# Risque de crédit

Année 2020-2021

Ying Jiao

# Table des matières



**Références :**

— Duffie et Singleton, Credit Risk, pricing, measurement and management
— Bielecki et Rutkowski, Credit risk : Modelling, valuation and hedging
— Schönbucher, Credit derivatives pricing models

# Chapitre 1

# Introduction aux risques et produits dérivés de crédit

26.01.21
Le risque de crédit représente les risques financiers liés aux incapacités d'un agent (particulier, entreprise, ou état souverain) de payer un engagement de remboursement.
Le cas extrême est la faillite ou le défaut de l'agent. Un évènement de défaut se produit rarement, mais peut induire des pertes importantes (dans ce cas, on s'intéresse à la modélisation de défaut qui est différente par rapport à celle liée à des processus stochastiques continus comme des diffusions browniennes).

### Comment mesurer les risques de crédit et de défaut ?

Intuitivement, si on imagine un particulier qui demande un prêt. Il va aller voir son banquier en disant qu'il veut emprunter un certain montant, et un coût est associé à ce prêt. Le banquier va donc demander des informations personnelles (travail, âge, etc) à l'emprunteur, et va proposer un taux de prêt à cette personne selon son risque de défaut. Chaque personne a donc un taux de défaut différent, et il peut différer selon la méthode de calcul des banques. La différence entre ce taux et le taux sans risque, appelé un spread, est ce qui permet de mesurer le risque de crédit.
Le fonctionnement est similaire pour une obligation (émise par une entreprise ou un état), on voit parfois des obligations avec des taux de coupon/dividende assez haut, car ce taux est lié au risque de crédit de l'émetteur. Dans ce cas, le spread va être la différence entre le taux de coupon concerné et le taux préposé pour une obligation d'état (de la même maturité, nombre de paiement, etc).

Plus le risque est élevé, plus le spread est grand pour le récompenser. En effet, cette différence de taux permet aux investisseurs de gérer les risques de crédit associés.
Grâce aux notes données par les agences de notation, les investisseurs peuvent avoir un idée de la qualité de crédit des produits sans devoir faire une étude eux-mêmes de l'entreprise. Les agences de notation font ce travail depuis plus de 100 ans, et ont donc beaucoup de données historiques, et peuvent calculer par des méthodes statistiques la probabilité de faillite pour chaque note (AAA jusqu'à D pour défaut), ainsi que la probabilité pour une obligation CC de passer à une note D par exemple. Classiquement, le risque est géré de façon statique par la loi des grands nombres (similaire à l'assurance). Parmi des milliers d'emprunteur, on estime la probabilité de faillite(s), et on utilise des spreads "mutualisés" pour compenser les pertes. C'est par exemple le cas pour les prêts des particuliers dans une banque.

Quand il s'agit d'une obligation corporate ou souveraine, les agences de notation, comme Moody's ou SP's, peuvent attribuer une note suivant l'état financier de l'agent, avec laquelle on peut calculer les risques de façon quantitative souvent par des méthodes statistiques.

### Les marchés de crédit

Les marchés de dérivés de crédit ont été créés dans les années 1990.
Un dérivé de crédit est un produit financier dont les paiements sont liés aux évènements de crédit d'un agent (ou un produit) sous-jacent. Le but est de gérer, transférer et couvrir les risques de crédit liés au sous-jacent (pour une entreprise ou un état souverain, ça ne concerne pas les particuliers).
Les composants caractéristiques d'un dérivé incluent le nom du sous-jacent, l'évènement de crédit (par exemple défaut de l'agent ou défaut d'un paiement ou d'une obligation), la date de maturité et la date de défaut, les paiements en cas de défaut ou non-défaut.

Il existe des dérivés avec un seul sous-jacent ou plusieurs (produits en portefeuille). Pour le dérivé seul sous-jacent (ou mono-sous-jacent), le terme clé à modéliser est le temps de défaut. Pour les dérivés multi-sous-jacent, les corrélations de défauts entre les noms sous-jacents jouent un rôle important, car il faut modéliser des familles de temps de défaut, et donc les corrélations entre ces temps de défaut ainsi que la loi jointe de probabilité du vecteur de ces temps de défaut. On s'intéresse ainsi à connaître la distribution conditionnelle par rapport à toutes les informations observées sur le marché, représentées par certaines filtration.
Remarque : on parle de noms sous-jacent (terme anglais *underlying names*) pour parler des produits sous-jacents.

Exemple :

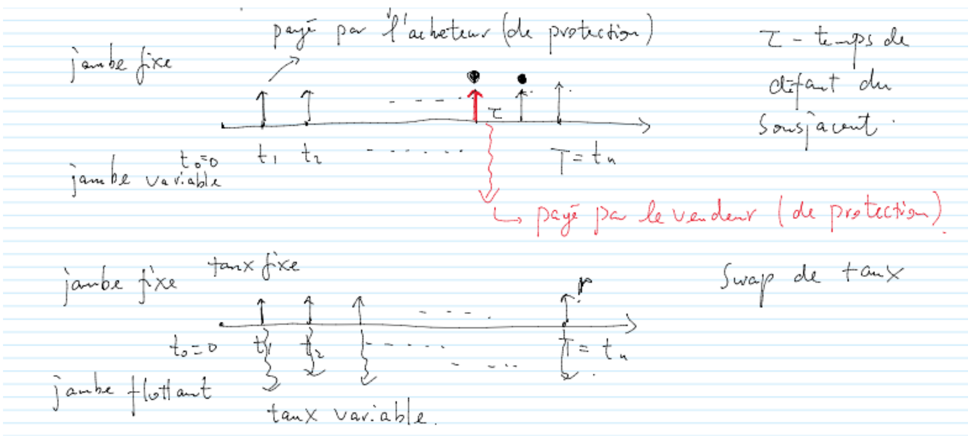
$$E_\theta[e^{-rT}(S_T - K)_+]$$
$$E_\theta[e^{-rT}(S_T - K)_+|\mathcal{F}_t]$$

où $S_T$ est le nom sous-jacent.

## 1.1 Différents produits dérivés

### 1.1.1 Credit Default Swap

Le produit le plus populaire est le *credit defaut swap* (CDS)




Le CDS est le produit de base sur le marché de crédit qui contient un seul nom sous-jacent et permet aux investisseurs de gérer le risque de défaut du sous-jacent de manière dynamique. Par ailleurs, par rapport à la note de crédit attribuée par les agences de notation, le prix de CDS sert comme un indicateur dynamique sur la qualité de crédit du sous-jacent.
Suggéré par son nom, un CDS ressemble à un swap de taux dans le sens où il existe un échange des flux de paiements fixes et flottants entre l'acheteur et le vendeur.

Un CDS porte aussi la caractéristique d'un produit d'assurance qui fournit à son acheteur la protection contre le risque de défaut (sinistre) du sous-jacent. L'acheteur de protection paie un montant fixe $S$, appelé le spread du CDS, à des dates régulières et préfixées (comme un swap de taux) jusqu'à la date de défaut $\tau$ si le défaut du sous-jacent a lieu avant la maturité $T$. Dans le contraire, il va payer le montant $S$ jusqu'à $T$.
La partie flottante payée par le vendeur de protection dépend de l'état de défaut ou non du sous-jacent avant la maturité $T$. Dans le cas de défaut, le vendeur va rembourser à l'acheteur une proportion de sons nominal dont la quantité est donnée par $1 - R$, où $R$ est le taux de recouvrement du sous-jacent, à valeurs dans $[0, 1]$, qui est aléatoire et n'est pas connu à la date initiale. Dans le cas sans défaut, le vendeur ne paie rien.
Le taux de recouvrement est une quantité qui ne se révèle qu'au moment de défaut et il est difficile d'estimer sa valeur qui peut varier largement d'une entreprise à l'autre.

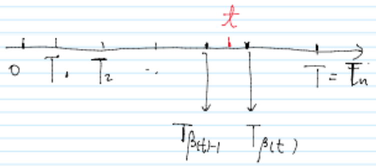
**Remarque :**
Pratique de marché : $R$ est un v.a. qui suit une loi Beta avec une moyenne de 40% et une variance de 26%.

Le prix d'un CDS, ou son spread, est déterminé à la date initiale tel que les espérances de ces deux flux soient égales. On introduit quelques notations :

— $\tau$ la date de défaut qui est une v.a. positive

- $R$ le taux de recouvrement qui est soit une v.a. à valeurs dans $[0,1]$, soit un processus stochastique (à valeurs dans $[0,1]$) pris en valeur à la date $\tau$
- $S > 0$ le spread de CDS (c'est ce que l'on cherche à calculer)
- $T_0$ la date initiale du CDS et $T > 0$ sa maturité
- $(T_1, ..., T_n = T)$ les date de paiements fixes, avec $\Delta T = T_i - T_{i-1}$ constants $\forall i = 1, ..., n$
- On introduit un indice $\beta(t)$ à valeur dans $\{1, ..., n\}$ tel que $t \in [T_{\beta(t)-1}, T_{\beta(t)}]$

( pour $\tau$, avant T on a $\tau \in [T_{\beta(\tau)-1}, T_{\beta(\tau)}]$ ).




- $r = (r_t, t \geq 0)$ le taux d'intérêt court et $D(t,T) = exp\Big(-\int_t^T r_s ds\Big)$

Pour le vendeur du CDS, le flux futur qu'il va recevoir vu à une date $t < min(T,\tau)$ est donné par :

$$S\Bigg(\underbrace{\mathbf{1}_{\{\tau > T_{\beta(t)}\}}(T_{\beta(t)} - t)D(t, T_{\beta(t)})}_{1} + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\tau > T_i\}} \Delta T D(t, T_i)}_{2} + \underbrace{\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}(\tau - T_{\beta(t)-1})D(t,\tau)}_{3}\Bigg)$$

où 1 est le paiement pour la période (incomplet) $t \longrightarrow T_{\beta(t)}$, 2 est le paiement pour les périodes (complet) $T_i \longrightarrow T_{i+1}$, et 3 est le paiement pour la période (incomplet) $T_{\beta(t)-1} \longrightarrow \tau$.

Ce flux peut être approximé par un flux continu :

$$\int_t^T S\mathbf{1}_{\{\tau > u\}} D(t,u)du$$

**Remarque :**
$S$, comme tous les taux, est annuel, donc quand on le multiplie par la longueur de temps, comme pour un spread linéaire, on a le spread correspondant à la période.

Le flux payé par le vendeur (vu à la date $t < min(T,\tau)$ est

$$\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}(1-R)D(t,\tau)$$

Pour calculer le spread de CDS à la date initiale : en t=0, on a

$$E_*\Bigg[\int_0^T S\mathbf{1}_{\{\tau > u\}} D(0,u)du\Bigg] = E_*\Bigg[\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} D(0,\tau)\Bigg]$$

$$\Rightarrow S = \frac{E_*[\mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}}(1-R)D(0,\tau)]}{E_*[\int_0^T \mathbf{1}_{\{\tau > u\}} D(0,u)du]} \tag{1.1}$$

où $E_*$ représente l'espérance sous une proba risque-neutre.
La formule (1.1) est très générale et peut s'adapter à tout modèle de $\tau$. Pour obtenir une valeur explicite de $S$, il faut choisir un modèle pour $\tau$.

### 1.1.2 Formulation générale

02.02.21
De façon générale, un produit dérivé de crédit ou un produit financier sensible au risque de défaut peut être représenté par un triplet $(C.G.Z)$ où :

- $C$ est la paiement à la maturité $T$ s'il n'y a pas défaut avant $T$ qui est une variable aléatoire
- $G$ est le paiement (cumulé) au long de la durée du produit jusqu'à la fin du contrat (maturité ou temps de défaut, $min(T,\tau)$), comme le paiement de coupon/dividende.
  $G$ est un processus stochastique $G_0 = 0$, et $G = (G_t, t \geq 0)$ est croissant en temps.
- $Z$ est le paiement à la date de défaut si le défaut a lieu avant la maturité $T$ qui représente le paiement de recouvrement ou recompensation.
  $Z$ peut être une variable aléatoire ou un processus stochastique.

On introduit un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ qui représente les informations ambiantes du marché (prix des produits financiers, taux d'intérêts, etc), où pour $t > 0$ fixé, $\mathcal{F}_t$ représente les données observables jusqu'à la date $t$.

Ainsi, $C$ est une v.a. $\mathcal{F}_t$-mesurable. Par exemple, pour un call, $C$ vaut $(S_T - K)_+$ qui est bien $\mathcal{F}_t$-mesurable. De plus, $G$ est un processus $\mathbb{F}$-adapté, par exemple le paiement de coupon ou le paiement de spread sont $\mathbb{F}$-adaptés. $Z$ est soit une v.a. $\mathcal{A}$-mesurable (qui ne dépend pas du temps), soit un processus $\mathbb{F}$-prévisible et le paiement $Z_\tau$.

**Exemple :**
**1.** Une obligation zéro-coupon défautable : on rappelle qu'une OZC est un produit qui paie 1€ à la maturité $T$. Pour évaluer ce produit, on introduit le processus de taux d'intérêt court $r = (r_t, t \geq 0)$ qui est un processus $\mathbb{F}$-adapté, et le prix à la date $t \in [0, T]$ est donné par :

$$B(t,T) = E_*\left(e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t\right)$$

où $E_*$ représente l'espérance sous une probabilité risque-neutre de pricing.

On considère une OZC défautable où le principal sera complètement/partiellement perdu. Dans ce cas-là, le paiement à la maturité est 0 si le défaut arrive avant la maturité $T$, donc a $C = 1$, $G = 0$ et $Z = 0$ (zéro-recouvrement) ou $Z = R$ si on a un recouvrement partiel. On parle ici de défaut du sous-jacent (il ne s'agit pas du défaut de l'OZC défautable même).
**Remarque :**
Dans le cas où le principal est partiellement perdu, il faut préciser dans le contrat à la date initiale si le remboursement partiel se fait à la maturité ou à la date de défaut.

La fonction payoff pour l'OZC défautable est

$$\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \times \underbrace{1}_{C} + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} \times \underbrace{\begin{cases} 0 & \text{si zéro-recouvrement} \\ R & \text{si remboursement partiel} \end{cases}}_{Z}$$

Donc au cas où $Z = 0$, on a tout simplement $\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}$, et si $Z = R$, on a $\mathbf{1}_{\{\tau > T\}} + \mathbf{1}_{\{\tau \leq T\}} R$.

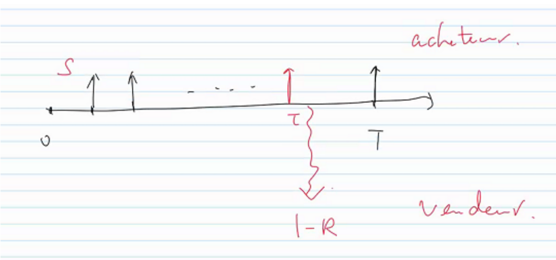
**2.** Obligation (standard) défautable :
Pour une obligation classique, l'investisseur paie un montant nominal à la date initiale, et reçoit un coupon régulier avec le taux de coupon égal à une constante $d > 0$, ainsi que le remboursement de nominal à la maturité.
Pour une obligation défautable, la différence est que en cas de défaut du sous-jacent, l'investisseur ne reçoit plus de coupon, ni de remboursement nominal (pour une perte totale). On s'intéresse à donner le triplet de l'obligation défautable :

$$\begin{aligned} &C = 1 \text{ (nominal) (ou N avec multiplication)} \\ &G_t = d \times t \text{ taux de coupon (c'est un taux annuel, d'où la multiplication par t)} \\ &Z = 0 \end{aligned}$$

Au cas où l'obligation est remboursée partiellement, alors $C$ et $G$ restent les mêmes mais $Z = R$ où $R$ est le taux de remboursement à valeurs dans $[0, 1]$.

La différence avec l'OZC défautable est que l'on a le paiement $G_t$.

**3.** Le triplet pour un CDS :



On prend le point de vue du vendeur. Pour ce produit, le triplet va être :

$$\begin{aligned}&C = 0\\&G_t = s \times t \text{ (c'est ce que le vendeur reçoit)}\\&Z = -(1-R) \text{ (signe - car on est du pdv du vendeur, le vendeur paie (1-R)}\end{aligned}$$

De façon similaire, si on se place du point de vue de l'acheteur :

$$\begin{aligned}&C = 0\\&G_t = -s \times t\\&Z = 1-R\end{aligned}$$

On cherche maintenant à évaluer un produit sensible au défaut en utilisant ce triplet, à une date $t$ avant la fin du contrat, c'est-à-dire à $t < min(T, \tau)$ :

$$V_t = \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} E_* \left( C\mathbf{1}_{\{\tau>T\}} D(t,T) + \int_t^T \mathbf{1}_{\{\tau>u\}} D(t,u) dG_u + Z\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}} D(t,\tau) \middle| \mathcal{F}_t \vee D_t \right)$$

où $D(t,T) = e^{-\int_t^T r_s ds}$, $dG_u$ est le paiement de coupon instantané que l'on va recevoir à la date $u$. $\mathcal{F}_t \vee D_t$ vient du fait que le défaut est un événement aléatoire, et qu'il faut donc rajouter de l'information via $D_t$ qui est l'information de départ.

En reprenant les exemples précédents :

1. L'OZC défautable, $C = 1$, $G = Z = 0$ :

$$V_t = \tilde{B}(t,T) = \mathbf{1}_{\{t<\tau\}} E_* \left( \mathbf{1}_{\{\tau>T\}} e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \vee D_t \right)$$

à comparer avec

$$B(t,T) = E_* \left( e^{-\int_t^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

2. L'obligation défautable, $C = 1$, $G_t = dt$ et $Z = 0$ :

$$V_t = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E_* \left( \mathbf{1}_{\{\tau>T\}} e^{-\int_t^T r_s ds} + \int_t^T \mathbf{1}_{\{\tau>u\}} e^{-\int_t^u r_s ds} ddu \middle| \mathcal{F}_t \vee D_t \right)$$

à comparer avec une obligation classique :

$$O_t = E_* \left( e^{-\int_t^T r_s ds} + \int_t^T de^{-\int_t^u r_s ds} du \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

Pour les obligations classiques (avec ou sans coupons), le seul risque concerné est le risque de variation de taux d'intérêt.

3. CDS $C = 0$, $G_t = st$ et $Z = (1-R)$

$$V_t = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E_* \left( \int_t^T \mathbf{1}_{\{\tau>u\}} e^{-\int_t^u r_s ds} s du - (1-R)\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}} e^{-\int_t^\tau r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t \vee D_t \right)$$

On rappelle que l'évaluation de CDS à la date initiale $t = 0$ pour l'objectif de trouver la valeur de $S$ : ici, si $t = 0$,

$$V_0 = E_* \left( \int_0^T \mathbf{1}_{\{\tau>u\}} e^{-\int_0^u r_s ds} s du - (1-R)\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}} e^{-\int_0^\tau r_s ds} \right) = 0$$

$$\Rightarrow S = \frac{E_*((1-R)\mathbf{1}_{\{\tau\leq T\}} e^{-\int_0^\tau r_s ds})}{E_*(\int_0^T \mathbf{1}_{\{\tau>u\}} e^{-\int_0^u r_s ds} du}$$

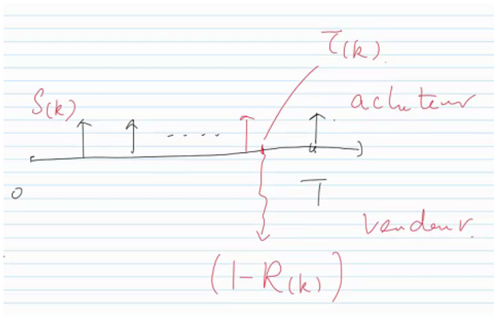
Et on retrouve le résultat vu précédemment.

La formule de $V_t$ nous permet de calculer la valeur dynamique d'un CDS qui a été transacté à la date 0, donc la valeur de $S$ (spread de CDS à la date 0) reste inchangé dans la formule, mais la probabilité de défaut (c'est-à-dire la loi conditionnelle de $\tau$) peut changer entre temps, ce qui peut créer des P&L pour cette position de CDS.

### 1.1.3 Basket Default Swap (Produit avec multi-sousjacents)

Un basket default swap ou un $k^{th}$-to-default swap est une extension directe du CDS sauf que le produit est érit sur portefeuille de sous-jacents. Ce type de produits permet aux investisseurs de gérer les risques de plusieurs contrepartie de façon globale avec un coût réduit. Par exemple, $k^{th}$-to-default swap fournit à son acheteur la protection contre le kème défaut qui a lieu dans le portefeuille. Le plus important est le firt-to-default swap.

Soient $\tau_1, ..., \tau_n$ une famille de temps de défaut de $n$ noms sous-jacents. En pratique, $n = 3$ à 7, et le plus souvent $n = 5$. On introduit l'ensemble de l'ordre croissant de cette famille, c'est-à-dire une permutation $\{\tau_{(1)}, ..., \tau_{(n)}\}$ de $\{\tau_1, ..., \tau_n\}$ telle que $\tau_{(1)} \leq ... \leq \tau_{(n)}$.
En d'autres termes, $\tau_{(1)} = min(\tau_1, ..., \tau_n)$ et $\tau_{(n)} = max(\tau_1, ..., \tau_n)$.
Le mécanisme de paiement est très similaire à celui d'un CDS :




L'acheteur du $k+D$ swap paie un montant préfixé $S_{(k)}$ (le spread du $k+D$ swap) à des dates régulières jusqu'à la date $\tau_{(k)}$ si celle-ci arrive avant la maturité $T$. Au cas où il y a moins de $k$ défauts avant $T$, alors le paiement continue jusqu'à $T$.
Le vendeur, à la date $\tau_{(k)}$, va rembourser à l'acheteur le montant $(1 - R_{(k)})$ où $R_{(k)}$ est le taux de recouvrement pour le kème défaut. Si $\tau_{(k)} > T$, le vendeur ne paie rien. Ainsi, le calcul est aussi très similaire.
On prend le point de vue du vendeur : le flux qu'il va recevoir (dans le futur), vu à la date $t < min(t, \tau_{(k)})$ est donné par :

$$\int_t^T \mathbf{1}_{\{\tau_{(k)}>u\}} D(t,u) S_{(k)} du$$

Le flux qu'il va payer vu à la date $t$ est donné par :

$$\mathbf{1}_{\{\tau_{(k)} \leq T\}} D(t, \tau_{(k)})(1 - R_{(k)})$$

On obtient alors le spread du $k+D$ swap :

$$S_{(k)} = \frac{E_*\left(\mathbf{1}_{\{\tau_{(k)} \leq T\}} D(t, \tau_{(k)})(1 - R_{(k)}\right)}{E_*\left(\int_0^T \mathbf{1}_{\{\tau_{(k)}>u\}} D(0,u) du\right)}$$

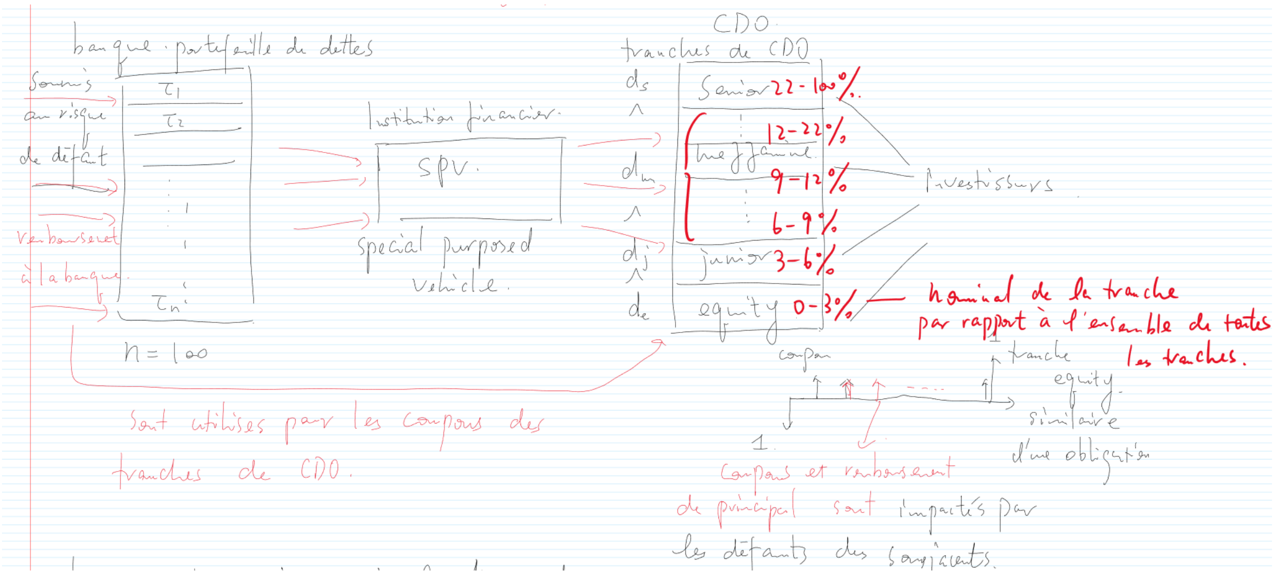
C'est une formule générale qui s'applique à tous les modèles de $(\tau_1, ..., \tau_n)$. en revanche, pour calculer sa valeur explicite, la structure de corrélation entre les défauts joue un rôle très important.
On peut aussi calculer la valeur dynamique du $k+D$ Swap à une date $t < min(T, \tau_{(k)})$ (vu par le vendeur) :

$$V_t = \mathbf{1}_{\{\tau_{(k)}>t\}} E_*\left(\int_t^T \mathbf{1}_{\{\tau_{(k)}<u\}} S_{(k)} D(t,u) du - \mathbf{1}_{\{\tau_{k)} \leq T\}} (1 - R_{(k)}) D(t, \tau_{(k)}) \middle| \mathcal{F}_t \vee D_t^1 \vee ... \vee D_t^n\right)$$

où $D_t^1 \vee ... \vee D_t^n$ est l'information sur les défauts de tous les sous-jacents, $S_{(k)}$ est la valeur calculée à la date 0.

### 1.1.4 CDO (Collateralized Debt Obligation)

C'est un produit structuré sur un portefeuille de dettes, sous une forme similaire à celle d'une obligation.




Une CDO est une transaction spéciale entre des investisseurs et des émetteurs de dettes par intermédiaire d'un organisme appelé special purposed vehicle(SPV). Le sous-jacent d'une CDO est un portefeuille de dettes (obligations, prêts, etc.) détenu par une institution financière (comme par exemple une banque) ; le portefeuille supporte les risques de défaut de chaque nom. La mission de SPV consiste à réorganiser ces dettes sous forme de tranches de CDO et les revendre aux investisseurs du marché. Cette procédure est appelée la titrisation. Les investisseurs, au lieu d'acheter directement les obligations individuelles, investit sur ces tranches de CDO suivant leurs aversions au risque. Il existe pour une CDO une tranche equity, un tranche junior, une ou plusieurs tranches mezzanine et une tranche senior. Chaque tranche de CDO a les caractérisques d'une obligation : un investisseur paie un montant à la date initiale et reçoit des coupons prefixés pour la tranche correspondante à des dates régulières. Les remboursement des coupons respectent un principe de hiérarchisation : la tranche senior qui reçoit un coupon moins élevé est remboursé en premier, les tranches mezzanines et junior sont remboursées ensuite, la tranche senior qui porte un coupon excessif est remboursé à la fin. Par cet ordre de subordination, les tranches supérieures sont protégées par les tranches inférieures contre le risque de défaut du portefeuille sous-jacent.

La tranche qui reçoit le taux de coupon le plus élevé, c'est-à-dire la tranche equity, sera la première à être touchée par les défauts du sous-jacent. La tranche equity subira une perte de coupon (proportionelle à la parte du portefeuille sous-jacent) et aussi du principal.
S'il y a une quantité de perte due aux défauts qui est plus importante que le nominal total de la tranche equity, la tranche equity sera complètement perdue, et c'est la tranche junior qui va commencer à subir la perte.
L'objectif est de calculer le taux de coupon pour toutes les tranches qui dépend de la structure de corrélation entre les défauts sous-jacents.

# Chapitre 2

# Modèles structurels

## 2.1 Modèle de Merton

23.03.21
L'idée de l'approche structurelle dans la modélisation de temps de défaut est basée sur l'article fondateur de Merton en 1973, où un défaut est provoqué quand une entreprise/pays souveraine n'arrive pas à rembourser ses engagements de remboursement (dette, obligations, etc).
Dans l'article de Merton, la valeur de l'entreprise est modélisée par un mouvement brownien géométrique comme dans le modèle de Black-Scholes :

$$dV_t = V_t(\mu dt + \sigma dW_t)$$

où $\mu$ et $\sigma$ sont des constantes et $(W_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien standard.

On peut rajouter dans l'EDS le niveau de coupon (ou de dividende) ce qui impliquera un changement de la valeur de $\mu$ mais ne changera pas le type d'équation stochastique ($(V_t)_{t\geq 0}$ reste un mouvement brownien).
L'entreprise doit rembourser sa dette dont la valeur est $L > 0$ et l'échéance est $T > 0$. Le défaut de l'entreprise se produit seulement à la date $T$ si sa valeur en $T$ ne permet pas d'effectuer le remboursement, c'est-à-dire si $V_T < L$. Sinon, l'entreprise va survivre.
En d'autres termes, le temps de défaut est définit par

$$\tau = T\mathbf{1}_{\{V_T<L\}} + \infty\mathbf{1}_{\{V_T\geq L\}}$$

Dans ce modèle, la filtration de référence $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est engendrée par le mouvement brownien, c'est-à-dire $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$.
Le temps de défaut $\tau$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt ; en effet $\{\tau \leq t\}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable :
- Si $t < T$, comme $\{\tau \leq t\}$ ne peut pas être réalisé ou de façon équivalente, $\mathbf{1}_{\{=0\}}$ presque-sûrement, donc $\{\tau \leq t\}$ est bien $\mathcal{F}_t$-mesurable.
- Si $t \geq T$, $\{\tau \leq t\} = \{\tau = T\} = \{V_T < L\}$ car $V_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et $\mathcal{F}_T \subset \mathcal{F}_t$. Donc $\{\tau \leq t\}$ est bien $\mathcal{F}_t$-mesurable également.

On peut étudier la valeur dynamique de la dette dont le payoff à $T$ est donné par :

$$D_T = L\mathbf{1}_{\{V_T\geq L\}} + V_T\mathbf{1}_{\{V_T<L\}}$$

c'est-à-dire en cas de défaut, l'entreprise va rembourser partiellement sa dette à hauteur de $V_T$.

On remarque que

$$\begin{aligned} D_T &= min(L, V_T) \\ &= L - \underbrace{(L - V_T)^+}_{\text{Payoff d'un put}} \\ &= V_T - \underbrace{(V_T - L)^+}_{\text{Payoff d'un call}} \end{aligned}$$

En utilisant le résultat par le modèle de Black-Scholes ainsi que le principe d'AOA, on obtient la valeur dynamique de la dette :

$$D_t = LB(t, T) - P_t$$

où $B(t,T)$ désigne le prix d'une obligation zéro-coupon de maturité $T$ et $P_t$ désigne le prix d'une option put du sous-jacent $(V_t)_{t\geq 0}$, maturité $T$ et strike $L$.

On peut aussi calculer la probabilité de défaut/survie conditionnelle :

$$P(\tau \leq T|\mathcal{F}_t) = P(\tau = T|\mathcal{F}_t) = P(V_T < L|\mathcal{F}_t)$$

Par l'EDS :

$$\begin{aligned}
dV_t &= V_t(\mu dt + \sigma dW_t) \\
V_T &= V_0 e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)T+\sigma W_T} \text{ avec } V_0 \text{ qui est } \mathcal{F}_0\text{-mesurable} \\
V_T &= V_t e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} \text{ avec } V_t \text{ qui est } \mathcal{F}_t\text{-mesurable} \\
&\quad \text{car } W_T - W_t \hookrightarrow W_{T-t} \text{ qui est une loi stationnaire } \hookrightarrow \mathcal{N}(0, T-t) \text{ indépendante de } \mathcal{F}_t
\end{aligned}$$

Donc la probabilité de défaut conditionnelle devient :

$$P\left(V_t e^{(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)+\sigma(W_T-W_t)} < L|\mathcal{F}_t\right) \tag{2.1}$$

où $V_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable et $(W_T - W_t) \perp \mathcal{F}_t$.

**Rappel :**

$$E[X|\mathcal{A}] = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ est } \mathcal{A}\text{-mesurable} \\ E[X] & \text{si } X \perp \mathcal{A} \end{cases}$$

Donc la formule (2.1) peut s'écrire :

$$P\left( \underbrace{W_T - W_t}_{\hookrightarrow \mathcal{N}(0,T-t)} < \frac{ln(\frac{L}{V_t}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma} \middle| \mathcal{F}_t \right)$$

On a que $W_T - W_t \hookrightarrow \sqrt{T-t}Z$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$, donc la formule précédente s'écrit :

$$\mathcal{N}\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(ln(\frac{L}{V_t}) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right)\right)$$

où $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition de la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$.
On désigne

$$d_t = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\left(ln(\frac{V_t}{L}) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)\right)$$

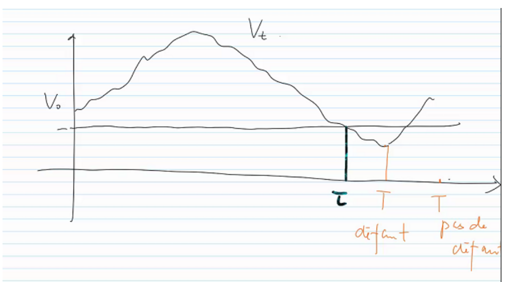
et on a

$$P(\tau \leq T|\mathcal{F}_t) = \mathcal{N}(-d_t)$$

Le terme $d_t$ est appelé la "distance to default" à la date $t$.

## 2.2 Modèles du premier temps de passage

On propose à généraliser le modèle de Merton par l'idée suivante : le défaut peut avoir lieu à tout moment quand la valeur de l'entreprise descend au-dessous d'un certain seuil, souvent supposé constant ou déterministe.




En termes mathématiques, il s'agit du temps de passage (ou le temps d'atteinte) pour un processus stochastique d'entrer ou de sortir d'un domaine.

Quand la barrière reste constante ou déterministe, le temps de défaut est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $\mathbb{F}$ (qui est de plus un temps d'arrêt prévisible).

La barrière pourrait être généralisée à un processus stochastique (ou une variable aléatoire) non nécessairement $\mathbb{F}$-adapté (ou $\mathcal{F}$-mesurable). Dans ce cas, $\tau$ n'est pas nécessairement un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt et on passe à l'approche forme-réduite de modélisation.

On considère un processus stochastique $X = (X_t, t \geq 0)$ et $B$ un ensemble et on définit

$$\tau(\omega) = inf\{t \geq 0 : X_t(\omega) \in B\}$$

On appelle $\tau$ le premier temps d'entrée de $X$ dans l'ensemble $B$ (de sortir de $X$ à partir de l'ensemble $B^c$).
On peut prendre par exemple $B = ]-\infty, L[$.

### 2.2.1 Modèle Black-Cox

C'est une extension directe du modèle de Merton où la valeur de l'entreprise $(V_t)_{t\geq 0}$ est comme dans le modèle de Black-Scholes et on définit

$$\tau := inf\{t \geq 0 : V_t \leq L\}$$

Ce qui est équivalent à

$$\begin{aligned}\tau &:= inf\{t \geq 0 : V_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t} < L\} \\ &= inf\{t \geq 0 : W_t + (\frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2})t < \frac{1}{\sigma} ln(\frac{L}{V_0})\}\end{aligned}$$

C'est un temps d'atteinte d'un mouvement brownien avec drift d'une barrière constante.
Soit $\mathbf{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ où $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$, alors $\tau$ est un temps d'arrêt prévisible par rapport à $\mathbb{F}$.
On s'intéresse à calculer la probabilité de défaut/survie. Par définition :

$$P(\tau > t) = P(\min_{s \leq t} V_S > L)$$

Dans la suite, on désigne par $X_t = W_t + \nu_t$ où $\nu$ est une constante et on désigne par $m_t^X = \min_{0\leq s\leq t} X_s$ son processus d'infimum.
On commence par le principe de reflet d'un mouvement brownien.

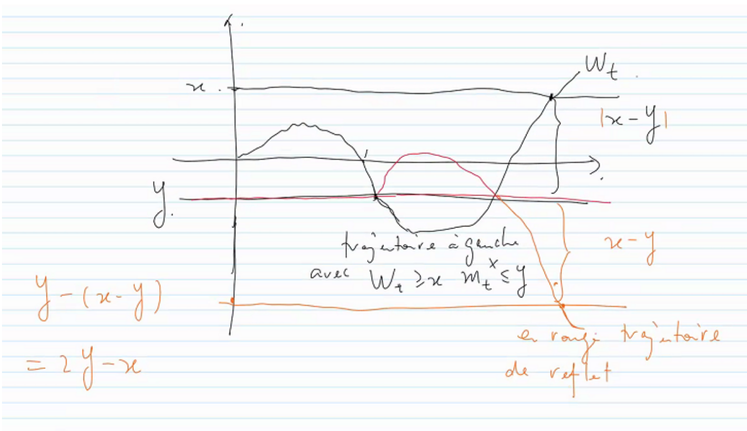
**Propriété :** Lemme
Soient $W = (W_t)_{t\geq 0}$ un MB, et $Y \leq 0$ une constante. Pour toute fonction $f$ tq $E[f(W_t)]$ existe, on a :

$$E\Big(f(W_t)\mathbf{1}_{\{W_t \geq y, m_t^W \leq y\}}\Big) = E\Big(f(2y - W_t)\mathbf{1}_{\{2y - W_t \geq y\}}\Big)$$

**Démonstration :**
On remarque que pour tout $y \leq 0$ et $x \geq y$,

$$P(W_t \geq x, m_t^W \leq y) = P(2y - x \geq W_t) = P(2y - W_t \geq x)$$

Montrons la première égalité.
$(-W_t)_{t\geq 0}$ est aussi un mouvement brownien.



Alors

$$E\Big(f(2y-W_t)\mathbf{1}_{\{2y-W_t\geq y\}}\Big) = -\int_y^{+\infty} f(x)d_xP(2y-W_t\geq x)$$
$$= -\int_y^{+\infty} f(x)d_xP(W_t\geq x, m_t^W\leq y)$$
$$= E\Big(f(W_t)\mathbf{1}_{\{W_t\geq y\}}\mathbf{1}_{\{m_t^W\leq y\}}\Big)$$

C'est ce que l'on voulait démontrer.

On obtient ainsi la loi jointe de $(W_t, m_t^W)$ en utilisant seulement la loi de $W_t$.

**Propriété :**
Pour tout $y \leq 0$ et $x \geq y$,

$$P\Big(X_t\geq x, m_t^X\leq y\Big) = e^{2\nu y}\mathcal{N}\Big(\frac{2y-x+\nu t}{\sqrt{t}}\Big)$$

où $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$.

**Démonstration :**
Le lemme précédent nous permet de faire le calcul pour un mouvement brownien. Pour un MB avec un drift en temps, on va faire un changement de probabilité, et le théorème de Girsanov pour ramener au cas du MB.
On fait le changement de probabilité (on cherche une proba sous laquelle $X_t = W_t + \nu t$ est un MB) :

$$\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}} = e^{-\nu W_T - \frac{\nu^2}{2}T}$$

$\mathbb{P}$-ps sur $\mathcal{F}_t$.
Alors par le théorème de Girsanov, on a $(X_t)_{t\geq 0} = (W_t+\nu t)_{t\geq 0}$ est un $\hat{\mathbb{P}}$-mouvement brownien et on a :

$$\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}} = e^{\nu W_T + \frac{\nu^2}{2}T} = e^{\nu X_T - \frac{\nu^2}{2}T}$$

qui est une $\hat{\mathbb{P}}$-martingale.

Donc

$$P(X_t\geq x, m_t^X\leq y) = E_{\mathbb{P}}\Big(\mathbf{1}_{\{X_t\geq x, m_t^X\leq y\}}\Big)$$
$$= E_{\hat{\mathbb{P}}}\Big(\mathbf{1}_{\{X_t\geq x, m_t^X\leq y\}}(\frac{d\mathbb{P}}{d\hat{\mathbb{P}}})\Big)$$
$$= E_{\hat{\mathbb{P}}}\Big(\mathbf{1}_{\{X_t\geq x, m_t^X\leq y\}}e^{\nu X_t - \frac{\nu^2}{2}t}\Big)$$
$$\text{D'après le lemme } \Rightarrow = E_{\hat{\mathbb{P}}}\Big(e^{\nu(2y-X_t)-\frac{\nu^2}{2}t}\mathbf{1}_{\{2y-X_t\geq x\}}\Big)$$
$$= e^{2\nu y}E_{\hat{\mathbb{P}}}\Big(e^{-\nu X_t-\frac{\nu^2}{2}t}\mathbf{1}_{\{X_t\leq 2y-x\}}\Big)$$

On peut procéder de deux manières différentes, soit par calcul direct, soit avec un nouveau changement de probabilité pour débarrasser la martingale exponentielle. On pose $\frac{d\tilde{\mathbb{P}}}{d\hat{\mathbb{P}}} = e^{-\nu X_t - \frac{\nu^2}{2}t}$.
Par le théorème de Girsanov, $\tilde{W}_t = X_t + \nu t$ est un $\tilde{P}$-mouvement brownien. Donc la formule précédente devient :

$$= e^{2\nu y}E_{\hat{\mathbb{P}}}\Big((\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\tilde{\mathbb{P}}}e^{-\nu X_t-\frac{\nu^2}{2}t}\mathbf{1}_{\{X_t\leq 2y-x\}}\Big)$$
$$= e^{2\nu y}E_{\tilde{\mathbb{P}}}\Big(\mathbf{1}_{\{X_t\leq 2y-x\}}\Big)$$
$$= e^{2\nu y}E_{\tilde{\mathbb{P}}}\Big(\mathbf{1}_{\{\tilde{W}_t-\nu t\leq 2y-x\}}\Big)$$
$$= e^{2\nu y}E_{\tilde{\mathbb{P}}}\Big(\mathbf{1}_{\{\tilde{W}_t\leq 2y-x+\nu t\}}\Big)$$
$$= e^{2\nu y}\mathcal{N}\Big(\frac{2y-x+\nu t}{\sqrt{t}}\Big)$$

**Propriété :** Corollaire
Pour tout $y \leq 0$, on a :

$$P(m_t^X \geq y) = \mathcal{N}\left(\frac{-y+\nu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\nu y}\mathcal{N}\left(\frac{y+\nu t}{\sqrt{t}}\right)$$

**Démonstration** :
Comme $m_t^X$ est le processus d'infimum de $X_t$, on a :

$$P(m_t^X \geq y) = P(m_t^X \geq y, X_t \geq y)$$

Alors $\forall y \leq 0$, $x \geq y$, par la proposition précédente,

$$\begin{aligned} P(X_t \geq x, m_t^X \geq y) &= P(X_t \geq x) - P(X_t \geq x, m_t^X \leq y) \\ &= \mathcal{N}\left(\frac{-x+\nu t}{\sqrt{t}}\right) - e^{2\nu y}\mathcal{N}\left(\frac{2y-x+\nu t}{\sqrt{t}}\right) \end{aligned}$$

En prenant $x = y$, on obtient la proposition.

**Propriété :**
La probabilité conditionnelle de survie est donnée pour tout $0 \leq t \leq T$, par :

$$P\Big(\tau > T|\mathcal{F}_t\Big) = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\left(\mathcal{N}\left(\frac{-y+X_t+\nu(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right) - e^{2\nu(y-X_t)}\mathcal{N}\left(\frac{y-X_t+\nu(T-t)}{\sqrt{T-t}}\right)\right)$$

où $X_t = W_t + \nu_t$, $\nu = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}$ et $y = \frac{1}{\sigma}ln(\frac{L}{V_0})$.

**Démonstration :**
On rappelle d'abord que $\{\tau > T\} = \{m_T^V > L\} = \{m_T^X > y\}$.
Donc $P(\tau > T|\mathcal{F}_t) = P(m_T^X > y|\mathcal{F}_t)$ .
Par le corollaire précédent et la propriété markovienne de la diffusion brownienne, on remplace dans le corollaire $y$ par $y - X_t$ et $t$ par $T - t$ et on obtient la proposition.

# Chapitre 3

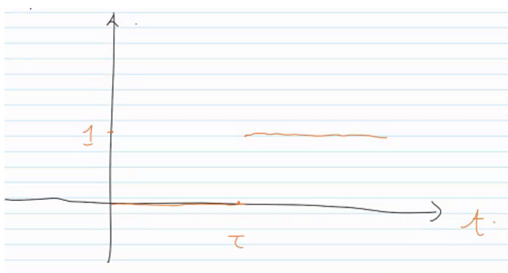
# Modèle forme-réduite

30.03.21
Le modèle structurel présente une très bonne interprétabilité financière. Le problème est que le saut est un temps d'arrêt car le mouvement brownien est un processus continu, et donc ce temps d'arrêt est prévisible. Les gens ont donc trouvé à redire sur ce modèle puisqu'en réalité on ne peut pas prédire quand survient la faillite.
On a donc créé ce modèle à forme réduite/intensité, qui permet de modéliser la faillite comme une arrivé brutale.

Dis autrement, dans l'approche structurelle, on a une filtration $\mathbb{F} = \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ , où $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t)$. Le temps de défaut $\tau$ définit comme le premier temps de passage est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt. De plus, comme le mouvement brownien est continu, $\tau$ est un temps d'arrêt prévisible.
Dans l'approche forme-réduite, $\tau$ n'est pas nécessairement un temps d'arrêt dans $\mathbb{F}$ (l'information de diffusion mouvement brownien n'implique pas l'information sur défaut). Il y a plus de "surprise" concernant l'arrivée du défaut par cette approche.
Dans ce cas-là, on a besoin de distinguer d'abord les différents types d'information dans le marché :

- L'information ambiante du marché représentée toujours par $\mathbb{F}$ (qui contient par exemple les taux d'intérêt, le prix de l'actif sous-jacent, la valeur de la firme, etc)
- L'information sur l'évènement de défaut modélisé par une nouvelle filtration $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t\geq 0}$ où $\mathcal{D}_t$ est engendée par le processus indicatrice de défaut $\mathbf{1}_{\{\tau \leq t\}}$.

  - $\mathcal{D}_t = \sigma(\mathbf{1}_{\{\tau\leq s\}}, s \leq t)$
  - $(\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \leq t))$




On voit que $\mathcal{D}_t = \mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$ est un processus à saut qui prend valeurs dans $\{0, 1\}$ avec un saut au moment de $\tau$.
Cette filtration contient les informations suivantes concernant le défaut $\tau$ :

- Est-ce que le défaut a lien ou non, à une date $t \geq 0$ arbitraire ;
- Si le défaut est arrivé, on connait le temps exact de défaut $\tau$.

**Remarque :**
Si $\tau$ est un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, alors $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, donc $\mathbf{1}_{\{\tau\leq t\}}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable. Ce qui implique que $\mathcal{D}_t \subseteq \mathcal{F}_t$. Il n'est donc pas nécessaire d'introduire cette nouvelle filtration.
En revanche, quand $\tau$ n'est pas un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt, alors la nouvelle filtration $\mathbb{D} = (\mathcal{D}_t)_{t\geq 0}$ représente une nouvelle source de risque concernant le défaut.

L'information globale du marché financier contient ces deux types d'information. On a :

- $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{D}$
- $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{D}_t$

Le symbole $\vee$ est une union, mais qui forme une tribu. Cette théorie en probabilité est appelée "théorie de grossissement de filtration", et a été développée dans les années 70-80 par l'école française de probabilité par Jacod, Yor et Jenkin ( ?) : *Application sur le risque de crédit d'information asymétrique.*

Dans un marché avec le risque de crédit, on travaille avec l'information globale observable $\mathbb{G} = (\mathcal{G}_t)_{t\geq 0}$. Plus précisément, pou évaluer un produit dérivé de crédit ou un produit plus classique (comme une obligation) mais sensible au risque de défaut de l'émetteur, on cherche à calculer des espérances conditionnelles par rapport à $\mathcal{G}_t$.
En général, $\mathbb{F}$ est engendrée par un MB (éventuellement multi-dimensionnel) et on sait faire les calculs de pricing par rapport à $\mathbb{F}$. Donc l'idée est d'établir un lien entre les deux calculs dans $\mathbb{G}$ et $\mathbb{F}$ et transformer les $\mathcal{G}_t$-espérances conditionnnelles à des $\mathcal{F}_t$-espérances conditionnnelles.

**Exemple : Une obligation zéro-coupon avec risque de défaut.**
On commence par une obligation zéro-coupon classique qui paie 1 euro à la maturité $T$. Soit $(r_t)_{t\geq 0}$ le taux court, un processus $\mathbb{F}$-adapté. Le prix de l'OZC classique est donné par

$$B(t,T) = E_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r_s ds} 1 | \mathcal{F}_t\right) \tag{3.1}$$

L'OZC classique ne contient pas de risque de défaut, donc l'information de pricing est $\mathbb{F}$.
On peut calculer cette $\mathcal{F}_t$-espérance conditionnelle dans différents modèles : Vasicek, CIR, etc.

On considère maintenant une obligation zéro-coupon défautable dont le payoff est $\begin{cases} 1 & \text{si } \tau > T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.
Son prix à une date $t \leq T$ est :

$$\tilde{B}(t,T) = E_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r_s ds} \mathbf{1}_{\{\tau > T\}} \middle| \mathcal{G}_t\right) \tag{3.2}$$

Si on compare les formules (3.1) et (3.2), on remarque deux différences :
- Le payoff $\mathbf{1}_{\{\tau > T\}}$ qui dépend du défaut (au lieu de 1)
- L'information à conditionner est $\mathcal{G}_t$ (au lieu de $\mathcal{F}_t$).

Le but est de calculer cette $\mathcal{G}_t$-espérance conditionnelle (formule (3.2)).

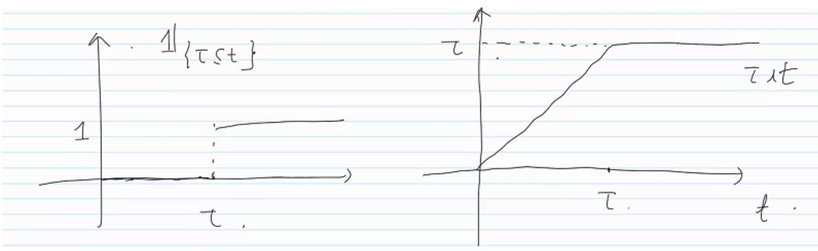
On présente un résultat clé pour calculer les $\mathcal{G}_t$-espérances conditionnelles.

**Propriété :**
Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ l'espace de probabilité et $Y$ une variable aléatoire $\mathcal{A}$-mesurable. Pour tout $t \geq 0$, on a :

$$E(\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau > t\}} \frac{E(\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} Y | \mathcal{F}_t)}{E(\mathbf{1}_{\{\tau > t\}} | \mathcal{F}_t)}$$

**Remarque :**
En termes financiers, les dérivés de crédit sont évalués à une date $t$ avec le défaut $\tau$ (car le produit s'arrête à $\tau$ et n'a donc plus de valeurs après). Donc la formule de pricing est calculée sur $\{t < \tau\}$.

**Démonstration :**
1. On va d'abord montrer que sur l'ensemble $\{t < \tau\}$, toute variable aléatoire $\mathcal{G}_t$-mesurable coïncide avec une variable aléatoire $\mathcal{F}_t$-mesurable.
Par définition, on a $\mathcal{G}_t = \mathcal{F} \vee \mathcal{D}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\mathbf{1}_{\{\tau \leq s\}}, s \leq t)$. On a également une représentation équivalente : $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau \wedge t)$.
Ces deux représentations donnent la même information engendrée :



Sur l'ensemble $\{t < \tau\}$, on a $\sigma(\tau \wedge t) = \sigma(t)$, donc $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(t) = \mathcal{F}_t$ car $\sigma(t)$ est déterministe.

2. Pour toute variable aléatoire $\bar{Y}$ qui est $\mathcal{G}_t$-mesurable, par 1., il existe une v.a. $Z$ qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable, et coïncide avec $\bar{Y}$ sur $\{t < \tau\}$.
Donc pour $E(Y|\mathcal{G}_t)$ qui est $\mathcal{G}_t$-mesurable, $\exists Z$ qui est $\mathcal{F}_t$-mesurable tq :

$$E(Y|\mathcal{G}_t)\mathbf{1}_{\{t<\tau\}} = Z\mathbf{1}_{\{t<\tau\}} \tag{3.3}$$

car $\mathbf{1}_{\{t<\tau\}} \in \mathcal{D}_t \subset \mathcal{G}_t$.

3. On va calculer la forme explicite de $Z$ (comme indiqué dans la proposition). On prend l'espérance conditionnelle par rapport à $\mathcal{F}_t$ sur (3.3) et on obtient :

$$\begin{aligned} E(Y|\mathcal{G}_t)\mathbf{1}_{\{t<\tau\}} &= E(E(\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}Y|\mathcal{G}_t)|\mathcal{F}_t) \\ &= E(\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}Y|\mathcal{F}_t) \text{ car } \mathcal{F}_t \subset \mathcal{G}_t \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} Z\mathbf{1}_{\{t<\tau\}} &= E(Z\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}|\mathcal{F}_t) \\ &= ZE(\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}|\mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

Donc en reprenant (3.3), on peut égaliser ces deux formules trouvées :

$$\begin{aligned} E(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}Y|\mathcal{F}_t) &= ZE(\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}|\mathcal{F}_t) \\ \Rightarrow Z &= \frac{E(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}Y|\mathcal{F}_t)}{E(\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}|\mathcal{F}_t)} \end{aligned}$$

Et en remplaçant cette formule de $Z$ dans (3.3) :

$$E(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}Y|\mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}Y|\mathcal{F}_t)}{E(\mathbf{1}_{\{t<\tau\}}|\mathcal{F}_t)}$$

La proposition nous permet de calculer les $\mathcal{G}_t$-espérances conditionnelles en utilisant des $\mathcal{F}_t$-espérances conditionnelles.

On revient à l'exemple de ZC défautable et commence par regarder la probabilité conditionnelle de survie.

**Exemple :**
$P(\tau > T|\mathcal{G}_t) = E(\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{G}_t)$. On applique la proposition :

$$\begin{aligned} E(\underbrace{\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}}_{Y}|\mathcal{G}_t) &= E(\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}|\mathcal{G}_t) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}E(\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{G}_t) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{F}_t)}{E(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}|\mathcal{F}_t)} \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E(\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{F}_t)}{E(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}|\mathcal{F}_t)} \\ \text{On pose } S_t = E(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}|\mathcal{F}_t), \Rightarrow &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E(E(\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_t)}{S_t} \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E(S_T|\mathcal{F}_t)}{S_t}\left(= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}E(\frac{S_T}{S_t}|\mathcal{F}_t)\right) \end{aligned}$$

**Exemple :**
Si on revient à l'exercice 1 du TD1, $\tau$ est le premier saut d'un processus de poisson, le taux d'intérêt $r$ est constant, d'intensité $\lambda$ (donc pas de $\mathbb{F}$).
$S_t = P(\tau > t|\mathcal{F}_t) = P(\tau > t) = e^{-\lambda t} \Rightarrow \frac{S_T}{S_t} = e^{-\lambda(T-t)} \Rightarrow P(\tau > T|\mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}e^{-\lambda(T-t)}$.

**Exemple : Obligation ZC défautable**

$$
\begin{aligned}
E(\underbrace{\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}e^{-\int_t^T r_s ds}}_{Y}|\mathcal{G}_t) &= E(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}e^{-\int_t^T r_s ds}|\mathcal{G}_t) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}E(\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}e^{-\int_t^T r_s ds}|\mathcal{G}_t) \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}e^{-\int_t^T r_s ds}|\mathcal{F}_t)}{E(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}|\mathcal{F}_t)} \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E(\mathbf{1}_{\{\tau>t\}}e^{-\int_t^T r_s ds}|\mathcal{F}_t)}{S_t}
\end{aligned}
$$

$e^{-\int_t^T r_s ds}$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable car $(r_t)_{t\geq 0}$ est $\mathbb{F}$-adapté donc $r_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

$$
\begin{aligned}
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E(E\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}e^{-\int_t^T r_s ds}|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_t)}{S_t} \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}\frac{E(e^{-\int_t^T r_s ds}E(\mathbf{1}_{\{\tau>T\}}|\mathcal{F}_t)|\mathcal{F}_t}{S_t} \\
&= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}}E(e^{-\int_t^T r_s ds}\frac{S_T}{S_t}|\mathcal{F}_t)
\end{aligned}
$$

Ces résultats sont très généraux et s'appliquent à tout modèle de défaut où $\tau$ n'est pas un $\mathbb{F}$-temps d'arrêt. On peut les appliquer dans les modèles explicites souvent dits les modèles d'intensités parmi lesquels le plus basique est basé sur un processus de poisson. Dans le modèle le plus simple au-dessus (TD1), on a $\frac{S_T}{S_t} = e^{-\lambda(T-t)}$.

On cherche à généraliser ce modèle dans le cas plus général avec des intensités stochastiques.
On commence par rappeler le modèle avec le processus de Poisson avec l'intensité constante $\lambda > 0$. C'est un processus de comptage à valeurs dans $\mathbb{N}$ tq :

$$P(N_T - N_t = n) = \frac{1}{n!}(T-t)^n\lambda^n e^{-\lambda(T-t)}$$

$\tau = inf\{t \geq 0 : N_t > 0\} = inf\{t \geq 0 : N_t = 1\}$ le premier instant de saut.
$P(\tau > t) = P(N_t = 0) = e^{-\lambda t}(= S_t)$.
Le processus $(N_t - \lambda t, t \geq 0)$ est une martingale. C'est le plus simple des modèles d'intensité (avec une intensité constante).

On va maintenant généraliser un peu.

## processus de poisson inhomogène

C'est une extension du processus de Poisson où l'intensité est une fonction déterministe en temps $\lambda(t)$ (mais c'est pas encore aléatoire, et il n'y a pas de $\mathbb{F}$ non plus).

$$P(N_T - N_t = n) = \frac{1}{n!}\left(\int_t^T \lambda(s)ds\right)^n e^{-\int_t^T \lambda(s)ds}$$

On définit encore $\tau$ comme le premier instant de saut $\tau = \inf\{t \geq 0, N_t > 0\}$ et on obtient la probabilité de survie :

$$P(\tau > t) = P(N_t = 0) = e^{-\int_0^t \lambda(s)ds}$$

Comme il n'y a pas de $\mathbb{F}$, on a $S_t = P(\tau > t|\mathcal{F}_t) = P(\tau > t) = e^{-\int_0^t \lambda_s ds}$ et $\frac{S_T}{S_t} = e^{-\int_t^T \lambda(s)ds}$.
Le processus $(N_t - \int_0^t \lambda(s)ds, t \geq 0)$ est une martingale.

## Modèle de Cox (doubly Stochastic Process)

C'est une extension du modèle de Poisson inhomogène où l'intensité devient stochastique. On se donne une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ (l'information ambiante du marché). Un processus de Cox admet une intensité $(\lambda_t)_{t\geq 0}$ qui est un processus stochastique positif et adapté à la filtration $\mathbb{F} = \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ . Il s'agit d'un processus de comptage qui, conditionnellement à la filtration $\mathbb{F}$, peut-être vu comme un processus de poisson inhomogène.

On va considérer le modèle de Cox comme la suite.
On définit le temps de défaut $\tau$ par :

$$\tau = \inf\{t \geq 0 : \int_0^t \lambda_s ds > \Gamma\}$$

où $\Gamma$ est une variable aléatoire exponentielle de paramètre 1, c'est-à-dire $\Gamma \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$ et qui est indépendante de la filtration $\mathbb{F}$.
On calcule la probabilité conditionnelle de survie

$$S_t = P(\tau > t|\mathcal{F}_t) = P(\underbrace{\int_0^t \lambda_s ds}_{\mathcal{F}_t-\text{mesurable}} < \underbrace{\Gamma}_{\perp \mathcal{F}_t}|\mathcal{F}_t)$$

Soient une tribu $\mathcal{B}$, une v.a. $X$, $E(X|\mathcal{B}) = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ est } \mathcal{B}\text{-mesurable} \\ E(X) & \text{si } X \perp \mathcal{B} \end{cases}$.
Donc si on reprend le calcul précédent :

$$P(\int_0^t \lambda_s ds < \Gamma|\mathcal{F}_t) = \underbrace{exp\Big(-\int_0^t \lambda_s ds\Big)}_{\mathcal{F}_t-\text{mesurable}}$$

Ce qui implique ensuite $\frac{S_T}{S_t} = e^{-\int_t^T \lambda_s ds}$.

Si on revient aux deux exemples précédents :
1.

$$\begin{aligned} P(\tau > T|\mathcal{G}_t) &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\Big(\frac{S_T}{S_t}|\mathcal{F}_t\Big) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E(e^{-\int_t^T \lambda_s ds}|\mathcal{F}_t) \end{aligned}$$

2. Le prix de l'obligation ZC défautable :

$$\begin{aligned} \tilde{B}(t,T) &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\Big(e^{-\int_t^T r_s ds}\frac{S_T}{S_t}|\mathcal{F}_t\Big) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\Big(e^{-\int_t^T r_s ds} e^{-\int_t^T \lambda_s ds}|\mathcal{F}_t\Big) \\ &= \mathbf{1}_{\{\tau>t\}} E\Big(e^{-\int_t^T (r_s+\lambda_s) ds}|\mathcal{F}_t\Big) \end{aligned}$$

**Remarques :**

1. On peut ainsi calculer le prix d'un produit sensible au défaut par une $\mathcal{F}_t$-espérance conditionnelle similaire à celle déjà vue dans les OZC classiques.
2. Le processus de l'intensité de défaut peut être vu comme un spread par rapport au taux sans risque.
3. Pour calculer explicitement la formule précédente, on suppose souvent que $(r_t)_t$ et $(\lambda_t)_t$ suivent le même type de processus stochastique pour obtenir des formules fermées dans certains cas.

**Exemple : Vasicek**

$$\begin{aligned} dr_t &= a(b - r_t)dt + \sigma dw_t \\ d\lambda_t &= \tilde{a}(\tilde{b} - \lambda_t)dt + \sigma d\tilde{W}_t \end{aligned}$$

où $d < W_t, \tilde{W}_t >= \rho dt$, avec $\rho \in (-1, 1)$.

# Chapitre 4

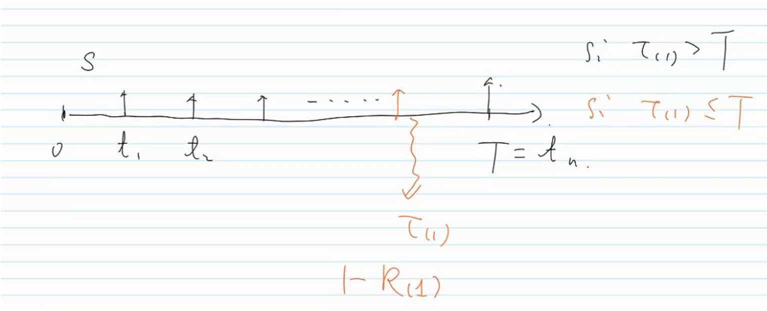
# Dérivés de crédit en portefeuille et corrélation de défauts

Deux types de produits :
- Le Basket default Swap : produit sur 3 à 7 sous-jacents dont le plus courant est le First-to-default swap (sur 5 sous-jacents).
- CDO Collateralized Debt Obligation : produit de très grande taille avec 100 sous-jacents.

Pour évaluer ces produits en portefeuille, le problème clé est de modéliser la structure de corrélation entre les événements de défaut.

## 4.1 Basket Default Swap

Pour le First-to-default swap, que l'on note FtD, la définition du produit est très similaire à celle du CDS. Soient $\tau_1, ..., \tau_n$ les temps de défauts. On note $\tau_{(1)} = min(\tau_1, ..., \tau_n)$.




S'il n'y a pas de défaut, le paiement va jusqu'à maturité $T$, s'il y a défaut le dernier paiement est juste avant ce temps de défaut.
Le FtD possède le même flux de paiement (acheteur et vendeur), sauf que l'on remplace $\tau$ par $\tau_{(1)}$ et $R$ par $R_{(1)}$.
On cherche à calculer $S_{(1)}$ qui est le spread du FtD.
On doit modéliser la probabilité de défaut ou de survie pour $\tau_{(1)}$.

En termes de modélisation, quand $n$ est petit, on peut proposer un modèle dynamique pour $\tau_{(1)}$ en généralisant le modèle uni-dimensionnel (modèle forme réduite avec la théorie du grossissement de filtration). On introduit $D_t^i = \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$ le processus de défaut et la filtration engendrée par le processus :

$$\mathcal{D}_t^i = \sigma(\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq s\}}, s \leq t), \forall t \geq 0$$

On note $\mathbb{D}^i = (\mathcal{D}_t^i)_{t \geq 0}$ et les informations concernant tous les évènements de défaut est $\mathbb{D} = \mathbb{D}^1 \vee ... \vee \mathbb{D}^n$.
L'information globale est $\mathbb{G} = \mathbb{F} \vee \mathbb{D}$, c'est-à-dire $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{D}_t$.

On peut également généraliser la proposition Jenkin-Yor pour le $\tau_{(1)}$.

**Propriété :**
Soit $Y$ une v.a. $\mathbb{A}$-mesurable, $\forall t \in [0, T]$, on a :

$$\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} E(Y|\mathcal{G}_t) = \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} \frac{E(Y \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} | \mathcal{F}_t)}{E(\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} > t\}} | \mathcal{F}_t)}$$

**Remarque :**
C'est un résultat qui ressemble à celui dans le cas d'un seul défaut. La seule différence est que dans le cas d'un seul défaut, on a $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \mathcal{D}_t^1 \vee ... \vee \mathcal{D}_t^n$ et dans le cas de plusieurs défaut on remplace le $t$ par $\tau_{(1)}$.

La raison de cette similitude est que dans le cas $n = 1$, un argument clé est que sur l'ensemble $\{\tau > t\}$, toute v.a. $\mathcal{G}_t$-mesurable coïncide avec une v.a. $\mathcal{F}_t$-mesurable car $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau \wedge t)$ car sur $\{\tau > t\}$, $\sigma(t)$ est déterministe.
Dans le cas $n > 1$, $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \sigma(\tau_1 \wedge t) \vee ... \vee \sigma(\tau_n \wedge t)$, alors sur l'ensemble $\{\tau_{(1)} > t\}, t < \tau_i, \forall i = 1, ..., n$, donc :

$$\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_t \vee \underbrace{\sigma(t) \vee ... \vee \sigma(t)}_{\text{déterministe}}$$

En se basant sur le résultat précédent, on obtient la même formule d'évaluation pour un FtD Swap.

Ce résultat n'est plus valable pour un Second-to-Default Swap. Il y aura besoin d'étudier ce qu'il se passe sur l'ensemble $\{\tau_{(1)} \leq t < \tau_{(2)}\}$.

Dans le modèle d'intensité, le pricing de CDS nécessite de la connaissance de l'intensité de $\tau$. Par analogie entre le CDS et FtD, on cherche à étudier l'intensité de $\tau_{(1)}$.

**Propriété :**
On suppose que les intensités de chaque $\tau_i$ sont notées comme $(\lambda_t^i, t \geq 0)$ qui sont des processus positifs et $\mathbb{F}-$adaptés. Si $P(\tau_i = \tau_j) = 0, i \neq j$ (c'est-à-dire que la proba que deux entreprises fassent faillite le même jour est nulle), alors l'intensité du premier instant de défaut $\tau_{(1)}$, notée $(\lambda_t^{(1)}, t \geq 0)$, est donnée par :

$$\lambda_{t\wedge\tau_{(1)}}^{(1)} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{t\wedge\tau_{(1)}}^i$$

**Démonstration :**
On va utiliser la propriété de martingale associée aux processus de l'intensité.
Pour rappel, si $N_t$ suit une loi de poisson, alors $(N_t - \lambda t, t \geq 0)$ est une martingale, pour une loi de poisson inhomogène, $(N_t - \int_0^t \lambda(s)ds, t \geq 0)$ est une martingale, et d'après le modèle de Cox, $(N_t - \int_0^t \lambda_s ds, t \geq 0)$ est une martingale.

***a)*** Comme $(\lambda_t^i, t \geq 0)$ est l'intensité de $\tau_i$, on a :

$$\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}} - \int_0^t \lambda_s^i ds$$

est une martingale.

***b)*** Comme $P(\tau_i = \tau_j) = 0$, on a $\mathbf{1}_{\{\tau_i = \tau_j\}} = 0$, p.s. :

$$\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}} = \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\wedge\tau_{(1)}\}}$$

***c)*** Par ***a)*** et le fait qu'une martingale arrêtée à un temps d'arrêt est encore une martingale, on obtient :

$$\mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\wedge\tau_{(1)}\}} - \int_0^{t\wedge\tau_{(1)}} \lambda_s^i ds$$

est une martingale.
Alors en combinant avec ***b)***,

$$\mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}} - \sum_{i=1}^{n} \int_0^{t\wedge\tau_{(1)}} \lambda_s^i ds$$

est une martingale.

Donc :

$$\Rightarrow \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}} - \int_0^{t\wedge\tau_{(1)}} \sum_{i=1}^{n} \lambda_s^i ds \text{ est une martingale}$$

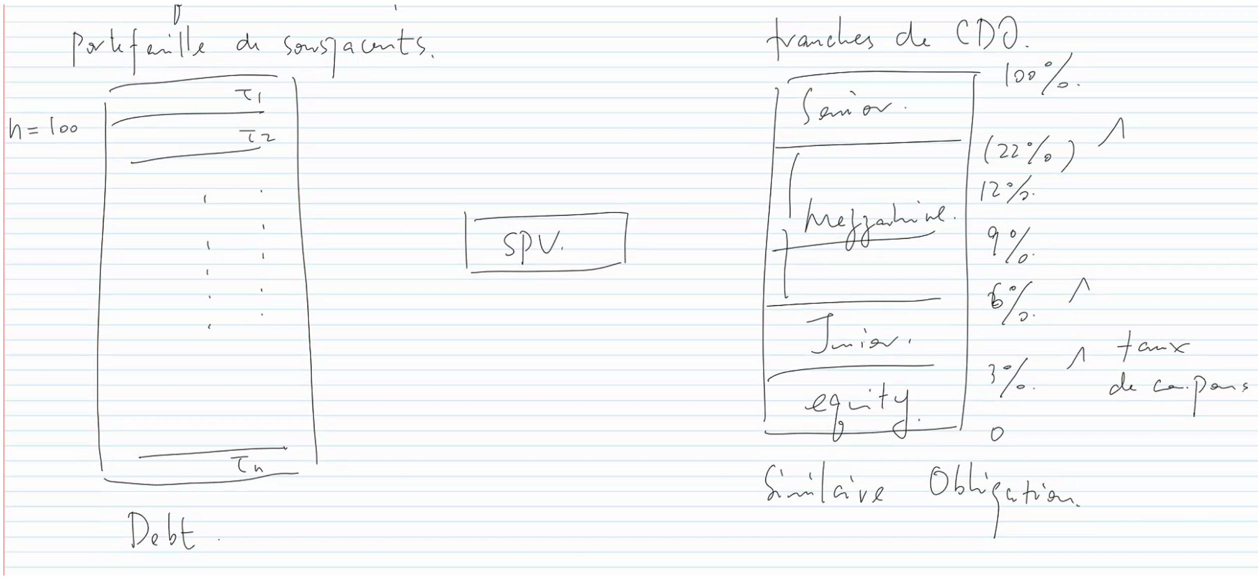
$$\Rightarrow \mathbf{1}_{\{\tau_{(1)} \leq t\}} - \int_0^{t} \sum_{i=1}^{n} \lambda_{s\wedge\tau_{(1)}}^i ds \text{ est une martingale}$$

*Fin de la démo.*

Par la proposition précédente et la formule généralisée de Jenkin-Yor, on peut évaluer la valeur du spread du FtD comme pour un CDS en remplaçant $\tau$ par $\tau_{(1)}$ et $\lambda_t$ par $\lambda_t^{(1)}$.

## 4.2 CDO

Le CDO est un produit de titrisation de grande taille et qui concerne un portefeuille des sous-jacents sensibles au risque de défaut.




En terme de modélisation, comme la taille du portefeuille est très grande, on utilise souvent des modèles de corrélation "statique" comme des modèles de copule.
On rappelle qu'une copule $C(u_1, ..., u_n)$ est une application $[0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ qui satisfait :

1. $C(u_1, ..., u_n)$ est croissant par rapport à chaque $u_i$
2. $C(1, ..., 1, u_i, 1, ..., 1) = u_i$ (si on restreint à une variable aléatoire, on va retrouver sa loi)
3. $\forall (a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n)$ avec $a_i \leq b_i$, on a :

$$\sum_{i_1=1}^{2} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} (-1)^{i_1+\ldots+i_n} C(u_{1_{i_1}}, ..., u_{n_{i_n}}) \geq 0$$

   où $u_{j_1} = a_j$ et $u_{j_2} = b_j, \forall j \in \{1, ..., n\}$.

**Propriété :** Théorème de Sklar
Soit $F$ une fonction de répartition jointe pour le vecteur de variables aléatoires $(X_1, ..., X_n)$ avec des fonctions de répartitions marginales continues $F_1, ..., F_n$, alors il existe une unique fonction de copule $C : [0,1]^n \longrightarrow [0,1]$ tq $\forall x_1, ..., x_n \in \mathbb{R}$ :

$$F(x_1, ...x_n) = C(F_1(x_1), ..., F_n(x_n))$$

Comme conséquence directe de ce théorème, on a :

$$P(\tau_1 \leq t_1, ..., \tau_n \leq t_n) = C\Big(P(\tau_1 \leq t_1), ..., P(\tau_n \leq t_n)\Big)$$

pour $t_1, ..., t_n \in \mathbb{R}_+$.

**Remarque :**
Le modèle copule ne conserve pas la propriété Markovienne.

Pour l'évaluation de CDO, on adopte le modèle facteur copule gaussienne.
On commence par décrire le produit :

— Pour le portefeuille sous-jacent :
  — $\tau_i$ le temps de défaut du $i^{\text{ème}}$ sous-jacent

- $N_i$ sa valeur nominale.
  Le montant nominal total est $N = \sum_{i=1}^{n} N_i$
- $\omega_i = \frac{N_i}{N}$ le poids de chaque sous-jacent
- Soit $R_i$ le taux de recouvrement $\tau_i$

— Le terme clé à calculer est la perte cumulative du portefeuille par les événements de défaut :

$$L_t = \sum_{i=1}^{n} N_i(1 - R_i)\mathbf{1}_{\{\tau_i \le t\}}$$

La perte cumulative en pourcentage est alors

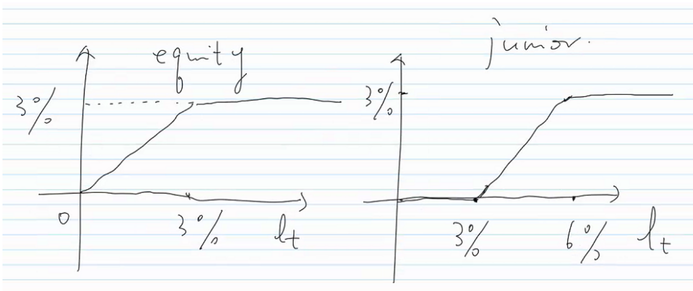
$$l_t = \frac{L_t}{N} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i(1 - R_i)\mathbf{1}_{\{\tau_i \le t\}}$$

qui prend valeurs dans l'intervalle $[0, 1]$ et est croissant en temps.

On va maintenant faire le lien entre le portefeuille sous-jacent et sa perte avec les différentes tranches de CDO.

Une CDO est structurée et hiérarchisée en différentes tranches.
Mathématiquement, on décompose l'intervalle $[0, 1]$ en des unions disjointes pour représenter les tranches $]\alpha_{j-1}, \alpha_j]$, où $0 = \alpha_0 < \alpha_1 < ... < \alpha_k = 1(100\%)$. L'intervalle $]\alpha_{j-1}, \alpha_j]$ correspond à la $j$-ème tranche (equity $]\alpha_0, \alpha_1]$, junior $]\alpha_1, \alpha_2]$, mezzanine plusieurs et senior $]\alpha_{k-1}, \alpha_k]$).
Les tranches supérieures sont protégées par des tranches inférieures, donc la perte (pourcentage) de la $j$-ème tranche est donnée par :

$$l_t^{(j)} = \begin{cases} 0 & \text{si } l_t \le \alpha_{j-1} \\ l_t - \alpha_{j-1} & \text{si } \alpha_{j-1} < l_t \le \alpha_j \\ \alpha_j - \alpha_{j-1} & \text{si } l_t > \alpha_j \end{cases}$$




Donc on a

$$l_t^{(j)} = (l_t - \alpha_{j-1})^+ - (l_t - \alpha_j)^+$$

qui est une fonction "Call Spread".

On explique ensuite le mécanisme de chaque tranche qui est similaire à une obligation :

— Pour chaque tranche, l'acheteur de la $j$-ème tranche investie à $t = 0$, un montant nominal et va recevoir à des date régulières préfixées $\{t_1, ..., t_M = T\}$ des coupons proportionnellement à son montant nominal (pour la $j$-ème tranche).
  Attention ! Par rapport à une obligation classique, l'acheteur peut subir une perte de nominal (et ainsi une perte de coupon et éventuellement une perte de remboursement de nominal).

— Soit $k_j$ le taux de coupon de la $j$-ème tranche, l'acheteur va recevoir à la date $t_u, u = 1, ..., M$, le montant de coupon suivant :

$$k_j\left(1 - \frac{l_{t_u}^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right)$$

  Plus précisément :

  1. Quand $l_t \le \alpha_{j-1}, l_{t_u}^{(j)} = 0$, l'acheteur va recevoir la totalité du coupon.
  2. Quand $l_{t_u}$ atteint $\alpha_{j-1}$, $l_{t_u}^{(j)}$ devient positif (mais encore plus petit que $\alpha_j - \alpha_{j-1}$), et l'acheteur commence à subir une perte de coupon due à la perte du nominal de la tranche.
  3. Quand $l_{t_u}$ dépasse $\alpha_j$, alors la tranche est complètement perdue.

A la maturité $T$, l'acheteur va recevoir le dernier coupon ainsi que le remboursement du nominal qui reste, et égal à :

$$1 - \frac{l_T^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}$$

Donc le flux total pour un acheteur de la tranche $j$ de CDO admet le flux comme la suite :

$$\underbrace{N(\alpha_j - \alpha_{j-1})}_{\text{Nom. tot. de la tranche}} \left( -1 + \sum_{u=1}^{M} k_j \left(1 - \frac{l_{t_u}^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right) D(0, t_u) + \left(1 - \frac{l_T^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right) D(0, T) \right)$$

où $D(0,t)$ est le facteur d'actualisation donné par $D(0,t) = e^{-rt}$.

A la date de signature du contrat, c'est-à-dire à la date 0, l'espérance sous une probabilité risque-neutre de pricing de ce flux doit être égal à 0 :

$$E_* \left( \sum_{u=1}^{M} k_j \left(1 - \frac{l_{t_u}^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right) D(0, t_u) + \left(1 - \frac{l_T^{(j)}}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right) D(0, T) \right) = 1$$

L'objectif est de calculer la valeur de $k_j$ :

$$k_j = \frac{1 - D(0,T)\left(1 - \frac{E(l_T^{(j)})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right)}{\sum_{u=1}^{M} D(0, t_u)\left(1 - \frac{E(l_{t_u}^{(j)})}{\alpha_j - \alpha_{j-1}}\right)}$$

Le terme à calculer est donc $E(l_{t_u}^{(j)})$ pour tout $u = 1, ..., M$, qui vaut $E((l_{t_u} - \alpha_{j-1})^+ - (l_{t_u} - \alpha_j)^+)$, c'est-à-dire :

$$E((l_t - k)^+)$$

pour $t \in [0,T]$ et $k \in [0,1]$, où $l_t = \sum_{i=1}^{n} \omega_i (1 - R_i) \mathbf{1}_{\{\tau_i \leq t\}}$.

Pour calculer l'espérance de la fonction Call avec comme sous-jacent la perte cumulative, on adopte le modèle de copule gaussienne (modèle standard pour CDO).
Souvent $U_1, ..., U_n$ des variables aléatoires uniformes sur $[0,1]$.
On définit le temps de défaut individuel par :

$$\tau_i = inf\{t \geq 0 : U_i \leq p^i(t)\}$$

où $p^i(t)$ est la probabilité de défaut pour $\tau_i$ calibrée avec les données du marché qui est une fonction croissante.
Par cette construction, on vérifie :

$$P(\tau_i \leq t) = P(U_i \leq p^i(t)) = p^i(t)$$

c'est-à-dire la loi de $\tau_i$ respecte l'observation du marché.

Pour le modèle de copule Gaussien, on définit la variable aléatoire $U_i$ par un modèle de facteur gaussien $U_i = \Phi(V_i)$, où $V_i = \sqrt{p_i} Y + \sqrt{1 - p_i} Y_i$, avec $Y$ et $Y_i$ qui sont des v.a. indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$ et $\Phi()$ étant la fonction de répartition de $\mathcal{N}(0,1)$, $p_i \in [0,1]$.

On appelle $Y$ le facteur commun et $Y_i$ le facteur individuel.

Tous les défauts $\tau_i$ sont corrélés par le facteur commun $Y$ et conditionnellement à $Y$, $(\tau_i)_{i=1}^n$ sont indépendantes.

**Remarque :**
Cette méthodologie nous donne également une façon de simuler numériquement le temps de défaut $\tau_i$, par exemple, pour les méthodes Monte-Carlo.

On finit par calculer $E((l_t - k)^+)$ dans le modèle copule gaussienne.
D'abord, par la définition, on calcule la probabilité de défaut conditionnelle à la facteur $Y$ :

$$\begin{aligned}
p_t^i(y) &= P(\tau_i \leq t | Y = y) \\
&= P(u_i \leq p_i(t) | Y = y) \\
&= P(\Phi(\sqrt{p}Y + \sqrt{1-p}Y_i) \leq p^i(t) | Y = y) \\
&= P(\sqrt{p}Y + \sqrt{1-p}Y_i \leq \Phi^{-1}(p^i(t)) | Y = y) \\
&= P(Y_i \leq \frac{\Phi^{-1}(p^i(t)) - \sqrt{p}Y}{\sqrt{1-p}} | Y = y) \\
&= \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p^i(t)) - \sqrt{p}y}{\sqrt{1-p}}\right)
\end{aligned}$$

Comme les $\tau_i$ sont conditionnellement indépendantes, ou cherche à calculer la somme d'une famille de v.a. Bernoulli (conditionnelle indépendante) par une loi binomiale.

On suppose que le portefeuille est homogène.
Soit $N^n$ le nombre de défaut dans le portefeuille.

$$P(N^n = k | Y = y) = \binom{n}{k} p_t(y)^k (1 - p_t(y))^{n-k}$$

et

$$P(N_t^n = k) = \int_{\mathbb{R}} \binom{n}{k} \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p(t)) - \sqrt{p}y}{\sqrt{1-p}}\right)^k \left(1 - \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p(t)) - \sqrt{p}y}{\sqrt{1-p}}\right)\right)^{n-k} \Phi(y) dy$$

où $\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\frac{y^2}{2}}$ est la densité de $\mathcal{N}(0,1)$.

De façon similaire, on peut calculer

$$E((l_t - k)^+) = \int_{\mathbb{R}} E((l_t - k)^+ | Y = y) \Phi(y) dy$$

dont l'espérance est calculable avec la loi Binomiale.