EXAMEN 7 janvier 2025
Introduction aux processus de diffusion
M2 Probabilités et Finance

Durée 3h.

Dans tout le sujet, nous considérons un mouvement brownien standard $B = (B_t)_{t\geq 0}$ sur un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathscr{F}, (\mathscr{F}_t), \mathbb{P})$.

Exercice 1. Soit $Z_t = (X_t, Y_t)$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^2$ issu de l'origine, i.e. X et Y sont deux mouvements browniens réels indépendants et issus de 0. On définit pour $a \in \mathbb{R}$ et $b \geq 0$ l'ensemble $S_{a,b} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : |y - ax| < b\}$ et le temps aléatoire

$$T_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : Z_t \notin S_{a,b}\}.$$

(1) Trouver une constante $c > 0$ telle que le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ avec $W_t := c(Y_t - aX_t)$ soit un mouvement brownien réel.

(2) Définir $\tau_x := \inf\{t \geq 0 : W_t = x\}$ et calculer à l'aide de la martingale $(W_t^2 - t)_{t\geq 0}$ la valeur de $\mathbb{E}[\tau_x \wedge \tau_{-y}]$ pour $x, y \geq 0$.

Fermé ((3) En déduire la valeur de $\mathbb{E}[T_{a,b}]$.

Exercice 2. Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ le processus défini par

$$X_t := \int_0^t \mathrm{sign}(B_s)\, \mathrm{d}B_s,$$

où $\mathrm{sign}(x) := 1$ pour $x \geq 0$ et $\mathrm{sign}(x) := -1$ pour $x < 0$.

(1) Prouver que $(X_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement brownien.

(2) Montrer que $\mathbb{E}[X_t B_s] = 0$ pour tous $t, s \geq 0$.

(3) L'espérance $\mathbb{E}[X_t B_t^2]$ pour $t \geq 0$ est-elle nulle ?

Fermé ((4) Que peut-on dire sur la loi du vecteur (X_t, B_t) ?

Exercice 3. Soit τ un temps d'arrêt borné.

(1) Montrer que $\mathbb{E}[B_\tau^4] < +\infty$.

(2) Montrer que $M_t := B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$, $t \geq 0$, définit une martingale et en déduire une formule (non-explicite) pour $\mathbb{E}(\tau^2)$.

(3) Montrer l'inégalité pour $a, b \geq 0$: $2ab \leq \frac{1}{2}a^2 + 2b^2$, et en déduire que

$$\mathbb{E}[\tau^2] \leq 4\mathbb{E}[B_\tau^4].$$

(4) Peut-on affaiblir l'hypothèse de bornitude pour τ ? Discuter les cas : 1) $\tau = \tau_1$, 2) $\tau = \tau_1 \wedge \tau_{-1}$ et 3) $\tau = \tau_2 \wedge \tau_{-1}$, où $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$.

Exercice 4. Soit $X_t := 1 + B_t$, $0 < \varepsilon < 1$, $\tau_\varepsilon := \inf\{t \geq 0 : X_t = \varepsilon\}$,

$$M_t := X_{t\wedge\tau_\varepsilon}.$$

(1) Montrer que M est une martingale positive d'espérance égale à 1 pour tout $t \geq 0$.

(2) Soit $T > 0$ et définir sur $\mathscr{F}_T$ la mesure de probabilité $\mathbb{Q} := M_T\mathbb{P}$. Trouver une martingale locale L telle que $M = \mathcal{E}(L)$ et calculer la décomposition canonique de $(X_t)_{t\in[0,T]}$ comme semi-martingale sous $\mathbb{Q}$.

(3) Comment peut-on gérer le cas $\varepsilon = 0$?

Exercice 5. Soit dorénavant $B_t = (B_t^1, \dots, B_t^n)$ un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^n$. Le produit scalaire euclidien et la norme associée sur $\mathbb{R}^n$ sont notés respectivement $\langle\cdot,\cdot\rangle$ et $\|\cdot\|$.

(1) Donner un résultat d'existence et unicité pour l'EDS pour $x \in \mathbb{R}^n$

$$\mathrm{d}X_t = -\frac{X_t}{1 + \|X_t\|^2}\,\mathrm{d}t + \mathrm{d}B_t, \qquad X_0 = x.$$

(2) Prouver que $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale positive d'espérance égale à 1 pour tout $t \geq 0$, où

$$Z_t = \exp\left(\int_0^t \frac{\langle X_s, \mathrm{d}B_s\rangle}{1 + \|X_s\|^2} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\|X_s\|^2}{(1 + \|X_s\|^2)^2}\,\mathrm{d}s\right).$$

(3) Quelle est la loi du processus $(X_t - x)_{t\in[0,T]}$ sous la mesure de probabilité $\mathbb{Q} := Z_T\mathbb{P}$ définie sur $\mathscr{F}_T$?

(4) Appliquer la formule d'Itô à $\frac{1}{2}\log(1 + \|X_t\|^2)$ pour montrer que

$$Z_t = \frac{V(X_t)}{V(x)}\exp\left(\int_0^t v(X_s)\,\mathrm{d}s\right), \qquad t \geq 0,$$

où $V : \mathbb{R}^n \to]0, +\infty[$ et $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions à déterminer.

(5) Montrer que si $\Phi : C([0,T];\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}_+$ et $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sont boréliennes positives nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathbb{E}[\Phi(x + B_s, s \in [0,T])\,g(x + B_T)]\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathbb{E}[\Phi(x + B_{T-s}, s \in [0,T])\,f(x + B_T)]\,\mathrm{d}x.$$

(6) Montrer que pour $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ boréliennes positives nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\mathbb{E}[g(X_T(x))]\,\frac{\mathrm{d}x}{1 + \|x\|^2} = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,\mathbb{E}[f(X_T(x))]\,\frac{\mathrm{d}x}{1 + \|x\|^2}.$$

(7) Comment peut-on interpréter la propriété précédente au niveau du semi-groupe de transition de $(X_t(x))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^n}$?