Jeux en information incomplète

A. Cournot en information incomplète.

B. La doctrine d'Harsanyi

C. L'Equilibre de Nash Bayésien

D. Enchères

Les stratégies pour restaurer les profits positifs :
- différenciation horizontale
- Biens véblen
- Rendre captif le consommateur = Viscosité des prix (coût pour changer)

Quel est l'intérêt d'une firme de limiter sa production ?
Faire en sorte que les prix ne baissent pas.

Le modèle de concurrence à la Cournot et à la Bertrand sont les deux modèles de concurrences.
Le modèle de Bertrand = modèle de concurrence en prix. (Inconvénient : loin de la réalité)
Le modèle de Cournot = modèle de concurrence en quantité (plus complexe mais plus riche et intéressant)
En gros le modèle de Cournot dit, par exemple, que considérant 2 firmes produisant la même chose avec des coûts supposés identiques au début. La demande va générer les prix (chez Bertrand c'est l'offre qui fait les prix or chez Cournot c'est la demande qui fait les prix).

Rendement d'échelle croissant :
  - Peu profitable devant une petite quantité
  - Très profitable devant grande quantité

Les rendements d'échelles croissants ont tendance à empêcher la concurrence

A. Cournot en information incomplète

Jeu de duopole en quantité (concurrence imparfaite à la Cournot) avec information asymétrique.

- Deux firmes sont en duopole : i, $i=1, 2$.
- La concurrence est en quantité (à la Cournot).

La demande globale est Q telle que :

$$Q = q_1 + q_2$$

A. Cournot en information incomplète

- La fonction inverse de demande (ou fonction de prix):

$$P(Q) = a - Q \text{ avec } a \in \mathbf{R}^{*+}$$

- Le coût marginal de la firme 1 est de connaissance commune et équivalent à c

- Le coût marginal de la firme 2 est une information privée :

$$c_H > c_L \qquad \begin{cases} c_H & \text{: coût élevé (High) avec la probabilité } \theta \\ c_L & \text{: coût faible (Low) avec la probabilité } 1-\theta \end{cases}$$

θ est de connaissance commune

A. Cournot en information incomplète

- Chacune des deux firmes maximise son profit espéré.

- La firme 2 a deux types possibles (*High, Low*) et choisit sa quantité en fonction de cela:

$$\{q_2(c_L);q_2(c_H)\} \text{ avec } c_H > c_L$$

A. Cournot en information incomplète

- Supposons que la firme 2 soit de type *High*; en considérant que la firme 1 est à l'équilibre :

$$q_1^* \text{ : quantité d'équilibre de la firme 1}$$

= qtt où l'on n'a pas d'incitation individuelle à changer.

$$\underset{q_2}{Max}\left(P - c_H\right).q_2 = \left[a - q_1^* - q_2 - c_H\right].q_2$$

a correspond à la demande.

- La CN1 nous donne: $q_2^*\left(c_H\right) = \dfrac{a - q_1^* - c_H}{2}$

- Si la firme 2 est de type *Low*, on obtient

$$q_2^*\left(c_L\right) = \dfrac{a - q_1^* - c_L}{2}$$

→ Principe d'oligopole frange.

Si on n'est pas cher, on vend à plein de gens (de plus en plus de clients) mais le profit par tête et de plus en plus faible.
Donc chez Bertrand le problème est la taille (profit par tête faible)

A. Cournot en information incomplète

- Supposons que la firme 2 est à l'équilibre, la firme 1 choisit sa quantité d'équilibre :

$q_1^*(c_H)$: quantité d'équilibre de la firme 1 si de type High

$q_1^*(c_L)$: quantité d'équilibre de la firme 1 si de type Low

$$\underset{q_1}{Max}\, \theta.\left[a-q_1-q_2^*(c_H)-c\right].q_1+(1-\theta).\left[a-q_1-q_2^*(c_L)-c\right].q_1$$

- La CN1 nous donne:

$$q_1^*=\frac{\theta.\left[a-q_2^*(c_H)-c\right]+(1-\theta).\left[a-q_2^*(c_L)-c\right]}{2}$$

A. Cournot en information incomplète

On doit donc résoudre le système suivant (à trois équations et trois inconnues) :

$$\begin{cases} q_2^*(c_H) = \dfrac{a - q_1^* - c_H}{2} \\ q_2^*(c_L) = \dfrac{a - q_1^* - c_L}{2} \\ q_1^* = \dfrac{\theta.\left[a - q_2^*(c_H) - c\right].q_1 + (1-\theta).\left[a - q_2^*(c_L) - c\right]}{2} \end{cases}$$

A. Cournot en information incomplète

On obtient comme valeurs d'équilibre :

$$
\begin{cases}
q_2^*(c_H) = \dfrac{a-2.c_H+c}{3} + \dfrac{1-\theta}{6}.(c_H-c_L) \\
q_2^*(c_L) = \dfrac{a-2.c_L+c}{3} - \dfrac{\theta}{6}.(c_H-c_L) \\
q_1^* = \dfrac{a-2c+\theta.c_H+(1-\theta).c_L}{3}
\end{cases}
$$

A. Cournot en information incomplète

Rappel des valeurs d'équilibre en information complète :

- Les coût marginaux des firmes 1 et 2 sont de *connaissance commune* et équivalent à

$$c_1 \text{ et } c_2$$

- Les quantités d'équilibre sont alors de :

$$\begin{cases} q_1^* = \dfrac{a - 2.c_1 + c_2}{3} \\ q_2^* = \dfrac{a - 2.c_2 + c_1}{3} \end{cases}$$

A. Cournot en information incomplète

Équilibres en information complète versus incomplète :

$$\begin{cases} q_2^*(c_H) = \left[\dfrac{a-2.c_H+c}{3} \boxed{+\dfrac{1-\theta}{6}.(c_H-c_L)}\right] \geq \left[\dfrac{a-2.c_H+c}{3}\right] \\ \\ q_2^*(c_L) = \left[\dfrac{a-2.c_L+c}{3} \boxed{-\dfrac{\theta}{6}.(c_H-c_L)}\right] \leq \left[\dfrac{a-2.c_L+c}{3}\right] \end{cases}$$

A. Cournot en information incomplète

Mesure de la rente informationnelle.

$$+\frac{1-\theta}{6}.(c_H - c_L) \text{ et } -\frac{\theta}{6}.(c_H - c_L)$$

$$\text{Rente} \Uparrow \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \theta \approx \dfrac{1}{2} & : \quad \text{(incertitude forte)} \\ (c_H - c_L) \Uparrow & : \quad \text{(hétérogénéité forte)} \end{cases}$$

A. Cournot en information incomplète

- **Qui est pénalisée par la rente informationnelle ?**

$$q_2^*(c_L / \text{information incomplète}) \leq q_2^*(c_L / \text{information complète})$$

Une firme qui a des coûts faibles a intérêt à les révéler

- **Qui détient la rente informationnelle ?**

$$q_2^*(c_H / \text{information incomplète}) \geq q_2^*(c_H / \text{information complète})$$

Une firme qui a des coûts élevés a intérêt à les cacher

- **CONCLUSION: Cet équilibre n'est pas séparateur**

Loi de Gresham, la mauvaise monnaie chasse la bonne. Les bons sont exclus, les mauvais sont conservés.

B. La Doctrine d'Harsanyi

Définition d'un jeu G en information complète

$G = \left\langle N = \{i, -i\}; S_i, S_{-i}; U_i, U_{-i} \right\rangle$ Tels que :

$N = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ ensemble des joueurs

S_i : ensemble des stratégies du joueur *i*.

S_{-i} : ensemble des stratégies des autres joueurs que *i*.

U_i : fonction d'utilité du joueur i : $U_i : (S_i, S_{-i}) \rightarrow \mathbf{R}$

U_{-i} : les n-1 fonctions d'utilité des autres joueurs que *i*.

B. La Doctrine d'Harsanyi

Définition de l'information symétrique et asymétrique

Information symétrique :

- tout ce que sait l'un les autres le savent ;
- tout ce qu'ignore l'un, est ignoré de la même façon par les autres
- Une information qui n'est connue qu'en probabilité par l'un est connue sous la même forme par les autres (en particulier la distribution de probabilités est identique pour chacun).

Il ya donc **asymétrie d'information** quand quelqu'un sait quelque chose que les autres ne connaissent pas de la même manière.

Exemple :

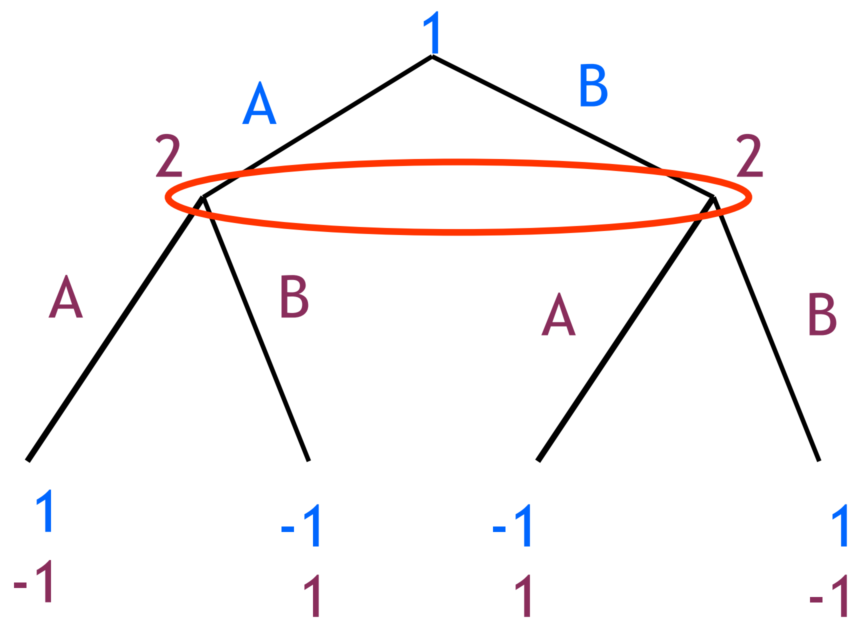
Bill sait la pièce peut tomber avec 2 chances sur 3 sur pile ;

Ragan pense que la pièce peut tomber sur face avec 1 chance sur 2.

B. La Doctrine d'Harsanyi

Jeu simultané et information imparfaite

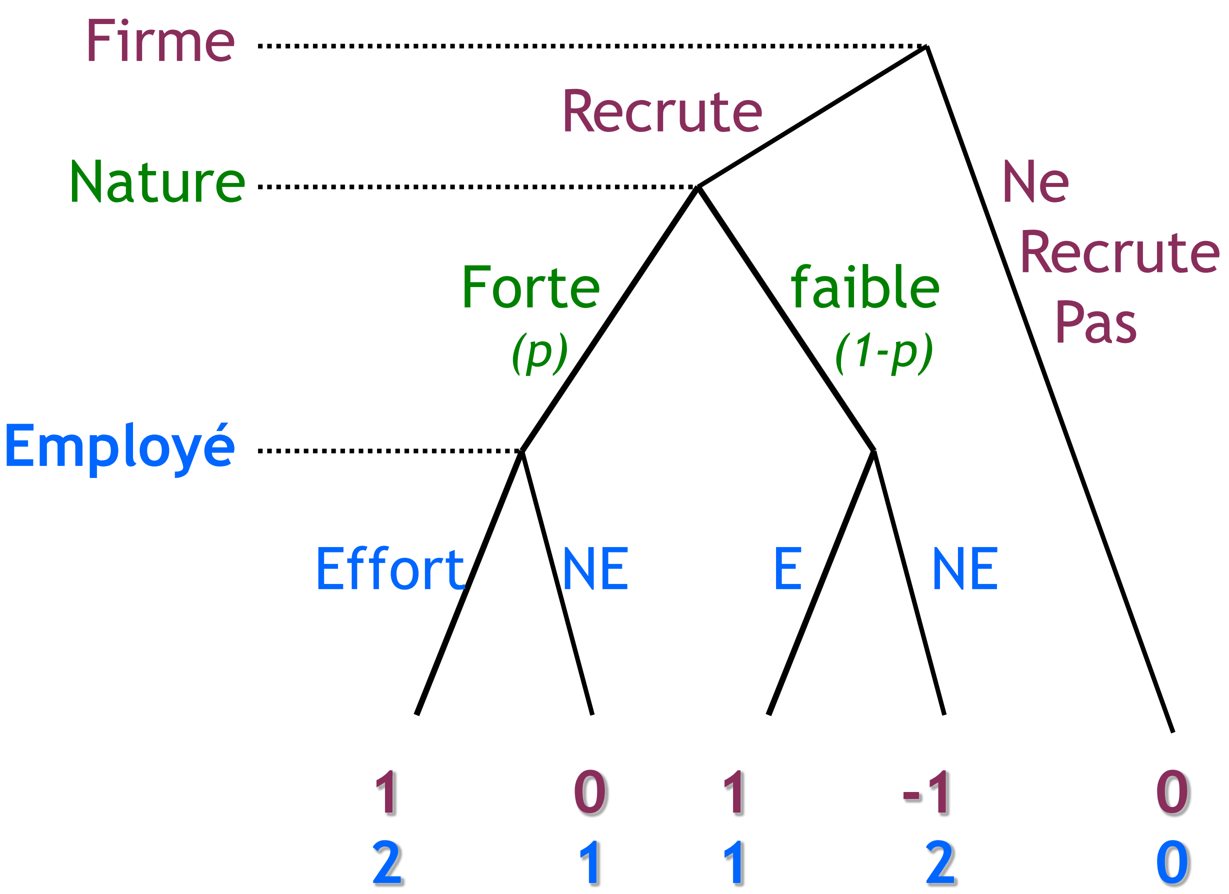
1 \ 2	A	B
A	1,-1	-1,1
B	-1,1	1,-1



Ici il y a information imparfaite : « *hidden action* »
stratégie - action - décision cachée

B. La Doctrine d'Harsanyi

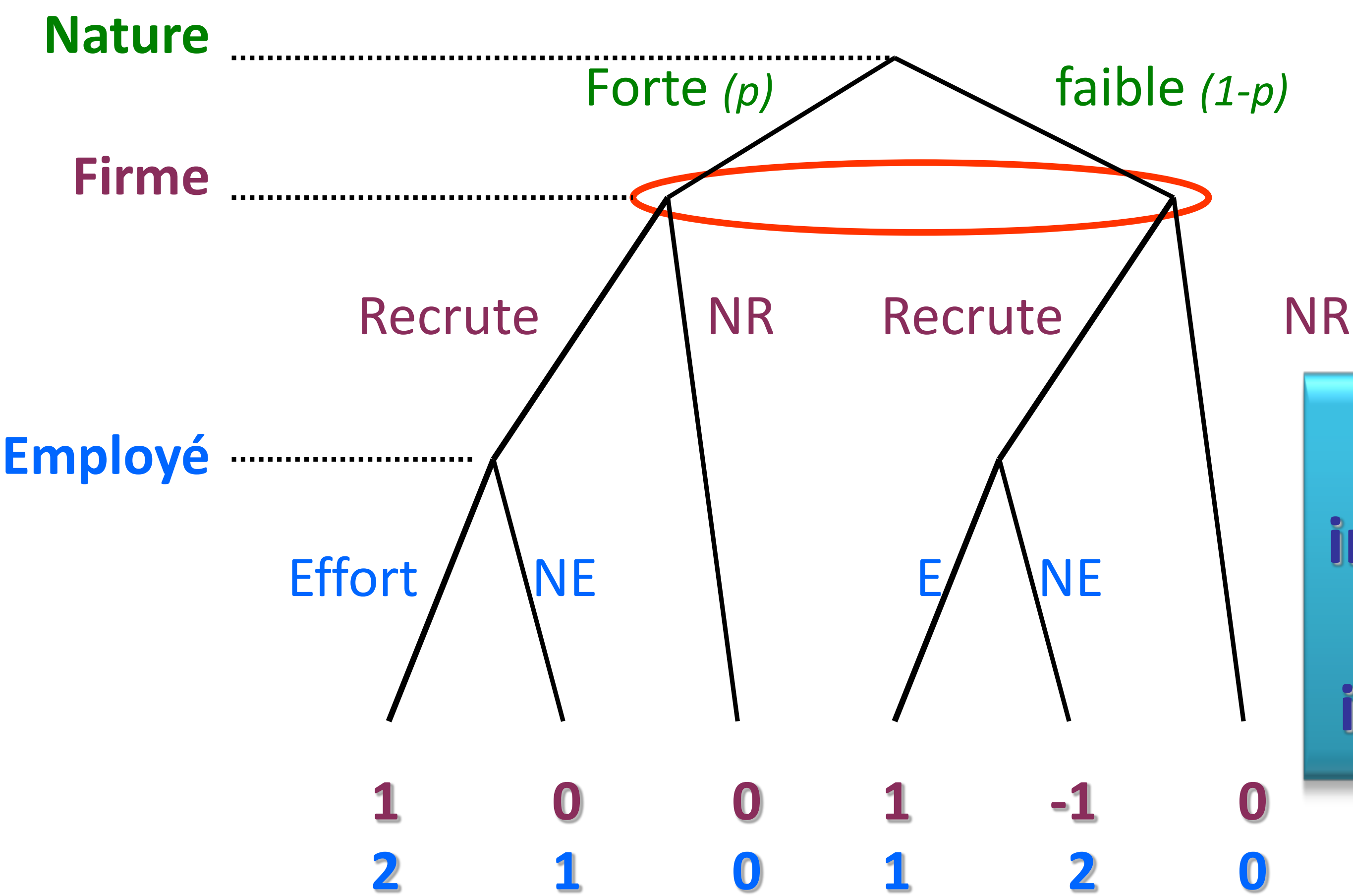
Jeu séquentiel et information incomplète et parfaite



Ici il y a information incomplète :
« hidden information »
information cachée

B. La Doctrine d'Harsanyi

Jeu séquentiel et information imparfaite et complète



Ici il y a donc du jeu en **information incomplète** en un jeu en **information imparfaite**

B. La Doctrine d'Harsanyi

La notion de *Type* ou de *Caractéristique*

- **Information imparfaite: connaissance imparfaite des actions passées dans le jeu.**
- **La nature est un joueur: chaque autre joueur peut ou ne peut pas observer les décisions passées de la nature.**
- **La nature prend comme décision, le vrai type ou la vraie caractéristique du joueur dont les autres ne connaissent pas la caractéristique ou le type.**

- **Jeu en information incomplète** sur le type du joueur

↕

- **Jeu en information imparfaite** sur les actions passées de la nature quant au choix du vrai type d'un joueur

B. La Doctrine d'Harsanyi

Jeu instantané

$\forall i, i = 1, ..., n$; n joueurs

Actions

a_i est une action ou tactique de i ;

A_i est l'ensemble des actions de i.

Types

t_i est un type du joueur i ;

T_i est l'ensemble des types du joueur i.

T_i est de connaissance commune parmi les joueurs.

Stratégies

$s_i(.)$ est une stratégie de i ; $s_i : T_i \rightarrow A_i$

$s_i(t_i) = a_i$: la tactique de i quand son type est t_i.

$S_i = \{s_i(.)\}$: ensemble des stratégies du joueur i.

B. La Doctrine d'Harsanyi

Exemple :

Le joueur *i* a deux types : $T_i = \{t_{i1}; t_{i2}\}$

U_i la fonction d'utilité du joueur i s'écrit dorénavant :

$$U_i : (A_i, A_{-i}, T_i) \rightarrow \mathbf{R}$$

$$U_i(a_1, a_2, \ldots, a_i, \ldots, a_n, t_{i1}) = U_i(a_i, a_{-i}, t_{i1}) = U_i(s_i(t_{i1}), a_{-i}) :$$

l'utilité de i quand il est de type t_{i1},

qu'il joue a_i et que les autres joeunt s_{-i}

B. La Doctrine d'Harsanyi

Retour sur le duopole de Cournot

$$\forall i, i=1,2, \text{ on a : } T_1=\{c\} \text{ et } T_2=\{c_L, c_H\}$$

$$\pi_1(q_1, q_2, c) = \left[(a-q_1-q_2)-c\right].q_1$$

$$\pi_2(q_1, q_2, c_L) = \left[(a-q_1-q_2)-c_L\right].q_2$$

$$\pi_2(q_1, q_2, c_H) = \left[(a-q_1-q_2)-c_H\right].q_2$$

Cas particulier en information complète et parfaite.

$$\forall i, i=1,2,\ldots,n \text{ on a : } T_i=\{t_i\}$$

$$\Leftrightarrow$$

Information complète et parfaite

B. La Doctrine d'Harsanyi

Être incertain sur l'identité des autres
équivaut à
Être incertain sur leurs types

$\forall i, i = 1,\dots,n$ les types des autres par rapport à i :

$$t_{-i} = \left(t_1, t_2, \dots, t_{i-1}, t_{i+1}, \dots, t_n\right) \text{ et } t_{-i} \in T_{-i} \text{ et}$$

$$T_{-i} = T_1 \times T_2 \dots \times T_{i-1} \times T_{i+1} \dots \times T_n$$

Introduction des croyances

$$p_i\left(t_{-i} / t_i\right)$$

Probabilité que i croit

que les types des autres sont t_{-i} quand il est de type t_i

B. La Doctrine d'Harsanyi

Probabilité subjective :
Jugement sous la forme d'une valeur de la croyance d'un individu face à un événement qui survient

A priori les individus peuvent différer dans leur jugement en probabilité, étant donné le même stock d'information. Mais

- Leurs croyances doivent satisfaire les règles statistiques conventionnelles
- *A* et *B* sont des événements indépendants: $p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B)$
- *C* est complémentaire de *A* : $p(C) = 1 - p(A)$
- *A* et *B* sont des événements indépendants $p(A|B) = p(A)$
- $p(A \text{ et } B) = p(A) . p(B|A)$

B. La Doctrine d'Harsanyi

Probabilité subjective :
Jugement sous la forme d'une valeur de la croyance d'un individu face à un événement qui survient

A priori les individus peuvent différer dans leur jugement en probabilité,

étant donné le même stock d'information. Mais

- Leurs croyances doivent satisfaire les règles statistiques conventionnelles
- *A* et *B* sont des événements indépendants: $p(A \text{ ou } B) = p(A) + p(B)$
- *C* est complémentaire de *A* : $p(C) = 1 - p(A)$
- *A* et *B* sont des événements indépendants $p(A|B) = p(A)$
- $p(A \text{ et } B) = p(A) \,.\, p(B|A)$

B. La Doctrine d'Harsanyi

- ***p(H/D)*** probabilité postérieure (expost) de *H*
  (après que *D* soit connu)
- ***p(H)*** prior probabilité a priori de *H*
  (avant que *H* soit connu)
- ***p(D/H)*** probabilité de D

$$p(H/D) = \frac{p(D/H).p(H)}{p(D/H).p(H) + p(D/\bar{H}).p(\bar{H})}$$

B. La Doctrine d'Harsanyi

Exemple :

- Des ampoules électriques ont 30 % de chance d'être défectueuses.
- 10% des ampoules défectueuses passent le test de défectuosité avec succès (sans être détectées défectueuses).
- Les ampoules sans défaut passent le test de défectuosité avec succès dans 80% des cas.

Quelle est la probabilité qu'une ampoule sans défaut soit détectée comme défectueuse lors du test de défectuosité ?

S: succès au Test -- **E**: Echec au test -- **D**: Défectueux -- **O**: opérationnel

$$p(O/E)=\frac{p(E/O).p(O)}{p(E/O).p(O)+p(E/D).p(D)}=\frac{(0,2).(0,7)}{(0,2).(0,7)+(0,9).(0,3)}=\frac{14}{41}$$

B. La Doctrine d'Harsanyi

Etape 1

La nature tire au sort au début du jeu

$t=\left(t_1,t_2,\dots,t_{i-1},t_i,t_{i+1},\dots,t_n\right)$ avec $t\in T$

et selon la probabilité $p(t)$

Etape 2

La nature révèle à chaque joueur i son type t_i

Etape 3

Chaque joueur i calcule $p_i\left(t_{-i}/t_i\right)$

avec la règle de Bayes.

$$p_i\left(t_{-i}/t_i\right)=\frac{p\left(t_{-i},t_i\right)}{p\left(t_i\right)}=\frac{p\left(t_{-i},t_i\right)}{\sum_{t_{-i}\in T_{-i}} p\left(t_{-i},t_i\right)}$$

et on suppose $p_i\left(t_{-i}/t_i\right)=p_i\left(t_{-i}\right)$

B. L'Equilibre Bayésien parfait

Définition d'un jeu G en information complète

$G = \langle N = \{i, -i\}; A_i, A_{-i}; T_i, T_{-i}; p_i, p_{-i}; U_i, U_{-i} \rangle$ Tels que :

$N = \{1, \ldots, i, \ldots, n\}$ ensemble des joueurs

A_i : ensemble des stratégies mixtes du joueur *i*.

T_i : ensemble des types du joueur *i*.

p_i : distribution de prob. du joueur *i* sur les types des autres:

$p_i = p_i(t_{-i} / t_i)$ [en général : $p_i = p_i(t_{-i} / t_i) = p_i(t_{-i})$]

U_i : fonction d'utilité du joueuer *i* : $U_i : (A_i, A_{-i}, T_i) \rightarrow \mathbf{R}$

C. L'Equilibre Bayésien parfait

Définition d'une stratégie en information incomplète

$G = \langle N = \{i, -i\}; A_i, A_{-i}; T_i, T_{-i}; p_i, p_{-i}; U_i, U_{-i} \rangle$ Tels que :

Une stratégie pour le joueur i est une fonction $s_i(.)$:

$$s_i(.) : T_i \rightarrow A_i$$

Pour tout type t_i de T_i , $s_i(t_i)$

indique l'action $s_i(t_i)$ de la stratégie s_i lorsque le type de i est t_i

$s_i(.) : t_i \rightarrow s_i(t_i) = a_i$: action a_i du joueur i de type t_i .

C. L'Equilibre Bayésien parfait

Définition d'un Equilibre de Nash Bayésien

Soit un jeu $G = \langle N = \{i, -i\}; A_i, A_{-i}; T_i, T_{-i}; p_i, p_{-i}; U_i, U_{-i} \rangle$

$s^* = \left(s_1^*, s_2^*, \ldots, s_i^*, \ldots, s_n^*\right)$ est le n-$uple$ de stratégies d'un

Equilibre de Nash Bayésien

si $\forall i = 1, \ldots, n$ et si $\forall t_i \in T_i$, $s_i^*(t_i) \in \underset{s_i \in S_i}{Arg\,Max} \sum_{t_{-i} \in T_{-i}} U_i\left(s_{-i}^*(t_{-i}), a_i\right)$

avec

$$s_{-i}^*(t_{-i}) = \left(s_1^*(t_1), s_2^*(t_2), \ldots, s_{i-1}^*(t_{i-1}), s_{i+1}^*(t_{i+1}), \ldots, s_n^*(t_n)\right)$$

C. L'Equilibre Bayésien parfait

Conditions d'existence de l'ENB

Soit un jeu $G = \langle N = \{i, -i\}; A_i, A_{-i}; T_i, T_{-i}; p_i, p_{-i}; U_i, U_{-i} \rangle$

Si pour tout i de N, les ensembles A_i et T_i sont finis, alors

alors le jeu G comprend

au moins un Equilibre de Nash Bayésien (ENB).

Démonstration similaire à celle de l'équilibre de Nash avec le théorème du point fixe de kakutani

C. L'Equilibre de Nash Bayésien

Exemple (suite) :

- Chaque joueur connaît son propre type et estime le type de son adversaire
- Chaque joueur a une stratégie pure d'équilibre pour chaque configuration possible
- Chaque joueur définit sa stratégie basée sur l'espérance de gain
- Harsanyi propose d'illustrer son exemple avec les probabilités suivantes dans les quatre configurations possibles :

	B_S	B_W
A_S	**0.4**	**0.1**
A_W	**0.2**	**0.3**

Exemple :

- Soient deux joueurs A et B. A cherche à maximiser son paiement tandis que and B cherche à minimiser le sien
- Les profils des actions de A et de B sont donnés: (a_1, a_2) et (b_1, b_2)
- Chaque joueur peut être de deux types différents :

  Fort (S) ou faible (W)
- Ceci permet donc d'identifier 4 appariements possibles en fonction de 4 types possibles :

$$(A_S, B_S) \text{ -- } (A_W, B_S) \text{ -- } (A_S, B_W) \text{ -- } (A_W, B_W)$$

- Chaque configuration correspond à un jeu avec un équilibre de Nash en stratégie pure.

	b_1	b_2
a_1	**2**	5
a_2	-1	20

(A_S, B_S)

	b_1	b_2
a_1	-24	-36
a_2	**0**	24

(A_S, B_W)

	b_1	b_2
a_1	28	**15**
a_2	40	4

(A_W, B_S)

	b_1	b_2
a_1	**12**	20
a_2	2	13

(A_W, B_W)

C. L'Equilibre de Nash Bayésien

Exemple (suite) :

Ces quatre configurations donnent la matrice des paiements suivante associée à un seul équilibre de Nash en stratégie pure:

	$B_S \to b_1, B_W \to b_1$	$B_S \to b_1, B_W \to b_2$	$B_S \to b_2, B_W \to b_1$	$B_S \to b_2, B_W \to b_2$
$A_S \to a_1, A_W \to a_1$	7.6	8.8	6.2	7.4
$A_S \to a_1, A_W \to a_2$	7.0	9.1	1.0	3.1
$A_S \to a_2, A_W \to a_1$	8.8	13.6	14.6	19.4
$A_S \to a_2, A_W \to a_2$	8.2	13.9	9.4	15.1

Exemple de calcul des paiements associés à l'équilibre de Nash bayésien

$$(.4)(-1) + (.1)(0) + (.2)(28) + (.3)(12) = 8.8$$

C. L'Equilibre de Nash Bayésien

Interprétation de l'équilibre de Nash Bayésien:

- Si le Joueur A est de type Fort, il décide a_2 et a_1 s'il est de type faible.
- Le joueur B décide de *jouer* b_1 sans tenir compte de son type.
- Ce résultat se fonde sur les probabilités connues de chaque configuration possible.
- **La stratégie de Nash Bayésien**: la meilleure réponse (Bayésienne) de chaque joueur face à toutes les décisions possibles de son adversaire
- Attention ! chaque joueur a une stratégie pure dépendant d'une configuration probabilisée : **un observateur extérieur pourrait interpréter cette stratégie comme une stratégie mixte**, avec la Nature jouant le rôle d'un troisième joueur indifférent qui choisit aléatoirement des types des deux joueurs selon des distributions de probabilités fixées)

D. Enchères

- **Définition de la question des enchères** : Comment dans un ensemble de valeurs de réserve, éliciter la valeur maximale (i.e. resp. minimale) parmi des acheteurs (i.e. des vendeurs).

- **Variété des formes d'enchères :**
  - Vente de grands crus, d'œuvres d'art, de bois, de fleurs, de poisson.
  - Vente de lots de bois, de bons du trésor.
  - Soumissions à une commission de marché public.
  - Sélection d'un sous traitant.
  - Octroi de licences Télécom3G, bande FM, de permis à polluer.
  - Allocation des créneaux de décollage-atterrissage.

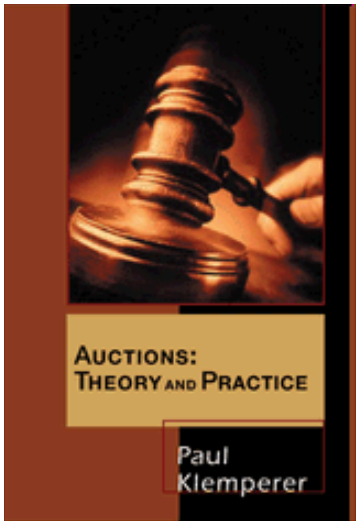
un bon mécanisme révélateur n'existe pas.

2 gros problèmes sur les enchères :
- dépassement de valeur de réserve (malédiction du vainqueur, aversion de pertes)
- collusion

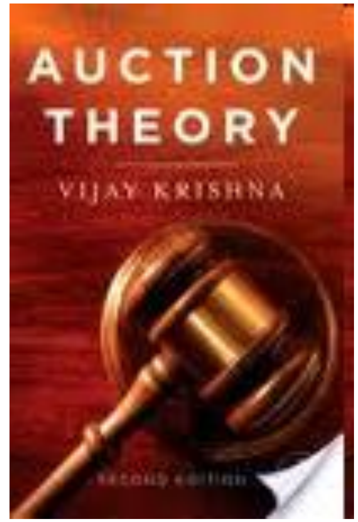
Exemple :
On fait courir des étudiants d'un point A à B et on propose n€ au plus rapide. Si on fait un graphe avec en abscisse la vitesse de course et ordonnée la valeur de n. On s'intéresse aux écarts de vitesse entre les différentes valeurs de n => potentiel problème de collusion entre les étudiants.

Comment se prémunir de la collusion ?

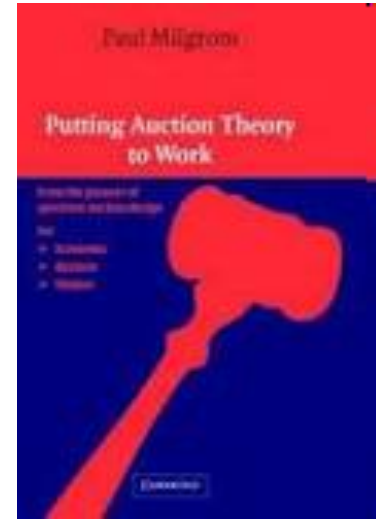
D. Enchères



Paul Klemperer
Auctions: Theory and Practice
Princeton U.P. 2004



Vijay Krishna
Auction Theory
San Diego Academic Press, 2002.



Paul Milgrom
Putting Auction Theory to Work
Cambridge U. P., 2004.

P. Klemperer, 1999, « Auction Theory : a Guide to the Literature »,
Journal of Economic Surveys, 13(3), 227-286.

John H. Kagel et Dan Levin « **Auctions: A Survey of Experimental Research , 1995 – 2008** »,
Working Paper 2008

D. Enchères

- **Problème** : **l'efficacité allocative des mécanismes d'enchères :** Comparer les revenus de l'enchères entre ces mécanismes ?

- **Effets pervers :**
  - Collusion
  - La malédiction des vainqueurs.

- **Variété des mécanismes d'enchères :**
  - Enchères anglaises, électroniques, orales
  - Enchères à la bougie, enchères hollandaises
  - Enchères au premier, au second prix, « All pay auctions »
  - Enchères sous pli
  - Enchères unitaires, par lot.
  - Enchères multi-unitaires
    - *à prix uniforme* : chacun paye le prix d'équilibre
    - *discriminatoire :* chacun paye un prix égal à sa proposition
    - *de Vickrey:* chacun paye le coût d'opportunité de son offre (ce que paieraient les autres en son absence).

Les enchères anglaises : c'est ascendant (les prix montent) et séquentiel

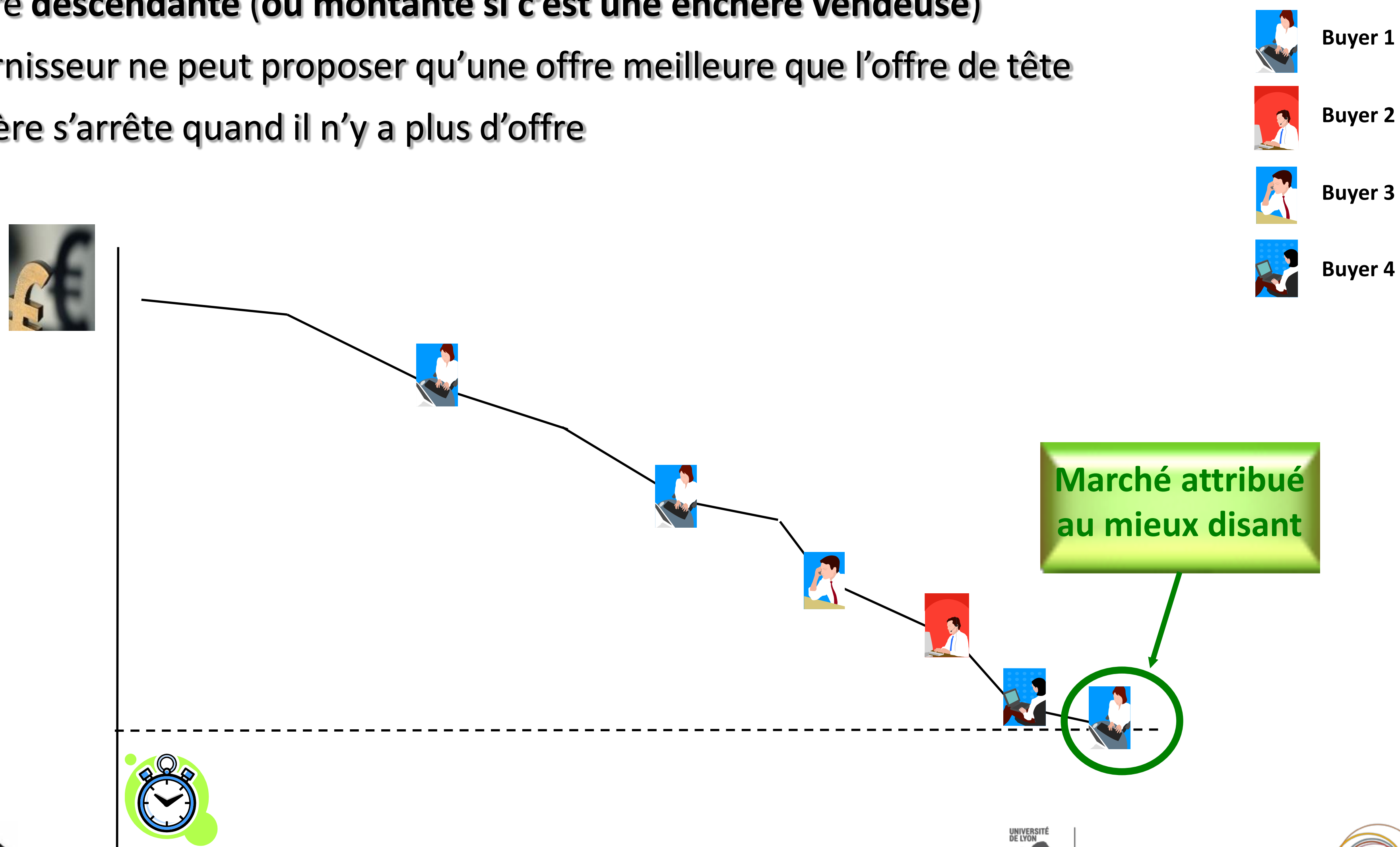
Enchères hollandaises : enchères descendants et séquentiel

Soucis à gérer pour les enchères par lot : taille et hétérogénéité

D. Enchères

Enchère anglaise

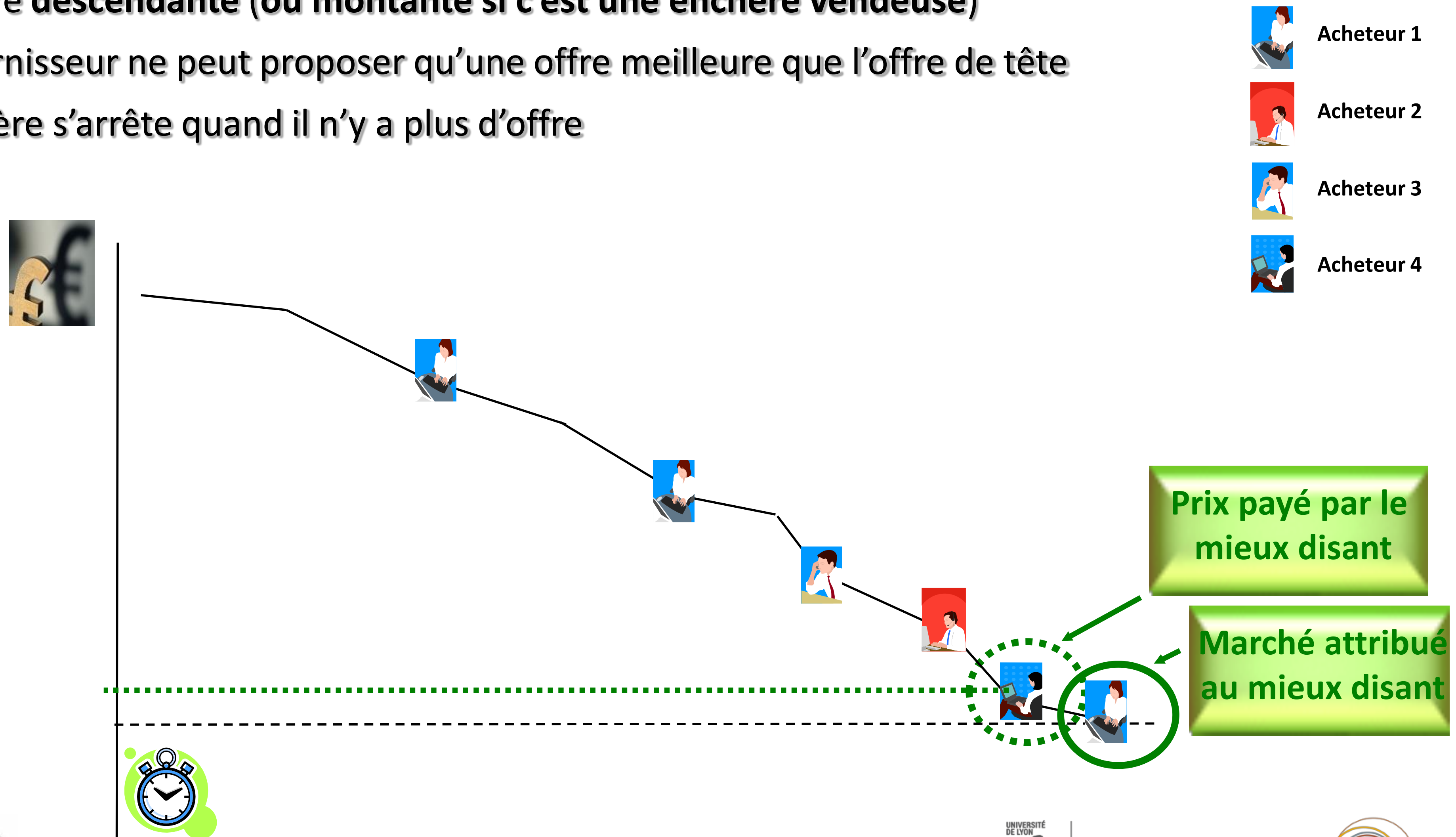
- Enchère **descendante (ou montante si c'est une enchère vendeuse)**
- Le fournisseur ne peut proposer qu'une offre meilleure que l'offre de tête
- L'enchère s'arrête quand il n'y a plus d'offre



D. Enchères

Enchère anglaise au second prix

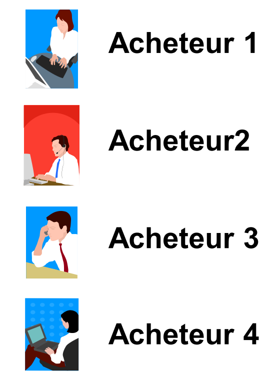
- Enchère **descendante (ou montante si c'est une enchère vendeuse)**
- Le fournisseur ne peut proposer qu'une offre meilleure que l'offre de tête
- L'enchère s'arrête quand il n'y a plus d'offre

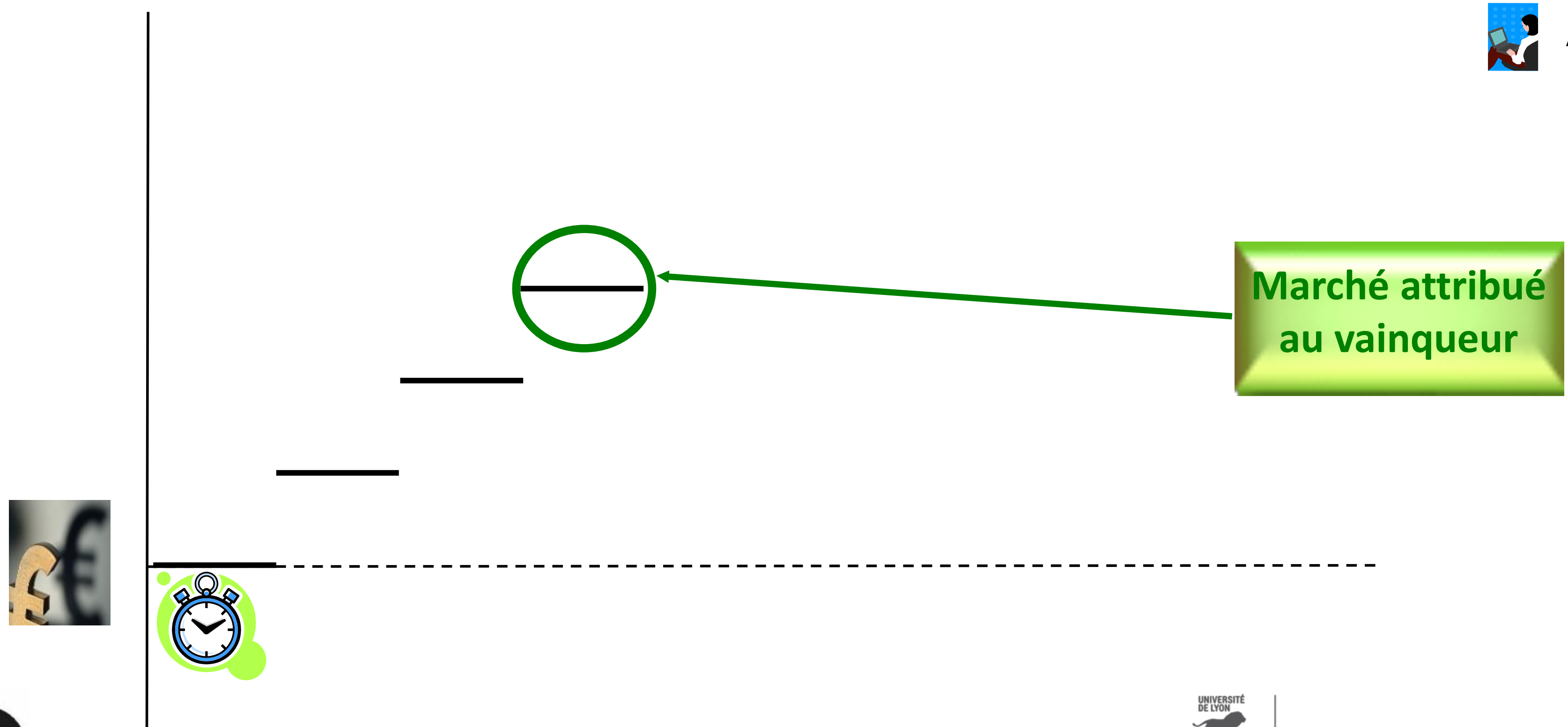


D. Enchères

Enchère hollandaise

- Enchère ascendante (sur paramétrage de l'acheteur, le système propose aux fournisseurs une offre qui augmente à intervalles réguliers)
- Le fournisseur retenu est celui qui accepte une offre le premier

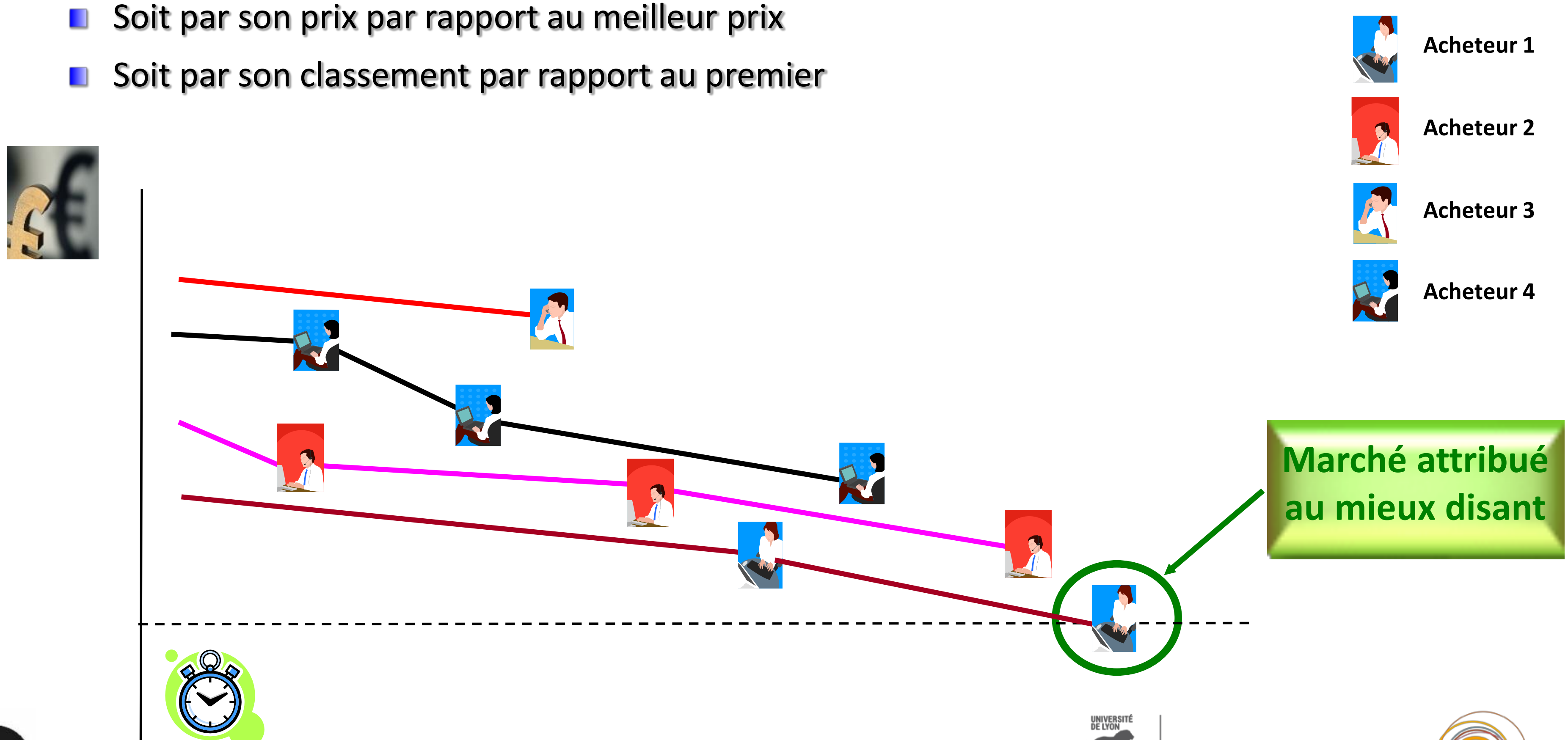




D. La Règle de Bayes

Enchère dynamique

- **Enchère descendante au second prix**
- Le fournisseur ne peut proposer qu'une offre meilleure que son offre précédente
- Il sait se situer par rapport à la meilleure offre du moment
  - Soit par son prix par rapport au meilleur prix
  - Soit par son classement par rapport au premier



D. Enchères

Etape 1

La nature tire au sort au début du jeu

$t=\left(t_1,t_2,\ldots,t_{i-1},t_i,t_{i+1},\ldots,t_n\right)$ avec $t\in T$

et selon la probabilité $p\left(t\right)$

Etape 2

La nature révèle à chaque acheteur i son type t_i

Etape 3

Chaque acheteur i évalue la valeur du bien

avec sa fonction $u_i\left(.\right)$

D. Enchères

Les types t_i sont indépendants :

les distributions

des t_i sont indépendantes

Les types t_i sont corrélés :

les distributions

des t_i sont corrélées

Les valeurs $u_i(.)$

sont indépendantes :

$u_i(t_i)$

Les valeurs $u_i(.)$

sont communes :

$u_i(t_i, t_{-i}) = u_i(t)$

D. Enchères

Illustration de l'Équilibre de Nash Bayèsien (ENB)

Double enchères orales

- Hall – Lazear (1984).
- Chatterjee – Samuelson (1983)

Enchères au premier prix sous pli

- Mc Afee Mc Millan (1987)
- Klemperer (1991)

Double enchères orales

- Répartition aléatoire des sujets entre des acheteurs et des offreurs d'un seul et même bien.

- Chaque vendeur dispose d'une seule unité du bien

- Chaque acheteur est disposé à acheter une seule unité de ce même bien.

- Chaque participant se voit attribuer de manière aléatoire une valeur de réserve.

- Soit s la valeur de réserve d'un vendeur et soit b celle de l'acheteur

Double enchères orales

- Au prix *p*, un vendeur gagne $p-s > 0$ et l'acheteur $b-p > 0$.

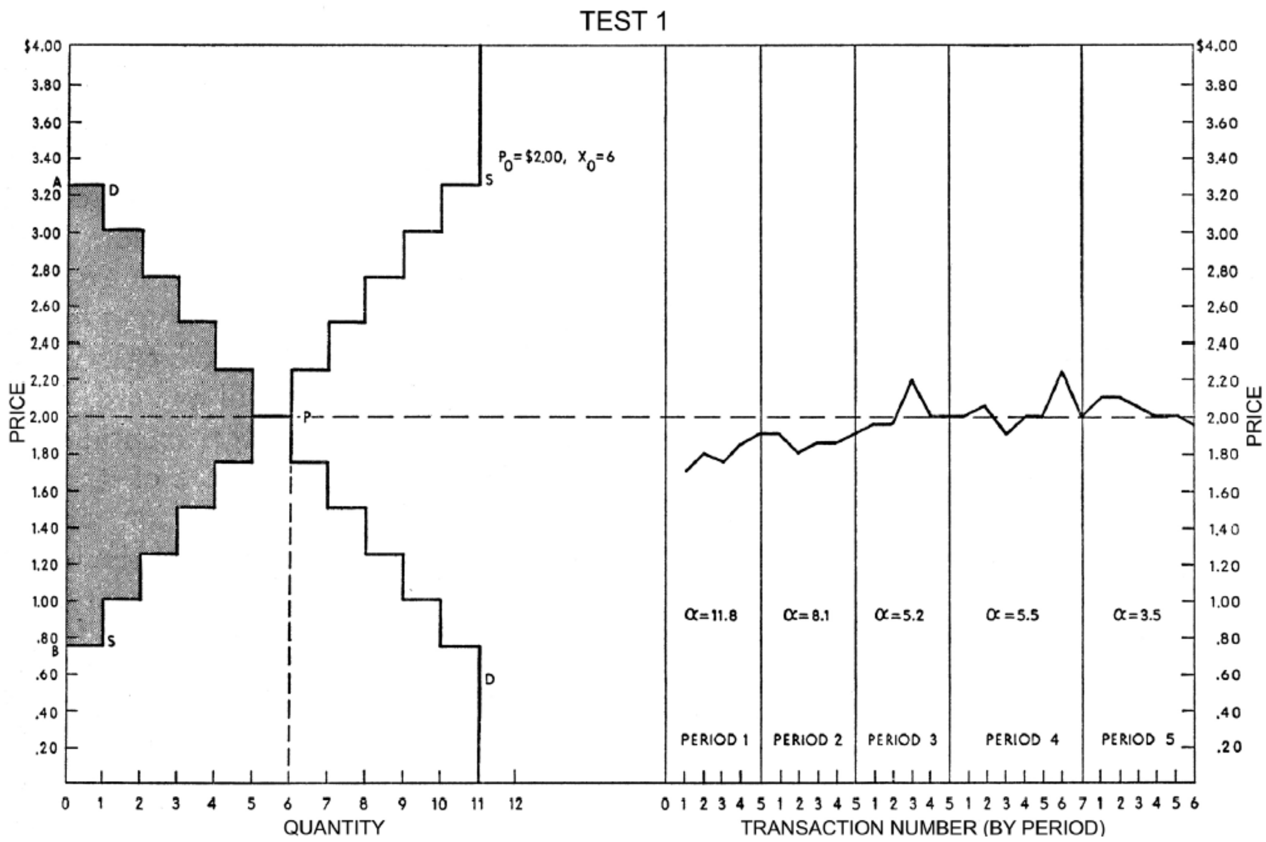
- Chaque participant peut soumettre, au moment qu'il choisit, une offre indiquant un prix ; cette offre publique d'un acheteur (resp. d'un vendeur) doit être supérieure (resp. inférieure) à l'offre précédente déclarée sur le marché.

- Chaque acheteur (resp. vendeur) peut à tout moment répondre à l'offre d'un vendeur (resp. acheteur) en dénouant une transaction.

- Les participants ne disposent donc pas de la distribution des prix de réserve s et b répartie entre tous.

Chacun n'a donc pas les moyens de calculer le prix théorique d'équilibre de marché.

Double enchères orales



Courbes d'offre et de demande de l'expérience de double enchère orale

Prix d'équilibre théorique, p = 2.

Vernon L. Smith (1962, p.113)

Double enchères orales

Annonces simultanées de (p_b, p_s) :

- Si $p_b \geq p_s$ et il y a échange au prix p : $p = \dfrac{p_b + p_s}{2}$. (1)
- Si $p_b < p_s$ et il n'y a pas d'échange au prix. (2)

Soit p le prix de l'échange du bien.

Les valeurs de réserve (v_b, v_s) sont des informations privées :

- Si $v_b - p \geq 0$; utilité de l'acheteur pour l'échange: $v_b - p$.
- Si $v_b - p < 0$; utilité de l'acheteur pour l'échange: 0.
- Si $p - v_s \geq 0$; utilité du vendeur pour l'échange: $p - v_s$.
- Si $p - v_s < 0$; utilité du vendeur pour l'échange: 0.

Double enchères orales

Qu'est ce qu'une stratégie ?

Soit p le prix de l'échange du bien.

Le joueur b possède un type v_b , valeur privée tirée surle support$[0;1]$.

Le joueur s possède un type v_s , valeur privée tirée surle support$[0;1]$.

L'annonce de p_b par b dépend de la valeur v_b .

L'annonce de p_s par s dépend de la valeur v_s .

Une paire de stratégies correspond donc à

$$\left\{p_b\left(v_b\right):v_b\in[0;1];p_s\left(v_s\right):v_s\in[0;1]\right\}$$

Double enchères orales

Qu'est ce Equilibre de Nash Bayèsien ?

Une paire de stratégies d'Equilibre de Nash Bayésien correspond à

$\left\{p_b^*(v_b) : v_b \in [0;1]; p_s^*(v_s) : v_s \in [0;1]\right\}$ telles que :

$$\begin{cases} \forall v_b \in [0;1] \\ p_b^*(v_b) = \underset{p_b}{Arg\,Max} \left\{ \left[v_b - \dfrac{p_b + E\left[p_s(v_s) / p_b \geq p_s(v_s)\right]}{2} \right] \cdot \mathrm{Prob}\left(p_b \geq p_s(v_s)\right) \right\} \\ \forall v_s \in [0;1] \\ p_s^*(v_s) = \underset{p_s}{Arg\,Max} \left\{ \left[\dfrac{p_s + E\left[p_b(v_b) / p_b(v_b) \geq p_s\right]}{2} - v_s \right] \cdot \mathrm{Prob}\left(p_b(v_b) \geq p_s\right) \right\} \end{cases}$$

Double enchères orales

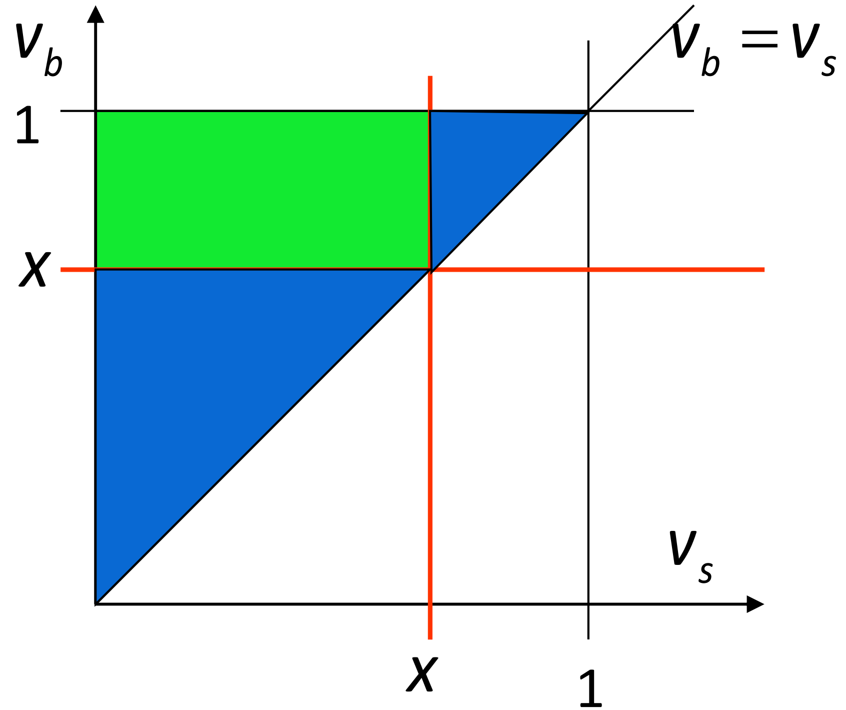
Le ou les Equilibres de Nash Bayèsiens ?

- En fait, il y a de très nombreux …
  … Équilibres de Nash Bayésiens.

- Études de cas particuliers:
  - Équilibre à prix unique : s'il y a échange, c'est avec un seul prix annoncé.
  - Équilibre de Nash Bayésien avec stratégie linéaire.

Équilibres de Nash Bayésiens à prix unique

$$\forall x \in [0;1] \text{ l'acheteur offre } \begin{cases} x \text{ si } v_b \geq x \\ 0 \text{ si } v_b < x \end{cases} \text{ et } \forall x \in [0;1] \text{ le vendeur demande } \begin{cases} x \text{ si } v_s \leq x \\ 0 \text{ si } v_s > x \end{cases}$$



ISFA

Université Claude Bernard Lyon 1

Équilibres de Nash Bayésiens linéaires

$p_s(v_s) = a_s + c_s \cdot v_s$ avec $p_s(\cdot)$ uniformément distribué sur $[a_s; a_s + c_s]$

Une paire de stratégies d'Equilibre de Nash Bayésien correspond à

$\{p_b^*(v_b) : v_b \in [0;1]; p_s^*(v_s) : v_s \in [0;1]\}$ telles que : $\forall v_b \in [0;1]$

$$\underbrace{p_b^*(v_b) = \underset{p_b}{ArgMax}\left[v_b - \frac{p_b + E\left[p_s(v_s) / p_b \geq p_s(v_s)\right]}{\Downarrow 2}\right] \cdot \text{Prob}\left(p_b \geq p_s(v_s)\right)}$$

$$E\left[p_s(v_s) / p_b \geq p_s(v_s)\right] = \frac{p_b + a_s}{2}$$

$$\text{Prob}\left(p_b \geq p_s(v_s)\right) = \frac{p_b - a_s}{c_s}$$

Double enchères orales

Équilibres de Nash Bayésiens linéaires

$$\underset{p_b}{Max}\left[v_b - \frac{p_b + \frac{p_b + a_s}{2}}{2} \right] \cdot \frac{p_b - a_s}{c_s}$$

Condition Nécessaire du Premier Ordre :

$$p_b = \frac{2}{3} \cdot v_b + \frac{1}{3} \cdot a_s$$

Double enchères orales

Équilibres de Nash Bayésiens linéaires

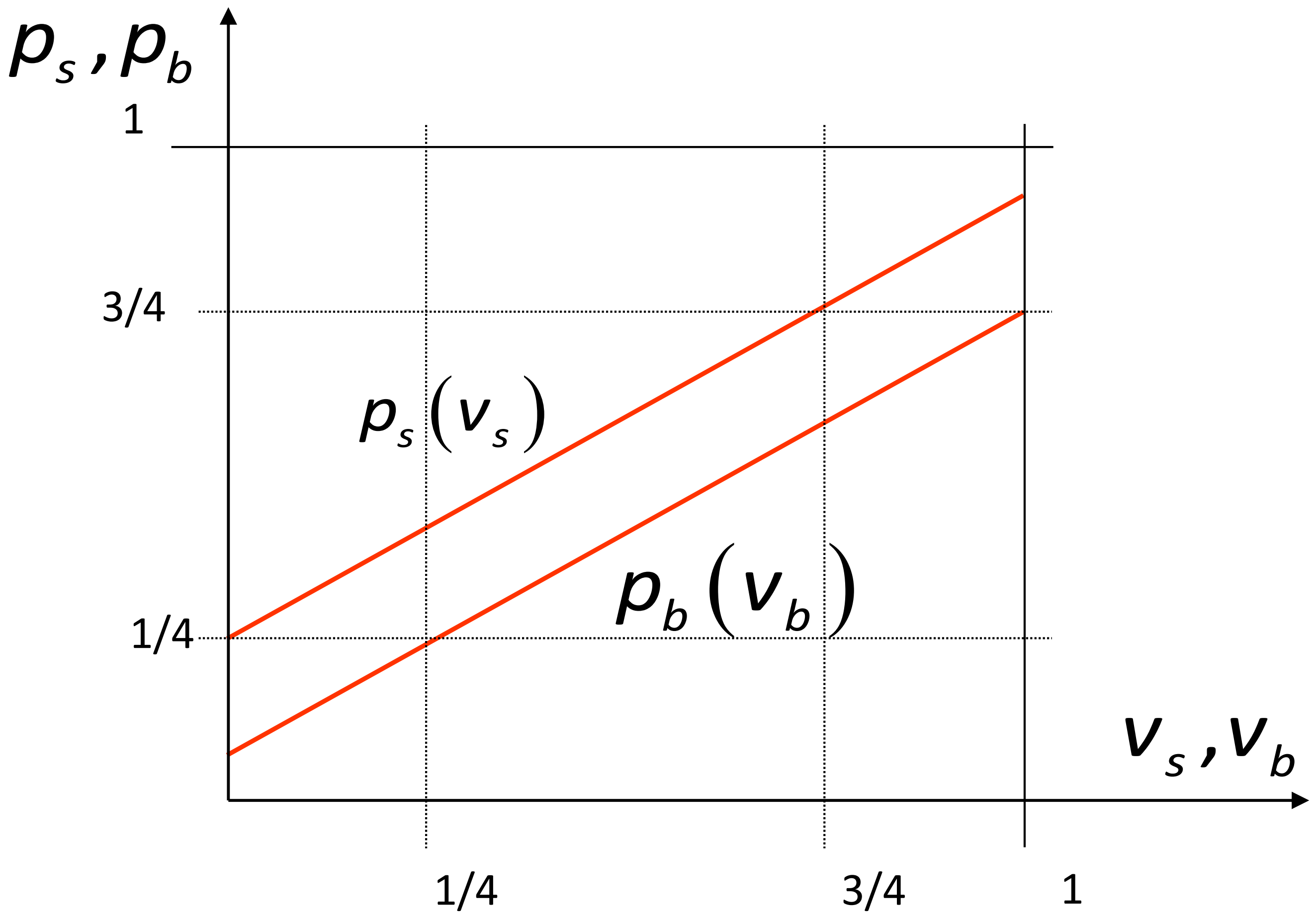
$$\begin{cases} p_b = \frac{2}{3} \cdot v_b + \frac{1}{3} \cdot a_s \\ p_s = \frac{2}{3} \cdot v_s + \frac{1}{3} \cdot (a_b + c_b) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_b(v_b) = \frac{2}{3} \cdot v_b + \frac{1}{12} \\ p_s(v_s) = \frac{2}{3} \cdot v_s + \frac{1}{4} \end{cases}$$

Enchères avec échange $\Leftrightarrow$ $p_b \geq p_s$ $\Leftrightarrow$

$$\frac{2}{3} \cdot v_b + \frac{1}{12} \geq \frac{2}{3} \cdot v_s + \frac{1}{4} \Leftrightarrow v_b \geq v_s + \frac{1}{4}$$

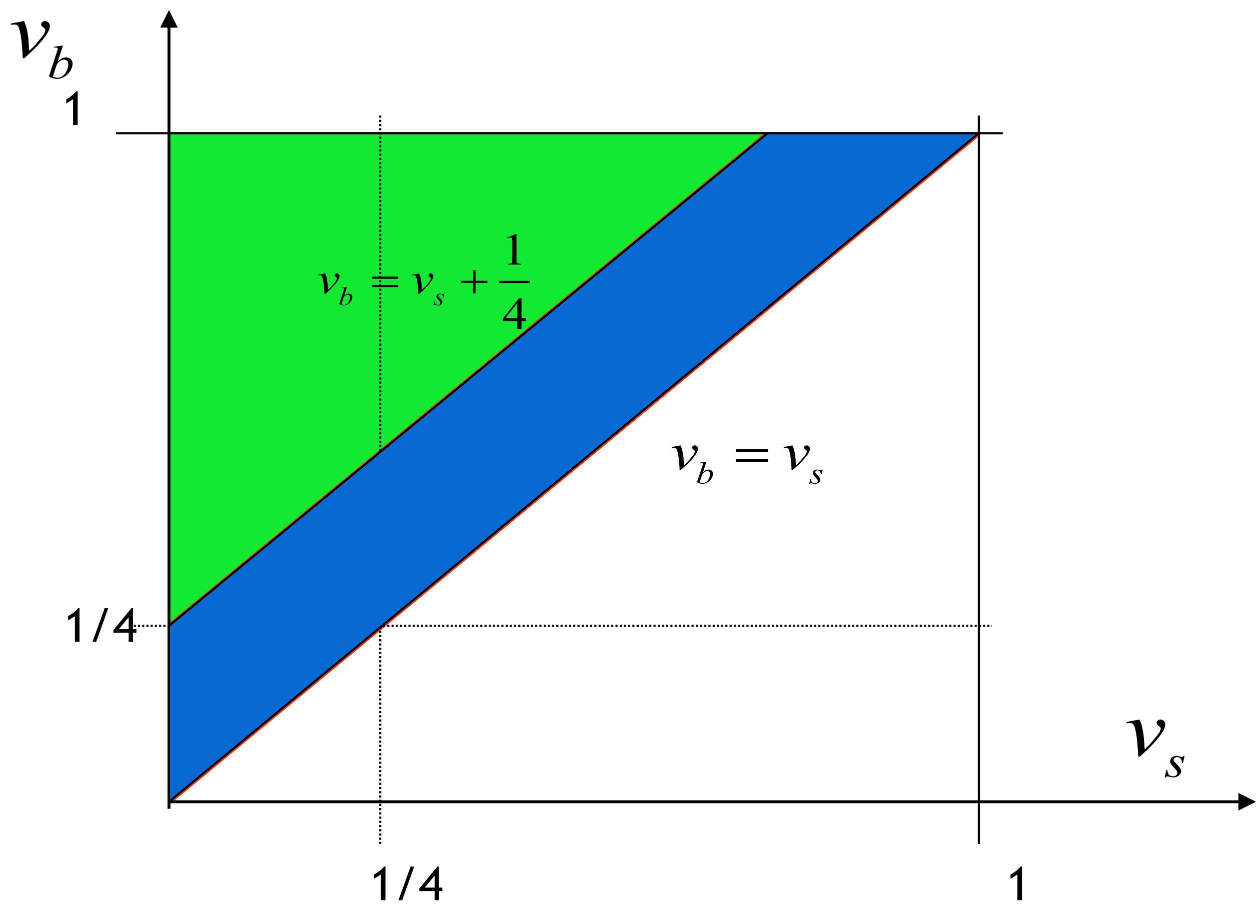
Double enchères orales

Équilibres de Nash Bayésiens linéaires



Double enchères orales

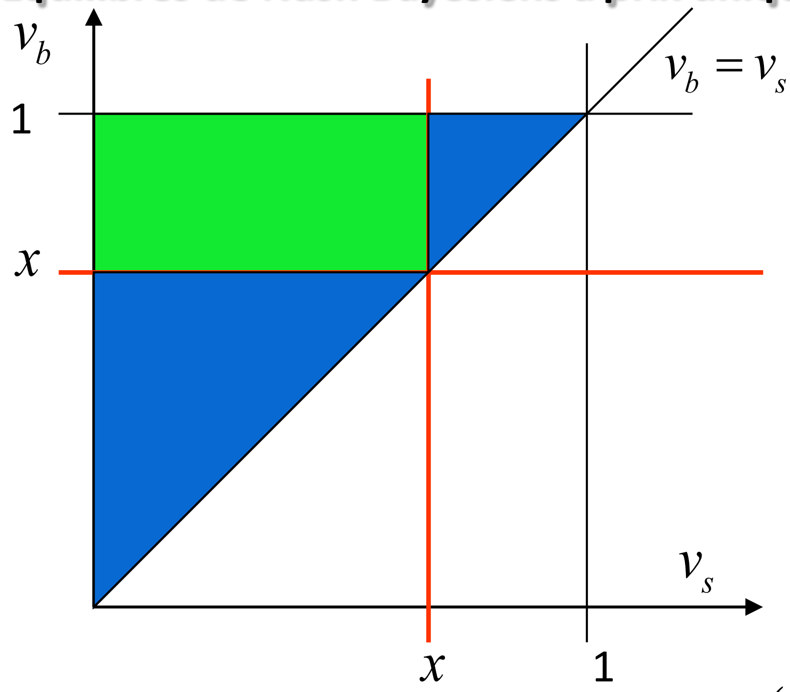
Équilibres de Nash Bayésiens linéaires



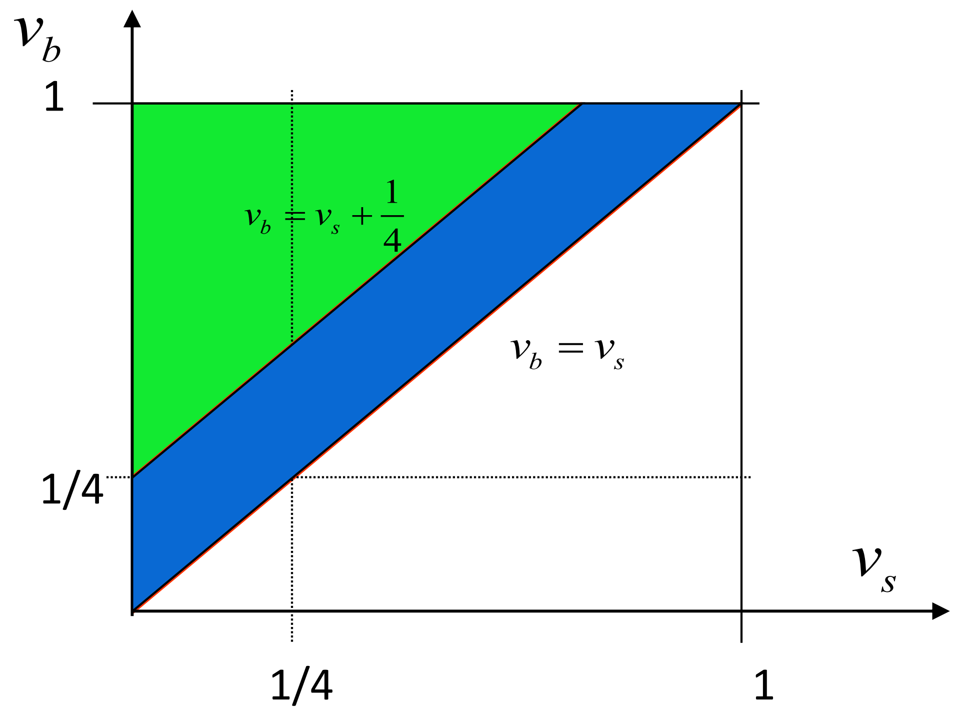
Double enchères orales

Équilibres de Nash Bayésiens linéaires

Équilibres de Nash Bayésiens à prix unique



Équilibres de Nash Bayésiens linéaires



$$(\varepsilon > 0)$$

$$\text{Impossible} : v_s = 0 \quad ; \quad v_b = x - \varepsilon$$

$$\text{Possible pour rien} : \; v_s = x - \varepsilon \quad ; \quad v_b = x + \varepsilon \, (\varepsilon > 0)$$

Enchères au premier prix sous pli

Les acteurs

Deux acheteurs : $i=1, 2.$

Les informations privées

Chaque acheteur a une valeur de réserve pour le bien : v_i

v_1 et v_2 sont uniformément distribuées sur [0;1]

Les actions

Chaque acheteur *i* annonce une enchère b_i

b_1 et b_2 sont simultanées (tirage au sort en cas d'égalité).

Le conflit

b_i augmente: *plus la probabilité de* ***l'emporter augmente…***

… et plus le gain diminue

Enchères au premier prix sous pli

$$G = \langle N = \{1,2\}; A_i; T_i; U_i; i = 1,2 \rangle$$

$$A_i = [0;\infty) \text{ et } b_i \in A_i \quad T_i = [0;1] \text{ et } v_i \in T_i$$

$$s_i : T_i \to A_i \text{ et } s_i(v_i) = b_i \equiv b_i(v_i)$$

v_i est uniformément distribuée sur $[0;1]$

$$U_i\left(b_1(v_1); b_2(v_2)\right) = \begin{cases} v_i - b_i & \text{si } b_i > b_j \\ \dfrac{(v_i - b_i)}{2} & \text{si } b_i = b_j \\ 0 & \text{si } b_i < b_j \end{cases}$$

Tout ceci est de connaissance commune.

Enchères au premier prix sous pli

Qu'est-ce qu'un Équilibre de Nash Bayésien ?

Une paire de stratégies d'Equilibre de Nash Bayésien correspond à

$\left\{b_1^*(v_1) : v_1 \in [0;1]; b_2^*(v_2) : v_2 \in [0;1]\right\}$ telles que :

$$\begin{cases} \forall i, i = 1,2 \text{ et } \forall j, j = 1,2 \text{ et i} \neq j \quad \forall (v_i, v_j) \in [0;1]^2 \\ b_i^*(v_i) = \underset{b_i}{ArgMax}\left\{(v_i - b_i)\cdot \text{Prob}\left(b_i \geq b_j(v_j)\right) + \dfrac{(v_i - b_i)}{2}\cdot \text{Prob}\left(b_i = b_j(v_j)\right)\right\} \end{cases}$$

Université Claude Bernard Lyon 1

Enchères au premier prix sous pli

Qu'est-ce qu'un Équilibre de Nash Bayésien ?

$$b_1(v_1) = a_1 + c_1 \cdot v_1 \quad \text{et} \quad b_2(v_2) = a_2 + c_2 \cdot v_2$$

Comme v_i et $b_i(v_i) = a_i + c_i \cdot v_i$ sont distribuées uniformément,

$$\text{Prob}\left(b_i = b_j\left(v_j\right)\right) = 0$$

on peut réécrire le programme de l'Equilibre de Nash Bayésien :

$$\begin{cases} \forall i, i = 1,2 \text{ et } \forall j, j = 1,2 \text{ et } \mathrm{i} \neq j \quad \forall\left(v_j\right) \in [0;1]^2 \\ b_i^*(v_i) = \underset{b_i}{Arg\,Max}\left\{(v_i - b_i) \cdot \text{Prob}\left(b_i \geq b_j\left(v_j\right)\right)\right\} \end{cases}$$

Enchères au premier prix sous pli

Équilibres de Nash Bayésiens linéaires

$$\forall i, i=1,2 \text{ et } \forall j, j=1,2 \text{ et } \mathrm{i} \neq j \quad \forall\left(v_i, v_j\right) \in [0;1]^2$$

$$b_i\left(v_i\right) = a_i + c_i \cdot v_i \text{ donc } b_i(\cdot) \in \left[a_i; a_i + c_i\right]$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \text{Pour le joueur } i, \\ \text{il est inutile d'enchérire en dessous de } a_j \\ \text{il est irrationnel d'énchérir au dessus de } a_j + c_j \end{bmatrix}}_{a_j \leq b_i \leq a_j + c_j}$$

$$\mathrm{Prob}\left(b_i \geq b_j\left(v_j\right)\right) = \mathrm{Prob}\left(b_i \geq a_j + c_j \cdot v_j\right) = \mathrm{Prob}\left(v_j < \frac{b_i - a_j}{c_j}\right)$$

Enchères au premier prix sous pli

Équilibres de Nash Bayésiens linéaires

$$\text{Comme Prob}\left(b_i \geq b_j\left(v_j\right)\right) = \text{Prob}\left(v_j < \frac{b_i - a_j}{c_j}\right)$$

on peut réécrire le programme de l'Equilibre de Nash Bayésien :

$$\begin{cases} \forall i, i = 1,2 \text{ et } \forall j, j = 1,2 \text{ et i} \neq j \quad \forall\left(v_j\right) \in [0;1]^2 \\ b_i^*\left(v_i\right) = \underset{b_i}{ArgMax}\left\{\left(v_i - b_i\right) \cdot \text{Prob}\left(v_j < \frac{b_i - a_j}{c_j}\right)\right\} \end{cases}$$

Enchères au premier prix sous pli

Équilibres de Nash Bayésiens linéaires

La condition Nécessaire du Premier Ordre donne:

$$\forall i, i = 1,2 \quad ; \quad b_i\left(v_i\right) = \begin{cases} \dfrac{v_i + a_j}{2} & \text{si } v_j \geq a_j \\ a_j & \text{si } v_j < a_j \end{cases}$$

Enchères au premier prix sous pli

Équilibres de Nash Bayésiens linéaires

3 cas se présentent:

$$0 < a_j < 1 \Rightarrow \quad b_i(v_i) \text{ pas linéaire}$$

$$1 \leq a_j \Rightarrow \quad b_j(v_j) \geq v_j : \text{non optimal}$$

$$a_j \leq 0 \Rightarrow \quad b_i(v_i) = \frac{v_i + a_j}{2} \text{ et } a_i = \frac{a_j}{2} \text{ et } c_i = \frac{1}{2}$$

En conclusion (on réplique pour *i* et *j*):

$$b_i(v_i) = \frac{v_i}{2} \text{ et } a_i = a_j = 0 \text{ et } c_i = c_j = \frac{1}{2}$$

Enchères au premier prix sous pli

Équilibres de Nash Bayésiens linéaires

3 cas se présentent :

$0 < a_j < 1$	$b_i(v_i)$ pas linéaire
$1 \leq a_j$	$b_j(v_j) \geq v_j$: non optimal
$a_j \leq 0$	$b_i(v_i) = \dfrac{v_i + a_j}{2}$ et $a_i = \dfrac{a_j}{2}$ et $c_i = \dfrac{1}{2}$

En conclusion (on réplique pour *i* et *j*):

$$b_i(v_i) = \frac{v_i}{2} \text{ et } a_i = a_j = 0 \text{ et } c_i = c_j = \frac{1}{2}$$