

Examen de Théorie des Options - M1SAF 2ème session - 18 Juin 2012 11h-12h
Documents interdits, calculatrices autorisées

Exercice 1 On considère un modèle binomial à deux étapes. On suppose que $S_0 = 30$ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1.15$ et $d = 0.85$. Le taux sans risque sur chaque période est $r = 5\%$.

1. Décrivez la dynamique de l'actif risqué S à l'aide d'un arbre.
2. Un trader vend un CALL européen de sous-jacent S et de prix d'exercice $K = 26$ et commence ses opérations de couverture.
 - (a) Rappelez la définition d'un CALL européen et tracer son payoff.
 - (b) Déterminez la prime du CALL.
 - (c) Rappelez la relation de parité CALL-PUT. Déduisez en la prime d'un PUT ayant le même sous-jacent S , la même échéance et le même prix d'exercice que le CALL.
3. On suppose que l'actif subit deux hausses consécutives : détailler les opérations effectuées par le trader sur son portefeuille de couverture.

Exercice 2 Répondez aux questions suivantes en justifiant proprement vos choix :

1. Je vends un CALL européen dans un marché constitué de 2 actifs, un risqué et un non risqué. Pour avoir un portefeuille delta-neutre, je dois acheter une quantité d'actif sous-jacent positive, nulle ou négative ?
2. Quelle relation existe entre le Gamma d'un CALL et le Gamma d'un PUT sur le même sous-jacent, avec les mêmes caractéristiques ?
3. Le prix d'un CALL américain est-il toujours égal au prix d'un CALL européen ?
4. Le prix d'un PUT américain est-il toujours égal au prix d'un PUT européen ?
5. Qu'appelle-t-on l'effet de levier des options ?
6. Sous la probabilité risque-neutre, dans le modèle de Merton, quelle est la dynamique de la valeur S_t d'une action versant un coupon continu au taux c ?
7. Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien sous P . Soit Q la probabilité donnée par la dérivée de Radon-Nikodym suivante :

$$\frac{dQ}{dP} = e^{2\sigma W_T - 2\sigma^2 T}$$

Donnez l'expression du nouveau mouvement Brownien sous la probabilité Q .

8. Considérons 3 actifs A, B et C de flux futurs à $t = 1$:

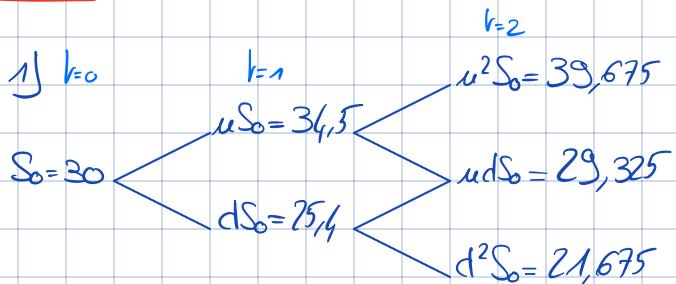
Actif	A	B	C
état hausse	60	75	105
état baisse	20	40	50
prix	3	5	

Dites si les assertions suivantes sont justes ou fausses, et expliquez votre réponse :

- (a) S'il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage sur le marché, le prix de C est 6.5
- (b) L'actif C n'est pas replicable
- (c) L'actif C est replicable par un portefeuille qui consiste en l'achat d'un actif A et la vente d'un actif B
- (d) Le marché constitué des actifs A, B et C est complet

Exercice 1: $S_0 = 30$, $u = 1,15$ $d = 0,85$ $r = 5\%$

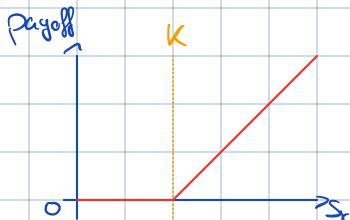
© Théo Jalabert



2) $k=26$

a) CALL européen: opt° d'achat ...

Payoff: $(S_T - k)_+$



b) $f_{02} = (u^2 S_0 - 26)_+ = 13,675$

$$q = \frac{R-d}{u-d} = \frac{e^{0,05 \times 1} - 0,85}{1,15 - 0,85} = 0,6703$$

$f_{1d} = (udS_0 - 26)_+ = 3,325$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{R^2} [q^2 f_{02} + 2q(1-q)f_{1d} + (1-q)^2 f_{02}]$$

= 6,898

c) $C_t - P_t = S_t - ke^{-r(T-t)}$

$$\begin{aligned} \Rightarrow P_0 &= C_0 - S_0 + ke^{-rT} \\ &= 6,898 - 30 + 26e^{-0,05 \times 2} \\ &= 0,4238 \end{aligned}$$

3)

Exercice 2:

© Théo Jalabert



1) Positive car $\Delta_{\text{Put}} = -2 \Delta_{\text{Call}}$

2) $C_r - P_r = S_r - ke^{-r(T-t)}$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_r}{\partial S_r} - \frac{\partial P_r}{\partial S_r} = \frac{\partial S_r}{\partial S_r} - \frac{\partial k e^{-r(T-t)}}{\partial S_r}$$

$$\Leftrightarrow \Delta_{\text{Call}} - \Delta_{\text{Put}} = 1$$

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} \Rightarrow \Gamma_{\text{Call}} - \Gamma_{\text{Put}} = 0$$

$$\Rightarrow \Gamma_{\text{Call}} = \Gamma_{\text{Put}}$$

3) Si il n'y a pas de dividende $\tilde{C}_0 = C_0$

Si dividende $\tilde{C}_0 > C_0$

4) $\tilde{P}_0 > P_0$

5) Parier hausse baisse.

6) ?

7) $Z_T = \exp(2\bar{\sigma}W_t - 2\bar{\sigma}^2 T)$

$$\Rightarrow W_t^Q = W_t - 2\bar{\sigma}t$$

$$8) \begin{cases} 60x + 75y = 105 \\ 20x + 40y = 50 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y) = \left(\frac{1}{2}, 1\right)$$

\Rightarrow En AOA, prix $C = \frac{1}{2} \times 3 + 1 \times 5 = 6.5$

\Rightarrow c) Vraie

b) Faux $C = \frac{1}{2}A + B$

c) Faux $A - B \neq C$

$$d) M = \begin{pmatrix} 60 & 75 & 105 \\ 20 & 40 & 50 \end{pmatrix}$$

$\text{rg } M \leq 2$ car $M \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{R})$

$$\begin{vmatrix} 60 & 75 \\ 20 & 40 \end{vmatrix} = 900 \neq 0 \Rightarrow \text{rg } M = 2 \Rightarrow \text{Marche compl.}$$