Modèles financiers en assurance / Mai 2018

Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Éléments de correction

Thème : Passage de la probabilité historique à la probabilité risque-neutre

Les différentes questions nécessitent des développements argumentés et structurés pour répondre de manière détaillée et précise.

Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la notation. Une copie mal écrite ne sera pas corrigée.

On considère le modèle de taux mono-factoriel de Vasicek dans lequel on suppose que le taux court instantané suit la dynamique suivante sous la probabilité historique :

$$dr_t = k\left(b - r_t\right)dt + \sigma dW_t$$

On note $b_\lambda = b - \frac{\lambda\sigma}{k}$ et $r_\infty\left(\lambda\right) = b_\lambda - \frac{\sigma^2}{2k^2}$. On rappelle que le prix d'un zéro-coupon de maturité *T* s'écrit, à la date *t* :

$$P\left(r_t, T-t\right) = \mathbf{exp}\left(\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k}\left(r_\infty\left(\lambda\right) - r_t\right) - \left(T-t\right)r_\infty\left(\lambda\right) - \frac{\sigma^2}{4k^3}\left(1-e^{-k(T-t)}\right)^2\right).$$

Enfin, on note $\delta\left(t\right) = \mathbf{exp}\left(-\int_0^t r\left(u\right)du\right)$

Question n°1 (2 points) : Quelle est la dynamique du taux court instantané sous la probabilité risque-neutre ? Que représente le paramètre λ ?

> $dr_t = k\left(b_\lambda - r_t\right)dt + \sigma dW_t$ et λ est le « prix de marché du risque » (cf. CAJA A., PLANCHET F. [2010] « La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ? », *Assurances et gestion des risques*, Vol.78 (3/4).)

Question n°2 (3 points) : Montrez que $g\left(\lambda\right) = P\left(r_t, T-t\right)$ est une fonction croissante de λ.

> On calcule facilement
> $\frac{d}{d\lambda} r_\infty\left(\lambda\right) = -\frac{\sigma}{k}$

$$\frac{d}{d\lambda}g(\lambda)=g(\lambda)\times\left(-\frac{1-e^{-k(T-t)}}{k}+(T-t)\right)\times\frac{\sigma}{k}$$

Comme $h(x)=x-\frac{1-e^{-kx}}{k}$ vérifie $h'(x)=1-e^{-kx}>0$ et que $h(0)=0$, h est donc positive et g croissante avec λ.

Question n°3 (2 points) : Quel est le lien entre $P(t,T)=P(r_t,T-t)$ et $\delta(t)$? Pourquoi le prix du ZC ne dépend que de la dernière valeur du taux court ?

$P(t,T)=E_t^Q\left(\mathbf{exp}\left(-\int_t^T r(u)du\right)\right)$ et $P(t,T)=P(r_t,T-t)$ car le processus de taux court est markovien.

Question n°4 (2 points) : À quelle valeur de λ est associée $E_t^P\left(\mathbf{exp}\left(-\int_t^T r(u)du\right)\right)$? Compte tenu du résultat ci-dessus, quel devrait être le signe de λ ?

La dynamique du taux court sous *P* est obtenue avec $\lambda=0$; compte tenu de l'incertitude sur le taux court, $P(t,T)\le E_t^P\left(\mathbf{exp}\left(-\int_t^T r(u)du\right)\right)$ donc $\lambda\le 0$.

Question n°5 (3 points) : On suppose que l'on dispose d'un historique du taux court et de prix de ZC de différentes maturités. Comment estimeriez-vous les paramètres (k,b,σ,λ) ? Est-il possible d'estimer ces quatre paramètres avec seulement des prix ?

On peut procéder en deux temps : d'abord estimer (k,b,σ) à l'aide des historiques avec des techniques de séries temporelles[1], puis ensuite en déduire λ en minimant en λ la fonction de perte $p(\lambda)=\sum_{T_i}\left(P_{obs}(O,T_i)-P_{th}(O,T_i,\lambda)\right)^2$

Avec seulement des prix, il est possible d'estimer (k,b_λ,σ) mais le paramètre λ n'est pas identifiable.

On considère maintenant un contrat d'assurance dont les flux de trésorerie sont décrits par le processus $(F_t,t\ge 1)$. On suppose que ces flux ne dépendent pas de la performance de l'actif.

---

[1] Voir PLANCHET F., THÉROND P.E. [2005a] « Simulation de trajectoires de processus continus », *Belgian Actuarial Bulletin*, vol. 5, 1-13.

Question n°6 (4 points) : Rappelez l'expression de la meilleure estimation des provisions à la date *t*, $BE(t)$, en fonction de F et de δ. Vous détaillerez les différentes probabilités en jeu et leur lien avec la nature des risques affectant les flux actualisés. Donnez un exemple de risque ni mutualisable ni réplicable et indiquez comment ce type de risque est pris en comptes dans les provisions techniques prudentielles.

> En notant P^a et Q^f respectivement la probabilité historique associée aux risques mutualisables et la probabilité risque neutre associée aux risques réplicables, on a simplement :
>
> $$BE(t) = E_t^{P^a \otimes Q^f}\left(\sum_{u>t} \frac{\delta(u)}{\delta(t)} F_u\right) = \sum_{u>t} P(t,u) \times E_t^{P^a}(F_u)$$
>
> Les risques comme les risques de modèle ou, de manière générale, les risques non réplicables mettant en cause l'indépendance des polices, sont pris en compte *via* la marge pour risque.

Question n°7 (3 points) : dans le cadre d'un modèle ORSA, vous souhaitez avoir une information sur la distribution de la variable aléatoire $BE(t)$; dans un premier temps, on se limite à l'incertitude induite par les risques financiers. Décrivez un algorithme qui permette d'avoir une distribution empirique de $BE^f(t) = E^{P^a}\left(BE^f(t)\right)$. Est-il possible d'avoir une expression analytique de la distribution de $BE^f(t)$? D'avoir une approximation par une loi simple raisonnable ?

> En se limitant au risque financier, on peut remplacer $E_t^{P^a}(F_u)$ par $\overline{F}(u) = E^{P^a}(F_u)$, ce qui conduit à
>
> $$BE^f(t) = E^{P^a}\left(BE^f(t)\right) = \sum_{u>t} P(r_t, u-t) \times \overline{F}(u).$$
>
> Il suffit donc de simuler le processus $r(t)$ en probabilité historique pour construire un échantillon de réalisations de $BE^f(t)$. Comme $P(r_t, u-t)$ suit une loi log-normale, une expression analytique exacte n'est pas accessible. Une approximation par une loi log-normale de $BE^f(t)$ peut être proposée.

Question n°8 (1 point) : Comment faire pour généraliser la démarche ci-dessus au cas où on ne néglige plus le risque d'assurance ?

> La généralisation implique de construire $E_t^{P^a}(F_u)$, ce qui ne peut être fait qu'en fonction d'un contexte particulier, puisqu'il est nécessaire alors de disposer d'informations sur la loi des flux de trésorerie.