

Modèles de durée / Examen du 27 juin 2012

Durée 1,5h – aucun document n'est autorisé

Problème : modèle à risques concurrents

On s'intéresse à un individu soumis à deux événements concurrents : le décès et l'entrée en dépendance. La durée avant le décès est notée D et la durée avant l'entrée en dépendance I . Les fonctions de survie associées sont notées respectivement S_D et S_I . On suppose ces 2 événements indépendants. Enfin, on note, pour $x \leq y$ fixés :

$$\varphi(x, y) = P(x < I < D \wedge y)$$

Question n°1 (4 points) : Donner l'expression de φ en fonction de S_D et S_I et f_D (densité de D) en utilisant un argument de conditionnement.

On suppose dans la suite que D et I suivent des lois exponentielles de paramètres respectifs λ_D et λ_I .

Question n°2 (3 points) : Donner l'expression de $\varphi(x, x+1)$. Que représente cette probabilité ?

Question n°3 (3 points) : Quelle est la loi de $I \wedge D$?

Question n°4 (4 points) : Déduire de ce qui précède la probabilité d'observer une entrée en dépendance entre x et $x+1$ sachant que l'individu est à risque en x . Vous donnerez l'interprétation de la formule obtenue.

Question n°5 (3 points) : On suppose maintenant que les lois de I et D sont données de manière non paramétrique via des probabilités conditionnelles de sortie $q_I(x)$ et $q_D(x)$. En vous inspirant de la question précédente, proposez une approximation de la probabilité d'observer une entrée en dépendance entre x et $x+1$ sachant que l'individu est vivant valide en x .

Question n°6 (3 points) : Vous disposez d'observations sur un portefeuille fermé de cotisants d'assurance dépendance dans lequel vous sont données, outre la date de naissance, la date de décès et la date d'entrée en dépendance (si l'un de ces 2 événements s'est produit). Comment estimez-vous $q_I(x)$?