7 Janvier 2020

$$B(t,T) = \exp\left\{-\int_t^T f(t,u)\,du\right\} \to f(t,T) \overset{\text{déf}}{:=} -\partial_T\left[\log B(t,T)\right] \quad (1)$$

1ère question $\quad f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)\,ds - \int_0^t \gamma(s,T)\,dW_s$

$s \mapsto \alpha(s,T)$, $s \mapsto \gamma(s,T)$ sont t.q. $\exists!$ solution (forte)

$$\Gamma(t,T) := \int_t^T \gamma(t,u)\,du$$

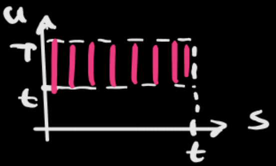
(a) Justifier que $X_t = -\log B(t,T)$ avec $X_t = \int_t^T f(t,u)\,du$ (à partir de (1))

$$\underbrace{-\log B(t,T)}_{X_t} + \log \underbrace{B(t,t)}_{=1} = \int_t^T f(t,u)\,du$$

(b) La dynamique de X_t? En déduire celle de $B(t,T) = e^{-X_t}$.

Vérifier que la vol de $B(\cdot,T)$ est égale à $\Gamma(\cdot,T)$

$$dX_t = -\underbrace{f(t,t)}_{=r_t}dt + \int_t^T d\left(\int_0^t \alpha(s,u)\,ds - \int_0^t \gamma(s,u)\,dW_s\right)du =$$



$$= -r_t\,dt + \int_t^T \left[\alpha(t,u)\,dt - \gamma(t,u)\,dW_t\right]du = \{\text{Fubini + Fubini stochastique}\} =$$

$$= \left(-r_t + \int_t^T \alpha(t,u)\,du\right)du - \left(\int_t^T \gamma(t,u)\,du\right)dW_t$$

$$dB(t,T) = d\,e^{-X_t} = -e^{-X_t}dX_t + \frac{1}{2}e^{-X_t}d\langle X\rangle_t$$

Alors
$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \left(r_t - \int_t^T \alpha(t,u)\,du + \frac{1}{2}\Big(\underbrace{\int_t^T \gamma(t,u)\,du}_{\Gamma(t,T)}\Big)^2\right)dt - \overbrace{\left(\int_t^T \gamma(t,u)\,du\right)}^{\text{vol de } B(\cdot,T)\ \hookrightarrow\ \Gamma(t,T)}dW_t$$

(c) Les conditions d'AOA: $\Big(\underbrace{e^{-\int_0^t r_s ds}}_{B_t^{-1}} B(t,T)\Big)_{t\in[0,T]}$ doit être une $\mathbb{Q}$-martingale.

$$d\left(\frac{B(t,T)}{B_t}\right) = \frac{B(t,T)}{B_t}\left(\left[-\int_t^T \alpha(t,u)\,du + \frac{1}{2}\Gamma(t,T)^2\right]dt - \Gamma(t,T)\,dW_t\right)$$

Pour que ce soit une mart, la condition nécessaire est

$$\int_t^T \alpha(t,u)\,du = \frac{1}{2}\Gamma(t,T)^2 \quad \forall t\in[0,T] \quad \forall T\geq 0$$

$$\Big\Downarrow\ \partial_T$$

$$\alpha(t,T) = \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot\cancel{2}\,\Gamma(t,T)\,\gamma(t,T) \qquad 0\leq t\leq T \qquad (2)$$

On va supposer que (2) est satisfaite.

(d) Proba sous laquelle $f(\cdot,T)$ soit une mart.

on suppose que $\gamma(\cdot,T)$ ne s'annule pas

$$\left.\frac{dQ^f}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_T} = \mathcal{E}\left(\int_0^{\cdot} \frac{\alpha(s,T)}{\gamma(s,T)}\, dW_s\right)_T = \exp\left\{\int_0^T \frac{\alpha(s,T)}{\gamma(s,T)}\, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \frac{\alpha(s,T)^2}{\gamma(s,T)^2}\, ds\right\}$$

Sous Q^f $\quad W^f_t = W_t - \int_0^t \frac{\alpha(s,T)}{\gamma(s,T)}\, ds$ est un Q^f-MB

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \alpha(s,T)\, ds - \int_0^t \gamma(s,T)\left[dW^f_s + \frac{\alpha(s,T)}{\gamma(s,T)}\, ds\right] =$$

$$= f(0,T) - \int_0^t \gamma(s,T)\, dW^f_s$$ une martingale (il faut supposer aussi que $\mathbb{E}\int_0^T \gamma(s,T)^2 ds < \infty$)

2ème question: Modèle de Ho-Lee

$r_t = r_0 + A(t) - \sigma W_t$, $\sigma > 0$ $\quad A(\cdot)$ fct. déterministe. $A(0) = 0$

(a) $\mathcal{L}\left(\int_t^T r_s\, ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right) = ?$

$$\int_t^T r_s\, ds = \underbrace{r_0(T-t) + \int_t^T A(s)\, ds}_{\text{déterministe}} - \sigma \underbrace{\int_t^T W_s\, ds}_{} \underset{\text{sachant } \mathcal{F}_t}{\sim} \mathcal{N}\Big(\underbrace{(r_0 - \sigma W_t)(T-t) + \int_t^T A(s)\, ds}_{\xi_{t,T}},\ \underbrace{\sigma^2 \frac{(T-t)^3}{3}}_{\Sigma^2_{t,T}}\Big)$$

$B \perp \mathcal{F}_t$

$$\int_t^T W_s\, ds \overset{\mathcal{L}}{=} \underbrace{W_t(T-t)}_{\mathcal{F}_t\text{-mes.}} + \underbrace{\int_0^{T-t} B_s\, ds}_{\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{(T-t)^3}{3}\right)}$$

$$B(t,T) = \mathbb{E}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}\left[e^{-\xi_{t,T} - \Sigma_{t,T} Z}\right] = \exp\left\{-\xi_{t,T} + \frac{1}{2}\Sigma^2_{t,T}\right\}$$

$Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\qquad$ déterministe

$\Gamma, \gamma = ?$ $\quad B(t,T) = e^{-\sigma(T-t)W_t + C_{t,T}}$

$$\Downarrow$$

$$dB(t,T) = B(t,T)\Big[(\cdots)\, dt - \underbrace{\sigma(T-t)}_{\overset{(1)}{=}\ \Gamma(t,T)} dW_t\Big]$$

Donc $\Gamma(t,T) = \sigma(T-t) = \int_t^T \gamma(t,u)\, du \rightarrow \gamma(t,T) \equiv \sigma$

(b) La condition sur A pour que le modèle soit calibré sur $(B^*(0,T))_{T \geq 0}$ et r_0^*.

On choisit $A(0) = 0$, $r_0 = r_0^*$.

$B^*(0,T) = \exp\left\{-\xi_{0,T} + \frac{1}{2}\Sigma^2_{0,T}\right\} \Rightarrow \xi_{0,T} = \frac{1}{2}\Sigma^2 - \ln B^*(0,T)$

$$\int_0^T A(s)\,ds = (\sigma \cancel{X}_0^{\,0} - r_0)T + \frac{1}{6}\sigma^2 T^3 - \log B^*(0,T) \qquad T \geq 0$$

$\{ \partial_T$

$$A(T) = -r_0 + \frac{1}{2}\sigma^2 T^2 - \partial_T[\log B^*(0,T)]$$

(c) Question très importante

Payoff $= (B(T,T_2) - K B(T,T_1))^+$ à la date $T < T_1 < T_2$

$\pi_t = ?$ Couverture
- avec $B(\cdot,T_1)$ et $B(\cdot,T_2)$
- avec $B(\cdot,T_2)$ et cash

$$\pi_t = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{T_1}}\left[\frac{B(t,T_1)}{B(T,T_1)}(B(T,T_2) - K B(T,T_1))^+\right] = B(t,T_1)\,\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{T_1}}\left[\left(\frac{B(T,T_2)}{B(T,T_1)} - K\right)^+\right] \circleddash$$

$B(T,T_1)$ ← numéraire

$\left(\frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}\right)_{t \leq T_1}$ est une $\mathbb{Q}^{T_1}$-martingale dont la volatilité est

$\sigma(T_2 - t) - \sigma(T_1 - t) = \sigma(T_2 - T_1)$ ne dépend pas de T

BS

$$\circleddash\ B(t,T_1)\left(\frac{B(t,T_2)}{B(t,T_1)}\Phi(d_+) - K\Phi(d_-)\right) = B(t,T_2)\Phi(d_+) - B(t,T_1)K\Phi(d_-)$$

où
$$d_\pm = \frac{\ln\frac{B(t,T_2)}{K B(t,T_1)} \pm \frac{\sigma^2(T_2-T_1)^2(T-t)}{2}}{\sigma(T_2-T_1)\sqrt{T-t}}$$

Couverture:
- $\uparrow \Phi(d_+)$ de $B(\cdot,T_2)$
- $\downarrow K\Phi(d_-)$ de $B(\cdot,T_1)$

Pour construire une couverture avec $B(\cdot,T_2)$ et cash il est suffit de savoir couvrir $B(\cdot,T_1)$ avec $B(\cdot,T_2)$ et cash.

$$B(t,T_1) = H_t B(t,T_2) + \underbrace{B(t,T_1) - H_t B(t,T_2)}_{\text{en cash}} \quad \text{pf autofinançant}$$

$$dB(t,T_1) = H_t\,dB(t,T_2) + r_t(B(t,T_1) - H_t B(t,T_2))\,dt$$

Sous $\mathbb{Q}$
$$\frac{dB(t,T_i)}{B(t,T_i)} = r_t\,dt + \sigma(T_i - t)\,dW_t$$

$$B(t,T_1)r_t\,dt + B(t,T_1)\cdot\sigma(T_1-t)\,dW_t = H_t B(t,T_2) r_t\,dt + H_t\cdot B(t,T_2)\cdot\sigma(T_2-t)\,dW_t + r_t(B(t,T_1) - H_t\cdot B(t,T_2))\,dt$$

D'où
$$H_t = \frac{B(t,T_1)}{B(t,T_2)}\cdot\frac{(T_1-t)}{\underbrace{(T_2-t)}_{\neq 0 \text{ si } t \leq T_1}}$$

Donc pour couvrir $B(t,T_1)$ il faut :
- $\frac{B(t,T_1)}{B(t,T_2)} \frac{T_1-t}{T_2-t}$ de $B(t,T_2)$
- $B(t,T_1)\left(1 - \frac{T_1-t}{T_2-t} \cdot \frac{1}{B(t,T_2)}\right)$ en cash

En combinant ça avec la stratégie de couverture on obtient

- $\Phi(d_+) - K\Phi(d_-) \frac{B(t,T_1)}{B(t,T_2)} \cdot \frac{T_1-t}{T_2-t}$ de $B(t,T_2)$
- $-K\Phi(d_-) B(t,T_1)\left(1 - \frac{T_1-t}{T_2-t} \cdot \frac{1}{B(t,T_2)}\right)$ en cash.

10 janvier 2019

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t dt + \underbrace{\Gamma(t,T)}_{\text{déterministe}} dW_t$$

$$L(t,\delta) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{B(t,t+\delta)} - 1\right)$$

(1) $\Psi_T = (K - L(T,\delta))^+$ payé en $T+\delta$. Prix et couverture?

(a) Réduire à une option sur $B(T,T+\delta)$

$$\Psi_T = \left(K + \frac{1}{\delta} - \frac{1}{\delta}\frac{1}{B(T,T+\delta)}\right)^+ \text{ payé en } T+\delta \Leftrightarrow \text{Call sur } B(T,T+\delta)$$

$$\tilde{\Psi}_T = \left(\left(K+\frac{1}{\delta}\right)B(T,T+\delta) - 1/\delta\right)^+ = \frac{1+\delta K}{\delta}\Big(B(T,T+\delta) - \underbrace{\frac{1}{1+\delta K}}_{\tilde{K}}\Big)^+ \text{ payé en } T$$

(b) $$V_t = \frac{1+\delta K}{\delta} B(t,T)\, \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^T}\left[\left(\frac{B(T,T+\delta)}{B(T,T)} - \frac{1}{1+\delta K}\right)^+\right] \ominus$$

$\left(\frac{B(t,T+\delta)}{B(t,T)}\right)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathbb{Q}^T$-martingale dont la volatilité est égale à $\Gamma(t,T+\delta) - \Gamma(t,T) = \Sigma_{t,T,\delta}$

$$\overset{BS}{\ominus} \frac{1+\delta K}{\delta} B(t,T)\left[\frac{B(t,T+\delta)}{B(t,T)}\Phi(d_+) - \frac{1}{1+\delta K}\Phi(d_-)\right] = \frac{1+\delta K}{\delta} \cdot B(t,T+\delta)\Phi(d_+) - \frac{\Phi(d_-)}{\delta}B(t,T)$$

$$\text{où } d_\pm = \frac{1}{\sqrt{\int_t^T (\Gamma(s,T+\delta)-\Gamma(s,T))^2 ds}} \ln\left(\frac{B(t,T+\delta)}{K B(t,T)}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\int_t^T (\Gamma(s,T+\delta)-\Gamma(s,T))^2 ds}$$

(c) Couverture : $\uparrow H_t^{T+\delta} = \frac{1+\delta K}{\delta}\Phi(d_+)$ de $B(t,T+\delta)$

$\downarrow H_t^T = \frac{\Phi(d_-)}{\delta}$ de $B(t,T)$

(d) Couverture avec Fut_t et cash

La dynamique du portefeuille $\tilde{V}_t$ contenant δ_t Futures et $\tilde{V}_t$ en cash est donnée par $d\tilde{V}_t = r\tilde{V}_t dt + \delta_t dFut_t$

Réplication : $V_t = \tilde{V}_t \Rightarrow dV_t = rV_t dt + \delta_t dFut_t = rV_t dt + \delta_t \sigma_t^F Fut_t dW_t$

(e) $dFut_t = \sigma^F_t Fut_t\, dW_t$

(e) $dFut_t = \sigma_t^F Fut_t \, dW_t$. Trouver σ_t

Par (c), $dV_t = H_t^{T+\delta} dB(t,T+\delta) - H_t^T dB(t,T) = r_t V_t dt + \Big(H_t^{T+\delta}\Gamma(t,T+\delta)B(t,T+\delta) -$

$(V_t = H_t^{T+\delta}B(t,T+\delta) - H_t^T B(t,T))$ $\qquad - H_t^T \Gamma(t,T)B(t,T)\Big)\, dW_t$

Alors $$\sigma_t = \frac{H_t^{T+\delta}\Gamma(t,T+\delta)B(t,T+\delta) - H_t^T\Gamma(t,T)B(t,T)}{\sigma_t^F \cdot Fut_t}$$

(2) (a) $$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t dt + \Gamma(t,T)\, dW_t \Rightarrow B(t,T) = B(0,T)\exp\Big\{\int_0^t r_s - \tfrac{1}{2}\Gamma(s,T)^2 ds + \int_0^t \Gamma(s,T)\, dW_s\Big\}$$

$$\frac{B(t,T+\delta)}{B(t,T)} = \frac{B(0,T+\delta)}{B(0,T)}\exp\Big\{\int_0^t \big(\Gamma(s,T)^2 - \Gamma(s,T+\delta)^2\big) ds + \int_0^t \big(\Gamma(s,T+\delta) - \Gamma(s,T)\big) dW_s\Big\}$$

loi lognormal

(b) $$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\Big[\frac{1}{B(T,T+\delta)}\Big] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\Big[\frac{B(T,T)}{B(T,T+\delta)}\Big] = \frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}\exp\Big\{\int_t^T \big(\Gamma(s,T+\delta)^2 - \Gamma(s,T)^2\big) ds + \frac{1}{2}\int_t^T \big(\Gamma(s,T+\delta) - \Gamma(s,T)\big)^2 ds\Big\}$$

(c) $$Fut_t = \mathbb{E}_t\big[L(T,\delta)\big] = \frac{1}{\delta}\mathbb{E}_t\Big[\frac{1}{B(T,T+\delta)} - 1\Big]$$

$1 + \delta Fut_t = \mathbb{E}_t\Big[\frac{1}{B(T,T+\delta)}\Big]$ - mart de Lévy de vol $\sigma_t^{LN} = \Gamma(t,T) - \Gamma(t,T+\delta)$ (par (b))

$$d(1+\delta Fut_t) = \sigma_t^{LN}(1+\delta Fut_t)\, dW_t$$

$$dFut_t = \frac{\sigma_t^{LN}(1+\delta Fut_t)}{\delta Fut_t}\cdot Fut_t\, dW_t \Rightarrow \sigma_t^F = \frac{(1+\delta Fut_t)}{\delta Fut_t}\big(\Gamma(t,T) - \Gamma(t,T+\delta)\big)$$

(3) On considère call sur Fut_{T_0}, $T_0 < T$

(a) $$\frac{d\mathbb{Q}^{T_0}}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_T} = \frac{B(T,T_0)}{B_T}\cdot\frac{1}{B(0,T_0)} = \mathcal{E}\Big(\int_0^{\cdot}\Gamma(t,T_0)\, dW_t\Big)_T$$

Donc $W_t^0 = W_t - \int_0^t \Gamma(s,T_0)\, ds$ est un MB sous $\mathbb{Q}^{T_0}$.

(b) $\dfrac{1+\delta Fut_t}{B(t,T_0)}$ n'est pas $\mathbb{Q}_{T_0}$-martingale parce que c'est $1+\delta Fut_t$ qui est une $\mathbb{Q}$-martingale et pas $B_t^{-1}(1+\delta Fut_t)$ comme il faut pour changement de numéraire (voir Girsanov).

(c) Déterminer $\lambda(t)$ déterministe t.q. $(1+\delta Fut_t)e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}$ soit une $\mathbb{Q}^{T_0}$-mart.

Par (2c),

$$d(1+\delta Fut_t) = (\Gamma(t,T) - \Gamma(t,T+\delta))\cdot(1+\delta Fut_t)\cdot dW_t \overset{(3a)}{=} \underbrace{(\Gamma(t,T) - \Gamma(t,T+\delta))}_{\sigma_t^{LN}}(1+\delta Fut_t)\, dW_t^0 +$$
$$+ \Gamma(t,T_0)(\Gamma(t,T) - \Gamma(t,T+\delta))(1+\delta Fut_t)\, dt$$

$$d\,(1+\delta Fut_t)e^{-\int_0^t \lambda(s)ds} = (1+\delta Fut_t)e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}\big(-\lambda(t)dt + \sigma_t^{LN} dW_t^0 + \Gamma(t,T_0)\sigma_t^{LN} dt\big)$$

Alors, $\lambda(t) = \Gamma(t,T_0)(\Gamma(t,T) - \Gamma(t,T+\delta))$

(d) $C_t = B(t,T_0)\,\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{T_0}}\left[(Fut_{T_0}-K)^+\right] = B(t,T_0)e^{\int_0^{T_0}\lambda(s)ds}\,\frac{1}{\delta}\mathbb{E}_t\left[\left(\delta\, Fut_{T_0}e^{-\int_0^{T_0}\lambda(s)ds} - \delta K e^{-\int_0^{T_0}\lambda(s)ds}\right)^+\right] =$

$$= \frac{1}{\delta}B(t,T_0)e^{\int_0^{T_0}\lambda(s)ds}\,\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{T_0}}\Big[\Big(\underbrace{(1+\delta Fut_{T_0})}_{\mathbb{Q}^{T_0}\text{ mart de vol } \sigma_t^{LN}}e^{-\int_0^{T_0}\lambda(s)ds} - (1+\delta K)e^{-\int_0^{T_0}\lambda(s)ds}\Big)^+\Big] =$$

$$\overset{BS}{=} \frac{1}{\delta}B(t,T_0)\cdot e^{\int_0^{T_0}\lambda(s)ds}\cdot\left[(1+\delta Fut_t)e^{-\int_0^{t}\lambda(s)ds}\Phi(d_+) - (1+\delta K)e^{-\int_0^{T_0}\lambda(s)ds}\Phi(d_-)\right] =$$

où $d_\pm = \dfrac{\ln\left(\frac{(1+\delta Fut_t)e^{-\int_0^t\lambda(s)ds}}{K}\right)}{\sqrt{\Sigma}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Sigma}$ et $\Sigma = \int_t^{T_0}\left(\Gamma(s,T)-\Gamma(s,T+\delta)\right)^2 ds$

(e) Comment couvrir C_t avec Fut_t ?

Sous $\mathbb{Q}^{T_0}$: $\uparrow H_t^1 = \frac{1}{\delta}\Phi(d_+)e^{\int_0^{T_0}\lambda(s)ds}$ actifs de valeur $(1+\delta Fut_t)\,e^{-\int_0^t\lambda(s)ds}$ (dans num. $B(t,T_0)$)

$\downarrow H_t^2 = \frac{(1+\delta K)}{\delta}\Phi(d_-)$ actifs de valeur 1 (num. $B(t,T_0)$)

$\uparrow$ nombre d'obligations $B(t,T_0)$

Comment couvrir $(1+\delta Fut_t)e^{-\int_0^t\lambda(s)ds}\cdot B(t,T_0)$ et $B(t,T_0)$ par Fut_t ?

- $dB(t,T_0) = \delta_t^{T_0}\,\overset{\sigma_t^F Fut_t dW_t}{\overset{\shortparallel}{dFut_t}} + \underbrace{r_t B(t,T_0)dt}_{\text{en cash}} \rightarrow \delta_t^{T_0} = \dfrac{\Gamma(t,T_0)B(t,T_0)}{\sigma_t^F\,Fut_t}$ en Fut_t

$\shortparallel$

$r_t B(t,T_0)dt + \Gamma(t,T_0)B(t,T_0)dW_t$ $\qquad B(t,T_0)$ en cash

- $d\Big(\underbrace{(1+\delta Fut_t)e^{-\int_0^t\lambda(s)ds}B(t,T_0)}_{\tilde V_t}\Big) = \tilde V_t\big(r_tdt + \Gamma(t,T_0)dW_t + \sigma_t^{LN}\underbrace{dW_t^0}_{dW_t - \Gamma(t,T_0)dt} + \overset{\text{crochet}}{\Gamma(t,T_0)\sigma_t^{LN}dt}\big) =$

$= r_t\tilde V_t dt + (\sigma_t^{LN} + \Gamma(t,T_0))\tilde V_t dW_t = r_t\tilde V_t dt + \delta_t\,\sigma_t^F\cdot Fut_t\,dW_t \Rightarrow$

$$\rightarrow \delta_t = \frac{(\sigma_t^{LN}+\Gamma(t,T_0))(1+\delta Fut_t)\,e^{-\int_0^t\lambda(s)ds}\,B(t,T_0)}{\sigma_t^F\cdot Fut_t}$$

Alors, la stratégie de couverture :
- C_t en cash
- $H_t^1\cdot\delta_t + H_t^2\cdot\delta_t^{T_0}$ de Fut_t

9 janvier 2023

$$\begin{cases} dr_t = a(b-r_t)dt - \sigma dW_t \\ r_0 = r_0 \end{cases} \quad (*)$$

(1) $d(e^{at}r_t) = e^{at}\cdot ab\,dt - \sigma e^{at}dW_t$

$$e^{at}r_t = r_0 + b(e^{at}-1) - \sigma\int_0^t e^{as}dW_s$$

$$r_t = e^{-at}r_0 + b(1-e^{-at}) - \sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}dW_s \sim \mathcal{N}\left(e^{-at}r_0 + (1-e^{-at})b,\ \frac{\sigma^2(1-e^{-2at})}{2a}\right)$$

(2) $I_T := \int_0^T r_s\,ds$

(2) $I_{t,T} := \int_t^T r_s\, ds$

par rapport à T

$$d(aI_{t,T}) = a r_T\, dT \overset{(1)}{=} ab\, dT - dr_T - \sigma dW_t$$

$$\Downarrow \int_t^T \quad , \quad I_{t,t} = 0$$

$$aI_{t,T} = ab(T-t) - (r_T - r_t) - \sigma(W_T - W_t)$$

Forme explicite: $e^{aT} r_T = e^{at} r_t + b(e^{aT} - e^{at}) - \sigma \int_t^T e^{as} dW_s$

$$r_T = e^{-a(T-t)} r_t + b(1 - e^{-a(T-t)}) - \sigma \int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s$$

$$I_{t,T} = \underbrace{b\,(T-t)}_{\text{const.}} + \frac{(1-e^{-a(T-t)})}{a}\underbrace{(r_t - b)}_{r_t\text{-mes.}} + \frac{\sigma}{a}\underbrace{\int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)\, dW_s}_{\perp\!\!\!\perp\ \mathcal{F}_t}$$

(3) $\mathbb{E}[I_{t,T} | r_t] = b(T-t) + (1-e^{-a(T-t)})(r_t - b)/a$

$$\mathbb{V}\text{ar}[I_{t,T} | r_t] = \frac{\sigma^2}{a^2}\int_t^T (e^{-a(T-s)} - 1)^2 ds = \frac{\sigma^2}{a^2}\left[(T-t) - 2\int_t^T e^{-a(T-s)} ds + \int_t^T e^{-2a(T-s)} ds\right] =$$

$$= \frac{\sigma^2}{a^2}\left[(T-t) - 2\,\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{1-e^{-2a(T-t)}}{2a}\right]$$

$$B(t,T) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}\right] = \exp\left\{-\mathbb{E}[I_{t,T}|r_t] + \frac{1}{2}\mathbb{V}\text{ar}[I_{t,T}|r_t]\right\} =$$

$$= \exp\left\{-b(T-t) + (b - r_t)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[(T-t) - \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} + \underbrace{\frac{1-e^{-2a(T-t)} - 2 + 2e^{-a(T-t)}}{2a}}_{-\frac{(1-e^{-a(T-t)})^2}{2a}}\right]\right\}$$

(4) $\dfrac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t dt + \Gamma(t,T) dW_t$

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_T} = \frac{B(T,T)}{B(0,T)} \cdot \frac{1}{B_T} = \mathcal{E}\left(\int_0^{\cdot} \Gamma(s,T) dW_s\right)_T$$

$W_t^T = W_t - \int_0^t \Gamma(s,T) ds$ un MB sous $\mathbb{Q}^T$.

$\dfrac{V_t}{B_t}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale ssi $\dfrac{V_t}{B(t,T)}$ est une $\mathbb{Q}^T$-martingale

(5) $\Gamma(t,T) = ?$ Dynamique de $B(t,T)$ sous $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{Q}^T$?

Par (3), $B(t,T) = \exp\left\{-\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) r_t + \underset{\text{déterm.}}{C(t,T)}\right\}$

$$dB(t,T) = [\dots] dt - \left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) B(t,T)\, \underset{[\dots]dt - \sigma dW_t}{\underset{\parallel}{dr_t}} = r_t B(t,T) dt + \underbrace{\sigma\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right)}_{= \Gamma(t,T)} B(t,T) dW_t$$

La solution $B(t,T) = B(0,T) \exp\left\{\int_0^t \left(r_s - \frac{\Gamma(s,T)^2}{2}\right) ds + \int_0^t \Gamma(s,T) dW_s\right\}$

$W_t = W_t^T + \int^t \Gamma(s,T) \dots \quad \dots \quad dB(t,T) \dots$

$$W_t^T = W_t + \int_0^t \Gamma(s,T)\,ds \Rightarrow \frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = \left(r_t + \Gamma(t,T)^2\right)dt + \Gamma(t,T)\,dW_t^T$$

La solution $B(t,T) = B(0,T)\exp\left\{\int_0^t \left(r_s + \frac{\Gamma(s,T)^2}{2}\right)ds + \int_0^t \Gamma(s,T)\,dW_s^T\right\}$

(6) Prix Fwd de $\frac{1}{B(T,T+\delta)}$ en T est

$$X_t = \frac{1}{B(t,T)} \cdot \underbrace{B(t,T)\,\mathbb{E}_t^T\left[\frac{1}{B(T,T+\delta)}\right]}_{\text{prix compt.}} = \mathbb{E}_t^T\left[\frac{B(T,T)}{B(T,T+\delta)}\right] \quad - \mathbb{Q}^T\text{-martingale}$$

$$d\left(\underbrace{\frac{B(t,T+\delta)}{B(t,T)}}_{\text{C une } \mathbb{Q}^T\text{-martingale}}\right) \Big/ \left(\frac{B(t,T+\delta)}{B(t,T)}\right) = \left(\Gamma(t,T+\delta) - \Gamma(t,T)\right)dW_t^T$$

$$\frac{B(T,T)}{B(T,T+\delta)} = \frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)}\exp\left\{\frac{1}{2}\int_t^T \left(\Gamma(s,T+\delta) - \Gamma(s,T)\right)^2 ds - \int_t^T \left(\Gamma(s,T+\delta) - \Gamma(s,T)\right)dW_s^T\right\}$$

$$\Rightarrow X_t = \frac{B(t,T)}{B(t,T+\delta)} \cdot \exp\left\{\int_t^T \left(\Gamma(s,T+\delta) - \Gamma(s,T)\right)^2 ds\right\} = \frac{B(0,T)}{B(0,T+\delta)}\underbrace{\exp\left\{\int_0^T \left(\Gamma(s,T+\delta) - \Gamma(s,T)\right)^2 ds\right\}}_{\text{C constante déterministe}} \cdot$$

$$\cdot \exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\Gamma(s,T+\delta) - \Gamma(s,T)\right)^2 ds - \int_0^t \left(\Gamma(s,T+\delta) - \Gamma(s,T)\right)dW_s^T\right\}$$

$$= \mathcal{E}\Big(\int_0^{\cdot} \underbrace{-\left(\Gamma(s,T+\delta) - \Gamma(s,T)\right)}_{\text{vol. de cette exp.}}dW_s\Big)_t$$

(8) $V_t = B(t,T)\,\mathbb{E}_t^T\left[(X_T - K)^+\right] \overset{BS}{=} B(t,T)\left[X_t\Phi(d_+) - K\Phi(d_-)\right]$

où $d_\pm = \dfrac{\log\left(\frac{X_t}{K}\right)}{\sqrt{\Sigma}} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\Sigma}$, $\Sigma = \int_t^T \left(\Gamma(s,T+\delta) - \Gamma(s,T)\right)^2 ds$