

TD4 : MESURES DE RISQUE

Exercice 1 Considérons X et Y définis par :

$$\mathbb{P}(X = 0, Y = 0) = 1/3 \quad \mathbb{P}(X = 0, Y = 3) = 1/3 \quad \mathbb{P}(X = 6, Y = 6) = 1/3$$

Calculer $Es_{1/2}(X)$ et $Es_{1/2}(Y)$. En déduire que la mesure d'Escher n'est pas cohérente.

Exercice 2 Soient X et Y tels que $X \sim U(0, 2)$ et $Y \sim Exp(1)$. Calculer et comparer la mesure du risque de X et de Y

- a) Selon VaR_α
- b) Selon $TVaR_\alpha$
- c) Selon la mesure d'Escher Es_h
- d) Selon la mesure PH_α

Exercice 3 Soient X et Y indépendantes telles que $X \sim Par(1, 1)$ et $Y \sim Par(1, 1)$
(c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X > t) = \frac{1}{1+t}$).

- (1) Calculer $VaR_\alpha(X)$
- (2) Calculer $F_{X+Y}(t)$
- (3) En déduire la valeur de $F_{X+Y}(2VaR_\alpha(X))$, puis que VaR n'est pas sous additive.

→ Exercice 4

a) Montrer que $X \leq_{VaR} Y$ si et seulement si $\mathbb{E}(g(X)) \leq \mathbb{E}(g(Y))$ pour toute fonction

croissante g (telle que les espérances existent).

Pour la partie directe, on pourra utiliser le fait que $F_X^{-1}(U)$ a même loi que X et pour la partie réciproque on introduira une fonction g bien choisie.

b) En déduire que si $X \leq_{VaR} Y$, alors $g(X) \leq_{VaR} g(Y)$ pour toute fonction croissante g .

→ Exercice 5

(1) On suppose X et Y comonotones. Montrer que

$$VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y) = VaR_\alpha(X + Y).$$

On pourra distinguer le cas "général" : $0 < \alpha < 1$ des deux cas particuliers $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ et, pour le cas général, utiliser l'exercice 6, avec une fonction g bien choisie.

(2) En écrivant $g(\bar{F}(x))$ comme une intégrale, montrer que les mesures de distorsion sont des mélanges de VaR . En déduire qu'elles sont elles aussi "comonotones additives".