Mathématiques Actuarielles

M1 Actuariat

Rémi GREGOIRE

Introduction

- Rythme : 2 CM (3h) + 1 TD (2x1h30) (x3)
- 3 supports de cours pour les 3 parties
- Examen : QCM et/ou Exercices + Cours

- Références :
  - Dickson, D. C., Hardy, M. R., & Waters, H. R. (2013). Actuarial mathematics for life contingent risks. Cambridge University Press.
  - Vladislav Kargin, Life Congingency Models 1
  - Anciens Cours de professeurs à l'ISFA (Karim Barigou et Didier Rullière)

Plan de la 2ème partie

- 5. Taux d'intérêt
- 6. Annuités
- 7. Assurances de capitaux
- 8. Rentes viagères

5. Taux d’intérêt

5. Taux d'intérêt - Définition

- Un taux d'intérêt est toujours défini avec une unité de temps. Elle peut par exemple être annuelle, trimestrielle ou mensuelle
- En assurance vie, les investissements de l'assureur sont supposés fournir un rendement constant. Nous utiliserons la capitalisation composée
- Dans les prochains slides, nous faisons quelques rappels du cours de Mathématiques financières

5. Taux d'intérêt – Capitalisation annuelle

- On considère le placement d'un capital C_0 au taux d'intérêt i
- On définit respectivement le facteur de capitalisation et d'actualisation de la manière suivante :

$$u = 1 + i$$

$$v = \frac{1}{1+i}$$

- La valeur acquise par le capital après n années est donc :

$$C_n = C_{n-1} + iC_{n-1}$$

- Par récurrence, on a : $Avec\ n \in \mathbb{N},\ C_n = (1+i)^n C_0$

5. Taux d'intérêt – Capitalisation fractionnée

- On considère le placement d'un capital C_0 au taux d'intérêt $\frac{i^{(m)}}{m}$ à la fin de chaque fraction de $\frac{1}{m}$ années et on appelle $i^{(m)}$ le taux annuel nominal du placement

- On obtient après k périodes :

$$Avec\ k \in \mathbb{N},\ C_{\frac{k}{m}} = C_0\left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^k$$

- Le taux annuel effectif est donné par la relation suivante :

$$1 + i = \left(1 + \frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

5. Taux d'intérêt – Capitalisation continue

- On considère le placement d'un capital C_0 au taux d'intérêt δ avec $(\delta > 0)$
- Sur une période $(t; t + dt]$, le capital produit un intérêt $\delta C(t)dt$
- On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$\frac{dC(t)}{dt} = \delta C(t)$$

- Que l'on résout avec $C(0) = C_0$, on a alors :

$$C(t) = C_0 e^{\delta t}$$

- Le taux d'intérêt annuel effectif est donné par $e^{\delta} = 1 + i$
- On obtient donc : $\delta = ln(1 + i)$

5. Taux d'intérêt – Taux d'escompte

- On peut verser l'intérêt en début de période. Le taux d'intérêt d est appelé taux d'escompte
- Une personne investissant C reçoit un intérêt dC versé immédiatement. Le capital C est remboursé en fin d'année.
- Le taux annuel effectif est donnée par :

$$C(1-d)(1+i) = C \iff i = \frac{d}{1-d}$$

6. Annuités

6. Définition Annuité

- Une annuité est une série de paiements effectués périodiquement à des échéances à intervalle régulier (pas nécessairement un an)

- Une annuité temporaire est une suite de n paiements unitaires effectués à la fin des n premières années.
- La valeur actuelle est donnée par :

$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + ... + v^n = v\frac{1-v^n}{1-v} = \frac{1-v^n}{i}$$

6. Valeur actuelle d’une annuité temporaire

n	i=2,5%	i=5%	i=15%
1	0,976	0,952	0,870
5	4,646	4,329	3,352
10	8,752	7,722	5,019
15	12,381	10,380	5,847
20	15,589	12,462	6,259

6. Perpétuité

- Une perpétuité ou annuité perpétuelle est une annuité illimitée dans le temps.
- La valeur d'une perpétuité unitaire est :

$$a_{\overline{\infty}|} = \sum_{k=1}^{\infty} v^k = \frac{v}{1-v} = \frac{1}{i}$$

6. Annuité temporaire fractionnée

- C'est une annuité unitaire payable par fractions de $\frac{1}{m}$ à la fin de chaque fraction pendant n années

$$
\begin{aligned}
a_{\overline{n}|}^{(m)} &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{nm} v^{\frac{k}{m}} \\
&= \frac{1}{m} v^{\frac{1}{m}} \frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}} \\
&= \frac{1}{m} \frac{1-v^n}{u^{\frac{1}{m}}-1} \\
&= \frac{1-v^n}{i^{(m)}}
\end{aligned}
$$

- Avec $i^{(m)}$ le taux annuel nominal en capitalisation fractionnée équivalent au taux annuel effectif i

6. Perpétuité unitaire payable par fractions

- La valeur actuelle d'une perpétuité unitaire payable par fractions de $\frac{1}{m}$

$$
\begin{aligned}
a^{(m)}_{\overline{\infty}|} &= \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty} v^{\frac{k}{m}} \\
&= \frac{1}{m}\frac{v^{\frac{1}{m}}}{1-v^{\frac{1}{m}}} \\
&= \frac{1}{m}\frac{1}{u^{\frac{1}{m}}-1} \\
&= \frac{1}{i^{(m)}}
\end{aligned}
$$

6. Annuité différée

- On considère une annuité de n termes payable annuellement à terme échu, mais dont le premier paiement est différé de p années et échoit en $t = p + 1$
- La valeur actuelle est donnée par :

$$_{p|}a_{\overline{n}|} = \sum_{k=p+1}^{p+n} v^k = v^p \sum_{k=1}^{n} v^k = v^p a_{\overline{n}|}$$

6. Annuité payable par anticipation

- Une annuité est dite payable par anticipation si les paiements ont lieu en début de période
- La valeur actuelle en t = 0 d'une suite de n paiements de 1 euro effectués au début des n premières années :

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} v^k = \frac{1-v^n}{1-v}$$

- Et l'équivalent en paiements fractionnés :

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^{nm-1} v^{\frac{k}{m}} = \frac{1}{m} \frac{1-v^n}{1-v^{\frac{1}{m}}}$$

6. Annuité continue

- On considère une annuité de 1€ par an payable de façon continue pendant n années. Pour un intervalle infinitésimal $[t, t+dt)\ pour\ 0 \leq t < n$, un montant dt est payé
- La valeur actuelle d'une annuité continue est :

$$\begin{aligned}\bar{a}_{\overline{n}|} &= \int_0^n v^t dt \\ &= \frac{v^n - 1}{ln(v)} \\ &= \frac{1 - v^n}{ln(1+i)} \\ &= \frac{1 - v^n}{\delta}\end{aligned}$$

6. Perpétuité continue

- La valeur actuelle d'une perpétuité continue est :

$$\bar{a}_{\overline{\infty|}} = \int_0^\infty v^t dt = \lim_{n\to\infty} \bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{1}{\delta}$$

7. Assurances de capitaux

7. Calcul des primes

- Par le contrat d'assurance, le risque économique (ici la mortalité) est transféré de l'assuré à l'assureur.
- Pour un portefeuille de n polices similaires, dénotons la valeur actualisée du paiement aléatoire par $Z_i\ pour\ i = 1, \dots, n\ et\ Z_i \sim Z$
- Le risque total pour l'assureur est la somme d'un grand nombre de risques indépendants. Par la loi des grands nombres, le risque total est bien plus prévisible qu'un risque individuel et devrait être proche de son espérance

7. Rappel de la loi forte des grands nombres

- La loi forte des grands nombres dit que la moyenne empirique $\overline{Z}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Z_i$ converge presque sûrement vers l'espérance quand $n \to \infty$
- On a alors : $\mathbb{P}(\lim_{n\to\infty} \overline{Z}_n) = 1$

7. Exemple

- On considère un individu ayant une assurance décès de 1000€ avec une probabilité de 0,01.
- La prime est la valeur espérée avec un chargement de 25%
- La prestation est la variable

$$X = \begin{cases} 0 \ avec \ la \ probabilite \ 0.99 \\ 1000 \ avec \ la \ probabilite \ 0.01 \end{cases}$$

- Ainsi, la prime est : $P = 1.25 \times 1000 \times 0.01$

7. Suite de l'exemple

- Il est important de mettre un chargement de sécurité strictement positif.
- Sans chargement de sécurité, on a $P_n = 10n$ €
- On obtient alors :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[B < 0] &= \mathbb{P}[N > 0.01n] \\ &= \mathbb{P}[\frac{N - 0.01n}{\sqrt{0.0099n}} > 0]\end{aligned}$$

- Quand $n \to \infty$, on a : $1 - \Phi(0) = \frac{1}{2}$
- On a donc 1 chance sur 2 que la compagnie fasse faillite même quand $n \to \infty$

7. Assurance de capitaux

- Une assurance de capital est un contrat par lequel un assureur s'engage à payer un capital déterminé
  - Soit en cas de vie de l'assuré à l'expiration d'une période fixée
  - Soit en cas de décès de l'assuré au cours d'une période fixée
- On note Ψ la valeur actuelle à l'origine du contrat des prestations assurées
- On cherche à calculer la prime pure $P = E[\Psi]$

7. Assurance vie-entière

- L’assurance vie-entière est un contrat par lequel l’assureur s’engage à payer au décès de l’assuré, quelque soit la moment de ce décès, le capital assuré à un bénéficiaire désigné
- Il y a 3 moments possibles pour le paiement du capital :
  - En fin de fraction d’année
  - Au moment du décès
  - A la fin de l’année du décès

7. Assurance vie-entière en fin d'année

- La prime pure d'une assurance d'un capital de 1€ payable à la fin de l'année du décès d'une tête d'âge x est :

$$A_x = \sum_{n=0}^{\infty} {}_{n}p_x q_{x+n} v^{n+1}$$

7. Assurance vie-entière en fin d'année

- La variance est donnée par :

$$Var(\Psi) = E(\Psi^2) - E^2(\Psi) = E(v^{2(K_x+1)}) - A_x^2$$

- Et, on a la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} A_x &= q_x v + p_x v \sum_{n=1}^{\infty} {}_{n-1}p_{x+1} q_{x+n} v^n \\ &= q_x v + p_x v \sum_{n=0}^{\infty} {}_{n}p_{x+1} q_{x+n+1} v^{n+1} \\ &= q_x v + p_x v A_{x+1} \end{aligned}$$

7. Assurance vie-entière au moment du décès

- La prime pure d'une assurance d'un capital de 1€ payable au moment du décès d'une tête d'âge x est :

$$\overline{A}_x = \int_0^{\infty} {}_tp_x \mu_{x+t} v^t dt$$

- Sous l'hypothèse de décès uniformes dans l'année, on a :

$$\overline{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$$

7. Assurance vie-entière au moment du décès

- Avec l'approximation $\int_0^1 v^t dt \approx v^{\frac{1}{2}}$, en pratique on utilise :

$$
\begin{aligned}
\overline{A}_x &\approx \sum_{n=0}^{\infty} {}_n p_x q_{x+n} v^{n+\frac{1}{2}} \\
&\approx \sum_{n=0}^{\infty} \frac{l_{x+n} - l_{x+n+1}}{l_x} v^{n+\frac{1}{2}} \\
&\approx \sqrt{1+i}A_x
\end{aligned}
$$

7. Assurance vie-entière en fin de fraction d'année

- La prime pure d'une assurance d'un capital de 1€ payable à la fin de la fraction de 1-même d'année du décès d'une tête d'âge x est :

$$A_x^{(m)} = \sum_{r=0}^{\infty} {}_{\frac{r}{m}}p_x \, {}_{\frac{1}{m}}q_{x+\frac{r}{m}} \, v^{\frac{r+1}{m}}$$

7. Assurance temporaire

- L'assurance temporaire garantit le paiement d'un capital déterminé en cas de décès de la tête assurée avant un terme fixé
- Il y a deux moments possibles pour le paiement du capital :
  - Au moment du décès
  - A la fin de l'année

7. Assurance temporaire fin d'année

- La prime pure d'une assurance d'un capital de 1€ payable à la fin de l'année du décès d'une tête d'âge x si ce décès survient avant n années est :

$$A^{1}_{x\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} {}_{t}p_{x} q_{x+t} v^{t+1}$$

- L'assurance temporaire est exprimée de cette manière par rapport à l'assurance vie-entière :

$$\begin{aligned} A^{1}_{x\overline{n}|} &= \sum_{t=0}^{\infty} {}_{t}p_{x} q_{x+t} v^{t+1} - {}_{n}p_{x} v^{n} \sum_{t=n}^{\infty} {}_{t-n}p_{x+n} q_{x+t} v^{t-n+\frac{1}{2}} \\ &= A_x - {}_{n}p_{x} v^{n} \sum_{r=0}^{\infty} {}_{r}p_{x+n} q_{x+n+r} v^{r+\frac{1}{2}} \\ &= A_x - {}_{n}p_{x} v^{n} A_{x+n} \end{aligned}$$

7. Assurance temporaire au moment du décès

- La prime pure d'une assurance d'un capital de 1€ payable au moment du décès d'une tête d'âge x si ce décès survient avant n années est :

$$\overline{A}^{1}_{x\,\overline{n}|} = \int_0^n {}_tp_x \mu_{x+t} v^t dt$$

- Sous l'hypothèse de décès uniformes dans l'année, on a comme en assurance vie-entière :

$$\overline{A}^{1}_{x\,\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} A^{1}_{x\,\overline{n}|}$$

7. Assurance temporaire au moment du décès

- En pratique, on va utiliser :

$$
\begin{aligned}
\overline{A}^{\,1}_{x\,\overline{n}|} &\approx \sum_{t=0}^{n-1} {}_tp_x q_{x+t} v^{t+\frac{1}{2}} \\
&\approx \sum_{n=0}^{n-1} \frac{l_{x+t} - l_{x+t+1}}{l_x} v^{t+\frac{1}{2}}
\end{aligned}
$$

7. Commutations

- Les primes uniques pures des assurances temporaires dépendant de deux variables : la durée du contrat et l'âge de l'assuré à la souscription
- A l'époque où il n'y avait pas tous les outils actuels, les actuaires ont introduits des notations simplifiant les calculs manuels. Ces notations sont appelées Commutations
- On définit donc les commutations suivantes :

$$D_x = l_x v^x$$

$$C_x = (l_x - l_{x+1}) v^{x+1}$$

$$M_x = \sum_{t=0}^{\infty} C_{x+t}$$

$$\overline{C}_x = (l_x - l_{x+1}) v^{x+\frac{1}{2}}$$

$$\overline{M}_x = \sum_{t=0}^{\infty} \overline{C}_{x+t}$$

$$N_x = \sum_{t=0}^{\infty} D_{x+k}$$

7. Commutations

- Grâce à ces commutations, on peut exprimer simplement les assurances temporaires et vie-entière. Par exemple, on a :

$$\overline{A}^{1}_{x\overline{n}|} = \sum_{t=0}^{n-1} \frac{(l_{x+t} - l_{x+t+1}) v^{t+x+\frac{1}{2}}}{l_x v^x}$$
$$= \sum_{t=0}^{n-1} \frac{\overline{C}_{x+t}}{D_x}$$
$$= \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_{x+n}}{D_x}$$

- Ou encore : $A_x = \frac{M_x}{D_x}$ $\qquad$ $\overline{A}_x = \frac{\overline{M}_x}{D_x}$

$$A^{1}_{x\overline{n}|} = \frac{M_x - M_{x+n}}{D_x}$$

7. Assurances à capital variable

- Parfois, le remboursement des primes payées est proposé par certains produits si l’assuré décède avant l’expiration du contrat.
- Dans ce cas, le capital assuré varie dans le temps et croît de manière arithmétique
- Une assurance à capital variable est une assurance pour laquelle le capital payable en cas de décès de l’assuré dépend du moment auquel survient le décès.

- Pour la suite, nous allons considérer 3 cas :
  - Le cas général
  - Le cas où nous avons un capital croissant en progression arithmétique
  - Le cas où nous avons un capital décroissant en progression arithmétique

7. Cas général d'assurances à capital variable

- On considère une assurance sur une tête d'âge x qui garantit le paiement d'un capital variable $C(t)$ en cas de décès de l'assuré à $x+t$
- La valeur actuelle de la prestation assurée si le capital est payable au moment du décès est :

$$\Psi = C(T_x)v^{T_x}$$

- La prime pure est la suivante :

$$E(\Psi) = \int_0^{\infty} v^t {}_tp_x \mu_{x+t} C(t)dt$$

7. Cas général d'assurances à capital variable

- Sous l'hypothèse des décès uniformes dans l'année, on a alors :

$$E(\Psi) = \sum_{k=0}^{\infty} v^{k+1} {}_kp_x q_{x+k} \int_0^1 v^{s-1} C(k+s) ds$$

7. Assurance temporaire dans le cas d'un capital croissant à progression arithmétique

- La prime pure d'une assurance temporaire de n années sur un assuré d'âge x qui garantit le paiement d'un capital t en cas de décès de l'assuré au cours de la t - ème année avec $t = 1, .., n$ est :

$$(IA)^{1}_{x\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) v^{t+1} {}_t p_x q_{x+t}$$

- Que l'on peut écrire à l'aide des commutations :

$$(IA)^{1}_{x\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1} (t+1) \frac{C_{x+t}}{D_x}$$

7. Assurance temporaire dans le cas d'un capital croissant à progression arithmétique

- Si le capital est payable au moment du décès, la prime pure est notée :

$$(I\bar{A})^{1}_{x\overline{n|}}$$

- Avec l'hypothèse de décès uniformes dans l'année, on a alors :

$$(I\bar{A})^{1}_{x\overline{n|}} = \frac{i}{\delta}(IA)^{1}_{x\overline{n|}}$$

- En utilisant l'approximation lorsqu'on suppose que les décès surviennent au milieu de l'année :

$$(I\bar{A})^{1}_{x\overline{n|}} = \sum_{t=0}^{n-1}(t+1)\frac{\bar{C}_{x+t}}{D_x}$$

7. Assurance vie-entière dans le cas d'un capital croissant à progression arithmétique

- Lorsque $n \to \infty$, on a une assurance vie-entière à capital croissant à progression arithmétique.
- Sa prime pure si le capital est payable au moment du décès est :

$$(I\overline{A})_x$$

- Sa prime pure si le capital est payable à la fin de l'année du décès :

$$(IA)_x$$

7. Assurance temporaire dans le cas d'un capital décroissant à progression arithmétique

- La prime pure pour une assurance temporaire de n années pour un assuré d'âge x qui garantit le paiement d'un capital $n-k$ à la $k+1$-ème année avec $k=0,..,n-1$ si l'assuré décède dans cette année est :

$$(DA)^{1}_{x\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1}(n-k)v^{k+1}{}_{k}p_{x}q_{x+k}$$

- Si le paiement du capital est au moment du décès, on note $(D\bar{A})^{1}_{x\overline{n}|}$

- On a la relation suivante :

$$(DA)^{1}_{x\overline{n}|} = (n+1)A^{1}_{x\overline{n}|} - (IA)^{1}_{x\overline{n}|}$$

7. Capitaux différés

- Une assurance de capital différé est un contrat par lequel la compagnie d'assurance va s'engager à payer le capital assuré après un terme fixé si l'assuré est toujours en vie à ce moment-là.

- La prime pure, pour l'assurance d'un capital unitaire différé de n années pour un assuré d'âge x est :

$$ {}_nE_x = v^n \, {}_np_x $$

- On peut la noter avec l'aide des commutations :

$$ {}_nE_x = v^n \frac{l_{x+n}}{l_x} = \frac{D_{x+n}}{D_x} $$

- On a également la relation suivante :

$$ {}_{n+k}E_x = {}_nE_x \, {}_kE_{x+n} $$

7. Capitaux différés

- Pour la prime pure d'un capital différé, on a l'inégalité suivante :

$$ {}_tE_x = exp\left(-\int_0^t (\delta + \mu_{x+s})ds\right) \leq exp\left(-\int_0^t \delta ds\right) = v^t $$

- Le rendement instantané d'un capital différé $\delta + \mu_{x+s}$ est donc supérieur au rendement δ d'une capitalisation pure
- Cela montre que l'assuré reçoit un rendement supérieur en échange du risque de non-paiement en cas de décès. Ce rendement est égal à la force de mortalité

7. Assurance mixte

- Une assurance mixte est un contrat par lequel la compagnie va s'engager à payer le capital assuré lors du décès de l'assuré si ce décès survient avant un terme fixé et à l'expiration de ce terme si l'assuré est encore vivant à ce moment-là.
- Cette assurance est le résultat d'une addition entre une assurance temporaire d'un capital différé de même durée.
- On considérera deux cas :
  - Un capital payable à la fin de l'année du décès
  - Un capital payable au moment du décès

7. Assurances mixtes à la fin de l'année du décès

- La prime pure d'une assurance mixte de n années pour un assuré d'âge x à la fin de l'année du décès est :

$$A_{x\overline{n|}} = A^{1}_{x\overline{n|}} + {}_{n}E_{x}$$

- En utilisant les commutations, on a :

$$A_{x\overline{n|}} = \frac{M_x + M_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

7. Assurances mixtes

- On note Ψ_1 la valeur actuelle des prestations de l'assurance temporaire (décès avant le terme)
- On note Ψ_2 la valeur actuelle des prestations du capital différé (vie au terme)
- On a alors : $\Psi_1 \Psi_2 = 0$
- On en déduit alors la Covariance :

$$Cov(\Psi_1, \Psi_2) = E(\Psi_1 \Psi_2) - E(\Psi_1)E(\Psi_2) = -A^1_{x\overline{n}|}\,{}_nE_x$$

- Qui nous permet de calculer la Variance :

$$Var(\Psi) = Var(\Psi_1) + Var(\Psi_2) - 2A^1_{x\overline{n}|}\,{}_nE_x$$

- On voit donc que la souscription d'une assurance mixte pour une tête est moins risqué pour l'assureur que la souscription d'une assurance temporaire pour une tête et d'un capital assuré pour une autre tête

7. Assurances mixtes au moment du décès

- La prime pure d'une assurance mixte de n années pour un assuré d'âge x au moment du décès est :

$$\overline{A}_{x\,\overline{n}|} = \overline{A}^{\,1}_{x\,\overline{n}|} + {}_{n}E_{x}$$

- En utilisant les commutations, on a :

$$\overline{A}_{x\,\overline{n}|} = \frac{\overline{M}_x + \overline{M}_{x+n} + D_{x+n}}{D_x}$$

7. Assurances mixtes généralisées

- On note C_D le capital en cas de décès
- On note C_V le capital en cas de vie

- On appelle mixte $10/X$ avec $C_D/C_V = 10/X$ une telle assurance mixte

- La prime pure, si le capital est payable au moment du décès est :

$$E(\Psi) = C_D \overline{A}^{\,1}_{x\,\overline{n}|} + C_V\,{}_nE_x$$

8. Rentes viagères

8. Rentes viagères

- Les rentes peuvent être payées fractionnées ou annuellement
- Une rente viagère est une suite de paiements effectués à des échéances périodiques et qui prend fin au plus tard au décès du bénéficiaire
- Il y a un engagement de l'assureur en contrepartie d'un capital versé avec que la rente ne prenne cours. C'est ce qu'on appelle le capital constitutif de rente

8. Rente viagère immédiate payable annuellement à terme échu

- La prime pure pour un assuré d'âge x dans le cas d'une rente viagère de 1€ par an payable à la fin de chaque année tant que le bénéficiaire (rentier) est vivant est :

$$a_x = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x q_{x+k} a_{\overline{k}|} = \sum_{k=1}^{\infty} {}_kp_x v^k$$

8. Rente viagère immédiate payable annuellement à terme échu

- On a une relation entre rente viagère et assurance vie-entière :

$$ia_x = 1 - (1+i)A_x$$

- On a également la relation de récurrence suivante :

$$a_x = vp_x(1 + a_{x+1})$$

- Avec les commutations, on a :

$$a_x = \frac{D_{x+1}}{D_x} + .. + \frac{D_{x+n}}{D_x} + ..$$

- Et donc :

$$a_x = \frac{N_{x+1}}{D_x}$$

8. Rente viagère immédiate payable annuellement par anticipation

- La prime pure pour un assuré d'âge x dans le cas d'une rente viagère de 1€ par an payable au début de chaque année tant que le bénéficiaire (rentier) est vivant est :

$$\begin{aligned}\ddot{a}_x &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_kp_x q_{x+k} \ddot{a}_{\overline{k+1}|} \\ &= 1 + v_k p_x + .. + v^n {}_np_x + ..\end{aligned}$$

8. Rente viagère immédiate payable annuellement par anticipation

- On a une relation entre rente viagère et assurance vie-entière :

$$(1-v)\ddot{a}_x = 1 - A_x$$

- On en déduit :

$$\ddot{a}_x = 1 + a_x$$

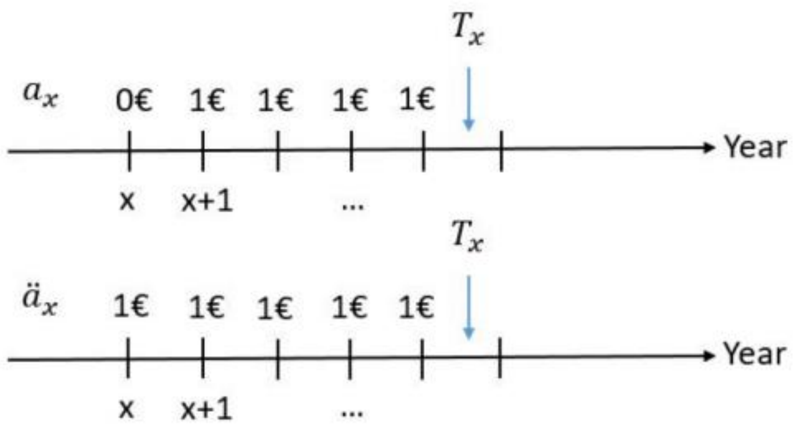
- On a également la relation de récurrence suivante :

$$\ddot{a}_x = 1 + vp_x\ddot{a}_{x+1}$$

- Avec les commutations, on a :

$$\ddot{a}_x = \frac{N_x}{D_x}$$

8. Différence entre les deux rentes viagères



8. Rente temporaire immédiate payable annuellement à terme échu

- La prime pure pour un assuré d'âge x dans le cas d'une rente de 1€ par an payable annuellement à terme échu tant que le bénéficiaire (rentier) est vivant mais au plus pendant n années est :

$$\begin{aligned} a_{x\overline{n}|} &= v\,{}_1p_x + .. + v^n\,{}_np_x \\ &= v\frac{l_{x+1}}{l_x} + .. + v^n\frac{l_{x+n}}{l_x} \end{aligned}$$

- Les primes pures des rentes temporaires peuvent s'exprimer en fonction des primes pures des rentes vie-entière :

$$a_{x\overline{n}|} = a_x - {}_np_x v^n a_{x+n}$$

8. Rente temporaire immédiate payable annuellement par anticipation

- La prime pure pour un assuré d'âge x dans le cas d'une rente de 1€ par an payable annuellement par anticipation tant que le bénéficiaire (rentier) est vivant mais au plus pendant n années est :

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = 1 + v_1 p_x + .. + v^{n-1}{}_{n-1}p_x$$

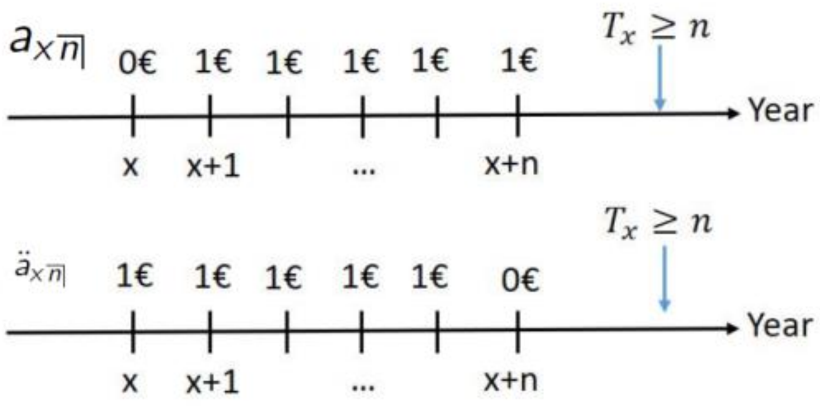
- La valeur actuelle des engagements est :

$$\Psi = 1 + v + v^2 + .. + v^{min(n-1,K_x)}$$
$$= \frac{1 - max(v^n, v^{K_x+1})}{1 - v}$$

- On a alors :

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|} = \frac{1 - A_{x\overline{n}|}}{1 - v}$$

8. Différence entre la rente temporaire immédiate payable annuellement à terme échu et la rente temporaire immédiate payable annuellement par anticipation



8. Rentes viagères différées

- On considère une rente viagère sur un assuré d'âge x mais dont le paiement est différé de n années. La prime pure si la rente est payable annuellement à terme échu est :

$$ {}_{n|}a_x = v^n {}_n p_x a_{x+n} $$

- On a alors la relation suivante :

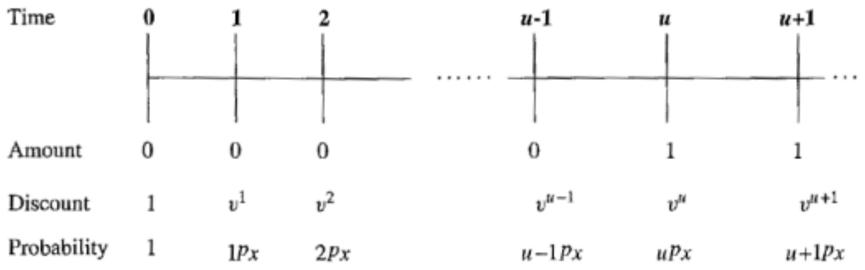
$$ {}_{n|}a_x = a_x - a_{x\overline{n}|} $$

- Par anticipation, on a également :

$$ {}_{n|}\ddot{a}_x = v^n {}_n p_x \ddot{a}_{x+n} $$

8. Rentes différées

- Les schéma suivant représente les rentes différées de u années payable annuellement par anticipation :



8. Rentes viagères temporaires différées

- Une rente temporaire différée à terme échu garantit le paiement d'1€ par an payable en fin d'années tant que le rentier est vivant mais au plus n années. Les paiements sont différés et commencent en x+d. La prime pure se note de deux manières équivalentes :

$$_{d|}a_{x\overline{n}|} \qquad _{d|n}a_{x\overline{n}|}$$

- Une rente temporaire différée par anticipation garantit le paiement d'1€ par an payable en début d'année tant que le rentier est vivant mais au plus n années. Les paiements sont différés et commencent en x+d. La prime pure se note de deux manières équivalentes :

$$_{d|}\ddot{a}_{x\overline{n}|} \qquad _{d|n}\ddot{a}_{x\overline{n}|}$$

8. Rentes viagères fractionnées

- On considère une rente d'1€ par an pour un assuré d'âge x payable par fraction de 1/m à la fin de chaque m-ème d'année tant que le rentier est vivant. Nous avons la prime pure suivante :

$$\begin{aligned} a_x^{(m)} &= \sum_{k=1}^{\infty} {}_{\frac{k}{m}}p_x v^{\frac{k}{m}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} {}_{\frac{k}{m}}E_x \end{aligned}$$

- Par anticipation, pour un paiement au début de chaque m-ème année tant que le rentier est vivant, la prime pure est :

$$\begin{aligned} \ddot{a}_x^{(m)} &= \frac{1}{m} + a_x^{(m)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{\frac{k}{m}}p_x v^{\frac{k}{m}} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} {}_{\frac{k}{m}}E_x \end{aligned}$$

8. Rentes viagères fractionnées par anticipation

Time	**0**	**1/*m***	**2/*m***	**3/*m***	**4/*m***	...
Amount	$1/m$	$1/m$	$1/m$	$1/m$	$1/m$	
Discount	1	$v^{1/m}$	$v^{2/m}$	$v^{3/m}$	$v^{4/m}$	
Probability	1	${}_{\frac{1}{m}}p_x$	${}_{\frac{2}{m}}p_x$	${}_{\frac{3}{m}}p_x$	${}_{\frac{4}{m}}p_x$	

8. Rentes viagères fractionnées - Approximations

- En pratique, nous approximons les rentes viagères fractionnées en utilisant une valeur approchée obtenue par interpolation.
- La rente viagère fractionnée peut également s'écrire :

$$a_x^{(m)} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{t=1}^{m} {}_{k+\frac{t}{m}}E_x$$

- On utilise l'interpolation suivante :

$${}_{k+\frac{t}{m}}E_x \approx \left(1 - \frac{t}{m}\right) {}_kE_x + \frac{t}{m} {}_{k+1}E_x$$

8. Rentes viagères fractionnées - Approximations

- Avec cette interpolation, on trouve :

$$a_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m-1}{2m}$$

- Par anticipation, on a :

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx a_x + \frac{m+1}{2m}$$

$$\ddot{a}_x^{(m)} \approx \ddot{a}_x - \frac{m-1}{2m}$$

- Par exemple, pour une rente viagère payable mensuellement, on a :

$$\ddot{a}_x^{(12)} \approx \ddot{a}_x - \frac{11}{24}$$

8. Rentes fractionnées temporaires

- La prime pure pour la rente fractionnée temporaire à terme échu est :

$$a_{x\overline{n}|}^{(m)} = a_x^{(m)} - {}_nE_x a_{x+n}^{(m)}$$

- Par anticipation, on a :

$$\ddot{a}_{x\overline{n}|}^{(m)} = \ddot{a}_x^{(m)} - {}_nE_x \ddot{a}_{x+n}^{(m)}$$

8. Rentes viagères continues

- On considère une rente viagère d'1€ par an payable de façon continue. Tant que le rentier est vivant, tout intervalle de temps de longueur dt donne lieu à un paiement de montant dt . Sa prime pure est alors :

$$\bar{a}_x = \int_0^\infty v^t {}_tp_x dt$$

- Lorsque qu'on prend la limite quand m tend vers l'infini, on a alors :

$$\bar{a}_x \approx a_x + \frac{1}{2}$$

- Et par anticipation :

$$\bar{a}_x \approx \ddot{a}_x - \frac{1}{2}$$

8. Rentes viagères continues

- On a la relation suivante pour la prime pour une rente continue :

$$\bar{a}_x \leq \bar{a}_{\overline{\infty}|}$$

- Comme pour les capitaux différés, le rendement instantané d'une rente continue est donc égal à $\delta + \mu_{x+s}$ qui est croissant avec l'âge et plus élevé que le rendement d'une capitalisation pure δ

- On a les relations suivantes :

$$a_x < a_x^{(m)} < \bar{a}_x < \ddot{a}_x^{(m)} < \ddot{a}_x$$

8. Rentes variables

- On considère une rente viagère sur un assuré d'âge x payable annuellement à terme échu, dont l'arrérage peut varier d'année en année. On note z_k l'arrérage payable à l'instant k. La valeur actuelle de cette rente s'écrit :

$$\Psi = \sum_{k=1}^{\infty} v^k z_k 1_{[K_x \geq k]}$$

- La prime pure est la suivante :

$$E(\Psi) = \sum_{k=1}^{\infty} v^k z_{k\,k}p_x$$

8. Rentes variables

- Nous avons deux exemples importants :
  - Les rentes croissantes en progression arithmétique. La prime pure est la suivante :

$$(Ia)_x = \sum_{k=1}^{\infty} k v^k {}_k p_x$$

  - Par anticipation, on a alors la prime pure suivante :

$$(I\ddot{a})_x = \sum_{k=1}^{\infty} (k+1) v^k {}_k p_x$$

8. Quelques remarques

- Les produits d'assurance vie contiennent de nombreuses garanties financières. Le risque financier est totalement supporté par l'assureur car le taux d'intérêt est fixe. L'assureur doit aussi supporter les risques de longévité et de mortalité.
- Le taux d'intérêt est réglementé par le code de l'assurance. Pour les opérations d'assurance vie, il doit être maximum de 60% du TME moyen des 6 derniers mois. En assurance non-vie, il doit être maximum de 75% du TME moyen des 24 derniers mois. Le TME est le taux de rendement sur le marché secondaire des emprunts d'Etat à taux fixe supérieurs à 7 ans.

8.