Séries temporelles, examen.

Master 2 SAF professionel, ISFA3, année 2008-2009

Deuxième session 2009.

Durée 1h30, notes de cours et de TD autorisés, pas de calculatrices.
Vous veillerez à justifier soigneusement vos réponses.

Dans toute la suite, L désigne l'opérateur de décalage $L(X_t) = X_{t-1}$, $\Delta_d = (1 - L^d)$ l'opérateur de différence d'ordre d et I est l'opérateur identité : $I(X_t) = X_t$.

Exercice 1 On considère $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(\nu_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux bruits blancs faibles non corrélés entre eux (i.e. $\mathrm{Cov}(\varepsilon_t, \nu_s) = 0$ pour tout t, s).
1. Soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus $MA(q)$ qui vérifie :

$$Z_t = C(L)(\nu_t),$$

où C est un polynôme de degré q.
Montrer que le processus $W_t = \varepsilon_t + Z_t$ est un processus $MA(q)$.
2. Le processus $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ s'écrit donc : $W_t = D(L)(\eta_t)$ où D est un polynôme de degré q et $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible.
2.a Exprimer la densité spectrale de $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ en fonction de D et de la variance de η_t d'une part, en fonction de C et des variances de ε_t et ν_t d'autre part.
2.b En déduire que le polynôme D n'a pas de racines de module 1.
2.c Que peut-on en déduire pour le processus $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$?
3. On considère A un polynôme de degré p, B un polynôme de degré q et deux processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ qui vérifient

$$A(L)(X_t) = \varepsilon_t \text{ et } Y_t = B(L)(\nu_t).$$

3.a Montrer que le processus $U_t = X_t + Y_t$ admet une représentation $ARMA(p, p+q)$.
3.b À quelle condition cette représentation admet-elle une solution stationnaire ?
3.c Le processus $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ admet-il une représentation inversible ?

Exercice 2 Soit $\Psi_1 = (5I + 2L - 3L^2)/4$ et $\Psi_2 = (I + L^2)/2$ deux moyennes mobiles finies, et $\Psi_3 = \Psi_1 \circ \Psi_2$.
1. Déterminer les séries absorbées par Ψ_i , $i = 1, 2, 3$ (i.e. les séries telles que $\Psi_i(X_t) = 0$).
2. Déterminer les séries invariantes par Ψ_1 et Ψ_2 et montrer que Ψ_3 laisse invariants les polynômes de degré 1.
3. On pose $X_t = at + b + s_t + U_t$ où s_t est une coposante saisonnière de période 4 et de somme nulle, et $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc centré de variance σ^2. Quelles sont les propriétés destationarité de $Y_t = \Psi_3(X_t)$, de $Z_t = \Psi_3(X_t) - (at+b)$? Déterminer leur espérance, leur fonction de covariance et leur densité spectrale si elles existent.

Exercice 1 :

Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(\nu_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux BB non corrélés entre eux

1) Soit $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ $MA(q)$ tq

$$Z(t) = C(L)(\nu_t) \qquad \text{où } C \text{ polynôme de degré } q$$

Mq $W_t = \varepsilon_t + Z_t$ est $MA(q)$

$W_t = \varepsilon_t + \nu_t + c_1\nu_{t-1} + \_\_ + c_q\nu_{t-q}$

(ε_t) et (ν_t) sont 2 BB faibles non corrélés entre eux

$\Rightarrow \varepsilon_t + \nu_t$ encore un BB

$\Rightarrow W_t$ est la somme d'un BB et d'un $MA(q)$ donc $MA(q)$ car $(\varepsilon_t) \perp\!\!\!\perp (\nu_t)$

2) $W_t = D(L)\eta_t$

a) $\Rightarrow f_W(\omega) = |D(e^{i\omega})|^2 f_\eta(\omega)$

$= |D(e^{i\omega})|^2 \frac{\sigma_\eta^2}{2\pi}$ car $(\eta_t) \sim BB(0,\sigma_\eta^2)$

D'autre part, $f_W(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_W(h)\cos(\omega h)$

et $W_t = \varepsilon_t + C(L)\nu_t$

$\gamma_W(h) = Cov(\varepsilon_t + C(L)\nu_t\,,\, \varepsilon_{t-h} + C(L)\nu_{t-h})$

$= Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) + Cov(C(L)\nu_t\,,\, C(L)\nu_{t-h})$ car $\forall t\ (\varepsilon_t) \perp\!\!\!\perp (\eta_t)$

$= \gamma_\varepsilon(h) + \gamma_Z(h)$

$\Rightarrow f_W(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_W(h)\cos(\omega h)$

$\gamma_\varepsilon(h) = \begin{cases}\sigma_\varepsilon^2 & \text{si } h=0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

$= \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}(\gamma_\varepsilon(h) + \gamma_Z(h))\cos(\omega h)$

il s'agit de la fact° d'autocov d'un $MA(q)$

$= \frac{1}{2\pi}\sigma_\varepsilon^2 + \underbrace{\frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}}\gamma_Z(h)\cos(\omega h)}_{f_Z(\omega)}$

$= \frac{1}{2\pi}\sigma_\varepsilon^2 + |C(e^{i\omega})|^2\frac{\sigma_\nu^2}{2\pi}$

$\Rightarrow f_W(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\sigma_\varepsilon^2 + |C(e^{i\omega})|^2\sigma_\nu^2)$

b) D'une part on a $f_W(\omega) = |D(e^{i\omega})|^2\frac{\sigma_\eta^2}{2\pi}$

et d'autre on a $f_W(\omega) = \frac{1}{2\pi}(\sigma_\varepsilon^2 + |C(e^{i\omega})|^2\sigma_\nu^2)$

$\Rightarrow |D(e^{i\omega})|^2\frac{\sigma_\eta^2}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}(\sigma_\varepsilon^2 + |C(e^{i\omega})|^2\sigma_\nu^2)$

Si le polynôme D avait une racine de module 1 disons à $e^{i\omega_0}$ alors $|D(e^{i\omega_0})|$ serait égal à 0

or par l'égalité précédente cela impliquerait que $0 = \frac{1}{2\pi}(\underbrace{\sigma_\varepsilon^2}_{>0} + \underbrace{|C(e^{i\omega})|^2\sigma_\nu^2}_{\geq 0})$ ce qui est impossible car le membre de droite est strictement positif $(\sigma_\varepsilon^2 > 0)$

c) On peut déduire que pour qu'on ait bien f_W continue et strictement positive pour toutes les fréquences toutes les racines de D doivent se situer à l'intérieur du cercle unité car bordure déjà vu et en dehors $\Rightarrow$ instabilité du processus, f_W peut être ∞ et non inversibilité

3) $A(L)(X_t)=\varepsilon_t$ et $Y_t = B(L)(\nu_t)$

a) Mq $U_t = X_t + Y_t$ admet une représentat° ARMA $(p, p+q)$

$U_t = X_t + B(L)(\nu_t)$

$\Rightarrow A(L)U_t = A(L)X_t + A(L)B(L)(\nu_t)$

$\Rightarrow A(L)U_t = \varepsilon_t + A(L)B(L)(\nu_t)$ avec $(\varepsilon_t) \sim BB(0,\sigma_\varepsilon^2)$
$(\nu_t) \sim B(0,\sigma_\nu^2)$

$A(L)$ est un polynôme de deg. p
$B(L)$ ———— q
$\rightarrow A(L)B(L)$ ———— $p+q$
$\Rightarrow U_t$ admet bien une représentat° ARMA$(p,p+q)$

b) Pour qu'un ARMA$(p,p+q)$ admettent une solut° stationnaire la condit° est sur la partie AR
→ Toutes les racines du polynôme autorégressif $A(L)$ doivent se situer à l'extérieur du cercle unité du plan complexe sinon le processus serait non stationnaire.
car racines à l'intérieur ⇒ les effets des chocs passés sur les valeurs futures de X_t ↗ exponentiellement ⇒ variance ∞ au fil du temps et donc non stationnarité.

c) Pour que U_t admette une représentat° inversible il faut que les racines de $B(L)$ se situent à l'extérieur du cercle unité du plan complexe.

Exercice 2 :

Soit $\Psi_1 = (5I + 2L - 3L^2)\frac{1}{4}$ et $\Psi_2 = (I + L^2)\frac{1}{2}$ 2 MM finies
et $\Psi_3 = \Psi_1 \cdot \Psi_2 = \frac{1}{8}(5I + 2L - 3L^2)(I + L^2)$
$= \frac{1}{8}(5I + 2L + 2L^2 + 2L^3 - 3L^4)$

1) On cherche $\mathrm{Ker}(\Psi_i)$ $i \in \{1,2,3\}$

$X_t \in \mathrm{Ker}(\Psi_1) \Leftrightarrow \Psi_1 X_t = \frac{1}{4}(5X_t + 2X_{t-1} - 3X_{t-2}) = 0$

On cherche x tq $\frac{1}{4}(5 + 2x - 3x^2) = 0$
$\Delta = 64 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{64}}{-6} = \frac{1}{3} \pm \frac{1}{6}8$
$= \frac{1}{3} \pm \frac{4}{3} \Rightarrow x \in \{-1; \frac{5}{3}\}$
$\Rightarrow \Psi_1(x) = -\frac{3}{4}(x+1)(x - \frac{5}{3})$

Donc solut° générale :
$\mathrm{Ker}(\Psi_1) = \{\alpha(-1)^t + \beta(\frac{5}{3})^t, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$

De même $\Psi_2(x) = \frac{(1+x^2)}{2} \Rightarrow x \in \{e^{i\frac{\pi}{2}}, e^{i\frac{3\pi}{2}}\}$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(\Psi_2) = \{\gamma \cos(t\frac{\pi}{2}) + \delta \sin(t\frac{\pi}{2}), (\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^2\}$

$\Psi_3 = \Psi_1 \cdot \Psi_2 = -\frac{3}{4}(x+1)(x - \frac{5}{3}) \cdot \frac{1}{2}(x - e^{i\frac{\pi}{2}})(x - e^{i\frac{3\pi}{2}})$

$\Rightarrow \mathrm{Ker}(\Psi_3) = \{\alpha(-1)^t + \beta(\frac{5}{3})^t + \gamma\cos(t\frac{\pi}{2}) + \delta\sin(t\frac{\pi}{2}), (\alpha,\beta,\gamma,\delta) \in \mathbb{R}^4\}$

2) On cherche $Im(\psi_1)$ et $Im(\psi_2)$

$Im(\psi_1) = \ker(\psi_1 - I)$

$\psi_1(L) - I = \frac{1}{4}(5I + 2L - 3L^2) - I$

$= \frac{1}{4}(I + 2L - 3L^2)$

$= \frac{-3}{4}(L + \frac{1}{3}I)(L - I)$ $\qquad -\frac{3}{4}(x+\frac{1}{3})(x-1)$

$\Rightarrow Im(\psi_1) = \ker(\psi_1 - I) = \{\alpha + \beta(-\frac{1}{3})^t, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$

$\psi_2(L) - I = \frac{1}{2}(I + L^2) - I = \frac{1}{2}(-I + L^2)$

$= -\frac{1}{2}(1-L)(1+L)$

$\Rightarrow Im(\psi_2) = \ker(\psi_2 - I) = \{\alpha + \beta(-1)^t, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\}$

Soit $X_t = \alpha + \beta t$ invariant par ψ_3 ?

Vrai si on montre que 1 est une racine double de $\psi(L) - I$

$\psi_3(L) - I = \frac{1}{8}(-3I + 2L + 2L^2 + 2L^3 - 3L^4)$

Soit $P(x) = -3 + 2x + 2x^2 + 2x^3 - 3x^4$

$\rightarrow P'(x) = 2 + 4x + 6x^2 - 12x^3$

$P(1) = -3 + 2 + 2 + 2 - 3 = 0$

$P'(1) = 2 + 4 + 6 - 12 = 0$

$\Rightarrow$ 1 est racine double $\Rightarrow \{\alpha + \beta t, (\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2\} \subset Im(\psi_3)$

Donc les polynômes de degré 1 sont bien invariants par ψ_3.

3) $X_t = at + b + s_t + U_t$ $\qquad s_t$ période 4 de somme nulle

$U_t \sim BB(0, \sigma^2)$

$Y_t = \psi_3(X_t)$

$= \frac{1}{8}(5X_t + 2X_{t-1} + 2X_{t-2} + 2X_{t-3} - 3X_{t-4})$

On a $X_t = at + b + s_t + U_t$

$\Rightarrow X_{t-1} = a(t-1) + b + s_{t-1} + U_{t-1} = at + b - a + s_{t-1} + U_{t-1}$

$X_{t-2} = at + b - 2a + s_{t-2} + U_{t-2}$

$X_{t-3} = at + b - 3a + s_{t-3} + U_{t-3}$

$X_{t-4} = at + b - 4a + s_{t-4} + U_{t-4}$

$\Rightarrow Y_t = \frac{1}{8}\left(at(5+2+2+2-3) + b(5+2+2+2-3) + a(2\times(-1) + 2\times(-2) + 2\times(-3) - 3\times(-4)) + 5s_t + 2s_{t-1} + 2s_{t-2} + 2s_{t-3} - 3s_{t-4} + 5U_t + 2U_{t-1} + 2U_{t-2} + 2U_{t-3} - 3U_{t-4}\right)$

$= \frac{1}{8}(8at + 8b + 5s_t + 2s_{t-1} + 2s_{t-2} + 2s_{t-3} - 3s_{t-4} + 5U_t + 2U_{t-1} + 2U_{t-2} + 2U_{t-3} - 3U_{t-4})$

$= \frac{1}{8}(8(at+b) + \underbrace{2s_t + 2s_{t-1} + 2s_{t-2} + 2s_{t-3}}_{= 0 \ \Sigma \text{ nulle et car période } = 4} + 5U_t + 2U_{t-1} + 2U_{t-2} + 2U_{t-3} - 3U_{t-4})$

$= \frac{1}{8}(8(at+b) + 5U_t + 2U_{t-1} + 2U_{t-2} + 2U_{t-3} - 3U_{t-4})$

$\Rightarrow E[Y_t] = at + b$ $\qquad \Rightarrow$ non stationnaire

$V[Y_t] = \frac{1}{8^2}(5^2 + 2^2 + 2^2 + 2^2 + 3^2)\sigma^2$

$= \frac{46}{64}\sigma^2$

$$\gamma_Y(k) = Cov(Y_t, Y_{t-k}) = \gamma_Z(k)$$

$$\Rightarrow \gamma_Y(k) = \begin{cases} \frac{46}{64}\sigma^2 & \text{si } k=0 \\ \frac{3}{16}\sigma^2 & \text{si } |k|=1 \\ \frac{1}{8}\sigma^2 & \text{si } |k|=2 \\ \frac{1}{16}\sigma^2 & \text{si } |k|=3 \\ \frac{-15}{64}\sigma^2 & \text{si } |k|=4 \\ 0 & \text{si } |k|>4 \end{cases}$$

$$Z_t = \Psi_3(X_t) - (at+b)$$

$$\Rightarrow Z_t = \Psi_3(U_t) \quad \Rightarrow \mathbb{E}[Z_t] = 0$$

$$\mathbb{V}[Z_t] = \frac{46}{64}\sigma^2$$

$$\gamma_Z(k) = Cov(Z_t, Z_{t-k}) = Cov\left(\frac{1}{8}(5U_t + 2U_{t-1} + 2U_{t-2} + 2U_{t-3} - 3U_{t-4}), \frac{1}{8}(5U_{t-k} + 2U_{t-1-k} + 2U_{t-2-k} + 2U_{t-3-k} - 3U_{t-4-k})\right)$$

$$= \begin{cases} \frac{46}{64}\sigma^2 & \text{si } k=0 \\ \frac{3}{16}\sigma^2 & \text{si } |k|=1 \\ \frac{1}{8}\sigma^2 & \text{si } |k|=2 \\ \frac{1}{16}\sigma^2 & \text{si } |k|=3 \\ \frac{-15}{64}\sigma^2 & \text{si } |k|=4 \\ 0 & \text{si } |k|>4 \end{cases}$$

$Y_t = at + b + \Psi_3(L)U_t \longrightarrow$ pas de densité spectrale car non stationnaire

$$Z_t = \Psi_3(L)U_t$$

$$f_Z(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h\in\mathbb{Z}} \gamma_Z(h)\cos(\omega h)$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{46}{64}\sigma^2 + \frac{3}{16}\sigma^2\cos(\omega) + \frac{2}{16}\sigma^2\cos(2\omega) + \frac{1}{16}\sigma^2\cos(3\omega) - \frac{15}{64}\sigma^2\cos(4\omega)\right)$$

$$= \frac{1}{64}\left(46 + 12\cos(\omega) + 8\cos(2\omega) + 4\cos(3\omega) - 15\cos(4\omega)\right)\frac{\sigma^2}{2\pi}$$