© Théo Jalabert

3 Exercices

Exercice 1. Rappeler et démontrer la relation de parité put-call. A partir de cette dernière, montrer que détenir une OC ZC convertible de type européen (sous-jacent ne versant pas de dividende) est au terme économiquement équivalent au fait de détenir C_r actions sous-jacentes et une option de vente européenne sur cette position de prix d'exercice le nominal de l'OC (ie, strike $= N = V_R$).

Exercice 2. On considère une OC ZC remboursée au pair dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Nominal, N =100 ;
- Echéance, T=1.5 ans ;
- Spread, $r_s = 0\%$;
- Ratio de conversion, $C_r = 7$;
- Option call émetteur, $K = 100$;
- Option put porteur, $P_v = 100$;

On dispose en outre des éléments suivants :

- Cours de l'action en $t = 0$, $S_0 = 13.5$;
- Volatilité de l'action, $\sigma = 45\%$;
- L'action ne verse pas de dividende entre $t = 0$ et $t = 1.5$;
- Taux sans risque (continu), $r_f = 2\%$

a) A l'aide du modèle binomial de pas de temps $\Delta t = 0.5$, calculer la valeur de l'OC dans le cas suivants (on prendra $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = 1/u$ et $q = \frac{e^{r_f \Delta t} - d}{u-d}$) :

a1) - OC sans clause particulière de type call émetteur ou put porteur ;

a2) - Soft call émetteur ;

a3) - Hard call émetteur ;

a4) - Put porteur ;

a5) - Hard call émetteur + put porteur ;

b) En supposant que l'OC ne soit exerçable qu'à l'échéance, vérifier vos réponses à la question a1) en appliquant le modèle de Black-Scholes aux deux expressions de la valeur de l'OC obtenues à partir de la relation de parité put-call rappelée à l'exercice 1. On rappelle que pour une option européenne (call ou put) ne versant pas de dividende de prix d'exercice K sur un sous-jacent S on a :

$$C_0 = S_0.\mathcal{N}_{(0,1)}(d_1) - Ke^{-r_f T}.\mathcal{N}_{(0,1)}(d_2)\,;\; P_0 = Ke^{-r_f T}.\mathcal{N}_{(0,1)}(-d_2) - S_0.\mathcal{N}_{(0,1)}(-d_1)\,;$$

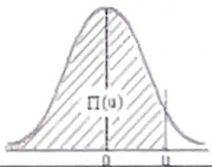
$$\text{où } d_1 = \frac{ln\frac{S_0}{K} + (r_f + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\,;\; d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

© Théo Jalabert

Exercice 3. Construction d'une obligation synthétique. Un gérant de fonds obligataire souhaite acquérir une exposition sur les actions d'Apple. Son mandat lui interdit clairement un investissement direct en actions ou en warrant mais une acquisition d'OC est possible. Des OC sur Apple ne sont toutefois pas disponibles sur le marché à cette date ; le banquier observe qu'il existe sur le marché des warrants call (européens) émis par Société Générale (SG) qui correspondent aux besoins exprimés par le gérant et dont les caractéristiques sont : prix = \$1.85 ; strike =\$500 ; échéance = 217 jours ; nombre d'actions obtenues par conversion d'un warrant = 0.025. Pour la partie obligataire de l'obligation synthétique le gérant sélectionne une obligation ZC de nominal \$100 remboursée au pair dans 217 jours (date de l'échéance des options). Le taux du ZC est de 1.06% (taux à composition annuel). Calculer le C_r de l'OC synthétique ZC de nominal \$100 remboursée au pair constituée des warrants call SG de strike \$500 ci-dessus et en déduire son prix d'émission.

ANNEXE

Table de Loi Normale
P(x<u)



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	6,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9998	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

© Théo Jalabert

Exercice 1 :

Relation parité CALL-PUT

$$C_t - P_t = S_t - k e^{-r_c (T-t)}$$

tx sans risque

Preuve :

	$t=0$	$t=T$
Achat CALL	C_0	$C_T = (S_T - k)_+$
Placem^t de k à la banque	$k e^{-r_c T}$	k
Vente PUT	$-P_0$	$-P_T = -(k - S_T)_+$
Vente sous-jacent	$-S_0$	$-S_T$

$$* \quad C_T + k - P_T - S_T = (S_T - k)_+ + k - (k - S_T)_+ - S_T$$

$*$ Si $S_T > k$, $* = S_T - k + k - S_T = 0$

$*$ Si $S_T < k$, $* = k - (k - S_T) - S_T = 0$

$\Rightarrow C_T + k - P_T - S_T = 0$

Par AOA, $\forall t \leq T$, $C_t + k e^{-r_c (T-t)} - P_t - S_t = 0$

$\Leftrightarrow \forall t \leq t$, $C_t - P_t = S_t - k e^{-r_c (T-t)}$

→ En utilisant la relat° de parité CALL-PUT, mq

$$P_T^{oc} = N + C_r \max(S_T - C_p, 0) = C_r S_T + C_r \max(C_p - S_T, 0)$$

C_p = prix de conversion $\frac{N}{C_r}$

$$\begin{aligned} N + C_r \max(S_T - C_p, 0) &= N + C_r (C_p - S_T)_+ + C_r S_T - C_r C_p \\ &= N + C_r (C_p - S_T)_+ + C_r S_T - N \quad \text{car } C_p = \frac{N}{C_r} \\ &= C_r S_T + C_r (C_p - S_T)_+ \end{aligned}$$

© Théo Jalabert

Exercice 2 :

$N = 100$ $\quad S_0 = 13.5$

$T = 1.5$ ans $\quad \sigma = 45\%$

$r_s = 0\%$ $\quad$ pas de dividende entre $t=0$ et $t=1.5$

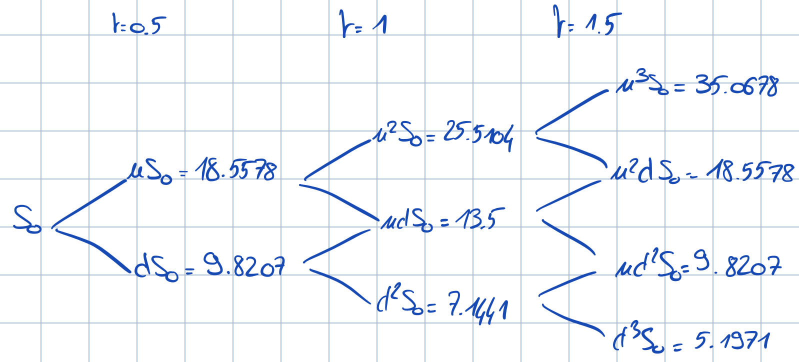
$C_r = 7$ $\quad r_g = 2\%$

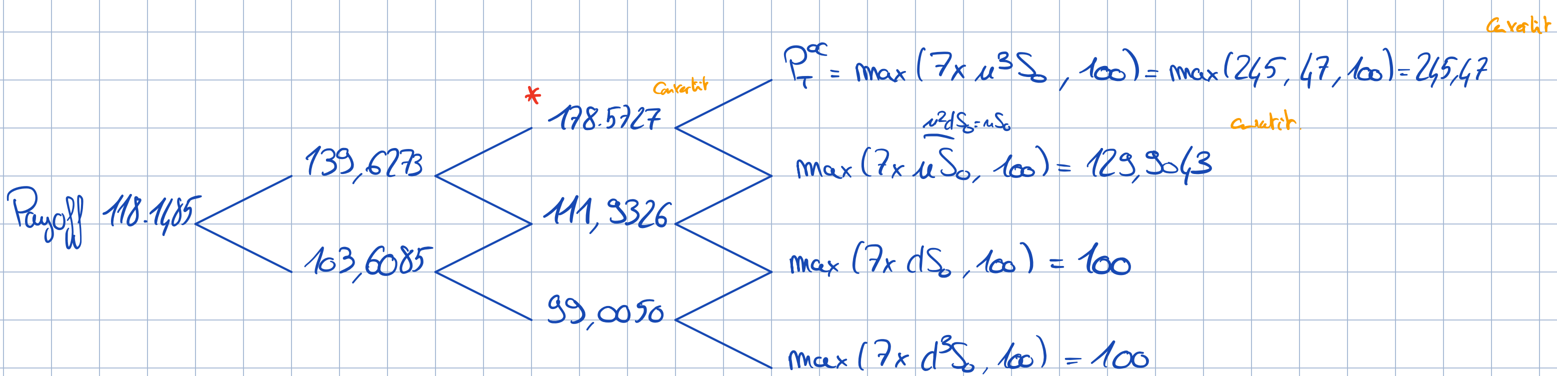
$K = 100$

$P_v = 100$

a) $\Delta t = 0.5 \quad u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \quad d = \frac{1}{u} \quad q = \frac{e^{r_g \Delta t} - d}{u - d}$

a1) OC sans clause particulière





$*\ P_c = \max\left(C_r S_t,\ e^{-r_g \times \Delta t}\left[q\, P_T^{oc}(up) + (1-q) P_T^{oc}(down)\right]\right)$

$\Rightarrow P_c^{u^2} = \max\left(7 \times 25.5104,\ e^{-2\% \times 0.5}\left[q \times 245.47 + (1-q) \times 129.9043\right]\right)$

$= 178.5727$

en T, $P_T^{oc} = \max(C_r \times S_T, N)$ $\qquad$ Aux dates $t < T$, $P_t^{oc} = \max(\underbrace{C_r \times S_t}_{\text{Parité}}, \underbrace{P_c}_{\text{Prix de "Continuation"}})$

= Prix si pas convertie en t.

$= P_c$

b) Black-Scholes $\qquad C_p = \frac{N}{C_r}$ prix d'exercice

$d_1 = \dfrac{\ln\left(\frac{13.5}{C_p}\right) + \left(2\% + \frac{(45\%)^2}{2}\right) \times 1.5}{45\% \times \sqrt{1.5}} = 0.2274 \quad \Rightarrow d_2 = -0.3238$

© Théo Jalabert

en T, $P_T^{oc} = N + C_r \max(S_T - C_p ; 0)$

en 0, $P_0^{oc} = N e^{-r_f T} + C_r \left[S_0 \mathcal{N}(d_1) - C_p e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2) \right]$

$$P(X < -u) = \int \omega e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathbb{1}_{x<-u} \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-u} \omega e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \underset{z=-x}{=} \int_{+\infty}^{u} \omega e^{-\frac{1}{2}z^2} (-dz) = \int_{u}^{\infty} \omega e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$= P(X > u)$$
$$= 1 - P(X < u)$$

d'où $\overbrace{P(X<d_2)}^{\mathcal{N}(d_2)} = 1 - P(X < -d_2)$

$\underline{AN}$: $P_0^{oc} = 100\, e^{-2\% \times 1.5} + 7 \times \left(13.5 \times \overbrace{0.5910}^{\mathcal{N}(d_1)} - \frac{100}{7} e^{-2\% \times 1.5} \overbrace{(1 - 0.6235)}^{\mathcal{N}(d_2)}\right)$ cf annexe.

$= 116.54$ m̂ ordre de grandeur.

Maintenant avec le PUT

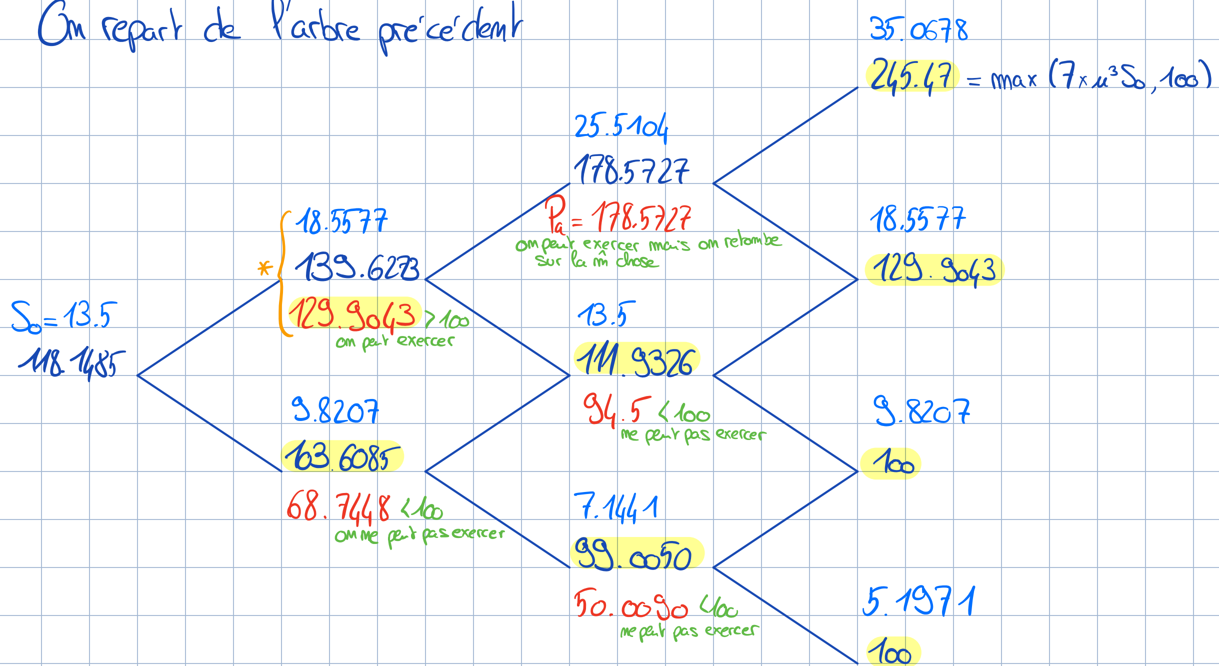
$$P_T^{oc} = C_r S_T + C_r \max(C_p - S_T ; 0)$$

en 0 : $P_0^{oc} = C_r S_0 + C_r \left(C_p e^{-r_f T} \mathcal{N}(-d_2) - S_0 \mathcal{N}(d_1) \right)$

a2) Soft CALL émetteur = droit pour l'émetteur de rembourser l'oc par anticipation, à condition que $P_c^{\%} > \text{seuil}$ ($\approx C_r \times S_t$)

Ici seuil = CALL trigger = 100% $P_t^{oc} = \max(P_a, \min(P_c, K))$

On repart de l'arbre précédent



on ne regarde pas car on n'achève pas à l'échéance, on regarde d'abord en t=1 et t=0.5.

* Exercice de l'émetteur => rb^t anticipé

L'investisseur aura le choix entre $K = 100$ (= N) ou convertir et avoir $P_a = 129.9043$ => Il va prendre P_a (conversion forcée)

Non exercice impossible contractuellem^t, l'émetteur veut rembourser le + tôt possible.

"Il sauve les meubles"

© Théo Jalabert

Donc comme l'émetteur va exercer il faut calculer le nouveau prix en 0

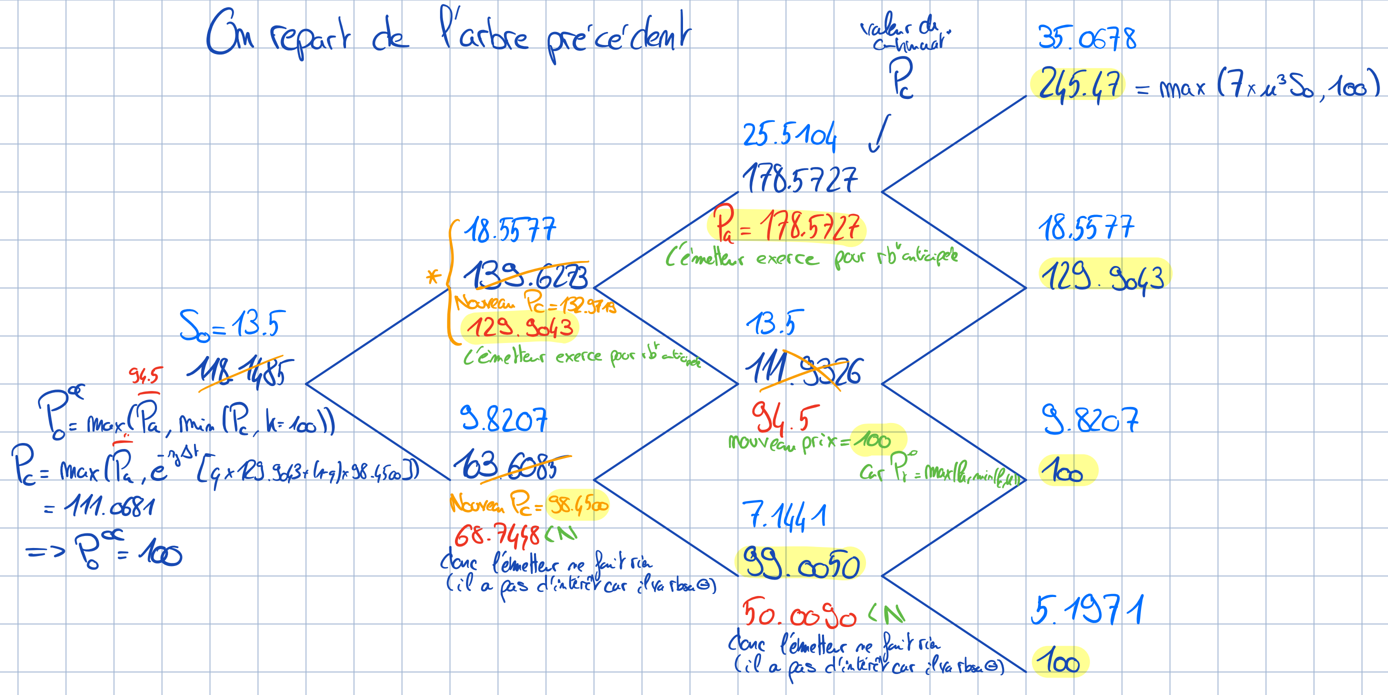
$$P_0^{\infty} = \max(\overset{94.5}{\overline{P_a}}, \min(P_c, \overset{100}{\overline{K}}))$$

$$P_c = \max(P_a = 94.5, e^{-2\% \times 0.5}[q \times 129.9043 + (1-q) \times 163.6085])$$
$$= 113.9452$$

$$\Rightarrow P_0^{\infty} = \max(94.5 ; 113.9452)$$
$$= 113.9452$$

a3) Hard CALL émetteur

On repart de l'arbre précédent



Pour l'émetteur il veut rembourser l'obligat° le + rapidem^t

Son nominal (N = 100) donc il va exercer/vendre dès que le prix = valeur de continuat° > 100 pour rembourser de manière anticipée

L'investisseur a le choix entre prendre 100 = K ou de convertir et avoir P_a.

Au final P_0^{∞}(Hard CALL) = 111.0681 < P_0^{∞}(Soft CALL) = 113.9452

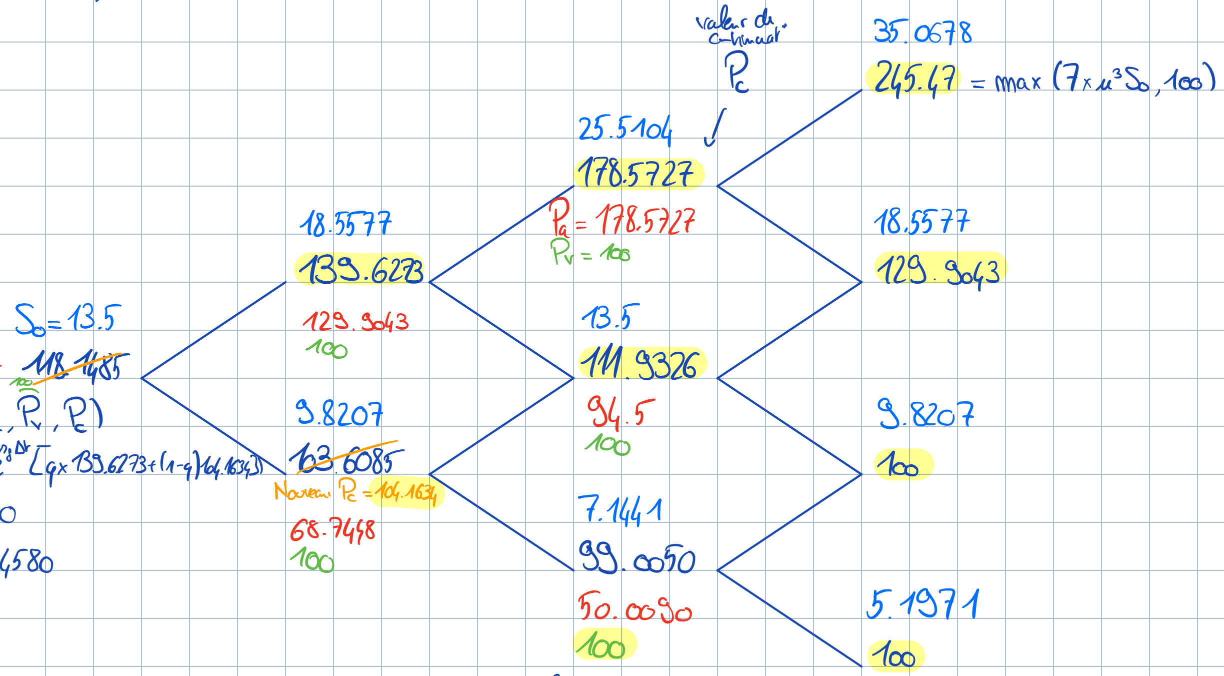
C'est ⊖ intéressant (Soft CALL) car il paie ⊕ cher à l'achat qu'un Hard CALL

L'émetteur préfère le Hard CALL qui lui donne ⊕ de droit et va le vendre ⊖ cher

© Théo Jalabert

a4) PUT porteur = l'investisseur peut demander le rbt anticipé P_v. L'émetteur paie ⊕ cher car l'investisseur a ⊕ de droit => prix ↗

$P_r^{oc} = \max(P_a, P_v, P_c)$



$P_0^{oc} = \max(P_a, P_v, P_c)$

$P_c = \max(P_a, e^{-r_f \Delta t}[q \times 139.6273 + (1-q) 104.1634])$

$= 118.4580$

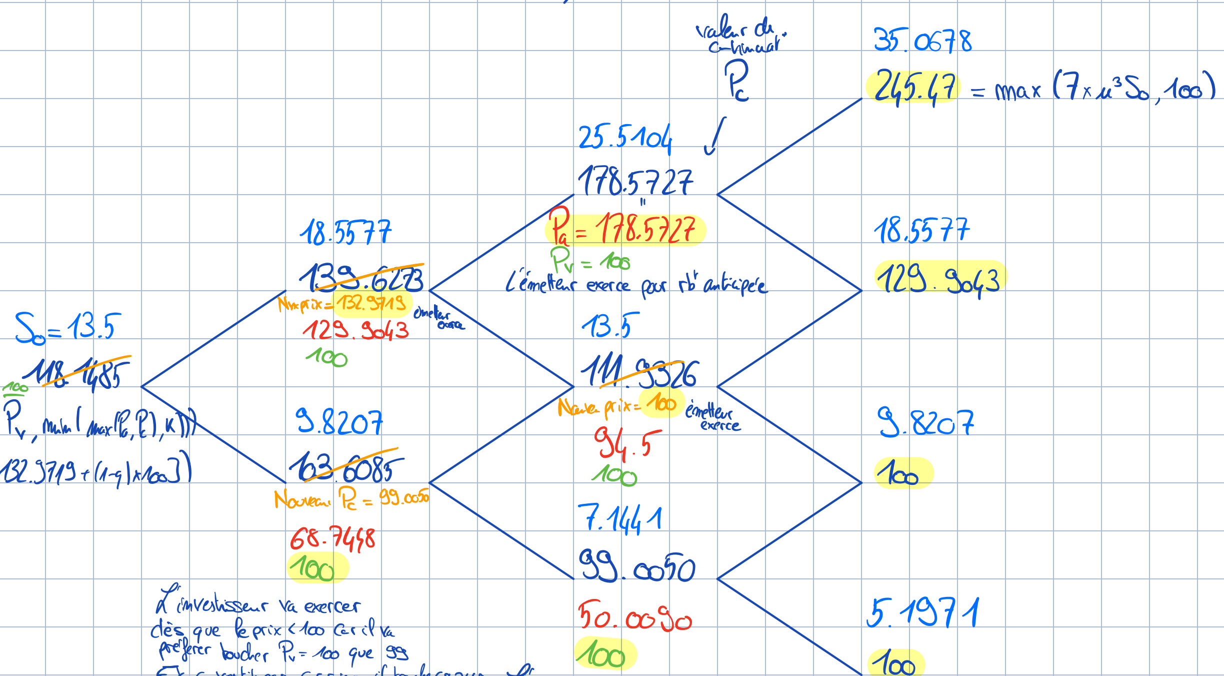
$\Rightarrow P_0^{oc} = 118.4580$

L'investisseur va exercer dès que le prix < 100 car il va préférer toucher $P_v = 100$ que 99. Et convertit pas car sinon il touche 50.0090.

a5) Hard CALL émetteur + PUT porteur

$P_r^{oc} = \max(P_a, P_v, \min(\max(P_a, P_c); K))$

94.5, 100, 100



$P_0^{oc} = \max(P_a, P_v, \min(\max(P_a, P_c), K))$

$P_c = \max(P_a, e^{-r_f \Delta t}[q \times 132.9719 + (1-q) \times 100])$

$= 113.2587$

$\Rightarrow P_0^{oc} = 113.2587$

L'investisseur va exercer dès que le prix < 100 car il va préférer toucher $P_v = 100$ que 99. Et convertit pas car sinon il touche 68.7498.

L'investisseur va exercer dès que le prix < 100 car il va préférer toucher $P_v = 100$ que 99. Et convertit pas car sinon il touche 50.0090.

© Théo Jalabert

Exercice 3 :

Zéro-Coupon sans risque + CALLS sur Apple ≈ OC sur Apple

Echéance 217j — CALL sur Apple $k = 500$ — $C_p = k = 500$

Prix du ZC en 0 + Prix des CALL = P^{OC}

$$\frac{100}{1 + r_c \frac{217}{360}} + C_r \times prix_{CALL} \times 40$$

$$C_r = \frac{N}{C_p} = \frac{100}{500} = 0.2$$

Car on veut 1 action et qd on convertit 1 fois on a 0.025 acti° donc pour avoir 1
$\Rightarrow 0.025 \times 40 = 1$

$$\Rightarrow P^{OC} = \frac{100}{1 + \left(\left(1 + 1.05\%\right)^{\frac{217}{360}} - 1\right)} + 0.2 \times 1.85 \times 40 = 114.1664$$