

# Examen du cours de “Mesures de risque en finance”

Mercredi 10 Janvier 2024 (9h00-11h00)

Aucun document autorisé.

Il est impératif de rédiger la réponse aux deux parties sur des copies différentes.

## Partie I (10 points)

On considère  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité tel qu'il existe une variable aléatoire réelle  $U$  de loi uniforme sous  $\mathbb{P}$ . On considère  $\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , l'ensemble des variables aléatoires à valeurs bornées muni de la norme  $\|X\|_\infty = \inf\{M > 0, \mathbb{P}(|X| \leq M) = 1\}$ . On définit, pour  $\alpha \in ]0, +\infty[$ ,

$$X \in \mathcal{X}, \rho_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} \log(\mathbb{E}[e^{-\alpha X}]).$$

1. Montrer que  $\rho_\alpha(X)$  est une mesure de risque monétaire convexe. Est-elle cohérente ?

2. (a) Montrer que pour  $X \in \mathcal{X}$  fixé,  $\alpha \mapsto \rho_\alpha(X)$  est une fonction croissante.

(b) Calculer pour  $X \in \mathcal{X}$ ,  $\rho_0(X) := \lim_{\alpha \rightarrow 0} \rho_\alpha(X)$ . Est-ce que  $\rho_0$  est une mesure de risque cohérente ?

On introduit, comme dans le cours,  $\mathcal{M}_1(\mathbb{P})$  l'ensemble des mesures de probabilité sur  $(\Omega, \mathcal{F})$  qui sont absolument continues par rapport à  $\mathbb{P}$ . Par la suite,  $\mathbb{E}$  désignera l'espérance par rapport à la probabilité de référence  $\mathbb{P}$ . Pour  $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$ , on note  $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}$  la densité de  $\mathbb{Q}$  par rapport à  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}$  l'espérance sous la probabilité  $\mathbb{Q}$  :  $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} X\right]$  pour tout  $X \in \mathcal{X}$ .

3. On se donne  $\alpha \in ]0, +\infty[$ .

(a) Soit  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{X}^{\mathbb{N}}$  une suite bornée (c'est à dire qu'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que  $\forall n \in \mathbb{N}, \|X_n\|_\infty \leq M$ ) telle que  $X_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} X$ , p.s.. Montrer que  $\rho_\alpha(X) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \rho_\alpha(X_n)$ .

(b) En déduire que

$$\rho_\alpha(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \gamma_\alpha(\mathbb{Q}),$$

où  $\gamma_\alpha(\mathbb{Q}) = \sup_{X \in \mathcal{X}} \mathbb{E}[-X \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}] - \frac{1}{\alpha} \log \mathbb{E}[e^{-\alpha X}]$ . Vérifier que  $\gamma_\alpha(\mathbb{Q}) = \frac{1}{\alpha} \gamma_1(\mathbb{Q})$

On pose  $\varphi(x) = x \log(x)$ ,  $x \geq 0$  ( $\varphi(0) = 0$  en prolongeant par continuité). Pour  $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$ , on pose  $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = \mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\log\left(\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right)\right]$  la fonction  $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})$  est appelée l'entropie de  $\mathbb{Q}$  par rapport à  $\mathbb{P}$ .

4. (a) Montrer que  $\varphi$  est convexe et minorée. En déduire que  $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})$  a un sens lorsque  $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$ , et montrer que  $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) \geq 0$ .

(b) Montrer que  $\gamma_1(\mathbb{Q}) \geq H(\mathbb{Q}|\mathbb{P})$ .

(c) On pose, pour  $Z \in \mathcal{X}$ ,  $\frac{d\mathbb{P}^Z}{d\mathbb{P}} = \frac{e^Z}{\mathbb{E}[e^Z]}$ . Montrer que si  $\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})$ ,  $\mathbb{Q}$  est absolument continue par rapport à  $\mathbb{P}^Z$ , et calculer  $\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^Z}$ .

(d) Montrer que  $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) = H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}^Z) + \mathbb{E}\left[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}^Z} Z\right] - \log(\mathbb{E}(e^Z))$ , puis que  $H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}) \geq \gamma_1(\mathbb{Q})$ .

En déduire la représentation suivante de  $\rho_\alpha$  :

$$\rho_\alpha(X) = \sup_{\mathbb{Q} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{P})} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-X] - \frac{1}{\alpha} H(\mathbb{Q}|\mathbb{P}).$$

### QUESTIONS SUR LA PRÉSENTATION DU 8 NOVEMBRE 2023 :

- Qu'est-ce que le risque opérationnel ? Donner un exemple.
- A-t-on besoin d'un modèle pour gérer le risque d'une option européenne ? Justifier votre réponse.

## Partie II (barème indicatif /10 points)

### Exercice 1 (1+1 points)

Soient  $\alpha > 0$ ,  $F$  fonction de répartition continue et  $F^{-1}(y) = \inf\{x \in \mathbb{R}, F(x) \geq y\}$ , elles vérifient  $\forall x \in \mathbb{R}$  et  $y \in ]0, 1]$  :  $F(x) \geq y \Leftrightarrow x \geq F^{-1}(y)$ .

1. Montrer que  $F(F^{-1}(x)) = x$ .
2. En supposant que  $x^\alpha(1 - F(x))$  est à variation lente, montrer que  $F$  est dans le domaine d'attraction d'une loi de Fréchet i.e.  $\exists d_n = 0$  et  $c_n = F^{-1}\left(1 - \frac{1}{n}\right)$  avec  $F^n(c_n x + d_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} \exp(-x^{-\alpha})$ .

### Exercice 2 (1+1 points)

Soit la fonction de répartition définie, pour  $x < x_F$ , par  $F(x) = 1 - \exp\left(\frac{-\alpha}{x_F - x}\right)$  avec  $\alpha > 0$ .

1. Déterminer, en justifiant, son domaine d'attraction.
2. Déterminer les coefficients d'échelle et de translation  $(c_n, d_n)$  associés à cette distribution.

### Exercice 3 (2+1+1 points)

Soient  $(U_i)_{1 \leq i \leq n}$  des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi uniforme sur  $[0, 1]$  et soient  $(V_i)_{1 \leq i \leq n}$  des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de fonction de survie  $\bar{F}(x) = (\lambda/x)^\alpha 1_{x \geq \lambda}$ . Pour  $X = U, V$  nous définissons la statistique d'ordre  $(X_i^{(n)})_{1 \leq i \leq n} = \left( \min_{1 \leq i \leq n} X_i = X_1^{(n)} \leq X_2^{(n)} \leq \dots \leq X_n^{(n)} \leq \max_{1 \leq i \leq n} X_i \right)$ . On introduit  $\Gamma_k = E_1 + \dots + E_k$  avec  $(E_i)_{1 \leq i \leq n+1}$  sont des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle  $\mathcal{E}(1)$ .

1. Montrer que  $(U_1^{(n)}, \dots, U_n^{(n)})$  est de même loi que  $(\Gamma_1/\Gamma_{n+1}, \dots, \Gamma_n/\Gamma_{n+1})$ .
2. Pour une suite  $k_n \in \{1, \dots, n\}$  avec  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n = +\infty$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} k_n/n = 0$ , on introduit l'estimateur

$$\hat{\alpha}_{k_n, n} = \left( \frac{1}{k_n} \sum_{l=n+1-k_n}^n \log(V_l^{(n)} / V_{n+1-k_n}^{(n)}) \right)^{-1}$$

- a. En distribution, réexprimer cet estimateur en fonction des variables  $\Gamma_k$ .
- b. Démonter la convergence en probabilité de cet estimateur.

### Exercice 4 (1 point)

Soit l'exemple d'un client qui achète un put à la banque de strike  $K$  et de maturité  $T$  sur le sous-jacent  $S$ . Soit  $\tau$  le minimum des deux temps de défauts de la banque et de son client. Quel est le flux  $C_t$  réellement transmis par la banque à son client au temps  $t$ .

### Exercice 5 (1 point)

Quelle asymétrie apparaît lorsqu'une banque veut couvrir le risque de défaut d'une contrepartie qui n'est pas une banque ?