Modèles Aléatoires Discrets
Memento

Définition d'un processus de Poisson :

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ tq $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et S_n le processus de renouvellement défini par :

$$\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = S_{n-1} + X_n \end{cases}$$

On appelle processus de Poisson homogène d'intensité $\mathbb{E}[R_t] = \lambda t$ le processus de comptage associé à S_n :

$$R_t = \text{Card}\{n \geq 1, S_n \leq t\} = \sum_{n \geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}}$$

Théorème d'arrêt de Doob :

Soit M une $(\mathcal{F})$-martingale continue et σ et τ deux temps d'arrêt tq $\sigma \leq \tau$ p.s
Supposons que :

* M est uniformément intégrable

<u>ou</u>

* Les temps d'arrêt σ et τ sont p.s bornés par une cte finie K

Alors, M_τ est une variable aléatoire intégrable et

$$\mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma.$$

Définition d'un temps d'arrêt

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé filtré.
Un temps d'arrêt relativement à la filtration $\{\mathcal{F}_t\}_{t \geq 0}$ est une va τ à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup \{+\infty\}$ tq :

$$\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \quad \forall t \in \mathbb{R}^+$$