

ACTIFS DERIVES D'ACTIONS

(1 feuille recto-verso de notes personnelles et la calculatrice sont autorisées)

Évaluation des obligations à bons de souscription d'actions remboursables (OBSAR)

Une entreprise financée jusqu'à ce jour (t_0) uniquement par N actions ($V = NS$) émet n obligations à bons de souscription d'actions remboursables. Chacune de ces obligations est en fait la juxtaposition d'une obligation classique, notée B, et d'un bon de souscription d'actions remboursable, noté W.

On suppose qu'à chaque obligation est associée un bon donnant droit à une action contre le paiement d'un prix d'exercice E .

En cas de non exercice des bons, ceux-ci sont alors remboursables au prix F par bon.

K désigne le prix de remboursement de chaque obligation ($K > F$).

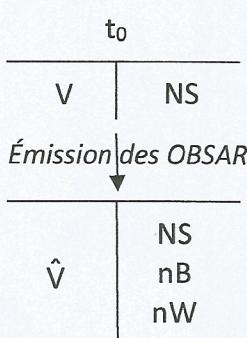
On admet que la structure des taux est plate et stable au cours du temps.

Afin de faciliter l'analyse, on suppose que l'entreprise ne verse pas de dividende ni de coupon et que le produit de l'émission est immédiatement investi dans des actifs risqués assimilables à ceux de la firme.

Les bons de souscription arrivent à échéance à la date t_1 avant les obligations qui arrivent à échéance en t_2 .

Soit τ_1 la durée de vie des bons et τ_2 celle des obligations avec $\tau_1 < \tau_2$. Désignons par τ_3 le laps de temps compris entre l'échéance des bons et celle des obligations, tel que $\tau_3 = \tau_2 - \tau_1$.

A l'émission, on pose : $\hat{V} = V + n(B + W)$.



Soit \hat{V}_1 , S_1 , B_1 et W_1 les valeurs respectives de la firme, des actions, des obligations et des bons en t_1 , date d'échéance des bons.

- Expliquez brièvement ce qu'implique la phrase « *le produit de l'émission est immédiatement investi dans des actifs risqués assimilables à ceux de la firme* » dans l'énoncé.

2. Recopiez et complétez sur votre copie le schéma suivant établi à la date t_1 , date d'échéance des bons :

	$\hat{V}_1 = \hat{V}_1 + nE$	<u>A compléter sur votre copie</u>	NS_1 nB_1
\hat{V}_1	$\hat{V}_1 = \hat{V}_1 - nF$	<u>A compléter sur votre copie</u>	NS_1
	\hat{V}_1	<u>A compléter sur votre copie</u>	$NS_1 = 0$
\hat{V}_1			

3.

- a. Montrez (en justifiant précisément) que la condition d'exercice des bons en t_1 en fonction de \hat{V}_1 s'écrit $\hat{V}_1 > nB_1 + NE + (N+n)F$.
- b. Déduisez-en la valeur des bons nW_1 en cas d'exercice.
- c. Recopiez sur votre copie et établissez le tableau des différentes situations en t_1 pour les valeurs des actions, obligations et bons selon le modèle suivant :

	Valeur en t_1		
	3 ^{ème} cas	2 ^{ème} cas	1 ^{er} cas
Actions			
Bons remboursables			
Obligations	0	nB_1	nB_1

4.

- a. Dans le 1^{er} cas du schéma de la question 2., montrez que $nB_1 = \hat{V}_1 - C(\hat{V}_1, \tau_3, nK)$.
- b. Dans le 2^{ème} cas du schéma de la question 2., montrez que $nB_1 = \hat{V}_1 - C(\hat{V}_1, \tau_3, nK)$.
- c. Déduisez-en une nouvelle écriture du tableau de la question 3.c. en faisant apparaître \hat{V}_1' et \hat{V}_1'' et non plus \hat{V}_1 .

5. Application numérique

$\hat{V} = 100\ 000 \text{ €}$ avec une volatilité annuelle de 30%.

La firme est financée par $N = 1000$ actions pour lesquelles il n'est prévu aucun versement de dividende.

Elle émet $n = 500$ OBSAR i.e. 500 obligations (nB) à bons de souscription (nW) remboursables au prix de $F = 60 \text{ €}$ par bon.

La durée de vie des bons est de 3 ans ; l'exercice d'un bon donne droit à une action contre le paiement d'un prix d'exercice $E = 100 \text{ €}$.

Les obligations ont une durée de vie de 5 ans ; elles sont remboursables à leur échéance au prix unitaire $K = 100 \text{ €}$. On considère qu'il s'agit d'obligations zéro-coupon (pas de coupon versé pendant leur durée de vie).

Le taux sans risque annuel continu constant est égale à $r = 10\%$.

- a. Pour l'application numérique entre t_0 et t_1 , nous utiliserons le modèle binomial de Cox, Ross et Rubinstein avec un pas semestriel.

Donnez sur votre copie les valeurs des différents paramètres de ce modèle (u , d , p , et \hat{r}). Vous en préciserez les calculs.

L'arbre d'évolution de la valeur des actifs de la firme entre t_0 et t_1 fournit les valeurs suivantes :

t_0	t_1
	357 081
	288 828
	233 621
	188 966
	152 847
123 631	123 631
100 000	100 000
80 886	80 886
	65 425
	52 920
	42 804
	34 623
	28 005

- b. A l'aide du tableau suivant, déduisez-en les cas d'exercice ou de non exercice des bons remboursables (ne recopiez sur votre copie que les cases à compléter).

\hat{V}_1'	\hat{V}_1''	$C(\hat{V}_1'', \tau_3, nK)$	Calcul intermédiaire	Exercice des BSAR (OUI/NON)
357 081	407 081	366 144		
233 621	283 621	242 684		
152 847	202 847	161 911		
100 000	150 000	109 073		
65 425	115 425	74 557		
42 804	92 804	52 131		
28 005	78 005	37 729		

A compléter sur votre copie

- c. **Vous remettrez avec votre copie les différentes feuilles comportant les arbres binomiaux complétés (en n'oubliant pas de reporter votre numéro d'anonymat).**

On donne la table suivante pour terminer les calculs.

\hat{V}_1'	\hat{V}_1''	$C(\hat{V}_1'', \tau_3, nK)$
357 081	327 081	286 144
233 621	203 621	162 685
152 847	122 847	81 955
100 000	70 000	30 161
65 425	35 425	4 021
42 804	12 804	9

Vous devrez donner les valeurs des cases vides (encadrées en gras) et expliquer sur la feuille comprenant l'arbre les calculs pour celles dont le fond est grisé.

Reporter le numéro d'anonymat de votre copie : _____

Arbre des bons

t_0			t_1
		39 779	
	32 744		
25 441	28 354	27 405	28 537
	24 638	27 145	
23 381	25 821	27 145	28 537
	24 505	25 682	30 000
		26 807	28 537
			30 000
			27 715

Explications des calculs (cases sur fond gris) :

Reporter le numéro d'anonymat de votre copie : _____

Arbre des actions

t₀			t₁
		156 808	198 299
	121 077		121 025
67 616	91 429	88 606	56 630
	44 428	37 931	30 161
30 527	24 812		17 926
	15 931	10 565	
	6 183		2 173
		1 174	9
			5
			

Explications des calculs (cases sur fond gris) :