Examen Séries temporelles 2015-2016

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice - 2 heures

Questions de cours : (6 points)

1. Qu'est-ce qui caractérise un processus stationnaire faible (stationnaire à l'ordre 2)? Donner plusieurs caractérisations possibles en expliquant l'intérêt de ces caractérisations.

2. A partir de données, comment procédez-vous pour savoir si un processus est stationnaire faible?

3. Quel est l'intérêt des processus ARMA par rapport aux processus AR ou MA? Quelles sont les difficultés statistiques rencontrées pour identifier les ordres des processus ARMA par rapport à l'identification des ordres des processus AR ou MA?

Exercice 1 : (5 points)

On dispose de la série (y_t) des indices trimestriels de la production industrielle (base 100 en 1970) de 1976 à 1982 (voir tableau p.3).

La série désaisonnalisée et les coefficients saisonniers ont été obtenus à partir d'une méthode de Buys-Ballot.

1. Expliquer la méthodologie mise en place et l'utilité des colonnes $X1$-$X5$.

2. Donner les valeurs A, B, C et expliquer les calculs.

3. Quelles sont les sommes des deux dernières colonnes?

4. Quel est l'avantage de cette méthode par rapport à la méthode des moyennes mobiles.

Exercice 2 : (4 points)

Soit $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc fort de variance σ_η^2.

0. Rappeler la définition d'un bruit blanc fort et d'un bruit blanc faible.

On definit

$$X_t = \eta_t \eta_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

1. Montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible et donner sa variance.

On définit

$$Y_t = (\eta_t + m)(\eta_{t-1} + m), \qquad t \in \mathbb{Z},$$

avec $m \in \mathbb{R}$.

2. Montrer que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $MA(1)$ non centré (donner son espérance, sa variance et ses autocorrélations).

3. Ecrire la représentation canonique de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 3: (5 points)

Soient $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(V_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux bruits blancs centrés de variance respective σ^2 et τ^2 et mutuellement indépendants. Soient a et b des réels non nuls. On définit un processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ par

$$\begin{aligned} X_{2t} &= aU_t + bV_t, \\ X_{2t+1} &= bU_t + aV_{t+1}. \end{aligned}$$

1. Calculer $\mathbb{V}ar(X_k)$ et $\mathbb{C}ov(X_k, X_{k+1})$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
2. Calculer $\mathbb{C}ov(X_k, X_{k+j})$ pour $j \geq 2$.
3. Montrer que X est stationnaire au second ordre si et seulement si $\sigma^2 = \tau^2$. On suppose dorénavant $\sigma^2 = \tau^2 = 1$.

4 On suppose $|b/a| < 1$ et l'on pose $\theta = b/a$ et pour $t \in \mathbb{Z}$,

$$\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^j X_{t-j}.$$

Montrer que le processus $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance a^2.

Indication : on calculera sa densité spectrale.

5. Montrer que X admet une représentation $MA(1)$ par rapport ε.

Tableau de l'exercice 1:

Yt	X1	X2	X3	X4	X5			
127	1	1	1	0	0	125,308	6,013	-4,321
127	1	2	0	1	0	125,674	3,790	-2,464
108	1	3	0	0	1	126,040	-18,433	0,393
134	1	4	-1	-1	-1	126,406	B	-1,036
133	1	5	1	0	0	126,772	6,013	0,214
130	1	6	0	1	0	127,138	3,790	-0,929
107	1	7	0	0	1	A	-18,433	-2,071
132	1	8	-1	-1	-1	127,871	8,629	-4,500
133	1	9	1	0	0	128,237	6,013	C
134	1	10	0	1	0	128,603	3,790	1,607
110	1	11	0	0	1	128,969	-18,433	-0,536
140	1	12	-1	-1	-1	129,335	8,629	2,036
138	1	13	1	0	0	129,701	6,013	2,286
136	1	14	0	1	0	130,067	3,790	2,143
118	1	15	0	0	1	130,433	-18,433	6,000
146	1	16	-1	-1	-1	130,799	8,629	6,571
145	1	17	1	0	0	131,165	6,013	7,821
138	1	18	0	1	0	131,531	3,790	2,679
115	1	19	0	0	1	131,897	-18,433	1,536
141	1	20	-1	-1	-1	132,263	8,629	0,107
137	1	21	1	0	0	132,629	6,013	-1,643
136	1	22	0	1	0	132,996	3,790	-0,786
115	1	23	0	0	1	133,362	-18,433	0,071
143	1	24	-1	-1	-1	133,728	8,629	0,643
137	1	25	1	0	0	134,094	6,013	-3,107
136	1	26	0	1	0	134,460	3,790	-2,250
111	1	27	0	0	1	134,826	-18,433	-5,393
140	1	28	-1	-1	-1	135,192	8,629	-3,821
Coefficient	124,942	0,366	6,013	3,790	-18,433			
Ecart-type	1,369	0,083	1,153	1,147	1,147			
R2	0,925							

Exercice 2 : $(\eta_t) \sim BBF(0, \sigma_\eta^2)$

0. $\eta_t \sim BBF(0, \sigma_\eta^2)$

0. Définitions BBF et BB

* Bruit Blanc fort $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$
  - $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ iid
  - $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$, $\forall t$
  - $\mathbb{V}[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2$, $\forall t$

* Bruit Blanc (faible) $(\varepsilon'_t)_{t\in\mathbb{Z}}$
  - (ε_t) centrées, variance cste et non corrélées
  - $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$
  - $\mathrm{cov}(\varepsilon'_t, \varepsilon'_{t'}) = \begin{cases} \sigma_\varepsilon^2, & \forall t = t' \\ 0, & \forall t \neq t' \end{cases}$

$X_t = \eta_t \eta_{t-1} \quad t \in \mathbb{Z}$

1) $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\eta_t \eta_{t-1}]$

$= \mathbb{E}[\eta_t]\mathbb{E}[\eta_{t-1}]$ Car $(\eta_t) \sim BBF(0, \sigma_\eta^2)$

$= 0$

$\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{V}[\eta_t \eta_{t-1}] = \sigma_\eta^4$

$\mathrm{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \mathbb{E}[\eta_t \eta_{t-1} \eta_{t+h} \eta_{t+h-1}] - \mathbb{E}[\eta_t \eta_{t-1}]\mathbb{E}[\eta_{t+h} \eta_{t+h-1}]$

$= 0 \quad \forall h \geq 1$

D'où $(X_t) \sim BB(0, \sigma_\eta^4)$

2) $Y_t = (\eta_t + m)(\eta_{t-1} + m) = X_t + m(\eta_t + \eta_{t-1}) + m^2$

$\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[X_t + m(\eta_t + \eta_{t-1}) + m^2]$

$= m^2$

$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[(\eta_t + m)(\eta_{t-1} + m)]$ $\qquad \eta_t \perp\!\!\!\perp \eta_{t-1} \Rightarrow \eta_t + m \perp\!\!\!\perp \eta_{t-1} + m$

$= \mathbb{V}[\eta_t + m]\mathbb{V}[\eta_{t-1} + m]$

$= \sigma_\eta^2 \sigma_\eta^2 = \sigma_\eta^4$

$\gamma_Y(h) = \mathrm{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \mathrm{Cov}((\eta_t + m)(\eta_{t-1} + m), (\eta_{t+h} + m)(\eta_{t+h-1} + m))$

Si $h = 1$, $\gamma_Y(1) = \mathbb{E}[(\eta_t + m)^2(\eta_{t-1} + m)(\eta_{t+1} + m)] - \underbrace{\mathbb{E}[(\eta_t + m)]^2\mathbb{E}[(\eta_{t-1} + m)]\mathbb{E}[(\eta_{t+1} + m)]}_{m^4}$

$= (\sigma_\eta^2 + m^2)m^2 - m^4$

$= m^2\sigma_\eta^2$ $\qquad \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

Si $h \geq 2$, $\gamma_Y(h) = 0$

3) Par identification :

$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$ où $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$Cov(\varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1} - \theta\varepsilon_t)$

* $\mathbb{E}[Y_t] = m^2 = \mu$
* $\mathbb{V}[Y_t] = \sigma_\eta^2(\sigma_\eta^2 + 2m^2) = \sigma_\varepsilon^2(1+\theta^2)$
* $\gamma_Y(1) = m^2\sigma_\eta^2 = -\theta\sigma_\varepsilon^2$

$\Rightarrow \sigma_\varepsilon^2 = -\dfrac{m^2\sigma_\eta^2}{\theta}$ (Le signe - ne pose pas de problème ici car on suppose que $\theta \in \mathbb{R}^* \to$ quitte à restreindre ...).

$\to (\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$

(ε_t) innovat° de Y_t

$\Rightarrow Y_t = m^2 + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ avec $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$

est la représentation canonique de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

Exercice 3 :

$(U_t) \sim BB(0,\sigma^2)$

$(V_t) \sim BB(0,\tau^2)$ avec $U \perp\!\!\!\perp V$

$a,b \in \mathbb{R}^*$, on définit $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ par

$$X_{2t} = aU_t + bV_t$$
$$X_{2t+1} = bU_t + aV_{t+1}$$

1) $\mathbb{V}[X_{2t}] = \mathbb{V}[aU_t + bV_t]$

$= a^2\sigma^2 + b^2\tau^2$ car $U \perp\!\!\!\perp V$

$\mathbb{V}[X_{2t+1}] = \mathbb{V}[bU_t + aV_{t+1}]$

$= b^2\sigma^2 + a^2\tau^2$ car $U \perp\!\!\!\perp V$

$\Rightarrow \mathbb{V}[X_k] = \begin{cases} a^2\sigma^2 + b^2\tau^2 & \text{si } k \text{ pair} \\ b^2\sigma^2 + a^2\tau^2 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$

$Cov(X_{2t}, X_{2t+1}) = Cov(aU_t + bV_t ; bU_t + aV_{t+1})$

$= ab\sigma^2$ car $U \perp\!\!\!\perp V$ et $U \sim BB(0,\sigma^2)$, $V \sim BB(0,\tau^2)$

$Cov(X_{2t+1}, X_{2t+2}) = Cov(bU_t + aV_{t+1}, aU_{t+1} + bV_{t+1})$

$= ab\tau^2$ car $U \perp\!\!\!\perp V$ et $U \sim BB(0,\sigma^2)$, $V \sim BB(0,\tau^2)$

$\Rightarrow Cov(X_k, X_{k+1}) = \begin{cases} ab\sigma^2 & \text{si } k \text{ pair} \\ ab\tau^2 & \text{si } k \text{ impair} \end{cases}$

2) Soit $j \geq 2$,

j pair : $Cov(X_{2t}, X_{2t+2i}) = Cov(aU_t + bV_t ; aU_{t+i} + bV_{t+i})$ $i \geq 1$

$= 0$ car $U \perp\!\!\!\perp V$ et $U \sim BB$, $V \sim BB$

$Cov(X_{2t+1}, X_{2t+1+2i}) = Cov(bU_t + aV_{t+1} ; bU_{t+i} + aV_{t+i+1})$

$= 0$

De même si j impair $= 0$

$\Rightarrow \forall j \geq 2,\ Cov(X_k, X_{k+j}) = 0$

3) X est stationnaire $\Leftrightarrow$ la moyenne et les autocorrélations de X sont invariantes par translation

$\Leftrightarrow \mathbb{V}[X_{2t}] = \mathbb{V}[X_{2t+1}]$

et $Cov(X_{2t}, X_{2t+1}) = Cov(X_{2t+1}, X_{2t+2})$

$\Leftrightarrow ab\sigma^2 = ab\tau^2$

$\Leftrightarrow \sigma^2 = \tau^2$ car $(a,b) \in (\mathbb{R}^*)^2$

On suppose $\sigma^2 = \tau^2 = 1 \Rightarrow \mathbb{V}[X_t] = a^2 + b^2$

$Cov(X_k, X_{k+1}) = ab$ $\quad \gamma_X(h) = 0$ $|h| > 1$

4) $\theta = b/a$ avec $|\frac{b}{a}| < 1$ $\forall t \in \mathbb{Z}$, $\varepsilon_t = \sum_{j=0}^{\infty} (-\theta)^j X_{t-j}$

Rappel : $f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \gamma_X(h) \overbrace{Re(e^{i\omega h})}^{\cos(\omega h)}$

Ici, $f_X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\left(\gamma_X(0) + 2\gamma_X(1)\cos(\omega)\right)$
$= \frac{1}{2\pi}\left(a^2+b^2+2ab\cos(\omega)\right)$
$= \frac{1}{2\pi}\left(a^2+2ab\cos(\omega)+b^2\right)$

$\varepsilon_t = \Phi(L) X_t$
avec $\Phi(L) = \sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^j L^j$

$\Rightarrow f_\varepsilon(\omega) = |\Phi(e^{i\omega})|^2 f_X(\omega)$

$|\Phi(e^{i\omega})|^2 = \left|\sum_{j=0}^{\infty}(-\theta)^j e^{i\omega j}\right|^2$
$= \left|\frac{1}{1+\theta e^{i\omega}}\right|^2$

$1+\theta e^{i\omega} = 1+\theta\cos(\omega) + i\theta\sin(\omega)$
$\Rightarrow |1+\theta e^{i\omega}| = \sqrt{(1+\theta\cos(\omega))^2+(\theta\sin(\omega))^2}$
$= \sqrt{1+2\theta\cos(\omega)+\theta^2\cos^2(\omega)+\theta^2\sin^2(\omega)}$
$= \sqrt{1+\theta^2+2\theta\cos(\omega)}$
$\rightarrow |1+\theta e^{i\omega}|^2 = 1+\theta^2+2\theta\cos(\omega)$
$\Rightarrow f_\varepsilon(\omega) = \frac{1}{1+2\theta\cos(\omega)+\theta^2} \times \frac{1}{2\pi}\left(a^2+2ab\cos(\omega)+b^2\right)$

Or $\theta = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1}{1+2\theta\cos(\omega)+\theta^2} = \frac{1}{1+2\frac{b}{a}\cos(\omega)+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+2ab\cos(\omega)+b^2}$

$\Rightarrow f_\varepsilon(\omega) = \frac{a^2}{a^2+2ab\cos(\omega)+b^2} \times \frac{1}{2\pi} \times \left(a^2+2ab\cos(\omega)+b^2\right)$
$= \frac{a^2}{2\pi} \quad \Rightarrow \varepsilon_t \sim BB(0, a^2)$

5) X MA(1) p/r à ε $\Leftrightarrow X_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}$ $|\theta|<1$

$\rightarrow X_t = (1+\theta L)\varepsilon_t$
$\Leftrightarrow (1+\theta L)^{-1} X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty}(-\theta)^k X_{t-k} = \varepsilon_t \quad |\theta|<1 \rightarrow \sum_{0}^{\infty}|-\theta|^k < \infty$

On a vu que $\mathbb{E}[X_t] = 0$
$\mathbb{V}[X_t] = a^2+b^2$
$Cov(X_t, X_{t+1}) = ab$
$Cov(X_t, X_{t+j}) = 0 \quad j \geq 2$

Si X_t MA(1) $\rightarrow \mathbb{E}[X_t] = 0$
$\mathbb{V}[X_t] = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2$
$Cov(X_t, X_{t+1}) = \theta\sigma_\varepsilon^2$
$Cov(X_t, X_{t+j}) = 0 \quad j \geq 2$

$\Rightarrow$ Par identificat° : $\begin{cases} a^2+b^2 = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 \\ ab = \theta\sigma_\varepsilon^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1+\theta^2}{\theta} = \frac{a^2+b^2}{ab} \Leftrightarrow \underbrace{\theta^2 - \frac{a^2+b^2}{ab}\theta + 1}_{P(\theta)} = 0$

$\Delta = \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^2 - 4 = \frac{1}{a^2b^2}\left(a^4+2a^2b^2+b^4-4a^2b^2\right)$
$= \frac{1}{a^2b^2}\left(a^4-2a^2b^2+b^4\right) = \frac{1}{a^2b^2}(a^2-b^2)^2 > 0$

$\theta_1 = \frac{\frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{a^2-b^2}{ab}}{2} = \frac{b}{a}$

$\theta_2 = \frac{\frac{a^2+b^2}{ab} + \frac{a^2-b^2}{ab}}{2} = \frac{a}{b}$

$\Rightarrow |\theta_1| < 1$ c'est donc celui à retenir et $\sigma_\varepsilon^2 = a^2$

5) $MA(1) \longrightarrow X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\theta)^k X_{t-k} + \theta \sum_{k=0}^{\infty} (-\theta)^k X_{t-k-1}$

$X_t = (1+\theta L)\varepsilon_t$

$\Leftrightarrow (1+\theta L)^{-1} X_t = \varepsilon_t \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} (-\theta)^k X_{t-k} = \varepsilon_t$

$|\theta| < 1$, $\sum_{k=0}^{\infty} (-\theta)^k < \infty$

$\mathbb{E}[X_t] = 0$

$\mathbb{V}[X_t] = a^2 + b^2$

$Cov(X_t, X_{t+1}) = ab$

$Cov(X_t, X_{t+j}) = 0 \quad j \geq 2$

$MA(1) \Leftrightarrow \exists \theta \in \mathbb{R}, (\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$ tq $X_t = \varepsilon_t + \theta \varepsilon_{t-1}$

$\rightarrow \mathbb{E}[X_t] = 0$

$\mathbb{V}[X_t] = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2$

$Cov(X_t, X_{t+1}) = \theta \sigma_\varepsilon^2$

$Cov(X_t, X_{t+j}) = 0 \quad j \geq 2$

$\Rightarrow$ Par identificat° : $\begin{cases} a^2 + b^2 = (1+\theta^2)\sigma_\varepsilon^2 \\ ab = \theta \sigma_\varepsilon^2 \end{cases}$

$\Rightarrow \frac{1+\theta^2}{\theta} = \frac{a^2+b^2}{ab} \Leftrightarrow \underbrace{\theta^2 - \frac{a^2+b^2}{ab}\theta + 1}_{P(\theta)} = 0$

$\Delta = \left(\frac{a^2+b^2}{ab}\right)^2 - 4 = \frac{1}{(ab)^2}(a^4 + 2a^2b^2 + b^4 - 4a^2b^2) = \frac{(a^2-b^2)^2}{(ab)^2}$

$\begin{cases} \theta_1 = b/a \\ \theta_2 = a/b \end{cases} \Rightarrow |\theta_1| < 1$ c'est donc le $\theta_1 = \theta$ à retenir et $\sigma_\varepsilon^2 = a^2$