TD 3 Finance Mathématique M2 Actuariat

Yahia SALHI
yahia.salhi@univ-lyon1.fr

Exercice 1: Prix zéro-coupon et résolution d'EDP
On considère le modèle de taux court suivant:

$$dr_t = a dt + \sigma dW_t,$$

avec a et σ deux constantes et $W = (W_t)_{t \geq 0}$ un mouvement Brownien standard.
1. Donner l'EDP vérifié par une obligation zéro-coupon d'échéance T, $P(t,T)$
2. Rappeler la forme du zéro-coupon $P(t,T)$ dans le cadre du modèle choisi
3. Donner la forme explicite (en résolvant l'EDP) de $P(t,T)$ en fonction de a, σ et r_t.

Exercice 2: Option sur zéro-coupon, univers forward neutre
On considère une obligation zéro-coupon d'échéance T et on suppose que son cours $P(t,T)$ admet, dans l'univers risque neutre, la dynamique suivante:

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r_t dt - \sigma(t,T) dW_t.$$

La structure de volatilité σ est supposée déterministe, r est le processus de taux court et W est un mouvement brownien standard sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$. On note $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle.
1. A l'aide du lemme d'Itô, intégrer l'équation précédente et montrer, en utilisant la relation $P(t,t) = 1$, que la solution est indépendante du taux court r.

2. On rappelle que l'univers $s-$forward neutre est associé au zéro-coupon d'échéance s et admet une mesure de probabilité $\mathbb{Q}_s$ définie par le changement de probabilité suivant:

$$\frac{d\mathbb{Q}_s}{d\mathbb{Q}}|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\delta(t)P(t,s)}{P(0,s)}, \ 0 \leq t \leq s,$$

où $\delta(t) = e^{-\int_0^t r(u)du}$ est le facteur d'actualisation à la date t. Donner à l'aide du théorème de Girsanov, l'expression du nouveau mouvement brownien W^s dans l'univers $s-$forward neutre.

3. Exprimer en fonction de la courbe des taux à l'origine et de la structure de volatilité, le prix $P(t,T)$ du zéro-coupon d'échéance T, successivement dans les univers $t-$forward neutre et $T-$forward neutre.

4. On considère un call européen de maturité t sur un zéro-coupon d'échéance $T > t$ et de prix d'exercice K.
4.a Montrer que le prix de cette option à la date 0 peut s'écrire:

$$C(0,t) = P(0,T)\mathbb{Q}_1(P(t,T) > K) - KP(0,t)\mathbb{Q}_2(P(t,T) > K)$$

où $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$ sont des probabilités à définir.

4.b Déterminer $\mathbb{Q}_1(P(t,T) > K)$ et $\mathbb{Q}_2(P(t,T) > K)$.

4.c En déduire le prix en 0 d'un put de même caractéristique.