Séries temporelles ISFA
Examen Janvier 2023 - Durée 1h30 - Sans document

1. Soit $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc (faible) de moyenne nulle et de variance $\mathbb{E}(\epsilon^2) = \sigma^2 < \infty$. On pose
$$Y_t = \epsilon_t - \epsilon_{t-1}.$$
Montrez que Y_t n'est pas un bruit blanc.

2. Si ϵ_t suit une loi normale, quelle est la loi de Y_t ?

3. On suppose que l'on observe $Y_1, \cdots, Y_T$. On sait que ce processus est centré et qu'il est construit à partir du bruit blanc ϵ_t. Proposez un estimateur de σ^2 sans biais.

4. On définit le processus $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ par
$$Z_t = Z_{t-1} + \epsilon_t,$$
avec Z_{t-1} indépendant de ϵ_t. Montrez que le processus Z_t n'est pas stationnaire.

5. On pose
$$W_t = \alpha t + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1},$$
avec $\alpha \neq 0$. Proposez une moyenne mobile M pour centrer ce processus W_t. On notera $X_t = MW_t$.

6. Montrez que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire et calculer sa fonction d'autocovariance.

7. Identifiez le processus X_t (comme un ARMA).

8. On construit maintenant le processus $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$
$$U_t = \phi U_{t-1} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1},$$
que l'on suppose stationnaire. Identifiez ce processus.

9. Montrez que le processus défini par $U_t + U_{t-1}$ est stationnaire et identifiez sa nature.

① Soit $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc (faible) $\varepsilon_t \sim BB(0,\sigma^2)$

On pose $Y_t = \varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}$

Mq $Y_t \nsim BB$

* Pour être un bruit blanc il faut :

$\mathbb{E}[Y_t] = 0 \quad \forall t$

$\mathbb{V}[Y_t] = \sigma_Y^2 \quad \forall t$

$Cov(Y_t, Y_{t'}) = 0 \quad \forall t \neq t'$

Or ici on a $Cov(Y_t, Y_{t+1}) = Cov(\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}, \varepsilon_{t+1} - \varepsilon_t)$

$= -\sigma^2 \neq 0$

Donc Y_t n'est pas bruit blanc.

② Soit ε_t suivant une loi normale.

Loi de Y_t ?

$\varepsilon_t \sim \mathcal{N}(0,\sigma^2)$

$\Rightarrow \mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}]$

$= 0$

$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1}]$

$= \mathbb{V}[\varepsilon_t] + \mathbb{V}[\varepsilon_{t-1}] - \underbrace{2\,Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-1})}_{=0 \text{ par } \perp\!\!\!\perp}$

$= 2\sigma^2$

La somme de 2 v.a gaussiennes étant une gaussienne

$\Rightarrow Y_t \sim \mathcal{N}(0, 2\sigma^2)$

③ On observe $Y_1, \ldots, Y_T$.

On sait que $(Y_t)_{t\in[1,T]}$ est centré et construit à partir de ε_t un BB.

Pour $\hat{\sigma}_Y^2 = \frac{1}{2(T-1)} \sum_{t=1}^{T} Y_t^2$ on a $\mathbb{E}[\hat{\sigma}_Y^2] = \frac{1}{2(T-1)} \sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}[Y_t^2]$

$= \frac{1}{2(T-1)} \sum_{t=1}^{T} 2\sigma^2$

$= \sigma^2 \quad \Rightarrow$ Sans biais

④ On définit $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ tq

$Z_t = Z_{t-1} + \varepsilon_t \qquad$ avec $Z_{t-1} \perp\!\!\!\perp \varepsilon_t$

Mq Z_t non stationnaire.

$Z_t = Z_0 + \sum_{i=0}^{t} \varepsilon_i \qquad t \geq 1.$

$\mathbb{V}[Z_t] = \mathbb{V}[Z_{t-1} + \varepsilon_t]$

$= \mathbb{V}[Z_{t-1}] + \sigma^2$ car $Z_{t-1} \perp \varepsilon_t$

n'est pas indep de t

car $\mathbb{V}[Z_{t+1}] = \mathbb{V}[Z_t + \varepsilon_{t+1}]$

$= \mathbb{V}[Z_t] + \sigma^2$

$= \mathbb{V}[Z_{t-1}] + 2\sigma^2 \neq \mathbb{V}[Z_t]$

5) On pose $W_t = \alpha t + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1}$ $\alpha \neq 0$

Posons $M = (Id - L)$

$\Rightarrow X_t = M W_t = W_t - W_{t-1}$

$= \alpha t + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} - (\alpha(t-1) + \varepsilon_{t-1} - \theta \varepsilon_{t-2})$

$= \alpha + \varepsilon_t - (1+\theta)\varepsilon_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-2}$

$= \alpha + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_{t-1} - (\varepsilon_{t-1} - \theta \varepsilon_{t-2})$

6) $X_t = \alpha + \phi(L)\varepsilon_t$ où $\phi(L) = 1 - (1+\theta)L + \theta L^2$

$\Rightarrow X_t$ stationnaire car ϕ inversible.

* $\mathbb{E}[X_t] = \alpha$
* $\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{V}[\alpha + \varepsilon_t - (1+\theta)\varepsilon_{t-1} + \theta \varepsilon_{t-2}]$

$= \sigma_\varepsilon^2 + (1+\theta)^2 \sigma_\varepsilon^2 + \theta^2 \sigma_\varepsilon^2$

$= 2(1+\theta)^2 \sigma_\varepsilon^2$

* $\gamma_X(k) = Cov(X_t, X_{t+k})$

$= Cov(\varepsilon_t + (1+\theta)\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2}, \varepsilon_{t+k} + (1+\theta)\varepsilon_{t+k-1} + \theta \varepsilon_{t+k-2})$

$$= \begin{cases} 2(1+\theta)^2\sigma_\varepsilon^2 & \text{si } k=0 \\ (1+\theta)^2\sigma_\varepsilon^2 & \text{si } |k|=1 \\ \theta\sigma_\varepsilon^2 & \text{si } |k|=2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

7) $X_t - X_{t-1} = \varepsilon_t - (1+\theta)\varepsilon_{t-1} + \theta\varepsilon_{t-2} - (\varepsilon_{t-1} - (1+\theta)\varepsilon_{t-2} + \theta\varepsilon_{t-3})$

$= \varepsilon_t - (2+\theta)\varepsilon_{t-1} + (1+2\theta)\varepsilon_{t-2} - \theta\varepsilon_{t-3}$

$\Rightarrow \phi(L) X_t = \Theta(L)\varepsilon_t$ avec $\begin{cases} \phi(L) = (1-L) \\ \Theta(L) = 1 - (2+\theta)L + (1+2\theta)L^2 - \theta L^3 \end{cases}$

$\Rightarrow (X_t)$ est un ARMA(1,3)

8) $U_t = \phi U_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$ supposé stationnaire.

$\Rightarrow U_t - \phi U_{t-1} = \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}$

$\Rightarrow \phi(L) U_t = \Theta(L)\varepsilon_t$

avec $\begin{cases} \phi(L) = 1 - \phi L \\ \Theta(L) = 1 - \theta L \end{cases}$ $\Rightarrow (U_t)_t$ est un ARMA(1,1)

9

$$* \ \mathbb{E}[U_t + U_{t-1}] = \mathbb{E}[(1+\phi)U_{t-1} + \varepsilon_t - \theta\varepsilon_{t-1}]$$
$$= (1+\phi)\mu_U$$

7. Identifiez le processus X_t (comme un ARMA).
8. On construit maintenant le processus $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$

$$U_t = \phi U_{t-1} + \epsilon_t - \theta\epsilon_{t-1},$$

que l'on suppose stationnaire. Identifiez ce processus.
9. Montrez que le processus défini par $U_t + U_{t-1}$ est stationnaire et identifiez sa nature.