Examen Séries temporelles 2016-2017

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice - 2 heures

Questions de cours : (5 points)

1. Qu'est-ce qui caractérise un processus stationnaire faible (stationnaire à l'ordre 2)?

2. On suppose qu'il est possible de décomposer une série temporelle en trois termes:

$$X_t = m_t + S_t + Y_t$$

où m_t est une tendance déterministe, S_t est une saisonnalité déterministe et Y_t est un processus stationnaire.

Expliquer quelles sont les différentes méthodes que vous connaissez pour identifier chacun des termes sur des données. Donner les avantages et les défauts de chaque méthode.

3. Dans quel cadre utilise-t-on un modèle SARIMA plutôt qu'ARIMA? Comment savoir à partir de données s'il vaut mieux utiliser un modèle plutôt que l'autre?

Exercice 1 : (5 points)

Soit $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc fort de variance σ_η^2.

0. Rappeler la définition d'un bruit blanc fort et d'un bruit blanc faible.

On définit

$$Y_t = (\eta_t + m)(\eta_{t-1} + m), \qquad t \in \mathbb{Z},$$

avec $m \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $MA(1)$ non centré (donner son espérance, sa variance et ses autocorrélations).

2. Ecrire la représentation canonique de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 2 : (10 points)

On considère le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ suivant:

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$. On définit les polynômes

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= 1 - \varphi_1 x - \varphi_2 x^2 \\ \bar{\Phi}(x) &= x^2 - \varphi_1 x - \varphi_2 \end{aligned}$$

1. Donner les conditions sur les racines de Φ et $\bar{\Phi}$ pour qu'il existe une solution stationnaire.

2. On cherche les conditions sur les coefficients φ_1 et φ_2 pour que l'écriture du processus soit l'écriture canonique.

a) Donner les conditions sur les racines de $\bar{\Phi}$ pour que ce soit le cas.

b) En considérant le produit des racines, en déduire qu'une condition nécessaire est $|\varphi_2| < 1$.

c) Montrer que, si les racines sont complexes conjuguées ($\varphi_1^2 + 4\varphi_2 < 0$), alors la condition $-\varphi_2 < 1$ est suffisante.

d) Montrer à l'aide d'un graphique que, si les racines sont réelles ($\varphi_1^2 + 4\varphi_2 \geq 0$), alors les conditions suivantes sont suffisantes

$$1 - \varphi_1 - \varphi_2 > 0, \qquad 1 + \varphi_1 - \varphi_2 > 0.$$

e) En déduire sur une représentation graphique, le domaine d'existence du couple (φ_1, φ_2) pour que l'écriture du processus soit l'écriture canonique.

On suppose dorénavant qu'il s'agit de la représentation canonique.

3. On cherche une représentation $MA(\infty)$ de X_t.

a) Donner les propriétés de (ε_t).

b) On suppose que les racines, λ_1 et λ_2, de Φ sont réelles ($\varphi_1^2 + 4\varphi_2 > 0$). Donner la représentation $MA(\infty)$ de X_t (indication: utiliser une décomposition en éléments simples).

4. On cherche à déterminer les autocorrélations du processus.

a) Montrer que

$$\gamma_X(0) = \frac{(1-\varphi_2)}{(1+\varphi_2)\left((1-\varphi_2)^2 - \varphi_1^2\right)}\sigma_\varepsilon^2$$

$$\rho_X(1) = \frac{\varphi_1}{1-\varphi_2}$$

$$\rho_X(2) = \frac{\varphi_1^2 - \varphi_2^2 + \varphi_2}{1-\varphi_2}$$

b) Montrer que pour $h \geq 2$

$$\rho_X(h) = \varphi_1 \rho_X(h-1) + \varphi_2 \rho_X(h-2).$$

c) Donner suivant le signe de $\varphi_1^2 + 4\varphi_2$, la forme générale de $\rho_X(h)$.

Question de cours :

1) Processus stationnaire faible (i.e à l'ordre 2) X_t :

* Moyenne / Espérance et autocovariance invariantes par translat°
* $t \mapsto \mathbb{E}[X_t] = \mu_X(t) = \mu$ où $\mu \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{Z}$
* $t \mapsto Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(t, t+h) = \gamma_X(h)$ $\forall h \in \mathbb{Z}$, $\forall t \in \mathbb{Z}$

Exercice 1 :

Soit $(\eta_t) \sim BBF(0, \sigma_\eta^2)$

0) **BBF :**

- $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ iid
- $\mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0 \quad \forall t$
- $\mathbb{V}[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2 \quad \forall t$

BB

- (ε_t) centrées, variance cte et non corrélés.

Exercice 2 :

On considère le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tq

$$X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}} \sim BB(0,\sigma_\varepsilon^2)$

$\phi(x) = 1 - \varphi_1 x - \varphi_2 x^2$

$\bar\Phi(x) = x^2 - \varphi_1 x - \varphi_2 = x^2 \phi(\frac{1}{x})$

1) X_t s'écrit comme un processus AR(2) de polynôme $\phi(x) = 1-\varphi_1 x - \varphi_2 x^2$

$\begin{cases} (X_t)_{t\in\mathbb{Z}} \text{ stationnaire} \iff \phi^{-1} \text{ existe} \\ (X_t) \sim AR(2) \end{cases}$ $\iff$ racines de ϕ et $\bar\phi$ de module $\neq 1$.
et celles de $\phi > 1$

2) a) Les racines de $\bar\Phi$ doivent être de module <1 car ϕ doit avoir des racines de module >1 et $\bar\Phi(x) = x^2\phi(\frac{1}{x})$

b) $\bar\Phi(x) = x^2 - \varphi_1 x - \varphi_2$

Soit λ_1 et λ_2 les deux racines de $\bar\Phi$

$\Rightarrow \bar\Phi(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$

$= x^2 - (\lambda_1+\lambda_2)x + \lambda_1\lambda_2$

Condit° sur racines de $\bar\Phi$

Comme λ_1 et λ_2 sont <1 et par identificat° $-\varphi_2 = \lambda_1\lambda_2$

On a $|\varphi_2| < 1$.

c) Pour un AR(2) avec le polynôme caract. modifié $\bar\Phi(x) = x^2 - \varphi_1 x - \varphi_2$, si les racines sont complexes conjuguées

$\Rightarrow \Delta < 0$ i.e $\varphi_1^2 + 4\varphi_2 < 0$

$\Rightarrow$ racines de la forme : $x = \frac{\varphi_1}{2} \pm i\sqrt{-\frac{\varphi_1^2}{4} - \varphi_2}$

$\Rightarrow |x| = \sqrt{\left(\frac{\varphi_1}{2}\right)^2 - \frac{\varphi_1^2}{4} - \varphi_2}$

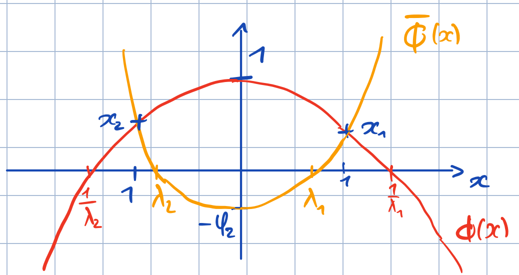
$= \sqrt{-\varphi_2}$

Or pour que ces racines soient à l'intérieur du cercle unité (et donc pour que le processus soit sous forme canonique), il faut que leur module soit <1.

$\Rightarrow \sqrt{-\varphi_2} < 1$

$\Rightarrow -\varphi_2 < 1$

d)



On suppose λ_1 et λ_2 les racines de $\bar{\Phi}$, alors $\frac{1}{\lambda_1}$ et $\frac{1}{\lambda_2}$ sont les racines de ϕ.
Graphiquement en ces points, les courbes $x \mapsto \phi(x)$ et $x \mapsto \bar{\Phi}(x)$ s'annulent

On sait aussi que $|\lambda_1|$ et $|\lambda_2| < 1 \Rightarrow |\frac{1}{\lambda_1}|$ et $|\frac{1}{\lambda_2}| > 1$

Par construct°, il est clair que pour $x \in \{x_1, x_2\} : \phi(x) = \bar{\Phi}(x) \geq 0$
De plus, comme racines $\neq 1$ (i.e $\lambda_1 \neq \frac{1}{\lambda_1}$ et $\lambda_2 \neq \frac{1}{\lambda_2}$) on a que $x_1 > \lambda_1$ et $x_2 < \lambda_2$ (afin que $\forall x > \lambda_1, \bar{\Phi}(x) > 0$) sinon le p^t d'intersect° serait sur la droite des abscisses !

On cherche x tq $\phi(x) = \bar{\Phi}(x)$

$$\begin{aligned}
\phi(x) = \bar{\Phi}(x) &\Leftrightarrow 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 = x^2 - \phi_1 x - \phi_2 \\
&\Leftrightarrow x^2(1+\phi_2) = 1 + \phi_2 \\
&\Leftrightarrow x^2 = 1 \\
&\Leftrightarrow x \in \{-1, 1\} = \{x_2 ; x_1\}
\end{aligned}$$

Comme en $x \in \{x_1, x_2\}$, $\phi(x) = \bar{\Phi}(x) > 0$ on a

$$\begin{cases} \bar{\Phi}(1) = 1 - \phi_1 - \phi_2 > 0 \\ \bar{\Phi}(-1) = 1 + \phi_1 - \phi_2 > 0 \end{cases}$$

e) Flemme of corr.

3) a) $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\varepsilon_t] = 0$

$\mathbb{V}[\varepsilon_t] = \sigma_\varepsilon^2$

$Cor(\varepsilon_t, \varepsilon_{t'}) = 0 \quad \forall t \neq t'$

b) On suppose λ_1 et λ_2 racines de ϕ, sont réelles

$$\begin{aligned}
\phi(x) &= 1 - \phi_1 x - \phi_2 x^2 \\
&= (1 - \lambda_1 x)(1 - \lambda_2 x)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\phi(x)} = \frac{1}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)} = \frac{a}{1-\lambda_1 x} + \frac{b}{1-\lambda_2 x}$$

$$= \frac{a(1-\lambda_2 x) + b(1-\lambda_1 x)}{(1-\lambda_1 x)(1-\lambda_2 x)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + b = 1 \\ -a\lambda_2 - b\lambda_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 - b \\ -(1-b)\lambda_2 - b\lambda_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow -\lambda_2 + b(\lambda_2 - \lambda_1) = 0$

$\Rightarrow b(\lambda_2 - \lambda_1) = \lambda_2$

$b = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ b = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \end{cases} \Rightarrow \phi^{-1}(x) = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{1}{1 - \lambda_1 x} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \frac{1}{1 - \lambda_2 x}$$

On a $|\lambda_1|$ et $|\lambda_2| < 1$

$$\Rightarrow \phi^{-1}(L) = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k L^k + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_2^k L^k$$

$$\Rightarrow X_t = \phi^{-1}(L)\, \varepsilon_t = \frac{-\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_1^k \varepsilon_{t-k} + \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_2^k \varepsilon_{t-k}$$

D'où X_t MA(∞)

4) a) $\gamma_X(0) = \mathbb{V}[X_t]$ avec $X_t = \varphi_1 X_{t-1} + \varphi_2 X_{t-2} + \varepsilon_t$

$$= \varphi_1^2 \gamma_X(0) + \varphi_2^2 \gamma_X(0) + \sigma_\varepsilon^2$$

$$\Rightarrow \gamma_X(0) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2}$$

$$\rho_X(1) = \frac{\gamma_X(1)}{\gamma_X(0)}$$

$$\gamma_X(1) = Cov(X_t, X_{t-1})$$
$$= \varphi_1 \gamma_X(0)$$

$$\Rightarrow \rho_X(1) = \varphi_1$$

$$(1+\varphi_2)\left((1-\varphi_2)^2 - \varphi_1^2\right)$$