INTÉGRATION

Intégration L3– 2020
Pierre-Olivier Goffard et Colin Jahel

---

1. Calculer les limites suivantes
   (a) $\lim_n \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} \sin(\frac{1}{nx})\mathrm{d}x$
   (b) $\lim_n \int_0^1 \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}x$
   (c) $\lim_n \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(\frac{x}{n})\frac{n}{(x^2+2)x}\mathrm{d}x$
   (d) $\lim_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2}\frac{1}{1-nk}$
   (e) $\lim_k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n} \arctan(\frac{n}{k})$

   Indication : Utiliser la mesure de comptage.

2. A l'aide du théorème de Beppo Levi, calculer $\lim \int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\alpha x}\mathrm{d}x$.

   Indication : Étudier $g_n \colon x \mapsto (n+1)\ln\left(1 - \frac{x}{n+1}\right) - n\ln\left(1 - \frac{x}{n}\right)$.

3. (a) La somme de fonctions intégrables est elle intégrable ?
   (b) Une fonction de carré intégrable est elle intégrable ? Le carré d'une fonction intégrable est il intégrable ?
   (c) Soit (f_n) une suite de fonctions positives qui converge vers f telles qu'il existe $K > 0$ verifiant $\int f_n \mathrm{d}\mu < K$, montrer que $\int f\mathrm{d}\mu \leq K$.

4. Soit $g \colon x \mapsto 1_{[0,1]}(x)$, on définit la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ comme $f_n(x) = g(x)$ si n est pair, $f_n(x) = g(-x)$ sinon. Montrer que
$$\int_{\mathbb{R}} \liminf f_n(x)\mathrm{d}x < \liminf \int_{\mathbb{R}} f_n(x).$$

5. Montrer que pour toute mesure de probabilité μ sur un espace X, et pour tout $f \colon X \to \mathbb{R}$ mesurable positive, on a ;
$$\int_X f\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}^+} \mu(\{f > t\})\mathrm{d}t$$

6. Soit $(E, \mathcal{E})$ un espace mesurable, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de fonctions mesurables dans $(F, \mathcal{F})$ et $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une partition mesurable de E.
   (a) Montrer que f définie par $f(x) = f_n(x)$ si $x \in A_n$ est mesurable.
   (b) Soit N mesurable de $(E, \mathcal{E})$ dans $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$, montrer que g définie par $g(x) = f_{N(x)}(x)$ est mesurable.