ALM Stochastique

Samy Collier
24 février 2021

Objectifs de l’intervention

Cours n°2

- Mettre en évidence les options cachées du passif
- Comprendre les mécanismes de participations aux bénéfices

- Revoir quelques notions sur les options

- Comprendre le cadre des valorisations risque-neutres
  - Risque neutre / AOA / Market Consistency
  - Indicateurs projetés dans les ESG
  - Valider des tables stochastiques

- Approfondissement sur les obligations :
  - Notion de spread
  - Risque-neutralisation

Objectifs de l'intervention

TD n°2

- Finir le TD n°1

- Valider un jeu de scénarios économiques
  - Test de martingalité Déflateur
  - Test de martingalité Actions
  - Observations d'autres tests

- Approfondissements sur les obligations
  - Déterminer le spread des obligations
  - Déterminer le rendement d'un actif financier
  - Chocs de taux et de spread

Previously, …

Previously

Bilan Economique

- Rappel : Le bilan économique est prospectif, équilibré et son passif se sépare entre la valeur de l'assuré et celle de l'actionnaire :
  - La valeur de marché (VM) est la meilleure estimation des flux futurs actualisés des actifs ;
  - Le BEL est la valeur actualisée des flux futurs des assurés ;
  - La NAV, ou actif net, se déduit par différence, ou se calcule à partir des résultats futurs actualisés (VIF).

ACTIF	PASSIF
Actifs en valeur de marché (VM)	Actif net (NAV)
	BEL

Previously

Bilan Economique

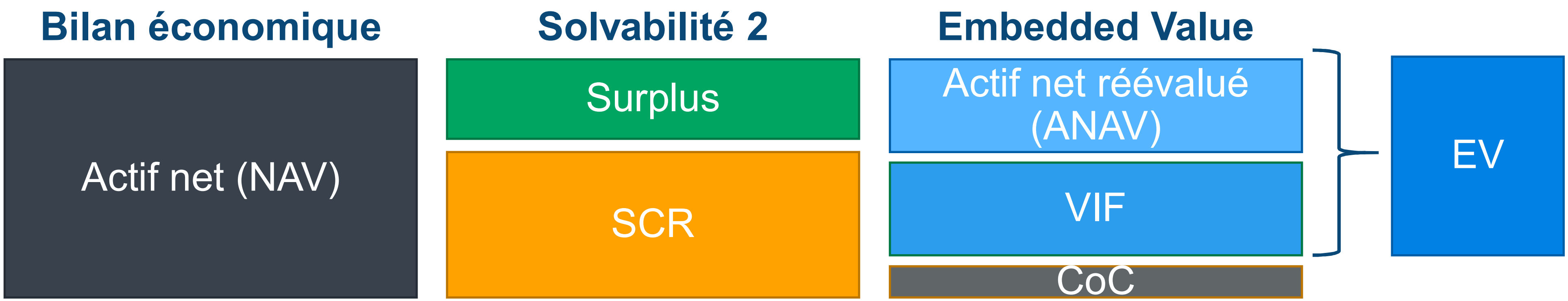
- Rappel : En considérant un taux d’actualisation r (zéro coupon !), on peut écrire sous forme prospective les indicateurs.

$$BEL = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{CF_i^{assuré}}{(1+r)^i}$$

$$VIF = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{résultat_i}{(1+r)^i}$$

$$VM = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{CF_i^{act}}{(1+r)^i}$$

- On définit la NAV = VM – BEL et comprend plusieurs éléments :



Les options financières

Les options financières
Principe

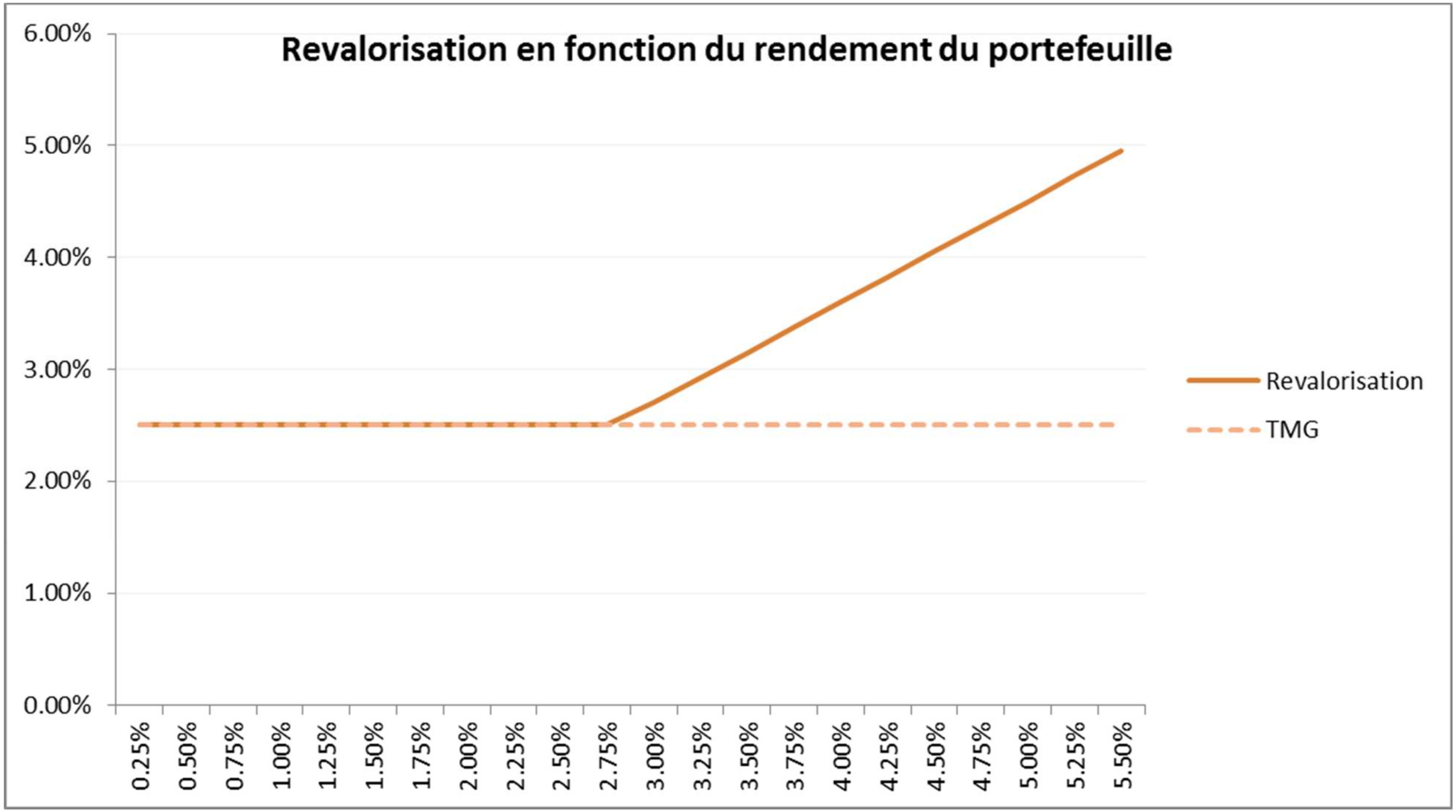
- La plupart des produits d'assurance Vie contiennent des options financières « cachées »:
  - La réglementation impose aux assureurs un partage des résultats financiers avec les assurés, on parle de participation aux bénéfices.
  - Par ailleurs, les produits offrent le plus souvent une garantie en capital.
- Concrètement, cela signifie que la revalorisation d'un contrat d'assurance Vie s'écrit sous la forme suivante :

$$PM_i = PM_{i-1} \times \left(1 + max(x\% \times r, TMG)\right)$$

- Le TMG représente donc le Strike d'une option sur le taux de rendement de l'actif du portefeuille.
- La possibilité de rachat d'un contrat d'assurance Vie constitue également une option, dans le sens où elle raccourcit la duration du passif (cf. obligation callable).

Les options financières
Principe

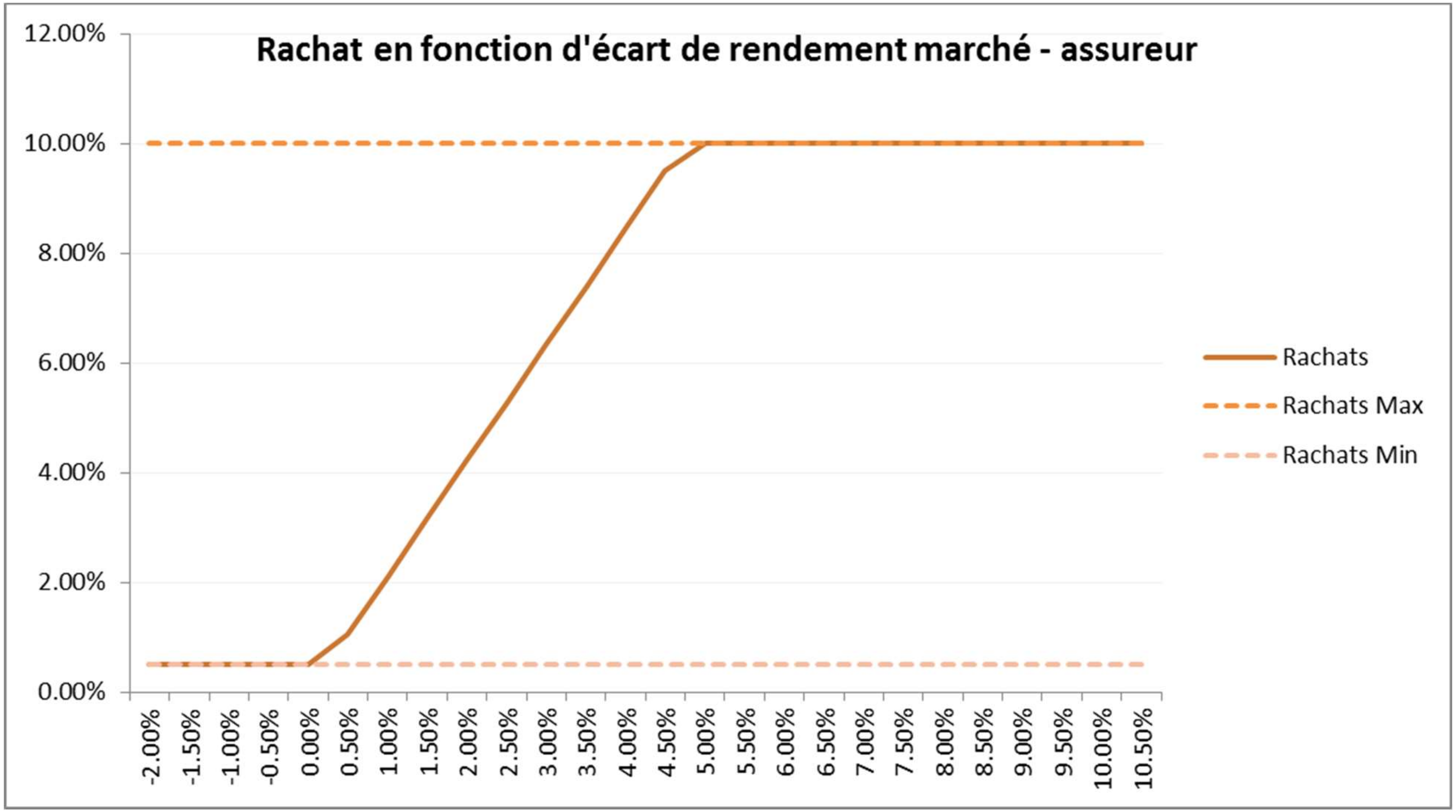
- La revalorisation du portefeuille en fonction du rendement du portefeuille d'actifs donne un profil typique d'option :



Les options financières

Principe

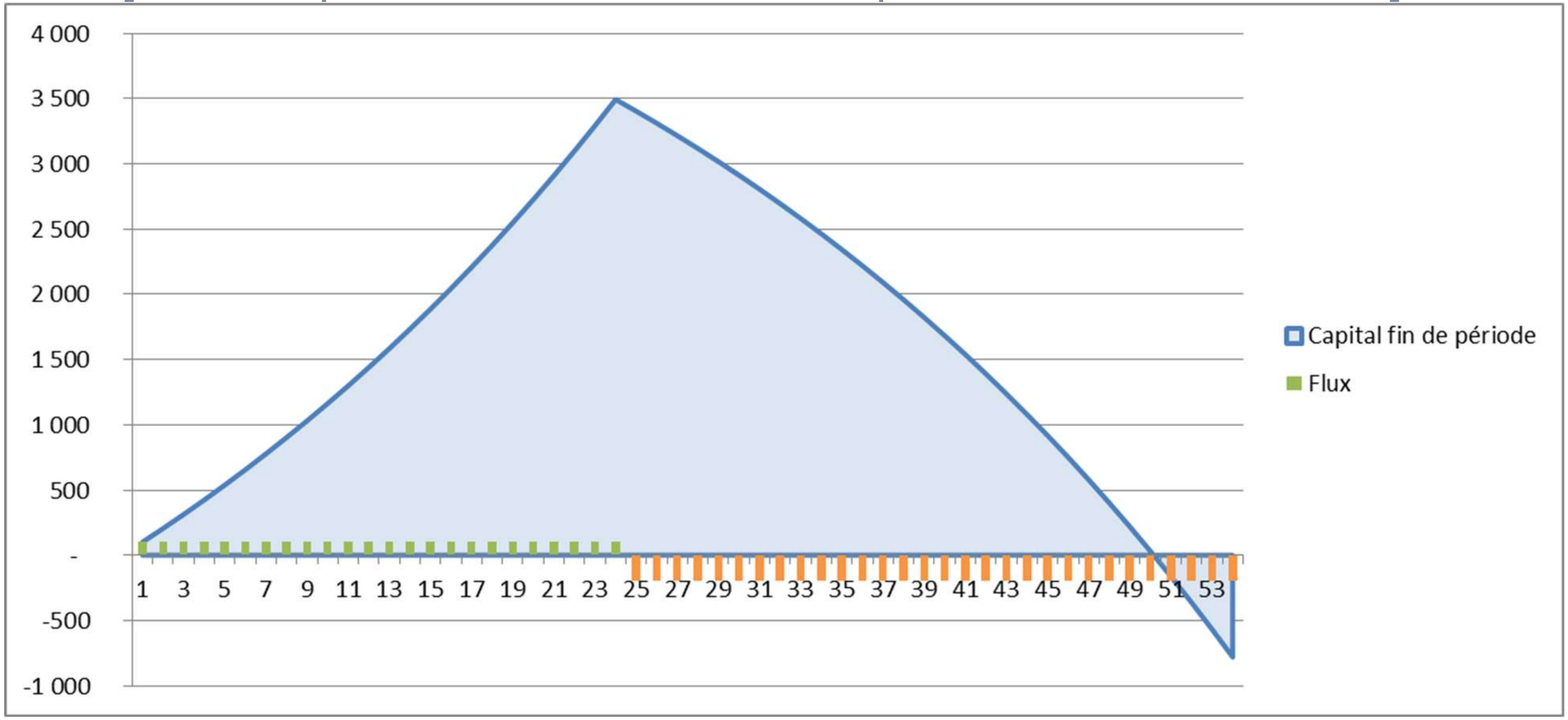
- Différentes études montrent que les assurés rachètent d'autant plus que le rendement de leur épargne est éloigné du rendement disponible sur le marché :



Les options financières

Principe

- Les rachats, ou la décision d'un assuré de passer de la phase de capitalisation à une phase de restitution, constitue des évènements assez imprévisibles qui modifient la chronique des flux.
- Par exemple, ci-dessous le montant d'encours d'un assuré ayant souscrit un contrat de retraite [100€ de prime, 40 ans, taux technique 3%, retraite à 65 ans] :



Les options financières

Bilan level 3 - Description

ACTIF

100
=
Actif
R de rendement

T=0

PASSIF

100
=
Contrat d'épargne
2.5% de taux garanti
7% de rachats
90% de PB

- Questions du gestionnaire actif-passif :
  1. Aurais-je assez de trésorerie pour régler mes engagements à la fin de la période ?
  2. D'un point de vue résultat, combien vais-je dégager de bénéfices / pertes ?
  3. Qu'en est-il au fil du temps ?
  4. Combien vaut mon portefeuille ? Pour l'assuré ? Pour l'actionnaire ?

Les options financières

Bilan level 3 – Analyse

ACTIF

100
=
Actif
R de rendement

PASSIF

100
=
Contrat d'épargne
2.5% de taux garanti
7% de rachats
90% de PB

T=0

R x 100

7 x (1+max(90% x R ; 2.5%)

- Aurais-je assez de trésorerie pour régler mes engagements à la fin de la période ?
  - Fonction de R, le niveau de trésorerie est de R – 7 x (1+max(90% x R ; 2.5%)
- D'un point de vue résultat, combien vais-je dégager de bénéfices / pertes ?
  - Résultat = Produits financiers – Variation provisions - Rachats = 100x [R – max(90% x R; 2.5%)]

Les options financières

Bilan level 3 – Analyse

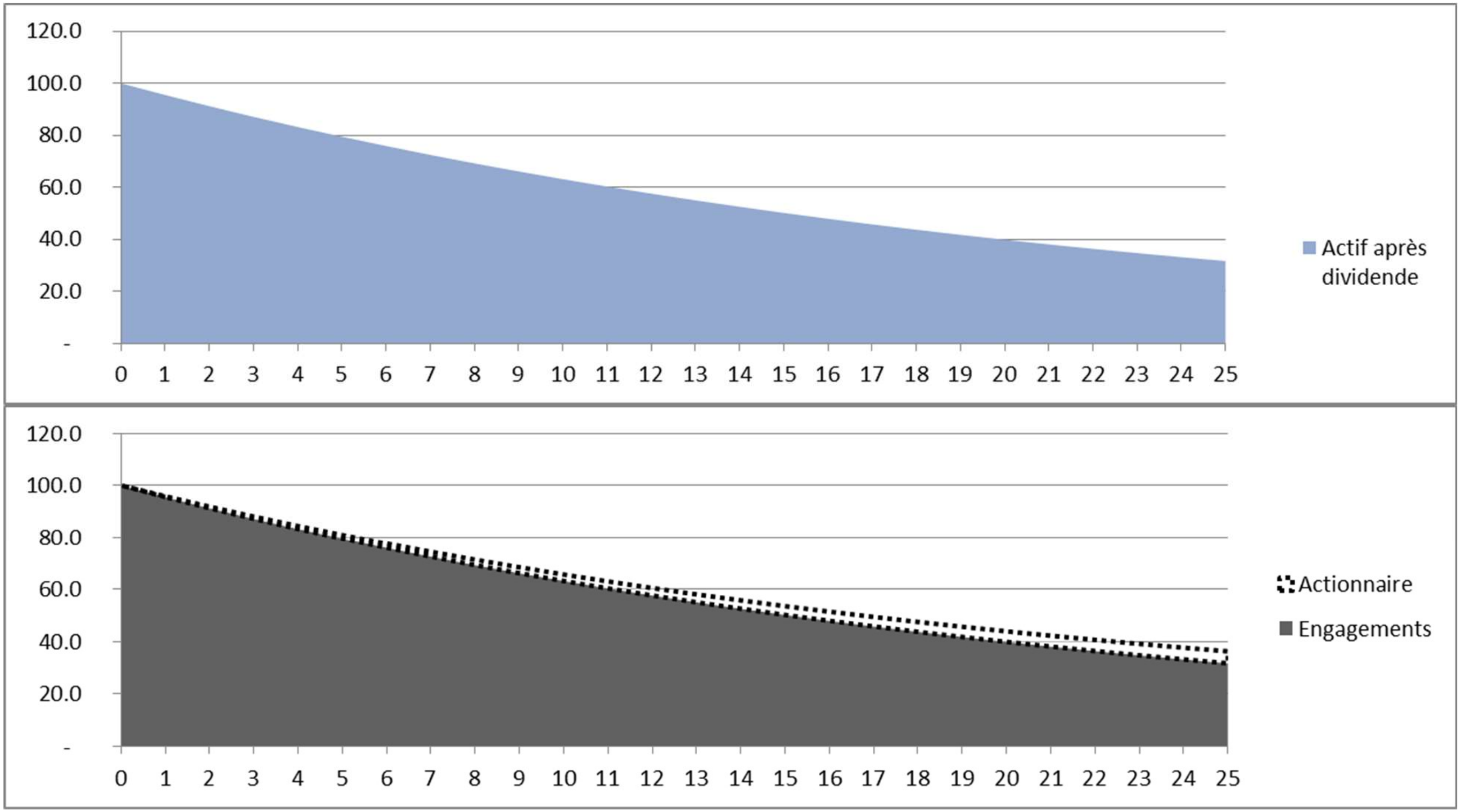
R – max(90% x R ; 2.5%)

ACTIF		PASSIF
100 = Actif R de rendement	T=1	93 x (1+max(90% x R ; 2.5%)
R x 100 – 7 x (1+max(90% x R ; 2.5%) = Cash		

- A la fin de la période, les engagements sont revalorisés selon les termes du contrat, les coupons et les sorties alimentent la trésorerie dont le niveau dépend de R.
- Le résultat est versé en dividende.

Les options financières

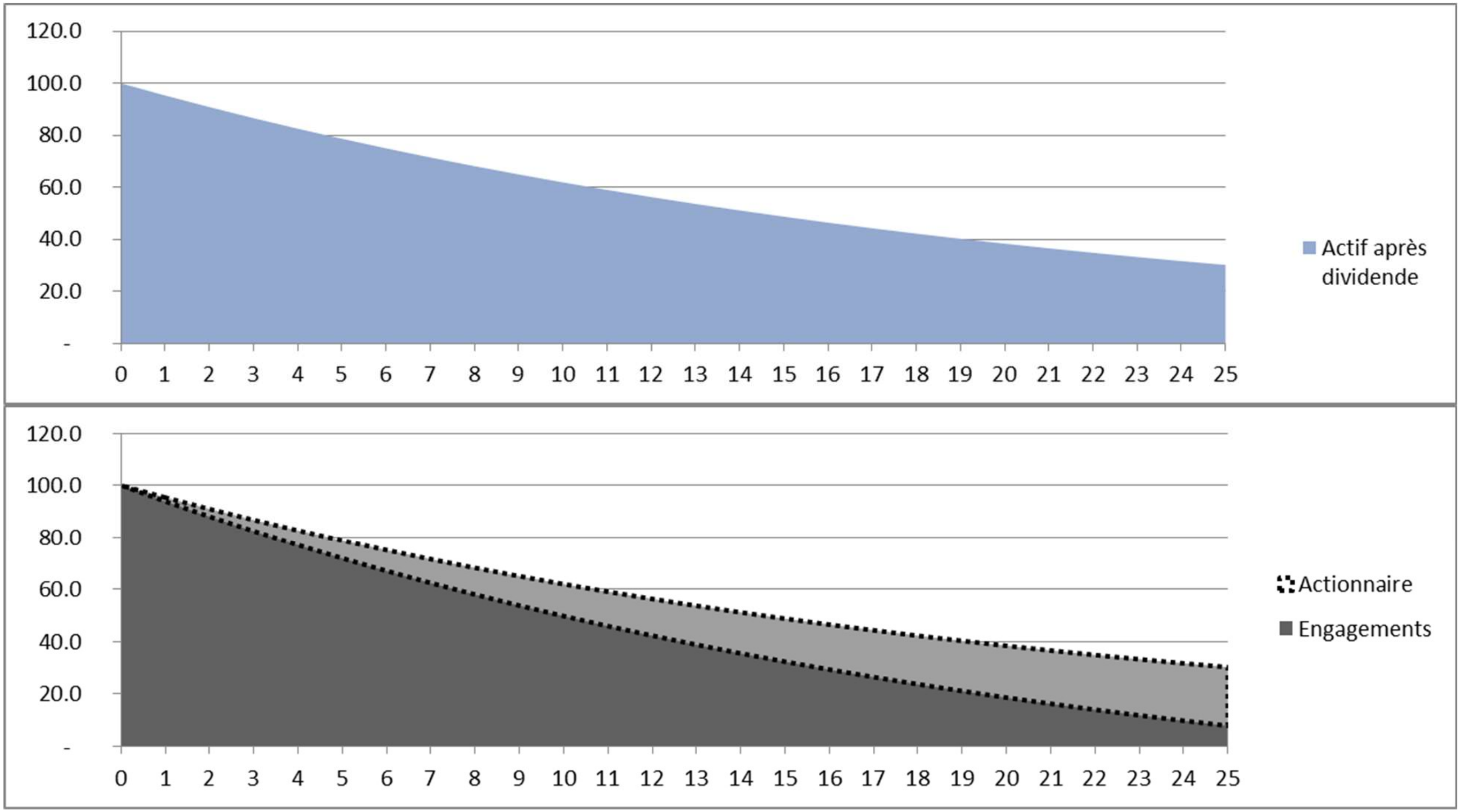
Bilan level 3 – R = 3%



- On constate que la richesse de l'actionnaire augmente légèrement dans le temps

Les options financières

Bilan level 3 – R = 1%



- A partir de r = TMG / PB = 2.8%, les engagements ne varient plus à la baisse du rendement, ils sont garantis par l'assureur, qui doit se financer auprès de l'actionnaire.

Les options financières

Bilan level 3 – Expression de l'option de PB

- Les flux à destination de l'assuré sont constitués uniquement des rachats, on a donc :

$$CF_i^{assuré} = PM_{i-1} \times Tx_{rachats} \times (1 + \max(90\% \times R, TMG))$$

- On peut également écrire l'expression du résultat comme la marge financière de l'assureur :

$$résultat_i = PM_{i-1} \times (R - \max(90\% \times R, TMG))$$

- Ces éléments peuvent également se réécrire sous la forme :

$$CF_i^{assuré} = PM_{i-1} \times Tx_{rachats} \times (1 + \mathrm{TMG} + (90\% \times R - TMG)_+)$$

$$résultat_i = PM_{i-1} \times (R - TMG - (90\% \times R - TMG)_+)$$

- Les assurés ont donc, en plus de la garantie de taux, une option d'achat (call) sur le rendement des actifs, s'ils sont supérieurs au TMG.

Les options financières

Bilan level 3 – Expression du BEL

- Les prestations payées aux assurés dépendent donc du rendement futur du portefeuille, qui est inconnu à la date d'évaluation.
- Pour déterminer la valeur économique des prestations, on considère le rendement comme une variable aléatoire R_t. Le BEL se considère alors comme une espérance :

$$BEL = E\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{PM_{i-1} \times Tx_{rachats} \times (1 + \mathrm{TMG} + (90\% \times R_i - TMG)_+)}{(1+r)^i}\right]$$

- On peut séparer la partie déterministe et la partie optionnelle en écrivant :

$$BEL = BEL_{det} + E\left[\sum_{i=1}^{\infty} \frac{PM_{i-1} \times Tx_{rachats} \times 90\% \times \left(R_i - \frac{TMG}{90\%}\right)_+}{(1+r)^i}\right]$$

- Cette partie optionnelle est appelée FDB (Future Discretionnary Benefits) dans le référentiels Solvabilité 2.

Les options financières

Bilan level 3 – Prix d'un call

- On reconnait l'expression du prix d'un call :

$$BEL = BEL_{det} + \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \times C\left(i, r, R_i, \frac{TMG}{90\%}\right)$$

- Lorsque R_i suit un mouvement brownien géométrique de volatilité σ et centré sur le taux sans risque r, on exprime les prix des call comme :

$$C\left(i, r, R_i, \frac{TMG}{90\%}\right) = R_0 \times \mathcal{N}(d_1) - \frac{TMG}{90\%} \times P_i \times \mathcal{N}(d_2)$$

- Avec $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{i}}\left[ln\left(\frac{R_0 \times 90\%}{TMG}\right) + \left(r + \frac{1}{2}\sigma^2\right) \times i\right]$ et $d_2 = d_1 - \frac{1}{\sigma\sqrt{i}}$

- Problématique : ici, les α_i dépendent des payoffs précédant…

Les options financières

Bilan level 3 – Evaluation des options

- Les options financières sont souvent trop complexes pour être évaluées par des formules fermées.
- De plus, ces formules nécessitent des hypothèses très restrictives (ex : taux sans risque non stochastique pour B&S).

- Les assureurs valorisent les portefeuilles de contrat par des techniques Monte Carlo.

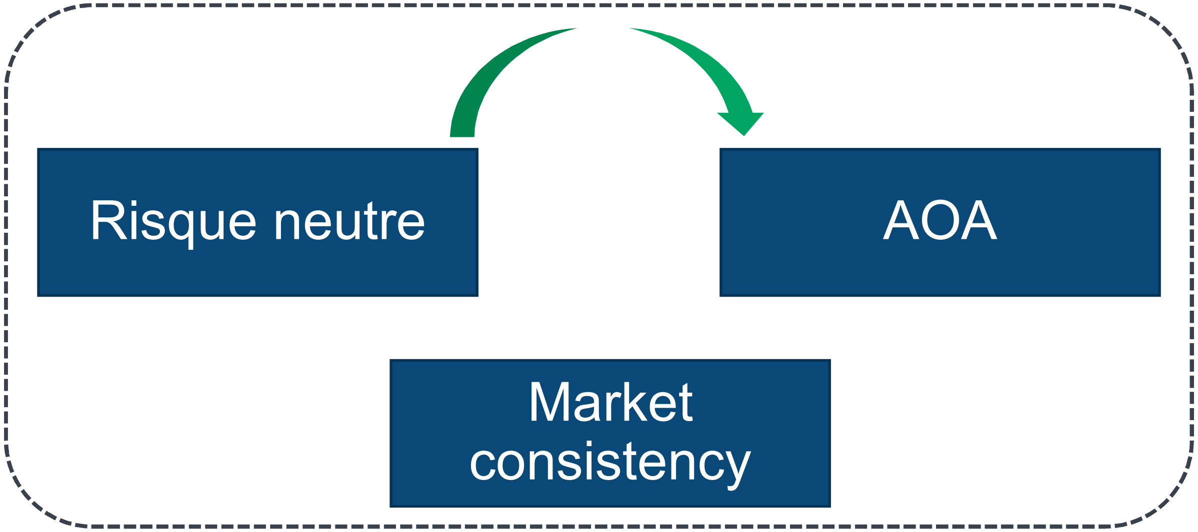
- Les réglementations encadrent cependant l'univers de valorisation :
  - Univers Risque Neutre
  - Absence d'opportunité d'arbitrage
  - Market Consistency

- Ces éléments concernent principalement la détermination des scénarios économiques et le traitement des actifs dans les modèles.

L’univers de valorisation

L'univers de valorisation

Le paradigme risque neutre et market consistent



- La risque-neutralité implique que tous les actifs, et toutes les stratégies d'investissements, rapportent exactement le taux sans risque.
- Le caractère risque neutre impose naturellement l'absence d'opportunité d'arbitrage.
- Le caractère market consistent est respecté s'il est possible de retrouver les prix de marché dans l'univers de valorisation.

L’univers de valorisation

La courbe de référence – les taux swap

- La réglementation Solvabilité 2 précise que lorsque le marché des taux swaps est suffisamment liquide, profond et transparent (DTL), la courbe des taux swap doit servir de base à la courbe des taux sans risque.
  - Les taux swap sont définis comme la jambe fixe qu’il faut payer (ou que l’on reçoit) annuellement ou semi-annuellement, contre le paiement d’un taux très court, variable (Euribor par exemple) sur une certaine durée.
  - Les taux swap correspondent donc à l’anticipation du marché des évolutions des taux courts.
  - Le marché des swaps de taux pour l’euro est le 3ème marché de taux après les govies et les futures sur govies

- C’est une courbe couponnée ! Il faut la découponner pour pouvoir actualiser avec (cf. TD n°1).

- Selon le régulateur européen (EIOPA), le marché des taux swap respecte le critère DLT jusqu’à 20 ans.

L'univers de valorisation

La courbe de référence – le Credit Risk Adjustment

- Les taux swap sont considérés par EIOPA comme la meilleure estimation du taux sans risque Euro. Néanmoins, on peut constater que les taux interbancaires « overnight » (EONIA) sont systématiquement inférieurs à leurs correspondants journaliers (EURIBOR).

- On peut en déduire que les taux courts contiennent un risque de crédit, le CRA permet justement de le corriger.

- Lorsque les marchés des swaps sont liquides, transparents et profonds, la formule suivante s'applique :

$$CRA = min\left(35\ bps\ ; max\left(10\ bps\ ; 50\% \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n=1\ an}(EUR3M_i - EONIA3M_i\ )}{n}\right)\right)$$

- Où :
  - EUR3M est le taux Euribor 3 mois,
  - EONIA3M est le taux 3 mois de l'indice EONIA,
  - La moyenne est faite sur 1 an.

L’univers de valorisation

La courbe de référence – la méthode Smith-Wilson

- La méthode S-W permet à la fois d’extrapoler et d’interpoler une courbe des taux. Si l’on considère des maturités manquantes avant le LLP (Last Liquid Point), la méthode les calculera.

- L’extrapolation se fait à partir du LLP, et converge en taux forward vers l’ultimate forward rate (UFR) en un nombre défini d’années.

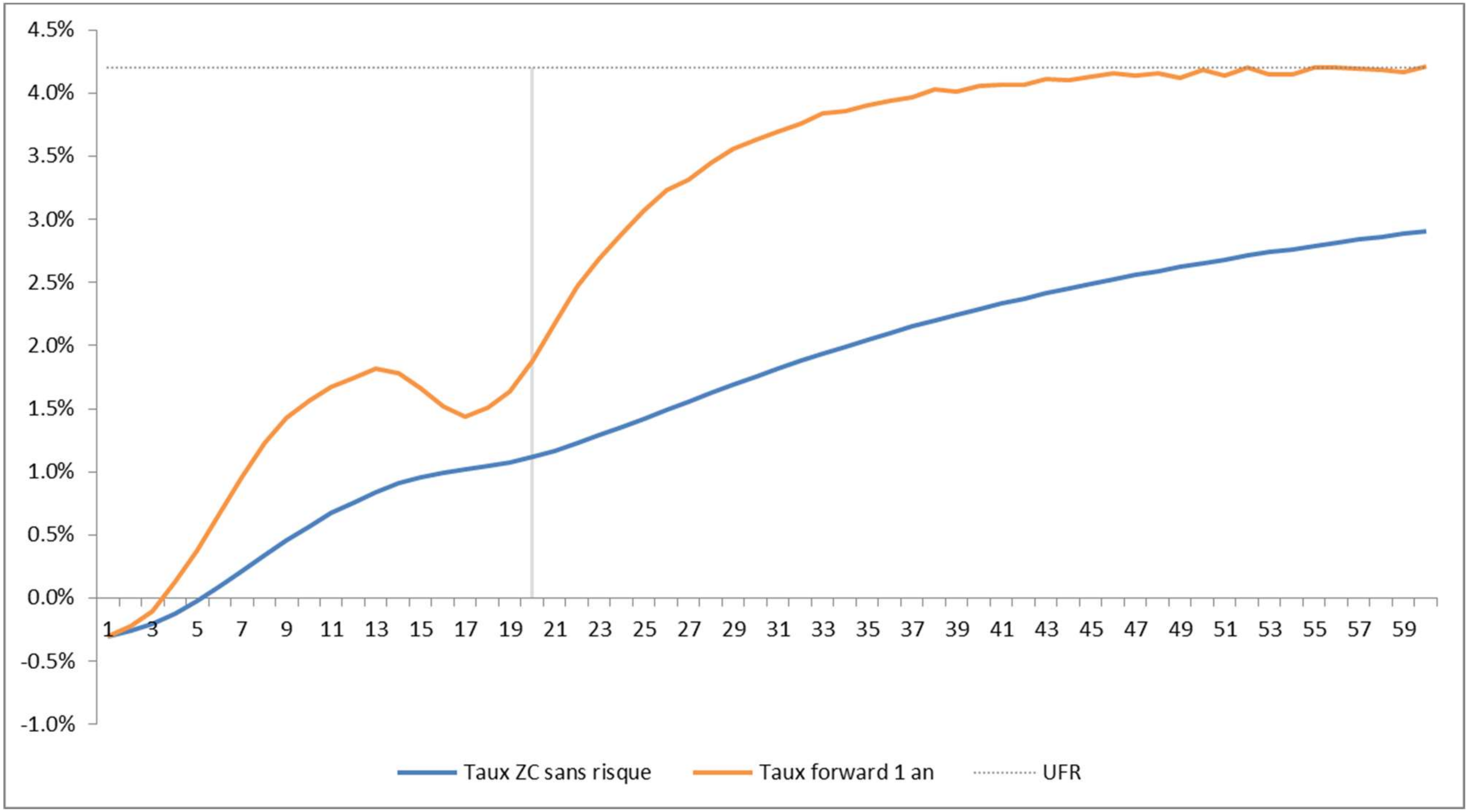
- Les inputs de la méthodes sont soit des taux couponnés, soit des zéro-coupon, la méthode produira les facteurs d’actualisation.

- Cette méthode fournit une courbe passant par l’intégralité des points renseignés en input (parfois au détriment de la dérivabilité).

L’univers de valorisation

La courbe de référence - Bilan

- La courbe de référence sans risque se déduit à partir des taux swap, corrigés du risque de défaut résiduel, découponnés, et interpolés en forward :



L'univers de valorisation

Le rendement d'un actif

- On définit le rendement d'un actif comme le taux d'actualisation unique IRR qui permet de retrouver la valeur de marché de l'actif :

$$VM = \sum_{i=1}^{M} \frac{CF_i^{actif}}{(1 + IRR)^i}$$

- Attention à ne pas confondre le taux de coupon d'un actif avec son rendement !
- Exemple : Obligation Pernod Ricard, de maturité 2024 et de taux de coupon 2.125%, est cotée 108% au 31/12/2016 a un rendement de 1.1%.
- Or, on constate que le taux sans risque pour une maturité de 8 ans est de 0.341%
- Intuitivement, on estime la marge pour risque à 1.1% - 0.341% = 0.76%

L'univers de valorisation

La marge pour risque

- On définit la marge pour risque, ou spread, la prime de risque sur le taux d'actualisation sans risque qui permet d'obtenir la valeur de marché :

$$VM = \sum_{i=1}^{M} \frac{CF_i^{actif}}{(1 + r_i + spread)^i}$$

- Dans le cas de l'obligation Pernod Ricard, on obtient 0.75%.
- Il faut noter que c'est une convention de pricing, il existe d'autre approches pour mesurer le risque d'une obligation.

- Le spread mesure deux éléments :
  - Le risque de défaut de l'émetteur, et donc qu'il ne paie ni les coupons, ni le remboursement ;
  - Le risque d'illiquidité de l'obligation, i.e. l'impossibilité du détenteur de vendre l'obligation sur les marchés.

L’univers de valorisation

Le traitement du risque

- Dans les projection risque-neutres, il est nécessaire d’avoir :
  - La valeur actualisée des flux égale à la valeur de marché (Market Consistency) ;
  - Le rendement des obligations égal au taux sans risque de maturité équivalente.

- Deux traitements existent : la risque-neutralisation ou la projection des spreads et des défauts.

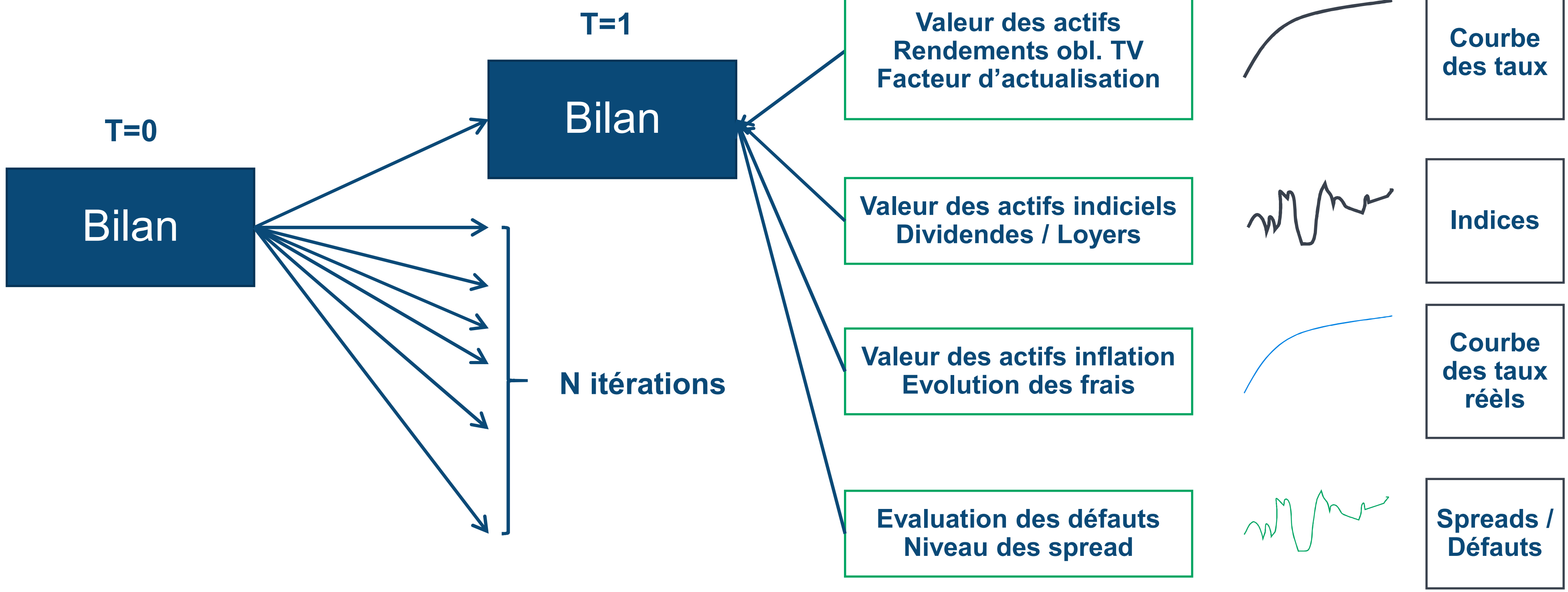
- La risque neutralisation consiste à modifier le remboursement et/ou les coupons de telle manière à obtenir $VM = \sum_{i=1}^{M} \frac{CF_i^*}{(1+r_i)^i}$, et donc considérer un spread à 0.
  - On considère que l’émetteur a immédiatement fait défaut d’une partie de l’obligation.

- Sinon, il convient de projeter spreads et défauts, de manière cohérente et on obtient la formule suivante : $VM = \sum_{i=1}^{M} \frac{CF_i \times (1-def_i)}{(1+r_i+spread)^i}$.
  - Dans cette modélisation, on modélise les défauts de façon prospective.

L'univers de valorisation

Les générateurs de scénarios économiques

- Afin de projeter le rendement des portefeuilles d'actifs, et ainsi déterminer la participation aux bénéfices reversée aux assurés, il est nécessaire d'estimer, de manière stochastique un certain nombre d'éléments.



L'univers de valorisation

Les modèles de taux

- Les ESG permettent de construire des courbes des taux à chaque pas de temps et pour un nombre défini d'itération. Il existe 3 grandes familles de modèle de diffusion:

- Les modèles de taux court, qui est directement modélisé. Par exemple, le modèle de Vasicek : $dr(t) = a\big(b - r(t)\big)dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t)$

- Les modèles fondés sur l'absence d'opportunité d'arbitrage où l'on modélise les prix ZC. Par exemple, les modèles de Heath-Jarrow-Morton:

$$dP(t,T) = P(t,T)\left(r(t)dt + \Gamma_{\Theta}(t,T).\, dW^{\mathbb{Q}}(t)\right)$$

- Les modèles de marché, comme le Libor Market Model, qui est basé sur une projection des taux forward : $dF_k(t) = \sigma_{\Theta}^{k}(t)F_k(t)dW^{\mathbb{Q}^{T_{k+1}}}(t)$
  - Dans ce modèle, W est un mouvement brownien sous la probabilité forward neutre associée à la maturité T_{k+1}. Pour les changements de numéraire, cf. cours de mathématiques financières.

L'univers de valorisation

Les modèles indiciels

- Pour projeter les actifs indiciels dans un univers risque neutre et market consistent, il existe deux modèles qui sont largement utilisés.

- Le modèle de Black & Scholes à volatilité déterministe (TVDV), où l'indice suit un processus log-normal : $dS(t) = S(t)\left(r(t)dt + \sigma_t dW^{\mathbb{Q}}(t)\right)$

- Le modèle à saut de type SVJD, qui introduit une volatilité stochastique ainsi qu'un processus de saut dans la diffusion :

Processus de Poisson représentant les saut LN

$$dS(t) = S(t)\left(\left(r(t) - \lambda\mu_J\right)dt + \sigma_t dW(t) + \boxed{J_t\, dN(t)}\right)$$
$$d\sigma^2(t) = k(\theta - \sigma(t))dt + \sigma^\nu \sigma(t) dW^\nu(t)$$
$$d\langle dW(t) | dW^\nu(t)\rangle = \rho dt$$

L'univers de valorisation

Vérifier la cohérence des scénarios

- Pour vérifier la risque neutralité des scénarios économiques, on met en place des tests de martingalité sur les scénarios.

- On vérifie tout d'abord que les déflateurs sont bien centrés sur la chronique des prix ZC initiaux, i.e. on actualise en moyenne au taux sans risque :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big(D(t)\big) = P_n(0,t)$$

- Ensuite, on vérifie que toute stratégie de taux de maturité M revient à avoir investi directement dans un ZC de maturité M (critères RN et AOA) :

$$\forall m \in [\![1, M]\!],\ \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big(D(t)P_n(t,t+m)\big) = P_n(0,t+m)$$

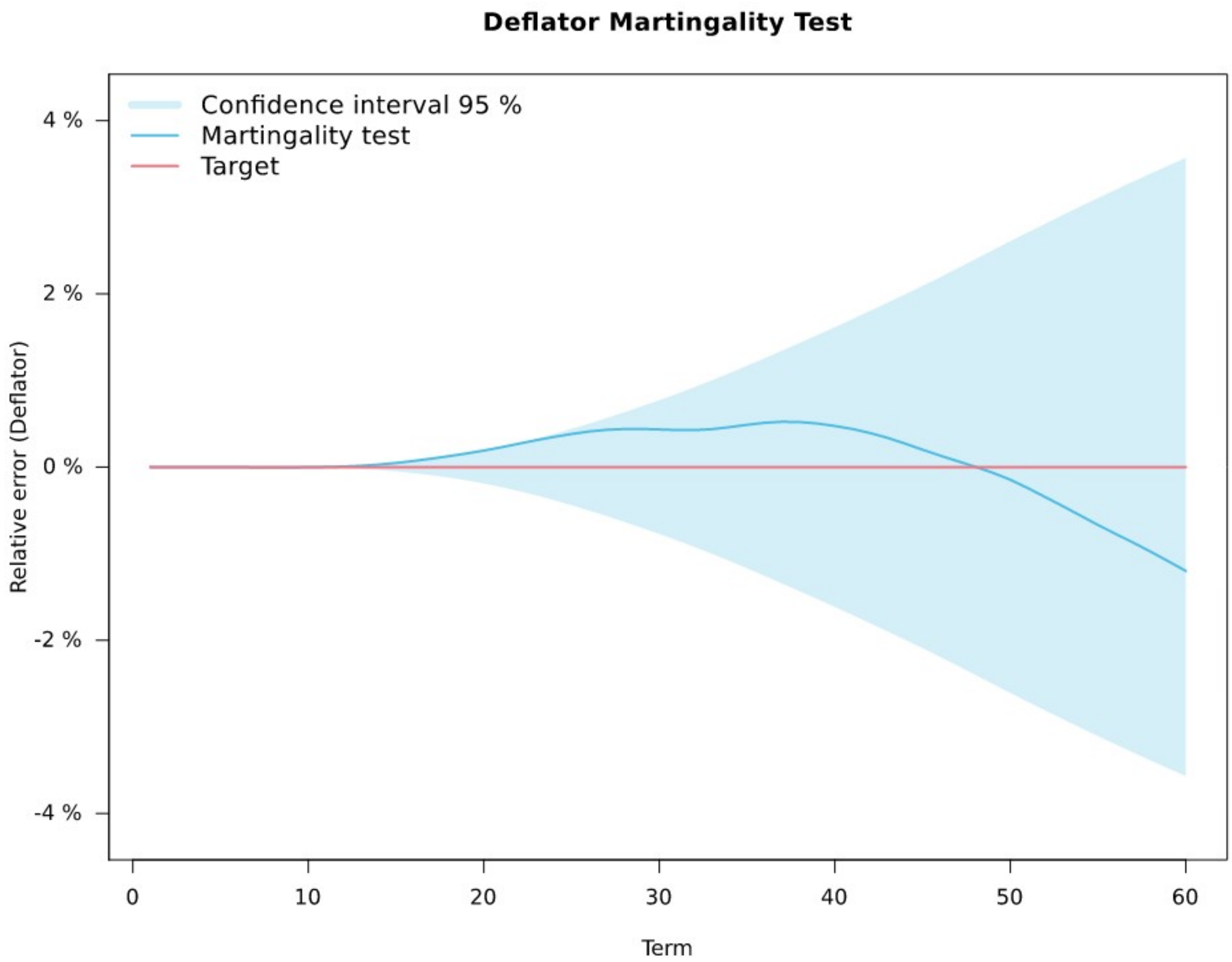
- Enfin, il convient de vérifier qu'en moyenne, les actifs indiciels ont rapporté le taux sans risque :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\big(D(t)S(t)\big) = S(0)$$

L’univers de valorisation

Vérifier la cohérence des scénarios

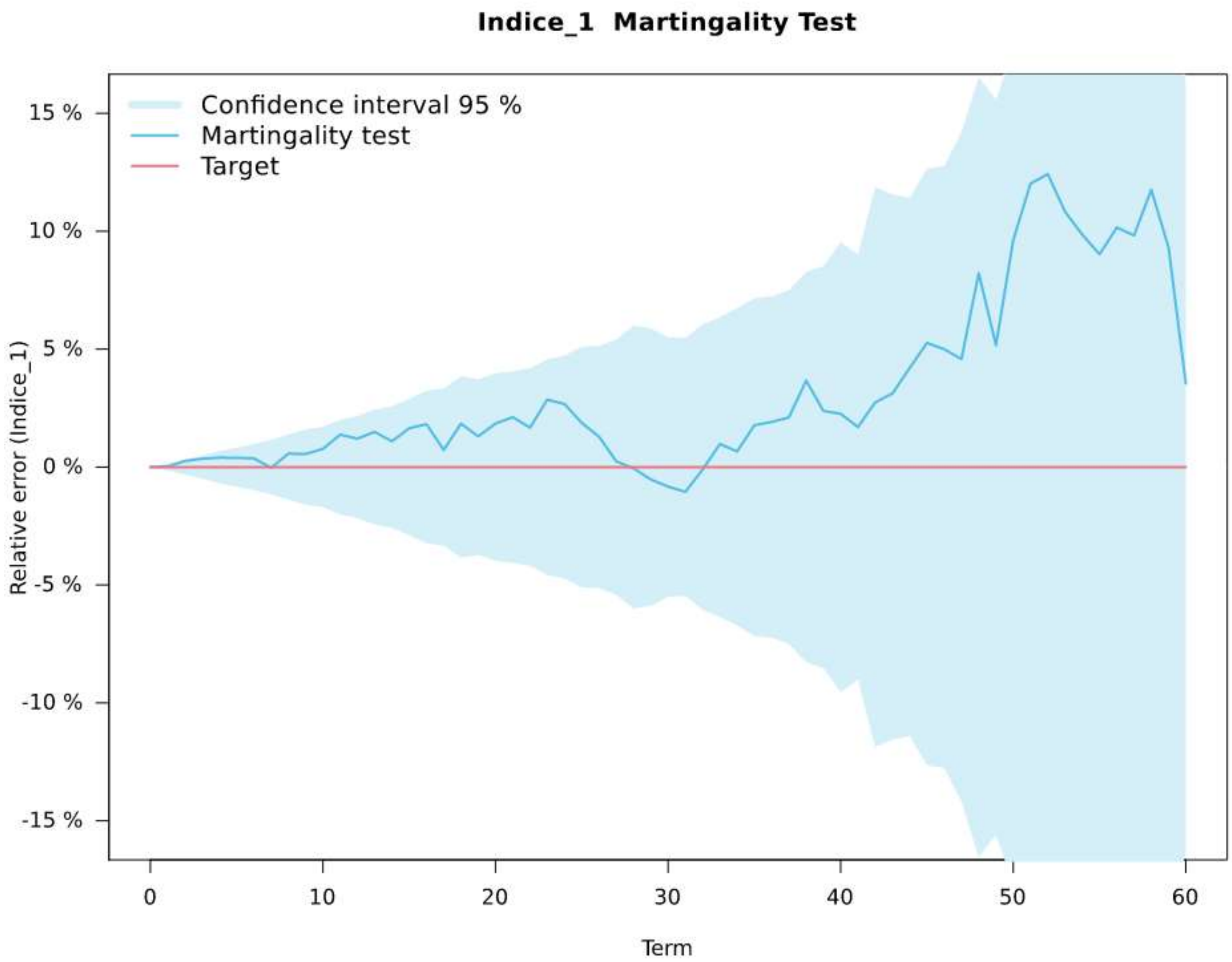
- Test de martingalité déflateur sur Milliman CHESS™ :



L’univers de valorisation

Vérifier la cohérence des scénarios

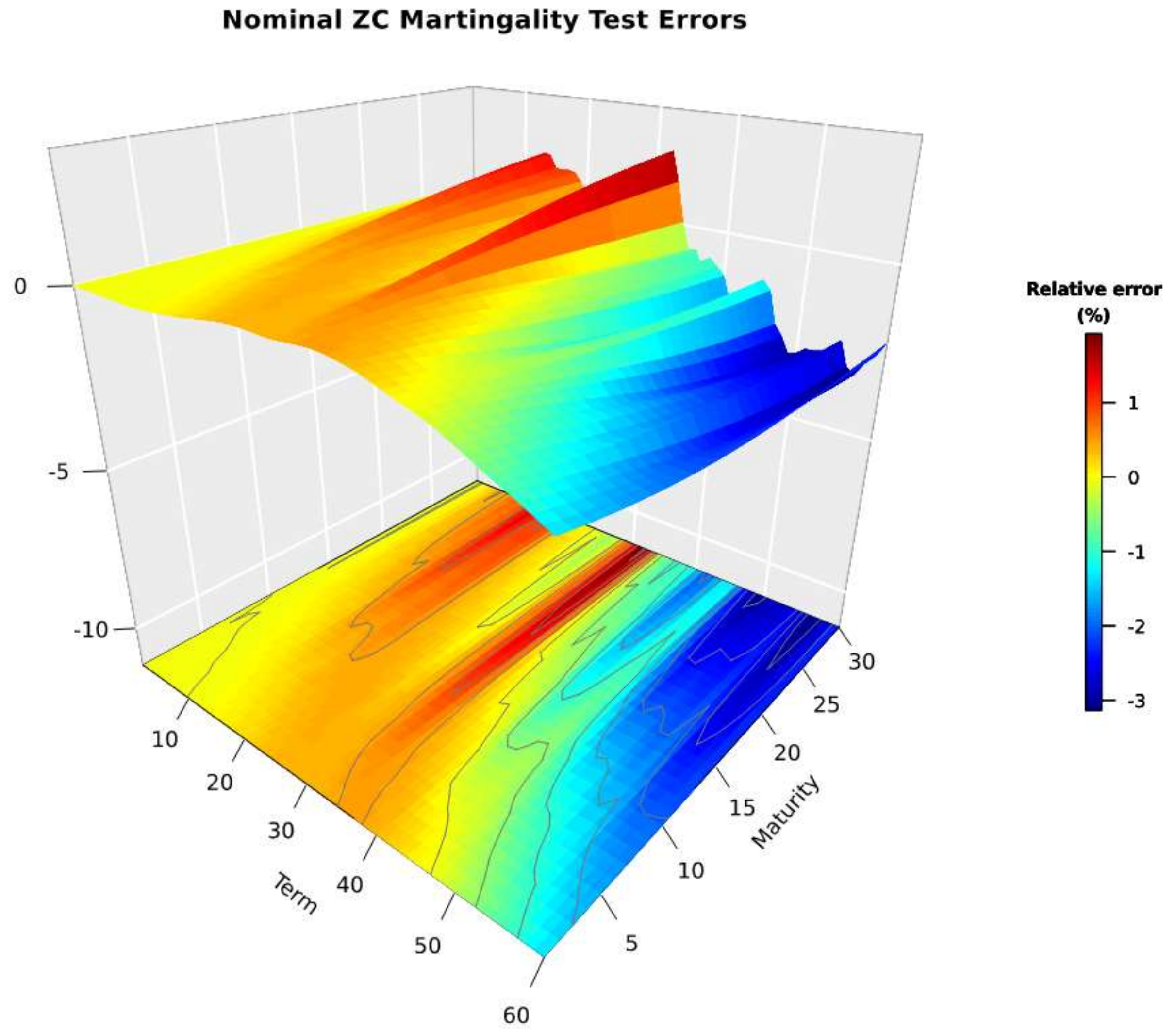
- Test de martingalité action sur Milliman CHESS™ :



L'univers de valorisation

Vérifier la cohérence des scénarios

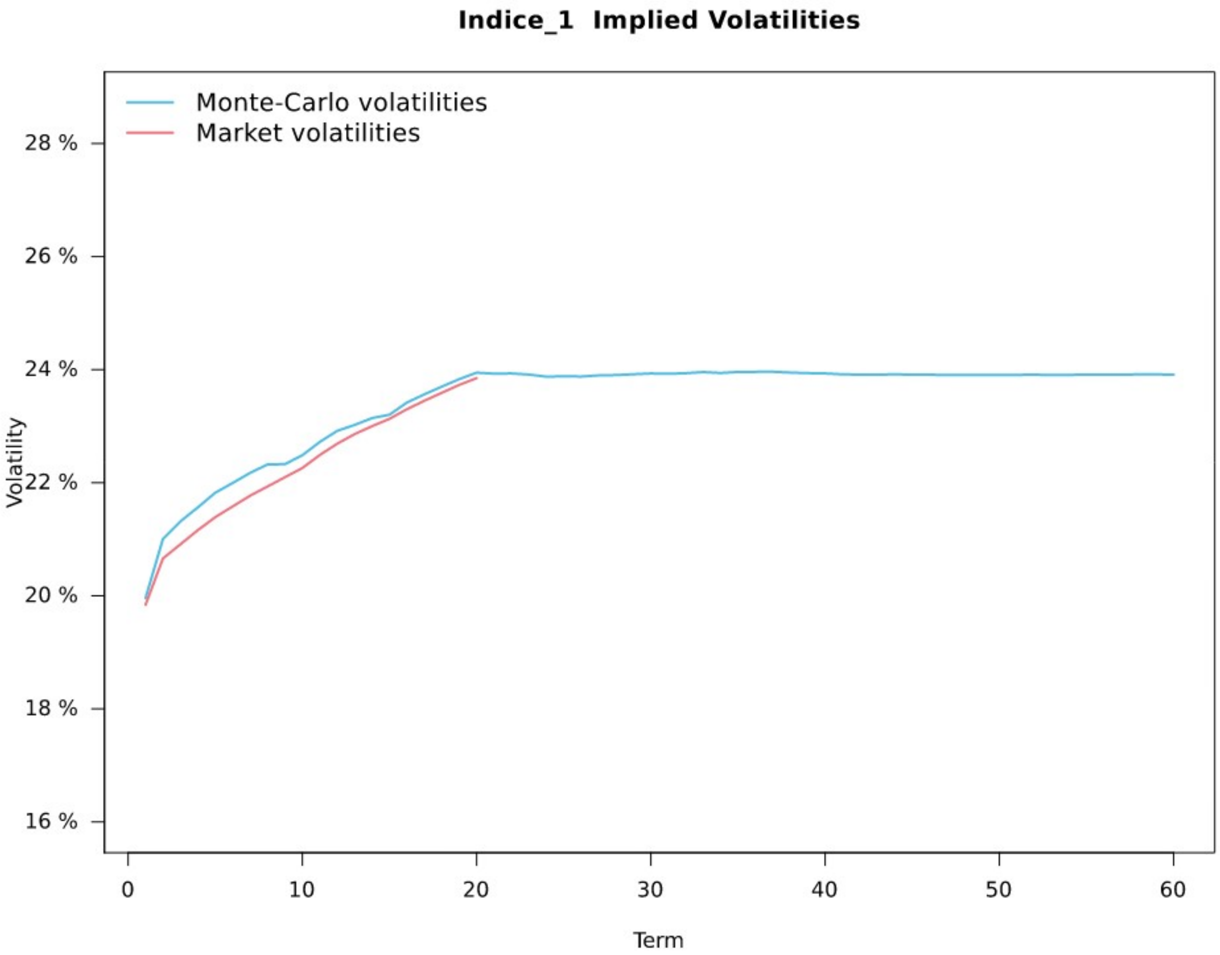
- Test de martingalité PZC sur Milliman CHESS™ :



L’univers de valorisation

Vérifier la cohérence des scénarios

- Pour vérifier la market consistency des scénarios économiques, on s’assure que les volatilités recalculés à partir des scénarios sont cohérentes avec les volatilités de marché :



L'univers de valorisation

Teaser – Next Week

- Les assureur utilisent des tables stochastiques pour estimer la valeur prospective de leur portefeuilles.

- Il convient alors d'estimer les indicateurs VIF, BEL, NAV dans ce nouveau référentiel.

- La présence des options, des différentes classes d'actif et du fonctionnement même des sociétés d'assurance conduit à la construction de modèles ALM complexes :
  - Aperçu de l'architecture des modèles
  - On étudiera quelques points de modélisation
  - Problématiques liés au modèles

- Enfin, il convient de prendre du recul par rapport à la modélisation, et de bien comprendre ses limites.

Annexes : TD

https://www.dropbox.com/s/ntw6a7rh7xb5o80/

TD n°1

Découponner des taux

- Les **taux swap sont des taux couponnés** (par rates), c'est-à-dire qu'il correspondent aux taux de coupon d'une obligation au pair. On a donc la relation suivante entre un taux couponné TC_n de maturité n et les facteurs d'actualisation $DF_1, \dots, DF_n$:

$$1 = TC_n \cdot DF_1 + \cdots + TC_n \cdot DF_n + 1 \cdot DF_n$$

- On obtient donc la relation de récurrence suivante qui permet d'obtenir les facteurs d'actualisation (et donc les taux zéro coupon et les taux forward) :

$$DF_n = \frac{1 - \sum_{i=1}^{n-1} TC_n \cdot DF_i}{1 + TC_n}$$

- Pour obtenir la courbe des taux zéro coupon, ce processus devra donc être appliqué.

Merci

Samy.collier@bnpparibas.com
24 février 2021