Copules de Gumbel

Angel Laplace - Emma Brisset - Camille Gueguen

ISFA
Projet de ERM

Décembre 2023

Overview

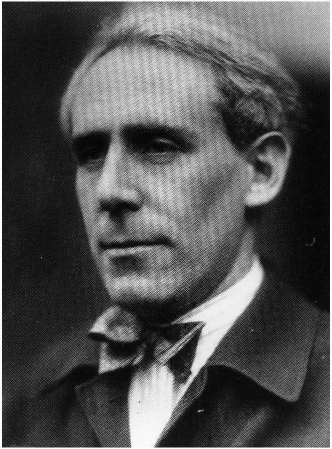
1. Introduction

Emil Julius Gumbel

Emil Julius Gumbel

- 1891 - 1966
- Allemand
- Mathématicien, théoricien des valeurs extrêmes (Statistics of Extremes, 1958)
- Enseigne à l'ISFA durant les années 1930

José Blanchet - Fabrice Vallée - Patricia Gumbel - Matthias Scherer - Stéphane Loisel

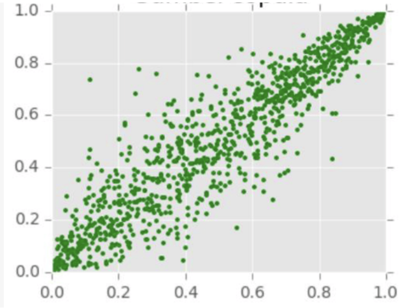


Contexte d'application

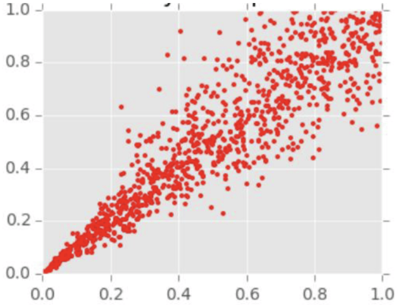
Utiles pour :

- Modélisation des dépendances asymétriques
- Modélisation des évènements rares de forte intensité

Copule de Gumbel



Copule de Clayton



2. Cadre théorique : définitions et propriétés

Définitions

Définition

La copule de Gumbel se définit par la fonction bivariée suivante :
Soit $(u, v) \in]0;1]^2$ et $\alpha \in [1;+\infty[$

$$C_\alpha(u, v) = \exp\left(-(\ln u)^\alpha + (\ln v)^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}}$$

Ainsi, on remarque qu'une copule de Gumbel est une copule archimédienne de générateur ϕ tel que $\phi(t) = (-\ln(t))^\alpha$.
On rappelle la définition d'une copule archimédienne :

Copule archimédienne

La copule de Gumbel est une copule Archimédienne que l'on définit par :

$$C(u, v) = \Phi^{-1}(\Phi(u) + \Phi(v))$$

Où Φ est appelé générateur de la copule et $u, v \in [0, 1]^2$.

Définitions

On rappelle la définition de la densité d'une copule.

Définition

La densité c d'une copule C, si elle existe, est définie comme suit :

$$c(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\partial^n C}{\partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n}$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_n \in [0, 1]$.

Densité de la copule de Gumbel

Sachant que la densité d'une copule archimédienne deux fois différentiable est de la forme

$$c_\alpha(u, v) = -\frac{\phi'_\alpha(C_\alpha(u, v))\phi'_\alpha(u)\phi'_\alpha(v)}{(\phi'_\alpha(C_\alpha(u, v)))^3}$$

Ainsi, on obtient une expression de la densité suivante :

$$\forall (u, v) \in]0; 1[^2,$$

$$c_\alpha(u, v) = \frac{C_\alpha(u,v)[\phi_\alpha(u)+\phi_\alpha(v)]}{\alpha^{-2}\left(\alpha-1+(\phi_\alpha(u)+\phi_\alpha(v))^{\frac{1}{\alpha}}\right)\phi_{\alpha-1}(u)\phi_{\alpha-1}(v)uv}$$

Définitions

On rappelle la définition de la densité d'une copule.

Définition

La densité c d'une copule C, si elle existe, est définie comme suit :

$$c(u_1, u_2, \ldots, u_n) = \frac{\partial^n C}{\partial u_1 \partial u_2 \ldots \partial u_n}$$

où $u_1, u_2, \ldots, u_n \in [0, 1]$.

Densité de la copule de Gumbel

Sachant que la densité d'une copule archimédienne deux fois différentiable est de la forme

$$c_\alpha(u, v) = -\frac{\phi'_\alpha(C_\alpha(u, v))\phi'_\alpha(u)\phi'_\alpha(v)}{(\phi'_\alpha(C_\alpha(u, v)))^3}$$

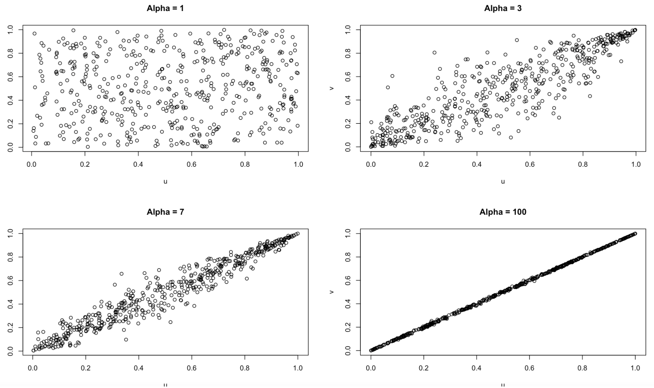
Ainsi, on obtient une expression de la densité suivante :

$$\forall (u, v) \in]0; 1[^2,$$

$$\mathrm{c}_\alpha(u, v) = \frac{C_\alpha(u,v)[\phi_\alpha(u)+\phi_\alpha(v)]}{\alpha^{-2}\left(\alpha-1+(\phi_\alpha(u)+\phi_\alpha(v))^{\frac{1}{\alpha}}\right)\phi_{\alpha-1}(u)\phi_{\alpha-1}(v)uv}$$

Propriétés

En traçant 500 réalisations des composantes d'un couple (U,V) de la loi jointe de Gumbel pour différentes valeurs de alpha on obtient :



Dépendance selon la valeur de α

Récapitulatif des types de copules selon la valeur de α :

Valeurs de α	$\alpha = 1$	$\alpha \in]1; \infty[$	$\alpha = \infty$
Type de copule	Indépendante	Dépendance positive	Comotonie
C_α	$C^\perp$	C_α	C^+

Remarque : Les VaR sont comonotones additives, ainsi pour des valeurs très élevées de α, $\text{VaR}(X+Y) \xrightarrow{\alpha \to \infty} \text{VaR}(X) + \text{VaR}(Y)$.

Propriétés

Propriété du max-stabilité

La copule de Gumbel est la seule copule archimédienne de valeur extrême. Elle vérifie donc la propriété suivante :

$$C(u_1^{\lambda}, \ldots, u_n^{\lambda}) = C(u_1, \ldots, u_n)^{\lambda}$$

Coefficient de corrélation de Kendall

Expression du coefficient de corrélation de Kendall

$$\tau_K = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^{n} \mathrm{sign}(x_i - x_j)\mathrm{sign}(y_i - y_j)$$

n taille de l'échantillon, x_i et y_i observations de la variable X et Y, $\mathrm{sign}(z)$ fonction de signe de z.

Coefficient de Kendall appliqué au copule de Gumbel

Coefficient de corrélation de Kendall :

$$\tau = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$$

Cette définition permet de retrouver les propriétés de la copule lorsque $\alpha = 1$ ou $\alpha = +\infty$.

Coefficient de corrélation de Spearman

Corrélation de Spearman

La corrélation de Spearman est définie par :

$$r_s = \frac{\mathrm{cov}(\mathrm{rg}_X, \mathrm{rg}_Y)}{\sigma_{\mathrm{rg}_X}\sigma_{\mathrm{rg}_Y}} \tag{1}$$

Où $\mathrm{cov}(\mathrm{rg}_X, \mathrm{rg}_Y)$ est la covariance des variables de rang, σ_{rg_X} et σ_{rg_Y} sont les écarts-types des variables de rang.

Coefficient de dépendance des queues de distribution

Méthode de dépendance

- **Dépendance à droite**

$$\begin{aligned}\lambda_U &= \lim_{u \to 1} P(U > u \mid V > u) \\ &= 2 - \frac{2}{\alpha}\end{aligned}$$

- **Dépendance à gauche**

$$\begin{aligned}\lambda_L &= \lim_{u \to 1} P(U \leq u \mid V \leq u) \\ &= 0\end{aligned}$$

3. Méthodologie

Simulation d'une copule de Gumbel

Algorithme avec l'inverse

- Nelsen (2005), U et $V \sim \mathcal{U} \Rightarrow C_\alpha(U, V) \perp \frac{\Phi_\alpha(U)}{\Phi_\alpha(U)+\Phi_\alpha(V)}$
- Générateur : $\Phi_\alpha(x) = (-ln(x))^\alpha$
- Algorithme :
  - Simuler $(s, t) \sim^{iid} \mathcal{U}([0, 1])$
  - Soit $x := K^{-1}(t)$ où $K(t) = t - \frac{\Phi_\alpha(t)}{\Phi_\alpha^{'}(t)} = \frac{t * ln(t)}{\alpha}$
  - Soit $u = \Phi_\alpha^{-1}(s\Phi_\alpha(x))$ et $v = \Phi_\alpha^{-1}((1-s)\Phi_\alpha(x))$
- Inconvénient : Limite en dimension supérieur

Simulation d'une copule de Gumbel

Algorithme à facteur commun

- Marshall & Olkin (1988) : générer des v.a. multivariées pour modéliser des dépendances extrêmes.
- Générateur : $\Phi_\alpha^{-1}(t) = e^{-t^{\frac{1}{\alpha}}}$: transformée de Laplace d'une loi stable de paramètre $(\frac{1}{\alpha}, 0, 1, 0)$
- Algorithme :
    - Simuler $(X_1, ..., X_d) \sim^{iid} \mathcal{E}(1)$
    - Simuler une variable Y suivant la loi de transformée de Laplace Φ_α^{-1}
    - $\forall i,\ u_i = \Phi_\alpha^{-1}(\left(\frac{x_i}{Y}\right)$
- Inconvénient : génération d'une variable additionnelle mais négligeable en haute dimension.

Méthodes de Calibrage

Méthodes des moments

- Estimes les paramètres θ des lois marginales et le paramètre α de la copule
- $\hat{\theta} = \frac{1}{\overline{X_n}}$ et $\hat{\alpha} = \frac{1}{1-\tau_n}$

Méthodes de Calibrage

Maximum de vraisemblance exact

- Condition : densité de la copule doit exister ainsi que celles des lois marginales
- maximise la log vraisemblance pour estimer les paramètres conjointement
- Existe pas d'expression explicite $\Rightarrow$ nécessite une application numérique.

Méthodes de Calibrage

Inférence sur les marginales

- Condition : densité de la copule doit exister ainsi que celles des lois marginales
- Combine les deux premières approches
  - Estime les paramètres θ_1 et θ_2 par maximum de vraisemblance
  - Construit les pseudo données $\forall 1 \leq i \leq n$, $u_i = F_1(x_o, \hat{\theta_1})$ et $v_i = F_2(y_i, \hat{\theta_2})$
  - Estime le paramètre α en maximisant la log-vraisemblance $ln\mathcal{L}(\alpha, u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n) = \sum_{i=1}^{n} ln(c(u_i, v_i, \alpha))$.
- Avantage : utiliser les estimateurs "classiques" de maximum de vraisemblance des marginales

Méthodes de Calibrage

Maximum de vraisemblance canonique

- Méthode semi-paramétrique qu se base sur la précédente
  - Calcul les fonctions de répartition empirique $F_{1,n}$ et $F_{2,n}$
  - Construit les pseudo données $\forall 1 \leq i \leq n$, $u_i = F_{1,n}(x_i)$ et $v_i = F_{2,n}(y_i)$
  - Estime α avec le maximum de la log-vraisemblance $ln\mathcal{L}(\alpha, u_1, ..., u_n, v_1, ..., v_n) = \sum_{i=1}^{n} ln(c(u_i, v_i, \alpha))$.

4. Application à un cas pratique

Mise en place

La copule de Gumbel est utilisée pour modéliser des dépendances dans la partie extrême des distributions marginales des variables.

Exemple d'application

- **Modélisation des Risques Extrêmes**
- **Allocation d'Actifs**
- **Modélisation des Dépendances en Assurance Vie**
- **Réassurance**
- **Pricing des Produits Dérivés**

Mise en place

Sujet du cas pratique

- On va faire le pricing d'une option associée à un risque climatique, structurée avec une couverture indicielle pour le risque de tempête (indemnisation en fonction d'un indice prédéterminé plutôt que des pertes réelles subies par l'assuré).
- L'indice sera basé sur la vitesse du vent pendant une tempête.
- On va calculer le pay-off de cette option.

Mise en place

Méthode de calcul du Pay-off

- Calcul de l'indice : Indice d'une station i :

$$S_i(T) = \sum_{t=1}^{T} \min(L_i - K_i, (X_i(t) - K_i)^+)$$

Où L_i est la limite de la station, K_i le seuil de la station et X_i la vitesse du vent.

- On calcul ensuite l'indice conjoint des deux stations $S(T)$ via la formule suivante :

$$S(T) = \frac{S_{\text{Millau}}(T) + S_{\text{Montpellier}}(T)}{2}$$

- Formule pour le Pay-off $C(T)$:

$$C(T) = N \cdot \min(L - K, (S(T) - K)^+)$$

Avec L la limite contractuelle, N la valeur du nominal et K la franchise.

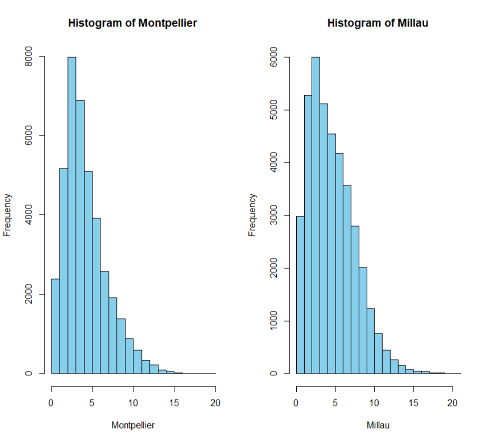
Mise en place

Données

- Variables : vitesse du vent (en m/s)
- Lieux : Millau et Montpellier (90 km de distance)
- Temporalité : 2010 à 2023
- Source : Meteo France
- Hypothèse : Franchise, limite contractuelle, limite et seuil par station

Définition des lois marginales

Données



On va donc modéliser nos deux variables avec des lois gamma.
On suppose que les lois marginales de X (Montpellier) et Y (Millau) suivent des lois gamma de paramètres (ω_i, β_i).

Estimation des paramètres des marginales et de la copule

Méthode	α	ω_1	β_1	ω_2	β_2
Inférence sur les marginales	1.4858	2.7908	0.6687	2.5266	2.4390
Méthode des moments	1.5512	2.5955	0.6279	2.5411	2.4706
Maximum de vraisemblance exacte	1.4888	2.7339	0.6527	2.5348	2.4599

La méthode des Maximum de Vraisemblance Exact est la plus précise on va donc utiliser cette dernière

Simulation et calcul du Pay-off

Calcul du Pay-off

- On fait 4000 simulations de 1000 observations.
- On calcule le pay-off avec les données simulées en utlisant la copule de Gumbel.
- On simule une Copule Gaussienne et avec la méthode de Monte Carlo on calcul les memes données puis on compare les résultats.

Simulation et calcul du Pay-off

Résultats

Table – Comparaison entre la Copule de Gumbel et la Copule Gaussienne

	Copule de Gumbel	Copule Gaussienne
Pay-off moyen	85.85114	85.74034
Écart-type	16.5086	14.71013
$\text{Var}_{75\%}$	96.91647	95.52087
$\text{Var}_{90\%}$	107.5419	105.0547

5. Bibliographie

Dependence Modeling with Archimedean Copulas, Roger B. Nelsen

Mémoire de Jean-Paul JOHN MATHEWS (ISFA 2022) :

Modélisation des dépendances au sein d'un portefeuille non-vie et impacts sur le besoin en fonds propres

Mémoire de Arnaud DUVAL (ISFA 2012) :

Risque de crédit dans un portefeuille obligataire. Modèle de prise en compte du risque de dépendance.

https://cran.r-project.org/web/packages/gumbel/vignettes/gumbel.pdf

Mémoire

Les lois α-stables comme modèle pour les séries financières

Les couvertures indicielles en réassurance Catastrophe :

Documentation cas pratique

Thank You