Modèles de durée / Examen du 2 juin 2005

Durée 1h – aucun document n'est autorisé

Exercice n°1 (hétérogénéité)

Il arrive souvent en pratique que les durées que l'on observe résultent de l'agrégation de sous-populations ayant chacune un comportement spécifique, souvent inobservable. On parle alors d'hétérogénéité.

On suppose ici que la fonction de survie dépend d'un paramètre aléatoire ν, ce paramètre étant distribué à l'origine selon une loi π. D'un point de vue heuristique, on se trouve en présence de sous-populations à l'intérieur desquelles la loi de survie est homogène et décrite par la loi de survie conditionnelle au fait que la valeur du paramètre soit ν, $S(t,\nu)$, la loi π décrivant le poids respectif de chaque sous-population dans la population totale à la date initiale. On notera de même $h(t,\nu)$ la fonction de hasard de la sous-population de caractéristique ν.

Question n°1 (1 point): Quelle est l'expression de la fonction de survie initiale de la population totale en fonction de $S(t,\nu)$ et π ?

Par conditionnement on trouve la forme suivante pour la fonction de survie initiale de la population totale : $S(t)=\int S(t,\nu)\pi(d\nu)$.

Question n°2 (2 points): Quelle est la distribution d'hétérogénéité π_t à la date *t* ? Comment exprimez-vous la fonction de hasard du groupe en fonction de $h(t,\nu)$ et de π_t ?

La distribution d'hétérogénéité dépend a priori de t, puisque les individus des différentes sous-populations ne sortent pas du groupe à la même vitesse. A la date t, et en supposant la taille de la population infinie, on a ainsi :

$$\pi_t(d\nu)=\frac{S(t,\nu)\pi(d\nu)}{S(t)}$$

La fonction de hasard à la date t s'écrit alors $h(t)=\int h(t,\nu)\pi_t(d\nu)$.

Question n°3 (3 points): On suppose maintenant que $S(t,\nu)=\mathbf{exp}(-\lambda(\nu)t)$; Que signifie cette hypothèse ? Montrez que la fonction de hasard agrégée est décroissante. Comment expliquez-vous ce phénomène ?

Chaque sous-population est décrite par une loi exponentielle de paramètre $\lambda(\nu)$*, la fonction de survie agrégée s'écrit :*

$$S(t)=\int_0^{+\infty}\mathbf{exp}(-\lambda(\nu)t)\pi(d\nu)$$

D'après l'expression ci-dessus de la fonction de hasard s'écrit donc $h(t) = \int \lambda(\nu)\pi_t(d\nu)$ *et on vérifie aisément que :*

$$\frac{dh(t)}{dt} = -\int_0^{+\infty} \lambda^2(\nu)\pi_t(d\nu) + \left(\int_0^{+\infty} \lambda(\nu)\pi_t(d\nu)\right)^2$$

ce qui implique par l'inégalité de Schwarz que $\frac{dh(t)}{dt} \leq 0$ *; l'agrégation de fonctions de hasard constantes conduit donc à une fonction de hasard globale décroissante. Ce phénomène s'explique par le fait que les individus ayant une valeur élevée de* $\lambda(\nu)$ *sortent en premier et il reste donc proportionnellement plus d'individus à* $\lambda(\nu)$ *faible lorsque le temps s'écoule. Le taux de sortie est donc logiquement décroissant. Ce phénomène porte le nom de « biais d'hétérogénéité », ou « mobile-stable ».*

Question n°4 (3 points): mélange de 2 lois exponentielles

La durée est ici une v.a. exponentielle de paramètre λ_1 avec la probabilité *p* et λ_2 avec la probabilité *1-p*. Exprimez la fonction de survie agrégée et représentez graphiquement la fonction de hasard. Quelle conclusion en tirez-vous ?

On a $S(t) = pe^{-\lambda_1 t} + (1-p)e^{-\lambda_2 t}$.

Exercice n°2 (Processus de Poisson) :

Question n°1 (2 points) : Rappelez la définition d'un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$ comme un processus. $N(t)$

Question n°2 (6 points) : Montrez que les processus $M_t = N_t - \lambda t$ et $M_t^2 - \lambda t$ sont des martingales relativement à la filtration $\sigma(N_s, s \leq t)$. Montrez également que pour $\theta > 0$, le processus $\chi_t = \mathbf{exp}\left(-\theta N_t + \lambda t\left(1 - e^{-\theta}\right)\right)$ est une martingale relativement à la filtration $\sigma(N_s, s \leq t)$.

Question n°3 (3 points) : Montrez que si T_n désigne l'instant du $n^{\text{ième}}$ saut, alors les v.a. $T_n - T_{n-1}$ sont iid de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

Les réponses se trouvent dans le support du cours