

Modèles financiers en assurance / Mai 2018

Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Thème : Passage de la probabilité historique à la probabilité risque-neutre

Les différentes questions nécessitent des développements argumentés et structurés pour répondre de manière détaillée et précise.

Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la notation. Une copie mal écrite ne sera pas corrigée.

On considère le modèle de taux mono-factoriel de Vasicek dans lequel on suppose que le taux court instantané suit la dynamique suivante sous la probabilité historique :

$$dr_t = k(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

On note $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{k}$ et $r_\infty(\lambda) = b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2k^2}$. On rappelle que le prix d'un zéro-coupon de maturité T s'écrit, à la date t :

$$P(r_t, T-t) = \exp\left(\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k}(r_\infty(\lambda) - r_t) - (T-t)r_\infty(\lambda) - \frac{\sigma^2}{4k^3}(1-e^{-k(T-t)})^2\right).$$

Enfin, on note $\delta(t) = \exp\left(-\int_0^t r(u)du\right)$

Question n°1 (2 points) : Quelle est la dynamique du taux court instantané sous la probabilité risque-neutre ? Que représente le paramètre λ ?

Question n°2 (3 points) : Montrez que $g(\lambda) = P(r_t, T-t)$ est une fonction croissante de λ .

Question n°3 (2 points) : Quel est le lien entre $P(t, T) = P(r_t, T-t)$ et $\delta(t)$? Pourquoi le prix du ZC ne dépend que de la dernière valeur du taux court ?

Question n°4 (2 points) : À quelle valeur de λ est associée $E_t^P\left(\exp\left(-\int_t^T r(u)du\right)\right)$?

Compte tenu du résultat ci-dessus, quel devrait être le signe de λ ?

Question n°5 (3 points) : On suppose que l'on dispose d'un historique du taux court et de prix de ZC de différentes maturités. Comment estimeriez-vous les paramètres (k, b, σ, λ) ? Est-il possible d'estimer ces quatre paramètres avec seulement des prix ?

On considère maintenant un contrat d'assurance dont les flux de trésorerie sont décrits par le processus $(F_t, t \geq 1)$. On suppose que ces flux ne dépendent pas de la performance de l'actif.

Question n°6 (4 points) : Rappelez l'expression de la meilleure estimation des provisions à la date t , $BE(t)$, en fonction de F et de δ . Vous détaillerez les différentes probabilités en jeu et leur lien avec la nature des risques affectant les flux actualisés. Donnez un exemple de risque ni mutualisable ni répliable et indiquez comment ce type de risque est pris en compte dans les provisions techniques prudentielles.

Question n°7 (3 points) : dans le cadre d'un modèle ORSA, vous souhaitez avoir une information sur la distribution de la variable aléatoire $BE(t)$; dans un premier temps, on se limite à l'incertitude induite par les risques financiers. Décrivez un algorithme qui permette d'avoir une distribution empirique de $BE^f(t) = E^{P^a}(BE^f(t))$. Est-il possible d'avoir une expression analytique de la distribution de $BE^f(t)$? D'avoir une approximation par une loi simple raisonnable ?

Question n°8 (1 point) : Comment faire pour généraliser la démarche ci-dessus au cas où on ne néglige plus le risque d'assurance ?