Quest° de cours

1

1. $F \in D(G) \iff \exists (a_n)_n > 0 \, ; \, b_n \, / \, P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} G(x)$

avec $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

où les X_i sont i.i.d de fonct° de répartit° F

2. $F \in D(G_\xi) \iff \exists \beta(\cdot) > 0 \, / \, \lim\limits_{u \to x^F} \sup\limits_{0 < x < x^F - u} \left| F_u(x) - G^P_{\xi, \beta(u)}(x) \right| = 0$

3. Si $G \in D(G_\xi)$, alors $\exists u_n \, / \, n \bar{G}(u_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \tau$

avec $\left| \begin{array}{l} u_n = a_n x + b_n \\ P(M_n \leq a_n x + b_n) \xrightarrow[n \to +\infty]{} G_\xi(x) \end{array} \right.$

Or $u_n \xrightarrow[n \to +\infty]{} x^F$

Donc $\lim\limits_{x \to x^F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{n \bar{F}(u_n)}{n \bar{G}(u_n)}$

D'où $n \bar{F}(u_n) \longrightarrow c\tau$

Par ailleurs $n \bar{G}(u_n) \longrightarrow \tau \iff P(M_n \leq u_n) \longrightarrow e^{-\tau}$

D'où $\tau = -\ln(G_\xi(x))$.

Comme $n \bar{F}(u_n) \longrightarrow c\tau$, on a $P(\underbrace{M'_n}_{\sim F^n} \leq a_n x + b_n) \longrightarrow e^{-c\tau}$

Or $e^{-c\tau} = [G_\xi(x)]^c$

Par calculs, on trouve $P(M'_n \leq A_n x + B_n) \longrightarrow G_\xi(x)$

avec $A_n = \frac{a_n}{c^\xi}$ et $B_n = b_n + A_n \cdot \frac{c^\xi - 1}{\xi}$

Réciproque. On a
$$\begin{cases} F^n(\ldots) \longrightarrow \Lambda(x) \\ \qquad \longrightarrow e^{-\tau_F} \\ G^n(\ldots) \longrightarrow \Lambda(x+b) \\ \qquad \longrightarrow e^{-\tau_G} \end{cases}$$

D'où
$$\begin{cases} \tau_F = -\ln(\Lambda(x)) \\ \tau_G = -\ln(\Lambda(x+b)) \end{cases}$$

D'où
$$\lim_{x \to x^F} \frac{\bar{F}(x)}{\bar{G}(x)} = \lim_{n \to +\infty} \frac{n \bar{F}(c_n x + d_n)}{n \bar{G}(c_n x + d_n)}$$
$$= \frac{\tau_F}{\tau_G}$$
$$= \frac{e^{-x}}{e^{-x-b}}$$
$$= e^{b}$$

D'où $\boxed{c = e^{b}}$

4- . QQ plot

. Max de vraisemblance

. Moments

Exo 2 : calculer $\lim_{x \to x^F} h'(x)$.

Exo 3 :

1. Comme $X_1, X_2 \geq 0$, alors

$$X_1 > x \Rightarrow X_1 + X_2 > x$$

$$\text{et } X_2 > x \Rightarrow X_1 + X_2 > x$$

Donc $\{X_1 > x\} \cup \{X_2 > x\} \subset \{X_1 + X_2 > x\}$

$$P(X_1 + X_2 > x) \geq P(X_1 > x \text{ ou } X_2 > x)$$

$$\geq 2P(X_1 > x) - P(X_1 > x \text{ et } X_2 > x)$$

$$\geq 2P(X_1 > x) - \underbrace{P(X_1 > x)^2}_{\underset{x \to \infty}{=} o(P(X_1 > x))}$$

$$\geq 2P(X_1 > x)(1 + o(1))$$

2. Supposons $X_1 + X_2 > x$

~~On~~ Supposons $\begin{cases} X_1 \leq (1-\delta)x \\ X_2 \leq (1-\delta)x \end{cases}$.

- supposons par l'absurde que X_1 ou $X_2 \leq \delta x$.
  - si $X_1 \leq \delta x$

    $X_1 + X_2 \leq x$

    absurde
  - idem si $X_2 \leq \delta x$.

Donc $\begin{cases} X_1 \leq (1-\delta)x \\ X_2 \leq (1-\delta)x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X_1 > \delta x \\ X_2 > \delta x \end{cases}$.

Donc $\{X_1+X_2>x\} \subset \{X_1>(1-\delta)x\} \cup \{X_2>(1-\delta)x\} \cup \{X_1, X_2>\delta x\}$

D'où $P(X_1+X_2>x) \leqslant 2P(X_1>(1-\delta)x) - P(X_1>(1-\delta)x)^2$

$$+ P(X_1>\delta x)^2$$

$$\leqslant 2P(X_1>(1-\delta)x) - o(P(X_1>(1-\delta)x))$$

$$+ o(P(X_1>(1-\delta)x))$$

$$\leqslant 2P(X_1>(1-\delta)x)(1+o(1))$$

car $\displaystyle \frac{P(X_1>\delta x)^2}{P(X_1>(1-\delta)x)} = \frac{\delta^{-\alpha}}{(1-\delta)^{-\alpha}} \underbrace{\frac{L\left((1-\delta)x \times \frac{\delta}{1-\delta}\right)}{L((1-\delta)x)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1} \times \underbrace{P(X_1>\delta x)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 0}$

car L à variations lentes

3. Quand $x\to+\infty$, on a

$$1+o(1) \leqslant \frac{P(X_1+X_2>x)}{2P(X_1>x)} \leqslant \frac{P(X_1>(1-\delta)x)}{P(X_1>x)}(1+o(1))$$

Or $\displaystyle \frac{P(X_1>(1-\delta)x)}{P(X_1>x)} = (1-\delta)^{-\alpha} \cdot \underbrace{\frac{L(x(1-\delta))}{L(x)}}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1}$.

En faisant tendre $\delta\to 0$, on montre par encadrement que $P(X_1+X_2>x)/2P(X_1>x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 1$.

4. On montre que $P(S_n > x) \sim n P(X_1 > x)$ par récurrence en utilisant la même méthode que pour le cas $n = 2$.

$$P(M_n > x) = 1 - P(M_n \leq x)$$

$$= 1 - P(X_1 \leq x)^n$$

$$= 1 - \left(1 - \overline{F}(x)\right)^n$$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \overline{F}(x)^k$$

$$= 1 - 1 + n\overline{F}(x) + \underbrace{\sum_{k \geq 2}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \overline{F}(x)^k}_{o(\overline{F}(x))}$$

$$\underset{x \to +\infty}{=} n\overline{F}(x).$$

D'où $P(S_n > x) \sim P(M_n > x)$

Exo 4 :

0. Max-stabilité de la loi de Fréchet

$$\frac{1}{n} M_n^X \sim_d \Phi_1 \quad \text{i.e.} \quad \boxed{\begin{array}{l} a_n = n \\ b_n = 0 \end{array}}$$

1. $Y_n \sim \Phi_1$ (max-stabilité, pareil que pour n)

2- On a $M_n^Y = \max(Y_1, \dots, Y_n)$

$$= \frac{1}{3} \max(X_1, \dots, X_{n+3})$$

$$= \frac{1}{3} M_{n+3}^X .$$

On $P\left(\frac{M_n^Y - b_n}{a_n} \leq x\right) = P\left(\frac{M_n^Y}{n} \leq x\right)$

$$= P\left(\frac{M_{n+3}^X}{3n} \leq x\right)$$

$$= P\left(\frac{M_{n+3}^X}{a_{n+3}} \leq \frac{3n}{a_{n+3}} x\right)$$

$$= P\left(\frac{M_{n+3}^X}{n+3} \leq \frac{3n}{n+3} x\right)$$

$$= e^{-\frac{n+3}{3n} \times \frac{1}{x}} .$$

$$\xrightarrow[x \to +\infty]{} e^{-\frac{1}{3x}}$$