Mathématiques Actuarielles

M1 Actuariat

Rémi GREGOIRE

Introduction

- Rythme : 2 CM (3h) + 1 TD (2x1h30) (x3)
- 3 supports de cours pour les 3 parties
- Examen : QCM et/ou Exercices + Cours

- Références :
  - Dickson, D. C., Hardy, M. R., & Waters, H. R. (2013). Actuarial mathematics for life contingent risks. Cambridge University Press.
  - Vladislav Kargin, Life Congingency Models 1
  - Anciens Cours de professeurs à l'ISFA (Karim Barigou et Didier Rullière)

Plan de la 1ère partie

- 1. Introduction au cours – Assurance Vie
- 2. Démographie
- 3. Durée de survie
- 4. Tables de mortalité

1. Introduction au cours – Assurance Vie

1. Qu’est-ce que l’assurance vie ?

- Contrat d'épargne et d'assurance signé entre un souscripteur, un assuré et un assureur, avec l’objectif d’obtenir un capital à une date déterminée d'avance et qui constitue l'échéance du contrat.
- Les primes donnent lieu à des intérêts qui sont capitalisés.
- Arrivé au terme du contrat, l'assureur reverse à l'assuré soit son capital, soit une rente.
- Si l'assuré décède avant le terme du contrat, le capital est versé au(x) bénéficiaire(s) désigné(s) par le souscripteur.

1. Qu’est-ce que l’assurance vie ?

- C’est un contrat entre :
  - Un souscripteur
  - Un assuré
  - Un assureur

1. Le souscripteur

- Le souscripteur est engagé à payer des primes :
  - Primes périodiques fixes : La périodicité et le montant sont fixés dans le contrat. Le non paiement de ces primes peut entrainer la résiliation du contrat ou le maintien du contrat avec des garanties réduites
  - Prime unique : Un seul versement décidé lors de la souscription du contrat
  - Primes à versements libres : Un montant minimal fixé. Les versements se font en fonction des capacités d’épargne du souscripteur.

1. Comment est composé la prime d'assurance ?

- La prime pure :
  - C'est la part de la prime qui couvre l'espérance des engagements de l'assureur
- La prime chargée, résultante de la somme de la prime pure et :
  - Des chargements de gestion (salaires du personnel, etc..)
  - Des chargements d'acquisition (frais d'apporteur s'il y en a un : courtier, agent, ..)
  - D'éventuels frais de versements (Pourcentage sur versement)

1. L’assuré

- L’assuré, personne couverte par l’assurance.
  - Pas nécessairement le souscripteur
    - Exemple : Un de vos grand-parent souscrit une assurance-vie pour vous. Vous êtes l’assuré et lui le souscripteur. Votre grand-père paye les primes et l’assureur vous versera l’engagement convenu entre les deux parties

1. L'assureur

- L'assureur, engagé à payer des prestations en fonction d'évènements aléatoires (survie ou décès)

- Les différents engagements :
  - Rachat partiel ou total : Fin du contrat d'assurance vie pour percevoir le capital partiel ou total
  - Rentes viagères : Cela permet de percevoir régulièrement une fraction du capital, selon une périodicité définie dans le contrat (mensuelle, trimestrielle ou encore annuelle), et ce, jusqu'au décès de l'assuré.
  - Assurance vie-entière : Paiement au moment du décès
  - Assurance de capital différé : Paiement en cas de survie

1. Un business risqué

- L'assureur reçoit les primes avant le paiement des différents engagements cités précédemment. Trois incertitudes notables :
  - La mortalité
  - Les taux d'intérêt
  - La longévité

- Les primes reçues par l'assureur sont investies dans des produits financiers. L'assureur est donc liée à la santé financière de l'entreprise. Néanmoins, l'Etat garantit à l'assuré un capital de 70000€ par assureur en cas de faillite.

1. Fiscalité - Décès

- Nous distinguons deux types de versements :

1. Versements effectués avant 70 ans
   - Base taxable : Valeur totale du contrat
   - Aucune imposition jusqu'à 152 500€ pour chaque bénéficiaire
   - De 152 500€ à 700 000€ → Application d'un taux forfaitaire de 20%
   - Au-delà de 700 000€ → Application d'un taux forfaitaire de 31,25%
   - Un conjoint survivant ou le partenaire de PACS sont exonérés d'impôts

1. Fiscalité - Décès

- Exemple :
  - Une personne a versé 1M€ AVANT ses 70 ans. Le contrat est valorisé aujourd'hui à 1,2M€
  - Les bénéficiaires sont :
    - Son conjoint pour 50%
    - Son fils pour 35%
    - Un ami pour 15%

? Quel montant va toucher chacun des bénéficiaires ?

1. Fiscalité - Décès

Réponse :

→ Sa femme touchera 600k€

→ Sa fille touchera 366 500€

→ Son ami touchera 174 500€

1. Fiscalité - Décès

- Nous distinguons deux types de versements :

2 Versements effectués après 70 ans

- Base taxable : Seulement les versements, les gains ou plus-values issus de ces versements ne sont pas imposables. S'il y a une moins-value, la base taxable sera les versements ajoutés de la moins-value
- Exonération sur les premiers 30 500€ de versements. Exonération appliquée sur la base globale (pas par bénéficiaire). Cela concerne l'ensemble des contrats de l'assuré, du même assureur ou non.
- Les sommes taxables sont soumises au régime commun des droits de succession
- La fiscalité dépend donc de la qualité du bénéficiaire en terme d'abattement et de taux

1. Fiscalité - Décès

- Exemple :
  - Nous reprenons le même exemple que tout à l'heure avec une personne ayant versé 1M€ APRES ses 70 ans. Le contrat est valorisé aujourd'hui à 1,2M€
  - Les bénéficiaires sont :
    - Son conjoint pour 50%
    - Son fils pour 35%
    - Un ami pour 15%

?

Quel montant va toucher chacun des bénéficiaires ?

1. Fiscalité - Décès

Réponse :

→ Sa femme touchera 600k€

→ Sa fille touchera 373 941€ (Droits de succession de 46 059€)

→ Son ami touchera 93 701€ (Droits de succession de 86 299€)

Base taxable globale : 1M€ - 30 500€ = 969 500€

NB : Droits de succession calculés sur le simulateur des droits de succession sur le site service-public.fr

1. Fiscalité – Décès - Récap

Versements	Base Taxable	Abattement	Taxe
Avant 70 ans	Valeur contrat	Jusqu'à 152 500€ pour chaque bénéficaire	20% de 152 500€ à 700k€ 31,25% au-dessus de 700k€
Après 70 ans	Seulement les versements	30 500€ pour l'enveloppe globale tous assureurs confondus	Droits de succession

1. Fiscalité – Rachat total ou partiel

- Dans ce cas, seuls les intérêts générés sont taxables. Le taux d’imposition dépend de deux facteurs :
  - La date des versements (avant ou après 2017)
  - L’âge du contrat (< 4 ans, entre 4 et 8 ans, > 8 ans)

- Distinction par date de versements :

1 Primes versées avant 2017, au choix :

- Impôts sur le revenu
- Prélèvement forfaire libératoire (PFL) + Prélèvement sociaux (17,2%) :
  - Pour un contrat de moins de 4 ans → PFL = 35%
  - Pour un contrat entre 4 et 8 ans → PFL = 15%
  - Pour un contrat de plus de 8 ans → PFL = 7,5%

1. Fiscalité – Rachat total ou partiel

- Exemple : Rachat partiel de 20% d'un contrat avec 1M€ de primes versées en 2016, valorisé à 1,2M€ aujourd'hui. L'assuré ne souhaite pas être taxé via l'impôt sur le revenu.

Quel montant net l'assuré récupèrera-t-il ?

L'assuré récupèrera 227 120€.

1. Fiscalité – Rachat total ou partiel

- Distinction par date de versements :

2 Primes versées après 2017, au choix :

- Impôts sur le revenu
- Prélèvement forfaire unique (PFU) + Prélèvement sociaux (17,2%) :
  - Pour un contrat de moins de 8 ans → PFU = 12,8%
  - Pour un contrat de plus de 8 ans :
    - Abattement de 4 600€ pour une personne seule, 9 600€ pour un couple
    - Plus-value après abattement < 150k€ (ou 300k€ pour un couple) → PFU = 7,5%
    - Passé ce plafond → PFU = 12,8%

1. Fiscalité – Rachat total ou partiel

- Exemple : Rachat total en 2029 d'un contrat avec 1M€ de primes versées en 2020, valorisé à 1,2M€ en 2029. L'assuré (personne seule) ne souhaite pas être taxé via l'impôt sur le revenu.

Quel montant net l'assuré récupèrera-t-il ?

L'assuré récupèrera 1 149 780€.

1. Fiscalité – Rachat total ou partiel - Récap

Date du contrat	Primes versées avant 2017	Primes versées après 2017
Inférieur à 4 ans	IR ou Prélèvements sociaux (17,2%) + PFL (35%)	IR ou Prélèvements sociaux (17,2%) + PFU (12,8%)
Entre 4 et 8 ans	IR ou Prélèvements sociaux (17,2%) + PFL (15%)	IR ou Prélèvements sociaux (17,2%) + PFU (12,8%)
Supérieur à 8 ans	IR ou Prélèvements sociaux (17,2%) + PFL (7,5%)	IR ou Prélèvements sociaux (17,2%) + PFU (7,5%) pour une plus-value après abattement < 150k€ (PFU = 12,8% pour > 150k€)

2. Démographie

2. Démographie

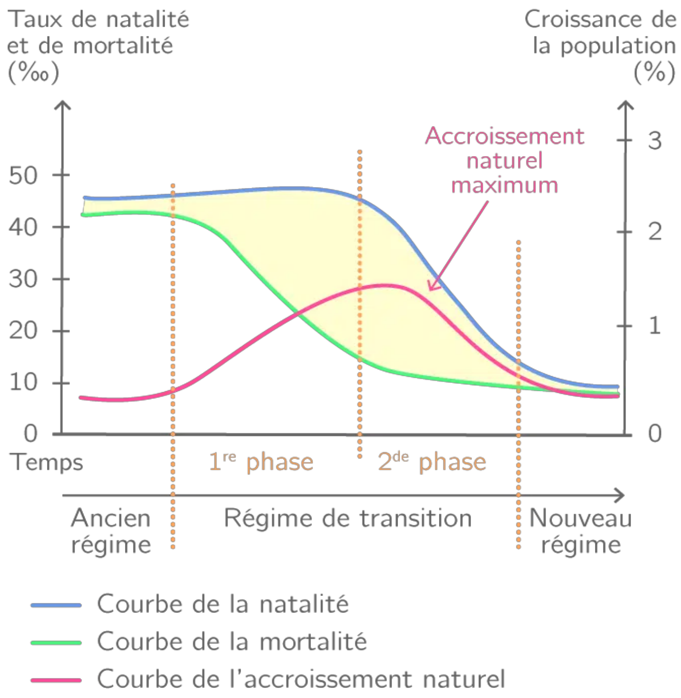
- Définition : C’est l’étude statistique des populations humaines

- La population mondiale augmente d’environ 400 millions de personnes tous les 5 ans. Là où nous avons mis 130 ans (de 1800 à 1930) pour passer de 1 à 2 milliards, nous sommes passés à 6 milliards en 1999 (+ 4 milliards en 69 ans) et nous sommes 8 milliards depuis le 15 novembre 2022.

- Dans un scénario d'évolution moyen, la population mondiale devrait atteindre près de 11 milliards d'habitants en 2100 (ONU)

2. Qu’est ce qui explique cette explosion démographique ?

- Théorie de la transition démographique par Adolphe Landry (1934) :



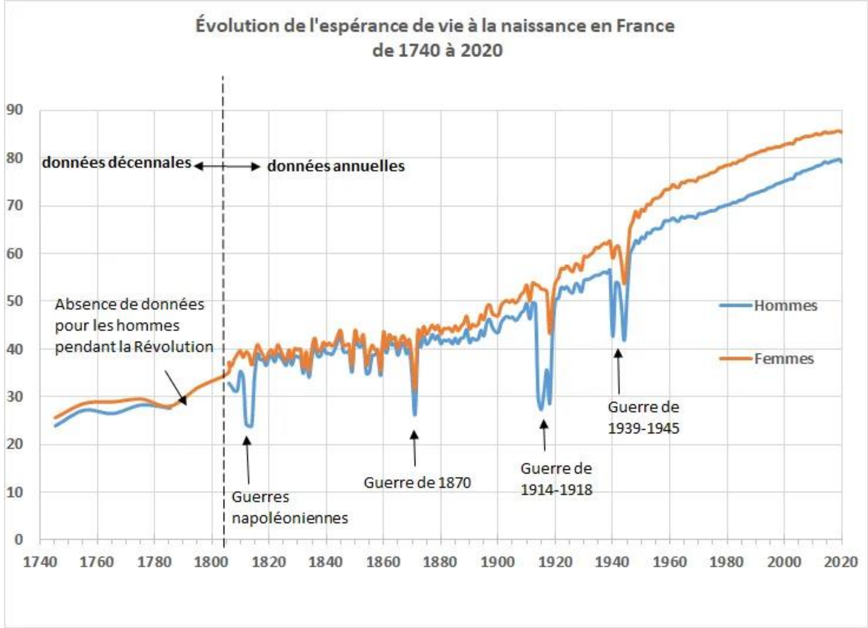
- 1ère phase : Baisse de la mortalité → Sous l’effet combiné des progrès de la médecine, de l’hygiène publique, de nouvelles normes sanitaires et sociales (qui limitent les épidémies), de l’agronomie (qui limite les famines) et de la raréfaction des guerres, la mortalité décroît. La natalité reste forte car l’Homme ne réalise pas tout de suite qu’il ne faut pas faire plein d’enfants pour en voir deux ou trois survivre à l’âge adulte

- 2ème phase : Baisse de la natalité → La contraception, le recul de l’âge du mariage, la scolarisation des filles et les nouvelles normes de transmission d’héritage (il n’y a plus de privilège pour les aînés)

- Les pays européens sont les premiers à entamer la transition démographique

2. Qu'est ce qui explique cette explosion démographique ?

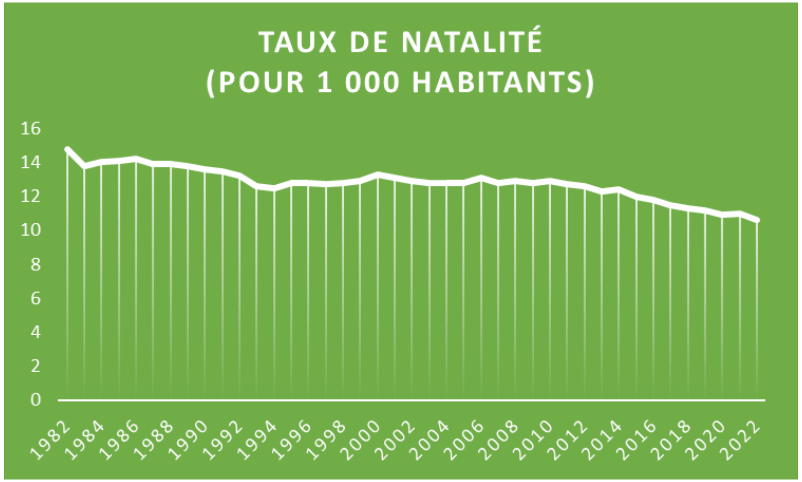
- On a donc une augmentation de l'espérance de vie à la naissance en France



Source graphique : https://www.ined.fr/fr/tout-savoir-population/graphiques-cartes/graphiques-interpretes/esperance-vie-france/

2. Qu’est ce qui explique cette explosion démographique ?

- Malgré un taux de natalité qui baisse en France, la population augmente (sans prendre en compte les flux migratoires)



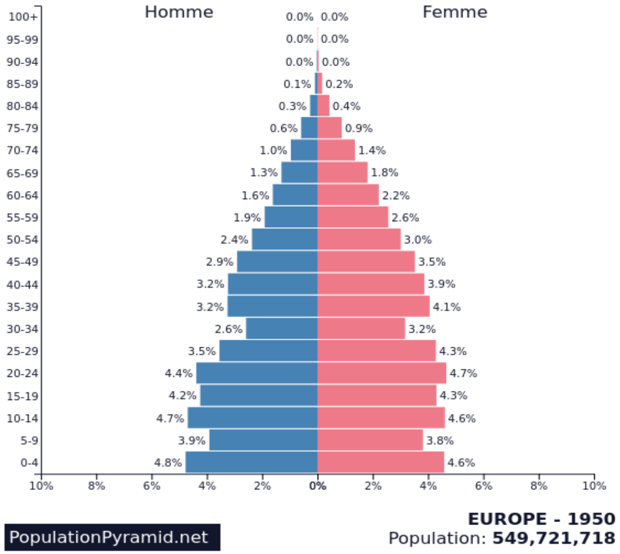
Source données graphique : http://www.insee.fr

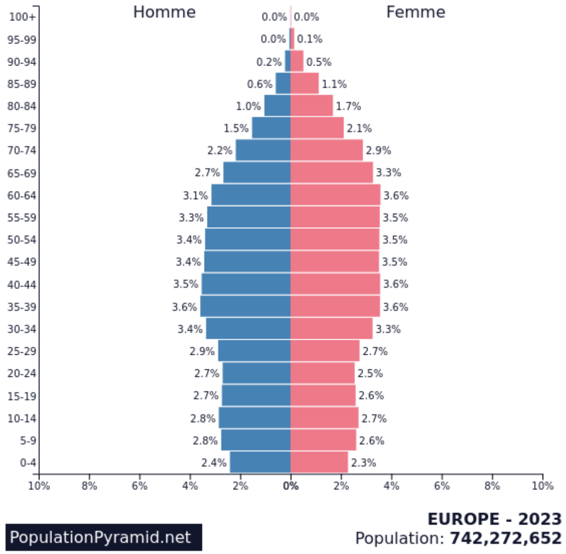
2. Démographie – Différents impacts

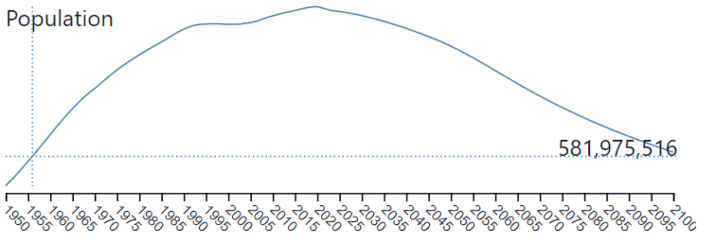
- Les différents impacts de l'augmentation de la population mondiale sont les suivants (liste non exhaustive) :
  - Des impacts écologiques
  - Des impacts de ressources
  - Selon les régions, un vieillissement de la population. C'est cet impact qui va nous intéresser dans notre cours d'assurance vie. Dans les prochains slides, nous allons montrer l'évolution de la pyramide des âges en Europe.

2. Démographie – Différents impacts

- En Europe, l’évolution de la pyramide des âges :







Source graphiques : https://www.populationpyramid.net/

2. Démographie – Différents impacts

- En Europe, la population est vieillissante. En 2100, les prévisions montrent que la population européenne sera du même ordre de grandeur qu’en 1955. Cela aura un impact sur nos calculs en assurance vie et sur l’utilisation des tables de mortalité

3. Durée de survie

3. Durée de survie - Introduction

- Dans cette partie, nous allons représenter la durée de vie future d'un individu comme une variable aléatoire, et nous montrerons comment les probabilités de décès ou de survie peuvent être calculées sous ce cadre.

- En introduction, nous avons évoqué les décès pouvant intervenir dans un contrat d'assurance vie. Lorsqu'une compagnie d'assurance émet une telle police, la date de décès de l'assuré est inconnue, donc l'assureur ne sait pas exactement quand la prestation de décès sera payable.

- Le sujet de cette partie est donc d'estimer le moment auquel une prestation de décès devra être payée.

3. Durée de survie – Quelques notations

- On considère une personne d'âge x et nous modélisons sa durée de survie par une variable aléatoire que l'on notera T_x
- Cela signifie que $x + T_x$ représente la variable aléatoire de l'âge du décès de cette personne

- Soit $F_x(t)$ la distribution de T_x :

$$\begin{aligned} F_x(t) &= \mathbb{P}[T_x \leq t] \\ &= \mathbb{P}[T \leq x + t | T > x] \\ &= \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \end{aligned} \qquad (1)$$

- Car $\mathbb{P}(A|B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$

3. Durée de survie – Quelques notations

- Alors $F_x(t)$ représente la probabilité que la personne ne survive pas au-delà de l'âge $x+t$, et nous nous référons à F_x comme la distribution de la durée de vie à partir de l'âge x .

- Dans beaucoup de problèmes et de calculs d'assurance vie, nous nous intéressons plutôt à la durée de Survie que l'on notera S_x avec :

$$\begin{aligned} S_x(t) &= 1 - F_x(t) \\ &= \mathbb{P}[T_x > t] \end{aligned} \qquad (2)$$

3. Durée de survie – Quelques notations

- On en déduit alors avec la relation (1) :

$$\begin{aligned} S_x(t) &= 1 - F_x(t) \\ &= 1 - \frac{F(x+t) - F(x)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{1 - F(x) - [F(x+t) - F(x)]}{1 - F(x)} \\ &= \frac{1 - F(x+t)}{1 - F(x)} \\ &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \end{aligned} \qquad (3)$$

- D'où nous déduisons aisément la relation suivante :

$$S(x+t) = S_x(t)S(x)$$

3. Durée de survie – Quelques notations

- C'est un résultat important car cela montre que nous pouvons interpréter la probabilité de survie de la naissance à l'âge $x+t$ comme le produit entre :
  - La probabilité de survie jusqu'à l'âge x
  - La probabilité, ayant survécu jusqu'à l'âge x de survivre jusqu'à l'âge $x+t$

- De même, la probabilité de survie d'un individu pour $t+u$ années est le produit entre la probabilité de survivre les t premières années, et, compte tenu de la survie de l'individu à l'âge $x+t$, survivant encore u ans :

$$\begin{aligned} S_x(t+u) &= \frac{S(x+t+u)}{S(x)} \\ &= \frac{S(x+t)}{S(x)} \times \frac{S(x+t+u)}{S(x+t)} \\ &= S_x(t)S_{x+t}(u) \end{aligned} \qquad (4)$$

3. Durée de survie – Quelques notations

- Toute fonction de survie doit satisfaire les propriétés suivantes pour être valide :

  - 1. $S_x(0) = 1$, cela signifie qu'un individu d'âge 0 an survive est de 1
  - 2. $\lim\limits_{t \to +\infty} S_x(t) = 0$, cela signifie que tout individu finit par mourir
  - 3. $\forall t > 0, \dfrac{d}{dt} S_x(t) \leq 0$, cela signifie que la fonction de Survie doit être décroissante

3. Durée de survie – Notations actuarielles

- On note ${}_tq_x$ la probabilité pour un individu d'âge x de décéder au plus tard à l'âge $x+t$:

$$ {}_tq_x = F_x(t) = \mathbb{P}[T_x \leq t] $$

- On note ${}_tp_x$ la probabilité pour qu'un individu d'âge x survive à l'âge $x+t$:

$$ {}_tp_x = S_x(t) = \mathbb{P}[T_x > t] = 1 - {}_tq_x $$

- On note ${}_{u|t}q_x$ la probabilité pour un individu d'âge x de décéder entre l'âge $x+u$ et l'âge $x+u+t$:

$$ {}_{u|t}q_x = \mathbb{P}[u < T_x \leq u+t] = \mathbb{P}[T_x > t] = {}_{u+t}q_x - {}_uq_x $$

3. Durée de survie – Notations actuarielles

- On note également :

$$q_x = {}_1q_x \, , p_x = {}_1p_x \, , {}_{u|}q_x = {}_{u|1}q_x$$

- Et on a aussi $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$${}_np_x = p_x p_{x+1} .. p_{x+n-1}$$

- Que l'on prouve avec la relation (3) :

$$\begin{aligned}
{}_np_x &= S_x(n) \\
&= \frac{S(x+n)}{S(x)} \\
&= \frac{S(x+1)S(x+2)..S(x+n-1)S(x+n)}{S(x)S(x+1)..S(x+n-1)} \\
&= \frac{S(x+1)}{S(x)} \times \frac{S(x+1+1)}{S(x+1)} \times .. \frac{S(x+n-1+1)}{S(x+n-1)} \\
&= S_x(1)S_{x+1}(1)..S_{x+n-1}(1) \\
&= {}_1p_x . {}_1p_{x+1} .. {}_1p_{x+n-1} \\
&= p_x . p_{x+1} .. p_{x+n-1}
\end{aligned}$$

3. Durée de survie – Exemple

- Soit $F(t) = 1 - (1 - \frac{t}{105})^{\frac{1}{5}}$ pour $0 \leq t \leq 105$. Calculer
  - La probabilité qu'un nouveau-né décède avant 60 ans.
  - La probabilité qu'un individu de 30 ans survive jusqu'au moins 70 ans.
  - La probabilité qu'un individu de 20 ans décède entre 90 et 100 ans.

3. Durée de survie – Exemple : Réponses

- Soit $F(t) = 1 - (1 - \frac{t}{105})^{\frac{1}{5}}$ pour $0 \leq t \leq 105$. Calculer
    - La probabilité qu'un nouveau-né décède avant 60 ans : **0,1559**
    - La probabilité qu'un individu de 30 ans survive jusqu'au moins 70 ans : **0,8586**
    - La probabilité qu'un individu de 20 ans décède entre 90 et 100 ans : **0,1394**

4. Tables de mortalité

4. Tables de mortalité – Définitions

- La table de mortalité d'une population donne pour chaque âge x entier la probabilité annuelle de décès q_x des individus de cette population. On note w l'âge ultime (souvent égal à 110 ou 120) et on a donc :

$$q_w = 1$$

- Ces tables sont soit :
  - D'expérience (issues de données des assureurs)
  - De recensements périodiques

- On note l_x le nombre de survivants à l'âge x parmi une population de l_0 nouveau-nés soumis à la loi de mortalité décrite par les probabilités annuelle de décès q_x . On a donc :

$$l_x = l_0 \cdot {}_x p_0$$

4. Tables de mortalité - Définitions

- En général, la table de mortalité est construite sur la base de 100 000 ou 1 million de nouveau-nés.
- On appelle l_x avec $0 \leq x \leq w$ l'ordre de suivie associé à la table de mortalité
- Les probabilités viagères en fonction de l'ordre de suivie se calculent alors avec la formule :

$$_np_x = \frac{l_{x+n}}{l_x}$$

- On note d_x les décréments successifs de l'ordre de suivie. On l'interprète comme le nombre attendu de décès entre les âges x et $x+1$. On a alors :

$$d_x = l_x q_x = l_x - l_{x+1}$$

4. Tables de mortalité

- Nous trouvons deux types de table de mortalité en France :
  - Les tables réglementaires. Deux des plus utilisées étant les TH00-02 et TF00-02 qui recensent les observations des décès des hommes (H) ou des femmes (F) entre 2000 et 2002 en utilisant les données de l'INSEE
  - Les tables d'expérience établies à partir des données du portefeuille de l'assuré et qui doit être certifié par un actuaire indépendant agréé à cet effet.

- Les différents critères de construction d'une table de mortalité peuvent être les suivants (liste non exhaustive) :
  - Paiements en cas de décès ou en cas de vie
  - Fumeurs ou Non Fumeurs
  - Hommes ou Femmes

4. Tables de mortalité

- Globalement, les observations faites sont les suivantes :
  - Les acheteurs de rentes ont une mortalité plus faible que les acheteurs d'assurance-décès
  - Les gens riches ont une mortalité plus faible que les gens pauvres. On estime par exemple l'espérance de vie moyenne d'un homme cadre de 7 ans supérieur à un homme non-cadre.
  - Dans le but d'éviter l'anti-sélection, l'assureur soumet l'assuré à un questionnaire médical ou à des examens médicaux dans le cadre de garanties décès pour des contrats individuels.

4. Tables de mortalité - Exemple

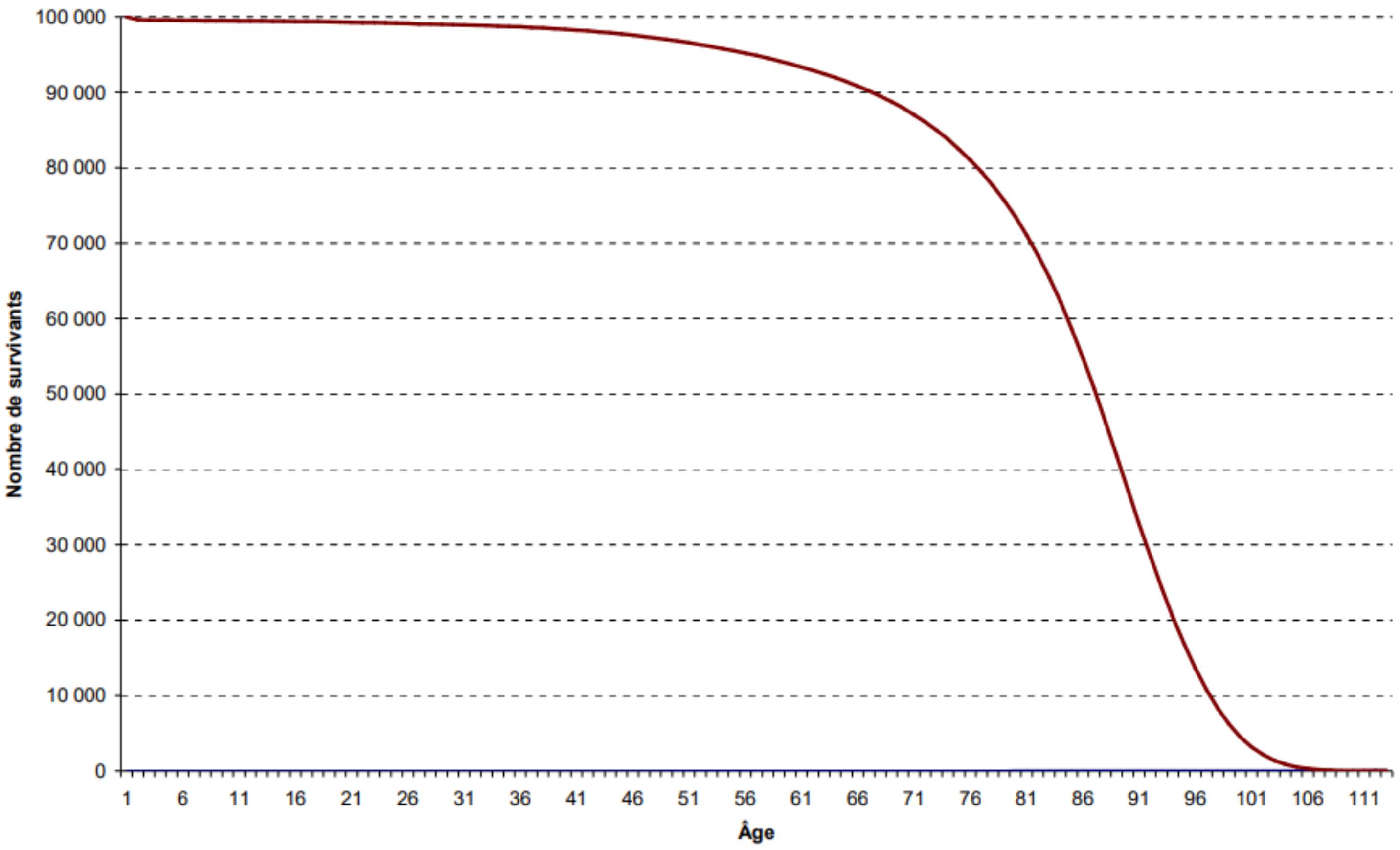
Table de mortalité TF 00-02

x	lx	x	lx	x	lx	x	lx
0	**100 000**	29	98 960	58	94 131	87	46 362
1	99 616	30	98 921	59	93 741	88	41 868
2	99 583	31	98 879	60	93 329	89	37 319
3	99 562	32	98 833	61	92 892	90	32 821
4	99 545	33	98 782	62	92 425	91	28 469
5	99 531	34	98 725	63	91 923	92	24 328
6	99 519	35	98 662	64	91 382	93	20 444
7	99 508	36	98 593	65	90 797	94	16 860
8	99 498	37	98 518	66	90 164	95	13 618
9	99 488	38	98 435	67	89 476	96	10 750
10	99 478	39	98 343	68	88 726	97	8 277
11	99 467	**40**	**98 242**	69	87 907	98	6 204
12	99 456	41	98 130	70	87 010	99	4 516
13	99 444	42	98 007	71	86 024	100	3 185
14	99 431	43	97 872	72	84 941	101	2 171
15	99 415	44	97 724	73	83 751	102	1 426
16	99 395	45	97 563	74	82 442	103	900
17	99 371	46	97 387	75	80 998	104	544
18	99 342	47	97 197	76	79 402	105	314
19	99 309	48	96 993	77	77 633	106	172
20	**99 274**	49	96 776	78	75 671	107	89
21	99 239	50	96 546	79	73 496	108	44
22	99 205	51	96 304	80	71 088	109	20
23	99 171	52	96 049	81	68 423	110	9
24	99 137	53	95 778	82	65 478	111	4
25	99 103	54	95 489	83	62 233	112	1
26	99 068	55	95 180	84	58 680		
27	99 033	56	94 851	85	54 828		
28	98 997	57	94 501	86	50 706		

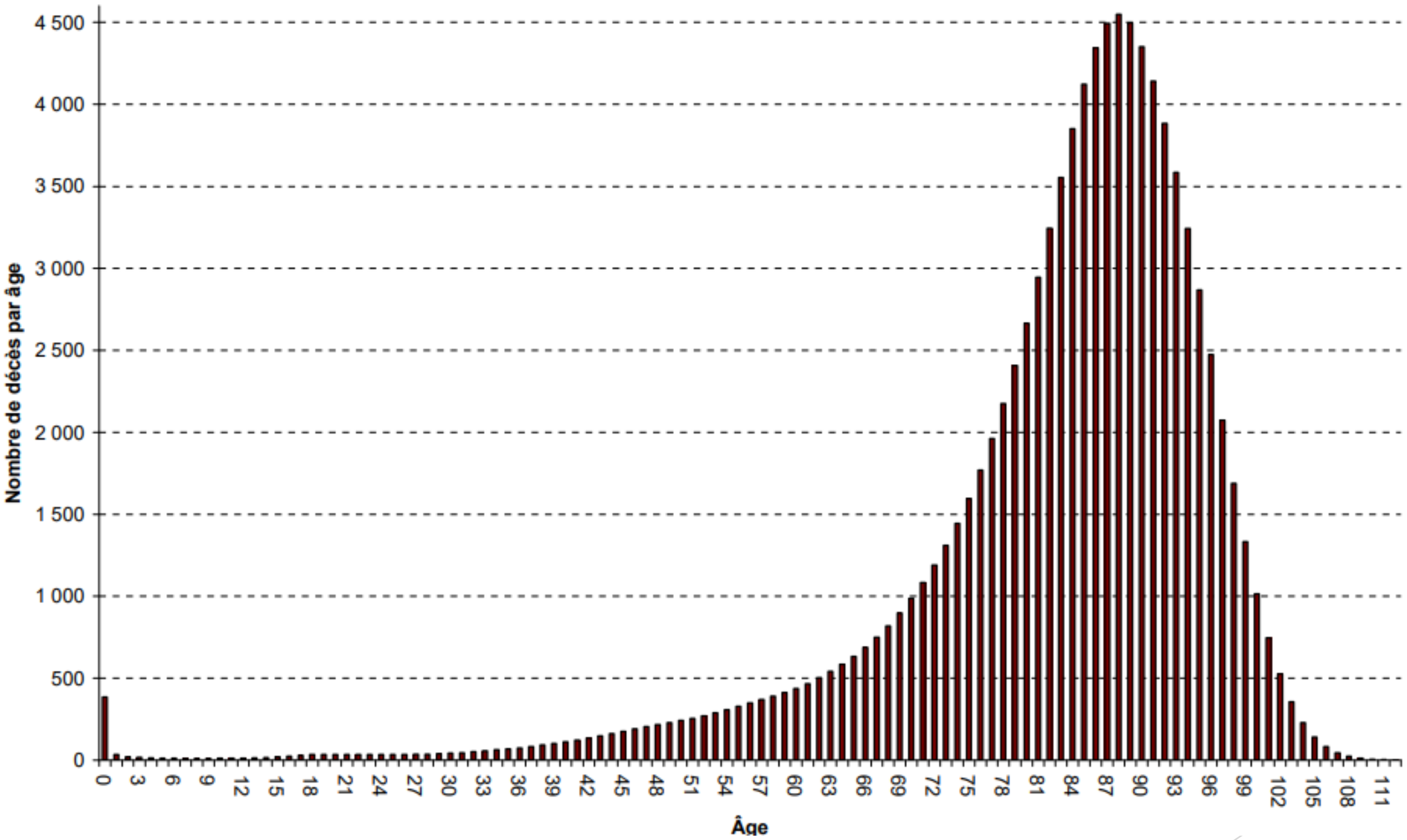
Exercice :

1. Quel est l’âge ultime de la table ?
2. Combien de personnes survivent à 40 ans ?
3. Calculer la probabilité qu’une personne de 20 ans survive jusqu’à 40 ans
4. Calculer la probabilité qu’une personne de 20 ans decède entre 70 et 75 ans.

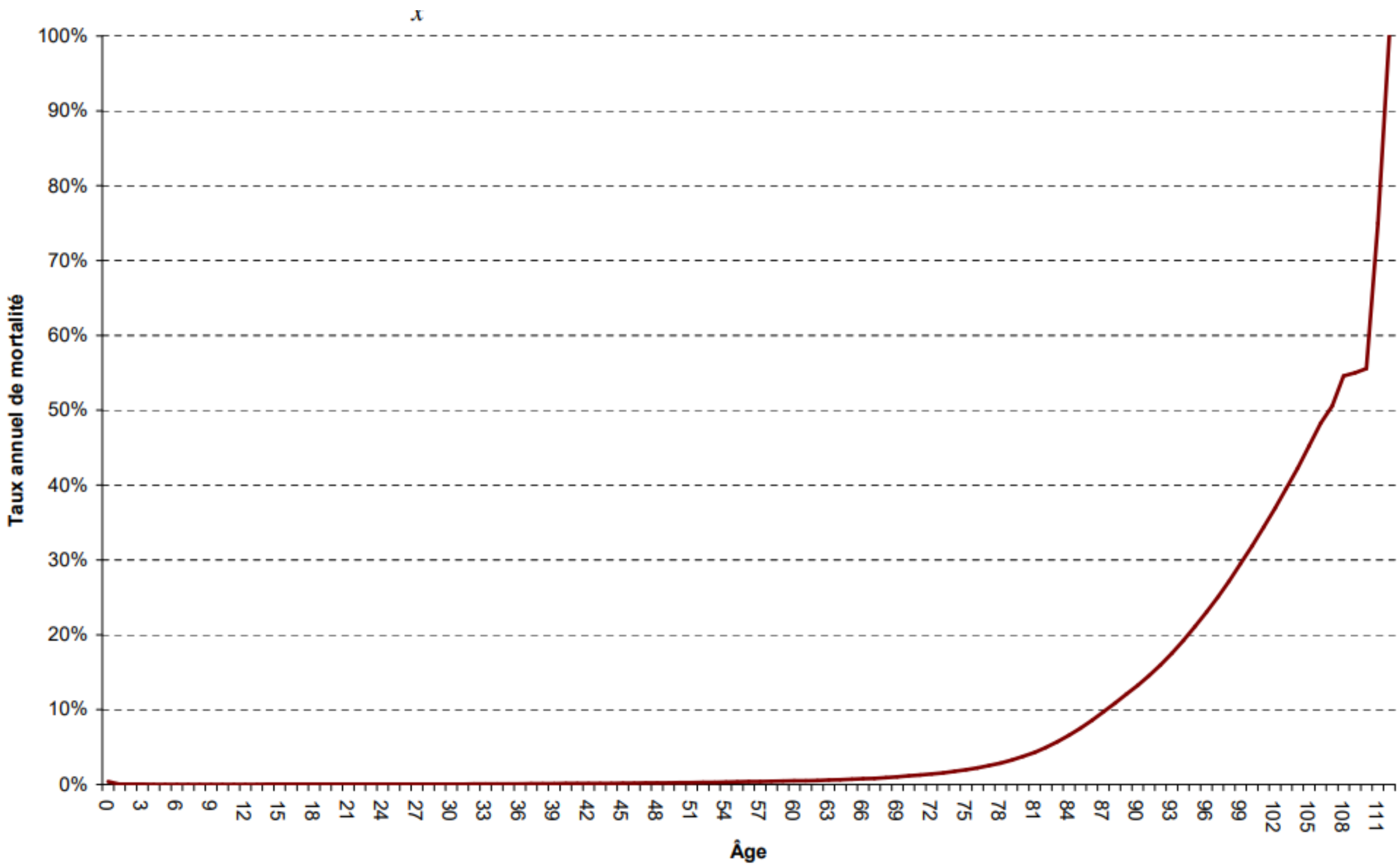
4. Tables de mortalité – Exemple – Nombre de survivants par âge



4. Tables de mortalité – Exemple – Nombre de décès par âge



4. Tables de mortalité – Exemple – Taux annuel de mortalité



4. Tables de mortalité – Force de mortalité

- On appelle Force de mortalité ou taux instantané de mortalité à l'âge x l'expression suivante :

$$\begin{aligned}\mu_x &= \lim_{dt \to 0^+} \frac{\mathbb{P}[T \leq x + dt | T > x]}{dt} \\ &= \lim_{dt \to 0^+} \frac{\mathbb{P}[T_x \leq dt]}{dt} \\ &= \lim_{dt \to 0^+} \frac{1 - S_x(dt)}{dt} \\ &= \lim_{dt \to 0^+} \frac{d}{dt} {}_t q_x\end{aligned}$$

- Pour dt petit, $\mu_x dt$ est en première approximation la probabilité pour qu'un individu ayant atteint l'âge x décède avant l'âge $x + dt$:

$${}_{dt}q_x \approx \mu_x dt$$

4. Tables de mortalité – Force de mortalité

- Avec la relation que l'on déduit de (4) :

$$ {}_{t+h}q_x = {}_tq_x + {}_tp_x\,{}_hq_{x+t} $$

- On a :

$$ \begin{aligned} \frac{d}{dt}\,{}_tq_x &= \lim_{h\to 0} \frac{{}_{t+h}q_x - {}_tq_x}{h} \\ &= {}_tp_x \lim_{h\to 0} \frac{{}_hq_{x+t}}{h} \\ &= {}_tp_x\mu_{x+t} \end{aligned} $$

4. Tables de mortalité – Force de mortalité

- On déduit avec les relations précédentes :

$$-\frac{d}{dt}{}_tp_x = {}_tp_x\mu_{x+t} \iff \frac{\frac{d}{dt}{}_tp_x}{{}_tp_x} = -\mu_{x+t}$$

- Et :

$$\frac{d}{dt}log_tp_x = -\mu_{x+t}$$

- On a alors la relation importante :

$${}_tp_x = exp\left(-\int_0^t \mu_{x+s}ds\right)$$

4. Tables de mortalité – Exercice

- Calculer le taux instantané de mortalité à 50 ans de la distribution de la durée de vie suivante :

$$F(t) = 1 - (1 - \frac{t}{105})^{\frac{1}{5}}$$

4. Tables de mortalité – Exercice - Réponse

- On calcule le taux instantané de mortalité :

$$\mu_x = -\frac{d}{dx} log_x p_0 = -\frac{d}{dx}\frac{1}{5} log\left(1 - \frac{x}{105}\right) = \frac{1}{525 - 5x}$$

- On en déduit alors :

$$\mu_{50} = 0,0036$$

4. Tables de mortalité – Quelques lois paramétriques

- En 1724, De Moivre suppose que la durée de vie humaine est distribuée uniformément entre 0 et l'âge ultime w :

$$F(t) = {}_tq_0 = \frac{t}{w}$$

- Nous calculons la distribution de cette loi :

$${}_tq_x = \frac{{}_{x+t}q_0 - {}_xq_0}{1 - {}_xq_0} = \frac{t}{w - x}$$

- Ainsi que sa force de mortalité :

$$\mu_x = \lim_{t \to 0} \frac{{}_tq_x}{t} = \frac{1}{w - x}$$

- On remarque alors que cette loi représente mal la mortalité que nous pouvons observer

4. Tables de mortalité – Quelques lois paramétriques

- En 1860, Makeham est repartie d'une loi créée par Gombertz en 1824 qui émettait l'hypothèse que le taux instantané de mortalité croît exponentiellement avec l'âge. Makeham ajoutait une constante qui représente un terme indépendant de l'âge.

$$\mu_x = A + \alpha c^x (A > 0, \alpha > 0, c > 1)$$

- Nous avons alors un terme qui représente la mortalité par accident et un terme qui représente la mortalité due à la « vieillesse »

- Ce modèle donne une bonne représentation des décès entre 30 ans et 80 ans mais n'arrive pas à montrer la mortalité infantile ou la bosse des accidents des 20-25 ans (alcool, fatigue au volant, ..)

4. Tables de mortalité – Probabilités de décès dans une fraction d'année

- Avec les tables de mortalité, nous avons souvent seulement une seule information : les ordres de suivie.

- Si on souhaite calculer $_tp_x$ pour x et t non-entiers, nous allons en général travailler avec l'une de ces 2 hypothèses :
  - Une distribution uniforme des décès
  - Un taux instantané de mortalité constant

4. Tables de mortalité – Probabilités de décès dans une fraction d'année

- Avant de détailler ces deux hypothèses, nous allons introduire quelques notations
  - On note K_x le nombre d'années entières de survie d'une personne ayant atteint l'âge x et S_x la fraction d'année que vivra cette personne au-delà de ces K_x années. On a alors :

$$K_x = [T_x] = max(n \in \mathbb{N} : n \leq T_x)$$

$$S_x = T_x - K_x$$

- On obtient alors :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}[S_x \leq t | K_x = k] &= \frac{\mathbb{P}[k < T_x \leq k + t]}{\mathbb{P}[k < T_x \leq k + 1]} \\
&= \frac{{}_k p_x (1 - {}_t p_{x+k})}{{}_k p_x (1 - p_{x+k})} \\
&= \frac{{}_t q_{x+k}}{q_{x+k}} (x, k \in \mathbb{N}, 0 \leq t \leq 1)
\end{aligned}$$

4. Probabilités de décès dans une fraction d'année – Hypothèse 1

- La première hypothèse est celle d'une distribution uniforme des décès :
- On suppose que $\forall x \in \mathbb{N}, 0 \leq t \leq 1$

$$\begin{cases} {}_tq_x = tq_x \\ {}_tp_x = 1 - tq_x \end{cases} \qquad \text{(a)}$$

- On calcule les taux instantanés de mortalité :

$$\mu_{x+t} = -\frac{d}{dt} log_t p_x = \frac{q_x}{1 - tq_x}$$

- On a alors : $\mathbb{P}[S_x \leq t | K_x = k] = t$
- On voit donc que S_x est distribuée uniformément sur [0;1] et également que S_x et K_x sont indépendantes d'après (a)

4. Probabilités de décès dans une fraction d'année – Hypothèse 2

- L'hypothèse deux est celle d'un taux instantané de mortalité constant. On suppose que $\forall x \in \mathbb{N}, 0 \leq t \leq 1$, $\mu_{x+t} = \mu_x$, on a alors :

$$\begin{cases} {}_tp_x = p_x^t \\ {}_tq_x = 1 - (1 - q_x)^t \end{cases} \qquad \text{(b)}$$

- Ici, S_x et K_x ne sont pas indépendantes, on a alors :

$$\mathbb{P}[S_x \leq t | K_x = k] = \frac{1 - p_{x+k}^t}{1 - p_{x+k}}$$

- Comme $K_x = k$, S_x a une distribution exponentielle tronquée en 1 donc le paramètre p_{x+k} dépend de k.

4. Espérance de vie

- On note e_x l'espérance de la variable K_x qui représente l'espérance de vie discrète. On a alors :

$$
\begin{aligned}
e_x &= \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}[K_x = k] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k\mathbb{P}[k \leq K_x < k+1] \\
&= \sum_{k=0}^{+\infty} k({}_kp_x - {}_{k+1}p_x) \\
&= ({}_1p_x - {}_2p_x) + 2({}_2p_x - {}_3p_x) + 3({}_3p_x - {}_4p_x) + \ldots \\
&= \sum_{k=1}^{+\infty} {}_kp_x
\end{aligned}
$$

4. Espérance de vie

- On appelle espérance de vie à l'âge x et on note $\mathring{e}_x$ la moyenne de la distribution $F_x(t)$ = ${}_tq_x$
- On a alors :

$$\begin{aligned}\mathring{e}_x &= E[T_x] \\ &= \int_0^{+\infty} t dF_x(t) \\ &= \int_0^{+\infty} (1 - F_x(t))dt \\ &= \int_0^{+\infty} {}_tp_x dt\end{aligned}$$

4. Espérance de vie – Lien avec l'espérance de vie discrète

- Avec l'expression suivante on en déduit :

$$\mathring{e}_x = \sum_{j=0}^{+\infty} \int_j^{j+1} {}_tp_x dt$$

- En utilisant la règle du trapèze pour l'intégration :

$$\mathring{e}_x \approx \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{1}{2}({}_jp_x + {}_{j+1}p_x)$$

$$= \frac{1}{2} + \sum_{j=1}^{+\infty} {}_jp_x$$

- On en conclut :

$$\mathring{e}_x \approx \frac{1}{2} + e_x$$

4. Exercice

- Soit $S_0(x) = exp\left[-\left(Ax + \frac{1}{2}Bx^2 + \frac{C}{logD}D^x - \frac{C}{logD}\right)\right]$ $avec\ A, B, C, D \geq 0$
  - 1. Montrer que S_0 est une fonction de survie
  - 2. Donner une formule de $S_x(t)$
  - 3. Donner une formule de μ_x
  - 4. On suppose maintenant que $A = 0,00005\ ;\ B = 0,0000005\ ;\ C = 0,0003\ ;\ D = 1,07$
    - a) Calculer ${}_tp_{30}\ pour\ t = 1, 10, 20$
    - b) Calculer ${}_tq_{40}\ pour\ t = 1, 10, 20$
    - c) Calculer ${}_{t|10}q_{30}\ pour\ t = 1, 10, 20$
    - d) Calculer $e_x\ pour\ x = 70, 75$
    - e) Calculer $\mathring{e}_x\ pour\ x = 70, 75$