Risque de crédit - Cours

Bibliographie :

Duffie & Singleton, Credit risk : pricing, measurement and management

Schönbucher : Credit derivatives pricing model

Bielecki & Rutkowski : Credit risk : modelling valuation and hedging → + maths

* Risque emprunt - Prêt

Risque crédit implique en général le risque qu'un emprunteur n'arrive pas à rembourser son engagement de prêt.

Pour une banque qui dispose d'une grande quantités de portefeuille de prêts, elle cherche à gérer le risque de crédit par l'ajustement de taux d'emprunt, plus le risque de non-remboursement est estimé élevé, plus le taux est grand.

La différence entre le taux et le taux d'intérêt sans risque représente le risque de crédit de l'emprunter.

Il s'agit d'une méthode statique de gestion basée sur les estimations statistiques.

* Notations de crédit

Les agences de notations publient régulièrement les notes de crédit pour les entreprises avec les meilleures notes AAA, AAa, Aaa, ..., D. état de défaut

On peut faire des estimations sur toutes les entreprises (et pays souverains) ayant la même note pour la probabilité de défaut, le taux d'emprunt, la probabilité de migration de notation etc.

d'émission d'obligation etc.

On peut modéliser les notes de crédit par une chaîne de Markov et on peut estimer la matrice de transition.

$$M = \begin{array}{c|c} & \begin{matrix} AAA & AAa & \cdots & D \end{matrix} \\ \begin{matrix} AAA \\ AAa \\ \vdots \\ D \end{matrix} & \begin{pmatrix} \ddots & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \end{array} \qquad N_{ij} = \mathbb{P}(X = j \mid X = i)$$

* Produits financiers classiques

Les entreprises (et les pays souverains) émettent des obligations et proposent des coupons qui dépendent de la qualité de crédit des émetteurs.

Plus la qualité de crédit est meilleure (avec AAA par ex) plus le taux de coupon est bas. Pour un émetteur qui a une qualité de crédit plus risqué, il doit proposer un taux de coupon plus élevé pour récompenser le risque de crédit.

Les obligations sont des produits échangés sur les marchés financiers de manière dynamique et transparente, qui permet aux investisseurs de gérer leur risque de crédit de manière plus souple.

* Produits dérivés de crédit

Le marché de dérivé de crédit est créé dans les années 1990. Un dérivé de crédit est un produit financier qui est écrit sur un sous-jacent dont les paiements sont liés aux évènements de crédit de celui-ci, par ex les non-paiements d'une obligation, ou le défaut d'une entreprise, etc.

L'objectif est de permettre aux investisseurs de gérer, couvrir et transférer le risque de crédit de manière dynamique.

Les composantes caractéristiques d'un dérivé de crédit incluent
* le nom sous-jacent $0 \leq t \leq T$
* l'évènement de crédit
* la maturité T et la date de défaut τ
* les paiements en cas de défaut ou non-défaut.

On cherche à déterminer le prix d'un produit dérivé de crédit à la date initiale $t=0$, et aussi une évaluation dynamique à $t>0$ (avant la fin du contrat) $T \wedge \tau = \min(T, \tau)$

* Credit Default Swap (CDS)

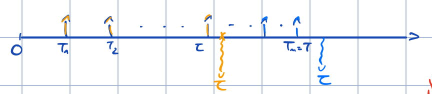
Le dérivé de crédit le plus important est le CDS.

Swap de taux (produit dérivé de taux)

Libor, Euribor. (utilisés pour swap de taux).

CDS (dérivé de crédit)

jambe fixe



jambe variable

① défaut $\tau < T$

② défaut $\tau > T$

Suggéré par son nom, un CDS ressemble à un swap de taux dans le sens qu'il consiste en un échange de flux fixés et variables entre son acheteur et vendeur.

De plus, un CDS porte la caractéristique d'un contrat d'assurance qui fournit à son acheteur la protection contre le risque de défaut. L'acheteur de CDS paie un montant fixe S, appelé le spread de CDS, à des dates régulières préfixées jusqu'à la date de défaut τ si le défaut du sous-jacent arrive avant T ou jusqu'à la maturité T sinon.

Les paiements variables dépendent de l'état défaut-ou-non du sous-jacent. Dans le cas défaut, le vendeur va rembourser une proportion de nominal à l'acheteur qui est égal à $(1-R)$ où R est une valeur aléatoire appelée le taux de recouvrement, qui prend valeur dans $[0,1]$.

Sur le marché, l'hypothèse standard est que R suit une loi Beta de moyenne 40% et de variance 26%.
Dans la littérature, on peut aussi modéliser R par un processus stochastique $(R_t)_{t \geq 0}$ et le recouvrement réalisé est égal à R_τ. Dans le cas où le défaut arrive après la maturité, alors le vendeur ne paie rien.

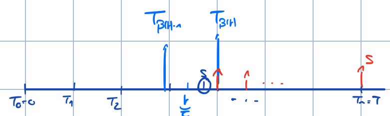
Le prix du CDS, ou sans spread, est déterminé à la date initiale tel que les espérances sous la probabilité risque $\mathbb{Q}$ de ces deux flux fixes et variables, actualisés à la date $t=0$ soient égales.

On introduit quelques notations :

* τ la date de défaut qui est une variable aléatoire à valeur dans $\mathbb{R}_+$
* R le taux de recouvrement (v.a ou processus) à valeur à $[0,1]$
* $T_0 = 0$ la date signature de CDS et T sa maturité
* $\{T_1, \dots, T_m = T\}$ où $\Delta T = T_i - T_{i-1}$ est le même $\forall i \in [\![1, m]\!]$. S spread CDS comme tous les taux à l'échelle d'un an.

  $T = 5$ ans $\Delta T = 3$ mois $S = 4\%$

* On introduit un indice $\beta(t)$ à valeur dans $[\![1, m]\!]$ tq $t \in [T_{\beta(t)-1}, T_{\beta(t)}]$



$\tau \in [T_{\beta(\tau)-1}, T_{\beta(\tau)}]$

* $r = (r_t)_{t \geq 0}$ et le discount factor $D(t,T) = \exp\left(-\int_t^T r_s \, ds\right)$

On considère à une date $t \in [0, T \wedge \tau]$, les flux futurs à venir.
On prend par exemple la position d'un vendeur, le flux qu'il va recevoir est donné par :

$$S \cdot \left[(T_{\beta(t)} - t) \cdot D(t, T_{\beta(t)}) \mathbb{1}_{\{\tau > T_{\beta(t)}\}} + \sum_{i=\beta(t)+1}^{m} \Delta T \cdot D(t, T_i) \mathbb{1}_{\{\tau > T_i\}} + (t - T_{\beta(\tau)-1}) \cdot D(t, \tau) \mathbb{1}_{\{\tau < T\}} \right]$$

Le flux qu'il va payer est donné par :

$$(1 - R) D(t, \tau) \mathbb{1}_{\{\tau < T\}}$$

On peut approximer le flux discret par un flux continu

$$\int_t^{T \wedge \tau} S \cdot D(t,u) \, du = \int_t^T S \cdot D(t,u) \mathbb{1}_{\{u < \tau\}} \, du$$

A la date $t = 0$, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T S \cdot D(0,u) \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} \, du\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(1-R) \cdot D(0,\tau) \mathbb{1}_{\{\tau < T\}}\right]$$

$$\Rightarrow S = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(1-R) \cdot D(0,\tau) \mathbb{1}_{\{\tau < T\}}\right]}{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^T D(0,u) \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} \, du\right]} \underset{R \perp (r_s),\ \sim \text{Beta}(60\%, 15\%)}{=} \frac{60\% \, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^\tau r_s ds} \mathbb{1}_{\{\tau < T\}}\right]}{\int_0^T \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_0^u r_s ds} \mathbb{1}_{\{\tau > u\}}\right] du}$$

On obtient ainsi le spread de CDS à $t = 0$.
Pour calculer la valeur explicite de S, on doit préciser les modèles pour $(r_t)_{t \geq 0}$ et pour τ.
On considère l'évaluation dynamique d'un CDS (avec la date signature à $t=0$) à une date $t \in [0, T \wedge \tau]$ dont le spread est égal à S.
(Attention ! Un CDS signé à t aura une valeur $\neq^{te}$ que S).

Pour le vendeur de ce CDS, sa valeur à $t \in [0, T \wedge \tau]$ est égale à :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_t^T S \cdot \underbrace{D(t,u)}_{(r_t)_{t \geq 0}} \mathbb{1}_{\{\tau > u\}} \, du - (1-R) D(t,\tau) \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \,\middle|\, \underset{?}{\mathcal{F}_t}\right] \quad \to \mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{D}_t$$

$\sigma(W_s, s \leq t)$ par r_t
+ information sur τ (processus ponctuel)

① Préciser l'information qui contient le taux d'intérêt $\mathcal{F}_t$ et le défaut $\mathcal{D}_t$
② Pour calculer l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{G}_t$, on cherche à établir un lien entre $\mathcal{G}_t$ et $\mathcal{F}_t$, espérances conditionnelles.

filtration Mouvement Brownien que l'on sait calculer.

II - Modèles structurels

Dans la literature, il y a deux approches principales de modélisation :

* Approche structurelle
* Approche forme-réduite / intensité

Dans la première approche, le défaut arrive quand la valeur (processus stochastique) de l'entreprise descend au-dessous d'une barrière (constante) de défaut.
Mathématiquement, cela définit un temps d'arrêt (prévisible) par rapport à la filtration engendrée par le processus de valeur (diffusion brownienne)

Dans la deuxième approche, le défaut est défini via un processus ponctuel (processus de comptage qui est un processus à saut aléatoire)
le temps de défaut est définit comme le temps de saut du processus ponctuel dont la fréquence est caractérisé par l'intensité (éventuellement stochastique) est appelé mathématiquement comme des temps totalement inacessibles.

II - 1 - Modèle de Merton

Dans l'approche structurelle, le modèle pionier est celui proposé par Merton en 1973.
On modélise la valeur de l'entreprise par l'EDS :

$$dV_t = V_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t) \quad t \geq 0$$
$$V_0 > 0$$

qui donne la même diffusion (MB géométrique) comme pour le modèle Black-Scholes.
Ici, on a $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$ et $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB standard.

On suppose que l'entreprise doit sa dette à une date fixe $T > 0$ avec un montant $L > 0$.
Le défaut arrive si à $T > 0$, la valeur de l'entreprise n'arrive pas à rembourser sa dette i.e $V_T < L$ au cas contraire i.e $V_T \geq L$, il n'y a pas de défaut.

Dans ce modèle il n'y a qu'une seule date possible pour le défaut qui est l'échéance de la dette T.

On a donc $\tau = T\,\mathbb{1}_{\{V_T < L\}} + \{+\infty\}\,\mathbb{1}_{\{V_T \geq L\}}$

On peut calculer la probabilité de défaut :

$$\mathbb{P}(\tau < t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < T \\ \mathbb{P}(\tau = T) = \mathbb{P}(V_T < L) & \text{si } t = T \end{cases} \qquad \text{où } V_T = V_0\, e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T}$$

On désigne par $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, où $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$.
On peut ainsi calculer la probabilité conditionnelle de défaut $\mathbb{P}(\tau > t \mid \mathcal{F}_s)$ $(s<t)$

Pour l'émetteur de dette, il reçoit le montant L à T s'il n'y a pas de défaut. S'il y a défaut à T, l'émetteur va recevoir un remboursement partiel $V_T < L$.

Le taux de recouvrement est $R = \frac{V_T}{L} \in [0,1]$

La fonction payoff de la dette est :

$$\begin{aligned} D_T &= L\,\mathbb{1}_{\{\tau=+\infty\}} + V_T\,\mathbb{1}_{\{\tau=T\}} \\ &= L\,\mathbb{1}_{\{V_T\geq L\}} + V_T\,\mathbb{1}_{\{V_T<L\}} \\ &= \min(V_T, L) \end{aligned}$$

On s'intéresse à calculer la valeur de la dette à la date $t=0$ (valeur initiale, prix) et à $t\in[0,T]$ (valeur dynamique)
L'idée est similaire que pour le modèle Black-Scholes où on calcule le prix (initial et dynamique) d'une option Call ou Put.

On peut calculer directement comme dans B-S :

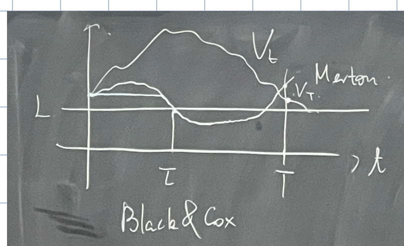
$$\begin{aligned} V_t(D) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} D_T \mid \mathcal{F}_t] \quad \text{où } r>0 \text{ est le taux d'intérêt} \\ &= e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[L\,\mathbb{1}_{\{V_T\geq L\}} + V_T\,\mathbb{1}_{\{V_T<L\}} \mid \mathcal{F}_t] \\ &= e^{-r(T-t)}\left[L\,\mathbb{P}(V_T\geq L\mid\mathcal{F}_t) + \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_T\,\mathbb{1}_{\{V_T<L\}}\mid\mathcal{F}_t]\right] \end{aligned}$$

avec des calculs similaires.

Une méthode alternative est d'utiliser le lien entre le payoff D_T et celui d'un Call ou Put, et puis on remplace la formule B-S directement $\rightarrow$ cf TD.

II-2- Modèle Black and Cox

En pratique, un évènement de défaut peut arriver à un temps arbitraire (et non nécessairement un temps un temp fixe T) il est donc naturel de généraliser le modèle de Merton à un modèle où le défaut arrive dès que la valeur de l'entreprise descend au-dessous de la barrière



En terme mathématique, il s'agit un temps de passage (pour entrer ou sortir d'un domaine)
$(X_t)_{t\geq 0}$ $\quad \tau = \inf\{t\geq 0,\ X_t\notin D\}$ avec $D=[L,+\infty[$

Le temps aléatoire ainsi défini est un temps d'arrêt par rapport à la filtration engendrée par $(X_t)_{t\geq0}$.

Définit° du temps arrêt : $\{\tau\leq t\}\in\mathcal{F}_t$
$\{\tau\leq t\} = \bigcup_{s\leq t}\{\tau = s\} \in\mathcal{F}_t$

Car $\{\tau=t\} = \{\forall s<t,\ X_s\notin D \text{ et } X_t\in D\}$ qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable car tout X_s est $\mathcal{F}_t$-mesurable $s\leq t$, X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Dans le modèle Black & Cox on modélise encore la valeur de l'entreprise par

$$dV_t = V_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t) \quad \text{avec } V_0 > L$$

et on définit $\tau := \inf\{t\geq 0,\ V_t\leq L\}$. (*)

On a que τ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt et on a $\{\tau > t\} = \{\min_{0\le s\le t} V_s > L\}$

Par $V_t = V_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$

On peut réécrire $\tau := \inf\{t \ge 0,\ W_t + \frac{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)}{\sigma} t \le \frac{1}{\sigma}\ln(\frac{L}{V_0})\}$

On distingue par $X_t = W_t + \vartheta t$ où $\vartheta = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{1}{2}\sigma$

et processus infimum par:

$$m_t^X = \min_{0\le s\le t} X_s \qquad \text{où } \boxed{\tilde{L} = \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{L}{V_0}\right)}$$

Ainsi, (*) devient $\{\tau > t\} = \{m_t^X > \tilde{L}\}$

On cherche à calculer la probabilité de survie, ce qui consiste à calculer $\mathbb{P}(m_t^X > \tilde{L})$

① On commence à travailler avec m_t^W pour un MB sans drift.

② On fait un changement de probabilité tel que $X_t = W_t + \vartheta t$ soit un MB sous la nouvelle proba pour appliquer le résultat ①

Lemme: (Principe de Reflet)

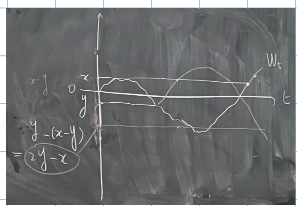
Soit W un mouvement brownien.

$\forall y \le 0$, et toute fonct° $f(\cdot)$ tq $\mathbb{E}[f(W_t)]$ existe,

On a:

$$\mathbb{E}[f(W_t)\mathbb{1}_{\{W_t\ge y,\, m_t^W \le y\}}] = \mathbb{E}[f(2y - W_t)\mathbb{1}_{\{2y-W_t\ge y\}}]$$

Preuve:



On remarque que $\forall y\le 0$ et $x\ge y$,

$\mathbb{P}(W_t \ge x, m_t^X \le y) = \mathbb{P}(2y - x \ge W_t) = \mathbb{P}(2y - W_t \ge x)$

Alors, on a $\mathbb{E}[f(2y-W_t)\mathbb{1}_{\{2y-W_t\ge y\}}] \underset{U=2y-W_t}{=} -\int_y^\infty f(x)\, d_x \mathbb{P}(U\ge x)$

$$= -\int_y^\infty f(x)\, d_x \mathbb{P}(W_t\ge x, m_t^W \le y)$$

$$= \mathbb{E}[f(W_t)\mathbb{1}_{\{W_t\ge y\}}\mathbb{1}_{\{m_t^W\le y\}}]$$

On obtient ainsi la loi jointe de (W_t, m_t^W)

En particulier si $f(x) = 1$ on a

$$\mathbb{P}(W_t\ge y,\ m_t^W\le y) = \mathbb{P}(2y - W_t \ge y)$$
$$= \mathbb{P}(W_t \le y)$$

Maintenant, on considère $X_t = W_t + \vartheta t$

Proposition:

$\forall y\le 0$ et $x\ge y$, on a:

$$\mathbb{P}(X_t \ge x,\ m_t^X \le y) = e^{2\vartheta y}\mathcal{N}\left(\frac{2y - x + \vartheta t}{\sqrt{t}}\right)$$

où $\mathcal{N}(\cdot)$ est la fonct° de répartit° de $\mathcal{N}(0,1)$

Preuve :

On fait le changement de probabilité pour que $X_t = W_t + \vartheta t$ est un MB avec (Girsanov)

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = e^{-\vartheta W_T - \frac{1}{2}\vartheta^2 T} \quad \text{sur } \mathcal{F}_T$$

et $(X_t)_{t\geq 0}$ est un $\hat{\mathbb{P}}$-MB et on a :

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}} = e^{\vartheta W_T + \frac{1}{2}\vartheta^2 T} = \underbrace{e^{\vartheta X_T - \frac{1}{2}\vartheta^2 T}}_{\hat{\mathbb{P}}\text{- martingale}}$$

Donc $\mathbb{P}(X_t \geq x, m_t^X \leq y) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{\{X_t \geq x, m_t^X \leq y\}}]$

$$= \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}[\underbrace{e^{\vartheta X_t - \frac{1}{2}\vartheta^2 t}}_{f(X_t)} \mathbb{1}_{\{X_t \geq x, m_t^X \leq y\}}] \quad \text{avec } X_t \text{ un } \hat{\mathbb{P}}\text{-MB}$$

$$= \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}[e^{\vartheta(2y - X_t) - \frac{\vartheta^2}{2}t} \mathbb{1}_{\{2y - X_t \leq x\}}]$$

$$= e^{2\vartheta y}\, \mathbb{E}_{\hat{\mathbb{P}}}[\underbrace{e^{-\vartheta X_t - \frac{\vartheta^2}{2}t}}_{\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\hat{\mathbb{P}}}} \mathbb{1}_{\{X_t \leq 2y - x\}}]$$

$$= e^{2\vartheta y}\, \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[\mathbb{1}_{\{X_t \leq 2y - x\}}] \qquad \frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\hat{\mathbb{P}}} = e^{-\vartheta X_t - \frac{1}{2}\vartheta^2 t} \text{ sur } \mathcal{F}_t \qquad \text{Thm de Girsanov}$$

2^e chg^t de proba

$$= e^{2\vartheta y}\, \mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{P}}}[\mathbb{1}_{\{\tilde{W}_t \leq 2y - x + \vartheta t\}}] \qquad \tilde{W}_t = X_t + \vartheta t \text{ est un } \tilde{\mathbb{P}}\text{-MB}$$

$$= e^{2\vartheta y}\, \mathcal{N}\left(\frac{2y - x + \vartheta t}{\sqrt{t}}\right)$$

Proposition :

$\forall y \leq 0$, on a

$$\mathbb{P}(m_t^X \geq y) = \mathcal{N}\left(\frac{-y + \vartheta t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\vartheta y}\mathcal{N}\left(\frac{y + \vartheta t}{\sqrt{t}}\right)$$

Preuve :

$\mathbb{P}(m_t^X \geq y) = \mathbb{P}(X_t \geq y, m_t^X \geq y)$

Alors, par la proposition précédente :

$$\mathbb{P}(X_t \geq x, m_t^X \leq y) = \mathbb{P}(X_t \geq x, m_t^X \leq y)$$
$$= \mathbb{P}(W_t + \vartheta t \geq x) - e^{2\vartheta y}\mathcal{N}\left(\frac{2y - x + \vartheta t}{\sqrt{t}}\right)$$
$$= \mathcal{N}\left(\frac{-x + \vartheta t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\vartheta y}\mathcal{N}\left(\frac{2y - x + \vartheta t}{\sqrt{t}}\right)$$

En prenant $x = y$, on obtient le résultat de la proposition.

Proposition : La probabilité conditionnelle de survie est donnée par $\{\tau > t\} = \{m_t^X > \Sigma\}$

$$\mathbb{P}(\tau > T \mid \mathcal{F}_t] = \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}\left[\mathcal{N}\left(\frac{-\Sigma + X_t + \vartheta(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) - e^{2\vartheta(\Sigma - X_t)}\mathcal{N}\left(\frac{\Sigma - X_t + \vartheta(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right)\right] \quad \text{où } X_t = W_t + \vartheta t$$

$$\vartheta = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2} \quad \text{et} \quad \Sigma = \frac{1}{\sigma}\ln\left(\frac{c}{V_0}\right)$$

Preuve :

On a $\{\tau > T\} = \{m_T^V > c\} = \{m_T^X > \Sigma\}$

Par la proposition précédente et la propriété Markovienne, on calcule $\mathbb{P}(m_T^X > \Sigma \mid \mathcal{F}_t)$ en remplaçant la barrière Σ par $\Sigma - X_t$ (et t par $T-t$ dans la prop précédente.)

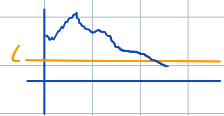
et on obtient la proposition.

III - Modélisation par l'approche forme-réduite

Dans la literature, il y a 2 approches principales pour modéliser le temps de défaut

$\begin{cases} \text{Approche structurelle} \quad \text{Merton} \quad \text{Black-Cox} \\ \text{Approche forme-réduite} \end{cases}$

Approche structurelle :



$(V_t)_{t\geq 0}$ valeur de l'entreprise
$dV_t = V_t(\mu dt + \sigma dW_t)$

Temps de défaut est modéliser quand V_t dépasse au-dessous de $L \in \mathbb{R}_+$, la barrière de défaut.

Merton : $\tau = T \mathbb{1}_{\{V_T < L\}} + \infty \mathbb{1}_{\{V_T \geq L\}}$

Black & Cox $\tau = \inf\{t \geq 0,\ V_t < L\}$

$\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $\quad \mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$ $\quad \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ temps de défaut τ est un temps d'arrêt p/r à $\mathbb{F}$, de plus, τ est prévisible

Dans cette approche, on peut "prédire" l'arrivée de défaut quand le processus V_t descend et approche de L.

Une approche alternative où le défaut est modélisé avec plus de "surprise" est par l'approche forme-réduite (reduced-form) qui fait intervenir des processus de saut.

$\{t = 0, 1, \ldots, N\}$. $(X_t)_t$ adapté X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable

(α_t) prévisible α_t est $\mathcal{F}_{t-1}$-mesurable $t = 1, \ldots, N$

α_0 est $\mathcal{F}_0$-mesurable

α_t est $\mathcal{F}_{t^-}$-mesurable.

1. qui fait intervenir des processus de saut
2. où τ n'est plus un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt c-à-d, l'information dans $\mathcal{F}_t$ ne suffit pas pour savoir si $\{\tau \leq t\}$ ou non (si le défaut est avant t ou non)

Donc nous devons distinguer les deux types d'informations.

* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ l'information ambiante qui contient les observations quotidiennes au marché : prix des actifs, valeur de l'entreprise taux d'intérêt.
* Préciser l'information de défaut par une filtration $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t\geq 0}$

En pratique, ce que l'on observe sur un évènement de défaut à la date $t > 0$ contient :

* Si le défaut a lieu avant ou après t
* Si le défaut est déjà arrivé avant t le temps exact de défaut τ

Soit $\mathcal{D}_t = \sigma(\mathbb{1}_{\{\tau \leq s\}}, s \leq t)$
$= \sigma(D_s, s \leq t) \quad (\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t))$

l'informat°