Janvier 2012-2013

Questions de cours

1. Processus stationnaire faible

- $t \mapsto \mu_X(t) = \mathbb{E}[X_t] = \mu$ où $\mu \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{Z}$
- $t \mapsto \gamma_X(t+h, t) = \gamma_X(h) = Cov(X_t, X_{t+h})$ où $h \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in \mathbb{Z}$.

Intérêt

stat. fort { Les propriétés de (X_t) ne sont pas modifiées par un changement de repère temporel, i.e. on garde le même comportement

- il n'y a pas de tendance
- L'autocovariance ne dépend que de l'ampleur du décalage h.
- permet de faire des régressions linéaires (si non-stationnaire, alors régression pas valide)
- permet de faire des intervalles de prédiction.

2. Méthode de Box et Jenkins

1 – Transformations données : – homoscédasticité
– Stationnarisation

2 – Estimation des paramètres p et q par visualisation ~~des~~ l'autocorrélogrammes et autocorrélogramme partiel

3 – Estimation des différents modèles

4 – Test d'adéquation des modèles (i.e. vérifier les modèles et choisir un modèle)

5 – Prévision des valeurs futures à travers le modèle retenu

Exercice 1

0. Bruit Blanc faible $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

- $\mathbb{E}[\eta_t]=0$
- $\mathbb{V}[\eta_t]=\sigma^2_\eta$
- $cov(\eta_t,\eta_{t'})=0$, $\forall t\neq t'$

1. $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire faible

* Déf : $\cdot\ \mu_X(t)=\mu$, $\forall t$ où $\mu\in\mathbb{R}$

$\cdot\ \gamma_X(t+h,t)=\gamma_X(h)$, $\forall t$ où $h\in\mathbb{Z}$

* $X_t=-\sum_{k=0}^{+\infty}\phi^k\eta_{t+k}$ où $0<|\phi|<1$

$\rightarrow \mathbb{E}[X_t]=-\sum_{k=0}^{+\infty}\phi^k\,\mathbb{E}[\eta_{t+k}]=0$

$\rightarrow \mathbb{V}[X_t]=\gamma_X(0)=(-1)^2\sum_{k=1}^{+\infty}\phi^{2k}\,\mathbb{V}[\eta_{t+k}]+0$ η_t est un BB donc décorrélé

$$=\sigma^2_\eta\sum_{k=1}^{+\infty}(\phi^2)^k \qquad \begin{cases}k-1=k'\\ k=k'+1\end{cases}$$

$$=\sigma^2_\eta\,\phi^2\sum_{k'=0}^{+\infty}(\phi^2)^{k'}$$

$$=\sigma^2_\eta\,\frac{\phi^2}{1-\phi^2}$$

$\rightarrow \gamma_X(1)=(-1)^2\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{j=1}^{+\infty}\phi^k\phi^j\,\underbrace{cov(\eta_{t+k},\eta_{t-1+j})}_{=0 \text{ sauf si } t+k=t-1+j\text{, i.e. } j=k+1}$

$$=\sum_{k=1}^{+\infty}\phi^{2k+1}\sigma^2_\eta$$

$$=\sigma^2_\eta\,\phi\times\phi^2\sum_{k=0}^{+\infty}\phi^{2k}=\phi\,\gamma_X(0)$$

$\gamma_X(2)=\sum_{k=1}^{+\infty}\phi^{2k+2}\sigma^2_\eta$ par le même processus,

$$=\sigma^2_\eta\,\phi^2\times\phi^2\sum_{k=0}^{+\infty}\phi^{2k}=\phi\,\gamma_X(1)=\phi^2\gamma_X(2)$$

$\gamma_X(h)=\phi^{|h|}\gamma_X(0)$, i.e. ne dépend pas de t.

$(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire

2. Mq $X_t = \frac{1}{\phi} X_{t-1} + \eta_t$ → pas canonique car $\left|\frac{1}{\phi}\right| > 1$ car $|\phi|<1$

$$X_t - \frac{1}{\phi} X_t = -\sum_{k=1}^{+\infty} \phi^k \eta_{t+k} - \left(- \frac{1}{\phi} \sum_{k=1}^{+\infty} \phi^{k} \eta_{t-1+k} \right),$$

$\begin{cases} k-1 = k' \\ k = k'+1 \end{cases}$

$$= -\sum_{k=1}^{+\infty} \phi^k \eta_{t+k} + \sum_{k'=0}^{+\infty} \phi^{k'} \eta_{t+k'},$$

$$= -\sum_{k=1}^{+\infty} \phi^k \eta_{t+k} + \eta_t + \sum_{k=1}^{+\infty} \phi^k \eta_{t+k},$$

$$= \eta_t \text{ , cqfd.}$$

3. Calcul $\mathbb{E}[X_t \eta_{t+1}]$ et en déduire $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ n'est pas innovation

* Par construction de l'innovation (et donc du projeté), si (η_t) était l'innovation, on aurait : $\eta_{t+1} \perp\!\!\!\perp \underline{X_t}$, ie. $\eta_{t+1} \perp\!\!\!\perp X_{t-k}$, $k \geq 0$.

i.e. $cov(\eta_{t+1}, X_{t-k}) = 0$, $k \geq 0$.

* $$\mathbb{E}[X_t \eta_{t+1}] = cov(X_t, \eta_{t+1}) = cov(X_t, X_{t+1} - \frac{1}{\phi} X_t)$$

$$= \gamma_X(1) - \frac{1}{\phi}\gamma_X(0)$$

$$= \phi \gamma_X(0) - \frac{1}{\phi}\gamma_X(0)$$

$$= \left(\phi - \frac{1}{\phi}\right)\gamma_X(0)$$

$$\neq 0 \text{ car } |\phi| \neq 1 \text{ et } \gamma_X(0) \neq 0$$

Donc $\eta_{t+1} \not\perp\!\!\!\perp X_t$, donc (η_t) n'est pas le processus d'innovation

4. Mq $(\varepsilon_t) \sim BBF(0, \sigma^2_\varepsilon)$ et $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] < \mathbb{E}[\eta_t^2]$

* $\varepsilon_t = X_t - \phi X_{t-1}$

  - $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = \mathbb{E}[X_t](1-\phi) = 0$ car $\mathbb{E}[X_t] = 0$, cf Q°1.

  - $\mathbb{V}[\varepsilon_t] = \mathbb{V}[X_t] + \phi^2 \mathbb{V}[X_{t-1}] - 2\phi\, cov(X_t, X_{t-1})$ $= \gamma_X(1)$

$$= \gamma_X(0)\,(1+\phi^2) - 2\phi \times \phi \gamma_X(0)$$
$$= \gamma_X(0)\,(1+\phi^2 - 2\phi^2)$$
$$= \gamma_X(0)\,(1-\phi^2)$$
$$= \frac{\sigma^2_\eta}{1-\phi^2}\phi^2\,(1-\phi^2) \Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = \sigma^2_\eta\, \phi^2$$

- $\text{cov}(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = \text{cov}(X_t - \phi X_{t-1}, X_{t-h} - \phi X_{t-h-1})$

$$= \gamma_X(h) - \phi\gamma_X(h+1) - \phi\gamma_X(h-1) + \phi^2\gamma_X(h)$$

$$= \cancel{\phi^h\gamma_X(0)} - \cancel{\phi^{h+2}}\gamma_X(0) - \cancel{\phi^h\gamma_X(0)} + \cancel{\phi^2}\gamma_X(0)$$

$$= 0$$

Ainsi $(\varepsilon_t) \sim BBF(0, \sigma_\varepsilon^2)$.

* $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \mathbb{V}[\varepsilon_t] = \phi^2\sigma_\eta^2 = \phi^2\mathbb{E}[\eta_t^2]$

Or $|\phi| < 1$, donc $\phi^2 < 1$, donc

$\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] < \mathbb{E}[\eta_t^2]$

5. Mq $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est le processus d'innovation

(ε_t) est l'innovation si $\varepsilon_t = X_t - EL(X_t \mid 1, \underline{X}_{t-1})$, i.e.

$\phi X_{t-1} = EL(X_t \mid 1, \underline{X}_{t-1})$.

Or : $EL(X_t \mid 1, \underline{X}_{t-1}) = EL(\varepsilon_t + \phi X_{t-1} \mid 1, \underline{X}_{t-1})$

$= \phi X_{t-1} + EL(\varepsilon_t \mid 1, \underline{X}_{t-1})$ par définition de la régression linéaire

Or : $\mathbb{E}[\varepsilon_t, X_{t-1}] = \text{cov}(\varepsilon_t, X_{t-1})$

$$= \text{cov}(X_t - \phi X_{t-1}, X_{t-1})$$

$$= \gamma_X(1) - \phi\gamma_X(0) = \phi\gamma_X(0) - \phi\gamma_X(0)$$

$$= 0$$

↳ pareil pour $\mathbb{E}[\varepsilon_t, X_{t-h}]$, $\forall h > 1$

Donc $\varepsilon_t \perp\!\!\!\perp \underline{X}_{t-1}$, i.e. $EL(\varepsilon_t \mid 1, \underline{X}_{t-1}) = 0$

Enfin, (ε_t) est le processus d'innovation de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et

$X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$ est l'écriture canonique.

Exo 3

1. Mq $W_t = (1-\varphi_1 L)(1-\varphi_2 L)Y_t$ est stationnaire et donner γ_W

$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + X_t + U_t$ et $X_t = \varphi_2 X_{t-1} + V_t$

$\Rightarrow (1-\varphi_2 L)Y_t = \varphi_1 (1-\varphi_2 L)Y_{t-1} + (1-\varphi_2 L)X_t + (1-\varphi_2 L)U_t$

$= \varphi_1 (1-\varphi_2 L)Y_{t-1} + \underbrace{X_t - \varphi_2 X_{t-1}}_{V_t} + (U_t - \varphi_2 U_{t-1})$

$\Rightarrow W_t = \varphi_1 (1-\varphi_1 L)(1-\varphi_2 L)Y_{t-1} + (1-\varphi_1 L)V_t + (1-\varphi_1 L)(U_t - \varphi_2 U_{t-1})$

$= \varphi_1 W_{t-1} + V_t - \varphi_1 V_{t-1} + U_t - \varphi_1 U_t - \varphi_2 U_{t-1} + \varphi_1\varphi_2 U_{t-2}$

$V_t + (1-\varphi_2 L)U_t$

$-\varphi_1 V_{t-1} - \varphi_1 U_t + \varphi_1\varphi_2 U_{t-2} = \varphi_1 W_{t-1}$?

$= \varphi_1 (-V_{t-1} - U_t + U_{t-2})$

$= \varphi (-\varphi_2 X_{t-2} = X_t - Y_t - \varphi_1 Y_{t-1} - X_t + U_{t-2})$