Théorie des options

TD5 - Modèle de Black-Scholes

1. On reprend les notations usuelles des formules de Black-Scholes.
   (a) Montrer l'égalité
   $$S_t\mathcal{N}'(d_1) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_2).$$
   (b) En déduire que la valeur du delta d'un CALL européen peut s'écrire $\Delta_{CALL} = \mathcal{N}(d_1)$. Calculer également le delta d'un PUT européen ayant le même sous-jacent, le même prix d'exercice et la même échéance que le CALL.
   (c) Calculer Γ, Θ, ρ, ν du CALL. Ecrire les résultats sous la forme $Af(d_1) + B\mathcal{N}(d_2)$ où f est la densité d'une v.a. gausienne centrée réduite.

2. Un CALL européen (sur un actif dont le prix est supposé suivre le modèle du brownien géométrique) est évalué sur le marché à 2.5 euros. Le prix initial du sous-jacent est $S_0 = 15$ euros, le prix d'exercice est $K = 13$ euros, la date de maturité est à trois mois (i.e. $T = 0.25$ année) et le taux sans risque est $r = 5\%$ par an. En utilisant les formules de Black-Scholes, montrer que la volatilité (dite implicite) est comprise entre 0.35 et 0.45.

3. Un stellage (straddle) est une stratégie qui consiste en l'achat simultané d'un CALL et d'un PUT europpéen sur le même sous-jacent S, de même maturité et prix d'exercice K.
   (a) Déterminer le payoff du stellage. Donner son prix à $t = 0$ en fonction de paramètres habituels des formules de Black-Scholes (σ, K, S_0, r, T, d_1 et d_2) et de la fonction de répartition $\mathcal{N}$ d'une v.a. gaussienne centrée réduite. Donner en particulier la formule pour $K = S_0$.
   (b) On suppose $S_0 = K = 30$ euros, $T = 3$ mois, $\sigma = 30\%$ et $r = 5\%$ (taux annuels). Déterminer le prix de ce stellage.
   (c) Déterminer les gains et les pertes maximales que peut enregistrer un trader qui aurait acheté ce stellage. Quelles seraient les anticipations du trader ?

4. Soit un actif S dont la dynamique stochastique est $dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$.
   (a) Calculer $\mathbb{E}(lnS_t)$ et $Var(lnS_t)$.
   (b) Supposons maintenant que $S_0 = 30$ euros, $\mu = 0.16$ et $\sigma = 0.32$. Calculer la probabilité pour que l'actif soit compris entre 30 euros et 34 euros au bout de 3 mois.

5. On se place dans le cadre d'un modèle de Black-Scholes. Il y a sur le marché un actif risqué S et un actif sans risque S^0. La dynamique de ces actifs est donnée par
   $$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \qquad dS_t^0 = S_t^0 r dt,$$
   avec W un mouvement brownien sous la probabilité historique, $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.
   (a) Rappeler quelle est la probabilité risque-neutre.
   (b) *Une option à la monnaie à départ différé* est une option payée immédiatement permettant de disposer à la date t_1 d'une option de maturité t_2 et de prix d'exercice S_{t_1}. Ecrire le prix à l'instant t de cette option comme espérance sous la probabilité risque-neutre.
   (c) Déterminer la valeur à tout t d'un CALL à la monnaie à départ différé.

1. On reprend les notations usuelles des formules de Black-Scholes.
   (a) Montrer l'égalité
   $$S_t\mathcal{N}'(d_1) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_2).$$
   (b) En déduire que la valeur du delta d'un CALL européen peut s'écrire $\Delta_{CALL} = \mathcal{N}(d_1)$. Calculer également le delta d'un PUT européen ayant le même sous-jacent, le même prix d'exercice et la même échéance que le CALL.
   (c) Calculer Γ, Θ, ρ, ν du CALL. Ecrire les résultats sous la forme $Af(d_1) + B\mathcal{N}(d_2)$ où f est la densité d'une v.a. gausienne centrée réduite.

Exercice 1 :

a) On note $\mathcal{N}'$ est la densité d'une $\mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow \mathcal{N}'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_1^2}{2}}$$

On sait que $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$

$$\Rightarrow d_2^2 = d_1^2 - 2d_1\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)$$
$$= d_1^2 - 2\left(\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)\right) + \sigma^2(T-t)$$
$$= d_1^2 - 2\ln\left(\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}\right)$$

Ainsi, $S_t\,\mathcal{N}'(d_1) = \frac{S_t}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(d_2^2 + 2\ln\left(\frac{S_t e^{r(T-t)}}{K}\right)\right)\right)$

$$= K e^{-r(T-t)} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{d_2^2}{2}}}_{\mathcal{N}'(d_2)} = K e^{-r(T-t)}\mathcal{N}'(d_2).$$

b) Dans le modèle de Black-Scholes, $C_t = S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$

$$\Rightarrow \Delta_{CALL} = \frac{\partial C_t}{\partial S_t} = \mathcal{N}(d_1) > 0$$

Pour le PUT de mêmes caractéristiques, $\Delta_{PUT} = \mathcal{N}(d_1) - 1 < 0$ car $\Delta_{CALL} - \Delta_{PUT} = 1$

c) Considérons un CALL :

$$* \ \Gamma_{CALL} = \frac{\partial \Delta_{CALL}}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{\partial \mathcal{N}(d_1)}{\partial S} = \frac{\partial \mathcal{N}(d_1)}{\partial d_1}\frac{\partial d_1}{\partial S}$$

$$\Rightarrow \Gamma_{CALL} = \frac{\mathcal{N}'(d_1)}{S_t\sigma\sqrt{T-t}} = \frac{1}{S_t\sigma\sqrt{T-t}} f(d_1)$$

$* \ \Theta_{CALL} = \frac{\partial C}{\partial t}$ On pose $\tau = T-t$ et $\Theta_{CALL} = \frac{\partial C}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial \tau}$

$$\Rightarrow \Theta_{CALL} = -\left[\frac{\sigma S_t}{2\sqrt{\tau}} f(d_1) + rKe^{-r\tau}\mathcal{N}(d_2)\right]$$

$$* \ \rho_{CALL} = \frac{\partial C}{\partial r} = \tau K e^{-r\tau}\mathcal{N}(d_2)$$

$$* \ \mathcal{V}_{CALL} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = S_t\sqrt{\tau} f(d_1)$$

Exercice 2 :

Dans le modèle de Black-Scholes, on écrit :

$$C_0 = S_0 \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$$

avec $d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Dans l'énoncé, on a : $C_0 = 2{,}5€$
$S_0 = 15€$
$K = 13€$
$T = 0{,}25$
$r = 5\%$ par an

On veut mq $\sigma^* \in [0{,}35 ; 0{,}45]$

* $\underline{\sigma = 0{,}35}$:

$$d_1 = \frac{1}{0{,}35 \times \sqrt{0{,}25}}\left[\ln(15/13) + \left(0{,}05 + \frac{0{,}35^2}{2}\right)0{,}25\right]$$
$$= 0{,}976648$$

$$\Rightarrow d_2 = d_1 - 0{,}35\sqrt{0{,}25} = 0{,}801648$$

$$\Rightarrow C_0^{\sigma=0{,}35} = 2{,}40964$$

* $\underline{\sigma = 0{,}45}$:

$$d_1 = 0{,}804059 \quad \text{et} \quad d_2 = 0{,}579059$$

$$\Rightarrow C_0^{\sigma=0{,}45} = 2{,}612415$$

De plus on sait que C_0^{σ} est monotone (croissante) selon σ.

Donc comme $C_0^{\sigma=0{,}35} < \underset{\substack{\parallel \\ 2{,}5}}{C_0^{\sigma^*}} < C_0^{\sigma=0{,}45} \Rightarrow \sigma^* \in [0{,}35 ; 0{,}45]$

Valeur approchée : $\sigma^* = 0{,}396485$.

Exercice 3 :

a) Stellage : Achat CALL européen
Achat PUT européen.

Opération	$t=0$	T
Achat CALL	$-C_0$	$(S_T-K)_+$
Achat PUT	$-P_0$	$(K-S_T)_+$
Total	$-(C_0+P_0)$	$\|S_T-K\|$

Payoff $= |S_T-K|$

A $t=0$, le prix du Stellage est C_0+P_0.

Or dans Black-Scholes, on a $\begin{cases} C_0 = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) \\ P_0 = -S_0 N(-d_1) + Ke^{-rT}N(-d_2) \end{cases}$

$$\Rightarrow C_0+P_0 = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT}N(d_2) - S_0 N(-d_1) + Ke^{-rT}N(-d_2)$$
$$= S_0(N(d_1)-N(-d_1)) - Ke^{-rT}(N(d_2)-N(-d_2))$$

Or on sait que $\forall x \in \mathbb{R}, N(x)+N(-x)=1 \Rightarrow N(x)-N(-x) = 2N(x)-1$

$$\Rightarrow C_0+P_0 = S_0(2N(d_1)-1) - Ke^{-rT}(2N(d_2)-1)$$
$$= S_0(2N(d_2+\sigma\sqrt{T})-1) - Ke^{-rT}(2N(d_1-\sigma\sqrt{T})-1)$$

où $d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

Si $K=S_0$, $\Rightarrow C_0+P_0 = S_0\left(2N(d_1)-1-2e^{-rT}N(d_2)+e^{-rT}\right)$

b) On suppose $S_0 = K = 30€$; $T = 3\text{ mois} = 0{,}25$ années ; $\sigma = 30\%$ et $r = 5\%$

Sachant qu'ici $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left[\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r+\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]$ et $d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$

$\Rightarrow d_1 = 0{,}158333$ et $d_2 = 0{,}008333$

$$\Rightarrow C_0+P_0 = 30\left(2N(d_1)-1-e^{-0{,}05\times0{,}25}N(d_2)+e^{-0{,}05\times0{,}25}\right)$$
$$= 18{,}489€$$

c) Gains $= -(C_0+P_0) + |S_T-K|$

$\Rightarrow$ Perte max $= -18{,}489€$

Gain max $=$

Exercice 4 : $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$

a) On a $\dfrac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$

Posons $X_t = \ln(S_t) \underset{\text{Itô}}{\Longrightarrow} dX_t = \dfrac{1}{S_t} dS_t - \dfrac{1}{2S_t^2}\sigma^2 S_t^2 dt$
$= (\mu - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW_t$

Donc $X_t = X_0 + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t$

$\Rightarrow S_t = S_0 \exp\left[(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t\right]$

a) On a donc $\mathbb{E}[\ln(S_t)] = \ln(S_0) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$ car $W_t \sim \mathcal{N}(0,t)$

et $Var(\ln(S_t)) = Var(\sigma W_t) = \sigma^2 t$

b) On suppose $S_0 = 30$ € ; $\mu = 0{,}16$ et $\sigma = 0{,}32$

On cherche $\mathbb{P}(S_t \in [30;34])$ avec $t = 3$ mois $= 0{,}25$ années.

$\mathbb{P}(S_t \in [30;34]) = \mathbb{P}(S_t \leq 34) - \mathbb{P}(S_t \leq 30)$

Or $\forall x \geq S_0$, $\mathbb{P}(S_t \leq x) = \mathbb{P}(S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} \leq x)$
$= \mathbb{P}((\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t \leq \ln(\frac{x}{S_0}))$
$= \mathbb{P}(\underset{\sim\mathcal{N}(0,1)}{U_t} \leq \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}[\ln(\frac{x}{S_0}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t]}_{y_x}) = \mathcal{N}(y_x)$ où $\mathcal{N}$ est la f.d.r d'une $\mathcal{N}(0,1)$

$\Rightarrow \mathbb{P}(S_t \in [30;34]) = \mathcal{N}(\underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}[\ln(\frac{34}{S_0}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t]}_{y_{34}}) - \mathcal{N}(\underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}[\ln(\frac{30}{S_0}) - (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t]}_{y_{30}})$

Ici, $y_{34} = 0{,}612270$ et $y_{30} = -0{,}17$.

Donc $\mathbb{P}(S_t \in [30;34]) = 0{,}297315$

Il y a donc près de 29,73 % de chances qu'au bout de 3 mois le cours de l'actif soit compris entre 30 et 34 euros.

Exercice 5 :

a) Sous la proba risque neutre notée $\mathbb{Q}$, la dynamique de l'actif risqué S est donnée par :

$dS_t = S_t(r dt + \sigma dW_t^{\mathbb{Q}})$ où $W_t^{\mathbb{Q}}$ est un MB sous $\mathbb{Q}$. $(W^{\mathbb{Q}} : t \longmapsto \frac{\mu - r}{\sigma}t + W_t)$

$\rightarrow S_t = S_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}}}$

b) Soit $C(t,t_1,t_2)$ le prix de l'option à la monnaie à départ différé à l'instant t, alors :

$$C(t,t_1,t_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_t - S_{t_1})_+]$$

c) $C(t,t_1,t_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t \mathbb{1}_{S_t>S_{t_1}} - S_{t_1}\mathbb{1}_{S_t>S_{t_1}}]$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t \mathbb{1}_{S_t>S_{t_1}}] - S_{t_1}\mathbb{Q}[S_t > S_{t_1}]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}}} \mathbb{1}_{S_t>S_{t_1}}] - S_{t_1}\mathbb{Q}\Big[\underbrace{\frac{-W_t^{\mathbb{Q}}}{\sqrt{t}}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} < \underbrace{\frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\Big(\ln\Big(\frac{S_{t_1}}{S_0}\Big) + (r-\frac{\sigma^2}{2})t\Big)}_{d_{\mathbb{Q}}}\Big]$$

avec Girsanov, $\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t = \exp(\sigma W_t^{\mathbb{Q}} - \frac{\sigma^2}{2}t)$

$W_t^{\mathbb{Q}} = \frac{\mu-r}{\sigma}t + W_t$

$W_t^{\mathbb{P}^*} = W_t^{\mathbb{Q}} - \sigma t$

$W_t^{\mathbb{P}^*} = \frac{\mu-r-\sigma^2}{\sigma}t + W_t$

$W_t^{\mathbb{P}} + \frac{-\mu+r+\sigma^2}{\sigma}t$

alors $W_t^{\mathbb{P}^*} = W_t^{\mathbb{Q}} - \sigma t$ est un MB sous $\mathbb{P}^*$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_0 e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t^{\mathbb{Q}}} \mathbb{1}_{S_t>S_{t_1}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[S_0 e^{rt}\mathbb{1}_{S_t>S_{t_1}}]$$

$$= S_0 e^{rt}\mathbb{P}^*[S_t > S_{t_1}]$$

Sous $\mathbb{P}^*$, $dS_t = S_t\left(\mu dt + \sigma\left(\frac{r-\mu+\sigma^2}{\sigma}dt + dW_t^{\mathbb{P}^*}\right)\right)$

$$= S_t\left((r+\sigma^2)dt + dW_t^{\mathbb{P}^*}\right)$$

$\Rightarrow$ Sous $\mathbb{P}^*$, $S_t = S_0 e^{(r+\sigma^2-\frac{1}{2})t + W_t^{\mathbb{P}^*}}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^*(S_t > S_{t_1}) = \mathbb{P}^*\Big(\underbrace{-\frac{W_t^{\mathbb{P}^*}}{\sqrt{t}}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} < \underbrace{\frac{1}{\sqrt{t}}\Big(\ln\Big(\frac{S_{t_1}}{S_0}\Big) + (r+\sigma^2-\frac{1}{2})t\Big)}_{d_*}\Big)$$

$$\Rightarrow C(t,t_1,t_2) = S_0 e^{rt}\mathcal{N}(d_*) - S_{t_1}\mathcal{N}(d_{\mathbb{Q}})$$

$\mathcal{N}$: f.d.r d'une $\mathcal{N}(0,1)$