

# ERM - Copules

© Théo Jalabert

Rappel:  $F_{x,y}(x,y) = P(X \leq x, Y \leq y)$

$$= C(\underbrace{P(X \leq x)}_u, \underbrace{P(Y \leq y)}_v)$$

$$\rightarrow C: [0,1]^2 \rightarrow [0,1]$$

$$(u,v) \mapsto F_{x,y}(F_x(u), F_y(v))$$

①  $\forall u \in [0,1], C(u,0) = C(0,u) = 0$

②  $\forall u \in [0,1], C(u,1) = C(1,u) = u$

③ C'est super-modulaire

i.e.  $C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_1) + C(u_2, v_2) \geq 0$

avec  $\begin{cases} u_1 \leq u_2 \\ v_1 \leq v_2 \end{cases}$

## Theorème de Sklar:

$\forall (X,Y)$  v.a., il existe une fonction  $C$  t.q. :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, F_{x,y}(x,y) = C(F_x(x), F_y(y)) \geq 0$$

De plus, si  $F_X$  et  $F_Y$  sont continues, alors  $C$  (i.e la copule) est unique.

$$\rightarrow X = F_X^{-1}(U) \text{ avec } U \sim U([0,1])$$

$$\rightarrow Y = F_Y^{-1}(V) \text{ avec } V \sim U([0,1])$$

Exemple:  $F_{x,y}(x,y) = \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}} \rightarrow F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{x,y}(x,y) = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}} = \frac{1}{1+e^{-x}}$

$$F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{x,y}(x,y) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}} = \frac{1}{1+e^{-y}}$$

$\rightarrow$  Copule Par le thm de Sklar,  $\exists$  fonct.  $C$  t.q.  $F_{x,y}(x,y) = C(F_X(x), F_Y(y))$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}} = C\left(\frac{1}{1+e^{-x}}, \frac{1}{1+e^{-y}}\right)$$

Posons  $u = \frac{1}{1+e^{-x}}$  et  $v = \frac{1}{1+e^{-y}}$

$$\Rightarrow e^{-x} = \frac{1}{u} - 1 \text{ et } e^{-y} = \frac{1}{v} - 1$$

Donc on a  $C(u,v) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{u}-1) + (\frac{1}{v}-1)} = \frac{uv}{u+v-uv}$

\* Soit  $\alpha$  et  $\beta$  deux fonct° strictement  $\uparrow \Rightarrow C(X,Y) = C(\alpha(X), \beta(Y)) \rightarrow$  exp

\*  $c(u,v) = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(u,v)$  est la densité de la copule  $C$  en  $(u,v)$

\* Copule II:  $C^+(u,v) = uv$

\*  $E[g(X,Y)] = \iint g(x,y) f_{x,y}(x,y) dx dy$

$$\text{où } f_{x,y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{x,y}(x,y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y)$$

$$= c(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y)$$

Lorsque  $X \perp\!\!\!\perp Y \rightarrow c(F_X(x), F_Y(y)) = 1$

## Fréchet:

- ensemble de F.  $\mathcal{F}(F_X, F_Y)$  l'ensemble des f.d.r jointes F, qui admettent  $F_X$  et  $F_Y$  comme f.d.r marginales, tq  $\begin{cases} F_X(x) = \lim_{y \rightarrow \infty} F_{x,y}(x,y) \\ F_Y(y) = \lim_{x \rightarrow \infty} F_{x,y}(x,y) \end{cases}$

$\rightarrow$  En pratique (assurance / finance): dimensions entre 5 et 200.

$\rightarrow$  Théorie : dim = 2

- barème de  $F$ :

$$\text{barème cmf: } C_1(F_x(x), F_y(y)) = \max(F_x(x) + F_y(y) - 1; 0) \rightarrow C_1(u, v) = \max(u + v - 1; 0)$$

$$\text{barème sup: } C_2(F_x(x), F_y(y)) = \min(F_x(x), F_y(y)) \rightarrow C_2(u, v) = \min(u, v)$$

- Comomotrone  $\rightarrow$  Corrélation = +100%  $\rightarrow U=V \rightarrow$  copule: barème sup de  $F$ .

Antimotrone  $\rightarrow$  -100%  $\rightarrow U=-V \rightarrow$  copule: barème inf de  $F$ .

\* Coeff de corrélation linéaire:  $r_{\text{lin}}(X, Y) = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{X} \sqrt{Y}}$   $\rightarrow$  stable par "transformat° affines croissantes"

$$\forall X, Y, r_{\text{lin}}(aX+b, cY+d) = \text{sigm}(ac) r_{\text{lin}}(X, Y) \quad \forall a \neq c \neq 0.$$

$\triangle r_{\text{lin}}(e^x, e^y) \neq r_{\text{lin}}(X, Y) \rightarrow$  pas affine

rm si: structure de corrélat° identique.

$\rightarrow r_{\text{lin}}$  est influencé par les lois marginales et n'est pas une "vraie" mesure de corrélat°.

\*  $\tau_{\text{Kendall}}$ : C'est une vraie mesure de corrélation.

$$\tau(X, Y) = \underbrace{P((X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y}) > 0)}_{\text{proba de concordance}} - \underbrace{P((X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y}) < 0)}_{\text{proba de discordance}}$$

où  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  copie  $\perp\!\!\!\perp$  de  $(X, Y)$  (i.e.  $(X, Y)$  et  $(\tilde{X}, \tilde{Y})$  ont la m° loi bivariée et  $(X, Y) \perp\!\!\!\perp (\tilde{X}, \tilde{Y})$ ).

$\triangle$  On n'a pas  $X \perp\!\!\!\perp \tilde{X}$  et  $Y \perp\!\!\!\perp \tilde{Y}$

Version empirique:  $\hat{\tau}(X, Y) = \frac{\text{nb de paires concordantes} - \text{nb de paires discordantes}}{\text{nb total de paires}}$

$\rightarrow$  Ex:

	Floride (X)	Louisiane (Y)
2022	100 m \$	5 m \$
2023	20 m \$	1 m \$
2024	90 m \$	6 m \$

concordant  
 pas concordant  
 X > et Y >

$\rightarrow \hat{\tau} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$

$$\rightarrow \tau = 4 \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1 \quad \rightarrow \tau \text{ ne dépend que de la structure de corrélat° entre } X \text{ et } Y : \text{vraie mesure de corrélat°}$$

Si: densité  $f$   
 $= C(u, v) dudv$

$\rightarrow$  Le  $\tau$  est trop centré sur une corrélation "moyenne" et pas assez sur les extrêmes.

\* Dépendance forte des extrêmes:  $\begin{cases} \text{à gauche si: } L > 0 \\ \text{à droite si: } R > 0 \end{cases} \rightarrow$  si non risque dit asympt. indép.

$$L = \lim_{u \rightarrow 0} P(X \leq F_x^{-1}(u), Y \leq F_y^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}$$

$$R = \lim_{u \rightarrow 1} P(X \geq F_x^{-1}(u), Y \geq F_y^{-1}(u)) = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1-u}$$

\* Dépendance faible des extrêmes:  $\begin{cases} \text{à gauche si: } L > 0 \\ \text{à droite si: } R > 0 \end{cases}$

$$\tilde{L} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\log(u)}{\log(C(u, u))}$$

gaussienne  $\rightarrow$  dépendance faible

Student  $\rightarrow$  dépendance forte gauche et droite

$$\tilde{R} = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{2 \log(1-u)}{\log(1-2u+C(u, u))}$$

\* Risque endogène: Source de risque extrêmes et de corrélat° des extrêmes.

Exercice :  $X \sim \mathcal{E}(2)$   $\rightarrow U = F_X(x) \rightarrow U$  capsule de  $(X, Y)$

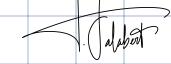
$$Y \sim \mathcal{E}(5) \quad V = F_Y(y)$$

et Rappel :  $VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$

$$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$$

© Théo Jalabert  
TVaR\_\alpha(X) = \mathbb{E}[X | X > VaR\_\alpha(X)]

$$= \frac{1}{1-\alpha} \int_{\alpha}^1 VaR_u(X) du$$



\*  $P(U \leq u) = P(F_X(x) \leq u)$

$$= P(U \leq u, V > v) + P(U \leq u, V \leq v) \Rightarrow P(U \leq u, V > v) = P(U \leq u) - P(U \leq u, V \leq v) = u - C(u, v)$$

$$* P(X \leq x | V \leq v) = \frac{P(X \leq x, V \leq v)}{P(V \leq v)} = \frac{P(X \leq F_X^{-1}(u), V \leq v)}{v} = \frac{P(F_X(x) \leq u, V \leq v)}{v} = \frac{C(u, v)}{v} \quad \text{car } U = F_X(x) \text{ i.e. } X = F_X^{-1}(U)$$

\*  $P(X > x, Y > y) = 1 - P(X \leq x, Y \leq y) - P(X \leq x) - P(Y \leq y)$

$$= 1 - C(u, v) - u - v$$

$$= 1 - C(1 - e^{-2x}, 1 - e^{-5y}) - 2 + e^{-2x} + e^{-5y}$$

\*  $P(X > x | Y \leq y) = 1 - P(X \leq x | Y \leq y)$

$$= 1 - \frac{P(X \leq x, Y \leq y)}{P(Y \leq y)}$$

$$= 1 - \frac{C(u, v)}{v} = 1 - \frac{C(1 - e^{-2x}, 1 - e^{-5y})}{1 - e^{-5y}}$$

\*  $P(X > VaR_{99\%}(X) | Y > VaR_{99\%}(Y)) = P(X > F_X^{-1}(\alpha) | Y > F_Y^{-1}(\alpha))$

$$= 1 - P(X \leq F_X^{-1}(\alpha) | Y > F_Y^{-1}(\alpha))$$

$$= 1 - \frac{P(X \leq F_X^{-1}(\alpha), Y > F_Y^{-1}(\alpha))}{P(Y > F_Y^{-1}(\alpha))}$$

\* Risk appetite: C'est le niveau de risque qu'une entreprise est prête à prendre pour atteindre ses objectifs

© Théo Jalabert

\*  $\rho$  de Spearman:  $\rho_{\text{Spearman}} = 2 \sin\left(\frac{\pi r}{6}\right) \Rightarrow \rho = \frac{6}{\pi} \arcsin\left(\frac{r_{\text{Spearman}}}{2}\right)$

\* Def: La loi continue est elliptique de paramètre de position  $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$  de mat sym de  $\Sigma \geq 0$  de dim d<sup>2</sup>.

si  $\forall m = (m_1, \dots, m_d)$ , sa densité s'écrit  $f(x) = (\det \Sigma)^{-d/2} g((x - \mu) \Sigma^{-1} (x - \mu)^T)$  où  $\int_{\mathbb{R}^d} g(x) dx = 1$

\* Copule gaussienne:  $C(\mu_1, \dots, \mu_d) = F_0(F_{\mu_1}^{-1}, \dots, F_{\mu_d}^{-1}) \rightarrow F^{-1}$  fait quatile

$F_0$  fdr conjointe de  $\mathcal{N}$  multivariée

$\rightarrow$  dim 2:  $C(\mu_1, \mu_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{F_{\mu_1}^{-1}} \int_{-\infty}^{F_{\mu_2}^{-1}} \exp\left(\frac{x_1^2 - 2\rho x_1 x_2 + x_2^2}{2(1-\rho^2)}\right) dx_1 dx_2$

$\rightarrow$  avantages:

\* Symétrique  $\Rightarrow$  adapté à l'étude des rendements

\* possible de prendre en compte la corr<sup>é</sup>lat° des modèles multi-facteurs à l'aide d'une matrice de corr<sup>é</sup>lat°

$\rightarrow$  inconvénients

\* pas de dépendance forte

\* Copule de Student:

\* Loi de Student:  $T_k = \frac{Z}{\sqrt{V/k}}$  où  $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$   $\rightarrow f_{T_k}(t) = \frac{1}{\sqrt{k\pi}} \frac{\Gamma(\frac{k+1}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}$   
 De +,  $T_k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \mathcal{N}(0, 1)$   $V \sim \chi_k^2$

C'est une loi symétrique à queue lourde.

$\rightarrow$  Student multivarié:  $Z \sim \mathcal{N}_d(0, \Sigma)$  et  $V \sim \chi_k^2 \rightarrow f_{k, \Sigma}(t) = \frac{1}{\sqrt{(k\pi)^d |\Sigma|}} \frac{\Gamma(\frac{k+d}{2})}{\Gamma(\frac{k}{2})} \left(1 + \frac{t^T \Sigma^{-1} t}{k}\right)^{-\frac{k+d}{2}}$

$\rightarrow$  Copule de Student:  $C_{k, \Sigma}(\mu_1, \dots, \mu_d) = T_{k, \Sigma}(T_k^{-1}(\mu_1), \dots, T_k^{-1}(\mu_d))$   
 $\rightarrow$  f.d.f. Student multivarié ( $k, \Sigma$ )

↳ elliptique

$\rightarrow$  peut présenter de la dépendance forte aux extrêmes

$\rightarrow$  2 params en dim 2

$\rightarrow$  peut présenter de la dépendance faible aux extrêmes

$\rightarrow$  3 params en dim 3

$\rightarrow$  mesure de corr<sup>é</sup>lat°  $\rightarrow \tau$  et  $\rho$

$\rightarrow$  loi symétrique donc  $\lambda_1 = \lambda_2$  les coeff de dépendance

$\rightarrow C_{k, \Sigma}^{\text{Stu.}} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} C_{\Sigma}^{\text{Gauss}}$   $\rightarrow$  toutes les deux sont elliptiques

$\rightarrow \tau_{\text{Kendall}}$  égaux

$\rightarrow$  Student permet de mesurer la dépendance forte aux extrêmes  $\rightarrow$  possède un coeff de dep queue contrairement à la copule gaussienne.

Estimation des paramètres 1)  $\widehat{\tau}(x_i, x_j) = \frac{2(\text{mb paires conc.} - \text{mb paires disc.})}{m(m-1)}$

2)  $\widehat{\sum}_{ij}$  avec méthode des moments:  $\widehat{\sum}_{ij} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \widehat{\tau}(x_i, x_j)\right) \rightarrow$  univarié:  $\widehat{\rho} = \sin\left(\frac{\pi}{2} \widehat{\tau}\right)$

3) ddpl, max murs:  $\widehat{\rho} = \arg \max \sum_{k=1}^m \ln(C_{k, \Sigma}(\widehat{x}_i^k, -\widehat{x}_i^k))$

⚠ C de Student n'est pas archimédienne.

Copule archimédienne

- \* générateur  $g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^+$ , \*  $g$  strictement décroissante
- \*  $g$  continue
- \*  $g(1) = 0$

Si  $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$   
 $\Rightarrow$  générateur strict

\* Copule archimédienne :  $C: [0, 1]^n \rightarrow [0, 1]$  de générateur  $g$

$$c(u_1, \dots, u_n) = \begin{cases} g^{-1}(\prod_{i=1}^n g(u_i)) & \text{si } \prod_{i=1}^n g(u_i) \leq g(0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\text{dim 2: } C(u_1, u_2) = \frac{g^{(2)}(C(u_1, u_2)) \cdot g^{(1)}(u_1) g^{(1)}(u_2)}{g^{(1)}(C(u_1, u_2))^2}$$

$$\text{p.d.r: } \forall t \in [0, 1], K_C(t) = t - \frac{g(t)}{g'(t)}$$

$\rightarrow$  générateur strict  $\Rightarrow$  copule toujours définie et dite stricte

$\rightarrow$  en dim  $n$ ,  $g$  de classe  $C^{n-2}$  au moins et  $(-1)^n g^{(n)} \leq 0$ .

$\rightarrow$  Kendall:  $\tau_C = 1 + 4 \int_0^1 \frac{P(t)}{K(t)} dt$  par  $(X, Y)$  deux va d'une copule archimédienne générée par  $g$ .

$\rightarrow$  Dépendance de queue:

$$*\text{Coiff inf } \lambda_L = 2 \lim_{R \rightarrow 0} \frac{(g')'(2R)}{(g')'(R)} \rightarrow \text{ si } (g')'(0) \text{ fini, alors } C \text{ n'admet pas de dep. à gauche}$$

$$*\text{Coiff sup } \lambda_R = 2(1 - \lim_{R \rightarrow 0} \frac{(g')'(2R)}{(g')'(R)}) \rightarrow \text{ si } (g')'(0) = +\infty \rightarrow \text{dépendance droite (supérieure)}$$

$\rightarrow$  Exemple: Gumbel, Clayton, Frank

Copules	$g(t)$	paramètre	$c(u, v)$	$\tau_C$	$\lambda_L$	$\lambda_R$
Gumbel	$-b(t)^{\alpha}$	$\alpha \in [1, +\infty[$	$\exp(-b(\frac{1}{u}) b(\frac{1}{v}))^{\alpha}$	$1 - \frac{1}{\alpha}$	0	$2 - \frac{1}{\alpha}$
Clayton	$\frac{1}{\alpha} - 1$	$\alpha \in [-1, +\infty[ \setminus \{0\}$	$\max((u^\alpha + v^\alpha - 1)^{\frac{1}{\alpha}}, 0)$	$\frac{\alpha}{\alpha+2}$	$2^{-\frac{1}{\alpha}}$	0
Frank	$-b(\frac{e^u - 1}{e^v - 1})$	$\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$	$\frac{1}{\alpha} b(1 + \frac{(e^u - 1)(e^v - 1)}{e^u - 1})$	$1 - \frac{1 + R_\alpha(\alpha)}{\alpha}$	0	0

$\alpha \neq 0$

$$D_\alpha(x) = \frac{R_\alpha}{\alpha} \int_x^\infty R_\alpha dx \text{ avec } R_\alpha = \frac{x^\alpha}{e^\alpha - 1} \text{ fonction de Debye.}$$

Copule empirique:

Toute copule est définie sur  $\{(\frac{k}{T}, -\frac{l}{T}) | 1 \leq k \leq m, 0 \leq l \leq T\}$

par  $\hat{C}(\frac{k}{T}, -\frac{l}{T}) = \frac{1}{T} \sum_{k=1}^T \sum_{l=1}^m \mathbf{1}_{\frac{k}{T} \leq k_l}$  est une copule empirique  $\alpha$  à vérifier

Copule Clayton:

dim 2:  $C_\theta: [0, 1]^2 \rightarrow [0, 1]$   $\rightarrow$  générateur  $g(u) = \frac{1}{\theta}(u^\theta - 1)$

$(x, y) \mapsto (x^\theta + y^\theta - 1)^{-1/\theta}$   $\rightarrow \theta$  permet de montrer le degré de dép. entre les risques  $\theta$  élevés  $\Rightarrow$  dépendance forte entre les variables.

$\rightarrow$  dépendance positive seulement.

$\rightarrow$  queue de distribution lourde: importance des événements rares, des événements de faible intensité

$\rightarrow$  copule asymétrique

$\rightarrow \theta = -1$ : anticomotrone ;  $\theta = 0$  indép ;  $\theta = +1$  comotrone /

$$\text{densité: } c(x, y) = y^{-|\theta|+1} x^{-|\theta|+1} (1+\theta) (x^\theta + y^\theta - 1)^{-(\frac{1}{\theta}+2)}$$

→ Copule de survie :  $\bar{C}(u, v)$  associée à  $C(u, v)$  :  $P(X \geq x, Y \geq y) = \bar{C}(1-x, 1-y)$

© Théo Jalabert

\* modélise la dépendance entre 2 va représentant des temps de survie

\* propriétés opposées à celles de Clayton

\* + forte dépendance de l'extrême sup.

\*  $\kappa = \text{Copule HRT}$

\* min limite que la  $C$  de Clayton

$$\rightarrow \tau = \frac{\theta}{\theta+2} \left\{ \begin{array}{l} P_S(X, Y) = 12 \int_{[0,1]^2} C(x, y) dx dy \\ \theta = \frac{2C}{1-C} \end{array} \right. \quad \tau(x, y) = 4[\mathbb{E}[C(x, y)] - 1]$$

## → Dépendance extrêmes

$$\text{Clayton: } \begin{cases} \lambda_L = 2^{1/6} \\ \lambda_R = 0 \end{cases}$$

$$\text{Survie de Clayton: } \begin{cases} \lambda_L = 0 \\ \lambda_R = 2^{1/6} \end{cases} \rightarrow \text{extrêmes indép.}$$

⚠  $\lambda=1 \Rightarrow$  extrêmes parfaitement corréls

↓  
dépendance forte à gauche

### Avantage:

- Simulation facile
- Simule bien la dépendance dans les parties inférieures des queues de distrib jointe

## Conditions pour être une mesure de dépendance:

\* Symétrie :  $\Pi(x, y) = \Pi(y, x)$

\* normalisation :  $-1 \leq \Pi(x, y) \leq 1$

\* Commomotonicité :  $\Pi(x, y) = 1 \Leftrightarrow X \text{ et } Y \text{ commomotone}$

\* Anticomomotonicité :  $\Pi(x, y) = -1 \Leftrightarrow X \text{ et } Y \text{ anticomomotone}$

\* invariance :  $\forall f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Pi(f(x), y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{si } f \text{ p} \\ -f(x, y) & \text{si } f \text{ p} \end{cases}$

Copule Gumbel: copule archimédienne de générateur  $\phi$  tel que  $\phi(x) = (-\ln(x))^\alpha$

$$\alpha \in [1, +\infty], \forall (u, v) \in [0, 1]^2, \quad C_\alpha(u, v) = \exp(-h(u)^\alpha + h(v)^\alpha)^{1/\alpha}$$

$$\text{densité: } \forall (u, v) \in [0, 1]^2, \quad c_\alpha(u, v) = \frac{C_\alpha(u, v)[\phi'_\alpha(u) + \phi'_\alpha(v)]}{\alpha^{-2}(\alpha-1 + (\phi'_\alpha(u) + \phi'_\alpha(v))^\alpha) \phi_{\alpha-1}(u) \phi_{\alpha-1}(v) u v}$$

$$\hookrightarrow \begin{cases} \alpha=1: C_\alpha = C^+ \\ \alpha=+\infty: C_\alpha = C^- \\ \alpha \in ]1, +\infty[ : \text{ dépendance positive.} \end{cases}$$

Copule de Gumbel = seule copule archimédienne de valeurs extrêmes, elle vérifie  $C(u_i^\lambda, -u_i^\lambda) = C(u_i, -u_i)^\lambda$   
(max-stabilité)

Gumbel: → dépendance positive || □

→ asymétrie à droite

→ modélise des événements rares et valeurs extrêmes

→  $\alpha \nearrow +\infty \Rightarrow \Pi \nearrow 1$  (forte)

$$\underline{\tau}: \quad \tau = \frac{\alpha-1}{\alpha} \rightarrow \text{retrouve les prop en } \alpha=1 \text{ et } \alpha=+\infty$$

Coeff Dépendance Queue:  $\lambda_R = 2 - \frac{2}{\alpha} \quad \lambda_L = 0$

La copule de Gumbel est utilisée pour :

- modélisat° des risques extrêmes
- Allocat° d'actif
- Modélisat° des dépendances en assu. vie
- Reass
- Pricing de produit dérivé.

### Copule archimédienne hiérarchique

Copule archimédienne classique :  $C(u_1, \dots, u_m) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_m))$

- modélisat° des corrélat° antisymétriques
- Formule fermée pour corrélat° classique
- Calculs rapide

MAIS : choix limité de leur paramètre  $\rightarrow$  CAH répond à ça  $\rightarrow$  introduct° de sous copule arch. pour créer des nouvelles structures de dép.

$\rightarrow$  la dépendance entre 2 v.a est dictée par la copule commune la + proche de ces 2 variables.

$\rightarrow$  CAH imbriquée = les CAH qui ajoutent une nouvelle va à chaque niveau de copule

$\rightarrow m$  va  $\Rightarrow m-1$  niveau de copule

# ERM

© Théo Jalabert



Risque: effet positif ou négatif de l'incertitude sur les objectifs stratégiques

- péril/risque
- bénéfice
- rentabilité...

Processus ERM: on cherche à mesurer le risque global pour le contrôler

↳ refuser certains risque

↳ Réassurance

↳ faire de la prévent°

↳ crédit de valeur de l'ERM difficile à modéliser

① IDENTIFIER

② MESURER

③ CONTRÔLER

④ SURVEILLER

Cycle qui recommence éternellement

ERM => / top management  
board  
employés

Cartographie des risques:

