TD1 - Opportunités d'arbitrage

Arbitrage sur le marché boursier

Rappel : Une vente à découvert (short selling) est une opération qui consiste à vendre un titre que l'on ne possède pas en espérant le racheter à une date ultérieure (à un cours moins élevé) afin de le livrer à l'acheteur à cette date. Le vendeur s'engage à livrer le titre à une certaine échéance sans le posséder. Il devra, pour tenir son engagement, se le procurer en l'achetant sur le marché au jour de l'échéance sauf s'il décide de déboucler sa position plus tôt.

1. Considérons un marché avec deux actions A et B. À l'instant $t = 1$, deux états sont possibles : hausse (up) ou baisse (down). Les prix à $t = 1$ des deux actifs sont donnés par le tableau suivant :

Actif	A	B
état hausse	80	80
état baisse	35	35

Imaginons que le prix actuel de A est de 50 euros et celui de B 57 euros. Comment peut-on construire une stratégie qui nous fasse gagner de l'argent à $t = 0$ sans en perdre en $t = 1$?

Loi du prix unique

1. Considérons trois actifs A, B et C de flux futurs à $t = 1$:

Actif	A	B	C
état hausse	60	75	105
état baisse	20	40	50

Les prix de marché de A et B sont 36 et 50 euros. Quel est le prix de C s'il n'existe pas d'opportunités d'arbitrage sur le marché ?

Marchés complets

1. On considère un marché monopériodique (c'est à dire qu'il y a deux dates $t = 0$ et $t = 1$) avec trois états de la nature possibles : up, stable et down. Supposons que sur le marché il existe deux actions A et B de prix à $t = 0$ de 12 et 21 euros. À $t = 1$ voici les payoffs des actions selon les états possibles de la nature

Actif	A	B
up	15	25
stable	12	20
down	9	16

On considère maintenant un actif D dont les payoffs possibles à $t = 1$ sont

Actif	D
up	120
stable	100
down	80

(a) Est-il possible de construire un portefeuille à $t = 1$ répliquant l'actif D ? Le marché considéré est-il complet ?

(b) On rajoute un troisième actif C sur le marché, de prix 17 euros à $t = 0$ et dont les payoffs possibles à $t = 1$ sont

Actif	C
up	20
stable	18
down	12

Est-il alors possible de répliquer D avec les actifs A, B et C ? Ce marché est-il complet ? En déduire le prix d'arbitrage de D.

2. La matrice suivante représente les payoffs à $t = 1$ de trois actifs dans un marché à quatre états de la nature

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

où les lignes représentent les valeurs de trois actifs à un état donné, et les colonnes représentent les valeurs d'un actif dans les quatre états de la nature possibles.

(a) Si le prix de chaque actif à $t = 0$ est 1, y a-t-il une opportunité d'arbitrage sur ce marché ? Si oui, donner la composition d'un portefeuille d'arbitrage.

(b) On suppose maintenant que le prix du premier actif est 2, alors que le prix des deux autres est toujours 1. On ajoute un actif qui vaut 0 dans tous les états de la nature sauf l'état 1 où il vaut 1 (cet actif est appelé l'actif d'Arrow-Debreu correspondant à l'état 1).

Cet actif est-il déjà disponible sur le marché ? (C'est à dire est-il déjà réplicable par un portefeuille formé d'actifs de ce marché ?) Le marché obtenu est-il complet ?

3. La matrice des payoffs à $t = 1$ de quatre actifs dans un marché avec quatre états de la nature est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 13 & 7 & 22 \\ 4 & 12 & 8 & 24 \\ 1 & 11 & 6 & 18 \\ 5 & 15 & 6 & 26 \end{pmatrix}$$

où les lignes représentent la valeur de quatre actifs dans un état donné, et les colonnes représentent les payoffs de l'actif correspondant dans les quatre états.

(a) Ce marché est-il complet ?

(b) On rajoute l'actif d'Arrow-Debreu correspondant à l'état 1. Est-il disponible sur le marché ? Si oui, donner son portefeuille de réplication et si non, dire si le marché obtenu en rajoutant cet actif est complet ou non.

I - Arbitrage sur le marché boursier

Actifs	A	B
Up	80	80
Down	35	35

Supposons que : prix actuel de A = 50€
prix actuel de B = 57€

→ Stratégie : * On vend B
* On achète A

⇒ en t=0 on gagne 7€ et t=1 on fait 0€
La stratégie rapporte 7€.

II - Loi du prix unique

Actif	A	B	C
Up	60	75	105
Down	20	40	50

On suppose que les prix de marché de A et B sont 36 et 50 €.

→ Prix de C sachant qu'il y a AOA.

AOA ⇒ réplication de C par ½ A + B

⇒ Prix de C est $\frac{1}{2} \times 36 + 50 = 68€$.

III - Marchés Complets

1)

Actif	A	B
Up	15	25
Stable	12	20
Down	9	16

Actif	D
Up	120
Stable	100
Down	80

Prix A : 12€
Prix B : 20€

a) $$\begin{pmatrix} 15 & 25 \\ 12 & 20 \\ 9 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 100 \\ 80 \end{pmatrix}$$ n'a pas de solution. → Impossibilité de répliquer D.

→ Marché incomplet.

b) → Ajout de C sur le marché avec :

* Prix de C = 17€

*

Actif	C
Up	20
Stable	18
Down	12

→ On résoud
$$\begin{pmatrix} 15 & 25 & 20 \\ 12 & 20 & 18 \\ 9 & 16 & 12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 120 \\ 100 \\ 80 \end{pmatrix}$$

→ Matrice formée des prix de A, B et C est inversible
⇒ réplication possible et marché complet

$$\Rightarrow (x, y, z) = (-8, 8, 2)$$

⇒ Réplication de D : $D = -8A + 8B + 2C$

Prix de D $= -8 \times 12 + 8 \times 20 + 2 \times 17 = 106€$.

2)

$$A = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{ccc} A_1 & A_2 & A_3 \end{array} \leftarrow \text{actifs}$$

$$A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \end{array}\begin{array}{l} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array}$$

↑ Etats

a) Si à $t=0$ Prix $A_1, A_2, A_3 = 1$

Une stratégie pourrait être à $t=0$: $A_1 + A_2 - 2A_3$

Car le payoff en E_1 est : $1 + 3 - 2\times 1 = 2$
E_2 : $3 + 0 - 2\times 1 = 1$
E_3 : $-1 + 3 - 2\times 1 = 0$
E_4 : $1 + 1 - 2\times 1 = 0$

→ Au mieux on fait +2
Au pire on fait 0.

b) On suppose Prix $A_1 = 2$ et Prix $A_2, A_3 = 1$.

On ajoute un actif A_4 tq $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ → payoffs (Actif d'Arrow-Debreu)

A_4 n'est pas réplicable par un portefeuille formé de A_1, A_2 et A_3.

Car $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de sol$^{\circ}$.

$\Rightarrow$ marché formé de A_1, A_2 et A_3 est incomplet.

Si on ajoute A_4 au marché on aurait
$$A^* = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

A^* est inversible, $rg(A) = 4$. Donc le marché formé de A_1, A_2, A_3 et A_4 est complet.

③ Soit
$$A = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \end{array} & \leftarrow \text{Actifs} \\ \begin{pmatrix} 2 & 13 & 7 & 22 \\ 4 & 12 & 8 & 24 \\ 1 & 11 & 6 & 28 \\ 5 & 15 & 6 & 26 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \\ E_4 \end{array} \\ & \uparrow \text{États} \end{array}$$

a) Le marché est incomplet car $A_1 + A_2 + A_3 = A_4$ i.e $rg\, A < 4$

b) On ajoute l'actif d'Arrow-Debreu noté A_5 tq $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Non, A_5 n'est pas disponible sur le marché formé de A_1, A_2, A_3 et A_4.

Si on ajoute A_5 on a :
$$A^* = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 2 & 13 & 7 & 22 & 1 \\ 4 & 12 & 8 & 24 & 0 \\ 1 & 11 & 6 & 18 & 0 \\ 5 & 15 & 6 & 26 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

On a $rg\, A^* = 4$ et il y a 4 états

$\Rightarrow$ marché complet.

Explication (personnelle) : On pourrait, à partir de A^*, une "sous-matrice" carrée qui est inversible $\Rightarrow$ marché complet.

Plus précisément, la base issue de la matrice A est liée, il en est de même pour A^*.
Comme $A_1 + A_2 + A_3 = A_4$, il suffirait de "supprimer" l'actif A_4 pour corriger le défaut de non liberté des bases.
On obtiendrai une matrice formée des actifs A_1, A_2, A_3 et A_5. Cette matrice qui serait inversible ...