Idris Kharroubi

Bureau 16-26 - 218 idris.kharroubi@upmc.fr

Convexité, optimisation et contrôle stochastique

2 parties:
- I Convexité et optimisation
- II Contrôle stochastique

Partie I Convexité et optimisation

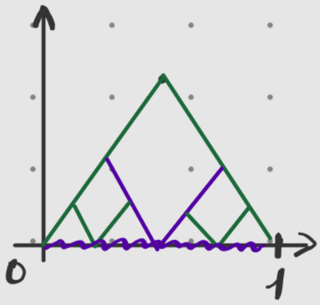
8.1. Le résultat de vérification

8.2. Application : pb d'allocation de portefeuille en horizon fini.

8.3. Application : pb d'investissement / conso.

Ex. d'EDP sans sol. régulière :

$$\begin{cases} |\nabla u(x)| = 1 & \forall x \in]0,1[\\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$



Thm. de Rolle $\exists \theta \in [0,1]$ t.q. $\nabla u(\theta) = 0$

9. Solutions de viscosité pour l'équation de prog. dynamique

9.1. Solutions de viscosité pour les EDP parabolique

9.2 Propriétés de la fonction valeur.

9.3. Unicité par comparaison.

10. Principe du maximum et contrôle optimal non markovien.

10.1. Condition necessaire d'optimalité

10.2 Condition suffisante dans le cas convexe

10.3. Application : maximisation d'utilité logarithmique

TD F. Djete 14h

Examen Janvier 3h sans doc.

Chap. 1 Ensembles et fcts convexes

On fixe dans tout le cours E un espace vectoriel de dimension finie et $|\cdot|$ la norme euclidienne associée

1. Ensembles convexes

Déf Un ensemble C de E et dit convexe si

$$\lambda x+(1-\lambda)y \in C \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in [0,1],\ x, y \in E.$$

Déf Une combinaison convexe du $x_1, \dots, x_n \in E$ est un élément de la forme $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i$, où $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in [0,1]$ t.q. $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$

Prop $C \subset E$ est convexe ssi toute combin. convexe d'éléments de C est dans C.

Dém $\Leftarrow$ évident

$\Rightarrow$ Par récurrence sur le nombre d'élément de la comb. convexe.

Au rang $n=2$ Ok par déf.

On suppose la ppté vraie au rang n

Soient $x_1, \dots, x_{n+1} \in C$

$\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1} \geq 0 : \sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i = 1$

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i x_i \overset{?}{\in} C$$

Si $\lambda_{n+1} = 0$ $\sum_1^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_1^n \lambda_i x_i \in C$ par hyp de récur.

Si $\lambda_{n+1} \neq 0$ $\sum_1^{n+1} \lambda_i x_i = \sum_1^n \lambda_i x_i + \lambda_{n+1} x_{n+1} = \underbrace{\Big(\sum_1^n \lambda_i' x_i\Big)}_{\in C}(1-\lambda_{n+1}) + \lambda_{n+1} x_{n+1} \in C$ $\square$

$\lambda_i' = \frac{\lambda_i}{1-\lambda_{n+1}}$ $\qquad$ $\overset{\cap}{C}$

Prop Soit $(C_i)_{i \in I}$ famille des ensembles convexes de E.

Alors $\bigcap_{i \in I} C_i$ est convexe.

Déf Soit $A \subset E$. L'enveloppe convexe de A notée $\mathrm{conv}(A)$ est le plus petit convexe contenant A. Un tel ensemble existe d'après la proposition précédente et on a $\mathrm{conv}(A) = \bigcap_{\substack{C \text{ convexe} \\ A \subset C}} C$

Prop $\mathrm{conv}(A)$ est l'ensemble des comb. convexes d'éléments de A :

$$\mathrm{conv}(A) = \underbrace{\Big\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i ,\ n \geq 1 \quad x_1, \dots, x_n \in A,\ \lambda_1, \dots, \lambda_n \geq 0,\ \sum \lambda_i = 1 \Big\}}_{\tilde{C}}$$

Démo

$\boxed{\mathrm{conv}(A) \supset \tilde{C}}$ $\quad x_1, \dots, x_n \in A \to \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \in A \subset \mathrm{conv}(A)$

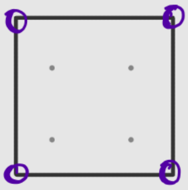
$\boxed{\mathrm{Conv}(A) \subset \tilde{C}}$ $\quad \tilde{C}$ est convexe :

$x \in \tilde{C} \to x = \sum_{1}^{n} \lambda_i x_i \qquad \lambda x + (1-\lambda) y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda x_i + \sum_{i=1}^{m} (1-\lambda) \theta_i y_i \in \tilde{C}$

$y \in \tilde{C} \to y = \sum_{1}^{m} \theta_i y_i$

Par déf de $\mathrm{Conv}(A)$ on a $\mathrm{Conv}(A) \subset \tilde{C}$ $\square$

points extrémaux



Déf Soit $C \subset E$ convexe. $x \in C$ est dit extrémal si $x \neq \lambda y + (1-\lambda) z$ pour $\lambda \in]0,1[$ et $y, z \in C$ t.q. $y \neq z$. On note $\mathrm{ext}(C)$ l'ensemble des points extrémaux de C.

Prop Les assertions suivantes sont équivalentes :

$\mathrm{ext}(C) = \partial C$

(i) $x \in \mathrm{ext}(C)$

(ii) $x \neq \frac{y+z}{2}$ pour tout $y, z \in C$ t.q. $y \neq z$

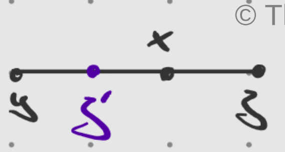
(iii) $\left. \begin{array}{l} x = \frac{y+z}{2} \\ y, z \in C \end{array} \right\} \Rightarrow x = y = z$

Démo On a (i) $\Rightarrow$ (ii) $\Rightarrow$ (iii)

On montre (iii) $\Rightarrow$ (i)

$\lambda \in]0,1[$ on suppose que $x = \lambda y + (1-\lambda) z$, $y, z \in C$.

Si $\lambda = \frac{1}{2}$ ok



Si $\lambda \in]0, \frac{1}{2}[$, alors $z' = 2x - z \in C \Rightarrow x = \frac{z+z'}{2} \overset{(iii)}{\Rightarrow} z = z' = x \Rightarrow$

$$z' = 2x - z = x + (x - z) = 2\lambda y + 2(1-\lambda)z - z = 2\lambda y + (1-2\lambda)z \in C$$

$\Rightarrow z = y = x$

Si $\lambda \in]\frac{1}{2}, 1[$ même argument avec y à la place de z $\square$

Prop. (i) $x \in \mathrm{ext}(C) \Leftrightarrow C \setminus \{x\}$ convexe.

(ii) On a $\mathrm{ext}(\mathrm{Conv}(A)) \subset A$ pour $A \subset E$

Démo

(i) Soit $x \in \mathrm{ext}(C)$, $y, z \in C \setminus \{x\}$, $\lambda \in [0,1]$

Alors $\lambda y + (1-\lambda) z \in C$

Si $\lambda y + (1-\lambda) z = x$ on a $y = z = x$ impossible car $y, z \in C \setminus \{x\}$

Donc $\lambda y + (1-\lambda) z \in C \setminus \{x\}$ et $C \setminus \{x\}$ convexe

Réciproquement, supposons que $C \setminus \{x\}$ convexe.

Soient $y, z \in C$, $y \neq z$ et $\lambda \in]0, 1[$.

Si $x = \lambda y + (1-\lambda) z$ et $y = x$ ou $z = x$ on a $x = y = z$

impossible car $y \neq z$

Donc $y, z \in C \setminus \{x\}$. Comme $C \setminus \{x\}$ convexe on obtient

$x = \lambda y + (1-\lambda) z \in C \setminus \{x\}$ absurde. Donc $x \neq \lambda y + (1-\lambda) z$

(ii) Admis $\square$

Thm (Minkowski (ou Krein-Milman en dimention ∞))

Si A sous ensemble convexe compact de E, alors $\text{conv}(\text{ext}(A)) = A$

2. Fonctions convexes

Déf Une fct $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite convexe si

$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$ pour tout $\lambda \in [0,1]$ ex $x, y \in E$ t.q. $f(x) < \infty$, $f(y) < \infty$

Rq Si f convexe les ensembles $A(a) = \{x : f(x) \leq a\}$, $B(a) = \{x : f(x) < a\}$ sont convexe pour tout $a \in \mathbb{R}$. Malheureusement, la réciproque est fausse.

Déf Le domaine d'une fct convexe f noté $\text{dom}(f)$ est défini par

$\text{dom}(f) = \{x \in E : f(x) < +\infty\}$

Rq $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est convexe ssi

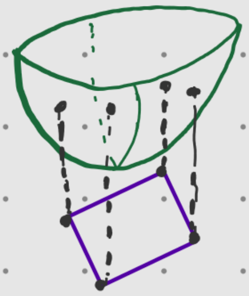
- $\text{dom}(f)$ est convexe
- $f|_{\text{dom}(f)}$ est convexe

Déf $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est strictement convexe si

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) < \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \quad \forall \lambda \in (0,1),\ x,y \in \mathrm{dom}(f)\ x \neq y$$

Prop $C \subset E$ convexe et $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ stt convexe t.q. $C \subset \mathrm{dom}(f)$

Soit $x_0 \in C$ t.q. $f(x_0) = \max_{x \in C} f(x)$. Alors $x_0 \in \mathrm{ext}(C)$.



Dém Soit $x_0 \in C$ t.q. $f(x_0) = \max_{x \in C} f(x)$

Si $x_0 \notin \mathrm{ext}(C)$, il existe $y, z \in C$ $y \neq z$ et $\lambda \in]0,1[$

t.q. $x_0 = \lambda y + (1-\lambda) z$.

Alors $f(x_0) < \lambda f(y) + (1-\lambda) f(z) \leq \max\{f(y), f(z)\} \leq \max_{x \in C} f(x)$?! $\square$

Prop Si $f : C \to \mathbb{R}$ est convexe où C est ensemble convexe de E

La fct $\tilde{f} : E \to \mathbb{R}$ définie par $\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & \text{si } x \in C \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$ est une

fct convexe de E dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ appelée extension convexe de f.

Déf Pour $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, l'épigraph est défini par

$$\mathrm{epi}(f) = \{(x,t) \in E \times \mathbb{R} : f(x) \leq t\}$$

Prop f convexe $\Leftrightarrow$ $\mathrm{epi}(f)$ convexe

Dém Soient $(t,x), (s,y) \in \mathrm{epi}(f)$

($\Rightarrow$) Supposons f convexe. Pour $\lambda \in [0,1]$ on a

$f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \leq \lambda t+(1-\lambda)s \Rightarrow \lambda(x,t)+(1-\lambda)(y,s) \in epi(f)$

$\Leftarrow$ Supposons $epi(f)$ convexe. Soient $(x,y)\in E^2$, $\lambda\in[0,1]$

$(x,f(x)), (y,f(y)) \in epi(f)$ par déf. Donc

$\lambda(x,f(x))+(1-\lambda)(y,f(y)) \in epi(f) \Rightarrow f(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$ $\square$

Prop (1) Si $(f_i)_{i\in I}$ famille de fct cvxe. $\bar{f} = \sup_{i\in I} f_i$ fct cvxe.

(2) Si $(g_n)_{n\geq 1}$ suite de fct cvxes tq $g_n(x) \to g(x)$ $\forall x\in E$.

Alors g cvxe.

Dém $x,y\in E$, $\lambda\in[0,1]$

(1) $f_i(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \lambda f_i(x)+(1-\lambda)f_i(y)$

$\sup_{i\in I} f_i(\lambda x+(1-\lambda)y) \leq \sup_{i\in I}\{\lambda f_i(x)+(1-\lambda)f_i(y)\} \leq$

$\leq \lambda \sup_i f_i(x)+(1-\lambda)\sup_i f_i(y) = \lambda\bar{f}(x)+(1-\lambda)\bar{f}(y)$

(2)
$$\begin{array}{ccccc} g_n(\lambda x+(1-\lambda)y) & \leq & \lambda g_n(x) & + & (1-\lambda)g_n(y) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ g(\lambda x+(1-\lambda)y) & \leq & \lambda g(x) & + & (1-\lambda)g(y) \end{array}$$ $\square$

Chapitre 2. Structure des ensembles convexes

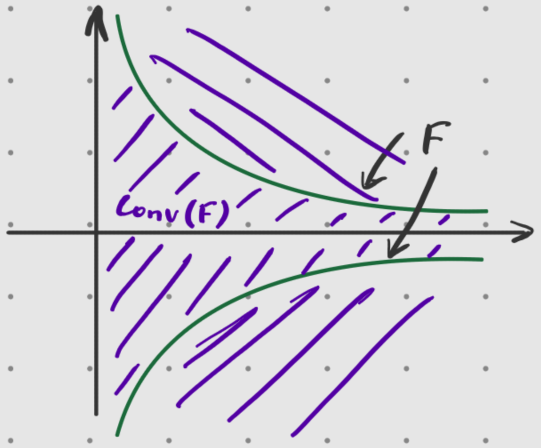
I. Propriétés topologiques

Prop Si C convexe de E, alors $adh(C)$ est un convexe de E.

<u>Dém</u> $x,y \in adh(C)$ $\lambda \in [0,1]$. $\exists (x_n)_n, (y_n)_n \in C^{\mathbb{N}}$ t.q. $x_n \to x$, $y_n \to y$

Alors $\lambda x + (1-\lambda) y = \lim_n \underbrace{(\lambda x_n + (1-\lambda) y_n)}_{\in C}$ □

<u>Rq</u> L'enveloppe cvxe d'un fermé n'est pas toujours fermée



F est fermé

$conv(F) = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ n'est pas fermé

<u>Prop</u> (i) $adh(conv(A))$ est le plus petit convexe fermé contenant A.

(ii) Si $A_1, \dots, A_p$ convexes compacts. Alors

$conv(A_1, \dots, A_p)$ $\left(= conv(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_p)\right)$ est compact.

<u>Démo</u> (ii) On a $conv(A_1, \dots, A_p) = \underbrace{\left\{ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i,\ \lambda_i \geq 0\ x_i \in A_i,\ \sum \lambda_i = 1 \right\}}_{\tilde{C}}$

En effet, $\tilde{C} \subset conv(A_1, \dots, A_p)$ par définition

Soit $x \in conv(A_1, \dots, A_p)$. Alors $x = \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{j=1}^{n_i} \mu_{ij} x_{ij} \right)$ où $x_{ij} \in A_i$, $n_i \geq 1$, $\sum_i \sum_j \mu_{ij} = 1$.

$\lambda_i := \sum_{j=1}^{n_i} \mu_{ij}$ $\quad x_i = \sum_{j=1}^{n_i} \frac{\mu_{ij}}{\lambda_i} x_{ij} \in A_i$

$x = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i \in \tilde{C}$. Alors $\tilde{C} = conv(A_1, \dots, A_p)$

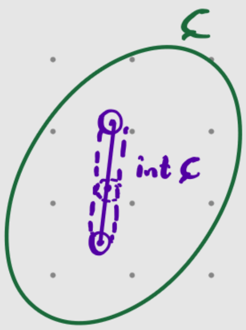
$\tilde{C}$ est convexe par construction

$\tilde{\mathcal{C}}$ compact en tant qu'image du compact

$A_1 \times \dots \times A_p \times \{\lambda \in \mathbb{R}_+^p : \sum \lambda_i = 1\}$ par l'application continue

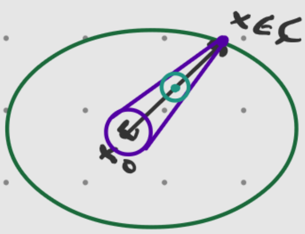
$\mathcal{C}$ compact

$\Phi : (x_1, \dots, x_p, \lambda_1, \dots, \lambda_p) \mapsto \sum_{i=1}^{p} \lambda_i x_i$ $\square$



Prop $\mathcal{C}$ convexe $\Rightarrow$ $\text{int}(\mathcal{C})$ est convexe

Lemme $\mathcal{C}$ cvxe de E et $x_0 \in \text{Int}(\mathcal{C})$. Alors pour tout $x \in \text{adh}(\mathcal{C})$ on a $[x_0, x) \subset \text{int}(\mathcal{C})$



Démo Soit $y \in [x_0, x)$ et $r > 0$: $B(x_0, r) \subset \mathcal{C}$

1) On suppose que $x \in \mathcal{C}$.

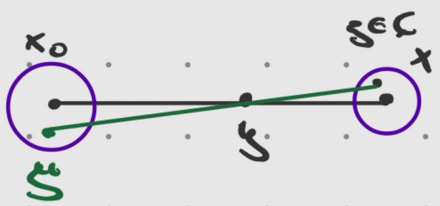
f : $f(z) = x + \lambda(z - x)$ $\forall z$ avec λ t.q. $f(x) = y$

On a $f(\mathcal{C}) \subset \mathcal{C}$ par convexité de $\mathcal{C}$ et $f(B(x_0, r)) = B(y, \lambda r)$

Donc comme $B(x_0, r) \subset \mathcal{C}$ on a $B(y, \lambda r) \subset \mathcal{C}$ et $y \in \text{int}(\mathcal{C})$.

2) Supposons $x \in \text{adh}(\mathcal{C})$ et soit $y \in (x_0, x)$ Soit g l'homothétie centrée en y de rapport λ t.q. $g(x_0) = x$

Donc $\lambda < 0$. Alors $g(B(x_0, r)) = B(x, |\lambda| r)$



Comme $x \in \text{adh}(\mathcal{C})$ il existe $z \in \mathcal{C} \cap B(x, |\lambda| r)$

Soit $u = g^{-1}(z)$. Alors $u \in B(x_0,r) \subset \text{int}(C)$ et $z - y = \lambda(u-y)$

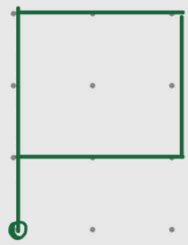
Donc $y \in (u,z)$, $u \in \text{Int}(C)$, $z \in C$. Par 1) $y \in \text{Int}(C)$ □

Prop Si C cvxe de E t.q. $\text{int}(C) \neq \emptyset$. $\text{Int}(C)$ cvxe.

De plus on a $\text{adh}(\text{int}(C)) = \text{adh}(C)$

$\text{int}(\text{adh}(C)) = \text{int}(C)$

Contre exemple si C non convexe :



Démo • $\text{int}(C)$ cvxe. Si $x, y \in \text{int}(C)$, par le lemme précédent $[x,y] \subset \text{int}(C)$ donc $\text{int}(C)$ cvxe.

• On a toujours $\text{adh}(\text{int}(A)) \subset \text{adh}(A)$

Si $x \in \text{adh}(C)$ donc il existe $x_0 \in \text{Int}(C)$ t.q. $[x_0, x) \subset \text{Int}(C)$ (lemme + $\text{int}(C) \neq \emptyset$)

$x_n = \frac{1}{n}x_0 + \left(1 - \frac{1}{n}\right)x \in \text{int}\, C \quad \forall n \geq 1$ et $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x$ donc $x \in \text{adh}(\text{int}(C))$

• On a toujours $\text{int}(A) \subset \text{int}(\text{adh}(A))$ ↙ adhérence

Soit $x \in \text{int}(\text{adh}(C)) \Rightarrow \exists r > 0 ;\ B(x,r) \subset \text{adh}(C)$

On a $\text{adh}(C) = \text{adh}(\text{int}(C))$ donc il existe $y \in \text{int}(C) \cap B(x,r)$

Soit $z \in E$ t.q. $x = \frac{z+y}{2}$. On a $z \in B(x,r)$ donc $z \in \text{adh}(C)$

Par le lemme $[y,z) \subset \text{Int}(C)$ et $x \in [y,z) \subset \text{int}(C)$ donc $x \in \text{int}(C)$ □

2. Séparation des convexes

Thm (projection sur les convexes)

$\mathcal{C}$ cvxe fermé de E et $x_0 \notin \mathcal{C}$. Il existe un unique $y_0 \in \mathcal{C}$

t.q. $|x_0 - y_0| = \inf\limits_{y \in \mathcal{C}} |x_0 - y|$

y_0 est appelé projection de x_0 sur $\mathcal{C}$ et est caracterisé par

l'inégalité $\langle x_0 - y_0, y - y_0 \rangle \leq 0 \quad \forall y \in \mathcal{C}$

Démo Soit $y \in \mathcal{C}$ et on pose $r = |x_0 - y|$

Alors $\inf\limits_{y \in \mathcal{C}} |x_0 - y| = \inf\limits_{\underbrace{y \in \mathcal{C} \cap \bar{B}(x_0, 2r)}_{\text{compact}}} |x_0 - y| \Rightarrow \inf\limits_{\mathcal{C} \cap \bar{B}(x_0, 2r)} |x_0 - y|$ est atteint.

Soit y_0 un pt de min. Alors $|y - x_0|^2 \geq |y_0 - x_0|^2$

$$\left.\begin{array}{l} |y - y_0 + y_0 - x_0|^2 \geq |y_0 - x_0|^2 \\ \quad\quad \shortparallel \\ |y - y_0|^2 + |y_0 - x_0|^2 + 2\langle y - y_0, y_0 - x_0 \rangle \end{array}\right\} \Rightarrow |y - y_0|^2 + 2\langle y - y_0, y_0 - x_0 \rangle \geq 0$$

$\mathcal{C}$ cvxe, $y, y_0 \in \mathcal{C}$ on peut remplacer $y - y_0$ par $\theta(y - y_0)$, $\theta \in (0,1)$

Alors $\theta^2 |y - y_0|^2 + 2\theta \langle y - y_0, y_0 - x_0 \rangle \geq 0 \quad \forall \theta \in (0,1)$

$$\underbrace{\frac{\theta}{2} |y - y_0|^2}_{\substack{\downarrow \theta \to 0 \\ 0}} + \langle y - y_0, y_0 - x_0 \rangle \geq 0$$

Un seul y_0 minimiseur vérifie cette inégalité : si y_0 le vérifie,

$$\forall y \quad |y-x_0|^2 = |y-y_0|^2 + |y_0-x_0|^2 + 2\langle y-y_0, y_0-x_0\rangle \geq |y-y_0|^2 + |y_0-x_0|^2 \geq |y_0-x_0|^2$$

avec inégalité stricte si $y \neq y_0$ $\square$

$\to$ y_0 est Proj

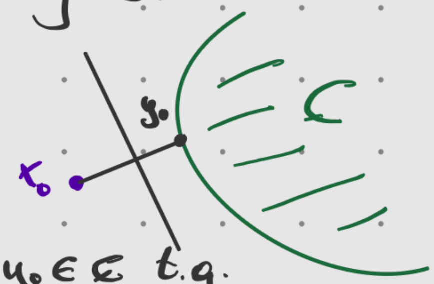
$\to$ unicité de y_0

On rappele qu'on hyperplan affine H est un ss ensemble de E t.q

$$H - \{x\} = \{y - x, y \in H\} \text{ est un hyperplan vectoriel}$$

Thm (séparation d'un pt et d'un cvxe fermé)

C convexe fermé et $x_0 \in E \setminus C$. Il existe un hyperplan affine H séparant x_0 de C : il existe une forme linéaire f et une const c t.q. $f(x_0) > c$ et $f(x_0) < c$ $\forall y \in C$.



Démo $x_0 \notin C$ donc $\inf_{y \in C} |x_0 - y| > 0$

Par le thm de proj il existe un unique $y_0 \in C$ t.q.

$$|y_0 - x_0| = \inf_{y \in C} |y - x| \qquad \langle y - y_0, x_0 - y_0\rangle \leq 0 \quad \forall y \in C$$

En posant $f(y) = \langle y, x_0 - y_0\rangle$ f forme linéaire non nulle

et on a $f(y) \leq f(x_0)$ $\forall y \in C$

Mais $f(x_0) = f(y_0) + f(x_0 - y_0) = f(y_0) + |x_0 - y_0|^2 > f(y_0)$

Soit $c = \dfrac{f(x_0)+f(y_0)}{2} = f\left(\dfrac{x_0+y_0}{2}\right)$

$$\left.\begin{array}{l} f(x_0) > c \\ \\ f(y) < c \quad \forall y \in C \end{array}\right\} \Rightarrow H = \{y,\ f(y) = c\} \text{ sépare } x_0 \text{ de } C \quad \square$$

Thm (Séparation d'un pt et d'un cvxe ouvert)

C ss ens. cvxe ouvert de E et $x_0 \in E \setminus C$.

Alors il existe un hyperplan affine t.q.

$x_0 \in H$ et $C \cap H = \emptyset$

Démo Sans perte de généralité, on suppose $x_0 = 0$

Soit $\Gamma = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda C$ $\quad \Gamma$ ouvert comme union de λC qui sont ouverts.

Γ convexe : $x, y \in \Gamma$, $\mu \in [0,1]$

$$x = \lambda_1 \tilde{x}, \quad y = \lambda_2 \tilde{y}, \quad \tilde{x}, \tilde{y} \in C$$

$$\mu x + (1-\mu) y = \mu \lambda_1 x + (1-\mu)\lambda_2 y = \overbrace{(\mu\lambda_1 + (1-\mu)\lambda_2)}^{\lambda}\left(\frac{\mu\lambda_1}{\mu\lambda_1+(1-\mu)\lambda_2} x + \right.$$

$$\left. + \frac{(1-\mu)\lambda_2}{\mu\lambda_1+(1-\mu)\lambda_2} y\right) = \lambda \cdot z, \ z \in C \Rightarrow \mu x + (1-\mu) y \in \Gamma.$$

$0 \notin \Gamma$ car $0 \notin C$

En particulier $\mathrm{adh}(\Gamma) \neq E$

Sinon $\mathrm{int}(\mathrm{adh}(\Gamma)) = \mathrm{int}\, E = E$

$$\overset{\circ}{\Gamma} = \Gamma$$

Soit $y_0 \in E \setminus adh(\Gamma)$. Le thm de séparation d'un pt et d'un evxe fermé nous donne une forme linéaire f:

$$f(y_0) < f(z) \quad \forall z \in adh(\Gamma)$$

Si $z \in \Gamma$ alors $t \cdot z \in \Gamma$ $\forall t > 0$ donc $f(y_0) < f(tz) = t f(z)$

$$\frac{f(y_0)}{t} < f(z) \quad \forall t > 0$$

$$\downarrow t \to +\infty$$

$$0 \leq f(z) \quad \forall z \in adh(\Gamma)$$

Donc $\Gamma \subset \{f \geq 0\}$

Comme Γ ouvert $\Gamma \subset int\{f \geq 0\} = \{f > 0\} \Rightarrow C \subset \{f > 0\}$

Si $x_0 \neq 0$ prendre $C - \{x_0\}$ et appliquer le résultat $\square$

Corollaire (Thm de Hahn-Banach)

C_1 et C_2 deux convexes nonvides de E t.q. $C_1 \cap C_2 = \emptyset$ et C_1 ouvert. Alors il existe une forme linéaire f et une const. c t.q. $f(x_1) < c \leq f(x_2)$ $\forall x_1 \in C_1$ $\forall x_2 \in C_2$.

Démo On applique la séparation d'un pt et d'un evxe ouverte à $C = C_1 - C_2 = \{x_1 - x_2 : x_1 \in C_1, x_2 \in C_2\}$ et au pt 0. $0 \notin C$ car $C_1 \cap C_2 = \emptyset$

C est ouvert : $C_1 - C_2 = \bigcup_{x_2 \in C_2} \underbrace{(C_1 - \{x_2\})}_{\text{ouvert}}$ est cvxe.

Le thm nous donne une f.l. f t.q.

$$f(0) = 0 < f(x) \quad \forall x \in C_1 - C_2$$

$$x = x_1 - x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1 \in C_1 \quad \forall x \in C_2.$$

On pose $c = \inf_{\xi \in C_2} f(\xi) = f(\xi^*)$

Alors $f(x_1) \leq c \leq f(x_2)$ $\quad C_1 \subset \{f \leq c\} \overset{C_1 \text{ ouvert}}{\Rightarrow} C_1 \subset \underbrace{\mathrm{int}\{f \leq c\}}_{= \{f < c\}}$

Donc $f(x_1) < c \leq f(x_2) \quad \forall x_1 \in C_1 \quad \forall x_2 \in C_2$ $\square$

Corollaire Si C_1 et C_2 cvxe tq. $\mathrm{int}(C_1) \neq \emptyset$ et $C_1 \cap C_2 = \emptyset$

il existe une f.l. f et une cnst c t.q.

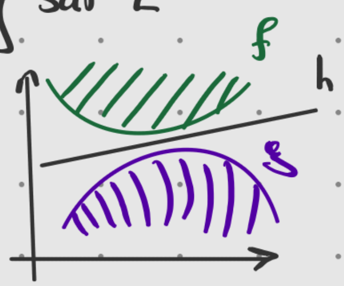
$$f(x_1) \leq c \leq f(x_2) \quad \forall x_1 \in C_1 \quad \forall x_2 \in C_2$$

Démo On applique le corollaire précédant à $\mathrm{int}(C_1)$ et C_2 $\square$

Corollaire f fonction cvxe et g fct concave t.q. $f \geq g$ sur E.

Alors il existe une forme affine h t.q. $f \geq h \geq g$ sur E

Démo Appliquer la séparation aux épigraphes. $\square$



Chap. 3 Regularité des fonctions convexes

1. Continuité

Pour $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et $x \in \mathrm{int}(\mathrm{dom} f)$, on dit f est

localement Lipschitz en x si il existe $r > 0$ et $L > 0$ t.q.

$B(x,r) \subset \mathrm{dom}(f)$ et $|f(y) - f(z)| \leq L|y - z| \quad \forall y, z \in B(x,r)$

On dit que f loc^t Lipschitz sur $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ si f

loc^t Lipschitz en tout point de $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.

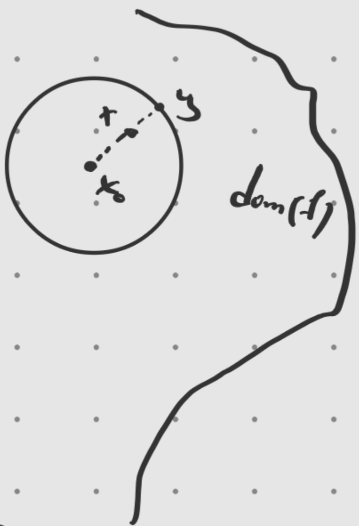
Prop Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe et $x_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$.

Si f majorée au voisinage de x_0, alors f continue en x_0

et même loc^t Lipschitz en x_0.

Démo 1) On montre la continuité, $x_0 \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$ et r_0 :

$B(x_0, r_0) \subset \mathrm{dom}(f)$ et $\sup_{x \in B(x_0, r_0)} f(x) \leq M$.



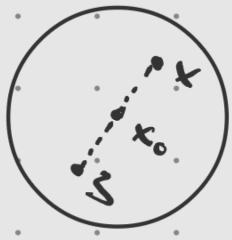
Posons $y - x_0 = r_0 \cdot \dfrac{x - x_0}{|x - x_0|}$, $\lambda := \dfrac{|x - x_0|}{r} \in [0,1]$

De plus, $x = \lambda y + (1-\lambda) x_0$

Donc par convexité $f(x) \leq \lambda f(y) + (1-\lambda) f(x_0)$

$(*)$ $\quad f(x) - f(x_0) \leq \lambda\big(f(y) - f(x_0)\big) = \dfrac{|x-x_0|}{r_0}\big(H - f(x_0)\big)$ $\rightarrow$ semicontinuité

On pose $z = x_0 - (x - x_0)$, $z \in \overline{B}(x_0, r_0)$



$x_0 = \dfrac{z + x}{2}$ par convexité on a

$$f(x_0) \leq \frac{f(z) + f(x)}{2} \quad \text{et} \quad f(z) - f(x_0) \geq -\big(f(x) - f(x_0)\big)$$

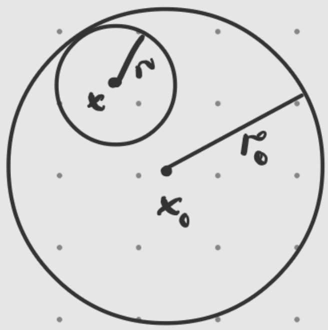
On applique $(*)$ à z $\quad f(z) - f(x_0) \leq \dfrac{|z - x_0|}{r_0}\big(H - f(x_0)\big) =$

$$= \frac{|x - x_0|}{r_0}\big(H - f(x_0)\big)$$

Donc $\quad -\big(f(x) - f(x_0)\big) \leq \dfrac{|x - x_0|}{r_0}\big(H - f(x_0)\big)$

Alors $\quad |f(x) - f(x_0)| \leq \dfrac{|x - x_0|}{r_0}\big(H - f(x_0)\big)$

2) Ppté de Lipschitz: si $x, y \in \overline{B}(x_0, r_0)$



$r = r_0 - |x - x_0|$

Si $x \in B(x, r)$ $\quad \overline{B}(x_0, r) \subset \overline{B}(x_0, r_0)$

$$|f(y) - f(x)| \leq \frac{|y - x|}{r_0 - r}\big(M - f(x)\big)$$

Comme $f(x) - f(x_0) \geq -\big(M - f(x_0)\big) \Rightarrow f(x) \geq 2f(x_0) - M$

Donc $\quad |f(y) - f(x)| \leq 2\dfrac{|y - x|}{r_0 - r}\big(M - f(x_0)\big) \quad \forall y \in B(x, r)$

$\forall y \in B(x_0, r_0)$ $\exists\, x_1, \dots, x_n$ t.q. $x_1 = x$ $x_n = y$ et $x_{i+1} \in \overline{B}(x_i, r)$

Alors $\quad |f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq \dfrac{2|x_{i+1} - x_i|}{r}\, |x_{i+1} - x_i|$

$$|f(x)-f(y)| \leq \sum_{i=1}^{n} |f(x_{i+1})-f(x_i)| \leq \frac{2(M-f(x_i))}{r} \sum |x_{i+1}-x_i|$$

En prenant $x_1,\dots,x_n$ alignés on a

$$|f(x)-f(y)| \leq \frac{2(M-f(x_0))}{r_0-r}|x-y| \qquad \square$$

Corollaire Soit $f : E \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ convexe. On a équivalence entre

i) il existe $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ t.q. f bornée au voisinage de x_0

ii) il existe $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ t.q. f cont. en x_0

iii) $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f)) \neq \emptyset$ et f cont. sur $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$

iv) $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f)) \neq \emptyset$ et f est Lipschitz sur $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$

Démo On a iv) $\Rightarrow$ iii) $\Rightarrow$ ii) $\Rightarrow$ i)

Il reste montrer i) $\Rightarrow$ iv). Soit $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ et $r_0>0$,

$B(x_0,r_0) \subset \mathrm{dom}(f)$ et f majorée par M sur $B(x_0,r_0)$

$\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f)) \neq \emptyset$. Soit $y \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$. Alors il existe $z \in \mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$

t.q. $y \in [x_0, z)$. Soit h homothétie centrée en z de rap. λ

t.q. $h(x_0)=y$. Alors $h(\bar{B}(x_0,r_0)) = \bar{B}(y_0,\lambda r_0)$

Par convexité $f(h(x)) = f(z+\lambda(x-z)) = f(\lambda x+(1-\lambda)z) \leq$

$\leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(z) \leq \max\{M, f(z)\} < +\infty$

Donc f majorée sur $\bar{B}(y_0, \lambda r_0) \Rightarrow f$ Lipschitz sur $\bar{B}(y_0, \lambda r_0)$ $\square$

Corollaire f cvxe est continue sur $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f))$

Démo Supposons que $\mathrm{int}(\mathrm{dom}(f)) \neq \emptyset$

$B(x_0, r_0) \subset \mathrm{dom}(f)$ $\quad x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ $\quad r_0 > 0$

Alors il existe $x_1, \dots, x_n \in B(x_0, r_0)$ t.q. $(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0)$ soit une base de E. Donc f majorée sur $\mathrm{conv}(x_1, \dots, x_n)$

On a $\mathrm{int}(\mathrm{conv}(x_1, \dots, x_n)) \neq \emptyset$ car $(x_1 - x_0, \dots, x_n - x_0)$ base de E

On applique alors le résultat précédent $\square$

Convexité et différentiabilité

Déf Une fonction $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ est dite dérivable en $x_0 \in \mathrm{dom}\, f$ dans la direction $h \in E \setminus \{0\}$ si $\lim_{t \downarrow 0} \dfrac{f(x_0 + th) - f(x_0)}{t}$ existe.

On la note alors $f'_d(x_0, h)$.

Prop Une fct $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe est dérivable en tout $x_0 \in \mathrm{dom}(f)$ dans toutes les directions.

De plus, on a $f(x)-f(x_0) \geq f'_d(x_0, x-x_0)$

Lemme La fct $\Delta_{x_0,h} : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ définie par

$$\Delta_{x_0,h}(t) = \frac{f(x_0+th)-f(x_0)}{t}, \quad t\in\mathbb{R}_+^*$$

est croissante pour tout $h\in E\setminus\{0\}$.

Démo du lemme

Soit φ la fct de $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $\varphi(t) = f(x_0+th)-f(x_0)$

$\varphi(0)=0$, $\varphi(\lambda t+(1-\lambda)s) = f(\lambda(x_0+th)+(1-\lambda)(x_0+sh)) - f(x_0) \leq$

$\leq \lambda(f(x_0+th)-f(x_0)) + (1-\lambda)(f(x_0+sh)-f(x_0)) \Rightarrow \varphi$ est convexe

Alors pour $\lambda\in[0,1]$

$$\varphi(\lambda t) = \varphi(\lambda t+(1-\lambda)0) \leq \lambda\varphi(t) + (1-\lambda)\underbrace{\varphi(0)}_{0} = \lambda\varphi(t)$$

Si $s=\lambda t \Rightarrow \varphi(s) \leq \frac{s}{t}\varphi(t)$ pour $s\leq t$

$$\frac{\varphi(s)}{s} \leq \frac{\varphi(t)}{t} \Rightarrow \Delta_{x_0,h}(s) \leq \Delta_{x_0,h}(t) \text{ pour } 0\leq s\leq t. \quad \square$$

Démo de la prop.

Comme $\Delta_{x_0,h} \nearrow$ elle admet une lim en $0+$ donc $f'_d(x_0,h)$ existe. $f(x)-f(x_0) = f(x_0+h)-f(x_0)$ avec $h = x-x_0$.

$$f(x) - f(x_0) = \Delta_{x_0,h}(1) \geq \lim_{t \downarrow 0} \Delta_{x_0,h}(t) = f'_d(x_0, x - x_0) \qquad \square$$

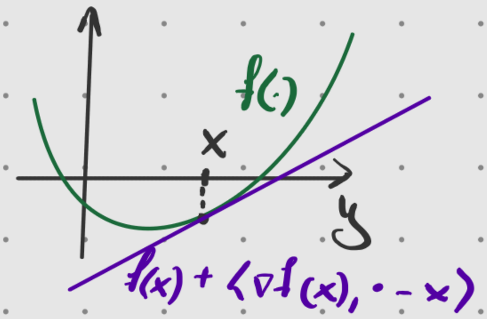
Corollaire f fct cvxe admet un min en x_0 ssi

$f'_d(x_0, h) \geq 0$ pour tout $h \in E \setminus \{0\}$.

Prop Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ différentiable sur $\mathrm{dom}(f)$.

f convexe ssi $f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle$

pour tout $x \in \mathrm{dom}(f)$ et tout $y \in E$.



Démo

($\Rightarrow$) Supposons f cvxe. Comme f differentiable

$$f'_d(x, y-x) = \langle \nabla f(x), y - x \rangle$$

Comme f cvxe, $f(y) - f(x) \geq f'_d(x, y-x) \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle$

($\Leftarrow$) Soit $x \in \mathrm{dom}(f)$ et $y \in E$. Si $y \notin \mathrm{dom}(f)$ $f(y) - f(x) = +\infty \geq \langle \nabla f(x), y - x \rangle$

Supposons $y \in \mathrm{dom}(f)$. Soit $z = \lambda x + (1-\lambda) y$

On applique l'inégalité en z:

$$f(y) - f(z) \geq \langle \nabla f(z), y - z \rangle \qquad (L_1)$$

$$f(x) - f(z) \geq \langle \nabla f(z), x - z \rangle \qquad (L_2)$$

$\lambda L_2 + (1-\lambda) L_1$:

$$\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) - f(z) \geq \langle \nabla f(z), \underbrace{\lambda(x-z) + (1-\lambda)(y-z)}_{\overset{\parallel}{0} \text{ par déf. de } z} \rangle$$

$$f(z) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

$\square$

Prop Soit $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ differentiable sur $\mathrm{dom}(f)$.

Alors f cvxe ssi $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y \rangle \geq 0 \quad \forall x, y \in \mathrm{dom}(f)$

Démo

$\Rightarrow$ Supposons f cvxe. Soit $x, y \in \mathrm{dom}(f)$

Alors d'après la prop. précédente

$$+ \begin{cases} f(y) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), y-x \rangle \\ f(x) - f(y) \geq \langle \nabla f(y), x-y \rangle \end{cases}$$

$$0 \geq \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), y-x \rangle$$

$\Leftarrow$ $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad \lambda \mapsto f(\lambda x + (1-\lambda) y)$

$$\varphi(\lambda) = f(y + \lambda(x-y))$$

φ dérivable de dérivée

$$\varphi'(\lambda) = \langle \nabla f(y + \lambda(x-y)), x-y \rangle$$

Pour $\lambda_1 < \lambda_2$ on a

$$\varphi'(\lambda_1) - \varphi'(\lambda_2) = \langle \nabla f(y+\lambda_1(x-y)) - \nabla f(y+\lambda_2(x-y)), x-y \rangle \leq 0$$

Donc $\varphi' \nearrow$ donc φ cvxe et $\varphi(\lambda) \leq \lambda \varphi(1) + (1-\lambda)\varphi(0)$

$$f(\lambda x + (1-\lambda) y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \qquad \square$$

Prop (Coercivité du gradient)

Soit $f : E \to \mathbb{R}$ convexe différentiable et ∇f L-Lipschitz

$$|\nabla f(x) - \nabla f(y)| \leq L |x-y| \quad \forall x,y \in E$$

Alors $\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x-y \rangle \geq \frac{1}{L} |\nabla f(x) - \nabla f(y)|^2 \quad \forall x,y \in E$

__Démo__ Fixons $y, z \in E$ et g une fct vérifiant les mêmes hypothèses que f. Par la formule de Taylor à l'ordre 1,

$$g(z) = g(y) + \int_0^1 \underbrace{\langle \nabla g(tz+(1-t)y), z-x \rangle}_{\underset{\text{Lipsch.}}{\leq} \langle \nabla g(y), z-x \rangle + tL|z-y|^2} dt$$

Donc $g(z) \leq g(y) + \langle \nabla g(y), z-y \rangle + L|z-y|^2 \underbrace{\int_0^1 t\,dt}_{1/2}$

On prend $y = x$ et $z = x - \frac{\nabla g(x)}{L}$

On obtient $\frac{1}{2L} |\nabla g(x)|^2 \leq g(x) - g(z) \quad (*)$

Supposons que g minorée par la const $\mathcal{M}$

Alors $(*)$ $\frac{1}{2L}|\nabla g(x)|^2 \leq g(x) - \mathcal{M}$

On applique $(*)$ à $g = h_1$ et $g = h_2$ où

$$h_1(u) = f(u) - \langle \nabla f(x), u \rangle$$

$$h_2(u) = f(u) - \langle \nabla f(y), u \rangle$$

Ici f cvxe donc $f(u) - f(x) \geq \langle \nabla f(x), u - x \rangle$ donc $h_1(u) \geq f(x)$ $\forall u$

De même, $h_2(u) \geq f(y)$.

D'après $(*)$ on a
$$+\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{2L}|\nabla f(u) - \nabla f(x)|^2 \leq h_1(u) - f(x) \\ \frac{1}{2L}|\nabla f(u) - \nabla f(y)|^2 \leq h_2(u) - f(y) \end{array}\right. \quad \begin{array}{l} u = y \\ u = x \end{array}$$

$$\frac{1}{2L}|\nabla f(y) - \nabla f(x)|^2 \leq \langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y \rangle \qquad \square$$

Prop Soit $f : E \to \mathbb{R}$ 2 fois différentiable. Supposons que

$$\left\langle \frac{\nabla f(x+th) - \nabla f(x)}{t}, h \right\rangle \xrightarrow[t \to 0^+]{} Q(x,h)$$

avec $Q(x,h) \geq 0$ $\forall x \in E$ $\forall h \in E \setminus \{0\}$. Alors f cvxe.

Démo Par le thm des accroiss. finis, il existe $\theta \in [0,1]$ t.q.

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), y - x \rangle = \frac{d}{dt}\langle \nabla f(y + t(x-y)), x - y \rangle_{t=\theta}$$

On obtient alors la cvxité $\square$

Chapitre 4. Optimisation de fct differentiables

1. Condition d'optimalité

On fixe un fermé cvxe K de E et $f : E \to \mathbb{R}$ differentiable t.q.

$$\lim_{|x| \to +\infty} f(x) = +\infty$$

Thm La fct f admet un minimum global sur K.

Si de plus f strictement cvxe, ce minimum et unique.

Démo Fixons $x_0 \in K$, alors $\tilde{K} = \{y \in E, f(y) \leq f(x_0)\} \cap K$

fermé est borné car $\lim_{|x| \to \infty} f(x) = +\infty$. Donc $\tilde{K}$ compact

Comme $x_0 \in K$ $\inf_K f = \inf_{\tilde{K}} f$ comme f diff, f continue

et elle admet un pt de min sur $\tilde{K}$ donc sur K.

Supposons f stt cvxe. Soient x_1 et x_2 2 pts de min $\neq$.

Alors $f(\lambda x_1 + (1-\lambda) x_2) < \lambda f(x_1) + (1-\lambda) f(x_2) = \min_K f(x)$ impossible $\square$

Thm Soit $f : E \to \mathbb{R}$ cvxe et differentiable. Alors x^* pt de min de f sur K ssi $\langle \nabla f(x^*), v - x^* \rangle \geq 0$ $\forall v \in K$.

Démo ($\Leftarrow$) $\langle \nabla f(x^*), v - x^* \rangle \leq f(v) - f(x^*) \Rightarrow f(v) \geq f(x^*)$

($\Rightarrow$) $\langle \nabla f(x^*), v - x^* \rangle = \lim_{t \downarrow 0} \dfrac{f(x^* + t(v - x^*)) - f(x^*)}{t} \geq 0$ $\square$

Multiplicateurs de Lagrange

On considère le cas où l'ensemble K est donné par

$$K = \{x \in E,\ F_i(x) = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, n\}$$

Thm Supposons que $f : E \to \mathbb{R}$ soit differentiable et $F_1, \dots, F_n : E \to \mathbb{R}$ C^1. Soit x^* solution de $\inf_{x :\ F_1(x) = 0, \dots, F_n(x) = 0} f(x)$ t.q $(\nabla F_i(x^*))_{i=1}^n$ forme une famille libre.

Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ t.q. $\nabla f(x^*) + \sum \lambda_i \nabla F_i(x^*) = 0$

Les coeff $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sont appelés multiplicateurs de Lagrange

Mode d'emploi Si on cherche x^* sol. de $\inf_{x :\ F_i(x) = 0} f(x)$

On introduit le Lagrangien $\mathcal{L} : E \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ $(x, \lambda_1, \dots, \lambda_n) \mapsto f(x) + \sum \lambda_i F_i(x)$

x^* alors vérifie $\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}(x^*, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i}(x^*, \lambda_1, \dots, \lambda_n) = F_i(x^*) = 0 \end{cases}$ $n+1$ equations avec $n+1$ inconnues $x^*, \lambda_1, \dots, \lambda_n$

Exemple d actifs sur une période (2 temps, $t=0$ et $t=1$)

$(S^1, \dots, S^d)$ S_t^i : valeur de S^i au temps t.

Stratégie d'investissement: capital initial x. π^i est une proportion de richesse investie en S^i.

$$\sum_{i=1}^{d} \pi^i = 1$$

Montant investi en S^i : $\pi^i \cdot x$

$V_t^{x,\pi}$ valeur en t du portefeuille de stratégie (x,π)

$$V_0^{x,\pi} = x = \sum_i \underbrace{\frac{\pi^i x}{S_0^i}}_{\text{nombre d'unité d'actif}} \cdot S_0^i$$

$$V_1^{x,\pi} = x \sum_i \pi^i \frac{S_1^i}{S_0^i}$$

Rdt : $$R^\pi = \frac{V_1^{x,\pi} - V_0^{x,\pi}}{V_0^{x,\pi}} = \sum_i \pi^i \underbrace{\left(\frac{S_1^i - S_0^i}{S_0^i} \right)}_{R^i} = \sum_i \pi^i R^i$$

En gestion de portefeuille, on cherche à maximiser le rdt moyen ss contrainte de risque:

$$\sup_{\substack{\pi \in \mathbb{R}^d \\ \sum \pi_i = 1 \\ \mathbb{V}ar[R^\pi] \leq c}} \mathbb{E}[R^\pi] = \sup_{\substack{\pi \in \mathbb{R}^d,\ \sum \pi_i = 1 \\ \mathbb{V}ar[R^\pi] = c}} \mathbb{E}[R^\pi] \iff \begin{cases} \sup \sum_i \pi_i \mathbb{E}[R^i] \\ \text{s.c. } \sum \pi_i = 1 \\ \pi^T \Sigma \pi = c \end{cases} \iff$$

$\Sigma = \mathbb{V}ar[R]$

$$\iff \begin{cases} \sup \pi^T \cdot R \\ \text{s.c.} \\ \quad \pi^T \mathbb{1} = 1 \\ \quad \pi^T \Sigma \pi = c \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \pi^T R + \lambda(\pi^T \mathbb{1} - 1) + \mu(\pi^T \Sigma \pi - c)$$

$$\nabla_\pi \mathcal{L} = R + \lambda \cdot 1 + 2\mu \Sigma \pi = 0$$

$$\pi = -\frac{1}{2\mu} \Sigma^{-1}(R + \lambda \cdot 1)$$

$$\pi^T \Sigma \pi = \frac{1}{4\mu^2}(\lambda \cdot 1' + R')\Sigma^{-1}\Sigma\Sigma^{-1}(R + \lambda 1) = \frac{1}{4\mu^2}(\lambda 1' + R')\Sigma^{-1}(\lambda 1 + R) = c$$

$$\pi^T \cdot 1 = -\frac{1}{2\mu}(R' + \lambda 1')\Sigma^{-1} \cdot 1 = 1.$$

Conditions de K-K-T (Karush-Kuhn-Tucker)

Théorème Soient f et $F_1, \dots, F_m$ des fcts de E dans $\mathbb{R}$ cvxes et différentiables. Soit x^* solution du pb $\begin{cases} \inf_{x \in E} f(x) \\ F_i(x) \leq 0, \; i = 1, \dots, m \end{cases}$

t.q. les contraintes sont qualifiées(*) en x^*.

Alors il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}_+$ t.q. $\nabla f(x^*) + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \nabla F_i(x^*) = 0$

avec $\lambda_i = 0$ si $F_i(x^*) < 0$ pour $i = 1, \dots, n$.

(*) $(\nabla F_i(x^*))_{i=1}^{n}$ est une famille libre, $\exists w : \langle \nabla F_i(x^*), w \rangle < 0$

2. Descente de gradient

On prend dans cette section $f : E \to \mathbb{R}$ cvxe et différentiable.

On cherche à construire une suite (x_n) t.q. $x_n \xrightarrow[n \to \infty]{} x^*$

avec $f(x^*) = \min_{x \in E} f(x)$

On fixe $\gamma \in \mathbb{R}_+^*$ appelé pas de la descente et on définit la suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en fixant $x_0 \in E$ et par la récurrence

$$x_{n+1} = x_n - \gamma \nabla f(x_n), \qquad n \geq 0$$

Conditions pour avoir convergence?

On introduit l'operateur $T : E \to E$ défini par

$$T(x) = x - \gamma \nabla f(x) = (I - \gamma \nabla f)(x)$$

Alors $x_{n+1} = T(x_n)$, $n \geq 0$

Pour que (x_n) converge, il faut que T ait un point fixe.

Théorème Supposons que ∇f est L-lipschitzien et que f admet un min global en x^*. Alors pour tout $x_0 \in E$ et $\gamma \in \left(0, \frac{2}{L}\right)$ on a $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$.

Lemme Soit $R : E \to E$ 1-Lipschitz admettant un point fixe. Soit $(y_n)_{n\geq 0}$ une suite définie par $y_0 \in E$ et $y_{n+1} = R(y_n)$ $n \geq 0$

Si $\lim_{n\to\infty} |y_{n+1} - y_n| = 0$, alors $(y_n)_n$ converge.

Preuve du lemme

Soit y pt fixe de R. Comme R est 1-lipschitz la suite

$(|y_n - y|)_{n\geq 0}$ est $\downarrow$, car $|y - y_{n+1}| = |R(y) - R(y_n)| \leq |y - y_n|$.

E de dim finie donc $(y_n)_n$ à une sous suite près vers $z \in E$.

Comme $|y_{n+1} - y_n| \to 0$ z est un point fixe de R

Alors $(|z - y_n|)_{n\geq 0}$ $\downarrow$ et admet ss suite tendant vers 0.

Donc $|z - y_n| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. $(y_n)_n$ converge vers pt fixe de R. $\square$

Lemme Pour $\gamma \in \left(0, \frac{2}{L}\right]$, T est 1-lipschitz

Preuve du lemme

Posons $S = I - T = \gamma \nabla f$

Alors $|x-y|^2 - |T(x) - T(y)|^2 = 2\langle S(x) - S(y), x - y\rangle - |S(x) - S(y)|^2$

En effet $T = I - S$ donc

$$|x-y|^2 - |x - y - (S(x) - S(y))|^2 = \cancel{|x-y|^2} - (\cancel{|x-y|^2} - 2\langle S(x) - S(y), x-y\rangle + |S(x) - S(y)|^2)$$

Par coercivité du gradient d'une fonction convexe,

$$\langle \nabla f(x) - \nabla f(y), x - y\rangle \geq \frac{1}{L}\|\nabla f(x) - \nabla f(y)\|^2$$

on a $\langle S(x)-S(y), x-y\rangle \geq \frac{1}{\gamma L}\|S(x)-S(y)\|^2$ car $S=\gamma\nabla f$

Alors pour $\gamma\in(0,\frac{2}{L})$ $|x-y|^2-|T(x)-T(y)|^2\geq 0$ et T 1-Lipschitz. $\square$

Preuve du thm

On remarque que être pt fixe de T est équivalent à annuler ∇f. Comme ∇f L-Lipschitz on a

$f(z)=f(y)+\int_0^1\langle\nabla f(tz+(1-t)y), z-y\rangle dt$

$=\langle\nabla f(y), z-y\rangle+\langle\nabla f(\cdot)-\nabla f(y), z-y\rangle$

C.S

$\leq |z-y|^2$

$$f(z)\leq f(y)+\langle\nabla f(y), z-y\rangle+\frac{L}{2}|z-y|^2 \text{ pour } y, z\in E.$$

On l'applique à $y=x_n$ et $z=x_{n+1}$

$$f(x_{n+1})\leq f(x_n)+\langle\nabla f(x_n), -\gamma\nabla f(x_n)\rangle+\frac{L}{2}|\gamma\nabla f(x_n)|^2$$

$$f(x_{n+1})\leq f(x_n)-\left(\frac{1}{\gamma}-\frac{L}{2}\right)|x_{n+1}-x_n|^2$$

Donc comme $\gamma\leq\frac{2}{L}$, $\gamma-\frac{L}{2}\geq 0$

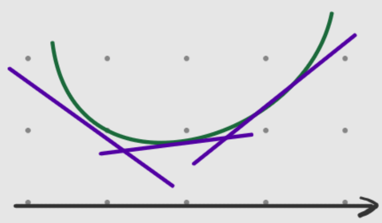
$\left(c|f(x_{n+1})-f(x_n)|\right)$

et $(f(x_n))_n\downarrow$ donc elle converge et $|x_{n+1}-x_n|\to 0$ et par les lemmes $x_n\to x^*$ pt fixe de T donc $\nabla f(x^*)=0$ $\square$

Chapitre 5. Dualité des fonctions convexes

1. Enveloppe superieure de fonction affine

On rappele que $h: E\to\mathbb{R}$ est affine si



$h(\lambda x + (1-\lambda)y) = \lambda h(x) + (1-\lambda)h(y)$ pour $x, y \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$

C'est équivalent à $h - h(0)$ fonction linéaire.

On dit que $f : E \to \mathbb{R}$ est semi-continue inferieurment (sci) si

$$\liminf_{x' \to x} f(x') \geq f(x) \qquad \liminf_{x' \to x} = \lim_{r \to 0} \inf_{x' \in B(x,r)}$$

En particulier, $f \in C \iff f$ sci et $-f$ sci.

<u>Thm.</u> $f : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ convexe et s.c.i. ssi f est l'enveloppe superieure de fcts affines

<u>Preuve</u> Si f enveloppe supérieure d'une famille $(f_i)_{i \in I}$ de fcts affines. $f(x) = \sup_{i \in I} f_i(x) \quad x \in E$

Alors f est s.c.i. en tant que sup de fcts f_i continues.

f convexe en tant que sup de fct affines.

<u>Réciproque</u> $f : E \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ cvxe et sci.

Si $f \equiv +\infty$, $f_i = i$, $f = \sup_i f_i$

Sinon $\mathrm{dom}(f) \neq \emptyset$. Soit $x_0 \in \mathrm{adh}(\mathrm{dom}(f))$

Pour $t < f(x_0)$, on définit $V_f(t) = \{x \in E,\ f(x) > t\}$

$V_t(f)$ ouvert car f sci. et $x_0 \in V_f(t)$.

Donc $B(x_0, r) \subset V_f(t)$ pour un certain $r > 0$

On définit la fct $g : E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ par

$$g(x) = \begin{cases} t & \text{si } x \in B(x_0, r) \\ -\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors g concave ($-g$ cvxe) finie et continue sur $B(x_0, r)$

et majorée par f comme $x_0 \in adh(dom(f))$, on a $dom(f) \cap B(x_0, r) \neq \emptyset$.

Par thm de séparation, il existe une forme affine h t.q.

$$g \leq h \leq f$$

Donc h fct affine t.q. $t \leq h(x_0) < f(x_0)$

Soit $x_0 \in E \setminus adh(dom(f))$. Par théoreme de séparation d'un pt

et d'un convexe, il existe $u^* \in E$ t.q.

$$\alpha = \sup_{x \in dom(f)} \langle u^*, x \rangle < \langle u^*, x_0 \rangle$$

Soit $h_{u^*,\alpha}(x) = \langle u^*, x \rangle - \alpha$

Alors $h_{u^*,\alpha}(x) \leq 0 \quad \forall x \in dom f$ et $h_{u^*,\alpha}(x_0) > 0$

Soit h_0 une forme lin. $h \leq f$ (continuité pour le cas $x_0 \in dom f$)

On définit $h_n(x) = n\, h_{u^*,2}(x) + h_0(x)$, $x \in E$

donne bien $+\infty$ à l'extérieur de $\mathrm{dom}(f)$

3. Conjuguée de Fenchel-Moreau

Déf Soit $f : E \to \mathbb{R}$. Sa conjuguée (au sens de Fenchel-Moreau) est la fct $f^* : E \to \mathbb{R}$ définie par $f^*(y) = \sup_{x \in E} \{\langle x, y\rangle - f(x)\}$, $y \in E$

Prop f^* est soit convexe sci soit identiquement $-\infty$.

Démo $f = +\infty \Rightarrow f^* \equiv -\infty$

Sinon f^* est un suprémum de fcts affines de $E \to \mathbb{R}$ (donc continues). Elle est donc convexe et s.c.i. $\square$

$$\left(f \text{ sci} \Leftrightarrow \liminf_{x' \to x} f(x') \geq f(x)\right)$$

Rem $f^*(y)$ est la plus petite valeur b t.q. la fct $h_{y,b}$ soit dominée par f avec $h_{y,b}(x) = \langle y, x\rangle - b$, $x \in E$

En effet, $f \geq h_{y,b} \Leftrightarrow f(x) \geq \langle y, x\rangle - b \;\; \forall x \in E \Leftrightarrow b \geq \langle y, x\rangle - f(x)$

$\Leftrightarrow b \geq \sup_{x \in E} \{\langle y, x\rangle - f(x)\} = f^*(y)$

4. Bi-conjuguée

Déf Soit $f : E \to \mathbb{R}$ et f^* sa conjuguée. La bi-conjuguée $(f^*)^*$ est la conjuguée de f^*.

Déf Soit $f : E \to \mathbb{R}$, sa convexe s.c.i. régularisée $\hat{f}$ est la plus grande fct convexe sci dominée par f.

Théorème (des fct bi-conjuguée)

Soit $f : E \to \mathbb{R}$, sa bi-conjuguée $(f^*)^*$ est sa convexe s.c.i. régularisée si f domine une fonction convexe.

Sinon $(f^*)^*$ est identiquement égale à $+\infty$.

Démo D'après la remarque on a f domine $h_{y,b} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \; b \geq f^*(y) \Leftrightarrow (y,b) \in epi(f^*)$

Voir * car $\hat{f}$ est + grande fct convexe sci $\leq f$

$$\hat{f}(x) \geq \sup_{(y,b)\in epi(f^*)} h_{y,b}(x) = \sup_{b \geq f^*(y)} \{\langle y, x\rangle - b\} = \sup_{y \in E} \{\langle y, x\rangle - f^*(y)\} = (f^*)^*(x) \quad \square$$

Corollaire Si $f : E \to \mathbb{R}$ est cvxe et $dom(f) = E$. Alors $(f^*)^* = f$

Démo Pour une telle fct f, on est convexe, continue, donc $\hat{f} = f$ et elle est minorée par une fct affine donc

$$(f^*)^* = f = \hat{f} \quad \square$$

Rem ⊛ Soit $\hat{f}$ le cvxe sci régularisée de f. Alors si h fct affine dominée par f alors h dominée par $\hat{f}$ (car cvxe et sci). Alors

$$\sup_{\substack{h \text{ affine} \\ h \leq f}} h(x) \leq \hat{f}(x) \quad \forall x \in E \Rightarrow \sup_{h \leq f,\, h \text{ affine}} h = \hat{f}$$

↑ cvxe sci

Chapitre 6. Processus de diffusion

0. Intégrale stochastique et formule d'Itô

On fixe dans la suite un espace de probabilité complet $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

Soit $(W_t)_{t \in [0,T]}$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^d$

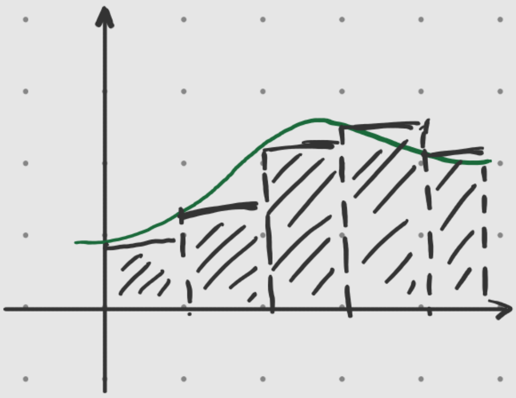
défini sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On note $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ la filtration complète

engendrée par W. $\mathcal{F}_t = \sigma(W_u, u \leq t) \vee \mathcal{N}$

↑ les négligeables de $\mathcal{A}$

On cherche à définir des intégrales de la forme $\int_0^t X_s \, dW_s$, $t \in [0,T]$

Pour Riemann



$$\rightsquigarrow \int_0^t f(s)\, ds$$

On fait la même chose

$$\sum_{i=0}^{n-1} X_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) \longrightarrow \int_0^t X_s \, dW_s$$

Ça a existé avant Itô, ça s'appelle l'intégral de

Riemann-Stieltjes : $\int f(s)\,dg(s)$

Pb ça n'est défini que pour g régulière (à variation finie)

Donc, on ne peut pas appliquer cette théme pour $\int X\,dW$

La convergence p.s. de $\sum X_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ pose pb.

En fait on a cvgc dans L^2. On peut définir $\int X\,dW$

comme limite L^2 de $\sum X_{t_i}(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ si X vérifie $\mathbb{E}\int |X_s|^2 ds < \infty$

Pptés de l'intégrale stochastique

- $\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t X_s\,dW_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t |X_s|^2 ds\right]$
- $\left\langle \int_0^{\cdot} X_s\,dW_s \right\rangle_t = \int_0^t |X_s|^2 ds$

X doit être adapté et $\mathbb{F}$-progressif

Processus d'Itô $\quad X_t = X_0 + \int_0^t \alpha_s\,ds + \int_0^t \beta_s\,dW_s,\ t \in [0,T]$

$$\int_0^T |\alpha_s|\,ds + \int_0^T |\beta_s|^2 ds < +\infty \quad \text{p.s.}$$

Formule d'Itô

$f : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\quad f \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^d, \mathbb{R})$

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \partial_t f(s,X_s)\,ds + \int_0^t \nabla f(s,X_s)\,dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \mathrm{Tr}\left(\beta_s \beta_s^T \nabla^2 f(s,X_s)\right) ds$$

1. EDS

On fixe $b, \sigma : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \Omega \to \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n\times d}$

On suppose que b et σ sont $\mathbb{F} \otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$-progressives.

Déf Une solution à l'EDS

$$\begin{cases} dX_t = b_t(X_t)\,dt + \sigma_t(X_t)\,dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

est un processus X $\mathbb{F}$-adapté t.q. $\int_0^T |b_t(X_t)|\,dt + \int_0^T |\sigma_t(X_t)|^2\,dt < \infty$ p.s.

et $X_t = x + \int_0^t b_s(X_s)\,ds + \int_0^t \sigma_s(X_s)\,dW_s$ pour $t \in [0,T]$

Exemple $d = n = 1$

$b_t(x) = \mu_t x$ $\qquad$ μ, σ fct de $[0,T]$ dans $\mathbb{R}$ bornées

$\sigma_t(x) = \sigma_t x$

Alors $X_t = x \exp\left\{ \int_0^t \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2}\right) ds + \int_0^t \sigma_s\,dW_s \right\}$

est solution de $\begin{cases} dX_t = \mu_t X_t\,dt + \sigma_t X_t\,dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$

Théorème (Itô-Cauchy-Lipschitz)

Soit $x \in \mathbb{R}$. Supposons que $\mathbb{E}\left[\int_0^T |b_s(0)| + |\sigma_s(0)|^2\,ds \right] < \infty$

et il existe une constante $L>0$ t.q.

$$|b_t(x)-b_t(y)|+|\sigma_t(x)-\sigma_t(y)|\leq L\cdot|x-y| \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^n.$$

Idée de la preuve

On suit la schéma de preuve du thm de Cauchy-Lipschitz : construire une contraction dont le point fixe est la solution de l'équation.

On remarque X solution de l'EDS est équivalent à X pt fixe de Φ où Φ définie par

$$\Phi(U)_t = x+\int_0^t b_s(U_s)\,ds+\int_0^t \sigma_s(U_s)\,dW_s$$

On change la norme pour rendre Φ contractante

$$\Phi : \mathbb{H}^2\to\mathbb{H}^2 \quad \text{où } \mathbb{H}^2=\{\text{processus } U \ \mathbb{F}\text{-prog. et } \mathbb{E}\int_0^T |U_s|^2 ds<\infty\}$$

Norme naturelle $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^2}$ définie par

$$\|U\|_{\mathbb{H}^2}=\left(\mathbb{E}\int_0^T |U_s|^2 ds\right)^{1/2}$$

À la place, on prendre $\|U\|_{\mathbb{H}^2_{,c}}=\left(\mathbb{E}\int_0^T e^{-cs}|U_s|^2 ds\right)^{1/2}$

On montre que

$$\|\Phi(U)-\Phi(V)\|_{\mathbb{H}^2_{,c}} \leq 2\,\frac{(T+1)L}{c}\,\|U-V\|_{\mathbb{H}^2_{,c}}$$

En prenant $c \geq 2L(T+1)$, Φ est $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^2_{,c}}$-contractante.

Elle admet un unique point fixe qui est dans $\mathbb{H}^2$ car

$\|\cdot\|_{\mathbb{H}^2}$ et $\|\cdot\|_{\mathbb{H}^2_{,c}}$ sont équivalentes. $\square$

Cas d'une condition initiale qque

On peut généraliser ces résultats au cas où la condition $X_0 = x$ est remplacée par $X_t = x$

La solution unique est alors notée $(X_s^{t,x})_{s\in[t,T]}$ pour $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^d$

Théorème Sous les hypothèses d'existence et d'unicité de solution à l'EDS,

(i) il existe une const C t.q.

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\leq s\leq t'} |X_s^{t,x}-X_s^{t,x'}|^2\Big] \leq C e^{ct'}|x-x'| \quad \text{pour } 0\leq t\leq t'\leq T \text{ et } x,x'\in\mathbb{R}^d.$$

(ii) Si de plus $B = \sup_{t\leq t'\leq T}\left\{\frac{1}{t'-t}\int_t^{t'} (|b_s(0)|+|\sigma_s(0)|)^2 ds\right\} < +\infty$ alors

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{t\leq s\leq t'} |X_s^{t,x}-X_s^{t,x}|\Big] \leq C e^{cT}(B+|x|^2)(t'-t) \quad \text{pour } 0\leq t\leq t'\leq T,\ x\in\mathbb{R}^n$$

b
σ $[0,T]\times\mathbb{R}^n \to \begin{matrix}\mathbb{R}^n\\ \mathbb{R}^{n\times d}\end{matrix}$

$(X_s^{t,x})_{s\in[t,T]}$ solution de l'EDS $X_s^{t,x}=x+\int_t^s b_u(X_u^{t,x})\,du+\int_t^s \sigma_u(X_u^{t,x})\,dW_u(t)$

$(W_s)_{s\in[0,T]}$ MBS à valeurs de $\mathbb{R}^d$

$$|b_t(x)-b_t(x')|+|\sigma_t(x)-\sigma_t(x')|\leq L|x-x'|$$

$$\int_0^T\left(|b_s(0)|^2+|\sigma_s(0)|^2\right)ds<\infty$$

les deux conditions assurent l'$\exists$ et l'! de la solution $(X_s^{t,x})_{s\in[t,T]}$

2. Propriété de Markov

$$dX_s^{t,x}=b_s(X_{s-\delta}^{t,x})\,ds+\sigma_s(X_{s-\delta}^{t,x})\,dW_s$$

Non-Markovien à cause de ça.

Soit $(X_s^{t,x})_{s\in[t,T]}$ la solution de l'EDS $(*)$

On a alors les 2 propriétés suivantes:

- $X_s^{t,x}=\Phi(t,x,s,(W_u-W_t)_{u\in[t,T]})$
- D'après l'unicité on a la propriété de flot

$X_s^{u,X_u^{t,x}}=X_s^{t,x}$ pour $s\geq u\geq t$ solution de

$$V_s=X_u^{t,x}+\int_u^s b_r(\dots)\,dr+\int_u^s\sigma(\dots)\,dW_r$$

$$X_s^{t,x} = x + \int_t^s b_r(\dots)dr + \int_t^s \sigma_r(\dots)dW_r = \underbrace{\left(x + \int_t^u b_r(\dots)dr + \sigma_r(\dots)dW_r\right)}_{X_u^{t,x}} + \int_u^s b_r(\dots)dr + \sigma_r(\dots)dW_r$$

Théorème (propriété de Markov)

$$\mathbb{E}\left[\Psi(X_r^{t,x},\ u\leq r\leq s)\,\middle|\,\mathcal{F}_u\right] = \mathbb{E}\left[\Psi(X_r^{t,x},\ u\leq r\leq s)\,\middle|\,X_u^{t,x}\right]$$

pour Ψ C^0 mesurable bornée et $0\leq u\leq s\leq T$

3. Lien avec les EDPs

Soit $(X_s^{t,x})_{s\in[t,T]}$ solution de l'EDS $(*)$ pour $t\in[0,T]$, $x\in\mathbb{R}$

On définit l'operateur $\mathcal{L}$ par

$$\mathcal{L}\varphi(t,x) = \lim_{h\to 0+} \frac{\mathbb{E}\left[\varphi(t+h, X_{t+h}^{t,x})\right] - \varphi(t,x)}{h} \quad \text{pour } \varphi\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$$

et $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$.

générateur

Par la formule d'Itô

$$\varphi(t+h, X_{t+h}^{t,x}) = \varphi(t,x) + \int_t^{t+h}\left(\partial_t\varphi + \nabla\varphi\cdot b + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\nabla^2\varphi\cdot\sigma\cdot\sigma^T)\right)(s, X_s^{t,x})\,ds$$

$$+ \int_t^{t+h}(\nabla\varphi\cdot\sigma)(s, X_s^{t,x})\,dW_s$$

$$\mathbb{E}\left[\varphi(t+h, X_{t+h}^{t,x})\right] - \varphi(t,x) = \mathbb{E}\int_t^{t+h}\left(\partial_t\varphi + \nabla\varphi\cdot b + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\nabla^2\varphi\cdot\sigma\cdot\sigma^T)\right)(s, X_s^{t,x})\,ds$$

$$\cdot\frac{1}{h},\ h\to 0 \Rightarrow \mathcal{L}\varphi(t,x) = \left(\partial_t\varphi + \nabla\varphi\cdot b + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\nabla^2\varphi\cdot\sigma\cdot\sigma^T)\right)(t,x)$$

On considère l'EDP (parabolique)

$$\begin{cases} \mathcal{L} v(t,x) = 0, & (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n \\ v(T,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

<u>But</u> Donner la solution de cette équation à l'aide de $X^{t,x}$

$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) + \nabla v(t,x) b_t(x) + \frac{1}{2} \mathrm{Tr}\left(\sigma_t(x) \sigma_t(x)^T \nabla v(t,x) \right) = 0, & (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n \\ v(T,x) = g(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

<u>Proposition</u> Supposons que la fonction $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est telle que la fonction $v : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $v(t,x) = \mathbb{E}[g(X_T^{t,x})]$ vérifie $v \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$. Alors v solution de EDP.

<u>Preuve</u>

$$v(t,x) = \mathbb{E}[v(T, X_T^{t,x})] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(X_T^{t,x}) \mid X_{t+h}^{t,x}]] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(X_T^{t+h, X_{t+h}^{t,x}}) \mid X_{t+h}^{t,x}]] =$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(\Phi(t+h, X_{t+h}^{t,x}, T, (W_u - W_{t+h})_{u \in [t+h,T]})) \mid X_{t+h}^{t,x}]] = \mathbb{E}[v(t+h, X_{t+h}^{t,x})]$$

Par la formule d'Itô,

$$v(t+h, X_{t+h}^{t,x}) = v(t,x) + \int_t^{t+h} \mathcal{L} v(s, X_s^{t,x}) ds + \int_t^{t+h} \nabla v \cdot \sigma(s, X_s^{t,x}) dW_s$$

$$\mathbb{E}[v(t+h, X_{t+h}^{t,x})] = v(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} \mathcal{L} v(s, X_s^{t,x}) ds\right]$$

Mais on a $v(t,x) = \mathbb{E}\, v(t+h, X_{t+h}^{t,x})$ donc

$$\mathbb{E}\left[\int_t^{t+h} \mathcal{L}v(s, X_s^{t,x})\, ds\right] = 0 \quad \forall h \in [0, T-t]$$

$\cdot \frac{1}{h}$, $\lim_{h \downarrow 0}$ $\Rightarrow$ $\mathcal{L}v(t,x) = 0 \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ $\square$

Représentation de Feynmann-Kac pour le problème de Cauchy

On considère l'EDP appelée problème de Cauchy

$$\begin{cases} \mathcal{L}v - kv + f = 0 & \text{sur } [0,T] \times \mathbb{R}^n \\ v(T, \cdot) = g & \text{sur } \mathbb{R}^n \end{cases}$$

k et f sont des fonctions de $[0,T] \times \mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}$

Théorème

Supposons que b et σ vérifient les conditions du thm d'E et d'! de solution aux EDS. Supposons que k est minorée et f à ↗ quadratique, $\sup_{(t,x)} \frac{|f(t,x)|}{1+|x|^2} < \infty$

Soit $v \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n) \cap C^0([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ solution du problème de Cauchy et telle que $\sup_{(t,x)} \frac{|v(t,x)|}{1+|x|^2} < \infty$

Alors $v(t,x) = \mathbb{E}\left[\int_t^T \beta_s^{t,x} f(s, X_s^{t,x})\, ds + \beta_T^{t,x} g(X_T^{t,x})\right]$ avec

$\beta^{t,x}$ définie par $\beta_s^{t,x} = \exp\left\{-\int_t^s k(u, X_u^{t,x})\, du\right\}$ $s \in [t,T]$

<u>Preuve</u> Par la formule d'Itô, on a

$$d\, \beta_s^{t,x} v(s, X_s^{t,x}) = \left(-k \cdot \beta_s^{t,x} v + \beta_s^{t,x} \cdot \mathcal{L} v\right) ds + \dots dW_s = \{EDPS\} =$$

$$= -\beta_s^{t,x} f(s, X_s^{t,x}) ds + (\dots) dW_s$$

En intégrant entre t et $T-\varepsilon$

$$\mathbb{E}\left[\beta_{T-\varepsilon}^{t,x} \cdot v(T-\varepsilon, X_{T-\varepsilon}^{t,x})\right] = v(t,x) - \mathbb{E}\int_t^{T-\varepsilon} \beta_s^{t,x} f(s, X_s^{t,x}) ds$$

$\varepsilon \downarrow 0$, par continuité de v

$$\beta_{T-\varepsilon}^{t,x} v(T-\varepsilon, X_{T-\varepsilon}^{t,x}) \xrightarrow[\varepsilon \downarrow 0]{p.s} \beta_T^{t,x} v(T, X_T^{t,x})$$

$$\int_t^{T-\varepsilon} \dots ds \xrightarrow{p.s.} \int_t^T \beta_s^{t,x} f(s, X_s^{t,x}) ds$$

Les conditions de $\nearrow$ quadratique sur v et f $\oplus$ estimées

sup L^2 sur $X^{t,x}$ permettent d'appliquer le TCD.

$\varepsilon \to 0$ $\quad \mathbb{E}\left[\beta_T^{t,x} \underbrace{v(T, X_T^{t,x})}_{g(X_T^{t,x})}\right] = v(t,x) - \mathbb{E}\left[\int_t^T \beta_s^{t,x} f(s, X_s^{t,x}) ds\right]$

Donc $v(t,x) = \mathbb{E}\left[\beta_T^{t,x} g(X_T^{t,x}) + \int_t^T \beta_s^{t,x} f(s, X_s^{t,x}) ds\right]$. $\square$

Chapitre 7. Contrôle optimale de diffusions et programmation dynamique

1. Le problème de contrôle stochastique

Pour définir le pb de contrôle stoch on introduit les objets suivants.

Contrôles On fixe un ensemble A de $\mathbb{R}^p$ $(p \geq 1)$.

On suppose A borné et on note $\mathcal{A}$ l'ensemble des contrôles i.e. l'ensemble des processus $(\alpha_t)_{t \in [0,T]}$ $\mathbb{F}$-progressifs à valeurs dans A. On rappele que $\mathbb{F}$ est la filtration naturelle du MB W.

Processus de diffusion controlé

On fixe 2 fonctions $\begin{matrix} b \\ \sigma \end{matrix} : \mathbb{R}^n \times A \to \begin{matrix} \mathbb{R}^n \\ \mathbb{R}^{n \times d} \end{matrix}$

On suppose qu'il existe une cste $L > 0$ t.q.

$$\left.\begin{matrix} |b(x,a) - b(x',a')| \\ |\sigma(x,a) - \sigma(x',a')| \end{matrix}\right\} \leq L(|x-x'| + |a-a'|) \quad \forall x,x' \in \mathbb{R}^n \quad \forall a,a' \in A$$

Pour $\alpha \in \mathcal{A}$ et $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$ on définit la processus de diffusion $(X_s^{t,x,\alpha})_{s \in [t,T]}$ par tout de x en t et contrôle suivant α, comme solution de l'EDS

$$X_s^{t,x,\alpha} = x + \int_t^s b(X_u^{t,x,\alpha}, \alpha_u)\,du + \int_t^s \sigma(X_u^{t,x,\alpha}, \alpha_u)\,dW_u, \quad s \in [t,T]$$

Les processus de drift $(b(\cdot,\alpha_s))_{s\in[t,T]}$ et de diffusion $(\sigma(\cdot,\alpha_s))_{s\in[t,T]}$ sont lipschitziennes. Par théorème d'Itô-Cauchy-Lipschitz, $X^{t,x,\alpha}$ est bien défini de manière unique.

En appliquant les estimés sur les diffusions on obtient les résultats suivants de régularité en flot et contrôle

Prop Pour $p\geq 1$ il existe un cste $C_p>0$ t.q.

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[t,T]}|X_s^{t,x,\alpha}|^p\Big]\leq C_p(1+|x|^p) \quad (1)$$

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[t,T]}|X_s^{t,x,\alpha}-X_s^{t,x',\alpha}|^p\Big]\leq C_p|x-x'|^p \quad (2)$$

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[t,T]}|X_s^{t,x,\alpha}-X_{s\vee t+h}^{t+h,x,\alpha}|^p\Big]\leq C_p h^{p/2}(1+|x|^p) \quad (3)$$

$$\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[t,T]}|X_s^{t,x,\alpha}-X_s^{t,x,\alpha'}|^p\Big]\leq C_p\,\mathbb{E}\Big[\int_t^T|\alpha_s-\alpha'_s|^p ds\Big] \quad (4)$$

$$\forall \alpha,\alpha'\in A \quad \forall x,x'\in\mathbb{R}^n \quad \forall t\in[0,T] \quad \forall h\in[0,T-h]$$

Fonctions de récompense (gain)

On fixe 2 fcts $f:\mathbb{R}^n\times A\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ (fcts de gain)

On suppose f et g loc^t Lipschitz

$$\forall N>0 \ \exists L_N>0 \quad |f(x,a)-f(x',a')|+|g(x)-g(x')|\leq L_N(|x-x'|+|a-a'|)$$
$$\forall x,x'\in B(0,N) \quad \forall a,a'\in A \ (A \text{ borné})$$

On suppose f et g à $\nearrow$ polynomiale : $\exists q>0, \exists C$:

$$|f(x,a)|+|g(x)| \leq C(1+|x|^q) \quad \forall (x,a) \in \mathbb{R}^n \times A$$

On définie la fonctionnelle $\mathcal{J} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{A} \to \mathbb{R}$ par

$$\mathcal{J}(t,x,\alpha) = \mathbb{E}\left[g(X_T^{t,x,\alpha}) + \int_t^T f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s) ds \right] \text{ pour } (t,x,\alpha) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{A}$$

On note que $\mathcal{J}(t,x,\alpha)$ est bien définie. En effet,

$$\mathbb{E}\left[\left| g(X_T^{t,x,\alpha}) + \int_t^T f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s) ds \right| \right] \leq \mathbb{E}\left[C(1+|X_T^{t,x,\alpha}|^q) + C\int_t^T (1+|X_s^{t,x,\alpha}|^q) ds \right] \leq$$

$$\leq \tilde{C}\left(1+\mathbb{E}\sup_{s\in[t,T]} |X_s^{t,x,\alpha}|^q\right) \leq \tilde{C}\left(1+C_q(1+|x|^q)\right) < +\infty.$$

On définit la fonction valeur $v : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

par $v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_t} \mathcal{J}(t,x,\alpha)$ avec $\mathcal{A}_t = \{\alpha \in \mathcal{A} \quad \alpha \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t\}$

But Calculer la fct v.

Rem En fait, on peut montrer $v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathcal{J}(t,x,\alpha)$

2 Principe de programmation dynamique (PPD)

But Donner une expression $v(t,x)$ à l'aide de v à un temps intermédiaire.

$$v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}\left[\int_t^\theta f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s) ds + \underbrace{v(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha})}_{\text{Est-elle mesurable ?}} \right]$$

On a besoin que v soit régulière (mesurable) pour calculer $\mathbb{E}$.

Prop Pour un compact $\Theta \subset [0,T]\times\mathbb{R}^n$ il existe une fct

$\lambda_\Theta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ t.q. $\lambda_\Theta(r) \xrightarrow[r\to 0]{} 0$ et $|J(t,x,\alpha) - J(t',x',\alpha)| \le \lambda_\Theta(|t-t'|+|x-x'|)$

pour $(t,x), (t',x') \in \Theta$ et $\alpha \in \mathcal{A}$. v est alors local^t unif^t continue

et à ↗ polynomiale

Preuve f et g loc^t Lipschitz + estimés sur régularité des diffusions controlées donnent

$$|J(t,x,\alpha)-J(t',x',\alpha)| =: |\mathbb{E}\,\delta(t,t',x,x',\alpha)| \le \overbrace{\left|\mathbb{E}\left[\delta(t,t',x,x')\,\mathbb{1}_{\sup|X^{t,x,\alpha}|\le N,\ \sup|X^{t',x',\alpha}|\le N}\right]\right|}^{(3)\ \le\ \tilde{C}\left(|t-t'|^{1/2}(1+|x|+|x'|)+|x-x'|\right)} +$$

$$+\underbrace{\mathbb{E}\left[\delta(t,t',x,x')\,\mathbb{1}_{\sup|X^{t,x,\alpha}|\vee\sup|X^{t',x',\alpha}|>N}\right]}_{\le\ \tilde{C}(1+|x|^q+|x'|^q)\,\mathbb{P}\left(\sup_{[t,T]}|X_s^{t,x,\alpha}|\vee\sup_{[t',T]}|X_s^{t',x',\alpha}|>N\right)}$$

Par inégalité de Markov

$$\mathbb{P}(--) \le \frac{\text{const}}{N}$$

$$|J(t,x,\alpha)-J(t',x',\alpha)| \le C|t-t'|^{1/2}(1+|x|+|x'|) + C|x-x'| + \frac{C}{N}(1+|x|^{p+1}+|x'|^{p+1})$$

1) Prend N grand : $\frac{C}{N}(1+\dots) < \frac{\varepsilon}{3}$
2) On choisit $|x-x'|$: $C|x-x'| < \frac{\varepsilon}{3}$
3) On choisit $|t-t'|$: $C|t-t'|^{1/2}(1+\dots) < \varepsilon/3$ $\square$

$$|v(t,x)-v(t',x')| \leq \sup_{\alpha\in\mathcal{A}} |J(t,x,\alpha)-J(t',x',\alpha)| \leq C\left(|t-t'|^{1/2}(1+|x|+|x'|)+\right.$$
$$\left.+|x-x'|+\frac{C}{N}(1+|x|^p+|x'|^p)\right)$$

La $\nearrow$ polynomiale de v est une conséquence de la $\nearrow$ polynomiale de f et g et des estimées de moments de diffusions contrôlées. On peut penser au PPD.

Théorème Soit $\{\theta_\alpha, \alpha\in\mathcal{A}\}$ une famille de t.a. à valeurs dans $[t,T]$ pour $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ fixé. Alors

$$v(t,x)=\sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t}\mathbb{E}\left[v(\theta_\alpha, X_{\theta_\alpha}^{t,x,\alpha})+\int_t^{\theta_\alpha} f(X_s^{t,x,\alpha},\alpha_s)ds\right] \quad \alpha\in\mathcal{A}_t.$$

Idée de la preuve

$$v(t,x)=\sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t}\mathbb{E}\left[g(X_T^{t,x,\alpha})+\int_t^T f(X_s^{t,x,\alpha},\alpha_s)ds\right]=\sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t}\mathbb{E}\left[\left(g(X_T^{t,x,\alpha})+\int_{\theta_\alpha}^T f(X_s^{t,x,\alpha},\alpha_s)ds\right)\right.$$
$$\left.+\int_t^{\theta_\alpha} f(X_s^{t,x,\alpha},\alpha_s)ds\right]=\sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t}\mathbb{E}\left[\underbrace{\mathbb{E}\left[g(X_T^{t,x,\alpha})+\int_{\theta_\alpha}^T f(\sim)ds \,\middle|\, \mathcal{F}_{\theta_\alpha}\right]}_{\mathbb{E}\left[g\left(X_T^{\theta_\alpha, X_{\theta_\alpha}^{t,x,\alpha},\alpha}\right)+\int_{\theta_\alpha}^T f\left(X_s^{\theta_\alpha,X_{\theta_\alpha}^{t,x,\alpha},\alpha},\alpha_s\right)ds\right]=}+\int_t^{\theta_\alpha} f(X_s^{t,x,\alpha},\alpha_s)ds\right]=$$

$$=\underbrace{\mathbb{E}\left[g(X_T^{s,y,\alpha})+\int_s^T f(X_u^{s,y,\alpha},\alpha_s)\,ds\right]}_{J(\theta_\alpha, X_{\theta_\alpha}^{t,x,\alpha},\alpha)}\Bigg|_{\substack{s=\theta_\alpha \\ y=X_{\theta_\alpha}^{t,x,\alpha}}}$$

$$=\sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t}\mathbb{E}\left[J(\theta_\alpha, X_{\theta_\alpha}^{t,x,\alpha},\alpha)+\int_t^{\theta_\alpha} f(X_s^{t,x,\alpha},\alpha_s)ds\right]\leq\sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t}\mathbb{E}\left[v(\theta_\alpha, X_{\theta_\alpha}^{t,x,\alpha})+\int_t^{\theta_\alpha} f(X_s^{t,x,\alpha},\alpha_s)ds\right]$$

Soit β^2 un contrôle ε-optimal pour $v(\theta_2, X_{\theta_2}^{t,x,\alpha})$

$$\mathcal{J}(\theta_2, X_{\theta_2}^{t,x,\alpha}, \beta^2) \geq v(\theta_2, X_{\theta_2}^{t,x,\alpha}) - \varepsilon$$

$\tilde{\mathcal{A}}_t = \{\tilde{\alpha} = \alpha_s \mathbb{1}_{[0,\theta_2[} + \beta_s^2 \mathbb{1}_{[\theta_2,T]},\ \alpha \in \mathcal{A}_t\}$

On pose $\tilde{\alpha}_s = \alpha_s \mathbb{1}_{[t,\theta_2[} + \beta_s^2 \mathbb{1}_{[\theta_2,T]} \in \mathcal{A}_t$

$\tilde{\mathcal{A}}_t \subset \mathcal{A}_t$

Alors $v(t,x) = \sup\limits_{\alpha \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}\left[\mathcal{J}(\theta_2, X_{\theta_2}^{t,x,\alpha}, \alpha_s) + \int_t^{\theta_2} f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\,ds\right] \geq \sup\limits_{\tilde{\mathcal{A}}_t} \{\ldots\} \geq$

$$\geq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}\left[\mathcal{J}(\theta_2, X_{\theta_2}^{t,x,\alpha}, \beta_s) + \int_t^{\theta} f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\,ds\right] \geq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}\left[v(\theta_2, X_{\theta_2}^{t,x,\alpha}) - \varepsilon + \int_t^{\theta_2} f(\cdot, \alpha_s)\,ds\right]$$

$$v(t,x) \geq \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}\left[v(\theta_2, X_{\theta_2}^{t,x,\alpha}) + \int_t^{\theta_2} f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\,ds\right] \qquad \square$$

$$\boxed{(\mathrm{PPD}) \qquad v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[v(\theta^\alpha, X_{\theta^\alpha}^{t,x,\alpha}) + \int_t^{\theta^\alpha} f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\,ds\right]}$$

3. Équation de programmation dynamique

On étudie dans cette section le cas où la fct valeur v est régulière ($C^{1,2}$). L'objectif est de montrer que v est solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) appelée équation de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB)

On introduit l'operateur local du seconde ordre $\mathcal{L}^a$, $a \in A$

défini par $\mathcal{L}^a\varphi(t,x) = \partial_t\varphi(t,x) + b(t,x)\nabla\varphi(t,x) + \frac{1}{2}Tr(\sigma\sigma^T(x,a)D^2\varphi)$

pour $(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n$ et $\varphi\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$

L'EDP de HJB est alors donnée par

$$\begin{cases} \sup_{a\in A}\{\mathcal{L}^a v(t,x) + f(x,a)\} = 0 & (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n \\ v(T,x) = g(x) & x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

Dans la suite on note l'operateur $\mathcal{H}$

$$\mathcal{H}\varphi(t,x) = \sup_{a\in A}\{\mathcal{L}^a\varphi(t,x) + f(x,a)\} \quad \varphi\in C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^n)$$

Théorème Supposons $v\in C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^n)\cap C^0([0,T]\times\mathbb{R}^n)$

Alors v est solution de l'EDP de HJB.

Preuve Par la définition de v on a bien $v(T,\cdot) = g(\cdot)$

$$v(t,x) = \sup_{\alpha\in A_t}\mathbb{E}\left[g(X_T^{t,x,\alpha}) + \int_0^T f(X_s^{t,x,\alpha})ds\right]$$

Sur $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$. Supposons que $\mathcal{H}v(t,x)\neq 0$

Cas 1 $\mathcal{H}v(t,x) > 0$. Donc il existe $\bar{a}\in A$: $\mathcal{L}^{\bar{a}}v(t,x) + f(x,\bar{a}) > 0$

Par continuité, il existe un voisinage V de (t,x)

dans $[0,T)\times\mathbb{R}^n$ t.q. $\mathcal{L}^{\bar{a}}v(s,y) + f(y,\bar{a}) > 0 \quad \forall(s,y)\in V$

Soit α le contrôle const. de valeur $\bar{a}$ et

$$\theta = \inf\{s \geq t : (s, X_s^{t,x,\alpha}) \notin V\} \wedge T$$

Par la formule d'Itô appliquée à v entre t et θ

$$v(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}) = v(t,x) + \int_t^\theta \mathcal{L}^{\bar{a}} v(s, X_s^{t,x,\alpha})\, ds + \int_t^\theta \nabla v(s, X_s^{t,x,\alpha}) \cdot \sigma(X_s^{t,x,\alpha}, \bar{a})\, dW_s$$

avant θ on reste dans un ensemble borné

$$\mathbb{E}\left[v(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha})\right] = v(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^\theta \mathcal{L}^{\alpha} v(s, X_s^{t,x,\alpha})\, ds\right] + 0$$

Donc

$$\mathbb{E}\left[v(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}) + \int_t^\theta f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\, ds\right] = v(t,x) + \underbrace{\mathbb{E}\left[\int_t^\theta (\underbrace{\mathcal{L}^{\alpha} v + f}_{>0})(s, X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\, ds\right]}_{>0} > v(t,x)$$

impossible d'après le PPD.

<u>Cas 2</u> $\mathcal{H}v(t,x) < 0$. Toujours par continuité, il existe

$r > 0$ t.q. $\mathcal{H}v < 0$ sur $V = \mathcal{B}((t,x), r) \cap [0,T] \times \mathbb{R}^n$

Soit $w : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$w(s,y) = v(s,y) + (s-t)^2 + |y-x|^4 \quad \text{pour } (s,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$$

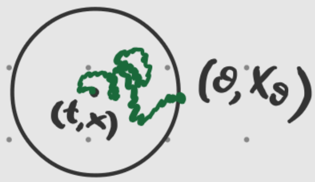
Alors en réduisant r, on peut supposer que $\mathcal{H}w < 0$

sur V (car $\mathcal{H}w(t,x) = \mathcal{H}v(t,x) +$ cont.)

Par Itô, on a $\mathbb{E}\left[w(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}) + \int_t^\theta f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\,ds\right] =$

$= w(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^\theta \left(\mathcal{L}^{\alpha_s} w(s, X_s^{t,x,\alpha}) + f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\right) ds\right.$ avec θ temps de sortie de V.

Comme $w(t,x) = v(t,x)$ et θ est temps de sortie de V



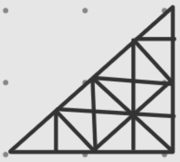
$$\mathbb{E}\left[w(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}) + \int_t^\theta f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\,ds\right] \leq v(t,x)$$

$$\mathbb{E}\left[v(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}) + \int_t^\theta f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\,ds + \underbrace{(\theta-t)^2 + |X_\theta^{t,x,\alpha} - x|^4}_{\geq r^4 \text{ si } r \in [0,1]}\right] \leq v(t,x)$$

$$\mathbb{E}\left[v(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}) + \int_t^\theta f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\,ds\right] \leq v(t,x) - r^4 \text{ pour tout } \alpha \in \mathcal{A}_t$$

donc $\sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[v(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}) + \int_t^\theta f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\,ds\right] \leq v(t,x) - r^4 < v(t,x)$

contradit le PPD.



Chapitre 8. Vérification

1. Le résultat de vérification

Théorème Soit $\varphi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ solution de l'EDP de HJB

$$\begin{cases} \mathcal{H}\varphi(t,x) = 0 & \text{pour } (t,x) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n \\ \varphi(T,x) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

Supposons que φ est à $\nearrow$ polynomiale

$\exists p \in \mathbb{N}^* \ \exists C > 0$ t.q. $|\varphi(t,x)| \leq C(1+|x|^p) \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$

et supposons que $\liminf\limits_{\substack{t \to T^- \\ y \to x}} \varphi(t,y) \geq g(x)$

Supposons également que

(i) il existe $\hat{\alpha} : [0,T] \times \mathbb{R}^n \to A$ mesurable t.q.

$$\mathcal{H}\varphi(t,x) = \mathcal{L}^{\hat{\alpha}(t,x)} \varphi(t,x) + f(x, \hat{\alpha}(t,x)) \quad \text{pour } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$$

(ii) L'EDS $\begin{cases} dX_s = b(X_s, \hat{\alpha}(s,X_s))ds + \sigma(X_s, \hat{\alpha}(s,X_s))\,dW_s, & s \geq t \\ X_t = x \end{cases}$

admet une unique solution pour tout $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$

(iii) Pour $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$, il existe une suite $\nearrow$ de t.a. $(\theta_n)_{n \geq 1}$

t.q. $X^{t,x,\hat{\alpha}}$ est borné sur $[t, \theta_n]$ pour tout $n \geq 1$ et $\theta_n \uparrow T$ p.s

et $\mathbb{E}\left[\varphi(\theta_n, X^{t,x,\hat{\alpha}}_{\theta_n}) + \int_t^{\theta_n} f(X^{t,x,\hat{\alpha}}_s, \hat{\alpha}_s(s, X^{t,x,\hat{\alpha}}_s))\,ds\right] \to \mathbb{E}\left[g(X^{t,x,\hat{\alpha}}_T) + \int_t^T f(\ldots)\,ds\right]$

Alors $\varphi = v$ (fct valeur) et $\hat{\alpha}$ contrôle optimal :

$(\hat{\alpha}(s, X^{t,x,\hat{\alpha}}_s))_{s \in [t,T]}$ optimal pour $v(t,x)$.

<u>Preuve</u> Par Itô appliquée à φ entre t et θ_n

$$\varphi(t,x) = \mathbb{E}\left[\varphi(\theta_n, X^{t,x,\hat{\alpha}}_{\theta_n}) - \int_t^{\theta_n} \mathcal{L}^{\hat{\alpha}(s,X_s)} \varphi(s, X^{t,x,\hat{\alpha}}_s)\,ds\right]$$

φ sol de l'EDP + (i) donne

$$\mathcal{L}^{\hat{\alpha}(s,X_s^-)}\varphi(s,X_s^{t,x,\hat{\alpha}}) = -f(X_s^{t,x,\hat{\alpha}},\hat{\alpha}(s,X_s^{t,x,\hat{\alpha}}))$$

Donc $\varphi(t,x) = \mathbb{E}\left[\varphi(\theta_n, X_{\theta_n}^{t,x,\hat{\alpha}}) + \int_t^{\theta_n} f(X_s^{t,x,\hat{\alpha}},\hat{\alpha}(s,X_s^{t,x,\hat{\alpha}}))ds\right]$

(iii) + $n\to\infty$ donnent

$$\varphi(t,x) = \mathbb{E}\left[g(X_T^{t,x,\hat{\alpha}}) + \int_t^T f(X_s^{t,x,\hat{\alpha}},\hat{\alpha}(s,X_s^{t,x,\hat{\alpha}}))ds\right] \Rightarrow \varphi(t,x) \leq v(t,x)$$

Inégalité réciproque

Soit $\alpha \in \mathcal{A}_t$ et $\vartheta_n = T\wedge\tau_n$ où $\tau_n = \inf\{s\geq t : |X_s^{t,x,\alpha}|\geq n\}$

Par la formule d'Itô

$$\mathbb{E}\left[\varphi(\vartheta_n, X_{\vartheta_n}^{t,x,\alpha}) + \int_t^{\vartheta_n} f(X_s^{t,x,\alpha},\alpha_s)ds\right] = \varphi(t,x) + \mathbb{E}\left[\int_t^{\vartheta_n}\Big(\underbrace{\mathcal{L}^{\alpha_s}\varphi(s,X_s) + f(X_s,\alpha_s)}_{\leq \mathcal{H}\varphi(s,X_s) = 0 \text{ HJB}}\Big)ds\right]$$

$$\varphi(t,x) \geq \mathbb{E}\left[\varphi(\vartheta_n, X_{\vartheta_n}) + \int_t^{\vartheta_n} f(X_s,\alpha_s)ds\right]$$

φ à $\nearrow$ poly $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ minorée par $|X_s|^p$ intégrable
$\Rightarrow$ on peut l'appliquer

Donc $\varphi(t,x) \geq \liminf\limits_{n\to+\infty} \mathbb{E}\left[\varphi(\vartheta_n, X_{\vartheta_n}) + \int_t^{\vartheta_n} f(X_s,\alpha_s)ds\right] \geq \{\text{Fatou}\} \geq$

$\Big(\varphi \geq -C\big(\underbrace{1+\sup|X_s^{t,x,\alpha}|^p}_{\in L^1}\big)\ \forall n\Big)$

$$\geq \mathbb{E}\left[\liminf_{n\to\infty} \varphi(\vartheta_n, X_{\vartheta_n}) + \int_t^{\vartheta_n} f(X_s,\alpha_s)ds\right]$$

Alors $\varphi(t,x) \geq \mathbb{E}\left[g(T,X_T) + \int_t^T f(X_s,\alpha_s)ds\right] \quad \forall \alpha\in\mathcal{A}_t$

$\leadsto$ sup

On a $\varphi(t,x) \geq v(t,x)$ $\square$

2. Application: allocation optimale de portefeuille en horizon fini

On considère un marché sur un intervalle de temps $[0, T]$ et composé de 2 actif.

Le premier actif S^0 est sans risque de taux const. $r > 0$.

$$\begin{cases} dS_t^0 = r S_t^0 dt \\ S_0^0 > 0 \text{ fixée} \end{cases} \rightarrow S_t^0 = S_0^0 e^{rt}$$

Le second actif S est défini par $S_0 > 0$ et la dynamique BGS

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t \quad \mu, \sigma \in \mathbb{R} \quad \sigma > 0 \text{ et } W \text{ MB de dim } 1$$

On note α_t la proportion de richesse investie dans S au temps t, et X^α la richesse autofin. associée. Alors

$$dX_t^\alpha = \underbrace{\frac{\alpha_t X_t^\alpha}{S_t}}_{\Delta_t \text{ - unité de } S_t} dS_t + \underbrace{\frac{(1-\alpha_t) X_t^\alpha}{S_t^0}}_{\Delta_t^0 \text{ - unité de } S_t^0} dS_t^0 = X_t^\alpha(\alpha_t \mu + (1-\alpha_t) r) dt + \alpha_t X_t^\alpha \sigma dW_t$$

On note $\mathcal{A}$ l'ensemble de contrôles (α_t) t.q. $\int_0^T |\alpha_s|^2 ds < \infty$ $\mathbb{P}$-p.s.

Cela assure pour $\alpha \in \mathcal{A}$ l'existence et l'unicité de X^α.

On note $(X_s^{t,x,\alpha})_{s \in [t,T]}$ le processus sol de l'EDS

$$\begin{cases} dX_s^{t,x,\alpha} = X_s^{t,x,\alpha}((\alpha_s \mu + (1-\alpha_s) r) ds + \alpha_s \sigma dW_s) \\ X_t^{t,x,\alpha} = x \end{cases}$$

On suppose que les préferences de l'investisseur sont donnée par une fct d'utilité CRRA $u(x) = \frac{x^p}{p}$ avec $p \in (0,1)$

<u>But</u> $v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}} \mathbb{E}[u(X_T^{t,x,\alpha})]$ maximiser son utilité moyenne lorsque il/elle peut d'une richesse x eut.

Équation de HJB associée

L'operateur local de second ordre est donnée par

$$\mathcal{L}^a \varphi(t,x) = \partial_t \varphi(t,x) + (a\mu + (1-a)r) x \partial_x \varphi(t,x) + \frac{1}{2} a^2 \sigma^2 x^2 \partial^2_{xx} \varphi(t,x)$$

L'EDP de HJB est alors

$$\begin{cases} \sup_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{L}^a v(t,x) = 0 \\ v(T,x) = U(x) \end{cases}$$

On cherche alors v sous la forme $v(t,x) = \varphi(t) U(x)$ $(t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+$

Alors $\mathcal{L}^a v(t,x) = \varphi'(t) U(x) + (a\mu + (1-a)r) p \varphi(t) U(x) + \frac{1}{2} p(p-1) \sigma^2 a^2 \varphi(t) U(x)$

$$\sup_{a \in \mathcal{A}} \mathcal{L}^a v(t,x) = 0 \Leftrightarrow U(x) \Big(\varphi'(t) + \sup_{a \in A} \Big\{ (a\mu + (1-a)r) p + \frac{1}{2} \sigma^2 a^2 \underbrace{p(p-1)}_{<0} \Big\} \varphi(t) \Big) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \varphi'(t) + \rho \varphi(t) = 0 \quad t \in [0,T) \quad \text{avec } \rho = \sup_{a \in A} \Big\{ (a\mu + (1-a)r) p + \frac{1}{2} \sigma^2 a^2 p(p-1) \Big\}$$

Donc $\varphi(t) = \text{cste} \cdot e^{-\rho t}$, $\varphi(T) = 1 \Rightarrow \varphi(t) = e^{\rho(T-t)}$

et $v(t,x) = e^{\rho(T-t)} U(x)$

Le contrôle optimal est celui maximisant $\mathcal{L}^a v$:

$$\hat{a} \in \underset{a \in A}{\operatorname{argmax}} \left\{ (a\mu + (1-a)r)p + \frac{1}{2}\sigma^2 a^2 p(p-1) \right\}$$

La fct à maximiser est stt concave. En particulier, si A cvxe fermé, elle admet un unique maximum $\hat{a}$ qui ne dépend pas de la position.

En particulier, l'EDS

$$\frac{dX_t}{X_t} = (\hat{a}\mu + (1-\hat{a})r)\,dt + \sigma \hat{a}\, dW_t$$

admet une unique solution pour une cond. initiale donnée.

On peut donc appliquer le thm de vérification et

$$v(t,x) = e^{\rho(T-t)} U(x) \quad \text{et} \quad \hat{\alpha}_t = \hat{a} \quad t \in [0,T] \text{ contrôle optimale.}$$

3. Application 2 : un problème d'investissement-consommation

On reprend le m̂ modèle de marché que celui dans la section précédente. On a aussi notre stratégie d'investissement $(\alpha_t)_{t\in[0,T]} \in \mathcal{A}$. On considère également une stratégie de consommation $(\gamma_t)_{t\in[0,T]}$ où γ_t le taux de consommation par unité de richesse relativement au temps. La dynamique du portefeuille $X^{\alpha,\gamma}$ autofinancé associé est donnée par

$$dX_t^{\alpha,\gamma} = \alpha_t X_t^{\alpha,\gamma} \frac{dS_t}{S_t} + (1-\alpha_t) X_t^{\alpha,\gamma} \frac{dS_t^0}{S_t^0} - \gamma_t X_t^{\alpha,\gamma} dt$$

Alors $$\frac{dX_t^{\alpha,\gamma}}{X_t^{\alpha,\gamma}} = X_t^{\alpha,\gamma}\left(\alpha_t(\mu-r) + r - \gamma_t\right)dt + \sigma\alpha_t X_t^{\alpha,\gamma} dW_t \quad (**)$$

L'agent cherche à resoudre le pb d'investissement/consommation donné par $$v(t,x) = \sup_{(\alpha,\gamma)\in\mathcal{A}\times\Gamma} \mathbb{E}\left[U(X_T^{t,x,\alpha,\gamma}) + \int_t^T U(\gamma_s X_s^{t,x,\alpha,\gamma})ds\right]$$

avec $\Gamma = \{(\gamma_t)_{t\in[t,T]}\ \mathbb{F}\text{- progr. mes}, \int_0^T |\gamma_t|^2 dt < +\infty\ \mathbb{P}\text{-p.s.}\}$

et $(X_s^{t,x,\alpha,\gamma})_{s\in[t,T]}$ solution de $(**)$ avec condition initiale $X_t^{t,x,\alpha,\gamma} = x \in \mathbb{R}_+$

EDP de HJB associée

Operateur du seconde ordre

$$\mathcal{L}^{(a,c)}\varphi(t,x) = \partial_t\varphi(t,x) + x\left(a(\mu-r) + r - c\right)\partial_x\varphi(t,x) + \frac{1}{2}x^2\sigma^2a^2\partial_{xx}^2\varphi(t,x)$$

$$\begin{cases} \sup\limits_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ c\geq 0}} \left\{\mathcal{L}^{(a,c)}v(t,x) + U(cx)\right\} = 0 & (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}_+ \\ v(T,x) = U(x), \quad x\in\mathbb{R}_+ \end{cases}$$

On s'intéresse au terme

$$\sup_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ c\geq 0}}\left\{\mathcal{L}^{(a,c)}v(t,x)+U(cx)\right\}=\sup_{\substack{a\in\mathcal{A}\\ c\geq 0}}\left\{\partial_t v+x\left(a(\mu-r)+r\right)\partial_x v+\frac{1}{2}\sigma^2x^2a^2\partial^2_{xx}v\right\}$$

$$+\sup_{c\geq 0}\left\{U(cx)-cx\,\partial_x v(t,x)\right\}=\sup_{a\in\mathcal{A}}\mathcal{L}^a v(t,x)+\tilde{U}(\partial_x v(t,x))$$

avec $\tilde{U}(\xi)=\sup_{C\geq 0}\{U(C)-C\xi\}$ (Transformée de Fenchel-Legendre)

et $\mathcal{L}^a$ défini à la section précédente.

On cherche (encore) v sous la forme $v(t,x)=\varphi(t)U(x)$

Comme v sol. de

$$\begin{cases}\sup_{a\in\mathcal{A}}\mathcal{L}^a v(t,x)+\tilde{U}(\partial_x v(t,x))=0\\ v(T,x)=U(x)\end{cases}$$

$$U(x)\left(\varphi'(t)+\rho\varphi(t)\right)+\tilde{U}(\varphi(t)\tilde{U}(x))=0$$

Calculons $\tilde{U}$:

$$\tilde{U}(\xi)=\sup_{c\geq 0}\{U(c)-c\xi\}=\sup_{c\geq 0}\left\{\frac{c^p}{p}-c\xi\right\}$$

$\underline{\text{CPO}}$: $c^{*\,p-1}=\xi\Rightarrow c^*=\xi^{\frac{1}{p-1}}$ $\qquad\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}=1\right)$

$$\tilde{U}(\xi)=\frac{(c^*)^p}{p}-c^*\xi=\frac{\xi^{\frac{p}{p-1}}}{p}-\xi^{1+\frac{1}{p-1}}=\left(\frac{1}{p}-1\right)\xi^{\frac{p}{p-1}}=\frac{\xi^{-q}}{q}\text{ où } q=\frac{-p}{p-1}$$

$$U(x)\left(\varphi'(t)+\rho\varphi(t)\right)+\frac{\varphi(t)^{-q}}{q}U(x)^{-q}$$

On $(U'(x))^{-q}=(x^{p-1})^{-q}=x^p=pU(x)$

Donc $$U(x)\left(\varphi'(t) + p\varphi(t) + \frac{\varphi(t)^{-q}}{q}\, p\right) = 0$$

$$\underbrace{\varphi'(t)\varphi(t)^{q}}_{\frac{1}{q+1}\frac{d}{dt}\left[\varphi(t)^{q+1}\right]} + p\underbrace{\varphi(t)^{q+1}}_{\psi(t)} + \frac{p}{q} = 0$$

$$\dot{\psi}(t) + p(q+1)\psi(t) = -\frac{p(q+1)}{q} \qquad \psi(T) = 1$$

$$\psi(t) = c(t)e^{-p(q+1)t}$$

$$c'(t) = e^{p(q+1)t}\left(-\frac{p(q+1)}{q}\right)$$

$$e^{p(q+1)T} - c(t) = \int_t^T e^{p(q+1)s}\cdot\left(-\frac{p(q+1)}{q}\right) ds = \frac{e^{p(q+1)t} - e^{p(q+1)T}}{q}$$

$$c(t) = -\frac{e^{p(q+1)t}}{q} + e^{p(q+1)T}\left(1+\frac{1}{q}\right)$$

$$\psi(t) = -\frac{1}{q} + e^{p(q+1)(T-t)}\left(1+\frac{1}{q}\right)$$

$$\varphi(t) = \left(\left(1+\frac{1}{q}\right)e^{p(q+1)(T-t)} - \frac{1}{q}\right)^{\frac{1}{q+1}}.$$

Contrôle optimal:

- Investiss^t $h_t = \hat{a}$ comme section précédente

- Consommation $C(t,x)$ qui réalise le max

$$c^*(t,x)x \text{ réalise } \tilde{U}(\partial_x V(t,x)) \to c^*(t,x) = \frac{1}{x}\left(\varphi(t)U(x)\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

$$c^*(t,x) = \frac{1}{x}\left(\frac{x^p}{p}\right)^{\frac{1}{p-1}}\cdot\varphi(t)^{\frac{1}{p-1}} = \frac{1}{p^{1/p-1}}\,\varphi(t)^{1/p-1} = c^*(t) \quad \text{fct continue}$$

L'EDS associée $dX_t = X_t(\hat{a}(\underline{\mu}-r)+r-c^*(t))dt + \hat{a}\sigma X_t dW_t$

admet une unique sol car drift et vol ne dépend

pas de x et sont continue.

Chapitre 9. Solutions de viscosité des équations de HJB

1. Définition des solutions de viscosité

⚠ Théorie des solutions faible au sens de Sobolev ne marche

pas pour les EDP non-linéaire (le cas de HJB)

On note F l'operateur de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n$ dans $\mathbb{R}$,

où $\mathcal{S}^n$ est l'ensemble des matrices $n \times n$ symétriques,

donnée par $F(x,a,q,p,M) = -\sup_{a\in A} \mathcal{L}^a[x,q,p,M] + f(x,a)$

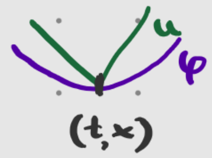
où $\mathcal{L}^a[x,q,p,M] = q + b(x,a)p + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma(x,a)\sigma^T(x,a)M)$

pour $a \in A$ et $(x,q,p,M) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{S}^n$

On considère l'EDP

$$\begin{array}{ll}(*) \\ (**)\end{array}\begin{cases} F(x,u(t,x),\partial_t u(t,x), \nabla u(t,x), \nabla^2 u(t,x)) = 0 & (t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n \\ u(T,x) = g(x) \quad \text{pour } x\in\mathbb{R}^n \end{cases}$$

Déf (i) Une fonction $u\in C^0([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ est sursolution de viscosité de (*) si pour toute fonction (test) $\varphi\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ t.q. pour tout $(t,x)\in[0,T)\times\mathbb{R}^n$ t.q. $0=(u-\varphi)(t,x)=\min\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^n}(u-\varphi)$

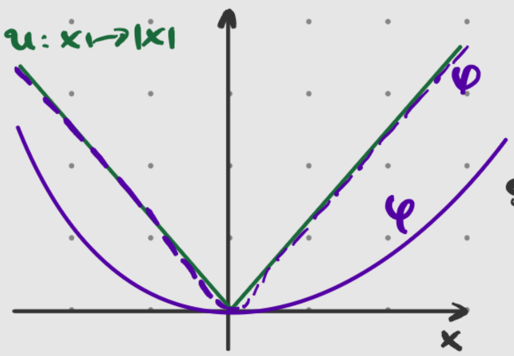


on a $F(x,\varphi(t,x),\partial_t\varphi(t,x),\nabla\varphi(t,x),\nabla^2\varphi(t,x))\geq 0.$

(ii) Une fonction $u\in C^0([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ est soussolution de viscosité de (*) si $\forall\varphi\in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ pour tout (t,x) t.q.

$0=(u-\varphi)(t,x)=\max\limits_{[0,T]\times\mathbb{R}^n}(u-\varphi)$ on a $F(x,\varphi(t,x),\partial_t\varphi(t,x),\nabla\varphi(t,x),\nabla^2\varphi(t,x))\leq 0$

(iii) $u\in C^0([0,T]\times\mathbb{R}^n)$ est solution de viscosité de (*) si u est sur et sous solution de (*).



$F(\text{--})=-|\nabla u|+1$

u solution de viscosité de $|\nabla u|=1$?

Si $x\neq 0$ on a bien la ppté de viscosité
(on a condition de min du 1er ordre / 2ème ordre $\rightarrow \nabla u=\nabla\varphi$)

En $x=0$ ppté de sur solution : φ test

$$\underbrace{\varphi(h)}_{\leq h}-\underbrace{\varphi(0)}_{=0}=\varphi'(\theta_h)\cdot h \quad \text{(Théorème des accroissements finis)}$$

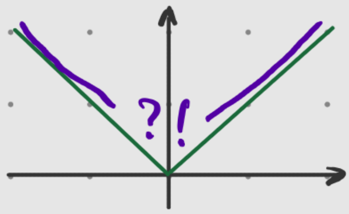
$$h\geq\varphi'(\theta_h)\cdot h \qquad h\to 0 \quad \theta_h\to 0 \Rightarrow \varphi'(0)\leq 1$$

$$\varphi(-h)-\varphi(0)=\varphi'(\theta_h)\cdot(-h)$$

$\overset{\vert\wedge}{h} - \overset{\shortparallel}{0} \geq \varphi'(\theta_h)\cdot(-h) \quad h \to 0 \quad \theta_h \to 0 \Rightarrow \varphi'(0) \geq -1$

Donc $|\varphi'(0)| \leq 1$ et $1 - |\varphi'(0)| \geq 0$ donc u sur solution.

Propriété de sous solution $\varphi \in C^2(\mathbb{R})$ t.q. $0 = (u-\varphi)(0) = \max\limits_{\mathbb{R}}(u-\varphi)$



Une telle fonction test n'existe pas.
Par convention, la ppté de sous sol est verifiée

2. Propriétés de viscosité de la fonction valeur

On rappelle que la fonction valeur v est définie par

$$v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}\left[g(X_T^{t,x,\alpha}) + \int_t^T f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\,ds \right] \quad \text{pour } (t,x) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$$

et v vérifie le PPD

$$v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}\left[v(\theta, X_\theta^{t,x,\alpha}) + \int_t^\theta f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s)\,ds \right]$$

__Théorème__ La fct v vérifie (**) et est solution de viscosité de (*)

__Preuve__ v vérifie (**) par définition

On montre la ppté de viscosité de v.

__1. Ppté de sous solution__

Soit $(\bar{t}, \bar{x}) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ t.q.

$$0 = (v-\varphi)(\bar{t},\bar{x}) = \max_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} (v-\varphi)$$

On raisonne par l'absurde et on suppose que

$$2\eta = -\sup_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^a\varphi(\bar t,\bar x) + f(\bar x,a)\right\} > 0$$

Par continuité des qttés apparaissant dans le sup on a

$$-\sup_{a\in A}\left\{\mathcal{L}^a\varphi(t,x) + f(x,a)\right\} \geq \eta > 0 \quad \text{pour } (t,x)\in \underbrace{B(\bar t,r)\times B(\bar x,r)}_{B}$$

avec $0 < r < T-\bar t$

Sans perte de généralité, on suppose que $(\bar t,\bar x)$ est un point de max strict de $(v-\varphi)$ (sinon remplacer $\varphi(t,x)$ par $\varphi(t,x) + |x-\bar x|^4 + |t-\bar t|^2$)

on peut prendre ici η plus petit si nécessaire

En particulier, $\max_{\partial B}(v-\varphi) \leq -\eta$

Soit $\mathcal{D}^\alpha = \inf\{s\geq \bar t,\ (s, X_s^{\bar t,\bar x,\alpha}) \notin B\}$

D'aprés le PPD, il existe $\hat\alpha$ t.q.

par définition de sup

$$v(\bar t,\bar x) \leq \mathbb{E}\left[v(\mathcal{D}^{\hat\alpha}, X_{\mathcal{D}^{\hat\alpha}}^{\bar t,\bar x,\hat\alpha}) + \int_{\bar t}^{\mathcal{D}^{\hat\alpha}} f(X_s^{\bar t,\bar x,\hat\alpha}, \hat\alpha_s)\,ds\right] + \frac{\eta}{2}$$

par $\max_{\partial B}(\cdot)\leq -\eta$

$$\varphi(\bar t,\bar x) \leq \mathbb{E}\left[\varphi(\mathcal{D}^{\hat\alpha}, X_{\mathcal{D}^{\hat\alpha}}^{\bar t,\bar x,\hat\alpha}) - \eta + \int_{\bar t}^{\mathcal{D}^{\hat\alpha}} f(X_s^{\bar t,\bar x,\hat\alpha}, \hat\alpha_s)\,ds\right] + \frac{\eta}{2}$$

En appliquant Itô à φ on obtient

$$\cancel{\varphi(\bar t,\bar x)} \leq \mathbb{E}\left[\cancel{\varphi(\bar t,\bar x)} + \int_{\bar t}^{\mathcal{D}^{\hat\alpha}} \mathcal{L}^{\hat\alpha_s}\varphi(s, X_s^{\bar t,\bar x,\hat\alpha})\,ds - \eta + \int_{\bar t}^{\mathcal{D}^{\hat\alpha}} f(X_s^{\bar t,\bar x,\hat\alpha}, \hat\alpha_s)\,ds\right] + \frac{\eta}{2}$$

$$\frac{\eta}{2} \le \mathbb{E}\left[\int_t^{\theta^{\hat{\alpha}}} \underbrace{(\mathcal{L}^{\hat{\alpha}_s}\varphi + f)(X_s^{\bar{t},\bar{x},\hat{\alpha}}, \hat{\alpha}_s)}_{\le -\eta} ds\right] \le 0 \qquad \frac{\eta}{2} \le 0 \text{ car } \eta > 0$$

2. Propriété de sur-solution de v

Soient $(\bar{t},\bar{x}) \in [0,T) \times \mathbb{R}^n$ et $\varphi \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ t.q.

$$0 = (v - \varphi)(\bar{t},\bar{x}) = \min_{[0,T]\times\mathbb{R}^n} (v - \varphi)$$

Soit $a \in A$ et notons $\bar{\alpha}$ le contrôle cons^te égal à a.

Par PPD on a

$$v(\bar{t},\bar{x}) \ge \mathbb{E}\left[v(\theta_h, X_{\theta_h}^{\bar{t},\bar{x},\bar{\alpha}}) + \int_t^{\theta_h} f(X_s^{\bar{t},\bar{x},\bar{\alpha}}, a)\, ds \right]$$

où $\theta_h = (\bar{t}+h) \wedge \inf\{ s \ge \bar{t} : (s, X_s^{\bar{t},\bar{x},\bar{\alpha}}) \notin B \}$

$$\overset{\overset{v(\bar{t},\bar{x})}{\shortparallel}}{\varphi(\bar{t},\bar{x})} \ge \mathbb{E}\left[\varphi(\theta_h, X_{\theta_h}^{\bar{t},\bar{x},\bar{\alpha}}) + \int_t^{\theta_h} f(X_s^{\bar{t},\bar{x},\bar{\alpha}}, a)\, ds \right]$$

car $(v - \varphi) \ge 0$

Ici : $B = B(\bar{t},r) \times B(\bar{x},r)$ avec $r \in]0, T-\bar{t}[$

Par Itô appliqué à φ on a

$$\cancel{\varphi(\bar{t},\bar{x})} \ge \mathbb{E}\left[\cancel{\varphi(\bar{t},\bar{x})} + \int_t^{\theta_h} \mathcal{L}^a \varphi(s, X_s^{\bar{t},\bar{x},\bar{\alpha}})\, ds + \int_t^{\theta_h} f(X_s^{\bar{t},\bar{x},\bar{\alpha}}, a)\, ds \right]$$

$$0 \ge \mathbb{E}\left[\int_{\bar{t}}^{\theta_h} (\mathcal{L}^a \varphi + f)(s, X_s^{\bar{t},\bar{x},\bar{\alpha}}, a)\, ds \right] \cdot \frac{1}{h}$$

$h \to 0 \Rightarrow \theta_h = t+h$ ($X_s^{\bar{t},\bar{x},\bar{\alpha}}$ est continue) $\Rightarrow$ TCD + TAF donnent

$0 \geq (\mathcal{L}^a \varphi + f)(\bar{t}, \bar{x}, a) \Rightarrow -\sup_{a \in A} \{(\mathcal{L}^a \varphi + f)(\bar{t}, \bar{x}, a)\} \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ v est sur-solution. $\square$

3. Comparaison et unicité

Théorème (comparaison)

Soit $U \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$ (resp $V \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^n)$) sous solution (régulière) (i.e. (*) avec ≤ 0) (resp. sur solution) à croissance polynomiale de (*). Alors si $U(T,x) \leq V(T,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on a $U \leq V$ sur $[0,T] \times \mathbb{R}^n$

Rem Le thm de comparaison reste vrai si U (resp V) est sous solution de viscosité (resp sur sol de viscosité) la démo utilise l'analogue de la condition du 2nd ordre d'optimalité, appelé lemme d'Ishii.

Idée de la preuve

Étape 1 Introduire du λ dans le F

Posons $\tilde{U}(t,x) = e^{\lambda t} U(t,x)$

$\tilde{V}(t,x) = e^{\lambda t} V(t,x)$

Alors $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ sont resp sous et sur solutions régulières

de $-\sup_{a\in A}\{\tilde{\mathcal{L}}^a\varphi + \tilde{f}(\cdot,a)\} = 0$ avec

$$\tilde{\mathcal{L}}^a\varphi(t,x) = \mathcal{L}^a\varphi(t,x) - \lambda\varphi(t,x)$$

et $\tilde{f}(t,x,a) = e^{\lambda t} f(x,a)$

Etape 2 Comme $\tilde{U}$ et $\tilde{V}$ à $\nearrow$ polynomiale il existe $p>0$:

$$\sup_{(t,x)\in[0,T]\times\mathbb{R}^n} \frac{|\tilde{U}(t,x)| + |\tilde{V}(t,x)|}{1+|x|^p} < +\infty.$$

On pose $\varphi(t,x) = e^{\lambda t}\psi(t,x)$ où $\psi(t,x) = (1+|x|^{2p})$

Alors par $\nearrow$ lin de b et σ il existe une conste $c>0$ t.q.

$$-\sup_{a\in A}\mathcal{L}^a\varphi(t,x) \geq (\lambda - c)\varphi(t,x) \geq 0$$

Si $\lambda > c$ alors en posant $\tilde{V}_\varepsilon(t,x) = \tilde{V}(t,x) + \varepsilon\varphi(t,x)$

on a $\lim_{|x|\to\infty} \sup_{t\in[0,T]} (\tilde{U} - \tilde{V}_\varepsilon)(t,x) = -\infty$

Etape 3 Par contradiction, supposons que $\sup_{[0,T]\times\mathbb{R}^n}(\tilde{U} - \tilde{V}_\varepsilon) > 0$

$\tilde{U} - \tilde{V}_\varepsilon$ admet un pt de max car $\lim_{|x|\to+\infty}\sup_{[0,T]}(\tilde{U} - \tilde{V}_\varepsilon)(t,x) = -\infty$

Notons $(\bar{t},\bar{x})$ ce point.

Alors par optimalité de $(\bar{t},\bar{x})$,

$$\partial_t \tilde{U}(\bar{t},\bar{x}) \leq \partial_t \tilde{V}_\varepsilon(\bar{t},\bar{x})$$

$$\nabla \tilde{U}(\bar{t},\bar{x}) = \nabla \tilde{V}_\varepsilon(\bar{t},\bar{x})$$
$$\nabla^2 \tilde{U}(\bar{t},\bar{x}) \leq \nabla^2 \tilde{V}_\varepsilon(\bar{t},\bar{x})$$

Alors $\lambda(\tilde{U}-\tilde{V}_\varepsilon)(\bar{t},\bar{x}) \leq \tilde{F}(\underbrace{\tilde{U}(\bar{t},\bar{x})}_{\geq 0}) - \tilde{F}(\underbrace{\tilde{V}_\varepsilon(\bar{t},\bar{x})}_{\geq 0}) < 0$

Impossible donc $\tilde{U} \leq \tilde{V}_\varepsilon \ \forall \varepsilon > 0$

Donc $\tilde{U} \leq \tilde{V}$ et $U \leq V$ $\square$

<u>Corollaire</u> $\mathcal{V}$ est l'unique solution de viscosité de $(*)$ satisfaisant $(**)$.