



Processus stochastiques et produits dérivés

Master 2 Probabilités et Finance UPMC-X

emmanuel.gobet@polytechnique.edu

PLAN DU COURS

Ch. I Introduction to Financial markets, Black-Scholes formula, market conventions

Ch. II Some alternatives to lognormal modeling

Ch. III Back to hedging risks

Ch. IV Hedging risk with several assets in the same currency market

Ch. V Foreign Exchanges

Ch. VI Introduction to Cryptocurrency Market Structure (Clara Medalie)

Ch. VII Interest rate (Nicole El Karoui)

TD avec Wanqing Wang

SUPPORTS DE COURS

Master PROBABILITE et FINANCE

Université Pierre et Marie Curie, Ecole Polytechnique,
Année 2012-2013

Risques de marché et Produits dérivés :
Couverture dynamique et Calibration :

Nicole EL KAROUI



email : elkaroui@gmail.com

L'essentiel du cours

- Tout cela dans le moodle de l'X (avec feuilles d'exercice)
-  Utilisation personnelle, ne pas diffuser.

Nicole El Karoui - Emmanuel Gobet

Les outils stochastiques des marchés financiers

Une visite guidée
de Einstein à Black-Scholes



LES ÉDITIONS DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quelques rappels de
base



PLAN DU CHAPITRE I (SEMAINE 1- DÉBUT SEMAINE 2)

1. Introduction to risk management : actors, products, data, risks
2. Valuation without model, no arbitrage and static replication, Carr ?s formula
3. Fair pricing in discrete time-space market
4. Continuous-time market with log-normal dynamics (risk management, dynamic portfolio, vanilla option)
5. Black-Scholes formula, valuation PDE, computation of greeks



I.A INTRODUCTION À LA GESTION DES RISQUES

UN PEU D'HISTOIRE DES PRODUITS DÉRIVÉS (CONTRATS FINANCIERS)

- Au **XIV^e siècle av. JC** (sous le pharaon Akhénaton) : **achat et vente à terme de blés**.
- Au **VII^e siècle av. JC** : Thalès de Millet **premier "grand spéculateur"** en anticipant sur les récoltes abondantes d'olive.
- Les **Romains** finançaient les grands travaux par la **vente d'obligations** (*dette souveraine*).
- Au **XVII^e siècle** en Hollande : commerce actif de bulbes de tulipe.
Contrats garantissant le prix de vente des tulipes au printemps suivant.
- Au **XVII^e siècle, marchés à terme** sur le riz au Japon, ou sur le blé et le bétail aux USA dès le XIX^e siècle.
- Jusque dans la fin des années 60, essentiellement **produits dérivés sur matières premières et agricoles**.



BOULEVERSEMENT DES ANNÉES 70

1971. Abandon du système Bretton Woods (parité or et \$ US, stabilité des changes).

- ➡ Déséquilibres macro-économiques
 - ➡ Grandes variations des taux d'intérêt et taux de change

Déréglementation des marchés financiers, volonté de mondialisation, chocs pétroliers... .

- Risques accrus des entreprises.

1973. **Création des marchés d'options** à Chicago en 1973, contrats à terme sur taux d'intérêt en 1977, LIFFE (Londres) en 1982, MATIF (Paris) en 1986...

2009 Premières transactions en Bitcoin

17 août 2010 : Le bitcoin vaut 0,06 € .

Record à plus de 54000€ en avril 2021.

TAUX DE RÉFÉRENCE (OCTOBRE 2011)



LES MARCHÉS

- Important élément de la vie quotidienne des gens (fonds de pension) et des financements des entreprises
- Accroissement important de la participation de petits investisseurs (e-business, Fintech)

INNOVATION FINANCIÈRE

Echange et transfert de risques.

Définition. Un *produit dérivé* est un *produit financier*, défini à partir d'un autre produit financier plus simple appelé *sous-jacent* (une action, un indice, une devise, une matière première, un métal, une céréale ou un taux d'intérêt ...).

Exemples dans notre quotidien : prêt à taux fixe ou variable, placements proposés par les banques de détail, Plan d'Epargne Logement...

 Depuis 20 ans, les sous-jacents ont été choisis comme des indices météo, des défaiillances d'entreprise, diverses créances (prêts, cartes bancaires ...)

Montant des notionels des produits dérivés (OTC) par marchés et par instruments

SOURCE : www.bis.org (Bank for International Settlements)

En Milliards de \$

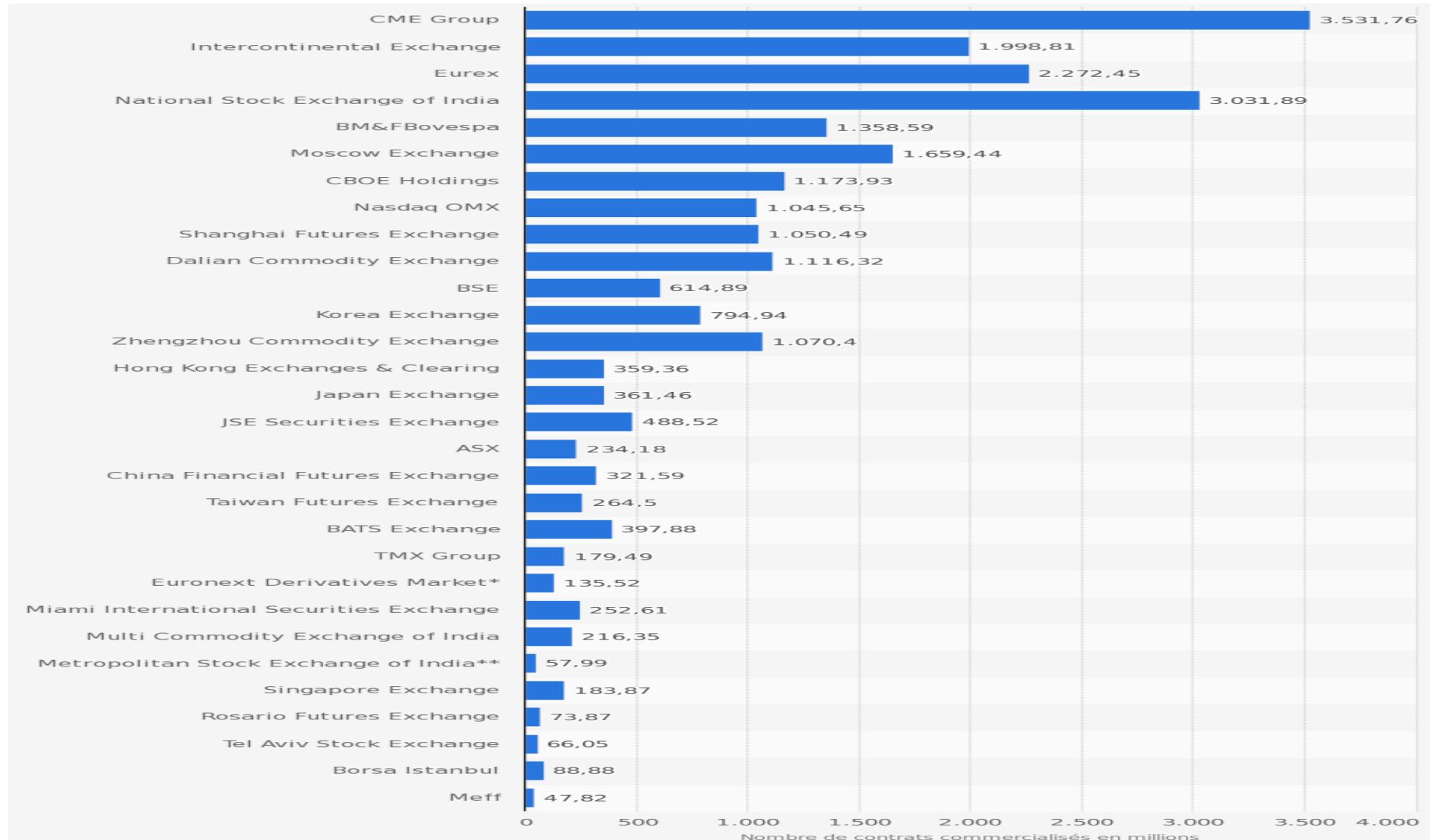
Pour comparaison, PIB 2010

- France \approx 2600 Milliards de \$
- USA \approx 14600 Milliards de \$
- Europe \approx 16100 Milliards de \$
- **Monde \approx 62000 Milliards de \$**

SOURCE : FMI.

Risk Category / Instrument	Notional amounts outstanding				
	Jun 2006	Dec 2006	Jun 2007	Dec 2007	Jun 2008
Total contracts	370,178	414,845	516,407	595,341	683,725
Foreign exchange contracts	38,127	40,271	48,645	56,238	62,983
Forwards and forex swaps	19,407	19,882	24,530	29,144	31,966
Currency swaps	9,696	10,792	12,312	14,347	16,307
Options	9,024	9,597	11,804	12,748	14,710
Interest rate contracts	262,526	291,582	347,312	393,138	458,304
Forward rate agreements	18,117	18,668	22,809	26,599	39,370
Interest rate swaps	207,588	229,693	272,216	309,588	356,772
Options	36,821	43,221	52,288	56,951	62,162
Equity-linked contracts	6,782	7,488	8,590	8,469	10,177
Forwards and swaps	1,430	1,767	2,470	2,233	2,657
Options	5,351	5,720	6,119	6,236	7,520
Commodity contracts	6,394	7,115	7,567	8,455	13,229
Gold	456	640	426	595	649
Other commodities	5,938	6,475	7,141	7,861	12,580
Forwards and swaps	2,188	2,813	3,447	5,085	7,561
Options	3,750	3,663	3,694	2,776	5,019
Credit default swaps	20,352	28,650	42,580	57,894	57,325
Single-name instruments	13,873	17,879	24,239	32,246	33,334
Multi-name instruments	6,479	10,771	18,341	25,648	23,991
Unallocated	35,997	39,740	61,713	71,146	81,708

Principaux échanges de produits dérivés dans le monde en 2015, par nombre de contrats de commercialisés (en millions) - SOURCE : Futures Industry Association



Exemple : option d'achat (*Call*). Air France-KLM a des recettes en € et des dépenses en \$, et un bilan en € .

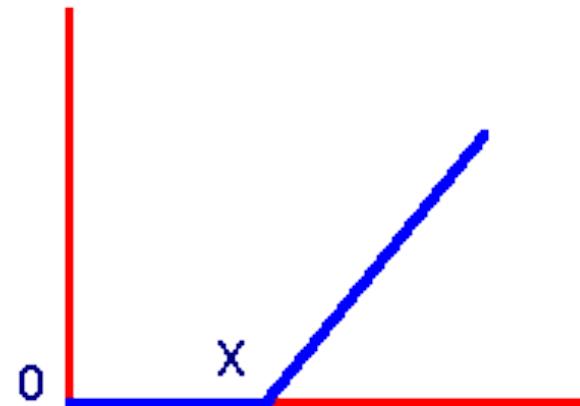
?

Comment **se protéger contre** l'appréciation du Dollar par rapport à l'Euro au 31 décembre 2013 ?

► La banque lui vend une **assurance = option d'acheter le \$ à $K = 0.75$ € , à exercer à $T=31/12/2013$** . Que se passe t'il au 31/12/2013 ?

1. Si $\text{Dollar/Euro} < 0.75$, pas d'intérêt à exercer l'option.
2. Sinon, exercice et équivalent d'un gain $\text{Dollar/Euro} - K$.

En résumé, si $X = \text{taux de change Dollar/Euro}$, option donne un gain $\max(X_T - K, 0)$.



- ?
- Quel est le coût (la **prime**) de cette assurance ?
- ?
- AF-KLM transfert le risque vers la banque. **Comment gérer ce risque ?**

?

A la différence des assurances, pas de diversification sur les nombreux assurés.



CALL/PUT SUR CAC40 ÉCHÉANCE 20 JUIN 2014

Cotation du 2 octobre 2013 : CAC40 = 4155.

- OTM = Out-The-Money
- ATM = At-The-Money
- ITM = In-The-Money.

Strike	3500	3700	3800	3900	3950	4000	4050
	Call ITM						
Dernier cours	621,68	466,8	394,99	328,19	296,73	266,93	241,23
Dernier cours	87,72	132,45	160,45	193,45	211,9	232	256,2
	Put OTM						
Strike	4100	4150	4200				
	Call ATM	Call ATM	Call ATM				
Dernier cours	214,35	188,95	166,2				
Dernier cours	279,22	303,73	330,88				
	Put ATM	Put ATM	Put ATM				
Strike	4250	4300	4350	4400	4500	4600	4800
	Call OTM						
Dernier cours	145,25	126,05	108,55	92,85	66,4	46,15	21
Dernier cours	359,83	390,53	422,94	457,14	530,5	610,05	784,51
	Put ITM						

DONNÉES EUREX : OPTIONS SUR EURO STOXX 50 (INDICE À 3400 LE 24/09/2018)



Eurex Exchange Products Equity index derivatives STOXX® indexes Blue Chip

EURO STOXX 50® Index Options (OESX)

Product ISIN DE0009652396 Currency EUR
Underlying ISIN EU0009658145

Latest

Prices/Quotes

Call Put Oct 2018

Displayed data is 15 minutes delayed. Last trade: Sep 24, 2018 4:25:30 PM

Strike price	Vers. num.	Opening price	High	Low	Bid price	Bid vol	Ask price	Ask vol	Diff. to prev. day last	Last price	Date	Time	Daily settlement	Traded contracts	Traded contracts Price
10,000.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.10	1,350	+0.00%	0.10	0.10	09/21/2018	18:16:02	0.10	0	
6,000.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.10	1,618	+0.00%	0.10	0.10	09/21/2018	18:16:02	0.10	0	
4,050.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.20	4,032	+0.00%	0.10	0.10	09/21/2018	18:16:02	0.10	0	
4,000.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.20	4,032	+0.00%	0.10	0.10	09/21/2018	18:16:02	0.10	0	
3,950.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.20	4,032	+0.00%	0.10	0.10	09/21/2018	18:16:02	0.10	0	
3,925.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.20	4,032	+0.00%	0.10	0.10	09/21/2018	18:16:02	0.10	0	
3,900.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.20	4,162	+0.00%	0.10	0.10	09/21/2018	18:16:02	0.10	0	
3,875.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.20	4,136	+0.00%	0.10	0.10	09/21/2018	18:16:02	0.10	0	
3,850.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.20	4,157	+0.00%	0.10	0.10	09/21/2018	18:16:02	0.10	0	
3,825.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.20	4,896	+0.00%	0.10	0.10	09/21/2018	18:16:02	0.10	0	
3,800.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.20	3,191	+0.00%	0.10	0.10	09/21/2018	18:16:02	0.10	20	
3,775.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	n.a.	0.20	3,115	-50.00%	0.10	0.10	09/21/2018	18:16:02	0.10	0	
3,750.00	0	0.20	0.20	0.20	n.a.	0.20	2,668	+100.00%	0.20	0.20	09/24/2018	12:51:51	0.10	1	
3,725.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	0.10	250	0.20	1,483	-66.67%	0.10	09/21/2018	18:16:02	0.10	10	
3,700.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	0.10	3,969	0.30	3,126	-33.33%	0.20	09/21/2018	18:16:02	0.20	1,155	
3,675.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	0.20	289	0.30	1,000	-25.00%	0.30	09/21/2018	18:16:02	0.30	2,663	
3,650.00	0	0.40	0.40	n.a.	0.20	4,297	0.40	2,188	-20.00%	0.40	09/24/2018	16:23:23	0.40	1,603	
3,625.00	0	0.50	0.60	0.50	0.40	731	0.50	665	-28.57%	0.50	09/24/2018	16:23:18	0.70	60	
3,600.00	0	1.00	0.80	0.60	0.50	800	0.389	-27.27%	0.80	0.80	09/24/2018	16:23:13	1.10	529	
3,575.00	0	1.50	1.60	1.10	1.00	1,865	1.20	2,341	-31.58%	1.30	09/24/2018	16:23:08	1.90	1,069	
3,550.00	0	2.70	2.70	1.90	1.80	1,400	2.10	3,053	-38.24%	2.10	09/24/2018	16:13:44	3.40	2,796	
3,525.00	0	5.10	5.20	3.50	3.50	245	3.70	1	-37.10%	3.90	09/24/2018	16:18:37	6.20	5,086	
3,500.00	0	9.00	9.20	6.60	6.60	632	6.90	300	-33.33%	7.20	09/24/2018	16:23:43	10.80	5,127	
3,475.00	0	15.50	15.50	11.80	11.80	281	12.20	301	-27.37%	13.00	09/24/2018	15:53:21	17.90	5,875	
3,450.00	0	24.70	24.70	19.00	19.50	689	20.10	366	-25.81%	20.70	09/24/2018	16:21:03	27.90	3,856	
3,425.00	0	36.00	36.50	29.50	30.20	458	30.90	212	-23.59%	31.10	09/24/2018	16:25:30	40.70	1,791	
3,400.00	0	50.10	50.10	43.70	43.60	476	44.50	212	-14.97%	47.70	09/24/2018	15:47:17	56.10	648	
3,375.00	0	65.00	65.80	65.00	59.30	150	61.10	252	-11.80%	65.00	09/24/2018	11:00:13	73.70	6	
3,350.00	0	78.40	78.40	78.40	76.20	150	79.40	150	+26.53%	93.00	09/24/2018	15:40:12	93.00	1,168	
3,325.00	0	102.70	102.70	102.70	95.50	150	99.50	150	-9.67%	102.70	09/24/2018	11:20:04	113.70	3	

3,300.00	0	125.10	125.10	125.10	116.20	150	121.00	150	-7.61%	125.10	09/24/2018	10:41:05	135.40	1
3,275.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	137.90	150	143.20	150	+17.57%	157.90	09/21/2018	18:16:02	157.90	7
3,250.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	160.50	150	166.10	150	+15.57%	181.10	09/21/2018	18:16:02	181.10	0
3,225.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	183.60	150	189.50	150	+13.97%	204.80	09/21/2018	18:16:02	204.80	7
3,200.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	207.20	150	213.30	150	+12.54%	228.80	09/21/2018	18:16:02	228.80	0
3,175.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	231.20	150	237.40	150	+11.40%	253.10	09/21/2018	18:16:02	253.10	0
3,150.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	255.50	150	261.80	150	+10.47%	277.60	09/21/2018	18:16:02	277.60	3
3,125.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	279.90	150	286.30	150	+9.61%	302.20	09/21/2018	18:16:02	302.20	0
3,100.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	304.50	150	310.90	150	+8.86%	326.80	09/21/2018	18:16:02	326.80	0
3,075.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	329.10	150	335.60	150	+8.22%	351.50	09/21/2018	18:16:02	351.50	0
3,050.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	353.80	150	360.30	150	+7.67%	376.30	09/21/2018	18:16:02	376.30	0
3,025.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	378.50	150	385.10	150	+7.16%	401.10	09/21/2018	18:16:02	401.10	0
3,000.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	403.30	150	409.90	150	+6.72%	425.90	09/21/2018	18:16:02	425.90	232
2,975.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	428.10	150	434.80	150	+6.35%	450.80	09/21/2018	18:16:02	450.80	4
2,950.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	453.00	150	459.60	150	+6.02%	475.70	09/21/2018	18:16:02	475.70	0
2,925.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	477.80	150	484.50	150	+5.68%	500.50	09/21/2018	18:16:02	500.50	0
2,900.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	502.70	150	509.40	150	+5.40%	525.40	09/21/2018	18:16:02	525.40	0
2,875.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	527.60	150	534.30	150	+5.16%	550.30	09/21/2018	18:16:02	550.30	0
2,850.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	552.50	150	559.30	150	+4.93%	575.20	09/21/2018	18:16:02	575.20	0
2,825.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	577.50	150	584.20	150	+4.69%	600.10	09/21/2018	18:16:02	600.10	0
2,800.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	602.40	150	609.10	150	+4.51%	625.10	09/21/2018	18:16:02	625.10	0
2,775.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	627.30	150	634.10	150	+4.33%	650.00	09/21/2018	18:16:02	650.00	0
2,750.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	652.30	150	659.00	150	+4.18%	675.00	09/21/2018	18:16:02	675.00	0
2,725.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	677.30	150	684.00	150	+4.03%	699.90	09/21/2018	18:16:02	699.90	0
2,700.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	702.20	150	709.00	150	+3.88%	724.90	09/21/2018	18:16:02	724.90	2
2,675.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	727.20	150	733.90	150	+3.76%	749.90	09/21/2018	18:16:02	749.90	0
2,650.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	752.20	150	758.90	150	+3.62%	774.80	09/21/2018	18:16:02	774.80	0
2,625.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	777.10	150	783.90	150	+3.52%	799.80	09/21/2018	18:16:02	799.80	0
2,600.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	802.10	150	808.80	150	+3.41%	824.80	09/21/2018	18:16:02	824.80	0
2,575.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	827.10	150	833.80	150	+3.31%	849.80	09/21/2018	18:16:02	849.80	0
2,550.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	852.10	150	858.80	150	+3.21%	874.80	09/21/2018	18:16:02	874.80	0
2,525.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	877.10	150	883.80	150	+3.12%	899.70	09/21/2018	18:16:02	899.70	0
2,500.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	902.00	150	908.80	150	+3.03%	924.70	09/21/2018	18:16:02	924.70	0
2,475.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	927.00	150	933.70	150	+2.95%	949.70	09/21/2018	18:16:02	949.70	0
2,450.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	952.00	150	958.70	150	+2.87%	974.70	09/21/2018	18:16:02	974.70	0
2,425.00	0	n.a.	n.a.	n.a.	977.00	150	983.70	150	+2.80%	999				

DEUX GRANDES CATÉGORIES DE PRODUIT DÉRIVÉ

- **Contrat à terme** : acheteur et vendeur s'entendent pour échanger à une date fixée un sous-jacent à un prix fixé (payé dans le futur).
 - Exemples : *forwards, futures, swaps*. **Marchés listés**.
 - **Risques symétriques.**
 -  Risque de contrepartie.
- **Contrat optionnel** ou **option** : assurance contre les mouvements défavorables du prix du sous-jacent (prime payée à signature).
 - **Risques dissymétriques.**
 - Options classiques dites *vanilles* (Call/Put), cotées sur le marché.
 - Options exotiques et structuration : flux "path-dependent". **Marchés de gré à gré (OTC=Over The Counter)**.
 - ➡ Mathématiques, processus stochastiques = discipline de référence en risk-management (hedging/pricing) via une **gestion infinitésimale des risques**.



Quelle utilisation, quelle utilité des produits dérivés ?

- Couverture du risque, transfert de risques des agents économiques vers les banques, économie de fonds de propre, spécialisation.
- Donne aux agents économiques un accès au marché qu'ils n'ont pas spécifiquement.
- Spéculation, liquidité accrue, fort effet de levier (utilisés par les sociétés de gestion).
- Banques utilisent leurs compétences spécifiques pour gérer ces nouveaux risques, en espérant une certaine rentabilité.



PARFOIS, TRANSFERT DES RISQUES HORS SPHÈRE FINANCIÈRE

Le Monde (5 novembre 2005) : **Axa se décharge d'une partie de ses risques sur l'assurance automobile**

"... Jusqu'ici, les assureurs recourraient à ce type de pratiques pour les seules catastrophes naturelles. Le rôle traditionnellement dévolu aux banquiers et aux assureurs consiste à financer et à assurer l'économie, donc à prendre leur part de risque, contre une rémunération. Or, depuis déjà quelques années, ces acteurs ont tendance à se décharger de ces risques de défaut de solvabilité sur les marchés financiers, en les transformant en titres négociables (notamment dans des montages dits de "titrisation"). L'opération d'Axa, annoncée jeudi 3 novembre, en est une illustration spectaculaire. Et innove dans le monde de l'assurance..."



Le Monde (1 juin 2006) : L'Unedic "titrise" 1.5 milliard d'euros pour améliorer ses finances

"... Cette technique sophistiquée permettra de transformer les futures cotisations d'assurance-chômage en titres financiers vendus aux investisseurs. C'est une première dans l'histoire des finances publiques.

L'Unedic, le régime d'assurance-chômage géré paritairement par les syndicats et le patronat, a mis en place, le 22 mai, une opération de titrisation de 1.5 milliard d'euros, un montant très élevé sur le marché français. Derrière le terme barbare de titrisation, se cache un mode de financement moderne, habituellement prisé par les grandes entreprises privées, notamment les assureurs. Il consiste à transformer des créances en titres financiers, vendus aux investisseurs privés sur les marchés.

Qui détient le risque in fine ?



wooclap

How to participate?



WEB

1

Connect to www.wooclap.com/M2PF

2

You can participate



SMS

1

Not yet connected? Send **@M2PF** to **06 44 60 96 62**

2

You can participate