Microéconomie

TD le producteur

Exercice 1

$$\begin{cases} y = k^{1/4}(l-1)^{1/4} \\ y = 0 \text{ si } l \leq 1 \end{cases}$$

1. $k^{1/4}(\ell-1)^{1/4} = 1$

$k(\ell-1) = 1$

$k = \frac{1}{\ell-1}$

$\frac{\partial k}{\partial \ell} = -\frac{1}{(\ell-1)^2}$ $\qquad \frac{\partial^2 k}{\partial^2 \ell} = \frac{2}{(\ell-1)^3} \geq 0$ donc convexe

$< 0 \rightarrow$ décroissant

2. $\frac{\partial y}{\partial k} = \frac{1}{4} k^{-\frac{3}{4}} (\ell-1)^{1/4}$

$\frac{\partial y}{\partial \ell} = \frac{1}{4} k^{1/4} (\ell-1)^{-3/4}$

normalement inverse pour le TMS

$$\frac{\frac{\partial y}{\partial k}}{\frac{\partial y}{\partial \ell}} = \frac{\cancel{\frac{1}{4}} k^{-3/4}(\ell-1)^{1/4}}{\cancel{\frac{1}{4}} k^{1/4}(\ell-1)^{-3/4}} = \frac{\ell-1}{k} = \frac{r}{w} \text{ à l'équilibre}$$

3. CAS 1. $\frac{\ell-1}{k} = 1$

$y = 1$ donc $k^{1/4}(\ell-1)^{1/4} = 1$

$(\ell-1)^{1/2} = 1$

$\ell - 1 = 1$

$\ell = 2 \qquad k = 1$

CAS B $\quad \frac{\ell-1}{k} = \frac{2}{3}$

$(\ell-1) = \frac{2}{3}k$

$k^{1/4}\left(\frac{2}{3}k\right)^{1/4} = 1$

$k = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$

$\ell = \sqrt{\frac{2}{3}} + 1$

Dans le 1° travail, le prix du travail = celui du travail. A ces prix là, la combinaison des facteurs de prod optimum avec $k=1$ et $l=2$ est optimum pour le producteur. Cela minimise les coûts.

- Dans le cas B, le prix du travail a triplé et le capital a doublé.

Le producteur modifie sa combinaison productive.
Il va diminuer la quantité de travail et va ↗ sa quantité de capital

Exercice 2

1) Elasticité partielle

$$Q(L,k) = 6L^{1/3}k^{2/3}$$

$$e_L = \frac{\partial Q(k,L)}{\partial L} \times \frac{L}{Q(k,L)} = \frac{1}{2}\frac{\cancel{6}\cancel{k^{2/3}}}{\sqrt{L}} \frac{L}{\cancel{6}L^{1/2}\cancel{k^{2/3}}} = \frac{1}{2}$$

$$e_k = \frac{\partial Q(k,L)}{\partial k} \frac{k}{Q(k,L)} = \frac{2}{3}$$

2. $$TMST_{k,L} = -\frac{\partial k}{\partial L} = \frac{P_w L}{P_w k}$$

$$= \frac{3L^{-1/2}k^{2/3}}{4L^{1/2}k^{-1/3}} = \frac{3}{4}\frac{k}{L}$$

3. $$f(tx, ty) = t^h f(x,y)$$

$$Q(tL, tk) = 6(tL)^{1/2}(tk)^{2/3}$$

$$= 6\, t^{1/2} L^{1/2} t^{2/3} k^{2/3}$$

$$= t^{7/6}(6L^{1/2}k^{2/3})$$

$$= t^{7/6}\, Q(k,L)$$

Th d'Euler

$$x f'(x) + y f'(y) = h f(x,y)$$

degré d'homogénéité

4. $x = k \quad f'(x) = P_{m_L}$

$$L P_{m_L} + k P_{m_k} = \frac{7}{6}(6L^{1/2}k^{2/3})$$

$$L\left(6 \times \frac{1}{2} L^{-1/2}k^{2/3}\right) + k\left(6 \times \frac{2}{3} k^{-1/3} L^{1/2}\right)$$

$$\Rightarrow 3L^{1/2}k^{2/3} + 4k^{2/3}L^{1/2}$$

Exercice 3 fonctionnement de production de Leontief

1) $a=1 \quad b=12 \quad c=48$

Bien Y_1 $\begin{cases} X_1 = aq \Rightarrow q = \frac{X_1}{a} \\ X_2 = bq \Rightarrow q = \frac{X_2}{b} \end{cases}$

Bien Y_2 $\begin{cases} X_1 = aq \Rightarrow q = X_1/a \\ X_2 = cq \Rightarrow q = X_2/c \end{cases}$

$Y_1 = f(X_1, X_2) = \min\left\{ X_{11}, \frac{X_{21}}{12} \right\}$

$Y_2 = f(X_1, X_2) = \min\left\{ X_{12}, \frac{X_{22}}{48} \right\}$

2) C'est complètement proportionnel. Si on augmente q alors tout augmente.
Il n'y a pas de substitut° possible car c'est des biens complémentaires.

3) Pour l'input 1 $\quad Y_1 + Y_2 = X_{11} + X_{12} \leq 100$

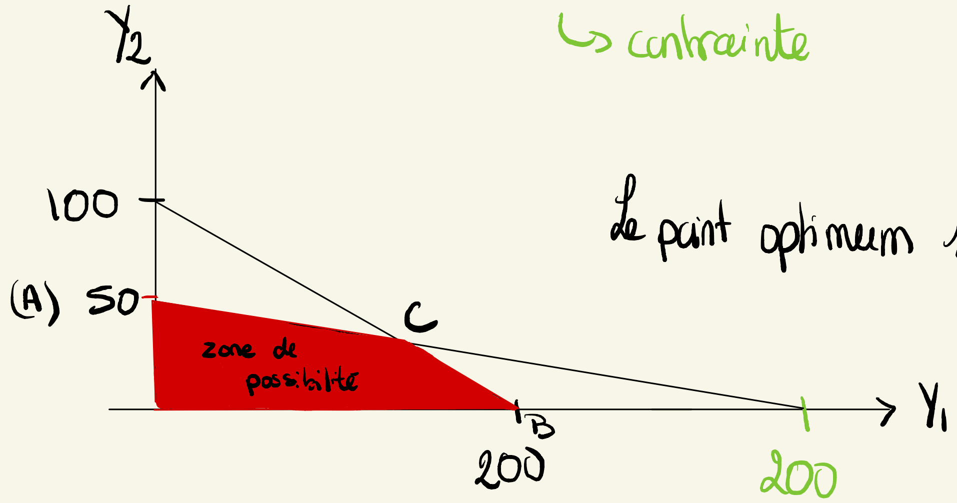
car $\frac{X_{21}}{12} = Y_1$

Pour l'input 2 $\quad 12Y_1 + 48Y_2 = X_{21} + X_{22} \leq 2400$

$\frac{X_{22}}{48} = Y_2$

$Y_1 + 4Y_2 \leq 200$

↳ contrainte



Le point optimum sera le sommet.

$\boxed{RT = pq}$

recette totale

• si $P_1 = 1$ et $P_2 = 2$

$A(0, Y_2) = (0, 50) \Rightarrow RT = 2 \times 50 = 100$

$B(Y_1, 0) = (200, 0) \Rightarrow RT = 100$

$C(Y_1, Y_2) = (66{,}6, 33{,}3) \Rightarrow RT = 133 \; (66{,}6 \times 1 + 33{,}3 \times 2)$

La firme produit C car $RT = 133 > 100$

• si $P_1 = 2$ et $P_2 = 1$

En A $\quad RT = 1 \times 50 = 50$

En B $\quad RT = 200 \qquad$ On produit B

En C $\quad RT = 167$

Exercice 4

Product° moyennes

- $P\Pi_1 = \frac{t_1^{1/2}}{t_1} = t_1^{-1/2}$

$$\frac{\partial t_1^{-1/2}}{\partial t_1} = -\frac{1}{2} t_1^{-3/2} < 0 \rightarrow \text{Productivité} \searrow$$

- $P\Pi_2 = \frac{2t_2}{t_2} = 2 \qquad P\Pi_2 \text{ cnst}$

→ Productivité marginale

$$Pm_1 = \frac{\partial Y_1}{\partial h} = \frac{1}{2} t_1^{-1/2} \qquad \frac{\partial Pm_1}{\partial h} = -\frac{1}{4} t_1^{-3/2} < 0$$

$$Pm_2 = 2$$

→ Coût réels

technique 1

$$\text{c}\Pi \text{ réel} \qquad c\Pi_1 = \frac{t_1}{Y_1} = t_1^{1/2}$$

$$\frac{\delta c\Pi}{\delta h} = \frac{1}{2} t_1^{-1/2} > 0$$

coût marginal réel

$$c_{m_1} = \frac{\delta h}{\delta y_1} = \frac{1}{\frac{\partial y_1}{\partial h}} = 2t^{1/2}$$

$$\frac{\partial Cm_1}{\partial h} = t^{-1/2} > 0$$

Techique 2

$$c\Pi_2 \text{ réel} = \frac{t_2}{Y_2} = \frac{\cancel{t_2}}{2\cancel{t_2}} = \frac{1}{2}$$

$$c_{m_2} \text{ Réel} = \frac{1}{\frac{\delta\, f_2(t_2)}{\partial t_2}} = \frac{1}{2}$$

Ici
$c\Pi_2 = Cm_2$

Exercice 5

1- $\frac{\partial Y(x_1,x_2)}{\partial x_1} = A p \alpha a x_1^{-\alpha-1} [a x_1^{-\alpha} + b x_2^{-\beta}]^{-p-1}$

$\frac{\partial Y(x_1,x_2)}{\partial x_2} = A p \beta b x_2^{-\beta-1} [\alpha x_1^{-\alpha} + b x_2^{-\beta}]^{-p-1}$

$$TMST_{2,1} = \frac{\frac{\partial Y(x_1,x_2)}{\partial x_1}}{\frac{\partial Y(x_1,x_2)}{\partial x_2}} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{a}{b}\frac{x_1^{-\alpha-1}}{x_2^{-\beta-1}}$$

si $\alpha = \beta$ on a $TMST_{2,1} = \frac{a}{b}\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{-\alpha-1}$

2) $A[a(kx_1)^{-\alpha} + b(kx_2)^{-\alpha}]^{-p}$

$= A\left[(k^{-\alpha})\left(a x_1^{-\alpha} + b x_2^{-\alpha}\right)\right]^{-p}$

$= k^{-\alpha p}[a x_1^{-\alpha} + b x_2^{-\alpha}]^{-p} = k^{-\alpha p} y(x_1,x_2)$

$\alpha p = 1$

donc $\boxed{p = 1/\alpha}$

en réécrivant la fonction de production $Y = A[a x_1^{-\alpha} + b x_2^{-\alpha}]^{-1/\alpha}$ f^o CES

3) Elasticité de substitution $\sigma_{2,1}$

$\sigma_{2,1} = \frac{\frac{\partial(\frac{x_2}{x_1})}{x_2/x_1}}{\frac{d(TMST_{2,1})}{TMST_{2,1}}} = \frac{d(\log(x_2/x_1))}{d(\log TMST_{2,1})}$ $\quad \frac{1}{\sigma_{2,1}} = \frac{d(\log TMST_{2,1})}{d(\log(x_2/x_1))} = \alpha + 1$ donc $\sigma_{2,1} = \frac{1}{\alpha+1}$

$TMST_{2,1} = \frac{a}{b}\left(\frac{x_2}{x_1}\right)^{\alpha+1}$ $\quad \log TMST_{2,1} = \log\left(\frac{a}{b}\right) + (\alpha+1)\log\left(\frac{x_2}{x_1}\right)$

on veut $\sigma_{2,1} = \frac{1}{3} = \frac{1}{\alpha+1}$ donc $\alpha = 2$

Exercice 6

1) $f(x_1, x_2) = x_1^\alpha x_2^\beta$

$$\min \; w_1x_1 + w_2x_2 \leftarrow \text{f° de coûts}$$
$$f(x_1,x_2) \leqslant x_1^\alpha x_2^\beta$$
$$x_1 \geqslant 0$$
$$x_2 \geqslant 0$$

$\mathcal{L}(x_1, x_2, \lambda) = w_1x_1 + w_2x_2 + \lambda(y - x_1^\alpha x_2^\beta)$ — y = output - ce qui sort de la fonct° de production - contrainte technologique comme le R en utilisateur

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_1} = 0 \Rightarrow w_1 - \lambda\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta = 0 \Rightarrow w_1 = \lambda\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_2} = 0 \Rightarrow w_2 - \lambda\beta x_2^{\beta-1}x_1^\alpha = 0 \Rightarrow w_2 = \lambda\beta x_2^{\beta-1}x_1^\alpha \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow y - x_1^\alpha x_2^\beta = 0 \Rightarrow y = x_1^\alpha x_2^\beta \quad \text{(saturation de la contrainte)} \quad (3)$$

$$\frac{(1)}{(2)} : \frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha x_1^{\alpha-1}x_2^\beta}{\beta x_2^{\beta-1}x_1^\alpha} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{x_1}$$

Avec (3) $x_1^\alpha = \frac{y}{x_2^\beta} \Rightarrow x_1 = \left(\frac{y}{x_2^\beta}\right)^{1/\alpha} \Rightarrow x_1 = y^{1/\alpha}x_2^{-\beta/\alpha}$

Donc $\frac{w_1}{w_2} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2}{y^{1/\alpha}x_2^{-\beta/\alpha}} = \frac{\alpha}{\beta}\frac{x_2^{\beta/\alpha+1}}{y^{1/\alpha}}$

$$\boxed{x_2^* = \left(\frac{w_1}{w_2}\frac{\beta}{\alpha}y^{1/\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\beta+\alpha}}}$$

$$y = x_1^\alpha x_2^\beta \Leftrightarrow x_1 = \left(\frac{y}{x_2^\beta}\right)^{1/\alpha} = \frac{y^{1/\alpha}}{\left(\frac{w_1}{w_2}\frac{\beta}{\alpha}y^{1/\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}}} = \left(\frac{w_2}{w_1}\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha}\left(1-\frac{\beta}{\beta+\alpha}\right)}$$

$$= \left(\frac{w_2\,\alpha}{w_1\,\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\beta+\alpha}\right)}$$

$$= \boxed{\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}} y^{\frac{1}{\beta+\alpha}}}$$

2) Coût à long terme total

$C(w_1, w_2, y) = w_1x_1^* + w_2x_2^*$ coût total

$$= w_1\left(\frac{\alpha}{\beta}\frac{w_2}{w_1}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} + w_2\left(\frac{\beta}{\alpha}\frac{w_1}{w_2}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}$$

$$= y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}\left[w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+\alpha}} + w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}} w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right]$$

$$= y^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \underbrace{\left(w_1^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}} w_2^{\frac{\beta}{\alpha+\beta}}\right)\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}} + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\beta}}\right)}_{A}$$

$$= \boxed{y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}A}$$

- $CM(w_1, w_2, y) = \frac{y^{\frac{1}{\alpha+\beta}}A}{y} = \frac{y^{\frac{1}{\nu}}A}{y} = \boxed{y^{\left(\frac{1}{\nu}-1\right)}A}$ $\quad \nu = \alpha + \beta$ coût moyen

- $Cm(w_1, w_2, y) = \frac{\partial C}{\partial y} = \boxed{\frac{A}{\nu}y^{\frac{1}{\nu}-1}}$ coût marginale

Exercice 7

courte période : var fixe
longue période : var variable

$Y = x_1^{1/4} x_2^{1/4} x_3^{1/2}$

$P_1 = 1/2 \quad P_2 = \frac{1}{2} \quad P_3 = 1$

- $\min_{(X_1, X_2)} P_1 X_1 + P_2 X_2 + \overline{X_3}$ $\qquad \overline{X_3} : X_3$ fixe

$Y \leq X_1^{1/4} X_2^{1/3} \overline{X_3}^{1/2}$

$X_1 \geq 0 \quad X_2 \geq 0$

Au minimum du coût, le rapport des productivités marginales est égale au rapport des prix.

$$\frac{dY}{dX_1} = \frac{1}{4} X_1^{-3/4} X_2^{1/4} \overline{X_3}^{1/2}$$

$$\frac{dY}{dX_2} = \frac{1}{4} X_1^{1/4} X_2^{-3/4} \overline{X_3}^{1/2}$$

$$TMST_{2,1} = \frac{\cancel{1/4} X_1^{-3/4} X_2^{1/4} \cancel{\overline{X_3}^{1/2}}}{\cancel{1/4} X_1^{1/4} X_2^{-3/4} \cancel{\overline{X_3}^{1/2}}} = \frac{3 X_2}{4 X_1} = \frac{P_1}{P_2} = 1 \quad \text{donc} \quad \frac{X_2}{X_1} = 1 \Leftrightarrow X_2 = X_1$$

$$y = X_1^{1/4} X_2^{1/4} \overline{X_3}^{1/2}$$
$$= X_1^{1/2} \overline{X_3}^{1/2} \Rightarrow \boxed{X_1^* = \frac{y^2}{\overline{X_3}} = X_2^*}$$

- $C(Y, \overline{X_3}) = \frac{1}{2} X_1 + \frac{1}{2} X_2 + \overline{X_3}$

$$C_c(Y, \overline{X_3}) = X_1 + \overline{X_3}$$
$$= \frac{Y^2}{\overline{X_3}} + \overline{X_3}$$

- Coût moyen : $CMC(Y, \overline{X_3}) = \frac{C}{y} = \frac{y}{\overline{X_3}} + \frac{\overline{X_3}}{y}$

minimum : $\frac{\partial CMC}{\partial y} = \frac{1}{\overline{X_3}} - \frac{\overline{X_3}}{y^2} = 0 \Leftrightarrow y = \overline{X_3}$ $\quad$ donc $CMC_{min} = 2$

- coût marginal : $\frac{\partial C}{\partial y} = \frac{2y}{\overline{X_3}}$

Méthode

La minimisation du CT de long terme se fait en 2 temps.
1) Calcul de $\overline{X_3}$ qui minimise le coût total de court terme
2) On remplace dans la fonction de coût total de court terme.

Etape 1

$$C_c(Y, \overline{X_3}) = \frac{Y^2}{\overline{X_3}} + \overline{X_3}$$

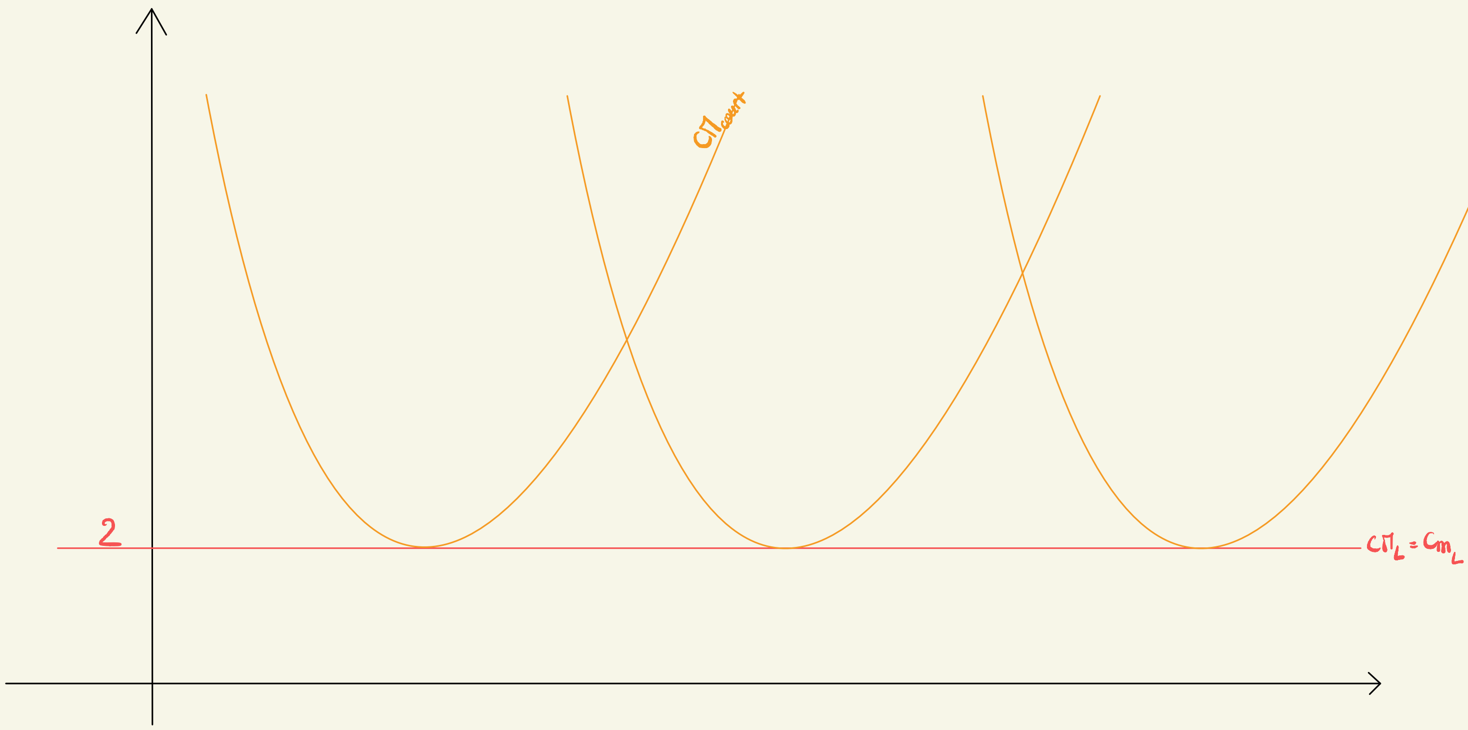
$$\frac{\partial C_c(Y, \overline{X_3})}{\partial \overline{X_3}} = 0 \Rightarrow \frac{-Y^2}{X_3^2} + 1 = 0 \Rightarrow X_3 = Y$$

Etape 2

$$C_c(Y, \overline{X_3}) = \frac{Y^2}{\overline{X_3}} + \overline{X_3}$$

- $C_L(Y) = \frac{Y^2}{Y} + Y = 2Y$

- $C\Pi(Y) = 2$
- $C_m(Y) = 2$



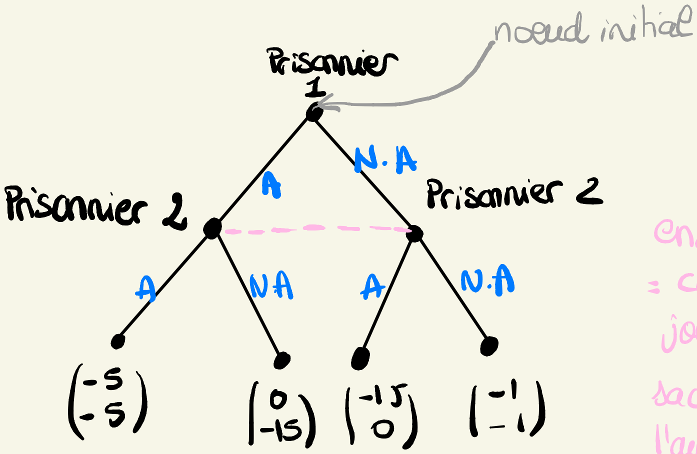
$C\Pi_{court}$ varie en fonction de la valeur qu'on donne à $\overline{x_3}$.
Les rendements d'échelles sont constants car $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = 1$
(les facteurs de prod varie dans les mêmes proportions)

Théorie des jeux

Exercice 1

jeu non coopératif
" simultané

1)



2)

ensemble d'information du joueur 2 = collection de ts les noeuds que les joueur peut jouer à cette étape sachant qu'il ne peut observer ce que l'autre à joue.

Exercice 2

	x	y	z
~~a~~	~~2,3~~	~~1,4~~	~~3,2~~
b	5,1	2,3	1,2
c	3,7	4,6	5,4
d	4,2	2,2	6,1

1_ Stratégie a dominé si l'utilité de a < utilité de b_

- a dominé par d et c pour le joueur 1.
- Joueur 2 : z dominé par x

Profit de stratégie : Résultat {(b, x), (b, y), (c, x), (c, y), (d, x), (d, y)}

2\.

	x	y	z
~~a~~	~~2,3~~	~~1,4~~	~~3,2~~
b	5,1	2,3	1,2
c	3,7	4,6	5,4
~~d~~	~~4,2~~	~~2,2~~	~~6,1~~

- joueur 1 d dominé faiblement par b
- joueur 2 on ne peut rien faire

Résultat : {(b, x), (b, y), (c, x), (c, y)}

Partie 2

Exercice 1

		Joueur 2 A	Joueur 2 NA
Joueur 1	A	-5, -5	0, -15
	NA	-15, 0	-1, -1

$BR_1(A) = A$ $\quad$ $BR_2(A) = A$

$BR_1(NA) = A$ $\quad$ $BR_2(NA) = A$

Ainsi (A, A) est un équilibre même si il n'est pas optimal au sens de pareto

On peut avoir plusieurs équilibres de Nash mais ce n'est pas le cas ici.
Les eq dominants sont des équilibres de Nash mais les eq de Nash ne sont pas toujours des eq dominant.

Exercice 2

$$u_G = \frac{-y^2}{x} - xc^4 \qquad u_c = \frac{1}{1+xy}\sqrt{y}$$

1) les fonctions de meilleures réponses
Le gouvernement sélectionne 1 niveau de force de l'ordre $x \geq 0$ tel qu'il max u_G

$$\frac{\partial u_G}{\partial x} = 0 \quad (CPO) \Rightarrow \frac{y^2}{x^2} - c^4 = 0 \iff x(y) = \frac{y}{c^2} : BR_G(y)$$

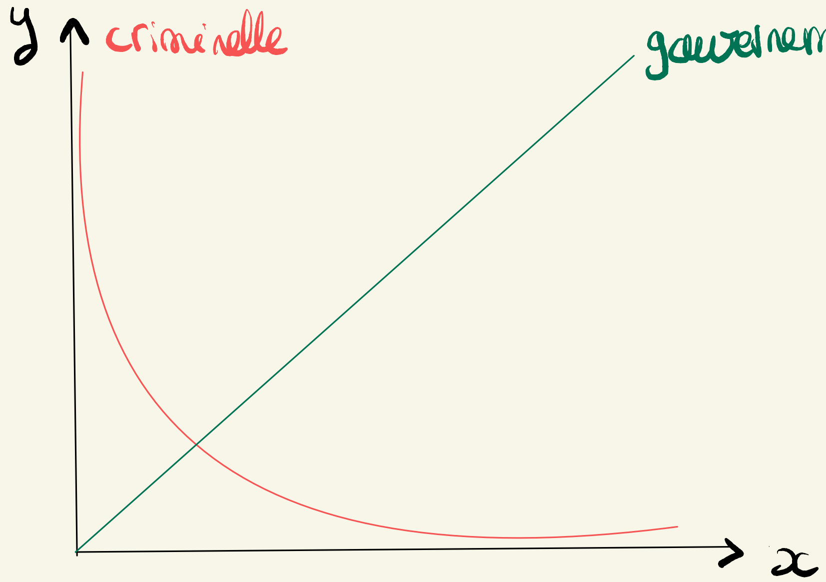
$$\frac{\partial u_c}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}}(1+xy) - \sqrt{y}\,x}{(1+xy)^2} = 0$$

$$\iff \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}} + \frac{x\sqrt{y}}{2} - \sqrt{y}\,x}{(1+xy)^2} = 0$$

$$\iff \frac{1}{2\sqrt{y}} \frac{1-xy}{(1+xy)^2} = 0$$

$$\iff 1 - xy = 0$$

$$\iff y = \frac{1}{x}$$



Eq de Nash :

$$\begin{cases} y = c^2 x \\ y = \frac{1}{x} \end{cases} \Rightarrow \frac{1}{x} = c^2 x \Leftrightarrow x^2 c^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1}{c}$$

$$\Rightarrow y = c$$

donc l'équilibre de Nash $EN(x, y) = EN\left(\frac{1}{c}, c\right)$

3) $c \nearrow \Rightarrow y \nearrow$ et $x \searrow$

Exercice 3

revoir Cournot & Bertrand

1) fonction de meilleure réponse du suiveur (F)

$$\max \underbrace{(1 - q_L - q_F) q_F - c_F q_F}_{\text{fonction de } \pi \text{ du suiveur}}$$

$\cdot\ P(Q) = 1 - Q$

$= 1 - q_L - q_F$

$\cdot\ \pi_F = P(Q) q_F - c_F q_F$: Profit

Recette totale (RT)

$$\frac{\partial \pi}{\partial q_F} = 0 \Rightarrow 1 - q_L - 2q_F - c_F = 0 \Rightarrow q_F(q_L) = \frac{1 - c_F}{2} - \frac{1}{2} q_L \quad (1)$$

2) Maximisation du profit du leader

$$\max_{q_L \geq 0} (1 - q_L - q_F) q_L - c_L q_L \quad (2)$$

(2) dans (1)

$$q_L^* = \frac{1}{2}(1 - c_F) - c_L$$

(2) dans (1) $q_F(q_L) = \dfrac{1 - 3c_F + 2c_L}{4}$

ENSP

$$(q_L^*, q_F(q_L)) = \left(\frac{1 - c_F - 2c_L}{4}, \frac{1 - c_F}{2} - \frac{1}{2} q_L \right)$$