Question de cours

Janvier 2013 - 2014
Séries temporelles

© Théo Jalabert

## 1. Processus stationnaire fort / faible

* Processus stationnaire fort $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$
→ $(X_t)$ invariante par translation, i.e. $(X_{t_1}, \dots, X_{t_k}) \overset{\mathcal{L}}{=} (X_{t_1+n}, \dots, X_{t_k+n})$
$\forall (t_1, \dots, t_k) \in \mathbb{Z}^k, \forall n \in \mathbb{Z}$.

* Processus stationnaire faible $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$
→ moyenne et autocovariance stables par translation
↳ • $t \mapsto \mu_X(t) = \mu \in \mathbb{R}, \forall t$
• $t \mapsto \gamma_X(t, t+h) = \gamma_X(h), \forall t$

* Reconnaître si un processus est stationnaire (fort ou faible)?
→ tracer l'autocorrélogramme et observer une décroissance exponentielle

## 2. Intérêt ARMA par rapport aux AR ou MA

→ moins de paramètres que les modèles AR ou MA
→ ARMA peut s'écrire comme MA(∞) et AR(∞) si racines de module > 1

### Difficultés statistiques pour identifier ordres d'un ARMA p.r/ à MA ou AR

→ ARMA peut s'écrire comme AR ou MA, donc paramètres très reliés
→ les racines des 2 $\Phi$ et $\Theta$ doivent être de module > 1
→ un AR(p) se caractérise par sa fonction d'autocorrélation partielle qui s'annule à partir de p+1.
→ un MA(q) se caractérise par sa fonction d'autocorrélation qui s'annule à partir de q+1.
→ un ARMA(p,q) se caractérise par les propriétés de ces corrélations canoniques => plus complexe statistiquement
↳ on trouve des bornes pour q et p et on cherche à réduire



Scanned by CamScanner

## 3. Cadre SARIMA plutôt qu'ARIMA

© Théo Jalabert

ARIMA → permet de stationnariser un processus afin d'avoir un processus asymptotiquement ARMA

SARIMA → généralisation des modèles ARIMA contenant une partie ~~stationnaire~~ saisonnière de nature aléatoire

## Quel modèle à partir des modèles ?

3 critères :
- parcimonie : nb de paramètres minimal
- prédiction :
  1. $R^2$ coef. de détermination
  2. $\bar{R}^2$
  
  } max
  3. $\sigma^2$ variance ↳ min
  4. Fisher ↳ max
- information :
  1. variance résiduelle
  2. AIC et AICC
  3. BIC
  4. Hannan - Quinn
  
  } min

Scanned by CamScanner

# Exo 1

© Théo Jalabert

$(\eta_t) \sim BBF(0, \sigma^2_\eta)$

0. * <u>Bruit Blanc Fort</u>
   - $\mathbb{E}[\eta_t] = 0$
   - $\mathbb{V}[\eta_t] = \sigma^2_\eta$
   - $(\eta_t)$ iid

   * <u>Bruit Blanc Faible</u>
   - $\mathbb{E}[\eta_t] = 0$
   - $\mathbb{V}[\eta_t] = \sigma^2_\eta$
   - $cov(\eta_t, \eta_{t'}) = 0$ , $\forall t \neq t'$

1. <u>$X_t = \eta_t \eta_{t-1}$ un $BB(0, \sigma^2_X)$</u>

- $\mathbb{E}[X_t] = \mathbb{E}[\eta_t \eta_{t-1}] = \mathbb{E}[\eta_t]\mathbb{E}[\eta_{t-1}]$ car $\perp\!\!\!\perp$.
$= 0 \times 0$
$= 0$

- $\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{V}[\eta_t \eta_{t-1}] = \mathbb{V}[\eta_t]\mathbb{V}[\eta_{t-1}] + \mathbb{V}[\eta_t]\mathbb{E}[\eta_{t-1}]^2 + \mathbb{V}[\eta_{t-1}]\mathbb{E}[\eta_t]^2$
$= (\sigma^2_\eta)^2 + 0 + 0$

- $cov(X_t, X_{t-1}) = cov(\eta_t \eta_{t-1}, \eta_{t-1}\eta_{t-2})$
$= \mathbb{E}[\eta_t \eta_{t-1} \eta_{t-1} \eta_{t-2}] - \mathbb{E}[\eta_t \eta_{t-1}]\mathbb{E}[\eta_{t-1}\eta_{t-2}]$
$= \underbrace{\mathbb{E}[\eta_t]}_{=0}\mathbb{E}[\eta^2_{t-1}]\mathbb{E}[\eta_{t-2}] - 0 \times 0$
$= 0$

$\hookrightarrow cov(X_t, X_{t-h}) = 0$ , $\forall h \neq 0$.

Donc $X_t \sim BB(0, \sigma^2_X)$

2. <u>$Y_t = (\eta_t + m)(\eta_{t-1} + m) \sim MA(1)$</u>

$(\eta_t)$ est iid, et $f : x \mapsto x + m$ est continue. Donc $f(\eta_t)$ est iid.

- $\mathbb{E}[Y_t] = \mathbb{E}[f(\eta_t) f(\eta_{t-1})] = \mathbb{E}[f(\eta_t)]\mathbb{E}[f(\eta_{t-1})]$ par indépendance
$= m \times m = m^2$

- $\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[f(\eta_t)]\mathbb{V}[f(\eta_{t-1})] + \mathbb{V}[f(\eta_t)]\mathbb{E}[f(\eta_{t-1})]^2 + \mathbb{V}[f(\eta_{t-1})]\mathbb{E}[f(\eta_t)]^2$
$= \sigma^2_\eta \times \sigma^2_\eta + 2m^2\sigma^2_\eta$
$= \sigma^2_\eta(\sigma^2_\eta + 2m^2)$



Scanned by CamScanner

$\bullet$ $\text{cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \text{cov}(f(\eta_t)f(\eta_{t-1}), f(\eta_{t-1})f(\eta_{t-2}))$ © Théo Jalabert

$$= \underbrace{\mathbb{E}[f(\eta_t)f(\eta_{t-1})f(\eta_{t-1})f(\eta_{t-2})]}_{} - \underbrace{\mathbb{E}[f(\eta_t)f(\eta_{t-1})] \times \mathbb{E}[f(\eta_{t-1})f(\eta_{t-2})]}_{\mathbb{E}[Y_t]\mathbb{E}[Y_{t-1}] = m^4}$$

car $(X_1, \dots, X_t)$ mutuellem$^{t}$ $\perp\!\!\!\perp$, alors $f(X_1, \dots, X_k) \perp\!\!\!\perp g(X_{k+1}, \dots, X_t)$ si $f$ et $g$ continue

$$\downarrow \ \mathbb{E}[f(\eta_t)]\,\mathbb{E}[f(\eta_{t-1})^2]\,\mathbb{E}[f(\eta_{t-2})]$$

$$= m \times \sigma_\eta^2 \times m - m^4$$

$$= m^2(\sigma_\eta^2 - m^2)$$

$\bullet$ $\text{cov}(Y_t, Y_{t-h}) = \mathbb{E}[f(\eta_t)f(\eta_{t-1})f(\eta_{t-h})f(\eta_{t-h-1})] - \mathbb{E}[f(\eta_t)f(\eta_{t-1})]\mathbb{E}[f(\eta_{t-h})f(\eta_{t-h-1})]$

$h > 1$

$$= \mathbb{E}[f(\eta_t)]\mathbb{E}[f(\eta_{t-1})]\mathbb{E}[f(\eta_{t-h})]\mathbb{E}[f(\eta_{t-h-1})] - m^4$$

$$= m^4 - m^4 = 0$$

Ainsi, $Y_t \sim MA(1)$.

## 3. Ecriture canonique

On travaille par identification :

$Y_t = \mu + \varepsilon_t - \theta \varepsilon_t$ où $\varepsilon_t \sim BB(0, \sigma_\varepsilon^2)$

$$\begin{cases} \mu = m^2 \\ \sigma_\eta^2(\sigma_\eta^2 + m^2) = \sigma_\varepsilon^2(1+\theta) \\ m^2(\sigma_\eta^2 - m^2) = \theta\sigma_\varepsilon^2 \end{cases}$$

$(1+\theta^2)\sigma^4 = \sigma^4 + 2m^2\sigma^2$

$\theta\sigma^4 = m^2\sigma^2$

$\Rightarrow \theta = \frac{m^2}{\sigma^2}$

$2m^2 = m^4$

$(1+\frac{m^4}{\sigma^2})\sigma^4 = \sigma^4 + m^4\sigma^2$

## Exo 2

voir sujet janv 2016-2017

Scanned by CamScanner