Economie du risque et de l'assurance.
Notes de cours et calculette interdites.

Mai 2019

Questions.

Définir en 2 fois 5 lignes maximum ce qu'est l'aléa moral et la sélection contraire.

Problème.

On considère le problème d'assurance avec aléa moral suivant. Un agent veut assurer sa propriété contre un risque d'incendie. La probabilité qu'un incendie survienne dépend du comportement de prévention de l'agent. Précisément, cette probabilité donnée par $p_1 = 2/5$ si l'individu adopte un comportement précautionneux, et par $p_0 = 3/5$ s'il adopte un comportement négligeant. On notera l'effort de prévention par e ∈ {0,1}, avec 0 pour un comportement négligeant, et 1 pour un comportement précautionneux. En l'absence d'incendie, l'individu dispose d'une richesse y = 100. On suppose que le dégât provoqué par un incendie se traduit par une perte monétaire de 100. Le comportement de notre agent est modélisé par la fonction d'utilité VNM suivante : $u(c,e) = \sqrt{c} - e$ avec *c* sa consommation, et *e* le coût lié à l'effort de prévention. L'assureur maximise son profit espéré. Il est en situation de monopole, et peut donc faire une offre à prendre ou à laisser à l'assuré.

1. On veut tout d'abord caractériser l'utilité de réserve de l'individu, lorsqu'il supporte lui-même tout le risque lié à la survenue éventuelle d'un dégât d'incendie. Ecrire le comportement de l'agent dans ce cas. Pour les valeurs numériques choisies, montrer que son utilité de réserve est donnée par $\bar{u} = 5$.
2. On analyse maintenant la relation d'assurance. On suppose que les contrats d'assurance spécifient un remboursement α ≥0 dans l'état du monde "incendie", et une prime β≥0 dans l'état "pas d'incendie". L'assuré a donc une utilité égale à $\sqrt{\alpha} - e$ en cas d'incendie, et à $\sqrt{y - \beta} - e$ sinon. Ecrire le programme de maximisation de l'assureur. Caractériser cette situation. Justifier en particulier que α = y−β. On interprétera cette condition. On suppose pour la suite que l'effort de prévention de l'assuré est inobservable.
3. Déterminer en fonction du contrat offert, le comportement de prévention de l'individu. En particulier, quel est l'effort de l'assuré si l'assureur offre le contrat ? Interpréter.
4. On suppose pour cette question qu'il est optimal pour l'assureur d'amener l'assuré à adopter l'effort e=1.
   a. Ecrire le programme de maximisation de l'assureur, en explicitant les contraintes pertinentes.
   b. Montrer que l'acceptation d'un contrat avec assurance implique que α > 0. Montrer qu'à l'optimum de ce programme, les deux contraintes sont saturées. (On commencera par montrer que la contrainte de participation est saturée). Ce résultat pourra être admis pour la suite.
   c. Caractériser le contrat optimal, toujours sous l'hypothèse que e=1. Déterminer le profit espéré de l'assureur.
5. On suppose maintenant qu'il est optimal pour l'assureur d'amener l'assureur à faire l'effort e=0. Ecrire le programme de maximisation correspondant. Justifier que la contrainte d'incitation peut-être éliminée. Déterminer le profit de l'assureur dans ce cas.
6. En utilisant les réponses à Q4-Q5, caractériser complétement la situation optimale.

N'oubliez pas de tourner la page SVP

7. Calculer la perte pour l'assureur, liée à l'inobservabilité du comportement de l'assuré. Est-il-optimal que l'assuré supporte une partie du risque ? Justifier votre réponse.

Exercice

Soit une double enchère orale entre acheteurs et vendeurs : soit $v_b \in [0;1]$ valeur de réserve de l'acheteur et soit $v_s \in [0;1]$ valeur de réserve du vendeur. $\forall x, x \in [0;1]$; l'acheteur offre x si $x \leq v_b$ et 0 sinon. De même le vendeur demande x si $x \geq v_s$ et 0 sinon.

L'acheteur annonce p_b qui dépend de v_b soit donc $p_b(v_b)$ et le vendeur annonce p_s qui dépend de v_s soit donc $p_s(v_s)$. On suppose que les schémas d'annonce sont linéaires à savoir que pour tout a_b, c_b, a_s, c_s réels positifs tels que $p_b(v_b) = a_b + c_b . v_b$ et $p_s(v_s) = a_s + c_s . v_s$. On supposera que $p_b(v_b)$ est uniformément distribué sur $[a_b; a_b + c_b]$ et $p_s(v_s)$ est uniformément distribué sur $[a_s; a_s + c_s]$

Déterminer les équilibres de Nash bayésiens de ce jeu d'enchères (i.e. fonction d'annonce d'équilibre.

N'oubliez pas de tourner la page SVP

Problème :

1) $\bar{u} = p_i\, u(0) + (1-p_i)\, u(100)$

$\bar{u}_{e_1} = p_1\, u(0) + (1-p_1)\, u(100)$
$= \frac{2}{3}\, u(0, e_1) + (1-p_1)\, u(100, e_1)$
$= 5$

2) $\max\limits_{\alpha,\beta} \Pi = p_i(-\alpha) + (1-p_i)\beta$

sc $p_i(\sqrt{\alpha} - e_i) + (1-p_i)(\sqrt{y-\beta} - e_i) \geq \bar{u}$

L'Agent est tq $\frac{\partial u}{\partial \alpha} > 0$ et $\frac{\partial u}{\partial \beta} < 0$

Le Principal $\frac{\partial \pi}{\partial \alpha} < 0$ et $\frac{\partial \pi}{\partial \beta} > 0$

Donc CP saturée

$\Rightarrow p_i(\sqrt{\alpha} - e_i) + (1-p_i)(\sqrt{y-\beta} - e_i) = 5$

$\mathcal{L}(\beta, \alpha, \lambda) = (1-p_i)\beta - p_i\alpha + \lambda\left(p_i\sqrt{\alpha} + (1-p_i)\sqrt{100-\beta} - e_i - 5\right)$

$\mathcal{L}$ est strict concave $\Rightarrow$ CPO nécessaire et suff

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta} = 0 = (1-p_i) - \lambda(1-p_i)\frac{1}{2\sqrt{100-\beta}}$ ①

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \alpha} = -p_i + \lambda p_i \frac{1}{2\sqrt{\alpha}} = $ ②

$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 = p_i\sqrt{\alpha} + (1-p_i)\sqrt{100-\beta} - e_i - 5$ ③

① et ② $\Rightarrow 100 - \beta = \alpha$

$100 - (5+e)^2$

$e = 0 \quad 100 - 25 = 75$

$e = 1 \quad 100 - 36 = 64$

3)