

**Modèles de durée / Examen / Janvier 2019****Durée 2h – aucun document n'est autorisé****Quelques propriétés des fonctions de survie et de hasard cumulé**

La qualité de la rédaction, des justifications apportées et de la présentation de la copie seront prises en compte dans la notation.

On considère une variable de durée  $X$  dont la fonction de hasard sous-jacente est notée  $h$  et la fonction de survie  $S$ .

**Question n°1 (4 points) :** Rappelez les définitions des fonctions suivantes : survie, survie conditionnelle, hasard, hasard cumulé et les relations entre ces grandeurs (ces relations devront être démontrées).

**Question n°2 (2 points) :** on considère une subdivision  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$  de l'intervalle  $[0, t]$ . Quelle est la limite lorsque le pas de discrétisation tend vers 0 de  $Z_n(t) = \sum_i P(T \leq t_i | T > t_{i-1})$  ?

**Question n°3 (2 points) :** On note, pour  $t \leq u$ ,  $S(t, u) = \frac{S(u)}{S(t)}$ , la fonction de survie conditionnelle. Montrez que, pour  $s \leq t \leq u$ ,  $S(s, u) = S(s, t)S(t, u)$

**Question n°4 (2 points) :** En déduire la loi de  $X$  si  $S(t, u) = S(u - t)$ , c'est-à-dire si  $S(t, u)$  ne dépend que de la différence  $u - t$  ?

**Question n°5 (2 points) :** Quelle est la loi de  $H(X)$  ?

**Question n°6 (3 points) :** En désignant par  $dt$  l'intervalle  $[t, t + dt]$  et en utilisant la notation  $H(s, t) = H(t) - H(s)$ , montrer que  $H(dt) = 1 - S(dt)$ . Comment peut-on écrire  $H(t)$  en fonction de  $S(du)$  ?  $S(t)$  en fonction de  $H(du)$  ?

**Question n°7 (2 points) :** Rappelez les expressions des estimateurs de Nelson-Aalen de la fonction de hasard cumulée et de Kaplan-Meier de la fonction de survie, discutez les liens que vous voyez avec les expressions obtenues à la question précédente.

**Question n°8 (3 points) :** Comment construire simplement un estimateur de la fonction de survie à partir de l'estimateur de Nelson-Aalen ? Si vous disposez d'un estimateur de la variance de l'estimateur de Nelson-Aalen, comment faites-vous pour en déduire un estimateur de la variance de l'estimateur de la fonction de survie ainsi obtenu ?