6/03/2024

Théorie des Valeurs Extrêmes

extrême

→ évènement rare = à une probabilité petite de réalisation
↳ dépend de la taille de l'échantillon

→ intensité importante

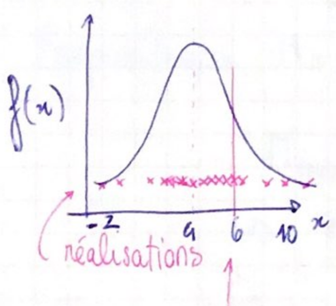
→ pertes financières agrégation des risques pour voir l'impact financier
pertes ≥ 0 ici

queues de distribution seront étudiées dans le cas des extrêmes

ex CAT NAT
dégâts autos, maisons, infrastructures publiques ou privées routes, ...

→ dépendance de certains faits générateurs de pertes financières empêche de modéliser les sinistres futurs

Objectif du cours étude de valeur extrême univariée i i d
1 seule valeur extrême
↳ échantillon n'a pas de dépendance temporelle



seuil pour qu'on ait assez d'échantillons à valeur élevée

Comment calculer la probabilité qu'on ait une réalisation > que 10 (→ maximum) avec les (dernière) observations ?

et on modélise la loi et ensuite on calcule la proba
= loi de dépassement des seuils

Chapitre 1

1. Lois limites maximum

Hyp $X_1, .., X_n$ iid fonction de répartition F

$M_n = \max_{i \in [\![1,n]\!]} X_i$

$$\mathbb{P}[M_n \leq x] = \mathbb{P}[X_1 \leq x, .., X_n \leq x] \underset{iid}{=} F^n(x)$$

en pratique inconnue

mais le but est de modéliser la loi

- $S_n = X_1 + \dots + X_n$

$\mathbb{P}(S_n \leq x) = F^{*n}(x)$ n-ième produit de convolution

$$F^{*n}(x) = \mathbb{P}(S_{n-1} + X_n \leq x) = \mathbb{P}(S_{n-1} \leq x - X_n)$$
$$= \mathbb{E}\left[F^{*n-1}(x - X_n)\right]$$
$$= \int F^{*n-1}(x-y)\,dF(y)$$

F^{*n} inconnue + n'a pas de forme analytique

- $\bar{X}_n = \frac{S_n}{n}$

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n \leq x) = \mathbb{P}(S_n \leq nx) = F^{*n}(nx)$$

2 théorèmes

LGN si $\mathbb{E}[X] < \infty \Rightarrow \bar{X}_n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X]$ $\quad \forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}[|X_n - \mathbb{E}[X]| > \varepsilon] \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$

TCL donne la vitesse de convergence de la moyenne empirique vers la moyenne

$$\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]) \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \mathbb{V}(X)) \quad (\text{si } \mathbb{V}[X] < +\infty)$$

$$\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\bar{X}_n - \mathbb{E}[X]\right) \leq x\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \mathbb{P}(Y \leq x)$$

avec $Y \sim \mathcal{N}(0, \mathbb{V}[X])$

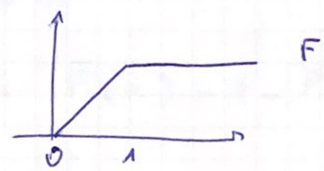
Si on veut approximer une somme on passe par la loi normale.

Pour une loi normale, $f > 0$ sur le support

$\Rightarrow$ probabilité qu'on ait une réalisation plus grande que le max est > 0 car aire > 0

donc max tend vers $+\infty$

$x^F = \sup\{x \mid F(x) < 1\}$ avec $F \sim \mathcal{U}[0, 1[$



$x^F = 1$

si $F(x) \leq 1$ alors $x^F = +\infty$

$F \sim \mathcal{N}(0, 1)$

on s'approche du max sans jamais le toucher

$\Rightarrow x^F = +\infty$.

Propositions $M_n \xrightarrow{\mathbb{P}} x^F$

$M_{n+1} \geq M_n$ $(M_n)_n$ suite croissante p.s

$\Rightarrow M_n \xrightarrow{ps} x^F$

Démonstrations

- $x^F < \infty$ Soit $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|M_n - x^F| > \varepsilon)$

plus grande valeur possible de l'échantillon

$= \mathbb{P}(M_n - x^F > \varepsilon \text{ ou } x^F - M_n > \varepsilon)$

$= \mathbb{P}(\underbrace{M_n > x^F + \varepsilon}_{= \emptyset} \cup x^F - \varepsilon > M_n)$

d'où $\mathbb{P}(|M_n - x^F| > \varepsilon) = \mathbb{P}(x^F - \varepsilon > M_n)$

$$= F^n(x^F - \varepsilon) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

(on a $F(x^F - \varepsilon) < 1$ par définition de x^F)

- $x^F = +\infty$ $\quad M_n \to x^F$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{M_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{M_n}\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

soit $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{M_n}\right| > \varepsilon\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{M_n} > \varepsilon \text{ ou } -\frac{1}{M_n} > \varepsilon\right)$$

$$\mathbb{P}(M_n \leq x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 & \text{si } x < x^F \\ 1 & \text{si } x > x^F \end{cases}$$

Loi du 0 - 1

par LGN $\bar{X}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \mathbb{E}[X]$ $\quad \mathbb{P}(\bar{X}_n \leq x) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0 \text{ si } x < \mathbb{E}(X) \\ 1 \text{ si } x > \mathbb{E}[X] \end{cases}$

dépend de la taille de l'échantillon

$\mathbb{P}(\bar{X}_n \leq x_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \neq 0$ et 1 $\quad$ quel x_n choisir ?

$x_n = m_n + \sigma_n x \quad \sigma_n > 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - m_n}{\sigma_n} \leq x\right) \longrightarrow \neq 0 \text{ et } 1$$

$$\left.\begin{aligned} m_n &= \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\bar{X}_n] \\ \sigma_n &= \frac{1}{\sqrt{n}}\,\sigma(X) = \sqrt{\mathbb{V}[\bar{X}_n]} \end{aligned}\right] \Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - m_n}{\sigma_n} \leq x\right) = \mathbb{P}(\bar{X}_n \leq x_n)$$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathbb{P}(Y \leq x) \text{ avec } Y \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$\mathbb{P}(M_n \leq u_n)$

quel u_n choisir ?

$u_n \to$? pour que la proba tende vers une limite $\neq 0$ et $\neq 1$

En transposant par rapport à ce qu'on a fait pour la moyenne empirique

$u_n \to x^F$

Maintenant quelle vitesse ? pour que la limite $\neq 0$ et $\neq 1$.

Propositions

1) $\mathbb{P}[M_n \leq u_n] \to \underbrace{e^{-\tau}}_{\neq 0 \text{ et } 1} \quad \tau > 0$

2) $\Leftrightarrow \quad n\overline{F}(u_n) \to \tau$ avec $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$

On note $N_n = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i > u_n}$

comptage du nb de dépassement de seuil $\doteq u_n$

Si $M_n \leq u_n$ alors 0 dépassement de seuil

$\Rightarrow \{M_n \leq u_n\} = \{N_n = 0\}$

$\mathbb{E}[N_n] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i > u_n) = n\overline{F}(u_n)$ qui tend vers τ

en moyenne le nb de dépassement tend vers τ

si $n\overline{F}(u_n) = 1 \Leftrightarrow F(u_n) = 1 - \frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow u_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ fonction quantile

quantile d'ordre $1 - \frac{1}{n}$

on veut un nb de dépassement de seuil fini pour une taille ∞ d'échantillon

Preuve

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n) = F^n(u_n)$$
$$= (1 - \overline{F}(u_n))^n$$
$$= e^{n \ln(1 - \overline{F}(u_n))} = e^{-n \overline{F}(u_n)(1+o(1))}$$

$\overline{F}(u_n) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

car $u_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x^F$

$u_n \dashrightarrow x^F$

$F(x^F) \to 1$

$\overline{F}(x^F) \to 0$

$$\underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} e^{-\tau}$$

$$\Leftrightarrow n\overline{F}(u_n) \to \tau$$

Proposition $N_n \xrightarrow{\mathcal{L}} N \sim \mathcal{P}(\tau)$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(N_n = k) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{P}(N = k) \quad \forall k \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[e^{-tN_n}] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}[e^{-tN}] \quad \forall t \geq 0$$ Transformée de Laplace.

Preuve

$$\mathbb{E}[e^{-tN}] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-tk} \frac{\tau^k}{k!} e^{-\tau} = e^{-\tau} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(e^{-t}\tau)^k}{k!}$$
$$= e^{-\tau} e^{e^{-t}\tau} = e^{-\tau(1 - e^{-t})}$$

$$\mathbb{E}[e^{-tN_n}] = \mathbb{E}\left[e^{-t\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{X_i > u_n}}\right]$$
$$\underset{iid}{=} \mathbb{E}[e^{-t\mathbb{1}_{X > u_n}}]^n = (\mathbb{P}(X > u_n)e^{-t} + \mathbb{P}(X \leq u_n))^n$$
$$= (\overline{F}(u_n)e^{-t} + 1 - \overline{F}(u_n))^n$$
$$= (1 - \overline{F}(u_n)(1 - e^{-t}))^n$$
$$= e^{n \ln(1 - \overline{F}(u_n)(1 - e^{-t}))}$$

$$\mathbb{E}\left[e^{-tN_n}\right] \underset{0}{\sim} e^{-n\bar{F}(u_n)(1-e^{-t})}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\tau(1-e^{-t})} = \mathbb{E}\left[e^{-tN}\right].$$

La loi convergente d'un dépassement de seuil est une Poisson

Existence de u_n

si limite à gauche de $\bar{F} = F$ $\quad \lim_{x \to x^F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-)} = 1$

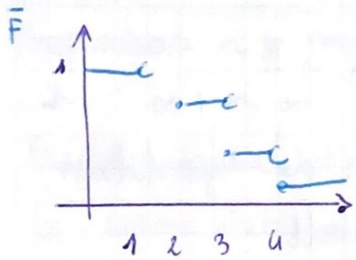
- F est $\mathcal{C}^0 \Rightarrow F$ $\mathcal{C}^0$ à droite et à gauche

$\bar{F}(x) = \bar{F}(x-)$

$$\Rightarrow \lim_{x \to x^F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-)} = \lim_{x \to x^F} 1 = 1.$$

- F non $\mathcal{C}^0$ contre exemple $X \sim \mathcal{G}(p)$

$\mathbb{P}(X = k) = p(1-p)^{k-1} \quad k \in \mathbb{N}^*$



$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}^*$ sur les marches de l'escalier c'est $\mathcal{C}^0$

$$\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-)} = 1$$

$$x \in \mathbb{N}^* \quad \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-)} = \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-1)} \leq 1$$

$$= 1 - p \quad \forall x \in \mathbb{N}^*$$

$$\neq 1$$

$$\limsup_{x \to x^F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-1)} = 1 \qquad \liminf_{x \to x^F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-1)} = 1 - p$$

comme $\limsup \neq \liminf \Rightarrow$ limite n'existe pas

Quand loi $\mathcal{C}^0$ $\Rightarrow$ cvg de la loi du max vers une loi non dégénérée.

Peut-on trouver u_n /
$u_n = a_n x + b_n$ avec $a_n > 0$?

a_n : paramètre d'échelle ; b_n : paramètre de position

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n) = \mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n) = \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right)$$

Exemple $X \sim \mathcal{E}(1)$.

$$\mathbb{P}(M_n \leq x + \ln n) = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)} \underset{n \to \infty}{\sim} e^{-e^{-x}}$$

$a_n = 1$
$b_n = \ln n$

cvg $\rightarrow \neq 0$ et $\neq 1$?

fonction croissante continue
en $x \to -\infty$ 0
$x \to +\infty$ 1

$\Rightarrow$ fonction de répartition
Loi de Gumbell

Proposition

$X \sim F_1$, $Y \sim F_2$

$F_1(x) = F_2(ax + b)$

$\Leftrightarrow \mathbb{P}(X \leq x) = \mathbb{P}(Y \leq ax + b) = \mathbb{P}\left(\frac{Y - b}{a} \leq x\right)$

$\Rightarrow X \overset{\mathcal{L}}{=} \dfrac{Y - b}{a}$ $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$

b : on décale ; a : on zoome et dézoome

Exemple loi Normale $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$ $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ $X \overset{\mathcal{L}}{=} \dfrac{Y - \mu}{\sigma^2}$.

$u_n = c_n x + d_n$

$c_n > 0$

$$\mathbb{P}(M_n \leq u_n) = \mathbb{P}(M_n \leq c_n x + d_n) = \mathbb{P}\left(\frac{M_n - d_n}{c_n} \leq x\right)$$

$$= F^n(c_n x + d_n) \to G(x)$$

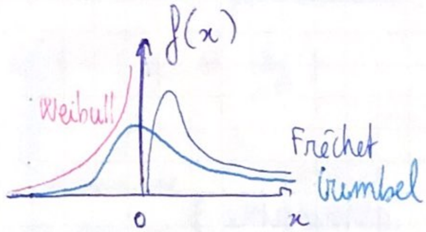
fonction de répartition si convergence.

Fisher - Typpett donne les 3 seules lois possibles de G.

Fréchet que valeurs positives ϕ_α

Weibull définition $\mathbb{R}^-$ donc $G = 1$ sur $\mathbb{R}^+$ Ψ_α

Gumbel $\mathbb{R}$ Λ



Proposition $X \sim \phi_\alpha \iff \alpha \ln X \sim \Lambda \iff -\frac{1}{X} \sim \Psi_\alpha$

Fréchet, Gumbel et Weibull sont des distributions max-stables

Ex somme stable Gaussienne $X \sim \mathcal{N}$, $Y \sim \mathcal{N}$ $X + Y \sim \mathcal{N}$

Cauchy

Proposition $X_1, \dots, X_n$ iid $X \sim \phi_\alpha$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n^{-1/\alpha} \underbrace{M_n}_{\to x^F} \overset{\mathcal{L}}{=} X$

et pour une loi ϕ_α définie sur $\mathbb{R}_+$ $x^F = +\infty$.

d'où $\times n^{-1/\alpha}$ pour compenser le comportement asymptotique de M_n

Preuve $\mathbb{P}[n^{-1/\alpha} M_n \leq x] = \mathbb{P}[M_n \leq x n^{1/\alpha}]$

$$= \phi_\alpha^n(x n^{1/\alpha}) = \left(e^{-\frac{1}{(x n^{1/\alpha})^\alpha}}\right)^n = e^{-\frac{1}{x^\alpha}} = \mathbb{P}(X \leq x)$$

Corollaire $M_n \overset{\mathcal{L}}{=} n^{1/\alpha} X$

si $\mathbb{E}[X] < \infty$ alors $\mathbb{E}[M_n] = n^{1/\alpha}\,\mathbb{E}[X]$

$\mathbb{E}[M_n]$ va tendre vers $+\infty$

si α petit, $n^{1/\alpha}$ grand donc $\mathbb{E}[M_n]$ converge rapidement vers $+\infty$.

sinon $\mathbb{E}[M_n]$ converge lentement.

si $\mathbb{V}[X] < \infty$ alors $\mathbb{V}[M_n] = n^{1/\alpha}\,\mathbb{V}[X]$

qd $X \geq 0$, $\mathbb{E}[X] = \int_0^{+\infty} \bar{\Phi}_\alpha(x)\,dx$

$$= \int_0^{\infty} 1 - e^{-\frac{1}{x^\alpha}}\,dx$$

$$1 - e^{-\frac{1}{x^\alpha}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x^\alpha}$$

$\mathbb{E}[X] < +\infty$ si $\alpha > 1$

$= +\infty$ si $\alpha < 1$ (risque inassurable)

Proposition $X_1, \dots, X_n$ iid $X \sim \Lambda$

$$\underbrace{M_n}_{\to +\infty} - \ln n \overset{\mathcal{L}}{=} X$$

car Gumbel définit sur $+\infty$

Preuve

$\mathbb{P}[M_n - \ln n \leq x] = \mathbb{P}[M_n \leq x + \ln n]$

$$= \Lambda^n(x + \ln n) = \Lambda(x)$$

Corollaire $M_n \overset{\mathcal{L}}{=} X + \ln n$

$\mathbb{E}[M_n] = \mathbb{E}[X] + \ln n$

$\mathbb{V}[M_n] = \mathbb{V}[X]$

Proposition $X_1, \dots, X_n$ iid $X \sim \Psi_\alpha$

$$n^{1/\alpha} \underbrace{M_n}_{\to 0} \overset{\mathcal{L}}{=} X$$

car défini sur $\mathbb{R}^-$
donc on multiplie par quelque chose qui tend vers $+\infty$

Corollaire $M_n \overset{\mathcal{L}}{=} n^{-1/\alpha} X$

$$\mathbb{E}[M_n] = n^{-1/\alpha} \, \mathbb{E}[X] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

$$\mathbb{V}[M_n] = n^{-2/\alpha} \, \mathbb{V}[X] \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

Distributions généralisées des extrêmes (GEV)

$GEV(\mu, \sigma, \xi)$

- μ : paramètre de position (à gauche ou à droite), $\mu \in \mathbb{R}$ — pas une moyenne
- σ : paramètre d'échelle (on zoome et dézoome), $\sigma > 0$, si petit on sera proche de 0 — pas un écart type
- ξ : paramètre de forme, $\xi \in \mathbb{R}$

GEV standard $\mu = 0$, $\sigma = 1$ $\quad X \sim GEV(0, 1, \xi)$

$Y \sim GEV(\mu, \sigma, \xi)$

$$Y \overset{\mathcal{L}}{=} \mu + \sigma X$$

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = \mathbb{P}(\mu + \sigma X \leq x) = \mathbb{P}\left(X \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$X \sim GEV(0,1,\xi)$ $\quad \mathbb{P}(X \leq x) = e^{-(1+\xi x)_+^{-1/\xi}}, \ x \in \mathbb{R}$

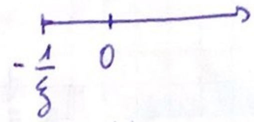
$$\lim_{\xi \to 0} (1 + \xi x)^{-1/\xi} = \lim_{\xi \to 0} e^{-\frac{1}{\xi} \ln(1+\xi x)} = \lim_{\xi \to 0} e^{-\frac{1}{\cancel{\xi}} \cancel{\xi} x} = e^{-x}$$

$\mathbb{P}(X \leq x) = e^{-e^{-x}}$ si $\xi = 0$

$GEV(0, 1, \xi) = \text{GUMBEL}$, $\xi = 0$

si $\xi > 0$

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -\frac{1}{\xi} \\ e^{-(1+\xi x)^{-1/\xi}} & \text{si } x > -\frac{1}{\xi} \end{cases}$$



ressemble au domaine de def de Fréchet

$Y \sim GEV\left(\mu = 1, \sigma = \frac{1}{\alpha}, \xi = \frac{1}{\alpha}\right)$

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = e^{-\left(1 + \cancel{\xi} \frac{x - \mu}{\cancel{\sigma}}\right)^{-1/\xi}} = e^{-x^{-\alpha}}$$

$GEV\left(1, \frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\alpha}\right) = \text{FRÉCHET}(\alpha)$; $\xi > 0$

si $\xi < 0$

$$\mathbb{P}(X \leq x) = \begin{cases} e^{-(1+\xi x)^{-1/\xi}} & \text{si } x < -\frac{1}{\xi} \\ 1 & \text{si } x \geq -\frac{1}{\xi} \end{cases}$$

$Y \sim GEV\left(-1, \frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha}\right)$

$\mathbb{P}(Y \leq x) = e^{-(-x)^{\alpha}}$ pour $x \leq 0$

$GEV\left(-1, \frac{1}{\alpha}, -\frac{1}{\alpha}\right) = \text{WEIBULL}(\alpha)$, $\xi < 0$

Remarques $\lim\limits_{n \to +\infty} \mathbb{P}(M_n \leq c_n x + d_n) = H(x)$

$\tilde{c}_n = a c_n$, $a > 0$

$\tilde{d}_n = b c_n + d_n$

Choisir le bon a et b.

$$\mathbb{P}(M_n \leq \tilde{c}_n x + \tilde{d}_n) = \mathbb{P}(M_n \leq c_n(ax+b) + d_n)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} H(ax+b)$$

Propriété $X \sim GEV(0, 1, \xi)$ sont max stables

$\exists a_n > 0, b_n \in \mathbb{R}$ $\mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n) = \mathbb{P}(X \leq x)$

avec $M_n = \max(X_1, .., X_n)$ avec $X_1, .., X_n$ iid

$$\mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n) = \left[e^{-(1+\xi(a_n x + b_n))_+^{-1/\xi}}\right]^n$$

$$= e^{-n(1+\xi(a_n x + b_n))_+^{-1/\xi}}$$

$$= e^{-(n^{-\xi} + n^{-\xi}\xi(a_n x + b_n))_+^{-\frac{1}{\xi}}}$$

et $\mathbb{P}(X \leq x) = e^{-(1+\xi x)_+^{-1/\xi}}$

D'où pour qu'on ait égalité, pour avoir $\frac{M_n - b_n}{a_n} \overset{\mathcal{L}}{=} X$

$$\begin{cases} 1 = n^{-\xi} + n^{-\xi}\xi b_n \\ \xi = n^{-\xi}\xi a_n \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = n^{\xi} \\ b_n = \frac{n^{\xi} - 1}{\xi} \end{cases}$$

si $\xi = 0$

$$\left(\Leftrightarrow \begin{cases} a_n = 1 \\ b_n = \ln n \end{cases} \right)$$

génère avec une proba elevée des évènements rares

$\xi > 0$ queue épaisse $\qquad \xi = 0$

$\xi < 0$ queue fine

↳ proba faible

$X \sim G \sim \phi_\alpha$ $\quad G(x) = e^{-x^{-\alpha}}$ $\quad x \geq 0$.

on veut trouver le domaine d'attraction, càd F /

$\frac{M_n - b_n}{a_n} \overset{\mathcal{L}}{\sim} X$ où $b_n = 0$, $a_n = n^{1/\alpha}$

$n^{-1/\alpha} M_n \overset{\mathcal{L}}{=} X$

Donc le domaine d'attraction de Fréchet n'est pas vide, on a au moins Fréchet dedans

$\phi_\alpha \in \mathcal{D}(\phi_\alpha)$

$\xi = 0$

$X \sim G = \Lambda \qquad M_n - \ln n \overset{\mathcal{L}}{=} X$

$F = G \qquad b_n = \ln n \qquad \Lambda \in \mathcal{D}(G)$

$a_n = 1$

Gumbell

$X \sim \mathcal{E}(1) \qquad M_n - \ln n \xrightarrow[n \to +\infty]{\mathcal{L}} \Lambda \qquad \mathcal{E}(1) \in \mathcal{D}(G)$

$\mathbb{P}(X > x) = e^{-x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ exponentiellement vite

$X \sim$ Gumbel $\mathbb{P}(X > x) = 1 - e^{-e^{-x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} e^{-x} \longrightarrow 0.$

et m̂ vitesse de convergence.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\mathbb{P}_{\mathcal{E}xp}(X > x)}{\mathbb{P}_\Lambda(X > x)} = 1.$$

$X \sim \Psi_1 \qquad \mathbb{P}(X \leq x) = e^{-(-x)} = e^{x} \qquad x \leq 0.$

$n M_n \overset{\mathcal{L}}{=} X \qquad \mathbb{P}(X > x) = 1 - e^{x} \underset{x \to 0}{\sim} -x$

$X \sim \mathcal{U}\,[-1, 0] \qquad x^F = 0 \quad \mathbb{P}(X \leq x) = x + 1$
$x \in [-1, 0]$

$$\mathbb{P}(n M_n \leq x) = \mathbb{P}\left(M_n \leq \frac{x}{n}\right) = \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)} \longrightarrow e^{x}$$

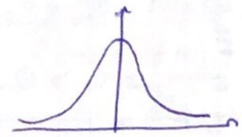
$n M_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \Lambda$

$X \sim \Phi_1 \qquad \mathbb{P}(X \leq x) = e^{-\frac{1}{x}}, \quad x \geq 0$

$\mathbb{P}(X > x) = 1 - e^{-\frac{1}{x}} \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{x}$ ($\mathbb{E}$ n'existe pas elle n'est pas finie)

$n^{-1} M_n \overset{\mathcal{L}}{=} X$

$X \sim$ Cauchy $\quad f(x) = \dfrac{1}{\pi(1+x^2)}, \; x \in \mathbb{R}.$



pas d'espérance.

fonction de survie

$$\mathbb{P}(X > x) = \bar{F}(x) = \int_x^{\infty} f(u)\,du$$

Rappel Règle de l'Hôpital

Soient h et g 2 fonctions dérivables avec $g > 0$

avec $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = 0 \quad \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0.$

si $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h'(x)}{g'(x)} = l$ alors $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{h(x)}{g(x)} = l$

$h(x) = \bar{F}(x) \qquad h'(x) = -f(x) = -\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$

$g(x) = \dfrac{1}{\pi x} \qquad g'(x) = -\dfrac{1}{\pi x^2}$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{h'(x)}{g'(x)} = 1 \qquad \lim_{x \to +\infty} \frac{\bar{F}(x)}{1/\pi x} = 1$$

$\mathbb{E}X$ n'est pas définie

$$\mathbb{P}(X > x) = \bar{F}(x) = \int_x^{+\infty} f(u)\,du \underset{x \to +\infty}{\sim} \frac{1}{\pi x}$$

$X \sim$ Cauchy $\quad \mathbb{P}\left(\frac{\pi}{n} M_n \leq x\right)$

$$= \mathbb{P}\left(M_n \leq \frac{xn}{\pi}\right) = \Big(1 - \underbrace{\bar{F}\left(\frac{xn}{\pi}\right)}_{= \frac{1}{nx}(1+o(1))}\Big)^n$$

$$= e^{n \ln\left(1 - \frac{1}{nx}(1+o(1))\right)}$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-\frac{1}{x}} \text{ pour } x > 0$$

Définition F et G sont équivalentes en termes de queue de distribution si $x^F = x^G$

et si $\lim\limits_{x \to x^F} \dfrac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = c > 0$.

Proposition $F \in \mathcal{D}(H) \Leftrightarrow G \in \mathcal{D}(H)$ avec H max stable.

De plus si $c = 1$ alors F et G ont le m̂ coefficient de normalisation

Preuve supposons $c = 1$

$$F \in \mathcal{D}(H) \Leftrightarrow \exists \underbrace{a_n > 0 \text{ et } b_n}_{\text{constantes de normalisation}} \text{ telles que } \underbrace{\mathbb{P}(M_n^F \leq a_n x + b_n)}_{= F^n(a_n x + b_n)} \xrightarrow[x \to x^F]{} H(x)$$

$$\Leftrightarrow n\overline{F}(a_n x + b_n) \to -\ln H(x)$$

$\dfrac{M_n^F - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} H$

$$\Leftrightarrow n\overline{G}(a_n x + b_n) \to -\ln H(x)$$

car $\lim\limits_{x \to x^F} \dfrac{\overline{F}(x)}{\overline{G}(x)} = 1$

$\dfrac{M_n^G - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} H$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(M_n^G \leq a_n x + b_n) \to H(x)$$

$$\Leftrightarrow G \in \mathcal{D}(H)$$

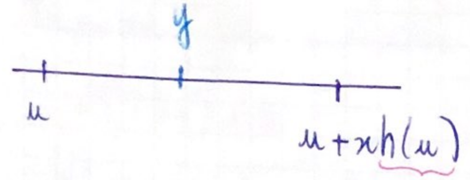
Faire le cas $c \neq 1$

On suppose que F est 2 fois dérivables

$h(x) = \dfrac{\overline{F}(x)}{f(x)}$ on a $\lambda(x) = \dfrac{1}{h(x)} = \dfrac{f(x)}{F(x)}$ fonction ou taux de hasard

si $X \geq 0$ $\lambda(x) = -\ln \overline{F}(x)$

$\overline{F}(x) = e^{-\int_0^x \lambda(u)\,du}$



vitesse d'accélération du décès

$$\mathbb{P}(X > u + xh(u) \mid X > u)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{X-u}{h(u)} > x \mid X > u \right)$$
$$= \frac{\bar{F}(u + xh(u))}{\bar{F}(u)} = (1 + h'(y))_+^{-1/h'(y)}$$

Proposition si $\lim_{y \to x^F} h'(y) = \xi \in \mathbb{R}$

$b_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right) \iff n\bar{F}(b_n) = 1$

$a_n = h(b_n)$

alors que $\mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n) \longrightarrow e^{-(1+\xi x)_+^{-1/\xi}}$

$$\iff \frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{\mathcal{L}} GEV(0, 1, \xi)$$

Preuve $\mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n) = e^{-\underbrace{n \ln(1 - \bar{F}(a_n x + b_n))}_{\sim n\bar{F}(a_n x + b_n)}}$

$$n\bar{F}(a_n x + b_n) = \frac{\bar{F}(a_n x + b_n)}{\bar{F}(b_n)} = \frac{\bar{F}(h(b_n)x + b_n)}{\bar{F}(b_n)}$$
$$= (1 + h'(y_n)x)_+^{-1/h'(y_n)}$$

$$\frac{\bar{F}(u + xh(u))}{\bar{F}(u)} = (1 + h'(y))_+^{-1/h'(y)} \qquad y_n \in [b_n, b_n + xh(b_n)]$$

$b_n \to x^F$, $y_n \to x^F$ $h'(y_n) \to \xi$

$\Rightarrow n\bar{F}(a_n x + b_n) \longrightarrow e^{-(1+\xi x)_+^{-1/\xi}}$

Exemple 1 $X \sim \mathcal{E}(1)$ $F(x) = 1 - e^{-x}$ $\bar{F}(x) = e^{-x}$

$f(x) = e^{-x}$ $h(x) = \frac{\bar{F}(x)}{f(x)} = 1$

$x^F = +\infty$ $h'(x) = 0 \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \Rightarrow \xi = 0$

$$b_n = F^{-1}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

$\Leftrightarrow \quad n\bar{F}(b_n) = 1$

$\Leftrightarrow \quad n e^{-b_n} = 1$

$\Leftrightarrow \quad b_n = \ln n$

$\mathcal{E}(1) \in \mathcal{D}(\Lambda)$

$a_n = h(b_n) = 1$

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} = M_n - \ln n \longrightarrow \Lambda$$

Exemple 2 $\quad X \sim \mathcal{U}\,[-1, 0] \quad x^F = 0 \quad$ car $x \in [-1, 0]$

$F(x) = x+1$

Trouvons les constantes maintenant

$\bar{F}(x) = -x$

$f(x) = 1$

$\Rightarrow h(x) = \dfrac{\bar{F}(x)}{f(x)} = -x$

$n\bar{F}(b_n) = 1$

$\Leftrightarrow \quad n(-b_n) = 1$

$\Leftrightarrow \quad b_n = -\frac{1}{n}$

$\Rightarrow h'(x) = -1 \xrightarrow[x \to 0]{} -1 = \xi$

$a_n = h(b_n) = -b_n = \frac{1}{n}$

$\Rightarrow \mathcal{U}\,[-1, 0] \in \mathcal{D}(GEV(0, 1, -1))$

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} = \frac{M_n + \frac{1}{n}}{1/n} = nM_n + 1 \xrightarrow{\mathcal{L}} GEV(0, 1, -1)$$

$$nM_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \Psi_1 .$$

Exemple 3 $\quad$ La distribution de Pareto(c, α)

$\bar{F}(x) \sim c x^{-\alpha}$ avec $\alpha > 0$.

$f(x) \sim \alpha c x^{-\alpha-1}$

$h(x) = \dfrac{\bar{F}(x)}{f(x)} = \dfrac{x}{\alpha} \qquad h'(x) = \dfrac{1}{\alpha} \xrightarrow[x \to x^F]{} \dfrac{1}{\alpha} = \xi$

Pareto $(c, \alpha) \in \mathcal{D}\left(GEV\left(0, 1, \frac{1}{\alpha}\right)\right)$

Trouvons les constantes maintenant

$n\bar{F}(b_n) = 1$

$\Leftrightarrow nc(b_n)^{-\alpha} = 1$

$\Leftrightarrow b_n = \left(\frac{1}{cn}\right)^{-1/\alpha}$

$a_n = h(b_n) = \frac{b_n}{\alpha}$

$\frac{M_n - b_n}{a_n} = \frac{M_n - b_n}{b_n/\alpha}$

$\xrightarrow{\mathcal{L}} GEV\left(0, 1, \frac{1}{\alpha}\right)$

Exemple 4 $X \sim \mathcal{N}(0,1)$

$F(x) = \phi(x)$

$f(x) = \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}$

$h(x) = \frac{\bar{\phi}(x)}{\varphi(x)}$

$\varphi'(x) = -x\varphi(x)$

$\frac{\varphi(x)}{\varphi'(x)} = -\frac{1}{x}$

on aimerait que $h(x) \sim \frac{1}{x}$

$\Leftrightarrow \frac{\bar{\phi}(x)}{\frac{\varphi(x)}{x}} \xrightarrow[x \to +\infty]{?} 1$

$$\frac{-\varphi(x)}{\frac{\varphi'(x)}{x} - \frac{\varphi(x)}{x}} = \frac{-\varphi(x)}{-\varphi(x)\left(1 + \frac{1}{x}\right)} \longrightarrow 1$$

Règle de l'Hopital

$h'(x) \sim -\frac{1}{x^2} \to 0 = \xi$ $\quad \phi \in D(\Lambda)$

$n\bar{\phi}(b_n) = 1 \sim n\frac{\varphi(b_n)}{b_n}$

$a_n = h(b_n) \sim \frac{1}{b_n}$.

$\Rightarrow \frac{M_n - b_n}{a_n} = \Lambda$

$\Leftrightarrow M_n - b_n = a_n \Lambda \to 0$.