Questions de cours

Juin 2012-2013

Séries temporelles

→ voir sujet 2016-2017 (Q1 et Q2)

1. Processus stationnaire faible

- $t \to \mathbb{E}[X_t] = \mu_X(t) = \mu$ où $\mu \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{Z}$
- $t \to Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(t, t+h) = \gamma_X(h)$ où $h \in \mathbb{R}$, $\forall t \in \mathbb{Z}$

Caractérisations possibles et leur intérêt

- moyenne stable, ainsi qu'importe l'info et où elle se trouve, on retrouve une valeur moyenne
- les observations gardent des corrélations stables entre elles pour un même décalage
- L'autocorrélogramme (partiel) doit avoir une décroissance exp et non pas lente, sinon pas stationnaire

2. ...

Problème

$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$, $t \in \mathbb{Z}$ et $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$, $a \in \mathbb{R} \setminus \{-1; 1\}$

* Cas $|a| < 1$

1. $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire ? Représentation $MA(\infty)$

Nous avons un $AR(1)$ où $|a| \neq 1$, donc $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire.

$\Phi(L) X_t = \varepsilon_t$ où $\Phi(L) = 1 - aL$.

Comme $|a| < 1$, alors racine de Φ (i.e. $\frac{1}{a}$) est de module > 1, donc nous avons $\Phi(L)^{-1} = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k L^k$

Ainsi : $X_t = \Phi(L)^{-1} \varepsilon_t = \sum_{k=0}^{+\infty} a^k \varepsilon_{t-k}$, soit sa représentation $MA(\infty)$.

2. Fonction d'autocovariance $\gamma_X(h)$

- $\mathbb{E}[X_t] = a\,\mathbb{E}[X_{t-1}] + 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X_t]\underbrace{(1-a)}_{\Phi(1)\neq 0} = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X_t] = 0.$

- $\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{V}\left[\sum_{k=0}^{+\infty} a^k \varepsilon_{t-k}\right] = \sum_{k=0}^{+\infty} (a^2)^k \sigma_\varepsilon^2$ car (ε_t) non corrélés.

$$\gamma_X(0) = \frac{1}{1-a^2}\sigma_\varepsilon^2.$$

- $\gamma_X(1) = \mathbb{E}[X_t X_{t-1}] = \mathbb{E}[a X_{t-1}^2] + \mathbb{E}[X_{t-1}\varepsilon_t]$

$= a\,\gamma_X(0) + 0$ car (ε_t) est l'innovation donc $\varepsilon_t \perp\!\!\!\perp \underline{X}_{t-1}$

$$\gamma_X(1) = \frac{a}{1-a^2}\sigma_\varepsilon^2$$

- $\gamma_X(2) = \mathbb{E}[X_t X_{t-2}] = \mathbb{E}[a X_{t-1} X_{t-2}] + \underbrace{\mathbb{E}[\varepsilon_t X_{t-2}]}_{=0}$

$= a\,\gamma_X(1)$

$\vdots$

$$\gamma_X(h) = \frac{a^h}{1-a}\sigma_\varepsilon^2,\ h\geq 1,\ \text{d'où } \rho_X(h) = a^{|h|},\ h \geq 1$$

Equation de récurrence

$$\gamma_X(h) = a^h \gamma_X(0)$$

Densité spectrale de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

$$X_t = \sum_{h=0}^{+\infty} a^h \varepsilon_{t-h}$$

$$f_X(\omega) = f_\varepsilon(\omega)\,|\Phi(\exp(i\omega))|^2 = f_\varepsilon \left|\sum a^k e^{-ik\omega}\right|^2 \ldots$$

On écrit plutôt $\varepsilon_t = X_t - aX_{t-1} = (1-aL)X_t = \sum_{k=0}^{1} (-a)^k X_{t-k}$

Donc $f_\varepsilon(\omega) = \left|\sum_{k=0}^{1} (-a)^k e^{+ik\omega}\right| f_X(\omega)$

$$f_\varepsilon(\omega) = |1 - a e^{+i\omega}|\, f_X(\omega)$$

$$|1 - a e^{-i\omega}| = |1 - a\cos(\omega) + ia\sin(\omega)| = (1 + a\cos(\omega))^2 + (a\sin(\omega))^2$$

$$= 1 + 2a\cos\omega + a^2\cos^2(\omega) + a^2\sin^2(\omega) \quad = a^2$$

$$= 1 + 2a\cos(\omega) + a^2$$

$$f_X(\omega) = \sum_{h=-\infty}^{+\infty} \gamma_X(h) e^{i\omega h} \times \frac{1}{2\pi}$$

D'où : $$f_X(\omega) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\frac{1}{1 + 2a\cos(\omega) + a^2}.$$

3/ Estimateur $\hat{a}_n$ de a par Yule-Walker

On observe $x_1, \dots, x_n$

Yule-Walker : $\gamma_X(h) = \sum_{j=1}^{p} \phi_j \gamma_X(h-j)$. Ici $p=1$

$$\Rightarrow \gamma_X(1) = a\,\gamma_X(0)$$

$$\Rightarrow \hat{a}_n = \frac{\hat{\gamma}_X(1)}{\hat{\gamma}_X(0)} \quad \text{où } \hat{\gamma}_X(h) = \frac{1}{T-h}\sum_{t=1}^{T-h}(x_t - \bar{x}_T)(x_{t+h} - \bar{x}_T)$$

- $\hat{\gamma}_X(h)$ est ps. convergent et asymptotiquement sans biais
- $\sqrt{T}(\hat{a}_n - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \sigma_\varepsilon^2 \frac{1}{\gamma_X(0)}\right)$

Or $\gamma_X(0) = \frac{1}{1-a^2}\sigma_\varepsilon^2$, d'où :

$$\sqrt{T}(\hat{a}_n - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2(1-a^2))$$

Ecrire la vraisemblance + donner estimateur $\hat{a}^{EMV}$ de a.

La fonction de vraisemblance s'écrit : Ici AR(1) $\rightarrow p=1$

$L(X_1, \dots, X_n ; a, \sigma_\varepsilon^2)$. On cherche "a" dans nos calculs

Ici $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$: On suppose σ_ε^2 connue.

Comme les (X_t) ne sont pas indépendants, il n'est pas possible d'écrire cette $\boxed{\text{vraisemblance}}$ (densité jointe) comme produit de densités marginales.

On utilise le théorème de Bayes et on utilise les densités cond. :

$$L(X_1, \dots, X_n ; a) = L(X_n | X_{n-1}, \dots, X_1 ; a) L(X_{n-1} | X_{n-2}, \dots X_1 ; a) \dots$$
$$L(X_t | X_{t-1}, \dots, X_1 ; a) \dots L(X_2 | X_1 ; a)$$

Or X_t ne dépend que de X_{t-1}, d'où :

$$L(X_1, \dots, X_n ; a) = L(X_n | X_{n-1} ; a) L(X_{n-1} | X_{n-2} ; a) \dots, L(X_2 | X_1 ; a)$$
$$= \prod_{t=2}^{n} L(X_t | X_{t-1} ; a)$$

Or $\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$ et $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$, donc si X_{t-1} connu, on peut écrire $X_t | X_{t-1} \sim \mathcal{N}(aX_{t-1}, \sigma_\varepsilon^2)$ par translation d'une cste.

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \exp\left\{\frac{-1}{2\sigma_\varepsilon^2}(x-\mu)^2\right\}$$

Donc : $L(X_t \mid X_{t-1} ; a) = \dfrac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ \dfrac{-1}{2\sigma_\varepsilon^2} (X_t - aX_{t-1})^2 \right\}$

D'où :

$$L(X_n, \dots, X_1 ; a) = \prod_{t=2}^{n} \frac{1}{\sigma_\varepsilon \sqrt{2\pi}} \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma_\varepsilon^2} (X_t - aX_{t-1})^2 \right\}$$

$$= (2\pi \sigma_\varepsilon^2)^{-\frac{T-1}{2}} \exp\left\{ \frac{-1}{2\sigma_\varepsilon^2} \sum_{t=2}^{T} \underbrace{(X_t - aX_{t-1})^2}_{\varepsilon_t} \right\}$$

Or : maximiser la vraisemblance par rapport à "a" revient à minimiser la somme sous l'exponentielle $\Rightarrow$ pareil que MCO car on reconnaît somme des carrés des résidus

$$\max_a L(X_n, \dots, X_1 ; a) \iff \min_a \sum_{t=2}^{T} (X_t - aX_{t-1})^2$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\left(\sum_{t=2}^{T} (X_t - aX_{t-1})^2 \right) = 0 \iff \sum_{t=2}^{T} -2X_{t-1}(X_t - aX_{t-1}) = 0$$

$$\iff \sum_{t=2}^{T} X_{t-1} X_t = a \sum_{t=2}^{T} X_{t-1}^2$$

Ainsi, on a : $\hat{a}^{EMV} = \dfrac{\sum_{t=2}^{T} X_{t-1} X_t}{\sum_{t=2}^{T} X_{t-1}^2}$.

On a : $\hat{a}^{EMV} = \hat{a}^{MCO}$ et $\sqrt{n}(\hat{a}^{EMV} - a) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2 (1-a^2))$

* <u>Cas $|a| > 1$</u>

4. <u>Processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ stationnaire ? Représentation MA(∞)</u>

$|a| \neq 1$, donc (X_t) est stationnaire.

$|a| > 1$, donc racine de Φ (i.e. $\frac{1}{a}$) est < 1, d'où :

$\Phi^{-1}(L) = -\sum_{k=1}^{+\infty} a^{-k} L^{-k}$. Donc : $X_t = \Phi^{-1}(L)\varepsilon_t = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{a^k} \varepsilon_{t+k}$.

5/ Fonction d'autocovariance

$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$ n'est pas l'écriture canonique si $|a|>1$. On doit réécrire :

$$X_t = \frac{1}{a} X_{t-1} + \eta_t \quad \text{où } \eta_t \sim BB(0,\sigma^2_\eta) \text{ et } \sigma^2_\eta = \sigma^2_\eta a^{-2}$$

Ainsi :

- $\mathbb{E}[X_t] = \frac{1}{a}\mathbb{E}[X_{t-1}] = \mathbb{E}[X_t]\left(1-\frac{1}{a}\right) = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X_t]=0$
- $\mathbb{V}[X_t] = \frac{1}{a^2}\mathbb{V}[X_{t-1}] + \sigma^2_\eta + \underbrace{\frac{2}{a}\mathrm{cov}(X_{t-1},\eta_t)}_{=0 \text{ car } \eta_t \perp\!\!\!\perp X_{t-1}}$

$$\Rightarrow \mathbb{V}[X_t]\left(1-\frac{1}{a^2}\right) = \sigma^2_\eta$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}[X_t]\,\frac{a^2-1}{a^2} = \sigma^2_\eta \Rightarrow \mathbb{V}[X_t] = \frac{a^2}{a^2-1}\sigma^2_\eta = \frac{1}{a^2-1}\sigma^2_\varepsilon$$

- $\gamma_X(0) = \mathbb{V}[X_t]$

$\gamma_X(1) = \mathrm{cov}(X_t, X_{t-1}) = \mathrm{cov}\left(\frac{1}{a}X_{t-1}+\eta_t, X_{t-1}\right)$

- $\gamma_X(1) = \frac{1}{a}\gamma_X(0)$

- $\gamma_X(2) = \mathrm{cov}(X_t, X_{t-2}) = \mathrm{cov}\left(\frac{1}{a}X_{t-1}+\eta_t, X_{t-2}\right)$

$$= \frac{1}{a}\gamma_X(1)$$
$$= \frac{1}{a^2}\gamma_X(0)$$

Donc : $\gamma_X(h) = \frac{1}{a^{|h|}}\gamma_X(0)$, $h \geq 1$

Densité spectrale

$$\eta_t = X_t - \frac{1}{a}X_{t-1} = \sum_{k=0}^{1}\left(\frac{-1}{a}\right)^k X_{t-k}$$

Donc $f_\eta(\omega) = \left|1-\frac{1}{a}e^{i\omega}\right| f_X(\omega)$ et $f_\eta(\omega) = \frac{\sigma^2_\eta}{2\pi} = \frac{\sigma^2_\varepsilon}{2a^2\pi}$

$$\frac{\sigma^2_\varepsilon}{2a^2\pi} = \left(1+\frac{2}{a}\cos(\omega)+\frac{1}{a^2}\right)f_X(\omega) \Rightarrow f_X(\omega) = \dots$$