Théorie des options

TD3 - Options. Relations d'arbitrage.

1. Montrer que sous l'hypothèse AOA, la prime d'un CALL (ou d'un PUT) est une fonction convexe du prix d'exercice [1].
2. On considère un CALL sur un actif S ne versant pas de dividendes, de maturité T et de prix d'exercice K.
   (a) Montrer que l'option américaine vaut plus qu'une option européenne de mêmes caractéristiques.
   (b) Montrer qu'à tout instant, il vaut mieux vendre l'option américaine à son prix de marché, qu'exercer le droit qu'elle donne d'acheter l'actif S.
   (c) En déduire que l'option américaine a la même valeur que son homologue européen.
3. Avec les notations du cours, montrer l'inégalité
$$S_0 - K \leq \hat{C}_0 - \hat{P}_0 \leq S_0 - Ke^{-rT}.$$
4. (a) Considérons deux options d'achat européennes sous le même sous-jacent, de même échéance T, de prix d'exercice K_1 et K_2 avec $K_1 \leq K_2$ et de primes C_0^1 et C_0^2. Montrer que l'hypothèse AOA implique $C_0^1 - C_0^2 \leq e^{-rT}(K_2 - K_1)$ où r est le taux sans risque.
   (b) Les options européennes à échéance T (T=1 an), "X/T/40/CALL" et "X/T/45/CALL", s'échangent respectivement à 6 et 1 euro. Le taux sans risque est de 6%. L'action X cote actuellement 40 euros. Montrer qu'il existe des opportunités d'arbitrage. Quelle stratégie faut-il metre en place pour en profiter ?
5. Les options européennes à échéance T (T=1 an), "XYZ/T/50/CALL" et "XYZ/T/50/PUT" sont à la monnaie et cotent respectivement 4 et 5 euros. Les bons du Trésor, de valeur faciale 50000 euros et à échéance dans un an, s'échangent actuellement à 49000 euros.
   (a) La parité CALL-PUT est-elle respectée ?
   (b) Quelle stratégie conseillez-vous ?
6. Considérons l'option européenne "ABC/T/75/CALL" ainsi que l'option américaine "ABC/T/75/CALL", toutes les deux à échéance T, T=1 an. Les placements sans risque se font au taux unique de 10% et l'action ABC s'échange à 80 euros.
   (a) Détérminez le prix minimum de ces deux options.
   (b) Supposons que l'action ABC versera dans trois mois un dividende. Déterminez le "dividende seuil" (au-délà duquel il est optimal d'exercer le CALL américain la veille du détachement du dividende) ?
   (c) L'action ABC versera dans trois mois un dividende. Que deviennent les prix minimum précedents si le dividende est de 4 euros. Même question si le dividende passe à 8 euros.
7. Considérons un CALL et un PUT européens sur l'action de l'entreprise ABC. Ils possèdent le même prix d'exercice et arrivent à échéance dans un an. A cette même date, l'entreprise ABC versera un dividende. Considérons la stratégie qui suit :
   • emprunt d'un montant égal à la valeur actualisée du Strike augmenté de celle du dividende ;
   • achat d'une option de vente ;
   • achat d'un sous-jacent ;
   • vente d'une option d'achat ;

1. En utilisant le même raisonnement, on peut également montrer que la prime d'une option est une fonction convexe du sous-jacent.

(a) Quelle est le montant initial correspondant au coût d'une telle stratégie ?

(b) Placez-vous à l'échéance et analysez les résultats de la stratégie précédente.

(c) Déduisez-en le coût initial de la stratégie.

(d) Sous l'hypothèse AOA, donnez la relation de parité CALL-PUT en présence du dividende.

(e) Vous avez sélectionné sur le marché quatre options :
- "ABC Sept 40 CALL" de prix 15 euros,
- "ABC Sept 50 CALL" de prix 8.36 euros,
- "ABC Sept 40 PUT" de prix 1.71 euros,
- "ABC Sept 50 PUT" de prix 4.5 euros.

Sachant que l'action ABC s'échange à 52 euros, déterminez le taux d'intérêt sans risque et le dividende versé par l'entreprise ABC à l'échéance.

8. Un investisseur détenant un portefeuille composé de 200 CALL identiques en position longue et de 40 actions (le sous-jacent des CALL) en position courte désire le rendre gamma-neutre et delta-neutre simultanément. Ce portefeuille de valeur V est déjà delta-neutre, mais son coefficient gamma est égal à 3. Notre investisseur sélectionne sur le marché un PUT doté d'un delta de -0.5 et un gamma de 0.015.

(a) Calculez le delta et le gamma d'un CALL.

(b) Combien de PUT doit-il détenir (en position courte ou longue) afin d'obtenir un portefeuille gamma-neutre de valeur $V^* = V + \alpha P_0$ où α et P_0 désignent respectivement le nombre de PUT et la prime d'un PUT.

(c) Calculez le delta du portefeuille ainsi obtenu.

(d) Déduisez-en un portefeuille de valeur $V^{**} = V^* + \beta S_0 = V + \alpha P_0 + \beta S_0$ à la fois delta-neutre et gamma-neutre, où β et S_0 désignent respectivement le nombre de sous-jacents relatif au PUT et la valeur de ce sous-jacent.

9. Une action, cotée au prix $S_0 = 42$, fait l'objet d'options européennes. Le taux d'intérêt sans risque annuel (continu) r , est égal à 5 %. On considère les 4 options suivantes :
- CALL : $C_0^1 = 8.772$, $K_1 = 40$, $T = 9$ mois, $\Delta(C^1) = 0.661$, $\Gamma(C^1) = 0.02$,
- CALL : $C_0^2 = 5.627$, $K_2 = 48$, $T = 9$ mois, $\Delta(C^2) = 0.498$, $\Gamma(C^2) = 0.026$,
- PUT : P_0^1, $K_1 = 40$, $T = 9$ mois,
- PUT : P_0^2, $K_2 = 48$, $T = 9$ mois.

(a) Calculer la prime des PUT P_0^1 et P_0^2, ainsi que leur delta et leur gamma.

(b) Soit la stratégie consistant en l'achat d'un CALL C^1, de deux PUT P^1 et d'un PUT P^2.

i. Représenter graphiquement le résultat de la stratégie en fonction du cours de l'action à l'échéance.

ii. Calculer le ou les points morts de la stratégie (ce sont les points où la stratégie ne rapporte rien ni à l'acheteur ni au vendeur).

iii. A partir de quel cours de l'action à l'échéance le profit de la stratégie est-il supérieur à celui de la stratégie consistant à acheter le put P^1 ?

iv. Calculer le delta et le gamma de la position.

Exercice 1 :

Soient K_1 et K_3, avec $K_1 < K_3$ et $\lambda \in]0,1[$

On veut mq $C_0(\lambda K_1 + (1-\lambda)K_3) \leq \lambda C_0(K_1) + (1-\lambda)C_0(K_3)$

On pose $K_2 = \lambda K_1 + (1-\lambda)K_3$

$\Rightarrow K_1 < K_2 < K_3$

On suppose $C_0(K_2) > \lambda C_0(K_1) + (1-\lambda)C_0(K_3)$

Opération	$t=0$	$t=T$
Vente $C_0(K_2)$	$C_0(K_2)$	$-(S_T - K_2)_+$
Achat $\lambda C_0(K_1)$	$-\lambda C_0(K_1)$	$\lambda(S_T - K_1)_+$
Achat $(1-\lambda)C_0(K_3)$	$-(1-\lambda)C_0(K_3)$	$(1-\lambda)(S_T - K_3)_+$
Placement du reste	$-[C_0(K_2) - \lambda C_0(K_1) - (1-\lambda)C_0(K_3)]$	$[C_0(K_2) - \lambda C_0(K_1) - (1-\lambda)C_0(K_3)]e^{rT}$

En $t=0$, $X_0 = 0$

En $t=T$, $X_T = -(S_T - K_2)_+ + \lambda(S_T - K_1)_+ + (1-\lambda)(S_T - K_3)_+ + [C_0(K_2) - \lambda C_0(K_1) - (1-\lambda)C_0(K_3)]e^{rT}$

* Si $S_T < K_1$, $X_T = (C_0(K_2) - \lambda C_0(K_1) - (1-\lambda)C_0(K_3))e^{rT} \geq 0$
* Si $S_T \in [K_1, K_2[$, $X_T = \lambda(S_T - K_1) + [C_0(K_2) - \lambda C_0(K_1) - (1-\lambda)C_0(K_3)]e^{rT} \geq 0$
* Si $S_T \in [K_2, K_3[$, $X_T = (1-\lambda)(K_3 - S_T) + [C_0(K_2) - \lambda C_0(K_1) - (1-\lambda)C_0(K_3)]e^{rT} \geq 0$
* Si $S_T > K_3$, $X_T = (C_0(K_2) - \lambda C_0(K_1) - (1-\lambda)C_0(K_3))e^{rT} \geq 0$

On a donc construit une OA $\Rightarrow$ le prix du call est une fonct° convexe du strike

Exercice 2 :

a) Notons C_t et P_t les prix d'un CALL et d'un PUT européens à l'instant t.

et $\underline{C}_t$ et $\underline{P}_t$ ceux de leurs homologues américains.

Montrons que $\underline{C}_t \geq C_t$.

Supposons $\underline{C}_0 < C_0$

$\longrightarrow$ On achète le CALL américain et on vend l'européen puis on place le reste

Opération	$t=0$	$t=T$
Achat CALL américain et on le garde jusqu'en T	$-\underline{C}_0$	$(S_T-K)_+$
Vente CALL européen	C_0	$-(S_T-K)_+$
Placem^t du reste	$-(C_0-\underline{C}_0)$	$(C_0-\underline{C}_0)e^{rT}>0$
Total	0	>0

$\Longrightarrow$ OA Ce qui est absurde

Donc $\underline{C}_0 \geq C_0$. Donc en généralisant $\forall t$ $\underline{C}_t \geq C_t$.

b)

Exercice 3:

On veut mq $S_0 - K \le \hat{C}_0 - \hat{P}_0 \le S_0 - Ke^{-rT}$

La parité call-put s'écrit : $C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$

Or $C_0 = \hat{C}_0$ et $\hat{P}_0 \ge P_0$

D'où $\hat{C}_0 - \hat{P}_0 = C_0 - \hat{P}_0 \le C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$

et $S_0 - K \le \hat{C}_0 - \hat{P}_0$

Supposons $S_0 - K - \hat{C}_0 + \hat{P}_0 > 0$

Opération	$t=0$	$t=T$
Vente S	S_0	$-S_T$
Vente $\hat{P}$	$\hat{P}_0$	$-(K-S_T)_+$
Achat $\hat{C}$	$-\hat{C}_0$	$\hat{C}_T$
Placement $S-\hat{C}-\hat{P}$	$-(S_0-\hat{C}_0+\hat{P}_0)$	$(S_0-\hat{C}_0+\hat{P}_0)e^{rT}$

en $t=0$, $X_0 = 0$

en $t=T$, $X_T = \hat{C}_T - S_T - (K-S_T)_+ + (S_0 - \hat{C}_0 + \hat{P}_0)e^{rT}$ avec $\hat{C}_T \ge (S_T - K)_+$

donc $X_T \ge (S_T-K)_+ - S_T - (K-S_T)_+ + (S_0 + \hat{P}_0 - C_0)e^{rT}$

Si $S_T > K$:

$$X_T \ge S_T - K - S_T + (S_0 + \hat{P}_0 - C_0)e^{rT}$$
$$\ge S_0 + \hat{P}_0 - C_0 - K \ge 0$$

Si $S_T < K$:

$$X_T \ge -S_T - (K - S_T) + (S_0 + \hat{P}_0 - C_0)e^{rT} \ge 0$$

=> OA absurde

Donc $S_0 - K - \hat{C}_0 + P_0 \leq 0$

D'où $S_0 - K \leq \hat{C}_0 - \hat{P}_0 \leq S_0 - Ke^{-rT}$

Preuve par AOA

- Supposons que $X_T=Y_T$ et que $X_0 < Y_0$ et proposons la stratégie suivante : à l'instant t = 0, achat de X, vente de Y et placement de $Y_0 - X_0 > 0$ à la banque.
- La valeur du portefeuille à l'instant t = T est $X_T - Y_T$ plus ce qu'a rapporté l'argent à la banque, qui est toujours > 0.
- On a construit une opportunité d'arbitrage. Donc AOA implique $X_0 \leq Y_0$.
- De manière similaire, on obtient également $X_0 \geq Y_0$, si bien que $X_0 = Y_0$.
- *Remarque* : Comme d'habitude, pour créer un arbitrage, on a acheté le moins cher et vendu le plus cher. Vu qu'ils ont la même valeur en T, on y gagne, logique...

OPÉRATION	EN 0	EN T
Achat de X	$-X_0$	X_T
Vente de Y	Y_0	$-Y_T$
Placement du gain à la banque	$Y_0 - X_0 > 0$	$(Y_0 - X_0)e^{rT} > 0$
TOTAL	0	>0

Exercice 5 :

$T = 1$ an

$C_0 = 4€$

$P_0 = 5€$

$Ke^{-rT} = 49\,000$

Exercice 7 :

Stratégie :

* emprunt de $(K+D)e^{-rT}$
* Achat PUT $-P_0$
* Achat Sous-Jacent $-S_0$
* Vente CALL $+C_0$

a) En 0, $X_0 = C_0 + (K+D)e^{-rT} - P_0 - S_0$

b) A l'échéance T, $X_T = -(S_T - K)_+ - (K+D) + (K - S_T)_+ + (S_T + D)$

Si $S_T < K$, $X_T = -(K+D) + (K - S_T) + (S_T + D) = 0$

Si $S_T \geqslant K$, $X_T = -(S_T - K) - (K+D) + (S_T + D) = 0$

c) A $t = T$ le solde est nul, donc investissement nul.

d) Sous AOA et avec dividende la parité CALL-PUT devient :

$$C_0 + (K+D)e^{-rT} - P_0 - S_0 = 0$$ sinon arbitrage.

e) On a sélectionné 4 options sur le marché :

* "ABC Sept 40 CALL" de prix 15€
* "ABC Sept 50 CALL" de prix 8.36€
* "ABC Sept 40 PUT" de prix 1.71€
* "ABC Sept 50 PUT" de prix 4.5€

L'action ABC s'échange à 52€

On va donc utiliser 2 fois la relation de parité CALL-PUT.

* $15 + (40+D)e^{-r} - 1.71 - 52 = 0 \Rightarrow (40+D)e^{-r} = 38.71$
* $8.36 + (50+D)e^{-r} - 4.5 - 52 = 0 \Rightarrow (50+D)e^{-r} = 48.14$

$\Rightarrow 10e^{-r} = 9.43 \Rightarrow e^{-r} = 0.943$

$\Rightarrow r = -\ln(0.943) = 5.87\%$ et $D = 1{,}05€$

Exercice 8 :

$V = \begin{cases} \text{Achat 200 CALL} \\ \text{Vente 40 Actions} \end{cases}$

$V^* = V + \alpha$

$V^* = \begin{cases} +200 \text{ CALL} \\ -40\,S \\ -200 \text{ PUT} \end{cases}$

$\Delta(V) = 0 \quad \Gamma(V) = 3$

$\Gamma(V^*) = 0 = \Gamma(V) + \alpha\,\Gamma(P)$
$= 3 + \alpha \times 0{,}015$
$\Rightarrow \boxed{\alpha = -200}$

1) $\Delta(C) = 0{,}2 \quad \Gamma(C) = 0{,}015$

2) $\Delta(P) = -\frac{1}{2} \quad \Gamma(P) = 0{,}015$

$\Delta(V^*) = 200\,\Delta(C) - 40\,\Delta(S) - 200\,\Delta(P)$
$= 100$

3) $V^{**} = V^* + \beta S \qquad \Delta(V^{**}) = \Delta(V^*) + \beta$

$\Rightarrow \boxed{\beta = -100}$

$\Gamma(V^{**}) = \Gamma(V^*) + \beta\,\cancel{\Gamma(S)} = 0$

$V^{**} = \begin{cases} 100 \text{ CALL} \\ -200 \text{ PUT} \\ -140 \text{ Actions} \end{cases}$

Δ-neutre $\underline{\underline{\text{et}}}$ Γ-neutre.

Exercice 9:

$S_0 = 42$; $r = 5\%$

4 options :

* CALL : $C_0^1 = 8.772$, $K_1 = 40$, $T = 9$ mois, $\Delta(C^1) = 0.661$, $\Gamma(C^1) = 0.02$
* CALL : $C_0^2 = 5.627$, $K_2 = 48$, $T = 9$ mois, $\Delta(C^2) = 0.498$, $\Gamma(C^2) = 0.026$
* PUT : P_0^1 , $K_1 = 40$, $T = 9$ mois
* PUT : P_0^2 , $K_2 = 48$, $T = 9$ mois.

a) On utilise la parité CALL-PUT : $C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT}$

* Pour $P_0^1 \Rightarrow P_0^1 = C_0^1 - S_0 + K_1 e^{-rT}$

$$= 8.772 - 42 + 40 e^{-5\% \times \frac{9}{12}}$$
$$= 5.30$$

puis $\Delta(P^1) = \Delta(C^1) - 1 = 0.661 - 1 = -0.339$

$\Gamma(P^1) = \Gamma(C^1) = 0.02$

* Pour $P_0^2 \Rightarrow P_0^2 = C_0^2 - S_0 + K_2 e^{-rT}$

$$= 5.627 - 42 + 48 e^{-5\% \times \frac{9}{12}}$$
$$= 9.860$$

puis $\Delta(P^2) = \Delta(C^2) - 1 = 0.498 - 1 = -0.502$

$\Gamma(P^2) = \Gamma(C^2) = 0.026$

b) Stratégie :
* Achat CALL C^1
* Achat 2 PUT P^1
* Achat PUT P^2

Opération	En 0	En T
Achat C^1	$-C_0^1$	$(S_T - K_1)_+$
Achat $2P^1$	$-2P_0^1$	$2(K_1 - S_T)_+$
Achat P^2	$-P_0^2$	$(K_2 - S_T)_+$

$$\Rightarrow \quad \text{Gains} = (S_T - K_1)_+ - C_0^1 + 2(K_1 - S_T)_+ - 2P_0^1 + (K_2 - S_T)_+ - P_0^2$$

$$= \left[(S_T - K_1)_+ + 2(K_1 - S_T)_+ + (K_2 - S_T)_+\right] - \left[C_0^1 + 2P_0^1 + P_0^2\right]$$

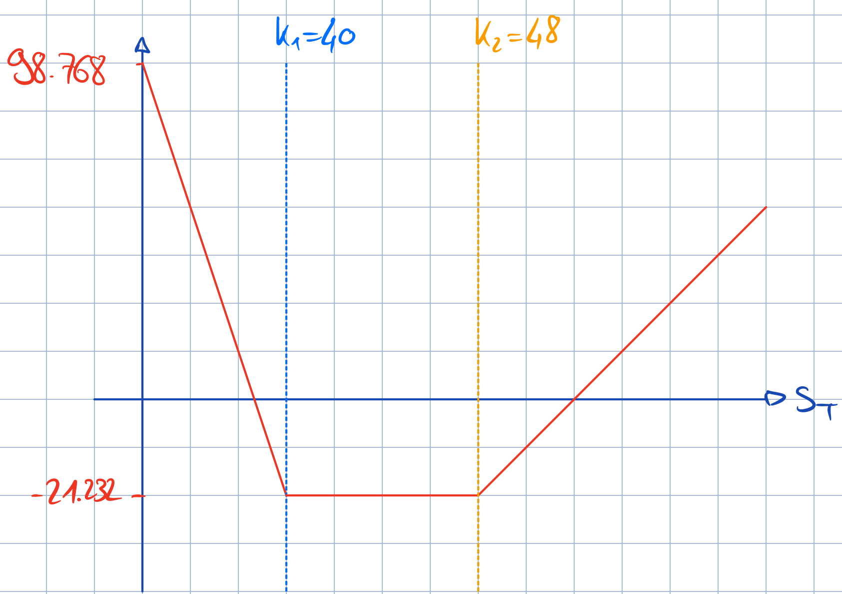
$* \; S_T < K_1$: $\text{Gains} = 2(K_1 - S_T) + (K_2 - S_T) - [C_0^1 + 2P_0^1 + P_0^2]$

$$= -3S_T + 2K_1 + K_2 - [C_0^1 + 2P_0^1 + P_0^2] = -3S_T + 98.768$$

$* \; S_T \in [K_1 ; K_2[$: $\text{Gains} = (S_T - K_1) + (K_2 - S_T) - [C_0^1 + 2P_0^1 + P_0^2]$

$$= K_2 - K_1 - [C_0^1 + 2P_0^1 + P_0^2] = -21{,}232$$

$* \; S_T \geq K_2$: $\text{Gains} = (S_T - K_1) - [C_0^1 + 2P_0^1 + P_0^2] = S_T - 69{,}232$



ii) Points morts $\Leftrightarrow$ S_T tq Gains $= 0$

$* \;$ Si $S_T < K_1$, Gains $= 0 \Leftrightarrow -3S_T + 98.768 = 0$

$$\Leftrightarrow S_T = \frac{98.768}{3} = 32.923$$

$* \;$ Si $S_T > K_2$, Gains $= 0 \Leftrightarrow S_T - 69{,}232 = 0$

$$\Leftrightarrow S_T = 69{,}232$$

iii) On cherche le plus petit S_T tq Gains $> -P_0^1 + (K_1 - S_T)_+$

$\Leftrightarrow$ On cherche S_T tq $-29{,}232 + (S_T - 40)_+ + 2(40 - S_T)_+ + (48 - S_T)_+ > -5{,}30 + (40 - S_T)_+$

Pour $S_T < 40$: $-29,232 + 2(40 - S_T) + (48 - S_T) > -5,30 + (40 - S_T)$

$\Leftrightarrow 98.768 - 3S_T > 34.7 - S_T$

$\Leftrightarrow S_T < 32.034$

Donc c'est à partir de $S_T = 32.034$ que le profit de la stratégie est supérieur à celui de la stratégie consistant à acheter le put P^1

iv) $\Delta(C^1 + 2P^1 + P^2) = \Delta(C^1) + 2\Delta(P^1) + \Delta(P^2)$
$= 0.661 - 2 \times 0.339 - 0.502$
$= -0.519$

$\Gamma(C^1 + 2P^1 + P^2) = \Gamma(C^1) + 2\Gamma(P^1) + \Gamma(P^2)$
$= 0.02 + 2 \times 0.02 + 0.026$
$= 0.086$