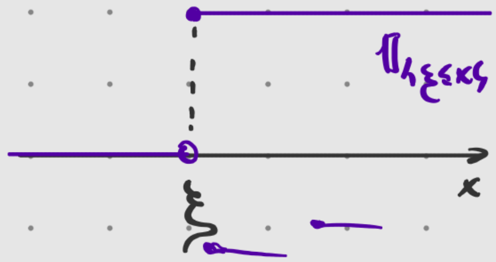
$\boxed{2023}$

QMC

$n\in\mathbb{N}$ $\quad \xi_1,\dots,\xi_n\in]0,1[$ $\quad \xi_1<\dots<\xi_n$

1) M.q. $\varphi_n : x\mapsto \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi_k\le x\}}}_{}-x$ est càdlàg et $\varphi_n(0)=\varphi_n(1)=0$



$\mathbb{1}$ càdlàg $\Rightarrow \varphi_n$ est càdlàg

$\xi_k\in]0,1[$

$\varphi_n(0)=\frac{1}{n}\sum_i\mathbb{1}_{\{\xi_k\le 0\}}=0$

$\varphi_n(1)=\frac{1}{n}\sum_i\underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi_k\le 1\}}}_{=1}-1=0$

$\sup_{[0,1]}\varphi_n(x)\overset{?}{=}\max_k\varphi_n(\xi_k)$ $\qquad \inf\varphi_n(x)=\min_k\varphi_n(\xi_k^-)$

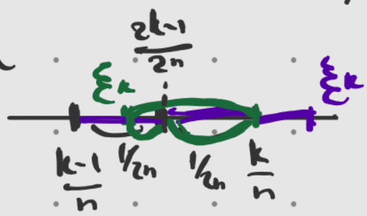
Sur $[\xi_i,\xi_{i+1})$ $\underbrace{\frac{1}{n}\sum\mathbb{1}_{\{\xi_k\le x\}}}_{=:F_n(x)}$ est constante $\Rightarrow \sup_{[\xi_i,\xi_{i+1})}\{F_n(x)-x\}=F_n(\xi_i)-\xi_i$, $\quad = \varphi_n(\xi_i)$

$\inf_{[\xi_i,\xi_{i+1})}\{F_n(x)-x\}=\lim_{x\uparrow\xi_{i+1}}\varphi_n(x)=\varphi_n(\xi_{i+1}^-)$

$\varphi_n(\xi_k)\qquad\varphi_n(\xi_k^-)$ $\qquad \underbrace{\frac{k}{n}-\frac{1}{2n}}$

Déduire $D_n^*(\xi_1,\dots,\xi_n)=\max_k\left\{\left|\xi_k-\frac{k}{n}\right|,\left|\xi_k-\frac{k-1}{n}\right|\right\}=\frac{1}{2n}+\max\left|\xi_k-\frac{2k-1}{2n}\right|$

$= \sup_{x\in[0,1]}|\varphi_n(x)| = \max\{|\max\varphi_n(x)|,|\min\varphi_n(x)|\}$



(2) $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ Hölder-cont., $\alpha\in]0,1]$ $\quad [f]_\alpha=\sup_{u\ne v}\frac{|f(u)-f(v)|}{|u-v|^\alpha}<\infty$

M.q. $\left|\sum_{k=1}^{n}\underbrace{\frac{1}{n}f(\xi_k)}_{\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}f(\xi_k)du}-\int_0^1 f(u)du\right|\le[f]_\alpha\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}}|\xi_k-x|^\alpha dx$

$\parallel$

//

$$\sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |f(\xi_k)-f(u)|\,du \underbrace{\leq}_{\leq \frac{1}{n}(D_n^*)^2} |\xi_k-u|^\alpha [f]_\alpha \qquad \max_k \{|\xi_k-\tfrac{k}{n}|, |\xi_k-\tfrac{k-1}{n}|\}$$

Il suffit montrer que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} |\xi_k-x|^\alpha dx \leq D_n^*(\xi_1 \dots \xi_n)^\alpha$

$$\forall \xi_k \quad \max_{[\frac{k-1}{n},\frac{k}{n}]} |\xi_k - x| = \max\{|\xi_k-\tfrac{k}{n}|, |\xi_k-\tfrac{k-1}{n}|\} \leq D_n^*(\xi_1,\dots,\xi_n)$$

Pb 1 $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ $(d\geq 1)$ $X=(X^1,\dots,X^d)$ X^i - la perte d'actif i, $\mathcal{L}(X)$ est sans atomes

$\lambda\in(0,1)$ $\forall \xi\in\mathbb{R}^d$ $\displaystyle V(\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}-1 + \frac{1}{1-\lambda}\sum_{i=1}^{d} \mathbb{E}(X^i-\xi^i)^+$

(1) $V\geq 0$ évident car $\underbrace{\sqrt{1+|\xi|^2}}_{\geq 1} - 1 \geq 0$

Dérivable? $\nabla V = ?$

$\sqrt{1+|\xi|^2}$ est bien dérivable $1+|\xi|^2\geq 1 \Rightarrow (\sqrt{\cdot})'$ existe

Donc la question est la dérivabilité de $\mathbb{E}(X^i-\xi^i)^+$.

Théorème (Dérivation sous le symbole d'$\int$ ou d'$\mathbb{E}$)

$(E,\mathcal{E},\mu)$ - espace mesuré. I intervalle de $\mathbb{R}$ non-trivial $(I\neq\emptyset, \{a\})$

Soit $\varphi : I\times E \to \mathbb{R}$ $(x,\xi)\mapsto \varphi(x,\xi)$

(a) Version locale: $x_0\in I$

(i) $\forall x$ $\varphi(x,\cdot)\in L^1(\mu)$ $\qquad (X^i-\xi^i)^+\in L^1$ ssi $X^i\in L^1$

(ii) $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0,\xi)$ existe $\mu(d\xi)$-p.p. $\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial \xi^i} = -\mathbb{1}_{\{X^i-\xi^i\geq 0\}}$

$(iii)_{loc}$ $\exists\ \boxed{H} : (E,\mathcal{E}) \to \mathbb{R}_+$ t.q. $\boxed{H} \in L^1(\mu)$

t.q. $\forall x \in I$ $|\varphi(x,\xi) - \varphi(x_0,\xi)| \leq \boxed{H} \cdot |x - x_0|$ $\mu(d\xi)$-p.p.

$(X^i - \xi^i)^+$ est lipschitzienne $(\boxed{H} = 1)$

Alors $\Phi : I \to \mathbb{R}$ est bien définie par $\Phi(x) = \int_E \varphi(x,\xi)\mu(d\xi)$

et $\Phi'(x_0) = \int \frac{\partial \varphi}{\partial x_0}(x_0,\xi)\mu(d\xi)$ $(*)$

(b) Version globale. Si φ vérifie

(i) —"—

$(ii)_{glob}$ $\mu(d\xi)$ p.p. $x \mapsto \varphi(x,\xi)$ est dérivable sur I

$(iii)_{glob}$ $\exists\ \boxed{H} : (E,\mathcal{E}) \to \mathbb{R}_+$, $\boxed{H} \in L^1(\mu)$ t.q. $\left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,\xi)\right| \leq \boxed{H}(\xi)$ $\forall x \in I$ $\mu(d\xi)$-p.p.

Alors $\Phi \in D(I)$ et $\Phi'(x)$ est donnée par $(*)$ $\forall x \in I$

Par le théorème locale V est dérivable $\forall \xi$

$$\nabla V(\xi) = \frac{\cancel{2}\xi}{\cancel{2}\sqrt{1+|\xi|^2}} - \frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix} \mathbb{P}(X^1 \geq \xi^1) \\ \vdots \\ \mathbb{P}(X^d \geq \xi^d)\end{pmatrix}$$

$\lim_{|\xi| \to \infty} V(\xi) = +\infty$ et V stt convexe

$$V(\xi) \geq \sqrt{1+|\xi|^2} - 1 \underset{|\xi|\to\infty}{\sim} |\xi| \Rightarrow V(\xi) \underset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

$\frac{1}{1-\lambda}\sum_i \mathbb{E}[\ldots]$ est convexe car $(X^i - \cdot)^+$ est convexe

Il suffit m.q. $H(\xi) = \sqrt{1+|\xi|^2}$ est stt convexe

$h(x)=\sqrt{1+x^2}$ est stt convexe car $h'(x)=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

$h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ est $\nearrow$ sur $\mathbb{R}^+$

$$h''(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-\frac{2x^2}{2(1+x^2)^{3/2}}=\frac{1+x^2-x^2}{(1+x^2)^{3/2}}=\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}>0$$

$g:\xi\mapsto|\xi|$ est convexe

$H=h\circ g$

$\lambda\in(0,1)$

$$H(\lambda x+(1-\lambda)y)=h(g(\lambda x+(1-\lambda)y))\le h(\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y))<\lambda\underbrace{h(g(x))}_{H(x)}+(1-\lambda)\underbrace{h(g(y))}_{H(y)}$$

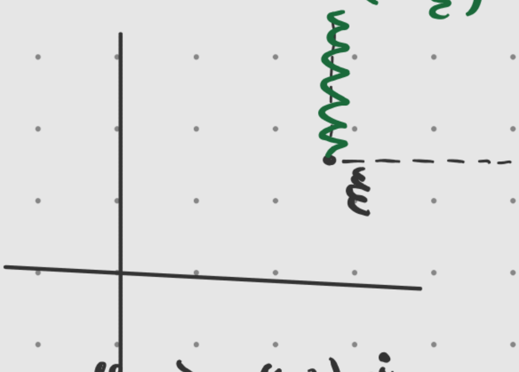
Alors V est stt convexe est $\lim_{|\xi|\to\infty}V=+\infty\Rightarrow$

$\Rightarrow$ il existe un unique point de minimum ξ^* qui satisfait

$$\nabla V(\xi^*)=0 \quad \text{i.e.} \quad \frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}}=\frac{1}{1-\lambda}\begin{pmatrix}\mathbb{P}(X^1\ge\xi^1)\\ \vdots \\ \mathbb{P}(X^d\ge\xi^d)\end{pmatrix}$$

Interpretation $d=1$: $\mathbb{P}(X\ge\xi)=(1-\lambda)\frac{\xi}{\sqrt{1+\xi^2}}$ $\leftarrow$ presque VaR

$\mathbb{P}(X^i>\xi^i)=(1-\lambda)\frac{\xi^i}{\sqrt{1+(\xi^i)^2+\cdots}}$



On cherche le portefeuille t.q.

pour chaque actif la proba de

perte plus grande que ξ^i soit proportionnelle à $(1-\lambda)\xi^i$

On peut considérer ξ_a comme une généralisation de VaR.

(2) L'algorithm stochastique

On veut resoudre $h(\xi)=0$ où $\overbrace{h(\xi)=(1-\lambda)\frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}}-\mathbb{E}\left(\mathbb{1}_{\{X^i\ge\xi^i\}}\right)}^{\nabla V}$

Donc $H(X_i,\xi)=(1-\lambda)\frac{\xi}{\sqrt{1+|\xi|^2}}-\left(\mathbb{1}_{\{X_i^j\ge\xi^j\}}\right)_{j=1\dots d}$ $\quad X_i\sim X$ i.i.d.

$$\xi_{n+1} = \xi_n - \gamma_{n+1} H(\xi_n, X_{n+1})$$

$$\gamma_n > 0 : \quad \sum_{n\geq 1} \gamma_n^2 < \infty \ , \ \sum_{n \geq 1} \gamma_n = +\infty$$

<u>Rem</u> Pour applique Robbins-Monro, il faut aussi checker

- $\forall \theta \neq \theta^* \quad \langle h(\xi), \xi - \xi^* \rangle > 0$
- $\forall \theta \in \mathbb{R}^d, \ \|H(\xi, Z)\|_2 \leq C(1 + |\xi - \xi^*|^2)^{1/2}$

(3) Soit $X \in L^2(\mathbb{P})$

$$V_{n+1} = V_n - \frac{1}{n+1}\left(V_n - v(\xi_n, X_{n+1})\right), \ n \geq 0 \quad , \ V_0 = 0$$

où $V(\xi) = \mathbb{E}\, v(\xi, X) = \mathbb{E}\Big[\underbrace{\sqrt{1+|\xi|^2} - 1 + \frac{1}{1-\lambda}\sum_{i=1}^d (X^i - \xi^i)^+}_{v(\xi, X)}\Big]$

(a) $V_n = \frac{1}{n}\sum_{k\geq 1}^n v(\xi_{k-1}, X_k) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n V(\xi_{k-1}) + \frac{S_n}{n}$, $S_n = \sum v(\xi_{k-1}, X_k) - V(\xi_{k-1})$

c'est évident

Par récurrence :

$$V_{n+1} = \frac{n}{n+1} V_n + \frac{1}{n+1} v(\xi_n, X_{n+1}) = \frac{1}{n+1}\sum_1^n v(\xi_{k-1}, X_k) + \frac{1}{n+1} v(\xi_n, X_{n+1}) =$$

$$\underbrace{V_n}_{\frac{1}{n}\sum_{k\geq 1}^n v(\xi_{k-1}, X_k)} \qquad = \frac{1}{n+1}\sum_1^{n+1} v(\xi_{k-1}, X_k)$$

est une martingale (carré?) intégralle par rapport à $\mathbb{F}^X$

$$\xi_k \in \mathcal{F}_k^X$$

$$\mathbb{E}[V_{n+1} | \mathcal{F}_n^X] = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} V(\xi_{k-1}) + \frac{1}{n}\,\mathbb{E}\Big[\overbrace{\sum_1^{n+1} v(\xi_{k-1}, X_k) - V(\xi_{k-1})}^{S_{n+1}} \Big| \mathcal{F}_n^X\Big]$$

$$\mathbb{E}[S_{n+1} | \mathcal{F}_n^X] = \sum_1^n \left(v(\xi_{k-1}, X_k) - V(\xi_{k-1})\right) + \underbrace{\mathbb{E}[v(\xi_{k-1}, \cancel{X_k}) | \mathcal{F}_n^X]}_{= V(\xi_{k-1})} - V(\cancel{\xi_{k-1}}) = S_n$$

donc ξ_n est une martingale

Elle est intégrable $\Leftrightarrow$ v est carré intégrable $(X \in L^2)$

(b) M.q. $\forall k \geq 1$ $|v(\xi_{k-1}, X_k) - V(\xi_{k-1})| \leq \frac{1}{1-\lambda} \sum_{i=1}^d \int |X_k^i - x^i| \underset{\sim}{\mu_i}(dx^i)$ $\quad \mathcal{L}(X^i)$

$$v(\xi_{k-1}, X_k) - V(\xi_{k-1}) = \cancel{\sqrt{1+|\xi_{k-1}|^2}} \cancel{-1} + \frac{1}{1-\lambda} \sum_{i=1}^d (X^i - \xi^i)^+ -$$

$$- \cancel{\sqrt{1+|\xi_{k-1}|^2}} \cancel{-1} + \frac{1}{1-\lambda} \sum_{i=1}^d \mathbb{E}(X^i - \xi^i)^+ = \frac{1}{1-\lambda} \sum_{i=1}^d \Big(\underbrace{(X^i - \xi^i)^+}_{\int (X^i - \xi^i) \mu_i(dx^i)} - \underbrace{\mathbb{E}(X^i - \xi^i)^+}_{\int (x^i - \xi^i)^+ \mu_i(dx^i)} \Big)$$

$|\ldots| \leq \{x \mapsto (x-K)^+$ est Lipschitzienne$\}$ $\leq$

$$\leq \frac{1}{1-\lambda} \sum_{i=1}^d \int |X^i - x^i| \underset{\sim}{\mu_i}(dx^i)$$

(c) M.q. $\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^n v(\xi_{k-1}, X_k) - V(\xi_{k-1})\right|^2 \leq \frac{2dn}{(1-\lambda)^2} \sum_{i=1}^d \mathbb{V}\mathrm{ar}[X^i]$ et

déduire que $V_n \xrightarrow{\mathbb{P}} V(\xi^*)$

Par (b) on a $\forall k$ $|v(\xi_{k-1}, X_k) - V(\xi_{k-1})| \leq \frac{1}{1-\lambda} \sum_{i=1}^d \int |X_k^i - x^i| \underset{\sim}{\mu_i}(dx^i)$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[X^i] = \int |x^i - \mathbb{E}X^i|^2 \underset{\sim}{\mu_i}(dx_i) = \int \left| \int (x^i - \tilde{x}^i) \underset{\sim}{\mu_i}(d\tilde{x}_i) \right|^2 \underset{\sim}{\mu_i}(dx_i)$$

$$\mathbb{E}\left|\sum_{k=1}^n v(\xi_{k-1}, X_k) - V(\xi_{k-1})\right|^2 \overset{(*)}{=} n\, \mathbb{E}\left[\frac{1}{(1-\lambda)} \sum_{i=1}^d \int |X^i - x^i| \underset{\sim}{\mu_i}(dx^i) \right]^2 \overset{(*)}{\leq}$$

$$\leq \frac{d \cdot n}{(1-\lambda)^2} \sum_{i=1}^d \mathbb{E} \underbrace{\left(\int |X^i - x^i| \underset{\sim}{\mu_i}(dx^i) \right)^2}_{= \mathbb{V}\mathrm{ar}[X^i]} = \frac{d\, n}{(1-\lambda)^2} \sum_{i=1}^d \mathbb{V}\mathrm{ar}[X^i] \leq 2 \frac{dn}{(1-\lambda)^2} \sum \mathbb{V}\mathrm{ar}[X^i]$$

D'où vient 2 ?

(⋆) $X_k \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^X_{k-1} \Rightarrow \mathbb{E}\left(\vartheta(\xi_{k-1},X_k)-V(\xi_{k-1})\right)\left(\vartheta(\xi_{\ell-1},X_\ell)-V(\xi_{\ell-1})\right) =$
$\forall k<\ell$

$$= \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{E}\big(\cdots \mid \mathcal{F}^X_{\ell-1}\big)}_{=0}\left(\vartheta(\xi_{k-1},X_k)-V(\xi_{k-1})\right)\Big] = 0$$

(⋆) $\left(\sum_{i=1}^d a_i\right)^2 \leq d\sum_{i=1}^d a_i^2$
$\shortparallel$ $\qquad\qquad \shortparallel$
$\langle a, \mathbb{1}\rangle^2 \leq |a|^2\cdot|\mathbb{1}|^2 = d|a|^2$

$\xi_n \xrightarrow{p.s.} \xi^*$ (Robbins-Monro)

$$V_n = \underbrace{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n V(\xi_{k-1})}_{\substack{p.s.\downarrow \text{ Lemme de Cesàro} \\ V(\xi^*)}} + \frac{S_n}{n}$$

S_n une martingale, $\mathbb{E}|S_n|^2 \overset{(c)}{\leq} C_{d,X}\cdot n$
$\mathbb{E}\left|\frac{S_n}{n}\right|^2 \leq \frac{C_{d,X}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{n}\right|>\varepsilon\right) \leq \frac{1}{\varepsilon^2 n^2}\mathbb{E}|S_n|^2 \to 0 \Rightarrow \frac{S_n}{n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$$

Donc $V_n \xrightarrow{\mathbb{P}} V(\xi^*)$

<u>Bonus question</u> $\tilde{S}_n = \sum_{k=1}^n \frac{\vartheta(\xi_{k-1},X_k)-V(\xi_{k-1})}{k}$, $n\geq 1$

$\tilde{S}_n$ $\underbrace{\text{carré intégrable } \mathcal{F}^X\text{-mart}}_{\text{le même argument que pour } S_n \ (c)}$ et $\langle\tilde{S}\rangle_n$ satisfait $\mathbb{E}\langle\tilde{S}\rangle_\infty < +\infty$

$$\mathbb{E}\left[\tilde{S}_{n+1}^2 - \tilde{S}_n^2 \mid \mathcal{F}_n\right] \overset{*}{=} \frac{1}{(n+1)^2}\mathbb{E}\left[\left(\vartheta(\xi_n,X_{n+1})-V(\xi_n)\right)^2 \mid \mathcal{F}^X_n\right] = \langle\tilde{S}\rangle_{n+1} - \langle\tilde{S}\rangle_n$$

$$\mathbb{E}\left[\tilde{S}_{n+1}^2 - \langle\tilde{S}\rangle_{n+1} \mid \mathcal{F}_n\right] = \tilde{S}_n^2 - \langle\tilde{S}\rangle_n$$

Donc $\mathbb{E}\left(\langle\tilde{S}\rangle_{n+1}-\langle\tilde{S}\rangle_n\right) \leq \frac{C}{(n+1)^2}$

$$\langle\tilde{S}\rangle_\infty = \lim_{n\uparrow\infty} \sum_{k=0}^{n} \langle\tilde{S}\rangle_{k+1}-\langle\tilde{S}\rangle_k$$ Par le thm. de B. Lévy

$$\mathbb{E}\langle\tilde{S}\rangle_\infty = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\sum_{k=0}^{n} \underbrace{\langle\tilde{S}\rangle_{k+1}-\langle\tilde{S}\rangle_k}_{\leq C/(k+1)^2} \leq C\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2} < \infty$$

Pourquoi: $V_n \to V(\xi^*)$ p.s. ? Il suffit montrer que $\frac{S_n}{n} \to 0$ p.s.

$\mathbb{E}\langle\tilde{S}\rangle_\infty < \infty \Rightarrow \mathbb{E}\tilde{S}_n^2 < \infty$ et $S_n^2 - \langle S\rangle_n$ est une mart.

Th. de Doob

(M_n) une supermart. $\sup_n \mathbb{E}[M_n^-] < \infty \Rightarrow M_n \xrightarrow{p.s.} M_\infty$

$M_n = \tilde{S}_n^2 - \langle\tilde{S}\rangle_n$ $\quad M_n^- \leq \langle\tilde{S}\rangle_n$ $\quad \mathbb{E}M_n^- \leq \mathbb{E}\langle\tilde{S}\rangle_\infty < \infty \Rightarrow$

$$\Rightarrow \tilde{S}_n \xrightarrow{p.s.} \sum_{k\geq 1} \frac{v(\xi_{k-1},X_k)-V(\xi_{k-1})}{k} \in L^2$$

(L'idée $\tilde{S}_n^2 - \underbrace{\langle\tilde{S}\rangle_n}_{\langle\tilde{S}\rangle_\infty} \xrightarrow{p.s.} M_\infty \in L^1$

$\Rightarrow \tilde{S}_n^2 \to \tilde{S}_\infty^2 = M_\infty + \langle\tilde{S}\rangle_\infty \in L^1$)

Lemme de Kronecker $(a_n), (b_n)$ $b_n \uparrow +\infty$ t.q. $\sum_n \frac{a_n}{b_n}$ converge dans $\mathbb{R}$ alors $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n} a_k \to 0$ (Abel + Césaro généralisé)

Donc $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(v(\xi_k,X_{k+1}) - V(\xi_k)\right) \xrightarrow{p.s.} 0$

$$\begin{cases} a_k = v(\xi_{k-1},X_k) - V(\xi_{k-1}) \\ b_k = k \end{cases}$$

ToDo: Démontrer le lemme!

- Cesaro généralisé
- lemme de Kronecker

Cesaro $a_k \to a_\infty$ $\quad S_n = \frac{a_1+\dots+a_n}{n} \Rightarrow S_n \to a_\infty$.

Lemme (de Césaro généralisé)

$b_n \uparrow \infty$, $b_n > 0$ $\quad a_n \to a_\infty \in \mathbb{R}$ alors $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k-1})a_k \to a_\infty$

Si $b_n = n$ $\frac{1}{n}\sum_i a_k \to a_\infty$ juste Cesaro

<u>Démo</u> $\forall \varepsilon > 0\ \exists N : \forall n > N\ \ |a_n - a_\infty| < \varepsilon$

$(b_0 = 0)$

$$\left|a_\infty - \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1}) a_k\right| = \left|\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n (b_k - b_{k-1})(a_\infty - a_n)\right| \leq$$

(a_n) bornée $\leadsto$ $< C$

$$\leq \underbrace{\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^N (b_k - b_{k-1})|a_\infty - a_k|}_{< \varepsilon \text{ si on prend } n \gg 1} + \overbrace{\frac{1}{b_n}\sum_{k=N+1} (b_n - b_{k-1})}^{<1}\underbrace{|a_\infty - a_n|}_{<\varepsilon}. \quad \square$$

<u>Preuve</u> du lemme de Kronecker $\quad C_n = \sum_{k=1}^n \frac{a_k}{b_k} \quad \Delta C_k = \frac{a_k}{b_k}$

$$\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n b_k \Delta C_k = \frac{1}{b_n}\Big(b_1(C_1 - \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{C_0}) + b_2(C_2 - C_1) + \dots + b_n(C_n - C_{n-1})\Big) =$$

$$\frac{1}{b_n}\Big(C_1(b_1 - b_2) + C_2(b_3 - b_2) + \dots + C_{n-1}(b_n - b_{n-1}) + b_n C_n\Big)$$

$$= \underbrace{-\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n C_k \Delta b_{k+1}}_{\to C_\infty \text{ Cesàro}} + \underset{\to C_\infty}{C_n} \to 0. \quad \square$$

Problem II EDS

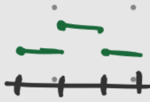
$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s \qquad b, \sigma \text{ sont Lipschitziennes}, \ X_0 \perp\!\!\!\perp W$$

$$\mathcal{F}_t^0 = \mathcal{F}_t^{X_0, W} = \sigma(\mathcal{N}_P, X_0, W_s, s \leq t).$$

$$h = h_n = \frac{T}{n} \qquad t_k = t_k^n = \frac{k}{n}\cdot T \qquad k = 0, \dots, n.$$

(1) (a) Les définitions de $\bar{X}^n_{t_k}$, $\tilde{X}^n_t$ et $\bar{X}^n_t$

1. En temps discret $\bar{X}^n_{t_0} = X_0$, $\bar{X}^n_{t_{k+1}} = \bar{X}^n_{t_k} + b(\bar{X}^n_{t_k})\cdot h + \sigma(\bar{X}^n_{t_k})\Delta W_{t_{k+1}}$

2. Const par morceau $\tilde{X}^n_t = \bar{X}^n_{\underline{t}}$ où $\underline{t} = \sup\{t_k : t_k \leq t\}$ 

3. $\bar{X}^n_t = \bar{X}^n_{\underline{t}} + b(\bar{X}^n_{\underline{t}})(t-\underline{t}) + \sigma(\bar{X}^n_{\underline{t}})(W_t - W_{\underline{t}})$

$$\left(\int_{\underline{t}}^{t} b(\bar{X}^n_{\underline{t}})ds + \int_{\underline{t}}^{t} \sigma(\bar{X}^n_{\underline{t}})dW_s \right)$$

(b) Uniform L^p-moment control résultats pour (X^x_t) et les schémas.

Alors $\forall p>0$ $\exists \tilde{C}_{T,p}>0$ t.q. $\|\sup_{[0,T]}|X_t|\|_p + \|\sup_{[0,T]}|\bar{X}_t|\|_p \leq \tilde{C}_{T,p}(1+\|X_0\|_p)$
$\forall n \geq 1$

Théorème Sous l'hypothèse additionnelle (par rapport à l'uniforme en temps Lipschitz en espace) b,σ ne dépend pas de x

$$H^\beta_T = \begin{cases} \text{(i) } \forall x \in \mathbb{R}^d,\ \forall s,t \in [0,T]\ |b(t,x)-b(s,x)| + \|\sigma(t,x)-\sigma(s,x)\| \leq C|t-s|^\beta(1+|x|) \\ \text{(ii) } \forall t \in [0,T]\ \forall x,y \in \mathbb{R}^d\ |b(t,x)-b(t,y)| + \|\sigma(t,x)-\sigma(t,y)\| \leq C|x-y| \end{cases}$$

$\beta \in]0,1]$

Alors pour tout $p>0$

(a) $\|\max_{k=0:n}|\bar{X}^n_{t_k} - X_{t_k}|\|_p \leq \|\sup_{t\in[0,T]}|\bar{X}^n_t - X_t|\|_p \leq C_{b,\sigma,T,p}\, h^{1/2}(1+\|X_0\|_p)$

$$\sqrt{\frac{1+\log n}{n}} \geq \sqrt{\frac{1}{n}} \sim \sqrt{h}$$

(b) $\|\sup_{t\in[0,T]}|X_t - \tilde{X}^n_t|\|_p \leq C'_{T,p,b,\sigma}\left(h^{1/2} + \sqrt{\frac{1+\log n}{n}}\right)$

$\tilde{X}^n_t$ ↑ $\bar{X}^n_t$

car

$$\|\sup_{t\in[0,T]}|\bar{X}^n_t - \tilde{X}^n_t|\|_p \leq C''_{T,p,b,\sigma}\sqrt{\frac{1+\log n}{n}}$$

(2a) Prouver que $x,y \in \mathbb{R}$

$$\sup_{s\in[0,t]}|\bar{X}^{n,x}_s - \bar{X}^{n,y}_s| \leq |x-y| + \int_0^t |b(X^{n,x}_{\underline{u}}) - b(X^{n,y}_{\underline{u}})|du + \sup_{[0,t]}\left|\int_0^t (\sigma(\bar{X}^{n,x}_{\underline{u}}) - \sigma(\bar{X}^{n,y}_{\underline{u}}))dW_u\right|$$

$$|\bar{X}_s^{n,x} - \bar{X}_s^{n,y}| = |(x-y) + \int_0^s b(X_{\underline{u}}^{n,x}) - b(X_{\underline{u}}^{n,y})\,du + \int_0^s \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,x}) - \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,y})\,dW_u|$$

$$\leq |x-y| + \underbrace{\int_0^s |b(X_{\underline{u}}^{n,x}) - b(X_{\underline{u}}^{n,y})|\,du}_{\leq \int_0^t |\ldots|\,du} + \sup_{s\in[0,t]} \left|\int_0^s \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,x}) - \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,y})\,dW_u\right|$$

(b) $g(T) = \mathbb{E} \sup_{[0,t]} |\bar{X}_s^{n,x} - \bar{X}_s^{n,y}|^2$. Prouver que g est $\nearrow$ et $g(T) < \infty$.

contrôl de moments

$$\mathbb{E} \sup_{[0,T]} |\bar{X}_s^{n,x} - \bar{X}_s^{n,y}|^2 \leq \mathbb{E} \sup_{[0,T]} 2(\bar{X}_s^{n,x\,2} + \bar{X}_s^{n,y\,2}) \leq 2\tilde{C}_{T,p}(1+|x|^2+|y|^2) < \infty$$

(c) $(a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2)$ (Cauchy-Schwartz)

(d) $$g(t) \overset{(c)}{\leq} 3\left(|x-y|^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^t \underbrace{|b(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,x}) - b(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,y})|}_{\leq [b]_{Lip} |\bar{X}_{\underline{u}}^{n,x} - \bar{X}_{\underline{u}}^{n,y}|}\,du\right)^2 + \mathbb{E} \sup_{[0,t]} \left|\int_0^t \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,x}) - \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,y})\,dW_u\right|^2\right)$$

$$\leq 3\left(|x-y|^2 + [b]_{Lip}^2\, t\, \mathbb{E} \int_0^t |\bar{X}_{\underline{u}}^{n,x} - \bar{X}_{\underline{u}}^{n,y}|^2 du + \mathbb{E} \sup_{[0,t]} \left|\int_0^t \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,x}) - \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,y})\,dW_u\right|^2\right.$$

$$\left(\int_0^t f\,du\right)^2 \leq \int_0^t f^2 du \int_0^t 1^2 du = t\int_0^t f^2 du$$

(3a) $$g(t) \leq 3\left(|x-y|^2 + \left(T[b]_{Lip}^2 + 4[\sigma]_{Lip}^2\right)\int_0^t g(s)\,ds\right)$$

On a déjà $$g(t) \leq 3\left(|x-y|^2 + [b]_{Lip}^2\, t \int_0^{t} \underbrace{|\bar{X}_{\underline{u}}^{n,x} - \bar{X}_{\underline{u}}^{n,y}|^2}_{\leq g(u)} du + \mathbb{E} \sup_{[0,t]} \left|\int_0^t \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,x}) - \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,y})\,dW_u\right|^2\right.$$

$$\mathbb{E} \sup_{[0,t]} \left|\int_0^t \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,x}) - \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,y})\,dW_u\right|^2 \overset{\text{Doob}}{\leq} 4\,\mathbb{E}\left|\int_0^t \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,x}) - \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,y})\,dW_u\right|^2 =$$

$$= 4\,\mathbb{E}\int_0^t \underbrace{|\sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,x}) - \sigma(\bar{X}_{\underline{u}}^{n,y})|^2}_{\leq [\sigma]_{Lip}^2 \cdot g(u)} du \leq 4[\sigma]_{Lip}^2 \int_0^t g(u)\,du$$

(b) $$\left\|\sup_{[0,T]} |\bar{X}_t^{n,x} - \bar{X}_t^{n,y}|\right\|_2 \leq \sqrt{3}\,|x-y|\,e^{C_{b,\sigma,T}\cdot T}$$

$$g(t) \leq 3|x-y|^2 + C\int_0^t g(s)\,ds$$

$$g(t) \leq 3|x-y|^2 e^{CT}$$

$$\Downarrow$$

$$\Big\| \sup_{[0,T]} |\bar{X}_t^{n,x} - \bar{X}_t^{n,y}| \Big\|_2 = \sqrt{g(t)} \leq \sqrt{3}\,|x-y|\, e^{\frac{C}{2}T}$$

$$\Big\| \sup_{[0,T]} |X_t^{x} - X_t^{y}| \Big\|_2 \leq \sqrt{3}\,|x-y|\, e^{\frac{C}{2}T}$$ par le m̂ raisonement

$$\left(g(T) = \mathbb{E} \sup_{[0,t]} |X_s^x - X_s^x|^2 . \right)$$

(4) $b, \sigma \in C_b^1$. On admet que $x \mapsto X_t^x(\omega)$ est dérivable

Processus tangent $\forall \omega \in \Omega \setminus \mathcal{N}_0$, $\forall t \in [0,T]$, $Y_t^{(x)}(\omega) = \frac{d}{dx} X_t^x(\omega)$ $\quad \mathbb{P}(\mathcal{N}_0) = 0$

$Y_t^{(x)}(\omega) = 0$ sur $\mathcal{N}_0$.

(a) Justifier que $(Y_t^{(x)})_{t \in [0,T]}$ satisfait l'EDS.

$$X_t^{x+\Delta x} = x + \Delta x + \int_0^t b(X_s^{x+\Delta x})\,ds + \int_0^t \sigma(X_s^{x+\Delta x})\,dW_s$$

$$X_t^{x} = x + \int_0^t b(X_s^{x})\,ds + \int_0^t \sigma(X_s^{x})\,dW_s$$

$$X_t^{x+\Delta x} - X_t^x = \Delta x + \int_0^t \underbrace{(b(X_s^{x+\Delta x}) - b(X_s^x))}\,ds + \int_0^t \underbrace{(\sigma(X_s^{x+\Delta x}) - \sigma(X_s^x))}\,dW_s$$

$\frac{d}{\Delta x}$; $\Delta x \to 0$ $\quad \to b'(X_s^x)\, Y_s^x \quad\quad \to \sigma'(X_s^x)\, Y_s^x$

$$\begin{cases} dY_t^{(x)} = b'(X_s^x)\, Y_t^x\, dt + \sigma'(X_s^x)\, Y_t^{(x)}\, dW_t \\ Y_0^{(x)} = 1 \end{cases}$$

$[\sigma]_{Lip}$ $W_t \leq$

Alors $\quad Y_t^{(x)} = \exp\left\{ \int_0^t \left(b'(X_s^x) - \frac{1}{2}(\sigma')^2(X_s^x)\right) ds + \int_0^t \sigma'(X_s^x)\, dW_s \right\}$

(b) $\forall t \quad x \mapsto X_t^x(\omega)$ est croissant.

$$\frac{dX_t^x}{dx} = Y_t^{(x)} \geq 0 \to x \mapsto X_t^x \text{ est croissant sur } \Omega/N_0$$

(c) M.q. $\mathbb{E} \sup_{[0,T]} (Y_t^{(x)})^2 < \infty$

$$\mathbb{E}(Y_T^{(x)})^2$$

$b, \sigma \in C_b^1 \Rightarrow b' \leq M, \ \sigma' \leq M$

Pour que $(Y_t^{(x)})^2$ soit intégrable il suffit motrer que $\mathbb{E}\, e^{\frac{1}{2}\int_0^T (2\sigma'(X_s^x))^2 ds} < \infty$

$$\mathbb{E}\, e^{2TM^2} < \infty$$

(5) h dérivable Lipschitzienne, Prouver que $P(x) = \mathbb{E}\, h(X_T^x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $P'(x) = \mathbb{E}\, h'(X_T^x) Y_T^{(x)}$

On sait déjà que $\frac{d}{dx} X_T^x = Y_T^{(x)}$ p.s.

h est dérivable $\to \frac{d}{dx} h(X_T^x) = h'(X_T^x) Y_T^{(x)}$

Il faut vérifier juste que $\frac{d}{dx}\mathbb{E}\, h(X_T^x) = \mathbb{E} \frac{d}{dx} h(X_T^x)$

$h(\cdot) \in L^1$ $\qquad x \in [\varepsilon, \frac{1}{\varepsilon}]$

$\mathbb{P}$- p.s. existe

$$\frac{\partial}{\partial x} h(X_T^x) = h'(X_T^x)\, Y_T^{(x)}$$

$$\left| \frac{h(X_T^x) - h(X_T^{x'})}{|x - x'|} \right| \quad \text{U.I ?} \quad (x, x' \in [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon])$$

$$\leq$$

$$[h]_{Lip} \frac{|X_T^x - X_T^{x'}|}{|x - x'|}$$ U.I. grace à ppté de Lipschitz de $x \mapsto X_t^x$ dans L^p

$\leq x'$

$$\mathbb{E}|\xi_{x'}|^p = \left\| \frac{X_T^x - X_T^{x'}}{|x-x'|} \right\|_p^p \leq C \to \{\xi_{x'}\}_{x'} \text{ U.I}$$
$p>1$

2013

Pb 1 Autour du schéma de Milstein

$$dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dW_t$$

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq C(1+|x|)$$

(1) $\exists C_{b,\sigma,T} > 0$ t.q. $(X_t^x)_t$ vérifie $\mathbb{E} \sup_{t\in[0,T]} |X_t^x|^2 \leq C_{b,\sigma,T}(1+|x|^2)$

Thm du contrôle des moments avec $p=2$, $X_0 = x$

(b) Conditions suffisantes pour $\exists!$ de la solution forte

$$|b(t,0)| + |\sigma(t,0)| \leq L$$

$$\forall x,y \quad |b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L|x-y|$$

(c) Schéma d'Euler

$$\bar{X}_{t_0}^n = x, \quad \bar{X}_{t_{k+1}}^n = \bar{X}_{t_k}^n + b(t_k, \bar{X}_{t_k}^n)\Delta t_{k+1} + \sigma(t_k, \bar{X}_{t_k}^n)\Delta W_{t_{k+1}}$$

b, σ sont dérivable en x, $\sigma^2(t,\cdot) \nearrow$ $\quad \sigma \neq 0$

(2a) $\forall t \in [0,T]$ $\forall \xi \in \mathbb{R}_+$ $\quad \underbrace{b(t,\xi) - \frac{1}{4}(\sigma^2)'_x(t,\xi) \geq 0}_{(1)}$ et $\underbrace{\frac{\sigma}{\sigma'_x}(t,\xi) \leq 2\xi}_{(2)}$

$\frac{1}{4}(\sigma^2)'_x = \frac{1}{2}\sigma\sigma'$

$\Rightarrow \tilde{X}_{t_i^n}^{mil} \geq 0$

$$\tilde{X}^{mil}_{t_{i+1}} = \tilde{X}^{mil}_{t_i} + b(t_i,\tilde{X}^{mil}_{t_i})(t_{i+1}-t_i) + \sigma(t_i,\tilde{X}^{mil}_{t_i})(W_{i+1}-W_i) + \frac{1}{2}(\sigma\sigma'_x)(t_i,\tilde{X}^{mil}_{t_i})(\Delta W_{i+1}^2 - \Delta t_{i+1})$$

Soit $\tilde{X}^{mil}_{t_0} = x \geq 0$

$$\tilde{X}^{mil}_{t_{i+1}} = \tilde{X}^{mil}_{t_i} + \Delta t_{i+1}\left(b - \frac{1}{2}\sigma\sigma'_x\right)(t_i,\tilde{X}^{mil}_{t_i}) + \underbrace{\sigma(t_i,\tilde{X}^{mil}_{t_i})}_{2ab}\Delta W_{i+1} + \underbrace{\frac{1}{2}(\sigma\sigma')}_{a^2}\Delta W_{i+1}^2 =$$

$$b = \frac{\sigma}{2\sqrt{\frac{1}{2}\sigma\sigma'}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{\sigma}{\sigma'}} \quad b^2 = \frac{\sigma}{2\sigma'}$$

$$= \tilde{X}^{mil}_{t_i} + \underbrace{\left(\sqrt{\frac{\sigma}{2\sigma'}} + \sqrt{\frac{\sigma\sigma'}{2}}\Delta W_{t_{i+1}}\right)^2}_{\geq 0} \underbrace{- \frac{\sigma}{2\sigma'}}_{\underset{(2)}{\geq} -\tilde{X}^{mil}_{t_i}} + \underbrace{\left(b - \frac{1}{2}\sigma\sigma'\right)\Delta t_{i+1}}_{\underset{(1)}{\geq} 0} \geq 0$$

Donc $\bar{X}^{mil}_{t_i} \geq 0 \ \forall i \Rightarrow \tilde{X}^{mil}_t \geq 0.$

(b) Montrer ss les $\hat{m}$ hypothèses $\mathbb{P}$-p.s. $\bar{X}^{mil}_t \geq 0$ $t \in [0,T]$

$$\bar{X}^{mil}_t = \bar{X}^{mil}_{\underline{t}} + b(\underline{t},\bar{X}^{mil}_{\underline{t}})(t-\underline{t}) + \sigma(\underline{t},\bar{X}^{mil}_{\underline{t}})(W_t - W_{\underline{t}}) +$$

$$+ \frac{1}{2}(\sigma\sigma'_x)(\underline{t},\bar{X}^{mil}_{\underline{t}})\left((W_t - W_{\underline{t}})^2 - (t-\underline{t})\right)$$

Par le $\hat{m}$ raisonement que dans (a) $(t_i = \underline{t},\ t_{i+1} = t)$ on obtient $\bar{X}^{mil}_t \geq 0$.

(3) $\varkappa \in \mathbb{R}$ $\forall t \in [0,T]$ $\quad Y_t = e^{\varkappa t} X^x_t$

(a) Mq Y_t vérifie $dY_t = \tilde{b}(t,Y_t)dt + \tilde{\sigma}(t,Y_t)dW_t$

Itô

$$dY_t = \varkappa Y_t dt + e^{\varkappa t}dX^x_t = \Big(\underbrace{\varkappa Y_t + e^{\varkappa t}b(t,e^{-\varkappa t}Y_t)}_{\tilde{b}(t,Y_t)}\Big)dt + \underbrace{e^{\varkappa t}\sigma(t,e^{-\varkappa t}Y_t)}_{\tilde{\sigma}(t,Y_t)}dW_t$$

(b) Condition suffisantes sur b, σ t.q. $\bar{Y}_t^{mil} \geq 0$

$\tilde{\sigma}(t,\cdot) \nearrow$ OK $\qquad \tilde{\sigma} \neq 0$ OK

$\tilde{b} - \frac{1}{2}\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'_y \geq 0$? $\qquad \frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}'_y}(t,\xi) \leq 2\xi$?

$$\tilde{\sigma}'_y = e^{\varkappa t} \sigma'_x(t, e^{-\varkappa t} Y_t) \cdot e^{-\varkappa t} = \sigma'_x(t, X_t)$$

$$\frac{\tilde{\sigma}}{\tilde{\sigma}'_y} = e^{\varkappa t}\left(\frac{\sigma}{\sigma'_x}\right)(t, e^{-\varkappa t} Y_t) \leq 2Y_t$$

Donc $\quad (\tilde{\sigma}/\tilde{\sigma}'_y)(t,\xi) \leq 2\xi \Leftrightarrow (\sigma/\sigma'_x)(t,\xi) \leq 2\xi$

$$\tilde{b}(t,y) - \frac{1}{2}(\tilde{\sigma}\tilde{\sigma}'_y)(t,y) = \varkappa y + e^{+\varkappa t} b(t, e^{-\varkappa t} y) - \frac{1}{2} e^{+\varkappa t} \sigma(t, e^{-\varkappa t} y)\sigma'_x(t, e^{-\varkappa t} y) \geq 0$$

$$b(t,x) - \frac{1}{2}(\sigma\sigma'_x)(t,x) \geq -\varkappa x$$

(4a) Les condition suffis. sur b et σ t.q. $\bar{Y}_t^{mil}$ converge vers la diffusion

Il faut que $\tilde{b}, \tilde{\sigma}$ soient $\in C^1_{Lip} = \{f \in C^1 : f' \text{ Lip}\}$

Si $b, \sigma \in C^1_{Lip} \to \tilde{b}, \tilde{\sigma}$ aussi

(b) Critère sur b, σ assurant que la sol. reste positive sur $[0,T]$

lorsque $X_0 = x \geq 0$ $\qquad \forall t \; X_t \geq 0 \Leftrightarrow \exists \varkappa \in \mathbb{R} \cdot Y_t \geq 0 \; \forall t$

Cond suffisante : $\quad b, \sigma \in C^1_{Lip}$, $\frac{\sigma}{\sigma'_x}(t,\xi) \leq 2\xi$, $\exists \varkappa \in \mathbb{R}$ $b - \frac{1}{2}(\sigma^2)'_x \geq -\varkappa x$

(par exemple, $b, (\sigma^2)'_x$ à $\nearrow$ ss linéaire)

Donc $\quad \bar{Y}_t^{mil} \geq 0 \quad$ et $\quad \sup_{[0,T]} \|\bar{Y}_t^{mil} - Y_t\|_p \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \to Y_t \geq 0$ p.s. $\to X_t \geq 0$ p.s.

On admet que $b, \sigma \in C$ $\quad |b| + |\sigma| \leq C(1+|x|) \to$ unique sol. forte

pour que $\bar{X}_t^{mil} \xrightarrow{\mathcal{L}} X_t^*$

(5) $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1]$ $\forall a \in \mathbb{R}_+^*, b \in \mathbb{R}, \theta \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{cases} dX_t = (a - bX_t)\,dt + \theta |X_t|^{\alpha} dW_t \\ X_0 = x \end{cases}$$

admet qu'il existe une unique sol. forte

(a) $\alpha < 1 \to \sigma$ n'est pas Lip ☹

(b) Valeurs de α, a, b, θ : la solution soit positive

$$b(x) = a - bx$$
$$\sigma(x) = \theta |x|^{\alpha}$$

Par 4b il faut que $\frac{\sigma}{\sigma'_x} \le 2x$ et $\exists\, \varkappa$ $b - \frac{1}{2}\sigma\sigma' \ge -\varkappa x$

On a déjà ça

$\sigma'_x = \theta \alpha |x|^{\alpha - 1}$ $(x \ge 0)$ $\quad \frac{\sigma}{\sigma'_x} = \frac{x}{\alpha} \le 2x \to \alpha \ge \frac{1}{2}$

$$b - \frac{1}{2}\sigma\sigma' = a - bx - \frac{1}{2}\theta^2 \alpha x^{2\alpha - 1} \overset{?}{\ge} -\varkappa x \iff \exists\, \tilde{\varkappa} :$$
$(x \ge 0)$

$a - \frac{1}{2}\theta^2 \cdot \alpha \cdot x^{2\alpha - 1} \ge -\tilde{\varkappa} x$ $\quad$ Si $\alpha = \frac{1}{2} \to$ il faut que $a - \frac{1}{2}\theta^2 \alpha \ge 0$

Si $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$ $\underbrace{2\alpha - 1}_{\in (0,1]} > 0$, il faut que $a > 0$ $(x = 0)$ $\to$ on peut minorer $\underbrace{a}_{>0} - cx^{\beta}$ par $-\tilde{\varkappa} x$. Si $a = 0 \to$ problème en zéro
$\beta \in (0, 1]$

<u>Résumé</u> Il faut que : soit $\alpha = \frac{1}{2}$ et $a - \frac{1}{2}\theta^2 \alpha \ge 0$
soit $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$ et $a > 0$

Pourquoi $\bar{X}_t \ge 0$? On a $\bar{X}_t^{m:e} \xrightarrow{\mathcal{L}} X_t$

Si $\mathcal{L}(X_t)$ est sans atome en $\{0\} \to \mathbb{P}(\bar{X}_t^{m:e} \ge 0) \to \mathbb{P}(X_t \ge 0)$ ($\mathbb{P}(\bar{X}_t^{m:e} \ge 0) = 1$)

(Sinon on utilise thm de Portmanteau pour $F = \{x \ge 0\}$ fermé $\to$

$\to \limsup \underbrace{\mathbb{P}_{\bar{X}_t^{m:e}}(x \ge 0)}_{=1} \le \mathbb{P}_{X_t}(x \ge 0) \to \mathbb{P}(X_t \ge 0) \ge 1$)

(6) $\lambda \in \mathbb{R}$ $\sigma > 0$ $\begin{cases} dZ_t = -\lambda Z_t dt + \sigma dW_t \\ Z_0 = z \in \mathbb{R} \end{cases}$ $t \in [0,T]$

(6a) Équation de type CIR pour Z_t^2

$$d\underbrace{Z_t^2}_{X_t} = 2Z_t(-\lambda Z_t dt + \sigma dW_t) + \sigma^2 dt = (\sigma^2 - 2\lambda \underbrace{Z_t^2}_{X_t}) dt + 2\sigma \underbrace{Z_t}_{\sqrt{X_t}} dW_t$$

$\rightarrow a = \sigma^2$, $b = 2\lambda$, $\vartheta = 2\sigma$, $\alpha = \frac{1}{2}$

(6b) Le schéma d'Euler $\Delta t = \frac{T}{n}$

$$\bar{Z}^n_{t_{k+1}} = \bar{Z}^n_{t_k} - \lambda \bar{Z}^n_{t_k} \cdot \Delta t + \sigma \underbrace{\Delta W_{t_{k+1}}}^{W_{t_{k+1}} - W_{t_k}}$$

$$\bar{Z}^n_t = z - \lambda \int_0^t \bar{Z}^n_{\underline{s}} ds + \sigma W_t \quad (EDS^n)$$

(6c) Montrer que $\sup_n \| |Z_T| + |\bar{Z}^n_T| \|_2 < +\infty$

$$\wedge$$

$$\|Z_T\|_2 + \|\bar{Z}^n_T\|_2$$

$\|Z_T\|_2 \leq C(1 + |z|)$ (contrôle de moments)

$$\|\bar{Z}^n_T\|_2 \leq \|\bar{Z}^n_T - Z_T\|_2 + \overbrace{\|Z_T\|_2}^{<\infty}$$

$$\|\bar{Z}^n_T - Z_T\|_2 \leq C_{T,b,\sigma} \left(\frac{T}{n}\right)^{1/2} (1 + |z|) \xrightarrow{n \to \infty} 0 \rightarrow \sup \{ \cdots \} < \infty.$$

$\uparrow$ b, σ Lipschitz, ne dépend pas de t $\rightarrow$
$\rightarrow$ thm. sur l'erreur du schéma d'Euler

(6d) Le schéma de discrétisation de CIR lorsque $a = \frac{\vartheta^2}{4}$: ($\alpha = \frac{1}{2}$!)

erreur de l'ordre $\frac{1}{n}$ pour $f \in Lip$ pour X_T et $\tilde{X}_T$

$a = \frac{\vartheta^4}{4}$

Dans ce cas $X_t = Z_t^2$ (CIR ; OU) $\lambda = \frac{b}{2}$, $\sigma = \frac{\vartheta}{2}$

On utilise le schéma de Milstein (qui coïncide avec le schéma d'Euler

cf 6b) pour OU $\Rightarrow$ {Thm pour $\|X_T^{mil} - X_T\|$ } $\to$ erreur d'ordre $\frac{T}{n}$

Donc $\|f(X_T) - f(\tilde{X}_T^{mil})\|_p \leq [f]_{Lip} \|X_T - \bar{X}_T^{mil}\|_p \leq 2T [f]_{Lip} \|Z_T - \bar{Z}_n^{mil}\|_p \leq 2T [f]_{Lip}\, C(1+|z|)$

coïncide avec $\bar{X}_T^n$ en T ; $x^2 \in Lip([0,T])$ avec $L = 2T$

(6e) Simulation exact de CIR X_t ?

$$X_t = Z_t^2 \quad \text{où} \quad dZ_t = -\lambda Z_t dt + \sigma dW_t$$

$$d e^{\lambda t} Z_t = e^{\lambda t} \sigma dW_t$$

$$e^{\lambda t_{k+1}} Z_{t_{k+1}} = e^{\lambda t_k} Z_{t_k} + \sigma \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{\lambda s} dW_s$$

$$Z_{t_{k+1}} = e^{-\lambda \Delta t} Z_{t_k} + \sigma \underbrace{\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-\lambda(t_{k+1}-s)} dW_s}_{\sim \mathcal{N}\left(0, \int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-2\lambda(t_{k+1}-s)} ds\right)}$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} e^{-2\lambda(t_{k+1}-s)} ds = \frac{1}{2\lambda}\left(1 - e^{-2\lambda \Delta t}\right)$$

$\Rightarrow \mathcal{L}\left(Z_{t_{k+1}} \,|\, (Z_{t_j})_{j=1,\dots,k}\right) = \mathcal{N}\left(e^{-\lambda \Delta t} Z_{t_k}, \frac{1-e^{-2\lambda\Delta t}}{2\lambda}\right) \to$ simulation exacte.

Modèle de Heston

$$\begin{cases} dS_t = r S_t dt + \sqrt{v_t}\, S_t \left(\rho\, dW_t + \sqrt{1-\rho^2}\, dB_t\right) \\ dv_t = (a - b v_t) dt + \sigma \sqrt{v_t}\, dW_t \end{cases}$$

$a > 0$
$b > 0$
$\sigma > 0$
$r \in \mathbb{R}$

positivité de la solution $\to \sigma^2 < 2a$

(7a) ρ corrélation entre les factors qui bougent le prix et la vol

(7b) φ borélienne $|\varphi(x)| \leq c(1+|x|^p)$

$$P_{BS}(x,r,s) = \mathbb{E}\left[e^{-rT}\varphi\Big(\underbrace{xe^{(r-\frac{s^2}{2})T+sB_T}}_{S_T^{BS}}\Big)\right] \qquad \mathcal{F}_t^W = \sigma(W_s, s\leq t, \mathcal{N}_{\mathbb{P}})$$

M.q. $\exists\ \Xi$ - v.a. $\mathcal{F}_T^W$-mesurable t.q. $\mathbb{E}[e^{-rT}\varphi(S_T)|\mathcal{F}_T^W] = P_{BS}\left(\Xi, r, \sqrt{\frac{1-\rho^2}{T}\int_0^T v_t\,dt}\right)$

$$\mathbb{E}[e^{-rT}\varphi(S_T)|\mathcal{F}_T^W] =$$

Sachant $\mathcal{F}_T^W$ $(v_t)_{t\in[0,T]}$ est connu ($\mathcal{F}_T^W$-mes) $\to$

$$\to dS_t = \rho\sqrt{v_t}\,S_t\,dW_t + rS_t\,dt + S_t\sqrt{v_t}\sqrt{1-\rho^2}\,dB_t$$

$$S_T = \underbrace{S_0\exp\left\{\int_0^T\rho\sqrt{v_t}\,dW_t - \frac{1}{2}\int_0^T\rho^2 v_t\,dt\right\}}_{\Xi\ -\ \mathcal{F}_T^W\text{-mesurable}}\exp\left\{\left(r - \frac{\int_0^T v_t(1-\rho^2)\,dt}{2T}\right)T + \int_0^T\sqrt{v_t(1-\rho^2)}\,dB_t\right\}$$

$$\mathcal{L}\left(\sqrt{1-\rho^2}\int_0^T\sqrt{v_t}\,dB_t\,\Big|\,\mathcal{F}_T^W\right) = \mathcal{N}\Big(0, \underbrace{(1-\rho^2)\int_0^T v_t\,dt}_{=:\ s^2 T}\Big)$$

$$\mathcal{L}(S_T|\mathcal{F}_T^W) = \mathcal{L}\left(\Xi\exp\left\{\left(r-\frac{s^2}{2}\right)T + s\overset{MB \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}^W}{\tilde{B}_T}\right\}\right) \to$$

$$\to e^{-rT}\mathbb{E}[\varphi(S_T)|\mathcal{F}_T^W] = P_{BS}(\Xi, r, s)$$

(7.c) En déduire un estimateur MC pour $\mathbb{E}[e^{-rT}\varphi(S_T)]$

$$\mathbb{E}[e^{-rT}\varphi(S_T)] = \mathbb{E}\left[e^{-rT}\mathbb{E}[\varphi(S_T)|\mathcal{F}_T^W]\right] = \mathbb{E}\left[e^{-rT}P_{BS}(\Xi, r, s)\right]$$

où Ξ et c sont déterminé dans (7b)

La variance de l'éstimateur est réduite grâce au conditionnement.

Numériquement, la ppté de φ pour que la méthode soit réellement implémentalble?

$P_{BS}(x,r,s)$ doit être calculable explicitement $\Rightarrow$ on peut l'utiliser

pour calculer $\mathbb{E}[e^{-rT} P_{BS}(\mathcal{E}, r, S)]$. Par exemple, $\varphi(x) \in \{(x-K)^+, x^p, \mathbb{1}_{\{x \geq K\}}\}$ etc

(8) Sous quelles conditions peut-on mettre en œuvre un schéma de Milstein pour (S_t, v_t) garantissant la positivité de $(v_t)_{t\in(0,T)}$

Pour v on a $dv_t = (a - b v_t)dt + \sigma\sqrt{v_t}\, dW_t$ $\quad a, b, \sigma > 0$

Par (5b) il faut que $\underline{a - \frac{\sigma^2}{4} \geq 0}$

Problème 2 Autour de pont de diffusion

(EDS) $\begin{cases} dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t & t\in[0,T] \\ X_0^x = x & T > 0 \end{cases}$ $\quad b, \sigma \in Lip$

$(Y_t^{B,T,y})_{t\in[0,T]}$ pont brownien de 0 à y

$$Y_t^{B,T,y} = B_t - \frac{t}{T}(B_T - y)$$

$\forall z \in \mathbb{R}$ $\quad \mathbb{P}(\sup_{[0,T]} Y_t^{B,T,y} \leq z) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{2}{T} z(z-y)} & \text{si } z \geq y^+ \\ 0 & \text{si } z \leq y^+ \end{cases}$

(1a) M.q. $\mathbb{P}(\inf_{[0,T]} Y_t^{B,T,y} \leq z) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{T} z(z-y)} & z \leq -y^- \\ 1 & z \geq -y^- \end{cases}$

$$\inf_{[0,T]} Y_t^{B,T,y} = -\sup_{[0,T]}\left(-Y_t^{B,T,y}\right) \overset{\mathcal{L}}{=} -\sup_{[0,T]} Y_t^{B,T,-y}$$

$$\mathbb{P}\left(\inf Y_t^{B,T,y} \le \xi\right) = \mathbb{P}\left(\sup Y_t^{B,T,-y} \ge -\xi\right) = 1 - \begin{cases} 1-e^{-\frac{2}{T}(-\xi)(-\xi+y)} & si\ -\xi \ge (-y)^+ \\ 0 & si\ -\xi \le y^- \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} e^{-\frac{2}{T}\xi(\xi-y)} & si\ \xi \le -y^- \\ 1 & si\ \xi \ge -y^- \end{cases}$$

(b) Fonction de répartition de $\inf_{[0,T]}\left\{x + \frac{t}{T}(y-x) + \lambda Y_t^{B,T,0}\right\} =$

$$= x + \inf_{[0,T]}\left\{\lambda B_t + \frac{t}{T}\left((y-x) - \lambda B_T\right)\right\} \underset{\lambda>0}{=} x + \lambda \inf_{[0,T]}\Big\{\underbrace{B_t - \frac{t}{T}\left(B_T - \frac{y-x}{\lambda}\right)}_{Y_t^{B,T,\frac{y-x}{\lambda}}}\Big\}$$

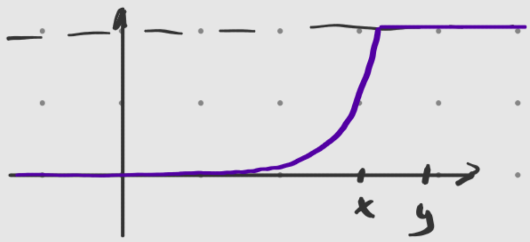
$$\mathbb{P}\left(x + \lambda \inf_{[0,T]} Y_t^{B,T,\frac{y-x}{\lambda}} \le u\right) = \mathbb{P}\left(\inf_{[0,T]} Y_t^{B,T,\frac{y-x}{\lambda}} \le \frac{u-x}{\lambda}\right) = \{\text{par (a)}\} =$$

$$= \begin{cases} e^{-\frac{2}{T}\left(\frac{u-x}{\lambda}\right)\left(\frac{u-y}{\lambda}\right)} & si\ \frac{u-x}{\lambda} \le \min\left(\frac{y-x}{\lambda}, 0\right) \quad (u \le x\wedge y) \\ 1 & si\ \frac{u-x}{\lambda} \ge \min\left(\frac{y-x}{\lambda}, 0\right) \quad (u \ge x\wedge y) \end{cases}$$

(c) Méthode simple de simulation de ce inf ?

$I = \inf\{\dots\}$

$$F_I(u) = \begin{cases} e^{-\frac{2}{\lambda^2 T}(u-x)(u-y)} & si\ u \le x\wedge y \\ 1 & si\ u \ge x\wedge y \end{cases}$$



Inversion de $F_I(u)$.

Soit $p \in (0,1]$ $\quad F_I(u) = p$

- $p = 1 \to F_I^{-1}(p) := \inf\{u : F_I(u) \ge p\} = x\wedge y$

- $p \in]0,1[\Rightarrow e^{-\frac{2}{\lambda^2 T}(u-x)(u-y)} = p$

$$(u-x)(u-y) + \frac{\lambda^2 T}{2}\log p = 0$$

$$u^2 - (x+y)u + xy + \frac{\lambda^2 T}{2}\log p = 0$$

$$\Delta = (x+y)^2 - 4\left(xy + \frac{\lambda^2 T}{2}\log p\right) = (y-x)^2 - 2\lambda^2 T \overbrace{\log p}^{<0} \geq 0$$

$$u_\pm = \frac{(x+y) \pm \sqrt{(y-x)^2 - 2\lambda^2 T \log p}}{2}$$

On cherche la solution $u^* < x \wedge y$, mais

$$u_+ \geq \frac{(x+y) + \sqrt{(y-x)^2}}{2} = \frac{x+y+|y-x|}{2} = x \vee y$$

Donc $u^* = u_-$.

Alors $$F_I^{-1}(u) = \begin{cases} x \wedge y, & u = 1 \\ \dfrac{(x+y) - \sqrt{(y-x)^2 - 2\lambda^2 T \log p}}{2} & \text{si } u \in]0,1[\end{cases}$$

$$F_I^{-1}(U) \overset{\mathcal{L}}{=} I \quad \text{où } U \sim \mathcal{U}([0,1]) \Rightarrow \text{simulation.}$$

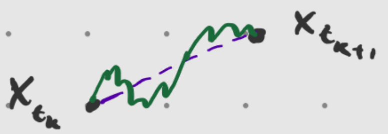
(2a) $\mathcal{L}\left((\bar{X}_t)_{t\in[0,T]} \,\middle|\, \sigma(\{\bar{X}_{t_k}\}\ k=0,\dots,n)\right) = ?$

ou $\bar{X}_{t_k} = x_k$, $k = 0 \dots n$

Si $t \in [t_k, t_{k+1}) \Rightarrow \bar{X}_t = \bar{X}_{t_k} + b(\bar{X}_{t_k})(\underbrace{t - t_k}_{\tau}) + \sigma(\bar{X}_{t_k})(W_t - W_{t_k})$

$s \in [0, \underbrace{t_{k+1} - t_k}_{T}]$

La m̃ loi que $\bar{X}_{\underbrace{t-t_k}_{\tau}} = \bar{X}_0 + b(\bar{X}_0)(\underbrace{t-t_k}_{s}) + \sigma(\bar{X}_0) W_{\underbrace{t-t_k}_{s}}$



Sachant $\bar{X}_0 = \bar{X}_{t_k}$ $\bar{X}_{t_{k+1}-t_k} = \bar{X}_{t_{k+1}}$

$$\mathcal{L}\left(\bar{X}_{t-t_k} \,\middle|\, \sigma(\{\bar{X}_{t_k}\}_{k=0\dots n})\right) = X_{t_k} + b(\bar{X}_{t_k})(t-t_k) + \sigma(\bar{X}_{t_k})\, Y_{t-t_k}^{B,\, t_{k+1}-t_k,\, \frac{\bar{X}_{t_{k+1}} - \bar{X}_{t_k} - b(t_{k+1}-t_k)}{\sigma(\bar{t}_k)}}$$

$$= \left\{ Y_t^{B,T,y} = Y_t^{B,T} + \frac{t}{T} y \right\} = X_{t_k} + b(\cancel{\bar{X}_{t_k}})(t-t_k) + \sigma(\bar{X}_{t_k}) Y_{t-t_k}^{B,\Delta t} + \frac{t-t_k}{\Delta t}\left(\bar{X}_{t_{k+1}} - \bar{X}_{t_k} - \cancel{b}\Delta t\right)$$

$$= \left(\frac{t_{k+1}-t}{t_{k+1}-t_k}\right) X_{t_k} + \left(\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}\right) X_{t_{k+1}} + \sigma(\bar{X}_{t_k}) \cdot Y_{t-t_k}^{B,t_{k+1}-t_k}$$

Alors,

(a) $(\bar{X}_t)_{t\in[t_k,t_{k+1}]}^{k=0,\dots,n-1}$ sont conditionnement indép. sachant $\{\bar{X}_{t_k}\}_{k=0,\dots,n}$

(b) $\mathcal{L}\left((\bar{X}_t)_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \mid \{X_{t_k}\}\right) = \mathcal{L}\left(X_{t_k} + \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} X_{t_{k+1}} + \sigma(\bar{X}_{t_k}) Y_{t-t_k}^{B,t_{k+1}-t_k}\right)$

$\mathcal{L}\left((\bar{X}_t)_{t\in[t_k,t_{k+1}]} \,\middle|\, \begin{matrix} X_{t_k}=x \\ X_{t_{k+1}}=y \end{matrix}\right) = \mathcal{L}\left(x + \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k} y + \sigma(\bar{X}_{t_k}) Y_{t-t_k}^{B,t_{k+1}-t_k}\right)$

(2b) $\mathbb{E}\left[f(X_T, \inf_{[0,T]} X_t)\right]$ $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ borélienne à ↗ linéaire

$\approx$

$\mathbb{E}\left[f(\bar{X}_T^n, \inf_{[0,T]} \bar{X}_t^n)\right]$

↳ loi joint?

1) On simule $(\bar{X}_{t_k}^n)_{k=0,\dots,n}$ ← par le schéma d'Euler, $\bar{X}_T^n = \bar{X}_{t_n}^n$

2) Pour $k=0,\dots,n-1$ $\mathcal{L}\left(\inf_{[t_k,t_{k+1}]} \bar{X}_t^n \mid \overset{x}{\bar{X}_{t_k}}, \overset{y}{\bar{X}_{t_{k+1}}}\right) = \mathcal{L}\left(x + \underbrace{\overset{\lambda}{\frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}}}_{T} y + \sigma(x) Y_{\underbrace{t-t_k}_{\tau}}^{B,\overbrace{t_{k+1}-t_k}^{T}}\right)$ $\tau \in [0,T]$

↳ indépendants

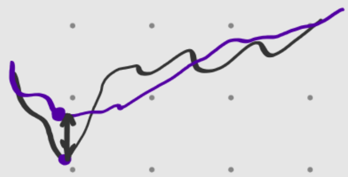
⇒ on applique (1c) pour simuler ces inf.

⇒ $\inf_{[0,T]} \bar{X}_t^n = \inf_k \inf_{[t_k,t_{k+1}]} \bar{X}_t^n$.

(2c) $f \in Lip$. Erreur de discrétisation? $\tilde{C}\sqrt{\frac{T}{n}}$

$$\mathbb{E}\left(\left|f(X_T, \inf_{[0,T]} X_t) - f(\bar{X}_T, \inf_{[0,T]} \bar{X}_t)\right|\right] \leq C\left(\mathbb{E}|X_T - \bar{X}_T| + \mathbb{E}|\inf X_T - \inf \bar{X}_T|\right)$$

$$|\inf X_T - \inf \bar{X}_T| \leq \sup_{[0,T]} |X_t - \bar{X}_t| \leq \tilde{C}\sqrt{\frac{T}{n}} \Rightarrow \text{ordre } \underline{n^{-1/2}}$$



(3a) Barrière $\mathbb{E}[g(X_T)\mathbb{1}_{\{\inf_{[0,T]} X_t \geq L\}}]$ $L \in (-\infty, x_0)$

$$\mathbb{E}[g(\bar{X}_T)\mathbb{1}_{\{\inf \bar{X}_t \geq L\}}] = \mathbb{E}\left[g(\bar{X}_T)\,\mathbb{P}\left(\inf \bar{X}_t \geq L \mid \{X_{t_k}\}_{k=0,\dots,n-1}\right)\right] = \{\text{indép condit.}\} =$$

$$= \mathbb{E}\left[g(\bar{X}_T)\prod_{k=0}^{n-1}\mathbb{P}\left(\inf_{[t_k,t_{k+1}]} \bar{X}_t \geq L \mid X_{t_k}, X_{t_{k+1}}\right)\right] = \{\text{on utilise } \mathcal{B}\} =$$

$$\mathcal{L}\left(\inf_{[t_k,t_{k+1}]} \bar{X}_t \mid X_{t_k}=x, X_{t_{k+1}}=y\right) = \mathcal{L}\left(x + \frac{t-t_k}{t_{k+1}-t_k}y + \underbrace{\sigma(x)}_{\lambda} Y^{B, t_{k+1}-t_k}_{t-t_k}\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(g(\bar{X}_T)\prod_{k=0}^{n-1}\left(1 - e^{-\frac{2n}{T\sigma(\bar{X}_{t_k})^2}(L-\bar{X}_{t_k})(L-\bar{X}_{t_{k+1}})}\right)\mathbb{1}_{\{X_{t_k} \geq L,\, k=0\dots n-1\}}\right]$$

<u>Simulation</u> 1) $\{\bar{X}_{t_k}\}$ par Euler

2) $\text{Payoff} = \Psi(\{\bar{X}_{t_k}\})$

(3b) Terme $\prod_{k=0}^{n-1}(1-e^{--})$ correctif?

algorithm naïve: $\mathbb{E}[g(\bar{X}_T)\mathbb{1}_{\{\inf_{[0,T]} \bar{X}_t \leq L\}}] \approx \mathbb{E}[g(\bar{X}_T)\mathbb{1}_{\{\inf \bar{X}_t \leq L\}}] =$

$= \mathbb{E}[g(\bar{X}_{t_n})\mathbb{1}_{\{\min_{k=0\dots n} \bar{X}_{t_k} \geq L\}}] \leftarrow$ pire vitesse de convergence

$\to$ le terme $\prod(1-e^{--})$ est une correction qui améliore la vitesse

(3c) Variances aux 3b et 2b?

(2b) $\mathbb{E}\left[g(\overline{X}_T)\prod_{k=0}^{n-1}\mathbb{1}_{\{\inf_{[t_k,t_{k+1}]}\overline{X}_t\geq L\}}\right]$

1) Simuler $\{\overline{X}_{t_k}\}$

2) Simuler $\inf_{[t_k,t_{k+1}]}\overline{X}_t$ → plus grande variance car on estime la proba conditionnelle $\mathbb{P}(\inf_{[0,T]}\overline{X}_t\geq L\mid \overline{X}_{t_k},\ k=0\ldots n-1)$ via MC au lieu de calcul exact

$$\boxed{\text{Exam 27 mars 2022}}$$

Exo (Hammersley)

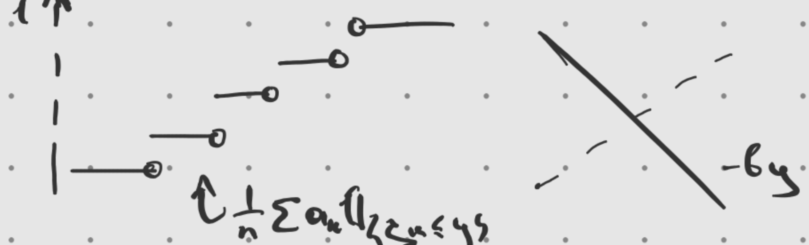
(1) $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)$ $\quad\xi_i<\xi_{i+1}\quad \xi_i\in[0,1]\quad a_i>0\quad b\in\mathbb{R}$

$$\varphi(y)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi_k\leq y\}}}_{\text{càdlàg}}-by \quad\to \varphi \text{ càdlàg}$$

M.q. • φ est càdlàg

• $\sup_{[0,1]}|\varphi(y)|=\max_{k=1:n}|\varphi(\xi_k)\vee\varphi(\xi_k-)|\vee|\varphi(1)|=$

$$=\max_{k=1:n}\left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^k a_\ell-b\xi_k\right|\vee\left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{k-1}a_\ell-b\xi_k\right|\vee\left|\frac{1}{n}\sum_1^n a_\ell-b\right|$$



const par morceau, by monotone →
max de $|\varphi(y)|$ est atteint soit en point de saut (ξ_k et ξ_k-) soit en 0 (où $\varphi=0$) soit en 1.

De plus $\varphi(\xi_k)=\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^n a_\ell\underbrace{\mathbb{1}_{\{\xi_\ell\leq\xi_k\}}}_{=1 \text{ ssi } \ell\leq k\ (\xi_k \text{ stt croissante})}-b\xi_k=\frac{1}{n}\sum_1^k a_\ell-b\xi_k$

$$\varphi(\xi_k^-) = \frac{1}{n}\sum_{1}^{k-1} a_\ell - b\,\xi_k \quad \text{car} \quad \{\xi_k - \varepsilon < \xi_k\}$$

(2) $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ $\quad \xi_i \in [0,1]^d$ $\quad d \geq 1$ t.q. $(\xi_1^d,\dots,\xi_n^d)$ est stt croissant

avec $\xi_n^d = 1$

(2a) $$D_n^*(\xi_1,\dots,\xi_n) := \sup_{x\in[0,1]^d} \left| \frac{1}{n}\sum_i \mathbb{1}_{\{\xi_k \in [0,x]\}} - \overset{\overset{\prod_{i=1}^d x_i}{\|}}{\mathrm{Vol}([0,x])} \right|$$

(2b) M.q. $$D_n^1(\xi_1^d,\dots,\xi_n^d) = \max_{1\leq k\leq n} \left|\xi_k^d - \frac{k}{n}\right| \vee \left|\xi_k^d - \frac{k-1}{n}\right|$$

$\|$

$$\sup_{x\in[0,1]} |\varphi(x)| \overset{(1)+(\xi_n^d=1)}{=} \max_{1\leq k\leq n} \left|\frac{k}{n} - \xi_k^d\right| \vee \left|\frac{k-1}{n} - \xi_k^d\right|$$

$\uparrow$ avec $b=1$

$a_\ell = 1$

(2c) $\tilde{\xi}_k = (\xi_k^1,\dots,\xi_k^{d-1})$ M.q.

$$D_n^*(\xi_1,\dots,\xi_n) = D_n^*(\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_n) \vee \max_{1\leq k\leq n}\ \sup_{x\in[0,1]^{d-1}} \left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{k} \mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \xi_k^d \prod_{i=1}^{d-1} x^i\right| \vee$$
$$\vee \left|\frac{1}{n}\sum_{\ell=1}^{k-1} \mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \xi_k^d \prod_{i=1}^{d-1} x^i\right|$$

$\|$

$$\sup_{x\in[0,1]^{d-1}}\ \sup_{z\in[0,1]} \left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \underbrace{\mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell)}_{a_\ell}\mathbb{1}_{\{\xi_\ell^d \leq z\}} - z\underbrace{\prod_{i=1}^{d-1} x^i}_{b}\right| = \{\text{par } (1) \text{ et } \xi_n^d = 1\} =$$

$$= \max_{1\leq k\leq n}\ \sup_{x\in[0,1]^{d-1}} \left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{k} \mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \xi_k^d \prod_{i=1}^{d-1} x^i\right| \vee \left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{k-1} \mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \xi_k^d \prod_{i=1}^{d-1} x^i\right| \vee$$

$$\vee D_n^*(\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_n) \qquad \longrightarrow D_n^*(\xi) \geq D_n^*(\tilde{\xi})$$

$\|$

$$\varphi(1) = \varphi(\xi_n^d)$$

$$\max_{1\leq k\leq n}\ \sup_{x\in[0,1]^{d-1}} \left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{k} \mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \xi_k^d \prod_{i=1}^{d-1} x^i\right| \vee \left|\frac{1}{n}\sum_{1}^{k-1} \mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \xi_k^d \prod_{i=1}^{d-1} x^i\right| \leq$$

$$\frac{k}{n}\left|\frac{1}{k}\sum_{1}^{k} \mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \prod_{i=1}^{d-1} x^i\right| + \left(\prod_{i=1}^{d-1} x^i\right)\left|\xi_k^d - \frac{k}{n}\right| \qquad \frac{k-1}{n}\left|\frac{1}{k-1}\sum_{1}^{k-1} \mathbb{1}_{[0,x]}(\tilde{\xi}_\ell) - \prod x^i\right| +$$
$$+ \left(\prod x^i\right)\left|\xi_k^d - \frac{k-1}{n}\right|$$

$$\overbrace{\frac{k}{n} D_k^*(\tilde{\xi})}^{\wedge 1} \qquad \frac{k-1}{n} D_{k-1}^{n}(\tilde{\xi})$$

$$\leq \frac{k}{n} D_k^*(\tilde{\xi}) + \sup_x \overbrace{\left(\prod x^i\right)}^{\leq 1} \underbrace{\max_{1\leq k\leq n} \left|\xi_k^d - \frac{k}{n}\right| \vee \left|\xi_k^d - \frac{k-1}{n}\right|}_{\underset{(2b)}{=} D_n^*(\xi_1^d, \dots, \xi_n^d)}$$

Donc $$D_n^*(\xi) \leq \max_{1\leq k\leq n} \frac{k D_k^*(\tilde{\xi})}{n} + D_n^*(\xi_1^d, \dots, \xi_n^d)$$

(3a) Suite de Halton pour dim d Estimation de sa discrépance

$p_1, \dots, p_d$ d premiers nombres différents

$$n = a_{i0} + a_{i1} p_i + a_{i2} p_i^2 + \dots + a_{ir} p_i^r \quad \text{où} \quad a_{ij} \in \{0, 1, \dots, p-1\}$$

$$\xi_n^i = \frac{a_{i0}}{p_i} + \frac{a_{i1}}{p_i^2} + \frac{a_{i2}}{p_i^3} + \dots + \frac{a_{ir}}{p_i^{r+1}} \in [0,1)$$

$$\xi_n = (\xi_n^1, \dots, \xi_n^d)$$

$$D_n^*(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq \frac{1}{n} \prod_{i=1}^d \left((p_i - 1) \left\lfloor \frac{\log(p_i n)}{\log(p_i)} \right\rfloor\right) \leq C \frac{(\log n)^d}{n}$$

(3b) Montrer l'existence de $C_d > 0$ t.q. $\forall n \geq 1$ $\exists (\xi_1, \dots, \xi_n) \in ([0,1]^d)^n$ t.q.

$$D_n^*(\xi_1, \dots, \xi_n) \leq C_d \frac{(\log(n+1))^{d-1}}{n}$$

On fixe n. $(\tilde{\xi}_\ell)_{\ell=1}^n$ suite de Halton dans $[0,1]^{d-1}$

On prend $\xi_\ell = (\underset{\substack{\cap \\ [0,1]^{d-1}}}{\tilde{\xi}_\ell}, \overset{\xi_\ell^d}{\overbrace{\frac{\ell}{n} - \frac{1}{2n}}})$ où $\tilde{\xi}_\ell$ la suite de Halton

$$D_n^*(\tilde{\xi}_1, \dots, \tilde{\xi}_n) \leq C_H \frac{(\log n)^{d-1}}{n} \quad \forall n$$

Par (2d) $\mathcal{D}_n^*(\xi_1,\dots,\xi_n) \leq \max_{k=1\dots n} \frac{k\mathcal{D}_k^*(\tilde{\xi}_1,\dots,\tilde{\xi}_k)}{n} + \underbrace{\mathcal{D}_n^*(\xi_1^d,\dots,\xi_n^d)}_{=\frac{1}{2n}} \leq$

$$\leq \max\left(\frac{k\, C_H \frac{(\log k)^{d-1}}{k}}{n} + \frac{1}{2n}\right) = \frac{\frac{1}{2} + C_H(\log n)^{d-1}}{n} \leq C_d \frac{(\log n)^{d-1}}{n}$$

(4) Principe de base de la simulation QMC et le rôle de $\mathcal{D}_n^*(\xi)$

Pour estimer $\mathbb{E}[f(U)]$ on veut utiliser $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k) \to \mathbb{E}[f(U)]$

Si ξ_k i.i.d. $\sim \mathcal{U}([0,1])$ on a LGN, TCL etc où l'erreur $\sim \frac{1}{\sqrt{n}}$

Mais on a $\frac{1}{n}\sum f(\xi_k) \to \int_0^1 f(u)\,du \;\; \forall f \in C \iff \frac{1}{n}\sum \delta_{\xi_k} \Rightarrow \lambda_d$ (Glivenko-Cantelli) $\to$ on peut cherche la suite (ξ_n) t.q. $\frac{1}{n}\sum \delta_{\xi_k} \Rightarrow \lambda_d$ (équirépartie) et la vitesse de convergence est mieux que pour MC standard.

Rôle de $\mathcal{D}_n^*$: pour f fct à variation finie au sens de la mesure on a l'inégalité de Koksma-Hlawka $\left|\frac{1}{n}\sum_i f(\xi_k) - \int f(u)\,du\right| \leq V(f)\cdot \mathcal{D}_n^*(\xi)$

C'est pourquoi on cherche les suites à disrépance faible

$\left(\mathcal{D}_n^*(\xi) \to 0\right.$ plus vite que $\frac{1}{\sqrt{n}}$. En fait, $\left.\frac{(\log n)^d}{n}\right)$

Petite digression En utilisant Hammersley et $\mathcal{D}_n^*(\xi_1,\dots,\xi_n) \geq c_d \frac{(\log n)^{\frac{d-1}{2}}}{n}$

m.q. $\exists\, \tilde{c}_d : \forall \xi = (\xi_n)_{n\geq 1}$, $\mathcal{D}_n^*(\xi) \geq \tilde{c}_d \frac{(\log n)^{\frac{d}{2}}}{n}$ infiniment souvent.

On prend $\xi_n \in [0,1]^d$ (quelconque) $\quad \check{\xi}_n := (\xi_n, \xi_n^{d+1})$

$$\mathcal{D}_n^*(\xi) \geq c_d \frac{(\log n)^{\frac{d-1}{2}}}{n} \quad \text{(Roth)}$$

$$c\,\frac{\log n}{n}$$

$$\mathcal{D}_n^*(\check{\xi}) \leq \frac{1}{n} \max_k k\mathcal{D}_k^*(\xi) + \underbrace{\mathcal{D}(\xi_1^{d+1}, \dots, \xi_n^{d+1})}_{\leq\, c\frac{\log n}{n}} \quad \text{Roth pour } \check{\xi}$$

$d > 2$

$$\frac{1}{n}\max_k k\mathcal{D}_k^*(\xi) \geq \mathcal{D}_n^*(\check{\xi}) - \mathcal{D}(\xi_1^{d+1}, \dots, \xi_n^{d+1}) \geq c_d \frac{(\log n)^{d-1}}{n} - c\,\frac{\log n}{n} \geq \tilde{c}\,\frac{(\log n)^{d-1}}{n}$$

$\tilde{c}\ \forall n$

Il existe $(n_\ell^*)_{\ell \geq 1}$: $n_\ell^* \mathcal{D}_{n_\ell^*}^* = \max_{k=1 \dots n_\ell^*} k\mathcal{D}_k^*(\xi)$.

Sinon, la suite $m_n = \max_{k=1\dots m} k\mathcal{D}_k^*(\xi)$ est bornée ?! $m_n \geq \tilde{c}\,(\log n)^{d-1} \to \infty$

Enfin, on a $\frac{1}{n_\ell^*} \max_{k=1:n_\ell^*} k\mathcal{D}_k^* = \frac{1}{\cancel{n_\ell^*}} \cdot \cancel{n_\ell^*} \cdot \mathcal{D}_{n_\ell^*}^* \geq \tilde{c}\,\frac{(\log n)^{d-1}}{n}$

Problème 1 Réduction de variance

$X_t = (X_t^1, \dots, X_t^d)$ $\quad X_t^i$ de carré intégrable

$X_0^i = x_0^i \quad i = 1:d$

$h_T = \varphi(X_T^1, \dots, X_T^d)$

$\nearrow$ à $\nearrow$ linéaire

$\forall i \quad k_T^i = \varphi(x_0^1, \dots, x_0^{i-1}, X_T^i, x_0^{i+1}, \dots, x_0^d) \rightsquigarrow P_i(x_0^1, \dots, x_0^d) = \mathbb{E}\, k_T^i$ on sait calculer explicitement

Variable de contrôle $k_T^{(\lambda)} = \sum_{i=1}^d \lambda_i k_T^i$, $\lambda \in \mathbb{R}^d$

(1) Exemple de telle situation

Option sur panier $h_T = \underbrace{(\sum_i w_i X_T^i - K)}_{\varphi(X_T^1, \dots, X_T^d)}^+$

$$k_T^i = \Big(w_i X_T^i - \overbrace{\big(K - \sum_{j \neq i} w_j x_0^j\big)}^{\tilde{K}}\Big)^+ \text{ - option vanille standard} \to \text{formule de BS}$$

(2) $\Sigma_i' = \left(\mathrm{Cov}(k_T^i, k_T^j)\right)_{ij}$ inversible

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[h_T - k_T^{(\lambda)}] = \mathbb{V}\mathrm{ar}[h_T] + \mathbb{V}\mathrm{ar}[k_T^{(\lambda)}] - 2\,\mathrm{Cov}(h_T, k_T^{(\lambda)}) = \qquad (\mathrm{Cov}(h_T, k_T^i))_i$$

$$= \mathbb{V}\mathrm{ar}[h_T] + \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \Sigma_{ij} - 2\sum_i \lambda_i \mathrm{Cov}(h_T, k_T^i) = \underbrace{\mathbb{V}\mathrm{ar}[h_T] + \lambda^T \Sigma \lambda - 2\lambda^T \mathrm{Cov}(h_T, k_T)}_{= \mathfrak{J}(\lambda)}$$

(3) $\mathbb{V}\mathrm{ar}[h_T - k_T^{(\lambda)}] \to \min_\lambda$

$\mathfrak{J}(\lambda)$ est stt convexe (Σ inversible) $\Rightarrow \nabla \mathfrak{J}(\lambda^*) = 0$

$$\nabla \mathfrak{J}(\lambda) = 2\Sigma\lambda - 2\mathrm{Cov}(h_T, k_T) = 0 \Rightarrow \lambda^* = \Sigma^{-1} \cdot \mathrm{Cov}(h_T, k_T)$$

inconnus

(4) Estimateur simple du vecteur λ^*

$\Sigma = \mathbb{E}\, k_T k_T^T$

$\mathrm{Cov}(h_T, k_T) = \mathbb{E}\, h_T \cdot k_T - \mathbb{E} h_T \mathbb{E} k_T$

} estimer via simulation $\Rightarrow$

$\Rightarrow \hat{\lambda}^* = \hat{\Sigma}^{-1} \widehat{\mathrm{Cov}}(h_T, k_T)$.

(5) Méthodes de réduction de variance

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[h_T - k_T^{(\lambda^*)}] \leq \mathbb{V}\mathrm{ar}[h_T]$$

$\parallel$ Vrai si $\mathrm{Cov}(h_T, k_T) \neq 0$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[h_T] - \mathrm{Cov}(h_T, k_T)^T \Sigma^{-1} \mathrm{Cov}(h_T, k_T)$$

$$\mathbb{E}[h_T] = \mathbb{E}[h_T - k_T^{(\lambda^*)}] + \sum_{i=1}^d \lambda_i^* P_i(x_0^1, \dots, x_0^d)$$

Simuler $X_T^{(m)}$ $m = 1, \dots, N$

$$\mathbb{E}[h_T] \approx \sum_{i=1}^d \lambda_i^* P_i(x_0^1, \dots, x_0^d) + \frac{1}{N}\sum_{m=1}^N \left(\varphi(X_T^{(m)}) - \sum \lambda_i^* \varphi(\dots x_0^{i-1}, X_T^{(m),i}, x_0^{i+1} \dots)\right)$$

Problème 2 Autour du schéma d'Euler

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t$$

$\in \mathbb{R}^d$; W_t : q-dim

Schéma d'Euler : (pas $\frac{T}{n}$)

$$\bar{X}_{t_{k+1}} = \bar{X}_{t_k} + b(X_{t_k})(t_{k+1}-t_k) + \sigma(X_{t_k})(W_{t_{k+1}}-W_{t_k})$$

$$\bar{X}_t = \bar{X}_{\underline{t}} + b(\bar{X}_{\underline{t}})(t-\underline{t}) + \sigma(\bar{X}_{\underline{t}})(W_t - W_{\underline{t}})$$

b, σ sont à $\nearrow$ linéaire : $|b(x)| + \|\sigma(x)\| \leq C(1+|x|)$

Contrôle de moments

b, σ à $\nearrow$ pol (on a linéaire) $\Rightarrow$

$$\left\| \sup_{t\in[0,T]} |X_t| \right\|_p + \left\| \sup |\bar{X}_t| \right\|_p \leq C(1+\|X_0\|_p)$$

$b, \sigma \in Lip \Rightarrow ? \Rightarrow \exists!$ solution forte de l'EDS

À partir de maintenant, $d=q=1$, $b \in Lip$, $\sigma(x) \equiv \sigma > 0$

(1a) m.q. $\displaystyle \sup_{[0,T]} |\bar{X}_t - X_t| \leq e^{[b]_{Lip}T} \sup_{[0,T]} \left| \int_0^t b(X_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}})\, ds \right|$

$$X_t = x + \int_0^t b(X_s)ds + \sigma W_t$$

$$\bar{X}_t = x + \int_0^t b(\bar{X}_{\underline{s}})ds + \sigma W_t$$

$$|\bar{X}_t - X_t| \leq \left| \int_0^t b(X_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}})ds \right| \leq \left| \int_0^t b(X_s) - b(\bar{X}_s)ds \right| + \left| \int_0^t b(\bar{X}_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}})ds \right| \leq$$

$$\leq [b]_{Lip}\int_0^t |\bar{X}_s - X_s|ds + \sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t b(\bar{X}_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}})ds\right|$$

ne dépend pas de t

Par Gronwall, $|\bar{X}_t - X_t| \leq e^{[b]_{Lip} t} \cdot \sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t b(\bar{X}_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}})ds\right| \to \sup|\bar{X}_t - X_t| \leq \ldots$ (avec $t \leadsto T$)

(1b) $\exists C^{(1)}_{p,b,\sigma,T} \geq 0 \quad \left\|\sup_{[0,T]} |\bar{X}_t - X_t|\right\|_p \leq C^{(1)}_{p,b,\sigma,T}(1+\|X_0\|_p)\sqrt{\frac{T}{n}}$

$$\left\|\sup|\bar{X}_t - X_t|\right\|_p = e^{[b]_{Lip}T}\left\|\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t b(\bar{X}_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}})ds\right|\right\|_p \leq e^{[b]_{Lip}T}\left\|\int_0^T [b]_{Lip}|\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|ds\right\|_p \leq$$

$$\leq e^{[b]_{Lip}T}\cdot[b]_{Lip}\cdot\left\|\int_0^T |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|ds\right\|_p \leq C\int_0^T \underbrace{\|\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}\|_p}ds$$

$$\|\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}\|_p = \Big\|\underbrace{\int_{\underline{s}}^s b(\bar{X}_{\underline{s}})ds}_{\substack{(s-\underline{s})|b(\bar{X}_{\underline{s}})| \\ \wedge \\ 1+|\bar{X}_{\underline{s}}|}}\Big\|_p + \sigma\underbrace{\|W_s - W_{\underline{s}}\|_p}_{= c_p\sqrt{s-\underline{s}}} \leq C(1+|x|)\frac{T}{n} + \sigma c_p\sqrt{\frac{T}{n}} \leq$$

$$\leq C^{(1)}(1+|x|)\sqrt{\frac{T}{n}}$$

(2) b dérivable, $b' \in Lip$. M.q.

$$\sup_{[0,T]}\left|\int_0^t b(\bar{X}_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}})ds\right| \leq [b]_{Lip}\frac{T}{n}\int_0^T |b(\bar{X}_{\underline{s}})|ds + [b']_{Lip}\int_0^T |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|^2 ds + \sigma\sup_{[0,T]}\left|\int_0^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}})ds\right|$$

$\wedge$ $\qquad |\ldots| \leq [b]_{Lip}$

$$\left|\int_0^t b'(\eta_s)(\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}})ds\right| = \left|\int_0^t \underbrace{(b'(\eta_s) - b'(\bar{X}_{\underline{s}}))}_{|\ldots| \leq [b']_{Lip}|\eta_s - \bar{X}_{\underline{s}}| \leq [b']_{Lip}|\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|}(\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}})ds\right| + \left|\int_0^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})\underbrace{(\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}})}_{b(\bar{X}_{\underline{s}})\underbrace{(s-\underline{s})}_{\leq \frac{T}{n}} + \sigma(W_s - W_{\underline{s}})}ds\right| \leq$$

$\eta_s \in [\bar{X}_{\underline{s}}, \bar{X}_s]$

$$\leq [b']_{Lip}\int_0^T |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|^2 ds + [b]_{Lip}\cdot\frac{T}{n}\int_0^T |b(\bar{X}_{\underline{s}})|ds + \sigma\sup_{t\in[0,T]}\left|\int_0^t b'(X_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}})ds\right|$$

(3a) M.q. $\sup_{n\geq 1}\left\|\int_0^T |b(\bar{X}^n_{\underline{s}})|ds\right\|_p < +\infty$ et $\exists C^{(2)}_{p,b,\sigma,T}$ t.q.

$$\left\|\int_0^T |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|^2 ds\right\|_p \leq C^{(2)}_{p,b,\sigma,T}(1+\|X_0\|_p)\frac{T}{n}$$

$$\int_0^T |b(\bar{X}^n_{\underline{s}})|ds \leq C\int_0^T (1+|\bar{X}^n_{\underline{s}}|)ds$$

$$\|\ldots\|_p \leq \tilde{C}\int_0^T (1+\|X_0\|_p)ds < \infty$$

$$\int_0^T |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|^2 ds \leq 2\int_0^T |b(\bar{X}_{\underline{s}})(s-\underline{s})|^2 + \sigma^2 |W_s - W_{\underline{s}}|^2 ds$$

$$\|\cdots\|_p \leq 2\int_0^T \underbrace{\|b(\bar{X}_{\underline{s}})^2\|_p}_{\leq C_{b,p}(1+\|X_0\|^2)} \left(\frac{T}{n}\right)^2 + \sigma^2 \underbrace{\|(W_s - W_{\underline{s}})^2\|_p}_{\leq C_p\left(\frac{T}{n}\right)} ds \leq C_{p,b,\sigma,T}(1+\|X_0\|^2)\left(\frac{T}{n}\right)$$

(3b) M.q. $\forall t = \frac{kT}{n}$ $(t = \underline{t})$ $\displaystyle\int_0^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}})ds = \int_0^t (\bar{s}-s)b'(\bar{X}_{\underline{s}})dW_s$ et

$$d(sW_s) = s\,dW_s + W_s ds$$

$$\underbrace{t_{k+1}(W_{t_{k+1}} - W_{t_k}) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} s\,dW_s + \int_{t_k}^{t_{k+1}} W_s - W_{t_k} ds}_{\text{I.P.P.}}$$

$$\forall t \quad \int_{\underline{t}}^{t} b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}})ds = b'(\bar{X}_{\underline{t}})\int_{\underline{t}}^{t}(t-s)dW_s$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+1}} b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}})ds = b'(\bar{X}_{t_k})\int_{t_k}^{t_{k+1}}(W_s - W_{t_k})ds = b'(\bar{X}_{t_k})\int_{t_k}^{t_{k+1}}(t_{k+1}-s)dW_s$$

$$\int_{t_k}^{t_{k+n}} b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}})ds = \sum_{l=0}^{n-1}\int_{t_{k+l}}^{t_{k+l+1}} b'(\bar{X}_{\underline{s}})(\bar{s}-s)dW_s = \int_{t_k}^{t_{k+n}} b'(\bar{X}_{\underline{s}})(\bar{s}-s)dW_s$$

(3c) M.q. $\displaystyle\underbrace{\sup_{[0,T]}\left|\int_0^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}})ds\right|}_{} \leq \sup_{[0,T]}\left|\int_0^t (\bar{s}-s)b'(\bar{X}_{\underline{s}})dW_s\right| + \frac{T}{n}\sup_{[0,T]}|b'(\bar{X}_{\underline{t}})|\cdot|W_t - W_{\underline{t}}|$

$$= \int_0^{\underline{t}} \cdots + \int_{\underline{t}}^{t}\cdots \overset{3b}{=} \underbrace{\int_0^{\underline{t}} (\bar{s}-s)b'(\bar{X}_{\underline{s}})dW_s}_{\leq \sup_t \left|\int_0^t \cdots dW_s\right|} + \underbrace{(t-\underline{t})}_{\leq \frac{T}{n}} \sup|b'(\bar{X}_{\underline{t}})|\cdot|W_t - W_{\underline{t}}|$$

(3d) M.q. $\displaystyle\left\|\sup_{[0,T]}\left|\int_0^t (\bar{s}-s)b'(\bar{X}_{\underline{s}})dW_s\right|\right\|_p \leq \varkappa_p \frac{T}{n}\left\|\int_0^T |b'(\bar{X}_{\underline{s}})|^2 ds\right\|_{\frac{p}{2}}^{1/2}$

Par l'inégalité de BDG, $\exists C_p : \mathbb{E}\sup|M_t|^p \leq C_p\, \mathbb{E}\langle M\rangle_T^{p/2}$

$M_t = \displaystyle\int_0^t (\bar{s}-s)b'(\bar{X}_s)dW_s$ est une vraie martingale car

$$\mathbb{E}\int_0^T (\bar{s}-s)^2 b'(\bar{X}_{\underline{s}})^2 ds \leq \left(\frac{T}{n}\right)^2 \int_0^T C_b(1+\|X_0\|^2)ds < \infty$$

$$\langle M\rangle_t = \int_0^t (\bar{s}-s)^2 b'(\bar{X}_{\underline{s}})^2 ds \leq \left(\frac{T}{n}\right)^2 \int_0^T |b'(\bar{X}_{\underline{s}})^2| ds$$

Par BDG $\|\sup_{[0,T]}|M_t|\|_p^p = \mathbb{E}(\sup_{[0,T]}|M_t|)^p \leq C_p\left(\frac{T}{n}\right)^p \mathbb{E}\left(\int_0^T |b'(\bar{X}_{\underline{s}})|^2 ds\right)^{p/2}$

$$C_p^{1/p} \quad \Downarrow (\ldots)^{1/p}$$

$$\|\sup_{[0,T]}|M_t|\|_p \leq \underset{\parallel}{\varkappa_p} \frac{T}{n} \cdot \sqrt{\left\|\int_0^T |b'(\bar{X}_{\underline{s}})|^2 ds\right\|}$$

(3e) Majoration pour $\|\sup_{[0,T]}|W_t - W_{\underline{t}}|\|_p \leq C_p\sqrt{\frac{T}{n}}\sqrt{1+\log n}$

$\exists C^{(3)}_{p,b,\sigma,T}$ t.q. $\|\sup_{[0,T]}|\int_0^t (b(\bar{X}_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}}))ds|\|_p \leq C^{(3)}(1+\|X_0\|_p^2)\frac{T}{n}$

Par (2), $\|\sup_{[0,T]}|\int_0^t (b(\bar{X}_s) - b(\bar{X}_{\underline{s}}))ds|\|_p \leq$

$$\leq [b]_{Lip}\left\|\int_0^T |b(\bar{X}_{\underline{s}})|ds\right\|_p \frac{T}{n} + [b']_{Lip}\left\|\int_0^T |\bar{X}_s - \bar{X}_{\underline{s}}|^2 ds\right\|_p + \sigma\left\|\sup_{[0,T]}\left|\int_0^t b'(\bar{X}_{\underline{s}})(W_s - W_{\underline{s}})ds\right|\right\|_p$$

$\wedge$ 3a: $\underbrace{\sup_n |\ldots| < \infty}_{C_{p,b}}$

$\wedge$ 3a: $C^{(2)}(1+\|X_0\|_p^2)\frac{T}{n}$

$\wedge$ (3d): $\varkappa_p \left\|\int_0^T \underbrace{|b'(\bar{X}_{\underline{s}})|^2}_{\leq 2|b'(0)|^2 + [b']_{Lip}|\bar{X}_{\underline{s}}|^2} ds\right\|_{p/2}^{1/2} \frac{T}{n}$

$$\underbrace{\qquad \sup|\ldots| \leq C(1+\|X_0\|_p^2)}_{C_{b,p}}$$

(4) Conclusion?

Enfin, on a montré (1a + 3e) que

$$\|\sup_{t\in[0,T]}|\bar{X}_t - X_t|\|_p \leq C_{p,b,\sigma,T}(1+\|X_0\|_p^2)\cdot\frac{T}{n}$$

si $\sigma(x) \equiv \sigma$ et $b \in C^1_{Lip}$

C'est le thm sur l'erreur forte pour le schéma de Milstein

qui coïncide dans ce cas avec le schéma d'Euler car $\sigma' \equiv 0$.

30 Mars 2010 — Vitesse de convergence L^2 d'un algo stochastique

$H : \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}^d$ borélienne et $Z : (\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P}) \to \mathbb{R}^q$

$$\forall y \in \mathbb{R}^d \quad \|H(y,Z)\|_2 \leq C_{H,Z}(1+|y|) \quad (*)$$

M.q. $h(y) = \mathbb{E}\, H(y,Z)$ définit bien h vérifiant

$$\forall y \in \mathbb{R}^d \quad |h(y)| \leq C_{H,Z}(1+|y|)$$

Par $(*)$ $H(y,\cdot) \in L^2 \Rightarrow H(y,\cdot) \in L^1$ et

$$|h(y)| \leq \mathbb{E}|H(y,Z)| \leq \sqrt{\mathbb{E}|H(y,Z)|^2} \overset{(*)}{\leq} C_{H,Z}(1+|y|)$$

Algo : $Y_{n+1} = Y_n - \gamma_{n+1} H(Y_n, Z_{n+1})$, $Y_0 \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$

$\gamma_n > 0 \quad \gamma_n \to 0$

(1) On suppose que $\exists y^* \in \mathbb{R}^d$ et $\exists c > 0 : \forall y \in \mathbb{R}^d$

$$\langle y - y^*, h(y) \rangle \geq c|y-y^*|^2 \quad (**)$$

(1a) M.q. $\{h=0\} = \{y^*\}$

$$\forall y : h(y) = 0 \quad \langle y-y^*, \overset{\overset{0}{\shortparallel}}{h(y)} \rangle \geq c|y-y^*|^2 \Rightarrow \underline{y = y^*}$$

$h(y^*) = 0$? Sinon $u = y^* - \overset{>0}{\lambda} \dfrac{h(y^*)}{|h(y^*)|}$ $\langle u - y^*, h(y) \rangle \geq 0$ $-\lambda \left\langle \dfrac{h(y^*)}{|h(y^*)|}, h(y) \right\rangle \geq c\lambda^2$ $\lambda \to \infty$?!

(1b) M.q. sous des hypos additionnelles la suite $(Y_n)_{n\geq 0}$ cvg^{ce} p.s vers Y_n

On veut applique Robbins-Siegmund

avec la fonction de Lyapounov $V(y) = \frac{1}{2}|y-y^*|^2$

(i) V Fonction de Lyapounov?

$\langle y-y^*, \nabla V(y) \rangle \geq |y-y^*|^2 > 0$

$|\nabla V(y)| = |y-y^*| \leq C\sqrt{1+V(y)}$ -> croissance ss-quadratique

(ii) $\|H(y,Z)\|_2 \leq C\sqrt{1+V(y)}$ par (*)

(iii) $\sum \gamma_n^2 < \infty$, $\sum \gamma_n = \infty$

(iv) $Y_0 \perp\!\!\!\perp (Z_n)$ et $Y_0 \in L^2$

Y_n est bornée sur Ω^0

Alors $V(Y_n) \to V_\infty$ p.s. $\Omega^0 = \{\omega : V(Y_n) \to V_\infty$ et $\sum \gamma_n \langle \nabla V, h \rangle (Y_n) < \infty \}$

$\liminf \langle \nabla V, h \rangle (Y_n) = 0$ sinon $\sum \gamma_n \underbrace{\langle \nabla V, h \rangle}_{\geq \varepsilon} (Y_n) \geq \varepsilon \sum \gamma_n = \infty$?!

Ss-suite qui converge $Y_n \to Y_\infty$

Donc $\langle \nabla V, h \rangle = \underbrace{\langle Y_n - Y^*, h(Y_n) \rangle}_{\to 0} \geq C|Y_n - Y^*|$ => $Y_n \xrightarrow{p.s.} Y^*$

et dans L^p $p \in (0,2)$

(2) $\mathcal{E}_n := \mathbb{E}|Y_n - y^*|^2$

(2a) M.q. $\forall n$ $\mathcal{E}_{n+1} \leq \mathcal{E}_n - 2c\gamma_{n+1}\mathcal{E}_n + \gamma_{n+1}^2 \mathbb{E}|H(Y_n, Z_{n+1})|^2$

$\mathcal{E}_{n+1} \leq \mathbb{E}|(Y_{n+1} - Y_n) + (Y_n - y^*)|^2 \leq \mathcal{E}_n^2 + \mathbb{E}|\underbrace{Y_{n+1} - Y_n}_{-\gamma_n H(Y_n, Z_{n+1})}|^2 + 2\mathbb{E}\langle Y_{n+1} - Y_n, Y_n - y^* \rangle \leq$

$\leq \mathcal{E}_n^2 + H_{n+1}^2 \mathbb{E}|H(Y_n, Z_{n+1})|^2 - 2\gamma_n \mathbb{E}[\underbrace{\langle Y_n - y^*, \overbrace{\mathbb{E}[H(Y_n, Z_{n+1}) | Y_n]}^{h(Y_n)} \rangle}_{\geq C|Y_n - y^*|^2}] \leq$

$$\leq \varepsilon_n^2 - 2c\gamma_n\varepsilon_n + \gamma_{n+1}^2\,\mathbb{E}|H(Y_n, Z_{n+1})|^2$$

(2b) M.q. $\forall n \geq 0 \quad \mathbb{E}|H(Y_n, Z_{n+1})|^2 \leq C'(1+\varepsilon_n)$

$$\Downarrow (+2a)$$

et $\quad \varepsilon_{n+1} \leq \varepsilon_n(1 - 2c\gamma_{n+1} + C'\gamma_{n+1}^2) + C'\gamma_{n+1}^2$

$$\mathbb{E}|H(Y_n, Z_{n+1})|^2 = \mathbb{E}\,\mathbb{E}\left[|H(Y_n, Z_{n+1})|^2 \,|\, Y_n\right] \leq \mathbb{E}\, C_{H,Z}^2(1+|Y_n|)^2 \leq$$

$$\leq C_{H,Z}^2\,\mathbb{E}(1+|Y_n - y^*| + |y^*|)^2 \leq C'\,\mathbb{E}(1+|Y_n - y^*|^2) = C'(1+\varepsilon_n)$$

(3) On pose $\forall n \geq 0 \quad \tilde{\varepsilon}_n = \frac{\varepsilon_n}{\gamma_n} \quad (\gamma_0 = 1)$ et $a_n = \frac{1}{\gamma_{n+1}}\left[\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}(1 - 2c\gamma_{n+1}) - 1\right]$

(3a) M.q. $\forall n \geq 0 \quad \tilde{\varepsilon}_{n+1} \leq \tilde{\varepsilon}_n\left(1 + (a_n + C'\gamma_n)\gamma_{n+1}\right) + C'\gamma_{n+1}$

$$\tilde{\varepsilon}_{n+1} = \frac{\varepsilon_{n+1}}{\gamma_{n+1}} \overset{(2b)}{\leq} \varepsilon_n\left(\frac{1}{\gamma_{n+1}} - 2c + C'\gamma_{n+1}\right) + C'\gamma_{n+1} =$$

$$= \tilde{\varepsilon}_n\left(\underbrace{\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} - 2c\gamma_n + C'\gamma_{n+1}\gamma_n - 1}_{= (a_n + C'\gamma_n)\gamma_{n+1}} + 1\right) + C'\gamma_{n+1} \leq \tilde{\varepsilon}_n\left(1 + (a_n + C'\gamma_n)\gamma_{n+1}\right) + C'\gamma_{n+1}$$

(3b) M.q. si $\limsup a_n = -\varkappa^* < 0 \Rightarrow \exists n^* \ \forall n \geq n^*$

$$\tilde{\varepsilon}_{n+1} \leq \tilde{\varepsilon}_n\left(1 - \tfrac{1}{2}\varkappa^*\gamma_{n+1}\right) + C'\gamma_{n+1}$$

$\exists n_1^* : \forall n \geq n_1^* \quad a_n \leq -\frac{\varkappa^*}{2} - \varepsilon \quad \left(\varepsilon < \frac{\varkappa^*}{2}\right)$

$$\tilde{\varepsilon}_{n+1} \leq \tilde{\varepsilon}_n\left(1 + (a_n + \underbrace{C'\gamma_n}_{\to 0})\gamma_{n+1}\right) + C'\gamma_{n+1} \Rightarrow \{n^* = n_1^* \vee n_2^*\} \Rightarrow$$

$(\exists n_2^* \ \forall n \geq n_2^* \quad C'\gamma_n < \varepsilon)$

$$\Rightarrow \forall n \geq n^* \quad \tilde{\varepsilon}_{n+1} \leq \tilde{\varepsilon}_n\left(1 + \left(-\frac{\varkappa^*}{2} - \cancel{\varepsilon} + \cancel{\varepsilon}\right)\gamma_{n+1}\right) + C'\gamma_{n+1}$$

(3c) M.q. $\tilde{\mathcal{E}}_n \leq \tilde{\mathcal{E}}_{n^*} \vee \frac{2C'}{\varkappa^*}$ $\left(\rightarrow \mathcal{E}_n \leq C''\gamma_n \rightarrow \|\gamma_n - y^*\|_2 \leq C''\sqrt{\gamma_n}\right)$

$$\forall n \geq \tilde{n}_{n^*} \quad \tilde{\mathcal{E}}_{n+1} \leq \tilde{\mathcal{E}}_n\left(1 - \frac{1}{2}\varkappa^*\gamma_{n+1}\right) + C'\gamma_{n+1} \leq \frac{2C'}{\varkappa^*} - C'\cancel{\gamma_{n+1}} + C'\cancel{\gamma_{n+1}} \leq \frac{2C'}{\varkappa^*}$$

$$\Uparrow \frac{2C'}{\varkappa^*}$$

Si $\frac{2C'}{\varkappa^*} > \tilde{\mathcal{E}}_{n^*}$

Sinon $\tilde{\mathcal{E}}_{n+1} \leq \tilde{\mathcal{E}}_{n^*} - \frac{1}{2}\varkappa^*\gamma_{n+1}\left(\tilde{\mathcal{E}}_{n^*} - \frac{2C'}{\varkappa^*}\right) \leq \tilde{\mathcal{E}}_{n^*}$

(3d) M.q. si $\gamma_n = \frac{\bar{\gamma}}{n^\alpha}$, $\alpha \in (0,1)$ alors $\limsup a_n < 0$

$$a_n = \frac{1}{\gamma_{n+1}}\left[\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}}(1 - 2c\gamma_{n+1}) - 1\right] = \frac{(n+1)^\alpha}{\bar{\gamma}}\left(\underbrace{\left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha}_{\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \sim 1 + \frac{\alpha}{n}}\left(1 - \frac{2c\bar{\gamma}}{(n+1)^\alpha}\right) - 1\right) \sim$$

$$\sim \frac{(n+1)^\alpha}{\bar{\gamma}}\left(\cancel{1} + \frac{\alpha}{n} - \frac{2c\bar{\gamma}}{(n+1)^\alpha} - \frac{2\alpha c\bar{\gamma}}{(n+1)^\alpha n} - \cancel{1}\right) \rightarrow -2c < 0 \Rightarrow \limsup a_n < 0$$

$0 < \alpha < 1$

(3e) $\gamma_n = \frac{\bar{\gamma}}{n}$ Condition sur $\bar{\gamma}$: $\limsup a_n < 0$?

$$a_n = \frac{n+1}{\bar{\gamma}}\left(\frac{n+1}{n}\left(1 - \frac{2c\bar{\gamma}}{n+1}\right) - 1\right) = \frac{n+1}{\bar{\gamma}}\left(\frac{1}{n} - \frac{2c\bar{\gamma}}{n+1} - \frac{2c\bar{\gamma}}{n(n+1)}\right) \rightarrow \frac{1 - 2c\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}}$$

Il faut que $1 - 2c\bar{\gamma} < 0$ $\quad \underline{\bar{\gamma} > \frac{1}{2c}}$

(3f) M.q. si $\lim_n a_n = a_\infty > 0$ alors $\sum \gamma_n < +\infty$

Ce n'est pas vrai ? Donc (3e) quand $\bar{\gamma} \in \left(0, \frac{1}{2\bar{\gamma}}\right)$ on

a $\lim a_n = \frac{1 - 2c\bar{\gamma}}{\bar{\gamma}} > 0$ mais $\sum \gamma_n = \sum \frac{\bar{\gamma}}{n} = \infty$?

$$\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}^2} - 2c\frac{\gamma_n}{\gamma_{n+1}} - \frac{1}{\gamma_{n+1}} = \frac{(n+1)^2}{\bar{\gamma}n} - \left(2c\,\overset{\nearrow 1}{\frac{n+1}{n}}\right) - \frac{(n+1)n}{\bar{\gamma}n}$$

$$\frac{n+1}{\bar{\gamma}n} \rightarrow \frac{1}{\bar{\gamma}}$$