# Finance mathématique

Mail prof: ying.jiao@univ-lyon1.fr

## Références:

* Brigo et Mercurio : Interest rate modelling – Theory and practice
* Musiela et Rutkowski : Martingale methods in Financial Modelling.

## Rappel sur la notion de taux d'intérêt.

- Capitalisation
  → Evaluation d'un montant à la date présente pour une maturité/échéance future
- Actualisation
  → L'opération inverse qui estime la valeur actuelle d'un montant / flux payé à une date future.

On utilise différents types de taux pour ces calculs (avec le taux constant)

ⓐ taux linéaire / taux simple (souvent pour une courte maturité $T < 1$ an)

→ 1€ à la date 0

à la date $t>0$, la valeur avec un taux linéaire devient $1+rt$ $\boxed{r>0}$

Attention: Tous les taux sont à l'échelle de l'année.

→ taux trimestriel $\frac{r}{4}$, taux semestriel $\frac{r}{2}$

ⓑ taux composé (pour maturité plus longue $T>1$ an et $T$ égale à plusieurs années)

→ 1€ à $t=0$ avec le taux composé la valeur à $t>0$ est $(1+r)^t$

ⓒ taux continu

→ 1€ à $t=0$ et à $t>0$ on a $e^{rt}$

On appelle le taux d'intérêt $r$ le taux court / instantané / spot.

Dans la pratique, la valeur de taux varie avec le temps $r \sim r(t)$ dépend du temps.

ⓘ $r(t)$ comme une fonction déterministe en temps.

ⓘⓘ $(r_t)_{t\geq 0}$ est un processus stochastique.

Sur le marché, il y a: Libor (London interbank offered rate) 1 mois, 3 mois, 6 mois, 1 an

Euribor (European interbank offered rate)

# 1 - Produits et notions de base

Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité qui représente le marché financier, muni d'une filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ qui décrit toutes les informations observables sur le marché (le prix courant des outils financiers, la valeur des taux d'intérêt...).

Soit $X = (X_t)_{t\geq 0}$ un processus $\mathbb{F}$-adapté càd $X_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

On modélise les prix et les taux court $r = (r_t)_{t\geq 0}$ par des processus adapté

## i) Taux court et l'actif sans risque (cash)

L'actif sans risque, dit le cash, correspond au placement à la banque (via une capitalisation)

Pour un taux d'intérêt fixe, le rendement est connu à l'avance, d'où vient le terme "sans risque".

On a déjà vu le calcul de sa valeur avec un taux constant.
Dans la suite, avec une modélisation en temps continu. On adopte le taux continu dans le calcul.

Soit $r = (r_t)_{t\geq 0}$ le taux d'intérêt instantané qui est un processus $\mathbb{F}$-adapté et positif où $r_t$ représente un taux spot pour un emprunt ou un prêt dans l'intervalle infinitésimal $[t, t+dt]$.

On suppose que le processus $r$ est intégrable par rapport à la mesure de Lebesgue sur $[0, T^*]$ où $T^*$ est un horizon de temps.

$$\int_0^{T^*} r_s \, ds < +\infty .$$

On considère maintenant le prix du cash noté par $S^0 = (S_t^0)_{t\geq 0}$ alors on a $S_t^0 = e^{\int_0^t r_s ds}$ (*)
En particulier, si $r_t = r$ est une constante, on a $S_t^0 = e^{rt}$

Short on a prêté à la ba
Long on a déposé

$S_t^0$ représente le montant accumulé jusqu'à $t$ en investissant 1€ à la date initiale sur le cash (placement à la banque)

Rq:

- Position longue (d'achat) en cash $\Longleftrightarrow$ épargne (placement à la banque)
- Position short/courte (de vente) en cash $\Longleftrightarrow$ emprunt de l'argent avec la banque

Le prix du cash (*) satisfait l'EDS suivante $\dfrac{dS_t}{S_t} = r_t \, dt$ (Formule d'Itô) $df(S_t) = f'(S_t)dS_t + \frac{1}{2} f''(S_t) d\langle S \rangle_t$

Il n'y a pas terme en mouvement brownien car il s'agit de l'actif "sans risque" mais le drift $r_t$ est stochastique donc le cash n'est plus tout à fait "sans risque" car son prix va dépendre de la fluctuation du taux court.

## ii) Obligation zéro-coupon (OZC)

Une obligation zéro-coupon de maturité $T$ est le produit financier qui garantit 1€ à son acheteur à la date $T$.

Son prix est noté par $B(t,T)$, $t\in[0,T]$ et son calcul est lié à l'actualisation.
Evidemment, on a $B(T,T)=1$
Le processus de prix $(B(t,T))_{t\geq 0}$ est un processus $\mathbb{F}$-adapté, $B(t,T)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable

Si $r_t = r$ est une constante, on a $B(t,T) = e^{-r(T-t)}$
Maintenant, quand $r_t$ devient stochastique $B(t,T)=?$

$B(t,T) \overset{?}{=} e^{-\int_t^T r_s ds}$ $\longrightarrow$ non car cela n'est pas de la bonne mesurabilité

$\rightarrow$ problème : Si $r(t)$ est une fonct° déterministe alors $B(t,T) = e^{-\int_t^T r(s)ds}$ $\longrightarrow$ ok
ici $r_t$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable, $\int_t^T r_s ds$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable $\Rightarrow$ ne peut pas être un prix

Intuition pour la bonne formule :
(i) project°/estimat° p/r à l'informat° $\mathcal{F}_t$
(ii) project° doit être faite sous une probabilité appropriée proba risque neutre (EMM : Equivalent Martingale Measure).

Le principe d'AOA (Absence d'opportunité d'arbitrage)

**Théorème :**
L'hypothèse d'AOA est satisfaite ssi il existe une proba risque neutre $\mathbb{Q}$ qui est équivalente à la proba historique $\mathbb{P}$ et sous laquelle le prix actualisé de tout actif financier est une martingale.

Par ce résultat, on obtient une formule générale pour évaluer les produits financiers, en particulier, ceux avec un payoff à une date future.

On considère un produit dont le paiement est effectué à la date $T$ avec le payoff $X_T$ ($(S_T-K)_+$ pour une action, $1$ pour l'OZC) qui est $\mathcal{F}_T$-mesurable.

Son prix actualisé par le cash est $\left(\frac{X_t}{S_t^0}\right)_{t\geq 0}$ qui est une $\mathbb{Q}$-martingale.

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X_T}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \frac{X_t}{S_t^0} \quad \text{où } S_t^0 = e^{\int_0^t r_s ds}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{X_T}{e^{\int_0^T r_s ds}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = \underbrace{\frac{X_t}{e^{\int_0^t r_s ds}}}_{\mathcal{F}_t\text{-mesurable}} \Rightarrow \boxed{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_T \underbrace{e^{-\int_t^T r_s ds}}_{\text{discount factor}} \middle| \mathcal{F}_t\right] = X_t}$$

Formule de Pricing générale.

**Exemple**
(i) Dans le modèle Black-Scholes, $r_t = r$ constant. Le prix de l'option à $0\leq t\leq T$ est :

$$C_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-r(T-t)}(S_T-K)_+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$
$$= e^{-r(T-t)}\,\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(S_T-K)_+ \mid \mathcal{F}_t\right] \quad \leftarrow \text{Pour CALL}$$

(ii) Pour OZC où $X_T = 1$ donc le prix de l'OZC à la date $t\in[0,T]$ est :

$$B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

## iii) Le taux d'intérêt continu moyen (la courbe de taux) (yield to maturity)

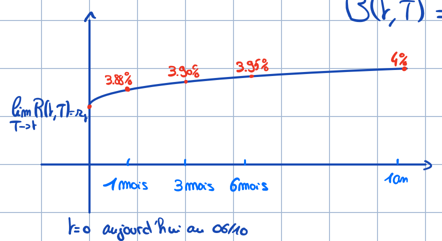
| | | 06/10 | 05/10 | 04/10 | 03/10 | 02/10 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Libor | 1 mois | 3.88% | 3.87% | 3.88% | 3.88% | |
| Euribor | 3 mois | 3.90% | 3.89% | 3.89% | | |
| | 6 mois | 3.95% | 3.96% | 3.95% | | |
| | 1 an | 4.00% | 4.01% | 4.00% | | |

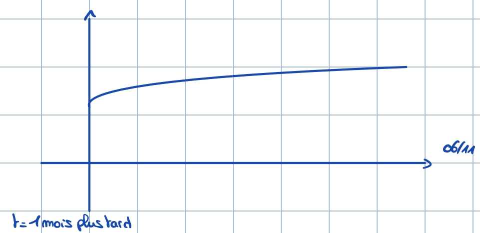
Il s'agit d'une courbe de taux d'intérêt sur la période $[t,T]$ qui est définit par :

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln(B(t,T)) \quad \text{où } 0 \leq t < T$$

Ou de manière équivalente

$$B(t,T) = \exp(-(T-t)R(t,T))$$




Remarque :

* Le taux court est la limite du taux moyen quand $T-t$ tend vers 0, càd $r_t = \lim_{T\to t} R(t,T) = -\left.\frac{\partial \ln(B(t,T))}{\partial T}\right|_{T=t}$

* $R(t,T)$ est, par définition, $\mathcal{F}_t$-mesurable. C'est la courbe de taux observable à la date $t$.

* On appelle la courbe des taux (term structure) en $t$ la fonction de $\theta$ (qui est la durée $T-t$) qui donne des taux moyens différents sur la période $[t, t+\theta]$ $\forall t \geq 0$

$$\theta \longmapsto R(t, t+\theta)$$

↳ 1 mois, 3 mois, 6 mois, 1 an

* Le taux forward en $t$ pour la maturité $T$ est défini par

$$f(t,T) = -\frac{\partial \ln(B(t,T))}{\partial T}$$

On a alors $B(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,u)\,du\right)$

$\left( = \exp(-(T-t)R(t,T)) \right)$ à comparer avec le taux continu moyen.

On a $f(t,T)$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable donc $\int_t^T f(t,u)\,du$ est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

Attention : À distinguer avec $\int_t^T r_s\,ds$ qui est $\mathcal{F}_T$-mesurable

On a également $r_t = f(t,t)$

Dans la littérature, il y a des modèles sur le taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ et puis on en déduit le prix de l'OZC



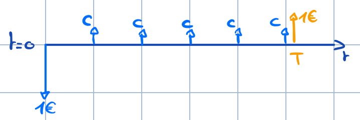
Vasicek
CIR
modèles affines

Il y a aussi des modèles qui modélisent directement le taux forward (term structure) HJM

Quelques produits standards sur le marché

(i) Obligations

Une obligation standard contient le paiement des coupons fixes à des dates régulières préfixées $\{T_i, i=1,\dots,m\}$ et le remboursement du nominal à la maturité $T=T_m$




On s'intéresse à l'évaluation de l'obligation dans le contexte où le taux d'intérêt est stochastique.

Pour une obligat° nouvelle, le taux de coupon est fixé à la date d'émission donc sa valeur à cette date initiale $t=0$ dépend de la courbe de taux vu à la date 0.

$$B^c(0) = \sum_{i=1}^{m} c\,B(0,T_i) + B(0,T)$$

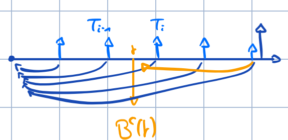
B pour Bonds

Cette formule est générale et valable pour tout modèle de taux stochastique (pour évaluer le produit de base OZC)

A une date intermédiaire $t\in[0,T]$. On peut s'intéresser à calculer le prix (la valeur dynamique) de cette obligation qui existait déjà depuis $t=0$, on a alors besoin d'utiliser la courbe de taux à $t$, et encore par l'utilisation de l'OZC.

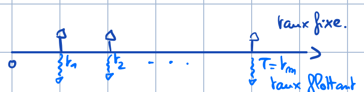
On a à une date $t\in[T_{i-1},T_i[$.

$$B^c(t) = \sum_{j=i}^{m} c\,B(t,T_j) + B(t,T)$$



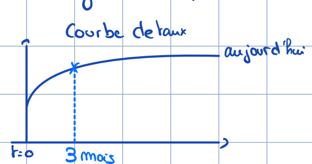

(ii) Swap de taux

Un swap est un contrat d'échange entre deux parties aux dates futures préfixées, pour un taux fixe (multiplié par un nominal) et un taux flottant (multiplié par le m̄ nominal)




Contrat le + courant $T = 5$ ans $\Delta T = t_i - t_{i-1} = 3$ mois

Le taux flottant est en général un taux de référence sur le marché (Libor, Euribor) que l'on observe au fur et à mesure.




détermine le flottant à t. A chaque $t_{i-1}$, on détermine le taux à échanger (maturité 3 mois vu à $t_{i-1}$) flottant

L'objectif est de déterminer le taux fixe contre lequel l'échange aura lieu en estimant les courbes de taux future à toutes les dates $(t_1, t_2 - t_{m-1})$.



# 2- Modèle de taux court

## 2.1 - AOA et probabilité de pricing

On cherche à modéliser le taux court $r = (r_t)_{t\geq 0}$ et l'appliquer à évaluer l'obligation zéro-coupon.

On commence par spécifier la probabilité risque neutre de pricing dans un cadre général où le taux court $r = (r_t)_{t\geq 0}$ est modélisé par un processus d'Itô $dr_t = \mu_t dt + \sigma_t dW_t \quad r_0 > 0$. tq $(W_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathbb{P}$- mvt brownien

On a $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ la filtration canonique engendrée par le mvt brownien i.e $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s\leq t)$.
Les coefficients $\mu = (\mu_t)_{t\geq 0}$ et $\sigma = (\sigma_t)_{t\geq 0}$ sont des processus $\mathbb{F}$-adaptés tq $\int_0^{T^*} |\mu_s| ds < \infty$ et $\int_0^{T^*} |\sigma_s|^2 ds < \infty$
avec $T^*$ un horizon de temps.

On rappelle que $\mathbb{P}$ est la proba historique.
Pour définir toute proba équivalente, on va appliquer le changem$^t$ de proba et le théorème de Girsanov.

Soit $\mathbb{P}^\lambda$ une proba sur $(\Omega, \mathcal{F}_{T^*})$ qui est définie par

$$\frac{d\mathbb{P}^\lambda}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_{T^*}} = \exp\left(\int_0^{T^*} \lambda_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^{T} \lambda_u^2 du\right) =: \eta_{T^*}$$

où $(\lambda_u)_{u\geq 0}$ est un processus $\mathbb{F}$-adapté tq $\int_0^{T^*} \lambda_u^2 du < \infty$

On a bien $(\eta_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathbb{P}, \mathbb{F})$-martingale qui est la densité Radon-Nikodym pour le changem$^t$ de proba.

Alors on a par le théorème de Girsanov que :
$W^\lambda = (W_t^\lambda)_{t\geq 0}$ avec

$$W_t^\lambda = W_t - \int_0^t \lambda_s ds \quad t\geq 0 \text{ est un } \mathbb{P}^\lambda\text{- mvt brownien.}$$

**Quelle est la diffusion de $S_t$ sous $\mathbb{Q}$ ?**

Sous $\mathbb{Q}$, $\frac{S_t}{S_t^0} = S_t e^{-rt}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale.

Donc sous $\mathbb{Q}$, $S_t$ doit satisfaire l'EDS

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t^* \qquad \text{où } W_t^* \text{ est un } \mathbb{Q}\text{- mvt brownien.}$$

En effectuant le changement de proba, on a le processus de taux court $r_t$ qui satisfait l'EDS suivante sous $\mathbb{P}^\lambda$:

$$\begin{aligned} dr_t &= \mu_t dt + \sigma_t d\left(W_t^\lambda + \int_0^t \lambda_s ds\right) \\ &= (\mu_t + \sigma_t \lambda_t) dt + \sigma_t dW_t^\lambda \end{aligned}$$

Sous la nouvelle proba, le prix de l'obligat° zéro-coupon va satisfaire l'EDS suivante:

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t dt + b^\lambda(t,T) dW_t^\lambda$$

ou de façon équivalente, on a:

$$B(t,T) = \exp\left(\int_0^T [r_s - \tfrac{1}{2}(b^\lambda(s,T))^2] ds + \int_0^t b^\lambda(s,T) dW_s^\lambda\right)$$

$$= S_r^0 \exp\Big(\underbrace{\int_0^t b^\lambda(s,T)\,dW_s^\lambda - \tfrac{1}{2}\int_0^t b^\lambda(s,T)^2 ds}_{\text{martingale exponentielle sous } \mathbb{P}^\lambda}\Big)$$



## 2-2- Modèle de Vasicek

On utilise la famille de processus Ornstein-Uhlenbeck (processus retour à la moyenne) pour modéliser le taux d'intérêt court.

Plus précisément, on suppose que le taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ est donné par l'EDS

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \qquad t \geq 0 \qquad (1)$$

où $a$, $b$ et $\sigma$ sont des ctes et $(W_t)_{t\geq 0}$ un $\mathbb{P}$-mvt brownien.

L'interprétat° du paramètre $b$ est un taux de référence à long terme et le coeff $a$ est appelé la force de rappel.
Quand $r_t \searrow$, $r_t < b$ on a un drift $b - r_t > 0$ qui va pousser $r_t$ à $\nearrow$.

En revanche, quand $r_t \nearrow$, le drift $b - r_t$ est négatif ce qui va pousser le taux à retourner vers la valeur de référence.

On précise la probabilité risque neutre dans le modèle de Vasicek.
Soit $\lambda$ une cte. On définit

$$\frac{d\mathbb{P}^\lambda}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\lambda W_t - \tfrac{1}{2}\lambda^2 t\right) = Z_t$$

Par le thm de Girsanov, on a $W_t^\lambda = W_t - \lambda t$ est un $\mathbb{P}^\lambda$-mvt brownien.
Donc sous $\mathbb{P}^\lambda = \mathbb{P}^*$ (et on note $W^\lambda = W^*$), on a

$$\begin{aligned} dr_t &= a(b - r_t)dt + \sigma(dW_t^* + \lambda dt) \\ &= (a(b - r_t) + \sigma\lambda)dt + \sigma dW_t^* \\ &= a(\hat{b} - r_t)dt + \sigma dW_t^* \qquad \text{avec } \hat{b} = b + \frac{\sigma\lambda}{a} \end{aligned}$$

On obtient ainsi la diffusion du taux court sous la probabilité qui suit la même EDS avec un coefficient modifier.

Notre objectif est d'évaluer le prix de l'obligation zéro-coupon par $B(t,T) = \mathbb{E}_*\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right]$

→ Réviser Ornstein-Uhlenbeck.

17/10

Le taux court $r = (r_t)_{t\geq 0}$ est modélisé par un O-U processus qui satisfait l'EDS :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t \qquad (1)$$

où $W = (W_t)_{t\geq 0}$ est un $\mathbb{P}$-mvt brownien.

On introduit le changement de probabilité

$$\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}^\lambda \qquad \frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\lambda W_t - \tfrac{1}{2}\lambda^2 t\right)$$

Par le théorème de Girsanov, on a

$$W_t^* = W_t^\lambda = W_t - \lambda t \qquad \text{est un } \mathbb{P}^*\text{-mvt brownien}$$

On réécrit (1) sous $\mathbb{Q}$ et il vient : $\qquad \mathbb{Q} \leftrightarrow \mathbb{P}^*$

$$dr_t = a(\hat{b} - r_t)dt + \sigma dW_t^* \qquad (2)$$

Avec $\hat{b} = b + \frac{\sigma\lambda}{a}$



On cherche à calculer le prix d'une OZC donné par $B(t,T) = \mathbb{E}_*[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t]$ (* où $\mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s \le t)$ $= \sigma(W_s^*, s \le t)$

la filtration canonique du MB.

## Proposition:

La solution de l'EDS (2) est donnée par:

$$r_t = \hat{b} + (r_0 - \hat{b})e^{-at} + \sigma\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u^*$$

## Preuve:

$$dr_t = a(\hat{b} - r_t)dt + \sigma dW_t^*$$

$$\Rightarrow dr_t + a r_t dt = a\hat{b}dt + \sigma dW_t^* \quad (**)$$

$$\Rightarrow d(e^{at} r_t) = e^{at} a r_t dt + e^{at} dr_t$$

$$= e^{at}(a r_t dt + dr_t)$$

$$\overset{(**)}{=} e^{at}(a\hat{b}dt + \sigma dW_t^*)$$

$$\Rightarrow \int_0^t d(e^{at} r_t) = \int_0^t e^{at}(a\hat{b}dt + \sigma dW_t^*)$$

$$\Rightarrow e^{at} r_t - r_0 = a\hat{b}\int_0^t e^{as} ds + \sigma\int_0^t e^{as} dW_s^*$$

Il vient donc:

$$e^{at} r_t = r_0 + \hat{b}(e^{at} - 1) + \sigma\int_0^t e^{as} dW_s^*$$

$$\Rightarrow r_t = \hat{b} + (r_0 - \hat{b})e^{-at} + \sigma\int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s^*$$

Rq: on peut résoudre l'EDS sous $\mathbb{P}$ (1) ou sous $\mathbb{P}^*$ (2)

$\to$ La solut° est la m̂.

Ensuite, on cherche à calculer $\int_t^T r_s ds$

Au lieu de faire l'intégrale avec la solution (2) où il y a une double intégrale, on revient à l'EDS initiale (2)

$$\Rightarrow \int_t^T dr_t + \int_t^T a r_t dt = \int_t^T a\hat{b} dt + \int_t^T \sigma dW_t^*$$

$$\Rightarrow r_T - r_t + a\int_t^T r_s ds = a\hat{b}(T-t) + \sigma\int_t^T dW_s^*$$

$$\Rightarrow \int_t^T r_s ds = -\frac{1}{a}(r_T - r_t) + \hat{b}(T-t) + \frac{\sigma}{a}\int_t^T dW_s^*$$

Une initiative (à éviter)

$$r_T - r_t = \underbrace{\quad\quad}_{\text{déterministe}} + \underbrace{\sigma\int_0^T e^{-a(T-u)} dW_u^* - \sigma\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u^*}_{\text{ne s'annule pas}}$$

Pour ensuite calculer $r_T - r_t$ (et espérance conditionnelle p/r à $\mathcal{F}_t$). On va revenir encore à (2) et écrire $r_T$ à partir de $r_t$.

$$\Rightarrow \int_t^T d(e^{at} r_t) = \int_t^T e^{at}(a\hat{b}dt + \sigma dW_t^*)$$

$$\Rightarrow e^{aT} r_T - e^{at} r_t = a\hat{b}\int_t^T e^{as} ds + \sigma\int_t^T e^{as} dW_s^*$$

$$\Rightarrow e^{aT} r_T = e^{at} r_t + \hat{b}(e^{aT} - e^{at}) + \sigma\int_t^T e^{as} dW_s^*$$

$$\Rightarrow r_T = \hat{b} + (r_t - \hat{b})e^{-a(T-t)} + \sigma\int_t^T e^{-a(T-s)} dW_s^*$$

$$\Longrightarrow \int_t^T r_s\,ds = -\frac{1}{a}(r_T - r_t) + \hat{b}(T-t) + \frac{\sigma}{a}\int_t^T dW_s^*$$
$$= \hat{b}(T-t) + (r_t - \hat{b})\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) + \frac{\sigma}{a}\int_t^T (1-e^{-a(T-s)})\,dW_s^*$$

Rappel : $\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_t] = \begin{cases} X & \text{si } X \text{ est } \mathcal{F}_t\text{-mes.} \\ \mathbb{E}[X] & \text{si } X \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t \end{cases}$

Il reste à calculer $\mathbb{E}_*[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t]$

On a que $\int_t^T r_s\,ds$ est un processus gaussien

On calcule son espérance conditionnelle p/r à $\mathcal{F}_t$

$$m(t,T) = \mathbb{E}_*\left[\int_t^T r_s\,ds \mid \mathcal{F}_t\right]$$
$$= \hat{b}(T-t) + (r_t - \hat{b})\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) + \cancel{\mathbb{E}_*\left[\frac{\sigma}{a}\int_t^T (1-e^{-a(T-s)})\,dW_s^* \mid \mathcal{F}_t\right]}$$

$$\overset{=X_t(T)}{\mathbb{E}_*\left[\frac{\sigma}{a}\int_t^T (1-e^{-a(T-s)})\,dW_s^* \mid \mathcal{F}_t\right]} = 0$$

Car : (i) $W_{t+h} - W_t \perp\!\!\!\perp W_t$ $(\mathcal{F}_t)$ par l'indépendance

$$\Longrightarrow \mathbb{E}\left[\frac{\sigma}{a}\int_t^T (1-e^{-a(T-s)})\,dW_s^*\right] = 0$$

(ii) argument de martingale

$$X_t(T) = X_t(t) = 0$$

On calcule sa variance conditionnelle

$$\Gamma^2(t,T) = \mathrm{Var}_*\left[\int_t^T r_s\,ds \mid \mathcal{F}_t\right]$$

$$\mathrm{Var}_*\left[\hat{b}(T-t) + (r_t - b)\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) + \frac{\sigma}{a}\int_t^T (1-e^{-a(T-t)})\,dW_s^* \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathrm{Var}_*\left[\frac{\sigma}{a}\int_t^T (1-e^{-a(T-t)})\,dW_s^* \mid \mathcal{F}_t\right]$$
$$\overset{\text{par indep}}{=} \mathrm{Var}_*\left[\frac{\sigma}{a}\int_t^T (1-e^{-a(T-t)})\,dW_s^*\right]$$
$$= \frac{\sigma^2}{a^2}\int_t^T (1-e^{-a(T-s)})^2\,ds$$
$$= \frac{\sigma^2}{a^2}\int_t^T (1 - 2e^{-a(T-s)} + e^{-2a(T-s)})\,ds$$
$$= \frac{\sigma^2}{a^2}(T-t) - 2\frac{\sigma^2}{a^2}\frac{1}{a}\, e^{-a(T-s)}\Big|_t^T + \frac{\sigma^2}{a^2}\frac{1}{2a}\, e^{-2a(T-s)}\Big|_t^T$$
$$= \frac{\sigma^2}{a^2}(T-t) - 2\frac{\sigma^2}{a^3}(1-e^{-a(T-t)}) + \frac{\sigma^2}{2a^3}(1-e^{-2a(T-t)})$$
$$= \frac{\sigma^2}{a^2}(T-t) - \frac{\sigma^2}{a^3}(1-e^{-a(T-t)}) \underbrace{- \frac{\sigma^2}{2a^3}(1-e^{-a(T-t)})^2}$$

$$= -\frac{\sigma^2}{a^3} + \frac{\sigma^2}{a^3}e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^3} - \frac{\sigma^2}{2a^3}e^{-2a(T-t)}$$
$$= -\frac{\sigma^2}{a^3}(1 - 2e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)}) = -\frac{\sigma^2}{2a^3}(1-e^{-a(T-t)})^2$$

On rappelle enfin la transformée de Laplace d'une v.a normale $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

$$\mathbb{E}[e^X] = e^{\mu + \frac{1}{2}\sigma^2}$$

Alors $\int_t^T r_s\,ds$ (conditionnellement à $\mathcal{F}_t$) est une va gaussienne avec la moyenne (conditionnelle) $m(t,T)$ et la variance conditionnelle $\Gamma^2(t,T)$

On a ainsi, $\mathbb{E}_*[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t] = e^{-m(t,T) + \frac{1}{2}\Gamma^2(t,T)}$

$$= \exp\left\{-\left(\hat{b} - \frac{\sigma^2}{2a^2}\right)(T-t) + \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_t\right)\left(\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right) - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-a(T-t)})^2\right\}$$

## Théorème :

Dans le modèle Vasicek, le prix de l'obligation zéro-coupon de maturité $T$ est donné par

$$B(t,T) = \exp\left(-R_\infty(T-t) + (R_\infty - r_t)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1-e^{-a(T-t)})^2\right) \quad \text{où } R_\infty = \hat{b} - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

## Quelques propriétés du modèle Vasicek

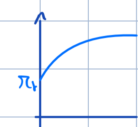
1) Pour un $t \geq 0$ fixé, on a (conséquence directe de la proposition)

$$\mathbb{E}_*[r_t] = \hat{b} + (r_0 - \hat{b})e^{-at}$$
$$Var_*[r_t] = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})$$

2) On a la courbe de taux qui est donnée par

$$R(t,T) = -\frac{1}{T-t}\ln(B(t,T)) = R_\infty - (R_\infty - r_t)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{4a^3(T-t)}(1-e^{-a(T-t)})^2$$

le taux continu moyen et on peut vérifier facilement que $\lim_{T \to t} R(t,T) = r_t$




3) On peut aussi calculer le taux forward par $f(t,T) = -\partial_T \ln(B(t,T))$

$$= R_\infty + \frac{R_\infty - r_t}{a} e^{-a(T-t)}(-a) + \frac{\sigma^2}{4a^3} 2(1-e^{-a(T-t)})e^{-a(T-t)} a$$
$$= (\hat{b} - \frac{\sigma^2}{2a^2}) - (\hat{b} - \frac{\sigma^2}{2a^2} - r_t)e^{-a(T-t)} + \frac{\sigma^2}{2a^2}(e^{-a(T-t)} - e^{-2a(T-t)})$$
$$= \hat{b} - (\hat{b} - r_t)e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2a^2}(\underbrace{1 - e^{-a(T-t)} - e^{-a(T-t)} + e^{-2a(T-t)}}_{(1-e^{-a(T-t)})^2})$$
$$= \hat{b} - (\hat{b} - r_t)e^{-a(T-t)} - \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-a(T-t)})^2$$

4) Dans le modèle de Vasicek, le court $r_t$ peut prendre des valeurs négatives.
En pratique, on calibre les coefficients $a, \hat{b}$ et $\sigma$ tq la proba que $r_t$ devienne négative est très petite.

5) Le modèle de Vasicek appartient à la famille des modèles affines pour laquelle le prix de l'OZC peut s'écrire sous forme :

$$B(t,T) = \exp(-r_t A(t,T) + C(t,T))$$

où $A(t,T)$ et $C(t,T)$ sont des fonct° déterministes

Dans le modèle de Vasicek, on a :

$$A(t,T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$
$$C(t,T) = -R_\infty(T-t) + R_\infty \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} - \frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-a(T-t)})^2$$

Les modèles affines contiennent les modèles à diffusion brownienne (Vasicek, CIR) et aussi les modèles à sauts (processus de Lévy ...)

Pour un modèle affine, la courbe de taux est donnée par :

$$R(t,T) = \frac{1}{T-t}(A(t,T)r_t - C(t,T))$$

## 2-3 Modèle Cox-Ingersoll-Ross (CIR)

Toujours dans la famille des modèles affines, pour surmonter l'inconvénient du modèle Vasicek où $r_t$ peut devenir négative. On propose le modèle CIR où le taux court $r_t$ reste positif (sous certaines conditions de coefficients) qui est donné par l'EDS :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\, dW_t$$

où $(W_t)_{t \geq 0}$ est un $\mathbb{P}$-MB.

On effectue le changement de probabilité

$\mathbb{P}^* \sim \mathbb{P}^\lambda \quad \left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left(\int_0^t \lambda_s dW_s - \int_0^t \lambda_s^2 ds\right)$ avec $\lambda_s = \lambda\sqrt{r_s}$ où $\lambda$ est une cte



Par le théorème de Girsanov, on a $W_t^* = W_t - \int_0^t \lambda_s ds$

On obtient alors sous $\mathbb{P}^*$

$$dr_t = a(b-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,(dW_t^* + \lambda\sqrt{r_t}\,dt)$$
$$= a(b-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t^* + \sigma\lambda r_t\,dt \quad = (ab-(a-\sigma\lambda)r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t^*$$
$$= \hat{a}(\hat{b}-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t^* \quad (2) \qquad \text{où } \hat{a} = a-\sigma\lambda \text{ et } \hat{b} = \frac{ab}{\hat{a}}$$

Ainsi, $(r_t)_{t\geq 0}$ reste dans la famille de processus stochastique après le changement de proba.

Rq : Sous la condition de Feller,

$2ab > \sigma^2$ (m̂ condit° sous $\mathbb{P}^*$)

Le processus $(r_t)_{t\geq 0}$ reste toujours positif.

On cherche à calculer le prix de l'OZC $B(t,T) = \mathbb{E}_*[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t]$ et on va adopter l'approche EDP.

(Rappel : Pour Black-Scholes, approche probabiliste $\to$ loi lognormale $\to$ Calcul d'$\mathbb{E}$ conditionnelle

approche EDP $\to$ Equation de chaleur.

24/10

On rappelle que le modèle CIR

$$dr_t = a(b-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t \qquad \text{sous } \mathbb{P}$$
$$dr_t = \hat{a}(\hat{b}-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t^* \qquad \text{sous } \mathbb{Q}$$

Notre objectif est de calculer le prix de l'obligation zéro-coupon

$$B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t] \qquad \text{où } \mathcal{F}_t = \sigma(W_s, s\leq t)$$

En particulier, comme le taux court suit une EDS dirigée par un MB qui admet la propriété Markovienne i.e

$$\mathbb{E}[f(W_T)|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(W_T)|W_t]$$

On a également cette propriété Markovienne qui s'applique pour le prix de l'OZC i.e

$$\mathbb{E}[f(r_T, \int_t^T r_s ds) | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[f(r_t, \int_t^T r_s ds) | r_t]$$

Ce qui nous permet d'écrire le prix de l'OZC sous forme

$$B(t,T) = B(t, r_t, T)$$

Exemple : Dans le modèle de Vasicek, ou plus généralement,

on a $B(t,T) = e^{-r_t A(t,T) + C(t,T)}$

Pour retrouver la forme de $B(t, r_t, T)$ dans le modèle CIR, on va utiliser l'approche EDP (Equation Differentielle Partielle) de l'évaluation.

Dans le modèle de Black-Scholes, on a employé cette approche sous forme de l'équation de chaleur par le prix de l'option CALL Européenne



$$C_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T-K)_+ \mid \mathcal{F}_t] = C(t, S_t, T, K)$$

Il y a deux points essentiels dans cette approche d'évaluation

(i) Le principe d'AOA pour tout produit financier, le prix (un processus stochastique) actualisé par le prix du cash $\left(S_t^0 = \begin{cases} e^{rt} & (B\text{-}S) \\ e^{\int_0^t r_s ds} & \text{(taux stochastique)} \end{cases}\right)$ est une $\mathbb{Q}$-martingale

Dans B-S, $\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t^*$ sous $\mathbb{Q}$

Dans le modèle avec taux stochastique, on doit avoir pour tout actif $(S_t)_{t\geq 0}$

$$\frac{dS_t}{S_t} = r_t dt + \sigma(t) dW_t^* \quad \text{sous } \mathbb{Q} \qquad \underset{1}{(*)}$$

où $\sigma(t)$ le coefficient de volatilité peut être une fonction déterministe en temps (mais pas stochastique)

Pour le coefficient de drift, on a forcément $r_t$ (sous $\mathbb{Q}$) car il faut $\frac{S_t}{S_t^0} = S_t e^{-\int_0^t r_s ds}$ soit une $\mathbb{Q}$-martingale $t\geq 0$

Alors, par la formule d'Itô, on a $d\left(\frac{S_t}{S_t^0}\right) = d(S_t e^{-\int_0^t r_s ds}) = e^{-\int_0^t r_s ds} dS_t - S_t e^{-\int_0^t r_s ds} r_t dt$ (terme quadratique $=0$)

$d(f(X_t)\, g(Y_t)) = f(X_t)\, dg(Y_t) + g(Y_t)\, df(X_t) + d < f(X_t), g(Y_t) >$

$$= e^{-\int_0^t r_s ds}(S_t r_t dt + S_t \sigma(t) dW_t^*) - S_t e^{-\int_0^t r_s ds} r_t dt$$

Comme les termes en "dt" s'annulent afin de faire une martingale, forcément, le drift de $S_t$ devrait être égal à $r_t$).

$$\Rightarrow d\left(\frac{S_t}{S_t^0}\right) = \frac{S_t}{S_t^0}\sigma(t) dW_t^*$$

Théorème de représentation :

Soit $M = (M_t)_{t\geq 0}$ une martingale.

Alors, $\exists (\gamma_t)_{t\geq 0}$ mesurable et de carré-intégrable tq

$$M_t = \int_0^t \gamma_s \, dM_s$$
$$dM_t = \gamma_t \, dM_t \; \cancel{+ \_\_ dt}$$

Cette EDS est valable pour tout produit financier $\mathbb{Q}$ donc par l'OZC également, on a donc

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t dt + \sigma(t) dW_t^* \qquad \underset{2}{(**)}$$

(ii) On va appliquer la formule d'Itô sous la forme "Markovienne" du prix de l'OZC $\underset{f(t, X_t)}{B(t, r_t, T)}$

Itô : $df(t,X_t) = \frac{\partial}{\partial t} f(t,X_t)\, dt + \frac{\partial}{\partial x} f(t,X_t)\, dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2} f(t,X_t)\, d\langle X\rangle_t$

$\rightarrow dB(t,r_t,T) = \partial_t B(t,r_t,T)\, dt + \partial_r B(t,r_t,T)\, dr_t + \frac{1}{2}\partial_r^2 B(t,r_t,T)\, d\langle r\rangle_t$

Pour les différents modèles de taux, on va spécifier $dr_t$ et $d\langle r\rangle_t$

Pour le modèle CIR, on a :

$$dB(t,r_t,T) = \partial_t B(t,r_t,T)dt + \partial_r B(t,r_t,T)dr_t + \frac{1}{2}\partial_r^2 B(t,r_t,T)d\langle r_t\rangle \quad (***) \quad 3$$



Applicat° simple d'Itô

Pour les différents modèles de taux, on va spécifier $dr_t$ et $d\langle r\rangle_t$

Pour le modèle CIR, on remplace $dr_t$ et $d\langle r\rangle_t$ dans (***) par :

$$dr_t = \hat{a}(\hat{b}-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t^*$$

$$d\langle r\rangle_t = \sigma^2 r_t\,dt$$

et on obtient

$$dB(t,r_t,T) = \partial_t B(t,r_t,T)dt + \partial_r B(t,r_t,T)(\hat{a}(\hat{b}-r_t)dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t^*) + \frac{1}{2}\partial_r^2 B(t,r_t,T)\sigma^2 r_t\,dt$$

$$= (\partial_t B(t,r_t,T) + \hat{a}(\hat{b}-r_t)\partial_r B(t,r_t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \partial_r^2 B(t,r_t,T))dt + \sigma\sqrt{r_t}\,\partial_r B(t,r_t,T)\,dW_t^* \quad (****) \quad 4$$

En comparant (2) et (4) et en identifiant les termes drift, on a :

$$B(t,r_t,T)r_t = \partial_t B(t,r_t,T) + \hat{a}(\hat{b}-r_t)\partial_r B(t,r_t,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 r_t \partial_r^2 B(t,r_t,T) \quad (5)$$

qui est valable pour toute valeur de $r_t$

On introduit alors la fonction $B(t,r) : [0,T]\times\mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$ qui est une fonction déterministe à 2 variables, on obtient par (5) que $B(t,r)$ doit satisfaire l'EDP (Équat° Différentielle Partielle) déterministe suivante :

$$\partial_t B(t,r) + \hat{a}(\hat{b}-r)\partial_r B(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 r \partial_r^2 B(t,r) - rB(t,r) = 0 \quad (6)$$

La condition de borne est donnée par le prix de l'ozc à la maturité $T$

$$B(T,T) = 1$$

c-à-d (si on fait apparaître la variable $r$)

$$B(T,r_T,T) = 1 \quad \text{pour toute valeur de } r_T$$

On a donc la Condit° Terminale $B(T,r) = 1 \quad \forall r \geq 0$.

$$\Rightarrow \begin{cases} \partial_t B(t,r) + \hat{a}(\hat{b}-r)\partial_r B(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 r \partial_r^2 B(t,r) - rB(t,r) = 0 \\ B(T,r) = 1 \quad \forall r \geq 0 \end{cases}$$

**Proposition :**

Le prix de l'OZC dans le modèle CIR est donné par

$$B(t,T) = A(t,T)e^{-rC(t,T)}$$

où $A(t,T) = A(T-t)$ et $C(t,T) = C(T-t)$ sont donnés par

$$\begin{cases} C(t) = \dfrac{2(e^{\rho t}-1)}{(\rho+\hat{a})(e^{\rho t}-1)+2\rho} \\ A(t) = \varphi(t)^{\frac{2\hat{a}\hat{b}}{\sigma^2}} \end{cases} \qquad \rho = \sqrt{\hat{a}^2+2\sigma^2} \qquad \varphi(t) = \frac{2\rho e^{\frac{\rho+\hat{a}}{2}t}}{(\rho+\hat{a})(e^{\rho t}-1)+2\rho}$$

**Preuve :**

On écrit la fonct° dans (6) sous forme

$$B(t,r) = A(T-t)e^{-rC(T-t)} \quad (7)$$

et on démontre la vérificat° que (7) satisfait l'EDP (6)

On calcule $\partial_t B(t,r) = -A'(T-t)e^{-rC(T-t)} + A(T-t)e^{-rC(T-t)}rC'(T-t)$

$$= -\frac{A'(T-t)}{A(T-t)} B(t,r) + r C'(T-t) B(t,r)$$

$$\partial_r B(t,r) = A(T-t) e^{-rC(T-t)} (-C(T-t)) = -C(T-t) B(t,r)$$

$$\partial_r^2 B(t,r) = C^2(T-t) B(t,r)$$

En remplaçant les termes précédent dans (6) et en notant $\theta = T-t$, on obtient

$$-\frac{A'(\theta)}{A(\theta)} B(t,r) + r C'(\theta) B(t,r) - \hat{a}(\hat{b}-r) C(\theta) B(t,r) + \frac{1}{2}\sigma^2 C^2(\theta) B(t,r) - r B(t,r) = 0$$

On identifie les termes par rapport à $r$ (l'ordre 1 et 0)

$$\Rightarrow \begin{cases} C'(\theta) + \hat{a} C(\theta) + \frac{1}{2}\sigma^2 C^2(\theta) - 1 = 0 & \text{(ordre 1)} \quad \Rightarrow C(\theta) \\ -\frac{A'(\theta)}{A(\theta)} - \hat{a}\hat{b}\, C(\theta) = 0 & \text{(ordre 0)} \quad \Rightarrow A(\theta) \end{cases} \quad (7)$$

La condition terminale $B(T,T) = A(0) e^{-rC(0)} = 1 \quad \forall r$

$$\Rightarrow \begin{cases} A(0) = 1 \\ C(0) = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Pour finir, on vérifie que les fonctions $A()$ et $C()$ données dans la proposition satisfont les équations (7) avec la condit° terminale (8)

$\square$.

## Extension :

On peut aussi considérer d'autres modèles de taux courts dans un cadre plus général où

$$dr_t = \mu(r_t,t)\,dt + \gamma(r_t,t)\,dW_t$$

Où $\begin{cases} \mu(r,t) = \alpha_1(t) + \alpha_2(t) r \\ \gamma^2(r,t) = \beta_1(t) + \beta_2(t) r \end{cases}$

Vasicek on a $\mu(r,t) = a(b-r)$, $\gamma(r,t) = \sigma$

CIR on a $\mu(r,t) = a(b-r)$, $\gamma(r,t) = \sigma\sqrt{r}$

Modèle de Dothan $\mu(r,t) = \alpha r$, $\gamma(r,t) = \beta r$

Courtadon $\mu(r,t) = \alpha_1 r + \alpha_2$, $\gamma(r,t) = \beta r$

Log-normal généralisé $\mu(r,t) = \alpha(t) r + \alpha_2 r \log(r)$, $\gamma(r,t) = \beta(t)$

# 3- Modèles de déformation de courbe des taux

Une autre approche de modélisation consiste à modéliser directement la courbe de taux, c-à-d, une modélisation avec deux temps $t$ et $T$.

$B(t,T)$
$R(t,T) = -\frac{1}{T-t} \ln(B(t,T))$
$f(t,T) = \partial_T \ln(B(t,T))$ Ho et Lee HJM

Taux forward

On peut modéliser le prix de l'obligation zéro-coupon $B(t,T)$ par un modèle stochastique
On peut aussi modéliser le taux forward instantané $f(t,T)$ et en déduire le prix de l'OZC

On a déjà démontrer que sous $\mathbb{Q}$ le prix de l'OZC satisfait l'EDS

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t\,dt + \Gamma(t,T)\,dW_t^* \quad (9)$$

où $\Gamma(t,T)$ est le coeff de volatilité

On obtient donc le prix de l'OZC donné par

$$B(t,T) = B(0,T)\exp\left(\int_0^t r_s\,ds + \int_0^t \Gamma(s,T)\,dW_s^* - \frac{1}{2}\int_0^t \Gamma(s,T)^2 ds\right) \quad (10)$$

On peut aussi écrire la solut° (10) sous forme suivante :

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)} \exp\left(\int_0^t (\Gamma(s,T)-\Gamma(s,t))\,dW_s^* - \frac{1}{2}\int_0^t (\Gamma(s,T)^2 - \Gamma(s,t)^2)\,ds\right) \quad (11)$$

en éliminant le taux court $r_t$. En effet, on a par (10) : $B(t,t) = B(0,t)\exp\left(\int_0^t r_s\,ds + \int_0^t \Gamma(s,t)\,dW_s^* - \frac{1}{2}\int_0^t \Gamma(s,t)^2 ds\right) = 1$

On peut ensuite calculer la courbe de taux i.e le taux continu moyen et le taux forward.

On a $R(t,T) = R(0,T) - \int_0^t \frac{\Gamma(s,T)-\Gamma(s,t)}{T-t}\,dW_s^* + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\Gamma(s,T)^2 - \Gamma(s,t)^2}{T-t}\,ds$

Pour le taux forward, on désigne par $\partial_T \Gamma(t,T) = \gamma(t,T)$ et on obtient

$$f(t,T) = f(0,T) - \int_0^t \gamma(s,T)\,dW_s^* + \int_0^t \underbrace{\boxed{\gamma(s,T)\Gamma(s,T)}}_{\text{Vol} \times \text{Son intégrale}}\,ds \quad (12)$$

<u>Remarque</u> : On peut aussi modéliser le dynamique de taux forward directement

$$df(t,T) = \_\_\,dt + \delta(t,T)\,dW_t^* \qquad \boxed{\text{modèle HJM}}$$

On peut montrer que le terme drift en "dt" doit satisfaire la relation précisée par (12)

<u>Remarque</u> : On peut spécifier différente forme pour le coefficient $\Gamma(t,T)$ pour avoir des modèles différents.

# IV - Changement de numéraire et mesure forward



Pour évaluer des produits dérivés dont le sous-jacent est un produit de taux d'intérêt, on adopte souvent la technique de numéraire.

L'idée est de choisir une obligation zéro-coupon, au lieu de l'actif sans risque le cash, comme la référence pour faire l'actualisation.

Rappel : Soit $S_t = \exp\left(\int_0^t r_s \, ds\right)$ le cash.

$\mathbb{Q} = \mathbb{P}^*$

Par le principe AOA, il est associé à une probabilité risque-neutre EMM (Equivalent Martingale Measure), c-à-d le prix actualisé de tout actif financier par rapport au cash est une martingale sous $\mathbb{P}^*$.

Pour un produit dérivé dont le payoff est $X$ à la maturité $T$.

On a $\frac{\pi_t(X)}{S_t^0} = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{X}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t\right]$

$$\Rightarrow \pi_t(X) = \mathbb{E}_*\left[\frac{S_t^0}{S_T^0} X \mid \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_*\left[e^{-\int_t^T r_s ds} X \mid \mathcal{F}_t\right]$$

On considère maintenant une option CALL écrite sur une OZC de maturité $U > T$ avec la maturité $T$ et le strike $K$.

Le prix à une date $t$ de cette obligation est donnée par :

$$C_t = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} (B(\underbrace{T}_{\text{maturité option CALL}}, \overbrace{U}^{\text{maturité de l'OZC}}) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right]$$

La valeur d'une OZC est donnée par :

$$B(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} \mid \mathcal{F}_t\right]$$

donc $B(T,U) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[e^{-\int_T^U r_s ds} \mid \mathcal{F}_T\right]$

Pour calculer le prix $C_t$, il faut la loi jointe entre le discount facteur $e^{-\int_t^T r_s ds}$ et le sous-jacent $B(T,U)$

Rappel : Pour un contrat future/forward qui est sur un sous-jacent $S$ à la maturité $T$, son prix à la date $t \leq T$ est

$$F^S(t,T) = \frac{S_t}{B(t,T)} \quad \text{prix forward.}$$

Si $S$ est une OZC de maturité $U > T$, alors son prix forward est donné par :

$$F^{B^U}(t,T) = \frac{B(t,U)}{B(t,T)}$$

Donc en prenant $t = T$, on a $B(t,U)$ qui est le prix forward de l'OZC de maturité $U$ pris à la date $T$ car

$$\frac{B(T,U)}{B(T,T)} = B(T,U)$$

On introduit maintenant un changement de probabilité afin de pouvoir découpler la structure de dépendance entre le discount facteur et le sous-jacent.

On choisit, comme actif de référence, une OZC de maturité T et on désigne par $\mathbb{P}^T$ la proba associée qui est définit p/r à la proba risque-neutre standarde $\mathbb{P}^*$ via la densité de Radon-Nikodym comme la suite

$$\eta_t = \left.\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)/B(0,T)}{S_t^0/S_0^0} = \frac{B(t,T)}{S_t^0 B(0,T)}$$

Rappel: Changement de proba $\mathbb{P}$ $\mathbb{Q}$ $(\Omega, \mathcal{A})$

$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = X$ $\mathcal{A}$-mesurable positive $X>0$

$\mathbb{E}_\mathbb{P}[X] = 1$

$\oplus$ $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ $T>0$

$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_T} = X_T$ $X_T$ est $\mathcal{F}_T$-mesurable

$X_T > 0$

$\mathbb{E}_\mathbb{P}[X_T] = 1$

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}_\mathbb{P}[X_T|\mathcal{F}_t] = X_t$$

$\Rightarrow (X_t)_{t\geq 0}$ est une $(\mathbb{P}.\mathbb{F})$-martingale positive

$\mathbb{E}_\mathbb{P}[X_T] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[X_t] = X_0 = 1$

$X_t \longrightarrow$ martingale exponentielle

$X_t = e^{\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t}$

$X_t = e^{\int_0^t \lambda_s dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_s^2 ds}$

Soit $Y$ va $\mathcal{A}$-mesurable

$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[Y] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \cdot Y] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[XY]$

$Y_T$ v.a $\mathcal{F}_T$-mesurable

$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[Y_T] = \mathbb{E}_\mathbb{Q}[\left.\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t} Y_T] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[Y_T \cdot X_T]$

$\mathbb{E}_\mathbb{Q}[Y_t] = \mathbb{E}_\mathbb{P}[Y_t X_t]$

Formule de Bayes $\quad \mathbb{E}_\mathbb{Q}[Y_T|\mathcal{F}_t] = \frac{\mathbb{E}_\mathbb{P}[Y_T X_T|\mathcal{F}_t]}{\mathbb{E}_\mathbb{P}[X_T|\mathcal{F}_t]} = \mathbb{E}_\mathbb{P}[Y_T \frac{X_T}{X_t}|\mathcal{F}_t]$

$$\eta_t = \frac{B(t,T)}{S_t^0} \Big/ \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{B(t,T)}{S_t^0}\right] = \frac{B(t,T)/B(0,T)}{S_t^0/S_0^0} = \frac{B(t,T)}{S_t^0 B(0,T)}$$ $\leftarrow$ on normalise pour densité de Radon-Nikodym.

* $\left(\frac{B(t,T)}{S_t^0}\right)_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{P}^*$-martingale

* $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{B(t,T)}{S_t^0}\right] = \frac{B(0,T)}{S_0^0} = B(0,T)$

* Quand $t=T$, la densité Radon-Nikodym devient $\eta_T = \frac{1}{S_T^0 B(0,T)}$

On appelle la probabilité $\mathbb{P}^T$ une probabilité forward qui peut être vue comme une proba "risque-neutre" associée au numéraire l'OZC de maturité $T$.

Nous avons les résultats suivant:

**Proposition:**

1) Le prix forward de l'actif $S$ avec la maturité $T$ à la date $t<T$ est donné par

$$F^S(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[S_T \mid \mathcal{F}_t]$$

2) Le prix d'un dérivé avec payoff $X$ à la maturité $T$ est donné, à la date $t \leq T$ par

$$\Pi_t(X) = B(t,T)\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[X \mid \mathcal{F}_t]$$

**Preuve:**

1) Nous avons

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[S_T \mid \mathcal{F}_t] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[\overbrace{\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*}\Big|_{\mathcal{F}_T}}^{\eta_T} S_T \mid \mathcal{F}_t\Big]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\eta_T \mid \mathcal{F}_t]} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[S_T\,\eta_T \mid \mathcal{F}_t]}{\eta_t} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[S_T \frac{1}{S_T^0\,\cancel{B(0,T)}} \mid \mathcal{F}_t\Big]}{\frac{B(t,T)}{S_t^0\,\cancel{B(0,T)}}}$$

$$= \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[S_T \frac{S_t^0}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t\Big]}{B(t,T)} = \frac{S_t}{B(t,T)} = F^S(t,T)$$

2) $$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[X \mid \mathcal{F}_t] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*}\Big|_{\mathcal{F}_T} \cdot X \mid \mathcal{F}_t\Big]}{\eta_t} = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[\eta_T X \mid \mathcal{F}_t]}{\eta_t} = \frac{1}{B(t,T)}\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\Big[X \frac{S_t^0}{S_T^0} \mid \mathcal{F}_t\Big]$$

$$= \frac{1}{B(t,T)}\,\Pi_t(X) \implies \Pi_t(X) = B(t,T)\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[X \mid \mathcal{F}_t]$$

## Pricing de l'option sous la probabilité forward

L'objective est d'évaluer l'option dont le sous-jacent est une OZC par la proposition précédente c-à-d sous la proba forward. Plus précisément, on cherche à calculer:

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[X \mid \mathcal{F}_t] \quad \text{avec } X = (B(T,U)-K)^+$$

sous $\mathbb{P}^T$.

Pour obtenir une formule (semi) explicite, on doit préciser un modèle pour le sous-jacent OZC.

$\mathbb{E}_*[e^{-rT}(S_T-K)^+ \mid \mathcal{F}_t]$ $\qquad$ $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[(B(T,U)-K)^+ \mid \mathcal{F}_t]$

$S_t$ sous $\mathbb{P}$ $\qquad$ $B(t,U)$ sous $\mathbb{P}^*$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$S_t$ sous $\mathbb{P}^*$ $\qquad$ $B(t,U)$ sous $\mathbb{P}^T$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

loi lognormale $S_T$ $\qquad$ la loi $B(T,U)$

On suppose que la dynamique du prix de l'OZC est donné sous $\mathbb{P}^*$, par

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t\,dt + b(t,T)\,dW_t^*$$

où $(r_t)_{t\geq 0}$ est le taux court, $b(t,T)$ est une fonction déterministe et $(W_t^*)_{t\geq 0}$ est un mvt browniem sous $\mathbb{P}^*$.

On a $B(t,T) = B(0,T)\exp\Big(\int_0^t (r_s - \frac{1}{2}b(s,T)^2)\,ds + \int_0^t b(s,T)\,dW_s^*\Big)$

et $\eta_t = \frac{B(t,T)}{S_t^0\,B(0,T)} = \exp\Big(\int_0^t b(s,T)\,dW_s^* - \frac{1}{2}\int_0^t b(s,T)^2\,ds\Big)$ qui est une $\mathbb{P}^*$-martingale exponentielle.

$\frac{dS_t}{S_t} = r\,dt + \sigma\,dW_t^*$ sous $\mathbb{P}^*$

$S_t = S_0\,e^{(r-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t^*}$

$S_t^0 = e^{\int_0^t r_s\,ds}$

Par le théorème de Girsanov, on a $W_t^T = W_t^* - \int_0^t b(s,T)\,ds$ est un mouvement browniem sous $\mathbb{P}^T$.

**Exemple.** Par la proposition, on a le prix forward est donné par

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[X|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[X \tfrac{\eta_T}{\eta_t}|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[X \exp(\int_t^T b(s,T)dW_s^* - \tfrac{1}{2}\int_t^T b(s,T)^2 ds)|\mathcal{F}_t]$$

et on remarque que sous la probabilité $\mathbb{P}^T$, le prix forward est une martingale car $F^S(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[S_T|\mathcal{F}_t]$
et de plus $F^{B^U}(T,T) = B(T,U)$

La fonction payoff qui nous intéresse est $(B(T,U)-K)^+$

Donc on cherche la valeur "terminale" d'une martingale sous $\mathbb{P}^T$ ainsi que sa loi de probabilité sous $\mathbb{P}^T$.

On calcule

$$F^{B^U}(t,T) = \frac{B(t,U)}{B(t,T)} = \frac{B(0,U)\exp(\int_0^t (\cancel{r_s} - \frac{1}{2}b(s,U)^2)ds + \int_0^t b(s,U)dW_s^*)}{B(0,T)\exp(\int_0^t (\cancel{r_s} - \frac{1}{2}b(s,T)^2)ds + \int_0^t b(s,T)dW_s^*)}$$

$$= \frac{B(0,U)}{B(0,T)} \exp(\int_0^t (b(s,U)-b(s,T))dW_s^* - \frac{1}{2}\int_0^t (b(s,U)^2 - b(s,T)^2)ds)$$

$W_t^T = W_t^* - \int_0^t b(s,T)ds$ MB sous $\mathbb{P}^T$
$dW_t^T = dW_t^* - b(t,T)dt$

changem$^t$ $W_t^* \to W_t^T$

$$= \frac{B(0,U)}{B(0,T)} \exp(\int_0^t (b(s,U)-b(s,T))dW_s^T + \int_0^t (b(s,U)-b(s,T))b(s,T)ds - \frac{1}{2}\int_0^t (b(s,U)^2 - b(s,T)^2)ds)$$

$$= \frac{B(0,U)}{B(0,T)} \exp(\int_0^t (b(s,U)-b(s,T))dW_s^T + \int_0^t (b(s,U)b(s,T) - \frac{1}{2}b(s,T)^2 - \frac{1}{2}b(s,U)^2)ds$$

$$= \frac{B(0,U)}{B(0,T)} \exp(\int_0^t (b(s,U)-b(s,T))dW_s^T - \frac{1}{2}\int_0^t (b(s,U)-b(s,T))^2 ds)$$

qui est bien une martingale exponentielle sous la proba $\mathbb{P}^T$

On remarque $\frac{B(0,U)}{B(0,T)} = F^{B^U}(0,T)$

On retrouve ainsi la dynamique du prix forward $F^{B^U}(t,T) = F^{B^U}(0,T)\exp(\int_0^t (b(s,U)-b(s,T))dW_s^T - \frac{1}{2}\int_0^t (b(s,U)-b(s,T))^2 ds)$

$$\longrightarrow \frac{dF^{B^U}(t,T)}{F^{B^U}(t,T)} = (b(t,U)-b(t,T))dW_t^T$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[(\underbrace{F^{B^U}(T,T)}_{\substack{\text{drift}: 0 \\ \text{Volatilité}: b(t,U)-b(t,T)}}-K)^+|\mathcal{F}_t].$$

Sous B-S on a $\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t^*$
$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[(S_T-K)^+|\mathcal{F}_t]$
la loi de $S_T$ log-normale.
drift : $r$
Volatilité : $\sigma$

**Remarque :** Ici, au lieu de travailler avec $B(t,U)$ comme sous-jacent, on choisit plutôt le prix forward $F^{B^U}(t,T)$ dont la valeur terminale coïncide avec $B(T,U)$ ($F^{B^U}(T,T) = B(T,U)$) qui possède la propriété de martingale sous $\mathbb{P}^T$ (mais pas $B(t,U)$).

On fait la comparaison avec le modèle Black et Scholes et remarque que la valeur terminale $F^{B^U}(T,T)$ du prix forward suit une loi log-normale sous $\mathbb{P}^T$ comme

$$\ln(F^{B^U}(T,T)) \sim \mathcal{N}(\ln(F^{B^U}) - \tfrac{1}{2}\int_0^T (b(s,U)-b(s,T))^2 ds, \underbrace{\int_0^T (b(s,U)-b(s,T))^2 ds}_{\Sigma^2})$$

$* \ln S_T \sim \mathcal{N}(\ln S_t + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)t$

On peut donc emprunter la formule de Black-Scholes$*$ pour évaluer l'option CALL en mettant $r=0$ et $\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma^2}{T}}$

Donc on obtient,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}\left[(B(T,U)-K)^+\right] = F^{B^U}(0,T)\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2)$$

$$\text{avec } \begin{cases} d_1 = d_2 + \Sigma \\ d_2 = \dfrac{\left(\ln \frac{F^{B^U}(0,T)}{K} - \frac{1}{2}\Sigma^2\right)}{\Sigma} \end{cases}$$

2exos (grand)

Modélisat° (modèle de taux court $r_{st}$ EDS, changement de proba

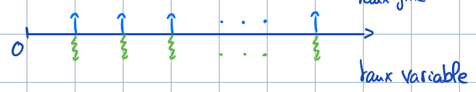
Vérifier étapes

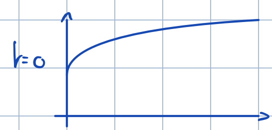
Savoir calculer prix

OZC

Puis 2ème exo comme celui-ci

## Swap de taux



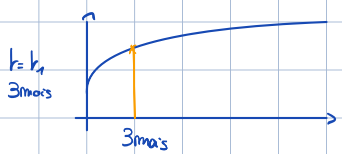

$T = 5$ ans

$\Delta t = 3$ mois.

À la date $t_0 = 0$, on détermine le taux fixe $R^S$ à échanger durant toute la maturité, et on observe le taux variable à échanger à $t_1$, Libor $(0, \underbrace{3\text{mois}}_{\Delta t})$ (Pas d'échange)

Euribor

À la date $t_1$, on échange $R^S$ et Libor $(0, 3\text{mois})$ et on observe le taux variable à échanger à $t_2$, Libor $(t_1, \Delta t)$




$R(t,\theta)$

⋮

À chaque date $t_i$ on observe Libor$(t_i, \Delta t)$ pour échanger à la date $t_{i+1}$

$\Delta t = t_{i+1} - t_i$ qui est égal $\forall i \in [\![0, n]\!]$

* On suppose que le nominal est égal à 1€.

* Le taux fixe est appelé le taux de swap. Notre objectif est de calculer le taux de swap à $t=0$.

On introduit quelques notations :

* Les dates de paiement sont notées comme $T_1, -, T_n$ avec $T_0 = 0$ et $T_{i+1} = T_i + \delta$ où $\delta$ est le m̂ $\forall i \in [\![0, n-1]\!]$ et $T_n = T$ est la maturité.

* Le taux variable qui doit être échanger à $T_{i+1}$ est $\delta L(T_i, \delta)$ contre le taux fixe $\delta R^S$ où $R^S$ est le taux de swap.

* $\delta$ étant une courte durée (moins d'un an), on va considérer le taux linéaire pour le taux variable qui satisfait

$$B(t, t+\delta) = \frac{1}{1 + \delta L(t,\delta)}$$

On obtient donc

$$\delta L(t,\delta) = \frac{1}{B(t,t+\delta)} - 1$$

$$\underbrace{\delta L(t_i,\delta)}_{\substack{\text{observé à } t_i \\ \mathcal{F}_{t_i}\text{-mesurable}}} = \frac{1}{\underbrace{B(t_i,t_{i+1})}_{\mathcal{F}_{t_i}\text{-mesurable}}} - 1$$

La valeur de $R^s$ est calculé en suivant le principe suivant:
L'espérance (sous une proba de pricing) de tous les flux entrant et sortant doit être egale à la date $t=0$
c-à-d

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\sum_{i=1}^{m}\frac{\delta L(T_i,\delta)-\delta R^s}{S^0_{T_i}}\right]=0$$

(recevoir du taux variable
payeur du taux fixe )

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{L(T_i,\delta)}{S^0_{T_i}}\right] = R_s\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{1}{S^0_{T_i}}\right] \Rightarrow R_s = \frac{\sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{L(T_i,\delta)}{S^0_{T_i}}\right]}{\sum_{i=1}^{m}B(0,T_i)}$$

C'est compliqué à calculer sous $\mathbb{P}^*$ quand $L(T_i,\delta)$ et $S^0_{T_i}$ sont corrélés.

Dans la suite, on va appliquer la méthode mesure forward pour calculer ces espérances.

$$0 = \sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{\delta L(T_{i-1},\delta)-\delta R^s}{S^0_{T_i}}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\Big(\underbrace{\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}}_{\mathcal{F}_{T_{i-1}}\text{-mes.}} - 1 - \delta R^s\Big)\underbrace{\frac{1}{S^0_{T_i}}}_{\mathcal{F}_{T_i}\text{-mesurable}}\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}\cdot\frac{1}{S^0_{T_i}}\right] - (1+\delta R^s)\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{1}{S^0_{T_i}}\right]\right)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}\,\frac{1}{S^0_{T_i}}\right] - (1+\delta R^s)B(0,T_i)$$

changem^t $\mathbb{P}^* \to \mathbb{P}^{T_i}$ →

$$= \sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_i}}\left[\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}^{T_i}}\Big|_{\mathcal{F}_{T_i}}\cdot\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}\,\frac{1}{S^0_{T_i}}\right] - (1+\delta R^s)B(0,T_i)$$

$\mathbb{P}^* \to \mathbb{P}^T$

$$\eta_T = \frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)}{S^0_t\,B(0,T)}$$

$$= \sum_{i=1}^{m}\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_i}}\left[\frac{\cancel{S^0_{T_i}}\,B(0,T_i)}{B(T_{i-1},T_i)\,\cancel{S^0_{T_i}}}\right] - (1+\delta R^s)B(0,T_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m}B(0,T_i)\left(\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_i}}\left[\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}\right]\right) - (1+\delta R^s)B(0,T_i)$$

Il reste à calculer $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_i}}\left[\underbrace{\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}}_{\mathcal{F}_{T_{i-1}}\text{ mes}}\right]$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}\cdot\frac{1}{S^0_{T_i}}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_i}}\left[\underbrace{\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}^{T_i}}\Big|_{\mathcal{F}_{T_i}}}_{\mathcal{F}_{T_i}}\cdot\underbrace{\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}\cdot\frac{1}{S^0_{T_i}}}_{\mathcal{F}_{T_i}\text{-mes}}\right]$$

Méthode 1:

On écrit le modèle de $B(t,T_i)$ sous $\mathbb{P}^*$ et puis Thm de Girsanov, sa dynamique sous $\mathbb{P}^{T_i}$ et la propriété de martingale pour calculer l'espérance sous $\mathbb{P}^{T_i}$.

Méthode 2:

Un autre changem^t de proba $\mathbb{P}^{T_i} \to \mathbb{P}^{T_{i-1}}$

$$\frac{d\mathbb{P}^{T_i}}{d\mathbb{P}^{T_{i-1}}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T_i)B(0,T_{i-1})}{B(t,T_{i-1})B(0,T_i)}$$

$$\frac{d\mathbb{P}^{T_i}}{d\mathbb{P}^{T_{i-1}}}\Big|_{\mathcal{F}_{T_{i-1}}} = \frac{B(T_{i-1},T_i)\,B(0,T_{i-1})}{B(0,T_i)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_i}}\left[\underbrace{\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}}_{\mathcal{F}_{T_{i-1}}\text{-mes}}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_{i-1}}}\left[\frac{d\mathbb{P}^{T_i}}{d\mathbb{P}^{T_{i-1}}}\Big|_{\mathcal{F}_{T_{i-1}}}\cdot\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_{i-1}}}\left[\frac{B(T_{i-1},T_i)B(0,T_{i-1})}{B(0,T_i)B(T_{i-1},T_i)}\right]$$

$$= \frac{B(0,T_{i-1})}{B(0,T_i)}$$

On obtient donc

$$\sum_{i=1}^{m} B(0,T_i)\,\mathbb{E}_{\mathbb{P}^{T_i}}\left[\frac{1}{B(T_{i-1},T_i)}\right] - (1+\delta R^S)B(0,T_i) = \sum_{i=1}^{m} B(0,T_i)\frac{B(0,T_{i-1})}{B(0,T_i)} - (1+\delta R^S)B(0,T_i)$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(B(0,T_{i-1}) - B(0,T_i)\right) - \delta R^S B(0,T_i)$$

$$= \underbrace{B(0,0)}_{1} - B(0,T) - \delta R^S \sum_{i=1}^{m} B(0,T_i)$$

$$= 0$$

$$\Rightarrow R^S = \frac{1 - B(0,T)}{\delta \sum_{i=1}^{m} B(0,T_i)}$$

Résumé :

Changement de numéraire

① Choisir un numéraire qui correspond à un nouvel actif p/r au cash, ici, il s'agit d'une OZC avec une maturité fixe $B(\cdot,T)$

② Définir la probabilité forward associée

$$\eta_t = \left.\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)\,(\overbrace{S_0^0}^{=1})}{S_t^0\, B(0,T)}$$

$$\eta_T = \left.\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*}\right|_{\mathcal{F}_T} = \frac{\overbrace{B(T,T)}^{=1}}{S_T^0\, B(0,T)} = \frac{1}{S_T^0\, B(0,T)}$$

③ $$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[X_{T_i}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\left.\frac{d\mathbb{P}^T}{d\mathbb{P}^*}\right|_{\mathcal{F}_{T_i}} X_{T_i}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\eta_{T_i} X_{T_i}\right]$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}[X_{T_i}] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}\left[\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\mathbb{P}^T}\right|_{\mathcal{F}_{T_i}} X_{T_i}\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}\left[\frac{1}{\eta_{T_i}} X_{T_i}\right]$$

④ $\mathbb{P}^{T_i} \longrightarrow \mathbb{P}^{T_{i-1}}$

$$\eta_t = \left.\frac{d\mathbb{P}^{T_i}}{d\mathbb{P}^{T_{i-1}}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T_i)\cdot B(0,T_{i-1})}{B(t,T_{i-1})\cdot B(0,T_i)}$$

D'autres applications :

Cap, Caplet $\quad (L(T_i,\delta)-K)^+\delta \quad i \in [\![0,m]\!]$

Floor, Floorlet $\quad (K-L(T_i,\delta))^+\delta$