Master 2 Probabilités et Finance UPMC-X

"Processus stochastiques et produits dérivés"

I.d Marché à temps continu log-normal

Minimum vital de calcul stochastique pour le MB

Ref : **[Formule d'Ito sans proba : approche de Follmer '81]**

Subdivision dyadique d'ordre n : discrétisation de pas $\delta_n = 2^{-n}$ avec les temps $t_i = i2^{-n}$.

Définition (Variation quadratique). La variation quadratique d'un processus X associée à la subdivision dyadique d'ordre n est définie, pour $t \geq 0$, par

$$V_t^n(X) = \sum_{t_i \leq t} (X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i})^2.$$

Propriété. Si X a des trajectoires dérivables, alors $V_t^n(X) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Le MB a une variation quadratique non nulle

Proposition (Convergence ponctuelle). Avec probabilité 1, dans le cas du mouvement brownien W, on a

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbf{V^n_t}(\mathbf{W}) = \mathbf{t}, \qquad \text{pour tout } \mathbf{t} \geq \mathbf{0}.$$

Preuve. (pour $t = 1$). Alors, pour des G_i i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$,

$$V^n_1(W) = \sum_{i=0}^{2^n-1} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \overset{\text{loi}}{=} \sum_{i=0}^{2^n-1} (\delta_n^{\frac{1}{2}} G_i)^2 \quad \text{(accrois. gaussiens ind. du MB)}$$
$$= 2^{-n} \sum_{i=0}^{2^n-1} G_i^2 \xrightarrow{LGN} \mathbb{E}(G_1^2) = 1.$$

Cela montre que $V^n_1(W) \xrightarrow{\text{Prob.}} 1$ (la convergence en loi vers une constante implique la convergence en proba). □

- Le pas dyadique (décroissance rapide) implique $V^n_1(W) \xrightarrow{\text{p.s.}} 1$.
- Si le pas $\to 0$ lentement, la convergence peut être seulement en probabilité.
- La convergence en proba est vraie même si la subdivision est aléatoire (donnée par des temps d'arrêt) **[voir cours de calcul sto. et références]**.

Conséquences : estimation de la volatilité sur un historique

Proposition. Si X est un modèle de type brownien arithmétique $X_t = x_0 + \sigma W_t$, alors

$$V_t^n(X) = \sum_{t_i \leq t} (X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i})^2 \xrightarrow{\text{p.s.}} \sigma^2 t.$$

➠ On retrouve le **paramètre inconnu σ** (au signe près) en **observant à haute fréquence la trajectoire de X** sur une intervalle.

Conséquences (suite) : une première formule d'Itô

Proposition (Formule pour le carré). Soit W un mouvement brownien standard. Avec probabilité 1, on a pour tout $t \geq 0$

$$W_t^2 = 2\int_0^t W_s \mathrm{d}W_s + t$$

où $\int_0^t \mathbf{W_s}\mathrm{d}\mathbf{W_s} = \lim_{n+\infty} \sum_{t_i \leq t} \mathbf{W_{t_i}}(\mathbf{W_{t_{i+1}\wedge t}} - \mathbf{W_{t_i}})$ = intégrale stochastique.

PREUVE. (pour $t = 1$).

$$\begin{aligned} W_1^2 &= \sum_{t_i \leq 1} (W_{t_{i+1}\wedge 1}^2 - W_{t_i}^2) \\ &= \sum_{t_i \leq 1} (W_{t_{i+1}\wedge 1} - W_{t_i})^2 + 2\sum_{t_i \leq 1} W_{t_i}(W_{t_{i+1}\wedge 1} - W_{t_i}). \end{aligned}$$

1er terme : converge vers 1.

2ème terme : nécessairement convergeant. □

Exercice. Montrer que l'espérance de cette intégrale stochastique est nulle.

Autre conséquence de la convergence des variations quadratiques

En posant

$$\mu_{\mathbf{n}}(\mathrm{d}\mathbf{t}) = \sum_{\mathbf{i}} (\mathbf{W}_{\mathbf{t}_{\mathbf{i+1}}} - \mathbf{W}_{\mathbf{t}_{\mathbf{i}}})^{\mathbf{2}} \delta_{\mathbf{t}_{\mathbf{i}}}(\mathrm{d}\mathbf{t}) \quad \text{et} \quad \mu(\mathrm{d}\mathbf{t}) = \mathrm{d}\mathbf{t},$$

on a démontré

$$\mu_{\mathbf{n}}([\mathbf{0}, \mathbf{t}]) \to \mathbf{t} = \mu([\mathbf{0}, \mathbf{t}]),$$

c-à-d la convergence de la mesure positive μ_n vers la mesure de Lebesgue.

Corollaire (Convergence des "variations quadratiques pondérées").
Pour toute fonction continue f, on a avec probabilité 1

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{t_i \le t} f(t_i)(W_{t_{i+1}\wedge t} - W_{t_i})^2 = \int_0^t f(s)\mathrm{d}s.$$

➡ **Heuristique fréquente quand on fait une somme en temps :**

$$(\mathbf{W}_{\mathbf{t}+\mathbf{\Delta}_{\mathbf{t}}} - \mathbf{W}_{\mathbf{t}})^{\mathbf{2}} \approx \mathbf{\Delta}_{\mathbf{t}}.$$

Théorème (Formule d'Itô pour le MB). Soit $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R})$ une fonction régulière en temps et espace. Alors avec probabilité 1, on a pour tout $t \geq 0$

$$\mathbf{f(t, x + W_t) = f(0, x) + \int_0^t f'_x(s, x + W_s)\, dW_s + \int_0^t [f'_t + \frac{1}{2} f''_{xx}](s, x + W_s)\, ds,}$$

où le terme $\mathcal{I}_t(f) = \int_0^t f'_x(s, x + W_s)\mathrm{d}W_s$ **s'appelle l'intégrale stochastique de** $f'_x(s, x + W_s)$ et est la limite de $\mathcal{I}_t^n(f, W) = \sum_{t_i \leq t} f'_x(t_i, x + W_{t_i})(W_{t_{i+1} \wedge t} - W_{t_i})$.

Exercice.

1. Appliquer la formule d'Itô à $S_t = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$.
   $S_t = \exp(X_t)$ mais "$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} \neq \mathrm{d}X_t$".
2. Montrer la formule d'intégration par partie (pour $f \in \mathcal{C}^1$ déterministe)

$$\int_0^t W_s f'(s)\mathrm{d}s + \int_0^t f(s)\mathrm{d}W_s = f(t)W_t.$$

PREUVE. Somme téléscopique :

$$f(t,x+W_t)-f(0,x)=\sum_{t_i\le t}[f(t_{i+1}\wedge t,x+W_{t_{i+1}\wedge t})-f(t_i,x+W_{t_{i+1}\wedge t})]$$
$$+\sum_{t_i\le t}[f(t_i,x+W_{t_{i+1}\wedge t})-f(t_i,x+W_{t_i})].$$

— Premier terme : via une formule de Taylor à l'ordre 1

$$f(t_{i+1}\wedge t,x+W_{t_{i+1}\wedge t})-f(t_i,x+W_{t_{i+1}\wedge t})=f'_t(t_i,x+W_{t_{i+1}\wedge t})(t_{i+1}\wedge t-t_i)+o(t_{i+1}-t_i).$$

➠ $\lim_{n\to\infty}\sum_{t_i\le t}[f(t_{i+1}\wedge t,x+W_{t_{i+1}\wedge t})-f(t_i,x+W_{t_{i+1}\wedge t})]=\int_0^t f'_t(s,x+W_s)\mathrm{d}s.$

— Second terme : via Taylor ordre 2

$$f(t_i,x+W_{t_{i+1}\wedge t})-f(t_i,x+W_{t_i})$$
$$=f'_x(t_i,x+W_{t_i})(W_{t_{i+1}\wedge t}-W_{t_i})+\frac{1}{2}f''_{xx}(t_i,x+W_{t_i})(W_{t_{i+1}\wedge t}-W_{t_i})^2+\dots.$$

et $\lim_{n\to\infty}\sum_{t_i\le t}f''_{xx}(t_i,x+W_{t_i})(W_{t_{i+1}\wedge t}-W_{t_i})^2=\int_0^t f''_{xx}(s,x+W_s)\mathrm{d}s.$ □

Quelles extensions à d'autres processus que W ?

Définition. Un processus continu $(X_t)_t$ est à variation quadratique finie si p.s.

$$V_t^n = \sum_{t_i \le t} (X_{t_{i+1} \wedge t} - X_{t_i})^2$$

a une limite (calculée le long des subdivisions dyadiques d'ordre $n \to \infty$).

$\boxed{\text{La limite est notée } \langle X \rangle_t \text{ et est appelée le crochet de } X.}$

➠ Définit une fonction croissante continue. Dépend de la subdivision ?

Exemple :

1. $\langle W \rangle_t = t$.
2. Si X_t est dérivable, alors $\langle X \rangle_t = 0$.

Proposition. Soit $(X_t)_t$ un processus continu à variation quadratique finie. Alors, pour toute fonction f continue,

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{t_i \le t} f(t_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = \int_0^t f(s) \mathrm{d}\langle X \rangle_s, \quad \text{p.s.}$$

Formule d'Itô plus générale

Théorème. Soit $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R})$ et X un processus à variation quadratique finie. Alors avec probabilité 1, on a pour tout $t \geq 0$

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s)\, \mathrm{d}X_s + \int_0^t f'_t(s, X_s)\, \mathrm{d}s + \frac{1}{2}\int_0^t f''_{xx}(s, X_s)\, \mathrm{d}\langle X\rangle_s.$$

Le terme $\int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s$ s'appelle l'intégrale stochastique de $f'_x(s, X_s)$ par rapport à X : c'est la limite p.s. de $\sum_{t_i \leq t} f'_x(t_i, X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$ le long de la subdivision dyadique d'ordre n.

Ecriture sous forme différentielle :

$$\mathrm{d}f(t, X_t) = f'_x(t, X_t)\, \mathrm{d}X_t + f'_t(t, X_t)\, \mathrm{d}t + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t)\, \mathrm{d}\langle X\rangle_t.$$

Comment calculer le crochet d'un processus continu ?

Quelques règles de calcul pour A, M continues avec A à variation finie et M à variation quadratique finie :

i) $\langle A\rangle_t = 0$

ii) si $X_t = x + M_t$, alors $\langle X\rangle_t = \langle M\rangle_t$.

iii) si $X_t = \lambda M_t$, alors $\langle X\rangle_t = \lambda^2\langle M\rangle_t$.

iv) si $X_t = M_t + A_t$, alors $\langle X\rangle_t = \langle M\rangle_t$.

v) si $X_t = f(A_t, M_t)$ avec $f \in C^1$, alors $\langle X\rangle_t = \int_0^t [f'_m(A_s, M_s)]^2 \mathrm{d}\langle M\rangle_s$.

Exercice.

i) $X_t = x + bt + \sigma W_t : \langle X\rangle_t = \langle \sigma W\rangle_t = \sigma^2\langle W\rangle_t = \sigma^2 t$.

ii) $S_t = S_0 \exp(bt + \sigma W_t) : \langle S\rangle_t = \int_0^t \sigma^2 S_s^2 \mathrm{d}s$.

Corollaire. Si S MBG, alors

$$\mathbf{f(t, S_t) = f(0, S_0) + \int_0^t f'_x(s, S_s)\, dS_s + \int_0^t f'_t(s, S_s)\, ds + \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 S_s^2\, f''_{xx}(s, S_s)\, ds}$$

càd $\mathbf{df(t, S_t) = f'_x(t, S_t)\, dS_t + f'_t(t, S_t)\, dt + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2\, f''_{xx}(t, S_t)\, dt}$.

Autofinancement, couverture dynamique

Valorisation et couverture de produit dérivé

Call : droit d'acheter (mais pas l'obligation) 1 actif négociable S sur le marché à K Euros (K =*prix d'exercice, strike*) à la date future T fixée (*échéance, maturité*).

Equivalent à recevoir un flux monétaire $(S_T - K)_+$.

Deux problèmatiques fondamentales

1. Quel est le prix de tel contrat optionnel (ce qui détermine le montant de la prime que l'acheteur doit verser au vendeur à la signature du contrat) ? C'est la question de **valorisation**.
2. Quelle attitude doit adopter le vendeur une fois qu'il a vendu un tel produit et ainsi endossé (à la place de l'acheteur) le risque d'une hausse du titre à maturité ? C'est la question de **couverture du risque de marché**.

Nécessité de modélisation et calcul probabiliste

— Bachelier (1900) : thèse *Théorie de la spéculation*, soutenue à la Sorbonne en 1900.

— Markovitz (1952) : optimisation de portefeuille (frontière moyenne-variance) (Prix Nobel d'Économie en 1990).

— Black, Scholes et Merton (1973) : **diversifier le risque sur le temps de manière infinitésimale**

➠ stratégie d'investissement dynamique (Prix Nobel d'Économie en 1997)

➠ solution parfaite (**sous hypothèses de marché sans friction avec connaissance du modèle**), sans risque résiduel et explicite.

Modélisation probabiliste du marché

Espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$:

— Ω est l'ensemble de tous les scénarii de marché possibles.

— la tribu $\mathcal{F}$ représente la structure d'information globale disponible sur le marché.

— les aléas sont générés par un mouvement brownien réel $(\widehat{W}_t)_{0\leq t\leq T}$, qui engendre une filtration croissante $(\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T)$, décrivant l'information disponible pour tous les acteurs du marché au fil du temps (toute le monde a la même information, pas de délit d'initié).

— la probabilité $\mathbb{P}$ est appelée **probabilité historique ou objective**.

Modèle de Black-Scholes-Samuelson

Le modèle de Black-Scholes-Samuelson est défini sous forme de rendement instantané par

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{S_t}}{\mathbf{S_t}} = \mu \mathrm{d}\mathbf{t} + \sigma \mathbf{d}\widehat{\mathbf{W}}_\mathbf{t}$$

avec $S_0 = x$, où $(\widehat{W}_t)_t$ est un mouvement brownien standard sous $\mathbb{P}$. Sous forme intégrée, cela devient $S_t = xe^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \widehat{W}_t}$.

C'est un **modèle log-normal** dont les deux premiers moments valent

$$\mathbb{E}_\mathbb{P}(S_t) = xe^{\mu t}, \quad \mathbb{E}_\mathbb{P}(S_t^2) = x^2 e^{(2\mu + \sigma^2)t}.$$

Propriétés gaussiennes simples de ses rendements :

a) les rendements $\log(S_t) - \log(S_s)$ suivent une loi gaussienne de moyenne $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t - s)$ et de variance $\sigma^2(t - s)$.

b) Pour tout $0 < t_1 < t_2 \ldots\ldots < t_n$, les accroissements relatifs $\{\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}; 0 \leq i \leq n - 1\}$ sont indépendants, et de même loi.

Notons r **le taux d'intérêt sans risque** (taux de rémunération de l'argent placé sans risque au jour le jour).

Portefeuille dynamique de couverture

Une stratégie simple de portefeuille investi dans le titre S et dans le cash $\mathbf{S_t^0 = e^{rt}}$ est la donnée de deux processus $(\delta^0(t), \delta(t))$ de la forme

$$\delta(\mathbf{t}) = \delta_\mathbf{0}\mathbf{1}_{[\mathbf{0},\mathbf{t_1}]}(\mathbf{t}) + \ldots + \delta_\mathbf{k}\mathbf{1}_{]\mathbf{t_k},\mathbf{t_{k+1}}]}(\mathbf{t}) + \ldots + \delta_\mathbf{n-1}\mathbf{1}_{]\mathbf{t_{n-1}},\mathbf{t_n}]}(\mathbf{t})$$

(et de manière analogue pour δ^0) où les variables δ_k^0, δ_k sont $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurables. La valeur liquidative à la date t du portefeuille associé est égale à

$$\mathbf{V_t} = \delta^\mathbf{0}(\mathbf{t})\mathbf{S_t^0} + \delta(\mathbf{t})\mathbf{S_t},$$

ou bien sous forme de valeur actualisée $\dfrac{\mathbf{V_t}}{\mathbf{S_t^0}} = \delta^\mathbf{0}(\mathbf{t}) + \delta(\mathbf{t})\dfrac{\mathbf{S_t}}{\mathbf{S_t^0}}.$

Convention : $(\delta^0(t), \delta(t))$ sont des **nombres d'unités** de titre et de cash. On pourrait aussi raisonner en **montant** ou en **proportion**.

Les propriétés qui en découlent sont :

1. $(\delta^0(t), \delta(t))_t$ est continue à gauche et $\mathcal{F}_t$-adapté.
2. V_t est $\mathcal{F}_t$-adapté.
3. Pour $t \in]t_{k-1}, t_k]$, intervalle sur lequel $\delta^0(t)$ et $\delta(t)$ sont constants, la variation de la valeur du portefeuille s'écrit

$$\mathbf{V_{t_k} - V_t = \delta^0_{k-1}(S^0_{t_k} - S^0_t) + \delta_{k-1}(S_{t_k} - S_t) = \int_t^{t_k} \delta^0(u) \mathrm{d}S^0_u + \delta(u) \mathrm{d}S_u}$$

ou de manière équivalente, sur les valeurs actualisées,

$$\mathbf{\frac{V_{t_k}}{S^0_{t_k}} - \frac{V_t}{S^0_t} = \delta_{k-1}(\frac{S_{t_k}}{S^0_{t_k}} - \frac{S_t}{S^0_t}) = \int_t^{t_k} \delta(u) d\left(\frac{S_u}{S^0_u}\right)}.$$

Autofinancement

Rebalancement du portefeuille sans apport ni retrait d'argent :

$$\delta^0_{k-1} S^0_{t_k} + \delta_{k-1} S_{t_k} = \delta^0_k S^0_{t_k} + \delta_k S_{t_k}$$

➠ continuité à droite de V : $V_{t_k} = \lim_{t \downarrow t_k} V_t$.

Définition. La valeur d'un portefeuille autofinançant a pour dynamique

$$V_t = V_0 + \int_0^t rV_u du + \int_0^t \delta(u)(dS_u - rS_u du)$$

Sur les valeurs actualisées, cela s'écrit

$$e^{-rt} V_t = V_0 + \int_0^t \delta(u) d(e^{-ru} S_u).$$

Remarque. Le processus $(V_t)_t$ est complètement déterminé par V_0 et $(\delta(t))_t$ (le nombre de parts de cash se déduit par $\delta^0(t) = \frac{V_t - \delta(t) S_t}{S^0_t}$.

Traduction du problème de couverture parfaite de l'option

Le vendeur de l'option doit déterminer un processus de couverture $(\delta(t))_t$ et une richesse initiale V_0 tels que

$$\mathbf{dV_t} = \mathbf{rV_t}\mathrm{d}\mathbf{t} + \delta(\mathbf{t})(\mathrm{d}\mathbf{S_t} - \mathbf{rS_t}\mathrm{d}\mathbf{t})$$

avec une erreur de couverture nulle

$$\boxed{\epsilon_{\mathbf{T}} = \mathbf{0} = \mathbf{V_T} - \mathbf{h}(\mathbf{S_T}),}$$

où

- $h(S_T) = (S_T - K)_+$ dans le cas de la vente d'un Call,
- $h(S_T) = (K - S_T)_+$ dans le cas de la vente d'un Put,
- ou encore $h(S_T) = \mathbf{1}_{S_T > K}$ pour un Call binaire (ou Call digital).

S'il existe un tel portefeuille de couverture, l'option et le portefeuille de couverture ont même valeur en T avec probabilité 1. En vertu de l'AOA, leurs valeurs à toute date intermédiaire coïncident. En particulier, **$\mathbf{V_0}$ est la valeur de l'option aujourd'hui (la prime à verser par l'acheteur au vendeur).**