Modèles financiers en assurance / Examen du 23 mai 2011

Durée 3h – aucun document n'est autorisé

Problème : Calculs du *best estimate* d'un contrat d'épargne

On considère un assureur qui commercialise un contrat d'épargne à prime unique dont la provision mathématique pour un assuré d'âge x à la souscription évolue selon :

$$\begin{aligned} PM(x,t) &= PM(x,0)\times \mathbf{exp}\left(\int_0^t \left(r_s(u)-\mu_x(u)\right)du\right) \\ &= PM(x,0)\times S_x(t)\times \mathbf{exp}\left(\int_0^t r_s(u)\,du\right) \end{aligned}$$

avec $r_s(t)$ le taux servi instantané (aléatoire) et $\mu_x(t)$ (déterministe) la fonction de hasard en t décrivant les sorties du portefeuille. Le contrat est souscrit pour une durée de T années et l'assuré peut racheter son contrat avant le terme sans pénalité.

Dans la suite du problème, sauf mention explicite du contraire, x et T sont fixés.

Question n°1 : Rappeler les principes de calcul des provisions dans le référentiel Solvabilité 2 en fonction de la nature du risque.

Il s'agit ici de rappeler la distinction entre les risque couvrables et les risques non couvrables. Pour les premiers, le calcul est effectué dans le cadre de l'AOA et pour le second en ajoutant au best estimate une marge pour risque calculée dans une logique de coût du capital.

Question n°2 : Comment s'interprète $PM(x,0)$?

Il s'agit de la prime initiale nette de chargements.

Question n°3 : Justifiez dans l'expression de la provision mathématique le fait que $r_s(t)$ soit aléatoire et $\mu_x(t)$ déterministe. Que décrit $\mu_x(t)$?

$\mu_x(t)$ *décrit les sorties anticipées, essentiellement donc le rachat structurel. L'expression indiquée pour* $PM(x,t)$ *suppose implicitement que le risque d'assurance (ici le rachat structurel) est supposé complètement mutualisé et l'aléa sur* $r_s(t)$ *traduit l'incertitude sur le rendement de l'actif.*

On note maintenant $\delta(t)=\mathbf{exp}\left(-\int_0^t r(u)\,du\right)$ le facteur d'actualisation et $BEL^F(x,T)$ la somme des flux de prestations actualisés sur le durée de vie du contrat, conditionnellement à un état du monde financier.

Question n°4 : Donnez l'expression de $BEL^F(x,T)$ en fonction de $PM(x,.)$, μ_x et δ. Vous pourrez distinguer les flux sur l'intervalle $[0,T[$ et le flux en *T*.

Les prestations payées en $t<T$ sont $d\phi_x(t)=PM(x,t)\times\mu_x(t)dt$, correspondant au paiement de l'épargne accumulée en cas de sortie anticipée. A l'échéance T du contrat, le montant de la PM est rendu à l'assuré vivant. La somme des prestations actualisées sur l'intervalle $[0,T]$, conditionnellement à un état du monde financier, est donc égale à :

$$BEL^F(x,T)=\int_0^T PM(x,t)\times\mu_x(t)\times\delta(t)dt+\delta(T)\times PM(x,T)$$

Question n°5 : Comment calculez-vous le *best estimate* du contrat en fonction de $BEL^F(x,T)$?

Par définition $BEL(x,T)=E^Q\left(BEL^F(x,T)\right)$ où Q est la (une) probabilité risque neutre pour le risque financier.

Question n°6 : Quelle condition soit satisfaire $PM(x,t)$ pour que dans le *best estimate* le coefficient d'actualisation du flux servi en *t* soit égal au prix du zéro-coupon d'échéance *t*, $P(0,t)$?

Il faut que $PM(x,t)$ soit indépendant de $\delta(t)$, ou en d'autres termes que $r_s(t)$ et $r(t)$ soient indépendants ; on a bien alors $E^Q\left(\delta(T)\times PM(x,T)\right)=E^Q\left(\delta(T)\right)\times E^Q\left(PM(0,T)\right)$. Cette condition est en particulier satisfaite si $PM(x,t)$ est déterministe.

Question n°7 : On se place dans le cas simple où $r_s(t)=r(t)=r$ supposé constant. Montrez qu'alors $BEL^F(x,T)=PM(0,x)$; qu'en pensez-vous ?

On a dans ce cas :

$$BEL^F(x,T)=PM(0,x)\times\left[\int_0^T S_x(t)\times\mu_x(t)dt+S_x(T)\right]$$

Or $\mu_x(t)=-\frac{d}{dt}\mathbf{ln}\,S_x(t)$ donc si on pose $u=\mathbf{ln}\,S_x(t)$ on obtient :

$$BEL^F(x,T)=PM(0,x)\times\left[-\int_0^{\mathbf{ln}\,S_x(T)} e^u du+S_x(T)\right]=PM(0,x)$$

Ce résultat est logique puisqu'on actualise au taux r des flux de prestations revalorisés au taux r.

On suppose maintenant que le taux servi est égal au taux sans risque majoré d'une prime, $r_s(t)=r(t)+\tau$, la prime étant supposée constante.

Question n°8 : calculez $BEL^F(x,T)$ dans ce cas et vérifiez que si $\tau=0$ vous retrouvez le résultat de la question précédente. Que pouvez-vous dire de la loi de la variable $BEL^F(x,T)$?

On a ici :

$$PM(x,t)\times\delta(t)=PM(x,0)\times\mathbf{exp}\left(\int_0^t\left(\tau-\mu_x(u)\right)du\right)=PM(x,0)\times e^{\tau t}S_x(t)$$

Par définition on a :

$$BEL^F(x,T)=PM(x,0)\times\left(\int_0^T e^{\tau t}\times S_x(t)\times\mu_x(t)dt+e^{\tau T}S_x(T)\right)$$

En utilisant le changement de variable s'écrit $t=S_x^{-1}\left(e^u\right)$ *qui s'écrit* $\mathbf{ln}\left(S_x(t)\right)=u$ *et conduit donc, comme* $\mu_x(t)=-\frac{d}{dt}\mathbf{ln}\left(S_x(t)\right)$ *à :*

$$BEL^F(x,T)=PM(0,x)\times\left[-\int_0^{\mathbf{ln}\,S_x(T)}e^{\tau S_x^{-1}\left(e^u\right)+u}du+e^{\tau T}S_x(T)\right]$$

Compte tenu de la règle de revalorisation de la PM, la valeur actualisée des prestations servies ne dépend pas de l'environnement financier et n'est donc pas aléatoire. La formule ci-dessus fournit donc une expression analytique pour $BEL(x,T)=E^Q\left(BEL^F(x,T)\right)=BEL^F(x,T)$.

Question n°9 : Rappelez comment le taux servi $r_s(t)$ est relié en général au taux de rendement de l'actif, que l'on notera $r_A(t)$. Existe-t-il une relation mathématique simple entre ces deux taux ? Vous décrirez avec soin la logique de calcul du *best estimate* du contrat dans le cas général.

Le taux servi est obtenu en tenant compte, une fois la performance de marché de l'actif observée, des règles comptables, du jeu des provisions financières et de la participation aux bénéfices. Il n'existe pas de relation simple entre les deux taux.

On introduit maintenant un fonds de stabilisation destiné à limiter les fluctuations de la charge de service des revalorisations en fonction du temps. En notant $PM(t)=\int PM(x,t)\pi(dx)$ où $\pi(dx)$ décrit la répartition par âge des souscripteurs on pose :

$$dF(t)=\mathbf{max}\left\{PM(t)\left(r_A(t)-r_s(t)\right);-F(t)\right\}dt$$

Question n°10 : En vous appuyant sur la forme de l'équation le définissant, indiquez l'intérêt et les caractéristiques du fonds *F*.

F est un fonds global (non affecté à une tête en particulier). Ce fonds permet donc à l'assureur de ne pas dégager en résultat les éventuels produits financiers et d'éviter de constater une perte en cas d'insuffisance du rendement obtenu par les actifs. Il introduit une mutualisation temporelle du rendement.

Question n°11 : Comment utiliseriez-vous ce fonds pour introduire de la participation aux bénéfices dans le modèle proposé ? Que pouvez-vous dire alors si le taux servi est défini comme à la question n°7 ?

L'assureur n'est plus en mesure d'honorer ses engagements sans utiliser ses fonds propres si $F(t)<0$. A ce stade il n'existe pas encore de participation aux bénéfices. On introduit ce dispositif en supposant la restitution à l'assuré du montant du fonds $F(T)$ au terme T du contrat. Cette restitution est effectuée au prorata des provisions. La somme des prestations actualisées sur l'intervalle $[0,T]$, conditionnellement à un état du monde financier, devient :

$$BEL^F(x,T)=\int_0^T PM(x,t)\times\mu_x(t)\times\delta(t)\,dt+\delta(T)\times PM(x,T)\times\left(1+\frac{F(T)}{PM(T)}\right).$$

Dans le cas particulier de la question n°7 où $PM(x,t)\times\delta(t)=PM(x,0)\times e^{\tau t}\times S_x(t)$, la provision best estimate pour une tête d'âge x se calcule alors selon :

$$BEL(x,T)=PM(x,0)\times\left[\int_0^T e^{\tau t}\times S_x(t)\times\mu_x(t)\,dt+e^{\tau T}\times S_x(T)\times\left(1+E^Q\left(\frac{F(T)}{PM(T)}\right)\right)\right]$$

L'expression ci-dessus n'est valide que parce que $PM(x,t)\times\delta(t)$ est déterministe, du fait de la forme du taux servi. On peut observer que $\alpha=E^Q\left(\frac{F(T)}{PM(T)}\right)$ s'interprète comme un taux de PB au terme.

Question n°12 : Que suggéreriez-vous pour améliorer le modèle décrit ci-dessus ?

Modèles financiers en assurance - Examen 2011

On considère un assureur commercialisant un contrat d'épargne à prime unique dont la PM pour un assuré d'âge x à la souscription évolue selon :

$$PM(x,t) = PM(x,0)\exp\left(\int_0^t (r_s(u) - \mu_x(u))\,du\right)$$

$$= PM(x,0)\, S_x(t) \exp\left(\int_0^t r_s(u)\,du\right)$$

$r_s(t)$ le tx servi instantané (aléatoire)
$\mu_x(t)$ (déterministe) la fonct° de hasard en t décrivant les sorties du portefeuille.

Question 1 :

Pour les risques couvrables (réplicables), le calcul des provisions est effectué dans le cadre de l'AOA.
Pour les risques non couvrables (non - "), le calcul des provisions est effectué en ajoutant au Best Estimate une marge pour risque calculée dans une logique de coût du capital.

Question 2 :

$PM(x,0)$ représente la prime initiale nette de chargements.

Question 3 :

$\mu_x(t)$ décrit les sorties anticipées, donc le rachat structurel.
L'expression indiquée pour $PM(x,t)$ suppose implicitement que le risque d'assurance (ici le rachat structurel) est supposé complètement mutualisé et l'aléa sur $r_s(t)$ traduit l'incertitude sur le rendement actif.

On note $\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t r(u)\,du\right)$ le facteur d'actualisat° et $BEL^F(x,T)$ la Σ des flux de prestat° actualisés sur la durée de vie du contrat, conditionnellement à un état du monde financier.

Question 4 :

Les prestations payées en $t<T$ sont $d\Phi_x(t) = PM(x,t)\,\mu_x(t)\,dt$, correspondant au paiement de l'épargne accumulée en cas de sortie anticipée. À l'échéance T du contrat, le montant de la PM est rendu à l'assuré vivant. La somme des prestat° actualisées sur $[0,T]$ conditionnellement à un état du monde financier, est :

$$BEL^F(x,t) = \int_0^T PM(x,t)\,\mu_x(t)\,\delta(t)\,dt + \delta(T)\,PM(x,T)$$

Question 5 :

Par définition, $BEL(x,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[BEL^F(x,T)]$ où $\mathbb{Q}$ est une proba risque neutre pour le risque financier.

Question 6 :

Il faut que $PM(x,t) \perp\!\!\!\perp \delta(t)$, ou en d'autres termes que $r_S(t) \perp\!\!\!\perp r(t)$.
Dès lors, on a bien que $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta(T) PM(x,T)] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta(T)]\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[PM(0,T)]$
Cette condition est en particulier satisfaite si $PM(x,t)$ déterministe

Question 7 :

$$BEL^F(x,t) = \int_0^T \underbrace{PM(x,t)}_{PM(x,0) S_x(t) e^{\int_0^t r_S(u)\,du}} \mu_x(t)\, \delta(t)\, dt + \delta(T)\, PM(x,T)$$

On a dans ce cas :

$$BEL^F(x,T) = PM(0,x) \times \left[\int_0^T S_x(t) \mu_x(t) dt + S_x(T) \right]$$

Or $\mu_x(t) = -\frac{d}{dt} \ln(S_x(t))$ donc si on pose $u = \ln(S_x(t))$

$$BEL^F(x,T) = PM(0,x) \left[-\int_0^{\ln(S_x(T))} e^u du + S_x(T) \right] = PM(0,x)$$

Ce résultat est logique car on actualise au taux r des flux de prestat° revalorisés au taux r.

On suppose mtn que $r_S(t) = r(t) + \tau$ ← prime cte

Question 8 :

On a :

$$PM(x,t)\,\delta(t) = PM(x,0) \exp\left(\int_0^t (\tau - \mu_x(u)) du\right)$$
$$= PM(x,0)\, e^{\tau t} S_x(t)$$

Par définition, on a :

$$BEL^F(x,T) = PM(x,0) \times \left(\int_0^T e^{\tau t} S_x(t)\, \mu_x(t) dt + e^{\tau T} S_x(T) \right)$$

En utilisant le changem^t de variable C^1 bijectif $t = S_x^{-1}(e^u)$ qui s'écrit $\ln(S_x(t)) = u \Rightarrow \mu_x(t) = -\frac{d}{dt} \ln(S_x(t))$, il vient :

$$BEL^F(x,T) = PM(0,x) \times \left[-\int_0^{\ln(S_x(T))} e^{\tau S_x^{-1}(e^u) + u} du + e^{t\tau} S_x(T) \right]$$

Compte tenu de la règle de revalorisation de la PM, la valeur actualisée des prestations servies ne dépend pas de l'environnement financier et n'est donc pas aléatoire. La formule ci-dessous fournit donc une express° analytique pour

$$BEL(x,T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[BEL^F(x,T)] = BEL^F(x,T)$$

Question 9 :

Le taux servi est obtenu en tenant compte, une fois la performance de marché de l'actif observée, des règles comptables, du jeu des provisions financières et de la PB. ∄ de relat° simple entre les 2 taux.