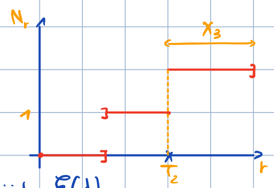
TD MAD N°5

Processus de Poisson (PPP)



Point de cours: $(N_t)_{t\geq 0}$

* Horloges (exponentielles) (X_n) iid $\sim \mathcal{E}(\lambda)$ ← intensité

$\Updownarrow$ $T_n = \sum_{k=1}^{n} X_k = \sum_{n\geq 0} \mathbb{1}_{T_n \leq t}$

* Processus de Lévy: $(N_t)_{t\geq 0}$ tq:

· $\forall s$: $(N_{t+s}-N_s)_{t\geq 0}$ est indépendant de $(N_r)_{r\leq s}$ et stationnaire

· $\forall t$: $N_t \sim \mathcal{P}(\lambda t)$ alors $(N_t)_{t\geq 0} \sim PPP(\lambda)$

Définition: (X_t) est à accroissements stationnaires ssi la loi de $X_{t+s}-X_s$ ne dépend que de t.

Exercice 3: (N_t) compte les accidents
(N_t^d) Compte les accidents déclarés
(N_t^{nd}) Compte les accidents non déclarés.

1) Soit $I \subset \mathbb{R}_+$, $n \in \mathbb{N}^*$

Calculer la loi de N_I^d sachant $N_I = n$.

On considère les intervalles $I=[0,t]$, on peut réexprimer le processus N_t^d:

$$N_t^d = \sum_{k=1}^{N_t} X_k \quad , \quad X_k \sim \mathcal{B}(p).$$

Conditionnellement à $N_t = n$, on a donc $N_t^d = \sum_{k=1}^{n} X_k \sim \mathcal{B}(n,p)$

$I = [a;b]$, $b-a=t$ $\quad N_t^d \overset{\mathcal{L}oi}{=} N_b^d - N_a^d$.

2) Calculer la loi de N_I^d

$$P(N_I^d = k) = \sum_{n\geq 0} P(N_I^d = k \mid N_I = n)\, P(N_I = n)$$

$$= \sum_{n\geq 0} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$= \frac{e^{-\lambda t}}{k!} \sum_{n\geq k} \frac{n!}{(n-k)!} (1-p)^n \frac{(\lambda t)^n}{n!}$$

$$= \frac{e^{-p\lambda t}}{k!} p^k (\lambda t)^k \sum_{m\ge k} \frac{((1-p)\lambda t)^{m-k}}{(m-k)!} e^{-(1-p)\lambda t}$$

$$= \frac{e^{-p\lambda}}{k!}(p\lambda t)^k \qquad \implies N_I^d \sim \mathcal{P}(p\lambda t)$$

$N_r^d = \sum_{k=1}^{N_r} X_k \quad X_k \sim \mathcal{B}(p)$

Rappel : $G_{N_r}(z) := \mathbb{E}[z^{N_r}] = \sum_{m\ge 0} z^m \, \mathbb{P}(N_r = m)$

$$G_{N_r}(z) = G_{N_r}(\mathcal{L}_{X_0}(z))$$
$$= G_{N_r}((1-p)+pe^{-z})$$

$\left(= \mathbb{E}[((1-p)+pe^{-z})^{N_r}]\right.$
$\left.= \sum_{k=0}^{\infty} ((1-p)+pe^{-z})^k \, \mathbb{P}(N_r = k)\right)$

Si $X \sim \mathcal{P}(\lambda) \implies G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$

À démontrer : Si $Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$ où N aléatoire et X_k iid, alors

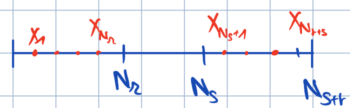
$$\mathcal{L}_Y = G_N \circ \mathcal{L}_{X_0}$$

3) Montrer que $(N_r^d)_{r\ge 0}$ est un processus de Poisson.

On doit montrer que $(N_r^d)_{r\ge 0}$ est à accroissements stationnaires et indépendants

$N_{t+s}^d - N_s^d = \sum_{k=N_s+1}^{N_{t+s}} X_k$, or $(X_i)_{1\le i\le N_r} \perp\!\!\!\perp (X_i)_{N_s+1\le i\le N_{t+s}}$ ← Car $(N_r)_{r\ge 0}$ est un processus de Poisson.

$N_r^d = \sum_{k=1}^{N_r} X_k$, $r \le s$



$N_{t+s}^d - N_s^d = \sum_{k=N_s+1}^{N_{t+s}} X_k$, or on a $\mathcal{L}(N_{t+s} - N_s)$ ne dépend que de t.

(X_i) ne dépend ni de t ni de s. Ainsi, $(N_{t+s}^d - N_s^d)$ est stationnaire

On a donc montré : $(N_r^d) \sim PPP(p\lambda)$.

4) N_I^d est-elle indépendante de N_I^{nd}.

Soit $x, y \in \mathbb{R}$, $\mathbb{E}[e^{ixN_I^d} e^{iyN_I^{nd}}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{ixN_I^d} e^{iyN_I^{nd}} \mid N_I]]$

$\mathbb{E}[e^{ixN_I^d} e^{iyN_I^{nd}} \mid N_I] = e^{iyN_I} \mathbb{E}[e^{i(x-y)N_I^d} \mid N_I]$ $\qquad N_I^{nd} = N_I - N_I^d$

$$= e^{iyN_I}(1-p+pe^{i(x+y)})^{N_I}$$
$$= ((1-p)e^{iy} + pe^{ix})^{N_I}$$

$\implies \mathbb{E}[((1-p)e^{iy} + pe^{ix})^{N_I}] = \sum_{m\ge 0} ((1-p)e^{iy} + pe^{ix})^m \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}$

D'autre part : $\mathbb{E}[e^{ixN_I^d}] \mathbb{E}[e^{iyN_I^{nd}}] = \left(\sum_0^{\infty} e^{ixm} \frac{(p\lambda t)^m}{m!} e^{-p\lambda t}\right)\left(\sum_0^{\infty} e^{iyk} \frac{((1-p)\lambda t)^k}{k!} e^{-(1-p)\lambda t}\right)$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda t} \left(\sum_{u+v=m} \frac{e^{ixu} (p\lambda t)^u}{u!} \frac{e^{iyv} ((1-p)\lambda t)^v}{v!} \right)$$

$$= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda t}}{m!} \left((1-p)e^{ix} + pe^{iy} \right)^m (\lambda t)^m$$