Examen Théorie des Valeurs Extrêmes 2015-2016

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice - 1h30

Questions de cours et exercices d'applications du cours (7 points):

1. Que signifie F appartient au domaine d'attraction d'une distribution max-stable G ($F \in D(G)$)?

2. Quel lien relie les distributions GEV (Generalised Extreme Value distributions) et les distributions GPD (Generalised Pareto distributions)?

3. On suppose que deux distributions F et G ont le même point extrémal ($x^F = x^G$) et

$$\lim_{x \to x^F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = c \in (0, \infty).$$

Montrer que F et G appartiennent au même domaine d'attraction (disons celui de la GEV$(0,1,\xi)$) et donner le lien entre les constantes de normalisation. On rappelle que la fonction de répartition d'une GEV$(0,1,\xi)$ est

$$\exp\left(-(1+\xi x)_+^{-\frac{1}{\xi}}\right), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement supposons que F et G ont le même point extrémal et appartiennent au domaine d'attraction de la Gumbel ($\Lambda(x) = \exp(-(\exp(-x)))$ telles qu'il existe $c_n > 0$ et d_n vérifiant

$$\lim_{n \to \infty} F^n(c_n x + d_n) = \Lambda(x) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} G^n(c_n x + d_n) = \Lambda(x + b).$$

Montrer que

$$\lim_{x \to x^F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = c \in (0, \infty)$$

et caractériser c.

4. Quelles sont les procédures statistiques à utiliser pour estimer les paramètres des distributions GPD (discuter suivant la nature des observations)?

Exercice 1 (8 points):

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID.

1. Montrer que s'il existe deux suites (a_n), $a_n > 0$, et (b_n) telles que

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left(\max\left(-X_1, \ldots, -X_n\right) \leq a_n x + b_n\right) = H(x)$$

pour une fonction de distribution H non-dégénérée, alors il existe deux suites (c_n), $c_n > 0$, et (d_n) telles que

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left(\min\left(X_1, \ldots, X_n\right) \leq c_n x + d_n\right) = 1 - H(-x).$$

Quelles relations existe-t-il entre les suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n)?

2. On rappelle que les distributions des extrêmes généralisées (GEV) sont caractérisées par les fonctions de répartition

$$G_\xi(x) = \exp\left(-(1+\xi x)_+^{-1/\xi}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Caractériser alors les distributions limites possibles pour le minimum de variables aléatoires indépendantes.

3. Montrer qu'elles sont min-stables et donner les coefficients de normalisation.

4. Posons $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $m_n = \min(X_1, ..., X_n)$ et supposons qu'il existe des constantes $a_n > 0$, $\alpha_n > 0$, b_n, β_n telles que

$$P\left(M_n \leq a_n x + b_n\right) \to G_1(x) \qquad \text{et} \qquad P\left(-m_n \leq \alpha_n x + \beta_n\right) \to G_2(x).$$

Montrer la convergence

$$P(M_n \leq a_n x + b_n, -m_n \leq \alpha_n y + \beta_n) \to G_1(x)G_2(y).$$

Qu'en concluez-vous?

Exercice 2 (5 points):

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution de Fréchet de paramètre 1, i.e. $\Pr\left(X_1 \leq x\right) = \exp\left(-x^{-1}\right)$.

0. Donner les constantes a_n et b_n telles que

$$\frac{\max(X_1, ..., X_n) - b_n}{a_n} \stackrel{L}{=} X_1.$$

On définit le processus max-autoregressif de la manière suivante:

$$Y_i = \max\left(\alpha Y_{i-1}, (1-\alpha) X_i\right)$$

avec $0 \leq \alpha < 1$.

1. Montrer que si $Y_i = \max_{j \geq 0} \alpha^j (1-\alpha) X_{i-j}$ alors Y_{i+1} a la même distribution que Y_i. Il s'agit de la distribution stationnaire. Montrer que cette distribution est la distribution de Fréchet de paramètre 1.

2. Montrer que

$$\Pr\left(\max(Y_1, ..., Y_n) \leq x\right) = \Pr\left(Y_1 \leq x, (1-\alpha)\, X_2 \leq x, \ldots, (1-\alpha)\, X_n \leq x\right).$$

3. En déduire que

$$\Pr\left(\max(Y_1, ..., Y_n) \leq x\right) = \exp\left(-\left[1 + (1-\alpha)\,(n-1)\right]/x\right)$$

et que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\frac{\max(Y_1, ..., Y_n) - b_n}{a_n} \leq x\right) = \exp\left(-\left(1-\alpha\right) x^{-1}\right).$$

4. Pour quelle valeur de α les lois asymptotiques des maxima des X_i et des Y_i normalisés coïncident?