Théorie des Options

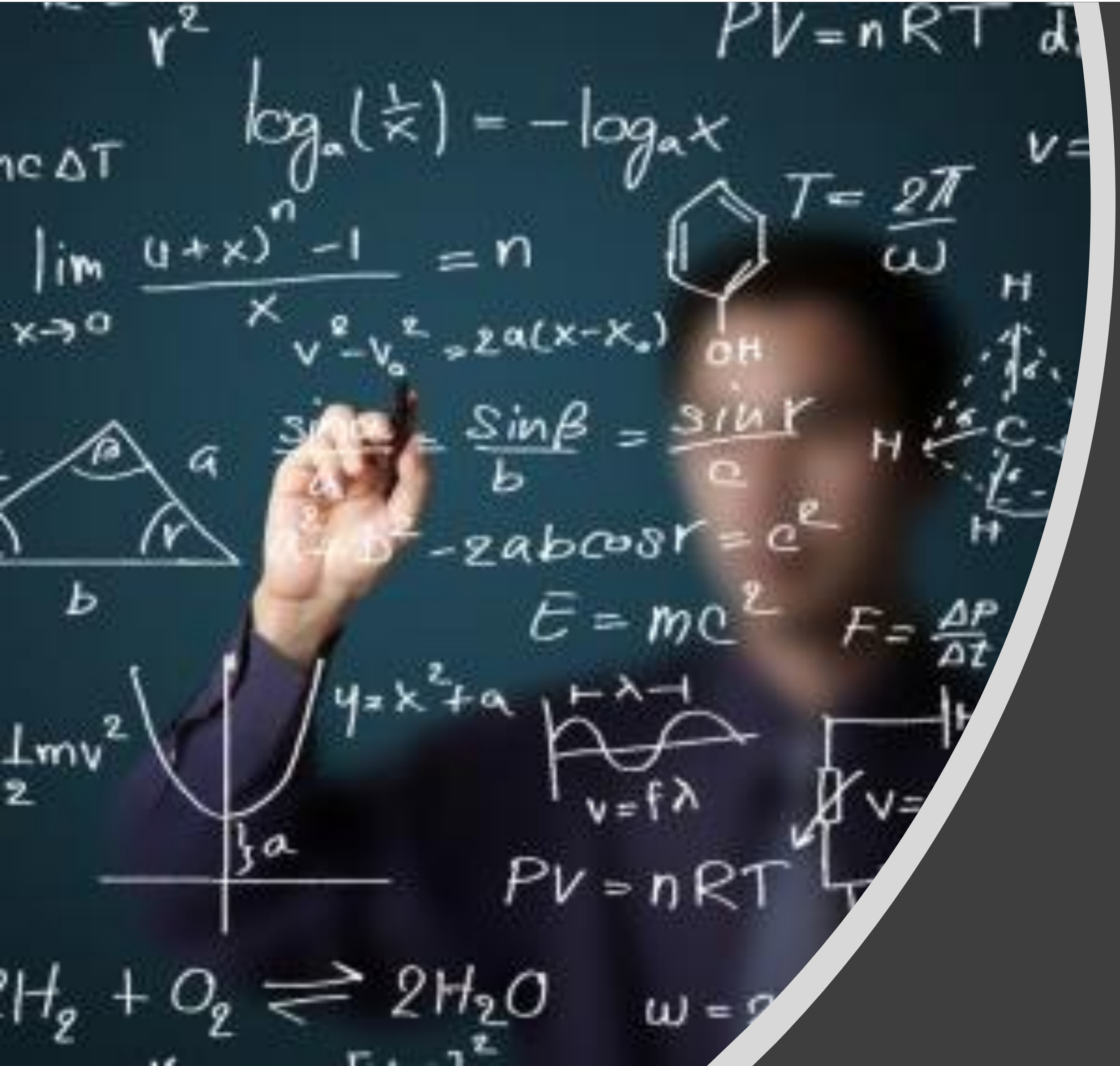
Anne EYRAUD-LOISEL

Cours numéro 2

02/02/2023

Généralités - ISFA

- Ne pas hésiter à me solliciter en cas de problème : mail, rdv tel/webex.
- **TER :** faire des groupes de 3 + choisir sujet/contacter encadrant
- **Examens :** 15 au 26 mai 2022
- **UE Projet Pro** : ne pas oublier le dossier à rendre pour fin mars.
- **Stages : ELIPSE** à partir du 29 mai jusqu'au 31 août 2023 – 3 Crédits



Partie 2 : Formalisation des marchés financiers

Hypothèses sur le marché

- Les actifs sont divisibles à l'infini
- Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant
- On autorise les ventes à découvert
- Les échanges ont lieu sans coût de transaction
- On autorise les emprunts et les prêts illimités pour tous les agents au même taux constant *r* (accès à l'actif sans risque)

Quelles sont les évolutions possibles du marché ?

- **Ω** : ensemble des états possibles du marché.
- **IP** : Probabilité réelle (ou en tous cas anticipée) de survenance de chacun des ´etats.
- $\mathscr{F}$: Filtration $(F_t)_{t \in T}$: informations disponibles à l'instant t = tribu engendrée par le processus de prix = informations révélées par les prix antérieurs à l'instant t.

Quels sont les actifs financiers ?

- On suppose qu'il y a d+1 actifs financiers : d **actifs risqués** et 1 **actif sans risque**
- Leurs prix à l'instant t sont donnés par des variables aléatoires à valeurs >0, mesurables par rapport à $(F_t)_{t \in T}$ (*les investisseurs ont connaissance des cours actuels et passés, mais pas des cours futurs*).
- Le vecteur St est le vecteur des prix à la date t.

$$S_t = (S_t^0, S_t^1, ..., S_t^d)$$

Le placement sans risque

- L'actif 0 est le placement sans risque, de taux r.
  - Cas discret : $S_0^0 = 1$, et $S^0_n = (1+r)^n$ (r est le taux discret sur la période de base considérée).
  - Ainsi, $\beta_n = 1/ S^0_n = 1/(1+r)^n$ est le coefficient d'actualisation (de la date n `a la date 0) : c'est la somme d'argent qu'il faut investir en 0 pour avoir 1 en n sans risque.
  - Cas continu : $S^0_t = e^{rt}$ et $\beta_t = e^{-rt}$.

Quelles sont les stratégies d'investissement possibles ?

Définition 1.1 Une **stratégie de gestion** (ou **portefeuille**) est un processus ***<u>prévisible</u>***

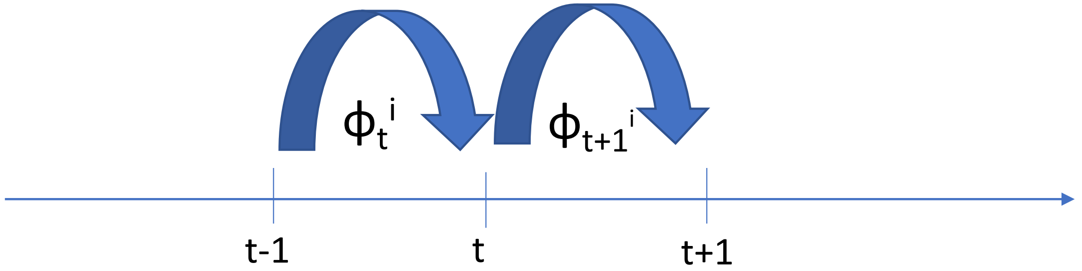
$$\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1, \dots, \phi_t^d))_{t \in \overline{\mathcal{T}}}$$

à valeurs dans IR^{d+1}, donnant à chaque instant les quantités ϕ_t^i des divers actifs détenus en portefeuille.

- Dans le cas discret, ***<u>prévisible</u>*** signifie que : $\forall i \in \{0, 1, \dots, d\}$, ϕ_0^i est F_0-mesurable et $\forall n \geq 1$, ϕ_n^i est F_{n-1}-mesurable.

Signification : le portefeuille en date n est constitué au vu des informations disponibles à la date (n−1) et conservé tel quel à la date n.

- En temps continu, c'est le même raisonnement, par passage à la limite, le portefeuille utilisé en date t est constitué à la date t^-.



Valeur du portefeuille en t

- Définition : la valeur du portefeuille à l'instant t est donnée par le produit scalaire

$$V_t(\phi) = \phi_t.S_t = \sum_{i=0}^{d} \phi_t^i S_t^i$$

- La valeur actualisée $\tilde{V}_t(\phi) = \beta_t(\phi_t.S_t) = \phi_t.\tilde{S}_t$

Où β est le facteur d'actualisation $\beta=1/S^0_t$

- Et le vecteur des prix actualisés

$$\tilde{S}_t = (1, \beta_t S_t^1, \ldots, \beta_t S_t^d)$$

Portefeuille autofinancé

Définition

Un portefeuille **autofinancé ou autofinançant** (ou **stratégie autofinancée**) est

- une stratégie d'achat ou de vente de titres, actions, prêts et emprunts à la banque, et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'a pas été modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent.

Portefeuille autofinancé

Signification

Les variations de la valeur du portefeuille sur une période ne sont dues qu'aux variations des prix des actifs sur le marché, et le réajustement du portefeuille se fait avec la même valeur globale de portefeuille pour la période suivante.

- <u>Cas discret</u>

$$\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n$$

Cette relation est équivalente à

$$\phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1}.S_{n+1} - \phi_n.S_n$$

ou encore à

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n)$$

Portefeuille autofinancé

Cas continu

- pour simplifier ici d=1
- On note $\phi = (\phi_t^0, \phi_t^1)$ le portefeuille
- $V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 S_t^1$ valeur du portefeuille

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t^1 dS_t$$

- Pour que les 2 intégrales stochastiques aient un sens, on impose une condition d'intégrabilité sur ϕ_t^0 et ϕ_t^1

$$\int_0^T |\phi_t^0| dt + \int_0^T (\phi_t^1)^2 dt < +\infty \ p.s.$$

- L'équation d'autofinancement se réécrit

$$\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 S_t = \phi_0^0 S_0^0 + \phi_0^1 S_0 + \int_0^t \phi_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \phi_u^1 dS_u \ p.s. \ \forall t \in [0, T]$$

Partie 3 : Formalisation des arbitrages

Stratégies admissibles

- **Définition**

Une stratégie est dite **admissible** si elle est autofinancée et si

$$\forall t \geq 0,\ V_t(\phi) \geq 0.$$

- *Remarque 1* : $\phi^0_t < 0$ signifie un emprunt, et $\phi^i_t < 0$ signifie une vente à découvert (short selling).
- *Signification* : Les emprunts et ventes à découvert sont donc autorisés, mais on impose à la valeur du portefeuille d'être positive à tout instant : l'investisseur doit être en mesure de rembourser ses emprunts à tout instant.
- *Remarque 2* : on peut avoir cette définition avec $V_t(\phi) \geq -C$ où C est la valeur maximal du découvert total autorisé.

Opportunité d'arbitrage

La notion d'arbitrage (réalisation de profit sans prendre de risque) est alors formalisée de la façon suivante :

Définition

Une **stratégie d'arbitrage** est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle avec une probabilité strictement positive.

$$X_0 = 0, \; X_T \geq 0 \;\; et \;\; \mathbb{P}(X_T > 0) > 0$$

Hypothèse d'AOA

Hypothèse d'AOA

On supposera qu'il y a sur la marché l'**hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage**

Cette hypothèse signifie simplement que si ma richesse aujourd'hui est nulle, elle ne peut devenir positive et non identiquement nulle, ou encore qu'on ne peut gagner de l'argent sans capital initial (*no free lunch*) entre l'instant 0 et l'instant T :

$$X_0 = 0,\ X_T \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{P}(X_T > 0) = 0$$

Comparaisons de portefeuilles

$$X_T = Y_T \Longrightarrow X_0 = Y_0$$

Proposition 1

En AOA, si deux portefeuilles autofinancés X et Y ont même valeur en T, ils ont même valeur en 0.

Preuve par AOA

- Supposez que $X_T = Y_T$ et que $X_0 < Y_0$ et proposez une stratégie permettant de construire une opportunité d'arbitrage pour montrer que cette hypothèse n'est pas compatible avec l'hypothèse d'AOA

On achète pas cher et on vend cher

Preuve par AOA

- Supposons que $X_T=Y_T$ et que $X_0 < Y_0$ et proposons la stratégie suivante : à l'instant t = 0, achat de X, vente de Y et placement de $Y_0 - X_0 > 0$ à la banque.
- La valeur du portefeuille à l'instant t = T est $X_T - Y_T$ plus ce qu'a rapporté l'argent à la banque, qui est toujours > 0.
- On a construit une opportunité d'arbitrage. Donc AOA implique $X_0 \leq Y_0$.
- De manière similaire, on obtient également $X_0 \geq Y_0$, si bien que $X_0 = Y_0$.
- *Remarque* : Comme d'habitude, pour créer un arbitrage, on a acheté le moins cher et vendu le plus cher. Vu qu'ils ont la même valeur en T, on y gagne, logique...

OPÉRATION	EN 0	EN T
Achat de X	$-X_0$	X_T
Vente de Y	Y_0	$-Y_T$
Placement du gain à la banque	$Y_0 - X_0 > 0$	$(Y_0 - X_0)e^{rT} > 0$
TOTAL	0	>0

Comparaisons de portefeuilles

$$X_T = Y_T \implies \forall t \leq T \;\; X_t = Y_t, \;\; \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

$$X_T \leq Y_T \implies \forall t \leq T \;\; X_t \leq Y_t, \;\; \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Proposition 2

En AOA, si deux portefeuilles autofinancés X et Y ont même valeur en T, ils ont presque sûrement même valeur en tout instant t ≤ T.

Conséquence de :

Proposition 3

En AOA, si deux portefeuilles autofinancés X et Y ont sont ordonnés en T, ils ont presque sûrement la même relation d’ordre en tout instant t ≤ T.

Preuve par AOA

- Supposez que $X_T \leq Y_T$ et que il existe $t \leq T$ tel que $X_t > Y_t$ pour certains $\omega \in \Omega$ (négation de $\forall t \leq T$ $X_t \leq Y_t$, **IP**-p.s.)
- et proposez une stratégie permettant de construire une opportunité d'arbitrage pour montrer que cette hypothèse n'est pas compatible avec l'hypothèse d'AOA

Preuve par AOA

- Supposez que $X_T \leq Y_T$ et que il existe $t \leq T$ tel que $X_t > Y_t$ pour certains $\omega \in \Omega$ (négation de $\forall t \leq T\ X_t \leq Y_t$, **IP**-p.s.) et proposons la stratégie suivante :
- à l'instant t = 0, je ne fais rien
- À l'instant t
  - sur $\{\omega \in \Omega, X_t(\omega) > Y_t(\omega)\}$, j'achète le portefeuille Y au prix Y_t, je vends le portefeuille X au prix X_t, et je place la différence $X_t - Y_t > 0$ à la banque.
  - sur $\{\omega \in \Omega, X_t(\omega) \leq Y_t(\omega)\}$, je ne fais rien.
- Finalement, en T, sur $X_t > Y_t$, je touche $Y_T - X_T \geq 0$ plus ce qu'a rapporté l'argent à la banque qui est toujours > 0, soit une valeur > 0, et sur $\{X_t \leq Y_t\}$, la valeur du portefeuille est nulle.
- On a construit une opportunité d'arbitrage. C'est absurde.
- Donc AOA implique **IP**$(X_t > Y_t) = 0$.

Quand ?	Opération	En t	En T
Sur {Xt > Yt}	Achat de Y en t	Y_t	Y_T
	Vente de X en t	$-X_t$	$-X_T$
	Placement du gain à la banque	$X_t - Y_t$ >0	$(X_t - Y_t)e^{r(T-t)}$ >0
	TOTAL	0	$Y_T - X_T + (X_t - Y_t)e^{r(T-t)}$ >0
Sur $\{X_t \leq Y_t\}$	TOTAL	0	0

Modéliser une option

*On définit une **option européenne** d'échéance T par la donnée d'une **variable aléatoire h ≥ 0**, F_T-mesurable, représentant le profit/payoff que permet l'exercice de l'option.*

- Une telle option est aussi appelée actif conditionnel ou actif contingent (en anglais *contingent claim*).
- Exemple :

pour un call de prix d'exercice K : $h = (S_T - K)_+$

Pour un put de prix d'exercice K : $h = (K - S_T)_+$

- h peut aussi dépendre de S_t, pour $t \leq T$

Ex. option asiatique, dont le *payoff* (gain final) est la moyenne sur une période donnée précédent l'échéance).

- Dans le cas d'un instant d'exercice aléatoire, pour définir une **option américaine**, on se donne $h \geq 0$, F_τ-mesurable, où τ est un temps d'arrêt adapté à la filtration F, ou plus simplement, $h = f(\tau)$, où f est une fonction mesurable.

Marchés complets

Définition 1

*On dit qu'une option h est **réplicable** (ou simulable, atteignable), attainable en anglais, si il existe une stratégie admissible dont la valeur finale à l'instant T est égale à h.*

C'est-à-dire : si on peut construire un portefeuille de réplication grâce à une stratégie admissible.

Définition 2

*On dit qu'un marché est **complet** si tout actif contingent est réplicable. On dit qu'il est **incomplet** sinon.*

Probabilité risque-neutre

Définition

On appelle ***probabilité neutre au risque*** **IP*** *ou probabilité risque-neutre, ou encore mesure martingale équivalente toute probabilité, équivalente à la probabilité historique* ***IP*** *sous laquelle le prix actualisé des actifs est une martingale.*

- Remarque : La probabilité **IP*** ainsi définie apparaîtra ensuite comme l'outil de calcul des formules de prix et de couvertures des options

Liens AOA, marchés complets et probabilité risque-neutre

Dans les marchés financiers en temps discrets, un résultat important est le suivant :

Théorème 1

L'hypothèse d'AOA équivaut à l'existence d'une probabilité neutre au risque.

Théorème 2

Un marché avec AOA est complet si et seulement si il existe une unique probabilité risque-neutre.

ATTENTION : Ce résultat n'est plus vrai dans le cas des modèles en temps continu.

L'existence d'une probabilité risque-neutre entraîne toujours l'absence d'opportunité d'arbitrage mais la réciproque est fausse.

Il faut renforcer l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage pour parvenir `a construire une probabilité risque neutre. On peut se référer pour cela aux travaux de F. Delbaen et W. Schachermayer, ou à l'article de 1981 de Harrison et Pliska. En effet, ils montrent que dans des modèles continus, **on n'est pas sûrs de l'existence d'une probabilité neutre au risque**. Il faut en général supposer qu'il en existe une (et donc que l'ensemble des mesures martingales n'est pas vide) pour pouvoir travailler.

Dans le cas particulier du modèle de Black et Scholes, on en exhibera une, ce qui montrera l'existence d'une probabilité neutre au risque. Mais dans le cas de modèles plus complexes, on ne sait pas montrer en général l'existence d'une probabilité neutre au risque.

Travail pour la séance prochaine

https://padlet.com/anneloisel/ProduitsDerivesOptions_Videos

Mot de Passe : PadletAEL2023

- **Chercher des vidéos** expliquant les produits dérivés et les options en particulier – les visionner, avoir un esprit critique, prendre de l'information.
- Si vous les trouvez intéressantes, je vous propose de mettre le lien sur mur de post-it padlet créé à cet effet afin de les partager avec la promo
- **Liens** : chacun peut mettre les liens sur des post-its avec le thème de la vidéo et son intérêt (+ votre nom)

--> outil collaboratif de mise à disposition/partage de vidéos de vulgarisation – apprendre, réviser, comprendre les mécanismes financiers sous-jacents