

Examen: Mathématiques actuarielles

Karim Barigou

Mai – 2022
ISFA

1. L'examen est à cours fermé.
2. Les exercices du cours ne sont pas autorisés.
3. Une feuille recto-verso de notes de cours et le formulaire de notations actuarielles sont autorisés.
4. Nombre total de questions: 2.
5. Une calculatrice non-graphique est autorisée.
6. Temps autorisé: 2 heures.
7. Bon courage !

Question 1: (12 points)

Une personne de 40 ans souscrit une assurance vie garantissant les prestations suivantes:

- en cas de décès avant 50 ans, le paiement immédiat d'un capital de 200.000 €.
- en cas de décès après 50 ans, le paiement immédiat d'un capital de 100.000 €.
- une rente viagère de 12.000 € par an payable par douzièmes mensuellement à terme échu et prenant cours au 65ème anniversaire de l'assuré s'il atteint cet âge.

Le contrat prévoit des primes constantes payables trimestriellement par anticipation pendant 20 ans. Le tarif est calculé sur les bases techniques suivantes :

- taux d'intérêt technique: 3,75 %.
- table de mortalité: voir la table ci-dessous.
- chargements:
 - inventaire:
 - * 25 € pour chacune des 25 premières années (valeur début d'année).
 - * chargement sur le taux d'intérêt *instantané* de 0,15%.
 - * chargement de 2% sur tous les arrérages de rente.
 - acquisition: 3% de la prime unique de réduction.
 - encasement: 5% de chaque prime payée.

Sur base de ces données, calculez:

- (a) Le taux d'intérêt technique en inventaire.
- (b) La prime unique de réduction.
- (c) La prime annuelle commerciale.
- (d) La valeur de rachat théorique du contrat à la fin de la 20ème année.
- (e) A la fin de la 20ème année, l'assuré demande que le capital assuré en cas de décès soit réduit à 50.000 € avec effet immédiat. Les primes n'étant pas modifiées, calculez la nouvelle rente assurée en cas de vie à 65 ans.

Données : commutations calculées au taux technique d'inventaire.

Table			
x	D_x	N_x	M_x
40	229646	4372986	79305
45	188776	3309085	75279
50	153707	2437404	70368
55	123211	1731472	64259
60	96267	1170552	56644
65	72125	738515	47329

Question 2: (8 points)

Emmanuel et Brigitte, âgés de 65 et 60 ans, respectivement achètent une police d'assurance dont les prestations garanties payables au premier décès sont une somme de 10.000 €, payable immédiatement au décès, plus une rente de 5000 € par an payable continûment tout au long de la vie de la personne survivante. De plus, un montant de 1000 € est payé immédiatement au second décès. Les primes sont payables continûment jusqu'au premier décès et on note P le montant annuel de prime.

On vous donne $\bar{A}_{60} = 0.353789$, $\bar{A}_{65} = 0.473229$ et $\bar{A}_{60|65} = 0.512589$ avec un taux d'intérêt effectif de 4%. Les durées de vie sont supposées indépendantes.

- (a) Calculez la prime unique pure des garanties décès.
- (b) Calculez la prime unique pure de la rente de réversion.
- (c) Après 10 ans, l'assureur calcule la réserve mathématique :
 - Donner une expression en termes de notations actuarielles pour la réserve à ce moment-là, étant donné qu'Emmanuel et Brigitte sont toujours vivants.
 - Donner une expression en termes de notations actuarielles pour la réserve à ce moment-là, étant donné qu'Emmanuel est décédé mais que Brigitte est toujours vivante.

Indication: La rente payable continûment jusqu'au premier décès se note \bar{a}_{xy} et vous pouvez utiliser les relations liant la rente continue et l'assurance décès données par

$$\begin{aligned} 1 &= \delta \bar{a}_x + \bar{A}_x \\ 1 &= \delta \bar{a}_{xy} + \bar{A}_{xy} \end{aligned}$$

Exercice 1:

© Théo Jalabert

a) Le calcul du taux d'intérêt technique en inventaire est donné par :

$$i^* = \exp(h(1+0,0375) - 0,0015) - 1$$

$$= 0,0359448 = 3,59448\%$$

b) D'abord, calculons le facteur de rente à 65 ans avec fractionnement mensuel :

$$\bar{a}_{65}^{(12)} = \frac{N_{65}}{D_{65}} - \frac{13}{24} = 9,69771$$

Comme la prime unique de réduct° s'écrit $\widehat{PV} = \frac{PV'}{\text{taux acquisit°}}$

=> On doit calculer PV' la prime unique d'inventaire.

$$\begin{aligned} PV' &= 100000 (\bar{A}_{40:60}^{(12)} + \bar{A}_{40}^{(12)}) + 1,02 \times 12000 \times {}_{25}E_{40} \bar{a}_{65}^{(12)} + 25 \ddot{a}_{40:25}^{(12)} \\ &= 100000 \times \left(\frac{\bar{M}_{40} - \bar{M}_{50}}{D_{40}} + \frac{\bar{M}_{40}}{D_{40}} \right) + 1,02 \times 12000 \times \frac{D_{65}}{D_{40}} \times \bar{a}_{65}^{(12)} + 25 \frac{N_{40} - N_{65}}{D_{40}} \\ &= 76101,03 \text{ €} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \widehat{PV} = \frac{PV'}{0,97} = 78454,67 \text{ €}$$

c) Pour le calcul des primes annuelles, on calcule le facteur de rente correspondant :

$$\ddot{a}_{40:20}^{(1)} = \frac{N_{40} - N_{60}}{D_{40}} - \frac{3}{8} \left(1 - \frac{D_{60}}{D_{40}} \right) = 13,7273$$

Dès lors :

$$\widehat{PA}^{(1)} = \frac{\widehat{PV}^{(1)}}{\ddot{a}_{40:20}^{(1)}} = 5715,2342 \leftarrow \text{prime annuelle d'inventaire.}$$

$$\widehat{PA}^{(1)} = \frac{\widehat{PA}^{(1)}}{0,97} = 5891,9940 \leftarrow \text{prime annuelle de réduction}$$

$$\widehat{PA}^{(1)} = \frac{\widehat{PA}^{(1)}}{0,95} = 6202,0389 \leftarrow \text{prime annuelle commerciale.}$$

d) Nous avons besoin de calculer le facteur de rente pour les primes restantes :

$$\ddot{a}_{60:51}^{(4)} = \frac{N_{60} - N_{65}}{D_{60}} - \frac{3}{8} \left(1 - \frac{D_{65}}{D_{60}} \right) = 4,39386$$

Dès lors, la valeur de rachat théorique du contrat à la fin de la 20^{ème} année est donnée par :

$$W(20) = \frac{\bar{M}_{60}}{D_{60}} \times 100000 + 1,02 \times 12000 \times \frac{D_{65}}{D_{60}} \bar{a}_{65}^{(12)} + 25 \frac{N_{60} - N_{65}}{D_{60}} - \widehat{PA} \ddot{a}_{60:51}^{(4)}$$

$$\Rightarrow W(20) = 123\,857,65 \text{ €}$$

e) Soit R la nouvelle rente assurée. Pour calculer le montant de la nouvelle rente, on égalise la valeur de rachat théorique obtenue en a) d'une part avec la valeur actuelle des nouveaux engagements (changement d'inventaire inclus) diminuée de la valeur actuelle des primes de réduction futures.

$$\Rightarrow W(20) = \frac{\bar{M}_{60}}{D_{60}} \times 50000 + R \times 1,02 \times \frac{\bar{D}_{65}}{D_{60}} a_{65}^{(12)} + 100 \frac{N_{60}-N_{65}}{D_{60}} - \hat{PA} \ddot{a}_{60,51}^{(14)}$$

$$\Rightarrow R = \frac{1}{1,02 \times \frac{\bar{D}_{65}}{D_{60}} a_{65}^{(12)}} (W(20) - \frac{\bar{M}_{60}}{D_{60}} \times 50000 - 100 \frac{N_{60}-N_{65}}{D_{60}} + \hat{PA} \ddot{a}_{60,51}^{(14)})$$

$$\Rightarrow R = 19\,335,09 \text{ g.}$$