
DEUXIÈME SESSION

Modèles Aléatoires Discrets– 2018-2019
Pierre-O Goffard

Instructions: On éteint et on range son téléphone.

- La calculatrice et les appareils électroniques ne sont pas autorisés.
- Vous devez justifier vos réponses de manière claire et concise.
- Vous devez écrire de la manière la plus lisible possible. Souligner ou encadrer votre réponse finale.

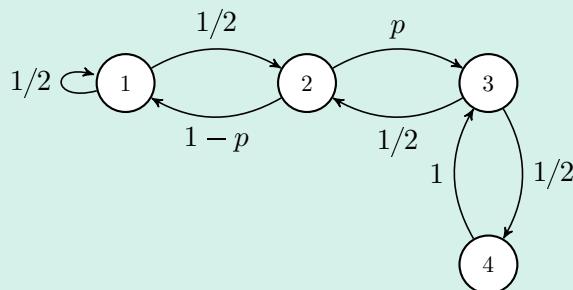
Question:	1	2	3	Total
Points:	7	10	3	20
Score:				

1. Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une chaîne de Markov d'espace d'état $\{1, 2, 3, 4\}$ de matrice de transition:

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \text{ avec } 0 \leq p \leq 1.$$

- (a) (1 point) Dessiner le graph des transitions de $(X_n)_{n \geq 0}$

Solution:



- (b) (3 points) Suivant les valeurs de p , donner les classes de communications et indiquer si elles sont ouvertes ou fermées.

Solution:

- Si $p = 0$, alors 2 classes de communications $F_1 = \{1, 2\}$ fermée et $O_1 = \{3, 4\}$ ouverte.
- Si $p = 1$, alors 2 classes de communications $F_1 = \{2, 3, 4\}$ fermée et $O_1 = \{1\}$ ouverte
- Si $0 < p < 1$, alors 1 classe de communications $F_1 = \{1, 2, 3, 4\}$ fermée.

(c) (3 points) Discuter l'existence et l'unicité de la loi stationnaire dans chacun des cas.

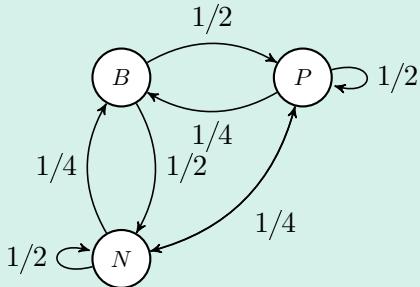
Solution: L'espace d'état est fini, il existe donc au moins une loi invariante dans chacun des cas. La loi stationnaire est unique dans le cas $0 < p < 1$ car la chaîne est irréductible. Dans les deux autres cas, la présence d'une seule classe fermée implique que la loi stationnaire est unique aussi.

2. Au pays d'Oz, le temps ne peut prendre que 3 formes : Beau temps (B), Pluvieux (P), ou Neigeux (N). Les règles d'évolution du temps sont immuables et ne souffrent aucune exception.

- S'il fait beau, il ne fera pas beau le lendemain, et il y a autant de chances qu'il pleuve ou qu'il neige le lendemain.
- S'il pleut ou il neige, il y a une chance sur deux qu'il fasse le même temps le lendemain, et une chance sur quatre qu'il fasse beau le lendemain.

(a) (2 points) Modélez cette situation par une chaîne de Markov, et justifiez ce choix. Donnez son graphe et sa matrice de transition.

Solution: La chaîne de Markov donne la météo chaque jour, la météo d'un jour sur l'autre ne dépend que de la météo le jour précédent. Le graphe de transition est donné par



et la matrice de transition est donnée par

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

(b) (2 points) Cette chaîne est-elle irréductible? Quelle est la nature des états (récurrent ou transitoire)? leur période?

Solution: Une seule classe d'équivalence, la chaîne est donc irréductible. Comme le nombre d'état est fini, les états sont récurrents. Finalement tout les états ont même période, celle ci est égale à 1 puisque par exemple la transition $(P) \rightarrow (P)$ est possible.

- (c) (2 points) Donnez, s'il en existe, la ou les mesures stationnaires de cette chaîne.

Solution: La chaîne est irréductible sur un espace d'état fini, on a donc existence et unicité de la loi stationnaire. Celle ci est obtenue en résolvant le système $\pi Q = \pi$, on a $\pi = \left(\frac{1}{5} \frac{2}{5} \frac{2}{5}\right)$

- (d) (1 point) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau après-demain sachant qu'il fait beau aujourd'hui?

Solution: On a $\mathbb{P}(X_{n+2} = B | X_n = B) = 1/4$.

- (e) (1 point) Après un certain temps (une fois que la chaîne a atteint la stationnarité), Quelle est la probabilité qu'il neige deux jours de suite en trois jours?

Solution: On peut initialiser l'état courant de la chaîne suivant la loi stationnaire $X_n \sim \pi$, on s'intéresse à l'événement E d'observer 2 jours de neige sur une période de 3 jours, on a

$$\mathbb{P}(E) = \sum_{i \in \{B, N, P\}} \mathbb{P}(E | X_n = i) \pi_i$$

On a

$$\mathbb{P}(E | X_n = N) = \mathbb{P}(X_{n+1} = N | X_n = N) = 1/2,$$

$$\mathbb{P}(E | X_n = B) = \mathbb{P}(X_{n+2} = N, X_{n+1} = N | X_n = B) = 1/4,$$

$$\mathbb{P}(E | X_n = P) = \mathbb{P}(X_{n+2} = N, X_{n+1} = N | X_n = P) = 1/8,$$

On en déduit que $\mathbb{P}(E) = 3/10$

- (f) (2 points) En moyenne, combien de jours faut-il pour que le beau temps revienne?

Indication: On recherche $\mathbb{E}(\tau_B | X_0 = B)$, avec $\tau_B = \inf\{n \geq 1 ; X_n = B\}$.

Solution: On note $\mathbb{E}_i(\tau_B) = \mathbb{E}(\tau_B | X_0 = i)$ et $\mathbb{P}(X_1 = j | X_0 = i) = \mathbb{P}(i, j)$, $i, j \in \{N, B, P\}$. On montre que

$$\mathbb{E}_i(\tau_B) = \frac{3}{2} + \sum_{j \in \{N, B, P\}} \mathbb{P}(i, j) \mathbb{E}_j(\tau_B), \quad i \in \{N, B, P\},$$

puis résoudre le système d'équation ou simplement écrire $\mathbb{E}(\tau_B | X_0 = B) = 1/\pi_B = 5$ par application du résultat du cours.

3. Soit la marche aléatoire sur \mathbb{Z} définie par

$$X_n = X_{n-1} + \xi_n,$$

où $\xi_1, \xi_2 \dots$ forment une suite de variables aléatoires **i.i.d.** avec

$$\mathbb{P}(\xi_i = 1) = p, \text{ et } \mathbb{P}(\xi_i = -1) = 1 - p, \text{ pour tout } i \geq 1 \text{ et } 0 < p < 1.$$

On notera $q = 1 - p$.

- (a) (1 point) Montrer que

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n) = X_n + 2p - 1.$$

Solution:

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_n) = \mathbb{E}(X_n + \xi_{n+1}|X_n) = X_n + \mathbb{E}(\xi_{n+1}) = X_n + 2p - 1$$

- (b) (1 point) Calculer $\mathbb{P}(X_2 = -2, X_5 = -1|X_0 = 0)$ en fonction de p et q .

Solution:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_2 = -2, X_5 = -1|X_0 = 0) &= \mathbb{P}(X_5 = -3|X_2 = -2, X_0 = 0)\mathbb{P}(X_2 = -2|X_0 = 0) \\ &= \mathbb{P}(X_5 = -3|X_2 = -2)\mathbb{P}(X_2 = -2|X_0 = 0) \\ &= \binom{3}{2}p^2q\binom{2}{0}q^2 \\ &= \binom{3}{2}p^2q^3\end{aligned}$$

- (c) (1 point) Soit $T_5 = \inf\{n \geq 0 ; X_n = 5\}$, calculer $\mathbb{P}(T_5 > 5|X_0 = 0)$ en fonction de p .

Solution: Conditionnellement à $X_0 = 0$, l'évènement $T_5 < 5$ est impossible. L'évènement $T_5 = 5$ correspond à 5 saut vers le haut consécutif et correspond exactement à $X_5 = 5$. On a donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_5 > 5|X_0 = 0) &= 1 - \mathbb{P}(T_5 \leq 5|X_0 = 0) \\ &= 1 - \mathbb{P}(T_5 = 5|X_0 = 0) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_5 = 5|X_0 = 0) \\ &= 1 - p^5\end{aligned}$$

FORMULAIRE

Nom	abbrev.	Loi	$\mathbb{E}(X)$	$\text{Var}(X)$	FGM
Binomial	Bin(n, p)	$\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	np	$np(1-p)$	$[(1-p) + pe^t]^n$
Poisson	Pois(λ)	$e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$	λ	λ	$\exp(\lambda(e^t - 1))$
Geometric	Geom(p)	$(1-p)^{k-1} p$	$\frac{1}{p}$	$\frac{1-p}{p^2}$	$\frac{pe^t}{1-(1-p)e^t}$ pour $t < -\ln(1-p)$
Uniform	Unif(a, b)	$\begin{cases} \frac{1}{b-a} & a \leq t \leq b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\frac{a+b}{2}$	$\frac{(b-a)^2}{12}$	$\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$
Exponential	Exp(λ)	$\begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$	$\frac{1}{\lambda}$	$\frac{1}{\lambda^2}$	$\frac{\lambda}{\lambda-t}$ pour $t < \lambda$
Normal	N(μ, σ^2)	$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\right) \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$	μ	σ^2	$e^{\mu t} e^{\sigma^2 t^2/2}$

Théorème Central Limite.

Soient X_1, \dots, X_n une suite de n variables aléatoires **i.i.d.** telles que $\mu = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}(X_1) < \infty$. Alors, on a

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - \mu) \xrightarrow{\text{Loi}} N(0, 1), \text{ lorsque } n \rightarrow \infty,$$

où $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k$ désigne la moyenne empirique.