

# INSTITUT DE SCIENCE FINANCIÈRE ET D'ASSURANCES

M2 ACTUARIAT  
ANNÉES 2023/2024

---

## TECHNIQUES NUMÉRIQUES Projet 2 : Calcul de la prime d'un contrat d'assurance-vie

---

Léo ALLERS  
Théo JALABERT  
Lou SIMONEAU-FRIGGI

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>2</b>
<b>I Interprétation des données et analyse</b>	<b>3</b>
<b>II Justification et réécriture du Payoff</b>	<b>4</b>
II.1 $\mathbb{1}_{\{t_f^s \leq \min(t_f^d, T)\}} \max(VM_{t_f^s}, e^{\kappa_s t_f^s} VM_0)$	4
II.2 $\mathbb{1}_{\{t_f^d \leq \min(t_f^s, T)\}} \max(VM_{t_f^d}, e^{\kappa_d t_f^d} VM_0)$	4
II.3 $\mathbb{1}_{\{T \leq \min(t_f^s, t_f^d)\}} \max(VM_T, e^{\kappa_m T} VM_0)$	4
II.4 Réécriture en fonction de $\tau$	4
<b>III Méthode directe</b>	<b>5</b>
III.1 Estimation de la trajectoire de VM par schéma d'Euler	5
III.2 Estimation des paramètres	6
III.2.A Étude du paramètre $N$	6
III.2.B Étude du paramètre $M$	8
III.3 Résultats	9
III.4 Bilan	9
<b>IV Méthode des simulations dans les simulations (SdS)</b>	<b>10</b>
IV.1 Principe de la méthode	10
IV.2 Estimation des paramètres	10
IV.2.A Étude du paramètre $N$	10
IV.2.B Étude du paramètre $M$	12
IV.2.C Étude du paramètre $N_2$	14
IV.3 Résultats	15
IV.4 Bilan	15
<b>V Méthode Least-Square Monte-Carlo (LSMC)</b>	<b>17</b>
V.1 Intérêt de la méthode LSMC	17
V.2 Estimation des paramètres	18
V.2.A Étude du paramètre $N$	18
V.2.B Étude du paramètre $M$	19
V.2.C Étude du paramètre $N_2$	21
V.2.D Étude du paramètre $d$	22
V.3 Résultats	23
V.4 Bilan	23
<b>Conclusion</b>	<b>25</b>

## Introduction

L'assurance-vie en France est un pilier de la gestion patrimoniale, offrant aux individus une sécurité financière tout en leur permettant de se préparer à l'avenir avec flexibilité. Le marché de l'assurance-vie est fortement influencé par des facteurs démographiques, économiques et réglementaires qui façonnent les produits offerts aux consommateurs. Dans un environnement où les fluctuations du marché peuvent affecter la valeur des investissements, la détermination de la prime initiale d'un contrat d'assurance-vie est une tâche complexe qui requiert une analyse minutieuse et une modélisation financière sophistiquée.

Notre projet se concentre sur le calcul de cette prime, en tenant compte de divers profils d'investisseurs et de leurs décisions potentielles face aux évolutions du marché. En règle générale, les souscripteurs d'une assurance-vie peuvent choisir de sortir du contrat de manière anticipée pour diverses raisons, telles que des besoins financiers imprévus, des changements dans les objectifs d'investissement, ou des réactions aux mouvements du marché. Ces décisions sont influencées par le taux de rémunération du contrat et par le rendement des investissements sous-jacents par rapport aux alternatives disponibles. Ainsi, notre modèle doit capturer la probabilité d'une sortie anticipée en fonction des performances du fonds d'investissement et des attentes des assurés.

Pour mener à bien cette mission, nous considérons un contrat avec plusieurs issues possibles : la maturité naturelle, le décès du souscripteur, ou la sortie volontaire, chaque scénario ayant son propre taux de rémunération et ses implications sur le versement final. La complexité du calcul de la prime  $\Pi$  est accentuée par la nécessité d'intégrer des variables aléatoires pour modéliser les comportements d'investissement, en se basant sur des données historiques et des prédictions de marché.

À travers l'application de méthodes numériques en Python, nous visons à fournir une estimation robuste et précise de la prime, qui soit à la fois équitable pour l'assuré et viable pour l'assureur. Ce travail représente une synthèse de l'expertise en finance quantitative et en science actuarielle, avec pour objectif de mieux comprendre les interactions entre les préférences des assurés, les dynamiques du marché et les produits d'assurance-vie.

## I Interprétation des données et analyse

Le détail du contrat sur le client standard indique que ce dernier, lorsqu'il se trouvera en  $t \in \{1.25, 1.5, 1.75\}$  choisira de sortir du contrat si cette sortie lui rapporte plus qu'une variable aléatoire  $G$ . Cette variable aléatoire est définie comme suivant une loi normale avec une moyenne de  $e^{0.3} \times VM_0$  et une variance de 100. Ici,  $VM_0$  est la valeur initiale du fond, fixée à 100.

**Interprétation de la moyenne :**  $e^{0.3} \times VM_0 \approx 135$ . Cette moyenne représente le rendement attendu par le client pour considérer la sortie du contrat comme une option viable. En d'autres termes, le client standard envisagera de sortir du contrat si le rendement de la sortie est supérieur à son rendement attendu qui est égal à 135. Cela correspond à un rendement d'environ 35% par rapport à la valeur initiale du fond. Ce qui est significativement élevé. On peut donc s'attendre à ce que le nombre de sortie soit relativement faible.

**Interprétation de la variance :** La variance, ici fixée à 100, mesure la dispersion des rendements autour de la moyenne. Compte tenu de sa valeur, nous pouvons dire qu'elle indique une large dispersion autour de cette moyenne suggérant que les attentes des clients en termes de rendement peuvent varier considérablement. Cela peut être dû à des facteurs tels que les différences dans les profils de risque ou les préférences personnelles...

## II Justification et réécriture du Payoff

La prime initiale  $\Pi$  doit être égale au pay-off espéré. Ce dernier s'écrit :

$$\begin{aligned}\Pi = \mathbb{E} \left[ & \mathbb{1}_{\{t_f^s \leq \min(t_f^d, T)\}} \max(VM_{t_f^s}, e^{\kappa_s t_f^s} VM_0) + \mathbb{1}_{\{t_f^d \leq \min(t_f^s, T)\}} \max(VM_{t_f^d}, e^{\kappa_d t_f^d} VM_0) \\ & + \mathbb{1}_{\{T \leq \min(t_f^s, t_f^d)\}} \max(VM_T, e^{\kappa_m T} VM_0) \right]\end{aligned}$$

Ce payoff représente le montant attendu que l'assureur doit payer à la fin du contrat d'assurance-vie, en fonction de l'évènement qui survient en premier : la sortie du souscripteur, son décès ou l'arrivée à maturité du contrat.

**II.1**  $\mathbb{1}_{\{t_f^s \leq \min(t_f^d, T)\}} \max(VM_{t_f^s}, e^{\kappa_s t_f^s} VM_0)$

Ceci représente le payoff si le souscripteur sort du contrat avant son décès ou la maturité du contrat. Le montant payé est le maximum entre la valeur du marché à la date de sortie  $VM_{t_f^s}$  et la valeur garantie qui a crû au taux  $\kappa_s$  depuis l'initiation du contrat.

**II.2**  $\mathbb{1}_{\{t_f^d \leq \min(t_f^s, T)\}} \max(VM_{t_f^d}, e^{\kappa_d t_f^d} VM_0)$

Ceci représente le payoff en cas de décès du souscripteur avant la sortie ou la maturité. Le montant payé est le maximum entre la valeur du marché à la date de décès  $VM_{t_f^d}$  et la valeur garantie qui a crû au taux  $\kappa_d$ .

**II.3**  $\mathbb{1}_{\{T \leq \min(t_f^s, t_f^d)\}} \max(VM_T, e^{\kappa_m T} VM_0)$

Ceci représente le payoff à la maturité du contrat si ni la sortie, ni le décès ne sont survenus avant. Le montant payé est la maximum entre la valeur de marché à la maturité  $VM_T$  et la valeur garantie qui a crû au taux  $\kappa_m$ .

### II.4 Réécriture en fonction de $\tau$

Afin de réécrire cette équation en fonction de la variable  $\tau$  qui modélise la survenue du décès de l'individu, nous pouvons substituer  $t_f^d$  avec  $\tau$  car  $t_f^d$  est la date de décès qui est modélisée par  $\tau$ . Voici l'équation avec cette substitution.

$$\begin{aligned}\Pi = \mathbb{E} \left[ & \mathbb{1}_{\{t_f^s \leq \min(\tau, T)\}} \max(VM_{t_f^s}, e^{\kappa_s t_f^s} VM_0) + \mathbb{1}_{\{\tau \leq \min(t_f^s, T)\}} \max(VM_\tau, e^{\kappa_d \tau} VM_0) \\ & + \mathbb{1}_{\{T \leq \min(t_f^s, \tau)\}} \max(VM_T, e^{\kappa_m T} VM_0) \right]\end{aligned}$$

### III Méthode directe

#### III.1 Estimation de la trajectoire de VM par schéma d'Euler

Dans cette partie nous nous intéressons à l'estimation de la trajectoire de la Valeur de Marché en utilisant le schéma d'Euler pour la modélisation de l'actif risqué.

En guise de rappel, voici l'expression de trajectoire de l'actif risqué, processus de Black-Scholes, via le schéma d'Euler :

$$S_{t+\Delta t} = S_t \times \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}z\right)$$

où  $z$  représente le terme de mouvement brownien. De plus, nous considérons que les simulations sur  $[0, 1]$  se font en environnement historique, puis en environnement risque neutre à partir de  $t = 1$ . Les expressions de  $S_t$  seront donc :

$$S_{t+\Delta t} = \begin{cases} S_t \times \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma_r^2\right)\Delta t + \sigma_r\sqrt{\Delta t}z\right) & t \in [0, 1] \text{ (environnement historique)} \\ S_t \times \exp\left(\left(r - \frac{1}{2}\sigma_i^2\right)\Delta t + \sigma_i\sqrt{\Delta t}z\right) & t > 1 \text{ (environnement risque neutre)} \end{cases}$$

De plus, nous avons décidé d'utiliser la technique des variables antithétiques pour la réduction de variance. Cette méthode repose sur le principe de symétrie des lois normales centrées réduites.

Parmi les hypothèses faites, on constate que le marché est caractérisé par deux actifs risqués  $(S_t^{(1)}, S_t^{(2)})_{t \geq 0}$ . Les caractéristiques de ces deux actifs risqués sont :

- Volatilité implicite<sup>1</sup> :  $\sigma_{i,1} = 30\%$ ,  $\sigma_{i,2} = 25\%$
- Corrélation implicite :  $\rho_i = 0.6$
- Volatilité historique<sup>2</sup> :  $\sigma_{r,1} = 25\%$ ,  $\sigma_{r,2} = 25\%$
- Corrélation historique :  $\rho_r = 0.7$
- Rendement escompté :  $\mu_1 = 4\%$ ,  $\mu_2 = 5\%$
- Taux sans risque :  $r = 1.5\%$
- Proportion du fond investie dans chaque actif risqué :  $x_1 = 20\%$ ,  $x_2 = 10\%$
- La partie restante est investie au taux sans risque

Compte tenu des conditions de notre contrat d'assurance vie, nous pouvons exprimer la valeur de marché à la date  $t$  par  $VM_t$  qui est telle que :

$$VM_t = VM_0 \times \left(x_1 S_t^{(1)} + x_2 S_t^{(2)} + remaining(t)\right)$$

Ici,  $remaining(t)$  représente la partie restante qui est investie au taux sans risque. On considère donc que  $remaining(t) = (1 - x_1 - x_2)e^{rt}$ .

---

1. En environnement risque neutre  
2. En environnement historique

D'où il vient :

$$VM_t = VM_0 \times \left( x_1 S_t^{(1)} + x_2 S_t^{(2)} + (1 - x_1 - x_2) e^{rt} \right)$$

Après avoir fixé les graines à 123, nous obtenons, après estimation, pour les dates 1.25, 1.5, 1.75 et 2, des valeurs moyennes :

- $VM_{1.25} = 102.8$
- $VM_{1.5} = 103.2$
- $VM_{1.75} = 103.6$
- $VM_2 = 104.1$

Ces estimations nous permettent dorénavant de déduire une première estimation de  $\Pi$ . Pour cela, nous devons simuler une valeur pour  $t_f^d = \tau$ , qui est modélisée par une loi exponentielle de paramètre 1, ainsi qu'une valeur de  $G$ , qui est modélisée par une loi normale de moyenne  $e^{0.3VM_0}$  et de variance 100. Cette variable  $G$ , comme discuté précédemment, conditionne la sortie du client. En effet, lorsque le client est à la date  $t \in (1.25, 1.5, 1.75)$  ce dernier décidera de sortir du contrat si cette sortie lui rapport plus que  $G$ .

Après estimation pour  $N = 10\,000$ ,  $M = 1\,000$  et  $N_2 = 1\,000$ , nous obtenons une estimation de  $\Pi$  à  $\Pi = 104.9$ .

## III.2 Estimation des paramètres

### III.2.A Étude du paramètre $N$

On commence donc par estimer le nombre de simulations  $N$ . On fixe la valeur de  $M$  à 1 000 puis on s'intéresse à la valeur de  $N$  pour laquelle nos résultats sont les plus performants. Dans cette étude, on fait varier  $N$  entre 2 et 2 000 simulations.

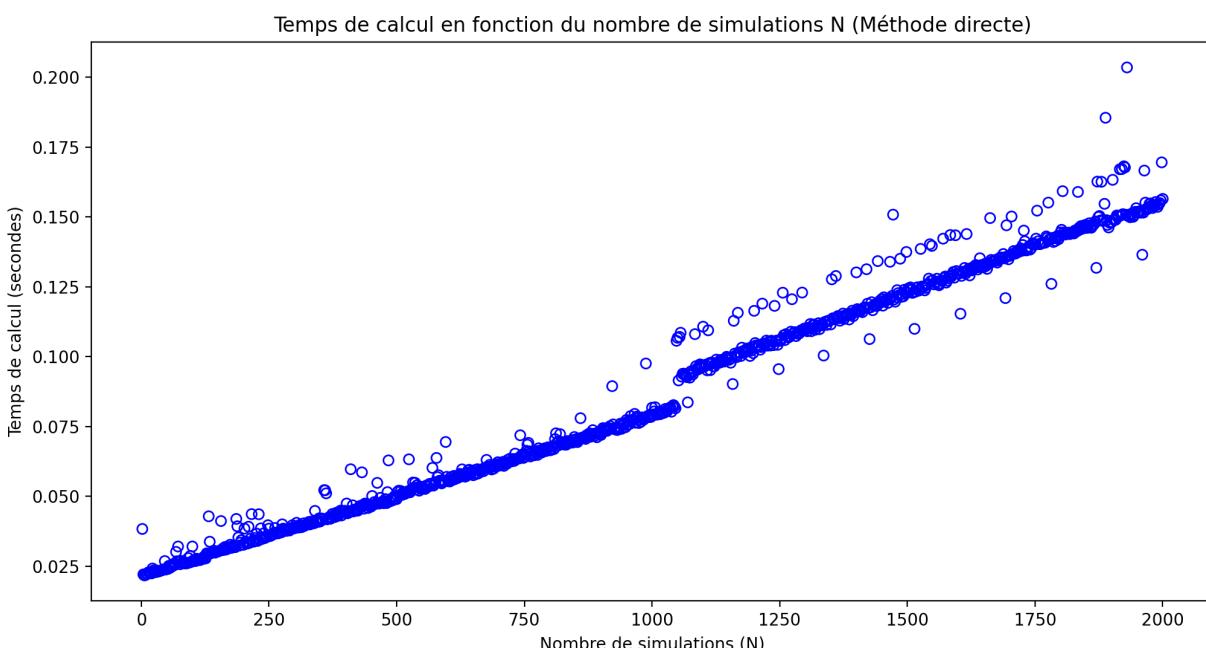


FIGURE 1 – Temps d'exécution selon le nombre de simulations N (sec)

On constate, avec la FIGURE 1, que le temps d'exécution est proportionnel au nombre de simulations et qu'il croît linéairement en fonction de  $N$ . Cependant, ce temps est relativement faible. En effet, pour  $N = 1\,000$  simulations le temps d'exécution est de 0.10 seconde.

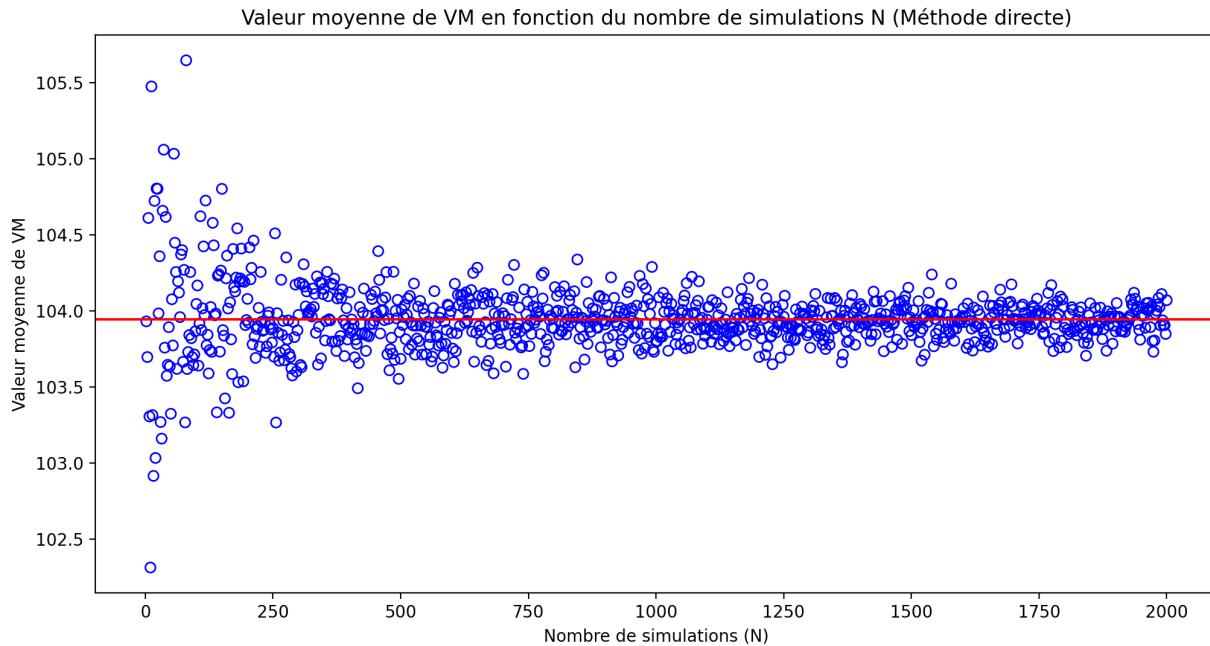


FIGURE 2 – Valeur moyenne de la Valeur de Marché selon le nombre de simulations  $N$

On observe bien, par la FIGURE 2, que la Valeur de Marché converge au fur et à mesure que le nombre de simulations augmente.

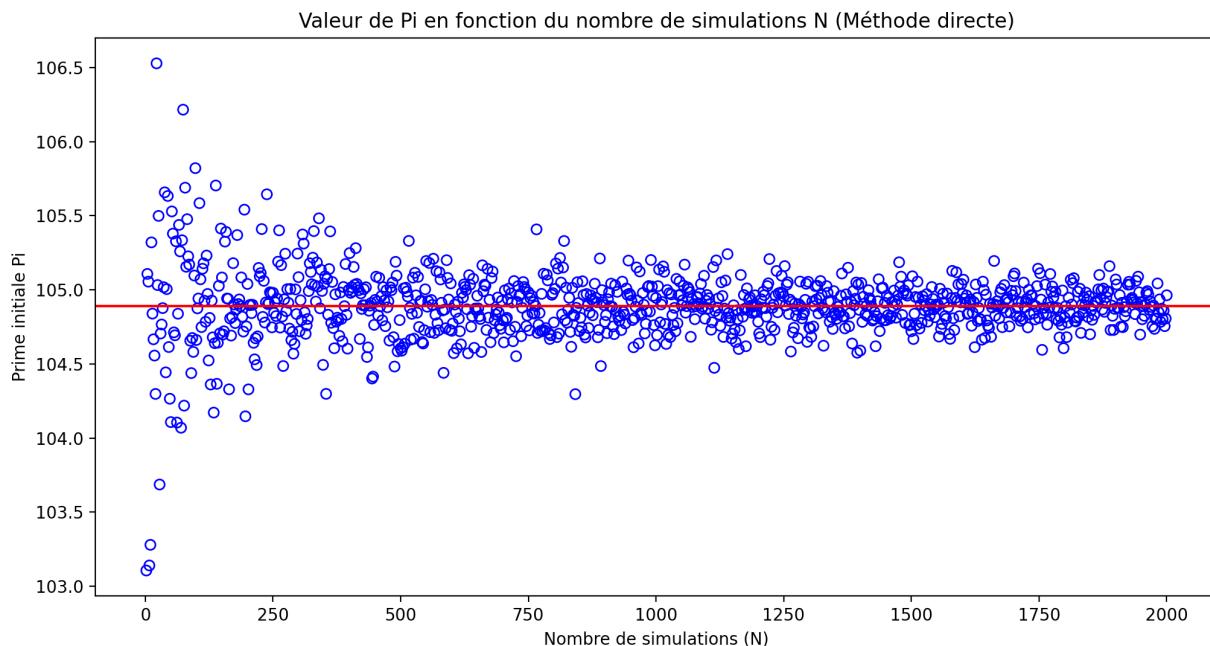


FIGURE 3 – Valeur moyenne de la prime  $\Pi$  selon le nombre de simulations  $N$

Enfin, nous avons analysé l'évolution de la prime  $\Pi$  en fonction du nombre de simulations (cf. FIGURE 3). Et là encore, comme attendu, la valeur de la prime  $\Pi$  converge autour de la valeur **104.9**.

### III.2.B Étude du paramètre $M$

Nous venons de réaliser l'étude sur le nombre de simulations primaires  $N$ . Concernant l'étude du nombre de pas de temps  $M$ , on commence par fixer une valeur de  $N$  à 1 000.

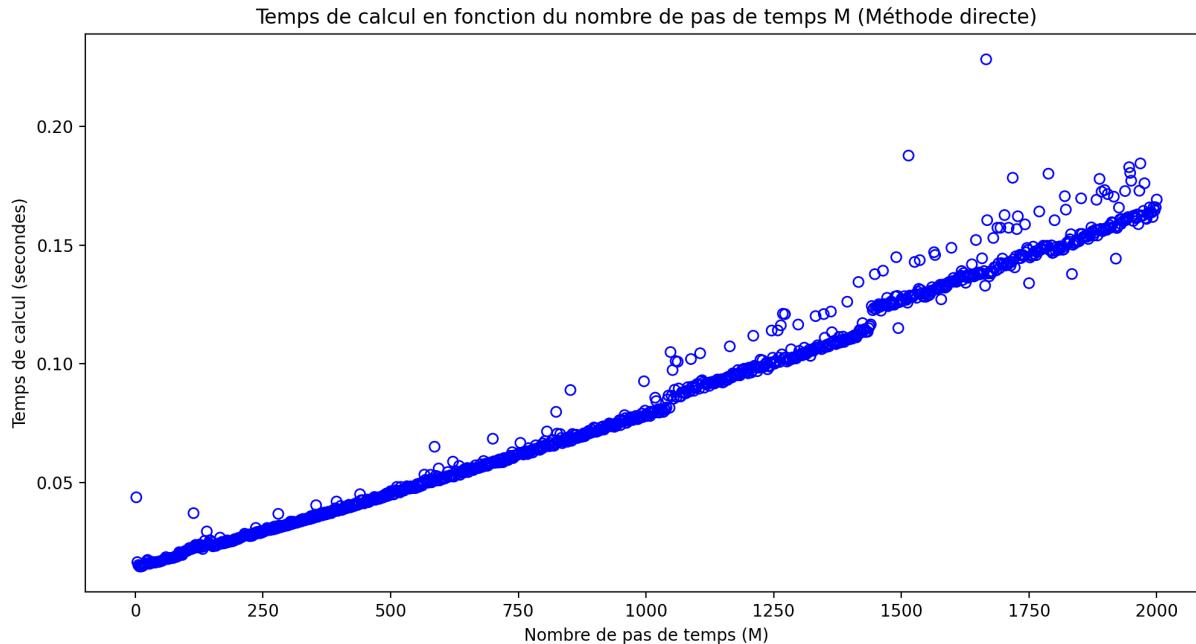


FIGURE 4 – Temps d'exécution selon le nombre de pas de temps  $M$  (sec)

On constate également que le temps d'exécution est proportionnel au nombre de pas de temps, il croît linéairement en fonction de  $M$ . Ce temps est également faible. En effet, pour  $M = 1\ 000$  pas de temps, le temps d'exécution est légèrement inférieur à 0.10 seconde.

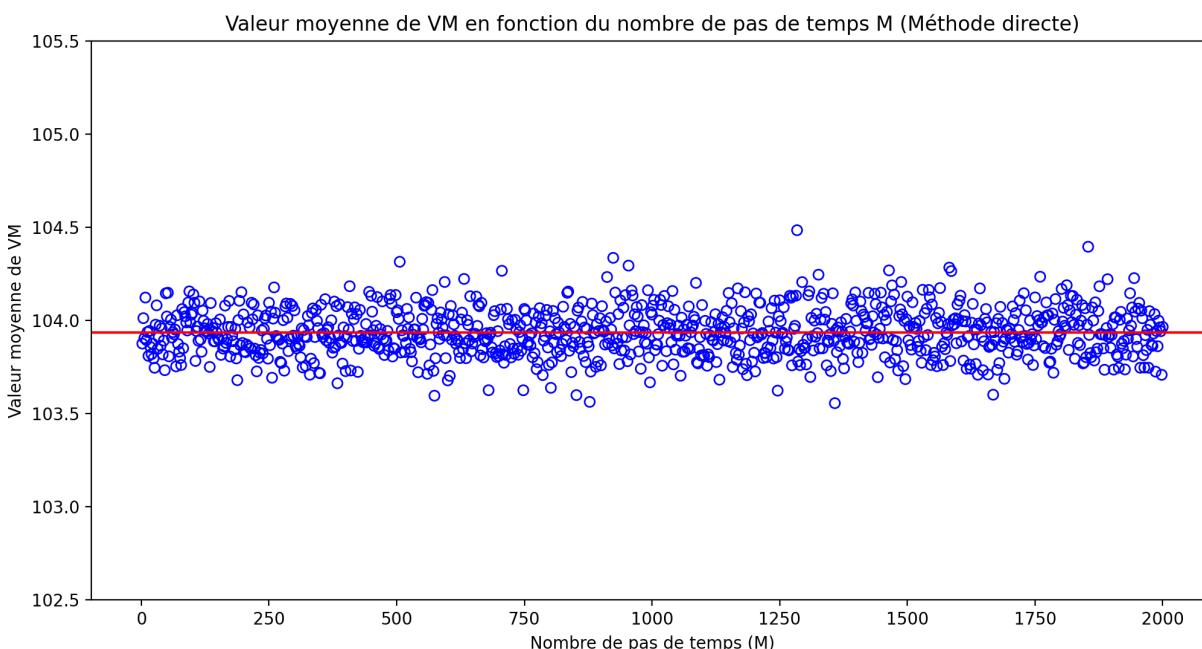


FIGURE 5 – Valeur moyenne de la Valeur de Marché selon le nombre de pas de temps  $M$

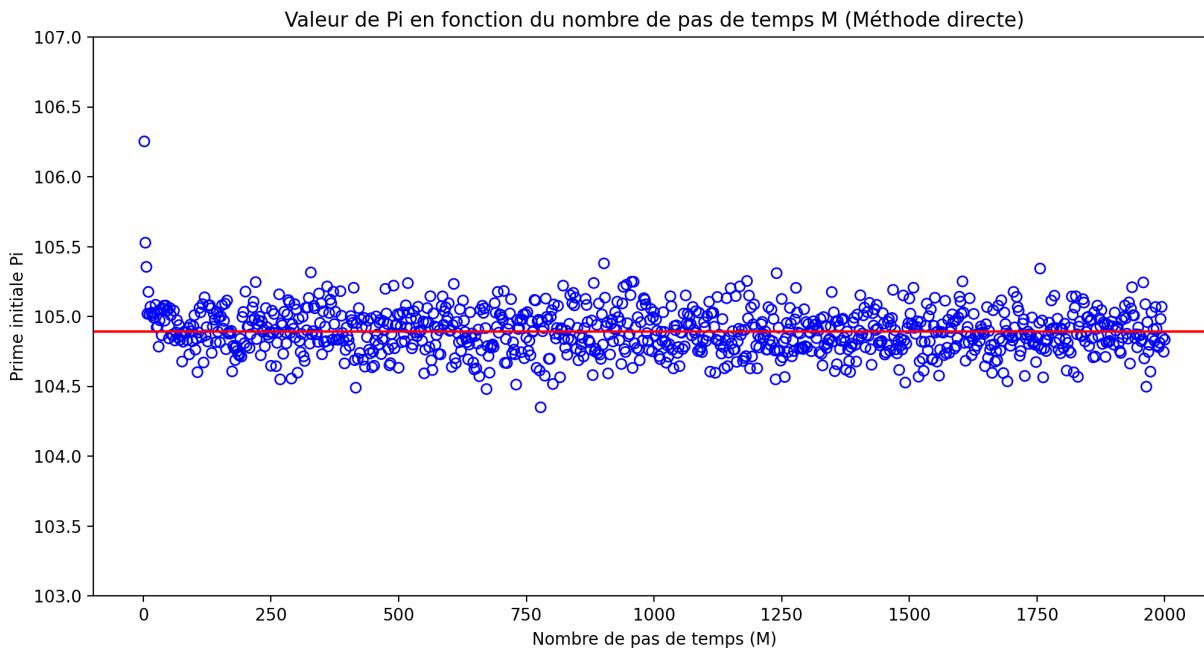


FIGURE 6 – Valeur moyenne de la prime  $\Pi$  selon le nombre de pas de temps  $M$

Contrairement à ce que l'on constatait pour l'estimation de  $N$ , ici nous n'observons pas une nette convergence de la Valeur de Marché au fur et à mesure que le nombre de pas de temps augmente. Il en est de même pour la prime  $\Pi$ . Cependant, nous pouvons quand même dire que la Valeur de Marché et la prime  $\Pi$  semblent converger autour d'une valeur.

### III.3 Résultats

Afin de pouvoir comparer les trois méthodes présentées dans ce rapport, nous avons décidé de fixer les valeurs de  $N$ ,  $M$  à  $N = 10\,000$ ,  $M = 1\,000$ . Une fois que nous avons fixé le nombre de simulations, nous pouvons calculer avec la méthode directe, les valeurs  $VM_{1.25}$ ,  $VM_{1.5}$ ,  $VM_{1.75}$  et  $VM_2$  ainsi qu'une estimation de la prime  $\Pi$ .

Nous avons également réalisé une estimation de la variance pour cette méthode. Après calculs, nous obtenons  $\mathbb{V}(\Pi) = 0.0115$ . Voici les résultats obtenus pour la méthode directe.

Temps exec.	$VM_{1.25}$	$VM_{1.5}$	$VM_{1.75}$	$VM_2$	$\Pi$	$\mathbb{V}(\Pi)$	$IC_{95\%}$ de $\Pi$
0.866 sec	102.8	103.2	103.6	104.1	104.9	0.0115	[104.7, 105.1]

### III.4 Bilan

Concernant la méthode directe, nous pouvons constater que cette dernière est facilement implémentable et relativement performante. Toutefois, compte tenu des spécificités du contrat d'assurance vie que nous étudions, il faut être conscient que cette méthode ne permet pas de saisir avec finesse les évènements de sortie volontaire qui peuvent avoir lieu aux date 1.25, 1.5 et 1.75. Ce manque de finesse a pour conséquence une sous-estimation de la prime  $\Pi$ . D'où la nécessité de s'intéresser aux méthodes qui vont suivre.

## IV Méthode des simulations dans les simulations (SdS)

### IV.1 Principe de la méthode

Ici, nous allons raffiner la simulation de la seconde partie de la trajectoire,  $t \in [1, 2]$ , pour mieux estimer le scénario de sortie volontaire qui peut avoir lieu aux dates  $t = 1.25$ ,  $t = 1.5$  et  $t = 1.75$ . Cette méthode (SdS) présente une approche Monte-Carlo imbriquée permettant une meilleure analyse de temps clés du contrat, par exemple ici les sorties volontaires. Deux niveaux de scénarios sont considérés selon la durée de vie du produit :

- Primaires : il s'agit de scénarios « Monde Réel ». On simule  $N$  trajectoires des sous-jacents  $S_t^{(1)}$  et  $S_t^{(2)}$  jusqu'à la date  $t = 1$ , en utilisant la probabilité historique. Pour chaque simulation, nous utilisons  $M$  pas de temps.
- Secondaires : il s'agit là de scénarios « Risque Neutre ». À partir des valeurs des sous-jacents obtenues à la date  $t = 1$ , on simule  $N_2$  trajectoires jusqu'à la date  $t = 2$ , en environnement risque neutre. Chacune des simulations secondaires est donc conditionnée par les simulations primaires.

Pour chaque simulation primaire, on estime la trajectoire  $(VM_s^k)_{1 \leq s \leq 2}$  avec  $N_2$  simulations.

Après estimation pour  $N = 10\,000$ ,  $M = 1\,000$  et  $N_2 = 1\,000$ , nous obtenons une estimation de  $\Pi$  à  $\Pi = 106.3$ .

Il est toutefois important de noter que pour la méthode SdS, la complexité temporelle et algorithmique est nettement plus importante que pour la méthode directe en raison du principe de cette approche Monte-Carlo imbriquée.

Afin de réduire le temps d'exécution du code permettant d'obtenir les différents graphiques ci-dessous, nous avons utilisé une technique appelée parallélisation. Cette technique permet d'exécuter les boucles (indépendantes) de façon simultanée sur les différents coeurs de l'ordinateur. Les simulations Monte-Carlo se prêtent bien à la parallélisation car chaque simulation est indépendante des autres. Pour cela, nous avons, entre autre, eu recours au package **Numba**.

### IV.2 Estimation des paramètres

Comme pour la méthode précédente, nous allons dans un premier temps fixer les paramètres  $M$  et  $N_2$  et faire varier  $N$  de 2 à 2 000, ensuite nous ferons varier  $M$  puis  $N_2$ .

#### IV.2.A Étude du paramètre $N$

Avec la méthode SdS, lorsqu'on l'on fixe  $M$  et  $N_2$  et que l'on fait varier  $N$ , nous obtenons les graphiques suivants :

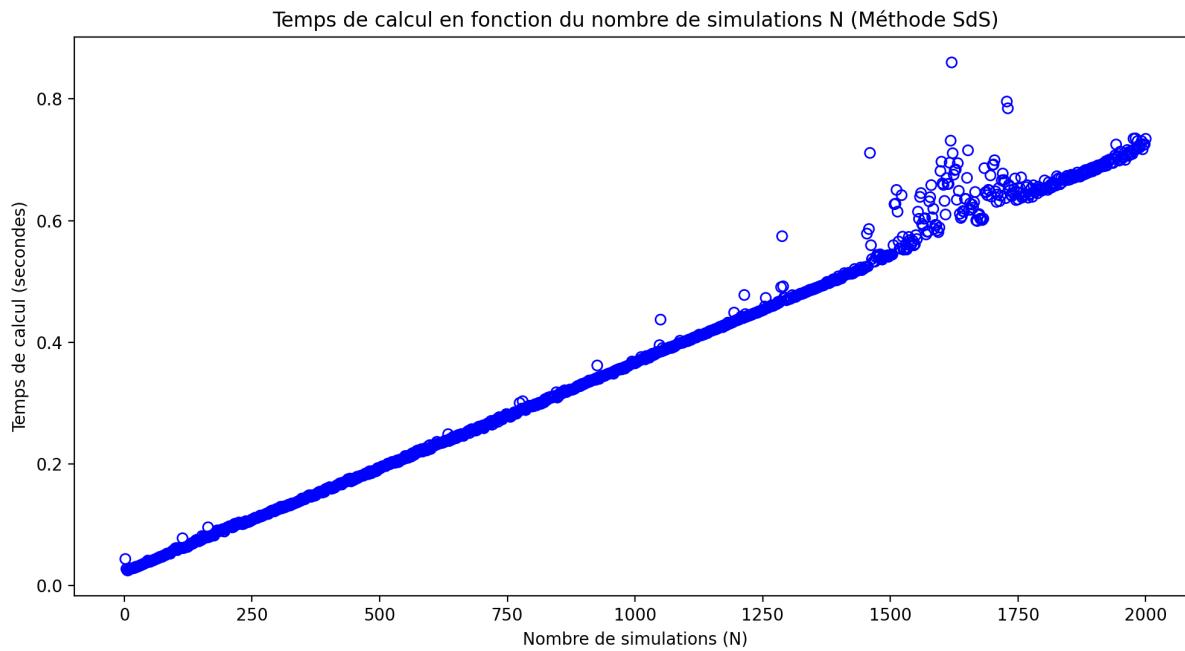


FIGURE 7 – Temps d'exécution selon le nombre de simulations  $N$  (sec)

Nous constatons encore une fois que le temps d'exécution croît linéairement avec  $N$ . Cependant, comme annoncé précédemment, on constate que la méthode SdS, outre ses avantages, présente l'inconvénient d'une augmentation de la complexité temporelle. Afin d'atténuer cet impact, nous avons utilisé des méthodes comme la parallélisation et la traduction langage machine.

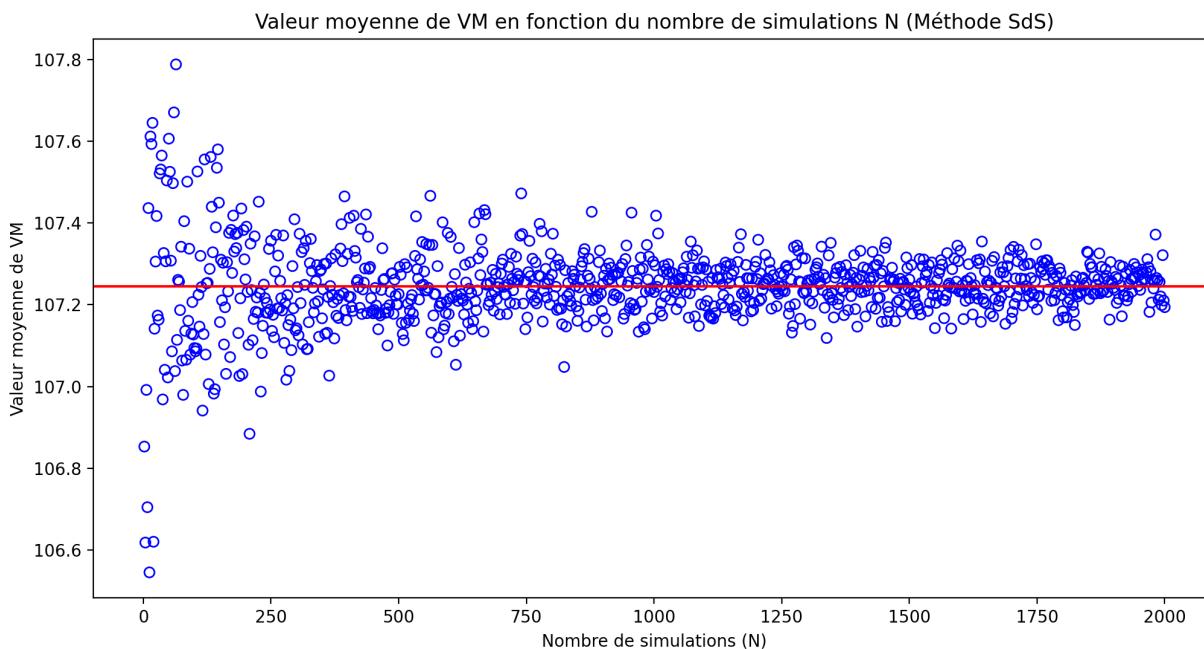


FIGURE 8 – Valeur moyenne de la Valeur de Marché selon le nombre de simulations  $N$

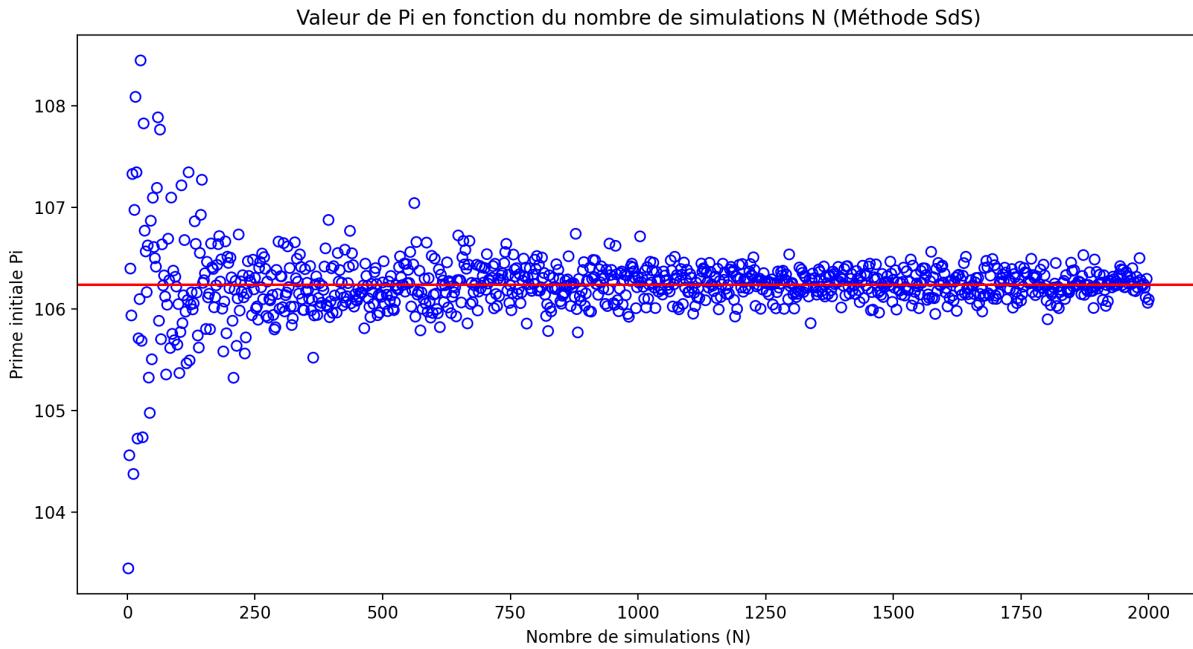


FIGURE 9 – Valeur moyenne de la prime  $\Pi$  selon le nombre de simulations  $N$

On observe bien sur la FIGURE 8) que la Valeur de Marché converge au fur et à mesure que le nombre de simulations augmente. Même constat pour la prime  $\Pi$ , cf FIGURE 9), qui converge au fur et à mesure que le nombre de simulations augmente vers la valeur **106.3**.

#### IV.2.B Étude du paramètre $M$

Nous venons de réaliser l'étude sur le nombre de simulations primaires  $N$ . Concernant l'étude du nombre de pas de temps  $M$ , on commence par fixer une valeur de  $N$  et  $N_2$  puis on fait varier  $M$  de 2 à 2 000.

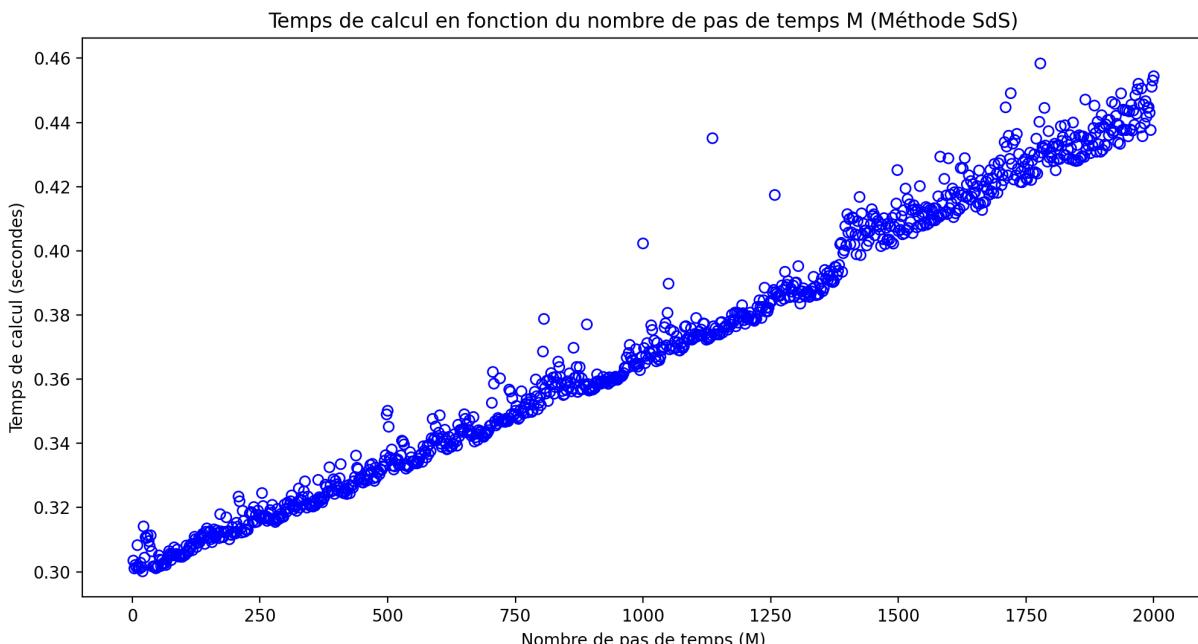


FIGURE 10 – Temps d'exécution selon le nombre de pas de temps  $M$  (sec)

On constate également que le temps d'exécution est proportionnel au nombre de pas de temps, il croît linéairement en fonction de  $M$ . Ce temps est relativement faible puisque pour  $M = 1\,000$  pas de temps, le temps d'exécution est de 0.38 seconde.

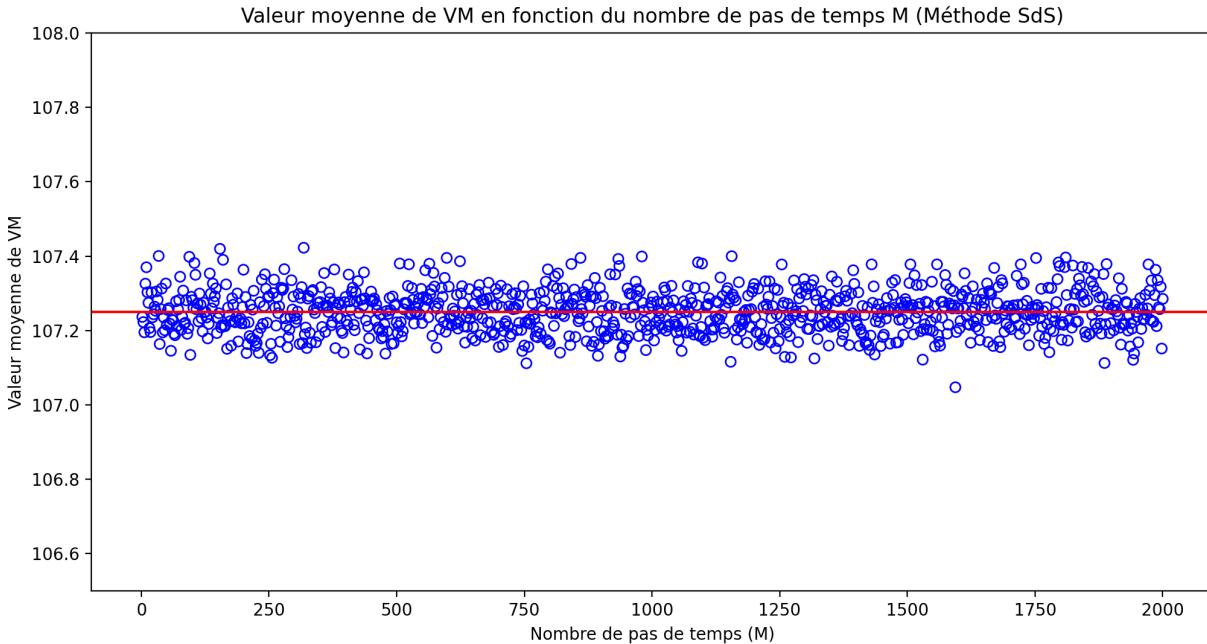


FIGURE 11 – Valeur moyenne de la Valeur de Marché selon le nombre de pas de temps  $M$

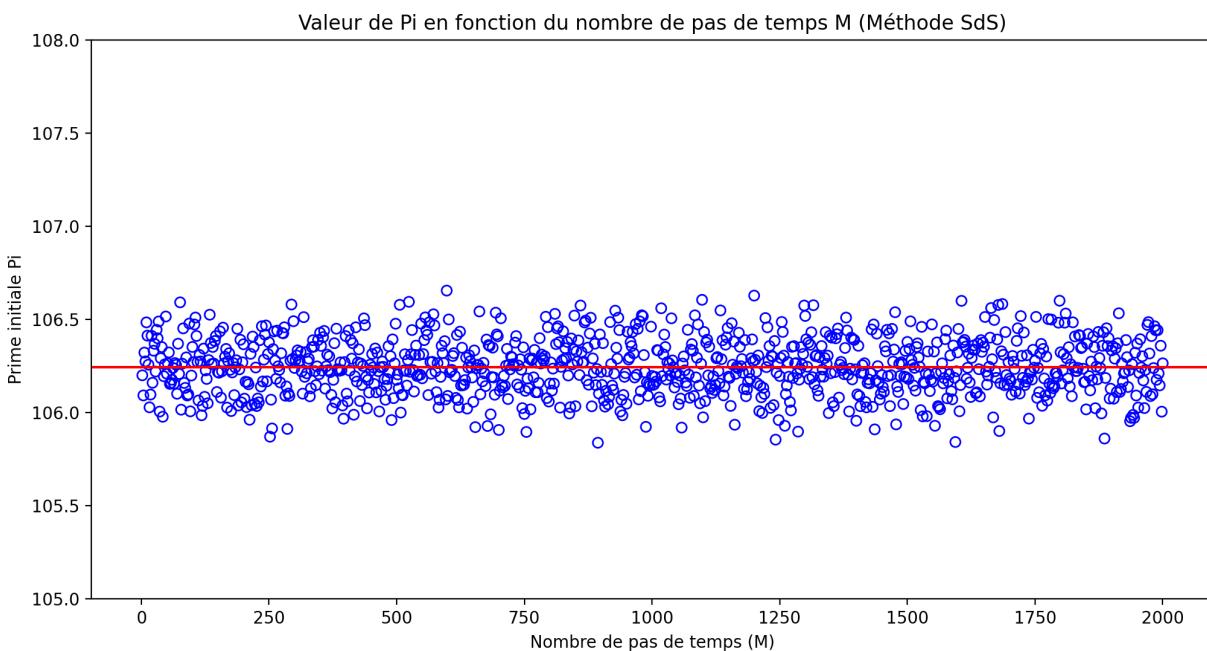


FIGURE 12 – Valeur moyenne de la prime  $\Pi$  selon le nombre de pas de temps  $M$

Contrairement à ce que l'on constatait pour l'estimation de  $N$ , ici nous n'observons pas de nette convergence de la Valeur de Marché au fur et à mesure que le nombre de pas de temps augmente. Il en est de même pour la prime  $\Pi$ . Toutefois, nous pouvons quand même remarquer que ces deux grandeurs semblent converger autour d'une valeur.

#### IV.2.C Étude du paramètre $N_2$

Nous venons de réaliser l'étude sur le nombre de simulations primaires  $N$  et sur le nombre de pas de temps  $M$ . Concernant l'étude du nombre de simulations secondaires  $N_2$ , on commence par fixer une valeur de  $N$  et  $M$  puis on fait varier  $N_2$  de 2 à 2 000.

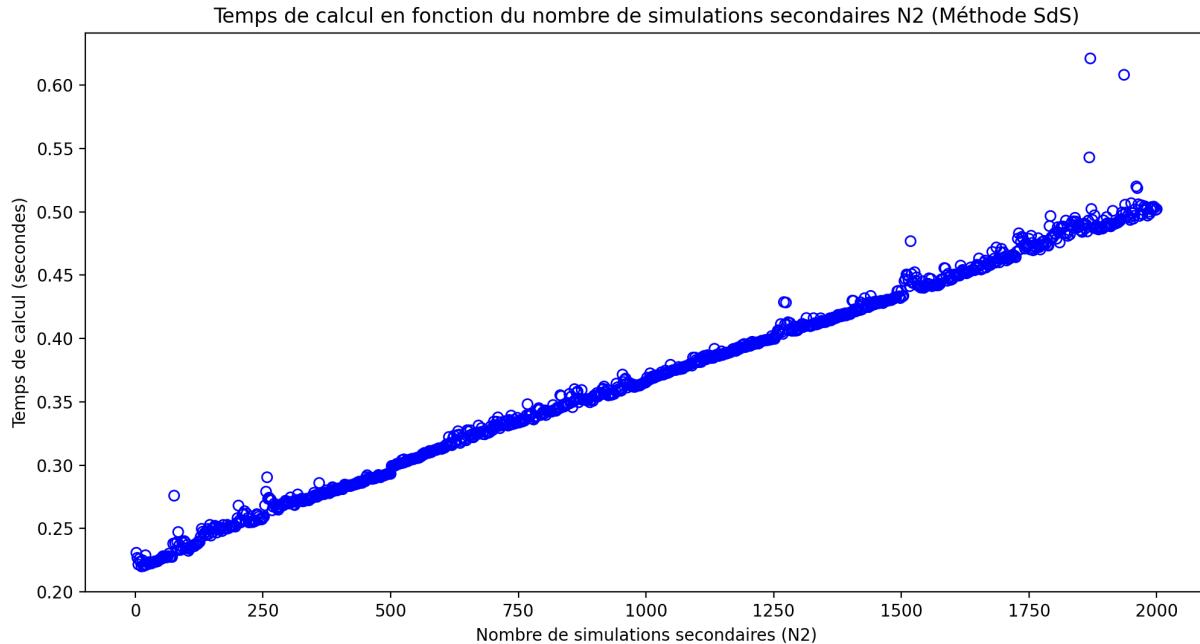


FIGURE 13 – Temps d'exécution selon le nombre de simulations secondaires  $N_2$  (sec)

Ici aussi, on constate que le temps d'exécution est proportionnel au nombre de simulations, il croît linéairement en fonction de  $N_2$ . Ce temps est également faible puisque pour  $N_2 = 1\,000$  simulations secondaires, le temps d'exécution s'élève à 0.35 seconde.

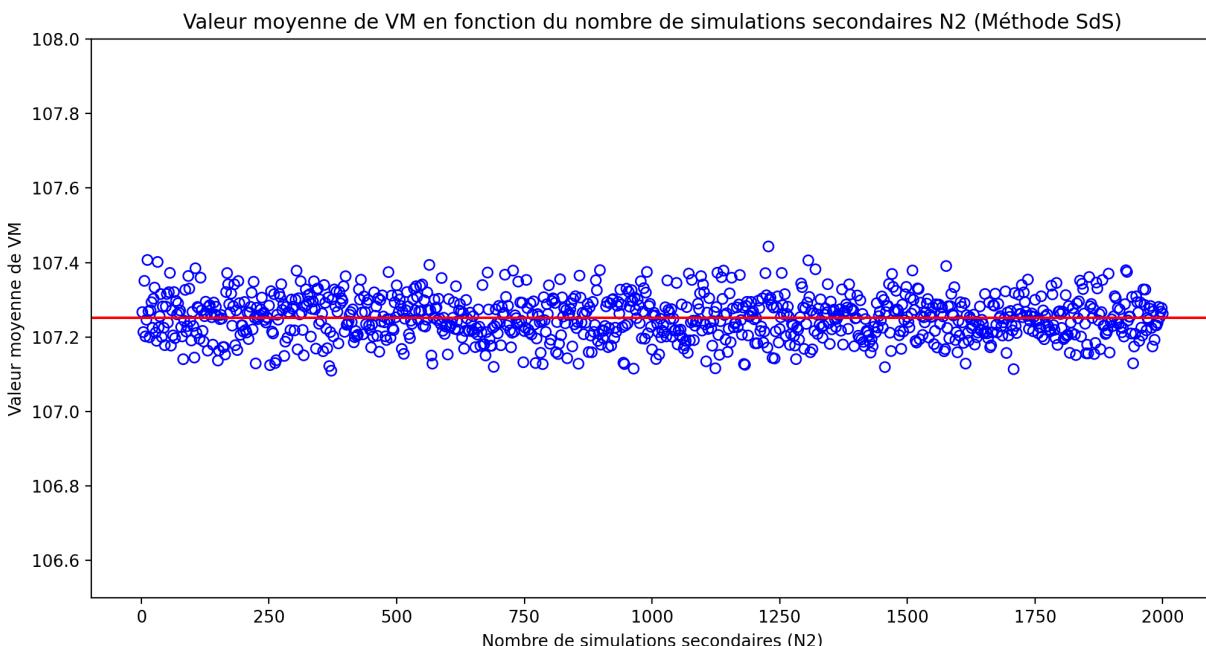


FIGURE 14 – Valeur moyenne de la Valeur de Marché selon le nombre de simulations secondaires  $N_2$

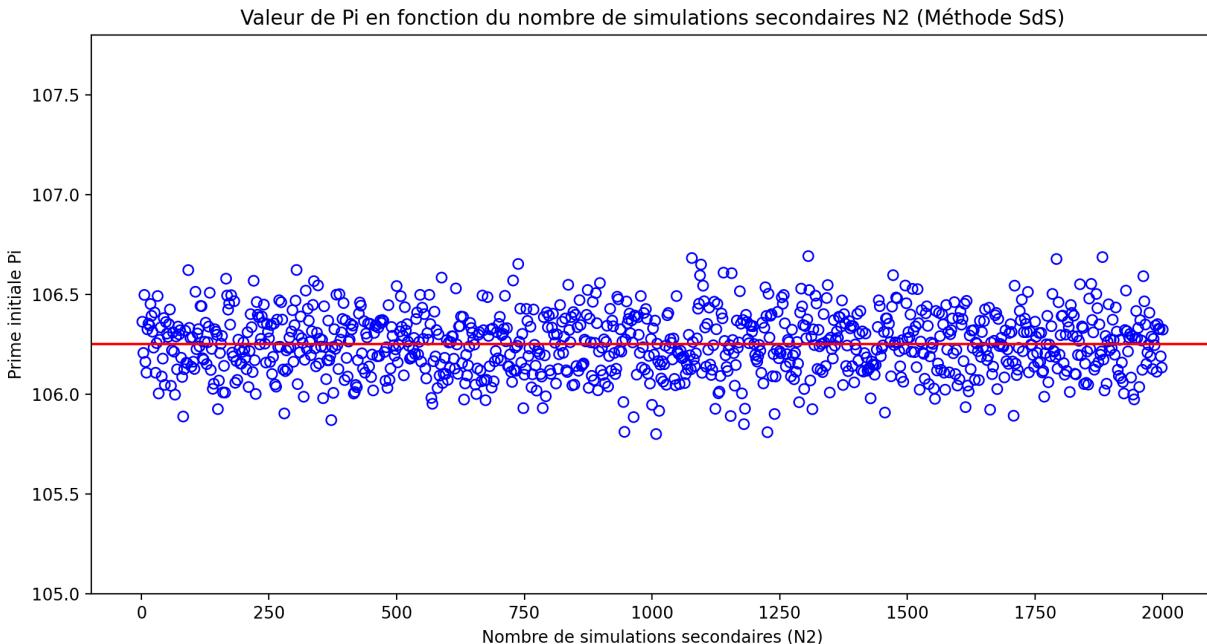


FIGURE 15 – Valeur moyenne de la prime  $\Pi$  selon le nombre de simulations secondaires  $N_2$

En revanche, contrairement à ce que l'on observait pour l'estimation de  $N$ , ici nous n'observons pas une nette convergence de la Valeur de Marché au fur et à mesure que le nombre de simulations secondaires augmente. Il en est de même pour la prime  $\Pi$ . Cependant, ces deux grandeurs semblent converger autour d'une valeur.

### IV.3 Résultats

Afin de pouvoir comparer les trois méthodes présentées dans ce rapport, nous avons décidé de fixer les valeurs de  $N$ ,  $M$  et  $N_2$  à  $N = 10\,000$ ,  $M = 1\,000$  et  $N_2 = 1\,000$ . Une fois que nous avons fixé le nombre de simulations, nous pouvons donner avec la méthode SdS une estimation de la prime  $\Pi$  à  $\Pi = 106.3$ .

Nous avons également réalisé une estimation de la variance pour cette méthode. Après calculs, nous obtenons  $\mathbb{V}(\Pi) = 0.0407$ . Voici les résultats obtenus pour la méthode SdS.

$N$	$M$	$N_2$	Temps d'exécution	$\Pi$	$\mathbb{V}(\Pi)$	$IC_{95\%}$ de $\Pi$
10 000	1 000	1 000	5.837 sec	106.3	0.0407	[105.8, 106.6]

### IV.4 Bilan

Concernant la méthode SdS, nous pouvons identifié plusieurs avantages et inconvénients. En effet, parmi les avantages de cette méthode on retrouve la précision des estimations et la flexibilité. En effet, grâce à sa structure de Monte-Carlo imbriquée les estimations fournies par cette méthode sont relativement précise. C'est une méthode assez simple à implémenter et facilement adaptable à différentes situations. De plus, cette méthode est particulièrement utile pour évaluer des instruments financiers où les payoffs sont sensibles au chemin suivi par les actifs sous-jacents.

---

Cependant, cette méthode présente des inconvénients. L'inconvénient majeur de cette méthode est certainement sa complexité algorithmique et temporelle. En effet, sa structure de Monte-Carlo imbriquée la rend coûteuse en temps de calcul. Cela pourrait devenir un frein si les actifs risqués composant le marché étaient en très grand nombre et potentiellement corrélés. De plus, l'optimisation de la méthode SdS pour réduire les coûts de calcul tout en conservant une précision suffisante peut s'avérer complexe.

Nous allons, dans cette dernière partie, nous intéresser à la méthode *Least-Square Monte-Carlo*.

## V Méthode Least-Square Monte-Carlo (LSMC)

L'idée de la méthode LSMC (*Least-Square Monte-Carlo*) est d'optimiser la méthode SdS précédemment abordée. Pour cela, nous devons réaliser moins de scénarios secondaires, ce qui conduit à un résultat moins précis, tout en effectuant une régression via la méthode des moindres carrés afin de réduire l'imprécision.

### V.1 Intérêt de la méthode LSMC

La méthode de Least-Square Monte-Carlo (LSMC) peut nécessiter moins de simulations secondaires que la méthode SdS pour plusieurs raisons :

- **Réduction de la variabilité grâce à la régression**

- LSMC utilise une régression linéaire pour établir une relation entre les valeurs de chaque sous-jacent à différents moments. Cela permet de réduire la variabilité des estimations en se basant sur une relation statistique, plutôt que de dépendre uniquement de simulations individuelles.

- **Exploitation de la corrélation**

- En utilisant une régression sur des polynômes de degrés divers, la méthode LSMC tire parti des corrélations entre les valeurs de chaque sous-jacent à différents moments. Cela signifie qu'une fois la relation établie, les simulations secondaires peuvent être moins nombreuses car elles sont guidées par cette relation.

- **Efficacité computationnelle**

- Avec une régression basée sur une base de polynômes orthonormés, LSMC réduit le temps de calcul nécessaire pour estimer les valeurs futures. Cela rend la méthode plus efficace, en particulier lorsqu'il s'agit de simuler un grand nombre de trajectoires.

Pour réaliser cette méthode, nous devons dans un premier temps simuler  $N$  trajectoires, notées  $VM_1^k$  pour  $k = 1, \dots, N$ . Ensuite, pour chaque simulation  $k$ , nous devons estimer par Monte-Carlo  $VM_t^k$  (en partant de  $VM_1^k$ ) pour  $t$  dans  $\{1.25, 1.5, 1.75, 2\}$ .

Ensuite, il nous faut utiliser une base orthonormée  $(P_j(X))_{j=0, \dots, d}$  (avec  $P_j(X)$  un polynôme de degré  $j$ ) et estimer par moindres carrés la régression linéaire suivante :

$$VM_2 = \alpha_0 \times P_0(VM_1) + \cdots + \alpha_d \times P_d(VM_1)$$

Ici, les  $\hat{\alpha}_j$  optimaux minimisent :

$$\sum_{k=1}^N \left( VM_2 - \sum_{j=1}^d \alpha_j \times P_j(VM_1) \right)^2$$

Et enfin, nous devons utiliser  $\sum_{j=1}^d \hat{\alpha}_j \times P_j(VM_1)$  en lieu et place de  $VM_2$ . Puis appliquer cette méthode à  $VM_{1.25}$ ,  $VM_{1.5}$  et  $VM_{1.75}$ .

Après estimation pour nos paramètres de référence, i.e  $N = 10\,000$ ,  $M = 1\,000$  et  $N_2 = 1\,000$ , nous obtenons après estimation, pour les dates 1.25, 1.5, 1.75 des valeurs moyennes :

- $VM_{1.25} = 106.5$
- $VM_{1.5} = 106.9$
- $VM_{1.75} = 107.3$

Ces estimations nous permettent donc de déduire un estimation de  $\Pi$  pour cette méthode. Après estimation pour nos paramètres standard, nous obtenons  $\Pi = 106.7$

## V.2 Estimation des paramètres

Comme pour les deux méthodes précédentes, nous allons dans un premier temps fixer les paramètres  $M$  et  $N_2$  et faire varier  $N$  de 2 à 2 000, ensuite nous ferons varier  $M$  puis  $N_2$ . Nous étudierons également l'impact du degré  $d$  sur notre modélisation et nous choisirons une valeur pour ce dernier.

### V.2.A Étude du paramètre $N$

Avec la méthode LSMC, lorsque l'on fixe  $M$  et  $N_2$  et que l'on fait varier  $N$ , on obtient les graphiques suivants :

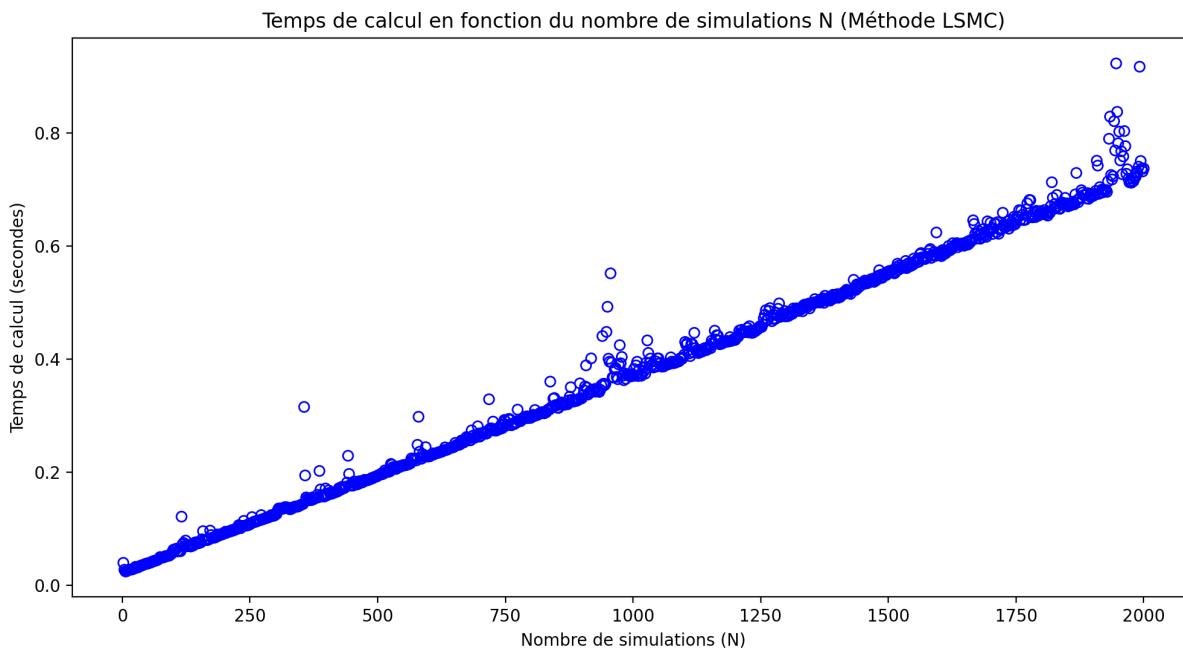


FIGURE 16 – Temps d'exécution selon le nombre de simulations  $N$  (sec)

Une nouvelle fois on constate que le temps d'exécution croît linéairement avec  $N$ .

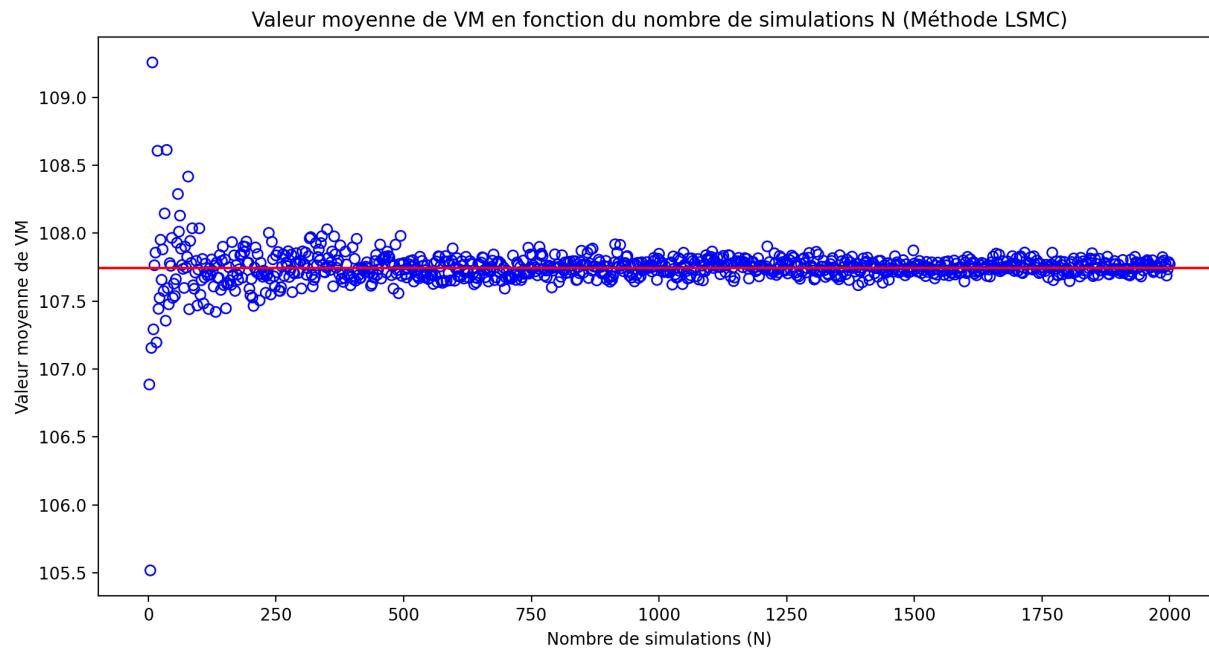


FIGURE 17 – Valeur moyenne de la Valeur de Marché selon le nombre de simulations  $N$

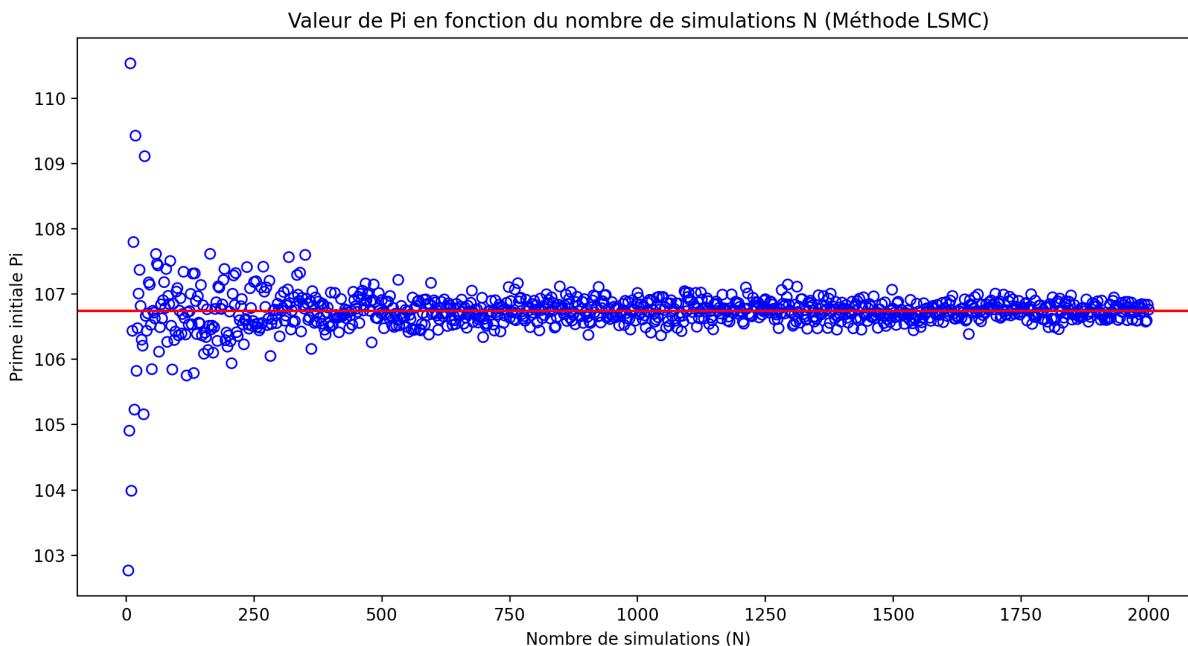


FIGURE 18 – Valeur moyenne de la prime  $\Pi$  selon le nombre de simulations  $N$

Comme pour la méthode SdS, on observe une nette convergence pour la Valeur de Marché ainsi que pour la prime  $\Pi$  qui tend vers  $\Pi = 106.7$ .

### V.2.B Étude du paramètre $M$

Lorsqu'on fixe  $N$  et  $N_2$  en faisant varier  $M$ , nous obtenons les graphiques suivants :

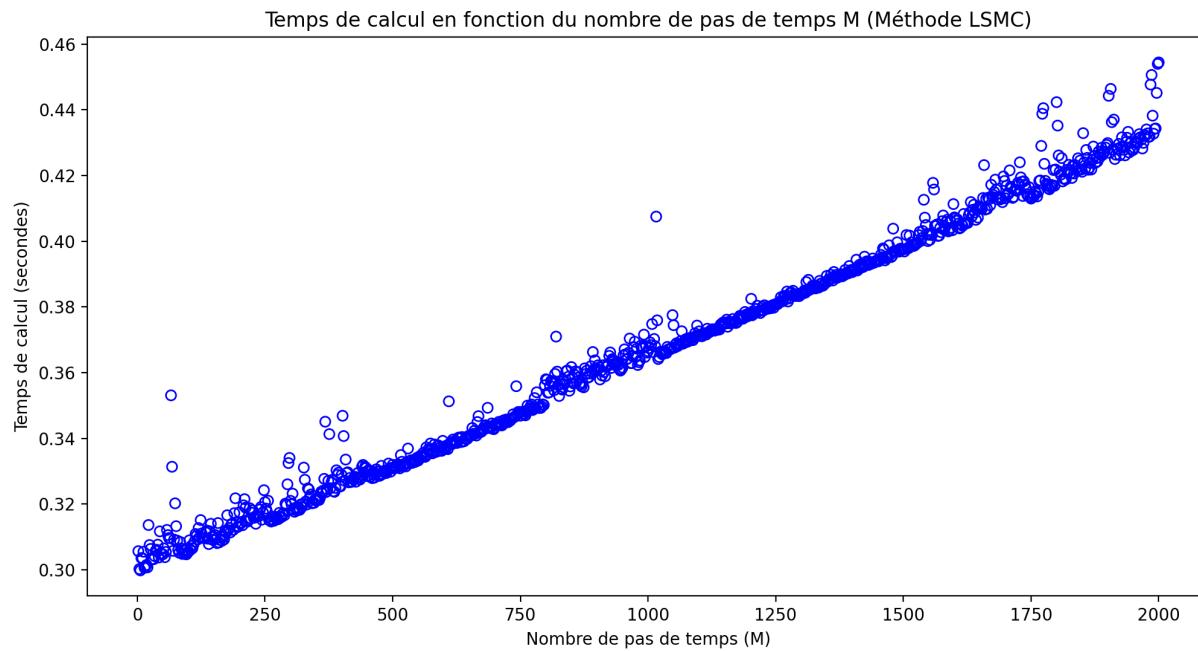


FIGURE 19 – Temps d'exécution selon le nombre de pas de temps  $M$  (sec)

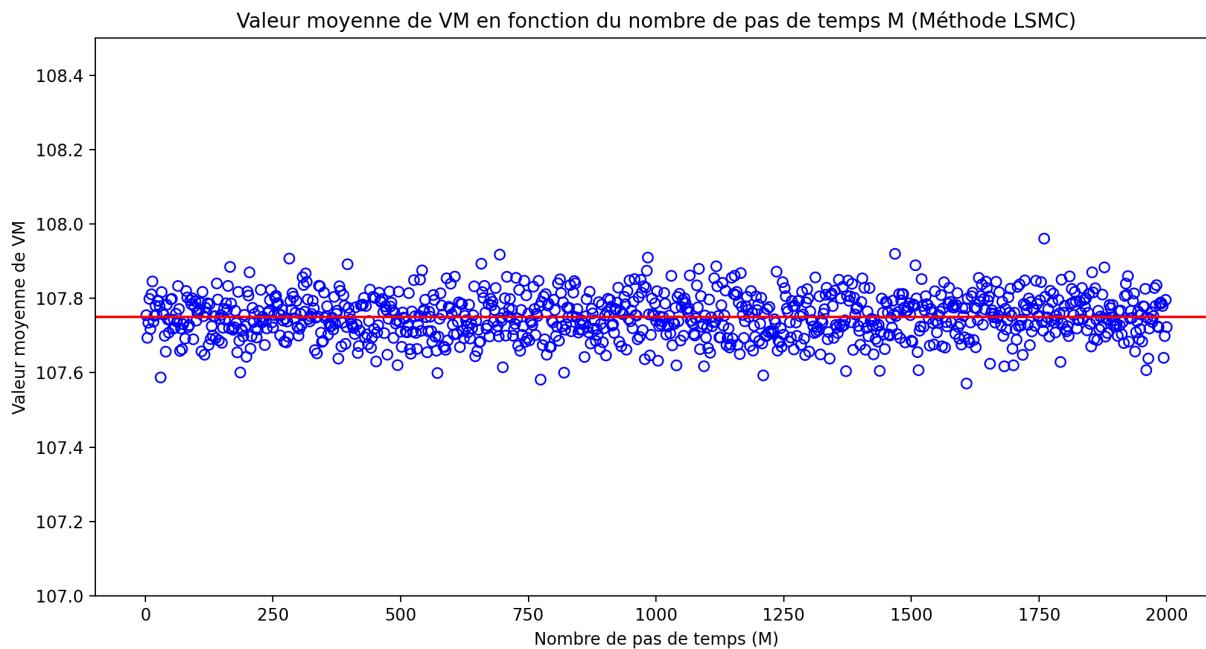


FIGURE 20 – Valeur moyenne de la Valeur de Marché selon le nombre de pas de temps  $M$

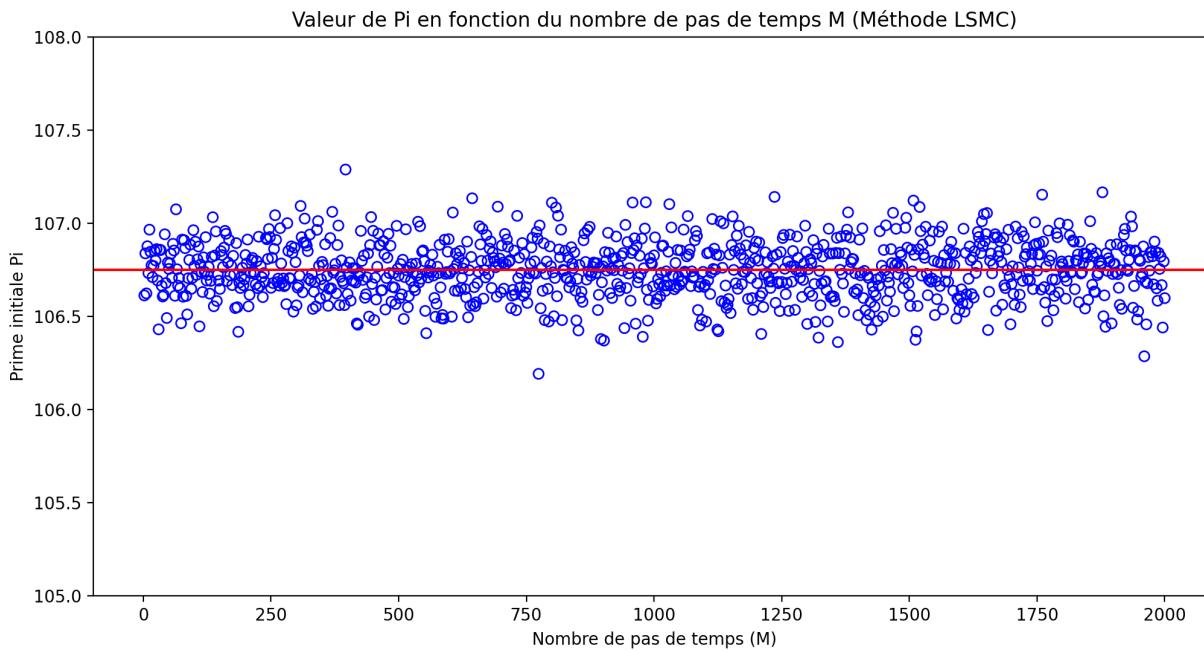


FIGURE 21 – Valeur moyenne de la prime  $\Pi$  selon le nombre de pas de temps  $M$

On constate que le temps d'exécution augmente toujours de façon linéaire en fonction de  $M$ . De plus, à l'image de la méthode SdS, nous n'observons pas de nette convergence de la Valeur de Marché au fur et à mesure de  $M$  augmente. Il en est de même pour la prime  $\Pi$ .

### V.2.C Étude du paramètre $N_2$

Lorsqu'on fixe  $N$  et  $M$  et que l'on fait varier  $N_2$ , nous obtenons les graphiques suivants :

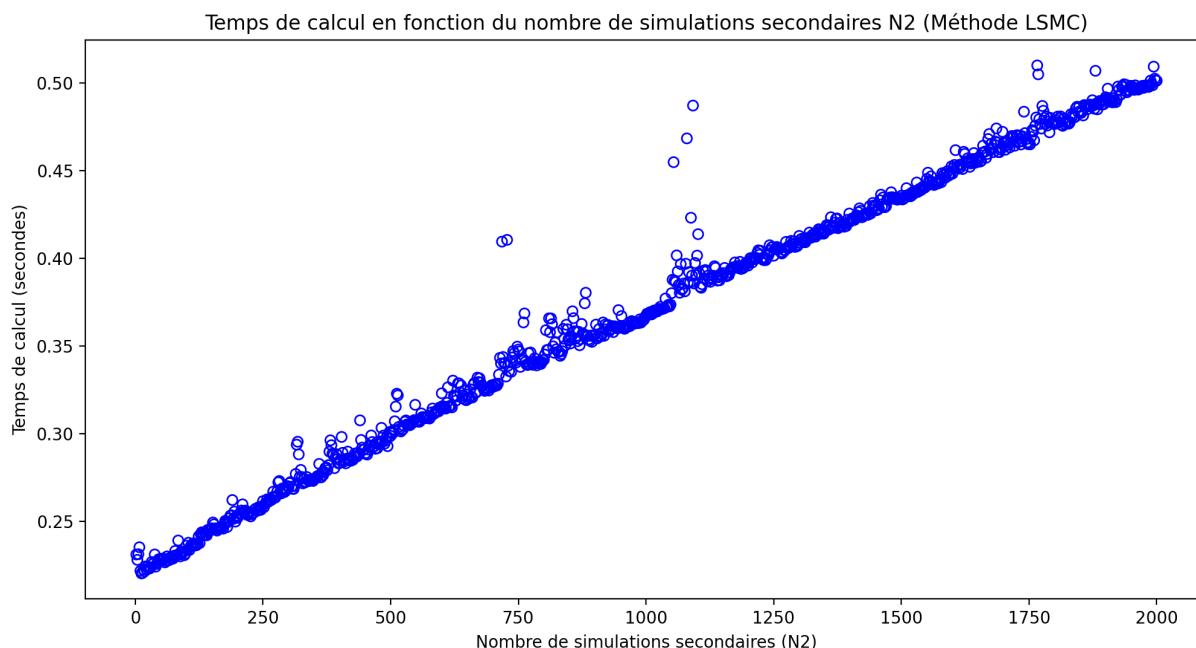


FIGURE 22 – Temps d'exécution selon le nombre de simulations secondaires  $N_2$  (sec)

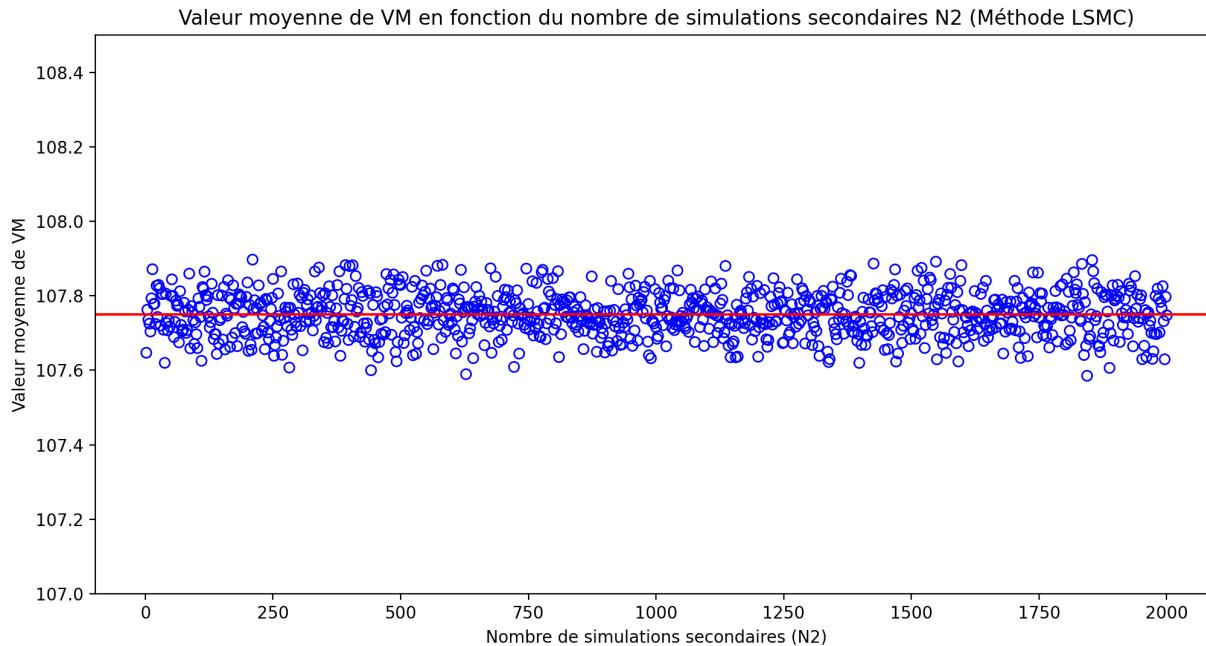


FIGURE 23 – Valeur moyenne de la Valeur de Marché selon le nombre de simulations secondaires  $N_2$

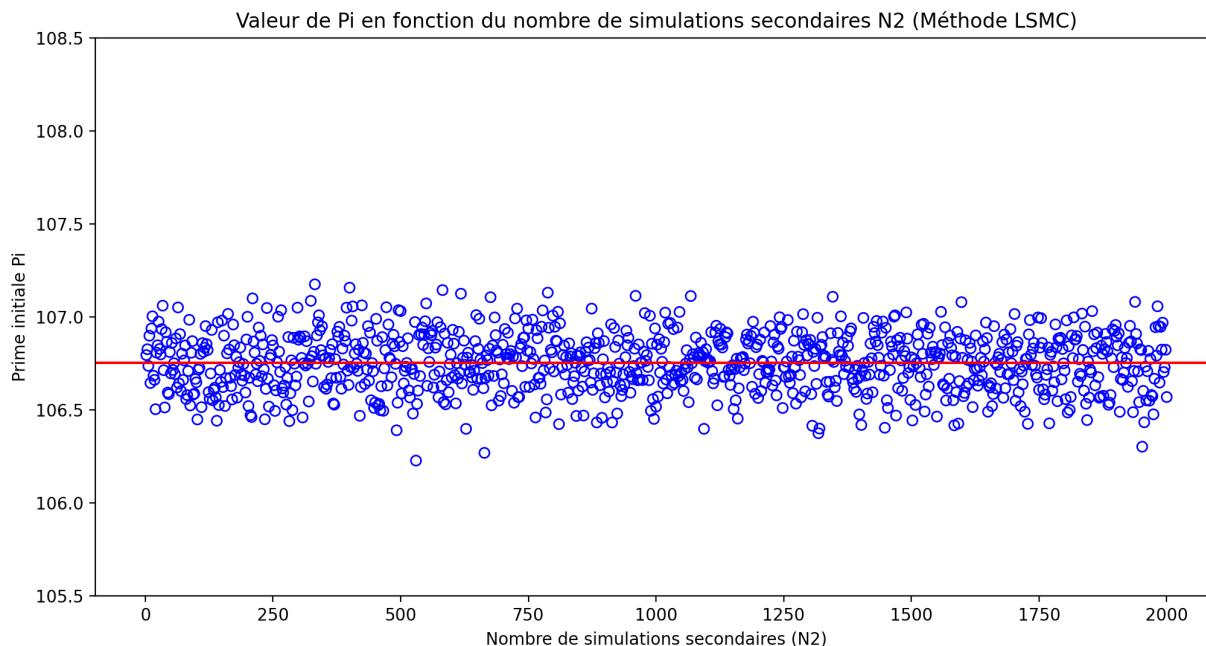


FIGURE 24 – Valeur moyenne de la prime II selon le nombre de simulations secondaires  $N_2$

Nous faisons les mêmes constats que précédemment : une augmentation linéaire du temps d'exécution selon  $N_2$ , et nous n'observons pas de convergence nette de la VM et de  $\Pi$  au fur et à mesure que  $N_2$  augmente.

#### V.2.D Étude du paramètre $d$

Après avoir trouvé la base orthonormée, nous cherchons le meilleur degré du polynôme orthonormé  $d$ . Pour ce faire, nous effectuons une régression linéaire pour chaque  $d$  compris entre 1 et 20. Afin de garder le meilleur degré, nous comparons les différents  $R^2$

ajustés. Nous avons ainsi retenu  $d = 3$  avec  $N = 10\,000$ ,  $M = 1\,000$  et  $N_2 = 1\,000$  car les  $R^2$  suivant ne varient pas significativement et  $d = 3$  semble être un bon compromis pour la performance de la modélisation.

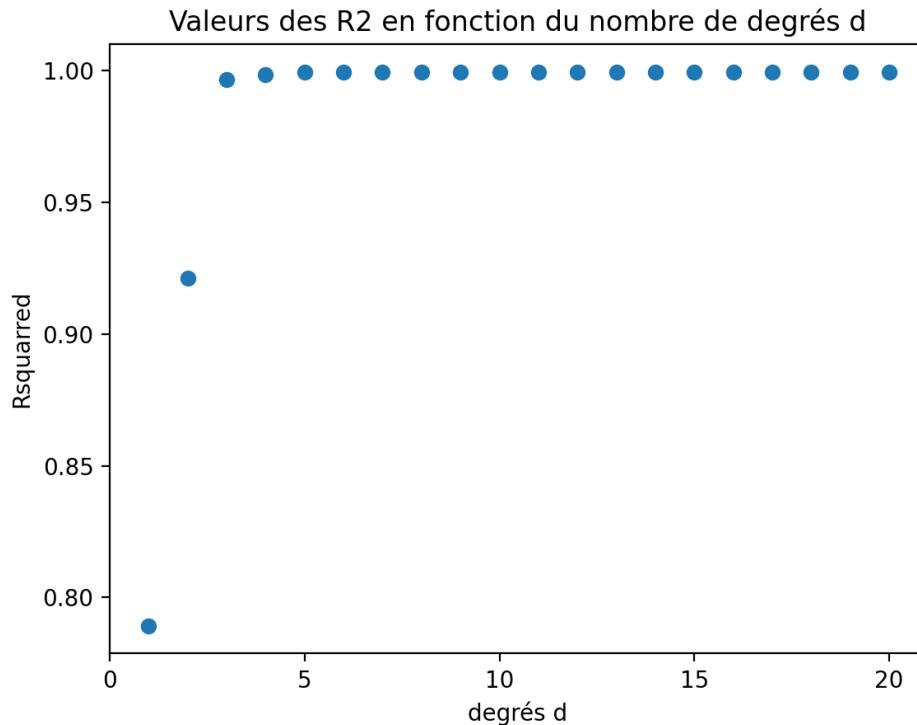


FIGURE 25 – Valeurs du coefficient de détermination selon le degré  $d$

### V.3 Résultats

Une fois que nous avons fixé le nombre de simulations, nous pouvons donner avec la méthode LSMC une estimation de la prime  $\Pi$  à  $\Pi = 106.7$ .

Nous avons également réalisé une estimation de la variance pour cette méthode. Après calculs, nous obtenons  $\mathbb{V}(\Pi) = 0.0108$ . Voici les résultats obtenus pour la méthode LSMC.

Temps exec.	$VM_{1.25}$	$VM_{1.5}$	$VM_{1.75}$	$\Pi$	$\mathbb{V}(\Pi)$	$IC_{95\%}$ de $\Pi$
2.747 sec	106.5	106.9	107.3	106.7	0.0108	[106.54, 106.95]

### V.4 Bilan

Parmi les avantages de la méthode *Least-Square Monte-Carlo*, nous pouvons noter que cette méthode est particulièrement adaptée à l'évaluation des options américaines et des autres produits financiers avec des caractéristiques de décision anticipée, car elle permet de modéliser la décision optimale d'exercice à chaque point dans le temps. Comme évoqué précédemment, la méthode LSMC nécessite moins de simulations secondaires que la méthode LSMC. Enfin, cette méthode peut s'adapter à une large gamme de payoffs et de modèles stochastiques ce qui la rend très flexible.

---

Toutefois, il existe des points sur lesquels nous devons être vigilants lorsque nous implémentons cette méthode. Il faut être conscient que le choix de la base orthonormée est déterminant pour l'obtention de bonnes simulations. Aussi, comme pour toute méthode de régression, il y a un risque de surajustement si le modèle est trop complexe par rapport à la quantité de données. Ce qui est d'autant plus vrai que la précision des estimations LSMC dépend fortement de la qualité des données d'entrée et de la pertinence du modèle stochastique utilisé pour générer les simulations.

## Conclusion

Les résultats ci-dessous ont été obtenus avec les paramètres de simulations suivants :  $N = 10\,000$ ,  $M = 1\,000$  et  $N_2 = 1\,000$ .

Méthode	Temps exec.	$\Pi$	$\mathbb{V}(\Pi)$	$IC_{95\%}$ de $\Pi$
Directe	0.866 sec	104.9	0.0115	[104.7, 105.1]
SdS	5.837 sec	106.3	0.0407	[105.8, 106.6]
LSMC	2.747 sec	106.7	0.0108	[106.5, 106.9]

Grâce à ce projet, nous avons pu mettre en oeuvre plusieurs méthodes afin de simuler les trajectoires de la Valeur de Marché et enfin pouvoir tarifer le contrat d'assurance vie qui était proposé à notre étude. Avant de conclure, il faut être conscient que dans le cadre de l'assurance vie, les clients ont des profils d'investissements très différents. Les rachats peuvent être conjoncturels ou structurels, et cela nécessite en règle général une étude beaucoup plus approfondie. Notre cas s'est limité à une sortie anticipée « volontaire » ou causé par le décès de l'assuré.

Ce sont ces sorties volontaires qui ont été le fil conducteur de notre projet. En effet, afin de tarifer correctement le contrat proposé à notre étude, nous devions analyser avec finesse les évènements de sorties anticipées. C'est pourquoi, si nous devions faire un choix parmi les méthodes, nous n'opterions pas pour la méthode directe puisque cette dernière est celle qui accorde le moins de précision sur ces évènements. D'autre part, bien que, dans le domaine de l'assurance vie, la méthode SdS soit assez répandue, le choix de méthode que nous pourrions faire pour l'estimation de la prime  $\Pi$  serait la méthode LSMC. Car, nous l'avons vu, la méthode SdS présente, ici, une complexité algorithmique et temporelle qui peut devenir complexe à maîtriser selon les cas d'utilisation et la méthode directe ne tient pas assez compte des évènements de sortie anticipée. De plus, c'est la méthode LSMC qui fournit la variance de  $\Pi$  la plus faible.

**Fin du Rapport**