Correction Partiel

Modèles aléatoires discrets 16/11/22

Exercice 1 : Le temps au pays d’Oz

- **Exercice 1 : le temps au pays d’Oz**
- *Au pays d’Oz, le temps ne peut prendre que 3 formes : Beau temps (B), Pluvieux (P), ou Neigeux (N). Les règles d’évolution du temps sont immuables et ne souffrent aucune exception.*
- *– S’il fait beau, il ne fera pas beau le lendemain, et il y a autant de chances qu’il pleuve ou qu’il neige le lendemain.*
- *– S’il pleut ou s’il neige, il y a une chance sur deux qu’il fasse le même temps le lendemain, et une chance sur quatre qu’il fasse beau le lendemain.*

1. Modélisez cette situation par une chaîne de Markov, et justifiez ce choix. Donnez son graphe et sa matrice de transition.

2. Cette chaîne est-elle irréductible ? Quelle est la nature des états ? leur période ?

3. Donnez, s’il en existe, la ou les mesures stationnaires de cette chaîne.

4. Quelle est, à long terme, la probabilité qu’il fasse beau ? qu’il neige ?

5. Quelle est la probabilité qu’il fasse beau après-demain sachant qu’il fait beau aujourd’hui ? Quelle est la probabilité qu’il neige deux jours de suite en trois jours ?

6. En moyenne, combien de jours faut-il pour que le beau temps revienne ?

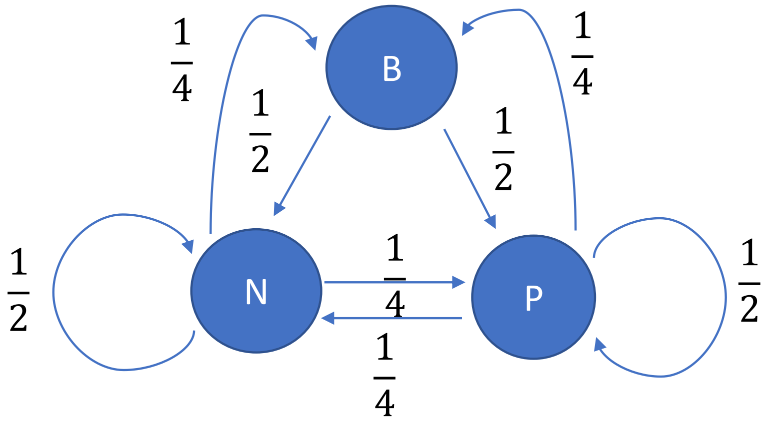
Exercice 1 : Le temps au pays d’Oz

1. Modélisez cette situation par une chaîne de Markov et justifiez ce choix. Donnez son graphe et sa matrice de transition.

- Le temps du jour dans ce pays ne dépend que du temps le jour précédent, et non des jours d’avant. Cela justifie la modélisation par une chaîne de Markov. La matrice de transition est

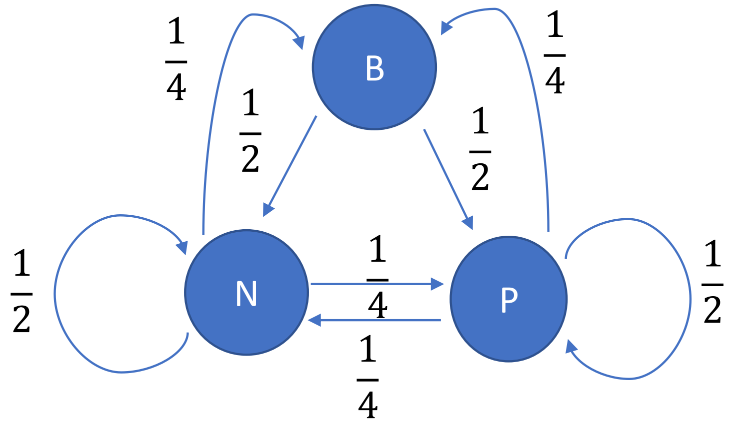
$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$E = \{P, B, N\}$



Exercice 1 : Le temps au pays d'Oz

- **2. Cette chaîne est-elle irréductible ? Quelle est la nature des états ? leur période ?**
- Cette chaîne est irréductible car tous les états communiquent. P communiquant avec lui-même par un chemin de longueur 1 (P(P, P) = 1/2 > 0), il est de période 1 donc apériodique, et comme la chaîne est irréductible, il en est de même pour tous les états. Les états sont tous de même nature.
- La chaîne étant irréductible sur un espace d'états fini, il existe une unique mesure stationnaire, donc tous les points sont positivement récurrents.
- La chaîne est donc apériodique récurrente positive.



Exercice 1 : Le temps au pays d'Oz

- **3. Donnez, s'il en existe, la ou les mesures stationnaires de cette chaîne.**
- La chaîne étant irréductible sur un espace d'états fini, il existe une unique mesure stationnaire, et en posant le système $\pi P = \pi$, on trouve la solution :

$$\pi_P = \pi_N = \frac{2}{5} \ ; \ \pi_B = \frac{1}{5}$$

- **4. Quelle est, à long terme, la probabilité qu'il fasse beau ? qu'il neige ?**
- La mesure stationnaire représente la probabilité à long terme d'être dans chacun des états. Donc à long terme, il fera beau avec une probabilité 1/5, et il neigera avec une probabilité 2/5.

Exercice 1 : Le temps au pays d'Oz

- **5. Quelle est la probabilité qu'il fasse beau après-demain sachant qu'il fait beau aujourd'hui ? Quelle est la probabilité qu'il neige deux jours de suite en trois jours ?**
- La probabilité qu'il fasse beau après-demain sachant qu'il fait beau aujourd'hui est :

$$\mathbb{P}(X_{n+2} = B | X_n = B) = \mathbb{P}(X_2 = B | X_0 = B) \text{ par homogénéité de la chaîne}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(X_2 = B, X_0 = B)}{\mathbb{P}(X_0 = B)}$$
$$= \frac{\mathbb{P}(X_2 = B, X_1 = P, X_0 = B) + \mathbb{P}(X_2 = B, X_1 = N, X_0 = B)}{\mathbb{P}(X_0 = B)}$$
$$= \frac{P(B,P)P(P,B)\mathbb{P}(X_0 = B) + P(B,N)P(N,B)\mathbb{P}(X_0 = B)}{\mathbb{P}(X_0 = B)}$$
$$= P(B,P)P(P,B) + P(B,N)P(N,B) = \frac{1}{4}$$

Exercice 1 : Le temps au pays d'Oz

- La probabilité qu'il neige deux jours de suite en trois jours est donnée par la somme des probabilités des évènements disjoints NNN,NNP,NNB,BNN et PNN. Soit :

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}(NNN, NNP, NNB, PNN, BNN)\\ &= \mathbb{P}(X_0 = N)P(N,N)^2 + \mathbb{P}(X_0 = N)P(N,N)P(N,P) + \mathbb{P}(X_0 = N)P(N,N)P(N,B)\\ &+ \mathbb{P}(X_0 = B)P(B,N)P(N,N) + \mathbb{P}(X_0 = P)P(P,N)P(N,N)\\ &= \frac{1}{2}\mathbb{P}(X_0 = N) + \frac{1}{4}\mathbb{P}(X_0 = B) + \frac{1}{8}\mathbb{P}(X_0 = P)\end{aligned}$$

- Et donc si on se trouve en régime stationnaire, en remplaçant par les valeurs de la mesure stationnaire, on obtient P = 3/10.
- **6. En moyenne, combien de jours faut-il pour que le beau temps revienne ?**
- En moyenne, pour que le beau temps revienne, il faut

$$N = \mathbb{E}_B(\tau_B) = \frac{1}{\pi_B} = 5 \text{ jours}$$

Exercice 2 : Dactylographe

1. Un père a eu le tort de laisser son enfant de 3 ans jouer avec son ordinateur, qui n'a plus que 3 touches à son clavier : le p, le a et le z. L'enfant tape au hasard des lettres, et le père attend avec impatience de voir celui-ci taper "papa" à l'écran. Quel nombre de lettres doit taper celui-ci en moyenne avant d'arriver à ce résultat ?

Afin de calculer cela, on pourra considérer une chaîne de Markov sur l'espace d'états E donné par E ={{∅}, {p}, {pa}, {pap}, {papa}}, qui correspondent aux derniers caractères écrits. On est dans l'état vide si les derniers caractères ne sont pas {p}, {pa}, {pap}, ou {papa}, et on passe de {∅} à {p} avec une probabilité 1/3, de {∅} à {∅} avec une probabilité 2/3, etc... (il faut regarder en détail le résultat de la frappe d'une touche sur les dernières lettres pour décrire la chaîne de Markov entièrement, selon que la lettre suivante est un p, un a ou un z).

On aura intérêt à imposer une transition de {papa} vers {∅} avec probabilité 1, et à regarder l'espérance du temps de retour de {papa} vers lui-même.

Exercice 2 : Dactylographe

- On considère une chaîne de Markov à 5 états : E = {{Ø}, {p}, {pa}, {pap}, {papa}}.
- Partant de {Ø}, l'enfant a une chance sur trois de taper un p, et 2 chances sur trois de taper une autre ettre, donc la probabilité de transition de {Ø} vers p est 1/3 et celle de ; vers ; est 2/3.
- Partant de p, si l'enfant tape un a, il a tapé pa, et la chaîne arrive en pa (probabilité 1/3), si il tape un p, la chaîne reste dans l'état p (la dernière séquence tapée intéressante est p) (probabilité 1/3), et si il tape un z, elle retourne dans l'état ; (probabilité 1/3.
- Avec un raisonnement identique pour les autres états, en regardant en détails les probabilités que la lettre suivante soit un a, un z ou un p, on trouve la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Dactylographe

- Comme indiqué dans l'énoncé, on impose une transition de {papa} vers {∅} avec probabilité 1.
- On regarde l'espérance du temps de retour de {papa} vers lui-même. Pour cela, on a besoin de calculer la mesure stationnaire (et plus précisément, on a besoin de π_5). Il suffit de résoudre le système $\pi P = \pi$ qui se traduit par :

$$\begin{cases} 2\pi_1 + \pi_2 + 2\pi_3 + \pi_4 + 3\pi_5 = 3\pi_1 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_4 = 3\pi_2 \\ \pi_2 = 3\pi_3 \\ \pi_3 = 3\pi_4 \\ \pi_4 = 3\pi_5 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 \end{cases}$$

- Cela nous donne $\pi_5 = 1/91$, et donc en moyenne, l'enfant aura besoin de taper sur le clavier

$$N = \mathbb{E}_{\{papa\}}(\{papa\}) = \frac{1}{\pi_5} = 91 \text{ fois}$$

pour écrire le mot papa.

- Donc au final, il lui faudra $N' = \mathbb{E}_{\{papa\}}(\{papa\}) - 1 = 90$ frappes pour écrire papa partant de {∅}

Exercice 2 : Dactylographe

- *2. Reprendre le problème ci-dessus avec un clavier de N lettres, et une chaîne de Markov sur le même espace d'états. Remarquer que la probabilité de transition de {∅} vers {p} dans ce cadre est 1/N, celle de {∅} vers lui-même étant (N − 1)/N...*

- Dans le cas d'un clavier à N touches, le problème est exactement le même que le précédent, sauf que les évènements à distinguer doivent être "taper p" (probabilité 1/N), "taper a" (probabilité 1/N) et "taper une autre lettre" (probabilité (N − 2)/N). En considérant alors les passages entre les 5 états, on obtient la matrice de transition suivante :

$$P = \begin{pmatrix} (N-1)/N & 1/N & 0 & 0 & 0 \\ (N-2)/N & 1/N & 1/N & 0 & 0 \\ (N-1)/N & 0 & 0 & 1/N & 0 \\ (N-2)/N & 1/N & 0 & 0 & 1/N \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Dactylographe

- Comme dans le cas précédent, on impose une transition de {papa} vers {Ø} avec probabilité 1.
- On regarde l'espérance du temps de retour de {papa} vers lui-même. Pour cela, on a besoin de calculer la mesure stationnaire (et plus précisément, on a besoin de 5). Il suffit de résoudre le
- système $\pi P = \pi$ qui se traduit par :

$$\begin{cases} (N-1)\pi_1 + (N-2)\pi_2 + (N-1)\pi_3 + (N-2)\pi_4 + N\pi_5 = N\pi_1 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_4 = N\pi_2 \\ \pi_2 = N\pi_3 \\ \pi_3 = N\pi_4 \\ \pi_4 = N\pi_5 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 : Dactylographe

- Cela nous donne

$$\pi_5 = \frac{1}{N^4 + N^2 + 1}$$

- et donc en moyenne, l'enfant aura besoin de taper sur le clavier

$$N = \mathbb{E}_{\{papa\}}(\{papa\}) = \frac{1}{\pi_5} = N^4 + N^2 + 1 \text{ fois}$$

pour écrire le mot papa.

- Donc au final, il lui faudra $N' = \mathbb{E}_{\{papa\}}(\{papa\}) - 1 = N^4 + N^2$ frappes pour écrire papa partant de {Ø}
- On peut vérifier que le résultat de la question précédente se retrouve pour N = 3.

Exercice 2 : Dactylographe

- 3. Dans le cas d'un mot à q lettres distinctes, la matrice est presque plus simple, car à chaque état 3 cas se présentent : soit on tape la lettre suivante, et donc on passe à l'état suivant avec une probabilité 1/N, soit on tape la première lettre du mot, et on passe à l'état "première lettre tapée" avec une probabilité 1/N, soit on tape une autre lettre, et on se retrouve dans l'état ; avec une probabilité (N − 2)/N. Cela nous permet d'obtenir la matrice de transition suivante, à q + 1 lignes et q + 1 colonnes :

$$P = \begin{pmatrix} (N-1)/N & 1/N & 0 & & 0 & 0 \\ (N-2)/N & 1/N & 1/N & \dots & 0 & 0 \\ (N-2)/N & 1/N & 0 & & 1/N & 0 \\ \dots & \dots & \dots & & \dots & \dots \\ (N-2)/N & 1/N & 0 & & 0 & 1/N \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2 : Dactylographe

- On cherche alors la mesure stationnaire, en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \pi_q = N\pi_{q+1} \\ \pi_{q-1} = N\pi_q = N^2\pi_{q+1} \\ \dots \\ \pi_3 = N^{q-2}\pi_{q+1} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{q} \pi_i = N\pi_2 \\ \displaystyle\frac{N-1}{N}\pi_1 + \frac{N-2}{N}\sum_{i=2}^{q} \pi_i + \pi_{q+1} = \pi_1 \\ \pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 = 1 \end{cases}$$

Exercice 2 : Dactylographe

- Ce qui nous permet d'obtenir :

$$\pi_{q+1} = \frac{1}{N^q + 1}$$

- Et donc en moyenne, l'enfant aura besoin de taper sur le clavier

$$N = \mathbb{E}_{mot}(\tau_{mot}) = N^q - 1$$

fois pour écrire le mot à q lettres.

- Donc au final, il lui faudra $N' = \mathbb{E}_{\{mot\}}(\tau_{\{mot\}}) - 1 = N^q$ frappes pour écrire le mot choisi partant de {Ø}

Exercice 3 : La ruine du joueur, version 2

- *Deux joueurs, le joueur A possédant initialement x euros et le joueur B en possédant également x euros, jouent au jeu suivant : A chaque coup, les deux joueurs misent un euro et on lance un dé à 6 faces. Si le résultat du dé est pair, le joueur A remporte la mise et si le résultat du dé est impair, le joueur B remporte la mise. Le jeu cesse quand l'un des deux est ruiné. On notera X_n la richesse du joueur A à l'instant n, Y_n la richesse du joueur B à l'instant n, et T l'instant où s'arrête le jeu.*

1. *Modéliser ce problème à l'aide d'une suite de processus stochastiques.*
2. *Justifier que T définit bien un temps d'arrêt et préciser la filtration utilisée.*
3. *Montrer que le processus de richesse de A et le processus de richesse de B sont des martingales, préciser la filtration utilisée.*
4. *En admettant que $T < +\infty$ presque sûrement, et en appliquant le théorème d'arrêt, calculer la probabilité que A gagne la fortune de B.*
5. *Démontrer que $T < +\infty$ presque sûrement.*

- **Cf correction du TD1 sur les martingales discrètes**, en adaptant les valeurs : jeu de dé au lieu de pièce ; richesse a=b=x.