Non-linear option pricing

$$V_T^{(N)} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln\left(\frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}}\right)^2 \longrightarrow \langle \ln S\rangle_T$$

$F_T = V_T^{(N)}$ payoff

Prix du produit?

1) $dS_t/S_t = \sigma\, dW_t \quad (r=0)$

$P_0 = \mathbb{E}[F_T] = \sigma^2 T$

$d\ln S_t = -\frac{1}{2}\sigma^2 dt + \sigma\, dW_t \qquad F_T = \langle \ln S\rangle_T = \int_0^T \sigma_t^2\, dt = \sigma^2 T$

2) Modèle à vol sto:

$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_t\, dW_t$ ⇝ autre prix

Q: Sens du prix? Pricing?

1) $\frac{dS_t}{S_t} = \mu\, dt + \sigma\, dW_t \overset{\text{Girsanov}}{\rightsquigarrow} \frac{dS_t}{S_t} = \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}} \quad (r=0)$

$P_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[(S_T-K)^+]$

2) $\bar{P}_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[(S_T-K)^+]$

Qu'est-ce que ça veut dire de pricer? Calculer le P&L à la fin

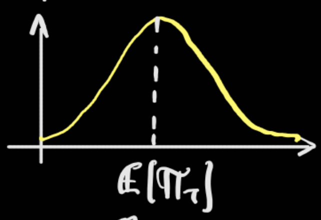
1) Assurer = Essayer d'obtenir le payoff F_T

(i) En $t=0$, vend le produit dérivé au prix P_0.

(ii) En $t=T$, $\Pi_T = P_0 e^{rT} - \underbrace{F_T}_{\text{payoff}}$

On fait l'hypo que $F_T = F(S_T)$ pour simplif.

$e^{-rT}\Pi_T = P_0 - e^{-rT}F(S_T)$



⇝ en moyenne doit être égale à 0

Fixer P_0 t.q. $\mathbb{E}^{hist}[\Pi_T]=0 \Rightarrow P_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{hist}[F(S_T)]$ ← $\$ \neq 0$

2) Bébé trader (peut se hedger mais une seule fois en t=0)

$$P\&L_T = -F_T + P_0 e^{rT} + \Delta(S_T - S_0)e^{rT}$$

i) $\mathbb{E}^{hist}[\Pi_T]=0$

ii) $\min_{\Delta, P_0} \mathbb{V}ar^{hist}[\Pi_T]$

$$\Leftrightarrow \min_{\Delta, \Pi_0} \mathbb{E}^{hist}[\Pi_T^2] \quad \text{s.c. } \mathbb{E}^{hist}[\Pi_T]=0$$

$\Updownarrow$ ← sous-jacent mart juste entre 0 et T.

$$P_0^* = e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_T)] \qquad (\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-rT}S_T] = S_0)$$

3) Trader expérimenté (peut se hedger tous les jours)

$$\Pi_T = -F(S_T) + P_0 + \sum_i \underbrace{\Delta_{i-1}}_{\Delta_{i-1}(S_0, S_1, \dots, S_{i-1})}(S_{t_i} - S_{t_{i-1}})$$

i) $\mathbb{E}^{hist}[\Pi_T]=0$

ii) $\min_{\Delta, P_0} \mathbb{V}ar(\Pi_T)$

$\rightsquigarrow \mathbb{Q} : \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}_{t_{i-1}}[S_{t_i}] = S_{t_{i-1}}$

4) Trader Paris 6

$$\Pi_T = -F_T + P_0 + \int_0^T \Delta_t dS_t \qquad P_0 = v(0,S_0),\ \Delta_t = \partial_S v(t,S_t)$$

$$\Pi_T = -F(S_T) + v(0,S_0) + \int_0^T \partial_S v(t,S_t)\, dS_t \overset{\text{Itô}}{=} -F(S_T) + v(T,S_T) - \int_0^T \left(\partial_t v + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \partial_S^2 v\right) dt$$

Posons $\begin{cases} v(T,S_T) = F(S_T) \\ \partial_t v + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \partial_S^2 v = 0 \end{cases} \rightsquigarrow$ EDP parabolique

← $dS_t = \sigma S_t dW_t \rightarrow S_t$ est $\mathbb{Q}$-mart

Feynman-Kac : $v(0,S_0) = P_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_T)]$

Gamma-hedging

Tous les jours Δ-hedge. Si on achète beaucoup $\rightsquigarrow$ market-impact

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma dW_t$$

Loi d'offre et de la demande

$$\frac{dS_t}{S_t} = \varepsilon \underbrace{d\Phi_t}_{\text{demande sur le marché}}$$

$$D_t = \Delta_t + \overset{\text{rasé}}{\Delta_t} \qquad \partial_S v(t,S_t) \qquad \Gamma_t$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t + \varepsilon \, d\underbrace{\overset{\text{"}}{\Delta_t}}_{\text{l'impact de }\Delta\text{-hedge}} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t + \varepsilon \partial_{SS} v(t,S_t)\, dS_t = (\ldots)dt + \frac{\sigma_t}{1-\varepsilon S_t \Gamma_t} dW_t$$

Question : comment on trouve le delta ? On optimise comme d'habitude

$$\Pi_T = -F(S_T) + v(T,S_T) - \int_0^T (\partial_t v + \ldots)\, dt$$

Après le calcul : $P_0 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[F(S_T)]$ ← EDP puis FK

$$\mathbb{Q} : \frac{dS_t}{S_t} = \frac{\sigma_t}{1-\varepsilon S_t \Gamma_t} dW_t$$

L'EDP parabolique : $\begin{cases} \partial_t v + \frac{1}{2} \frac{\sigma^2 S^2}{1-\varepsilon S \partial_S^2 v} \partial_S^2 v = 0 \\ v(t,S) = F(S) \end{cases}$

EDP parabolique (dans $\mathbb{R}$)

$$\begin{cases} \partial_t v(t,S) + F(t,S,\underbrace{\partial_S v}_{\Delta}, \underbrace{\partial_S^2 v}_{\Gamma}) = 0 \qquad \frac{\partial F}{\partial \Gamma} > 0 \\ v(T,S) = F(S) \end{cases}$$

Pour BS $F = \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \Gamma$

Principe de comparaison ?

$$\begin{array}{ccc} v_1(T,S) & < & v_2(T,S) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ \text{EDP} & & \text{EDP} \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ v_1(0,S_0) & & v_2(0,S_0) \end{array}$$

si parabolique et $\frac{\partial f}{\partial \Gamma} > 0$ on aura $v_1(0,S_0) < v_2(0,S_0)$

$$v_1(T,S) \rightsquigarrow v_1(0,S_0)$$

$$\bar{v}_1(T,S) = v_1(T,S) + c \rightsquigarrow v_1(0,S_0) + c$$

$$\Downarrow$$

$$\partial_t v_1 + F(t,S,\partial_S v_1, \partial_{SS}^2 v_1) = 0$$

$\text{Prix}(S_T) = S_0$ car $S_0 + \underbrace{\int_0^T dS_t}_{\Delta\text{-hedge de }1} - S_T = 0$

$v(T,S) = cS \Rightarrow v(t,S) = cS$

$0 + F(t,S,c,0) = 0$

c doit être vérifié à chaque fois

Trader flippé bébé

$$\Pi_T = -F(S_T) + P_0 + \Delta(S_T - S_0)$$

$$\begin{cases} \min\limits_{P_0,\Delta} P_0 \\ \text{s.c. } \Pi_T \geq 0 \ - \mathbb{P}^{hist}\text{-p.s.} \end{cases}$$ super-réplication

$\hookrightarrow$ C pb de programmation linéaire

$$P = \min_{P_0,\Delta} P_0 + \max_{p(\cdot)\geq 0} \int p(s)ds \{F(s) - P_0 - \underbrace{\Delta(s-s_0)}_{\text{positif en } s=s^*}\} \quad (*)$$

$\rightarrow p(s) = \lambda \delta_{s=s^*}, \ \lambda \to \infty$

$\min\limits_{P_0,\Delta} P_0 \neq +\infty$ obligé

2me étape

$$\min_{x\in\mathcal{X}} \max_{y\in\mathcal{Y}} f(x,y) \geq \max_{y\in\mathcal{Y}} \min_{x\in\mathcal{X}} f(x,y) \quad \text{(dualité faible)}$$

Dualité forte s'il y a égalité

$$(*) \rightsquigarrow P = \max_{p(\cdot)\geq 0} \min_{P_0,\Delta} P_0 + \int p(s)ds\{F(s) - P_0 - \Delta(s-S_0)\}$$

convexité $\rightsquigarrow$ dualité forte

3me étape

Par rapport à P_0 : $P_0\left(1 - \int p(s)ds\right) \to \int p(s)ds = 1$ (sinon $-\infty$)

Par rapport à Δ, $-\Delta\underbrace{\int p(s)ds\,(s-s_0)}_{=0}$

Finalement,

$$P = \max_{\substack{p(\cdot) \\ p(\cdot)\geq 0 \ \int p\,ds = 1 \ \int p(s-s_0)ds = 0}} \int F(s)p(s)ds = \max_{\mathbb{P}\in\mathcal{M}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[F(S_T)]$$

$\hookrightarrow$ mesures de proba t.q. $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[S_T] = S_0$

$\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^{hist}$ = permet de dire que les supports de $\mathbb{P}^{hist}$ et $\mathbb{P}$ sont les m̂.

Optimisation?

(a) Un grid $\mathbb{R}_+$ $[M,N]$

(b) On fait un simplexe $\rightsquigarrow \underline{P}^{M,N} \leq P^* \leq P^{M,N}$

Sous réplication : dans ce cas on achète le produit

$$\underline{P} = \max_{\text{t.q. } \Pi_T \leq 0 \ \mathbb{P}^{hist} \text{ p.s.}} P_0 = \min_{\substack{\mathbb{P} \in \mathcal{M} \\ \mathbb{P} \sim \mathbb{P}^{hist}}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[F(S_\cdot)]$$

Théorème Si A.O.A. $\underline{P} \leq P \leq \bar{P}$

prix sans arbitrage

Trader Paris VI stressé

$$\bar{P} = \min_{P_0, \Delta} P_0 \quad \text{t.q.} \quad \Pi_T = P_0 + \int_0^T \Delta_t \, dS_t - F_T \geq 0 \quad \mathbb{P}^{hist} \text{ p.s.}$$

proc. adapté

Discrétise Δ_t par $(\Delta t_0, \Delta t_1, \dots)$ puis passe à la limite

$$\bar{P} = \max_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^{hist}) = \{S \text{ est une } \mathbb{P}\text{-mart}, \ \mathbb{P} \sim \mathbb{P}^{hist}\}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[F_T]$$

$$\underline{P} = \min_{\dots} \dots$$

$$\mathbb{P} = \theta \bar{\mathbb{P}} + (1-\theta) \underline{\mathbb{P}}$$

Ex $\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma dW_t$

Girsanov : $\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^{hist}$ S est $\mathbb{P}$-mart

Sous $\mathbb{P}$, $\frac{dS_t}{S_t} = \sigma dW_t^{\mathbb{P}} \Rightarrow \bar{P} = \mathbb{E}^{BS}[F_T] = \underline{P}$ unicité de prix

Vol locale $\frac{dS_t}{S_t} = (\dots)dt + \sigma(t, S_t) dW_t$

Model-free
- Transport optimal
- Skorokhod pb.
- Schrödinger (modèles génératifs)
- Géométrie

Trader stressé Paris VI

$(r \equiv 0)$

$$P_{super} = \inf_{z, \Delta} z \quad \text{t.q.} \quad M_T = z + \int_0^T \Delta_t \, dS_t - F_T \geq 0 \quad \mathbb{P}^{hist}\text{-a.s.}$$

$F_T = F(S_\cdot)$

déf du prix de superréplication

$$P_{super} = \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^{hist})} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[F_T]$$

$$\hookrightarrow \{\mathbb{P} : S_t \text{ est } \mathbb{P} \text{ martingale}, \mathbb{P} \sim \mathbb{P}^{hist}\}$$ ← espace convexe (dim ∞)

$$P_{sousrep} = \inf_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^{hist})} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[F_T]$$

$P_{sous} \leq P \leq P_{super}$, sinon arbitrage

↳ prix sans arbitrage

Exemple $\mathbb{P}^{hist}$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_{BS} dW_t^{\mathbb{P}^{hist}}$$

sous $\mathbb{P}$:

la vol doit être la même! (Girsanov)

$$\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^{hist} \qquad \frac{dS_t}{S_t} = \mu_t' dt + \sigma_{BS} dW_t^{\mathbb{P}}$$

↳ on peut mettre ici n'importe quoi, mais pour avoir une martingale il faut que $\mu_t' = 0$

Donc $\mathcal{M}(\mathbb{P}^{hist}) = \{\mathbb{P}^{BS}\}$ $\Rightarrow P = P_{sous} = P_{super}$

Lemme $z = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{BS}}[F_T]$. $\exists \Delta^*$: $z + \int_0^T \Delta_t^* dS_t = F_T$ $\mathbb{P}^{hist}$-p.s.

Preuve

(1) $z + \int_0^T \Delta_t^{sous} dS_t - F_T \leq 0$ SUB

(2) $z + \int_0^T \Delta_t^{super} dS_t - F_T \geq 0$ SUPER

$$-(1)+(2) : \underbrace{\int_0^T (\Delta_t^{super} - \Delta_t^{sous}) dS_t}_{\text{martingale}, \geq 0} \geq 0 \quad \mathbb{P}^{hist}\text{-p.s.}$$

martingale, $\geq 0 \Rightarrow = 0$ p.s. $\Rightarrow \Delta_t^{super} = \Delta_t^{sous}$ $\square$

Déf On dit que $\mathbb{P}^{hist}$ est un "modèle" complet si $\mathcal{M}(\mathbb{P}^{hist}) = \{\mathbb{P}^*\}$

Ex $\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(t, S_t) dW_t$ (fonc $[0,T] \times \mathbb{R}_+$)

Mr. Girsanov $\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^{hist}$ $\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t' dt + \sigma(t, S_t) dW_t^{\mathbb{P}}$

$$\Updownarrow$$

$$0 \cdot dt + \sigma(t, S_t) dW_t^{\mathbb{P}}$$

$\rightarrow$ aussi compet

Ex (SVM) SABR

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

$$d\sigma_t = \nu \sigma_t dZ_t \qquad d\langle W, Z\rangle_t = \rho dt \text{ avec } \rho \in (-1, 1)$$

(a) $\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^{hist}$ (Mr Girsanov)

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu_t' dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}}$$

$$d\sigma_t = b_t' dt + \nu \sigma_t dZ_t^{\mathbb{P}}$$

Exo $\frac{d\mathbb{P}}{d\mathbb{P}^{hist}} = \dots$

(b) S $\mathbb{P}$-martingale $\rightsquigarrow$ $\begin{cases} \frac{dS_t}{S_t} = 0 \cdot dt + \sigma_t dW_t^{\mathbb{P}} \\ d\sigma_t = b_t' dt + \nu \sigma_t dZ_t^{\mathbb{P}} \end{cases}$

$b \Rightarrow \dim = \infty$ de $\mathcal{M}(\mathbb{P}^{hist})$

$\Rightarrow$ Pas de résultat de replication.

Modèle de courbe de variance

Variance swap:

$t=0 \quad t_1 \quad t_2 \quad \cdots \quad t_N = T$

$$V.S_T = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \ln^2 \frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}} \xrightarrow[N\to\infty]{} \langle \ln S\rangle_T \qquad \frac{1}{T}\langle \ln S\rangle_T = \frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2 dt = \sigma_{BS}^2$$

Ex (BS) $\mathbb{P}^{BS}$: $\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_{BS} \cdot dW_t^{\mathbb{P}^{BS}}$

Ex (LV) $\mathbb{P}^{LV}$: $\frac{dS_t}{S_t} = \sigma(t, S_t) dW_t^{\mathbb{P}^{LV}}$ $\qquad \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{LV}}\left[\frac{1}{T}\langle \ln S\rangle_T\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{LV}}\left[\frac{1}{T}\int_0^T \sigma^2(t, S_t) dt\right]$

Hypothèse $(t=0)$ Le trader peut acheter des Vanilles $\begin{smallmatrix}\nearrow \text{Call} \\ \searrow \text{Put}\end{smallmatrix}$

$C(T,K)$, $P(T,K)$

Lemme (Carr) (identité remarquable)

$$f(s) = f(s_0) + f'(s_0)(s-s_0) + \int_0^{s_0} f''(x)(x-s)^+ dx + \int_{s_0}^{\infty} f''(x)(s-x)^+ dx$$

Preuve $f(s) = \int_0^\infty f''(x) \underbrace{\delta(s-x)}_{\partial^2_{xx}(s-x)^+} dx \overset{IPP}{=}$ $\square$

$$\text{Prix}(f(S_T)) \overset{carr}{=} \text{Prix}\Big(\underbrace{f(S_0)}_{\text{CASH}} + f'(S_0)\underbrace{(S_T - S_0)}_{\text{FORWARD}} + \int_0^{S_0} f''(x)\underbrace{(x - S_T)^+}_{\text{PUTS}} dx + \int_{S_0}^{\infty} f''(x)\underbrace{(S_T - x)^+}_{\text{CALLS}} dx\Big)$$

Axiome $\text{Prix}(\mathcal{P}) \in \mathbb{R}$

$\text{Prix}(\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2) = \text{Prix}(\mathcal{P}_1) + \text{Prix}(\mathcal{P}_2)$

$$\text{Prix}(f(S_T)) = f(S_0)\underbrace{\text{Prix}(1)}_{=1} + f'(S_0)\underbrace{\text{Prix}(S_T - S_0)}_{=0} + \int_0^{S_0} f''(x)\underbrace{\text{Prix}((x - S_T)^+)}_{C(T,x)} dx + \int_{S_0}^{\infty} f''(x)\underbrace{\text{Prix}((S_T - x)^+)}_{P(T,x)} dx$$

Choix pour $S_0 = S_t|_{t=0}$

$$\text{Prix}(f(S_T)) = f(S_0) + \int_0^{S_0} f''(x) P(T,x) dx + \int_{S_0}^{\infty} f''(x) C(T,x) dx$$

Réplication statique $\Rightarrow$ exerc. vanilles

$$\Pi_T^f = +\text{Prix}(f(S_T)) + \Big(f(S_0) + \int_0^{S_0} f''(x)(x - S_T)^+ dx + \int_0^{S_0} f''(x)(S_T - x)^+ dx\Big) -$$

$$- \text{Prix}(f(S_T)) - \underbrace{f(S_T)}_{\text{client exerc.}} \overset{carr}{=} 0$$

Rem (Analyse fonctionnelle)

$\text{Prix}(\mathcal{P}) \geq 0$ si $\mathcal{P}(S_T) \geq 0$

Prix = forme linéaire positive

$\text{Prix}(P) = \int P(x)\mu(dx)$, μ mesure (Riesz)

$\text{Prix}(1) = 1 \Rightarrow \mu$ probabilité

$\text{Prix}(P) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{mkt}}[\mathcal{P}(S_T)]$

Ex $\mathcal{P}(S_T) = (S_T - K)^+$ $\quad \underbrace{\text{Prix}((S_T - K)^+)}_{C(T,K)} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{mkt}}[(S_T - K)^+]$

$$\partial^2_K C(T,K) = \partial^2_K \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{mkt}}[(S_T - K)^+] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{mkt}}[\delta(S_T - K)] = \mathbb{P}^{mkt}(S_T = K) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ induire la proba de pricing utilisée par le marché

Ex (Mechanique quantique) A op. adjoint A. $\text{Prix}(A) = \text{tr}(\rho A)$

Rem $(\omega_1 S_T^1 + \omega_2 S_T^2 - K)^+$ le prix est connu $\forall \omega_1\ \forall \omega_2\ \forall K \to \mathbb{P}^{mkt}(S_T^1, S_T^2)$

Rem $\pi = z + \int_0^T \Delta_t \cdot dS_t - F_T$ dans le cas multidim.

Pricing VSwap $\mathbb{P}^{hist}$: $\frac{dS_t}{S_t} = (\dots)dt + \sigma_t dW_t$ (si S_t est processus continu)

$$d \ln S_t \overset{\text{Itô}}{=} \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2}\sigma_t^2 dt$$

$$\overset{\int}{\to} \frac{1}{T}\ln\frac{S_T}{S_0} = \int_0^T \frac{dS_t}{T S_t} - \frac{1}{2}\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2 dt \to \boxed{\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2 dt = -\frac{2}{T}\ln\frac{S_T}{S_0} + \frac{2}{T}\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}}$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T \sigma_t^2 dt = \frac{1}{T}\langle \ln S \rangle_T$$

$$\pi_T = \underbrace{-\frac{2}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}}_{\text{Exerce. de payoff Europ.}} + \underbrace{\frac{2}{T}\int_0^T \frac{dS_t}{S_t}}_{\text{delta-hedge}} \underbrace{- \frac{1}{T}\langle \ln S\rangle_T}_{\text{client exerce VS en } T} = 0$$

$$+ \underbrace{\text{Prix}\left(-\frac{2}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}\right)}_{\text{prime de VS}} \underbrace{- \text{Prix}\left(-\frac{2}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}\right)}_{\text{achat en } t=0 \text{ de payoff } -\frac{2}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}}$$

$$\text{Prix VS en } T = \text{Prix}\left(-\frac{2}{T}\ln\frac{S_T}{S_0}\right) = \frac{2}{T}\left(\int_0^{S_0} \frac{1}{x^2}\text{Put}(T,x)dx + \int_{S_0}^{\infty} \frac{1}{x^2}\text{Call}(T,x)dx\right)$$

SVM (Extra terreste)

$$\mathbb{P} \quad \frac{dS_t}{S_t} = \sigma_t dW_t = \sqrt{\xi_t^t}\, dW_t$$

$$\xi_t^T := \mathbb{E}_t[\sigma_T^2] \quad \left(\xi_t^t = \mathbb{E}_t[\sigma_t^2] = \sigma_t^2\right)$$

$\Rightarrow$ par la déf de ξ, $\xi_\cdot^T$ est une $\mathbb{P}$-martingale

$$d\xi_t^T = \Sigma(S_\cdot, \xi_\cdot) \cdot dZ_t$$

∞ de processus à simuler!

$$\xi_0^T \overset{\text{déf}}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\sigma_T^2]$$

Bookins :

- Øksendal
- Revuz-Yor
- Karatzas
- Protter
- Itô, ...

$$T \cdot VS_T = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\int_0^T \sigma_t^2 dt\right] \Rightarrow \partial_T\left[T \cdot VS_T^{mkt}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\sigma_T^2\right]$$

Ex $\Sigma = \sinh \xi_t^T \rightarrow$ infinité de courbes à simuler...

Trouver un Σ t.q. $\xi_t^T = f(t, T, \vec{x}_t)$ - répresentation Markovienne de dim finie

Axiome

1) Rep. Markov

2) $d\xi_t^T = \Sigma(\xi_t^\cdot, \underbrace{t, T}_{T-t}) dW_t$ Homogenité

3) $\xi_t^T \geq 0$

$\exists!$ Modèle $\mathbb{P}_n$ SG@06 (Bergomi)

$$\Rightarrow d\xi_t^T = \sum_{i=1}^{n} \sigma_i e^{-\varkappa_i(T-t)} dZ_t^i$$

Modèle $\mathbb{P}_n$ (décoré) @SG 08

EDS McKean-Vlasov

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sqrt{\xi_t^t}\, dW_t \cdot \sigma(t, S_t)$$

Calibration Pierre & Luc Computation of breakeven for SVMs.

Rem "Malliavin de pauvre"

$$\mathbb{E}[f] = \int f(x) \frac{e^{-\frac{(x-S_0)^2}{2\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} dx$$

$$\Delta = \partial_{S_0}\mathbb{E}[f] = \int f(x) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \cdot \left(\frac{x-S_0}{\sigma^2}\right) \cdot \underbrace{e^{-\frac{(x-S_0)^2}{2\sigma^2}}}_{\text{densité}} dx = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[f(S_T) \cdot \frac{(S_T - S_0)}{\sigma^2}\right]$$

1) Bump & Recompute (DF)

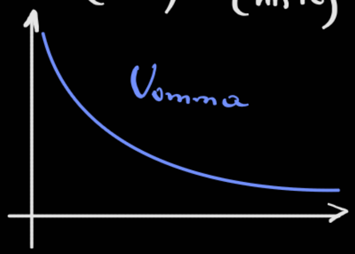
2) $\Delta = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[f(S_T) \cdot W(S_T)\right]$ MC

Ex $\frac{dS_t}{S_t} = \sigma(t, S_t) dW_t$

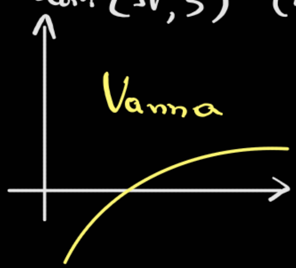
formule Bismut

$$\partial_{S_0}\mathbb{E}\left[f(S_T) \mid S_0\right] = \mathbb{E}\left[f(S_T) \cdot W\right]$$

$Vol(IV^T)$ (histo)



$Corr(IV^T, S)$ (histo)



On calibre les paramètres pour ditter bien ces courbes

$c(S_T^1, S_T^2)$ $\qquad$ $\text{Prix}(u_1(S_T^1)) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^1}[u_1(S_T^1)]$

Hypothèse : Le trader peut acheter des vanilles @T pour S^1 et S^2

$$\mathcal{P}_{\text{Monge-(Kantorovitch)}} = \inf_{\substack{u_1 \in L^1(\mathbb{P}^1) \\ u_2 \in L^1(\mathbb{P}^2)}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_1}[u_1] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}_2}[u_2]$$

$$\text{t.q. } \underbrace{u_1(s_1) + u_2(s_2)}_{\text{exerc. vanilles}} \geq \underbrace{c(s_1, s_2)}_{\text{exerc. de client}} \quad \forall s_1, \forall s_2.$$

Avec Δ-hedge

$\sum_i \Delta_{t_i}^2 (S_{t_{i+1}} - S_{t_i}) \rightsquigarrow$ le $\hat{m}$ prix

autres maturités pour vanille

① $$\mathcal{P}_{\text{Monge}} = \inf_{u_1, u_2} \sup_{\substack{p(\cdot,\cdot) \\ p \geq 0}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_1}[u_1] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}_2}[u_2] + \int p(s_1, s_2)\big(\underbrace{c(s_1,s_2) - u_1(s_1) - u_2(s_2)}_{\geq 0 \text{ en } (s_1^*, s_2^*)}\big)\, ds_1 ds_2$$

$\Rightarrow p = \delta(s_1 - s_1^*, s_2 - s_2^*)\,\lambda, \ \lambda \uparrow \infty$

② $$\mathcal{P}_{\text{Monge}} \overset{\text{Minimax}}{=} \sup_{p(\cdot,\cdot) \geq 0} \inf_{u_1, u_2} \left[\int u_1(s_1)\left(\mathbb{P}_1(ds) - \int p(s_1, s_2) ds_2\right) ds_1 + (\dots) \right]$$

③ $$\mathcal{P}_{\text{Monge}} = \sup_{p(\cdot,\cdot)} \int p(s_1, s_2) c(s_1, s_2)\, ds_1 ds_2 = \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[c(S_1, S_2)]$$

$$\text{t.q. } \int p(s_1, s_2)\, ds_2 = \mathbb{P}_1(s_1)$$
$$\int p(s_1, s_2)\, ds_1 = \mathbb{P}_2(s_2)$$

$\mathcal{M}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2) = \{ S_1 \sim \mathbb{P}_1 \text{ et } S_2 \sim \mathbb{P}_2 \}$

Pb du transport optimal

Bibliothèque (analyse fonctionnelle)
- H. Brezis

$$\sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[c] = \inf_{u_1, u_2} \mathbb{E}^{\mathbb{P}_1}[u_1] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}_2}[u_2]$$

$$u_1(s_1) + u_2(s_2) \geq c(s_1, s_2)$$

<u>1ère étape</u> $\mathbb{P}^* \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2)$ ↙ "guesser à la con"

$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[c] \leq \sup \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[c] \leq$

<u>2ème étape</u> u_1^* et u_2^* qui vérifient $u_1^* + u_2^* \geq c$

$$\leq \inf \mathbb{E}^{\mathbb{P}_1}[u_1] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}_2}[u_2] \leq \mathbb{E}^{\mathbb{P}_1}[u_1^*] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}_2}[u_2^*]$$

<u>3ème étape</u> (vérification)

<u>Rem</u> Supposons que $\mathbb{P}^*$ soit une solution optimale

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[u_1^* + u_2^* - c] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[u_1^*] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[u_2^*] - \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[c] = \{\mathbb{P}^* \in \mathcal{M}(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2)\} =$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}_1}[u_1^*] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}_2}[u_2^*] - \mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}[c] \overset{\mathbb{P}^* \text{ optimal}}{=} 0$$

$\Rightarrow$ $u_1^* + u_2^* - c$ est une v.a. de moyenne 0

$$\Rightarrow \underbrace{u_1^*(s_1) + u_2^*(s_2) - c(s_1, s_2)}_{\geq 0} = 0 \quad \mathbb{P}^*\text{- p.s.}$$

• Protter-Jacod

<u>Digression</u> ① $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2)$ convexe, (faible) compact (Prokhorov)

② $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2) = \overline{\text{Conv Ext}(\mathcal{M})}$

③ (Lemme de Bauer) $\rightarrow$ sup est atteint en un point extremal.

$$\mathbb{P}^*(s_1, s_2) = \mathbb{P}^1(s_1)\, \delta_{s_2 - T(s_1)} \qquad \xrightarrow{\mathbb{P}^1} s_1 \xrightarrow{T} s_2$$

$\mathbb{P}^* \in \mathcal{M}(s_1, s_2)$ $\quad T(s) = F_{\mathbb{P}^2}^{-1} \circ F_{\mathbb{P}^1}(s)$

$u_1^*(s_1) + u_2^*(s_2) = c(s_1, s_2)$ $\mathbb{P}^*$- p.s.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \underline{u_1^*(s_1) + u_2^*(T(s_1)) = c(s_1, T(s_1))} \\ u_1^*(s_1) = \sup\limits_{s_2} \{c(s_1, s_2) - u_2^*(s_2)\} \rightarrow \underline{\partial_{s_2} c(s_1, T(s_1)) - u_2^*(s_2) = 0} \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ expression pour u_1^*, u_2^* (Fréchet-Hoeffding)

$$P = \inf_{\substack{u_1 \in L^1(\mathbb{P}^1) \\ u_2 \in L^1(\mathbb{P}^2)}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^1}[u_1(S_1)] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}^2}[u_2(S_2)] \quad \text{t.q. } u_1(S_1) + u_2(S_2) \geq C(S_1, S_2) \quad = \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[C(S_1, S_2)]$$

<u>Rem</u> $\mathbb{P}_{1,2}(K) = \partial_K^2 C_{1,2}^{mkt}(T, K)$

<u>Rem</u> $\mathcal{M} \neq \emptyset$ car $\mathbb{P} = \mathbb{P}^1 \otimes \mathbb{P}^2 \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2)$

<u>Ex.</u> Cliquet / Forward-start

$$C(S_1, S_2) = (S_{t_2} - K S_{t_1})^+, \quad K \in [0, 1]$$

info sur vol entre t_1 et t_2.

<u>Rem (BS)</u> $P_{BS} = \mathbb{E}[(S_{t_2} - K S_{t_1})^+]$ où $dS_t = \sigma_{BS}(t) S_t dW_t$

$$= \mathbb{E}\left[S_{t_1}\left(\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}} - K\right)^+\right] = \mathbb{E}\left[S_{t_1} \mathbb{E}_{t_1}\left[\left(\underbrace{\frac{S_{t_2}}{S_{t_1}}}_{\text{log-normale}} - K\right)^+\right]\right] =$$

$$= \mathbb{E}\Big[S_{t_1} \cdot \underbrace{BS\Big(S_0 = 1, K, \sigma_{IV}^2 = \frac{1}{t_2 - t_1}\int_{t_1}^{t_2} \sigma_{BS}^2(t)\,dt, t_2 - t_1\Big)}_{\text{const.}}\Big] = S_0 \cdot BS(S_0 = 1, K, \sigma_{IV}^2, t_2 - t_1)$$

Prix de sur-réplication

$$P = \inf_{\substack{u_1 \in L^1(\mathbb{P}^1) \\ u_2 \in L^1(\mathbb{P}^2) \\ \Delta(S_1) \in C_b^0(\mathbb{R}_+)}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^1}[u_1(S_1)] + \mathbb{E}^{\mathbb{P}^2}[u_2(S_2)] =$$

$$\text{t.q. } u_1(S_1) + u_2(S_2) - C(S_1, S_2) \geq 0 \quad + \cancel{\Delta_0 (S_1 - S_0)} \to 0 \quad + \Delta_1 (S_2 - S_1) \quad \forall s_1, \forall s_2$$

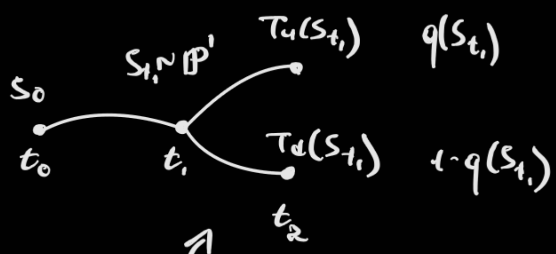
$\Delta_1(S_1)$ ← delta hedge entre t_1 et t_2

$$= \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2)} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[C(S_1, S_2)]$$

où $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2) = \{S_\cdot,\ S_{t_1} \sim \mathbb{P}^1,\ S_{t_2} \sim \mathbb{P}^2,\ \mathbb{E}_{t_1}[S_{t_2}] = S_{t_1}\}$

Modèle optimale

Sous la condition $\partial^3_{s_1 s_2 s_2} C \geq 0$



Binomial

Rem Solution de Fréchet : $\mathbb{P}_{(S_1,S_2)} = \mathbb{P}'(S_1)\,\delta_{S_2 - T(S_1)}$ où $T = F_2^{-1} \circ F_1$

$\partial_{S_1 S_2} C \geq 0$

$$\bar{C}(S_1,S_2) = C(S_1,S_2) + U_2(S_2) + \underbrace{U_1(S_1)}_{\text{Prix } \mathbb{E}^{\mathbb{P}'}[U_1]}$$

ne change pas le risque du produit

$$\downarrow$$

$$\partial_{S_1 S_2}\bar{C} = \partial_{S_1 S_2} C$$

$$\bar{C}(S_1,S_2) = C(S_1,S_2) + U_2(S_2) + \underbrace{U_1(S_1)}_{\text{Prix } \mathbb{E}^{\mathbb{P}'}[U_1]} + W(S_1)(S_2 - S_1)$$

$$\downarrow$$

$\partial_{S_1 S_2}\bar{C} = \partial_{S_1 S_2} C + W'(S_1)$ $\Rightarrow$ pas invariant

mais

$$\partial_{S_1 S_2 S_2}\bar{C} = \partial_{S_1 S_2 S_2} C$$

Ex (Lookback) $\text{Payoff} = (M_T - S_T)^2$, $M_T = \max_{t \in [0,T]} S_t$

Approche 1 $dS_t = \sigma_{BS} S_t \, dW_t$

$$P_{BS} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{BS}}\left[(M_T - S_T)^2\right], \quad \Delta(t,s,m) = \partial_s \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{BS}}\left[(M_T - S_T)^2 \mid S_0 = s, M_0 = m\right]$$

réplicable sous l'hypothèse de BS

Approche 2 " Cette option exotique est en fait modèle-indépendante "

Identité 1 : $d(M_t - S_t)^2 = -2(M_t - S_t)dS_t + d\langle S\rangle_t + 2(M_t - S_t)\underbrace{dM_t}_{=0} =$

lorsque $M_t \neq S_t$

$\underbrace{}_{=0}$

$$(M_T - S_T)^2 - \underbrace{(M_0 - S_0)^2}_{=0} = -2\int_0^T (M_t - S_t)\,dS_t + \langle S\rangle_T \; (=)$$

réplicable comme le variance swap

Identité 2 :

$$dS_t^2 = 2S_t\,dS_t + d\langle S\rangle_t \Rightarrow S_T^2 = S_0^2 + 2\int_0^T S_t\,dS_t + \langle S\rangle_T$$

$$(=) \; -2\int_0^T (M_t - \cancel{S_t})\,dS_t + S_T^2 - S_0^2 - 2\cancel{\int_0^T S_t\,dS_t} = -2\int_0^T M_t\,dS_t + S_T^2 - S_0^2 \qquad (*)$$

Δ-hedge

$$-\underbrace{(M_T - S_T)^2}_{\text{client exerce l'option}} - 2\int_0^T M_t\,dS_t + S_T^2 - S_0^2 = 0 \quad \mathbb{P}^{hist}$$

(sous l'hypothèse que S_t n'a pas de sauts)

$+ \text{Prix}(S_T^2) - \text{Prix}(S_T^2)$

prix d'option $= \text{Prix}(S_T^2) - S_0^2$

par la formule de Carr

$$\text{Prix}(S_T^2) = S_0^2 + 2\int_0^{S_0} \text{Put}(T,K)\,dK + 2\int_{S_0}^{\infty} C(T,K)\,dK$$

Rem $\lim_{|k|\to\infty} \frac{\sigma_{IV}^2 T}{|k|} \leq 2$ Borne de Lee

k : log-moneyness

Digression : Implied vol

σ_{IV} t.q. $C(T,K) = BS(S_0, K, T, \sigma_{IV})$

Arbitrage-free $\Leftrightarrow$ (i) $\partial_K^2 C^{mkt}(T,K) \geq 0$ (Butterfly)

(ii) Ordre convexe : $C^{mkt}(T_1,K) \leq C^{mkt}(T_2,K) \quad \forall K$ avec $T_1 < T_2$

(Calendar spread)

Rem $\mathcal{M}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2) = \{S_{t_1} \sim \mathbb{P}^1, S_{t_2} \sim \mathbb{P}^2, \mathbb{E}_{t_1}[S_{t_2}] = S_{t_1}\} \neq \emptyset$ ssi (ii) est vérifiée

$\curvearrowleft$ Kellerer theorem

<u>Preuve</u> $\Rightarrow$ Soit $\mathbb{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}^1, \mathbb{P}^2)$ $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[(S_{t_2} - K)^+] \overset{\text{Jensen}}{\geq} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[(\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{P}}_{t_1}[S_{t_2}]}_{S_{t_1}} - K)^+]$

$\Leftarrow$ Si les conditions (i) & (ii) sont vérifiées on va construire $\mathbb{P} \in \mathcal{M}(\mathbb{P}_1, \mathbb{P}_2)$.

$$\underset{\text{Itô-Tanaka}}{d(S_t - K)^+} = \mathbb{1}_{\{S_t > K\}} dS_t + \underbrace{\text{"}\tfrac{1}{2}\delta(S_t - K)\, d\langle S\rangle_t\text{"}}_{dL_t \text{ - local time}} = \mathbb{1}_{\{S_t > K\}} dS_t + \tfrac{1}{2}\delta(S_t - K)\sigma_t^2\, dt$$

$\downarrow \mathbb{E}_0[\ldots]$

$$dS_t = \sigma_t\, dW_t$$

$$d\underbrace{\mathbb{E}_0[(S_t - K)^+]}_{C(t,K)} = \tfrac{1}{2}\mathbb{E}_0[\delta(S_t - K)\sigma_t^2]\,dt = \tfrac{1}{2}\frac{\mathbb{E}_0[\delta(S_t - K)\sigma_t^2]}{\mathbb{E}_0[\delta(S_t - K)]}\cdot \mathbb{E}_0[\delta(S_t - K)]\,dt =$$

$$= \tfrac{1}{2}\mathbb{E}[\sigma_t^2 \mid S_t = K]\cdot \underbrace{\mathbb{E}_0[\delta(S_t - K)]}_{\partial^2_{KK} C(t,K)}\,dt$$

$$\mathbb{E}[\sigma_t^2 \mid S_t = K] = \frac{2\,\partial_t C(t,K)}{\partial^2_K C(t,K)}$$

positif $\Leftrightarrow$ ordre convexe

On prend $\sigma_t = \sigma_{loc}(t, S_t)$ où $\sigma^2_{loc}(t,K) := \dfrac{2\,\underbrace{\partial_t C^{mkt}}}{\underbrace{\partial^2_K C^{mkt}}_{>0 \,\Leftrightarrow\, \text{butterfly}}}$

Vol locale: $dS_t = \dfrac{2\,\partial_t C^{mkt}(t, S_t)}{\partial^2_K C^{mkt}(t, S_t)}\, dW_t$

SV: $dS_t = S_t\, a_t \cdot dW_t$

$\curvearrowleft$ proc. d'Itô.

LSV: $dS_t = \underbrace{S_t a_t}_{\sigma_t}\, dW_t$ ce modèle est calibré sur les vanilles

ssi $\mathbb{E}[\underbrace{S_t^2}_{=K^2} a_t^2 \mid S_t^2 = K] = \sigma^2_{loc}(t,K)$

On prend (?) $a_t = \sigma(t, S_t)\cdot A_t \rightsquigarrow \sigma^2(t,K) = \mathbb{E}[A_t^2 \mid S_t = K] = \sigma^2_{loc}(t,K) \Rightarrow$

$$\Rightarrow \sigma(t,K) = \frac{\sigma_{loc}(t,K)}{\sqrt{\mathbb{E}[A_t^2 \mid S_t = K]}} \longrightarrow \frac{dS_t}{S_t} = A_t \cdot \frac{\sigma_{loc}(t, S_t)}{\sqrt{\mathbb{E}[A_t^2 \mid S_t]}}\, dW_t$$

$\rightarrow \quad \mathbb{E}\left[(S_t-K)^+\right] = C^{mkt}(t,K) \quad \forall t \quad \forall K$

Revue Ⓐ Approche paramétrique : SVI

$\sigma^2_{SV}(k,T) = a + bk + \sqrt{c(k-d)^2+e^2}$ linéaire en k pour $|k| \to \infty$

log-moneyness

⚠ Ne vérifie pas (i) !

On peut l'utiliser pour l'extrapollation

SABR ⇝ smile paramétrique

$$\begin{cases} dS_t = S_t^\beta a_t dW_t \\ da_t = \vartheta \cdot a_t \cdot dZ_t \\ d\langle W,Z\rangle = \rho\, dt \end{cases}$$

$C^{MC}(t,K) = \mathbb{E}^{MC,SABR}\left[(S_t-K)^+\right] = f(t,K,\beta,\vartheta,\rho,a_{t=0}) \rightarrow$

$\rightarrow \sigma^{SABR}_{SV}(K,t,\beta,\vartheta,\rho,a_0)$

Approx. analytique (DL) dans le cas $T \ll 1$:

$\tilde{\sigma}^{SABR}_{SV} \approx f_0(K) + f_1(K)a_0^2 t + f_2(K)(a_0^2 t)^2 + \dots$

Ⓑ Approche non-paramétrique

On veut trouver $\mathbb{P}$ t.q. $\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[(S_T-K)^+\right] = C(T,K_i) \quad i=1 \dots n$

$$\mathcal{M} = \left\{ \mathbb{P} \in \mathcal{P}(\mathbb{R}_+) : \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[(S_T-K_i)^+\right] = C(T,K_i) \quad i=1,\dots,n \right\}$$

(i) $\mathcal{M}$ convexe

(ii) $\mathcal{M}$ est faibl. compact (Skorokhod)

$\mathcal{M}$ •

$\rightarrow \inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{M}} F(\mathbb{P}) = F(\mathbb{P}_*)$ avec $\mathbb{P}_* \in \mathcal{M}$

stt. convexe $\mathcal{P} \to \mathbb{R}$

Ex. $F(p) = \int p(x) \ln p(x)\, dx$

Ex. $F(p) = \int f(p(x))\, dx$

f-divergence

$$\mathcal{P} = \inf_{\mathbb{P}\in\mathcal{M}} \int p(x) \ln \frac{p(x)}{p_0(x)} dx = \sup_{(\lambda_i)_{i=1\dots n}} \inf_{p \geq 0} \int p \ln \frac{p}{p_0} + \sum \lambda_i \int p\,(x-K_i)^+ - \sum \lambda_i C(T,K_i) \quad ☺$$

On dérive par rapport à p :

$$\ln \frac{p(x)}{p_0(x)} + 1 + \sum \lambda_i (x-K_i)^+ = 0 \rightarrow p(x) = p_0(x)\, e^{\sum \lambda_i (x-K_i)^+} \Big/ \int \cdots dx$$

$$\Leftrightarrow \sup_{(\lambda_i)_{i=1\dots n}} \sum \lambda_i C(T,K_i) + \ln \mathbb{E}^{\mathbb{P}_0} e^{\sum \lambda_i (S_T - K_i)^+}$$ – maximisation finale numérique

"Appetizer" $dS_t = \mu_t\, dt + dW_t$

$$S_T \sim \mu_T^{data} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} \delta_{x_i \cdots}$$

$$\mathbb{P}^{MSB} = \inf_{\substack{\mathbb{P} \sim \mathbb{P}_0 \\ S_T \sim \mu_T}} F(\mathbb{P} | \mathbb{P}_0)$$ → pont de Schrödinger

aucun sens en finance !

(mais la fonc d'utilité est exp. invariante par la translation)

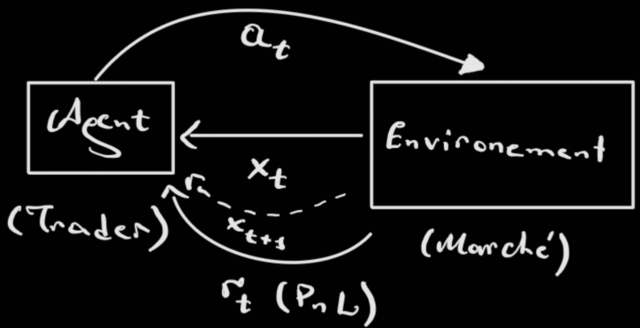
$$\begin{cases} dS_t = a_t S_t\, dW_t \\ da_t = (\mu_t)\, dt + \vartheta a_t\, dZ_t \end{cases}$$

filter le drift pour calibrer les vanilles

Reinforcement learning

Machine learning

- Apprentissage supervisé: $(x_1,y_1) \cdots (x_n,y_n)$
  $$\inf_\theta \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} (f_\theta(x_i) - y_i)^2$$
  loss MSE
- Apprentissage non-supervisé: $x_1, \dots, x_n$
- Reinforcement learning



5) Markov Decision Process (MDP)

Une MDP est la donnée de 4 élements (X, A, p, r)

X: l'ensemble des états possibles de l'env : $X = \mathbb{R}_+^*$

A: l'ensemble des actions possibles, $A = [-\Delta, \Delta]$

p: la densité de transition de l'env.

$p : [0,T] \times X \times A \to \mathbb{R}_+ \qquad p(x_{t+1} | t, x, a)$

r : la fonction de reward

$r : [0,T] \times X \times A \to \mathbb{R}$

2) Policy : une stratégy choisie par l'agent.

$\pi : [0,T) \times X \to A$

3) Policy evaluation

On fixe policy π : on évalue policy avec 2 fonctions

* State-value function

$$V^{\pi}(t,x) = \mathbb{E}_{x_{s+1}}\left[\sum_{s=t}^{T-1} r(t, x_s, \mathcal{L}_s) + g(x_T) \,\middle|\, x_t = x,\ \mathcal{L}_s = \pi(s, x_s)\right]$$

* Action state fuction

$$Q^{\pi}(t,x,a) = \mathbb{E}\left[\sum_{s=t}^{T-1} r(t, x_t, \mathcal{L}_t) + g(x_T) \,\middle|\, X_t = x,\ \mathcal{L}_t = a,\ \mathcal{L}_s = \pi(s, x_s)\right]$$

L'objectif d'une MDP

$$\sup_{\pi} V^{\pi}(0, x_0)$$

$$\pi^* \in \operatorname{argmax} V^{\pi}(0, x_0)$$

On note la fonction state-value optimale par V

On note la fonction option-state optimale par Q

4) Les équations de la programmation dynamique

On fixe une policy π :

$$\begin{cases} V^{\pi}(t,x) = r(t, x, \pi(t,x)) + \mathbb{E}^{\pi}\left[V^{\pi}(t+1, x_{t+1}) \,|\, x_t = x\right] \\ Q^{\pi}(t,x,a) = r(t,x,a) + \mathbb{E}^{\pi}\left[Q^{\pi}(t+1, x_{t+1}, \pi(t+1, x_{t+1})) \,|\, X_t = x,\ \mathcal{L}_t = a\right] \end{cases}$$

On prend le $\sup_{\pi}$:

$$\begin{cases} V(t,x) = \sup_{a \in A}\{ r(t,x,a) + \mathbb{E}\left[V(t+1, x_{t+1}) \,|\, x_t = x\right] \\ \\ Q(t,x,a) = r(t,x,a) + \mathbb{E}\left[\sup_{a' \in A} Q(t+1, x_{t+1}, a') \,\middle|\, x_t = x,\ a_t = a\right] \end{cases}$$

Exemple : Contrôle stochastique

$$\sup_{\alpha} \mathbb{E}\left[\int_0^T f(t, X_t, \alpha_t)\,dt + g(X_T)\right]$$

$$dX_t = \mu(t, X_t, \alpha_t)\,dt + \sigma(t, X_t, \alpha_t)\,dW_t$$

1) $X_{t_{i+1}} = X_{t_i} + \mu(t_i, X_{t_i}, \alpha_{t_i})\,\Delta t + \sigma(t_i, X_{t_i}, \alpha_{t_i})\,\Delta W_{t_i}$

2) $\sup_{\alpha} \mathbb{E}\Big[\underbrace{\sum_{i=0}^{N-1} f(t_i, X_{t_i}, \alpha_{t_i})\,\Delta t_i}_{r(t_i, X_{t_i}, \alpha_{t_i})} + \underbrace{g(X_{t_N})}_{\text{reward terminal}}\Big]$

3) $\mathcal{X} = \mathbb{R}$

$A = [a, b]$

p : une loi determinée à partire de 1)

II MC learning, Q-learning, Q-learning

Importance de la fonction Q optimale. $\pi^*(t,x) \in \underset{a \in A}{\operatorname{argmax}}\, Q(t,x,a)$

Définitions

On considère une fonction $\hat{Q}$ arbitraire :

* π est greedy : $\pi(t,x) \in \underset{a \in A}{\operatorname{argmax}}\, Q(t,x,a)$
* π est ε-greedy : $\begin{cases} \pi(t,x) \in \underset{a \in A}{\operatorname{argmax}}\, Q(t,x,a) & \text{avec une proba } 1-\varepsilon \\ \pi(t,x) \in \mathcal{U}(A) & \text{avec une proba } \varepsilon. \end{cases}$

  $\mathcal{U}$: uniforme

Cas : $\mathcal{X}$ est fini, A est fini

1) MC learning

$$\pi_0 \xrightarrow{MC} Q^{\pi_0} \xrightarrow{\text{stratégie greedy}} \pi_1 \xrightarrow{MC} Q^{\pi_1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow Q^* \xrightarrow{\text{greedy}} \pi^*$$

→ méthode très coûteuse

2) Q-learning

Rappel (Robbins-Monro)

On considère deux v.a. X et Y et on suppose $\sigma(X) \subset \sigma(Y)$

On veut simuler $f(x) = \mathbb{E}[Y | X = x]$

$$Y_1, \dots, Y_n \sim \mathcal{L}(Y | X = x) \qquad f^{(n)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

Relation de récurrence entre $f^{(n)}$ et $f^{(n+1)}$:

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x) + \frac{1}{n+1}\left(Y_{n+1} - f^{(n)}(x)\right)$$

$$f^{(n)}(x) \xrightarrow[\substack{p.s. \\ n \to \infty}]{LLN} f(x)$$

Thm. On considère $(\eta_n(x))_n$ qui vérifie $\sum_n \eta_n(x) = +\infty$, $\sum_n \eta_n(x) < \infty$

la suite définie par

$$f^{(n+1)}(x) = f^{(n)}(x) + \eta_n(x)\left(Y_{n+1} - f^{(n)}(x)\right) \text{ converge p.s. vers } f(x)$$

L'évaluation de la PD pour Q

$$Q(t,x,a) = r(t,x,a) + \mathbb{E}\left[\sup_{a' \in A} Q(t+1, X_{t+1}, a') \,\middle|\, X_t = x, \alpha_t = a\right]$$

Q-learning

$$\hat{Q}(t,x,a) \leftarrow \hat{Q}(t,x,a) + \eta_n\left(r(t,x,a) + \sup_{a' \in A} \hat{Q}(t+1, x_{t+1}, a') - \hat{Q}(t,x,a)\right)$$

Algo (X et A sont finis)

→ Initialisation de $\hat{Q}$ (une matrice)

for $e = 1, \dots, E$: (epoch)

Init. d'état initial x_0

for $t = 0, \dots, T-1$

$$\alpha_t = \begin{cases} \in \operatorname{argmax} \hat{Q}(t,x,a) & \text{avec une pb } 1-\varepsilon \\ \mathcal{U}(A) & \text{avec une pb } \varepsilon \end{cases}$$

$$(t, x_t, \alpha_t) \rightsquigarrow \boxed{\text{Env Black Box}} \rightarrow x_{t+1}, r_t$$

Update de la fonction $\hat{Q}$

$$\hat{Q}(t,x_t,\alpha_t) = \hat{Q}(t,x_t,\alpha_t) + \eta_n\left(r_t + \sup_{a' \in A} \hat{Q}(t,x_t,a') - \hat{Q}(t,x_t,\alpha_t)\right)$$

Thm (Convergence de Q-learning)

Si $(\eta_n)_n$ vérifie les conditions de Robbins-Monro et les couples (x,a) sont visités une infinité de fois alors $\hat{Q} \to Q$

Cas X infini A est fini :

3) Deep Q-learning

On paramétrise la fonction $\hat{Q}$ par un réseau de neurones

$$Q_{\theta_{n+1}}(t,x,a) = r(t,x,a) + \mathbb{E}\left[\sup_{a' \in A} Q_{\theta_n}(t+1, x_{t+1}, a') \,\middle|\, x_t = x, \alpha_t = a\right]$$

Un step de gradient avec une loss

$$\mathcal{L}(\theta_{n+1}) = \mathbb{E}\left[\left| Q_{\theta_{n+1}}(t, x_t, \alpha_t) - r(t, x_t, \alpha_t) - \sup_{a' \in A} Q_{\theta_n}(t, x_1, a') \right|^2\right]$$

$$\nabla_{\theta_{n+1}} \mathcal{L}(\theta_{n+1}) = \mathbb{E}\left[\nabla_{\theta_{n+1}} Q_{\theta_{n+1}}(t, x_t, \alpha_t)\left(Q_{\theta_{n+1}} - r_t - \sup_{a'} Q_{\theta_n}(t, x_1, a')\right)\right] \simeq \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}[\dots]$$

$$\theta \leftarrow \theta + \lambda \cdot \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{M}[\dots]$$

Cas X infini, A infini

III) Méthodes de policy gradient

1) Policy grad deterministe

$$\underbrace{\sup_{\pi} \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1} r(t, x_t, \pi_\theta(t, x_t)) + g(x_T)\right]}_{\mathcal{L}(\theta)}$$

SGD : $\theta \leftarrow \theta + \lambda \nabla_\theta \mathcal{L}(\theta)$

2) Policy gradient stochastique

$\pi : [0,T] \times X \to \mathcal{P}(A)$

$$\frac{d\pi_\theta}{\nu(da)} = p_\theta(t,x,a)$$

$$\mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1} r(t, x_t, \alpha_t) + g(x_T) \,\middle|\, \alpha_t \sim \pi_\theta(t, x_t)\right] = \int \left(\sum_{t=0}^{T-1} r(t, x_t, \alpha_t) + g(x_T)\right) p(x_1 | 0, x_0, \alpha_0) p_\theta(0, x_0, \alpha_0)$$

$= \dots$

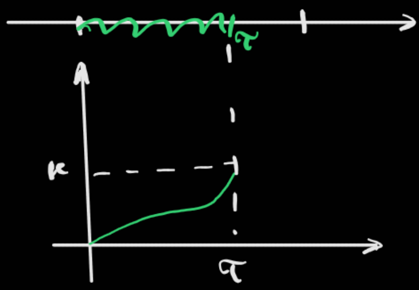
Thm (La représentation de gradient)

$$\nabla_\theta \mathcal{I}(\theta) = \mathbb{E}\Big[\Big(\sum_{t=0}^{T-1} r(t,x_t,\alpha_t) + g(x_T)\Big)\Big(\sum_{t=0}^{T-1} \nabla_\theta \log p_\theta(t,x_t,\alpha_t)\Big) \,\Big|\, \alpha_t \sim \pi_\theta(t,x_t)\Big]$$

Application : pricing des produits de buyback

Maturité du produit : T entre 60 jours et 90 jours

Entreprise qui demande K de ses propres actions



Modélisation

Prix $\dfrac{dS_t}{S_t} = \sigma dW_t$

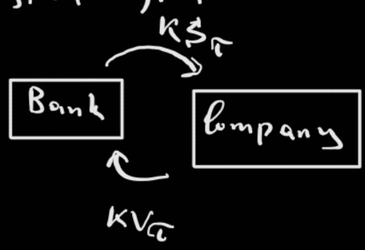
Inventaire : $dQ_t = \alpha_t dt$ $\quad A = [0, \bar{a}]$

α_t vitesse de trading

VWAP/TWAP : $V_t = \frac{1}{t}\int_0^t S_u du$

Le temps d'arrêt τ : $\tau = \inf\{t \in [0,T],\ Q_t \geq K\} \wedge T$

Le flux à l'instant t :



$$P_nL = K(V_\tau - S_\tau) - \lambda(K - A_t)^+$$

Le pb de contrôle sto.

$$\sup_\tau \{ K(V_\tau - S_\tau) - \lambda(K - A_\tau)^+ \}$$

v la fct valeur associé à ce pb et les variables d'état $(S_t, V_t, Q_t) = X_t$

Applique le HJB

$$\partial_t v(t,x) + \sup_{a \in [0,\bar{a}]} \Big\{ a\,\partial_q v + \frac{1}{2} S^2 \sigma^2 \partial_S^2 v + \frac{S - v}{t} \partial_v v \Big\}$$

$$a^* = \bar{a}\,\mathbb{1}_{\{\partial_q v \geq 0\}}$$ – le contrôle est Bang-Bang

...

$$\sup_\alpha \mathbb{E}\Big[\int_0^T f(t,X_t,\alpha_t)dt + g(X_T)\Big]$$

$$dX_t = \mu(t,X_t,\alpha_t)dt + \sigma(t,X_t,\alpha_t)dW_t$$

La fonct valeur $v(t,x) = \mathbb{E}\Big[\int_t^T f(s, X_s^{t,x}, \alpha_s)\,ds + g(X_T^{t,x})\Big]$

HJB :
$$\begin{cases} \partial_t v(t,x) + \sup_{a\in A}\left\{ f(t,x,a) + \mu(t,x,a)\,\nabla_x v(t,x) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^T(t,x,a)\,\nabla_x^2 v(t,x)\right)\right\} = 0 \\ v(T,x) = g(x) \end{cases}$$

On cherche le argmax a^* en fct de u et ensuite on plug dans (*) pour avoir une EDP pour v.

On suppose que σ est indép. de a
$$\partial_t v + h(t,x,\nabla_x v) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\sigma\sigma^T\nabla_x^2 v\right) = 0$$

On pose $Y_t = v(t,X_t)$
$Z_t = \nabla_x v(t,X_t)$

$$dY_t = \left(\partial_t v(t,X_t) + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}(\sigma\sigma^T\nabla_x^2 v)\right)dt + \nabla_x v\cdot\sigma(t,X_t)\cdot dW_t$$

$$\begin{cases} dY_t = -h(t,X_t,Z_t)dt + Z_t\sigma(t,X_t)\,dW_t \\ Y_T = g(X_T) \\ dX_t = \sigma(t,X_t)\,dW_t \end{cases}$$
FBSDE

On paramétrise la fct valeur v et le grad de v par
$$v \leftrightarrow u_\theta$$
$$\partial_x v \leftrightarrow Z_\beta \qquad \rightsquigarrow \qquad \inf_{\theta,\beta}\mathbb{E}\left[\left|Y_T^{\theta,\beta} - g(X_T)\right|^2\right]$$

Cours 5. Le 26 mars.

Calcul sto & les applications en finance

Recette : $dX_t = \underbrace{b_t}_{\text{drift, contrôle}}\,dt + dW_t$, $X_t \in \mathbb{R}$

$b_t \in [\underline{b},\bar{b}]$, adapté

$$\sup_{(b_\cdot)\in\mathcal{A}}\mathbb{E}\left[g(X_T) + \int_0^T f(t,X_t,b_t)\,dt\right] = u(0,x)$$
$u : [0,T]\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ est une sol de HJB

$$(\mathrm{HJB})\begin{cases} \partial_t u + \sup_{\underline{b}\le b\le\bar{b}}\left\{ b\,\partial_x u + \frac{1}{2}\partial_{xx}u\right\} + f = 0 \\ u|_{t=T} = g \end{cases}$$

(UVM) uncertain volatility model

$$dS_t = \underbrace{\sigma_t}_{\text{inconnu! } \in [\underline{\sigma}, \overline{\sigma}]} S_t \, dW_t$$

$$u_0 = \sup_{\underline{\sigma} \le \sigma_\cdot \le \overline{\sigma}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(S_T)]$$ - problème du contrôle stoch.

$$\begin{cases} \partial_t u + \sup\limits_{\underline{\sigma} \le \sigma \le \overline{\sigma}} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 s^2 \partial_{ss} u \right\} = 0 \\ u(T,s) = g(s) \end{cases}$$

$$\boxed{\partial_t u + \frac{1}{2} s^2 \partial_s^2 u \cdot \Sigma(\partial_{ss} u)^2 = 0}$$ où $\Sigma(\Gamma) = \begin{cases} \overline{\sigma}, & \Gamma \ge 0 \\ \underline{\sigma}, & \Gamma \le 0 \end{cases}$

1. Parabolique
2. $2^{\text{ème}}$ ordre en espace
3. (1, 1)

$$\begin{cases} \frac{u_{t,x} - u_{t-1,x}}{\Delta t} + \frac{1}{2} x^2 [\partial_{ss}^2 u]_t \Sigma([\partial_{ss}^2 u]_t) = 0 \\ u_{T,x} = g(x) \end{cases}$$

En pratique, on fais le schéma predictor-corrector

$$\sigma_t^* = \overline{\sigma} \, \mathbb{1}_{\partial_{ss}^2 u(t,S_t) \ge 0} + \underline{\sigma} \, \mathbb{1}_{\partial_{ss}^2 u(t,S_t) \le 0}$$

Signification de u_0 comme prix?

$$\mathbb{P}^{hist}: \quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma_t dW_t$$

$$\mathcal{P} = \inf_{z, \Delta} z \text{ t.q. } z + \int_0^T \Delta_t dS_t - g(S_T) \ge 0 \quad \mathbb{P}^{hist} \text{ p.s. } \forall \underline{\sigma} \le \sigma_t \le \overline{\sigma}$$

$$\forall \mathbb{P} \in \mathcal{P}(\underline{\sigma}, \overline{\sigma})$$

prix de super réplication robuste

Thm. $\mathcal{P} \overset{!}{=} u_0$

Preuve ② Supposons que z et Δ soient les solutions réalisables

$$\mathbb{P} \in \mathcal{P}_{\text{mart.}}(\underline{\sigma}, \overline{\sigma}) \Rightarrow \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[z + \underbrace{\int_0^T \Delta_t dS_t}_{\to 0} - g(S_T)\Big] \ge 0 \to z \ge \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(S_T)] \quad (1)$$

$\inf_z$

$$P \geq \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(S_T)]$$

$$P \geq \sup_{\mathbb{P} \in \mathcal{P}(\underline{\sigma}, \overline{\sigma})} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(S_T)] = \sup \mathbb{E}[g(S_T)] \Rightarrow P \geq u_0$$

$$\frac{dS_t}{S_t} = \sigma_t \, dW_t$$

$$\underline{\sigma} \leq \sigma_t \leq \overline{\sigma}$$

(5) Choisissons $z = u_0^{HJB}$, $\Delta_t = \partial_s u^{HJB}(t, S_t)$ et checkons que c'est une solution réalisable:

$$u(0,S_0) + \int_0^T \partial_s u(t,S_t)\, dS_t - g(S_T) \overset{\text{Itô}}{=} \underbrace{u(T,S_T)}_{g(S_T)} - \int_0^T \left(\partial_t u + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \partial_s^2 u\right)(t,S_t)\, dt - g(S_T) =$$

$$\geq -\int_0^T \sup_{\underline{\sigma} \leq \sigma_t \leq \overline{\sigma}} \left(\partial_t u + \frac{1}{2}\sigma_t^2 \partial_{ss}^2 u\right)(t,S_t)\, dt \overset{HJB}{=} 0$$

$$\overset{HJB}{=} \int_0^T \frac{1}{2}\left(\Sigma^2(\Gamma) - \sigma_t^2\right)\sigma^2 \Gamma(t,S_t)\, dt \geq 0$$

Donc $z = u_0 \geq P$. $\square$

Exemple 2

$$d\pi_t = \Delta_t \cdot dS_t = \sum_{i=1}^{N} \Delta_t^i \, dS_t^i$$

$$SR = \sup_{\Delta_\cdot} \left\{ \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{hist}}[\pi_T]}{\sqrt{\mathbb{E}^{\mathbb{P}^{hist}}[\pi_T^2] - \mathbb{E}[\pi_T]^2}} \right\} \overset{?}{=} \sup_{\Delta_\cdot} \sup_{p} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^{hist}}\left[-\pi_T^2 + (1+2p)\pi_T - p^2\right]$$

↑ Sharpe ratio

$p = \mathbb{E}[\pi_T]$

Exemple 3 Mortality deal

$g(S_T) \cdot \mathbb{1}_{\tau > T}$ où τ = défaut de Mme Michu

$$P = \sup_{0 \leq \lambda_\cdot \leq \beta} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_{\tau > T}\, g(S_T)] = \sup_{0 \leq \lambda_\cdot \leq \beta} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\Big[\underbrace{e^{-\int_t^T \lambda_s ds}}_{\text{Prob. de Poisson}} g(S_T)\Big]$$

↑ Poisson(λ) ; contrôle (de DF) ; $dS_t = \sigma S_t \, dW_t$

$$\begin{cases} \partial_t u + \sup_{0 \leq \lambda \leq \beta} \left\{\frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_{ss}^2 u - \lambda u\right\} = 0, \\ u(T,s) = g(s) \end{cases} \rightsquigarrow \begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_{ss}^2 u + \beta(-u)^+ = 0 \\ u(T,s) = g(s) \end{cases}$$

↑ équation semilinéaire

$$\lambda_t^* = \beta \, \mathbb{1}_{\{-u(t,S_t) \geq 0\}}$$

Exemple 4 Le taux stoch est inconnu

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t\,dt + \sigma_{BS}\cdot dW_t$$

$\uparrow$ valeurs dans $[\underline{r},\bar{r}]$

$$\mathcal{P} = \sup_{\underline{r}\le r_t\le\bar{r}} \mathbb{E}[g(S_T)]$$

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2}\sigma^2 s^2 \partial_s^2 u + \sup_{\underline{r}\le r\le\bar{r}} \{ r\cdot s\cdot \partial_s u \} = 0 \\ u(T,s) = g(s) \end{cases}$$

$g(M_T)$, delta-hedge + Européen$_T$

payoff Européen

$$\mathcal{P} = \inf_{\substack{z,\Delta \\ \lambda\in L^1(\mu)}} z = \quad \text{t.q. } z + \int_0^T \Delta_t\,dS_t + \lambda(S_T) - \mathbb{E}^{\mu}[\lambda(S_T)] \ge g(M_T) \quad \forall\omega\in\Omega$$

$$= \inf_{\lambda\in L^1(\mu)} \sup_{\mathbb{P}\in\mathcal{P}_{mart}} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(M_T) - \lambda(S_T)] - \mathbb{E}^{\mu}[\lambda(S_T)] =$$

$$= \inf_{\lambda\in L^1(\mu)} \Big\{ \underbrace{\sup_{0\le\sigma_t\le\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(M_T) - \lambda(S_T)]}_{=\,u(0,S_0)} + \mathbb{E}^{\mu}[\lambda(S_T)] \Big\}$$

$\uparrow$ pb de contrôle singulier

$$\mathcal{P}_{UVM} = \sup_{0\le\sigma_t\le\infty} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[g(S_T)] \qquad \frac{dS_t}{S_t} = \sigma_t\,dW_t$$

$\uparrow$ $\rightarrow$ on a besoin de la notion de viscosité

$$\begin{cases} \partial_t u + \frac{1}{2}\sup_{\sigma\ge 0}\{ \sigma^2 s^2 \partial_s^2 u \} = 0 \\ u(T,s) = g(s) \end{cases}$$

$\partial_s^2 u \le 0$ sinon on a $+\infty = 0$

On obtient $\begin{cases} \partial_t u = 0 \\ u(T,s) = g(s) \end{cases}$ un problème si $g(\cdot)$ n'est pas concave... Existence?

$u(t,S) \geq g(S)$ si on prend $\sigma_t \equiv 0$

u est la plus petite sol $\geq g(S)$ et t.q. u soit concave = Enveloppe concave de g

$\max\{g(S)-u(S), \partial_S^2 u\} = 0$ éq. HJB, éq variationnelle

$$\mathcal{P} = \inf_{\lambda} \{ u_\lambda(0,S_0) + \mathbb{E}^{S}[\lambda(S_T)] \}$$

$$\max\{ g(m) - \lambda(S) - u_\lambda(S,m), \partial_{SS}^2 u_\lambda \} = 0$$

Rem $u_0 = \sup_{\tau \in [0,T]} \mathbb{E}[g(S_\tau)]$

$$\begin{cases} \max\{g(S)-u(t,S), \partial_t u + \mathcal{L}u\} = 0 \\ u(T,S) = g(S) \end{cases}$$

$$u_\lambda(0,S_0) = \sup_{\tau \in [0,+\infty)} \mathbb{E}[g(B_\tau^*) - \lambda(B_\tau)]$$

Digression Timer option

$\tau = \inf\{t \geq 0, \langle S \rangle_t \geq B\}$ Payoff $g(S_\tau)$

Complètement modèle-indépendant ! (BS)

1er approche. $dS_t = \sigma dW_t$

$S_\tau = S_0 + \sigma W_\tau$ $\langle S \rangle_t = \sigma^2 t \Rightarrow \tau = \frac{B}{\sigma^2}$

$$\mathcal{P}^B = \mathbb{E}[g(S_{T=\frac{B}{\sigma^2}})]$$

2ème approche $\Pi_T = u_0 + \int_0^\tau \Delta_t dS_t - g(S_\tau) \geq 0$ $\forall \omega \in \Omega$ continu en t.

$u_0 = u(0,S_0)$, $\Delta_t = \partial_S u(\langle S \rangle_t, S_t)$

variation quad. au lieu de temps

$$du(\langle S \rangle_t, S_t) = \partial_y u \cdot d\langle S \rangle_t + \partial_S u \cdot dS_t + \frac{1}{2}\partial_{SS}^2 u \, d\langle S \rangle_t =$$

$$= (\partial_y u + \frac{1}{2}\partial_{SS}^2 u) d\langle S \rangle_t + \partial_S u \cdot dS_t$$

$$u(B,S_\tau) \overset{\text{Itô}}{=} u(0,S_0) + \int_0^t \partial_s u \, dS_t + \int_0^\tau \left(\partial_v u + \tfrac{1}{2}\partial_s^2 u\right) d\langle S\rangle_t$$

$$\pi_T = u(B,S_\tau) - \int_0^t \underbrace{\left(\partial_v u + \tfrac{1}{2}\partial_s^2 u\right)}_{=0} d\langle S\rangle_t - g(S_\tau)$$

Prenons (a) $u(B,S) = g(S)$

(b) $\partial_v u(v,S) + \frac{1}{2}\partial_s^2 u = 0, \quad 0 \leq v \leq B$

$$P_{\text{replication}} = u(0,S_0) \overset{FK}{=} \mathbb{E}^{\mathbb{P}^0}\big[g(\underset{\text{MB}}{B_B})\big]$$

$$dS_t = \sigma_t \, dW_t$$

$$P^{\text{model répl.}} = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[g(S_{\tau_B})\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^0}\left[g(B_B)\right]$$

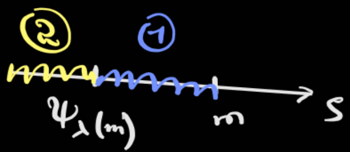
<u>Ex</u> $g(s) = e^{\lambda s}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[e^{\lambda S_{\tau_B}}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^0}\left[e^{\lambda B_B}\right] = e^{\frac{\lambda^2}{2}B} \qquad \underline{\text{DDS}}$$

$$P_{\text{super}} = \inf_{\lambda \in L^1(\mu)} \left\{ u_\lambda(s_0, M_0 = s_0) - \int \lambda(x)\,\mu(dx) \right\} = \inf_{z,\Delta,\lambda\in L^1(\mu)} \text{ t.q. } z + \int_0^T \Delta_t \, dS_t + \lambda(S_T) - \mathbb{E}^\mu[\lambda] \geq g(M_T)$$

$$\begin{cases} \max\left\{ g(m) - \lambda(s) - u_\lambda(s,m),\ \partial_s^2 u_\lambda \right\} = 0 \\ \partial_m u^\lambda(m,m) = 0 \end{cases}$$

① $\psi_\lambda(m) \leq s \leq m \quad \begin{cases} \partial_s^2 u_\lambda = 0 \\ u_\lambda \geq g(m) - \lambda \end{cases}$



② $s \leq \psi_\lambda(m) \quad \begin{cases} u_\lambda = g(m) - \lambda \\ \partial_s^2 u_\lambda \leq 0 \end{cases}$

Smoothing : C^1 en $s = \psi_\lambda$

On résout ① et ②

$$u^\lambda(s,m) = -\lambda'(\psi_\lambda(m))(s - \psi_\lambda(m)) + g(m) - \lambda(\psi_\lambda(m)) \quad \forall s \in [\psi_\lambda(m), m]$$

$$= g(m) - \lambda(\psi_\lambda(m)) \quad \forall s \leq \psi_\lambda(m)$$

$$\lambda''(\psi_\lambda(m))(m - \psi_\lambda(m)) = g'(m)$$

infinité des solutions paramétrisée par ψ

On introduit une fct $u(s,m) = -\lambda'(\psi(m))(s-\psi(m)) + g(m) - \lambda(\psi(m)) \quad \forall s \in [\psi(m), m]$

$$= g(m) - \lambda(s) \quad \forall s \leq \psi(m)$$

(A) $\sup_{\sigma} \mathbb{E}[g(M_T) - \lambda(S_T)] \geq u(S_0, S_0)$

$$P \geq \inf_{\lambda \in L'} u(S_0,S_0) - \int \lambda \, d\mu$$

(B) $Z = u(S_0, S_0)$, $\Delta_t = \partial_s u(S_t, M_t) \longrightarrow u(S_0,S_0) \geq P$

(C) $\inf_{\lambda} \rightsquigarrow$ on montre alors que la borne haute = basse

$$\inf_{\lambda} u(S_0,S_0) = \inf_{\lambda} \{ -\lambda'(\psi(S_0))(S_0 - \psi(S_0)) + g(S_0) - \lambda(\psi(S_0)) - \int \lambda \, d\mu \} =$$

$\{$ Or $\lambda''(\psi)(m-\psi) = g'(m) \}$

$= \inf$

ψ où λ est

$$\psi_{HL}^{-1}(s) = \frac{\mathbb{E}^{\mu} S_T \mathbb{1}_{\{S_T \geq x\}}}{\mathbb{E}^{\mu} \mathbb{1}_{\{S_T \geq x\}}}$$

Hardy-Littlewood

Ramanujan

Connection avec pb de Skorokhod

τ_{AY} : $Loi(B_\tau) = \mu$ $\quad \mathbb{E}[g(B^*_\tau)] = \max_{\tau : \mathcal{L}(B_\tau) = \mu} \mathbb{E}[g(B_\tau)]$

$\tau_{Perkins}$ $\quad \max \mathbb{E}[g(\underline{B}_\tau)]$

τ_{Root} $\quad \max \mathbb{E}[g(\tau)]$

$$\sup_{\sigma < \infty} \mathbb{E}[g(M_T) - \lambda(S_T)] \overset{DBS}{=} \sup_{\tau \geq 0} \mathbb{E}[g(\mathbb{B}^*_\tau) - \lambda(\mathbb{B}_\tau)]$$

$\inf_{\lambda}$

$$P = \sup_{\substack{\tau \geq 0 \\ B_\tau \sim \mu}} \mathbb{E}[g(\mathbb{B}^*_\tau)]$$

$$\tau = \inf\{t : B_t \leq \psi_{HL}(B^*_t)\}$$