ISFA, Université Claude Bernard - Lyon 1
Risque de crédit, TD3

Exercice 1 On considère un modèle généralisé de Cox. Fixe un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ fourni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ engendrée par un mouvement brownien.

1. Soit $(\Lambda_t, t \geq 0)$ un processus $\mathbb{F}$-adapté, absolument continue et croissant. On définit le temps de défaut par
$$\tau := \inf\{t \geq 0 : \Lambda_t \geq L\}$$
où L est une variable aléatoire $\mathcal{A}$-mesurable avec la fonction de répartition dans C^1 : $F^L(x) = \mathbb{P}(L \leq x)$ et $G^L = 1 - F^L$. On suppose que L est indépendente de $\mathbb{F}$. Calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{F}_t)$ pour tous θ et t positives.
2. En déduire que
$$\mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{F}_t) = \mathbb{P}(\tau > \theta | \mathcal{F}_\infty)$$
pour tout $\theta \leq t$.
3. Calculer le prix d'une obligation zéro coupon défautable (sans recouvrement) de maturité T à une date $t < T \wedge \tau$. On désigne par $\mathbb{Q}$ une probabilité risque-neutre et par $(r_t, t \geq 0)$ le taux d'intérêt court qui est un processus $\mathbb{F}$-adapté.
4. Dans le cas particulier que L suit une loi exponentielle de paramètre 1 et que Λ peut s'écrire sour forme $\Lambda_t = \int_0^t \lambda_s ds$, on retrouve le modèle de Cox. Que devient la formule du prix de l'obligation zéro-coupon ?
5. On suppose que r et λ suivent respectivement un processus Orstein-Uhlenbeck sous $\mathbb{Q}$
$$dr_t = a_1(b_1 - r_t)dt + \sigma_1 dW_t^1$$
$$d\lambda_t = a_2(b_2 - \lambda_t)dt + \sigma_2 dW_t^2$$
où W^1 et W^2 sont deux mouvements browniens tels que $d\left\langle W^1, W^2 \right\rangle_t = \rho dt$ où $a_1, b_1, a_2, b_2, \sigma_1; \sigma_2, \rho$ sont des constants. Calculer le prix de l'obligation zéro-coupon à une date $t < T \wedge \tau$ dans le modèle de Cox.