TD 1

Question 1

(a) $\phi_X(t) = \mathbb{E}[e^{itX}]$

Propriétés : • $\phi_X = \phi_Y \iff X \overset{\mathcal{L}}{=} Y$

• $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow \phi_{X+Y} = \phi_X \phi_Y$

Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$

$$\phi_X(n) = \mathbb{E}[e^{inX}] = \sum e^{ink} \frac{(\lambda e^{in})^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda e^{in})^k}{k!}$$

$$= e^{-\lambda + \lambda e^{in}}$$

(b) $X \sim \mathcal{P}(\lambda_1)$, $Y \sim \mathcal{P}(\lambda_2)$, $X \perp\!\!\!\perp Y$

$Z \sim \mathcal{P}(\lambda_1 + \lambda_2)$

$$\phi_{X+Y}(n) = \phi_X(n)\,\phi_Y(n) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{in}-1)}$$

$$\phi_Z(n) = e^{(\lambda_1+\lambda_2)(e^{in}-1)} = \phi_{X+Y}(n)$$

Donc Z et $X+Y$ suivent la même loi $(X+Y) \sim \mathcal{P}(\lambda_1+\lambda_2)$

Question 2

(a) La transformée de Laplace L_x d'une va continue x est la fonction

$$L_x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \mathbb{E}[e^{-tx}]$$

<u>Propriétés</u> :
- $L_{x+y} = L_x L_y$ si $X \perp\!\!\!\perp Y$
- $\forall k \in \mathbb{N}^*, \ \mathbb{E}[x^k] = L_x^{(k)}(0)(-1)^k$
- $L_x = L_y \iff X \overset{\mathcal{L}}{=} y$
- $L_{aX+b}(t) = L_x(at)e^{-tb}$

(b) La fonction génératrice des moments d'une V.A.R discrète N est la fonction :

$$G_x : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$
$$t \mapsto \mathbb{E}[t^X] = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathbb{P}(N=k)t^k$$

<u>Propriétés</u> :
- $G_x = G_y \iff X \overset{\mathcal{L}}{=} y$
- Pour $X \perp\!\!\!\perp Y$: $G_{x+y} = G_x G_y$
- $\mathbb{E}[x] = G_x'(1)$
- $V(X) = G_x''(1) + G_x'(1) - G_x'(1)^2$
- $G^{(k)}(0) = k! \ \mathbb{P}(N=k)$

(c) $L_S(t) = \mathbb{E}[e^{-tS}]$

$$= \mathbb{E}\left[e^{-t\sum_{i=1}^{N} X_i}\right]$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{-t\sum_{i=1}^{k} X_i} \mid N=k\right] \mathbb{P}(N=k)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}\left[e^{-t\sum_{i=1}^{k} X_i}\right) \mathbb{P}(N=k) \quad \text{car } N \perp (X_i)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} L_{\sum_{i=1}^{k} X_i}(t)\ \mathbb{P}(N=k)$$

$\rfloor$ (X_i) iid

$$= \sum_{k=1}^{\infty} L_{X_1}(t)\ \mathbb{P}(N=k)$$

$$= G_N \circ L_{X_1}(t)$$

Question 3

On sait que $V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

Donc $V(X \mid Y=y_i) = \mathbb{E}[X^2 \mid Y=y_i) - \mathbb{E}[X \mid Y=y_i]^2$

et $\mathbb{E}[X^2] = \sum_{i=0}^{+\infty} \mathbb{E}[X^2 \mid Y=y_i) \mathbb{P}(Y=y_i)$

D'où $V(X) = -\mathbb{E}[X]^2 + \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(Y=y_i)(V(X \mid Y=y_i) + \mathbb{E}[X \mid Y=y_i]^2]$

Question 4 :

$X_i \sim \mathcal{E}(\theta) \qquad N \sim \mathcal{P}(\theta)$

$S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ alors $F_S(s) = \mathbb{P}(S \leqslant s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S \leqslant s \mid N = k)\mathbb{P}(N = k)$

$$= \mathbb{P}(N=0) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}(N=k)\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_k \leqslant s)$$

$$= e^{-\theta} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{-\theta}\theta^k}{k!} \times H(s,k,\theta)$$

avec $H(s,k,\theta)$ la fonction de répartition d'une loi Gamma (k,θ) car une somme iid de k lois exponentielles de paramètre θ donne Gamma (k,θ).

Question 5

$$S = \sum_{i=0}^{N} X_i$$

(a) $Var(S) = \mathbb{E}[Var(S|N)] + Var(\mathbb{E}[S|N])$

- $Var(S|N) = Var(\sum X_i | N) = N\, Var(X_1)$
- $\mathbb{E}[S|N] = \mathbb{E}[\sum^{N} X_i | N] = N\,\mathbb{E}[X_1]$

(b) $Var(S) = \mathbb{E}[N\, V(X)] + Var(N\, \mathbb{E}[X])$

$$= \underbrace{\mathbb{E}[N]\, Var(X)}_{\text{variabilité de l'intensité}} + \underbrace{\mathbb{E}[X]^2\, Var(N)}_{\text{variabilité de la fréquence}}$$