Exercice 1 : $X = (X_1, X_2, X_3)$ vect aléat Gaussian et $\Gamma_X = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1) $Cov(X_1, X_2) = -1 \Rightarrow X_1 \cancel{\perp\!\!\!\perp} X_2$

$Cov(X_1, X_3) = 0 \Rightarrow X_1 \perp\!\!\!\perp X_3$ ca vect gaussien

$Cov(X_2, X_3) = 0 \Rightarrow X_2 \perp\!\!\!\perp X_3$ "

2) $Cov(aX_1 + X_2, X_2) = a\,Cov(X_1, X_2) + V(X_2)$

$= -a + 4$

$aX_1 + X_2 \perp\!\!\!\perp X_2 \Rightarrow Cov(\cdot, \cdot) = 0 \Rightarrow a = 4$

$4X_1 + X_2, X_2$ gaussien ?

Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}$, $\alpha(4X_1 + X_2) + \beta X_2 = 4\alpha X_1 + (\alpha + \beta) X_2 + 0 X_3$ va gaussien

ca (X_1, X_2, X_3) gaussien.

3) On a mq $aX_1 + X_2, X_2$ gaussien $\Rightarrow aX_1 + X_2$ va gauss

$\mathbb{E}[aX_1 + X_2] = a\mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2$

$V(aX_1 + X_2) = V(aX_1) + V(X_2) + 2Cov(4X_1, X_2)$

$= 16V(X_1) + V(X_2) + 8Cov(X_1, X_2)$

$= 16 \times 3 + 4 - 8$

$= 44$

$$f_{4X_1 + X_2} = \frac{1}{\sqrt{44\pi}} e^{-\frac{(x - 4EX_1 - EX_2)^2}{2 \times 44}}$$

4) $aX_1 + X_2, X_2, X_3$ indep ?

Exercice 2 :

$$S_n = Y_1 + \dots + Y_n \qquad Y_n \sim \mathcal{U}([-2,3])$$

$a \in]-2,3[$

$$\mathbb{P}(S_n \in [-2n, an]) = ?$$

$$S_n(\Omega) = [-2n, 3n]$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(S_n \in [-2n, an]) = \mathbb{P}(S_n \leq an)$$
$$= \mathbb{P}\left(\frac{S_n}{n} \leq a\right) = F_{\frac{S_n}{n}}(a)$$

$\mathbb{E}\, Y_n = \frac{1}{2}$ loi faible des grands nbrs $\frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow F_{\frac{S_n}{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{1}_{]\frac{1}{2}, +\infty[}$$

$$\mathbb{P}\left(S_n \in \left[-2n, \tfrac{1}{2}n\right]\right) = \mathbb{P}\left(S_n \leq \tfrac{1}{2}n\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(S_n - \tfrac{1}{2}n \leq 0\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(n\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \leq 0\right)$$

b. **Théorème Central Limite**

Théorème IV.24 *TCL unidimensionnel $(X_n)_n$ une suite de v.a.r. indépendantes de même loi, de carré intégrable (i.e. $\mathbb{E}(X_n^2) < \infty$), d'espérance μ et de variance σ^2. On note par*

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n}\frac{X_i - \mu}{\sigma} = \sqrt{n}\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

Théorème IV.25 *TCL multi (X_n) suite de v.a. de $\mathbb{R}^d$ indépendants, de même loi, de carré intégrable. On note μ et Γ le vecteur moyenne et la matrice de variance. Alors*

$$\sqrt{n}\left(\overline{X} - \mu\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,\Gamma)$$

$$= \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{S_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \leq 0\right)$$
$$= \mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \frac{1}{2}}{\sigma}\right) \leq 0\right) = F_{\sqrt{n}\frac{\overline{X}_n - \frac{1}{2}}{\sigma}}(0)$$

$$\text{TCL} \quad \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \frac{1}{2}}{\sigma} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow F_{\sqrt{\cdot\cdot}} = \frac{1}{2}$$

Ex 3 :

$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k \qquad S_n^* = \frac{S_n}{n} \qquad X_n \sim \mathcal{E}(1)$

1) $\phi_{X_k}(t) = \int_0^{\infty} e^{itx} e^{-x} \, dx = \int_0 e^{x(it-1)} \, dx$

$= \left[\frac{1}{it-1} e^{x(it-1)} \right]_0^{\infty}$

$= \frac{1}{1-it}$

2) $\phi_{S_n}(t) = \phi_{X_1 + \dots + X_n}(t) \underset{\uparrow}{=} \prod_{k=1}^{n} \phi_{X_k}(t) = \left(\frac{1}{1-it} \right)^n$

Car les X_k sont $\perp\!\!\!\perp$

3) $\phi_{S_n^*}(t) = \phi_{\frac{X_1 + \dots + X_n}{n}}(t) = \left(\frac{1}{1-\frac{it}{n}} \right)^n$

4) $t \in \mathbb{R}$,

$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1-\frac{it}{n}} \right)^n$

$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{it}{n}\right)^n = e^{-it} \implies \lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{1-\frac{it}{n}} \right)^n = e^{it}$

5) D'après Q4, $\lim_{n \to \infty} \phi_{S_n^*}(t) = e^{it} = \phi_S(t)$ où S va de $=1$

$\underset{\text{thm de Levy}}{\implies} S_n^* \xrightarrow[n \to \infty]{\mathcal{L}} 1$

$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

$\phi_{X_n} \to \phi_X$

$\phi_{X_n} \to \phi_X$

6)

Exercice 4 : $X_1, \dots, X_n$ va gaussiennes

1) $\mathcal{L}^1 \Rightarrow \mathbb{P}$

2) a) $Y \sim \mathcal{N}(0,1)$

$$\mathbb{E}[\exp(it(m_n + \sigma_n Y))] = e^{itm_n} \mathbb{E}(e^{it\sigma_n Y})$$

$$\Rightarrow \phi_{X_n}(t) = e^{itm_n} e^{-\frac{(t\sigma_n)^2}{2}}$$

b) $m_n \to m \quad \sigma_n \to \sigma$

$$\Rightarrow \phi_{X_n}(t) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{itm} e^{-\frac{(\sigma t)^2}{2}}$$ fonction de loi gauss d'esp m et de var σ^2

$\underset{\text{thm Levy}}{\Longrightarrow} X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

et loi limite loi gaussien de moy m et var σ^2

c) $\Leftarrow$ / cf b

$\Rightarrow$ / Supposons $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$

$\underset{\text{Levy}}{\Longrightarrow} \phi_{X_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi_X$ Or $\phi_{X_n} : t \mapsto e^{itm_n} e^{-\frac{(\sigma_n t)^2}{2}}$

$\Rightarrow (m_n)$ et (σ_n) CV

3) $(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

a) $(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} X \Rightarrow (X_n) \xrightarrow{\mathcal{L}} X \underset{2.c}{\Longleftrightarrow} (m_n)_n$ et $(\sigma_n)_n$ CV

Mq $\exists C \in \mathbb{R}^+$ tq $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{E}(X_n^2) < C$ et $\mathbb{E}(X^2) < C$

b) $\mathbb{E}(X_n^2) = V(X_n) + \mathbb{E}(X_n)^2 = \sigma_n^2 + m_n^2$

De m̂ $\mathbb{E}(X^2) = \sigma^2 + m^2$

Or (σ_n) cv et (m_n) cv

$\Rightarrow (\sigma_n)$ borné $\quad \sigma_n < A$

$(m_n) \quad m_n < M$

$\mathbb{E}(X_n^2)$

c) Mq $\forall \varepsilon > 0$, $|X_n - X| \leq \varepsilon + 1_{|X_n - X| \geq \varepsilon} |X_n - X|$

$|X_n - X| = |X_n - X| 1_{|X_n - X| < \varepsilon} + |X_n - X| 1_{|X_n - X| \geq \varepsilon} \leq \varepsilon + |X_n - X|_{\geq \varepsilon}$

d) $\alpha(X_1, X_4) + \beta(X_3, X_4) + \gamma(X_5)$

$= (\alpha X_1 + \beta X_3 + \gamma X_5, \alpha X_2 + \beta X_4)$

Mq $(X_1, X_2), (X_3, X_4), X_5$ $\perp\!\!\!\perp$

Soit $A, B, C \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$ $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix} c_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$A(X_1, X_2) + B(X_3, X_4) + C(X_5, 0)$

$= a_1 X_1 + a_2 X_2 + b_1 X_3 + b_2 X_4 + c_1 X_5$ va gaussienne

car $(X_1, \dots, X_5)$ vect gaussien

Donc $((X_1, X_2), (X_3, X_4), X_5)$ Vect gauss

Puis $\mathrm{Cov}((X_1, X_2), (X_3, X_4)) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$

De m̂ $\mathrm{Cov}((X_1, X_2), X_5) = 0$

$$\mathrm{Cov}((X_3, X_4), X_5) = 0$$

$X = (X_1, \_\_\_, X_5)$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}5 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Donc décorrélées + Vect gaussien

$$\Rightarrow \underline{\perp\!\!\!\perp}$$