QCM **Master 2 MAIM, filière IF**

QCM Théorie des options
Evaluation du 27/01/2011

Nom et prénom :
....

Théorie des options

Question 1 Le prix d'un PUT européen est

- [ ] Supérieur ou égal à celui d'un PUT américain de mêmes caractéristiques
- [ ] Le même que celui d'un PUT américain de mêmes caractéristiques
- [x] Inférieur ou égal à celui d'un PUT américain de mêmes caractéristiques

Question 2 On considère un modèle binomial à une étape où le taux sans risque est $r = 0$. On suppose que $S_0 = 100$ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1.2$ et $d = 0.8$. Dans ce modèle quel est le prix d'un CALL européen de prix d'exercice $K = 104$ et d'échéance $T = 1$?

[ ] 4 [x] 8 [ ] 2 [ ] 3

Question 3 Quelle relation existe entre le gamma d'un CALL et le gamma d'un PUT sur le même sous-jacent et de même prix d'exercice ?

- [ ] $\Gamma_{call} = \Gamma_{put} + 1$
- [ ] aucune
- [x] $\Gamma_{call} = \Gamma_{put}$
- [ ] $\Gamma_{call} > \Gamma_{put}$

Question 4 On considère un portefeuille constitué des actifs suivants :

Actif	Nombre	Δ_{actif}
Action A	3	1
Action B	1	0
Option d'achat (action A)	60	0.5
Option de vente (action B)	2	-0.75

$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S}$

Que doit-on faire pour que ce portefeuille soit delta-neutre par rapport au prix de l'action A ?

- [ ] On doit vendre l'action B et le PUT
- [ ] On doit acheter 1,5 actions A
- [x] On doit vendre 33 actions A
- [ ] On doit vendre 32,5 actions A

Stratégie de couverture Pour couvrir sa position, le vendeur d'options d'achat (qui doit livrer des titres) adopte une position en Δ neutre (dite stratégie delta-

111

neutre). Il constitue un portefeuille d'action. Sur un certain nombre d'actions il respecte toujours deux conditions :
- acheter Δ actions par call vendu ;
- gérer en continu (à cause de l'instabilité du Δ).

Exemple 1 : Soit $\Delta = 0,3$. Pour couvrir la vente d'une option d'achat, l'investisseur achète 0,3 actions par option vendue (pour une action). S'il vend 100 options d'achat (pour une quotité de 10). La position acheteur (longue) est de 300 actions et la position vendeur (courte) est de 100 options. Le delta global d'une position est défini par le gain ou la perte réalisé par cette position lorsque le cours de l'action augmente d'une unité monétaire. Le delta d'une action est égal à un. Dans l'exemple :
- Δ de la position courte pour 100 options : $0,3 \times 10 \times (-100) = -300$
- Δ de la position longue pour 300 actions : $1 \times 300 = 300$

Le Δ global vaut donc 0, d'où le nom de stratégie "Delta-neutre".

Couverture pour un acheteur d'option d'achat : Le procédé sera identique mais la position sera inversée : on sera en position vendeur d'actions par call acheté.
Couverture pour un acheteur d'option de vente : Une position longue sur un put est couverte par une position longue sur l'action (gestion en continu, les positions sur le sous-jacent sont ajustées régulièrement).
Couverture pour un vendeur d'option de vente : Une position courte sur un put est couverte par une position courte sur l'action (gestion en continu).

rence les documents compilés

Question 5 Soit S un actif dont la dynamique stochastique est

$$dS_t = 0.10 S_t dt + 0.40 S_t dW_t$$

avec $S_0 = 50$, W un mouvement brownien et où les coefficients 0.10 et 0.40 représentent respectivement le rendement moyen annuel et la volatilité du rendement sur un an de l'actif S. La probabilité pour que le prix de l'actif soit au moins égal à 58 au bout de 6 mois est comprise entre

☐ $[0.75,\ 1]$

☒ $[0.25,\ 0.5]$

☐ $[0,\ 0.25]$

☐ $[0.5,\ 0.75]$

Question 6 Considérons trois actifs A, B et C de flux futurs à $t = 1$:

$\begin{vmatrix} 60 & 75 \\ 20 & 40 \end{vmatrix} = 60\times40 - 20\times75 = 900 \neq 0$

Actif	A	B	C
état hausse	60	75	105
état baisse	20	40	50
prix	3	5	

$\begin{cases} 60x + 75y = 105 \\ 20x + 40y = 50 \end{cases}$

$x = 1/2$

$y = 1$

$\Rightarrow$ prix C = 1,5 + 5

= 6,5

☐ L'actif C n'est pas replicable

☐ S'il n'y a pas d'opportunités d'arbitrage sur le marché, le prix de C est 0.65

☒ Le marché constitué des actifs A, B et C est complet

☐ L'actif C est replicable par un portefeuille qui consiste en l'achat d'un actif A et la vente d'un actif B

Question 7 L'action X est cotée au prix de 100 euros. Sur le marché est disponible un CALL européen sur cette action, d'échéance 1 an, de prix d'exercice 90 euros au prix de 14 euros. En supposant que le taux sans risque vaut $r = 0$, quel est le prix d'un PUT européen sur le même sous-jacent, d'échéance 1 an et de strike 90 ?

☐ 1 euro ☐ 7 euros ☐ 10 euros ☒ 4 euros

Question 8 L'actif S est supposé ne pas rendre de dividende. On reprend les notations habituelles. Le gain/perte de l'acheteur d'une option européenne sur S d'échéance T est $90 - S_T$ si $S_T < 95$ et -5 sinon.

☒ Il s'agit d'un PUT de strike 95 et prime 5

Gain à échéance $= (K - S_T)_+ - 5$

$\Rightarrow K = 95$

☐ Il s'agit d'un CALL de strike 90 et prime 5

☐ Il s'agit d'un PUT de strike 90 et prime 5

☐ Il s'agit d'un CALL de strike 95 et prime 5

Question 9 Considérons une option CALL et une option PUT sur le même actif sous-jacent S, de même prix d'exercice K, de même échéance $T = 1$ an et de primes $C_0 = 5$ et $P_0 = 3$. Monsieur X achète ces deux options.

- [ ] Monsieur X paie pour son achat 2 euros.
- [ ] A l'échéance monsieur X gagne $(S_T - K)^+ - (K - S_T)^+$.
- [x] A l'échéance monsieur X gagne $|S_T - K|$.
- [x] Monsieur X paie pour son achat 8 euros.
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 10 Quel est le payoff de la stratégie qui consiste en l'achat de 2 options d'achat et la vente de 2 options de vente ? Toutes les options sont sur le même sous-jacent S, ont le même strike K et la même échéance T.

- [ ] $2(S_T - K)^+ + 2(K - S_T)^+$
- [ ] 0
- [ ] $(S_T - K)^+ + (K - S_T)+$
- [ ] $2|S_T - K|$
- [x] $2((S_T - K)\mathbf{1}_{S_T \geq K} - (K - S_T)\mathbf{1}_{S_T \leq K})$

Question 11 Quel(s) paramètre(s) intervien(nen)t dans la formule de Black Scholes

- [x] Le drift du processus de prix
- [x] L'échéance de l'option
- [x] Le mouvement Brownien
- [ ] Le payoff de l'option
- [x] La volatilité du processus de prix
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 12 Quelle relation existe entre le delta d'un CALL et celui d'un PUT à la monnaie, sur le même sous-jacent et de même échéance ?

- [ ] $\Delta_{call} \leq \Delta_{put}$
- [ ] $\Delta_{call} = \Delta_{put}$
- [ ] $\Delta_{call} + e^{-rT} = \Delta_{put} + 1$
- [ ] $\Delta_{call} + \Delta_{put} = 1$
- [x] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 13 Les primes d'un CALL et d'un PUT européens à la monnaie sur le même sous-jancent, de même échéance sont

- [ ] La prime du CALL peut être plus grande ou plus petite que la prime du PUT
- [x] Egales si le prix de l'actif sans risque est constant
- [x] La prime du CALL est toujours supérieure ou égale à la prime du PUT
- [ ] La prime du CALL est toujours inférieure ou égale à la prime du PUT
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 14 Le prix d'un CALL américain est

- [ ] Supérieur ou égal à celui d'un CALL européen de mêmes caractéristiques
- [ ] Inférieur ou égal à celui d'un CALL européen de mêmes caractéristiques
- [ ] Il peut être plus grand ou plus petit que celui d'un CALL européen de mêmes caractéristiques
- [x] Le même que celui d'un CALL européen de mêmes caractéristiques

Question 15 Comment évalue-t-on un CALL européen ?

- [x] En probabilité risque neutre
- [ ] En probabilité historique moins la probabilité risque neutre
- [ ] En probabilité historique divisée par la probabilité risque neutre
- [ ] En probabilité historique

Question 16 On considère un modèle binomial à deux étapes (chaque étape représentant un mois). On suppose que $S_0 = 30$ et que les facteurs de hausse et de baisse sont respectivement $u = 1.08$ et $d = 0.93$. Le taux sans risque sur chaque période est $r = 3\%$. Supposons que l'actif sous-jacent est une action qui, dans un mois (donc à $t = 1$), délivre un dividende égale à 1. Quelle est la prime d'un PUT européen à la monnaie sur cette action et d'écheance 2 mois ?

- [ ] 0.5664
- [ ] 0.7685
- [x] 0.8876
- [ ] 0.4245

Question 17 On reprend les notations usuelles des formules de Black-Scholes. On a :

- [x] $\frac{d_2^2-d_1^2}{2} = ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - r(T-t)$
- [x] Le prix d'un CALL C_t est une fonction croissante de S_t
- [x] $\Delta_{CALL} = \mathcal{N}(d_1)$
- [x] Le prix d'un CALL C_t est une fonction convexe de S_t
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 18 Je vends un CALL européen dans un marché avec 2 actifs, un risqué et un non risqué. Pour avoir un portefeuille delta-neutre je dois acheter une quantité de l'actif sous-jacent

- [ ] Nulle
- [ ] Négative
- [x] Positive

Question 19 Le détenteur d'un CALL américain?

- [x] Peut revendre son CALL avant son échéance.
- [ ] A l'obligation de vendre le sous-jacent au prix d'exercice à tout moment jusqu'à l'échéance de l'option.
- [x] A le droit d'acheter le sous-jacent à un prix déterminé (prix d'exercice) à tout moment jusqu'à l'échéance de l'option.
- [ ] A l'obligation d'acheter le sous-jacent au prix d'exercice à l'échéance de l'option.
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 20 On se place dans le cadre d'un modèle de Black-Scholes. Il y a sur le marché un actif risqué S et un actif sans risque S^0. La dynamique de ces actifs est donnée par

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t), \qquad dS_t^0 = S_t^0 r dt,$$

avec W un mouvement brownien sous la probabilité historique, μ est un réel et $\sigma > 0$. Une option CALL à la monnaie à départ différé est une option CALL payée immédiatement permettant de disposer à la date t_1 d'une option de maturité t_2 et de prix d'exercice S_{t_1}. On introduit la notation suivante : $C_t(T, K)$ le prix d'un CALL (habituel) sur S, de strike K et d'échéance T.

- [x] Le payoff de l'option est $(S_{t_2} - S_{t_1})^+$
- [x] La valeur du CALL à la monnaie à départ différé est $C_t(t_2, S_{t_1})$
- [x] Le prix de l'option à l'instant t s'écrit $e^{-r(t_2-t)}\tilde{E}((S_{t_2} - S_{t_1})^+|F_t))$ où $\tilde{E}$ est l'espérance sous la probabilité risque-neutre
- [ ] La valeur du CALL à la monnaie à départ différé est $C_t(t_2, S_{t_1})$ pour tout $t \geq t_1$
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 21 J'ai acheté un PUT européen de prix d'exercice 50 et d'échéance 1 an au prix de 4 euros. Je gagnerai de l'argent si le cours du sous jacent à l'échéance est :

- [ ] inférieur à 54
- [ ] supérieur à 46
- [ ] supérieur à 54
- [x] inférieur à 46

Question 22 Un PUT américain est

- [ ] Une option dont le prix est égal à $(S_t - K)^+$ à tout instant t avant l'échéance
- [x] Une option de vente
- [ ] Un contrat qui donne le droit mais non l'obligation de vendre l'actif sous-jacent à son prix de marché
- [x] Un contrat qui donne le droit mais non l'obligation de vendre l'actif sous-jacent à tout instant
- [x] Un produit dérivé à effet de levier
- [ ] *Aucune de ces réponses n'est correcte.*

Question 23 Soit $Y_t = exp(\alpha W_t + \beta t)$, où α et β sont des constantes, quelle est l'EDS satisfaite par ce processus ?

- [x] $dY_t = \alpha Y_t dW_t + (\beta + \frac{\alpha^2}{2})Y_t dt$
- [ ] $dY_t = \beta dt + \alpha dW_t$
- [ ] $dY_t = \alpha dt + \beta dW_t$
- [ ] $dY_t = \alpha Y_t dW_t + (\beta - \frac{\alpha^2}{2})Y_t dt$
- [ ] $dY_t = (\alpha Y_t - \frac{\beta^2}{2})dt + \beta Y_t dW_t$

Question 2:

$$S_0 = 100 \quad \begin{cases} uS_0 = 120 & f_u = (120-104)_+ = 16 \\ dS_0 = 80 & f_d = 0 \end{cases}$$

$$q = \frac{R-d}{u-d} \qquad R = e^{2\Delta r} = 1$$

$$\Rightarrow q = \frac{1-0,8}{1,2-0,8} = 1/2$$

$K = 104$

$$\Rightarrow f = \frac{1}{R}\left[q f_u + (1-q) f_d\right]$$
$$= \frac{1}{2} \times f_0 = 8$$

4) $P_{portefeuille} = 60\, P_{op^{\circ}A} + 3\, S_A$

$$\Delta_{Port.} = \frac{\partial P_{Port.}}{\partial S_A} = 60 \frac{\partial P_{op^{\circ}A}}{\partial S_A} + 3 \frac{\partial S_A}{\partial S_A}$$
$$= 60 \times 0,5 + 3 \times 1$$
$$= 33$$

$\Rightarrow$ Vente de 33 Actions A.

5) $dS_t = 0,10\, S_t\, dt + 0,40\, S_t\, dW_t \quad = S_t(\alpha dt + \sigma dW_t)$

$S_0 = 50$

$$\Rightarrow S_t = S_0 \exp\left(\left(\alpha - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$
$$= 50 \exp(0,02t + 0,4 W_t)$$

$$\mathbb{P}(S_{6/12} \geq 58) = \mathbb{P}\left(50 \exp\left(0,02 \times \frac{6}{12} + 0,4\, W_{6/12}\right) \geq 58\right)$$

$$= \mathbb{P}(\qquad \geq \frac{58}{50}$$

$$W_{6/12} \geq \frac{\ln\left(\frac{58}{50}\right) - 0,02 \times \frac{6}{12}}{0,4}$$

$$\mathbb{P}\left(W_{6/12} \leq \frac{0,02 \times \frac{6}{12} - \ln\left(\frac{58}{50}\right)}{0,4}\right)$$

$$\mathbb{P}\left(\mathcal{N}(0,1) \leq \underbrace{\frac{0,02 \times \frac{6}{12} - \ln\left(\frac{58}{50}\right)}{0,4\sqrt{6/12}}}_{-0,4853886214}\right) = \int_{-\infty}^{*} \quad = 0,312283$$

7) $C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$ $\qquad (K-S_T)_+ - 5$

$\Rightarrow P_0 = C_0 - S_0 + Ke^{-rT}$
$= 14 - 100 + 90$
$= 4$

8) $(K - S_T)_+$

9) $C_0 = 5 \quad P_0 = 3$

Achat $\rightarrow 8€$

et $(S_T - K)_+ + (K - S_T)_+$

10) Payoff : $2(S_T - K)_+ - 2(K - S_T)_+$

$= 2\left((S_T - K)\mathbb{1}_{S_T \geq K} - (K - S_T)\mathbb{1}_{S_T \leq K}\right)$

11) BS : $C_0 = S_0 \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$ $\quad$ avec $d_2 = \dfrac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$

$P_0 = S_0 \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2) - S_0 + Ke^{-rT}$
$= S_0(\mathcal{N}(d_1) - 1) - Ke^{-rT}(\mathcal{N}(d_2) - 1)$ $\qquad \mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(-x) = 1$
$= -S_0 \mathcal{N}(-d_1) + Ke^{-rT}\mathcal{N}(-d_2)$

12) À la monnaie $K = S_0$

$C_t - P_t = S_t - S_0 e^{-r(T-t)}$

$\Rightarrow \dfrac{\partial C_t}{\partial S_t} - \dfrac{\partial P_t}{\partial S_t} = \dfrac{\partial S_t}{\partial S_t}$

$\Rightarrow \Delta_{CALL} - \Delta_{PUT} = 1$

$C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$

$\dfrac{\partial C_0}{\partial S_0} - \dfrac{\partial P_0}{\partial S_0} = 1$

$\Delta_{CALL} - \Delta_{PUT} = 1$

Pour Gamma $\dfrac{\partial^2 C_0}{\partial S_0^2} - \dfrac{\partial^2 P_0}{\partial S_0^2} = 0$

$\Rightarrow \Gamma_{CALL} - \Gamma_{PUT} = 0$
$\Rightarrow \Gamma_{CALL} = \Gamma_{PUT}$

13) $C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$

$S_0 = K$ $\qquad C_0 - P_0 = S_0 - S_0 e^{-rT}$
$= S_0 \underbrace{(1 - e^{-rT})}_{\leq 1}$

$P_0 = C_0 - S_0 \underbrace{(1 - e^{-rT})}_{\leq 1} \leq C_0$

Si le prix de l'actif sans risque est cte $\Rightarrow dS_t^0 = 0$ où $S_t^0 = e^{rt} \Rightarrow r = 0$

16) $u = 1{,}08$ $d = 0{,}93$ $S_0 = 30$ $r = 3\%$ $T = 2$ mois délivre un dividende de 1 à 1 mois.

À la monnaie $\Rightarrow K = S_0 = 30$

$S_0 = 30$

$uS_0 - 1$:
- $u(uS_0 - 1) \rightarrow f_{u^2} = (K - u(uS_0 - 1))_+ = (30 - 33{,}912)_+ = 0$
- $d(uS_0 - 1) \rightarrow f_{ud} = (K - d(uS_0 - 1))_+ = (30 - 29{,}262)_+ = 0{,}738$

$dS_0 - 1$:
- $u(dS_0 - 1) \rightarrow f_{du} = (K - u(dS_0 - 1))_+ = (30 - 29{,}052)_+ = 0{,}948$
- $d(dS_0 - 1) \rightarrow f_{d^2} = (K - d(dS_0 - 1))_+ = (30 - 25{,}017)_+ = 4{,}983$

$$q = \frac{R - d}{u - d} = \frac{e^{0{,}03 \times 1} - 0{,}93}{1{,}08 - 0{,}93} = 0{,}66970 \qquad R = e^{0{,}03 \times 1}$$

$$f_u = \frac{1}{R}\left[q f_{u^2} + (1-q) f_{ud}\right] = e^{-0{,}03}\left[q f_{u^2} + (1-q) f_{ud}\right] = 0{,}25579$$

$$f_d = \frac{1}{R}\left[q f_{du} + (1-q) f_{d^2}\right] = 2{,}21337$$

$$f = \frac{1}{R}\left[q f_u + (1-q) f_d\right] = 0{,}87571$$

17) $C_t = S_t N(d_1) - Ke^{-r(T-t)}$

$$\Rightarrow \frac{\partial C_t}{\partial S_t} = N(d_1) \quad \text{d'où } \Delta_{call} = N(d_1)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$= \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

$$\Rightarrow d_2^2 = d_1^2 - 2d_1\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)$$

$$\frac{d_2^2 - d_1^2}{2} = \frac{-2d_1\sigma\sqrt{T-t} + \sigma^2(T-t)}{2}$$

$$= \sigma\sqrt{T-t}\left(-d_1 + \frac{\sigma\sqrt{T-t}}{2}\right)$$

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

$$- \ln\left(\frac{S_t}{K}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t) + \frac{\sigma^2(T-t)}{2}$$

$$-\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) - r(T-t)$$

$$\ln\left(\frac{K}{S_t}\right) - r(T-t)$$