Séries temporelles ISFA
Rattrapage 2021 - Durée 1h - Sans document

Exercice 1 Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(X'_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus non corrélés définis par

$$X_t = \mu + \epsilon_t + \theta_1\epsilon_{t-1}, \quad \text{et} \quad X'_t = \mu' + \epsilon'_t + \theta'_1\epsilon'_{t-1},$$

avec μ, μ' réels, $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(\epsilon'_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux bruits blancs faibles non corrélés de variance respectives σ^2 et σ'^2. On pose

$$U_t = X_t + X'_t, \quad \text{et} \quad V_t = X_t - X'_t.$$

- Montrer que X_t et X'_t sont stationnaires.
- Montrer que les deux nouveaux processus U et V sont aussi stationnaires. Donner l'expression de leurs fonctions d'autocovariance en fonction de celles de X et X'.
- Donner des conditions sur θ_1 et θ'_1 pour que U et V soient des processus MA(q) dont on déterminera le degré q.

Exercice 2 On considère un processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tel que, pour tout $t\in\mathbb{Z}$, $\mathbb{E}(X_t^2)<\infty$ et vérifiant :

$$X_t \quad = \quad \mu + \Theta(L)\epsilon_t,$$

avec L l'opérateur retard défini par $L\epsilon_t = \epsilon_{t-1}$, ϵ un bruit blanc faible, μ une constante, et

$$\Theta(L) \quad = \quad I + \theta_1 L + \cdots + \theta_d L^d, \text{ avec } \theta_j \neq 0; j = 1, \cdots, d.$$

Montrer que par construction ce processus est stationnaire. Quel est ce processus ?

Exercice 3 On considère le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$X_t \quad = \quad a + bt + S_t + u_t$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $(S_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une fonction périodique de période 2 et $(u_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc (faible) de variance σ^2. On suppose que le modèle est identifiable.

1. Proposer un opérateur moyenne mobile M tel que le processus $Y = MX$ n'ait plus de partie périodique et donner l'expression de Y_t pour $t\in\mathbb{Z}$.
2. On définit le processus différencié $Z = (I-L)Y$. Donner l'expression de Z_t. Montrer que Z est stationnaire et calculer sa fonction d'autocorrélation.

Exercice 4 Soit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus $ARMA(p,q)$. Montrer que le processus défini par $U_t = (I-L)X_t = X_t - X_{t-1}$ est un processus $ARMA(p,q+1)$ et exprimer ses coefficients en fonction de ceux de X_t.