Gestion de portefeuille
Actuariat, mai 2022, durée 2h

On reprend ici les notations utilisées en cours.

1. On considère un marché à deux actifs $A_1(\mu_1, \sigma_1)$ et $A_2(\mu_2, \sigma_2)$ avec $\mu_1 < \mu_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$ (avec μ_i le rendement espéré de l'actif A_i et σ_i son écart-type). Supposons que le coefficient de corrélation entre les rendements aléatoires de ces actifs est $\rho = -1$. Sur ce marché les ventes à découvert sont interdites.
   (a) Soit le portefeuille $(\alpha, 1-\alpha)$. Quelle contrainte doit-on avoir sur α ?
   (b) Ecrire le rendement espéré μ_P et la variance σ_P^2 du portefeuille $(\alpha, 1-\alpha)$.
   (c) Ecrire un problème qui vous permet de trouver le portefeuille VM de variance minimale. Trouver le portefeuille VM. Que remarquez-vous ?
   (d) Donner l'équation de frontière efficiente (trouver donc une relation entre μ_P et σ_P).
   (e) Tracer la frontière efficiente. Placer A_1 et A_2 sur cette frontière.
2. Modèle de Black-Litterman :
   (a) Soit un marché avec 7 actifs A, B, C, D, E, F et G. Considérons les vues suivantes :
   -L'actif A sur-performera l'actif E de 3%. La confiance dans cette vue est de 15%.
   -L'actif B aura une prime de risque de 4.2%. L'agent est certain de cette vue.
   -La somme des primes de risque de G et D sur-perfomera la somme de A et C de 3%. L'agent est incertain à 20% de cette vue.
   Ecrire P, q et Ω.
   (b) Supposons qu'un investisseur souhaite investir dans l'unique actif risqué du marche. L'investisseur est certain que la prime de risque de l'actif sera de 3%. Trouvez P, q, Ω et Π_{BL}.
3. On considère deux portefeuilles A et B dont les taux de rentabilité sont décrits par les relations suivantes

$$\tilde{R}_A = \beta_{AF} F + \varepsilon_A$$
$$\tilde{R}_B = \beta_{BF} F + \varepsilon_B$$

   avec $F, \varepsilon_A, \varepsilon_B$ indépendants et $\beta_{iF} = \frac{cov(\tilde{R}_i, F)}{\sigma_F^2}$, $i = A, B$. Construisez un portefeuille combinant A et B et de telle manière à ce que son exposition au facteur F soit nulle (i.e. non-corrélé avec le facteur).
4. **Frontière efficiente**
   Supposons un marché à deux actifs : un actif sans risque (de rendement r_f) et un actif risqué A (de rendement espéré $\mu_A > r_f$ et de risque $\sigma_A > 0$).
   (a) Quelle est la frontière efficiente de Markowitz dans ce cas (équation et graphique) ?
   (b) Dans le modèle de Markowitz on a admis l'existence du taux sans risque r_f sans distinguer les taux de prêt et de placement. Supposons maintenant que le taux d'emprunt noté R_f et le taux de placement noté r_f sont différents.
      i. Quelle serait le rendement espéré du portefeuille $(1-w, w)$ où w représente le poids de richesse investi dans l'actif risqué ?

ii. Que devient la frontière efficiente si le taux d'emprunt est supérieur au taux de placement ? Faites une représentation graphique de la frontière.

iii. Pour quels investisseurs cette situation ne change-t-elle pas la composition de leur portefeuille ?

Exercices 1 et 4 ont déjà été fait en TD

Exercice 2 :

a) $q = \begin{pmatrix} 3\% \\ 4{,}2\% \\ 3\% \end{pmatrix} \qquad \Omega = \begin{pmatrix} 85\% & & \\ & 0\% & \\ & & 20\% \end{pmatrix}$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow p_1' \\ \leftarrow p_2' \\ \leftarrow p_3' \end{matrix}$$

b) $\tilde{\Pi}_{BL} = \Pi + \tau\Sigma P'(\Omega + P\tau\Sigma P')^{-1}(q - P\Pi)$

$P = 1$

$q = 3\%$

$\Omega = 0$

$$\Rightarrow \tilde{\Pi}_{BL} = \Pi + \tau\Sigma P'(\Omega + P\tau\Sigma P')^{-1}(q - P\Pi)$$

$$= \Pi + \tau\Sigma(0 + \tau\Sigma)^{-1}(3\% - \Pi)$$

$$\Rightarrow \tilde{\Pi}_{BL} = 3\%$$

Exercice 3 :

$$\tilde{R}_A = \beta_{AF} F + \varepsilon_A$$

$$\tilde{R}_B = \beta_{BF} F + \varepsilon_B$$

F, ε_A et ε_B $\perp\!\!\!\perp$ $\quad \beta_{iF} = \frac{Cov(\tilde{R}_i, F)}{\sigma_F^2} \quad i = A, B.$

On cherche w tq $Cov(w\tilde{R}_A + (1-w)\tilde{R}_B, F) = 0$

$$\Leftrightarrow w\,Cov(\tilde{R}_A, F) + (1-w)\,Cov(\tilde{R}_B, F) = 0$$

$$\Leftrightarrow w\,\beta_{AF}\,\sigma_F^2 + (1-w)\,\beta_{BF}\,\sigma_F^2 = 0$$

$$\Rightarrow w(\beta_{AF} - \beta_{BF}) = -\beta_{BF}$$

$$\Rightarrow w = \frac{\beta_{BF}}{\beta_{BF} - \beta_{AF}}$$

Donc le portefeuille serait : $\left(\frac{\beta_{BF}}{\beta_{BF} - \beta_{AF}} \,;\, \frac{-\beta_{AF}}{\beta_{BF} - \beta_{AF}} \right)$

① PB d'opti sous contrainte

② Un exo de BL i.e cherche P, q ...

③ Exo soit sur APT soit sur MEDAF

Exercice 1 :

$\rho = -1 \implies \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\sigma_1\sigma_2 \\ -\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \implies \Sigma$ n'est pas inversible
$\implies$ on ne peut pas utiliser les formules.

a) Soit $P : (\alpha \;\; 1-\alpha)' \longrightarrow \alpha \in [0,1]$ Car les ventes à découverts sont interdites.

b) $\mu_P = \mathbb{E}[\alpha A_1 + (1-\alpha) A_2] = \alpha \mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 \implies \alpha = \dfrac{\mu_P - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$ et $1-\alpha = \dfrac{\mu_1 - \mu_P}{\mu_1 - \mu_2}$

$$\sigma_P^2 = Var(\alpha A_1 + (1-\alpha) A_2) = \alpha^2 \sigma_1^2 + (1-\alpha)^2 \sigma_2^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2$$
$$= (\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_2)^2$$

c) Pour trouver le port. de VM on résout :

$$\min_{\alpha \in [0,1]} (\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_2)^2 = \min_{\alpha\in[0,1]} (\sigma_1^2+\sigma_2^2)\alpha^2 - 2\sigma_2^2\alpha + \sigma_2^2 = \min_{\alpha \in [0,1]} f(\alpha)$$

où $f : x \longmapsto \underbrace{\underbrace{(\sigma_1^2+\sigma_2^2)}_{>0} x^2 - 2\sigma_2^2 x + \sigma_2^2}_{ax^2+bx+c}$ $\implies$ le min sur $\mathbb{R}$ est atteint en $x^* = -\dfrac{b}{2a}$

ici $x^* = \dfrac{2\sigma_2^2}{2(\sigma_1^2+\sigma_2^2)} = \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$

$$\implies \alpha^* = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}} \implies 1-\alpha^* = \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$$

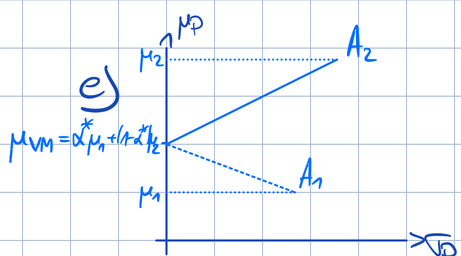
$$\implies \mu_{VM} = \frac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\mu_1 + \frac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\mu_2$$

et $\sigma_{VM}^2 = \left(\dfrac{\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\sigma_1 - \dfrac{\sigma_1}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}\sigma_2\right)^2 = 0 \longleftarrow$ Portefeuille sans risque.

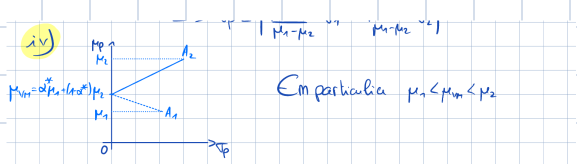
d) FE : $\sigma_P = |\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_2|$ Or $\mu_P = \alpha\mu_1 + (1-\alpha)\mu_2 \implies \alpha = \dfrac{\mu_P-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}$ et $1-\alpha = \dfrac{\mu_1-\mu_P}{\mu_1-\mu_2}$

$$\implies \sigma_P = \left|\frac{\mu_P-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\sigma_1 - \frac{\mu_1-\mu_P}{\mu_1-\mu_2}\sigma_2\right|$$

e)



En particulier, $\mu_1 < \mu_{VM} < \mu_2$.



Exercice 2:

a) $$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad q = \begin{pmatrix} 3\% \\ 4{,}2\% \\ 3\% \end{pmatrix}$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} 85\% & & \\ & 0\% & \\ & & 20\% \end{pmatrix}$$

b) $$\Pi_{BL} = \Pi + \tau \Sigma P' (\Omega + P \tau \Sigma P')^{-1} (q - P\Pi)$$

$P = 1$

$q = 3\%$

$\Omega = 0$

$$\Longrightarrow \Pi_{BL} = \Pi + \tau\Sigma (0 + \tau\Sigma)^{-1} (3\% - \Pi)$$
$$= 3\%$$

Exercice 3:

$$\tilde{R}_A = \beta_{AF} F + \varepsilon_A$$
$$\tilde{R}_B = \beta_{BF} F + \varepsilon_B$$

avec $F \perp\!\!\!\perp \varepsilon_A \perp\!\!\!\perp \varepsilon_B$ et $\beta_{iF} = \frac{Cov(\tilde{R}_i, F)}{\sigma_F^2}$ $i = A, B$.

On cherche le port. $P : (\alpha \;\; 1-\alpha)'$ tel que $Cov(\alpha \tilde{R}_A + (1-\alpha)\tilde{R}_B, F) = 0$

$$\Longrightarrow \alpha \, Cov(\tilde{R}_A ; F) + (1-\alpha) Cov(\tilde{R}_B ; F) = 0$$

Or $Cov(\tilde{R}_A ; F) = Cov(\beta_{AF} F + \varepsilon_A ; F)$
$= \beta_{AF} \sigma_F^2$ car $\varepsilon_A \perp\!\!\!\perp F$

De m̂, $Cov(\tilde{R}_B ; F) = \beta_{BF} \sigma_F^2$ car $\varepsilon_B \perp\!\!\!\perp F$.

$$\Longrightarrow \alpha \beta_{AF} \sigma_F^2 + (1-\alpha) \beta_{BF} \sigma_F^2 = 0$$

$$\Longrightarrow \alpha = \frac{\beta_{BF}}{\beta_{BF} - \beta_{AF}}$$

Donc le portefeuille serait $\left(\frac{\beta_{BF}}{\beta_{BF} - \beta_{AF}} \quad \frac{\beta_{AF}}{\beta_{BF} - \beta_{AF}} \right)'$

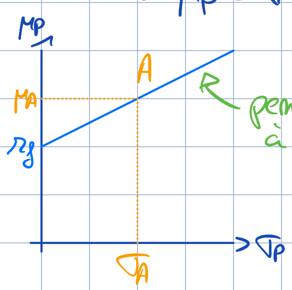
Exercice 4 :

a) $\Pi = \mu_A - r_f$

On a $\Sigma = \sigma_A^2 \Rightarrow \Sigma^{-1} = \frac{1}{\sigma_A^2}$

$$\Rightarrow \mu_P = \sqrt{\Pi' \Sigma^{-1} \Pi}\, \sigma_P + r_f = \sqrt{\frac{1}{\sigma_A^2}(\mu_A - r_f)^2}\, \sigma_P + r_f$$

$$= \frac{\mu_A - r_f}{\sigma_A}\sigma_P + r_f$$



b) i) $P : (1-\omega \quad \omega)'$

poids actif sans risque

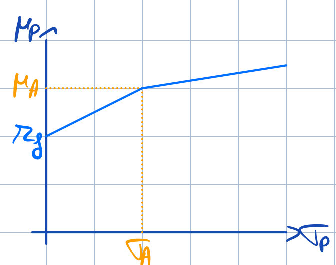
poids actif risqué

$$\mu_P = \omega \mu_A + (1-\omega) r_f \mathbb{1}_{1-\omega > 0} + (1-\omega) R_f \mathbb{1}_{1-\omega \leq 0} = \begin{cases} \omega \mu_A + (1-\omega) r_f & \text{si } \omega \leq 1 \\ \omega \mu_A + (1-\omega) R_f & \text{si } \omega > 1 \end{cases}$$

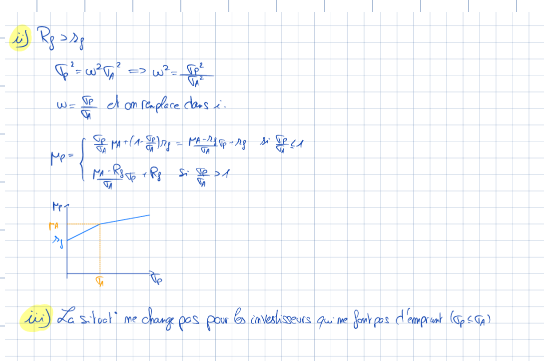
ii) $R_f > r_f$

$$\sigma_P^2 = \omega^2 \sigma_A^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{\sigma_P^2}{\sigma_A^2} \Rightarrow \omega = \frac{\sigma_P}{\sigma_A}$$

$$\Rightarrow \mu_P = \begin{cases} \frac{\sigma_P}{\sigma_A}\mu_A + \frac{\sigma_A - \sigma_P}{\sigma_A} r_f & \text{si } \frac{\sigma_P}{\sigma_A} \leq 1 \\ \frac{\sigma_P}{\sigma_A}\mu_A + \frac{\sigma_A - \sigma_P}{\sigma_A} R_f & \text{si } \frac{\sigma_P}{\sigma_A} > 1 \end{cases}$$



iii) La situat° ne change pas pour les investisseurs qui ne font pas d'emprunt ($\sigma_P \leq \sigma_A$).



ii) $R_f > r_f$

$\sigma_P^2 = \omega^2 \sigma_A^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{\sigma_P^2}{\sigma_A^2}$

$\omega = \frac{\sigma_P}{\sigma_A}$ et on remplace dans i.

$$\mu_P = \begin{cases} \frac{\sigma_P}{\sigma_A}\mu_A + \left(1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_A}\right) r_f = \frac{\mu_A - r_f}{\sigma_A}\sigma_P + r_f & \text{si } \frac{\sigma_P}{\sigma_A} \leq 1 \\ \frac{\mu_A - R_f}{\sigma_A}\sigma_P + R_f & \text{si } \frac{\sigma_P}{\sigma_A} > 1 \end{cases}$$

iii) La situat° ne change pas pour les investisseurs qui ne font pas d'emprunt ($\sigma_P \leq \sigma_A$)