TD MAD N°4 : Martingales

Soit $(\mathcal{F}_n)_{n\geq 0}$ une filtration

- $(X_n)_{n\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale.
  $\forall n \geq 0, \ \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \overset{p.s.}{=} X_n$ (Croissante).

- $(X_n)_{n\geq 0}$ est une surmartingale
  $\forall n \geq 0, \ X_n \overset{p.s.}{\geq} \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n]$ (Décroissante).

- (X_n) est une sous martingale
  $\forall n \geq 0, \ \mathbb{E}[X_{n+1} | \mathcal{F}_n] \overset{p.s.}{\geq} X_n$ (Croissante).

Exercice 1 : (Y_n) va iid tq $\mathbb{P}(Y_n = 1) = \mathbb{P}(Y_n = -1) = 1/2$

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} Y_k \quad , \quad \mathcal{F}_n = \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$$

1) (S_n) est $(\mathcal{F}_n)$-adapté $\iff \forall n$, S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

$$S_n = f(Y_1, \dots, Y_n) \quad , \quad f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k$$

donc S_n est $\mathcal{F}_n$-mesurable.

2) Montrons que (S_n) est une martingale

$$\mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n + Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n | \mathcal{F}_n] + \underbrace{\mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n]}_{=0}$$

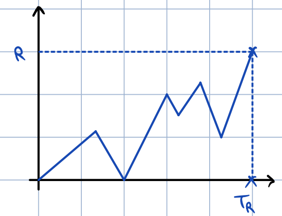
$$= S_n$$

$$\mathbb{E}[S_{n+1}^2 - (n+1) | \mathcal{F}_n] = \mathbb{E}[S_n^2 - 2S_n Y_{n+1} + Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - (n+1)$$

$$= \mathbb{E}[S_n^2 | \mathcal{F}_n] - 2S_n \mathbb{E}[Y_{n+1} | \mathcal{F}_n] + \mathbb{E}[Y_{n+1}^2 | \mathcal{F}_n] - (n+1)$$

$$= S_n^2 - n$$

Application : $T_R = \inf\{n \geq 1, S_n = R\}$



Théorème (optionnal sampling)

T temps d'arrêt borné, (S_n) martingale : $\mathbb{E}[S_0] = \mathbb{E}[S_T]$

Par optional sampling, $S_n^2 - n$ martingale.

$$\mathbb{E}[S_0^2 - 0] = \mathbb{E}[S_{T_R}^2 - T_R] = 0$$
$$\mathbb{E}[T_R] = R^2$$

Autre feuille de TD – Exercice n°4 : (Celui du TD 5)

$Y = \sum_{k=1}^{N} X_k$, N v.a. $\in \mathbb{N}$, (X_n) suite iid

1) On conditionne par N, fixons $\{N = n\}$.
Dans ce cas $\mathbb{E}[\sum_{k=1}^{N} Y_k \mid N = n] = n\,\mathbb{E}[Y_n] = f(n)$

Ainsi, pour en déduire $\mathbb{E}[Y \mid N]$, on évalue f en N, d'où $\mathbb{E}[Y \mid N] = f(N)$.

$$\left(\forall A \in \sigma(N),\ \mathbb{E}[f(N)\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[Y\mathbb{1}_A]\right)$$

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[Y \mid N]] = \mathbb{E}[N\,\mathbb{E}[X_1]]$$
$$= \mathbb{E}[N]\mathbb{E}[X_1] \qquad \text{(Première formule de Wald)}$$

2) $$V(Y \mid N) = \mathbb{E}[(Y - \mathbb{E}[Y \mid N])^2 \mid N]$$
$$= \mathbb{E}[Y^2 \mid N] - \mathbb{E}[Y \mid N]^2$$
$$= \mathbb{E}[Y^2 \mid N] - N^2\,\mathbb{E}[X_1]^2$$

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \mathbb{E}[Y^2 \mid N = n] = \mathbb{E}[(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2 \mid N = n] = \mathbb{E}[(\sum_{k=1}^{n} X_k)^2]$$
$$= \mathbb{E}[\sum_{k=1}^{n} X_k^2 + 2\sum_{1 \le j < k \le n} X_k X_j]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}[X_k^2] + 2\sum_{1 \le j < k \le n} \mathbb{E}[X_k]\mathbb{E}[X_j] \qquad k \neq j.$$
$$= n\,\mathbb{E}[X_1^2] + 2\sum_{j=1}^{n-1}\sum_{k=j+1}^{n} \mathbb{E}[X_1]^2$$
$$= n\,\mathbb{E}[X_1^2] + 2\sum_{j=1}^{n-1} (n-j)\,\mathbb{E}[X_1]^2$$
$$= n\,\mathbb{E}[X_1^2] + 2n^2\,\mathbb{E}[X_1]^2 - n(n+1)\,\mathbb{E}[X_1]^2$$
$$= n\,\mathbb{E}[X_1^2] + \mathbb{E}[X_1]^2\,(2n^2 - n^2 - n)$$
$$= n\,\mathbb{E}[X_1^2] + n(n-1)\,\mathbb{E}[X_1]^2 = g(n) \qquad \text{avec } g \text{ mesurable.}$$

Donc $\mathbb{E}[Y^2 \mid N] = N\,\mathbb{E}[X_1^2] + N(N-1)\,\mathbb{E}[X_1]^2$

D'où $V(Y \mid N) = N\,\mathbb{E}[X_1^2] + N(N-1)\,\mathbb{E}[X_1]^2 - N^2\,\mathbb{E}[X_1]^2$
$$= N\,\mathbb{E}[X_1^2] - N\,\mathbb{E}[X_1]^2 = N\,V(X_1)$$

$$V(Y) = \mathbb{E}[V(Y \mid N)] + V(\mathbb{E}[Y \mid N])$$
$$V(Y) = \mathbb{E}[N\,V(X_1)] + V(N\,\mathbb{E}[X_1])$$
$$V(Y) = \mathbb{E}[N]V(X_1) + \mathbb{E}[X_1]^2 V(N) \qquad \text{Seconde formule de Wald.}$$