© Théo Jalabert

Modèles financiers en assurance / Examen du 22 mai 2015

Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Le soin apporté à la rédaction sera pris en compte dans la notation. Il est demandé de prendre le temps de développer un argumentaire précis et structuré pour répondre aux questions, les réponses lapidaires sans détails ne seront pas considérées comme justes.

Utilisation d'une courbe de taux ZC dans le cadre de l'ORSA

On considère un contrat de retraite pour lequel on souhaite calculer la meilleure estimation des provisions à la date initiale, $t=0$, puis dans une vision prospective aux dates $t=1,\ldots,T$.

On dispose pour cela d'une courbe des taux sans risque fournissant des taux ZC annuels $\left(R_0\left(0,\tau\right);\tau=1,\ldots,150\right)$ sous forme non paramétrique.

La prestation considérée se limite à une rente unitaire non revalorisée servie à terme échu à un assuré d'âge x à la date du calcul. On note T_x la durée de survie résiduelle du rentier et $\delta\left(t\right)$ le facteur d'actualisation associé à un flux de maturité t.

Question n°1 (4 points) : Écrivez en fonction de T_x et $\delta\left(t\right)$ la valeur actuelle des flux de prestation que l'on notera Λ_x et donnez l'expression de la meilleure estimation de la provision associée à Λ_x en rappelant la règle générale de calcul d'une provision *best estimate* dans Solvabilité 2.

Pour déformer la courbe des taux initiale et disposer ainsi à chaque date future d'une courbe pour calculer les provisions, on retient comme modèle de référence le modèle à trois facteurs de forme et un facteur d'échelle proposé par Nelson et Siegel. Le taux zéro-coupon $R\left(t,\tau\right)$ se décompose par hypothèse en[1] :

$$R\left(t,\tau\right)=r\left(t\right)\varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)+l\left(t\right)\left(1-\varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right)+c\left(t\right)\psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right).$$

avec $\varphi\left(x\right)=\dfrac{1-e^{-x}}{x}$ et $\psi\left(x\right)=\varphi\left(x\right)-e^{-x}$ et on fait l'hypothèse que le taux court $r\left(t\right)$, le taux long $l\left(t\right)$ et la convexité $c\left(t\right)$ évoluent selon :

$$\begin{aligned}
dr\left(t\right)&=\mu_r\left(r_\infty-r_t\right)dt+\sigma_r dW_r\left(t\right)\\
dl\left(t\right)&=\mu_l\left(l_\infty-l_t\right)dt+\sigma_l dW_l\left(t\right)\\
dc\left(t\right)&=\mu_c\left(c_\infty-c_t\right)dt+\sigma_c dW_c\left(t\right)
\end{aligned}$$

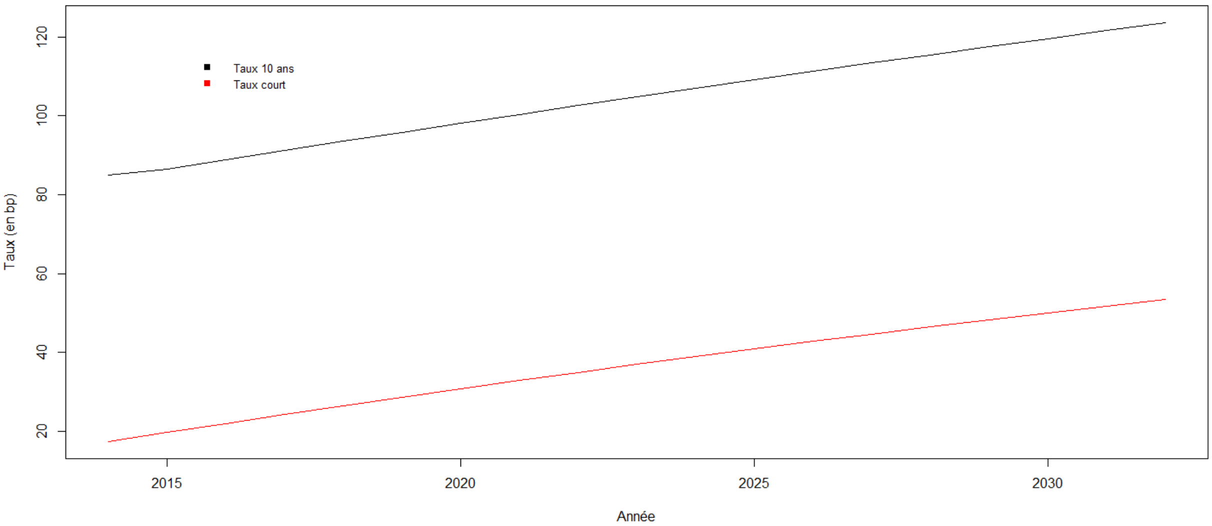
[1] On note $\tau=T-t$ la maturité résiduelle d'un flux d'échéance T vu en date t.

En termes de structure de dépendance entre les facteurs ci-dessus, on suppose que les corrélations constatées historiquement sont compatibles avec une hypothèse d'indépendance, qui sera donc retenue ici.

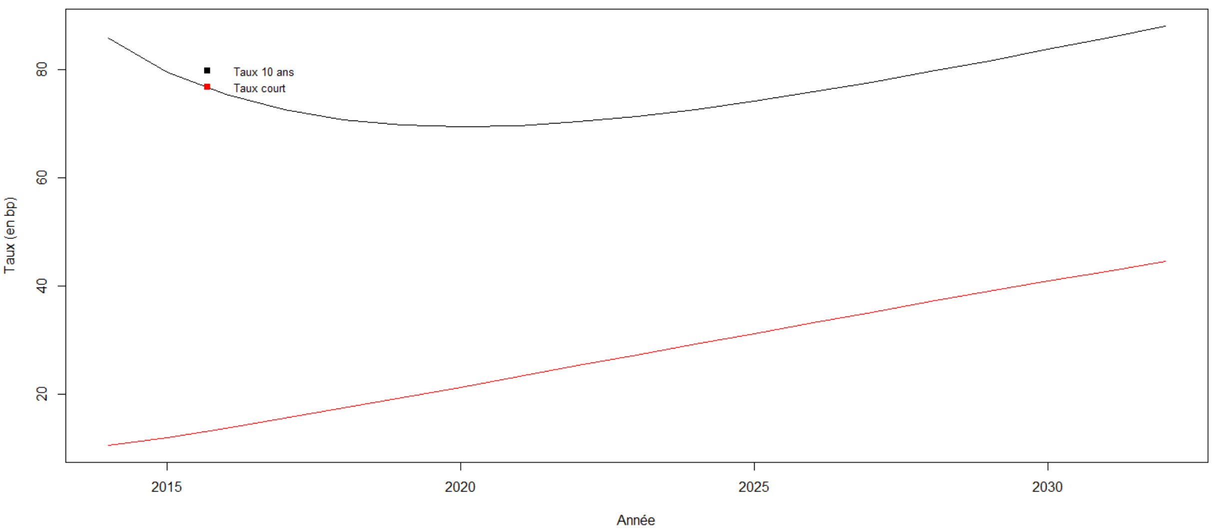
Question n°2 (4 points) : Pourquoi fait-on le choix d'un modèle paramétrique pour modéliser la déformation de la courbe ? Comment déterminer les paramètres de l'ajustement initial ? Comment déterminer les paramètres des trois diffusions ? À partir de quelles données ? Sous quelle probabilité sont modélisées ces diffusions ?

Question n°3 (3 points) : calculez $E\left(x\left(t\right)\right)$ pour $x=r,l,c$ et en déduire l'expression de l'espérance du taux 10 ans à la date t, $E\left[R\left(t,10\right)\right]$.

On suppose que l'on a déterminé des valeurs des paramètres pour les diffusions ci-dessus ; en réalisant l'ajustement de la courbe initiale sur les 50 premières années on obtient l'évolution suivante du taux 10 ans moyen :



et en effectuant ce même ajustement sur l'ensemble des 150 maturités disponibles on trouve :



Question n°4 (2 points) : Discutez les différences .les plus marquantes entre les deux projections ; laquelle retiendriez-vous dans le cadre de l'ORSA du régime ?

Question n°5 (2 points) : Quelle est l'expression du *best estimate* à la date t dans l'hypothèse d'une évolution déterministe du contrat entre 0 et t ?

On suppose maintenant que la rente est revalorisée de manière continue sur la base d'une fraction λ du taux court, c'est-à-dire que le montant de la rente en fonction du temps est $m(t) = \mathbf{exp}\left(\lambda \int_0^t r(u)\,du\right)$.

Question n°6 (5 points) : Quelle est la valeur de la meilleure estimation de la provision dans ce cas ? Comment la calculer explicitement de manière raisonnable ? Les modèles spécifiés jusqu'alors suffisent-ils ? Dans le cas où ils ne suffiraient pas, proposez un modèle simple et expliquez comment vous le calibrez.