Théorie des options Examen M1 Actuariat 2017-2018
2 heures

Documents et calculette interdits. Le barême est indiqué à titre indicatif. Tous les exercices sont indépendants. Bon courage !

Questions de cours (5 pts)

1. En utilisant l'approche par absence d'opportunités d'arbitrage, montrer la relation de parité Call-Put.
2.a Rappeler les définitions et les significations du delta (Δ), du gamma (Γ), du thêta (θ) et du rhô (ρ).
2.b Existe-t-il une relation entre $\Delta(Call)$ et $\Delta(Put)$? Et entre $\rho(Call)$ et $\rho(Put)$? Si oui, monter le.
2.c Montrer quelle relation relie le delta, le gamma et le thêta.

Exercice : Complétude et marché discret (5 pts)

On considère un marché monopériodique avec 3 états de la nature possibles. 4 actifs sont échangeables sur ce marché, leurs payoffs dans tous les états de la nature possibles sont donnés par la matrice suivante (actifs en colonnes, états en lignes) :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Le marché est-il complet ? Justifier votre réponse.
2. On suppose que les prix, à $t = 0$, des 4 actifs sont $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = \frac{5}{6}$ et $p_4 = \frac{2}{3}$. Y a-t-il des opportunités d'arbitrage sur ce marché ? Si oui en exhiber une.
3. Quel devrait être le prix de l'actif 2 pour qu'il n'y ait pas d'opportunités d'arbitrage ? On prendra ce prix par la suite.
4. Donner le taux d'intérêt sans risque (discret sur cette période). 20 %
5. Soit X un actif quelconque, de payoffs (x, y, z) dans chacun des états de la nature. Donner la formule donnant son prix en fonction des prix, notés a_1, a_2 et a_3, des trois actifs d'Arrow-Debreu de ce marché.
En déduire une expression liant les probabilités risque-neutre de chacun des états, les prix des actifs d'Arrow-Debreu, et le taux d'intérêt sans risque r.
6. Donnez les prix des 3 actifs d'Arrow-Debreu dans ce marché. En déduire les valeurs des probabilités risque-neutre de chacun des 3 états.

Problème : option Call sur zéro-coupon (10 pts)

On considère une obligation zéro-coupon d'échéance T et on suppose que son cours en t, noté $P(t,T)$, admet dans l'univers risque neutre la dynamique suivante :

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = rdt - \sigma(t,T)dW_t. \qquad (1)$$

La structure de volatilité σ est supposée déterministe, et r est constant. De plus, W est un mouvement brownien standard sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$, et on note $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle.

Partie 1: expression de $P(t,T)$
L'objectif de cette première partie est d'obtenir une expression fermée du prix en t du zéro-coupon de maturité T.

1.a Que vaut $P(t,t)$?
1.b En procédant au changement de variable adéquate et en appliquant le lemme d'Itô, trouver la solution de l'équation (1).
1.c A l'aide des questions précédentes, montrer que

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t (\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t))du - \int_0^t (\sigma(u,T) - \sigma(u,t))dW_u\right). \quad (2)$$

Que remarquez-vous ?

Partie 2: passage à l'univers $s-$forward neutre
L'objectif dans cette seconde partie est de procéder à un changement de probabilité, puis d'obtenir le prix du zéro-coupon dans ce nouvel univers.

On rappelle que l'univers $s-$forward neutre est associé au zéro-coupon d'échéance s, et admet une mesure de probabilité $\mathbb{Q}^s$ définie par le changement de probabilité suivant :

$$\eta_t^s = \left.\frac{d\mathbb{Q}^s}{\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\delta(t)P(t,s)}{P(0,s)}, \quad 0 \leq t \leq s, \quad (3)$$

avec $\delta(t) = e^{-rt}$ est le facteur d'actualisation à la date t.

2.a En utilisant la solution de l'équation (1) trouvée en **1.b**, calculer η_t^s.
2.b A l'aide du théorème de Girsanov, donner l'expression du nouveau mouvement brownien W^s sous $\mathbb{Q}^s$.
2.c En repartant de l'equation (2), exprimer le prix $P(t,T)$ dans les univers $t-$forward neutre et $T-$forward neutre.

Partie 3: pricing de l'option Call
L'objectif dans cette dernière partie est de donner le prix du Call.

On considère un Call européen de maturité t sur un zéro-coupon d'échéance $T > t$ et de prix d'exercice K.
3.a Montrer que

$$C(0,t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\delta(t)P(t,T)\mathbb{1}_{P(t,T)>K}\right] - K\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\delta(t)\mathbb{1}_{P(t,T)>K}\right].$$

3.b En utilisant la question précédente, montrer que

$$C(0,t) = P(0,T)\mathbb{Q}^T(P(t,T) > K) - KP(0,t)\mathbb{Q}^t(P(t,T) > K),$$

où $\mathbb{Q}^T$ est la probabilité $T-$forward neutre, et $\mathbb{Q}^t$ est la probabilité $t-$forward neutre.

3.c Pour finir, déterminer $\mathbb{Q}^T(P(t,T) > K)$ et $\mathbb{Q}^t(P(t,T) > K)$ et en déduire $C(0,t)$.

Exercice : Complétude et marché discret.

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) On a $4C_3 = C_1 + C_2 + C_4 \implies rg(A) \leq 3$

De plus les colonnes 1, 2 et 4 sont linéairement indep $\implies$ marché complet.

2) Stratégie : * Achat de 4 actifs 3
* Vente des actifs 1, 2 et 4

en $t=1$: Valeur du port $= 0$ dans tous les états de la nature.

$\implies$ en $t=0$: gain $= -4 \times \frac{5}{6} + 1 + 2 + \frac{2}{3} = +\frac{1}{3} > 0$

On a donc construit une OA.

3) Pour qu'il n'y ait pas d'OA, il faudrait que :

$$p_2 = 4 \times \frac{5}{6} - 1 - \frac{2}{3} = \frac{5}{3}$$

4) L'actif 3 est sans risque (valeur de en $t=1$).
$\implies$ Par AOA, il doit avoir le même rendement que l'actif sans risque.

Ainsi, $\underbrace{p_3 (1+r)}_{\text{Car taux discret}} = \underbrace{1}_{\text{Valeur de l'actif 3 en } t=1}$

$\iff r = \frac{1}{p_3} - 1 = \frac{1}{5} \implies r = 20\%$

5) * L'actif d'Arrow-Debreu pour l'état 1 a pour payoff $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et prix a_1

* L'actif d'Arrow-Debreu pour l'état 2 a pour payoff $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et prix a_2

* L'actif d'Arrow-Debreu pour l'état 3 a pour payoff $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ et prix a_3

Par AOA, on a que le prix de X respecte $p_X = a_1 x + a_2 y + a_3 z$

Soient q_1, q_2 et q_3 les probas risque-neutre associées aux états 1, 2 et 3

Alors, par définition de la proba risque neutre, on a :

$$p_x(1+r) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\text{payoff de } X]$$

$$\Longleftrightarrow (1+r)(a_1 x + a_2 y + a_3 z) = q_1 x + q_2 y + q_3 z$$

6) Il est clair que $\begin{cases} A_1 = 2C_4 - C_1 \\ A_2 = C_1 - C_4 \\ A_3 = C_3 - C_4 \end{cases}$

$$\Longrightarrow \begin{cases} a_1 = 2p_4 - p_1 = 1/3 \\ a_2 = p_1 - p_4 = 1/3 \\ a_3 = p_3 - p_4 = 1/6 \end{cases}$$

Puis, par définition de la proba risque neutre,

$$\begin{cases} (1+r)\,a_1 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\text{payoff de } A_1] = q_1 \\ (1+r)\,a_2 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\text{payoff de } A_2] = q_2 \\ (1+r)\,a_3 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\text{payoff de } A_3] = q_3 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q_1 = 6/15 \\ q_2 = 6/15 \\ q_3 = 1/5 = 3/15 \end{cases}$$

On a bien $q_1 + q_2 + q_3 = 1$

Problème : option CALL sur zéro-coupon

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r\,dt - \sigma(t,T)\,dW_t$$

Partie 1 : expression de $P(t,T)$

1) a) $P(t,t)$ correspond au prix en t d'un zéro-coupon de maturité t.

Donc, il est clair que $P(t,t)=1$

b) L'équation (1) nous dit que $dP(t,T) = P(t,T)[r\,dt - \sigma(t,T)\,dW_t]$

On va appliquer la 1ère formule d'Itô à $\ln(P(t,T))$ $\quad f : x \mapsto \ln(x)$ est bien C^2 p/r à x

et $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$

$$\Rightarrow d\ln(P(t,T)) = \frac{1}{P(t,T)}\,dP(t,T) - \frac{1}{2P(t,T)^2}\,\sigma^2(t,T)P(t,T)^2\,dt$$

$$= -\frac{\sigma^2(t,T)}{2}\,dt + r\,dt - \sigma(t,T)\,dW_t$$

$$= \left(r - \frac{\sigma^2(t,T)}{2}\right)dt - \sigma(t,T)\,dW_t$$

$$\Rightarrow \ln(P(t,T)) - \ln(P(0,T)) = \int_0^t \left[r - \frac{\sigma^2(u,T)}{2}\right]du - \int_0^t \sigma(u,T)\,dW_u$$

$$\Rightarrow P(t,T) = P(0,T)\exp\left(\int_0^t r - \frac{\sigma^2(u,T)}{2}\,du - \int_0^t \sigma(u,T)\,dW_u\right)$$

c) Par la question b) on déduit que :

$$P(t,t) = P(0,t)\exp\left(\int_0^t r - \frac{\sigma^2(u,t)}{2}\,du - \int_0^t \sigma(u,t)\,dW_u\right)$$

Or par a) on a vu que $P(t,t)=1$

$$\Rightarrow 1 = P(0,t)\exp\left(\int_0^t r - \frac{\sigma^2(u,t)}{2}\,du - \int_0^t \sigma(u,t)\,dW_u\right)$$

Donc $P(t,T) = \dfrac{P(t,T)}{P(t,t)}$

$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t [\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t)]\,du - \int_0^t [\sigma(u,T) - \sigma(u,t)]\,dW_u\right)$$

On remarque que le paramètre r n'intervient pas dans l'expression du prix du zéro-coupon

Ainsi, le prix du zéro-coupon en t ne dépend que de sa volatilité

Partie 2 : Passage à l'univers s-forward neutre

$$\eta_t^s = \frac{dQ^s}{Q}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\delta(t)P(t,s)}{P(0,s)} \quad 0 \leq t \leq s \quad \text{et } \delta(t) = e^{-rt}$$

2) a)
$$\frac{\delta(t)P(t,s)}{P(0,s)} = e^{-rt}\frac{1}{P(0,s)}P(0,s)\exp\left(\int_0^t r - \frac{\sigma^2(u,s)}{2}du - \int_0^t \sigma(u,s)dW_u\right)$$
$$= \exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,s)du - \int_0^t \sigma(u,s)dW_u\right)$$
$$= \eta_t^s$$

b) $(\sigma(t,T))_{t\in[0,T]}$ est un processus local vérifiant la condition de Novikov

et on a $\frac{dQ^s}{Q}\Big|_{\mathcal{F}_t} = e^{-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,s)du - \int_0^t \sigma(u,s)dW_u}$

D'où en appliquant le théorème de Girsanov, on a :

Sous la mesure Q^s, le processus $W^s : t \mapsto W_t + \int_0^t \sigma(u,s)du$ est un mouvement brownien.

c) On a $W_t = W_t^s - \int_0^t \sigma(u,s)du \iff dW_t = dW_t^s - \sigma(u,s)du$

en t-forward neutre :

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,T)-\sigma^2(u,t)\,du - \int_0^t \sigma(u,T)-\sigma(u,t)\,dW_u\right)$$
$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t[\sigma^2(u,T)-\sigma^2(u,t)]du - \int_0^t \sigma(u,T)-\sigma(u,t)\,dW_u^t + \int_0^t \sigma(u,t)(\sigma(u,T)-\sigma(u,t))du\right)$$
$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t[\sigma^2(u,T)+\sigma^2(u,t)-2\sigma(u,t)\sigma(u,T)]du - \int_0^t[\sigma(u,T)-\sigma(u,t)]dW_u^t\right)$$
$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t(\sigma(u,T)-\sigma(u,t))^2du - \int_0^t[\sigma(u,T)-\sigma(u,t)]\,dW_u^t\right)$$

en T-forward neutre :

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t[\sigma^2(u,T)-\sigma^2(u,t)]du - \int_0^t[\sigma(u,T)-\sigma(u,t)]\,dW_u^T + \int_0^t \sigma(u,T)(\sigma(u,T)-\sigma(u,t))du\right)$$
$$= \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t(\sigma(u,T)-\sigma(u,t))^2du - \int_0^t[\sigma(u,T)-\sigma(u,t)]dW_u^T\right).$$

Partie 3 : Pricing de l'option CALL.

3) a) Sous $\mathbb{Q}$, les prix actualisés sont des martingales.

On a : $C(0,t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\underbrace{\delta(t)(P(t,T)-K)_+}_{\text{payoff actualisé}}]$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[\delta(t)(P(t,T)-K)\mathbb{1}_{P(t,T)>K}]$$

$$\Longrightarrow C(0,t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\delta(t)P(t,T)\mathbb{1}_{P(t,T)>K}] - K\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\delta(t)\mathbb{1}_{P(t,T)>K}]$$

b) On effectue le changement de proba de $\mathbb{Q}$ à $\mathbb{Q}^S$ en utilisant η_t^S

$$C(0,t) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[\frac{1}{\eta_t^T}\delta(t)P(t,T)\mathbb{1}_{P(t,T)>K}\right] - K\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^t}\left[\frac{1}{\eta_t^t}\delta(t)\mathbb{1}_{P(t,T)>K}\right]$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[P(0,T)\mathbb{1}_{P(t,T)>K}] - K\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^t}[P(0,t)\mathbb{1}_{P(t,T)>K}]$$

$$= P(0,T)\,\mathbb{Q}^T(P(t,T)>K) - K P(0,t)\,\mathbb{Q}^t(P(t,T)>K)$$

c) Calcul de $\mathbb{Q}^T(P(t,T)>K)$:

Soit $\overline{\Delta\sigma_t}^2 = \frac{1}{t}\int_0^t [\sigma(u,T) - \sigma(u,t)]^2 du$

en T-forward, on peut donc écrire :

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(\frac{1}{2}t\,\overline{\Delta\sigma_t}^2 - \overline{\Delta\sigma_t}\sqrt{t}\,\underbrace{U^T}_{\to\ \mathcal{N}(0,1)\text{ sous }\mathbb{Q}^T}\right)$$

donc

$$\mathbb{Q}^T(P(t,T)>K) = \mathbb{Q}^T\left(\ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right) + \frac{1}{2}t\,\overline{\Delta\sigma_t}^2 - \overline{\Delta\sigma_t}\sqrt{t}\,U^T > \ln(K)\right)$$

$$= \mathbb{Q}^T\left(U^T < \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right) - \ln(K) + \frac{1}{2}t\,\overline{\Delta\sigma_t}^2}{\overline{\Delta\sigma_t}\sqrt{t}}}_{d_1}\right) = \mathcal{N}(d_1)$$

$\hookrightarrow$ f.d.r d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Calcul de $\mathbb{Q}^t(P(t,T)>K)$:

en t-forward, on peut écrire :

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{1}{2}t\,\overline{\Delta\sigma_t}^2 - \overline{\Delta\sigma_t}\sqrt{t}\,\underbrace{U^t}_{\to\ \mathcal{N}(0,1)\text{ sous }\mathbb{Q}^t}\right)$$

$$\Longrightarrow \mathbb{Q}^{t}\left(P(t,T) > K\right) = \mathbb{Q}^{t}\left(\ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right) - \frac{1}{2} t\, \bar{\sigma}_r^{2} - \bar{\sigma}_r \sqrt{t}\, U^{t} > \ln(K)\right)$$

$$= \mathbb{Q}^{t}\left(U^{t} < \underbrace{\frac{\ln\left(\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\right) - \ln(K) - \frac{1}{2} t\, \bar{\sigma}_r^{2}}{\bar{\sigma}_r \sqrt{t}}}_{d_2} \right) = \mathcal{N}(d_2)$$

↳ f.d.r d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Ainsi, on obtient $C(0,t) = P(0,T)\,\mathcal{N}(d_1) - K\,P(0,t)\,\mathcal{N}(d_2)$