ISFA 2° année
Processus Stochastiques
Examen du 7 janvier 2014
Durée : 2 heures
Aucun document autorisé - calculatrices interdites

Les 4 exercices sont indépendants et peuvent être traités séparément

Exercice 1
Soit $(W_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un mouvement brownien standard et $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ le processus défini par

$$X_t = \int_0^t (t-s)dW_s, \ t \in \mathbb{R}_+.$$

Lesquelles des affirmations suivantes sont vraies ? Justifiez votre réponse pour chacune d'entre elles :

1. $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est un processus adapté à la filtration naturelle de $(W_t, t \in \mathbb{R}_+)$.
2. $(\mathcal{F}_t = \sigma(X_t))$ définit une filtration.
3. $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est -t-il un processus gaussien ? Si oui, donner $E(X_t)$ et $E(X_t^2)$.
4. $X_t = \int_0^t W_s ds$ p.s., pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Exercice 2 Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ le processus continu solution de

$$dX_t = X_t dt + \sqrt{t}dB_t, \quad \text{avec } X_0 = 0$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard.

1. En appliquat la formule d'Itô au processus $Y_t = e^{-t}X_t$, calculer X_t.
2. Répondez aux questions suivantes en justifiant vos réponses :
   (a) Est-ce que X_t est une martingale ?
   (b) Est-ce que X_t est de carré intégrable ?
   (c) Est-ce que X_t est un processus d'Itô ? Si oui déduire $\langle X \rangle_t$.
   (d) Est-ce que X_t est un processus gaussien ? Si oui donner $E(X_t)$ et $Cov(X_t, X_s)$.

Exercice 3 Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard.

1. Trouver l'équation différentielle stochastique satisfaite par le processus :

$$X_t = \exp(t + B_t)$$

   pour $t \in \mathbb{R}_+$.

2. Montrer que pour toute fonction $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ solution de l'équation différentielle ordinaire

$$3xu'(x) + x^2u''(x) = 0$$

   le processus $u(X_t)$ est une martingale.

3. En déduire que le processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$Y_t = \frac{1}{X_t^2}$$

est une martingale.

Exercice 4

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$ un espace de probabilité filtré. On considère un marché financier où sont échangés des actifs risqués et des actifs non risqués. Soit $(S_t)_{t\geq 0}$ le prix de l'actif risqué. On suppose que $dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma dB_t)$. L'actif sans risque vérifie

$$dS_0(t) = S_0(t) r_t dt.$$

Les processus μ_t, r_t sont $\mathcal{F}_t$- adaptés bornés, σ est une constante non nulle.

1. Montrer que $S_t \exp\left(-\int_0^t \mu_s ds\right)$ est une $\mathbb{P}$ martingale.
2. On pose

$$\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma}$$

   (a) Determiner Q telle que, sous Q le processus $\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$ soit un mouvement Brownien.

   (b) Écrire l'équation vérifiée par S_t en utilisant $\tilde{B}_t$.

3. Un agent de richesse initiale x investit sa richesse X_t suivant l'actif sans risque et l'actif risqué de prix S_t suivant $X_t = n_0(t)S_0(t) + n_1(t)S(t)$. On suppose que $dX_t = n_0(t)dS_0(t) + n_1(t)dS(t)$.

   (a) Montrer que $dX_t = r_t X_t dt + n_1(t)(dS_t - S_t r_t dt)$.

   (b) On note $\pi(t) = n_1(t)S_t$ et $R_t = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$.
   Ecrire dX_t en fonction de π_t, r_t et $\tilde{B}_t$.

   (c) Montrer que sous Q, le processus $X_t R_t$ est une martingale.

   (d) soit $\zeta = X_T$. Écrire X_t sous forme d'une espérance conditionnelle faisant intervenir ζ et le processus r.

Exercice 1 :

$(W_t, t\in\mathbb{R}_+)$ un MB standard et $(X_t, t\in\mathbb{R}_+)$ processus défini par :

$$X_t = \int_0^t (t-s)\,dW_s \qquad t\in\mathbb{R}_+.$$

1) Vraie car $\mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s, s\leq t)$ filtrat° naturelle de $(W_t, t\in\mathbb{R}_+)$.

Il est donc clair que $\forall t$, $X_t = \int_0^t (t-s)\,dW_s \subset \mathcal{F}_t^W$

Donc X_t est $(\mathcal{F}_t^W)$ adapté.

2) X_t est $\mathcal{F}_t^W$ mesurable $\Rightarrow \mathcal{F}_t = \sigma(X_t)$ est une $\mathcal{F}_t^W$ sous tribu.

De plus, $\forall s\leq t$, $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$

Donc $(\mathcal{F}_t = \sigma(X_t))$ définit bien un filtrat° car suite $\nearrow$ $\mathcal{F}_n$ de sous-tribu de $\mathcal{F}^W$.

3) On voit que X_t est une intégrale de Wiener

En effet, $X_t = \int_0^t \underbrace{(t-s)}_{\text{fonct° déterministe et de carré intég.}}\,d\underbrace{W_s}_{MB} = \sum_{i=0}^{m(t)-1} \alpha_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \alpha_{m(t)}(B_t - B_{m(t)})$

où $m(t)$ est l'unique entier tq $t_{m(t)} \leq t < t_{m(t)+1}$

Les B_i sont gaussiens $\Rightarrow$ X_t est un processus gaussien par CL de gaussien.

$$\mathbb{E}[X_t] = 0$$

$$\mathbb{E}[X_t^2] = \mathbb{E}\left[\left(\int_0^t (t-s)\,dW_s\right)^2\right]$$

$$= \int_0^t (t-s)^2\,ds = \int_0^t t^2 - 2ts + s^2\,ds$$

$$= t^3 - 2t\times\frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} = \frac{t^3}{3}$$

4) Faux car $d\left(X_t = \int_0^t (t-s)\,dW_s\right) = 0$

et $d\left(X_t = \int_0^t W_s\,ds\right) = W_t\,dt$

Dire que $X_t = \int_0^t W_s\,ds$ revient à dire que $0 = W_t$ $\cancel{\alpha}$.

Exercice 2 :

$dX_r = X_r\,dr + \sqrt{r}\,dB_r$ $\quad X_0 = 0$ et B un MB standard.

1) On applique la 2^e formule d'Itô avec $f:(x,r)\mapsto xe^{-r}$ qui est bien C^1 p/r à r et C^2 p/r à x

avec $\dfrac{\partial f}{\partial x} = e^{-r}$ $\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$

$\dfrac{\partial f}{\partial r} = -xe^{-r}$

On a donc

$$Y_r = \int_0^r e^{-s}\,dX_s - \int_0^r X_s e^{-s}\,ds$$

$$= -\int_0^r Y_s\,ds + \int_0^r e^{-s}(X_s\,ds + \sqrt{s}\,dB_s)$$

$$= -\int_0^r Y_s\,ds + \int_0^r Y_s\,ds + \int_0^r \sqrt{s}\,e^{-s}\,dB_s$$

$$= \int_0^r \sqrt{s}\,e^{-s}\,dB_s$$

$$\Rightarrow X_r = \int_0^r \sqrt{s}\,e^{-(s-r)}\,dB_s \qquad \text{car } X_r = e^r Y_r$$

2) a) Drift nul $\Rightarrow$ martingale locale (Coeff de diffus° $= \sqrt{r}$ car $dX_r = \sqrt{r}\,dB_r$)

$\Rightarrow d\langle X\rangle_r = \sqrt{r}\,dr$

$\Rightarrow \langle X\rangle_r = \sqrt{r}\,r$

De +, $\mathbb{E}[\langle X\rangle_r] = \mathbb{E}[\sqrt{r}\,r] < \infty$

$\Rightarrow X_r$ vraie martingale

b) Oui car

$$\mathbb{E}[X_r^2] = \mathbb{E}\Big[\Big(\int_0^r \sqrt{s}\,e^{-(s-r)}\,dB_s\Big)^2\Big]$$

$$= \int_0^r s\,e^{-2(s-r)}\,ds < \infty \qquad \text{car } s\mapsto s\,e^{-2(s-r)} \text{ est continue et bornée sur } [0,r]$$

Donc X_r est de carré intégrable.

c) Oui X_t est un processus d'Itô car

$$X_t = \int_0^t \sqrt{s}\, e^{-(s-t)}\, dB_s = \int_0^t b_s\, ds + \int_0^t \sigma_s\, dB_s$$

Ici $b_s : s \mapsto 0$ et $\sigma_s : s \mapsto \sqrt{s}\, e^{-(s-t)}$

et $d\langle X\rangle_t = \sigma_t^2\, dt$

$= \sqrt{t}\, dt \implies \langle X\rangle_t = \sqrt{t}\, t = t^{3/2}$

d) X_t est un processus gaussien car $X_t = \int_0^t \underbrace{\sqrt{s}\, e^{-(s-t)}}_{\text{fonct° déterm. et de carré integ.}} dB_s$ est une intégrale de Wiener

ou $X_t = \sum_{i=0}^{m(t)-1} \alpha_i (B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) + \alpha_{m(t)} (B_t - B_{m(t)})$

où $m(t)$ est l'unique entier tq $t_{m(t)} \le t < t_{m(t)+1}$

$\implies X_t$ est gaussien par CL de gaussiens (les B_i sont gaussiens).

$$\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \sqrt{s}\, e^{-(s+t)}\, dB_s\right] = 0$$

et $Cov(X_t, X_s) = \mathbb{E}[(X_t - \mathbb{E}[X_t])(X_s - \mathbb{E}[X_s])]$

$$= \mathbb{E}[X_t X_s] = \mathbb{E}\left[\int_0^t \sqrt{u}\, e^{-(u-t)}\, dB_u \int_0^s \sqrt{u}\, e^{-(u-s)}\, dB_u\right]$$

$$= \int_0^{t\wedge s} u\, e^{-2(u-t)}\, du$$

Supposons $t \le s$

$$\implies Cov(X_t, X_s) = \int_0^t u\, e^{-2(u-t)}\, du$$

$$\underset{\text{IPP}}{=} \left[-\frac{u}{2} e^{-2(u-t)}\right]_0^t + \int_0^t \frac{1}{2} e^{-2(u-t)}\, du = \left[-\frac{t}{2}\right] + \frac{1}{2}\int_0^t e^{-2(u-t)}\, du$$

$a = u \quad a' = 1$

$b' = e^{-2(u-t)} \quad b = \frac{-1}{2} e^{-2(u-t)}$

$$= -\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2} e^{-2(u-t)}\right]_0^t$$

$$= -\frac{t}{2} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{2t}\right)$$

$$= \underline{e^{2t} - 1 - 2t}$$

Exercice 3 :

1) $X_t = \exp(t + B_t)$

On applique la 2^e formule d'Itô avec $f : (x,t) \mapsto \exp(t+x)$ qui est bien C^2 p/r à t et C^2 p/r à x

avec $\frac{\partial f}{\partial x} = \exp(t+x)$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \exp(t+x)$

$\frac{\partial f}{\partial t} = \exp(t+x$

On a $dX_t = \exp(t+B_t)dB_t + \frac{1}{2}\exp(t+B_t)\,d\langle B\rangle_t + \exp(t+B_t)\,dt$

$$= \frac{3}{2}\exp(t+B_t)\,dt + \exp(t+B_t)\,dB_t$$

$$= \frac{3}{2}X_t\,dt + X_t\,dB_t$$

$$= X_t\left(\frac{3}{2}dt + dB_t\right)$$

2) $(E) : 3x\,y'(x) + x^2\,y''(x) = 0$

$$3x \times \alpha x^{\alpha-1} + x^2\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2} = 0$$

$$3\alpha x^{\alpha} + \alpha(\alpha-1)x^{\alpha} = 0$$

$$\Rightarrow 3\alpha + \alpha(\alpha-1) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha^2 + 2\alpha = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(\alpha+2) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -2$$

Soit $u : x \mapsto x^{-2} \in S_I(H)$

$u' = -2x^{-3} = \frac{-2}{x^3}$ et $u'' = 6x^{-4} = \frac{6}{x^4}$

(Posons $y = uz$ $\quad y' = u'z + uz'$ $\quad$ et $y'' = u''z + 2u'z' + uz''$

Méthode de Lagrange. $\quad = -2x^{-3}z + x^{-2}z'$ $\quad = 6x^{-4}z - 4x^{-3}z' + x^{-2}z''$

$y \in S_I(H)$ ssi $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 3xy' + x^2y'' = 0$

ssi $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ 3x(-2x^{-3}z + x^{-2}z') + x^2(6x^{-4}z - 4x^{-3}z' + x^{-2}z'') = 0$

ssi $\forall x \in \mathbb{R}^*,\ \cancel{-6x^{-2}z} + 3x^{-1}z + \cancel{6x^{-2}z} - 4x^{-1}z' + z'' = 0$

ssi $\forall x \in \mathbb{R}^*\quad z'' - x^{-1}z' = 0$

On pose $Z = z'$ $\Rightarrow Z' - \frac{1}{x}Z = 0$

$\Rightarrow xZ' - Z = 0$

Les λx solut° $\Rightarrow z = \frac{\lambda}{2}x^2 + \beta$

$\Rightarrow$ Les solut° sont de la forme

$$y = \mu z = \mu x^{-2}\left(\frac{\lambda}{2}x^2 + \beta\right)$$

$$= \frac{\lambda\mu}{2} + \mu\beta x^{-2}$$

$$y \in \left\{ \lambda + \frac{\mu}{x^2},\ \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}$$

Soit $a, b \in \mathbb{R}$, $u(x) = a + \frac{b}{x^2}$

$$u(X_r) = a + \frac{b}{X_r^2}$$

On applique la 1ère formule d'Itô avec $f = u$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-2b}{x^3} \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{6b}{x^4}$$

$$\Rightarrow du(X_r) = -2b X_r^{-3} dX_r + \frac{1}{2} 6b X_r^{-4} d\langle X \rangle_r$$

$\langle X \rangle_r = X_r^2 \, dr$

et $dX_r = X_r \left(\frac{3}{2} dr + dB_r \right)$

$$\Rightarrow du(X_r) = -2b X_r^{-3} X_r \left(\frac{3}{2} dr + dB_r \right) + 3b X_r^{-4} X_r^2 dr$$
$$= -3b X_r^{-2} dr - 2b X_r^{-2} dB_r + 3b X_r^{-2} dr$$
$$= -2b X_r^{-2} dB_r$$

* Drift nul $\Rightarrow$ martingale locale
* $\mathbb{E}[\langle u(X) \rangle_r] < \infty$ car le coeff de diffus° de $u(X_r)$ est $-2b X_r^{-2} = -2b e^{-2(r+B_r)}$
  Or $X_r > 0$ et $\mathbb{E}[\langle X \rangle_r] < \infty$

Donc $u(X_r)$ est une martingale.

3) $u : x \mapsto a + \frac{b}{x^2}$ $\quad a, b \in \mathbb{R}$

et par Q2 on a que $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$, $u(X_r)$ est une martingale

Donc si $a = 0$ et $b = 1$

On a $Y_r = \frac{1}{X_r^2} = u(X_r \mid a=0, b=1)$ est une martingale.

Exercice 4 :

$$dS_r = S_r(\mu_r\,dr + \sigma\,dB_r)$$

$$dS_0(r) = S_0(r)\,r_r\,dr$$

1) Soit $Y_r = S_r \exp\left(-\int_0^r \mu_s\,ds\right)$

On applique la $2^{ème}$ formule d'Itô avec $f : (x,r) \mapsto x\exp\left(-\int_0^r \mu_s\,ds\right)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \exp\left(\int_0^r \mu_s\,ds\right) \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = -x\,\mu_r\,dr\exp\left(\int_0^r \mu_s\,ds\right)$$

D'où on a

$$dY_r = \exp\left(-\int_0^r \mu_s\,ds\right)dS_r - S_r\,\mu_r\,dr\exp\left(-\int_0^r \mu_s\,ds\right)$$

$$= \exp\left(-\int_0^r \mu_s\,ds\right)S_r(\mu_r\,dr + \sigma\,dB_r) - S_r\,\mu_r\,dr\exp\left(-\int_0^r \mu_s\,ds\right)$$

$$= -\sigma S_r \exp\left(-\int_0^r \mu_s\,ds\right)dB_r$$

$$= -\sigma\,Y_r\,dB_r$$

Drift nul $\Rightarrow$ $\mathbb{P}$ martingale locale

puis $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\left[\left\langle S\exp\left(-\int_0^{\cdot} \mu_s\,ds\right)\right\rangle_r\right] = \int_0^r \sigma S_s^2 \exp\left(-\int_0^s \mu_u\,du\right)ds$

$< \infty$ car σ cte

μ_r est $\mathcal{F}_r$ adapté

Donc $S_r\exp\left(-\int_0^r \mu_s\,ds\right)$ est une $\mathbb{P}$-martingale

2) $\theta_r = \dfrac{\mu_r - r_r}{\sigma}$

a) Soit $L_r = \exp\left(\int_0^r \theta_s\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^r \theta_s^2\,ds\right) = \mathcal{E}(\theta * B)$ exponentielle de Doléans-Dade

$\theta_s = \frac{\mu_s - r_s}{\sigma}$ $\Rightarrow$ Condit° de Novikov respectée

car $\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)\right] < \infty$ $\forall t$

car σ cte

et μ_t, r_t sont $\mathcal{F}_t$ adaptés, bornés.

$\Rightarrow L_t$ est une vraie martingale

On définit $\mathbb{Q}$ la nouvelle proba définie par : $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = L_t$

Donc par le thm de Girsanov,

sous $\mathbb{Q}$, le processus $\tilde{B}_t : t \mapsto B_t - \int_0^t \theta_s ds$ est un MB

b) On pose $Z_t = S_t \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$

$\rightarrow$ 2e formule d'Itô ...

$$dZ_t = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) dS_t - S_t r_t dt \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$$

$$= \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) S_t \left(\mu_t dt + \sigma dB_t\right) - S_t r_t dt \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$$

$$= (\mu_t - r_t) S_t \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) dt + \sigma S_t \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) dB_t$$

$$\Rightarrow dZ_t = \sigma S_t \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right) \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma} dt + dB_t\right)$$

$$\Rightarrow dS_t = \sigma S_t \underbrace{\left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma} dt + dB_t\right)}_{d\tilde{B}_t}$$ car $S_t = \exp\left(+\int_0^t r_s ds\right) Z_t$

Donc on a $dS_t = \sigma S_t d\tilde{B}_t$

3) $\begin{cases} X_0 = x & X_t = n_0(t) S_0(t) + n_1(t) S(t) \\ \text{On suppose } dX_t = n_0(t) dS_0(t) + n_1(t) dS(t) \end{cases}$

a)
$$\begin{aligned} dX_t &= n_0(t) dS_0(t) + n_1(t) dS(t) \\ &= n_0(t) S_0(t) r_t dt + n_1(t) dS(t) \\ &= n_0(t) S_0(t) r_t dt + n_1(t) S_t r_t dt - n_1(t) S_t r_t dt + n_1(t) dS_t \\ &= r_t \left(n_0(t) S_0(t) + n_1(t) S_t\right) dt + n_1(t) \left(dS_t - S_t r_t dt\right) \\ &= r_t X_t dt + n_1(t) \left(dS_t - S_t r_t dt\right) \end{aligned}$$

b) On note $\pi(t) = n_1(t) S_t$ et $R_t = \exp\left(-\int_0^t r_s ds\right)$

$$dX_t = r_t X_t dt + n_1(t) \left(dS_t - S_t r_t dt\right)$$

Ecrire dX_t en fact° de $\pi_t = n_1(t) S_t$; r_t ; $\tilde{B}_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma} t + B_t$

$$\begin{aligned} dX_t &= r_t X_t dt + n_1(t) \left(S_t (\mu_t dt + \sigma dB_t) - S_t r_t dt\right) \\ &= r_t X_t dt + \sigma \pi_t \left(\frac{\mu_t - r_t}{\sigma} dt + dB_t\right) = r_t X_t dt + \sigma \pi_t d\tilde{B}_t \end{aligned}$$

c) 3^e formule d'Ito $f = xy$ $\quad \frac{\partial f}{\partial x} = y \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0 \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0$

$$\begin{aligned} \Rightarrow d X_t R_t &= R_t dX_t + X_t dR_t \\ &= R_t \left(r_t X_t dt + \sigma \pi_t d\tilde{B}_t\right) + X_t \times \left(-r_t R_t dt\right) \\ &= \sigma R_t \pi_t d\tilde{B}_t \end{aligned}$$

Drift nul $\Rightarrow$ martingale locale sous $\mathbb{Q}$

De plus $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\langle XR\rangle_t] = \int_0^t \sigma^2 R_s^2 \pi_s^2 ds < \infty$ Car σ cte

$R_t = \exp(-\int_0^t r_s ds)$ et r_s borné $\Rightarrow R_t$ borné

et $\pi_s = m_1(s) S_s$

Donc $X_t R_t$ est une $\mathbb{Q}$ martingale $\forall t$

d) Soit $\xi = X_T$

On a mq en c) que $X_t R_t$, $\mathbb{Q}$ martingale

$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_t R_t | \mathcal{F}_T] = X_T R_T$

$\mathbb{E}[X_t R_t \times \exp(+\int_0^T r_s ds) | \mathcal{F}_T] = \exp(+\int_0^T r_s ds)\, \mathbb{E}[X_t R_t | \mathcal{F}_T]$

Car le processus r_T est $\mathcal{F}_T$-adapté

$\Rightarrow \mathbb{E}[X_t R_t \exp(\int_0^T r_s ds) | \mathcal{F}_T] = \exp(\int_0^T r_s ds)\, X_T R_T$

$= X_T$

Donc $\mathbb{E}[X_t \exp(-\int_0^t r_s ds + \int_0^T r_s ds) | \mathcal{F}_T] = X_T$