mathan.quiblier@imrcia.fr

Economie de l'assurance
Information symétrique

Exercices

Exercice 1 : Assurance en information parfaite

Un individu dispose d'une richesse initiale w et d'une propriété sujette à un risque d'incendie, de valeur L. Pour se protéger contre ce risque l'individu peut souscrire une police d'assurance. L'assureur et l'individu ont le même à priori sur la probabilité d'incendie, notée p et supposée indépendante de l'effort de l'individu. L'individu peut décider du niveau de couverture q, c'est-à-dire le montant qu'il décide d'assurer. L'assureur demande une prime d'assurance x, et s'engage à indemniser l'assurer à hauteur de q en cas d'incendie.

On note $\pi(q, x, p)$ la fonction objectif de l'assureur supposé neutre vis-à-vis du risque et $u(w)$ la fonction d'utilité de l'individu.

1. Quelle est l'utilité de réserve de l'individu ?
2. Calculer le contrat Optimal (q^*, x^*) qui serait offert par l'assureur à un agent ayant une aversion pour le risque ?
3. Combien coûtera la prime x :
   (a) si l'individu est neutre vis-à-vis du risque ?
   (b) s'il y a concurrence pure et parfaite sur le marché de l'assurance ?
4. Montrer que si l'assureur et l'individu sont tous les deux averses au risque, ils signeront un contrat de coassurance (i.e. $q^* < L$).

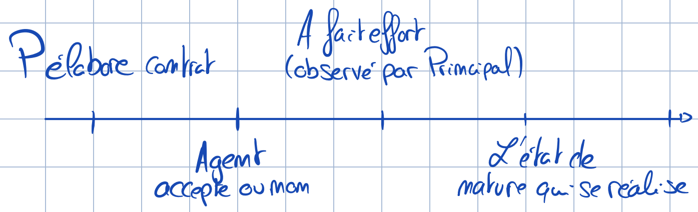
Exercice 2 : Relation d'emploi

Un agent exerce une activité professionnelle pour le compte d'un principal. Le résultat de la tâche qui lui est confiée peut être un succès (état de la nature S) ou un échec (état de la nature E). Le résultat dépend du niveau d'effort fourni par l'agent, e, et d'un évènement aléatoire. L'agent reçoit un salaire (w_s ou w_e) et subit un coût d'effort noté $v(e)$. Le résultat dont bénéficie le principal est x_s avec une probabilité de $p_s(e)$ et x_E avec une probabilité complémentaire $p_E(e)$.

Les fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern (VNM) des deux joueurs sont notées $B(.)$ et $u(.)$. L'utilité de réserve de l'agent est normalisée (=0).

1. On suppose que le principal veut obtenir l'effort e_0. Ecrire le contrat optimal proposé par le principal lorsque :
   (a) l'agent est averse au risque et le principal neutre.
   (b) l'agent est neutre au risque et le principal averse.
2. Quel serait le résultat si l'agent est le principal était tous les deux averses au risque ?
3. Quelle hypothèse faudrait-il ajouter pour que le principal se trouve confronté à un problème :
   (a) d'aléa moral ?
   (b) de sélection adverse ?

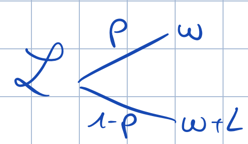
Relation Principal - Agent :



Exercice 1 :

1) L'utilité de réserve de l'agent correspond à son niveau d'utilité dans le cas où il ne souscrit aucun contrat d'assurance.

On peut représenter la situation de l'énoncé tq



$$\Rightarrow \bar{u} = pu(w) + (1-p)\,u(w+L)$$

2) L'agent est averse au risque : sa fonction d'utilité est concave $(u'>0,\ u''<0)$

L'assureur va chercher à maximiser son profit sous contrainte de participation de l'agent.

Profit de l'assureur :

$$\Pi(q,x,p) = p(x-q) + (1-q)x$$
$$= x - pq$$

La contrainte du participation de l'agent est telle que :

$$u = pu(w-x+q) + (1-p)\,u(w-x+L) \geq \bar{u}$$

Soit le programme d'optimisation suivant :

$$\text{Max } \Pi = x - pq$$
$$\text{S.C } u \geq \bar{u}$$

On écrit le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\lambda, q, x) = x - pq + \lambda\left[pu(w-x+q) + (1-p)\,u(w-x+L) - \bar{u}\right]$$

Conditions KKT et on résout :

① $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \iff 1 - \lambda p u'(w+q-x) - (1-p)\lambda u'(w+L-x) = 0$

② $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \iff -p + \lambda p u'(w+q-x) = 0$

③ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff pu(w-x+q) + (1-p)u(w-x+L) - \bar{u} = 0$

(1) et (2) $\iff \lambda \overset{(1)}{=} \frac{1}{pu'(w-x+q)+(1-p)u'(w-x+L)}$

$\overset{(2)}{=} \frac{1}{u'(w+q-x)}$

$\iff pu'(w-x+q) + (1-p)u'(w-x+L) = u'(w+q-x)$

$\iff u'(w-x+q) = u'(w-x+L)$

$\iff q^* = L$ car fonction monotone

En d'autres termes, la couverture optimale = couverture complète

(3) $\iff u(w+L-x^*) = \bar{u} \implies x^* = w+L-u^{-1}(\bar{u})$

↳ Prime d'assurance fixe

$\implies$ propriété du cours : assureur neutre vis-à-vis du risque + agent averse au risque : prime fixe + couv. complète.

3) a) Agent neutre au risque : $u'>0$ et $u''=0$

$$\mathbb{E}[u(x)] = u(\mathbb{E}[x])$$

Le programme devient :

$$\max \; x - pq$$
$$\text{s.c } \underbrace{pu(w-x+q)+(1-p)u(w-x+L) \geq \bar{u}}_{\iff pu(w-x+q)+(1-p)u(w-x+L) \geq pu(w)+(1-p)u(w+L)}$$

On applique $u(\mathbb{E}[x]) = \mathbb{E}[u(x)]$

$\iff u(p(w-x+q)+(1-p)(w-x+L)) \geq u(p(w)+(1-p)(w+L))$

$\iff u(w-x+pq+(1-p)L) \geq u((1-p)L+w)$

et puisque u est ↗ monotone (hypothèse de non satiété).

$\iff w-x+pq+(1-p)L \geq w+(1-p)L$

$\Longleftrightarrow pq \geq x$ $\longrightarrow$ Soit la contrainte de participation de l'agent.

Le problème devient $\max\limits_{s.c\ pq \geq x} x - pq$

$$\Rightarrow x^* = pq$$

b) Situation de CPP (Concurrence pure et parfaite) $\Rightarrow$ On a un prix qui vaut le coût marginal et l'assureur qui ne fait pas de profit ($\Pi = 0$)

$\Rightarrow$ Soit $x = pq$

Donc $x^* = pq^*$ (avec $q^* = L$ car agent averse).

4) On note $B(\cdot)$ la fonction d'utilité de l'assureur.

On a : $u' > 0$ et $u'' < 0$

$B' > 0$ et $B'' < 0$

On réécrit le programme :

$$\max (1-p)B(x) + pB(x-q)$$
$$s.c\ pu(w-x+q) + (1-p)u(w-x+L) \geq \bar{u}$$

$$\mathcal{L}(q, x, \lambda) = (1-p)B(x) + pB(x-q) + \lambda\left(pu(w-x+q) + (1-p)u(w-x+L) - \bar{u}\right)$$

Conditions KKT :

(1) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = (1-p)B'(x) + pB'(x-q) + \lambda[pu'(w-x+q) + (1-p)u'(w-x+L)] = 0$

(2) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -pB'(x-q) - \lambda pu'(w-x+q) = 0$

(3) $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = pu(w-x+q) + (1-p)u(w-x+L) - \bar{u} = 0$

(1) et (2) $\Longleftrightarrow$ $\lambda \overset{(1)}{=} -\dfrac{(1-p)B'(x) - pB'(x-q)}{pu'(w-x+q) + (1-p)u'(w-x+L)}$

$\lambda \overset{(2)}{=} -\dfrac{pB'(x-q)}{pu'(w-x+q)}$

$$\Longrightarrow \frac{\cancel{(1-p)}B'(x) + p\cancel{B'(x-q)}}{B'(x-q)} = \frac{p\cancel{u'(w+q-x)} + \cancel{(1-p)}u'(w-x+L)}{u'(w-x+q)}$$

$$\Longrightarrow \frac{B'(x)}{B'(x-q)} = \frac{u'(w-x+L)}{u'(w-x+q)} \qquad \text{(Arrow Pratt)}$$

On retrouve au numérateur : les utilités marginales des 2 acteurs dans le cas "pas de sinistre", et au dénominateur : les utilités marginales dans le cas "avec sinistre"

$\Longrightarrow$ Condition d'Arrow Pratt : égalité des utilités marginales relatives des 2 acteurs
↳ Partage du risque.

Or $\dfrac{B'(x)}{B'(x-q)} < 1$

On sait que $B' > 0$ et $B'' < 0 \Leftrightarrow B'(\cdot)$ monotone ↘
$\longrightarrow x > x - q$ car couv non négative ni nulle)

Donc $\dfrac{u'(w+L-x)}{u'(w+q-x)} < 1 \iff u'(w+L-x) < u'(w+q-x)$

$\iff u(w-x+L) > u(w+q-x)$

$\iff q^* < L$

$\Longrightarrow$ Lorsque les 2 acteurs sont averses au risque, ils partagent le risque.

D'où le fait que la couverture soit incomplète.

Exercice 2 :

1) On cherche à maximiser le profit

$$\max \Pi(e, w_S, w_P) = p_S(e)B(x_S - w_S) + p_E(e)B(x_E - w_E)$$
$$\text{s.c } p_S(e)u(w_S) + p_E(e)u(w_E) - V_E \geq 0$$

$$\mathcal{L}(w_E, w_S, \lambda) = p_S(e)B(x_S - w_S) + p_E(e)B(x_E - w_E) + \lambda[p_S(e)u(w_S) + p_E(e)u(w_E) - V(e)]$$

Conditions KKT :

① $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_S} = 0 \iff \lambda(p_S(e)u'(w_S)) - p_S(e)B'(x_S - w_S) = 0$

② $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_E} = 0 \iff \lambda(p_E(e)u'(w_E)) - p_E(e)B'(x_E - w_E) = 0$

③ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff P_S(e)\,u(w_S) + P_E(e)\,u(w_E) - V(e) = 0$

① et ② $\Rightarrow \lambda = \frac{P_S(e)B'(x_S - w_S)}{P_S(e)\,u'(w_S)} = \frac{P_E(e)\,B'(x_E - w_E)}{P_E(e)\,u'(w_E)}$

$\iff \frac{B'(x_S - w_S)}{u'(w_S)} = \frac{B'(x_E - w_E)}{u'(w_E)}$

$\iff \frac{B'(x_S - w_S)}{B'(x_E - w_E)} = \frac{u'(w_S)}{u'(w_E)}$

On retrouve l'égalité d'Arrow-Pratt (égalité des utilités marginales des 2 acteurs)

Dans le cas a) on a principal neutre vis-à-vis du risque $\Rightarrow B'' = 0 \Rightarrow B' = cte$

$\hookrightarrow \frac{B'(x_S - w_S)}{B'(x_E - w_E)} = 1 \iff \frac{u'(w_S)}{u'(w_E)} = 1$

Donc $u'(w_E) = u'(w_S)$

Comme $u(\cdot)$ est $\nearrow$ (monotone), on peut dire que $w_E = w_S$

En d'autres termes, le principal, neutre vis-à-vis du risque, supporte tout le "risque" en offrant un revenu constant quelque soit l'état de nature.

b) Cette fois $\frac{u'(w_S)}{u'(w_E)} = 1$

Rq : ⚠ c'est ≠ ici car on a des propriétés $\neq^{tes}$ sur la fonction d'utilité $(u'' = 0)$

Donc $\frac{B'(x_S - w_S)}{B'(x_E - w_E)} = 1 \iff B'(x_S - w_S) = B'(x_E - w_E)$

Comme B' monotone $\searrow$: $x_S - w_S = x_E - w_E \iff w_S = x_S - x_E + w_E$

$\iff w_E > w_E$

c'est l'agent qui supporte le risque.

2) On repart de l'égalité d'Arrow Pratt :

$$\frac{B'(x_S - w_S)}{B'(x_E - w_E)} = \frac{u'(w_S)}{u'(w_E)} < 1$$

* Pour le principal : $B'(x_S - w_S) < B'(x_E - w_E)$

Puisque $B'(\cdot)$ est monotone $\searrow$: $x_S - w_S > x_E - w_E$

* Pour l'agent : $u'(w_S) < u'(w_E)$ avec $u'(\cdot)$ monotone $\searrow$ $w_S > w_E$

$\Longrightarrow$ Partage du risque

3) a) Problème d'asymétrie d'information

↳ Cas où l'employeur ne peut pas observer l'effort de l'agent

b) Problème d'asymétrie d'information :

↳ Cas où l'employeur n'observe pas le "type" de l'agent.

Economie de l'assurance
Aléa moral

Exercices

Exercice 1

Un employeur neutre vis-à-vis du risque propose un contrat de travail à un agent, stipulant le salaire de l'agent en fonction de valeurs appropriées. L'agent peut accepter ou refuser le contrat. S'il l'accepte, il choisit son niveau d'effort faible (a = 1) ou élevé (a = 2). Le revenu de l'employeur peut prendre deux valeurs, 10 ou 30, dont les probabilités dépendent du niveau d'effort.

Action	10	30
$a = 1$	$2/3$	$1/3$
$a = 2$	$1/3$	$2/3$

La fonction d'utilité de l'agent dépend de son salaire et de son effort, et est telle que :

$$u(w, a) = w - a + 1$$

Son utilité de réserve vaut 1.

1. On suppose d'abord que l'employeur observe l'effort du travailleur. Déterminez le contrat optimal, en calculant le revenu espéré de l'employeur.
2. On suppose maintenant que l'employeur n'observe pas l'effort de l'agent.
   (a) Commentez et décrivez la relation principal-agent.
   (b) Déterminez le contrat optimal qui serait proposé pour obtenir un effort élevé.
   (c) Calculer le revenu espéré de l'employeur.

Exercice 2 : Relation d'emploi

On considère une relation contractuelle entre un agent et un principal, dans laquelle deux résultats sont réalisables : 50 000 (succès) ou 25 000 (échec). Les probabilités de succès ou d'échec dépendent du niveau d'effort fourni par l'agent, qui peut prendre trois valeurs : $e_1 > e_2 > e_3$.

Effort	25 000	50 000
e_1	0.25	0.75
e_2	0.50	0.50
e_3	0.75	0.25

La fonction d'utilité de l'agent dépend de son salaire et de son effort, et est telle que :

$$u(w, e) = \sqrt{w} - v(e) \text{ avec } v(e_1) = 40,\ v(e_2) = 20,\ v(e_3) = 5.$$

Son utilité de réserve vaut 120.

1. Dans le cas où l'information est symétrique :
   (a) Donnez la forme du contrat optimal (pour tout niveau d'effort).
   (b) Calculez le profit espéré pour chaque niveau d'effort, et identifiez le contrat d'équilibre.
2. On suppose maintenant qu'il y a asymétrie d'information : l'employeur n'observe pas l'effort de l'agent.
   (a) Donnez le contrat optimal pour chaque niveau d'effort.
   (b) Calculez le profit espéré dans chaque cas, et identifiez le contrat d'équilibre.

Exercice 1 :

Effort \ Gain	10	30
$a=1$	$2/3$	$1/3$
$a=2$	$1/3$	$2/3$

* $u(w,a) = w - a + 1$
* $\bar{u} = 1$

1) Soit a fixé, — Informat° symétrique

$$\max_{w_a} \; p_S(a)(30 - w_a) + p_E(a)(10 - w_a)$$

$$sc \quad w_a - a + 1 \geq \bar{u} = 1$$

* $\dfrac{\partial \Pi}{\partial w_a} < 0$ et $\dfrac{\partial C}{\partial w_a} > 0 \implies$ CP saturée

$w_a - a$

* A l'équilibre, $w_a^* - a + 1 = 1$

$$\implies w_a^* = a$$

$$\Pi_{a=1} = \frac{1}{3}(30-1) + \frac{2}{3}(10-1)$$

$$= \frac{47}{3}$$

$$\Pi_{a=2} = \frac{64}{3}$$

Donc le contrat d'équilibre est $\{a=2, w^* = 2\}$

2) a) Cas $a=2$: — Information asymétrique.

Salaires en cas de succès et échec $\rightarrow w_S, w_E$

$$\max_{w_S, w_E} \; \frac{2}{3}(30 - w_S) + \frac{1}{3}(10 - w_E)$$

$$sc: (CP) \quad \frac{2}{3}w_S + \frac{1}{3}w_E - 2 + 1 \geq \bar{u} = 1$$

Contrainte d'incitat°

$$(CI) \quad \underbrace{\frac{2}{3}w_S + \frac{1}{3}w_E - 2 + 1 \geq \frac{1}{3}w_S + \frac{2}{3}w_E - 1 + 1}$$

$$\iff \mathbb{E}[u(W,2)] \geq \mathbb{E}[u(W,1)]$$

On connait pas l'agent et la qtt de travail qu'il sera prêt à fournir $\implies$ Contrainte d'incitat°.

b) $\mathcal{L}(w_S, w_E, \lambda, \mu) = \frac{2}{3}(30 - w_S) + \frac{1}{3}(10 - w_E) + \lambda\left(\frac{2}{3}w_S + \frac{1}{3}w_E - 2\right) + \mu\left(\frac{1}{3}w_S - \frac{1}{3}w_E - 1\right)$

→ Conditions KKT :

$* \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_S} = 0 \iff -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3}\mu = 0 \qquad (1)$

$* \ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_E} = 0 \iff -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu = 0 \qquad (2)$

$* \ \lambda\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff \lambda\left(\frac{2}{3}w_S + \frac{1}{3}w_E - 2\right) = 0 \qquad (3)$

$* \ \mu\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \iff \mu\left(\frac{1}{3}w_S - \frac{1}{3}w_E - 1\right) = 0 \qquad (4)$

(1) et (2) $\Rightarrow 2\lambda + \mu = 2$ et $\lambda - \mu = 1 \Rightarrow \lambda = 1$ et $\mu = 0$

Donc la (CCP) est saturée $\Rightarrow \frac{2}{3}w_S + \frac{1}{3}w_E - 2 = 0$

$$\Rightarrow w_S = \frac{3}{2}\left(2 - \frac{1}{3}w_E\right) = 3 - \frac{1}{2}w_E \quad \circledast$$

D'après (4) on a $\frac{1}{3}w_S - \frac{1}{3}w_E - 1 \geq 0$ (car $\mu = 0$)

$$\overset{\circledast}{\Rightarrow} \frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{2}w_E\right) - \frac{1}{3}w_E - 1 = 1 - \frac{1}{6}w_E - \frac{1}{3}w_E - 1 = -\frac{1}{2}w_E \geq 0$$

Donc $w_E \leq 0$

$\Rightarrow w_E = 0$

Ainsi, $w_S = 3 - \frac{1}{2}w_E = 3$

Contrat $= \{w_E = 0, w_S = 3\}$

c) $\Pi_{a=2} = \frac{2}{3}(30 - 3) + \frac{1}{3}(10 - 0) = \frac{64}{3}$

De même pour le cas $a = 1$

et si $\Pi_{a=1} > \Pi_{a=2}$ le contrat utilisé est celui du cas $a=1$

et sinon ce sera celui du cas $a=2$ càd $w_E^* = 0$ et $w_S^* = 3$

Exercice 2 :

Effort \ Gain	25 000	50 000
e_1	0,25	0,75
e_2	0,50	0,50
e_3	0,75	0,25

$u(w,e) = \sqrt{w} - v(e)$

$\bar{u} = 120$

$v(e_1) = 40$; $v(e_2) = 20$; $v(e_3) = 5$

1) a) On fixe e, $\max\limits_{w_e} \; p_S(e)(50\,000 - w_e) + p_E(25\,000 - w_e)$

sc : (CP): $\sqrt{w_e} - V(e) \geq 120$

Contrainte saturée : $w_e^* = (120 + V(e))^2$

b) $\Pi_{e=1} = 18\,150$

$\Pi_{e=2} = 17\,900$ $\Longrightarrow$ Contrat équilibre $= \{e = e_1,\ w^* = 160^2\}$

$\Pi_{e=3} = 15\,625$

2) a) Cas où $e = e_1$:

$$\max_{w_E, w_S} \; 0,75(50000 - w_S) - 0,25(25000 - w_E)$$

sc : (CP) $0,75\sqrt{w_S} + 0,25\sqrt{w_E} - 40 \geq 120$

(CI_1) $0,75\sqrt{w_S} + 0,25\sqrt{w_E} - 40 \geq 0,5\sqrt{w_S} + 0,5\sqrt{w_E} - 20$

(CI_2) $0,75\sqrt{w_S} + 0,25\sqrt{w_E} - 40 \geq 0,25\sqrt{w_S} + 0,75\sqrt{w_E} - 5$

neutre au risque $\Leftrightarrow \mathbb{E}[u(\,)] = u(\mathbb{E}[\,])$

$\Longleftrightarrow$ $\max \; 43750 - 0,75 w_S + 0,25 w_E$

sc : $0,75\sqrt{w_S} + 0,25\sqrt{w_E} \geq 160$

$\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \geq 80$

$\cancel{\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \geq 70}$

$\longrightarrow \mathcal{L}(w_S, w_E, \lambda, \mu) = 43750 - 0,75 w_S + 0,25 w_E + \lambda(0,75\sqrt{w_S} + 0,25\sqrt{w_E} - 160) + \mu(\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} - 80)$

Conditions KKT : $\lambda, \mu \geq 0$

$*$ $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_S} = 0 \Longleftrightarrow -0,75 + \dfrac{0,25\lambda}{2\sqrt{w_S}} + \dfrac{\mu}{2\sqrt{w_S}} = 0$ (1)

$*$ $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_E} = 0 \Longleftrightarrow 0,25 + \dfrac{0,25\lambda}{2\sqrt{w_E}} - \dfrac{\mu}{2\sqrt{w_E}} = 0$ (2)

$*$ $\lambda \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Longleftrightarrow \lambda(0,75\sqrt{w_S} + 0,25\sqrt{w_E} - 160) = 0$ (3)

$*$ $\mu \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \Longleftrightarrow \mu(\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} - 80) = 0$ (4)

$(2) \Rightarrow \lambda = \left(\frac{2\sqrt{w_E}}{0,25}\right)\left(0,25 + \frac{\mu}{2\sqrt{w_E}}\right) \Rightarrow \lambda > 0$

D'où (3) $\Rightarrow 0,75\sqrt{w_S} + 0,25\sqrt{w_E} - 160 = 0$ $*^1$

Cas où $\mu = 0$, CI pas saturée

Grâce à (1) et (2) on a $2\sqrt{w_S} = 2\sqrt{w_E} = \lambda$

$\rightarrow$ on injecte dans CI $\Rightarrow -80 \geq 0$ impossible.

$\rightarrow$ Donc $\mu > 0 \Rightarrow$ CI saturée

$\Rightarrow \sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} - 80 = 0$ $*^2$

Donc avec $*^1$ et $*^2$ on résout $\begin{cases} \sqrt{w_S} = 180 \\ \sqrt{w_E} = 100 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} w_S = 32400 \\ w_E = 10000 \end{cases}$

Cas où $e = e_2$:

$$\max_{w_E, w_S} 0,5\,(50000 - w_S) + 0,5\,(25000 - w_E)$$

sc : (CP) $0,5\sqrt{w_S} + 0,5\sqrt{w_E} - 20 \geq 120$

(CI_1) $0,5\sqrt{w_S} + 0,5\sqrt{w_E} - 20 \geq 0,75\sqrt{w_S} + 0,25\sqrt{w_E} - 40$

(CI_2) $0,5\sqrt{w_S} + 0,5\sqrt{w_E} - 20 \geq 0,25\sqrt{w_S} + 0,75\sqrt{w_E} - 5$

Puis de même on résout et $w_S = 28900$ et $w_E = 12100$

et si $e = e_3 \Rightarrow w_S = w_E = 15625$

b) $\Pi_{e_1} = 16\,950$

$\Pi_{e_2} = 17000$ $\Rightarrow e_2$ donne le contrat d'équilibre : $\{w_S = 28900, w_E = 12100\}$

$\Pi_{e_3} = 15625$

ECONOMIE DE L'ASSURANCE
SÉLECTION CONTRAIRE

Exercice 1

Un producteur de vin en monopole fait face à deux types de consommateurs, des non-connaisseurs (en proportion π) et des connaisseurs. L'utilité retirée de l'achat d'une bouteille de qualité q et de prix p s'écrit :

$$u = \theta q - p$$

avec θ un paramètre positif de sophistication des goûts ($\theta_H > \theta_B$). L'utilité de réserve est nulle. La fonction de coût $C(q)$ du producteur est une fonction croissante, convexe et inversible.

1. Quelle serait l'offre du producteur s'il pouvait observer le type de chaque client ?
2. Ce menu sera-t-il proposé par le producteur s'il ne peut pas observer le type des clients ? Pourquoi ?
3. Quel serait le menu d'offres optimales en cas d'asymétrie d'information sur le type ?

Exercice 2

Un conducteur souhaite assurer sa voiture contre le risque d'accident. Ce conducteur peut être de type prudent (avec la probailité t) ou à risque (avec la probabilité $1 - t$). Les probabilités d'accident sont les suivantes :

	Prudent	A risque
Pr(accident)	$P_p = 1/3$	$P_r = 1/2$

L'assureur est supposé neutre vis-à-vis du risque. Le conducteur a une fonction d'utilité $u(w) = ln(w)$. Sa richesse initiale w_0 vaut 64, et un accident implique un coût de 63. Tout contrat d'assurance définit une prime d'assurance ρ et une couverture d'un montant q.

1. Information symétrique :
   (a) Ecrire la contrainte de participation pour un conducteur de type i.
   (b) Quels sont les profits espérés de l'assureur lorsqu'il assure un conducteur prudent ? Un conducteur à risque ? Lorsqu'il ne connait pas le type du conducteur ?
   (c) Calculer les contrats optimaux (ρ_i, q_i) proposés à chaque type de conducteur, selon que l'assureur est en monopole ou sur un marché parfaitement concurrentiel.
2. On suppose maintenant que l'employeur n'observe pas le type de l'agent.
   (a) Pourquoi les contrats optimaux en information symétrique ne peuvent-ils pas apparaître sur le marché si les assureurs ignorent le type des conducteurs ?
   (b) Ecrire le programme que l'assureur résout en cas d'asymétrie d'information.

Exercice 1 :

Connaisseur (H) : $1-\pi$
Non Connaisseur (B) : π

$i \in \{H, B\}$, $u_i(q,p) = \theta_i q - p$

$\frac{\partial u_i}{\partial q} = \theta_i$; $\theta_H > \theta_B$

1) Info symétrique

* $i \in \{H,B\}$

$$\max_{q_i, p_i} \overbrace{p_i - C(q_i)}^{\pi(p_i, q_i)}$$

sc : (CP) $u_i(q_i, p_i) \geq \bar{u} = 0$
$\theta_i q_i - p_i \geq 0$

On a $\begin{cases} \frac{\partial \pi}{\partial p_i} > 0 \text{ et } \frac{\partial u_i}{\partial p_i} < 0 \\ \frac{\partial \pi}{\partial q_i} < 0 \text{ et } \frac{\partial u_i}{\partial q_i} > 0 \end{cases}$

Contraintes saturées à l'équilibre :
$\theta_i : q_i^* = p_i^*$

Le problème de maximisation devient $\max_{q_i} \theta_i q_i - C(q_i) = g(q_i)$

Par concavité, on peut appliquer la CPO :
$$\frac{\partial g}{\partial q_i}(q_i^*) = 0 \iff C'(q_i^*) = \theta_i$$
$$\Rightarrow q_i^* = C'^{-1}(\theta_i) \text{ et } p_i^* = \theta_i C'^{-1}(\theta_i)$$

2) On sait $\theta_H > \theta_B \implies \theta_H q_B^* - p_B^* > \theta_B q_B^* - p_B^* = 0$

$\implies u_H(q_B^*, p_B^*) > 0$ → le connaisseur aura tendance à acheter la bouteille des non-connaisseurs

3) Asymétrie d'info

$$\max_{q_B, p_B, q_H, p_H} \pi(p_B - C(q_B)) + (1-\pi)(p_H - C(q_H))$$

sc : (CP_B) : $\theta_B q_B - p_B \geq 0$
(CP_H) : $\theta_H q_H - p_H \geq 0$
(CI_B) : $\theta_B q_B - p_B \geq \theta_B q_H - p_H$
(CI_H) : $\theta_H q_H - p_H \geq \theta_H q_B - p_B$

(CI_B) : * En info sym, on a $\begin{cases} q_i^* = c'^{-1}(\theta_i) \\ p_i^* = \theta_i q_i^* \end{cases}$ alors (CI_B) satisfaite

* En info asym : $\overline{\Pi}_a = \Pi(\overline{\Pi}_B) + (1-\Pi)(\overline{\Pi}_H)$
* Sym : $\overline{\Pi}_B$ et $\overline{\Pi}_H$

$$\begin{cases} \max \overline{\Pi}_B \\ \text{sc } \underbrace{(CP_B)}_{F_B} \\ \max \overline{\Pi}_H \\ \text{sc } \underbrace{(CP_H)}_{F_H} \end{cases} \Rightarrow CI_B \text{ saturée}$$

$$\underset{\text{sc } CP_B, CP_H, CI_H, CI_B}{\operatorname{argmax}} \overline{\Pi}_a = \left(\underset{\text{sc } \underbrace{CP_H, CI_H, CI_B}_{E_H}}{\operatorname{argmax}} \overline{\Pi}_H \; ; \; \underset{\text{sc } \underbrace{CP_B, CI_H, CI_B}_{E_B}}{\operatorname{argmax}} \overline{\Pi}_B \right)$$

$E_H \subset F_H$ et $E_B \subset F_B$

$$\Rightarrow \max_{E_H} \overline{\Pi}_H \leq \max_{F_H} \overline{\Pi}_H \text{ et } \max_{E_B} \overline{\Pi}_B < \max_{F_B} \overline{\Pi}_B$$

$$= \max_{F_H \cap CI_B \cap CI_H} \overline{\Pi}_H \qquad = \max_{F_H \cup (CI_B)} \overline{\Pi}_H \qquad = \max_{F_B \cap (CI_B)} \overline{\Pi}_B$$

Economie de l'assurance
Interaction stratégique

Exercice 1 : Dilemme du prisonnier

Deux cambrioleurs, appelés Joueur 1 et Joueur 2 sont arrêtés par la police et placés en garde à vue dans des cellules différentes. Les preuves sont insuffisantes pour les inculper et la police leur propose la solution suivante. S'ils avouent tous les deux, chacun sera condamné à 3 ans de prison et dans ce cas l'utilité de chacun est égale à 1. Si seulement l'un des deux avoue, il sera libéré et servira de témoin contre l'autre et dans ce cas, l'utilité de celui qui avoue est égale à 4 et celle de l'autre à 0. Si aucun des deux n'avoue, ils seront inculpés pour un délit mineur et condamnés à 1 an de prison et dans ce cas, l'utilité de chacun est égale à 3.

1. Après avoir identifié les différentes composantes de ce jeu stratégique, donnez la forme normale et extensive de ce jeu.
2. Déterminez l'équilibre en stratégies dominantes et l'équilibre de Nash résultant.

Exercice 2 : Bataille des sexes et coordination

Un couple femme-homme désire sortir ensemble, mais ils ne sont pas d'accord sur le spectacle. Monsieur désire assister à un match de boxe, Madame à un spectacle de danse. S'ils vont à la danse, Monsieur (resp. Madame) a une utilité égale à 1 (resp. égale à 2) ; et s'ils vont au match de boxe, Monsieur (resp. Madame) a une utilité égale à 2 (resp. égale à 1). S'ils sont séparés, ils ont tous les deux une utilité nulle.

1. Après avoir identifié les différentes composantes de ce jeu stratégique, donnez la forme normale de ce jeu et représentez ce jeu sous forme extensive.
2. Les joueurs peuvent-ils se coordonner ?
3. Déterminez l'équilibre en stratégies dominantes.
4. Répondre aux questions 1 et 2 dans le cas où ils décident d'aller au match de boxe (resp . spectacle de danse) et l'utilité est égale à 2 (resp. égale à 1) pour chacun.

Exercice 1 :

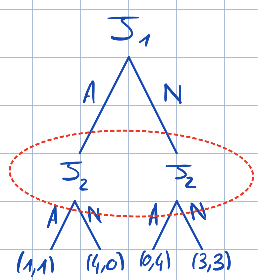
1) N=2
Jeu non coopératif
Jeu simultané, non répété
Information complète
Information imparfaite

$N = \{1,2\}$
$S_1 = S_2 = \{\text{nier}, \text{avouer}\}$

$S = S_1 \times S_2 = \{(n,n); (n,a); (a,n); (a,a)\}$ profils des stratégies possibles

$u_1(n,n) = u_2(n,n) = 3$
$u_1(a,a) = u_2(a,a) = 1$
$u_1(a,n) = u_2(n,a) = 4$
$u_1(n,a) = u_2(a,n) = 0$

$J_1 \backslash J_2$	A	N
A	(1,1)	(4,0)
N	(0,4)	(3,3)



2) Pour J_1, on a $s^* \in S_1$
Stratégie dominante :
$$\forall s_2 \in S_2, \forall s_1 \in S_1 / \{s^*\}, \; u_1(s^*, s_2) \geq u_1(s_1, s_2)$$

$*$ J_1 :

Si J_2 joue A, alors J_1 joue A car $u_1(A,A) > u_1(N,A)$

Si J_2 joue N, alors J_1 joue A car $u_1(A,N) > u_1(N,N)$

Donc $\{A\}$ est une stratégie dominante pour les 2 joueurs.

Donc l'équilibre en stratégie dominante est $\{A,A\}$

L'équilibre de Nash est $\{A,A\}$, il est parfait.

Exercice 2 :

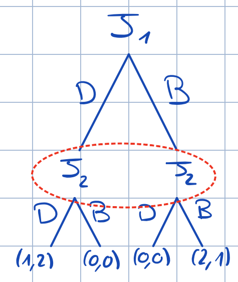
1) N = 2
* Jeu équilibré, non répété, non coopératif
* Information complète, imparfaite

$N = \{1, 2\}$

$S_1 = S_2 = \{Danse, Boxe\}$

J_1 \ J_2	D	B
D	(1,2)	(0,0)
B	(0,0)	(2,1)

J_1 = Homme
J_2 = Danse



2) Le plus important pour les 2 joueurs est de se coordonner mais chacun d'eux a une préférence contrastée avec celle de l'autre. Bien que les 2 souhaitent se coordonner, ils arrivent toujours à des résultats conflictuels (problème de coordination). Ainsi, aucune stratégie n'est strictement dominée ou dominante.

3) Pour J_1 :

Si J_2 joue D, $S_1^*(D) = D$
Si J_2 joue B, $S_1^*(B) = B$

Pour J_2 :

Si J_1 joue D, $S_2^*(D) = D$
Si J_1 joue B, $S_2^*(B) = B$

Ainsi, pas de stratégie dominante

On a 2 équilibres de Nash
$EqN = \{(D,D) ; (B,B)\}$

<u>En stratégie mixte :</u>

* Soit $p \in [0,1]$ (resp $q \in [0,1]$) les poids sur les stratégies pures du J_1 (resp J_2)

* $S_1 = \{pD + (1-p)B \,/\, p \in [0,1]\}$

* $S_2 = \{qD + (1-q)B \,/\, q \in [0,1]\}$

Pour le J_1 :

$u_1(D,B)=(0,0)$

* Si J_2 joue D avec proba q : $u_1(D,q) = q + (1-q)\times 0 = q$
* Si J_2 joue B avec proba q : $u_1(B,q) = 0\times q + (1-q)\times 2 = 2-2q$

$$D \geq B \iff q \geq 2-2q \iff q \geq \frac{2}{3} \quad \text{i.e } B \geq D \iff q \leq 2/3$$

$$S_1^*(q) = \begin{cases} 0 & \text{si } q < 2/3 \\ [0,1] & \text{si } q = 2/3 \\ 1 & \text{si } q > 2/3 \end{cases} \quad \longleftarrow \text{fonct}^\circ \text{ de meilleure réponse}$$

$$= p^*(q)$$

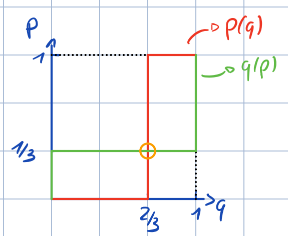
Pour le J_2 :

* Si J_1 joue D avec proba p : $u_2(p,D) = p\times 2 + (1-p)\times 0 = 2p$
* Si J_1 joue B avec proba p : $u_2(p,B) = p\times 0 + (1-p)\times 1 = 1-p$

$$B \geq D \iff u_2(p,B) \geq u_2(p,D) \iff 1-p \geq 2p \iff p \leq 1/3$$

$$S_2^*(p) = \begin{cases} 0 & \text{si } p < 1/3 \\ [0,1] & \text{si } p = 1/3 \\ 1 & \text{si } p > 1/3 \end{cases}$$

Graphiquement :

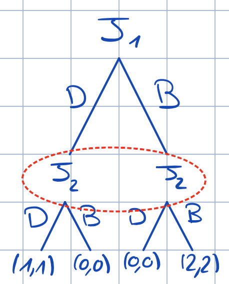


$$\text{ENSM} = \left\{\left(\tfrac{1}{3}D + \tfrac{2}{3}B \,;\, \tfrac{2}{3}D + \tfrac{1}{3}B\right); (D,D); (B,B)\right\}$$

Eq de Nash en strat. mixtes

4)

J_1 \ J_2	D	B
D	(1,1)	(0,0)
B	(0,0)	(2,2)



Les joueurs peuvent coopérer en choisissant (B,B), les intérêts ne sont pas conflictuels.

Economie de l'assurance
Compétition et Jeux Bayésiens

Exerice 1 : Compétition à la Cournot

Supposons un marché duopolistique dans lequel deux firmes sont en concurrence à la Cournot (c-à-d en quantité). La demande globale sur le marché est Q tel que $Q = q_1 + q_2$. D'autre part, la fonction de demande inverse est la suivante : $P(Q) = a - Q$, avec $a \in R^+$. Le coût de la production d'une unité q est c.

1. Quelle est la structure informationnelle de ce jeu ?
2. Calculer les quantités d'équilibre. En déduire les prix et profits d'équilibre ?

   Supposons maintenant que la firme 1 a un coût unitaire de c. Ce coût unitaire est de connaissance commune. D'autre part, la firme 2 a un coût unitaire égal à c_H avec une probabilité de θ et c_L avec une probabilité $1 - \theta$, avec $c_H > c_L$. Au moment de définir leur stratégie optimale, seule la firme 2 connaît avec certitude son coût unitaire.

3. Calculer les quantités d'équilibre.
4. Quel est l'impact de l'asymétrie d'information sur les quantités produites ? Quelle est la stratégie optimale de la firme 2 ?

Exercice 2 : Jeux Bayésiens

Soient deux joueurs A et B pouvant être de type Fort (S) ou Faible (W). Les probabilités jointes de chaque couple sont les suivantes :

	B_S	B_W
A_S	0.4	0.1
A_W	0.2	0.3

Les profils d'action possible de A (resp. B) sont (a_1, a_2) (resp. (b_1, b_2)). A cherche à maximiser son paiement tandis que B cherche à minimiser le sien. Les matrices de paiements correspondantes à chaque appariement possible sont les suivantes :

(A_S, B_S)		b$_1$	b$_2$
	a$_1$	2	5
	a$_2$	-1	20

(A_S, B_W)		b$_1$	b$_2$
	a$_1$	-24	-36
	a$_2$	0	24

		b_1	b_2
(A_W, B_S)	a_1	28	15
	a_2	40	4

		b_1	b_2
(A_W, B_W)	a_1	12	20
	a_2	2	13

1. Déterminez l'équilibre de Nash en stratégie pure pour chaque configuration possible.
2. Peut-on utiliser ces résultats pour déterminer l'équilibre de Nash Bayésien de ce jeu ? Pourquoi ?
3. Déterminez l'équilibre de Nash Bayésien de ce jeu.

Rappels :

Stratégie Dominante :

• $s_i^* \in S_i$ strat dominante <u>ssi</u> $\forall s_{-i} \in S_{-i}, \forall s_i \in S_i, u(s_i^*, s_{-i}) \geq u(s_i, s_{-i})$

Equilibre de Nash :

• $s^* = (s_i^*, s_{-i}^*)$ Eq Nash <u>ssi</u> $\forall i, \forall s_{-i} \in S_{-i}, u(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u(s_i, s_{-i}^*)$

Exercice 1 :

1) $Q = q_1 + q_2$
$P(Q) = a - Q$
Coût marginal $= c$.
$N = 2$
Information complète mais imparfaite.
$S_1 = S_2 = \mathbb{R}+$

2) $\max\limits_{q_i \in S_i} \pi_i(q_i, q_{-i}) = \max\limits_{q_i \in S_i} (a - q_i - q_{-i} - c) q_i \quad = \pi(q_i, q_{-i}, c)$

CPO :

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i}(q_i^*, q_{-i}) = 0 \iff (a - 2q_i - q_{-i} - c) = 0$$

$$\iff q_i^* = \frac{a - q_{-i} - c}{2}, \quad q_{-i}^* = \frac{a - q_i - c}{2}$$

$$\implies q_i^* = \frac{a-c}{3} \; ; \; p^* = \frac{a+2c}{3} \; ; \; \pi_i^* = \frac{(a-c)^2}{9}$$

3) $F_1 = c$

$$F_2 = \begin{cases} c_H & \text{avec } \mathbb{P} = \theta \\ c_L & \text{avec } \mathbb{P} = 1-\theta \end{cases} \quad \Big| \; c_H > c_L$$

Cas 1 : c_H

$$\max_{q_2 \in S_2} (a - q_1 - q_2 - c_H) q_2 \implies q_2^*(c_H) = \frac{a - q_1 - c_H}{2}$$

Cas 2 : C_L

$$q_2^*(C_L) = \frac{a - q_1 - C_L}{2}$$

Firme 1 :

$$q_2 = \begin{cases} q_2(C_H) & \mathbb{P} = \theta \\ q_2(C_L) & \mathbb{P} = 1-\theta \end{cases}$$

$$\max_{q_1 \in S_1} \mathbb{E}[\Pi(q_1, q_2)] = \max_{q_1 \in S_1} (a - q_1 - \mathbb{E}[q_2] - c) q_1$$

$$q_1^* = \frac{a - \mathbb{E}[q_2] - c}{2} = \frac{a - \theta q_2(C_H) - (1-\theta) q_2(C_L) - c}{2}$$

$$\to q_1^* = \frac{a - 2c + (1-\theta)C_L + \theta C_H}{3}$$

$$\Rightarrow q_2^*(C_L) = \frac{a - C_L}{2} - \frac{a - 2c + (1-\theta)C_L + \theta C_H}{6}$$

$$= \frac{a - 2C_L + c}{3} - \frac{1-\theta}{6}(C_H - C_L)$$

et $q_2^*(C_H) = \dfrac{a - 2C_H - c}{3} + \dfrac{\theta}{6}(C_H - C_L)$

$$q^{IC}(c) = \frac{a - c}{3}$$

$$\Pi_2^{INC}(q_1, q_2) = \Pi_2^{IC}(q_1, q_2) - \alpha(a - q^{IC}(C_L) - C_H) + \alpha^2$$

$\Pi_2^{INC} \geq \Pi_2^{IC}$ <u>ssi</u> $\alpha^2 \geq \alpha(a - q^{IC}(C_L) - C_H)$.

Exercice 2 :

	B_s	B_W
A_s	0.4	0.1
A_W	0.2	0.3

	b_1	b_2
a_1	2	5
a_2	-1	20

$S_A = \{a_1, a_2\}$ et $S_B = \{b_1, b_2\}$

$EN(A_s, B_s) = (a_1, b_1)$
$EN(A_s, B_W) = (a_2, b_1)$
$EN(A_W, B_s) = (a_1, b_2)$
$EN(A_W, B_W) = (a_1, b_1)$

$\overline{S_A} = \{(a|s, a|w) \mid a|s, a|w \in \{a_1, a_2\}\}$

$\overline{S_B} = \{(b|s, b|w) \mid b|s, b|w \in \{b_1, b_2\}\}$

	(b_1, b_1)	(b_2, b_2)	(b_1, b_2)	(b_2, b_1)
(a_1, a_1)	1	7,4	8,8	6,2
(a_2, a_2)	8,2	15,1	13,9	9,4
(a_1, a_2)	7,0	3,1	9,1	1,0
(a_2, a_1)	8,8	19,4	13,6	14,6

1 : $0{,}4 \times 2 + 0{,}1 \times (-24) + 0{,}2 \times 28 + 0{,}3 \times 12 = 7{,}6$

	B_S	B_W
A_S	0.4	0.1
A_W	0.2	0.3

e de A (resp. B) sont (a_1, a_2) (resp. (b_1, b_2)). A cherc
erche à minimiser le sien. Les matrices de paiements
e sont les suivantes :

(A_S, B_S)		b_1	b_2
	a_1	2	5
	a_2	-1	20

(A_S, B_W)		b_1	b_2
	a_1	-24	-36
	a_2	0	24

(A_W, B_S)		b_1	b_2
	a_1	28	15
	a_2	40	4

(A_W, B_W)		b_1	b_2
	a_1	12	20
	a_2	2	13

	$B_S \to b_1, B_W \to b_1$	$B_S \to b_1, B_W \to b_2$	$B_S \to b_2, B_W \to b_1$	$B_S \to b_2, B_W \to b_2$
$A_S \to a_1, A_W \to a_1$	7.6	8.8	6.2	7.4
$A_S \to a_1, A_W \to a_2$	7.0	9.1	1.0	3.1
$A_S \to a_2, A_W \to a_1$	8.8	13.6	14.6	19.4
$A_S \to a_2, A_W \to a_2$	8.2	13.9	9.4	15.1