Modèles financiers en assurance / Mai 2018

Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Éléments de correction

Thème : Calcul du SCR pour un contrat en UC avec garantie plancher

Les différentes questions nécessitent des développements argumentés et structurés pour répondre de manière détaillée et précise.

Le soin apporté à la rédaction et à la présentation sera pris en compte dans la notation. Une copie mal écrite ne sera pas corrigée.

On considère le bilan simplifié de l'assureur présenté sous la forme suivante :

BILAN en t

A_t	FP_t
	L_t

où :

- ✓ A_t : la valeur de marché de l'actif en t ;
- ✓ L_t : la valeur de marché du passif en t.

Question n°1 (2 points) : Rappelez comment sont calculés les différents postes de ce bilan et la contrainte que doit satisfaire FP_t. Vous préciserez comment le principe de valorisation « économique » se traduit en pratique pour le calcul de l'engagement d'un assureur vie (typiquement en présence d'interactions entre l'actif et le passif).

> Il s'agit de décrire la logique de « valeur économique » ou « valeur de marché » et, pour le cas particulier du calcul du BE en assurance vie, de rappeler le schéma vu en cours du GSE « risque neutre » qui alimente un modèle ALM « comptes sociaux » qui permet de produire des chroniques de flux de trésorerie[1].

On s'intéresse au calcul du SCR dans une logique de « modèle interne ».

Question n°2 (3 points) : Montrez comment obtenir la relation $SCR = FP_0 - VaR(FP_1; 0,5\%) \times P(0,1)$.

[1] Voir http://actudactuaires.typepad.com/laboratoire/2013/05/engagement-best-estimate-dun-contrat-d%C3%A9pargne-en-.html

Une partie des fonds propres de l'entité correspond au capital requis et l'autre partie reste disponible (Free Surplus). On est donc amené à présenter le bilan économique en $t=0$ selon le schéma suivant :

BILAN en 0

A_0^{FS}	FS_0
$A_0 - A_0^{FS}$	$SCR = FP_0 - FS_0$
	L_0

où :

A_0^{FS} : la valeur de marché de l'actif en représentation du surplus ;

FS_0 : la valeur initiale du surplus.

La condition de ruine à horizon un an doit donc être réajustée car elle ne doit pas tenir compte du surplus, cette quantité étant la propriété de l'actionnaire. La condition devient :

$$\Pr\left[\left(A_1 - A_1^{FS}\right) - L_1 > 0\right] \geq 99,5\%$$

On détermine le montant de surplus pour que l'égalité soit vraie :

$$\Pr\left[\left(A_1 - A_A^{FS}\right) - L_1 > 0\right] = 99,5\%$$

$$\Pr\left[A_1 - L_1 > A_1^{FS}\right] = 99,5\%$$

ce qui équivaut à dire que $A_1^{FS} = FS_1 = VaR\left(FP_1; 0,5\%\right)$.

Pour simplifier, on considère que le montant de surplus est investi sur un zéro-coupon de maturité un an (hypothèse forte). D'où, en notant $P(0,1)$ la valeur du zéro-coupon :

$$FS_0 = VaR\left(FP_1; 0,5\%\right) \times P(0,1)$$

$$SCR = FP_0 - FS_0 = FP_0 - VaR\left(FP_1; 0,5\%\right) \times P(0,1)$$

Question n°3 (3 points) : Montrez comment obtenir la relation $SCR = VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1 + L_1}{1 + R_1}\right) - L_0$ avec F_1 le flux de prestations de la première année et R_1 le rendement de l'actif sur cette période.

Pour le calcul du *SCR*, on ne s'intéresse qu'à la partie basse du bilan (c'est-à-dire à la fraction de l'actif en représentation des engagements), ce qui revient à se placer dans la situation où $FS_0 = 0$. Or, on peut écrire en fonction des équations ci-dessus :

$$A_1 - L_1 = A_0\left(1+R_1\right) - F_1 - L_1 = \left(SCR + L_0\right)\left(1+R_1\right) - F_1 - L_1 .$$

On en titre que $\frac{A_1 - L_1}{1+R_1} = \left(SCR + L_0\right) - \frac{F_1 + L_1}{1+R_1}$ ce qui conduit à observer que :

$$P\left(A_1 - L_1 \geq 0\right) = P\left(SCR \geq \frac{F_1 + L_1}{1+R_1} - L_0\right)$$

et donc la condition limite $P\left(A_1 - L_1 \geq 0\right) = 99{,}5\%$ impose que SCR satisfasse l'égalité :

$$SCR = VaR_{99,5\%}\left(\frac{F_1 + L_1}{1+R_1}\right) - L_0 .$$

Question n°4 (2 points) : Discutez les deux égalités ci-dessus, notamment le rôle de la marge pour risque. Rappelez brièvement la logique de calcul du SCR proposé par la formule standard, que vous comparerez aux approches ci-dessus.

Voir les pages 13 et 14 de cette présentation pour le premier point et le règlement délégué UE n°2015/35 pour la formule standard.

On considère maintenant le cas particulier d'un contrat d'épargne en unité de compte avec une garantie de remboursement des primes investies en cas de décès. On utilise les notations du cours : S pour l'unité de compte, $K = S_0$ la prime investie et on rappelle que le flux dû par l'assureur est de la forme

$$\Lambda = \left[K - S_{T_x}\right]^+ 1_{\{T_x < T\}} + S_T 1_{\{T_x \geq T\}} .$$

On suppose dans la suite que le risque de mortalité est parfaitement mutualisé et on ne considère donc que le risque financier dans les flux.

Question n°5 (3 points) : pour le risque ci-dessus :

- Écrire les flux avec la mutualisation du risque d'assurance ;
- Calculer le *best estimate* de ces flux en $t = 0$ et à n'importe quelle date ultérieure.

On a, avec les notations du cours, les flux avec le risque d'assurance mutualisé qui s'écrivent

$$\Lambda_t^f = E^{P^a}\left(\Lambda_t \middle| S\right) = \sum_{u=t}^{T-1} q_{x+u} \times \frac{l_{x+u}}{l_x} \times \left[K - S_{u+1-t}\right]^+ + \frac{l_{x+T}}{l_x} S_T$$

d'où l'on déduit le *best estimate* en *t* :

$$BE_t = \sum_{u=t}^{T-1} q_{x+u} \times \frac{l_{x+u}}{l_x} \times P\left(S_t, u-t+1\right) + \frac{l_{x+T}}{l_x} S_t$$

Question n°6 (4 points) : Écrire la variable $Z_1 = \dfrac{F_1 + L_1}{1 + R_1}$ en fonction de S_1 dans le cas du contrat ci-dessus, en supposant la marge pour risque proportionnelle au *best estimate* et que l'actif a le même rendement que *S*.

> On a de manière évidente
> $$\frac{1}{1+R_1} = \frac{S_0}{S_1},$$
> $$F_1 = q_x \times \left[K - S_1\right]^+$$
> et le *best estimate* en $t=1$ s'écrit d'après la question précédente
> $$BE_1 = \sum_{u=1}^{T-1} q_{x+u} \times \frac{l_{x+u}}{l_x} \times P\left(S_1, u-1+1\right) + \frac{l_{x+T}}{l_x} S_1$$
> ce qui permet d'écrire, comme $L_1 = \left(1+\tau_{RM}\right) \times BE_1$ et d'en déduit finalement
> $$Z_1 = \frac{S_0}{S_1}\left(q_x \times \left[K - S_1\right]^+ + \sum_{u=1}^{T-1} q_{x+u} \times \frac{l_{x+u}}{l_x} \times \left(1+\tau_{RM}\right) \times P\left(S_1, u-1+1\right) + \frac{l_{x+T}}{l_x}\left(1+\tau_{RM}\right) \times S_1 \right)$$
> et donc
> $$Z_1 = S_0 \left(q_x \times \left[\frac{K}{S_1} - 1\right]^+ + \sum_{u=1}^{T-1} q_{x+u} \times \frac{l_{x+u}}{l_x} \times \left(1+\tau_{RM}\right) \times \frac{P\left(S_1, u-1+1\right)}{S_1} + \frac{l_{x+T}}{l_x}\left(1+\tau_{RM}\right) \right)$$

Question n°7 (2 points) : Comment calculer $SCR = VaR_{99,5\%}\left(Z_1\right) - L_0$ en pratique ? L'une des hypothèses de la question précédente est particulièrement discutable : laquelle et pourquoi ?

> L'hypothèse que l'actif a le rendement de l'UC est fausse, puisqu'en toute rigueur, la garantie accordée à l'assuré sur le remboursement des primes investies devrait être adossée à un portefeuille de couverture ou à des options, dont le rendement est différent.
> L'estimation de la loi de Z_1 peut être effectuée simplement par simulation, sous la probabilité historique, dès lors que l'on spécifie la loi de S_1 et que l'on dispose d'une formule fermée pour le prix des options.

Question n°8 (1 point) : Quel risque important n'est pas pris en compte dans le calcul précédent ?

> Le risque associé à l'erreur de couverture (voir les détails dans le support du cours pour sa mesure)

Remarque : l'expression du flux $\Lambda = \left[K - S_{T_x}\right]^+ 1_{\{T_x < T\}} + S_T 1_{\{T_x \geq T\}}$ donnée dans l'énoncé est critiquable, il serait plus logique de prendre

$$\Lambda = \left(S_{T_x} + \left[K - S_{T_x}\right]^+ \right) 1_{\{T_x < T\}} + S_T 1_{\{T_x \geq T\}}$$

Puisqu'en cas de décès, on rembourse évidemment l'unité de compte.