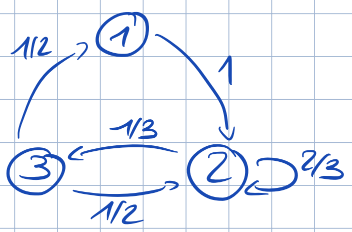
Exam MAD 2018-2019

1) $E = \{1,2,3\}$ $\qquad Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2/3 & 1/3 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$

1 a)



1 b) La chaîne est irréductible. Il n'y a qu'une seule classe d'équivalence qui est donc fermée.

2 c) Espace d'états finis + chaîne irréductible $\Rightarrow$ il existe une unique mesure stationnaire π.

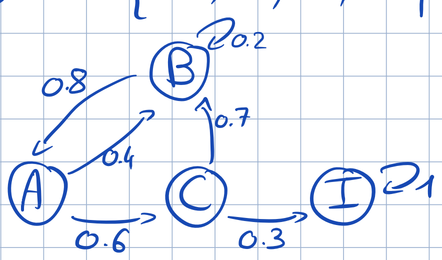
$\pi = (a\ b\ c)$ et est tq $\pi Q = \pi$ et $\pi 1_3 = 1_3$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{c}{2} = a \\ a + \frac{2b}{3} + \frac{c}{2} = b \\ \frac{b}{3} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{c}{2} \\ 2a = \frac{b}{3} \\ c = \frac{b}{3} \end{cases} \Rightarrow \pi = (a, 6a, 2a)$$

Donc a est tq $\pi 1_3 = 1_3 \Rightarrow a = \dfrac{1}{9}$

$\pi = (1/9, 2/3, 2/9)$

2) 1 a) $E = \{B, A, C, I\}$



$$Q = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.8 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Il y a 2 classes d'équivalence

- $\{B, A, C\}$ ouverte
- $\{I\}$ fermée.

1 c) Tous les états sont apériodiques (période 1).

3) a) 1 $\mathbb{P}(N_1 \geq 3) = 1 - \mathbb{P}(N_1 < 3)$

$$= 1 - \mathbb{P}(N_1 \in [\![0;2]\!])$$

$$= 1 - \mathbb{P}(N_1=0) - \mathbb{P}(N_1=1) - \mathbb{P}(N_1=2)$$

$$= 1 - \frac{\lambda^0 e^{-\lambda}}{0!} - \frac{\lambda^1 e^{-\lambda}}{1!} - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2!}$$

$$= 1 - e^{-\lambda} - \lambda e^{-\lambda} - \frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$$

Rappel
$\mathbb{P}(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}$

Donc $\mathbb{P}(N_1 \geq 3) = 1 - e^{-\lambda}\left(1 + \lambda + \frac{\lambda^2}{2}\right)$

1 b) $\mathbb{P}(N_1 = 8 \cap (N_2 - N_{1,5}) = 1) = \mathbb{P}(N_1 = 8)\,\mathbb{P}(N_{0,5} = 1)$

$$= \frac{\lambda^8 e^{-\lambda}}{8!} \times \left(\frac{\lambda}{2}\right) e^{-\lambda/2}$$

$$= \frac{\lambda^9 e^{-\frac{3\lambda}{2}}}{2 \times 8!}$$

4) $*\ \mathbb{P}(N=0) = \frac{7}{10}$ $\quad \mathbb{P}(N=1) = \frac{2}{10}$ $\quad \mathbb{P}(N=2) = \frac{1}{10}$ Nbr accident

$*\ f_U(x) = \left[p\delta_1 e^{-\delta_1 x} + (1-p)\delta_2 e^{-\delta_2 x}\right] \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$ Montant des sinistres pour 1 assuré

$0 \leq p \leq 1$
$\delta_1, \delta_2 > 0$

$*\ S = \sum_{k=1}^{N} U_k$ Montant agrégé des sinistres

$*\ N \perp\!\!\!\perp U_i \quad \forall i$

1 a) $\mathbb{E}[N] = \frac{2}{10} + 2 \cdot \frac{1}{10} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$

1 b) $p = 1/2$, $\delta_1 = 1/4$, $\delta_2 = 1/6$ $\Rightarrow f_U(x) = \left[\frac{e^{-\frac{x}{4}}}{8} + \frac{e^{-\frac{x}{6}}}{12}\right] \mathbb{1}_{[0,+\infty[}(x)$.

$$\Rightarrow \mathbb{E}[U] = \int_0^\infty x \left(\frac{1}{8} e^{-x/4} + \frac{1}{12} e^{-x/6}\right) dx$$

$$= \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty x \frac{1}{4} e^{-x/4} dx}_{= \mathbb{E}[\mathcal{E}(1/4)] = 4} + \frac{1}{2} \underbrace{\int_0^\infty x \frac{1}{6} e^{-x/6} dx}_{= \mathbb{E}[\mathcal{E}(1/6)] = 6} = 2 + 3 = 5.$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[U] = 5.$

① c) Prime que doit payer l'assuré : $C = (1+\eta)\mathbb{E}[S]$

On prend $\eta = 5\%$, $p = 1/2$, $\delta_1 = 1/4$, $\delta_2 = 1/6$

$C = (1 + \frac{5}{100})\mathbb{E}[S]$

Or $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{N} U_k] \underset{\text{les } U_k \text{ sont iid}}{=} \mathbb{E}[NU] \underset{N \perp\!\!\!\perp U}{=} \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[U] = 2.$

$\Rightarrow C = (1 + \frac{5}{100}) \times 2 = 2,1.$

① d) $V(S) = V(\sum_{k=1}^{N} U_k) \underset{\text{Va iid}}{=} V(NU) \underset{N \perp\!\!\!\perp U}{=} V(U)\mathbb{E}[N^2] + V(N)\mathbb{E}[U]^2$

$V(N) = \mathbb{E}[N^2] - \mathbb{E}[N]^2$

$= \frac{2}{10} + 4 \times \frac{1}{10} - \left(\frac{2}{5}\right)^2$

$= \frac{3}{5} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{15-4}{25} = \frac{11}{25}$

et $V(U) = \mathbb{E}[U^2] - \mathbb{E}[U]^2$

avec $\mathbb{E}[U^2] = \int_0^\infty x^2 \left(\frac{1}{8}e^{-x/4} + \frac{1}{12}e^{-x/6}\right)dx = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\int_0^\infty x^2 \frac{1}{4} e^{-x/4} dx}_{\substack{= \mathbb{E}[\mathcal{E}(\frac{1}{4})^2] \\ = V(\mathcal{E}(\frac{1}{4})) + \mathbb{E}[\mathcal{E}(\frac{1}{4})]^2 \\ = 4^2 + 4^2}} + \underbrace{\int_0^\infty x^2 \frac{1}{6} e^{-x/6} dx}_{\substack{= \mathbb{E}[\mathcal{E}(1/6)^2] \\ = V(\mathcal{E}(1/6)) + \mathbb{E}[\mathcal{E}(1/6)]^2 \\ = 6^2 + 6^2}}\right)$

$= 4^2 + 6^2 = 16 + 36 = 52$

$\Rightarrow V(U) = 52 - 5^2$

$= 52 - 25 = 27$

Donc $V(S) = V(U)\mathbb{E}[N^2] + V(N)\mathbb{E}[U]^2$

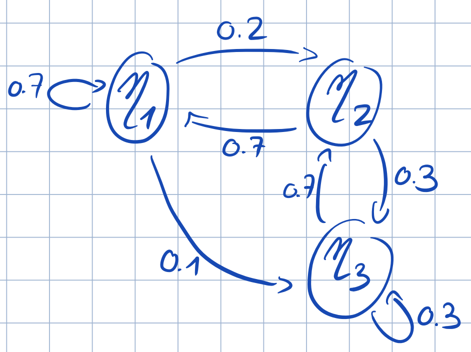
$= 27 \times \frac{3}{5} + \frac{11}{25} \times 25$

$= 27 \times \frac{3}{5} + 11$

$= \frac{81}{5} + 11 = \frac{136}{5}$

e) $E=\{\eta_1,\eta_2,\eta_3\}$ On suppose $X_0=\eta_1$

1



$$Q=\begin{pmatrix} 0.7 & 0.2 & 0.1 \\ 0.7 & 0 & 0.3 \\ 0 & 0.7 & 0.3 \end{pmatrix}$$

2 f) Espace d'états finis + chaine irréductible $\Rightarrow$ Il existe une unique mesure stationnaire π

$\pi=(a\ b\ c)$ est tq $\begin{cases} \pi Q=\pi \\ \pi 1_3 = 1_3 \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} 0.7a+0.7b=a \\ 0.2a+0.7c=b \\ 0.1a+0.3b+0.3c=c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\frac{7}{3}b \\ b=0.2a+0.7c \\ 0.7c=0.1a+0.3b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=a \\ b=\frac{3}{7}a \\ c=\frac{16}{49}a \end{cases}$$

Or $\pi 1_3 = 1_3 \Rightarrow a = \dfrac{1}{1+\frac{3}{7}+\frac{16}{49}} = \dfrac{49}{49+21+16} = \dfrac{49}{86}$

Donc $\pi=\left(\frac{49}{86}, \frac{21}{86}, \frac{16}{86}\right)$

2 g) $C_\infty = \mathbb{E}[(1+X_\infty)S]$

$= \mathbb{E}[S]+\mathbb{E}[X_\infty S]$

$\underset{\perp\!\!\!\perp}{=} 2 + \mathbb{E}[X_\infty]\mathbb{E}[S]$

$= 2(1+\mathbb{E}[X_\infty]) = 2\left(1+\frac{49}{86}\times\eta_1+\frac{21}{86}\eta_2+\frac{16}{86}\eta_3\right)$

$= 2+\frac{49}{43}\eta_1+\frac{21}{43}\eta_2+\frac{16}{43}\eta_3$

2 h) $\varphi(u)=\mathbb{P}\left(u+mC_\infty-\sum_{k=1}^{m}S_k<0\right)$

$\Phi: x \mapsto \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}}\,dr.$

$$\psi(u) = \mathbb{P}\left(\sum_{k=1}^{n} S_k > nc_\infty + u\right) = \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k > c_\infty + \frac{u}{n}\right)$$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k - \mu > c_\infty + \frac{u}{n} - \mu\right)$$

$$= \mathbb{P}\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k - \mu\right) > \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(c_\infty + \frac{u}{n} - \mu\right)\right].$$

$$\sim 1 - \phi\left[\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(c_\infty + \frac{u}{n} - \mu\right)\right].$$

Car $\sqrt{n}\left(\dfrac{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} S_k - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$. par TCL

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{S} - \mu}{\sigma}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$