Examen Théorie des Valeurs Extrêmes 2017-2018

Ecole d'actuariat UIR

Sans document - Sans calculatrice - 2h00

Exercices d'applications du cours (8 points):

1. Soit B une variable aléatoire de distribution Binomiale(n,p)

$$P(B=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

et N une variable aléatoire de distribution Poisson(λ). On pose $\lambda = np$. Montrer que

$$P(B=k)=P(N=k)\left(\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{e^{-\lambda}}\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\right).$$

En déduire que si $n\to\infty$, $p\to 0$ tel que $\lambda = np$, alors B converge en distribution vers N.

Expliquer comment ce résultat peut être utilisé pour caractériser la loi du maximum ou des plus grandes statistiques d'ordre.

2. Expliquer ce que veut dire "F appartient au domaine d'attraction d'un loi max-stable G ($F\in D(G)$)". On considère la variable aléatoire de distribution H telle que

$$H(x)=F(\alpha x+\beta)$$

avec $\alpha>0$. A quelle domaine d'attraction appartient H. Donner les relations qui existent entre les suites de normalisation pour H et F.

3. On rappelle que la distribution de Pareto généralisée GPD(β,ξ) est définie par

$$G^p_{\xi,\beta}(x)=\begin{cases}1-[1+\xi(x/\beta)]_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi\neq 0,\\ 1-e^{-x/\beta} & \text{si } \xi=0,\end{cases}.$$

Expliquer à quel domaine d'attraction appartient la distribution de Pareto généralisée GPD(β,ξ).

4. Soit $X_1,...,X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution F et soit $M_n=\max(X_1,...,X_n)$. On rappelle que:

i) Pour un $\tau>0$ et une suite de réels (u_n), les conditions suivantes sont équivalentes: quand $n\to\infty$

$$\begin{aligned}&1)\quad \Pr(M_n\le u_n)\to e^{-\tau},\\ &2)\quad n\bar{F}(u_n)=n(1-F(u_n))\to\tau.\end{aligned}$$

ii) Il existe une suite (u_n) satisfaisant $n\bar{F}(u_n)\to\tau$ quand $n\to\infty$ si et seulement si

$$\lim_{x\uparrow x^F}\frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-)}=1.$$

où $x^F=\sup\{x:F(x)<1\}$. Peut-on trouver une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty}\Pr(M_n\le u_n)=e^{-\tau}$ si

- les X_i ont une loi Exponentielle de paramètre λ

$$\Pr(X_i > x) = \exp(-\lambda x), \quad x > 0;$$

- les X_i ont une loi Géométrique de paramètre p

$$\Pr(X_i = n) = p(1-p)^n, \quad n \in \mathbb{N};$$

- les X_i ont une loi de Poisson de paramètre λ

$$\Pr(X_i = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 1 (4 points):

On rappelle qu'une distribution F appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel Λ, si et seulement si il existe une fonction positive g telle que :

$$\lim_{x\to x^F} \frac{\bar{F}(x+tg(x))}{\bar{F}(x)} = \exp(-t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

et qu'un choix possible pour la fonction g est donnée par

$$g(x) = \frac{\int_x^{x^F} \bar{F}(t)dt}{\bar{F}(x)} = \mathbb{E}(X - x | X > x).$$

Les coefficients a_n et b_n tels que $P(M_n \leq a_n x + b_n) \to \Lambda(x)$ ont alors la forme suivante : $b_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$, $a_n = g(b_n)$.

1. Supposons que X soit une variable aléatoire positive de distribution F telle que $x^F = \infty$.

Donner quelques éléments d'explication (sans trop de détails mathématiques) pour justifier que l'on a $\lim_{x\to\infty} g(x)/x = 0$.

Montrer que si $F \in D(\Lambda)$ où Λ est la distribution de Gumbel

$$\Lambda(x) = \exp(-\exp(-x)), \qquad x \in \mathbb{R},$$

alors la distribution de $-X^{-1}$ appartient aussi au domaine d'attraction de la distribution de Gumbel.

2. On considère une transformation croissante T, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on suppose que le point extremal $x^F < \infty$ est fini. Montrer que $F \circ T^{-1}$ appartient au domaine d'attraction de la distribution de Gumbel et donner les coefficients de normalisation.

Exercice 2 (4 points):

Supposons que les variables (X_i) sont des variables iid de distributions F. Posons $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$ et $m_n = \min(X_1, ..., X_n)$ et supposons qu'il existe des constantes $a_n > 0$, $\alpha_n > 0$, b_n, β_n telles que

$$P(M_n \leq a_n x + b_n) \to G_1(x) \qquad \text{et} \qquad P(-m_n \leq \alpha_n x + \beta_n) \to G_2(x).$$

1. Montrer la convergence

$$P(M_n \leq a_n x + b_n, -m_n \leq \alpha_n y + \beta_n) \to G_1(x)G_2(y).$$

Qu'en concluez-vous?

2. On considère le cas où les (X_i) sont des variables aléatoires Gaussiennes centrées et réduites. On rappelle que dans ce cas

$$\frac{M_n - b_n}{a_n} \xrightarrow{d} \Lambda$$

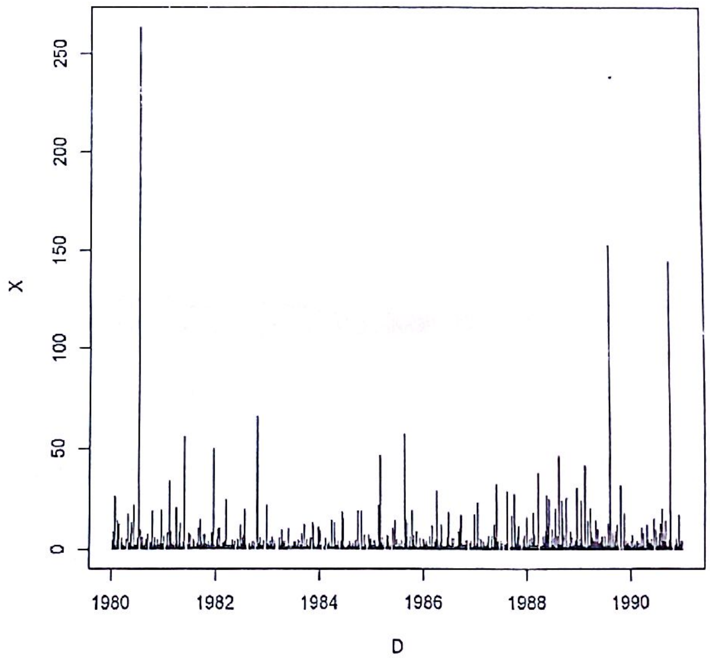
où Λ a une distribution de Gumbel et

$$\begin{aligned} a_n &= (2\ln(2n))^{-1/2} \\ b_n &= (2\ln(2n))^{1/2} - \frac{1}{2}(2\ln(2n))^{-1/2}[\ln(\ln(2n)) + \ln(4\pi)]. \end{aligned}$$

Montrer que $(M_n + m_n)/a_n$ converge en distribution et caractériser sa loi.

Question méthodologique (4 points):

Un réassureur dispose des données de sinistres suivantes pour tarifier un excédent de sinistres de priorité 100 et de portée illimitée.



Quelle méthodologie lui proposez-vous? Donner une réponse littérale.