ERM
M2A, année 2020 – 2021

TD 2 : COPULES

Exercice 1
Soit (U, V) un vecteur Gaussien centré, dont les variances sont $Var(U) = a^2$ et $Var(V) = b^2$, et de corrélation $r \in [-1, 1]$. On pose

$$X = \frac{U}{a} + \frac{V}{b} \; et \; Y = \frac{U}{a} - \frac{V}{b}.$$

Donner la copule du couple (X, Y).

Exercice 2
Déterminer les distributions marginales $F(x)$ et $G(x)$ associées à la distribution $H(x, y)$ puis construire la copule $C(u, v)$ associée à H par le théorème de Sklar.

$$H(x, y) = \frac{1}{1 + e^{-x} + e^{-y}} \; ; \; pour \; x, y \in \mathbb{R}$$

Exercice 3
On considère deux variables alatoires indpendantes X_1 et X_3 telles que $X_1 \sim Exp(1)$ et $X_3 \sim Exp(2)$. On pose alors $X_2 = X_1 + X_3$ et $X = (X_1, X_2)$.

(1) **Copules**
  (a) Déterminer la fonction de répartition de X_2.
  (b) Déterminer la fonction de répartition jointe de X. Vérifier alors le résultat de (a).
  (c) On note désormais F_1 et F_2 les fonctions de répartition de X_1 et X_2. Déterminer la fonction copule associée à F_X, ie. la fonction de C de $[0, 1]^2$ dans $[0, 1]$ telle que :
$$F_X(X_1, X_2) = C(F_1(X_1), F_2(X_2)).$$
(2) **Corrélations**
  (a) Calculer le ρ de Spearmann de X, $\rho(X, Y) = 12 \iint_{[0,1]^2} C(u, v)dudv - 3$
  (b) Calculer le τ de Kendall de X de trois manières différentes :
    (i) A l'aide de la définition $\tau = \mathbb{P}[(X_1 - X_1')(X_2 - X_2') > 0] - \mathbb{P}[(X_1 - X_1')(X_2 - X_2') < 0]$
    (ii) A l'aide de la formule $\tau = 4\,\mathbb{E}[F_X(X_1, X_2)] - 1$
    (iii) A l'aide des copules $\tau(X, Y) = 4 \iint_{[0,1]^2} C(u, v)dC(u, v) - 1$