Examen Séries temporelles 2012-2013
Seconde session

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice

Questions de cours : (6 points)

1. Qu'est-ce qui caractérise un processus stationnaire faible (stationnaire à l'ordre 2)? Donner plusieurs caractérisations possibles en expliquant l'intérêt de ces caractérisations.

2. On suppose qu'il est possible de décomposer une série temporelle en trois termes:

$$X_t = m_t + S_t + Y_t$$

où m_t est une tendance déterministe, S_t est une saisonnalité déterministe et Y_t est un processus stationnaire.

Expliquer quelles sont les différentes méthodes que vous connaissez pour identifier chacun des termes sur des données. Donner les avantages et les défauts de chaque méthode.

Problème : (14 points)

Soit (ε_t) un bruit blanc centrée de variance σ^2, soit a un réel différent de 1 et -1 et soit (X_t) le processus solution de l'equation

$$X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t, \quad t \in \mathbb{Z}.$$

On suppose $|a| < 1$.

1. Ce processus est-il stationnaire? Donner sa représentation $MA(\infty)$.

2. Déterminer la fonction d'autocovariance. Quelle est l'équation de récurrence vérifiée par la fonction d'autocovariance? Quelle est la densité spectrale du processus (X_t)?

Rappel: Soit $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus stationnaire. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par $X_t = m + \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j Y_{t-j}$ (avec $\sum_{j=-\infty}^{\infty} |\psi_j| < \infty$) est stationnaire et admet pour fonction de densité spectrale :

$$f_X(\omega) = |\Psi(\exp(-i\omega))|^2 f_Y(h), \qquad \omega \in [-\pi, \pi],$$

où

$$\Psi(\exp(i\omega)) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \psi_j \exp(ij\omega), \qquad \omega \in [-\pi, \pi].$$

3. On observe $X_1, ..., X_n$.

- Donner l'estimateur $\hat{a}_n$ de a donné par les équations de Yule-Walker. Quelles sont ses propriétés ?

- On suppose que (ε_t) est un bruit blanc Gaussien. Ecrire la vraisemblance des observations et donner la forme de l'estimateur du maximum de vraisemblance de a. Quelles sont ses propriétés ?

On suppose $|a| > 1$.

4. Ce processus est-il stationnaire? Donner sa représentation $MA(\infty)$.

5. Déterminer la fonction d'autocovariance. Quelle est l'équation de récurrence vérifiée par la fonction d'autocovariance? Quelle est la densité spectrale du processus (X_t)?