

INSTITUT DE SCIENCE FINANCIÈRE ET D'ASSURANCES

M2 ACTUARIAT
ANNÉES 2023/2024

TECHNIQUES NUMÉRIQUES

Projet 1 : Capital de solvabilité (SCR) pour un produit d'épargne

Léo ALLERS
Théo JALABERT
Lou SIMONEAU-FRIGGI

Table des matières

Introduction	2
I Décomposition du contrat d'épargne	3
I.1 Partie Garantie G_T	3
I.2 Partie Optionnelle O_T	3
II Calcul de la NAV_0	4
III Méthode des simulations dans les simulations (SdS)	6
III.1 Principe de la méthode	6
III.2 Estimation des paramètres	6
III.2.A Étude du paramètre N	6
III.2.B Étude du paramètre M	8
III.2.C Étude du paramètre N_2	10
III.3 Résultats	12
III.4 Bilan	13
IV Méthode LSMC	14
IV.1 Intérêt de la méthode LSMC	14
IV.2 Estimation des paramètres	14
IV.2.A Étude du paramètre N	14
IV.2.B Étude du paramètre M	16
IV.2.C Étude du paramètre N_2	18
IV.3 Résultats	19
IV.4 Bilan	21
V Méthode Mixte (Simulations/EDP)	22
V.1 Principe	22
V.2 Estimation des paramètres	23
V.2.A Étude du paramètre N	23
V.2.B Étude du paramètre M	25
V.2.C Étude du paramètre N_2	26
V.3 Résultats	28
V.4 Bilan	29
Conclusion	30

Introduction

Le secteur de l'assurance en France, étant un domaine bien établi, nécessite une régulation pour garantir sa durabilité. Ainsi, de multiples réglementations ont été instaurées pour protéger les consommateurs de produits d'assurance, notamment pour réduire le risque de défaillance des assureurs. Parmi ces réglementations, la norme européenne Solvabilité II, adoptée en 2009 et effective depuis 2016, est particulièrement importante. Cette norme inclut le calcul d'un indicateur nommé Besoin en Capital de Solvabilité Requis (SCR), qui est central dans ce projet.

Le SCR représente le capital économique qu'une compagnie d'assurance doit maintenir pour limiter sa probabilité de faillite annuelle. Son estimation est donc cruciale pour les assureurs, et il existe plusieurs méthodes pour la déterminer. Ce projet se concentre sur l'évaluation du SCR pour un produit d'épargne.

Trois d'entre elles seront détaillées et implémentées dans la suite de ce rapport :

- La méthode des Simulations dans les Simulations (**SdS**)
- La méthode Least-Square Monte-Carlo (**LMSC**)
- Une méthode mixte (**Simulations/EDP**)

Le cadre dans lequel nous sommes placés est celui d'un marché avec un unique actif risqué, que l'on note $(S_t)_{t \geq 0}$ qui suit un processus de Black-Scholes. Les simulations sur $[0, 1]$, étant réalisées en environnement historique, on peut écrire, sur l'intervalle $[0, 1]$:

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma_r^2}{2})t + \sigma_r W_t}$$

où W_t est un mouvement brownien sous \mathbb{P} , la probabilité historique.

À partir de $t = 1$, nous nous plaçons en environnement risque neutre ce qui nous permet d'écrire :

$$S_T = S_t e^{(r - \frac{\sigma_i^2}{2})(T-t) + \sigma_i W'_T}$$

où W'_T est un mouvement brownien sous \mathbb{Q} , la probabilité risque neutre.

On initialisera le processus $(S_t)_{t \geq 0}$ à $S_0 = 1$.

I Décomposition du contrat d'épargne

Le contrat d'épargne que nous étudions présente deux composantes (à maturité¹) :

- Une partie garantie : $G_T = R \times VM_0 \times (xS_T + (1-x)e^{rT})$
- Une partie optionnelle (*put européen*) : $O_T = (K - \tilde{S}_T)^+$ avec un strike

$$K = R \times VM_0 e^{r_g T} - (1-x) \times R \times VM_0 \times e^{rT}$$

sur un sous-jacent $(\tilde{S}_t)_t$ dont la dynamique est la même que $(S_t)_t$ avec la valeur initiale $\tilde{S}_0 = x \times R \times VM_0$.

Pour justifier cette décomposition, nous pouvons procéder comme suit :

I.1 Partie Garantie G_T

Cette composante représente l'engagement de l'assureur de rembourser au moins le montant investi par l'assuré, majoré des intérêts techniques garantis.

Mathématiquement, elle est exprimée par :

$$G_T = R \times VM_0 \times (xS_T + (1-x)e^{rT})$$

où R est la quote-part de l'assuré dans le fond. VM_0 est la valeur initiale du fonds, x représente la proportion du fonds investie dans l'actif risqué. S_T est la valeur de l'actif risqué à maturité et r est le taux d'intérêt technique garanti.

Cette formule reflète donc le minimum que l'assureur doit payer à l'assuré, soit la partie du capital qui a été investie de manière risquée (et qui a donc évolué avec le marché) plus la partie non risquée qui a crû au taux garanti.

I.2 Partie Optionnelle O_T

La partie optionnelle correspond à une option de vente européenne, qui permet à l'assuré de vendre l'actif risqué à un prix déterminé à l'avance (le strike K), peu importe sa valeur de marché à l'échéance. Le strike est défini par

$$K = R \times VM_0 e^{r_g T} - (1-x) \times R \times VM_0 \times e^{rT}$$

L'option put européenne donne à l'assuré le droit de vendre l'actif risqué S_T pour K si S_T tombe en dessous de K . Cela permet de se couvrir contre une baisse significative de la valeur de l'actif risqué.

La somme de ces deux composantes représente la garantie totale à l'échéance. Si la valeur de l'actif risqué S_T est supérieure à K , l'option n'est pas exercée, et la garantie totale est simplement la partie garantie G_T . Si S_T est inférieur à K , l'option est exercée, et la garantie totale devient $G_T + O_T$, assurant que l'assuré reçoive au moins K .

En résumé, cette décomposition permet à l'assuré de bénéficier d'un investissement à la fois partiellement protégé par la garantie G_T et potentiellement amélioré par l'option O_T , qui offre une protection supplémentaire contre la baisse des marchés.

1. C'est-à-dire à date $t = T$

II Calcul de la NAV_0

Afin d'évaluer le montant du capital de solvabilité, il est nécessaire, dans un premier temps, de connaître la valeur de la *Net Asset Value* (NAV) de l'assureur à l'instant $t = 0$.

Pour rappel, pour le contrat d'épargne que nous étudions, le besoin en capital réglementaire (SCR) s'écrit de la forme suivante :

$$SCR = NAV_0 - VaR_{98\%} \left(\frac{NAV_1}{1+r} \right)$$

Or la *Net Asset Value* (Valeur nette des actifs en français), à l'instant t se définit par :

$$NAV_t = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[VM_T | S_t] - e^{-r(T-t)} \mathbb{E}[G_T + O_T | S_T]$$

Donc, à l'instant $t = 0$, nous avons :

$$NAV_0 = e^{-rT} \mathbb{E}[VM_T | S_0] - e^{-rT} \mathbb{E}[G_T + O_T | S_0] = e^{-rT} [VM_T - G_T - O_T]$$

La NAV évaluée en 0 ne dépend donc que des trois quantités suivantes :

- La valeur du fonds (valeur de marché) :

$$VM_T = VM_0 \times (xS_T + (1-x)e^{rT})$$

- La partie garantie :

$$G_T = R \times VM_T = PM_0 \times (xS_T + (1-x)e^{rT})$$

- La partie optionnelle :

$$O_T = (K - \tilde{S}_T)^+$$

avec K le strike et $(\tilde{S}_t)_t$ le sous-jacent défini dans l'énoncé.

Pour calculer la valeur de la *Net Asset Value*, nous avons choisi d'utiliser la discré-tisation par schéma d'Euler en utilisant la technique des variables antithétiques pour la réduction de variance.

En guise de rappel, voici l'expression de trajectoire de l'actif risqué, processus de Black-Scholes, via le schéma d'Euler :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \times \exp \left((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} z \right)$$

où z représente le terme de mouvement brownien. De plus, nous considérons que les simulations sur $[0,1]$ se font en environnement historique, puis en environnement risque neutre à partir de $t = 1$. Les expressions de S_t seront donc :

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t \times \exp \left((\mu - \frac{1}{2}\sigma_r^2) \Delta t + \sigma_r \sqrt{\Delta t} z \right) & t \in [0, 1] \text{ (environnement historique)} \\ S_t \times \exp \left((r - \frac{1}{2}\sigma_i^2) \Delta t + \sigma_i \sqrt{\Delta t} z \right) & t > 1 \text{ (environnement risque neutre)} \end{cases}$$

La méthode de réduction de variance basée sur les variables antithétiques repose sur le principe de symétrie des lois normales centrées réduites.

On calcule donc toutes ces quantités à maturité $T = 2$, pour pouvoir ensuite estimer la NAV_0 en actualisant le tout. Par la méthode Monte-Carlo : nous obtenons **NAV₀ = 6.79** pour un nombre de simulations égales à 100 000 et 10 000 pas de temps. Le temps de calcul de cette fonction est relativement court et négligeable par rapport aux autres fonctions du reste du projet.

De plus, nous avons décidé de représenter graphiquement les 100 000 simulations de la NAV_0 à l'aide de l'histogramme suivant :

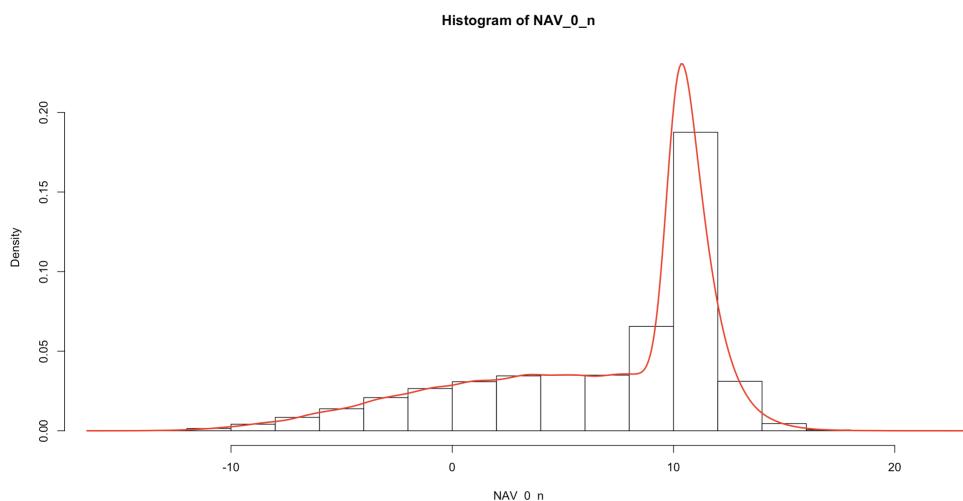


FIGURE 1 – Histogramme de la répartition de NAV_0

III Méthode des simulations dans les simulations (SdS)

III.1 Principe de la méthode

Une fois que nous avons calculé la NAV_0 , nous passons au calcul de la NAV_1 et du SCR selon trois méthodes distinctes.

La première méthode utilisée dans ce projet est la méthode de simulation dans les simulations (**SdS**). Elle présente une approche Monte-Carlo imbriquée permettant une projection du bilan économique entre l'origine de temps et la maturité. Deux niveaux de scénarios sont considérés selon la durée de vie du produit :

- Primaires : il s'agit de scénarios « Monde Réel ». On simule N trajectoires du sous-jacent jusqu'à la date $t = 1$, en utilisant la probabilité historique. Pour chaque simulation, nous utilisons M pas de temps.
- Secondaires : il s'agit là de scénarios « Risque Neutre ». À partir des valeurs du sous-jacent obtenues à la date $t = 1$, on simule N_2 trajectoires jusqu'à la date $t = 2$, en environnement risque neutre. Chacune des simulations secondaires est donc conditionnée par les simulations primaires.

Pour chaque simulation primaire, on calcule la NAV_1 (à la date $t = 1$) associée aux valeurs du sous-jacent. Pour cela, on utilise la formule donnée dans l'énoncé.

III.2 Estimation des paramètres

III.2.A Étude du paramètre N

On commence donc par estimer le nombre de simulations N . On fixe la valeur de M à 1 000 et N_2 à 1 000 et on s'intéresse à la valeur de N pour laquelle nos résultats sont les meilleurs. Dans cette étude, on fait varier N entre 2 et 2 000 simulations.

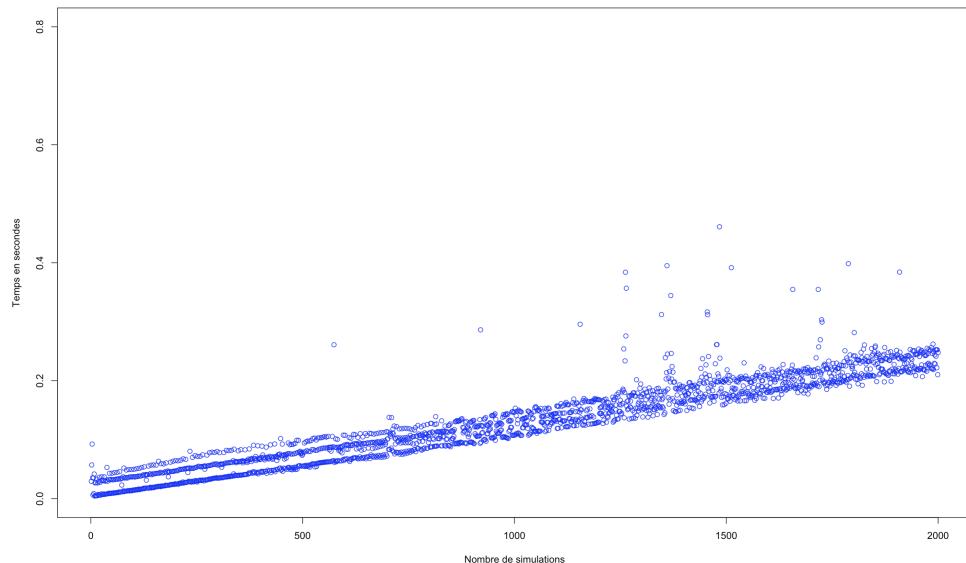


FIGURE 2 – Temps d'exécution selon le nombre de simulations N (sec)

On constate, avec la FIGURE 2, que le temps d'exécution est proportionnel au nombre de simulations et qu'il croît linéairement en fonction de N . Cependant, ce temps est relativement faible. En effet, pour $N = 1\,000$ simulations le temps d'exécution est de 0.10 seconde.

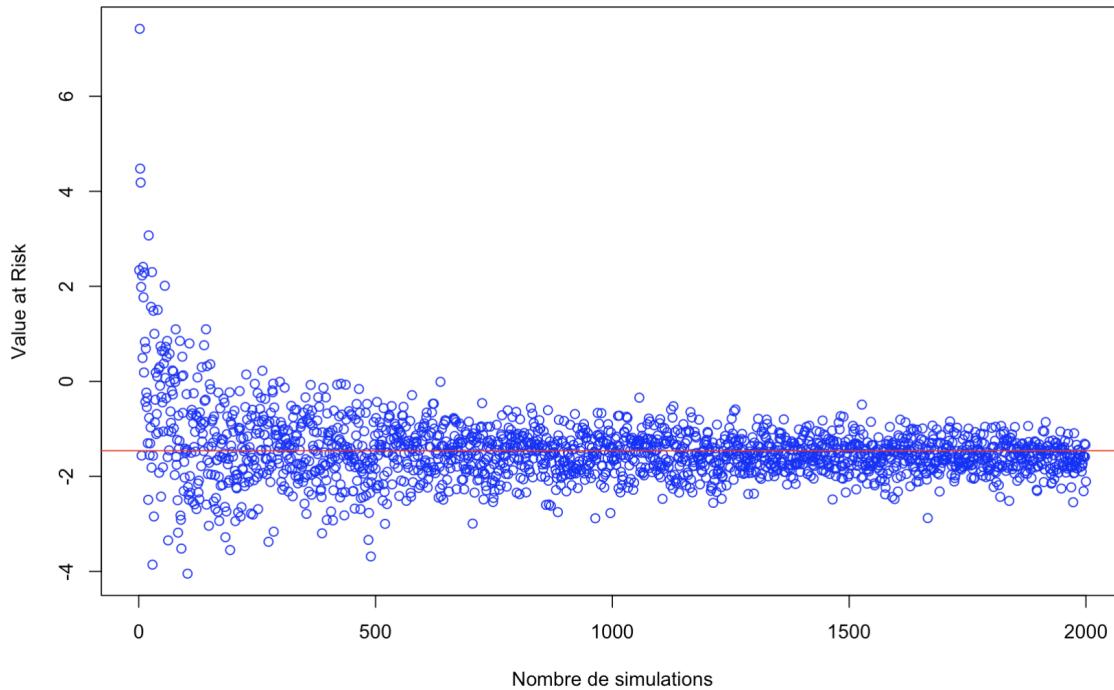


FIGURE 3 – Value at Risk en fonction du nombre de simulation N

On observe bien, par la FIGURE 3, que la Value at Risk à 98% converge au fur et à mesure que le nombre de simulations augmente. Cette dernière converge autour de la valeur **-1.43**.

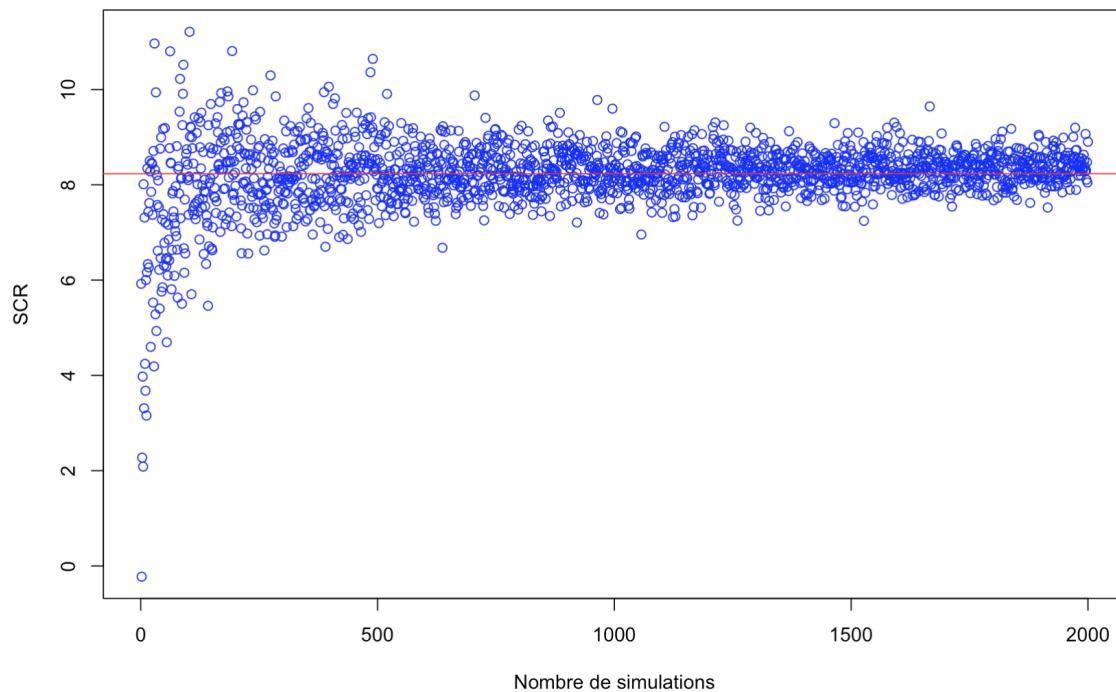


FIGURE 4 – SCR en fonction du nombre de simulations N

Enfin, nous avons analysé l'évolution du SCR en fonction du nombre de simulations (cf. FIGURE 4). Et là encore, comme attendu, la valeur du SCR converge autour de la valeur **8.22**.

III.2.B Étude du paramètre M

Nous venons de réaliser l'étude sur le nombre de simulations primaires N . Concernant l'étude du nombre de pas de temps M , on commence par fixer une valeur de N et N_2 ($N = 1\,000$ et $N_2 = 1000$).

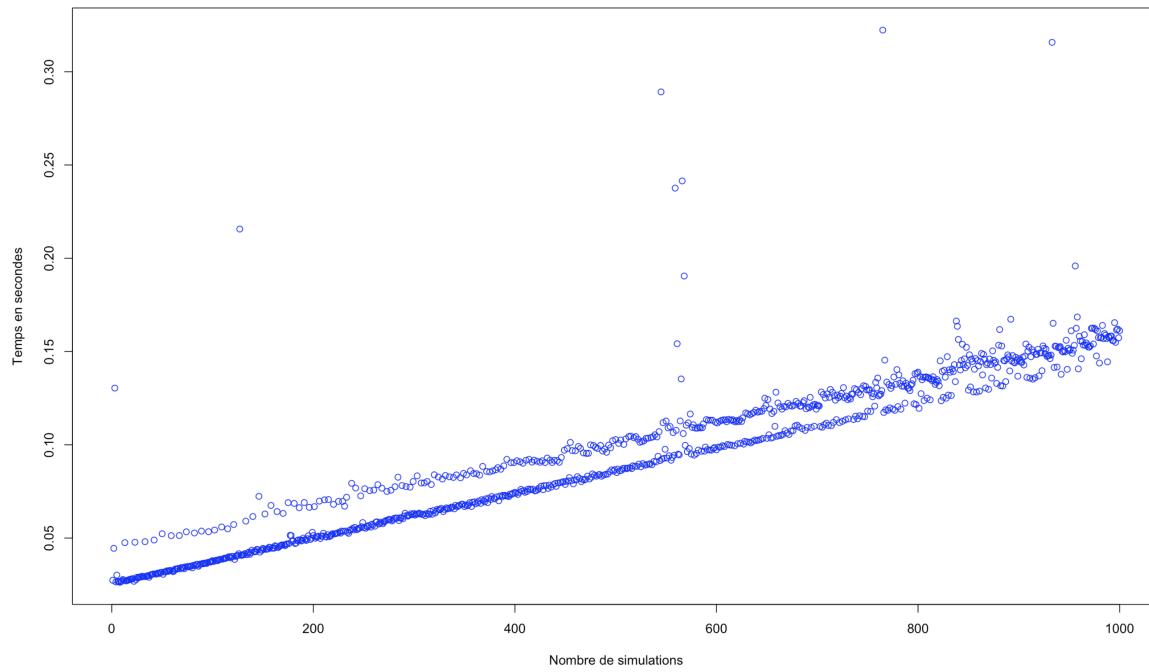


FIGURE 5 – Temps d'exécution selon le nombre de pas de temps M

On constate également que le temps d'exécution est proportionnel au nombre de pas de temps, il croît linéairement en fonction de M . Ce temps est également faible. En effet, pour $M = 1\,000$ pas de temps, le temps d'exécution est de 0.15 secondes.

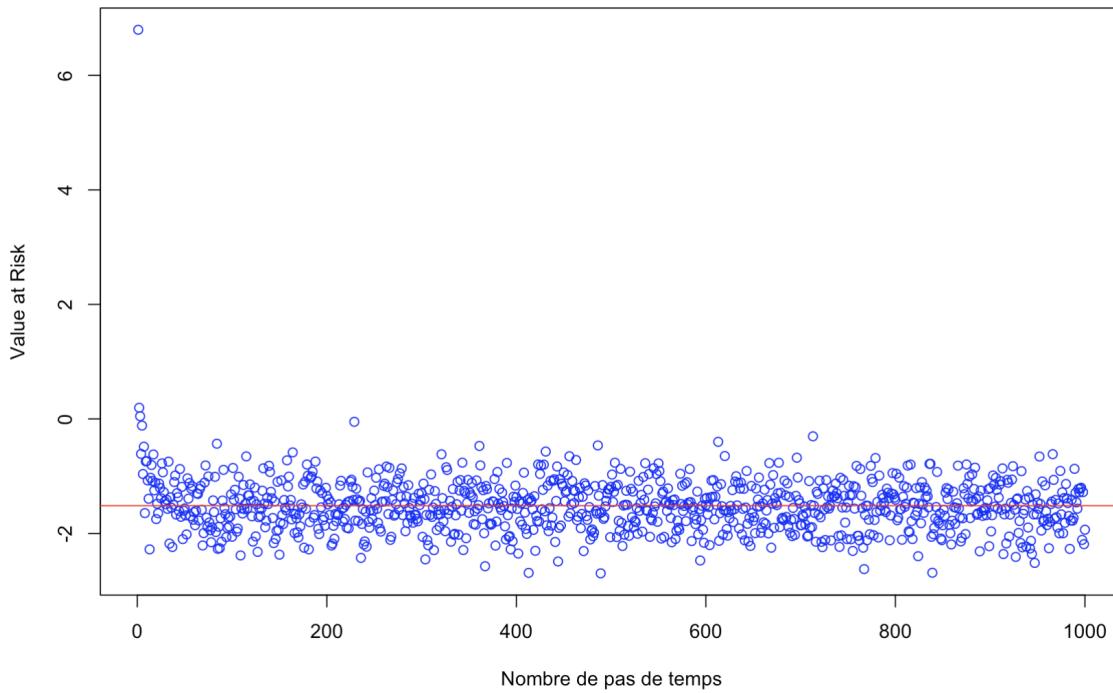


FIGURE 6 – Value at Risk en fonction du nombre de pas de temps M

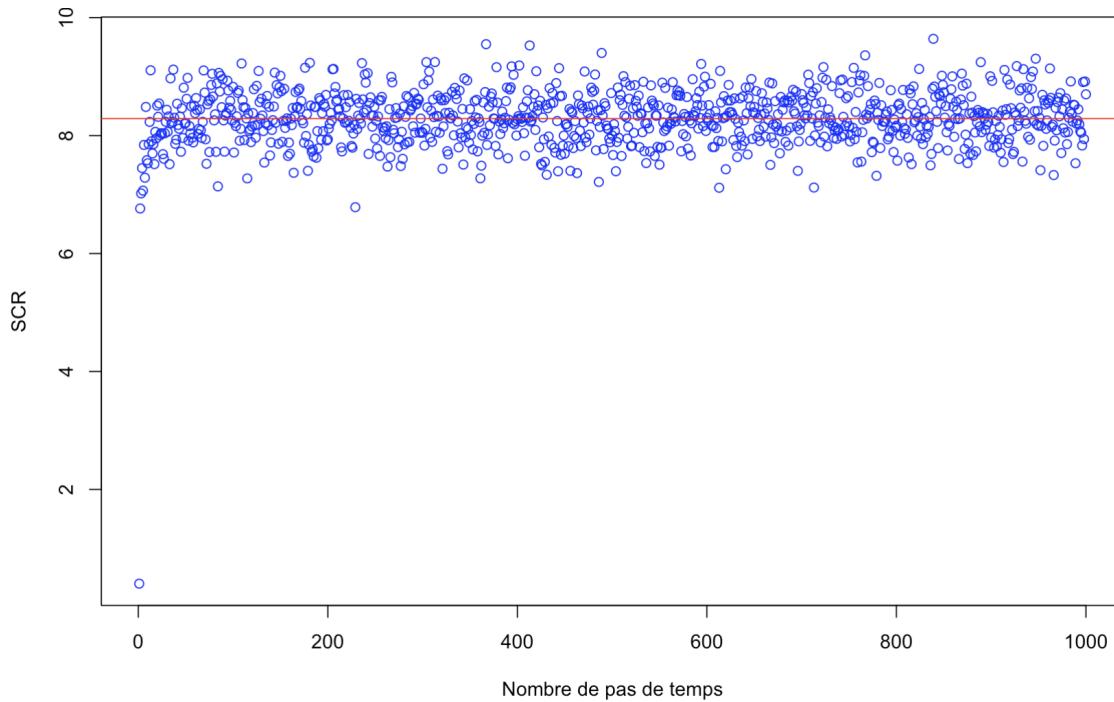


FIGURE 7 – SCR en fonction du nombre de pas de temps M

Contrairement à ce que l'on constatait pour l'estimation de N , ici nous n'observons pas une nette convergence de la Value at Risk au fur et à mesure que le nombre de pas de temps augmente. Il en est de même pour le SCR. Cependant, la VaR et le SCR semblent converger autour d'une valeur.

III.2.C Étude du paramètre N_2

Nous venons de réaliser l'étude sur le nombre de simulations primaires N et sur le nombre de pas de temps M . Concernant l'étude du nombre de simulations secondaires N_2 , on commence par fixer une valeur de N et M ($N = 1\,000$ et $M = 1\,000$).

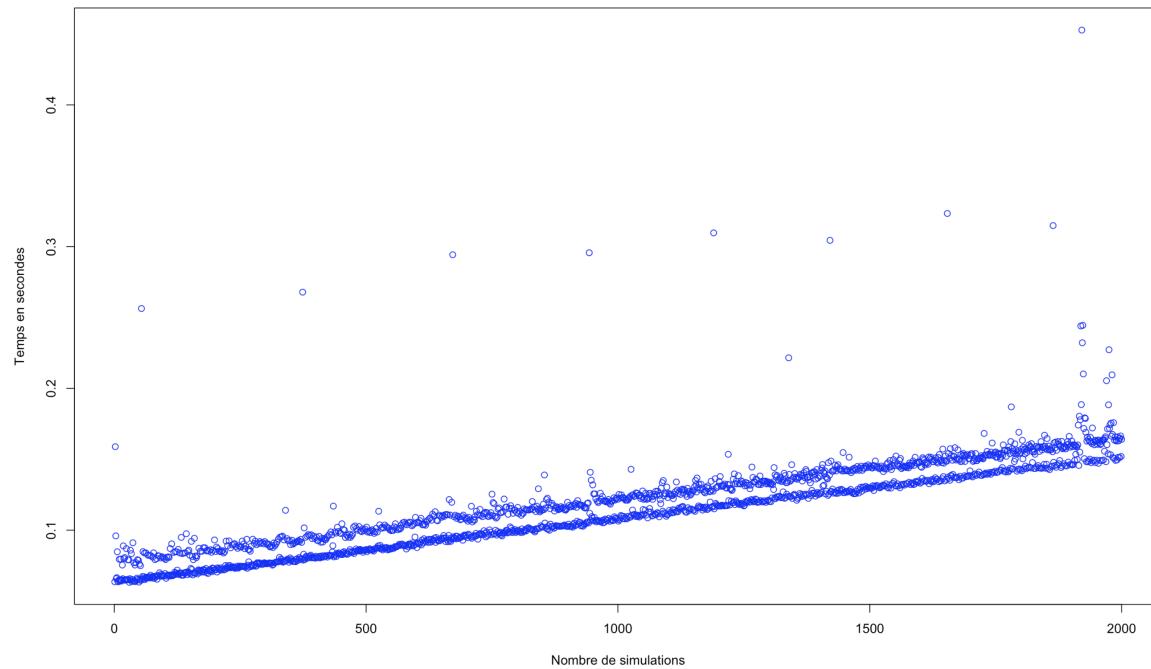


FIGURE 8 – Temps d'exécution selon le nombre de simulations N_2

Ici aussi, on constate que le temps d'exécution est proportionnel au nombre de simulations, il croît donc linéairement en fonction de N_2 . Ce temps est également faible. En effet, pour $N_2 = 1\,000$ simulations secondaires, le temps d'exécution est de 0.1 seconde.

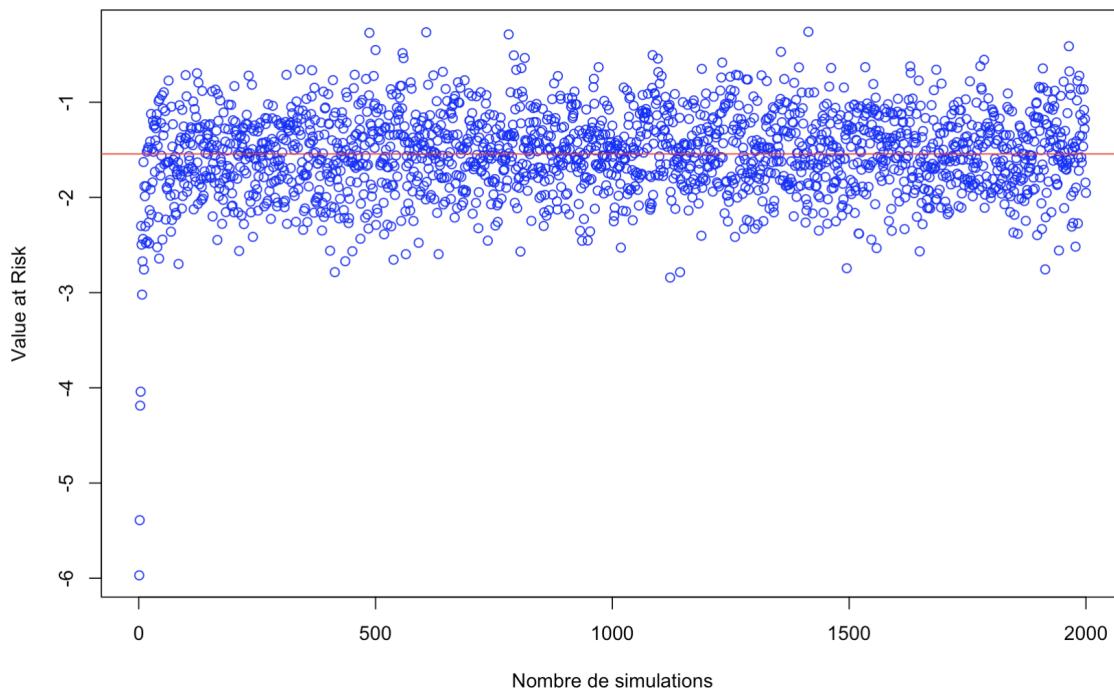
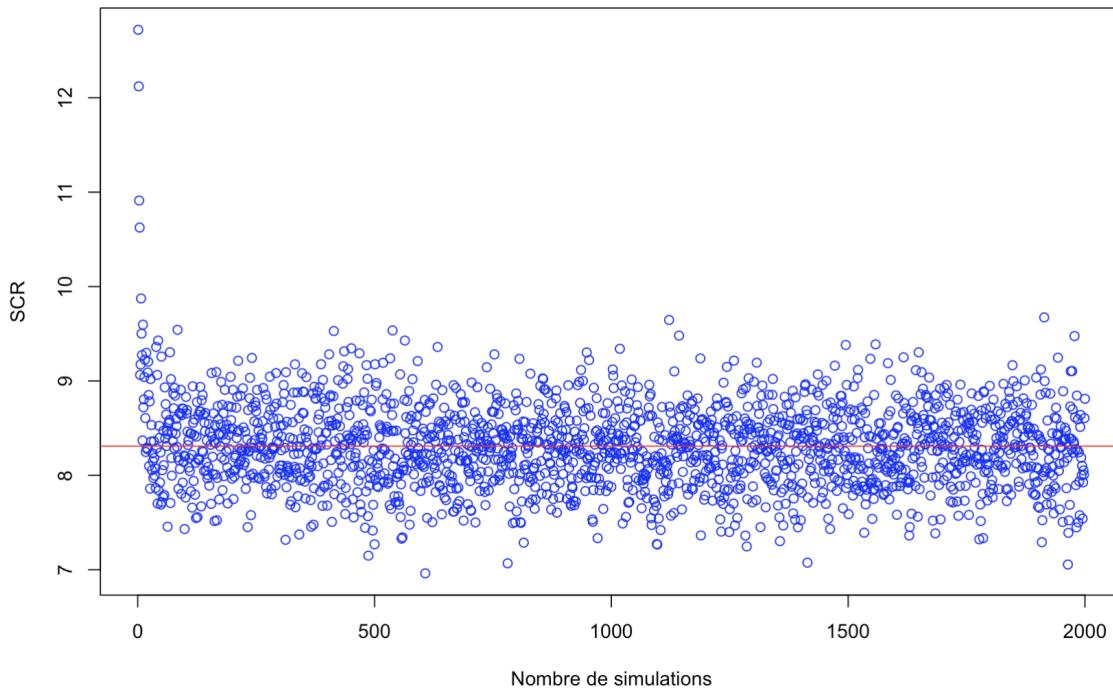


FIGURE 9 – Value at Risk en fonction du nombre de simulations N_2

FIGURE 10 – SCR en fonction du nombre de simulations N_2

Contrairement à ce que l'on constatait pour l'estimation de N , ici nous n'observons pas une nette convergence de la Value at Risk au fur et à mesure que le nombre de simulations secondaires augmente. Il en est de même pour le SCR. Cependant, la VaR et le SCR semble converger autour d'une valeur. Nous avons donc estimé les intervalles de confiance à 95% pour la VaR et le SCR respectivement.

Après calcul, nous obtenons un intervalle de confiance à 95% avec 1000 échantillons bootstrap pour la VaR qui est $[-1.70, -1.14]$. Pour le SCR l'intervalle de confiance est $[8.19, 8.25]$.

III.3 Résultats

Afin de pouvoir comparer les trois méthodes présentées dans ce rapport nous avons décidé de fixer les valeurs de N , M et N_2 à $N = 10\,000$, $M = 1\,000$ et $N_2 = 1\,000$. Une fois que nous avons fixé le nombre de simulations, nous pouvons calculer, grâce à la méthode de simulation dans les simulations (SdS), la valeur de la *Value at Risk* à 98% de cette NAV₁ actualisée. On obtient la sortie suivante selon notre code R :

```
> VaR_SdS
2%
-1.433376
```

FIGURE 11 – Valeur de la Value at Risk à 98%

Comme nous l'avons fait pour la NAV₀, on va analyser la répartition de la NAV₁ en représentant l'histogramme. Étant donné que l'histogramme de répartition est très similaire pour les trois méthodes de ce projet, nous avons décidé de ne le représenter qu'une seule fois dans cette section.

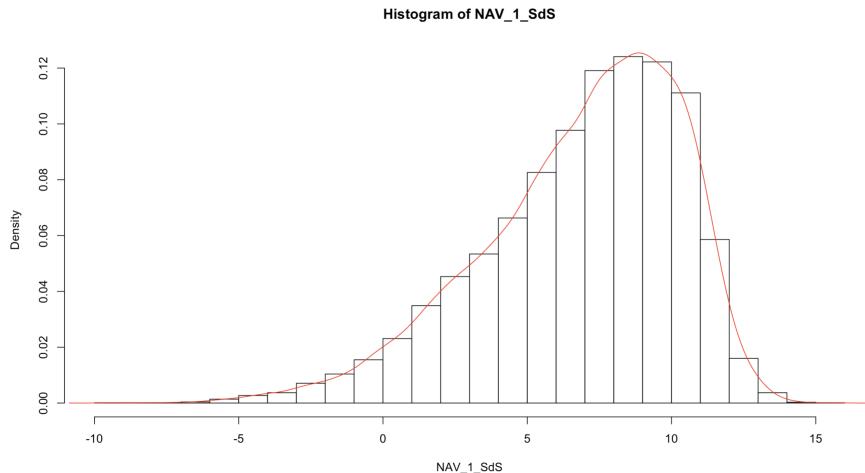


FIGURE 12 – Répartition de la NAV₁

À partir de tout cela, nous sommes capables de calculer le SCR :

> SCR_SdS
2%
8.221664

FIGURE 13 – Valeur du SCR par la méthode SdS

Nous avons ensuite estimé les intervalles de confiance à 95% pour la VaR et le SCR respectivement.

Après calcul, nous obtenons que l'intervalle de confiance à 95% avec 1000 échantillons bootstrap pour la VaR est $[-1.70, -1.14]$. Pour le SCR l'intervalle de confiance est $[8.19, 8.25]$.

Nous pouvons également estimer la variance du SCR après l'estimation à l'aide de cette méthode. Ainsi, la variance est : $\mathbb{V}(SCR) = 0.0140$.

III.4 Bilan

Nous regroupons ici les résultats obtenus au cours de l'étude réalisée sur la méthode SdS.

N	M	N_2	Temps d'exécution	$VaR_{98\%}$	$IC_{95\%}$ de VaR	SCR	$\mathbb{V}(SCR)$
10 000	1 000	1 000	0.952 sec	-1.433	[-1.700, -1.139]	8.222	0.0140

IV Méthode LSMC

L'idée de la méthode LSMC (*Least Square Monte Carlo*) est d'optimiser la méthode SdS vue précédemment. Pour cela, nous devons réaliser moins de scénarios secondaires, ce qui conduit à un résultat moins précis, tout en effectuant une régression via la méthode des moindres carrés afin de limiter la perte de précision.

IV.1 Intérêt de la méthode LSMC

La méthode de Least-Square Monte-Carlo (LSMC) peut nécessiter moins de simulations secondaires que la méthode SdS pour plusieurs raisons :

- **Réduction de la variabilité grâce à la régression**

- LSMC utilise une régression linéaire pour établir une relation entre les valeurs du sous-jacent à différents moments. Cela permet de réduire la variabilité des estimations en se basant sur une relation statistique, plutôt que de dépendre uniquement de simulations individuelles.

- **Exploitation de la corrélation**

- En utilisant une régression sur des polynômes de degrés divers, la méthode LSMC tire parti des corrélations entre les valeurs du sous-jacent à différents moments. Cela signifie qu'une fois la relation établie, les simulations secondaires peuvent être moins nombreuses car elles sont guidées par cette relation.

- **Efficacité computationnelle**

- Avec une régression basée sur une base de polynômes orthonormés, LSMC réduit le temps de calcul nécessaire pour estimer les valeurs futures. Cela rend la méthode plus efficace, en particulier lorsqu'il s'agit de simuler un grand nombre de trajectoires.

IV.2 Estimation des paramètres

Comme pour la méthode précédente, nous allons dans un premier temps fixer les paramètres M et N_2 et faire varier N de 2 à 2 000. Nous ferons ensuite varier M puis N_2 .

IV.2.A Étude du paramètre N

Avec la méthode LSMC, lorsque l'on fixe M et N_2 et que l'on fait varier N , on obtient les graphiques suivants :

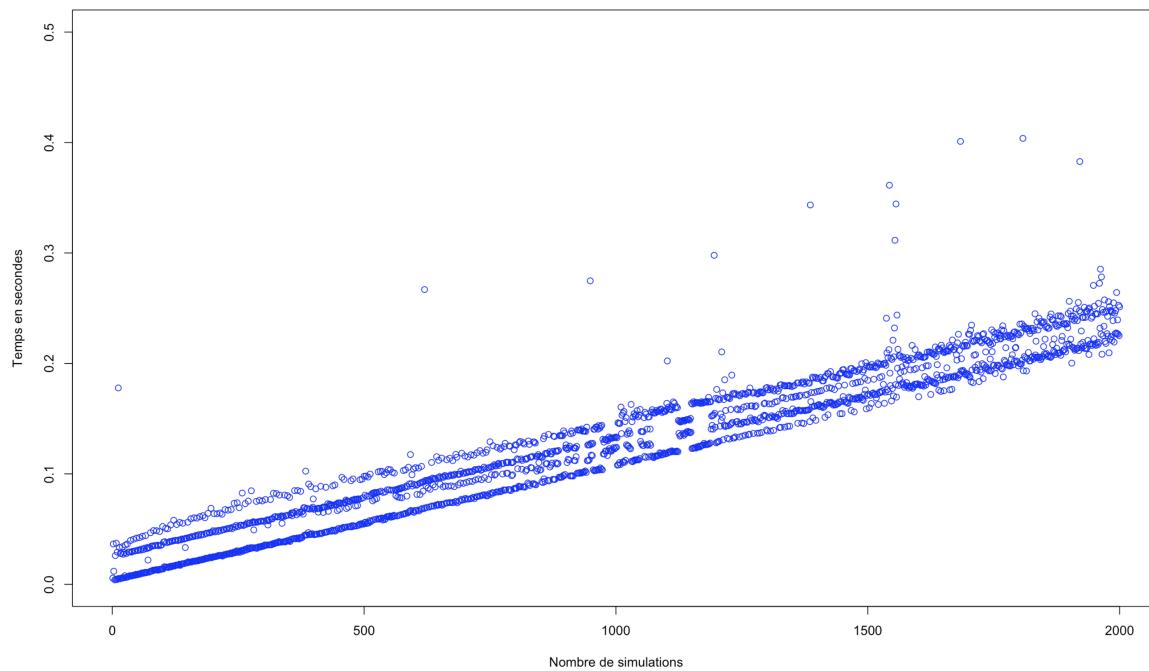


FIGURE 14 – Temps d'exécution en fonction de N pour la méthode LSMC

On constate encore que le temps d'exécution croît linéairement avec N .

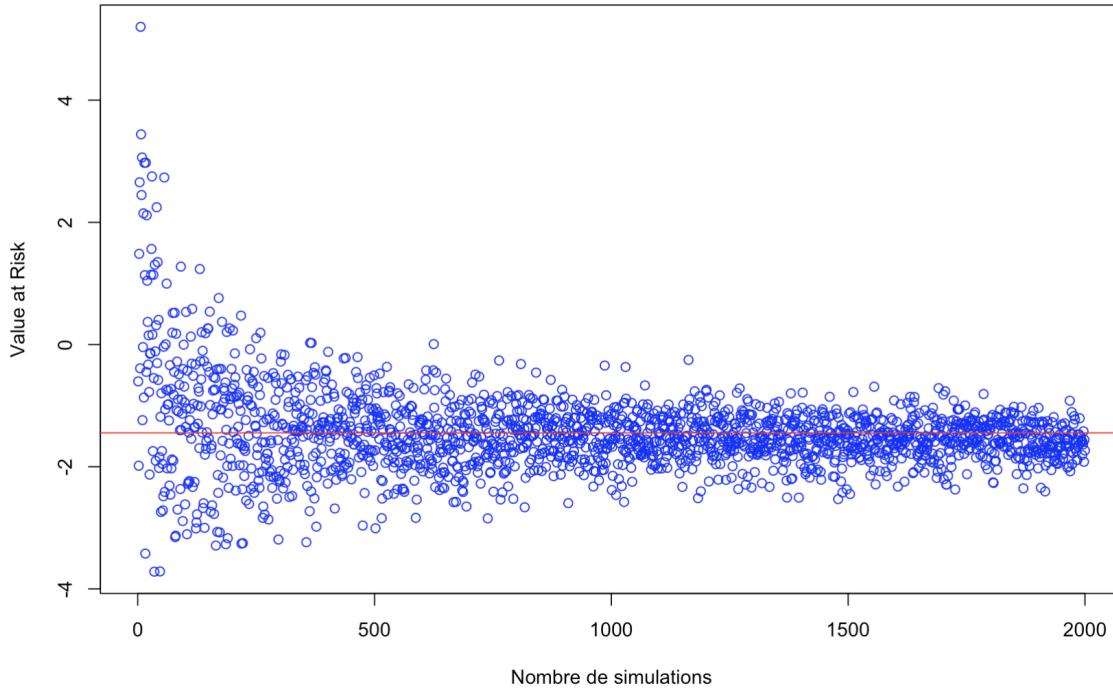


FIGURE 15 – VaR en fonction de N pour la méthode LSMC

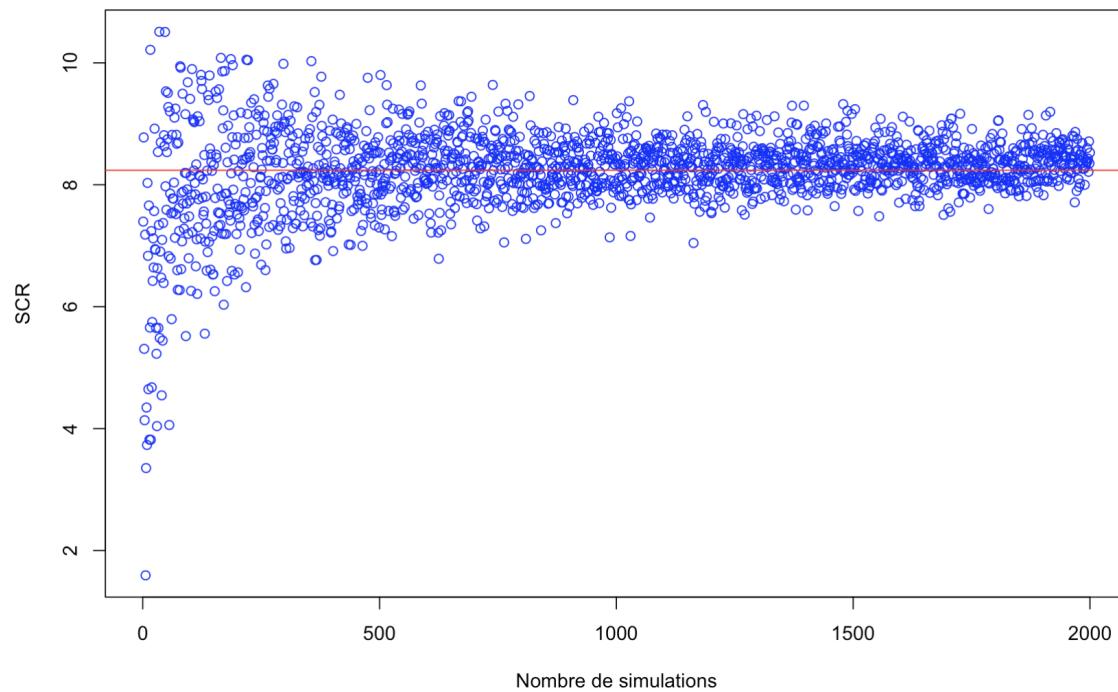


FIGURE 16 – SCR en fonction de N pour la méthode LSMC

Comme pour la méthode SdS, la VaR converge vers -1.488 et le SCR tend environ vers 8.22 quand N augmente.

IV.2.B Étude du paramètre M

Lorsque l'on fixe N et N_2 et que l'on fait varier le pas de temps M , on obtient les graphiques suivants :

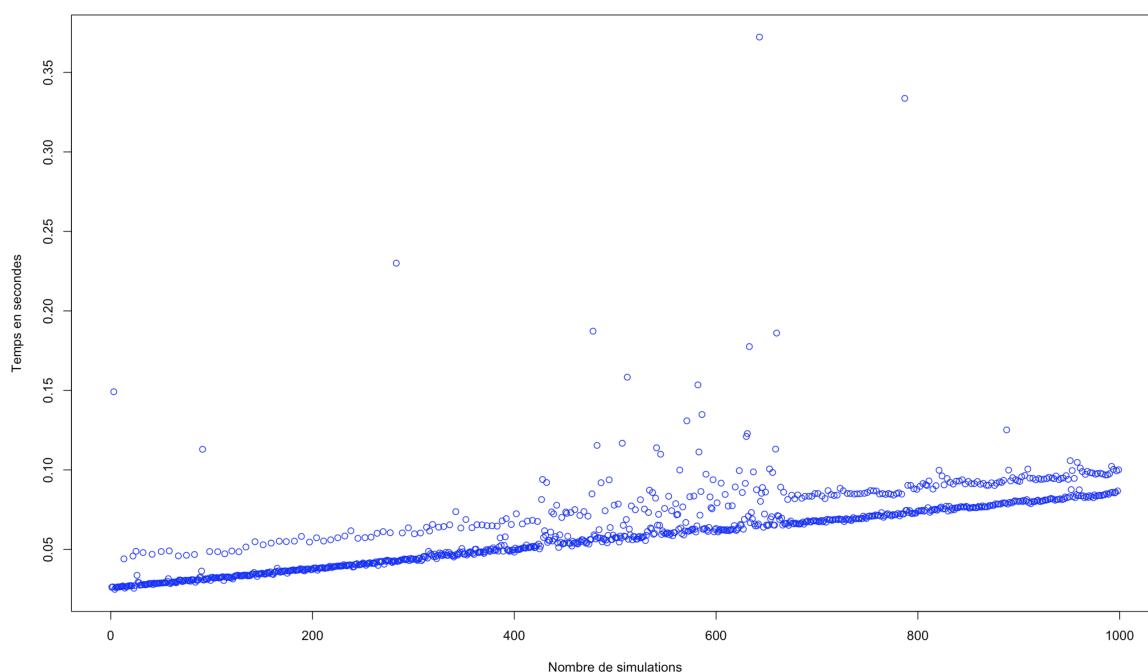


FIGURE 17 – Temps d'exécution en fonction de M pour la méthode LSMC

Comme pour N , le temps d'exécution augmente linéairement avec M .

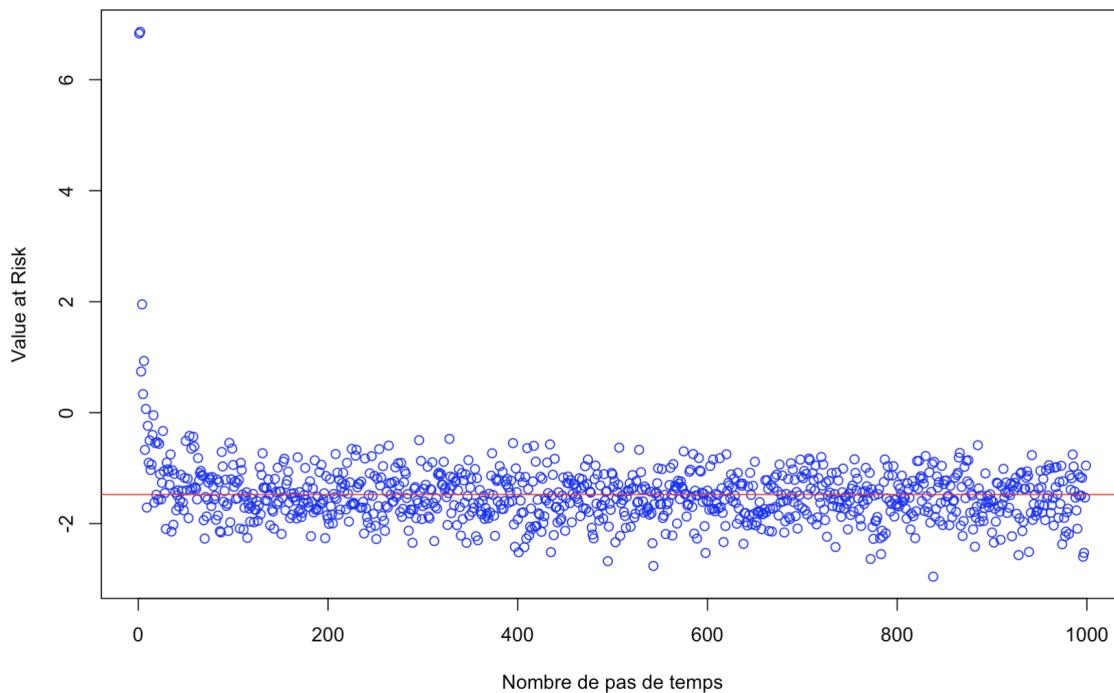


FIGURE 18 – VaR en fonction de M pour la méthode LSMC

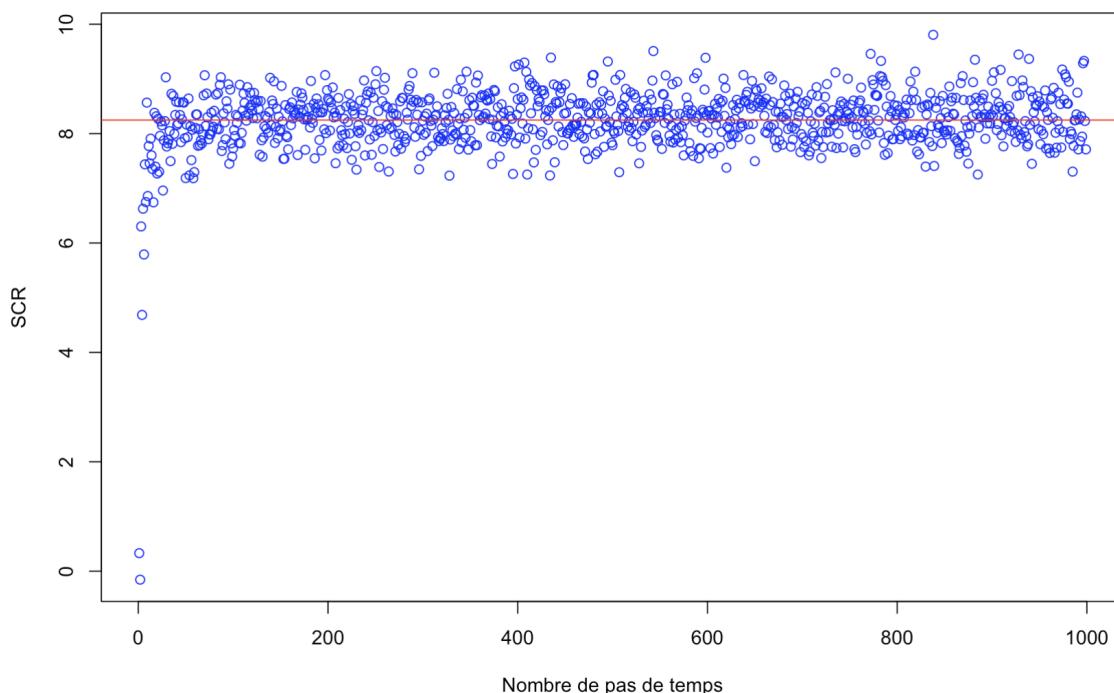


FIGURE 19 – SCR en fonction de M pour la méthode LSMC

À l'image de la méthode SdS, nous n'observons pas une nette convergence de la Value at Risk. Il en est de même pour le SCR.

IV.2.C Étude du paramètre N_2

Lorsque l'on fixe N et M et que l'on fait évoluer N_2 , on obtient les graphiques suivants :

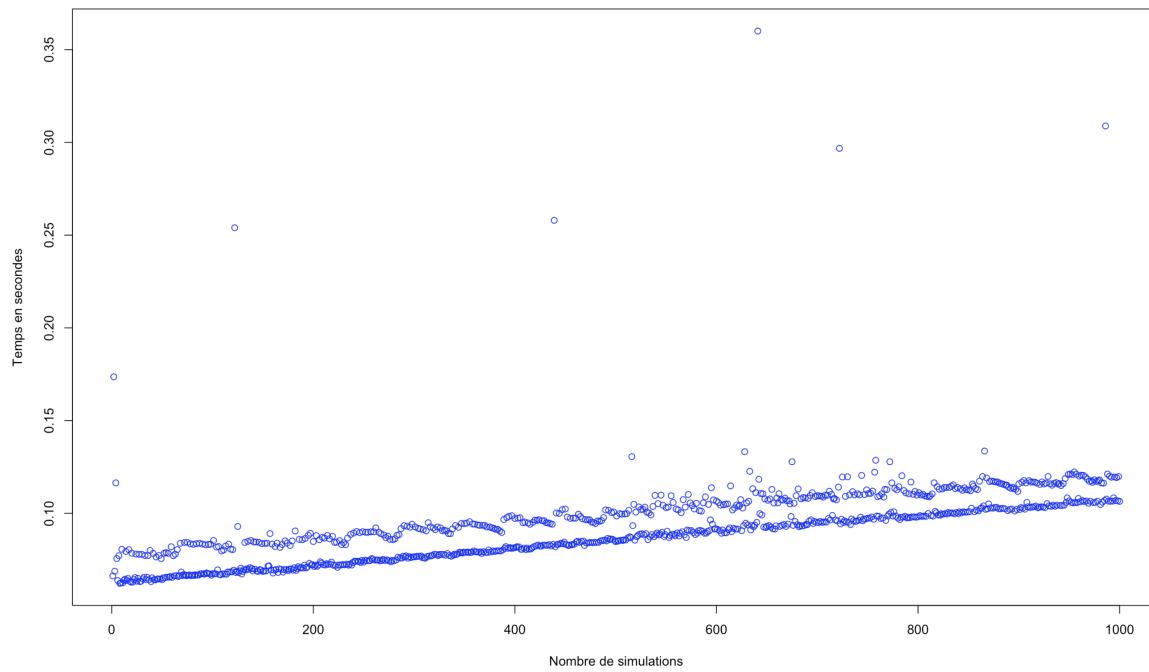


FIGURE 20 – Temps d'exécution en fonction de N_2 pour la méthode LSMC

Comme pour N , le temps d'exécution augmente linéairement avec N_2 .

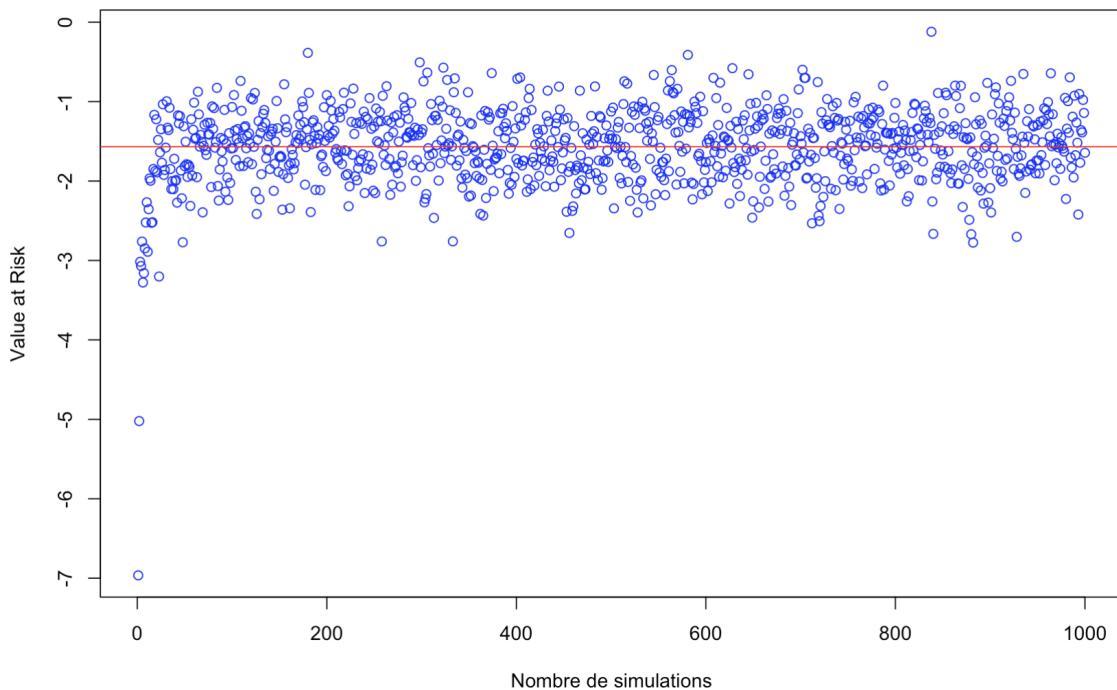


FIGURE 21 – VaR en fonction de N_2 pour la méthode LSMC

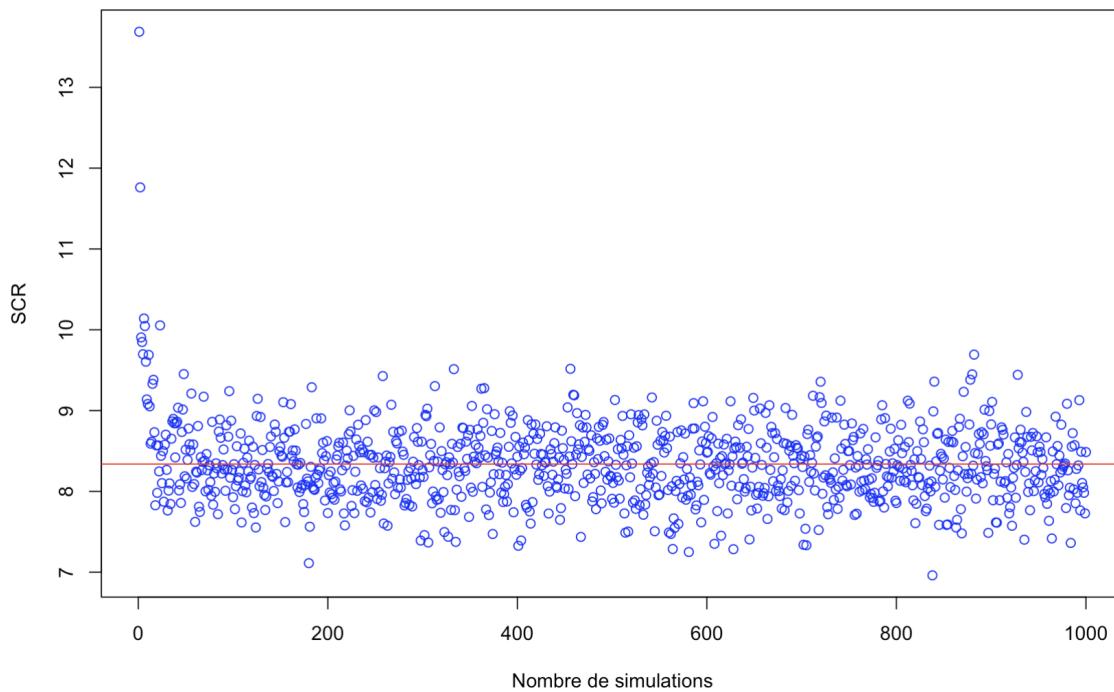


FIGURE 22 – SCR en fonction de N_2 pour la méthode LSMC

Comme pour la méthode SdS, nous n’observons pas une nette convergence de la *Value at Risk*. Il en est de même pour le SCR. Cependant, la VaR et le SCR semble converger autour d’une valeur.

IV.3 Résultats

Dans un premier temps, nous faisons de nouveau appel à la fonction NAV_1 . Ensuite, afin de trouver une base orthonormée, nous utilisons la fonction *poly* du package *orthopolynom*. À partir de cela, nous allons chercher le meilleur degré du polynôme orthonormé d . Pour ce faire, nous effectuons une régression linéaire pour chaque d compris entre 1 et 20. Afin de retenir le meilleur degré, nous comparons les différents R^2 ajustés. Nous avons ainsi trouvé $d = 3$ avec $N = 10\,000$ et $N_2 = 1\,000$ car les R^2 suivants ne varient pas significativement :

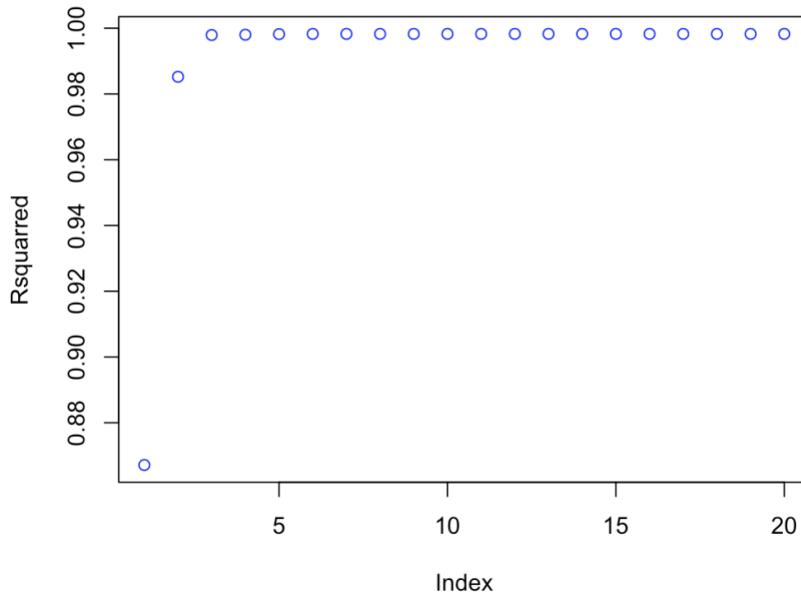


FIGURE 23 – R^2 ajusté en fonction de la valeur de d

Avec ces paramètres, nous obtenons les valeurs suivantes :

```
> var_LSMC
2%
-1.429461
```

FIGURE 24 – Valeur de la VaR pour la méthode LSMC

```
> SCR_LSMC
2%
8.217748
```

FIGURE 25 – Valeur du SCR pour la méthode LSMC

Après calculs, nous obtenons que l'intervalle de confiance à 95% avec 1 000 échantillons bootstrap pour la VaR est $[-1.879, -1.310]$. Pour le SCR, l'intervalle de confiance est $[8.216, 8.219]$.

En ce qui concerne l'intervalle de confiance, nous obtenons le graphique suivant :

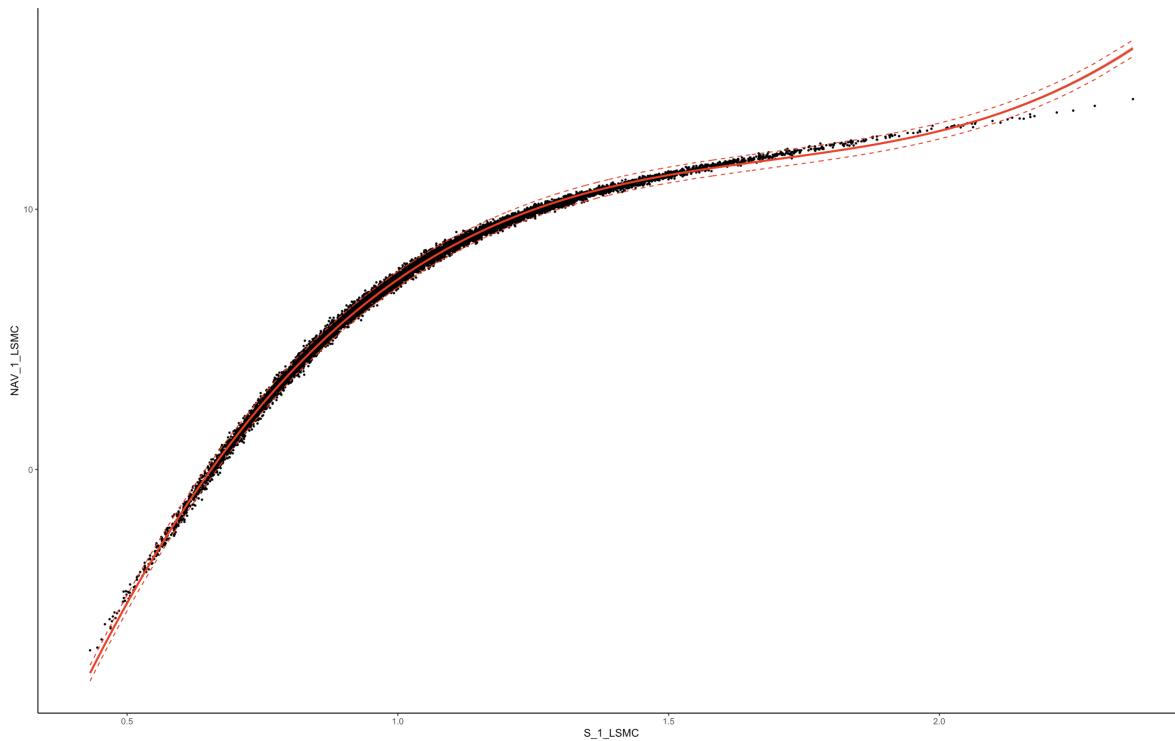


FIGURE 26 – Intervalle de confiance pour la méthode LSMC

On remarque que la plupart des points de la NAV_1 en fonction de S_1^{LSMC} se situent dans l'intervalle de confiance.

De plus, après estimation de la variance pour le SCR, nous obtenons $\mathbb{V}(SCR) = 0.0008$. Par ailleurs, nous avons un temps de calcul de 1.34 secondes pour cette méthode.

IV.4 Bilan

Nous regroupons ici les résultats obtenus au cours de l'étude réalisée sur la méthode LSMC.

N	M	N_2	Temps d'exécution	$VaR_{98\%}$	$IC_{95\%}$ de VaR	SCR	$\mathbb{V}(SCR)$
10 000	1 000	1 000	1.340 sec	-1.429	[-1.879,-1.310]	8.218	0.0008

V Méthode Mixte (Simulations/EDP)

V.1 Principe

Cette méthode est basée sur l'évaluation par une méthode déterministe de la fonction :

$$u(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} f(X_t) | X_t = x]$$

D'après le théorème de Feynman-Kac, cette fonction, en environnement risque neutre, vérifie l'équation aux dérivées partielles suivante :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + rx \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = ru$$

Avec la condition terminale, pour tout x :

$$u(T, x) = f(x)$$

On effectue alors le changement de variables suivant :

$$u(t, x) = v(\tau, y)$$

$$\tau = T - t$$

$$y = \log(x)$$

Cette nouvelle fonction vérifie désormais l'EDP :

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - (r - \frac{1}{2} \sigma^2) \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 y}{\partial^2 y} = -rv$$

$$v(0, y) = u(T, \exp(y)) = f(\exp(y))$$

On discrétise alors les intervalles sur lesquels on souhaite mener l'étude, en choisissant un pas M pour la dimension temporelle et N_2 pour la seconde dimension de la fonction. En notant :

$$\Delta\tau = \frac{T}{N}$$

$$\Delta y = \frac{y_{max} - y_{min}}{M + 1}$$

On a :

$$\tau_n = n\Delta\tau, n \in \llbracket 0, N \rrbracket$$

$$y_i = y_{min} + i\Delta y, i \in \llbracket 0, M + 1 \rrbracket$$

Ainsi, nous allons résoudre numériquement l'EDP explicitée ci-dessus. On se place dans le cadre du schéma explicite. On peut alors approcher les dérivées partielles par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial v}{\partial \tau}(\tau_n, y_i) \approx \frac{v_{n+1,i} - v_{n,i}}{\Delta\tau} \\ \frac{\partial v}{\partial y}(\tau_n, y_i) \approx \frac{v_{n,i+1} - v_{n,i-1}}{2\Delta y} \\ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}(\tau_n, y_i) \approx \frac{v_{n,i+1} - 2v_{n,i} + v_{n,i-1}}{2\Delta y^2} \end{array} \right.$$

En isolant les termes en $n + 1$ en fonction de ceux en n , nous pouvons écrire ce système sous la forme d'une formule de récurrence sur des matrices :

$$V_{n+1} = AV_n$$

où A est la matrice tridiagonale vérifiant :

$$\begin{cases} a_{i,i-1} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} \\ a_{i,i} = 1 - r\Delta\tau - \sigma^2 \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} \\ a_{i,i+1} = \frac{\sigma^2}{2} \frac{\Delta\tau}{\Delta y^2} - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{\Delta\tau}{2\Delta y} \end{cases}$$

V.2 Estimation des paramètres

V.2.A Étude du paramètre N

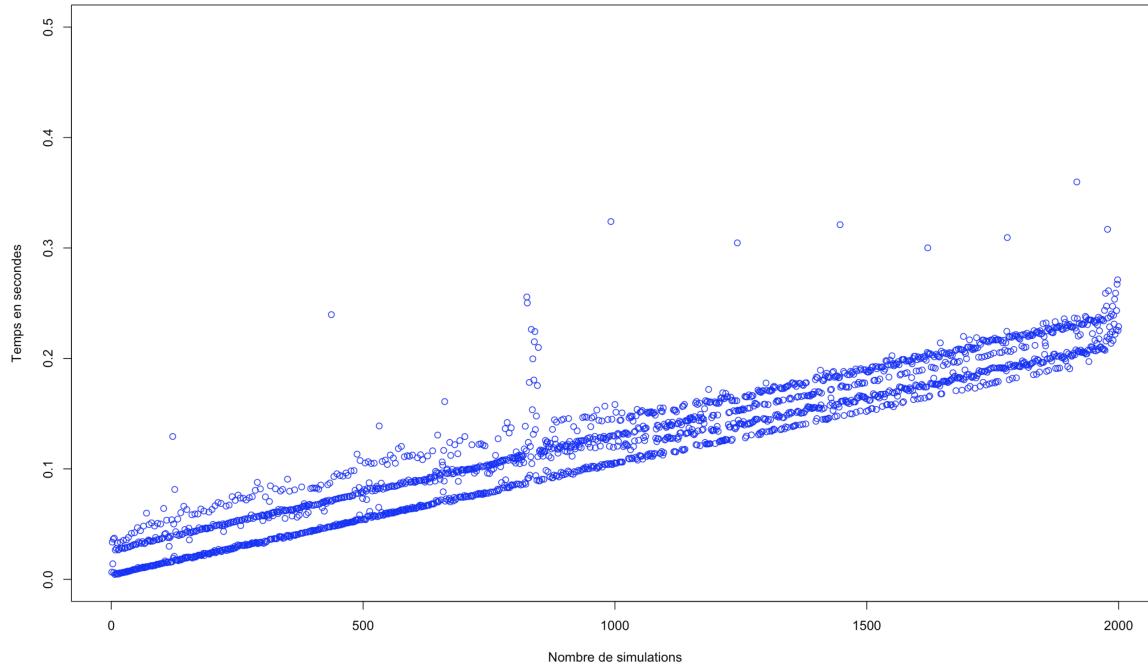


FIGURE 27 – Temps d'exécution en fonction de N pour la méthode Mixte

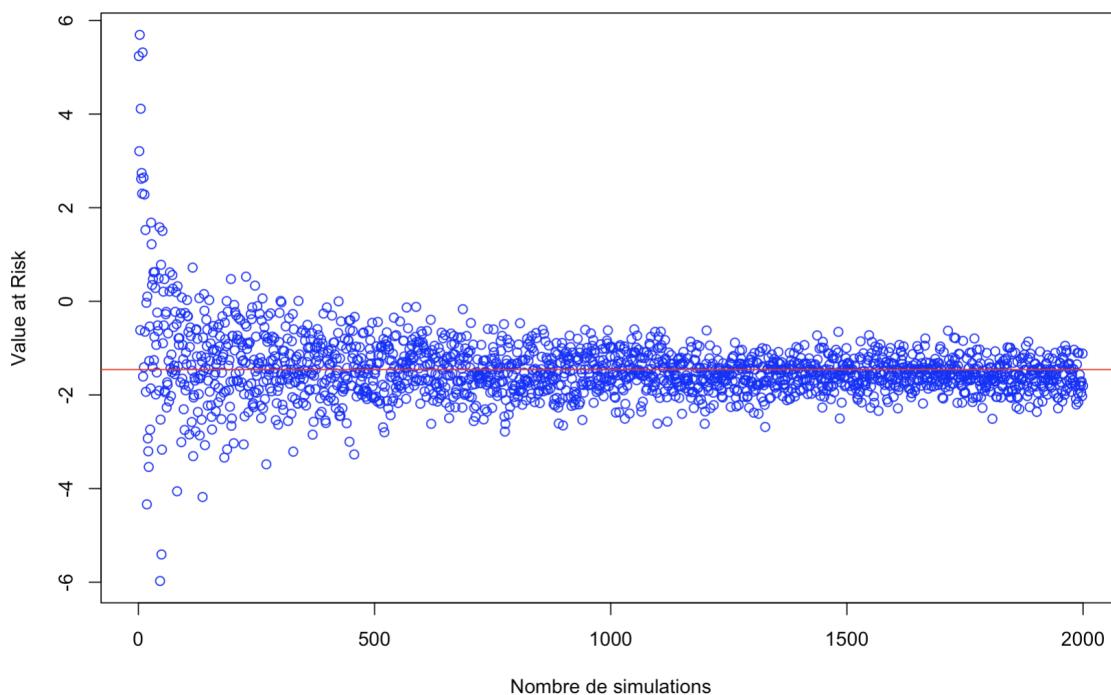


FIGURE 28 – VaR en fonction de N pour la méthode Mixte

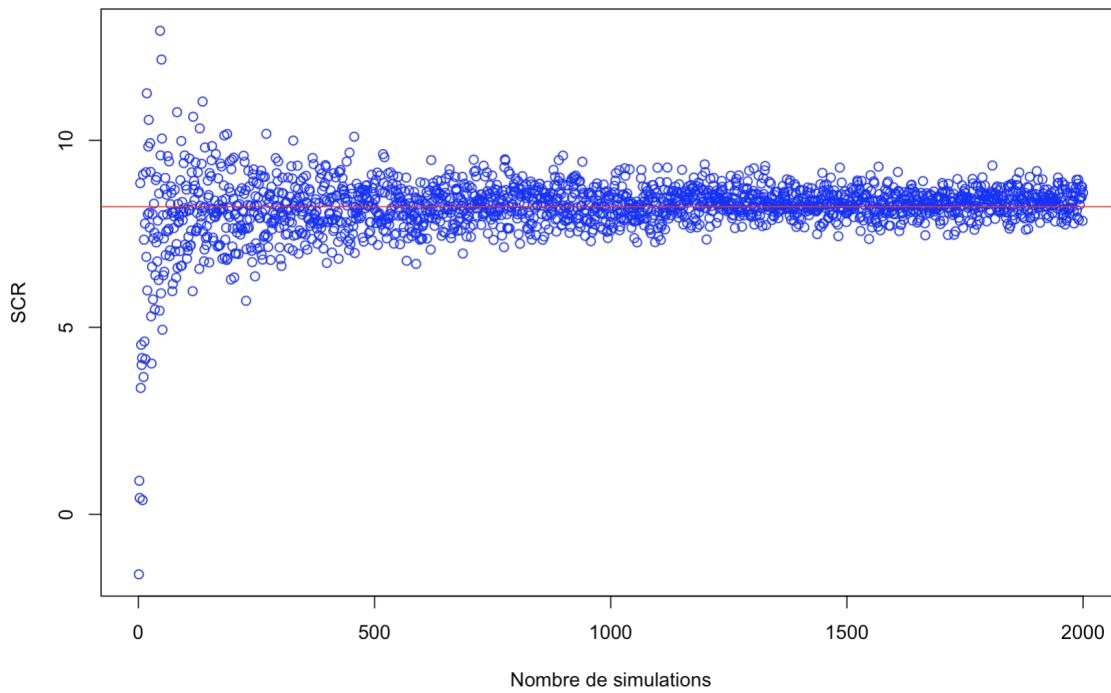


FIGURE 29 – SCR en fonction de N pour la méthode Mixte

Avec ces trois graphes, nous tirons les mêmes conclusions que pour les deux méthodes précédentes. En effet, le temps d'exécution est proportionnel au nombre de simulations N . De plus, la VaR ainsi que le SCR semblent converger vers les mêmes valeurs que pour les précédentes méthodes lorsque le nombre de simulations augmente.

V.2.B Étude du paramètre M

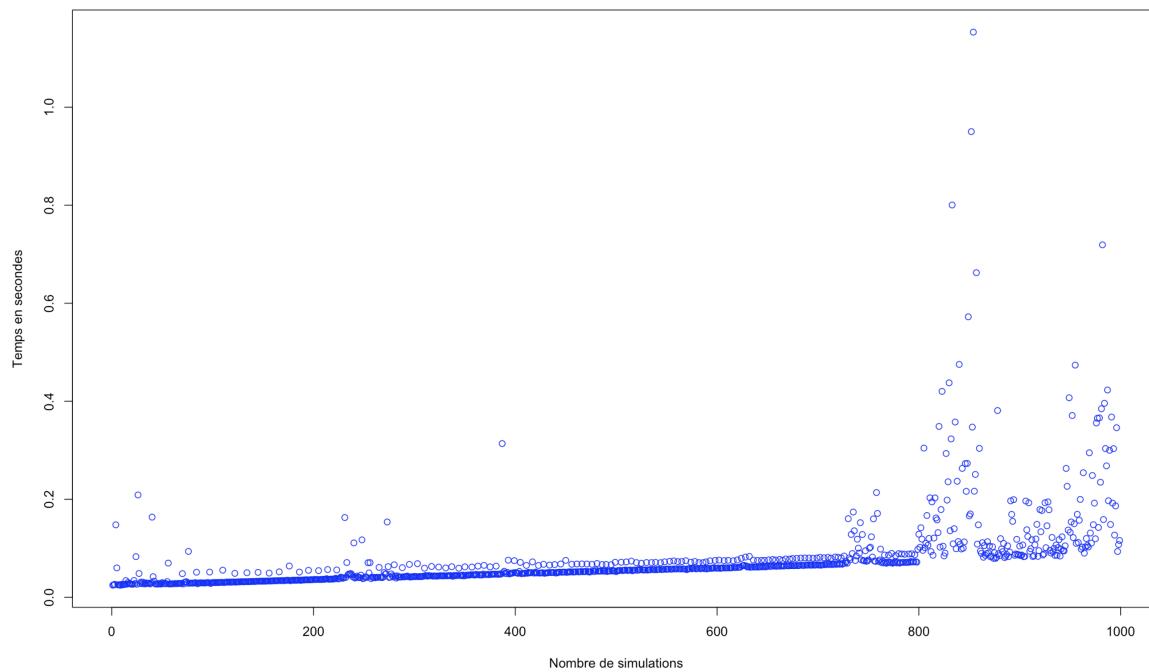


FIGURE 30 – Temps d'exécution en fonction de M pour la méthode Mixte

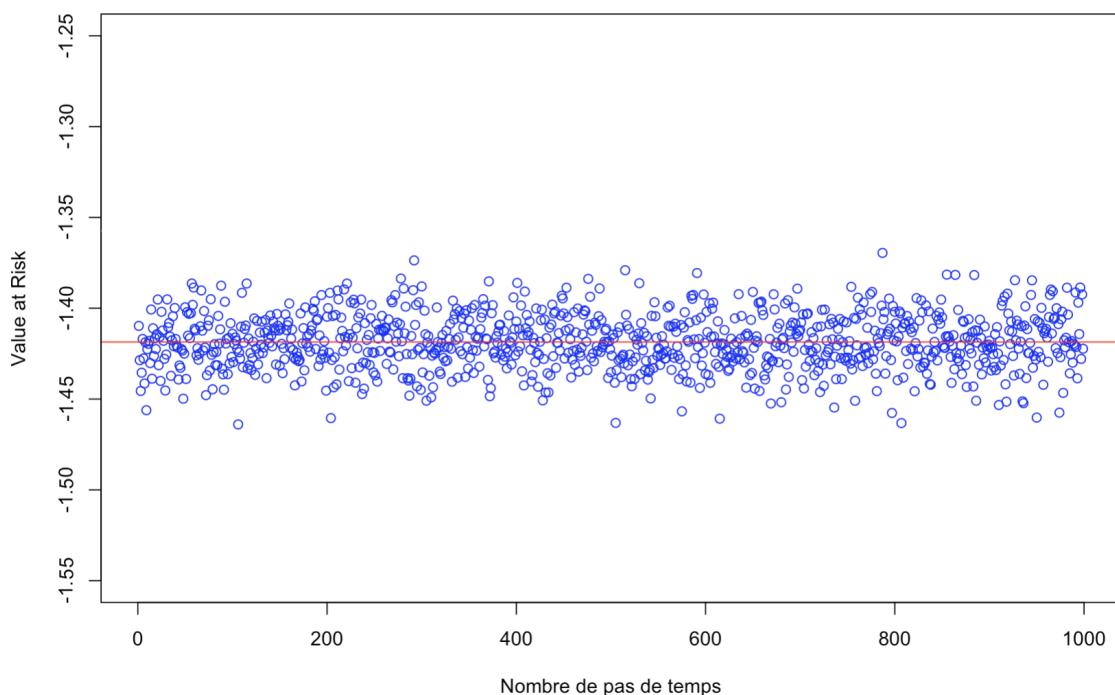


FIGURE 31 – VaR en fonction de M pour la méthode Mixte

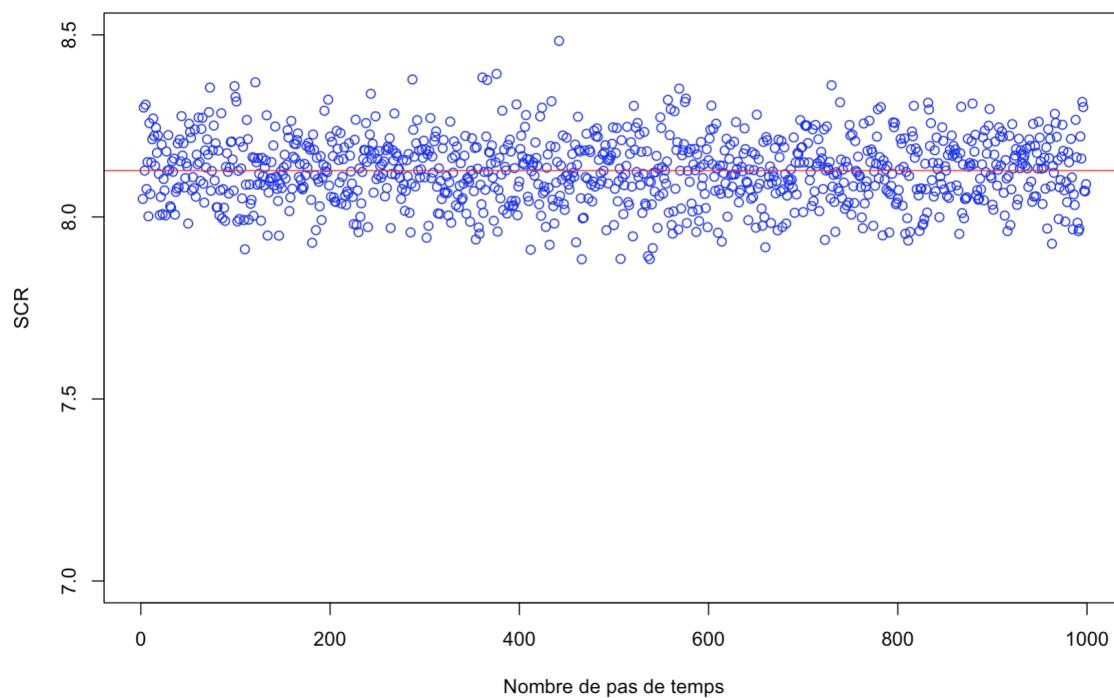


FIGURE 32 – SCR en fonction de M pour la méthode Mixte

V.2.C Étude du paramètre N_2

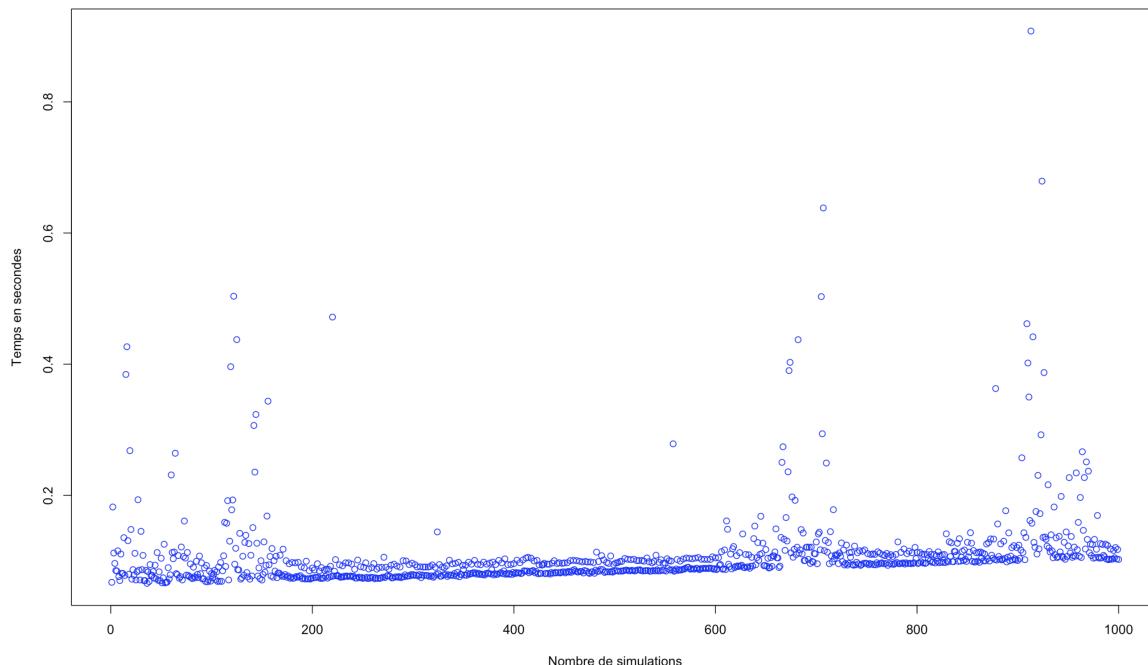


FIGURE 33 – Temps d'exécution en fonction de N_2 pour la méthode Mixte

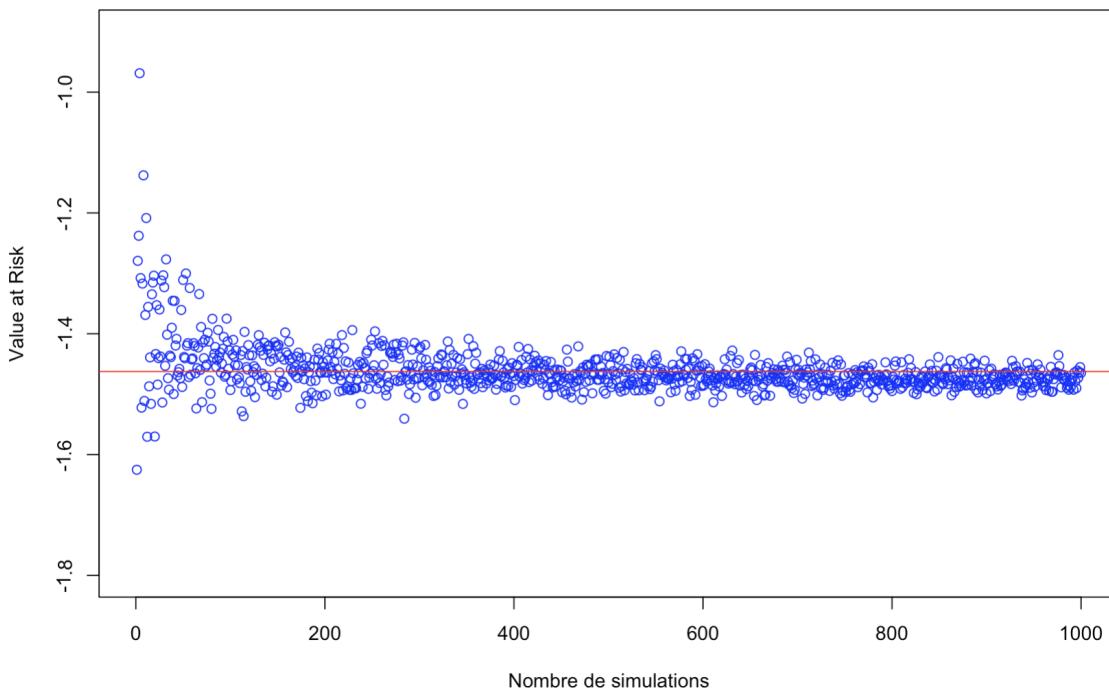


FIGURE 34 – VaR en fonction de N_2 pour la méthode Mixte

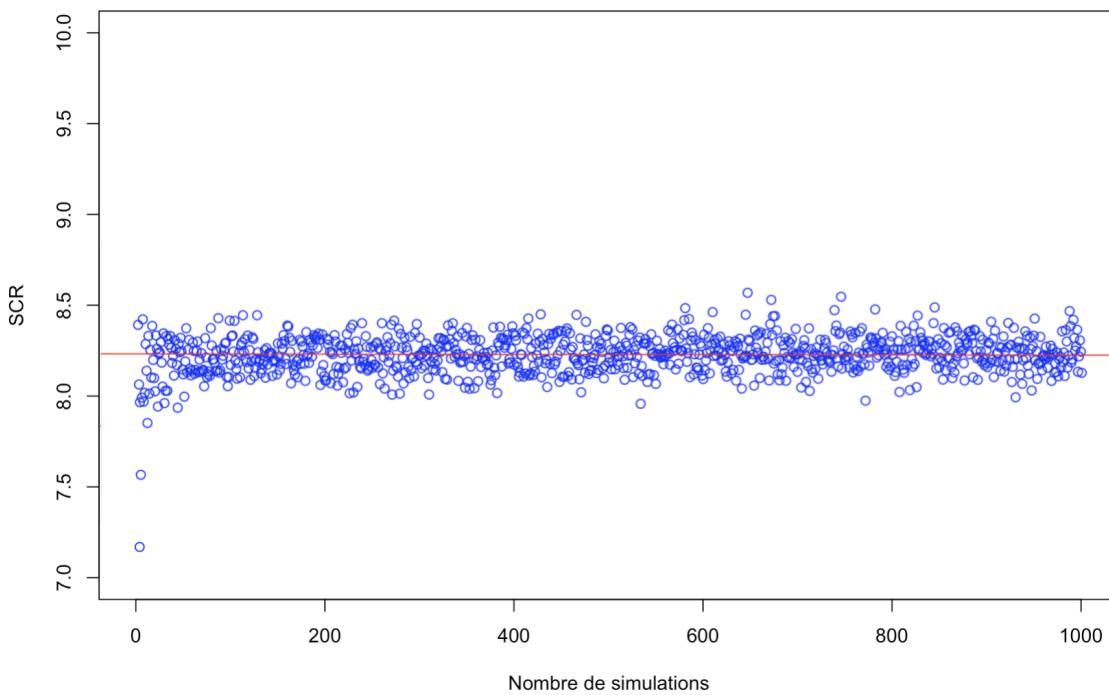


FIGURE 35 – SCR en fonction de N_2 pour la méthode Mixte

Ici aussi nous dressons les mêmes conclusions que pour les études du paramètre N_2 des deux autres méthodes. En effet, le temps d'exécution est toujours proportionnel au nombre de simulations secondaires N_2 . On remarque également que pour la méthode mixte, la VaR ainsi que le SCR ne semblent pas converger vers une valeur unique mais plutôt à l'intérieur d'un intervalle de confiance.

V.3 Résultats

On choisit une valeur de N supérieure à celle de N_2 afin de s'assurer que le schéma explicite soit stable. Pour cela, on prend $N = 10\,000$ et $N_2 = 1\,000$. Ensuite, on fixe y_{min} et y_{max} à des valeurs arbitrairement choisies afin de balayer entièrement le spectre de v . Après avoir posé les termes de la matrice A , on complète celle-ci suivant le système évoqué précédemment.

La partie optionnelle de la NAV se calcule à l'aide des termes composant la matrice V_{exp} , elle-même obtenue après multiplication successive de la matrice V_0 par A . V_0 s'obtient en vectorisant :

$$\max(K - y_{exp}, 0)$$

avec le strike K et la valeur initiale du sous-jacent y_{exp} .

On obtient la valeur de la NAV par la forme habituelle. Ci-dessous le graphique montrant la distribution de la NAV_1 :

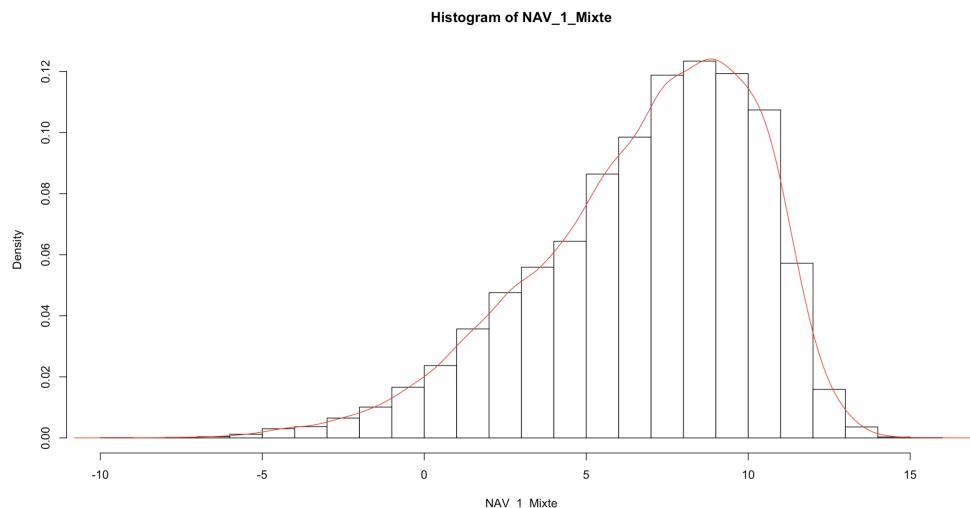


FIGURE 36 – Distribution de la NAV_1

En ce qui concerne la $VaR_{98\%}$ et le SCR, nous avons obtenu :

```
> SCR_mixte
2%
8.21238
```

FIGURE 37 – Valeur du SCR pour la méthode mixte

```
> var_mixte
2%
-1.424092
```

FIGURE 38 – Valeur de la VaR pour la méthode mixte

Nous avons donc estimé les intervalles de confiance à 95% pour la VaR et le SCR respectivement.

Après calculs, nous obtenons que l'intervalle de confiance à 95% avec 1 000 échantillons bootstrap pour la $VaR_{98\%}$ est $[-1.688, -1.149]$. Pour le SCR, l'intervalle de confiance à 95% est $[8.177, 8.247]$.

De plus, après estimation de la variance pour le SCR, nous obtenons $\mathbb{V}(SCR) = 0.0180$.

V.4 Bilan

Nous regroupons ici les résultats obtenus au cours de l'étude réalisée sur la méthode mixte.

N	M	N_2	Temps d'exécution	$VaR_{98\%}$	$IC_{95\%}$ de VaR	SCR	$\mathbb{V}(SCR)$
10 000	1 000	1 000	5.899 sec	-1.424	[-1.688,-1.149]	8.212	0.0180

Conclusion

Les résultats ci-dessous ont été obtenus avec les paramètres de simulations suivants : $N = 10\,000$, $M = 1\,000$ et $N_2 = 1\,000$.

Méthode	Temps d'exécution	$VaR_{98\%}$	$IC_{95\%}$ de VaR	SCR	$\mathbb{V}(SCR)$
SdS	0.952 sec	-1.433	[-1.700,-1.139]	8.222	0.0140
LSMC	1.340 sec	-1.429	[-1.879,-1.310]	8.218	0.0008
Mixte	5.899 sec	-1.424	[-1.688,-1.149]	8.212	0.0180

À travers ce projet, nous avons pu mettre en application plusieurs modèles d'estimation du SCR. Il est à noter que plus le SCR est grand, moins l'entreprise sera enclin à prendre des risques et plus la probabilité de défaut sera faible. Il est donc beaucoup plus dangereux de sous-estimer un SCR que de le sur-estimer. On constate que nos trois méthodes aboutissent à des résultats relativement similaires concernant la valeur de ce SCR.

Cependant, chaque méthode présente des avantages et inconvénients, que ce soit par rapport à la complexité temporelle ou à la convergence du SCR.

En effet, compte tenu de sa construction, la méthode mixte est la plus précise mais elle est la plus coûteuse en temps de calcul, notamment lorsque l'on fait évoluer le pas de discréétisation. De plus, c'est la méthode qui nous donne le SCR le plus faible. Nous devons donc être vigilant quant à l'utilisation de cette méthode car il ne faudrait pas que le SCR soit sous-estimé puisque cela ferait courir un risque de défaut d'autant plus grand pour l'assureur.

D'un autre côté, dans le cadre de notre étude, les méthodes SdS et LSMC sont moins coûteuses en temps de calcul que la méthode mixte. En effet, le temps de calcul de la méthode SdS est le plus faible, seulement 0.952 seconde. Cela s'explique par la simplicité du modèle étudié et par le fait que les composantes du contrat épargne étudié sont évaluées à la maturité, rendant le principe de Monte-Carlo imbriqué, inhérent à la méthode SdS, moins coûteux en calcul. En revanche, les méthodes SdS et LSMC présentent des SCR un peu plus élevés que la méthode mixte. En particulier la méthode SdS fournit un SCR à 8.222 tandis que la méthode LSMC fournit un SCR à 8.218.

Bien que dans le domaine de l'assurance, en raison de son intelligibilité et sa facilité à être implémentée, la méthode SdS est assez répandue, si on avait un choix à faire entre ces méthodes, l'assureur pourrait sûrement s'orienter vers la méthode LSMC qui combine un temps de calcul faible, une convergence du SCR assez rapide ainsi qu'un SCR suffisamment élevé.

De plus, nos estimations de variance du SCR pour chaque méthode nous confortent dans notre choix puisque les variances estimées pour la méthode SdS et Mixte donnent respectivement $\mathbb{V}(SCR) = 0.0140$ et $\mathbb{V}(SCR) = 0.0180$ tandis que la méthode LSMC donne $\mathbb{V}(SCR) = 0.0008$.

Fin du Rapport