Théorie des Options

M1 Actuariat - 1ère session 2019 Durée : 2h

1 feuilles A4 recto-verso manuscrite autorisée, calculatrice non programmable autorisée.

Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans un ordre quelconque. Le soin porté à la justification précise des réponses sera apprécié.

Exercice 1 On considère un marché mono-périodique avec 3 états de la nature possibles. 4 actifs sont échangeables sur ce marché, leurs payoffs dans tous les états de la nature possibles sont donnés par la matrice suivante (actifs en colonnes, états en lignes) :

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

1. Le marché est-il complet ? Justifiez votre réponse.
2. On suppose que les prix, à t=0, des 4 actifs sont $p_1 = 1$, $p_2 = 2$, $p_3 = \frac{5}{6}$ et $p_4 = \frac{2}{3}$. Y a-t-il des opportunités d'arbitrage sur ce marché ? Si oui en exhiber une.
3. Quel devrait être le prix de l'actif 2 pour qu'il n'y ait pas d'opportunités d'arbitrage ? On prendra ce prix par la suite.
4. Donnez le taux d'intérêt sans risque (**discret** sur cette période).
5. Soit X un actif quelconque, de payoffs (x, y, z) dans chacun des états de la nature. Donner la formule donnant son prix en fonction des prix, notés a_1, a_2 et a_3, des trois actifs d'Arrow-Debreu de ce marché [1].
   En déduire une expression liant les probabilités risque-neutre de chacun des états, les prix des actifs d'Arrow-Debreu, et le taux d'intérêt sans risque r.
6. Donnez les prix des 3 actifs d'Arrow-Debreu dans ce marché.
   Déduire les valeurs des probabilités risque-neutre de chacun des 3 états.

Exercice 2 *(Option Lookback en modèle binomial à deux périodes)*
On se place dans le cadre d'un modèle binomial à trois dates : $t = 0$, $t = 1$ et $t = 2$ avec $r = 0,05$ (taux discret sur une période), $u = 1,1$ et $d = 0,95$ et $S_0 = 100$.

1. Représentez l'arbre d'évolution de l'actif risqué.
2. Décrire Ω, $\mathcal{F}_0$, $\mathcal{F}_1$ et $\mathcal{F}_2$.
3. Déterminez la probabilité risque-neutre.
4. Quel est le prix d'un call européen de strike 105 d'échéance $T = 2$?
5. Déterminez le prix d'une option lookback de payoff final :

$$(S_2^* - 100)+, \quad \text{avec } S_t^* = \sup_{s \leq t} S_s$$

1. Pour ceux qui auraient raté la définition, l'actif d'Arrow-Debreu correspondant à l'état i est l'actif dont les payoffs sont 0 partout sauf dans l'état i, où ils valent 1. Ce sont les actifs de base du marché.

Exercice 3 *(Option sur moyenne)*
Soit S le processus donné par l'EDS suivante, sous la probabilité risque neutre $\mathbb{P}$:

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma dB_t), \quad S_0 = 1, \tag{1}$$

avec r et σ deux constantes et B un mouvement Brownien. On souhaite calculer le prix d'une option dont le payoff final est

$$C = (Z_T - S_T)_+$$

avec

$$Z_T := \exp\left[\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)dt\right].$$

1. Donner l'expression de la solution de l'EDS (1) en le démontrant.
2. Trouver la probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle :

$$e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[(Z_T - S_T)_+\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{Z_T}{S_T} - 1\right)_+\right]$$

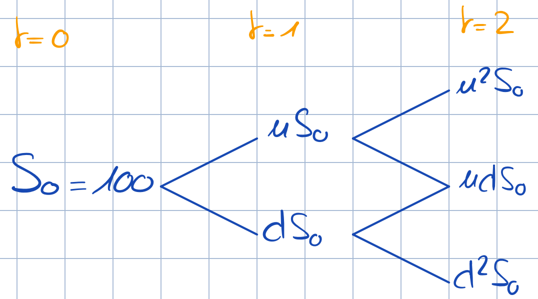
   Précisez sa densité de Radon-Nikodym par rapport à $\mathbb{P}$.
3. Donner l'expression de $\bar{B}_t$ nouveau mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}$.
4. (a) En utilisant la formule d'Itô appliquée à $g(t) = tB_t$, montrer que

$$\int_0^T \bar{B}_t dt = \int_0^T (T-t)d\bar{B}_t.$$

   (b) Ecrire $\frac{Z_T}{S_T}$ sous la forme $e^{\alpha T - \int_0^T \beta(t)d\bar{B}_t}$.
5. Déterminez K pour que le calcul de C se réduise au calcul de $\mathbb{E}\left[(\tilde{S}_T - K)_+\right]$ avec $\tilde{S}$ un mouvement Brownien géométrique dont on précisera la dynamique.
6. Calculer la prime de C à l'instant 0.

Exercice 2 :

1)



2) $\Omega = \{ S_0 ; uS_0 ; dS_0 ; u^2 S_0 ; udS_0 ; d^2 S_0 \}$

$= \{ 100 ; 110 ; 95 ; 121 ; 104,5 ; 90,25 \}$

$\mathcal{F}_0 = \{ \phi ; \underbrace{S_0^{t=0} = 100}_{\Omega_0} \}$

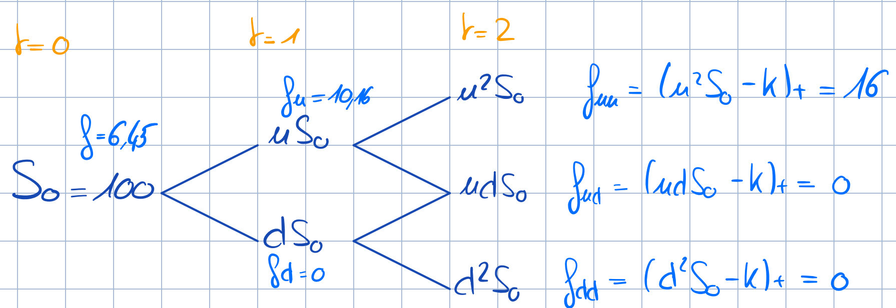
$\mathcal{F}_1 = \{ \phi ; \Omega_0 ; \underbrace{uS_0^{t=1} = 110 ; dS_0^{t=1} = 95}_{\Omega_1} \}$

$\mathcal{F}_2 = \{ \phi ; \Omega_0 ; \Omega_1 ; u^2 S_0^{t=2} = 121 ; udS_0^{t=2} = 104,5 ; d^2 S_0^{t=2} = 90,25 \}$

3) Proba risque neutre : $q = \dfrac{R-d}{u-d}$ où $R = 1 + r = 1,05$

$\Rightarrow q = \dfrac{1,05 - 0,95}{1,1 - 0,95} = 2/3 = 0,67$

4) CALL européen de strike $K = 105$ et échéance $T = 2$.



$\Rightarrow f = \dfrac{1}{R^2} [q^2 f_{uu} + 2q(1-q) f_{ud} + (1-q)^2 f_{dd}]$

$= 6,45€$

ou

$\begin{cases} f_u = \frac{1}{R} [q f_{uu} + (1-q) f_{ud}] = 10,16€ \\ f_d = \frac{1}{R} [q f_{ud} + (1-q) f_{dd}] = 0€ \end{cases} \Rightarrow f = \frac{1}{R} [q f_u + (1-q) f_d] = 6,45€$

5) $t=0 \qquad t=1 \qquad t=2$

$S_0 = 100$, f^*

$uS_0 = 110$, f_u^* ; $dS_0 = 95$, f_d^*

$u^2 S_0 = 121 \longrightarrow S_2^* = 121 \implies f_{uu}^* = (121-100)_+ = 21$

$udS_0 = 104{,}5 \longrightarrow S_2^* = \begin{cases} 110 \text{ si chemin } ud \\ 104{,}5 \text{ si chemin } du \end{cases} \implies \begin{cases} f_{ud}^* = (110-100)_+ = 10 \\ f_{du}^* = (104{,}5-100) = 4{,}5 \end{cases}$

$d^2 S_0 = 90{,}25 \longrightarrow S_2^* = 100 \implies f_{dd}^* = (100-100)_+ = 0$

$$\implies \begin{cases} f_u^* = \frac{1}{R}\left[q f_{uu}^* + (1-q) f_{ud}^*\right] = 16{,}51€ \\ f_d^* = \frac{1}{R}\left[q f_{du}^* + (1-q) f_{dd}^*\right] = 2{,}86€ \end{cases}$$

$$\implies f^* = \frac{1}{R}\left[q f_u^* + (1-q) f_d^*\right]$$

$$= 11{,}39€$$

Donc le prix d'une option lookback vaut $f^* = 11{,}39€$.

Exercice 3 :

$$dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\, dB_t), \quad S_0 = 1$$

$$Z_T = \exp\left(\frac{1}{T}\int_0^T \ln(S_t)\,dt\right)$$

1) On applique la 1ère formule d'Itô à $\ln(S_t)$ $\qquad f : x \mapsto \ln(x)$ est C^2 p/r à x et $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{x}$ $\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}$

$$\underset{\text{Itô}}{\implies} d\ln(S_t) = \frac{1}{S_t} dS_t - \frac{1}{2S_t^2}\sigma^2 S_t^2\, dt$$

$$= r\,dt + \sigma\, dB_t - \frac{\sigma^2}{2} dt = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)dt + \sigma\, dB_t$$

$$\implies \ln(S_t) \underbrace{- \ln(S_0)}_{=0} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t$$

$$\implies S_t = \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right)$$

2) $$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_T} = X_T = e^{-rT} S_T = e^{-\frac{\sigma^2}{2}t + \sigma B_t}$$

On a bien $e^{-rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[(Z_T - S_T)_+\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[X_T e^{-rT}(Z_T - S_T)_+\right]$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[(Z_T - S_T)_+ \frac{1}{S_T}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(\frac{Z_T}{S_T} - 1\right)_+\right]$$

3) En appliquant le théorème de Girsanov, on a :

Sous $\mathbb{Q}$, le processus $\widetilde{B} : t \mapsto B_t - \sigma t$ est un mouvement brownien.

4) a) $g : (t,x) = tx$ est C^1 p/r à t et C^2 p/r à x avec $\frac{\partial g}{\partial t} = x$ $\frac{\partial g}{\partial x} = t$ $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} = 0$

Donc en appliquant la 2ème formule d'Itô à $g(t, B_t) = tB_t$, on a

$$TB_T = \int_0^T B_t \, dt + \int_0^T t \, dB_t$$

Or $B_t = \widetilde{B}_t + \sigma t$

$$\Rightarrow TB_T = \int_0^T (\widetilde{B}_t + \sigma t) dt + \int_0^T t \, d\widetilde{B}_t + \int_0^T \sigma t \, dt$$

Or $TB_T = \int_0^T T dB_t = \int_0^T T d\widetilde{B}_t + \int_0^T \sigma T \, dt$

$$\text{Donc } \int_0^T T d\widetilde{B}_t + \cancel{\sigma T^2} = \int_0^T \widetilde{B}_t \, dt + \cancel{\sigma \frac{T^2}{2}} + \int_0^T t \, d\widetilde{B}_t + \cancel{\sigma \frac{T^2}{2}}$$

$$\text{D'où } \int_0^T \widetilde{B}_t \, dt = \int_0^T (T-t) \, d\widetilde{B}_t$$

b) $$\frac{Z_T}{S_T} = \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \ln(S_t) \, dt - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t - \sigma B_t \right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{T} \int_0^T \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t \right] dt - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - \sigma B_T \right)$$

$$= \exp\left(\frac{1}{T} \left[\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T^2}{2} + \sigma \int_0^T B_t \, dt \right] - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T - \sigma B_T \right)$$

$$= \exp\left(-\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\frac{T}{2} + \frac{\sigma}{T} \int_0^T \widetilde{B}_t \, dt + \sigma^2 \frac{T}{2} - \sigma \widetilde{B}_T - \sigma^2 T \right) \quad \text{car } B_t = \widetilde{B}_t + \sigma t$$

$$= \exp\left(-\left(\frac{2r + \sigma^2}{4}\right)T + \frac{\sigma}{T}\Big(\underbrace{\int_0^T \widetilde{B}_t \, dt - \int_0^T T d\widetilde{B}_t}_{= -\int_0^T t \, d\widetilde{B}_t} \Big) \right)$$

Car avec 4.a) on a mq $\int_0^T \widetilde{B}_t \, dt = \int_0^T (T-t) \, d\widetilde{B}_t$

$$= \exp\Big(\underbrace{-\left(\frac{2r + \sigma^2}{4}\right)}_{\alpha} T - \int_0^T \underbrace{\frac{\sigma t}{T}}_{\beta(t)} d\widetilde{B}_t \Big)$$

$$\text{D'où } \frac{Z_T}{S_T} = e^{\alpha T - \int_0^T \beta(t) d\widetilde{B}_t} \qquad \text{avec } \alpha = -\frac{2r + \sigma^2}{4} \text{ et } \beta(t) = \frac{\sigma t}{T}$$

5) On cherche K tel que $(Z_T - S_T)_+ = \mathbb{E}[(\widetilde{S}_T - K)_+]$

Posons $\widetilde{S}_T = e^{\alpha T - \int_0^T \beta(t) d\widetilde{B}_t} = \frac{Z_T}{S_T}$

$\Longrightarrow \quad (\tilde{S}_T - 1)_+ = \mathbb{E}[(\tilde{S}_T - K)_+]$

$\Longrightarrow$ En prenant $K = 1$ on est bien dans le cas où le calcul de C revient à calculer $\mathbb{E}[(\tilde{S}_T - K)_+]$

6) $C_{T=0} = \mathbb{E}[(\tilde{S}_0 - K)_+] = \mathbb{E}[(1-1)_+] = 0.$