Examen Séries temporelles 2010-2011

Master 2 SAF Pro

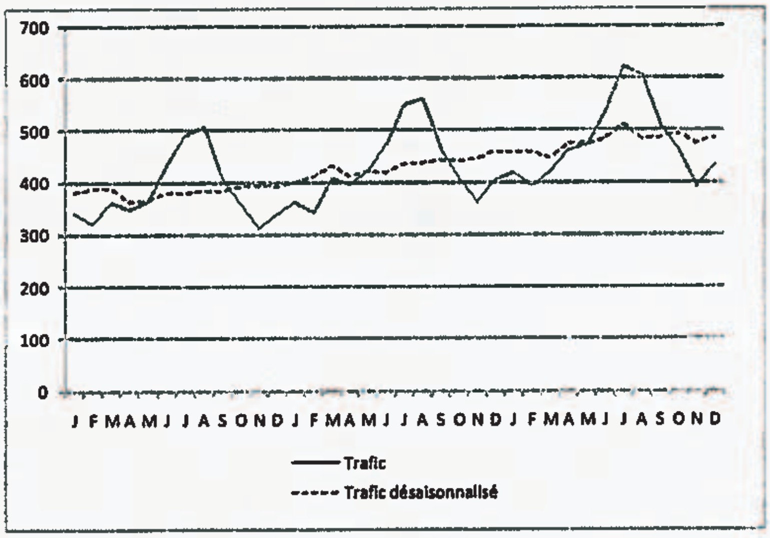
Sans document - Avec calculatrice - 2 heures

Exercice 1 : (6 points)

Le tableau suivant donne le trafic de voyageurs de janvier 1958 à décembre 1960 et la série corrigée des variations saisonnières.

Mois	Trafic					Trafic désaisonnal
Janvier	340					380,1215
Février	318					384,9549
Mars	362					387,2257
Avril	348					361,5174
Mai	363					362,8090
Juin	435					380,9549
Juillet	491	381,833	109,167	113,229	114,0451	376,9549
Août	505	383,667	121,333	122,604	123,4201	381,5799
Septembre	404	386,500	17,500	21,396	22,2118	381,7882
Octobre	359	A 390,33	-31,333	-32,646	-31,8299	390,8299
Novembre	310	394,708	-84,708	-84,271	-83,4549	393,4549
Décembre	337	398,625	-61,625	C -53,625	-52,8090	389,8090
Janvier	360	402,542	B -42,52	-40,938	-40,1215	400,1215
Février	342	407,167	-65,167	-67,771	-66,9549	408,9549
Mars	406	411,875	-5,875	-26,042	-25,2257	431,2257
Avril	396	416,333	-20,333	-14,333	D -13,517	409,5174
Mai	420	420,500	-0,500	-0,625	0,1910	419,8090
Juin	472	425,500	46,500	53,229	54,0451	417,9549
Juillet	548	430,708	117,292			433,9549
Août	559	435,125	123,875			435,5799
Septembre	463	437,708	25,292			E 440,7882
Octobre	407	440,958	-33,958			438,8299
Novembre	362	445,833	-83,833			445,4549
Décembre	405	450,625	-45,625			457,8090
Janvier	417	456,333	-39,333			457,1215
Février	391	461,375	-70,375			457,9549
Mars	419	465,208	-46,208			444,2257
Avril	461	469,333	-8,333			474,5174
Mai	472	472,750	-0,750			471,8090
Juin	535	475,042	59,958			480,9549
Juillet	622					507,9549
Août	606					482,5799
Septembre	508					485,7882
Octobre	461					492,8299
Novembre	390					473,4549
Décembre	432					484,8090
				-9,792	0,000	

Le graphique représente le trafic de voyageurs et la série corrigée des variations saisonnières en fonction du temps.



La série désaisonnalisée a été obtenue à partir d'une méthode de type moyenne mobile.

1. Expliquer la méthodologie et donner la moyenne mobile utilisée.
2. Donner les valeurs A, B, C, D, E.
3. Quelles méthodes proposeriez-vous pour estimer la tendance?

Exercice 2 : (5 points)

Soit $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc faible. On definit

$$X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k}, \qquad t \in \mathbb{Z},$$

où $0 < |\phi| < 1$.

1. Rappeler la définition d'un processus stationnaire faible et montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire faible.
2. Montrer que
$$X_t = \frac{1}{\phi} X_{t-1} + \eta_t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$
3. Calculer $\mathbb{E}[X_t \eta_{t+1}]$ et en déduire que $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ n'est pas le processus d'innovation de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.
4. Soit
$$\varepsilon_t = X_t - \phi X_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible et que $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] < \mathbb{E}[\eta_t^2]$.

5. Montrer que $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est le processus d'innovation de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 3 : (3 points)

On considère un processus stationnaire du second ordre $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ vérifiant

$$X_t = \varepsilon_t + \eta_t - \eta_{t-1}$$

où $\varepsilon = (\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ_ε^2 et η est un bruit blanc décorrélé de ε et de variance σ_ε^2.

Donner la représentation canonique de ce processus.

$$\left(1 - L + \frac{1}{4}L^2\right) X_t = (1+L)\,\varepsilon_t$$

Exercice 4 : (6 points)

On considère l'équation de récurrence

$\Delta = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2\times 1/4} = 2$

$$X_t - X_{t-1} + \frac{1}{4}X_{t-2} = \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1},$$

$\Rightarrow \underbrace{\left(1 - \tfrac{1}{2}L\right)^2}_{\Phi(L)} X_t = \underbrace{(1+L)}_{\Theta(L)}\varepsilon_t$

où $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc de variance σ_ε^2.

1. Existe-t-il une représentation canonique pour ce processus? Pour rpz canonique il faut $\begin{cases} \text{racines de } \Phi \text{ de module} > 1 \\ \text{—— } \Theta \text{ ——} \\ \Phi \text{ et } \Theta \text{ sont 1}^{\text{er}} \text{ entre eux.} \end{cases}$

   Or ici : racine de $\Theta = 1$ $\Rightarrow$ NON

2. Montrer qu'il existe une solution qui admet la représentation $X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \varepsilon_{t-j}$, avec des coefficients ψ_j (qu'on ne cherchera pas à déterminer) qui vérifient $\psi_0 = 1$ et $\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty$.

   $|1/2| < 1 \Rightarrow (1 - \tfrac{1}{2}L)$ inversible $\Rightarrow \Phi(L)$ inversible

   $\Rightarrow X_t = \frac{(1+L)}{\Phi^{-1}(L)}\varepsilon_t$ $\quad \Phi^{-1}(L) = \sum_{j=0}^{\infty} \left(\tfrac{1}{2}\right)^j L^j$

   $\Rightarrow X_t = \left((1+L)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^j L^j\right)\varepsilon_t$

   On nous demande pas de déterminer les ψ_j mais faisons le : $(1+L)\sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^j L^j = \sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^j L^j + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^j L^{j+1}$

   $= \sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^j L^j + 2\sum_{j=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^j L^j$

   $= \left(1 + 3\sum_{j=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^j L^j\right)$

   $\Rightarrow X_t = \sum_{j=0}^{\infty}\psi_j \varepsilon_{t-j}$ avec $\psi_j = \begin{cases} 1 \text{ si } j=0 \\ 3\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^j \text{ si } j\geq 1 \end{cases}$

   et on a bien $\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j| < \infty$

   Car $\sum_{j=0}^{\infty}|\psi_j| = 1 + 3\sum_{j=1}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^j$

   $= 1 + 3\times\frac{1/2}{1-1/2} = 4$

   $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^j L^j + \sum_{j=0}^{\infty}\left(\tfrac{1}{2}\right)^j L^{j+1}$

3. Montrer que $\psi_1 = 2$. $\quad \psi_1 = 3\times\left(\tfrac{1}{2}\right)^j = 3/2$

4. Montrer que pour $k \geq 2$, on a

$$\gamma_X(k) - \gamma_X(k-1) + \frac{1}{4}\gamma_X(k-2) = 0.$$

Donner la forme générale de l'équation de récurrence linéaire.

5. Montrer que l'on a aussi

$$\begin{aligned} \gamma_X(0) - \gamma_X(1) + \frac{1}{4}\gamma_X(2) &= 3\sigma_\varepsilon^2 \\ \gamma_X(1) - \gamma_X(0) + \frac{1}{4}\gamma_X(1) &= \sigma_\varepsilon^2. \end{aligned}$$