Produits dérivés Taux Libor

Les univers forwards

Evaluation forward sans modèle

- **Prix forward**

$$F_t(X_T, T) = B(t,T)^{-1}\mathbb{E}_{\mathsf{Q}}(\exp - \int_t^T r_s\, ds\ \ X_T|\mathcal{F}_t)$$

- Contrat forward sur un actif financier : $F_t(S_T, T) = \dfrac{S_t}{B(t,T)}$
- Contrat forward sur un taux prédéterminé $F_t(L(T-h,h),T) = L_t(T-h,h)$
- Contrat à terme sur le taux court $F_t(r_T, T) = f(t,T)$
- Taux de Swap forward, partant de T_0

$$ISW_t(T_0, T_N) = \frac{B(t,T_0) - B(t,T_N)}{\sum_{i=1}^N B(t,T_i)} = \frac{1 - B_{\mathbf{t}}(T_0,T_N)}{\sum_{i=1}^N B_{\mathbf{t}}(T_0,T_i)}$$

Marchés à terme et Probabilité forward neutre

Définition

$$\mathbf{F_t(T, X_T) = \mathbb{E}_t^{Q_T}[X_T]}$$

Nous avons plusieurs manières de caractériser la proba forward neutre

- En calculant sa densité par rapport à la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, grâce à la formule précédente

$$\frac{d\mathsf{Q}_T}{d\mathsf{Q}} = \frac{\exp - \int_0^T r_s ds}{B(0,T)} = \exp - \int_0^T (r_s - f(0,s))ds$$

- En écrivant que sous la probabilité $\mathbb{Q}_T$, la dynamique des contrats forwards $\dfrac{B(t,T+\theta)}{B(t,T)} = B_t(T, T+\theta)$ est martingale.
- $W_t^T = W_t - \int_0^t \Gamma(s,T)ds$ doit être un Q_T- mouvement brownien.
- Le taux spot forward est une Q_T martingale.

$$df(t,T) = \gamma(t,T)dW_t^T, \quad f(T,T) = r_T$$

Changement de Numéraire

Pricing sous différents numéraires

- Payoff H_T
- Soit un numéraire N_T associé à une proba risque neutre $\mathbb{Q}^N$
- Sous $\mathbb{Q}^N$, H/N est une martingale locale
- Expression pour la valeur à la date t

$$\frac{H_t}{N_t} = \mathbb{E}^N\left[\frac{H_T}{N_T}|\mathcal{F}_t\right]$$

Formule de Changement de Numéraire

- La valeur en t doit être indépendante du choix du numéraire

$$\begin{aligned} N_t\,\mathbb{E}^N\left[\frac{H_T}{N_T}|\mathcal{F}_t\right] &= M_t\,\mathbb{E}^M\left[\frac{H_T}{M_T}|\mathcal{F}_t\right] \\ \mathbb{E}^N\Big[G_T|\mathcal{F}_t\Big] &= \frac{M_t}{N_t}\,\mathbb{E}^M\left[G_T\frac{N_T}{M_T}|\mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

Correction de convexité

- Pour une large classe d'options exotiques
  - \- les payoff sont écrits à une mauvaise date
  - \- ou dans la mauvaise monnaie
- Cela concerne des produits simples en général
- Traditionnellement : ad hoc approximations pour le pricing
- Comment est ce que le prix de l'option est changé dans ce cas ?
- Principal outil : Changement de numéraire

Exemples à faire en exercices

dans le modèle de Vasicek, par exemple (concerne les 2 prochains Slides)

- Payoff écrits aux “mauvaises dates”
  - ⇒ Libor in Arrears
  - ⇒ Libor in Advance, payé à la date d’obervation
  - ⇒ Constant Maturity Swap, payé quand il est observé sans rentrer dans un swap
- Payoff dans les mauvaises monnaies
  - ⇒ Quantoed Libor
  - ⇒ Options avec garantie de change à maturité
- Future Contracts
- Sous-jacents avec des taux de dividendes stochastiques

Correction de Convexité pour des “Future”

- A cause des appels de marge des Future Contracts, le prix en t d'un Future de payoff Φ_T à maturité est donné par

$$\mathbf{Fut_t}(T,\Phi) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\Phi_T]$$

où $\mathbb{Q}$ est la probabilité risque-neutre.

- La correction de convexité est l'écart entre le prix du Future et le prix du Forward

  $\Rightarrow$ Si les taux sont déterministes, il n'y a pas de différence.

  $\Rightarrow$ Si les taux sont stochastiques, le prix forward est donné par

$$\mathbf{Forward_t}(T,\Phi) = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_\mathbf{T}}[\Phi_T]$$

où $\mathbb{Q}_\mathbf{T}$ est la probabilité forward neutre

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_\mathbf{T}}[\Phi_T] = \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\left(\exp - \int_t^T (r_s - f(t,s))ds\right)\Phi_T\right]$$

La correction de convexité est donnée par

$$\mathbf{Fut_t}(T,\Phi) - \mathbf{F_t}(T,\Phi) = \int_t^T du\, \mathrm{cov_t}^{\mathbb{Q}_\mathbf{u}}\left[r_u, \mathbf{Fut_t}(T,\Phi) - \mathbf{F_u}(T,\Phi)\right]$$

Preuve:

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}[\Phi_T] - \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_\mathbf{T}}[\Phi_T] = -\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\Big[\Big(\exp - (\int_t^T r_s - f(t,s)ds) - 1\Big)\Phi_T\Big]$$

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}}\Big[\int_t^T \exp - \Big(\int_t^u r_s - f(t,s)ds\Big)(r_u - f(t,u))du \quad \Phi_T\Big]$$

$$\int_t^T du\, \mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_\mathbf{u}}\Big[(r_u - f(t,u))\mathbf{F_u}(T,\Phi)\Big] = \int_t^T du\, \mathrm{cov_t}^{\mathbb{Q}_\mathbf{u}}\Big[r_u, \mathbf{F_u}(T,\Phi)\Big]$$

Toutes ces quantités nécessitent un modèle pour être évaluées

Libor Market Model (LMM) ou Brace Gatarek Musiela (BGM) model

et les options sur Libor

Retour au Libor en Avance

- Taux Libor forward, martingales sous la proba forward $\mathsf{Q}^{T+\delta}$

$$\delta L_t(T,\delta) = B_t(T,T+\delta)^{-1} - 1 = \frac{B(t,T) - B(t,T+\delta)}{B(t,T+\delta)}$$

- Libor en avance : Observe le taux Libor à la date T et paye immediatement à la date T

- Payer L à T $\Leftrightarrow$ Payer $L(1+\delta L)$ à $T+\delta$

$$\begin{aligned} V_t^{LIA} &= B(t,T+\delta)\mathbb{E}_t^{\mathsf{Q}^{T+\delta}}\Big[L(T,\delta)(1+\delta L(T,\delta))\Big] \\ &= B(t,T+\delta)\Big[L_t(T,\delta) + \delta\mathbb{E}_t^{\mathsf{Q}^{T+\delta}}\big[L(T,\delta)^2\big]\Big] \end{aligned}$$

- La correction repose sur le moment d'ordre deux du Libor. Peut être calculée à partir de prix d'options sur Libor avec Smile. Besoin de modèle.

Libor Market Model (LMM ou BGM)

Modèle pour les caplets sur un Libor de tenor donné

- By NAO, $\widehat{\mathbf{L}}_{\mathbf{t}}(\mathbf{T},\delta) = \mathbf{1} + \delta\mathbf{L}_{\mathbf{t}}(\mathbf{T},\delta) = \mathbf{B}_{\mathbf{t}}(\mathbf{T},\mathbf{T}+\delta)^{-\mathbf{1}}$ est martingale sous $\mathsf{Q}^{T+\delta}$
- comme zero-coupon $B(t,T)$ dans le numeraire $B(t,T+\delta)$
- $\delta L_t(T,\delta)$ est lui aussi martingale $\mathsf{Q}^{T+\delta}$, difference de deux actifs $\widehat{L}_t(T,\delta)$ et 1
- Il est connu en T, payé en $T+\delta$, et considéré constant entre T et $T+\delta$

Dynamique des taux Libor, LMM modèle

- Modélisation de type relative:

$$dL_t(T,\delta) = L_t(T,\delta) \ < \kappa_t(T,\delta), dW_t^{T+\delta} >$$

- $d\widehat{L}_t(T,\delta) = \delta L_t(T,\delta) \ < \kappa_t(T,\delta), dW_t^{T+\delta} >= (\widehat{L}_t(T,\delta) - 1) < \kappa_t(T,\delta) dW_t^{T+\delta} >$

Liens entre LMM et HJM Volatilités

Liens entre $\Gamma(t,T)$ et $\kappa_t(T,\delta)$

- La volatilité de $B_t(T,T+\delta)^{-1}$ est $-\mathbf{\Gamma_t(T,T}+\delta) = -\mathbf{\Gamma(t,T}+\delta) + \mathbf{\Gamma(t,T)}$
- La volatilité de $\widehat{L}_t(T,\delta)$ est $(1-\widehat{L}_t(T,\delta)^{-1}\kappa_t(T,\delta)$
- $\Gamma_t(T,T+\delta) = -\frac{\delta L_t(T,\delta)}{1+\delta L_t(T,\delta)}\,\kappa_t(T,\delta)$ et

LMM sous la proba risque neutre: $dW_t = dW_t^{T+\delta} + \Gamma(t,T+\delta)dt$

- LMM (BGM) Risque neutre

$$\frac{dL_t(T,\delta)}{L_t(T,\delta)} = -\frac{\delta L_t(T,\delta)}{1+\delta L_t(T,\delta)}\|\kappa_t(T,\delta)\|^2 dt + <\kappa_t(T,\delta), dW_t>$$

- Si les volatilités $\kappa_t(T,\delta)$ sont déterministes, les volatilités $\Gamma_t(T,T+\delta)$ ne peuvent être déterministes, et reciproquement.

Option sur zéro-coupon et Caplets

Option sur zéro-coupon

On considère un Call de strike K et de maturité T_C, sur le zéro-coupon $B(t,T_f)$, $(T_f \geq T_C)$. Son prix à l'instant t est donné par

$$\text{Call}_t(T_C, K, T_f)/B(t, T_C) = \mathbb{E}_t^{Q_{T_C}}\left((B(T_C, T_f) - K)^+\right) \tag{1}$$

- L' évaluation forward-neutre conduit à considérer comme vrai sous-jacent le ZC forward $B_t(T_C, T_f)$
- Si les vol des ZC sont déterministes, on a la formule de Black, (Black Scholes sans tx) dans l'univers forward
- La vol du ZC forward est $\Gamma_t(T_C, T_f) = \Gamma(t,T) - \Gamma(t, T_C)$ qui est déterministe
- La variance est $(T_C - t)\Sigma_t^2(T_C, T_f) = \int_t^{T_C} \mid \Gamma_s(T_C, T_f) \mid^2 ds$

- Le prix forward du Call est
  - $\mathrm{Call}_t(T_C, K, T_f)/B(t, T_C) = \mathbf{B_t(T_C, T_f)\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_0)}$
  - $d_1(t, T_C) = \frac{1}{\Sigma_t(T_C, T_f)} \sqrt{T_C - t}\mathrm{Ln}\left(\frac{B_t(T_C, T_f)}{K}\right) + \frac{1}{2}\Sigma_t(T_C, T_f)\sqrt{T_C - t}$
  - $d_0(t, T_C) = d_1 - \Sigma_t(T_C, T_f)\sqrt{T_C - t}$
- **Très important !** La couverture se fait à partir de $\mathcal{N}(d_1)$ zéro-coupons de maturité T_f et $\mathcal{N}(d_0)$ zéro-coupon de maturité T_C. (Pourquoi?)

Caplets et Options sur Libor

Caplet sur Libor de tenor δ

- Un caplet de strike K et de maturité T_C est un produit dérivé qui garantit la possibilité d'emprunter en T_C au taux Libor de tenor δ au niveau maximum de K. Le paiement aura lieu en $T_C + \delta$.
- Le flux garanti est $\delta(L(T_C, \delta) - K)^+$ en $T_C + \delta$.

Equivalent Put Options sur ZC

- L'opération est équivalente à acheter en T_C une option de vente sur zéro-coupon de maturité $T_f = T_C + \delta$ de strike $\frac{1}{1+\delta K}$, en nombre $1 + \delta K$.
- C'est donc ($1 + \delta K$) Puts de maturité T_C, de strike $\frac{1}{1+\delta K}$, sur un ZC de maturité $T_C + \delta$

Hedging et choix de modèles

Le Point de vue ZC

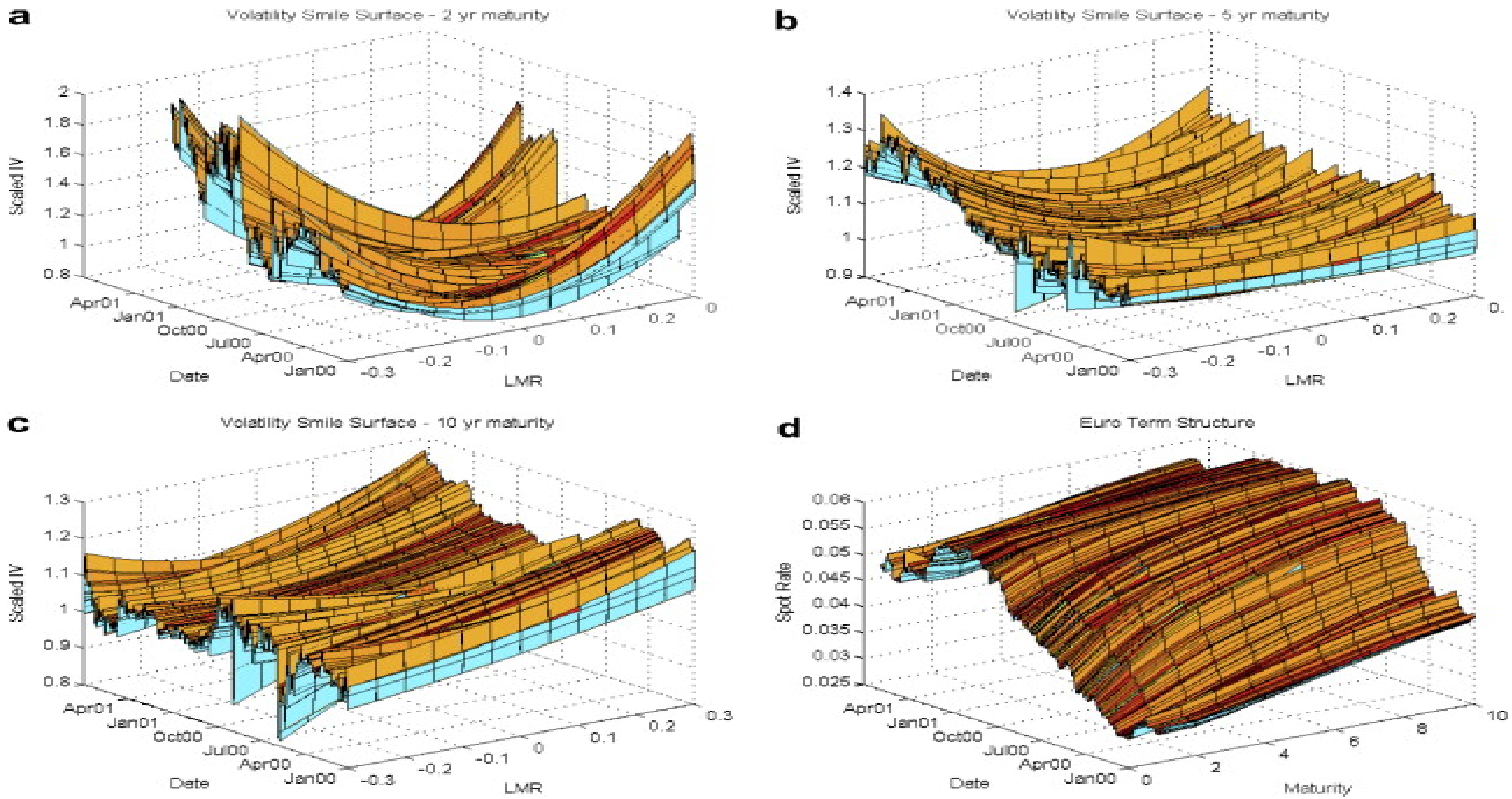
- Un ZC est un prix d'un actif négocié, et l'option est "hedgeable" à l'aide de deux zéro-coupons $B(t, T_C)$ et $B(t, T_C + \delta)$ lorsque la volatilité est déterministe.
- Dans la vision taux, les instruments de couverture sont moins clairs. L'idée est maintenir une couverture en *Delta* vue comme une insensibilité au niveau du taux, considéré comme un pur sous-jacent, alors que dans le meilleur des cas il est une différence de deux actifs.

Le choix de modèle

- HJM est orienté vers les zéros coupons et leurs prix
- LMM à vol déterministe est orienté directement taux Libor, d'où la formule de Black sur les taux, qui est la solution de marché
- Comme nous l'avons vu, les notions de volatilité $\gamma(t, \theta)$ pour HJM et $\kappa_t(T, \delta)$ pour LMM diffèrent sérieusement

Caps et Floors et Stripping de la volatilité des Caps

- Caps et floors sont des baskets de Calls et Puts sur des Libor forwards avec le même taux de strike, **le taux de swap ISW si on est à la monnaie**.
- A cause de la complexité de leur description, (un cap 10 ans = 39 caplets!), le marché les quote en termes de prime ou d'une simple " volatilité flat"
- Cette volatilité implicite a comme propriété qu'insérée dans la formule de pricing des caplets, de type Black, elle permette de reproduire la prime.
- En réalité les caplets ont une structure par terme de volatilité prononcée. Typiquement, il y a persistence d'une "bosse" de volatilité qui se situe habituellement entre 6 mois and 2 ans.
- Le processus qui consiste à reproduire la volatilité implicite des caplets à partir des volatilités implicites des caps données par les prix de marché est appelé le stripping de volatilité



Cap Volatility Surfaces 2000, a=2yr, b=5yr, c=10yr)

Ref: The economic determinants of interest rate option smiles, Gupta, Subrah.., Journal/ Banking/Finance2008)

Compléments

Calibration de la volatilité des caps: forme deterministe paramétrique

Formule de Rebonato

- Volatilité paramétrique $|\kappa(t)| = (\alpha + \beta t)\exp(-\lambda t) + \mu$
- Le résultat du strippping est une suite $\zeta_j, j = 0, ..., N-1$ of N volatiliés de caplet à la monnaie at the money.
- En fait, ζ_j est la volatilité implicite à la monnaie du caplet de maturità la monnaie T_j .
- Les paramètres $(\alpha, \beta, \rho, \mu)$ sont calibrés à partir des ζ_j