Annales d'exercices de calcul stochastique
(Lorenzo Zambotti, LPSM)

✓ **Exercice 1.** Soit $\eta \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ une variable aléatoire indépendante de B. On définit

$$Y_t := \eta\, t + B_t, \qquad t \geq 0,$$

et $\mathcal{G}_t := \sigma(Y_s, s \in [0,t])$. On veut retrouver η à partir de l'observation du processus Y.

(1) Montrer que $(Y_t, t \geq 0)$ est un processus gaussien et calculer la loi de Y_t pour tout $t \geq 0$.
(2) Calculer $\mathrm{Cov}(\eta, Y_s)$, $\mathrm{Cov}(Y_s, Y_t)$ pour $s, t \geq 0$.
(3) Soit $t > 0$ fixé. Montrer qu'il existe un réel λ_t et une variable aléatoire Z_t indépendante de $\mathcal{G}_t$ tels que $\eta = \lambda_t Y_t + Z_t$. Quelle est la loi de Z_t ?
(4) Calculer $\mathbb{E}[\eta \,|\, \mathcal{G}_t]$ et la limite p.s. de $\mathbb{E}[\eta \,|\, \mathcal{G}_t]$ quand $t \to +\infty$.
(5) La variable η est-elle $\mathcal{G}_t$-mesurable ? Et $\mathcal{G}_\infty$-mesurable ?

✓ **Exercice 2. (Polynômes d'Hermite)** Soit $M_0(t) = 1$ pour tout $t \geq 0$ et pour tout $n \geq 0$

$$M_{n+1}(t) = \int_0^t M_n(s)\, \mathrm{d}B_s, \qquad t \geq 0.$$

(1) Montrer par récurrence que

$$\mathbb{E}\left[(M_n(t))^2\right] = \frac{t^n}{n!}, \qquad t \geq 0,\ n \geq 0.$$

(2) Soit $T > 0$ fixé. Montrer qu'il existe $\alpha_0 > 0$ tel que pour tout $\alpha \in]-\alpha_0, \alpha_0[$ la série

$$L_\alpha(t) := \sum_{n \geq 0} \alpha^n M_n(t)$$

converge dans L^2 pour tout $t \in [0,T]$. Montrer la continuité p.s. des trajectoires de L_α.

(3) Montrer que L_α satisfait

$$L_\alpha(t) = 1 + \int_0^t L_\alpha(s)\, \alpha\, \mathrm{d}B_s, \qquad t \in [0,T].$$

(4) Pour $\alpha, x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+$ et $n \in \mathbb{N}$ nous définissons

$$H(\alpha, x, c) := \exp\left(\alpha x - \frac{\alpha^2}{2} c\right), \qquad H_n(x,c) := \frac{\partial^n H}{\partial \alpha^n}(0, x, c).$$

Montrer que p.s. pour tout $n \geq 0$ nous avons $M_n(t) = H_n(B_t, t)/n!$, $t \geq 0$.

✓ **Exercice 3.** Soit $g_1 := \sup\{t \leq 1 : B_t = 0\}$. Nous voulons montrer que le processus

$$\gamma_u := \frac{1}{\sqrt{g_1}} B_{g_1 u}, \qquad u \in [0,1],$$

est un pont brownien.

(1) Montrer que le processus $(tB_{\frac{1}{t}-1})_{t\in[0,1]}$ est un pont brownien.

(2) Montrer que p.s. $g_1 > 0$. La variable aléatoire g_1 est-elle un temps d'arrêt ?

(3) Soit $\hat{B}_t := tB_{\frac{1}{t}}$, $t \geq 0$. Montrer que $\hat{B}$ est un mouvement brownien. Soit $\hat{d}_1 := \inf\{t \geq 1 : \hat{B}_t = 0\}$; montrer que $\hat{d}_1 = 1/g_1$. La variable aléatoire $\hat{d}_1$ est-elle un temps d'arrêt ?

(4) Montrer que pour tout $u \in [0,1]$

$$\frac{1}{\sqrt{g_1}} B_{g_1 u} = \frac{u}{\sqrt{\hat{d}_1}} \left(\hat{B}_{\hat{d}_1 + \hat{d}_1(\frac{1}{u}-1)} - \hat{B}_{\hat{d}_1} \right).$$

En déduire que $(\gamma_u)_{u\in[0,1]}$ est un pont brownien.

Exercice 4. Soit $M_t := \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$, $t \geq 0$.

(1) Montrer que M est une martingale et en donner une expression comme intégrale stochastique.

(2) Montrer que pour tout $b \geq 0$, la martingale locale $\mathscr{E}(-bM)$ est une martingale. Pour un $T > 0$ fixé, définir la mesure de probabilité $\mathbb{Q} := \mathscr{E}(-bM)_T \cdot \mathbb{P}$ sur $(\Omega, \mathscr{F}_T)$.

(3) Calculer l'EDS satisfaite par $(B_t, t \in [0,T])$ sous $\mathbb{Q}$ et la loi de B_t sous $\mathbb{Q}$, $t \in [0,T]$.

(4) En déduire que pour tous $a, b \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-aB_t^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2 \,\mathrm{d}s\right)\right] = \left(\frac{b}{b\cosh(bt) + 2a\sinh(bt)}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

(5) En rappellant que pour $\alpha, \beta > 0$ et $s \geq 0$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta+s)x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\beta}{s+\beta}\right)^\alpha$$

calculer

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s\right) \,\middle|\, B_t = y\right], \qquad b > 0,\ y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 5. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien.

(1) Montrer que pour tout $T < 1$ et $x \in \mathbb{R}$ il existe p.s. une seule solution de l'EDS

$$X_t^x = x + B_t - \int_0^t \frac{X_s^x}{1-s}\,\mathrm{d}s, \qquad t \in [0,T].$$

(2) En appliquant la formule d'Itô à $(\frac{X_t^0}{1-t})_{t\in[0,T]}$, obtenir une formule explicite pour $(X_t^0, t \in [0,T])$.

(3) Montrer que $X_t^x = X_t^0 + x(1-t)$, $t \in [0,T]$.

(4) Que se passe-t-il quand $T \to 1$?

(5) Le processus $(X_t^x, t \in [0,T])$ est-il une martingale ? une semi-martingale ? par rapport à quelle filtration ?

(6) Le processus $(X_t^x, t \in [0,T])$ est-il gaussien ? Peut-on identifier sa loi ?

Exercice 6. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}$. On rappelle que si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ alors $\mathbb{E}[e^X] = e^{\sigma^2/2}$. Soit pour $h \in L^2(0,1)$

$$\langle h, B\rangle := \int_0^1 h_s\, B_s\, \mathrm{d}s.$$

(1) Calculer la loi de $\langle h, B\rangle$ et $\lambda(h) := \mathbb{E}[e^{\langle h,B\rangle}]$.

(2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance de $\langle h_1, B\rangle$ et $\langle h_2, B\rangle$.

(3) Définir une nouvelle mesure de probabilités par

$$\mathbb{P}^h(A) := \frac{1}{\lambda(h)}\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_A\, e^{\langle h,B\rangle}].$$

Sous $\mathbb{P}^h$, quelle est la loi de $(B_t)_{t\in[0,1]}$?

(4) Calculer pour tout $k \in L^2(0,1)$

$$\mathbb{E}^h[e^{\langle k,B\rangle}],$$

où $\mathbb{E}^h$ est l'espérance sous $\mathbb{P}^h$.

(5) Donner une condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance de $\langle k_1, B\rangle$ et $\langle k_2, B\rangle$ sous $\mathbb{P}^h$.

Exercice 7. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $S_t = \sup_{s\in[0,t]} B_s$. On rappelle que, par le principe de réflexion, la densité de (S_t, B_t) est donnée par

$$f_t(a,b) = \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} \exp\left(-\frac{(2a-b)^2}{2t}\right) \mathbb{1}_{\{a>0,\, b<a\}}.$$

Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ le processus canonique sur $E := C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et $\P_x$ la loi de $(x+B_t)_{t\geq 0}$. Soit $\tau := \inf\{t > 0 : X_t = 0\}$, $\inf \emptyset := +\infty$.

(1) Pour toute $f :]0,+\infty[\mapsto \mathbb{R}$ borélienne bornée on définit

$$Q_t f(x) := \mathbb{E}_x(f(X_t)\, \mathbb{1}_{(\tau>t)}), \qquad t \geq 0,\ x > 0.$$

Montrer que pour $t > 0$, $Q_t f(x) = \int_{\mathbb{R}_+} f(y)\, q_t(x,y)\, \mathrm{d}y$, où

$$q_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(\exp\left(-\frac{(y-x)^2}{2t}\right) - \exp\left(-\frac{(y+x)^2}{2t}\right)\right), \qquad x, y > 0.$$

(2) On veut montrer que $Q_{t+s} = Q_t Q_s$, c'est à dire que $(Q_t)_{t\geq 0}$ est un semigroupe. Utiliser la propriété de Markov du mouvement brownien ; si $\theta_t : E \mapsto E$ est l'opérateur de décalage $\theta_t(w) = w_{t+\cdot}$, remarquer que $\{\tau > t+s\} = \{\tau > t\} \cap \{\tau \circ \theta_t > s\}$.

(3) Montrer que $X_t \mathbb{1}_{(\tau>t)} = X_{t\wedge\tau}$ et en déduire la valeur de $\mathbb{E}_x(X_t\, \mathbb{1}_{(\tau>t)})$.

(4) Soit $p_t(x,y) := \frac{1}{x} q_t(x,y) y$, $x, y > 0$, $t > 0$, et $P_t f(x) := \int_{\mathbb{R}_+} f(y)\, p_t(x,y)\, \mathrm{d}y$. Montrer que $(P_t)_{t\geq 0}$ est un semigroupe avec $P_t \mathbf{1} = \mathbf{1}$, où $\mathbf{1}$ est la fonction constante égale à 1.

(5) Soit $p_t(y) := \lim_{x\downarrow 0} p_t(x,y)$. Montrer que $p_t(\cdot)$ est la densité de $|B_t^{(3)}|$, où $B^{(3)}$ est un MB dans $\mathbb{R}^3$ issu de 0.

Exercice 8. (Développements de Taylor aléatoires) Nous considérons un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et bornée avec sa dérivée f' et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F' = f$.

Soient $T \geq 0$ et $\alpha \in]0, 1/2[$ fixés.

(1) Montrer qu'il existe une v.a. $K_1 \geq 0$ p.s. finie telle que pour tous $t, s \in [0, T]$

$$|F(B_t) - F(B_s)| \leq K_1 |t - s|^\alpha,$$
$$|F(B_t) - F(B_s) - f(B_s)(B_t - B_s)| \leq K_1 |t - s|^{2\alpha}.$$

(2) Montrer qu'il existe une v.a. $K_2 \geq 0$ p.s. finie telle que pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\left| \int_s^t f(B_u) \, \mathrm{d}B_u \right| \leq K_2 |t - s|^\alpha, \qquad \left| \int_s^t f(B_u) \, \mathrm{d}B_u - f(B_s)(B_t - B_s) \right| \leq K_2 |t - s|^{2\alpha}.$$

On pourra utiliser la formule d'Ito appliquée à $F(B_t)$.

(3) On suppose que f' est de classe C^1 avec dérivée f'' bornée. Montrer qu'il existe une v.a. $K_3 \geq 0$ p.s. finie telle que pour tous $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\left| \int_s^t (B_u - B_s) \, \mathrm{d}B_u \right| \leq K_3 |t - s|^{2\alpha},$$

$$\left| \int_s^t f(B_u) \, \mathrm{d}B_u - f(B_s)(B_t - B_s) - f'(B_s) \int_s^t (B_u - B_s) \, \mathrm{d}B_u \right| \leq K_3 |t - s|^{3\alpha}.$$

On pourra utiliser une formule d'Ito appliquée au processus $[s, T] \ni t \mapsto (B_t - B_s)^2$.

(4) Soit maintenant $\alpha \in]1/3, 1/2[$. Montrer qu'il existe un seul processus $\gamma : [0, T] \to \mathbb{R}$ tel que p.s. pour une v.a. p.s. finie $C \geq 0$ et tous $0 \leq s \leq t \leq T$

$$\gamma_0 = 0, \qquad \left| \gamma_t - \gamma_s - f(B_s)(B_t - B_s) - f'(B_s) \int_s^t (B_u - B_s) \, \mathrm{d}B_u \right| \leq C |t - s|^{3\alpha}.$$

Exercice 9. Nous considérons un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et bornée avec sa dérivée f' et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F' = f$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que

$$M_t := F(x + B_t) - F(x) - \frac{1}{2} \int_0^t f'(x + B_s) \, \mathrm{d}s, \qquad t \geq 0,$$

est une martingale.

(2) Soit pour $t \geq 0$

$$D_t := \exp\left(F(x + B_t) - F(x) - \frac{1}{2} \int_0^t f'(x + B_s) \, \mathrm{d}s - \frac{1}{2} \int_0^t (f(x + B_s))^2 \, \mathrm{d}s \right)$$

et $\mathbb{Q}_T|_{\mathscr{F}_T} := D_T \cdot \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$ pour tout $T \geq 0$. Montrer que $(D_t)_{t\geq 0}$ est une martingale et que $\mathbb{Q}_T$ est une mesure de probabilité sur $\mathscr{F}_T$ pour tout $T \geq 0$.

(3) Montrer que sous $\mathbb{Q}_T$ le processus $(x + B_t)_{t\in[0,T]}$ est solution faible d'une EDS pour laquelle on a unicité trajectorielle.

(4) Quelle est la loi de $(x+B_t)_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbb{Q}_T$?

Exercice 10. Soit $x>0$ et $B^{(3)}=(B^1,B^2,B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ défini sur $(\Omega,\mathscr{F},(\mathscr{F}_t),\mathbb{P})$. On pose $\rho_t := |\bar{x}+B_t^{(3)}|$, $t\geq 0$, où $\bar{x}:=(x,0,0)\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$.

(1) Montrer que $(\rho_t)_{t\geq 0}$ est une solution faible de l'EDS

$$\rho_t = x + \int_0^t \frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}s + \beta_t, \qquad t\geq 0, \tag{1}$$

où β est un MB standard. (On pourra passer par l'EDS satisfaite par ρ_t^2 ou faire un calcul direct).

(2) Montrer que le processus

$$M_t := -\int_0^t \frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}\beta_s, \qquad t\geq 0$$

définit une martingale locale. Si $D:=\mathscr{E}(M)$ est la martingale locale exponentielle de M, montrer que p.s.

$$D_t = \mathscr{E}(M)_t = \frac{x}{\rho_t}, \qquad t\geq 0.$$

(3) Montrer que D^{τ_ε} est une vraie martingale, où $\tau_\varepsilon := \inf\{t>0 : \rho_t=\varepsilon\}$ pour $0<\varepsilon<x$.

(4) Soit $T\geq 0$ et $\mathbb{Q}_T^\varepsilon|_{\mathscr{F}_T} := D_T^{\tau_\varepsilon}\cdot\mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$. Montrer que $(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon})_{t\in[0,T]}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}_T^\varepsilon$ et en calculer le crochet.

(5) Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB standard indépendant de $B^{(3)}$ et

$$\gamma_t^\varepsilon := \rho_{t\wedge\tau_\varepsilon} + W_t - W_t^{\tau_\varepsilon}, \qquad t\geq 0.$$

Montrer que γ^ε sous $\mathbb{Q}_T^\varepsilon$ est un MB standard issu de x et p.s. $\tau_\varepsilon = \inf\{t>0 : \gamma_t^\varepsilon=\varepsilon\}$.

(6) Montrer que pour toute fonctionnelle $\Phi : C([0,T])\to\mathbb{R}$ borélienne bornée

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t\in[0,T])\frac{x}{\rho_{T\wedge\tau_\varepsilon}}\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(x+B_{t\wedge\sigma_\varepsilon}, t\in[0,T])\right]$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t\in[0,T])\right] = \mathbb{E}\left[\frac{x+B_{T\wedge\sigma_\varepsilon}}{x}\,\Phi(x+B_{t\wedge\sigma_\varepsilon}, t\in[0,T])\right]$$

où $\sigma_\varepsilon := \inf\{t>0 : x+B_t=\varepsilon\}$.

(7) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_t, t\in[0,T])\right] = \mathbb{E}\left[\frac{x+B_T}{x}\mathbb{1}_{(\inf_{[0,T]}(x+B)>0)}\,\Phi(x+B_t, t\in[0,T])\right].$$

Comparer avec l'exercice 2 et interpréter le résultat.

Exercice 11. Soit $b : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ de classe C^∞ et avec b', b'', σ' et σ'' bornées sur $\mathbb{R}$. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien sur $\mathbb{R}$ et $(X_t(x))_{t\geq 0}$ la seule solution de l'équation

$$\mathrm{d}X_t = b(X_t)\,\mathrm{d}t + \sigma(X_t)\,\mathrm{d}B_t, \qquad X_0 = x \in \mathbb{R}.$$

Pour toute $f \in C_b(\mathbb{R})$ on note $\|f\|_\infty := \sup_{\mathbb{R}} |f|$ et l'on définit $u(t,x) := P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t(x))]$.

(1) Soit x fixé et $\eta_t^\varepsilon(x) := \frac{1}{\varepsilon}(X_t(x+\varepsilon) - X_t(x))$. Montrer que $(\eta_t^\varepsilon(x))_{t\geq 0}$ satisfait une EDS du type

$$\mathrm{d}\eta_t^\varepsilon(x) = (h_t^\varepsilon\,\mathrm{d}t + k_t^\varepsilon\,\mathrm{d}B_t)\eta_t^\varepsilon(x) \tag{2}$$

avec h^ε et k^ε des processus progressivement mesurables et bornés.

(2) Considérer le processus auxiliaire $\zeta_t := \exp(-\int_0^t k_s^\varepsilon\,\mathrm{d}B_s + \frac{1}{2}\int_0^t (k_s^\varepsilon)^2\,\mathrm{d}s - \int_0^t h_s^\varepsilon\,\mathrm{d}s)$ et donner une expression explicite pour $(\eta_t^\varepsilon(x))_{t\geq 0}$.

(3) Montrer que pour toute sous-suite $(\varepsilon_n)_n$ il existe une sous-sous-suite $(n_k)_k$ telle que p.s. $\eta_t^{\varepsilon_{n_k}}(x) \to \eta_t(x)$ pour tout $t \geq 0$, où $(\eta_t(x))_{t\geq 0}$ est un processus continu solution d'un analogue de (2) et qui ne dépend pas des sous-suites considérées. En déduire que $\frac{1}{\varepsilon}(X_t(x+\varepsilon) - X_t(x)) \to \eta_t(x)$ en probabilité quand $\varepsilon \to 0$.

(4) Si $f \in C_b^1(\mathbb{R})$, montrer que $P_t f$ est différentiable en $x \in \mathbb{R}$, donner une formule pour $\partial_x P_t f(x)$ et montrer que $\sup_{t\in[0,T]} \|\partial_x P_t f\|_\infty < +\infty$.

(5) Soit $t > 0$ fixé et $f \in C_b^\infty(\mathbb{R})$. On peut admettre que $(t,x) \mapsto u(t,x)$ est de classe C^∞ et que

$$\sup_{t\in[0,T]} \left\|\partial_x^2 P_t f\right\|_\infty < +\infty.$$

Montrer que le processus $(u(t-s, X_s(x)))_{s\in[0,t]}$ est une martingale, et trouver un processus explicite $(\alpha_s^t)_{s\in[0,t]}$ tel que

$$f(X_t(x)) = u(t,x) + \int_0^t \alpha_s^t\,\mathrm{d}B_s. \tag{3}$$

Donner une majoration de $\mathbb{E}((\alpha_s^t)^2)$.

(6) On suppose que $\sigma \geq \delta > 0$. Multiplier (3) par $\int_0^t \sigma^{-1}(X_s(x))\,\eta_s(x)\,\mathrm{d}B_s$, utiliser l'isométrie d'Ito et le théorème de dérivation des fonctions composées, pour arriver à la formule

$$\partial_x u(t,x) = \frac{1}{t}\,\mathbb{E}\left[f(X_t(x))\int_0^t \sigma^{-1}(X_s(x))\,\eta_s(x)\,\mathrm{d}B_s\right].$$

Quelle interprétation peut-on donner de cette formule ?

Exercice 12. Soit $Z_t = (X_t, Y_t)$ un mouvement Brownien dans $\mathbb{R}^2$ issu de $x \neq 0$. L'*aire de Lévy* de Z est définie par

$$A_t := \int_0^t (X_s\,\mathrm{d}Y_s - Y_s\,\mathrm{d}X_s), \qquad t \geq 0.$$

(1) Définir explicitement un mouvement brownien standard $(\beta_t)_{t\geq 0}$ tel que

$$A_t = \int_0^t R_s \,\mathrm{d}\beta_s, \qquad t \geq 0,$$

où $R_s := |Z_s|$, $s \geq 0$.

On peut admettre dans les points (2) et (3) que $(\beta_t)_{t\geq 0}$ et $(R_t)_{t\geq 0}$ sont indépendants.

(2) Pour $t \geq 0$ fixé, calculer la loi conditionnelle de A_t sachant $(R_s)_{s\geq 0}$.

(3) En utilisant le point (4) de l'exercice 2, calculer

$$\mathbb{E}[\exp(i\lambda A_t) \,|\, R] \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[\exp(i\lambda A_t)], \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

(4) Montrer qu'il existe un mouvement brownien standard γ tel que

$$R_t = R_0 + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{R_u}\,\mathrm{d}u + \gamma_t, \qquad t \geq 0.$$

(5) Montrer que γ est indépendant de β.

(6) En déduire que que β et R sont indépendants.

✓ **Exercice 13.** Soit $x > 0$ et $B^{(3)} = (B^1, B^2, B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$. On note $\rho_t := |\bar{x} + B_t^{(3)}|$, $t \geq 0$, où $\bar{x} := (x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, et $\mathbf{P}_x^3$ la loi de $(\rho_t)_{t\geq 0}$. On peut voir que $(\mathbf{P}_x^3)_{x\geq 0}$ forme une famille markovienne.

Sur l'espace canonique $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, nous définissons $T_a := \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$ où X est le processus canonique. D'après l'exemple 6.4.9 du polycopié nous avons

$$\mathbf{P}_x^3(T_a < T_b) = \frac{x^{-1} - b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}}, \qquad 0 < a < x < b$$

et $(1/X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale sous $\mathbf{P}_x^3$.

Soit $J_t := \inf_{u\geq t} X_u$ et $Y_t := 2J_t - X_t$, $t \geq 0$. On fixe $x > 0$. Dans cet exercice, on veut montrer que sous $\mathbf{P}_x^3$ le processus $(Y_t - Y_0)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien. Soient $a \geq 0$, $t \geq s \geq 0$ et $(\mathscr{F}_t^X)_{t\geq 0}$ la filtration canonique de X.

(1) Discuter pourquoi on peut appliquer la formule d'Itô à $|\bar{x} + B_t^{(3)}|$. En déduire que la variation quadratique de ρ est $\langle \rho \rangle_t = t$, $t \geq 0$.

(2) Montrer que, si Y est une martingale locale (par rapport à sa filtration canonique), alors $Y - Y_0$ doit être un MB issu de 0.

(3) Montrer que

$$\mathbf{P}_x^3(T_a < +\infty) = \mathbf{P}_x^3(J_0 \leq a) = \frac{a \wedge x}{x}, \qquad \mathbf{P}_x^3(J_0 > a) = (1 - ax^{-1})\mathbb{1}_{(a<x)}.$$

(4) Montrer que

$$\mathbf{E}_x^3\left[J_0\,\mathbb{1}_{(J_0 > a)}\right] = \frac{1}{2}(x - a^2x^{-1})\mathbb{1}_{(a<x)}.$$

(5) En appliquant la propriété de Markov, montrer que p.s.

$$\mathbf{E}_x^3\left[(2J_s - X_s)\,\mathbb{1}_{(J_s>a)} \,|\, \mathscr{F}_s^X\right] = (a - a^2X_s^{-1})\mathbb{1}_{(a<X_s)}.$$

(6) Montrer que p.s.

$$\mathbf{E}_x^3\left[Y_t\,\mathbb{1}_{(J_s>a)}\mid \mathscr{F}_t^X\right]=\mathbf{E}_x^3\left[Y_t\,\mathbb{1}_{(J_t>a)}\mid \mathscr{F}_t^X\right]\mathbb{1}_{(\inf_{s\le u\le t}X_u>a)}.$$

(7) Montrer que p.s.

$$\mathbf{E}_x^3\left[Y_t\,\mathbb{1}_{(J_s>a)}\mid \mathscr{F}_s^X\right]=\mathbf{E}_x^3\left[(a-a^2X_t^{-1})\mathbb{1}_{(\inf_{s\le u\le t}X_u>a)}\mid \mathscr{F}_s^X\right].$$

(8) Montrer que p.s.

$$\mathbf{E}_x^3\left[Y_t\,\mathbb{1}_{(J_s>a)}\mid \mathscr{F}_s^X\right]=\mathbf{E}_{X_s}^3\left[\left(a-a^2X_{(t-s)\wedge T_a}^{-1}\right)\right]\mathbb{1}_{(a<X_s)}=\left(a-a^2X_s^{-1}\right)\mathbb{1}_{(a<X_s)}.$$

(9) Montrer que $\mathscr{G}_t:=\mathscr{F}_t^X\vee\sigma(J_t)$ définit une filtration.

(10) Montrer que $(Y_t)_{t\ge0}$ est une martingale par rapport à la filtration $(\mathscr{G}_t)_{t\ge0}$ et en déduire que $Y-Y_0$ est un MB.

Ce résultat vaut aussi pour $x=0$ et a comme conséquence un théorème important dû à Jim Pitman : si B est un MB issu de 0 et $S_t=\sup_{s\le t}B_s$, alors le processus $(2S_t-B_t)_{t\ge0}$ a loi $\mathbf{P}_0^3$.

N1 $\eta \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2) \perp\!\!\!\perp (B_t)_{t \geq 0}$

$Y_t = \eta t + B_t, \quad t \geq 0 \qquad \mathcal{G}_t = \sigma(Y_s, s \in [0,t])$

$(\eta, B_t)_{t\geq 0}$ est gaussien, Y_t est une fonct linéaire

1) (Y_t) est un proc. gaussien, $\mathbb{E}[Y_t] = mt$

$0 \leq s \leq t \quad \mathrm{Cov}(Y_s, Y_t) = \mathrm{Cov}(\eta s + B_s, \eta t + B_t) = st\sigma^2 + s = s(1 + t\sigma^2)$

2) $\mathrm{Cov}(\eta, Y_s) = \mathrm{Cov}(\eta, \eta s, B_s) = s\sigma^2$

3) $\exists \lambda_t \in \mathbb{R}$ t.q. $Z_t = \eta - \lambda_t Y_t \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_t$

Proc gaussien $\Rightarrow$ on cherche λ_t : $Z_t \perp\!\!\!\perp Y_s \ \forall s \leq t$

$$\mathrm{cov}(Z_t, Y_s) = \mathrm{cov}(\eta - \lambda_t Y_t, Y_s) = \mathrm{cov}(\eta, Y_s) - \lambda_t \mathrm{cov}(Y_t, Y_s) =$$

$$= s\sigma^2 - \lambda_t s(1 + t\sigma^2) = 0 \rightarrow \lambda_t = \frac{\sigma^2}{1 + t\sigma^2}$$ - ne dépend pas de s!

Loi de $Z_t = \eta - \lambda_t(\eta t + B_t) = \eta\left(1 - \frac{\sigma^2 t}{1 + \sigma^2 t}\right) - \lambda_t B_t = \frac{\eta - \sigma^2 B_t}{1 + \sigma^2 t}$

$$Z_t \sim \mathcal{N}\left(\frac{m}{1+\sigma^2 t}, \frac{1}{(1+\sigma^2 t)^2}(\sigma^2 + \sigma^4 t)\right) = \mathcal{N}\left(\frac{m}{1+\sigma^2 t}, \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2 t}\right)$$

(4) Calculer $\mathbb{E}[\eta | \mathcal{G}_t]$. $t \to \infty$?

$$\mathbb{E}[\eta | \mathcal{G}_t] = \mathbb{E}[\underbrace{(\eta - \lambda_t Y_t)}_{Z_t \perp\!\!\!\perp \mathcal{G}_t} + \lambda_t \overset{\in \mathcal{G}_t}{Y_t} | \mathcal{G}_t] = \lambda_t Y_t + \frac{m}{1+\sigma^2 t} = \frac{1}{1+\sigma^2 t}(m + \sigma^2 \overset{\eta t + B_t}{Y_t})$$

$$= \underbrace{\frac{m + \sigma^2 B_t}{1 + \sigma^2 t}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\sigma^2 t}{1 + \sigma^2 t}}_{\to 1}\eta \xrightarrow{p.s.} \eta$$

On obtient $\left(\frac{m+\sigma^2 Y_t}{1+\sigma^2 t}\right)_{t\geq 0}$ est $(\mathcal{G}_t)$-martingale (fermée)
(car $= \mathbb{E}[\eta | \mathcal{G}_t]$)

5) η est-elle $\mathcal{G}_t$ mesurable ? Non car $\mathbb{E}[\eta|\mathcal{G}_t] \neq \eta$ p.s.

η est $\mathcal{G}_\infty$-mesurable car $\eta = \lim\limits_{t\to\infty} \frac{m+\sigma^2 Y_t}{1+\sigma^2 t} \in \bigcup\limits_{t>0} \mathcal{F}_t^Y = \mathcal{F}_\infty^Y$

N3 $(B_t)_{t\geq 0}$ un MB

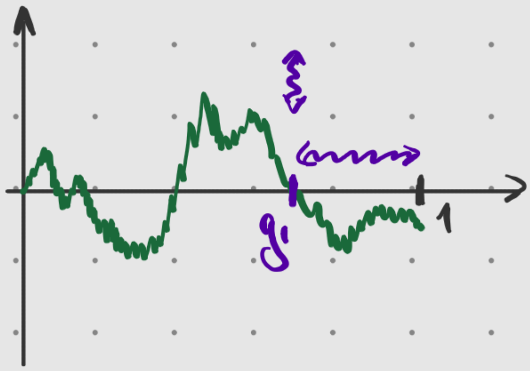
1) $\left(t B_{\frac{1}{t}-1}\right)_{t\in[0,1]}$ est un pont brownien

$\mathrm{Cov}(tB_{\frac{1}{t}-1}, sB_{\frac{1}{s}-1}) = ts\left(\left(\frac{1}{t}-1\right)\wedge\left(\frac{1}{s}-1\right)\right) = (t\wedge s) - ts$

Le processus est gaussien

2) $g_1 = \sup\{t\leq 1 : B_t = 0\}$ $g_1>0$ p.s. ? g_1 - t.a. ?

$\gamma_u = \frac{1}{\sqrt{g_1}} B_{g_1 u}$, $u\in[0,1]$
↑ pont brownien



Si g_1 était un temps d'arrêt, on pourrait considérer un MB $(M_{g_1+t} - M_{g_1})_{t\geq 0}$ qui ne s'annule pas au voisinage (droite) de 0 p.s. -> ce n'est pas un MB

3) $\hat{B}_t = t B_{\frac{1}{t}}$, $t>0$ $\hat{B}_0 = 0$ $\hat{d}_1 = \inf\{t\geq 1 : \hat{B}_t = 0\}$. M.q. $\hat{d}_1 = \frac{1}{g_1}$

$\underbrace{\hat{d}_1 \text{ - temps d'arrêt?}}_{\text{pas } \mathcal{F}_t^{\hat{B}}\text{-t.a. car } g_1 \text{ n'est pas un t.a.}}$

Mais $\hat{d}_1$ est $\hat{\mathcal{F}}_t$ - t.a. car $\{\hat{d}_1 \leq t\} = \{\inf_{[1,t]} |\hat{B}_s| = 0\} \in \hat{\mathcal{F}}_t$

$$\hat{d}_1 = \inf\{t \geq 1 \quad \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{t B_{\frac{1}{t}}} = 0\} = \frac{1}{\sup\{s \leq 1 : B_s = 0\}} = \frac{1}{g_1}$$

$t \rightsquigarrow s = \frac{1}{t}$

$t \geq 1 \Leftrightarrow s \leq 1$

(4) M.q. $\forall u \in [0,1]$ $\quad \frac{1}{\sqrt{g_1}} B_{g_1 u} = \frac{u}{\sqrt{\hat{d}_1}} \left(\hat{B}_{\hat{d}_1 + \hat{d}_1 (\frac{1}{u} - 1)} - \hat{B}_{\hat{d}_1} \right)$

En déduire que $(\delta_u)_{u \in [0,1]}$ est un pont brownien

$$\frac{1}{t} \hat{B}_t = B_{\frac{1}{t}} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} 1)\ t = \frac{1}{u g_1} \\ 2)\ t = \frac{1}{g_1} \end{array} \right\} \Rightarrow B_{u g_1} - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{B_{g_1}} = u g_1 \hat{B}_{\frac{1}{u g_1}} - g_1 \hat{B}_{\frac{1}{g_1}} =$$

$$= u g_1 \hat{B}_{\frac{\hat{d}_1}{u}} - g_1 \hat{B}_{\frac{1}{g_1}}$$

$$\frac{u}{\sqrt{\hat{d}_1}} \left(\hat{B}_{\frac{\hat{d}_1}{u}} - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{\hat{B}_{d_1}} \right) = \frac{u}{\sqrt{\hat{d}_1}} \cdot \frac{\hat{d}_1}{u} B_{\frac{u}{\hat{d}_1}} = \sqrt{\hat{d}_1}\, B_{u/\hat{d}_1} = \frac{1}{\sqrt{g_1}} B_{g_1 u}$$

$Y = \left(\hat{B}_{\hat{d}_1 + t} - \hat{B}_{\hat{d}_1} \right)_{t \geq 0}$ est un MB $\perp\!\!\!\perp \hat{\mathcal{F}}_{\hat{d}_1} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tilde{B}_s = \frac{1}{\sqrt{\hat{d}_1}} \left(\hat{B}_{\hat{d}_1 + s\hat{d}_1} - \hat{B}_{\hat{d}_1} \right) = \frac{1}{\sqrt{\hat{d}_1}} Y_{s\hat{d}_1}$$

Si $\Phi : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée

$$\mathbb{E}\left[\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{\hat{d}_1}} Y_{s\hat{d}_1}, s \geq 0 \right) \right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}[\Phi(-) \mid \hat{\mathcal{F}}_{\hat{d}_1}] \right] = \mathbb{E}[\Phi(B_s, s \geq 0)] \Rightarrow$$

$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{\hat{d}_1}} Y_{s\hat{d}_1} \right)_{s \geq 0}$ est un MB

$$\frac{1}{\sqrt{g_1}} B_{g_1 u} = u \tilde{B}_{(\frac{1}{u} - 1)} \text{ est un pont brownien.}$$

N°4. $M_t = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$

1) $M_t = \int_0^t H_s dB_s = \int_0^t B_s dB_s$

2) $\beta \geq 0$ $\quad \mathcal{E}(-\beta M)_t = \exp\left\{-\beta \int_0^t B_s ds - \frac{\beta^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right\} =$

mart. locale bornée $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ une vraie martingale $\to \mathbb{E} D_t = 1$

$= \exp\left\{-\frac{\beta}{2}(B_t^2 - t) - \frac{\beta^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right\} \leq e^{\frac{\beta t}{2}}$

On fixe $T \geq 0$, $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A D_T]$ $\quad A \in \mathcal{F}_T$

3) Loi de B sous $\mathbb{Q}$

$\tilde{B}_t = B_t - \langle B, \beta M\rangle_t$ $\quad t \in [0,T]$ est une mart locale sous $\mathbb{Q}$

$\langle B, M\rangle_t = \int_0^t B_s ds$ $\quad \tilde{B}_t = B_t + \beta \int_0^t B_s ds \Rightarrow \underbrace{B_t = -\beta \int_0^t B_s ds + \tilde{B}_t}_{O.U.} \Rightarrow B_t \sim \mathcal{N}\Big(0, \underbrace{\frac{1 - e^{-2\beta t}}{2\beta}}_{\sigma^2 > 0}\Big)$

Sous $\mathbb{Q}$ $\tilde{B}$ est un MB (Lévy)

(4) En déduire que pour $a, \beta \geq 0$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-aB_t^2 - \frac{\beta^2}{2}\int_0^t B_s^2 ds\right\}\right] = \left(\frac{\beta}{\beta\cosh(\beta t) + 2a\sinh(\beta t)}\right)^{1/2}$$

$$\|$$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{\left(\frac{\beta}{2} - a\right)B_t^2 - \frac{\beta t}{2}\right\} D_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\exp\left\{\left(\frac{\beta}{2} - a\right)B_t^2\right\}\right] e^{-\frac{\beta t}{2}} =$$

$$= e^{-\frac{\beta t}{2}} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\left(\frac{\beta}{2} - a\right)\sigma^2 Z^2}\right] \boxed{\approx} \quad \text{où} \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{\frac{\lambda}{2}Z^2}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int e^{-\frac{z^2}{2}(1-\lambda)}\frac{dz\sqrt{1-\lambda}}{\sqrt{1-\lambda}} = \frac{1}{\sqrt{1-\lambda}}$$

$\lambda<1$!

$$\lambda = (b-2a)\frac{1-e^{-2bt}}{2b}$$

$$1-\lambda = \frac{2b-(b-2a)(1-e^{-2bt})}{2b} = \frac{(b+2a)+(b-2a)e^{-2bt}}{2b}$$

$$b\cosh(bt)+2a\sinh(bt) = \frac{be^{bt}+be^{-bt}}{2}+\frac{2a(e^{bt}-e^{-bt})}{2} = \frac{(b+2a)e^{bt}+(b-2a)e^{-bt}}{2}$$

$$\left(e^{-bt}\cdot\frac{2b}{(b+2a)+(b-2a)e^{-2bt}}\right)^{1/2} = \left(\frac{b}{b\cosh(bt)+2a\sinh(bt)}\right)^{1/2}$$

(5) En rappellant que pour $\alpha,\beta>0$ et $s\geq 0$

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \beta^\alpha x^{\alpha-1}e^{-(\beta+s)x}\,\mathrm{d}x = \left(\frac{\beta}{s+\beta}\right)^\alpha$$

calculer

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(-\frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2\,\mathrm{d}s\right)\,\middle|\,B_t=y\right],\qquad b>0,\ y\in\mathbb{R}.$$

$$\mathbb{E}\left[e^{-\frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2ds}\,\middle|\,B_t\right] = g(B_t) \quad \text{il faut trouver } g.$$

$g(x)=g(-x)$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left\{-aB_t^2-\frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2ds\right\}\right] = \mathbb{E}\left[e^{-aB_t^2}\mathbb{E}\left[e^{-\frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2ds}\,\middle|\,B_t\right]\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_{\mathbb{R}} e^{-ay^2}g(y)\,e^{-\frac{y^2}{2t}}dy = \frac{2}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty g(y)\,e^{-(a+\frac{1}{2t})y^2}dy = \{x=y^2\} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty g(\sqrt{x})\,e^{-(a+\frac{1}{2t})x}\frac{1}{\sqrt{x}}dx = \left(\frac{b}{b\,\mathrm{ch}(bt)+2a\,\mathrm{sh}(bt)}\right)^{1/2} = \left(\frac{b\cdot\frac{1}{\mathrm{sh}(bt)}}{b\cdot\mathrm{cotanh}(bt)+2a}\right)^{1/2}$$

β α

$$= \frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}(bt)}}\left(\frac{b\coth(bt)/2}{b\,\mathrm{cotanh}(bt)/2+a}\right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{sh}(bt)}}\cdot\frac{1}{\Gamma(1/2)}\int_0^\infty\left(\frac{b\coth(bt)}{2}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}\,e^{-(a+\frac{b\coth(bt)}{2})x}dx$$

s

$$\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty \beta^\alpha x^{\alpha-1} e^{-(\beta+s)x}\,dx = \left(\frac{\beta}{s+\beta}\right)^\alpha \qquad \rho(x) \propto \frac{1}{x}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\int_0^\infty g(\sqrt{x})\frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-(a+\frac{1}{2t})x}\,dx = \frac{1}{(\sinh(bt))^{1/2}}\cdot\frac{1}{\Gamma(1/2)}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{t}{2}}\int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{x}}\, e^{-(a+\frac{b}{2}\tanh(bt)^{-1})x}\,dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\, g(\sqrt{x})\, e^{-\frac{1}{2t}x} = \frac{1}{(\sinh(bt))^{1/2}\,\Gamma(1/2)}\left(\frac{b}{2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{b}{2}\tanh(bt)^{-1}x}$$

$$g(\sqrt{x}) = \left(\frac{\cancel{\pi}\, tb}{\sinh(bt)}\right)^{1/2}\cdot\frac{1}{\Gamma(1/2)}\, e^{\frac{x}{2}\left(\frac{1}{t}-\frac{b}{\tanh(bt)}\right)}$$

$$\cancel{\sqrt{\pi}}$$

$$g(y) = \sqrt{\frac{bt}{\sinh(bt)}}\, e$$

N°6 $h \in L^2(0,1)$ $\quad \langle h,B\rangle = \int_0^t h_s B_s\,ds$

1) $$\mathrm{Var}[\langle h,B\rangle] = \mathbb{E}\int_0^t\int_0^t h_s B_s h_u B_u\,ds\,du = \int_0^t\int_0^t h_s h_u (s\wedge u)\,ds\,du = \langle Qh,h\rangle_{L^2}$$

$$Qh(t) = \int_0^1 (s\wedge t)\cdot h(s)\,ds$$

2) $\langle h_1,B\rangle$ et $\langle h_2,B\rangle$ sont indépendents?

La loi joint est gaussienne $\Rightarrow$

indépend. $\Leftrightarrow$ $\mathbb{E}[\langle h_1,B\rangle\langle h_2,B\rangle] = 0 = \langle Qh_1,h_2\rangle$

$$\int_0^1 h_s B_s\,ds = HB\Big|_0^1 - \int_0^1 H_s\,dB_s = \int_0^t\left(\int_s^1 h_s\,du\right)dB_s$$

$H_s' = h_s$ $\qquad$ on cherche $H(1)=0$

$$H_t = -\int_t^1 h_s\,ds$$

Exercice 6. Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}$. On rappelle que si $X \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$ alors $\mathbb{E}[e^X] = e^{\sigma^2/2}$. Soit pour $h \in L^2(0,1)$

$$\langle h, B\rangle := \int_0^1 h_s\, B_s\, \mathrm{d}s.$$

(1) Calculer la loi de $\langle h, B\rangle$ et $\lambda(h) := \mathbb{E}[e^{\langle h,B\rangle}]$.

(2) Donner une condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance de $\langle h_1, B\rangle$ et $\langle h_2, B\rangle$.

(3) Définir une nouvelle mesure de probabilités par

$$\mathbb{P}^h(A) := \frac{1}{\lambda(h)}\, \mathbb{E}[\mathbb{1}_A\, e^{\langle h,B\rangle}].$$

Sous $\mathbb{P}^h$, quelle est la loi de $(B_t)_{t\in[0,1]}$?

(4) Calculer pour tout $k \in L^2(0,1)$

$$\mathbb{E}^h[e^{\langle k,B\rangle}],$$

où $\mathbb{E}^h$ est l'espérance sous $\mathbb{P}^h$.

(5) Donner une condition nécessaire et suffisante pour l'indépendance de $\langle k_1, B\rangle$ et $\langle k_2, B\rangle$ sous $\mathbb{P}^h$.

(3) $\frac{d\mathbb{P}^h}{d\mathbb{P}} = \frac{e^{\langle h,B\rangle}}{\lambda(h)} = \mathcal{E}(L)$

Loi de B_t ?

$W^h = W - \langle M, L\rangle$ un $\mathbb{P}^h$-MB

$\lambda(h) = \mathbb{E}\, e^{\langle h,B\rangle} = \exp\{\frac{1}{2}\langle Qh,h\rangle\}$ $\quad Qh(x) = \int_0^1 h(y)(x\wedge y)\,dy$

$\mathbb{E}[\langle h^1,B\rangle\langle h^2,B\rangle] = \langle Qh^1, h^2\rangle = \langle H^1, H^2\rangle$

$\langle h,B\rangle = \int_0^1 h_s B_s\, ds = \int_0^1 H_s\, dB_s$ $\quad \mathbb{E}\langle h^1,B\rangle\langle h^2,B\rangle = \mathbb{E}\int_0^1 H^1_s dB_s \int_0^1 H^2_s dB_s = \mathbb{E}\int_0^1 H^1_s H^2_s\, ds$

$H_t B_t = \overset{0}{H_0 B_0} + \int_0^t B_s H'_s\, ds + \int_0^t H_s\, dB_s + \overset{0}{\cancel{\langle H,B\rangle_t}}$

déterministe

Si $H_1 = 0$ et $H'_s = -h_s$ $\Rightarrow \int_0^1 h_s B_s\, ds = \int_0^1 H_s\, dB_s$

$\Rightarrow H_t = \int_t^1 h_s\, ds$

$\mathbb{E}[\langle h^1,B\rangle\langle h^2,B\rangle] = \mathbb{E}\int_0^1 H^1_s dB_s \int_0^1 H^2_s dB_s = \int_0^1 H^1_s H^2_s\, ds$

$\frac{d\mathbb{P}^h}{d\mathbb{P}} = \mathcal{E}\left(\int_0^{\cdot} H_s\, dB_s\right)_1$ $\quad \underline{B = \tilde{B} + \int_0^t H_s\, ds}$

Sous $\mathbb{P}^h$, $\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t H_s\, ds$ est un MB

Calculer $\underset{k\in L^2}{\mathbb{E}^h[e^{\langle k,B\rangle}]} = \mathbb{E}[e^{\langle k, B + \int_0^{\cdot} H_s ds\rangle}] = e^{\langle k, \int_0^{\cdot} H_s ds\rangle}\, e^{\frac{1}{2}\langle Qk,k\rangle}$

Sous quelle condition $\langle k^1, B\rangle$ et $\langle k^2, B\rangle$ sont-ils indépendents sous $\mathbb{P}^h$?

Covariance nulle $\Leftrightarrow \langle Q' k_1, k_2 \rangle = 0$ (ne dép. pas de h)

Exercice 9. Nous considérons un mouvement brownien standard $(B_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$, une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^1 et bornée avec sa dérivée f' et $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $F' = f$.

$F' = f$

Soit $x \in \mathbb{R}$.

(1) Montrer que

$$M_t := F(x + B_t) - F(x) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(x + B_s)\,\mathrm{d}s, \qquad t \geq 0,$$

est une martingale.

(2) Soit pour $t \geq 0$

$$D_t := \exp\left(F(x + B_t) - F(x) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(x + B_s)\,\mathrm{d}s - \frac{1}{2}\int_0^t (f(x + B_s))^2\,\mathrm{d}s\right)$$

et $\mathbb{Q}_T|_{\mathscr{F}_T} := D_T \cdot \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$ pour tout $T \geq 0$. Montrer que $(D_t)_{t\geq 0}$ est une martingale et que $\mathbb{Q}_T$ est une mesure de probabilité sur $\mathscr{F}_T$ pour tout $T \geq 0$.

(3) Montrer que sous $\mathbb{Q}_T$ le processus $(x + B_t)_{t\in[0,T]}$ est solution faible d'une EDS pour laquelle on a unicité trajectorielle.

(4) Quelle est la loi de $(x + B_t)_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbb{Q}_T$?

(1) $M_t = F(x+B_t) - F(x) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(x+B_s)ds$ est une martingale

$$F(x+B_t) = F(x) + \int_0^t \underbrace{F'(x+B_s)}_{f(x+B_s)} dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t \underbrace{F''(x+B_s)}_{f'(x+B_s)} ds$$

Donc $M_t = \int_0^t f(x+B_s)dB_s$ $\quad f$ bornée $\Rightarrow M_t$ est une vraie martin dans L^2

$$\langle M \rangle_t = \int_0^t f^2(x+B_s)ds \leq \|f\|_\infty^2 \cdot t$$

(2) $D_t = \exp\{\underbrace{F(x+B_t) - F(x) - \frac{1}{2}\int_0^t f'(x+B_s)ds}_{M_t} - \frac{1}{2}\underbrace{\int_0^t f(x+B_s)^2 ds}_{\langle M \rangle_t}\}$ une vraie mart. sur $[0,T]$ par Novikov $\mathbb{E}\, e^{\frac{1}{2}\langle M \rangle_\infty} \leq e^{\frac{1}{2}\|f\|_\infty^2 T} < \infty$

$\frac{d\mathbb{Q}_T}{d\mathbb{P}} = D_T \Rightarrow \mathbb{Q}_T$ une mesure de proba sur $\mathscr{F}_T$ par Girsanov.

- Comment motrer ça en général?
- Soit appliquer Novikov, soit borner D_t directement

(3) Sous $\mathbb{Q}_T$ $(x+B_t)$ est une solution faible pour laquelle on a l'unicité de solution trajectorielle

$D_t = \mathcal{E}(M)_t \Rightarrow$ par Girsanov $\hat{B}_t = B_t - \langle B, M\rangle_t$ est un $\mathbb{Q}_T$-MB

$$\tilde{B}_t = B_t - \int_0^t f(x+B_s)\,ds \Rightarrow \underbrace{(x+B_t)}_{Y_t} = x + \int_0^t f(\underbrace{x+B_s}_{Y_s})\,ds + \hat{B}_t$$

$\Rightarrow (x+B_t)$ est une solution faible de $\begin{cases} dY_t = f(Y_t)\,dt + d\hat{B}_t \\ Y_0 = x \end{cases}$

$f \in C^1$, f' bornée $\Rightarrow f$ lipschitz $\Rightarrow$ unicité forte.

(4) Loi de $(x+B_t)_{t\in[0,T]}$ sous $\mathbb{Q}_T$

$\Phi : C([0,T]) \to \mathbb{R}$ borélienne bornée

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\Phi(x+B_t,\ t\in[0,T])\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(x+B_t, t\in[0,T]) \exp\left\{F(x+B_T) - F(x) - \frac{1}{2}\int_0^T f'(x+B_s)\,ds - \frac{1}{2}\int_0^T f^2(x+B_s)\,ds\right\}\right]$$

$(x+B_t)_{t\in[0,T]}$ est une v.a à valeurs dans $C([0,T])$ et sa loi notée $\mathbb{W}_x$ est la mesure de Wiener de x.

<u>Digression</u> X v.a. Bernoulli (p) définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Loi de X est une mesure de proba sur $\{0,1\}$

$$\mathbb{E}[f(X)] = f(0)(1-p) + f(1)p = \int_{\{0,1\}} f \, d\mathscr{B}_p$$

$$\left(\mathscr{B}_p = (1-p)\delta_0 + p\,\delta_1\right)$$

On peut choisir $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbb{P}) = (\{0,1\}, 2^{\{0,1\}}, \mathscr{B}_p)$ $\quad X = \mathrm{Id}$

$$\iff \int_{C([0,T])} \Phi(X_t, t\in[0,T]) \underbrace{\exp\left\{F(X_T) - F(x) - \frac{1}{2}\int_0^T (f'(X_s) + f^2(X_s))\,ds\right\} \mathbb{W}_x(dX)}_{\text{Loi de } (x+B_t)_{t\geq 0} \text{ sous } \mathbb{Q}}$$

Exercice 10. Soit $x > 0$ et $B^{(3)} = (B^1, B^2, B^3)$ un mouvement brownien à valeurs dans $\mathbb{R}^3$ défini sur $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$. On pose $\rho_t := |\bar{x} + B_t^{(3)}|$, $t \geq 0$, où $\bar{x} := (x, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

(1) Montrer que $(\rho_t)_{t\geq 0}$ est une solution faible de l'EDS

$$\rho_t = x + \int_0^t \frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}s + \beta_t, \qquad t \geq 0, \tag{1}$$

où β est un MB standard. (On pourra passer par l'EDS satisfaite par ρ_t^2 ou faire un calcul direct).

(2) Montrer que le processus

$$M_t := -\int_0^t \frac{1}{\rho_s}\,\mathrm{d}\beta_s, \qquad t \geq 0$$

définit une martingale locale. Si $D := \mathscr{E}(M)$ est la martingale locale exponentielle de M, montrer que p.s.

$$D_t = \mathscr{E}(M)_t = \frac{x}{\rho_t}, \qquad t \geq 0.$$

(3) Montrer que D^{τ_ε} est une vraie martingale, où $\tau_\varepsilon := \inf\{t > 0 : \rho_t = \varepsilon\}$ pour $0 < \varepsilon < x$.

(4) Soit $T \geq 0$ et $\mathbb{Q}_T^\varepsilon|_{\mathscr{F}_T} := D_T^{\tau_\varepsilon} \cdot \mathbb{P}|_{\mathscr{F}_T}$. Montrer que $(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon})_{t\in[0,T]}$ est une martingale sous $\mathbb{Q}_T^\varepsilon$ et en calculer le crochet.

(5) Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un MB standard indépendant de $B^{(3)}$ et

$$\gamma_t^\varepsilon := \rho_{t\wedge\tau_\varepsilon} + W_t - W_t^{\tau_\varepsilon}, \qquad t \geq 0.$$

Montrer que γ^ε sous $\mathbb{Q}_T^\varepsilon$ est un MB standard issu de x et p.s. $\tau_\varepsilon = \inf\{t > 0 : \gamma_t^\varepsilon = \varepsilon\}$.

(6) Montrer que pour toute fonctionnelle $\Phi : C([0,T]) \to \mathbb{R}$ borélienne bornée

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t \in [0,T])\frac{x}{\rho_{T\wedge\tau_\varepsilon}}\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(x + B_{t\wedge\sigma_\varepsilon}, t \in [0,T])\right]$$

et en déduire que

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t \in [0,T])\right] = \mathbb{E}\left[\frac{x + B_{T\wedge\sigma_\varepsilon}}{x}\Phi(x + B_{t\wedge\sigma_\varepsilon}, t \in [0,T])\right]$$

où $\sigma_\varepsilon := \inf\{t > 0 : x + B_t = \varepsilon\}$.

(7) Montrer que

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_t, t \in [0,T])\right] = \mathbb{E}\left[\frac{x + B_T}{x}\mathbb{1}_{(\inf_{[0,T]}(x+B) > 0)}\,\Phi(x + B_t, t \in [0,T])\right].$$

Comparer avec l'exercice 2 et interpréter le résultat.

$\rho_t = |\bar{x} + B_t| \qquad \bar{x} = (x,0,0) \qquad B_t = (B_t^1, B_t^2, B_t^3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

(1) M.q. ρ_t est une solution faible de l'EDS

$$\rho_t = x + \int_0^t \frac{ds}{\rho_s} + \beta_s$$

↖ un MB standard

$X_t = |\bar{x} + B_t|^2$

$$\beta = \int_0^{\cdot} \frac{B_t^{\bar{x}} \, dB_t^{\bar{x}}}{|B_t^{\bar{x}}|} \text{ est un MB}$$

$$dX_t = 2 B_t^{\bar{x}} \cdot dB_t^{\bar{x}} + 3dt = 2\sqrt{X_t}\, d\beta_t + 3\,dt$$

$$d\rho_t = d\sqrt{X_t} = \frac{1}{2\sqrt{X_t}} dX_t - \frac{1}{8} \frac{1}{X_t\sqrt{X_t}} \cdot 4X_t\,dt = d\beta_t + \frac{3}{2\rho_t}dt - \frac{1}{2\rho_t}dt = -\frac{1}{\rho_t}dt + d\beta_t$$

(2) $M_t = -\int_0^t \frac{d\beta_s}{\rho_s} \qquad D = \mathcal{E}(M)$ montrer que $D_t = \frac{x}{\rho_t} \qquad \underline{x > 0}$

$$\frac{1}{\rho_t} = \frac{1}{|x|} + \int_0^t \left(-\frac{1}{\rho_s^2}\right) d\rho_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{2}{\rho_s^3} ds = \frac{1}{|x|} + \int_0^t \frac{d\beta_s}{\rho_s^2}$$

$$D_t = \frac{x}{\rho_t} = 1 - \int_0^t \frac{x}{\rho_s} \frac{d\beta_s}{\rho_s} = 1 + \int_0^t D_s\, dM_s$$ - une martingale locale qui n'est pas une martingale !

(3) $\tau_\varepsilon = \inf\{t > 0 : \rho_t = \varepsilon\} \qquad 0 < \varepsilon < x$. M.q. D^{τ_ε} est une martingale

$$0 \leq D_t^{\tau_\varepsilon} = \frac{x}{\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}} \leq \frac{x}{\varepsilon}$$ → bornée → vraie martingale

(4) $\mathbb{Q}^\varepsilon = D_T^\varepsilon \cdot \mathbb{P}$ sur $\mathcal{F}_T \qquad D_T^{\tau_\varepsilon} = \mathcal{E}(M^{\tau_\varepsilon})_T$

$\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}$ sous $\mathbb{Q}^\varepsilon \qquad \tilde{\beta}_t = \beta_t - \langle \beta, M^{\tau_\varepsilon}\rangle_t = \beta_t - \int_0^{t\wedge\tau_\varepsilon} \frac{ds}{\rho_s}$

Sous $\mathbb{Q}^\varepsilon \qquad \rho_{t\wedge\tau_\varepsilon} = x + \int_0^{t\wedge\tau_\varepsilon} \frac{ds}{\rho_s} + \beta_{t\wedge\tau_\varepsilon} = x + \tilde{\beta}_{t\wedge\tau_\varepsilon}$ est une martingale.

(5) $\gamma_t^\varepsilon = \rho_{t\wedge\tau^\varepsilon} + W_t - W_t^{\tau^\varepsilon}$ $\quad \tau^\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : \gamma_t^\varepsilon = \varepsilon\}$

$\uparrow$ $\mathbb{Q}^\varepsilon$-MB issu de x. $(W \perp\!\!\!\perp B)$

$$\gamma_t^\varepsilon = \rho_t \mathbb{1}_{\{t<\tau_\varepsilon\}} + (\varepsilon + W_t - W_{\tau_\varepsilon})\mathbb{1}_{\{t \geq \tau_\varepsilon\}} \text{ - continue en } \tau_\varepsilon$$

$\rightarrow \tau_\varepsilon = \inf\{t \geq 0 : \rho_t = \varepsilon\}$ $\quad$ MB par Markov Forte

On peut calculer $\langle \gamma^\varepsilon \rangle_t = \int_0^{\tau_\varepsilon \wedge t} d\langle \rho \rangle_s + \int_{\tau_\varepsilon \wedge t}^{t} d\langle W - W_{\tau_\varepsilon} \rangle_s = t$

$\rightarrow \gamma^\varepsilon$ est MB par thm. de Lévy.

(6) M.q. $\forall \Phi$ borélienne bornée

$\sigma_\varepsilon = \inf\{t > 0 : x + B_t = \varepsilon\}$

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t \in [0,T]) \frac{x}{\rho_{T\wedge\tau_\varepsilon}}\right] = \mathbb{E}\left[\Phi(x + B_{t\wedge\sigma_\varepsilon}, t \in [0,T])\right]$$

$\parallel$

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t\in[0,T]) D_{T\wedge\tau_\varepsilon}\right] \overset{\text{thm d'arrêt}}{=} \mathbb{E}[\Phi(\dots) D_T] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\Big[\Phi\big(x + \underbrace{\tilde{B}_{t\wedge\tilde{\sigma}_\varepsilon}}_{(4)}, t \in [0,T]\big)\Big] =$$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\Phi(x + B_{t\wedge\sigma_\varepsilon}, t \in [0,T])\right]$$

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t\in[0,T])\right] = \mathbb{E}\Big[\underbrace{\frac{\rho_{T\wedge\varepsilon}}{x} \Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t\in[0,T])}_{=:\, \Psi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t\in[0,T])} \frac{x}{\rho_{T\wedge\tau_\varepsilon}}\Big] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{x + B_{T\wedge\sigma_\varepsilon}}{x} \Phi(x + B_{t\wedge\sigma_\varepsilon}, t\in[0,T])\right]$$

(7) M.q. $\mathbb{E}[\Phi(\rho_t, t\in[0,T])] = \mathbb{E}\left[\frac{x+B_T}{x} \mathbb{1}_{\{\inf_{[0,T]}(x+B_s) > 0\}} \Phi(x + B_t, t\in[0,T])\right]$

On a $\mathbb{E}[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t\in[0,T])] = \mathbb{E}\left[\frac{x + B_{T\wedge\tau_\varepsilon}}{x} \Phi(x + B_{t\wedge\sigma_\varepsilon}, t\in[0,T])\right]$

$$\parallel$$

$$\frac{x+B_T}{x} \mathbb{1}_{\{\inf_{[0,T]}(x+B_s) > 0\}} \Phi(x + B_t, t\in[0,T])$$

$$\mathbb{P}\left(\left|\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t\in[0,T]) - \Phi(\rho_t, t\in[0,T])\right| > \delta\right) \leq \mathbb{P}\left(\inf_{[0,T]} \rho_t \leq \varepsilon\right) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathbb{P}\left(\inf \rho_t \leq 0\right) \overset{\substack{\rho_t > 0 \\ \text{continu}}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}\left[\Phi(\rho_{t\wedge\tau_\varepsilon}, t\in[0,T])\right] \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \mathbb{E}\left[\Phi(\rho_t, t\in[0,T])\right] \text{ car } \Phi \text{ est bornée}$$

$$\mathbb{E}\left[\Phi(\rho_t, t\in[0,T])\right] = \mathbb{E}\left[\frac{x+B_T}{x} \mathbb{1}_{\{\inf_{[0,T]}(x+B_s)>0\}} \Phi(x+B_t, t\in[0,T])\right] =$$

$$= \int_{C([0,T])} \Phi(X) \frac{X_T}{x} \mathbb{1}_{\{\inf_{[0,T]} X > 0\}} \mathbb{W}_x(dX)$$

"loi du MB conditionné à rester positif"

N2. Polynômes d'Hermite

$M_0(t) \equiv 1 \qquad M_{n+1}(t) = \int_0^t M_n(s)\,dB_s$ martingale, adapté

$M_0 \quad M_1 \quad M_2$

$1, \quad B_t, \quad B_t^2 - t$

(1) M.q. $\mathbb{E}\left[M_n(t)^2\right] = \dfrac{t^n}{n!}$

Par récurrence : $\mathbb{E} M_0(t) = 1$. Soit $\mathbb{E} M_n(t) = \dfrac{t^n}{n!}$

$$\mathbb{E}\left[M_{n+1}(t)^2\right] = \mathbb{E}\int_0^t M_n(s)^2\,ds = \int_0^t \frac{s^n}{n!}\,ds = \frac{t^{n+1}}{(n+1)!}$$

(2) $T>0$ fixé. M.q. $\exists \lambda_0 > 0 : \quad \forall \lambda \in \,]-\lambda_0, \lambda_0[$

$L_\lambda(t) = \sum_{n\geq 0} \lambda^n M_n(t)$ converge dans L^2 $\forall t \in [0,T]$

Continuité p.s. de trajectoires de L_λ ?

$L_{\lambda,N}(t) = \sum_{n=0}^{N} \lambda^n M_n(t)$ polynôme de B_t qui est gaussien

$\|L_{\lambda,N}(t)\|_2^2 \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{N} \lambda^n \frac{t^n}{n!}$ $\quad \mathbb{E}\int_0^T M_k^2(t) M_n^2(t)\,dt < \infty$

$M_n \perp M_k$ si $k \neq n$?

vraie martingales

$$d\,M_n(t)M_k(t) = M_k(t)M_{n-1}(t)\,dB_t + M_n(t)M_{k-1}(t)\,dB_t + \frac{1}{2}M_{n-1}(t)M_{k-1}(t)\,dt$$

$$\mathbb{E}[M_n(t)M_k(t)] = \frac{1}{2}\int_0^t \mathbb{E}[M_{n-1}(s)M_{k-1}(s)]\,ds$$

Par récurrence on obtient $\mathbb{E}[M_n(t)M_k(t)] = 0$

Donc $\|L_{\lambda,N}\|_2^2 = \sum_{n=0}^{N} \frac{(\lambda t)^n}{n!}$ suite de Cauchy qui converge $\forall \lambda$ vers $e^{\lambda t}$

$\Rightarrow \exists\, L_\lambda(t) = \lim_N L_{\lambda,N}(t)$ dans L^2 : $\|L_{\lambda,N}(t)\|_2 = e^{\frac{\lambda t}{2}}$

Continuité (p.s.) de trajectoires :

On a vu dans le cours que l'espace $\mathcal{M}_T^2$ des martingales continues et de carré intégrable avec $M_0 = 0$ muni par $\langle M,N\rangle_{\mathcal{M}_T^2} = \mathbb{E}(M_T N_T)$ est un espace de Hilbert. On a montré que $\|L_{\lambda,N} - L_\lambda\|_{\mathcal{M}_T^2} \to 0$ et on a $L_{\lambda,N} \in \mathcal{M}_T^2 \Rightarrow L_\lambda \in \mathcal{M}_T^2 \Rightarrow$ les trajectoires sont p.s. continues

(3) M.q. $L_\lambda(t) = \underset{\underset{L_\lambda(0)}{\parallel}}{1} + \int_0^t L_\lambda(s)\,\lambda\, dB_s$

Formalement, $dL_\lambda(t) = \underbrace{\sum_{n\geq 1} \lambda^n M_{n-1}(t)}_{\lambda L_\lambda(t)}\, dB_t$ - le droit de faire ça?

$$dL_{\lambda,N}(t) = \lambda L_{\lambda,N-1}\, dB_t$$

$$L_{\lambda,N}(t) = 1 + \lambda \int_0^t L_{\lambda,N-1}(s)\, dB_s$$

$L^2 \downarrow N \to \infty \qquad L^2 \downarrow ?$

$$L_\lambda(t) = 1 + \int_0^t L_\lambda(s)\, dB_s$$

$$\left\| \int_0^t L_{\lambda,N}(s) - L_\lambda(s)\, dB_s \right\|_2^2 = \int_0^t \underbrace{\| L_{\lambda,N}(s) - L_\lambda(s) \|^2}_{\sum_{k\geq n+1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}} ds \leq T \sum_{k \geq N+1} \frac{(\lambda T)^k}{k!} \to 0$$

(4) $\lambda, x \in \mathbb{R}$, $c \in \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}$ $\quad H(\lambda,x,c) = e^{\lambda x - \frac{\lambda^2}{2}c}$ $\quad H_n(x,c) = \frac{\partial^n H}{\partial \lambda^n}(0,x,c)$

M.q. p.s. $M_n(t) = \frac{H_n(B_t,t)}{n!}$

$$dH_n(B_t,t) = \partial_x H_n(B_t,t)\,dB_t + \partial_c H_n(B_t,t)\,dt + \frac{1}{2}\partial_{xx} H_n(B_t,t)\,dt$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} H(\lambda,x,c) = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\left[\lambda H(\lambda,x,c)\right] \overset{\text{Leibnitz}}{=} \lambda \cdot \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} H + \frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda^{n-1}} H \cdot n \to \partial_x H(B_t,t) = n \cdot H_{n-1}(B_t,t)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} H(\lambda,x,c) = \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n}\left[\lambda^2 H(\lambda,x,c)\right] = \lambda^2 \cdot \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} H + 2n\lambda \frac{\partial^{n-1}}{\partial \lambda^{n-1}} H + 2\frac{n(n-1)}{2} \frac{\partial^{n-2}}{\partial \lambda^{n-2}} H \to$$

$$\to \partial_x^2 H_n(B_t,t) = n(n-1) H_{n-2}(B_t,t)$$

$$\partial_c \partial_\lambda^n H(\lambda,x,c) = \partial_\lambda^n\left(-\frac{\lambda^2}{2} H\right) = -\frac{\lambda^2}{2}\partial_\lambda^n H - \lambda n \partial_\lambda^{n-1} H - \frac{n(n-1)}{2}\partial_\lambda^{n-2} H \to$$

$$\to \partial_c H_n(B_t,t) = -\frac{n(n-1)}{2} H_{n-2}(B_t,t)$$

Donc $\quad dH_n(B_t,t) = n\cdot H_{n-1}(B_t,t)\,dB_t$

$H_n(B_0,0)=0 \quad$ si $n\geq 1$

$H_0 = \mathcal{M}_0 \equiv 1 \quad$ Par récurrence

$$\mathcal{M}_{n+1}(t) = \int_0^t \mathcal{M}_n(s)\,dB_s$$

$$H_n(B_t,t) = \int_0^t n\,\underbrace{H_{n-1}(B_t,t)}_{(n-1)!\cdot\mathcal{M}_n(t)}\,dB_t = n!\,\mathcal{M}_{n+1}(t)$$

Ex 5

(1) M.q. $\forall T<1 \quad \exists!$ solution de l'EDS

$$X_t^x = x + B_t - \int_0^t \frac{X_s^x}{1-s}\,ds \qquad t\in[0,T]$$

$\sigma(t,x)\equiv 1$ - Lipschitz

$b(t,x) = -\dfrac{x}{1-t}$ Lipschitz en x

$|b(t,x)-b(t,y)| \leq \dfrac{|x-y|}{1-T}$

$\Big\} \to \exists!$ solution forte

(2) Formule explicite pour X_t^0

$$d\left(\frac{X_t^0}{1-t}\right) = \frac{X_t^0}{(1-t)^2}\,dt + \frac{dX_t^0}{1-t} = \frac{dB_t}{1-t}$$

$$\frac{X_t^0}{1-t} = \int_0^t \frac{dB_s}{1-s} \implies X_t^0 = \int_0^t \frac{1-t}{1-s}\,dB_s$$

(3) M.q. $X_t^x = X_t^0 + x(1-t)$

$$d\left(\frac{X_t^x}{1-t}\right) = \frac{dB_t}{1-t}$$

$$\frac{X_t^x}{1-t} = x + \int_0^t \frac{dB_s}{1-s} \rightarrow X_t^x = (1-t)x + X_t^0$$

(4) $T \to 1$?

$$(1-t)x \underset{t\to 1}{\to} 0$$

$$X_t^0 = \int_0^t \frac{1-t}{1-s} dB_s \quad \text{gaussien}$$

$$\mathbb{E}[X_t^{0\,2}] = (1-t)^2 \int_0^t (1-s)^{-2} ds = (1-t)^2\left(\frac{1}{1-t} - 1\right) = t(1-t) \underset{t\to 1}{\to} 0$$

$$\mathbb{E}[X_t^0] = 0 \quad \rightarrow \quad X_t^0 \to 0 \text{ dans } L^2$$

(5) $(X_t^x)_{t\in[0,T]}$ est il une mart? Une semi-mart?
Par rapport à quelle filtration?

$$\mathcal{F}_t^0 = \sigma(B_s, s \leq t)$$

$$t > s$$

X_t^x n'est pas une $\mathcal{F}_t$-martingale : $\mathbb{E}[X_t^x | \mathcal{F}_s^0] = X_s^x \frac{1-t}{1-s} \neq X_s^x$

Semimartingale : $X_t^x = x + \underbrace{B_t}_{\text{mart. locale}} - \underbrace{\int_0^{t} \frac{X_s^x}{1-s} ds}_{\text{à variation finie}}$

(6) X_t^x est gaussien

$\mathbb{E} X_t^x = (1-t)x$; X_t^0 est le pont Brownien $\rightarrow \mathbb{E}[X_t^0 X_s^0] = t\wedge s - ts$

$$\text{Cov}(X_t^x, X_s^x) = \mathbb{E}(X_t^0 X_s^0) = t\wedge s - ts$$

N°7. $S_t = \sup_{s\in[0,t]} B_s$. La densité de (S_t, B_t) : $f_t(a,b) = \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2a-b)^2}{2t}} 1\!\!1_{\{a>0,\, b<a\}}$

X proc. canonique, $\mathbb{W}_x$ la loi de $(x+B_t)_{t\geq 0}$ $\quad \tau = \inf\{t>0 : X_t = 0\}$

(1) $f :]0,\infty[\to \mathbb{R}$ borélienne bornée $\quad Q_t f(x) := \mathbb{E}_x[f(X_t) 1\!\!1_{\{\tau>t\}}]$ $\quad \underline{x>0}$

M.q. $Q_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^+} f(y)\, q_t(x,y)\, dy$ où $q_t(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(y+x)^2}{2t}}\right)$

$$\mathbb{E}[f(X_t)1\!\!1_{\{\tau>t\}}] = \mathbb{E}[f(X_t) 1\!\!1_{\{\inf_{[0,t]} X_s > 0\}}] = \mathbb{E}[f(x+B_t) 1\!\!1_{\{x - \sup_{[0,t]}(-B_s) > 0\}}] =$$

$$= \{\tilde{B}_t = -B_t \text{ MB}\} = \mathbb{E}[f(x-B_t) 1\!\!1_{\{S_t < x\}}] = \int_{-\infty}^{x}\int_{0\vee b}^{x} f(x-b) \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2a-b)^2}{2t}} \, da\, db =$$

$$= \int_{-\infty}^{x} f(x-b) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} db \int_{b^+}^{x} d\left(e^{-\frac{(2a-b)^2}{2t}}\right) = \int_{\mathbb{R}} f(x-b) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \left(e^{-\frac{(2b^+ - b)^2}{2t}} - e^{-\frac{(2x-b)^2}{2t}}\right) db$$

$(2b^+ - b)^2 = b^2$

$$= \{y = x-b\} = \int_0^{+\infty} f(y) \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\left(e^{-\frac{(y-x)^2}{2t}} - e^{-\frac{(x+y)^2}{2t}}\right)}_{q_t(x,y)} dy$$

(2) M.q. $Q_{t+s} = Q_t \circ Q_s$

$\theta_t(W) = W_{t+\cdot}$ décalage. $\{\tau > t+s\} = \{\tau > t\} \cap \{\tau\circ\theta_t > s\}$

$$Q_{t+s} f(x) = \mathbb{E}_x[f(X_{t+s}) 1\!\!1_{\{\tau > t+s\}}] = \mathbb{E}_x[\mathbb{E}[f(X_{t+s}) 1\!\!1_{\{\tau\circ\theta_t > s\}} | \mathcal{F}_s] 1\!\!1_{\{\tau>t\}}] \ominus$$

$$\{\tau\circ\theta_t > s\} = \inf\{u\geq 0 : \underbrace{X_{t+u}}_{(x+B_t)+B_u} = 0\} > s$$

$$\mathbb{E}[f(X_{t+s}) 1\!\!1_{\{\tau\circ\theta_t > s\}} | \mathcal{F}_s] \overset{\text{Markov}}{=} \mathbb{E}_{X_t}[f(X_s) 1\!\!1_{\{\tau > s\}}] = Q_s(X_t)$$

$$\ominus\ \mathbb{E}_x[Q_s(X_t) 1\!\!1_{\{\tau>t\}}] = Q_t \circ Q_s f(x)$$

(3) M.q. $X_t 1\!\!1_{\{\tau>t\}} = X_{t\wedge\tau}$, en déduire $\mathbb{E}_x[X_t 1\!\!1_{\{\tau>t\}}]$

$$X_t \mathbb{1}_{\{\tau > t\}} = \begin{cases} X_t & \text{si } t < \tau \\ 0 & \text{si } t \geq \tau \\ \overset{\shortparallel}{X_\tau} & \end{cases} = X_{t\wedge\tau}$$

thm d'arrêt car $t \wedge \tau \leq t$ p.s.

$$\mathbb{E}_x\left[X_t \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}\right] = \mathbb{E}_x\left[X_{t\wedge\tau}\right] \overset{\downarrow}{=} x$$

(4) $p_t(x,y) := \frac{1}{x} q_t(x,y) \cdot y$, $x, y > 0$ $\quad P_t f(x) := \int_{\mathbb{R}_+} f(y) p_t(x,y) dy$

M.q. $(P_t)_{t \geq 0}$ est un semigroupe avec $P_t 1 = 1$

$$P_t \cdot 1 = \int_{\mathbb{R}_+} p_t(x,y) dy = \int_{\mathbb{R}_+} \frac{y}{x} q_t(x,y) dy = \mathbb{E}_x\left[\frac{X_t}{x} \mathbb{1}_{\{\tau > t\}}\right] \overset{(3)}{=} 1$$

$$Q_{t+s} f(x) = \int_{\mathbb{R}^+} f(y) q_{t+s}(x,y) dy = \iint f(y) q_s(z,y) dy \, q_t(x,z) dz =$$

$$= \int f(y) \int q_t(x,z) q_s(z,y) dz \, dy \quad \forall f \Rightarrow q_{t+s}(x,y) = \int q_t(x,z) q_s(z,y) dz$$

$$p_{t+s}(x,y) = \frac{y}{x} q_{t+s}(x,y) = \int \underbrace{\frac{z}{x} q_t(x,z)}_{p_t(x,z)} \cdot \underbrace{\frac{y}{z} q_t(z,y)}_{p_t(z,y)} dz \Rightarrow$$

$\Rightarrow (P_t)$ est un semigroupe

(5) Soit $p_t(y) = \lim_{x \downarrow 0} p_t(x,y)$. M.q. $p_t(\cdot)$ est la densité de $|B_t^{(3)}|$ où $B^{(3)}$ est un MB dans $\mathbb{R}^3$,

densité par (4)

$$p_t(x,y) \overset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \cdot e^{-\frac{y^2}{2t}} \Big(\overbrace{-\frac{(y-x)^2}{2t} + \frac{(y+x)^2}{2t}}^{\frac{2xy}{t}} \Big) \cdot \frac{y}{x} = \frac{2y^2}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{y^2}{2t}}$$

Densité de $|B_t^{(3)}| = ?$

$$\mathbb{P}(|B_t^{(3)}| \leq u) = \mathbb{P}(\underbrace{Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2}_{\mathcal{N}(0,1) \text{ i.i.d.}} \leq \frac{u^2}{t}) = \iiint_{|z| \leq \frac{u^2}{t}} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{-\frac{1}{2}(z_1^2 + z_2^2 + z_3^2)} dz =$$

$$= \int_0^{u/\sqrt{t}} C(\pi) e^{-\frac{r^2}{2}} r^2 dr \to p_{|B(s)|}(y) = C(\pi) \frac{y^2}{t} e^{-\frac{y^2}{2t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{t}} \to \text{la } \hat{m} \text{ densité.}$$

N°8. Développements de Taylor aléatoires

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $f \in C^1_B$, $F' = f$. $\alpha \in]0, 1/2[$, $T \geq 0$ fixés.

(1) M.q. $\exists$ v.a. $K_1 \geq 0$ p.s. finie t.q. $\forall t, s \in [0,T]$

$$|F(B_t) - F(B_s)| \leq K_1 |t-s|^\alpha$$

$$|F(B_t) - F(B_s) - f(B_s)(B_t - B_s)| \leq K_1 |t-s|^{2\alpha}$$

ξ entre B_s et B_t B est α-Hölder par Kolmogorov

$$|F(B_t) - F(B_s)| = |\underbrace{F'(\xi)}_{|f(\xi)|}| |B_t - B_s| \leq \|f\|_\infty \cdot K |t-s|^\alpha$$

$$|f'(\eta)| \cdot |\xi - B_s| \leq \|f'\|_\infty |B_t - B_s|$$

$$|\underbrace{F(B_t) - F(B_s)}_{f(\xi)(B_t - B_s)} - f(B_s)(B_t - B_s)| = \overbrace{|f(\xi) - f(B_s)|} \cdot |B_t - B_s| \leq \|f'\|_\infty K |t-s|^{2\alpha}$$

(2) M.q. $\exists K_2 \geq 0$ v.a. t.q. $\forall 0 \leq s \leq t \leq T$

$$\left| \int_s^t f(B_u) dB_u \right| \leq K_2 |t-s|^\alpha$$

$$\left| \int_s^t f(B_u) dB_u - f(B_s)(B_t - B_s) \right| \leq K_2 |t-s|^{2\alpha}$$

$$F(B_t) = F(B_s) + \int_s^t f(B_u) dB_u + \frac{1}{2} \int_s^t f'(B_u) du$$

$$\left| \int_s^t f(B_u) dB_u \right| \leq \underbrace{|F(B_t) - F(B_s)|}_{\leq K_1 |t-s|^\alpha} + \frac{1}{2} \|f'\|_\infty \underbrace{|t-s|}_{\leq |t-s|^\alpha T^{1-\alpha}} \leq K_2 |t-s|^\alpha \quad \forall t, s \in [0,T]$$

$$\left| \int_s^t f(B_u) dB_u - f(B_s)(B_t - B_s) \right| \leq K_1 |t-s|^{2\alpha} + \frac{1}{2} \|f'\|_\infty \underbrace{|t-s|}_{\leq |t-s|^{2\alpha} T^{1-2\alpha}} \leq K_2 |t-s|^{2\alpha}$$

(3) $f' \in C^1_b$. M.q. $\exists K_3 \geq 0$ t.q.

$$\left|\int_s^t (B_u - B_s)\,dB_u\right| \leq K_3 |t-s|^{2\alpha}$$

$$\left|\int_s^t f(B_u)\,dB_u - f(B_s)(B_t - B_s) - f'(B_s)\int_s^t (B_u - B_s)\,dB_u\right| \leq K_3 |t-s|^{3\alpha}$$

$$(B_t - B_s)^2 = \int_s^t 2(B_u - B_s)\,dB_u + (t-s)$$

$$\left|\int_s^t (B_u - B_s)\,dB_u\right| \leq \frac{1}{2}|B_t - B_s|^2 + \frac{1}{2}|t-s| \leq K_3|t-s|^{2\alpha}$$

$$(B_t - B_s)^2 = 2\int_s^t (B_u - B_s)\,dB_u + \int_s^t du \Rightarrow \int_s^t (B_u - B_s)\,dB_u = \frac{1}{2}(B_t - B_s)^2 - \frac{1}{2}(t-s)$$

$$F(B_t) = F(B_s) + \int_s^t f(B_u)\,dB_u + \frac{1}{2}\int_s^t f'(B_u)\,du \Rightarrow \int_s^t f(B_u)\,dB_u = F(B_t) - F(B_s) - \frac{1}{2}\int_s^t f'(B_u)\,du$$

$$|\dots| = \left|F(B_t) - F(B_s) - \frac{1}{2}\int_s^t f'(B_u)\,du - f(B_s)(B_t - B_s) - \frac{1}{2}f'(B_s)(B_t - B_s)^2 + \frac{1}{2}f'(B_s)(t-s)\right|$$

$$= \left|F(B_t) - \cancel{F(B_s)} - \frac{1}{2}f'(B_s)(B_t - B_s)^2 - f(B_s)\cancel{(B_t - B_s)} + \frac{1}{2}\int_s^t (f'(B_s) - f'(B_u))\,du\right| =$$

$$F(B_t) = \cancel{F(B_s)} + \cancel{F'(B_s)(B_t - B_s)} + \frac{1}{2}\underbrace{F''(\xi)}_{f'(\xi)}(B_t - B_s)^2$$

$$= \left|\frac{1}{2}(B_t - B_s)^2 \underbrace{(f'(\xi) - f'(B_s))}_{f''(\eta)(\xi - B_s)} + \frac{1}{2}\int_s^t (f'(B_s) - f'(B_u))\,du\right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|f''\|_\infty C|t-s|^{3\alpha} + \frac{1}{2}\|f''\|_\infty C|t-s|^{\overset{3\alpha\,\wedge}{1+\alpha}} \leq K_3|t-s|^{3\alpha}$$

(4) Soit $\alpha \in]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$ M.q. $\exists!\, \gamma$ t.q. $\exists C < \infty$ v.q. :

$$\left|\gamma_t - \gamma_s - f(B_s)(B_t - B_s) - f'(B_s)\int_s^t (B_u - B_s)\,dB_u\right| \leq C|t-s|^{3\alpha}, \quad \gamma_0 = 0$$

Par (3) $\gamma_t = \int_0^t f(B_u)\,dB_u \Rightarrow$ existence

Unicité : $|\underbrace{\gamma_t - \gamma_s}_{Y_t} - \underbrace{\tilde{\gamma}_t + \tilde{\gamma}_s}_{- Y_s}| \leq 2C|t-s|^{3\alpha}$ où $Y_t = \gamma_t - \tilde{\gamma}_t$

$$\mathbb{E}|Y_t - Y_s|^p \leq 2C|t-s|^{1+(3\alpha p - 1)}$$

$\rightarrow Y_t$ est α Hölder $\forall \alpha \in \left]0, \underbrace{3\alpha - \frac{1}{p}}_{>1}\right[\Rightarrow Y_t$ α-Hölder avec $\alpha > 1$

Donc $\exists c$: $|Y_t - Y_s| \leq C|t-s|^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$

$$\frac{|Y_t - Y_s|}{|t-s|} \leq C|t-s|^{\varepsilon}$$

$\downarrow s \to t$

$|Y_t'| \leq 0 \Rightarrow Y_t \equiv 0 \rightarrow$ unicité.

$Y_0 = 0$

N11 $b, \sigma \in C^\infty$, $b', b'', \sigma', \sigma''$ bornées

$$dX_t = b(X_t)\,dt + \sigma(X_t)\,dB_t$$
$$X_0 = x$$

$$u(t,x) = P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t^x)]$$

(1) $\eta_t^\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon}(X_t^{x+\varepsilon} - X_t^x)$ M.q. $d\eta_t^\varepsilon(x) = \eta_t^\varepsilon(x)(h_t^\varepsilon\,dt + k_t^\varepsilon\,dB_t)$ progressifs, bornés

$$d\eta_t^\varepsilon = \underbrace{\frac{b(X_t^{x+\varepsilon}) - b(X_t^x)}{\varepsilon}}_{|\cdot| \leq \|b'\|_\infty} dt + \underbrace{\frac{\sigma(X_t^{x+\varepsilon}) - \sigma(X_t^x)}{\varepsilon}}_{|\cdot| \leq \|\sigma'\|_\infty} dB_t =$$

$$= \eta_t^\varepsilon\left(b'(\xi_t^{x,x+\varepsilon})\,dt + \sigma'(\eta_t^{x,x+\varepsilon})\,dB_t\right)$$

$\xi_t^{x,x+\varepsilon}, \eta_t^{x,x+\varepsilon}$ entre X_t^x et $X_t^{x+\varepsilon}$, $\mathcal{F}_t$-mesurables, continues

en $t \rightarrow b'(\xi_t), \sigma'(\xi_t)$ sont cont. $\rightarrow$ progressifs.

Solution explicite: $\eta_t^\varepsilon = \exp\left\{ \int_0^t \left(h_s^\varepsilon - \frac{(k_s^\varepsilon)^2}{2}\right) ds + \int_0^t k_s^\varepsilon dB_s \right\}$

(2) $\xi_t = \exp\left\{ -\int_0^t k_s^\varepsilon dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t (k_s^\varepsilon)^2 ds - \int_0^t h_s^\varepsilon ds \right\}$

$$\eta_t^\varepsilon = \frac{1}{\xi_t}$$

(3) M.q. $\forall$ sous-suite (ε_n) $\exists$ sous-sous-suite (n_k):

ne dépend pas de ss-suite

$$\eta_t^{\varepsilon_{n_k}}(x) \xrightarrow{p.s.} \eta_t(x) \quad \forall t$$

En déduire que $\frac{1}{\varepsilon}(X_t^{x+\varepsilon} - X_t^x) \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta_t(x)$

$\xi_t^{x, x+\varepsilon_n}$ et $\eta_t^{x, x+\varepsilon_n}$ sont entre X_t^x et $X_t^{x+\varepsilon}$

De plus, $X_t^{x+\varepsilon_n} - X_t^x \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ -> on peut trouver sous-suite (n_k):

$$X_t^{x+\varepsilon_{n_k}} - X_t^x \xrightarrow{p.s.} 0 \underset{\eta_t \to X_t^x}{\overset{\xi_t \to X_t^x}{\Rightarrow}} b'(\xi_t^{x, x+\varepsilon_{n_k}}) \xrightarrow{p.s.} b'(X_t^x)$$

$$\sigma'(\eta_t^{x, x+\varepsilon_{n_k}}) \xrightarrow{p.s.} \sigma'(X_t^x)$$

bornée -> U.I.

$$\mathbb{P}\left(\left|\int_0^t k_s^\varepsilon - k_s \, dB_s\right| > \delta\right) \le \delta^{-2} \mathbb{E}\int_0^t \underbrace{|k_s^\varepsilon - k_s|^2}_{\xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0} ds \xrightarrow{TCD} 0 \to \int k_s^\varepsilon dB_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \int k_s dB_s$$

$$\eta_t^{\varepsilon_n} = \exp\left\{ \underbrace{\int_0^t \left(h_s^{\varepsilon_n} - \frac{(k_s^{\varepsilon_n})^2}{2}\right) ds}_{\to \int_0^t h_s - \frac{k_s^2}{2} ds} + \underbrace{\int_0^t k_s^\varepsilon dB_s}_{\downarrow \mathbb{P} \; \int_0^t k_s dB_s} \right\} \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta_t = \exp\left\{ \int_0^t h_s - \frac{k_s^2}{2} ds + \int_0^t k_s dB_s \right\} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ sous-suite $\Rightarrow$ $\eta_t^{\varepsilon_{n_k}} \xrightarrow{p.s.} \eta_t$

$\eta_t^\varepsilon \xrightarrow{\mathbb{P}} \eta_t$ Sinon, $\exists \varepsilon_n$: $\mathbb{P}(|\eta_t^{\varepsilon_n} - \eta_t| > \delta) \ge \varkappa > 0$ $\forall n$

Mais $\exists$ sous suite ε_{n_k} $\mathbb{P}(|\eta_t^{\varepsilon_{n_k}} - \eta_t| > \delta) \to 0$?!

(4) $f \in C_b^1$. M.q. $P_t f$ est dérivable en $x \in \mathbb{R}$.

Formule pour $\partial_x P_t f(x)$ et m.q. $\sup_{[0,T]} \|\partial_x P_t f\|_\infty < \infty$

$$P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t^x)]$$

$$\frac{P_t f(x+\varepsilon) - P_t f(x)}{\varepsilon} = \mathbb{E}\Big[\underbrace{f'(\xi_t^\varepsilon)}_{\leq C} \underbrace{\eta_t^\varepsilon}_{\xrightarrow{\mathbb{P}} \eta_t}\Big] \longrightarrow \mathbb{E}[f'(X_t^x)\eta_t]$$

$$\eta_t^\varepsilon = \exp\left\{\int_0^t \left(h_s^\varepsilon - \frac{(k_s^\varepsilon)^2}{2}\right)ds + \int_0^t k_s^\varepsilon dB_s\right\}$$

$h_s^\varepsilon, k_s^\varepsilon$ bornée $\Rightarrow \mathbb{E}(\eta_t^\varepsilon)^2 \leq C \Rightarrow (\eta_t^\varepsilon)_{\varepsilon \in [0,\varepsilon_0]}$ est U.I

Donc $\partial_x P_t f(x) = \mathbb{E}[f'(X_t^x)\eta_t]$

$$\eta_t = e^{\int_0^t h_s - \frac{k_s^2}{2} ds + \int_0^t k_s dB_s} \leq e^{\|b'\|_\infty T} \underbrace{e^{-\int_0^t \frac{k_s^2}{2} ds + \int_0^t k_s dB_s}}_{M_t}$$

$$|\mathbb{E}[f'(X_t^x)\eta_t]| \leq \|f'\|_\infty |\mathbb{E}[\eta_t]| \leq \|f'\|_\infty e^{\|b'\|_\infty T}$$

(5) $t > 0$ fixé $f \in C_c^\infty$. On admet que $u(t,x) \in C^\infty$ et que $\sup_{t \in [0,T]} \|\partial_x^2 P_t f\|_\infty < +\infty$. M.q.

- $(u(t-s, X_s^x))_{s \in [0,t]}$ est une mart.
- Trouver $(L_s^t)_{s \in [0,t]}$ t.q. $f(X_t^x) = u(t,x) + \int_0^t L_s^t dB_s$
- Donner une maj. de $\mathbb{E}(L_s^t)^2$ bornée, ne dépend pas de t

$$u(t-s, X_s^x) = \mathbb{E}[f(X_{t-s}^{X_s^x})] \overset{\text{flot}}{=} \mathbb{E}[f(X_t^x) \mid X_s = X_s^x] = \mathbb{E}[f(X_t^x) \mid \mathcal{F}_s] \rightarrow$$

$\Rightarrow \mathcal{F}_s$-martingale

$$u(t-t, X_t^x) = f(X_t^x)$$

$$d\,u(t-s, X_s^x) = \partial_x u(t-s, X_s^x) \cdot \sigma(X_s^x)\, dB_s = \underbrace{\mathbb{E}\left[f'(X_{t-s}^{X_s^x}) \eta_{t-s} \right] \sigma(X_s^x)\, dB_s}_{(\alpha_s^t)_{s \in [0,T]}}$$

$$\partial_x u(t,x) \overset{(4)}{=} \mathbb{E}\left[f'(X_t^x) \eta_t \right]$$

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f'(X_{t-s}^{X_s^x}) \eta_{t-s} \right]^2 \sigma(X_s^x)^2 \right] \leq \|f'\|_\infty^2 \cdot \|\sigma\|_\infty^2 \, e^{2\|b'\|_\infty \cdot T}$$

(6) $\sigma \geq \delta > 0$ m.q. $\partial_x u(t,x) = \frac{1}{t} \mathbb{E}\left[f(X_t^x) \int_0^t \sigma^{-1}(X_s^x)\, \eta_s(x)\, dB_s \right]$

$\leq \frac{1}{\delta}$ de carré intégrable

$$f(X_t^x) \int_0^t \sigma^{-1}(X_s^x) \eta_s dB_s = u(t,x) \int_0^t \sigma^{-1}(X_s^x) \eta_s dB_s + \int_0^t \mathbb{E}\left[f'(X_{t-s}^{X_s^x}) \eta_{t-s} \right]_t \sigma(X_s^x) dB_s \cdot \int_0^t \sigma^{-1}(X_s^x) \eta_s dB_s$$

$\mathbb{E}$; exp{...}

$$\mathbb{E}\left[f(X_t^x) \int_0^t \sigma^{-1}(X_s^x) \eta_s dB_s \right] = 0 + \mathbb{E} \int_0^t \underbrace{\mathbb{E}\left[f'(X_{t-s}^{X_s^x}) \eta_s \cdot \eta_{t-s} \right]}_{\mathbb{E}\left[f'(X_t^x) \eta_t \mid \eta_s, X_s^x \right]} ds =$$

$$= t\, \mathbb{E}\left[f'(X_t^x) \eta_t \right]$$

Interprétation : IPP pour les processus stochastiques.

N_{12} $Z_t = (X_t, Y_t)$ MB ds $\mathbb{R}^2$ issu de $x \neq 0$

L'aire de Lévy de Z : $A_t := \int_0^t X_s dY_s - Y_s dX_s$, $t \geq 0$

(1) Définir β_t MB t.q. $A_t = \int_0^t R_s d\beta_s$ où $R_s := |Z_s|$

$$A_t = \int_0^t R_s \underbrace{\frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{R_s}}_{d\beta_s} \Rightarrow \beta_t = \int_0^t \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{R_s} \text{ - une mart. locale}$$

$$\langle \beta \rangle_t = \int_0^t \frac{X_s^2 \, d\langle Y \rangle_s^{=ds} - 2X_sY_s \, d\langle X,Y \rangle_s^{=0} + Y_s^2 \, d\langle X \rangle_s^{=ds}}{R_s^2} = t \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ par le thm de Lévy, $(\beta_t)_{t\in[0,T]}$ est un MB.

On admet que $(\beta_t)_{t\geq 0}$ et $(R_t)_{t\geq 0}$ sont indépendants.

(2) $\mathcal{L}(A_t \mid (R_s)_{s\geq 0}) = ?$

$$A_t = \int_0^t R_s \, d\underbrace{\beta_s}_{\text{MB} \perp\!\!\!\perp \sigma(R_s, s\geq 0)} \longrightarrow \mathcal{L}(A_t \mid (R_s)_{s\geq 0}) = \mathcal{N}\left(0, \int_0^t R_s^2 ds\right)$$

$R_s \in \sigma(R_s, s\geq 0)$

(3) $\mathbb{E}[e^{i\lambda A_t} \mid R] = ?$ $\qquad \mathbb{E}[e^{i\lambda A_t}] = ?$

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda A_t} \mid R] \overset{(2)}{=} e^{-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t R_s^2 ds} = e^{-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t X_s^2 ds} \, e^{-\frac{\lambda^2}{2}\int_0^t Y_s^2 ds}$$

indépendants

$$\mathbb{E}[e^{i\lambda A_t}] = \mathbb{E}\Big[e^{-\frac{\lambda^2}{2}\underbrace{\int_0^t X_s^2 ds}_{\mathcal{N}(0, \frac{T^3}{3})}}\Big]^2 = \mathbb{E}\Big[e^{-\underbrace{\frac{\lambda^2}{2}\frac{T^{3/2}}{\sqrt{3}}}_{\sigma} \cdot Z}\Big]^2 = e^{\sigma^2} = \exp\left\{-\frac{\lambda^4 T^3}{12}\right\}$$

(4) M.q. $\exists$ un MB γ t.q. $R_t = R_0 + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{du}{R_u} + \gamma_t$

$$R_t^2 = X_t^2 + Y_t^2$$

$$dR_t^2 = 2(X_t dX_t + Y_t dY_t) + 2dt \qquad d\langle R^2 \rangle_t = 4R_t^2 dt$$

$$dR_t = \frac{1}{2R_t} dR_t^2 - \frac{1}{8R_t^3} d\langle R^2 \rangle_t = \frac{dt}{R_t} + \underbrace{\frac{X_t dX_t + Y_t dY_t}{R_t}}_{d\gamma_t} - \frac{1}{2R_t} dt =$$

$$= \frac{dt}{2R_t} + d\gamma_t$$

un MB - on montre ça comme dans (1)

(5) M.q. $\gamma \perp\!\!\!\perp \beta$

$\langle \gamma \rangle_t = t$ $\quad \langle \gamma, \beta \rangle_t = \left\langle \int_0^{\cdot} \frac{X_s dY_s - Y_s dX_s}{R_s}, \int_0^{\cdot} \frac{X_s dX_s + Y_s dY_s}{R_s} \right\rangle_t =$

$\langle \beta \rangle_t = t$ $\quad = \int_0^t \frac{X_s Y_s - X_s Y_s}{R_s^2} ds = 0$

Par le thm de Lévy, (γ, β) est un MB dans $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ ils sont indépendants

(6) $\beta \perp\!\!\!\perp R$?

$$R_t = \frac{1}{2} \int_0^t \frac{ds}{R_s} + \gamma_t \in \sigma(\gamma_s, s \leq t) \perp\!\!\!\perp \beta \Rightarrow R \perp\!\!\!\perp \beta$$

N13. Soit $x > 0$, $B^{(3)}$ MB ds $\mathbb{R}^3$, $\rho_t = |\bar{x} + B_t^{(3)}|$ $\quad \bar{x} = (x, 0, 0)$

$\mathbb{P}_x^3$ loi de $(\rho_t)_{t \geq 0}$. $T_a = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$

$$\mathbb{P}_x^3 (T_a < T_b) = \frac{x^{-1} - b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} \quad 0 < a < x < b$$

$\frac{1}{X_t} \in \mathcal{M}_{loc}$ sous $\mathbb{P}_x^3$

$J_t := \inf_{u \geq t} X_u$ et $Y_t = 2J_t - X_t$. $\quad a \geq 0 \quad t \geq s \geq 0$

(1) Pourquoi on peut appliquer Itô à $|\bar{x} + B_t^{(3)}|$.

En déduire que $\langle \rho \rangle_t = t$

$\mathbb{P}(\exists t \geq 0 : \bar{x} + B_t^{(3)} = 0) \Rightarrow$ avec la proba 1 on va considérer $x \mapsto |x|$ en points où elle est deux fois dérivable

$f(x) = |x| \quad \nabla f(x) = \frac{x}{|x|}$

→ on peut appliquer Itô.

$\partial_{x_i} \frac{x_i}{\sqrt{\sum_i x_j^2}} = \frac{\sqrt{\sum x_j^2} - x_i^2/\sqrt{\cdots}}{\sum x_j^2} = \frac{1}{|x|} - \frac{x_i^2}{|x|^3}$

$f(x) = \sqrt{(B_t^{1,x})^2 + (B_t^2)^2 + (B_t^3)^2}$

$\Delta f(x) = \frac{d-1}{|x|} \quad (d=2)$

$$d|\bar{x} + B_t| = \frac{1\,\cancel{2}}{\cancel{2}|\bar{x} + B_t|}\left(B_t^{1,x} dB_t^{1,x} + B_t^2 dB_t^2 + B_t^3 dB_t^3\right) + \frac{1}{2|\bar{x}+B_t|} dt$$

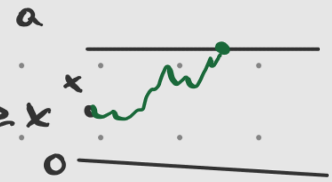
$$\langle \rho \rangle_t = \frac{1}{\rho_s^2} \int_0^t (B_s^{1,x})^2 + (B_s^2)^2 + (B_s^3)^2 \, ds = t$$

(2) M.q. si $Y \in \mathcal{M}_{loc}$ ⇒ $Y - Y_0$ MB issu de 0

Il suffit de montrer que $\langle Y \rangle_t = t$ et appliquer le thm de Lévy

$$Y_t = \underbrace{2 \inf_{u \geq t} \rho_u}_{\substack{\text{décroissant} \\ \to \text{à variation finie}}} - \rho_t$$

$\to \langle Y \rangle_t = \langle \rho \rangle_t = t$



$= 1$ si $a \geq x$

(3) M.q. $\mathbb{P}_x^3(T_a < +\infty) = \mathbb{P}_x^3(J_0 \leq a) = \frac{a \wedge x}{x}$

$$\mathbb{P}_x^3(J_0 > a) = \left(1 - \frac{a}{x}\right) \mathbb{1}_{\{a < x\}}$$

On a $\mathbb{P}_x^3(T_a < T_b) = \frac{x^{-1} - b^{-1}}{a^{-1} - b^{-1}} \quad a < x < b$

TCM $\downarrow b \to \infty \quad \downarrow$

$\mathbb{P}_x^3(T_a < T_b) = \frac{a}{x} \quad \to \mathbb{P}_x^3(T_a < \infty) = \frac{a \wedge x}{x}$

$$\{T_a < +\infty\} = \{\exists t : X_t \leq a\} = \{\inf_{t \geq 0} X_s \leq a\} = \{J_0 \leq a\}$$

$$\mathbb{P}_x^3(J_0 > a) = 1 - \frac{a \wedge x}{x} = \frac{x - a \wedge x}{x} = \frac{(x-a)^+}{x} = \left(1 - \frac{a}{x}\right)^+ = \left(1 - \frac{a}{x}\right) \mathbb{1}_{\{a < x\}}$$

(4) M.q. $\mathbb{E}_x^3\left[\mathcal{J}_0 \mathbb{1}_{\{\mathcal{J}_0>a\}}\right] = \frac{1}{2}\left(x-\frac{a^2}{x}\right)\mathbb{1}_{\{a<x\}}$

$$\mathcal{J}_0 \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}_x^3\left[\mathcal{J}_0 \mathbb{1}_{\{\mathcal{J}_0>a\}}\right] = \int_a^\infty u \, d\mathbb{P}_x^3(\mathcal{J}_0 \leq a) = \int_a^x \frac{u}{x}\, du \, \mathbb{1}_{\{a<x\}} =$$

$$= \mathbb{1}_{\{a<x\}} \cdot \frac{1}{2}\,\frac{x^2-a^2}{x} = \frac{1}{2}(x-a^2x^{-1})\mathbb{1}_{\{a<x\}}$$

(5) M.q. $\mathbb{E}_x^3\left[(2\mathcal{J}_s - X_s)\mathbb{1}_{\{\mathcal{J}_s>a\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_s^X\right] = (a-a^2X_s^{-1})\mathbb{1}_{\{a<X_s\}}$

|| Markov

$$\mathbb{E}_x^3\left[(2\mathcal{J}_0 - x)\mathbb{1}_{\{\mathcal{J}_0>a\}}\right]\Big|_{x=X_s}$$

||

$$\left(2\,\mathbb{E}_x^3\left[\mathcal{J}_0 \mathbb{1}_{\{\mathcal{J}_0>a\}}\right] - x\,\mathbb{P}_x^3(\mathcal{J}_0>a)\right)\Big|_{x=X_s}$$

||

$$(X_s - a^2X_s^{-1})\mathbb{1}_{\{a<X_s\}} - (X_s-a)\mathbb{1}_{\{a<X_s\}} = (a-a^2X_s^{-1})\mathbb{1}_{\{a<X_s\}}$$

(6) M.q. $\mathbb{E}_x^3\left[\underset{2\mathcal{J}_t - X_t}{Y_t}\, \mathbb{1}_{\{\mathcal{J}_s>a\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t^{oX}\right] = \mathbb{E}_x^3\left[Y_t \mathbb{1}_{\{\mathcal{J}_t>a\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t^X\right]\mathbb{1}_{\{\inf_{[s,t]} X_u>a\}}$

$$\mathbb{1}_{\{\mathcal{J}_s>a\}} = \mathbb{1}_{\{\inf_{u\geq s} X_u>a\}} = \underbrace{\mathbb{1}_{\{\inf_{[s,t]} X_u>a\}}}_{\mathcal{F}_t^{oX}\text{ mesurable}}\ \underbrace{\mathbb{1}_{\{\inf_{u\geq t} X_u>a\}}}_{\mathcal{J}_t}$$

(7) M.q. $\mathbb{E}_x^3\left[Y_t\mathbb{1}_{\{\mathcal{J}_s>a\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_s^X\right] = \mathbb{E}_x^3\left[(a-a^2X_t^{-1})\mathbb{1}_{\{\inf_{[s,t]} X_u>a\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_s^X\right]$

||

$$\mathbb{E}_x^3\left[\mathbb{E}_x^3\left[Y_t\mathbb{1}_{\{\mathcal{J}_s>a\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t^X\right] \,\middle|\, \mathcal{F}_s^X\right] \overset{(6)}{=} \mathbb{E}_x^3\left[\mathbb{E}_x^3\left[Y_t\mathbb{1}_{\{\mathcal{J}_t>a\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_t^X\right]\mathbb{1}_{\{\inf_{[s,t]} X_u>a\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_s^X\right] =$$

car $\{a<X_t\} \subset \{\inf_{[s,t]} X_u > a\}$

$$\overset{(5)}{=} \mathbb{E}_x^3\left[(a-a^2X_t^{-1})\cancel{\mathbb{1}_{\{a<X_t\}}}\,\mathbb{1}_{\{\inf_{[s,t]} X_u>a\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_s^X\right]$$

(8) M.q. $\mathbb{E}_x^3\left[Y_t\mathbb{1}_{\{\mathcal{J}_s>a\}} \,\middle|\, \mathcal{F}_s^X\right] = \mathbb{E}_{X_s}^3\left[(a-a^2X^{-1}_{(t-s)\wedge T_a})\right]\mathbb{1}_{\{a<X_s\}} = (a-a^2X_s^{-1})\mathbb{1}_{\{a<X_s\}}$

|| (7)

$$\mathbb{E}_x^3\Big[\underbrace{(a-a^2X_t^{-1})\mathbb{1}_{\{\inf_{[s,t]} X_u > a\}}}_{=0 \text{ si } X_s \leq a}\Big|\mathcal{F}_s^{\circ X}\Big] \overset{\text{Markov}}{=} \mathbb{E}^3_{X_s}\Big[\underbrace{(a-a^2X_{t-s}^{-1})\mathbb{1}_{\{\inf_{[0,t-s]} X_u > a\}}}_{a-a^2X^{-1}_{(t-s)\wedge T_a}}\Big]\mathbb{1}_{\{X_s > a\}} =$$

$$= \mathbb{1}_{\{X_s > a\}}\mathbb{E}^3_{X_s}\left[a-a^2X^{-1}_{(t-s)\wedge T_a}\right] \underset{(*)}{=} \mathbb{1}_{\{X_s > a\}}(a-a^2X_s^{-1})$$

$(*)$ $(X^{-1}_{t\wedge T_a})$ mart locale bornée grâce à T_a $\to$
$\to$ une vraie mart $\to$ thm d'arrêt
(fermée sur $[0,t-s]$)

(9) M.q. $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t^{\circ X} \vee \sigma(\mathcal{T}_t)$ définit une filtration

$$s \leq t \qquad \mathcal{F}_s^{\circ X} \vee \sigma(\mathcal{T}_s) \overset{?}{\subset} \mathcal{F}_t^{\circ X} \vee \sigma(\mathcal{T}_t)$$

$$\sigma(\mathcal{T}_s) \subseteq \sigma(X_u, u\in[s,t]) \vee \sigma(\mathcal{T}_t)$$

$$\mathcal{F}_s^{\circ X} \vee \sigma(\mathcal{T}_s) \subseteq \underbrace{\mathcal{F}_s^{\circ X} \vee \sigma(X_u, u\in[s,t])}_{\subseteq \mathcal{F}_t^{\circ X}} \vee \sigma(\mathcal{T}_t) \subseteq \mathcal{F}_t^{\circ X} \vee \sigma(\mathcal{T}_t)$$

(10) M.q. (Y_t) est une $(\mathcal{G}_t)$-martingale et en déduire que $Y - Y_0$ est un MB

$$\forall s \leq t \qquad \mathbb{E}[Y_t \mid \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[Y_t \mid X_t, \mathcal{T}_t]$$

On sait que $\mathbb{E}_x^3\left[Y_t \mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_t > a\}} \middle| \mathcal{F}_s^{\circ X}\right] = (a-a^2X_s^{-1})\mathbb{1}_{\{a < X_s\}}$

$$\mathbb{E}\left[Y_t \mid X_t, \mathcal{T}_t \in [a, a+da]\right] = \frac{\mathbb{E}_x^3\left[Y_t\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_t > a\}} - Y_t\mathbb{1}_{\{\mathcal{T}_t > a+da\}} \middle| \mathcal{F}_s^{\circ X}\right]}{\mathbb{P}^3_{X_s}(\mathcal{T}_0 > a) - \mathbb{P}^3_{X_s}(\mathcal{T}_0 > a+da)} =$$

$$= \frac{(a - a^2 X_s^{-1}) \mathbb{1}_{\{a<X_s\}} - ((a+da) - (a+da)^2 X_s^{-1}) \mathbb{1}_{\{a+da<X_s\}}}{(1 - aX_s^{-1}) \mathbb{1}_{\{a<X_s\}} - (1-(a+da)X_s^{-1}) \mathbb{1}_{\{a+da<X_s\}}} =$$

$$= \mathbb{1}_{\{a<X_s\}} \cdot \frac{-da + (da)^2 X_s^{-1} + 2a \cdot da \cdot X_s^{-1}}{(da) X_s^{-1}} + \underbrace{(\dots) \mathbb{1}_{\{X_s \in [a, a+da]\}}}_{\xrightarrow[da \to 0]{} 0}$$

$$\parallel$$

$$\mathbb{1}_{\{a<X_s\}} \left(-X_s + (da) + 2a \right)$$

$$\downarrow da \to 0$$

$$\mathbb{1}_{\{a<X_s\}} (2a - X_s)$$

$$\mathbb{E}[Y_t | \mathcal{G}_s] = \mathbb{E}[Y_t | X_s, \mathcal{J}_s] = \lim_{da \to 0} \mathbb{E}[Y_t | X_t, \mathcal{J}_t \in [a, da]] \Big|_{a = \mathcal{J}_s} = 2\mathcal{J}_s - X_s = Y_s$$

$\to$ Y est $\mathcal{G}_t$-martingale $\xrightarrow{(2)}$ $Y - Y_0$ est un $(\mathcal{G}_t)$-MB

2022 18 fevrier

Exo 2 $\tau_y = \inf\{t>0 : B_t = y\}$, $y \in \mathbb{R}$ $\forall x>0$ $X_t = \dfrac{x}{1 - xB_t}$, $t \in [0, \tau_{1/x}[$

On veut m.q. $X_t = x + \displaystyle\int_0^{t \wedge \tau_{1/x}} X_s^3 ds + \int_0^{t \wedge \tau_{1/x}} X_s^2 dB_s$

(1) $\varepsilon \in (0, 1/x)$ $f_\varepsilon(u) = \dfrac{x}{1 - xu}$, $u \leq \frac{1}{x} - \varepsilon$ $f_\varepsilon \in C^2$

$$X_{t \wedge \underbrace{\tau_{1/x - \varepsilon}}_{= \tau^\varepsilon}} = x + \int_0^{t \wedge \tau^\varepsilon} X_s^3 ds + \int_0^{t \wedge \tau^\varepsilon} X_s^2 dB_s$$ par Itô pour $t \leq \frac{1}{x} - \varepsilon$

ne sont pas Lipschitz!

(2) sur $\{t < \tau_{1/x}\} = \bigcup_{\varepsilon > 0} \{t \leq \tau_{\frac{1}{x} - \varepsilon}\}$ $X_t = x + \displaystyle\int_0^t X_s^3 ds + \int_0^t X_s^2 dB_s$ $\left(t \wedge \tau_{\frac{1}{x} - \varepsilon} = t\right)$

(3) Y a-t-il une solution de cette EDS sur $[0, T]$ avec $T > 0$?

S'il existe une solution forte $(X_t)_{t \in [0,T]}$ donc elle coïncide p.s. avec

$\frac{x}{1-xB_t}$ sur $\{t<\tau_{1/x}\}$ qui tend $+\infty$ quand $t\to\tau_{1/x}$ $\to$

$\to$ X_t explose en $\tau_{1/x}$ qui peut être $<T$.

2023 5 janvier

Exo 3 (X,Y) MBS $\quad F_t = e^{X_t}\int_0^t e^{-X_s}\,dY_s$ ont la m̂ loi?

$G_t = \sinh(X_t)$

$$g(x)=\sinh^{-1}(x)=\log\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

$$X_t = g(G_t)=\log\left(G_t+\sqrt{1+G_t^2}\right) \qquad F_t = \underbrace{\left(G_t+\sqrt{1+G_t^2}\right)}_{e^{X_t}}\int_0^t \frac{dY_s}{G_s+\sqrt{1+G_s^2}}$$

$$dF_t = \left(dG_t + \frac{dG_t^2}{2\sqrt{1+G_t^2}} - \frac{1}{8}\frac{d\langle G^2\rangle_t}{(1+G_t^2)^{3/2}}\right)\int_0^t \frac{dY_s}{G_s+\sqrt{1+G_s^2}} + dY_t$$

EDS pour G

$$dG_t = \cosh(X_t)\,dX_t + \frac{1}{2}\sinh(X_t)\,dt = \sqrt{1+G_t^2}\,dX_t+\frac{1}{2}G_t\,dt$$

$$dG_t^2 = 2G_t\left(\sqrt{1+G_t^2}\,dX_t+\frac{1}{2}G_t\,dt\right) + (1+G_t^2)\,dt \qquad d\langle G^2\rangle_t = 4G_t^2(1+G_t^2)\,dt$$

$$dG_t + \frac{dG_t^2}{2\sqrt{1+G_t^2}} - \frac{1}{8}\frac{d\langle G^2\rangle_t}{(1+G_t^2)^{3/2}} = \sqrt{1+G_t^2}\,dX_t + \frac{1}{2}G_t\,dt + G_t\,dX_t + \frac{1}{2}\cancel{\frac{G_t^2}{\sqrt{1+G_t^2}}}\,dt +$$

$$+ \frac{1}{2}\sqrt{1+G_t^2}\,dt - \cancel{\frac{G_t^2}{2\sqrt{1+G_t^2}}}\,dt = e^{X_t}\,dX_t+\frac{1}{2}e^{X_t}\,dt$$

Donc $dF_t = \underbrace{F_t\,dX_t + dY_t} + \frac{1}{2}F_t\,dt = \sqrt{1+F_t^2}\,dZ_t+\frac{1}{2}F_t\,dt$

$$= \sqrt{1+F_t^2}\underbrace{\left(\frac{F_t}{\sqrt{1+F_t^2}}\,dX_t+\frac{1}{\sqrt{1+F_t^2}}\,dY_t\right)}_{\text{MB par le thm. de Lévy}} = \sqrt{1+F_t^2}\,dZ_t$$

MBS

On a obtenu la m̂ EDS qui a une unique solution forte $\to$
$\to$ {Yamada-Watanabe} $\to$ $\exists!$ sol. faible $\to$ $(F_t)\overset{\mathcal{L}}{\sim}(G_t)$

Exo 4 Soit $T_1^* := \inf\{s \geq 0 : |B_s| = 1\}$. M.q. $\frac{1}{\sqrt{T_1^*}} \overset{\mathcal{L}}{\sim} \sup_{s\in[0,1]} |B_s|$

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{T_1^*}} \leq x\right) = \mathbb{P}\left(T_1^* \geq \frac{1}{x^2}\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,\frac{1}{x^2}]} |B_s| < 1\right) = \mathbb{P}\Big(\frac{1}{x}\sup_{t\in[0,1]} |\underbrace{xB_{t/x^2}}_{W_t}| < 1\Big) =$$

a B_{t/x^2} est un MB

sup $|W_t|$ a une densité

$$= \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |W_t| < x\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{t\in[0,1]} |W_t| \leq x\right)$$