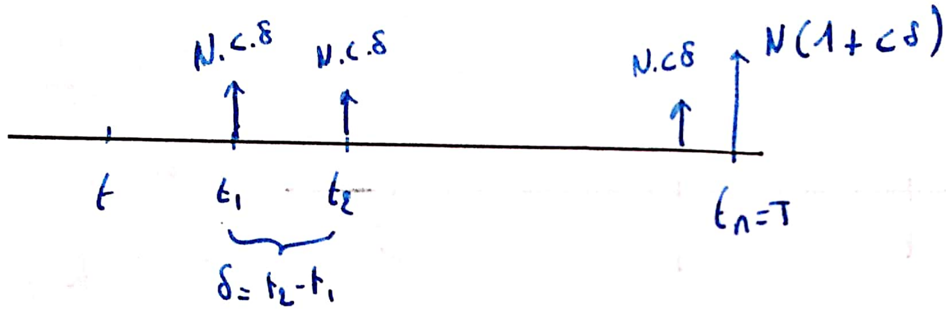
Finance mathématique

Chapitre 2 : Principaux produits de taux d'intérêt

I - Obligation à coupons

c'est un produit financier qui verse des flux périodiques proportionnels au nominal.



ici : N : nominal

c : taux des coupon

δ : nb d'années/période qui séparent deux dates consécutive de détachement de coupons.

On note le prix de ce produit $B(t,T)$

Proposition

En AOA, le prix de l'obligation à coupon est donné par

$$B(t,T) = \sum_{i=1}^{n-1} N.c.\delta\, P(t,t_i) + N(1+c\delta)P(t,t_n)$$

Démonstration :

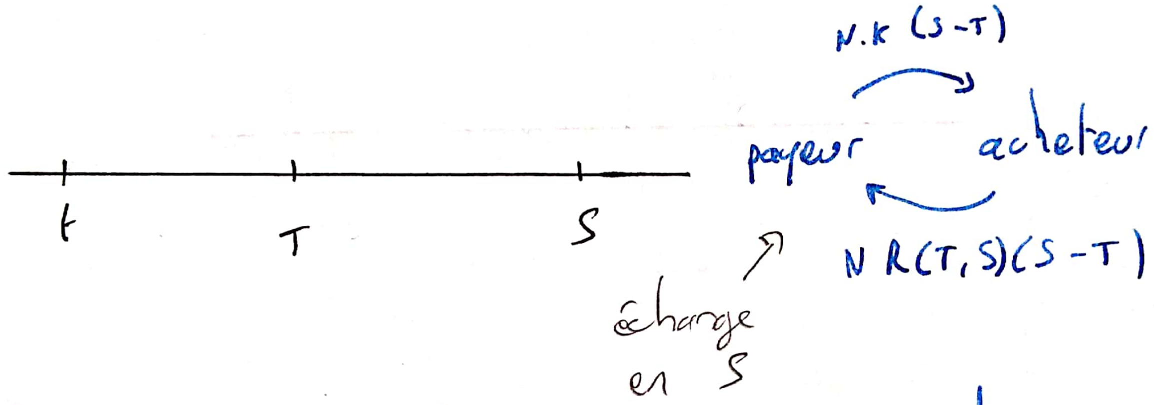
Si on considère la stratégie d'investissement suivante (en t)

- achat de $N\delta.C$ de Z.C de maturité t_1 $P(t,t_1)$
- achat $N(1+C\cdot\delta)$ de $P(t,t_n)$

Le flux correspondant est le suivant

- en t_1 : $NC\delta$ ... en t_n $N(1+C\delta)$

II_ Forward Rate agreement (FRA)



C'est un échange à une date S d'un taux fixe k contre un taux variable constaté à une date $T<S$.

Un FRA payeur paye le taux fixe k et on note son prix $\Pi^{FRA-P}(t,T,S,k)$

Comment déterminer le prix $\Pi^{FRA-P}(t,T,S,k)$?

$$\Pi^{FRA-P}(S,T,S,k) = NR(T,S)(S-T) - Nk(T-S)$$

Si on considère une convention <u>simple</u> de calcul des taux

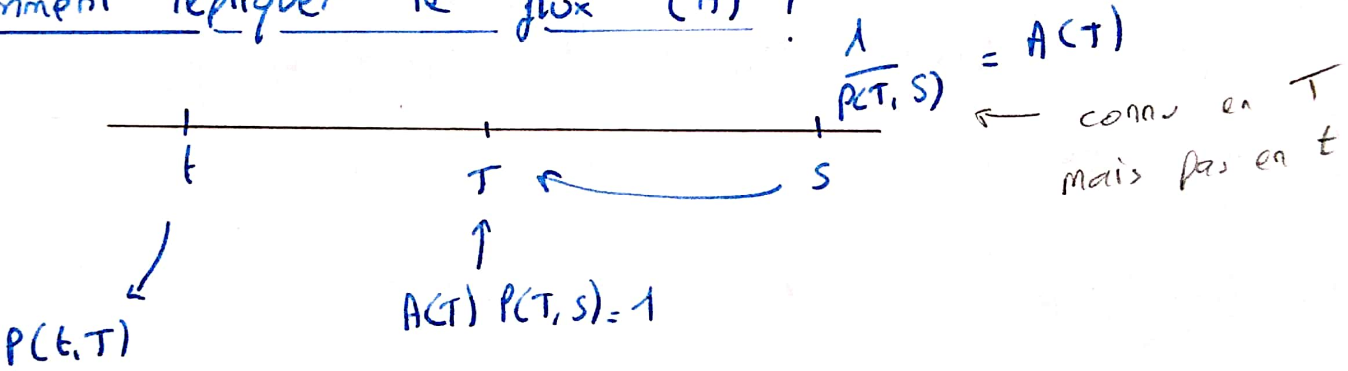
on a :

$$R(T,S) = \frac{1}{S-T}\left\{\frac{1}{P(T,S)} - 1\right\}$$

Donc

$$\Pi^{FRA-P}(S,T,S,k) = N\left\{\underbrace{\frac{1}{P(T,S)}}_{(A)} - \underbrace{(1+k(S-T))}_{(B)}\right\}$$

<u>Comment répliquer le flux (A)</u> ?



- En achetant en t le ZC $P(t,T)$ qui donne une unité en T.
- En achetant $\frac{1}{P(T,S)}$ de Z.C $P(T,S)$

Donc le coût/prix de cette stratégie est $P(t,T)$

<u>Comment répliquer le flux (B)</u> ?

En achetant en t $(1+k(S-T))$ de Z.C $P(t,S)$

Donc le prix de FRA payeur

$$\Pi^{FRA-P}(t,T,S,k) = N\left(P(t,T) - (1+k(S-T))P(t,S)\right)$$

NB: Le FRA acheteur (receveur) noté Π^{FRA-R} est donné en AOA.

$$\Pi^{FRA-R}(t,T,S,k) = -\Pi^{FRA-P}(t,T,S,K)$$

Definition

Le taux d'équilibre $K_{eq}(t)$ est le taux qui égalise le prix acheteur et payeur. C'est-à-dire

$$\Pi^{FRA-R}(t,T,S,K_{eq}(t)) = \Pi^{FRA-P}(t,T,S,K_{eq}(t))$$

En AOA, on a également $\Pi^{FRA-P} = -\Pi^{FRA-R}$

Donc le taux d'équilibre est solution

$$\Pi^{FRA-R}(t,T,S,K_{eq}(t)) = 0$$

Donc

$$K_{eq}(t) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right)$$

Le taux d'équilibre est donc le taux forward

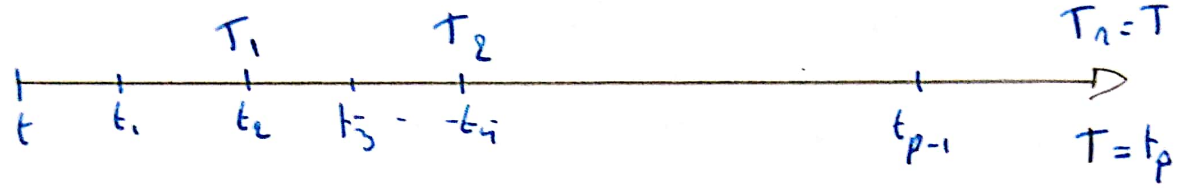
$$K_{eq}(t) = F(t,T,S)$$

NB: En convention simple

III - Swap

C'est un échange financier à des dates fixes de taux variables contre un taux fixe.

Les flux d'un swap sont les suivants



- $R(t_j, t_{j+1})$: Le taux variable constaté à t_j et échangé en t_{j+1}

- δ : la période entre deux dates consécutives d'échange de taux variable. $\delta = t_j - t_{j-1}$

Par exemple, pour $\delta = 3$ mois on échange un LIBOR.

- $R(t_j, t_{j+1})$ 3 mois
- K : taux fixe
- N : le nominal
- $t_1 < t_2 < \dots < t_p$ date de paiement d'intérêt variables.

  $t_0 < t_1 < \dots < t_{p-1}$ date de revision de taux variables
- $T_1 < T_2 < \dots < T_n$ dates de paiement de taux fixe.

<u>NB</u> : Les paiements fixes se font sur une base annuelle

Evaluation du swap (en AOA)

- Pour les intérêts fixes, payés en T_i.

$$NK.(T_i - T_{i-1}) \text{ en } T_i$$

Son prix est $NK(T_i - T_{i-1})P(t,T_i)$

- Pour les intérêts variables payés en t_j

$$N.R(t_{j-1},t_j)(t_j - t_{j-1}) = N\left(\frac{1}{P(t_{j-1},t_j)} - 1\right)$$

Son prix en t

$$N\Big(\underbrace{\frac{1}{P(t_{j-1},t_j)}}_{P(t,t_{j-1})} - \underbrace{1}_{P(t,t_j)}\Big)$$

Donc le prix est $N(P(t,t_{j-1}) - P(t,t_j))$

Pour un swap payeur (du tx fixe), son prix est donné par

$$\Pi^{swap-p}(t,T,K) = N\sum_{j=1} P(t,t_{j-1}) - P(t,t_j)$$
$$- Nk\sum_{i=1}^{n} P(t,T_i)(T_i - T_{i-1})$$

$$\Pi^{swap-p}(t,T,k) = N(\underbrace{P(t,t_0)}_{=1} - P(t,t_p)) - Nk\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})P(t,T_i)$$

Definition

Le taux d'equilibre $K_{eq}(t)$ est celui qui égalise la jambe variable et la jambe fixe

$$\Pi^{swap-P} = \Pi^{swap-R}$$

(Sachant qu'en AOA, $\Pi^{swap-P} = -\Pi^{swap-R}$)

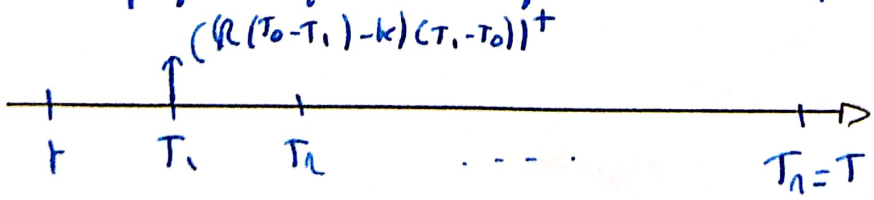
Autrement $\Pi^{swap-P}(t, T, K_{eq}(t)) = 0$

$$K_{eq}(t) = \frac{P(t,t_0) - P(t,t_p)}{\sum_{i=1}^{n} (T_i - T_{i-1}) P(t, T_i)}$$

Ce taux d'équilibre est appelé le taux swap forward.

IV - Cap - floor

① Un cap est un swap de taux payeur où la différence entre les taux variables et les taux fixe n'est payée que lorsqu'elle est positive



Utilité :

souhait de l'assureur

$R(T_i,T_{i+1}) < K$

Assureur → (assuré)

↑

CAP avec tx fixe K

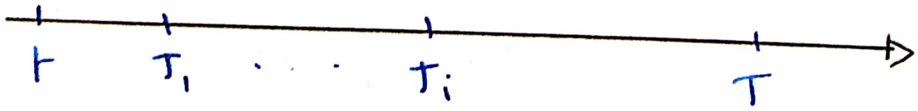
$$\underbrace{(R(T_i,T_{i+1})-K)^+(T_{i+1}-T_i)}_{\text{flux du CAP}} - R(T_i,T_{i+1})(T_{i+1}-T_i) = -\min(R(T_i,T_{i+1}),K)(T_{i+1}-T_i)$$

Total : versement de K au maximum

② FLOOR

FLOOR : C'est un swap receveur où la différence entre les taux fixe et variable est payée lorsqu'elle est positive :

$$(K-R(T_{i-1},T_i))^+(T_i-T_{i-1})$$



Utilité : Un swap permet de se couvrir contre la baisse des taux.

Proposition (Parité CAP-FLOOR)

Nous avons la relation suivante

$$\Pi^{CAP}(t) - \Pi^{FLOOR}(t) = \Pi^{SWAP-P}(t)$$

le prix à la date t du CAP et FLOOR.

NB: Cette proposition est valide uniquement pour CAP et FLOOR avec les mêmes caractéristiques.

Preuve :

$$\underbrace{(R-K)^+}_{CAP} - \underbrace{(K-R)^+}_{FLOOR} = R-K$$

Donc par AOA, on retrouve le prix à la date initiale

V - Swaption

Une swaption est une option de type Européenne dont le sous-jacent est un swap payeur, qui donne le droit et non l'obligation, de contracter le swap de taux avec un taux fixe à l'avance.

Caractéristiques

- T_0 : maturité de l'option (qui coïncide avec la première date de constatation des taux variables de swap)
- T : maturité du swap
- K : c'est le taux fixe
- R : Le taux variable.

En AOA, le prix de la swaption

$$\Pi^{swaption-R}(T_0, T_0, T, K) = \left(\Pi^{swap-R}(T_0, T, K)\right)^+$$

maturité option ↑ ↑ maturité swap

$$\Pi^{SWAP-R}(T_0, T, K) = (P(T_0, T_0) - P(T_0, T))N + NK\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})P(T_0, T_i)$$

On suppose que la jambe variable et la jambe fixe ont les mêmes dates de paiement.

① Récupérer le prix du swap en fonction du taux swap $[K_{eq}(t) = S(t)]$

② Réarranger l'équation pour faire apparaître le payoff d'une option "EU"

$$S(T_0,T) = \frac{P(T_0,T_0)-P(T_0,T)}{\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})P(T_0,T_i)}$$

$$= \frac{\sum_{i=1}^{n} P(T_0,T_{i-1}) - P(T_0,T_i)}{\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})P(T_0,T_i)}$$

$\Pi^{Swap\text{-}R}$ en fonction de $S(T_0,T)$!

$$\Pi^{SWAP\text{-}R}(T_0,T,R) = N\sum (T_i - T_{i-1})P(T_0,T_i)K - S(T_0,T)N\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})P(T_0,T_i)$$

$$= N\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})P(T_0,T_i)(K - S(T_0,T))$$

Donc le prix :

$$\Pi^{SWAPTION}(T_0,T_0,T,K) = N\sum_{i=1}^{n}(T_i - T_{i-1})P(T_0,T_i)(K - S(T_0,T))^+$$

$\Rightarrow$ Le prix de la swaption en T_0 est proportionnel à un put de type européen de strike K (taux fixe) et de sous-jacent le taux swap.

NB :

- On ne peut pas répliquer le payoff de ce produit à partir de portefeuille de ZC.

- La courbe de taux en t n'est pas suffisante pour évaluer ces options.

- Nécessité des hypothèses supplémentaire sur la déformation de la courbe des taux.