TD 6: PROCESSUS DE POISSON

Modèles Aléatoires Discrets M1– 2019-2020
P.-O. Goffard & Rémy Poudevigne

---

1. Soit X_1 et X_2 des variables aléatoires indépendantes de lois exponentielles de paramètres λ_1 et λ_2 respectivement.

   (a) Quelle est la loi de $Y = \min(X_1, X_2)$?

   Solution: Le calcul de la loi du minimum se fait souvent de la manière suivante: on remarque que $Y > x$ si et seulement si $X_1 > x$ et $X_2 > x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a donc, pour $x \leq 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y \leq x) &= 1 - \mathbb{P}(Y > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x\,;\, X_2 > x) \\ &= 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)\mathbb{P}(X_2 > x),\end{aligned}$$

   où dans la dernière inégalité on a utilisé le fait que X_1 et X_2 étaient indépendants. En utilisant le fait que pour une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre λ, on a $\mathbb{P}(X > x) = e^{-\lambda x}$, on obtient:

$$\mathbb{P}(Y \leq x) = 1 - e^{-(\lambda_1+\lambda_2)}.$$

   On reconnait la fonction de répartition d'une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda_1 + \lambda_2$.

   (b) Calculer $\mathbb{P}(Y = X_1)$.

   Solution: On a $\mathbb{P}(Y = X_1) = \mathbb{P}(X_1 \leq X_2)$ d'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(Y = X_1) &= \int_{x_1=0}^{+\infty}\int_{x_2=0}^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x_2} 1_{x_1 \leq x_2} dx_1 dx_2 \\ &= \int_{x_1=0}^{+\infty}\int_{x_2=x_1}^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}\lambda_2 e^{-\lambda_2 x} dx_1 dx_2 \\ &= \int_{x_1=0}^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x_1} e^{-\lambda_2} dx_1 \\ &= \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}.\end{aligned}$$

   Par le même calcul on trouve que $\mathbb{P}(Y = X_2) = \lambda_2/(\lambda_1 + \lambda_2)$. On remarque que l'on a bien $\mathbb{P}(Y = X_1) + \mathbb{P}(Y = X_2) = 1$.

2. Dans une station de taxi, il y a des voitures de marque A et B, qui arrivent suivant des processus de Poisson indépendants d'intensité 10 et 15 par heure respectivement.

   (a) Soit T la minute d'arrivée du premier taxi. Quelle est la loi de T ? Quelle est la probabilité que le premier taxi arrivé soit de la marque A ?

Solution: Notons T_1 et T_2 les heures d'arrivées des marques A et B respectivement. T_1 et T_2 sont donc de loi exponentielle de paramètres 10 et 15 respectivement. Par définition, $T = \min(T_1, T_2)$. D'après l'exercice précédent, T suit donc une loi exponentielle de paramètre $10 + 15 = 25$. Toujours d'après l'exercice précédent, la probabilité pour que le premier taxi soit de marque A est $10/25 = 2/5$.

(b) Si le premier taxi arrivé est de marque A, quelle est la loi du temps qu'il faut encore attendre (après l'arrivée de ce taxi) avant l'arrivée du premier taxi de marque B ?

Solution: On montre cela de la même manière que l'on montre la propriété d'être sans mémoire de la loi exponentielle: par la formule de Bayes, on a

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_2 \geq x + T_1 \,|\, T_2 \geq T_1) &= \frac{\mathbb{P}(T_2 \geq x + T_1)}{\mathbb{P}(T_2 \geq T_1)}\,\mathbb{P}(T_2 \geq T_1 \,|\, T_2 \geq x + T_1) \\ &= \frac{\mathbb{P}(T_2 \geq x + T_1)}{\mathbb{P}(T_2 \geq T_1)}.\end{aligned}$$

On calcule donc $\mathbb{P}(T_2 \geq x + T_1)$. On pose $\lambda_1 = 10$ et $\lambda_2 = 15$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_2 \geq x + T_1) &= \int_{y=0}^{+\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 y}\mathbb{P}(T_2 \geq x + y)dy \\ &= \lambda_1 e^{-\lambda_2 x}\int_{y=0}^{+\infty} e^{-(\lambda_1+\lambda_2 y}dy \\ &= \cdots = \frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}e^{-\lambda_2 x}.\end{aligned}$$

On retrouve que T_2, sachant qu'il n'y avait pas de taxi B avant le temps aléatoire T_1, suit toujours une loi exponentielle de paramètre 15.

(c) Montrer que les dates d'arrivée des taxis (quelle que soit leur marque) forment un processus de Poisson dont on donnera l'intensité.

Solution: Notons N_t^1 et N_t^2 le nombre de taxis A où B arrivés avant la date t. Ce sont donc deux processus de Poisson d'intensité 10 et 15 respecivement. On nous demande de calculer la loi de $N_t = N_t^1 + N_t^2$. On a, pour tout entier $k \geq 0$:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(N_t = k) &= \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(N_t^1 = l\,;\, N_t^2 = k - l) \\ &= \sum_{l=0}^{k} \mathbb{P}(N_t^1 = l)\,\mathbb{P}(N_t^2 = k - l) \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\sum_{l=0}^{k} \frac{\lambda_1^l}{l!}\frac{\lambda_2^{k-l}}{(k-l)!} \\ &= \frac{e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}}{k!}\sum_{l=0}^{k} C_k^l\,(\lambda_1 t)^l(\lambda_2 t)^{k-l} \\ &= e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\,\frac{(\lambda_1+\lambda_2)^k}{k!}.\end{aligned}$$

On trouve que N_t est un processus desuit une loi de Poisson de paramètre 25. Pour montrer que c'est bien un processus de Poisson, il nous faut donc montrer que les accroissements sont indépendants et que les trajectoires sont continues à droite. Ce dernier point est direct vu la définition de N_t comme la somme de deux processus de Poisson. Montrons que les accroissements sont indépendants. Soient I et J deux intervalles disjoints. Montrons que pour tout entier $k, l \geq 0$:

$$\mathbb{P}(N_I = k\,;\, N_J = l) = \mathbb{P}(N_I = k)\,\mathbb{P}(N_J = l).$$

Pour cela on conditionne par les valeurs possibles de N^1 et N^2 et on applique la formule des probabilités totales:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_I = k\,;\, N_J = l) &= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} \mathbb{P}(N_I^1 = i\,;\, N_I^2 = k-i\,;\, N_J^1 = j\,;\, N_J^2 = l-j) \\
&= \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} \mathbb{P}(N_I^1 = i\,;\, N_I^2 = k-i)\,\mathbb{P}(N_J^1 = j\,;\, N_J^2 = l-j) \\
&= \left(\sum_{i=0}^{k} \mathbb{P}(N_I^1 = i\,;\, N_I^2 = k-i)\right)\left(\sum_{j=0}^{l} \mathbb{P}(N_J^1 = j\,;\, N_J^2 = l-j)\right) \\
&= \mathbb{P}(N_I = k)\,\mathbb{P}(N_J = l).
\end{aligned}$$

On a utilisé pour la deuxième égalité l'indépendance des variables N_I^1, N_J^1, N_I^2, N_J^2.

3. On suppose que les dates des accidents des assuré-es de la compagnie *JojoTranquille* forment un processus de Poisson d'intensité λ. Pour chaque accident, l'assuré-e fera une déclaration à son assurance avec une probabilité $p \in]0,1[$, la décision étant prise de manière indépendante des autres accidents et des autres assuré-es.
   Pour tout intervalle de temps $I \subset \mathbb{R}$, on note N_I^d (respectivement N_I^{nd}) le nombre d'accidents déclarés (respectivement non-déclarés) dans cet intervalle de temps. On note enfin $N_I = N_I^d + N_I^{nd}$.

   (a) Pour $n \in \mathbb{N}$, quelle est la loi de N_I^d conditionnellement à $N_I = n$?

   Solution: C'est une loi Binomiale de paramètre (n, p).

   (b) Quelle est la loi de N_I^d ?

Solution: D'après la formule des probabilités totales, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_I = k) &= \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N_I = k \,|\, N_I^0 = n)\, \mathbb{P}(N_I^0 = n) \\
&= \sum_{n=k}^{+\infty} C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \times e^{-\lambda|I|} \frac{(\lambda|I|)^n}{n!} \\
&= e^{-\lambda|I|} \sum_{l=0}^{+\infty} C_{k+l}^k p^k (1-p)^l \frac{(\lambda|I|)^{k+l}}{(k+l)!} \\
&= \cdots = e^{-p\lambda|I|} \frac{(p\lambda|I|)^k}{k!}
\end{aligned}$$

N_I suit donc une loi de Poisson de paramètre $p\lambda$.

(c) Montrer que les dates des accidents déclarés forment un processus de Poisson dont on donnera l'intensité.

Solution: De plus, les accroissements de N_t sont indépendants, car ceux de N_I^0 le sont (on peut le prouver directement en conditionnant par les valeurs de N_I^0 et N_J^0). N_t est donc un processus de Poisson d'intensité $p\lambda$.

(d) Les variables N_I^d et N_I^{nd} sont-elles indépendantes ?

Solution: Faisont le calcul. D'une part on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(N_I = k\,;\, N_I' = l) =& \mathbb{P}\left(N_I = k\,;\, N_I' = l \,|\, N_I^0 = k+l\right) \\
=& \mathbb{P}(N_I^0 = k+l) \\
=& C_k^{k+l} p^k (1-p)^{k+l} \frac{(\lambda|I|)^{k+l}}{(k+l)!}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\mathbb{P}(N_I = k)\, \mathbb{P}(N_I' = l) = \cdots = C_k^{k+l} p^k (1-p)^{k+l} \frac{(\lambda|I|)^{k+l}}{(k+l)!}.$$

Les deux variables sont donc bien indépendantes.

4. Montrer que si on transforme les dates d'un processus de Poisson d'intensité λ sur $]0,T[$ par l'application $t \mapsto T-t$, alors on obtient toujours un processus de Poisson d'intensité λ sur $]0,T[$.

Solution: Notons N_t les processus de Poisson d'intensité λ et N_t' le processus que l'on obtient par le changement de temps $t \mapsto T-t$. Montrons que

$$N_t' = N_T - N_{T-t} = N_{[T-t,T]}.$$

Soit $(T_i)_{i\geq 1}$ une suite de v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre λ. Posons $S_i = T_1 + \cdots + T_i$ pour tout $i \geq 1$, de tel sorte que

$$N_t = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{0 \leq S_i \leq t\}}.$$

On a alors
$$N'_t = \sum_{i=1}^{+\infty} \mathbb{I}_{\{0 \leq S'_i \leq t\}},$$
où S'_i est donné par $S'_i = T - S_i$ pour tout $i \geq 1$. Comme $\{0 \leq S'_i \leq t\} = \{T - t \leq S_i \leq T\}$, on obtient bien que $N'_t = N_{[T-t,T]}$.
Le résultat est maintenant évident: on vérifie bien que pour tous intervalles disjoints I et J dans $[0, T]$, N'_I et N'_J sont indépendants et que N'_I suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda|I|$.

5. On modélise les dates T_i des sinistres déclarés par les assuré-es d'une compagnie d'assurance par un processus de Poisson d'intensité $\lambda > 0$.
   On considère une date $t > 0$, et on note A_t (respectivement B_t) le temps qui sépare la date t du sinistre déclaré juste avant (respectivement après) t.
   Quelle est la loi de B_t ? Et celle de A_t ? Quelle est l'espérance de $A_t + B_t$?

Solution: Si on se place au temps T et qu'on se demande quand était le dernier accident, on fait la transformation $T - t$ donc d'après l'exercice précédent, A_T suit une loi exponentielle de paramètre λ. De même, si on se place au temps t, sans savoir quand à eu le dernier accident, et qu'on se demande quand sera le prochaine, alors par la propriété d'être sans mémoire de la loi exponentielle B_T suit elle aussi une loi exponentielle de paramètre λ. En conséquence, $A_T + B_T$ a une espérance de 2λ.
Cela est paradoxale, car on obtient qu'en moyenne il s'écoule 2λ unité de temps entre deux accidents, alors que le modèle nous dit que c'est en réalité λ. On appelle cela le *paradoxe de l'autobus* (on attend en moyenne 5 min son autobus alors qu'il y en a tous les 5 min). Ce paradoxe est vraiment lié au choix de la loi exponentielle pour modéliser les temps entre deux accidents.