Examen - Finance Mathématique
M2 Actuariat
jeudi 19 janvier 2017
Durée 2h, supports de cours et calculatrices non autorisés
La notation prendra en compte la qualité de la rédaction.

Question 1. On observe à la date t la cotation S d'un swap contre Euribor 6 mois de maturité 3 ans. On note R le taux variable, $T_1, \ldots, T_n$ les dates successives des flux de la jambe fixe et $t_1, \ldots, t_p$ les dates successives des flux de la jambe variable.

1. Quelles durées séparent la date courante t des instants T_i, $i = 1, \ldots, n$ pour un swap classique ayant ces caractéristiques ? Même question pour les instants t_j, $j = 1, \ldots, p$.
2. Pour un nominal d'une unité monétaire et une position en tant que receveur, donner l'expression des flux de la jambe fixe et de la jambe variable. Représenter sur un diagramme les flux associés à cette position.
3. Exprimer en AOA la valeur en t du flux de la jambe fixe correspondant à la date T_i et du flux de la jambe variable correspondant à la date t_j. On donnera des expressions en fonction de prix d'obligations ZC que l'on précisera.
4. En AOA, quelle relation doit vérifier en t la cotation S du swap ? Donner l'expression de S.
5. On observe à la date t les cotations $S_1, \ldots, S_q$ associées à des swaps contre Euribor 6 mois de maturités $\tau_1 < \cdots < \tau_q$.
   a) En AOA, quel système linéaire est vérifié par les prix des ZC ?
   b) Préciser dans quel cas ce système est inversible ? Pourquoi ce système n'est pas inversible en pratique ?
   c) Proposer une méthode qui, à partir des cotations $S_1, \ldots, S_q$, permet de construire une courbe de taux spot et sa courbe des taux forward associée.

Question 2. On rappelle que, dans un cadre HJM, la dynamique risque-neutre des taux forward instantanés est donnée par

$$df(t,T) = \sigma_f(t,T)\sigma^*(t,T)dt + \sigma_f(t,T)dW_t$$

où W est un mouvement brownien standard.

1. Quel est l'intérêt pratique d'un modèle HJM par rapport à un modèle de taux court ? Quelles sont les données d'entrée de ce modèle ?
2. Exprimer σ^* en fonction de σ_f.
3. Soit A la fonction définie par $A(t) = f(0,t) + \int_0^t \sigma_f(u,t)\sigma^*(u,t)du$, $t \geq 0$. Donner l'expression explicite du taux court r_t en fonction de A et de σ_f .
4. On suppose que $\sigma_f(t,T) = \alpha(t)\beta(T)$ où α et β sont des fonctions déterministes du temps. Montrer que

$$dr_t = (a(t) + b(t)r_t)dt + c(t)dW_t$$

où a, b, c sont à expliciter en fonction de A, β, σ_f et de leur dérivées. Commenter.

5. On suppose que $\sigma_f(t,T) = \sigma \exp\left(-a(T-t)\right)$ où σ et a sont deux paramètres positifs.
   a) Expliquer pourquoi la dynamique de r est markovienne. A quel modèle ce choix correspond-il ?
   b) Montrer que la dynamique de r peut s'exprimer sous la forme suivante :
   $$dr_t = (\theta(t) - ar_t)dt + \sigma dW_t$$
   où
   $$\theta(t) = \frac{\partial f}{\partial T}(0,t) + af(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-2at}).$$
   Notons que dans l'expression précédente, $\frac{\partial f}{\partial T}$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à son second argument.
   c) Donner la dynamique risque-neutre des prix de zero-coupon dans ce modèle.
   d) Intégrer l'équation précédente et montrer, en utilisant la relation $P(t,t) = 1$, que la solution peut être donnée indépendamment de r.
   e) Une fois la courbe de taux initiale prise en compte, quels sont les paramètres restants du modèle ? Comment procéderiez-vous pour calibrer ces paramètres ?

Question 3. On note $P(t,T)$ le prix en t d'une obligation zéro-coupon (ZC) de maturité T. On note $\mathcal{F}$ la filtration associée à la dynamique du prix des ZC.

1. Montrer par un raisonnement d'AOA (absence d'opportunité d'arbitrage) que, à t fixé, la fonction $T \mapsto P(t,T)$ est décroissante.
2. Soit $t \leq T_1 \leq T_2$. Retrouver l'expression du taux forward $F(t,T_1,T_2)$ dans la convention simple des intérêts en fonction du prix de ZC que l'on précisera.
3. Définir la mesure T–forward-neutre et expliquer comment la construire à partir de la mesure risque-neutre.
4. Montrer que le processus $(F(t,T_1,T_2))_{0\leq t\leq T_1}$ est une $(\mathbb{Q}_{T_2},\mathcal{F})$–martingale où $\mathbb{Q}_{T_2}$ est la mesure T_2–forward neutre.
5. En déduire que
   $$F(t,T_1,T_2) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_{T_2}}\left[R(T_1,T_2) \mid \mathcal{F}_t\right].$$
   Commenter cette dernière expression.