Modèles de durée / Examen / Janvier 2020

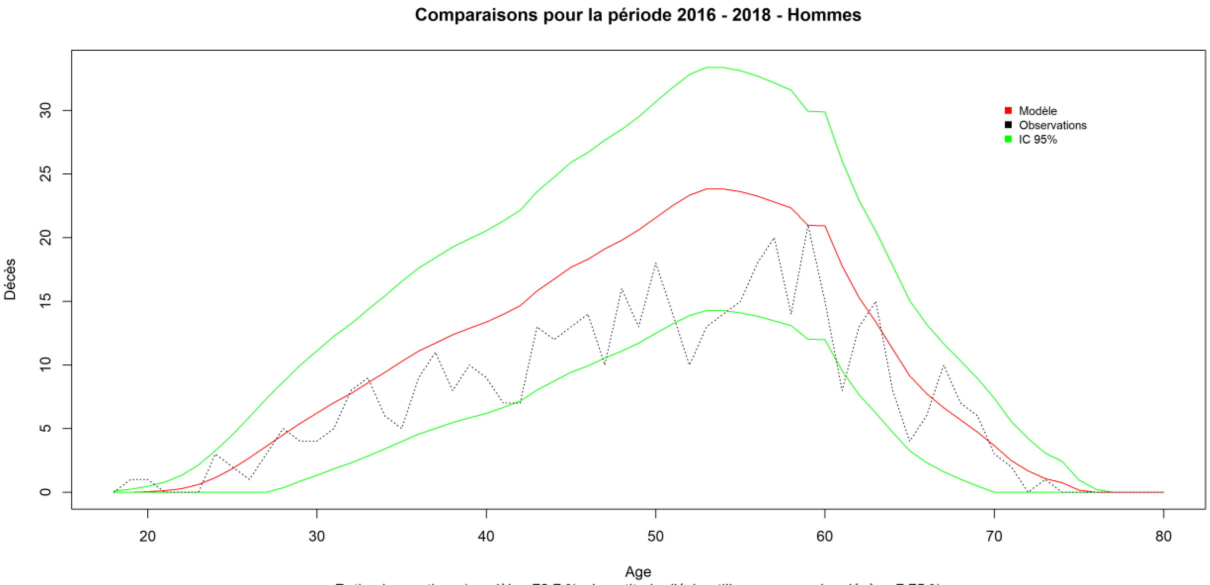
Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Corrigé

La qualité de la rédaction, des justifications apportées et de la présentation de la copie seront prises en compte dans la notation. Chaque réponse doit être correctement justifiée : une réponse juste sans justification sera considérée comme fausse.

Comparaison de valeurs modélisées et observées dans le cadre de la construction d'une table de mortalité

Après avoir construit une table de mortalité à partir d'observations sur un portefeuille d'assurance, on vous remet le graphique suivant :



Question n°1 (2 points) : À quoi correspondent les 4 courbes représentées sur ce graphique ?

> La courbe irrégulière indique le nombre de décès observé par âge sur la période 2016-2018 ; la courbe régulière au milieu le nombre de décès issu de l'application de la table ajustée et les deux courbes qui l'entourent les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance à 95 % autour des valeurs modélisées.

Question n°2 (2 points) : Que représentent les deux indicateurs chiffrés en dessous du graphique ? Quelle serait approximativement la valeur de l'incertitude d'échantillonnage si la période considérée était d'une année au lieu de 3 ?

> Le ratio SMR est le ratio entre le nombre de décès observé et le nombre de décès modélisé. L'incertitude d'échantillonnage est la demi-largeur relative de l'intervalle de confiance bilatéral à 95 %. Avec une seule année, en supposant

l'exposition au risque à peu près identique chaque année, l'incertitude serait augmentée d'un facteur $\sqrt{3}$.

Question n°3 (1 points) : Dans le contexte d'un contrat en cas de décès, la table ajustée est-elle prudente ?

Elle est prudente car le SMR est inférieur à un et l'écart est plus grand que l'incertitude d'échantillonnage.

On note E_x et D_x l'exposition au risque et le nombre de décès observé à l'âge $x = 20,\ldots,80$ et on suppose que la fonction de hasard du modèle est constante sur chaque intervalle $[x, x+1[$ et qu'elle est de plus « petite ».

On rappelle l'expression de la log-vraisemblance d'un modèle censuré à droite et tronqué à gauche :

$$\ln L_\theta(y_1,\ldots,y_n,e_1,\ldots,e_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[d_i \times \ln h_\theta(t_i) + \ln S_\theta(t_i) - \ln S_\theta(e_i)\right]$$

Question n°4 (5 points) : Démontrez cette formule et rappelez les deux hypothèses sur les propriétés de la censure qu'il convient de faire pour qu'elle soit valide.

Voir le support du cours.

Question n°5 (3 points) : Décrire les données dont il faut disposer pour calculer (t_i, d_i, e_i) et les informations qui doivent accompagner cette base.

Voir le support du cours.

Question n°6 (3 points) : Comment sont calculés E_x et D_x ? Pour le calcul de l'exposition au risque, vous pourrez utiliser la vraisemblance d'un modèle exponentiel.

La log-vraisemblance d'un modèle tronqué à droite et censuré à gauche s'écrit

$$\ln L_\theta(y_1,\ldots,y_n,e_1,\ldots,e_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[d_i \times \ln h_\theta(t_i) + \ln S_\theta(t_i) - \ln S_\theta(e_i)\right]$$

et donc, dans le cas particulier d'un modèle exponentiel

$$\ln L_\theta(y_1,\ldots,y_n,e_1,\ldots,e_n) = \sum_{i=1}^{n}\left[d_i \times \ln(\theta) - \theta(t_i - e_i)\right].$$

En se plaçant sur l'intervalle $[x, x+1[$, ce qui conduit à prendre $e_i(x) = t_i \vee x$ $t_i(x) = t_i \wedge (x+1)$ on en déduit

$$\ln L_\theta(y_1,\ldots,y_n,e_1,\ldots,e_n) = D_x \times \ln(\theta_x) - \theta_x \times E_x$$

avec $E_x = \sum_{i=1}^{n}\left(t_i(x) - e_i(x)\right)$ et $D_x = \sum_{i=1}^{n} d_i$.

Question n°7 (4 points) : Donner, en fonction de E_x, D_x et du taux de mortalité ajusté que l'on notera q_x l'expression des différents éléments du graphique (les 4 courbes et les deux indicateurs).

$D_x^{th} = E_x \times q_x$, $D_x^{+/-} = E_x \times q_x +/- 1{,}96 \times \sqrt{E_x \times q_x \times (1 - q_x)}$

$$SMR = \frac{\sum D_x}{\sum D_x^{th}}$$

En notant $E = \sum E_x$, $D = \sum D_x$ et $q = \frac{D}{E}$, l'incertitude d'échantillonnage est

$$\varepsilon = \frac{1{,}96 \times \sqrt{E \times q \times (1 - q)}}{E \times q}$$