Exam MAD 2019-2020

■ : points attribués

(1) 1) a) Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Mq $\mathbb{P}(X > t+s \mid X > t) = \mathbb{P}(X > s)$ $\forall s,t > 0$

Soit $s,t > 0$, $\mathbb{P}(X>t+s \mid X>t) = \dfrac{\mathbb{P}(X>t+s \cap X>t)}{\mathbb{P}(X>t)}$

$= \dfrac{\mathbb{P}(X>t+s)}{\mathbb{P}(X>t)}$ Car $\{X>t\} \subset \{X>t+s\}$ Car $s,t>0$

Or $\mathbb{P}(X>t+s) = \int_{t+s}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-e^{-\lambda x}]_{t+s}^{\infty} = e^{-\lambda(t+s)}$

et $\mathbb{P}(X>t) = \int_t^{\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = [-e^{-\lambda x}]_t^{\infty} = e^{-\lambda t}$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}(X>t+s \mid X>t) = \frac{e^{-\lambda(t+s)}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda s}$$

(1) b) Rappeler la définition d'un processus de Poisson $(N_t)_{t\geq 0}$

Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de va iid tq $\forall i$ $X_i \sim \mathcal{E}(\lambda)$ et un processus de renouvellement tq $\begin{cases} S_0 = 0 \\ S_n = S_{n-1} + X_n \end{cases}$

On appelle Processus de Poisson homogène d'intensité $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t$ le processus de comptage associé à S_n :

$$N_t = \text{Card}\{n \geq 1,\ S_n \leq t\} = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{\{S_n \leq t\}}$$

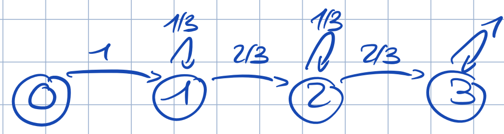
(1) c) Soit $(N_t)_{t\geq 0}$ un Processus de Poisson, mq $\mathbb{P}(N_t = k) = \dfrac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}$, $k \geq 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_t = k) &= \mathbb{P}(S_k \leq t,\ S_{k+1} > t) \\
&= \mathbb{P}(S_k \leq t,\ S_k + \Delta^S_{k+1} > t) \qquad \Delta^S_{k+1} = S_{k+1} - S_k \sim \mathcal{E}(\lambda) \\
&= \int_0^t \int_{t-x}^{\infty} f_{S_k, \Delta^S_{k+1}}(x,y)\,dy\,dx \\
&= \int_0^t \int_{t-x}^{\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda x} x^{k-1}}{(k-1)!} \lambda e^{-\lambda y}\,dy\,dx \\
&= \int_0^t \frac{\lambda^k e^{-\lambda x} x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\lambda(t-x)}\,dx = \frac{\lambda^k e^{-\lambda t}}{(k-1)!} \int_0^t x^{k-1}\,dx = \frac{(\lambda t)^k e^{-\lambda t}}{k!}
\end{aligned}$$

2) a) $E = \{0, 1, 2, 3\}$ $\qquad \mu = (1, 0, 0, 0)$

1

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



1 b) (X_n) n'est pas irréductible car tous les états ne communiquent pas.

Par exemple il est impossible de retourner dans un autre état lorsque nous sommes en 3.

- $\{0; 1; 2\}$ est une classe transiente et $\{3\}$ est une classe absorbante closes irréductible

D'où chaîne non irréductible.

2 c) L'espace d'état est fini $\Rightarrow$ il existe au moins une mesure stationnaire.

Elle est unique car nous avons qu'une seule classe fermée.

La loi stationnaire est donnée par $\pi = (0, 0, 0, 1)$.

$$(a\ b\ c\ d) \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ & 1/3 & 2/3 & 0 \\ & & 1/3 & 2/3 \\ & & & 1 \end{pmatrix} = \left(0, a + \frac{b}{3}, \frac{2b}{3} + \frac{c}{3}, \frac{2c}{3} + d\right)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c = 0 \\ d = d \end{cases} \quad \text{et } \sum \pi_i = 1 \Rightarrow d = 1$$

1 d) $\tau_3 = \inf\{n \geq 0, X_n = 3\}$

$$\{\tau_3 = n\} = \bigcap_{k=0}^{n-1} \{X_k \neq 3\} \cap \{X_n = 3\} \in \mathcal{F}_n \quad \text{avec } \mathcal{F}_n = \sigma(X_0, \ldots, X_n)$$

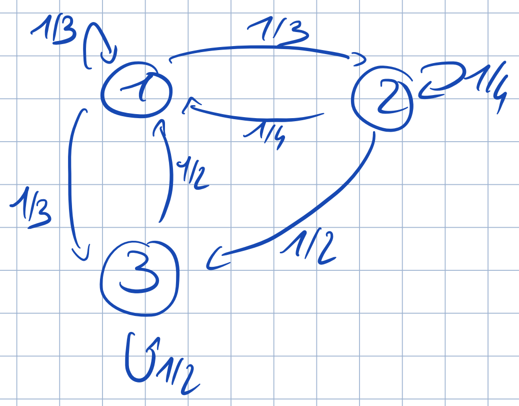
2 e) $\mathbb{E}_0[\tau_3] = \mathbb{E}[\tau_3 \mid X_0 = 0] = ?$ $\qquad$ Revoir

$$\begin{cases} \mathbb{E}_0[\tau_3] = 1 + \mathbb{E}_1(\tau_3) \\ \mathbb{E}_1(\tau_3) = 1 + \mathbb{E}_1(\tau_3)/3 + 2\mathbb{E}_2(\tau_3)/3 \\ \mathbb{E}_2(\tau_3) = 1 + 2\mathbb{E}_2(\tau_3)/3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbb{E}_0(\tau_3) = 11/2 \\ \mathbb{E}_1(\tau_3) = 9/2 \\ \mathbb{E}_2(\tau_3) = 3 \end{cases}$$

1 3) a) $E = \{ \underset{1}{\text{Maison}}, \underset{2}{\text{ISFA}}, \underset{3}{\text{Bar}} \}$

$\mu = (1/3, 1/3, 1/3)$



$$Q = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

1 b) Oui tous les états communiquent

1 c) Tous les état sont de m̂ classes $\Rightarrow$ ils ont tous la m̂ période qui est égale à 1.

$$d(1) = \text{pgcd}(1, 2, \dots) = 1.$$

2 d) Espace d'états fini et chaîne irréductible $\Rightarrow$ existence d'une unique mesure stationnaire.

$\pi = (a \; b \; c)$

$$\pi Q = \pi \Rightarrow (a \; b \; c) \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \end{pmatrix} = (a \; b \; c)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{3} + \frac{b}{4} + \frac{c}{2} = a \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = b \\ \frac{a}{3} + \frac{b}{2} + \frac{c}{2} = c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{2}{3}a = \frac{b}{4} + \frac{c}{2} \\ \frac{3b}{4} = \frac{a}{3} \\ \frac{c}{2} = \frac{a}{3} + \frac{b}{2} \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_1 \leftarrow 12L_1 \\ L_2 \leftarrow 12L_2 \\ L_3 \leftarrow 6L_3}}{\Rightarrow} \begin{cases} 8a = 3b + 6c \\ 9b = 4a \\ 3c = 2a + 3b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 8a = 3b + 6c \\ 9b = 4a \\ 3c = 2a + \frac{4}{3}a = \frac{10}{3}a \end{cases}$$

$\Rightarrow \pi = (a, \frac{4}{9}a, \frac{10}{9}a)$

$\Rightarrow a = 9/23$ $\Rightarrow \pi = (\frac{9}{23}, \frac{4}{23}, \frac{10}{23})$

4) $S_r = \sum_{i=1}^{N_r} X_i \quad r \geq 0$ et $(N_r) \sim PPP(\lambda)$

$R_r = (S_r - r)_+ \quad r \geq 0.$

(1) a) $\mathbb{P}(N_{11} - N_8 \in \{2,3,4\}) = \mathbb{P}(N_3 = 2) + \mathbb{P}(N_3 = 3) + \mathbb{P}(N_3 = 4)$

$$= \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^2}{2!} + \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^3}{3!} + \frac{e^{-3\lambda}(3\lambda)^4}{4!}$$

(2) b) $X \sim \text{Weibull}(\alpha, \beta)$

$$f_X(x) = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right) \quad x > 0, \alpha, \beta > 0.$$

$k \geq 1$, $\mathbb{E}[X^k] = \int_0^{\infty} x^k \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} \exp\left(-\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}\right) dx$

$$= \int_0^{\infty} (\beta u^{1/\alpha})^k \exp(-u)\, du$$

Changem^t de var : $u = \left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha}$

$du = \frac{\alpha}{\beta}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{\alpha-1} dx$

$\Rightarrow \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-1}\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-(\alpha-1)} du = dx$

$x = \beta u^{1/\alpha}$

$$= \beta^k \int_0^{\infty} u^{k/\alpha} \exp(-u)\, du$$

ici $z - 1 = \frac{k}{\alpha}$

$\Rightarrow z = \frac{k}{\alpha} + 1$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[X^k] = \beta^k \Gamma\left(\frac{k}{\alpha} + 1\right).$$

(1) c) Rappel : $S_r = \sum_{i=1}^{N_r} X_i$

$$\mathbb{E}[S_r] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{N_r} X_i\right] \underset{\text{Les } X_i \text{ sont iid}}{=} \mathbb{E}[N_r X_i] \underset{N_r \perp\!\!\!\perp X_i}{=} \mathbb{E}[N_r]\mathbb{E}[X_i]$$

$$= (\lambda r) \times \beta \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$V(S_r) = V\left(\sum_{i=1}^{N_r} X_i\right) \underset{\text{Les } X_i \text{ sont iid}}{=} V(N_r X_i) \underset{N_r \perp\!\!\!\perp X_i}{=} V(N_r)\, V(X_i)$$

$$= (\lambda r) \times \left(\mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2\right)$$

$$= (\lambda r) \times \left(\beta^2 \Gamma\left(1 + \frac{2}{\alpha}\right) - \beta^2 \Gamma\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)^2\right)$$

Donc $\begin{cases} \mathbb{E}[S_r] = (\lambda r)\beta\,\Gamma(1+\frac{1}{\alpha}) \\ V(S_r) = (\lambda r)\beta^2\left(\Gamma(1+\frac{2}{\alpha}) - \Gamma(1+\frac{1}{\alpha})^2\right). \end{cases}$

1 d) On considère $S_r \sim \mathcal{E}\left(\frac{1}{\mathbb{E}[S_r]}\right) = \mathcal{E}\left(\frac{1}{\lambda r\beta\Gamma(1+\frac{1}{\alpha})}\right)$

$\mathbb{E}[R_r] = ?$

$$R_r = \max(0, S_r - r) = (S_r - r)_+$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[R_r] &= \mathbb{E}[\max(0, S_r - r)] \\ &= \mathbb{E}[(S_r - r)\mathbb{1}_{S_r > r}] \\ &= \mathbb{E}[S_r \mathbb{1}_{S_r > r}] - r\,\mathbb{E}[\mathbb{1}_{S_r > r}]. \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{S_r > r}] = \mathbb{P}(S_r > r) = e^{-\frac{r}{\lambda r\beta\Gamma(1+1/\alpha)}} = \exp\left(-\frac{1}{\lambda\beta\Gamma(1+1/\alpha)}\right)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \mathbb{E}[R_r] &= \lambda r\beta\Gamma(1+\tfrac{1}{\alpha}) \times \exp\left(\frac{-1}{\lambda\beta\Gamma(1+1/\alpha)}\right) - r\exp\left(\frac{-1}{\lambda\beta\Gamma(1+1/\alpha)}\right) \\ &= (\lambda r\beta\Gamma(1+1/\alpha) - 1)\exp\left(\frac{-1}{\lambda\beta\Gamma(1+1/\alpha)}\right) \end{aligned}$$