Mathématiques Actuarielles

M1 Actuariat

Rémi GREGOIRE

Introduction

- Rythme : 2 CM (3h) + 1 TD (2x1h30) (x3)
- 3 supports de cours pour les 3 parties
- Examen : QCM et/ou Exercices + Cours

- Références :
  - Dickson, D. C., Hardy, M. R., & Waters, H. R. (2013). Actuarial mathematics for life contingent risks. Cambridge University Press.
  - Vladislav Kargin, Life Congingency Models 1
  - Anciens Cours de professeurs à l'ISFA (Karim Barigou et Didier Rullière)

Plan de la $3^{ème}$ partie

- 9. Primes et Chargements
- 10. Réserves mathématiques pures
- 11. Réserves mathématiques d'inventaire
- 12. Opérations sur plusieurs têtes

9. Primes et chargements

9. Introduction

- Dans un contrat d'assurance, nous avons toujours d'un côté les primes que le preneur d'assurance s'engage à payer en contrepartie des prestations auxquelles s'engage l'assureur

- Dans la plupart des contrats nous avons :
  - Soit le paiement de primes périodiques constantes pendant une période fixée, généralement égale à la durée du contrat, mais au plus tard jusqu'au décès de l'assuré.
  - Soit une prime unique à l'origine du contrat

- Le paiement des primes commence toujours avant la période de couverture
- Les primes pures couvrent les engagements
- Les primes chargées couvrent les engagements et les frais divers

9. Primes pures – Principe d'équivalence

- On note L la perte totale de l'assureur définie comme la différence entre la valeur actuelle des engagements futures et des primes futures
- Les primes sont dites pures si elles satisfont le principe d'équivalence suivant :

$$E(L) = 0$$

9. Primes pures – Principe d'équivalence

- On considère un contrat d'assurance-vie souscrit en $t = 0$ pour une durée de n années ($n = \infty$ si la durée du contrat est illimitée, par exemple dans le cas d'une assurance vie-entière).
- On note $P(t)$ le cumul des primes à payer dans l'intervalle $[0; t]$ si l'assuré ne décède pas avant t $(0 \leq t \leq n)$
- On va toujours supposer que $P(t)$ est une fonction continue et non décroissante de t ayant au plus un nombre fini de discontinuités sur $[0; n]$

9. Primes pures – Principe d'équivalence

- Les primes n'étant dues que si l'assuré est vivant au moment où elles viennent à échéance, l'espérance de la valeur actuelle en $t=0$ de toutes les primes que percevra l'assureur est donnée, avec x l'âge de l'assuré lors de la souscription du contrat, par :

$$\mathcal{P} = \int_0^n v^t {}_tp_x dP(t)$$

- Dans le cas d'un contrat à prime unique de montant PU due à l'origine, on a alors :

$$\forall t \geq 0 \quad P(t) = PU$$

- On a donc :

$$\mathcal{P} = P(0) = PU$$

9. Primes pures – Principe d'équivalence

- Dans le cas d'un contrat avec des primes annuelles de montant constant PA payables annuellement par anticipation jusqu'au terme, mais au plus tard jusqu'au décès de l'assuré, on a :

$$P(t) = \begin{cases} ([t]+1)PA & \forall t \in [0, n-1) \\ nPA & \forall t \geq n-1 \end{cases}$$

- Et également :

$$\mathcal{P} = PA \sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x v^t = PA\ddot{a}_{x\overline{n}|}$$

- On note Ψ la valeur actuelle des prestations assurées.
- Les primes sont pures si elles satisfont au principe d'équivalence suivant :

$$\mathcal{P} = E(\Psi)$$

9. Primes pures – Cas général

- De façon générale, on va considérer un contrat d'assurance-vie d'une durée de n années sur un assuré d'âge x avec les prestations suivantes :
  - En cas de vie de l'assuré à l'instant t $(0 < t < n)$, le montant cumulé des prestations payées dans l'intervalle $[0, t]$ est $L(t)$, fonction continue à droite et non décroissante sur $[0, n]$
  - En cas de décès de l'assuré à l'instant t $(0 < t < n)$, on a un paiement immédiat d'un capital de montant $C(t)$, fonction intégrable sur $[0, n]$

9. Primes pures – Cas général

- La valeur actuelle à l'origine du contrat des prestations est donnée par :

$$\Psi = \int_0^n v^t 1_{[T_x > t]} dL(t) + C(T_x) v^{T_x} 1_{[T_x \leq n]}$$

- Le principe d'équivalence s'écrit alors :

$$\int_0^n {}_tp_x v^t dP(t) = \int_0^n {}_tp_x v^t dL(t) + \int_0^n {}_tp_x \mu_{x+t} v^t C(t) dt$$

9. Primes pures – Exemples (Assurance vie-entière)

- On considère une assurance vie-entière de capital C sur un assuré d'âge x, le capital assuré étant payable au moment du décès.
  - Si le contrat est financé par une prime annuelle pure constante PA payable annuellement par anticipation jusqu'au décès de l'assuré, on a :

$$PA = C\frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_x}$$

  - Si le contrat est financé par des primes annuelles pures constantes PA payables annuellement par anticipation pendant n années, on a $\mathcal{P} = PA\ddot{a}_{x\overline{n}|}$, d'où :

$$PA = C\frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}$$

9. Primes pures – Capital sous risque

- Pour les assurances vie, l'exposition au risque de mortalité est mesuré par le capital sous risque.
- Si l'assuré décède en milieu d'année à l'âge $x+t$, la perte appelée capital sous risque est

$$R(t) = C - PA\ddot{a}_{\overline{t+1}|}(1+i)^{t+\frac{1}{2}}$$

- Ce capital décroît avec le temps et peut être éventuellement réassuré

9. Primes pures – Exemples (Assurance temporaire)

- On prend le cas d'une assurance temporaire de capital C sur un assuré d'âge x , le capital assuré étant payable au moment du décès s'il survient avant n années. La prime annuelle PA est payable annuellement par anticipation pendant n années. La prime annuelle est :

$$PA = C\frac{\overline{A}^{1}_{x\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}$$

9. Primes pures – Exemples (Capital différé)

- On prend le cas d'un capital différé de capital C sur un assuré d'âge x d'une durée n , le capital assuré étant payable si l'assuré est vivant après n années. La prime annuelle PA est payable annuellement par anticipation pendant n années. La prime annuelle est donc :

$$PA = C\frac{{}_nE_x}{\ddot{a}_{x\overline{n}|}}$$

9. Primes pures – Exemples (Rente viagère différée)

- On considère une rente viagère payable trimestriellement à terme échu, différée de n années, sur un assuré d'âge x et financée par des primes annuelles constantes PA payables mensuellement à terme échu pendant le terme différé. On a alors :

$$PA = \frac{{}_{n|}a_x^{(4)}}{a_{x\overline{n}|}^{(12)}}$$

- Avec l'hypothèse d'interpolation, on a :

$$PA \approx \frac{{}_{n}p_x v^n a_{x+n}^{(4)}}{a_{x\overline{n}|} + \frac{11}{24}(1 - {}_{n}E_x)} = \frac{{}_{n|}a_x + \frac{3}{8}{}_{n}E_x}{a_{x\overline{n}|} + \frac{11}{24}(1 - {}_{n}E_x)}$$

9. Chargements

- Les primes pures couvrent l’espérance de la valeur actuelle des prestations assurées.
- L’émission et la gestion des contrats entraînent des frais divers
- Pour couvrir ces frais, les assureurs collectent des recettes sous forme de chargements qui s’ajoutent aux primes pures

9. Chargements

- On classe les frais encourus par la compagnie d'assurance en trois types :
  - Les frais de gestion encourus tout au long de la durée de vide des contrats : émission des avenants au contrat, gestion financière des actifs représentant les réserves mathématiques, calcul et attribution des participations bénéficiaires,…
  - Les frais d'acquisition encourus à l'occasion ou avant la souscription des contrats : campagnes publicitaires, rémunération des intermédiaires qui apportent les contrats (courtiers, agents,..),..
  - Les frais d'encaissement des primes : confection et expédition des avis d'échéance, commissions payées au intermédiaires sur les primes perçues.

9. Chargements de gestion ou d'inventaire

- Les chargements de gestion ou d'inventaire peuvent prendre différentes formes :
  - Chaque année des frais de gestion d'un montant constant b (valeur en début de chaque année d'assurance). Pour un contrat de n années sur une tête d'âge x on obtient ainsi un chargement de montant $b\ddot{a}_{x\overline{n}|}$ qui s'ajoute à la prime unique pure du contrat. Généralement, b est soit forfaitaire soit proportionnel aux capitaux assurés en cas de vie (L) et en cas de décès (K) (exemple : $b = b_1 L + b_2 K$)
  - Pour les rentes viagères, on suppose généralement que la compagnie encourt lors de chaque paiement des frais proportionnels au montant du paiement. Si r est le taux de ces frais, on obtient un chargement d'inventaire égal à r fois la prime unique de la rente. Le taux de chargement r dépend souvent du fractionnement de la rente (ex : 2% en annuel, 3% en trimestriel et 4% en mensuel)

9. Chargements de gestion ou d’inventaire

- Les chargements de gestion ou d’inventaire peuvent prendre différentes formes :
  - Frais proportionnels à la valeur de rachat théorique du contrat, encourus de façon continue dans le temps tout au long de la vie du contrat. On distingue alors le taux d’intérêt technique pur du contrat (taux utilisé pour calculer les primes pures) et le taux d’intérêt technique d’inventaire (c’est-à-dire après chargements d’inventaire).
  - Frais proportionnels au capital sous risque du contrat (c’est-à-dire au capital assuré en cas de décès diminué de la valeur de rachat théorique), encourus de façon continue tout au long de la vie du contrat. Ce chargement est plus un chargement de sécurité qu’un chargement de gestion.

9. Chargements d'acquisition

- Les chargements d'acquisition sont destinés à couvrir les frais encourus lors de la souscription des contrats.
- Prime unique d'inventaire + chargements d'acquisition
- On a différentes formes :
  - Chargements proportionnels aux capitaux assurés $b = b_1 L + b_2 K$
  - Chargements proportionnels à la prime unique de réduction
  - Chargements proportionnels à la prime annuelle du contrat (par exemple 110% de la prime annuelle)

9. Chargements d’encaissement

- Les chargements d’encaissement représentent une quotité fixée de chaque prime payée.
- La prime unique de réduction augmentée du chargement d’encaissement est la prime unique commerciale

9. Chargements

- On a alors pour résumer :
  - Prime unique d'inventaire

$$PU' = PU + B$$

  - Prime unique de réduction

$$\hat{PU} = PU' + A = PU + B + A$$

  - Prime unique commerciale

$$PU'' = \frac{\hat{PU}}{1-c} = \frac{PU + B + A}{1-c}$$

- Avec :
  - La prime unique PU
  - Le montant total des chargements d'inventaire B
  - Le montant des chargements d'acquisition A
  - Le taux du chargement d'encaissement exprimé par rapport à la prime commerciale c

9. Primes chargées - Exemple

- On considère une assurance mixte de capitaux unitaires et d'une durée de n années sur un assuré d'âge x financée par des primes annuelles constantes payables par anticipation pendant k années $(k \leq n)$. Le tarif comporte les chargements suivants :
  - Inventaire : 0,2% du capital assuré au début de chaque année d'assurance
  - Acquisition : Frais de 1,5% du capital assuré à l'origine du contrat
  - Encaissement : 7% de chaque prime commerciale payée.
- On note $PA,\ PA',\ \hat{PA},\ PA''$ les primes annuelles respectivement pures, d'inventaire, de réduction et commerciale. On a alors :

$$PU = \overline{A}^{1}_{x\overline{n}|} + {}_{n}E_{x}$$

$$PU' = PU + 0,002\ddot{a}_{x\overline{n}|}$$

$$\hat{PU} = PU + 0,002\ddot{a}_{x\overline{n}|} + 0,015$$

$$PU'' = \frac{\hat{PU}}{0,93}$$

$$PA = \frac{PU}{\ddot{a}_{x\overline{k}|}}$$

$$PA' = \frac{PU'}{\ddot{a}_{x\overline{k}|}} = PA + \frac{0,002\ddot{a}_{x\overline{n}|}}{\ddot{a}_{x\overline{k}|}}$$

$$\hat{PA} = \frac{\hat{PU}}{\ddot{a}_{x\overline{k}|}}$$

$$PA'' = \frac{\hat{PA}}{0,93}$$

10. Réserves mathématiques pures

10. Introduction

- En assurance vie, à la souscription du contrat, l'espérance de la valeur actuelle (VA) des primes futures est égale à l'espérance de la valeur actuelle des engagements futurs. La perte espérée est donc nulle en $t = 0$
- L'équivalence entre primes futures et engagements futurs ne tient pas en général au cours du contrat
- On note L_t la différence au temps t entre la VA des engagements futurs et des primes futures
- La réserve mathématique pure notée $V(t)$ est l'espérance conditionnelle de L_t sachant que l'assuré est toujours vivant en t

10. Introduction

- La réserve mathématique est le montant détenu par l'assureur envers l'assuré pour s'assurer que les engagements futurs soient bien respectés
- Ce poste représente la dette de l'assurer vis-à-vis des assurés; c'est un élément très important au passif du bilan des assureurs vie.
- Au temps t , les primes futures ne sont en général pas suffisantes pour couvrir les engagements futurs. Le montant nécessaire pour couvrir la différence est exactement la réserve mathématique $V(t)$

10. Réserves mathématiques pures : Cas général

- On considère un contrat d'assurance-vie souscrit en $t = 0$ sur un assuré d'âge x et d'une durée de n années. Pour un intervalle de temps $T \subset [0; \infty)$ d'origine s on note :
  - ε_T : l'espérance de la VA en s des prestations payables dans l'intervalle de temps T sachant que l'assuré est vivant en s
  - $\mathcal{P}_T$: l'espérance de la VA en s des primes pures échéant dans l'intervalle de temps T sachant que l'assuré est vivant en s
- On a :

$$\varepsilon_{[s,t]} = \int_s^t {}_{y-s}p_{x+s}\mu_{x+y}v^{y-s}C(y)dy + \int_s^t {}_{y-s}p_{x+s}v^{y-s}dL(y)$$

$$\mathcal{P}_{[s,t]} = \int_s^t {}_{y-s}p_{x+s}v^{y-s}dP(y)$$

- Avec $C(y)$ le capital décès, $L(y)$ le cumul des prestations en cas de vie et $P(y)$ est la fonction de prime

10. Réserves mathématiques pures : Cas général

- La réserve mathématique pure du contrat est donnée par :

$$V(t) = \varepsilon_{[t,n]} - \mathcal{P}_{[t,n]} \quad (0 \leq t \leq n)$$

- On aura les notations suivantes :

$$\varepsilon_{[0,n]} = \varepsilon \qquad\qquad \mathcal{P}_{[0,n]} = \mathcal{P}$$

- Les primes pures satisfont le principe d'équivalence, on a donc :

$$V(0) = \varepsilon - \mathcal{P} = 0$$

- Si on a le paiement d'un capital L au terme n et s'il n'y a pas de prime échéant en n , on a :

$$V(n) = L$$

10. Réserves mathématiques pures : Cas général

- Si on considère un assuré d'âge x à l'origine du contrat, la réserve mathématique à l'âge $x+t$, la réserve mathématique $V(t)$ est souvent notée ${}_tV_x$

- On suppose que si une prime vient à échéance ou une prestation est payable à la fin de la k-ème année, la réserve mathématique en k sera calculée en supposant cette prime déjà payée ou cette prestation déjà liquidée.
- On suppose que si une prime vient à échéance ou une prestation est payable au début de la (k+1)-ème année, la réserve mathématique en k sera calculée en supposant cette prime ou cette prestation non encore payée

10. Réserves mathématiques – Exemple 1

- On considère une assurance vie-entière de capital unitaire sur une tête d'âge x . Si l'assuré vit en t , l'espérance de la VA en t des prestations assurées dans l'intervalle $[t;\infty)$ est égale à la prime unique pure d'une assurance vie-entière sur une tête d'âge $x+t$:

$$\varepsilon_{[t,\infty)} = \int_0^\infty {}_s p_{x+t} \mu_{x+t+s} v^s ds = \overline{A}_{x+t}$$

- Si le contrat est financé par une prime unique payable à la souscription, il vient :

$$\forall t > 0 \quad \mathcal{P}_{[t,\infty)} = 0$$

- On a alors :

$$\forall t > 0 \quad {}_tV_x = \overline{A}_{x+t}$$

10. Réserves mathématiques – Exemple 1 (suite)

- Si le contrat est financé par des primes annuelles constantes de montant PA payables annuellement par anticipation pendant k années, on a :

$$PA = \frac{\overline{A}_x}{\ddot{a}_{x\overline{k|}}}$$

$$\mathcal{P}_{[t;\infty)} = \begin{cases} PA\ddot{a}_{x+t:\overline{k-t|}} & \forall t \in [0, k-1] \\ 0 \quad \forall t \geq k \end{cases}$$

- On a alors :

$${}_tV_x = \begin{cases} \overline{A}_{x+t} - PA\ddot{a}_{x+t:\overline{k-t|}} & \forall t \in [0, k-1] \\ \overline{A}_{x+t} \quad \forall t \geq k \end{cases}$$

- On considère une assurance temporaire d'un capital de 10000€ sur une tête d'âge 30 ans de durée 10 ans payable annuellement par anticipation jusqu'au terme. On utilisera un taux technique d'1% et la table TF 00-02

$$PA = \frac{10000\,\bar{A}^{1}_{30:\overline{10}|}}{\ddot{a}_{30:\overline{10}|}}$$

$$V(r) = 10000\,\bar{A}^{1}_{30+r:\overline{10-r}|} - PA\,\ddot{a}_{30+r:\overline{10-r}|}$$

10. Réserves mathématiques – Exemple pour une rente temporaire

- On considère une assurance temporaire d'un capital de 10000€ sur une tête d'âge 30 ans de durée 10 ans payable annuellement par anticipation jusqu'au terme. On utilisera un taux technique d'1% et la table TF 00-02
- Les engagements sont alors : $10000\overline{A}^{\,1}_{30:\overline{10|}}$
- Les primes sont : $PA\ddot{a}_{30:\overline{10|}}$
- On a alors : $PA = \dfrac{10000\overline{A}^{\,1}_{30:\overline{10|}}}{\ddot{a}_{30:\overline{10|}}}$
- Les réserves mathématiques s'écrivent : $V(t) = 10000\overline{A}^{\,1}_{30+t:\overline{10-t|}} - PA\ddot{a}_{30+t:\overline{10-t|}}$
- On a pour t = 0 : $V(0) = 64.82 - 64.82 = 0$
- Et pour t = 5 : $10000\overline{A}^{\,1}_{35:\overline{5|}} = 41.45$ $\quad V(5) = 41.45 - 33.25 = 8.2$

  $PA\ddot{a}_{35:\overline{5|}} = 33.25$

11. Réserves mathématiques d’inventaire

11.Introduction

- Pour évaluer la situation réelle d'une compagnie, il convient d'inclure les frais de gestion des contrats d'assurance. En contrepartie, il faut inclure les chargements d'inventaire en plus des primes pures (=Primes d'inventaire)

- On note L'_t la différence au temps t entre la VA des engagements et frais de gestion futurs et des primes d'inventaire futures

- La réserve mathématique d'inventaire $V'(t)$ est l'espérance conditionnelle de L'_t sachant que l'assuré est toujours vivant en t

11.Provision mathématique

- La provision mathématique est la différence entre les valeurs actuelles des engagement respectivement pris par l’assureur et par les assurés. Pour des contrats faisant intervenir une table de survie ou de mortalité, les montants des provisions mathématiques doivent inclure une estimation des frais futurs de gestion qui seront supportés par l’assureur pendant la période de couverture au-delà de la durée de paiement des primes ou de la date du prélèvement du capital constitutif. L’estimation de ces frais est égale au montant des chargements de gestion prévus dans les conditions tarifaires de la prime ou du capital constitutif et destinés à couvrir les frais de gestion.

11. Réserves mathématiques d'inventaire : Cas général

- On considère un contrat d'assurance-vie souscrit en $t = 0$ sur un assuré d'âge x et d'une durée de n années. On note $B(t)$ les frais de gestion cumulés sur $[0;t]$. $B(t)$ est une fonction décroissante de t
  - $\mathcal{B}_{[s,t]}$: l'espérance de la VA en s des frais de gestion qui seront encourus dans l'intervalle de temps $[s;t]$

$$\mathcal{B}_{[s,t]} = \int_s^t {}_{y-s}p_{x+s} v^{y-s} dB(y)$$

  - $\mathcal{P}'_{[s,t]}$: l'espérance de la VA en s des primes d'inventaire échéant dans l'intervalle de temps $[s;t]$:

$$\mathcal{P}'_{[s,t]} = \int_s^t {}_{y-s}p_{x+s} v^{y-s} dP'(y)$$

  - $\varepsilon'_{[s;t]}$: l'espérance de la VA en s de la somme des prestations et des frais de gestion encourus dans l'intervalle de temps $[s;t]$:

$$\varepsilon'_{[s;t]} = \varepsilon_{[s;t]} + \mathcal{B}_{[s,t]}$$

11. Réserves mathématiques d'inventaire

- La réserve mathématique d'inventaire en t , notée $V'(t)$ est définie par :

$$V'(t) = \varepsilon'_{[t;n]} - \mathcal{P}'_{[t;n]} \qquad (0 \leq t \leq n)$$

- On utilisera également la notation ${}_xV'_t$
- L'écart entre la réserve d'inventaire et la réserve pure est une réserve pour frais de gestion futurs. Cette réserve est égale à l'espérance de la VA des frais de gestion futurs diminuée de la VA des chargements de gestion contenus dans les primes d'inventaire futures :

$$\begin{aligned} V'(t) - V(t) &= \varepsilon'_{[t;n]} - \mathcal{P}'_{[t;n]} - (\varepsilon_{[t;n]} - \mathcal{P}_{[t;n]}) \\ &= \mathcal{B}_{[t,n]} - \left(\mathcal{P}'_{[t;n]} - \mathcal{P}_{[t;n]}\right) \end{aligned}$$

12. Opération sur plusieurs têtes

12. Opérations sur plusieurs têtes

- Certains contrats d'assurance-vie font intervenir deux assurés, voire plus.
- On considère r têtes d'âges respectifs $x_1, x_2, .., x_r$. Leurs durées de vie restantes sont des variables aléatoires dénotées par T_k pour $k = 1, .., r$
- Le temps de premier décès du groupe est :

$$T = min(T_1, T_2, .., T_r)$$

- On notera aussi :

$$K_{min} = min(K_{x_1}, .., K_{x_r})$$

$$K_{max} = max(K_{x_1}, .., K_{x_r})$$

avec $K_{x_i} = [T_{x_i}]$ le nombre d'années entières de survie de la i-ème tête

12. Opération sur plusieurs têtes

- Sous l'hypothèse que $T_1, .., T_r$ sont indépendantes, la probabilité de survie conjointe des r têtes après un temps t est :

$$
\begin{aligned}
{}_tp_{x_1,...,x_r} &= P(T > t) \\
&= P(T_1 > t, T_2 > t, .., T_r > t) \\
&= \prod_{k=1}^{r} P(T_k > t) \\
&= \prod_{k=1}^{r} {}_tp_{x_k}
\end{aligned}
$$

- On notera que l'hypothèse d'indépendance est simplificatrice mais facilite les dérivations

12. Opérations sur plusieurs têtes

- On définit le taux instantané de mortalité

$$\mu_{x_1,\dots,x_r} = \lim_{h\to 0} \frac{1 - {}_hp_{x_1,\dots,x_r}}{h} = \left[\frac{d}{dh}{}_hp_{x_1,\dots,x_r}\right]$$

- On a alors :

$$\begin{aligned}\mu_{x_1,\dots,x_r} &= -\left[\frac{d}{dh}\prod_{j=1}^{r}{}_hp_{x_j}\right]_{h=0}\\ &= -\sum_{j=1}^{r}\left[\left(\frac{d}{dh}{}_hp_{x_j}\right)\prod_{k\neq j}{}_hp_{x_k}\right]_{h=0}\\ &= \sum_{j=1}^{r}\mu_{x_j}\end{aligned}$$

12. Opérations sur plusieurs têtes

- On a :

$$ {}_tp_{x_1,..,x_r} = exp\left(- \int_0^t \mu_{x_1+s,..,x_r+s} ds \right) $$

- La probabilité pour qu'au moins une des r têtes survive après un temps t :

$$ {}_tp_{\overline{x_1,..,x_r}} = P\left[\bigcup_{i=1}^{r} (T_{x_i} > t) \right] $$

- Pour deux et trois têtes, on a alors :

$$ {}_tp_{\overline{xy}} = {}_tp_x + {}_tp_y - {}_tp_{xy} $$

$$ {}_tp_{\overline{xyz}} = {}_tp_x + {}_tp_y + {}_tp_z - ({}_tp_{xy} + {}_tp_{xz} + {}_tp_{yz}) + {}_tp_{xyz} $$

12. Capitaux différés

- Capital payable en cas de vie au terme de toutes les têtes
  - Soient r têtes d'âges respectifs $x_1, x_2, .., x_r$
  - On considère l'assurance d'un capital unitaire payable dans n années si toutes les têtes sont encore en vie
  - La valeur actuelle de la prestation s'écrit :

$$\Psi = \begin{cases} v^n & si \;\; T_{min} > n \\ 0 & sinon \end{cases}$$

  - La prime unique pure est donnée par

$${}_nE_{x_1 x_2 .. x_r} = {}_np_{x_1 x_2 .. x_r} v^n$$

12. Capitaux différés

- Capital payable au terme si l'une au moins des r têtes est encore en vie
  - On considère l'assurance d'un capital unitaire payable dans n années si une au moins des r têtes est encore en vie
  - La valeur actuelle de la prestation s'écrit :

$$\Psi = \begin{cases} v^n & si \;\; T_{max} \geq n \\ 0 & sinon \end{cases}$$

  - La prime unique pure est donnée par :

$${}_nE_{\overline{x_1 x_2 .. x_r}} = {}_np_{\overline{x_1 x_2 .. x_r}} v^n$$

12. Assurance vie-entière

- On considère une assure sur r têtes d'âges $x_1, x_2, .., x_r$ garantissant le paiement d'un capital unitaire :
  - A la fin de l'année du premier décès, la valeur actuelle de la prestation et la prime unique pure s'écrivent :

$$\Psi = v^{K_{min}+1}$$

$$A_{x_1..x_r} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} {}_tp_{x_1..x_r}(1 - {}_tp_{x_1+t,..,x_r+t})$$

  - A la fin de l'année du dernier décès, la valeur actuelle de la prestation et la prime unique pure s'écrivent :

$$\Psi = v^{K_{max}+1}$$

$$A_{\overline{x_1..x_r}} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1} ({}_tp_{\overline{x_1..x_r}} - {}_{t+1}p_{\overline{x_1..x_r}})$$

12. Assurance temporaires

- Dans le cas des assurances temporaires, l'indice se note à gauche et on a :

$$_{|n}A_{x_1..x_r} = \sum_{t=0}^{\infty} v^{t+1}\,{}_tp_{x_1..x_r}(1 - {}_tp_{\overline{x_1..x_r}})$$

- Pour les primes payables au moment du décès, on a :

$$_{|n}\overline{A}_{x_1..x_r} = \int_0^n {}_tp_{x_1..x_r}\mu x_1 + t...x_r + tv^t dt$$

12. Assurances de rente

- Rentes payables jusqu'au premier décès
  - On considère une rente unitaire payable annuellement à terme échu tant que les r têtes sont toutes vivantes
  - La valeur actuelle des prestations s'écrit

$$\Psi = a_{\overline{K_{min}|}}$$

  - La prime unique pure est donnée par

$$a_{x_1..x_r} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{x_1..x_r} v^k$$

12. Assurances de rente

- Autres types de rente :
  - Avec des notations prolongeant celles à une seule tête, on a :

$$\ddot{a}_{x_1x_2..x_r} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_{x_1..x_r} v^k = 1 + a_{x_1..x_r}$$

$$_{n|}a_{x_1..x_r} = \sum_{k=n}^{\infty} {}_kp_{x_1..x_r} v^k = {}_nE_{x_1..x_r} a_{x_1+n..x_r+n}$$

$$a_{x_1..x_r\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_kp_{x_1..x_r} v^k = a_{x_1x_2..x_r} - {}_nE_{x_1..x_r} a_{x_1+n..x_r+n}$$

$$\ddot{a}_{x_1..x_r\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_kp_{x_1..x_r} v^k = \ddot{a}_{x_1x_2..x_r} - {}_nE_{x_1..x_r} \ddot{a}_{x_1+n..x_r+n}$$

12. Assurances de rente

- Rentes fractionnées
  - Pour les rentes fractionnées, on aura les approximations suivantes :

$$a^{(m)}_{x_1..x_r} = a_{x_1..x_r} + \frac{m-1}{2m}$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x_1..x_r} = \ddot{a}_{x_1..x_r} - \frac{m-1}{2m}$$

$$a^{(m)}_{x_1..x_r\overline{n}|} = a_{x_1..x_r\overline{n}|} + \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_{x_1..x_r})$$

$$\ddot{a}^{(m)}_{x_1..x_r\overline{n}|} = \ddot{a}_{x_1..x_r\overline{n}|} - \frac{m-1}{2m}(1 - {}_nE_{x_1..x_r})$$

12. Assurances de rente

- Rentes payables jusqu'au dernier décès
  - Les primes pures pour les rentes jusqu'au dernier décès sont :

$$a_{\overline{x_1..x_r}} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_k p_{\overline{x_1..x_r}} v^k$$

$$\ddot{a}_{\overline{x_1..x_r}} = \sum_{k=0}^{\infty} {}_k p_{\overline{x_1..x_r}} v^k = 1 + a_{\overline{x_1..x_r}}$$

$$a_{\overline{x_1..x_r}\,\overline{n}|} = \sum_{k=1}^{n} {}_k p_{\overline{x_1..x_r}} v^k$$

$$\ddot{a}_{\overline{x_1..x_r}\,\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} {}_k p_{\overline{x_1..x_r}} v^k$$

12. Rentes sur deux têtes

- On a les relations suivantes pour les rentes sur deux têtes :

$$a_{\overline{xy}} = a_x + a_y - a_{xy}$$

$$a_{\overline{xyz}} = a_x + a_y + a_z - (a_{xy} + a_{xz} + a_{yz}) + a_{xyz}$$

$$a_{\overline{xy}\,\overline{n}|} = a_{x\overline{n}|} + a_{y\overline{n}|} - a_{xy\overline{n}|}$$

$${}_{n|}a_{\overline{xy}} = {}_{n|}a_x + {}_{n|}a_y - {}_{n|}a_{xy}$$

12. Opérations sur plusieurs têtes - Exercice

- Un homme âgé de 55 ans et sa femme âgée de 50 ans souscrivent à une rente différée sur deux têtes
- Les primes sont payables mensuellement par anticipation pendant au plus 10 ans mais seulement si les deux sont en vie
- Si un des deux décède dans le délai de 10 ans, un capital de 200 000€ est payé en fin d'année du décès
- En cas de survie des deux dans 10 ans, une rente de 50 000€ par an payable mensuellement par anticipation est payé tant que les deux ont en vie mais réduite à 30 000€ s'il n'y a plus qu'un survivant.
- La rente cesse au décès du dernier survivant

- Calculez la prime mensuelle en termes de notations actuarielles

12.