Introduction à la théorie de la ruine

0 Déroulement du cours

Séances : 2 séances de 5h chacune

Pas de séance de TD → Des exercices auront lieu en cours

Evaluation : Un examen final écrit de durée à déterminer. Pas de document autorisé.

Objectif du cours :
1) Connaître les principes de base de la théorie de la ruine
2) Manipuler de nombreux outils mathématiques appris jusqu'ici

Contact : romain.gauchon@relyens.eu

SOMMAIRE

1 Introduction

Pourquoi la théorie de la ruine ?

1 Introduction

Pourquoi la théorie de la ruine ?

- ~~Car très utile en pratique~~

1 Introduction

Pourquoi la théorie de la ruine ?

- ~~Car très utile en pratique~~

Intérêt métier :

- Développer une intuition actuarielle
- S’entrainer à abstraire et modéliser les concepts d’assurance

Intérêt pédagogique :

- Manipulation des objets mathématiques classiques

1 Introduction

La ruine, c'est quoi ?

a) Définition française (Larousse)

« État de quelqu'un, d'un groupe qui a perdu tous ses biens, tout son avoir »

La ruine, c'est quoi ?

a) Définition française (Larousse)

« État de quelqu'un, d'un groupe qui a perdu tous ses biens, tout son avoir »

b) Ruine économique

- Dépôt de bilan / Cessation de paiement (entreprendre.service-Public.fr) :

« Une entreprise est en état de cessation des paiements lorsque la trésorerie dont elle dispose n'est plus suffisante pour régler ses dettes. »

→ Argent disponible – Dettes < 0

1 Introduction

La ruine, c'est quoi ?

a) Définition française (Larousse)

« État de quelqu'un, d'un groupe qui a perdu tous ses biens, tout son avoir »

b) Ruine économique

- Dépôt de bilan / Cessation de paiement (entreprendre.service-Public.fr) :

« Une entreprise est en état de cessation des paiements lorsque la trésorerie dont elle dispose n'est plus suffisante pour régler ses dettes. »

→ Argent disponible – Dettes < 0

c) Ruine réglementaire

-Solvency Capital Requirement (SCR) – EIOPA

Value-at-Risk of the basic own funds of an insurance or reinsurance undertaking subject to a confidence level of 99,5 % over a one-year period.

La ruine, c'est quoi ?

c) Ruine réglementaire

- Solvency Capital Requirement (SCR) – EIOPA

Value-at-Risk of the basic own funds of an insurance or reinsurance undertaking subject to a confidence level of 99,5 % over a one-year period.

→ Argent necessaire pour faire face à ses obligations 199 cas sur 200

- Ratio de SCR

Provisions constituées / SCR

Si le ratio de SCR est trop faible

→ Risque de mise sous tutelle par l'ACPR

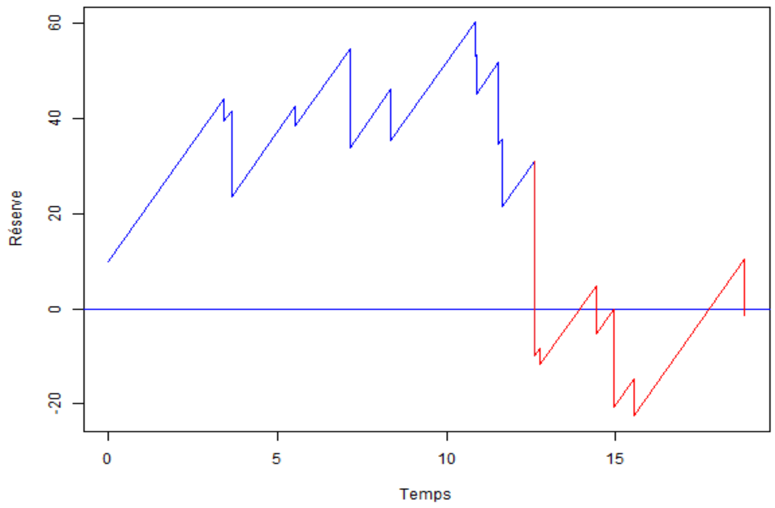
→ Exemple de Humanis

La ruine, c'est quoi ?

d) Ruine académique

On définit un processus stochastique qui évolue dans le temps
Exemple : jetons au casino, nombre d'habitants d'une ville, provisions.

On regarde quand le processus atteint 0 pour la première fois



SOMMAIRE

2.1 Les lois exponentielles

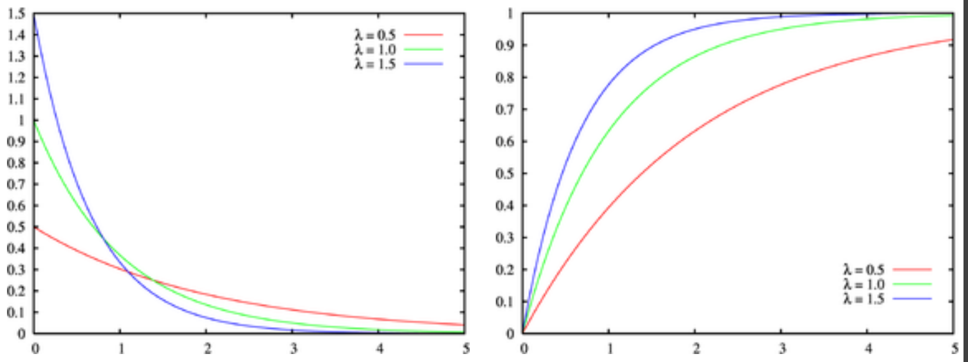
Généralités :
Soit $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$

Densité : $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} 1_{\mathbb{R}_+}(x)$

Fonction de répartition : $F(x) = (1 - e^{-\lambda x}) 1_{\mathbb{R}_+}(x)$

Espérance : λ^{-1}

Variance : λ^{-2}



Crédit image : Wikipédia

Assureur : dans quel cas on utilise loi exponentielle ?
=> Pour modéliser les temps inter sinistres.
Impact de cette hyp :
- Les év^ts arrivés sont supposés ⊥.

Propriété 2.1 : absence de mémoire

Soit t, s > 0
Alors $\mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{t} + \mathbf{s} \mid \mathbf{X} > \mathbf{s}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} > \mathbf{t})$

Seule loi continue à vérifier cette propriété

Les lois exponentielles peuvent être utilisées pour modéliser le temps restant avant qu'un sinistre ne survienne.

Supposons qu'une société d'assurance couvre plusieurs risques indépendants arrivant après un temps $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{E}(\lambda_1), \dots, \mathcal{E}(\lambda_n)$

Quelle est la loi du temps avant d'avoir un sinistre ?

Propriété 2.2 : minimum de lois exponentielles

$$\min(X_1, \dots, X_n) \sim \mathcal{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i\right)$$

Quel sera le premier sinistre ?

Propriété 2.3 : minimum de lois exponentielles

$$\forall 1 \leq k \leq n, \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) = X_k) = \frac{\lambda_k}{\sum_{i=1}^{n} \lambda_i}$$

Supposons qu'une société d'assurance couvre 1 risque dont les temps entre chaque survenance sont iid et suivent une loi $X \sim \mathcal{E}(\lambda)$ (X_1 est le temps avant le premier sinistre, X_2 le temps entre le premier et le second sinistre, etc…)

Combien de temps avant n sinistres ?

Propriété 2.4 : somme de lois exponentielles

$$\sum_{i=1}^{n} X_i \sim \Gamma(n, \lambda)$$

2.1 Les lois de Poisson

Généralités :
Soit $X \sim P(\lambda)$, $\lambda > 0$

Loi de probabilité : $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} 1_{\mathbb{N}}(k)$

Espérance : λ

Variance : λ

Fonction génératrice des moments : $e^{\lambda(e^t - 1)}$

Souvent utilisée pour compter le nombre de sinistres

Propriété 2.5 : somme de lois Poisson

Si $X_1 \sim P(\lambda_1)$ et $X_2 \sim P(\lambda_2)$ alors $X_3 \sim P(\lambda_1 + \lambda_2)$ avec $X_3 = X_1 + X_2$

2.2 Les processus de comptage

Un ***processus de comptage*** est un processus stochastique positif qui va compter la survenance d'un événement dans le temps. Un processus de comptage au sens où on l'entend dans ce cours

- Ne peut que augmenter
- Commence à zéro
- N'augmente que de 1 en 1

Exemples :

2.2 Les processus de comptage

Un ***processus de comptage*** est un processus stochastique positif qui va compter la survenance d'un événement dans le temps. Un processus de comptage au sens ou on l'entends dans ce cours

- Ne peut que augmenter
- Commence à zéro
- N'augmente que de 1 en 1

Exemples :

- Le nombre de naissance (ou de décès)
- Le nombre de défaite de l'OL (ou de match nul)
- L'âge d'une personne
- Le nombre de sinistres dans l'année

Il ne peut donc pas être **directement** utilisé pour modéliser

2.2 Les processus de comptage

Un ***processus de comptage*** est un processus stochastique positif qui va compter la survenance d'un événement dans le temps. Un processus de comptage au sens ou on l'entends dans ce cours

- Ne peut que augmenter
- Commence à zéro
- N'augmente que de 1 en 1

Exemples :

- Le nombre de naissance (ou de décès)
- Le nombre de défaite de l'OL (ou de match nul)
- L'âge d'une personne
- Le nombre de sinistres dans l'année

Il ne peut donc pas être **directement** utilisé pour modéliser

- Le nombre de points de l'OL
- Le nombre de personnes ayant le Covid à l'instant t
- La somme des montants de sinistre depuis le début de l'année

Remarque : un processus qui pourrait aussi diminuer est appelé un ***processus de vie ou de mort***

Définition : Processus de comptage

Un processus stochastique $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est appelé un processus de comptage si

(i) $N_0 = 0$
(ii) N est croissant
(iii) N est continu à droite
(iv) N est constant sur tout intervalle ou il est continu (constant entre deux sauts consécutifs)
(v) Si N n'est pas continu en un point T, $N_{T_+} - N_{T_-} = 1$

On notera $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite croissante des temps d'arrivées des sauts du processus n (l'ensemble des points t pour lequel le processus N n'est pas continu). Pour $t \in \mathbb{R}_+$, on a alors :

$$N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$$

Pour la suite de ce cours, on supposera que les processus de comptages modélisent la survenance des sinistres. Aussi, plutôt que le terme « saut » on pourra utiliser le terme « sinistre » (voir partie 3 pour plus de détail)

Définition : Processus de comptage à accroissement stationnaire

Un processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit à accroissement stationnaire si, $\forall 0 \leq s < t$,

$$N_t - N_s \sim N_{t-s}$$

Propriété 2.6 : Espérance d'un processus de comptage à accroissement stationnaires

Si le processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à accroissement stationnaire et, $\forall t > 0, \mathbb{E}(N_t) < \infty$, alors :

$$\forall t > 0, \exists \mathrm{q} \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } \mathbb{E}(N_t) = qt$$

Démonstration :

Soit $(t,s) \in (\mathbb{R}_+)^2$,

$$\mathbb{E}[N_{t+s}] = \mathbb{E}[N_{t+s} - N_s + N_s]$$
$$= \mathbb{E}[N_{t+s} - N_s] + \mathbb{E}[N_s]$$
$$= \mathbb{E}[N_t] + \mathbb{E}[N_s]$$

processus de comptage à accroissem^t stationnaire

Donc, $t \mapsto \mathbb{E}[N_t]$ est solution de l'équation fonctionnelle de Cauchy. D'où le résultat.

Plus généralement,

Soit f tq $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$\Rightarrow f(x) = f(x) + f(0) \Rightarrow f(0) = 0$

Si $(n,m) \in \mathbb{N}^2$, alors $f(n) = n f(1)$

$$= f\left(\frac{nm}{m}\right)$$
$$= nm\, f\left(\frac{1}{m}\right)$$
$$\Rightarrow f\left(\frac{1}{m}\right) = \frac{1}{m} f(1)$$
$$\Rightarrow \forall y \in \mathbb{Q},\ f(y) = y f(1)$$

On termine par la densité.

Définition : Processus de comptage à accroissement indépendant

Un processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit à accroissement indépendant si,
$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n,$

les variables aléatoire $N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \dots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont indépendantes entres elles

Propriété 2.7 : Espérance d'un processus de comptage à accroissement indépendant

Si le processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à accroissement indépendant alors,

$$\forall t > 0, \exists \alpha > 0 \text{ tel que } \mathbb{E}(e^{\alpha N_t}) < \infty$$

Un processus à accroissement indépendant a donc toujours un nombre d'accroissement « relativement » faible (en un sens mathématique) : il existe toujours un seuil à partir duquel les moments exponentiels existent

Propriété 2.8 : Lien entre processus de comptage et loi de Poisson

Si le processus de comptage $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est à accroissement indépendant alors, $\forall t$,

$$N_t \sim P(\mathbb{E}(N_t))$$

Tout processus de comptage indépendant est donc nécessairement lié à la loi de Poisson !

On peut même montrer que $\forall s < t, N_t - N_s \sim P(\mathbb{E}(N_t) - \mathbb{E}(N_s))$

De très loin le processus de comptage le plus courant

Trois définitions équivalentes pour les processus de Poisson homogènes

Définition : Processus de Poisson homogène, première caractérisation

Soit $\lambda > 0$, $(W_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable iid tel que $W_n \sim \mathcal{E}(\lambda)$. Soit $T_n = \sum_{i=1}^{n} W_i$.

On appelle Processus de Poisson homogène le processus $N_t = \sum_{n\geq 1} 1_{T_n \leq t}$

Autrement dit, un **processus de Poisson homogène est un processus de comptage dont les temps inter arrivés sont iid et suivent une loi exponentielle.**

Dans cette définition :

Les W_i sont appelés les temps inter-arrivées (des sauts / des sinistres)
Les T_i sont appelés les temps d'arrivées (des sauts / des sinistres) – voir définition des processus de comptage

Remarque : la loi des T_i est donné par la proposition 2.4

Définition : Processus de Poisson homogène, seconde caractérisation

On appelle Processus de Poisson homogène tout processus $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ vérifiant :

(i) $N_0 = 0$
(ii) $\exists\lambda > 0$ tq $\forall t > s$, $N_t - N_s \sim P(\lambda(t-s))$
(iii) N_t est un processus à accroissements indépendants

Remarques :

- $\forall t > 0$, $N_t \sim P(\lambda t)$
- Les accroissements d'un processus de Poisson sont stationnaires

2.2 Les processus de comptage : *Les processus de Poisson homogènes*

Définition : Processus de Poisson homogène, troisième caractérisation

Soit $\lambda > 0$. On appelle Processus de Poisson homogène tout processus $(N_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ vérifiant :

(i) $N_0 = 0$

(ii) Lorsque h tends vers 0, $\mathbb{P}(N_{t+h} = \mathbf{0}) = \mathbf{1} - \lambda \boldsymbol{h} + \boldsymbol{o}(\boldsymbol{h})$

(iii) Lorsque h tends vers 0, $\mathbb{P}(N_{t+h} = \mathbf{1}) = \lambda \boldsymbol{h} + \boldsymbol{o}(\boldsymbol{h})$

(iv) N_t est un processus à accroissements indépendants et stationnaires

Autrement dit, sur un intervalle de temps suffisamment court, **la probabilité d'avoir deux sauts / sinistres ou plus est négligeable**

Remarque :

- Les **trois définitions sont équivalentes**

Supposons que l'on utilise un processus de Poisson pour compter la survenance des décès dans la population.

Survient une pandémie. Les temps inter-sinistre se réduisent → **L'hypothèse de temps inter-sinistres iid n'est plus vérifiée**. Pour modéliser ces situations, on utilise un processus de Poisson/ Un processus de Poisson général / Un processus de Poisson inhomogène

Définition : Processus de Poisson (inhomogène)

On appelle Processus de Poisson (inhomogène) tout processus $(N_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ vérifiant :

(i) $N_0=0$
(ii) N_t est un processus à accroissements indépendants
(iii) $\exists\lambda : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+^*$ une fonction réelle positive $tq\ \forall t > s,\ N_t - N_s \sim P\left(\int_s^t \lambda(u)du\right)$

Remarques : un processus de Poisson qui n'est pas homogène :

- N'est pas à accroissements stationnaires
- Les temps inter-sauts / inter-sinistres ne sont plus indépendants
- Les temps inter-saut / inter-sinistres ne suivent pas une loi exponentielle

- La densité jointe des moments d'arrivés des n premiers sinistres est données par :

$$f_{(T_1,\dots,T_n)}(t_1, \dots, t_n) = e^{-\int_0^{t_n} \lambda(u)du} \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i)$$

Soit **X** et **Y** deux variables aléatoires.

- Les V.A. étant fondamentalement des fonctions, cela a un sens de dire que $X \leq Y$
    - Par exemple si X est une V.A négative et Y une V.A positive
- Mais ce sont des cas très particuliers
    - Cas des supports ordonnés
    - Cas de la dépendance
- On a envie de pouvoir comparer plus généralement des variables aléatoires
    - Comparer les risques permet de comparer les portefeuilles (actuariat)
    - Ou de comparer des alternatives (économie)

Définition intuitive mais fausse : ordre stochastique

Soit $(\Omega, A, \mathbb{P})$ un espace probabilisé. On appelle ordre stochastique toute relation d'ordre sur l'espace des variables aléatoires définie sur $(\Omega, A, \mathbb{P})$

Attention :

- Ce ne sont pas des ordres « total »
- La définition est légèrement abusive
  - Ex : condition d'antisymétrie classique :
    $$x \leq y \text{ et } y \leq x \rightarrow x = y$$
- Dans notre cas : $X \leq Y$ et $Y \leq X \rightarrow \mathrm{X} =_L Y$

Définition : Premier ordre stochastique

Soit X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition F_X et F_Y . On dit que X est dominé par Y à l'ordre 1 (ou « au sens du premier ordre stochastique »), noté $X \leq_1 Y$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_Y(x) \leq F_X(x)$$

Définition équivalente :

- Pour toute fonction u croissante, $\mathbb{E}(\mathrm{u}(\mathrm{X})) \leq \mathbb{E}(\mathrm{u}(\mathrm{Y}))$

→ Tout agent rationnel préférera **X** à **Y** si il fait ses choix selon la théorie de l'utilité espérée

Définition : Second ordre stochastique

Soit X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition F_X et F_Y . On dit que X est dominé par Y à l'ordre 2 (ou « au sens du second ordre stochastique »), noté $X \leq_2 Y$ si et seulement si

$$\forall x \in \mathbb{R}, \int_{-\infty}^{x} F_Y(t)dt \leq \int_{-\infty}^{x} F_X(t)dt$$

Définition équivalente :

- Pour toute fonction u croissante concave, $\mathbb{E}(\mathrm{u}(\mathrm{X})) \leq \mathbb{E}(\mathrm{u}(\mathrm{Y}))$

→ $X \leq_1 Y$ implique $X \leq_2 Y$

Définition : ordre convexe

Soit X et Y deux variables aléatoires de fonctions de répartition F_X et F_Y . On dit que X est dominé par Y à l'ordre convexe (ou « au sens du l'ordre convexe »), noté $X \leq_{cx} Y$ si et seulement si, pour toute fonction u convexe,

$$\mathbb{E}(u(X)) \leq \mathbb{E}(u(Y))$$

→ $X \leq_{cx} Y$ implique $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ et $\mathrm{Var}(X) \leq \mathrm{Var}(Y)$

L'ordre convexe compare donc (entre autre) la variance de deux V.A. de même moyenne

Une caractérisation équivalente est $X \leq_{cx} Y$ si et seulement si

(i) $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$

(ii) $\forall x \in \mathbb{R}, \int_x^\infty 1 - F_X(t)dt \leq \int_x^\infty 1 - F_Y(t)dt$

Une condition suffisante pour l'ordre convexe

Si $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$ et $\exists j$ tel que

$$\forall x < j, \mathbb{P}(X > j) \geq \mathbb{P}(Y > j)$$

Et $\forall x \geq j, \mathbb{P}(X > j) \leq \mathbb{P}(Y > j)$

Alors $X \leq_{cx} Y$

SOMMAIRE

Définition : fonction génératrice des moments (parfois appelé transformé de Laplace)

Soit X une variable aléatoire. On appelle fonction génératrice des moments la fonction $M_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

Définition : Fonction génératrice des probabilités

Soit X une variable aléatoire. On appelle fonction génératrice des probabilités la fonction $G_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$G_X(t) = \mathbb{E}(t^X)$$

Définition : transformé de Laplace (définition « logique »)

Soit X une variable aléatoire. On appelle transformée de Laplace la fonction $L_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$L_X(t) = \mathbb{E}(e^{-tX})$$

UNIVERSITÉ DE LYON

LABORATOIRE SAF

Définition : transformé de Laplace-Stielje

Soit X une variable aléatoire de densité f. On appelle transformée de Laplace-Stielje la fonction $LS_X : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$LS_X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-tx} d f_X(t)$$

2.5 Les martingales

Définition : processus adapté

Soit F_n une filtration, X_n une suite de variable aléatoire. On dit que X_n est adapté à la filtration F_n si $\forall n \in \mathbb{N}$, X_n est F_n mesurable

Définition : Martingale

Soit F_n une filtration, X_n une suite de variable aléatoire intégrable. On dit que X_n est une martingale par rapport à la filtration F_n si :

- X_n est adapté par rapport à la filtration F_n
- $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{E}(X_{n+1}|F_n) = X_n$

Caractérisation d'un processus de Poisson

Soit N_t un processus stochastique. Les propositions suivantes sont équivalentes :

$i)$ N_t est un processus de Poisson de paramètre λ

ii) Le processus N_t est un processus de comptage tel que N_t - λt soit une martingale

SOMMAIRE

3.1 Le modèle de Poisson composé

Aussi appelé modèle de Cramer Lundberg

Modélisation simple d'une compagnie d'assurance selon 3 paramètres : ses réserves, les primes qu'elle gagne, et les sinistres qu'elle paye.

Soit

-$\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}_+$: montant de **réserve initiale**

-$\boldsymbol{c} \in \mathbb{R}_+$: **primes** gagnées par unité de temps

-$\boldsymbol{N_t}$: processus de Poisson que l'on supposera ici **homogène** de paramètre λ

-$(\boldsymbol{X_i})$: famille de variables aléatoires positives i.i.d., vérifiant $\mu = \mathbb{E}(X_1) < \infty$ **(Montant de sinistre)**

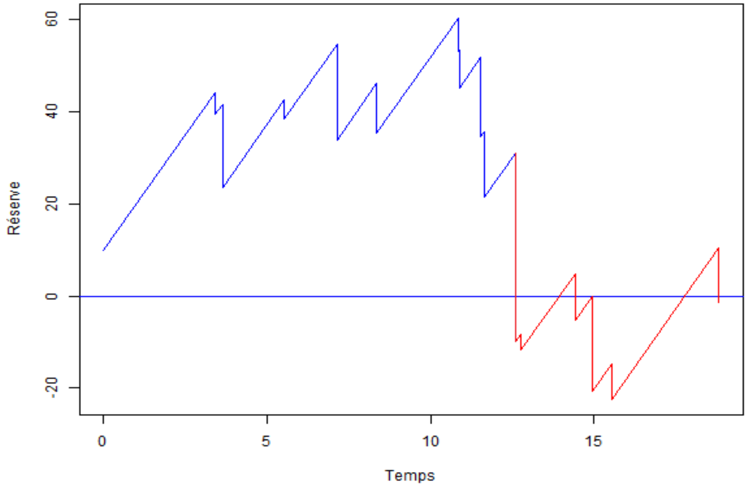
-$\boldsymbol{F_X}$: la fonction de répartition des $(\boldsymbol{X_i})$

-N_t et (X_i) sont supposés indépendants

-Sinistralité à l'instant t : $\sum_{i=1}^{N_t} X_i$

On définit le processus des réserves :

$$\boldsymbol{R_t(u) = u + c\ t - \sum_{i=1}^{N_t} X_i}$$



La ruine : au sens de la théorie de la ruine

- Moment ou le processus des réserves devient négatif

- $T_r = \inf(t > 0 \; tq \; \boldsymbol{R_t} < \boldsymbol{0})$

Si la ruine n'arrive jamais (pour tout t, $\boldsymbol{R_t} > \boldsymbol{0}$), on note $T_r = \infty$

On définit alors les probabilités de non ruine ultime

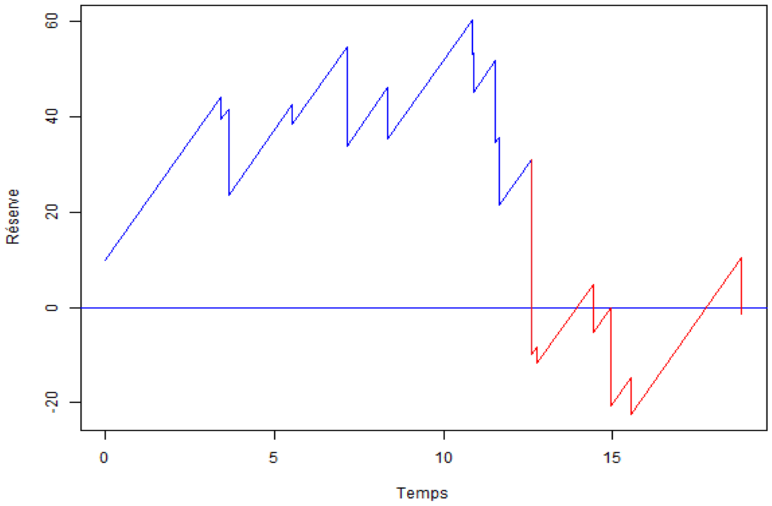
$$\boldsymbol{\varphi(u) = \mathbb{P}(\forall t > 0 \, , R_t > 0),}$$

de ruine ultime

$$\boldsymbol{\psi(u) = 1 - \varphi(u) = \mathbb{P}(\exists t > 0 \; tq \; R_t \leq 0),}$$

ou encore la probabilité de non ruine en temps fini

$$\boldsymbol{\varphi(u, T) = \mathbb{P}(\forall 0 < t < T \, , R_t > 0)}$$



Remarque : changement d'échelle de temps

Idée : Si l'assurance gagne des primes deux fois plus vite, mais rencontre des sinistres deux fois plus rapidement, alors sa probabilité de ruine sera la même

Formellement :

Soit **k > 0**. Soit N_t^* un processus de Poisson de paramètre λ $\mathbf{k}$. Les processus $R_t(u) = u + c$ **t** - $\sum_{i=1}^{N_t} X_i$ et $R_t^*(u) = u + (c\ k)\ t$ - $\sum_{i=1}^{N_t^*} X_i$ ont la même probabilité de ruine. On appelle ça un changement de temps (ou d'échelle de temps)

Conséquence :

Même si nous ne le ferons pas dans ce cours, **il est souvent possible de supposer c=1 sans perte de généralité.**

Proposition 3.1 : Chargement de sécurité

(i) Si $c \leq \lambda\mu$, alors $\forall u \geq 0, \psi(u) = 1$

(ii) Si $c > \lambda\mu$, alors $\forall u \geq 0, \psi(u) < 1$

(iii) Si $c > \lambda\mu$, alors $\lim_{u \to \infty} \psi(u) = 0$

Remarque: $\mathbb{E}(R_t(0)) = t(c - \lambda\mu)$

Donc si l'espérance des réserves sans provision initiale est négative, la ruine est certaine.

Il arrive donc que l'on écrive $c = \lambda\mu(1 + \theta)$, $\theta > 0$. On appelle alors θ le chargement de sécurité (ou la prime pour risque en pratique)

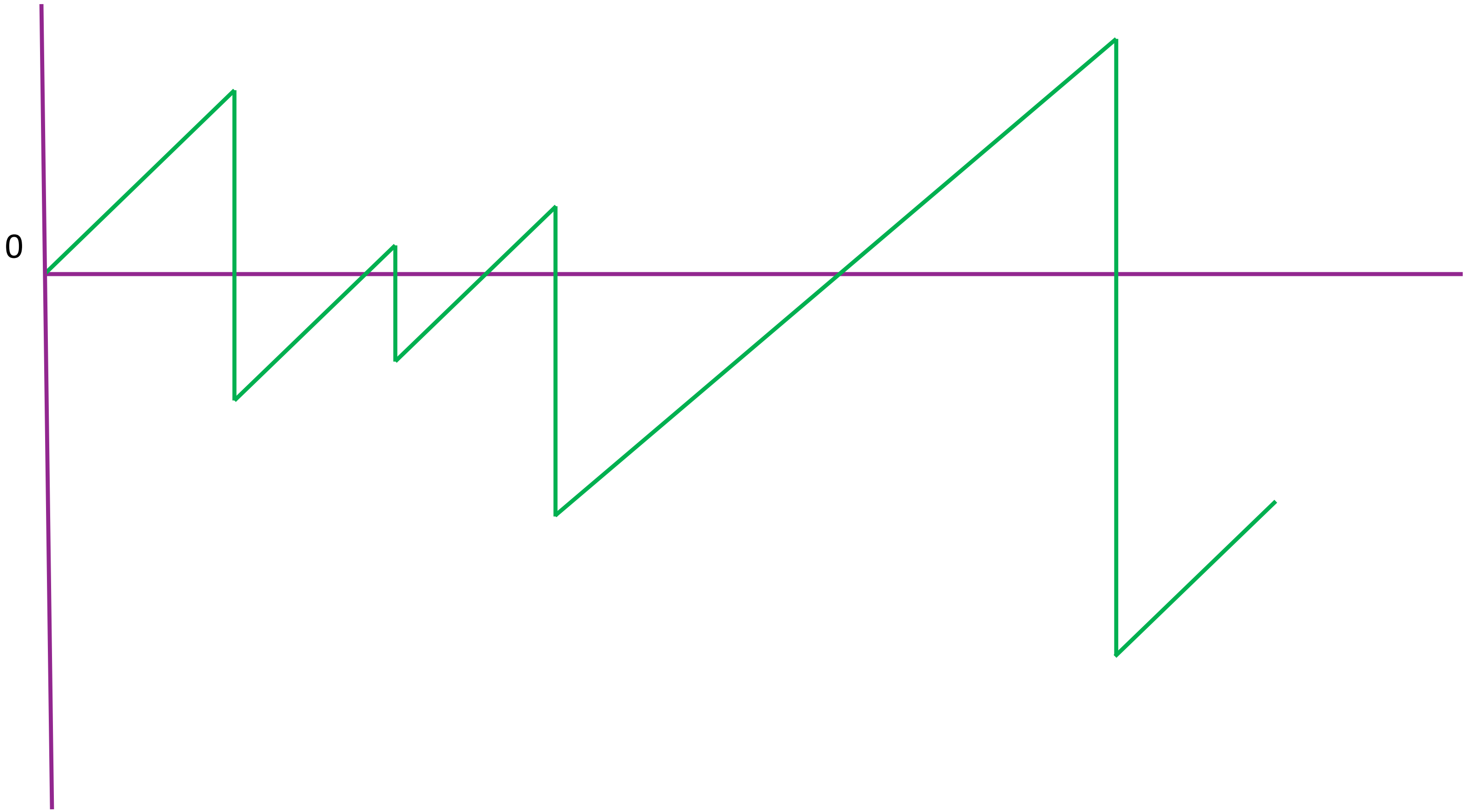
Définition : Ladder height

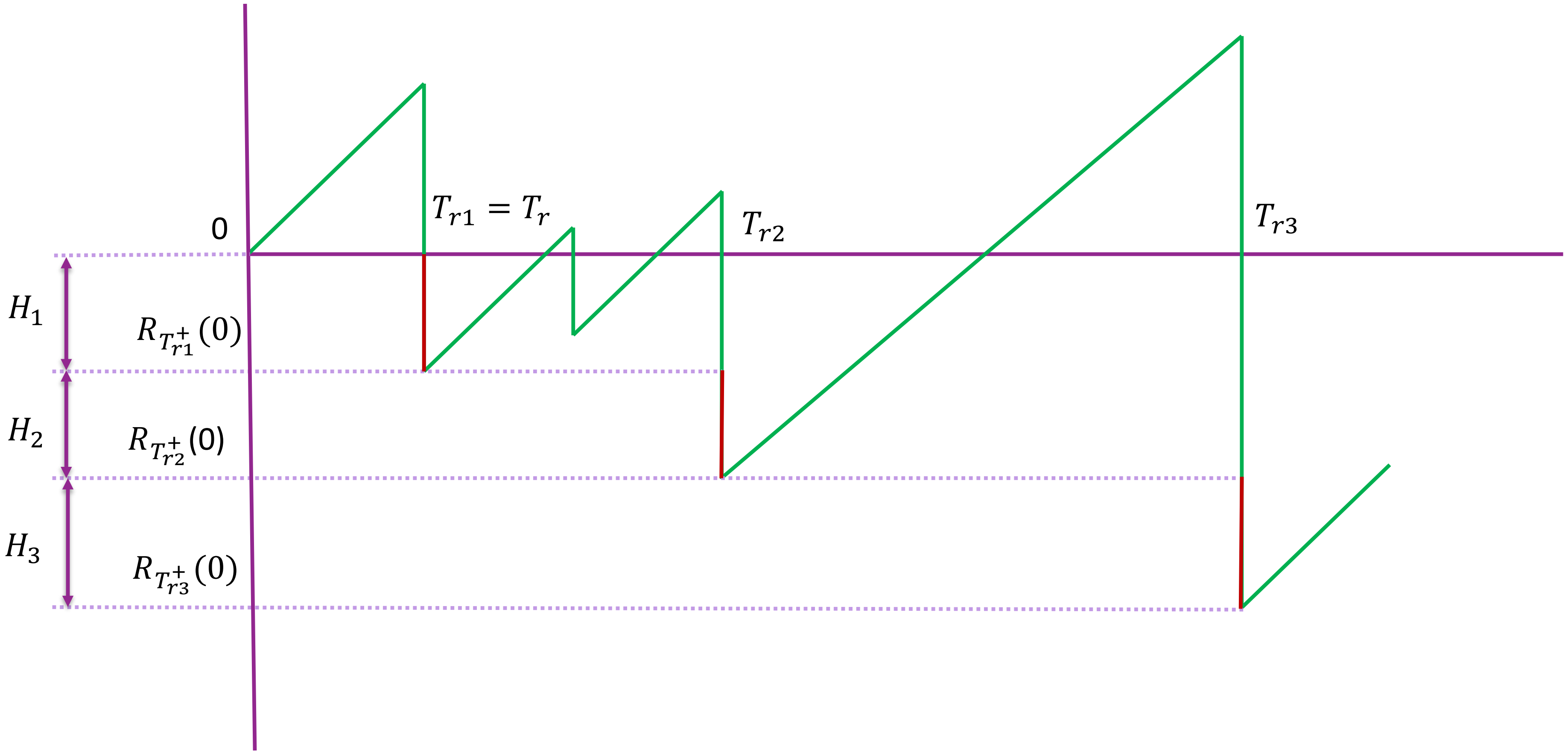
On considère $M_0, M_1, M_2, \ldots$ la suite des minimum atteint par le processus des réserves R_t

On appelle ladder height les variables aléatoires $H_i = M_i - M_{i-1}$, pour i>0
H_1 est appelé première ladder height, H_2 seconde ladder height, etc

Remarque :

- $M_0 = u$
- $M_1 = H_1$
- Si $u = 0$, et **que l'on sait que H_1 existe**, alors H_1 est aussi appelée la sévérité de la ruine : il s'agit de savoir si on est vraiment largement ruiné, ou si on peut quand même essayé de négocier avec l'ACPR
- Il se peut que seul un nombre finit (voir aucune) ladder height n'existe


0


0
$T_{r1} = T_r$
T_{r2}
T_{r3}
H_1
$R_{T_{r1}^+}(0)$
H_2
$R_{T_{r2}^+}(0)$
H_3
$R_{T_{r3}^+}(0)$

La distribution « ladder height », ou la distribution de la sévérité de la ruine

On note $\boldsymbol{G(x)}$ la fonction de répartition de la première ladder height. Dans le cas ou u = 0, on a $\boldsymbol{G(x)} = \mathbb{P}\left(R_{T_r^+}(0) \leq \boldsymbol{x}\,,\ \ T_r^+ \leq \infty\right)$. On note **g** la densité associée.

On note $\boldsymbol{F_e(x)}$ la fonction de répartition de la sévérité de la ruine. Dans le cas ou u = 0, on a $\boldsymbol{F_e(x)} = \mathbb{P}(R_{T_r^+}(0) \leq \boldsymbol{x}\,|T_r^+ \leq \infty)$. $\boldsymbol{F_e}$ est aussi appelé la fonction de répartition d'équilibre.

Proposition 3.2 : Distribution des ladder heights

(i) Dans le modèle de Poisson composé, les ladder heights sont iid

(ii) $g(x) = \psi(0)\ \frac{1 - F_X(x)}{\mu}$

(iii) $F_e\ (x) = \frac{1}{\mu} \int_0^x\ [1 - F_X(s)]\, ds$

Rappel : si X est une variable aléatoire positive, $\int_0^\infty\ [1 - F_X(x)]\, dx = \mathbb{E}(X)$

Proposition 3.3 : Equation intégro-différentielle

$$\boldsymbol{\varphi}'(u) = \frac{\lambda}{c}\boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}) - \frac{\lambda}{\boldsymbol{c}}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x})\boldsymbol{d}\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})$$

Proposition 3.4 : Equation intégrale

$$\boldsymbol{\varphi}\,(u) = \boldsymbol{\varphi}(0) + \frac{\lambda}{\boldsymbol{c}}\int_{\boldsymbol{0}}^{\boldsymbol{u}} \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{x})[\boldsymbol{1}-\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{X}}(\boldsymbol{x})]\,\boldsymbol{d}\boldsymbol{x}$$

Proposition 3.5 : Formule de $\varphi(0)$

$$\boldsymbol{\varphi}(0) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c}$$

Ne dépend que de μ, et pas de $\boldsymbol{F_X}$

→ Quel que soit la variance, $\boldsymbol{\varphi}(0)$ ne dépend que de $\frac{\lambda\mu}{c}$ → que du S/P

Proposition 3.6 : Formule de Pollaczeck-Kinchine

$$\boldsymbol{\varphi}\,(u) = \boldsymbol{\varphi}(0)\sum_{n=0}^{\infty}(1 - \boldsymbol{\varphi}(0))^n F_e^{*n}(u),$$

Avec :

F_e^{*n} la fonction de répartition de la variable aléatoire de sévérité de la ruine convoluée n fois avec elle-même

Rappel : $F_e\ (u) = \frac{1}{\mu}\int_0^u [1 - F_X(x)]\,dx$. La probabilité de ruine dépend désormais de la loi complète des sinistres

Proposition 3.7 :

Si $X \leq_{cx} Y$, alors

(i) $X_e \leq_1 Y_e$

(ii) Pour tout u, c, λ, $\boldsymbol{\varphi}_X(u, c, \lambda) \leq \boldsymbol{\varphi}_Y(u, c, \lambda)$

Note : X_e *est la sévérité de la ruine, de fonction de répartition* $F_e\ (u) = \frac{1}{\mu} \int_0^u [1 - F_X(x)]\, dx.$

Définition : loi à queue légère

On dit qu'une variable aléatoire X est à queue légère ssi il existe s>0 tel que $M_X(s) = \mathbb{E}(e^{sX}) < \infty$. Autrement dit, il existe un intervalle fermé pour lequel la fonction génératrice des moments existe.

Exemple de loi à queue légère :

- Loi exponentielle
- Loi Gamma
- Loi bornée

Remarque : Si la fonction génératrice des moments existe pour un s donné, pour tout x>0 :

$$\mathbb{P}(X > x) = \mathbb{P}\left(e^{sX} > e^{sx}\right) \leq \frac{\mathbb{E}(e^{sX})}{e^{sx}}$$

Ne dépend pas de x

Donc , lorsque x tends vers l'infini, la fonction de survie de X tends vers 0 à une vitesse au moins exponentielle

3 cas possibles:

(i) $\forall s > 0, \mathbb{E}(e^{sX}) < \infty$

(ii) $\exists \sigma \; tq \; \forall s < \sigma, \mathbb{E}(e^{sX}) < \infty$, et $\forall s \geq \sigma, \mathbb{E}(e^{sX}) = \infty$

(iii) $\exists \sigma \; tq \; \forall s \leq \sigma, \mathbb{E}(e^{sX}) < \infty$, et $\forall s > \sigma, \mathbb{E}(e^{sX}) = \infty$

Définition : Coefficient d'ajustement

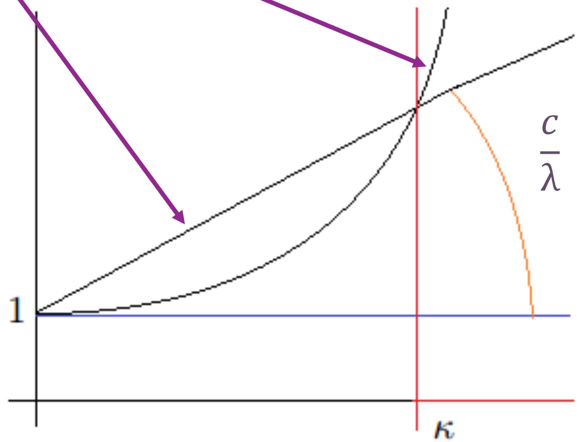
On appelle coefficient d'ajustement (noté **κ**) la solution de l'équation d'inconnue s

$$1 + \frac{c}{\lambda} s = \mathbb{E}(e^{sX})$$

Définition : Coefficient d'ajustement

On appelle coefficient d'ajustement (noté **κ**) la solution de l'équation d'inconnue s

$$1+\frac{c}{\lambda}s=\mathbb{E}(e^{sX})$$



3 cas possibles:

(i) $\forall s>0, \mathbb{E}(e^{sX})<\infty$ → **κ** existe toujours

(ii) $\exists\sigma\ tq\ \forall s<\sigma, \mathbb{E}(e^{sX})<\infty$, et $\forall s\geq\sigma, \mathbb{E}(e^{sX})=\infty$ → **κ** existe toujours

(iii) $\exists\sigma\ tq\ \forall s\leq\sigma, \mathbb{E}(e^{sX})<\infty$, et $\forall s>\sigma, \mathbb{E}(e^{sX})=\infty$ → **κ** n'existe pas toujours

Proposition 3.8 : Inégalité de Lundberg

Dans le cas de sinistres à queue légère

$$\psi(u) \leq e^{-\mathbf{K}\, u}$$

Remarques :

La **probabilité de ruine décroit exponentiellement avec les réserves**

Le coefficient d'ajustement peut être vu comme une **mesure de l'efficacité des réserves**

Exemple / exercice : Le cas du processus de Poisson avec sinistres de loi exponentielle iid

Proposition 3.9 : Approximation de Cramer Lundberg

Dans le cas de sinistres à queue légère

$$\psi(u) \sim_{\infty} \frac{c - \lambda\mu}{\lambda M_X'(\boldsymbol{\kappa}) - c} e^{-\boldsymbol{\kappa} u}$$

Remarque :

Renforce l'intuition derrière les remarques effectuées dans la slide précédente

Définition : Loi sous exponentielle

Une variable aléatoire X est dite sous exponentielle si pour tout n >0, $X_1, \dots, X_n$ iid de même loi que X, on a

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(\sum_{\boldsymbol{i=1}}^{\boldsymbol{n}} X_i > \boldsymbol{x})}{\mathbb{P}(\max\limits_{i \in [1,n]} X_i > \boldsymbol{x})} = 1$$

Proposition 3.10 : les lois sous exponentielles sont à queue lourde

Si X suit une loi sous exponentielle, pour tout s > 0,

$$\lim_{x \to \infty} e^{sx} \mathbb{P}(\boldsymbol{X} > \boldsymbol{x}) = \infty$$

La queue de la loi de X est donc trop épaisse pour contrebalancer une croissance exponentielle : la queue de distribution décroit moins vite qu'exponentiellement. C'est pourquoi on parle de loi sous exponentielle

Proposition 3.11

X suit une loi sous exponentielle si et seulement si, pour tout n > 0,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\mathbb{P}(\sum_{i=1}^{n} X_i > x)}{\mathbb{P}(X > x)} = n$$

Exemples de lois sous exponentielles :

Loi Pareto
Loi de Weibull
Loi log normal

Proposition 3.12 : Approximation dans le cas de lois sous exponentielles

Si la sévérité de la ruine (de fonction de répartition $\boldsymbol{F_e}$) suit une loi sous exponentielle, alors

$$\psi(u) \sim_{\infty} \frac{\lambda\mu}{c - \lambda\mu}[1 - \boldsymbol{F_e}(\mathrm{u})]$$

Remarques :

Attention : la plupart du temps, si X suit une loi sous exponentielle, alors la sévérité de la ruine suit aussi une loi sous exponentielle, mais ce n'est pas toujours vrai.

Puisque la sévérité de la ruine suit une loi sous exponentielle, $\boldsymbol{F_e}(\mathrm{u})$ n'est jamais négligeable. Cette proposition montre donc que dans un tel cas, la ruine est toujours une possibilité à garder en tête, car il est toujours possible qu'un ou plusieurs sinistres extrêmes consécutifs réduisent à néant les réserves

- Cas des tempêtes de 1999

Cas discret :

On s'intéresse désormais à la probabilité d'être ruiné avant un temps T (par exemple dans l'année), notée $\boldsymbol{\psi(u,T)}$

Le résultat de cette section n'est pas à retenir.

Cas des sinistres exponentiels

On suppose que les sinistres suivent une loi exponentielle de paramètre 1

Que la prime c=1 (changement de temps, pas de perte de généralité)

Proposition 3.13 : Ruine en temps finis, cas exponentiel

$$\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{T}) = \lambda e^{-(1-\lambda)u} - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{f_1(\theta) f_2(\theta)}{f_3(\theta)}\, d\theta,$$

Avec

$$f_1(\theta) = \lambda e^{-T[1+\lambda-2\sqrt{\lambda}\cos(\theta)]+u(\sqrt{\lambda}\cos(\theta)-1)}$$
$$f_2(\theta) = \cos\left(u\sqrt{\lambda}\sin(\theta)\right) - \cos(u\sqrt{\lambda}\sin(\theta)+2\theta)$$
$$f_3(\theta) = 1+\lambda-2\sqrt{\lambda}\cos(\theta)$$

Comment modéliser la réassurance ?

Comment modéliser la réassurance ?

Sinistralité :

On considère une fonction h qui jouera le rôle d'un traité de réassurance.
Lors de la survenance d'un sinistre **X**, le réassureur paiera **h(X)**
L'assureur paiera **X – h(X)**

Exemples :

- Réassurance proportionnelle :

$$h(X, \alpha) = \alpha X$$

- Réassurance XS

$$h(X, \beta) = \max(X - \beta, 0)$$

Comment modéliser la réassurance ?

Prime :

- Le réassureur touche une prime

Fréquence de sinistre

$$c_R = (1 + \theta_R)\,\lambda\,\mathbb{E}(h(X))$$

Chargement de sécurité

Montant moyen de sinistre

L'assureur touche une prime c- c_R

Faut-il ajouter une hypothèse sur θ_R?

Comment modéliser la réassurance ?

Prime :

- Le réassureur touche une prime

Fréquence de sinistre

$$c_R = (1 + \theta_R)\, \lambda\, \mathbb{E}(h(X))$$

Chargement de sécurité

Montant moyen de sinistre

L'assureur touche une prime c- c_R

Faut-il ajouter une hypothèse sur θ_R?

Il faut prendre $\boldsymbol{\theta_R > \theta}$, car sinon se réassurer à 100% créérait une opportunité d'arbitrage pour l'assureur !

Proposition 4.1 : Réassurance optimale

Soit $s^{cible} \in \mathbb{R}^{+}$ tel que $0 < s^{cible} < \mu$.

(i) Il existe β^{cible} tel que $h_{\beta^{cible}}(X) = \max(X - \beta^{cible}, 0)$ et $\mathbb{E}\left(h_{\beta^{cible}}(X)\right) = s^{cible}$

(ii) De plus, pour tout **h** tel que $\mathbb{E}(h(X)) = s^{cible}$,

$$X - h_{\beta^{cible}}(X) \leq_{cx} X - h(X)$$

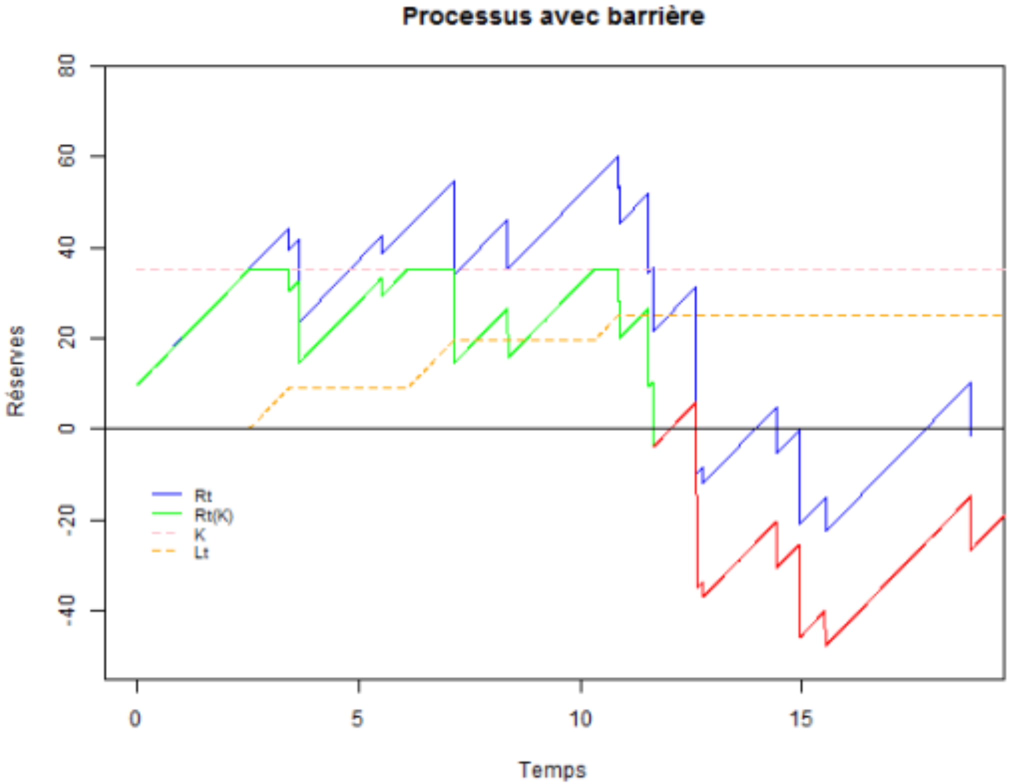
Autrement dit : pour un assureur qui considère tout les contrats de réassurance possible pour une prime donnée, alors le contrat qui minimise le risque (au sens convexe) est un contrat de type XS

Ces modèles supposent que les réserves ne peuvent pas dépasser une limite K(t) → Si les réserves venaient à dépasser ce montant, le surplus serait versé en dividende.

Si $K(t) = K \in \mathbb{R}_+$, la modèle est dit à barrière constante.

On note L_t le montant de dividende versé depuis t=0

Remarque : dans le modèle à barrière constante, la ruine est certaine.



Formellement :

Soit $P_t = \sum_{n=1}^{N(t)} X_i - ct$ le montant de perte à l'instant t

On a alors $L_t = \sup_{0 \leq s \leq t} max(u - P_s - K, 0)$

Enfin, $R_t = u - P_t - L_t$

Soit $\delta(u, K)$ la probabilité d'être ruiné avant d'avoir versé le moindre dividende

Proposition 4.2 : Probabilité de ruine avant de verser des dividendes

$$\delta(u,K) = \frac{\boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{u}) - \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{K})}{1 - \boldsymbol{\psi}(\boldsymbol{K})}$$

Proposition 4.3 : dividendes moyens

$$\mathbb{E}(L_T) = \frac{\big(1-\delta(u,K)\big)c}{\lambda(1-r)},$$

Avec $r = \mathbb{P}(\mathbf{T} > \mathbf{inf}(\mathbf{t} > \boldsymbol{T_1}\ \boldsymbol{tq}\ \boldsymbol{R_t} = \boldsymbol{K})|\mathbf{0} < \boldsymbol{T_1} < \boldsymbol{T})$

(Pour rappel : T désigne le temps ou se produit la ruine. Ici $\boldsymbol{T_1}$ désigne le premier temps pour lequel la barrière de dividende est atteinte.

Définition : Processus de Lévy

Soit $(\boldsymbol{X_t})_{t\geq 0}$ un processus stochastique. $\boldsymbol{X_t}$ est appelé processus de Lévy si

(i) $\boldsymbol{X_0 = 0}$

(ii) $\boldsymbol{X_t}$ est a accroissement indépendant i. e. $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t_0 = 0 < t_1 < \cdots < t_n$, les variables aléatoire $N_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \ldots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes entres elles

(iii) $\forall \boldsymbol{s < t},\ \boldsymbol{X_{t-s} \sim X_t - X_s}$

(iv) $\boldsymbol{X_t}$ est cadlag

Remarques :

Le processus des réserves sans réserve initiale du modèle de Poisson composé est un processus de Lévy

Le mouvement Brownien est un processus de Lévy

Proposition 4.4 : Processus de Lévy et Martingale

Soit $(\boldsymbol{X_t})_{\boldsymbol{t\geq 0}}$ un processus de Lévy, soit $\mathrm{z} \in \mathbb{R}$. Alors soit :

(i) $\forall \boldsymbol{t} \geq 0$, $\mathbb{E}(e^{\mathrm{Z}X_t})$ est finie, ou

(ii) $\forall \boldsymbol{t} \geq 0$, $\mathbb{E}(e^{\mathrm{Z}X_t})$ n'est pas finie.

Dans le cas 1, il existe une fonction **f** : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction telle que $\mathbb{E}\left(e^{\mathbf{Z}X_t}\right) = e^{t\mathbf{f}(z)}$, et le processus $e^{\mathrm{Z}X_t - t\mathbf{f}(z)}$ est une martingale

Remarques :

Pour le modèle de Poisson composé sans réserve initiale, $\mathbf{f}(z) = \lambda\mathbb{E}(e^{-zX})$ - λ + zc.

Rappel : le coefficient d'ajustement est la solution si elle existe de $1 + \frac{c}{\lambda}s = \mathbb{E}(e^{sX})$

Pour un mouvement Brownien de drift μ et variance σ^2, $\mathbf{f}(z) = z\,\mu + \frac{z^2\sigma^2}{2}$

Proposition 4.5 : Formule de ruine alternative

Soit $\boldsymbol{R_t}$ un processus de réserve. Si

(i) $\exists \mathbf{\kappa}>0$ *tel que* $(e^{-\mathbf{\kappa}(R_t-u)})_{t\geq 0}$ soit une martingale

(ii) $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{R_t} = \infty$

Alors $$\boldsymbol{\psi(u)} = \frac{e^{-\mathbf{K}u}}{\mathbb{E}\left(e^{R_{T_r}\mathbf{K}} \mid T_r < \infty, R_0 = u\right)}$$

Remarques :

Si le coefficient d'ajustement existe, le modèle de Poisson composé vérifie les hypothèses de la proposition

On considère un mouvement Brownien W_t de drift μ et variance σ^2, tel que $W_0 = u \geq 0$. Soit $\delta(u,a) = \mathbb{P}(\exists T_r^+ tq\ W_{T_r^+} < 0\ et\ \forall t < T_r^+, W_t < a)$ la probabilité que le mouvement Brownien passe sous 0 sans avoir atteins un certain niveau a.

Proposition 4.6 : Formule de ruine n° 1 dans le cas Brownien

Sous les hypothèses ci-dessus, si $\mu \neq 0$,

$$\delta(u,a) = \frac{e^{-2\mu\frac{u}{\sigma^2}} - e^{-2\mu\frac{a}{\sigma^2}}}{1 - e^{-2\mu\frac{a}{\sigma^2}}}.$$

si $\mu = 0$,

$$\delta(u,a) = \frac{a-u}{a}$$

Proposition 4.7 : Formule de ruine n° 2 dans le cas Brownien

Sous les hypothèses de la proposition 4.6, si $\mu > 0$,

$$\boldsymbol{\psi(u)} = e^{-2\mu\frac{u}{\sigma^2}}.$$

si $\mu \leq 0$,

$$\boldsymbol{\psi(u)} = 1.$$

Proposition 4.8 : Formule de ruine n° 3 dans le cas Brownien

Sous les hypothèses de la proposition 4.6, si $\mu = 0, alors\ \forall T > 0$

$$\boldsymbol{\psi(u,T)} = 2\Phi\left(\frac{-u}{\sigma\sqrt{T}}\right)$$

Avec Φ la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite

5 *Pour aller plus loin*

Références :

Ruin Probabilities, écrit par Asmussen et Albrecher

Stochastic orders, écrit par Shaked et Shantikumar

Actuarial mathematics, écrit par Bowers, Gerber, Hickman, Jones et nesbitt