Done

M2 "Probabilités et Finance" Sorbonne Université *Année 2022 – 2023*
"Introduction aux processus de diffusion" (L.Zambotti)

Chapitre IV. Semimartingales continues

Exercice 1. (i) Soient M et N deux martingales locales continues. Montrer que si M et N sont indépendantes, alors elles sont orthogonales (c'est-à-dire, $\langle M, N\rangle = 0$). On pourra considérer d'abord le cas de M et N martingales dans L^2.

(ii) Montrer que la réciproque est fausse. (On pourra, par exemple, considérer M^τ et $M - M^\tau$.)

Exercice 2. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s.

(i) Montrer que pour tout temps d'arrêt p.s. fini τ, on a $\mathbb{E}(M_\tau^2) \le \mathbb{E}(\langle M\rangle_\tau)$.

(ii) Soit $a > 0$ et soit $\tau_a := \inf\{t \ge 0 : |M_t| \ge a\}$. Montrer que $\mathbb{E}(\langle M\rangle_{\tau_a \wedge t}) \ge a^2\,\mathbb{P}(\tau_a \le t)$, $\forall t > 0$.

(iii) Montrer que $\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,\,t]} |M_s| \ge a) \le a^{-2}\mathbb{E}(\langle M\rangle_t)$.

Exercice 3. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s.

(i) Soit $a > 0$ et soit $\sigma_a := \inf\{t \ge 0 : \langle M\rangle_t \ge a^2\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{s\in[0,\,\sigma_a]} |M_s| > a\Big) \le \frac{1}{a^2}\mathbb{E}(a^2 \wedge \langle M\rangle_\infty).$$

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(\sup_{t\ge 0} |M_t| > a) \le \mathbb{P}(\langle M\rangle_\infty \ge a^2) + a^{-2}\mathbb{E}(a^2 \wedge \langle M\rangle_\infty)$.

(iii) Montrer que $\mathbb{E}(\sup_{t\ge 0} |M_t|) \le 3\,\mathbb{E}(\sqrt{\langle M\rangle_\infty}\,)$.

(iv) Montrer que si $\mathbb{E}(\sqrt{\langle M\rangle_\infty}\,) < \infty$, alors M est une (vraie) martingale uniformément intégrable.

(v) Montrer que si $\mathbb{E}(\sqrt{\langle M\rangle_t}\,) < \infty$ pour tout t, alors M est une (vraie) martingale.

Exercice 4. Soit M une martingale locale continue. Montrer qu'il existe une suite de temps d'arrêt $(\tau_n) \uparrow \infty$ telle que pour tout n, $M^{\tau_n} - M_0$ soit une martingale continue bornée.

Exercice 5. Soit M un processus continu et adapté. On suppose qu'il existe une suite de temps d'arrêt $(\tau_n) \uparrow \infty$ telle que pour tout n, M^{τ_n} est une martingale locale. Montrer que M est une martingale locale.

Exercice 6. Soit M une martingale locale continue. Montrer qu'il existe $A \in \mathscr{F}$ avec $\mathbb{P}(A) = 1$ tel que pour tout $\omega \in A$ et tous $s < t$,

$$\langle M\rangle_s(\omega) = \langle M\rangle_t(\omega) \;\Leftrightarrow\; M_u(\omega) = M_s(\omega),\ \forall u \in [s,\,t].$$

Exercice 7. Soit M une martingale locale continue. Montrer que M est une martingale uniformément intégrable si et seulement si $(M_\tau \mathbf{1}_{\{\tau<\infty\}},\ \tau$ temps d'arrêt) est uniformément intégrable.

Exercice 8. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s. Soit (τ_n) une suite de temps d'arrêt finis qui réduit M.

(i) Soit τ un temps d'arrêt fini. Montrer que pour tout n, $\mathbb{E}(|X_{\tau\wedge\tau_n}|) \leq \mathbb{E}(|X_{\tau_n}|)$.

(ii) Montrer que $\sup_n \mathbb{E}(|X_{\tau_n}|) = \sup\{\mathbb{E}(|X_\tau|),\ \tau$ temps d'arrêt fini$\}$.

Exercice 9. Donner un exemple de martingale locale M continue et bornée telle que $\langle M\rangle$ ne soit pas borné.

Exercice 10. Soit M une martingale locale continue, et soit A un processus à variation finie tel que $M^2 - A$ est une martingale locale. Montrer que A est indistinguable de $\langle M\rangle$.

Exercice 11. Soit M, N des martingales locales continues, et soit τ un temps d'arrêt. Montrer que $\langle M^\tau\rangle = \langle M\rangle^\tau$, $\langle N, M^\tau\rangle = \langle N^\tau, M^\tau\rangle = \langle N, M\rangle^\tau$ et $\langle M - M^\tau\rangle = \langle M\rangle - \langle M\rangle^\tau$.

Exercice 12. Soient M et N des martingales locales et continues, et soit H un processus mesurable tel que pour tout t, $\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M\rangle_s < \infty$ et $\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle N\rangle_s < \infty$ p.s. Montrer que pour tout t, $\int_0^t H_s^2 \,\mathrm{d}\langle M+N\rangle_s < \infty$ p.s.

Exercice 13. Soit M une martingale locale continue, et soit T un temps d'arrêt fini. Soit $\mathscr{G}_t := \mathscr{F}_{t+T}$, $t \geq 0$.

(i) Montrer que si τ est un temps d'arrêt, alors $(\tau - T)^+$ est un $(\mathscr{G}_t)$-temps d'arrêt.

(ii) Montrer que $(M_{t+T},\ t \geq 0)$ est une $(\mathscr{G}_t)$-martingale locale, et calculer sa variation quadratique.

$\mathbb{N}^{1}$ M, N deux martingales locales continues indépendentes $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ elles sont orthogonales, $\langle M, N \rangle = 0$

Preuve D'abord M, N martingales dans L^2. On veut prouver

que $(M_t N_t)_{t \geq 0}$ est une martingale

$0 \leq s \leq t$ $\quad \mathbb{E}[M_t N_t | \mathcal{F}_s] = ?$ $\quad \mathbb{E}[\mathbb{1}_A M_t N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A M_s N_s]$

M est une mart. par rapport à $(\mathcal{F}_t^M)_{t \geq 0}$, $\mathcal{F}_t^M = \sigma(M_s, s \in [0,t])$

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s^M] = \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]}_{M_s} | \mathcal{F}_s^M] = M_s$$

N est de même une $(\mathcal{F}_t^N)_{t \geq 0}$ - martingale

$A \in \mathcal{F}_s^M$, $B \in \mathcal{F}_s^N$, $G = A \cap B$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_G M_t N_t] = \mathbb{E}[(\mathbb{1}_A M_t)(\mathbb{1}_B N_t)] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A M_t] \mathbb{E}[\mathbb{1}_A N_t] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A M_s] \mathbb{E}[\mathbb{1}_B N_s] =$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_G M_s N_s] \quad \forall G \in \mathcal{F}_s^M \vee \mathcal{F}_s^N$$

$\Rightarrow (M_t N_t)_{t \geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t^M \vee \mathcal{F}_t^N)$ - martingale $\Rightarrow \langle M, N \rangle_t \equiv 0$

(le crochet ne dépend pas de la filtration)

$$\tau_n = \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq n\}$$
$$\sigma_n = \inf\{t \geq 0 : |N_t| \geq n\}$$

$$(M^{\tau_n}) \perp\!\!\!\perp (N^{\sigma_n}) \Rightarrow \langle M^{\tau_n}, N^{\sigma_n} \rangle = 0 = \langle M, N \rangle^{\tau_n \wedge \sigma_n} \xrightarrow[n \to \infty]{} \langle M, N \rangle$$

Exercice 2. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s.

(i) Montrer que pour tout temps d'arrêt p.s. fini τ, on a $\mathbb{E}(M_\tau^2) \leq \mathbb{E}(\langle M \rangle_\tau)$.

(ii) Soit $a > 0$ et soit $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : |M_t| \geq a\}$. Montrer que $\mathbb{E}(\langle M \rangle_{\tau_a \wedge t}) \geq a^2\, \mathbb{P}(\tau_a \leq t)$, $\forall t > 0$.

(iii) Montrer que $\mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} |M_s| \geq a) \leq a^{-2}\mathbb{E}(\langle M \rangle_t)$.

(i) $M_t^2 - \langle M \rangle_t$ une mart. locale

$\tau < \infty$ p.s.

$\underbrace{M_{t\wedge\tau}^2 - \langle M \rangle_{t\wedge\tau}}_{\downarrow \; M_\tau^2 - \langle M \rangle_\tau}$ est aussi une mart. locale

τ_n reduit $Y_t = M_t^2 - \langle M \rangle_t$ Donc $Y_{t\wedge\tau_n}$ est une vrai mart $\rightarrow$

$\Rightarrow Y_{t\wedge\tau_n\wedge\tau}$ aussi $\quad \mathbb{E}[Y_{\underbrace{t\wedge\tau_n}_{\sigma_n}\wedge\tau} \mid \mathcal{F}_0] = \mathbb{E}[Y_0] = 0$

$$\mathbb{E}[M_{\sigma_n\wedge\tau}^2 - \langle M \rangle_{\sigma_n\wedge\tau}] = 0$$

$\wr\; \sigma_n \to \infty$

$$\mathbb{E}[M_\tau^2 - \langle M \rangle_\tau] \leq 0$$

$$\mathbb{E}[M_{\sigma_n\wedge\tau}^2] = \mathbb{E}[\langle M \rangle_{\sigma_n\wedge\tau}] \leq \mathbb{E}[\langle M \rangle_\tau]$$

$(\langle M \rangle_{\sigma_n\wedge\tau})_{\sigma_n}$ est croissante $\Rightarrow \mathbb{E}[\langle M \rangle_{\sigma_n\wedge\tau}] \leq \mathbb{E}[\langle M \rangle_\tau]$

$M_{\sigma_n\wedge\tau}^2 \geq 0$, Par la lemme de Fatou,

$$\mathbb{E}[\liminf M_{\sigma_n\wedge\tau}] \leq \liminf \mathbb{E}[M_{\sigma_n\wedge\tau}]$$

$$\| \quad$$

$$\mathbb{E}[M_\tau]$$

$$\mathbb{E}[M_{\sigma_n \wedge \tau}] \leq \mathbb{E}\langle M\rangle_\tau$$

$$\mathbb{E}[M_\tau^2] \overset{\text{Fatou}}{\leq} \liminf_n \mathbb{E}[M^2_{\sigma_n\wedge\tau}] \leq \mathbb{E}\langle M\rangle_\tau$$

(ii) $\tau_a = \inf\{t : |M_t| \geq a\}$

M.q. $\mathbb{E}[\langle M\rangle_{t\wedge\tau_a}] \geq a^2\,\mathbb{P}(\tau_a \leq t) \quad \forall t > 0.$

Par (i) on a $\mathbb{E}[\langle M\rangle_{t\wedge\tau_a}] \geq \mathbb{E}[M^2_{t\wedge\tau_a}] \geq \mathbb{E}[\underbrace{M^2_{\tau_a}}_{=a^2} \mathbb{1}_{\{\tau_a \leq t\}}] = a^2\,\mathbb{P}(\tau_a \leq t)$

(iii) M.q. $\mathbb{P}(\sup_{[0,t]} |M_s| \geq a) \leq a^{-2}\,\mathbb{E}[\langle M\rangle_t]$

~~$// \tau_n > t$~~

~~$\mathbb{P}(\sup_{[0,t]} |M_s^{\tau_n}|^2 \geq a^2) \underset{\text{Doob}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[(M_t^{\tau_n})^2]}{a^2}$~~ $\overset{(i)}{\leq} \frac{\mathbb{E}[\langle M\rangle_t]}{a^2}$

Sans Doob

$\mathbb{P}(\sup_{[0,t]} |M_s| \geq a) = \mathbb{P}(\tau \leq t) \leq$

$\overset{(ii)}{\leq} a^{-2}\,\mathbb{E}[\langle M\rangle_{t\wedge\tau_a}] \leq a^{-2}\,\mathbb{E}[\langle M\rangle_t]$

Exercice 3. Soit M une martingale locale continue telle que $M_0 = 0$ p.s.

(i) Soit $a > 0$ et soit $\sigma_a := \inf\{t \geq 0 : \langle M\rangle_t \geq a^2\}$. Montrer que

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{s\in[0,\sigma_a]} |M_s| > a\Big) \leq \frac{1}{a^2}\mathbb{E}(a^2 \wedge \langle M\rangle_\infty).$$

(ii) Montrer que $\mathbb{P}(\sup_{t\geq 0}|M_t| > a) \leq \mathbb{P}(\langle M\rangle_\infty \geq a^2) + a^{-2}\mathbb{E}(a^2 \wedge \langle M\rangle_\infty)$.

(iii) Montrer que $\mathbb{E}(\sup_{t\geq 0}|M_t|) \leq 3\,\mathbb{E}(\sqrt{\langle M\rangle_\infty})$.

(iv) Montrer que si $\mathbb{E}(\sqrt{\langle M\rangle_\infty}) < \infty$, alors M est une (vraie) martingale uniformément intégrable.

(v) Montrer que si $\mathbb{E}(\sqrt{\langle M\rangle_t}) < \infty$ pour tout t, alors M est une (vraie) martingale.

(i) $\mathbb{P}(\sup_{[0,\sigma_a]} |M_s| > a) = \mathbb{P}(\sup_{s\geq 0} |M_s^{\sigma_a}| > a) \leq \frac{\mathbb{E}[M^2_{\infty\wedge\sigma_a}]}{a^2} =$

$\forall t \quad \mathbb{P}(\sup_{[0,t]} |M_s^{\sigma_a}| > a) \leq \frac{\mathbb{E}\langle M^{\sigma_a}\rangle_t}{a^2} = \frac{\mathbb{E}\langle M\rangle_{\sigma_a\wedge t}}{a^2} \underset{t\to\infty}{\leq} \frac{\mathbb{E}[a^2\wedge\langle M\rangle_\infty]}{a^2}$ ($\langle M\rangle$ est croissant)

$\sup_t \mathbb{P}(\sup_{[0,t]} |M_s^{\sigma_a}| > a) = \mathbb{P}(\sup_{[0,\infty)} |M_s^{\sigma_a}| > a) \leq a^{-2}\,\mathbb{E}[a^2\wedge\langle M\rangle_\infty]$

(ii) $\mathbb{P}(\sup_{t\ge 0}|M_t|>a) \le \mathbb{P}(\langle M\rangle_\infty \ge a^2) + a^{-2}\mathbb{E}[a^2\wedge\langle M\rangle_\infty]$

On a montré que $\mathbb{P}(\sup_{t\ge 0}|M_t^{\sigma_a}|>a) \le a^{-2}\mathbb{E}[a^2\wedge\langle M\rangle_\infty]$

$$\langle M\rangle_{\sigma_a}=a^2$$

Il est suffit de démontrer que

$$\mathbb{P}(\sup_{t\ge 0}|M_t|>a)\le \mathbb{P}(\sup|M_t^{\sigma_a}|>a)+\mathbb{P}(\underbrace{\langle M\rangle_\infty\ge a^2}_{\{\sigma_a<\infty\}})$$

Si $\sigma_a=\infty$ donc $M=M^{\sigma_a}$:

$$\sup_{t\ge 0}|M_t| = \mathbb{1}_{\{\sigma_a=\infty\}}\sup|M_t^{\sigma_a}| + \mathbb{1}_{\{\sigma_a<\infty\}}\sup|M_t|$$

$$\{\sup_{t\ge 0}|M_t|>a\}\subset\{\sup|M_t^{\sigma_a}|>a\}\cup\{\sigma_a<\infty\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\sup_{t\ge 0}|M_t|>a)\le\mathbb{P}(\sigma_a<\infty)+\mathbb{P}(\sup|M_t^{\sigma_a}|>a)\le\mathbb{P}(\langle M\rangle_\infty\ge a^2)+$$
$$+a^{-2}\mathbb{E}[a^2\wedge\langle M\rangle_\infty]$$

(iii) $\mathbb{E}[\sup_{t\ge 0}|M_t|]\le 3\mathbb{E}[\sqrt{\langle M\rangle_\infty}]$

$$\mathbb{E}[\sqrt{\langle M\rangle_\infty}] = \int_0^\infty \mathbb{P}(\sqrt{\langle M\rangle_\infty}\ge a)\,da = \int_0^\infty \mathbb{P}(\langle M\rangle_\infty\ge a^2)\,da$$

$$\mathbb{E}[\sup_{t\ge 0}|M_t|] = \int_0^\infty \mathbb{P}(\sup|M_t|>a)\,da \le \int_0^\infty\mathbb{P}(\langle M\rangle_\infty\ge a^2)\,da+\int\frac{\mathbb{E}[a^2\wedge\langle M\rangle_\infty]}{a^2}\,da$$

$$\left(\mathbb{E}\xi = -\int_0^\infty x\,d(1-F(x)) = \int(1-F(x))\,dx = \int\mathbb{P}(\xi>a)\,da\right)$$

Pourquoi $\int_0^\infty \mathbb{E}[1\wedge\frac{\langle M\rangle_\infty}{a^2}]\,da < 2\,\mathbb{E}\sqrt{\langle M\rangle_\infty}$

$\int$ $\quad\mathbb{E}\sqrt{\langle M\rangle_\infty}$

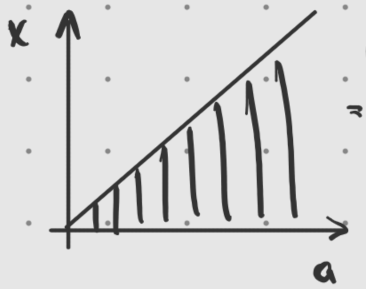
$$\mathbb{E}\left[1\wedge\frac{\langle M\rangle_\infty}{a^2}\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\langle M\rangle_\infty\ge a^2\}} + \frac{\langle M\rangle_\infty}{a^2}\mathbb{1}_{\{\langle M\rangle_\infty<a^2\}}\right] = \mathbb{P}(\langle M\rangle_\infty\ge a^2)+\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\langle M\rangle_\infty<a^2\}}\frac{\langle M\rangle_\infty}{a^2}\right]$$

Enfin, pourquoi $\displaystyle\int_0^\infty \mathbb{E}\left[\frac{\langle M\rangle_\infty}{a^2}\mathbb{1}_{\left\{\frac{\langle M\rangle_\infty}{a^2}<1\right\}}\right]da \le \mathbb{E}\sqrt{\langle M\rangle_\infty}$?

$$\mathbb{E}\sqrt{\langle M\rangle_\infty} = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\frac{\langle M\rangle_\infty}{a^2}\ge 1\right)da$$

$\sqrt{\langle M\rangle_\infty} \sim p(x)$

$$\int_0^\infty\int_0^a \frac{x^2}{a^2}\,p(x)\,dx\,da =$$



$$= \int_0^\infty dx\; x^2 p(x)\underbrace{\int_x^\infty \frac{1}{a^2}\,da}_{\frac{1}{x}} =$$

$$= \int_0^\infty x\,p(x)\,dx = \mathbb{E}\sqrt{\langle M\rangle_\infty}$$

(iv) $\mathbb{E}\sqrt{\langle M\rangle_\infty} < \infty \Rightarrow M$ est une vrai martingale u.i.

$$\mathbb{E}\sqrt{\langle M\rangle_\infty} < \infty \Rightarrow \underbrace{\mathbb{E}\sup_{t\ge 0}|M_t| < \infty}_{Y} \Rightarrow M_t \text{ est une mart. u.i.}$$

$$\uparrow$$

$$\mathbb{E}\left[M_{t\wedge T_n}\,|\,\mathcal{F}_s\right] = M_{s\wedge T_n}$$

$$\downarrow \text{TCD} \qquad\qquad \downarrow$$

$$\mathbb{E}\left(M_t\,|\,\mathcal{F}_s\right) = M_s$$

(v) $\mathbb{E}\sqrt{\langle M\rangle_t} < \infty \quad \forall t \Rightarrow M$ est une vraie martingale

On considère $(M^t_s)_{s\ge 0}$, $\langle M^t\rangle_\infty = \langle M\rangle_t$

Donc M^t est une vrai martingale u.i. $\Rightarrow$

$\Rightarrow M$ est une vraie mart. sur $[0,t]$ $\forall t>0 \Rightarrow$

$\Rightarrow M$ est une vraie martingale.

N°4 $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$. M.q. $\exists (\tau_n) \uparrow \infty$ t.q. $\forall n$ $M^{\tau_n} - M_0$ soit une martingale continue bornée.

σ_n reduit $M \Rightarrow M^{\sigma_n}$ une mart. continue

$\tilde{\sigma}_n = \inf\{t : |M_t - M_0| \geq n\}$ $\tilde{\sigma}_n \uparrow \infty$

$\tau_n = \sigma_n \wedge \tilde{\sigma}_n \uparrow \infty$ $M^{\tau_n} = (M^{\sigma_n})^{\tilde{\sigma}_n}$ une mart continue

$|M^{\tau_n} - M_0| \leq n \rightarrow$ bornée.

N5 M continu et adapté. $\exists \tau_n \uparrow \infty$ t.q. $\forall n$ M^{τ_n} est une mart. locale. $\Rightarrow$ M est une martingale locale.

M^{τ_n} une mart. locale $\rightarrow \exists \sigma_n \uparrow \infty$: $(M^{\tau_n})^{\sigma_n} = M^{\tau_n \wedge \sigma_n}$ est une mart u.i. $\Rightarrow \exists$ suite $(\tau_n \wedge \sigma_n) \uparrow \infty$: $M^{\tau_n \wedge \sigma_n}$ mart. u.i. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ M est une mart. locale.

N6 $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$. M.q. $\exists A \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}(A) = 1$: $\forall \omega \in A$ $\forall s < t$

$$\langle M \rangle_s(\omega) = \langle M \rangle_t(\omega) \Leftrightarrow M_u(\omega) = M_s(\omega) \quad \forall u \in [s, t].$$
$$(= \langle M \rangle_u(\omega) \ \forall u)$$

$\exists \tau_n \uparrow \infty$ $M_t^{\tau_n}$ et $(M_t^{\tau_n})^2 - \langle M \rangle_t^{\tau_n}$ sont martingales u.i.

Si $\langle M \rangle_s \overset{p.s.}{=} \langle M \rangle_t$ $\left.\begin{array}{l} \mathbb{E}[M_t^2 | \mathcal{F}_s] = M_s^2 \\ \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s \end{array}\right\}$

$\mathbb{E}[|M_u - M_s|^2 | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[M_u^2 - 2M_uM_s + M_s^2 | \mathcal{F}_s] = 0 \Rightarrow |M_u - M_s|^2 = 0$ p.s. $\forall u$

$\rightarrow$ On choisit A : $M_u = M_s$ pour $u \in [s,t] \cap \mathbb{Q} \overset{\text{continuité}}{\Rightarrow} \forall u \in [s,t]$

N7 $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$. M est une mart. u.i. $\Leftrightarrow$ $\{M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}, \tau \text{ t.a.}\}$ u.i.

$(M_t)_{t\geq 0}$ u.i.

$\Rightarrow$ M est une mart. u.i $\Rightarrow$ fermée

$$M_{\tau\wedge\tau_n} = \mathbb{E}[M_\infty^{\tau_n} | \mathcal{F}_{\tau\wedge\tau_n}]$$

$$\mathbb{E}[M_{\tau\wedge\tau_n}] \leq \mathbb{E}[M_{\tau\wedge\tau_{n+1}}]$$

$\exists M_\infty$: $\forall \tau$ t.a. fini $M_\tau = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_\tau] \Rightarrow$ u.i. (cf TD0)

$$\tau \leq \sigma \Rightarrow M_\tau = \mathbb{E}[M_\sigma | \mathcal{F}_\tau] = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_\tau]$$

$\sigma = \infty$ $\quad M_\tau = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_\tau]$

$\quad \| $

$M_\tau \mathbb{1}_{\tau<\infty} + M_\infty \mathbb{1}_{\tau=\infty}$ $\Big\} \Rightarrow |M_\tau \mathbb{1}_{\tau<\infty}| \leq |M_\infty| + \underbrace{\mathbb{E}[|M_\infty| | \mathcal{F}_\tau]}_{\text{u.i.}}$

$\Leftarrow$ $\{M_\tau \mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}\}$ u.i. $\Rightarrow \{M_t\}$ est u.i.

Pourquoi : M_t est une vraie martingale?

$\tau_n \uparrow \infty$ réduit M $\quad M_s^{\tau_n} = \mathbb{E}[M_t^{\tau_n} | \mathcal{F}_s]$

$\quad\quad \downarrow \tau_n \uparrow \infty \quad \downarrow \quad M_{t\wedge\tau_n} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} M_t$

$M_s = \mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s]$ $\quad \{M_{t\wedge\tau_n}\}_n$ u.i. $\Big\} \Rightarrow \underline{M_{t\wedge\tau_n} \xrightarrow{L^1} M_t}$

18 $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$, $M_0 = 0$. (τ_n) réduit M. $\tau_n < \infty$.

(i) $\tau < \infty$. M.q. $\forall n$ $\mathbb{E}[|M_{\tau\wedge\tau_n}|] \leq \mathbb{E}[|M_{\tau_n}|]$

M^{τ_n} vraie mart u.i. $\Rightarrow$ $|M^{\tau_n}|$ une sous-martingale

$\Downarrow$

fermée $\Rightarrow$ $M_{t\wedge\tau\wedge\tau_n} = \mathbb{E}[M_{t\wedge\tau_n} \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau\wedge\tau_n}]$

$\Downarrow$ Jensen

$$|M_{t\wedge\tau\wedge\tau_n}| \leq \mathbb{E}[|M_{t\wedge\tau_n}| \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau\wedge\tau_n}]$$

$\downarrow$ $t \to \infty$ $\downarrow$ u.i.

$$|M_{\tau\wedge\tau_n}| \leq \mathbb{E}[|M_{\tau_n}| \mid \mathcal{F}_{t\wedge\tau\wedge\tau_n}]$$

$\Downarrow \mathbb{E}$

$$\mathbb{E}|M_{\tau\wedge\tau_n}| \leq \mathbb{E}|M_{\tau_n}|$$

(ii) M.q. $\sup_n \mathbb{E}|M_{\tau_n}| = \sup\{\mathbb{E}|M_\tau|, \tau\text{-t.a. fini}\}$

($\leq$) évident

Il suffit montrer que $\forall \tau$-t.a. fini $\exists n$: $\mathbb{E}|M_\tau| \leq \mathbb{E}|M_{\tau_n}|$

On a $\mathbb{E}|M_{\tau\wedge\tau_n}| \leq \mathbb{E}|M_{\tau_n}|$

$\tau_n \uparrow \infty \overset{?}{\cancel{\Rightarrow}} \exists N : \tau_N \geq \tau$ p.s. $\to \mathbb{E}|M_{\tau\wedge\tau_N}| \leq \mathbb{E}|M_{\tau_N}|$

C'est faux!

$\uparrow \quad \mathbb{E}|M_\tau| = \mathbb{E}|M_{\tau\wedge\tau_N}|$

$$\mathbb{E}|M_{\tau\wedge\tau_n}| \leq \mathbb{E}|M_{\tau_n}| \leq \sup_n \mathbb{E}|M_{\tau_n}| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

ne dépend plus de n.

$$\mathbb{E}|M_\tau| \overset{?}{=} \sup_n \mathbb{E}|M_{\tau\wedge\tau_n}|$$

$$\underset{\displaystyle |M_{\tau\wedge\tau_n}|}{\underset{\|}{|M_{\tau\wedge\tau_n\wedge\tau_{n+1}}|}} \leq \mathbb{E}\left[|M_{\tau\wedge\tau_{n+1}}| \,\middle|\, \mathcal{F}_{t\wedge\tau_n\wedge\tau_{n+1}}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$\mathbb{E}|M_{\tau\wedge\tau_n}| \leq \mathbb{E}|M_{\tau\wedge\tau_{n+1}}|$$

Donc $\left(\mathbb{E}|M_{\tau\wedge\tau_n}|\right)_{n\geq 1}$ est croissante

Si $\mathbb{E}|M_\tau| = \infty \Rightarrow$

$$\mathbb{E} \liminf_n |M_{\tau\wedge\tau_n}| \leq \liminf \mathbb{E}|M_{\tau\wedge\tau_n}|$$

$$\| $$

$$\mathbb{E}|M_\tau| \leq \liminf_n \underbrace{\mathbb{E}|M_{\tau\wedge\tau_n}|}_{\nearrow} = \sup_n \mathbb{E}|M_{\tau\wedge\tau_n}|$$

Donc $\mathbb{E}|M_\tau| \leq \sup_n \mathbb{E}|M_{\tau\wedge\tau_n}| \leq \sup_n \mathbb{E}|M_{\tau_n}| \Rightarrow \sup_{\tau\text{-t.a.}} \mathbb{E}|M_\tau| \leq \sup_n \mathbb{E}|M_{\tau_n}|$

N9. Donner un exemple: $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$ bornée t.q. $\langle M \rangle$ ne soit pas borné.

$$d f(t, B_t) = \left(\partial_t f + \frac{1}{2}\partial_{xx} f\right) dt + \partial_x f \cdot dW_t$$

f bornée

$$\partial_t f = -\frac{1}{2}\partial_{xx} f \qquad f = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

$$\partial_t f = -\frac{1}{2t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} + \frac{1}{\sqrt{t}} \frac{x^2}{2t^2} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

$$\partial_x f = -\frac{x}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \qquad \partial_{xx} f = -\frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{2t}} + \frac{x^2}{t^{5/2}} e^{-\frac{x^2}{2t}}$$

$$\begin{cases} \text{Donc } X_t = \frac{1}{\sqrt{t+1}} e^{-\frac{B_t^2}{2(1+t)}} \in \mathcal{M}^c_{loc} \\ dX_t = -\frac{B_t}{t^{3/2}} e^{-\frac{B_t^2}{2t}} dB_t \\ \langle X \rangle_t = \int_0^t \frac{B_s^2}{(1+s)^3} e^{-\frac{B_s^2}{2(1+s)}} ds = \int_0^t \frac{1}{(1+s)^2} \cdot \underbrace{\frac{B_s^2}{1+s} e^{-\frac{B_s^2}{2(1+s)}}}_{\leq C} ds \\ \leq C \int_0^t \frac{ds}{(1+s)^2} \leq C \text{ bornée !!} \end{cases}$$

$\frac{1}{}$

$y e^{-\frac{y}{2}} \leq c \quad \forall y$

$$\frac{1}{1+\|B_t\|^p}$$

$$X_t = \int_0^t H_s\, dB_s \qquad B_t = (B_t^1, \dots, B_t^d) \text{ - MB indép.}$$

$$\langle X\rangle_t = \int_0^t \sum H_s^2\, ds = \int_0^t \|H_s\|^2\, ds$$

$\langle M\rangle_t$ n'est pas borné $\Rightarrow \langle M\rangle_\infty = \infty$

Si $M_0 = 0$ il existe B-MB : $M_t = B_{\langle M\rangle_t}$ (Dubins-Schwarz) ??

$$\tau = \inf\{t : |B_t| = 1\}$$

G $\quad M = B^\tau$ mart. bornée $\langle B^\tau\rangle_t = \langle B\rangle_t^\tau = (t\wedge\tau)$ n'est pas bornée !

(car $\langle B^\tau\rangle_\infty = \tau$)

N10. $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$. $A \in BV$ $A_0 = 0$! $M^2 - A$ martingale locale

M.q. A est indistinguable de $\langle M \rangle$

$\mathcal{M}^c_{loc} \ni (M_t^2 - A_t) - (M_t^2 - \langle M \rangle_t) = \langle M \rangle_t - A_t$ à variation finie $\to$

$\to$ $\langle M \rangle_t = A_t$ p.s. $\forall t$ $\to$ {continuité} $\Rightarrow$ indistinguable.

N11. $M, N \in \mathcal{M}^c_{loc}$ τ - t.a. M.q. $\langle M^\tau \rangle = \langle M \rangle^\tau$, $\langle N, M^\tau \rangle = \langle N^\tau, M^\tau \rangle = \langle N, M \rangle^\tau$

et $\langle M - M^\tau \rangle = \langle M \rangle - \langle M \rangle^\tau$

$\langle M^\tau \rangle$ un proc. t.q. $(M_t^\tau)^2 - \langle M^\tau \rangle_t$ est une mart. locale

Il faut m.q. $M^2_{t\wedge\tau} - \langle M \rangle_{\tau\wedge t} \in \mathcal{M}^c_{loc}$

c'est vrai parce que $M_t^2 - \langle M \rangle_t \in \mathcal{M}^c_{loc}$
est $X \in \mathcal{M}^c_{loc} \Rightarrow X^\tau \in \mathcal{M}^c_{loc}$
(cf TD3 N11)

Même raisonement pour $\langle M^\tau, N^\tau \rangle$

$\langle M, N^\tau \rangle = \langle M^\tau, N^\tau \rangle$ par la propriété $\langle M, N \rangle_t = \lim \sum (M_{t_i} - M_{t_{i-1}})(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})$

$\langle M - M^\tau \rangle = \langle M \rangle + \langle M^\tau \rangle - 2\underbrace{\langle M, M^\tau \rangle}_{= \langle M^\tau, M^\tau \rangle = \langle M \rangle^\tau} = \langle M \rangle - \langle M \rangle^\tau$

N12. $M, N \in \mathcal{M}^c_{loc}$, H mesurable t.q. $\forall t$ $\int_0^t H_s^2 \, d\langle M \rangle_s < \infty$ et $\int_0^t H_s^2 \, d\langle N \rangle_s < \infty$

M.q. $\forall t$ $\int_0^t H_s^2 \, d\langle M+N \rangle_s < \infty$

$\langle M+N \rangle_t = \overset{\text{OK}}{\langle M \rangle_t} + \overset{\text{OK}}{\langle N \rangle_t} + \overset{?}{2\langle M, N \rangle_t}$

Kunita-Watanabe $\left|\int_0^T H_s K_s \, d\langle M,N\rangle_s\right|^2 \leq \left|\int_0^T H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right| \cdot \left|\int_0^T K_s^2 \, d\langle N\rangle_s\right|$

$$H=K \Rightarrow \int_0^T H_s^2 \, d\langle M,N\rangle_s < \infty \Rightarrow \int_0^T H_s^2 \, d\langle M+N\rangle_s < \infty$$

N°14. $M \in \mathcal{M}^c_{loc}$. T t.a. fini. Soit $\mathcal{G}_t = \mathcal{F}_{t+T}$

(i) Mq si τ t.a., alors $(\tau - T)^+$ est $(\mathcal{G}_t)$-t.a.

$$\{(\tau - T)_+ \leq t\} \overset{?}{\in} \mathcal{F}_{t+T} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : A \cap \{t+T \leq s\} \in \mathcal{F}_s \ \forall s\}$$

$$\{(\tau - T)_+ \leq t\} = \{\tau \leq T+t\} \in \mathcal{F}_{T+t}$$

$$\{\tau \leq T+t\} \in \mathcal{F}_{\tau \wedge (T+t)} = \mathcal{F}_\tau \cap \mathcal{F}_{T+t} \rangle$$

(cf TD3 N3)

$$\Rightarrow \{\tau \leq T+t\} \in \mathcal{F}_{T+t} = \mathcal{G}_t$$

(ii) Mq $(M_{t+T})_{t \geq 0}$ est une $(\mathcal{G}_t)$-mart. locale, calculer $\langle M \rangle$

(τ_n) réduit $M \Rightarrow M^{\tau_n}$ mart u.i. $\Rightarrow$ fermée $\Rightarrow$ th. d'arrêt: $\forall t \geq s$

$$M^{\tau_n}_{(s+T)} = \mathbb{E}[M^{\tau_n}_{t+T} \mid \mathcal{F}_{s+T}] = \mathbb{E}[M^{\tau_n}_{t+T} \mid \mathcal{G}_s] \Rightarrow \text{mart}$$

$$M^{\tau_n}_{t+T} = \mathbb{E}[M^{\tau_n}_\infty \mid \mathcal{G}_t] \Rightarrow (M^{\tau_n}_{t+T}) \text{ u.i.}$$

Donc $(M_{t+T})_{t \geq 0} \in \mathcal{M}^c_{loc}$

$$A_t \text{ à v.f. t.q. } M^2_{t+T} - A_t \in \mathcal{M}^2_{loc}((\mathcal{G}_t)_{t \geq 0})$$

(τ_n) réduit $M_t^2 - \langle M \rangle_t$

$$(M^{\tau_n}_{s+T})^2 - \langle M \rangle^{\tau_n}_{s+T} = \mathbb{E}[(M^{\tau_n}_{t+T})^2 - \langle M \rangle^{\tau_n}_{t+T} \mid \mathcal{G}_s] \Rightarrow A = (\langle M \rangle_{t+T})_{t \geq 0}$$