Modèles financiers en assurance - Cours

Gestion des risques en assurance

$(X_i)_{i\in[1,n]}$ On observe les sinistres

$$\Lambda = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

$$\frac{\Lambda_n - \mathbb{E}[\Lambda_n]}{\sigma(\Lambda_n)} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

A	P
A	FP ← dettes vis-à-vis des actionnaires PT ← dettes vis-à-vis des assurés $E(\Lambda_n) + RM$ $q_\alpha \sigma(\Lambda_n)$ quantile

Ex : assu auto en assu je paie (mutualisat°) alors qu'en finance risque non mutualisable, paie pour personne ou tout le monde.

Gestion des risques en finance.

$X_i = F_t = [K - S_t]_+$

$X_i = f(S_t)$

$\Rightarrow \Lambda_n = \tilde{f}(S_t)$

Il est possible en AOA de constituer un portefeuille en $t=0$ autofinancé tel que $w_t = (K-S_t)_+$ p.s.

	Réplicables	Non réplicables
Mutualisables	$\simeq \emptyset$ (titrisat°)	Assurance *
Non mutualisables	Finance *	"risque de modèle" (perte d'indép, risques d'estimation, ...)

A	P
A	FP
	PT

$$PT = \mathbb{E}^{\tilde{\mathbb{P}}}\Big[\sum_{t\geq 1} \delta_t F_t\Big] = BE + RM \qquad \tilde{\mathbb{P}} \text{ - "prudence"}$$

$$S(t) = S(0)\exp\Big(\big(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\big)t + \underbrace{\sigma W_t}_{\text{marché}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N_t} X_i}_{\text{propre au titre}}\Big)$$

EIOPA $\longrightarrow PT = \underbrace{BE}_{\text{Best Estimate}} + RM$, $\quad BE = \mathbb{E}\Big[\sum_{t\geq 1}\delta_t F_t\Big]$

On s'intéresse au $\Lambda = \sum_{t\geq 1} S(t) F_t$ $\quad \mathbb{Q}^f$ finance $\quad \mathbb{P}^a$ assurance

En l'absence d'interact° A/P (F_t ne dépend pas de A)

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a\otimes\mathbb{Q}^f}\Big(\sum \delta_t F_t\Big)$$

$$= \sum \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta_t]}_{P(0,t)}\, \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}[F_t]$$

$$BE = \sum P(0,t)\overline{F}_t \qquad P(0,t) = e^{-tR(0,t)}$$

Si $\exists$ interactions $\mathbb{E}^{\mathbb{P}^a\otimes\mathbb{Q}^f}[\delta_t F_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}\big[\delta_t\, \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}[F_t \mid \mathcal{F}^f]\big]$ ← on conditionne p/r à l'ev^t financier.

$F_t = (K - S_t)_+$

$$\Lambda = \delta(T_x)(K - S_{T_x})^+ \mathbb{1}_{T_x \leq T}$$

$\mathbb{Q}^f$ $\quad \mathbb{Q}^f$ $\quad \mathbb{P}^a$

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a\otimes\mathbb{Q}^f}[\Lambda]$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \frac{S(x+t)}{S(x)}\, q_{x+t-1}\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta_t (K - S_t)^+]$$

$$RM = \alpha \sum_{t\geq 0} e^{-\tilde{r}_t t}\, SCR_t$$ ← poule et oeuf car SCR besoin FP...

Hyp : $SCR_t = k\, BE_t$

$$RM = k\alpha \sum_{t\geq 0} e^{-\tilde{r}_t t}\, \mathbb{E}[BE_t]$$

$$\mathbb{E}[BE_t] = E_t\Big(\sum_{u\geq t} e^{-\tilde{r}(u-t)} F_u\Big)$$

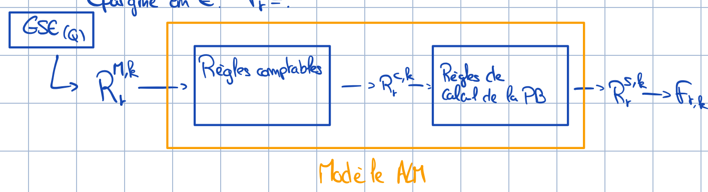
$$= k\alpha \sum_{t\geq 0} e^{-\tilde{r}_u} \sum_{u\geq t} \mathbb{E}[F_u] = \alpha k \sum_{u\geq 0} e^{-\tilde{r}_u} \overbrace{\sum_{t\leq u} \mathbb{E}[F_u]}^{u\,\mathbb{E}[F_u]}$$

$$RM = \alpha \, SCR_0 \underbrace{\boxed{\frac{\sum_{u>0} u \, \mathbb{E}[F_u] e^{-\tilde{r}_u u}}{\sum_{u>0} \mathbb{E}[F_u] e^{-\tilde{r}_u u}}}}_{D_0 \text{ (durat°)}}$$

$$RM = \alpha \times D_0 \times SCR_0$$

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}\left[\sum \delta_t F_t\right]$$

Épargne en €. $F_t = ?$



__Exemple :__

$$S(t) = S(0) \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

$\mathbb{R}$

$\mathbb{Q}$ $\quad \left(r - \frac{\tilde{\sigma}^2}{2}\right)t + \tilde{\sigma} W_t$

$\tilde{\sigma} \neq \sigma$

__06/02__

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}\left[\sum_{t \geq 1} \delta_t F_t\right]$$

Contrat d'épargne UC, $k = S_0$ maturité T

A	P
S_0	? $\underset{=?}{BE+RM}$

τ le temps d'arrêt "instant du rachat"

$$\Lambda = \delta(\tau) S_\tau \mathbb{1}_{\tau \leq T}$$

$$BE = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}(\delta_\tau S_\tau \mathbb{1}_{\tau \leq T})$$

$t = 1, \dots, T$

$\mathbb{P}(\tau = t) = q_t$

$\sum_{t=1}^{T} q_t = 1$

$$\begin{aligned}
BE &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}\left[\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}\left[\delta_\tau S_\tau \mathbb{1}_{\{\tau \leq T\}} \mid S\right]\right] \\
&= \sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}\left[\delta_t S_t \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}[q_t \mid S]\right] \\
&= \sum_{t=1}^{T-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta_t S_t q_t] + \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}\left[\delta_T S_T \left(1 - \sum_{t=1}^{T-1} q_t\right)\right] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta_T S_T]}_{S_0 \text{ car martingale}} + \sum_{t=1}^{T-1} \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[(\delta_t S_t - \delta_T S_T) q_t]}_{=0}
\end{aligned}$$

$= 0$ car $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta_t S_t q_t - \delta_T S_T q_t] = \delta_t S_t q_t - \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta_T S_T]}_{\delta_t S_t} q_t = 0$

$$= S_0$$

Ajout d'une garantie en cas de décès : "si décès avant T, en t, alors les ayant-droits obtiennent $S_t \vee k$" $= S_t + \underbrace{[k - S_t]_+}_{V \text{ valeur de la garantie}}$

Notons T_x la date de décès

$$\begin{aligned}
V &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}\left[\delta(T_x)[k - S_{T_x}]^+ \mathbb{1}_{\{T_x \leq T\}}\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}\left[\sum_{t=1}^{T} \delta_t [k - S_t]^+ \mathbb{P}^a(T_x = t)\right] \\
&= \sum_{t=1}^{T} \frac{l_{x+t-1}}{l_x} q_{x+t-1} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}\left[\delta_t [k - S_t]^+\right]
\end{aligned}$$

...

Exercice : Plan d'attribution d'actions gratuites

cf correct° sur site.

Conditions :

* horizon T
* 2 possibilités
  - lorsque $S_T > (1+\rho) S_T^{SBF}$ → 1 act°
  - lorsque $EBIT_T > L$ → 1 action

+ présence dans l'entreprise en T.

Quelle est la "valeur économique" de cet avantage

① Flux

$$F(T) = \mathbb{1}_{(\tau > T)} \left(S_T \mathbb{1}_{S_T > (1-\rho) S_T^{SBF}} + S_T \mathbb{1}_{EBIT > L} \right)$$

présence

② Actualisation $\Lambda = \delta(T) F(T)$

③ $V = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^\delta} \left[\mathbb{1}_{\tau > T} \left(\delta_T S_T \mathbb{1}_{S_T > (1-\rho) S_T^{SBF}} + \delta_T S_T \mathbb{1}_{EBIT > L} \right) \right]$

$\delta_T : \mathbb{Q}$

$S_T^{SBF}, S_T : \mathbb{Q}$

$EBIT : \mathbb{P}$

$\tau : \mathbb{P}$

$$V = \underbrace{\mathbb{P}(\tau > T)}_{\text{entreprise}} \times \left(\underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\delta_T S_T \mathbb{1}_{S_T > (1-\rho) S_T^{SBF}} \right]} + \underbrace{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\delta_T S_T]}_{S_0} \underbrace{\mathbb{P}(EBIT > L)}_{\text{entreprise}} \right)$$

S_T → BG

S_T^{SBF} → BG + coeff de corrélat° entre les 2 browni.