Examen Séries temporelles 2011-2012
Seconde session

Master 2 SAF Pro

Sans document - Avec calculatrice

Questions de cours : (6 points)

1. Qu'est-ce qu'un processus stationnaire fort et un processus stationnaire faible? Quels sont les outils statistiques que vous utiliseriez pour décider à partir d'observations si un processus est stationnaire fort ou faible?

2. Expliquer ce qu'est la procédure de Box et Jenkins d'ajustement d'un modèle ARMA.

3. Quel est l'intérêt des processus ARMA par rapport aux processus AR ou MA? Quelles sont les difficultés statistiques rencontrées pour identifier les ordres des processus ARMA par rapport à l'identification des ordres des processus AR ou MA?

Exercice 1 : (5 points)

On considère le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$X_t = \varepsilon_t \varepsilon_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z},$$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont des variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de moyenne m de variance σ^2.

$Cov(X,Y) = \mathbb{E}[(X-\mathbb{E}[X])(Y-\mathbb{E}[Y])]$

$\mathbb{E}[\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-1}^2] = \mathbb{E}[\varepsilon_t^2]\mathbb{E}[\cdot] = (\sigma^2+m^2)$

1. Le processus est-il stationnaire faible/fort?

   a) Donner son espérance et sa variance. $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t]\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}] = m^2$ car (ε_t) ⫫ et $\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{E}[X_t^2] - \mathbb{E}[X_t]^2 = (\sigma^2+m^2)^2 - m^4 = \sigma^4 + 2\sigma^2 m^2$ car (ε_t) ⫫

   b) Donner sa fonction d'autocovariances. $Cov(X_t, X_{t-k}) = \mathbb{E}[(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1} - m^2)(\varepsilon_{t-k}\varepsilon_{t-k-1} - m^2)] = \mathbb{E}[\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}\varepsilon_{t-k}\varepsilon_{t-k-1}] - m^4 - m^4 + m^4 = \mathbb{E}[\dots] - m^4$ car (ε_t) ⫫

   $\Rightarrow$ Si $k=1$, $\gamma_X(1) = \mathbb{E}[\varepsilon_t]\mathbb{E}[\varepsilon_{t-1}^2]\mathbb{E}[\varepsilon_{t-2}] - m^4 = m\times(\sigma^2+m^2)m - m^4 = m^2\sigma^2$ si $k\geq 2$, $\gamma_X(k) = 0$

2. En déduire qu'il s'agit d'un processus $MA(1)$ dont on donnera la représentation cononique. $\Rightarrow \gamma_X(k) = \begin{cases} \sigma^2(\sigma^2+2m^2) & \text{si } k=0 \\ m^2\sigma^2 & \text{si } |k|=1 \\ 0 & \text{si } |k|\geq 2 \end{cases}$

On a donc $\begin{cases} \mathbb{E}[X_t] = m^2 \\ \mathbb{V}[X_t] = \sigma^2(\sigma^2+2m^2) \\ \gamma_X(k) = \begin{cases} \sigma^2(\sigma^2+2m^2) \text{ si } k=0 \\ m^2\sigma^2 \text{ si } |k|=1 \\ 0 \text{ si } |k|\geq 2 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow X_t$ est un MA(1) $\to X_t = \mu + \theta_1\eta_{t-1} + \eta_t$

On va centrer $\varepsilon_t \Rightarrow$ on considère $\eta_t = \varepsilon_t - m$

$\Rightarrow X_t = (\eta_t + m)(\eta_{t-1}+m) \Rightarrow X_t = \eta_t\eta_{t-1} + m(\eta_t + \eta_{t-1}) + m^2$

or $\mathbb{E}[\eta_t] = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[m(\eta_t+\eta_{t-1}) + m^2] = m^2 \Rightarrow$ on peut reformuler $X_t = m^2 + \eta_t\eta_{t-1} + \eta_t$

Pour rendre comparable à forme MA(1), on considère $\eta_t\eta_{t-1}$ comme le terme de MM

$\Rightarrow \mu = m^2$ et $\theta_1 = m^2\sigma^2$

Exercice 2: (4 points)

On considère le processus $ARMA(2,2)$ suivant

$(1 - 0.4L - 0.45L^2)X_t = (1 + L + 0.25L^2)$

$\Delta_1 = 0.4^2 + 4\times 0.45 = 0{,}16 + 1{,}8 = 1{,}96$

$\Delta_2 = 1 - 4\times 0.25 = 0$

$x = \frac{-1}{2\times 0.25} = -2$

$\Rightarrow x_1 = -2$, $x_2 = \frac{10}{9}$

$$X_t = 0,4X_{t-1} + 0,45X_{t-2} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1} + 0,25\varepsilon_{t-2},$$

$\Rightarrow (1+\frac{1}{2}L)(1-\frac{9}{10}L)X_t = (1+\frac{1}{2}L)^2\varepsilon_t$

$\Rightarrow \underbrace{(1-\frac{9}{10}L)}_{\Phi}X_t = \underbrace{(1+\frac{1}{2}L)}_{\Theta}\varepsilon_t$

racine de Φ est de module >1

racine de Θ

Φ et Θ sont 1ers entre eux

$\Rightarrow$ rpz canonique minimale est :

$(1-\frac{9}{10}L)X_t = (1+\frac{1}{2}L)\varepsilon_t$

$\Leftrightarrow X_t - 0.9X_{t-1} = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible.

1. Donner la représentation canonique minimale de ce processus.

2. En déduire les représentations $AR(\infty)$ et $MA(\infty)$.

↳ on a vu que $\underbrace{(1-\frac{9}{10}L)}_{\Phi(L)}X_t = \underbrace{(1+\frac{1}{2}L)}_{\Theta(L)}\varepsilon_t$

Deja Φ et Θ sont inversibles car $|\frac{9}{10}|<1$ et $|-\frac{1}{2}|<1$

$\Rightarrow \Phi^{-1}(L) = \sum_{j=0}^{\infty}(\frac{9}{10})^j L^j$ et $\Theta^{-1}(L) = \sum_{j=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^j L^j$

$\sum(-\frac{1}{2})^j L^j - \frac{9}{10}\times(-2)\sum_{j=0}(-\frac{1}{2})^{j+1}L^{j+1}$

$= 1 + \frac{14}{5}\sum_{j=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^{j+1}L^{j+1}$

$\Rightarrow MA(\infty)$: $X_t = (1+\frac{1}{2}L)\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{9}{10})^j L^j)\varepsilon_t \to X_t = (\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{9}{10})^j L^j + \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}(\frac{9}{10})^j L^{j+1})\varepsilon_t = (1 + \frac{14}{9}\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{9}{10})^j L^j)\varepsilon_t = \varepsilon_t + \frac{14}{9}\sum_{j=1}^{\infty}(\frac{9}{10})^j\varepsilon_{t-j}$

et $AR(\infty)$: $\varepsilon_t = (1-\frac{9}{10}L)\sum_{j=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^j L^j) X_t \to \varepsilon_t = (\sum_{j=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^j L^j - \frac{9}{10}\sum_{j=0}^{\infty}(-\frac{1}{2})^j L^{j+1})X_t = (1 + \frac{14}{5}\sum_{j=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^j L^j)\varepsilon_t = X_t + \frac{14}{5}\sum_{j=1}^{\infty}(-\frac{1}{2})^j X_{t-j}$

Exercice 3 : (5 points)

On dispose de la série (y_t) des indices trimestriels de la production industrielle (base 100 en 1970) de 1976 à 1982 :

Yt	X1	X2	X3	X4	X5			
127	1	1	1	0	0	125,308	6,013	-4,321
127	1	2	0	1	0	125,674	3,790	-2,464
108	1	3	0	0	1	126,040	-18,433	0,393
134	1	4	-1	-1	-1	126,406	B	-1,036
133	1	5	1	0	0	126,772	6,013	0,214
130	1	6	0	1	0	127,138	3,790	-0,929
107	1	7	0	0	1	A	-18,433	-2,071
132	1	8	-1	-1	-1	127,871	8,629	-4,500
133	1	9	1	0	0	128,237	6,013	C
134	1	10	0	1	0	128,603	3,790	1,607
110	1	11	0	0	1	128,969	-18,433	-0,536
140	1	12	-1	-1	-1	129,335	8,629	2,036
138	1	13	1	0	0	129,701	6,013	2,286
136	1	14	0	1	0	130,067	3,790	2,143
118	1	15	0	0	1	130,433	-18,433	6,000
146	1	16	-1	-1	-1	130,799	8,629	6,571
145	1	17	1	0	0	131,165	6,013	7,821
138	1	18	0	1	0	131,531	3,790	2,679
115	1	19	0	0	1	131,897	-18,433	1,536
141	1	20	-1	-1	-1	132,263	8,629	0,107
137	1	21	1	0	0	132,629	6,013	-1,643
136	1	22	0	1	0	132,996	3,790	-0,786
115	1	23	0	0	1	133,362	-18,433	0,071
143	1	24	-1	-1	-1	133,728	8,629	0,643
137	1	25	1	0	0	134,094	6,013	-3,107
136	1	26	0	1	0	134,460	3,790	-2,250
111	1	27	0	0	1	134,826	-18,433	-5,393
140	1	28	-1	-1	-1	135,192	8,629	-3,821
Coefficient	124,942	0,366	6,013	3,790	-18,433			
Ecart-type	1,369	0,083	1,153	1,147	1,147			
R2	0,925							

La série désaisonnalisée et les coefficients saisonniers ont été obtenus à partir d'une méthode de Buys-Ballot.

1. Expliquer la méthodologie mise en place et l'utilité des colonnes $X1$-$X5$.
2. Donner les valeurs A, B, C et expliquer les calculs.
3. Quelles sont les sommes des deux dernières colonnes?
4. Quel est l'avantage de cette méthode par rapport à la méthode des moyennes mobiles.