Grecque	Définit°	Valeur pour CALL sous BS
Δ	$\frac{\partial C}{\partial S}$	$\mathcal{N}(d_1) \in [0,1]$
Γ	$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$	$f(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} > 0$
Θ	$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial \tau}$	$-\left[\frac{S\sigma}{2\sqrt{\tau}} f(d_1) + rKe^{-r\tau}\mathcal{N}(d_2)\right] < 0$
ν	$\frac{\partial C}{\partial \sigma}$	$C_\sigma = S\sqrt{\tau} f(d_1) > 0$
ρ	$\frac{\partial C}{\partial r}$	$\tau K e^{-r\tau}\mathcal{N}(d_2) > 0$

OA = stratégie qui rapport sans aucun risque et coût $\rightarrow$ hyp d'AOA sur les marchés $\rightarrow X_0 = 0, X_T \geq 0 \Rightarrow \mathbb{P}(X_T > 0) = 0$

$\hookrightarrow$ Sous AOA, même payoff $\rightarrow$ même prix

AOA $\Leftrightarrow$ Existence d'une proba risque neutre   AOA + complet $\Leftrightarrow$ unique proba risque neutre

Portefeuille autofinancé $\rightarrow$ valeur non modifié par ajout ou retrait.

Stratégie admissible si autofinancée et $\forall t > 0, V_t(\phi) > 0$

$\mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(-x) = 1$

Facteur	Valeur du CALL	Valeur du PUT
S_0	↗	↘
K	↘	↗
σ	↗	↗
T	↗	? (↗ pour PUT américain)
r	↗	↘
D	↘	↗

PARITE CALL-PUT : $C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$

$\rightarrow$ Avec dividende discret $D \rightarrow C_0 - P_0 = S_0 - Ke^{-rT} - De^{-rT_0}$ versem^t du divi $T_0 < T$

FORMULE DE BLACK-SCHOLES : $C_t = S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$

avec dividende continu : $C_t = e^{-c(T-t)}[S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)]$

discret : $C_t = (S_t - D^*)\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$ D^* dividende actualisé

$\rightarrow$ Les relat° parité CALL-PUT changent

Cas continu : $C_t - P_t = e^{-c(T-t)}S_t - Ke^{-r(T-t)}$ Cas discret : $C_t - P_t = (S_t - D^*) - Ke^{-r(T-t)}$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{et} \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

En cas de dividendes continu (MERTON) on remplace r par $r - c$.

EDS de BLACK-SCHOLES : $dS_t = S_t(\mu\, dt + \sigma\, dW_t) \rightarrow S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}$

Changement de Proba : si $\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t^\omega} = Z_t$, X_t VA $(\mathcal{F}_t^\omega)$-mesurable alors $\mathbb{E}_\mathbb{P}[X_t Z_t] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[X_t]$

Théorème de Girsanov : Sous $\mathbb{Q}$, le processus $\tilde{W} : t \mapsto W_t - \int_0^t \theta_s\, ds$ est un MB   où $Z_t = \exp\left(\int_0^t \theta_s\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2\, ds\right)$

Couverture : $\Delta = \frac{f_u - f_d}{uS_0 - dS_0}$ Pour un CALL : achat de Δ actif risqué et placem^t de $C_0 - \Delta S_0$ actif sans risque

PUT : ——— $\Delta S_0 - P_0$ ———

Arbre binomial : $q = \frac{R-d}{u-d}$ $R = e^{r\Delta t}$ ou $1 + r$ (si taux discret)   Si taux sans risque sur 1 période $\rightarrow \Delta t = 1$ Simon 4/12...

Si dividende continu taux $d \rightarrow R = e^{(r-d)\Delta t}$ $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ $d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$

Pour américain c'est $\tilde{f}_u = \max(f_u ; (uS_0 - K)_+)$ $f_0 = \frac{1}{R}[q f_{u2} + (1-q) f_{ud}]$

Arbre trinomial : $p_u = \left(\frac{e^{Y\frac{t}{2}} - d}{u-d}\right)^2$ $p_d = \left(\frac{u - e^{Y\frac{t}{2}}}{u-d}\right)^2$ $p_m = 1 - p_u - p_d$ $u = e^{\sigma\sqrt{2t}}$ $d = e^{-\sigma\sqrt{2t}}$

$S_u = uS$
$S_m = S$
$S_d = dS$

$$Y = \begin{cases} r & \leftarrow \text{proba risque neutre} \\ 0 & \leftarrow \text{futures} \\ r_{dom} - r_{foreign} & \leftarrow \text{devises} \end{cases}$$

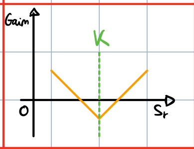
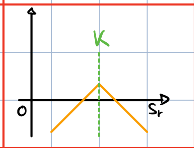
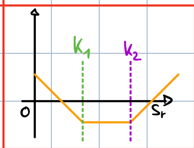
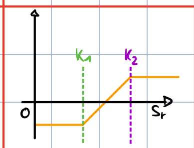
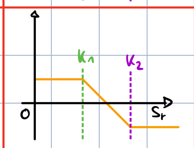
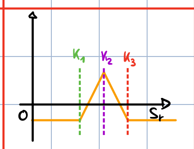
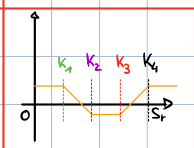
Trade CASH-AND-CARRY : On prend 2 posit° opposés (achat et vente). Ex : achat sous-jacent comptant puis vente d'un future sur celui-ci

	Proba historique $\mathbb{P}$	Proba risque neutre $\mathbb{Q}$
Actif risqué	$dS_t = \mu S_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$	$dS_t = rS_t\, dt + \sigma S_t\, dW_t$
Actif risqué réactualisé	$d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t\, dt + \sigma\tilde{S}_t\, dW_t$	$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t\, d\tilde{W}_t$

Numéraire = tout processus d'Itô $\mathcal{F}_t$-adapté qui ne s'annule pas, $\rightarrow$ c'est une "monnaie"

$\hookrightarrow d\left(\frac{X^{x,\phi}}{Y}\right)_t = \phi_t^0\, d\left(\frac{S^0}{Y}\right)_t + \phi_t\, d\left(\frac{S}{Y}\right)_t$

Titre risqué comparaison μ et r : $\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}$ prime de risque (Ratio Sharpe)

Nom	Graphique	Stratégie	Anticipation
STELLAGE (Straddle) acheté		Achat CALL Achat PUT	Forte fluctuation, sens inconnu
STELLAGE (Straddle) vendu		Vente CALL Vente PUT	Stabilité; pertes non limitées
STRANGLE acheté		Achat PUT K_1 Achat CALL K_2 $K_1<K_2$	Fluctuation de sens inconnu "écrêtage" de la perte maximale
ECART HAUSSIER (Bull Spread)		Achat CALL K_1 Vente CALL K_2 $K_1<K_2$ OU " PUT K1 " PUT K2	Hausse modérée, pertes limitées en cas de baisse
ECART BAISSIER (Bear Spread)		Vente CALL K_1 Achat CALL K_2 $K_1<K_2$ OU " PUT K_1 " PUT K_2	Baisse modérée, pertes limitées en cas de hausse
BUTTERFLY acheté		$+C_{K_1}+C_{K_3}-2C_{K_2}$ OU $K_1<K_2<K_3$ $+P_{K_1}+P_{K_3}-2P_{K_2}$	Stabilité mais possible fluctuation, de sens inconnu, pertes limitées
CONDOR vendu		$-C_{K_1}-C_{K_4}+C_{K_2}+C_{K_3}$ OU $-P_{K_1}-P_{K_4}+P_{K_2}+P_{K_3}$	Forte fluctuation de sens inconnu, faibles gains et pertes

Forward: $F=S_0e^{(r-q)t}=S_0(1+r-q)^t$

CALL: A la monnaie → $S=k$ PUT: " → $S=k$

Dans " → $S>k$ " → $S<k$

En dehors " → $S<k$ " → $S>k$

$C_0=\tilde{C}_0$ si pas de dividende sinon $\tilde{C}_0>C_0$

$\tilde{P}_0\geq P_0$

Effet de levier: $C_0=4,8€$. $T=6$ mois $k=100€$, $S_0=98€$ $S_T=107€$

Investissement dans le support rapporte $\frac{107-98}{98}=9,2\%$

Acheteur CALL a un taux de rendement semestriel $\frac{(107-100)-4,8}{4,8}=45,8\%$

Δ neutre: Port: 3 action A, 1 act° B, 60 CALL A $\Delta=0,5$

2 PUT B $\Delta=-0,75$

$\Rightarrow \Delta_{Port}=3\times1+60\times0,5=33$ ⇒ Vente de 33 A pour Δ neutre

$$\frac{d_2^2-d_1^2}{2}=\ln\left(\frac{K}{S_t}\right)-r(T-t)$$

Matrice des payoffs $\begin{pmatrix}60 & 75 & 105\\ 20 & 40 & 50\end{pmatrix}$

→ Marché complet? → ssi rg A = 2 $\begin{vmatrix}60 & 75\\ 20 & 40\end{vmatrix}=900\neq0$ rg A = 2

Réplicat° de C : $\begin{cases}60x+75y=105\\20x+40y=50\end{cases}\Leftrightarrow(x,y)=\left(\frac{1}{2},1\right)\Rightarrow$ Prix C: $\frac{1}{2}P_A+P_B$

Exemple couverture: $S_0=k=20$ $u=1,1$ $d=0,9$ $r=2\%$ $\Delta_1=\frac{f_u-f_d}{uS_0-dS_0}=0,5583$ → en t=0 achat de 0,5583 act°, $\Delta_2=\frac{f_{u^2}-f_{ud}}{u^2S_0-udS_0}=0,7704$

⇒ achat 0,7704 − 0,5583 act°

Future = pas de coût pour une position longue → taux de ↗ espéré de la valeur d'un contrat nulle.

$F_0=quF_0+(1-q)dF_0$ et $q=\frac{1-d}{u-d}$

MERTON (Dividende Continu) $C_t=S_te^{-c(T-t)}N(d_1)-Ke^{-r(T-t)}N(d_2)$

$\rightarrow d_1=\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-c+\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$ et $d_2=d_1-\sigma\sqrt{T-t}$

Considérons un produit dérivé de la forme $h(S_T)$

$\rightarrow\exists\, v:[0,T]\times\mathbb{R}^+\rightarrow\mathbb{R}$ tq $v(t,S_t):=e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$

Taux de change (Garman Kohlagen)

$dS_t=S_t((r-r_f)dt+\sigma dW_t)$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T-K)_+]=e^{-r(T-t)}\underbrace{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T\mathbb{1}_{S_T\geq K}]}_{\text{Changement}}-Ke^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{S_T\geq K}]$$

$\frac{d\mathbb{Q}^*}{d\mathbb{Q}}=e^{-\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma\tilde{W}_t}$

$P_t=-S_tN(-d_1)+Ke^{-r(T-t)}N(-d_2)$

Si c'est S_T ⇒ $(T-t)=T$

Port.

Th: $x=e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[h(S_T)]$, $\phi_t=\frac{\partial v}{\partial x}(t,S_t)$

$\mathbb{P}(S_T\geq K)=N(d_2)$ $d_2=\frac{\ln\left(\frac{S_t}{K}\right)+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$

Th: $\left.\begin{array}{l}C_1^u=\Delta S_1^u+(x-\Delta S_0)R\\ C_1^d=\Delta S_1^d+(x-\Delta S_0)R\end{array}\right\}$ Solut° $\Delta=\frac{C_1^u-C_1^d}{(u-d)S_0}$

$C_0=\frac{1}{1+R}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[C_1]$ (AOA) $\Rightarrow x=\frac{1}{R}\left[\underbrace{\frac{R-d}{u-d}}_{q}C_1^u+\underbrace{\frac{u-R}{u-d}}_{1-q}C_1^d\right]$