Examen de Première Session
Finance Mathématique
M2 SAF Pro
12 janvier 2016
Durée 2h, supports de cours et calculatrices non autorisés
La notation prendra en compte la qualité de la rédaction.

Exercice 1. Soit $t < T_1 < T_2$. On note $P(t, T_1)$ le prix en t d'une obligation zéro-coupon de maturité T_1 et $F(t, T_1, T_2)$ le taux forward à la date t pour la période future (T_1, T_2), dans la convention simple de calcul des intérêts.

1. Par un argument d'absence d'opportunité d'arbitrage (AOA), retrouver l'expression de $F(t, T_1, T_2)$ en fonction du prix d'obligations zéro-coupon que l'on précisera.
2. Dans la pratique, le flux terminal d'un FRA associé à la période future (T_1, T_2) a lieu à la date T_1 et est donné en pourcentage du nominal par

$$X = \frac{(R(T_1, T_2) - K)\,(T_2 - T_1)}{1 + R(T_1, T_2)(T_2 - T_1)}$$

où K est le taux fixe du FRA, $R(T_1, T_2)$ est le taux de référence pour la période d'emprunt (T_1, T_2) et $T_2 - T_1$ est la durée en fraction d'année entre les dates T_1 et T_2.

a) Interpréter cette expression. S'agit-il ici d'un FRA payeur ou receveur ?

b) Sachant que R est un taux d'intérêt en convention simple, exprimer le flux X en fonction du prix d'une obligation zero-coupon que l'on précisera.

c) Montrer par un raisonnement d'AOA que la valeur en t du FRA s'écrit :

$$\pi^{FRA}(t) = P(t, T_1) - P(t, T_2)\,[1 + K(T_2 - T_1)]\,.$$

d) En déduire le taux d'équilibre $K^{eq}(t)$ du FRA. Commenter.

e) Exprimer $\pi^{FRA}(t)$ en fonction de $K^{eq}(t)$. Comment évolue la valeur de ce FRA en fonction du taux forward $F(t, T_1, T_2)$?

3. On considère un swap de nominal N qui a pour taux fixe K et pour taux variable R. On suppose que les intérêts fixes et variables sont versés aux mêmes dates $T_1 < \cdots < T_n$. Le taux d'intérêt variable est révisé aux dates $T_0 < T_1 < \cdots < T_{n-1}$.

a) Montrer qu'en AOA, la valeur $\pi^{P-Swap}(t)$ en $t < T_0$ du swap payeur est donnée par

$$N \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)(T_i - T_{i-1})(F(t, T_{i-1}, T_i) - K)$$

b) En déduire l'expression du taux swap forward.

c) En pratique $t = T_0$. On note S la cotation en t de ce swap. Donner la relation linéaire vérifiée par les prix en t de certaines obligations zero-coupon que l'on précisera.

d) Expliquer comment, à partir des cotations de swap à différentes maturité $\tilde{T}_1, \ldots, \tilde{T}_n$, il est possible de construire une courbe de taux spot deux fois différentiables.

Exercice 2. On rappelle que, dans un cadre HJM à un facteur, la dynamique risque-neutre des taux forward instantanés est donnée par

$$df(t,T) = \sigma_f(t,T)\sigma^*(t,T)dt + \sigma_f(t,T)dW_t$$

où W est un mouvement brownien standard.

1. Quel est l'intérêt pratique d'un cadre HJM pour la modélisation des taux d'intérêt ?
2. Exprimer σ^* en fonction de σ_f.
3. Donner l'expression explicite du taux court r_t en fonction de la courbe des taux forward $t \to f(0,t)$ et de la structure de volatilité σ_f.
4. On suppose que $\sigma_f(t,T) = \sigma \exp(-a(T-t))$ où σ et a sont deux paramètres positifs.
   a) Expliquer pourquoi la dynamique de r est markovienne.
   b) Donner l'expression de la dynamique de r.
   c) A quel modèle ce choix correspond-il ?
   d) Etant donnée une courbe de taux, combien de paramètres reste-il à estimer dans ce modèle ? Comment procéderiez-vous pour calibrer ces paramètres (4 lignes max) ?

Exercice 3. On considère une obligation zéro-coupon d'échéance T et on suppose que son cours $P(t,T)$ obéit dans l'univers risque-neutre à la dynamique suivante :

$$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)dt - \sigma(t,T)dW(t)\,.$$

La structure de volatilité σ est supposée déterministe. Le processus r décrit l'évolution du rendement instantané du compte épargne. Le processus W est un mouvement brownien standard sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$. On note $\mathcal{F}$ sa filtration naturelle.

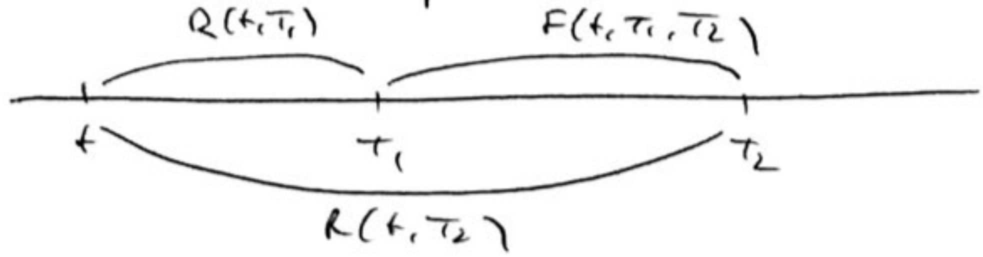
1. Intégrer l'équation précédente et montrer, en utilisant la relation $P(t,t) = 1$, que la solution peut être donnée indépendamment de r.
2. On rappelle que l'univers s-forward neutre est associé à une mesure de probabilité $\mathbb{Q}_s$ définie par :
$$\left.\frac{d\mathbb{Q}_s}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} = \frac{\delta(t)P(t,s)}{P(0,s)},\ 0 \leq t \leq s,$$
   où $\delta(t) = e^{-\int_0^t r(u)du}$. Donner l'expression du nouveau mouvement brownien W^s dans l'univers s-forward neutre.
3. Soit $t < T$. Exprimer en fonction de la courbe des taux à l'origine et de la structure de volatilité, le prix $P(t,T)$ du zéro-coupon d'échéance T, dans les univers t-forward neutre et T-forward neutre.
4. On considère un *call* européen de maturité t sur un zéro-coupon d'échéance $T > t$ et de prix d'exercice K.
   a) Montrer que le prix de cette option à la date 0 peut s'écrire :
$$C(0,t) = P(0,T)\mathbb{Q}_1\left(P(t,T) > K\right) - KP(0,t)\mathbb{Q}_2\left(P(t,T) > K\right)$$
   où $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$ sont des probabilités à définir.
   b) Déterminer $\mathbb{Q}_1\left(P(t,T) > K\right)$ et $\mathbb{Q}_2\left(P(t,T) > K\right)$.

Correction Exam "Finance Math"
M2 SAF — 12 janvier 2016

Exo 1

. $P(t,T_1)$ prix en t d'un ZC de mat T_1

1.



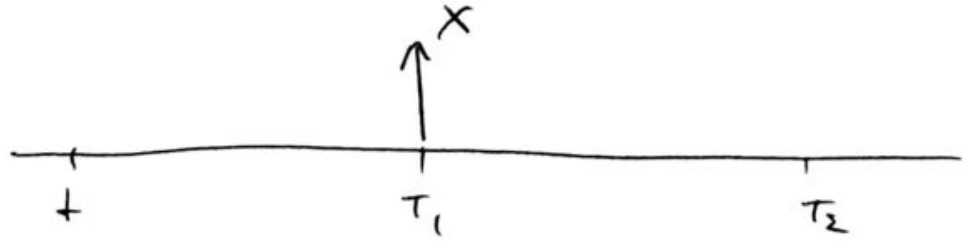
$$\big(1+R(t,T_1)(T_1-t)\big)\big(1+F(t,T_1,T_2)(T_2-T_1)\big) = 1+R(t,T_2)(T_2-t)$$

$$\Rightarrow \boxed{F(t,T_1,T_2) = \frac{1}{T_2-T_1}\left[\frac{1+R(t,T_2)(T_2-t)}{1+R(t,T_1)(T_1-t)} - 1\right]}$$

Or $\quad P(t,T) = \dfrac{1}{1+R(t,T)(T-t)}$

$$\Rightarrow \boxed{F(t,T_1,T_2) = \frac{1}{T_2-T_1}\left[\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)} - 1\right]}$$

2. a)



$$X = \frac{\big(R(T_1,T_2)-K\big)(T_2-T_1)}{1+R(T_1,T_2)(T_2-T_1)} \qquad \boxed{\text{FRA payeur}}$$

Il s'agit de la valeur actualisée en T_1 du flux ~~qui~~ ~~devrait arriver~~ $\big(R(T_1,T_2)-K\big)(T_2-T_1)$ qui devrait arriver en T_2.

)

$$B(T_1,T_2) = \frac{1}{1+R(T_1,T_2)(T_2-T_1)}$$

$$\Rightarrow R(T_1,T_2) = \frac{1}{T_2-T_1}\left[\frac{1}{B(T_1,T_2)} - 1\right]$$

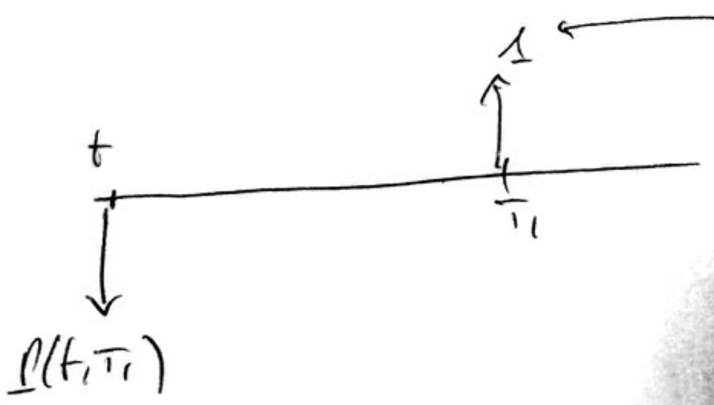
D'où $X = B(T_1,T_2)\left[\frac{1}{B(T_1,T_2)} - 1 - K(T_2-T_1)\right]$

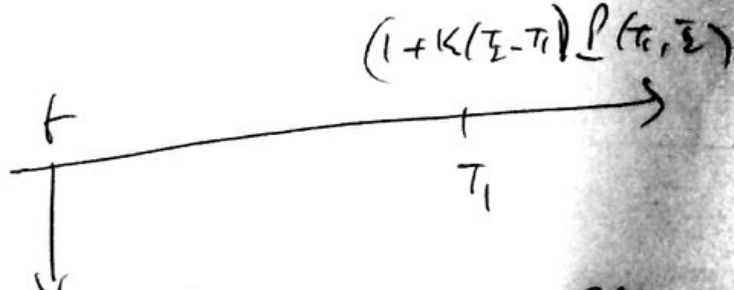
$$= 1 - B(T_1,T_2) - K(T_2-T_1)B(T_1,T_2)$$

$$\Rightarrow \boxed{X = 1 - (1+K(T_2-T_1))B(T_1,T_2)}$$

2.c) On a $\pi^{FRA}(T_1) = X$

$$= \boxed{1} - \underline{(1+K(T_2-T_1))B(T_1,T_2)}$$





$(1+K(T_2-T_1))B(t,T_2)$ $\Rightarrow \pi^{FRA}(t) = B(t,T_1) - (1+K(T_2-T_1))B(t,T_2)$

d) $K^{eq}(t)$ et tel que $\pi^{FRA}(t) = 0$

$$\Rightarrow \quad K^{eq}(t) = \frac{1}{T_2-T_1}\left[\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)} - 1\right] = F(t,T_1,T_2)$$

$K^{eq}(t)$ = taux forward conv. simple.

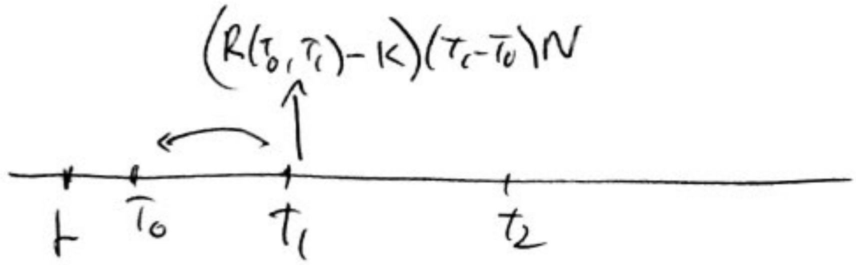
e)
$$\pi^{FRA}(t) = P(t,T_2)\left[\frac{P(t,T_1)}{P(t,T_2)} - 1 - K(T_2-T_1)\right]$$

$$= P(t,T_2)(T_2-T_1)\left[K^{eq}(t) - K\right]$$

$$= P(t,T_2)(T_2-T_1)\left[F(t,T_1,T_2) - K\right]$$

Lorsque $F(t,T_1,T_2) \uparrow$ $\quad \pi^{FRA}(t) \uparrow$.

3. a)



$$(R(T_{i-1},T_i) - K)(T_i - T_{i-1})N \quad \text{en } T_i$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{(R(T_{i-1},T_i) - K)(T_i - T_{i-1})N}{1 + R(T_{i-1},T_i)(T_i - T_{i-1})} \quad \text{en } T_{i-1}$$

le portefeuille composé de FRA payeur T_{i-1}, T_i <u>réplique</u> le flux de ce swap.

$$\Rightarrow \quad \pi^{\text{P-Swap}}(t) = N \sum_{i=1}^{n} \pi^{\text{P-FRA}}(t, T_{i-1}, T_i)$$

$$= N \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)(T_i - T_{i-1}) \cdot \left[F(t, T_{i-1}, T_i) - K \right]$$

3 b) $K_{eq}(t)$ ~~est~~ tq que $\pi^{\text{P-Swap}}(t) = 0$.

$$\Rightarrow \quad K_{eq}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)(T_i - T_{i-1}) F(t, T_{i-1}, T_i)}{\sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)(T_i - T_{i-1})}.$$

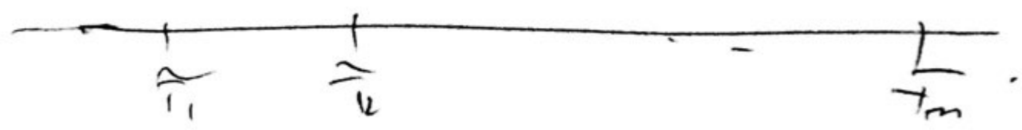
or $F(t, T_{i-1}, T_i) = \frac{1}{T_i - T_{i-1}} \left[\frac{P(t, T_{i-1})}{P(t, T_i)} - 1 \right]$

$$K_{eq}(t) = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left(P(t, T_{i-1}) - P(t, T_i) \right)}{\sum \cdots}$$

$$\boxed{K_{eq}(t) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)(T_i - T_{i-1})}}$$

3 c) $t = T_0$. On a $P(t, T_0) = 1$.

et ~~Swaption~~ on a : $\boxed{S \sum_{i=1}^{n} P(t, T_i)(T_i - T_{i-1}) + P(t, T_n) = 1}$



- Système linéaire rectangulaire en $f(t, \tilde{T}_i)$.

-> procédure de bootstrap avec interpolation spline cubique.

Exo 2 $\qquad df(t,T) = \sigma_f(t,T)\,\sigma^*(t,T)\,dt + \sigma_f(t,T)\,dW_t$.

1. permet de pricer une courbe de taux donnée en entrée : $\quad f(0,T) = f^M(0,T) \quad \forall T$.

2. $\sigma^*(t,T) = \int_t^T \sigma_f(t,u)\,du$

3. $f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma_f(u,T)\,\sigma^*(u,T)\,du + \int_0^t \sigma_f(u,T)\,dW_u$.

$$\boxed{r_t = f(t,t) = f(0,t) + \int_0^t \sigma_f(u,t)\,\sigma^*(u,t)\,du + \int_0^t \sigma_f(u,t)\,dW_u}$$

4. $\sigma_f(t,T) = \sigma e^{-a(T-t)}$

a) $\sigma_f(t,T) = \sigma e^{-aT}\cdot e^{+at}$ => structure de vol à variables séparées

=> r est un processus markovien

b) $\sigma^*(t,T) = \int_t^T \sigma_f(t,u)\,du = \sigma \int_t^T e^{-a(u-t)}\,du$

$= -\frac{\sigma}{a}\left[e^{-a(T-t)} - 1\right] = \sigma\,\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$

$$\cancel{df_t = \frac{\partial f}{\partial T}(0,t)\,dt +}$$

$$\int_0^t \sigma_f(u,t)\,\sigma^*(u,t)\,du = \frac{\sigma^2}{a}\int_0^t e^{-a(t-u)}\left(1-e^{-a(t-u)}\right) du.$$

$$= \frac{\sigma^2}{a}\left(\int_0^t e^{-a(t-u)}\,du - \int_0^t e^{-2a(t-u)}\,du\right).$$

$$= \frac{\sigma^2}{a}\cdot\left(\frac{1}{a}\left(1-e^{-at}\right) - \frac{1}{2a}\left(1-e^{-2at}\right)\right)$$

$$= \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[2 - 2e^{-at} - 1 + e^{-2at}\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{2a^2}\left[1 - 2e^{-at} + e^{-2at}\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1-e^{-at}\right)^2$$

$$dr_t = \left[\frac{\partial f}{\partial T}(0,t) + \cancel{\frac{\sigma^2}{2a^2}}\ \frac{\sigma^2}{a}\left(1-e^{-at}\right)e^{-at}\right]dt$$

$$+\ \sigma_f(t,t)\,dW_t + \int_0^t \frac{\partial \sigma_f}{\partial T}(u,t)\,dW_u.$$

$$\frac{\partial}{\partial T}\sigma_f(t,T) = -a\sigma\, e^{-a(T-t)}$$

$$\Rightarrow \int_0^t \frac{\partial \sigma_f}{\partial T}(u,t)\,dW_u = -a\sigma \int_0^t e^{-a(t-u)}\,dW_u .$$

$$= -a \boxed{\int_0^t \sigma_f(u,t)\,dW_u}$$

$$= -a\left[r_t - f(0,t) - \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(1-e^{-at}\right)^2 \right]$$

$$\Rightarrow dr_t = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(0,t) + \frac{\sigma^2}{a} e^{-at}\left(1-e^{-at}\right) + a f(0,t) - a r_t + \frac{\sigma^2}{2a}\left(1-e^{-at}\right)^2 \right] dt$$

$$+ \sigma\, dW_t .$$

$$\frac{\sigma^2}{2a}\left[\cancel{2e^{-at}} - 2e^{-2at} + 1 - \cancel{2e^{-at}} + e^{-2at} \right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{2a}\left[1 - e^{-2at} \right]$$

$$\Rightarrow \boxed{dr_t = \left[\frac{\partial f}{\partial t}(0,t) + a f(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}\left(1-e^{-2at}\right) - a r_t \right] dt + \sigma\, dW_t .}$$

4.c) Hull & White.

2 paramètres : a et σ.

Exo 3 $$\frac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r(t)\,dt - \sigma(t,T)\,dW_t .$$

1. $$P(t,T) = P(0,T)\exp\left(\int_0^t \left[r(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u,T)\right] du - \int_0^t \sigma(u,T)\,dW_u\right)$$

$$P(t,t) = P(0,t)\exp\left(\int_0^t \left(r(u) - \frac{1}{2}\sigma^2(u,t)\right) du - \int_0^t \sigma(u,t)\,dW_u\right)$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow \boxed{P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left(-\frac{1}{2}\int_0^t \left(\sigma^2(u,T) - \sigma^2(u,t)\right) du - \int_0^t \left(\sigma(u,T) - \sigma(u,t)\right) dW_u\right)}$$

2. Voir correction TD 4.