Feuille d'exercices n°7 – Duration et immunisation

1) Exercice sur le calcul des durations :

Aujourd'hui (date 0), on considère une obligation remboursable in fine de maturité 3 ans, remboursable au pair dont le coupon est versé aux dates 1, 2 et 3. Son taux nominal est de 5%.

1) Le taux actuariel (TRI des flux) de l'emprunt étant de 6%, quel est le prix de l'emprunt ?
2)
   a. Quelle est sa duration (version 1) ?
   b. Exprimez littéralement la duration (version 1) de cette obligation en fonction du taux actuariel r, du taux nominal k et de la maturité T puis retrouvez le résultat numérique du a.
3) On connaît les prix des zéro-coupons de prix de remboursement 1 de maturités 1 an, 2 ans et 3 ans respectivement B(0,1) = 0,939, B(0,2) = 0,89 et B(0,3) = 0,852.
   Calculez alors la duration (version 2) de l'obligation.
4) A quelle(s) condition(s) les durations versions 1 et 2 coïncideraient-elles ?

2) Exercice : *Duration d'une obligation couponnée remboursable in fine*

On considère une obligation dont le taux de coupon est c, et la valeur faciale F. Le coupon est annuel. On note t_1 la première date de tombée de coupon et T le nombre de flux. L'obligation est remboursée au pair.
Soit P le prix de l'obligation, *r* son taux de rentabilité interne discret et y son taux de rentabilité interne continu.

1) Montrez que $P(y) = F \times e^{-y \times t_1} \times \left[c \times \left[\dfrac{1-e^{-y \times T}}{1-e^{-y}} \right] + e^{-y \times (T-1)} \right]$.

2) Utilisez cette expression pour montrer que la duration D_1 est donnée par $D_1 = t_1 + 1/r + T \times \left[\dfrac{r - c - \dfrac{1+r}{T}}{r - c + c(1+r)^T} \right]$.

3) Considérons une obligation remboursable in fine de maturité 3 ans, remboursable au pair dont le coupon annuel est versé dans 1 an, 2 ans et 3 ans. Son taux nominal étant de 5% et son taux acturiel de 6%, calculer sa duration (version 1) de deux manières différentes.

4) Dans la suite, on examinera la duration D_1 comme une fonction de la « maturité » T, du taux actuariel discret r et du taux de coupon c. On utilisera la notation $D_1(T,r,c)$ et on supposera que le taux d'actualisation est positif.
   a) Vérifiez alors que la duration converge vers $t_1 + 1/r$ quand la maturité de l'obligation tend vers l'infini.
   b) Faites le lien avec une rente perpétuelle qui paye chaque année un coupon $c \times F$ dont le premier coupon est payé dans un an).
   c) Montrez que la duration diminue quand le taux de coupon augmente ($\dfrac{\partial D_1(T,r,c)}{\partial c} < 0$).

3) Exercice sur l'immunisation passive :

On considère une obligation versant annuellement des coupons et remboursable *in fine* en T au prix PR_T.
Notons k le taux nominal annuel, F la valeur nominale. Si l'obligation est émise en 0, les dates de tombée de coupon sont numérotées 1, 2, …, j, …, T (on suppose donc que le 1er coupon est versé 1 an après l'émission).
Dans la suite de l'exercice, on notera r le taux d'intérêt annuel unique et constant qui prévaut pour toute l'étude.

1) Ecrire le prix P_j de l'obligation à la date j, en considérant le taux d'actualisation r.
2) On suppose que les coupons perçus de 0 à j ont été à chaque fois réinvestis au taux r.
   Quelle est alors la valeur acquise par ces coupons en j ?
3) En j, on note V_j la valeur du portefeuille constitué par l'obligation de prix P_j et la valeur acquise par les coupons réinvestis. Montrer que $V_0 = P_0$.
4) On dit que le portefeuille est immunisé si $\dfrac{\partial V_j}{\partial r} = 0$ (i.e. il est insensible à une variation du taux d'intérêt).
   Montrer alors que dans ce cas j doit être égal à la duration à l'émission (en 0) de l'obligation.

<u>Remarque :</u> Pour un horizon d'investissement j proche de la duration à l'émission, le rendement du portefeuille ainsi constitué est très proche du rendement initial de l'obligation.

1) Exercice sur le calcul des durations :

Aujourd'hui (date 0), on considère une obligation remboursable in fine de maturité 3 ans, remboursable au pair dont le coupon est versé aux dates 1, 2 et 3. Son taux nominal est de 5%.

1) Le taux actuariel (TRI des flux) de l'emprunt étant de 6%, quel est le prix de l'emprunt ?
2)
   a. Quelle est sa duration (version 1) ?
   b. Exprimez littéralement la duration (version 1) de cette obligation en fonction du taux actuariel r, du taux nominal k et de la maturité T puis retrouvez le résultat numérique du a.
3) On connaît les prix des zéro-coupons de prix de remboursement 1 de maturités 1 an, 2 ans et 3 ans respectivement B(0,1) = 0,939, B(0,2) = 0,89 et B(0,3) = 0,852.
   Calculez alors la duration (version 2) de l'obligation.
4) A quelle(s) condition(s) les durations versions 1 et 2 coïncideraient-elles ?

0	1	2	3
	5%	5%	105%

1) $P_0 = \frac{5\%}{1.06^1} + \frac{5\%}{1.06^2} + \frac{105\%}{1.06^3} = 0.973269$

$= 97.33\%$

2) a.

$$D_0 = \frac{1}{97.32\%}\left(\frac{1 \times 0.05}{1.06^1} + \frac{2 \times 0.05}{1.06^2} + \frac{3 \times 1.05}{1.06^3}\right)$$

$$= 2.86 < 3$$

b. Expression de la duration

$$D = \frac{1}{P}\sum_{k=1}^{3}\frac{F_k \times k}{(1+r)^k} \quad \text{où } F_3 = 105\% \text{ et } F_{1,2} = 5\%$$

$$P = \sum_{k=1}^{3}\frac{F_k}{(1+r)^k} \Rightarrow D = \frac{1}{\sum_{k=1}^{3}\frac{F_k}{(1+r)^k}} \times \sum_{k=1}^{3}\frac{F_k \times k}{(1+r)^k}$$

3) 3) On connaît les prix des zéro-coupons de prix de remboursement 1 de maturités 1 an, 2 ans et 3 ans respectivement B(0,1) = 0,939, B(0,2) = 0,89 et B(0,3) = 0,852.
Calculez alors la duration (version 2) de l'obligation.

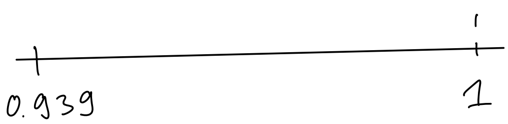
Duration (version 2)

$$D = \frac{\sum_{k=1}^{3} k \times F_k \times B(0,k)}{\sum_{k=1}^{3} F_k \times B(0,k)}$$

$$= \frac{1 \times 5\% \times 0.939 + 2 \times 5\% + 0.89 + 3 \times 105\% \times 0.852}{5\% \times 0.939 + 5\% \times 0.89 + 105\% \times 0.852}$$

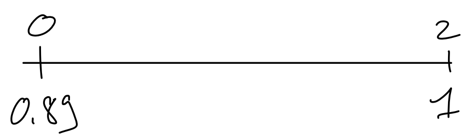
$D = 2.86$

$B(0,1)$



$$1 = B(0,1) \times (1 + r_{0,1}) \Rightarrow r_{0,1} = \frac{1}{B(0,1)} - 1$$
$$= 6.5\%$$

$B(0,2)$



$$B(0,2) \times (1 + r_{0,2})^2 = 1 \Rightarrow r_{0,2} = \sqrt[2]{\frac{1}{B(0,2)}} - 1 = 6\%$$

et de la même manière : $r_{0,3} = \sqrt[3]{\frac{1}{B(0,3)}} = 5.40\%$

On a $5\% \times B(0,1) + 5\% \times B(0,2) + 105\% \times B(0,3)$

$$= \frac{5\%}{(1 + r_{0,1})} + \frac{5\%}{(1 + r_{0,2})^2} + \frac{105\%}{(1 + r_{0,3})^3}$$

2) Exercice : *Duration d'une obligation couponnée remboursable in fine*

On considère une obligation dont le taux de coupon est c, et la valeur faciale F. Le coupon est annuel. On note t_1 la première date de tombée de coupon et T le nombre de flux. L'obligation est remboursée au pair.

Soit P le prix de l'obligation, r son taux de rentabilité interne discret et y son taux de rentabilité interne continu.

1) Montrez que $P(y) = F \times e^{-y \times t_1} \times \left[c \times \left[\frac{1-e^{-y \times T}}{1-e^{-y}} \right] + e^{-y \times (T-1)} \right]$.

2) Utilisez cette expression pour montrer que la duration D_1 est donnée par $D_1 = t_1 + 1/r + T \times \left[\frac{r - c - \frac{1+r}{T}}{r - c + c(1+r)^T} \right]$.

3) Considérons une obligation remboursable in fine de maturité 3 ans, remboursable au pair dont le coupon annuel est versé dans 1 an, 2 ans et 3 ans. Son taux nominal étant de 5% et son taux acturiel de 6%, calculer sa duration (version 1) de deux manières différentes.

4) Dans la suite, on examinera la duration D_1 comme une fonction de la « maturité » T, du taux actuariel discret r et du taux de coupon c. On utilisera la notation $D_1(T,r,c)$ et on supposera que le taux d'actualisation est positif.

a) Vérifiez alors que la duration converge vers $t_1 + 1/r$ quand la maturité de l'obligation tend vers l'infini.

b) Faites le lien avec une rente perpétuelle qui paye chaque année un coupon $c \times F$ dont le premier coupon est payé dans un an).

c) Montrez que la duration diminue quand le taux de coupon augmente ($\frac{\partial D_1(T,r,c)}{\partial c} < 0$).