



# Cours 4 "Processus stochastiques et produits dérivés"

[emmanuel.gobet@polytechnique.edu](mailto:emmanuel.gobet@polytechnique.edu)

PLAN DU COURS

**Ch. III** Retour sur la couverture des risques (point de vue dynamique, dim 1 MBG)

**III.1** Raffinements supplémentaires sur la formule de Black-Scholes

**III.2** Options barrière dans le cas Black-Scholes

**III.3** Delta-Hedging à temps discret

**III.4** Delta-Gamma-Hedging à temps discret

### III.1 RAFFINEMENTS SUPPLÉMENTAIRES SUR LA FORMULE DE BS

#### Extension aux titres versant un dividende continu

 Détenir  $S$  pendant  $dt$  rapporte  $S \times q \times dt$  : approximation panier d'actions, prise en compte du taux de repo lors du prêt de titre et vente à découvert.

**Définition et Proposition.** Un portefeuille autofinancant investi dans le cash et le titre  $S$  (**versant un dividende continu au taux  $q$  par unité de temps**) a à la date  $t$  pour valeur liquidative  $V_t = \delta^0(t)S_t^0 + \delta(t)S_t$ , et sa dynamique est

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + \int_0^t \delta^0(u)dS_u^0 + \delta(u)(dS_u + \mathbf{qS_udu}) \\ &= V_0 + \int_0^t rV_u du + \int_0^t \delta(u)(dS_u + (q - r)S_u du). \end{aligned}$$

#### Objectif de couverture d'un Call pour le vendeur d'un contrat

Tracking error nulle  $\iff V_T = h(S_T)$ .

## EDP de valorisation et représentation risque-neutre

**Théorème.** Soit  $h$  une fonction mesurable, à croissance au plus linéaire, pour laquelle l'EDP ci-dessous admet une solution régulière  $v(t, x)$  sur  $]0, T[ \times ]0, +\infty[$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''_{xx}(t, x) + (\mathbf{r} - \mathbf{q})x v'_x(t, x) + v'_t(t, x) - rv(t, x) = 0, \\ v(T, x) = h(x). \end{array} \right.$$

Le flux  $h(S_T)$  est duplicable par un portefeuille autofinancant, dont la valeur à la date  $t$  est  $v(t, S_t)$ , et celle du portefeuille de couverture  $\delta(t, S_t) = v'_x(t, S_t)$ .

**Théorème.** Soit  $(\tilde{S}_t)_t$  un titre fictif de dynamique :

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = (\mathbf{r} - \mathbf{q})dt + \sigma dW_t,$$

avec  $W$  un mouvement brownien sous une probabilité  $\mathbb{Q}$ . Alors la solution de l'EDP d'évaluation est donnée par

$$v(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [e^{-r(T-t)} h(\tilde{S}_T) | \tilde{S}_t = x].$$

## Formule de Black-Scholes avec dividende

### Théorème.

- La fonction prix d'un Call de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$  sur un titre versant un dividende au taux continu  $q$  est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Call}(t, x, T, K) = & xe^{-\mathbf{q}(T-t)} \mathcal{N} \left[ d_1(T-t, xe^{(\mathbf{r}-\mathbf{q})(T-t)}, K) \right] \\ & - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N} \left[ d_0(T-t, xe^{(\mathbf{r}-\mathbf{q})(T-t)}, K) \right]. \end{aligned}$$

- De plus, cette option est couverte par un portefeuille qui contient

$$\delta(t) = \text{Call}'_x(t, S_t, T, K) = e^{-\mathbf{q}(T-t)} \mathcal{N}[d_1(T-t, S_t e^{(\mathbf{r}-\mathbf{q})(T-t)}, K)]$$

parts de titre  $S$ .

- Formules analogues pour les Puts :

$$\begin{aligned} \text{Put}(t, x, T, K) = & K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}[d_1(T-t, K, xe^{(\mathbf{r}-\mathbf{q})(T-t)})] \\ & - xe^{-\mathbf{q}(T-t)} \mathcal{N}[d_0(T-t, K, xe^{(\mathbf{r}-\mathbf{q})(T-t)})]. \end{aligned}$$



## Valorisation des options binaires/digitales

Contrat financier, dont le flux en  $T$  est de la forme

- a)  $\mathbf{1}_{S_T > K}$  ( $\rightsquigarrow$  BinC)
- b)  $\mathbf{1}_{S_T < K}$  ( $\rightsquigarrow$  BinP)

### Théorème.

$$\text{BinC}(0, x, T, K) = -\partial_K \text{Call}(0, x, T, K) = e^{-rT} \mathcal{N} \left[ d_0(T, xe^{(r-q)T}, K) \right].$$

$$\text{BinP}(0, x, T, K) = \partial_K \text{Put}(0, x, T, K) = e^{-rT} \mathcal{N}[d_1(T, K, xe^{(r-q)T})].$$

PREUVE.  $\mathbf{1}_{S_T > K} = -\partial_K [(S_T - K)_+]$ , ce qui induit par AOA la même relation sur les prix à toute date intermédiaire.  $\square$



## Formules de symétrie call/put

Idée : payoff  $(S - K)_+ =$

- a) Call avec strike  $K$  et sous-jacent initial  $S$  ?
- b) Put avec strike  $S$  et sous-jacent initial  $K$  ?

On note  $\boxed{\nu = r - q}$  (appelé le **cout de portage**).

### Lemme.

1. **Symétrie Call-Put.** On a

$$\text{Call}(t, xe^{-\nu(T-t)}, T, K) = \text{Put}(t, Ke^{-\nu(T-t)}, T, x).$$

2. **Homogénéité des fonctions prix.** Pour tout  $\lambda > 0$ , on a

$$\text{Call}(t, \lambda x, T, \lambda K) = \lambda \text{Call}(t, x, T, K) \quad \text{et} \quad \text{Put}(t, \lambda x, T, \lambda K) = \lambda \text{Put}(t, x, T, K).$$

## III.2 OPTIONS BARRIÈRE

Contrats très courants sur les changes.

- Un *Down-In Call (DIC)* donne le droit à son détenteur d'acheter le titre en  $T$  au prix  $K$  (*Call*) et **son droit est activé** seulement si le titre descend (*In*) en dessous d'une barrière basse  $D$  (*Down*) pendant la durée de vie du contrat. Son exercice revient à recevoir un flux égal à  $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\tau_D \leq T}$  où  $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : S_t \leq D\}$ .
- C'est un *Down-Out Call (DOC)* si la clause d'activation est de ne pas descendre en dessous de  $D$  (**l'option est alors désactivée**) : le payoff vaut alors  $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T < \tau_D}$ .
- Le contrat devient *Up-In Call (UIC)* si le titre doit franchir une barrière haute  $U$  (*Up*), avec pour flux équivalent  $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\tau_U \leq T}$  où  $\tau_U = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq U\}$ .
- En combinant les Up/Down, In/Out, Call/Put, 8 variantes.



Relation d'AOA :

$$\text{DOC}_t + \text{DIC}_t = \text{Call}_t.$$

- Une autre manière de classer les options barrière consiste à regarder leur payoff à la barrière.
  1. Si celui-ci est nul, ce sont des options barrière dite *regular*. C'est par exemple le cas d'un DOC/DIC avec  $K \geq D$ .
  2. Si celui-ci est non nul, elles sont de type *reverse*. C'est par exemple le cas d'un DOC/DIC avec  $K < D$ .

Option barrière **difficile à couvrir** : le cas regular est mieux que le cas reverse.



## RéPLICATIONS STATIQUES ET SEMI-STATIQUES À L'AIDE DE CALL/PUT :

- P. Carr, K. Ellis, and V. Gupta. Static hedging of path dependent options. *Journal of Finance*, 53 :1165-1190, 1998.
- N. El Karoui and M. Jeanblanc. Options exotiques. *Finance*, pages 49-67, 1999.
- L. Andersen, J. Andreasen, and D. Eliezer. Static replication of barrier options : some general results. *Journal of Computational Finance*, 5(4) :1-25, 2002.
- J. Maruhn and E. Sachs. Robust static hedging of barrier options in stochastic volatility models. *Mathematical Methods of Operations Research*, 70(13) :405-433, 2009.
- P. Carr and S. Nadtochiy. Static hedging under time-homogeneous diffusions. *SIAM Journal of Financial Mathematics*, pages 794-838, 2011.

## EDP et espérance risque-neutre

**Théorème (Prix des options barrière : EDP et espérance risque-neutre).** Considérons une option barrière Down-Out-Call (DOC) de payoff  $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\tau_D > T}$  sur un titre  $S$  log-normal de tendance  $\mu$ , de volatilité  $\sigma$  et versant un dividende au taux  $q$ .

**1) EDP.** Le prix à l'instant  $t$  du contrat est donné par  $V_t = v(t \wedge \tau_D, S_{t \wedge \tau_D}) = \mathbf{1}_{t < \tau_D} v(t, S_t)$  où  $v$  est solution de l'EDP

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''_{xx}(t, x) + (r - q)x v'_x(t, x) + v'_t(t, x) - rv(t, x) = 0, & t \in [0, T], x \geq D \\ v(T, x) = (x - K)_+, & x > D \\ v(t, x) = 0, & t \in [0, T], x \leq D. \end{cases}$$

L'option est couverte par l'achat de  $\delta(t) = \mathbf{1}_{t < \tau_D} v'_x(t, S_t)$  titres  $S$ .

**2) Valorisation risque-neutre.** La solution de l'EDP d'évaluation du DOC est donnée par  $v(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T < \tau_D} | S_t = x]$  où  $\tau_D = \inf\{s \geq t : S_s \leq D\}$  et où le drift de  $S$  sous  $\mathbb{Q}$  est  $r - q$ .

## Calcul explicite des prix

à l'aide du paramètre

$$\gamma = 1 - \frac{2\nu}{\sigma^2} \text{ où } \nu = r - q.$$

**Théorème (DIC regular ( $D \leq K$ ) dans le cas  $r = q$  ( $\gamma = 1$ )).**

- Si  $x \leq D$ , l'option est activée immédiatement et se transforme en Call :

$$\text{DIC}(t, x; T, K; D) = \text{Call}(t, x; T, K).$$

**RéPLICATION statique** : acheter un Call de caractéristiques  $(T, K)$ .

- Si  $x > D$ , on a

$$\text{DIC}(t, x; T, K; D) = \frac{K}{D} \text{Put}(t, x; T, \frac{D^2}{K}) = \frac{K}{D} \text{Call}(t, \frac{D^2}{K}; T, x) = \text{Call}(t, D; T, \frac{Kx}{D}).$$

**Couverture semi-statique :**

- tant que  $S_u > D$ , acheter  $\frac{K}{D}$  Puts de caractéristiques  $(T, \frac{D^2}{K})$ ,
- à l'instant où l'option est activée, acheter un Call de caractéristiques  $(T, K)$ .

## Prix des DIC regular ( $D \leq K$ ) dans le cas général

- Si  $x \leq D$ , activation immédiate et le DIC est équivalent à un Call.
  - Si  $x > D$ , valorisation va passer par celle des BinDIC, de payoff  $\mathbf{1}_{S_T > K} \mathbf{1}_{T \geq \tau_D}$ . En effet,  $\mathbf{1}_{S_T > K} \mathbf{1}_{T \geq \tau_D} = -\partial_K [(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T \geq \tau_D}]$ .
- ⇒ par AOA :

$$\begin{aligned}\text{BinDIC}(\mathbf{0}, \mathbf{x}; \mathbf{T}, \mathbf{K}; \mathbf{D}) &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [e^{-rT} \mathbf{1}_{S_T > K} \mathbf{1}_{T \geq \tau_D} | S_0 = x] \\ &= -\partial_K \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} [e^{-rT} (S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T \geq \tau_D} | S_0 = x] = -\partial_{\mathbf{K}} \text{DIC}(\mathbf{0}, \mathbf{x}; \mathbf{T}, \mathbf{K}; \mathbf{D}).\end{aligned}$$

**Théorème (cas  $x > D$ ).** Considérons les fonctions prix du BinDIC et DIC regular ( $D \leq K$ ). On a

$$\begin{aligned}\text{BinDIC}(t, \mathbf{x}; \mathbf{T}, \mathbf{K}; \mathbf{D}) &= \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{D}}\right)^\gamma \text{BinC}\left(t, D; \mathbf{T}, \frac{\mathbf{Kx}}{\mathbf{D}}\right), \\ \text{DIC}(t, \mathbf{x}; \mathbf{T}, \mathbf{K}; \mathbf{D}) &= \left(\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{D}}\right)^{\gamma-1} \text{Call}\left(t, D; \mathbf{T}, \frac{\mathbf{Kx}}{\mathbf{D}}\right).\end{aligned}$$

## Prix des DIC reverse ( $D > K$ )

Il reste à donner les formules dans le cas *reverse* pour  $x > D$ .

**Théorème.** Considérons les fonctions prix du DIC et BinDIC reverse ( $D > K$ ).

Pour  $x > D$ , on a

$$\begin{aligned} \text{BinDIC}(t, x; T, K; D) &= \text{BinC}(t, x; T, K) - e^{-r(T-t)} \\ &\quad + \text{BinP}(t, x; T, D) + \text{BinDIC}(t, x; T, D; D), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{DIC}(t, x; T, K; D) &= \text{Call}(t, x; T, K) - \text{Call}(t, x; T, D) - (D - K)\text{BinC}(t, x; T, D) \\ &\quad + \text{DIC}(t, x; T, D; D) + (D - K)\text{BinDIC}(t, x; T, D; D). \end{aligned}$$

PREUVE. Ecrire l'égalité des flux à maturité et appliquer l'AOA. □

 Toutes ces formules de réplications statiques et semi-statiques dépendent de  $\gamma$  qui dépend de  $\sigma$ ... encadrements de prix possibles si bornes sur  $\sigma$ .



### III.3 DELTA-HEDGING À TEMPS DISCRET

- La réPLICATION parfaite sans risque résiduel suppose (entre autres) le rebalancement en temps continu du portefeuille  $\Rightarrow$  Impossible en pratique
- Rebalancement à temps discret : si la fréquence est grande, l'erreur de couverture (**tracking error**) "doit" être petite (si l'on connaît le modèle <sup>a</sup>).

**Voir démo sur feuille excel.**

- Dans quel sens ?
- Impact des dates de rebalancement : régulières ou adaptatives au marché ?
- Impact des payoffs irréguliers ?

---

a. voir plus tard pour l'erreur de modèle

## Quelques résultats sur les intégrales stochastiques

**Définition.** Un intégrande est simple si

- $g_s = g_{t_i}$  if  $s \in ]t_i, t_{i+1}]$ ,
- $g_{t_i}$  dépend seulement de  $W$  avant  $t_i$ ,
- $g$  est de carré intégrable,  $\mathbb{E}(\int_0^T |g_s|^2 ds) < +\infty$ .

On pose alors  $\int_0^t \mathbf{g}_s d\mathbf{W}_s = \sum_{t_i \leq t} \mathbf{g}_{t_i} (\mathbf{W}_{t \wedge t_{i+1}} - \mathbf{W}_{t_i})$ .

 on prend  $g_{t_i}$  (valeur à gauche de l'intervalle et non à droite).

**Proposition (1er et 2ème moments).** L'intégrale stochastique  $\int_0^t g_s dW_s$  vérifie

$$\mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbf{g}_s d\mathbf{W}_s\right) = \mathbf{0}, \quad \mathbb{E}\left|\int_0^t \mathbf{g}_s d\mathbf{W}_s\right|^2 = \mathbb{E}\left(\int_0^t \mathbf{g}_s^2 ds\right).$$

→ **Relation d'isométrie** entre l'intégrale stochastique dans  $L_2(\mathbb{P})$  et les intégrandes dans  $L_2(dt \otimes d\mathbb{P})$  ↗ Extension à tous les intégrandes adaptés, continus, de carré intégrable ... (voir cours de calcul sto).

### Couverture discrète en $\Delta$

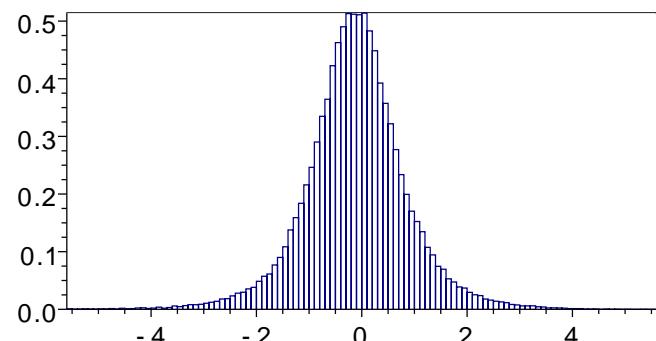
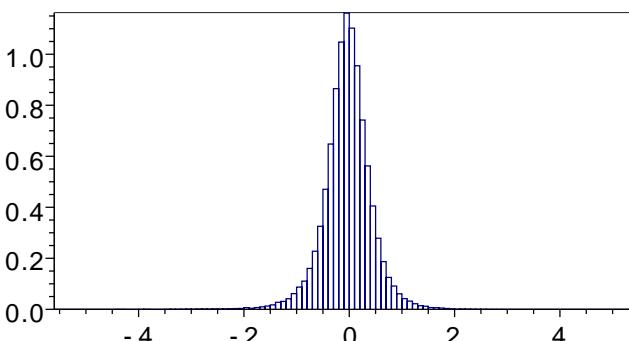
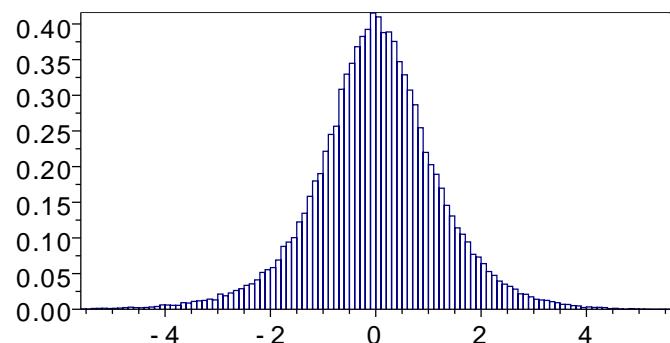
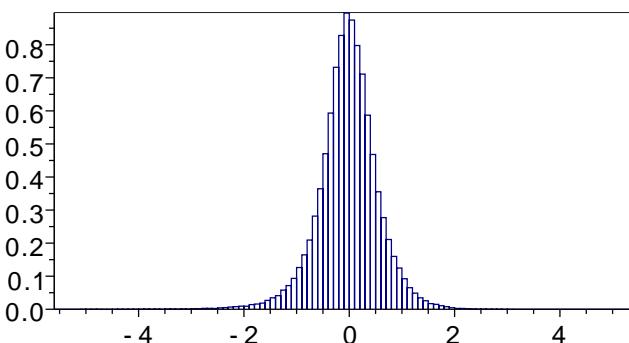
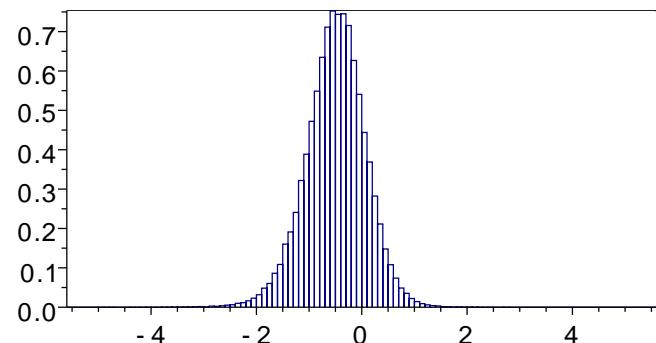
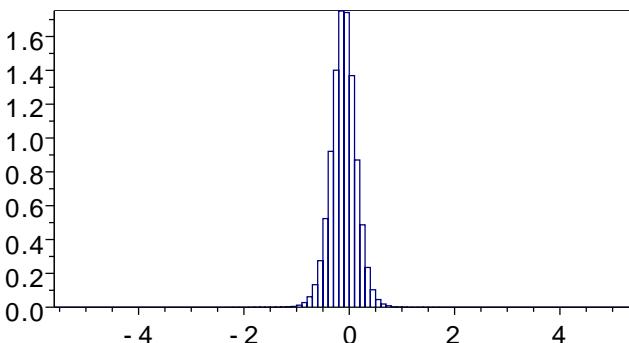
Cas du call :  $\delta(t) = \text{Call}'_x(t, S_t) = \mathcal{N}(d_1(t, S_t, K))$ .

Dates de rebalancement :  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_i < \dots < t_N = T$



- $\delta_t = \text{Call}'_x(t_i, S_{t_i})$  pour  $t \in ]t_i, t_{i+1}]$ .
- Portfolio resulting :  $V_T^N$ .
- Tracking error :  $\varepsilon_T^N = V_T^N - (S_T - K)_+$ .

**Théorème.**  $\mathbb{E}(|\varepsilon_T^N|^2) \sim C/N$  qd  $N \rightarrow +\infty$ .

Erreurs de couverture avec N=52 dates ( $\mu \ll r$ )Erreurs de couverture avec N=252 dates ( $\mu \ll r$ )Erreurs de couverture avec N=52 dates ( $\mu = r$ )Erreurs de couverture avec N=252 dates ( $\mu = r$ )Erreurs de couverture avec N=52 dates ( $\mu > r$ )Erreurs de couverture avec N=252 dates ( $\mu > r$ )

Distributions des erreurs de couverture avec re-balancement hebdomadaire (gauche) ou quotidien (droite). Influence du rendement du titre  $\mu$  (1ère ligne :  $\mu = -30\% \ll r$ , 2ème ligne  $\mu = r$ , 3ème ligne  $\mu = 30\% \gg r$ ). Paramètres :  $S_0 = K = 100$ ,  $\sigma = 25\%$ ,  $r = 2\%$  et  $T = 1$  an.

### III.4 COUVERTURE EN DELTA-GAMMA À TEMPS DISCRET



Unicité des prix mais pas unicité de la couverture.

Pour simplifier, pas de dividende :  $\mathbf{V}_t = \mathbf{v}(t, \mathbf{S}_t)$  et

$$\mathbf{d}(e^{-rt}\mathbf{V}_t) = \mathbf{v}'_{\mathbf{S}}(t, \mathbf{S}_t)\mathbf{d}(e^{-rt}\mathbf{S}_t).$$

Autre actif négociable écrit sur  $S$  (ex : option) :  $\mathbf{C}_t = \mathbf{C}(t, \mathbf{S}_t)$  et

$$\mathbf{d}(e^{-rt}\mathbf{C}_t) = \mathbf{C}'_{\mathbf{S}}(t, \mathbf{S}_t)\mathbf{d}(e^{-rt}\mathbf{S}_t).$$

Autre couverture : pour tout  $\alpha_t$  (satisfaisant conditions techniques)

$$\mathbf{d}(e^{-rt}\tilde{\mathbf{V}}_t) = \mathbf{v}'_{\mathbf{S}}(t, \mathbf{S}_t)(1 - \alpha_t)\mathbf{d}(e^{-rt}\mathbf{S}_t) + \alpha_t \frac{\mathbf{v}'_{\mathbf{S}}(t, \mathbf{S}_t)}{\mathbf{C}'_{\mathbf{S}}(t, \mathbf{S}_t)}\mathbf{d}(e^{-rt}\mathbf{C}_t),$$

s'interprète comme à la date  $t$  la détention de

- i)  $v'_S(t, S_t)(1 - \alpha_t)$  actifs  $S$ ,
- ii)  $\alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)}$  options  $C$ .

## Quel choix de $\alpha$ ?

- i) en temps continu, tous les choix fonctionnent.
- ii) en temps discret, un choix de  $\alpha$  rend plus petit la tracking error qd  $N$  grand.

### Matching des Gammas de l'option et du portefeuille de couverture

(insensibilité aux variations d'ordre 2 en  $S$ )

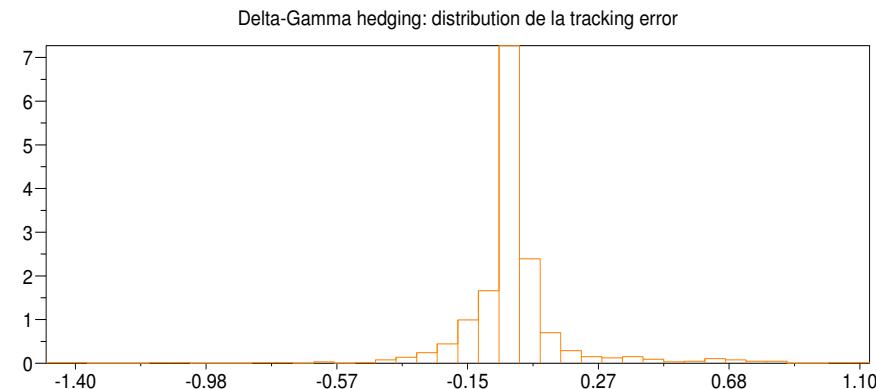
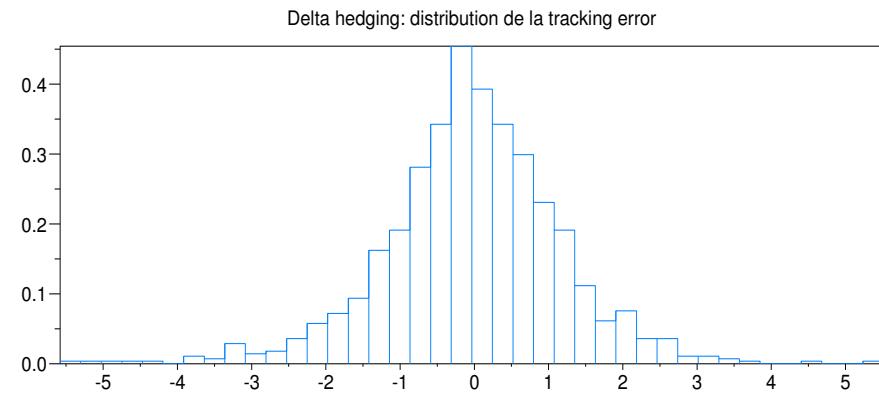
	option $V_t = v(t, S_t)$	portefeuille de couverture $\tilde{V}$
composition	$v'_S(t, S_t)$ titres $S$	$v'_S(t, S_t)(1 - \alpha_t)$ actifs $S$ et $\alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)}$ actifs $C$
delta % $S$	$v'_S(t, S_t)$	$v'_S(t, S_t)(1 - \alpha_t) + \alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)} C'_S(t, S_t)$
gamma % $S$	$v''_{SS}(t, S_t)$	$\alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)} C''_{SS}(t, S_t)$

⇒ Nombre d'options :  $\alpha_t \frac{v'_S(t, S_t)}{C'_S(t, S_t)} = \frac{v''_{SS}(t, S_t)}{C''_{SS}(t, S_t)}$  = ratio des gammas.

**Exemple.** Option supplémentaire : Call  $(T_2, K)$  de maturité plus longue.

Paramètres :  $T_1 = 12M$ ,  $T_2 = 15M$ ,  $K = 100$ ,  $r = 2\%$ ,  $\mu = 1\%$ ,  $S_0 = 100$ ,  $\sigma = 25\%$ .

Pour un rebalancement hebdomadaire, distribution empirique des tracking errors :



## Erreur quadratique

	hebdo.	quotid.
$\Delta$ hedging	1.25	0.566
$\Delta - \Gamma$ hedging	0.222	0.0567

➡ Tracking error  $\sim$   
 {  
      $\sqrt{\text{pas trading}}$  si  $\Delta$  hedge,  
     pas trading si  $\Delta - \Gamma$  hedge.



Tout ceci repose fortement sur l'hypothèse de "connaissance parfaite du modèle de prix" (irréaliste en pratique)