TD 2 Maths Actuarielles

Exercice 1 On considère la table suivante en supposant un taux d'intérêt effectif de 6% par an.

x	l_x	A_x
35	100 000.00	0.151375
36	99 737.15	0.158245
37	99 455.91	0.165386
38	99 154.72	0.172804
39	98 831.91	0.180505
40	98 485.68	0.188492

Calculer :

1. ${}_5E_{35}$
2. $A^{1}_{35:\overline{5}|}$
3. ${}_{5|}A_{35}$
4. $\overline{A}_{35:\overline{5}|}$

Exercice 2 On vous donne $A_x = 0,25$, $A_{x+20} = 0,40$, $\overline{A}_{x:\overline{20}|}$ et $i = 3\%$. Calculer $10000\overline{A}_{x:\overline{20}|}$ avec les hypothèses suivantes :

1. Décès survenant au milieu d'année
2. Décès uniformes dans l'année

Exercice 3

1. Montrer que $(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_x\left((IA)^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} + A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|}\right)$

2. On vous donne $(IA)_{50} = 4,99675$, $A^1_{50:\overline{1}|} = 0,00558$, $A_{51} = 0,24905$ et $i = 6\%$. Calculer $(IA)_{51}$

Exercice 4 On vous donne $\ddot{a}_x = 10$, ${}_{10|}\ddot{a}_x = 4$, ${}_{10}E_x = 0,375$ et $v = 0,94$ sachant que ${}_{n|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x\overline{n}|}$

1. Calculer $A^1_{x:\overline{10}|}$

Exercice 5 On suppose qu'une personne a souscrit à un plan de pension qui lui garantit une rente viagère par anticipation avec un paiement de 1000€ par mois à partir de 65 ans. L'assureur lui propose une annuité garantie pendant les 10 premières années en échange d'une réduction du paiement mensuel. Le nouveau montant mensuel est calculé de sorte que la prime pure avant et après révision soit égale. On vous donne :

$$\ddot{a}_{65} = 13,55 \ , \ \ddot{a}_{75} = 10,318 \ , \ {}_{10}p_{65} = 0,55305 \ et \ i = 0,05$$

Calculez le nouveau montant mensuel de pension avec l'annuité garantie en sachant qu'on utilisera l'approximation encore non vue en cours à ce jour

$$\ddot{a}^{(m)}_x = \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

et

$$\ddot{a}^{(m)}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i^{(m)}}$$

Exercice 1 :

$V = \frac{1}{1+i}$

1) $_5E_{35} = \left(\frac{1}{1+6\%}\right)^5 \frac{\ell_{40}}{\ell_{35}} = \left(\frac{1}{1{,}06}\right)^5 \frac{98485.68}{100\,000}$

$= 0.73594$

Rappel : $_mE_x = V^m \frac{\ell_{x+m}}{\ell_x} = \frac{D_{x+m}}{D_x}$ où $V = \frac{1}{1+i}$

2) $A^1_{35:\overline{5}|} = A_{35} - {_5p_{35}} V^5 A_{40}$

$= A_{35} - \frac{\ell_{40}}{\ell_{35}} \times \left(\frac{1}{1+i}\right)^5 A_{40}$

$= 0.151375 - \frac{98485.68}{100\,000} \times \left(\frac{1}{1{,}06}\right)^5 \times 0.151375$

$= 0{,}012656$

$A^1_{x\overline{m}|} = \sum_{r=0}^{m-1} {_rp_x}\, q_{x+r}\, V^{r+1}$

$= A_x - {_mp_x} V^m A_{x+m}$

3) $_{5|}A_{35} = {_5E_{35}} A_{40}$

$= 0.74 \times 0.188492$

$= 0.138719$

$_{m|}A_x = {_mE_x} A_{x+m}$

4) $\bar{A}_{35:\overline{5}|} = \bar{A}^1_{35:\overline{5}|} + {_5E_{35}}$

$= \frac{i}{\delta} A^1_{35:\overline{5}|} + {_5E_{35}}$

$= 0.748974$

$\bar{A}_{x\overline{m}|} = \bar{A}^1_{x\overline{m}|} + {_mE_x} = \frac{\bar{M}_x - \bar{M}_{x+m} + D_{x+m}}{D_x}$

$\bar{A}^1_{x\overline{m}|} = \frac{i}{\delta} A^1_{x\overline{m}|}$

avec $\delta = \ln(1+i)$

Exercice 2 :

On a $A_x = 0.25$; $A_{x+20} = 0.40$; $A_{x:\overline{20}|} = 0.55$; $i = 3\%$

Calculer $10\,000\, \bar{A}_{x:\overline{20}|}$ avec les hypothèses

$_mE_x = V^m {_mp_x}$

On a : $A^1_{x:\overline{20}|} = A_x - {_{20}E_x} A_{x+20}$

$\Rightarrow A_{x:\overline{20}|} = A_x - {_{20}E_x}(A_{x+20} - 1)$ (ajout de $_{20}E_x$)

$\Rightarrow {_{20}E_x} = \frac{A_{x:\overline{20}|} - A_x}{1 - A_{x+20}} = \frac{0.55 - 0.25}{1 - 0.4} = 0.5$

Donc $A^{1}_{x:\overline{20}|} = A_{x:\overline{20}|} - {}_{20}E_x = 0.05$

1) Sous l'hypothèse des décès en milieu d'année :

$$10000\,\bar{A}_{x:\overline{20}|} = 10000\left((1+i)^{1/2} A^{1}_{x:\overline{20}|} + {}_{20}E_x\right)$$
$$= 5507.445$$

2) Sous l'hypothèse des décès uniformes dans l'année

$$10000\,\bar{A}_{x:\overline{20}|} = 10000\left(\frac{i}{\delta} A^{1}_{x:\overline{20}|} + {}_{20}E_x\right)$$
$$= 5507.463$$

Exercice 3 :

1) On a $(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = \sum_{r=0}^{n-1} (r+1) v^{r+1}\, {}_rp_x\, q_{x+r}$

$$\Longrightarrow (IA)^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} = \sum_{r=0}^{n-2} (r+1) v^{r+1}\, {}_rp_{x+1}\, q_{x+1+r}$$

On a $A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} = \sum_{r=0}^{n-2} {}_rp_{x+1}\, q_{x+1+r}\, v^{r+1}$

Donc $vq_x + vp_x\left((IA)^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} + A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|}\right) = vq_x + vp_x\left(\sum_{r=0}^{n-2}(r+1)v^{r+1}\,{}_rp_{x+1}\,q_{x+1+r} + \sum_{r=0}^{n-2} {}_rp_{x+1}\,q_{x+1+r}\,v^{r+1}\right)$

$$\Longrightarrow vq_x + vp_x\left((IA)^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} + A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|}\right) = vq_x + \left(\sum_{r=0}^{n-2}(r+1)v^{r+2}\,{}_{r+1}p_x\,q_{x+1+r} + \sum_{r=0}^{n-2} {}_{r+1}p_x\,q_{x+1+r}\,v^{r+2}\right)$$
$$= vq_x + \sum_{r=0}^{n-2}(r+2)v^{r+2}\,{}_{r+1}p_x\,q_{x+1+r}$$
$$= vq_x + \sum_{r=1}^{n-1}(r+1)v^{r+1}\,{}_rp_x\,q_{x+r}$$
$$= \sum_{r=0}^{n-1}(r+1)v^{r+1}\,{}_rp_x\,q_{x+r} = (IA)^{1}_{x:\overline{n}|}$$

On a donc montré que $(IA)^{1}_{x:\overline{n}|} = vq_x + vp_x\left((IA)^{1}_{x+1:\overline{n-1}|} + A^{1}_{x+1:\overline{n-1}|}\right)$

2) On a $(IA)_{50} = 4{,}99675$; $A^{1}_{50:\overline{1}|} = 0{,}00558$; $A_{51} = 0{,}24905$ et $i = 6\%$ $\longrightarrow$ Calculer $(IA)_{51}$

et $p_{50} = 0{,}99409$

On considère $n \to \infty$ donc de 1) on a $(IA)_{50} = vq_{50} + vp_{50}\left((IA)_{51} + A_{51}\right)$

$$\Longrightarrow (IA)_{51} = \frac{1}{vp_{50}}\left((IA)_{50} - vq_{50}\right) - A_{51} = 5{,}07305$$

Exercice 4 :

On a $\ddot{a}_x = 10$ ${}_{10|}\ddot{a}_x = 4$ ${}_{10}E_x = 0{,}375$ et $v = 0{,}94$

1) Sachant que ${}_{m|}\ddot{a}_x = \ddot{a}_x - \ddot{a}_{x:\overline{m}|}$, Calculons $A^1_{x:\overline{10}|}$

On sait que $\ddot{a}_{x:\overline{m}|} = \dfrac{1 - A_{x:\overline{m}|}}{1-v}$

$$\Rightarrow A_{x:\overline{m}|} = 1 - (1-v)\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|}$$

$$\Rightarrow A^1_{x:\overline{m}|} = 1 - (1-v)\,\ddot{a}_{x:\overline{m}|} - {}_mE_x$$

Donc $A^1_{x:\overline{10}|} = 1 - (1-v)\,\ddot{a}_{x:\overline{10}|} - {}_{10}E_x$

On a $\ddot{a}_{x:\overline{10}|} = \ddot{a}_x - {}_{10|}\ddot{a}_x \Rightarrow \ddot{a}_{x:\overline{10}|} = 10 - 4 = 6$

$$\Rightarrow A^1_{x:\overline{10}|} = 1 - (1-0{,}94)\times 6 - 0{,}375$$
$$= 0{,}265$$

Exercice 5 :

Soit B le montant de pension mensuel après révision.
Pour déterminer B, on égalise la prime pure avant et après révision.

$$\Rightarrow 12 \times 1000 \times \underbrace{\ddot{a}^{(12)}_{65}}_{\text{ancien plan}} = 12 \times B \times \Big(\underbrace{\ddot{a}^{(12)}_{\overline{10}|}}_{\text{annuité garantie de 10 ans}} + \underbrace{{}_{10}E_{65}\,\ddot{a}^{(12)}_{75}}_{\text{rente viagère à 75 ans qui n'a lieu que si l'assuré est toujours en vie à 75 ans}}\Big)$$

On a :

* $\ddot{a}^{(12)}_{65} = \ddot{a}_{65} - \dfrac{12-1}{24}$
$= 13{,}0917$

* $\ddot{a}^{(12)}_{\overline{10}|} = \dfrac{1 - \left(\frac{1}{1+5\%}\right)^{10}}{i^{(12)}}$ avec $i^{(12)} = 12\left((1+i)^{1/12} - 1\right) = 0{,}048889$

$= 7{,}8971$

* $\ddot{a}^{(12)}_{75} = \ddot{a}_{75} - \dfrac{12-1}{24}$
$= 9{,}8597$

$$\Rightarrow B = \frac{1000\,\ddot{a}^{(12)}_{65}}{\ddot{a}^{(12)}_{\overline{10}|} + {}_{10}E_{65}\,\ddot{a}^{(12)}_{75}} = 980{,}646 \text{ €}$$

$\Rightarrow$ L'assuré peut avoir une annuité garantie pendant 10 ans moyennant une réduct° de 20 € par mois dans sa pension.