightarrow X_t\sim BB(0,\sigma_\eta^4)$

On définit $Y_t=(\eta_t+m)(\eta_{t-1}+m)$

2) $\mathbb{E}[Y_t]=\mathbb{E}[(\eta_t+m)(\eta_{t-1}+m)]$

$=m^2$ car $(\eta_t)\sim BBF(0,\sigma_\eta^2)$

$\mathbb{V}[Y_t]=\mathbb{V}[(\eta_t+m)(\eta_{t-1}+m)]$

$=\mathbb{V}[\eta_t\eta_{t-1}+m(\eta_t+\eta_{t-1})+m^2]$

$=\mathbb{V}[\eta_t\eta_{t-1}]+m^2\mathbb{V}[\eta_t+\eta_{t-1}]$ car $Cov=0$

$=\sigma_\eta^4+m^2 2\sigma_\eta^2$

$=\sigma_\eta^2(\sigma_\eta^2+2m^2)$

$Cov(Y_t,Y_{t-1})=\mathbb{E}[Y_tY_{t-1}]-\underbrace{\mathbb{E}[Y_t]}_{m^2}\underbrace{\mathbb{E}[Y_{t-1}]}_{m^2}$

$=\mathbb{E}[Y_tY_{t-1}]-m^4$

$\mathbb{E}[Y_t Y_{t-1}] = \mathbb{E}[(\eta_t + m)(\eta_{t-1}+m)^2(\eta_{t-2}+m)]$

$= \mathbb{E}[\eta_t + m]\,\mathbb{E}[(\eta_{t-1}+m)^2]\,\mathbb{E}[\eta_{t-2}+m]$

$= m \times (\sigma_\eta^2 + m^2)\, m$

$\Rightarrow \gamma_X(1) = m^2\sigma_\eta^2$

et si $|h|>1$, $\gamma_X(h) = 0$ car $\mathbb{E}[Y_t Y_{t-h}] = m^4$ $(|h|>1)$

$\rightarrow \gamma_X(h) = m^4 - m^4 = 0$

$\Rightarrow$ Y_t est bien MA(1) non centré tq $\mathbb{E}[Y_t] = m^2$

$\mathbb{V}[Y_t] = \sigma_\eta^2(\sigma_\eta^2 + 2m^2)$

$$\gamma_Y(h) = \begin{cases} \sigma_\eta^2(\sigma_\eta^2+2m^2) & \text{si } h=0 \\ m^2\sigma_\eta^2 & \text{si } |h|=1 \\ 0 & \text{si } |h|>1 \end{cases}$$

3) $Y_t = \mu + \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ $\quad \varepsilon_t \sim BB(0,\sigma_\varepsilon^2)$

$\Rightarrow \mu = m^2$

$(\theta_0^2 + \theta_1^2)\sigma_\varepsilon^2 = \sigma_\eta^2(\sigma_\eta^2 + 2m^2)$

$\theta\sigma_\varepsilon^2 = m^2\sigma_\eta^2$

$\Rightarrow \mu = m^2 \quad \theta = \frac{m^2}{\sigma_\eta^2}$ et $\varepsilon_t = X_t \sim BB(0,\sigma_\eta^4)$

$\Rightarrow Y_t = m^2 + X_t + \frac{m^2}{\sigma_\eta^2}X_{t-1}$ Ecriture canonique $X_t \sim BB(0,\sigma_\eta^4)$

Exercice 2 :

$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$

$(\varepsilon_t) \sim BB(0,\sigma_\varepsilon^2)$

$\phi(x) = 1 - \varphi_1 x - \varphi_2 x^2$

$\bar{\Phi}(x) = x^2 - \varphi_1 x - \varphi_2 \quad = x^2\phi\left(\frac{1}{x}\right)$

1) Pour qu'il existe une solut° stationnaire il faut que les racines de ϕ soient $\neq 1$

$\Rightarrow$ Pour $\bar{\Phi}$ idem

2) a) Ecriture canonique $\Rightarrow$ racines de ϕ en dehors du $\mathcal{C}_{unité}$ i.e $|\text{racines}|>1$

$\Rightarrow$ racines de $\bar{\Phi}$ dans $\mathcal{C}_{unité}$ i.e $|\text{racines}|<1$

b) $(X - R_1)(X - R_2) = X^2 - (R_1+R_2)X + \underbrace{R_1R_2}_{\text{Prod des racines}}$

$\Rightarrow \varphi_2 = \prod \text{racines}$

les racines pour $\bar{\Phi}$ doivent être dans $\mathcal{C}_{unit}$ $\Rightarrow |\text{racines}|<1$

$\Rightarrow |\varphi_2| = \prod |\text{racines}| < 1$

c) Si $\varphi_1^2 + 4\varphi_2 < 0$

racines cpx conjuguées. Soit λ_1 et λ_2 les solut° conjuguées $\rightarrow \lambda_1 = \bar{\lambda}_2$

$\Rightarrow -\varphi_2 = \lambda_1\lambda_2 = \lambda_1\bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 < 1$

$\lambda_1 + \bar{\lambda}_1 = 2\,\mathrm{Re}(\lambda_1)$

d) On suppose λ_1 et λ_2 racines de $\bar{\Phi}$, alors $\frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{1}{\lambda_2}$ racines de ϕ

$\Rightarrow \bar{\Phi}(\lambda_1) = \bar{\Phi}(\lambda_2) = \phi(\frac{1}{\lambda_1}) = \phi(\frac{1}{\lambda_2}) = 0$

De plus on a $|\lambda_1|, |\lambda_2| < 1 \iff |\frac{1}{\lambda_1}|, |\frac{1}{\lambda_2}| > 1$

On sait aussi que $\phi(0) = 1$ et $\bar{\Phi}(0) = -\varphi_2$

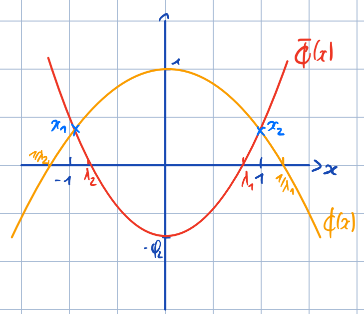
$\Rightarrow$ ϕ et $\bar{\Phi}$ possèdent deux points d'intersect°

$\phi(x) = \bar{\Phi}(x) \iff 1 - \varphi_1 x - \varphi_2 x^2 = x^2 - \varphi_1 x - \varphi_2$

$\iff x^2(1+\varphi_2) = 1 + \varphi_2$

$\iff x^2 = 1$

$\iff x \in \{-1, 1\}$ On note x_1 et x_2 les points $(-1; \bar{\Phi}(-1))$ resp $(1; \bar{\Phi}(1))$



On remarque $\bar{\Phi}(1) = 1 - \varphi_1 - \varphi_2 > 0$

$\bar{\Phi}(-1) = 1 + \varphi_1 - \varphi_2 > 0$

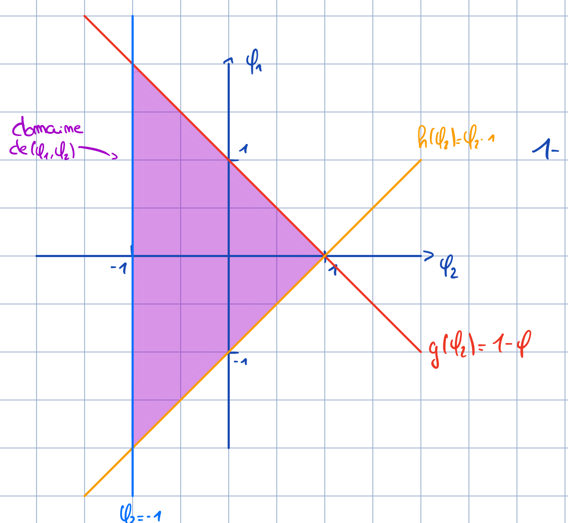
e) On a vu que $1 - \varphi_1 - \varphi_2 > 0 \Rightarrow 1 - \varphi_2 > \varphi_1$

$1 + \varphi_1 - \varphi_2 > 0 \Rightarrow \varphi_1 > \varphi_2 - 1$

On va s'intéresser à $h(\varphi_2) = \varphi_2 - 1$

et $g(\varphi_2) = 1 - \varphi_2$

De plus on doit respecter $|\varphi_2| < 1$



3) a) $(\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$

$\mathbb{V}[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2$

$Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0 \quad \forall t \neq t'$

b) On suppose que λ_1 et λ_2 racines de ϕ avec (λ_1, λ_2) réelles i.e $(\varphi_1^2+4\varphi_2>0)$

$$\Rightarrow \phi(L) = 1-\varphi_1 L - \varphi_2 L^2 = (1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)$$

$$\frac{1}{\phi(L)} = \frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} = \frac{a}{1-\lambda_1 L} + \frac{b}{1-\lambda_2 L}$$

$$1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \qquad \frac{\lambda_1-\lambda_2 a}{\lambda_1}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} = \frac{a(1-\lambda_2 L)+b(1-\lambda_1 L)}{(1-\lambda_1 L)(1-\lambda_2 L)} \Rightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ -(a\lambda_2+b\lambda_1)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1-b \\ b = -\frac{a\lambda_2}{\lambda_1} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1+\frac{a\lambda_2}{\lambda_1} \Rightarrow a = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} \\ b = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1-\lambda_1 L} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2} \times \frac{1}{1-\lambda_1 L} \quad \text{et} \quad \frac{b}{1-\lambda_2 L} = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2} \times \frac{1}{1-\lambda_2 L}$$

Comme $|\lambda_1|$ et $|\lambda_2| < 1$

$$\Rightarrow \frac{a}{1-\lambda_1 L} = a\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_1^k)L^k$$

$$\text{et } \frac{b}{1-\lambda_2 L} = b\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_2^k)L^k$$

$$\Rightarrow \frac{a}{1-\lambda_1 L} = \frac{\lambda_1}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_1)^k L^k \; ; \; \frac{b}{1-\lambda_2 L} = \frac{-\lambda_2}{\lambda_1-\lambda_2}\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda_2)^k L^k$$

$$\Rightarrow \phi^{-1}(L) = \frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left[\sum_{k=0}^{\infty}\left((\lambda_1)^{k+1}-(\lambda_2)^{k+1}\right)L^k\right]$$

4) a) Il s'agit des équat° de Yule-Walker.

Rappel : Yule-Walker

$$\gamma_X(k) = \sum_{j=1}^{p}\varphi_j\gamma_X(k-j)$$

$\forall k \geq 0$ et $X_t = \varepsilon_t + \varphi_1 X_{t-1} + \dots + \varphi_p X_{t-p}$

$$\rho_X(k) = \frac{\gamma_X(k)}{\gamma_X(0)} = \sum_{j=1}^{p}\varphi_j\rho_X(k-j)$$

Ici : $X_t = \varepsilon_t + \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2}$

$$\Rightarrow \gamma_X(0) = \sum_{j=1}^{2}\varphi_j\gamma_X(0-j)$$

$\gamma_X(k)$ symétrique

$$= \varphi_1\gamma_X(1)+\varphi_2\gamma_X(2)+\sigma_\varepsilon^2$$

$$\gamma_X(1) = \varphi_1\gamma_X(0)+\varphi_2\gamma_X(1) \Rightarrow \gamma_X(1) = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\gamma_X(0)$$

$$\gamma_X(2) = \varphi_1\gamma_X(1)+\varphi_2\gamma_X(0) \Rightarrow \gamma_X(2) = \left(\varphi_1\times\frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}+\varphi_2\right)\gamma_X(0)$$

$$\Rightarrow \gamma_X(0) = \varphi_1\times\frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\gamma_X(0)+\varphi_2\times\frac{(\varphi_1^2+\varphi_2)}{1-\varphi_2}\gamma_X(0)+\sigma_\varepsilon^2$$

$$= \frac{1}{1-\varphi_2}\left(\varphi_1^2+\varphi_1^2\varphi_2+\varphi_2^2(1-\varphi_2)\right)\gamma_X(0)+\sigma_\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-\varphi_2-\varphi_1^2-\varphi_1^2\varphi_2-\varphi_2^2+\varphi_2^3}{1-\varphi_2}\right)\gamma_X(0) = \sigma_\varepsilon^2$$

On a $1-\varphi_2-\varphi_1^2-\varphi_1^2\varphi_2-\varphi_2^3+\varphi_2^3 = 1-\varphi_2-\varphi_1^2(1+\varphi_2)-\varphi_2^2(1-\varphi_2)$

$$= (1-\varphi_2)(1-\varphi_2^2)-\varphi_1^2(1+\varphi_2)$$

$$= (1-\varphi_2)((1-\varphi_2)(1+\varphi_2))-\varphi_1^2(1+\varphi_2)$$

$$= (1+\varphi_2)\left((1-\varphi_2)^2-\varphi_1^2\right)$$

$$\Rightarrow \gamma_X(0) = \frac{1-\varphi_2}{(1+\varphi_2)((1-\varphi_2)^2-\varphi_1^2)}\sigma_\varepsilon^2$$

On a vu que $\gamma_X(1) = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}\gamma_X(0) \Rightarrow \rho_X(1) = \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)} = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}$

et $\gamma_X(2) = \varphi_1\gamma_X(1)+\varphi_2\gamma_X(0) = \left(\varphi_1\times\frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}+\varphi_2\right)\gamma_X(0) \Rightarrow \rho_X(2) = \frac{\gamma_X(2)}{\gamma(0)} = \frac{\varphi_1^2+\varphi_2(1-\varphi_2)}{1-\varphi_2} = \frac{\varphi_1^2-\varphi_2^2+\varphi_2}{1-\varphi_2}$

b) Démo ++

$X_t = \varepsilon_t + \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2}$

$Cov(X_t, X_{t+\ell}) = \mathbb{E}[X_t X_{t+\ell}] - \mathbb{E}[X_t]\mathbb{E}[X_{t+\ell}]$

Or $\mathbb{E}[X_t] = 0$

Donc $Cov(X_t, X_{t+\ell}) = \mathbb{E}[X_t X_{t+\ell}]$

Si $\underline{\underline{h=0}}$: $\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{V}[X_t] = \gamma_X(0) = \mathbb{E}[\varepsilon_t X_t] + \varphi_1 \mathbb{E}[X_{t-1} X_t] + \varphi_2 \mathbb{E}[X_{t-2} X_t]$

$= \mathbb{E}[\varepsilon_t X_t] + \varphi_1 \gamma_X(1) + \varphi_2 \gamma_X(2)$

$\mathbb{E}[\varepsilon_t X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2] + \varphi_1 \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-1}] + \varphi_2 \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-2}]$

Or comme $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et X_t a une écriture $MA(\infty)$ (Q3.b)) $\Rightarrow \mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-\ell}] = 0 \ \forall \ell > 0$

Donc $\mathbb{E}[\varepsilon_t X_t] = \sigma_\varepsilon^2$

$\Rightarrow \gamma_X(0) = \sigma_\varepsilon^2 + \sum_{j=1}^{2} \varphi_j \gamma_X(j)$

De m̂, $\mathbb{E}[X_{t-1} X_t] = \gamma_X(1) = \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-1}]}_{=0} + \varphi_1 \gamma_X(0) + \varphi_2 \gamma_X(1)$

$\Rightarrow \gamma_X(k) = \varphi_1 \gamma_X(k-1) + \varphi_2 \gamma_X(k-2)$

$\Rightarrow \rho_X(h) = \varphi_1 \rho_X(h-1) + \varphi_2 \rho_X(h-2)$

c)