Quelques exercices de révision en Vrac

I-3

Soit (X,Y) de densité $f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$ $(x,y)\in\mathbb{R}^2$

Effectuer le changement de variable

$$(X,Y)\longmapsto(R,\theta) \text{ avec}$$

$$X=R\cos\theta \quad\text{et}\quad Y=R\sin\theta$$

et trouvez la loi de (R,θ)

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$$

$X \perp\!\!\!\perp Y$

$X,Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

Changement de variable :

$$\underbrace{X=R\cos(\theta)}_{h_1(R,\theta)} \quad \underbrace{Y=R\sin(\theta)}_{h_2(R,\theta)}$$

Donc d'après le thm sur le cas bivarié

Donc d'après le thm pour le cas bivarié

$$\Rightarrow f_{R,\theta}(r,\theta) = f_{X,Y}(x,y)\,|J(x,y)|^{-1}\Big|_{x,y=h(r,\theta)}$$

avec $f_{X,Y}(x,y) = \frac{1}{2\pi} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$

et $|J(r,\theta)| = \begin{vmatrix} \frac{\partial h_1}{\partial R} & \frac{\partial h_1}{\partial \theta} \\ \frac{\partial h_2}{\partial R} & \frac{\partial h_2}{\partial \theta} \end{vmatrix}$

$$= \begin{vmatrix} \cos\theta & -R\sin\theta \\ \sin\theta & R\cos\theta \end{vmatrix}$$

$$= R\cos^2\theta + R\sin^2\theta$$

$$= R$$

$$\Rightarrow f_{R,\theta}(r,\theta) = \frac{R}{2\pi} e^{-R^2/2}\, 1_{[0,2\pi[}(\theta)\, 1_{\mathbb{R}_+^*}(R)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{2\pi} 1_{[0,2\pi[}(\theta)}_{\text{distribution uniforme sur } [0,2\pi[} \cdot \underbrace{R e^{-R^2/2}\, 1_{\mathbb{R}_+^*}(R)}_{\text{distribution de Rayleigh}}$$

Exercice I.6 *On considère la fonction suivante*

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}\mathbf{1}_{\{0<x<y\}}.$$

1. *Vérifier que $f_{X,Y}$ définit une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Calculer les densités marginales f_X et f_Y de X et Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?*
3. *Calculer $E(X), E(Y), cov(X,Y)$.*
4. *Déterminer la loi jointe $f_{Z,T}$ du couple (Z,T) défini par :*

$$\begin{cases} Z &= X+Y \\ T &= Y-X \end{cases}$$

5- En déduire les densités marginales de Z et T

$$f_{X,Y}(x,y) = e^{-y}\mathbb{1}_{\{0<x<y\}}$$

1) * f est intégrable sur $\mathbb{R}^2$
* f est positive sur $\mathbb{R}^2$
* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy = \int_0^\infty \int_x^\infty e^{-y}\,dy\,dx$

$$= \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$$

Donc $f_{X,Y}$ définit bien une densité de proba sur $\mathbb{R}^2$

2) Soient $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ $\quad f = e^{-y} 1_{\{0<x<y\}}$

$$f_X(x) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y} 1_{\{0<x<y\}}\,dy$$

$$= \int_x^{\infty} e^{-y} 1_{\{0<x<y\}}\,dy$$

$$= e^{-x} 1_{\mathbb{R}_+}$$

$$f_Y(y) = \int_{\mathbb{R}} f_{X,Y}(x,y)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-y} 1_{\{0<x<y\}}\,dx$$

$$= \int_0^y e^{-y} 1_{\{0<x<y\}}\,dx$$

$$= y e^{-y} 1_{\mathbb{R}_+}$$

Donc $X \not\perp\!\!\!\perp Y$ Car $f_X \times f_Y \neq f_{X,Y}$

3) $\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}_+} e^{-x}\,dx = 1$

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{\mathbb{R}_+} y e^{-y}\,dy = 1$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}\left[(X-1)(Y-1)\right]$$

$$= \mathbb{E}(XY) \underbrace{- \mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y) + 1}_{=-1}$$

$$\mathbb{E}(XY) = \int_{\mathbb{R}^2} xy \, f_{X,Y}(x,y) \, dy \, dx$$

$$= \int_0^\infty \int_x^\infty xy \, e^{-y} \, dy \, dx$$

$$= \int_0^\infty x \, \frac{x+1}{e^x} \, dx = 1$$

$$\Rightarrow Cov(X,Y) = 0$$

4) $\begin{cases} Z = X+Y \\ T = Y-X \end{cases}$

$$\mathbb{E}[\varphi(\underbrace{X+Y}_{Z}, \underbrace{Y-X}_{T})] = \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x+y, y-x) \, f_{X,Y}(x,y) \, dy \, dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} \varphi(x+y, y-x) \, e^{-y} \, 1_{\{0<x<y\}} \, dy \, dx$$

$$= \int^\infty \int^\infty \varphi(x+y, y-x) \, e^{-y} \, dy \, dx$$

Changement de variable :

$$\begin{cases} z = x+y \\ r = y-x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{z-r}{2} \\ y = \frac{z+r}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = \frac{1}{2}dz - \frac{1}{2}dr \\ dy = \frac{1}{2}dz + \frac{1}{2}dr \end{cases}$$

$$dx\,dy = |dx \wedge dy| = \left|\frac{1}{4}dz \wedge dr + \frac{1}{4}dz\wedge dr\right|$$
$$= \frac{1}{2}\,dz\,dr$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \varphi(z,r)\,\frac{1}{2}e^{-\frac{(z+r)}{2}}\,dz\,dr$$

$$\Rightarrow f_{Z,T}(z,r) = \frac{1}{2}e^{-\frac{z+r}{2}}\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^2}(z,r)$$

5) $$f_{Z,T}(z,r) = \underbrace{\frac{1}{4}e^{-z/2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(z)}_{f_Z(z)} \cdot \underbrace{\frac{1}{4}e^{-r/2}\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(r)}_{f_T(r)}$$

Exercice I.7 *Soit (X,Y) un vecteur aléatoire bidimensionnel de densité*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1+xy) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et soit (U,V) un autre vecteur aléatoire bidimensionnel de densité

$$g(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq u \leq 1 \text{ et } -1 \leq v \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. *Vérifier que f et g sont bien des densités de probabilités sur $\mathbb{R}^2$.*
2. *Trouver les densités marginales de (X,Y) et (U,V) notées respectivement f_X, f_Y, g_U et g_V.*
3. *Vérifier que malgré les égalités (en loi) $X \sim U$ et $Y \sim V$, on n'a pas $(X,Y) \sim (U,V)$!*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4}(1+xy) & \text{si } -1 \leq x \leq 1 \text{ et } -1 \leq y \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$g(u,v) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{si } -1 \leq u \leq 1 \text{ et } -1 \leq v \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1) * f et g sont intégrables sur $\mathbb{R}^2$

* Elles sont positives ou nulle sur $\mathbb{R}^2$

* $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1+xy)\,dx\,dy = 1$

et $\displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} g(u,v)\,du\,dv = \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\,du\,dv = 1$

2) $f_X(x) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1+xy)\,dy = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$

$f_Y(y) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}(1+xy)\,dx = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(y)$

$g_U(u) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{4}\,dv = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(u)$

$g_V(v) = \frac{1}{2}\mathbb{1}_{[-1,1]}(v)$

3) On a clairement $X \sim U$ et $Y \sim V$

Or $\forall (x,y,u,v) \in (]-1,1[\setminus \{0\})^4$,

$$\underbrace{f(x,y)}_{=\frac{1}{4}(1+xy)} \neq \underbrace{g(u,v)}_{=\frac{1}{4}}$$

Exercice II.1 *Soient X_1, X_2 deux variables aléatoires réelles indépendantes, de même loi de Laplace (densité $\frac{1}{2}e^{-|x|}$). On définit $X = (X_1, X_2)$, ainsi que Y_1 et Y_2 par $Y_1 = X_1 - X_2$, $Y_2 = X_1 + X_2$.*

1. *Calculer la fonction caractéristique de X_1 et X_2, puis celle de X.*
2. *Calculer les fonctions caractéristiques de Y puis des marginales Y_1 et Y_2.*
3. *Montrer que Y_1 et Y_2 ont la même loi.*
4. *Montrer que $Cov(Y_1, Y_2) = 0$*
5. *Montrer que Y_1 et Y_2 ne sont pas indépendantes.*

Exercice II - 1

X_1 et X_2 suivent une loi de Laplace

1) $$\phi_{X_1}(t) = \int_{\mathbb{R}} e^{itx_1} \, d\mathbb{P}_{X_1}(x_1)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} e^{itx_1} \frac{1}{2} e^{-|x_1|} dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{2} e^{itx_1 - |x_1|} dx_1$$

$$= \int_{\mathbb{R}_-} \frac{1}{2} e^{itx_1 + x_1} dx_1 + \int_{\mathbb{R}_+} \frac{1}{2} e^{itx_1 - x_1} dx_1$$

$u = itx_1 + x_1$ $\qquad$ $u = itx_1 - x_1$

$du = (it+1)\,dx_1$ $\qquad$ $du = (it-1)\,dx_1$

$$= \frac{1}{2(it+1)} \int_{\mathbb{R}_-} e^u du + \frac{1}{2(it-1)} \int_{\mathbb{R}_+} e^u du = \frac{1}{2(it+1)} - \frac{1}{2(it-1)}$$

$$= \frac{1}{1+t^2}$$

De m̂, $\phi_{X_2}(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$

$X = (X_1, X_2)$ et $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$

$$\Rightarrow \phi_X(t_1, t_2) = \phi_{X_1}(t_1)\,\phi_{X_2}(t_2) = \frac{1}{1+t_1^2}\,\frac{1}{1+t_2^2}$$

2) Rappel : $\phi_{AX+B} = e^{i\langle t, B\rangle}\,\phi_X({}^tA \cdot t)$

$$Y_1 = X_1 - X_2 \qquad Y_2 = X_1 + X_2$$

$$Y = \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \phi_Y(t_1, t_2) = \phi_{Y_1, Y_2}(t_1, t_2) = \frac{1}{1+(t_1+t_2)^2} \cdot \frac{1}{1+(t_2-t_1)^2}$$

$$\phi_{Y_1}(t) = \phi_Y(t, 0) = \frac{1}{(1+t^2)^2} = \phi_Y(0, t) = \phi_{Y_2}(t)$$

$$\Rightarrow Y_1 \sim Y_2$$

4) $$\mathrm{Cov}(Y_1, Y_2) = \underbrace{\mathbb{E}(Y_1 Y_2)}_{= \mathbb{E}(X_1^2) - \mathbb{E}(X_2^2) = 0} - \underbrace{\mathbb{E}(Y_1)}_{= \mathbb{E}(X_1) - \mathbb{E}(X_2) = 0}\mathbb{E}(Y_2)$$

$$= 0$$

5) $Y_1 \cancel{\perp\!\!\!\perp} Y_2$ Car

$$\Phi_{Y_1,Y_2}(t_1,t_2) = \frac{1}{1+(t_1+t_2)^2} \cdot \frac{1}{1+(t_2-t_1)^2}$$

$$\neq$$

$$\Phi_{Y_1}(t_1) \cdot \Phi_{Y_2}(t_2) = \frac{1}{(1+t_1^2)^2} \cdot \frac{1}{(1+t_2^2)^2}$$