# Théorie des Valeurs Extrêmes - TD1

ISFA3, ANNEE

**Exercice 1:**

Soient $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de loi uniforme sur $[-1, 0]$ et $M_n(X) = \max(X_1, ..., X_n)$.

1. Donner les coefficients $a_n$ et $b_n$ tels que, quand $n \to \infty$,

$$\Pr\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \to \Psi_1(x).$$

Soient $Y_1, ..., Y_n$ une suite de variables aléatoires IID de loi exponentielle unitaire ($\Pr(Y_i > y) = e^{-y}$, $y > 0$) et $m_n = \min(Y_1, ..., Y_n)$.

2. En remarquant que

$$\min(Y_1, ..., Y_n) = -\max(-Y_1, ..., -Y_n),$$

trouver des coefficients $c_n$ et $d_n$, et une loi $G$ tels que, quand $n \to \infty$,

$$\Pr\left(\frac{-m_n - d_n}{c_n} \leq x\right) \to G(x).$$

**Exercice 2:**

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution $F$ et soit $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. On note la statistique d'ordre la manière suivante

$$X_{(n)} \leq X_{(n-1)} \leq \ldots \leq X_{(1)}$$

et $B_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i > x\}}$.

1. Montrer que $X_{(k)} \leq x$ si et seulement si $B_n(x) < k$.

2. Donner la loi de $B_n(x)$. En déduire que

$$P\left(X_{(k)} \leq x\right) = \sum_{r=0}^{k-1} C_n^r \left(F(x)\right)^{n-r} \left(1 - F(x)\right)^r.$$

3. Calculer la transformée de Laplace de $B_n(x)$:

$$\varphi_n(t, x) = \mathbb{E}\left(\exp\left(tB_n(x)\right)\right).$$

4. Montrer que s'il existe une suite $(u_n)$ telle que $\lim_{n\to\infty} n \Pr(X_i > u_n) = \tau$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \ln \varphi_n(t, u_n) = \tau(e^t - 1).$$

5. Donner la transformée de Laplace d'une loi de Poisson de paramètre $\tau$ (Rappel: si $N$ suit une loi de Poisson de paramètre $\tau$, alors $P(N = n) = e^{-\tau}\tau^n/n!$).

6. Déduire des questions précédentes l'expression analytique de la loi limite de $X_{(2)}$ si l'on peut trouver deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$ telles que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{(1)} - b_n}{a_n} \leq x\right) = \exp\left(-\exp\left(-x\right)\right).$$

**Exercice 3:**

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution $F$ et soit $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

1. Soit $x^F = \sup\{x : F(x) < 1\}$. Quel est l'intérêt de definir cette valeur? Montrer que $M_n \to x^F$ en probabilité quand $n \to \infty$.

2. Soit $\bar{F} = 1 - F$. Montrer que, pour deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$, et une fonction de répartition $H$, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{ll} 1) & \lim_{n\to\infty} \Pr\left(M_n \leq a_n x + b_n\right) = H(x), \\ 2) & \lim_{n\to\infty} n\bar{F}\left(a_n x + b_n\right) = -\ln H(x). \end{array}$$

On suppose que $F$ est deux fois dérivable. On définit l'inverse de la fonction de hasard par

$$h(x) = \frac{1 - F(x)}{F'(x)}.$$

On sait que si $h'(x) \to \xi \in \mathbb{R}$ quand $x \to x^F$, alors

$$n\bar{F}\left(a_n x + b_n\right) \to (1 + \xi x)_+^{-\frac{1}{\xi}} \text{ quand } n \to \infty.$$

avec $b_n = F^{-1}(1 - 1/n)$ ($F^{-1}$ est la fonction réciproque de $F$) et $a_n = h(b_n)$.

On définit alors

$$U(t) = F^{-1}(1 - 1/t).$$

3. Montrer que

$$\frac{1}{1 - F(U(t))} = t.$$

4. Montrer que, pour deux suites $(a_n)$ et $(b_n)$, et une fonction de répartition $H$ qui admet une réciproque $H^{-1}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{ll} 1) & \lim_{n\to\infty} \Pr\left(M_n \leq a_n x + b_n\right) = H(x), \\ 2) & \lim_{n\to\infty} (U(nx) - b_n)/a_n = H^{-1}\left(e^{-1/x}\right). \end{array}$$

5. Montrer que

$$\begin{aligned} U'(t) &= \frac{\left[1 - F(U(t))\right]^2}{F'(U(t))} \\ \frac{tU''(t)}{U'(t)} &= -2 - \frac{F''(U(t))\left[1 - F(U(t))\right]}{\left[F'(U(t))\right]^2} \end{aligned}$$

En déduire que les trois conditions suivantes sont équivalentes

1) $\lim_{x \to x^F} h'(x) = \xi$,
2) $\lim_{x \to x^F} (1 - F(x)) F''(x) / (F'(x))^2 = -\xi - 1$,
3) $\lim_{t \to \infty} tU''(t)/U'(t) = \xi - 1$.

**Exercice 4:**

Supposons que $Y$ a une distribution Pareto Généralisée GPD$(\sigma, \xi)$ $(\xi \neq 0)$ telle que

$$P(Y < y) = 1 - \left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}.$$

1. Donner le domaine de définition de $Y$, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de réalisation possibles de la variable aléatoire $Y$.

2. De quelle loi connue s'agit-il lorsque $\xi = -1$? Est-il possible de définir une loi si $\xi = 0$?

3. Donner la densité de cette loi. Peut-on trouver des expressions analytiques pour l'estimateur du maximum de vraisemblance de $(\sigma, \xi)$.

4. Montrer que si $U \sim U[0, 1]$, alors

$$Y \sim \sigma\left(\frac{U^{-\xi} - 1}{\xi}\right).$$

Donner une procédure pour simuler une loi GPD$(\sigma, \xi)$.

5. Donner l'expression de la médiane, de la moyenne $(\xi < 1)$ et de la variance $(\xi < 1/2)$ d'une loi GPD$(\sigma, \xi)$. Donner un estimateur simple de $\xi$ basé sur les deux premiers moments lorsque $\xi < 1/2$.

**Exercice 1 :** $(X_i)$ iid de loi uniforme sur $[-1, 0]$

$F(x) = \frac{x+1}{0+1} = 1+x \qquad -1 \leq x \leq 0$

1) $M_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$

$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \longrightarrow \exp(x) \qquad x \leq 0$

$a_n \geq 0 \quad b_n ? \quad \Leftrightarrow \quad \frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \Psi_1$

$M_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 = x^F \implies a_n x + b_n \longrightarrow 0 = x^F \implies \begin{cases} a_n \to 0 \\ b_n \to 0 \end{cases}$

$\mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n) = F^n(a_n x + b_n) = (1 + (a_n x + b_n))^n$

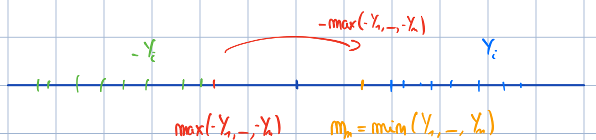
$= \exp(\underbrace{n \ln(1 + \underset{\to 0}{(a_n x + b_n)})}_{\sim n(a_n x + b_n)}) \longrightarrow \exp(x)$

$\implies \begin{cases} a_n = \frac{1}{n} \\ b_n = 0 \end{cases}$ convient.

2) $(Y_i)$ iid de loi exponentielle de paramètre 1

$\mathbb{P}(Y > y) = \exp(-y) \qquad y \geq 0$

$m_n = \min(Y_1, \ldots, Y_n) \overset{?}{=} -\max(-Y_1, \ldots, -Y_n)$




$-m_n = \max(-Y_1, \ldots, -Y_n)$

$\mathbb{P}(-Y \leq y) = \mathbb{P}(Y \geq -y) = \exp(-(-y))$

$= \exp(y) \implies -Y \sim \Psi_1$ (Weibull de paramètre 1)

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*} > 0$, et $(d_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tq $\mathbb{P}\left(\frac{\max(-Y_1, \ldots, -Y_n) - d_n}{c_n} \leq y\right) = \exp(y)$

On a la propriété de max-stabilité !

$\mathbb{P}(-m_n \leq c_n y + d_n) = e^y$

$\mathbb{P}(-Y \leq c_n y + d_n)^n = e^y \implies \exp(c_n y + d_n)^n = e^y$

$\implies \exp(n c_n y + n d_n) = e^y$

$\implies \begin{cases} c_n = \frac{1}{n} \\ d_n = 0 \end{cases}$ convient par identificat°

Loi unif et Weibull

- même p$^t$ extrémal proche de 0
- 2 fct° de survie asymptotiq$^t$ c$^{tes}$ au p$^t$ extrémal.

| $\mathcal{U}([-1, 0])$ | $\Psi_1$ |
|---|---|
| $\mathbb{P}(Y \leq y) = 1+y$ | $\mathbb{P}(Y \leq y) = \exp(y)$ |
| $y^F = 0$ | $y^F = 0$ |
| $\mathbb{P}(Y > y) = -y \underset{y\to 0}{\sim} -y$ | $\mathbb{P}(Y > y) = 1 - \exp(y) \underset{y\to 0}{\sim} -y$ |

## Exercice 2 :

$(X_i)$ iid de distribution $F$

$n$-échantillon $X_1, \dots, X_n$

Statistique d'ordre $\underbrace{X_{(n)}}_{m_n = \min_{i\in[\![1,n]\!]}(X_i)} \leq X_{(n-1)} \leq \dots \leq \underbrace{X_{(1)}}_{M_n = \max_{i\in[\![1,n]\!]}(X_i)}$

Soit $B_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_k > x\}}$

1) Mq $X_{(k)} \leq x$ ssi $B_n(x) < k$

$$X_{(k)} \leq x \iff (X_{(n)} \leq x) \cap (X_{(n-1)} \leq x) \cap \dots \cap (X_{(k)} \leq x)$$
$$\iff \bigcap_{i=k}^{n} \{X_{(i)} \leq x\}$$
$$\iff \prod_{i=k}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{(i)} \leq x\}} = 1$$
$$\iff \sum_{i=k}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{(i)} \leq x\}} = k$$

$$\iff \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_{(i)} \leq x\}} \geq k$$
$$\iff \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i \leq x\}} \geq k$$
$$\iff \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > x\}} < k$$
$$\iff B_n(x) < k$$

2) Pour $n$ évènements, $\mathbb{P}(B_n = k) = \binom{n}{k} \bar{F}(x) \, (1-\bar{F}(x))^{n-k}$ $\qquad B_n(x) \sim \mathcal{B}(n, \bar{F}(x))$

$$\mathbb{P}(X_{(k)} \leq x) = \mathbb{P}(B_n \leq k-1) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} \bar{F}(x)^i \, (\underbrace{1-\bar{F}(x)}_{F(x)})^{n-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{k-1} C_n^i \, F(x)^{n-i} (1-F(x))^i$$

3) $\varphi_n(t,x) = \mathbb{E}[\exp(t B_n(x))]$ $\qquad$ Transformée de Laplace de $B_n(x)$ : $\varphi_n(t,x) = \mathbb{E}[e^{tB_n(x)}]$

$$\underset{iid}{=} [\mathbb{E}[\exp(t \mathbb{1}_{\{X_i \geq x\}})]]^n$$

$$\mathbb{E}[\exp(t \mathbb{1}_{\{X_i \geq x\}})] = F(x) e^{t\times 0} + \bar{F}(x) e^{t\times 1}$$
$$= 1 - \bar{F}(x) + \bar{F}(x) e^t$$
$$= 1 + \bar{F}(x)(e^t - 1)$$

$$\varphi_n(t,x) = [1 + \bar{F}(x)(e^t - 1)]^n$$

4) $$\lim_{n\to\infty} \ln(\varphi_n(t,u_n)) = \lim_{n\to\infty} \ln([1+\bar{F}(u_n)(e^t-1)]^n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \ln(\exp(n \ln(1+\bar{F}(u_n)(e^t-1))))$$

$\bar{F}(u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ car $u_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^F$

$$\lim_{n\to\infty} \ln(\varphi_n(t,u_n)) = \lim_{n\to\infty} n \bar{F}(u_n)(e^t-1) = \lim_{n\to\infty} n \mathbb{P}(X_i > u_n)(e^t-1) = \tau(e^t-1) \quad \text{si} \quad n\mathbb{P}(X_i > u_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tau$$

5) Soit $N \sim \mathcal{P}(\tau)$

$$\varphi_n(t) = \mathbb{E}[e^{tN}]$$
$$= \sum_{m\geq 0} e^{tm} \mathbb{P}(N=m)$$
$$= \sum_{m\geq 0} e^{tm} e^{-\tau} \frac{\tau^m}{m!}$$
$$= e^{-\tau} \sum_{m\geq 0} \frac{(e^t\tau)^m}{m!}$$
$$= e^{-\tau} \exp(e^t \tau)$$
$$= e^{\tau(e^t-1)}$$

Par égalité de $\varphi_n(t,x)$, on a $N_n = B_n(u_n)$ converge vers une loi de Poisson de paramètre $\tau$ pour $n \to \infty$.

6) Pour $\tau > 0$ et $u_n$ une suite de réels, lorsque $n \in \mathcal{D}(\infty)$,

i) $P(M_n \leq u_n) \to e^{-\tau}$

ii) $n\bar{F}(u_n) \to \tau$

$$P(X_{(k)} \leq u_n) \overset{④}{=} \mathbb{P}(B_n \leq k-1) \underset{n\to\infty}{\overset{⑤}{\longrightarrow}} e^{-\tau} \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\tau^i}{i!}$$

$$e^{-\tau} = e^{-e^{-x}} \text{ (énoncé)} \Rightarrow \tau = e^{-x}$$

Pour $k=2$,

$$e^{-\tau} \sum_{i=0}^{2-1} \frac{\tau^i}{i!} = e^{-e^{-x}}(1+e^{-x})$$

$$P\left(\frac{X_{(2)} - b_n}{a_n} \leq x\right) \longrightarrow e^{-e^{-x}}(1+e^{-x})$$

## Exercice 3 : $(X_i)$ iid de distribution $F$

$M_n = \max(X_1, \dots, X_n) \qquad x^F = \sup\{x \mid F(x) < 1\}$

1) $x^F$ est le point extrémal :

- borne supérieure quand la distribut° est bornée
- limite du maximum

(1) $x^F < +\infty$ (Ex : loi unif $x^F$ fini, $x^F$ infini par ex avec loi normale / exp)

On veut mq $\forall \varepsilon > 0,\ P(|M_n - x^F| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Soit $\varepsilon > 0$, $P(|M_n - x^F| > \varepsilon) = P[(M_n - x^F > \varepsilon) \cup (M_n - x^F < \varepsilon)]$

$= P[\underbrace{(M_n > \varepsilon + x^F)}_{=\emptyset} \cup (M_n < x^F - \varepsilon)]$

$= P(M_n < x^F - \varepsilon)$

$= [F(x^F - \varepsilon)]^n$

$F(x^F) \longrightarrow 1$

$F(x^F - \varepsilon) \longrightarrow 1^- \implies P(|M_n - x^F| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

(2) $x^F = \infty$

On veut mq $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{P} x^F \iff \frac{1}{M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{P} 0 \iff \forall \varepsilon > 0,\ P(|\frac{1}{M_n} - 0| > \varepsilon) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$P(\frac{1}{|M_n|} > \varepsilon) = P[(\frac{1}{M_n} > \varepsilon) \cup (\frac{1}{M_n} < -\varepsilon)]$

$= P[(M_n < \frac{1}{\varepsilon}) \cup (M_n > -\frac{1}{\varepsilon})]$

$= P(-\frac{1}{\varepsilon} < M_n < 1/\varepsilon)$

$\leq P(M_n < 1/\varepsilon) = [\underbrace{F(1/\varepsilon)}_{\in ]0,1[}]^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

2) $\bar{F} = 1 - F$

Mq (1) $P(M_n \leq a_n x + b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} H(x) \iff$ (2) $n \bar{F}(a_n x + b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} -\ln(H(x))$

(2) ⟹ (1) / $P(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x) = P(M_n \leq a_n x + b_n) = [F(a_n x + b_n)]^n$

$= \exp(n \ln(F(a_n x + b_n)))$

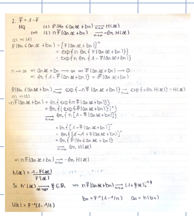
$= \exp(n \ln(1 - \bar{F}(a_n x + b_n)))$

$a_n x + b_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^F \implies \bar{F}(a_n x + b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$

$\implies \ln(1 - \bar{F}(a_n x + b_n)) \sim -\bar{F}(a_n x + b_n)$ lorsque $n \in \mathcal{V}(\infty)$

$P(M_n \leq a_n x + b_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(-n \bar{F}(a_n x + b_n)) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \exp(+\ln(H(x))) = H(x)$

(1) ⟹ (2) / $-n \bar{F}(a_n x + b_n) = \ln(\exp($



5) $U(t) = F^{-1}(1 - 1/t)$ $\iff$ $\dfrac{1}{1 - F(U(t))} = t$

$U'(t)$

$$\frac{U'(t)F'(U(t))}{(1 - F(U(t)))^2} = 1 \iff U'(t) = -\frac{\bar{F}(U(t))^2}{F'(U(t))}$$

$$U'(t)F'(U(t)) = (\bar{F}(U(t)))^2$$