© Théo Jalabert

Théorie de portefeuille

TD - MEDAF

1. Considérons un marché financier efficient sur lequel $r_f = 5\%$, $\mu_M = 15\%$ et $\sigma_M = 20\%$. Soit P un portefeuille sur ce marché et $\mu_P = 20\%$.
   (a) Quel est le β du portefeuille efficient P ? Calculer σ_P et σ_{PM}.
   (b) Considérons maintenant une action k dont les caractéristiques sont $\mu_k = 25\%$ et $\sigma_k^2 = 52\%$. Quel est le risque systématique du titre k et quel est le risque spécifique.

2. Une analyse financière de trois titres A, B et C a conduit aux évaluations suivantes de leurs caractéristiques :

Titre	Bêta	Risque spécifique	Covariance des erreurs
A	0.48	35%	$cov(\varepsilon_A, \varepsilon_B) = -0.0171$
B	0.98	21%	$cov(\varepsilon_A, \varepsilon_C) = -0.026$
C	1.12	30%	$cov(\varepsilon_B, \varepsilon_C) = -0.04322$

   Le taux d'intérêt de l'actif sans risque est $r_f = 12\%$. On connait également $\mu_M = 21\%$ et $\sigma_M = 24\%$. On construit un portefeuille partagé également entre les 3 titres.
   (a) Calculer l'espérance du rendement de ce portefeuille.
   (b) Calculer son risque systématique, spécifique et total.

3. On se place sous les hypothèses du MEDAF, sur un marché à n actifs risqués et un actif sans risque. Soit P un portefeuille efficient sur ce marché. Calculer le coefficient de corrélation ρ_{PM} où M est le portefeuille de marché.

4. (a) Dans le modèle APT à n facteurs, le rendement de tout titre individuel i est décrit par l'équation

$$\tilde{R}_i = r_f + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki}(F_k - r_f) + \varepsilon_i,$$

   où β_{ki} est le beta entre le titre i et le facteur k, les facteurs F_k ne sont ni corrélés entre eux, ni corrélés avec ε_i (v.a. centrée dont la variance représente le risque spécifique du titre i). Montrer que cette équation peut s'écrire sous la forme :

$$\tilde{R}_i = \mu_i + \sum_{k=1}^{n} \beta_{ki}\tilde{F}_k + \varepsilon_i,$$

   avec $\tilde{F}_k$ d'espérance nulle et $\mu_i = \mathbb{E}(\tilde{R}_i)$.

   (b) Considérons trois portefeuilles A,B et C très bien diversifiés (par conséquence on supposera que leur risque spécifique est nul) et deux facteurs F_1 et F_2 avec

$$\tilde{R}_A = 4\% + 0.5(F_1 - \mathbb{E}(F_1)) + 2(F_2 - \mathbb{E}(F_2))$$
$$\tilde{R}_B = 6\% + 1.5(F_1 - \mathbb{E}(F_1)) + 1(F_2 - \mathbb{E}(F_2))$$
$$\tilde{R}_C = 4\% + 2.5(F_1 - \mathbb{E}(F_1)) + 0.5(F_2 - \mathbb{E}(F_2))$$

© Théo Jalabert

Le taux sans risque est de 2%. On appelle 'pure factor portfolio', un portefeuille dont le bêta est de 1 avec un facteur donné et de 0 avec chacun des autres facteurs (par exemple $\tilde{R}_P = \mu_P + 1(F_1 - \mathbb{E}(F_1)) + 0(F_2 - \mathbb{E}(F_2)) + ... + 0(F_n - \mathbb{E}(F_n)) + \varepsilon_P$ est un pure factor portfolio).

i. Trouver les 'pure factor portfolios'.

ii. Déterminer les primes de risque des facteurs F_1 et F_2.

© Théo Jalabert

Exercice 1 :

a) D'après le MEDAF $\mu_P = r_f + \beta_P(\mu_M - r_f)$

$$\Rightarrow \beta_P = \frac{\mu_P - r_f}{\mu_M - r_f} = \frac{0.2 - 0.05}{0.15 - 0.05} = 1.5$$

Or $\beta_P = \frac{\sigma_{PM}}{\sigma_M^2} \Rightarrow \sigma_{PM} = \beta_P \sigma_M^2 = 1{,}5 \times 0{,}04 = 0{,}06$

P efficient $\Rightarrow P \in CML \Rightarrow \mu_P = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}\sigma_P$

$$\Rightarrow 0{,}2 = 0{,}05 + \frac{0{,}15 - 0{,}05}{0{,}2}\sigma_P \Rightarrow \sigma_P = 0{,}3$$

Donc, $\beta_P = 1{,}5$; $\sigma_P = 0{,}3$; $\sigma_{PM} = 0{,}06$

b) MEDAF + modèle diagonal

$$\tilde{R}_i = r_f + \beta_i(\tilde{R}_M - r_f) + \varepsilon_i \qquad \tilde{R}_M \perp\!\!\!\perp \varepsilon_i$$

$$\overset{Var}{\Longrightarrow} \sigma_i^2 = \underbrace{\beta_i^2 \sigma_M^2}_{\text{risque systématique}} + \underbrace{\sigma_{\varepsilon_i}^2}_{\text{risque spécifique}}$$

D'après le MEDAF, $\beta_k = \frac{\mu_k - r_f}{\mu_M - r_f} = 2$

$\Rightarrow$ risque systématique : $2^2 \times 0{,}2^2 = 0{,}16$

$\Rightarrow$ risque spécifique : $\sigma_k^2 - \beta_k^2 \sigma_M^2 = 0{,}52 - 0{,}16 = 0{,}36$

Exercice 2 :

a) * Méthode 1 :

$$\mu_P = \frac{\mu_A + \mu_B + \mu_C}{3}$$

D'après le MEDAF : $\mu_A = r_f + \beta_A(\mu_M - r_f) = 0{,}1632$

$\mu_B = r_f + \beta_B(\mu_M - r_f) = 0{,}2082$

$\mu_C = r_f + \beta_C(\mu_M - r_f) = 0{,}2268$

$$\Rightarrow \mu_P = \frac{0,1632 + 0,2082 + 0,2208}{3} = 0,1974$$

© Théo Jalabert

* Méthode 2 :

Avec le MEDAF : $\mu_P = r_f + \beta_P (\mu_M - r_f)$

Or β_P est une mesure linéaire $\Rightarrow \beta_P = \frac{\beta_A + \beta_B + \beta_C}{3} = 0,86$

$$\Rightarrow \mu_P = 0,1974$$

b) $\tilde{R}_P = \frac{\tilde{R}_A + \tilde{R}_B + \tilde{R}_C}{3}$

$i = A, B$ ou C, $\tilde{R}_i = r_f + \beta_i (\tilde{R}_M - r_f) + \varepsilon_i$

$$\Rightarrow \tilde{R}_P = r_f + \frac{\beta_A + \beta_B + \beta_C}{3} (\tilde{R}_M - r_f) + \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C}{3}$$

$$\xRightarrow{Var} \underbrace{\sigma_P^2}_{\text{risque total}} = \underbrace{\beta_P^2 \sigma_M^2}_{\text{risque systématique}} + \underbrace{Var\left(\frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B + \varepsilon_C}{3}\right)}_{\text{risque spécifique}}$$

$\beta_P^2 \sigma_M^2 = 0,0426$

risques spécifiques de A, B et C

$$= \frac{1}{9}\left[\sigma_{\varepsilon_A}^2 + \sigma_{\varepsilon_B}^2 + \sigma_{\varepsilon_C}^2 + 2\,Cov(\varepsilon_A, \varepsilon_B) + 2\,Cov(\varepsilon_A, \varepsilon_C) + 2\,Cov(\varepsilon_B, \varepsilon_C)\right]$$

$$= \frac{1}{9}\left[0,35 + 0,21 + 0,3 - 2 \times 0,0171 - 2 \times 0,026 - 2 \times 0,04322\right]$$

$$= 0,076$$

risque total : $4,26\,\% + 7,6\,\% = 11,86\,\%$

Exercice 3 :

Rappel : $\rho_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \sigma_j}$

D'après le MEDAF, $\rho_{PM} = \frac{\sigma_{PM}}{\sigma_P \cdot \sigma_M} = \frac{\beta_P \cdot \sigma_M^2}{\sigma_P \cdot \sigma_M} = \frac{\beta_P}{\sigma_P} \cdot \sigma_M$

$\sigma_{PM} = \beta_P \sigma_M^2$

$$\mu_P = r_f + \beta_P (\mu_M - r_f) \Rightarrow \beta_P = \frac{\mu_P - r_f}{\mu_M - r_f}$$

P est efficient $\Rightarrow P \in CML$

© Théo Jalabert

$$\mu_P = r_f + \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}\,\sigma_P$$

$$\Rightarrow \frac{\sigma_M}{\sigma_P} = \frac{\mu_M - r_f}{\mu_P - r_f}$$

Donc, $\rho_{PM} = \dfrac{\mu_P - r_f}{\mu_M - r_f} \cdot \dfrac{\mu_M - r_f}{\mu_P - r_f} = 1$

Exercice 4 :

a) $\tilde{R}_i = r_f + \sum_{k=1}^{m} \beta_{ki}\,(F_k - r_f) + \varepsilon_i$

$$\overset{\mathbb{E}}{\Longrightarrow} \mu_i = r_f + \sum_{k=1}^{m} \beta_{ki}\,(\mathbb{E}[F_k] - r_f) + \overbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_i]}^{=0}$$

$$\Rightarrow \tilde{R}_i = r_f + \sum_{k=1}^{m} \beta_{ki}\,(\mathbb{E}[F_k] - r_f) - \sum_{k=1}^{m} \beta_{ki}\,(\mathbb{E}[F_k] - r_f) + \sum_{k=1}^{m} \beta_{ki}\,(F_k - r_f)$$

$$\Rightarrow \tilde{R}_i = \mu_i + \sum_{k=1}^{m} \beta_{ki}\,(F_k - \mathbb{E}[F_k]) + \varepsilon_i$$

Rq :

$$\mu_i = r_f + \sum_{k=1}^{m} \beta_{ki}\,(\mathbb{E}[F_k] - r_f) \iff \underbrace{\mu_i - r_f}_{\pi_i} = \sum_{k=1}^{m} \beta_{ki}\,\underbrace{(\mathbb{E}[F_k] - r_f)}_{\pi_{F_k}}$$

$$\pi_i = \sum_{k=1}^{m} \beta_{ki}\,\pi_{F_k}$$

prime de risque

b) $\tilde{R}_A = \underbrace{4\%}_{\mu_A} + \underbrace{0{,}5}_{\beta_{A_1}}(F_1 - \mathbb{E}[F_1]) + \underbrace{2}_{\beta_{A_2}}(F_2 - \mathbb{E}[F_2])$

1^{er} PFP : $(a \quad b \quad 1-a-b)$ tq $\beta_{P_1} = 1$ et $\beta_{P2} = 0$

$$\begin{cases} 1 = 0{,}5a + 1{,}5b + 2{,}5(1-a-b) \\ 0 = 2a + b + 0{,}5(1-a-b) \end{cases} \iff (-2{,}5 \quad 6{,}5 \quad -3)$$

β_{P2} β_{A2} β_{B2} β_{C2}

2^{eme} PFP : $(a \quad b \quad 1-a-b)$ tq $\beta_{P_1} = 0$ et $\beta_{P2} = 1$

$$\begin{cases} 0 = 0{,}5a + 1{,}5b + 2{,}5(1-a-b) \\ 1 = 2a + b + 0{,}5(1-a-b) \end{cases} \Rightarrow (-1{,}5 \quad 5{,}5 \quad -3)$$

ii) D'après la Remarque :

$$\pi_{1^{er}PFP} = 1 \times \pi_{F_1} + 0 \times \pi_{F_2} \Rightarrow \pi_{1^{er}PFP} = \pi_{F_1}$$

$$\mu_{1^{er}PFP} - r_f = (-2{,}5\mu_A + 6{,}5\mu_B - 3\mu_C) - r_f = 15\%$$

© Théo Jalabert

De même, $\Pi_{2^{\text{ème}}\,\text{PFP}} = \Pi_{F_2} = 13\,\%$