– Université Lyon 1, ISFA – Master SAF 1ère année –

Processus stochastiques

Examen du 7 janvier 2013 – Durée : 2h30.

Tous les documents, les calculatrices et tous les autres appareils électroniques sont interdits.
Tous vos résultats doivent être justifiés, par un calcul détaillé et/ou un raisonnement clair s'appuyant sur les résultats donnés en cours. La qualité de la rédaction et la précision des explications fournies entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1

Formule d'Itô

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.

1. Ecrire les processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(U_t)_{t\geq 0}$ donnés ci-dessous comme processus d'Itô, c'est-à-dire sous la forme :
$$\int_0^t \mu(s, B_s)\, \mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, B_s)\, \mathrm{d}B_s,$$
en précisant leur drift μ et leur terme de diffusion σ.
   (a)
$$X_t = (B_t + t)e^{-B_t - \frac{t}{2}}$$
   (b)
$$U_t = e^{\frac{t}{2}} \sin(B_t)$$
2. Trouver la solution de l'EDS suivante :
$$\mathrm{d}Y_t = \frac{1}{2} Y_t\, \mathrm{d}t + Y_t\, \mathrm{d}B_t, \quad \text{avec } Y_0 = 1.$$
On pourra admettre que cette solution est strictement positive.
3. Donner une EDS satisfaite par le processus suivant :
$$Z_t = \frac{B_t}{1+t}.$$

Exercice 2

Processus racine carrée

On considère le processus $(X_t)_{t\geq 0}$ solution de l'équation différentielle stochastique suivante :
$$\mathrm{d}X_t = a(b - X_t)\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{X_t}\mathrm{d}W_t,$$
où $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien standard, et a, b, σ sont des paramètres dans $\mathbb{R}_+^*$.
On note $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration naturelle associée à $(W_t)_{t\geq 0}$.

1. Que pouvez-vous dire (qualitativement) sur le comportement des trajectoires du processus $(X_t)_{t\geq 0}$?
2. Ecrire une équation différentielle stochastique satisfaite par le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ défini par :
$$\forall t \geq 0, \quad Y_t = e^{at} X_t.$$
On donnera la réponse en écrivant $\mathrm{d}Y_t$ en fonction de $\mathrm{d}W_t$, $\mathrm{d}t$, $\sqrt{X_t}$, de t et des paramètres a, b, σ.
3. En déduire, pour $u \geq 0$, l'expression de Y_u en fonction de u, Y_0, a, b, σ et du processus $(M_u)_{u\geq 0}$ défini par :
$$\forall u \geq 0, \quad M_u = \int_0^u e^{at}\sqrt{X_t}\mathrm{d}W_t.$$
4. Rappeler brièvement pourquoi $(M_u)_{u\geq 0}$ est une martingale, relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$. En déduire $\mathbb{E}(M_u)$ pour $u \geq 0$.
5. Exprimer $\mathbb{E}(Y_u)$, puis $\mathbb{E}(X_u)$, en fonction de u, X_0, a et b.
6. Le processus $(X_t)_t$ est-il une martingale, relativement à $(\mathcal{F}_t)_t$? Pourquoi ?

Exercice 3

Temps d'atteinte et Martingale exponentielle

On note $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement Brownien standard sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, et $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ sa filtration naturelle associée.

1. Soit N une variable aléatoire gaussienne centrée de variance $s^2 > 0$. Calculer $\mathbb{E}(\exp(N))$ en fonction de s.
2. Pour $\gamma > 0$, soit $(Z_t)_{t\geq 0}$ le processus défini par :
$$\forall t \geq 0, \quad Z_t = \exp\left(\gamma W_t - \gamma^2 \frac{t}{2}\right).$$
On admet que $Z_t \in L^1$ pour tout $t \geq 0$. Montrer que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale relativement à $(\mathcal{F}_t)_t$.
3. Soit $a > 0$. On note T la variable aléatoire :
$$T = \inf\{t \geq 0 \text{ tel que } W_t = a\}.$$
Rappeler pourquoi T est un temps d'arrêt relativement à $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$.
4. Expliquer pourquoi $(Z_{t\wedge T})_{t\geq 0}$ est une martingale, et en déduire $\mathbb{E}(Z_{t\wedge T})$ pour tout $t \geq 0$.
5. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$, dépendant uniquement de γ et de a, telle que
$$\forall t \geq 0, \quad Z_{t\wedge T} \leq C \exp\left(-\frac{\gamma^2 (t\wedge T)}{2}\right),$$
et donc aussi que :
$$\forall t \geq 0, \quad |Z_{t\wedge T}| \leq C.$$
6. Déterminer $\lim\limits_{t\to+\infty} Z_{t\wedge T(\omega)}(\omega)$:
   (a) pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) = +\infty$;
   (b) pour tout $\omega \in \Omega$ tel que $T(\omega) < +\infty$.

   On donnera le résultat en fonction de $Z_{T(\omega)}(\omega)$.
7. En déduire la limite (presque sûre), lorsque $t \to +\infty$, de $Z_{t\wedge T}$.
On donnera le résultat en fonction de Z_T et de $\mathbb{1}_{T<+\infty}$.
8. Déduire des questions précédentes que :
$$1 = \mathbb{E}(\mathbb{1}_{T<+\infty} Z_T).$$
9. Exprimer Z_T en fonction de γ, de a et de T.
10. En prenant $\gamma = 1/n$, où $n \in \mathbb{N}^*$, et en faisant tendre n vers $+\infty$ dans le résultat de la question 8., montrer que T est fini presque sûrement.
11. Déduire de la question 8. et de la question précédente que
$$\forall \gamma > 0, \quad \mathbb{E}\left(\exp\left(-\frac{1}{2}\gamma^2 T\right)\right) = \exp(-\gamma a).$$
12. En déduire l'expression de la transformée de Laplace de T :
$$L(\alpha) = \mathbb{E}(\exp(-\alpha T)),$$
pour tout $\alpha > 0$.
13. On admet que :
$$\mathbb{E}(T) = -\lim_{\alpha\to 0^+} \frac{\partial L(\alpha)}{\partial \alpha},$$
même si ces deux quantités sont infinies.
Déterminer $\mathbb{E}(T)$.

Exercice 1

Formule d'Itô

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard.

1. Ecrire les processus $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(U_t)_{t\geq 0}$ donnés ci-dessous comme processus d'Itô, c'est-à-dire sous la forme :
$$\int_0^t \mu(s, B_s)\,\mathrm{d}s + \int_0^t \sigma(s, B_s)\,\mathrm{d}B_s,$$
en précisant leur drift μ et leur terme de diffusion σ.
   (a)
$$X_t = (B_t + t)e^{-B_t - \frac{t}{2}}$$
   (b)
$$U_t = e^{\frac{t}{2}}\sin(B_t)$$
2. Trouver la solution de l'EDS suivante :
$$\mathrm{d}Y_t = \frac{1}{2}Y_t\,\mathrm{d}t + Y_t\,\mathrm{d}B_t, \quad \text{avec } Y_0 = 1.$$
On pourra admettre que cette solution est strictement positive.
3. Donner une EDS satisfaite par le processus suivant :
$$Z_t = \frac{B_t}{1+t}.$$

Exercice 1 :

1) Ecrire $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(U_t)_{t\geq 0}$ comme 2 processus d'Itô de la forme :

$$\int_0^t \mu(s,B_s)\,ds + \int_0^t \sigma(s,B_s)\,dB_s$$

a) $X_t = (B_t + t)e^{-B_t - t/2}$

Soit $f : (x,y) \mapsto (y+x)e^{-y-\frac{x}{2}}$

* $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = e^{-y-\frac{x}{2}} - (y+x)e^{-y-\frac{x}{2}} = (1-y-x)e^{-y-\frac{x}{2}}$

* $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^{-y-\frac{x}{2}} - \frac{1}{2}(y+x)e^{-y-\frac{x}{2}} = (1-\frac{1}{2}y-\frac{1}{2}x)e^{-y-\frac{x}{2}}$

* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^{-y-\frac{x}{2}} - (1-y-x)e^{-y-\frac{x}{2}}$

- **Théorème : 2ème formule d'Itô**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à 2 variables de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x, et X un processus d'Itô. Alors :

$$f(t,X_t) = f(0,X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X_s)d\langle X\rangle_s$$

Sous forme différentielle, cette formule s'écrit :
$$df(t,X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)d\langle X\rangle_t$$

$$\Rightarrow X_t = f(0,B_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s,B_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial B}(s,B_s)dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial B^2}(s,B_s)d\langle B\rangle_s$$

$$= \int_0^t (1-\tfrac{1}{2}B_s - \tfrac{1}{2}s)e^{-B_s-\frac{s}{2}}ds + \int_0^t (1-B_s-s)e^{-B_s-\frac{s}{2}}dB_s + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t (2-B_s-s)e^{-B_s-\frac{s}{2}}d\langle B\rangle_s}_{\frac{1}{2}\int_0^t (2-B_s-s)e^{-B_s-\frac{s}{2}}ds}$$

$$= \int_0^t \underbrace{(2-B_s-s)e^{-B_s-\frac{s}{2}}}_{\mu(s,B_s)}ds + \int_0^t \underbrace{(1-B_s-s)e^{-B_s-\frac{s}{2}}}_{\sigma(s,B_s)}dB_s$$

b) $U_t = e^{t/2}\sin(B_t)$

$= f(t, B_t)$ où $f : (t,x) \mapsto e^{t/2}\sin(x)$

$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = \frac{1}{2}\sin(x)e^{t/2}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = -\cos(x)e^{t/2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = -\sin(x)e^{t/2}$

$\Longrightarrow$ (2e formule d'Itô) $U_t = f(0, B_0) + \int_0^t \frac{1}{2}\sin(B_s)e^{s/2}ds + \int_0^t -\cos(B_s)e^{-s/2}dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t -\sin(B_s)e^{s/2}ds$

$= \int_0^t \underbrace{-\cos(B_s)e^{-s/2}}_{\sigma(s,B_s)} dB_s$ et $\mu : (x,y) \mapsto 0$.

2) $dY_t = \frac{1}{2}Y_t dt + Y_t dB_t$ avec $Y_0 = 1$.

$X_t = e^{-\frac{1}{2}t}Y_t$

$\Longrightarrow$ (Itô) $dX_t = e^{-\frac{1}{2}t}dY_t - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}Y_t dt$

$= e^{-1/2 t}\left(\frac{1}{2}Y_t dt + Y_t dB_t\right) - \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}Y_t dt$

$= X_t dB_t$

$Z_t = \ln X_t$

$\Longrightarrow dZ_t = \frac{1}{X_t}dX_t - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}d\langle X\rangle_t = dB_t - \frac{1}{2}dt$

$\Longrightarrow dZ_t = -\frac{1}{2}dt + dB_t$

$\Longrightarrow Z_t = Z_0 - \frac{1}{2}t + B_t$ $\qquad Z_0 = \ln X_0 = \ln(Y_0) = 0$

$= -\frac{1}{2}t + B_t$

$\Longrightarrow X_t = \exp\left(-\frac{1}{2}t + B_t\right)$

$\Longrightarrow Y_t = \exp(B_t)$ $\qquad$ Car $Y_t = e^{1/2 t}X_t$

3) $Z_t = \frac{B_t}{1+t} = f(t, B_t)$ $\qquad f : (t,x) \mapsto \frac{x}{1+t}$ $\qquad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+t}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$ $\quad \frac{\partial f}{\partial t} = \frac{-x}{(1+t)^2}$

$dZ_t = \frac{1}{1+t}dB_t - \frac{B_t}{(1+t)^2}dt$

Exercice 2 :

$$dX_t = a(b - X_t)\,dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dW_t$$

1) Lorsque $X_t \simeq b$, le comportement de (X_t) est proche de celui d'un mvt Brownien sans dérive, de volatilité $\sigma\sqrt{b}$

Lorsque X_t s'éloigne de b, le terme en dt agit comme une force de « rappel » vers b

X_t est à valeurs positives.

2) $Y_t = e^{at}X_t \qquad f(t,x) = e^{at}x \quad \frac{\partial f}{\partial x} = e^{at} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial t} = ae^{at}x$

$$dY_t = e^{at}dX_t + ae^{at}X_t\,dt$$
$$= e^{at}(a(b-X_t)\,dt + \sigma\sqrt{X_t}\,dW_t) + ae^{-at}X_t\,dt$$
$$= abe^{at} + \sigma e^{at}\sqrt{X_t}\,dW_t$$
$$\Rightarrow dY_t = abe^{at} + \sigma e^{at}\sqrt{X_t}\,dW_t$$

3) $dY_t = abe^{at} + \sigma e^{at}\sqrt{X_t}\,dW_t$

$$\Rightarrow Y_u = Y_0 + \int_0^u abe^{at}\,dt + \int_0^u \sigma e^{at}\sqrt{X_t}\,dW_t$$
$$= Y_0 + \underbrace{\int_0^u abe^{at}\,dt}_{\substack{b[e^{at}]_0^u \\ = b(e^{au}-1)}} + \sigma M_u$$
$$\Rightarrow Y_u = Y_0 + b(e^{au}-1) + \sigma M_u$$

4) Car $dM_u = e^{au}\sqrt{X_u}\,dW_u$ a un drift nul $\Rightarrow$ martingale locale

et $\mathbb{E}[\langle M\rangle_u] = \mathbb{E}[\int_0^u e^{2at}X_t\,dt] < \infty$ donc unif intég $\Rightarrow$ martingale

$\Rightarrow \forall u \geq 0,\ \mathbb{E}[M_u] = \mathbb{E}[M_0] = 0$ Car martingale $\Rightarrow \mathbb{E} = $ cte

5) $\mathbb{E}[Y_u] = \mathbb{E}[Y_0 + b(e^{au}-1) + \sigma M_u] = Y_0 + b(e^{au}-1)$

Or $Y_t = e^{at}X_t \Rightarrow Y_0 = X_0 \quad \Rightarrow \mathbb{E}[Y_u] = X_0 + b(e^{au}-1)$

$\mathbb{E}[X_u] = \mathbb{E}[e^{-au}Y_u] = e^{-au}(X_0 + b(e^{au}-1)) = X_0e^{-au} + b(1-e^{-au})$

6) Non $(X_t)_t$ n'est pas une martingale relativement à $\mathcal{F}_t$ puisque son espérance n'est pas constante. En effet elle dépend du temps

$\mathbb{E}[X_0] = X_0$ or $\mathbb{E}[X_1] = X_0 e^{-a} + b(1-e^{-a})$ a priori $\neq$ de X_0

Exercice 3 :

1) $N \sim \mathcal{N}(0, s^2) \implies \exp(N) \sim \text{Log-}\mathcal{N}(0, s^2)$

$$\implies \mathbb{E}[\exp(N)] = e^{\frac{s^2}{2}}$$

2) $\gamma > 0$

$$\forall t \geq 0, \; Z_t = \exp\left(\gamma W_t - \gamma^2 \frac{t}{2}\right)$$

$*$ $\forall t$, Z_t est intégrable et mesurable car $Z_t \sim \text{Log-}\mathcal{N}(0,t)$ car W_t MB et $\sim \mathcal{N}(0,t)$

et $\forall t \geq s$, $\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\exp(\gamma W_t - \gamma^2 \frac{t}{2}) | \mathcal{F}_s]$

$$= \exp\left(-\gamma^2 \frac{t}{2}\right) \mathbb{E}[\exp(\gamma(W_t - W_s + W_s)) | \mathcal{F}_s]$$

$$\underset{\text{car } \mathcal{F}_s \text{ mes}}{=} \exp\left(-\gamma^2 \frac{t}{2}\right) \exp(\gamma W_s) \mathbb{E}[\exp(\gamma \underbrace{(W_t - W_s)}_{\sim \mathcal{N}(0, \gamma^2(t-s))}) | \mathcal{F}_s]$$

Par accroissement Brownien et indep

$$\mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] = e^{-\gamma^2 \frac{t}{2}} e^{\gamma W_s} \underbrace{\mathbb{E}[\underbrace{e^{\gamma(W_t - W_s)}}_{\sim \text{Log-}\mathcal{N}(0, \gamma^2(t-s))}]}_{e^{\frac{1}{2}\gamma^2(t-s)}}$$

$$\implies \mathbb{E}[Z_t | \mathcal{F}_s] = e^{\gamma W_s - \gamma^2 \frac{s}{2}} = Z_s$$

$\implies$ Martingale.

3) $T = \inf\{t \geq 0, W_t = a\}$

Soit $t \in \mathbb{R}_+$, $\{T \leq t\} = \{\exists k \in [0,t], W_k = a\}$

$$= \bigcup_{k \in [0,t]} \{W_k = a\} \in \mathcal{F}_t$$

Donc T est un temps d'arrêt

4) $Z_{t \wedge T}$ est la martingale Z_t arrêtée en T qui est un temps d'arrêt c'est donc encore une martingale

et $\mathbb{E}[Z_{t \wedge T}] = 1$ car c'est une martingale donc espérance cte

$\Rightarrow \mathbb{E}[Z_{t\wedge T}] = \mathbb{E}[Z_{0\wedge T}] = \mathbb{E}[Z_0] = 1 \quad \forall t \geq 0$

5) Soit $\omega \in \Omega$,

* Mq $\forall\, 0 \leq u \leq T(\omega)$ on a $W_u(\omega) \leq a$

En effet, car sinon ($W_u(\omega) > a$) le TVI (appliqué à $t \mapsto W_t(\omega)$ C^0 d'après un thm du cours entre $t=0$ et $t=u$)

donne l'existence de $u'(\omega) < u$ tq $W_{u'(\omega)}(\omega) = a$ et donc $T(\omega) \leq u'(\omega)$ Contradiction

Il s'ensuit que $\forall t \geq 0$, $W_{t\wedge T} \leq a$ car $W_T = a$

D'où, comme $\gamma > 0$, $Z_{t\wedge T} \leq \exp\left(\gamma a - \gamma^2 \frac{t\wedge T}{2}\right)$

$\Rightarrow C = \exp(\gamma a)$

Or comme $\gamma > 0$ $t\wedge T \geq 0$ et $a > 0$ $C > 0$ et $\exp\left(-\gamma^2 \frac{t\wedge T}{2}\right) \leq 1$

$\Rightarrow |Z_{t\wedge T}| \leq C$

6) a) Soit $\omega \in \Omega$ tq $T(\omega) = \infty$

$\Rightarrow t\wedge T(\omega) \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$ donc par la Q5 $Z_{t\wedge T} \leq C \exp\left(-\gamma^2 \frac{t\wedge T}{2}\right)$

On a que $Z_{t\wedge T(\omega)}(\omega)$ qui est majoré par une fct° $\xrightarrow[\infty]{} 0$

De plus $Z_{t\wedge T(\omega)} \geq 0 \quad \forall t$

$\Rightarrow \lim\limits_{t\to\infty} Z_{t\wedge T(\omega)} = 0.$

b) Soit $\omega \in \Omega$ tq $T(\omega) < \infty$

$\Rightarrow t\wedge T(\omega) \xrightarrow[\infty]{} T(\omega) \quad \Rightarrow Z_{t\wedge T(\omega)}(\omega) \xrightarrow[\infty]{} Z_{T(\omega)}(\omega)$

7) Donc $Z_{t\wedge T} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s} Z_T \times 1_{T<\infty}$

8) On a mq en Q4 que $\mathbb{E}[Z_{t\wedge T}] = 1 \quad \forall t \geq 0$ donc d'une part

$\lim\limits_{\infty} \mathbb{E}[Z_{t\wedge T}] = 1$

D'autre part la Q7 et l'inégalité $\forall r \geq 0,\ |Z_{r \wedge T}| \leq C$
permettent d'appliquer le Thm de CV Dominée
$\Rightarrow \lim_{r \to \infty} \mathbb{E}[Z_{r \wedge T}] = \mathbb{E}[1_{T<\infty} Z_T]$
$\Rightarrow 1 = \mathbb{E}[1_{T<\infty} Z_T]$

9) On a clairement que $Z_T = \exp(\gamma a - \gamma^2 \frac{T}{2})$

10) $\gamma = \frac{1}{n}$

On pose $V_n = 1_{T<\infty} \exp(\frac{a}{n} - \frac{T}{2n^2})$
$\Rightarrow 1 = \mathbb{E}[V_n]\ \forall n$ par Q8 $*^1$

Donc d'une part $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[V_n] = 1$

D'autre part, (V_n) est une suite de VA qui CV p.s vers $1_{T<\infty}$ et elle est clairement dominée par la cte e^a

$\Rightarrow$ par thm de CV dominée $\lim_{n \to \infty} \mathbb{E}[V_n] = \mathbb{E}[1_{T<\infty}] = \mathbb{P}(T<\infty)$ $*^2$

Donc $\mathbb{P}(T<\infty) = 1$ par $*^1$ et $*^2$

11) Donc comme on a mq T est fini p.s
$\Rightarrow$ p.s on a $1 = \mathbb{E}[Z_T]$ $*$

Or $\mathbb{E}[Z_T] = \mathbb{E}[\exp(\gamma a - \gamma^2 \frac{T}{2})]$

$\Rightarrow$ $*$ $\forall \gamma > 0,\ \mathbb{E}[\exp(\gamma a - \gamma^2 \frac{T}{2})] = 1$ p.s

$\Rightarrow \mathbb{E}[\exp(-\gamma^2 \frac{T}{2})] = \exp(-\gamma a)$

12) On prend $\gamma = \sqrt{2\alpha}$ $\alpha > 0$

$\Rightarrow \mathcal{L}(\alpha) = \mathbb{E}[\exp(-\alpha T)] = \exp(-a\sqrt{2\alpha})$

13) $\forall \alpha > 0$, $\dfrac{\partial \mathcal{L}(\alpha)}{\partial \alpha} = \dfrac{-a}{\sqrt{2\alpha}} e^{-a\sqrt{2\alpha}}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T] = -\lim_{\alpha \to 0^+} -\frac{a}{\sqrt{2\alpha}} e^{-a\sqrt{2\alpha}}$$
$$= \lim_{\alpha \to 0^+} \frac{a}{\sqrt{2\alpha}} e^{-a\sqrt{2\alpha}}$$

Or $\displaystyle\lim_{\alpha \to 0^+} \frac{a}{\sqrt{2\alpha}} e^{-a\sqrt{2\alpha}} = +\infty$

Donc $\mathbb{E}[T] = +\infty$