Exercice 1. On note $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$.

1. Quelle est la loi de $V = -\ln(U)$. En déduire celle de $W = -\ln(1-U)$.
2. Montrer que $R = \sqrt{-\ln(U)}$ suit une loi de Rayleigh $\mathcal{R}(\alpha)$ dont on précisera le paramètre α. On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi de Rayleigh $\mathcal{R}(\alpha)$ si elle admet une densité de la forme : $f(x) = \left(\frac{x}{\alpha^2}\right) e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}} \mathbb{1}_{[0,+\infty[}$.
3. Soient $X = R\cos(\Theta)$ et $Y = R\sin(\Theta)$ où $R \sim \mathcal{R}(\alpha)$ et $\Theta \sim \mathcal{U}([0,2\pi[)$ sont indépendantes. Déterminer la loi conjointe de (X,Y). En déduire une méthode pour générer deux variables aléatoires gaussiennes indépendantes.

Exercice 1 : $U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$

1) Soit $V = -\ln(U)$ $\quad \varphi$ mesurable positive

$$\mathbb{E}[\varphi(-\ln(U))] = \int_{\mathbb{R}} \varphi(-\ln(u)) \mathbb{1}_{]0,1[}(u)\, du$$

$$= \int_0^1 \varphi(-\ln(u))\, du$$

$x = -\ln(u)$

$dx = -\frac{1}{u} du$

$u = e^{-x}$

$-e^{-x} dx = du$

$$= \int_0^{\infty} \varphi(x) e^{-x} dx$$

$$\Rightarrow f_V(v) = e^{-v} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(v)$$

$W = -\ln(1-U)$

$U \sim \mathcal{U}(]0,1[) \Rightarrow 1-U \sim \mathcal{U}(]0,1[)$

$$\Rightarrow f_W(w) = e^{-w} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(w)$$

2) $X \sim \mathcal{R}(\alpha) \Rightarrow f(x) = \left(\frac{x}{\alpha^2}\right) e^{\frac{-x^2}{2\alpha^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$

$R = \sqrt{-\ln(U)} = \sqrt{V}$

$$\mathbb{E}[\varphi(\sqrt{V})] = \int_0^\infty \varphi(\sqrt{v})\, e^{-v}\, dv$$

$x = \sqrt{v}$

$dx = \frac{1}{2\sqrt{v}} dv$ $\quad = \int_0^\infty \varphi(x)\, e^{-x^2}\, 2x\, dx$

$2x\,dx = dv$

$v = x^2$ $\quad \Rightarrow f_R(x) = 2x e^{-x^2} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

D'où $R \sim \mathcal{R}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

3) $X = R\cos(\theta)$ $Y = R\sin(\theta)$

où $R \sim \mathcal{R}(\alpha)$ et $\theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi[)$

$-\rho^2$

$$f_{R,\theta}(r,\theta) = f_R(r) \times f_\theta(\theta) = \left(\frac{r}{\alpha^2}\right) e^{-\frac{r^2}{2\alpha^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(r) \frac{1}{2\pi} \mathbb{1}_{[0,2\pi[}(\theta)$$

$$R = \underbrace{\sqrt{X^2+Y^2}}_{h_1(x,y)} \qquad \theta = \underbrace{\arctan\left(\frac{Y}{X}\right)}_{h_2(x,y)}$$

$$\mathrm{Jac}(X,Y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial x} & \frac{\partial h_1}{\partial y} \\ \frac{\partial h_2}{\partial x} & \frac{\partial h_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \\ -\frac{y}{x^2+y^2} & \frac{x}{x^2+y^2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow |\mathrm{Jac}(X,Y)| = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi\alpha^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2\alpha^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}(x,y)$$

$$= \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\alpha^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(x) \frac{1}{\alpha\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2\alpha^2}} \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(y)$$

$$\Rightarrow X \sim \mathcal{N}(0,\alpha) \quad \underbrace{Y \sim \mathcal{N}(0,\alpha)}$$

VA gaussienne

Exercice 2. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi $\mathcal{U}(]0,1[)$ et soit $\lambda > 0$. On note $E_n = \dfrac{-\ln(U_n)}{\lambda}$ pour tout $n \geq 1$ et $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} E_k$.

1. Identifier la loi des E_k puis celle de S_n.
2. On pose $N = \min\{n \geq 0, U_1U_2\cdots U_{n+1} \leq e^{-\lambda}\}$. Montrer que N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

   Hint : on pourra commencer par montrer que $\{N = n\}$ est le même évènement que $\{S_1 \leq 1, S_2 \leq 1, \cdots, S_n \leq 1, S_{n+1} > 1\}$ puis utiliser le théorème de transfert.

$$E_n = -\frac{\ln(U_n)}{\lambda} \quad (n \geq 1) \qquad S_n = \sum_{k=1}^{n} E_k$$

1) $\forall k \geq 1$, $E_k \sim \mathcal{E}(\lambda)$

Et par somme de lois exponentielles indep $S_n \sim \Gamma(n,\lambda)$

2) $N = \min(n \geq 0, U_1U_2 \cdots U_{n+1} \leq e^{-\lambda})$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} E_k = \sum_{k=1}^{n} -\frac{\ln(U_k)}{\lambda} = -\frac{1}{\lambda}\ln\left(\prod_{k=1}^{n} U_k\right)$$

$$\Rightarrow \{n \geq 0 \mid U_1 \cdots U_{n+1} \leq e^{-\lambda}\} \leftarrow = \{N = n\}$$

$$= \left\{n \geq 0 \mid -\frac{1}{\lambda} \ln\left(\prod_{k=1}^{n+1} U_k\right) \leq 1\right\}$$

$$= \{n \geq 0 \mid S_1 \leq 1, \dots, S_n \leq 1, S_{n+1} > 1\}$$

$$\mathbb{P}(N = n) = \mathbb{P}(N \geq n) - \mathbb{P}(N \geq n+1)$$

$$= \mathbb{P}(S_n \leq 1) - \mathbb{P}(S_{n+1} \leq 1)$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1} \, dx}_{*} - \int_0^1 \frac{\lambda^{n+1}}{\Gamma(n+1)} e^{-\lambda x} x^n \, dx$$

$$* \int_0^1 \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} x^{n-1} \, dx \underset{\text{IPP}}{=} \frac{\lambda^n}{\Gamma(n+1)} e^{-\lambda} + \int_0^1 \frac{\lambda^{n+1} e^{-\lambda x} x^n}{\Gamma(n+1)}$$

IPP

$$u' = x^{n-1}, \quad u = \frac{1}{n} x^n$$

$$v = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x} \Rightarrow v' = \frac{-\lambda^{n+1}}{\Gamma(n)} e^{-\lambda x}$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

D'où $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$

Exercice 3. On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables aléatoires iid de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Montrer que la convergence

$$\frac{1}{\ln(n)} \max_{1\leq k\leq n} X_k \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{\lambda}$$

a lieu en probabilité.

Exercice 3

$X_n \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$ $n\geq 1$, $\lambda>0$

Montrons que $\limsup\limits_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} = \frac{1}{\lambda}$ p.s.

* Soit $a\geq 0$, alors $\forall \varepsilon>0$ l'évènement $\{\limsup \frac{X_n}{\ln(n)} > a\}$ est imbriqué entre 2 lim sup d'évènement :

$$\limsup_{n\to\infty}\{X_n \geq (a-\varepsilon)\ln(n)\} \subset \left\{\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} > a\right\} \subset \limsup_{n\to\infty}\{X_n > a\ln(n)\}$$

$$\mathbb{P}(X_n > a\ln(n)) = \int_{a\ln(n)}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = e^{-\lambda a \ln(n)} = \frac{1}{n^{\lambda a}}$$

et les evts sont $\perp\!\!\!\perp$, donc d'après Borel-Cantelli en prenant des ε appropriés

$$\mathbb{P}\left[\limsup_{n\to\infty} \frac{X_n}{\ln(n)} > a\right] = \begin{cases} 1 & \text{si } \lambda a < 1 \Rightarrow a < \frac{1}{\lambda} \\ 0 & \text{si } \lambda a > 1 \Rightarrow a > \frac{1}{\lambda} \end{cases}$$

donc $\limsup \frac{X_n}{\ln(n)} = \frac{1}{\lambda}$ p.s.

Montrons que $\liminf\limits_{n\to\infty} Z_n \geq \frac{1}{\lambda}$ p.s. où $Z_n = \frac{\max(X_1,\dots,X_n)}{\ln(n)}$

* Soit $\varepsilon \in]0, \frac{1}{\lambda}]$ et posons $A_n = \{Z_n \leq \frac{1}{\lambda} - \varepsilon\}$

Mq $\sum \mathbb{P}(A_n)$ CV

On a :

$$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(X_k \leq (\tfrac{1}{\lambda} - \varepsilon)\ln n \mid i \in [\![1,n]\!])$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \leq (\tfrac{1}{\lambda} - \varepsilon)\ln(n))^n \quad \text{car les } X_i \text{ sont indep}$$

$$= \left(\int_0^{(\frac{1}{\lambda}-\varepsilon)\ln n} \lambda e^{-\lambda x}\,dx\right)^n = \left(1 - e^{-\lambda(\frac{1}{\lambda}-\varepsilon)\ln n}\right)^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{n^{1-\lambda\varepsilon}}\right)^n = \exp\left(n \ln\left(1 - \frac{1}{n^{1-\lambda\varepsilon}}\right)\right)$$

$$\leq \exp\left(-n \cdot \frac{1}{n^{1-\lambda\varepsilon}}\right)$$

$$\leq e^{-n^{\lambda\varepsilon}}$$

Donc $\sum \mathbb{P}(A_n)$ CV (par comparaison car $\sum e^{-n^{\lambda\varepsilon}}$ CV)

D'après le lemme de Borel-Cantelli p.s. $\forall n$ suffisamment grand on a $Z_n \geq \frac{1}{\lambda} - \varepsilon$, ce qui conclut.

Mq $\lim_{n\to\infty} Z_n = \frac{1}{\lambda}$ p.s.

Posons $B_n = \{ Z_n \geq \frac{1}{\lambda} + \varepsilon \}$.

De même que précédemment on calcule que

$$\mathbb{P}(B_n) = 1 - \left(1 - \frac{1}{n^{1+\lambda\varepsilon}}\right)^n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon}}$$

Or $\sum \frac{1}{n^{\lambda\varepsilon}}$ ne converge pas forcément

Fixons $m > 0$ et posons $n_k = (1+m)^k$

$\Rightarrow \sum_k \mathbb{P}(B_{n_k})$ CV et d'après le lemme de

Borel-Cantelli, p.s. $\forall k$ suffisamment grand on a

$Z_{n_k} \leq \frac{1}{\lambda} + \varepsilon$

De plus, avec m_k tq $(1+\eta)^k \leq n \leq (1+\eta)^{k+1}$

$$Z_n = \frac{\max(X_1, \ldots, X_n)}{\ln(n)} \leq \frac{\max(X_1, \ldots, X_{m_{k+1}})}{\ln(n)} \leq \underbrace{\frac{\max(X_1, \ldots X_{m_{k+1}})}{\ln(m_{k+1})} \cdot \frac{\ln(m_{k+1})}{\ln(m_k)}}_{= Z_{m_{k+1}} \cdot \frac{k+1}{k}}$$

Il s'ensuit que $\limsup\limits_{n \to \infty} Z_n = \frac{1}{\lambda}$ p.s.

Compte tenu des résultats précédents, il vient que

$$\lim_{n \to \infty} Z_n = \lim_{n \to \infty} \frac{\max\limits_{1 \leq k \leq n} (X_k)}{\ln(n)} = \frac{1}{\lambda} \text{ p.s.}$$

Exercice 5. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires iid de loi $\mathcal{N}(0,1)$. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n \geq 1$.

1. Justifier que $\frac{S_n}{\sqrt{n}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ pour tout $n \geq 1$.
2. Montrer que si $X \sim \mathcal{N}(0,1)$, alors $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq e^{-\frac{1}{2}t^2}$.
   Hint : On pourra commencer par étudier $\mathbb{P}(X \geq t)$.
3. En utilisant la question précédente, montrer que pour tout $\alpha > \frac{1}{2}$, on a $\frac{S_n}{n^\alpha} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s}} 0$.

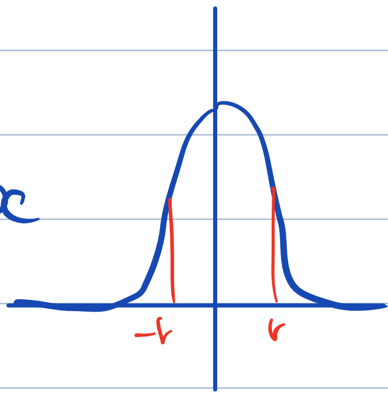
$X_n \sim \mathcal{N}(0,1) \quad S_n = \sum X_i$

1) Par le TCL, $\overline{X}_n = \frac{1}{n} S_n$

alors $\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} X_i = \sqrt{n}\, \overline{X} = \frac{S_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

2) $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}(|X| \geq t) = 2\int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$



Or $x \mapsto e^{-\frac{x^2}{2}}$ est $\searrow$ sur $[t, +\infty[$

$t \geq 0$

$$\Rightarrow \int_t^{\infty} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\Rightarrow 2\int_t^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\frac{t^2}{2}} \leq e^{-\frac{t^2}{2}}$$

$$\mathbb{P}(|X|\geq r) = 2\int_r^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$g : [r, +\infty[\longrightarrow [0,1]$

$r \mapsto \int_r^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$$= \int_r^{\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \quad = g(r)$$

Soit F une primitive de $f : x \mapsto \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$$g(r) = \lim_{n\to\infty} \int_r^{n} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \lim_{n\to\infty} F(n) - F(r)$$

$$\Rightarrow g'(r) = -F'(r) = -f(r) = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}}$$

$\Rightarrow g \searrow$ sur $[r, +\infty[$ donc majorée par $g(r)$

Donc $\forall r \in \mathbb{R}_+$, $g(r) = 2\int_r^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$$= \mathbb{P}(|X|\geq r) \leq \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}}$$

$$\leq e^{-\frac{r^2}{2}}$$

Exercice 4. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue bornée et $\alpha > 0$. Calculer la limite suivante

$$\lim_{n \to +\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

en utilisant la loi forte des grands nombres.

$$\sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = \mathbb{E}\left(f\left(\frac{P_1 + \dots + P_n}{n}\right)\right)$$

où $P_1, \dots, P_n$ sont de VA de Poisson de paramètre α $\perp\!\!\!\perp$

D'après la loi forte des grands nombres, $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} P_i$ cv p.s donc cv en loi vers α.

D'où $\displaystyle\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\alpha n} \frac{(\alpha n)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right) = f(\lambda)$

$$\underbrace{\mathbb{E}(\varphi(X))}_{\text{thm de transfert}} = \sum \varphi(n)\,\mathbb{P}(X = n)$$

Exercice 6. Soit $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Pour $\alpha > 0$, on pose $Y_\alpha = X\mathbb{1}_{|X|<\alpha} - X\mathbb{1}_{|X|\geq\alpha}$.

1. Montrer que $Y_\alpha \sim \mathcal{N}(0,1)$.
2. Montrer qu'il existe un unique α_0 tel que $\operatorname{cov}(X, Y_{\alpha_0}) = 0$.
3. Les variables X et Y_{α_0} sont-elles indépendantes ? Le vecteur (X, Y_{α_0}) est-il gaussien ?

$X \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \alpha > 0 \quad Y_\alpha = X 1_{|X|<\alpha} - X 1_{|X|\geq\alpha}$

$$\mathbb{E}[\varphi(X 1_{|X|<\alpha} - X 1_{|X|\geq\alpha})] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x 1_{|x|<\alpha} - x 1_{|x|\geq\alpha}) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$y_\alpha = x 1_{|x|<\alpha} - x 1_{|x|\geq\alpha}$

$\frac{y_\alpha}{|y_\alpha|} dy = dx$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_\alpha) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_\alpha^2}{2}} \frac{y_\alpha}{|y_\alpha|}}_{\text{impaire p/r à } x} dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y_\alpha) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y_\alpha^2}{2}} dy$$

On reconnait ici $Y_\alpha \sim \mathcal{N}(0,1)$.

2) $\operatorname{Cov}(X, Y_\alpha) = \operatorname{Cov}(X, X 1_{|X|<\alpha} - X 1_{|X|\geq\alpha})$

$$= 1_{|X|<\alpha} V(X) - 1_{|X|\geq\alpha} V(X)$$

Supposons $Cov(X, Y_{\alpha_0}) = 0$

$$\Rightarrow Cov(X, X\mathbb{1}_{|X|<\alpha_0} - X\mathbb{1}_{|X|\geq\alpha_0})$$

On cherche α_0 tq

$$\int_0^{\alpha_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\alpha_0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \int_{\alpha_0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 0$$

$$g(\alpha) = \int_0^{\alpha} f(x)\,dx - \int_{\alpha}^{\infty} f(x)\,dx$$ F primitive de f

$$= F(\alpha) - F(0) - F(\infty) + F(\alpha)$$
$$= 2F(\alpha) - F(0) - F(\infty)$$

$$\Rightarrow g'(\alpha) = 2F'(\alpha) = 2f(\alpha)$$
$$= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{\alpha^2}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx - \frac{3}{4} = 0$$

$$g(\alpha) = \int_{-\infty}^{\alpha} f(x)\,dx - \frac{3}{4}$$

$$g'(\alpha) = F'(\alpha) = f(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$$F(x) = \frac{1}{2}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{x-\mu}{\sigma\sqrt{2}}\right)\right)$$

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-r^2}\,dr$$

0,6745