Examen Théorie des Valeurs Extrêmes 2014-2015

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice - 1h30

Exercices d'applications du cours (10 points):

1. Soit B une variable aléatoire de distribution Binomiale(n,p)

$$P(B=k)=C_n^k p^k (1-p)^{n-k}$$

et N une variable aléatoire de distribution Poisson(λ). On pose $\lambda = np$. Montrer que

$$P(B=k)=P(N=k)\left(\frac{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n}{e^{-\lambda}}\frac{1}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^k}\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{i-1}{n}\right)\right).$$

En déduire que si $n\to\infty$, $p\to 0$ tel que $\lambda=np$, alors B converge en distribution vers N.

Expliquer comment ce résultat peut être utilisé pour caractériser la loi du maximum et des statistiques d'ordre élevé.

2. Qu'est-ce que la propriété de max-stabilité? Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle standard. Est-ce que X ou $-X$ a une loi max-stable? Si oui, donner les coefficients permettant de déduire la max-stabilité.

3. Expliquer ce que veut dire "F appartient au domaine d'attraction d'un loi max-stable G ($F\in D(G)$)". On considère la variable aléatoire de distribution H telle que

$$H(x)=F(\alpha x+\beta)$$

avec $\alpha>0$. A quelle domaine d'attraction appartient H. Donner les relations qui existent entre les suites de normalisation pour H et F.

4. On rappelle que la distribution de Pareto généralisée GPD(β,ξ) est définie par

$$G^p_{\xi,\beta}(x)=\begin{cases}1-\left[1+\xi\left(x/\beta\right)\right]_+^{-1/\xi} & \text{si } \xi\neq 0,\\ 1-e^{-x/\beta} & \text{si } \xi=0,\end{cases}.$$

Expliquer à quel domaine d'attraction appartient la distribution de Pareto généralisée GPD(β,ξ).

5. Soit $X_1,...,X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution F et soit $M_n = \max(X_1,...,X_n)$. On rappelle que:

i) Pour un $\tau>0$ et une suite de réels (u_n), les conditions suivantes sont équivalentes: quand $n\to\infty$

$$\begin{aligned}&1)\quad \Pr(M_n\le u_n)\to e^{-\tau},\\ &2)\quad n\bar{F}(u_n)=n(1-F(u_n))\to\tau.\end{aligned}$$

ii) Il existe une suite (u_n) satisfaisant $n\bar{F}(u_n) \to \tau$ quand $n \to \infty$ si et seulement si

$$\lim_{x \uparrow x^F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{F}(x-)} = 1.$$

où $x^F = \sup\{x : F(x) < 1\}$. Peut-on trouver une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} \Pr(M_n \leq u_n) = e^{-\tau}$ si

- les X_i ont une loi Exponentielle de paramètre λ

$$\Pr(X_i > x) = \exp(-\lambda x), \quad x > 0;$$

- les X_i ont une loi Géométrique de paramètre p

$$\Pr(X_i = n) = p(1-p)^n, \quad n \in \mathbb{N};$$

- les X_i ont une loi de Poisson de paramètre λ

$$\Pr(X_i = n) = e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Exercice 1 (5 points):

On rappelle qu'une distribution F appartient au domaine d'attraction de la loi de Gumbel Λ, si et seulement si il existe une fonction positive g telle que :

$$\lim_{x \to x^F} \frac{\bar{F}(x + tg(x))}{\bar{F}(x)} = \exp(-t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

et qu'un choix possible pour la fonction g est donnée par

$$g(x) = \frac{\int_x^{x^F} \bar{F}(t)dt}{\bar{F}(x)} = \mathbb{E}(X - x | X > x).$$

Les coefficients a_n et b_n tels que

$$\Pr(M_n \leq a_n x + b_n) \to \Lambda(x) = \exp(-\exp(-x)), \qquad x \in \mathbb{R},$$

ont alors la forme suivante : $b_n = F^{\leftarrow}(1 - n^{-1})$, $a_n = g(b_n)$.

1. Supposons que X soit une variable aléatoire positive de distribution F telle que $x^F = \infty$.

- Donner quelques éléments d'explication (sans trop de détails mathématiques) pour justifier que l'on a $\lim_{x\to\infty} g(x)/x = 0$.

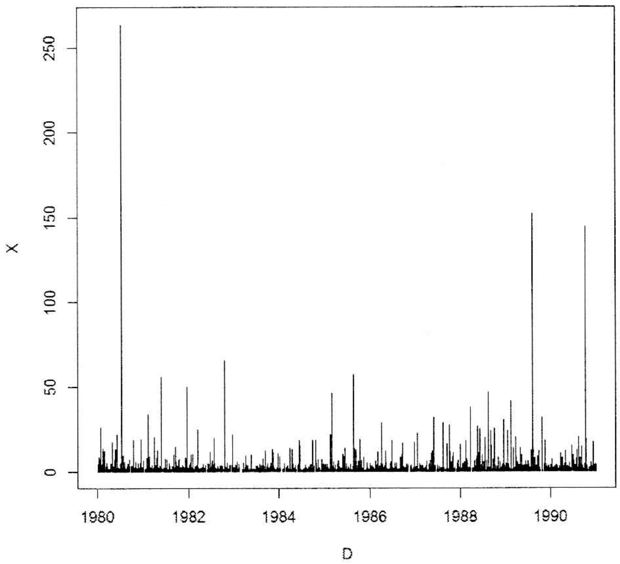
- Montrer que si $F \in D(\Lambda)$ où Λ est la distribution de Gumbel, alors la distribution de $-X^{-1}$ appartient aussi au domaine d'attraction de la distribution de Gumbel. On partira de l'écriture de la condition $F \in D(\Lambda)$ en fonction de M_n, le maximum, pour en déduire la réponse.

2. On considère une transformation croissante T, deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et on suppose que le point extremal $x^F < \infty$ est fini. Montrer que $F \circ T^{-1}$ appartient au domaine d'attraction de la distribution de Gumbel et donner les coefficients de normalisation.

Indication: on utilisera un développement limité au voisinage de x^F.

Question méthodologique (5 points):

Un réassureur dispose des données de sinistres suivantes pour tarifier un excédent de sinistres de priorité 100 et de portée illimitée.



Quelle méthodologie lui proposez-vous? Donner une réponse la plus littérale possible en décrivant la formule que vous allez utiliser, les paramètres dont vous avez besoin, les procédures d'estimation que vous allez utiliser.