Provisionnement non-vie :

Livre : Provisionnement non-vie (PARTRAT et al.)

But : Etudier des méthodes qui permettent d'effectuer un calcul de provision.

En gros, la provision est une somme d'argent que la compagnie d'assurance doit mettre de côté afin de faire face aux engagements qu'elle a pris envers les assurés.

Méthodes de Provisionnement :
- Déterministes
- Stochastiques (Il y a un cadre probabiliste qui va permettre d'effectuer, par exemple, des calculs d'erreur associée à l'estimation de la provision).

Pourquoi une compagnie d'assurance a-t-elle besoin de provisionner ?

* Invers° du cycle de product°.
* Branche à cadence de règlement courte / longue
  → longue ex : assurance auto

Il y a 2 raisons à cela :

1) Inversion du cycle de production
(la compagnie connait son chiffre d'affaire (les primes qu'elle reçoit) mais elle ne sait pas ce qu'elle va devoir payer suite à d'éventuels sinistres).

2) Dans certaines branches, appelées BRANCHES À CADENCE DE REGLEMENT LONGUE, il y a toujours un certain délai (± important) entre le moment où le sinistre a lieu et le moment où la compagnie d'assurance commence à payer pour ce sinistre
→ Exemple :
accident de la route avec blessé grave : avant que la compagnie puisse commencer à payer pour ce sinistre, il faut que l'état de santé de la victime soit stabilisé.

Comme on travaille avec des branches à cadence de règlement (très) longue, on va devoir effectuer une distinction entre exercices différents.
On parle de :
* EXERCICE DE SURVENANCE d'un sinistre : année où le sinistre s'est produit
* EXERCICE DE DECLARATION d'un sinistre : année où l'assuré signale l'existence d'un sinistre à l'assureur.
* EXERCICE DE REGLEMENT d'un sinistre : année où le sinistre a été définitivement réglé par la compagnie.
* EXERCICES DE DEVELOPPEMENT : années qui séparent la survenance et le règlement définitif par l'assureur.

La compagnie doit constituer des réserves ou PROVISIONS TECHNIQUES, à l'aide des primes relatives à un exercice, afin de régler les sinistres survenus au cours de cet exercice une fois que leur montants seront connus.

Les provisions techniques sont constituées à la date de fin d'inventaire (31/12/n) et figurent au passif du bilan de la compagnie. Elles représentent les engagements de la compagnie vis-à-vis des assurés ou des bénéficiaires du contrat.

Provisions techniques
- Provision pour primes non acquises (PPNA)
- Provision pour risques en cours (PREC)
- Provision pour sinistres à payer (PSAP)

Les PPNA et PREC font référence à des sinistres non-encore survenus à la date de fin d'inventaire alors que la PSAP est relative à des sinistres survenus avant la date de fin d'inventaire.

PPNA : Cette provision trouve son origine dans le fait que la plupart des contrats d'assurance non-vie prévoient une durée de garantie d'un an et que la prime est payée au moment de la souscription du contrat et qu'elle sert à couvrir le risque sur deux années comptables.
Du coup, la prime est fractionnée sur les deux années comptables et une partie de cette prime va alimenter la PPNA.

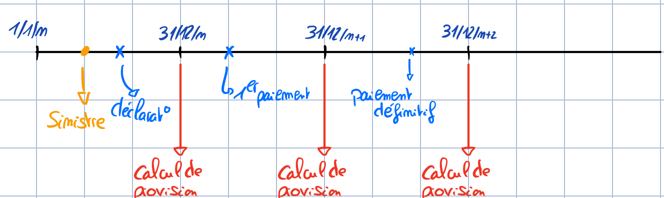
→ Exemple :
Un assuré paye sa prime le 1/4/22, donc 3/12 de cette prime vont être mis de côté sous forme de PPNA.

PREC : Elle sert à se prémunir contre un RISQUE DE MODELE : si l'actuaire retient un modèle qui s'avère être erroné, alors la compagnie s'expose à des pertes systématiques, qu'elle reflète dans son bilan sous forme de PREC.

PSAP : Cette provision est imposée par la réglementation et elle est définie dans le code des assurances.

Définition : (article R331-6, Code des Assurances) la PSAP est la valeur estimative des dépenses, en principal et en frais, tant internes qu'externes (frais d'expertise, frais judiciaires, ...), nécessaires au règlement de tous les sinistres survenus (connus ou inconnus de l'assureur) et non payés.

En d'autres termes, la PSAP représente les dettes de la compagnie envers les bénéficiaires de contrats au titre des sinistre survenu avant la date de l'inventaire.



La PSAP concerne les sinistres survenus avant la date de fin d'inventaire mais qui n'ont pas encore été réglés.

Ceux-ci regroupent : * SINISTRES REGLES MAIS NON ENCORE PAYES : le montant du sinistre a été administrativement déterminé mais il reste tout ou partie du paiement à effectuer.

* SINISTRES NON ENCORE REGLES
- le sinistre a été déclaré mais on ne connait pas encore le montant.
- le sinistre est survenu mais il n'a pas encore été déclaré ; on parle de TARDIFS ou IBNR (Incurred But Not Reported) et la compagnie doit en évaluer le nb et le montant.

→ Exemple : incendie qui survient juste avant minuit du 31/12.

Méthodes d'évaluation de la PSAP
- Méthode Dossier/Dossier (c'est une méthode prospective)
- Méthodes statistiques (depuis 1991)

→ * Méthode Dossier/Dossier :

Pour chaque sinistre non-clos dans le portefeuille, le gestionnaire de sinistres évalue le montant qui reste à payer. A cela il faudra rajouter une évaluation forfaitaire pour les tardifs.

* Méthodes Statistiques :

Elles sont basées sur des données de sinistralité. Comme pour toute méthode statistique, on aimerait avoir un historique assez important mais en gardant en tête que les résultats seront d'autant + fiables que le passé est régulier et que le présent et le futur sont peu ≠ du passé (la branche considérée doit être peu volatile)
Dans un souci de stabilité des données, on distingue les sinistres attritionnels/graves/CAT

Les données analysées peuvent être différentes :

* montants : paiements de sinistres
  Charge sinistre
  recours...

* primes
- émises
- acquises : du fait du principe de l'annualité des comptes, la prime émise relative au contrat doit être scindé en 2 parties : une partie destinée à couvrir le risque au cours de l'année jusqu'au 31/12/n, constitue la PRIME ACQUISE.
  Tandis que le reste, destiné à couvrir le risque entre le 31/12/n et la prochaine échéance de prime est placé dans la PPNA.

PRIMES ACQUISES au cours de l'année n = primes émises au cours de l'année n − réserve de prime (PPNA) au 31/12/n + réserve de prime (PPNA) au 1/1/n.

* nb de sinistres : déclarés
  réglés
  Tardifs...

* loss-ratio : ratio S/P
* montants moyens.

Les sinistres sont rapportés à des périodes de temps : Trimestre, Semestre, année

L'année courante m se déroule du 1/1 au 31/12 (exercice comptable).

date de fin d'inventaire

On suppose que les sinistres se déroulent (ou developpent) au plus sur $(m+1)$ années.

On note :

i : ANNEE D'ORIGINE $(i = 0, \dots, m)$

↳ année de survenance du sinistre, année de déclarat°, année de souscript° du contrat.

j : DELAI DE DEVELOPPEMENT (DEVELOPMENT YEAR) $j = 0, \dots, m$.

x_{ij} : mesure de sinistralité correspondant à l'année d'origine i et au délai j.

↳ paiements incrémentaux (ou non cumulés).

Ces données se présentent sous forme matricielle dans ce qu'on appelle un triangle de liquidation (ou triangle RUN-OFF).

Au 31/12/m, on observe le triangle des paiements incrémentaux suivant :

Année d'origine	DELAI DE REGLEMENT										
	0	1	$\dots$	j	$\dots$	$m-i$	$\dots$	$m-1$	m
0	x_{00}	x_{01}	—	x_{0j}	—	$x_{0,m-i}$	—	$x_{0,m-1}$	$x_{0,m}$
1	$x_{1,0}$	$x_{1,1}$	—	$x_{1,j}$	—	$x_{1,m-i}$	—	$x_{1,m-1}$	
$\vdots$	$\vert$	$\vert$		$\vert$		$\vert$			
i	$x_{i,0}$	$x_{i,1}$	—	$x_{i,j}$	—	$\boxed{x_{i,m-i}}$			
$\vdots$	$\vert$	$\vert$							
$m-j$	$x_{m-j,0}$	$x_{m-j,1}$	—	$x_{m-j,j}$					
$\vdots$	$\vert$	$\vert$							
$m-1$	$x_{m-1,0}$	$x_{m-1,1}$							
m	$x_{m,0}$								

Dernier paiement connu pour l'année i.

↳ Tous les paiements qui ont été effectués en année calendaire m (cette année). Toutes années d'origine confondues.

x_{ij} représente le montant total des paiements effectués au cours de l'année $i+j$ (donc en délai de développement j) pour les sinistres survenus l'année i.

Tous les paiements qui ont été effectués jusqu'à présent pour les sinistres survenus l'année 0.

Tous les paiements qui ont été effectués la m̂ année que la survenance

On peut aussi travailler avec un triangle de paiements cumulés que l'on note $\{C_{i,j}\}_{i+j \leq m}$

où $C_{i,j} = \sum_{h=0}^{j} x_{ih}$ représente le montant des paiements effectués jusqu'au délai de développement j pour les sinistres survenus l'année i.

Remarque : $x_{i,0} = C_{i,0}$ $\quad i \in [\![0, m]\!]$ (la 1ère colonne est la m̂)

$x_{i,j} = C_{i,j} - C_{i,j-1}$ $\quad (j \geq 1)$

Une autre quantité d'intérêt est la Charge sinistre $S_{i,j}$ qui représente la charge pour les sinistres survenus l'année i vue après un délai j (càd en année $i+j$).

Au 31/12/m, on observe le TRIANGLE DE PAIEMENTS CUMULÉS suivant :

Année d'origine	Années de développement (délais de règlement)									
	0	1	—	j	$j+1$	—	$m-i$	—	$m-1$	m
0	$C_{0,0}$	$C_{0,1}$	—	$C_{0,j}$	$C_{0,j+1}$	—	$C_{0,m-i}$	—	$C_{0,m-1}$	$C_{0,m}$
1	$C_{1,0}$	$C_{1,1}$	—	$C_{1,j}$	$C_{1,j+1}$	—	$C_{0,m-i}$	—	$C_{1,m-1}$	
$\vert$	$\vert$			$\vert$	$\vert$		$\vert$			
i	—	—	—	$C_{i,j}$	$C_{i,j+1}$	—	$C_{i,m-i}$			
$\vert$	$\vert$			$\vert$	$\vert$					
$m-j-1$	—	—	—	$C_{m-j-1,j}$	$C_{m-j-1,j+1}$					
$m-j$	$\vert$			$C_{m-j,j}$						
$\vert$	$\vert$									
m	$C_{m,0}$									

CHARGES ULTIMES

DERNIER MONTANT CONNU
pour les sinistres survenus l'année i.

Tous les paiements qui ont été effectués jusqu'en année $i+j$ (ou alors jusqu'au développement j) pour les sinistres survenus l'année i.

BUT : à partir des données historiques (données du triangle de liquidation) et en utilisant éventuellement d'autres informations exogènes au triangle, on souhaite obtenir une estimation, au 31/12/m, des quantités suivantes :

* $S_i = C_{i,m}$ CHARGE ULTIME pour les sinistres survenus l'année i $i \in [\![0,m]\!]$.

  (ça représente la CHARGE pour les sinistres survenus l'année i).

  ⚠ $C_{0,m}$ est connue puisque l'année 0 est complètement développée.
  (i.e pour les sinistres survenus l'année 0, la compagnie a déjà tout payé !).

* $R_i = C_{i,m} - C_{i,m-i}$ PROVISION A CONSTITUER pour les sinistres survenus l'année i $i \in [\![1,m]\!]$.

  Rq : $R_0 = 0$ puisque pour les sinistres survenus l'année 0, on a tout payé.

* $R = \sum_{i=1}^{m} R_i$ PROVISION GLOBALE.

Méthodes Déterministe de Provisionnement.

METHODE CHAIN LADDER (CL) STANDARD

Il s'agit de la méthode de provisionnement la plus populaire et aussi parmi les plus simples à mettre en œuvre.

On considère les délais de développement j et $j+1$ d'un triangle de paiements cumulés $\{C_{i,j}\}_{i+j\leq m}$

Idée : Le déroulement des paiements est gouverné par des facteurs de déroulement qui ne dépendent que de l'année de développement j (ils ne dépendent pas de l'année de survenance i).

Du coup, le modèle CL s'écrit : $\boxed{C_{i,j+1} = f_j\, C_{i,j}}$ $\forall i,j \in [\![1,m]\!]^2$

avec f_j : FACTEUR DE DEVELOPPEMENT (ou de déroulem^t) ou LINK RATIOS.
(il s'agit d'un facteur de "passage" de l'année de développement j à l'année $j+1$).

f_{ij} : FACTEURS DE DEVELOPPEMENT INDIVIDUELS

En pratique, les rapports $\frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$ $j\in[\![0,m-1]\!]$ ne dépendent que de j (et pas de i), on peut donc écrire :

$$\text{Pour } j\in[\![0,m-1]\!],\quad \frac{C_{0,j+1}}{C_{0,j}} = \frac{C_{1,j+1}}{C_{1,j}} = \text{———} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}} = \text{———} = \frac{C_{m-j-1,j+1}}{C_{m-j-1,j}}$$

(Ces égalités, en pratique, ne sont au mieux qu'approximativement vérifiées).

Les facteurs de développement peuvent être estimés en moyennant ces facteurs de dvp^t individuels :

$$\boxed{f_j = \frac{\sum_{i=0}^{m-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{m-j-1} C_{i,j}} \qquad j\in[\![0,m-1]\!]}$$

En effet, il s'agit d'une moyenne pondérée par les paiements cumulés $C_{i,j}$ des facteurs de développem^{ent} individuels f_{ij}.

$$f_j = \frac{\sum_{i=0}^{m-j-1} f_{ij}\, C_{i,j}}{\sum_{i=0}^{m-j-1} C_{i,j}} = \frac{\sum_{i=0}^{m-j-1} C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{m-j-1} C_{i,j}}$$

$$f_{ij} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$$

Une fois que l'on a calculé les f_j $j \in [\![0, m-1]\!]$. Nous pouvons utiliser le modèle CL $(C_{i,j+1} = f_j \, C_{i,j})$ pour compléter le triangle et calculer, en particulier, les CHARGES ULTIMES.

$$S_i = C_{i,m} = C_{i,m-i} \prod_{h=m-i}^{m-1} f_h$$

et ensuite les provisions $R_i = \underbrace{C_{i,m}}_{\text{CHARGE ULTIME}} - \underbrace{C_{i,m-i}}_{\text{DERNIER MONTANT CONNU pour les sinistres survenus l'année } i}$ $\quad i \in [\![1, m]\!]$.

et $R = \sum_{i=1}^{m} R_i$.

La méthode CL peut être validée <u>empiriquement</u> grâce à deux outils $\begin{cases} \text{C-C PLOTS} \\ \text{D-TRIANGLE.} \end{cases}$

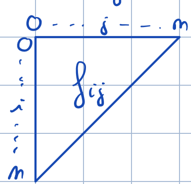
C-C PLOTS :

à j fixé, il s'agit du plot des points $(C_{i,j}, C_{i,j+1})_{i \in [\![0, m-j-1]\!]}$.

Si l'hypothèse de la méthode C-L est vérifiée sur nos données, on observera des points sensiblement alignés sur une droite qui passe par l'origine.

D-TRIANGLE :

Il s'agit du triangle (supérieur) des facteurs de développement individuels $f_{ij} = \dfrac{C_{i,j+1}}{C_{i,j}}$



On s'attend à observer, par colonne, des facteurs de développement "sensiblement" constants (volatilité très faible).

Bilan :

⊕ Idée simple à comprendre et méthode facile à mettre en œuvre

⊖ * On observe une incertitude très importante et, ce, surtout pour les années les plus récentes puisque, afin d'estimer la charge ultime, le dernier montant connu est multiplié par un certain nb de facteurs de développement qui sont estimés à l'aide des données.
Cette incertitude est d'autant plus importante pour les branches à déroulement très long où les paiements commencent à être effectués au bout de quelques années.

* On travaille avec un schéma de dvp^t qui est identique pour toutes les années de survenance ce qui veut dire que le coût d'un sinistre au bout de j année de développement est proportionnel au coût de l'année précédente, ou même de n'importe quelle année $i < j$, et que le coeff de prop $\left(\prod_{h=m-i}^{m-1} f_h\right)$ ne change pas.

Cela risque de ne pas être vérifié en pratique en cas de changement de jurisprudence ou alors en cas de changement au niveau de la gestion des sinistres (qui par exemple, commenceraient à être liquidés beaucoup + rapidement à partir d'une date donnée).

* Il s'agit d'une méthode déterministe qui ne donne aucune indication sur l'erreur d'estimation par exemple.

$\Longrightarrow$ Modèle de MACK : version stochastique de CL.

METHODES CHAIN LADDER PONDEREES.

Dans cette méthode qui reste une méthode CL, on va essayer d'accorder $\pm$ d'importance à certaines années grâce à des poids que l'on attribue aux facteurs de développement individuel f_{ij} lors du calcul des f_j.

Les facteurs de développement se calculent de la façon suivante :

$$f_j = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} f_{ij} W_{ij}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} W_{ij}} \qquad j \in [\![0, n-1]\!].$$

avec $\{W_{ij}\}_{i\in[\![0,n-j-1]\!]}$ des poids "judicieusement" choisis en fonction de la fiabilité des f_{ij}.

Comme exemples, on pourrait avoir :

* une moyenne simple des f_{ij} et donc $f_j = \dfrac{\sum_{i=0}^{n-j-1} f_{ij}}{n-j}$
* la moyenne des k derniers facteurs de dvpt individuels.
* le dernier facteur individuel : $f_j = f_{n-j-1,j}$
* une PONDERATION PAR ANNEE CALENDAIRE qui correspond à $W_{ij} = i+j+1$ (ou alors $= (i+j+1)^2$). et qui donnerait + d'importance aux années les + récentes.

Remarque : Si $W_{ij} = C_{ij}$, on retrouve CL standard.

Méthodes Autorégressives < LONDON CHAIN (LC) / LONDON PIVOT.

LONDON CHAIN

On dispose d'un triangle de paiements cumulés $\{C_{ij}\}_{i+j\leq n}$ et on a observé sur certains C-C PLOTS des points qui restent "sensiblement" alignés mais la droite ne passe plus par l'origine.

En ce cas, nous pouvons utiliser la méthode London Chain ce qui consiste à adopter le modèle suivant :

$$\boxed{C_{i,j+1} = f_j\, C_{i,j} + a_j \quad i \in [\![0, n-j-1]\!]}$$

avec f_j et a_j les paramètres inconnus du modèle que l'on estime par la méthode MCO en minimisant

$$\Delta_j = \sum_{i=0}^{n-j-1} \left(C_{i,j+1} - f_j\, C_{ij} - a_j\right)^2$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} f_j^{LC} = \dfrac{\frac{1}{n-j}\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{ij}C_{i,j+1} - \overline{C_j}\,\overline{C_{j+1}}}{\frac{1}{n-j}\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{ij}^2 - \overline{C_j}^2} = \dfrac{\mathrm{Cov}(col_j, col_{j+1})}{\mathrm{Var}(col_j)} \\ a_j^{LC} = \overline{C_{j+1}} - f_j^{LC}\,\overline{C_j} \end{cases}$$

avec $\overline{C_j} = \dfrac{1}{n-j}\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{ij}$

la moyenne empirique des données de la colonne j (sauf $C_{n-j,j}$).

Remarque :

Si on appliquait la méthode MCO pour estimer le paramètre f_j du modèle CL ($C_{i,j+1} = f_j C_{ij}$)

On obtiendrait

$$f_j^{MCO} = \frac{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{ij}\, C_{i,j+1}}{\sum_{i=0}^{n-j-1} C_{ij}^2} \neq f_j \text{ obtenu par CL.}$$

Bilan :

⊕ Simple à mettre en oeuvre puisqu'il s'agit simplement d'estimer les paramètres inconnus d'un modèle de régression (ce qui peut être fait avec n'importe quel logiciel).

⊖ * risque de SURPARAMETRISATION : là où on estimait n paramètres (les f_j) pour la méthode CL, on se retrouve à devoir estimer $2n$ paramètres (les f_j et les a_j) avec le m̂ nb de données (i.e les $\frac{(n+1)(n+2)}{2}$ données du triangle de liquidation).

Comme le nb de paramètres est élevé p/r au nb d'observat°, on risque d'avoir des estimat° peu (voire pas) robustes.

* les paramètres du modèles ne sont plus interprétables (les f_j^{LC} ne représentent plus des facteurs de dvp^t).

Du coup, en pratique, rarement on applique un London Chain tout seul ; on conseille plutôt de "coupler" CL et LC, i.e. effectuer un CL à la base et puis rajouter LC seulement pour les années où l'ordonnée à l'origine est vraiment significativement $\neq 0$.

LONDON PIVOT

Pour $j \in [\![0, m-1]\!]$, le modèle s'écrit : $\boxed{(C_{i,j+1} + a) = f_j (C_{ij} + a)}$ $\quad i \in [\![0, m-j-1]\!]$.

où a est un paramètre qui ne dépend pas de j et qu'on peut interpréter comme des charges fixes (des frais de règlement par exemple).

Si on représentait à j fixé, les points $(C_{ij}, C_{i,j+1})_{i \in [\![0,m-j-1]\!]}$ on observerait des points "sensiblement" alignés sur des droites concourantes, qui convergent vers un même point de coordonnées $(-a, a)$ que l'on appelle le POINT PIVOT (pour CL, le pivot est l'origine).

Afin d'estimer les $(m+1)$ paramètres inconnus du modèle, $(f_j)_{j \in [\![0,m-1]\!]}$ et a, on minimise

$$\Delta = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{i=0}^{m-j-1} \left[(C_{ij} + a) - f_j (C_{ij} + a) \right]^2$$

Malheureusement, il n'y a pas de solution analytique, la solution est trouvé par des méthodes itératives qui peuvent être assez lourde et c'est la raison pour laquelle cette méthode n'est pas beaucoup utilisée en pratique !

⊕ - On réduit le nb de paramètre à estimer p/r à LC et les paramètres sont interprétables

⊖ - difficulté d'estimation des paramètres.

On va maintenant étudier d'autres méthodes déterministes qui cherchent à intégrer dans le calcul de la provision d'autres informations dont la compagnie pourrait disposer.

METHODES BASEES SUR LES LOSS-RATIOS

- LOSS RATIO SIMPLE
- LOSS RATIO COMPLEMENTAIRE
- CAPE CODE
- METHODE A CADENCE DE REGLEMENT CONSTANTE
  - CADENCE PURE
  - BORNHUETER-FERGUSSON
  - BENKTANDER.

On va d'abord définir un loss-ratio.

On note E_i un indicateur de sinistralité ou d'exposition au risque associé à l'année d'origine i $\quad (i \in [\![0, m]\!])$

E_i peut représenter, par exemple, les primes (émises ou acquises) ou alors le nombre de sinistres (déclarés ou réglés) ou encore le nombre de contrats.

On définit $\quad L_{ij} = \dfrac{C_{ij}}{E_i} \quad _{i,j \in [\![0,m]\!]^2}$ LOSS RATIO $\qquad L_i = \dfrac{C_{im}}{E_i} = \dfrac{S_i}{E_i} \quad _{i \in [\![0,m]\!]}$ LOSS RATIO ULTIME.

En pratique, les compagnies d'assurance calculent le RATIO SINISTRES A PRIMES ou RATIO S/P que l'on obtient en prenant comme indicateur de sinistralité E_i le volume de primes acquises pour les sinistres survenus l'année i, P_i.

$L_i = \frac{S_i}{P_i}$ $i \in [\![1,m]\!]$. C'est un indicateur de l'état de santé de la compagnie : on s'attend à observer un ratio S/P < 100 % car autrement cela voudrait dire que la compagnie est entrain de débourser plus que ce qu'elle reçoit en prime et que donc elle se met en danger.

Remarque :

Si on choisit $E_i = P_i$, alors $L_{i,m-i} = \frac{C_{i,m-i}}{P_i}$ représente la part de la prime qui a été dépensée jusqu'à présent (31/12/m) pour les sinistres survenus l'année i.

Remarque :

Si on applique la méthode CL à un triangle de loss-ratio $(L_{ij})_{i+j\leq m}$ on obtient la même provision que si on appliquait CL au triangle des $(C_{ij})_{i+j\leq m}$. En effet, si on calcule le D-triangle $(f_{ij})_{i+j\leq m}$, on obtient que $f_{ij}^{(L)} = \frac{L_{i,j+1}}{L_{i,j}} = \frac{C_{i,j+1}/E_i}{C_{ij}/E_i} = \frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} = f_{ij}$

(L) pour loss-ratio

↳ facteurs de développement du D-triangle calculé à partir des $(C_{ij})_{i+j\leq m}$

1- METHODE DU LOSS-RATIO SIMPLE

L'hypothèse de cette méthode est que les loss-ratios ultimes $(L_i)_{i\in[\![1,m]\!]}$ sont constants sur toutes les années d'origine. Or, le loss-ratio de l'année d'origine 0, L_0, est connu : $L_0 = \frac{C_{0m}}{E_0} = \frac{S_0}{E_0}$.

Donc on décide de "cristalliser" ce dernier loss-ratio ultime connu et on pose $L_i = L_0$ $\forall i \in [\![1,m]\!]$.

On observe qu'on peut écrire la charge ultime comme $S_i = L_i E_i$ et que l'hypothèse du modèle nous dit que $L_i = L_0$ $\forall i \in [\![1,m]\!]$. Ceci nous permet de récupérer des estimations de la charge ultime $S_i = L_0 E_i$ $i \in [\![1,m]\!]$ et finalement calculer la provision par $R_i = S_i - C_{i,m-i}$ $i \in [\![1,m]\!]$.

⊕ - méthode simple et rapide

⊖ - Cette méthode s'applique exclusivement à des triangles totalement stables !
- Cette méthode utilise très peu l'information donnée par le triangle (ce qui entraine une perte d'informatio° et la possibilité d'obtenir, par cette méthode, des résultats aberrants.

2- METHODE DU LOSS-RATIO COMPLEMENTAIRE

Elle est proposée comme une amélioration de la méthode précédente, car, en part, p/r à la méthode précédente, on va utiliser toute l'information du triangle (il n'y a donc pas de perte d'information) mais on garde la même hypothèse de stabilité du triangle.

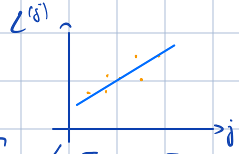
Hypothèse :

Les loss-ratios $(L_i)_{i \in [1,m]}$ sont "sensiblement" constants sur toutes les années d'origine

i.e $L_i \sim L \ \forall i$ mais L est un paramètre inconnu que l'on estime à partir des données du triangle de liquidation.

Comment faire pour estimer L ?

On se rappelle que $L_i = \frac{C_{im}}{E_i}$ et que donc on est en train de dire que $\frac{C_{im}}{E_i} \sim L \ \forall i$, d'où aussi $\frac{\sum_{i=0}^{m} C_{im}}{\sum_{i=0}^{m} E_i} \sim L$. Du coup, on commence par calculer un loss-ratio global partiel à la fin de chaque délai de développement j, $j \in [0,m]$. $L^{(j)} = \frac{\sum_{i=0}^{m-j} C_{ij}}{\sum_{i=0}^{m-j} E_i}$ et ensuite on analyse la suite des $L^{(j)}$ et on essaye de récupérer L par extrapolation.



Une fois que l'on a récupéré L, on calcule les charges ultimes $S_i = L_i E_i$ $i \in [1,m]$ et ensuite la provision R_i puis R.

(+) - méthode qui reste simple à mettre en œuvre et qui permet d'utiliser un peu plus les données du triangle

(−) - méthode applicable exclusivement à des triangles stables ; l'hypothèse de la méthode est forte et pas toujours réaliste.

3- METHODE CAPE-CODE (ou de Bühlmann - Stanard)

L'hypothèse de cette méthode (moins forte que celle de la méthode précédente) est qu'il existe des groupes d'années d'origine "semblables" en terme de cadence de règlement et de loss-ratio.

Définition :

La CADENCE DE REGLEMENT en année $(m-i+1)$ est définie comme $p_{m-i} = \frac{C_{i,m-i}}{C_{im}}$ et représente la part de la charge ultime pour les sinistres survenus l'année i qui a été réglée jusqu'à présent.

On peut écrire la charge ultime comme : $S_i = C_{i,m-i} + (1-p_{m-i})C_{i,m} = C_{i,m-i} + (1-p_{m-i})L_i P_i$.

et on a aussi que $L_i = \frac{C_{im}}{P_i} = \frac{C_{i,m-i}}{p_{m-i} P_i}$. (*)

On note L_k le loss-ratio de l'exercice k que l'on peut écrire comme en (*) et on note $A \subset \{0, 1, \ldots, m\}$ le groupe d'années d'origine semblables. Le loss-ratio commun aux années du groupe A est noté L_A.

(**) $L_A = \dfrac{\sum_{k \in A} C_{k,m-k}}{\sum_{k \in A} \beta_{m-k} P_k}$. Supposons maintenant de vouloir calculer la provision R_i pour les sinistres survenus l'année i. L'année i appartient à un groupe d'années semblables que l'on

note A_i auquel on associe un loss-ratio commun que l'on note L_{A_i} que l'on calcule en utilisant (**).

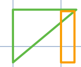
On obtient :

$$\boxed{R_i = S_i - C_{i,m-i} = C_{i,m-i} + (1-\beta_{m-i}) L_{A_i} P_i - C_{i,m-i} = (1-\beta_{m-i}) L_{A_i} P_i}$$

Pour les cadences de règlement β_k, on peut, par exemple, récupérer celles obtenues par CL.

$$\beta_{m-i} = \frac{C_{i,m-i}}{C_{i,m}}$$

obtenue en complétant le triangle par CL



⊕ - hypothèse moins forte et peut-être plus réaliste que pour les 2 méthodes précédentes.

⊖ - méthode qui est sensible au choix des groupes ! Ce choix peut être effectué sur la base de l'expérience de l'actuaire ou en se basant sur des informations exogènes ou en utilisant des graphiques de développement des loss-ratios.

4- METHODES A CADENCE DE REGLEMENT CONSTANTE

a) CADENCE PURE
b) BF
c) Benktander

Le point commun entre ces 3 méthodes est que la formule que l'on utilise pour calculer la provision pour l'année d'origine i est $\boxed{R_i = (1-\underbrace{\beta_{m-i}}_{\text{cadence de règlement}})\underbrace{S_i}_{\text{charge ultime}}}$ $i \in [1, m]$

Il va falloir estimer les cadences de règlement et les charges ultimes S_i.

a) METHODE CADENCE PURE

Pour les cadences de règlement on note $(\hat{\beta}_j)_{j \in [0,m]}$ un vecteur d'estimation de $(\beta_j)_{j \in [0,m]}$

tq $0 \leq \hat{\beta}_0 \leq \ldots \leq \hat{\beta}_{m-1} \leq \hat{\beta}_m = 1$, que l'on a obtenu, par exemple, en appliquant CL à notre triangle de liquidation.

Il nous reste à estimer la charge ultime S_i. Or, $\underbrace{C_{i,m-i}}_{\text{connu}} = \underbrace{\beta_{m-i}}_{\text{on l'estime par } \hat{\beta}_{m-i}} S_i$, ce qui permet de récupérer

$$\hat{S}_i^{CD} = \frac{C_{i,m-i}}{\hat{\beta}_{m-i}} \quad \text{et} \quad \hat{R}_i^{CD} = (1-\hat{\beta}_{m-i}) \hat{S}_i^{CD}$$

b) METHODE BORNHUETTER - FERGUSON

Cette méthode permet d'intégrer dans le calcul de la provision un AVIS D'EXPERT et elle est très utilisée en pratique en complément de la méthode CL pour le calcul des provisions pour les années les plus récentes dans des triangles présentant une incertitude importante.

Pour les cadences de règlement, p_j, on se donne une estimation, $\hat{p}_j$, obtenue, par exemple, par application de la méthode CL au triangle des paiements cumulés (on rappelle que, par définition, $p_{m-i} = \frac{C_{i,m-i}}{C_{i,m}}$)

Pour la charge ultime, on peut écrire $S_i = L_i P_i$ et remplacer le loss-ratio inconnu L_i $i \in [1, m]$ par un LOSS-RATIO ATTENDU, que l'on note ϕ_i, ce qui permet d'obtenir une CHARGE ULTIME A PRIORI

$$\hat{S}_i = \phi_i P_i$$

Le loss-ratio attendu, ϕ_i, correspond à l'avis d'expert et est déterminé par des considérations exogènes au triangle, par exemple un benchmark marché sur la branche considérée.

Au final, la provision pour l'année d'origine i, calculée par la méthode BF, s'écrit :

$$\hat{R}_i^{BF} = (1 - \hat{p}_{m-i}) \underbrace{\hat{S}_i}_{\text{CHARGE ULTIME A PRIORI } \hat{S}_i = \underbrace{\phi_i}_{\text{loss-ratio attendu (avis d'expert)}} P_i}$$

Le risque avec cette méthode est de donner un poids trop important à l'avis d'expert (par rapport aux données du triangle de liquidation) dans le calcul de la provision, c'est pour cela que Benktander a proposé une modification de la méthode BF qui permet de mieux tenir en compte les données du triangle.

c) METHODE de BENKTANDER

La provision se calcule comme :

$$\hat{R}_i^{BE} = (1 - \hat{p}_{m-i}) \hat{S}_i^{BF} \quad \text{où} \quad \underbrace{\hat{S}_i^{BF}}_{\text{CHARGE ULTIME A POSTERIORI}} = C_{i,m-i} + (1 - \hat{p}_{m-i}) \underbrace{\hat{S}_i}_{\text{CHARGE ULTIME A PRIORI}}$$

L'avis d'expert est toujours intégré dans le calcul de la provision (puisque $\hat{S}_i = \phi_i P_i$) mais son poids est un peu moins important que pour BF p/r aux données historiques.

On peut dire que Benktander se positionne entre BF (où l'avis d'expert prend une place importante) et CL qui est exclusivement basé sur les données du triangle.

On va maintenant étudier deux méthodes qui, comme les précédentes (celles basées sur les loss-ratios) permettent d'utiliser, dans le calcul de la provision, une information supplémentaire qui, cette fois-ci, est représentée par le nb de sinistres (que l'on va utiliser comme indicateur de sinistralité).

METHODE DU COUT MOYEN
- SANS TRIANGULATION
- AVEC TRIANGULATION

* METHODE SANS TRIANGULATION

On note m_i le nb de sinistres pour l'année d'origine i, $i \in [\![0,n]\!]$. On constate que, comme l'année d'origine 0 est complètement déroulée, alors le COUT MOYEN pour l'année d'origine 0, $\overline{C_0} = \frac{S_0}{m_0}$, est connu (il a été observé).

L'idée, pour récupérer des estimations des charges ultimes inconnues, est de se baser sur un historique de coûts moyens, y compris $\overline{C_0}$, et sur ces indices exogènes afin d'anticiper les taux de croissance de ces coûts moyens pour les années 1 à n et obtenir $\overline{C_i}$ $i \in [\![1,n]\!]$.

En effet, on peut écrire $\overline{C_i} = \overline{C_0} \cdot I\{i\}$ où $I\{i\}$ peut être imaginé comme un taux exogène (taux d'inflation du marché, évolut° des salaires médicaux, ...).
Ensuite, on se rappelle que le coût moyen $\overline{C_i}$ s'écrit comme $\overline{C_i} = \frac{S_i}{m_i}$ → Connu (puisque c'est l'info supplémentaire dont on dispose)
↳ anticipé grâce à $I\{i\}$ et $\overline{C_0}$
et on constate que cette formule nous permet de récupérer une estimation des charges ultimes

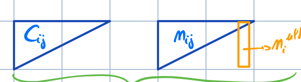
$$S_i = \overline{C_i}\, m_i \quad i \in [\![1,n]\!].$$

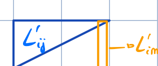
Et enfin de la provision $R_i = S_i - C_{i,n-i}$ $\quad i \in [\![1,n]\!]$ puis $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$

* METHODE AVEC TRIANGULATION

L'information supplémentaire dont on dispose se présente sous forme d'un triangle du nb de sinistres cumulés $(m_{ij})_{i+j\leq n}$. m_{ij} représente le nb de sinistres survenus au cours de l'année i et réglés ou clos au cours de l'année $i+j$.  On commence par construire le triangle de coûts moyens $(L'_{ij})_{i+j\leq n}$ avec

$L'_{ij} = \frac{C_{ij}}{m_{ij}}$. Ensuite, à l'aide d'une méthode de triangulat° choisie, on complète les triangles des

L'_{ij} et des m_{ij} afin de récupérer les ultimes : L'_{in} et $m_{in} = m_i^{ult}$ 

Ceci va être utile pour récupérer une estimation de la charge ultime $S_i = m_i^{ult} L'_{in}$ $i \in [\![1,n]\!]$ et ensuite une estimat° de $R_i = S_i - C_{i,n-i}$ $\quad i \in [\![1,n]\!]$. 

On continue à étudier des méthodes déterministes qui, cette fois-ci, effectuent un calcul de provision en se basant sur l'informat° donnée par le triangle des paiements incrémentaux $(X_{ij})_{i+j\leq n}$

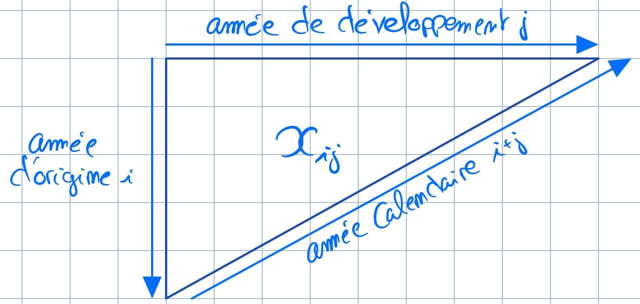
METHODES FACTORIELLES

- MOINDRES CARRES de DE VYLDER
- SEPARATION de VERBECK-TAYLOR
  - ARITHMETIQUE
  - GEOMETRIQUE

L'idée des méthodes factorielles est que les paiements incrémentaux puissent être écrits comme le produit de trois facteurs qui représentent chacun une des directions du triangle de liquidation.

$$x_{ij} = x_i \, y_j \, \lambda_{i+j} \qquad 0 \leq i,j \leq m.$$

avec x_i : paramètre de l'année d'origine i (effet "volume du portefeuille")
y_j : paramètre du délai de règlement j (effet "cadence de règlement")
λ_k : paramètre de l'année calendaire (effet de l'inflation)



Ce modèle présente beaucoup trop de paramètres à estimer ($3(m+1)$ paramètres inconnus) et, en plus, il présente un problème d'identifiabilité : les vecteurs $[(x_i),(y_j),(\lambda_k)]$ et $[(ax_i),(\frac{y_j}{a}),(\lambda_k)]$ conduisent aux mêmes valeurs des x_{ij}.

Il va falloir rajouter des hypothèses et/ou des contraintes sur les paramètres du modèle !

* METHODE DES MOINDRES CARRES de DE VYLDER

On fait une hypothèse d'inflation annuelle constante dans le triangle analysé (hypothèse effectivement vérifiée sur notre triangle ou alors triangle "déflaté"). Du coup, le paramètre λ_{i+j} (qui représentait l'effet de l'inflation) peut être intégré dans les autres et le modèle devient :

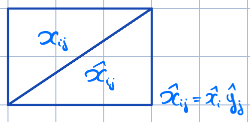
$$\boxed{x_{ij} = x_i \, y_j} \qquad 0 \leq i,j \leq m \quad \text{avec la contrainte d'identifiabilité} \quad \boxed{\sum_{j=0}^{m} y_j = 1}$$

La contrainte d'identifiabilité permet d'obtenir une interprétation des paramètres inconnus du modèle.

x_i : charge ultime des sinistres survenus l'année i.

$$\sum_{j=0}^{m} x_{ij} = x_i \underbrace{\sum_{j=0}^{m} y_j}_{=1} = x_i$$

y_j : proportion du montant x_i payée l'année j ; en effet $y_j = \dfrac{x_{ij}}{x_i}$ → cadence (non cumulée) de règlement en année de dvpt j.



Rq : Le modèle s'écrit $x_{ij} = x_i y_j$ et alors les paiements cumulés peuvent s'écrire :

$$C_{ij} = \sum_{k=0}^{j} x_{ik} = \sum_{k=0}^{j} x_i y_k = x_i \underbrace{\sum_{k=0}^{j} y_k}_{Y_j} = x_i Y_j$$ d'où les facteurs de dvp^t individuels f_{ij}

$$\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}} = \frac{x_i Y_{j+1}}{x_i Y_j} = \frac{Y_{j+1}}{Y_j}$$ sont indep de l'année d'origine i et on retrouve donc l'hypothèse de la méthode CL.

Sauf que les facteurs $\frac{C_{i,j+1}}{C_{ij}}$ ne sont plus des facteurs individuels pondérés.

Comment estimer les paramètres inconnus du modèle (les x_i et les y_j) ?

$\longrightarrow$ Par la méthode des MOINDRES CARRES PONDERES (MCP) en minimisant

$$\Delta = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m} (x_{ij} - x_i y_j)^2 w_{ij}$$

où w_{ij} sont des poids associés aux x_{ij}.

Après dérivat$^°$ p/r^t à x_i et y_j, on obtient :

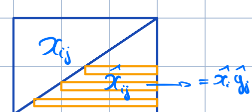
$$\begin{cases} x_i = \dfrac{\sum_{j=0}^{m-i} w_{ij} x_{ij} y_j}{\sum_{j=0}^{m-i} w_{ij} y_j^2} & i \in [\![0, m]\!] \\[2ex] y_j = \dfrac{\sum_{i=0}^{m-j} w_{ij} x_{ij} x_i}{\sum_{i=0}^{m-j} w_{ij} x_i^2} & j \in [\![0, m]\!] \end{cases}$$

On peut obtenir une solut$^°$ numérique $((\hat{x}_i), (\hat{y}_j))$ de ce système de manière récursive, à partir d'une valeur initiale pour y, que l'on va noter $(y_j^{(0)})_{j \in [\![0,m]\!]}$.

Le choix de la valeur initiale est important pour une convergence rapide.

Exemple de choix : $y_0^{(0)} = 1$ et $y_j^{(0)} = \frac{x_{0j}}{x_{00}}$, $j \geq 1$.

qui vient des égalités $\frac{x_{ij}}{x_{i0}} = \frac{x_i y_j}{x_i y_0} = \frac{y_j}{y_0}$.



$$R_i = \sum_{k=m-i+1}^{m} x_{ik}$$

* TECHNIQUES DE LISSAGE DES FACTEURS DE DEVELOPPEMENT f_j $j \in [\![0, m-1]\!]$

En pratique, parfois on a besoin de lisser les f_j $j \in [\![0, m-1]\!]$ pour des raisons différentes comme, par exemple, pour :

* Simplement modéliser les facteurs de développement.

* atténuer des irrégularités dans les f_j.

* interpoler des facteurs trimestriels ou semestriels, par exemple à partir de facteurs annuels.

* extrapoler des f_j et grâce à un TAIL FACTEUR, être capable de calculer la provision dans un triangle tronqué (cf exercice en TD).

Lisser veut dire ajuster une fonction $f(t)$ régulière et telle que $f(t) \geq 1$ aux m facteurs de développement dont on dispose.
Il existe un certain nb de fonctions qui permettent d'effectuer le lissage comme :

a) Puissance inverse

* à 2 paramètres : $f(t) = 1 + a(1+t)^{-b}$, a et $b > 0$

* à 3 paramètres : $f(t) = 1 + a(c+t)^{-b}$, a et $b > 0$

b) Exponentielle négative : $f(t) = 1 + a e^{-bt}$, $b > 0$

c) Type Weibull : $f(t) = 1 + a(1+t)^b e^{-ct}$, $a, b, c > 0$

Les paramètres inconnus peuvent être estimés par la méthode MC, i.e en minimisant :

$$\Delta(f) = \sum_{j=0}^{m-1} [(\underbrace{f_j}_{\text{facteur empirique}} - 1) - \underbrace{f(j)}_{\text{facteur lissé}} - 1]^2$$

En passant au log, on se ramène aux MCO et on estime les paramètres en minimisant :

$$\Delta_1(f) = \sum_{j=0}^{m-1} [\ln(f_j - 1) - \ln(f(j) - 1)]^2$$

Une autre possibilité pour lisser les $(f_j)_{j \in [\![0, m-1]\!]}$ est d'utiliser la METHODE DE BONDY :

La fonction de lissage vérifie :

* $f(0) = \underline{f_0}$ celui de CL

* $f(t+1) = [f(t)]^B$ avec $0<B<1$ paramètre inconnu que l'on estime par la méthode MC en minimisant $\Delta_1(B) = \sum_{j=0}^{n-1} [\ln(f_{j+1}) - B\ln(f(j))]^2$ (avec $f_n = 1$.)