Théorie des Options

Anne EYRAUD-LOISEL

Cours numéro 6

02/03/2023

Relations d’arbitrage

- Relations entre les prix des options dû à l’AOA
- Relation de parité CALL-PUT
- Cas des options américaines

Borne inf sur CALL

$C_0 \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$

- **Preuve** :

Prenons 2 portefeuilles X et Y définis de la façon suivante :

X =

Y =

Et comparons ces 2 portefeuilles :
$X_T \geq Y_T$ car
Donc $X_0 \geq Y_0$ soit

Opération	t=0	t=T
Portefeuille X		
Portefeuille Y		
Comparaison		

Borne inf sur CALL

$C_0 \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$

- **Preuve** :

Prenons 2 portefeuilles X et Y définis de la façon suivante :

X = CALL + placement Ke^{-rT}

Y = Sous-jacent

Et comparons ces 2 portefeuilles :
$X_T \geq Y_T$ car $\max(S_T,K) \geq S_T$
Donc $X_0 \geq Y_0$ soit $C_0 + Ke^{-rT} \geq S_0$
ou encore $C_0 \geq S_0 - Ke^{-rT}$

Opération	t=0	t=T
Portefeuille X	C_0+Ke^{-rT}	$(S_T-K)_+ + K$ $=\max(S_T,K)$
Portefeuille Y	S_0	S_T
Comparaison	$X_0 \geq Y_0$	$(S_T-K)_+ + K$ $=\max(S_T,K)$ $\geq S_T$ Soit $X_T \geq Y_T$

Borne inf sur PUT

$$P_0 \geq \max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$$

- **Preuve** :

Prenons 2 portefeuilles X et Y définis de la façon suivante :

X =

Y =

Et comparons ces 2 portefeuilles :
$X_T \geq Y_T$ car
Donc $X_0 \geq Y_0$ soit

Opération	t=0	t=T
Portefeuille X		
Portefeuille Y		
Comparaison		

Borne inf sur PUT

$P_0 \geq \max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$

- **Preuve** :

Prenons 2 portefeuilles X et Y définis de la façon suivante :

X = PUT + sous jacent

Y = place Ke^{-rT} sans risque

Et comparons ces 2 portefeuilles :
$X_T \geq Y_T$ car
Donc $X_0 \geq Y_0$ soit $P_0 + S_0 \geq Ke^{-rT}$
Or $P_0 + S_0 \geq 0$ donc $P_0 \geq \max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$

Opération	t=0	t=T
Portefeuille X	$P+S_0$	$(K-S_T)_+ + S_T$ $=\max(K,S_T)$
Portefeuille Y	Ke^{-rT}	K
Comparaison	$X_0 \geq Y_0$	$\max(K,S_T) \geq K$ Donc $X_T \geq Y_T$

EXERCICE

Refaire le même raisonnement avec
X = PUT
Y = place Ke^{-rT} sans risque+ sous jacent en position courte (vente à découvert)
→ on obtient directement $P_0 \geq Ke^{-rT} - S_0$

Relation de Parité CALL-PUT

- **Proposition** : Un CALL et un PUT <u>européens</u> ayant le même sous-jacent, le même prix d'exercice et la même échéance sont toujours liés par la relation :

$$C_0 + Ke^{-rT} = S_0 + P_0$$

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$$

- **Preuve** :

Prenons 2 portefeuilles X et Y définis de la façon suivante :

X =

Y =

Et comparons ces 2 portefeuilles :

$X_T = Y_T$ car

Donc $X_0 = Y_0$ soit

Opération	t=0	t=T
Portefeuille X		
Portefeuille Y		
Comparaison		

Relation de Parité CALL-PUT

- **Proposition** : Un CALL et un PUT européens ayant le même sous-jacent, le même prix d'exercice et la même échéance sont toujours liés par la relation :

$$C_0 + Ke^{-rT} = S_0 + P_0$$

$$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$$

- **Preuve** :

Prenons 2 portefeuilles X et Y définis de la façon suivante :

X = CALL + placement Ke^{-rT}

Y = PUT + sous jacent

Et comparons ces 2 portefeuilles :
$X_T = Y_T$ car
Donc $X_0 = Y_0$ soit $C_0 + Ke^{-rT} = S_0 + P_0$

Opération	t=0	t=T
Portefeuille X	$C_0 + Ke^{-rT}$	$(S_T-K)_+ + K$ $=\max(S_T,K)$
Portefeuille Y	$S_0 + P_0$	$(K-S_T)_+ + S_T$ $=\max(K,S_T)$
Comparaison	$X_0 = Y_0$	$X_T = Y_T$

Être capable de le refaire !

Bornes et Relation de Parité CALL-PUT

Proposition générale : Les prix en n'importe quel instant t d'un CALL et d'un PUT <u>européens</u> ayant le même sous-jacent, le même prix d'exercice et la même échéance sont toujours liés par la relation de parité CALL-PUT suivante :

$$C_t + Ke^{-r(T-t)} = S_t + P_t$$

Autrement dit

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Ainsi que les bornes

$$\max(S_t - Ke^{-r(T-t)}, 0) \leq C_t \leq S_t$$

$$\max(Ke^{-r(T-t)} - S_t, 0) \leq P_t \leq Ke^{-r(T-t)}$$

- Refaire le raisonnement avec les portefeuilles X et Y entre t et T
- Reprendre l'exercice sur le BOX SPREAD et faire le lien avec la relation de parité CALL-PUT

Signification de la Relation de Parité CALL-PUT

La relation de parité call-put signifie économiquement que **sur les 4 instruments financiers** que sont le titre support, le call, le put et l'actif sans risque, **l'un** quelconque est **redondant**, c'est-à-dire qu'on peut le **répliquer** à l'aide des 3 autres.

Par exemple, l'achat du call est identique à l'achat du put correspondant et du titre support, financé par un emprunt sur le marché monétaire.

C'est la raison pour laquelle on peut créer des call, des puts, des supports et des instruments de taux d'intérêts **synthétiques**.

Naturellement, la parité et donc cette redondance ne sont **pas absolues** dans la **réalité**, du fait de l'existence de **coûts de transaction**.

Relation de Parité CALL-PUT en présence de dividendes discrets

- **Proposition** : En présence d'un dividende discret D versé à une date t_D, la relation de parité devient :

$$C_0 + Ke^{-rT} = S_0 + P_0 - De^{-rtD}$$

- **Preuve** :

Prenons 2 portefeuilles X et Y définis de la façon suivante :

X = CALL + placement Ke^{-rT} **+ De^{-rtD}**

Y = PUT + sous jacent

Et comparons ces 2 portefeuilles :
$X_T = Y_T$ car
Donc $X_0 = Y_0$ soit $C_0 + Ke^{-rT} + De^{-rtD} = S_0 + P_0$

Opération	t=0	$t=t_{D+}$	t=T
Portefeuille X	$C_0 + Ke^{-rT}$ **$+ De^{-rtD}$**	$C_{0tD} + Ke^{-r(T-tD)}$ **+ D**	$(S_T-K)_+ + K + De^{r(T-tD)}$ $=\max(S_T,K) + De^{r(T-tD)}$
Portefeuille Y	$P_0 + S_0$	$P_{tD} + S_{tD}$ **+D**	$(K-S_T)_+ + S_T + De^{r(T-tD)}$ $=\max(K,S_T) + De^{r(T-tD)}$
Comparaison	$X_0 = Y_0$	$X_{tD} = Y_{tD}$	$X_T = Y_T$

Cas du dividende continu taux d

$$C_0 - P_0 = S_0\, e^{-dT} - Ke^{-rT}$$

Options américaines

Que deviennent les bornes et la relation de parité CALL-PUT ?

Cas des options américaines

Notons C_t et P_t les prix d'un CALL et d'un PUT européens à l'instant t, et $\underline{C}_t$ et $\underline{P}_t$ ceux de leurs homologues américains.

- **Proposition** : Comme les options américaines procurent plus de droits que leurs homologues européens

$$\underline{C}_0 \geq C_0 \text{ et } \underline{P}_0 \geq P_0$$

- **Preuve** :

Supposons $\underline{C}_0 < C_0$

On achète le CALL américain et on vend le CALL européen. On place le reste. On obtient une OA.

Donc $\underline{C}_0 \geq C_0$.

Généralisation : $\underline{C}_t \geq C_t$ et $\underline{P}_t \geq P_t$

Opération	t=0	t=T
Achat CALL américain (et on le garde jusqu'en T)	$-\underline{C}_0$	$(S_T-K)_+$
Vente CALL européen	C_0	$-(S_T-K)_+$
Placement du reste	$-(C_0 - \underline{C}_0)$	$(C_0 - \underline{C}_0)e^{rT}>0$
Total : 0A !	0	>0

Le faire pour le PUT

Cas des options américaines

Proposition

Dans le cas standard (sans dividendes), sous l'hypothèse d'AOA, les prix des options américaines vérifient les relations suivantes :

1. $\underline{C}_T = C_T = (S_T - K)_+$ et $\underline{P}_T = P_T = (K - S_T)_+$
2. $\max(S_t - K, 0) \leq \underline{C}_t \leq S_t$
   $\max(K - S_t, 0) \leq \underline{P}_t \leq K$
3. $\underline{C}_t(T_2) \geq \underline{C}_t(T_1)$ si $T_2 \geq T_1$
   $\underline{P}_t(T_2) \geq \underline{P}_t(T_1)$ si $T_2 \geq T_1$

Preuve – cas des options américaines

1. À l'échéance les options européennes et américaines sont identiques (même payoff) donc $\underline{C}_T = C_T = (S_T - K)_+$ et $\underline{P}_T = P_T = (K - S_T)_+$
2. Si $\underline{C}_t < (S_t - K)_+$, on achète le CALL américain et on exerce tout de suite.
   On obtient en t : $- \underline{C}_t + (S_T - K)_+ > 0$. C'est une OA. Donc $\underline{C}_t \geq (S_t - K)_+$

Supposons $\underline{C}_0 > S_0$ (on se place à t=0), on achète le sous-jacent et on vent le CALL américain. Que se passe-t-il ?

→ $\underline{C}_0 \leq S_0$ et plus généralement $\underline{C}_t \leq S_t$

Opération	t=0	$t=\underline{t}$
Achat sous-jacent S	$-S_0$	$S_{\underline{t}}$
Vente <u>CALL</u> américain	$\underline{C}_0$	$-(S_{\underline{t}}-K)_+$
Placement du reste	$-(\underline{C}_0-S_0)$	$(\underline{C}_0-S_0)e^{r\underline{t}}$
Total	0	$X_{\underline{t}}=$ $S_{\underline{t}}-(S_{\underline{t}}-K)_+ + (\underline{C}_0-S_0)e^{r\underline{t}}$ ≥ 0 > 0 $X_{\underline{t}}>0$

EXERCICE

Faire le raisonnement identique pour le PUT

Preuve – cas des options américaines

3. $T_2 \geq T_1$

Supposons que $\underline{C}_t(T_2) < \underline{C}_t(T_1)$

On achète le moins cher et on vend le plus cher. Que se passe-t-il ?

On construit une OA. Absurde !

Donc $\underline{C}_t(T_2) \geq \underline{C}_t(T_1)$

Interprétation : un CALL (T_2) donne plus de droits qu'un CALL (T_1) donc le prix est plus cher.

Opération	t=0	t=
Achat <u>CALL</u>(T_2) américain		
Vente <u>CALL</u>(T_1) américain		
Total		

CALL américain sur sous-jacent ne versant pas de dividendes

- On a vu que $\max(S_t - K, 0) \leq \underline{C}_t$

autrement dit $(S_t - K)_+ \leq \underline{C}_t$

→ À tout instant, le détenteur de l'option a intérêt à vendre l'option à son prix de marché plutôt que de l'exercer.

→ Il n'est JAMAIS OPTIMAL d'exercer un CALL américain sur un actif ne versant pas de dividende

Proposition : En l'absence de versement de dividendes, un CALL américain a le même prix qu'un CALL européen de mêmes caractéristiques

Preuve par AOA : supposons $\underline{C}_0 > C_0$ (on a déjà vu que $\underline{C}_0 \geq C_0$). Construisez une OA.

Signification : La valeur temps du CALL américain est toujours >0 et donc il n'a jamais intérêt à être exercé

Opération	t=0	t=$\underline{t}$
Achat option européenne	$-C_0$	$C_{\underline{t}}$
Vente option américaine	$\underline{C}_0$	$-(S_{\underline{t}}-K)_+$
Place reste	$-(\underline{C}_0 - C_0)$	$(\underline{C}_0 - C_0)e^{r\underline{t}}$
Total	0	>0

≥ 0

ATTENTION : FAUX pour les PUT

CALL américain sur sous-jacent versant des dividendes

$$\hat{C} \geq C = P + S - Ke^{-rT} - De^{-rT} \geq S - Ke^{-rT} - De^{-rT}$$

Soit un call américain sur un support au comptant versant un dividende D ou un coupon d'ici à l'échéance T.

- Il n'est jamais optimal de l'exercer avant la veille du jour de détachement du dividende.
- Il peut alors être optimal de l'exercer prématurément si le dividende est suffisant. Dans ce cas, le jour optimal d'exercice anticipé est la veille du jour du détachement du coupon.

Pourquoi ? Le détachement du coupon provoque une baisse discrète du cours d'un montant D. L'exercice anticipé du call prévient les conséquences néfastes de cette baisse sur sa valeur.

Le dernier terme n'est pas nécessairement supérieur à S − K si D est suffisamment grand. Le call peut donc avoir une valeur de marché inférieure à sa valeur intrinsèque, et il faut alors l'exercer pour obtenir S − K.

La raison pour laquelle il faut attendre la veille du jour du détachement avant d'éventuellement exercer le call est que l'exercice à une date antérieure ferait perdre un peu de valeur temps.

Relation de parité pour les options américaines

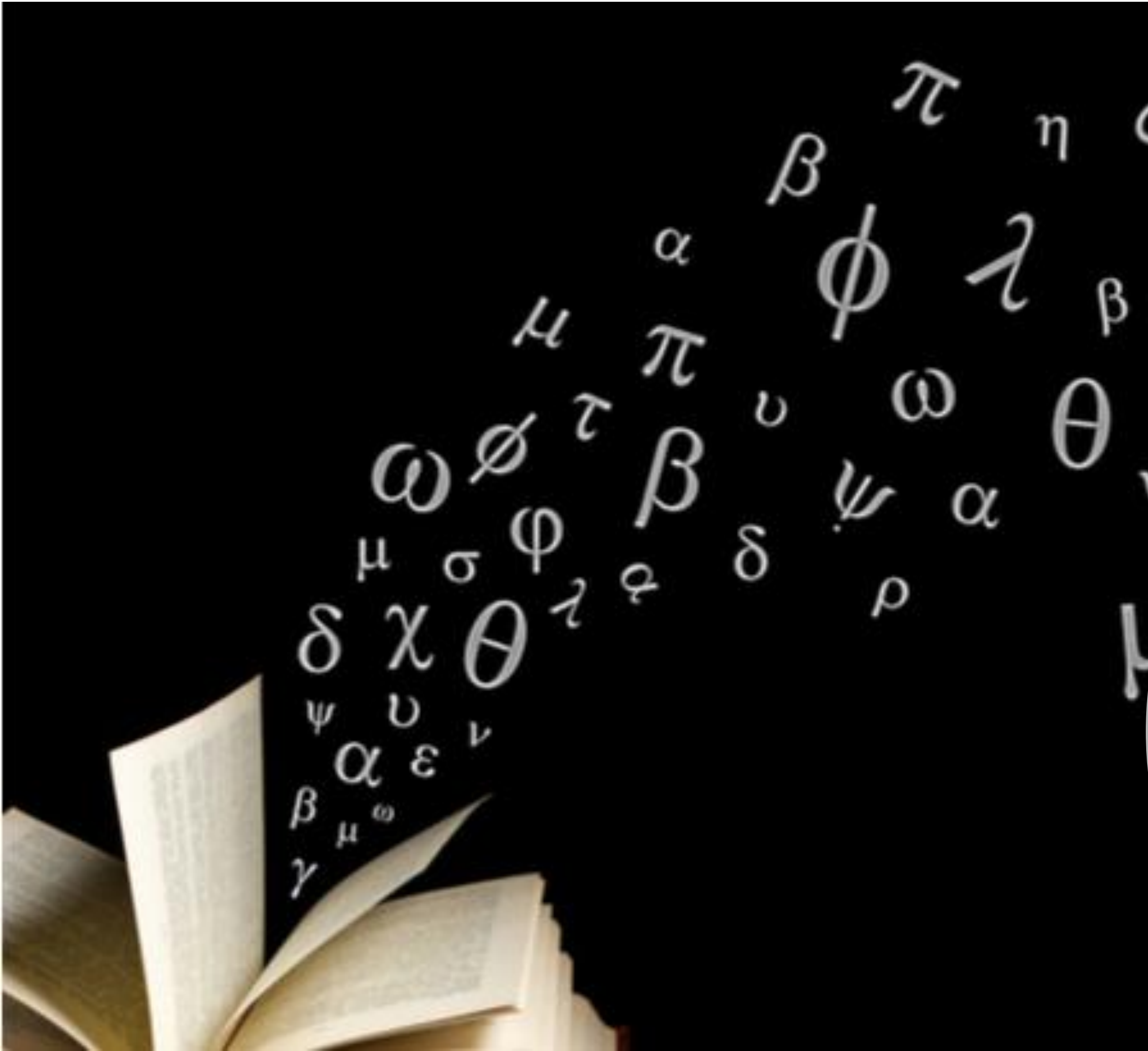
La relation de parité CALL-PUT exacte n'est valide que pour les options européennes. La valeur $\underline{C_0}$-$\underline{P_0}$ est toutefois comprise entre 2 bornes dans le cas des options américaines

- Sans dividende

$$S_0 - K \leq \underline{C_0} - \underline{P_0} \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

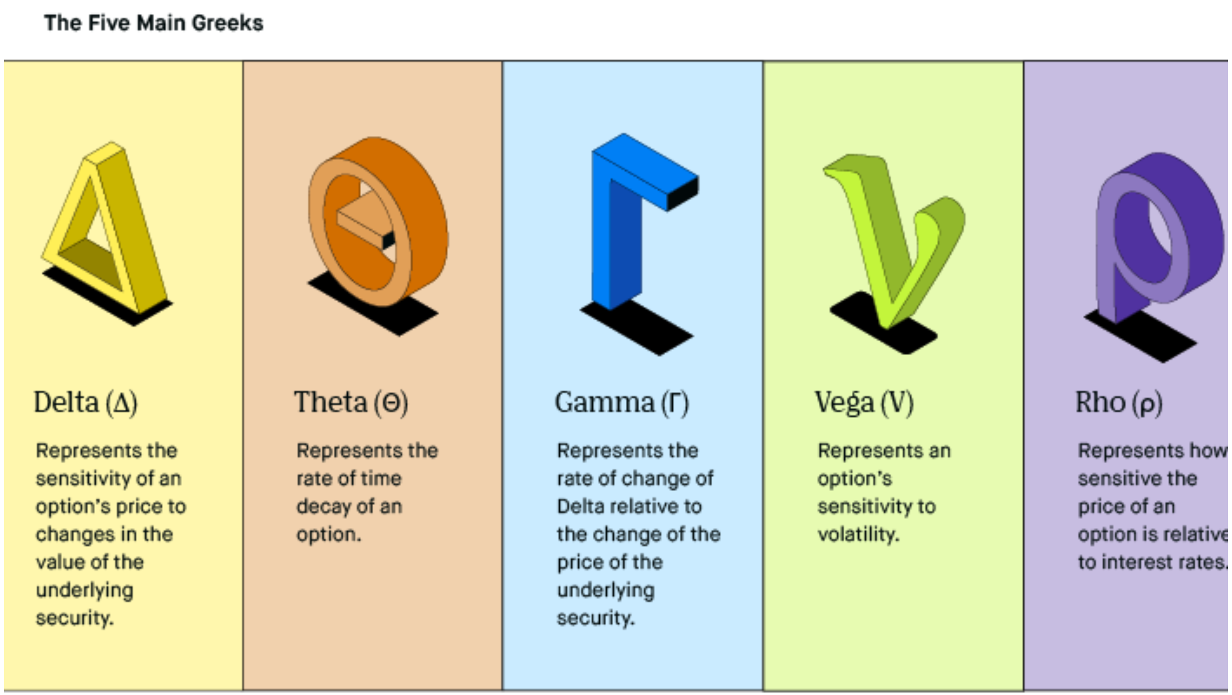
- Avec dividende

$$S_0 - De^{-rTD} - K \leq \underline{C_0} - \underline{P_0} \leq S_0 - Ke^{-rT}$$



Les Grecques et leur Utilisation

Les lettres Grecques



- La **sensibilité du prix d'une option** peut être mesurée par 5 paramètres. Ce sont des instruments de base de la gestion financière des options (gestion de risque, stratégie d'investissement et couverture)
  - **Le Delta Δ** mesure la sensibilité de la valeur de l'option par rapport aux variations du prix du ***sous-jacent***
  - **Le Gamma Γ** mesure la sensibilité du prix de l'option aux variation du ***Delta***
  - **Le Theta θ** mesure la sensibilité d'une option par rapport au ***temps*** qui reste jusqu'à l'échéance
  - **Le Véga ν** mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations de la ***volatilité***
  - **Le Rho ρ** mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations du ***taux d'intérêt***

Le Delta **Δ / δ**

Définition : Variation de la prime p de l'option quand le sous-jacent S_0 varie d'une unité

$$\Delta = \partial p / \partial S_0$$

- Il est le premier des indicateurs pris en compte par le trader. Il traduit la sensibilité de l'option aux variations du prix du sous-jacent (de combien le prix de l'option varie-t-il quand le prix du sous-jacent varie de une unité).
- **Exemple** : CALL de Δ=0,25, S_0=90€ et C_0=5€

Lorsque le cours de l'action passe de 90€ à 91€, la prime augmente de Δ et devient 5,25€.

Lorsque le cours de l'action passe de 90€ à 88€, la prime diminue de 2 Δ et devient 4,5€

Attention : approximation d'une courbe par sa tangente : pas exact

Le Delta **Δ** - Propriétés

- **Proposition** :

Δ_{CALL} € [0,1] et Δ_{PUT} € [-1,0]

Explication :

- Pour un call, $1 \geq \Delta_{CALL} \geq 0$.
  Pour le call, le delta est nécessairement positif (au pire nul) : une option d'achat vaut d'autant plus cher que le cours du sous-jacent est élevé. Par ailleurs, le delta du call est nécessairement compris entre 0 et 1. Prenons en effet le cas extrême d'un call à prix d'exercice nul : il vaut en tout temps C = S, et par conséquent Delta = 1. Si K n'est pas nul et qu'il est au contraire très élevé (K > S), le call sera moins sensible aux fluctuations du cours de l'action.

- Pour un put, $-1 \leq \Delta_{PUT} \leq 0$.
  Pour le put, le delta est nécessairement négatif (au pire nul) : une option de vente à un prix fixe vaut d'autant plus cher que le cours du sous-jacent est bas. Par un raisonnement symétrique au précédent on peut montrer que le delta du put est strictement compris entre -1 et 0.

Le Delta **Δ** - Propriétés

- **Proposition** :

Δ_{CALL} € [0,1] et Δ_{PUT} € [-1,0] ; et $\Delta_{CALL} - \Delta_{PUT} = 1$

- Preuve : conséquence de la relation de parité CALL-PUT à dériver par rapport au sous-jacent S_0

$\mathbf{C_0 + Ke^{-rT} = S_0 + P_0}$

En dérivant par rapport à S_0 cela donne

$\partial \mathbf{C_0} / \partial S_0 + 0 = 1 + \partial \mathbf{P_0} / \partial S_0$

Soit $\partial \mathbf{C_0} / \partial S_0 - \partial \mathbf{P_0} / \partial S_0 = 1$

Soit $\Delta_{CALL} - \Delta_{PUT} = 1$

Le Delta Δ - Propriétés

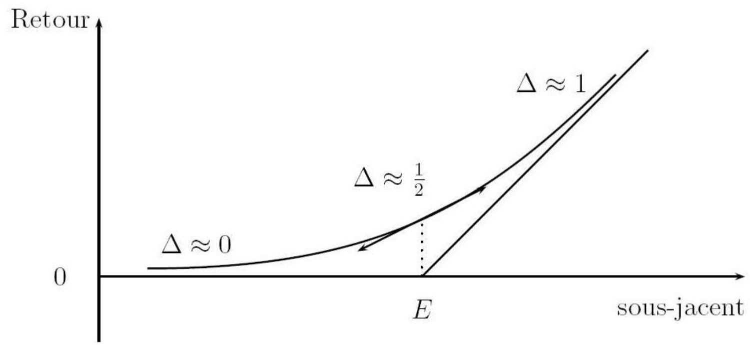
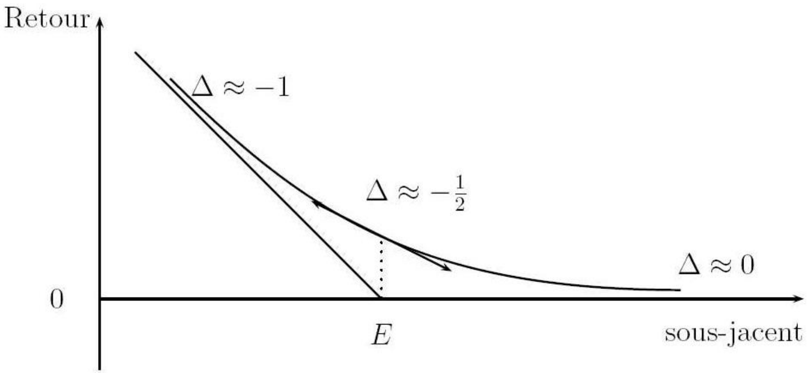


FIG. 2.3 – *L'influence du sous-jacent sur la valeur d'une option d'achat*



G. 2.4 – *L'influence du sous-jacent sur la valeur d'une option de vente*

Delta global d'un portefeuille

- Le delta global par rapport au sous-jacent S d'un portefeuille Π composé de n actifs différents (α_i la quantité d'actif i) s'écrit de la manière suivante en fonction des différents delta des actifs détenus :

$$\partial \Pi / \partial S = \sum_i \alpha_i \Delta_i$$

- **Stratégie de couverture** : Pour couvrir sa position, le vendeur d'options d'achat (qui doit livrer des titres) adopte une **position en Δ-neutre** (ou stratégie delta-neutre). Il constitue un portefeuille d'actions en achetant Δ actions par call vendu. Cette stratégie doit être adaptée constamment à cause de l'instabilité du Δ.
- <u>Exemple</u> : Soit Δ = 0,3. Pour couvrir la vente d'une option d'achat, l'investisseur achète 0,3 actions par option vendue (pour une action). S'il vend 100 options d'achat (pour une quotité de 10). La position acheteur (longue) est de 300 actions et la position vendeur (courte) est de 100 options. Le delta global d'une position est défini par le gain ou la perte réalisé par cette position lorsque le cours de l'action augmente d'une unité monétaire. Le delta d'une action est égal à 1. Dans l'exemple :
  - Δ de la position courte pour 100 options : $0,3 \times 10 \times (-100) = -300$
  - Δ de la position longue pour 300 actions : $1 \times 300 = 300$

Si on constitue donc un portefeuille constitué de 300 actions et 100 options d'achat sur une quotité de 10, le Δ global de ce portefeuille, à l'instant considéré, vaut donc 0, d'où le nom de **stratégie "Delta-neutre".**

Le Delta **Δ / δ** - Utilisation

- Il fournit une information sur la variabilité de l'option mais aussi sur la probabilité d'exercer l'option.
- Il est le premier des indicateurs pris en compte par le trader. Il traduit la sensibilité de l'option aux variations du prix du sous-jacent (de combien le prix de l'option varie-t-il quand le prix du sous-jacent varie de une unité).
- Il nous donne le nombre d'actions à utiliser pour couvrir une option. Il suffira de multiplier ce Delta par la quotité pour obtenir la position globale de couverture.
- **Portefeuille Delta-Neutre** : rendre moins sensible son portefeuille aux variations du sous-jacent -> éviter d'avoir à rebalancer trop fréquemment son portefeuille

Le Gamma Γ / γ

Définition : Variation du Δ de l'option quand le sous-jacent S_0 varie d'une unité

$$\Gamma = \partial \Delta / \partial S_0 = \partial^2 p / \partial S_0^2$$

C'est donc la variation d'ordre 2 par rapport au prix du sous-jacent.

Exemple : CALL de Δ=0,30, Γ =0,10, S_0=60€

Lorsque le cours de l'action passe de 60€ à 61€, le delta augmente de Γ et devient 0,40.

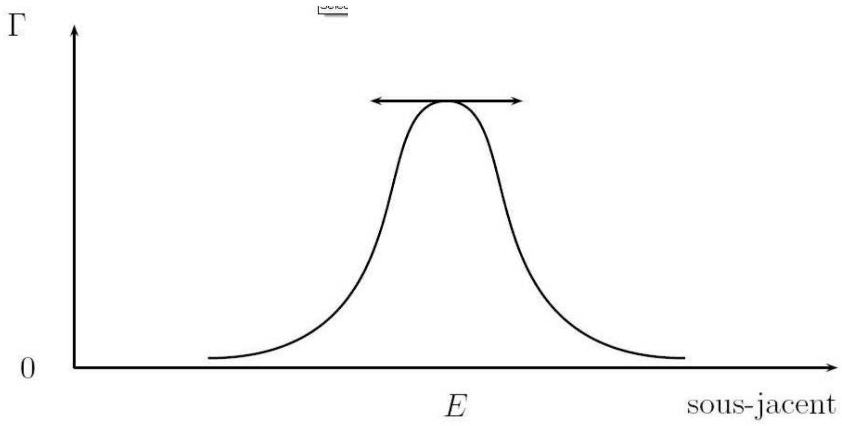
Lorsque le cours de l'action passe de 60€ à 58€, le delta diminue de 2Γ et devient 0,10.

Proposition : $\Gamma_{CALL} = \Gamma_{PUT}$

Le Gamma est identique pour l'option d'achat et l'option de vente (il suffit de dériver 2 fois la relation de parité Call-Put pour s'en apercevoir).

Le Gamma Γ - Comportement

- L'évolution du Γ en fonction du sous-jacent est illustré sur la figure suivante :



- ”at the money”, le Δ est instable que ce soit pour l'option d'achat ou pour l'option de vente (Γ élevé).
- A l'inverse, loin de cette position, le Δ est stable (Γ faible).

Le Gamma Γ - Utilisation

- Le Gamma représente la **convexité du prix d'une option** en fonction du cours du sous-jacent. Il indique si le prix de l'option a tendance à évoluer plus ou moins vite que le prix du sous-jacent. Par analogie, on peut comparer le **delta à la vitesse** et le **gamma à l'accélération**.
- En pratique, celui-ci est très important, vu le comportement des acteurs en salle de marché : leur stratégie étant traditionnellement de se positionner en delta-neutre sur leur portefeuille (insensibilité au premier ordre), c'est donc principalement le gamma, et donc les fluctuations de grande amplitude du cours, qui vont être responsables de l'évolution d'un portefeuille.
- Le Gamma peut être vu comme une estimation de la **fréquence de rebalancement d'un portefeuille delta-neutre**. En effet, un Γ élevé implique une forte sensibilité du par rapport au prix du sous-jacent. Le trader qui adopte une couverture dynamique delta-neutre sera donc amené à modifier sa position sur le sous-jacent de façon très fréquente, ce qui peut-être prohibitif si les coûts de transaction sont élevés. A l'inverse, si le gamma de l'option est petit, voire nul, le trader peut conserver une position fixe tout au long de la durée de vie de l'option.
- La connaissance du Γ est très importante dans une stratégie delta-neutre. Si le Γ est élevé, les stratégies de rééquilibrage seront nombreuses parce qu'il y aura une forte instabilité de la couverture. Idéalement, la position globale devra avoir un delta nul mais également un Γ proche de 0.

Exercice

- Utilisation Δ et Γ, et portefeuilles Δ-neutres et Γ-neutres
- Exercice 8 fiche de TD 3

8. Un investisseur détenant un portefeuille composé de 200 CALL identiques en position longue et de 40 actions (le sous-jacent des CALL) en position courte désire le rendre gamma-neutre et delta-neutre simultanément. Ce portefeuille de valeur V est déjà delta-neutre, mais son coefficient gamma est égal à 3. Notre investisseur sélectionne sur le marché un PUT doté d'un delta de -0.5 et un gamma de 0.015.
   (a) Calculez le delta et le gamma d'un CALL.
   (b) Combien de PUT doit-il détenir (en position courte ou longue) afin d'obtenir un portefeuille gamma-neutre de valeur $V^* = V + \alpha P_0$ où α et P_0 désignent respectivement le nombre de PUT et la prime d'un PUT.
   (c) Calculez le delta du portefeuille ainsi obtenu.
   (d) Déduisez-en un portefeuille de valeur $V^{**} = V^* + \beta S_0 = V + \alpha P_0 + \beta S_0$ à la fois delta-neutre et gamma-neutre, où β et S_0 désignent respectivement le nombre de sous-jacents relatif au PUT et la valeur de ce sous-jacent.

Le Theta θ

- Variation de la prime p de l'option par rapport au temps

  $\boldsymbol{\theta} = \partial p / \partial t = -\partial p / \partial (T-t) = -\partial p / \partial \tau$

- La valeur temps diminue avec le temps donc **θ≤0**
- Theta = coût du temps qui passe sur le portefeuille d'options (ex. un achat de CALL sera θ-négatif)
- $\theta_{CALL} - \theta_{PUT} = rKe^{-r(T-t)}$
- $\theta_{CALL} \neq \theta_{PUT}$ impact du temps différent si PUT ou CALL

Le Theta θ - Utilisation

- Le thêta est le coût du temps qui passe sur un portefeuille d’options. Il évalue combien le passage du temps influe sur la valeur d’une option. Une position longue d’options (gamma positive) sera thêta-négative. Le trader devra veiller tous les jours à payer son thêta journalier en profitant de sa position longue en gamma.
- On préfèrera donc être long d’une option qui soit suffisamment volatile, ainsi en rebalancant la position, on pourra payer le temps qui passe en tradant le gamma.

Le Véga **ν**

Définition : Variation de la prime p de l'option quand la volatilité σ du sous-jacent S_0 varie d'une unité

$$\boldsymbol{\nu} = \partial p / \partial \sigma$$

- **Proposition** :

$$\boldsymbol{\nu}_{CALL} = \boldsymbol{\nu}_{PUT}$$

$$\boldsymbol{\nu}_{CALL} \geq 0 \text{ et } \boldsymbol{\nu}_{PUT} \geq 0$$

Un acheteur de CALL ou PUT est long de Véga ou **ν** ≥ 0,

un vendeur de CALL ou PUT est court de Véga ou **ν** ≤ 0

- Vega fonction croissante de la maturité (une augmentation de la volatilité aura + d'impact sur les options dont l'échéance est éloignée)

Le Véga **ν** - Utilisation

- Contrairement au gamma et au thêta, le véga est une fonction croissante de la maturité. Ainsi une augmentation parallèle de la volatilité aura-t-elle plus d’impact sur les options dont la date d’échéance est éloignée que sur celles dont elle est proche. En effet, une volatilité forte augmente les chances d’exercer l’option et augmente donc son prix. Une position généralement appreciée des traders et des market makers est alors d’avoir une position globalement gamma positive (sensible aux grands mouvements de marché) et véga négative, qui consiste à acheter des options courtes et à vendre des options longues.

Le Rho ρ

Définition : Variation de la prime p de l'option par rapport au taux d'intérêt

$$\boldsymbol{\rho} = \partial p / \partial r$$

- **Proposition** :

$\boldsymbol{\rho}_{CALL} - \boldsymbol{\rho}_{PUT} = KTe^{-rT}$

$\boldsymbol{\rho}_{CALL} \geq 0$ et $\boldsymbol{\rho}_{PUT} \leq 0$

- **Remarque** : existe aussi sensibilité par rapport au prix d'exercice mais beaucoup moins répandue…

Utilité des grecques

- Les grecques sont avant tout des **indicateurs des risques** pris par celui qui a acheté ou vendu des options. Elles détaillent ces risques par origine : le prix du sous-jacent, la volatilité implicite, le temps et le taux d’intérêt.
- Elles vont donc permettre de gérer chacun de ces paramètres finement, que ce soit au niveau du trading, ou au niveau des services de contrôle des risques dans les structures où ils existent.
- Elles sont des **outils de gestion** pour le trader.

Prochain cours s:
Les modèles d'évaluation