## 2022-2023

### Exo 1

$\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ $\quad X \prec Y$ si $\mathbb{E}[f(X)] \le \mathbb{E}[f(Y)]$

$\forall f \nearrow$ et concave.

**(1)** Vérifier $X, Z \in \mathcal{X} \to X \prec \mathbb{E}[X|Z]$ (par Jensen.)

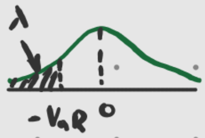
**(2)** $X \in \mathcal{X}$, $\lambda \in ]0,1]$ $\quad AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[(q-X)^+] - q$ où $q$ est un quantile d'ordre $\lambda$. M.q. $AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda} \inf_r \left(\mathbb{E}[(r-X)^+] - \lambda r\right)$

On peut supposer que $X$ admet une densité $p(x)$

$(\to q_\lambda^+ = q_\lambda^- = q(\lambda))$

$VaR_\lambda(X) = \inf\{m : \mathbb{P}(X+m<0) \le \lambda\}$

$AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_z(X)\,dz$




$$AVaR_\lambda(X) := \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_z(X)\,dz = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda -q(z)\,dz = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[-\underbrace{q(U)}_{X} \mid U < \lambda] =$$

$\lambda = \mathbb{P}(U<\lambda)$ $\quad X < q$

$$= \frac{1}{\lambda}\int_0^q -x\,p(x)\,dx = \frac{1}{\lambda}\int_0^q (q-x)p(x)\,dx - \frac{q}{\lambda}\underbrace{\int_0^q p(x)\,dx}_{\lambda} = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[(q-X)^+] - q$$

$J(r) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}(r-X)^+ - r$ - fonction convexe

$$J'(r) = \frac{1}{\lambda}\overbrace{\mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{X<r\}}}^{\mathbb{P}(X<r)} - 1 = 0 \to r^* : \mathbb{P}(X<r) = \mathbb{P}(X \le r) = \lambda \to$$

$\to$ Pour $r = VaR_\lambda$ $\quad J'(r) = 0 \to \square$

**(3)** $X \precsim Y \to \forall \lambda \in ]0,1]$ $\quad AVaR_\lambda(X) \ge AVaR_\lambda(Y)$

$x \mapsto (r-x)^+$ est convexe $\to \forall r$

$$\frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{E}[(r-X)^+] - \lambda r\right) \ge \frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{E}[(r-Y)^+] - \lambda r\right) \overset{\inf_r}{\ge} AVaR_\lambda(Y)$$

$$\mathrm{AVaR}_\lambda(Y) \leq \inf \left[ \frac{1}{\lambda}\left(\mathbb{E}(r-X)^+ - \lambda r\right)\right] = \mathrm{AVaR}_\lambda(X)$$



(4) $\rho$ convexe et invariante en loi

$\rho$ convexe monétaire $\to \rho(X) = \max\{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha_{min}(\mathbb{Q})\}$

$\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{1,f}(\mathbb{P})$ pour $X \in L^\infty(\mathbb{P})$ $\longrightarrow$ $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_{1,f} = \{\mu \in ba : \mu \geq 0,\ \mu(\Omega) = 1\}$

$\alpha_{min}(\mathbb{Q}) = \sup\limits_{X \in \mathcal{A}_\rho = \{X : \rho(X) \leq 0\}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X]$

$\rho$ convexe monétaire invariante en loi $\to$

$$\rho(X) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1(]0,1])} \left\{ \int_{]0,1]} \mathrm{AVaR}_\lambda(X)\,\mu(d\lambda) - \beta_{min}(\mu) \right\}$$

où $\beta_{min}(\mu) = \sup\limits_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int_{]0,1]} \mathrm{AVaR}(X)\,\mu(d\lambda) = \sup\limits_{X \in L^\infty} \left\{ \int_{]0,1]} \mathrm{AVaR}_\lambda(X)\,d\lambda - \rho(X) \right\}$

En déduire $X \prec Y \to \rho(X) \geq \rho(Y)$

ne dépend pas de $X$

Par (3) $$\underbrace{\int_{]0,1]} \mathrm{AVaR}_\lambda(X)\,\mu(d\lambda) - \beta_{min}(\mu)}_{\leq\ \rho(X)} \geq \int_{]0,1]} \mathrm{AVaR}_\lambda(Y)\,\mu(d\lambda) - \beta_{min}(\mu)$$

$\downarrow \sup$

$\rho(Y) \leq$

Maintenant, $\rho$ convexe invariante en loi normalisée $\rho(X) \geq \mathrm{VaR}_{\lambda_0}(X)$

(5) $\varepsilon > 0$ $A_\varepsilon = \{-X \geq \mathrm{VaR}_{\lambda_0}(X) - \varepsilon\}$, $Y_\varepsilon = \mathbb{E}[X \mid \mathbb{1}_{A_\varepsilon}] = \mathbb{1}_{A_\varepsilon^c} X + \mathbb{1}_{A_\varepsilon}\mathbb{E}[X \mid A_\varepsilon]$

m.q. $\mathbb{P}(Y_\varepsilon < \mathbb{E}[X \mid A_\varepsilon]) = 0$ et $\mathbb{P}(Y_\varepsilon \leq \mathbb{E}[X \mid A_\varepsilon]) > \lambda_0$

$$\mathbb{P}(Y_\varepsilon < \mathbb{E}[X \mid A_\varepsilon]) = \mathbb{P}\Big(\underbrace{A_\varepsilon^c}_{= \{-X < \mathrm{VaR}_{\lambda_0}(X) - \varepsilon\}}, X < \frac{\mathbb{E}[X \mathbb{1}_{A_\varepsilon}]}{\mathbb{P}(A_\varepsilon)}\Big) \leq \mathbb{P}(\emptyset) = 0$$

Mais sur $A_\varepsilon$ $X \leq -\mathrm{VaR}_{\lambda_0}(X) + \varepsilon \to \{X < \mathbb{E}[X \mid A_\varepsilon]\} \subset \{X \leq -\mathrm{VaR}_{\lambda_0}(X) + \varepsilon\}$

$\mathbb{P}\left(Y_\varepsilon = \mathbb{E}[X|A_\varepsilon]\right) \geq \mathbb{P}(A_\varepsilon) = \mathbb{P}\left(X \leq -VaR_{\lambda_0}(X) + \varepsilon\right) > \lambda_0$ par déf. de VaR

$$\left(\begin{array}{l} VaR_{\lambda_0}(X) = \inf\{m : \mathbb{P}(X+m<0) \leq \lambda_0\} \\ \text{si } \mathbb{P}(X \leq -VaR_{\lambda_0}(X)+\varepsilon) = \lambda_0 \rightarrow \ ?! \end{array}\right)$$

**(6)** En déduire que $\rho(X) \geq -\mathbb{E}[X|A_\varepsilon]$

Par (5), $q^+_{Y}(\lambda_0) = \mathbb{E}[X|A_\varepsilon] \Rightarrow VaR_{\lambda_0}(Y_\varepsilon) = -\mathbb{E}[X|A_\varepsilon]$

Par (1) $\quad \rho(X) \geq \rho(\mathbb{E}[X|\mathbb{1}_{A_\varepsilon}]) = \rho(Y_\varepsilon) \geq VaR_{\lambda_0}(Y_\varepsilon) = -\mathbb{E}[X|A_\varepsilon]$

**(7)** $X \in \mathcal{X}$ t.q. $\mathbb{P}(X=x) = 0 \quad \forall x \quad$ M.q. $\rho(X) \geq AVaR_{\lambda_0}(X)$

$$AVaR_{\lambda_0}(X) = \frac{1}{\lambda_0}\int_0^{\lambda_0} -q^+(\lambda)\,d\lambda = \mathbb{E}[-q^+(U)|U<\lambda_0] = \mathbb{E}[-X|X<-VaR_{\lambda_0}(X)] =$$

$\mathbb{P}(X=-VaR_{\lambda_0}(X)=0)$

$$= \frac{\mathbb{E}[-X\,\mathbb{1}\{X<-VaR_{\lambda_0}(X)\}]}{\mathbb{P}(X<-VaR_{\lambda_0}(X))} \overset{TCM}{=} \frac{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{E}[-X\,\mathbb{1}_{A_\varepsilon}]}{\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\mathbb{P}(A_\varepsilon)} = \lim \mathbb{E}[-X|A_\varepsilon] \leq \rho(X)$$

**(8)** $X, U \in \mathcal{X}$, $U \sim \mathcal{U}[0,1]$ $U \perp\!\!\!\perp X$ et $\eta > 0$. M.q. $\mathbb{P}(X+\eta U = x) = 0$. $\forall x$

En déduire que $\rho(X) \geq AVaR_{\lambda_0}(X)$

$$\mathbb{P}(X+\eta U = x) = \int \mathbb{P}(y+\eta U = x)\,dF_X(y) = \int \underbrace{\mathbb{P}\left(U = \frac{x-y}{\eta}\right)}_{\overset{p.s.}{=}0} dF_X(y) = 0$$

Par (7), $\rho(X+\eta U) \geq AVaR_{\lambda_0}(X+\eta U)$

$\downarrow \eta\downarrow 0$ les métric sont Lipschitz en $\|\cdot\|_\infty$

$\|(X+\eta U) - X\|_\infty = \eta \to 0$

$\rho(X) \geq AVaR_{\lambda_0}(X)$

## 2021-2022

**(1)** Axioms de mesure de risque monétaire normalisée

$\rho(0) = 0$

1) $X \geq Y \to \rho(X) \leq \rho(Y)$ - Monotonie

2) $c$-const. $\to \rho(X+c) = \rho(X) - c$ - Invariance par translation

$\rho(0) = 0$ - normalisée

Cohérent = convexe + positivement homogène

B est dit étoilé si $\forall X \in B$, $\lambda \in [0,1]$, $\lambda X \in B$

$\rho$ est étoilée si $\forall X \in \mathcal{X}, \forall \lambda > 1, \rho(\lambda X) \geq \lambda \rho(X)$

(2) M.q. $\rho$ est étoilée ssi $\forall Y \in \mathcal{X}$ $\forall \lambda \in ]0,1[$, $\rho(\lambda Y) \leq \lambda \rho(Y)$

En déduire que $\rho$ convexe $\to$ étoilée

$$\forall X \in \mathcal{X} \ \forall \lambda > 1 \ \ \rho(\underbrace{\lambda X}_{Y \in \mathcal{X}}) \geq \lambda \rho(X) \iff \forall Y \in \mathcal{X} \ \forall \lambda > 1 \ \ \frac{1}{\lambda}\rho(Y) \geq \rho\left(\frac{Y}{\lambda}\right) \iff$$

$\mu = \frac{1}{\lambda}$

$$\iff \forall Y \in \mathcal{X} \ \forall \mu \in ]0,1[ \ \ \mu \rho(Y) \geq \rho(\mu Y).$$

$\rho$ convexe $\to$ $\rho(\lambda X + (1-\lambda)\cdot 0) \leq \lambda \rho(X)$ $\forall \lambda \in [0,1]$ $\Rightarrow$ étoilée

(3) $\rho$ est étoilée ssi $\mathcal{A}_\rho$ est étoilé

$$\mathcal{A}_\rho = \{X \in \mathcal{X} : \rho(X) \leq 0\}$$

$(\Rightarrow)$ $X \in \mathcal{A}_\rho$ $\forall \lambda \in ]0,1[$ $\rho(\lambda X) \overset{(2)}{\leq} \lambda \rho(X) \leq 0 \to \lambda X \in \mathcal{A}_\rho$

$(\Leftarrow)$ $\mathcal{A}_\rho$ étoilé. $\forall Y \in \mathcal{X}$ $Y + \rho(Y) \in \mathcal{A}_\rho \to \lambda Y + \lambda \rho(Y) \in \mathcal{A}_\rho \to$

$$\left.\begin{array}{l} \to \rho(\lambda Y + \lambda \rho(Y)) \leq 0 \\ \qquad \qquad \| \\ \rho(\lambda Y) - \lambda \rho(Y) \end{array}\right\} \to \rho(\lambda Y) \leq \lambda \rho(Y)$$

(4) $(\rho_\theta)_{\theta \in \Theta}$ une famille de mesures de risque étoilées

Est-ce que $\begin{cases} \rho_V(X) = \sup\limits_{\theta \in \Theta} \rho_\theta(X) \\ \rho_\wedge(X) = \inf\limits_{\theta \in \Theta} \rho_\theta(X) \end{cases}$ sont des m.d.r. étoilées ?

Ils sont des mesure de risque monétaire (on peut vérifier les p-ptés)

$\forall \lambda \in ]0,1[$

$$\rho_V(\lambda X) = \sup_{\theta \in \Theta} \underbrace{\rho_\theta(\lambda X)}_{\leq \lambda \rho(X)} \leq \lambda \rho_V(X)$$

$$\rho_\wedge(\lambda X) = \inf_{\theta \in \Theta} \rho_\theta(\lambda X)$$

$$\rho_\theta(\lambda X) \leq \lambda \rho_\theta(X)$$

$$\inf_\theta \rho_\theta(\lambda X) \leq \lambda \rho_\theta(X)$$

$\downarrow \inf$

$\rho_\wedge(\lambda X) \leq \lambda \rho_\wedge(X)$ → Oui pour les deux.

(5) M.q. $\rho$ étoilée + sous-additive → cohérente

1) Convexité : $\forall \lambda \in ]0,1[$ $\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \overset{\text{sous-add.}}{\leq} \rho(\lambda X) + \rho((1-\lambda)Y) \overset{\text{étoilée}}{\leq} \lambda \rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y)$

2) Positivement homogène :

$$\rho\left(\frac{\lambda}{2}X + \frac{\lambda}{2}X\right) \overset{\text{sous-add}}{\leq} \lambda \rho(X)$$

$$\rho(\lambda X) \geq \lambda \rho(X)$$

étoilée si $\lambda > 1$

→ $\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X)$ pour $\lambda > 1$ $X \in \mathcal{X}$

→ $\frac{1}{\lambda}\rho(Y) = \rho\left(\frac{Y}{\lambda}\right)$ $\forall \lambda > 1$ $Y \in \mathcal{X}$

→ $\rho(\mu Y) = \mu \rho(Y)$ $\forall \mu < 1$ $\forall Y \in \mathcal{X}$

$\rho$ étoilée. Pour $Y \in \mathcal{X}$ $\mathcal{A}_Y = \{\lambda(Y + \rho(Y)) + Z : \lambda \in [0,1], Z \in \mathcal{X}, Z \geq 0\}$

(6) M.q. $\mathcal{A}_Y \subset \mathcal{A}_\rho$ convexe. En déduire $\forall X \in \mathcal{X}$, $\rho(X) \leq \inf\limits_{Y \in \mathcal{X}} \rho_{\mathcal{A}_Y}(X)$

$\lambda \in [0,1]$, $Z \geq 0$

$$\rho\big(\lambda(Y+\rho(Y))+\underbrace{Z}_{\geq 0}\big) \leq \rho\big(\lambda(Y+\rho(Y))\big) \overset{*}{\leq} \lambda\rho(Y+\rho(Y)) = \lambda\big(\rho(Y)-\rho(Y)\big) = 0$$

$\to \mathcal{A}_Y \subset \mathcal{A}_\rho$.

**Déf** $\mathcal{A}$ est un ensemble de positions acceptables si
- $\mathcal{A} \neq \emptyset$ et $\inf\{m \in \mathbb{R} : m \in \mathcal{A}\} = 0$
- si $X \in \mathcal{A}$, $Y \geq X \to Y \in \mathcal{A}$

$\hookrightarrow \rho_{\mathcal{A}}(X)$ est une mesure de risque monétaire

Convexe? $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$, $Z_1, Z_2 \geq 0$, $\mu \in ]0,1[$

$$\mu\big(\lambda_1(Y+\rho(Y))+Z_1\big)+(1-\mu)\big(\lambda_2(Y+\rho(Y))+Z_2\big) =$$

$$= \underbrace{(\mu\lambda_1+(1-\mu)\lambda_2)}_{=\tilde{\lambda} \in [0,1]\ ([0,1] \text{ est convexe})}(Y+\rho(Y)) + \underbrace{\lambda Z_1+(1-\lambda)Z_2}_{=\tilde{Z}\geq 0} \in \mathcal{A}_Y$$

On a vu dans le cours que $\rho(X) = \rho_{\mathcal{A}_\rho}(X) = \inf\{m : \rho(X+m) \in \mathcal{A}_\rho\}$

Par définition de $\rho_{\mathcal{A}}$, si $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2 \to \rho_{\mathcal{A}_2}(X) \leq \rho_{\mathcal{A}_1}(X)$

Donc $\rho(X) = \rho_{\mathcal{A}_\rho}(X) \leq \rho_{\mathcal{A}_Y}(X)$ $\forall Y \to \rho(X) \leq \inf_{Y \in \mathcal{X}} \rho_{\mathcal{A}_Y}(X)$

**(7)** M.q. $\rho(X) = \rho_{\mathcal{A}_\rho}(X)$ et en déduire $\rho(X) = \inf_{Y \in \mathcal{X}} \rho_{\mathcal{A}_Y}(X)$

il faut prendre $Y = X$ dans (6)

$\rho(X) = \inf\{m : X+m \in \mathcal{A}_\rho\}$

$\{m : X+m \in \mathcal{A}_\rho\} = \{m : m \geq \rho(X)\} \to \inf\{\dots\} = \rho(X)$

$\{m : \rho(X)-m \leq 0\}$

**(8)** Pour $X \in \mathcal{X}$ on considère $(X_n)$ t.q. $X_n \geq X_{n+1}$ et $X_n \to X$ p.s.

M.q. $\lim_n \rho_{\mathcal{A}_Y}(X_n) = \rho_{\mathcal{A}_Y}(X)$. En déduire que

$\rho_{\mathcal{A}_Y}(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})}\{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-X] - \mathcal{L}^*(\mathbb{Q})\}$ où $\mathcal{L}^*(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{A}_Y} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-X]$

$\rho_{\mathcal{A}_Y}(X) \geq \rho_{\mathcal{A}_Y}(X_{n+1}) \geq \rho_{\mathcal{A}_Y}(X_n) \to \exists \lim \rho_{\mathcal{A}_Y}(X_n) = \rho_\infty \leq \rho_{\mathcal{A}_Y}(X)$

On a $\rho_{\mathcal{A}_Y}(X_n) + X_n = \lambda_n (Y + \rho(Y)) + Z_n$

$\lambda_n \in [0,1] \Rightarrow \exists n_k : \lambda_{n_k} \to \lambda_\infty \in [0,1]$

$$\begin{array}{ccccccc} Z_{n_k} & = & X_{n_k} & + & \rho_{\mathcal{A}_Y}(X_{n_k}) & - & \lambda_n (Y + \rho(Y)) \\ \text{VI} & & \downarrow \text{p.s.} & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & & & & & & \\ Z_\infty & = & X & + & \rho_\infty & - & \lambda_\infty (Y + \rho(Y)) \geq 0 \Rightarrow \rho_{\mathcal{A}_Y}(X) \leq \rho_\infty \Rightarrow \end{array}$$

$\Rightarrow \rho_{\mathcal{A}_Y}(X) = \rho_\infty$

Donc $\rho$ est continue par au dessus $\overset{\text{Thm de cours}}{\Rightarrow} \rho(X) = \sup\limits_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha_{\min}(\mathbb{Q}) \}$

**Théorème** $\rho$ monétaire convexe. On pose $\alpha_{\min}(\mathbb{Q}) = \sup\limits_{X \in \mathcal{A}_\rho} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-X]$, $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$

Les conditions suivantes sont équivalentes :

a) $\rho$ est s.c.i. pour la topologie faible * $\sigma(L^\infty, L^1)$

b) $\rho(X) = \sup\limits_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \{ \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha_{\min}(\mathbb{Q}) \}$, $X \in L^\infty$

c) $\rho$ est continue par au dessus : si $X_n \downarrow X$ p.s. alors $\rho(X_n) \uparrow \rho(X)$

d) $\rho$ satisfait la propriété de Fatou : $X_n \in L^\infty$ t.q. $X_n \to X$ p.s., $\exists M : \|X_n\| \leq M$ alors $\rho(X) \leq \liminf\limits_{n \to \infty} \rho(X_n)$.

Représentation de $AVaR_\lambda(X) = \max\limits_{\mathbb{Q} \in \mathcal{Q}_\lambda} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-X]$ où

$$\mathcal{Q}_\lambda = \left\{ \mathbb{Q} \text{ proba} : \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{\lambda} \text{ p.s.} \right\}$$

**2020-2021**

$$\rho_\lambda(X) = \sup_{\substack{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}) \\ \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{\lambda}}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] \overset{\text{objectif}}{=} AVaR_\lambda(X)$$

(1) $\rho$ est cohérente (= mesure de risque + convexe + positivement homogène)

- Monotonie $X \leq Y \Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-Y] \leq \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X]$ $\forall \mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}) \to$

$\xrightarrow{\sup} \rho(Y) \leq \rho(X)$

- Invariance par transl. $c \in \mathbb{R}$

$\rho_\lambda(X+c) = \sup_{\mathbb{Q}} \{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \lambda\} = \rho(X) - \lambda$

- Positivement hom. $\alpha > 0$

$\rho_\lambda(\alpha X) = \sup_{\mathbb{Q}} \alpha \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] = \alpha \rho_\lambda(X)$

- Convexité: $\alpha \in ]0,1[$

$\rho_\lambda(\alpha X + (1-\alpha)Y) = \sup_{\mathbb{Q}} \{\alpha \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] + (1-\alpha)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-Y]\} \leq \alpha \sup \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] +$

$+ (1-\alpha) \sup \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-Y] = \alpha\rho(X) + (1-\alpha)\rho(Y).$

application du thm. de Radon-Nikodym

(2) M.q. $\rho_\lambda(X) = \sup\limits_{\substack{Z \in L^1(\mathbb{P}) \\ 0 \leq Z \leq \frac{1}{\lambda} \\ \mathbb{E}Z = 1}} \mathbb{E}[-XZ]$ puis que

$$\rho_\lambda(X) = \sup_{\substack{\psi : \mathbb{R} \to [0, \frac{1}{\lambda}] \text{ mes.} \\ \mathbb{E}[\psi(X)] = 1}} \mathbb{E}[-X\psi(X)]$$

$$\sup_{\substack{Z \in L^1(\mathbb{P}) \\ 0 \leq Z \leq \frac{1}{\lambda},\ \mathbb{E}Z = 1}} \mathbb{E}[-XZ] = \sup_Z \mathbb{E}[-X\underbrace{\mathbb{E}[Z|X]}]= \sup_\psi \mathbb{E}[-X\psi(X)]$$

$\sigma(X)$-mesurable $\to$

$\to \exists \psi$ - mes.: $\mathbb{E}[Z|X] = \psi(X) \in [0, \frac{1}{\lambda}]$

$\mathbb{E}[\psi(X)] = \mathbb{E}[Z] = 1$

Inverse: $\mathbb{E}[-X \underbrace{\psi(X)}_{\substack{Z \in L^1(\mathbb{P}) \\ 0 \leq Z \leq \frac{1}{\lambda}\ \mathbb{E}Z = 1}}]$

**(3)** $q$ quantile d'ordre $\lambda$ de $X$ $\left(\mathbb{P}(X<q)\leq \lambda,\ \mathbb{P}(X\leq q)\geq \lambda\right)$

$$\psi_0(x) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{1}_{\{x<q\}} + \varkappa\,\mathbb{1}_{\{x=q\}} \qquad \varkappa = \begin{cases} \dfrac{1-\frac{\mathbb{P}(X<q)}{\lambda}}{\mathbb{P}(X=q)} & \text{si } \mathbb{P}(X=q)>0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

**(a)** Vérifier que $\psi_0(x)\in[0,1/\lambda]$ $\forall x\in\mathbb{R}$

Il suffit de m.q. $\varkappa \leq \frac{1}{\lambda}$ i.e. $\lambda - \mathbb{P}(X<q)\leq \mathbb{P}(X=q)$

C'est vrai car $\mathbb{P}(X\leq q)\geq\lambda$

**(b)** Calculer $\mathbb{E}[\psi_0(X)]$ et $\mathbb{E}[-X\psi_0(X)]$ le cas $\neq 0$

$$\mathbb{E}[\psi_0(X)] = \frac{1}{\lambda}\mathbb{P}(X<q) + \frac{1-\frac{\mathbb{P}(X<q)}{\lambda}}{\mathbb{P}(X=q)}\,\mathbb{P}(X=q) = 1$$

$$\mathbb{E}[-X\psi_0(X)] = -\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}\,X\mathbb{1}_{\{X<q\}} - q\left(1-\frac{\mathbb{P}(X<q)}{\lambda}\right) =$$

$$= -q - \mathbb{E}\,\mathbb{1}_{\{X<q\}}(X-q)\cdot\frac{1}{\lambda} = \boxed{\frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[(q-X)^+] - q = AVaR_\lambda(X)}$$

$$\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda(\cancel{q} - q^+(u))\,du - \cancel{q} = -\frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda q^+(u)\,du$$

$$AVaR_\lambda(X) = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda VaR_\alpha(X)\,d\alpha = \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda -q^+(u)\,du \underset{+q-q}{=} \frac{1}{\lambda}\int_0^\lambda (q-q^+(u))\,du - q =$$

$$= \frac{1}{\lambda}\mathbb{E}[(q-X)^+] - q$$

$\uparrow$ $q>q^+(u) \iff u<\lambda$

**(c)** Vérifier que $\forall\psi:\mathbb{R}\to[0,\frac{1}{\lambda}]$ mes. $\psi(x)\leq \overset{\frac{1}{\lambda}}{\overset{\shortparallel}{\psi_0(x)}}$ si $x<q$ et $\psi(x)\geq \underset{\overset{\shortparallel}{0}}{\psi_0(x)}$ si $x>q$. En déduire que $0\leq\mathbb{E}[-X(\psi_0(X)-\psi(X))]$ si $\mathbb{E}[\psi(X)]=1$

$$\mathbb{E}[-X(\psi_0(X)-\psi(X))] = \mathbb{E}[\overbrace{-X}^{\geq -q}\underbrace{(\psi_0(X)-\psi(X))}_{\geq 0}\mathbb{1}_{\{X<q\}}] +$$

$$+\ \mathbb{E}[\underbrace{-X}_{\leq -q}\underbrace{(\psi_0(X)-\psi(X))}_{\leq 0}\mathbb{1}_{\{X>q\}}] + \mathbb{E}[-X(\varkappa-\psi(X))\mathbb{1}_{\{X=q\}}] \geq$$

$$\geq -q\,\mathbb{E}[(\psi_0(X)-\psi(X))\mathbb{1}_{\{X<q\}}] + q\,\mathbb{E}[(\psi(X)-\psi_0(X))\mathbb{1}_{\{X>q\}}] - q\,\mathbb{E}[(\psi_0(X)-\psi(X))\mathbb{1}_{\{X=q\}}]$$

$$= -q\,\mathbb{E}[\psi_0(X)-\psi(X)] = 0$$

**(4)** Par (2) et (3c), $\rho_\lambda(X) = \mathbb{E}[-X\psi_0(X)] \overset{(3b)}{=} AVaR_\lambda(X)$

Construire $\mathbb{Q}_0 \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$ $\quad \frac{d\mathbb{Q}_0}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{\lambda} \quad \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_0}[-X] = \rho_\lambda(X)$

$$\psi_0(X) = \frac{1}{\lambda}\mathbb{1}_{\{X<q\}} + \varkappa\mathbb{1}_{\{X=q\}} = Z = \frac{d\mathbb{Q}_0}{d\mathbb{P}}$$

$$d\mathbb{Q}_0 = \left(\frac{1}{\lambda}\mathbb{1}_{\{X<q\}} + \varkappa\mathbb{1}_{\{X=q\}}\right)\cdot d\mathbb{P}$$

**(4)** **(a)** À partir de (1),

$$\rho_\lambda(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P}):\ \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{\lambda}} \left\{ \sup_{Z:\ Z \overset{\mathcal{L}}{=} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}} \mathbb{E}[-ZX] \right\}$$

Évident $\checkmark$

$$\rho_\lambda(X) \overset{(1)}{=} \sup_{\mathbb{Q}} \mathbb{E}\left[-X\cdot\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] \quad \geq$$

Pour $\mathbb{Q}$ fixé $\forall Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$ $\exists \tilde{\mathbb{Q}} : \frac{d\tilde{\mathbb{Q}}}{d\mathbb{P}} = Z \quad Z\in[0,\frac{1}{\lambda}],\ \mathbb{E}Z = \mathbb{E}\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = 1 \to$

$\to \tilde{\mathbb{Q}} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P}) \to =$

**(b)** $$\rho_\lambda(X) = \sup_{\substack{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P})\\ \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \leq \frac{1}{\lambda}}} \left\{ \int_0^1 VaR_u(X)\cdot\left(-q^{+}_{-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}}(u)\right) du \right\}$$

Lemme 1

$$\sup_{\tilde{Y} \overset{\mathcal{L}}{\sim} Y} \mathbb{E}[X\tilde{Y}] = \int_0^1 q_X^{+}(u) q_Y^{+}(u)\,du \Rightarrow \sup_{Z \overset{\mathcal{L}}{\sim} \frac{dQ}{dP}} \mathbb{E}[-ZX] = \int_0^1 \underbrace{q_X^{+}(u)}_{=-VaR_u(X)} q^{+}_{-\frac{dQ}{dP}}(u)\,du$$

**(c)** Monotonie de $u \in ]0,1[ \mapsto VaR_u(X) = -q_X^{+}(u) \downarrow$

et $u \mapsto -q^{+}_{-\frac{dQ}{dP}} \downarrow$

et la valeur $\int_0^1 -q^{+}_{-\frac{dQ}{dP}}(u)\,du = -\mathbb{E}\left[q_{-\frac{dQ}{dP}}(U)\right] = \mathbb{E}\left[\frac{dQ}{dP}\right] = 1$

M.q. pour $Q \in \mathcal{M}_1(P)$ : $\frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\lambda}$ $\int_0^1 VaR_u(X)\left(-q^{+}_{-\frac{dQ}{dP}}(u)\right)du \leq \frac{1}{\lambda}\int_0^{\lambda} VaR_u(X)\,du$

Construire le proba pour laquelle on a égalité ($\to$ (1) $= AVaR_\lambda$)

Pour $y \in ]0,1[$

Si $-\frac{1}{\lambda} \leq Z \leq 0 \Rightarrow q_Z^{+}(y) = \inf\{x : P(Z \leq x) \geq y\} \leq 0$

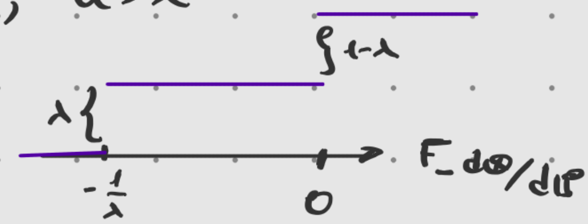
et $q_Z^{+}(y) \geq -\frac{1}{\lambda}$ car $F(Z \leq -\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{n}) = 0 \ \forall n$

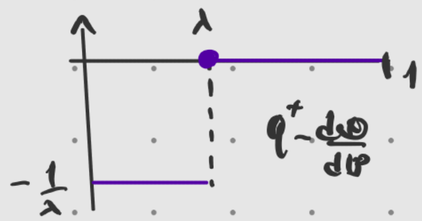
Donc $-q^{+}_{-\frac{dQ}{dP}} \leq \frac{1}{\lambda} \to$ inégalité

Égalité si $-q^{+}_{-\frac{dQ}{dP}}(u) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda} & \text{pour } u < \lambda \to \\ 0, & u > \lambda \end{cases}$

$\frac{dQ}{dP} = \frac{1}{\lambda} \mathbb{1}_{u<\lambda}$

$\mathbb{E}\left[\frac{dQ}{dP}\right] = 1$




## 2019-2020

$\rho_1, \rho_2$ mesures de risque monétaires t.q. $\inf_{Z \in \mathcal{X}} \{\rho_1(-Z) + \rho_2(Z)\} > -\infty$

Inf-convolution $\rho_1 \square \rho_2(X) = \inf_{Z \in \mathcal{X}} \{\rho_1(X-Z) + \rho_2(Z)\}$

**(1)** M.q. $\rho_1 \square \rho_2(X) > -\infty$ pour $X \in \mathcal{X}$ puis que $\rho_1 \square \rho_2$ est une mesure de risque monétaire. Vérifier que $\rho_1 \square \rho_2 = \rho_2 \square \rho_1$

$\rho_1$ est $\|\cdot\|_\infty$-1-Lip $\rightarrow$ $\rho_1(-Z) - \rho_1(X-Z) \leq \|X\|_\infty \rightarrow \rho_1(X-Z) \geq \rho_1(-Z) - \|X\|_\infty$

$$\rightarrow \rho_1 \square \rho_2(X) \geq \overbrace{\inf_{Z \in \mathcal{X}} \{\rho_1(-Z) + \rho_2(Z)\}}^{>-\infty} - \overbrace{\|X\|_\infty}^{\infty} > -\infty$$

Montononie + cash invariance grâce à cette pptés de $\rho(\cdot - Z)$

$$\inf_{Z \in \mathcal{X}} \{\rho_1(\underbrace{X-Z}_{Y \in \mathcal{X}}) + \rho_2(Z)\} = \inf_{Y \in \mathcal{X}} \{\rho_1(Y) + \rho_2(Y-X)\} = \rho_2 \square \rho_1(X)$$

**(2)** $\rho_1, \rho_2$ est convexe si $\rho_1$ et $\rho_2$ sont convexes

$$\rho_1 \square \rho_2(\lambda X + (1-\lambda)Y) = \inf_Z \{\rho_1(\lambda X + (1-\lambda)Y - Z) + \rho_2(Z)\} \leq$$

$$\overset{?}{\leq} \lambda \inf_Z \{\rho_1(X-Z) + \rho_2(Z)\} + (1-\lambda) \inf_Z \{\rho_2(Y-Z) + \rho_2(Z)\}$$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists Z', Z''$:

$$\lambda(\rho_1(X-Z') + \rho_2(Z')) \leq \inf\{\dots\} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$$+ \quad (1-\lambda)(\rho_1(Y-Z'') + \rho_2(Z'')) \leq \inf\{\dots\} + \frac{\varepsilon}{2}$$

$\lambda\, \rho_1 \square \rho_2(X)$ $\quad (1-\lambda)\, \rho_1 \square \rho_2(Y)$

$$\inf\{\dots\} + \inf\{\dots\} + \varepsilon \geq (\lambda \rho_1(X-Z') + (1-\lambda)\rho_1(Y-Z'')) + (\lambda \rho_2(Z') + (1-\lambda)\rho_2(Z'')) \geq$$

Jensen

$$\geq \rho_1(\lambda X + (1-\lambda)Y - \underbrace{(\lambda Z' + (1-\lambda)Z'')}_{\tilde{Z}}) + \rho_2(\underbrace{\lambda Z' + (1-\lambda)Z''}_{\tilde{Z}}) \geq \rho_1 \square \rho_2(\lambda X + (1-\lambda)Y)$$

**(3)** $Y \in L^1(\mathbb{P})$ $\quad (\rho_1 \square \rho_2)^*(Y) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \{\mathbb{E}[XY] - \rho_1 \square \rho_2(X)\} =$

$$= \sup_{X \in \mathcal{X}} \{\mathbb{E}[XY] - \inf_Z \{\rho_1(X-Z) + \rho_2(Z)\}\} = \sup_{X, Z} \{\mathbb{E}[(\underbrace{X-Z}_{W})Y] + \mathbb{E}[ZY] - \rho_1(X-Z)$$

$$-\rho_2(Z)\} = \sup_{W,Z}\{\mathbb{E}[WY]-\rho_1(W)+\mathbb{E}[ZY]-\rho_2(Z)\} = \rho_1^*(Y)+\rho_2^*(Y)$$

(4) Entropie: $Ent_s(X) = \frac{1}{s}\log(\mathbb{E}[e^{-sX}])$, $X\in\mathcal{X}$

M.q. $Ent_s(X)$ est monétaire, convexe, $\underbrace{\text{invariante en loi}}$ :

$\mathbb{E}[e^{-sX}]$ - transformée de Laplace qui caractérise la loi

$\to$ s.c.i pour la topologie faible *

- $X\le Y \to \mathbb{E}[e^{-sX}] \ge \mathbb{E}[e^{-sY}]$

$$\downarrow$$

$$Ent_s(X)\ge Ent_s(Y)$$

- $\frac{1}{s}\log(\mathbb{E}\,e^{-s(X+c)}) = \frac{1}{s}\log(e^{-sc}\,\mathbb{E}\,e^{-sX}) = -c+Ent_s(X)$

- Convexité: $Ent_s(\lambda X+(1-\lambda)Y) = \frac{1}{s}\log(\mathbb{E}[e^{-s\lambda X}\cdot e^{-s(1-\lambda)Y}]) \le$

$\le \left\{ \int fg\,dx \le \left(\int f^p dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int g^q dx\right)^{1/q}\right.$, Hölder avec $p=\frac{1}{\lambda}$, $q=\frac{1}{1-\lambda}$ $\} \le$

$$\le \frac{1}{s}\log\mathbb{E}[e^{-sX}]^{\lambda}+\frac{1}{s}\log\mathbb{E}[e^{-sY}]^{1-\lambda} = \lambda Ent_s(X)+(1-\lambda)Ent_s(Y)$$

(5) $Ent_s(X) = \sup_{\mathbb{Q}\in\mathcal{M}_1(\mathbb{P})}\{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X]-\alpha_s(\mathbb{Q})\}$. $\alpha_s \Leftrightarrow Ent_s^*$

grâce à s.c.i. pour la top. faible *.

$$\alpha_s(\mathbb{Q}) = \sup_{X\in\mathcal{X}}\{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-X]-Ent_s(X)\} = \sup_{X\in\mathcal{A}_s}\{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-X]\}$$

$\subset L^1$

$$= \sup_{X\in\mathcal{X}}\{\mathbb{E}\left[X\cdot\left(-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right]-Ent_s(X)\} = Ent_s^*\left(-\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)$$

$$Ent_s^*(Y) = \begin{cases} +\infty & \text{si } Y\notin\{Y\in L^1 : Y\le 0,\ \mathbb{E}Y=-1\} \\ \alpha_s(\mathbb{Q}) & \text{sinon où } \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}=-Y \end{cases}$$

(6) On admet que $\alpha_s(\mathbb{Q}) = \frac{1}{s}H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \frac{1}{s}\mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\log\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right]$

M.q. pour $s,t>0$ $\left(\mathrm{Ent}_s \,\square\, \mathrm{Ent}_t\right)^{**} = \mathrm{Ent}_{\frac{st}{s+t}}$

$$\left(\mathrm{Ent}_s \,\square\, \mathrm{Ent}_t\right)^{*} = \mathrm{Ent}_s^{*} + \mathrm{Ent}_t^{*}$$

$$\left(\mathrm{Ent}_s \,\square\, \mathrm{Ent}_t\right)^{**} = \sup_{\substack{Y \in L^1 \\ Y \leq 0 \ \mathbb{E} Y = -1}} \left\{ \mathbb{E}[XY] - \mathrm{Ent}_s^{*}(Y) - \mathrm{Ent}_t^{*}(Y) \right\} =$$

$$= \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \left\{ \mathbb{E}\left[-X \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right] \underbrace{- \alpha_s(\mathbb{Q}) - \alpha_t(\mathbb{Q})}_{-\frac{t+s}{st} H(\mathbb{Q} \| \mathbb{P})} \right\} = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \left\{ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[-X] - \alpha_{\frac{st}{s+t}}(\mathbb{Q}) \right\} \overset{(S)}{=} \mathrm{Ent}_{\frac{st}{t+s}}$$

**(7)** Trouver $\lambda \in [0,1]$ t.q. $\mathrm{Ent}_s(\lambda X) + \mathrm{Ent}_t((1-\lambda)X) = \mathrm{Ent}_{\frac{st}{s+t}}$.
En déduire la valeur de $\mathrm{Ent}_s \,\square\, \mathrm{Ent}_t$ et déterminer la séparation optimale.

$$\mathrm{Ent}_s(\lambda X) + \mathrm{Ent}_t((1-\lambda)X) = \frac{1}{s} \log\left(\mathbb{E} e^{-s\lambda X}\right) + \frac{1}{t} \log\left(\mathbb{E} e^{-t(1-\lambda)X}\right) =$$

$$= \log\left( \mathbb{E}\left[e^{-\lambda s X}\right]^{1/s} \mathbb{E}\left[e^{-(1-\lambda)tX}\right]^{1/t} \right) =$$

$$= \frac{t+s}{st} \log\left( \mathbb{E}\left[e^{-\lambda s X}\right]^{\frac{t}{t+s}} \mathbb{E}\left[e^{-(1-\lambda)tX}\right]^{\frac{s}{t+s}} \right) = \frac{t+s}{st} \log\left( \mathbb{E}\, e^{-\frac{st}{t+s} X} \right) = \mathrm{Ent}_{\frac{st}{t+s}}(X)$$

On choisit $\lambda$ t.q. $\lambda s = (1-\lambda) t \rightarrow \lambda = \frac{t}{s+t}$

On sait que $\mathrm{Ent}_t \,\square\, \mathrm{Ent}_s \geq \left(\mathrm{Ent}_t \,\square\, \mathrm{Ent}_s\right)^{**} = \mathrm{Ent}_{\frac{st}{s+t}}(X) = \mathrm{Ent}_s\left(\frac{t}{s+t} X\right) + \mathrm{Ent}_t\left(\frac{s}{t+s} X\right)$

$$\mathrm{Ent}_t \,\square\, \mathrm{Ent}_s = \inf_Z \left\{ \mathrm{Ent}_s(X-Z) + \mathrm{Ent}_t(Z) \right\} \rightarrow Z^* = \frac{s}{t+s} X \rightsquigarrow \mathrm{Ent}_t$$

$$X - Z^* = \frac{t}{t+s} X \rightsquigarrow \mathrm{Ent}_s$$