© Théo Jalabert

Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2018-2019 - Première session
17 janvier 2019 - Durée : 2 heures
Documents et calculatrices ne sont pas autorisés.

Question de cours

Dans le modèle de Bühlmann, avec les notations habituelles,

(1) donnez les expressions de la prime de crédibilité et du facteur de crédibilité ;

(2) donnez une interprétation de α, τ^2, σ^2 et μ_0 ;

(3) déduisez-en le sens de variation de la prime de crédibilité en fonction de τ^2, σ^2 et le nombre de périodes d'observation n.

Problème

Considérons un portefeuille d'assurance dans lequel le profil de risque d'un assuré i est représenté par le couple (θ_i, λ_i) :

— θ_i représente la partie non-observable *a priori* du profil de risque ;

— λ_i représente la partie *a priori* observable du profil de risque (ex : la zone d'habitation).

On modélise l'hétérogénéité (non observée *a priori* par l'assureur) par la variable aléatoire Θ et la partie observable *a priori* par la variable Λ. Θ et Λ sont supposées indépendantes. Un assuré de profil de risque (θ, λ) produit un nombre de sinistres par an avec la distribution :

$$\Pr\left[N = k | \Theta = \theta, \Lambda = \lambda\right] = e^{-\theta\lambda}\frac{(\theta\lambda)^k}{k!}, k \in \mathbb{N}.$$

L'assureur estime que les profils de risque *a priori* non-observables sont distribués selon une loi Gamma de paramètre (α, β), i.e.

$$u(\theta) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}, \theta \geq 0.$$

De plus,

$$\Lambda = \left\{ \begin{array}{ll} \lambda_r & \text{si l'assuré vit en zone rurale } (w_r) \,; \\ \lambda_u & \text{si l'assuré vit en zone urbaine } (w_u = 1 - w_r). \end{array} \right\}$$

© Théo Jalabert

Le coût des sinistres est supposé indépendant du nombre de sinistres et l'espérance mathématique du coût d'un sinistre est normalisée à 1.

Partie I

1. Quelle est la prime individuelle correcte d'un assuré de profil de risque (θ, λ) ?

2. Déterminez la prime collective.

3. Montrez que les familles de distribution poisson et gamma sont conjuguées.

On se place à présent après n années d'observations $(k_1, ..., k_n)$ d'un assuré vivant en zone urbaine.

4. Déterminez la densité *a posteriori* de Θ pour cet assuré.

5. Calculez la prime de Bayes pour la $(n+1)$-ème année pour ce même assuré.

6. Calculez la prime de Bühlmann $(n+1)$-ème année pour ce même assuré.

7. Comparez les primes de Bayes et de Bühlmann et commentez.

Partie II

L'assureur souhaite mettre en place une échelle bonus-malus à trois degrés (numérotés 1 à 3) avec le fonctionnement suivant :

- une année sans sinistre fait descendre d'un degré dans l'échelle,
- un sinistre ou plus au cours de l'année fait remonter au niveau 3.

1. Donnez la matrice de transition de la chaîne de Markov décrivant le parcours d'un assuré de profil de risque (θ, λ) dans l'échelle.

2. Donnez la distribution stationnaire de cette chaîne et précisez son temps d'atteinte.

3. Donnez la distribution stationnaire du portefeuille.

4. Quelles primes relatives proposeriez-vous d'associer aux trois degrés de l'échelle en utilisant la méthode de Norberg ?

5. Calculez l'élasticité de la prime en régime stationnaire pour un assuré vivant en zone urbaine, de profil de risque (θ, λ_u).

© Théo Jalabert

Questions de cours

Dans le modèle de Bühlmann avec notat° habituelles.

1) Prime de crédibilité : $\widehat{\mu(\theta_i)}^{hom} = \alpha\bar{X} + (1-\alpha)\mu_0$

Facteur de crédibilité : $\alpha = \frac{m}{m+\frac{\sigma^2}{\tau^2}}$ avec $\tau^2 = \mathbb{V}[\mu(\Theta)]$

$\sigma^2 = \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]$

$\mu(\theta) = \mathbb{E}[X_j \mid \Theta = \theta]$

2) Facteur de crédibilité $\alpha = \frac{m}{m+\frac{\sigma^2}{\tau^2}}$

Il s'agit de l'importance que l'on accorde aux observations.
Il croît avec le nb d'années d'observat° m.
Il décroît avec la variabilité interne du risque $\left(\frac{\sigma}{\mu_0}\right)$
Il croît avec l'hétérogénéité du portefeuille $\left(\frac{\tau}{\mu_0}\right)$

Paramètres de structure :

$\sigma^2 = \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)]$ avec $\sigma^2(\theta) = \mathbb{V}[X_j \mid \Theta = \theta]$
$\tau^2 = \mathbb{V}[\mu(\Theta)]$ avec $\mu(\theta) = \mathbb{E}[X_j \mid \Theta = \theta]$

σ^2 est une mesure de la variabilité interne du risque $\longrightarrow \frac{\sigma^2}{m}$ est l'erreur quadratique moyenne de $\bar{X}$
τ^2 est une mesure de l'hétérogénéité du portefeuille, c'est aussi l'erreur quadratique moyenne de μ_0

Prime collective μ_0

$\mu_0 = \mathbb{E}[\mu(\theta)]$

Il s'agit du montant moyen de sinistre espéré par risque sur l'ensemble du portefeuille, c'est le meilleur estimateur a priori.

3) $\widehat{\mu(\theta_i)}^{hom} = \alpha(\bar{X} - \mu_0) + \mu_0$ $\quad \alpha = \frac{m}{m+\frac{\sigma^2}{\tau^2}} = \frac{1}{1+\frac{1}{m}\frac{\sigma^2}{\tau^2}}$

$\Rightarrow \widehat{\mu(\theta_i)}^{hom}$: $\nearrow$ avec τ^2
$\nearrow$ avec m
$\searrow$ avec σ^2

Problème :

Partie 1 :

1) La prime individuelle d'un assuré de p.d.r (θ, λ) est :

$$P^{ind} = \mathbb{E}[N \mid \Theta = \theta, \Lambda = \lambda] = \theta\lambda$$

Car $P(N = k \mid \Theta = \theta, \Lambda = \lambda) = e^{-\theta\lambda}\frac{(\theta\lambda)^k}{k!}$ $\quad k \in \mathbb{N}$

© Théo Jalabert

2) $P^{col} = \mathbb{E}[N] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[N \mid \Theta = \theta, \Lambda = \lambda]] = \mathbb{E}[\Theta \Lambda]$

$= \mathbb{E}[\Theta]\mathbb{E}[\Lambda]$ car $\Theta \perp \Lambda$

$$\mathbb{E}[\Theta] = \int \theta\, u(\theta)\, d\theta$$

$$= \int \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^\alpha e^{-\beta\theta} d\theta = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \times \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\beta^{\alpha+1}} \underbrace{\int \frac{\beta^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)} \theta^{(\alpha+1)-1} e^{-\beta\theta} d\theta}_{=1}$$

$$= \frac{\alpha}{\beta} \quad \text{car } \Gamma(\alpha+1) = \alpha\Gamma(\alpha)$$

$$\mathbb{E}[\Lambda] = \lambda_r \omega_r + \lambda_u (1 - \omega_r)$$

$$\Longrightarrow P^{col} = \mathbb{E}[\Theta]\mathbb{E}[\Lambda]$$

$$= \frac{\alpha}{\beta}[\lambda_r \omega_r + \lambda_u(1-\omega_r)]$$

3) $u(\theta \mid \underline{N}) \propto \prod_{i=1}^{m} P(N_i = k_i \mid \Theta = \theta, \Lambda = \lambda_i)\, u(\theta)$

$$\propto \prod_{i=1}^{m} \left(e^{-\theta\lambda_i} \frac{(\theta\lambda_i)^{k_i}}{k_i!}\right) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$$

$$\propto e^{-\theta \sum_{i=1}^m \lambda_i}\, \theta^{\sum_{i=1}^m k_i}\, \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}$$

$\Theta \mid \underline{N} \sim \Gamma(\alpha', \beta')$ avec $\alpha' = \alpha + \sum_{i=1}^m k_i$

$\beta' = \beta + \sum_{i=1}^m \lambda_i$

Donc les familles de distribut° Poisson et Gamma sont conjuguées.

hyp : assuré vit en zone urbaine $\longrightarrow \lambda_u$

4) $\Theta \mid \underline{N} \sim \Gamma\Big(\underbrace{\alpha + \sum_{i=1}^m k_i}_{\alpha'}, \underbrace{\beta + m\lambda_u}_{\beta'}\Big)$

$$u(\theta \mid \underline{N}) = \frac{(\beta + m\lambda_u)^{\alpha + \sum_{i=1}^m k_i}}{\Gamma(\alpha + \sum_{i=1}^m k_i)}\, \theta^{(\alpha + \sum_{i=1}^m k_i) - 1}\, e^{-(\beta + m\lambda_u)\theta}$$

5) $\mathbb{E}[N_{m+1} \mid \underline{N}] = \int_0^\infty \mathbb{E}[N_{m+1} \mid \Theta = \theta, \Lambda = \lambda_u]\, u(\theta \mid \underline{N})\, d\theta$

$$= \int_0^\infty \theta\lambda_u \times \frac{\beta'^{(\alpha')}}{\Gamma(\alpha')} \theta^{\alpha'-1} e^{-\beta'\theta} d\theta$$

$$= \lambda_u \frac{\beta'^{(\alpha')}}{\Gamma(\alpha')} \underbrace{\int_0^\infty \theta^{(\alpha'+1)-1} e^{-\beta'\theta} d\theta}_{\text{moyen d'une } \Gamma(\alpha'+1,\, \beta')}$$

$$= \lambda_u \frac{\beta'^{(\alpha')}}{\Gamma(\alpha')} \frac{\Gamma(\alpha'+1)}{\beta'^{(\alpha'+1)}}$$

$$= \lambda_u \frac{\alpha'}{\beta'} = \lambda_u \frac{\alpha + \sum_{i=1}^m k_i}{\beta + m\lambda_u}$$

6) $\tau^2 = \mathbb{V}[\mu(\Theta)] = \mathbb{V}[\Theta\lambda_u] = \lambda_u^2 \mathbb{V}[\Theta] = \lambda_u^2 \frac{\alpha}{\beta^2}$

$\sigma^2 = \mathbb{E}[\sigma^2(\Theta)] = \mathbb{E}[\Theta\lambda_u] = \lambda_u \frac{\alpha}{\beta} \Longrightarrow \frac{\sigma^2}{\tau^2} = \frac{\beta}{\lambda_u}$

$\sigma^2(\Theta) = \mathbb{V}[N \mid \Theta = \theta, \Lambda = \lambda] = \theta\lambda$

© Théo Jalabert

$$\alpha = \frac{m}{m+\frac{\sigma^2}{\tau^2}} = \frac{m}{m+\frac{\beta}{\lambda_u}}$$

$$\widehat{\mu(\theta_i)}^{Bam} = \alpha \bar{X} + (1-\alpha)\mu_0$$

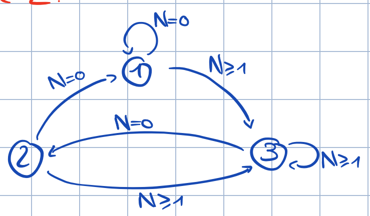
$$= \frac{m}{m+\frac{\beta}{\lambda_u}} \cdot \frac{\sum_{i=1}^{m} k_i}{m} + \frac{\beta/\lambda_u}{m+\beta/\lambda_u} \frac{\alpha}{\beta} \lambda_u$$

$$= \lambda_u \frac{\alpha + \sum_{i=1}^{m} k_i}{\beta + m\lambda_u}$$

7) La prime de Bayes et de Bühlmann sont égales. Ceci vient du fait que l'on a choisit des lois conjuguées.

Partie 2 :

1)



$$P(N=0 \mid \Theta=\theta, \Lambda=\lambda) = e^{-\theta\lambda}$$

$$P(N\geq 1 \mid \Theta=\theta, \Lambda=\lambda) = 1-e^{-\theta\lambda}$$

$$P_\theta = \begin{pmatrix} e^{-\theta\lambda} & 0 & 1-e^{-\theta\lambda} \\ e^{-\theta\lambda} & 0 & 1-e^{-\theta\lambda} \\ 0 & e^{-\theta\lambda} & 1-e^{-\theta\lambda} \end{pmatrix}$$

2) On cherche π_θ tq $\begin{cases} \pi_\theta' P_\theta = \pi_\theta \\ \pi_\theta' e = 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+b)e^{-\lambda\theta} = a \\ (1-a-b)e^{-\lambda\theta} = b \\ 1-e^{-\theta\lambda} = 1-a-b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1-e^{-\theta\lambda})a = (1-e^{-\theta\lambda})e^{-2\theta\lambda} \\ b = (1-e^{-\theta\lambda})e^{-\theta\lambda} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \pi_\theta' = \begin{pmatrix} e^{-2\theta\lambda} \\ (1-e^{-\theta\lambda})e^{-\theta\lambda} \\ 1-e^{-\theta\lambda} \end{pmatrix}$$

Concernant le temps d'atteinte, on remarque que le rang de P_θ est 2.

$\Rightarrow$ Temps d'atteinte $= 2$.

3) On considère $\Theta \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

$$P(L=\ell) = \int_\Theta P(L=\ell \mid \Theta=\theta)\, u(\theta)\, d\theta$$

$$\Rightarrow P(L=1) = \int_\Theta e^{-2\theta\lambda} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-\beta\theta}\, d\theta.$$

$$= \int_\Theta \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \theta^{\alpha-1} e^{-(\beta+2\lambda)\theta}\, d\theta$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_\Theta \underbrace{\theta^{\alpha-1} e^{-(\beta+2\lambda)\theta}}_{\text{moyen d'une } \Gamma(\alpha, \beta+2\lambda)}\, d\theta$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta+2\lambda)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta+2\lambda}\right)^\alpha$$

© Théo Jalabert

$$\Rightarrow \mathbb{P}(L=2) = \int_\Theta e^{-\theta\lambda}(1-e^{-\theta\lambda})\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}d\theta$$

$$= \int_\Theta \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\underbrace{\theta^{\alpha-1}e^{-(\beta+\lambda)\theta}}_{\text{moyen d'un } \Gamma(\alpha,\beta+\lambda)}d\theta - \int_\Theta \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\underbrace{\theta^{\alpha-1}e^{-(\beta+2\lambda)\theta}}_{\text{moyen d'un } \Gamma(\alpha,\beta+2\lambda)}d\theta$$

$$= \left(\frac{\beta}{\beta+\lambda}\right)^\alpha - \left(\frac{\beta}{\beta+2\lambda}\right)^\alpha$$

$$= \frac{\beta^\alpha(\beta+2\lambda)^\alpha - \beta^\alpha(\beta+\lambda)^\alpha}{(\beta+\lambda)^\alpha(\beta+2\lambda)^\alpha}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(L=3) = \int_\Theta (1-e^{-\theta\lambda})\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}d\theta$$

$$= \int_\Theta \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}d\theta - \int_\Theta \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\underbrace{\theta^{\alpha-1}e^{-(\beta+\lambda)\theta}}_{\text{moyen d'un } \Gamma(\alpha,\beta+\lambda)}d\theta$$

$$= 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+\lambda}\right)^\alpha$$

$\Rightarrow$ La distribution stationnaire de ce portefeuille est donc $\Pi = \begin{pmatrix} \left(\frac{\beta}{\beta+2\lambda}\right)^\alpha \\ \left(\frac{\beta}{\beta+\lambda}\right)^\alpha - \left(\frac{\beta}{\beta+2\lambda}\right)^\alpha \\ 1-\left(\frac{\beta}{\beta+\lambda}\right)^\alpha \end{pmatrix}'$

4) Méthode de Norberg : $\rho_\ell = \mathbb{E}[\Theta \mid L=\ell] = \dfrac{\int \theta u(\theta)\mathbb{P}(L=\ell \mid \Theta=\theta)d\theta}{\int u(\theta)\mathbb{P}(L=\ell\mid\Theta=\theta)d\theta} = \int_\Theta \theta u(\theta \mid L=\ell)d\theta = \int_\Theta \theta \dfrac{\overbrace{\mathbb{P}(L=\ell\mid\Theta=\theta)}^{\pi_\ell(\theta)}u(\theta)}{\underbrace{\mathbb{P}(L=\ell)}_{\pi_\ell}}d\theta$

(L : posit° occupée en régime stationnaire ℓé)

$$\mathbb{P}(L=\ell\mid\Theta=\theta) = \pi_\ell$$

$$\rho_1 = \int_\Theta \theta \frac{e^{-2\theta\lambda}}{\beta^\alpha/(\beta+2\lambda)^\alpha}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}d\theta$$

$$= \int_\Theta \frac{(\beta+2\lambda)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{(\alpha+1)-1}e^{-(\beta+2\lambda)\theta}d\theta$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{\beta+2\lambda}\int_\Theta \underbrace{\frac{(\beta+2\lambda)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\theta^{(\alpha+1)-1}e^{-(\beta+2\lambda)\theta}}_{=f_{\Gamma(\alpha+1,\beta+2\lambda)}(\theta)}d\theta$$

$$= \frac{\alpha}{\beta+2\lambda}$$

$$\rho_2 = \int_\Theta \theta \frac{e^{-\theta\lambda}(1-e^{-\theta\lambda})}{\frac{[\beta^\alpha(\beta+2\lambda)^\alpha-\beta^\alpha(\beta+\lambda)^\alpha]}{(\beta+\lambda)^\alpha(\beta+2\lambda)^\alpha}}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^{\alpha-1}e^{-\beta\theta}d\theta$$

$$= \int_\Theta (1-e^{-\theta\lambda})\frac{1}{(\beta+2\lambda)^\alpha-(\beta+\lambda)^\alpha}\frac{(\beta+\lambda)^\alpha(\beta+2\lambda)^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\theta^\alpha e^{-(\beta+\lambda)\theta}d\theta$$

$$= \frac{1}{(\beta+2\lambda)^\alpha-(\beta+\lambda)^\alpha}\left[\frac{(\beta+2\lambda)^\alpha}{\beta+\lambda}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\int_\Theta \underbrace{\frac{(\beta+\lambda)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\theta^\alpha e^{-(\beta+\lambda)\theta}}_{=f_{\Gamma(\alpha+1,\beta+\lambda)}(\theta)}d\theta - \frac{(\beta+\lambda)^\alpha}{\beta+2\lambda}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)}\int_\Theta \underbrace{\frac{(\beta+2\lambda)^{\alpha+1}}{\Gamma(\alpha+1)}\theta^\alpha e^{-(\beta+2\lambda)\theta}}_{=f_{\Gamma(\alpha+1,\beta+2\lambda)}(\theta)}d\theta\right]$$

$$= \frac{1}{(\beta+2\lambda)^\alpha-(\beta+\lambda)^\alpha}\left[\frac{\alpha(\beta+2\lambda)^\alpha}{\beta+\lambda} - \frac{\alpha(\beta+\lambda)^\alpha}{\beta+2\lambda}\right]$$

$$= \alpha\,\frac{(\beta+2\lambda)^{\alpha+1}-(\beta+\lambda)^{\alpha+1}}{}$$