# Chapitre 5 : Changement de Probabilité et Théorème de Girsanov

PLAN

1/ Rappels sur les changements de probabilité

2/ Formule de Cameron-Martin

3/ Théorème de Girsanov

4/Applications : calculs d’espérances et probabilité risque neutre

# Introduction

- Avec la formule d'Itô, le **Théorème de Girsanov** est l'outil fondamental de calcul stochastique et de ses applications en pricing en finance, en particulier lorsqu'il s'agit de déterminer l'existence d'une **probabilité risque neutre**.
- Le Théorème de Girsanov décrit comment changer de façon absolument continue la loi de certains processus.
- Plus précisément, on va considérer un processus $\{X_t, t \geq 0\}$, défini sur un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$, et on va perturber la mesure $\mathbb{P}$ à l'aide d'une $(\mathcal{F}_t)$-martingale. On obtiendra alors une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}$, sous laquelle la loi du processus $\{X_t, t \geq 0\}$ sera différente, et qui sera potentiellement plus simple à étudier. On pourra ensuite étudier cette loi puis revenir à la mesure de probabilité $\mathbb{P}$ avec la martingale exponentielle.
- Les applications de cette méthode sont multiples, aussi bien en Finance que pour le mouvement Brownien proprement dit.

# Chapitre 5 : Changement de Probabilité et Théorème de Girsanov

1/ Rappels sur les changements de probabilité

# Généralités – Densité de Radon-Nikodym

- Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $Z$ une v.a. $\mathcal{F}$-mesurable, **positive**, **d'espérance 1**.
- Alors on peut définir une nouvelle mesure de probabilité $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}$ par
$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z\mathbb{1}_A) = \int_A Z d\mathbb{P}$$
- Z est la densité de Radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$.
- La formule de Bayes nous assure que pour toute v.a. $X$ $\mathcal{F}$-mesurable et $\mathbb{Q}$-intégrable, on a :
$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(ZX).$$

# Généralités – Densité de Radon-Nikodym

- Si l'espace de probabilité est muni d'une filtration, et si $Z_T$ est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable, **positive**, **d'espérance 1,** on définit $\mathbb{Q}$ sur $\mathcal{F}_T$ par :
$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T \mathbb{1}_A) = \int_A Z_T d\mathbb{P}$$
- La probabilité $\mathbb{Q}$ est équivalente à $\mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T$ ssi $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{P}$ chargent les mêmes ensembles de mesure nulle, donc si $Z_T$ ne s'annule jamais, puisque :
$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T \mathbb{1}_A)$$
- Alors, la densité de Radon-Nikodym de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}$ est $\frac{1}{Z_T}$ :
$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{1}{Z_T} \mathbb{1}_A\right).$$

# Généralités – Densité de Radon-Nikodym

- Enfin, pour tout $t < T$ et tout $A \in \mathcal{F}_t$, on a :

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T \mathbb{1}_A | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_A \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_A Z_t)$$

Donc en réalité sur $\mathcal{F}_t$, le changement de probabilité est $Z_t$

- Il est donc naturel d'associer à la v.a. $Z_T$ son **processus martingale associé** :

$$Z_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T | \mathcal{F}_t)$$

- Ainsi, pour tout $t < T$ et toute v.a. $X$ $\mathcal{F}_t$-mesurable, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T X_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T X_t | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_t \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T | \mathcal{F}_t)) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(X_t Z_t)$$

- En réalité, $Z_t$ est la densité de radon-Nikodym de $\mathbb{Q}$ par rapport à $\mathbb{P}$, restreinte à $\mathcal{F}_t$.
- On note :

$$Z_t = \left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} \quad \text{ou encore} \quad d\mathbb{Q}\big|_{\mathcal{F}_t} = Z_t \, d\mathbb{P}\big|_{\mathcal{F}_t}$$

# Martingales et changement de probabilité

- **Lemme** : Soit $\{M_t, t \geq 0\}$ un processus. C'est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale sous $\mathbb{Q}$ **si et seulement si** le processus $\{Z_t M_t, t \geq 0\}$ est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale sous $\mathbb{P}$.

- **Preuve** : Supposons que $M$ soit une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{Q})$-martingale. pour tout s $\leq t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_s$, on a

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_t M_t \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(M_t \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(M_s \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_s M_s \mathbb{1}_A)$$

On déduit que $Z_t M_t$ est une $(\mathcal{F}_t, \mathbb{P})$-martingale.

La réciproque se démontre de la même façon.

# Formule de Bayes généralisée

- **Proposition** : si on considère un processus $X$ $\mathcal{F}$-adapté, la formule de Bayes généralisée s'écrit

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T|\mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(\frac{Z_T}{Z_t}X_T\middle|\mathcal{F}_t\right) = \frac{1}{Z_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T X_T|\mathcal{F}_t)$$

- **Preuve** :

En effet, pour toute v.a. mesurable bornée, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_T Y_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T X_T Y_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\big(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T X_T Y_t|\mathcal{F}_t)\big)$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T X_T|\mathcal{F}_t)Y_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\frac{1}{Z_t}\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z_T X_T|\mathcal{F}_t)\right)$$

# Chapitre 5 : Changement de Probabilité et Théorème de Girsanov

## 2/ Formule de Cameron-Martin

# Exemple introductif

- Avant de passer à cette formule, nous allons étudier un exemple en dimension finie.
- Soient $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes, construites sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.
- Calculons $\forall\ (\mu_1, \dots, \mu_n) \in \mathbb{R}^n$ :

$$\mathbb{E}\left(\exp \sum_{i=1}^{n} \mu_i X_i\right) = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}(\exp(\mu_i)) = \prod_{i=1}^{n} \exp\left(\frac{\mu_i^2}{2}\right) = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \mu_i^2\right)$$

- Cela entraîne que

$$\mathbb{E}\left(\exp \sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i X_i - \frac{\mu_i^2}{2}\right)\right) = 1$$

- Cela forme donc une v.a. positive, d'espérance 1. Cela peut donc définir un changement de variable. Ainsi, on peut définir une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F})$ en posant :

$$Z(\omega) = \exp \sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i X_i(\omega) - \frac{\mu_i^2}{2}\right), \qquad et \quad Z(\omega) = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}, \qquad \text{ou encore } \mathbb{Q}(d\omega) = Z(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

# Exemple introductif

$$Z(\omega) = \exp \sum_{i=1}^{n} \left( \mu_i X_i(\omega) - \frac{\mu_i^2}{2} \right), \qquad et \quad Z(\omega) = \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$$

- La mesure $\mathbb{Q}$ est bien une mesure de probabilité sur $(\Omega, \mathcal{F})$ puisque $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Z) = 1$ et $Z$ est strictement positive.
- De plus, comme $Z > 0$ p.s., les probabilités $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes :
$$\mathbb{P}(A) = 0 \iff \mathbb{Q}(A) = 0, \forall A \in \mathcal{F}$$
- La variable $Z$ désigne la densité de Radon-Nikodym de $\mathbb{P}$ par rapport à $\mathbb{Q}$.
- On a donc changé de probabilité. Sous la probabilité $\mathbb{P}$, le n-uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ suivaient des lois gaussiennes centrées réduites indépendantes.
- **Quelle est alors la loi du n-uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sous cette nouvelle probabilités $\mathbb{Q}$ ?**

# Exemple introductif

- **Quelle est alors la loi du n-uplet $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ sous cette nouvelle probabilités $\mathbb{Q}$ ?**

$$\mathbb{Q}(X_1 \in dx_1, \dots, X_n \in dx_n) = Z(\omega)\mathbb{P}(X_1 \in dx_1, \dots, X_n \in dx_n)$$
$$= \exp\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\mu_i x_i - \frac{\mu_i^2}{2}\right)\right]\mathbb{P}(X_1 \in dx_1, \dots, X_n \in dx_n)$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(\sum_i^n\left(\mu_i x_i - \frac{\mu_i^2}{2}\right)\right)\exp\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{x_i^2}{2}\right)dx_1 \dots dx_n$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right)^n \exp\left(-\frac{1}{2}\sum_i^n\left((x_i - \mu_i)^2\right)\right)dx_1 \dots dx_n$$

- On en déduit donc que sous $\mathbb{Q}$

$$(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{N}(\mu, I), \qquad \text{où } \mu = (\mu_1, \dots, \mu_n)$$

# Formule de Cameron-Martin

- La formule de Cameron-Martin obéit au même principe de changement de probabilité, sauf que celui-ci a lieu sur l'espace des fonctions continues, et donc en dimension infinie.
- Au lieu de $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ des variables gaussiennes centrées réduites indépendantes, on se donne $\{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
- et au lieu de $Z(\omega) = \exp \sum_{i=1}^{n} \left( \mu_i X_i(\omega) - \frac{\mu_i^2}{2} \right)$, on va travailler avec le processus
$$t \mapsto Z_t^m = \exp\left[ m W_t - \frac{m^2 t}{2} \right]$$
- Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on sait déjà que le processus $Z_t^m$ est une $\mathcal{F}_t^W$-martingale positive (cf martingales du mouvement Brownien)
- $Z_t^m$ va définir une nouvelle mesure de probabilité : pour un horizon $T > 0$, on définit $\mathbb{Q}_T^m$ par :
$$\mathbb{Q}_T^m(A) = \mathbb{E}(Z_T^m \mathbb{1}_A)$$

# Formule de Cameron-Martin

- Avec le changement de probabilité

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Z_t^m = \exp\left[mW_t - \frac{m^2 t}{2}\right]$$

- La formule de Cameron-Martin spécifie alors la loi de $W$ sous $\mathbb{Q}_T^m$ :

- **Théorème (Formule de Cameron-Martin)** : Sous la mesure $\mathbb{Q}_T^m$ , le processus

$$\widetilde{W} : t \mapsto W_t - mt, \qquad t \leq T$$

Est un mouvement Brownien.

# Théorème de Cameron-Martin : preuve

- **Preuve** :
- On remarque d'abord que les tribus $\mathcal{F}_t^W$ et $\mathcal{F}_t^{\widetilde{W}}$ sont égales, $\forall\, t \leq T$.
- On fixe $\lambda \in \mathbb{R}$, et on considère le processus :

$$L_t^\lambda = \exp\left(\lambda \widetilde{W}_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right).$$

Pour montrer que $\widetilde{W}_t$ est un mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}_T^m$ on va utiliser la caractérisation de Paul Levy et montrer que quel que soit $\lambda \in \mathbb{R}$, $L_t^\lambda$ est une $\mathbb{Q}_T^m$-martingale.

- Pour tout $s \leq t \leq T$ et tout $A \in \mathcal{F}_s^W$, on peut écrire :

$$\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left(L_t^\lambda \mathbb{1}_A\right) = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left(Z_t L_t^\lambda \mathbb{1}_A\right) = \mathbb{E}_\mathbb{P}\left(\exp\left[mW_t - \frac{m^2 t}{2}\right] \exp\left(\lambda \widetilde{W}_t - \frac{\lambda^2 t}{2}\right) \mathbb{1}_A\right)$$
$$= \mathbb{E}_\mathbb{P}\left(\exp\left[mW_t - \frac{m^2 t}{2}\right] \exp\left(\lambda(W_t - mt) - \frac{\lambda^2 t}{2}\right) \mathbb{1}_A\right)$$
$$= \mathbb{E}_\mathbb{P}\left(\exp\left[(\lambda + m)W_t - \frac{(\lambda+m)^2 t}{2}\right] \mathbb{1}_A\right)$$
$$= \mathbb{E}_\mathbb{P}\left(\exp\left[(\lambda + m)W_s - \frac{(\lambda+m)^2 s}{2}\right] \mathbb{1}_A\right) \quad \textit{car } \exp\left[(\lambda + m)W_t - \frac{(\lambda+m)^2 t}{2}\right] \textit{ est une } \mathbb{P}-\textit{martingale car } W_t \textit{ est un } \mathbb{P}-\textit{brownien}$$
$$= \mathbb{E}_\mathbb{P}\left(Z_s L_s^\lambda \mathbb{1}_A\right) = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left(L_s^\lambda \mathbb{1}_A\right)$$

- On en déduit que $\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left(L_t^\lambda \mathbb{1}_A\right) = \mathbb{E}_\mathbb{Q}\left(L_s^\lambda \mathbb{1}_A\right)$ $\forall\, A \in \mathcal{F}_s^W$ ce qui signifie que $\mathbb{E}_\mathbb{Q}\left(L_t^\lambda | \mathcal{F}_s^W\right) = L_s^\lambda$. Donc $L_t^\lambda$ est une $\mathbb{Q}_T^m$-martingale, et donc $\widetilde{W}_t$ est un mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}_T^m$

# Chapitre 5 : Changement de Probabilité et Théorème de Girsanov

## 3/ Théorème de Girsanov

# Théorème de Girsanov

- Nous allons généraliser le résultat précédent.
- On se donne à nouveau $\{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et on note $\mathcal{F}_t^W$ sa filtration naturelle complétée.
- Soit $\{\theta_t, t \geq 0\}$ un bon processus local, vérifiant la condition de Novikov. Donc tel que l'unique solution de l'EDS

$$dZ_t^\theta = \theta_s Z_s^\theta dW_s$$

Qui s'écrit

$$Z_t^\theta = \exp\left[\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

Est une $\mathcal{F}_t^W$-martingale, positive, d'espérance 1.

- Comme précédemment, on fixe un horizon $T > 0$, et on définit la mesure, équivalente à $\mathbb{P}$ suivante :

$$\mathbb{Q}_T^\theta(d\omega) = Z_t^\theta(\omega)\mathbb{P}(d\omega)$$

Autrement dit

$$Z_t^\theta(\omega) = \frac{d\mathbb{Q}_T^\theta}{d\mathbb{P}}$$

- La loi de $\{W_t, t \geq 0\}$ sous $\mathbb{Q}_T^\theta$ est alors donnée par le théorème de Girsanov, sorte de généralisation de la formule de Cameron-Martin dans le cas où $\theta_t \neq m$ constante.

# Théorème de Girsanov

- **Théorème (Girsanov)** : Soit

$$Z_t^\theta(\omega) = \frac{d\mathbb{Q}_T^\theta}{d\mathbb{P}} = \exp\left[\int_0^t \theta_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right]$$

Alors sous la mesure $\mathbb{Q}_T^\theta$, le processus

$$\widetilde{W} : t \mapsto W_t - \int_0^t \theta_s ds, \qquad t \leq T$$

Est un mouvement Brownien.

- **Remarque** : théorème très utile dans la pratique, puisque c'est lui qui nous permettra de trouver la probabilité risque neutre.

# Théorème de Girsanov

- **Preuve** : On veut montrer que $\widetilde{W}: t \mapsto W_t - \int_0^t \theta_s ds\,, \quad t \leq T$ est un mouvement Brownien.
- la preuve repose sur le lemme de début de chapitre : on démontre directement que $Z\widetilde{W}$ est une martingale sous $\mathbb{P}$, donc par le lemme cela montre que $\widetilde{W}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}_T^\theta$.
- De plus, le crochet de $\widetilde{W}$ sous $\mathbb{P}$, vu comme processus d'Itô, est le crochet de sa partie martingale, donc $\langle \widetilde{W} \rangle_t = \langle W \rangle_t = t$, et comme le crochet est invariant par changement de probabilité, il est le même sous $\mathbb{Q}_T^\theta$. Donc $\widetilde{W}$ est un mouvement brownien sous $\mathbb{Q}_T^\theta$ (martingale de crochet t).

# Théorème de Girsanov général

- **Théorème (Girsanov général)** : Soient $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ deux mesure de probabilité équivalentes sur un espace filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t)$. On suppose que toutes les $\mathcal{F}_t$-martingales sont continues. Alors sous $\mathbb{P}$ il existe une $\mathcal{F}_t$-martingale $L_t$ telle que $\forall t \leq T$ et $\forall A \in \mathcal{F}_t$,

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}\left[\exp\left[L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right]\mathbb{1}_A\right].$$

Autrement dit tel que

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left[L_t - \frac{1}{2}\langle L\rangle_t\right].$$

De plus, si $M$ est une martingale locale continue sous $\mathbb{P}$, alors le processus

$$\widetilde{M}: t \mapsto M_t - \langle M, L\rangle_t$$

Est une martingale locale continue sous $\mathbb{Q}$.

# Théorème de Girsanov

- **Remarque** : on voit que le théorème de Girsanov général entraîne le théorème de Girsanov précédent. Il suffit de prendre

$$L_t = \int_0^t \theta_s dB_s$$

On a alors

$$\langle B, L \rangle = \int_0^t \theta_s ds \,.$$

Comme $B$ est une martingale locale continue sous $\mathbb{P}$, alors $\tilde{B}$ est une martingale continue sous $\mathbb{Q}$, de crochet $\langle \tilde{B} \rangle_t = \langle B \rangle_t = t$ stable par changement de probabilité, c'est donc bien un mouvement Brownien.

# Chapitre 5 : Changement de Probabilité et Théorème de Girsanov

## 4/Applications : calculs d'espérances et probabilité risque neutre

# Applications – Exemple 1

- **Changement de probabilité** : Modèle de Black et Scholes
- Soit $X_t$ le prix d'une action à l'instant $t$ dans le modèle de Black et Scholes. Le prix suit la dynamique de Brownien géométrique suivante :

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

**Calculer la dynamique du prix actualisé de l'action $\boldsymbol{Y_t = e^{-rt} X_t}$ et trouver sous quelle probabilité ce prix est une martingale.**

# Applications – Exemple 1

- **Changement de probabilité** : Modèle de Black et Scholes

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t$$

On cherche la dynamique de $Y_t = e^{-rt} X_t$

Application de la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} dY_t &= \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d\langle X \rangle_t \\ &= -rY_t dt + e^{-rt} dX_t \\ &= -rX_t e^{-rt} dt + e^{-rt} \mu X_t dt + \sigma e^{-rt} X_t dB_t \\ &= (\mu - r\,) Y_t dt + \sigma Y_t dB_t \end{aligned}$$

N'est pas une martingale sous $\mathbb{P}$.

Mais si on réécrit :

$$dY_t = \sigma Y_t \left( dB_t + \frac{\mu - r}{\sigma} dt \right) = \sigma Y_t d\tilde{B}_t$$

Et si on trouve une probabilité sous laquelle $\tilde{B}_t$ est un mouvement Brownien, Y sera une martingale.

Le théorème de Cameron-Martin assure l'existence d'une telle probabilité, en posant $m = -\frac{\mu - r}{\sigma}$, donc

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = \exp\left( -\frac{\mu - r}{\sigma} B_t - \frac{1}{2} \left( \frac{\mu - r}{\sigma} \right)^2 t \right)$$

# Applications : Exemple 2

- Le théorème de Girsanov permet également de calculer des espérances par l'intermédiaire de changement de probabilité.
- **Exemple** : on cherche à calculer l'espérance suivante :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[B_t \exp\left[\left[\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right]\right]\right]$$

Pour $t < T$ et $\theta_s$ une fonction déterministe.

**Poser le changement de probabilité suivant :**

$$\boldsymbol{\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L_t = \exp\left[\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right]}$$

**Et calculer l'espérance précédente grâce au théorème de Girsanov.**

# Applications : Exemple 2

- **Exemple** : on cherche à calculer l'espérance suivante :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[B_t \exp\left[\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right]\right]$$

Pour $t < T$ et $\theta_s$ une fonction déterministe.

On pose le changement de probabilité suivant :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L_t = \exp\left[\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right]$$

Grâce au théorème de Girsanov, on sait que sous $\mathbb{Q}$, le processus $\widetilde{B_t} = B_t - \int_0^t \theta_s ds$ est un mouvement Brownien. Calculons l'espérance :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[B_t \exp\left[\int_0^T \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T \theta_s^2 ds\right]\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[B_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\widetilde{B_t} + \int_0^t \theta_s ds\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\int_0^t \theta_s ds\right] = \int_0^t \theta_s ds$$

# Applications : exemple 3

- Dans le modèle de Black et Scholes, on va être amené à calculer le prix d'un CALL européen de payoff $C_T = (S_T - K)_+$
- Ce prix se calcule par la formule sous la probabilité risque neutre

$$C_T = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left(e^{rT}(S_T - K)\mathbb{1}_{S_T \geq K}\right) \quad (*)$$

Où $S_T$ est solution de l'EDS de Black et Scholes

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Donc

$$S_T = S_0 \exp\left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T + \sigma W_T\right]$$

- **Calculer l'espérance** $(*)$

# Processus Stochastiques



- Fin du cours de Processus Stochastiques !