TD 1 – Finance Mathématique | M2 Actuariat

yahia.salhi@univ-lyon1.fr

Exercice 1 : FRA, Swaps et Swaptions

Forward Rate Agreement (FRA). Soit $t < T_k < T_{k+1}$. On note $P(t, T_k)$ le prix en t d'une obligation zéro-coupon de maturité T_k et $F(t, T_k, T_{k+1})$ le taux forward à la date t pour la période future (T_k, T_{k+1}), dans la convention simple de calculs des intérêts.

1. Par un argument d'AOA appliqué à un FRA, retrouver l'expression de $F(t, T_k, T_{k+1})$ en fonction du prix d'obligations zéro-coupon que l'on précisera.

Swap. On considère un swap payeur (échange d'un taux fixe contre un taux variable) de nominal N qui a pour taux fixe C et pour taux variable R. On suppose que les intérêts fixes et variables sont versés aux mêmes dates $T_{i+1} < \cdots < T_j$. Le taux d'intérêt variable est révisé aux dates $T_i < T_{i+1} < \cdots < T_{j-1}$. Le swap est donc émis à la date T_i et a la maturité T_j.

Dans la suite on considère un swap payeur et on note $\pi^{P-Swap}(t, T_i, T_j)$ son prix en $t < T_i$.

2. En considérant le flux de ce swap en une date $T_{k+1} < T_j$, déterminer par AOA la valeur de ce flux en $t < T_i$. En déduire ensuite le prix du swap $\pi^{P-Swap}(t, T_i, T_j)$ en $t < T_i$.

3. En AOA, déterminer le taux swap forward $S(t, T_i, T_j)$ en fonction des prix zéro-coupons et des taux forward $F(t, T_k, T_{k+1})$. Le taux swap est le taux qui rend le contrat équitable swap, c'est-à-dire $\pi^{P-Swap}(t, T_i, T_j) = \pi^{R-Swap}(t, T_i, T_j)$.

4. En déduire la valeur $\pi^{P-Swap}(t, T_i, T_j)$ en $t < T_0$ du swap payeur en fonction du taux swap $S(t, T_i, T_j), C, N$ et les prix zéro-coupon.

Swaption. Une call swaption est une option sur swap de maturité T_j donnant le droit d'acheter à une maturité fixée T_i, à un prix K fixé à l'avance. Le taux variable échangé est le taux forward $F(T_i, T_k, T_{k+1})$. Rappelons que le payoff de cette swaption en T_i est donné par

$$g(T_i, T_i, T_j) = \left(\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(T_i, T_{k+1}) \Big(F(T_i, T_k, T_{k+1}) - K \Big) \right)^+$$

5. Montrer que $g(T_i, T_i, T_j)$ peut s'écrire en fonction du taux swap forward $S(T_i, T_i, T_j)$ de la façon suivante :

$$g(T_i, T_i, T_j) = \sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(T_i, T_{k+1}) \Big(S(T_i, T_i, T_j) - K \Big)^+.$$

Exercice 2 : Rappel sur les changements de probabilité dans un cadre Brownien

1. Soit $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard défini sur l'espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}), \mathbb{P})$. On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle. Montrer que le processus $X = (X_t)_{t\geq 0}$ défini par $X_t = Z^2 - t$ pour $t \geq 0$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

2. Montrer que les propositions suivantes sont équivalentes :

i) $Z = (Z_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard ;
ii) $Z_0 = 0$ et pour tout λ réel, le processus $\left(\exp\left(\lambda Z_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)\right)_{t\geq 0}$ est une $\mathcal{F}_t$-martingale.

3. Soit λ fixé. On définit le processus $L = (L_t)_{t\geq 0}$ par $L_t = \exp\left(\lambda Z_t - \frac{\lambda^2}{2}t\right)$.

(a) Soit $T > 0$ fixé et $A \in \mathcal{F}_T$. On pose $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T 1_A]$. Montrer que $\mathbb{Q}$ définie une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$. On peut donc, pour tout λ réel, définir un changement de probabilité grâce au processus L. Le processus L est la densité de Radon-Nikodym associée au changement de probabilité $\mathbb{P} \to \mathbb{Q}$ et on note :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L_T$$

(b) Soit X une variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{F}_T)$, l'espérance de X sous $\mathbb{Q}$ est définie par

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T X]$$

Montrer que pour toute variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable avec $0 \leq t \leq T$, on a $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_t X]$.

(c) Montrer la formule de Bayes suivante : Pour tout $Y \in L^2(\mathbb{P})$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Y|\mathcal{F}_t] = \frac{1}{L_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T Y|\mathcal{F}_t]$$