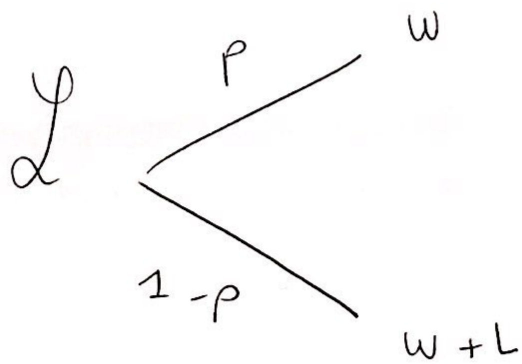
# Exercice 1

1) L'utilité de réserve de l'agent correspond à son niveau d'utilité dans le cas où il ne souscrit aucun contrat d'assurance.

On peut représenter la situation de l'énoncé t.q :




$$\Rightarrow \underline{u} = p\,u(w) + (1-p)\,u(w+L)$$

2) L'agent est averse au risque : sa fonction d'utilité est concave ($u' > 0$ et $u'' < 0$).

L'assureur va chercher à maximiser son profit sous <u>contrainte de participation</u> de l'agent.

Profit de l'assureur :

$$\Pi(q, x, p) = p(x - q) + (1-p)x$$
$$= x - pq$$

La contrainte de participation de l'agent est telle que :

$$u = p\,u(w - x + q) + (1-p)\,u(w - x + L) \geq \underline{u}$$

Soit le programme de maximisation suivant :

$$\text{Max } \Pi = x - pq$$
$$\text{SC. } u \geq \underline{u}$$

On écrit le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\lambda, q, x) = x - pq + \lambda\left[p\,u(w - x + q) + (1-p)\,u(w - x + L) - \underline{u}\right]$$

On résout : ~~(les conditions de Kuhn-Tucker)~~ (CPO)  Séance 1

$$(1)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \iff 1 - \lambda \rho u'(w + q - x) - (1-\rho)\lambda u'(w + L - x) = 0$$

$$(2)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \iff -\rho + \lambda \rho u'(w + q - x) = 0$$

$$(3)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff \rho u(w - x + q) + (1-\rho) u(w - x + L) - \underline{u} = 0$$

$$(1) \text{ et } (2) \iff \lambda \overset{(1)}{=} \frac{1}{\rho u'(w - x + q) + (1-\rho) u'(w - x + L)}$$

$$\overset{(2)}{=} \frac{1}{u'(w + q - x)}$$

$$\iff u'(w - x + q) = \rho u'(w + q - x) + (1-\rho) u'(w + L - x)$$

$$\iff u'(w - x + q) = u'(w - x + L)$$

car fonction monotone

$$\iff q^* = L$$

Scanné avec CamScanner

En d'autres termes, la couverture optimale = couverture complète.

On reprend :

(3) $p\,u(w - x + q^*) + (1-p)\,u(w - x + L) - \underline{u} = 0$

(=> CP saturée)

(=) ~~u(w - x +~~

$(\Leftrightarrow)\ p\,u(w + L - x) + (1-p)\,u(w + L - x) = \underline{u}$

$(\Leftrightarrow)\ u(w + L - x) = \underline{u}$

$(\Leftrightarrow)\ w + L - x = u^{-1}(\underline{u})$

$(\Leftrightarrow)\ x^* = w + L - u^{-1}(\underline{u})$

↳ prime d'assurance fixe.

=> propriété du cours : assureur neutre vis-à-vis du risque + agent averse au risque : prime fixe + couv. complète.

3) a) Agent neutre : $u' > 0$ et $u'' = 0$

$$E(u(x)) = u(E(x))$$

Le programme devient :

$$\max \; x - pq$$
$$\text{s.c. } p\,u(w - x + q) + (1-p)\,u(w - x + L) \geq \underline{u}$$

$$\cancel{\Leftrightarrow u(w - x + pq + (1-p)L) \geq \underline{u}}$$

$$\Leftrightarrow p\,u(w - x + q) + (1-p)\,u(w - x + L) \geq$$
$$p\,u(w) + (1-p)\,u(w+L)$$

On applique : $u(E(w)) = E(u(w))$

$$\Leftrightarrow u\big(p(w - x + q) + (1-p)(w - x + L)\big) \geq$$
$$u\big(p(w) + (1-p)(w+L)\big)$$
$$\Leftrightarrow u(w - x + pq + (1-p)L) \geq u((1-p)L + w)$$

et Puisque $u(\cdot)$ est croissante monotone (hypothèse de non satiété) :

$$\Leftrightarrow w - x + pq + (1-p)L \geq w + (1-p)L$$

$$\Leftrightarrow pq \geq x$$ → soit la contrainte de participation de l'agent

Le problème devient :

$$\begin{cases} \max & x - pq \\ \text{sc.} & pq \geq x \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Donc $x^* = pq$.

b) Situation de CPP $\Rightarrow$ on a un prix qui vaut le coût marginal et l'assureur qui ne fait pas de profit ($\Pi = 0$).

$\Rightarrow$ Soit $x = pq$.

Donc $x^* = pq^*$. (avec $q^* = L$ car agent averse)

4) On note $B(\cdot)$ la fonction d'utilité de l'assureur.

On a : $u' > 0$ et $u'' < 0$

$B' > 0$ et $B'' < 0$

On réécrit le programme :

$$\max \ (1-p)\,B(x) + p\,B(x-q)$$

$$\text{sc.} \quad p\,u(w-x+q) + (1-p)\,u(w-x+L) \geq \underline{u}$$

$$\mathcal{L}(q,x,\lambda) = (1-p)\,B(x) + p\,B(x-q) - \lambda\big(p\,u(w-x+q) + (1-p)\,u(w-x+L) - \underline{u}\big)$$

(1) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = (1-p)\,B'(x) + p\,B'(x-q) + \lambda\big(p\,u'(w-x+q) + (1-p)\,u'(w-x+L)\big) = 0$$

(2) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -p\,B'(x-q) - \lambda\,p\,u'(w-x+q) = 0$$

(3) $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = p\,u(w-x+q) + (1-p)\,u(w-x+L) = \underline{u}$$

(1) et (2) $\Leftrightarrow$ $$\lambda \overset{(1)}{=} \frac{-(1-p)\,B'(x) - p\,B'(x-q)}{p\,u'(w-x+q) + (1-p)\,u'(w-x+L)}$$

$$\lambda \overset{(2)}{=} \frac{-\cancel{p}\,B'(x-q)}{\cancel{p}\,u'(w-x+q)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(1-p)\,B'(x) + p\,B'(x-q)}{p\,u'(w-x+q) + (1-p)\,u'(w-x+L)} = \frac{B'(x-q)}{u'(w-x+q)}$$

($\rightarrow$ propriété d'efficience)

$$\Leftrightarrow \frac{(1-p)\,B'(x) + p\,B'(x-q)}{B'(x-q)} = \frac{p\,u'(w+q-x) + (1-p)\,u'(w-x+L)}{u'(w-x+q)}$$

$$\Leftrightarrow p + \frac{(1-p)\,B'(x)}{B'(x-q)} = p + \frac{(1-p)\,u'(w+L-x)}{u'(w+q-x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B'(x)}{B'(x-q)} = \frac{u'(w+L-x)}{u'(w+q-x)}$$

On retrouve au numérateur : les utilités marginales des deux acteurs dans le cas "pas de sinistre", et au dénominateur : les utilités marginales dans le cas "avec sinistre".

$\Rightarrow$ ~~Égalité~~ Condition d'Arrow Pratt : égalité des utilités marginales relatives des deux acteurs

$\hookrightarrow$ Partage du risque.

Séance 1 (5)

Or $\dfrac{B'(x)}{B'(x-q)} < 1$

(→ On sait que $B'>0$ et $B''<0$
⇒ $B'()$ monotone décroissante
→ $x > x-q$ car couv non négative, ni nulle)

Donc (égalité d'Arrow Pratt) $\dfrac{u'(w+L-x)}{u'(w+q-x)} < 1$

$\Leftrightarrow u'(w+L-x) < u'(w+q-x)$

$\Leftrightarrow u(w-x+L) > u(w+q-x)$

$\Leftrightarrow q^* < L$

⇒ Lorsque les 2 acteurs sont averses au risque, ils partagent le risque.

D'où le fait que la couverture soit incomplète.

 6

# Exercice 2 :

1) On cherche à maximiser le profit

$$\max \Pi(e, w_s, w_p) = P_s(e)\, B(x_s - w_s) + P_E(e)\, B(x_E - w_E)$$

$$\text{sc. } P_s(e)\, u(w_s) + P_E(e)\, u(w_E) - V(e) \geq 0$$

(utilité de l'agent quand il travaille > à 0)

On écrit de Lagrangien

$$\mathcal{L}(w_s, w_E, \lambda) = P_s(e) \cdot B(x_s - w_s) + P_E(e) \cdot B(x_E - w_E)$$
$$+ \lambda \left[ P_s(e) \cdot u(w_s) + P_E(e) \cdot u(w_E) - V(e) \right]$$

On résout :
~~les conditions de Kuhn-Tucker :~~

$$(1)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_s} = 0 \iff \lambda \left( P_s(e)\, u'(w_s) \right) - P_s(e) \cdot B'(x_s - w_s) = 0$$

$$(2)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_E} = 0 \iff \lambda \left( P_E(e) \cdot u'(w_E) \right) - P_E(e) \cdot B'(x_E - w_E) = 0$$

$$(3)\ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff P_s(e)\, u(w_s) + P_E(e) \cdot u(w_E) - V(e) = 0$$

(1) et (2) $\Rightarrow \lambda = \dfrac{P_S(e) \cdot B'(x_S - w_S)}{P_S(e)\, \mu'(w_S)} = \dfrac{P_E(e) \cdot B'(x_E - w_E)}{P_E(e) \cdot \mu'(w_E)}$

$$\Leftrightarrow \frac{B'(x_S - w_S)}{\mu'(w_S)} = \frac{B'(x_E - w_E)}{\mu'(w_E)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{B'(x_S - w_S)}{B'(x_e - w_e)} = \frac{\mu'(w_S)}{\mu'(w_E)}$$

On retrouve l'égalité d'Arrow Pratt (égalité des utilités marginales des 2 acteurs)

Dans le cas a) on a principal neutre vis-à-vis du risque $\Rightarrow B'' = 0 \Rightarrow B' = cste$

$\hookrightarrow \dfrac{B'(x_S - w_S)}{B'(x_E - w_E)} = 1$ (Rapport des $\hat{\mu}$ perdu)

$$\Leftrightarrow \frac{\mu'(w_S)}{\mu'(w_E)} = 1$$

Donc $\mu'(w_E) = \mu'(w_S)$

Comme $u(\cdot)$ est décroissante (monotone), on peut dire que $w_E = w_S$.

En d'autre termes, le principal, neutre vis-à-vis du risque, supporte tout le "risque" en offrant un revenu constant qqs l'état de la nature.

b) Cette fois $$\frac{u'(w_S)}{u'(w_E)} = 1$$

Remarque : (!) c'est ≠t ici car on a des propriété ≠tes sur la fonction d'utilité $(u''=0)$

Donc
$$\Leftrightarrow \frac{B'(x_S - w_S)}{B'(x_E - w_E)} = 1$$

$$\Leftrightarrow B'(x_S - w_S) = B'(x_E - w_E)$$

Comme $B'$ monotone déroissante :
$$x_S - w_S = x_E - w_E$$

$\Leftrightarrow w_S = x_S - x_E + w_E$

$\Leftrightarrow w_S > w_E$

↳ c'est l'agent qui supporte le risque

2) On repart de l'égalité d'Arrow Pratt :

$$\frac{B'(x_S - w_S)}{B'(x_E - w_E)} = \frac{u'(w_S)}{u'(w_E)} < 1$$

+ Par le principal : $B'(x_S - w_S) < B'(x_E - w_E)$.
  Puisque $B'(\cdot)$ est monotone décroissante : $x_S - w_S > x_E - w_E$

+ Par l'agent : $u'(w_S) < u'(w_E)$.
  Avec $u'(\cdot)$ monotone décroissante : $w_S > w_E$

$\Rightarrow$ Partage du risque

3) a. Problème d'asymétrie d'information :

↳ cas où l'employeur ne peut pas observer l'effort de l'agent

b. Problème d'asymétrie d'information :

↳ cas où l'employeur n'observe pas le "type" de l'agent.