TD MAD N°2

Exercice 1 : Soit Q une matrice de transition.

a) Définit° de l'irréductibilité

b) Exemple de chaîne pas irréductible

c) Exemple où $Q_{i,j} = 0$, mais la chaîne est irréductible. pour 2 états i et j

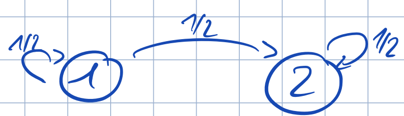
d) Exemple où $(Q^k)_{i,j} = 0$, pour $k \in \mathbb{N}$ mais la chaîne est irréductible. pour 2 états i et j

a)

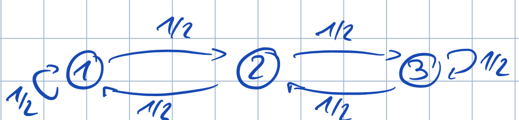
> **Définition** : On dira que deux états x et y **communiquent**, si il existe deux entiers $n, m > 0$ tels que $\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) > 0$ et $\mathbb{P}(X_m = x | X_0 = y) > 0$.
> La chaîne sera dite **irréductible** si tous les états communiquent.

Q est irréductible si $\forall i,j \in E$, $\exists k \in \mathbb{N}$, $(Q^k)_{i,j} > 0$

b)



c)



d)

N+1 états

$(Q_{1,N+1}{}^k) = 0$

$\iff \mathbb{P}(X_k = N+1 | X_0 = 1) = 0$

Exercice 2 : Maladie Contagieuse

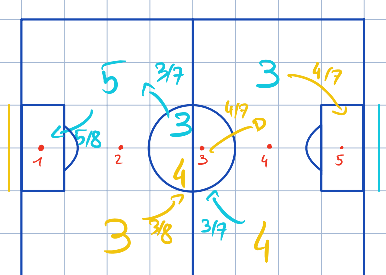
Fait en cours

Exercice 3 : Jeu du Soccer.

1/1

3-4-4

5-3-3



a) Mesure initiale ?
Matrice de transition ?

$* \ \mu_0 = (0,0,1,0,0)$

$$* \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5/8 & 0 & 3/8 & 0 & 0 \\ 0 & 3/7 & 0 & 4/7 & 0 \\ 0 & 0 & 3/7 & 0 & 4/7 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

b) La chaîne est-elle irréductible ? Oui
Calculer sa probabilité invariante.

$\pi = (a,b,c,d,e)$ On a $\begin{cases} a+b+c+d+e=1 \\ a = \frac{5}{8} b \\ b = \frac{3}{7} c \\ c = a + \frac{3}{8} b + \frac{3}{7} d + e \\ d = \frac{4}{7} c \\ e = \frac{4}{7} d \end{cases}$

On cherche π tq
- $\pi P = \pi$
- π est une proba.

$a = \frac{5}{8} b = \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} c = \frac{15}{56} c$
$b = \frac{3}{7} c$
$d = \frac{4}{7} c$
$e = \frac{4}{7} d = \frac{16}{49} c$

On remplace dans $a+b+c+d+e=1 \Rightarrow c = \frac{196}{547}$

$$\Rightarrow \boxed{\pi = \frac{196}{547} \left(\frac{15}{56}, \frac{3}{7}, 1, \frac{4}{7}, \frac{16}{49} \right)}$$