Modèles financiers en assurance / Examen du 22 mai 2015

Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Le soin apporté à la rédaction sera pris en compte dans la notation. Il est demandé de prendre le temps de développer un argumentaire précis et structuré pour répondre aux questions, les réponses lapidaires sans détails ne seront pas considérées comme justes.

Éléments de correction

Utilisation d'une courbe de taux ZC dans le cadre de l'ORSA

On considère un contrat de retraite pour lequel on souhaite calculer la meilleure estimation des provisions à la date initiale, $t=0$, puis dans une vision prospective aux dates $t=1,\ldots,T$.

On dispose pour cela d'une courbe des taux sans risque fournissant des taux ZC annuels $\left(R_0\left(0,\tau\right);\tau=1,\ldots,150\right)$ sous forme non paramétrique.

La prestation considérée se limite à une rente unitaire non revalorisée servie à terme échu à un assuré d'âge x à la date du calcul. On note T_x la durée de survie résiduelle du rentier et $\delta\left(t\right)$ le facteur d'actualisation associé à un flux de maturité t.

Question n°1 (4 points) : Écrivez en fonction de T_x et $\delta\left(t\right)$ la valeur actuelle des flux de prestation que l'on notera Λ_x et donnez l'expression de la meilleure estimation de la provision associée à Λ_x en rappelant la règle générale de calcul d'une provision *best estimate* dans Solvabilité 2.

> On a $\Lambda_x=\sum_{t\geq 1}\delta\left(t\right)1_{\{T_x\geq t\}}=\sum_{h=1}^{T_x}\delta\left(t\right)$.
>
> La provision est égale à $E^{P^a\otimes Q^f}\left(\Lambda_x\right)=\sum_{t\geq 1}E^{Q^f}\left(\delta\left(t\right)\right)P\left(T_x\geq t\right)=\sum_{t\geq 1}P\left(0,t\right)\frac{l_{x+t}}{l_x}$
>
> avec $P\left(0,t\right)=\left(1+R_0\left(0,t\right)\right)^{-t}$.
>
> La règle de calcul de la meilleure estimation des provisions dans Solvabilité 2 est discutée ici : http://actudactuaires.typepad.com/laboratoire/2013/05/engagement-best-estimate-dun-contrat-d%C3%A9pargne-en-.html

Pour déformer la courbe des taux initiale et disposer ainsi à chaque date future d'une courbe pour calculer les provisions, on retient comme modèle de référence le modèle à trois facteurs de forme et un facteur d'échelle proposé par Nelson et Siegel. Le taux zéro-coupon $R\left(t,\tau\right)$ se décompose par hypothèse en[1] :

[1] On note $\tau=T-t$ la maturité résiduelle d'un flux d'échéance T vu en date t.

$$R(t,\tau)=r(t)\varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)+l(t)\left(1-\varphi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right)\right)+c(t)\psi\left(\frac{\tau}{\tau_1}\right).$$

avec $\varphi(x)=\frac{1-e^{-x}}{x}$ et $\psi(x)=\varphi(x)-e^{-x}$ et on fait l'hypothèse que le taux court $r(t)$, le taux long $l(t)$ et la convexité $c(t)$ évoluent selon :

$$\begin{aligned} dr(t) &= \mu_r(r_\infty - r_t)dt + \sigma_r dW_r(t) \\ dl(t) &= \mu_l(l_\infty - l_t)dt + \sigma_l dW_l(t) \\ dc(t) &= \mu_c(c_\infty - c_t)dt + \sigma_c dW_c(t) \end{aligned}$$

En termes de structure de dépendance entre les facteurs ci-dessus, on suppose que les corrélations constatées historiquement sont compatibles avec une hypothèse d'indépendance, qui sera donc retenue ici.

Question n°2 (4 points) : Pourquoi fait-on le choix d'un modèle paramétrique pour modéliser la déformation de la courbe ? Comment déterminer les paramètres de l'ajustement initial ? Comment déterminer les paramètres des trois diffusions ? À partir de quelles données ? Sous quelle probabilité sont modélisées ces diffusions ?

> La courbe étant fournie sous forme non paramétrique, sa déformation nécessite de projeter les 150 taux ZC qu'elle contient. Utiliser un modèle paramétrique permet de ramener la projection à un petit nombre de facteurs (ici 3, l'énoncé suppose implicitement que le facteur d'échelle est constant).
> Les paramètres de l'ajustement initial peuvent être déterminés en minimisant la somme des écarts quadratiques entre les taux ZC issus du modèle et ceux fournis par la courbe.
> La détermination des paramètres des diffusions nécessite de disposer d'un historique de courbes sur lesquelles il est possible d'ajuster, à chaque date, le modèle NS pour construire ainsi des séries temporelles des paramètres.
> La détermination des paramètres peut alors se faire en ajustant les séries temporelles sur les versions discrétisées des processus.
> Elles sont modélisées sous la probabilité historique, la probabilité risque neutre servant de son côté uniquement au calcul des provisions.

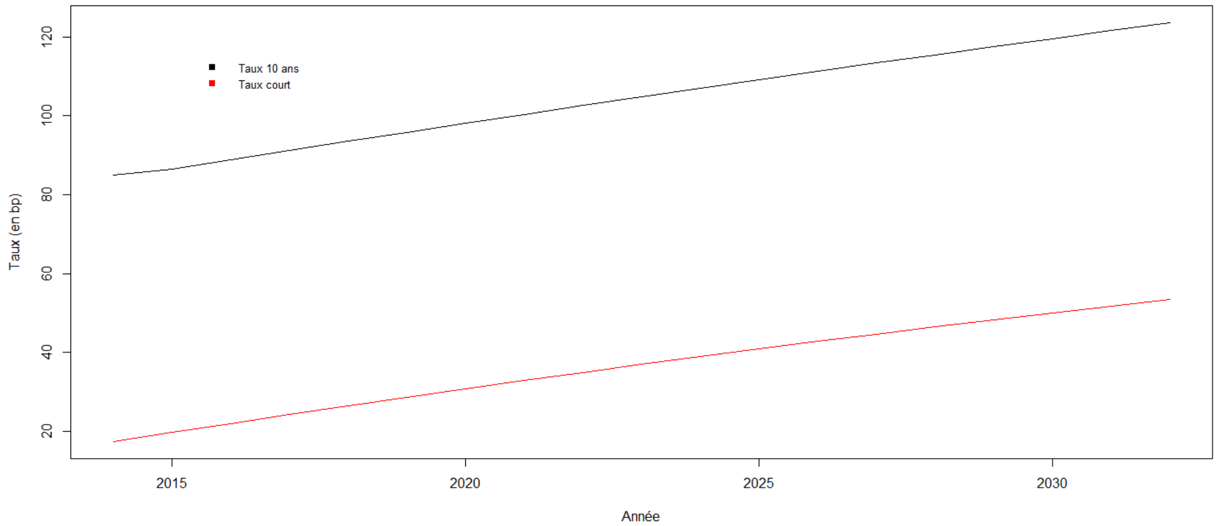
Question n°3 (3 points) : calculez $E(x(t))$ pour $x=r,l,c$ et en déduire l'expression de l'espérance du taux 10 ans à la date t, $E\left[R(t,10)\right]$.

> On montre que pour un processus d'Ornstein-Uhlenbeck :
> $$x(t)=x_0\times e^{-\mu t}+x_\infty\times\left(1-e^{-\mu t}\right).$$
> La justification de ce résultat se trouve par exemple page 234 de
> PLANCHET F., THÉROND P.E. [2011] *Modélisation statistique des phénomènes de durée – applications actuarielles*, Paris : Economica.
> On a simplement

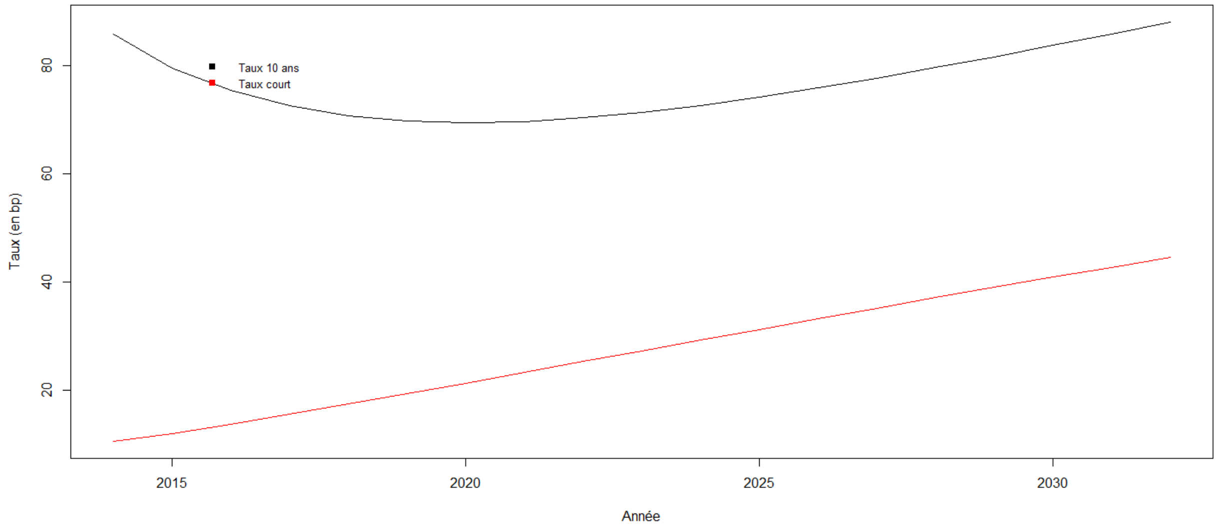
$$E\left[R(t,10)\right]=E\left[r(t)\right]\varphi\left(\frac{10}{\tau_1}\right)+E\left(l(t)\right)\left(1-\varphi\left(\frac{10}{\tau_1}\right)\right)+E\left[c(t)\right]\psi\left(\frac{10}{\tau_1}\right)$$

et il de remplacer les espérances par leurs valeurs en fonction des paramètres.

On suppose que l'on a déterminé des valeurs pour les diffusions ci-dessus ; en réalisant l'ajustement de la courbe initiale sur les 50 premières années on obtient l'évolution suivante du taux 10 ans moyen :



et en effectuant ce même ajustement sur l'ensemble des 150 maturités disponibles on trouve :



Question n°4 (2 points) : Discutez les différences .les plus marquantes entre les deux projections ; laquelle retiendriez-vous dans le cadre de l'ORSA du régime ?

Les situations économiques associées à ces deux projections sont très différents : dans le premier cas, le taux 10 ans remonte régulièrement pour atteindre 120 bp alors que dans le second il baisse avant de remonter au niveau initial de 80 bp.

> Le choix dépend donc de l'anticipation que l'on fait de la situation économique future : une remontée progressive conduit à retenir le premier scénario, une situation de taux très bas durable la seconde.

Question n°5 (2 points) : Quelle est l'expression du *best estimate* à la date *t* dans l'hypothèse d'une évolution déterministe du contrat entre 0 et t ?

> La provision est égale à $E_t\left(\Lambda_{x,t}\right)=\sum_{h\geq 1}P(t,h)\frac{l_{x+t+h}}{l_x}$ avec $P(t,h)=\left(1+R(t,h)\right)^{-h}$.

On suppose maintenant que la rente est revalorisée de manière continue sur la base d'une fraction λ du taux court, c'est-à-dire que le montant de la rente en fonction du temps est $m(t)=\mathbf{exp}\left(\lambda\int_0^t r(u)\,du\right)$.

Question n°6 (3 points) : Quelle est la valeur de la meilleure estimation de la provision dans ce cas ? Comment la calculer explicitement de manière raisonnable ? Les modèles spécifiés jusqu'alors suffisent-ils ? Dans le cas où ils ne suffiraient pas, proposez un modèle simple et expliquez comment vous le calibrez.

> La provision est égale à $\sum_{t\geq 1}E^{Q^f}\left(\delta(t)m(t)\right)\frac{l_{x+t}}{l_x}$ donc tout se ramène au calcul de
>
> $$E^{Q^f}\left(\delta(t)m(t)\right)=E^{Q^f}\left(\mathbf{exp}\left((\lambda-1)\int_0^t r(u)\,du\right)\right).$$
>
> Il est nécessaire de disposer d'une dynamique du taux court en probabilité risque neutre, ce qui n'est à ce stade pas explicite : l'ajustement NS de la courbe des taux n'explicite pas une telle dynamique et le processus OU utilisé à la question 4 est spécifié sous la probabilité historique. On peut pour cela utiliser l'approche de
>
> CHRISTENSEN J.H.E.; DIEBOLD F.X.; RUDEBUSH G.D. [2010] « The Affine Arbitrage-Free Class of Nelson-Siegel Term Structure Models », *Federal Reserve Bank of San Francisco*, WP n°2007-20.
>
> qui est celle qui est la plus cohérente avec le choix du modèle NS ; on peut utiliser également l'approche simplifiée vue en cours et décrite dans
>
> BONNIN F., COMBES F., PLANCHET F., TAMMAR M. [2015] « Un modèle de projection pour des contrats de retraite dans le cadre de l'ORSA », *Bulletin Français d'Actuariat*, vol. 14, n°28.
>
> On dispose alors de formules fermées pour le calcul de $E^{Q^f}\left(\delta(t)m(t)\right)$.