Exercices: Mathématiques actuarielles
Primes, réserves et valeur de rachat

Karim Barigou

1. Une personne de 40 ans souscrit un contrat d'assurance vie comportant les garanties suivantes:

   - en cas de décès avant 65 ans, le payement immédiat d'un capital de 5.000 €.
   - en cas de vie à 65 ans, le payement d'un capital de 10.000 €.

   Le contrat prévoit des primes payables annuellement par anticipation pendant les 20 premières années. Ces primes sont de montant P durant les 10 premières années, de montant $1,5P$ à partir de la 11 -ème année. Le tarif est calculé sur les bases techniques suivantes:

   - taux d'intérêt technique et table de mortalité: voir ci-dessous
   - chargements: aucun

   Sur base des données ci-dessous, calculez:

   a. la prime unique du contrat,
   b. la prime annuelle P des 10 premières années,
   c. la réserve mathématique pure à la fin de la 5ème année.

   Données : commutations dans la table à $4,75\%$.

	Table 4,75%		
x	D_x	N_x	$\overline{M}_x$
40	147349	2432717	37905
45	114590	1764397	35394
50	88268	1246350	32947
60	49478	551011	25067
65	35069	333532	20413

Solution:

a. La prime unique du contrat est donnée par

$$\begin{aligned} PU &= 5.000\bar{A}^1_{40\overline{25}|} + 10.000{}_{25}E_{40} \\ &= \frac{5\left(\bar{M}_{40} - \bar{M}_{65}\right) + 10D_{65}}{D_{40}} \cdot 10^3 \\ &= 2.973,552 \end{aligned}$$

b. Pour le calcul de la prime annuelle, on égalise la prime unique et la valeur actuelle des primes annuelles:

$$\begin{aligned} PU &= PA\left(\ddot{a}_{40\overline{10}|} + 1,5{}_{10}E_{40}\ddot{a}_{50\overline{10}|}\right) \\ &= PA\left(\frac{N_{40} - N_{50}}{D_{40}} + 1,5\frac{D_{50}}{D_{40}}\frac{N_{50} - N_{60}}{D_{50}}\right). \end{aligned}$$

Dès lors, en isolant PA, on trouve que

$$PA = \frac{D_{40}}{N_{40} + 0,5N_{50} - 1,5N_{60}} \cdot PU = 196,534.$$

c. Pour le calcul de la réserve mathématique pure on calcule la différence entre la valeur actuelle des engagements futurs et des primes futures, si l'assuré est toujours vivant dans 5 ans. On trouve alors que

$$\begin{aligned} {}_5V_{40} &= 5.000\bar{A}^1_{45\overline{20}|} + 10.000{}_{20}E_{45} - PA\left(\ddot{a}_{45:\overline{5}|} + 1,5 \cdot {}_5E_{45} \cdot \ddot{a}_{50\overline{10}|}\right) \\ &= \frac{5\left(\bar{M}_{45} - \bar{M}_{65}\right) + 10D_{65}}{D_{45}} \cdot 10^3 - PA\frac{N_{45} + 0,5N_{50} - 1,5N_{60}}{D_{45}} \\ &= 1.036,680 \end{aligned}$$

2. Une personne de 40 ans souscrit une assurance vie garantissant les prestations suivantes:

- le payement d'un capital de 400.000 € en cas de décès de l'assuré avant 55 ans,
- le payement d'un capital de 200.000 € en cas de décès de l'assuré après 55 ans,
- une rente viagère de 30.000 € par an payable par douzièmes mensuellement à terme échu et prenant cours au 65ème anniversaire de l'assuré s'il atteint cet âge.

Le contrat prévoit des primes constantes payables trimestriellement par anticipation pendant 25 ans. Le tarif est calculé sur les bases techniques suivantes :

- taux d'intérêt technique: 3.75 %.
- table de mortalité: voir ci-dessous
- chargements:
  - inventaire:

  * 100 € pour chacune des 25 premières années (valeur début d'année).
  * chargement sur le taux d'intérêt *instantané* de $0,15\%$.
  * chargement de 2% sur tous les arrérages de rente.
- acquisition: 3% de la prime unique de réduction.
- encaissement: 5% de chaque prime payée.

Sur base des données ci-dessous, calculez:

a. le taux d'intérêt technique en inventaire.
b. les primes uniques d'inventaire et de réduction du contrat,
c. les primes annuelles d'inventaire, de réduction et commerciale,
d. la valeur de rachat théorique du contrat à la fin de la 20éme année.
e. A la fin de la 20ème année, l'assuré demande que le capital assuré en cas de décès soit réduit à 100.000€ avec effet immédiat. Les primes n'étant pas modifiées, calculez la nouvelle rente assurée en cas de vie à 65 ans.

Données : commutations calculées au taux technique d'inventaire.

	Table MK		
x	D_x	N_x	$\bar{M}_x$
40	229646	4372986	79305
45	188776	3309085	75279
50	153707	2437404	70368
55	123211	1731472	64259
60	96267	1170552	56644
65	72125	738515	47329

Solution:

a. Le calcul du taux technique d'inventaire est donnée par

$$i^* = \exp[\log(1.0375) - .0015] - 1 = 3.59449\%$$

b. Tous les calculs ci-dessous sont effectués avec le taux technique d'inventaire. On calcule le facteur de rente à 65 ans avec fractionnement mensuel:

$$a_{65}^{(12)} = \frac{N_{65}}{D_{65}} - \frac{13}{24} = 9,69771$$

Les primes uniques d'inventaire et de réduction sont données par

$$\begin{aligned} PU' &= \left(2\bar{A}_{40} + 2\bar{A}^1_{40\overline{15}|}\right) \cdot 10^5 + 1,02 \cdot 3 \cdot 10^4 {}_{25}E_{40} a_{65}^{(12)} + 100\ddot{a}_{40\overline{25}|} \\ &= \frac{4\bar{M}_{40} - 2\bar{M}_{55}}{D_{40}} \cdot 10^5 + 3,06 \cdot 10^4 \frac{D_{65}}{D_{40}} a_{65}^{(12)} + 100\frac{N_{40} - N_{65}}{D_{40}} \\ &= 176953,8 \\ \widehat{PU} &= \frac{PU'}{0,97} = 182426,6 \end{aligned}$$

c. Pour le calcul des primes annuelles, on calcule le facteur de rente correspondant:

$$\ddot{a}^{(4)}_{40\overline{25}|} = \frac{N_{40} - N_{65}}{D_{40}} - \frac{3}{8}\left(1 - \frac{D_{65}}{D_{40}}\right) = 15,56918$$

Dès lors, les primes annuelles d'inventaire, de réduction et commerciales sont données par

$$PA' = \frac{PU'}{\ddot{a}^{(4)}_{40\overline{25}|}} = 11.365,645$$

$$\widehat{PA} = \frac{PA'}{0,97} = 11.717,160$$

$$PA'' = \frac{\widehat{PA}}{0,95} = 12.333,85$$

d. On calcule d'abord le facteur de rente pour les primes restantes

$$\ddot{a}^{(4)}_{60\overline{5}|} = \frac{N_{60} - N_{65}}{D_{60}} - \frac{3}{8}\left(1 - \frac{D_{65}}{D_{60}}\right) = 4,39386$$

Dès lors, la valeur de rachat théorique du contrat à la fin de la 20ème année est donnée par

$$\begin{aligned} W(20) &= \frac{\bar{M}_{60}}{D_{60}} \cdot 2 \cdot 10^5 + \frac{D_{65}}{D_{60}} a^{(12)}_{65} \cdot 3,06 \cdot 10^4 + 100\frac{N_{60} - N_{65}}{D_{60}} - \widehat{PA} \cdot \ddot{a}^{(4)}_{60\overline{5}|} \qquad (1) \\ &= 288.976,728 \end{aligned}$$

e. Soit R la nouvelle rente assurée. Pour calculer le montant de la nouvelle rente, on égalise la valeur de rachat théorique obtenue au point précédent d'une part avec la valeur actuelle des nouveaux engagements (chargements d'inventaire inclus) diminuée de la valeur actuelle des primes de réduction futures. On trouve alors

$$W(20) = \frac{\bar{M}_{60}}{D_{60}} \cdot 10^5 + R \cdot 1,02 \cdot \frac{D_{65}}{D_{60}} a^{(12)}_{65} + 100\frac{N_{60} - N_{65}}{D_{60}} - \widehat{PA} \cdot \ddot{a}^{(4)}_{60\overline{5}|}$$

Dès lors, en comparant avec (1), on trouve

$$R = 30.000 + \frac{\bar{M}_{60}}{1,02 \cdot D_{65} \cdot a^{(12)}_{65}} \cdot 10^5 = 37.939,602.$$

3. Un assureur auto propose une assurance temporaire d'une durée de 3 ans à ces assurés âgés de 70 ans. La police d'assurance paie un montant de 10.000 € si l'assuré décède d'un accident automobile durant les 3 ans du contrat (paiement en fin d'année du décès).

On vous donne les informations suivantes concernant la mortalité de la population assurée:

(i)

x	l_x	$d_x^{(1)}$	$d_x^{(2)}$	$d_x^{(3)}$
70	1000	80	10	40
71	870	94	15	60
72	701	108	18	82

où $d_x^{(1)}$ représente le nombre de décès par cancer à l'âge x, $d_x^{(2)}$ représente le nombre de décès par accidents à l'âge x et $d_x^{(3)}$ représente le nombre de décès par autres causes. De plus, comme vu au cours, l_x représente le nombre de vies à l'âge x.

(ii) Le taux d'intérêt technique est $i = 1\ \%$.

(iii) Les primes sont annuelles et payables par anticipation (çad payable aux instants $t = 0, 1, 2$ pour autant que l'assuré est vivant).

Calculez la prime pure annuelle PA pour ce contrat.

Hint: La probabilité pour qu'un individu d'âge 70 décède d'un accident de voiture dans l'année $(k, k+1)$ est estimée par

$$_{k|}q_{70}^{(2)} = \frac{d_{70+k}^{(2)}}{l_{70}}.$$

Solution: Pour calculer la prime pure annuelle, on égalise l'espérance de la valeur actuelle (VA) des engagements futurs et l'espérance de la valeur actuelle des primes futures (VA). Celles-ci sont données par

$$\begin{aligned}
VA[\text{engagements}] &= \sum_{k=0}^{2} v^k \ _{k|}q_{70}^{(2)} \times 10.000 \\
&= \frac{1}{l_{70}} \left(v\ d_{70}^{(2)} + v^2\ d_{71}^{(2)} + v^3\ d_{72}^{(2)} \right) \times 10.000 \\
&= 0.04207605 \times 10.000 = 420.7605
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
VA[\text{primes}] &= PA \sum_{k=0}^{2} v^k \ _{k}p_{70} \\
&= PA \sum_{k=0}^{2} v^k \ \frac{l_{70+k}}{l_{70}} = 2.548574 \times PA
\end{aligned}$$

On trouve dès lors que la prime pure annuelle est

$$PA = \frac{420.7605}{2.548574} = 165.0964.$$

4. On considère une assurance vie-entière d'un capital décès de 1000 € payable à la fin de l'année du décès pour un assuré âgé de 45 ans. On donne les informations suivantes:

   - Les primes pures annuelles payables par anticipation au temps t sont données par

   $$\begin{cases} P & \text{si } t = 0, 2, \ldots, 19 \\ P + W & \text{si } t = 20, 21, \ldots \end{cases}$$

   - $V(t)$, la réserve mathématique pure la 20ème année, est 0.
   - Quelques données actuarielles sont données dans le tableau ci-dessous:

A_{45}	$A^{1}_{\overline{45:20}\rvert}$	$\ddot{a}_{\overline{45:20}\rvert}$	A_{65}
0.109765	0.021333	12.028991	0.296972
${}_{20}E_{45}$	$\ddot{a}_{45}$	${}_{20}E_{65}$	$\ddot{a}_{65}$
0.297781	15.727478	0.201711	12.420165

Questions:

A. Sur base de la valeur de la réserve initiale et de la réserve dans 20 ans, écrire un système à deux équations où P et W sont les inconnues.

B. Déterminez les valeurs numériques de W et P.

Solution: Etant donné que la réserve mathématique pure dans 20 ans est nulle, on a

$$\begin{aligned} &V(20) = 0 \\ &1000 A_{65} - (P + W)\, \ddot{a}_{65} = 0. \end{aligned}$$

D'autre part, comme la réserve mathématique pure est nulle à la souscription, on a

$$\begin{aligned} &V(0) = 0 \\ &1000 A_{45} - (P \ddot{a}_{45} + W {}_{20}E_{45} \ddot{a}_{65}) = 0. \end{aligned}$$

On trouve alors le système à deux inconnus suivant:

$$\begin{cases} 1000 A_{65} - (P + W)\, \ddot{a}_{65} & = 0 \\ 1000 A_{45} - (P \ddot{a}_{45} + W {}_{20}E_{45} \ddot{a}_{65}) & = 0 \end{cases} \tag{2}$$

Le calcul des valeurs est assez immédiat:

$$1000 \cdot 0.296972 - (P + W)\, 12.420165 = 0 \rightarrow P + W = 23.9104714$$

En injectant dans la seconde équation, on a

$$\begin{aligned}
&1000 \cdot 0.109765 - P \cdot 15.727478 = W \cdot 0.297781 \cdot 12.420165 \\
&109.765 - (23.9104714 - W)\, 15.727478 = W \cdot 3.698489
\end{aligned}$$

Dès lors, on trouve que

$$\begin{aligned}
W &= \frac{266.2864129}{12.028998885} = 22.137057 \\
P &= 1.773414
\end{aligned}$$