

- Projet informatique automne
- Livre: Numerical Probability ↗ Google ↗ Springer ↗
↗ Sorbonne University
- Glasserman: MC method ...

Chap. I. Rappels de simulation

Mémoire (un peu)

- Aiguille de Buffon: estimer π en laissant tomber

"au hasard" une aiguille de longueur ℓ sur un parquet avec de tailles de lignes d .

- Projet Manhattan

Von Neumann (chef Maths)

Stanislaw Ulam

Metropolis

↓
↓

ENIAC

↓

MC = LFGN + ENIAC

Teller & Ulam ↗ bombe H

Ulam & Metropolis: 1949 "The Monte Carlo method"

↑
LFGN + TCL + Ordinateur

1950 ↔ 1970: MC massivement utilisée par les physiciens

1977 P. Boyle "Monte Carlo approach to pricing"

3. Nombres pseudo aléatoires

$X_n = U_n(\omega)$, $n \geq 1$ $(U_n)_{n \geq 1}$ de v.a. indépendantes,

i.d. de la loi $U([0,1])$ $P(U \leq x) = (x \wedge 1) \vee 0$

avec un ω "générique"

Logiciens: S'il existe un algorithme de génération \Rightarrow

\rightarrow pas aléatoire

Informaticiens N nombres aléatoires \Rightarrow programme de long. $\tilde{O}(n)$

Praticiens (physiciens, statisticiens et les probab.)

Suite à génération rapide qui vérifie un

de propriétés statistiques aussi asymptotique que possible

$$X_{n+1} = aX_n + b \pmod{p} \quad -\text{suite périodique!}$$

D'où pseudo-aléatoire

Tests Woolbox de tests: Marsaglia

2. Thm fondamental de la simulation

(E, d) polonais $\xrightarrow{\text{complet}}$ $\xrightarrow{\text{Séparable}}$ $\xrightarrow{\text{distance}}$ $\exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dense dans E)

Exemples $\mathbb{R}^d, C([0, 1], \mathbb{R}^d)$

Théorème $X : (\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow (E, d)$ polonais. Il existe $\varphi : [0, 1] \rightarrow E$

$\omega \mapsto X(\omega)$ t.q. $X \stackrel{d}{\sim} \varphi(U)$ où U loi uniforme sur $[0, 1]$

ou encore $P_X = P \circ X^{-1} = \lambda_{[0, 1]} \circ \varphi^{-1}$

↑

Utile quand $E = \mathbb{R}$ (parfois \mathbb{R}^d) ou fini

Exemples ③ g proba sur $\mathbb{I} \subset \mathbb{R}$

$F_g(x) = g((-\infty, x] \cap \mathbb{I})$ F_g M et continue

F_g homéomorph. $\Rightarrow \exists$ une réciproque

Donc si $U \sim U[0, 1]$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, P) \rightarrow F_g^{-1}(U) \stackrel{d}{\sim} g$

$$\mathbb{P}(F_g^{-1}(U) \leq x) = F_g(x)$$

$F_g^{-1}(U)$ à même fonction de répartition de g donc $F_g^{-1}(U) \stackrel{d}{\sim} g$

$\{(-\infty, x] \cap \mathbb{I}, x \in \mathbb{R}\} \cup \{\emptyset\}$ n-système engendr. $\text{Bor}(\mathbb{I})$

Exercices

1) $F_{\mathcal{G}}^{-1}(u) = \inf \{x : F_{\mathcal{G}}(x) \geq u\}$ inverse canonique

$$F_{\mathcal{G}}^{-1}(u) \leq x \Leftrightarrow u \leq F_{\mathcal{G}}(x)$$

$$F_{\mathcal{G}}^{-1}(u) \underset{\text{cadl\acute{o\grave{s}}}}{\sim} \mathcal{G}$$



2) Regarder la fonction de survie

$$\bar{F}_{\mathcal{G}}(x) = 1 - F_{\mathcal{G}}(x) \quad \bar{F}_{\mathcal{G}}^{-1}(u) \sim \mathcal{G}$$

Exemple ① $\mathcal{G} = \lambda e^{-\lambda x} \mathbb{1}_{x \geq 0} dx$, $\Omega = \mathbb{R}_+^*$

$$\bar{F}_{\mathcal{G}}(x) = e^{-\lambda x} \rightarrow -\frac{\ln(u)}{\lambda} \sim \mathcal{E}(\lambda) \text{ si } u \sim U[0,1]$$

② lanchy $\mathcal{G}(dx) = \frac{c}{\pi(x^2 + c^2)} dx$, $c > 0$

$$F_{\mathcal{G}}(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x}{c}\right) \text{ hom\acute{e}om. de } \mathbb{R} \text{ sur } [0,1]$$

$$F_{\mathcal{G}}^{-1}(u) = c \cdot \tan\left(\pi\left(u - \frac{1}{2}\right)\right), u \in [0,1]$$

3. Quelques lois discr\acute{e}tes

① $E = \{x_1, \dots, x_N\} \quad \mathcal{G}(x_i) = p_i$

$$p_i \geq 0 \quad \sum_{i=1}^N p_i = 1$$

$$X = \sum x_i \mathbb{1}_{\{p_1 + \dots + p_{i-1} < U \leq p_1 + \dots + p_i\}}$$

$$\mathbb{P}(X = x_i) = p_i$$

② $B(p) \quad p \in [0,1]$

$$X = \prod_{U \leq p} \{U\}$$

$$\textcircled{3} \quad \text{Bin}(n, p) \quad g(i; n) = \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = p^i$$

Méthode ③ \rightarrow Problème: calculer p_i

Méthode ② Y_1, \dots, Y_n i.i.d. de loi $B(p)$ $X = Y_1 + \dots + Y_n \stackrel{d}{\sim} \text{Bin}(n, p)$

$$X = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{Y_i \leq p\}}, \quad Y_i \text{ i.i.d. } \sim U(0, 1)$$

Rq $np_n \rightarrow \lambda$ alors $\text{Bin}(n, p) \rightarrow P(\lambda)$ $P(\lambda)(k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$

Δ $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$ $P(X_n = k) = \frac{n!}{k!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} \sim$
 $\sim \frac{n!}{(n-k)!} \cdot \frac{1}{k!} \lambda^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^k}_{\approx e^{-\lambda}} \rightarrow e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \quad \square$

$$n \gg 1, p \ll 1, np \approx 1 \Rightarrow \text{Bin}(n, p) \approx P(\lambda)$$

② Approximation gaussien

$$X_n = Y_1 + \dots + Y_n$$

$$\frac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} \rightarrow \mathcal{N}(0, 1) \Rightarrow X_n \sim \mathcal{N}(np, np(1-p))$$

③ Lois de Pascal / géométrique

$$p \in [0, 1] \quad g^*(k) = p(1-p)^{k-1} \quad k \in \mathbb{N}^*$$

$$\alpha^* = \min \{k : Y_k = 1\} \quad \text{où } Y_k \text{ i.i.d. } B(p)$$

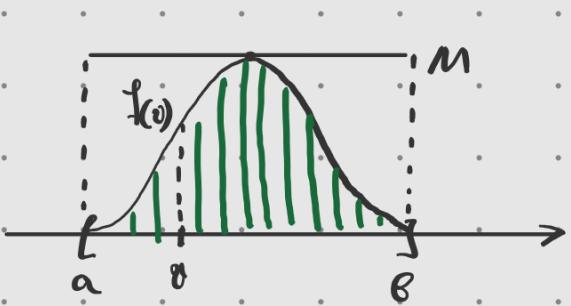
$$\mathbb{P}(\alpha^* = k) = \mathbb{P}(Y_1 = \dots = Y_{k-1} = 0, Y_k = 1) = p(1-p)^{k-1}$$

$$P^* = \frac{1}{C^*}$$

$$\begin{aligned} P^* &= \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} P(G^* = k) = \sum_{k \geq 1} \frac{1}{k} P(1-p)^{k-1} = \frac{p}{1-p} \sum_{k \geq 1} \frac{(1-p)^k}{k} = \\ &= -\frac{p}{1-p} \log(1-(1-p)) = -\frac{p}{1-p} \log p \quad \left\{ \begin{array}{l} 0 \quad p \rightarrow 0 \\ \infty \quad p \rightarrow 1 \end{array} \right. \end{aligned}$$

4. Méthode du rejet (Von Neumann)

Idée $f \geq 0$ à support \subseteq sur $[a, b]$ borné



$$(U, V) \stackrel{d}{\sim} U([0, M] \times [a, b])$$

$$\tau_1 = \min \{k : V_k \leq f(V_k)\}$$

$$\tau_{k+1} = \min \{n \geq \tau_k : V_n \leq f(V_n)\}$$

$$\tau_0 = 0$$

Prop $(\tau_{n+1} - \tau_n)_{n \geq 0}$ i.i.d. de loi géométrique et (Y_{τ_n}) i.i.d.

de loi $\frac{f}{\int_a^b f dx} \cdot \lambda$

Preuve: exercice

Le cas général f mesure \mathbb{Q} -finie sur \mathbb{R}^d

(i) $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, $\int f dm > 0$

$f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ vérifiant Hypothèses (ii) $g > 0$ m.p.p. et $\int g dm < \infty$

(iii) $\exists c > 0$: $f \leq cg$

Conditions de simulation(a) $Y \sim g$ est simulable(b) $\frac{f}{cg}$ se calcule

$$\tau_0 = 0, \quad \tau_1 = \min\{k : U_k \leq \frac{f}{cg}(Y_k)\}$$

$$\tau_{n+1} = \min\{k > n : U_k \leq \frac{f}{cg}(Y_k)\}$$

si (U_n, Y_n) i.i.d. de loi $U_{(0,1)} \otimes (g \cdot m)$ Alors $\tau_i \sim \mathcal{E}(p)$ avec $p = \mathbb{P}(U \leq \frac{f}{cg}(y))$ (i) $(\tau_{n+1} - \tau_n)$ i.i.d. de loi $\mathcal{E}'(p)$ (ii) Y_{τ_n} i.i.d de loi $\frac{f dm}{\int f dm}$ Dém φ donc teste (borélienne bornée)

$$\mathbb{E}[\varphi(Y_k) \mathbb{I}_{\{U \leq \frac{f}{cg}(Y_k)\}}] = \iint dudy \varphi(y) \mathbb{I}_{\{U \leq \frac{f}{cg}(y)\}} g(y)m(dy)$$

$$= \underbrace{\int \int \mathbb{E}[\varphi(Y_k) \mathbb{I}_{\{U \leq \frac{f}{cg}(Y_k)\}}] du g(y) g(y)m(dy)}_{\text{ici il est important que } m \text{ soit finie!}} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{\varphi(y) f(y)}{e g(y)} f(y) dm = \underbrace{\frac{1}{c} \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(y) f(y) dm}_{\mathbb{E} Y_k}$$

$$\mathbb{E} \varphi(Y_{\tau_1}) = \sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \left[\varphi(Y_k) \mathbb{I}_{\bigcap_{j=1}^{n-1} \{U_j > \frac{f}{cg}(Y_j)\} \cap \{U_n \leq \frac{f}{cg}(Y_n)\}} \right]$$

$$= \sum_{n \geq 1} \underbrace{\mathbb{P}(U > \frac{f}{cg}(y))}_{1-P}^{k-1} \mathbb{E} \varphi(Y_k) \mathbb{I}_{\{U_n \leq \frac{f}{cg}(Y_n)\}} =$$

$$\left(\sum_{k \geq 1} (1-p)^k \right) \frac{1}{c} \int \varphi(y) f(y) dm = \frac{1}{pc} \int (\varphi(y) f(y)) m(dy) = \int \varphi(y) \frac{f(y)m(dy)}{\int f(y) dm}$$

Donc $Y_{\alpha, n} \stackrel{d}{\sim} \frac{f_m}{\int f dm}$

$$P(Y^k = k) = (1-p)^{k-1} p.$$

Exercice Terminer la preuve. D

Rq Rendement p proportionnel à $\frac{p}{1-p}$

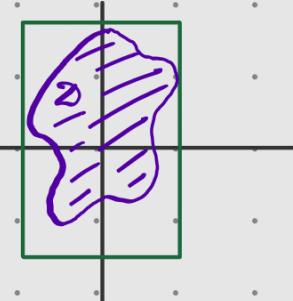
→ p ≈ 1 un bon rendement

Cela signifie que $\frac{\int f dm}{c} \approx 1 \quad \int f dm \approx c \int g dm$

Exercice ② Simuler les loi uniforme sur $\Omega \subset [-M, M]^d$

Y_n i.i.d. $\stackrel{d}{\sim} U([-M, M]^d)$

$$\tau_0 = 0 \quad \tau_{n+1} = \min \{ k > \tau_n : Y_k \in \Sigma \}$$



(Y_{τ_n}) i.i.d. $\stackrel{d}{\sim} U(\Sigma)$

Montrer cela $\begin{cases} \text{directement} \\ \text{via la méthode du rejet} \end{cases}$

③ Montrer la proposition

④ Simuler méthode du rejet $\delta(a) = \frac{e^{-x} x^{a-1}}{\Gamma(a)} \mathbb{I}_{x>0} \quad 0 < a < 1$

$$a \geq 1 \quad a = \lfloor a \rfloor + \{a\}$$

La somme de $\mathcal{E}(1)$

Indication

$$e^{-x} x^{\alpha-1} \leq \begin{cases} x^{\alpha-1} & \text{si } x \in [0, 1[\\ e^{-x} & x > 1 \end{cases} - \text{Rareté} \quad \text{Théo Jalabert}$$

Jalabert

④ Variables aléatoires, vecteurs gaussiens

4.1. Simuler $\mathcal{N}(0, I_2)$

La méthode de Box-Muller:

$$R^2 = -2 \log U \sim \mathcal{U}(0, 2\pi) \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$X = (X_1, X_2) = (R \cos \Theta, R \sin \Theta) \sim \mathcal{N}(0, I_2)$$

Preuve $\Phi(X) = \int \varphi(x_1, x_2) e^{-\frac{x_1^2 + x_2^2}{2}} dx_1 dx_2 =$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \varphi(r \cos \theta, r \sin \theta) e^{-\frac{r^2}{2}} \frac{r}{2\pi} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \varphi(\sqrt{r} \cos \theta, \sqrt{r} \sin \theta) e^{-\frac{r}{2}} \frac{1}{2} \cdot dr \underbrace{\cdot d\theta}_{\mathcal{E}\left(\frac{1}{2}\right)} \underbrace{\cdot U[0, \infty]}_{\mathcal{U}[0, \infty]}$$

$r = \sqrt{r}$

Exercice La méthode de Marsaglia (Méthode polaire)

$$(U_1, U_2) \sim U(B(0,1)) \stackrel{L}{\sim} U([0, 1])$$

$$R^2 = U_1^2 + U_2^2 \quad (X_1, X_2) = \sqrt{-2 \frac{\ln R^2}{R^2}} (U_1, U_2) \stackrel{L}{\sim} \mathcal{N}(0, I_2)$$

Simuler (U_1, U_2) par rejét.

Méthode de "zigzagat"

4.2. Simuler $\mathcal{N}(0, I_d)$

$$(V_1, \dots, V_d) \sim U[0,1] \quad X = (\sqrt{-\log V_i} \cos 2\pi V_i, \dots)$$

© Théo Jalabert
T. Jalabert

4.3. Simuler $N(0, \Sigma)$

$$\Sigma \in S^+(d, \mathbb{R})$$

$$\Sigma \in S^{++}(d, \mathbb{R}) \cap GL(d, \mathbb{R})$$

matrices inversibles

Lemme $Y: (\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}^q \quad A \in M(d, q)$

$$C_{AY} = AC_Y A^T$$

Preuve $\text{cov}(\sum_k a_{ik} Y_k, \sum_e a_{je} Y_e) = \sum_{k,e} a_{ik} a_{je} \text{cov}(Y_k, Y_e) = \sum_{k,e} a_{ik} a_{je} \delta_{ke} = (ACA^T)_{ij}$ \square

$$Y \sim N(0, I_d); \quad B \text{ t.q. } BB^T = \Sigma \Rightarrow BZ \stackrel{d}{\sim} N(0, BB^T)$$

Cholesky

(i) $\exists ! T$ triangulaire inférieure t.q. $\Sigma = TT^*$ $\Rightarrow TZ \sim N(0, \Sigma)$

(ii) $\exists ! T$ triangulaire inférieure et D diagonale t.q.

$$\forall i \quad T_{ii} = 1 \quad \text{et} \quad \Sigma = TD T^* \quad T \sqrt{D} \stackrel{d}{\sim} N(0, \Sigma)$$

Racine carré

$$\Sigma \in S^+(d, \mathbb{R}) \quad \exists ! \sqrt{\Sigma} \in S^+(d, \mathbb{R}) \text{ t.g. } (\sqrt{\Sigma})^2 = \Sigma$$

$$(\Rightarrow \sqrt{\Sigma}^* \Sigma = \Sigma \sqrt{\Sigma})$$

Application à simulation de MBS

© Théo Jalabert

$(B_t)_{t \geq 0}$ - M.B.S processus à trajectoires ps. continue, gaussien centré, $\mathbb{E}[B_t B_s] = t \wedge s$

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$$

$(B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}})$ v.a. indépend.

$$\sim \mathcal{N}(0, \begin{pmatrix} t_1 & & & \\ & t_2 - t_1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & t_n - t_{n-1} \end{pmatrix})$$

$$\begin{pmatrix} B_{t_1} \\ \vdots \\ B_{t_n} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}}_{\text{triangulaire}} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{t_1} & & & \\ & \sqrt{t_2 - t_1} & & 0 \\ & & \ddots & \\ & & & \sqrt{t_n - t_{n-1}} \end{pmatrix}}_{\text{Cholesky de } (t_i \wedge t_j)_{i,j}} \begin{pmatrix} Z_1 \\ \vdots \\ Z_n \end{pmatrix}$$

= Cholesky de $(t_i \wedge t_j)_{i,j}$

Application au fBm (Brownien fractionnaire)

$H \in [0, 1]$ (B_t^H) proc. gaussien t.q.

$$\mathbb{E}[B_t^H B_s^H] = \frac{1}{2} (t^{2H+1} + s^{2H+1} - |t-s|^{2H})$$

$$H = \frac{1}{2} \rightarrow B^{\frac{1}{2}} = B$$

$(B_{t_1}^H, \dots, B_{t_n}^H) \rightsquigarrow$ Cholesky $[\frac{1}{2} (t_i^{2H+1} + t_j^{2H+1} - |t_i - t_j|^{2H})]_{i,j}$ a.s. $T \rightsquigarrow \infty$

Valorisation et couverture d'options.

1. Simulation de Monte Carlo

$(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a. sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ i.i.d. (de m^e loi que X)

telle que $X \in L^1(\mathbb{P})$. On pose $m_X = \mathbb{E}X$ quantité d'intérêt

$$X_m = \begin{cases} \varphi(U_m), & U_m \text{ i.i.d. } U([0,1]^d) \\ \varphi(\tau; V_1, \dots, V_m), & V_k \text{ i.i.d. } U([0,1]) \text{ et t.q. } \{\tau = m\} \subset G(V_1, \dots, V_m) \end{cases}$$

↑ standard
↑ rejet

LFGN - L¹:

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_i X_i \xrightarrow{\text{p.s. \& b}} m_X = \mathbb{E}X$$

Rq LFGN - L² (si $X \in L^2(\mathbb{P})$) $\bar{X}_n \xrightarrow{\text{p.s. \& L}^2} m$

ss l'hyp. plus faible (X_m) 2-à-2 non corrélés.

• $\mathbb{E}X_n = m_X$ - estim. sans biais

Vitesse de convergence

L²:

$$X \in L^2, \quad \sigma_X^2 = \text{Var}[X] = \mathbb{E}X^2 - (\mathbb{E}X)^2$$

$$\sigma_X^2 = \inf_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X-a)^2 \quad \text{et} \quad m_X = \arg \min_{a \in \mathbb{R}} \mathbb{E}(X-a)^2$$

$$\|X_n - m\|_2^2 = \frac{1}{n^2} \sum \sigma_X^2 = \frac{\sigma_X^2}{n} \Rightarrow$$

$$\|\bar{X}_n - m_X\|_2 = \sqrt{\frac{\sigma_X^2}{n}}$$

σ_X écart-type

p.s.: $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. $\xrightarrow{d} X$ ↗ loi de logarithme itérée (LLI)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{n}{\log \log n}} (\bar{X}_n - m_X) = \pm \tilde{\sigma}_X$$

TCL (Théorème de la limite centrale)

$$(X_n) \text{ i.i.d. } \xrightarrow{d} X \in L^2 \quad \sqrt{n}(\bar{X}_n - m_X) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \tilde{\sigma}_X^2)$$

- $\tilde{\sigma}_X = 0 \Leftrightarrow X = m_X$ p.s. $\bar{X}_n = m_X$ p.s.

- $\tilde{\sigma}_X > 0 \Leftrightarrow \sqrt{n} \left(\frac{\bar{X}_n - m_X}{\tilde{\sigma}_X} \right) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

Rappels sur le conv. en loi: $(Y_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ vecteurs aléatoires à valeurs \mathbb{R}^d

$$Y_n \xrightarrow{d} Y_\infty \text{ si}$$

$$\forall f \in C_b(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}) \quad E_{P_n}[f(Y_n)] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} E_{P_\infty}[Y_\infty] \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(y) (P_m)_{Y_m}(dy) \rightarrow \int_{\mathbb{R}^d} f(y) (P_\infty)_{Y_\infty}(dy)$$

Thm $Y_n \xrightarrow{d} Y_\infty \Leftrightarrow \forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \text{ t.q. } P_\infty(Y_\infty \in \partial A) = 0 \quad P_n(Y_n \in A) \rightarrow P_\infty(Y_\infty \in A)$

Ici d-1 $Y_n \xrightarrow{d} Y_\infty$ alors $\forall I = [b, a], b < a \quad P_\infty(Y_\infty \in \partial I = \{a, b\}) = 0$

$$P_n(Y_n \in [b, a]) \rightarrow P_\infty(Y_\infty \in [b, a])$$

Pour notre problème $\sqrt{n}(\bar{X}_n - m_X) \xrightarrow{d} \mathcal{N}(0, \tilde{\sigma}_X^2) \quad \tilde{\sigma}_X > 0$

$\forall f \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad E f(\sqrt{n}(\bar{X}_n - m_X)) \rightarrow E f(\tilde{\sigma}_X Z), \text{ où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$f \rightarrow f\left(\frac{\cdot}{\tilde{\sigma}_X}\right) \in C_b(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \quad E f\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m_X}{\tilde{\sigma}_X}\right) \rightarrow E f(Z)$

En particulier $\forall [b,a] b < a \quad \mathbb{P}\left(\sqrt{n} \frac{\bar{X}_n - m_x}{\sigma_x} \in [b,a]\right) \xrightarrow{\text{© Théo Jalabert}} \mathbb{P}(Z \in [b,a])$

$$I_X^{b,a}(\omega) = \left[\bar{X}_n - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} a, \bar{X}_n + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} b \right] \quad \mathbb{P}(m_x \in I_X^{b,a})$$

D'où l'idée de la notion d'intervalle de confiance

1) Phénomène soumis au TCL. Il y a une symétrie $R = \frac{L}{2} - \bar{x}$

2) Il est naturel de considérer des intervalles $[-\alpha, \alpha]$

3) à niveau de confiance $\lambda \in [0, 1]$ $\lambda \leq 1$

q_λ le λ -quantile t.q. $\mathbb{P}(Z \in [-q_\lambda, q_\lambda]) = \lambda = \Phi_\phi(\lambda) - \Phi_\phi(-\lambda)$,

où $\Phi_\phi(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\xi^2/2} d\xi$ - fct de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{P}(Z \in [-q_\lambda, q_\lambda]) = \lambda \Phi_\phi(q_\lambda) - 1 = \lambda$$

$$\text{TCL} \quad I_X^\lambda(\omega) = \left[\bar{X}_n - \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} q_\lambda, \bar{X}_n + \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} q_\lambda \right]$$

$$\mathbb{P}(m_x \in I_X^\lambda) \rightarrow \mathbb{P}(Z \in [-q_\lambda, q_\lambda]) = \lambda$$

Problème Comment calculer I_X^λ ? \bar{X}_n connu, mais σ_x^2 pas connu

$$\bar{V}_n = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^n (X_k - \bar{X}_n)^2 = \frac{1}{n-1} \sum X_k^2 - 2 \left(\sum X_k \right) \bar{X}_n + n \bar{X}_n^2 = \frac{1}{n-1} \left(\sum X_k^2 - \bar{X}_n^2 \right) \rightarrow \sigma_x^2$$

Suggère d'introduire l'intervalle de confiance empirique.

$$I_X^\lambda(\omega) = \left[\bar{X}_n - q_\lambda \sqrt{\frac{\bar{V}_n}{n}}, \bar{X}_n + q_\lambda \sqrt{\frac{\bar{V}_n}{n}} \right]$$

$$\mathbb{P}(m_x \in I_x^{\omega}(\omega)) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma_{\bar{X}_n}} (\bar{X}_n - m_x) \in [-q_n, q_n]\right) =$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - m_x}{\sigma_{\bar{X}_n}} \sim \frac{(\bar{X}_n - m_x)}{\sigma_x} \in [-q_n, q_n]\right) \rightarrow \mathbb{P}(Z \in [-q_n, q_n]) = \alpha$$

p.s. \downarrow $\xrightarrow{n \rightarrow \infty}$ $N(0, 1)$ Slutsky \downarrow

Loin de praticien ① Pourquoi: $\bar{V}_n = \frac{1}{n-1} \sum \dots$? $E\bar{V}_n = \sigma_x^2$ sans biais

On s'en lâche: en proba numérique $n \geq 10^5, 10^6$ ou même 10^9

② Quand n est-il grand du pt de l'approximation

$$\mathbb{P}(\bar{X}_n \in I_x^{\omega}) \approx \alpha?$$

Thm (Berry-Esseen) $X \in L^3(\mathbb{P})$ $(X_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. $\xrightarrow{d} X$

$$\left| \mathbb{P}\left(\frac{\bar{X}_n - m_x}{\sigma_{\bar{X}_n}} \leq x\right) - \Phi_0(x) \right| \leq \frac{E|X - m|^3}{\sigma_x \sqrt{n}} \cdot \frac{1}{1 + |x|^3} \quad (\text{Shiryagin})$$

$\overline{\text{Vitesse}} \frac{1}{\sqrt{n}}$

• ne prend pas en compte \sqrt{n} au lieu de $\sigma_{\bar{X}_n}$

l'approximation gaussienne du TCL devient raisonnable pour

$n = 99$ dizaines (> 20 ou 25)

pour $n \geq 10^5$ aucun souci

Rq Si $X \sim N(m_x, \sigma_x^2)$, $\sqrt{\frac{n}{V_n}} (\bar{X}_n - m_x) \xrightarrow{d} \text{Student}(n-1)$

n grand ($n \geq 20$) $\rightarrow \text{Student}(n-1) \approx N(0, 1)$

1) Estimateur de la moyenne

2) Niveau de confiance a priori

3) Estimation de la variance

Résultat: $\bar{X}_n, [\bar{X}_n - q_\lambda \sqrt{\frac{V_n}{n}}, \bar{X}_n + q_\lambda \sqrt{\frac{V_n}{n}}]$

Alternative On se donne $t_{\lambda/2}$ $\lambda \in [0, 1[$ $\lambda \approx 1$

$I_{X_1, n}^\lambda(\omega) = [\bar{X}_n - q_\lambda \sqrt{\frac{V_n}{n}}, \bar{X}_n + q_\lambda \sqrt{\frac{V_n}{n}}]$ de longueur 2ϵ

$$\Leftrightarrow \epsilon = q_\lambda \sqrt{\frac{V_n}{n}} \sim \epsilon = q_\lambda \frac{\sigma_x}{\sqrt{n}} \Leftrightarrow n = n_\epsilon = \frac{q_\lambda^2 \sigma_x^2}{\epsilon^2}$$

Pratique n_1 petit ($n_1 \approx 10^3$ ou 10^4) $\Rightarrow \bar{V}_n$, $\Rightarrow n_\epsilon \approx \frac{q_\lambda^2 \bar{V}_{n_1}}{\epsilon^2}$

2. Un calcul d'option européenne

(Black-Scholes 2D) $X_t^0 = e^{rt}$, $r \in \mathbb{R}$ (souvent $> 0, \approx 0$)

$X_t^0 = \frac{1}{B(0, t)}$, $B(0, t)$ - O-coupon de maturité t .

$$\frac{dX_t^i}{X_t^i} = r dt + \sigma_i dW_t^i, \quad i=1, 2 \quad \langle W^1, W^2 \rangle_t = pt, \quad -1 \leq p \leq 1$$

Itô $\eta(t, \omega) = \exp\left\{(r - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i \omega\right\}$ and $(X_t^i = X_0^i \exp\left\{(r - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i W_t^i\right\})_{i=1, 2}$

$h_T = h(X_T^1, X_T^2) \geq 0$ payff (actif contingent)

Ex. $h_{T,K}^i = (X_T^i - K)_+$ option d'achat.

↑ droit d'acheter l'actif au prix K .

Prix en $t \in [0, T]$ du contrat d'option Européenne écrit sur X_T

$$V_t = e^{-r(T-t)} E[h_T | \mathcal{F}_t], \quad \mathcal{F}_t = \sigma(X_s^i, i=1,2, \text{ ossets } N_P) \stackrel{\text{P-négligable}}{\sim} \sigma(W_s^i, i=1,2, 0 \leq s \leq t, N_P)$$

Etape 1 Se débarasser de $E[\cdot | \mathcal{F}_t]$

$$\left(\frac{X_T^i}{X_t^i} \right)_{i=1,2} = \exp \left((r - \frac{\sigma_i^2}{2})(T-t) + \sigma_i (W_T^i - W_t^i) \right) \perp \mathcal{F}_t \text{ donc de}$$

$$X_t = (X_t^1, X_t^2)$$

$$\left(\frac{X_T^i}{X_t^i} \right)_{i=1,2} \stackrel{d}{\sim} \left(\exp \left\{ (r - \frac{\sigma_i^2}{2})(T-t) + \sigma_i (W_{T-t}^i) \right\} \right) = \left(\frac{X_{T-t}^i}{X_0^i} \right)_{i=1,2}$$

Lemme $Y: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d_Y}, Z: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^{d_Z} \quad \mathcal{B} \subset \mathcal{A}$ -sous-tribu

Y - \mathcal{B} -mesurable et $Z \perp \mathcal{B}$. alors $\varphi: \mathbb{R}^{d_Y} \times \mathbb{R}^{d_Z} \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(Y, Z) \in L^1(\mathbb{R})$

$$E[\varphi(Y, Z) | \mathcal{B}] = [E\varphi(y, Z)]|_{y=Y}$$

$$V_t = e^{-r(T-t)} E[h(X_t^1, X_t^2) | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} E[h\left(\frac{X_T^1}{X_t^1} \cdot X_t^1, \frac{X_T^2}{X_t^2} \cdot X_t^2\right) | \mathcal{F}_t] = \\ = e^{-r(T-t)} E[h\left(\frac{X_T^1}{X_t^1} \cdot \xi_0^1, i=1,2\right)] \Big|_{\xi_0^i = X_t^i} = v_t^i(X_t^1, X_t^2)$$

$$v_t^i(x^1, x^2) = E[h(x^i \exp \{(r - \frac{\sigma_i^2}{2})(T-t) + \sigma_i W_{T-t}^i, i=1,2\})]$$

$$W_{T-t} = (W_{T-t}^1, W_{T-t}^2) \stackrel{d}{\sim} \mathcal{N}(0, \text{mat de cov})$$

$$W_T = \sqrt{T-t} (Z_1, \sqrt{p} Z_1 + \sqrt{1-p^2} Z_2) \quad \text{où } Z = (Z_1, Z_2) \stackrel{d}{\sim} \mathcal{N}(0, I_2)$$

Etape 2 Echantillon $Z^n = (Z_1^n, Z_2^n), i.i.d. \stackrel{d}{\sim} \mathcal{N}(0, I_2) \quad k=1, n$

$$1) \bar{\varphi}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \varphi(x^1, x^2, \dots, z_1^k, z_2^k)$$

$$2) \bar{V}_n \varphi = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n-1} (\varphi(x^1, x^2, z_1^k, z_2^k))^2 - \frac{n}{n-1} (\bar{\varphi}_n)^2$$

$$3) \text{ Soit } L \in \{0, 1\} \quad L=1 \quad I_\varphi^L(\omega) = [\bar{\varphi}_n \pm q_L \sqrt{\frac{\bar{V}_n}{n}}]$$

Rq Il faut utiliser les \hat{m} v.a. s'il est possible

3. Calcul de sensibilités

Théorème (Dérivation sous le symbole d' \int ou d' \mathbb{E})

(E, \mathcal{E}, μ) - espace mesuré. I intervalle de \mathbb{R} non-trivial ($I \neq \emptyset, \mathbb{R}$)

Soit $\varphi: I \times E \rightarrow \mathbb{R} \quad (x, \xi) \mapsto \varphi(x, \xi)$

(a) Version locale: $x_0 \in I$

(i) $\forall x \quad \varphi(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{G})$

(ii) $\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \xi)$ existe $\mathbb{G}(d\xi)$ -p.p.

(iii) $\exists \mathbb{H}: (E, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}_+ \quad t.q. \quad \mathbb{H} \in L^1(\mathbb{G})$

t.q. $\forall x \in I \quad |\varphi(x, \xi) - \varphi(x_0, \xi)| \leq \mathbb{H} \cdot |x - x_0| \quad \mathbb{G}(d\xi)$ -p.p.

alors $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie par $\Phi(x) = \int_{\mathcal{E}} \varphi(x, \xi) \xi(d\xi)$

$$\text{et } \Phi'(x_0) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, \xi) \xi(d\xi) \quad (*)$$

(b) Version globale. Si φ vérifie

(i) —

(ii) $\xi(d\xi)$ pp. $x \mapsto \varphi(x, \xi)$ est dérivable sur I

(iii) $\exists \tilde{\omega} : (\mathcal{E}, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}_+$, $\tilde{\omega} \in L'(\xi)$ t.q. $|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \xi)| \leq \tilde{\omega}(\xi) \forall x \in I$
 $\xi(d\xi)$ pp.

Alors $\Phi \in \mathcal{D}(I)$ et $\Phi'(x)$ est donnée par (*) $\forall x \in I$

Prop Dans le cas $(\mathcal{E}, \mathcal{E}, \xi) = (\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{P})$

a) (iii) loc. imp. $\left(\frac{|\varphi(x, \omega) - \varphi(x_0, \omega)|}{|x - x_0|} \right)_{x \in (U(x) \cap I)} \forall \epsilon \in \mathcal{E}$ et \mathbb{P} -équicontinu (u.i)

b) (iii) glob. imp. $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \omega) \right)_{x \in I}$ est \mathbb{P} -équicontinu

Thm (a) $(X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ équiintégrablessi (i) $\sup_i \mathbb{E} |X_i| < \infty$

(ii) $\forall \epsilon > 0 \exists \eta > 0$ t.q. $\forall A \in \mathcal{F} \mathbb{P}(A) \leq \eta \Rightarrow \sup_i \int_A |X_i| d\mathbb{P} \leq \epsilon$

Exo (b) $\exists \gamma > 0$ t.q. $\sup_{i \in \mathbb{Z}} \int |X_i|^{1+\gamma} d\mathbb{P} < +\infty \Rightarrow (X_i)_{i \in \mathbb{Z}}$ \mathbb{P} -équiintégrable

Rq • Thm de continuité sous le \int et l' \mathbb{E}

• 3 versions holomorphes, différentiables, dériv. à droite, à gauche, Gâteaux

Exemples ① $X^n \xi$ sur $(\mathbb{R}, \mathbb{R}, \mathbb{P})$ à valeurs ds \mathbb{R} , $X \in L'(\xi)$

$$\Phi(x) = \mathbb{E}(X-x)^+ \quad (X-x)^+ \leq X^+ x^+ \in L'(\mathbb{R})$$

$$|(X-x)^+ - X^+| \leq x \quad \text{donc } \leq x^+$$

$x_0 \in \mathbb{R}$ t.q. $\mathbb{E}(\{x_0\}) < \infty$

$$\varphi(x, \omega) = (X(\omega) - x)^+$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, \omega) = -\mathbb{I}_{\{X(\omega) > x\}} \quad \text{si } X(\omega) \neq x_0$$

$$\text{(ii)}_{\text{loc}} \quad \mathbb{P}(\{ \omega : X(\omega) = x_0 \}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \exists \frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \mathbb{P}\text{-p.s.}$$

$$\text{(iii)}_{\text{loc}} \quad |(X-x)^+ - (X-x)^+| \leq |x - x_0| \Rightarrow \Xi = \mathbb{I}_{\mathbb{R}} \in L'(\mathbb{P})$$

$$\text{Donc } \varphi'(x_0) = -\mathbb{E} \mathbb{I}_{\{X > x_0\}} = -\bar{F}_X(x_0)$$

En particulier: si X n'a pas d'atome i.e. $\mathbb{P}(X=x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$
(i.e. si il est diffus)

Alors $\varphi \in D(\mathbb{R})$ et $\varphi'(x) = -\bar{F}_X(x)$.

$$(6) \quad \varphi(x, \omega) = (X(\omega) - x)^+ \quad \mathcal{I}_\epsilon = [\epsilon, \frac{1}{\epsilon}] \quad 0 < \epsilon < 1$$

(ii) gloc. $\mathbb{P}(\mathcal{I}_\epsilon)$ -p.s. $x \mapsto (X(\omega) - x)^+$ est dérivable sur $[\epsilon, \frac{1}{\epsilon}]$

si $\mathbb{P}(X(\omega) \in \mathcal{I}) = 0$?!

Version globale échoue

$$\textcircled{2} \quad \Phi(u) = \mathbb{E}[e^{iuX}], \quad u \in \mathbb{R} \quad X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

$$X \in L^1(\mathbb{P}) \quad \varphi(u, \omega) = e^{iuX(\omega)} \quad (\tilde{i}^2 = -1)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial u}(u, \omega) = iX(\omega) e^{iuX(\omega)} \text{ - dérivable p.p.}$$

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \forall \omega \in \Omega \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| \leq |X(\omega)| \left| e^{iuX(\omega)} \right| \leq |X(\omega)| \in L^1(\mathbb{P})$$

Thm. global

$$\Rightarrow \bar{\Phi}'(u) = i \mathbb{E}[X e^{iuX}]$$

3.3. Dérivation / sensibilité sur l'espèce des scénarios

$$\begin{cases} dX_t^x = X_t^x (rdt + \sigma dW_t) \\ X_0^x = x \end{cases} \quad (\text{B.S. ID})$$

$$X_t^x = x e^{(r-\frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} > 0 \quad \forall t \geq 0$$

On considère une fonction $\Phi(x) = \mathbb{E}[\varphi(X_T^x)]$ où $\varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}_+$

Prop (a) $\varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable, 1 poly

$$|\varphi(x)| \leq C(1+|x|^p) \quad p \geq 0 \text{ t.q. } \varphi' \text{ aussi à 1 poly}$$

Alors $\Phi(x) \in D(\mathbb{R}_+^*)$ et $\Phi'(x) = \mathbb{E}[\varphi'(X_T^x) \frac{X_T^x}{x}]$

(b) Si φ' existe sur \mathcal{D}^c , \mathcal{D} dénombrable, $D \subset \mathbb{R}_+^*$

et si φ local Lipschitz à 1 poly i.e.

$$\forall x, y \in \mathbb{R}_+^* \quad |\varphi(x) - \varphi(y)| \leq C|x-y|^{1+p} (1+|x|^p + |y|^p)$$

Alors $\Phi \in D(\mathbb{R}_+^*)$ et $\Phi(x) = \mathbb{E}[\varphi(X_T^x) \frac{X_T^x}{x}]$ © Théo Jalabert 

(c) Si $\varphi: \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ borelienne à ↑ poly.
donc $\Phi \in D(\mathbb{R}_+^*)$ et $\Phi(x) = \mathbb{E}[\varphi(X_T^x) \frac{X_T^x}{x}]$

Dém (a) Thm global! Si φ dérivable

$$\forall \omega \in \Omega \quad \forall x > 0 \quad \frac{d}{dx} \varphi(X_T^x) = \varphi'(X_T^x) \frac{X_T^x}{x}$$

$$|\varphi'(X_T^x)| \leq C(1 + |X_T^x|^p) \quad \text{pour un } p > 0$$

$$X \in I_\varepsilon = [\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}]$$

$$\left| \frac{X_T^x}{x} \varphi'(X_T^x) \right| \leq \frac{C}{\varepsilon} |X_T^x| \cdot (1 + |X_T^x|^p) \leq \frac{C}{\varepsilon} (1 + |X_T^x|^{p+1}) \leq$$

$$\leq \frac{C}{\varepsilon} \left(1 + \underbrace{|X_T^x|^{p+1}}_{\leq \frac{1}{\varepsilon^{p+1}}} \exp \left\{ (p+1) \left(\frac{\sigma^2}{2} T + (p+1) \mathbb{E}[W_T] \right) \right\} \right) \leq \tilde{C}_{p, \varepsilon, r, \sigma} (1 + \exp \{(p+1) \sqrt{T} Z\})$$

$$(E e^{\lambda Z} = e^{\lambda^2/2} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}) \quad L'(P)$$

(b) Exercice: appliquer le thm. local

(c) Lemme de Stein $Z \stackrel{d}{\sim} \mathcal{N}(0, 1)$ $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable t.q.

$$|g'(z)| \vee |z g(z)| \in L' \quad \text{alors } \mathbb{E}[g'(Z)] = \mathbb{E}[g(Z)Z]$$

$$\begin{aligned} \text{Preuve} \quad & \mathbb{E}[Z g(Z)] = \int_{-\infty}^{\infty} z g(z) e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sqrt{2\pi}} = \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 g(\xi) e^{\frac{\xi^2}{2}} \right] \Big|_{-\infty}^0 + \int_0^{\infty} g(\xi) e^{\frac{\xi^2}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} \\ & = \mathbb{E}[g'(Z)] \end{aligned}$$

Preuve du (c) On suppose d'abord φ régulière et vérifie (a)

$$\Phi'(x) = \mathbb{E}[\varphi'(X_T) \frac{X_T}{x}] = \int \varphi'(x \exp\{\zeta T + \sigma \sqrt{T} Z\}) \underbrace{\exp\{\zeta T + \sigma \sqrt{T} Z\}}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} e^{\frac{-Z^2}{2}} dz$$

© Théo Jalabert

$$\left\{ \frac{d}{dx} : \zeta \mapsto \varphi(x \exp\{\zeta T + \sigma \sqrt{T} Z\}) \right\}$$

$$\begin{aligned}\Phi'(x) &= \mathbb{E}\left[\frac{g'(Z)}{x \sigma \sqrt{T}}\right] = \frac{1}{x \sigma \sqrt{T}} \mathbb{E}[g(Z) Z] = \frac{1}{x \sigma \sqrt{T} \sqrt{2\pi}} \int \varphi(x \exp\{\zeta T\}) \underbrace{Z e^{-\frac{Z^2}{2}}}_{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}} \frac{dZ}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= \frac{1}{x \sigma T} \mathbb{E}[\varphi(X_T) W_T]\end{aligned}$$

Comment conclure? On approche φ borélienne par convolution

avec des fcts C^∞ (C^1 suffirait...) vérifiant (a).

" $\varphi_n \xrightarrow[\mathcal{C} \text{ sur compact}]{} \varphi$ and $\varphi' = \lim \varphi'_n$ " \square

3.3. Differencier sur l'espace d'état

$$X: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}^d \quad \varphi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\mathbb{E} \varphi(X) = \int_{\mathbb{R}^d} \varphi(\xi) \mathbb{P}_X(d\xi)$$

$X(\theta)$ indexées par $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}^k$ (compact)

$$\mathbb{E} \varphi(X(\theta)) = \mathbb{P}_{X(\theta)} = P(\theta, y) g(dy) \quad \text{où } g \text{ mesure de référence}$$

$$\text{sur } (\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)) \quad \mathbb{E}[\varphi(X(\theta))] = \int \varphi(y) p(\theta, y) g(dy)$$

On va considérer $X_T(\theta)$ vecteurs aléatoires au temps terminal T

d'une dynamique $(X_t^\theta(\theta))_{t \in [0, T]}$ t.q. $X_0^\theta(\theta) = x \in \mathbb{R}$

Hyp $L(X_T^x(\theta)) = p_T(x, \theta, y) g(dy)$

mesure de référence \mathbb{P}^d qui n'est pas un paramètre de $g(y)$

(θ peut être x, θ, y , mais pas K strike d'option)

$$\mathbb{E}[\varphi(X_T^x(\theta))] = \int \varphi(y) p_T(x, \theta, y) g(dy)$$

(à justifier: exercice) $\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}[\varphi(X_T^x(\theta))] = \int \varphi(y) \frac{\partial}{\partial \theta} p_T(x, \theta, y) g(dy) \quad \textcircled{1}$

Hyp $\forall \theta, x \quad p_T(x, \theta, y) > 0 \quad g(dy) - P.P.$

$$\textcircled{1} \int \varphi(y) \frac{\partial \theta p_T(x, \theta, y)}{p_T(x, \theta, y)} g(dy) = \int \varphi(y) \partial_\theta \log p_T(x, \theta, y) p_T(x, \theta, y) dy$$

$$= \{ \text{transfert} \} = \mathbb{E}[\varphi(X_T^x(\theta)) \underbrace{\partial_\theta \log p_T(x, \theta, X_T^x(\theta))}_{\text{score (dans le cadre diffusion)}}]$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}[\varphi(X_T^x(\theta))] = \mathbb{E}[\varphi(X_T^x(\theta)) \partial_\theta \log p_T(x, \theta, X_T^x(\theta))]$$

La méthode de log-vraisemblance

Exercice ① $X_T^x = x \exp\{(r - \sigma^2/2)T + \sigma W_T\} \stackrel{L}{=} x \exp\{(r - \sigma^2/2)T + \sigma \sqrt{T} Z\}$

$\partial_x \mathbb{E} \varphi(X_T^x) = ?$ selon la méthode de log-vraisemblance

(a) $L(X_T^x) = p_T(x, y) dy$

(b) $\partial_x \log p_T(x, y)$

(c) conclusion

② $\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E} \varphi(X_T^{x, \theta}) = \mathbb{E}[\varphi(X_T^{x, \theta}) \left(\frac{W_T^2 - T}{\sigma^2 T} - W_T \right)]$

Rq $\varphi = \mathbb{E}[\varphi(X_T^x(s))] = \mathbb{E}\left[\frac{\partial \varphi}{\partial x} \log p_T(x, s, X_T^x(s))\right]$ © Théo Jalabert 

Chapitre III Réduction de variance

1 Méthode de Monte Carlo, variable de contrôle

$$m = \mathbb{E}X, \quad X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

$$\lambda \approx 1 \rightsquigarrow I_n^\lambda(\omega) = \left[\bar{X}_n \pm q_\lambda \sqrt{\frac{V_n}{n}} \right]$$

L'alternative : si donner ε $I_n^\lambda(\omega) = [\bar{X}_n \pm \varepsilon]$

$$n(\varepsilon) = q_\lambda^2 \frac{V_n}{\varepsilon^2} \approx \underbrace{q_\lambda^2}_{\text{Le seul paramètre sur lequel éventuellement jouer : } \sigma_x^2} \frac{\sigma_x^2}{\varepsilon^2}$$

Le seul paramètre sur lequel éventuellement jouer : σ_x^2

Idée Chercher $X' \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ t.q.

- $\mathbb{E}X' = m$ - quantité d'intérêt
- $\text{Var}[X'] = \sigma_{X'}^2 \leq \sigma_X^2$
- Complexité $K_{X'}$ de simul. de X' vérifie $K_{X'} \approx K_X$

Budget de la simulation de red. $\mathbb{E}X$

$$\hat{m} \text{ budget} \rightarrow M \cdot K_X = MK_{X'}$$

Rq Si $K_X < K_{X'}$, il faudra raisonner en budget

$$M'(\varepsilon) = \frac{q_2^2 \bar{V}_{H'}^1}{\varepsilon^2} \approx \frac{q_2^2 \bar{\sigma}_x^2}{\varepsilon^2}$$

$$K_{x'} M'(\varepsilon) = K_x M(\varepsilon)$$

Aspects pratiques

On cherche $\Xi \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

(i) Si Ξ se calcule à complexité négligeable $K_\Xi \approx 0$

(ii) $X - \Xi$ se simule au m^e coûté que X : $K_{X-\Xi} = K_X$

(iii) $\text{Var}[X - \Xi] < \text{Var}[X]$

Alors $X' = X - \Xi + E\Xi$ vérifie

- $E[X'] = EX = m$

- $K_{X'} \approx K_{X-\Xi} \approx K_X$

- $\text{Var}[X'] = \text{Var}[X - \Xi] < \text{Var}[X]$

Exercice Réécrire les conditions (i) - (iii) lorsque $K_X \neq K_{X'}$

en introduisant le budget.

Exemples ④ Sensibilités $X_T^x = x e^{(r+\sigma W_T)} \quad , \quad \sigma = r - \frac{\sigma^2}{2}$

$$\Phi(x) = E\Phi(X_T^x) \quad (\text{oublié l'actualisation volontairement})$$

Quand suffisamment régulière

$$\Phi'(x) = \mathbb{E} \left[\varphi' \left(X_T^x \right) \frac{X_T^x}{x} \right] = \mathbb{E} \left[\varphi \left(X_T^x \right) \underbrace{\frac{W_T}{x^{G-T}}}_{Y_2} \right]$$

$\underbrace{}_{Y_1}$ $\underbrace{}_{Y_2}$

$\text{Var}[Y_1]$ v.s. $\text{Var}[Y_2] \Leftrightarrow \mathbb{E} Y_1^2 - \mathbb{E} Y_2^2$:

$$\mathbb{E} \left[\varphi' \left(X_T^x \right)^2 \left(\frac{X_T^x}{x} \right)^2 \right] \text{ v.s. } \mathbb{E} \left[\varphi \left(X_T^x \right)^2 \left(\frac{W_T}{x^{G-T}} \right)^2 \right]$$

cas 1 (maturités courts) $T \rightarrow 0$

$$\mathbb{E} Y_1^2 \rightarrow \varphi'(x)^2 \quad \mathbb{E} Y_2 \sim \varphi'(x)^2 \frac{\mathbb{E} W_T^2}{(x^{G-T})^2} \sim \frac{\varphi'(x)^2}{x^{2G-2T}} \underset{T \rightarrow 0}{\rightarrow} \infty$$

cas 2 (maturités longues) $T \rightarrow +\infty$

si $\varphi' \geq \varepsilon_0 > 0$ (pas vérifié par les Call ou les Put)

$$\mathbb{E} \left[Y_1^2 \right] \geq \varepsilon_0^2 \mathbb{E} \left(\frac{X_T^x}{x} \right)^2 = \frac{\varepsilon_0^2}{x^2} e^{2rT + 2G^2 T} = \frac{\varepsilon_0^2}{x^2} e^{(2r+G^2)T} \rightarrow \infty$$

D'autre part si φ est bornée

$$\mathbb{E} Y_2^2 \leq \|\varphi'\|_{\infty}^2 \sup \frac{\mathbb{E} W_T^2}{(x^G)^2} \sim \frac{1}{T} \underset{T \rightarrow \infty}{\rightarrow} 0$$

② Tentons une réduction de variance "naïve"

$$\Phi'(x) = \mathbb{E} \left[\varphi' \left(X_T^x \right) \frac{X_T^x}{x} \right]$$

$$\mathbb{E} \left[\frac{X_T^x}{x} \right] = \mathbb{E} e^{(r-G^2)T + G W_T} = e^{rT}$$

$$\Phi'(x) = \mathbb{E} \left[(\varphi' \left(X_T^x \right) - \lambda) X_T^x \right] + \lambda e^{rT}$$

idée γ pas trop grand, $X_T^x \approx xe^{rT}$

© Théo Jalabert

Jalabert

$$\lambda = \varphi'(xe^{rT})$$

$$\Phi'(x) = E \left[(\varphi(X_T^x) - \varphi(xe^{rT})) \frac{X_T^x}{x} \right] + \varphi'(xe^{rT}) e^{rT}$$

Candidat à réduction de variance à vérifier numériquement

$$\Phi'(x) = E \left[\varphi(X_T^x) \frac{W_T}{x\sigma_T} \right] \quad E W_T = 0$$

$$\text{Donc } \Phi'(x) = E \left[(\varphi(X_T^x) - \lambda) \frac{W_T}{x\sigma_T} \right] \quad \forall \lambda$$

$\lambda = \varphi(xe^{rT})$ si T pas trop grand

$$\Phi'(x) = E \left[(\varphi(X_T^x) - \varphi(xe^{rT})) \frac{W_T}{x\sigma_T} \right]$$

C'est un autre candidat.

Question Démontrez que cela sont des variables de contrôle.

1. Inégalité de Jensen

Rappel $X \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, B ss-très de \mathcal{A}

On suppose $\varphi \in L^1$. alors $\varphi(E[X|B]) \leq E[\varphi(X)|B]$

Mémo $|E[X]| \leq E|X|$, H convexe

Exemples ① Panier d'actifs sous-jacents dans un modèle

de B-S multi-dim.

$$X_t^i = e^{rt} - \text{numérique}$$

$$(*) dX_t^i = X_t^i \left(rdt + \sum_{j=1}^q G_{ij} W_t^j \right) \text{ où } W = (W^1, \dots, W^q) \text{ - M.B.S. q-dim}$$

$$q \geq d \quad \sum = GG^* \quad G = (G_{ij})$$

être inversible $\begin{pmatrix} r_G(\Sigma) = r_G(G) \leq d \wedge q \\ \text{donc } q < d \Rightarrow \Sigma \text{ singulière} \end{pmatrix}$

$GG^* = T \cdot T^*$. T triangulaire via décomp. de Cholesky

$$(G_{ij}) \rightarrow (t_{ij})$$

$$\sum_{j=1}^q G_{ij} W_t^j \rightarrow \sum_{j=1}^q t_{ij} W_t^j \quad (\text{les z procs auront la m loi})$$

Le modèle de chaque composante

$$|G_i|_2 = \left(\sum_{j=1}^q G_{ij}^2 \right)^{1/2}$$

$$\left\langle \sum_k G_{ik} W_t^k, \sum_\ell G_{i\ell} W_t^\ell \right\rangle_t = \sum_{k, \ell} G_{ik} G_{i\ell} \underbrace{\langle W_t^k, W_t^\ell \rangle}_{S_{kk} \cdot t} = \sum_{k=1}^q G_{ik} G_{ik} \cdot t = S_{kk} \cdot t = (GG^*)_{ii} \cdot t$$

$$\sum_k G_{ik} W_t^k = |G_i|_2 \underbrace{\sum_k \frac{G_{ik}}{|G_i|_2} W_t^k}_t$$

$$\langle \dots \rangle = t \Rightarrow B_t^i = \sum_{k=1}^q \frac{G_{ik}}{|G_i|_2} W_t^k \text{ est un MBS}$$

$$\langle B_i^i, B_j^j \rangle_t = \frac{(GG^*)_{ii}}{|G_i|_2 |G_j|_2} \cdot t = p_{ij} t$$

$$(t) \text{ se réécrit } \begin{cases} dX_t^i = X_t^i (rdt + \beta_i l_2 dB_t^i) \\ X_0^i = x^i \end{cases}$$

B est un BM de matrice de corrélation plus

Donc $(X_t^i)_{t \in [0, T]}$ soit un modèle de BS avec de volatilité $\beta_i l_2 = \left(\sum_k \sigma_{ik}^2 \right)^{1/2}$

On vient au sujet d'exemple

$$h_T = \varphi \left(\sum_{i=1}^d \lambda_i X_T^i \right) \quad \lambda_i > 0, \quad \sum_{i=1}^d \lambda_i = 1$$

Si Z index, λ_i capitalisation boursière relative de l'entreprise "i".

Si $Z \sim N(m, \sigma^2)$ $e^{m + \beta Z} \sim \text{lognormale}(\dots)$

$$X_T^i = x^i e^{\left\{ \left(r - \frac{\beta_i^2}{2} \right) t + \beta_i l_2 B_t^i \right\}}$$

$$X_T^i = x^i \exp \left\{ \left(r - \frac{\beta_i^2}{2} \right) t + \sum_k \beta_{ik} W_t^k \right\}$$

$$\log X_T^i = \log x^i + \left(r - \frac{\beta_i^2}{2} \cdot t \right) + \sum_k \beta_{ik} W_t^k \quad \text{- proc. gaussien}$$

On suppose $\varphi \neq$

$$\sum_{i=1}^d \lambda_i X_T^i = \sum_{i=1}^d \lambda_i \exp(\log X_T^i) \geq \exp \left\{ \sum_i \lambda_i \log X_T^i \right\}$$

$$\varphi \left(\sum_i \lambda_i X_T^i \right) \geq \varphi \left(\exp \left\{ \sum_i \lambda_i \log X_T^i \right\} \right)$$

On pose $k_T = \Phi(\exp\{\sum_i \lambda_i \log X_i^*\})$ et donc on veut calculer

$$e^{-rT} \mathbb{E}[h_T] = e^{-rT} \mathbb{E}[h_T - k_T] + e^{-rT} \mathbb{E}[k_T]$$

$$\sum_i \lambda_i \log X_i^* \sim N(0)$$

Exo $e^{-rT} \mathbb{E}[k_T] = \mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{d}{dt} x_i^{2i} \exp\left\{(r - \frac{1}{2} \sum_j \lambda_j^2)^t + \sum_i \lambda_i G_i N_T^{ij}\right\}\right)\right]$

valeur initiale \downarrow

$$\sim N\left(\frac{1}{2} \sum \lambda_i (\bar{x}_i)^2 T, (\omega^2 \sigma^2 \lambda^2) T\right)$$

$$\Rightarrow e^{-rT} \mathbb{E}[k_T] = \text{Princ}_BS\left((\pi x_i^{2i}) \exp\left\{(-\frac{1}{2}(\sum_i \lambda_i \bar{x}_i)^2) - (\omega^2 \lambda^2) T\right\}, r, \right. \\ \left. (\omega^2 \sigma^2 \lambda^2)^{1/2}, T\right)$$

\uparrow taux d'intérêt
 \uparrow volatilité \uparrow maturité

Simulation de MC cohérente du couple (h_T, k_T) avec

les mêmes n_T^* afin de simuler $h_T - k_T$.

$$h_T - k_T = \Psi(Z), Z \sim N(0, I_9)$$

$$e^{-rT} \mathbb{E}[h_T] \approx \frac{e^{-rT}}{n} \sum_{k=1}^n \Psi(z_k) + e^{-rT} \mathbb{E}[k_T]$$

⚠ On n'a pas démontré que cela produit une réduction de variance même si c'est une méthode standard

Procédure (parois baux) utilisée

$X \geq 0$ $0 \leq \Sigma \leq X$ alors Σ est une variable de contrôle.

Faux! $X = 0, \Sigma \sim U[0,1], \text{Var}[X] = 0, \text{Var}[X - \Sigma] = \frac{1}{12}$

② Variable de contrôle de Kemna-Vorst (options asiatiques) © Théo Jalabert

BS 1D $dX_t^x = X_t^x(rdt + \sigma dW_t)$, $x > 0$

$$X_t^x = x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$$

asiatique = moyenne temporelle
d'un sous-géant.

Payoff asiatique $h_T = \varphi\left(\frac{1}{T} \int_0^T X_t^x dt\right)$

(voire plus généralement $h_T = \varphi\left(\frac{1}{T-T_0} \int_{T_0}^T X_t^x dt\right)$)

Hypo $\varphi \uparrow$

Applique l'égalité de Jensen à $\mathbb{E}_{[0,T]} \frac{dt}{T}$

$$x \int_0^T \exp\left\{yt + \sigma W_t\right\} \frac{dt}{T} \geq x e^{\frac{1}{T} \int_0^T (yt + \sigma W_t) dt}$$

$$\varphi(\dots) \geq \varphi(\dots)$$

$$k_T = \varphi\left(x \exp\left\{\frac{1}{T} \int_0^T (yt + \sigma W_t) dt\right\}\right) = \varphi\left(\exp\left\{\frac{yT}{2} + \frac{\sigma^2}{T} \int_0^T (W_t dt)^2\right\}\right)$$

i) $\text{Var}\left(\int_0^T W_t dt\right) = \iint_0^T t ds dt = 2 \int_0^T dt \int_0^t s ds = \frac{T^3}{3}$

ii) i.p.p. $\int_0^T W_t dt + \int_0^T t dW_t = TW_T - 0 \cdot W_0 - \langle t, W \rangle_T$

$$\int_0^T W_t dt = TW_T - \int_0^T t dW_t$$

$$\int_0^T dW_t$$

$$\text{Var}\left(\int_0^T W_t dt\right) = T^3 + \underbrace{\int_0^T t^2 dt}_{T^3/3} - 2 \underbrace{\int_0^T t dt}_{T^2/2} \cdot T = T^3/3$$

$$\text{Or } \int_0^T (T-t) dW_t \Rightarrow \text{Var}[-] = \int_0^T (T-t)^2 dt = \frac{\pi^3}{3} \quad \text{© Théo Jalabert}$$

$$\text{Var}\left[\frac{1}{T} \int_0^T W_t dt\right] = \frac{T}{3}$$

$$k_T \stackrel{d}{=} \Phi\left(x \exp\left(\left(\frac{r}{2} - \frac{\sigma^2}{4}\right)T + \frac{\sigma}{\sqrt{3}} B_T\right)\right) = \Phi\left(x e^{-\left(\frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{12}\right)T} e^{\left(r - \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma^2}{3}\right)\right)T + \frac{\sigma}{\sqrt{3}} B_T}\right)$$

$$e^{-rT} \mathbb{E}[k_T] = \text{Prime}_{BS}\left(x e^{-\left(\frac{r}{2} + \frac{\sigma^2}{12}\right)T}, r, \frac{\sigma}{\sqrt{3}}, T\right)$$

Formule fermée pour call, Put \Rightarrow formule fermée

pour $e^{-rT} \mathbb{E}[k_T]$

$$e^{-rT} \mathbb{E}[k_T] = e^{-rT} \mathbb{E}[h_T - k_T] + \text{Prime}_{BS}(k_T)$$

$$\text{Simulation } \int_0^T X_t^x dt = \int_0^T x e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t} dt \text{ et } e^{\frac{xT}{2} + \frac{\sigma^2}{T} \int_0^T W_t dt} \text{ conjointement.}$$

Contraint de discréteriser en temps

$$\text{Simuler } \left(x \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right) \frac{kT}{n} + \text{exp}\left(\frac{1}{T} \int_0^T W_t dt\right)\right)\right)$$

\uparrow
Simuler $(W_{\frac{kT}{n}}, \frac{1}{T} \int_0^T W_t dt)$ - vecteur Gaussien

$$\mathbb{E}\left[W_{\frac{kT}{n}} \mid \frac{1}{T} \int_0^T W_t dt\right] = \frac{1}{T} \int_0^T \mathbb{E}[W_{\frac{kT}{n}} | W_t] dt \text{ avec } \Sigma \text{ de covariance}$$

Alternative $\mathcal{L}\left(W_{\frac{kT}{n}}, k=1, \dots, N \mid \frac{1}{T} \int_0^T W_t dt\right)$ loi normale

moyenne et la covar. $\mathbb{E}\left[W_{\frac{kT}{n}} \mid \frac{1}{T} \int_0^T W_t dt\right], \mathbb{E}\left[W_{\frac{kT}{n}} W_{\frac{lT}{n}} \mid \frac{1}{T} \int_0^T W_t dt\right]$

Exercice 1a) Calculer $e^{-rT} \mathbb{E}[h_T]$ avec $\Phi(x) = (x - K)^+$,

$e^{-\frac{1}{2}t^T K t}$ et $e^{-\frac{1}{2}t^T K' t}$ avec la réduction de variance. © Théo Jalabert

(6) $e^{-\frac{1}{2}t^T K t} \leq \text{call}_B(x, K, r, S, T)$

1.2. Variable de contrôle dynamique (régression)

$$X, X' \in L^2(\mathbb{P}) \quad m = \mathbb{E}X = \mathbb{E}X', \quad \text{Var}[X], \text{Var}[X'], \text{Var}[X-X'] > 0.$$

$$K(X, X') \approx K_X$$

Comment tirer partie de ce cadre optimalement pour calculer m ?

$$\lambda \in \mathbb{R} \quad X^\lambda = X - \lambda E, \text{ où } E = X - X'$$

$$\mathbb{E}X^\lambda = (1-\lambda)\mathbb{E}X + \lambda\mathbb{E}X' = \mathbb{E}X$$

$$g(\lambda) = \text{Var}[X^\lambda] = \text{Var}[X] - 2\lambda \text{cov}(X, E) + \lambda^2 \text{Var}[E]$$

$$g'(\lambda) = 2(\lambda \text{Var}[E] - \text{cov}(X, E)) \rightarrow \lambda_{\min} = \frac{\mathbb{E}[XE]}{\mathbb{E}[E^2]}$$

$$g(\lambda_{\min}) = \text{Var}[X] - \frac{\text{cov}(X, E)^2}{\text{Var}[E]} \leq \text{Var}[X] \text{ si } \mathbb{E}[XE] \neq 0$$

$$g(\lambda_{\min}) = \text{Var}[X'] - \frac{\text{cov}(X', E)^2}{\text{Var}[E]} \leq \text{Var}[X] \text{ si } \mathbb{E}[X'E] \neq 0$$

$$\text{si } \mathbb{E}[XE] = 0 \text{ et } \mathbb{E}[X'E] = 0 \rightarrow \mathbb{E}[(X-X')E] = \text{Var}[E] = 0 ?$$

Si $\mathbb{E}[XE] = 0 \Leftrightarrow \text{Var}[X] \text{ meilleure possible}$

Si $\mathbb{E}[X'E] = 0 \Leftrightarrow \text{Var}[X'] \text{ meilleure possible}$

Implementation ① naïve $(X_k, X'_k)_{k=1..n}$ i.i.d. de lo. (X, X')

© Théo Jalabert

$$\bar{X}_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_k, \quad \bar{C}_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_k - \bar{X}_m \quad \text{où} \quad \bar{\Xi}_k = X_k - \bar{X}_m, \quad \bar{V}_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m \bar{\Xi}_k^2$$

$$\text{lo.v}(X, \Xi)$$

$$\text{et } \hat{\lambda}_m = \frac{\bar{C}_m}{\bar{V}_m} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} \lambda_{\min}$$

$$\mathbb{E} \Xi^2 = \text{Var}[\Xi]$$

$$\bar{X}^{\hat{\lambda}_m} = \bar{X}_m - \hat{\lambda} \bar{\Xi}_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} m - \lambda_{\min} \cdot 0 = m$$

$$\text{Tch? } \underbrace{\sqrt{m}(X^{\hat{\lambda}_m} - m)}_{\xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_{\min}^2)} = \underbrace{\sqrt{m}(X_m - m)}_{\sim \sigma_{\min} = \text{Var}(X^{\lambda_{\min}})} + \underbrace{\sqrt{m}(X^{\hat{\lambda}_m} - X^{\lambda_{\min}})}_{\xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_{\Xi}^2)}$$

$$\begin{aligned} & \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_{\min}^2) \quad \sqrt{m}(\lambda_{\min} - \hat{\lambda}_m) \bar{\Xi}_m \\ & \sim \sigma_{\min} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \sigma_{\Xi}^2) \quad \text{t-1} \leq |\lambda_{\min} - \hat{\lambda}_m| / \sqrt{m} \bar{\Xi}_m \xrightarrow{P} 0 \end{aligned}$$

Content?

Non! Car $\mathbb{E} \bar{X}_m^{\hat{\lambda}_m} \neq m$

(Slutsky) $\xrightarrow{P} \mathbb{E} \bar{X}_m^{\lambda_{\min}}$

$$\mathbb{E} \bar{X}_m^{\hat{\lambda}_m} = \mathbb{E} \bar{X}_m - \mathbb{E} \hat{\lambda}_m \bar{\Xi}_m$$

" " 0 !

② Batch $M' \ll M$

$$\hat{\lambda}_{\min} \approx \frac{\bar{C}_m}{\bar{V}_m} \quad \text{"fixé"}$$

$$\bar{X}_{M-M'}^{\hat{\lambda}_{\min}} = \frac{1}{M-M'} \sum_{k=1}^{M-M'} (X_k - \hat{\lambda}_{\min} \bar{\Xi}_k)$$

③ Méthode adoptative

On introduit $\hat{\lambda}_k = (-k) \sqrt{\hat{\lambda}_k} \wedge k$

$$\hat{X}_k = X_k - \hat{\lambda}_{k-1} \bar{\Xi}_k$$

$$\tilde{X}_m = \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m X_k - \tilde{\lambda}_{k-1} \tilde{\Sigma}_k$$

\uparrow

$$\text{indépendants} \rightarrow E[\tilde{\lambda}_{k-1} \tilde{\Sigma}_k] = E[\tilde{\lambda}_{k-1}] E[\tilde{\Sigma}_k]$$

donc $E[\tilde{X}_m] = m - 0 \rightarrow$ sans biais.

$$\tilde{X}_m = \bar{X}_m - \lambda_{\min} \tilde{\Sigma}_m + \underbrace{\frac{1}{m} \sum_{k=1}^m (\lambda_{\min} - \tilde{\lambda}_{k-1}) \tilde{\Sigma}_k}_{E_m}, \quad |E_m| \leq \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m |\lambda_{\min} - \tilde{\lambda}_{k-1}| |\tilde{\Sigma}_k| \xrightarrow{k \rightarrow \infty}$$

\downarrow p.s. E_m

Lemme (de Cesaro généralisé)

$$b_n \nearrow \infty, b_n > 0 \quad a_n \rightarrow a_\infty \in \mathbb{R} \quad \text{alors} \quad \frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{b_n} (b_k - b_{k-1}) a_k \rightarrow a_\infty$$

Preuve Exo!

$$\frac{\sum |E_k|}{m} \cdot \frac{1}{\sum |E_k|} \sum |(\lambda_{\min} - \tilde{\lambda}_{k-1})| |E_k| \xrightarrow{a.s.} 0$$

$\downarrow \quad \text{NMB}[E]$

$E[E] > 0$

$\lambda_{k-1} = \lambda_k \rightarrow \lambda_{\min}$

car $E[E] > 0$

Donc $E_m \rightarrow 0$ donc $\tilde{X}_m \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} 0$

• TCL?

$$\sqrt{m}(\tilde{X}_m - m) = \sqrt{m}(X_m^{\lambda_{\min}} - m) + \underbrace{\frac{1}{\sqrt{m}} \sum (\lambda_{\min} - \tilde{\lambda}_k) \tilde{\Sigma}_k}_{\xrightarrow{D(0, G_m^2)}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} \sum (\lambda_{\min} - \tilde{\lambda}_k) \tilde{\Sigma}_k$$

$L_M = \sum_{k=1}^M (\lambda_{\min} - \hat{\lambda}_{k-1}) \tilde{E}_k$ - martingale car \tilde{E}_k est $\mathcal{G}(X_1, \dots, X_{k-1})$ -mes.

$$\mathbb{E} L_M^2 = \sum_{k=1}^M \mathbb{E} (L_k - L_{k-1})^2$$

$$\mathbb{E} (L_k - L_{k-1})^2 = \mathbb{E} (\lambda_{\min} - \hat{\lambda}_{k-1})^2 \tilde{E}_k^2 = \mathbb{E} \tilde{E}^2 \mathbb{E} (\lambda_{\min} - \hat{\lambda}_{k-1})^2$$

On admet que l'on peut faire comme si (Haux)

$$\mathbb{E} (\lambda_{\min} - \hat{\lambda}_{k-1})^2 \rightarrow 0$$

?

$$\underbrace{\mathbb{E} [E^2] \cdot M \cdot \frac{1}{m} \sum \mathbb{E} (\lambda_{\min} - \hat{\lambda}_{k-1})^2}_{\rightarrow 0} \mathbb{E} E^2 = O(M)$$

$$\left(\langle L \rangle_M = \sum (\lambda_{\min} - \hat{\lambda}_{k-1})^2 \notin L^2 \right. \\ \left. \frac{L_m}{\sqrt{m}} = O(m) \text{ en } P \text{ car } \frac{\langle L \rangle_m}{m} \xrightarrow[m \rightarrow \infty]{} 0 \right)$$

$$\frac{1}{\sqrt{m}} L_m = O(1) \text{ dans } L^2 \quad \overbrace{\mathbb{E} \left(\frac{L_m^2}{m} \right)} \leq \mathbb{E} \frac{\langle L \rangle_m}{m} \rightarrow 0$$

$$\left\| \frac{1}{\sqrt{m}} L_m \right\|_2 \rightarrow 0 \rightarrow \frac{1}{\sqrt{m}} L_m \xrightarrow{P} 0$$

1.3. Variables antithétique

Que se passe-t-il si, outre les hypothés précédentes

$(\text{Var}(X), \text{Var}(X'), \text{Var}(X-X')) > 0$ et $m_X = \mathbb{E}X = \mathbb{E}X'$,

$$X \stackrel{d}{\sim} X' \quad \lambda_{\min} = \frac{\mathbb{E}[X \Xi]}{\text{Var}[\Xi]} = \frac{\mathbb{E}X^2 - \mathbb{E}XX'}{\mathbb{E}X^2 - 2\mathbb{E}XX' + \mathbb{E}X'^2} = \frac{1}{2}$$

On utilise ici $E[X^2] \neq E[X]E[X']$ si non, $X = XX'$ p.s. \rightarrow

$\Rightarrow \lambda = 1$, mais $\text{Var}[X-X'] > 0$.

Hypo $K_X \approx K_{X'}$ et $K_{(X,X')} \approx K_X + K_{X'}$
l'complexité

⚠ de l'hypo de la variable de contrôle dynamique

$$\lambda_{\min} = \frac{1}{2} \Rightarrow X = \frac{X+X'}{2}$$

Rappel $K_X \text{Var}[X] < K_X \text{Var}[X] = K_{X'} \text{Var}[X']$

$$2K_X \cdot \frac{1}{4} [\text{Var}[X] + \text{Var}[X'] + 2\text{cov}[X, X']] = K_X (\text{Var}[X] + \text{cov}[X, X'])$$

$$\Leftrightarrow \text{cov}(X, X') < 0.$$

Prop (eo-monotonie)

Soient $\varphi, \psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eo-monotones (^{-monotones}
^{-de m monotonie})

et $z : (\mathcal{Z}, \mathcal{A}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $\varphi(z)$ et $\psi(z) \in L'$ alors

$$\text{cov}(\varphi(z), \psi(z)) \geq 0 \quad \text{avec } \Theta \text{ ssi} \quad \begin{cases} \varphi(z) = c^{\text{ste}} & \text{p.s.} \\ \psi(z) = c^{\text{ste}} & \text{p.s.} \end{cases}$$

Preuve

$z' \stackrel{L}{\sim} z, z' \perp\!\!\!\perp z \quad \left(\begin{array}{l} \mathcal{Z} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}' \text{ PEP} \\ (w, w') \mapsto (z(w), z'(w')) \\ z'(w) = z(w) \quad z' \sim z \text{ et } z' \perp\!\!\!\perp z \text{ si PEP} \end{array} \right)$

φ, ψ ω -monotones

$\varphi(z) - \varphi(z')$ est de même signe que $\psi(z) - \psi(z') \Rightarrow$

$$\rightarrow E[(\varphi(z) - \varphi(z'))(\psi(z) - \psi(z'))] \geq 0$$

$$E[\varphi(z)\psi(z)] - E[\varphi(z)\psi(z')] - E[\varphi(z')\psi(z)] + E[\varphi(z')\psi(z')] \geq 0$$

$$\text{Donc } E[\varphi(z)\psi(z)] - E[\varphi(z)]E[\psi(z)] \geq 0 \Leftrightarrow \text{Cov}(\varphi(z), \psi(z)) \geq 0$$

dém le cas d'égalité □

$$\text{Var}[\varphi(z)] \text{ et } \text{Var}[\psi(z)] > 0 \Rightarrow \text{Cov}(\varphi(z), \psi(z)) > 0$$

Corollaire (application pratique) On suppose qu'il existe $T: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $Z \sim T Z$

alors pour toute $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monotone t.q. $\varphi(z) \in L^2(\mathbb{R})$

$$\text{et } \text{Var}[\varphi(z)] > 0 \quad \text{Cov}(\varphi(z), \varphi(T(z))) < 0.$$

Dém Appliq la proposition à φ et $\psi = -\varphi_0 T$ □

Exemple

1) $V \sim U(0,1)$ alors $V \sim 1-V$, $T(u) = 1-u$.

2) $V: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ t.q. $V \sim \lambda - V$ où $\lambda \in \mathbb{R}$ $T(u) = \lambda - u$

$$3) \quad Z \stackrel{d}{\sim} N(0,1) \quad Z \stackrel{d}{\sim} -Z \quad (2) \text{ avec } L=0$$

Théorème $\varphi, \psi: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ co-monotones component par component.

$\forall i \in \{1, \dots, d\}$ $x_i \mapsto \varphi(x_1, \dots, x_d)$ sont co-monotones.
 $x_i \mapsto \psi(x_1, \dots, x_d)$

$Z: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}^d$ alors $\text{cov}(\varphi(Z), \psi(Z)) \geq 0$

avec \Leftrightarrow ssi $\varphi(Z)$ ou $\psi(Z) = c^{\text{ste}}$

2. Application au pricing d'options: relation de parité

$$S_t^0 = e^{rt} \text{ numéraire}$$

$(S_t)_{t \in [0, T]}$ actif risqué "qq" dans un marché complet, i.e.

! \mathbb{P} risque-neutre (t.q. $\tilde{S}_t = \frac{S_t}{S_t^0}$ est une \mathbb{P} -martingale)

$$(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+ = S_T - K$$

$$\mathbb{E}[e^{-rT}(S_T - K)^+] - \mathbb{E}[e^{-rT}(K - S_T)^+] = \mathbb{E}[e^{-rT}S_T] - e^{-rT}K$$

$$\text{Call}_0(T, K) - \text{Put}_0(T, K) = S_0 - e^{-rT}K$$

Exo. $\mathbb{E}[.] \rightsquigarrow \mathbb{E}[\cdot | \mathcal{F}_t] \Rightarrow \text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t - e^{-rT}K$

$$\text{Call}_0(T, K) = \mathbb{E}[\underbrace{e^{-rT}(K - S_T)^+ + S_0 - Ke^{-rT}}_{X'}] = \mathbb{E}[\underbrace{e^{-rT}(S_T - K)^+}_{X}]$$

$X \approx X'$

$$\mathbb{E}X = \mathbb{E}X' \quad \text{Var}[X] > 0, \quad \text{Var}[X'] > 0, \quad \text{Var}[X-X'] > 0$$

$$\forall K \mapsto \lambda_{\min}^K$$

Call dans la monnaie \Rightarrow call synthétique (c'est X')

hors de la monnaie \Rightarrow call standard

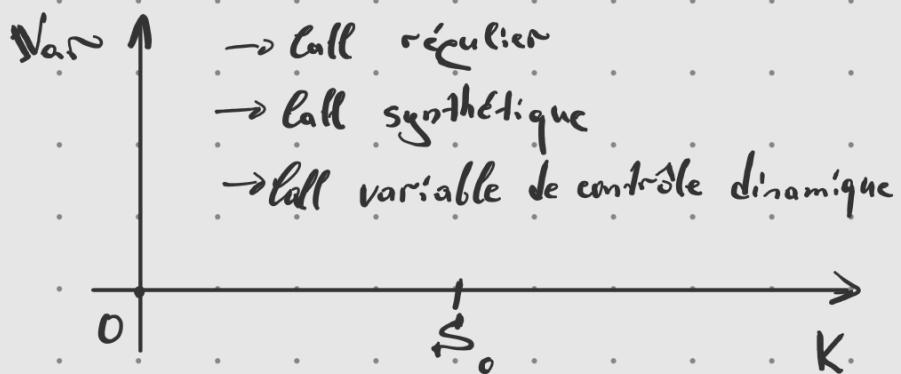
Exercice (mini-projet) Relation de parité call-Put "asiatique".

$$0 < T_0 < T \quad \left(\frac{1}{T-T_0} \int_{T_0}^T S_t dt - K \right)^+ \text{ et } \left(K - \frac{1}{T-T_0} \int_{T_0}^T S_t dt \right)^+$$

payoff de call asiatique payoff put asiatique

3) Relation call-Put

2) Faire de simulation



$$S_0 = 100, \sigma = 0.3$$

$$\rho = 0.05, T = 1$$

3. Pré-conditionnement (méthode de Blackwell-Rao)

$$X \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \quad \mathcal{B} \subset \mathcal{A} \quad m_X = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X | \mathcal{B}]]$$

$$\text{Var}(X) = \text{Var}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]] + \|\mathbb{E}[X - \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]]\|_2^2 \quad \text{Var}(X)$$

$$X - \mathbb{E}X = \underbrace{X - \mathbb{E}[X|\mathcal{B}]}_{\perp L^2(\mathcal{B})} + \underbrace{\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] - \mathbb{E}X}_{\mathcal{B}\text{-measurable}} \rightarrow \|X - \mathbb{E}X\|_2^2 = \|\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]\|_2^2 + \underbrace{\|\mathbb{E}[X|\mathcal{B}] - \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]]\|_2^2}_{\text{Var}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]]}$$

Donc si $X \in L^2(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$ alors $\text{Var}[\mathbb{E}[X|\mathcal{B}]] < \text{Var}(X)$.

Situation canonique en simulation de M.C

$$X = g(Z_1, Z_2) \quad Z_1 \perp\!\!\!\perp Z_2 \text{ sur } (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \quad \mathcal{B} = \mathcal{G}(Z_2)$$

$$g(Z_1, Z_2) \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[g(Z_1, Z_2)] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[g(Z_1, Z_2) | Z_2]] = \mathbb{E}[G(Z_2)] \quad \text{où}$$

$$G(Z_2) = \mathbb{E}[g(Z_1, Z_2) | Z_2]$$

↑ utile si formule fermée (au EDP, ...)

$$\text{Var}(X) < \text{Var}[G(Z_2)]$$

Exemple Option spread $h_T = (X_T^1 - X_T^2 - K)^+$

$$X_t^i = x_t^i \exp\left\{(r - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i W_t^i\right\} \quad \langle W^1, W^2 \rangle_t = \rho t \quad \rho \in [-1, 1]$$

$$(W_T^1, W_T^2) = \sqrt{T} \left(\sqrt{1-\rho^2} Z_1 + \rho Z_2, Z_2 \right) \quad (Z_1, Z_2) \sim N(0, I_2)$$

$$\begin{aligned} G(Z_2) &= \mathbb{E}[e^{-rT} (x_0^1 \exp\{(r - \frac{\sigma_1^2}{2})T + \sigma_1 \sqrt{T} (\sqrt{1-\rho^2} Z_1 + \rho Z_2)\} - (K \exp\{(r - \frac{\sigma_1^2}{2})T + \sigma_1 \sqrt{T} Z_1\} \\ &\quad + K))^+] = \text{Call}_{BS}(x_0^1 e^{-\frac{\rho^2 \sigma_1^2}{2} T + \sigma_1 \sqrt{T} Z_1}, K + K^2 \exp\{(r - \frac{\sigma_1^2}{2})T + \sigma_1 \sqrt{T} Z_1\}, r, \\ &\quad \sigma_1, \rho) \end{aligned}$$

$\sqrt{1-p^2} G_1, T) \rightarrow \text{Formule fermée pour } G_2$

Exercice 1) Quand est pourquoi conditionnée par W_T^1 ou W_T^2 ?

Lié à G_1, G_2, P ...

2) Même question sur le ball BestOf

$$h_T = (\max(X_T^1, X_T^2) - K)^+$$

Hint $(AVB - K)^+ = (B - K)^+ + (A - BVK)^+$

4. Echantillonnage préférentiel

4.1. approche abstraite

$$X: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$$

• μ mesure \mathcal{G} -finie (référence λ_d sur \mathbb{R}^d , \mathbb{P}_W sur $C[0,1]$)

• $P_X = f \cdot \mu$ ($f > 0$ μ -p.p.) On veut calculer

$$\mathbb{E}[h(x)] = \int_E h(\xi) f(\xi) \mu(d\xi) = \int h \cdot f d\mu$$

On pose d'une v.a. Y simulable avec $K_Y \leq K_X$ de loi $\mathbb{P}_Y = g \cdot \mu$

avec $g > 0$ μ -p.p.

$$\mathbb{E}[h(x)] = \int h g d\mu = \int h \frac{f}{g} \cdot g d\mu = \mathbb{E}\left[h \frac{f}{g}(Y)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n h \frac{f}{g}(Y_k),$$

où Y_α i.i.d. $\sim \mathcal{N}$.

Pratique Calcul de $\frac{f}{g} \ll h$

Question Est-ce utile?

$$\text{Var}\left[h\frac{f}{g}(y)\right] < \text{Var}[h(x)]? \Leftrightarrow E\left[\left(\frac{hf}{g}(y)\right)^2\right] < E[h^2(x)]$$

$$\Leftrightarrow \int h^2 \frac{f^2}{g^2} g dy < \int h^2 \cdot f dy \Leftrightarrow \int h^2 \frac{f}{g} f dy < \int h^2 f dy \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E\left[h^2 \frac{f}{g}(x)\right] < E[h^2(x)] - \text{condition "à vérifier"}$$

$$(h \in L^2(\mathbb{R}), \quad h \frac{f}{g} \in L^2(\mathbb{R}))$$

$$\begin{aligned} (Eh(x))^2 &= \left(\int h(x) f(x) dx \right)^2 = \left(\int h(x) \frac{f}{g}(x) g(x) dx \right)^2 \stackrel{(CS)}{\leq} \left(\int |h(x)| \frac{|f(x)|}{|g(x)|} dx \right) \left(\int g(x)^2 dx \right) \\ &= Eh^2(x) \frac{f}{g}(x) \end{aligned}$$

$$\text{Or si } h \frac{f}{g} = \lambda g \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow h \frac{f}{g} = \lambda g \quad g(x) = \frac{h \cdot f}{\lambda}$$

$$\text{Si } h \geq 0 \quad g = \frac{h \cdot f}{\lambda \int h \cdot f dx}$$

$$\text{Var}\left[h\frac{f}{g}(y)\right] = E\left[h\frac{f}{g}\right]^2 - (Eh(x))^2 = 0$$

en cas d'égalité

disc en œuvre pratique ball BS

$$X_t^{x_0} = x_0 \exp\{yt + \sigma W_t\} \quad g = r - \frac{\sigma^2}{2}$$

$$\sigma \approx 0.3$$

$$T = 1 \text{ an}$$

$$\text{Actif sans risque} \quad S_t^0 = e^{rt}$$

$$x_0 = 100, \quad K = 120$$

$$\text{Coll}_0^{\text{BS}}(K, T) = e^{-rT} \mathbb{E}[(X_T - K)^+] = e^{-rT} \mathbb{E}[(X_0 \exp\{(\mu + \sigma \sqrt{T})Z\} - K)^+]$$

© Théo Jalabert
Th. Jalabert

Idée Utiliser l'I.S. pour "recenter" la loi autour de K

$$\varphi(z) = e^{-rT} (X_0 e^{(\mu + \sigma \sqrt{T} Z)} - K)^+$$

$$\mathbb{E}[\varphi(z)] = \int \varphi(z) f(z) dz, \quad f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}}$$

$$\theta \in \mathbb{R} \quad g_\theta(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(s-\theta)^2}{2}}$$

$$\frac{\varphi}{g_\theta}(s) = e^{-\theta s + \frac{\theta^2}{2}}$$

Donc $\mathbb{E}[\varphi(z)] = \mathbb{E}\left[\varphi(z+s) e^{-\theta(z+s) + \frac{\theta^2}{2}}\right]$

$$\mathbb{E}[\varphi(z)] = e^{-\frac{\theta^2}{2}} \mathbb{E}[\varphi(z+s) e^{-\theta z}]$$

Approche plus simple

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\varphi(z)] &= \int \varphi(s) f(s) ds = \{s \cdot s + \theta\} = \int \varphi(s+\theta) e^{-\frac{(s+\theta)^2}{2}} \frac{ds}{\sqrt{2\pi}} = \\ &= e^{-\frac{\theta^2}{2}} \mathbb{E}[\varphi(z+\theta) e^{-\theta z}] \end{aligned}$$

Dans un monde idéal

$$\min_{\theta} \text{Var}[\varphi(z+\theta) e^{-\frac{\theta^2}{2}-\theta z}] = \min_{\theta} \mathbb{E}[\varphi^2(z+\theta) e^{-\theta^2-2\theta z}]$$

Approche alternative

S'appliquer l'intuition "décentrer $\mathcal{N}(0,1)$ en $\mathcal{N}(\theta,1)$ ".

① chercher θ t.q. $\mathbb{P}(x_0 \exp\{\zeta T + \theta \sqrt{T}(Z+\theta)\} \leq K) \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathbb{P}(\zeta T + \theta \sqrt{T}(Z+\theta) \leq -\log\left(\frac{x_0}{K}\right)) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \mathbb{P}\left(Z \leq \frac{-\log\left(\frac{x_0}{K}\right) - \theta}{\sqrt{T}}\right) = \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \theta_0 = -\frac{\log\left(\frac{x_0}{K}\right) + \zeta T}{\sqrt{T}}$$

② chercher θ t.q. $\mathbb{E}[x_0 \exp\{\zeta T + \theta \sqrt{T}(Z+\theta)\}] = K \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[x_0 e^{\zeta T} e^{-\frac{\theta^2}{2} + \theta \sqrt{T} Z} e^{\theta \sqrt{T} \theta}] = K \Leftrightarrow e^{\theta \sqrt{T} \theta} = e^{-\zeta T} \frac{K}{x_0}$$

$$\theta_1 = \frac{\log\left(\frac{K}{x_0}\right) - \zeta T}{\sqrt{T}} \approx \theta_0 \text{ si } \frac{\sqrt{T}}{2} \text{ petit}$$

Rem Sur cet exemple très simple de calculer

$$\text{Var}[\varphi(z+\theta_1) e^{-\frac{\theta_1^2}{2} - \theta_1 z}]$$

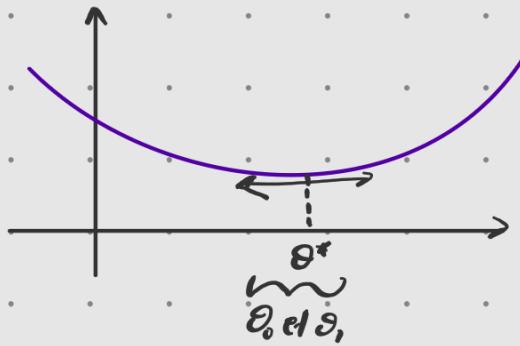
et

$$\text{Var}[\varphi(z)]$$

Tracer $\theta \mapsto \text{Var}[\varphi(z+\theta) e^{-\frac{\theta^2}{2} - \theta z}]$

Calculer $\text{Var}[\varphi(z+\theta) e^{-\frac{\theta^2}{2} + \theta z}]$

comparer à $\theta = \theta_0$ et $\theta = \theta_1$



Retour sur l'idée de base

$$\min_{\theta} \mathbb{E} \underbrace{\left[\varphi^2(z+\theta) e^{-2\theta z - \theta^2} \right]}_{\Psi(\theta)}$$

$$\mathbb{E}[-] = \int \varphi^2(z+\theta) e^{-2\theta z - \theta^2} e^{-\frac{\xi^2}{2}} \frac{d\xi}{\sqrt{2\pi}} = \{ \xi = z + \theta \} - \int \varphi^2(\xi) e^{-\xi^2} e^{-\frac{(\xi-\theta)^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d\xi$$

$$= \int \varphi^2(\xi) e^{\frac{(\xi-\theta)^2 - \xi^2}{2}} f(\xi) d\xi = \mathbb{E}[\varphi^2(z) e^{-2\theta z + \frac{\theta^2}{2}}]$$

$$\Psi(\theta) = \mathbb{E}[\varphi(z) e^{\frac{\theta^2}{2} - 2\theta z}]$$

$\forall \omega: \theta \mapsto e^{-2\theta z(\omega) + \frac{\theta^2}{2}}$ 凸的 $\rightarrow \Psi$ 凸的

Si $\mathbb{P}(\varphi(z) \neq 0) > 0$

Lemma de Fatou $\lim_{|\theta| \rightarrow \infty} \Psi(\theta) \geq \mathbb{E} \lim_{|\theta| \rightarrow \infty} e^{\frac{\theta^2}{2} - 2\theta z} \varphi(z) = +\infty$
 $\lim_{|\theta| \rightarrow \infty} e^{\frac{\theta^2}{2} - 2\theta z} \neq 0$

Donc le minimum précédemment évoqué existe effectivement.
 (on peut m-q. Ψ est strictement convexe)

Bilan $\Psi(\theta) = \mathbb{E} \left[\underbrace{\varphi(z+\theta)}_{\Psi_1(\theta, z)}^2 e^{-\frac{\theta^2}{2} - 2\theta z} \right] = \mathbb{E} \left[\underbrace{\varphi(z)}_{\Psi_2(\theta, z)} e^{\frac{\theta^2}{2} - 2\theta z} \right]$

2 cas:

(1) $\underset{\text{si } \varphi}{\sim} \partial_\theta \Psi_1(\theta, z) = 2\varphi(z+\theta) \varphi'(z+\theta) e^{-\frac{\theta^2}{2} - 2\theta z} + \varphi(z+\theta) e^{-\frac{\theta^2}{2} - 2\theta z} (-2\theta - 2z)$

suffisamment dérivable

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma \partial_\theta \Psi_1(\theta_n, z_{n+1})$$

(2) φ pas dérivable. $\partial_\theta \Psi_2(\theta, z) = \varphi^2(z) e^{\frac{\theta^2}{2} - 2\theta z} (\theta - z)$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma \partial_\theta \Psi_2(\theta_n, z_{n+1})$$

⚠ Pour appliquer la méthode de gradient il faut que

$$|\nabla \Psi(\theta)|^2 \leq C(1 + \Psi(\theta))^2$$

5. Stratification

Idée: localiser la méthode de MC.

$$X: (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{R}) \rightarrow (E, \mathcal{E}) \quad (E = \mathbb{R}^d \text{ ou } E = C([0, T], \mathbb{R}))$$

$(A_i)_{i \in I}$, I fini, partition \mathcal{E} -mes. de E .

On suppose

$$\begin{cases} \text{(i)} & p_i = P(X \in A_i) > 0 \text{ connue, } i \in I \\ \text{(ii)} & L(X | X \in A_i) = \varphi_i(U^{(i)}) \text{ où } U^{(i)} \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} U([0, 1]^{n_i}) \end{cases}$$

$$K_{L(X | X \in A_i)} \cong K_{\varphi_i} \cong K_X$$

$F: (E, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Calculer $E[F(X)]$

Idée: Allouer à chaque simulation conditionnelle un budget M_i :

$$\sum M_i = M \quad q_i = \frac{M_i}{M}$$

$$\begin{aligned} E[F(X)] &= \sum_{i \in I} [E[F(X) | \{X \in A_i\}] \cdot \underbrace{\frac{p_i}{P(X \in A_i)}}_1] = \sum_i p_i E[F(X) | X \in A_i] = \\ &= \sum_i p_i E[F(\varphi_i(U_i))] \quad \text{où } U_i \stackrel{\mathcal{L}}{\sim} U([0, 1]^{n_i}) \end{aligned}$$

$\left\{ \begin{array}{l} \text{estimer pour MC de taille } M_i \\ \downarrow \end{array} \right.$

$$\widehat{F(X)}_M = \sum_{i \in I} p_i \frac{1}{M_i} \sum_{n=1}^{M_i} F(\varphi_i(U))$$

$$\text{Var}[\widehat{F(X)}_M] = \sum_{i \in I} \frac{p_i^2}{q_i M_i} M_i \text{Var}[F(\varphi_i(U))] = \sum_{i \in I} \frac{p_i^2}{q_i M} Q_{F,i}^2 = \underbrace{\frac{1}{M} \sum_{i \in I} \frac{p_i^2}{q_i}}_{\text{minimiser par rapport à } q} Q_{F,i}^2$$

s.c. $\sum q_i = 1$, $q_i \geq 0$

Choix q (sous optimal)

$$q_i = p_i \quad i \in I \quad \sum_{i \in I} \frac{p_i^2}{q_i} G_{F,i}^2 = \sum_{i \in I} p_i G_{F,i}^2 = \sum_{i \in I} \mathbb{E}[(F(x) - \mathbb{E}[F(x)] | X \in A_i)] \underbrace{\prod_{X \in A_i} p_i}_{\text{sauf si } \mathbb{E}[F(x)|B] = \mathbb{E}[F(x)]} \\ = \mathbb{E}[(F(x) - \mathbb{E}[F(x)] | \cap_{i \in I} (X \in A_i))]^2 \leq \mathbb{E}(F(x) - \mathbb{E}F(x))^2$$

© Théo Jalabert

sauf si $\mathbb{E}[F(x)|B] = \mathbb{E}[F(x)]$
impossible si F n'est pas constante

Donc on gagne à chaque fois (si si "F(x) ≈ B_x")

Choix 2 (Optimiser en (q_i))

$$\sum_{i \in I} \frac{p_i^2}{q_i} G_{F,i}^2 = \left(\sum_{i \in I} \left(\frac{p_i}{\sqrt{q_i}} \right)^2 G_{F,i}^2 \right) \left(\sum_{i \in I} (\sqrt{q_i})^2 \right) \stackrel{C.S.}{\geq} \left(\sum_{i \in I} \frac{p_i}{\sqrt{q_i}} G_{F,i} \cdot \sqrt{q_i} \right)^2 = \left(\sum_{i \in I} p_i G_{F,i} \right)^2$$

cas d'égalité $\frac{p_i}{\sqrt{q_i}} G_{F,i} = \lambda \sqrt{q_i} \Rightarrow q_i = \frac{p_i G_{F,i}}{\sum_j p_j G_{F,j}}$

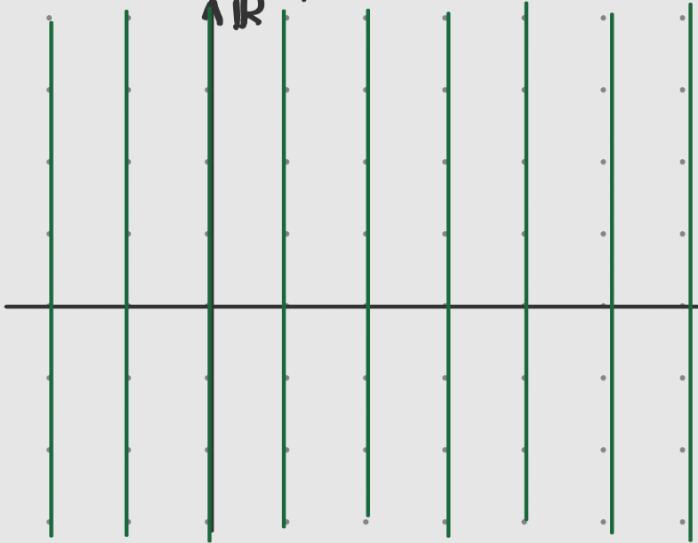
PB $G_{F,i}$ a priori inconnue

Exercice $\left(\sum_{i \in I} p_i G_{F,i} \right)^2 \leq \| F(x) - \mathbb{E}[F(x) | B_x] \|^2_1$

Gain par rapport au choix 1 (qui ne nécessite aucun effort supplémentaire)

Exemple $\mathbb{E}[Z]$ $Z \sim \mathcal{N}(0, \text{Id})$

\mathbb{R}^{d-1}



$$A_i = [a_{i-1}, a_i] \times \mathbb{R}^{d-1}$$

$a_0 = -\infty, \quad a_N = +\infty \quad N$ strates

$$a_i : \Phi_a(a_i) - \Phi_a(a_{i-1}) = \frac{1}{N}$$

$$P(Z \in A_i) = \frac{1}{N}$$

$$L(Z | Z \in A_i) = L(Z' | Z' \in [a_{i-1}, a_i]) \underbrace{\otimes \mathcal{N}(0, \text{Id})}_{\text{méthode de la fct. de répart. inversée}}$$

Exo F_X 1 continue

$$\Phi_0(\Phi_0(a_{i-1}) + (\Phi_0(a_i) - \Phi_0(a_{i-1})))$$

$$\Phi_0(x) = \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{\sqrt{2\pi}}$$

$$Z(X|X \in [a, b]) = F_X(F_X(a) + (F_X(b) - F_X(a))U)$$

où $U \sim U([0, 1])$

Chapitre 4. Méthode QMC (quasi-Monte Carlo)

* Motivation

$$(\xi_k)_{k \geq 1} \xrightarrow{\frac{1}{n} \sum S_{\xi_k} \xrightarrow{w} \text{loi de proba}}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[f(U)] \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{[0,1]^d} f(u_m, u^d) d\lambda_d \quad \text{si } f: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R} \\ U \sim U([0,1]^d) \\ \int_{[0,1]^{Nd}} f(u)(u_1, u_2, \dots)^{\otimes N^d} (u', \dots, u''') \end{array} \right.$$

$$\text{Question } U_1 = (U_m^1, U^d) \quad U_2 = (U^{d+1}, \dots, U^{2d}) \dots$$

Jusqu'à quel pt a-t-il besoin d'indépendance?

Prop (Thm de Glivenko - Cantelli)

$$(U_n)_{n \geq 1} \text{ i.i.d. } \sim U([0,1]^d) \text{ sur } (\mathbb{R}, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

Alors on a $\mathbb{P}(du) \text{ p.s. } \frac{1}{n} \sum S_{U_k} \xrightarrow{w} \lambda_d / [0,1]^d$

$$\left(\Leftrightarrow \mathbb{P}(du) \text{ p.s. } \forall f \in C_c \quad \frac{1}{n} \sum f(U_k) \rightarrow \int f(u) du \right)$$

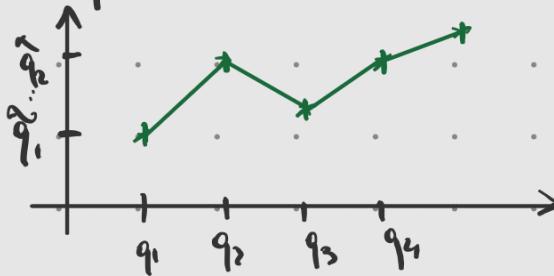
Dém $(C([0,1], \mathbb{R}^d), \| \cdot \|_{\sup})$ espace vectoriel normé, séparable

$d=1$ $f: f(0) \in \mathbb{Q} \quad f(T) \in \mathbb{Q}, f$ affine par morceaux (continue),

a ses ruptures d'affinité en des points dénombrables, elle g
© Théo Jalabert 

prend de valeurs dénombrables

Les fets sont un nombre dénombrable



$f \in C([0, T], \mathbb{R}^d)$

$$\frac{1}{n} \sum_{e=1}^n f(U_e) - \int f d\lambda_e = \left(\frac{1}{n} \sum_e f(U_e) - f(U_e) \right) + \frac{1}{n} \sum_k f_k(U_e) - \int f_k d\lambda_e + \int (f_k(u) - f(u)) d\lambda_e$$

$$| - - | \leq | - - | + | - - | + | - - |$$

$$\leq 2 \|f - f_k\|_{\text{sup}} + \frac{1}{n} \sum_e f_k(U_e) - \int f_k d\lambda_e$$

$$\Omega_0 = \left\{ \omega \in \Omega \text{ t.q. } \forall k \geq 1 \quad \frac{1}{n} \sum_e f_k(U_e) \rightarrow \int f_k d\lambda_e \right\}$$

$$\Omega_0^c = \bigcup_{k \geq 1} \left\{ \omega \in \Omega : \frac{1}{n} \sum_e f_k(U_e) \not\rightarrow \int f_k d\lambda_e \right\}$$

$$P(N_k) = 0 \text{ par LFGN pour } f_k \in L^1(\lambda_e) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow P(\Omega_0^c) \leq \sum P(N_k) = 0$$

$$\forall \omega \in \Omega_0 \quad \limsup_n \left| \frac{1}{n} \sum_e f(U_e(\omega)) - \int f d\lambda_e \right| \leq 2 \liminf_k \|f - f_k\|_{\text{sup}}$$

$$\text{i.e. } \forall \omega \in \Omega_0 \quad P(d\omega) - \text{ps. } \forall f \in C([0, T], \mathbb{R}^d) \quad \frac{1}{n} \sum_e f(U_e(\omega)) \xrightarrow[L^1]{} \int f d\lambda_e$$

Rem S'étendre aux fets bornées ad-p.p. continue
(t.q. $\lambda_d(\text{Disc}(f)) = 0$)

Rappels de convergence étroite/faible

© Théo Jalabert

$(\mu_n)_{n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}}$ probas sur (S, \mathcal{S}) , $\mathcal{S} = \text{Bor}(S)$

$\mu_n \Rightarrow \mu_\infty$ si $\forall f \in C_b(S, \mathbb{R}) \quad \int_S f d\mu_n \rightarrow \int_S f d\mu_\infty$ ↗ convergence étroite
(faible)

$\{= X_n : (\mathcal{X}, \mathcal{A}, P^n) \rightarrow (S, \mathcal{S}) \quad n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}\}$

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X_\infty$ si $P_{X_n}^n = P^n \circ X_n^{-1} \xrightarrow{(S)} P_{X_\infty}^\infty = P^\infty \circ X_\infty^{-1}$

si $\forall f \in C_b(S, \mathbb{R}) \quad E[f(X_n)] \rightarrow E[f(X_\infty)]$

Théorème (Portemanteau)

Equivalences entre

(i) $\mu_n \xrightarrow{(S)} \mu_\infty$

(ii) $\forall O \subset S$ ouvert $\mu_\infty(O) \leq \liminf_n \mu_n(O)$

(iii) $\forall F$ fermé $\mu_\infty(F) \geq \limsup_n \mu_n(F)$

(iv) $\forall A \in \mathcal{S}$ t.q. $\mu_\infty(\partial A) = 0$, $\mu_n(A) \rightarrow \mu_\infty(A)$

(v) $\forall f : (S, \mathcal{S}) \rightarrow \mathbb{R}$ bornée, $\mu_\infty(\text{disc}(f)) = 0 \quad \int f d\mu_n \rightarrow \int f d\mu_\infty$

(vi) f s.c.i. ≥ 0 alors $\int f d\mu_\infty \leq \liminf_n \int f d\mu_n$ (lemme de Fatou faible)

Déf $(\xi_n)_{n \geq 1}$, $\xi_n \in \{0, 1\}^d$ $n \geq 1$ est équirépartie si $\frac{1}{n} \sum \xi_n \Rightarrow \lambda_d / \{0, 1\}^d$

Thm (Portmanteau)

(i) (ξ_n) équirépartie

$$(ii) \forall x \in [0,1]^d \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \mathbb{I}_{[0,x]\mathbb{B}}(\xi_k) \rightarrow V_0([0,x]\mathbb{B}) = \prod_i x^i,$$

où $[0,x]\mathbb{B} = \{(u_1, \dots, u^d) \in [0,1]^d : \forall i \quad 0 \leq u^i \leq x^i\}$

$$(iii) \text{ Discrépance à l'origine } D_n^*(\xi) = \sup_{x \in [0,1]^d} \left| \frac{1}{n} \sum \mathbb{I}_{[0,x]\mathbb{B}}(\xi_k) - \text{Vol}([0,x]\mathbb{B}) \right| \rightarrow 0$$

$$(iv) D_n^\infty(\xi) = \sup_{x,y \in [0,1]^d} \left| \frac{1}{n} \sum \mathbb{I}_{[x,y]\mathbb{B}}(\xi_k) - \text{Vol}([x,y]\mathbb{B}) \right| \rightarrow 0$$

où $[x,y]\mathbb{B} = \{u \in [0,1]^d : x^i \leq u^i \leq y^i\} \neq \emptyset \Leftrightarrow x \leq y$

(V) Critère de Weil

$$\forall p \in \mathbb{Z}^d \setminus \{0\} \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n e^{2\pi i \langle \xi_k, p \rangle} \rightarrow 0$$

$$(Vi) \forall f: [0,1]^d \rightarrow \mathbb{R} \text{ mes. bornée} \quad \lambda_d(\text{disc}(f)) = 0 \quad \frac{1}{n} \sum \mathbb{I}(\xi_k) \rightarrow \int f d\lambda_d$$

Dém $d=1$

$$(ii) \frac{1}{n} \sum \mathbb{I}_{[0,x]\mathbb{B}}(\xi_k) \rightarrow x$$

$F_n(x) = \text{fct de répartition de } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\xi_k}$

$$(ii) \equiv F_n(x) \rightarrow x = F(x) \quad \forall x \in [0,1]$$

(i) \Leftrightarrow (ii) Caractérisation de la convergence étroite par les

(ii) \Leftrightarrow (iii) 2nd lemme de Dini:

$g_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ suite de fct \uparrow $\left\{ \begin{array}{l} \xrightarrow{\text{comp}} g_n \xrightarrow{g} g \\ \forall x \in \mathbb{R} \quad g_n(x) \rightarrow g(x) \end{array} \right.$ ($\forall K > 0 \sup_{|x| \leq K} |g(x) - g_n(x)| \rightarrow 0$)

Donc $F_n \xrightarrow{F(x) = x}$ sur [91]

$$\|F_n - F\|_{\sup} = \mathcal{D}_n^\infty(\xi)$$

(iii) \Leftrightarrow (iv) $x \leq y \quad [x, y] = [0, y] \setminus [0, x] \quad (d=1!)$

(i) \Leftrightarrow (v) Thm de Shannon $\left(\int e^{2\pi i(U, p)} d\lambda_d = 0 \right)$

(vi) \Leftrightarrow (vi) \Rightarrow (i) \Leftrightarrow (v) de le thm de Birkhoff-Gordan. \square

Exercices

1) $d=1 \quad (\xi_1, \dots, \xi_n) \in [0, 1]^n$. Reordrement croissant $\xi_1^{(n)}, \dots, \xi_n^{(n)}$

t.q. $\{\xi_i, i=1:n\} = \{\xi_i^{(n)}, i=1:n\}$

Alors $\mathcal{D}_n^*(\xi_{1:n}) = \max_{k=1:n} \left(\left| \xi_k^{(n)} - \frac{k}{n} \right| \vee \left| \xi_k^{(n)} - \frac{k-1}{n} \right| \right)$

$\mathcal{D}_n^*(\xi_{1:n}) = \frac{1}{2n} + \max_{k=1:n} \left| \xi_k^{(n)} - \frac{2k-1}{2n} \right|$

Discrepance minimale $= \frac{1}{2n}$ pour $\xi_n = \frac{2k-1}{2n}$

2) Rotation du tore $T_d ([0, 1]^d, + \mod (L_1))$

$\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ libre sur \mathbb{Q} ($\sum r_i \lambda_i = 0 \Rightarrow \sum r_i = 0 \forall r_i \in \mathbb{Q}$)

Si $x_1, \dots, x_d \in [0,1]^d$ $(\{x_i + n\lambda_i\}_{i=1,d})_{n \geq 1}$ est équirépartie

$$(\{x\} = x - Lx \quad x \in \mathbb{R})$$

$$\{x + n\lambda\}_{n \geq 1} \quad \lambda \in \mathbb{Q} \quad i=1$$

Critère de Weyl $\forall p \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \quad \frac{1}{n} \sum e^{2\pi i \{x + k\lambda\} p} = \frac{e^{2\pi i \pi x}}{\sum e^{2\pi i (k\lambda - Lx + k\lambda) p}}$

$$\frac{e^{2\pi i \pi x}}{n} \sum e^{2\pi i k \lambda p} \leq \frac{e^{2\pi i \pi x}}{n} \frac{e^{2\pi i p \lambda} - e^{2\pi i (n-1) p \lambda}}{1 - e^{2\pi i p \lambda}}$$

$$| - | \leq \frac{2}{n |1 - e^{2\pi i p \lambda}|} \rightarrow 0$$

$(\xi_n)_{n \geq 1}, \xi_n \in [0,1]^d$ est équirépartie si $\frac{1}{n} \sum S_{\xi_n} \Rightarrow U([0,1]^d) = \lambda_d|_{[0,1]^d}$

$$\Leftrightarrow (\star) \quad \forall f \in C_b \quad \frac{1}{n} \sum f(\xi_n) \xrightarrow{[0,1]^d} \int f(u) du$$

$\Leftrightarrow \forall f: [0,1]^d \xrightarrow{\text{Bord}} \mathbb{R}$ bornée t.q. $\lambda_d(\text{Disc}(f)) = 0$ (\star) est vraie

$(U_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. $\stackrel{d}{\sim} U([0,1]^d) \quad \frac{1}{n} \sum S_{U_n(\omega)} \Rightarrow \lambda_d|_{[0,1]^d} \quad \mathbb{P}(d\omega)-\text{p.s.}$

$\mathbb{P}-\text{p.s. } \forall f \text{ bor. bornée t.q. } \lambda_d(\text{Disc}(f)) = 0 \quad \frac{1}{n} \sum f(U_n) \xrightarrow{[0,1]^d} \int f(u) du$

LFGN: $\forall f \in L^1 \quad \mathbb{P}-\text{p.s. } \frac{1}{n} \sum f(U_n(\omega)) \xrightarrow{[0,1]^d} \int f(u) du$

Pratique de MC $X = \varphi(V) \quad V \sim U([0,1]^d)$

Application à l'intégration numérique

© Théo Jalabert



Def $f: [0,1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ est à variation finie au sens de la mesure

s'il existe une mesure signée \mathcal{D} sur $([0,1]^d, \mathcal{B}([0,1]^d))$ t.q.

$$(i) \mathcal{D}(\{0\}) = 0$$

$$(ii) \forall x \in [0,1]^d \quad f(x) = f(0) + \mathcal{D}([0,1-x]) = f(0) - \mathcal{D}([0,1-x]^c)$$

mesure signée?

$$\mathcal{D} = \mathcal{D}^+ - \mathcal{D}^- \text{ ssi } \mathcal{D}^\pm \text{ mesures positives sur } [0,1]^d$$

Thm On peut supposer $\exists A_1, A_2 \in \mathcal{B}([0,1]^d), A_1^T \cup A_2^T = [0,1]^d,$

$$A_1^T \cap A_2^T = \emptyset, \mathcal{D}^+(A_1^T) = 0 \text{ et } \mathcal{D}^-(A_2^T) = 0$$

Rem exos

① $d=1$ f v.f. au sens de la mesure si f est à v.f.

au sens classique et $x \mapsto f(1-x)$ est càdlàg

② f v.f. au sens de la mesure s'il existe \mathcal{D} mesure signée

$$\left. \begin{array}{l} (i) \mathcal{D}(\{1\}) = 0 \\ (ii) f(x) = f(1) + \mathcal{D}([x,1]) \end{array} \right\}$$

$$(ii) f(x) = f(1) + \mathcal{D}([x,1])$$

Théorème (Koksma-Hlawka, 1943)

$(\xi_1, \dots, \xi_n) \in [0,1]^d$ $f: [0,1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ v.t. au sens de la mesure de variation $V(f) = |\mathcal{D}|([0,1]^d)$ ($|\mathcal{D}| = \mathcal{D}^+ - \mathcal{D}^-$ où \mathcal{D}^\pm sont minimales au sens précédent disjoints). Alors

$$\left| \frac{1}{n} \sum_k f(\xi_k) - \int_{[0,1]^d} f(u) du \right| \leq V(f) \cdot \mathcal{D}_n^*(\xi_{1:n}) \quad \begin{matrix} \text{motrice à rechercher} \\ \text{les suites à faible disp.} \end{matrix}$$

où $\mathcal{D}_n^*(\xi) = \sup_{X \in \{0,1\}^d} \left| \frac{1}{n} \sum_k \prod_{\xi_k \in X} - \underbrace{\text{Vol}([0,1]^d)}_{\prod_i x_i} \right|$

Démo $\tilde{g}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \delta_{\xi_k} - \lambda_d |_{[0,1]^d}$.

$$\tilde{g}_n([0,1]^d) = d - 1 = 0$$

$$\int f d\tilde{g}_n = \frac{1}{n} \sum f(\xi_k) - \int_{[0,1]^d} f(u) du$$

$$f(x) = f(1) + \mathcal{D}([0,1-x])$$

$$\int f d\tilde{g}_n = f(1) \tilde{g}_n \left(\overset{0}{\underset{1}{\overbrace{[0,1]}}} \right) + \int_{[0,1]^d} \mathcal{D}([0,1-x]) \tilde{g}_n(dx) =$$

$$= \iint_{[0,1-x]} \mathcal{D}(du) \tilde{g}_n(dx) \quad \textcircled{*}$$

$$\mathcal{D}_{[0,1-x]} = \mathcal{D}_{\{u : 0 \leq u \leq 1-x\}} = \mathcal{D}_{\{u : 0 \leq x \leq 1-u\}} = \tilde{g}_n([0,1-x])$$

$$\textcircled{*} \int \left[\int_{\{u : 0 \leq x \leq 1-u\}} \mathcal{D}(du) \right] \tilde{g}_n(dx) = \int \mathcal{D}(du) \int_{\{x : 0 \leq x \leq 1-u\}} \tilde{g}_n(dx)$$

$$\left| \int f d\tilde{\mu}_n \right| = \left| \int \varphi(\mu)(du) \tilde{\mu}_n([0, 1-u]) \right| \leq \int |\varphi|(du) \tilde{\mu}_n([0, 1-u]) \leq \varphi_n(\xi_{1:n}) V(1)$$

Propriétés de v.f.

① Si $\frac{\partial^d f}{\partial x^1 \dots \partial x^d}$ distribution est un fait une fct de $L^1([0, 1]^d)$

alors f est v.f. au sens de la mesure et

$$V(f) = \left\| \frac{\partial^d f}{\partial x^1 \dots \partial x^d} \right\|_{L^1([0, 1]^d)}$$

② $f(x) = f(1) + \int \varphi(u) du$ alors f est à v.f. au sens de la mesure

$$\text{et } V(f) = \|\varphi\|_{L^1([0, 1]^d)}$$

Exercices ③ $d=1$ f Lipschitz $\Rightarrow f$ v.f. au sens de mesure

$$② d=2 \quad x \mapsto (x^1 + x^2) \wedge 1 \dots$$

$$③ d=3 \quad x \mapsto (x^1 + x^2 + x^3) \wedge 1 \dots$$

Parenthèse v.f. au sens de Hardy & Krause

$$d=2 \quad A \quad B \quad C \quad D \quad \Delta_{A,B,C,D} f = f(B) + f(C) - f(A) - f(D)$$

$$c \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad D \quad V(f) = \sup_G \sum_{\overbrace{\epsilon \in G}} \Delta_{A,B,C,D} f \quad x < \infty \text{ alors}$$

f est à v.f. au sens de Hardy & Krause

Lien entre les 2 notions

f est v.f. au sens de la mesure $\Rightarrow f$ v.f. au sens de H&K

© Théo Jalabert

Jalabert

- f v.f. au sens H&K $X \mapsto f(1-x)$ est égal à par end. intérieur

$$\lim_{y \leq x} f(1-y) = f(1-x)$$

$$(x_0, y_0) \in [0, 1]^2$$

- f est v.f. au sens H&K alors $\exists \tilde{f}$ v.f. au sens de la mesure

t.q. $f = \tilde{f}$ a.s.-pp et $\{f + \tilde{f}\} \subset U \dots ?$

3. Suites à discrépance faible

Déf $(\xi_n)_{n \geq 1}, \xi_n \in [0, 1]^d$ est à discrépance faible si

$$D_n^1(\xi) = \overline{o}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

vitesse L^2 de M.C.

3.1 Boxe de M.C. Monde de Chung

(a) TCL de Chung (V_t) i.i.d $\stackrel{d}{\sim} U(0, 1^d)$ $\sqrt{n} D^1(V_{t:n}) \xrightarrow{d} \sup_{x \in [0, 1]^d} |\xi_x^d|$ où
 $(Z_x^d)_{x \in [0, 1]^d}$ champs gaussien, cov. $E[Z_x^d Z_y^d] = \sum_{i=1}^d x_i^i y_i^i - (\bar{x}_i^i)(\bar{y}_i^i)$

En autre si $d=1$ $Z_t^1 = W_t - tW_1$ - pont Brown.

$$P\left(\sup_{x \in [0, 1]} |Z_x^1| \geq z\right) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} e^{-2k^2 z^2}$$

(b) LLI de Chung

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2n}{\log n}} D_n^*(\xi_{1:n}) = \pm 1 \quad \text{P.-ps.}$$

3.2. Bornes universelles de discrépance (monde Röhl)

Thm (a) $d \geq 1 \exists C_d \in \mathbb{R}_+^*$ t.q. $\forall (\xi_1, \dots, \xi_n) \in [0, 1]^d$

$$D_n^*(\xi_{1:n}) \geq C_d \frac{(\log n)^{\frac{d-1}{2}}}{n}$$

(b) $d \geq 1 \exists C_d \in \mathbb{R}_+^* : \forall (\xi_n)_{n \geq 1}, \xi \in [0, 1]^d$

$$D_n^*(\xi_{1:n}) \geq C_d \frac{(\log n)^{d/2}}{n} \quad \text{inf-t souvent}$$

Exo (a) Util q la discrépance $D_n^*\left(\left(\frac{k}{n}, \xi_n\right)_{k=1:n}\right) \leq C_d \max_{k=1:n} \frac{k D_k^*(\xi_{1:n})}{n}$
 $\downarrow_{[0,1]^{d-1}}$ \uparrow
 ≤ de Hammersley

(b) Utiliser (a) pour montrer (b)

$$\frac{R_q}{n} \xrightarrow{\frac{d-1}{2} \rightarrow d-1} \\ \xrightarrow{\frac{d}{2} \rightarrow d}$$

Théorème

(a) $\exists (\xi_n)_{n \geq 1}$ t.q. $D_n^*(\xi) = O\left(\frac{(\log n)^d}{n}\right)$

(b) $\exists c_d > 0$ t.q. $\forall n \geq 1 \exists n\text{-uplet } (\xi_{1:n})$ t.q. $D_n^*(\xi_{1:n}) \leq c_d \frac{(\log n)^{d-1}}{n}$

Thm (Van der Corput, Halton)

p_1, \dots, p_d de premiers nbs premiers

On pose $\xi_n = (\Phi_{p_1}(n), \dots, \Phi_{p_d}(n))$ où $\Phi_p(n) = \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a_k}{p^{k+1}}$ si
 transform. radicale

$$\sum_{n=0}^{\infty} q_{\pi(n)} \cdot q_n^{(p)} = arp^r + ar \cdot p^{r-1} + \dots + ap + a_0$$

Alors $\Phi_n^*(\xi) \stackrel{(1)}{\leq} \frac{1}{n} \left(1 + \prod_{i=1}^n (\pi_i - 1) \left\lfloor \frac{\log(\pi_i)}{\log \pi_i} \right\rfloor \right) \cdot O\left(\frac{(\log n)^d}{n}\right)$

(b) Si $d=1$, $p \geq 2$ que ça -- au sens où $\xi_n \cdot \Phi_p(x)$

alors $\Phi_n^*(\xi)$ vérifie (*) pour $d=1$

Ex Vdc(2) $\xi_1 = \frac{1}{2}$ $\xi_2 = \frac{1}{4}$ $\xi_3 = \frac{3}{4}$ $\xi_4 = \frac{1}{8}$, $\xi_5 = \frac{5}{8}$, $\xi_6 = \frac{3}{8}$, $\xi_7 = \frac{7}{8}, \dots$

Comment calculer une suite de Hallon?

exos $p=2$ $\xi_{2n} = \xi_n/2$, $\xi_{2n+1} = \frac{\xi_{n+1}}{2}$

Pqqq $\xi_{pn} = \frac{\xi_n}{p^n}$, $\xi_{pn+r} = \frac{\xi_{n+r}}{p^n}$, $r=0, \dots, p-1$

② Suite de Kakutan (rotation p-adiques)

$p \geq 2$ $x \in [0, 1]^L$ ($\in \mathbb{Q}_p$ rationnels p-adique de la forme $\frac{m}{p^n}$)

$x = \sum_{k \geq 1} \frac{x_k}{p^{k+1}}$ $x_k \in \{0, \dots, p-1\}$ dev-t propre
 x_k ne stationne pas en $p-1$ ($1 = \sum_{k \geq 1} \frac{p-1}{p^{k+1}}$)

Thm. $x_1, \dots, x_d \in [0, 1]^L$ ($\in (\mathbb{Q}_p \cap (0, 1)^L) \times \dots \times (\mathbb{Q}_{pd} \times (0, 1)^L)$)

$$\xi_i \in \mathbb{Q}_{pi} \cap [\frac{1}{pi}, 1[$$

→ angles

rotation d'angle ξ

Transformation $T_{p, \xi}(z) = \sum_{i=1}^d \xi_i z^i$ - addition de gauche à droite avec propagation vers dans dev-t p-adique propre de ξ et de z

$$p=10 \quad \begin{array}{r} 0,12333 \\ \oplus_{10} 0,41277 \\ \hline 0,5350111 \end{array}$$

On définit la suite $\xi_n = (T_{p_1, q_1}^{n-1}(x_1), \dots, T_{p_d, q_d}^{n-1}(x_d))$ $n \geq 1$

vérifie (x)

Hint $x_i = y_i = 1/p_i$ $\xi_n = \text{Méthode}(p_1, \dots, p_n)$

$$\xi_{n+1} = T_{p_1, q_1} p(\xi_n) \text{ méthode de génération}$$

bon du praticien heuristique $y_i = 1/p_i$

$$x_i = \frac{2p_i - 1 - \sqrt{(p_i+2)^2 + 4p_i}}{3} \quad \text{- une "super-suite"}$$

③ Suite de Faure

$$\xi_n = (\Phi_p(n-1), C_p \circ \Phi_p(n-1), \dots, C_p^{d-1} \circ \Phi_p(n-1)) \quad n \geq 1, p \in P, p \geq d$$

C_p Shifter

$$C_p \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{s_k}{p^{k+1}} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{j \geq k} \binom{k}{j} s_j \right)$$

$$\forall n \geq 1 \quad D_n^*(\xi_n) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{d!} \left(\frac{p-1}{c_{\max} p} \right)^d (c_{\max})^d + O((c_{\max})^{d-1}) \right)$$

MASS On a montré

$$\forall n \quad D_n^*(\xi) \leq \frac{1}{n} \left(\frac{1}{d!} \left(\frac{p-1}{c_{\max} p} \right)^{d-1} \left(L \frac{\log n}{c_{\max} p} + d+1 \right)^d \right)$$

④ Sobol' paradoxalement \rightarrow cf. livre-poly

Avantages et inconvénients de méthodes QMC

© Théo Jalabert

$$X = \varphi(U), U \sim U([0,1]^d) \quad \text{dimension structurale}$$

4.1. Le piège de la corrélation

$$VdC(2) \quad \xi_n = \sum_{k=0}^n \frac{a_k}{2^{k+1}} \quad \text{où } n = \overrightarrow{a_r a_{r-1} \dots a_0}$$

$$\xi_{2n} = \frac{\xi_n}{2}, \quad \xi_{2n+1} = \frac{\xi_{n+1}}{2}$$

$$\mathbb{E}[U^1 U^2] = \frac{1}{2} \quad \text{où } (U^1, U^2) \sim \mathcal{L}(U([0,1]^2))$$

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi_{2k} \xi_{2k+1} = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{\xi_k}{2} \cdot \frac{\xi_{k+1}}{2} = \frac{1}{4n} \sum \xi_k (\xi_{k+1}) \rightarrow \frac{1}{4} \int_0^1 u(u+1) du$$

car $(\xi_n)_{n \geq 1}$ équidistribue et $u \mapsto u(u+1)$ est continue.

$$\frac{1}{4} \int_0^1 (u(u+1)) du = \frac{5}{24} \neq \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{n} \sum V_{2k} V_{2k+1} \rightarrow \mathbb{E}[U^1 U^2] = \frac{1}{4} \text{ si } (V_k) \text{ i.i.d. } \sim U[0,1]$$

Exercice $VdC(p) \quad \xi_{pn+r} = \frac{\xi_{pn+r}}{p} \quad \text{où } r \in \{0, \dots, p-1\}$

En déduire $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{1}{p} \sum_{r=1}^{p!} S_{\xi_{pk+r}} \xrightarrow{w} ?$

4.2. L'illusion de la dimension

$$(x^1, x^2, x^3) \mapsto x^1 + x^2 + x^3 \quad \text{Lipschitz mais pas à v.f. ni au}$$

sens de la mesure, ni au sens de H&K.

Thm (Proinov, 1987) très pessimiste, pour les fcts \mathcal{D}_n^+ Théorèmes sont plus à v.f.. En vrai, la vérité est mieux, mais il est difficile de la estimer.

(a) $f: [0,1]^d \rightarrow \mathbb{R}$ continue ($\xi_{1:n}$) n-uplet de $[0,1]^d$

$$\left| \frac{1}{n} \sum_k f(\xi_k) - \int f(u) du \right| \leq C_d W_{\infty}^{\text{universelle}}(f, \mathcal{D}_n^+(\xi_{1:n}))^{1/d}$$

$$W_{\infty}(f, \zeta) = \sup_{\substack{|u-v| \leq \delta \\ u, v \in [0,1]^d}} |f(u) - f(v)|$$

$C_1 = 1$ et $C_d \leq 4$ si $d \geq 2$

(b) Si f est Lipschitz et $\|f\|_{Lip, L^\infty} = \sup_{u \neq v} \frac{|f(u) - f(v)|}{|u - v|_\infty} < +\infty$

$$(a) \Rightarrow \left| \frac{1}{n} \sum_k f(\xi_k) - \int f(u) du \right| \leq C_d \|f\|_{Lip, L^\infty} \cdot \mathcal{D}_n^+(\xi_{1:n})^{1/d}$$

$$\left(\leq C_d \|f\|_{Lip, L^\infty} \cdot \frac{(\log n)^{1/d}}{n^{1/d}} \leq C_d \frac{\log n}{n^{1/d}} \right)$$

$$\geq C_d \|f\|_{Lip, L^\infty} \cdot \frac{(\log n)^{1/d}}{n^{1/d}} \geq C_d'' \frac{\log n}{n^{1/d}}$$

d > 2 \Rightarrow moins bien que MC

Chapitre 5. Premiers pas en optimisation stochastique.

Le gradient stochastique et les autres

3. Introduction

- On veut résoudre $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue

On cherche à déterminer un élément de $\{h=0\}$.

• On veut minimiser la fct $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$, C^∞ Théo Jalabert

$$\underset{\mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} V + \phi \quad \text{et} \quad C\{DV=0\} \\ = \text{si } V \text{ est convexe}$$

Exemples

1) Implication de paramètre

- Volatilité implicite

$$h(\sigma) = \text{Call}_{BS}(S_0, K, r, \sigma, T) - \text{Call}^{Mkt}(T, K)$$

- Corrélation implicite

BS 2D numéraire e^{rt} , $t \in [0, T]$

$$X_t^i = x^i \exp\left\{(r - \frac{\sigma_i^2}{2})t + \sigma_i W_t^i\right\} \quad i=1,2$$

$$\langle W^1, W^2 \rangle_t = pt, \quad x^i > 0$$

$$\text{Payoff} = \text{BestOfCall} = (\max(S_T^1, S_T^2) - K)^+$$

$$h(p) = \text{BestOfCall}^{BS}(x^1, x^2, K, r, \sigma_1, \sigma_2, p, T) - \text{BestOfCall}^{Mkt}(K, T)$$

2) Calcul de la VaR / CVaR $\lambda \in [0, 1]$ $\lambda \approx 1$

$$V_\lambda(\xi) = \xi + \frac{1}{1-\lambda} \mathbb{E}[(Z - \xi)^+]$$

où Z est représentatif

d'une perte ($Z \geq 0 \Leftrightarrow$ on a perdu $Z \in \mathbb{R}$)

$P_Z(d\xi)$ n'a pas d'atome

$$\bullet V_\alpha'(\xi) = -\frac{1}{1-\alpha} \mathbb{P}(Z \geq \xi)$$

• V_α convexe et $\lim_{|\xi| \rightarrow \infty} V_\alpha(\xi) = +\infty$

$$\bullet \underset{\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} V_\alpha = \{V_\alpha' = 0\}$$

$$V_\alpha'(\xi_*) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z \geq \xi) = \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}(Z \leq \xi) = 1 - \alpha$$

donc si $\underset{\mathbb{R}}{\operatorname{argmin}} V_\alpha = \{\xi_*\}$ alors $\xi_* = V_\alpha R_\alpha(Z)$

$$\text{Exo } V_\alpha(\xi_*) = C V_\alpha R_\alpha(Z) = \mathbb{E}[Z | Z \geq V_\alpha R_\alpha(Z)]$$

Rechercher un zéro de $h(\xi) = \mathbb{P}(Z \leq \xi) - \alpha$

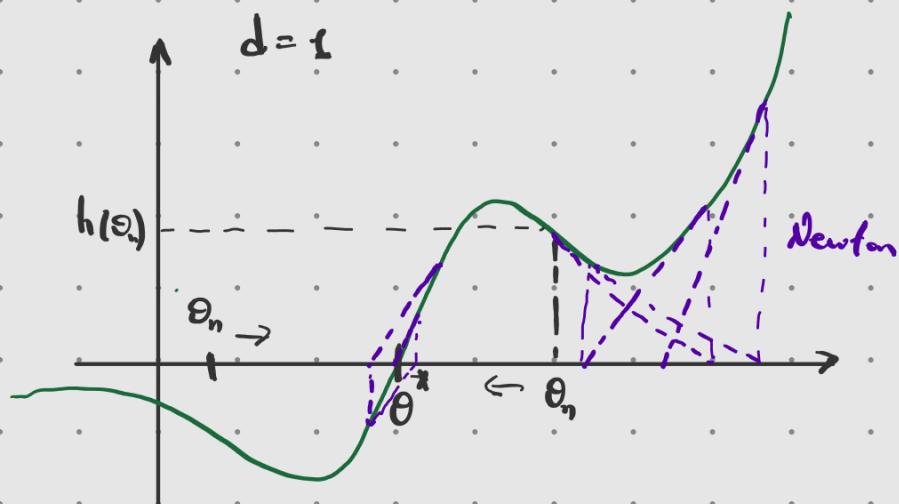
3) Réduction de variance $\mathbb{E}[\varphi(Z)]$

$$\forall \theta \in \mathbb{R}^d \quad \mathbb{E}[\varphi(Z)] = \mathbb{E}[\varphi(Z+\theta) e^{-\langle \theta, Z \rangle - \frac{1}{2} \|\theta\|^2}]$$

$$\underset{\theta \in \mathbb{R}^d}{\operatorname{argmin}} \mathbb{E} [\varphi^2(Z+\theta) e^{-2\langle \theta, Z \rangle - \|\theta\|^2}]$$

Idee de base de l'optimisation

i) Basique



$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} h(\theta_n)$$

$$\gamma_n = \begin{cases} \gamma > 0 & \text{petit} \\ \gamma_n \downarrow & \text{à bonne vitesse } (\sum \gamma_n = +\infty) \end{cases}$$

2) Newton-Raphson

$$\text{h diff } h(\theta_{n+1}) = h(\theta_n) + T_n(\theta_n)(\theta_{n+1} - \theta_n)$$

"fausse tangent" $h(\theta_{n+1}) \approx 0$

$$h(\theta_n) + T_n(\theta_n)(\theta_{n+1} - \theta_n) = 0$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - T_n(\theta_n)^{-1} h(\theta_n), \quad \theta_0 \in \mathbb{R}^d$$

Très instable si pas "monotonie" de $T_h(\theta)$

2') Levenberg-Maquart

$$\text{Variante } \theta_{n+1} = \theta_n - \text{diag}(T_n(\theta_n) + \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d))^{-1} h(\theta_n)$$

$\lambda_i > 0$

Plus stable

Exemples II (Machine learning)

$$(x_k)_{k=1:n} \quad n \text{ grand}, \quad x_k \in \mathbb{R}^d \quad d \text{ grand}$$

$\theta \in \mathbb{H}$ paramètres

$$V(\theta, \xi) \quad V: \mathbb{H} \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$$

↑ fonction de perte

$$\min_{\theta \in \mathbb{H}} [V(\theta) = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M v(\theta, \xi_k)] \quad \text{où } \xi_k \stackrel{\text{i.i.d.}}{\sim} \mathcal{U}(f_0, 1, \dots, M)$$

Apprentissage supervisé

$$\xi_k = (x_k, y_k)$$

↑
entrée ↓ label

$$v(\theta, (x, y)) = \|f(\theta, x) - y\|^2 = \varphi(f(\theta, x) - y) \text{ où } \varphi: \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$$

Apprentissage non-supervisé (clustering)

$$\xi_k = x_k \text{ entrées } \in \mathbb{R}^d$$

$$\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{H}^n$$

↑ ↑
candidats prototypes

Fonction de similarité $\rho(u, x) \geq 0$ si $u \neq x$
 $\rho(\theta, \theta) = 0$

$$V(\theta, x) = \min_i \varphi(\theta_i, x) \rightarrow \text{fct de perte}$$

$$\min_{\mathbb{H}} [V(\theta) = \dots] \text{ ou } \theta^* = (\theta_1^*, \dots, \theta_n^*)$$

Classification en n classes

$$C(\theta_i^*) = \{x_k : \varphi(\theta_i^*, x_k) < \varphi(\theta_j^*, x_j) \forall j \neq i\}$$

Les θ^* sont les prototypes de leur classe

Rem Dans tous les cas

$$V(\theta) = \mathbb{E}[v(\theta, z)] \quad z \text{ v.a.}$$

$$h(\theta) = \mathbb{E}[h(\theta, z)]$$

$$\nabla V(\theta) = \mathbb{E}[\partial_\theta v(\theta, z)] \quad \text{si } \theta \mapsto v(\theta, z) \text{ régulière w.r.t. } z$$

MAIS en proba numérique on peut

$V'(\theta)$ existe alors que $\partial_\theta v(\theta, z) \neq$

On a souvent $V(\theta) = \mathbb{E}[v(\theta, z)]_{\mathbb{E}_\theta}$
↑ poids

En machine learning

$$V(\theta) = \mathbb{E}[v(\theta, z)] \quad z \text{ v.a. à valeurs } \{z_1, \dots, z_n\}$$

\downarrow

$$\frac{1}{M} \sum z_i \text{ total singulier}$$

Donc $\theta \mapsto v(\theta, z)$ est différentiable et $\partial_\theta v(\theta, z)$

w.r.t indispensable

• En pratique $\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} \begin{cases} h(\theta_n) \\ \nabla V(\theta_n) \end{cases}$

Proba num $\begin{cases} h(\theta) \\ \nabla V(\theta) \end{cases} \quad \mathbb{E}[h(\theta, z)] - \text{Notation}$

Calculer $\int_{\mathbb{R}^q} H(\theta, z) P_z(dz) = \int_{\mathbb{R}^q} H(\theta, z) p_z(z) dz$

Machine learning $\partial_\theta v(\theta, z)$ explicite mais on ne peut pas

© Théo Jalabert 

calculer $\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N V(\theta, \xi_k)$ si il est trop grand

2. Algo stochastiques, gradients stochastique

Idée 0 (1950) Monte Carlo pour estimer $h(\theta_n)$ simulable

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} \frac{1}{N_{n+1}} \sum_{k=1}^{N_{n+1}} H(\theta_n, z_k^n) \quad (z_k^n)_{n,k} \text{ i.i.d.}$$

Idée 1 (dès 1950) Poser $N_n = 1 \quad \forall n \geq 1$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} H(\theta_n, z_{n+1}), \quad \theta_0 \in \mathbb{R}^d$$

Idée 2 (Mini-batch, 1990 puis 2010) $\forall n \geq 1 \quad N_n = N$ fixé

$$(\text{ou } N_n \uparrow +\infty \text{ lentement}) \quad \theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} \sum_{k=1}^N H(\theta_n, z_{(N)}^{n+1})$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} H_N(\theta_n, z_{(N)}^{n+1})$$

où $H_N(\theta, \xi_{(N)}) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N H(\theta, \xi_k), \quad \xi_{(N)} = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix}$

$z_{(N)}^{n+1} = \begin{pmatrix} z_1^{n+1} \\ \vdots \\ z_N^{n+1} \end{pmatrix}$ composants i.i.d. de loi $\sim (\mu_z)^{\otimes N}$

Théorème (lemme de Robbins-Siegmund)

$$H: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q \xrightarrow{\text{bon}} \mathbb{R}^d, \quad d, q \geq 1$$

- $(z_n)_{n \geq 1}$ i.i.d. à valeurs dans \mathbb{R}^q définis sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

- $\vartheta_0: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}^d, \quad \vartheta_0 \perp\!\!\!\perp z_n$ et on suppose que
 $\forall \theta \in \mathbb{R}^d \quad H(\theta, z) \in L^1(\mathbb{P})$ et on pose $h(\theta) = \mathbb{E} H(\theta, z)$

• $(\delta_n)_{n \geq 1}$ suite de "pas" $\delta_n > 0 \quad \forall n \geq 1$

(i) Il existe une fonction de Lyapounov $V: \mathbb{R}^d \xrightarrow{\mathcal{C}} \mathbb{R}_+^*$ t.q.

- coercive ($= \lim_{|\theta| \rightarrow \infty} V(\theta) = +\infty$) et ∇V Lipschitz
descend de grad. $\approx \dot{\theta} = -h(\theta) \Rightarrow \frac{d}{dt} V(\theta(t)) = \langle \nabla V, h \rangle(\theta) \geq 0$
- $\langle \nabla V, h \rangle \geq 0$
- $|\nabla V|^2 \leq C(1+V)$ ($\Rightarrow \frac{|\nabla V|}{\sqrt{1+V}} \leq C \Rightarrow \nabla \sqrt{V}$ est borné \Rightarrow
 C const réelle $\Rightarrow \sqrt{V}$ est \uparrow au plus affine
 $\Rightarrow V \propto$ quadratique)

(ii) L^2 -croissance de H en θ

$$\|H(\theta, z)\|_2 \leq C(1+V(\theta))^{1/2}$$

$$(\Rightarrow |h(\theta)| = |\mathbb{E} H(\theta, z)| \leq \|H(\theta, z)\|_1 \leq \|H(\theta, z)\|_2 \leq C(1+V(\theta))^{1/2})$$

(iii) (PS) $\sum \delta_n = \infty, \quad \sum \delta_n^2 < \infty$

(iv) $V(\theta_0) \in L^1(\mathbb{P})$ (et $\theta_0 \perp\!\!\!\perp (Z_n)$)

Alors la procédure récursive $\theta_{n+1} = \theta_n - \delta_{n+1} \cdot H(\theta_n, Z_{n+1})$

vérifie (a) $V(\theta_n) \xrightarrow{\text{PS}} V_\infty \in L^1$

(b) $(V(\theta_n))_{n \geq 0}$ L^1 -bornée

(c) $\sum_{n \geq 1} \delta_n \langle \nabla V, h \rangle(\theta_{n+1}) \in L^1$ ($\Rightarrow \text{c}\infty \text{ p-s}$)

(d) $\sum_{n \geq 1} |\Delta \theta_n|^2 \in L^1$ ($\Rightarrow \text{c}\infty \text{ p-s}$)

Rem(PS) et (c) $\rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla V, h \rangle(\theta_n) = 0$ Si $\sum_{n \geq n_0} \xi_n \geq 0 \quad n > n_0$

$$\sum_{n \geq 0} \xi_{n+1} \langle \nabla V, h \rangle(\theta_n) \geq \sum_{n \geq n_0} \xi_n \geq \xi \sum_{n \geq n_0} \xi_n = +\infty$$

• mini-batch $\zeta_N \in (\mathbb{R}^q)^N$

$$H_N(\theta, \zeta_N) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N H(\theta, \zeta_N^k)$$

$$\|H(\theta, \zeta_N)\|_2 \leq \frac{1}{N} \cdot N \|H(\theta, z)\|_2. \quad (ii) \xrightarrow{H} (ii)_{H_N}$$

$$z_N^i : i \text{d} \approx z \quad \langle \nabla V, z \rangle \geq 0 \quad \text{car } h_N = h$$

A noter que

$$\text{Var}[H_N(\theta, z_N)] = \frac{1}{N^2} \sum \text{Var}[H(\theta, z_N^k)] = \frac{\text{Var}[H(\theta, z)]}{N} = \frac{4(H(\theta, z))^2 - H(\theta)^2}{N}$$

Rem $\langle h, \nabla V \rangle \geq 0 \quad (h(x) = \mathbb{E}[H(x, z)], \quad \nabla V \text{ Lip.} \quad \lim_{|\theta| \rightarrow \infty} V(\theta) = +\infty)$

$$(\theta_n)_{n \geq 1} \quad \sum \xi_n^2 < \infty, \sum \xi_n = \infty$$

$$\underbrace{\sum \xi_{n+1} \langle \nabla V, h \rangle(\theta_{n+1})}_{\geq 0} \in h^* \rightarrow \sum \xi_{n+1} \langle \nabla V, h \rangle(X_{n+1}) < \infty \text{ ps.} \rightarrow$$

avec $\sum X_n < \infty$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \nabla V, h \rangle(\theta_n) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{Sinon, } n \geq n_0, \langle \nabla V, h(\theta_n) \rangle \geq \frac{\xi_n}{2} \\ \text{et donc } \sum_{n \geq n_0} \xi_{n+1} \langle \nabla V, h \rangle(\theta_n) \geq \frac{\xi_{n_0}}{2} \sum_{n \geq n_0} \xi_n = \infty \end{array} \right)$$

$(\arg \min V = \{\theta^*\})$

• Si V est convexe et coercive
(cont.)

Supposons (V strict. evxe) que $\arg \min V = \{\theta^*\}$

$\forall x, y \in \mathbb{R}^d \quad \langle \nabla V(y) - \nabla V(x), y-x \rangle \geq 0$ en particulier © Théo Jalabert 

$\forall \theta \in \mathbb{R}^d \quad \langle \nabla V(\theta) - 0, \theta - \theta^* \rangle \geq 0 \quad (*)$.

Donc V est sa propre fct de Lyapunov

Si $h = \nabla V \Rightarrow \langle h, \nabla V \rangle = |\nabla V|^2 \geq 0$

et $W: \theta \mapsto \frac{1}{2} |\theta - \theta^*|^2$ est aussi une fct de Lyapunov grâce

à $(*)$ car $\nabla W = \theta - \theta^*$ $\langle W(\theta), \nabla V(\theta) \rangle \geq 0$

En outre, W vérifie aussi $|\nabla W|^2 \leq C(1+W)$

$$\begin{aligned} \Delta \text{ Condition } \|H(\theta, z)\|_2 &\leq C(1+V(\theta))^{1/2} \quad V \text{ Lyap} \\ &\leq C(1+|\theta - \theta^*|^2)^{1/2} \quad W \text{ Lyap} \end{aligned}$$

D'une part on a l'hypo $|\nabla V|^2 \leq C(1+V) \Rightarrow V$ ss quadratique \Rightarrow

$$\rightarrow \frac{|\nabla V|}{\sqrt{1+V}} \leq \sqrt{C} \rightarrow |\nabla \sqrt{V}| \text{ bornée} \Rightarrow V(\theta) \leq C(1+|\theta|^2)$$

$$\rightarrow \|H(\theta, z)\|_2 \leq C(1+V(\theta))^{1/2} \rightarrow \leq C(1+|\theta - \theta^*|^2)^{1/2}$$

Donc la contrainte sur H est la m. les degr. de liberté

se cache où?

$$\nabla V(\theta) = E[H(\theta, z)] \quad \nabla V(\theta) = P(\theta) E[H(\theta, z)]$$

- Formulation mini-batch (de taille N)

$$H_N(\theta, \tilde{z}_{(N)}) = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_N \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N H(\theta, z_k) \rightarrow$$

$$\Rightarrow \|H_N(\theta, \tilde{z}_{(N)})\|_2 = \sqrt{\sum \|H(\theta, z_k)\|^2} \leq \|H(\theta, z)\|_2 \leq C \frac{\sqrt{(1 + V(\theta))^{1/2}}}{\sqrt{(1 + \|z - \theta\|^2)^{1/2}}}$$

$$\langle \nabla V, h \rangle \geq 0 \text{ car } h_{(N)}(\theta) = h(\theta)$$

$$\text{Var}[H_N(\theta, \tilde{z}_{(N)})] = \frac{\text{Var}[H(\theta, z)]}{N} = \frac{\mathbb{E}[(H(\theta, z) - \mathbb{E}H(\theta, z))^2]}{N} = \frac{\|H(\theta, z)\|_2^2 - \|h(\theta)\|^2}{N}$$

\uparrow + de variance \Rightarrow + d'exploration.

Preuve de lemme de R.S.

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} H(\theta_n, \tilde{z}_{n+1})$$

$\Delta \theta_{n+1}$

$$V(\theta_{n+1}) = V(\theta_n) + \langle \nabla V(\tilde{\theta}_{n+\frac{1}{2}}), \overbrace{\theta_{n+1} - \theta_n}^{\Delta \theta_{n+1}} \rangle \quad (\tilde{\theta}_{n+\frac{1}{2}} \in [\theta_n, \theta_{n+1}])$$

$$= V(\theta_n) - \gamma_{n+1} \langle \nabla V(\tilde{\theta}_{n+\frac{1}{2}}), H(\theta_n, \tilde{z}_{n+1}) \rangle =$$

$$= V(\theta_n) - \gamma_{n+1} \langle \nabla V(\theta_n), H(\theta_n, \tilde{z}_{n+1}) \rangle + \gamma_{n+1} \langle \nabla V(\theta_n) - \nabla V(\tilde{\theta}_{n+\frac{1}{2}}), H(\cdot) \rangle$$

∇V Lipschitz \Rightarrow

$$|\Delta \theta_{n+1}| \leq \gamma_{n+1} \|H(\theta_n, \tilde{z}_{n+1})\|$$

$$V(\theta_{n+1}) \leq V(\theta_n) - \gamma_{n+1} \langle \nabla V(\theta_n), H(\theta_n, \tilde{z}_{n+1}) \rangle + \gamma_{n+1} \|W\|_{\text{Lip}} |\theta_n - \tilde{\theta}_{n+\frac{1}{2}}| \|H(\theta_n, \tilde{z}_{n+1})\|$$

$$V(\theta_{n+1}) \leq V(\theta_n) - \gamma_{n+1} \langle \nabla V(\theta_n), H(\theta_n, \tilde{z}_{n+1}) \rangle + \|\nabla V\|_{\text{Lip}} \gamma_{n+1} |\tilde{z}_{n+1}| \|H(\theta_n, \tilde{z}_{n+1})\|^2$$

Etape 1 $V(\theta_n) \in L^1$ $\forall n \geq 0$ récurrence

$$V(\theta_0) \in L^1(\mathbb{P})$$

$$(x) \quad V(\theta_{n+1}) \leq V(\theta_n) + \gamma_{n+1} \underbrace{|\nabla V(\theta_n)| \cdot |H(\theta_n, z_{n+1})|}_{\leq \frac{1}{2} (\|\nabla V(\theta_n)\|^2 + |H(\theta_n, z_{n+1})|^2)}$$

$$\mathcal{F}_n = \sigma(z_0, z_1, \dots, z_n), \quad n \geq 0$$

$$|\nabla V(\theta_n)|^2 \leq C(1 + V(\theta_n)) \quad (\text{hypo})$$

$$\mathbb{E} [|H(\theta_n, z_{n+1})|^2] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} \left[|H(\theta_n, z_{n+1})|^2 \mid \mathcal{F}_n \right] \right] = \mathbb{E} \left[\mathbb{E} [|H(\theta, z)|^2 \mid_{\theta=\theta_n}] \right] \leq$$

$\overset{\text{C}(1+V(\theta))}{\ll}$

$$\leq \mathbb{E} [C(1+V(\theta_n))] = C(1 + \mathbb{E}[V(\theta_n)])$$

$$\text{Compte tout} \rightarrow \mathbb{E}[V(\theta_{n+1})] \leq A \underbrace{\mathbb{E}[V(\theta_n)]}_{<\infty} + B < \infty$$

Etape 2 Mise en évidence d'une sousmartingale > 0 .

$$\mathbb{E}_n[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_n]$$

$$\mathbb{E}_n[\cdot] \rightsquigarrow ?$$

et étape 1
 $y \leq C(1 + V(\theta_n))$

$$\mathbb{E}_n[V(\theta_{n+1})] \leq V(\theta_n) - \gamma_{n+1} \mathbb{E}_n \left[\underbrace{\langle \nabla V(\theta_n), H(\theta_n, z_{n+1}) \rangle}_{\mathcal{F}_n-\text{mes}} + \underbrace{[\nabla V]_{\text{Lip}} \gamma_{n+1}^2 \mathbb{E}_n [H(\theta_n, z_{n+1})]^2}_{h_i(\theta)} \right]$$

$\Rightarrow \sum_i \partial_i V(\theta_n) \mathbb{E}_n[H_i(\theta_n, z_{n+1})] = \sum_i \partial_i V(\theta_n) \mathbb{E}[H_i(\theta, z)] \Big|_{\theta=\theta_n} = \langle \nabla V, h \rangle(\theta_n)$

$$\mathbb{E}_n[V(\theta_{n+1})] \leq V(\theta_n) - \gamma_{n+1} \langle \nabla V, h \rangle(\theta_n) + \underbrace{[\nabla V]_{\text{Lip}} \cdot C_V}_{\leq C_V} \gamma_{n+1}^2 (1 + V(\theta_n))$$

$$(xx) \quad \mathbb{E}_n[V(\theta_{n+1})] \leq (1 + C_V \gamma_{n+1}^2) V(\theta_n) - \gamma_{n+1} \langle \nabla V, h \rangle(\theta_n) + C_V \gamma_{n+1}^2$$

$$+ E_n \left(C_V \sum_{k \geq n+2} \delta_k^2 \right) + E_n \left[\sum_{k=0}^n \delta_{k+1} \langle \nabla V, h \rangle (\theta_k) \right]$$

$$\mathbb{E}_n\text{-mesur.} \left\{ + \sum_{k=0}^n \delta_{k+1} \langle \nabla V, h \rangle (\theta_k) + C_V \sum_{k \geq n+2} \delta_k^2 \right\}$$

$$E_n \left[V(\theta_{n+1}) + \sum_{k=0}^n \delta_{k+1} \langle \nabla V, h \rangle (\theta_k) + C_V \sum_{k \geq n+2} \delta_k^2 \right] \leq (1 + C_V \delta_{n+1}^2) \left[V(\theta_n) + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{k+1} \langle \nabla V, h \rangle (\theta_k) + C_V \sum_{k \geq n+1} \delta_k^2 \right]$$

$\Rightarrow S_{n+1}$

$S_n < \infty$

$$E_n(S_{n+1}) \leq (1 + C_V \delta_{n+1}^2) S_n$$

$$m_n = \prod_{k=0}^n (1 + C_V \delta_k^2) = e^{\sum_{k=0}^n \log(1 + C_V \delta_k^2)} \leq e^{C_V \sum_{k=0}^n \delta_k^2} < \infty$$

$$\tilde{S}_n = \frac{S_n}{m_n} \text{ alors } (***): E_n(\tilde{S}_{n+1}) \leq \tilde{S}_n$$

Donc $(\tilde{S}_n)_{n \geq 0}$ est une \mathbb{F}_n -surmartingale positive

$$E[\tilde{S}_0] = E[S_0] = E[V(\theta_0)] < \infty \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \tilde{S}_n \xrightarrow{\text{P.S.}} \tilde{S}_\infty \in L^1 \\ (\tilde{S}_n)_{n \geq 0} \text{ } L^1\text{-bornée } (E[\tilde{S}_n] \leq E[\tilde{S}_0] = E[V(\theta_0)] < \infty) \end{cases}$$

$$\underline{\text{Etape 3}} \quad m_n \rightarrow m_\infty = \prod_{n \geq 0} (1 + C_V \delta_n^2) \quad \text{donc } S_n = m_n \tilde{S}_n \xrightarrow{\text{P.S.}} m_\infty \tilde{S}_\infty =: S_\infty \in L^1$$

$$S_n = V(\theta_n) + \sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \langle \nabla V, h \rangle (\theta_k) + C_V \sum_{k \geq n+2} \delta_k^2 \xrightarrow{\substack{\text{P.S.} \\ \underbrace{\quad}_{\rightarrow 0} \\ n \rightarrow \infty}} S_\infty \in L^1$$

$$V(\theta_n) \geq 0 \quad \forall n \rightarrow 0 \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{n-1} \delta_k \langle \nabla V, h \rangle (\theta_k)}_{\geq 0} \leq S_n \quad L^1\text{-bornée}$$

$$\rightarrow E \sum_{k \geq 0} \delta_k \langle \nabla V, h \rangle (\theta_k) \leq \sup_n E[S_n] \leq m_\infty E[V(\theta_0)] < \infty$$

$\Rightarrow \sum_{n \geq 0} \delta_{n+1} \langle \nabla V, h \rangle (\theta_n) < +\infty$ p.s. et converge dans L^1 (Th. de B. Levy)

Donc $V(\theta_n) = S_n - \sum_{k=0}^{n-1} \delta_{n+k} \langle \nabla V, h \rangle (\theta_k) - C_V \sum_{k \geq n+1} \delta_k^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} V_\infty \in L^1(\mathbb{R})$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \underbrace{\quad}_{S_\infty} & \downarrow \\ \sum_{n \geq 0} & \sum_{n \geq 0} \{ \dots \} & 0 \end{array}$$

$V(\theta_n) \leq M_n \underbrace{\sum_{n \geq 0} \delta_n}_{S_n}$ donc L^1 -bornée

$$|\Delta \theta_{n+1}|^2 = \delta_{n+1}^2 |H(\theta_n, z_{n+1})|^2$$

$$\mathbb{E} |\Delta \theta_{n+1}|^2 \leq \delta_{n+1}^2 \mathbb{E} |H(\theta_n, z_{n+1})|^2 \leq C \delta_{n+1}^2 (1 + V(\theta_n))$$

$$\sum_{n \geq 0} \mathbb{E} |\Delta \theta_{n+1}|^2 \leq C \sum_{n \geq 0} \delta_{n+1}^2 (1 + \mathbb{E} V(\theta_n)) \stackrel{\leq K}{\leq} (1 + K) C \sum_{n \geq 0} \delta_{n+1}^2 < \infty$$

B.L. $\mathbb{E} \left(\sum_{n \geq 0} |\Delta \theta_{n+1}|^2 \right) < +\infty \Rightarrow \sum_{n \geq 0} |\Delta \theta_{n+1}|^2 < +\infty$ p.s.

D

3 Application

S-L. Robbins-Monro

Théorème $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$, $H: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ et $Z: (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}^q$ vect

aléatoire et on suppose que $h(\theta) = \mathbb{E} H(\theta, Z)$ est bien défini

$\forall \theta \in \mathbb{R}^d \quad H(\theta, Z) \in L^1(P) \quad \text{et} \quad h(\theta) = \mathbb{E} H(\theta, Z)$

(i) $\forall \theta \neq \theta^* \quad \langle h(\theta), \theta - \theta^* \rangle > 0$

$$\left\{ \begin{array}{l} V = \frac{1}{2} |\theta - \theta^*|^2 \end{array} \right.$$

(ii) $\forall \theta \in \mathbb{R}^d, \|H(\theta, Z)\|_2 \leq C(1 + |\theta - \theta^*|^2)^{1/2}$

(iii) (PS) $\sum \gamma_n = \infty$ et $\sum \gamma_n^2 < \infty$ (iv) $\theta_0 \in L^2$ et $(\theta_n) \perp \mathcal{L}(Z_n)$ i.i.d. $\sim \mathcal{N} Z$ Alors $\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} H(\theta_n, Z_{n+1})$, $n \geq 0$ vérifie $\theta_n \xrightarrow{\text{PS.}} \theta^*$ et $\theta_n \xrightarrow{L^p} \theta^*$ $0 < p < 2$ $(|\theta_n - \theta^*|)_{n \geq 0}$ est L^2 -bornée (en général pas $\xrightarrow{L^2}$)Rem $H(\theta, z) = h(\theta) \Rightarrow$ pas d'aléa!Preuve

Etape 1 $V(\theta) = \frac{1}{2} |\theta - \theta^*|^2$

$\nabla V(\theta) = \theta - \theta^*$

$\|H(\theta, Z)\|_2 \leq C(1 + |\theta - \theta^*|) \leq C'(1 + |\theta - \theta^*|^2)^{1/2} = C'(1 + V(\theta))^{1/2}$

Etape 2 θ^* la cible? $\{h=0\} \subset \{\theta^*\}$ d'après (i) $h(\theta^*) = 0$? Si $h(\theta^*) \neq 0$

$u = \theta^* - \lambda \frac{h(\theta^*)}{\|h(\theta^*)\|} \neq \theta^*, \lambda > 0$

$\langle h(u), u - \theta^* \rangle \geq 0 \iff \left\langle h\left(\theta^* - \lambda \frac{h(\theta^*)}{\|h(\theta^*)\|}\right), -\lambda \frac{h(\theta^*)}{\|h(\theta^*)\|} \right\rangle \geq 0$

$$\forall \theta^* \rightarrow \left\langle h(\theta^*), \frac{h(\theta^*)}{\|h(\theta^*)\|} \right\rangle \leq 0$$

$$\|h(\theta^*)\| = 0 \rightarrow h(\theta^*) = 0$$

$$\text{Donc } \{h=0\} = \{\theta^*\}$$

θ_n bornée dans \mathbb{R}^d

$$\underline{\text{Etape 3}} \quad (\rightarrow \theta^*) \quad \mathcal{Q}_0 = \left\{ \omega : \frac{1}{2} \| \theta_n(\omega) - \theta^* \|^2 \rightarrow V_\infty(\omega) \text{ et } \sum \gamma_{n+1} \langle \theta_n(\omega) - \theta^*, h(\theta_n) \rangle < \infty \right\}$$

$$\mathbb{P}(\mathcal{Q}_0) = 1 \quad (\text{R.S.}) \quad \omega \in \mathcal{Q}_0$$

$$\sum \gamma_n = \infty \rightarrow \lim_n \langle \theta_n - \theta^*, h(\theta_n) \rangle = 0$$

$$\text{Donc } \exists \varphi(n) \uparrow +\infty \text{ t.q. } \langle \theta_{\varphi(n)} - \theta^*, h(\theta_{\varphi(n)}) \rangle \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

$$(\theta_{\varphi(n)})_{n \geq 0} \text{ bornée donc } \exists \theta_{\varphi_0 \varphi(n)} \rightarrow \theta_\infty \in \mathbb{R}^d$$

$$h \text{ continue } \rightarrow \langle \theta_\infty - \theta^*, h(\theta_\infty) \rangle = 0 \rightarrow \theta_\infty = \theta^* \text{ (à cause de (i))}$$

$$V_\infty = \frac{1}{2} \|\theta_\infty - \theta^*\|^2 \rightarrow V_\infty = 0!$$

$$\text{Donc } \theta_n \xrightarrow{\text{P.S.}} \theta^* \quad (V_n \xrightarrow{\text{P.S.}} 0)$$

□

Exercice En résultat $h(\theta^*) = 0$ ent. et $\theta \mapsto \langle h(\theta), \theta - \theta^* \rangle \geq 0$ s.c.i.
(au lieu de h continu)

3.2. Gradient et pseudo-gradient stoch.

$$h(\theta) = \nabla V(\theta)$$

Théorème \checkmark i) $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}_+$ coercive, ∇V Lipschitz $\{\nabla V = 0\} = \{\theta^*\}$

$$\text{ii) } H: \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d \quad Z: (\mathcal{Q}, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}^d$$

t.q. $\forall \theta \quad \nabla V(\theta) = \mathbb{E} H(\theta, Z)$ avec $\|H(\theta, Z)\| \leq C(1+V(\theta))^{1/2}$

gradient local: $V(\theta) = \mathbb{E} V(\theta, Z) \quad H(\theta, Z) = \partial_\theta V(\theta, Z)$
ou un substitut

iii) (PS) et $\theta_n \perp\!\!\!\perp (Z_i)_{i \geq 0}$ i.i.d. $\sim Z$ et $V(\theta_n) \in L^1$

Alors $\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} H(\theta_n, Z_{n+1})$ vérifie $\theta_n \rightarrow \theta^*$ p.s.

et $|\nabla V(\theta_n)| \xrightarrow{L^p} 0 \quad 0 < p < 2$

Preuve

Etape 1 V coercive V continue (car différentiable)

$(\lim_{\|\theta\| \rightarrow \infty} V = +\infty)$

\downarrow Hypo $\left(\begin{array}{l} h(\theta) = \mathbb{E} H(\theta, Z) \cdot \nabla V(\theta) \\ \text{donc } \langle \nabla V, h \rangle = \|\nabla V\|^2 \end{array} \right)$

Donc $\arg \min_{\mathbb{R}^d} V \neq \phi$ donc $C\{\nabla V = 0\} = \{\theta^*\}$

Donc $\min_{\mathbb{R}^d} V = V(\theta^*)$

Etape 2 $\Omega_0 = \{\omega: V(\theta_n(\omega)) \rightarrow V_\infty(\omega) < \infty \text{ et } \sum_n \gamma_{n+1} |\nabla V(\theta_n(\omega))|^2 < \infty\}$

R.S. $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1, \omega \in \Omega_0$

$V(\theta_n) \rightarrow V_\infty < \infty \rightarrow (\theta_n)_{n \geq 0}$ bornée
 V coercive

Par ailleurs (PS) et $\sum \gamma_{n+1} |\nabla V(\theta_n)|^2 < \infty \rightarrow \lim |\nabla V(\theta_n)|^2 = 0$

$\exists \theta_{\varphi(n)}$ t.q. $\nabla V(\theta_{\varphi(n)}) \rightarrow 0$
bornée

$\exists \theta_{\varphi \circ \varphi(n)}$ t.q. $V(\theta_{\varphi \circ \varphi(n)}) \rightarrow V_\infty$ et $\nabla V(\theta_{\varphi \circ \varphi(n)}) \rightarrow 0$

et $\theta_{\varphi_0 \cdot 4(n)} \rightarrow \theta_\infty$ donc par cont. de ∇V en θ_n

$$\nabla V(\theta_\infty) = \lim_n \nabla V(\theta_{\varphi_0 \cdot 4(n)}) = 0 \rightarrow \theta_\infty = \theta^*$$

$$V(\theta_\infty) = V_\infty$$

$$V(\theta^*) = V_\infty$$

Donc

$$\left\{ \begin{array}{l} V(\theta_n) \rightarrow \min_{\mathbb{R}^d} V \\ (\theta_n) \text{ bornée} \end{array} \right. \rightarrow \theta_n \rightarrow \theta^*$$

$$\arg \min_{\mathbb{R}^d} V = \{\theta^*\}$$

Rappel $V(\theta_n)$ L^1 -bornée donc $|\nabla V(\theta_n)|^2 \leq C(1+V(\theta_n))$ est L^1 -bornée

Donc $(|\nabla V(\theta_n)|^p)_{n \geq 0}$ équicontinué pour tout $0 < p < 2$

$$\nabla V(\theta_n) \rightarrow \nabla V(\theta^*) = 0$$

$$\underbrace{\nabla V(\theta_n)}_{L^p} \rightarrow 0$$

□

3.3. Pseudo gradient

Théorème

(i) $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$ continue, $h(\theta) = \underbrace{H(\theta, z)}_{\in L^1(\mathbb{R})} \forall \theta$

(ii) $V: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ coercive ∇V Lipschitz $|\nabla V|^2 \leq C(1+r)$

(iii) $\|H(\theta, z)\|_2 \leq C(1+V(\theta))^{1/2}$

+ h spéciifique pour h et V

(iv) $\forall K$ compact de $\mathbb{R}^d \exists C_K > 0 \forall \theta \in K \quad \langle h, \nabla V \rangle(\theta) \geq C_K |\nabla V(\theta)|^2$

Preuve (exo)

Raisonnement habituel avec le R₀ = $\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} (\langle \nabla V, h \rangle(\theta_n))^2 < \infty \\ V(\theta_n) \rightarrow V_\infty < \infty \end{cases}$

V coercive + R.S. $\Rightarrow (\theta_n)$ bornée $K = \{\theta_n, n \geq 0\}$ compact

donc $\langle \nabla V, h \rangle(\theta_n) \geq c_K (\|\nabla V(\theta_n)\|)^2$ et là c'est p.m. \Rightarrow

3.4. Algos multi-cibles ($\{\nabla V = 0\} \neq \{\theta^*\}$)

Si on enlève malaties mutandis

$\left\{ \begin{array}{l} \nabla V = 0 \\ \langle \nabla V, h \rangle = 0 \end{array} \right\} = \{\theta^*\}$ SGD
$\left\{ \langle \nabla V, h \rangle = 0 \right\} \neq \{\theta^*\}$ PGD

alors $(P(dw))$ -p.s. $\exists \vartheta_n(\omega) \in V(\mathbb{R}^d)$ et une composante connexe χ^*

de $\{\nabla V = 0\} \cap \{V = V_\infty(\omega)\}$ (SGD) t.q. $\text{dist}(\vartheta_n(\omega), \chi^*(\omega)) \rightarrow 0$
 \uparrow
 $(\{\langle \nabla V, h \rangle = 0\} \cap \{V = V_\infty\})$ (PGD))

En particulier si $\forall \vartheta \in V(\mathbb{R}^d)$ $\{\langle \nabla V, h \rangle = 0\} \cap \{V = V\}$ est

localement fini ($\bigcap K_{\text{connex}}$ est finie) alors $\exists \theta_n(\omega)$ t.q. $\vartheta_n(\omega) \rightarrow \vartheta_\infty(\omega)$

4. Retour sur les exemples

4.1. Vol implicite

$$X_T = x_0 e^{(r - \frac{\sigma^2}{2})T + \sigma \sqrt{T} Z}, \quad Z \sim N(0,1)$$

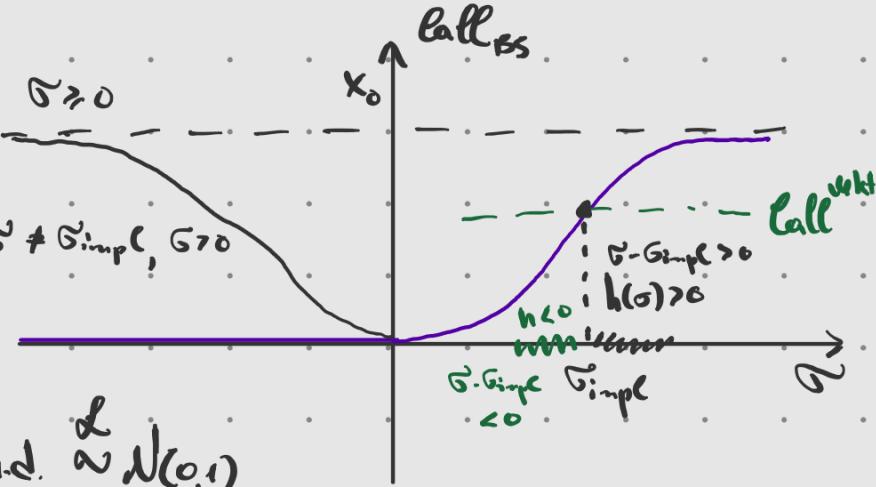
$$h_T = (X_T - K)^+ \quad V_{\text{Call BS}}(\sigma) = \frac{X_0 \sqrt{T}}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{d_1^2(\sigma)}{2}\right\} \quad \text{© Théo Jalabert} \quad \text{Signature}$$

$$\sigma \mapsto \text{Call}_{BS}(S, K, r, \sigma, T) = S_0 \Phi(d_1) - K e^{-rT} \Phi(d_2) \quad \text{si } \sigma > 0$$

$$h(\sigma) = \begin{cases} \text{Call}_{BS}(S, \sigma, \dots) - \text{Call}^{\text{MKI}}(T, K) & \sigma > 0 \\ -\text{Call}^{\text{MKI}}(K, T) & \sigma \leq 0 \end{cases}$$

$\exists \text{ str M} \rightarrow h(\sigma)(\sigma - \sigma_{\text{imp}}) \geq 0 \quad \forall \sigma \neq \sigma_{\text{imp}}, \sigma > 0$

Une façon de faire



$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \gamma_{n+1} H(\sigma_n, z_{n+1}), \quad (z_n) \text{ i.i.d. } \sim N(0, 1)$$

$$H(\sigma, z) = (X \exp\left(-\frac{\sigma^2}{2} T + \sigma \sqrt{T} z\right) - e^{-rT} K)^+$$

pas? Vitesse optimal d'un algo "Japon" $\frac{\partial_n - \theta^*}{\sqrt{\gamma_n}} \xrightarrow{L} \mathcal{N}(0, \dots)$

Vrai si $\gamma_n = \frac{c}{n^2} \quad \frac{1}{2} < c < 1$

$$\gamma_n = \frac{a}{n+b} \quad \text{avec } a > \frac{1}{2h'(\sigma_{\text{imp}})} \quad b \text{ un constante}$$

Choisir (γ_n) de façon que

$$\frac{\gamma_n}{H} \approx + ou - \frac{1}{2} \text{ pour n "petit"}$$

Vraie vie algorithme de JR.

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n - \frac{1}{V_{\text{Call BS}}(\sigma_n)} (\text{Call}_{BS}(\sigma_n) - \text{Call}^{\text{MKI}}(K, T))$$

Ici: $V_{\text{Call BS}}(\sigma) = 0$ quand $\sigma \leq 0$!

Solution: $V_{\text{Call BS}}(\sigma) \sim V_{\text{Call BS}}(\sigma) \vee \frac{c}{n}$

• Solution : papier que l'ice Go pour enregistrer quasi-instantanée

© Théo Jalabert

Jalabert

• Levenberg - Marquardt

$$G_{n+1} = G_n - \frac{\beta}{V_{\text{gross}}(G_n) + \lambda_n} (\text{call}_{BS}(G_n) - \text{call}(K, T)), \quad \lambda_n > 0, \quad \lambda_n \rightarrow 0$$

4.2. Corrélation implicite

BS 2D, $\langle W^1, W^2 \rangle_t = p t, \quad p \in [-1, 1]$

$$h(p) = \text{BestOfCall}(p) - \text{BestOfCall}^{\text{ukt}}(T, K)$$

$$= \mathbb{E}_H(p, (Z^1, Z^2))$$

$$\sim N(0, I_2)$$

Exercice $[-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}, \quad p \mapsto h(p)$

$$\text{Idée} \quad p_{n+1} = p_n - \kappa_{n+1} H(p_n, Z_{n+1}) \quad (p_0 = 0)$$

ou valeur connue historique

Problème $p_n \in [-1, 1] \quad \forall n$

Solution 1 $p_{n+1} = \text{Proj}_{[-1, 1]}(p_n - \kappa_{n+1} H(p_n, Z_{n+1}))$ théorie

Solution 2 $p_n = \arctan(\theta_n) \cdot \frac{2}{\pi}$

$\theta_{n+1} = \theta_n - \kappa_{n+1} H(\arctan(\theta_n), Z_{n+1}), \quad \theta_0 = 0 \text{ ou une valeur proche historique}$

Solution 3 Dans l'algo $Z'_n \quad Z = p_n Z'_n + \sqrt{1-p_n^2} Z''_{n+1}, \quad (Z^1, Z^2) \sim N(0, I_2)$

$$p = \cos \theta \quad Z = (\cos \theta) Z^1 + |\sin \theta| Z^2$$

Problème Solution à l'^e p^{me} solut

© Théo Jalabert

direct (i) direct (\mathbb{E}^*) $\frac{\xi}{\lambda}$

Nombre de sol. est infini par sin : $\{\pm \delta^k 2kn, k \in \mathbb{Z}\}$

4.3. VaR_λ(X) et CVaR_λ(X)

$F_X \uparrow$ cont. $X: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ représentative d'une perte

R.U. $V(\xi) = \xi + \frac{1}{1-\lambda} \mathbb{E}(Z - \xi)^+$ $\lambda \geq 0, 1 - \lambda = \mathbb{E} \left[\xi + \underbrace{\frac{1}{1-\lambda}(Z - \xi)^+}_{V(\xi, Z)} \right]$

$$V'(\xi) = \mathbb{E} \left[1 - \frac{1}{1-\lambda} \mathbb{I}_{\{Z \geq \xi\}} \right] = 1 - \frac{1}{1-\lambda} \mathbb{P}(Z \geq \xi)$$

ξ_L t.q. $\mathbb{P}(Z \geq \xi_L) = 1 - \lambda \mapsto F_Z(\xi_L) = \lambda$

Solution de $V'(\xi) = 0 \rightsquigarrow$ déf de VaR_λ(Z)

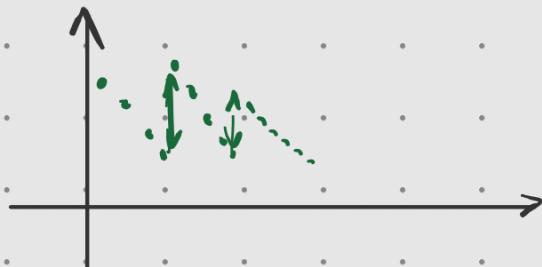
$$V(\xi_L) = \frac{\xi_L \mathbb{P}(Z \geq \xi_L) + \mathbb{E}(Z - \xi_L)^+}{\mathbb{P}(Z \geq \xi_L)} = \frac{\mathbb{E}[\xi_L \mathbb{I}_{Z \geq \xi_L} + (Z - \xi_L) \mathbb{I}_{Z \geq \xi_L}]}{\mathbb{P}(Z \geq \xi_L)} =$$

$$= \mathbb{E}[Z | Z \geq \xi_L] = c \text{VaR}_L(Z) \quad 1 - F_Z(\xi_L)$$

(GD) $\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{\chi_{n+1}}{1-\lambda} ((1-\lambda) - 1 \cdot \mathbb{P}(Z \geq \xi))$ $\chi_n = \begin{cases} 1 & Z_n > 0 \\ 0 & Z_n \leq 0 \end{cases}$
 $= \xi_n - \frac{\chi_{n+1}}{1-\lambda} (F_Z(\xi) - \lambda)$

(SGD) $\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{\chi_{n+1}}{1-\lambda} (\mathbb{I}_{\{Z_{n+1} \leq \xi\}} - \lambda)$ Z_n i.i.d. $\sim Z$

Très échantillonnage



Idée Newton $V'(\xi) = \frac{1}{1-\lambda} f_2(\xi)$ si ξ a une densité
(très peu accessible)

© Théo Jalabert
T. Jalabert

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \frac{1-\lambda}{\lambda} \left(1 - \frac{1}{1-\lambda} F_2(\xi_n) \right) = \xi_n - \frac{1}{\lambda} (F_2(\xi_n) - \lambda)$$

Comment résoudre? Prendre en compte les événements rares

- Ajouter de l'IS
- Tromper l'algo λ par plateaux

$$\lambda_0 = \frac{1}{2}, \quad \lambda_n \uparrow$$

↳ multi-niveaux pour les événements rares.

Quid de la eVaR_λ(x)

$$V(\xi) = ? \quad V(\xi) = \mathbb{E}[U(\xi, z)]$$

En parallèle du SGD $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} U(\xi_k, z_{k+1}) = \underbrace{\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V(\xi_k)}_{\text{calculer}} + \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (U(\xi_k, z_{k+1}) - V(\xi_k))$

$\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_0, z_{1:n})$ filtration

accroissements de martingale
($\rightarrow 0$?)

$$\forall n \geq 0 \quad \xi_n \in \mathcal{F}_n \quad z_{n+1} \perp \mathcal{F}_n$$

$$\mathbb{E}[U(\xi_k, z_{k+1}) - V(\xi_k) | \mathcal{F}_k] = 0$$

Idée $M_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} (U(\xi_k, z_{k+1}) - V(\xi_k))$

$$\langle M \rangle_n = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}[(U(\xi_k, z_{k+1}) - V(\xi_k))^2 | \mathcal{F}_k]}{k^2} = \sum_{k=1}^n \frac{\mathbb{E}[U(-)^2 - V(\xi_k)^2 | \mathcal{F}_k]}{k^2} \leq$$

$$\sum_{k=0}^n \frac{\mathbb{E}[V^2(\xi_k, z_{k+1}) | F_k]}{k^2}$$

Admet que si $Z \in L^2$ alors $\mathbb{E}[V^2(\xi_1, Z)] < \infty$

$$\text{et donc } \langle M \rangle_\infty \leq \sum_{n \geq 1} \frac{\mathbb{E}[V^2(\xi_n, z_{n+1}) | F_n]}{n} < \infty$$

Alors $M_n \xrightarrow{\text{P.S.}} \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} (V(\xi_n, z_{n+1}) - V(\xi_n))$

Lemme de Kronecker $(a_n), (b_n) \quad b_n \uparrow +\infty$ t.q. $\sum_n \frac{a_n}{b_n}$ converge

dans \mathbb{R} alors $\frac{1}{b_n} \sum_{k=1}^{n-1} a_k \rightarrow 0$ (Abel + Cesaro généralisé)

Donc $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} (V(\xi_k, z_{k+1}) - V(\xi_k)) \xrightarrow{\text{P.S.}} 0$

Finalement $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} V(\xi_k) \xrightarrow{\text{P.S.}} V(\xi) = \text{eVaR}_n(Z)$

Mini-proj

$$L = 0.5, 0.75, \dots$$

$$L = 0.95 \quad \lambda = 0.5 \quad L_n \uparrow \text{but } 0.35$$

$\underbrace{\quad}_{\text{par plateau}}$

4.4. Réduction de variance adoptative

$$\mathbb{E}\Phi(z) = \mathbb{E} \left[\underbrace{\Phi(z+\theta)}_{\mathbb{E}} e^{-\langle z, \theta \rangle - \frac{|\theta|^2}{2}} \right] \quad \forall \theta \in \mathbb{R}^d$$

Minimiser $\min_{\theta} \mathbb{E}\Phi^2(z+\theta) e^{-2\langle z, \theta \rangle - |\theta|^2}$

① Φ pas "dérivable du tout" = Φ pas localt Lipschitz
 $(\Phi = \prod_{i=1}^n \zeta_i)$

$$\nabla V(\theta) = \mathbb{E} \left[\Phi^2(z) e^{-\langle \theta, z \rangle + \frac{|\theta|^2}{2}} (\theta - z) \right]$$

$\mathcal{SVD}(g, z)$

(SGD) $\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} \partial g \vartheta(\theta_n, z_{n+1})$ (z_n) iid $N(0, 1)$ ~ Explosif!

Idée 1 $\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} e^{-\frac{\|\theta_n\|^2}{2}} \partial g \vartheta(\theta_n, z_{n+1})$ Explosif encore.

Idée 2 Relaire un chgt de variable pour supprimer le $e^{-\frac{\|\theta_n\|^2}{2}}$

$\delta \mapsto z - \delta$ dans l'intégrale en $d\delta$

$$\nabla V(\theta) = \mathbb{E} [\Psi(z - \theta)^2 (2\theta - z)] \cancel{e^{\frac{\|\theta\|^2}{2}}}$$

Pseudo SGD $\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} \Psi(z_{n+1} - \theta_n)^2 (2\theta_n - z_{n+1})$

Idée 3 Contrôler le terme $\Psi(z_{n+1} - \theta_n)^2$ via le contrôle de Ψ

En fin de compte possibilité d'amélioration / contrôle du (PSGD)

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_n \frac{\Psi^2(z_{n+1} - \theta_n)}{1 + \Psi^2(-\theta_n)} (2\theta_n - z_{n+1})$$

(stable en général, ça peut parfois "gelé")

② Si Ψ raisonnablement dérivable:

Ψ dérivable sur D^c et Ψ Lipschitz (local Lipschitz)

$$\theta_{n+1} = \theta_n - \gamma_{n+1} \partial g \vartheta(\theta_n, z_{n+1})$$

avec le ϑ "initiale"

Chapitre VI Schémas de discréétion dans diffusions

© Théo Jalabert

Théo Jalabert

Sans biais \rightsquigarrow Biassé

Introduction

$(X_t)_{t \in [0, T]}$ une solution forte de l'EDS

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s \text{ où}$$

(i) $b, \sigma : [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^d & \text{ou} \\ M_{d,q}(\mathbb{R}) & \text{continues} \end{cases}$

(ii) $W = (W_t)_{t \in [0, T]}$ MB standard q -dimensionnel défini

sur espace (Ω, \mathcal{A}, P) avec une filtration $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, T]}$

satisfaisant aux conditions habituelles et $X_0 : (\Omega, \mathcal{A}, P) \rightarrow \mathbb{R}^d$

$$\mathcal{F}_{t+} = \mathcal{F}_t, \quad \mathcal{N}_P = \{A \in \mathcal{A}, P(A) = 0\} \subset \mathcal{F}_0$$

et vérifient $X_0 \in \mathcal{F}_0, X_0 \perp\!\!\!\perp W$.

$$\bullet \forall t, s \in [0, T] \text{ s.t } W_t - W_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$$

(iii) $X_t : (\Omega, \mathcal{F}_t) \rightarrow \mathbb{R}^d$

Ex $\mathcal{F}_t^{X_0, W} = \sigma(X_0, \mathcal{N}_P, W_s, s \leq t)$

Théorème Si

(i) $b, \sigma \in C([0, T], \mathbb{R}^d)$ $\underbrace{\mathbb{R}^d}_{\mathbb{R}^{d \times q}}$

$$(ii) \forall t \in [0, T] \quad |b(t, x) - b(t, y)| + \|\sigma(t, x) - \sigma(t, y)\|_{\text{Frob}} \leq C_T |x - y| \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d$$

où $\|A\|_{\text{Frob}} = \sqrt{\text{Tr}(AA^*)} = \left(\sum_{i,j} a_{ij}^2\right)^{1/2}$

(iii) X_0 et W comme ci-dessus

Alors il existe une unique solution forte $(X_t)_{t \in [0, T]}$

de l'EDS (F_t) adoptée définie sur $(\mathbb{R}, \mathcal{A}, (F_t), \mathbb{P})$

En outre, $\mathbb{P}(dw)$ -ps. $t \mapsto X_t(w)$ est continue (et $\in L^\alpha$ Hölder avec $0 < \alpha < \frac{1}{2}$)

(X_t) n'est généralement pas simulable

1. Schéma d'Euler (-Maruyama)

$n \in \mathbb{N}^*$, on pose $t_k^n = k \frac{T}{n} = k \cdot h$, où $h = \frac{T}{n}$ pas

1.1. Schéma à temps discret

$\bar{X}_0^n = X_0$ et pour tout $k = 0, \dots, n-1$

$$\bar{X}_{t_{k+1}^n}^n = \bar{X}_{t_k^n}^n + h b(t_k^n, \bar{X}_{t_k^n}^n) + \sigma(t_k^n, \bar{X}_{t_k^n}^n) \underbrace{(W_{t_{k+1}^n} - W_{t_k^n})}_{\delta W_{t_{k+1}^n}}$$

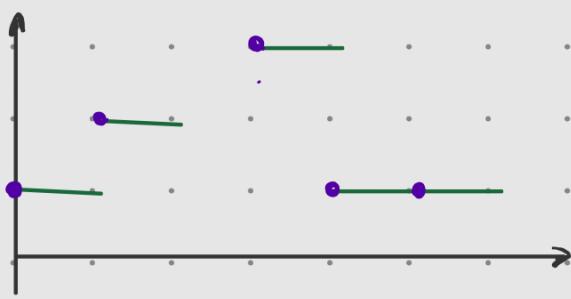
inspiré par $X_{t_{k+1}^n} = X_{t_k^n} + \int_{t_k^n}^{t_{k+1}^n} b(s, X_s) ds + \sigma(s, X_s) dw_s$
 $\approx b(t_k^n, X_{t_k^n}) \approx \sigma(t_k^n, X_{t_k^n})$

Notation \bar{X}^n vs \bar{X} par d'ambiguité

1.2. Schéma constant par morceaux

où $\underline{t} = \left\lfloor \frac{n}{T} t \right\rfloor$ i.e. $\begin{cases} \underline{t} = t_k^n & \text{si } t \in [t_k^n, t_{k+1}^n[\\ \underline{T} = T & \end{cases}$

$$\underline{\tilde{X}}_t^n = \bar{X}_t^n$$



1.3. Schéma authentique (ou "genuine")

$$t \in [0, T] \quad \bar{X}_t^n = \bar{X}_{\underline{t}}^n + (t - \underline{t}) b(\underline{t}, \bar{X}_{\underline{t}}^n) + G(\underline{t}, \bar{X}_{\underline{t}}^n)(W_t - W_{\underline{t}})$$

Si b et G sont continues donc $t \mapsto \bar{X}_t^n$ est continue

$$\forall t \in [0, T] \quad \bar{X}_t = X_0 + \int_0^t b(s, \bar{X}_s) ds + \int_0^t G(s, \bar{X}_s) dW_s \text{ - processus d'Ito !}$$

2. Erreur forte et moments polynomiaux

- Enoncés généraux
- Preuves $d=q=1$ et $b(t,x)=b(x)$, $G(t,x)=G(x)$.

Proposition (Contrôle de moments)

b, G boréliennes sur $[0, T] \times \mathbb{R}^d$, $\exists C_T > 0$ t.q. $\forall t \in [0, T] \quad \forall x \in \mathbb{R}^d$

$$|b(t, x)| + \|G(t, x)\| \leq C_T (1 + |x|)$$

Alors $\forall p \geq 0 \quad \exists \tilde{C}_{T,p} > 0$ t.q. $\|\sup_{[0,T]} |X_t| \|_p + \|\sup_{[0,T]} |\bar{X}_t| \| \leq \tilde{C}_{T,p} (1 + \|X_0\|_p)$

Théorème Sous l'hypothèse additionnelle (par rapport à

(l'uniforme en temps Lipschitz en espace)

© Théo Jalabert

$$H_T^\beta = \begin{cases} (i) \forall x \in \mathbb{R}^d, \forall s, t \in [0, T] \quad |b(t, x) - b(s, x)| + |\sigma(t, x) - \sigma(s, x)| \leq C|t-s|^{\frac{\beta}{2}}(1+|x|) \\ (ii) \forall t \in [0, T] \quad \forall x, y \in \mathbb{R}^d \quad |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq C|x-y| \end{cases}$$

Alors pour tout $p > 0$

$$(a) \quad \left\| \max_{k=0:n} |\bar{X}_{t_k}^n - X_{t_k}| \right\|_p \leq \left\| \sup_{t \in [0, T]} |\bar{X}_t^n - X_t| \right\|_p \leq C_{\beta, \gamma, T, p} \left(\frac{T}{n} \right)^{\frac{\beta+1}{2}} (1 + \|X_0\|_p)$$

$$(b) \quad \left\| \sup_{t \in [0, T]} |X_t - \tilde{X}_t^n| \right\|_p \leq C_{T, p, \epsilon, \gamma} \left(\left(\frac{T}{n} \right)^{\frac{\beta+1}{2}} + \sqrt{\frac{1 + \log n}{n}} \right)$$

car

$$\left\| \sup_{t \in [0, T]} |\bar{X}_t^n - \tilde{X}_t^n| \right\|_p \leq C_{T, p, \epsilon, \gamma} \sqrt{\frac{1 + \log n}{n}} \quad \begin{array}{l} \text{Meilleure vitesse universelle} \\ \text{(atteinte avec } X_t = W_t) \end{array}$$

$$\underline{\text{Practitioner's corner}} \quad |E[\bar{f}(\bar{X}_T)] - E[f(X_T)]| \leq \|f\|_{Lip} \left\| \bar{X}_T - X_T \right\| \leq \|f\|_{Lip} C_1 \left(\frac{T}{n} \right)^{\frac{\beta+1}{2}} (1 + \|X_0\|_p)$$

$$\rightarrow E[F((X_t)_{t \in [0, T]})] \approx E[F((\tilde{X}_t)_{t \in [0, T]})] \leq \|F\|_{Lip} \left\| \sup_{t \in [0, T]} |\tilde{X}_t - X_t| \right\|_1 \leq$$

\uparrow est par morceaux

$$\leq C_p \|F\|_{Lip} \left(\left(\frac{T}{n} \right)^{\frac{\beta+1}{2}} + \sqrt{\frac{1 + \log n}{n}} \right)$$

Commentaires sur (b) du théorème, $p \geq 2$. En pratique $d=q=1$, $p=2$

$$b \equiv 0, \sigma \equiv 1, X_t = X_0 + W_t, \bar{X}_t = X_0 + W_t, \tilde{X}_t = X_0 + W_t$$

$$\sup_{t \in [0, T]} |X_t - \tilde{X}_t| = \sup_{t \in [0, T]} |W_t - W_t|$$

$$\| \dots \|_p = \| \sup_{k=1:n} \sup_{t \in [\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}]} |W_t - W_{t_k}| \|_p \leq \sqrt{\frac{T}{n}} \left\| \max_{k=1:n} \sup_{t \in [k, k+1]} |B_t^{(n)} - B_{t_k}^{(n)}| \right\|_p$$

But $\sqrt{\frac{1+\log n}{n}}$?

$$B_u^{(n)} = \sqrt{\frac{1}{T}} W_{\frac{T}{n}k} \quad \text{© Théophile Albert}$$

$$\left\| \sup_{t \in [0, T]} |X_t - \bar{X}_t| \right\|_p \geq \sqrt{\frac{1}{n}} \left\| \max_k |B_{k+1} - B_k| \right\|_p = \sqrt{\frac{1}{n}} \left\| \max_k |B_{k+1} - B_k|^2 \right\|_{p/2}^{1/2} \geq$$

Exercice (2_n) suite i.i.d. $\sim \mathcal{N}(0, 1)$, $n \geq 1$

$$\left\| \max_{k=1:n} |Z_k| \right\|_p \geq C_p \log n$$

$$\textcircled{2} \sqrt{\frac{1}{n} \log n} \geq C \sqrt{\frac{1}{n} \log n}$$

≤

Lemme Y_0, \dots, Y_{n-1} n.v.a de m̂ loi (pas forcément indép)

$$\exists \lambda_0 > 0 \text{ tq } E e^{\lambda_0 Y_0} < \infty \text{ alors } E \max_{k=1:n} Y_k \leq C_{\lambda, \lambda_0} (1 + \log n)$$

Preuve $E \max_{k=1:n} Y_k = \frac{1}{\lambda_0} E \max_{k=1:n} \lambda_0 Y_k = \frac{1}{\lambda_0} E \log (\max_k e^{\lambda_0 Y_k}) \stackrel{\text{Tensen}}{\leq} \frac{1}{\lambda_0} \log (E \max_k e^{\lambda_0 Y_k}) \leq$

$$\leq \frac{1}{\lambda_0} \log (\underbrace{E(e^{\lambda_0 Y_0} \cdots e^{\lambda_0 Y_n})}_{n E e^{\lambda_0 Y_0}}) = \frac{1}{\lambda_0} (\log n + \log E e^{\lambda_0 Y_0})$$

Idée appliquer à $Y_0 = \sup_{t \in [0, 1]} (B_t)^2$

$$\sup_{t \in [0, 1]} B_t^2 = \underbrace{(\sup_{t \in [0, 1]} B_t)^2}_{\geq 0} \vee \underbrace{(\sup_{t \in [0, 1]} (-B_t))^2}_{\geq 0} =$$

$$E e^{\lambda_0 \sup_{t \in [0, 1]} B_t^2} \leq e^{\lambda_0 (\sup B_1)^2} + e^{\lambda_0 (\sup (-B_1))^2}$$

$$E[e^{\lambda_0 \sup_{t \in [0, 1]} B_t^2}] \leq 2 E e^{\lambda_0 (\sup B_1)^2} = \{ \sup_{t \in [0, 1]} B_t \sim |B_1| \} = 2 E e^{\lambda_0 B_1^2}$$

$$E e^{\lambda_0 B_1^2} = \int e^{\lambda_0 x^2 - \frac{x^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \int e^{-\frac{1}{2}(1-2\lambda_0)x^2} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} = \frac{1}{\sqrt{1-2\lambda_0}} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 1 \quad \lambda_0 < \frac{1}{2}$$

p=2 Rappel $\left\| \max_k (B_t - B_k) \right\|_1 \leq C (1 + \log n)^{1/2}$

$$\text{Alors } \sup_{t \in [0, T]} \|W_t - W_0\|_\infty \leq C \sqrt{\frac{T}{n}} \sqrt{1 + \log n}$$

□

les majorations du (6) du thm sont "rate optimale"
(valide $\forall X_0$ diffusion)

Preuve de la proposition

$(X_t)_{t \in [0, T]}$ solution forte supposée exister

$L > 0$ $\tau_L = \inf\{t : |X_t - X_0| \geq L\} \wedge T$ temps d'arrêt d'un proc continu

→ aussi τ_L temps d'arrêt

$$\begin{aligned} X_t^{\tau_L} &= X_0 + \int_0^{\tau_L} b(X_s^{\tau_L}) ds + \int_0^{\tau_L} G(X_s^{\tau_L}) dW_s \\ (\frac{a+b+c}{3}) &\leq \frac{1}{3}(a+b+c) \end{aligned}$$

\downarrow

$$\sup |X_t^{\tau_L}|^2 \leq 3(X_0^2 + \underbrace{\sup \left(\int_0^{\tau_L} b(X_s^{\tau_L}) ds \right)^2}_{\{ \sup \left(\int_0^{\tau_L} b(X_s^{\tau_L})^2 ds \text{ et } \right)} +$$

$$+ \sup \left(\int_0^{\tau_L} G(X_s^{\tau_L}) dW_s \right)^2)$$

$\tau \leq \bar{\tau}$ temps d'arrêt
 $H = K$ sur $\{\tau, \bar{\tau}\} \Rightarrow$
 $\int_H dH_s = \int_K dK_s$ p.s.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \sup |X_t^{\tau_L}|^2 &\leq 3\mathbb{E} X_0^2 + T \int_0^{\tau_L} \mathbb{E} b(X_s^{\tau_L})^2 ds + \mathbb{E} \sup \left(\int_0^{\tau_L} G(X_s^{\tau_L}) dW_s \right)^2 \\ f_L(t) &\stackrel{\text{Doob}}{\leq} 4 \int_0^{\tau_L} \mathbb{E} G^2(X_s^{\tau_L}) ds \end{aligned}$$

$$f_L(t) \leq 3(\mathbb{E} X_0^2 + T \int_0^t \mathbb{E} b(X_s^{\tau_L})^2 ds + 4 \int_0^t \mathbb{E} G^2(X_s^{\tau_L}) ds) \leq \{ |b(x)|^2 + |G(x)|^2 \leq C(1 + |x|^2) \}$$

$$f_L(t) \leq 3(\mathbb{E} X_0^2 + T C(t + \int_0^t \mathbb{E} |X_s^{\tau_L}|^2 ds))$$

$\leq f_L(s)$

$$f_L(t) \leq C_{T, \epsilon, G, X_0} (X_0^2 + \int_0^t f_L(s) ds) \xrightarrow{\text{Brownian}} f_L(t) \leq e^{C_{T, \epsilon, G, K} t} C_{T, \epsilon, G, K} (1 + \mathbb{E} X_0^2)$$

$$t=7 \quad \mathbb{E} \sup |X_t^{\alpha_n}|^2 \leq C'_{7,6,\epsilon, X_0} (1+\mathbb{E} X_0^2) \quad \text{et ne dépend pas de } h$$

$$|X_t^{\alpha_n}| \leq |X_0| + L \text{ toutes les quantités} \quad \int_0^t \frac{\alpha}{s} f_b(X_s^{\alpha_n})^2 ds \leq C_{\theta, \epsilon, 7, L} < \infty$$

$L \rightarrow \infty \quad X_t^{\alpha_n} \rightarrow X_t \text{ car } \alpha_n \nearrow \infty \text{ car } t \mapsto X_t \text{ continue}$

Paron

$$\rightarrow \mathbb{E} \sup |X_t|^2 \leq \liminf_{[0,T]} \mathbb{E} \sup |X_t^{\alpha_n}|^2 \leq C'_{7,6,\epsilon, X_0} (1+\mathbb{E} X_0^2)$$

cas du schéma d'Euler authentique

$$\bar{X}_t^n = X_0 + \int_0^t b(\bar{X}_s^n) ds + \int_0^t G(\bar{X}_s^n) dW_s \text{ traj. continue}$$

$$\bar{\tau}^n = \inf \{t: |\bar{X}_t^n - X_0| > L\} \wedge T \quad \bar{\tau}_t^n = t \wedge T.$$

$$|\bar{X}_t^n - X_0| \leq L \quad |\bar{X}_t^n|^2 \leq |X_0|^2 + L.$$

$$\mathbb{E} X_0^2 = +\infty \Rightarrow \text{c'est fini}$$

$$\mathbb{E} X_0^2 < \infty \rightarrow \mathbb{E} |\bar{X}_t^n|^2 \leq 2(\mathbb{E} X_0^2 + L^2)$$

Recopie la preuve avec des \leq au lieu de \leq avec la \tilde{m} constante

$$\mathbb{E} |\bar{X}_s^{\tilde{\alpha}_n}|^2 \leq \mathbb{E} \sup_{u \leq s} |\bar{X}_u^{\tilde{\alpha}_n}|^2 \quad \text{et on continue}$$

\rightsquigarrow \tilde{m} majoration indépendamment du pas $\frac{T}{n}$ □

Preuve du théorème b, G Lipschitzennes $\rightarrow |b(x)| + |G(x)| \leq |b(0)| + |G(0)| + ((Lip_b + Lip_G)) |x| \leq C(1+|x|)$

$$X_t - \bar{X}_t^n = \int_0^t (b(X_s) - b(\bar{X}_s^n)) ds + \int_0^t (G(X_s) - G(\bar{X}_s^n)) dW_s$$

$$g(t) = \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s - \bar{X}_s|^2 \leq 2(\mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} |X_s|^2 + \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} |\bar{X}_s|^2) \stackrel{\text{proposition}}{\leq} C(1 + \mathbb{E} X_0^2) < \infty$$

$$g(t) \leq 2 \mathbb{E} \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\underbrace{\int_0^s [b(X_u) - b(\bar{X}_u)] du}_{\leq T \int_0^t [b(X_s) - b(\bar{X}_s)]^2 ds} \right)^2 + \sup_{0 \leq s \leq t} \left(\underbrace{\int_0^s [\sigma(X_s) - \sigma(\bar{X}_s)] dw_s}_{\leq 4 \mathbb{E} \int_0^t [\sigma(X_u) - \sigma(\bar{X}_u)]^2 du} \right)^2$$

comme b, σ Lipschitz

$$g(t) \leq 2 \left(\int_0^T [b]_{\text{Lip}}^2 \mathbb{E} (X_s - \bar{X}_s)^2 ds + 4 [\sigma]_{\text{Lip}}^2 \int_0^t \mathbb{E} |X_s - \bar{X}_s|^2 ds \right)$$

$$g(t) \leq C_{b,\sigma} \int_0^t \mathbb{E} (X_s - \bar{X}_s)^2 ds \leq C_{b,\sigma} \left(\int_0^t \underbrace{\mathbb{E} |X_s - \bar{X}_s|^2 ds}_{\leq g(s)} + \int_0^t \mathbb{E} |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|^2 ds \right)$$

$$g(t) \leq C_{b,\sigma} \int_0^t g(s) ds + C_{b,\sigma} \int_0^t \mathbb{E} |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|^2 ds$$

lemme de Gronwall

$$g(t) \leq e^{C_{b,\sigma} T} C_{b,\sigma} \int_0^T \mathbb{E} |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|^2 ds$$

$$\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}} = (s - \underline{s}) b(\bar{X}_{\underline{s}}) + \sigma(\bar{X}_{\underline{s}}) (W_s - W_{\underline{s}})$$

$$\mathbb{E} (\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}})^2 \leq \left(\frac{T}{n} \right)^2 \underbrace{\mathbb{E} b^2(\bar{X}_{\underline{s}})}_{\text{prop}\sigma} + \underbrace{\mathbb{E} G^2(\bar{X}_{\underline{s}})}_{\substack{\text{prop}\sigma \\ s - \underline{s} \leq \frac{T}{n}}} \underbrace{\mathbb{E} (W_s - W_{\underline{s}})^2}_{\leq \frac{T}{n}} \quad \textcircled{5}$$

$$\leq C_b (1 + \mathbb{E} X_0^2)$$

$$\mathbb{E} b^2(\bar{X}_{\underline{s}}) \leq C(1 + \mathbb{E} |\bar{X}_s|^2) \leq C(1 + \sup \mathbb{E} |\bar{X}_s|^2) \leq C'(1 + \mathbb{E} X_0^2)$$

$$\textcircled{5} \quad C''_{b,\sigma,T} \left(\frac{T}{n^2} + \frac{T}{n} \right) (1 + \mathbb{E} X_0^2)$$

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0,T]} |X_t - \bar{X}_t|^2 \leq C_{b,\sigma,T} \left(\frac{T}{n} \right) (1 + \mathbb{E} X_0^2)$$

Preuve du pt (b) Il suffit montrer ($d=q=1$, $p=2$)

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |\tilde{X}_t^n - \tilde{\bar{X}}_t^n|^2 \leq C \sqrt{\frac{1 + \mathbb{E} X_0^2}{n}} (1 + \mathbb{E} X_0^2)$$

$$\tilde{X}_t^n - \tilde{\bar{X}}_t^n = \tilde{X}_t^n - \bar{X}_{\underline{t}}^n = (t - \underline{t}) \mathbb{E}(X_{\underline{t}}^n) + \mathbb{O}(\bar{X}_{\underline{t}}^n)(W_t - W_{\underline{t}})$$

$$\mathbb{E} \sup_{t \in [0, T]} |\tilde{X}_t^n - \tilde{\bar{X}}_t^n|^2 \leq 2 \left(\mathbb{E} \sup_{\substack{t \\ \underline{t}}} (t - \underline{t})^2 \mathbb{E}^2(X_{\underline{t}}^n) \right) + \mathbb{E} \left[\sup_{[0, T]} G^2(\bar{X}_{\underline{t}}^n) (W_t - W_{\underline{t}})^2 \right] \leq \frac{T}{n}$$

$$\begin{aligned} & \leq 2 \left(\frac{T}{n} \right)^2 \underbrace{\mathbb{E} \sup_{[0, T]} |\mathbb{E}(X_{\underline{t}}^n)|^2}_{\leq C_{\ell, G, T} (1 + \mathbb{E} X_0^2)} + \underbrace{\mathbb{E} \left[\sup_{[0, T]} G^2(\bar{X}_{\underline{t}}^n) \right]^{1/2} \mathbb{E} \left[\sup_{[0, T]} (W_t - W_{\underline{t}})^2 \right]^{1/2}}_{\substack{\leq C_{\ell, G, T, p} \| \sup G(X_{\underline{t}}) \|_4^2 \cdot \| \sup (W_t - W_{\underline{t}}) \|_4^2 \\ \text{admet } p=2 \rightsquigarrow p=4}} \\ & \leq C_{\ell, G, T, p} \left(1 + \| K_0 \|_{L_2} \right) \left(\sqrt{\frac{1 + \mathbb{E} X_0^2}{n}} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E} \sup_{[0, T]} |X_t^n - \bar{X}_{\underline{t}}^n|^2 \leq C_{\ell, G, T, p}^{\text{gérable}} (1 + \mathbb{E} X_0^2 + \mathbb{E} X_0^4) \left(\left(\frac{T}{n} \right)^2 + \frac{1 + \mathbb{E} X_0^2}{n} \right)$$

3. Schéma de Milstein (ordre supérieure)

3.1. L'idée

$$d=q=1 \quad \text{et} \quad \ell(t, x) = b(x), \quad G(t, x) = G(x) \quad \ell, G \in C'_{Lip} = \{ f : f' \text{ Lipschitz} \}$$

$$X_t^x = x + \int_0^t \ell(X_s^x) ds + \int_0^t G(X_s^x) dW_s \quad t \rightarrow 0 ?$$

$$\int_0^t \ell(X_s^x) ds = \ell(x) \cdot t + \int_0^t (\ell(X_s^x) - \ell(x)) ds$$

$t \mapsto X_t^x(\omega)$ $\mathcal{P}(dw)$ -p.s. continue (on suppose que c'est le cas)

$$X_t^x \xrightarrow[t \rightarrow 0]{} x \rightarrow \ell(X_t^x) \rightarrow \ell(x) \rightarrow \ell(X_t^x) - \ell(x) = o(1)$$

$$\textcircled{1} \quad \text{donc } \underbrace{\int_0^t (f(X_s^x) - f(x)) ds}_{\tilde{\epsilon}} = \tilde{o}(t)$$

$\tilde{\epsilon}$ rejeté selon notre but

$$\sup_{0 \leq s \leq t} |f(X_s^x) - f(x)| \rightarrow 0$$

$$\textcircled{2} \quad \text{On suppose } G \in C^2$$

$$G^2(X_s^x) ds$$

$$\begin{aligned} G(X_t^x) &= G(x) + \int_0^t G'(X_s^x) dX_s^x + \frac{1}{2} \int_0^t \overbrace{G''(X_s^x)}^{G^2(X_s^x) ds} d\langle X^x \rangle_s = \\ &= G(x) + \underbrace{\int_0^t (G' f + \frac{1}{2} G^2 G'')}_{\text{continue}} ds + \int_0^t G' dW_s \\ &\sim (G' f + \frac{1}{2} G^2 G'')(x) \cdot t + \underbrace{\int_0^t dW_s}_{\mathbb{E}[\dots] = O(t^2)} \\ \int_0^t G(X_s^x) dW_s &= G(x) W_t + \underbrace{\int_0^t \alpha(s) dW_s}_{\mathbb{E}[\dots] = O(t^{3/2})} + \iint_0^t \overbrace{G' G(X_u^x) dW_u dW_s}^{G G'(x)} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[\dots] = O(t^2)$$

$$\text{Var}[\dots] = O(t^{3/2}) \rightarrow \text{rejeté}$$

$$\iint_0^t \underbrace{(f(G(X_u^x)) - G'(x)) dW_u dW_s}_{\Phi = 0} + G G'(x) \iint_0^t dW_u dW_s$$

$$\iint_0^t dW_u dW_s = \int_0^t W_s^2 ds = \frac{1}{2} (W_t^2 - t) \rightarrow G G'(x) \iint_0^t dW_u dW_s = \frac{1}{2} G G'(W_t^2 - t)$$

$$\textcircled{3} \quad \left(\iint_0^t \Phi dW_u dW_s \right)^2 = \iint_0^t \underbrace{\Phi^2 du ds}_{O(1)} = \tilde{o}(t^2) \rightarrow \| \dots \|_2 = \tilde{o}(t) \Rightarrow \text{on néglige}$$

$$X_t^x = x + f(x)t + G(x)W_t + \frac{1}{2} G G'(x) (W_t^2 - t) + \tilde{o}_L(t)$$

Schéma de Milstein = Dériv. limitée en t petit ($\ln L^2$) + pp-lé de Markov

$$t_n = k \frac{T}{n} = kh$$

$$\bar{X}_{t_{k+1}}^{\text{mil}} = \bar{X}_{t_k}^{\text{mil}} + b(\bar{X}_{t_k}^{\text{mil}})(t_{k+1} - t_k) + G(\bar{X}_{t_k}^{\text{mil}})(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \frac{1}{2} \sigma G'(\bar{X}_{t_k}^{\text{mil}})((\Delta W_{k+1}^2) - h)$$

$$\bar{X}_{t_0}^{\text{mil}} = x$$

Schéma en temps continu

$$\bar{X}_t^{\text{mil}} = \bar{X}_{\underline{t}}^{\text{mil}} + (t - \underline{t}) b(\bar{X}_{\underline{t}}^{\text{mil}}) + G(\bar{X}_{\underline{t}}^{\text{mil}})(W_t - W_{\underline{t}}) + \frac{1}{2} \sigma G'(\bar{X}_{\underline{t}}^{\text{mil}})((W_t - W_{\underline{t}})^2 - (t - \underline{t}))$$

Théorème $b, G \in C_{Lip}' = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq } f' \text{ Lipschitz}\}$

(a) $\forall p > 0$ ordre I!

$$\left\| \sup_{[0, T]} |X_t - \bar{X}_t^{\text{mil}}| \right\|_p \leq C_{b, G, T, p} \left(\frac{T}{n} \right) (1 + \|X_0\|_p)$$

$$\left\| \max_k \left| X_{t_k} - \bar{X}_{t_k}^{\text{mil}} \right| \right\|_p$$

$\|X_T - \bar{X}_T^{\text{mil}}\|$ schéma constant
par morceaux (Simulab)

$$(b) \left\| \sup_{[0, T]} |X_t - \bar{X}_t^{\text{mil}}| \right\|_p \leq C_{b, G, T, p} \left(\frac{T}{n} \right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{1 + \log n} \quad (\text{au moins une borne universelle})$$

Rem • $b=0, G=1, X_t = W_t$

$$\bar{X}_{t_k}^{\text{mil}} = W_{t_k} \text{ et } \bar{X}_t^{\text{mil}} = (W_t - W_{\underline{t}}) + W_{\underline{t}} = W_t$$

$$(A \asymp B : \frac{1}{C} B \leq A \leq CB)$$

$$\left\| \sup_{[0, T]} |X_t - \bar{X}_t^{\text{mil}}| \right\|_p = \left\| \sup_{[0, T]} |W_t - W_{\underline{t}}| \right\|_p \asymp C \sqrt{\frac{1 + \log n}{n}}$$

• $b(t, x)$ et $G(t, x)$

$$|b(t, x) - b(s, x)| + |G(t, x) - G(s, x)| \leq C_{b, G} |t-s|^{\beta} (1 + |x|)$$

Le théorème reste vrai avec $\left(\frac{T}{n} \right)^{\beta+1}$

$$\bullet \quad b(t, x) = b(x) \quad \sigma(t, x) = \sigma(x)$$

$b, \sigma \in C^{1,2}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f' \text{ Lipschitz}\}$ alors le thm est vrai.

avec $(\frac{T}{n})^k$ au lieu de $\frac{T}{n}$

• Si $\sigma = \text{const}$ alors $\sigma' = 0$ et Euler = Milstein.

Dans ce cas la schéma d'Euler est d'ordre 1.

3.2. Le cadre multidimensionnel

Soient $d=1$ et $q=2$, $b=0$ $W^1 \perp W^2$

$$X_t^x = x + \int_0^t \sigma_1(X_s^x) dW_s^1 + \int_0^t \sigma_2(X_s^x) dW_s^2 \stackrel{!}{=} x + \int_0^t (\sigma_1(X_s^x)^2 + \sigma_2(X_s^x)^2)^{1/2} dB_s$$

! solution faible

O.L. en tps petit ($t \rightarrow 0$)

$$\begin{aligned} \int_0^t \sigma_1(X_s^x) dW_s^1 &= \sigma_1(x) W_t + \underbrace{\iint_0^t (\sigma_1'' b + \frac{1}{2} (\sigma_1^2 + \sigma_2^2) \sigma_1'') du dW_s^1}_{+} \\ &+ \underbrace{\iint_0^t \sigma_1'' \sigma_1 dW_u^1 dW_s^1}_{+} + \underbrace{\iint_0^t \sigma_1' \sigma_2 dW_u^1 dW_s^2}_{+} \\ &\approx (\sigma_1, \sigma_2)(x) \iint_0^t dW_u^1 dW_s^1 \quad \approx (\sigma_1, \sigma_2)(x) \iint_0^t dW_u^2 dW_s^1 \end{aligned}$$

Aire de Iévy = $\int_0^t W_s^1 dW_s^2$ et on a besoin de $\int_0^t W_s^2 dW_s^1$

Pas de méthodes efficace (en termes de répart., précision)

pour simuler cet objet.

$$\bar{X}_{t_{k+1}}^{m.l} = \bar{X}_{t_k}^{m.l} + h b(\bar{X}_{t_k}^{m.l}) + \sigma(\bar{X}_{t_k}^{m.l}) \Delta W_{t_k \rightarrow t_{k+1}} + \sum_{1 \leq i, j \leq q} \partial_{G_{i,j}} G_{i,j}(\bar{X}_{t_k}^{m.l}) \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s^i - W_{t_k}^i) dW_s$$

où $\partial_{G_{i,j}} G_{i,j}(x) = \sum_{\ell=1}^d \frac{\partial G_{i,j}}{\partial x^\ell} G_{i,j} \in \mathbb{R}$

Rem Hypothèse de symétrie $\partial G_{i,j} G_{j,i} = \partial G_{j,i} G_{i,j} \forall i, j$ alors

$$\begin{aligned} \partial G_{i,j} G_{j,i} & \left(\int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s^i - W_{t_k}^i) d(W_s^j - W_{t_k}^j) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} (W_s^j - W_{t_k}^j) d(W_s^i - W_{t_k}^i) \right) \\ & = \Delta W_{t_k \rightarrow t_{k+1}}^i \Delta W_{t_k \rightarrow t_{k+1}}^j - \underbrace{\langle W_{t_k \rightarrow t_{k+1}}^i - W_{t_k}^i, W_{t_k \rightarrow t_{k+1}}^j - W_{t_k}^j \rangle}_{=0 \text{ si } i \neq j \text{ car les MBS sont indépendants.}} \end{aligned}$$

Si $G_{i,j}(x) - G_{j,i} = \text{const}$ alors Milstein = Euler

Exercice Modèle de BS vérifie l'hypothèse de commutativité

Théorème $X_t^x = x + \int_0^t b(X_s^x) ds + \sum_{j=1}^q \int_0^t \sigma_{i,j}(X_s^x) dW_s$ $b = (b_1, \dots, b_d)$ sont C_{lip}^1 , $\sigma = (\sigma_{i,j})$ les dérivées partielles sont Lipschitz

alors Milstein (d,q) a les mêmes propriétés que Milstein (1,1)

4. Convergence p.s. des schémas

Si p assez grand

Exercice $X_0 \in \bigcap_{p>0} L^p(\mathbb{P})$ $\sum_{n \geq 1} \mathbb{E} \sup |X_t - \bar{X}_t^n|^p < +\infty$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\dots] < \infty & \rightarrow \sum_{n \geq 1} \sup |X_t - \bar{X}_t^n|^p < +\infty \text{ p.s.} \\ \rightarrow \sup |X_t - \bar{X}_t^n| & \rightarrow 0 \end{aligned}$$

5. Erreur faible

$\mathbb{E} f(X_T)$ X_T pas simulable direct^t copies i.i.d. de \bar{X}_T^n

$\mathbb{E} f(\bar{X}_T^n)$ \bar{X}_T^n simulable $\Rightarrow \frac{1}{M} \sum_{m=1}^M f((\bar{X}_T^n)_m)$ Mgrand

But Bias le plus faible possible i.e. $\mathbb{E} f(X_T) - \mathbb{E} f(\bar{X}_T^n)$ aussi

petit que possible et aussi l'estimer

à la date t Si f est Lipschitz s.c.m (sous certaines conditions math.)

$$|\mathbb{E} f(X_T) - \mathbb{E} f(\bar{X}_T^n)| \leq \|f\|_{Lip} \mathbb{E} |X_T - \bar{X}_T^n| \leq \|f\|_{Lip} \frac{\ell_{\infty, T, 1}}{\sqrt{n}}$$

Ceuler en $\frac{1}{n}$ pour Lipschitz

Peut-on faire mieux? Oui!

"erreur faible" le long d'une certaine de tel (ici Lipschitzennes)

Théorème (a) $b, \sigma \in C_B^4$ i.e. dérivées partielles de b et σ sont bornées aux ordres $k=1:4$

$f \in C_{pol}^4$ les dérivées part. sont polynomiales

$(\bar{X}_t^n)_{t \in [0, T]}$ schéma d'Euler de pas $\frac{T}{n}$

$$\mathbb{E}[f(\bar{X}_T^n)] = \mathbb{E}[f(X_T)] + O\left(\frac{1}{n}\right) \quad \left[\begin{array}{l} \text{Si } C^5 \text{ au lieu de } C^4 \\ \Rightarrow \mathbb{E}[f(X_T)] + \frac{c_1}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right) \end{array} \right]$$

(b) (Talay-Tubrus) : $b, \sigma \in C_B^{R+4}$ $f \in C_{polyn}^{R+4}$ alors

$$\mathbb{E} f(\bar{X}_T^n) = \mathbb{E} f(X_T) + \sum_{k=1}^R \frac{c_k(f, g)}{n^k} + O\left(\frac{1}{n^{R+1}}\right) \quad (\mathcal{E}_{R+1})$$

(c) (Bally-Talay) $\mathbb{E} f(x + W_t) = f * g_1(x)$ densité gaussien

$b, \sigma \in \mathcal{C}_b^\infty$ (tout le monde est borné y compris b et σ)

f borélienne bornée

et en autre $\exists \varepsilon_0 > 0$ t.q. $\forall x \in \mathbb{R}^d \quad G^*(x) \geq \varepsilon_0 I_d \quad (u^* A u \geq \varepsilon_0 \|u\|^2)$

l'uniforme ellipticité sur \mathbb{Q}

alors $\forall R \in \mathbb{N}^+ \quad (\mathcal{E}_{R+1})!$

Rem ellipticité $\Rightarrow q \geq d$

Principe de démonstration de (a) et (b)

Etape 1 Formule de Feynman-Kac $X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$

$d=q=1$ Générateur infinitesimal de diffusion

$$g: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad \mathcal{C}^{1,2}$$

$$\mathcal{L}g(t, x) = b(t, x) \partial_x g(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) \partial_x^2 g(t, x)$$

$u \in \mathcal{C}^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ sol. classique de l'EDP parabolique

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u \right)(t, x) = 0 & (t, x) \in [0, T] \times \mathbb{R} \\ u(T, \cdot) = f \end{cases}$$

$$f(X_T) = u(T, X_T) = u(t, X_t) + \int_t^T \underbrace{\left(\frac{\partial u}{\partial t}(s, X_s) + \mathcal{L}u(s, X_s) \right)}_{\equiv 0} ds + \int_t^T \frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s) G(s, X_s) dW_s$$

$$u(t, X_t) = f(X_T) - \int_t^T \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(s, X_s) G(s, X_s)}_{M_T - M_t} dW_s$$

$$(M_t)_{t \geq 0} \quad X_0 \in L^p \quad \forall p \Rightarrow X_t \in L^p \quad \| \partial_x u(t, x) \| \leq C_k (1 + |x|^{-1})$$

→ une vraie martingale $\Rightarrow u(t, X_t) = \mathbb{E}[f(X_T) | \mathcal{F}_t^W]$

$$\{ \mathbb{E}[-|X_t|] \}$$

$$u(t, X_t) = \mathbb{E}[f(X_T) | X_t]$$

① $X_0 = x \quad t=0 \quad u(0, x) = \mathbb{E}[f(X_T)]$

② $t > 0 \quad X_0$ déterministe q.q. $((X_t))$ prop. de Markov

$$\mathbb{E}[f(X_T) | \mathcal{F}_t^W] = \mathbb{E}[f(X_T) | X_t] = u(t, X_t)$$

$u(t, y) = \mathbb{E}[f(X_T) | X_t = y] \Rightarrow u(t, y)$ version régulière de l'espérance conditionnelle

③ $(X_s^{t,x})_{0 \leq s \leq T-t}$ l'unique solution forte de l'EoS partout de x en t .

Si on "traduit" ① avec cette solution, $u(t, y) = \mathbb{E}[f(X_T^{t,y})]$

En particulier, si $b(t, x) = b(x)$ et $G(t, x) = G(x)$

$$(X_s^{t,y})_{0 \leq s \leq T-t} \underset{\mathcal{L}}{\sim} (X_s^y)_{0 \leq s \leq T-t} \quad (\text{exo!})$$

Solution de \hat{m} équation avec \hat{n} MB différents

$$(W_{t+s} - W_t)_{0 \leq s \leq T-t} \text{ et } (W_s)_{0 \leq s \leq T-t}$$

"unicité forte (trajectorielle)" \rightarrow "unicité faible" i.e. en lo?

Etape 2 (l'erreur faible elle-même)

$$\mathbb{E} f(\bar{X}_T^{n,x}) - \mathbb{E} f(X_T) = \mathbb{E} u(T, \bar{X}_T^{n,x}) - u(qx) = \sum_{k=0}^{n-1} \mathbb{E} [u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}}^{n,x}) - u(t_k, \bar{X}_{t_k}^{n,x})]$$

Itô à u entre t_k et t_{k+1}

$$u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}}^{n,x}) - u(t_k, \bar{X}_{t_k}^{n,x}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{L}u \right)(s, s, \bar{X}_s^n, \bar{X}_s^n) ds + \Delta M_{t_{k+1}}$$

mart.
locale

$$\bar{L}u(s, s, \bar{X}_s^n, \bar{X}_s^n) = b(s, \bar{X}_s^n) \partial_x u(s, \bar{X}_s^n) + \frac{1}{2} G^2(s, \bar{X}_s^n) \partial_{xx} u(s, \bar{X}_s^n)$$

u solution de l'EDP

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \bar{L}u \right)(t, x) = 0 \rightarrow \frac{\partial u}{\partial t}(s, \bar{X}_s^n) = -\bar{L}u(s, \bar{X}_s^n)$$

$$\mathbb{E} \left[u(t_{k+1}, \bar{X}_{t_{k+1}}^{n,x}) - u(t_k, \bar{X}_{t_k}^{n,x}) \right] = \int_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E} \left[(\bar{L}u - L_u)(s, s, \bar{X}_s^n, \bar{X}_s^n) \right] ds + \mathbb{E} \gamma M_{t_{k+1}}^0$$

$$\mathbb{E} \underbrace{\frac{\partial u}{\partial x}(s, \bar{X}_s^n) \left(b(s, \bar{X}_s^n) - b(s, \bar{X}_s^n) \right)}_{\text{↑ Itô à ces } \approx \text{ accrois.}} + \underbrace{\frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(s, \bar{X}_s^n) \left(G(s, \bar{X}_s^n) - G(s, \bar{X}_s^n) \right)}_{\text{↑}}$$

+ estimations "fortes" associées au schéma d'Euler $\|\bar{X}_s^n - \bar{X}_s^n\| \rightarrow$

Pourquoi $\frac{1}{n}$? Idée: on applique Itô 2 fois $n \cdot \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$
 $\rightarrow O(\frac{1}{n})$ uniforme en $k=0, \dots, n-1$ (cf. livre)

$$\mathbb{E} \left[f(\bar{X}_T^{n,x}) - f(X_T^x) \right] = \sum_{t_k}^{t_{k+1}} \mathbb{E} \left[O\left(\frac{1}{n}\right) ds \right] = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

□

On a "montré" le (a), (b) est admis par des méthodes similaires

(c) relève du calcul de Malliavin.

6 Extrapolation de Richardson-Rembag

car les solutions sont construites sur le m
espace de proba

Diffusion solution forte d'EDS avec les bonnes pp-tés

Schémas d'Euler de pas $\frac{T}{n}$ et $\frac{T}{2n}$

$R=1$ $f \in C_{\text{pol}}^5(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ $\theta, 5 \dots$

$$\mathbb{E}[f(\bar{X}_T^{n,x})] = \mathbb{E}[f(X_T^x)] + \frac{c_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\mathbb{E}[f(\bar{X}_T^{2n,x})] = \mathbb{E}[f(X_T^x)] + \frac{c_1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\begin{aligned} u_n &= \ell + \frac{c_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \\ u_{2n} &= \ell + \frac{c_1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \rightarrow 2u_{2n} - u_n = \ell + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$2\mathbb{E}[f(\bar{X}_T^{2n,x})] - \mathbb{E}[f(\bar{X}_T^{n,x})] = \mathbb{E}[f(X_T^x)] + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \quad \begin{array}{l} \text{meta-schéma d'ordre} \\ \text{à faible} \end{array}$$

Pratique

$$\mathbb{E}[f(X_T^x)] \approx \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M [2f((\bar{X}_T^{n,x})_k) - f((\bar{X}_T^{n,x})_k)] \quad \begin{array}{l} \text{avant} \\ \text{biais de } \frac{c_1}{n} \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{après} \\ O\left(\frac{1}{n^2}\right) \end{array}$$

⚠ Question de la variance?

$$\text{Var}[\dots] = \frac{1}{M} \text{Var}[2f(\bar{X}_T^{n,x}) - f(\bar{X}_T^{n,x})]$$

$$\begin{array}{ccc} \text{2 façons} & \longrightarrow & 1) (\bar{X}_{t_n}^{2n,x}) \text{ et } (\bar{X}_{t_n}^{n,x}) \\ & & W^{(1)} \qquad \qquad W^{(2)} \end{array} \quad \begin{array}{l} \rightarrow \text{Var}[2f(\bar{X}_T^{2n,x}) - f(\bar{X}_T^{2n,x})] = \\ \approx 5 \text{Var}[f(\bar{X}_T^{2n,x})] \end{array}$$

2) Si on suppose que le W ss-jacent à $(\bar{X}_{t_n}^{2n,x})_k$ et $(\bar{X}_{t_n}^{n,x})_k$

est le même alors $(\bar{X}_t^{2n,x})_t \xrightarrow{L^2(P)} (X_t^x)$

$(\bar{X}_t^{n,x})_t \xrightarrow{L^2(P)} (X_t^x)$ $\forall p > 0$

donc si f raisonnабlement régulière $|f(x) - f(y)| \leq C|x-y|(1+|x|^p + |y|^p)$

$$\text{alors } \mathbb{V}\text{ar}[2f(X_T^{n,x}) - f(X_T^{n,x})] \rightarrow \mathbb{V}\text{ar}[2f(X_T^x) - f(X_T^x)] = \mathbb{V}\text{ar}[f(X_T^x)]$$

© Théo Lalabastier Habert

pas de dérivée de la vov

1) Simuler $W_{t_{k+1}}^{z_n} - W_{t_k}^{z_n} = \sqrt{\frac{T}{z_n}} Z_{k+1}$, $Z_n \text{ i.i.d } \mathcal{N}(0, I_q)$

$\left. \begin{array}{l} \text{accroissements} \\ \text{cohérents} \end{array} \right\}$

2) $W_{t_{k+1}}^{z_n} - W_{t_k}^{z_n} = (W_{t_{k+1}}^{z_n} - W_{t_{2k+1}}^{z_n}) + (W_{t_{2k+1}}^{z_n} - W_{t_k}^{z_n})$

Pour aller + loin 2 types d'extension

→ Multistep tuer le biais $\rightarrow Rss (C_{RH})$

→ Multiniveau (multi-level): contrôle de la variance (C_{RH})

Chapitre III. Back to pricing (payoffs, trajectoire-dépendant)

$$F: D([0,T], \mathbb{R}^d) \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{fonctionnelle}$$

$$(t \mapsto \lambda(t)) \mapsto F(\lambda)$$

Calculer $E[F((X_t))]$ (X_t) diffusion (solu d'EDS Brownienne)
traç-dépendant

→ $E[F((\bar{X}_t^n)_t)]$ jamais simulable (sans parler de calcul de F) Idée: simuler directement $F(\bar{X}^n)$

→ $E[F((\tilde{X}_t^n))]$ toujours simulable
 $F \parallel \|\cdot\|_{sup}-Lipschitz$ (ou loc^t Lipschitz avec r contrôlé)

$$|E[F((\tilde{X}_t^n))] - E[F((X_t))]| \leq E|F(\tilde{X}^n) - F(X)| \leq$$

$$\leq [F]_{Lip} E \sup |X_t - \tilde{X}_t^n| \leq [F]_{Lip} C_{t, \epsilon, \sigma} \left(\left(\frac{T}{n}\right)^{\beta + \frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1 + \log n}{n}} \right)$$

1 Qq exemples de résultats théoriques erreur faible

© Théo Jalabert

Théorème (Bobet, Ph.D)

(a) \mathcal{D} domaine borné de \mathbb{R}^d , $\partial\mathcal{D}$ est C^3 (^{paramétrisable loc^t} par les set C^3)

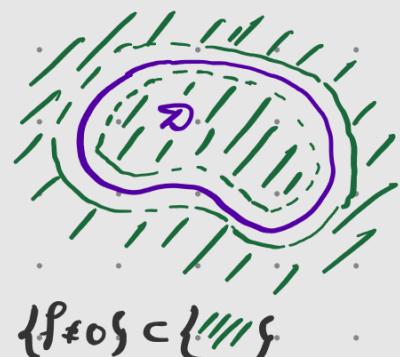
$b, \sigma \in C^3(\mathbb{R}^d)$ σ unif^t elliptique ($\forall x \in \mathbb{R}^d \quad \sigma^{-1}(x) \geq \xi_0 \text{ Id}, \xi_0 > 0$)

$\forall f \in C^3(\mathbb{R}^d)$ t.q. $f \equiv 0$ au "voisinage" du $\partial\mathcal{D}$ ($\exists \xi_0 > 0 \quad d(x, \partial\mathcal{D}) < \xi_0 \Rightarrow f(x) = 0$)

$$\forall x \in \mathcal{D} \quad \mathbb{E} f(\bar{x}_T^n)^+ \mathbb{1}_{\{\alpha_{\mathcal{D}}(\bar{x}^n) > T\}} =$$

$$= \mathbb{E} f(x_T^n) \mathbb{1}_{\{\alpha_{\mathcal{D}}(x) > T\}} + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

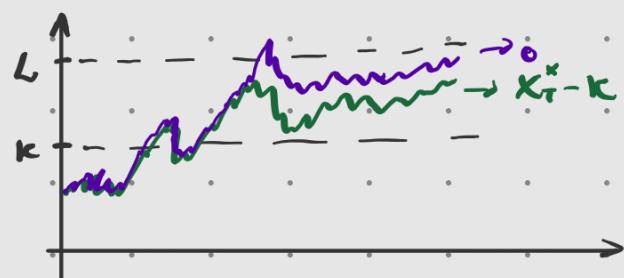
où $\alpha_{\mathcal{D}} = \inf \{s : \lambda(s) \in \mathcal{D}\}$



$$\mathbb{E} f(\bar{x}_T^n)^+ \mathbb{1}_{\{\alpha_{\mathcal{D}}(\bar{x}^n) > T\}} = \mathbb{E} f(x_T^n) \mathbb{1}_{\{\alpha_{\mathcal{D}}(x) > T\}} + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

Exemple Options barrières call-up-and-out

$$(X_T^n - K)^+ \mathbb{1}_{\{\sup_{t \in [0, T]} X_t^n \leq L\}} \\ \text{P.S. } \alpha_{[0, L]} > T$$



Ce n'est pas le cas de them, mais on peut utiliser la parité put-call et la parité pour les options barrières.

Thm ($d=1$) (n'est pas encore démontré)

(a) $b, \sigma \in C^1_b(\mathbb{R})$, σ uniformément elliptique et $f \in C^2_{\text{pol}}(\mathbb{R}^2)$

Alors $\mathbb{E} f(X_T, \sup_{[0,T]} X_t) = \mathbb{E} f(\bar{X}_T^n, \max_{k=0 \dots n} \bar{X}_{t_k}^n) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
 $f(\bar{X}_T^n, \sup \bar{X}_t^n) = O\left(\frac{1}{n}\right) \leftarrow \text{conjecture}$

(b) (Altomisi - Tournadre - Kohatsu - Hoja) + régularité $= O(n^{-2/3})$

Méthode du pont de diffusion

1) On ne peut pas simuler $(\bar{X}_t^n)_{[0,T]}$ authentique.

2) On peut espérer simuler une fonctionnelle $F((\bar{X}_t^n))$ où

$$F: \begin{cases} D([0,T], \mathbb{R}^d) \\ \text{ou} \\ C([0,T], \mathbb{R}^d) \end{cases} \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{pour de } F \text{ bien choisi}$$

Principe de si

Proposition W MBS $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s, s \leq t, \mathcal{N}_P)$.

$\forall T > 0$ fixé on pose: $\forall t \in [0, T] \quad Y_t = W_t - \frac{t}{T} W_T$

(a) $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ processus gaussien centré vérifiant

(i) (Y_t) est \mathcal{F}_t^W -mesurable $Y_t \in \mathcal{F}_t^W$

(ii) $(Y_t)_{t \in [0, T]}$ est indépendant de $(W_s)_{s \geq T}$

(iii) La loi de $(Y_t)_{[0, T]}$ est donc entièrement caractérisée par sa fonction de covariance $\forall s, t \in [0, T] \quad \mathbb{E}[Y_s Y_t] = s t - \frac{s t}{T}$

$$(B) \quad 0 < T_0 < T_1 : \mathcal{L}\left(\left(W_t\right)_{t \in [T_0, T_1]} \mid \left(W_s\right)_{s \in [T_0, T_1]^c}\right) = \mathcal{L}\left(\left(W_t\right)_{t \in [T_0, T_1]} \mid W_{T_0}, W_{T_1}\right)$$

En autre, la loi conditionnelle située à droite a une version régulière $\mathcal{L}\left(\left(W_t\right)_{t \in [T_0, T_1]} \mid W_T = x, W_{T_1} = y\right) = \mathcal{L}\left(\left(x + \frac{t-T_0}{T_1-T_0}(y-x) + Y_{t-T_0}^{B, T_1-T_0}\right)_{t \in [T_0, T_1]}\right)$

Démo (a) gaussien OK. centré $E[Y_t] = EW_t - \frac{t}{T}EN_T = 0$

$$(i) \quad Y_t \in \mathbb{F}_T^W \text{ car } W_t \in \mathbb{F}_t^W \subset \mathbb{F}_T^W, W_T \in \mathbb{F}_T^W$$

$$t \in [0, T], s \geq T \quad E[Y_t W_s] = E[W_t W_s - \frac{t}{T} N_T W_s] = t s - \frac{t}{T} \cdot T = 0$$

$$\forall t \in [0, T] \quad \forall s \geq T \quad Y_t \perp \mathbb{F}_s^W$$

$((Y_t), (W_t))$ processus gaussien $\left(\overline{\text{vect}\{W_u, u \geq 0\}} \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P) \right)$

$$\text{donc } (Y_t)_{t \in [0, T]} \perp \mathbb{F}_{s \geq T}^W$$

$$(iii) \quad \text{cov}(Y) = C_Y = \left([0, T]^2 \ni (s, t) \mapsto E[Y_s Y_t] \right)$$

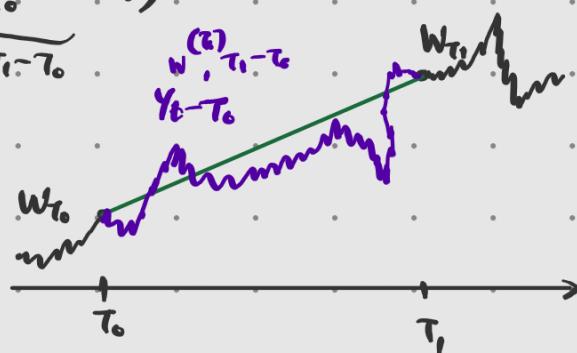
$$E[Y_s Y_t] = E\left[\left(W_s - \frac{s}{T} W_T\right)\left(W_t - \frac{t}{T} W_T\right)\right] = s t - \frac{s t}{T} - \frac{t s}{T} + \frac{s t}{T^2} T = s t - \frac{s t}{T}$$

$$(b) \quad t \in [T_0, T_1] \quad W_t = W_{T_0} + \frac{t-T_0}{T_1-T_0} (W_{T_1} - W_{T_0}) + W_{T_0+(t-T_0)} - W_{T_0} - \frac{t-T_0}{T_1-T_0} (W_{T_0+(T_1-T_0)} - W_{T_0}) =$$

$$= \left\{ W_t^{(T_0)} = W_{T_0+t} - W_{T_0} \right\} = \underbrace{\dots}_{Y_{t-T_0}^{W, T_1-T_0}} + \left(W_{t-T_0}^{(T_0)} - \frac{t-T_0}{T_1-T_0} W_{T_1-T_0}^{(T_0)} \right) \text{ où } Y_t^{B, T} = B_t - \frac{t}{T} B_T$$

$$W_t = W_{T_0} + \frac{t-T_0}{T_1-T_0} (W_{T_1} - W_{T_0}) + Y_{t-T_0}^{W, T_1-T_0}$$

$$W_t^{(T_0)} \perp \mathbb{F}_{T_0}^W \text{ donc } (Y_{t-T_0}^{W, T_1-T_0}) \text{ mesur. par}$$



rapport à $\Phi_{T_0}^W \rightarrow (Y_{t-T_0}^{W^{(T)}})_{t \in [T_0, T_1]} \perp \Phi_{T_0}^W (\Leftrightarrow Y_t \perp W_u)$ \rightarrow

© Théo Jalabert 

$Y_t^{W^{(T)}, T_1 - T_0}$

$$Y_t^{W^{(T)}, T_1 - T_0} \perp W_{T_0 + u} = W_{T_0 + u} - W_{T_0} + W_{T_0}, \forall u \geq T_1 - T_0$$

$$Y_t^{W^{(T)}, T_1 - T_0} \perp \mathbb{E}[W_u] \quad \forall u \geq T_1 - T_0$$

$$\rightarrow (Y_{t-T_0}^{W^{(T)}, T_1 - T_0})_{t \in [T_0, T_1]} \perp \mathbb{E}[W_u]_{u \in T_0 \text{ et } u \geq T_1} = (W_u)_{u \in [T_0, T_1]^c}$$

$$\mathcal{L}\left((W_t)_{t \in [T_0, T_1]} \mid (W_s)_{s \in [T_0, T_1]^c}\right) = \mathcal{L}\left((W_t)_{t \in [T_0, T_1]} \mid W_{T_0}, W_{T_1}\right)$$

$$W_t = W_{T_0} + \underbrace{\frac{t-T_0}{T_1-T_0}(W_{T_1} - W_{T_0})}_{\in \mathcal{G}(W_{T_0}, T_1)} + \underbrace{Y_{t-T_0}^{W^{(T)}, T_1 - T_0}}_{\perp \mathcal{G}(W_u, u \in [T_0, T_1]^c)}$$

$$\mathcal{L}\left((W_t)_{t \in [T_0, T_1]} \mid W_{T_0} = x, W_{T_1} = y\right) = \mathcal{L}\left((x + \frac{t-T_0}{T_1-T_0}(y-x) + Y_{t-T_0}^{B, T_1 - T_0})\right)$$

□

Version "Schéma d'Euler"

$$d = q = 1$$

Proposition (admise mais naturelle...)

Avec les notations habituelles et sous l'hypothèse $\forall t \forall x \mathcal{G}(t, x) \neq 0$

(a) Les $(\bar{X}_t)_{t \in [t_n, t_{n+1}]} \quad k=0, \dots, n-1$ sont conditionnellement indépendants

sachant les $(\bar{X}_{t_k})_{k=0:n}$.

$$\forall F_k \in \mathcal{C}([t_n, t_{n+1}], \mathbb{R}) \quad \mathbb{E}\left[\prod_{k=0}^{n-1} F_k((\bar{X}_t^n)_{t \in [t_k, t_{k+1}]}) \mid \mathcal{G}(\bar{X}_{t_k}^n, k=0:n)\right] =$$

$$= \prod_{k=0}^n \mathbb{E}\left[F_k((\bar{X}_t^n)_{t \in [t_k, t_{k+1}]}) \mid \bar{X}_{t_k}^n, \bar{X}_{t_{k+1}}^n\right]$$

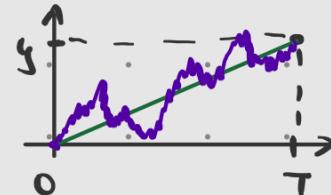
$$(6) \quad \mathcal{L}\left(\left(\bar{X}_t^n\right)_{t \in [t_n, t_{n+1}]}\mid \bar{X}_{t_n}=x, \bar{X}_{t_{n+1}}=y\right) = \mathcal{L}\left(\left(x + \frac{t-t_n}{(T/n)}(y-x) + G(t_n, x_n)Y_{t-t_n}^{B_{t_n}^{\beta}}\right)_{t \in [t_n, t_{n+1}]}\right)$$

En pratique, $B = W_t^{t_n}$

Que faire avec tout ça?

Etendue la notion du pont Brownien

$$Y_t^{W,T,y} = W_t - \frac{t}{T}(W_T - y) = Y_t^{W,T} + \frac{t}{T}y$$



Proposition (a) $\mathcal{L}\left(\left(Y_t^{W,T,y}\right)_{t \in [0,T]}\right) = \mathcal{L}\left(\left(W_t\right)_{t \in [0,T]} \mid W_T = y\right)$

$$(6) \quad \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} Y_t^{W,T,y} \geq \xi\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} W_t \geq \xi \mid W_T = y\right) \quad \forall \xi \geq y > 0 =$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{si } \xi \leq y \\ e^{-\frac{2\xi(y-\xi)}{T}}, & \xi > y \end{cases} = e^{-\frac{2\xi^+(y-\xi)^+}{T}}$$

Démo (6)

Principe de réflexion

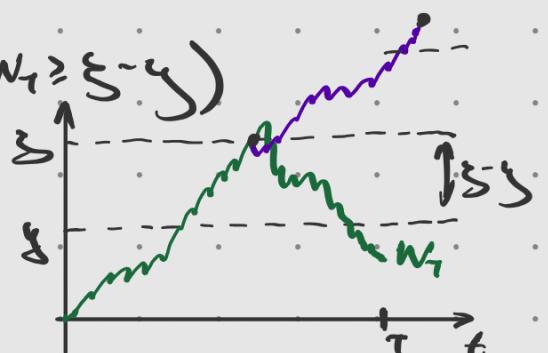
$$\forall \xi > y > 0 \quad \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} W_t \geq \xi \text{ et } W_T \leq y\right) = \mathbb{P}(W_T \geq \xi - y)$$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} Y_t^{W,T,y} \geq \xi\right) \stackrel{(a)}{=} \mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} W_t \geq \xi \mid W_T = y\right) =$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}\left(\sup_{t \in [0,T]} W_t \geq \xi \text{ et } W_T \in [y-\epsilon, y]\right)/\epsilon}{\mathbb{P}(W_T \in [y-\epsilon, y])/\epsilon} =$$

à vérifier

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{[\mathbb{P}(\sup_{t \in [0,T]} W_t \geq \xi \text{ et } W_T \leq y) - \mathbb{P}(\sup_{t \in [0,T]} W_t \geq \xi \text{ et } W_T \leq y-\epsilon)]/\epsilon}{[\mathbb{P}(W_T \leq y) - \mathbb{P}(W_T \leq y-\epsilon)]/\epsilon} =$$



$$= \{ \text{Reflexion} \} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{[\mathbb{P}(W_T \geq 2\xi - \varepsilon) - \mathbb{P}(W_T \geq 2\xi - \xi + \varepsilon)]/\varepsilon}{[\mathbb{P}(W_T \leq \xi) - \mathbb{P}(W_T \leq \xi - \varepsilon)]/\varepsilon} = \frac{\varphi(\frac{2\xi - \varepsilon}{\sqrt{T}})}{\varphi(\xi/\sqrt{T})} =$$

$$= \exp \left\{ -\frac{1}{2T} ((2\xi - \xi)^2 - \xi^2) \right\} = \exp \left\{ -\frac{1}{T} (2\xi^2 - 2\xi \xi) \right\} = e^{-\frac{2\xi(\xi-\xi)}{T}} \text{ si } \xi \geq \xi_0$$

Corollaire $\forall \lambda > 0 \quad \forall \xi > x \vee y$

$$\mathbb{P} \left(\sup_{[0,T]} (x + \frac{t}{T}(y-x) + \lambda Y_t^{B,T}) \geq \xi \right) = e^{-\frac{2(\xi-x)^+(y-x)^+}{T\lambda^2}} \quad \forall \xi \geq x \vee y$$

Application à la simulation du supremum du schéma d'Euler

Rappel g proba t.q. $\bar{F}_g(x) = g(3x + \infty L)$ (\Downarrow cont.)

Alors $\bar{F}_g^{-1}(U) \stackrel{d}{\sim} g$ si $U \sim U[0,1]$

Si on combine la prop (a) sur $(\bar{X}_t^n)_{t \in [0,T]}$ avec le corollaire ci-dessous

$$\text{ci-dessous } \mathcal{L} \left(\sup_{[0,T]} \bar{X}_t^n \mid \bar{X}_{t_n}^n = x_n \quad n=0 \dots n \right) = \mathcal{L} \left(\max_{k=0:n-1} \bar{M}_n^{n,x_n,x_{n+1}} \right) \text{ où}$$

$$\bar{M}_n^{n,x_n,x_{n+1}} = \sup_{t \in [0,T_n]} \left(x_n + \frac{t}{T_n} (x_{n+1} - x_n) + G(t_n, X_{t_n}) Y_t^{W^{(t_n)}, T_n} \right)$$

$$\forall \xi \geq x_n \vee x_{n+1} \quad \mathbb{P} \left(\bar{M}_n^{n,x_n,x_{n+1}} \geq \xi \right) = e^{-\frac{2n(\xi - x_{n+1})^+(\xi - x_n)^+}{G^2(t_n, x_n) T}}$$

|| corol.

$$\bar{F}_{\bar{M}_n^{n,x_n,x_{n+1}}}$$

On veut résoudre l'équation $\bar{F}_g(\xi) = u \in [0,1] \quad \xi \geq x_n \vee x_{n+1}$

$$-\frac{2n}{G^2(t_n, x_n) T} (\xi - x_{n+1})(\xi - x_n) = \log u$$

$$\xi^2 - (x_n + x_{n+1}) \xi + x_n x_{n+1} + \frac{T}{2n} G^2(t_n, x_n) \log u = 0$$

$$\Delta = (x_k + x_{k+1})^2 - 4 \left(x_k x_{k+1} + \frac{T}{2n} G^2(t_k, x_k) \log u \right) = (x_{k+1} - x_k)^2 + 2 \frac{T}{n} G(t_k, x_k) \log \frac{u}{\bar{u}}$$

$$S = \frac{(x_k + x_{k+1}) + \sqrt{\Delta}}{2} \geq x_k \vee x_{k+1} \rightarrow \text{Formule explicite pour } F_{M_n^{(n)}, x_k, x_{k+1}}^{-1}(u)$$

Loin du praticien ① Simuler les $(\bar{X}_{t_k}^n)$ $k=0 \dots n$

② Simuler $\max_{k=0:n-1} \bar{M}_n^{(n), \bar{X}_{t_k}^n, \bar{X}_{t_{k+1}}^n}$ $U_k \text{ i.i.d. } \sim U(0, 1)$ $\prod_{k=0:n-1} (\bar{X}_{t_k}^n)$

③ Appliquer à $F(x(T))$, $\sup_{[0:T]} x(t)$

$$\bar{X}_T^n = \max_{k=0:n-1} \bar{M}_n^{(n), \bar{X}_{t_k}^n, \bar{X}_{t_{k+1}}^n}$$

application à la réduct. de variance (Blackwell-Rao) préconditionnement

$F((x(t)) = f(x(T)) \mathbb{I}_{\sup_{[0:T]} x_t \leq L}$ paix barrière up & out.

$$\mathbb{E}[f(X_T) \mathbb{I}_{\{\sup X_t \leq L\}}] \approx \mathbb{E}[f(\bar{X}_T^{n,x}) \mathbb{I}_{\{\sup \bar{X}_t^{n,x} \leq L\}}] \stackrel{\text{B.R.}}{=}$$

$$= \mathbb{E}[f(\bar{X}_T^{n,x}) \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{\sup \bar{X}_t^{n,x} \leq L\}} \mid \sigma(\bar{X}_{t_{k+1}}^n, \dots, \bar{X}_{t_0}^n)]] =$$

$$= \mathbb{E}[f(\bar{X}_T^{n,x}) \mathbb{P}(\underbrace{\sup \bar{X}_t^{n,x} \leq L}_{\max_{k=0:n-1} \bar{X}_{t_k}^n} \mid \bar{X}_{t_k}^n \quad k=0:n)] = \mathbb{E}[f(\bar{X}_T^{n,x}) \prod_{k=0}^n \mathbb{P}(\max_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} \bar{X}_t^n \leq L \mid \bar{X}_{t_k}^n)]$$

$$= \mathbb{E}[f(\bar{X}_T^{n,x}) \prod_{k=0}^{n-1} \left(1 - e^{-\frac{2n}{T G^2(t_k, \bar{x}_k)} (L - \bar{X}_{t_{k+1}}^n)^+ (L - \bar{X}_{t_k}^n)^+} \right) \mathbb{I}_{\{\max_{k=0:n-1} \bar{X}_{t_k}^n \leq L\}}]$$

Chapitre VIII Retour sur la couverture

$F: I \times (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}$ I intervalle non trivial

$$(x, \omega) \mapsto F(x, \omega)$$

$$\forall x \in I \quad F(x, \cdot) \in L^1(\mathbb{P}) \rightsquigarrow f(x) = \mathbb{E}_\omega F(x, \omega)$$

(i) $\mathbb{P}(\text{ds})$ ps. ($x \mapsto F(x, \omega)$ est dérivable en $x_0 \in I$)

(ii) $\left(\frac{F(x, \omega) - F(x_0, \omega)}{x - x_0} \right)_{x \in U(x_0) \setminus \{x_0\}}$ V.T. ($\Leftarrow L^{1+\eta}$ bornée pour $\eta > 0$)

Alors $f'(x_0) = \mathbb{E} \left[\frac{\partial}{\partial x} F(x, \omega) \right]$

↑ conditions suffisantes
(cf. thm $\frac{\partial}{\partial x} f \in L^q$)

Rem

• $F: x \mapsto F(x, \cdot)$
 $I \rightarrow L^p(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ $p \geq 1$
C Banach

• AAD ?!

1. Méthode de shocks (différences finies)

1.1 Pas constant

$F(x, \omega) \rightsquigarrow F(x, Z(\omega))$ où $F: I \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}$

$Z: (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \rightarrow \mathbb{R}^q$

① $x_0 \in I \quad \forall x, x' \in]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$

$\|F(x, Z) - F(x', Z)\|_2 \leq C_{F, Z} |x - x'|^\theta$ pour $\theta \in [0, 1]$
(F θ -Hölder)

② $f \in C^2([x_0 \pm \varepsilon], \mathbb{R})$ avec f'' Lipschitz

Idée $f'(x_0) \approx \frac{f(x_0 + \varepsilon) - f(x_0 - \varepsilon)}{2\varepsilon} \quad \varepsilon \in]0, \varepsilon_0[$

(autre choix possible: $\frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$ auquel cas $f \in C^1$)

f' Lipschitz et $\|F(x, z) - F(x_0, z)\|_2 \leq C_{F,z} |x - x_0|^{\theta}$

C'est un estimateur moins efficace)

$$\hat{f}'(x_0) \approx \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{F(x_0 + \epsilon, z_k) - F(x_0 - \epsilon, z_k)}{2\epsilon} \quad z_k \text{ i.i.d. } \sim \mathcal{Z}$$

$$\mathbb{E}|Y - a|^2 = (\mathbb{E}Y - a)^2 + \text{Var}[Y] \quad \text{déc bias-variance}$$

$$\left\| \hat{f}'(x_0) - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \frac{F(x_0 + \epsilon, z_k) - F(x_0 - \epsilon, z_k)}{2\epsilon} \right\|_2^2 = \left\| \hat{f}'(x_0) - \frac{f(x_0 + \epsilon) - f(x_0 - \epsilon)}{2\epsilon} \right\|_2^2 + \frac{1}{n} \text{Var}\left(\frac{F(x_0 + \epsilon, z) - F(x_0 - \epsilon, z)}{2\epsilon}\right)$$

$$\leq \left([f']_{\text{Lip}} \cdot \frac{\epsilon^2}{2} \right)^2 + \frac{1}{n} \frac{\|F(x_0 + \epsilon, z) - F(x_0 - \epsilon, z)\|_2^2}{(2\epsilon)^2} \leq \left([f']_{\text{Lip}} \cdot \frac{\epsilon^2}{2} \right)^2 + \frac{C_{P,z}^2}{n} (2\epsilon)^{2(1-\theta)}$$

↑ Taylor ↑ bias ↑ erreur MC

⚠ $\frac{\text{Var}[F(x + \epsilon, z) - F(x - \epsilon, z)]}{(2\epsilon)^2} = \frac{\text{Var}[F(x + \epsilon, z)] + \text{Var}[F(x - \epsilon, z)]}{(2\epsilon)^2}$

$$\approx \frac{2\|F(x, z)\|_2^2}{(2\epsilon)^2} = C' (2\epsilon)^{-2} \quad !!!$$

Exemples ① Call BS

$$F(x, S) = e^{-rT} \left(x \exp \left\{ - \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) T + \sigma \sqrt{T} S - K \right\} \right)^+$$

$$\text{call}_{BS}(x) = \mathbb{E}[F(x, Z)] \quad \text{où } Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

$$\begin{aligned} x, x' > \frac{1}{\epsilon} & \quad \|F(x, z) - F(x', z)\|_2^2 \leq e^{-2rT} |x - x'|^{\theta} \mathbb{E}[e^{2S^2 T + 2\sigma^2 T^2}] = \\ & \quad \epsilon \approx 0 \\ & = e^{-\sigma^2 T} |x - x'|^2 \mathbb{E}[e^{2\sigma^2 T^2}] = e^{8\sigma^2 T} |x - x'|^2 \rightarrow (\cdot) \text{ est uniforme} \end{aligned}$$

$$(ii) \mathbb{E} \frac{\partial}{\partial x_0}$$

Rémi On aurait pu dériver ses le's $\frac{\partial}{\partial x} \text{Call}_{BS} = \mathbb{E} \frac{\partial}{\partial x} F(x, z)$ © Théo Jalabert 

② Option digital (g-Hedge)

$$F(x, z) = e^{-rT} \mathbb{I}\{x e^{(z+\sigma\sqrt{T})z} \geq K\}$$

$$(ii) x \mapsto \text{Digit}_{BS} \in \mathcal{P}^\infty(\mathbb{R}^+) \quad (-\Phi(d_1))$$

$$(i)? \|F(x', z) - F(x, z)\|_2^2 \leq ? \quad x, x' \geq \frac{1}{\epsilon}$$

"

$$e^{-2rT} (\mathbb{P}(x e^z \geq K) + \mathbb{P}(x' e^z \geq K) - 2\mathbb{E}[\mathbb{I}_{\{x e^z \geq K\} \cap \{x' e^z \geq K\}}]) =$$

b.p.s. que $x \geq x' \rightarrow \mathbb{P}(x' e^z \geq K)$

$$= e^{-2rT} \left(\mathbb{P}\left(Z \geq -\frac{\log \frac{x}{K} + \sigma T}{\sigma \sqrt{T}}\right) - \mathbb{P}\left(Z \leq -\frac{\log \frac{x'}{K} + \sigma T}{\sigma \sqrt{T}}\right) \right) = e^{-2rT} \int_{-\frac{\log \frac{x'}{K} + \sigma T}{\sigma \sqrt{T}}}^{\frac{\log \frac{x}{K} + \sigma T}{\sigma \sqrt{T}}} e^{-\frac{z^2}{2}} \frac{dz}{\sigma \sqrt{T}}$$

$$\|F(x', z) - F(x, z)\|_2^2 \leq \frac{e^{-2rT}}{\sqrt{2\pi}} \left| \frac{\log \frac{x}{K} + \sigma T}{\sigma \sqrt{T}} - \frac{\log \frac{x'}{K} + \sigma T}{\sigma \sqrt{T}} \right| \leq C |\log x - \log x'| \leq$$

$$\leq \frac{C}{\epsilon} |x - x'|$$

$$\|F(x', z) - F(x, z)\|_2 \leq \sqrt{\frac{C}{\epsilon}} |x - x'|^{1/2} \rightarrow \theta = \frac{1}{2}$$

Revenus sur la formule

$$\left\| f'(x_0) - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{F(x_0 + \epsilon, z_k) - F(x_0 - \epsilon, z_k)}{2\epsilon} \right\|_2^2 \rightarrow \text{MSE}$$

$$\left(\frac{\|f''\|_{Lip}}{2} \epsilon^2 \right)^2 + \frac{C_{F, Z}^2}{M(2\epsilon)^{2(1-\theta)}} + \left(\frac{\|f''\|}{2} \epsilon^2 + \frac{C_{T, Z}}{\sqrt{M}(2\epsilon)^{1-\theta}} \right)^2$$

$\theta = 1$ \rightarrow l'erreur MC ne dépend pas de ϵ

Si on veut diviser l'erreur par 2 $\varepsilon \rightsquigarrow \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}$ $M \rightsquigarrow 4M$

$$0 < \theta < 1 \quad \inf_{\varepsilon > 0} \left(\frac{|f'|}{2} \varepsilon^2 + \frac{C}{\sqrt{M} \varepsilon^{1-\theta}} \right) \rightsquigarrow \varepsilon_{\min}(M)$$

Fixe $\text{RMSE} = \eta > 0$ $\text{RMSE} = \varphi(\varepsilon_{\min}(M) M) = \varphi^*(M)$ on calibre M .

Comment diviser la RMSE par 2 ?

$$\varepsilon \rightsquigarrow \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad M \rightsquigarrow 2^{3-\theta} M = 4 \cdot 2^{-\theta}$$

$$\text{Ex. } \theta = \frac{1}{2} \quad 2^{3-\theta} M = 2^{\frac{3}{2}} M = 4\sqrt{2} M \approx 5.6 M !$$

1.2. Pas décroissant

$\varepsilon > 0$ const $\rightsquigarrow \varepsilon_k \forall 0$

$$f'(x_0) \approx \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{F(x_0 + \varepsilon_k, z_k) - F(x_0 - \varepsilon_k, z_k)}{2\varepsilon_k}$$

$$\text{Biais-Variance} \quad \| f'(x_0) - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{F(x_0 + \varepsilon_k, z_k) - F(x_0 - \varepsilon_k, z_k)}{2\varepsilon_k} \|_2^2 = \underbrace{n_1 n_2}_{\text{Bais}} \leq C_{T, \varepsilon}^2 (2\varepsilon_k)^{2\theta}$$

$$= \left| f'(x_0) - \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \frac{f(x_0 + \varepsilon_k) - f(x_0 - \varepsilon_k)}{2\varepsilon_k} \right| + \frac{1}{M^2} \sum_{k=1}^M \frac{\text{Var}[F(x_0 + \varepsilon_k, z_k) - F(x_0 - \varepsilon_k, z_k)]}{(2\varepsilon_k)^2}$$

$$= \frac{1}{M^2} \sum_{k=1}^M \left(|f'|_{Lip} \frac{\varepsilon_k^2}{2} \right)^2 + \frac{C_{T, \varepsilon}^2}{M^2} \sum_{k=1}^M \frac{1}{(2\varepsilon_k)^{2(1-\theta)}}$$

Pour simplifier, on suppose $\theta = 1$.

$$\frac{1}{M^2} \left(\sum_{k=1}^M \frac{|f'|^2}{2} \varepsilon_k^2 \right) + \frac{C_{T, \varepsilon}^2}{M^2} \cdot M$$

Idée Biais < Erreur MC

$$\left(\sum_{k=1}^M \varepsilon_k^2 \right)^{1/2} = \tilde{O}(M) \quad \varepsilon_k = \tilde{O}\left(\frac{1}{k^{1/4}}\right)$$

Pratique $\varepsilon_k = \frac{c}{k^{1/4}} \dots ?$

2 Processus tangent et une EDS

$$(EDS) \quad X_t^x = x + \int_0^t b(s, X_s^x) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s^x) dW_s$$

$$b, \sigma: [0, T] \times \mathbb{R}^d \rightarrow \begin{cases} \mathbb{R}^d \\ \mathbb{R}^{d \times q} \end{cases}$$

Toute deux C^{1+2} en x , U^t en t (dérivées partielles spatiales de b et σ sont λ -Hölder U^t en $t \in [0, T]$)

Thm (Kunita) Si cette hypothèse: $\forall t \in [0, T]$

$x \mapsto X_t^x(w)$ est différentiable de diff. notée $Y_t^{(x)}$ $P(dw)$ -p.s.

Rem Dès que b et σ sont Lipschitz U^t en $t \in [0, T]$

$x \mapsto X_t^x$ est Lipschitz de \mathbb{R}^d dans $L^p(\Omega, \mathcal{A}, P)$ $\forall p \geq 1$

$$\|X_t^x - X_t^y\|_p \leq C_{\sigma, p} \|x - y\|$$

$$\text{et } \sup_{[0, T]} \|X_t^x - X_t^y\|_p \leq C_{p, \sigma, \sigma'} \|x - y\|$$

(suit à établir la prop. de équ-intégrabilité)

$$d=q=1 \quad Y_t^{(x)} = \frac{\partial X_t^x}{\partial x} \quad Y_0^{(x)} = 1$$

$$Y_t^{(x)} = x + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} b(s, X_s^{(x)}) Y_s^{(x)} ds + \int_0^t \frac{\partial}{\partial x} \sigma(s, X_s^{(x)}) Y_s^{(x)} dW_s$$

Itô $Y_t^{(x)} = \exp \left\{ \int_0^t \left(b'(s, X_s^{(x)}) - \frac{\sigma'^2(s, X_s^{(x)})}{2} \right) ds + \int_0^t \sigma'(s, X_s^{(x)}) dW_s \right\} > 0$

$d \geq 2$ ou $q \geq 2$

Équation tient toujours sauf que

$$Y_t^{(x)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial X^{(x)}}{\partial x_s} \end{vmatrix}_{1 \leq i \leq d} \rightsquigarrow \text{matrice}$$

$\frac{\partial b}{\partial x}, \frac{\partial \sigma}{\partial x} \rightsquigarrow \text{tenseurs}$

Exemples BS $X_t^{(x)} = x \exp \left\{ \left(r - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right\}$

$$\frac{\partial X_t^{(x)}}{\partial x} = \frac{X_t^{(x)}}{x} \quad (\text{vérifier avec EDS})$$

Application $f(x) = \mathbb{E}[h(X_T^{(x)})]$ où $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ t.q.

(i) h est $\mathbb{P}[X_T^{(x)} \sim \text{p.p.}]$ différentiable sur \mathbb{R}^d

$$(ii) \left(\frac{|h(X_T^{(x)}) - h(X_T^{(x')})|}{|x - x'|} \right)_{x' \in U(x) \setminus \{x\}} \text{ est U.I.}$$

Alors $\nabla f(x) = \mathbb{E} \left[Y_T^{(x)} \nabla h(X_T^{(x)}) \right]$
en EDS

En particulier si h est Lipschitz

$$(ii) \left(\frac{|X_T^{(x)} - X_T^{(x')}|}{|x - x'|} \right)_{x' \in U(x) \setminus \{x\}} \text{ est U.I.}$$

C.e.f. Rq sur le flot

Quid si $b(t, x) \rightsquigarrow b(t, \theta, x) \rightsquigarrow \theta(t, x)$

Solution $(X_t^{x, \theta}) \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbb{E}[h(X_T^{x, \theta})]$

$$\tilde{X}_t^{x, \theta} = (X_t^{x, \theta}, \theta_t)$$

$$d\tilde{X}_t^{x, \theta} = \begin{pmatrix} b(\theta_t, X_t) dt + \sigma(\theta_t, X_t) dW_t \\ 0 \cdot dt + 0 \cdot dW_t \end{pmatrix} \quad \tilde{X}_0^{x, \theta} = \begin{pmatrix} x_0 \\ \theta \end{pmatrix}$$

$$\theta_t = \theta \quad \forall t$$

deuxième composante
de la condition initiale

Ce qui précéde: OK, les pasifs régulière!
(h différentiable ou presque)

3. Sensibilités de les pasif irréguliers

3.1. Retour sur la méthode de la log-vraisemblance

$$X(\theta) \stackrel{d}{\sim} p(\theta, y) \zeta(dy) \quad y \text{ Génic} \quad \theta \in \Theta \subset \mathbb{R}$$

On "soit" que $\underbrace{\partial_\theta \mathbb{E}[\varphi(X(\theta))]}_{f(\theta)} = \mathbb{E}[\varphi(X(\theta)) \partial_\theta \log p(\theta, X(\theta))]$

Si $X(\theta) = \bar{X}_T(\theta) \rightsquigarrow \bar{f}(\theta) = \mathbb{E}[\varphi(\bar{X}_T^{n, \theta}(\theta))]$
à diffusion (EDS)

On sait (s.c.m.) que $f(\theta) \approx \bar{f}'(\theta)$

Donc $f'(\theta) \approx (\bar{f}')'(\theta)$

$$(\bar{f}')'(\theta) = \mathbb{E}[\varphi(\bar{X}_T^{n, \theta}(\theta)) \partial_\theta \log p(\theta, \bar{X}_T^{n, \theta}(\theta))]$$

Proposition Pour simplifier $b(t, \theta, x) = b(\theta, x)$ et $\Sigma(t, \theta, x) = \Sigma(\theta, x)$, $\theta \in \mathbb{C}$

(a) $\forall \theta \in \mathbb{H} \quad \forall x \in \mathbb{R}^d \quad \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^T(\theta, x) \in GL(d, \mathbb{R})$

$$\mathcal{L}(\bar{X}_{\frac{T}{n}}^{n,x}) = \mathcal{N}\left(x + \frac{T}{n} b(\theta, x), \frac{T}{n} \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^*(\theta, x)\right) = P_{\frac{T}{n}}(x, \theta, y) dy =$$

schéma d'Euler
de pas $\frac{T}{n}$ à la date $t = \frac{T}{n}$

$$= \exp \left\{ -\frac{n}{2T} (y - x - \frac{T}{n} b(s, x)) \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^*(\theta, x) \right\} \left[(y - x - \frac{T}{n} b(\theta, x)) \cdot \frac{1}{(2\pi \frac{T}{n})^{d/2}} \sqrt{\det \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^*} \right]$$

(b) Sous la \hat{m} hypothèse

$$\mathcal{L}(\bar{X}_{t_{k+1}}^{n,x} | (\bar{X}_{t_k}^{n,x})_{k=1:n}) = \mathcal{N}\left(\bar{X}_{t_k}^{n,x} + \frac{T}{n} b(t_k, \bar{X}_{t_k}^{n,x}), \frac{T}{n} \bar{\Sigma}\bar{\Sigma}^*(\theta, \bar{X}_{t_k}^{n,x})\right)$$

Rem • $\mathbb{E}[\varphi(\bar{X}_T^n)] = \int \dots \int \varphi(y_n) \bar{P}_{(\bar{X}_{t_{k+1}}, k=1:n)}^n(y_1, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n$

• $\mathbb{E}[\varphi(\bar{X}_T^n) \partial_\theta \log \bar{P}_n^n(x, \theta, \bar{X}_{t_1}^n, \dots, \bar{X}_{t_n}^n)] = \sum_{k=1}^n \mathbb{E}[\varphi(\bar{X}_T^n) \partial_\theta \log \bar{P}_{\frac{T}{n}}^n(\bar{X}_{t_{k+1}}^n, \theta, \bar{X}_{t_k}^n)]$

3.2. Vers la différentiation seul espace de Wiener

Théorème $X_t^x = b(X_t^x) dt + \Sigma(X_t^x) dW_t \quad X_0^x = x$

$\varphi \in C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ t.q. $\mathbb{E}[\varphi(X_T^x)^2 + \varphi'(X_T^x)^2] < +\infty$

Alors pour tout processus $(H_t)_{t \in [0, T]}$ (Φ_t^W) -progressivement mesurable

où $\Phi_t^W = \Sigma(W_s, s \leq t, \mathcal{N}_P)$ si $\mathbb{E} \int H_s^2 dt < +\infty$

$$\mathbb{E}[\varphi(X_T^x) \int_0^T H_s dW_s] = \mathbb{E}[\varphi'(X_T^x) Y_T^{(x)} \int_0^T \frac{H_s \Sigma(X_s^x)}{Y_s^{(x)}} ds] \quad \text{Formule Bismut-Elworthy-Li} \quad (**)$$

Démo Admis

Rem Version multidim. existe.

Application au δ -hedge

Hypo d'U ellipticité: $\forall x \in \mathbb{R} \quad G(x) \geq \underline{G} > 0$

$$f(x) = \mathbb{E}[\varphi(X_T^x)] \quad \varphi \text{ régulière (au moins } C_b^1)$$

$$f'(x) = \mathbb{E}[\varphi'(X_T^x) Y_T^{(x)}] \quad H_t = \frac{Y_t^{(x)}}{G(X_t^x)} \text{ sur } (\star\star)$$

$$\mathbb{E}\left[\varphi(X_T^x) \int_0^T \frac{Y_t^{(x)}}{G(X_t^x)} dW_t\right] = \mathbb{E}\left[\varphi'(X_T^x) Y_T^{(x)} \underbrace{\int_0^T dt}_{= T}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{T} \mathbb{E}\left[\varphi(X_T^x) \int_0^T \frac{Y_t^{(x)}}{G(X_t^x)} dW_t\right] \quad \begin{array}{l} \text{Droit de le faire?} \\ \text{Qui si } G \text{ U elliptique car} \\ \mathbb{E}[H_t^2] \leq \frac{1}{\underline{G}^2} \mathbb{E}[Y_t^{(x)}]^2 \leq \frac{C_{b,\underline{G}}}{\underline{G}^2} \\ \text{si } b \text{ et } \underline{G} \text{ soit } C_{b,\underline{G}} \end{array}$$

$$\rightarrow \mathbb{E} \int_0^T H_t^2 dt < \infty \quad \varphi \text{ était } C^1 \text{ par hypothèse}$$

la formule BÉL ($\star\star$) s'applique

$$f'(x) = \mathbb{E}\left[\varphi(X_T^x) \frac{1}{T} \int_0^T \frac{Y_s^{(x)}}{G(X_s^x)} dW_s\right] \quad (\star\star)$$

Exemple BS $G(y) = \sigma x y \quad Y_t^{(x)} = \frac{X_t^x}{x}$

$$\int_0^T \frac{Y_t^{(x)}}{G(X_t^x)} dW_t = \int_0^T \frac{1}{\sigma x} dW_t = \frac{W_T}{\sigma x} \Rightarrow f'(x) = \mathbb{E}\left[\varphi(X_T^x) \frac{W_T}{\sigma x T}\right]$$

Rem comme ($\star\star$) ne dépend pas de $\varphi'(\dots)$ on peut l'éteindre à

toute $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ borélienne bornée.

© Théo Jalabert



On peut l'utiliser ainsi pour la schéma d'Euler $E[\varphi(\bar{X}_T^n) \frac{1}{T} \int_0^T \frac{\bar{Y}_s^{(n)}}{\sigma(\bar{X}_s^n)} dW_s]$