TRIBUS, MESURES ET APPLICATIONS MESURABLES

Intégration L3– 2021
Pierre-O Goffard et G. Terii

---

1. Soient $f : X \mapsto Y$, $A, A_i \subset X$, $B, B_i \subset Y$. Comparer (en précisant éventuellement si f est injective ou surjective)
   (a) $f^{-1}\left(\bigcup_j B_j\right)$ et $\bigcup_j f^{-1}(B_j)$
   (b) $f^{-1}\left(\bigcap_j B_j\right)$ et $\bigcap_j f^{-1}(B_j)$
   (c) $f^{-1}(B^c)$ et $f^{-1}(B)^c$
   (d) $f\left(\bigcup_j A_j\right)$ et $\bigcup_j f(A_j)$
   (e) $f\left(\bigcap_j A_j\right)$ et $\bigcap_j f(A_j)$
   (f) $f(A^c)$ et $f(A)^c$
2. Soient Ω un ensemble et $\mathcal{A}$ une tribu.
   (a) Montrer qu'une tribu est stable par intersection finie.
   (b) Montrer que l'intersection quelconque de tribus de Ω est une tribu de Ω.
   (c) $F \subset \Omega$. Montrer que $\mathcal{A}_F = \{A \cap F\ ;\ A \in \mathcal{A}\}$ est une tribu sur F. On l'appelle tribu trace.
3. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et deux suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}$ telles que $B_n \subset A_n$.
   (a) Montrer que
   $$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \backslash \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_n \backslash B_n).$$
   (b) Montrer que
   $$\mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) - \mu\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n\right) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} [\mu(A_n) - \mu(B_n)].$$
4. Les ensembles suivants sont-ils des tribus
   (a) $\mathcal{F}_1 = \{A \subset X\ ;\ A \text{ est fini}\}$
   (b) $\mathcal{F}_2 = \{A \subset X\ ;\ A \text{ est dénombrable}\}$
   (c) $\mathcal{F}_3 = \{A \subset X\ ;\ A \text{ est dénombrable ou codénombrable dans } X\}$
   (d) $\mathcal{F}_4 = \{A \subset X\ ;\ A \text{ est fini ou cofini dans } X\}$
   (e) $\mathcal{F}_5 = \mathcal{P}(X)$
5. On considère $(X, \mathcal{T})$ un espace muni d'une tribu.
   (a) Soit $A \subset X$, montrer que 1_A est mesurable ssi $A \in \mathcal{T}$.
   (b) Soit $\mathcal{P}$ une partition au plus dénombrable de X qui engendre $\mathcal{T}$, et f une fonction réelle $\mathcal{T}$-mesurable, montrer que f est constante sur P pour tout $P \in \mathcal{P}$.

6. (a) L'inverse d'une application mesurable est elle mesurable ?
   (b) Une application mesurable est elle continue ?
   (c) Une application continue est elle mesurable ?

7. (a) Soit $\mathcal{F} = \{]-\infty, x[\ , x \in \mathbb{Q}\}$, montrer que $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma(\mathcal{F})$
   (b) A-t-on $\mathcal{B}_{\mathbb{R}} = \sigma\left(\{\{x\}\ , x \in X\}\right)$

8. Soit $(X, \mathcal{T}, \mu)$ un espace probabilisé, f une application $\mathcal{T}$-mesurable. On suppose que μ est f invariante, c'est à dire que pour tout $T \in \mathcal{T}$, on a $\mu(T) = \mu\left(f^{-1}(T)\right)$. On fixe $A \in \mathcal{T}$ et on considère $A' = \{x \in A$ tels que il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ avec $f^n(x) \in A\}$.
   (a) Soit $n \geq 1$, on considère $B_n = \{x \in A$ tels que pour tout $f^n(x) \in A$ et $k > n,\ f^k(x) \notin A\}$. Montrer que $f^{-nk}(B_n)$ est disjoint de $f^{-nk'}(B_n)$ pour $k \neq k'$ des entiers naturels.
   (b) En utilisant la finitude de μ, montrer que $\mu(A) = \mu(A')$.

9. Le but de cet exercice est de construire une partie non mesurable de $\mathbb{R}$. On considère R la relation d'équivalence sur $[0, 1]$ "être à distance rationelle". Soit A un système de représentants des classes d'équivalences (l'existence d'une telle partie repose sur l'axiome du choix !). Montrer que A ne peut pas avoir de mesure pour la mesure de Lebesgue. Indication : raisonner par l'absurde et utiliser l'invariance par translation de la mesure de Lebesgue.