Chapitre 1

Modèle de Black et Scholes

- Distributions normales et lognormales en temps continu
- EDP et formule de Black et Scholes
- Formule de BS par les martingales, AOA, proba risque neutre, valeur du call
- Feynman Kac
- Changement de proba / changement de numéraire sous BS
- Volatilité implicite / volatilité historique

Le premier modèle d'évolution des actif financiers a été proposé par Louis Bachelier dans sa thèse en 1900. Les actifs risqués étaient supposés Gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs. Ce modèle a le nom de modèle de Black-Scholes. En effet, en 1973, Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes proposent l'idée de définir le prix d'un produit dérivé comme celui de son portefeuille de couverture et l'appliquent à ce modèle Log-normal. Ils ont obtenus le prix nobel d'économie en 1997 pour ces travaux, ce qui n'a pas empêché leur fond d'investissement "Long Term Capital Market" de faire faillite en 1998.

I Formalisation du modèle de Black-Scholes

1 Les hypothèses sur le marché

Nous reprenons ici le même type d'hypothèses faites au début du chapitre sur la modélisation des marchés financiers et les notions d'arbitrage :

– Les actifs sont divisibles à l'infini
– Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant
– On autorise les ventes à découvert
– Les échanges ont lieu sans coût de transaction
– On autorise les emprunts et les prêts illimités pour tous les agents au même taux constant r (accès à l'actif sans risque)
– Le marché fonctionne en continu

2 L'hypothèse fondamentale des rendements lognormaux

L'incertain est modélisé à travers les trajectoires futures du titre risqué, vues comme des scenarii possibles d'évolution. En général, on suppose que ce sont des fonctions continues (ω_t), définies sur $\mathbb{R}_+$. Afin de prendre en compte le caractère très erratique des cours des actifs financiers, Bachelier les modélise à l'aide d'un mouvement Brownien avec tendance. Une telle modélisation conduit à des prix qui peuvent être négatifs. Aussi, Samuelson (1960) propose de retenir cette modélisation pour les rendements, plutôt que pour les cours eux-mêmes. C'est ce type de modélisation que choisiront Black, Scholes et Merton.

Il y a plusieurs définitions possibles des rendements, qui en général sont équivalentes lorsque les phénomènes étudiés sont déterministes, mais qui diffèrent dans le cas stochastique. La différence est explicable par la formule d'Itô. Nous supposons ici que les rendements entre deux périodes sont mesurés par la différence des logarithmes des cours.

On fait l'hypothèse que les rendements entre 0 et t suivent un mouvement Brownien de tendance $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$ et de coefficient de diffusion σ, autrement dit que les rendements suivent une normale. Cela se traduit par les propriétés suivantes du processus des prix $\{S_t, t \in [0,T]\}$:

- $S_0 = x$
- Les rendements $Log(S_t) - Log(S_s)$ suivent une loi gaussienne de moyenne $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)$ et de variance $\sigma^2(t-s)$
- $\forall 0 < t_1 < ... < t_n$, les accroissements relatifs $\{\frac{S_{t_i+1}}{S_{t_i}}; 0 \leq i \leq n-1\}$ sont indépendants, et de même loi.

En d'autres termes, il existe un mouvement Brownien W tel que :

$$S_t = f(t, W_t) = x \exp\left(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

Par application de la formule d'Itô pour le mouvement Brownien et la fonction $f(t,z) = x\exp\left(\mu t + \sigma z - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$, dont les dérivées valent :

$$f'_t(t,z) = f(t,z)\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right), \quad f'_z(t,z) = f(t,z)\sigma, \quad f''_{zz} = f(t,z)\sigma^2$$

Nous voyons que

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

L'hypothèse principale à la base du modèle de Black-Scholes est donc la modélisation de la dynamique du sous-jacent par un mouvement brownien géométrique (modélisation des actifs par des lois lognormales).

Comme la fonction exponentielle n'est pas bornée, pour justifier l'écriture différentielle et l'utilisation de la formule d'Itô, nous avons besoin de propriétés d'intégrabilité, que l'on vérifie facilement grâce aux propriétés des exponentielles de variables gaussiennes.

Lemme 1.1 *La transformée de Laplace d'une v.a. gaussienne U de moyenne m et de variance γ^2 est donnée par*

$$\mathbb{E}[exp(\lambda U)] = \exp\left(\lambda m + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2\right)$$

En particulier, si W est un mouvement Brownien,

$$\mathbb{E}\left[exp\left(\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)\right] = 1$$

Grâce à ce lemme (cf cours sur les vecteurs gaussiens et le mouvement Brownien), on obtient facilement :

Théorème 1.1 *Soit S un mouvement Brownien géométrique de valeur initiale x. Alors :*
Le cours S_t suit une loi log-normale, dont les deux premiers moments valent :

$$\mathbb{E}[S_t] = xe^{\mu t}, \;\; \mathbb{E}[S_t^2] = x^2 \exp((2\mu + \sigma^2)t),$$

$$Var(S_t) = x^2 \exp(2\mu t)(\exp(\sigma^2 t) - 1)$$

En particulier, le ratio de Sharpe, qui rapporte le gain moyen à la variabilité du titre :

$$SharpeRatio = \frac{\mathbb{E}[S_t] - x}{\sqrt{Var(S_t)}}$$

est indépendant de la valeur initiale x.
De plus, la densité de la loi de S_t partant de x est la fonction $l(t,x,y)$ donnée par :

$$l(t,x,y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{1}{2}d_0(t, xe^{\mu t}, y)^2\right)$$

$$d_0(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 t}} Log\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} \tag{1.1}$$

Preuve : L'étude des moments de S_t repose sur le lemme précédent, et la densité $l(t,x,y)$ est déduite de la densité gaussienne par un changement de variable.
ECRIRE LE CALCUL, cf pages 33-34 poly El Karoui

a. Interprétation financière des paramètres du modèle

– S'il n'y a pas de bruit, ($\sigma = 0$), μ représente le rendement annualisé du titre. Un simple argument d'arbitrage montre qu'en absence d'alea sur le titre, son rendement doit être le même que celui d'un placement à la banque, dont le taux est désigné ici par r. On désignera par S_t^0 la valeur en t de la capitalisation d'un Euro à la banque.

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt$$

Un ordre de grandeur de ce taux est $[2\%, 12\%]$.

- Lorsque le titre est risqué, μ représente le rendement annualisé du titre espéré par unité de temps. Le marché le compare en général à celui d'un placement sans risque. Le paramètre $\mu - r$ est donc en général un paramètre de référence.
- Le ratio de Sharpe par unité de temps des excès de rendements par rapport au cash prend en compte la volatilité du titre. Il est considéré comme **la prime de risque** λ que le marché affecte à la source de risque W puisque

$$\text{prime de risque } = \lambda = \frac{\frac{1}{dt}\mathbb{E}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] - r}{\sqrt{\frac{1}{dt}Var\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)}} = \frac{\mu - r}{\sigma}\frac{dS_t}{S_t}$$

- Il sera utile d'écrire
$$dS_t = S_t[rdt + \sigma(dW_t + \lambda dt)]$$
Dans cette représentation, nous voyons apparaître l'importance du paramètre clé dans la caractérisation des titres financiers à savoir la volatilité σ. L'ordre de grandeur de ce paramètre dépend énormément de la nature du titre support : dans les marchés d'actions, il varie entre 20 et 70%, dans les marchés de change entre 10 et 30%, dans les marchés de taux d'intérêt entre 8 et 30%.

b. Limites de la modélisation

- Dans le monde de Black et Scholes, tous les paramètres sont supposés constants. Il est clair que ce n'est pas très réaliste, dans aucun marché. En fait, on pourra sans grande modification dans ce qui suit supposer les paramètres déterministes. Mais cela pose évidemment des problèmes d'identification des paramètres (calibration dans le vocabulaire de la finance) importants.
En pratique : on observe en général un smile/skew de volatilité, elle est non constante. En effet, la volatilité implicite aux options fortement hors de la monnaie ou largement dans la monnaie est plus élevée que la volatilité implicite recalculée à partir des options à la monnaie. On appelle ce phénomène "smile de volatilité" (le graphe de la volatilité en fonction du prix d'exercice est en forme de sourire). Pour un prix d'exercice donné, la différence entre la volatilité implicite observée et celle à la monnaie qui s'appelle **le skew**. La surface de volatilité d'un sous-jacent évolue également dans le temps. Les acteurs du marché la réévaluent sans cesse, modifiant leur anticipation de la probabilité, pour chaque prix d'exercice et maturité, qu'une option ne finisse dans la monnaie. La volatilité en pratique n'est donc pas constante.
Il existe des modèles plus poussés qui supposent les paramètres du modèle aléatoires/stochastiques (modèles à volatilité stochastique). Nous les citerons à la fin de ce cours, et vous les verrez l'an prochain, en particulier pour les modèles de taux d'intérêt.
- Notons par ailleurs que dans leur papier de 1973, Black et Scholes ne cherchent pas tant à modéliser avec exactitude la dynamique du sous-jacent qu'ils considèrent qu'à essayer de voir si le point de vue très nouveau qu'ils proposent dans le domaine des options est prometteur, quitte à revenir sur les questions de modélisation dans la suite. A cette époque, Mandelbrot (1963) avait dejà

montré que les rendements des actifs financiers à un jour, ou une semaine n'étaient clairement pas statistiquement gaussiens, en particulier que la probabilité de grands mouvements de ces rendements était plus grande que celle que le monde gaussien quantifiait. Cette question "des queues épaisses" des distributions des rendements et de son implication dans la mesure des risques et la couverture des produits financiers est au coeur de la recherche actuelle. Mais comme nous le verrons, bien qu'imparfait le modèle de Black et Scholes est encore très efficace et très utilisé dans toutes les salles de marché.

– Un des grands messages de la finance mathématique est que la prime de risque n'est pas spécifique du titre mais de la source de bruit W_t. C'est une caractéristique du marché au même titre que le taux d'intérêt, du moins dans un monde sans arbitrage et très liquide. Cela sert beaucoup lors de l'étude des multi-sous-jacents. Cette hypothèse joue en particulier un rôle déterminant dans les marchés de taux.

3 Modélisation probabiliste du marché

Après ces introductions relatives aux hypothèses faites sur le marché, nous allons poser proprement le modèle.
Nous considérons un marché constitué d'un actif sans risque S_0 et d'un actif risqué S sur la période $[0, T]$. On considère donc un **actif sans risque** évoluant selon l'équation suivante :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \quad \text{et} \quad S_0^0 = 1 \Longrightarrow S_t^0 = e^r t$$

(on est en continu, donc le taux considéré est toujours un taux continu).
L'actif risqée aura la dynamique donnee par l'EDS de Black-Scholes ou $\sigma > 0$:

$$dSt = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \tag{1.2}$$

Ce modèle est le modèle le plus simple que l'on puisse imaginer pour modeliser l'évolution d'un actif risqué tout en imposant qu'il soit positif. Comme nous l'avons vu plus haut, cela revient à supposer que les rendements des actifs sont normaux. Cet actif a une tendance donnée par μ et une volatilite donnée par σ toutes les deux constantes.

Décrivons maintenant $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: L'ensemble des états du monde Ω sera un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+ \times]0, T]$.
Pour tout $t \in [0, T]$, la tribu $\mathcal{F}_\sqcup$ représente l'information disponible à la date t, l'aléa provient seulement de S, donc

$$\mathcal{F}_t := \sigma(S_s, s \leq t)$$

La probabilité historique $\mathbb{P}$ est la probabilité de survenance de chaque état du monde, elle est telle que W soit un Mouvement Brownien sous $\mathbb{P}$.

Si on part dans le sens inverse, et que l'on essaie de résoudre l'EDS de Black et Scholes, on a :

Théorème 1.2 *L'EDS 1.2 admet une unique solution qui est donnée par :*

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}, \quad \mathbb{P}_p.s.$$

Preuve : La solution proposée vérifie bien l'EDS, en appliquant la formule d'Itô (cf partie précédente).
Donc S, processus $\mathcal{F}$-adapté est bien solution de l'EDS 1.2. Le caractère Lipschitz des coefficients de l'EDS nous assure l'unicité de la solution, mais, dans notre cas, nous pouvons également la démontrer : soit Y un processus solution de l'EDS 1.2. Remarquons que S_t ne s'annule jamais si bien que l'on peut appliquer la formule d'Ito pour déterminer la dynamique de $\frac{1}{S_t}$:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{S_t}\right) &= -\frac{1}{S_t^2}dS_t + \frac{1}{2}\frac{2}{S_t^3}d\langle S\rangle_t \\ &= -\frac{1}{S_t}(\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{S_t}\sigma^2 dt \end{aligned}$$

Donc la formule d'intégration par partie donne la dynamique de $\frac{Y_t}{S_t}$:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{Y_t}{S_t}\right) &= Y_t d\left(\frac{1}{S_t}\right) + \frac{1}{S_t}dY_t + d\langle \frac{1}{S}, Y\rangle_t \\ &= \frac{Y_t}{S_t}((\sigma^2 - \mu)dt - \sigma dW_t) + \frac{Y_t}{S_t}(\mu dt + \sigma dW_t) - \sigma Y_t \frac{\sigma}{S_t}dt \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Remarquez que l'on aurait pu obtenir directement le resultat en appliquant la formule d'Ito à la fonction $(y, s) \mapsto y/s$. On a donc :

$$\frac{Y_t}{S_t} = \frac{Y_0}{S_0} + \int_0^t 0 dW_s = 1$$

Donc les processus Y et S sont égaux presque sûrement et l'EDS admet une unique solution.

Remarque : Comme nous avons suppose $\sigma > 0$, la fonction g telle que $S_t = g(W_t)$ est inversible, et donc les aléas du marché sont complètement décrits par le mouvement Brownien W :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(S_r, r \leq t) = \sigma(W_r, r \leq t)$$

Définition 1.1 *Un produit dérivé (ou actif contingent) est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable.*

Comme dans le cas du modèle discret, nous allons chercher à donner un prix en t à un produit dérivé connu en T et trouver une manière pour dupliquer exactement ce produit dérivé.

La méthode va être similaire à celle utilisée dans le cas discret :
- On va chercher à construire une probabilité risque neutre qui rende tout actif de base réactualisé martingale.
- On va définir ce que l'on appelle une stratégie de portefeuille simple autofinançante.

- On va vérifier que toute stratégie de portefeuille simple autofinançante réactualisée reste martingale sous la probabilité risque neutre.
- On en déduira l'absence d'opportunités d'arbitrage entre stratégies de portefeuille simple (AOA').
- Nous allons chercher à dupliquer tout produit dérivé par une stratégie de portefeuille simple.
- On en déduira que la définition économique naturelle du prix de l'option en t s'écrit à un facteur d'actualisation près comme l'espérance sous cette proba risque neutre du flux final.
- Le portefeuille de duplication nous donnera la stratégie de couverture de l'option.

II Probabilité risque neutre

1 Rappel sur les changements de probabilités

On cherche à construire une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ sur $(\omega, \mathcal{F}_T)$ équivalente à $\mathbb{P}$. Si $\mathbb{P}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors le théorème de Radon Nikodym assure l'existence d'une variable aléatoire Z_T $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que $d\hat{\mathbb{P}} = Z_T d\mathbb{P}$, i.e. :

$$\forall A \in \mathcal{F}_T, \;\; \hat{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z_T d\mathbb{P}$$

Autrement dit :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T \mathbb{1}_A)$$

Dire que $\hat{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{P}$ sont équivalentes revient à dire qu'elles chargent les mêmes ensembles et donc que Z_T ne s'annule jamais, i.e. $Z_T > 0$. Alors la densité de Radon-Nikodym de $\mathbb{P}$ par rapport) $\hat{\mathbb{P}}$ est $\frac{1}{Z_T}$.
Pour que $(\Omega, \mathcal{F}_T, \hat{\mathbb{P}})$ soit toujours un espace probablisé (ie que $\hat{\mathbb{P}}$ soit toujours une mesure de probabilités, il faut que

$$\hat{\mathbb{P}}(\Omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T] = 1$$

La formule de Bayes nous assure que pour toute v.a. X_T , $\mathcal{F}_T$-mesurable, on a :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(X_T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T X_T)$$

On associe naturellement à la v.a. Z_T le processus martingale $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par

$$Z_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T | \mathcal{F}_t]$$

Alors, pour tout t et toute variable aléatoire X_t $\mathcal{F}_t$-mesurable, on a :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_t | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_t X_t]$$

En fait, Z_t est la densité de Radon Nikodym (définie à une modification p.s. près) de $\hat{\mathbb{P}}$ restreint à $\mathcal{F}_t$ par rapport à $\mathbb{P}$ restreint à $\mathcal{F}_t$. On note :

$$Z_t = \left. \frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_t}$$

Si l'on considère un processus X $\mathcal{F}$-adapté, la formule de Bayes généralisée s'écrit :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{Z_T}{Z_t}X_T\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{Z_t}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T|\mathcal{F}_t]$$

En effet, pour toute variable aléatoire Y_t $\mathcal{F}_t$-mesurable bornée, on a :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T Y_t] = e^{\mathbb{P}}[Z_T X_T Y_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T|\mathcal{F}_t]Y_t] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[\frac{1}{Z_t}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T|\mathcal{F}_t]Y_t\right]$$

2 Probabilité risque neutre

Dans toute la suite, tout comme dans le cas discret, on notera $\tilde{Y}$, la valeur actualisée d'un processus Y définie donc par

$$\tilde{Y}_t = \frac{Y_t}{S_t^0} = e^{-rt}Y_t$$

Déterminons la dynamique des actifs risqués et sans risque réactualisés sous la probabilité historique $\mathbb{P}$. L'actif sans risque réactualisé S_t^0 est constant égal à 1 donc

$$dS_t^0 = 0$$

Pour l'actif risqué réactualisé, il faut appliquer la formule d'Ito :

$$d\tilde{S}_t = \frac{1}{S_t^0}dS_t + S_t d\left(\frac{1}{S_t^0}\right) + d\langle S, \frac{1}{S^0}\rangle_t = \tilde{S}_t[(\mu - r)dt + \sigma dW_t]$$

Définition 1.2 *Dans le modèle de Black Scholes, $\lambda := \frac{\mu - r}{\sigma}$ est ce que l'on appelle la* **prime de risque**.

Donc, si l'on introduit le processus defini pout $t \in [0, T]$,

$$\hat{W}_t = W_t + \lambda t$$

alors la dynamique de $\tilde{S}$ est donnée par :

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\hat{W}_t$$

Donc, si l'on arrive à construire une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$, équivalente à $\mathbb{P}$, sous laquelle $\hat{W}_t = W_t + \lambda t$ est un mouvement Brownien, cette probabilité rendra l'actif risqué réactualisé une martingale, et sera un très bon candidat pour notre probabilité risque neutre. L'outil qui va nous premettre de démontrer l'existence de cette probabilité est le théorème de Girsanov :

Théorème 1.3 Théorème de Girsanov
Il existe une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$, équivalente à la probabilité historique $\mathbb{P}$, définie sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ par :

$$\left.\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_T} = Z_T = e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2}T}$$

sous laquelle le processus $\hat{W}_t$ défini par $\hat{W}_t = W_t + \lambda t$ est un mouvement Brownien sur $[0, T]$.

Preuve : cf cours de proc stoch ! la réécrire, cf poly ELIE pp 61-62

Maintenant que nous avons un candidat pour notre probabilité risque neutre, regardons si elle rend les portefeuilles autofinançants réactualisés des martingales.

3 Portefeuilles autofinançants

Après avoir modélisé la dynamique du sous-jacent, nous avons à formaliser mathématiquement l'évolution de la valeur liquidative d'un portefeuille géré dynamiquement de manière autofinançante, c'est à dire sans modification de la valeur du portefeuille aux dates de renégociation.

Une stratégie de portefeuille consiste a l'investissement à tout instant $t \in [0, T]$ dans une quantité denotée ϕ_t d'actif risqué S et d'une quantité ϕ_t^0 d'actif sans risque S^0. La valeur du portefeuille est donc donnée par

$$X_t = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

La condition d'autofinancement dans le cas continu s'écrit :

$$\boxed{dX_t = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t S_t}$$

Définition 1.3 *Une* **stratégie de portefeuille simple atofinancée** $X^{x,\phi}$ *est la donnée d'un capital de départ x et d'une stratégie continue ϕ d'investissement dans l'actif risqué, c'est-à-dire un processus $\mathcal{F}$-adapté $(\phi_t)_{0\leq t\leq T}$ qui doit vérifier certaines conditions d'intégrabilité :*

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T |\phi_t \tilde{S}_t|^2 dt\right] < +\infty$$

A chaque instant t, la quantité ϕ_t^0 est déterminée à l'aide de la condition d'autofinancement du portefeuille. Cette condition se lit simplement "La variation de la valeur du portefeuille est égale à la variation de la valeur des actifs multipliée par la quantité d'actifs détenus".

Définition 1.4 *On appelle* **numéraire** *tout processus d'Itô Y $\mathcal{F}$-adapté, qui ne s'annule pas.*

Un numéraire est une "monnaie". Un changement de numéraire correspond à un changement de monnaie, ou d'unité de compte (autre monnaie, normalisé par S_0, par S). Changer de numéraire revient à normaliser l'actif considéré suivant un autre. Intuitivement, que les actifs soient écrits dans n'importe quel numéraire , tant que ce numéraire est bien déterminé à l'instant t par l'information $\mathcal{F}_t$ dont l'on dispose sur le marché en t, la condition d'autofinancement devrait être verifiée. En effet, **la condition d'autofinancement est stable par changement de numéraire**, et la formulation mathématique de ce résultat est la suivante :

Proposition 1.1 *Pour tout* **numéraire** Y*, la condition d'autofinancement se réécrit :*

$$d\left(\frac{X^{x,\phi}}{Y}\right)_t = \phi_t^0 d\left(\frac{S^0}{Y}\right)_t + \phi_t d\left(\frac{S}{Y}\right)_t$$

Preuve : Appliquons la formule d'intégration par parties aux processus $X^{x,\phi}$ et $U := \frac{1}{Y}$:

$$\begin{aligned} d(UX^{x,\phi})_t &= U_t dX_t^{x,\phi} + X_t^{x,\phi} dU_t + d\langle X^{x,\phi}, U\rangle_t \\ &= U_t(\phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t) + (\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t)dU_t + d\langle \phi^0 S^0 + \phi S, U\rangle_t \\ &= \phi_t^0(U_t dS_t^0 + S_t^0 dU_t + d\langle S^0, U\rangle_t) + \phi_t(U_t dS_t + S_t dU_t + d\langle S, U\rangle_t) \\ &= \phi_t^0 d(US^0)_t + \phi_t d(US)_t \end{aligned} \tag{1.4}$$

La difficulté vient du passage de la deuxième à la troisième ligne, qui nécessite la relation :

$$d\langle \phi^0 S^0 + \phi S, U\rangle_t = \phi_t^0 d\langle S^0, U\rangle_t + \phi_t d\langle S, U\rangle_t$$

Cette relation vient du fait que la covariation entre 2 processus d'Itô fait uniquement intervenir linéairement leurs parties Browniennes (parties martingales). Or grâce à la condition d'autofinancement, on a :

$$d(\phi^0 S^0 + \phi S)_t = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t$$

Donc la partie martingale de $_phi^0 S^0 + \phi S$ est la somme de ϕ_t^0 fois celle de S^0 (qui est nulle...) et de ϕ_t fois celle de S, ce qui donne le résultat.

En particulier la relation d'autofinancement écrite dans le numéraire S^0 (appelé parfois numéraire cash) donne :

$$d\tilde{X}_t^{x,\phi} = \phi_t d\tilde{S}_t \Rightarrow \tilde{X}_t^{x,\phi} = x + \int_0^t \phi_r d\tilde{S}_r$$

et donc la dynamique de la valeur réactualisée de mon portefeuille $\tilde{X}_t^{x,\phi}$ sous la probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ est

$$d\tilde{X}_t^{x,\phi} = \phi_t d\tilde{S}_t = \sigma\phi_t \tilde{S}_t d\hat{W}_t$$

ce qui justifie d'une part la forme que l'on a donnée a notre condition d'intégrabilité pour rendre $\tilde{X}$ martingale, et d'autre part le fait que la probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ rend bien le prix actualisé de tout portefeuille autofinançant une martingale, et est donc bien une probabilité risque neutre.

Remarque : Le résultat indiquant que la condition d'autofinancement est stable par changement de numéraire est très utile. Dans notre cas, nous resterons dans le numéraire cash, mais selon le problème auquel on est confronté, il peut être judicieux de changer de numéraire. Nous avons prouvé l'existence d'une proba risque neutre qui rend les actifs écrits dans le numéraire cash martingales mais on pourrait également choisir de rendre les actifs écrits dans un numéraire différent martingale. En particulier, lorsque les taux ne sont plus supposés constants, le numéraire cash n'est pas toujours le plus adapté, il est plus pratique d'écrire les actifs dans le numéraire Zéro-coupon, on parle alors de **Probabilité forward neutre**. L'article introduisant le concept de changement de numéraire est du à El-Karoui - Geman -Rochet (1995).

Le résultat est donc comme dans le cas discret : "Si l'actif risqué réactualisé est un processus d'Ito martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$, toute stratégie de portefeuille autofinancée réactualisée l'est également". Cela résume la proposition suivante :

Proposition 1.2 *La probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ construite précédemment est une probabilité risque neutre.*
La valeur en t de toute stratégie autofinançante (x, ϕ) de flux final $X_T^{x,\phi} = h_T$ est :

$$X_t^{x,\phi} = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[h_T|\mathcal{F}_t\right]$$

Preuve : Les dynamiques de $\tilde{S}$ et de $\tilde{X}^{x,\phi}$ sous $\hat{\mathbb{P}}$ sont données par

$$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t d\hat{W}_t \Rightarrow d\tilde{X}_t^{x,\phi} = \phi_t d\tilde{S}_t = \sigma\phi_t\tilde{S}_t d\hat{W}_t$$

Donc grâce aux conditions d'intégrabilité de ϕ, $\tilde{X}^{x,\phi}$ est une martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$ et donc :

$$X_t^{x,\phi} = e^{rt}\tilde{X}_t^{x,\phi} = e^{rt}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[\tilde{X}_T^{x,\phi}|\mathcal{F}_t\right] = e^{rt}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[e^{-rT}X_T^{x,\phi}|\mathcal{F}_t\right] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[h_T|\mathcal{F}_t\right].$$

Proposition 1.3 *L'existence d'une probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$ implique l'AOA entre stratégies de portefeuille simple autofinançantes.*

Preuve : Si $X_T^{0,\phi} \geq 0$, comme $\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T^{0,\phi}] = e^{rT}.0$, on a donc $X_T^{0,\phi} = 0$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour $\hat{\mathbb{P}}$, qui est également un ensemble de mesure nulle pour $\mathbb{P}$.

Nous venons donc de voir que l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage est bien vérifiée dans le cadre du modèle de Black-Scholes.

La valeur en t de toute stratégie de portefeuille simple s'écrit comme l'espérance sous la proba risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$ de son flux terminal actualisé, donc, si un produit dérivé est duplicable, pour éviter les arbitrages, on définit économiquement son prix comme l'espérance sous $\hat{\mathbb{P}}$ de son flux terminal actualisé.

Il est important de bien visualiser la dynamique de l'actif risqué réactualisé ou non sous les différentes probabilités :

	Probabilité historique $\mathbb{P}$	Probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$
Actif risqué	$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$	$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\hat{W}_t$
Actif risqué réactualisé	$d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma\tilde{S}_t dW_t$	$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t d\hat{W}_t$

4 Duplication d'un produit dérivé : EDP de Black et Scholes

Tout d'abord, remarquons le caractère Markovien du processus S :

Proposition 1.4 *Considérons un produit dérivé de la forme $h(S_T)$. Alors il existe une fonction $v : [0, T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que*

$$v(t, S_t) := e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

Preuve : Dans le modèle de Black Scholes, la valeur du sous-jacent en t est :

$$S_t = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t-\sigma W_t}$$

On en déduit

$$S_T = S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)-\sigma(W_T-W_t)}$$

Donc l'espérance conditionnelle se réécrit :

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\hat{\mathbb{P}}\left[h\left(S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)-\sigma(W_T-W_t)}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

Or la va S_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et la variable aléatoire $W_T - W_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_\sqcup$. On en déduite grâce aux proproétés des espérances conditionnelles que :

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t] = v(t, S_t)$$

avec la fonction v définie par :

$$v : (t,x) \mapsto e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\hat{\mathbb{P}}\left[h\left(x e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)-\sigma(W_T-W_t)}\right)\right].$$

Théorème 1.4 (Prix et EDP de Black Scholes)
Si l'on suppose que $v \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^+)$, alors il existe une stratégie autofinançante (x,ϕ) qui duplique le produit dérivé, i.e. telle que $\forall t \in [0,T], X_t^{x,\phi} = v(t,S_t)$ et les quantités x et ϕ sont données par :

$$x := e^{-rT}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)] \quad \phi_t := \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t)$$

En AOA, le prix en t du profuit de flux final $h(S_T)$ est donc $e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$. De plus, le prix de l'option $v(t,S_t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) + v_t(t,x) - rv(t,x) = 0 \quad et \quad v(T,x) = h(x)$$

Réciproquement, si l'EDP précédente admet une solution $v^\star$ (dont la dérivée partielle $\partial_x v^\star(t,x)$ est bornée, alors $v^\star(t,S_t)$ est le prix de l'option de flux terminal $h(S_T)$.

Preuve : Supposons que $v \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^+)$, et construisons le portefeuille de couverture. Considérons le processus défini sur $[0,T]$ par :

$$U_t := e^{-rt}v(t,S_t) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

Par construction, ce processus est une martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$, en effet, pour tout $s \le t$:

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[U_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}h(S_T)|\mathcal{F}_s]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}h(S_T)|\mathcal{F}_t] = U_s$$

Remarquons que l'on peut écrire

$$U_t = u(t,\tilde{S}_t) \quad \text{avec } u : (t,x) \mapsto e^{-rt}v(t, e^{rt}x)$$

Alors $u \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^+)$ et la formule d'Itô nous donne :

$$\begin{aligned} dU_t &= u_x(t, \tilde{S}_t + u_t(t, \tilde{S}_t)dt + \frac{1}{2}u_{xx}(t, \tilde{S}_t)d\langle \tilde{S} \rangle_t \\ &= \sigma \tilde{S}_t u_x(t, \tilde{S}_t)d\hat{W}_t + \left(u_t(t, \tilde{S}_t) + \frac{\sigma^2}{2}\tilde{S}_t^2 u_{xx}(t, \tilde{S}_t) \right) dt \end{aligned} \quad (1.5)$$

Etant donné qu'on a déjà établi que U_t était une martingale, sa partie en dt est nulle, et on obtient

– D'une part la partie en dt est nulle et égale à

$$u_t(t, \tilde{S}_t) + \frac{\sigma^2}{2}\tilde{S}_t^2 u_{xx}(t, \tilde{S}_t) = 0$$

Or par définition de u, on a les relations suivantes :

$$u_t(t,x) = -re^{-rt}v(t, e^{rt}x) + e^{-rt}v_t(t, e^{rt}x) + rxv_x(t, e^{rt}x)$$

et $u_{xx}(t,x) = e^{rt}v_{xx}(t, e^{rt}x)$ (1.6)

Donc l'EDP précédente en u se réécrit en v de la manière suivante (en remplaçant et en simplifiant par e^{-rt}) :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) + rS_t v_x(t, S_t) - rv(t, S_t) = 0$$

avec la condition terminale $v(T, S_T) = h(S_T)$. L'idée pour obtenir l'EDP en tout x est que le mouvement Brownien W_t diffuse sur tout $\mathbb{R}$, donc S_t diffuse sur tout $\mathbb{R}^+$, et par conséquent, v est solution sur $\mathbb{R}^+$ de :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) + v_t(t,x) - rv(t,x) = 0 \quad \text{et} \quad v(T,x) = h(x)$$

– Et d'autre part une solution de cette forme résoud également le problème de duplication. En effet, la propriété de martingale de U_t avec le terme en dt qui s'annule nous donne finalement l'expression de U_t :

$$U_t = U_0 + \int_0^t u_x(r, \tilde{S}_r)d\tilde{S}_r$$

Considérons maintenant la stratégie de portefeuille donnée par :

$$x := U_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_t)] \text{ et } \phi_t := u_x(t, \tilde{S}_t) = v_x(t, S_t)$$

Par construction, U est une martingale, donc (x, ϕ) est une stratégie de portefeuille, et grâce à la condition d'autofinancement, la valeur actualisée de ce portefeuille est :

$$\tilde{X}_t^{x,\phi} = x + \int_0^t \phi_r d\tilde{S}_r = U_0 + \int_0^t u_x(r, \tilde{S}_r d\tilde{S}_r = U_t$$

Donc le portefeuille $X^{x,\phi}$, qui vérifie de bonnes conditions d'intégrabilité puisque U est une martingale, est bien un portefeuille de duplication, car il vérifie :

$$X_t^{x,\phi} = e^{rt}U_t = v(t, S_t) = e^{-(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

Réciproquement, si on prend une fonction v qui vérifie l'EDP précédente, on peut introduire le processus

$$U_t^* := e^{-rt} v^*(t, S_t)$$

et u^* la fonction associée. Alors il est assez facile de montrer que la dynamique de U^* est donnée par :

$$dU_t^* = \sigma \tilde{S}_t u_x^*(t, \tilde{S}_t) d\hat{W}_t + \left(u_t^*(t, \tilde{S}_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \tilde{S}_t^2 u_{xx}^*(t, \tilde{S}_t) \right) dt$$

Comme v^* est solution de l'EDP, le terme en dt est nul, on obtient donc que U^* est une martingale (la dérivée v^* bornée assure de bonne conditions d'intégrabilité), et

$$U_t^* = U_0 + \int_0^t u_x^*(r, \tilde{S}_r) d\tilde{S}_r$$

On en déduit que, pour tout $t \in [0, T]$:

$$v^*(t,_t) = e^{rt} U_t^* = e^{rt} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[U_T^* | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

Donc $v^*(t, S_t)$ est bien le prix en t du produit dérivé $h(S_T)$.

Remarque 1 : Supposer que $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+)$ n'est pas restrictif. On pourrait penser qu'il est nécessaire que la fonction de payoff h soit régulière, mais en fait, grâce à des intégrations par parties, on peut renvoyer l'opérateur de dérivation sur la densité du sous-jacent qui est suffisamment régulière.

Remarque 2 : Le résultat indiquant que le prix Black-Scholes de payoff $h(S_T)$, donné par

$$v(t, x) := e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T) | S_t = x]$$

est solution de l'EDP ci-avant, est un résultat très important connu sous le nom plus général de **Formule de Feynman-Kac**. Une espérance conditionnelle sur un processus Markovien peut se réécrire comme solution d'une EDP, créant ainsi des liens entre le monde déterministe et le monde probabiliste. Il y a ainsi des méthodes déterministes ou probabilistes de résoudre un même problème.

Remarque 3 : parallèle entre $v_x(t, S_t)$ et le delta vu dans le modèle binomial... ie le rapport entre la différence des valeurs possibles de l'option sur la différence des valeurs possibles du sous-jacent : $\Delta = \frac{\delta v}{\delta S}$.

Remarque 4 : Tout produit dérivé est bien duplicable. Ceci est du au fait que la dimension du Brownien est égale à celle de l'actif risqué : il y a autant d'aléa sur le marché que d'actifs possibles pour le couvrir.

Proposition 1.5 *La probabilité risque neutre est unique.*

Preuve : Pour la même raison qu'auparavant, la complétude du marché (ie tout actif est réplicable) implique que la proba risque neutre est unique. Par définition, la probabilité risque neutre rend tout portefeuille autofinançant réactualisé une martingale. Supposons que l'on ait deux probabilités risques neutres $\hat{\mathbb{P}}_1$ et $\hat{\mathbb{P}}_2$. Pour tout B élément de $\mathcal{F}_T$, $1\!\!1_B$ est une va $\mathcal{F}_T$-mesurable, donc elle est duplicable par une stratégie de portefeuille (x, ϕ) qui est martingale sous $\hat{\mathbb{P}}_1$ et $\hat{\mathbb{P}}_2$, et l'on a :

$$\hat{\mathbb{P}}_1(B) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}_1} 1\!\!1_B = e^{rT} x = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}_2} 1\!\!1_B = \hat{\mathbb{P}}_2(B)$$

5 Formule de Black et Scholes

D'après ce que l'on vient de voir, le prix d'une option de type européen de payoff $h(S_T)$ est donc de la forme $v(t, S_t)$ avec :

$$v(t, S8t) = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

et de plus, la fonction v est solution de l'EDP :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) + v_t(t,x) - rv(t,x) = 0 \quad \text{et} \quad v(T,x) = h(x)$$

Il "suffit" donc de résoudre cette EDP pour avoir le prix de l'option...
Cette EDP n'est généralement pas facile à résoudre, sans solution explicite. Mais pour certains payoffs, il existe des formules explicites qui donnent leur prix en t. C'est en particulier le cas du Call européen et du Put européen.

Proposition 1.6 *Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le prix du call de maturité T et de strike K est :*

$$C_t = S_t \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)} \alpha N(d_2)$$

avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, d_1 et d_2 donnés par :

$$d_1 := \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad et\ d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

La formule de parité Call-Put s'acrit

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Et donc le prix du Put est donné par

$$P_t = Ke^{-r(T-t)} \alpha N(-d_2) - S_t \mathcal{N}(-d_1)$$

Preuve : Nous allons ici nous placer en 0, sachant qu'un raisonnement équivalent peut être fait en t.
Prix du Call : On a montré que sous la probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$, les prix actualisés sont des martingales, donc le prix du call en 0 est :

$$\begin{aligned} C(0,T) &= \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(e^{-rT}(S_T-K)\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right) \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_T\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right) - Ke^{-rT}\hat{\mathbb{P}}(S_T\geq K) \end{aligned} \tag{1.7}$$

Il nous faut donc calculer ces deux termes.
Le premier se calcule simplement : sous $\hat{\mathbb{P}}$, on a $S_T = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\hat{W}_T}$ (solution de l'EDS sous $\hat{\mathbb{P}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(S_T\geq K) &= \hat{\mathbb{P}}\left(S_0e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\hat{W}_T}\geq K\right) \\ &= \hat{\mathbb{P}}\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\hat{W}_T\geq ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right) \\ &= \hat{\mathbb{P}}\left(-\frac{\hat{W}_T}{\sqrt{T}}\leq\frac{ln\left(\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

Or, sous $\hat{\mathbb{P}}$, $-\frac{\hat{W}_T}{\sqrt{T}}\sim\mathcal{N}(0,1)$.
Donc $\hat{\mathbb{P}}(S_T\geq K)=\mathcal{N}(d_2)$, où $d_2=\frac{ln\left(\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}}$.

Pour l'autre terme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_T\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right) &= \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_0e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\hat{W}_T}\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right) \\ &= S_0e^{rT}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(e^{\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\hat{W}_T}\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right) \end{aligned}$$

Si on définit alors la nouvelle probabilité $\mathbb{P}^*$ par sa dérivée de Radon Nikodym :

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma\hat{W}_t}$$

sous $\mathbb{P}^*$ c'est $W_t^*=\hat{W}_t-\sigma t$ qui est un $\mathbb{P}^*$-Brownien (Girsanov). Et ainsi :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_T\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right)=S_0e^{rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left(\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right)=S_0e^{rT}\mathbb{P}^*\left(S_T\geq K\right)$$

Or on a vu que

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{S_T\geq K} &= \mathbb{1}_{-\frac{\hat{W}_T}{\sqrt{T}}\leq d_2} \\ &= \mathbb{1}_{-\frac{(\hat{W}_T-\sigma T)}{\sqrt{T}}\leq d_2+\sigma\sqrt{T}} \\ &= \mathbb{1}_{-\frac{W_T^*}{\sqrt{T}}\leq d_1} \end{aligned} \tag{1.8}$$

Or $-\frac{W_T^*}{\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, puisque c'est un mouvement Brownien sous $\mathbb{P}^*$.
Donc $\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K}\right) = S_0 e^{rT}\mathcal{N}(d_1)$.
D'où on tire bien
$$C(0,T) = S_0\mathcal{N}(d_1) - Ke^{rT}\mathcal{N}(d_2)$$

Prix du Put : Il suffit d'appliquer la formule de parité Call Put et de remarquer que par symétrie, $\mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(-x) = 1$.

Remarque : Le prix d'un call en t est de la forme $C(T-t, \sigma, S_t, r, K)$, et vérifie la relation d'homogénéité :

$$C(T-t, \sigma, \lambda S_t, r, \lambda K) = \lambda C(T-t, \sigma, S_t, r, K)$$

Il existe 3 grandes méthodes pour l'évaluation financière des produits dérivés :

1. Résolution d'EDP (c'est l'approche "officielle" dans le papier de $B\&S$, bien qu'ils ne résolvent pas l'EDP directement...)
2. Approches probabilistes
   (a) Changement de mesure de probabilité
   (b) Changement de numéraire
3. Approche utilisant la mesure d'Esscher (travaux de Gerber et Shiu 1994)

Nous avons vu l'approche EDP, il suffit de résoudre l'EDP pour avoir le prix, ce qui n'est pas toujours aisé.
Nous venons de voir une méthode par changement de mesure de probabilité pour résoudre ce problème.
Il existe aussi l'approche changement de numéraire équivalente.

6 Volatilité implicite

remarques sur la vol implicite : absence de μ dans le résultat (idem modèle binomial), donc le prix ne dépend que de σ, et donc si on connait le prix, on peut en déduire la vol implicite. Cela consiste à inverser la formule de BS, ie à trouver la vol qui donne ces prix dans le modèle de BS. Elle ne correspond généralement pas à la vol historique ! Grosse question financière depuis des années.

Chapitre 2

La sensibilité des options et leur utilisation = Les grecques

- Intro
- Le Delta
- Le Vega (ou lambda)
- Le Theta
- Le Rho