Examen Séries temporelles 2012-2013

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice - 2 heures

Questions de cours : (4 points)

1. Qu'est-ce qui caractérise un processus stationnaire faible (stationnaire à l'ordre 2)? Donner plusieurs caractérisations possibles en expliquant l'intérêt de ces caractérisations.

2. Expliquer ce qu'est la méthode d'estimation de Box et Jenkins. Donner les différentes étapes en expliquant leur intérêt, mais sans rentrer dans les détails mathématiques.

Exercice 1 : (6 points)

Soit $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc faible de variance σ_η^2.

0. Rappeler la définition d'un bruit blanc faible.

On definit

$$X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k}, \qquad t \in \mathbb{Z},$$

où $0 < |\phi| < 1$.

1. Rappeler la définition d'un processus stationnaire faible et montrer que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire faible.

2. Montrer que

$$X_t = \frac{1}{\phi} X_{t-1} + \eta_t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

3. Calculer $\mathbb{E}[X_t \eta_{t+1}]$ et en déduire que $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ n'est pas le processus d'innovation de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

4. Soit

$$\varepsilon_t = X_t - \phi X_{t-1}, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

Montrer que $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc faible et que $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] < \mathbb{E}[\eta_t^2]$.

5. Montrer que $(\varepsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est le processus d'innovation de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 2 : (5 points)

Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus stationnaires faibles vérifiant

$$\begin{aligned} Y_t &= \varphi_1 Y_{t-1} + X_t + U_t \\ X_t &= \varphi_2 X_{t-1} + V_t \end{aligned}$$

où $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(V_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ sont deux bruits blancs non corrélés de variances respectives σ_U^2 et σ_V^2. On suppose que $0 < |\varphi_1| < 1$ et $0 < \varphi_2 < 1$.

1. Soit

$$W_t = (1 - \varphi_1 L)(1 - \varphi_2 L) Y_t$$

Montrer que $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire faible et calculer γ_W.

2. En déduire que $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus MA dont on donnera la représentation canonique.

3. En déduire que $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est en général un processus ARMA dont on donnera la représentation canonique.

4. Donner la représentation MA(∞) de $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

5. En déduire la meilleure prévision linéaire $EL(Y_t|Y_{t-1},...)$ et la variance de l'erreur de prévision.

Exercice 3 : (5 points)

Soit $(\eta_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un bruit blanc fort de variance σ_η^2.

0. Rappeler la définition d'un bruit blanc fort.

On definit

$$X_t = aX_{t-1}\eta_{t-1} + \eta_t, \qquad t \in \mathbb{Z},$$

avec $0 < |a| < 1$. On admettra que $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est stationnaire fort.

1. Soit

$$Y_t = \eta_t X_t, \qquad t \in \mathbb{Z}.$$

(a) Montrer que $Y_t = aY_{t-1}\eta_t + \eta_t^2$ et que Y_t est mesurable par rapport à $\sigma\left(\eta_t, \eta_{t-1}, \ldots\right)$. En déduire

$$\mathbb{E}\left[Y_t\right] = \sigma_\eta^2$$

(Indication: conditionner par rapport à la filtration $\sigma\left(\eta_{t-1}, \ldots\right)$).

(b) Montrer que $\gamma_Y(h) = 0$ pour $|h| \neq 0$.

2. (a) En remarquant que $X_t = aY_{t-1} + \eta_t$, montrer que

$$\mathbb{E}\left[X_t\right] = a\sigma_\eta^2.$$

(b) On suppose que $\mathbb{E}\left[\eta_t^3\right] = 0$. Montrer que $\gamma_X(1) = a^2\sigma_\eta^4$ et $\gamma_X(h) = 0$ pour $|h| \neq 0, 1$.

Exercice 1 :

0. $(\eta_t) \sim BB(0, \sigma_\eta^2)$

c.e $* \mathbb{E}[\eta_t] = 0$

$* \mathbb{V}[\eta_t] = \sigma_\eta^2$

$* \forall t \neq t', \ Cov(\eta_t, \eta_{t'}) = 0$

On définit $X_t = -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k}$ $\quad |\phi| < 1$

1) (X_t) stationnaire faible si $\mathbb{E}[X_t] = \mu$ ⫫ t

$\gamma_X(k) = Cov(X_t, X_{t-k})$ ⫫ de t $\forall k$

2) Mq $X_t = \frac{1}{\phi} X_{t-1} + \eta_t$

$$X_t - \frac{1}{\phi} X_{t-1} = -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k} + \frac{1}{\phi} \sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k-1}$$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \phi^{k-1} \eta_{t+k-1}}_{= \sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k} + \eta_t}$$ change^t de compteur

$$= \eta_t$$

$\Rightarrow X_t = \frac{1}{\phi} X_{t-1} + \eta_t \quad \forall t \in \mathbb{Z}$

3) $\mathbb{E}[X_t \eta_{t+1}] = \mathbb{E}[-\sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k} \eta_{t+1}]$

$$= -\sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \gamma_\eta(k-1)$$

$$= -\phi \sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \gamma_\eta(k) = -\phi \sigma_\eta^2$$

$\Rightarrow Cov(X_t, \eta_{t+1}) = -\phi \sigma_\eta^2$

$\Rightarrow \eta_t$ n'est pas l'innovat° car les innovat° ne sont pas corrélés avec les valeurs passées du processus

ε_t innovat° $\leftrightarrow E L[\varepsilon_t | \underline{X_{t-1}}] = 0$

4) $\varepsilon_t = X_t - \phi X_{t-1} = X_t - \phi^2 (X_t - \eta_t) = (1-\phi^2) X_t + \phi^2 \eta_t$

$= \phi^2 \eta_t$

$\mathbb{E}[\varepsilon_t] = \mathbb{E}[X_t] - \phi \mathbb{E}[X_{t-1}]$

$= 0$

$\mathbb{V}[\varepsilon_t] = \mathbb{V}[X_t - \phi X_{t-1}]$

$$= \mathbb{V}[-\sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k} + \phi \sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k-1}]$$

$$= \mathbb{V}[-\sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k} + \phi^2 \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \phi^{k-1} \eta_{t+k-1}}_{\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k}}]$$

$\Rightarrow \varepsilon_t = X_t - \phi X_{t-1} = \phi^2 \eta_t$

$$= \mathbb{V}[\phi^2 \eta_t]$$

$$= \phi^4 \sigma_\eta^2$$

$\gamma_\varepsilon(k) = Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-k})$

$= Cov(\phi^2 \eta_t, \phi^2 \eta_{t-k}) = 0 \quad \forall k \neq 0$

$\Rightarrow (\varepsilon_t) \sim BB(0, \phi^2 \sigma_\eta^2)$

et $\mathbb{E}[\varepsilon_t^2] = \phi^2 \sigma_\eta^2 < \mathbb{E}[\eta_t^2] = \sigma_\eta^2$

car $|\phi| < 1$

5) $\varepsilon_t = X_t - \phi X_{t-1}$

On a vu que $\varepsilon_t = \phi^2 \eta_t$

$$\Rightarrow X_t = \phi X_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$= -\phi \sum_{k=1}^{\infty} \phi^k \eta_{t+k-1} + \varepsilon_t$$

$$= -\phi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \phi^{k-1} \eta_{t+k-1} + \varepsilon_t$$

$$= -\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \underbrace{\phi^2 \eta_{t+k}}_{\varepsilon_{t+k}}$$

$$\Rightarrow X_t = -\sum_{k=0}^{\infty} \phi^k \varepsilon_{t+k} \quad *$$

(ε_t) innovat° si $\varepsilon_t = X_t - EL(X_t \mid \underline{X_{t-1}})$

Avec * on voit que $EL(X_t \mid \underline{X_{t-1}}) = \phi X_{t-1}$

$$\Rightarrow X_t - EL(X_t \mid \underline{X_{t-1}}) = X_t - \phi X_{t-1} = \varepsilon_t$$

$\Rightarrow \varepsilon_t$ innovat°

Exercice 2 :

$$Y_t = \varphi_1 Y_{t-1} + X_t + U_t$$

$$X_t = \varphi_2 X_{t-1} + V_t$$

$U_t \sim BB(0, \sigma_U^2)$ $\quad V_t \sim BB(0, \sigma_V^2)$ $\quad \perp\!\!\!\perp$

On suppose $0 < |\varphi_1| < 1$ et $0 < |\varphi_2| < 1$

1) Soit $W_t = (1 - \varphi_1 L)(1 - \varphi_2 L) Y_t$

$$= Y_t - (\varphi_1 + \varphi_2) Y_{t-1} + \varphi_1 \varphi_2 Y_{t-2}$$

$\mathbb{E}[W_t] = 0$ car Y_t stationnaire

$$\mathbb{V}[W_t] = \mathbb{V}[Y_t - (\varphi_1 + \varphi_2) Y_{t-1} + \varphi_1 \varphi_2 Y_{t-2}]$$

$$= \mathbb{V}[Y_t] + (\varphi_1 + \varphi_2)^2 \mathbb{V}[Y_{t-1}] + \varphi_1^2 \varphi_2^2 \mathbb{V}[Y_{t-2}] + 2\Big(\underbrace{Cov(Y_t, -(\varphi_1+\varphi_2) Y_{t-1})}_{-(\varphi_1+\varphi_2)\varphi_1 \mathbb{V}[Y_{t-1}]} + \underbrace{Cov(Y_t, \varphi_1\varphi_2 Y_{t-2})}_{=0} + \underbrace{Cov(-(\varphi_1+\varphi_2) Y_{t-1}, \varphi_1 \varphi_2 Y_{t-2})}_{-(\varphi_1+\varphi_2)\varphi_1\varphi_2 \times \varphi_1 \mathbb{V}[Y_{t-2}]}\Big)$$

$$\mathbb{V}[Y_t] = \mathbb{V}[\varphi_1 Y_{t-1} + X_t + U_t]$$

$$\mathbb{V}[X_t] = \mathbb{V}[\varphi_2 X_{t-1} + V_t]$$

$$= \varphi_2^2 \mathbb{V}[X_{t-1}] + \sigma_V^2 \quad \text{car } V \perp X$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}[X_t] = \frac{\sigma_V^2}{1 - \varphi_2^2} \quad \text{car } X_t \text{ stationnaire}$$

$$\mathbb{V}[Y_t] = \varphi_1^2 \mathbb{V}[Y_{t-1}] + \frac{\sigma_V^2}{1-\varphi_2^2} + \sigma_U^2$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}[Y_t] = \frac{1}{1-\varphi_1^2}\left(\sigma_U^2 + \frac{\sigma_V^2}{1-\varphi_2^2}\right)$$

$$= \frac{\sigma_U^2(1-\varphi_2^2) + \sigma_V^2}{(1-\varphi_1^2)(1-\varphi_2^2)}$$

$$\Rightarrow \mathbb{V}[W_t] = \left[1 + (\varphi_1+\varphi_2)^2 + \varphi_1^2\varphi_2^2 + 2\left(-\varphi_1(\varphi_1+\varphi_2) - \varphi_1^2 \varphi_2 (\varphi_1 + \varphi_2)\right)\right] \frac{\sigma_U^2(1-\varphi_2^2) + \sigma_V^2}{(1-\varphi_1^2)(1-\varphi_2^2)}$$

$$\Rightarrow V[W_t] = \left[(1-\varphi_1^2)(1+\varphi_2^2) - 2\varphi_1^3\varphi_2\right] \underbrace{\frac{\sigma_U^2(1-\varphi_2^2)+\sigma_V^2}{(1-\varphi_1^2)(1-\varphi_2^2)}}_{\sigma_Y^2} = \sigma_W^2$$

$$\gamma_W(k) = Cov(W_t, W_{t-k}) = Cov(Y_t - (\varphi_1+\varphi_2)Y_{t-1} + \varphi_1\varphi_2 Y_{t-2}\ ,\ Y_{t-k} - (\varphi_1+\varphi_2)Y_{t-1-k} + \varphi_1\varphi_2 Y_{t-2-k})$$

$$= \begin{cases} \sigma_W^2 & \text{si } k=0 \\ -(1+\varphi_1\varphi_2)(\varphi_1+\varphi_2)\sigma_Y^2 & \text{si } |k|=1 \\ \varphi_1\varphi_2\sigma_Y^2 & \text{si } |k|=2 \\ 0 & \text{si } |k|>2 \end{cases}$$

$$= \left((1+\phi_1)(1+\phi_2) - 2\phi_1(\phi_1+\phi_2)(1+\phi_1\phi_2)\right)\frac{a^2\sigma_V^2+(1-\phi_2^2)\sigma_U^2}{(1-\phi_1^2)(1-\phi_2^2)}$$

$$\gamma_W(k) = Cov(W_t, W_{t+k}) = Cov(Y_t - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2}\ ,\ Y_{t+k} - (\phi_1+\phi_2)Y_{t+k-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t+k-2})$$

Déjà, si $|k|>2$ $\gamma_W(k)=0$

si $k=1$, $\gamma_W(1) = Cov(Y_t - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2}\ ,\ Y_{t+1} - (\phi_1+\phi_2)Y_t + \phi_1\phi_2 Y_{t-1})$

$= -(\phi_1+\phi_2)\sigma_Y^2 - \phi_1\phi_2(\phi_1+\phi_2)\sigma_Y^2$

$k=2$, $\gamma_W(2) = Cov(Y_t - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2}\ ,\ Y_{t+2} - (\phi_1+\phi_2)Y_{t+1} + \phi_1\phi_2 Y_t)$

$= \phi_1\phi_2\sigma_Y^2$

$k=-1$, $\gamma_W(-1) = Cov(Y_t - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2}\ ,\ Y_{t-1} - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-2} + \phi_1\phi_2 Y_{t-3})$

$= -(\phi_1+\phi_2)\sigma_Y^2 - (\phi_1+\phi_2)\phi_1\phi_2\sigma_Y^2$

$k=-2$, $\gamma_W(-2) = Cov(Y_t - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-1} + \phi_1\phi_2 Y_{t-2}\ ,\ Y_{t-2} - (\phi_1+\phi_2)Y_{t-3} + \phi_1\phi_2 Y_{t-4})$

$= \phi_1\phi_2\sigma_Y^2$

Donc W_t est bien stationnaire et $\gamma_W(k) = \begin{cases} \left((1+\phi_1)(1+\phi_2) - 2\phi_1(\phi_1+\phi_2)(1+\phi_1\phi_2)\right)\sigma_Y^2 & \text{si } k=0 \\ -(\phi_1+\phi_2)(1+\phi_1\phi_2)\sigma_Y^2 & \text{si } k=\pm 1 \\ \phi_1\phi_2\sigma_Y^2 & \text{si } k=\pm 2 \\ 0 & \text{si } k \notin [\![-2,2]\!] \end{cases}$