Examen Théorie des Valeurs Extrêmes 2011-2012
Seconde session

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice

Question de cours (6 points):

1. On rappelle que les lois "max-stable" sont définies par

$$\text{Fréchet } (\alpha > 0): \quad \Phi_\alpha(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0, \\ \exp\{-x^{-\alpha}\} & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{Weibull } (\alpha > 0): \quad \Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^{\alpha}\} & \text{si } x \leq 0, \\ 1 & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

$$\text{Gumbel}: \quad \Lambda(x) = \exp\{-e^{-x}\} \quad x \in \mathbb{R}.$$

Montrer que: $X \sim \Phi_\alpha \Leftrightarrow \ln(X^\alpha) \sim \Lambda \Leftrightarrow -\Psi^{-1} \sim \Phi_\alpha$.

2. Qu'est-ce que le domaine d'attraction d'une loi max-stable? Quelles sont les conditions qui définissent le domaine d'attraction de la loi de Fréchet?

3. Quel lien relie les distributions GEV (Generalised Extreme Value distibutions) et les distributions GPD (Generalised Pareto distributions)?

4. Quelles sont les procédures statistiques à utiliser pour estimer les paramètres des distributions GEV (discuter suivant la nature des observations)?

Exercice 1 (8 points):

Supposons que Y a une distribution Pareto Généralisée GPD(σ, ξ) $(\xi \neq 0)$ telle que

$$P(Y < y) = 1 - \left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}.$$

1. Donner le domaine de définition de Y, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de réalisation possibles de la variable aléatoire Y.

2. De quelle loi connue s'agit-il lorsque $\xi = -1$? Est-il possible de définir une loi si $\xi = 0$?

3. Donner la densité de cette loi. Peut-on trouver des expressions analytiques pour l'estimateur du maximum de vraisemblance de (σ, ξ).

4. Montrer que si $U \sim U[0,1]$, alors

$$Y \sim \sigma\left(\frac{U^{-\xi} - 1}{\xi}\right).$$

Donner une procédure pour simuler une loi GPD(σ, ξ).

5. Donner l'expression de la médiane, de la moyenne ($\xi < 1$) et de la variance ($\xi < 1/2$) d'une loi GPD(σ, ξ). Donner un estimateur simple de ξ basé sur les deux premiers moments lorsque $\xi < 1/2$.

6. Montrer que $Y - v|Y > v$ a une distribution GPD$(\sigma + \xi v, \xi)$. A partir du calcul de l'espérance de $Y - v|Y > v$, en déduire une procédure simple pour estimer ξ.

7. Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution F et soit $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. Montrer que si, lorsque $u \to x^F = \sup\{x : F(x) < 1\}$

$$\frac{X-u}{a(u)}|X > u \xrightarrow{L} GPD(1, \xi),$$

alors

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) = \begin{cases} \exp\left(-\left[1+\xi x\right]_+^{-1/\xi}\right) & \text{si } \xi \neq 0, \\ \exp\left(-\exp\left(-x\right)\right) & \text{si } \xi = 0, \end{cases},$$

avec $a_n = a(b_n)$ et $b_n = F^{-1}(1 - n^{-1})$.

Exercice 2 (6 points):

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution F et soit $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. On note la statistique d'ordre la manière suivante

$$X_{(n)} \leq X_{(n-1)} \leq \ldots \leq X_{(1)}$$

et $B_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{I}_{\{X_i > x\}}$.

1. Montrer que $X_{(k)} \leq x$ si et seulement si $B_n(x) < k$.

2. Donner la loi de $B_n(x)$. En déduire que

$$P\left(X_{(k)} \leq x\right) = \sum_{r=0}^{k-1} C_n^r \left(F(x)\right)^{n-r} \left(1 - F(x)\right)^r.$$

3. Calculer la transformée de Laplace de $B_n(x)$:

$$\varphi_n(t, x) = \mathbb{E}\left(\exp\left(tB_n(x)\right)\right).$$

4. Montrer que s'il existe une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} n \Pr(X_i > u_n) = \tau$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \ln \varphi_n(t, u_n) = \tau(e^t - 1).$$

5. Donner la transformée de Laplace d'une loi de Poisson de paramètre τ (Rappel: si N suit une loi de Poisson de paramètre τ, alors $P(N = n) = e^{-\tau}\tau^n/n!$).

6. Déduire des questions précédentes l'expression analytique de la loi limite de $X_{(2)}$ si l'on peut trouver deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{(1)} - b_n}{a_n} \leq x\right) = \exp\left(-\exp\left(-x\right)\right).$$

Exercice 1 :

$Y \sim GPD(\sigma, \xi)$ avec $\xi \neq 0$

$$\mathbb{P}(Y < y) = 1 - \left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}$$

1) Domaine de définition de y i.e y tq $\mathbb{P}(Y<y) \in]0,1[$.

$$1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right) > 0 \iff \xi y > -\sigma \iff \begin{cases} y > -\frac{\sigma}{\xi} & \text{si } \xi > 0 \\ y < -\frac{\sigma}{\xi} & \text{si } \xi < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathbb{R}_+ & \text{si } \xi > 0 \\ y \in [0, -\frac{\sigma}{\xi}] & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

2) Si $\xi = -1$, $\mathbb{P}(Y<y) = 1 - \left[1 - \frac{y}{\sigma}\right]_+^{+1}$

$$= \frac{y}{\sigma} \quad y \in [0, \sigma] \quad Y \sim \mathcal{U}([0,\sigma])$$

$$\lim_{\xi \to 0} \mathbb{P}(Y<y) = \lim_{\xi \to 0} 1 - \left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi} = \lim_{\xi \to 0} 1 - e^{-\frac{1}{\xi}\ln(1 + \xi(y/\sigma))}$$

$$= 1 - e^{-y/\sigma} \implies Y \sim \mathcal{E}(1/\sigma)$$

3) $$f(y) = F'(y) = -\left(-\frac{1}{\xi}\right) \times \frac{\xi}{\sigma} \times \left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi - 1}$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi - 1}$$

$$\mathcal{L}(\sigma, \xi) = \prod_{i=1}^{m} f(y_i) = \frac{1}{\sigma^m}\left(\prod_{i=1}^{m}\left(1 + \xi\left(\frac{y_i}{\sigma}\right)\right)\right)^{-1/\xi - 1}$$

$$\implies \ln(\mathcal{L}(\sigma,\xi)) = -m\ln(\sigma) - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right)\sum_{i=1}^{m} \ln\left(1 + \xi\left(\frac{y_i}{\sigma}\right)\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \ell(\sigma, \xi) = -\frac{m}{\sigma} - \left(\frac{1}{\xi} + 1\right)\sum_{i=1}^{m} \frac{-\xi y_i \sigma^{-2}}{1 + \xi\frac{y_i}{\sigma}}$$ pas de solut° analytique

$3^{-2} \leq 0.01$
$\to 3^{-2 \times \frac{1}{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{0{,}01}}$

4) Si $U \sim \mathcal{U}([0,1])$

$$\mathbb{P}\left(\sigma\left(\frac{U^{-\xi} - 1}{\xi}\right) \leq y\right) = \begin{cases} \mathbb{P}\left(U^{-\xi} - 1 \leq \frac{\xi y}{\sigma}\right) & \text{si } \xi > 0 \\ \mathbb{P}\left(U^{-\xi} - 1 \geq \frac{\xi y}{\sigma}\right) & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \mathbb{P}\left(U \geq \left(1 + \frac{\xi y}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right) & \text{si } \xi > 0 \\ \mathbb{P}\left(U \geq \left(1 + \frac{\xi y}{\sigma}\right)^{-1/\xi}\right) & \text{si } \xi < 0 \end{cases}$$

$$= 1 - \mathbb{P}\left(U \leq \left[1 + \xi\frac{y}{\sigma}\right]^{-1/\xi}\right)$$

$$= 1 - \left[1 + \frac{\xi y}{\sigma}\right]_+^{-1/\xi}$$

On peut donc simuler les $U_i \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}([0,1])$ puis leur appliquer la transformat° $Y_i = \sigma\frac{U_i^{-\xi} - 1}{\xi}$ pour simuler une $GPD(\sigma, \xi)$