

Examen - Finance Mathématique**M2 SAF Pro****mercredi 14 janvier 2015**

Durée 2h, supports de cours et calculatrices non autorisés

La notation prendra en compte la qualité de la rédaction.

Question 1. On note $P(t, T)$ le prix en t d'une obligation ZC (zéro-coupon) de maturité T et de nominal égal à 1.

- Montrer par un raisonnement d'AOA (absence d'opportunité d'arbitrage) que la fonction $T \mapsto P(t, T)$ est décroissante.
- Soit $t \leq T_1 \leq T_2$. Retrouver l'expression du taux forward $F(t, T_1, T_2)$ dans la convention des intérêts composés, en fonction du prix d'obligations ZC que l'on précisera.

Question 2. On observe à la date t la cotation S d'un swap contre Euribor 6 mois de maturité 3 ans. On note R le taux variable, T_1, \dots, T_n les dates successives des flux de la jambe fixe et t_1, \dots, t_p les dates successives des flux de la jambe variable.

- Quelles durées séparent la date courante t des instants T_i , $i = 1, \dots, n$ pour un swap classique ayant ces caractéristiques ? Même question pour les instants t_j , $j = 1, \dots, p$.
- Pour un nominal d'une unité monétaire et une position en tant que receveur, donner l'expression des flux de la jambe fixe et de la jambe variable. Représenter sur un diagramme les flux associés à cette position.
- Exprimer en AOA la valeur en t du flux de la jambe fixe correspondant à la date T_i et du flux de la jambe variable correspondant à la date t_j . On donnera des expressions en fonction de prix d'obligations ZC que l'on précisera.
- En AOA, quelle relation doit vérifier en t la cotation S du swap ? Donner l'expression de S .
- On observe à la date t les cotations S_1, \dots, S_q associées à des swaps contre Euribor 6 mois de maturités $\tau_1 < \dots < \tau_q$.
 - En AOA, quel système linéaire est vérifié par les prix des ZC ?
 - Préciser dans quel cas ce système est inversible ? Pourquoi ce système n'est pas inversible en pratique ?
 - Proposer une méthode qui, à partir des cotations S_1, \dots, S_q , permet de construire une courbe de taux spot et sa courbe des taux forward associée.

Question 3. On rappelle que, dans un cadre HJM, la dynamique risque-neutre des taux forward instantanés est donnée par

$$df(t, T) = \sigma_f(t, T)\sigma^*(t, T)dt + \sigma_f(t, T)dW_t$$

où W est un mouvement brownien standard.

- Exprimer σ^* en fonction de σ_f .

Examen - Finance Mathématique**M2 SAF Pro****mercredi 14 janvier 2015**

Durée 2h, supports de cours et calculatrices non autorisés

La notation prendra en compte la qualité de la rédaction.

Question 1. On note $P(t, T)$ le prix en t d'une obligation ZC (zéro-coupon) de maturité T et de nominal égal à 1.

- Montrer par un raisonnement d'AOA (absence d'opportunité d'arbitrage) que la fonction $T \mapsto P(t, T)$ est décroissante.
- Soit $t \leq T_1 \leq T_2$. Retrouver l'expression du taux forward $F(t, T_1, T_2)$ dans la convention des intérêts composés, en fonction du prix d'obligations ZC que l'on précisera.

Question 2. On observe à la date t la cotation S d'un swap contre Euribor 6 mois de maturité 3 ans. On note R le taux variable, T_1, \dots, T_n les dates successives des flux de la jambe fixe et t_1, \dots, t_p les dates successives des flux de la jambe variable.

- Quelles durées séparent la date courante t des instants T_i , $i = 1, \dots, n$ pour un swap classique ayant ces caractéristiques ? Même question pour les instants t_j , $j = 1, \dots, p$.
- Pour un nominal d'une unité monétaire et une position en tant que receveur, donner l'expression des flux de la jambe fixe et de la jambe variable. Représenter sur un diagramme les flux associés à cette position.
- Exprimer en AOA la valeur en t du flux de la jambe fixe correspondant à la date T_i et du flux de la jambe variable correspondant à la date t_j . On donnera des expressions en fonction de prix d'obligations ZC que l'on précisera.
- En AOA, quelle relation doit vérifier en t la cotation S du swap ? Donner l'expression de S .
- On observe à la date t les cotations S_1, \dots, S_q associées à des swaps contre Euribor 6 mois de maturités $\tau_1 < \dots < \tau_q$.
 - En AOA, quel système linéaire est vérifié par les prix des ZC ?
 - Préciser dans quel cas ce système est inversible ? Pourquoi ce système n'est pas inversible en pratique ?
 - Proposer une méthode qui, à partir des cotations S_1, \dots, S_q , permet de construire une courbe de taux spot et sa courbe des taux forward associée.

Question 3. On rappelle que, dans un cadre HJM, la dynamique risque-neutre des taux forward instantanés est donnée par

$$df(t, T) = \sigma_f(t, T)\sigma^*(t, T)dt + \sigma_f(t, T)dW_t$$

où W est un mouvement brownien standard.

- Exprimer σ^* en fonction de σ_f .