Pricing de l'option sous proba forward

On cherche à calculer $\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[X|\mathcal{F}_t]$ $\quad X = (B(T,U)-K)^+$ ← obligat° basée sous S_T

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t\,dt + \underbrace{b(t,T)}_{\text{Volatilité}}dW_t^*$$

$$\rightarrow B(t,T) = B(0,T)\,e^{\int_0^t (r_s - \frac{1}{2}b(s,T)^2)ds + \int_0^t b(s,T)dW_s^*} \quad *$$

par Itô $Z_t = \ln(B(t,T))$

$$\Rightarrow dZ_t = \frac{1}{B(t,T)}dB(t,T) + \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{B(t,T)^2}\right)b(t,T)^2B(t,T)^2dt$$

$$= \frac{1}{B(t,T)}B(t,T)(r_t dt + b(t,T)dW_t^*) - \frac{1}{2}b(t,T)^2dt$$

$$\Rightarrow d(B(t,T)) = \exp((r_t - \tfrac{1}{2}b(t,T)^2)dt + b(t,T)dW_t^*)$$

et $\eta_t = \dfrac{B(t,T)}{S_t^0 B(0,T)} = e^{\int_0^t b(s,T)dW_s^* - \frac{1}{2}\int_0^t b(s,T)^2 ds}$

qui est une $\mathbb{P}^*$ Martingale Exponentielle

Par Girsanov, $W_t^T = W_t^* - \int_0^t b(s,T)\,ds$ est un $\mathbb{P}^T$ - MB

Ex :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[X|\mathcal{F}_t] \overset{\text{Bayes}}{=} \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[X\frac{\eta_T}{\eta_t}\Big|\mathcal{F}_t\right]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[X e^{\int_t^T b(s,T)dW_s^* - \frac{1}{2}\int_t^T b(s,T)^2ds}\Big|\mathcal{F}_t\right]$$

Sous $\mathbb{P}^T$ le prix forward est une martingale car $F^S(t,T) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}[S_T|\mathcal{F}_t]$
et de + $F^{B^U}(T,T) = B(T,U)$

La fonct° payoff qui nous intéresse est $(B(T,U)-K)^+$

Donc on cherche la valeur terminale d'une martingale sous $\mathbb{P}^T$ ainsi on calcule sa loi sous $\mathbb{P}^T$.

$$F^{B^U}(t,T) = \frac{B(t,U)}{B(t,T)} \overset{*}{=} \frac{B(0,U)\,e^{\int_0^t (r_s - \frac{1}{2}b(s,U)^2)ds + \int_0^t b(s,U)dW_s^*}}{B(0,T)\,e^{\int_0^t (r_s - \frac{1}{2}b(s,T)^2)ds + \int_0^t b(s,T)dW_s^*}}$$

$$= \frac{B(0,U)}{B(0,T)}e^{\int_0^t b(s,U)-b(s,T)dW_s^* - \frac{1}{2}\int_0^t b(s,U)^2 - b(s,T)^2ds}$$

On fait chgemt de proba
$dW_t^* = dW_t^T + b(t,T)dt$ ⟶
car $W_t^T = W_t^* - \int_0^t b(s,T)ds$ MB sous $\mathbb{P}^T$ par Girsanov

$$= \frac{B(0,U)}{B(0,T)}e^{\int_0^t b(s,U)-b(s,T)dW_s^T + \int_0^t (b(s,U)-b(s,T))b(s,T)ds - \frac{1}{2}\int_0^t b(s,U)^2 - b(s,T)^2 ds}$$

$$= \frac{B(0,U)}{B(0,T)}e^{\int_0^t b(s,U)-b(s,T)dW_s^T + \int_0^t b(s,U)b(s,T) - \frac{1}{2}b(s,T)^2 - \frac{1}{2}b(s,U)^2ds}$$

$$= \underbrace{\frac{B(0,U)}{B(0,T)}}_{F^{B^U}(0,T)}e^{\int_0^t b(s,U)-b(s,T)dW_s^T - \frac{1}{2}\int_0^t (b(s,U)-b(s,T))^2ds}$$

qui est bien une martingale exp sous $\mathbb{P}^T$

on rq $\dfrac{B(0,U)}{B(0,T)} = F^{B^U}(0,T)$

$$F^{B^U}(t,T) = F^{B^U}(0,T)\,e^{\int_0^t b(s,U)-b(s,T)dW_s^T - \frac{1}{2}\int_0^t (b(s,U)-b(s,T))^2ds}$$

$$\frac{dF^{B^U}(t,T)}{F^{B^U}(t,T)} = (b(t,U)-b(t,T))\,dW_t^T$$

pas de drift en dt ici !
drift = 0
Volatilité = $b(t,U) - b(t,T)$

$dS_t = rdt + \sigma dW_t^*$
par B-S

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^T}\left[(F^{B^U}(T,T) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t \right]$$

Rq : Ici au lieu de travailler sur le sous-jacent $B(t,U)$ on choisit le prix forward $F^{B^U}(t,T)$ dont la valeur terminale coïncide avec $B(T,U)$ qui possède la propriété de martingale sous $\mathbb{P}^T$ (alors que $B(t,U)$ non).

Proposition :

La solution de l'EDS (2) est donnée par :

$$r_t = \hat{b} + (r_0 - \hat{b})e^{-at} + \sigma\int_0^t e^{-a(t-u)}\,dW_u^*$$

$$dr_t = a(\hat{b} - r_t)\,dt + \sigma dW_t^*$$

$$\Rightarrow dr_t + a r_t\,dt = a\hat{b}\,dt + \sigma dW_t^*$$

$$\Rightarrow d(e^{at} r_t) = e^{at} a\hat{b}\,dt + \sigma e^{at}\,dW_t^*$$

$$\Rightarrow e^{at} r_t - r_0 = \hat{b}(e^{at} - 1) + \sigma\int_0^t e^{as}\,dW_s^*$$

$$\Rightarrow r_t = r_0 e^{-at} + \hat{b}(1 - e^{-at}) + \sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}\,dW_s^*$$

$$= \hat{b} + (r_0 - \hat{b})e^{-at} + \sigma\int_0^t e^{-a(t-s)}\,dW_s^*$$

On veut $\int_t^T r_s\,ds$

$$\int_t^T dr_s + \int_t^T a r_s\,ds = \int_t^T a\hat{b}\,ds + \int_t^T \sigma\,dW_s^*$$

$$\Rightarrow r_T - r_t + a\int_t^T r_s\,ds = a\hat{b}(T-t) + \sigma\int_t^T dW_s^*$$

$$\Rightarrow \int_t^T r_s\,ds = \frac{-1}{a}(r_T - r_t) + \hat{b}(T-t) + \frac{\sigma}{a}\int_t^T dW_s^*$$

On veut alors r_T

$$d(e^{at} r_t) = e^{at} a\hat{b}\,dt + \sigma e^{at}\,dW_t^*$$

$$\Rightarrow e^{aT} r_T - e^{at} r_t = \int_t^T e^{as} a\hat{b}\,ds + \sigma\int_t^T e^{as}\,dW_s^*$$

$$\Rightarrow r_T = r_t e^{-a(T-t)} + a\hat{b}\int_t^T e^{-a(T-s)}\,ds + \sigma\int_t^T e^{-a(T-s)}\,dW_s^*$$

$$= \hat{b}(1 - e^{-a(T-t)}) + r_t e^{-a(T-t)} + \sigma\int_t^T e^{-a(T-s)}\,dW_s^*$$

$$\Rightarrow \int_t^T r_s\,ds = \frac{-1}{a}\left(\hat{b}(1 - e^{-a(T-t)}) + r_t e^{-a(T-t)} + \sigma\int_t^T e^{-a(T-s)}\,dW_s^* - r_t\right) + \hat{b}(T-t) + \frac{\sigma}{a}\int_t^T dW_s^*$$

$$= \hat{b}(T-t) + (r_t - \hat{b})\frac{(1 - e^{-a(T-t)})}{a} + \frac{\sigma}{a}\int_t^T (1 - e^{-a(T-s)})\,dW_s^*$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}\left[\int_t^T r_s\,ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \hat{b}(T-t) + (r_t - \hat{b})\left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}\right)$$

term brownien $=0$ par $\perp\!\!\!\perp$ des accroissement browniens élémentaires

$$\mathbb{V}_{\mathbb{P}^*}\left[\int_t^T r_s\,ds \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right] = \mathbb{V}\left[\frac{\sigma}{a}\int_t^T (1 - e^{-a(T-s)})\,dW_s^* \,\middle|\, \mathcal{F}_t\right]$$

$$= \mathbb{V}\left[\frac{\sigma}{a}\int_t^T (1 - e^{-a(T-s)})\,dW_s^*\right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{a^2}\int_t^T (1 - e^{-a(T-s)})^2\,ds$$