M1 Actuariat & Econométrie et Statistiques, année 2016–2017.

Numéro copie (obligatoire) :

Statistique Inférentielle
Contrôle terminal

Vendredi 6 janvier

Durée 2h, documents, téléphone, calculatrice interdits
Veuillez soigner la présentation
et bien justifier les résultats

Le barème (indicatif) prévu est le suivant : 10-5-5

Exercice 1

On considère le modèle exponentiel translaté

$$\left(\mathbb{R}_+^*, \mathcal{B}_{\mathbb{R}_+^*}, \mathcal{P}_\theta, \theta = (\lambda, \beta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}\right)$$

de densité

$$f(x, \theta) = \lambda \exp\left(-\lambda(x-\beta)\right) \mathbb{1}_{[\beta,\infty[}(x).$$

1. Calculer les moments d'ordre 1 et 2.

$$\mathbb{E}[X_i] = \int_\beta^\infty x \lambda e^{-\lambda(x-\beta)} dx = \left[-x e^{-\lambda(x-\beta)}\right]_\beta^\infty + \int_\beta^\infty e^{-\lambda(x-\beta)} dx$$

$$= \beta + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda(x-\beta)}\right]_\beta^\infty = \beta + \frac{1}{\lambda}$$

IPP :
$u = x \quad u' = 1$
$v' = \lambda e^{-\lambda(x-\beta)} \quad v = -e^{-\lambda(x-\beta)}$

$$\mathbb{E}[X_i^2] = \int_\beta^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda(x-\beta)} dx = \left[-x^2 e^{-\lambda(x-\beta)}\right]_\beta^\infty + 2\int_\beta^\infty x e^{-\lambda(x-\beta)} dx$$

$$= \beta^2 + \frac{2}{\lambda}\left(\beta + \frac{1}{\lambda}\right)$$

IPP
$u = x^2 \quad u' = 2x$
$v' = \lambda e^{-\lambda(x-\beta)} \quad v = -e^{-\lambda(x-\beta)}$

2. Déterminer l'estimateur $\hat{\theta}_n^{MM}$ par la méthode des moments.

$$V(X_i) = \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 \implies V(X_i) = \beta^2 + \frac{2}{\lambda}\left(\beta + \frac{1}{\lambda}\right) - \left(\beta + \frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

$$\begin{cases} \hat{\beta}_{MM} + \dfrac{1}{\hat{\lambda}_{MM}} = \overline{X}_n \\ \dfrac{1}{\hat{\lambda}_{MM}^2} = \overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2 = S_n^2 \end{cases} \implies \begin{cases} \hat{\lambda}_{MM} = \dfrac{1}{\sqrt{\overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2}} = S_n^{-1} \\ \hat{\beta}_{MM} = \overline{X}_n - \dfrac{1}{\sqrt{\overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2}} = \overline{X}_n - S_n^{-1} \end{cases}$$

3. Déterminer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}_n^{MV}$.

$$L = \lambda^n \exp\left(-\lambda \sum (x_i - \beta)\right) \mathbb{1}_{\min x_i \geq \beta}$$

non indep dû à β $\implies$ on maximise selon β

$$\implies \hat{\beta}_{MV} = \min_{i \in [\![1,n]\!]} X_i$$

On considère β fixé

$$\ln L = n \ln \lambda - \lambda \sum (x_i - \beta)$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \lambda} = \frac{n}{\lambda} - \sum (x_i - \beta) \quad \rightarrow \quad \hat{\lambda}_n = \frac{n}{\sum_{1}^{n} (x_i - \beta)}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \lambda^2} = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$$

$$\hat{\theta}_n^{MV} = \left(\hat{\lambda}_n^{MV}, \hat{\beta}_n^{MV}\right) = \left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \beta)}, \min x_i\right)$$

4. On note $\hat{\theta}_n^{MV} = (\hat{\lambda}_n, \hat{\beta}_n)$, montrer que $\hat{\beta} - \beta \sim \mathcal{E}(n\lambda)$

$\hat{\beta} = \min X_i$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\hat{\beta} - \beta \leq x) &= \mathbb{P}(\min X_i \leq x + \beta) \\
&= 1 - \mathbb{P}(\min X_i > x + \beta) \\
&= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x + \beta)^n \\
&= 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x + \beta))^n \\
&= 1 - \left(1 - \int_\beta^{x+\beta} \lambda e^{-\lambda(t-\beta)} dt\right)^n = 1 - \left(1 - \left[-e^{-\lambda(t-\beta)}\right]_\beta^{x+\beta}\right)^n \\
&= 1 - (1 + e^{-\lambda x} - 1)^n \\
&= 1 - e^{-n\lambda x}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow f_{\hat{\beta}-\beta}(x) = n\lambda e^{-n\lambda x}$

$\Rightarrow \hat{\beta} - \beta \sim \mathcal{E}(n\lambda)$

5. Calculer le risque quadratique de $\hat{\beta}_n$ et montrer que $\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

$\mathcal{R}(\beta, \hat{\beta}_n) = B_\beta(\hat{\beta}_n)^2 + V(\hat{\beta}_n)$

$B_\beta(\hat{\beta}_n) = \mathbb{E}[\hat{\beta}_n] - \beta = \mathbb{E}[\hat{\beta}_n - \beta] = \frac{1}{n\lambda}$

$V(\hat{\beta}_n) = V(\hat{\beta}_n - \beta) = \frac{1}{(n\lambda)^2}$

$\Rightarrow \mathcal{R}(\beta, \hat{\beta}_n) = \left(\frac{1}{n\lambda}\right)^2 + \frac{1}{(n\lambda)^2} = \frac{2}{(n\lambda)^2}$

Soit $\varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\hat{\beta}_n - \beta \geq \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\right)$

$$= \int_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}}^{\infty} n\lambda e^{-n\lambda x} dx = \left[-e^{-n\lambda x}\right]_{\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}}^{\infty} = e^{-n\lambda \frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}}$$

Car $\hat{\beta}_n - \beta \sim \mathcal{E}(n\lambda)$

$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0$, $\mathbb{P}(|\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)| \geq \varepsilon) = e^{-\sqrt{n}\lambda\varepsilon}$

Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(|\sqrt{n}(\hat{\beta}_n - \beta)| \geq \varepsilon) = 0$

Donc $\sqrt{n}(\hat{\beta} - \beta) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$

6. En utilisant le Théorème Centrale Limite sur $(X_i - \beta)_{i\in\mathbb{N}}$, déterminer la loi asymptotique de $\overline{X} - \hat{\beta}_n$.

TCL sur $(X_i - \beta)$

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \beta - \underbrace{\mathbb{E}[X_i - \beta]}_{\frac{1}{\lambda}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \underbrace{V(X-\beta)}_{\lambda^{-2}}\right)$$

Donc $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \beta - \frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^{-2})$

7. En déduire que $\sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2)$.

$\hat{\lambda} = \frac{n}{\sum(X_i - \beta)} \Rightarrow \overline{X}_n - \beta = \frac{1}{\hat{\lambda}}$

Donc $\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \beta - \frac{1}{\lambda}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^{-2})$

$\Rightarrow$ En utilisant la méthode Delta avec $g : x \mapsto \frac{1}{x}$ $\quad g'(x) = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow \left(g'\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^2 = \lambda^4$

$g(\overline{X}_n - \beta) = \frac{1}{\hat{\lambda}}$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\underbrace{g(\overline{X}_n - \beta)}_{=\hat{\lambda}} - \underbrace{g\left(\frac{1}{\lambda}\right)}_{=\lambda}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \underbrace{\lambda^{-2} \times \left(g'\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right)^2}_{\lambda^{-2} \times \lambda^4 = \lambda^2}\right)$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(\hat{\lambda} - \lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \lambda^2)$$

8. Déterminer $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $[\hat{\lambda}_n/a, \hat{\lambda}_n/b]$ soit un intervalle de confiance de niveau asymptotique $1-\alpha$ pour λ.

Donc $\sqrt{n}(\hat{\lambda}-\lambda) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\lambda^2) \Rightarrow \sqrt{n}\left(\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\lambda}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Comme $\hat{\lambda}$ EMV de $\lambda \Rightarrow \hat{\lambda} \xrightarrow{\mathbb{P}} \lambda$ Donc $\sqrt{n}\left(\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\hat{\lambda}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}\left(\frac{\hat{\lambda}-\lambda}{\hat{\lambda}}\right) \leq z_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\hat{\lambda}\left(1-\frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right) \leq \lambda \leq \hat{\lambda}\left(1+\frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}\right)\right) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{\hat{\lambda}}{a} \leq \lambda \leq \frac{\hat{\lambda}}{b}\right) = 1-\alpha \quad \text{où } a = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}-z_{1-\alpha/2}} \text{ et } b = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+z_{1-\alpha/2}}$$

9. Déterminer $C > 0$ tel que le test de zone de rejet $R_n = \{\hat{\lambda}_n > C\}$ soit de niveau asymptotique α pour le problème $H_0 : \lambda \leq 1$ contre $H_1 : \lambda > 1$.

On pose $R_n = \{\hat{\lambda}_n > C\}$ et on veut un test de niveau asympt α.

$$\mathbb{P}_\theta(R_n) = 1 - \mathbb{P}_\theta(\hat{\lambda}_n \leq C)$$

$$= 1 - \mathbb{P}_\theta\Big(\underbrace{\sqrt{n}\left(\frac{\hat{\lambda}_n}{\lambda}-1\right)}_{\mathcal{N}(0,1)} \leq \sqrt{n}\left(\frac{C}{\lambda}-1\right)\Big) \longrightarrow 1 - \phi\left(\sqrt{n}\left(\frac{C}{\lambda}-1\right)\right)$$

f.d.r d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Rappel : Si on a un test ϕ pour $H_0 : \theta \in \Theta_0$ contre $H_1 : \theta \in \Theta_1$ de région de rejet W alors,

$$\alpha = \sup_{\theta \in \Theta_0} \mathbb{P}_\theta(W)$$

On cherche α tq $\sup_{\theta \in \Theta} \mathbb{P}_\theta(R_n) \longrightarrow \alpha$

Or $\mathbb{P}_\theta(R_n) \longrightarrow 1 - \phi\left(\sqrt{n}\left(\frac{C}{\lambda}-1\right)\right)$ est une fonct° ↗ en λ, donc $\sup\left\{1-\phi\left(\sqrt{n}\left(\frac{C}{\lambda}-1\right)\right)\right\} = 1-\phi(\sqrt{n}(C-1))$

$$\Rightarrow \phi(\sqrt{n}(C-1)) = 1-\alpha$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}(C-1) = z_{1-\alpha}$$

$$\Rightarrow C = 1 + \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}$$

10. Ce test est-il convergent?

Un test est convergent si $\forall \theta \in \Theta_1$, on a $\beta(\theta) \longrightarrow 1$

$$\beta(\theta) = 1 - \phi\left(\sqrt{n}\left(\frac{1 + \frac{z_{1-\alpha}}{\sqrt{n}}}{\lambda} - 1\right)\right)$$

$$= 1 - \phi\left(\underbrace{\frac{z_{1-\alpha}}{\lambda} + \sqrt{n}\underbrace{\left(\frac{1}{\lambda} - 1\right)}_{<0}}_{\longrightarrow -\infty}\right) \quad \text{pour } \lambda > 1$$

$\Longrightarrow \beta(\theta) \longrightarrow 1$

$\Longrightarrow$ Le test est convergent

Exercice 2

Soit $X_1,\ldots,X_n$ un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de même loi que X. X suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2, i.e. admettant pour densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right)$$

1. On suppose μ inconnu. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance de (μ, σ^2).

$$L = (2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2} \exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

$$\ln L = -\frac{n}{2}\ln(2\pi) - \frac{n}{2}\ln(\sigma^2) - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{1}^{n}(x_i-\mu)^2$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2}\sum_{1}^{n}(x_i-\mu) \implies \hat{\mu}_n = \overline{X}_n \qquad \frac{\partial^2 \ln L}{\partial \mu^2} = -\frac{n}{\sigma^2} < 0$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial(\sigma^2)} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2(\sigma^2)^2}\sum(x_i-\mu)^2 \implies \hat{\sigma}_n^2 = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n}(x_i-\mu)^2 \qquad \frac{\partial^2 \ln L}{\partial(\sigma^2)^2} = \frac{n}{2(\sigma^2)^2} - \frac{1}{(\sigma^2)^3}\sum(x_i-\mu)^2$$

< 0 en $\hat{\sigma}^2$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\mu\,\partial\sigma^2} = -\frac{1}{(\sigma^2)^2}\sum(x_i-\mu) < 0$$

$$(\hat{\mu}_n, \hat{\sigma}_n^2) = \left(\overline{X}_n, \frac{1}{n}\sum(x_i-\mu)^2\right)$$

$$L = (2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\right)$$

2. Construire le test $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu = \mu_1 > \mu_0$.

$$V_{\mu,\mu_0} = \frac{(2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\right)}{(2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_i-\mu_0)^2\right)} = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_1^n (x_i-\mu)^2 - \sum_1^n (x_i-\mu_0)^2\right]\right)$$

$$\Rightarrow V_{\mu,\mu_0} = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_1^n (x_i^2-2\mu x_i+\mu^2) - \sum_1^n (x_i^2-2\mu_0 x_i+\mu_0^2)\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2n(\mu-\mu_0)\bar{x}_n + n(\mu^2-\mu_0^2)\right)\right) = \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}\left((\mu^2-\mu_0^2)-2(\mu-\mu_0)\bar{x}_n\right)\right)$$

Comme $\mu > \mu_0$, V_{μ,μ_0} est ↗ à $t = \bar{x}$ $\Rightarrow$ On rejette si $\bar{x}_n > k_\alpha$ avec $P_{H_0}(\bar{X}_n > k_\alpha) = \alpha$

Sous H_0, $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$, on a $\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

On sait que $\sigma^{-2}\sum (X_i-\bar{X}_n)^2 \sim \chi^2_{n-1}$ et $\bar{X}_n \perp\!\!\!\perp$ de $\sum (X_i-\bar{X}_n)^2$ $\Rightarrow \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sqrt{S_n^2}} \sim t_{n-1}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{H_0}(\bar{X}_n > k_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}_{H_0}\left(\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sqrt{S_n^2}} \geq \underbrace{\frac{\sqrt{n}(k_\alpha-\mu_0)}{\sqrt{S_n^2}}}_{t_{n-1}^{1-\alpha}}\right) = \alpha \Rightarrow k_\alpha = \frac{t_{n-1}^{1-\alpha}\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}} + \mu_0$$

On rejette si $\frac{1}{n}\sum_1^n x_i > \frac{t_{n-1}^{1-\alpha}\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}} + \mu_0$ $\quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_i-\bar{x})^2$

3. Construire le test $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu < \mu_0$.

$$V_{\mu,\mu_0} = \frac{(2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2\right)}{(2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_1^n (x_i-\mu_0)^2\right)} = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\sum_1^n (x_i-\mu)^2 - \sum_1^n (x_i-\mu_0)^2\right]\right)$$

$$\Rightarrow V_{\mu,\mu_0} = \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(\sum_1^n (x_i^2-2\mu x_i+\mu^2) - \sum_1^n (x_i^2-2\mu_0 x_i+\mu_0^2)\right)\right)$$

$$= \exp\left(-\frac{1}{2\sigma^2}\left(-2n(\mu-\mu_0)\bar{x}_n + n(\mu^2-\mu_0^2)\right)\right) = \exp\left(-\frac{n}{2\sigma^2}\left((\mu^2-\mu_0^2)-2(\mu-\mu_0)\bar{x}_n\right)\right)$$

Comme $\mu < \mu_0$, V_{μ,μ_0} est ↘ à $t = \bar{x}$ $\Rightarrow$ On rejette si $\bar{x}_n < k_\alpha$ avec $P_{H_0}(\bar{X}_n < k_\alpha) = \alpha$

Sous H_0, $\bar{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu_0, \frac{\sigma^2}{n})$, on a $\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0,1)$

On sait que $\sigma^{-2}\sum (X_i-\bar{X}_n)^2 \sim \chi^2_{n-1}$ et $\bar{X}_n \perp\!\!\!\perp$ de $\sum (X_i-\bar{X}_n)^2$ $\Rightarrow \sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sqrt{S_n^2}} \sim t_{n-1}$

$$\Rightarrow \mathbb{P}_{H_0}(\bar{X}_n < k_\alpha) = \alpha \Leftrightarrow \mathbb{P}_{H_0}\left(\sqrt{n}\,\frac{\bar{X}_n-\mu_0}{\sqrt{S_n^2}} < \underbrace{\frac{\sqrt{n}(k_\alpha-\mu_0)}{\sqrt{S_n^2}}}_{t_{n-1}^{\alpha}}\right) = \alpha \Rightarrow k_\alpha = \frac{t_{n-1}^{\alpha}\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}} + \mu_0$$

On rejette si $\frac{1}{n}\sum_1^n x_i < \mu_0 + \frac{t_{n-1}^{\alpha}\sqrt{S_n^2}}{\sqrt{n}}$ $\quad S_n^2 = \frac{1}{n-1}\sum_1^n (x_i-\bar{x})^2$

4. Construire le test $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ contre $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$.

$$V_{\sigma^2,\sigma_0^2} = \frac{(2\pi)^{-n/2}(\sigma^2)^{-n/2}\exp\left(\frac{-1}{2\sigma^2}\sum(x_i-\mu)^2\right)}{(2\pi)^{-n/2}(\sigma_0^2)^{-n/2}\exp\left(\frac{-1}{2\sigma_0^2}\sum(x_i-\mu)^2\right)} = \left(\frac{\sigma^2}{\sigma_0^2}\right)^{-n/2}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sigma^2}-\frac{1}{\sigma_0^2}\right)\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2\right)$$

Comme $\sigma^2 > \sigma_0^2$, V_{σ^2,σ_0^2} est une fct° ↗ en $t = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu)^2$ qui est une stat exhaustive

Donc on rejette H_0 si $\sum(X_i-\mu)^2 > k_\alpha$ avec k_α tq $\mathbb{P}_{H_0}\left(\sum(X_i-\mu)^2 > k_\alpha\right) = \alpha$

Sous H_0, $\sum\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 \sim \chi^2_n \implies \mathbb{P}\left(\sum\left(\frac{X_i-\mu}{\sigma_0}\right)^2 > \underbrace{\frac{k_\alpha}{\sigma_0^2}}_{\chi^2_{n,1-\alpha}}\right) = \alpha$

$\implies k_\alpha = \sigma_0^2\chi^2_{n,1-\alpha}$

Donc on rejette H_0 si $\sum(x_i-\mu)^2 > \sigma_0^2\chi^2_{n,1-\alpha}$

5. Construire le test $H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$.

$H_0 : \mu = \mu_0$ contre $H_1 : \mu \neq \mu_0$ C'est comme si l'on faisait 2 tests celui de la Q2 et Q3)

Donc on rejette H_0 si $\{\overline{X}_n < k_{Q3}$ ou $\overline{X}_n > k_{Q2}\}$ avec $k_{Q3}^{\alpha/2} = \mu_0 + \frac{\sqrt{S_n^2}\, t_{n-1}^{\alpha/2}}{\sqrt{n}}$

$k_{Q2}^{1-\alpha/2} = \mu_0 + \frac{\sqrt{S_n^2}\, t_{n-1}^{1-\alpha/2}}{\sqrt{n}}$

On a $\mathbb{P}_{H_0}\left(k_{Q3}^{\alpha/2} \leq \overline{X}_n \leq k_{Q2}^{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}_{H_0}\left(t_{n-1}^{\alpha/2} \leq \underbrace{\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}}}_{\text{Sous } H_0 \sim t_{n-1}} \leq t_{n-1}^{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

Donc on rejette H_0 si $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}} < t_{n-1}^{1-\alpha/2}$

ou $\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}} > t_{n-1}^{\alpha/2}$

On accepte H_0 si $t_{n-1}^{\alpha/2} < \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mu_0}{\sqrt{S_n^2}} < t_{n-1}^{1-\alpha/2}$

Exercice 3

Soit X_1,...,X_n un échantillon de n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de même loi que X. X suit une loi Gamma $\Gamma(\theta, k)$ de densité :

$$f(x) = \frac{\theta^k x^{k-1}}{\Gamma(k)} \exp(-\theta x)$$

1. Calculer $\mathbb{E}(X^i)$ pour $i = 1, ..., 4$.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^{\infty} x \frac{\theta^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\theta x} dx = \int_0^{\infty} \frac{\theta^k}{\Gamma(k)} x^{k+1-1} e^{-\theta x} dx = \frac{k}{\theta}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{k(k+1)}{\theta^2} \qquad \mathbb{E}[X^3] = \frac{k(k+1)(k+2)}{\theta^3}$$

$$\mathbb{E}[X^4] = \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{\theta^4}$$

2. Calculer l'estimateur des moments de (θ, k).

3. Ecrire le Théorème Central Limite pour les vecteurs aléatoires (X_i, X_i^2)

4. Calculer la loi asymptotique de l'estimateur de moments de $\theta, k)$.

5. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ et k existe.