Théorie de la ruine

$X \sim \mathcal{E}(\lambda), \lambda > 0$ $\quad f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ $\quad \mathbb{E}(X) = 1/\lambda$

$X \sim \mathcal{P}(\lambda), \lambda > 0$ $\quad \mathbb{P}(X = k) = \dfrac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$

- Processus de comptage à accroissements indépendants :

  $(N_{t_1} - N_{t_0}), (N_{t_2} - N_{t_1}), \dots, (N_{t_n} - N_{t_{n-1}})$ indépendants

  $\exists\, \alpha$ tq $\mathbb{E}(e^{\alpha N_t}) < \infty$

  Un processus à accroissements indépendants a donc toujours un nb d'accroissements "relativemen faible i.e. il existe toujours un seuil à partir duquel les moments exponentiels existent

- Processus de Poisson homogène

  (i) $N_0 = 0$

  (ii) $\mathbb{P}(N_h = 0) \xrightarrow{h \to 0} 1 - \lambda h + o(h)$

  (iii) $\mathbb{P}(N_h = 1) \xrightarrow{h \to 0} \lambda h + o(h)$

  (iv) accroissements indépendants & stationnaires

  $\mathbb{P}(N_h \geq 2) \xrightarrow{h \to 0} o(h)$

  Sur un intervalle de temps suffisament court, la proba d'avoir ≥ 2 sinistres est négligeable

- Premier ordre stochastique

  $X \leq_1 Y \iff F_Y(z) \leq F_X(z) \quad \forall z \in \mathbb{R}$

  $\iff \mathbb{E}[u(X)] \leq \mathbb{E}[u(Y)]$

  Théorie de l'utilité espérée : l'agent préfère Y à X

- Modèle de Poisson composé

  - Montants de sinistre : $\underbrace{(X_i) \text{ iid et } \mu = \mathbb{E}(X_i) < \infty}_{\text{Risque assurable}}$

  - Chargement de sécurité

    $\mathbb{E}[R_t(0)] = t(c - \lambda\mu) \Rightarrow c > \lambda\mu$ sinon la ruine est certaine

    $c = \lambda\mu(1 + \theta)$

    ↳ chargement de sécurité / prime pour risque

- Formule explicite de la probabilité de la ruine

  $\psi(0) = 1 - \underbrace{\dfrac{\lambda\mu}{c}}_{S/P}$

  Avec des réserves initiales nulles, la probabilité de ruine dépend uniquement du S/P

  - Formule de Pollaczeck - Kinchine

    $\psi(u) = \psi(0) \sum_{n=1}^{\infty} [1 - \psi(0)]^n \, F_e^{*n}(u)$

    $F_e(u) = \dfrac{1}{\mu} \int_0^u [1 - F_X(x)]\, dx$

    Avec des reserves initiales non nulles, la probabilité de la ruine dépend de la loi complète des sinistres.

- Sinistres à queue légère — i.e. il existe un interval fermé pour lequel la fgm existe

  $\exists s>0$ tq $M_X(s) = \mathbb{E}(e^{sX}) < \infty$

  - coefficient d'ajustement K

    $1 + \frac{c}{\lambda} s = \mathbb{E}(e^{sX})$ (solution de l'équation)

  - Inégalité de Lundberg

    $\psi(u) \leq e^{-Ku}$

    → la proba. de ruine décroit exponentiellement avec u

    → K : mesure d'efficacité des réserves (u)

- Sinistres sous-exponentiels

  X sous exponentielle si $\frac{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i > x)}{\mathbb{P}(\max_{i \in [1,n]} X_i > x)} \xrightarrow[x \to \infty]{} 1 \quad \forall n$

  - Queue lourde

    $e^{sx} \, \mathbb{P}(X > x) \xrightarrow[x \to \infty]{} \infty$

    → la queue lourde est trop épaisse pour contrebalancer une croissance exponentielle

    (la queue de X décroit moins vite qu'exponentiellement)