Crédibilité - Systèmes bonus-malus

Année universitaire 2007-2008 - Première session

29 avril 2008 - Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé.

Exercice n°1

Soit N_j le nombre de sinistres causés par un assuré pendant l'année j. Conditionnellement à $\Theta = \theta$, les N_j sont supposées i.i.d. de loi de Poisson de paramètre θ, i.e.

$$\Pr\left[N_j = k | \Theta = \theta\right] = e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!}, \text{ pour } k \in \mathbf{N}.$$

La distribution *a priori* de Θ est une loi Gamma de paramètres γ et β, i.e. de densité

$$u(\theta) = \frac{\beta^\gamma}{\Gamma(\gamma)}\theta^{\gamma-1}e^{-\beta\theta}, \text{ pour } \theta \geq 0.$$

1. Les montants de sinistres sont constants égaux à 1. Quelle prime pure réclameriez-vous à un nouvel assuré ?

2. Montrez que les familles des lois de Poisson et des lois Gamma sont conjuguées. Qu'en déduisez-vous sur l'intérêt de ce modèle dans la cadre de la révision des primes ?

3. Donnez la densité *a posteriori* de Θ pour un assuré qui a causé $k_1, ..., k_n$ sinistres durant les n premières années. Déduisez-en la prime de Bayes pour la $(n+1)$-ème année.

Exercice n°2

Une société d'assurance couvre deux contrats depuis 3 ans. Elle dispose des montants annuels de sinistres suivants :

Contrat	Année 1	Année 2	Année 3
1	5	8	11
2	11	13	12

Selon le modèle de Bühlmann, quelles primes réclameriez-vous à ces deux assurés pour la 4^e année ?

Exercice n°3

Soit N_j le nombre annuel de sinistres causés par un conducteur du portefeuille. Supposons que, conditionnellement à Θ, les N_j soient des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées telles que :

$$\Pr(N_j = 1|\Theta = \theta) = 1 - \Pr(N_j = 0|\Theta = \theta) = \theta,$$

avec

$$\Theta = \left\{ \begin{array}{ll} 0,1, & \text{avec la probabilité } 0{,}8\,; \\ 0,2, & \text{avec la probabilité } 0{,}2. \end{array} \right\}$$

1. Si un assuré n'a déclaré aucun sinistre au cours des 3 premières années de couverture, estimez la probabilité qu'il cause 1 sinistre durant la quatrième année.

2. Afin de corriger l'hétérogénéité du portefeuille induite par Θ, la société d'assurance met en place un système bonus-malus à trois degrés $(0; 1; 2)$. L'entrée se fait au niveau 1 puis :
- chaque année sans sinistre est gratifiée d'une descente d'un degré dans l'échelle ;
- chaque sinistre est pénalisé par une remontée d'un niveau.

a. Donnez la matrice de transition sachant $\Theta = 0,1$.

b. En régime stationnaire, quelle est la répartition des assurés entre les trois degrés de l'échelle ?

c. Quelle prime relative associer aux différents échelons ?

Quelques rappels :

– Estimateurs des paramètres de structure dans le modèle de Bühlmann :

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{I(n-1)} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n} \left(X_{ij} - \bar{X}_i\right)^2,$$
$$\widehat{\tau^2} = \frac{1}{I-1} \sum_{i=1}^{I} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 - \frac{\widehat{\sigma^2}}{n};$$

– Si $Y \sim Gamma(\gamma, \beta)$, alors $\mathrm{E}[Y] = \frac{\gamma}{\beta}$ et $\mathrm{Var}[Y] = \frac{\gamma}{\beta^2}$.