Chaînes de Markov

Modèles aléatoires discrets – Chapitre 1

Définitions - Vocabulaire

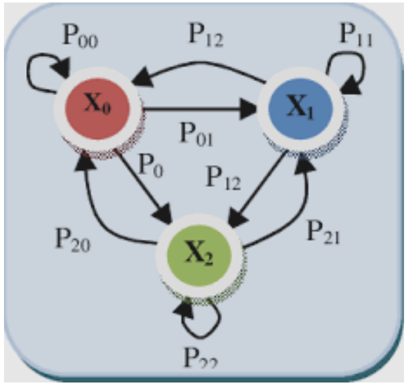
Pour la modélisation, on dispose :

- D'un **espace d'états**, c'est-à-dire d'un ensemble E, fini ou dénombrable,
- D'une loi de probabilité μ_0 sur E, qui jouera le rôle de **loi initiale**,
- Des **probabilités de transition** (ou de **passage**) de x vers y, c'est-à-dire d'une famille $\big(p(x,y)\big)_{(x,y)\in E^2}$ de nombres réels positifs vérifiant :

$$\sum_{y\in E} p(x,y) = 1.$$

- Lorsque l'espace d'état E est fini, les $(p(x,y))$ peuvent être écrits sous forme d'une matrice P, appelée **matrice de transition**, et dans ce cas, les « sommes des lignes » de cette matrice doivent toutes être égales à 1. On dit que cette matrice est **stochastique**.

Exemple



- Exemple : ci-contre, $E = \{X_0, X_1, X_2\}$ et $P = \begin{pmatrix} P_{00} & P_{01} & P_{02} \\ P_{10} & P_{11} & P_{12} \\ P_{20} & P_{21} & P_{22} \end{pmatrix}$
- P matrice stochastique, ce qui signifie : $P_{00} + P_{01} + P_{02} = 1$, $P_{10} + P_{11} + P_{12} = 1$, $P_{20} + P_{21} + P_{22} = 1$
- Loi de probabilité μ_0 correspondrait à la répartition initiale à l'instant 0 dans les différents états possibles

Définition – Chaîne de Markov

Définition : Une **chaîne de Markov** $(X_n)_{n\geq 0}$ sur un espace d'états E, de loi initiale μ_0, et de probabilité de transition $\big(p(x,y)\big)_{(x,y)\in E^2}$ est une suite de variables aléatoires à valeurs dans E, telle que :

I. Pour tout $x \in E, \mathbb{P}(X_0 = x) = \mu_0(x)$

II. Pour tout $n \geq 1$ et pour tout $(n+1)$-uplet $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in E^{n+1}$, on a
$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mu_0(x_0)p(x_0,x_1)p(x_1,x_2)\dots p(x_{n-1},x_n).$$

- Remarque : en particulier on aura $p(x,y) = \mathbb{P}(X_1 = y|X_0 = x) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y|X_n = x)$.
- On notera pas la suite $p^{(n)}(x,y) = \mathbb{P}(X_n = y|X_0 = x) = \mathbb{P}(X_{n+k} = y|X_k = x)$, c'est-à-dire la probabilité de passer de l'état x à l'état y en n étapes.

Exemples

- Une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées constitue une chaîne de Markov, mais ce n’est évidemment pas un cas générique.
- Vérification : exercice

Suite de variables iid = Chaîne de Markov

- Une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées constitue une chaîne de Markov.
- **Preuve** : soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de vaiid. Notons p sa loi : $p(x) = \mathbb{P}(X_n = x)$.
  On peut écrire, par indépendance des X_n:
  $$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) &= \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_1 = x_1)\dots\mathbb{P}(X_n = x_n)\\ &= \mu_0(x_0)p(x_1)p(x_2)\dots p(x_n)\end{aligned}$$

Ce qui correspond à la définition d'une chaîne de Markov en prenant $p(x, x_i) = p(x_i) \forall x \in E$.

Exemples

- Une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées constitue une chaîne de Markov (le vérifier !), mais ce n'est évidemment pas un cas générique.
- **Vérification** : par indépendance des variables aléatoires, on a
$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_1 = x_1) \dots \mathbb{P}(X_n = x_n)$$
$= \mu_0(x_0)\mathbb{P}(X = x_1) \dots \mathbb{P}(X = x_n)$ puisque les v.a. sont i.i.d.
$= \mu_0(x_0)\, p(x_1) \dots p(x_n)$.
Ce qui définit bien la chaîne de Markov.

Exemples

- Une chaîne de Markov peut servir à modéliser la cotisation d'assurance automobile versée par un assuré : la cotisation versée pour l'année n + 1 dépend de sa cotisation pour l'année n, et du nombre d'accidents qu'il a occasionnés au cours de l'année n.
  Réfléchir à une modélisation
- On peut modéliser le niveau de stock de produits (avec par exemple un réapprovisionnement dès que le stock est inférieur à un seuil), l'état d'une machine (fonctionnement/panne/réparation), la santé d'un individu (sain/malade/mort, avec éventuellement différents niveaux de gravité de la maladie).
  Réfléchir à une modélisation pour l'évolution d'une maladie

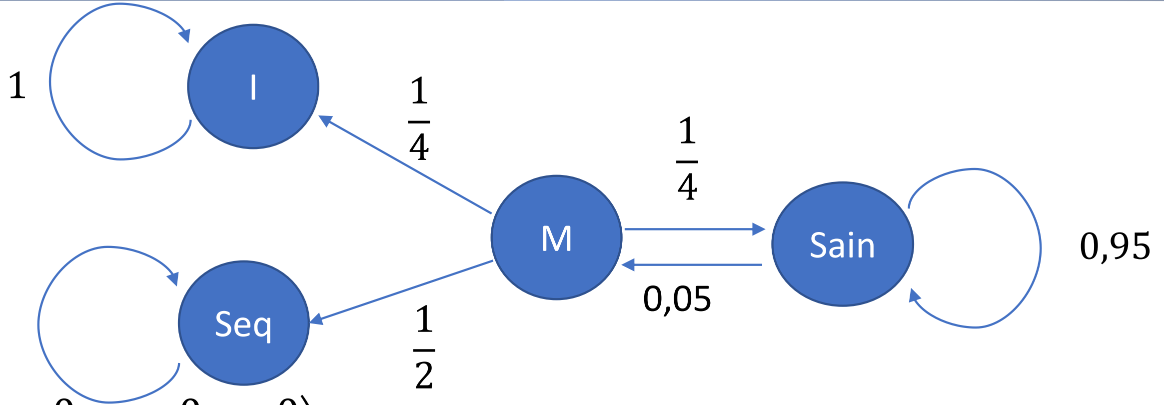
Exemples

- On peut également utiliser une chaîne de Markov pour modéliser le temps qu'il fait. Les états seront alors par exemple : beau, nuageux, pluvieux.
  - Dans le modèle le plus simple, le temps d'un jour donné ne dépend que du temps de la veille.
  - On peut également envisager une modélisation faisant intervenir le temps de deux jours successifs (ou plus).
    Les états seront alors les 9 couples (beau, beau), (beau, nuageux), (beau, pluvieux), (nuageux, beau), ..., la première coordonnée désignant le temps de l'avant-veille et la deuxième le temps de la veille.
    Un certain nombre de transitions est alors impossible (par exemple de (beau, beau) vers (pluvieux, pluvieux)).
    Pourquoi ? Lister les différentes transitions possibles.

Exercice : maladie contagieuse

- On suppose qu'une maladie s'attrape avec probabilité 0,05. Quand on l'a attrapée, on peut de manière équiprobable, soit en guérir, soir acquérir des séquelles irréversibles. Ces séquelles sont associées à une immunité totale par la suite. Si on guérit, en revanche, on n'est immunisé que dans 50% des cas. Dans la population, 1/5 des gens est naturellement immunisé.
- **Modéliser l'état d'un individu dans la période de temps $(n, n+1)$ par une chaîne de Markov. Donner son graphe, sa loi initiale et sa matrice de transition.**
- **Quelle est la probabilité d'attraper la maladie 2 fois de suite et de s'en sortir sans séquelle mais non immunisé ?**

Exercice – Maladie contagieuse



Solution :

- Espace d'états : {I, Sain, M, Seq}
- Mesure initiale : $\mu_0 = (\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, 0,0)$
- Matrice de transition :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,95 & 0,05 & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- Probabilité d'attraper 2 fois la maladie de suite, et de s'en sortir sans séquelle mais non immunisé :

$$\mathbb{P}(X_0 = Sain, X_1 = M, X_2 = Sain, X_3 = M, X_4 = Sain) = \mu_0(Sain)P(Sain, M)^2 P(M, Sain)^2$$

$$= \frac{4}{5}(0,05)^2 \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8000}$$

Caractérisation

La proposition suivante permet de caractériser les chaînes de Markov

- **Proposition** : Une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de probabilités de transition $(p(x,y))$ si et seulement si, pour tout $n \geq 0$ et pour tout $(n+1)$-uplet $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de E^{n+1}, on a :

  $$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\ ) = p(x_n, x_{n+1}). \quad (1)$$

Equivalence des 2 caractérisations

- $\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) = p(x_n, x_{n+1})$. (1)
- **Preuve** : Supposons qu'une suite $(X_n)_{n\geq 0}$ vérifie l'égalité (1) ci-dessus, pour tout $(n+1)$-uplet $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de E^{n+1}. Notons μ_0 la loi de la variable aléatoire X_0 et montrons, par récurrence sur n, que $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov.
  L'hypothèse de récurrence est : pour tout $(n+1)$-uplet $(x_0, x_1, \dots, x_n)$ de E^{n+1},
  $$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mu_0(x_0) p(x_0, x_1) p(x_1, x_2) \dots p(x_{n-1}, x_n).$$
  L'hypothèse de récurrence est bien vérifiée puisque, pour tous $(x_0, x_1) \in E^2$ on a
  $$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1) = \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \mathbb{P}(X_0 = x_0) = p(x_0, x_1) \mu_0(x_0).$$
  Supposons que l'hypothèse de récurrence soit vérifiée en n, et montrons qu'elle est vraie en $n+1$.
  Fixons un $(n+2)$-uplet $(x_0, x_1, \dots, x_{n+1})$ de E^{n+2}. On a :
  $$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) \times \mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n).$$
  L'hypothèse de récurrence au rang n et l'égalité (1) permettent d'écrire :
  $$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n, X_{n+1} = x_{n+1}) = \mu_0(x_0) p(x_0, x_1) p(x_1, x_2) \dots p(x_{n-1}, x_n) p(x_n, x_{n+1}) \blacksquare$$
- **Exercice** : montrer que la réciproque est vraie aussi.

Exercice

- **Exercice** : on se donne une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de mesure initiale μ_0 et de probabilités de transition $p(x,y)$.
  Ecrire la loi conjointe de (X_0, X_1), puis la loi de X_1, puis celle de X_2.

Correction

- **Exercice** : on se donne une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ de mesure initiale μ_0 et de probabilités de transition $p(x,y)$. Ecrire la loi conjointe de (X_0, X_1), puis la loi de X_1, puis celle de X_2.
- **Solution** :

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1) = \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0)\mathbb{P}(X_0 = x_0) = p(x_0, x_1)\mu_0(x_0)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1) = \sum_{y\in \mathrm{E}} \mathbb{P}(X_1 = x_1, X_0 = y)$$

$$= \sum_{y\in \mathrm{E}} \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = y)\, \mathbb{P}(X_0 = y) \text{ (formule de Bayes)}$$

Donc $\mathbb{P}(X_1 = x_1) = \sum_{y\in E} \mu_0(y) p(y, x_1)$

$$\mathbb{P}(X_2 = x_2) = \sum_{z\in \mathrm{E}} \mathbb{P}(X_2 = x_2, X_1 = z) = \sum_{z\in \mathrm{E}} \mathbb{P}(X_2 = x_2 | X_1 = z)\, \mathbb{P}(X_1 = z)$$

$$\mathbb{P}(X_2 = x_2) = \sum_{z\in \mathrm{E}} p(z, x_2) \sum_{y\in E} \mu_0(y) p(y, z)$$

Donc $\mathbb{P}(X_2 = x_2) = \sum_{y,z\in E^2} \mu_0(y) p(y,z) p(z, x_2).$

Notations – loi initiale

Dans la suite, c'est les probabilités de transition qui seront importantes, beaucoup plus que la loi initiale. Le plus souvent, on parlera ainsi d'une chaîne de Markov de probabilités de transition données, sans préciser la loi initiale.

Néanmoins, on utilisera les notations suivantes pour spécifier la loi initiale :

- Si $e \in E$ est un état, $\mathbb{P}_e$désignera la mesure de probabilité se rapportant à l a chaîne vérifiant $X_0 = e$ p.s.
  On a ainsi $\mathbb{P}_e(X_n = x) = \mathbb{P}(X_n = x | X_0 = e)$,
  et en particulier $\mathbb{P}_e(X_0 = x) = 1$ si $x = e$ et 0 sinon, et $\mathbb{P}_e(X_1 = x) = p(e, x)$
- Si μ est une mesure sur E, $\mathbb{P}_\mu$ désignera la loi de la chaîne de mesure initiale μ. On aura donc $\mathbb{P}_\mu(X_0 = x) = \mu(x)$ et $\mathbb{P}_\mu(X_1 = x) = \sum_{y \in E} \mu(y)\, p(y, x)$.

De façon similaire, lorsque l'on calcule des espérances, on écrit $\mathbb{E}_e$ ou $\mathbb{E}_\mu$.

Transformation de chaîne de Markov

- Le fait d'être une chaîne de Markov n'est pas stable par les opérations habituelles (somme, produit...).
- L'une des opérations que l'on peut faire pour conserver le caractère markovien est décrite dans la proposition suivante :
- **Proposition** : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov, dont les probabilités de transition sont données par la matrice (éventuellement infinie) $\Pi = \big(p(x,y)\big)$. Alors la suite $(X_{2n})_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov, de probabilités de transition, notées $\Pi^{(2)} = \left(p^{(2)}(x,y)\right)$, données par

$$p^{(2)}(x,y) = \sum_{z\in E} p(x,z)p(z,y)\,.$$

Chaîne de Markov homogène/inhomogène

- Les chaînes de Markov telles que définies ci-avant sont telles que les probabilités de transition entre un état x et un état y ne dépendent pas de l'instant n. On dit que ce sont des chaînes de Markov **homogènes en temps**. (exemple précédent de la suite de vaiid : chaîne de Markov homogène)

- On parle de chaîne de Markov inhomogène en temps, par opposition aux chaînes de Markov décrites ici, si leurs probabilités de transition dépendent du temps. C'est-à-dire si :

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mu_0(x_0)p(x_0, x_1, 1)p(x_1, x_2, 2) \dots p(x_{n-1}, x_n, n).$$

Et on a $p(x, y, n) = \mathbb{P}(X_n = y | X_{n-1} = x)$.

- Le problème est alors que les résultats décrits dans la suite de ce chapitre ne s'appliquent plus. La seule méthode pour étudier des chaînes de Markov inhomogènes en temps consiste à effectuer des **simulations informatiques**.

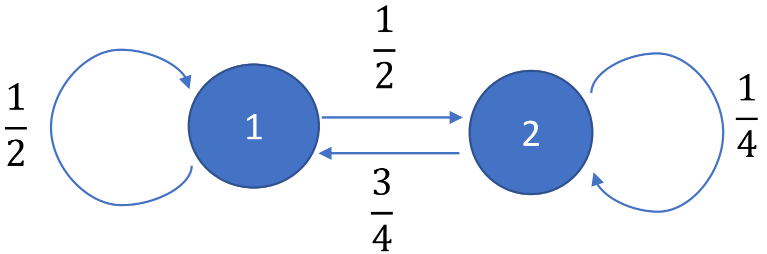
Exemple de chaîne de Markov : Modélisation d'un Système de chauffage

- **Exercice :** On dispose, dans une maison individuelle, de deux systèmes de chauffage, l'un de base, et l'autre d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, et dans l'état 2 si les 2 systèmes fonctionnent. Si un jour on est dans l'état 1, on estime qu'on y reste le lendemain avec une probabilité 1/2. En revanche si on est dans l'état 2, le lendemain la maison est chaude et on passe à l'état 1 avec une probabilité 3/4. Soit X_n l'état du système de chauffage au jour n.

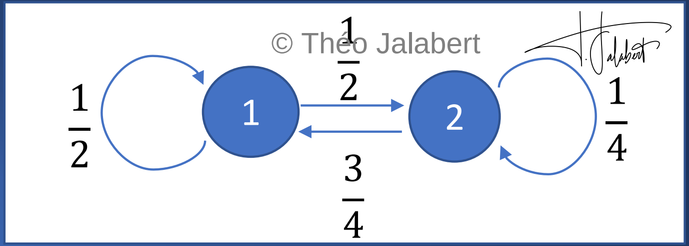
1. Modéliser $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par une chaîne de Markov, en justifiant pourquoi cela est possible, et en précisant son espace d'états, sa matrice de transition et son graphe.
2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$. Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}.
3. Que vaut $lim_{n\to+\infty} p_n$?
4. Montrer que si un jour on se trouve dans l'état 1 avec une probabilité 3/5, alors il en est de même tous les jours qui suivent.

Correction de l'exercice

1. On peut modéliser ce problème par une **chaîne de Markov** car l'évolution future de $X_n$ne dépend que de l'état actuel dans lequel se trouve X_n, et pas de sa trajectoire passée. Cf proposition
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \dots, X_1 = x_1, X_0 = x_0) = \mathbb{P}(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n\ ) = p(x_n, x_{n+1}).$$
La chaîne de Markov à utiliser sera bien **homogène** car la probabilité $p(x_n, x_{n+1})$ de passage d'un état à l'autre ne dépend par du jour n.
L'espace d'état est $E = \{1,2\}$.
La matrice de transition est $\mathrm{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$, qui est bien une **matrice stochastique** (ou matrice aléatoire) : les termes de chaque ligne constituent une loi de probabilités (loi de transition de l'état correspondant à l'indice de la ligne).
Remarque : La matrice de transition entre le temps n et le temps $n+k$ est P^k.
Graphe :



Correction - suite



2. On pose $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$. Déterminer une relation de récurrence entre p_n et p_{n+1}.
   La formule des probabilités totales nous donne, puisque $\{X_n = 1\}, \{X_n = 2\}$ forme une partition disjointe de l'espace d'état :
   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, X_n = 1) + \mathbb{P}(X_{n+1} = 1, X_n = 2)$$
   $$\mathbb{P}(X_{n+1} = 1) = \mathbb{P}(X_n = 1)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 1) + \mathbb{P}(X_n = 2)\mathbb{P}(X_{n+1} = 1|X_n = 2)$$
   $$p_{n+1} = p_n P(1,1) + (1 - p_n)P(2,1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}p_n.$$

3. Que vaut $lim_{n\to+\infty} p_n$?
   Si x est solution de $x = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}x$, point fixe, alors on peut écrire $p_{n+1} - x = -\frac{1}{4}(p_n - x)$, suite géométrique.
   $x = \frac{3}{5}$. Donc $p_{n+1} = \frac{3}{5} - \left(\frac{1}{4}\right)^n (p_n - \frac{3}{5})$ et $lim_{n\to+\infty} p_n = \frac{3}{5}$.

4. Montrer que si un jour on se trouve dans l'état 1 avec une probabilité 3/5, alors il en est de même tous les jours qui suivent. $x = \frac{3}{5}$ point fixe. Donc $\mathrm{p_n} = \frac{3}{5} \Rightarrow \mathrm{p_{n+1}} = \frac{3}{5}$. On dit que c'est une mesure stationnaire.

Notion importante de **mesure stationnaire** et de limite de mesure de probabilité qui tend vers cette mesure stationnaire.

Temps passé dans un état x

- Etudions pour une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur un espace d'états E le **temps passé dans un état donné** avant de le quitter.
- Supposons pour fixer les idées que $X_0 = x$ p.s. et notons $T = \inf\{n \geq 1, X_n \neq x\}$.
- $T - 1$ est alors le temps passé dans l'état x avant de le quitter.
- On a tout d'abord : $\mathbb{P}(T = 1) = \mathbb{P}_x(X_1 \neq x) = 1 - p(x, x)$, et plus généralement
$$\mathbb{P}_x(T = n) = \mathbb{P}_x(X_1 = x, \dots, X_{n-1} = x, X_n \neq x)$$
$$= \mathbb{P}_x(X_1 = x, \dots, X_{n-1} = x\ ) - \mathbb{P}_x(X_1 = x, \dots, X_{n-1} = x, X_n = x)$$
$$= \big(p(x,x)\big)^{n-1} - \big(p(x,x)\big)^{n} = \big(p(x,x)\big)^{n-1}\big(1 - p(x,x)\big).$$
- La **loi de *T*** est donc une **loi géométrique**, c'est-à-dire une loi sans mémoire, qui vérifie :
$$\mathbb{P}(T \geq n + k | T \geq n) = \mathbb{P}(T \geq k).$$
- Le seul moyen d'éviter d'avoir une loi géométrique est de permettre aux probabilités de transition de dépendre du temps, et donc d'utiliser des chaînes de Markov inhomogènes.

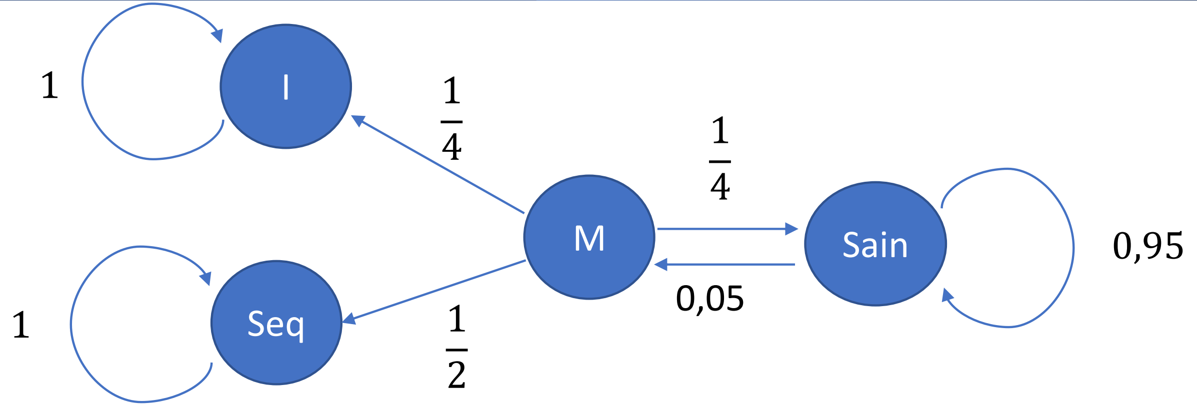
Irréductibilité

On se donne une chaîne de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur un espace d'états E fini ou dénombrable.

Définition : On dira que deux états x et y **communiquent**, si il existe deux entiers $n, m > 0$ tels que $\mathbb{P}(X_n = y | X_0 = x) > 0$ et $\mathbb{P}(X_m = x | X_0 = y) > 0$.
La chaîne sera dite **irréductible** si tous les états communiquent.

- L'irréductibilité traduit donc la possibilité de passer d'un état à un autre, même avec une très faible probabilité.
- Pour vérifier qu'une chaîne de Markov est irréductible, il est souvent utile de dessiner un graphe orienté donc les sommets sont les états de la chaîne et où une arête/flèche représente une transition possible (l'arête (x, y) existe uniquement si $p(x, y) > 0$). La chaîne est alors irréductible ssi il existe un chemin fermé passant au moins une fois par tous les états de la chaîne. On dit que le graphe est **connexe**.
- La notion d'irréductibilité dépend uniquement des probabilités de transition, et non de la loi initiale.

Exemple : maladie contagieuse



- On suppose qu'une maladie s'attrape avec probabilité 0,05. Quand on l'a attrapée, on peut de manière équiprobable, soit en guérir, soir acquérir des séquelles irréversibles. Ces séquelles sont associées à une immunité totale par la suite. Si on guérit, en revanche, on n'est immunisé que dans 50% des cas. Dans la population, 1/5 des gens est naturellement immunisé.
- **Est-ce que cette chaîne est irréductible ?**

Stationnarité

Définition : Une mesure de probabilité μ est dite **stationnaire** pour les probabilités de transition $(p(x,y))$ si, pour tout $x \in E, \mathbb{P}_\mu(X_1 = x) = \mu(x)$, c'est-à-dire que si μ est la loi de X_0, alors c'est aussi celle de X_1, et de X_n pour tout $n \geq 1$. De façon pratique, une mesure μ, donnée par les $\mu(x), x \in E$, est stationnaire pour $(p(x,y))$ si elle vérifie

$$\sum_{x \in E} \mu(x) = 1$$

$$\forall x \in E, \sum_{y \in E} \mu(y)p(y,x) = \mu(x)$$

- **Remarque** : si les $p(x,y)$ sont disposés sous la forme d'une matrice notée Π (les x représentent les lignes et les y les colonnes), alors μ est solution d'un système donné par les colonnes de cette matrice.
  En fait, μ est un **vecteur propre** de la transposée de Π, associé à la **valeur propre 1**.
  $\overline{\Pi}\mu = \mu$, ou encore $\bar{\mu}\Pi = \bar{\mu}$.
- **Remarque :** Lorsque l'espace d'état E est fini, 1 est toujours valeur propre.

Lien irréductibilité / stationnarité

Proposition :

1. Si l'espace d'états est **fini**, il existe toujours **au moins** une mesure stationnaire.
2. Si la chaîne est **irréductible**, il existe **au plus** une mesure stationnaire.

Corollaire : Si la chaîne de Markov est irréductible sur un espace d'état fini, il existe une **unique mesure stationnaire**

- **Exercice 1 :** retour sur l'exercice sur le chauffage : chaîne sur espace d'état fini, irréductible donc mesure trouvée est l'unique mesure stationnaire.
- **Exercice 2** : Vérifier que la chaîne de Markov formée par une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuée est irréductible, et que tous les états sont récurrents positifs. Quelle est la mesure stationnaire ?

Transience, récurrence, période

- Une des questions importantes qui se posent face à une chaîne de Markov est de savoir si, partant d'un point, on y revient avec probabilité 1. Autrement dit, si on se promène en suivant une chaîne de Markov, est-on sûr de repasser par son point de départ ?
- Pour étudier ces questions, on fixe un état $x \in E$ et on travaille avec la mesure $\mathbb{P}_x$, c'est-à-dire que l'on a $X_0 = x$ p.s.
- On note τ_x **l'instant du premier retour** en x :

$$\tau_x = \inf\{n \geq 1, X_n = x\}.$$

Transience, récurrence, période

τ_x est **l'instant du premier retour** en x : $\tau_x = \inf\{n \geq 1, X_n = x\}$.

Définitions :

- L'état x est dit **transient** ou **transitoire** si $\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty) < 1$.
- L'état x est dit **récurrent** si $\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty) = 1$.
- L'état x est dit **récurrent positif** $\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty) = 1$ et si $\mathbb{E}_x(\tau_x) < \infty$.
- L'état x est dit **récurrent nul** $\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty) = 1$ et si $\mathbb{E}_x(\tau_x) = \infty$.
- La **période** de l'état x est le pgcd (plus grand commun diviseur) de toutes les longueurs de chemins reliant x à lui-même, et parcourus avec une probabilité strictement positive. Lorsque le pgcd obtenu est égal à 1, on dit que l'état à **apériodique**.
- Lorsque tous les états d'une chaîne de Markov sont de même nature, on dit que la chaîne est, selon le cas, transiente, récurrente, récurrente positive ou récurrente nulle. On parle également de période de la chaîne si tous les états ont la même période, et de chaîne apériodique si tous les états le sont.

Transience, récurrence, période

- **Signification de la transience/récurrence**
- **Exercice** : vérifier que la chaîne de Markov formée par une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuée est apériodique.
- **Remarque** : La récurrence et la transience ne sont pas directement liées à l'irréductibilité de la chaîne de Markov : la chaîne peut tout à fait être irréductible sans qu'aucun de ses états ne soit récurrent.

Caractérisation de la transience/récurrence

- Rappelons que l'on note $p^{(n)}(x,y) = \mathbb{P}_x(X_n = y) = \mathbb{P}(X_n = y|X_0 = x)$ et que $p^{(n)}(x,y)$ est le terme (x,y) de la matrice Π^n. La proposition suivante permet de caractériser la récurrence/transience d'un état :

Théorème (Caractérisation de la récurrence/transience)

1. x est récurrent $\Leftrightarrow \mathbb{P}_x(\exists\, une\ infinité\ d'indices\ n\ tels\ que\ X_n = x) = 1.$

2. x est transient $\Leftrightarrow\ \sum_{n\geq 1} p^{(n)}(x,x) < \infty$

3. x est récurrent nul $\Leftrightarrow\ \sum_{n\geq 1} p^{(n)}(x,x) = \infty$ et $\lim\limits_{n\to\infty} p^{(n)}(x,x) = 0.$

4. Si x est récurrent positif et apériodique, $p^{(n)}(x,x)$ admet une limite strictement positive.

5. Si x est récurrent positif et périodique de période t, $p^{(nt)}(x,x)$ admet une limite strictement positive.

Caractérisation de la transience/récurrence

Preuve du point 1.
x est récurrent $\Leftrightarrow$ $\mathbb{P}_x(\exists\ \boldsymbol{une\ infinit}$é $\boldsymbol{d'indices\ n\ tels\ que\ X_n = x}) = \mathbf{1}$.

- Fixons un état x.

$$\mathbb{P}_x(On\ revient\ au\ moins\ 2\ fois\ en\ x) = \mathbb{P}_x\left(\bigcup_n \{\tau_x = n, X_n = x, \exists m > n, X_m = x\}\right)$$
$$= \sum_n \mathbb{P}_x(\tau_x = n, X_n = x, \exists m > n, X_m = x)$$
$$= \sum_n \mathbb{P}_x(\exists m > n, X_m = x | \tau_x = n, X_n = x) \times \mathbb{P}_x(\tau_x = n, X_n = x)$$
$$= \sum_n \mathbb{P}_x(\exists m > n, X_m = x | \tau_x = n, X_n = x) \times \mathbb{P}_x(\tau_x = n)$$
$$= \sum_n \mathbb{P}_x(\tau_x < \infty)\mathbb{P}_x(\tau_x = n) = \left(\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty)\right)^2.$$

Plus généralement, $\mathbb{P}_x(On\ revient\ au\ moins\ n\ fois\ en\ x) = \left(\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty)\right)^n$.

Caractérisation de la transience/récurrence

Preuve du point 1 (suite)

x est récurrent $\Leftrightarrow \mathbb{P}_x(\exists\ une\ infinit\acute{e}\ d'indices\ n\ tels\ que\ X_n = x) = 1$.

On a donc $\mathbb{P}_x(On\ revient\ au\ moins\ n\ fois\ en\ x) = \left(\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty)\right)^n$.

Comme les événements *{on revient n fois en x}* sont décroissants, on a

$$\mathbb{P}_x(On\ revient\ une\ infinit\acute{e}\ de\ fois\ en\ x) = \lim_{n\to+\infty} \left(\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty)\right)^n.$$

Ainsi, si x est récurrent, $\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty) = 1$, donc $\mathbb{P}_x(On\ revient\ une\ infinit\acute{e}\ de\ fois\ en\ x) = 1$, la chaîne issue de x repasse presque sûrement en x une infinité de fois.

Si x est transient, $\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty) < 1$ donc $\lim_n \left(\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty)\right)^n = 0$, donc $\mathbb{P}_x(On\ revient\ une\ infinit\acute{e}\ de\ fois\ en\ x) = 0$, la probabilité que la chaîne repasse une infinité de fois en x est nulle.

Caractérisation de la transience/récurrence

Preuve du point 2.
$\boldsymbol{x}$ **est transient** $\Leftrightarrow$ $\sum_{n\geq 1} \boldsymbol{p}^{(n)}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) < \infty$

- Supposons que $\sum_{n\geq 1} p^{(n)}(x,x) < \infty$. Le lemme de Borel Cantelli implique que

$$\mathbb{P}_x\left(\bigcup_N \bigcup_{n\geq N} \{X_n = x\}\right) = 0.$$

L'événement précédent se traduit par :

$\{\omega$; il existe une sous-suite infinie $n_k(\omega)$ telle que $X_{n_k}(\omega) = x\}$,

Ou autrement dit, la chaîne $(X_n)_{n\geq 0}$ visite l'état x une infinité de fois.

Puisque cet événement est de probabilité nulle, le point 1 implique que x est transient .

Caractérisation de la transience/récurrence

Preuve du point 2.
$\boldsymbol{x}$ **est transient** $\Leftrightarrow \sum_{n\geq 1} \boldsymbol{p}^{(\boldsymbol{n})}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}) < \infty$

- Supposons maintenant que x est transient et notons N_x le nombre de passages de $(X_n)_{n\geq 0}$ par x.
- En reprenant la preuve du point 1, on voit que $\mathbb{P}_x\{N_x \geq l\} = (\mathbb{P}_x(\tau_x < \infty))^l$, c'est-à-dire que N_x suit une loi géométrique sur $\mathbb{N}$ de paramètre $1 - \mathbb{P}_x(\tau_x < \infty)$.
  En particulier $\mathbb{E}_x(N_x) < \infty$.
- Or

$$\mathbb{E}_x(N_x) = \mathbb{E}_x\left(\sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_{X_n = x}\right) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}_x\left(\mathbb{1}_{X_n = x}\right) = \sum_{n\geq 0} p^{(n)}(x,x)\,.$$

On a donc équivalence entre transience d'un état et convergence de la série $\sum_{n\geq 0} p^{(n)}(x,x)$.

Etats communicants : même nature

- **Proposition** : Si x et y sont deux états qui communiquent, ils sont de même nature (récurrents positifs, récurrents nuls ou transients) et sont de même période.

- **Preuve** : Soient x et y deux états qui communiquent. Choisissons 2 entiers N et M tels que $\alpha = p^{(N)}(x,y) > 0$ et $\beta = p^{(M)}(y,x) > 0$.
- Pour tout n positif, on a :

$$p^{(N+M+n)}(x,x) \geq p^{(N)}(x,y)\, p^{(n)}(y,y)\, p^{(M)}(y,x) = \alpha\beta p^{(n)}(y,y)$$

$$p^{(N+M+n)}(y,y) \geq p^{(M)}(y,x)\, p^{(n)}(x,x)\, p^{(N)}(x,y) = \alpha\beta p^{(n)}(x,x)$$

Donc les séries $\sum_{n\geq 0} p^{(n)}(x,x)$ et $\sum_{n\geq 0} p^{(n)}(y,y)$ convergent ou divergent simultanément, et la limite des termes de l'une de ces séries est non nulle ssi la limite des termes de l'autre séries l'est aussi : x est récurrent nul si et seulement si y l'est.

- Concernant la période : supposons que x soit de période t.
  Comme $p^{(N+M)}(x,x) \geq p^{(N)}(x,y)\, p^{(M)}(y,x) > 0$, $N + M$ est nécessairement divisible par t.
  On en déduit que si n n'est pas un multiple de t, alors $p^{(N+M+n)}(x,x) = 0$, et donc $p^{(n)}(y,y) = 0$. Donc la période de y est un multiple de celle de x. Donc les 2 périodes sont égales.

Irréductibilité et nature des états

Corollaire

- Si la chaîne est irréductible, tous les états de la chaîne sont de même nature et ont la même période.
- Si la chaîne est irréductible, il existe une (nécessairement unique) mesure stationnaire μ si et seulement tous les états sont récurrents positifs et on a alors

$$\mathbb{E}_{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\tau}_{\boldsymbol{x}}) = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{x})}, \boldsymbol{pour\ tout\ x} \in \boldsymbol{E}$$

  Si la chaîne est de plus apériodique, on a $p^{(n)}(x,x) \to \mu(x)$, et si elle est de période t, on a $p^{(nt)}(x,x) \to t\mu(x)$.
- En particulier si l'espace d'états est fini et si la chaîne est irréductible, tous les états sont positivement récurrents et de même période.

Probabilités d'absorption

- Que se passe-t-il dans le cas d'une chaîne non irréductible, donc avec des états de nature différents ?
- On considère une chaîne de Markov de matrice de transition P, et d'espace d'états S. On désigne par S_T le sous-ensemble des états transients, supposé fini et non vide. Soit C un sous-ensemble clos irréductible d'états récurrents.

- **Proposition 1** : on peut montrer que $\forall x \in S, \forall y \in S_T, P^{(n)}(x, y) \to 0$ quand $n \to +\infty$. On en déduit ainsi que la chaîne a au moins un état récurrent.

- **Définition** : Soit T_C le temps d'atteinte d'un élément de C. On appelle **probabilité d'absorption de $\boldsymbol{x}$ par $\boldsymbol{C}$** la probabilité suivante :

$$\rho_C(x) = \mathbb{P}(T_C < +\infty).$$

- **Proposition 2** : $\rho_C(x)$ vérifie l'équation

$$\rho_C(x) = \sum_{y \in C} P(x, y) + \sum_{y \in S_T} P(x, y)\rho_C(y), \forall x \in S_T$$

Preuve Proposition 1

- **Proposition 1** : on peut montrer que $\forall x \in S, \forall y \in S_T, P^{(n)}(x,y) \to 0$ quand $n \to +\infty$. On en déduit ainsi que la chaîne a au moins un état récurrent.
- **Preuve** : Pour $y \in S_T$, soit $N(y) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}_y(X_n = y)$, le nombre de passages en y après l'instant 0. Comme y est transient, on a, $\forall x \in S$

$$\mathbb{E}_x\big(N(y)\big) = \sum_{n\geq 1} P^n(x,y) < +\infty$$

  Car

$$\mathbb{E}_x\big(N(y)\big) = \mathbb{P}(\exists n \in \mathbb{N}, X_n = y).\ (\mathbb{E}_y\big(N_y\big) + 1) + \mathbb{P}(\forall n \in \mathbb{N}, X_n \neq y).0 \leq \sum_{n\geq 1} P^n(y,y) < +\infty$$

  car y est transient.
- D'où $P^{(n)}(x,y) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Preuve Proposition 2

- **Proposition 2** : $\rho_C(x)$ vérifie l'équation

$$\rho_C(x) = \sum_{y \in C} P(x,y) + \sum_{y \in S_T} P(x,y)\rho_C(y), \forall x \in S_T$$

- **Preuve** : Atteindre C en un temps fini exige qu'au premier pas on se trouve soit en C (et $T_c = 1$), soit dans un état transitoire, mais jamais dans un état récurrent n'appartenant pas à C.
  D'où, $\forall\, x \in S_T$:

$$\mathbb{P}_x(T_C < +\infty) = \mathbb{P}_x(X_1 \in C) + \mathbb{P}_x(X_1 \in S_T, T_C < +\infty)$$
$$= \sum_{y \in C} P(x,y) + \sum_{y \in S_T} P(x,y)\mathbb{P}_y(T_C < +\infty)$$

Exemple - Exercice

- Soit $S = \{1, \dots, 6\}$. Complétez la matrice P suivante pour qu'elle soit une matrice de transition :

$$
\mathrm{P} = \begin{pmatrix}
. & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1/3 & . & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & . & 0 & 7/8 & 0 \\
1/4 & 1/4 & 0 & . & 1/4 & 1/4 \\
0 & 0 & 3/4 & 0 & . & 0 \\
0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & .
\end{pmatrix}
$$

- Déterminer les états transients et récurrents.
- Déterminer les probabilités d'absorption dans les sous-ensemble clos irréductibles.
- Montrer que la chaîne admet une infinité de mesures stationnaires, les donner.
- Quelle est l'espérance de temps de retour en chaque état récurrent ?

Exercice - Solution

$$P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 0 & 7/8 & 0 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 3/4 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 1/5 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 \end{pmatrix}$$

- En partant de 1 ou 2, la chaîne n'atteint jamais les états 3,4,5,6.
  L'ensemble fini $\{1,2\}$ est donc **clos**, et comme $\mathbb{P}_1(X_1 = 2) = 1/2$ et $\mathbb{P}_2(X_1 = 1) = 1/3$, il est **irréductible** et donc **récurrent**.
  Idem pour $\{3,5\}$.
  Enfin, $\mathbb{P}_4(X_1 = 1) = \frac{1}{4} > 0$ et $\mathbb{P}_6(X_1 = 2) = \frac{1}{5} > 0$, donc partant de 4 ou 6, la chaîne a une proba >0 d'être absorbée par $\{1,2\}$, et donc d'y rester et de ne pas revenir. Les états 4 et 6 sont donc **transients**.

$$S_T = \{4,6\}, \qquad et \quad S_R = \{1,2\} \cup \{3,5\}$$

Exercice - Solution

- On cherche à déterminer les probabilités d'absorption dans les sous-ensemble clos irréductibles, pour les états transients (sinon évident).
- Probabilités d'absorption par $C = \{1,2\}$. La proposition 2 nous fournit un système d'équations :

$$\rho_C(x) = \sum_{y \in C} P(x,y) + \sum_{y \in S_T} P(x,y)\rho_C(y), \forall x \in S_T$$
$$\rho_C(4) = P(4,1) + P(4,2) + P(4,6)\rho_C(6) + P(4,4)\rho_C(4)$$
$$\rho_C(6) = P(6,1) + P(6,2) + P(6,4)\rho_C(4) + P(6,6)\rho_C(6)$$

Solution : $\rho_C(4) = \frac{7}{11}, \rho_C(6) = \frac{6}{11}$.

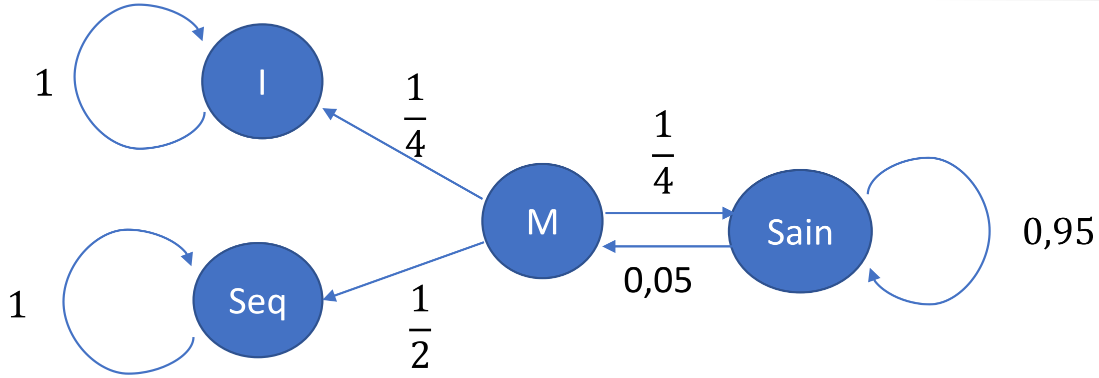
- Nécessairement pour $\mathrm{D} = \{3,5\}$, $\rho_D(4) = \frac{4}{11}, \rho_D(6) = \frac{5}{11}$.

Exercice - Solution

- La chaîne n'est pas irréductible, donc il n'y a pas existence et unicité de la mesure stationnaire. Mais sur les sous-ensembles clos irréductibles C et D, le théorème s'applique : si je pars de C, je reste dans C. Donc C fonctionne comme une sous-chaîne de Markov irréductible sur un espace d'états fini, donc avec une unique mesure stationnaire π_C. Idem pour D qui a une unique mesure stationnaire π_D.
- Ainsi, $\pi_C = (\pi_C(1), \pi_C(2), 0,0,0)$ et $\pi_D = (0,0, \pi_D(3), 0, \pi_D(5), 0)$ sont des mesures stationnaires.
- On les obtient en résolvant $\pi_C . P = \pi_C$ et $\pi_D . P = \pi_D$.
  On obtient $\pi_C(1) = \frac{2}{5}$; $\pi_C(2) = \frac{3}{5}$; $\pi_D(3) = \frac{6}{13}$; $\pi_D(5) = \frac{7}{13}$.
- Ensuite, $\forall \lambda \in [0,1]$, toute probabilité $\lambda \pi_C + (1-\lambda)\pi_D = \pi^\lambda$ vérifie $\pi^\lambda . P = \pi^\lambda$ et donc est stationnaire. Il existe donc **une infinité de mesures stationnaires**.
- Sur les sous-chaînes de Markov irréductibles C et D on peut appliquer les résultats qui nous assurent que l'espérance de retour dans un état récurrent peut être obtenu en prenant l'inverse de la mesure stationnaire en cet état. Soit :

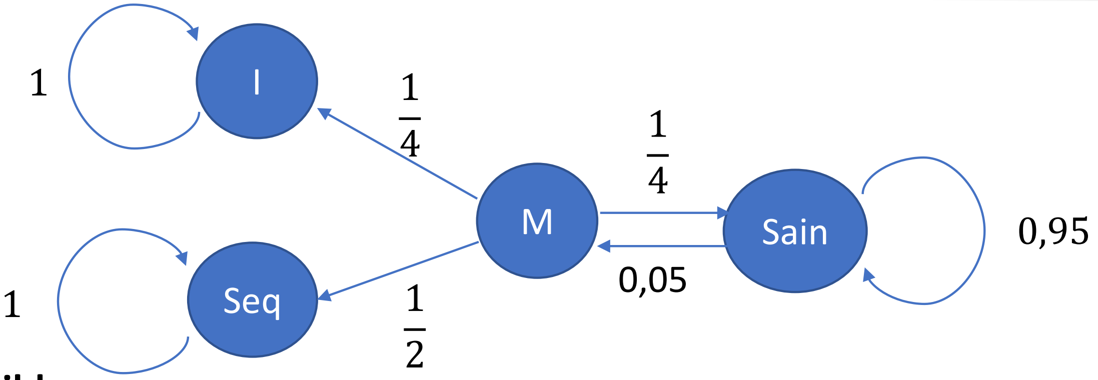
$$\mathbb{E}_1(\tau_1) = \frac{1}{\pi_C(1)} = \frac{5}{2} \,;\, \mathbb{E}_2(\tau_2) = \frac{1}{\pi_C(2)} = \frac{5}{3} ; \mathbb{E}_3(\tau_3) = \frac{1}{\pi_D(3)} = \frac{13}{6} \,;\, \mathbb{E}_5(\tau_5) = \frac{1}{\pi_D(5)} = \frac{13}{7}$$

Exercice : maladie contagieuse



- On suppose qu'une maladie s'attrape avec probabilité 0,05. Quand on l'a attrapée, on peut de manière équiprobable, soit en guérir, soir acquérir des séquelles irréversibles. Ces séquelles sont associées à une immunité totale par la suite. Si on guérit, en revanche, on n'est immunisé que dans 50% des cas. Dans la population, 1/5 des gens est naturellement immunisé.
- **Classifier les états**
- **Existe-t-il une mesure invariante ? Est-elle unique ? Pourquoi ?**

Exercice : maladie contagieuse



- **Classifier les états**

I ne communique qu'avec lui-même
Seq aussi : états absorbants, récurrents positifs.
$\mathbb{P}_I(\tau_I < +\infty) = 1$ et $\mathbb{P}_{Seq}\left(\tau_{Seq} < +\infty\right) = 1$,
Et même $\mathbb{E}_I(\tau_I) = 1$ et $\mathbb{E}_{Seq}\left(\tau_{Seq}\right) = 1$.

{I} et {Seq} sont des classes absorbantes closes irréductibles.

$\mathbb{P}_{Sain}(X_2 = I) = 0{,}05 \times \frac{1}{4} > 0$ et $\mathbb{P}_M(X_1 = I) = \frac{1}{4} > 0$. Donc probabilité > 0 de partir de Sain ou M et d'être absorbé par I donc ne jamais revenir.

Donc {M ; Sain} est une classe transiente.

- **Existe-t-il une mesure invariante ? Est-elle unique ? Pourquoi ?**

Toute mesure $(\lambda, 0, 0, 1-\lambda)$ est invariante. Le vérifier.

Logique : tout immunisé reste immunisé et tout séquelle reste séquelle : la proba reste la même à l'étape suivante.

Chaîne non irréductible donc pas forcément mesure stationnaire unique.

Chaîne sur espace d'états fini : donc au moins une mesure stationnaire.

Convergence

- Le principal résultat est le suivant

Proposition : Si $(X_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov **irréductible**, **apériodique** et si il existe une **unique mesure stationnaire** μ, alors, pour toute mesure initiale μ_0, la suite $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers μ.

- Autrement dit, pour tout $x \in E, \mathbb{P}_{\mu_0}(X_n = x)$ tend vers $\mu(x)$ lorsque n tend vers $+\infty$.
- On connaît de plus un majorant de la vitesse de convergence :

$$\left|\mathbb{P}_{\mu_0}(X_n = x) - \mu(x)\right| \leq c\lambda^n,$$

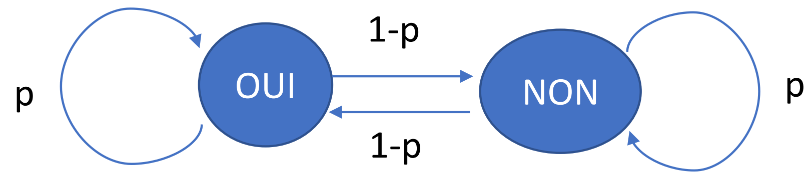
Où λ est la 2ème plus grande valeur propre de la matrice de transition (la plus grande valeur propre est toujours 1).

- La convergence que l'on observe est donc en loi, et il y a très peu de chances d'obtenir une convergence presque sûre : cela signifierait que la chaîne de Markov est constante à partir d'un certain rang.
- La convergence est très rapide : λ est inférieur à 1. On dit dans ce cas que la vitesse est exponentielle.

Exemple : bruit qui court

- Un message pouvant prendre 2 formes (*oui* ou *non*) est transmis à travers n intermédiaires. On suppose que chaque intermédiaire transmet le message de façon correcte avec une probabilité $p \in]0,1[$ ou le déforme en son contraire avec une probabilité $1-p$. Les intermédiaires sont indépendants.
- **Modéliser cette situation par une chaîne de Markov à 2 états**.
- **Calculer la probabilité que l'information transmise par le $n-ième$ intermédiaire soit conforme à l'information initiale** *(indication : remarquer que (1,1) et (1,-1) sont vecteurs propres de P et diagonaliser P pour calculer P^n)*
- **Que se passe-t-il lorsque $n \to +\infty$?**
- **Quelle est la mesure stationnaire ?**

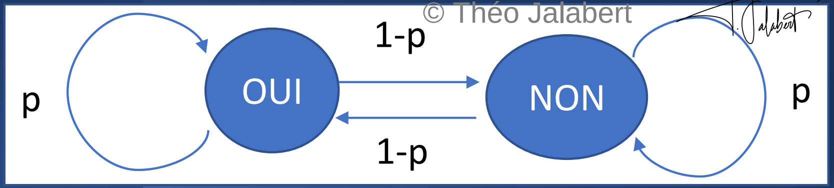
Exemple : bruit qui court



Solution

- On définit une suite aléatoire $(U_i)_{i\geq 1}$ en convenant que $U_i = 1$ si la i-ème transmission est correcte et $U_i = -1$ sinon. Les hypothèses nous assurent que les $(U_i)_{i\geq 1}$ sont i.i.d. de loi
$$\mathbb{P}(U_i = 1) = 1 - \mathbb{P}(U_i = -1) = p$$
- On modélise le message transmis par $(X_k)_{k\geq 0}$, où $X_k = 1$ si le k-ème message est « OUI » et -1 si « NON ». La v.a.r. X_0 représente le message initial.
- On a $X_{k+1} = X_k U_{k+1}, \forall k \geq 0$. X_0 et les $(U_i)_{i\geq 1}$ étant i.i.d. cela montre que $(X_k)_{k\geq 0}$ forment bien une chaîne de Markov homogène, de matrice de transition
$$P = \big(P(x,y)\big)_{x,y\in\{1,-1\}} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$
- On veut calculer $\mathbb{P}(X_n = X_0)$.

Exemple : bruit qui court



- $P = \left(P(x,y)\right)_{x,y\in\{1,-1\}} = \begin{pmatrix} p & 1-p \\ 1-p & p \end{pmatrix}$.
- $\mathbb{P}(X_n = X_0) = \mathbb{P}(X_n = X_0 | X_0 = 1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_n = X_0 | X_0 = -1)\mathbb{P}(X_0 = -1))$
  $= P^n(1,1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + P^n(-1,-1)\mathbb{P}(X_0 = -1)$
- Calcul de P^n : (1,1) et (1,-1) sont vecteurs propres de P, valeurs propres 1 et $2p-1$.
- Diagonalisation de P :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2p-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$P^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (2p-1)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+(2p-1)^n & 1-(2p-1)^n \\ 1-(2p-1)^n & 1+(2p-1)^n \end{pmatrix}$$

- D'où $P^n(1,1) = P^n(-1,-1) = \frac{1}{2}(1+(2p-1)^n)$
- Donc $\mathbb{P}(X_n = X_0) = P^n(1,1)\mathbb{P}(X_0 = 1) + P^n(-1,-1)\mathbb{P}(X_0 = -1) = \frac{1}{2}(1+(2p-1)^n)(\mathbb{P}(X_0 = 1) + \mathbb{P}(X_0 = -1))$
- $\mathbb{P}(X_n = X_0) = \frac{1}{2}(1+(2p-1)^n) \to \frac{1}{2}$ quand $n \to +\infty$ puisque $2p-1 \in]-1,1[$

Fonction de coût

- Les transitions d'une chaîne de Markov ont fréquemment un **coût** (ou un gain) associé : le coût de la transition de l'état x vers l'état y. On peut alors calculer le coût d'un chemin, comme étant la somme des coûts des différentes transitions.
- On se donne une **fonction** $c: E \times E \to \mathbb{R}$, qui décrit le **coût des transitions**.
- Le coût moyen du chemin $\gamma = (x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n)$ est ainsi

$$\mathrm{c}(\gamma) = c(x_0, x_1) + c(x_1, x_2) + \cdots + c(x_{n-1}, x_n)$$

et le coût moyen le long de ce chemin est $\frac{c(\gamma)}{n}$.

Fonction de coût

- **Théorème** : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne irréductible, de mesure initiale μ_0 et de mesure stationnaire μ. Soit $c: E \times E \to \mathbb{R}$ une fonction de coût telle que :

$$\mathbb{E}_\mu |c(X_0, X_1)| = \sum_{x,y \in E} \mu(x) p(x,y) |c(x,y)| < +\infty.$$

On note C_n le coût du chemin $(X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n)$. Alors presque sûrement :

$$\frac{C_n}{n} \to \mathbb{E}_\mu\big(c(X_0, X_1)\big) = \sum_{x,y \in E} \mu(x) p(x,y) \big(c(x,y)\big).$$

- Ce résultat est une extension de la loi forte des grands nombres : en prenant pour $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de va iid (qui est une CM), et en posant $c(x,y) = y$, on retrouve l'énoncé de la LGN.

Fonction de coût

- On en déduit le résultat suivant :

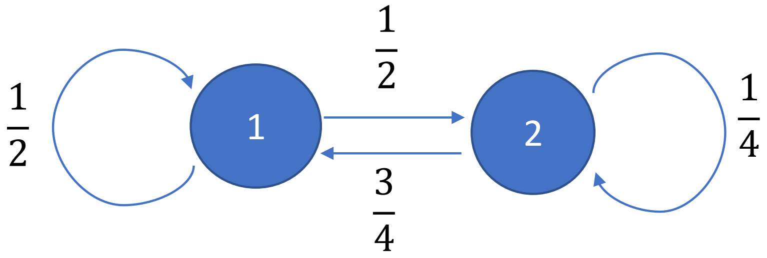
- **Proposition** : Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov irréductible admettant une mesure stationnaire μ. Fixons un état $e \in E$ et notons $\rho_e(n)$ le nombre de visites de l'état e par la chaîne de Markov avant l'instant n :

$$\rho_e(n) = card\{k \leq n, X_k = e\} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{X_k=e}\,.$$

Alors $\frac{\rho_e(n)}{n}$ tend presque sûrement vers $\mu(e)$.

- Preuve : il suffit d'appliquer le théorème précédent à la fonction $c(x, y) = \mathbb{1}_{y=e}$.

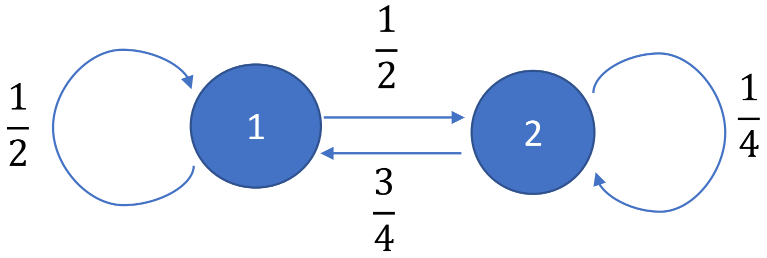
Fonction de coût - Exemple



- Reprenons l'exercice sur le système de chauffage :

- **Exercice :** On dispose, dans une maison individuelle, de deux systèmes de chauffage, l'un de base, et l'autre d'appoint. On dira qu'on est dans l'état 1 si seul le chauffage de base fonctionne, et dans l'état 2 si les 2 systèmes fonctionnent. Si un jour on est dans l'état 1, on estime qu'on y reste le lendemain avec une probabilité 1/2. En revanche si on est dans l'état 2, le lendemain la maison est chaude et on passe à l'état 1 avec une probabilité 3/4. Soit X_n l'état du système de chauffage au jour n.
- On a montré que la mesure stationnaire unique (CM homogène irréductible) était $p_n = \mathbb{P}(X_n = 1) = \frac{3}{5}$.
- On suppose que chaque journée dans l'état 1 coûte 1,5€, et dans l'état 2 coûte 2€. Chaque transition de l'état 1 à l'état 2 ou inversement coûte 0,5€. **Calculer le coût moyen d'une journée en régime stationnaire**.

Fonction de coût - exemple



- Si on note C_n le coût aléatoire en euros de la journée n, en faisant une partition suivant les valeurs de X_n et X_{n-1}, on a :
  $$C_n = 1{,}5.\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=1, X_n=1\}} + 2{,}5.\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=1, X_n=2\}} + 2.\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=2, X_n=1\}} + 2.\mathbb{1}_{\{X_{n-1}=2, X_n=2\}}$$
- D'où
  $$\mathbb{E}(C_n) = 1{,}5.p_{n-1}P(1,1) + 2{,}5.p_{n-1}P(1,2) + 2.(1-p_{n-1})P(2,1) + 2.(1-p_{n-1})P(2,2)$$
- En remplaçant p_{n-1} par sa valeur en régime stationnaire, puisque $p_n \to \frac{3}{5}$ quand $n \to +\infty$, on trouve le coût moyen d'une journée de chauffage en régime stationnaire qui est de 2,1€.

Simulation de chaînes de Markov

Pour quoi faire ?

- Lorsque l'on simule un échantillon aléatoire, on répète généralement un certain nombre *k* de fois la même opération, et on obtient un échantillon de taille *k*, c'est-à-dire *k* nombres répartis suivant une loi fixée.
- Pour simuler une chaîne de Markov, l'objectif est différent : il faut simuler les chemins $(X_0 \to X_1 \to \cdots \to X_n)$.
- Un échantillon de taille 1 est donc un chemin, dont on fixe a priori la longueur n.
- La simulation peut avoir plusieurs buts :
  - Obtenir une estimation du coût moyen d'un chemin. Dans ce cas, un échantillon de taille 1 suffit, puisque $\frac{C_n}{n}$ tend presque sûrement vers $\mathbb{E}_\mu(c(X_0, X_1))$.
  - Simuler la mesure stationnaire, en obtenir un histogramme ou faire des tests sur cette loi, sans la calculer explicitement. Pour n assez grand, X_n suit « presque » la loi stationnaire, lorsque la chaîne est irréductible et apériodique, et si cette loi existe. Pour obtenir une simulation de la mesure stationnaire, on peut donc simuler k chemins $(x_0 \to x_1 \to \cdots \to x_n)$. en ne gardant que x_n.

Simulation de chaînes de Markov

Les ingrédients

- Il faut connaître la loi initiale et chacune des probabilités de transition.
- La loi initiale n’est pas très importante dans le cas des chaînes irréductibles et apériodiques admettant une mesure stationnaire, puisque très rapidement, la loi de X_n est très proche de la loi stationnaire.
- Il faut évidemment également disposer d’une liste suffisamment longue de nombres uniformément répartis sur $[0, 1]$.

Simulation de chaînes de Markov

La recette

- Pour obtenir un chemin simulé, on commence par simuler l'état initial x_0. La loi de X_1 sachant $\{X_0 = x_0\}$ est ensuite donnée par $\mathbb{P}(X_1 = x|X_0 = x_0) = p(x_0, x)$; on simule donc une valeur suivant la loi donnée par la ligne x_0 de la matrice de transition et on obtient une valeur x_1. Pour simuler X_2, on recommence de la même façon, mais avec la loi donnée par la ligne x_1 de la matrice de transition et ainsi de suite, jusqu'à obtenir le chemin de longueur désirée.
- **Attention** : Même si la loi initiale est la mesure stationnaire μ, cela ne revient pas du tout au même de simuler *n* fois μ (comme on le ferait pour obtenir un échantillon « standard »), et de simuler le chemin de la chaîne de Markov, pour lequel il peut y avoir par exemple des transitions interdites.

Simulation de chaînes de Markov

Pour simuler des lois discrètes :

Nous décrivons ici comment simuler une loi discrète ν sur $\{1, \dots, m\}$, donnée par

$$p_1 = \nu(1), \dots, p_m = \nu(m)$$

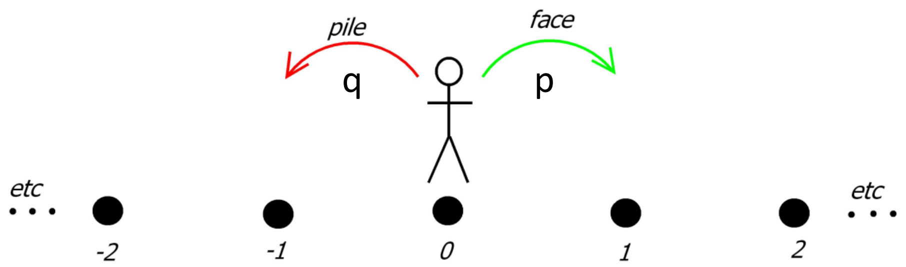
- Pour obtenir un échantillon de taille 1, on découpe l'intervalle $[0,1]$ en *m* sous-intervalles de longueur $p_1, p_2, \dots, p_m$. On a ainsi par exemple $I_1 = [0, p_1[, I_2 = [p_1, p_1 + p_2[, \dots, I_m = [p_1 + \cdots + p_{m-2}, p_1 + \cdots p_{m-1}[, et\ I_m = [1 - p_m, 1[$. On prend une valeur *u* (la première valeur) de l'échantillon uniforme, et si *u* appartient à l'intervalle I_j, on pose $x_1 = j$.
- Pour obtenir un échantillon de taille *k*, on recommence *k* fois l'opération précédente, en renouvelant le tirage de la valeur uniforme : on utilise successivement $u_1, u_2, \dots, u_k$.

Simulation de chaînes de Markov

- En résumé, le plus simple est de commencer par décrire la méthode de simulation choisie, pour chacune des lois dont on va avoir besoin : la loi initiale, puis la loi donnée par chacune des lignes de la matrice.
- On procède alors à la simulation en utilisant l'échantillon uniforme, sans reprendre deux fois le même u_i.
- Si on a besoin de plusieurs chemins, on applique autant de fois qu'il le faut la méthode, en utilisant à chaque fois des échantillons uniformes disjoints : par exemple les $n + 1$ premières valeurs de l'échantillon uniforme permettront de construire le premier chemin de longueur n, les $n+1$ valeurs suivantes le deuxième chemin et ainsi de suite.

Marche aléatoire au plus proche voisin

- Nous étudions dans cette partie une chaîne de Markov particulière : **la marche aléatoire au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}$** : le « marcheur » part de 0 et se déplace sur $\mathbb{Z}$ vers la gauche ou vers la droite en faisant un pas par unité de temps, indépendamment du chemin déjà parcouru.
- Cette chaîne peut s'écrire de la façon suivante : $X_0 = 0$ et $X_n = X_{n-1} + Y_n$ où les Y_n sont des v.a.i.i.d. telles que $\mathbb{P}(Y_n = 1) = p, \mathbb{P}(Y_n = -1) = q = 1 - p$.
- Il est facile de montrer que cette chaîne est **irréductible** et **de période 2**. On dira qu'elle est **symétrique** lorsque $p = q = \frac{1}{2}$, et **asymétrique** pour $p \neq q$.



Marche aléatoire au plus proche voisin

Récurrence et transience

- Lorsque $p \neq q$, il est facile de voir que la marche est transiente.
  Supposons en effet que $p > q$. On a alors
  $$\mathbb{E}(Y_1) = \mathbb{P}(Y_1 = 1).1 + \mathbb{P}(Y_1 = -1).(-1) = p - q > 0$$
  Par la loi forte des grands nombres, $\frac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}$ tend presque sûrement vers $\mathbb{E}(Y_1)$.
  Donc X_n tend presque sûrement vers $+\infty$: il n'existe pas une infinité d'indices n tels que $X_n = 0$, donc 0 est un état transient, et comme la chaîne est irréductible, tous les états sont de même nature, c'est-à-dire que la chaîne de Markov est transiente.

- Ce raisonnement ne permet pas de résoudre le cas $p = q = \frac{1}{2}$.

Marche aléatoire au plus proche voisin

- **Proposition** : la marche aléatoire au plus proche voisin sur $\mathbb{Z}$ est récurrente nulle si $p = \frac{1}{2}$ et transiente si $p \neq \frac{1}{2}$.

- **Preuve** : Comme la chaîne est irréductible, tous les états sont de même nature. On s'intéresse uniquement à la nature de l'état 0. Nous allons utiliser le théorème de caractérisation de la transience/récurrence pour vérifier cela.

$$p^{(2n)}(0,0) = \mathbb{P}(n\ des\ (Y_k)_{k \leq 2n}\ sont\ égales\ à\ 1\ et\ les\ autres\ égales\ à\ -1)$$

$$= C_{2n}^{n} p^n q^n \sim \frac{(2n)^{2n}\sqrt{4\pi n}e^{-2n}}{\left(n^n\sqrt{2\pi n}e^{-n}\right)^2}(pq)^n = \sqrt{\frac{2}{n\pi}}(4pq)^n$$

Si $p = \frac{1}{2}$, la série de terme général $p^{(2n)}(0,0)$ est donc divergente, ce qui implique que 0 est un état récurrent et $p^{(2n)}$ tend vers 0, donc 0 est nécessairement récurrent nul.

Si $p \neq \frac{1}{2}$, $4pq$ est strictement inférieur à 1, la série de terme général $p^{(2n)}(0,0)$ est convergente : on retrouve que 0 est transient.

Marche aléatoire au plus proche voisin

Temps de retour

Il est également possible d'étudier la loi de $\tau_1 = \inf\{n \geq 1, X_n = 1\}$ et $\tau_{-1} = \inf\{n \geq 1, X_n = -1\}$, ainsi que celle de $\tau_0 = \inf\{n \geq 1, X_n = 0\}$, pour une chaîne issue de 0. On obtient le résultat suivant

Proposition :

$$\mathbb{P}_0(\tau_0 < \infty) = q\mathbb{P}_0(\tau_1 < \infty) + p\mathbb{P}_0(\tau_{-1} < \infty)$$

- Si $p = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}_0(\tau_1 < \infty) = \mathbb{P}_0(\tau_{-1} < \infty) = 1$ donc $\mathbb{P}_0(\tau_0 < \infty) = 1$. On retrouve que 0 est récurrent.

Fin du cours sur les chaînes de Markov