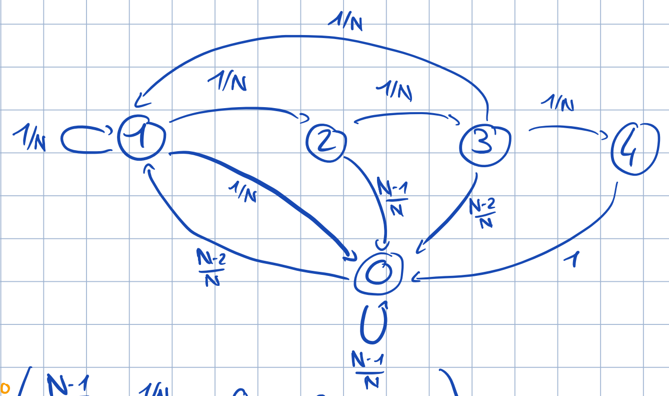
TD MAD : N°3

Exercice 2 :

1) Espace d'états : L'ensemble des derniers caractères écrits.

$$\{\{\emptyset\}, \{p\}, \{pa\}, \{pap\}, \{papa\}\}$$
$$\quad 0 \qquad 1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4$$



$$\mathcal{P} = \begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{pmatrix} \frac{N-1}{N} & 1/N & 0 & 0 & 0 \\ \frac{N-2}{N} & 1/N & 1/N & 0 & 0 \\ \frac{N-1}{N} & 0 & 0 & 1/N & 0 \\ \frac{N-2}{N} & 1/N & 0 & 0 & 1/N \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Regarder l'espérance de premier retour de 4 vers lui-même :

$$T_4 = \inf\{n \geq 1, X_n = 4, X_0 = 4\}.$$

Théorème :

Si (X_n) est une chaîne de Markov irréductible,
alors $\forall x \in E$, $\mathbb{E}[T_x] = \frac{1}{\pi(x)}$ où π est la probabilité stationnaire.

La stratégie consiste alors à calculer π.

$$\pi\mathcal{P} = \pi \iff \begin{cases} a+b+c+d+e = 1 \\ a = \frac{N-1}{N}a + \frac{N-2}{N}b + \frac{N-1}{N}c + \frac{N-2}{N}d + e \\ b = \frac{1}{N}a + \frac{1}{N}b + \frac{1}{N}d \\ c = \frac{1}{N}b \\ d = \frac{1}{N}c \\ e = \frac{1}{N}d \end{cases}$$

On exprime en fonction de $\underline{\underline{e}}$.

On remarque :

$d = Ne \qquad b = Nc = N^3e$

$c = N^2e$

$bN = a+b+d$

$(N-1)b = a + Ne$

$(N-1)N^3e = a + Ne \qquad a = ((N-1)N^3 - N)e$

$$\Rightarrow \boxed{\pi = e\left(N^3(N-1) - N, N^3, N^2, N, 1\right)}$$

$\Rightarrow \quad e \times (N^4 + N^2 + 1) = 1$

donc

$$\boxed{e = \frac{1}{N^4+N^2+1}}$$

$\mathbb{E}[T_4] = N^4 + N^2 + 1$

Ainsi, partant de 0, le temps d'atteinte de 4 est

$$\boxed{\mathbb{E}_0[T_4] = N^4 + N^2}$$

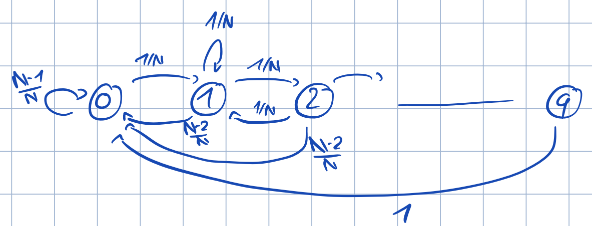
En réalité, on est sensé partir de l'état 0.

Or, partir de 0, c'est comme partir de 4 en retirant la transition déterministe $4 \to 1$

$\mathbb{E}_4[T_4] = \mathbb{E}_0[T_4] + 1$

2) mot $= \{l_1 l_2 l_3 — l_9\}$

$$\{ \underset{0}{\{\emptyset\}}, \underset{1}{\{l_1\}}, \underset{2}{\{l_1 l_2\}}, —, \underset{9}{\{l_1 l_2 — l_9\}} \}$$



Espérance conditionnelle : $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

$\mathcal{F} = \{\text{Sous-ensemble de } \Omega\}$, $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ Sous-tribu

Informel : $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ est la meilleure approximat° de X par des fonct° $\mathcal{G}$-mesurables.

Variable aléatoire

Règles de calculs

1) Si X est indépendante de $\mathcal{G}$
$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \overset{p.s}{=} \mathbb{E}[X]$

2) Si X est $\mathcal{G}$-mesurable, $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}] \overset{p.s}{=} X$.

3) Si X est $\mathcal{F}$-mesurable et Y est $\mathcal{G}$-mesurable
$\mathbb{E}[XY \mid \mathcal{G}] \overset{p.s}{=} Y\,\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$

4) Formule des espérances totales :
$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]]$

5) Théorème d'identification :
Soit X $\mathcal{F}$-mesurable,
$\mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]$ est l'unique variable aléatoire $\mathcal{G}$-mesurable tq
$\forall G \in \mathcal{G}, \ \mathbb{E}[X \mathbb{1}_G] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_G\, \mathbb{E}[X \mid \mathcal{G}]]$.