Université Claude Bernard - Lyon 1
ISFA - M2SAF
Frédéric Planchet et Maxime Ben-Brik

Année 2021-2022

Travaux dirigés : modèles de durée
Séance n°1

Exercise 1.

Soit T une variable aléatoire positive représentant la durée de vie d'un individu. Soit S sa fonction de survie.

1. Supposons que T soit une variable aléatoire continue. Donner l'expression de sa fonction de survie, de sa densité f, puis trouver la relation qui les lient à la fonction de hasard définie par
$$h(t) = \lim_{\delta t \to 0} \frac{\mathbb{P}(t < T \leq t + \delta t \mid T > t)}{\delta t}.$$
2. Montrer que
$$S(t) = \exp(-H(t)),$$
avec $H(t) = \int_0^t h(u)\, du$, appelée fonction de hasard cumulée.
3. Supposons à présent que T soit discrète et prenne ses valeurs aux dates $t_1 < \ldots < t_k$. En notant, $p(t_i) = \mathbb{P}(T = t_i)$, pour $i = 1, \ldots k$, fournir une expression additive et multiplicative de $S(t)$.
4. En temps discret, on définit usuellement la fonction de hasard par $h(t_i) = \dfrac{p(t_i)}{S(t_{i-1})}$ avec $S(t_0) = 1$. En déduire, une expression de S en fonction de h.
5. Comparer cette expression au cas continu. Que faire pour que la relation de la question 2. s'applique au cas discret.

Exercise 2.

Soit T une variable aléatoire positive continue représentant la durée de vie d'un individu. Soit S sa fonction de survie, f sa densité et h sa fonction de hasard.

1. Donner les expressions, en fonction de $S(t)$, de l'espérance de vie de T et de l'espérance de vie résiduelle de T à la date x
$$\mathbb{E}[T - x \mid T > x].$$
2. Donner l'expression de la variance de T.
3. En considérant un contrat d'assurance versant un montant de 1 EUR à la date du décès de l'assuré et un taux d'actualisation constant δ (en temps continu), donner l'expression de la valeur de l'engagement de l'assuré d'âge x.

Exercise 3 Modèle à hasard constant par morceaux.

Pour une décomposition en K segments fixés de l'ensemble de valeurs prises par la durée de vie T, la fonction de hasard du modèle est supposée constante par morceaux (appelé aussi modèle de Poisson) telle que

$$h(t) = \theta_k \text{ pour } t \in J_k = [\tau_{k-1}; \tau_k[\,,\ k = 1, \ldots, K, \text{ avec } \tau_0 = 0 \text{ et } \tau_K = \infty,$$

où $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_K)$ est un vecteur de paramètres positifs.

1. Si $K = 1$, que dire de la loi suivie par la variable T.
2. Si $K > 1$, donner l'expression de la fonction de survie de T.
3. Calculer l'espérance de vie résiduelle à un âge $x \in J_l$ avec $l \in \{1, \ldots, K\}$.
4. Soit un échantillon de n individus i.i.d. de durée de vie $T_1, \ldots, T_n$. Écrire la log-vraisemblance du modèle.
5. Calculer le score du modèle et en déduire un estimateur pour chaque θ_k en faisant apparaître pour chaque segment k une statistique comptant le nombre de décès N_k et une autre mesurant l'exposition au risque R_k.
6. Calculer la matrice d'information de Fisher. En déduire une expression de la variance asymptotique des $\widehat{\theta}_k$ et proposer un intervalle de confiance asymptotique de niveau α pour ces estimateurs.
7. Expliciter un test pour l'hypothèse $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0$.

Exercise 4 Modèles AFT et avec *odds* proportionnels.

On souhaite étudier deux classes de modèles classiques de régression : les modèles *accelered failure times* (AFT), traduisant une multiplication de la durée de vie par rapport à une durée de référence, et les modèles avec *odds* proportionnels (PO), traduisant une multiplication de l'*odds* des fonctions de répartition (ou de survie). Dans la suite, on introduit $\boldsymbol{X}$ un vecteur de covariables.

1. On considère un modèle AFT tel que le loi de durée prend la forme
$$\ln T = -\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\theta} + W\ ,$$
avec $\boldsymbol{\theta}$ un vecteur de paramètres et une distribution correspondant à un terme d'erreur. Écrire la loi de survie de T, $S(t|\boldsymbol{X}; \boldsymbol{\theta})$, et sa fonction de hasard, $h(t|\boldsymbol{X}; \boldsymbol{\theta})$, en fonction de celles de la loi de référence $T_0 = \exp(W)$.
2. Montrer que si T_0 suit une loi de de Weibull, de fonction de hasard
$$h_0(t) = \lambda \alpha t^{\alpha - 1}, \lambda > 0, \alpha > 0,$$
alors la loi du modèle AFT est encore une loi de Weibull. Donner sa fonction de survie.
3. Les modèles PO sont définis par la relation générale
$$\frac{1 - S(t)}{S(t)} = \frac{1 - S_0^*(t)}{S_0^*(t)} \exp\left(\boldsymbol{X}^\top \boldsymbol{\beta}\right)\ ,$$
avec $S_0^*(t)$ la fonction de survie d'une loi quelconque et $\boldsymbol{\beta}$ un vecteur de paramètres. Montrer que si T_0 suit une loi de de Weibull, alors le modèle AFT ne satisfait pas la relation d'un modèle PO.

4. Caractériser la loi de S_0 pour que le modèle AFT vérifie l'hypothèse PO. En prenant différentes valeurs de $\boldsymbol{X}$, on cherchera à maintenir le ratio $\dfrac{\beta_j}{\theta_j}$ constant.

Exercise 5 Fragilité Gamma.

Soit T la variable aléatoire positive et continue représentant la durée de vie d'un individu de fonction de survie S. Pour une population donnée, on cherche à mesurer l'effet d'une source d'hétérogénéité latente en date $t = 0$, représentée par une variable Z de densité $\pi(z)$. Les individus pour lesquels $Z = z$ sont supposés suivre la même loi de durée, de fonction de survie $S(t|z)$, de densité $f(t|z)$ et fonction de hasard

$$h(t|z) = zh(t).$$

La variable Z est usuellement appelée *fragilité*.

1. Après avoir écrit $S(t)$ en fonction de $S(t|z)$, donner l'expression de $\pi_t(z)$, la densité de la fragilité pour la population des survivants en date $t \geq 0$, i.e. sachant $T \geq t$. Dans la suite, on notera $Z_t = Z \mid T \geq t$ la variable de densité $\pi_t(z)$.
2. On suppose que la fragilité suit initialement une loi Gamma (λ, k) de densité*

$$\pi(z) = \frac{\lambda^k z^{k-1} \exp(-\lambda z)}{\Gamma(k)}, k > 0, \lambda > 0.$$

   Donner l'expression de $S(t)$.
3. Fournir l'expression de la fonction de hasard moyenne (non conditionnelle) pour la population survivante en $t \geq 0$

$$\bar{h}(t) = \int_0^\infty h(t|z)\, \pi_t(z)\, dz.$$

4. Calculer l'espérance de Z_t, puis dériver la. Commenter le résultat.
5. Proposer un paramétrage pour k et λ permettant d'interpréter facilement la fonction de hasard des survivants $\bar{h}(t)$, ainsi que l'espérance et la variance de Z_t.

*. Rappel : $\mathbb{E}[Z] = k/\lambda$ et $\mathbb{V}[Z] = k/\lambda^2$.

Modèles de durée :

TD 1 :

Exercice 1 : Soit T une va positive représentant la durée de vie d'un individu. Soit S sa fonct° de survie.

① Supposons T va continue et $h : t \mapsto \lim_{\delta t \to 0^+} \frac{P(t < T \leq t + \delta t \mid T > t)}{\delta t}$

On a $* S(t) = \mathbb{P}(T > t)$

$* f(t) = - \frac{d S(t)}{dt}$

$* \ h(t) = \frac{f(t)}{S(t)} = \frac{-1}{S(t)} \frac{d S(t)}{dt}$

$\Rightarrow h(t) = - \frac{d \ln(S(t))}{dt}$

Donc $h(t) = \lim_{\delta t \to 0^+} \frac{P(t < T \leq t + \delta t \mid T > t)}{\delta t} = - \frac{d \ln(S(t))}{dt}$

② Mq $S(t) = \exp(-H(t))$

Ici on considère que $H(t) = \int_0^t h(u)\, du$

En ① on a mq $h(t) = - \frac{d \ln(S(t))}{dt}$

Comme $t \mapsto S(t)$ est une fonction de survie, on a nécessairement $S(0) = 1$

$\Rightarrow \ln(S(t)) - \underbrace{\ln(1)}_{0} = - \int_0^t h(u)\, du$

$\Rightarrow S(t) = \exp\left(- \int_0^t h(u)\, du\right)$

$= \exp(-H(t))$

③ On suppose mtn T discrète et $\Omega(T) = (t_i)_{i \in [\![1, k]\!]}$ avec $\forall i, j$ tq $i < j$ $t_i < t_j$.

On note $p(t_i) = \mathbb{P}(T = t_i) \quad i \in [\![1, k]\!]$

$S(t) = \mathbb{P}(T > t)$

$= \sum_{t_i > t} p(t_i)$

$= \prod_{t_i \leq t} \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$

④ $h(t_i) = \dfrac{p(t_i)}{S(t_{i-1})}$ avec $S(t_0) = 1$.

On sait que $p(t_i) = S(t_{i-1}) - S(t_i)$

$$\Rightarrow h(t_i) = \frac{S(t_{i-1}) - S(t_i)}{S(t_{i-1})} = 1 - \frac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$$

Il vient donc $S(t) = \prod_{t_i \leq t} \dfrac{S(t_i)}{S(t_{i-1})}$

$$= \prod_{t_i \leq t} (1 - h(t_i))$$

⑤ En cas continu, on a mq $S(t) = \exp(-H(t))$
et en discret, $S(t) = \prod_{t_i \leq t} (1 - h(t_i))$

Pour que la relation de la Q2 (i.e $S(t) = \exp(-H(t))$) s'applique au cas discret il nous faudrait : $H(t) = -\sum_{t_i \leq t} \ln(1 - h(t_i))$

__Exercice 2 :__ Soit T une va positive continue représentant durée de vie.
Soit S sa fonct° de survie, f sa densité et h fonct° de hasard.

① Il est clair que $\mathbb{E}[T] = \mathbb{E}\left[\int_0^T dt\right] = \int_0^\infty \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T>t\}}]\, dt = \int_0^\infty S(t)\, dt$

Notons $T_x = (T - x)\mathbb{1}_{\{T>x\}}$ et $S_x(t) = \dfrac{S(x+t)}{S(x)}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[T - x \mid T > x] = \int_0^\infty S_x(t)\, dt = \int_x^\infty \frac{S(t)}{S(x)}\, dt.$$

② $Var(T) = \mathbb{E}[T^2] - \mathbb{E}[T]^2$

$$= \int_0^\infty t^2 f(t)\, dt - \left(\int_0^\infty S(t)\, dt\right)^2$$

$$= -\int_0^\infty t^2\, dS(t) - \left(\int_0^\infty S(t) dt\right)^2$$

$$= -[t^2 S(t)]_0^\infty + 2\int_0^\infty t S(t)\, dt - \left(\int_0^\infty S(t)\, dt\right)^2$$

$$= 2\int_0^\infty t S(t) dt - \left(\int_0^\infty S(t)\, dt\right)^2$$

③ Engagement de l'assureur : $\Lambda_x = e^{-\delta T_x}$ $\qquad$ δ supposé positif

$\Rightarrow$ *VAP de l'engagement $\bar{A}_x = \mathbb{E}[\Lambda_x] = \int_x^\infty e^{-\delta t} f_x(t)\, dt = \int_x^\infty e^{-\delta t} h_x(t) S_x(t)\, dt$

* Variance de l'engagement $Var(\Lambda_x) = \int_x^{\infty} e^{-2\delta t} h_x(t) S_x(t) dt - (\bar{A}_x)^2$

$$= e^{-\delta t}\bar{A}_x - (\bar{A}_x)^2$$

Exercice 3 : $h(t) = \theta_k \quad t \in J_k = [\tau_{k-1}; \tau_k[\quad k \in [\![1; K]\!]$ avec $\tau_0 = 0$ et $\tau_K = \infty$.

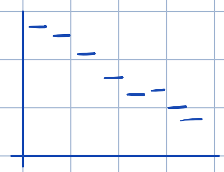
où $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_K)$ vecteurs de paramètres positifs.

① Si $K = 1 \Rightarrow t \mapsto h(t)$ est cte sur $[0; +\infty[$ et $\forall t \geq 0,\ h(t) = \theta$.

$\Rightarrow S(t) = \exp(-\theta t)$

$\Rightarrow T \sim \mathcal{E}(\theta)$

② $K > 1$



On sait que $S(t) = \exp(-\int_0^t h(u) du)$

Or on peut remarquer que

$$\int_0^t h(u) du = \sum_{k=1}^{K} (\tau_k \wedge t - \tau_{k-1})_+ \theta_k = \sum_{k=1}^{K} \pi_k(t) \theta_k$$

Où π_k représente le temps passé dans le $k^{\text{ème}}$ intervalle.

$$\Rightarrow S(t) = \exp(-\sum_{k=1}^{K} \pi_k(t) \theta_k)$$

Donc si $t \in J_k$, il vient :

$$S(t) = \exp(-\sum_{i=1}^{k-1} (\tau_i - \tau_{i-1})\theta_i - (t - \tau_{k-1})\theta_k)$$

③ Soit $x \in J_\ell$ avec $\ell \in \{1, \dots, K\}$

Notons $S_x(t) = \frac{S(x+t)}{S(x)} = \exp(-\theta_\ell(\tau_\ell \wedge (x+t) - x) - \sum_{k=\ell+1}^{K} \pi_k(t+x)\theta_k)$.

Il vient donc :

$$\mathbb{E}_x[T_x] = \mathbb{E}[T - x \mid T > x]$$

$$= \frac{1}{S(x)} \left(\int_x^{\tau_\ell} S(t) dt + \sum_{k=\ell+1}^{K} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} S(t) dt \right)$$

$$= \int_x^{\tau_\ell} e^{-\theta_\ell(t-x)} dt + \int_{\tau_\ell}^{\tau_{\ell+1}} e^{-\theta_\ell(\tau_\ell - x) - \theta_{\ell+1}(t - \tau_\ell)} dt + \sum_{k=\ell+2}^{K} \int_{\tau_{k-1}}^{\tau_k} e^{-\theta_\ell(\tau_\ell - x) - \sum_{j=\ell+1}^{k-1} -\theta_j(\tau_j - \tau_{j-1}) - \theta_k(t - \tau_{k-1})} dt$$

$$= \frac{1 - e^{-\theta_\ell(\tau_\ell - x)}}{\theta_\ell} + \frac{e^{-\theta_\ell(\tau_\ell - x)}(1 - e^{-\theta_{\ell+1}(\tau_{\ell+1} - \tau_\ell)})}{\theta_{\ell+1}} + e^{-\theta_\ell(\tau_\ell - x)} \sum_{k=\ell+1}^{K} \theta_k^{-1} e^{-\sum_{j=\ell+1}^{k-1} -\theta_j(\tau_j - \tau_{j-1})} (1 - e^{-\theta_k(\tau_k - \tau_{k-1})})$$

④ $\ln(\mathcal{L}(\theta)) = \sum_{i=1}^{m} \ln(f(t_i))$

$$= \sum_{i=1}^{m} \left(\ln(h(t_i)) - \int_0^{t_i} h(u) du \right)$$

On a $\ln(h(t_i)) = \sum_{k=1}^{K} \mathbb{1}_{\{T_i \in J_k\}} \ln(\theta_k)$ et $\int_0^{t_i} h(u) du = \sum_{k=1}^{K} \pi_k(t_i) \theta_k$

Ainsi, on obtient :

$$\ln(\mathcal{L}(\theta)) = \sum_{k=1}^{K} \Big[\underbrace{\sum_i^m \mathbb{1}_{\{T_i \in J_k\}}}_{\text{nb de décès observés dans le } k^{\text{ème}} \text{ intervalle}} \Big] \ln(\theta_k) - \sum_{k=1}^{K} \Big[\underbrace{\sum_i^m \pi_k(t_i)}_{\text{temps d'expositº total de la populatº dans le } k^{\text{ème}} \text{ intervalle}} \Big] \theta_k$$

⑤ Le $k^{\text{ème}}$ terme du vecteur du score s'écrit (en dérivant p/r à k)

$$U_k(\theta) = \frac{\partial}{\partial \theta_k} \ln(\mathcal{L}(\theta)) = \frac{\sum_i^m \mathbb{1}_{\{T_i \in J_k\}}}{\theta_k} - \sum_i^m \pi_k(t_i)$$

$$\Longrightarrow \hat{\theta}_k = \frac{\sum_i^m \mathbb{1}_{\{T_i \in J_k\}}}{\sum_i^m \pi_k(t_i)}$$ ← ratio d'un nombre de décès ramené à une expositº au risque.

⑥ $$I_{k\ell} = \delta_{k\ell} \frac{\sum_i^m \mathbb{1}_{\{T_i \in J_k\}}}{\theta_k \, \theta_\ell}$$

$$\Longrightarrow IC_\alpha = \Big[\frac{N_k}{R_k} - \phi^{-1}\big(1-\tfrac{\alpha}{2}\big) \frac{\sqrt{N_k}}{R_k} \, ; \, \frac{N_k}{R_k} + \phi^{-1}\big(1-\tfrac{\alpha}{2}\big) \frac{\sqrt{N_k}}{R_k} \Big]$$

ϕ fdr d'une $\mathcal{N}(0,1)$.

⑦ * Stat de Wald : $(\hat{\theta}-\theta_0)' I(\hat{\theta}) (\hat{\theta}-\theta_0)$

En détail : $$(\hat{\theta}-\theta_0)' I(\hat{\theta}) (\hat{\theta}-\theta_0) = \sum_{k=1}^{K} (\hat{\theta}_k - \theta_{0k})^2 I_{kk}(\hat{\theta})$$
$$= \sum_{k=1}^{K} \Big(\frac{N_k}{R_k} - \theta_{0,k} \Big)^2 \frac{R_k^2}{N_k}$$

Exercice 4 :

① Modèle AFT tq loi de durée de la forme :
$$\ln(T) = -X^T\theta + W$$

$$\rightarrow T = \exp(-X^T\theta + W)$$
$$= e^W \exp(-X^T\theta)$$
$$= T_0 \exp(-X^T\theta)$$

$$S(t \mid X;\theta) = \mathbb{P}(T_0 \exp(-X^T\theta) > t)$$
$$= \mathbb{P}(T_0 > t\exp(X^T\theta))$$
$$= S_0(t\exp(X^T\theta))$$

$$h(t \mid X;\theta) = h_0(t\exp(X^T\theta)) \exp(X^T\theta)$$

② Supposons que T_0 suit une loi de Weibull, de fonct° de hasard :

$$h_0(t) = \lambda\alpha t^{\alpha-1} \quad \lambda>0, \alpha>0$$

$$\begin{aligned} h(t|X;\theta) &= h_0(t\gamma)\gamma \quad \text{où } \gamma = \exp(X^T\theta) \\ &= \lambda\alpha(t\gamma)^{\alpha-1}\gamma \\ &= (\lambda\gamma^\alpha)\alpha t^{\alpha-1} \\ &= \lambda^*\alpha t^{\alpha-1} \end{aligned}$$

La fonct° de survie est donc :

$$S(t|X;\theta) = \exp(-\lambda^* t^\alpha)$$

③ On se place sous le modèle AFT, on veut déterminer si sous AFT on satisfait la relation d'un modèle PO i.e si on satisfait :

$$\frac{1-S(t)}{S(t)} = \frac{1-S_0^*(t)}{S_0^*(t)} \exp(X^T\beta)$$

Supposons que cela soit vrai,

$\Rightarrow$ vrai pour $X=0$ et comme $x \mapsto \frac{1-x}{x}$ est $\searrow$ strictement

$\Rightarrow S_0^*(t) = S_0(t) = e^{-\lambda t^\alpha}$

Et pour $X = (1, 0, \ldots, 0)$, il viendrait :

$$\frac{1-e^{-\lambda(e^{\theta_1})^\alpha t^\alpha}}{e^{-\lambda(e^{\theta_1})^\alpha t^\alpha}} = \frac{1-e^{-\lambda t^\alpha}}{e^{-\lambda t^\alpha}} e^{\beta_1}$$

Or cela n'est pas vérifié $\forall t \geq 0$. $\cancel{\alpha}$

④ Cherchons à caractériser la loi S_0 comme intersect° entre un modèle AFT et PO.

De façon analogue à ③, on mq $S_0^*(t) = S_0(t)$

Si $X = \left(-\frac{1}{\theta_1}\ln(t), 0, \ldots, 0\right)$, il vient

$$\frac{1-S_0(1)}{S_0(1)} = \frac{1-S_0^*(t)}{S_0^*(t)} \exp\left(-\frac{\beta_1}{\theta_1}\ln(t)\right)$$

$$\Rightarrow \forall t \geq 0, \; \frac{1-S_0(t)}{S_0(t)} = \frac{1-S_0(1)}{S_0(1)} t^{\frac{\beta_1}{\theta_1}}$$

De façon analogue avec $X_j = -\frac{1}{\theta_j}\ln(t)$, on remarque que les $\frac{\beta_j}{\theta_j}$ sont constants.

Notons $p = \frac{\beta_j}{\theta_j}$

$$\Rightarrow \frac{1-S_0(t)}{S_0(t)} = \frac{1-S_0(1)}{S_0(1)} t^p = (ct)^p$$

$$\Rightarrow S_0(t) = \frac{1}{1+(ct)^p}$$ $\longrightarrow$ fonction de survie d'une loi log-logistique.

Exercice 5 : $h(t|z) = z\,h(t)$

① $S(t) = \int S(t|z)\,\pi(z)\,dz$

À la date t, la population des survivants est :

$$\pi_t(z) = \frac{S(t|z)\pi(z)}{\int S(t|z)\pi(z)dz} = \frac{S(t|z)}{S(t)}\pi(z)$$

② On suppose $Z_0 \sim \Gamma(\lambda, k)$

$$\Rightarrow \pi_0(z) = \pi(z) = \frac{\lambda^k z^{k-1} e^{-\lambda z}}{\Gamma(k)} \qquad k>0,\ \lambda>0$$

On a $h(t|z) = z\,h(t)$,

$$\Rightarrow S(t|z)\,\pi(z) = \exp(-zH(t))\,\frac{\lambda^k z^{k-1} e^{-\lambda z}}{\Gamma(k)} \qquad \text{car } S(x|z) = \exp\left(-\int_0^x h(t|z)\,dt\right) = \exp(-H(x|z))$$

$$= \frac{\lambda^k}{(\lambda(t))^k}\underbrace{\frac{(\lambda(t))^k z^{k-1}\exp(-\lambda(t)z)}{\Gamma(k)}}_{\sim\Gamma(k,\lambda(t))} \qquad \text{avec } \lambda(t) = \lambda + H(t)$$

Si on isole le terme $\frac{\lambda^k}{(\lambda(t))^k}$, on reconnait une $\Gamma(k, \lambda(t))$

$$\Rightarrow S(t) = \frac{\lambda^k}{(\lambda(t))^k}$$

③ $\bar{h}(t) = \int_0^\infty h(t|z)\,\pi_t(z)\,dz$

En ① on a mq $\pi_t(z) = \frac{S(t|z)}{S(t)}\pi(z)$

et en ② on a mq $S(t) = \frac{\lambda^k}{(\lambda(t))^k}$

$$\Rightarrow \pi_t(z) = \frac{e^{-zH(t)}}{\frac{\lambda^k}{(\lambda(t))^k}}\,\frac{\lambda^k z^{k-1} e^{-\lambda z}}{\Gamma(k)} = \frac{1}{\Gamma(k)}\left((\lambda(t))^k z^{k-1} e^{-\lambda(t)z}\right)$$

$$\Rightarrow \bar{h}(t) = \int_0^\infty h(t|z)\,\pi_t(z)\,dz$$

$$= \int_0^\infty z\,h(t)\frac{1}{\Gamma(k)}\left((\lambda(t))^k z^{k-1} e^{-\lambda(t)z}\right)dz$$

$$= h(t)\int_0^\infty z\,f_{\Gamma(k,\lambda(t))}(z)\,dz$$

$$= h(t)\,\frac{k}{\lambda(t)}$$

On rq $h \nearrow$ + vite que $\bar{h}$ car $t \mapsto H(t)$ est $\nearrow$ donc le terme $\frac{k}{\lambda(t)} = \frac{k}{\lambda + H(t)} \searrow$

⑤ En supposant $\lambda = k = \frac{1}{\sigma^2}$ où $\sigma^2 = Var(Z)$, il vient

$$\bar{h}(t) = h(t)\,S(t)^{\sigma^2} = \frac{h(t)}{1+\sigma^2 H(t)}$$

$$\mathbb{E}[Z_t] = \frac{1}{1+\sigma^2 H(t)}$$

et $V(Z_t) = \sigma(t)^2$

$$= \frac{\sigma^2}{(1+\sigma^2 H(t))^2}$$

L'espérance de la fragilité des survivants ↘ avec le temps. C'est aussi le cas pour la variance, ce qui signifie d'une certaine manière que la population devient plus homogène avec le temps. Cependant, le coefficient de variation $\frac{\sqrt{V(Z_t)}}{\mathbb{E}[Z_t]}$ est constant ce qui signifie que d'un point de vue relatif, l'hétérogénéité de la populat° demeure la même.