

ERM
M2A, année 2021 - 2022

TD4 : COPULE

Exercice 1

Soit $H_\theta(x, y)$ la copule définie par la loi de répartition :

$$H_\theta(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y} + (1 - \theta)e^{-x-y}}$$

- a) Donner les fonctions de répartitions marginales, ainsi que la copule associée.
- b) Quelle(s) valeur(s) de θ correspond(ent) au cas indépendant ?

Exercice 2

Soit (X_1, \dots, X_n) un vecteur aléatoire de copule C .

- (1) Soient n fonctions croissantes bijectives g_1, \dots, g_n de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Déterminer la copule du vecteur $(g_1(X_1), \dots, g_n(X_n))$.
- (2) Même question si g_n est décroissante et les $n - 1$ autres fonctions croissantes.

Exercice 3

- (1) Donner une condition sur la copule C d'un couple $X = (X_1, X_2)$ exprimant que ce couple est positivement dépendant par quadrant, i.e.
 $\forall (x_1, x_2), \bar{F}_X(x_1, x_2) \geq \bar{F}_1(x_1)\bar{F}_2(x_2)$
- (2) Donner une condition sur la copule C d'un couple (X, Y) exprimant que ce couple est conditionnellement croissant, i.e.
 $\forall t, x_1 \leq y_1 \implies P(X_2 > t | X_1 = x_1) \leq P(X_2 > t | X_1 = y_1)$
 $\forall t, x_2 \leq y_2 \implies P(X_1 > t | X_2 = x_2) \leq P(X_1 > t | X_2 = y_2)$