Done

M2 "Probabilités et Finance" Sorbonne Université *Année 2022 – 2023*
"Introduction aux processus de diffusion" (L.Zambotti)

Exercice 1 (i) Soit (M_t) une martingale continue et positive, telle que $M_t \to 0$, p.s. ($t \to \infty$). Montrer que pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} M_t \geq x \,|\, \mathscr{F}_0) = 1 \wedge \frac{M_0}{x}$, p.s.

(ii) Soit B un mouvement brownien. Calculer la loi de $\sup_{t\geq 0}(B_t - t)$.

(ii) Soit B un mouvement brownien issu de $x > 0$. Calculer la loi de $\sup_{t\leq \tau_0} B_t$, où $\tau_0 := \inf\{t > 0 : B_t = 0\}$.

Dans les exercices suivants, B est un $(\mathscr{F}_t)$-mouvement brownien.

Exercice 2 Soient $\sigma \leq \tau$ deux temps d'arrêt bornés. Montrer que $\mathbb{E}[(B_\tau - B_\sigma)^2] = \mathbb{E}(B_\tau^2) - \mathbb{E}(B_\sigma^2) = \mathbb{E}(\tau - \sigma)$.

Exercice 3 Soient $a > 0$ et $b > 0$.

(i) Soit $\tau_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : B_t = -a \text{ ou } B_t = b\} = \tau_{-a} \wedge \tau_b$. En étudiant $M_t := \mathrm{sh}(\theta(B_t + a))\exp(-\frac{\theta^2}{2}t)$, montrer que

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-\lambda\tau_{a,b}}\right] = \frac{\mathrm{ch}(\frac{a-b}{2}\sqrt{2\lambda}\,)}{\mathrm{ch}(\frac{a+b}{2}\sqrt{2\lambda}\,)}, \qquad \lambda \geq 0.$$

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(\tau_b < \tau_{-a}) = \frac{a}{a+b}$ et que $\mathbb{P}(\tau_b > \tau_{-a}) = \frac{b}{a+b}$.

(iii) Quelle est la loi de $\sup_{0\leq t\leq \tau_{-1}} B_t$?

Exercice 4 Soient $\gamma \neq 0$, $a > 0$ et $b > 0$ trois réels. Posons $\tau_x := \inf\{t > 0 : B_t + \gamma t = x\}$, $x = -a$ ou b. Calculer $\mathbb{P}(\tau_{-a} > \tau_b)$.

Indication : on pourra considérer la martingale $\exp\{-2\gamma(B_t + \gamma t)\}$.

Exercice 5 Dans cet exercice $(\mathscr{F}_t)$ est une filtration et τ, σ sont des $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt. On rappelle les définitions

$$\mathscr{F}_\tau := \{A \in \mathscr{F}_\infty : \forall t \geq 0,\, A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t\}$$

$$\mathscr{F}_{\tau+} := \{A \in \mathscr{F}_\infty : \forall t \geq 0,\, A \cap \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t\}$$

(i) Si $\sigma \leq \tau$ alors $\mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_\tau$.

(ii) $\sigma \wedge \tau$ et $\sigma \vee \tau$ sont des temps d'arrêt, et on a $\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau$. En plus, $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$ et $\{\sigma = \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$ (et donc $\{\sigma < \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$).

(iii) Si σ et τ sont des temps d'arrêt, alors $\sigma + \tau$ est un temps d'arrêt.

(iv) Si (τ_n) est une suite croissante de temps d'arrêt, alors $\tau := \lim_n \uparrow \tau_n$ est aussi un temps d'arrêt, et

$$\mathscr{F}_{\tau-} = \bigvee_n \mathscr{F}_{\tau_n-}.$$

(iv) Si (τ_n) est une suite décroissante de temps d'arrêt, alors $\tau := \lim_n \downarrow \tau_n$ est un $(\mathscr{F}_{t+})$-temps d'arrêt, et

$$\mathscr{F}_{\tau+} = \bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n+}.$$

(v) Si $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est une suite de temps d'arrêt, alors $\sup_{n\geq 1} \tau_n$ est un temps d'arrêt.

(vi) Si $\mathscr{G}_t := \mathscr{F}_{t+}$ alors $\mathscr{G}_\tau = \mathscr{F}_{\tau+}$.

Exercice 6 Soit $M = (M_t,\ t \geq 0)$ une sous-martingale. Soit $(\mathscr{G}_t)$ une sous-filtration [1] de $(\mathscr{F}_t)$. Montrer que [2] $N_t := \mathbb{E}(M_t \,|\, \mathscr{G}_t)$, $t \geq 0$, est une $(\mathscr{G}_t)$-sous-martingale.

Exercice 7 Soit $M = (M_t,\ t \geq 0)$ une martingale telle que $\sup_{t\geq 0} \mathbb{E}(|M_t|) < \infty$.

(i) Soit $t \geq 0$ fixé et $\xi_n := \mathbb{E}(M_n^+ \,|\, \mathscr{F}_t)$, $n \geq t \geq 0$. Montrer que si $n \geq m \geq t$ alors p.s. $\xi_n \geq \xi_m$. Montrer que $\mathbb{E}(M_n^+ \,|\, \mathscr{F}_t)$ converge (lorsque $n \to \infty$) p.s. vers une variable aléatoire réelle, notée X_t.

(ii) Montrer que $(X_t,\ t \geq 0)$ est une martingale.

(iii) Montrer que M s'écrit comme différence de deux martingales positives.

Exercice 8 Soit $M := (M_t,\ t \in [0, 1])$ une sous-martingale telle que $\mathbb{E}(M_0) = \mathbb{E}(M_1)$. Montrer que M est une martingale.

Exercice 9 Soit M une martingale continue. Soit $t \geq 0$. Montrer que $M_{t+\varepsilon} \to M_t$ (lorsque $\varepsilon \downarrow 0$) dans L^1.

Exercice 10 Soit ξ une variable aléatoire réelle. Soit $M_t := \mathbb{P}(\xi \leq t \,|\, \mathscr{F}_t)$. Montrer que $(M_t,\ t \geq 0)$ est une sous-martingale.

Exercice 11 Soit τ un temps d'arrêt et $(M_t,\ t \geq 0)$ une martingale continue à droite et uniformément intégrable. Montrer que $(M_{\tau\wedge t},\ t \geq 0)$ est une martingale uniformément intégrable.

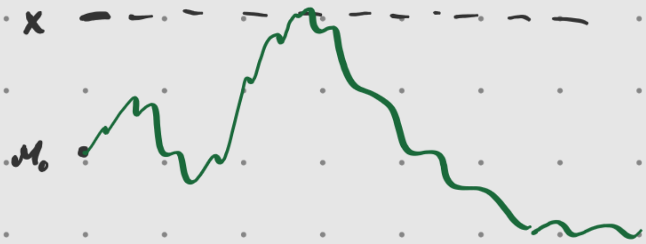
1. C'est-à-dire, une filtration telle que $\mathscr{G}_t \subset \mathscr{F}_t$, $\forall t \geq 0$.
2. En particulier, toute (sous-)martingale est une (sous-)martingale par rapport à sa filtration canonique.

Exercice 1 (i) Soit (M_t) une martingale continue et positive, telle que $M_t \to 0$, p.s. $(t \to \infty)$. Montrer que pour tout $x > 0$, $\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} M_t \geq x \mid \mathscr{F}_0) = 1 \wedge \frac{M_0}{x}$, p.s.

(ii) Soit B un mouvement brownien. Calculer la loi de $\sup_{t\geq 0}(B_t - t)$.

(ii) Soit B un mouvement brownien issu de $x > 0$. Calculer la loi de $\sup_{t\leq \tau_0} B_t$, où $\tau_0 := \inf\{t > 0 : B_t = 0\}$.

(i) $M_t > 0$, $M_t \to 0$ p.s.



$$\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} M_t \geq x \mid \mathcal{F}_0) = 1 \wedge \frac{M_0}{x} \ ?$$

$\sup M_t \geq x \iff \tau$

$\tau_x = \inf\{t \geq 0, M_t = x\}$

$x \geq M_0$

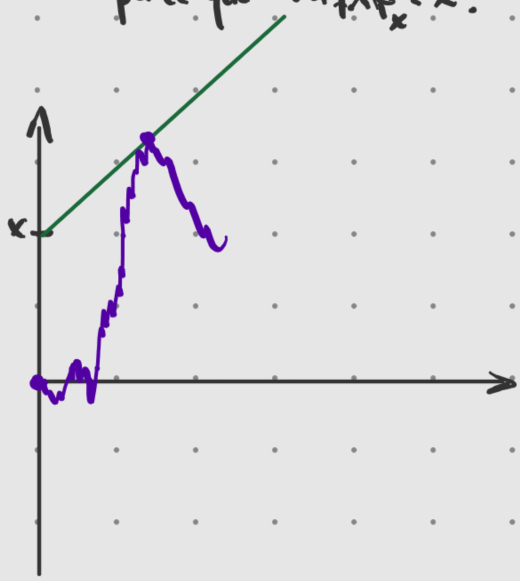
$M_{\tau_x \wedge t}$ - mart., $M_0 = \mathbb{E}[M_{\tau_x \wedge t}] = \mathbb{E}[\underbrace{M_{t\wedge\tau_x} \mathbb{1}_{\{\tau_x < \infty\}}}_{\downarrow\, t\to\infty}] + \mathbb{P}[M_{t\wedge\tau_x} \mathbb{1}_{\{\tau_x = \infty\}}]$

$M_0 = x\,\mathbb{P}(\tau_x < \infty) \Rightarrow \mathbb{P}(\tau_x < \infty) = \frac{M_0}{x}$

$\underbrace{M_{\tau_x}}_{x} \mathbb{1}_{\{\tau_x < \infty\}}$ $\quad M_{\tau_x}\mathbb{1}_{\{\tau_x < \infty\}} \to x$, $\quad M_t \mathbb{1}_{\{\tau_x = \infty\}} \to 0$

TCD parce que $M_{t\wedge\tau_x} \leq x$.

(ii) Calculer la loi de $\sup_{t\geq 0}(B_t - t)$



$\sup_{t\geq 0}(B_t - t) \geq x \iff \exists s$ tq $B_s \geq x + s$

$f(B_t - t)$ une mart, f monotone?

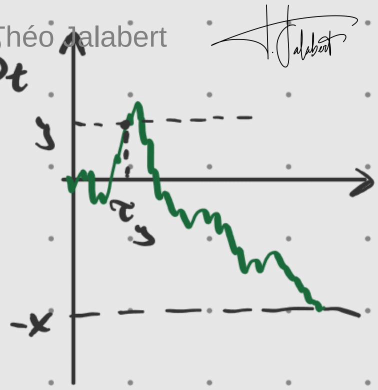
$e^{B_t - t} > 0$, $e^{B_t - \frac{t}{2}}$

$\mathbb{E}[e^{\sigma B_t - \sigma t}]$ $\quad \sigma = \frac{\sigma^2}{2}$ $\quad \sigma = 2 \Rightarrow M_t = e^{2(B_t - t)}$ est une mart positive,

$M_t \to 0$. $\quad B_t - t \geq x \iff M_t \geq e^{2x}$

$$\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0}(B_t - t) \geq x) = \mathbb{P}(\sup_{t\geq 0} M_t \geq e^{2x}) = \frac{M_0}{e^{2x}} \wedge 1 = e^{-2x} \wedge 1.$$

(iii) $B_0^x = x > 0$ Loi de $\sup_{t \le \tau_0^x} B_t^x = \sup_{t \le \tau_{-x}} \{x + B_t\} = x + \sup_{t \le \tau_{-x}} B_t$



$B^x_{t\wedge\tau_0} \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ p.s. car $\tau_0 < \infty$ p.s.

$B_0^x = 0$

$M_t = B^x_{t\wedge\tau_0}$ une mart $M_t \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$

$\sigma_y = \inf\{t > 0 : M_t = y\}$

$(y > x)$

$\mathbb{P}(\sup_{t\ge 0} M_t \ge y) = \mathbb{P}(\sigma_y < \infty) = \frac{x}{y}$ par (i)

Or $\sup_{t \ge 0} M_t = \sup_{t \le \tau_0} B_t^x$

Exercice 2 Soient $\sigma \le \tau$ deux temps d'arrêt bornés. Montrer que $\mathbb{E}[(B_\tau - B_\sigma)^2] = \mathbb{E}(B_\tau^2) - \mathbb{E}(B_\sigma^2) = \mathbb{E}(\tau - \sigma)$.

$\sigma \le \tau \le K$ - constante.

par l'identité de Wald

$$\mathbb{E}(B_\tau - B_\sigma)^2 \overset{?}{=} \mathbb{E}B_\tau^2 - \mathbb{E}B_\sigma^2 \overset{\checkmark}{=} \mathbb{E}[\tau - \sigma]$$

Il faut juste m.q. $\mathbb{E}B_\tau B_\sigma = \mathbb{E}B_\sigma^2$

Par le thm d'arrêt,

$$\mathbb{E}[B_\tau B_\sigma] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[B_\tau B_\sigma | \mathcal{F}_\sigma]] = \mathbb{E}[B_{\sigma\wedge K}\overbrace{\mathbb{E}[B_{\tau\wedge K} | \mathcal{F}_{\sigma\wedge K}]}^{B_{\sigma\wedge K}}] = \mathbb{E}[B_\sigma^2]$$

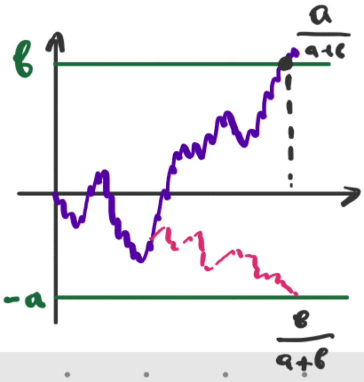
Exercice 3 Soient $a > 0$ et $b > 0$.

(i) Soit $\tau_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : B_t = -a \text{ ou } B_t = b\} = \tau_{-a} \wedge \tau_b$. En étudiant $M_t := \operatorname{sh}(\theta(B_t + a)) \exp(-\frac{\theta^2}{2}t)$, montrer que

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda \tau_{a,b}}\right] = \frac{\operatorname{ch}(\frac{a-b}{2}\sqrt{2\lambda})}{\operatorname{ch}(\frac{a+b}{2}\sqrt{2\lambda})}, \qquad \lambda \geq 0.$$

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(\tau_b < \tau_{-a}) = \frac{a}{a+b}$ et que $\mathbb{P}(\tau_b > \tau_{-a}) = \frac{b}{a+b}$.

(iii) Quelle est la loi de $\sup_{0 \leq t \leq \tau_{-1}} B_t$?



voir N1,(iii)

$\mathbb{P}(\sup_{t \le \tau_{-1}} B_t \geq x) = \frac{1}{1+x}$ $(a=1, b=x)$

$\tau_{a,b} = \tau_{-a} \wedge \tau_b$

En étudiant $M_t = sh(\theta(B_t+a)) e^{-\frac{\theta^2}{2}t}$, m.q. $E[e^{-\lambda\tau_{a,b}}] = \frac{ch(\frac{a-b}{2}\sqrt{2\lambda})}{ch(\frac{a+b}{2}\sqrt{2\lambda})}$

$dM_t = [-\frac{\theta^2}{2}M_t + \frac{1}{2}\theta^2 M_t]dt + [-]dB_t \Rightarrow M_t$ est une martingale

$M_{t\wedge\tau_a} > 0 \qquad M_{t\wedge\tau_a} \to 0$

$M_{t\wedge\tau_{a,b}} \leq sh(\theta(a+b)) \Rightarrow$ U.I. $\Rightarrow$ fermée $\Rightarrow$ {thm d'arrêts} $\Rightarrow$

$E[\mathbb{1}_{\{\tau_{a,b}=\tau_b\}} e^{-\frac{\theta^2}{2}\tau_{a,b}}]$

$\Rightarrow M_0 = E[M_{\tau_{a,b}}] \cancel{=} p_a \cdot 0 + p_b \, sh(\theta(b+a)) E e^{-\frac{\theta^2}{2}\tau_{a,b}}$

$0 = E[W_{\tau_{a,b}}] = (1-p_b)(-a) + p_b b = -a + p_b(b+a)$ } Pour la question (ii)

$W_{\tau_{a,b}} = sh(\theta(B_{\tau_{a,b}}+a)) e^{-\frac{\theta^2}{2}\tau_{a,b}}$

$M_0 = sh(\theta a) = \frac{a}{b+a} sh(\theta(b+a)) E[e^{-\frac{\theta^2}{2}\tau_{a,b}}]$

$E[e^{-\frac{\theta^2}{2}\tau_{a,b}}] = \frac{b+a}{a} \frac{sh(\theta a)}{sh(\theta(a+b))} = \frac{b+a}{a}\frac{sh(\sqrt{2\lambda}a)}{sh(\sqrt{2\lambda}(a+b))}$

$\neq$?!

$\lambda = \frac{\theta^2}{2} \to \theta = \sqrt{2\lambda}$

$\frac{b+a}{b}\frac{sh(\sqrt{2\lambda}b)}{sh(\sqrt{2\lambda}(a+b))}$

$sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$a \to 0$ $\frac{\sqrt{2\lambda}b}{sh(\sqrt{2\lambda}b)}$??

$$\mathrm{sh}(x+y) = \frac{e^{x+y} - e^{-(x+y)}}{2} = \mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) + \mathrm{sh}(y)\,\mathrm{ch}(x)$$

$$\mathrm{sh}(x)\,\mathrm{ch}(y) = \frac{(e^{x} - e^{-x})(e^{y} + e^{-y})}{4} = \frac{e^{x+y} + e^{x-y} - e^{y-x} - e^{-(x+y)}}{4}$$

$$\mathrm{ch}(-x) = \mathrm{ch}(x)$$

$$\mathrm{ch}(f(-a)) = \mathrm{ch}(-f(b))$$

$$\tilde{M}_t = \mathrm{ch}\left(\theta\left(\frac{a-b}{2} + W_t\right)\right) e^{-\frac{\theta^2}{2} t}$$

$$f(x) = \alpha + \theta x$$

$$\tilde{M}_{\tau_{a,b}} = \mathrm{ch}\left(\theta \frac{a+b}{2}\right) e^{-\frac{\theta^2}{2} \tau_{a,b}}$$

$$\alpha - \theta a = -\alpha - \theta b$$

$$\tilde{M}_0 = \mathrm{ch}\left(\theta \frac{a-b}{2}\right)$$

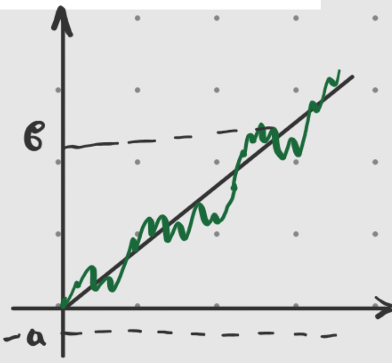
$$\alpha = \frac{\theta(a-b)}{2}$$

$$\mathbb{E}\,\tilde{M}_{\tau_{a,b}} = \tilde{M}_0 \to \mathbb{E}\left[e^{-\lambda \tau_{a,b}}\right] = \frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{2\lambda}\,\frac{a-b}{2}\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{2\lambda}\,\frac{a+b}{2}\right)}$$

$b \to 0 \quad p_b \to 1 \quad \tau_{a,b} \to 0$

Exercice 4 Soient $\gamma \neq 0$, $a > 0$ et $b > 0$ trois réels. Posons $\tau_x := \inf\{t > 0 : \ B_t + \gamma t = x\}$, $x = -a$ ou b. Calculer $\mathbb{P}(\tau_{-a} > \tau_b)$.

Indication : on pourra considérer la martingale $\exp\{-2\gamma(B_t + \gamma t)\}$.



$$M_t = \exp\{-2\gamma B_t - 2\gamma^2 t\} = \exp\{-2\gamma(B_t + \gamma t)\}$$

$M_{t \wedge \tau_{-a} \wedge \tau_b}$ est bornée $\to$ on applique le théorème d'arrêt

$$M_0 = 1 = \mathbb{E}\left[M_{\tau_{-a} \wedge \tau_b}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\tau_{-a} < \tau_b} \cdot e^{2\gamma a}\right] + \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\tau_b < \tau_{-a}}\, e^{-2\gamma b}\right]$$

$$= p_a e^{2\gamma a} + p_b e^{-2\gamma b} = 1$$

$$p_a\left(e^{2\gamma a} - e^{-2\gamma b}\right) = 1 - e^{-2\gamma b} \to p_a = \frac{1 - e^{-2\gamma b}}{e^{2\gamma a} - e^{-2\gamma b}}$$

Exercice 5 Dans cet exercice $(\mathscr{F}_t)$ est une filtration et τ, σ sont des $(\mathscr{F}_t)$-temps d'arrêt. On rappelle les définitions

$$\mathscr{F}_\tau := \{A \in \mathscr{F}_\infty :\ \forall t \geq 0,\ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t\}$$

$$\mathscr{F}_{\tau+} := \{A \in \mathscr{F}_\infty :\ \forall t \geq 0,\ A \cap \{\tau < t\} \in \mathscr{F}_t\}$$

✓(i) Si $\sigma \leq \tau$ alors $\mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_\tau$.

✓(ii) $\sigma \wedge \tau$ et $\sigma \vee \tau$ sont des temps d'arrêt, et on a $\mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau} = \mathscr{F}_\sigma \cap \mathscr{F}_\tau$. En plus, $\{\sigma \leq \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$ et $\{\sigma = \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$ (et donc $\{\sigma < \tau\} \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau}$).

✓(iii) Si σ et τ sont des temps d'arrêt, alors $\sigma + \tau$ est un temps d'arrêt.

(i) $A \in \mathscr{F}_\sigma \Rightarrow A \cap \{\sigma \leq t\} \in \mathscr{F}_t \quad\Rightarrow A \in \mathscr{F}_\tau$

$A \cap \{\tau \leq t\} = \underbrace{A \cap \{\sigma \leq t\}}_{\in \mathscr{F}_t} \cap \overbrace{\{\tau \leq t\}}^{\in \mathscr{F}_t} \in \mathscr{F}_t$

$\{\tau \leq t\} \subseteq \{\sigma \leq t\}$

(ii) $\{\tau \wedge \sigma \leq t\} = \{\tau \leq t\} \cup \{\sigma \leq t\} \in \mathscr{F}_t$ m̂ pour $\tau \vee \sigma$

$A \in \mathscr{F}_{\sigma\wedge\tau} \overset{?}{\Rightarrow} A \in \mathscr{F}_\tau,\ A \in \mathscr{F}_\sigma$. $A \cap \{\tau\wedge\sigma \leq t\} \in \mathscr{F}_t$

$\parallel$

$(A \cap \{\tau \leq t\}) \sqcup \Big[\big(A \cap \{\tau\wedge\sigma \leq t\}\big) \cap \underbrace{\{\tau > t\}}_{\{\tau \leq t\}^c}\Big]$ $\Big\} \Rightarrow A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathscr{F}_t$

$\left.\begin{array}{l} A \in \mathscr{F}_\tau \\ A \in \mathscr{F}_\sigma \end{array}\right\} \Rightarrow A \cap \{\tau\wedge\sigma \leq t\} = (A \cap \{\sigma \leq t\}) \cup (A \cap \{\sigma \leq t\}) \in \mathscr{F}_t \Rightarrow \mathscr{F}_\tau \cap \mathscr{F}_\sigma \subset \mathscr{F}_{\tau\wedge\sigma}$

$\{\sigma \leq \tau\} \cap \{\tau\wedge\sigma \leq t\} = \underbrace{\{\sigma \leq t \leq \tau\}}_{\{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \geq t\} \in \mathscr{F}_t} \sqcup \underbrace{\{\sigma \leq \tau < t\}}_{? \in \mathscr{F}_t}$

$\{\sigma \leq \tau < t\} = \bigcup_{\substack{q<t \\ q \in \mathbb{Q}}} \bigcap_{\substack{\varepsilon \in \mathbb{Q} \\ \varepsilon > 0 \\ q+\varepsilon < t}} \{\sigma \leq q+\varepsilon\} \cap \{\tau \leq q\} \in \mathscr{F}_t$

✓(iv) Si (τ_n) est une suite croissante de temps d'arrêt, alors $\tau := \lim_n \uparrow \tau_n$ est aussi un temps d'arrêt, et

$$\mathscr{F}_{\tau-} = \bigvee_n \mathscr{F}_{\tau_n-}.$$

✓(iv) Si (τ_n) est une suite décroissante de temps d'arrêt, alors $\tau := \lim_n \downarrow \tau_n$ est un $(\mathscr{F}_{t+})$-temps d'arrêt, et

$$\mathscr{F}_{\tau+} = \bigcap_n \mathscr{F}_{\tau_n+}.$$

✓(v) Si $(\tau_n)_{n\geq 1}$ est une suite de temps d'arrêt, alors $\sup_{n\geq 1} \tau_n$ est un temps d'arrêt.

✓(vi) Si $\mathscr{G}_t := \mathscr{F}_{t+}$ alors $\mathscr{G}_\tau = \mathscr{F}_{\tau+}$.

$\{\tau = \sigma\} \cap \{\tau\wedge\sigma \leq t\} = \{\tau = \sigma \leq t\} = \bigcap_{\varepsilon \in \mathbb{Q}^+} \bigcup_{\substack{(q_1,q_2) \in \mathbb{Q}^2 \\ q_2 - q_1 < \varepsilon}} \underbrace{\{q_1 \leq \tau \leq q_2 \wedge t\}}_{\in \mathscr{F}_t} \cap \underbrace{\{q_1 \leq \sigma \leq q_2 \leq t\}}_{\in \mathscr{F}_t}$

"$\tau = \sigma \leq t$" $= \forall \overset{\in \mathbb{Q}}{\varepsilon} > 0\ \exists q_1, q_2 \in \mathbb{Q} :\ \begin{array}{l} q_1 \leq \tau \leq q_2 \wedge t \\ q_1 \leq \sigma \leq q_2 \wedge t \end{array}$, $q_2 - q_1 < \varepsilon$

(iii) $\{\tau+\sigma\le t\} = $ " $\forall \varepsilon>0$ ($\varepsilon\in\mathbb{Q}^+$) $\exists q_1,q_2\in\mathbb{Q} : \tau\le q_1\wedge t,\ \sigma\le q_2\wedge t$, $q_1+q_2\le t+\varepsilon$ " $=$

$$= \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+}\ \bigcup_{\substack{(q_1,q_2)\in\mathbb{Q}^2\\ q_1+q_2\le t+\varepsilon}} \{\tau\le q_1\wedge t\}\cap\{\sigma\le q_2\wedge t\}\in\mathcal{F}_t$$

(iv) (τ_n) une suite croissante $\tau=\lim_{n\uparrow\infty}\tau_n$ est t.a. et

$$\mathcal{F}_{\tau-} = \bigvee \mathcal{F}_{\tau_n-}$$

$$\{\lim\uparrow\tau_n\le t\} = \bigcap_n\{\tau_n\le t\}\in\mathcal{F}_t$$

$$\tau=\lim\downarrow\tau_n$$

$$\{\tau\le t\}=\{\tau>t\}^c$$

$$\{\tau>t\} = \underbrace{\exists\varepsilon\in\mathbb{Q} : \forall n\ \tau_n>t+\varepsilon}_{\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_{t+\varepsilon}\ \forall\varepsilon>0} \Rightarrow \{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_{t+}$$

(v) $\{\sup_n\tau_n\le t\} = \bigcap_n\{\tau_n\le t\}\in\mathcal{F}_t$

(vi) $\mathcal{G}_t=\mathcal{F}_{t+} \Rightarrow \mathcal{G}_\tau = \mathcal{F}_{\tau+}$ " $\{A\in\mathcal{F}_\infty : \forall t\ A\cap\{\tau<t\}\in\mathcal{F}_t\}$

$$\forall t\ A\cap\{\tau<t\}\in\mathcal{F}_t \overset{?}{\Leftrightarrow} A\cap\{\tau\le t\}\in\mathcal{F}_{t+}\ \forall t$$

1. $A\cap\{\tau\le t\} = \bigcap_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \underbrace{A\cap\{\tau<t+\varepsilon\}}_{\in\mathcal{F}_{t+\varepsilon}} \in\mathcal{F}_{t+}$

2. $A\cap\{\tau<t\}\overset{?}{\in}\mathcal{F}_t$

$A\cap\{\tau<t\} = $ " $\tau<t \Leftrightarrow \exists\varepsilon\in\mathbb{Q}^+,\ \tau\le t-\varepsilon$ " $=$

$$= \bigcup_{\varepsilon\in\mathbb{Q}^+} \underbrace{A\cap\{\tau\leq t-\varepsilon\}}_{\in\mathcal{F}_{(t-\varepsilon)+}\subset\mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_{t-}$$

N6 $\mathcal{M}_t$ est $\mathcal{F}_t$-sousmart. $(\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$ sous-filtration.

M.q. $\mathcal{N}_t = \mathbb{E}[\mathcal{M}_t|\mathcal{G}_t]$ est une $(\mathcal{G}_t)$-sous-mart.

1) Intégrabilité : OK

2) Il faut m.q. $\forall s\leq t$ $\mathcal{N}_s \leq \mathbb{E}[\mathcal{N}_t|\mathcal{G}_s]$

$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[\mathcal{M}_t|\mathcal{G}_t]|\mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[\mathcal{M}_t|\mathcal{G}_s] = \{\mathcal{G}_s\subset\mathcal{F}_s\} = \mathbb{E}[\overbrace{\mathbb{E}[\mathcal{M}_t|\mathcal{F}_s]}^{\geq \mathcal{M}_s}|\mathcal{G}_s] \geq \mathbb{E}[\mathcal{M}_s|\mathcal{G}_s] = \mathcal{N}_s$$

N7 $\mathcal{M}_t$ une mart. t.q. $\sup_{t\geq 0}\mathbb{E}|\mathcal{M}_t|<\infty$

(i) $\xi_n = \mathbb{E}[\mathcal{M}_n^+|\mathcal{F}_t]$ $n\geq t\geq 0$ M.q. si $n\geq m\geq t$ alors

$\xi_n \geq \xi_m$

$$\mathbb{E}[\mathcal{M}_n^+|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[\mathcal{M}_n^+|\mathcal{F}_m]}_{\geq \mathcal{M}_m^+}|\mathcal{F}_t] \geq \mathbb{E}[\mathcal{M}_m^+|\mathcal{F}_t] = \xi_m$$

$(\mathcal{M}_t^+)$ est une sous-mart

M.q. ξ_n converge p.s. vers une v.a. X_t.

$\xi_n \nearrow$

(ξ_n) est bornée (sinon $\xi_n\uparrow\infty$ $\mathbb{E}\xi_n = \mathbb{E}\mathcal{M}_n^+\to\infty$?! $\sup\mathbb{E}|\mathcal{M}_t|<\infty$) $\Big\} \Rightarrow \exists \lim_{n\to\infty}\xi_n$ p.s.

(ii) M.q. $(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale

$\forall t$ X_t est bien intégrable (TCM: $\mathbb{E}X_t = \lim_n \overbrace{\mathbb{E}\xi_n}^{=\mathbb{E}[\mathcal{M}_n^+]\leq\sup\mathbb{E}\mathcal{M}_t<\infty}<\infty$)

$$\mathbb{E}[X_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\lim_{n\to\infty} \underbrace{\mathbb{E}[M_n^+|\mathcal{F}_t]}_{\xi_n \uparrow X_t}|\mathcal{F}_s] \overset{TCM}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[M_n^+|\mathcal{F}_s] = X_s$$

(iii) M.q. M s'écrit comme différence de 2 martingales positives.

$\forall n \geq t$

$$\begin{array}{ccccc} M_t = \mathbb{E}[M_n|\mathcal{F}_t] & = & \mathbb{E}[M_n^+|\mathcal{F}_t] & - & \mathbb{E}[M_n^-|\mathcal{F}_t] \\ \downarrow n\to\infty & & \downarrow & & \downarrow \\ M_t & = & X_t & - & Y_t \end{array}$$

où X et Y sont marts positives

N8 $(M_t)_{t\in[0,1]}$ sous-martingale t.q. $\mathbb{E}[M_0] = \mathbb{E}[M_1]$. M.q. M est une mart.

On a $\forall t$

$$\left.\begin{array}{l} M_t \leq \mathbb{E}[M_1|\mathcal{F}_t] \Rightarrow \mathbb{E}M_t \leq \mathbb{E}M_1 \\ M_0 \leq \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_0] \Rightarrow \mathbb{E}M_0 \leq M_t \end{array}\right\} \Rightarrow \mathbb{E}M_0 = \mathbb{E}M_t = \mathbb{E}M_1 \ \forall t$$

$\forall t \geq s$

Donc $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] - M_s \geq 0$ et $\mathbb{E}[\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] - M_s] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] - M_s \overset{p.s.}{=} 0$

N9 Soit M une martingale continue, $t \geq 0$. M.q. $M_{t+\varepsilon} \xrightarrow[\varepsilon\downarrow 0]{} M_t$ dans L^1

On a $\mathbb{E}[M_{t+\varepsilon}|\mathcal{F}_t] = M_t$

$$\left.\begin{array}{l} M_{t+\varepsilon} \xrightarrow{p.s.} M_t \text{ grâce à continuité} \\ \text{Sur } [t, t+\delta]\ M \text{ est une mart. fermée donc u.i.} \end{array}\right\} \Rightarrow M_{t+\varepsilon} \xrightarrow{L^1} M_t$$

N10 ξ v.a.r. Soit $M_t := \mathbb{P}(\xi \leq t|\mathcal{F}_t)$. M.q. $(M_t)_{t\geq 0}$ est une sous-mart.

$M_t = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\xi\leq t\}}|\mathcal{F}_t]$, $t \geq s$ $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\xi\leq t\}}|\mathcal{F}_s] \geq \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\xi\leq s\}}|\mathcal{F}_s] = M_s$

$\mathbb{1}_{\{\xi\leq t\}} \geq \mathbb{1}_{\{\xi\leq s\}}$

N11 τ un t.a. $(M_t)_{t\geq 0}$ une mart. continue à droite et u.i.

M.q. M^{τ} est une martingale uniformément intégrable.

$t \geq s$

M_t est une mart $\Rightarrow$ M_t^{τ} est une mart. (cf le cours)

M est u.i. $\Rightarrow$ fermée

Par le thm d'arrêt, $\tau \wedge t \leq t$ donc $M_{t\wedge\tau} = \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_{t\wedge\tau}] =$
$= \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_{t\wedge\tau}]$

M_∞ est intégrable donc $\{\mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_{t\wedge\tau}], t \geq 0\}$ est u.i.

cf. TD 0 n°8