TD Le producteur (1)

Exercice 1

Soit la fonction de production d'une entreprise :
$y = k^{1/4}(l-1)^{1/4}$ si $l > 1$
$y = 0$ si $l \leq 1$

y, k et l représentent respectivement les volumes de la production et des facteurs variables capital et travail (on raisonne à long terme).
r est le prix unitaire du capital et w celui du travail.

1- Ecrivez l'équation de l'isoquante $y = 1$ et vérifiez qu'elle soit décroissante et convexe.
2- Etablissez l'équation du $TMST_{k,l}$
3- Quelles sont les quantités de facteurs qui minimisent le coût d'une production $y = 1$ dans les cas suivants : Cas A : $r = 1$, $w = 1$ et Cas B : $r = 2$, $w = 3$?
Donnez l'interprétation économique de vos résultats.

Exercice 2

Partie 1

La fonction de production d'une entreprise est donnée par $Q(L,K) = 6L^{1/2}K^{2/3}$, où L et K représentent les quantités de travail et de capital.
1) Calculer les élasticités (partielles) de la production par rapport aux facteurs de production.
2) Déterminer le TMST
3) La fonction de production est-elle homogène ?
En déduire la nature des rendements d'échelle.
4) le théorème d'Euler ?

Partie 2

Déterminer si les fonctions suivantes sont homogènes et si elles vérifient le théorème d'Euler :
$Q(L,K) = L + K^{1/2}$
$Q(K,L,T) = \alpha.K + \beta.L + T$

Exercice 3

Soit une entreprise qui produit deux biens Y_1 et Y_2 à partir de deux inputs X_1, X_2 (par exemple le travail et le capital)
Pour produire q unités de bien Y_1 (resp. Y_2), il faut au moins q(resp.q) unités de X_1 et $12q$ (resp.$48q$)unités de X_2.

1) Ecrire les fonctions de production associés aux techniques qui permettent de produire les biens Y_1 et Y_2 .
2) Quelle est la forme des rendements d'échelle dans cette entreprise ?
3) On suppose que le producteur dispose de 100 unités de facteur 1 (X_1) et de 2400 unités de facteur 2 (X_2). Représenter dans le plan (Y_1, Y_2) l'ensemble des productions réalisables dans cette entreprise
4) Si l'entrepreneur a un comportement concurrentiel sur les marchés des biens Y_1 et Y_2 et si les prix de vente de ces biens sont respectivement 1 et 2 déterminer la décision de production
5) Quelle serait cette décision si les prix étaient respectivement de 2 et 1 ?

Exercice 4

Dans l'économie de Robinson ce dernier dispose de t heures totales de travail pour produire les biens 1 et 2 qu'il répartira entre un temps consacré à la production de bien 1, noté t_1, et un temps consacré à la production de bien 2, noté t_2. On note y_1 et y_2 les quantités produites par Robinson respectivement de bien 1 et de bien 2. Ses techniques de production sont alors représentées par les équations suivantes

(1) $y_1 = f_1(t_1) = t_1^{1/2}$
(2) $y_2 = f_2(t_2) = 2t_2$

Commentez les techniques de Robinson en termes de productivités, de coûts réels et de rendements d'échelle.

TD Le producteur (1)

Exercice 1

Soit la fonction de production d'une entreprise :

$y = k^{1/4}(l-1)^{1/4}$ si $l > 1$

$y = 0$ si $l \leq 1$

y, k et l représentent respectivement les volumes de la production et des facteurs variables capital et travail (on raisonne à long terme).

r est le prix unitaire du capital et w celui du travail.

1- Ecrivez l'équation de l'isoquante $y = 1$ et vérifiez qu'elle soit décroissante et convexe.
2- Etablissez l'équation du $TMST_{k,l}$
3- Quelles sont les quantités de facteurs qui minimisent le coût d'une production $y = 1$ dans les cas suivants : Cas A : $r = 1$, $w = 1$ et Cas B : $r = 2$, $w = 3$?
Donnez l'interprétation économique de vos résultats.

$$y = \begin{cases} k^{\frac{1}{4}} (L-1)^{\frac{1}{4}} & \text{si } L > 1 \\ 0 & \text{si } L \leq 1 \end{cases}$$

1) L'isoquante

$$y = k^{\frac{1}{4}} (L-1)^{\frac{1}{4}}$$

$$y^4 = k (L-1)$$

$$k = \frac{y^4}{(L-1)} \qquad y = 1 \qquad k = \frac{1}{(L-1)}$$

$$\frac{dk}{dL} = \frac{-1}{(L-1)^2}$$ qui est négatif donc l'isoquante est bien décroissante

$$\frac{d^2 k}{dL^2} = \frac{2}{(L-1)^3}$$ qui est positive donc l'isoquante est convexe

2) Equation du $TMST_{K,\ell}$:

$$= \frac{\partial y / \partial \ell}{\partial y / \partial K}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \ell} = \frac{1}{4} \cdot (\ell - 1)^{-3/4} \cdot K^{1/4}$$

$$\frac{\partial y}{\partial K} = \frac{1}{4} K^{-3/4} \cdot (\ell - 1)^{1/4}$$

Donc $TMST_{K,\ell} = \dfrac{K^{1/4} (\ell - 1)^{-3/4}}{K^{-3/4} (\ell - 1)^{1/4}} = \dfrac{K}{\ell - 1}$

3) La fonction étant strictement convexe, donc, il existe une unique solution donnée par l'égalité

TMST = rapport des prix

CAS 1 : $r = 1$ et $w = 1$

$$TMST_{K,\ell} = \frac{K}{\ell - 1} = \frac{1}{1} = 1$$

Rappelons que $K(\ell) = \dfrac{1}{\ell - 1}$, alors,

$$\frac{1}{(\ell - 1)^2} = 1 \Leftrightarrow \ell = 2 \qquad \Rightarrow K = 1$$

Cas B $r = 2$ et $m = 3$

$$TMST_{k,l} = \frac{k}{l-1} = \frac{m}{r} = \frac{3}{2}$$

De même, $\frac{1}{(l-1)^2} = \frac{3}{2} \Leftrightarrow (l-1)^2 = \frac{2}{3}$

$$l = \sqrt{\frac{2}{3}} + 1$$
$$k = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Pour le premier cas, à ces prix, la combinaison $k=1$ et $l=2$ est la combinaison qui minimise les coûts pour les producteurs

Pour le deuxieme cas, le prix du capital et du travail ont augmenté donc il va augmenter la quantité de capital puisque le capital est relativement moins cher que le travail

Exercice 2

Partie 1

La fonction de production d'une entreprise est donnée par $Q(L,K)=6L^{1/2}K^{2/3}$, où L et K représentent les quantités de travail et de capital.

1) Calculer les élasticités (partielles) de la production par rapport aux facteurs de production.
2) Déterminer le TMST
3) La fonction de production est-elle homogène ?
En déduire la nature des rendements d'échelle.
4) le théorème d'Euler ?

Partie 2

Déterminer si les fonctions suivantes sont homogènes et si elles vérifient le théorème d'Euler :

$Q(L,K) = L + K^{1/2}$

$Q(K,L,T) = \alpha.K + \beta.L + T$

$$Q(K,L) = 6L^{\frac{1}{2}} K^{\frac{2}{3}}$$

1) Elasticités partielles par rapport à 1 facteur de production

élasticité du travail :

$$e_L = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial L} \times \frac{L}{Q(K,L)}$$

$$e_K = \frac{\partial Q(K,L)}{\partial K} \times \frac{K}{Q(K,L)}$$

$$e_L = \frac{1}{2} \times 6 L^{-\frac{1}{2}} K^{\frac{2}{3}} \times \frac{L}{6L^{\frac{1}{2}}K^{2/3}} = \frac{1}{2}$$

$$e_K = \frac{2}{3} K^{-\frac{1}{3}} L^{\frac{1}{2}} \times \frac{K}{6L^{1/2}K^{2/3}} = \frac{2}{3}$$

2) $TMST_{K,L} = \frac{-dK}{dL} = \frac{PML}{PMK} = \frac{\frac{1}{2} \times 6 L^{-1/2} K^{2/3}}{\frac{2}{3} \times 6 K^{-1/3} L^{1/2}} = \frac{3}{4} \frac{K}{L}$

$TMST_{L,K} = \frac{-dL}{dK} = \frac{PMK}{PML}$

3) Euler : $x f'(x) + y f'(y) = h f(x,y)$
où h de degrée homogène

$f(tx, ty) = t^h f(x,y)$

$$Q(tL, tK) = 6 (tL)^{1/2} (tK)^{2/3}$$
$$= 6 t^{1/2} L^{1/2} t^{2/3} K^{2/3} = t^{7/6} (6 L^{1/2} K^{2/3})$$
$$= t^{7/6} Q(K, L)$$

homogeneité de $7/6 > 1$ donc croissant

$x = K$

$f'(x) = Pm_L$

$$L \times Pm_L + K \times Pm_K = \frac{7}{6} (6 L^{1/2} K^{2/3})$$
$$L \times \underbrace{(6 \times \tfrac{1}{2} L^{-1/2} K^{2/3})}_{Pm_L} + K \underbrace{(6 \times \tfrac{2}{3} K^{-1/3} L^{1/2})}_{Pm_K}$$

$$= 3 L^{1/2} K^{2/3} + K^{2/3} L^{1/2} = 7 L^{1/2} K^{2/3}$$

Exercice 3

↳ homogénéité ✓

Soit une entreprise qui produit deux biens Y_1 et Y_2 à partir de deux inputs X_1, X_2 (par exemple le travail et le capital)
Pour produire q unités de bien Y_1 (resp. Y_2), il faut au moins q(resp.q) unités de X_1 et $12q$ (resp.$48q$)unités de X_2.

1) Ecrire les fonctions de production associés aux techniques qui permettent de produire les biens Y_1 et Y_2 .
2) Quelle est la forme des rendements d'échelle dans cette entreprise ?
3) On suppose que le producteur dispose de *100* unités de facteur *1* (X_1) et de *2400* unités de facteur 2 (X_2). Représenter dans le plan (Y_1, Y_2) l'ensemble des productions réalisables dans cette entreprise
4) Si l'entrepreneur a un comportement concurrentiel sur les marchés des biens Y_1 et Y_2 et si les prix de vente de ces biens sont respectivement *1* et *2* déterminer la décision de production
5) Quelle serait cette décision si les prix étaient respectivement de *2* et *1* ?

Bien $\begin{cases} x_1 = aq \Rightarrow q = \frac{x_1}{a} \\ x_2 = bq \Rightarrow q = \frac{x_2}{b} \end{cases}$ $a = 1$, $b = 12$ Y_1

$$Y_1 = f(x_1, x_2) = Min\left\{ x_{11}, \frac{x_{21}}{12} \right.$$

$$x_1 = aq \Rightarrow q = \frac{x_1}{a} \qquad a = 1$$

$$x_2 = bq \Rightarrow q = \frac{x_2}{b} \qquad b = 48$$

$$Y_2 = f(x_1, x_2) = Min\left\{ x_{22}, \frac{x_{22}}{48} \right\}$$

Les rendements d'échelle seront constant car pas de substitution. Le TMS est pas important

3) 100 unités de facteur 1 (x_1)
2400 " " " 2 (x_2)

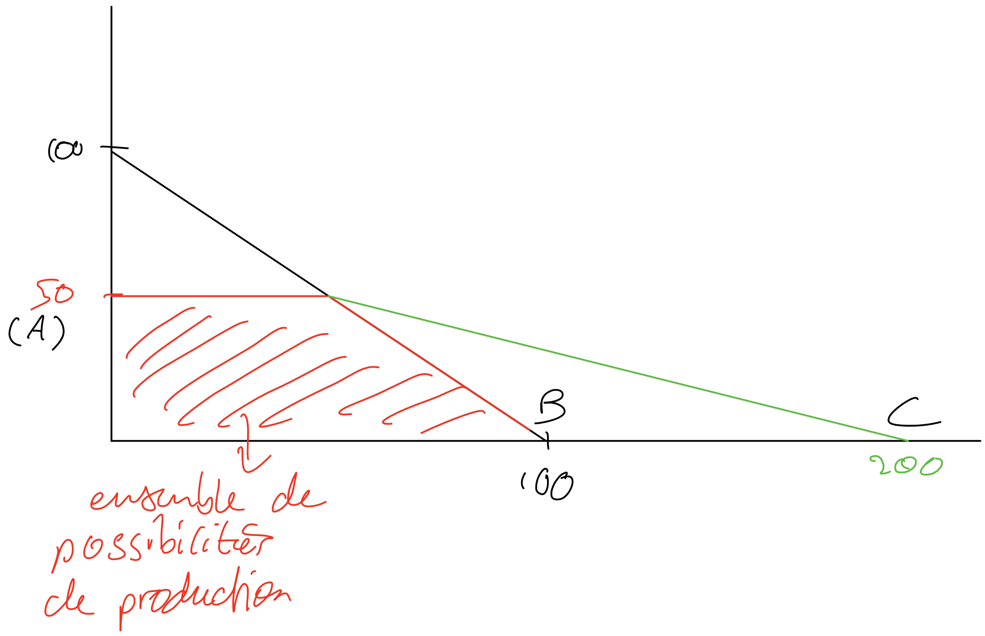
Pour input 1 $Y_1 + Y_2 = X_{11} + Y_{12} \leq 100$

$$\frac{X_{21}}{12} = Y_1 \Rightarrow 12 Y_1 = x_{21}$$

Pour input 2

$$12 Y_1 + 48 Y_2 = X_{21} + Y_{22} \leq 2400$$

$$\frac{x_{22}}{48} = Y_2 \Rightarrow X_{22} = 48 Y_2$$



4) $\boxed{RT = pq}$ $p_1 = 1$ $p_2 = 2$

$A(0, Y_2) = (0, 50) \Rightarrow RT = 2 \times 50 = 100$
$B(Y_1, 0) = (100, 0) \Rightarrow RT = 1 \times 100$
$C(Y_1, Y_2) = 166.6, 33.3 \Rightarrow RT = 133 = (66.6 \times 1 + 33.3 \times 2)$

La firme produit C $RT = 133 > 100$

5)
$P_1 = 2$ $P_2 = 1$
En A, $RT = 1 \times 50 = 50$
En B, $RT = 2 \times 100 = 200$ }
En C, $RT = 66.6 \times 2 + 33.3 \times 1 = 167$

Exercice 4

Dans l'économie de Robinson ce dernier dispose de *t* heures totales de travail pour produire les biens *1* et *2* qu'il répartira entre un temps consacré à la production de bien 1, noté t_1, et un temps consacré à la production de bien *2*, noté t_2. On note y_1 et y_2 les quantités produites par Robinson respectivement de bien *1* et de bien *2*. Ses techniques de production sont alors représentées par les équations suivantes

(1) $y_1 = f_1(t_1) = t_1^{1/2}$

(2) $y_2 = f_2(t_2) = 2t_2$

Commentez les techniques de Robinson en termes de productivités, de coûts réels et de rendements d'échelle.

Productivités Marginales

$$Pm_1 = \frac{\delta y_1}{\partial t_1} = \frac{1}{2} t_1^{-\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\delta P_{m_1}}{\delta t_1} = -\frac{1}{4} t_1^{-3/2} < 0$$

$$P_{m_2} = 2 = PM_2$$

Coûts réels

technique 1

CM réel

$$CM_1 = \frac{t_1}{Y_1} = \frac{t_1}{t_1^{1/2}} = t_1^{1/2} = \text{inverse de la } PM1$$

$$\frac{\delta CM_1}{\delta t_1} = \frac{1}{2} t_1^{-1/2} > 0$$

Coût marginal réel :

$$Cm_1 = \frac{\delta t_1}{\delta y_1} = \frac{1}{P_{m_1}} = 2t^{1/2}$$

technique 2

$$CM_2 \text{ reel} = \frac{t_2}{Y_2} = \frac{t/2}{2t/2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{\frac{2t_2}{t_2}}$$

$$Cm_2 \text{ reel} = \frac{1}{\frac{\delta f_2(t_2)}{\delta t_2}} = \frac{1}{2}$$

$$\underline{\underline{CM_2 \text{ reel}}} = \underline{\underline{Cm_2 \text{ reel}}}$$

L3 Actuariat Le producteur
TD2/3

Exercice 5 :

On considère la fonction de production définie par $y = A\left[a\, x_1^{-\alpha} + b\, x_2^{-\beta}\right]^{-\rho}$

où A, a, b, α, β et ρ sont des constantes positives

1) Exprimez β en fonction de α pour que le $TMST_{2,1}$ ne dépende que du rapport x_1/x_2
   On conserve cette hypothèse pour la suite de l'exercice
2) Exprimez ρ en fonction de α pour que la fonction soit homogène de degré *1*
3) Trouver la valeur de α pour laquelle l'élasticité de substitution est égale à *1/3*

Exercice 6 :

Soit une firme qui produit un output avec une technologie représentée par la fonction de production $f(x_1,x_2)$. La production se fait avec deux facteurs, x_1 et x_2, dont les prix unitaires sont respectivement w_1 *et* w_2.

La fonction de production est de type Cobb-Douglas : $f(x_1,x_2) = x_1^{\alpha} x_2^{\beta}$.

On suppose 0< α <1 ; 0< β <1 et β ≠ 1−α (A priori)

1- En utilisant le lagrangien, déterminer les quantités de facteurs utilisées à l'optimum par cette firme ?

2- Ecrire les fonctions de coût moyen et de coût marginal de long terme de la firme et établir la relation entre ces 2 coûts

Exercice 7 :

Soit une entreprise qui produit un bien (Y) à partir de trois inputs (X_1), (X_2)et (X_3) . La technique de production de cette dernière est décrite par la fonction $Y = X_1^{1/4} X_2^{1/4} X_3^{1/2}$

On suppose qu'à court terme le volume de l'input (X_3) est fixe pour toute production Y positive ou nulle. Il n'existe aucune rigidité sur (X_1), (X_2).

Les prix des inputs (X_1), (X_2)et (X_3) sont respectivement ½, ½ et *1*

En supposant l'entreprise concurrentielle sur le marché des inputs établir les fonctions de coûts à court et long terme

Annexe

Si on raisonne sur des accroissements très petits:

$$e_{f/x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}\frac{x}{f} = f'\frac{x}{f} = x\frac{f'}{f}$$

On peut transformer ce résultat. Rappel: soit une fonction f à valeurs positives et dérivable. Prenons son Log népérien Log f. On a affaire à une fonction composée (la fonction Log et la fonction f). La dérivée de Log f (dite dérivée logarithmique) est:

$$\frac{\mathrm{d}Log\,f}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}Log\,f}{\mathrm{d}f}.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$$

en vertu de la règle de dérivation des fonctions composées: $[u(v(x))]' = u'_v \,.\, v'_x$;

donc: $\frac{\mathrm{d}Log\,f}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{f}.f' = \frac{f'}{f}$ = taux de croissance instantané de f en x.

D'où: $e_{f/x} = x.\frac{\mathrm{d}Log\,f}{\mathrm{d}x}$ qu'on peut encore transformer car:

d $Log\,f$ (différentielle de $Log\,f$ = variation infinitésimale) = $\frac{\mathrm{d}Log\,f}{\mathrm{d}f}.\mathrm{d}f = \frac{1}{f}\mathrm{d}f = \frac{1}{f}.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x$

et d $Log\,x$ = 1/x . dx d'où dx = x . d$Log\,x$.

$$\text{D'où: } \frac{\mathrm{d}Log\,f}{\mathrm{d}Log\,x} = \frac{\frac{1}{f}\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\mathrm{d}x}{\frac{1}{x}\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\frac{x}{f} = f'.\frac{x}{f} = x.\frac{f'}{f} = e_{f/x}$$

Exercice 5 :

On considère la fonction de production définie par $y = A\left[a\, x_1^{-\alpha} + b\, x_2^{-\beta}\right]^{-\rho}$

où A, a, b, α, β et ρ sont des constantes positives

1) Exprimez β en fonction de α pour que le $TMST_{2.1}$ ne dépende que du rapport x_1/x_2

On conserve cette hypothèse pour la suite de l'exercice

2) Exprimez ρ en fonction de α pour que la fonction soit homogène de degré *1*
3) Trouver la valeur de α pour laquelle l'élasticité de substitution est égale à *1/3*

$$y = A\left[aX_1^{-\alpha} + b\,x_2^{-\beta}\right]^{-\rho}$$

$$TMST_{2,1} = \frac{a\alpha}{b\beta}\,\frac{x_2^{\beta+1}}{x_1^{\alpha+1}}$$

si $\alpha = \beta$ $\quad y = A\left[ax_1^{-\alpha} + b\,x_2^{-\alpha}\right]^{-\rho}$

2) $f(tx_1, tx_2) = t^{k} f(x_1, x_2)$

$$y(tx_1, tx_2) = A\left[a(tx_1)^{-\alpha} + b(tx_2)^{-\alpha}\right]^{-\rho}$$

$$= A\ t^{\alpha\rho}\left[ax_1^{-\alpha} + x_2^{-\alpha}\right]^{-\rho}$$

$$y(tx_1, tx_2) = t^{\alpha\rho}\, y(x_1, x_2)$$

$$\alpha\rho = 1$$

$$\rho = \frac{1}{\alpha}$$

$$f = A\left[\alpha x_1^{-\alpha} + b\,x_2^{-\alpha}\right]^{-\frac{1}{2}}$$

3) elasticité de substitution $\sigma_{2,1}$

$$\sigma_{2,1} = \frac{\dfrac{d(x_2/x_1)}{x_2/x_1}}{\dfrac{d(TRST_{2,1})}{TMST_{2,1}}} = \frac{d\log(x_2/x_1)}{d\log TMST_{2,1}}$$

$$TMST_{2,1} = \frac{a}{b}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha+1} \Rightarrow \log TMST_{2,1} = \log\frac{a}{b} + (\alpha+1)\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$$

avec $\alpha = \beta$

$$\frac{1}{\sigma_{2,1}} = \frac{d \log TMST_{2,1}}{d\log(x_2/x_1)} = \alpha+1 = 3$$

$$\alpha = 2$$

$$\sigma = \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{\sigma} = 3$$

Exercice 6 :

Soit une firme qui produit un output avec une technologie représentée par la fonction de production $f(x_1,x_2)$. La production se fait avec deux facteurs, x_1 et x_2, dont les prix unitaires sont respectivement w_1 et w_2.

La fonction de production est de type Cobb-Douglas : $f(x_1,x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$.

On suppose $0<\alpha<1$; $0<\beta<1$ et $\beta \neq 1-\alpha$ (A priori)

1- En utilisant le lagrangien, déterminer les quantités de facteurs utilisées à l'optimum par cette firme ?

2- Ecrire les fonctions de coût moyen et de coût marginal de long terme de la firme et établir la relation entre ces 2 coûts

$$f(x_1,x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta \qquad 0<\alpha<1,\quad 0<\beta<1,\quad \beta \neq 1-\alpha$$

On veut minimiser $w_1x_1 + w_2x_2$ (fonction de coût)

$$S.C : f(x_1,x_2) \leq x_1^\alpha x_2^\beta$$

$$x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0$$

$$\mathcal{L}(x_1,x_2,\lambda) = w_1x_1 + w_2x_2 + \lambda(y - x_1^\alpha x_2^\beta)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow w_1 - \lambda\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta = 0 \Rightarrow w_1 = \lambda\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow w_2 - \lambda\beta x_2^{\beta-1}x_1^\alpha = 0 \Rightarrow w_2 = \lambda\beta x_2^{\beta-1}x_1^\alpha \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow y - x_1^\alpha x_2^\beta = 0$$

$$\Rightarrow y = x_1^\alpha x_2^\beta \quad (3)$$ (saturation de la contrainte)

$$\frac{(1)}{(2)} = \frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta}{\beta x_2^{\beta-1}x_1^\alpha} \qquad TMST_{2,1} = \frac{P_1}{P_2}$$

$$\boxed{\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha}{\beta}\,\frac{x_2}{x_1}}$$

Avec ③ $x_1^\alpha = \frac{y}{x_2^\beta} \Rightarrow x_1 = \frac{y^{1/\alpha}}{x_2^{\beta/\alpha}}$

$$x_1 = y^{1/\alpha} x_2^{-\beta/\alpha}$$

$$\Rightarrow \frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha}{\beta} \frac{x_2}{y^{1/\alpha} x_2^{-\beta/\alpha}}$$

$$\Rightarrow \beta y^{1/\alpha} w_1 = w_2 \alpha x_2^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}}$$

$$\Rightarrow x_2^{\frac{\alpha+\beta}{\alpha}} = \frac{\beta y^{1/\alpha} w_1}{w_2 \alpha}$$

$$x_2^* = \left(\frac{\beta w_1}{\alpha w_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} \times y^{1/\alpha+\beta}$$

$$x_1^* = \left(\frac{\alpha w_2}{\beta w_1}\right)^{\beta/\alpha+\beta} y^{1/\alpha+\beta}$$

fonctions de demande des facteurs de production

2) $C(w_1, w_2, y) = w_1 \alpha x_1^*(w_1, w_2, y) + w_2 x_2^*(w_1, w_2, y)$

$$= w_1 \left(\frac{\alpha}{\beta} \frac{w_2}{w_1}\right)^{\beta/\beta+1} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + w_2 \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$= y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \underbrace{\left(w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\left(\beta/\alpha+\beta\right)}\right)\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\beta/\beta+1} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right)}_{A}$$

$$= y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} A$$

$$CM(w_1, w_2, y) = \frac{y^{1/\alpha+\beta} \times A}{y}$$

$$C(w_1, w_2, y) = y^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} A$$

$$Cm(w_1, w_2, y) = \frac{1}{\alpha+\beta} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}-1} A$$

Exercice 7 :

Soit une entreprise qui produit un bien (Y) à partir de trois inputs (X_1), (X_2)et (X_3) . La technique de production de cette dernière est décrite par la fonction $Y=X_1^{1/4}X_2^{1/4}X_3^{1/2}$

On suppose qu'à court terme le volume de l'input (X_3) est fixe pour toute production Y positive ou nulle. Il n'existe aucune rigidité sur (X_1), (X_2).

Les prix des inputs (X_1), (X_2)et (X_3) sont respectivement ½, ½ et *1*

En supposant l'entreprise concurrentielle sur le marché des inputs établir les fonctions de coûts à court et long terme

$$\underset{(x_1, x_2)}{\text{Min}} \quad \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \bar{x}_3^{\frac{1}{2}}$$

$$y \leq x_1^{1/4} x_2^{1/4} \bar{x}_3^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 \geq 0 \text{ et } x_2 \geq 0$$

Au min du coût, le rapport des productivités marginales = rapport de prix

$$\frac{\partial Y}{\partial x_1} = \frac{1}{4} x_1^{-3/4} x_2^{1/4} \bar{x}_3^{\frac{1}{2}} \Rightarrow \frac{\partial Y / \partial x_1}{\partial Y / \partial x_2} = \frac{P_1}{P_2} = \frac{\frac{1}{2}}{1/2} = 1$$

$$\frac{\partial Y}{\partial x_2} = \frac{1}{4} x_2^{-\frac{3}{4}} x_1^{1/4} \bar{x}_3^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = x_2 = \frac{Y^2}{\bar{x}_3} \Rightarrow \frac{x_2}{x_1} = 1 \Rightarrow x_2 = x_1$$

$$Y = x_1^{1/4} x_2^{1/4} \bar{x}_3^{\frac{1}{2}}$$

$$x_1 = x_2$$

$$Y = x_1^{1/2} \bar{x}^{\frac{1}{2}} \Rightarrow x_1 = \frac{Y^2}{\bar{x}_3}$$

$$C_{\text{court terme}}(Y, \bar{x}_3) = \frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \bar{x}_3$$

avec $x_1 = x_2$

$$C_C(Y, \bar{x}_3) = x_1 + x_3 \qquad x_1 = \frac{Y^2}{\bar{x}_3}$$

$$C_C = \frac{Y^2}{x_3} + \bar{x}_3$$

$$CM_C(Y, \bar{x}_3) = \frac{Y^{\cancel{2}}}{\bar{x}_3 \cancel{Y}} + \frac{\bar{x}_3}{Y} = \frac{Y}{\bar{x}_3} + \frac{\bar{x}_3}{Y}$$

$$\frac{\partial CM}{\partial Y} = 0 \Rightarrow \frac{1}{\bar{x}_3} - \frac{\bar{x}_3}{Y_2} = 0 \Rightarrow Y^2 = \bar{x}_3^2 \Rightarrow Y = \bar{x}_3$$

$CM_{min} = 2$

$$C_m = \frac{\partial C_c}{\partial y} = \frac{2Y}{\bar{X}_3}$$

la minimisation du cout totale long terme se fait en 2 temps

1) Calculer $\bar{X}_3$ qui minimise le coût total de court terme (dérive par rapport à $\bar{X}_3$)

2) on remplace dans la fonction de coût total de CT

$$C_c(Y, \bar{X}_3) = \frac{Y^2}{\bar{X}_3} + \bar{X}_3$$

$$\frac{\partial C_c}{\partial \bar{X}_3} = 0 \Rightarrow \frac{-Y^2}{\bar{X}_3^2} + 1 = 0 \qquad y = \bar{X}_3$$

$$C_c(Y, \bar{X}_3) = \frac{Y^2}{Y} + Y$$

$$= 2Y$$

$$CM(Y) = 2 = \frac{2Y}{Y}$$

$$C_m(Y) = 2$$