Correction TD2-Le producteur 2020

Exercice 1

y= $k^{1/4}$ $(l-1)^{1/4}$ si $l \geq 1$Correction TD2 ETU VF.docx

y=0 si $l < 1$

1- L'équation de l'isoquante s'écrit

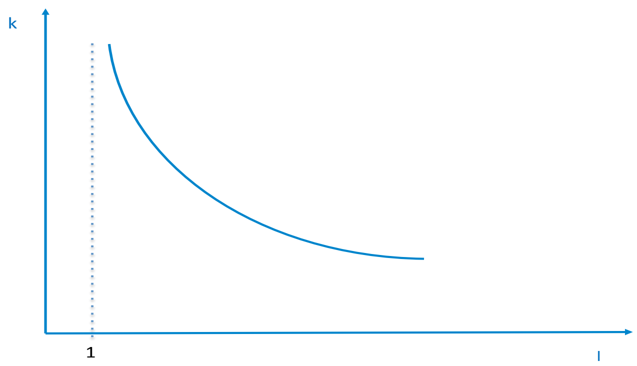
y= $k^{1/4}$ $(l-1)^{1/4}$ avec $l > 1$

d'où k =$\frac{1}{l-1}$ $l > 1$

On a $\frac{dk}{dl} = -\frac{1}{(l-1)^2} < 0$ et $\frac{d^2k}{dl^2}$= $\frac{2}{(l-1)^3}$>0

L'isoquante est convexe et décroissante
On a $k \rightarrow \infty$ *quand* $l \rightarrow 1$ et k$\rightarrow$ 0 *quand* $l \rightarrow \infty$

Pour produire une quantité positive (même si elle est très faible) il faut au minimum une unité de travail dans le cas y =1 à une asymptote verticale l = 1
L'isoquante est convexe conformément aux hypothèses habituelles ce qui signifie que le TMST du capital au travail est décroissant quand on augmente le travail et qu'on diminue le capital



2- Le TMST k,l du capital au travail

Quand la firme réalise une production y > 0 avec un coût minimum elle utilisera des quantités de facteurs k et l correspondant à un point de l'isoquante de niveau y où TMST est égal au rapport des prix des facteurs

Les deux conditions sont donc :

$y = k^{1/4} (l-1)^{1/4}$ (1)
$TMST_{k,l} = w/r$ (2)

On sait aussi que le TMST est égal à la pente (en valeur absolue) au point considéré

Dans le cas de y =1, r =1 et w =1
Les deux conditions précédentes s'écrivent :

k = 1/(l-1)

le TMST est égal au rapport des productivités marginales des facteurs

$$\frac{\frac{\delta y}{\delta l}}{\frac{\delta y}{\delta k}} = k \ (l-1)^{-1}$$

$TMST_{k,l} = w/r$
$\Rightarrow k \ (l-1)^{-1} = 1$

$\Rightarrow 1/(l-1)^2 = 1$

ce qui implique que : l= 2 k = 1

Dans le cas y = 1, r= 2 w=3

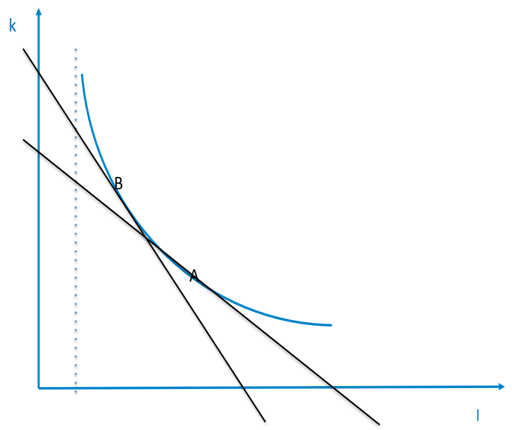
k = 1/(l-1)
$1/(l-1)^2 = 3/2$

ce qui implique $l = \sqrt{\frac{2}{3}} + 1$

et k = $\sqrt{\frac{3}{2}}$

On peut voir que le passage de la première situation (A) à la seconde (B) entraine une réduction de la quantité de travail (l) et une augmentation de la quantité de capital (k). La combinaison optimale de facteurs étant déterminée par le rapport de leurs prix (qui est passé de 1 à 1,5) , on constate que le prix du travail s'est renchéri par rapport au capital et donc pour que le coût de production soit le plus faible possible , la firme va substituer le capital au travail.

<u>Rq : Le graphique n'est pas à l'échelle</u>
En A la pente = -1 ; en B la pente = -3/2



Exercice 2

Remarque préalable L'hypothèse de décroissance des productivités marginales impose des conditions sur les paramètres α et β

$$\frac{\delta y}{\delta x_1} = \alpha x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} = \alpha \frac{y}{x_1}$$

et donc :

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2} = \alpha(\alpha-1) x_1^{\alpha-2} x_2^{\beta} \langle 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \langle \alpha \langle 1$$

et

$$\frac{\delta y}{\delta x_2} = \beta x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1} = \beta \frac{y}{x_2}$$

et donc :

$$\frac{\delta^2 y}{\delta x_1^2} = \beta(\beta-1) x_1^{\alpha} x_2^{\beta-2} \langle 0$$

$$\Leftrightarrow 0 \langle \beta \langle 1$$

1- La recherche de l'équilibre du producteur peut être appréhendée comme la recherche de la minimisation du coût de production sous la contrainte de la technologie La contrainte associée au niveau de production à atteindre est saturée (condition d'efficience) dès lors que la production est croissante en chacun des facteurs des production et que les facteurs de production ont un prix strictement positifs. La fonction Cobb Douglas correspond à une technologie où les facteurs de production sont substituables .

$$Min \quad x_1 w_1 + x_2 w_2$$
$$sc\; y = f(x_1, x_2)$$
$$x_1 et\, x_2 \rangle 0$$

$$car\, \forall x_1, f(x_1, 0) = 0$$
$$\forall x_2, f(0, x_2) = 0$$
$$Donc\; pas\; de\; solution\; en\; coin$$

Le lagrangien

$$L(x_1, x_2, \lambda) = \quad x_1 w_1 + x_2 w_2 + \lambda(y - x_1^{\alpha} x_2^{\beta})$$

$$CPO$$

$$(1) \frac{\delta L(x_1, x_2, \lambda)}{\delta x_1} = 0 \Leftrightarrow w_1 - \alpha\lambda\; x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta} = 0$$

$$\Leftrightarrow w_1 = \alpha\lambda\; x_1^{\alpha-1} x_2^{\beta}$$

$$(2) \frac{\delta L(x_1, x_2, \lambda)}{\delta x_2} = 0 \Leftrightarrow w_2 = \beta\lambda\; x_1^{\alpha} x_2^{\beta-1}$$

$$(3) \frac{\delta L(x_1, x_2, \lambda)}{\delta \lambda} = 0 \Leftrightarrow y = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$$

$$\Leftrightarrow x_1^{\alpha} = \frac{y}{x_2^{\beta}} \Leftrightarrow x_1 = y^{1/\alpha} x_2^{(-\beta/\alpha)}$$

où (3) représente la contrainte d'efficience de la firme le multiplicateur de Lagrange mesure la variation de la fonction objectif (fonction de coût) quand la contrainte de la firme (niveau de production)se desserre. Il mesure donc le coût marginal de production c'est à dire le supplément de coût qu'entraine la variation infinitésimale de la production.

Avec (1)et (2) on a que le $TMST_{1,2}(x^*_1,x^*_2)$ est égal au rapport des prix des facteurs de production (inputs) à l'équilibre du producteur. <u>On pourra constater que le TMST ne dépend que du rapport des inputs, α et βétant des paramètres constants.</u>

(1) / (2)

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha\lambda\ x_1^{\alpha-1}x_2^{\beta}}{\beta\lambda\ x_1^{\alpha}x_2^{\beta-1}} = \frac{\alpha\ x_2}{\beta\ x_1}$$

en utilisant (3) $x_1 = y^{1/\alpha}x_2^{(-\beta/\alpha)}$

On a :

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha\ x_2}{\beta\ x_1} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{y^{1/\alpha}x_2^{(-\beta/\alpha)}} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2^{(\frac{\alpha+\beta}{\alpha})}}{y^{1/\alpha}}$$

$$\Rightarrow w_1\beta y^{1/\alpha} = w_2\alpha x_2^{(\frac{\alpha+\beta}{\alpha})}$$

$$\Rightarrow x_2^* = \left(\frac{w_1}{w_2}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

Par symétrie :

$$\Rightarrow x_1^* = \left(\frac{w_2}{w_1}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

x_1^* *et* x_2^* représentent les quantités de facteurs utilisées à l'équilibre

Les demandes conditionnelles de facteurs de production :

$$x^*_1(w_1,w_2,y) = \left(\frac{w_2}{w_1}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \text{ et } x^*_2(w_1,w_2,y) = \left(\frac{w_1}{w_2}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

2- A partir des fonctions de demandes d'inputs on peut établir la fonction de coût de long terme de la firme

$C(w_1, w_2, y) = w_1 x^*_1(w_1, w_2, y) + w_2 x^*_2(w_1, w_2, y)$

Le coût total représente le coût minimum de la firme lorsqu'elle utilise de manière optimale ses facteurs de production c'est à dire sans gaspillage

$$w_1\left(\frac{w_2}{w_1}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + w_2\left(\frac{w_1}{w_2}\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$= y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left[w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]$$

$$C(w_1, w_2, y) = = y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \underbrace{\left(w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right)\left[\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]}_{A=\text{constante positive}}$$

$$avec\ \alpha+\beta = v$$

$$C(w_1, w_2, y) = A.y^{\frac{1}{v}}$$

La firme n'a aucune influence sur le prix des facteurs de production (concurrence parfaite), elle est price taker.

<u>Le coût moyen de LT</u>

$$C(w_1, w_2, y) = A.y^{\frac{1}{v}}$$

$$CML(w_1, w_2, y) = \frac{A.y^{\frac{1}{v}}}{y} = A.y^{\frac{1}{v}-1} = A.y^{\frac{1-(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}}$$

Le coût marginal de LT

$$C(w_1, w_2, y) = A.y^{\frac{1}{v}}$$

$$CmL(w_1, w_2, y) = \frac{\delta A.y^{\frac{1}{v}}}{\delta y} = \frac{A}{v}.y^{\frac{1}{v}-1} = \frac{A}{\alpha+\beta}y^{(\frac{1}{\alpha+\beta}-1)}$$

On peut établir une relation entre ces deux fonctions de coûts :
CML/Cml = v = α+β

Si α+β =1 alors CML= CmL le CM est constant « en le niveau de production »
Si α+β >1 alors CmL < CML le CM est décroissant « en le niveau de production »
Si α+β <1 alors CmL > CML le CM est croissant « en le niveau de production »

Les positions des courbes qui représentent le CML et du CmL dépendent donc directement de la nature des rendements d'échelle

----
Remarque : avec l'égalité du TMST de la firme au prix relatif des inputs on obtient l'équation du chemin d'expansion

(1) / (2)

$$\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha\ x_2^*}{\beta\ x_1^*} \Leftrightarrow x_2^* = \left(\frac{\beta w_1}{\alpha w_2}\right) x_1^*$$ Lorsque le rapport des prix des inputs est constant ,

cette expression est celle d'une droite passant par l'origine et qui réunit tous les équilibres de l'entreprise obtenus pour chaque déplacement de la contrainte de coût

Exercice 3 les coûts à CT et LT

1- A court terme CT la quantité de X_3 est une donnée pour l'entreprise, A long terme LT l'entreprise choisit X_3 de façon à adapter son unité de production aux conditions économiques. Il existe donc à CT une infinité de techniques de production possibles en fonction du volume de X_3. A LT le volume de chacun des facteurs de production est choisi de sorte que l'efficacité soit maximale dans la production, la fonction de coût à LT est donc unique

Soit $\overline{X_3}$ le volume de l'input X_3 fixé à CT. Par la suite on prendra $\overline{X_3}$ strictement positif sinon la seule production réalisable est la production nulle.

2- La fonction de coût de court terme est obtenue en résolvant le système :

$$\min_{(X_1, X_2)} 1/2\ X_1 + 1/2\ X_2 + \overline{X_3}$$

sous les contraintes :

$$\begin{cases} Y \leq X_1^{1/4} X_2^{1/4} \overline{X}_3^{1/2} \\ X_1 \geq 0 \text{ et } X_2 \geq 0 \end{cases}$$

Les variables X_1 et X_2 sont toutes deux strictement positives dès que la production Y l'est. Au minimum du coût, le rapport des productivités marginales des biens (X_1)et (X_2) est égal au rapport de leurs prix

$$\frac{\frac{\delta Y}{\delta X_1}}{\frac{\delta Y}{\delta X_2}} = 1 \Rightarrow \frac{Y/(4X_1)}{Y/(4X_2)} = 1$$

Donc $X_1 = X_2$

Compte tenu de l'expression de la fonction de production , les demandes en facteurs (X_1) et (X_2) s'écrivent :

$$\begin{cases} Y = X_1^{1/4} X_2^{1/4} \bar{X}_3^{1/2} \\ X_1 = X_2 \end{cases}$$

$$Y = X_1^{1/2} \bar{X}_3^{1/2}$$

$$d'où\ X_1 = \frac{Y^2}{\bar{X}_3} = X_2$$

Les fonctions de coûts à court terme :

$$Cc(\mathrm{Y}, \bar{X}_3) = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2 + \bar{X}_3$$

$$Cc(\mathrm{Y}, \bar{X}_3) = \frac{Y^2}{\bar{X}_3} + \bar{X}_3$$

Le coût moyen de CT :CMc

$$CMc(\mathrm{Y}, \bar{X}_3) = \frac{Y^2}{\bar{X}_3 Y} + \frac{\bar{X}_3}{Y} = \frac{Y}{\bar{X}_3} + \frac{\bar{X}_3}{Y}$$

$$\frac{\delta CMc(\mathrm{Y}, \bar{X}_3)}{\delta Y} = 0 \Leftrightarrow Y = \bar{X}_3$$

Le CMc est à son minimum pour Y= $\overline{X_3}$=2

Le coût marginal de CT (Cm_c)

$$\frac{\delta Cc(\mathrm{Y}, \bar{X}_3)}{\delta Y} = \frac{2Y}{\bar{X}_3}$$

Le coût marginal est linéaire

Les fonctions de coûts à long terme :

$$Cc(\mathrm{Y}, \bar{X}_3) = \frac{Y^2}{\bar{X}_3} + \bar{X}_3$$

A LT X_3 n'est plus fixe. La quantité de ce facteur est choisie de manière à minimiser en X_3 la fonction de coût de CT soit pour X_3= Y

D'où la Fonction de coût total de long terme :`

CL(Y) = 2Y

Le coût moyen = 2

Le coût marginal = 2

On peut noter que les rendements d'échelle sont constants à long terme, le minimum du coût moyen à LT n'est pas dans ce cas unique

Exercice 4
1°)

CT= CV(y) + CF= ½ y^3-y^2+4y+4

Coût moyen :CM(y) = 1/2y^2-y +4+ 4/y
Coût marginal Cm(y) = 3/2 y^2-2y+4
Coût variable moyen CVM (y)= 1/2y^2-y +4
Coût fixe moyen CFM (y) = 4/y

2) Cm et CVM sont des paraboles.

Le minimum de Cm est atteint en 2/3 et le Cm vaut alors 10/3.
Le minimum du CVM est atteint en y=1, le CVM vaut alors 7/2 = 3,5.

Le minimum du Coût moyen

$$\frac{\delta CM(y)}{\delta y} = 0 \Leftrightarrow y - 1 - \frac{4}{y^2} = \frac{y^3 - y^2 - 4}{y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{(y-2)(y^2 + y \ \ + 2)}{y^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow y = 2$$

$\frac{\delta CM(y)}{\delta y}$ >0 si y >2 et $\frac{\delta CM(y)}{\delta y}$ <0 si y<2

Le coût moyen atteint son minimum pour y = 2 et vaut alors 6
Lorsque CM(y) → ∞ $quand\ y$ → 0 et quand y→ ∞ CM(y)~CVM(y) (en raison des Coûts Fixes Moyens)

On vérifie que la courbe de coût marginal doit couper celle de coût moyen et de coût variable moyen en leur minimum
Cm(1)=3,5 et Cm(2) = 6

Le seuil de fermeture SF de l'entreprise correspond au minimum du coût variable moyen ici 3,5 ;
Le seuil de rentabilité SR de l'entreprise correspond au minimum du coût moyen ici 6

3- Soit le profit Π = recette totale – coût total = py- CT(y)= py - CV(y)-CF avec CF =4

$$\Pi'(y) = \frac{d\Pi}{dy}(y) = Rm(y) - Cm(y) = 0$$

$$d'où Rm(y) = Cm(y)$$

Pour un prix unitaire de vente p= 3 :

p < SF et donc y =0, le profit Π= -4 , la firme subit une perte de 4
Lorsque le prix est inférieur au SF, il ne vaut mieux pas produire et supporter une perte égale au coût fixe

Pour un prix unitaire de vente p= 4 :

SF <p<SR, Le prix est inférieur au seuil de rentabilité (minimum du CM) donc les profits sont négatifs
La production qui maximise le profit est caractérisée par l'égalité du prix (prix= Recette marginale) et du coût marginal :

$$3/2\ y^2 - 2y + 4 = 4$$

ce qui implique soit y =0 soit y = 4/3
Le profit est négatif pour y = 4/3, Π= - 92/27 =- 3,40
Toutefois l'entreprise a intérêt à produire y = 4/3 car elle va pouvoir récupérer une partie de ses coûts fixes .

Pour un prix unitaire de vente p= 6

Si p=6, y =2 et Π=0 ; le seuil de rentabilité est atteint et si le prix était supérieur à 6, la firme ferait un profit positif.