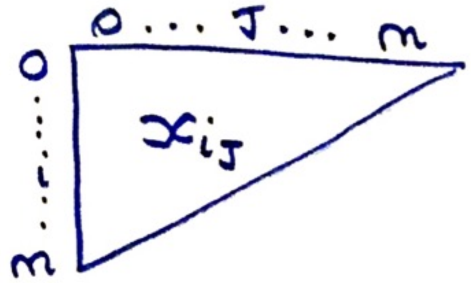
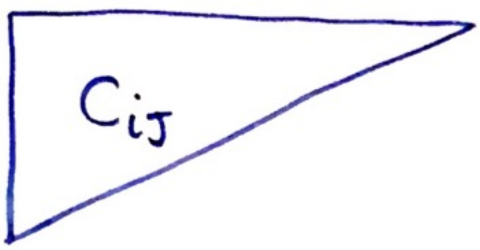


Les x_{ij} sont les réalisations de v.a. X_{ij} (observées au 31/12/n)

MODELE DE MACK



Remarque : pour la méthode de Mack, afin de suivre les notations du papier, on a

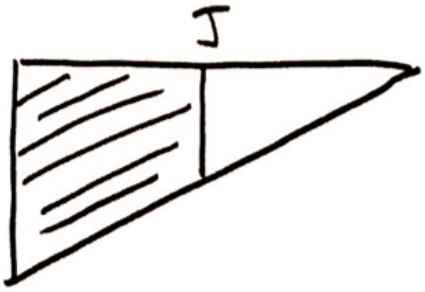
$i = 1, \dots, n$
$j = 1, \dots, n$

(pas 0 comme pour les méthodes déterministes)

H1) Cette hypothèse pourrait être mise à mal en cas de changements importants dans la gestion des sinistres ou dans le taux d'inflation puisque ces changements vont affecter, par effet calendaire, plusieurs années d'origine.

Il faudrait travailler avec des données "as if" - Le montant "AS IF" d'un sinistre est le coût de celui-ci s'il survenait avec les mêmes caracteristiques mais dans l'environnement present à la date de l'étude.

Mack a montré que sous les hypothèses H1 et H2, le modele stochastique donne exactement les mêmes provisions que la methode CL standard.

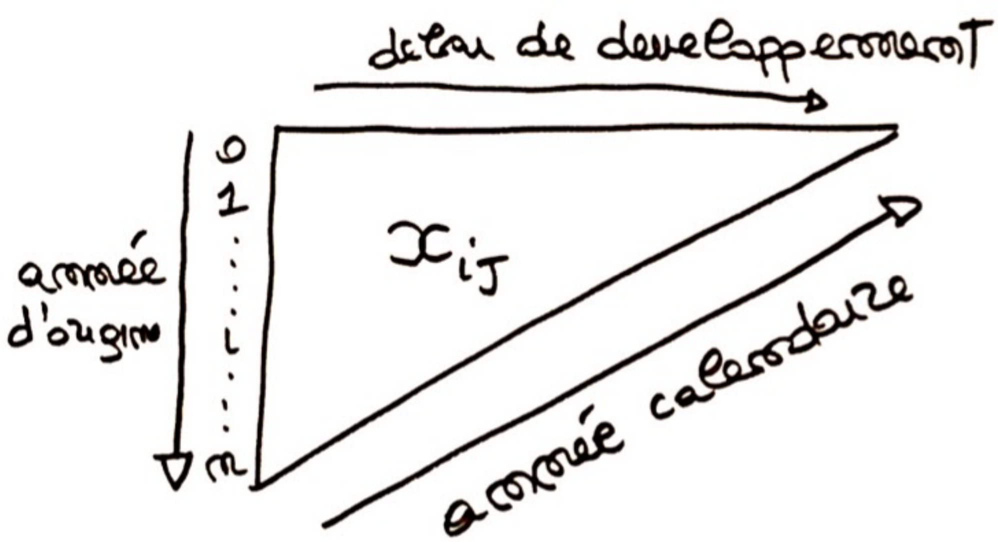


T_J

$$\hat{R}_i = \hat{C}_{in} - C_{i,n-i+1} \qquad i = 2, \dots, n$$ ③

MSE : MEAN SQUARE ERROR
(EQM : erreur quadratique moyenne)

$$E(C_{i,j+1} \mid C_{i1}, \dots, C_{ij}) = f_j C_{ij}$$



$$\underbrace{\mu_{ij}}_{E(X_{ij})} = \mu + \alpha_1 \overset{D=0}{\mathbb{1}^{\alpha}_{1}} + \dots + \alpha_i \overset{D=1}{\mathbb{1}^{\alpha}_{i}} + \dots + \alpha_n \overset{D=0}{\mathbb{1}^{\alpha}_{n}} +$$

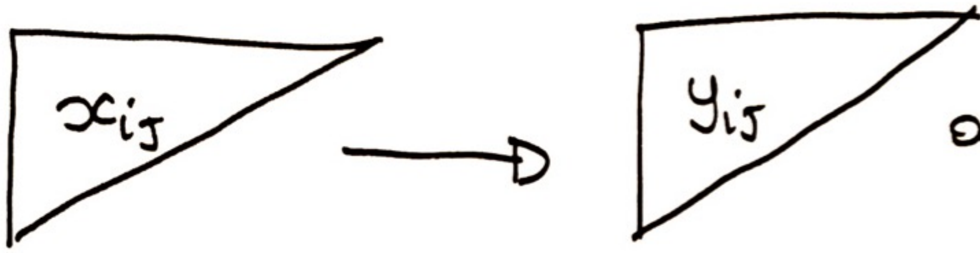
$$+ \beta_1 \underset{D=0}{\mathbb{1}^{\beta}_{1}} + \dots + \beta_j \underset{D=1}{\mathbb{1}^{\beta}_{j}} + \dots + \beta_n \underset{D=0}{\mathbb{1}^{\beta}_{n}}$$

BEST ESTIMATE $\leftarrow$ $$\widehat{E(R)} = \sum_i \sum_{i+j>n} \widehat{E(X_{ij})}$$

Rappel : $X \sim LN(\mu, \sigma^2)$

si $Y = \ln(X) \sim N(\mu, \sigma^2)$

REGRESSION LOGNORMALE



avec $y_{ij} = \ln(x_{ij})$

→ on estime un modele de regression

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ij}$$

avec $\varepsilon_{ij} \sim N(0, \sigma^2)$

→ $\hat{\mu}, \hat{\alpha}_i, \hat{\beta}_j$ → $\widehat{E(X_{ij})}$

→ $\widehat{E(R)} = \sum \sum \widehat{E(X_{ij})}$

$$Y = M\Theta + \varepsilon$$

avec $Y' = (Y_{00}, Y_{01}, \dots, Y_{0m}, Y_{10}, \dots, Y_{1,m-1}, \dots, Y_{m0})$

↳ vecteur d'ordre $t = \dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$

des elements du Triangle

puis ligne à ligne.

$$\begin{array}{cc}
 & \mathbb{1}_1^{\alpha} \quad \mathbb{1}_2^{\alpha} \quad \cdots \quad \mathbb{1}_1^{\beta} \cdots \mathbb{1}_m^{\beta} \\
\underset{t\times(2m+1)}{M} = & \begin{pmatrix}
1 & \left.\begin{matrix}0\\0\\\vdots\\0\end{matrix}\right\}\begin{matrix}m+1\\ \text{fois}\end{matrix} & & & \\
1 & & & & \\
\vdots & \left.\begin{matrix}1\\\vdots\\1\end{matrix}\right\}m \text{ fois} & & & \\
1 & & & & \\
\vdots & 0 & & & \\
\vdots & \vdots & & & \\
1 & 0 & & &
\end{pmatrix}
\end{array}$$

→ matrice de regression

$$\Theta = (\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta_1, \dots, \beta_m)$$

↳ vecteur d'ordre $p = 2m+1$ des paramètres à estimer

$$\varepsilon' = (\varepsilon_{00}, \varepsilon_{01}, \dots, \varepsilon_{m0})$$

↳ vecteur des erreurs

↳ d'ordre $t = \dfrac{(m+1)(m+2)}{2}$

Du coup, on peut recuperer les resultats de la Theorie sur les modeles de regression et ecrire par exemple que $\hat{\Theta} = (M'M)^{-1}M'Y$

↳ EMV de Θ

eT aussi

$$s^2 = \frac{1}{t-p} \sum_{i=1}^{t} \hat{\varepsilon}_i^2$$

↳ estimateur sans biais de σ^2
(variance de l'erreur)

θ_{ij} : PARAMETRE reel appelé
PARAMETRE CANONIQUE

ϕ : parametre de DISPERSION

η_{ij} : SCORE ou PREDICTEUR LINEAIRE

$$\boxed{g(E(X_{ij})) = \mu + \alpha_i + \beta_j}$$

Souvent on prend comme fonction lien la fn log.

$V(\mu_{ij}) = b''(\theta_{ij})$ FONCTION VARIANCE

↳ dérivée d'ordre 2
de b par rapport à θ_{ij}

LOI PREDICTIVE : loi de la v.a. R (provision globale)

La $VaR_\eta(R)$ peut être interprétée comme la provision suffisante dans $100(1-\eta)\%$ des cas.

1) si la loi des X_{ij} est additive (par exemple Poisson ou Gaussienne) alors la loi de R s'obtient par convolution directe.

Φ : f.d.r. d'une loi $N(0,1)$

Une fois que l'on a estimé μ_{ij} et μ_R par MV, on obtient, par plug-in, l'estimateur du MV du quantile :

$$\hat{q}^{(P)}_{1-\eta}(R) = \hat{\mu}_R + \sqrt{\hat{\mu}_R}\, q_{1-\eta}$$

FFT : fast Fourier Transform

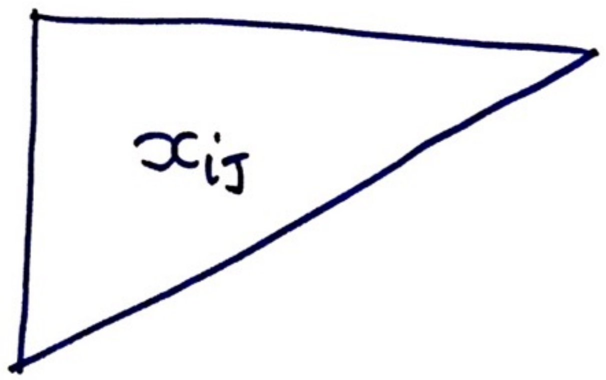
$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

COEFFICIENT D'ASYMETRIE

avec μ_3 le moment centré d'ordre 3.

L'approximation NP est censée améliorer l'approximation gaussienne en prenant en compte γ_1. Elle est assez précise tant que $0 \le \gamma_1 \le 2$; la qualité est de moins en moins bonne à mesure que γ_1 augmente.

Encore une fois, on peut obtenir une estimation par "plug-in" du quantile $q^{(NP)}_{1-\eta}$ (estimation du MV).



X_{iJ}

x_{ij}

$$\xrightarrow{GLM} \quad g(\underbrace{E(X_{ij})}_{\mu_{ij}}) = \mu + \alpha_i + \beta_j \longrightarrow \hat{\mu}_{ij} = g^{-1}(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$$

→ valeurs ajustées par le modèle

$$\longrightarrow r_{ij}^{P} = \frac{x_{ij} - \hat{\mu}_{ij}}{\sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}}$$

→ residus de Pearson

avec V la fn variance

$$V(\mu_{ij}) = b''(\theta_{ij})$$

$$\hat{\phi} = \frac{1}{t - p} \sum_{i+j \leq n} (r_{ij}^{P})^2$$

→ nb de données (Triangle superieur)

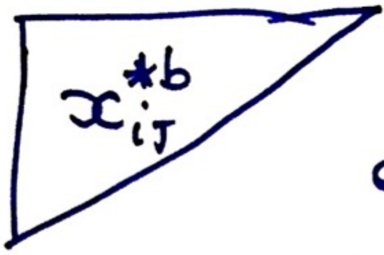
$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

→ nb de paramètres inconnus

$$2n+1$$

r_{ij}^{P} $\xrightarrow{\text{Tirage avec remise}}$ r_{ij}^{*b}

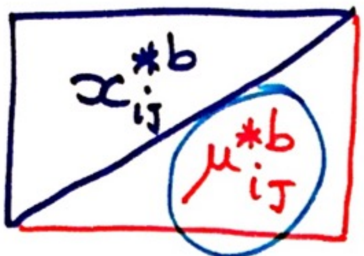
$\longrightarrow$



avec

$$x_{ij}^{*b} = \hat{\mu}_{ij} + r_{ij}^{*b} \sqrt{V(\hat{\mu}_{ij})}$$

$\xrightarrow{\text{GLM}}$



$$\longrightarrow \hat{R}^{*b} = \sum_{i+j>n} \mu_{ij}^{*b}$$

$\mu_{ij}^{*b} \rightarrow g^{-1}(\hat{\mu} + \hat{\alpha}_i + \hat{\beta}_j)$

Au final on se retrouve avec un échantillon de taille B d'estimations de la provision globale

$$(\hat{R}^{*1}, \dots, \hat{R}^{*B})$$

ce qui permet d'obtenir les quantités du slide 53.

On rappelle que
$$R = \sum_{i+j>n} X_{ij}$$

$$Var(R) = \sum_{i+j>n} \underbrace{Var(X_{ij})}_{\phi V(\mu_{ij})} = \phi \sum_{i+j>n} V(\mu_{ij})$$

Sep : standard error of prediction

La quantité qui va permettre de comparer des modèles est le coefficient de variation :

$$\boxed{CV(\hat{R}) = \frac{\sqrt{EQMPC(\hat{R})}}{\widehat{E(R)}}}$$

avec EQMPC : erreur quadratique moyenne de prediction conditionnelle

N.B. De manière générale, le modèle log Gamma (loi Gamma pour les X_{ij} et fonction lien log) donne des distributions à queue plus épaisse que le modèle log Poisson surdispersé

Remarque : pour la loi de Poisson, $\phi = 1$ et $V(\mu_{ij}) = \mu_{ij}$