Modèles financiers en assurance / Mai 2021

Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Éléments de correction

Thème : Quelques calculs de valeurs économiques

Les différentes questions nécessitent des développements argumentés et structurés pour répondre de manière détaillée et précise.

Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la notation. Une copie mal écrite ne sera pas corrigée.

On note $\delta(t) = \mathbf{exp}\left(-\int_0^t r(u)\,du\right)$

Question n°1 (4 points) : Rappelez l'expression de la meilleure estimation des provisions à la date t, $BE(t)$, pour une séquence de flux $F(t)$ avec une processus d'actualisation $\delta(t) = \mathbf{exp}\left(-\int_0^t r(u)\,du\right)$. Vous détaillerez les différentes probabilités en jeu et leur lien avec la nature des risques affectant les flux actualisés. Donnez un exemple de risque ni mutualisable ni réplicable et indiquez comment ce type de risque est pris en compte dans les provisions techniques prudentielles.

> En notant P^a et Q^f respectivement la probabilité historique associée aux risques mutualisables et la probabilité risque neutre associée aux risques réplicables, on a simplement :
>
> $$BE(t) = E_t^{P^a \otimes Q^f}\left(\sum_{u>t} \frac{\delta(u)}{\delta(t)} F_u\right) = \sum_{u>t} E_t^{P^a \otimes Q^f}\left(\frac{\delta(u)}{\delta(t)} F_u\right)$$
>
> Lorsque les flux sont indépendants du risque financier, alors
>
> $$BE(t) = \sum_{u>t} P(t,u) \times E_t^{P^a}(F_u)$$
>
> Les risques comme les risques de modèle ou, de manière générale, les risques non réplicables mettant en cause l'indépendance des polices, sont pris en compte *via* la marge pour risque.

On considère un dispositif de retraite qui fonctionne de la manière suivante :

- Entre les âges x_c et x_R l'adhérent paye une cotisation C, tant qu'il est en vie ;
- S'il décède pendant la période $d = x_R - x_c$ avant la retraite, un capital K est payé aux ayant-droit ;

- À partir de l'âge x_R, une rente viagère R est servie.

On considère une représentation continue du temps. On note T_{x_c} la durée de vie résiduelle d'un individu d'âge x_c en $t=0$.

Question n°2 (4 points) : écrire les variables Λ_C et Λ_P représentant respectivement les sommes des flux actualisés de cotisations et de prestations pour un individu d'âge x_c en $t=0$ et entrant dans le dispositif. On distinguera les deux périodes $0 \le t \le d$ et $t > d$.

> Comme on raisonne en temps continu, on peut écrire
>
> $$\Lambda_C = C \times \int_0^d 1_{\{T_{x_c} > u\}} \delta(u)\, du$$
>
> $$\Lambda_P = K \times 1_{\{T_{x_c} \le d\}} \times \delta(T_{x_c}) + R \times \int_d^{+\infty} 1_{\{T_{x_c} > u\}} \delta(u)\, du$$

Question n°3 (4 points) : en déduire les valeurs économiques des deux composantes en fonction de la fonction de hasard μ décrivant la survie et du prix des ZC $P(0,t)$.

> En utilisant la formulé rappelée à la question n°1, on trouve
>
> $$V_C = E^{P^a \otimes Q^f}(\Lambda_C) = C \times \int_0^d E^{P^a}\left(1_{\{T_{x_c} > u\}}\right) E^{Q^f}(\delta(u))\, du = C \times \int_0^d S_{x_c}(u) P(0,u)\, du$$
>
> $$V_P = E^{P^a \otimes Q^f}(\Lambda_P) = K \times \int_0^d P^a(T_{x_c} = u) E^{Q^f}(\delta(u))\, du$$
>
> $$+ R \times \int_d^{+\infty} P^a(T_{x_c} > u) E^{Q^f}(\delta(u))\, du$$
>
> On en déduit
>
> $$V_P = K \times \int_0^d S_{x_c}(u) \mu(u) P(0,u)\, du + R \times \int_d^{+\infty} S_{x_c}(u) P(0,u)\, du$$

On suppose maintenant que $\mu(t) = \lambda$ pour tout $t \ge 0$ et que le taux court instantané est constant, $r(t) = r$. On notera $\omega = \lambda + r$.

Question n°4 (4 points) : Calculez les expressions explicites de V_C et V_P.

> Avec les hypothèses de constance de la fonction de hasard et du taux court, on a $S_{x_c}(t) = e^{-\lambda t}$ et $P(0,t) = e^{-rt}$. On en déduit que
>
> $$V_C = C \times \int_0^d S_{x_c}(u) P(0,u)\, du = C \times \int_0^d e^{-(\lambda + r)u}\, du = C \times \frac{1 - e^{-(\lambda + r)d}}{\lambda + r} = C \times \frac{1 - e^{-\omega d}}{\omega}$$

$$\begin{aligned} V_P &= K \times \int_0^d S_{x_c}(u)\mu(u)P(0,u)\,du + R \times \int_d^{+\infty} S_{x_c}(u)P(0,u)\,du \\ &= K \times \int_0^d \lambda e^{-(\lambda+r)u}\,du + R \times \int_d^{+\infty} e^{-(\lambda+r)u}\,du \\ &= K \times \lambda \times \frac{1-e^{-\omega d}}{\omega} + R \times \frac{e^{-\omega d}}{\omega} \end{aligned}$$

Question n°5 (2 points) : En déduire la cotisation d'équilibre en fonction de λ, R, K et $\rho = e^{-\omega d}$.

La cotisation d'équilibre est déterminée par l'égalité $V_C = V_P$ (« engagement de l'assureur = engagement de l'assuré »), ce qui conduit à

$$C \times (1-\rho) = K \times \lambda \times (1-\rho) + R \times \rho$$

et finalement

$$C = K \times \lambda + R \times \frac{\rho}{(1-\rho)}$$

Question n°6 (2 points) : Les formules obtenues à la question 3 restent-elles valides si on suppose que le montant de la rente est revalorisé en fonction de la performance de l'actif ? Pourquoi ? Indiquez comment adapter la formule donnant la valeur économique de l'engagement si R est revalorisé en fonction d'une fraction $0 \le \alpha < 1$ du taux court.

Les formules doivent être adaptées ; en effet, la valeur économique de la garantie de rente s'écrit maintenant

$$V_R = E^{P^a \otimes Q^f}(\Lambda_R) = R \times \int_d^{+\infty} P^a(T_{x_c} > u) E^{Q^f}(G(u) \times \delta(u))\,du$$

avec $G(u)$ la revalorisation cumulée de la rente (i.e. $R(u) = R \times G(u)$) n'est plus indépendante du risque financier et le produit $G(u) \times \delta(u)$ doit être analysé spécifiquement pour effectuer le calcul de l'espérance sous Q^f.

Dans le cas simple où $G(u) = e^{\alpha \int_0^u r(u)du}$, on a $G(u) \times \delta(u) = \mathbf{exp}\left(-(1-\alpha)\int_0^t r(u)\,du\right) = \delta(t)^{1-\alpha}$ et la formule pour la composante viagère de l'engagement devient

$$V_R = R \times \int_d^{+\infty} S_{x_c}(u) E^{Q^f}\left(\delta(t)^{1-\alpha}\right)du .$$

On peut noter en particulier que, dans les modèles affines gaussiens, le calcul de cette expression est simple.

$\delta(t) = \exp(-\int_0^t r(u)\,du)$

Question 1 :

En notant $\mathbb{P}^a$ et $\mathbb{Q}^f$ resp proba historique associée aux risques mutualisables et proba risque neutre associée aux risques réplicables, on a simplement :

$$BE(t) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}\left[\sum_{u>t} \frac{\delta(u)}{\delta(t)} F_u\right] = \sum_{u>t} \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}\left[\frac{\delta(u)}{\delta(t)} F_u\right]$$

Lorsque les flux sont $\perp$ du risque fin. alors :

$$BE(t) = \sum_{u>t} P(t,u)\, \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}^a}[F_u] \qquad P(t,u) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{P}^a}\left[\frac{\delta(u)}{\delta(t)}\right] \text{ prix ZC}$$

Les risques comme les risques de modèle ou de manière générale, les risques non réplicables mettant en cause l'indép des polices, sont pris en cpte via marge pour risque.

Question 2 :

$$\Lambda_C = C \int_0^d \mathbb{1}_{T_{x_c} > u}\, \delta(u)\, du$$

$$\Lambda_P = K\, \mathbb{1}_{\{T_{x_c} \le d\}}\, \delta(T_{x_c}) + R \int_d^\infty \mathbb{1}_{\{T_{x_c} > u\}}\, \delta(u)\, du$$

Question 3 :

$$V_C = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[\Lambda_C] = C \int_0^d \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a}[\mathbb{1}_{\{T_{x_c} > u\}}]\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta(u)]\, du = C \int_0^d S_{x_c}(u)\, P(0,u)\, du$$

$$V_P = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \otimes \mathbb{Q}^f}[\Lambda_P] = K \int_0^d \mathbb{P}^a(T_{x_c} = u)\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta(u)]\, du + R \int_d^\infty \mathbb{P}^a(T_{x_c} > u)\, \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta(u)]\, du$$

$$\Rightarrow V_P = K \int_0^d S_{x_c}(u)\, \mu(u)\, P(0,u)\, du + R \int_d^\infty S_{x_c}(u)\, P(0,u)\, du$$

Question 4 :

On suppose $\mu(t) = \lambda \ \forall t \geq 0$ $\quad r(t) = r$ $\quad$ on note $\omega = \lambda + r$

$$V_C = C \int_0^d S_{x_c}(u)\, P(0,u)\, du = C \int_0^d e^{-\lambda u} \times e^{-ru}\, du$$

$$= C\, \frac{1 - e^{-(\lambda + r)d}}{\lambda + r} = C\, \frac{1 - e^{-\omega d}}{\omega}$$

$$V_p = k\int_0^d S_{x_c}(u)\,\mu(u)\,P(0,u)\,du + R\int_d^\infty S_{x_c}(u)\,P(0,u)\,du$$

$$= k\int_0^d e^{-\lambda u} \times \lambda \times e^{-ru}\,du + R\int_d^\infty e^{-\lambda u}\,e^{-ru}\,du$$

$$= k\lambda\,\frac{1-e^{-\omega d}}{\omega} + R\,\frac{e^{-\omega d}}{\omega}$$

Question 5 :

Constat° d'équilibre si $V_c = V_p$

$$\Rightarrow C\,\frac{1-e^{-\omega d}}{\omega} = k\lambda\,\frac{1-e^{-\omega d}}{\omega} + R\,\frac{e^{-\omega d}}{\omega}$$

$$\Leftrightarrow C\,\frac{1-\rho}{\omega} = k\lambda\,\frac{1-\rho}{\omega} + \frac{R\rho}{\omega}$$

$$\Leftrightarrow C(1-\rho) = k\lambda(1-\rho) + R\rho$$

$$\Leftrightarrow C = k\lambda + R\,\frac{\rho}{1-\rho}$$

Question n°6 :

Les formules doivent être adaptées ; en effet, la valeur économique de la garantie de rente s'écrit mtn :

$$V_R = \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f}[\Lambda_R] = R\int_d^\infty \mathbb{P}^a(T_{x_c} > u)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[G(u)\,\delta(u)]\,du$$

avec $G(u)$ la revalorisat° cumulée de rente (i.e $R(u) = R\,G(u)$) n'est plus $\perp$ du risque fin. et $G(u)\,\delta(u)$ doit être analysé spécifiqt pour effectuer le calcul de l'$\mathbb{E}$ sous $\mathbb{Q}^f$

Dans le cas où $G(u) = e^{\alpha\int_0^u r(u)\,du}$

On a $G(u)\,\delta(u) = \exp\left(-(1-\alpha)\int_0^t r(u)\,du\right) = \delta(t)^{1-\alpha}$ et la formule pour la composante viagère devient

$$V_R = R\int_d^\infty S_{x_c}(u)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\delta(t)^{1-\alpha}]\,du$$