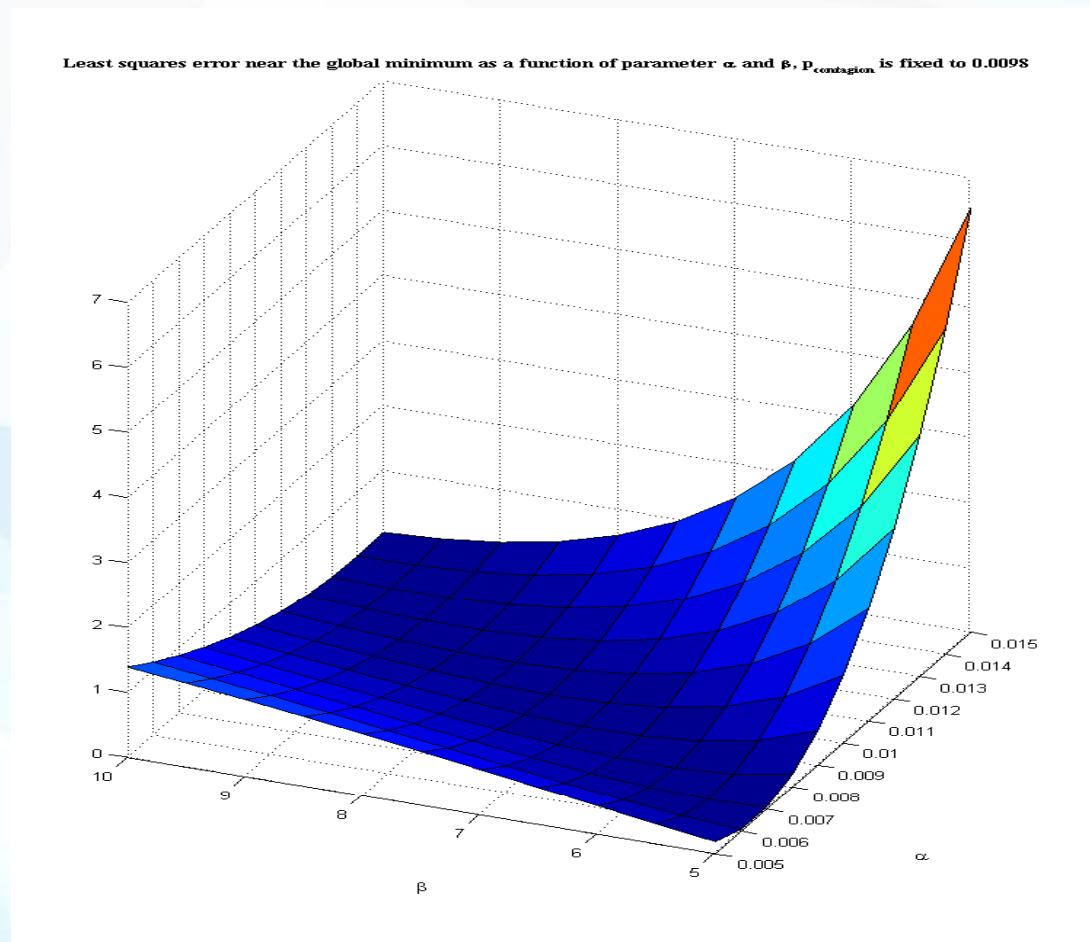


# Techniques numériques en finance et actuariat

Armand Bernou - armand.bernou@univ-lyon1.fr



Année 2023-2024

# Plan

© Théo Jalabert



Chapitre 4: Applications à plusieurs modèles

Modèle CIR

Options asiatiques

Options barrières



Modèle de Cox-Ingersoll-Ross :

1.  $X_0 \geq 0$
- 2.

$$dX_t = \theta(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

$\sigma(x) = \sigma\sqrt{x}$  non Lipschitz, mais on peut quand même montrer existence et unicité d'une solution.

Théorème: si  $\sigma^2 \leq 2\theta b$ ,  $(X_t)_{t \geq 0}$  reste strictement positif avec probabilité 1.

**Schéma d'Euler :**

Modèle de Cox-Ingersoll-Ross :

1.  $X_0 \geq 0$
- 2.

$$dX_t = \theta(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

$\sigma(x) = \sigma\sqrt{x}$  non Lipschitz, mais on peut quand même montrer existence et unicité d'une solution.

Théorème: si  $\sigma^2 \leq 2\theta b$ ,  $(X_t)_{t \geq 0}$  reste strictement positif avec probabilité 1.

**Schéma d'Euler :**

$$X_0^n = x, \quad X_{t_{k+1}}^n = X_{t_k}^n + \theta(b - X_{t_k}^n)\Delta_n + \sigma\sqrt{X_{t_k}^n}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$



**Schéma d'Euler :**

$$X_0^n = x, \quad X_{t_{k+1}}^n = X_{t_k}^n + \theta (b - X_{t_k}^n) \Delta_n + \sigma \sqrt{X_{t_k}^n} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

**Problème à partir du schéma :**  $\mathbb{P} \left( X_{t_{k+1}}^n < 0 \mid X_{t_k}^n \right) > 0 \quad \rightarrow$  le théorème n'est pas préservé.

**Schéma d'Euler :**

$$X_0^n = x, \quad X_{t_{k+1}}^n = X_{t_k}^n + \theta(b - X_{t_k}^n) \Delta_n + \sigma \sqrt{X_{t_k}^n} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})$$

**Problème à partir du schéma :**  $\mathbb{P}(X_{t_{k+1}}^n < 0 \mid X_{t_k}^n) > 0 \rightarrow$  le théorème n'est pas préservé.

**Solution :** Version symétrisée :

$$X_0^n = x, \quad X_{t_{k+1}}^n = \left| X_{t_k}^n + \theta(b - X_{t_k}^n) \Delta_n + \sigma \sqrt{X_{t_k}^n} (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \right| > 0 \text{ p.s.}$$

Convergence à la vitesse  $\frac{1}{n}$ .

# Plan

© Théo Jalabert



Chapitre 4: Applications à plusieurs modèles

Modèle CIR

Options asiatiques

Options barrières

# Payoff de type options asiatiques

On a vu comment estimer  $\mathbb{E}[f(X_T)]$  à l'aide du schéma d'Euler.

Comment simuler plutôt

$$\mathbb{E}[f(X_T, I_T)]$$

avec  $I_T = \int_0^T X_t dt$  qui dépend de toute la trajectoire du sous-jacent ?

Problématique proche des calculs de PDD, ou pour les options asiatiques.

Sous-jacent, processus 2D:  $\tilde{X}_t = \begin{pmatrix} X_t \\ I_t \end{pmatrix}$ . Le processus  $\tilde{X}$  vérifie l'EDS :

$$d\tilde{X}_t = \begin{pmatrix} dX_t \\ dI_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(t, X_t) \\ X_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma(t, X_t) \\ 0 \end{pmatrix} dW_t$$

## Options asiatiques

On veut estimer (numeriquement)  $\mathbb{E}[f(X_T, I_T)]$

$$I_t = \int_0^t X_s ds \Rightarrow dI_t = X_t dt$$

On passe en 2D

$$\tilde{X}_t = \begin{pmatrix} X_t \\ I_t \end{pmatrix} \rightarrow d\tilde{X}_t = \begin{pmatrix} b(t, X_t) \\ X_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma(t, X_t) \\ 0 \end{pmatrix} dW_t$$

## Options asiatiques II

© Théo Jalabert



Sous-jacent, processus 2D:  $\tilde{X}_t = \begin{pmatrix} X_t \\ I_t \end{pmatrix}$ . Le processus  $\tilde{X}$  vérifie l'EDS :

$$d\tilde{X}_t = \begin{pmatrix} dX_t \\ dI_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b(t, X_t) \\ X_t \end{pmatrix} dt + \begin{pmatrix} \sigma(t, X_t) \\ 0 \end{pmatrix} dW_t$$

On va donc adapter le schéma d'Euler à ce cadre: **Schéma d'Euler** :

$$\begin{cases} X_0^n = X_0 \\ I_0^n = 0 \\ X_{t_{k+1}}^n = X_{t_k}^n + b(t_k, X_{t_k}^n) \Delta_n + \sigma(t_k, X_{t_k}^n) (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) \\ I_{t_{k+1}}^n = I_{t_k}^n + X_{t_k}^n \Delta_n \end{cases}$$

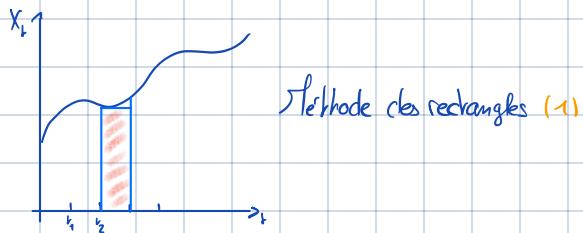
Même schéma qu'avant pour  $(X_t)_t$ . En revanche, on évalue  $I_T$  par la méthode des rectangles.

On obtient à nouveau une erreur en  $O(\frac{1}{n})$ .

# Schéma d'Euler

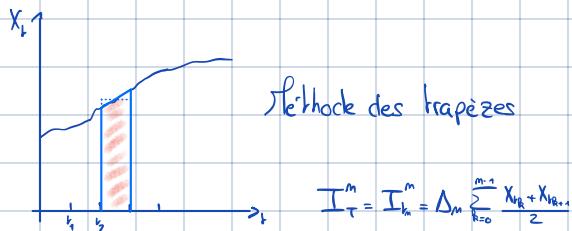
© Théo Jalabert

$$\begin{cases} X_0^m = X_0 \\ I_0^m = 0 \\ X_{k_{\text{rec}}}^m = X_{k_{\text{rec}}}^m + b(k_{\text{rec}}, X_{k_{\text{rec}}}) \Delta_m + J(k_{\text{rec}}, X_{k_{\text{rec}}})(W_{k_{\text{rec}}} - W_{k_{\text{rec}}}) \\ I_{k_{\text{rec}}}^m = I_{k_{\text{rec}}}^m + X_{k_{\text{rec}}}^m \Delta_m \quad (1) \end{cases}$$



Dans ce cas,

$$\begin{aligned} I_T^m &= I_{t_m}^m = I_{t_{m-1}}^m + X_{k_{m-1}}^m \Delta_m \\ &= I_{t_{m-2}}^m + X_{k_{m-2}}^m \Delta_m + X_{k_{m-1}}^m \Delta_m \\ &= \dots \\ &= \Delta_m \sum_{k=0}^{m-1} X_k^m = \frac{T}{m} \sum_{k=0}^{m-1} X_k^m \end{aligned}$$



# La méthode des rectangles

Soit  $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ , l'intégrale  $I_T$  est approchée par la méthode des rectangles :

$$I_T^n = I_{t_n}^n = \frac{T}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_{t_k}^n.$$

→ Outil classique pour l'évaluation numérique d'une intégrale.

On peut nettement améliorer la précision, en approchant  $I_T$  par la méthode des trapèzes:

$$I_T^n = \frac{T}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{X_{t_k}^n + X_{t_{k+1}}^n}{2}.$$

## Schéma de Milstein ( $X_t \in \mathbb{R}$ )

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

© Théo Jalabert

$$\left\{ \begin{array}{l} X_0^m = X_0 \\ I_0^m = 0 \\ X_{t_{k+1}}^m = X_{t_k}^m + b(t_k, X_{t_k}^m) \Delta_m + \sigma(t_k, X_{t_k}^m) (W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) + \frac{1}{2} \sigma(t_k, X_{t_k}^m) \sigma(t_k, X_{t_k}^m) [ (W_{t_{k+1}} - W_{t_k})^2 - \Delta_m ] \\ I_{t_{k+1}}^m = I_{t_k}^m + \frac{X_{t_{k+1}}^m - X_{t_k}^m}{2} \Delta_m \end{array} \right.$$

→ Meilleure convergence.

# Méthodes pour la simulation d'options asiatiques

© Théo Jalabert



$$\mathcal{L} \mathbb{E}[g(X_T, I_T)] = \mathbb{E}[e^{-rT}(X_T - I_T)_+]$$

## Schéma d'Euler

```
INITIALIZE  $\sigma, r, T, N, n$ 
LET  $h = T/N, F = 0$ 
FOR  $i = 1, \dots, n$ 
    LET  $X = X_0, I = 0$ 
    FOR  $j = 1, \dots, N$ 
        SIMULATE  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 
         $I = I + h \times X$ 
         $X = X \times (1 + r \times h + \sigma \times \sqrt{h}Z)$ 
    END FOR
    IF  $X > I$ 
         $F = F + e^{-rT}(X - I)$ 
    END IF
END FOR
PAYOFF =  $F/n$ 
```

## Schéma de Milstein

```
INITIALIZE  $\sigma, r, T, N, n$ 
LET  $h = T/N, F = 0$ 
FOR  $i = 1, \dots, n$ 
    LET  $X = X_0, I = 0$ 
    FOR  $j = 1, \dots, N$ 
        SIMULATE  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$ 
         $I = I + h \times X$ 
         $X = X \times (1 + r \times h + \sigma \times \sqrt{h}Z + \frac{1}{2}\sigma^2 \times h \times (Z^2 - 1))$ 
    END FOR
    IF  $X > I$ 
         $F = F + e^{-rT}(X - I)$ 
    END IF
END FOR
PAYOFF =  $F/n$ 
```

MB géométrique

$$\frac{dx_r}{x_r} = \gamma dt + \sigma dW_t$$

$$\tilde{\pi}(t, x_r) = \pi x_r$$

$$\partial_x \tilde{\pi}(t, x_r) = \pi \quad \text{d'où } \pi = \pi^2$$

# Plan

© Théo Jalabert



## Chapitre 4: Applications à plusieurs modèles

Modèle CIR

Options asiatiques

Options barrières

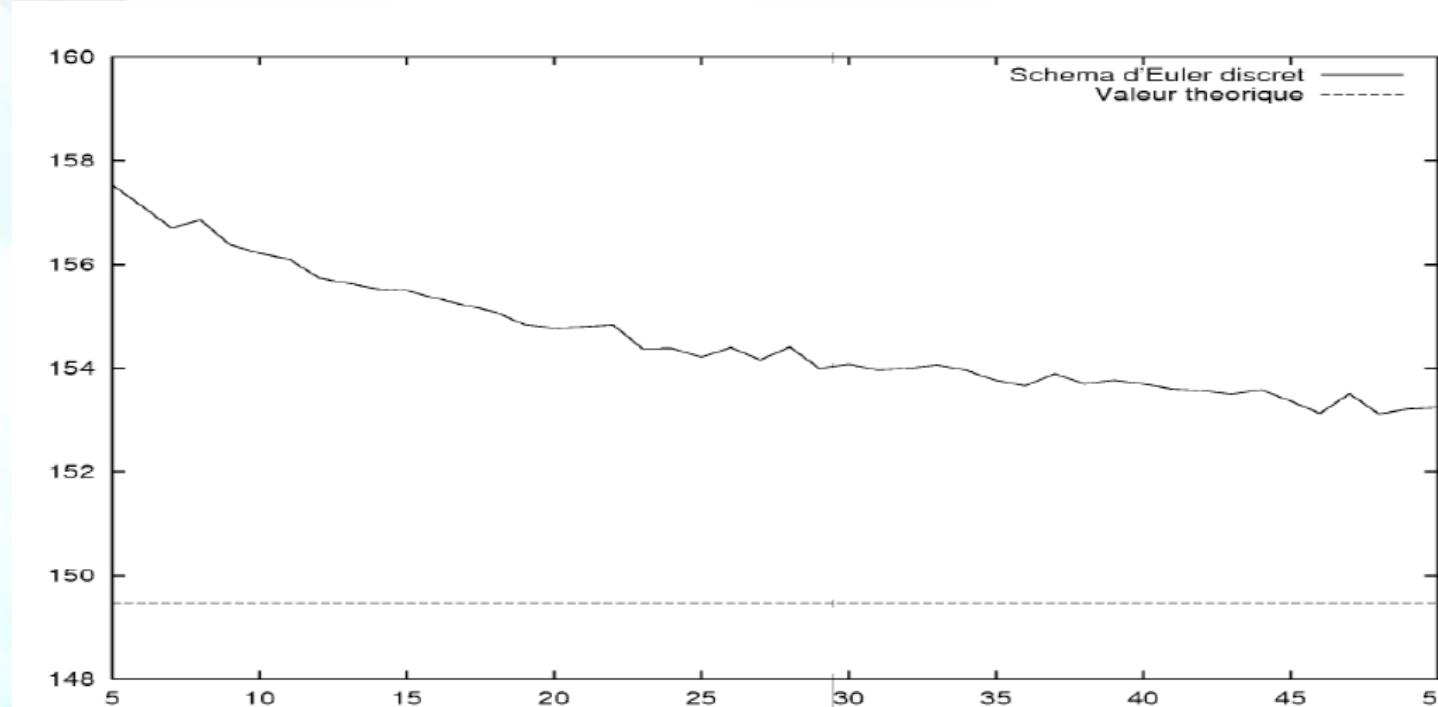
## Options barrières

Payoff de type **out** (clause désactivante)  $\mathbf{1}_{\tau>T} f(X_T)$ , où  $\tau = \inf\{t > 0 \mid X_t \notin D\}$  avec  $D$ ,  $D$  tunnel d'activation.

Stratégie: simuler  $X_{t_1}^n, \dots, X_{t_n}^n$ . Le temps d'arrêt  $\tau$  est approché par  $\tau^n = \min\{t_i, i = 1, \dots, n \mid X_{t_i}^n \notin D\}$ . Cela revient à calculer le payoff à “barrière discrète”:

$$\mathbf{1}_{\forall t_i \leq T, X_{t_i}^n \in D} f(X_T^n)$$

**Exemple:** Put Up and Out de barrière haute  $U$ , en fonction de  $n$  (sous-jacent modèle de Black-Scholes avec  $S_0 = 1000$ ,  $r = 0.02$ ,  $\sigma = 0.2$ ,  $T = 1$ ,  $K = 1300$ ,  $U = 1200$ ).



## Options barrières

© Théo Jalabert



On veut estimer (numériquement)  $\mathbb{E}[f(X_T)]_{\text{CST}}$

### Schéma d'Euler

Initialize  $r, \sigma, T, N, m$

Let  $h = \frac{T}{N}$ ,  $F = 0$

For  $i = 1, \dots, m$

Let  $Y = \log(X_0)$

For  $j = 1, \dots, N$

Simulate  $Z \sim N(0, 1)$

$$Y = Y + (r - \frac{\sigma^2}{2})h + \sigma \sqrt{h} Z$$

IF  $Y \text{ NOT IN } D$

BREAK

END IF

END FOR

$$F = F + e^{-rt} f(e^Y)$$

END FOR

PAYOUT  $\frac{F}{m}$

Rappel:  $\frac{dx}{x} = r dt + \sigma dW_t$

$$dY_t = (r - \frac{\sigma^2}{2})dt + \sigma dW_t$$

→ Erreur en  $O(\frac{1}{\sqrt{m}})$  → convergence assez lente

# Options barrières II

© Théo Jalabert



Stratégie qui surestime systématiquement l'espérance car

$$\mathbf{1}_{\forall t_i \leq T, X_{t_i} \in D} > \mathbf{1}_{\forall t \leq T, X_t \in D}.$$

On peut quand même montrer

$$\mathbb{E} [\mathbf{1}_{\tau^n > T} f(X_T^n)] - \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\tau > T} f(X_T)] = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

L'erreur faible converge en  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  au lieu de  $\frac{1}{n}$  pour le cas sans barrière.

**Reference :** Gobet, E. 2008, *Advanced Monte Carlo methods for barrier and related exotic options*

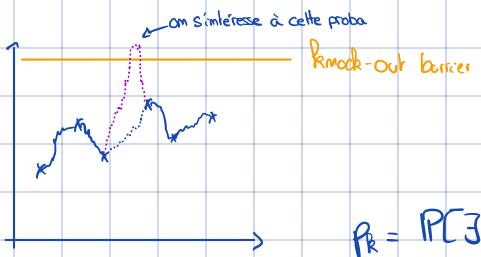
On peut utiliser le **pont Brownien**. Le schéma d'Euler continu s'écrit pour  $t \in [t_k, t_{k+1}[$  :

$$X_t^n = X_{t_k}^n + b(t_k, X_{t_k}^n)(t - t_k) + \sigma(t_k, X_{t_k}^n)(W_t - W_{t_k})$$

For  $k = 0, \dots, n-1$

- ▶ Partant de  $X_{t_k}^n$ , simuler  $X_{t_{k+1}}^n$ ;
- ▶ Si  $X_{t_k}^n \notin D$  ou  $X_{t_{k+1}}^n \notin D$ , alors  $\tau^n \leq T \Rightarrow \text{STOP}$ ;
- ▶ Sinon, calculer  $p_k = \mathbb{P}\left(\exists t \in [t_k, t_{k+1}], X_t^n \notin D \mid X_{t_k}^n = x, X_{t_{k+1}}^n = y\right)$ ;
- ▶ Simuler  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ . Si  $U < p_k$ , alors  $\tau^n \leq T \Rightarrow \text{STOP}$ ;
- ▶ **Calcul du Payoff:** Si  $\tau^n \leq T$ , alors Payoff= 0, sinon Payoff=  $f(X_T^n)$ .

End For.



$$p_k = \mathbb{P}[ \exists t \in [t_k, t_{k+1}] : X_t^* \notin D | X_k^* = x, X_{t_{k+1}}^* = y ]$$

## Evaluation de $p_k$

On doit calculer  $p_k = \mathbb{P} \left( \exists t \in [t_k, t_{k+1}], X_t^n \notin D \mid X_{t_k}^n = x, X_{t_{k+1}}^n = y \right)$

Pour un Brownien géométrique:

$$\frac{dX_t}{X_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

on a

$$\mathbb{P} (\exists t \leq T, X_t \geq U \mid X_0 = x, X_T = y) = \exp \left( -2 \frac{\log(x/U) \log(y/U)}{\sigma^2 T} \right)$$

# Evaluation de $p_k$ II

© Théo Jalabert



Pour un Brownien géométrique, on a trouvé

$$\mathbb{P}(\exists t \leq T, X_t \geq U \mid X_0 = x, X_T = y) = \exp\left(-2 \frac{\log(x/U) \log(y/U)}{\sigma^2 T}\right)$$

**Cas d'une barrière Up**  $D = \{X < U\}$  ou **Down**  $D = \{X > U\}$  (1D) :

$$p_k = \exp\left(-2 \frac{(x - U)(y - U)}{\sigma^2(t_k, x)\Delta_n}\right)$$

**Cas d'une double barrière**  $D = \{U < X < V\}$  (1D) :

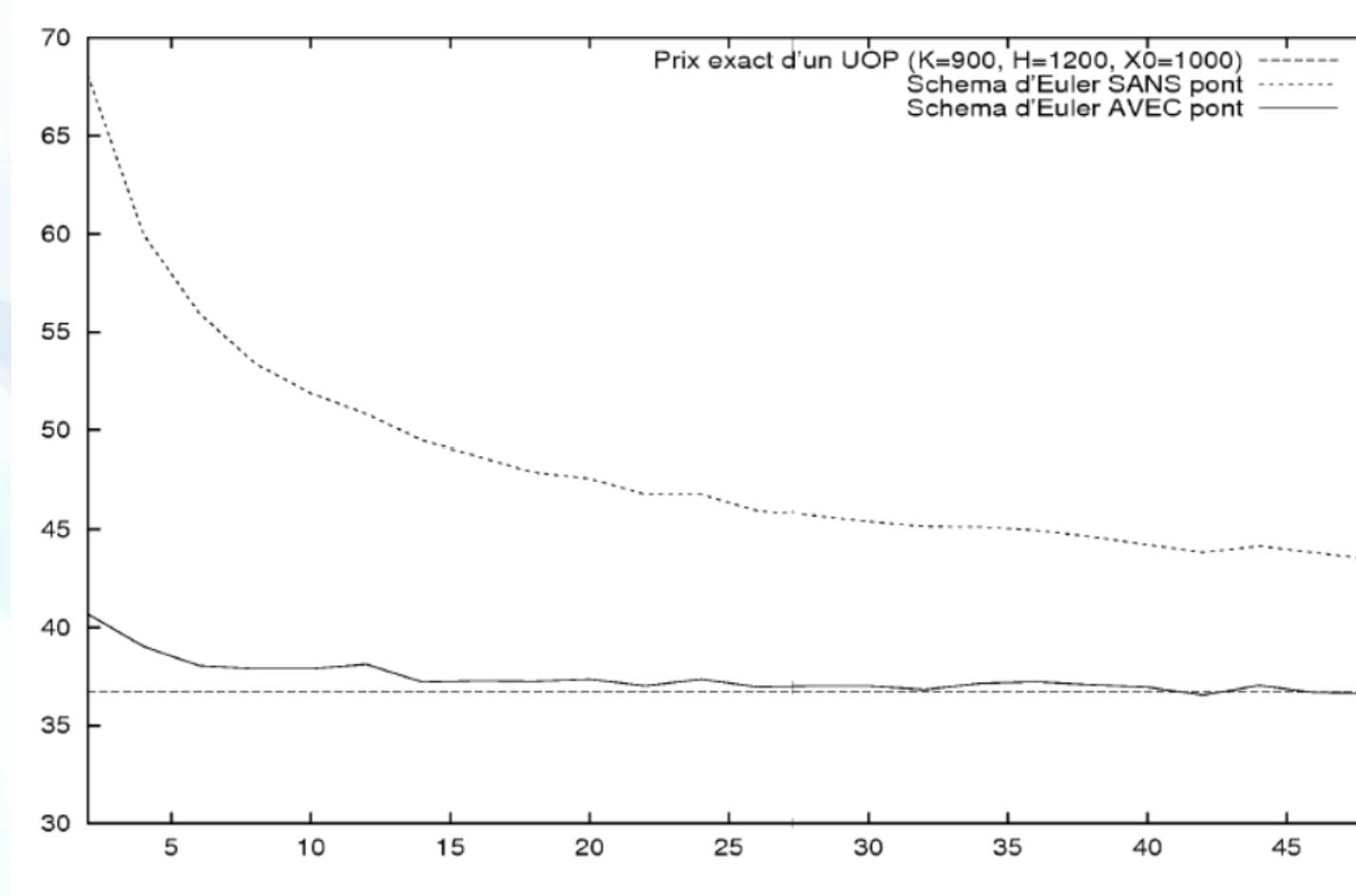
Si  $\frac{x+y}{2} \geq \frac{U+V}{2}$ , la barrière haute est la plus proche :

$$p_k \approx \exp\left(-2 \frac{(x - V)(y - V)}{\sigma^2(t_k, x)\Delta_n}\right)$$

# Comparaison avec le schéma d'Euler classique

© Théo Jalabert

**Comparaison** entre approximation simple (schéma d'Euler discret) et approximation avec le pont Brownien (schéma d'Euler continu) pour un Put Up and Out, en fonction du pas de discréétisation



# Convergence de l'approximation par pont Brownien (admis)

© Théo Jalabert



La technique du pont brownien permet de ramener l'ordre de convergence de l'erreur faible de  $\frac{1}{\sqrt{n}}$  à  $\frac{1}{n}$  :

$$\mathbb{E} [\mathbf{1}_{\tau^n > T} f(X_T^n)] - \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\tau > T} f(X_T)] = O\left(\frac{1}{n}\right)$$

**Reference** : Gobet, E. 2001, *Euler schemes for the weak approximation of killed diffusion*

Preuve de la conséquence du lemme :

Densité jointe de  $(W_t, \max_{t \leq T} W_t)$  donnée par :

$$\rho(z, w) = \mathbb{1}_{\{w \geq z\}} \frac{2(2w-z)}{t_h \sqrt{2\pi t_h}} e^{-\frac{(2w-z)^2}{2t_h}}$$

Calculons

$$\rho = P(\max_{t \leq T} W_t \geq y \mid W_T = x)$$

$$\text{Ic: } \rho = \int_{w \in \mathbb{R}} \mathbb{1}_{w \geq y} \frac{\rho(w, x)}{\frac{2(2w-x)}{t_h \sqrt{2\pi t_h}}} \text{ car } W_t \sim N(0, t_h)$$

$$= \int_{w \in \mathbb{R}} \mathbb{1}_{w \geq y} \mathbb{1}_{w \geq x} \frac{2(2w-x)}{t_h \sqrt{2\pi t_h}} e^{-\frac{(2w-x)^2}{2t_h}} e^{\frac{-|x|^2}{2t_h}} \sqrt{2\pi t_h} dw$$

Sur  $\{w: w \geq y, w \geq x\}$ ,

$$\text{Si } y \leq x, \text{ on a } \mathbb{1}_{w \geq y} \mathbb{1}_{w \geq x} = \mathbb{1}_{w \geq x} \Rightarrow \rho = \int \text{densité} = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Si } y > x, \text{ on a } \mathbb{1}_{w \geq y} \mathbb{1}_{w \geq x} &= \mathbb{1}_{w \geq y} \\ \Rightarrow \rho &= \int_y^\infty 2(2w-x) e^{-\frac{(2w-x)^2}{2t_h}} e^{\frac{-|x|^2}{2t_h}} e^{\frac{-|x|^2}{2t_h}} dw \\ &= \int_y^\infty 2(2w-x) e^{-\frac{2w(w-x)}{t_h}} dw \\ &= \left[ -e^{-\frac{2w(w-x)}{t_h}} \right]_y^\infty \\ &= e^{-\frac{2y(y-x)}{t_h}} \end{aligned}$$

## Option "Up"

© Théo Jalabert

Dans ce cas,

$$P_R = \mathbb{P}(\exists t \in [t_k, t_{k+1}] : X_t \geq L \mid X_{t_k} = x, X_{t_{k+1}} = y)$$

$$= \mathbb{P}(x + \tau \max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} W_t \geq L \mid W_{t_k} = \frac{y-x}{\tau})$$

$$= \mathbb{P}(\max_{t \in [t_k, t_{k+1}]} W_t \geq \frac{L-x}{\tau} \mid W_{t_k} = \frac{y-x}{\tau})$$

$$= e^{-\frac{2(L-x)(L-y)}{\sigma^2 \tau}}$$

Initialize  $\pi, \sigma, T, N, m$

Let  $R = \frac{T}{N}, F = 0$

For  $i = 1, \dots, m$

Let  $Y = \log(X_0)$

For  $j = 1, \dots, N$

$Y' = Y$

Simulate  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$Y = Y + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})h + \sigma \sqrt{h} Z$$

IF  $Y$  NOT IN  $D$

BREAK

ELSE

SIMULATE  $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$

IF  $U < P(Y, Y')$

BREAK

END IF

END IF

END FOR

$$F = F + e^{-\pi T} f(e^Y)$$

END FOR

PAYOUT  $\frac{F}{m}$

$$P = \text{FUNCTION}(X, X', L)$$

$$\text{IF } L \geq \left(\frac{X-X'}{\tau}\right)_+$$

RETURN 1

ELSE

$$\text{RETURN } \left(e^{\frac{-2(L-X)(L-X')}{\sigma^2 \tau}}\right)$$

END IF

END FUNCTION.

$\rightarrow CVg$  en  $O(\frac{1}{n})$