

Modèles de durée / Examen du 29 mai 2007

Durée 1h – aucun document n'est autorisé

Modèle à risques concurrents

Dans cet exercice on utilise la paramétrisation suivante des lois exponentielles et de Weibull :

- ✓ loi exponentielle : $h(t) = \frac{1}{\lambda_e}$,
- ✓ loi de Weibull : $h(t) = \frac{\beta}{\lambda_w} \left(\frac{t}{\lambda_w} \right)^{\beta-1}$.

On considère pour modéliser le fonctionnement d'un appareil jusqu'à sa défaillance le modèle de durée $T = \min(E, W)$ où les variables aléatoires E et W sont indépendantes, E suivant une loi exponentielle et W une loi de Weibull définies comme ci-dessus.

- 1- Déterminez la fonction de hasard, la densité, et la fonction de survie de T .
- 2- On suppose $\beta = 2$ et on veut déterminer la probabilité que la défaillance provienne de E ; montrez que $\Pr(T = E) = \frac{\lambda_w}{\lambda_e} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\lambda_w}{2\lambda_e}\right)$ avec $\operatorname{erfc}(x) = e^{-x^2} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-u^2} du$ la fonction d'erreur complémentaire. On pourra conditionner par la durée exponentielle, puis faire le changement de variable $y = \frac{x}{\lambda_w}$.
- 3- On se place maintenant en situation de censure droite ; rappelez le lien entre le modèle latent (X_1, \dots, X_n) et le modèle observable (Y_1, \dots, Y_n) .
- 4- Ecrivez la log-vraisemblance des données observées dans le cas ci-dessus ; vous rappelerez l'ensemble des notations avec précision.
- 5- Quelle méthode proposez-vous pour résoudre les équations de vraisemblance ?