ISFA- M1 **2019/2020**

STATISTIQUE INFÉRENTIELLE

FICHE DE TD N° 3

Exercice 1.

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi uniforme sur $[0, \theta]$.

1. Écrire la vraisemblance du modèle. Donner une statistique exhaustive pour θ.
2. Donner un estimateur sans biais de θ fonction de la statistique exhaustive.
3. En déduire sans faire de calcul, la valeur de $\mathrm{E}\left(\overline{X} / \max_{1 \leq i \leq n} X_i\right)$.

Exercice 2.

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi exponentielle décentrée sur $[\theta, +\infty[$.

1. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ. Est-il biaisé ? Est-ce une statistique exhaustive ?
2. En déduire un estimateur sans biais de θ fonction d'une statistique exhaustive.

Exercice 3.

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi uniforme sur $[\theta - \frac{1}{2}, \theta + \frac{1}{2}], \theta \in \mathbb{R}$. On pose :

$$X_{\max} = \max_{1 \leq i \leq n} X_i \text{ et } X_{\min} = \min_{1 \leq i \leq n} X_i.$$

1. Écrire la vraisemblance du modèle et montrer que le couple $(X_{\min}, X_{\max})$ est exhaustif.
2. Calculer la loi de probabilité de $X_{\max} - X_{\min}$.

Exercice 4.

Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de loi F_θ de densité :

$$f(x, \theta) = (k+1) \frac{x^k}{\theta^{k+1}} \mathbf{1}_{[0,\theta]}(x),$$

où $k \geq 1$ est connu et $\theta > 0$ est le paramètre inconnu.

1. Calculer $\mathrm{E}_\theta(X_1)$.
2. Donner une statistique exhaustive pour θ.
3. On considère l'estimateur

$$S = \frac{n(k+1)+1}{n(k+1)} \max(X_1, \ldots, X_n).$$

Quelles sont ses propriétés ? En déduire sans calcul $\mathrm{E}_\theta\left(X_1 / \max_{1 \leq i \leq n} X_i\right)$.

Exercice 5.

Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un n-échantillon de loi F_θ de densité :

$$f(x, \theta) = (\theta + 1)x^\theta \mathbf{1}_{[0,1]}(x),$$

où $\theta > 0$ est le paramètre inconnu.

1. Écrire la vraisemblance du modèle Donner une statistique exhaustive.
2. Quelle est la loi de $-\ln X_1$ et de $-(\theta + 1)\ln X_1$.
3. Donner un estimateur sans biais de $-1/(\theta + 1)$. On pose :

$$S_n = \frac{\max_{1\leq i\leq n} \ln X_i}{\min_{1\leq i\leq n} \ln X_i}.$$

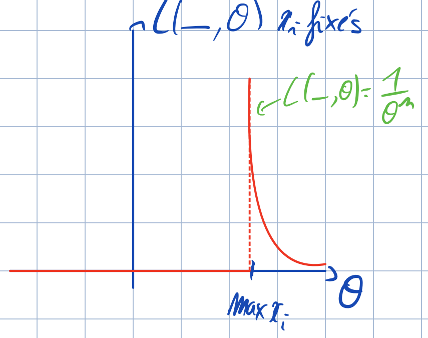
Montrer que la loi de S_n ne dépend pas de θ. En déduire que S_n et $\prod_{i=1}^n X_i$ sont indépendantes.

Exercice 1 :

1) $L(x_1, \dots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\theta} 1_{[0,\theta]}(x_i)$

$$= \theta^{-n} 1_{\min_{i \in [\![1,n]\!]} x_i \geq 0} \, 1_{\max_{i \in [\![1,n]\!]} x_i \leq \theta}$$

Comme nous n'avons pas l'indep du Support on trouve $\hat{\theta}_n$ en maximisant la vraisemblance



Donc $\hat{\theta}_n = \max_{i \in [\![1,n]\!]} X_i$

$$\Rightarrow L(\_, \theta) = \underbrace{\theta^{-n} \overbrace{1_{\max x_i \leq \theta}}^{= 1_{\hat{\theta}_n \leq \theta}}}_{\varphi(\theta, \hat{\theta}_n)} \underbrace{1_{\min x_i \geq 0}}_{\psi(x_1, \dots, x_n)}$$

Donc $\hat{\theta}_n$ stat exhaustive pour θ.

2) $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \mathbb{E}[\max X_i]$

$x \in [0,\theta]$ $\mathbb{P}(\hat{\theta}_n \leq x) = \mathbb{P}(\max X_i \leq x) = \mathbb{P}(X_1 \leq x)^n = \left(\frac{x}{\theta}\right)^n \Rightarrow f_{\hat{\theta}_n}(x) = n x^{n-1} \theta^{-n}$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \int_0^\theta x n x^{n-1} \theta^{-n} dx = \int_0^\theta n x^n \theta^{-n} dx = n\theta^{-n} \left[\frac{1}{n+1} x^{n+1}\right]_0^\theta = \frac{n}{n+1} \theta$

$\Rightarrow T_n = \frac{n+1}{n} \hat{\theta}_n$ ESB

3)

Exercice 2 :

$f(x) = \exp(-(x-\theta)) 1_{[\theta, +\infty[}(x)$

1) $L(\_, \theta) = \prod_{i=1}^{n} e^{-(x_i - \theta)} 1_{[\theta, +\infty[}(x_i)$

$$= e^{n\theta} \left(\prod_{i=1}^{n} e^{-x_i}\right) 1_{\min_{i \in [\![1,n]\!]} x_i \geq \theta}$$

$\longrightarrow \hat{\theta}_n = \min_{i \in [\![1,n]\!]} x_i$ (On a maximisé la vraisemblance car nous n'avons pas l'indep du support).

Est-ce que $\hat{\theta}_n$ est biaisé ?

Calculons sa f.d.r puis sa densité pour calculer $\mathbb{E}[\hat{\theta}_n]$.

$$\mathbb{P}(\hat{\theta}_n \leq x) = \mathbb{P}(\min_{i\in[\![1,n]\!]} X_i \leq x) = 1 - \mathbb{P}(\min X_i > x)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x, X_2 > x, \dots, X_n > x)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)^n$$

$$= 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x))^n$$

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x) = \int_\theta^x e^{-(t-\theta)} dt = e^\theta \int_\theta^x e^{-t} dt = e^\theta [-e^{-t}]_\theta^x = e^\theta(-e^{-x} + e^{-\theta})$$
$$= 1 - e^{-(x-\theta)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\hat{\theta}_n \leq x) = 1 - (1 - (1 - e^{-(x-\theta)}))^n$$

$$= 1 - e^{-n(x-\theta)}$$

$$\Rightarrow f_{\hat{\theta}_n}(x) = n e^{-n(x-\theta)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \int_\theta^\infty x n e^{-n(x-\theta)} dx$$

$$= n \int_\theta^\infty x e^{-n(x-\theta)} dx$$

IPP :

$u = x \quad u' = 1$

$v' = e^{-n(x-\theta)} \quad v = -\frac{1}{n} e^{-n(x-\theta)}$

$$= n\left(\left[-\frac{x}{n} e^{-n(x-\theta)}\right]_\theta^\infty + \int_\theta^\infty \frac{1}{n} e^{-n(x-\theta)} dx\right) = n\left(\frac{\theta}{n} + \frac{1}{n}\int_\theta^\infty e^{-n(x-\theta)} dx\right)$$

$$= \theta + \left[-\frac{1}{n} e^{-n(x-\theta)}\right]_\theta^\infty$$

$$= \theta + \frac{1}{n}$$

Donc $\hat{\theta}_n$ est asympt SB.

$$L(\_, \theta) = \underbrace{e^{n\theta} \mathbb{1}_{\hat{\theta}_n \geq \theta}}_{\varphi(\theta, \hat{\theta}_n)} \underbrace{\prod_{i=1}^n e^{-x_i}}_{\psi(x_1, \_, x_n)}$$

Donc stat exhaustive.

2) $T_n = \hat{\theta}_n - \frac{1}{n}$ C'est bien un ESB de θ en fonct° d'une stat exhaustive ($\hat{\theta}_n$)

$\mathbb{E}[T_n] = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n] - \frac{1}{n} = \theta + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} = \theta$.

Exercice 3

1) $L(\_,\theta) = \left(\prod_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{1}{\theta+\frac{1}{2}-(\theta-\frac{1}{2})}}_{=1}\right) 1_{\min x_i \geq \theta-\frac{1}{2}} \, 1_{\max x_i \leq \theta+\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow L(\_,\theta) = 1_{\min x_i \geq \theta-\frac{1}{2}} \, 1_{\max x_i \leq \theta+\frac{1}{2}} = 1_{X_{min} \geq \theta-\frac{1}{2}} \, 1_{X_{max} \leq \theta+\frac{1}{2}}$

Donc le couple (X_{min}, X_{max}) est exhaustif.

2) $x \in [0,1]$, $\mathbb{P}(X_{max} - X_{min} = x)$

La densité de Xmax - Xmin est donnée par :

f(x) = n * (n-1) * (x+1)^(n-2) pour 0 < x < 1

f(x) = 0 pour x < 0 ou x > 1

En effet, la probabilité que Xmax - Xmin prenne une valeur dans l'intervalle [x,x+dx] est égale à la probabilité que deux éléments de l'échantillon, disons X_i et X_j, aient des valeurs comprises respectivement dans l'intervalle [θ-1/2+x,θ-1/2+x+dx] et [θ+1/2,θ+1/2+dx]. Cette probabilité est donnée par f(x+dx) * g(dx) = (x+dx)^(n-2) * dx.

Il y a n(n-1)/2 paires d'éléments dans l'échantillon, donc la probabilité que Xmax - Xmin prenne une valeur dans l'intervalle [x,x+dx] est égale à (n(n-1)/2) * (x+dx)^(n-2) * dx.

En divisant cette quantité par dx, nous obtenons la densité de Xmax - Xmin : f(x) = n(n-1)(x+1)^(n-2).

Il reste à vérifier que cette fonction vérifie les conditions de normalisation : ∫f(x)dx = 1 et f(x) ≥ 0 pour tout x. Cela peut être fait en utilisant les propriétés de l'intégrale.

Donc $\mathbb{P}(X_{max} - X_{min} \in [x, x+\varepsilon]) = \frac{n(n-1)}{2}(x+\varepsilon)^{n-2}\varepsilon$

Exercice 4 :

$f(x,\theta) = (k+1)\frac{x^k}{\theta^{k+1}} 1_{[0,\theta]}(x)$

1) $\mathbb{E}_\theta[X_1] = \int_0^\theta x(k+1)\frac{x^k}{\theta^{k+1}}\,dx = \frac{k+1}{\theta^{k+1}}\int_0^\theta x^{k+1}\,dx = \frac{k+1}{\theta^{k+1}}\left[\frac{1}{k+2}x^{k+2}\right]_0^\theta$

$= \frac{k+1}{k+2}\theta$

2) $L(x_1,\dots,x_n) = (k+1)^n \theta^{-n(k+1)} \prod_{i=1}^{n} x_i^k \, \mathbb{1}_{\min x_i \geq 0} \mathbb{1}_{\max x_i \leq \theta}$

L'EMV $\hat{\theta}_n$ de θ est $\hat{\theta}_n = \max_{i\in[\![1,n]\!]} X_i$ et $\hat{\theta}_n$ est une stat exhaustive pour θ

Car $L(x_1,\dots,x_n) = \underbrace{(k+1)^n \theta^{-n(k+1)} \mathbb{1}_{\hat{\theta}_n \leq \theta}}_{\varphi(\theta,\hat{\theta}_n)} \underbrace{\prod x_i^k \, \mathbb{1}_{\min x_i \geq 0}}_{\psi(x_1,\dots,x_n)}$

3) $S = \dfrac{n(k+1)+1}{n(k+1)} \max_{i\in[\![1,n]\!]} X_i = \dfrac{n(k+1)+1}{n(k+1)} \hat{\theta}_n$

* S est une stat exhaustive comme $\alpha\hat{\theta}_n$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\hat{\theta}_n$ exhaustive
* $B_\theta(S) = \mathbb{E}_\theta[S] - \theta$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{n(k+1)+1}{n(k+1)}\hat{\theta}_n\right] - \theta = \frac{n(k+1)+1}{n(k+1)} \mathbb{E}[\max X_i] - \theta$$

Loi du $\max X_i$, $\mathbb{P}(\max X_i \leq x) = P(X_1 \leq x)^n = \left(\int_0^x (k+1)\frac{r^k}{\theta^{k+1}} dr\right)^n$

$$= \left(\frac{x}{\theta}\right)^{n(k+1)}$$

$\Rightarrow \mathbb{E}[\max X_i] = \dfrac{n(k+1)\theta}{n(k+1)+1}$

$\Rightarrow B_\theta(S) = 0$ Donc S est sans biais

$V(S) = \left(\dfrac{n(k+1)+1}{n(k+1)}\right)^2 V(\hat{\theta}_n)$

$$V(\max X_i) = \int_0^\theta x^2 \frac{n(k+1)}{\theta}\left(\frac{x}{\theta}\right)^{n(k+1)-1} dx - \left(\frac{n(k+1)}{n(k+1)+1}\theta\right)^2$$

$$= \frac{n(k+1)}{\theta^{n(k+1)}} \int_0^\theta x^{n(k+1)+1} dx - \left(\frac{n(k+1)\theta}{n(k+1)+1}\right)^2$$

$$= \frac{n(k+1)}{\theta^{n(k+1)}} \frac{1}{n(k+1)+2} \theta^{n(k+1)+2}$$

$$= \frac{n(k+1)}{n(k+1)+2}\theta^2 - \left(\frac{n(k+1)}{n(k+1)+1}\right)^2\theta^2 = \frac{\left(n(k+1)(n(k+1)+1)^2 - n^2(k+1)^2(n(k+1)+2)\right)\theta^2}{(n(k+1)+1)^2(n(k+1)+2)}$$

$$= \frac{n(k+1)}{(n(k+1)+1)^2(n(k+1)+2)}\theta^2$$

$\Rightarrow V(S) = \dfrac{\theta^2}{n(k+1)(n(k+1)+2)} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\Rightarrow$ Converge

Donc $\mathbb{E}_\theta\left[\frac{X_1}{\max X_i}\right] = 1$ car $\frac{\hat{\theta}_n}{\theta} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$

Exercice 5 :

$$f(x,\theta) = (\theta+1)x^\theta \mathbb{1}_{[0,1]}(x)$$

1) $L(X_1, \dots, X_n) = (\theta+1)^n \prod_{i=1}^n x_i^\theta \; \mathbb{1}_{\min X_i \geq 0} \mathbb{1}_{\max X_i \leq 1}$

$\ln L = n \ln(\theta+1) + \sum \theta \ln(x_i)$

$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = \frac{n}{\theta+1} + \sum \ln X_i \Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{-n}{\sum \ln X_i} - 1$ $\qquad \frac{1}{\hat{\theta}_n+1} = \frac{-\sum \ln X_i}{n}$

$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = \frac{-n}{(\theta+1)^2} < 0 \Rightarrow \hat{\theta}_n$ est l'EMV de θ $\qquad \exp\left(-\frac{n}{\hat{\theta}_n+1}\right) = \prod x_i$

$\prod_{i=1}^n x_i = \exp\left(\frac{-n}{\hat{\theta}_n+1}\right) \Rightarrow \hat{\theta}_n$ est exhaustive

car $L = \underbrace{(\theta+1)^n \exp\left(-\frac{n\theta}{\hat{\theta}_n+1}\right)}_{\varphi(\theta,\hat{\theta}_n)} \underbrace{\mathbb{1}_{\min X_i \geq 0} \mathbb{1}_{\max X_i \leq 1}}_{\psi(X_1,\dots,X_n)}$

2) $F_{-\ln(X_1)}(x) = \mathbb{P}(-\ln(X_1) \leq x)$

$= \mathbb{P}(\ln X_1 \geq -x)$

$= \mathbb{P}(X_1 \geq e^{-x}) = \int_{e^{-x}}^1 (\theta+1)x^\theta dx$

$= [x^{\theta+1}]_{e^{-x}}^1 = 1 - e^{-(\theta+1)x}$

$\Rightarrow f_{-\ln(X_1)}(x) = (\theta+1)e^{-(\theta+1)x} \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}(x)$

$\Rightarrow -\ln(X_1) \sim \mathcal{E}(\theta+1)$

$F_{-(\theta+1)\ln(X_1)}(x) = \mathbb{P}(-(\theta+1)\ln(X_1) \leq x)$

$= \mathbb{P}(X_1 \geq e^{-\frac{x}{\theta+1}}) = \int_{e^{-\frac{x}{\theta+1}}}^1 (\theta+1)x^\theta dx = [x^{\theta+1}]_{e^{-\frac{x}{\theta+1}}}^1 = 1 - e^{-x}$

$\Rightarrow f_{-(\theta+1)\ln X_1}(x) = e^{-x} \Rightarrow -(\theta+1)\ln X_1 \sim \mathcal{E}(1)$

3) Donner un ESB de $-\frac{1}{\theta+1}$

$\mathbb{E}[T_n] + \frac{1}{\theta+1} = 0$

Soit $T_n = \frac{1}{n}\sum \ln(X_i) \Rightarrow -T_n = \frac{1}{n}\sum -\ln X_i$

$\Rightarrow -nT_n \sim \Gamma(n, \theta_u)$

$\Rightarrow \mathbb{E}[T_n] = -\frac{1}{n}\mathbb{E}[-nT_n] = -\frac{1}{n}\frac{n}{\theta_u} = \frac{-1}{\theta_u}$

$\Rightarrow B_{-\frac{1}{\theta_u}}(T_n) = 0$ Donc $T_n = \frac{1}{n}\sum \ln X_i$ est un ESB de $-\frac{1}{\theta_u}$

$S_n = \frac{\max \ln X_i}{\min \ln X_i}$

$\mathbb{P}(S_n \leq x) = \mathbb{P}\left(\frac{\max \ln X_i}{\min \ln X_i} \leq x\right)$

$S_n = \frac{\max \ln X_i}{\min \ln X_i} = \frac{-\max \ln X_i}{-\min \ln X_i} = \frac{\min -\ln X_i}{\max -\ln X_i}$

$\mathbb{P}(\min -\ln X_i \leq x) = 1 - \mathbb{P}(\min -\ln X_i \geq x)$

$= 1 - \mathbb{P}(-\ln X_i \geq x)^n$

$= 1 - (1 - \mathbb{P}(-\ln X_i \leq x))^n$

$= 1 - (1 - \int_0^x (\theta_u) e^{-(\theta_u)t} dt)^n$

$= 1 - (1 - [-e^{-(\theta_u)t}]_0^x)^n = 1 - (1 + e^{-(\theta_u)x} - 1)^n$

$= 1 - e^{-n(\theta_u)x}$

$\Rightarrow \min -\ln X_i \sim \mathcal{E}(n(\theta_u))$

$\mathbb{P}(\max -\ln X_i \leq x) = \mathbb{P}(-\ln X_i \leq x)^n = \left(\int_0^x (\theta_u) e^{-(\theta_u)t} dt\right)^n$

$= \left([-e^{-(\theta_u)t}]_0^x\right)^n = (-e^{-(\theta_u)x} + 1)^n$

$f_{\max -\ln X_i}(x) = n(\theta_u) e^{-(\theta_u)x} (1 - e^{-(\theta_u)x})^n \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+}$

On note $A_n = \min -\ln X_i$

$B_n = \max -\ln X_i$

$\mathbb{P}\left(\frac{A_n}{B_n} \leq x\right) = \mathbb{P}(A_n - xB_n \leq 0) = \mathbb{P}(A_n + (-xB_n) \leq 0)$

S_n''

Loi de $-x \max \ln(X_i)$ $\quad f_{-x\max}(z) = \frac{1}{|-x|} f_{\max \ln(X_i)}(z)$

$$f_{A_n+(1-x)B_n}(a) = n(\theta+1)e^{-n(\theta+1)t} \times \frac{1}{|1-x|}\, n(\theta+1)\, e^{-(\theta+1)(x-t)/(1-}$$