Finance Mathématique

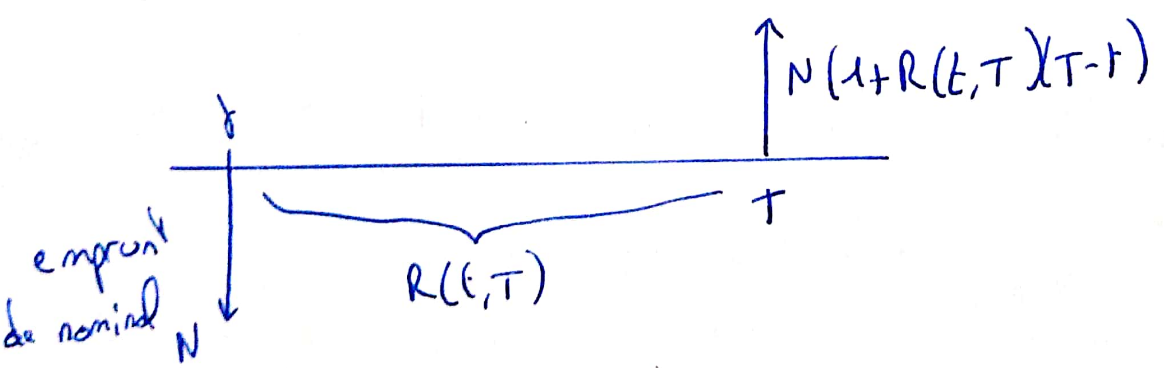
Chapitre 1: Concepts fondamentaux

I - Conventions de calcul des taux

1/ Convention simple

On note $R(t,T)$ le taux d'intérêt pour un emprunt entre la date t et T.

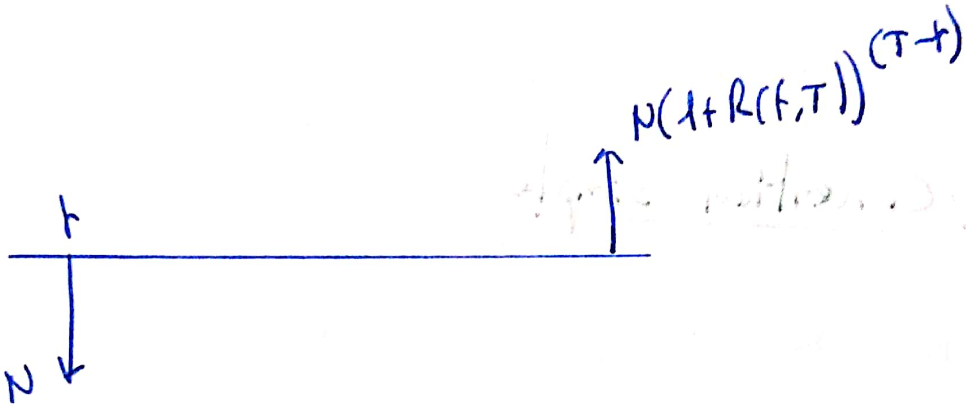
- C'est un taux de référence annuel
- $(T-t)$ c'est la durée entre T et t qu'on exprime en annuité.
- On suppose que le taux d'intérêt est défini et fixe pour la période.



NB: L'intérêt dans cette convention est $NR(t,T)(T-t)$ proportionnel à la période de l'emprunt.

NB : • Cette convention est utilisée pour des produits avec $(T-t) < 1$ an

2/ Convention composée annuellement



Les intérêts sont calculés tous les ans sur le capital accumulé.

C'est une convent utilisée pour des périodes $(T-t) > 1$ an

3/ Convention composée m-fois annuellement

Pour $m=2$, on calcul tous les 6 mois

La formule de recalcul des taux en T (avec une période m)

$$\left(1 + \frac{R(t,T)}{m}\right)^{m(T-t)}$$

Par exemple, pour une composition semestrielle $(m=2)$

$t+\frac{1}{2}$: $\left(1+\frac{R(t,T)}{2}\right)^{(T-t)}$ $\quad$ t : $\left(1+\frac{R(t,T)}{2}\right)^{2(T-t)}$

NB : $\lim \left(1+\frac{R(t,T)}{m}\right)^{m(T-t)} = \exp(R(t,T)(T-t))$

$\Rightarrow$ La convention continue de calcul des taux

4/ Convention continue

Soit $c(u)$ le capital accumulé jusqu'à la date

$$c(u+du) = c(u)(1+R(t,T)\,du)$$

$$\frac{c(u+du)-c(u)}{du} = R(t,T)\,c(u)$$

Quand $du \to 0$

$$\begin{cases} \frac{dc(u)}{du} = R(t,T)\,c(u) \\ c(t) = N \end{cases} \Rightarrow c(u) = N e^{R(t,T)(u-t)}$$

et en T, $c(T) = N e^{R(t,T)(T-t)}$

II - Hypothèses sur le marché

On considère un marché financier sous les hypothèses suivantes :

1. Absence de coût de transaction
2. Marché liquide
3. Ventes à découvert sont autorisées
4. Absence d'opportunité d'arbitrage

III - Définitions de différents concept de base

1/ Obligation zéro-coupon

Définition

Un ZC est un titre échangeable sur le marché et qui garanti à l'acheteur le versement d'un unique flux égale à une unité monétaire à une date future T.
et on note son prix $P(t, T)$ à la date t.

En AOA,

- $\forall T$, $P(T,T)=1$
- Pour t fixé, $T \mapsto P(t, T)$ est décroissante

Démonstration

1) On suppose $P(T,T) < 1$

<u>En T :</u> • Emprunter $P(T,T)$

• Acheter le ZC de maturité T

$$X_T = +P(T,T) - P(T,T) = 0$$

<u>En T :</u>

$$X_T = +1 - P(T,T) > 0$$

(ici les intérêts sont considérés négligeables)

versement de l'obg ZC

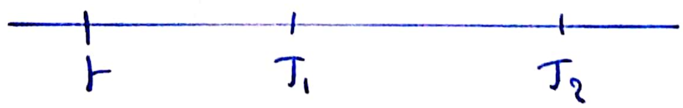
rbt de l'emprunt

Donc on a une opportunité d'arbitrage

2) Décroissance de $T \to P(t,T)$

Si ce n'est le cas, on suppose qu'il existe

$T_1 < T_2$ tq $P(t,T_1) < P(t,T_2)$



<u>En t :</u> • On vend à découvert le $P(t,T_2)$

• On achète $P(t,T_1)$

$$X_t = P(t,T_2) - P(t,T_1)$$

$$X_{T_1} = P(t,T_2) - P(t,T_1) + 1$$

$$X_{T_2} = P(t,T_2) - P(t,T_1) + 1 - 1 > 0$$

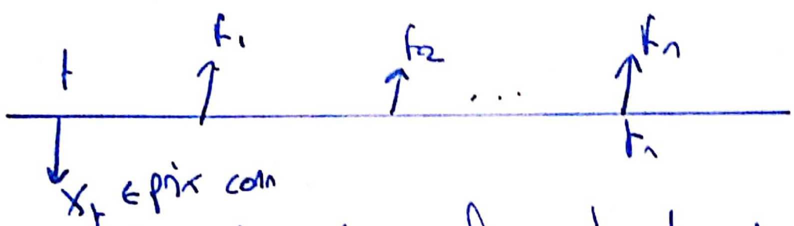
$\Rightarrow T \mapsto P(t,T)$ est décroissante

2/ Taux spot ou taux ZC

Définition

Le taux spot ou taux ZC, $R(t,T)$ est le taux de remboursement actuariel de l'obligation ZC de maturité T acheté en t.

Rappel : (Tx de rbt actuariel / yield to Maturity)



Le taux de rendement actuariel est le tx qui permet d'égaliser le prix de l'actif avec ses flux actualisés.

Le taux actuariel $Y(t,T)$ est tel que

$$X_t = \sum_{i=1}^{n} F_i \, D(t,t_i)$$

avec X_t le prix
F_i les flux
$D(t,t_i)$ le tx d'actualisation

Le taux d'actualisation $D(t,t_i)$ s'écrit en en fonction du taux actuariel $Y(t,T)$ et dépend de la convention de calcul, càd :

- Convention simple

$$D(t,t_i) = \frac{1}{1 + Y(t,T)(t_i - t)}$$

- Convention composée

$$D(t,t_i) = \frac{1}{(1+Y(t,T))^{(t_i - t)}}$$

le tx spot est le tx actuariel associé à un ZC

- Convention continue

$$D(t,t_i) = e^{Y(t,T)(t_i - t)}$$

À partir de ce rappel, on définit le taux spot (taux ZC)

- Convention simple

$$P(t,T) = D(t,T) \times 1 = 1 + R(t,T)(T-t)$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{tx spot}}}{R(t,T)} = \frac{1}{T-t}\left\{\frac{1}{P(t,T)} - 1\right\} \quad (*)$$

- Convention composée

$$R(t,T) = \left(\frac{1}{P(t,T)}\right)^{1/T-t} - 1$$

- Convention continue

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln P(t,T) \quad (*)$$

3/ Taux court ou taux spot instantané

Définition

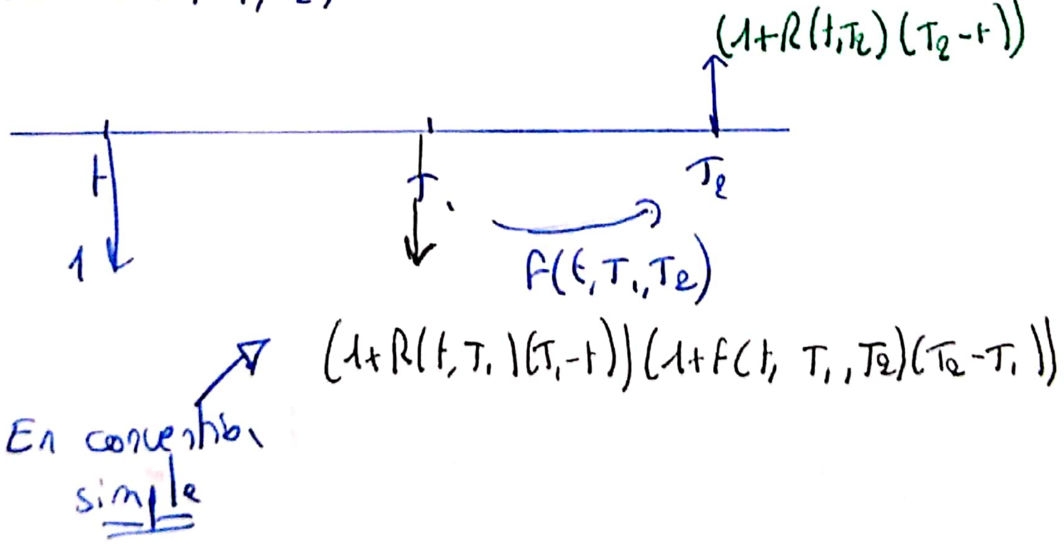
$r_t = \lim_{T \to t} R(t,T)$ c'est le taux actuariel / de rendement pour une obligation ZC $P(t, t+dt)$ avec $dt \to 0$

4/ Taux forward

Définition

Le taux forward est le taux d'intérêt fixé en t pour les emprunts sur la période $[T_1, T_2]$.

On le note $F(t, T_1, T_2)$



Donc $1 + R(t,T_2)(T_2 - t) = (1 + R(t,T_1)(T_1 - t))(1 + f(t,T_1,T_2)(T_2 - T_1))$

Donc $$F(t,T_1,T_2) = \left(\frac{1 + R(t,T_2)(T_2 - t)}{1 + R(t,T_1)(T_1 - t)} - 1 \right) \frac{1}{T_2 - T_1}$$

Au final

$$\boxed{F(t,T_1,T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1}\left(\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)} - 1\right)} \quad (*)$$

- Sous la convention composée

$$F(t,T_1,T_2) = \left(\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)} - 1\right)^{\frac{1}{T_2 - T_1}}$$

- Sous la convention continue

$$\boxed{F(t,T_1,T_2) = \frac{1}{T_2 - T_1}\log\left(\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)}\right)} \quad (*)$$

Pour $T_1 = t$, $F(t,t,T_2) = \frac{1}{T_2 - t}\ln\left(\frac{1}{P(t,T_2)}\right) = R(t,T_2)$

5/ Taux forward instantané

$$f(t,T) = \lim_{h \to 0} F(t,T,T+h)$$

Propriété : (convention continu)

$$f(t,T) = \frac{\partial}{\partial T}\left(R(t,T)(T-t)\right)$$

Démonstration

On a $\quad F(t, T, T+h) = \dfrac{R(t, T+h)(T+h-t) - R(t,T)(T-t)}{h}$

$$f(t,T) = \lim_{h \to 0} F(t, T, T+h) = \frac{\partial}{\partial T}\left(R(t,T)(T-t)\right)$$

NB : On a $\bullet\ R(t,T) = \dfrac{1}{T-t}\displaystyle\int_t^T f(t,u)\,du$

$\bullet\ f(t,T) = -\dfrac{\partial}{\partial T} \log . P(t,T)$