Economie de l'assurance
Aléa moral

Exercices

Exercice 1

Un employeur neutre vis-à-vis du risque propose un contrat de travail à un agent, stipulant le salaire de l'agent en fonction de valeurs appropriées. L'agent peut accepter ou refuser le contrat. S'il l'accepte, il choisit son niveau d'effort faible (a = 1) ou élevé (a = 2). Le revenu de l'employeur peut prendre deux valeurs, 10 ou 30, dont les probabilités dépendent du niveau d'effort.

Action	10	30
$a = 1$	$2/3$	$1/3$
$a = 2$	$1/3$	$2/3$

La fonction d'utilité de l'agent dépend de son salaire et de son effort, et est telle que :

$$u(w, a) = w - a + 1$$

Son utilité de réserve vaut 1.

1. On suppose d'abord que l'employeur observe l'effort du travailleur. Déterminez le contrat optimal, en calculant le revenu espéré de l'employeur.
2. On suppose maintenant que l'employeur n'observe pas l'effort de l'agent.
   (a) Commentez et décrivez la relation principal-agent.
   (b) Déterminez le contrat optimal qui serait proposé pour obtenir un effort élevé.
   (c) Calculer le revenu espéré de l'employeur.

Exercice 2 : Relation d'emploi

On considère une relation contractuelle entre un agent et un principal, dans laquelle deux résultats sont réalisables : 50 000 (succès) ou 25 000 (échec). Les probabilités de succès ou d'échec dépendent du niveau d'effort fourni par l'agent, qui peut prendre trois valeurs : $e_1 > e_2 > e_3$.

Effort	25 000	50 000
e_1	0.25	0.75
e_2	0.50	0.50
e_3	0.75	0.25

La fonction d'utilité de l'agent dépend de son salaire et de son effort, et est telle que :

$$u(w, e) = \sqrt{w} - v(e) \text{ avec } v(e_1) = 40,\ v(e_2) = 20,\ v(e_3) = 5.$$

Son utilité de réserve vaut 120.

1. Dans le cas où l'information est symétrique :
   (a) Donnez la forme du contrat optimal (pour tout niveau d'effort).
   (b) Calculez le profit espéré pour chaque niveau d'effort, et identifiez le contrat d'équilibre.
2. On suppose maintenant qu'il y a asymétrie d'information : l'employeur n'observe pas l'effort de l'agent.
   (a) Donnez le contrat optimal pour chaque niveau d'effort.
   (b) Calculez le profit espéré dans chaque cas, et identifiez le contrat d'équilibre.

Exercice 1 :

Effort \ Gain	10	30
$a=1$	$2/3$	$1/3$
$a=2$	$1/3$	$2/3$

* $u(w,a) = w - a + 1$
* $\bar{u} = 1$

1) Soit a fixé, Informat° symétrique

$$\max_{w_a} \; p_S(a)(30 - w_a) + p_E(a)(10 - w_a)$$
$$sc \quad w_a - a + 1 \geq \bar{u} = 1$$

* $\frac{\partial \pi}{\partial w_a} < 0$ et $\frac{\partial C}{\partial w_a} > 0 \implies$ CP saturée ($w_a - a$)

* A l'équilibre, $w_a^* - a + 1 = 1$
$\implies w_a^* = a$

$$\pi_{a=1} = \frac{1}{3}(30-1) + \frac{2}{3}(10-1)$$
$$= \frac{47}{3}$$
$$\pi_{a=2} = \frac{64}{3}$$

Donc le contrat d'équilibre est $\{a = 2, w^* = 2\}$

2) a) Cas $a=2$: Information asymétrique.

Salaires en cas de succès et échec $\rightarrow$

$$\max_{w_S, w_E} \; \frac{2}{3}(30 - w_S) + \frac{1}{3}(10 - w_E)$$
$$sc: (CP) \quad \frac{2}{3}w_S + \frac{1}{3}w_E - 2 + 1 \geq \bar{u} = 1$$

Contrainte d'incitat°

$$(CI) \quad \underbrace{\frac{2}{3}w_S + \frac{1}{3}w_E - 2 + 1 \geq \frac{1}{3}w_S + \frac{2}{3}w_E - 1 + 1}_{\iff \mathbb{E}[u(W,2)] \geq \mathbb{E}[u(W,1)]}$$

On connait pas l'agent et la qtt de travail qu'il sera prêt à fournir $\implies$ Contrainte d'incitat°

b) $\mathcal{L}(w_S, w_E, \lambda, \mu) = \frac{2}{3}(30-w_S)+\frac{1}{3}(10-w_E)+\lambda(\frac{2}{3}w_S+\frac{1}{3}w_E-2)+\mu(\frac{1}{3}w_S-\frac{1}{3}w_E-1)$

→ Conditions KKT :

* $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_S} = 0 \iff -\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\lambda+\frac{1}{3}\mu = 0$ (1)
* $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_E} = 0 \iff -\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\lambda-\frac{1}{3}\mu = 0$ (2)
* $\lambda\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff \lambda(\frac{2}{3}w_S+\frac{1}{3}w_E-2) = 0$ (3)
* $\mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \iff \mu(\frac{1}{3}w_S-\frac{1}{3}w_E-1) = 0$ (4)

(1) et (2) $\Rightarrow 2\lambda+\mu = 2$ et $\lambda-\mu = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ et $\mu = 0$

Donc la (CCP) est saturée $\Rightarrow \frac{2}{3}w_S+\frac{1}{3}w_E-2 = 0$

$$\Rightarrow w_S = \frac{3}{2}(2-\frac{1}{3}w_E) = 3-\frac{1}{2}w_E \quad \circledast$$

D'après (4) on a $\frac{1}{3}w_S-\frac{1}{3}w_E-1 \geq 0$ (car $\mu=0$)

$$\overset{\circledast}{\Rightarrow} \frac{1}{3}(3-\frac{1}{2}w_E)-\frac{1}{3}w_E-1 = 1-\frac{1}{6}w_E-\frac{1}{3}w_E-1 = -\frac{1}{2}w_E \geq 0$$

Donc $w_E \leq 0$
$\Rightarrow w_E = 0$

Ainsi, $w_S = 3-\frac{1}{2}w_E = 3$

Contrat $= \{w_E = 0, w_S = 3\}$

c) $\Pi_{a=2} = \frac{2}{3}(30-3)+\frac{1}{3}(10-0) = \frac{64}{3}$

De même pour le cas $a=1$
et si $\Pi_{a=1} > \Pi_{a=2}$ le contrat utilisé est celui du cas $a=1$
et sinon ce sera celui du cas $a=2$ càd $w_E^* = 0$ et $w_S^* = 3$

Exercice 2 :

Effort \ Gain	25 000	50 000
e_1	0,25	0,75
e_2	0,50	0,50
e_3	0,75	0,25

$u(w,e) = \sqrt{w} - v(e)$

$\bar{u} = 120$

$v(e_1) = 40$; $v(e_2) = 20$; $v(e_3) = 5$

1) a) On fixe e, $\max\limits_{w_e} \; p_S(e)(50\,000 - w_e) + p_E(25000 - w_e)$

sc : (CP) : $\sqrt{w_e} - V(e) \geq 120$

Contrainte saturée : $w_e^* = (120 + V(e))^2$

b) $\Pi_{e=1} = 18\,150$

$\Pi_{e=2} = 17\,900$ $\Longrightarrow$ Contrat équilibre $= \{e = e_1 , w^* = 160^2\}$

$\Pi_{e=3} = 15\,625$

2) a) Cas où $e = e_1$:

$$\max_{w_E, w_S} \; 0{,}75(50000 - w_S) - 0{,}25(25000 - w_E)$$

sc : (CP) $0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 40 \geq 120$

(CI_1) $0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 40 \geq 0{,}5\sqrt{w_S} + 0{,}5\sqrt{w_E} - 20$

(CI_2) $0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 40 \geq 0{,}25\sqrt{w_S} + 0{,}75\sqrt{w_E} - 5$

neutre au risque $\Leftrightarrow \mathbb{E}[u()] = u(\mathbb{E}[\;])$

$\Longleftrightarrow$ $\max \; 43750 - 0{,}75\,w_S + 0{,}25\,w_E$

sc : $0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} \geq 160$

$\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \geq 80$

$\cancel{\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \geq 70}$

$\longrightarrow \mathcal{L}(w_S, w_E, \lambda, \mu) = 43750 - 0{,}75 w_S + 0{,}25 w_E + \lambda(0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 160) + \mu(\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} - 80)$

Conditions KKT : $\lambda, \mu \geq 0$

$* \; \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_S} = 0 \Longleftrightarrow -0{,}75 + \dfrac{0{,}25\lambda}{2\sqrt{w_S}} + \dfrac{\mu}{2\sqrt{w_S}} = 0$ (1)

$* \; \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_E} = 0 \Longleftrightarrow 0{,}25 + \dfrac{0{,}25\lambda}{2\sqrt{w_E}} - \dfrac{\mu}{2\sqrt{w_E}} = 0$ (2)

$* \; \lambda \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Longleftrightarrow \lambda(0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 160) = 0$ (3)

$* \; \mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \Longleftrightarrow \mu(\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} - 80) = 0$ (4)

$(2) \Rightarrow \lambda = \left(\frac{2\sqrt{w_E}}{0{,}25}\right)\left(0{,}25 + \frac{\mu}{2\sqrt{w_E}}\right) \Rightarrow \lambda > 0$

D'où (3) $\Rightarrow 0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 160 = 0$ $*^1$

Cas où $\mu = 0$, CI pas saturée

Grâce à (1) et (2) on a $2\sqrt{w_S} = 2\sqrt{w_E} = \lambda$

→ on injecte dans CI $\Rightarrow -80 \geq 0$ impossible.

→ Donc $\mu > 0 \Rightarrow$ CI saturée

$\Rightarrow \sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} - 80 = 0$ $*^2$

Donc avec $*^1$ et $*^2$ on résout $\begin{cases} \sqrt{w_S} = 180 \\ \sqrt{w_E} = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_S = 32400 \\ w_E = 10000 \end{cases}$

Cas où $e = e_2$:

$$\max_{w_E, w_S} 0{,}5\,(50000 - w_S) - 0{,}5\,(25000 - w_E)$$

sc : (CP) $0{,}5\sqrt{w_S} + 0{,}5\sqrt{w_E} - 20 \geq 120$

(CI_1) $0{,}5\sqrt{w_S} + 0{,}5\sqrt{w_E} - 20 \geq 0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 40$

(CI_2) $0{,}5\sqrt{w_S} + 0{,}5\sqrt{w_E} - 20 \geq 0{,}25\sqrt{w_S} + 0{,}75\sqrt{w_E} - 5$

Puis de même on résout et $w_S = 28900$ et $w_E = 12100$

et si $e = e_3 \Rightarrow w_S = w_E = 15625$

b) $\Pi_{e_1} = 16\,950$

$\Pi_{e_2} = 17000$ $\Rightarrow e_2$ donne le contrat d'équilibre : $\{w_S = 28900, w_E = 12100\}$

$\Pi_{e_3} = 15625$