© Théo Jalabert

Questions de cours

Q1 :
$$\begin{cases} B \sim \mathcal{B}(n,p) \\ N \sim \mathcal{P}(\lambda) \end{cases}$$

↳ Avec $\lambda = np$, $\mathbb{P}[N=k] = \frac{(np)^k}{k!} e^{-np}$

$$\Rightarrow \frac{\mathbb{P}[B=k]}{\mathbb{P}[N=k]} = \frac{n!}{(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \cdot \frac{1}{(np)^k e^{-np}} \quad p = \lambda/n$$

$$= \underbrace{\frac{n!}{n^k (n-k)!}} \frac{(1-\lambda/n)^n}{(1-\lambda/n)^k} \cdot \frac{1}{e^{-\lambda}}$$

De plus, $\prod_{i=1}^{k} \left(1 - \frac{i-1}{n}\right) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{n}(n-i+1) = \frac{1}{n^k} \frac{n!}{n-k!}$

Donc, si $n \to \infty$, $p \to 0$, $\lambda = np$, $\mathbb{P}[N=k] = \mathbb{P}[B=k]$

car $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{(1-\lambda/n)^n}{e^{-\lambda}} \cdot \frac{1}{(1-\lambda/n)^k} \prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{i-1}{n}\right) = \lim\limits_{n\to\infty} 1 \cdot \frac{\prod_{i=1}^{k}(n+1-i)}{(n-\lambda)^k} = 1$

$$B_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}\{X_i > x\}$$

→ $\mathbb{P}[X_{(1)} \leq x] = \mathbb{P}[B_n(x) = 0] \underset{n\to\infty}{\sim} e^{-np}$

$\mathbb{P}[X_{(2)} \leq x] = \mathbb{P}[B_n(x) = 1] \underset{n\to\infty}{\sim} np\, e^{-np}$

⋮

↳ $\mathbb{P}[X_{(i)} \leq x] = \mathbb{P}[B_n(x) = i-1] \underset{n\to\infty}{\sim} (np)^{i-1} \frac{e^{-np}}{(i-1)!}$

Scanned with CamScanner

Q2. Propriété de max-stabilité : Soient $X_1, \dots X_n$ des va iid de distribution F.

F est dite max-stable ssi $\exists\, a_n, b_n$ tq $\frac{M_n - b_n}{a_n} \overset{\mathcal{L}}{=} F$

- $X \sim \mathcal{E}xp(1) \Rightarrow \begin{cases} \bar{F}(x) = e^{-x} \; \mathbb{1}\{x \geq 0\} \\ f(x) = e^{-x} \; \mathbb{1}\{x \geq 0\} \end{cases}$

$\Rightarrow h(x) = 1 \Rightarrow h'(x) = 0 \longrightarrow 0 \Rightarrow X \in D(\Lambda)$

↳ coeff : $b_n = F^{-1}(1 - 1/n)$ avec $F^{-1} : y \mapsto -\ln(1-y)$

$\Rightarrow b_n = -\ln(1 - 1 + 1/n)$

$= -\ln(1/n)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow b_n = \ln n \\ \text{et } a_n = h(b_n) = 1 \end{array}}$$

- $-X : \begin{cases} \bar{F}_{-x}(x) = e^{x} \; \mathbb{1}\{x \leq 0\} \\ f_{-x}(x) = e^{x} \; \mathbb{1}\{x \leq 0\} \end{cases}$

$\Rightarrow h_{-x}(x) = 1 \Rightarrow h'_{-x}(x) = 0 \longrightarrow 0 \Rightarrow -X \in D(\Lambda)$

↳ coeff : $b_n = F_{-x}^{-1}(1 - 1/n)$

$= \ln(1 - 1 + 1/n)$

$$\boxed{\begin{array}{l} \Rightarrow b_n = \ln(1/n) \\ \text{et } a_n = h_{-x}(b_n) = 1 \end{array}}$$

© Théo Jalabert

Q3 : $X_i \sim GPD(\beta, \xi)$: $G(x) = \begin{cases} 1 - [1 + \xi (x/\beta)]_+^{-1/\xi} , & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-x/\beta} , & \xi = 0 \end{cases}$

• Si $\xi = 0$: $GPD(\beta, \xi) \stackrel{\mathcal{L}}{=} \mathcal{E}xp(1/\beta)$

$\Rightarrow \boxed{X \in D(\Lambda)}$

en effet, $\begin{cases} F(x) = e^{-x/\beta} \\ f(x) = \beta e^{-x/\beta} \end{cases} \Rightarrow h(x) = \beta \Rightarrow h'(x) = 0 \longrightarrow 0$

• Si $\xi > 0$: $\bar{G}(x) = [1 + \xi (x/\beta)]^{-1/\xi}$

$\Rightarrow f(x) = -\cancel{-1/\xi} \, [1 + \xi/\beta \, x]^{-1/\xi - 1} \cdot \frac{\cancel{\xi}}{\beta}$

$= \frac{1}{\beta} \left[1 + \frac{\xi}{\beta} x\right]^{-1/\xi - 1}$

$\Rightarrow h(x) = \beta \left[1 + \frac{\xi}{\beta} x\right]^{-1/\xi - (-1/\xi - 1)}$

$= \beta \left[1 + \frac{\xi}{\beta} x\right] = \beta + \xi x$

$\Rightarrow h'(x) = \xi > 0 \Rightarrow \boxed{X \in D(\Phi)}$

• Si $\xi < 0$: $\bar{G}(x) = [1 + \xi (x/\beta)]^{1/-\xi}$, $x \in [\beta/\xi, 0]$

$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{\cancel{\xi}} \left[1 + \xi \frac{x}{\beta}\right]^{1/-\xi - 1} \cdot \frac{\cancel{\xi}}{\beta}$

$= \frac{1}{\beta} [1 + \xi x/\beta]^{1/-\xi - 1}$

$\Rightarrow h(x) = \frac{\bar{G}(x)}{f(x)} = \frac{1}{\beta} [1 + \xi x/\beta] = \beta + \xi x$

$\Rightarrow h'(x) = \xi < 0 \Rightarrow \boxed{X \in D(\Psi)}$

© Théo Jalabert

Q4 : 1) $F \in D(G)$ veut dire qu'il existe 2 suites $(a_n) > 0$ et (b_n) tq

$$F^n(a_n x + b_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} G(x)$$

2) $H(x) = F(\alpha x + \beta) \Rightarrow F(x) = H\left(\frac{x - \beta}{\alpha}\right)$

$\Rightarrow H\left(\frac{a_n x + b_n - \beta}{\alpha}\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} G(x)$ et les suites de normalisation de H sont

$$c_n = \frac{a_n}{\alpha} \quad \text{et} \quad d_n = \frac{b_n - \beta}{\alpha}$$

→ remarque : $H \in D(G)$ car $F \in D(G)$ et F et H sont de même type.

Q5. Peut-on trouver (u_n) tq $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[M_n \leq u_n] = e^{-\tau}$ si :

(i) $X_i \sim \mathcal{E}xp(\lambda)$: $\mathbb{P}[X_i > x] = e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{\{x \geq 0\}}$

→ oui : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

$\Rightarrow h(x) = \dfrac{\bar{F}(x)}{f(x)} = 1/\lambda$

$\Rightarrow h'(x) = 0$

$\Rightarrow h'(u_n) \xrightarrow[u_n \to \infty]{} 0$

Donc $X \in D(\Lambda)$ et il existe bien (u_n).

(ii) $X_i \sim \mathcal{G}(p) \Rightarrow \mathbb{P}[X_i = n] = p(1-p)^n \quad \forall n \in \mathbb{N}$

→ Si $x \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{N}^*$, $\bar{F}(x) = \bar{F}(x^-)$

→ Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{\bar{F}(n)}{\bar{F}(n^-)} = \dfrac{\bar{F}(n)}{\bar{F}(n-1)} = 1 \quad p \neq 1$

$\left.\right\}$ Ainsi $\dfrac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x^-)}$ diverge quand $x \to +\infty = x^F$

→ non

(iii) $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda)$: $\mathbb{P}[X_i = n] = \dfrac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

→ Si $x \in \mathbb{R}^* \setminus \mathbb{N}^*$, $\bar{F}(x) = \bar{F}(x^-)$

→ Si $n \in \mathbb{N}^*$, $\bar{F}(n) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$\bar{F}(n^-) = \bar{F}(n-1) = 1 - \sum_{k=0}^{n-2} \dfrac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$

$$\Rightarrow \frac{\bar{F}(n)}{\bar{F}(n^-)} = \frac{e^{\lambda} - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k/k!}{e^{\lambda} - \sum_{k=0}^{n-2} \lambda^k/k!}$$

or $\dfrac{1 - \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k/k!\, e^{-\lambda}}{1 - \sum_{k=0}^{n-2} \lambda^k/k!\, e^{-\lambda}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1 \Leftrightarrow 1 - \sum_{k=0}^{n-1} (\quad) \underset{n\to\infty}{\sim} 1 - \sum_{k=0}^{n-2} (\quad)$

$\Leftrightarrow \dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \underset{n\to\infty}{\sim} 0$

et $\lim_{n\to\infty} \dfrac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} = 0$ donc OK

$\Rightarrow \dfrac{\bar{F}(n)}{\bar{F}(n^-)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Scanned with CamScanner

Q6: 1) Si $X \sim \Phi_\alpha$, $\mathbb{P}[X \leq x] = \exp(-x^{-\alpha}) \mathbb{1}_{\{x>0\}}$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}[\ln(X^\alpha) \leq y] = \mathbb{P}[X \leq (e^y)^{1/\alpha}]$$
$$= \mathbb{P}[X \leq e^{y/\alpha}]$$
$$= \exp(-(e^{y/\alpha})^{-\alpha}) \underbrace{\mathbb{1}_{\{e^{y/\alpha}>0\}}}_{\text{vrai } \forall y \in \mathbb{R}}$$
$$= \exp(-e^{-y})$$

Donc $X \sim \Phi_\alpha \Leftrightarrow \ln(X^\alpha) \sim \Lambda$

$$\ln(X^\alpha) \sim \Lambda \Leftrightarrow \mathbb{P}[\ln(X^\alpha) \leq x] = \Lambda(x) = \exp(-\exp(-x))$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}[X \leq e^{x/\alpha}] = \exp(-e^{-x})$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}[-X^{-1} \leq -e^{-x/\alpha}] = \exp(-e^{-x})$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}[-X^{-1} \leq y] = \exp(-e^{-\alpha \ln(y)})$$
$$\Leftrightarrow \mathbb{P}[-X^{-1} \leq y] = \exp(-(-y)^\alpha)$$
$$\sim \Psi_\alpha$$

$\hookrightarrow$ $\boxed{X \sim \Phi_\alpha \Leftrightarrow \ln(X^\alpha) \sim \Lambda \Leftrightarrow -X^{-1} \sim \Psi_\alpha}$

2) Soit G une loi max stable.

$$D(G) = \left\{ F \text{ fonction de répartition tq } \exists a_n > 0, b_n \text{ des suites tq } \mathbb{P}\left[\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} G(x), \text{ où } M_n = \max(X_i)_{1\leq i\leq n}, X_i \text{ iid} \sim F \right\}$$

$F \in D(\Phi_\alpha) \Leftrightarrow \bar{F}(x) = x^{-\alpha} L(x)$ où L à variations lentes, ie $\forall x$ $\frac{L(tx)}{L(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} 1$

3) (X_i) iid de fdr F et $F \in D(GEV(\mu, \sigma, \xi_1))$
$\Leftrightarrow B_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\{X_i > x\}} \sim GPD(\beta, \xi_2)$

) pour un même échantillon, $\xi_1 = \xi_2$

Q7. On suppose que $\lim_{x \to x^F} \dfrac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = c \in (0, \infty)$

$F \in D(H) \Rightarrow \exists\, a_n, b_n$ tq $n\bar{F}(a_n x + b_n) = -\ln(H(x))$

$G \in D(H) \Rightarrow \exists\, c_n, d_n$ tq $n\bar{G}(c_n x + d_n) = -\ln(H(x))$

On peut trouver c_n et d_n tq $n\bar{G}(c_n x + d_n) \to \tau$

Comme $\lim_{x \to x^F} \dfrac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = c \Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{n\bar{F}(a_n x + b_n)}{n\bar{G}(c_n x + d_n)} \to c$

$\Rightarrow n\bar{F}(a_n x + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} c\tau$

$\Rightarrow \mathbb{P}[M_n \leq a_n x + b_n] \xrightarrow[n\to\infty]{} (e^{-\tau})^c$

$\hookrightarrow (GEV(0,1,\xi))^c$

$(GEV(0,1,\xi))^c = \exp\left(c\,(1+\xi(a_n x + b_n))^{-1/\xi}\right)$

$= \exp\left(\left[c^{-\xi}\,(1+\xi(a_n x + b_n))\right]^{-1/\xi}\right)$

$= \exp\left(\left[\xi c^{-\xi} a_n x + \xi c^{-\xi} b_n + c^{-\xi}\right]^{-1/\xi}\right)$

Identification à une $GEV(0,1,\xi)$ $\left(\exp(1+\xi(c_n x + d_n))\right)$

$\Rightarrow \xi c_n = \xi c^{-\xi} a_n \qquad 1+\xi d_n = \xi c^{-\xi} b_n + c^{-\xi}$

Réciproquement, $\begin{cases} F^n(a_n x + b_n) \to \Lambda(x) \\ G^n(c_n x + d_n) \to \Lambda(x+b) \end{cases}$

$\begin{cases} \lim_{n\to\infty} F^n(a_n x + b_n) = \exp(-\exp(-x)) \\ \lim_{n\to\infty} G^n(c_n x + d_n) = \exp(-\exp(-x-b)) \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} n\bar{F}(a_n x + b_n) \to e^{-x} \\ n\bar{G}(c_n x + d_n) \to e^{-x-b} \end{cases}$

$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \dfrac{n\bar{F}(a_n x + b_n)}{n\bar{G}(a_n x + d_n)} = \dfrac{e^{-x}}{e^{-x-b}} = e^{b}$ donc $c = e^{b}$

Scanned with CamScanner

© Théo Jalabert

Q8 : Fonction de dépassement moyen empirique : Pour $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ iid, c'est la fonction

$$e_n : u \mapsto \frac{\sum_{i \in \Delta_n(u)} (X_i - u)}{\mathrm{card}(\Delta_n(u))}, \text{ avec } \Delta_n(u) = \{ i \in [\![1, n]\!] \mid X_i > u \}$$

↳ La limite $\lim_{n \to \infty} e_n(u) = E[X - u \mid X > u]$ donne le coût moyen d'un excédant pour le seuil u.

Graphique de dépassement moyen : $\{ X_{(i)}, e_n(X_{(i)}) \}_{1 \leq i \leq n}$.

Pour les grandes valeurs de u, on attend de la fonction de dépassement un comportement linéaire.

© Théo Jalabert

QCM ENSAE 2018.

1) $\begin{cases} P[Y < y] = \dfrac{1}{1+e^{-y}} & , \quad \bar{F}(y) = 1 - \dfrac{1}{1+e^{-y}} = \dfrac{e^{-y}}{1+e^{-y}} \\ f(y) = \dfrac{e^{-y}}{(1+e^{-y})^2} & \end{cases}$

$\Rightarrow h(y) = 1 + e^{-y}$

$\Rightarrow h'(y) = e^{-y} \xrightarrow[y \to \infty]{} 0 = \xi \quad \Rightarrow Y \in D(\Lambda)$

2) A. La convergence du max d'une v.a. correctement normalisée est équivalente à la convergence du nb de dépassements de seuil vers une GPD car :

$$\exists\, \beta \text{ une fonction } > 0 \text{ tq } \lim_{x \to x^F} \sup_{x \in [0, x^F - u]} \left| F_u(x) - GPD(\beta(u), \xi)(x) \right| = 0$$

B. Faux, vers une GPD

C. Non c'est une $GPD(\beta + x\xi, \xi)$ (cf cours)

D. $X \sim \mathcal{U}[0, \beta] \Rightarrow F_X(x) = \dfrac{x}{\beta} \mathbb{1}\{x \in [0, \beta]\} \Rightarrow \bar{F}(x) = 1 - x/_\beta \, \mathbb{1}[0, \beta]$

$F_G(x) = \left(1 - \left(1 + \xi\, x/_\beta\right)_+^{-1/\xi}\right) \underset{\varepsilon = -1}{=} 1 - \dfrac{x}{\beta} \mathbb{1}_{[0, \beta]}$

$\Rightarrow GPD(\beta, -1)$

Vrai pour $\xi = -1$

E. Faux. Pour les QP il n'y a pas de seuil. Par contre GPD pour XS, SL, Excedent Plein

3) et 4) Déjà faites