Chapitre 4 : Les EDS et la formule d'Ito

1/ Crochet – Variation quadratique

Rappels : variation quadratique

- **Rappel** : Sous réserve d'uniforme intégrabilité, la décomposition de Doob-Meyer assure l'existence, pour Z une $(\mathcal{F}_t)$-martingale continue de carré intégrable, d'un processus croissant A_t tel que $t \mapsto Z_t^2 - A_t$ soit une $(\mathcal{F}_t)$-martingale.
  On appelle ce processus **crochet** de la martingale Z et on écrit $\langle Z \rangle_t \coloneqq A_t$ (ou **variation quadratique**).
- **Extension aux martingales locales** : quitte à utiliser la suite de temps d'arrêt $\tau_n = \inf\{t > 0, Z_t^2 = n\}$, on peut étendre cette définition aux martingales locales :

Définition : Si Z est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale, $\langle Z \rangle$ est l'unique processus croissant continu $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que $t \mapsto Z_t^2 - \langle Z \rangle_t$ soit une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale.

Crochet stochastique entre 2 martingales locales

- On peut également définir le **crochet entre deux $(\mathcal{F}_t)$-martingales locales** M et N en écrivant :

$$\langle M, N \rangle_t = \frac{1}{2}\left(\langle M + N \rangle_t - \langle M \rangle_t - \langle N \rangle_t\right)$$

- **Propriété** : Le crochet $\langle M, N \rangle_t$ est aussi l'unique processus à variations finies tel que le processus $MN - \langle M, N \rangle$ soit une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale.

- On a alors le résultat suivant :

- **Proposition** : Soit M est une $(\mathcal{F}_t)$-martingale locale continue. Alors M est une martingale L^2 si et seulement si $\mathbb{E}(\langle M \rangle_t) < +\infty, \forall\, t \geq 0$

Variation Quadratique / Crochet Stochastique

- La proposition suivante donne du crochet stochastique une importante construction trajectorielle :

- **Proposition** : Soit M et N deux $(\mathcal{F}_t)$-martingales locales continues. Alors p.s. $\forall\, t \geq 0$:

$$\langle M, N\rangle_t = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{2^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})$$

Où $t_i^n, i = 0, \dots, 2^n$ désigne la subdivision régulière de $[0, t]$

- **Remarque** : Par l'inégalité de Cauchy-Schwartz, le terme de droite est bien défini pour deux processus à variation quadratique finir.
- On voit aussi que ce crochet sera nul dès qu'une variation quadratique est nulle, en particulier dès qu'un processus est à variation finie.

Variation Quadratique / Crochet Stochastique

$$\langle M, N \rangle_t = \lim_{n \to +\infty} \sum_{i=1}^{2^n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})$$

- **Proposition** : Une conséquence cruciale est que le crochet stochastique $\langle M, N \rangle$ reste inchangé si on effectue un changement de probabilité équivalente.

- **Remarque** : sera utile quand on changera de probabilité… en particulier pour le calcul d'Itô

Martingales orthogonales

- **Définition** : On dit que deux martingales continues sont **orthogonales** si leur crochet est nul, c'est-à-dire si leur produit est une martingale.

- **Exemples** :
  - 2 Browniens indépendants sont des martingales orthogonales
  - Le crochet du Mouvement Brownien est $\langle B \rangle_t = t$
  - On peut calculer le crochet entre 2 mouvements Brownien corrélés avec coefficient ρ : par définition $\langle B_1, B_2 \rangle_t = \rho t$.

Variation Quadratique / Crochet Stochastique d'une intégrale stochastique

- Comme on l'a vu dans le chapitre précédent, on peut donc calculer le **crochet stochastique** de 2 intégrales stochastiques et la **variation quadratique** d'une intégrale stochastique, grâce aux propriétés de martingale de l'intégrale stochastique :

$$\langle I_t(\theta)\rangle_t = \left\langle \int_0^{\cdot} \theta_s dB_s \right\rangle_t = \int_0^t \theta_s^2(s) ds$$

$$\langle I_t(\phi), I_t\,(\theta)\rangle_t = \left\langle \left(\int_0^{\cdot} \phi_s dB_s\right), \left(\int_0^{\cdot} \theta_s dB_s\right) \right\rangle = \int_0^t \phi_u \theta_u du$$

Chapitre 4 : Les EDS et la formule d’Ito

2/ Processus d’Itô – semi-martingales

Semi-martingales

- **Définition** : Une semi-martingale est un processus de la forme

$$X_t = M_t + A_t$$

Où M_t est une martingale et A_t un processus à variation finie.

Processus d’Itô et EDS

- **Définition** : on appelle processus d’Itô les processus qui s’écrivent sous la forme :

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

Avec b_s un processus $(\mathcal{F}_t^B)$-adapté tel que $\int_0^t |b_s| ds < +\infty$ p.s. $\forall t \geq 0$ et σ_s un bon processus local (i.e. càglàd, $(\mathcal{F}_t^B)$-adapté et $\int_0^t \theta_s^2 ds < +\infty$ p.s. $\forall t \geq 0$).

- On utilise également la notation sous forme **d’Equation Différentielle Stochastique (EDS)** :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

EDS : vocabulaire

- **Processus d'Ito :** $X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$
- **Equation Différentielle Stochastique (EDS)** :

$$\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

- **Remarque** : Il faut une **condition aux bords** en plus de l'EDS. En général c'est une condition initiale. Mais cela peut aussi être une condition terminale (exemple pricing). Si la condition est une condition terminale $X_T = \xi \in L^2(\Omega, \mathcal{F}_T, \mathbb{P})$, alors cette équation s'appelle une EDSR (Equation Différentielle Stochastique Rétrograde).
- Le coefficient b_t s'appelle la dérive (*drift*) du processus X, et σ_t son coefficient de diffusion (ou volatilité/*volatility*).
- On appelle la partie t $\mapsto x + \int_0^t b_s ds$ la partie à variation finie du processus X (qui est bien à VF car $\int_0^t |b_s| ds < +\infty$ p.s. $\forall t \geq 0$).
- On appelle t $\mapsto \int_0^t \sigma_s dB_s$ la partie martingale du processus X (c'est a priori une martingale locale, d'après la construction de l'intégrale stochastique).

Identification des parties d'une EDS

- **Processus d'Ito :** $X_t = \underbrace{x + \int_0^t b_s ds}_{partie\ à\ VF} + \underbrace{\int_0^t \sigma_s dB_s}_{partie\ martingale}$
- **EDS** : $\begin{cases} dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t \\ X_0 = x \end{cases}$
- La partie martingale est en général une martingale locale, et est une martingale si σ_s est un bon processus, c'es-à-dire si $\mathbb{E}\left[\int_0^t \theta_s^2 ds\right] < +\infty$.
- Comme une martingale locale à variations finies est un processus constant, on en déduit que la décomposition ci-dessus est unique.
- En particulier, si X_t s'écrit comme processus d'Itô, sous forme intégrale ou EDS, alors X_t est une martingale locale ssi $b_t = 0\ \forall t \geq 0$, donc si la partie à VF est nulle.
- On appelle cela la **représentation des martingales locales** : tout processus d'Itô martingale locale s'écrit $X_t = x + \int_0^t \sigma_s dB_s$.

Représentation des martingales locales

- En réalité, cette représentation des martingales locales dans une filtration Brownienne est caractéristique, indépendamment de ce que le processus soit a priori un processus d'Itô :

- **Théorème de représentation des martingales locales** : Soit B un mouvement Brownien standard, et M une $(\mathcal{F}_t^B)$- martingale locale continue. Alors il existe $x \in \mathbb{R}$ et θ un bon processus local tels que

$$M_t = x + \int_0^t \theta_s dB_s$$

- Ce théorème est très important en finance, et est lié à la complétude d'un marché financier. Cf cours sur le pricing et la théorie des options au 2ème semestre.
- L'hypothèse fondamentale est que M une $(\mathcal{F}_t^B)$- martingale locale par rapport à la filtration naturelle engendrée par le mouvement Brownien. Il n'est pas vraie si on change de filtration.
- **Remarque importante** : dans la filtration Brownienne, processus d'Itô = semi-martingale.

Crochet entre 2 processus d'Itô

Soient X et Y deux processus d'Itô, donnés par leurs décompositions d'Itô :

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

$$Y_t = y + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \phi_s dB_s$$

Alors**, leur crochet est par définition le crochet de leurs parties martingales**.

Exercice : le calculer ! Calculer $\langle X, Y \rangle_t$

Crochet entre 2 processus d'Itô

Soient X et Y deux processus d'Itô, donnés par leurs décompositions d'Itô :

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

$$Y_t = y + \int_0^t a_s ds + \int_0^t \phi_s dB_s$$

Alors**, leur crochet est par définition le crochet de leurs parties martingales.**

Calcul du crochet $\langle X, Y \rangle_t$:

$$\langle X, Y \rangle_t = \langle I(\sigma), I(\phi) \rangle_t = \left\langle \int_0^{\cdot} \sigma_s dB_s \, , \int_0^{\cdot} \phi_s dB_s \right\rangle_t = \int_0^t \sigma_s \phi_s ds$$

- **Remarque** : attention, à cause des parties à variations finies, le processus $X_t Y_t - \langle X, Y \rangle_t$ n'est pas une martingale locale en général. En revanche, ma définition du crochet comme limite est toujours valable.

Généralisation de l'intégrale à une martingale

Grâce au théorème de représentation des martingales Browniennes, on peut généraliser l'intégrale stochastique et donner un sens à une intégrale par rapport à n'importe quelle martingale… et même à une semi-martingale.

- Soit M une $(\mathcal{F}_t^B)$- martingale continue. Le théorème de représentation des martingales donne $\exists x \in \mathbb{R}, \exists \theta$ bon processus local tel que

$$M_t = x + \int_0^t \theta_s dB_s$$

Ainsi on peut donner un sens à l'écriture sous forme d'EDS donc de la différentielle

$$dM_t = \theta_s dB_s$$

Ainsi,

$$\int_0^t Y_s dM_s = \int_0^t Y_s \theta_s dB_s$$

Pour tout Y_s bon processus local.

Généralisation de l'intégrale à une semi-martingale

- De même on peut donner un sens à l'intégrale par rapport à une semi-martingale continue :

Si X est une semi-martingale (= un processus d'Itô) :

$$X_t = M_t + A_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \theta_s dB_s$$

Alors

$$\int_0^t H_s dX_s = \int_0^t H_s dM_s + \int_0^t H_s dA_s = \int_0^t H_s b_s ds + \int_0^t H_s \theta_s dB_s$$

Chapitre 4 : Les EDS et la formule d’Ito

3/ Formule d’Itô

Introduction

- Dans cette partie, on se donne un processus d'Itô réel

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

Et une fonction $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ suffisamment régulière.

- La formule d'Itô vise à donner une formule de changement de variable pour le processus $f(X_t)$, qui permettra d'écrire $f(X_t)$ comme processus d'Itô.

Intro Changement de variable

CE QU'ON FERAIT SI PAS D'INTEGRALE STOCHASTIQUE :

- Imaginons que $\sigma_s = 0$ et que b_s soit de classe C^0.

Alors $X_t = x + \int_0^t b_s ds$ est de classe C^1 et $(f \circ X)' = (f' \circ X)X'$.

D'où par la formule de changement de variables classique :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t (f \circ X)'(s)ds = f(x) + \int_0^t \big(f'(X_s)\big)X_s{}'ds = f(x) + \int_0^t \big(f'(X_s)\big)dX_s$$

Cette formule du 1er ordre garderait un sens quand $\sigma_s \neq 0$ en posant $dX_t = b_t dt + \sigma_t dB_t$. MAIS elle est fausse quand $\sigma_s \neq 0$ à cause du caractère quadratique de la partie martingale de X.

- Dès qu'on a de l'intégrale stochastique, il faut une formule du 2ème ordre.

$1^{\text{ère}}$ formule d'Itô

- **Théorème : $1^{\text{ère}}$ formule d'Itô**

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à 1 variable de classe C^2 et X un processus d'Itô. Alors :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)d\langle X\rangle_s$$

De plus, si f est à dérivées bornées, alors le processus

$$f(X_t) - \int_0^t f'(X_s)b_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\sigma_s^2 ds$$

Sous forme différentielle, cette formule s'écrit :

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)d\langle X\rangle_t$$

$1^{\text{ère}}$ formule d'Itô

Si X un processus d'Itô qui s'écrit

$$X_t = x + \int_0^t b_s ds + \int_0^t \sigma_s dB_s$$

Alors

$$d\langle X\rangle_t = \sigma_t^2 d\langle B\rangle_t = \sigma_t^2 dt, \qquad ou\ encore\ \ \langle X\rangle_t = \int_0^t \sigma_s^2 d\langle B\rangle_s$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} f(X_t) &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s) d\langle X\rangle_s \\ &= f(X_0) + \int_0^t f'(X_s)(b_s ds + \sigma_s dB_s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\, \sigma_s^2 ds \end{aligned}$$

Autrement dit sous forme différentielle

$$df(X_t) = \underbrace{\left(f'(X_t) b_t + \frac{1}{2} f''(X_t)\sigma_t^2\right)}_{dérive} dt + \underbrace{f'(X_t)\sigma_t}_{volatilité} dB_t$$

En particulier, t $\mapsto f(X_t)$ est un processus d'Itô.

t $\mapsto f(X_t)$ est un processus d'Itô

- t $\mapsto f(X_t)$ est un processus d'Itô de dérive $\int_0^t \left(f'(X_s)b_s + \frac{1}{2}f''(X_s)\sigma_s^2\right) ds$ et de volatilité $\int_0^t f'(X_t)\sigma_t dB_t$.
- Quand les dérivées sont bornées, l'intégrale stochastique apparaissant dans la formule est une vraie martingale, et on en déduit :

$$\mathbb{E}(f(X_t)) = \mathbb{E}(f(X_0)) + \mathbb{E}\left(\int_0^t f'(X_s)b_s ds + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X_s)\,\sigma_s^2 ds\right)$$
$$= \mathbb{E}(f(X_0)) + \int_0^t \mathbb{E}\left(f'(X_s)b_s + \frac{1}{2}f''(X_s)\sigma_s^2\right) ds$$

- On peut calculer de la même façon les espérances conditionnelles

$$\mathbb{E}(f(X_t)|\mathcal{F}_r) = \mathbb{E}(f(X_r)) + \mathbb{E}\left(\int_r^t f'(X_s)b_s ds + \frac{1}{2}\int_r^t f''(X_s)\,\sigma_s^2 ds\right)$$
$$= \mathbb{E}(f(X_r)) + \int_r^t \mathbb{E}\left(f'(X_s)b_s + \frac{1}{2}f''(X_s)\sigma_s^2\right) ds$$

Règle de calcul simplifiée

- Les financiers utilisent souvent une notation « multiplicative » de la formule d'Itô :

$$df(X_t) = f'(X_t)dX_t + \frac{1}{2}f''(X_t)dX_t.dX_t$$

Avec la table de multiplication suivante :

$$\begin{array}{ccc} & dt & dB_t \\ dt & 0 & 0 \\ dB_t & 0 & dt \end{array}$$

Exemple d'application de la 1ère formule d'Itô

- Appliquer la formule d'Itô à $f(B_t)$ où $f(x) = x^2$

Exemple d'application de la 1ère formule d'Itô

- Appliquer la formule d'Itô à $f(B_t)$ où $f(x) = x^2$
- **Solution** : $f(x) = x^2, \;\; f'(x) = 2x, \;\; f''(x) = 2$

On applique la 1ère formule d'Itô et on trouve :

$$df(B_t) = f'(B_t)dB_t + \frac{1}{2}f''(B_t)d\langle B\rangle_t$$

Soit

$$d(B_t^2) \;= 2B_t dB_t + \frac{1}{2}2dt$$

Ou encore

$$B_t dB_t = \frac{1}{2}d(B_t^2) - \frac{1}{2}dt$$

Ou encore

$$\int_0^t B_s dB_s = \frac{1}{2}B_t^2 - \frac{1}{2}t$$

2ème formule d'Itô

- **Que faire si la fonction à étudier dépend de X_t et de t ?**
- La 2ème formule d'Itô fait intervenir le temps en 1ère variable. Elle sera très utile pour étudier les EDS non homogènes en temps.
- **Théorème : 2ème formule d'Itô**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à 2 variables de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x, et X un processus d'Itô. Alors :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)d\langle X\rangle_s$$

Sous forme différentielle, cette formule s'écrit :

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)d\langle X\rangle_t$$

Exemple : le mouvement Brownien géométrique

- **Exemple d'application de la 2ème formule d'Itô** :

Le mouvement Brownien géométrique, ou processus log-normal (ou processus de Black et Scholes) est défini par l'équation

$$X_t = x + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s$$

Avec $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$.

Cela équivaut à **l'EDS de Black et Scholes**

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t, \qquad X_0 = x.$$

- Appliquer la 2ème formule d'Itô à $Y_t = f(t, X_t) = e^{-\mu t} X_t$, puis la 1ère formule d'Itô à $Z_t = \ln Y_t$ pour trouver la solution de cette EDS de Black et Scholes.

Exemple : le mouvement Brownien géométrique

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t, \qquad X_0 = x.$$

- Appliquons la 2ème formule d'Itô à $Y_t = f(t, X_t) = e^{-\mu t} X_t$

$$f(t,x) = e^{-\mu t} x \, ; \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -\mu x e^{-\mu t} \, ; \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = e^{-\mu t} \, ; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 0$$

Donc

$$dY_t = df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t) dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t) dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t) d\langle X \rangle_t$$
$$= -\mu X_t e^{-\mu t} dt + e^{-\mu t} dX_t = \sigma Y_t dB_t$$

Soit $Y_t = x + \int_0^t \sigma Y_s dB_s$.

Autrement dit, Y_t est une martingale.

Exemple : le mouvement Brownien géométrique

- Appliquons ensuite la 1ère formule d'Itô à $Z_t = \ln Y_t$ pour trouver la solution de cette EDS de Black et Scholes.

Soit $g(x) = \ln(x)\,;\, g'(x) = \frac{1}{x}\,;\, g''(x) = -\frac{1}{x^2}$. On a aussi besoin de $d\langle Y\rangle_t = \sigma^2 Y_t^2 dt$.

Ainsi la 1ère formule d'Itô nous donne :

$$dg(Y_t) = g'(Y_t)dY_t + \frac{1}{2}g''(Y_t)d\langle Y\rangle_t = \frac{1}{Y_t}dY_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{Y_t^2}\right)\sigma^2 Y_t^2 dt = \sigma dB_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

Ainsi, on montre que

$$\ln Y_t = \ln x + \int_0^t \sigma dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds = \ln x + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t$$

Donc on obtient une expression de Y_t :

$$Y_t = x \exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

Et donc de $X_t = e^{\mu t} Y_t$

$$X_t = x \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

Qui est la solution de l'EDS de Black-Scholes $dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t,\; X_0 = x$.

Exemple : le mouvement Brownien géométrique

- On peut aussi considérer le cas où μ, σ ne sont plus des réels mais sont des fonctions déterministes :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s) X_s ds + \int_0^t \sigma(s) X_s dB_s$$

On dit alors que X est un mouvement Brownien géométrique à coefficients déterministes.

- Toujours par la 2ème formule d'Itô, on montre que le processus $t \mapsto X_t \exp\left(-\int_0^t \mu(s) ds\right)$ est une martingale locale.

C'est en fait une vraie martingale et la solution de cette EDS est

$$X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \mu(s) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s) ds\right)$$

3ème formule d'Itô

- Finalement, une 3ème formule d'Itô permet de traiter les fonctions à plusieurs variables… et de retrouver les 2 autres formules !

- **Théorème : 3ème formule d'Itô**

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à 2 variables de classe C^2 à dérivées bornées, et X, Y deux processus d'Itô. Alors :

$$f(X_t, Y_t) = f(X_0, Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) dY_s$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s) d\langle X\rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s) d\langle Y\rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s) d\langle X, Y\rangle_s$$

Sous forme différentielle, cette formule s'écrit :

$$df(X_t, Y_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, Y_t) dX_t + \frac{\partial f}{\partial y}(X_t, Y_t) dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, Y_t) d\langle X\rangle_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_t, Y_t) d\langle Y\rangle_t + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_t, Y_t) d\langle X, Y\rangle_t$$

2ème formule d'Itô

- **Que faire si la fonction à étudier dépend de X_t et de t ?**
- La 2ème formule d'Itô fait intervenir le temps en 1ère variable. Elle sera très utile pour étudier les EDS non homogènes en temps.
- **Théorème : 2ème formule d'Itô**

Soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à 2 variables de classe C^1 par rapport à t et de classe C^2 par rapport à x, et X un processus d'Itô. Alors :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial t}(s, X_s)ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s, X_s)dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s, X_s)d\langle X\rangle_s$$

Sous forme différentielle, cette formule s'écrit :

$$df(t, X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, X_t)d\langle X\rangle_t$$

Exemple : le mouvement Brownien géométrique

- **Exemple d'application de la 2ème formule d'Itô** :

Le mouvement Brownien géométrique, ou processus log-normal (ou processus de Black et Scholes) est défini par l'équation

$$X_t = x + \mu \int_0^t X_s ds + \sigma \int_0^t X_s dB_s$$

Avec $\mu, \sigma \in \mathbb{R}$.

Cela équivaut à **l'EDS de Black et Scholes**

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t, \qquad X_0 = x.$$

- Appliquer la 2ème formule d'Itô à $Y_t = f(t, X_t) = e^{-\mu t} X_t$, puis la 1ère formule d'Itô à $Z_t = \ln Y_t$ pour trouver la solution de cette EDS de Black et Scholes.

Exemple : le mouvement Brownien géométrique

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma dB_t, \qquad X_0 = x.$$

- Appliquons la 2ème formule d'Itô à $Y_t = f(t, X_t) = e^{-\mu t} X_t$

$$f(t,x) = e^{-\mu t} x \,;\, \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = -\mu x e^{-\mu t} \,;\, \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = e^{-\mu t} \,;\, \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 0$$

Donc

$$dY_t = df(t,X_t) = \frac{\partial f}{\partial t}(t,X_t)dt + \frac{\partial f}{\partial x}(t,X_t)dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,X_t)d\langle X\rangle_t$$
$$= -\mu X_t e^{-\mu t} dt + e^{-\mu t} dX_t = \sigma Y_t dB_t$$

Soit $Y_t = x + \int_0^t \sigma Y_s dB_s$.

Autrement dit, Y_t est une martingale.

Exemple : le mouvement Brownien géométrique

- Appliquons ensuite la 1ère formule d'Itô à $Z_t = \ln Y_t$ pour trouver la solution de cette EDS de Black et Scholes.

Soit $g(x) = \ln(x)$; $g'(x) = \frac{1}{x}$; $g''(x) = -\frac{1}{x^2}$. On a aussi besoin de $d\langle Y\rangle_t = \sigma^2 Y_t^2 dt$.

Ainsi la 1ère formule d'Itô nous donne :

$$dg(Y_t) = g'(Y_t)dY_t + \frac{1}{2}g''(Y_t)d\langle Y\rangle_t = \frac{1}{Y_t}dY_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{Y_t^2}\right)\sigma^2 Y_t^2 dt = \sigma dB_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

Ainsi, on montre que

$$\ln Y_t = \ln x + \int_0^t \sigma dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2 ds = \ln x + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t$$

Donc on obtient une expression de Y_t :

$$Y_t = x \exp\left(\sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

Et donc de $X_t = e^{\mu t} Y_t$

$$X_t = x \exp\left(\mu t + \sigma B_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

Qui est la solution de l'EDS de Black-Scholes $dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dB_t,\ X_0 = x$.

Exemple : le mouvement Brownien géométrique

- On peut aussi considérer le cas où μ, σ ne sont plus des réels mais sont des fonctions déterministes :

$$X_t = x + \int_0^t \mu(s) X_s ds + \int_0^t \sigma(s) X_s dB_s$$

On dit alors que X est un mouvement Brownien géométrique à coefficients déterministes.

- Toujours par la 2ème formule d'Itô, on montre que le processus $t \mapsto X_t \exp\left(-\int_0^t \mu(s) ds\right)$ est une martingale locale.

C'est en fait une vraie martingale et la solution de cette EDS est

$$X_t = X_0 \exp\left(\int_0^t \mu(s) ds + \int_0^t \sigma(s) dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(s) ds\right)$$

3ème formule d'Itô

- Finalement, une 3ème formule d'Itô permet de traiter les fonctions à plusieurs variables… et de retrouver les 2 autres formules !

- **Théorème : 3ème formule d'Itô**

Soit $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction à 2 variables de classe C^2 à dérivées bornées, et X, Y deux processus d'Itô. Alors :

$$f(X_t, Y_t) = f(X_0, Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) dY_s$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s) d\langle X \rangle_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_s, Y_s) d\langle Y \rangle_s + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s) d\langle X, Y \rangle_s$$

Sous forme différentielle, cette formule s'écrit :

$$df(X_t, Y_t) = \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, Y_t) dX_t + \frac{\partial f}{\partial y}(X_t, Y_t) dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, Y_t) d\langle X \rangle_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_t, Y_t) d\langle Y \rangle_t + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_t, Y_t) d\langle X, Y \rangle_t$$

Exercices

- Retrouver les 2 premières formules d'Itô grâce à la 3ème
- Ecrire la dynamique de $f(X_t, Y_t)$ lorsque X_t, Y_t suivent les dynamiques de processus d'Itô suivantes :

$$dX_t = b_t^X dt + \sigma_t^X dB_t^X, \qquad X_0 = x$$
$$dY_t = b_t^Y dt + \sigma_t^Y dB_t^Y, \qquad Y_0 = y$$

Où B_t^X et B_t^Y sont 2 Browniens corrélés de coefficient de corrélation ρ.

- Ecrire $d(X_t Y_t)$ en utilisant la 3ème formule d'Itô sur $f(X_t, Y_t) = X_t Y_t$.

Pour 2 processus d'Itô

- La dynamique de $f(X_t, Y_t)$ lorsque X_t, Y_t suivent les dynamiques de processus d'Itô suivantes :

$$dX_t = b_t^X dt + \sigma_t^X dB_t^X, \qquad X_0 = x$$
$$dY_t = b_t^Y dt + \sigma_t^Y dB_t^Y, \qquad Y_0 = y$$

Où B_t^X et B_t^Y sont 2 Browniens corrélés de coefficient de corrélation ρ.

S'écrit

$$f(X_t, Y_t) = f(X_0, Y_0) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(X_s, Y_s) dX_s + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(X_s, Y_s) dY_s$$
$$+ \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s)(\sigma_s^X)^2 ds + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_s, Y_s)(\sigma_s^Y)^2 ds + \int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_s, Y_s)\rho\sigma_s^X \sigma_s^Y ds$$

Produit de 2 processus d'Itô

- Ecrire $d(X_tY_t)$ en utilisant la 3ème formule d'Itô sur $f(X_t, Y_t) = X_tY_t$.

$$\boxed{d(X_tY_t) = X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X, Y\rangle_t}$$

- Preuve :

$$f(x,y) = xy\,;\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,;\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x\,;\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0;\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1$$

$$\begin{aligned} df(X_t,Y_t) &= \frac{\partial f}{\partial x}(X_t,Y_t)dX_t + \frac{\partial f}{\partial y}(X_t,Y_t)dY_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t,Y_t)d\langle X\rangle_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_t,Y_t)d\langle Y\rangle_t + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_t,Y_t)d\langle X,Y\rangle_t \\ &= X_t dY_t + Y_t dX_t + d\langle X,Y\rangle_t \end{aligned}$$

Rappel : Equations différentielles ordinaires

- Rappelons qu'une EDO (Equation Différentielle Ordinaire) sur $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}$ est un système du type :

$$(*) \quad \begin{cases} y_0 = y \\ y_t' = f(t, y_t) \end{cases}$$

Où $y : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est la fonction inconnue et $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction donnée.

L'étude mathématiques des EDO, d'une importance considérable en physique notamment, car elle permet de décrire l'évolution temporelle de phénomènes déterministes, s'est développée au début du XIXème siècle.

Généralisation de la fonction exponentielle qui est solution de :

$$\begin{cases} y_0 = 1 \\ y_t' = y_t \end{cases}$$

Il est généralement impossible de donner une solution explicite à une EDO. Il est cependant utile de savoir si il existe une solution, et si elle est unique. Un critère est le suivant :

- **Théorème** (Cauchy-Lipschitz) : Supposons qu'il existe une constante $K > 0$ telle que $\forall t \in \mathbb{R}^+, x, y \in \mathbb{R}$

$$\begin{cases} |f(t,x) - f(t,y)| \leq K|x - y| \quad \text{(condition de Lipscitz globale)} \\ |f(t,x)| \leq K(1 + |x|) \quad \text{(condition de croissance linéaire)} \end{cases}$$

Alors l'EDO $(*)$ admet une unique solution définie sur $\mathbb{R}_+$.

Equations Différentielles Stochastiques

- Une Equation Différentielle Stochastique (EDS) est une perturbation de l'EDO $(*)$ avec un terme aléatoire modélisant un « bruit » autour du phénomène déterministe décrit par l'EDO $(*)$. La perturbation la plus simple est l'ajout d'un Brownien, et alors on peut considérer :

$$(**)\begin{cases} Y_0 = y \\ dY_t = f(t, Y_t)dt + \sigma dB_t \end{cases}$$

Soit sous la forme intégrale : $Y_t = y + \int_0^t f(s, Y_s)ds + \sigma dB_t, \ \ \forall t \geq 0.$

- La propriété de martingale du Brownien entraîne que pour σ petit, la trajectoire non dérivable d'une solution de $(**)$ va suivre en gros celle régulière et déterministe de $(*)$, en oscillant aléatoirement autour. Mais quand σ est grand, la trajectoire de la solution de $(**)$ n'a plus rien à voir avec celle de $(*)$.

EDS: cadre général

- Le cadre général des EDS concerne la situation où le coefficient σ dépend aussi du temps et de la solution Y_t (en finance on parle alors de modèle à volatilité locale).
- On peut même généraliser en considérant un modèle multidimensionnel (mais ici seul cas $\mathbb{R}$).

Définition : Soient $b: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\sigma: \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions mesurables bornées. Soit $x \in \mathbb{R}$ une condition initiale. Une solution de l'EDS

$$E_x(b,\sigma)\begin{cases} X_0 = x \\ dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \end{cases}$$

est constituée par :

- Un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t, t \geq 0), \mathbb{P})$
- Un $(\mathcal{F}_t)$-mouvement brownien (B_t)
- Un processus $X = \{X_t, t \geq 0\}$, continu, $(\mathcal{F}_t)$-adapté tel que les intégrales $\int_0^t b(s,X_s)ds \;\; et \;\; \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s$ aient un sens et tel que l'égalité suivante soit satisfaite $\forall t \geq 0, \mathbb{P}$-p.s.

$$X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s$$

Solutions d’EDS

Définitions : La caractère aléatoire des EDS impose plusieurs notions d’existence et d’unicité. On dit qu’il y a

1. **Existence d’une solution faible** si $E_x(b, \sigma)$ admet une solution X
2. **Existence d’une solution forte** si $E_x(b, \sigma)$ admet une solution X qui soit adaptée à la filtration du Brownien
3. **Unicité faible** si tous les processus X solutions de $E_x(b, \sigma)$ ont même loi
4. **Unicité trajectorielle/forte** si, l’espace de probabilité et le Brownien étant fixés, deux solutions quelconques X et X' de $E_x(b, \sigma)$ sont indistingables au sens où $\mathbb{E}[\exists t \in \mathbb{R}, X_t \neq X'_t] = 0$.

Existence et Unicité faible/forte

- L'exemple suivant montre que l'on peut avoir 1. et 3. (existence et unicité faible), mais ni 2. ni 4. :
- Soit $\{W_t, t \geq 0\}$ un mouvement Brownien standard. On considère le processus

$$B_t = \int_0^t \mathrm{sgn}(W_s)\, dW_s$$

Où sgn désigne la fonction définie par

$$\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \geq 0 \\ -1 \text{ si } x < 0 \end{cases}.$$

Comme $\mathrm{sgn}^2(x) = 1$, on remarque que le processus B_t est bien défini, et que c'est une martingale continue de crochet t. Par le théorème de caractérisation de Paul Lévy c'est donc un mouvement Brownien.

- On considère maintenant l'EDS

$$\begin{cases} X_0 = x \\ dX_t = \mathrm{sgn}(X_t)\, dB_t \end{cases}$$

Par construction, on voit que W est solution de cette équation. De même, par le même argument que précédemment, on voit que toutes les solutions de cette équation sont des mouvements Browniens et sont donc égaux en loi. On a **existence et unicité faible**.

- En revanche, le point 4. n'est pas vérifié car $-W$ est aussi solution, et $\mathbb{P}[\mathrm{W_t} \neq -W_t] = \mathbb{P}[2\mathrm{W_t} \neq 0] = 1$ de sorte que 2 solutions W et $-W$ ne sont pas indistingables. On n'a **pas unicité forte**.
- De plus, par construction on voit intuitivement (et on peut montrer rigoureusement) que la filtration naturelle du processus B est celle de $|X|$, et est donc plus petite que celle de X, puisqu'elle ne prend par en compte le signe de X. Donc toute solution X n'est pas $(\mathcal{F}_t^B)$-adaptée et il n'y a **pas de solution forte**.

Existence et Unicité faible/forte

- Le théorème suivant nous dit que 1. + 4. $\Rightarrow$ $2. + 3.$

- **Théorème (Yamada-Watanabe)** : Supposons que $E_x(b, \sigma)$ admette une solution faible, et que toutes ses solutions soient indistingables. Alors $E_x(b, \sigma)$ admet une solution forte.

Théorème d’existence et d’unicité des solutions fortes d’EDS

- Le théorème suivant est l’analogue du théorème de Cauchy-Lipschitz pour les EDS. Il fournit les conditions standards d’existence et d’unicité de solution forte :

Théorème (d’existence sous conditions lipschitziennes) : Supposons qu’il existe une constante $K > 0$ telle que

- $|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq K|x-y|, \forall t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}_+$ (condition de Lipscitz globale)
- $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq K(1+|x|), \forall t \geq 0, x, y \in \mathbb{R}_+$ (condition de croissance linéaire)

Alors il existe une solution forte de $E_x(b,\sigma)$ sur $\mathbb{R}_+$

- Théorie des EDS : Propriétés de Markov, faible et forte, théorème de comparaison,… cf des livres sur le sujet. Exemple : B. Oksendal « Stochastic Differential Equations and Their Applications ».
- Ici nous traiterons surtout des exemples d’EDS utilisées en modélisation, plutôt que la théorie générale des EDS.

Approche qualitative des EDS

- Avant d'appliquer « brutalement » la formule d'Itô pour chercher l'expression d'une solution, ou le Théorème d'existence et d'unicité, pour chercher à savoir si la solution existe et est unique, il y a certaines propriétés qu'on peut déduire sur le comportement d'une solution d'EDS à la lecture même de l'EDS.

$$dX_t = \mu_t dt + \sigma_t dB_t$$

- μ_t tendance instantanée, σ_t écart-type instantané.
- **Exemple** : Sans calculs, et sans la formule d'Itô, décrire le comportement de la solution de l'EDS

$$dX_t = \left(\frac{1}{2} - X_t\right) dt + \sqrt{X_t(1 - X_t)}\, dB_t$$

En supposant que la valeur initiale X_0 est une v.a. à valeurs dans $[0,1]$. Expliquer pourquoi X_t sera aussi nécessairement à valeurs dans $[0,1]$.

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

- Très utile en finance pour décrire la dynamique des taux courts, en particulier dans le modèle de Vasicek (1977).
- L'évolution du processus de taux est modélisé par l'EDS suivante :

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t$$

- Analyse qualitative : taux faible / taux élevé – force de rappel.
- Résolution de cette EDS :

On applique la formule d'Itô à $Y_t = f(t, X_t) = (X_t - b)e^{at}$ et on obtient :

$$f(t,x) = (x-b)e^{at}; \frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = a(x-b)e^{at}; \frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = e^{at}; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t,x) = 0$$

Donc

$$\begin{aligned} dY_t &= a(X_t - b)e^{at}dt + e^{at}dX_t + 0 \\ &= aY_tdt + a(-Y_t)dt + \sigma e^{at}dW_t = \sigma e^{at}dW_t \end{aligned}$$

Donc : $Y_t = Y_0 + \sigma \int_0^t e^{as}dW_s$: c'est une martingale car intégrale stochastique d'un bon processus.

Et ainsi on obtient $(X_t - b)e^{at} = (X_0 - b) + \sigma \int_0^t e^{as}dW_t$

et donc $X_t = b + (X_0 - b)e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{a(s-t)}dW_s$.

Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

- Pas de solution explicite.
- Mais possibilité de calculer l'intégrale stochastique par approximation (Monte Carlo)
- Analyse qualitative de l'EDS

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma dW_t$$

- Problème principal de cette modélisation : peut avoir des valeurs négatives

Si $\mathrm{X_t} = 0, dX_t = abdt + \sigma dW_t$ → suit une loi normale.

- Choix de Cox-Ingersoll-Ross de modéliser les taux d'intérêt avec un processus « racine carrée »

$$dX_t = a(b - X_t)dt + \sigma\sqrt{X_t}dW_t$$

Exponentielle de Doléans-Dade

- Soit θ un bon processus local, et Z_0 une constante.

- **Proposition :** L'unique solution de l'EDS

$$dZ_t = \theta_t Z_t dB_t$$

Ou sous forme intégrale $Z_t = Z_0 + \int_0^t \theta_s Z_s dB_s$, est le processus suivant :

$$Z_t = Z_0 \exp[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds]$$

- Le processus Z_t, noté $\mathcal{E}_t(\theta * B)$ est appelé **l'exponentielle de Doléans-Dade** de $\theta * B$.

Exponentielle de Doleans-Dade

- L'unique solution de l'EDS

$$dZ_t = \theta_t Z_t dB_t$$

Ou sous forme intégrale $Z_t = Z_0 + \int_0^t \theta_s Z_s dB_s$, est le processus suivant :

$$Z_t = Z_0 \exp[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds]$$

- **Preuve** : On applique la formule d'Itô à $f(Z_t) = \ln Z_t$ pour trouver la solution de cette EDS de Black et Scholes.

Soit $f(x) = \ln(x)$; $f'(x) = \frac{1}{x}$; $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. On a aussi besoin de $d\langle Z\rangle_t = \theta_t^2 Z_t^2 dt$.

Ainsi la 1ère formule d'Itô nous donne :

$$dg(Y_t) = g'(Y_t)dY_t + \frac{1}{2}g''(Y_t)d\langle Y\rangle_t = \frac{1}{Z_t}dZ_t + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{Z_t^2}\right)\theta_t^2 Z_t^2 dt = \theta_t dB_t - \frac{1}{2}\theta_t^2 dt$$

Ainsi, on montre que

$$\ln Z_t = \ln Z_0 + \int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds$$

Donc on obtient une expression de Z_t :

$$Z_t = Z_0 \exp[\int_0^t \theta_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds]$$

Condition de Novikov

$$dZ_t = \theta_t Z_t dB_t$$

- D'après la forme de l'EDS, c'est une martingale locale positive, dès que $Z_0 > 0$.
- Le critère suivant, de preuve difficile, permet de savoir quand l'exponentielle de Doléans-Dade est une vraie martingale :

- **Théorème (condition de Novikov)** : Supposons que

$$\mathbb{E}\left(\exp\left(\frac{1}{2}\int_0^t \theta_s^2 ds\right)\right) < +\infty, \forall t > 0$$

Alors $t \mapsto \mathcal{E}_t(\theta * B)$ est une vraie martingale.

- Quand la condition de Novikov n'est pas satisfaite, $\mathcal{E}_t(\theta * B)$ est une martingale locale positive, donc une sur-martingale, et $\mathbb{E}(Z_t) \leq \mathbb{E}(Z_s) \leq Z_0, \forall t \geq s \geq 0$.
- On ne connaît pas de conditions plus faciles à vérifier que la condition de Novikov, sauf dans le cas particulier suivant :

- **Proposition** : Supposons que $\theta_t = f(t, B_t)$ où f est une fonction globalement Lipschitz. Alors $t \mapsto \mathcal{E}_t(\theta * B)$ est une vraie martingale.

Exponentielle Stochastique

- Plus généralement, on a le résultat suivant :

- **Théorème** : Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$.

Alors il existe une unique semi-martingale continue solution de l'EDS suivante :

$$(*)\ \ Z_t = 1 + \int_0^t Z_s dX_s \qquad (\text{ou} \quad dZ_t = Z_t dX_t \ \ \text{sous forme différentielle}).$$

La solution est

$$Z_t\ (X) = \exp\left(X_t - \frac{1}{2}\langle X\rangle_t\right) := \mathcal{E}(X).$$

On appelle cette unique solution **l'exponentielle stochastique de $\boldsymbol{X}$**, et on la note $\mathcal{E}(X)$.

- **Remarque** : c'est l'exponentielle de Doléans-Dade pour $\theta = 1\ p.s.$
- Exemple : Soit $X = aB$ où a $\in \mathbb{R}$ et B le mouvement Brownien. Alors $\mathcal{E}(aB) = \exp\left(aB_t - \frac{1}{2}a^2 t\right)$. C'est le mouvement Brownien géométrique de tendance nulle. C'est la solution de $dZ_t = aZ_t dB_t$

Martingale exponentielle

- On donne ici quelques résultats sur les exponentielles stochastiques :

- **Théorème** : Soit X et Y deux semi-martingales continues, $X_0 = Y_0 = 0$. Alors

$$\mathcal{E}(X).\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y\rangle)$$

- **Preuve** : On pose $U_t = \mathcal{E}_t(X)$ et $V_t = \mathcal{E}_t(Y)$.

Alors on peut utiliser la formule d'Itô pour le produit $U_t V_t$ qui nous donne :

$$U_t V_t = 1 + \int_0^t U_s dV_s + V_s dU_s + d\,\langle U, V\rangle_s$$

Ou sous forme différentielle, en utilisant $dU_t = U_t dX_t$ et $dV_t = V_t dY_t$ puisque $U_t = \mathcal{E}_t(X)$ et $V_t = \mathcal{E}_t(Y)$, et ainsi, comme $d\langle U, V\rangle_t = U_t V_t d\langle X, Y\rangle_t$:

$$d(U_t V_t) = U_t V_t dY_t + V_t U_t dX_t + d\langle U, V\rangle_t = (U_t V_t) d(X_t + Y_t + \langle X, Y\rangle_t)$$

Ce qui est la définition de $\mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y\rangle)$.

Donc $U_t V_t = \mathcal{E}_t(X).\mathcal{E}_t(Y) = \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y\rangle)$.

Exponentielle stochastique

- **Corollaire** : Soit X une semi-martingale continue, $X_0 = 0$. Alors

$$\mathcal{E}_t(X)^{-1} = \mathcal{E}_t(-X + \langle X \rangle)$$

- Preuve : il suffit d'appliquer le théorème précédent à X et $Y = -X + \langle X \rangle$ et on obtient :

$$\mathcal{E}(X).\mathcal{E}(Y) = \mathcal{E}(X + Y + \langle X, Y \rangle)$$

Soit

$$\mathcal{E}_t(X).\mathcal{E}_t(-X + \langle X \rangle) = \mathcal{E}_t\big(X + -X + \langle X \rangle + \big\langle X, -X + \langle X \rangle \big\rangle\big) = \mathcal{E}_t(X + -X + \langle X \rangle - \langle X \rangle) = \mathcal{E}_t(0) = 1$$

Exponentielle Stochastique - généralisation

- En réalité on peut même généraliser le résultat avec le théorème suivant :

- **Théorème** : Soit Z et H deux semi-martingales continues, $Z_0 = 0$.

Alors il existe une unique semi-martingale continue solution de l'EDS suivante :

$$(*)\ \ X_t = H_t + \int_0^t X_s dZ_s \qquad (\text{ou} \quad dX_t = dH_t + X_t dZ_t \ \ \text{sous forme différentielle}).$$

La solution est

$$\mathcal{E}_H(Z)_t = X_t\,(Z,H) = \mathcal{E}_t(Z)\left(H_0 + \int_0^t \mathcal{E}_s^{-1}(Z)(dH_s - d\langle H,Z\rangle_s)\right)$$