Théorie des Options
Anne EYRAUD-LOISEL

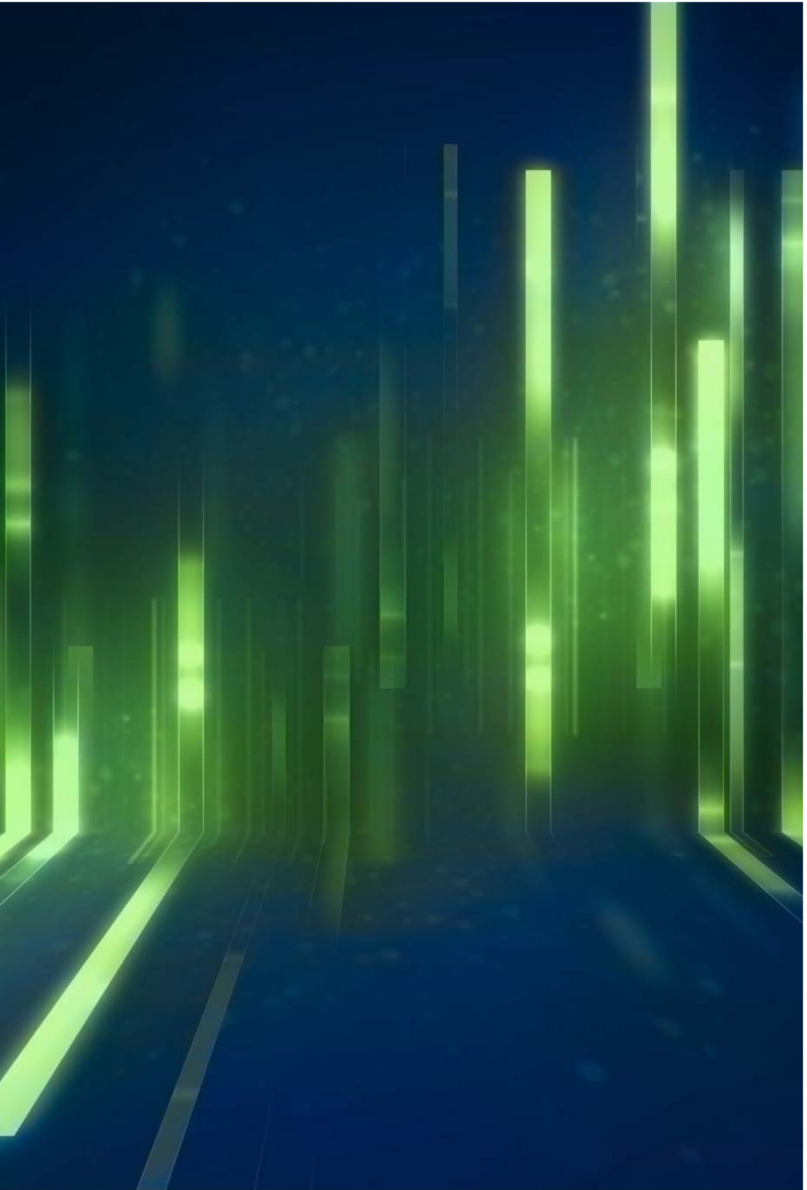
Cours numéro 12

08/04/2021

Généralités - ISFA

- Si vous changez d'avis et voulez revenir (ou inverse), signalez-vous à la scolarité scolarite.isfa@univ-lyon1.fr
- **Reconfinement** total avec fermeture des établissements scolaires – **pas de fermeture des Universités** = maintien des cours en présentiel au même rythme.
- **Pas d'examen en présentiel jusqu'au 2 mai** : non concernés car nos périodes d'examens sont après. À suivre…
- **Prochaines séances prévues** (pour l'instant) :
  - Vendredi 09/04 : Cours Maths actu
  - Mardi 13/04 : TD MLG
  - Mercredi 14/04 : TD Economie de l'Assurance // TD Théorie des Options
  - Vendredi 16/04 : TD Maths actu
  - Lundi 26/4 : TD Théorie des Options
  - Mardi 27/04 : TD Economie de l'Assurance
- **Remarques : prévoir impérativement d'être présents sur Lyon pour les semaines d'examen.**
- **Point conventions de stage : ATTENTION bien poser demander de convention en M1 Actuariat et non DU2**

Questionnaire Webex de présence



Programme du jour

Extensions du modèle de Black-Scoles

- Dividendes
- Options sur Matières premières
- Options sur Taux de change
- Options sur Contrats à termes
- Volatilité variable

Extensions du Modèle de Black et Scholes

RESUME

- **Théorème** *L'EDS de Black et Scholes* $dS_t = S_t(\mu dt + \sigma dW_t)$ *admet une unique solution qui est donnée par :*

$$S_t = S_0 e[(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t], \ \text{IP-}p.s.$$

- **Sous proba RN** : $dS_t = S_t(\mathbf{r}dt + \sigma dW_t)$ et $S_t = S_0 e[(\mathbf{r} - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma \underline{W}_t]$, $\underline{\text{IP}}$-*p.s.*
- **Formule de BS :** **Proposition 6.1** *Soit $F_r(t,x)$ la fonction :*

$$F_r(t,x) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(\left(xe^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)+\sigma\sqrt{T-t}U} - K\right)_+\right)$$

où U est une variable aléatoire gaussienne, centrée, réduite sous $\hat{\mathbb{P}}$. Alors

$$F_r(t,x) = x\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2)$$

où $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite et où

$$d_1 = \frac{ln\frac{x}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad et \ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

Sous-jacent versant une rémunération

- Le versement d’une rémunération (=« droit ») se traduit par une baisse instantanée de la valeur au moment du détachement du droit.
- Les options ne sont jamais protégées contre le versement des droits.
- Toutes choses étant égales par ailleurs, la valeur du CALL diminue et celle du PUT augmente avec le montant du ou des droits distribués avant l’échéance T.

Modèle à dividende continu

- Le processus de prix S_t est supposé suivre l'EDS de BS sous $\underline{IP}$

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma d\underline{W}_t)$$

- **1ère question** : sous $\underline{IP}$, quelle doit être la tendance μ du processus S_t ?
- Si l'action ne versait pas de dividende : $\mu=r$ le taux sans risque
- Si l'action verse un dividende continu au taux c :

Sur un intervalle de temps dt, l'action verse un flux de dividende d'un montant cStdt sur [t,t+dt]. Ainsi, la rémunération totale R_t du placement en action résulte du gain en capital dS_t et du dividende cS_tdt

$$dR_t=(dS_t+cS_tdt)/S_t=dS_t/S_t+cdt=(\mu+c)dt+ \sigma d\underline{W}_t$$

- Dans l'univers risque-neutre, l'espérance de rentabilité de tous les placements doit être égale au taux sans risque. Ici l'espérance de rentabilité de ce placement est $(\mu+c)$. Donc

$$\mu+c=r \quad \text{ou encore} \quad \mu=r-c$$

- Donc pour modéliser la valeur St d'une action versant un coupon continu au taux c, on utilise la dynamique sous $\underline{IP}$:

$$dS_t = S_t(\mathbf{(r-c)}dt + \sigma d\underline{W}_t)$$

$$\text{dont la solution est } S_t = S_0 e[(\mathbf{r\text{-}c}- ½\, \sigma^2)t+\sigma W_t],\ \underline{IP}\text{-}p.s.$$

- Dans l'univers risque-neutre, le taux de croissance du sous-jacent est égal au taux sans risque diminué du taux de dividende c. Le versement d'un dividende diminue la croissance de la valeur boursière de l'action, mais pas la rentabilité globale du placement.

Modèle à dividende continu

- Ce modèle est appelé **modèle de Merton**. On peut adapter le raisonnement fait pour obtenir la formule de Black et Scholes à ce modèle. Le raisonnement reste identique et on obtient le résultat suivant (Exercice : le retrouver en faisant le raisonnement/calcul)

Proposition 6.2 (Modèle de Merton pour un actif versant un dividende continu) *Soient un CALL et un PUT européens, de prix d'exercice K, de maturité T, sur une action de prix S_t versant un taux de dividende continu constant c. r le taux sans risque est supposé constant, et σ la volatilité du sous-jacent aussi.*
Les valeurs du CALL et du PUT sont données par :

$$C(t, S_t) = S_t e^{-c(T-t)} \mathcal{N}(d_1) - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_2),$$

$$P(t, S_t) = K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_2) - S_t e^{-c(T-t)} \mathcal{N}(-d_1),$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r - c + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \textit{et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

- Le modèle à dividende continu est utile dans différents contextes (options sur indices, options sur devises, options longues,…) où le taux est effectivement continu, ou bien lorsque de nombreux versements ou dividendes sont attendus avant l'échéance de l'option et peuvent être modélisés par un flux continu.

Modèle à dividende discret

- Certaines actions cotées versant un dividende annuel, dont le montant est connu quelques mois auparavant, rendent nécessaire une modélisation par un dividende discret.
- On note St le prix de l'action support, t la date à laquelle on opère l'évaluation, D la valeur du dividende, τ* la date de versement et D* la valeur actualisée en t du dividende à recevoir.
- Alors on peut également adapter la formule de BS (voir preuve poly):

Proposition 6.3 (Modèle pour un actif versant un dividende discret) *Soient un CALL et un PUT européens, de prix d'exercice K, de maturité T, sur une action de prix S_t versant un dividende entre t et T dont la valeur actualisée en t est notée D^*. r le taux sans risque est supposé constant, et σ la volatilité du sous-jacent aussi. L'évaluation s'opère à l'aide des formules de Black et Scholes dans lesquelles S_t est remplacé par $S_t - D^*$. Les valeurs du CALL et du PUT sont données par :*

$$C(t, S_t) = (S_t - D^*)\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(d_2),$$

$$P(t, S_t) = Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - (S_t - D^*)\mathcal{N}(-d_1),$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t - D^*}{K} + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{et } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}.$$

Options sur matières premières

- Ce cas peut être traité à partir du modèle de Merton car une matière première fonctionne techniquement comme un actif versant un dividende continu.
- En effet, il existe ce qu'on appelle un *convenience yield c*, qui traduit à la fois l'éventuel avantage de disposer physiquement de la matière première, mais également le coût de stockage et la liquidité du marché (stocks disponibles attendus dans le futur,…). Le *convenience yield* peut donc être positif ou négatif, en fonction des divers coûts/bénéfices de l'investissement, et il fonctionne techniquement comme un dividende algébrique qui diminuerait ou augmenterait l'espérance de croissance du prix de la matière première.
- La dynamique risque-neutre du prix St d'une matière première est donc généralement représentée dans l'univers risque neutre comme solution de l'EDS :

$$dS_t = S_t(\boldsymbol{(r\text{-}c)}dt + \sigma d\underline{W}_t)$$

- Ainsi on peut utiliser le modèle de Merton pour pricer des options sur matières premières

Options sur taux de change

- On peut également évaluer les options sur taux de change par la formule de Merton. Il suffit d'écrire la dynamique risque-neutre du taux de change et de montrer que cette dynamique est similaire à celle d'une action versant un dividende continu. Ce modèle est appelé **modèle de Garman et Kohlagen** (1983)
- On note St le taux de change (valeur d'une unité de monnaie étrangère, exprimée en monnaie domestique), r_f le taux sans risque étranger, r_d le taux sans risque domestique. Le processus de prix S_t est supposé suivre l'EDS de BS sous $\underline{IP}$

$$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma d\underline{W}_t)$$

- Sous la probabilité RN, quelle doit être la tendance μ du taux de change S_t ?
- On construit un portefeuille autofinancé π de la manière suivante : en t=0, une unité monétaire domestique est changée contre $1/S_0$ monnaie étrangère, placée au taux sans risque r_f.
- L'encours du portefeuille π en monnaie étrangère en t est donc $1/S_0\, e^{r_f t}$. Exprimé en monnaie domestique cela donne :

$$\pi_t = S_t/S_0\, e^{r_f t}$$

- On applique la formule d'Itô et on obtient :

$$d\pi_t = 1/S_0\, e^{r_f t}\, dS_t + r_f S_t/S_0\, e^{r_f t} dt \text{ soit } d\pi_t/\pi_t = (\mu + r_f)dt + \sigma d\underline{W}_t$$

- Comme tout portefeuille autofinancé en monnaie domestique doit avoir sous $\underline{IP}$ une tendance égale à r_d on en déduit :

$$\mu + r_f = r_d \quad \text{ou encore } \mu = r_d - r_f$$

- Ainsi, sous la proba $\underline{IP}$ le taux de change s'exprime :

$$dS_t = S_t((\mathbf{r_d} - \mathbf{r_f})dt + \sigma d\underline{W}_t)$$

Options sur taux de change

- Le taux étranger fonctionne ainsi pour le taux de change comme un taux de dividende. Il suffit d'appliquer les résultats de la formule du modèle de Merton, en remplaçant *r* par r_d et *c* par r_f pour obtenir le résultat de Garman-Kohlagen :

Proposition 6.4 (Modèle de Garman-Kohlagen pour une option sur taux de change) *Soient un CALL et un PUT européens, de prix d'exercice K, de maturité T, sur un taux de change S_t, r_f désignant le taux sans risque étranger, et r_d le taux sans risque domestique, et σ la volatilité.*
Les valeurs du CALL et du PUT sont données par :

$$C(t, S_t) = S_t e^{-r_f(T-t)}\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r_d(T-t)}\mathcal{N}(d_2),$$

$$P(t, S_t) = Ke^{-r_d(T-t)}\mathcal{N}(-d_2) - S_t e^{-r_f(T-t)}\mathcal{N}(-d_1),$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln \frac{S_t}{K} + \left(r_d - r_f + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad et\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

De plus la relation de parité s'écrit :

$$C_t - P_t = S_t e^{-r_f(T-t)} - Ke^{r_d(T-t)}.$$

Options sur contrat à terme

- Certains produits optionnels sont définis sur des contrats futures. C'est en particulier souvent le cas sur les matières premières, pour lesquelles il n'existe que peu d'options sur les prix au comptant (pour des raisons de temps de livraison par exemple).
- Sous la proba RN IP, le prix de cotation d'un contrat future, sans spécifier la nature du sous-jacent, suit une martingale. On peut donc écrire :

$dF_t^{T'}/F_t^{T'}=\sigma d\underline{W}_t$,où $F_t^{T'}$ désigne le prix de cotation en t d'un contrat future d'échéance T'.

- Si on considère un CALL européen sur future, de maturité T<T', ayant pour payoff final $(F_T^{T'}-K)_+$ alors il suffit d'appliquer les résultats du modèle de Merton en remplaçant c par r pour annuler la tendance risque-neutre μ. On obtient le modèle de Black.

Proposition 6.5 **(Modèle de Black pour une option sur contrat** ***future*****)** *Soient un CALL et un PUT européens, de prix d'exercice K, de maturité T, sur un contrat à terme d'échéance T' dont le prix de cotation en t est $F_t^{T'}$. Le taux sans risque r et σ la volatilité sont supposés constants.*
Les valeurs du CALL et du PUT sont données par :

$$C(t, F_t^{T'}) = e^{-r(T-t)}\left(F_t^{T'}\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2)\right),$$

$$P(t, F_t^{T'}) = e^{-r(T-t)}\left(K\mathcal{N}(-d_2) - F_t^{T'}\mathcal{N}(-d_1)\right),$$

avec

$$d_1 = \frac{\ln \frac{F_t^{T'}}{K} + \frac{\sigma^2}{2}(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad et \ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

De plus la relation de parité s'écrit :

$$C_t - P_t = e^{-r(T-t)}(F_t^{T'} - K).$$

Volatilité variable

- La formule de Black et Scholes est obtenue sous l'hypothèse d'une volatilité constante du titre sous-jacent. Elle peut s'étendre au cas où la volatilité est variable (mais déterministe).
- Supposons la dynamique risque-neutre de S donnée par

$dS_t = S_t(\mu dt + \sigma_t d\underline{W}_t)$, où σ_t déterministe

- Dans le cas où la volatilité du support n'est pas constante mais est déterministe, et en notant $\underline{\sigma}_t$ la volatilité moyenne du support entre t et T, les modèles de type BS restent valables, à condition de remplacer σ par $\underline{\sigma}_t$

Proposition 6.6 *Lorsque la volatilité de S_t est une fonction σ_t déterministe du temps, le logarithme du rapport $\frac{S_T}{S_t}$ suit une loi gaussienne de variance $v_s = \int_t^T \sigma_s^2 ds$ et de moyenne $m_s = r(T-t) - \frac{1}{2}\int_t^T \sigma_s^2 ds$.*
En appelant $\bar{\sigma}_t$ la volatilité moyenne du support entre t et T

$$\bar{\sigma}_t^2 = \frac{1}{T-t}\int_t^T \sigma_s^2 ds = \frac{v_s}{T-t}$$

on a

$$S_T = S_t e^{\left(r - \frac{\bar{\sigma}_t^2}{2}\right)(T-t) + \bar{\sigma}_t\sqrt{T-t}U} \quad , où\ U \sim N(0,1)$$

Examen
→ Calcul d'espérance de payoff.
→ Calcul arbre binomial.

Améliorations et Fin du cours

Volatilité stochastique : cours de finance maths 3A

Taux stochastiques : cours de risque de crédit 3A

Application à l'assurance : cours de modèles financiers en assurance, Générateurs de scenarios économiques 3A

Bref, il vous reste des choses à apprendre ;-)

En attendant : bien bosser ces modèles et la manière de les obtenir.

Examen : distanciel type QCM (attention, points négatifs).