Théorie de la crédibilité

Chapitre 5 : Les systèmes bonus malus

I - Introduction

SBM ⟷ Syst. Bonus - Malus

SBM sert à faire infléchir les comportements en comptant le nombre de sinistres.
On a d'autres exemples de SBM pour produire cet effet :
- franchise déductible (partie de sinistre non payée)
- franchise pour les AT (aussi déductible)

Quelle est la vertue d'une franchise ? (Transfert de risque imparfait)
→ Pour l'assuré, TCEEPA sa prime sera minorée.

→ Pour l'assureur :
- ⊕ Partage du risque
- ⊕ Gain de temps et d'argent car les sinistres de montant inférieur à la franchise ne sont pas déclarés
  ⇒ économie sur la gestion de sinistre (qui peut être de montant supérieur à l'indemnisation).
- ⊖ Création d'une troncature à gauche dans les données de l'assurance.

Quelle est la $\neq^{ce}$ entre une troncature et une censure ?

→ Troncature : on ne connait pas la quantité d'information non observée.
→ Censure : l'information existe mais n'est pas observée / retenue.

Donc l'assureur ne sait pas quelle quantité de sinistre il y avait avant le montant de franchise.

SBM : déclaration de sinistre ⇒ augmentation de la prime l'année d'après.

Il existe un aspect de diffusion : on aura payé une prime + chère même si l'année d'après, on n'aura pas d'accident.

Quelles conditions pour avoir un SBM efficace ?
Il faut qu'il soit accessible : compris par tous les assurés (en auto : les conducteurs).
Mais cette accessibilité conduit à des contraintes de présentations et formes.
- * en FRANCE, coefficients majorant et minorant
- * SBM à classes

  1 → s   à une classe i, on aura un coeff de majoration i.
  il faut comprendre comment passer d'une étape à l'autre

Il faut qu'il y ait un suivi de l'assuré.

Quelles sont les alternatives d'un SBM ?

* Prise de conscience dans les comportements (générat° de sinistres et responsabilisat°)
* Justesse :

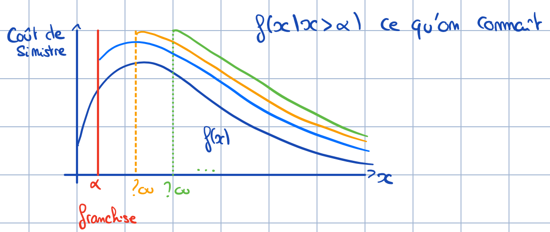
  ① une prime adaptée/équilibrée p/r à la sinistralité déclarée.
  ② Il ne faut pas d'effet démesuré et injustifiable.
  ③ Il faut bien représenter la sinistralité observée qui illustre le profil de risque des assurés.

Conséquence sur les années différentes de la franchise :

La soif de bonus : les assurés ne vont pas déclarer le sinistre pour ne pas toucher de malus.

Exemple : un petit accrochage en sortant d'un parking.

On arrive encore à une troncature.



l'assuré peut déclarer un sinistre n'importe où et quand.

La problématique de réduire la franchise devient + compliquée car on ne travaille qu'avec des bases de données incomplètes et incomplètes d'une qtt inconnue (il manque 5% ou 30% de sinistres ?) (on a que les sinistres déclarés).

Différents types de SBM

1) EN FRANCE

Le système français est dans le Code des Assurances.

On appelle le coeff de réduct° majorat° ρ (CRM)

* 1 année sans sinistre responsable $\rho_{n+1} \leftarrow 0.95\rho_n$
* Chaque sinistre responsable $\Rightarrow$ +25%
* $\rho \in [0.5 ; 3.5]$
* Clause de retour rapide : si $\rho > 1$ après 2 années sans sinistre, on repasse à $\rho_{n+2} = 1$
* Clause de protect° du bon conducteur : si $\rho = 0.5$ depuis 3 ans, pas de malus pour le prochain sinistre responsable.

ρ moyen d'un français ? $\rho_{moyen} = 0.6$

fréq. de sinistres entre 5 et 6% pour RC auto

+40% des gens sont à 0.5

Au final, tout le monde est à peu près au même coeff.

Ce genre de contrats de masse (auto, MRH, ...) ont beaucoup de modularités, notamment pour le montant de la franchise.

Une franchise + haute $\Rightarrow$ sinistralité moindre.

2) BRESILIEN : un système à classes très simple

degrés	p	nb de sinistres :	0	1	2	...
7	100		6	7	7	
6	90		5	7	7	
5	85		4	6	7	
4	80		3	5	6	
3	75		2	4	5	
2	70		1	3	4	
1	65		1	2	3	

On appelle ça un système +1/-1 où le nb de sinistres nous fait monter ou descendre de classe.
Le syst. français peut se traduire comme un syst. à classes (il faudrait 1400 ou 1600 classes).

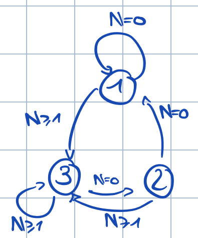
II - SBM à classes

degrés	p
s	p_s
$\vert$	$\vert$
ℓ	p_ℓ
$\vert$	$\vert$
1	p_1

- $\exists$ classe de départ
- Règles qui fixent le passage d'un degré à l'autre de l'échelle

SBM-1 / Top à 3 degrés

degrés	0	1 ou +
3	2	3
2	1	3
1	1	3



Modélisation du parcours d'un assuré dans l'échelle bonus-malus.

Soit un assuré de profil de risque θ

$L = (L_k)_{k\in\mathbb{N}}$, le processus qui désigne le degré occupé dans l'échelle par l'assuré.

<u>Hyp. de stabilité:</u> θ est constant sur la période considérée

$$P[L_{k+1} = \ell_2 \mid L_k = \ell_1, \Theta = \theta] = \underbrace{p_\theta(\ell_1,\ell_2)}_{\text{ne dépend pas de } k!} \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Par définition de p_θ, $\forall (\ell_1,\ell_2) \in \{1,\dots,s\}^2$, $p_\theta(\ell_1,\ell_2) \in [0,1]$, $\sum_{\ell=1}^{s} p_\theta(\ell_1,\ell) = 1$

aussi la matrice

$$P_\theta = \begin{pmatrix} p_\theta(1,1) & \cdots & p_\theta(1,s) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_\theta(s,1) & \cdots & p_\theta(s,s) \end{pmatrix}$$

est la matrice de transition de la chaîne de Markov qui décrit le parcours de l'assuré de profil de risque θ.

Notons $p_\theta^{(k)}(\ell_0)$ le vecteur de probabilité dont la ℓ-ème composante est la probabilité de passer du degré ℓ_0 au degré ℓ en k-périodes pour un assuré de profil de risque θ.

$$p_\theta^{(0)}(\ell_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow \ell_0\text{-ème posit}^\circ$$

On a:

$$p_\theta^{(k)}(\ell_0)' = p_\theta^{(k-1)}(\ell_0)' P_\theta$$
$$p_\theta^{(k)}(\ell_0)' = p_\theta^{(0)}(\ell_0)' P_\theta^k$$

En pratique, tous les SBM à classes ont :
- un nombre fini d'états
- un état, de bonus maximal, qui une fois atteint n'est quitté qu'en cas de sinistres.

$\Rightarrow$ la matrice de passage $\mathbb{P}_\theta$ est régulière

i.e $\exists \xi_0, \mathbb{P}_\theta^{\xi_0} > 0$

Donc la chaîne de Markov associée est ergodique. Il est possible à partir de n'importe quel état d'atteindre n'importe quel état dans un temps fini.

De plus, une telle échelle admet toujours une distribution stationnaire π_θ tq

$$\begin{cases} \pi_\theta' = \pi_\theta' \mathbb{P}_\theta \\ \pi_\theta' e = 1 \end{cases} \qquad \text{où } e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Propriété :

Si $\mathbb{P}_\theta$ est régulière, de DF, l'unique distribution stationnaire est donnée par :

$$\pi_\theta' = e'[I - \mathbb{P}_\theta - \mathbb{E}]^{-1}$$

$$\text{où } I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{s,s} \quad \text{et } \mathbb{E} = (1)_{s \times s}$$

Définition :

L'échelle bonus-malus est équilibrée si $\pi_\theta p = 1$.

Illustration échelle -1/top à 3 classes

audio $\rightarrow$

Soit un assuré de profil de risque θ.

Hyp : $N \sim \mathcal{P}(\theta)$

$\mathbb{P}_\theta$?

$$\mathbb{P}_\theta = \begin{pmatrix} e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ 0 & e^{-\theta} & 1-e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}(N=0 \mid \Theta=\theta) = e^{-\theta}$

$\mathbb{P}(N=1 \mid \Theta=\theta) = \theta e^{-\theta}$

$\mathbb{P}(N \geq 1 \mid \Theta=\theta) = 1 - e^{-\theta}$

$\mathbb{P}[L_2 = 1 \mid L_1 = 1, \Theta=\theta] = \mathbb{P}[N=0 \mid \Theta=\theta] = e^{-\theta}$

$\mathbb{P}[L_2 = 2 \mid L_1 = 1, \Theta=\theta] = 0$

π_θ tq $\pi_\theta' = \pi_\theta' \mathbb{P}_\theta$?

$$(0 \;\; 0 \;\; 1)\mathbb{P}_\theta = (0 \;\; e^{-\theta} \;\; 1-e^{-\theta})$$

$$(0 \;\; e^{-\theta} \;\; 1-e^{-\theta})\mathbb{P}_\theta = (e^{-2\theta} \;\; (1-e^{-\theta})e^{-\theta} \;\; 1-e^{-\theta})$$

$$\underbrace{(e^{-2\theta} \;\; (1-e^{-\theta})e^{-\theta} \;\; 1-e^{-\theta})}_{\pi_\theta'}\underbrace{\mathbb{P}_\theta}_{\mathbb{P}_\theta} = \underbrace{(e^{-2\theta} \;\; (1-e^{-\theta})e^{-\theta} \;\; 1-e^{-\theta})}_{\pi_\theta'}$$

$$\Rightarrow \pi_\theta = \begin{pmatrix} e^{-2\theta} \\ e^{-\theta}(1-e^{-\theta}) \\ 1-e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{P}_\theta^2 = \begin{pmatrix} e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ e^{-\theta} & 0 & 1-e^{-\theta} \\ 0 & e^{-\theta} & 1-e^{-\theta} \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} e^{-2\theta} & e^{-\theta}(1-e^{-\theta}) & 1-e^{-\theta} \\ e^{-2\theta} & e^{-\theta}(1-e^{-\theta}) & 1-e^{-\theta} \\ e^{-2\theta} & e^{-\theta}(1-e^{-\theta}) & 1-e^{-\theta} \end{pmatrix}$$

Quelque soit l'état de départ, la distribution stationnaire est atteinte au bout de 2 itérations.

L'échelle BM est équilibrée si :

$$\begin{cases} 0\le \rho_1\le\rho_2\le\rho_3 \\ \rho_1 e^{-2\theta}+\rho_2 e^{-\theta}(1-e^{-\theta})+\rho_3(1-e^{-\theta})=1 \end{cases}$$

Illustrations

$N\sim\mathcal{P}(\lambda\Theta)$ où $\Theta=\begin{cases}\theta_1 & p\\ \theta_2 & 1-p\end{cases}$ $\quad \theta_1<\theta_2$ $\quad$ déjà donné en exam

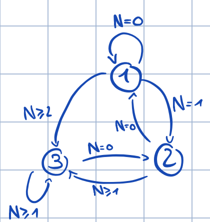
SBM +1/-1 à 3 états

degré	0	1	2 ou +
3	2	3	3
2	1	3	3
1	1	2	3

Pour un assuré de p.d.r θ, quelle est la matrice de transition $\mathbb{P}_\theta$? $\quad$ p.d.r $\Leftrightarrow$ profil de risque

$\mathbb{P}[L_2=1\mid L_1=1,\Theta=\theta]=$?

$\forall (i,j)\in\{1,\dots,3\}^2$, $\mathbb{P}(L_2=j\mid L_1=i,\Theta=\theta)=$?



$\mathbb{P}(N=0\mid\Theta=\theta)=e^{-\lambda\theta}$

$\mathbb{P}(N=1\mid\Theta=\theta)=\lambda\theta e^{-\lambda\theta}$

$\mathbb{P}(N\geq 1\mid\Theta=\theta)=1-e^{-\lambda\theta}$

$\mathbb{P}(N\geq 2\mid\Theta=\theta)=1-\mathbb{P}(N<1\mid\Theta=\theta)$
$=1-e^{-\lambda\theta}-\lambda\theta e^{-\lambda\theta}$

$$\mathbb{P}_\theta=\begin{pmatrix} e^{-\lambda\theta} & \lambda\theta e^{-\lambda\theta} & 1-(1+\lambda\theta)e^{-\lambda\theta}\\ e^{-\lambda\theta} & 0 & 1-e^{-\lambda\theta}\\ 0 & e^{-\lambda\theta} & 1-e^{-\lambda\theta}\end{pmatrix}$$

$\mathbb{P}(L=\ell)=\mathbb{P}(L=\ell\mid\Theta=\theta_1)\,\omega+\mathbb{P}(L=\ell\mid\Theta=\theta_2)(1-\omega)$

$\pi=\omega\pi_{\theta_1}+(1-\omega)\pi_{\theta_2}$

$\rightarrow$ Si on connaît les p.d.r on demanderait $\widehat{\mu(\theta_1)}=\lambda\theta_1$ et $\widehat{\mu(\theta_2)}=\lambda\theta_2$ $\quad$ or ici on a ω θ_1 et $1-\omega$ θ_2.

Détermination de CRM

$N\sim\mathcal{P}(\lambda\Theta)$ où $\mathbb{E}[\Theta]=1$

1) Méthode de Norberg

Echelle bonus-malus à s degrés.

$$\rho^*=\underset{\rho}{\arg\min}\ \mathbb{E}[(\Theta-\rho_L)^2]$$

où ρ_ℓ est le CRM (Coeff Réduct° Majorat°) associé au degré (aléatoire) L.

$$Q = \mathbb{E}[(\Theta-\rho_L)^2]$$
$$= \sum_{\ell=1}^{s} \mathbb{E}[(\Theta-\rho_\ell)^2 | L=\ell] \underbrace{\mathbb{P}(L=\ell)}_{\pi_\ell}$$
$$= \sum_{\ell=1}^{s} \int_{\Theta} (\theta-\rho_\ell)^2 u(\theta|L=\ell) d\theta \, \mathbb{P}(L=\ell)$$

où $u(\theta|L=\ell) = u(\theta) \dfrac{\mathbb{P}(L=\ell|\Theta=\theta)}{\mathbb{P}(L=\ell)}$

$$= \sum_{\ell=1}^{s} \int_{\Theta} (\theta-\rho_\ell)^2 u(\theta) \underbrace{\mathbb{P}(L=\ell|\Theta=\theta)}_{\pi_{\ell(\theta)}} d\theta$$

$$\Rightarrow \forall \ell \in \{1,\dots,s\}, \frac{\partial Q}{\partial \rho_\ell} = 0 \iff \int_{\Theta} -2(\theta-\rho_\ell) u(\theta) \mathbb{P}(L=\ell|\Theta=\theta) \, d\theta = 0$$

$$\iff \rho_\ell = \frac{\int_{\Theta} \theta u(\theta) \mathbb{P}(L=\ell|\Theta=\theta) d\theta}{\int_{\Theta} u(\theta) \mathbb{P}(L=\ell|\Theta=\theta) d\theta}$$

$$\Rightarrow \rho_\ell = \mathbb{E}[\Theta | L=\ell]$$

On vient de calculer la moyenne des fréquences de sinistre de tous les gens de la classe ℓ.

Lorsque les CRM sont déterminés avec la méthode de Norberg, on a :

$$\mathbb{E}[\rho_L] = \sum_{\ell=1}^{s} \rho_\ell \mathbb{P}(L=\ell)$$
$$= \sum_{\ell=1}^{s} \mathbb{E}[\Theta | L=\ell] \mathbb{P}(L=\ell)$$
$$= \mathbb{E}[\Theta] = 1.$$

Propriété d'équilibre financier.

$$\lambda = \sum_{\ell=1}^{s} \pi_\ell \lambda \rho_\ell$$

2) Méthode de Gilde et Sundt

$$\rho_\ell = \alpha + \beta \ell \quad \ell = 1, \dots, s$$

$$(\alpha^*, \beta^*) = \underset{(\alpha,\beta)}{\operatorname{argmin}} \, \mathbb{E}[(\Theta - \alpha - \beta L)^2]$$

$$\alpha^* = \lambda - \frac{\lambda \operatorname{Cov}(L,\Theta)}{\operatorname{Var}(L)} \mathbb{E}[L]$$
$$\beta^* = \lambda - \frac{\operatorname{Cov}(L,\Theta)}{\operatorname{Var}(L)}$$

$$\rho_\ell = 1 + \frac{\operatorname{Cov}(L,\Theta)}{\operatorname{Var}(L)} [\ell - \mathbb{E}[L]]$$

Propriété d'équilibre financier.

$$\mathbb{E}[\rho_L] = 1 + \frac{\operatorname{Cov}(L,\Theta)}{\operatorname{Var}(L)} \underbrace{\mathbb{E}[L - \mathbb{E}[L]]}_{=0}$$
$$= 1$$

III - Echelle en univers segmenté

$\{N \mid \Theta = \theta\} \sim \mathcal{P}(\lambda\theta)$ $\longrightarrow$ on se plaçait jusqu'à maintenant dans le cas où $\mathbb{E}[\Theta] = 1$ donc $\mathbb{E}[N] = \lambda$

Introduction illustrative

$$\Lambda = \begin{cases} \lambda_u & \text{de proportion } \omega \\ \lambda_r & \text{— } 1-\omega \end{cases}$$

fréq. de sinistre zone urbaine / zone rurale.

$\mathbb{E}[\Theta] = 1.$

donc $N \sim \mathcal{P}(\Lambda\Theta)$

hyp $\Theta \perp \Lambda$

p.d.r d'un assuré ↳ informat° sur la fréq. de sinistre

⚠ Objectif du cours : déterminer le crédit que l'on donne aux observations que l'on a pour répondre à la question : comment je peux mieux connaître les risques individuels ?

$\longrightarrow$ dans ce modèle :

pas la m̂ nature.
- * Θ, comme dans tout le cours, on ne pourra jamais l'observer
- * Mais Λ on le connait d'office au moment de la tarificat°

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[N] &= \mathbb{E}[\mathbb{V}[N \mid \Theta]] + \mathbb{V}[\mathbb{E}[N \mid \Theta]] \\ &= \mathbb{E}[\Lambda\Theta] + \mathbb{V}[\Lambda\Theta] \\ &\overset{\text{car } \perp\!\!\!\perp}{=} \lambda \underbrace{\mathbb{E}[\Theta]}_{=1} + \mathbb{V}[\underbrace{\mathbb{E}[\Lambda\Theta \mid \Theta]}_{\Theta \underbrace{\mathbb{E}[\Lambda]}_{=\lambda}}] + \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{V}[\Lambda\Theta \mid \Theta]}_{\Theta^2 \mathbb{V}[\Lambda]}] \\ &= \lambda + \lambda^2 \mathbb{V}[\Theta] + \mathbb{V}[\Lambda] \underbrace{\mathbb{E}[\Theta^2]}_{= \mathbb{V}[\Theta] + \underbrace{\mathbb{E}[\Theta]}_{=1}^2} \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \mathbb{V}[N] = \lambda + \lambda^2 \mathbb{V}[\Theta] + \mathbb{V}[\Lambda](1 + \mathbb{V}[\Theta])$$

1er cas : pas de segmentation

$\longrightarrow \mathbb{V}[N] = \lambda + \lambda^2 \mathbb{V}[\Theta]$ car $\mathbb{V}[\Lambda] = 0$ dans ce cas $\Lambda = \{\lambda\}$

pas les m̂ λ mais m̂ N

2ème cas : $\Lambda = \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda & \mathbb{P} = 1/2 \\ \frac{3}{2}\lambda & \mathbb{P} = 1/2 \end{cases}$

$\mathbb{E}[\Lambda] = \lambda$

$\mathbb{V}[\Lambda] = \lambda^2 \left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{9}{4}\right) - 1\right] = \frac{\lambda^2}{4}$

$\mathbb{V}[N] = \lambda + \lambda^2 \mathbb{V}[\Theta] + \frac{\lambda^2}{4}(1 + \mathbb{V}[\Theta])$

+ on segmente + $\mathbb{V}[\Lambda] \nearrow$ et $\mathbb{V}[\Theta] \searrow$

Méthode de Norberg

$$\mathbb{P}(L = \ell) = \sum_k \omega_k \int_{\theta \geq 0} \pi_\ell(\lambda_k \theta)\, u(\theta)\, d\theta$$

$N \sim \mathcal{P}(\Lambda\Theta)$

avec $\Lambda \perp\!\!\!\perp \Theta$

$\mathbb{E}[\Theta] = 1$

$\Lambda = \{(\lambda_k)$ ω_k $\quad \sum_k \omega_k = 1$, $\quad \sum_k \omega_k \lambda_k = \lambda\theta$

$$\rho^* = \underset{\rho}{\arg\min}\ \mathbb{E}[(\rho_L - \Theta)^2]$$

$$Q = \mathbb{E}[(\rho_L - \Theta)^2]$$
$$= \sum_{\ell=1}^{s} \mathbb{E}[(\Theta - \rho_\ell)^2 \mid L = \ell]\,\mathbb{P}(L = \ell)$$
$$= \sum_{\ell=1}^{s} \int_{\Theta} (\theta - \rho_\ell)^2 \underbrace{u(\theta \mid L = \ell)\,\mathbb{P}(L = \ell)}_{\substack{= u(\theta)\mathbb{P}(L = \ell \mid \Theta = \theta) \\ \text{BAYES}}} d\theta$$
$$= \sum_k w_k \int_{\Theta} \sum_{\ell=1}^{s} (\theta - \rho_\ell)^2 \pi_\ell(\lambda_k \theta)\, u(\theta)\, d\theta.$$

$$\longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial \rho_\ell} = 0 \iff \sum_k w_k \int_{\Theta} (\theta - \rho_\ell)\, \pi_\ell(\lambda_k \theta)\, u(\theta)\, d\theta = 0$$

$$\iff \rho_\ell = \frac{\sum_k w_k \int \theta\, \pi_\ell(\lambda_k \theta) u(\theta)\, d\theta}{\sum_k w_k \int \pi_\ell(\lambda_k \theta) u(\theta)\, d\theta}$$
$$= \mathbb{E}[\Theta \mid L = \ell]$$
$$\implies \mathbb{E}[\rho_L] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[\Theta \mid L = \ell]] = \mathbb{E}[\Theta] = 1.$$

audio 3:43

IV - Mesures de performance d'un SBM.

1) Prime moyenne relative à l'état stationnaire.

Relative Stationary Average Premium (RSAP)

$$RSAP = \frac{\pi' \rho - \rho_1}{\rho_s - \rho_1}$$

$\pi_\ell = \mathbb{P}(L = \ell)$

$\pi = \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \vdots \\ \pi_s \end{pmatrix} \quad \rho = \begin{pmatrix} \rho_1 \\ \vdots \\ \rho_s \end{pmatrix}$

2) Mesure d'efficacité

Soit un assuré de p.d.r θ

$\hookrightarrow \pi(\theta) \quad b(\theta) = \pi(\theta)\rho \quad \leftarrow$ prime de risque pour un assuré de p.d.r θ.

$$\mathrm{Eff} = \frac{\frac{db(\theta)}{b(\theta)}}{\frac{d\theta}{\theta}} = \frac{d \ln(b(\theta))}{d \ln(\theta)}$$

idéalement on aimerait que Eff vaille 1 pour que la prime varie linéairement avec θ.

aussi: Élasticité.