C’est quoi un processus stochastique ?

- Jusqu’à maintenant, les cours de probabilités que vous avez suivis se sont intéressés essentiellement à
  - l’étude d’une variable aléatoire (loi, espérance, variance,…)
  - l’étude d’un couple ou d’un vecteur aléatoire (loi, loi jointe, couple ou vecteur des espérance, matrice de covariance).
  - Le comportement de suites formées à partir de v.a. i.i.d. (LGN, TCL, théorèmes statistiques,…)
- Ce cours s’intéresse aux **processus stochastiques**, c’est-à-dire aux familles de variables aléatoires, indexées par un paramètre discret ou continu, représentant le temps.
- Avant de vous pencher sur ce cours, prenez le temps de revisiter vos cours de calcul intégral et probabilité, en vous penchant en particulier sur les notions de mesurabilité, lois usuelles discrètes et à densités, lois conjointes, espérance conditionnelle, lois fortes de grands nombres, théorème central limite... Sans que cela soit limitatif !

Définition d'un processus stochastique

- Définition (Processus stochastique))
- Un processus stochastique $(X_t)_{t \in T}$ est une suite de variables aléatoires indicée sur le temps.
  - Si $t \in \mathbb{N}$ alors on parle de processus stochastique en temps discret.
  - Si $t \in \mathbb{R}^+$ou / ***un intervalle de temps*** alors on parle de processus stochastique en temps continu.
- $(X_t)_{t \in T}$ ou autrement écrit $\{X_t; t \in \boldsymbol{T}\}$ est une quantité qui évolue de façon aléatoire dans le temps.
- La loi d'un processus $(X_t)_{t \in T}$ sera donnée par la loi conjointe de $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$, pour tout choix de $n \in \mathbb{N}^*$ et de $t_i \in \boldsymbol{T}$, et non simplement par la loi de chacune des variables aléatoires X_t.

Pourquoi les modèles aléatoires ?

Objectif : construire des modèles à partir de phénomènes réels

- Modélisation de phénomènes réels aléatoires qui évoluent dans le temps.
- Suite, famille de variables aléatoires. Evolution dans le temps d'une v.a.

Moyens : comment et avec quoi ?

- Exemples de chaîne Markov, de processus de Poisson et de martingales
  - Exemple 1 : Cours de l'action Amazon
  - Exemple 2 : Modèle SIR de diffusion d'une épidémie
  - Exemple 3 : Modèle de ruine en temps discret

Exemple 1 : Cours de l'action Amazon (1/3)

- Soit $(X_t)_{t\epsilon N}$ la valeur journalière de l'action Amazon à la clôture du marché. On suppose que le cours de l'action augmente de α % avec probabilité p diminue de β % avec probabilité 1-p.
- ***Première modélisation*** : l'action vaut à l'instant t : $X_{t+1} = Z_i.X_t$ où Zi est une suite de va de loi 1+ α avec proba p et 1- β avec proba 1-p.
- Si les Z_i sont iid, indépendants de X_0 et si $E(Z_i)=1$, alors on a $E(X_{t+1} \mid \sigma(X_t))= E(Z_i).X_t =X_t$.
  On dit que le processus X est une martingale.
- **Une martingale sera en particulier un processus dont l'espérance est constante. L'espérance conditionnelle du processus sachant l'état du processus à l'instant t sera le processus à l'instant t lui-même**

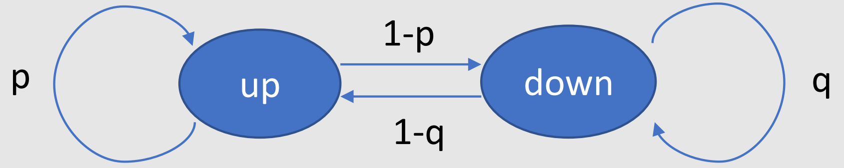
Exemple 1 : Cours de l'action Amazon (2/3)

- Soit N le nombre de jour d'augmentations, à l'instant t, l'action vaut

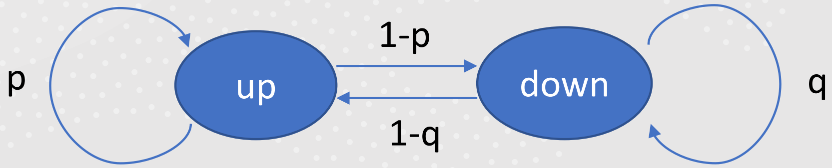
$$X_t = (1+ \alpha)^N (1- \beta)^{t-N} X_0$$

On peut par exemple calculer la loi de N en fonction de t et p, *α et* β.

- ***2ème modélisation possible*** : On peut raffiner le modèle en supposant qu'une augmentation est plus probable si une augmentation est observée le jour d'avant.
- On définit le processus $\{Y_t \,;\, t \in \boldsymbol{N}\}$ indiquant si le cours de l'action augmente ou diminue à l'instant $t \in \boldsymbol{N}$.
- L'espace d'état (valeur possibles de Y_t) est E = {up, down}.
- On a, pour $t \in \boldsymbol{N}$,
  - P(Yt+1 = up |Yt = up) = p et P(Yt+1 = down | Yt = up) = 1-p
  - P(Yt+1 = up |Yt = down) = 1-q et P(Yt+1 = down | Yt = down) = q



Exemple 1 : Cours de l'action Amazon (3/3)



- Lorsque l'état du processus ne dépend que de la valeur précédente, on parle de processus de Markov. On dit aussi : lorsque l'évolution future d'un processus ne dépend que de l'état présent, c'est un processus de Markov.
- $\{Y_t \,;\, t \in \boldsymbol{N}\}$ définit **une chaîne de Markov**. On parle de *chaîne de Markov cachée* influençant la valeur du processus X_t.
- Le graphe ainsi dessiné s'appelle le graphe de transition de la chaîne de Markov.

Exemple 2 : Modèle SIR de diffusion d'une épidémie

- Soit une population de N individus placés dans 3 compartiments
  - Compartiment S pour Sains/Susceptibles
  - Compartiment I pour Infectés/Infected
  - Compartiment R pour Guéris/Removed

Sains → Infectés → Guéris

- On modélise le nombre d'individus dans chaque compartiment au cours du temps via les processus

$$S_t,\ I_t \text{ et } R_t = N - (S_t + I_t) \text{ avec } t \in \mathbf{N}.$$

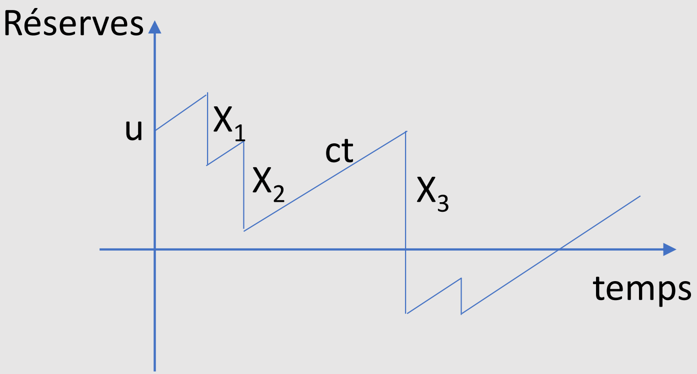
- Le modèle évolue selon deux règles, durant chaque période,
  - chaque infecté contamine un susceptible donné avec une probabilité p,
  - les infectés vont dans le compartiment R
- Chaque susceptible est contaminé durant une période donnée avec une probabilité $1-(1-p)I_t$, le nombre de susceptible S_t+1 à t+1 dépend du nombre de susceptibles St à l'instant t et du nombre d'infecté It à l'instant t avec

$$S_{t+1} \sim Bin(S_t,(1-p)I_t)$$

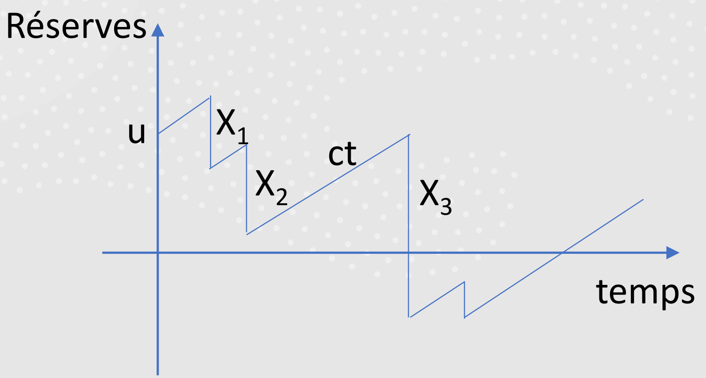
- L'épidémie s'arrête à T lorsque le nombre d'infectés est 0 ($I_T = 0$), on s'intéresse à la taille finale de l'épidémie donnée par $N - S_T$, soit combien de susceptibles ont été contaminés.
- On a une fois de plus un processus (S_t, I_t) avec une dépendance à l'état précédent, donc un processus Markovien en temps discret.

Exemple 3 : Modèle de ruine en temps discret

- Soit une compagnie d'assurance non-vie,
  - détenant un capital initial $u > 0$,
  - récupérant $c > 0$ sur chaque période d'exercice au titre des primes,
  - indemnisant X_i, variable aléatoire positive, à l'un de ses assurés à chaque sinistre.
  - On note $N(t)$ le nombre de sinistres indemnisés entre 0 et t, et X_i le montant du i-ème sinistre
- Soit $\{R_t\ ;\ t \epsilon \mathbf{N}\}$ la valeur de la réserve financière à la fin de chaque période d'exercice.
- On a $R_0 = u$ et $R_t = u+ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$, où $X_1, X_2, \ldots$ sont des v.a.i.i.d. positives



Exemple 3 : Modèle de ruine en temps discret



- On a $R_0 = u$ et $R_t = u+ct - \sum_{k=1}^{N(t)} X_k$, où $X_1, X_2, \ldots$ sont des v.a.i.i.d. positives
- On s'intéresse à la probabilité de ruine avant T définit par $\psi(u,T) = \mathbf{P}(R_t < 0$, pour un certain $t \leq T)$
- Chaque sinistre indemnisé va correspondre à un « saut ». Il va falloir définir le processus qui va régir la survenue des sinistre : **N(t)** va être défini à l'aide d'**un processus de Poisson** (loi exponentielle de survenance des sauts, indépendance des sauts,…).
- Calibrer la prime **c** → tarification, typiquement $c = E(X_i)(1+\eta)$, avec un chargement de sécurité $\eta > 0$.
- Calibrer le capital **u** → provisionnement. Choisir u grand permet d'éviter une ruine à court terme.
- → Cours de **Provisionnement Non-Vie** en 2A au 2ème semestre, **Théorie de la Ruine, Tarification et Provisionnement** en 3A, outils stochastiques à définir avant !

Pourquoi le calcul stochastique ?

- Probabilité Risque Neutre pour le pricing en finance : besoin de définir le calcul stochastique

  *Une **probabilité** Risque Neutre est une probabilité sous laquelle*

  *le **prix actualisé des actifs** est une **martingale**.*

- -> définir ce qu'est une martingale = chapitre 1
- -> définir comment on modélise des prix : besoin d'introduire Mouvement Brownien (chapitre 2), et comment on écrit des modèles avec (chapitre 3 sur le calcul d'Itô, l'intégrale stochastique et les Equations Différentielles Stochastiques)
- -> si il faut trouver une probabilité sous laquelle le prix est une martingale, il faut apprendre à changer de probabilité = chapitre 4 (Théorème de Girsanov)
- Tout cela avant le cours de Théorie des Options et tout le cours de pricing au 2ème semestre !

Plan du cours

Modèles Aléatoires Discrets

- Chaînes de Markov
- Processus de Poisson

Calcul Stochastique

- Martingales discrètes et continues
- Mouvement Brownien
- Intégrale Stochastique
- Calcul D'Itô
- Equations Différentielles Stochastiques
- Théorème de Girsanov

Chapitre 0 : Généralités sur les processus stochastiques

1/ Premières définitions

Rappels

- On appelle ***tribu*** ou ***σ-algèbre*** sur un ensemble Ω un ensemble de parties de Ω qui vérifie :
  - $\emptyset$ et Ω sont dans la tribu
  - La tribu est stable par complémentaire
  - La tribu est stable par réunion dénombrable
- Cas particulier : la tribu des Boréliens $\mathcal{B}$ (tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles ouverts)

Premières définitions : Filtration

- On commence par introduire une notion mathématique qui joue un rôle central en théorie des marchés financiers en particulier :

Définition : Soit $(\Omega, F, \mathbb{P})$ un espace de probabilité muni d'une tribu ***F*** et $\{F_t, t\geq 0\}$ une famille de sous-tribus de ***F***. On dit que $\{F_t, t\geq 0\}$ est une filtration si c'est une famille croissante de sous-tribus, au sens où

$$F_s \subseteq F_t \text{ si } s\leq t$$

- Il faut comprendre la tribu F_t comme l'« information connue au cours du temps » : plus le temps croît (s≤t), plus on a d'information ($F_s \subseteq F_t$).

Filtration

- Une filtration $\{G_t, t \geq 0\}$ est dite **plus grosse que** $\{F_t, t \geq 0\}$ si $F_t \subseteq G_t \forall t \geq 0$.
- Une filtration est dite **normale** si elle vérifie les propriétés suivantes :
  - Les négligeables au sens large sont dans tous les F_t : $\mathbb{P}(A) = 0 \Rightarrow A \in F_0$
  - La filtration est continue à droite : $F_t = F_{t+} = \cap_{s>t} F_s$
- Si $\{F_t, t \geq 0\}$ est une filtration sur un espace de probabilité $(\Omega, F, \mathbb{P})$, on dit que $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ est **un espace de probabilité filtré**.

Définitions : Processus Stochastiques

- Définition : Soit $(\Omega, \boldsymbol{F}, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbf{P})$ un espace de probabilité filtré
  - Une famille $\{X_t, t \geq 0\}$ de variables aléatoires sur Ω est appelée **processus stochastique**
  - On appelle **processus stochastique discret** si il est indexé par un espace de temps discret, typiquement **N**.
  - On appelle **processus stochastique continu** si il est indexé par un espace de temps continu, typiquement $\mathbf{R}^+$ **ou un intervalle [0,T]**.

Processus adapté – Filtration naturelle

- On dit que le processus $\{X_t, t\geq 0\}$ est **adapté à une filtration** $\{F_t, t\geq 0\}$ si

  X_t est F_t-mesurable pour tout $t\geq 0$.

- A un processus stochastique X on peut associer sa **filtration naturelle $\mathbf{F}^X$=**$(\sigma(X_s, s\leq t), t\geq 0)$, qui est la plus petite filtration telle que le processus X soit adapté.
- À un processus stochastique X on associe plus généralement sa filtration naturelle complétée des ensembles de mesure nulle (négligeables) (= plus petite filtration contenant à la fois la filtration naturelle engendrée par le processus, et les négligeables).
- La tribu $\mathbf{F}^X_t$ représente l'information portée par X_t à l'instant t
- Evidemment, X est un processus $\mathbf{F}^X$-adapté.
- On peut montrer que si X a p.s. des trajectoires continues à droite, avec des limites à gauche (càdlàg), en particulier continues, alors la filtration $\{\mathbf{F}^X_t , t\geq 0\}$ est continue à droite.

Egalités de processus stochastiques

- **Définition** : on dit que deux processus X et Y sont **égaux à modification près** si

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X_t} = \boldsymbol{Y_t}) = \mathbf{1} \text{ pour tout } t\geq 0$$

- *Remarque* : si deux processus continus à droite sont égaux à modification près, alors

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X_t}=Y_t, \forall t \geq 0)=1$$

En effet, comme Q est dénombrable et que l'intersection d'une famille dénombrable d'événements certains est certain, on a

$$\mathbb{P}(\boldsymbol{X_t} = Y_t, \forall t \in \mathbb{Q})=1$$

si X et Y égaux à modification près.

Comme $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$ et X et Y continus à droite, les trajectoires de X et Y sont uniquement déterminées par leurs valeurs sur $\mathbb{Q}$.

D'où $\mathbb{P}(\boldsymbol{X_t}=Y_t, \forall t \geq 0)=1$.

Egalités de processus stochastiques

- Définition : On dit que 2 processus X et Y sont **égaux en loi**, et on écrit $X =^d Y$
  Si pour tout n € **N** et tout $(t_1,\ldots,t_n)$, on a

$$\{X_{t_1},\ldots,X_{t_n}\} =^d \{Y_{t_1},\ldots,Y_{t_n}\}$$

On dit que X et Y sont **des versions l'un de l'autre**.

Remarque 1 : on remarque immédiatement que si X et Y sont continus à droite et modifications l'un de l'autre, alors ils sont égaux en loi.

Remarque 2 : la réciproque est fausse. En effet, si X est symétrique (au sens ou $X =^d -X$, alors X et –X sont des versions l'un de l'autre, mais évidemment $\mathbf{P}(X_t = -X_t, \forall\, t \geq 0)=1$ n'est vrai que si X=0 p.s. !!

Processus uniformément intégrable

- **Définition** : une famille de variables aléatoire H, et plus généralement un processus stochastique H est **uniformément intégrable** si

$$Sup_{X\in H} \int_{\{|X|>a\}}^{\cdot} |X| d\mathbb{P} \xrightarrow[a\longrightarrow+\infty]{} 0$$

Cela équivaut à

$$\forall \epsilon > 0, \exists a_0, tq\ \forall X \in H, \forall a \geq a_0, \int_{\{|X|>a\}}^{\cdot} |X| d\mathbb{P} \leq \epsilon$$

Ou encore

$$Sup_{X\in H}\ \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_{|X|\geq a}) \xrightarrow[a\longrightarrow+\infty]{} 0$$

- Propriété : une famille de v.a. H est uniformément intégrable ssi les 2 conditions suivantes sont satisfaites :
  I. *H est bornée dans L^1, autrement dit* $\exists c \in \mathbb{R}, tq\ \mathbb{E}(|X|) \leq c, \forall X \in H.$
  II. $\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0\ tq\ \forall A \in F, \mathbb{P}(A) \leq \alpha \Rightarrow \mathbb{E}(|X| \mathbb{1}_A) \leq \epsilon, \forall X \in H.$

Chapitre 0 : Généralités sur les processus stochastiques

2/ Propriétés fonctionnelles

Propriétés Fonctionnelles

- Un processus stochastique $\{X_t, t \geq 0\}$ est en réalité une fonction à 2 variables : ω et t.
  - A t fixé, en tant que fonction de ω, Xt(ω) : Ω→R est une variable aléatoire réelle
  - A ω fixé, en tant que fonction de t, Xt(ω) : [0,T]→R est une fonction réelle, appelée trajectoire du processus stochastique X.
- Les propriétés des trajectoires, ou propriétés trajectorielles des processus stochastiques, sont directement issues des propriétés des fonctions d'une variable réelles.

Propriétés Fonctionnelles

- Un processus X est croissant si p.s. $t \to X_t(\omega)$ est une fonction croissante, c'est-à-dire si $X_s(\omega) \leq X_t(\omega)\ \forall\ s \leq t$.
- De même on dira qu'un processus est continu à droite, continu, dérivable, de classe C^2,… si la fonction $t \to X_t(\omega)$ vérifie la propriété considérée.
- Un processus est dit à variations finies (VF) sur [0,T] si

$$\sup_{0 \leq t_0 < \ldots < t_n \leq t} \left(\sum_{k=0}^{n} |X_{t_{k+1}} - X_{t_k}|\right) < +\infty$$

- Cette dernière notion, assez délicate, joue un rôle fondamental en théorie de l'intégration. Elle signifie que la longueur de la courbe trajectoire de X est localement finie (quand cette longueur est infinie, ce qui sera le cas de la courbe brownienne par exemple, on parle de processus à variations infinies, et on mesure la complexité de la courbe à l'aide de notions de dimension fractale et de mesure de Hausdorff).

Propriétés Fonctionnelles

Propriétés des processus à variation finie :

- **Propriété 1** : Si X est dérivable, alors X est à Variations Finies
- **Propriété 2** : Dans le cas réel, on peut les caractériser et montrer que

X est à Variations Finies

ssi

X est la différence entre 2 processus croissants

Chapitre 0 : Généralités sur les processus stochastiques

3/ Processus Gaussiens

Processus Gaussiens

- **Définition :** Un processus X est appelé processus gaussien si toute combinaison linéaire finie de X_t est une variable aléatoire gaussienne. Autrement dit, si

$$\forall n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n, a_1, \dots, a_n, \sum_{i=1}^{n} a_i X_{t_i} \text{est une v.a. gaussienne}$$

- Un processus gaussien est caractérisé par 2 fonctions :
  - Sa **fonction espérance** : $t \mapsto m(t) = \mathbb{E}[X_t]$
  - Sa **fonction de covariance** : $(s,t) \mapsto \Gamma(s,t) = \mathbb{E}\left[\left(X_t - m(t)\right)\left(X_s - m(s)\right)\right] = Cov(X_t; X_s)$
- La fonction $\Gamma(s,t)$ est de type positif, au sens où

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, t_1, \dots, t_n, a_1, \dots, a_n, \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j \Gamma(t_i, t_j) \geq 0$$

Processus gaussiens

- **Théorème (Kolmogorov)** :
Soit $m : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction quelconque, et Γ: $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction symétrique de type positif. Alors il existe un processus gaussien X de fonction espérance m et de fonction de covariance Γ.

- **L'espace gaussien** engendré par un processus gaussien X est le sous espace de $L^2(\Omega)$ engendré par les v.a.r. centrées $\{X_t - \mathbb{E}[X_t], t \geq 0\}$, c'est-à-dire le sous-espace formé des combinaisons linéaires de ces variables centrées et de leurs limites en moyenne quadratique.

Processus gaussien et mouvement Brownien

- **Exercice** : Montrer que la fonction $(s,t) \mapsto \inf(s,t)$ est une fonction symétrique de type positif sur $\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, autrement dit que pour tout

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, t_1 \leq \cdots \leq t_n, a_1, \ldots, a_n, \sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j inf(t_i, t_j) \geq 0$$

- **Définition** : Le processus gaussien centré ayant pour fonction de covariance $(s,t) \mapsto \inf(s,t)$ est appelé **mouvement brownien**.

Processus stationnaires

- **Définition** : Un processus est dit **stationnaire** si

$$\{X_{t+s}, t \geq 0\} =^d \{X_t, t \geq 0\}, \forall s \in \mathbb{R}^+$$

En particulier, tous les ont la même loi.

- **Remarque** : on voit immédiatement qu'un processus gaussien stationnaire est tel que sa fonction espérance est constante et sa fonction de covariance $\Gamma(s,t)$ ne dépend que de $(s-t)$.
- Ne pas confondre :

- **Définition : Processus à accroissements stationnaires (PAS)**

$$\forall t \in \mathbb{T}, \forall s \geq 0, la\ loi\ de\ X_{t+s} - X_t\ ne\ dépend\ pas\ de\ t$$

Chapitre 0 : Généralités sur les processus stochastiques

4/ Temps d’arrêt

Définition d'un temp d'arrêt

- **Définition** : Soit $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. Un temps d'arrêt relativement à la filtration $\{F_t\}_{t\geq 0}$ est une variable aléatoire τ à valeurs dans $\mathbb{R}^+ \cup +\infty$ telle que

$$\{\tau \leq t\} \in F_t \,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

- **Remarque** : par stabilité des tribus par passage au complémentaire, la définition est équivalente à

$$\{\tau > t\} \in F_t \,, \qquad \forall t \in \mathbb{R}^+$$

- **Remarque importante** : cette définition est valable pour temps discret ET temps continu.

Définition en temps discret

- ATTENTION : c'est bien l'événement $\{\tau \leq t\}$ et non l'événement $\{\tau = t\}$ qui intervient dans la définition du temps d'arrêt dans le cas général.

- <u>**En temps discret uniquement**</u> :
- **Définition 2** : Relativement à une filtration discrète $\{F_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, un temps d'arrêt en temps discret est plus simplement défini par

$$\{\tau = n\} \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

- **Exercice** : montrer que ceci est équivalent à

$$\{\tau \leq n\} \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$$

Pourquoi n'est-ce pas vrai dans le cas continu ?

Exercice : équivalence des 2 définitions en temps discret

- Supposons $\{\tau \leq n\} \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$, et montrons $\{\tau = n\} \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\{\tau = n\} = \underbrace{\{\tau \leq n\}}_{\in F_n} \cap \underbrace{\{\tau \leq n-1\}^c}_{\in F_{n-1} \subset F_n} \quad \in F_n$$

- Supposons $\{\tau = n\} \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$, et montrons $\{\tau \leq n\} \in F_n, \forall n \in \mathbb{N}$

$$\{\tau \leq n\} = \bigcup_{k=0}^{n} \underbrace{\{\tau = k\}}_{\in F_k \subset F_n} \qquad \in F_n$$

- Les 2 définitions sont donc équivalentes en temps discret.
- **ATTENTION** : ce n'est pas vrai en temps continu car une réunion non dénombrable d'éléments dans une tribu n'est pas nécessairement dans la tribu. Typiquement, l'événement $\{\tau = t\}$ est généralement de probabilité nulle en temps continu.
- DONC : gardez en tête la 1ère définition en priorité.

Interprétation : c’est quoi un temps d’arrêt ?

- Un temps d’arrêt doit être vu comme un temps aléatoire qui suit l’évolution aléatoire d’un phénomène sous-jacent.
- Notion de décision d’arrêt conforme à l’information disponible au temps t
- Illustrations / exemples :
  - Sortie d’autoroute

  - Cours d’action en bourse : ordres d’achat

Temps d'arrêt p.s. fini / p.s. borné

- **Définitions :**

On dit qu'un temps d'arrêt τ est **presque sûrement fini** si $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = 1$, autrement dit

$$\mathbb{P}(\omega \in \Omega, \exists M \in \mathbb{R}, \tau(\omega) < M) = 1$$

On dit qu'un temps d'arrêt est **presque sûrement borné** si $\exists M \; tq \; \mathbb{P}(\tau < M) = 1$, ou encore

$$\exists M \in \mathbb{R}, tq \; \mathbb{P}(\omega \in \Omega, \tau(\omega) < M) = 1$$

- Bien saisir la différence

Exercices d'application

- **Exercices :**
- Montrer que les constantes sont des temps d'arrêt
- Montrer que si $\sigma\ et\ \tau$ sont des temps d'arrêt, alors $\sigma \wedge \tau = \min(\sigma, \tau)$ et $\sigma \vee \tau = max(\sigma, \tau)$ sont des temps d'arrêt.

- L'exemple le plus simple de temps d'arrêt est un temps déterministe, une constante. En particulier, $\forall n \in \mathbb{N}, n$ est un temps d'arrêt.
- Ainsi, pour tout temps d'arrêt τ, $\tau \wedge n$ est un temps d'arrêt, presque sûrement borné par n.

Premier temps d'atteinte

X

- Un exemple plus élaboré et extrêmement important de temps d'arrêt est ce qu'on appelle le premier temps d'atteinte :

- **Définition** : Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus $(F_t)_{t\geq 0}$ −adapté à valeurs dans $\mathbb{R}$, continu à droite et partant de 0 ($X_0 = 0$). Pour tout $a > 0$, le temps aléatoire
$$T_a = \inf\{t > 0, X_t > a\}$$
est un $(F_t)_{t\geq 0}$ − temps d'arrêt, appelé **premier temps d'atteinte ou de passage au seuil a.**

- **Preuve** : en effet, pour tout $t > 0$, on a l'identification suivante :
$$\{T_a > t\} = \{X_s \leq a, \forall s \leq t\} = \bigcap_{s\in\mathbb{Q}^+\leq t} \{X_s \leq a\}$$

La 2ème égalité provenant de l'hypothèse cruciale de continuité à droite de X, qui est alors entièrement déterminé par ses évaluations sur les rationnels, par densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$. Comme X est F_t − adapté, et par stabilité des tribus par intersection dénombrable, on voit que l'événement de droite est bien dans F_t.

Temps d'atteinte

- Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est un processus continu, on a de plus $T_a = \inf\{t > 0, X_t = a\}$ et $X_{T_a(\omega)}(\omega) = a$.
- On peut montrer de même que $T_a = \inf\{t > 0, X_t < a\}$ est également un temps d'arrêt pour tout $a < 0$.
- D'une manière générale, on peut montrer que si $(X_t)_{t\geq 0}$est un processus càd et adapté, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, et si A est un borélien de $\mathbb{R}^d$, alors $T_A = \inf\{t > 0, X_t \in A\}$, premier temps d'atteinte du borélien A, est un temps d'arrêt. *(démo beaucoup plus difficile…)*
- De même, le n-ième temps d'atteinte d'une valeur ou plus généralement d'un borélien est un temps d'arrêt
- En revanche, ATTENTION : en général, le **dernier temps de passage** en A,
$$L_A = \sup\{t > 0, X_t \in A\}$$
n'est PAS un temps d'arrêt, même dans les situations les plus simples.

Filtration arrêtée

- **Définition** : Soit $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré et τ un temps d'arrêt relativement à $\{F_t, t \geq 0\}$. On appelle Filtration arrêtée en τ la σ-algèbre :

$$F_\tau = \{A \in F, A \cap \{\tau \leq t\} \in F_t, \forall t \in \mathbb{R}^+\}$$

- Pour bien comprendre l'intérêt de cette tribu, remarquons d'abord que

- **Proposition** : τ est F_τ-mesurable

Preuve : les boréliens de $\mathbb{R}^+$ étant engendrés par les intervalles de type $]-\infty; u]$, il suffit de montrer que $\{\tau \leq u\} \in F_\tau$.
C'est évident car $\forall t \in \mathbb{R}^+, \{\tau \leq u\} \cap \{\tau \leq t\} = \{\tau \leq t \wedge u\} \in \mathrm{F}_{t\wedge u} \subset F_t$.

Propriétés – processus arrêté

X

- **Proposition** : Si σ *et* τ sont des temps d'arrêt tels que $\sigma \leq \tau \ p.s.$, alors $F_\sigma \subset F_\tau$.

- ***Preuve*** *: Soit* $A \in F_\sigma$*. Montrons que* $A \in F_\tau$*.*
  $\forall t \geq 0, on\ a\ A \cap \{\tau \leq t\} = A \cap \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\}$ *puisque* $\sigma \leq \tau \ p.s.$
  D'autre part, $\{\tau \leq t\} \in F_t$ *car* τ *est un temps d'arrêt.*
  Et $A \cap \{\sigma \leq t\} \in F_t$ *puisque* $A \in F_\sigma$*.*
  Donc $A \cap \{\sigma \leq t\} \cap \{\tau \leq t\} \in F_t, \forall t \geq 0.$ ∎

Une propriété importante, mais plus difficile à montrer :

- **Proposition** : Soit $X: \mathbb{R}^+ \times \Omega \to \mathbb{R}$ un processus, et τ un temps d'arrêt.
  Rappelons que le ***processus arrêté*** X_τ est défini par $X_\tau(\omega) = X_{\tau(\omega)}(\omega)$.
  Si le processus X est càd et adapté, alors la variable aléatoire $X_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<+\infty\}}$ est F_τ-mesurable.

Séances prochaines

- Modèles Aléatoires Discrets : Chaînes de Markov, définition, exemples et premières propriétés
- Processus stochastiques : Martingales, discrètes et continues, définitions, exemples et premières propriétés