Corrigé Séance 4 TD Théorie des Options

Exercice 1 :
Avant de commencer, nous précisons que l'échéance de l'option est de 1 année, et que chaque période a la même durée. Une période a donc une durée de 4 mois.

a) L'arbre est recombinant:

			26,62
		A -> 24,2	
	D -> 22		21,78
S0 = 20		B -> 19,8	
	E -> 18		17,82
		C -> 16,2	
			14,58

b) La probabilité risque neutre s'obtient par:

$$q = \frac{R-d}{u-d},$$

avec $R = \exp(r.\Delta t)$. Ici, $r = 2\%$ et $\Delta t = 4$ mois, d'où $q = 0,5334$.

c) Le prix d'exercice de l'option est de $K = 20$. Pour calculer la valeur du Call en 0, on part de la fin de l'arbre, et on utilise la formule (1.2) du cours (cf page 8 du poly).
En A:

$$C_A = \frac{q \times 6,62 + (1-q) \times 1,78}{R} = 4,3329,$$

En B:

$$C_B = \frac{q \times 1,78 + (1-q) \times 0}{R} = 0,9432,$$

En C:

$$C_C = \frac{q \times 0 + (1-q) \times 0}{R} = 0.$$

Pour les points D et E, on actualise les valeurs des options en A,B,C, c'est-à-dire: En D:

$$C_D = \frac{q \times C_A + (1-q) \times C_B}{R} = 2,733,$$

En E:

$$C_E = \frac{q \times C_B + (1-q) \times C_C}{R} = 0,499.$$

On procède naturellement de la même manière pour le point F, qui correspond en fait à C_0, le prix du Call en 0.
En F:

$$C_F = C_0 = \frac{q \times C_D + (1_q) \times C_E}{R} = 1,6799.$$

d) Les stratégies de couverture correspondent aux quantités d'actions qu'il est nécessaire de posséder sur la période correspondante pour couvrir l'option. La couverture en delta est une couverture dite dynamique car il faut ajuster le nombre d'actions détenues en portefeuille à chaque période. Le delta calculer pour la période i donne le nombre d'actions à détenir à l'instant $i-1$. Par conséquent, l'information "baisse en période 3" n'est pas utile.

Le delta correspondant aux variations du cours de l'action sur la première période est

$$\Delta_1 = \frac{C_D - C_E}{22 - 18} = 0,5583.$$

L'information "hausse sur la première période" ne nous sert pas pour calculer Δ_1. En revanche, cette information est utilisée pour le calcul du Δ_2 puisque

$$\Delta_2 = \frac{C_A - C_B}{24,2 - 19,8} = 0,7704.$$

Encore une fois, on se sert de l'information "hausse sur la période" pour calculer le delta de la troisième période, et obtient

$$\Delta_3 = \frac{6,62 - 1,78}{26,62 - 21,78} = 1.$$

Les opérations à effectuer sont donc: en t=0, achat de 0,5583 actions; en t=1, achat de 0,7704-0,5583 actions; en t=2, achat de 1-0,7704 actions.

e) Pour déterminer le prix du Put, on utilise la parité Call - Put. Celle-ci donne

$$C_0 - P_0 = S_0 - \frac{K}{R},$$

d'où $P_0 = C_0 - S_0 + \frac{K}{R} = 1,5470$. Et bien NON !! Il faut faire attention à un point important: le R utilisé est donné pour une période, alors que la parité comme on l'a écrit vaut pour une actualisation à l'échéance, soit $\Delta t = 1$. Le facteur d'actualisation annuel est donc $R_{annuel} = R^3 = \exp(2/100) = 1,02$. La "bonne" parité Call-Put est donnée par

$$C_0 - P_0 = S_0 - \frac{K}{R_{annuel}},$$

soit $P_0 = 1,284$.

Pour le cas américain, on regarde à chaque noeud s'il est optimal ou non d'exercer prématurément l'option. La valeur de l'option sur les noeuds terminaux (à la date d'échéance) est la même que celles des options européennes puisqu'à cette date il n'y a pas plus de différence entre ces deux types d'options. Par contre, sur les noeuds intermédiaires, la valeur de l'option est le maximum de:

- le payoff procuré par l'exercice anticipé de l'option,
- la valeur donnée par l'équation (1.2) du poly page 17.

Alors on obtient,

$$\tilde{P}_A = max\left(20 - 24,2; \frac{q \times 0 + (1-q) \times 0}{R}\right) = 0,$$

$$\tilde{P}_B = max\left(20 - 19,8; \frac{q \times 0 + (1-q) \times 2,18}{R}\right) = 1,01,$$

$$\tilde{P}_C = max\left(20 - 16,2; \frac{q \times 2,18 + (1-q) \times 5,42}{R}\right) = 3,8.$$

Remarquez qu'on exerce en C ! Continuous le pricing. En D, on obtient

$$\tilde{P}_D = max\left(20 - 22; \frac{q \times 0 + (1-q) \times \tilde{P}_B}{R}\right) = 0,469,$$

$$\tilde{P}_E = max\left(20 - 18; \frac{q \times \tilde{P}_B + (1-q) \times \tilde{P}_C}{R}\right) = 2,296.$$

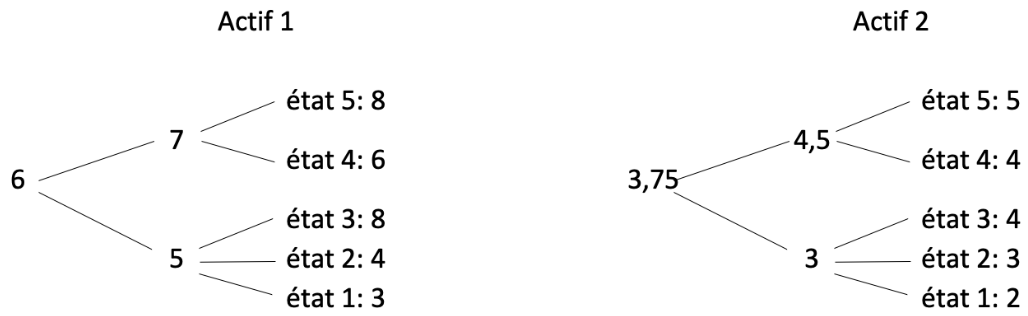
Enfin, le prix en 0 est donc

$$\tilde{P}_F = \tilde{P}_0 = \frac{q \times \tilde{P}_D + (1-q) \times \tilde{P}_E}{R} = 1,31.$$

Alors le prix du Put américain est de 1,31, et il est optimal de l'exercer en C. Vous voyez que l'on a bien $\tilde{P}_0 = 1,31 > 1,284 = P_0$ avec le bon raisonnement pour le calcul du prix du put européen du dessus. Avec le faux raisonnement, on aurait eu $\tilde{P}_0 = 1,31 < 1,547 = P_0$, et là on aurait eu soucis...

Exercice 3 :

a) Les arbres sont les suivants:



b) Montrons qu'il existe une unique probabilité risque neutre. On remarque que sur la période 1, il n'y a en fait que 2 états, puisque

$$\begin{cases} S_1^1(\omega_1) = S_1^1(\omega_2) = S_1^1(\omega_3) = 5, \\ S_1^2(\omega_1) = S_1^2(\omega_2) = S_1^2(\omega_3) = 3, \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} S_1^1(\omega_4) = S_1^1(\omega_5) = 7, \\ S_1^2(\omega_4) = S_1^2(\omega_5) = 4,5. \end{cases}$$

Appelons "up" les états 4 et 5, et "down" les états 1,2 et 3. Comme le taux d'actualisation est nul, $R = 1$. Alors on cherche q_{up} et q_{down} tels que

$$\begin{cases} 6 = 7 \times q_{up} + 5 \times q_{down}, \\ 3,75 = 4,5 \times q_{up} + 3 \times q_{down}, \\ q_{up} + q_{down} = 1. \end{cases}$$

On trouve alors $q_{up} = q_{down} = 0,5$. De la même façon, on cherche q_{ω_4} et q_{ω_5} tels que

$$\begin{cases} 7 = 8 \times q_{\omega_5} + 6 \times q_{\omega_4}, \\ 4,5 = 5 \times q_{\omega_5} + 4 \times q_{\omega_4}, \\ q_{\omega_5} + q_{\omega_4} = 1. \end{cases}$$

On trouve alors $q_{\omega_4} = q_{\omega_5} = 0,5$. Enfin pour les états 1,2,3 on cherche $q_{\omega_1}, q_{\omega_2}$ et q_{ω_3} tels que

$$\begin{cases} 5 = 3 \times q_{\omega_1} + 4 \times q_{\omega_2} + 8 \times q_{\omega_3}, \\ 3 = 2 \times q_{\omega_1} + 3 \times q_{\omega_2} + 4 \times q_{\omega_3}, \\ q_{\omega_1} + q_{\omega_2} + q_{\omega_3} = 1. \end{cases}$$

On obtient finalement $q_{\omega_1} = q_{\omega_2} = q_{\omega_3} = 1/3$. Finalement la probabilité risque neutre est unique sur chaque période, il y a donc AOA.

c) X est un actif sur ce marché, il obéit donc à la même probabilité risque neutre. On actualise l'espérance risque neutre des flux terminaux dans chaque états pour trouver les valeurs de X dans les 4 et 5, puis $1, 2$ et 3. Alors,

$$X_{1,up} = 3,5 \times q_{\omega_5} + 1,5 \times q_{\omega_4} = 2,5,$$
$$X_{1,down} = 0 \times q_{\omega_1} + 0,25 \times q_{\omega_2} + 4,25 \times q_{\omega_3} = 1,5.$$

Finalement, $X_0 = X_{1,up} \times q_{up} + X_{1,down} \times q_{down} = 2$.

La stratégie de couverture consiste à vendre le portefeuille de réplication de l'actif X. On sait qu'il existe puisque le marché est complet. Soient α et β les quantités d'actifs S_1 et S_2 investies. Le portefeuille doit vérifier:

$$\begin{cases} X_0 = 2 = \alpha \times S_0^1 + \beta \times S_0^2 = \alpha \times 6 + \beta \times 3,75, \\ X_{1,up} = 2,5 = \alpha \times S_{1,up}^1 + \beta \times S_{1,up}^2 = \alpha \times 7 + \beta \times 4,5, \\ X_{1,down} = 1,5 = \alpha \times S_{1,down}^1 + \beta \times S_{1,down}^2 = \alpha \times 5 + \beta \times 3. \end{cases}$$

Le système se réduit à

$$\begin{cases} 2 = \alpha \times 6 + \beta \times 3,75, \\ 1,5 = \alpha \times 5 + \beta \times 3, \end{cases}$$

On trouve alors $\alpha = -0,5$ et $\beta = 4/3$. Finalement on $X_0 = -0,5S_0^1 + 4/3S_0^2$.