# TD Aléa moral

## Exercice 1

1. Information symétrique.

- L'employeur observe le niveau d'effort
- Il cherche à maximiser son profit
- Il va proposer un niveau de salaire qui dépend du niveau d'effort observé de l'agent.

Soit le programme d'optimisation suivant :

$$\underset{(w_i)}{\text{Max}} \quad P_S(a_i)(30 - w_i) + P_E(a_i)(10 - w_i)$$

$$\text{sc.} \quad w_i - a_i + 1 \geqslant 1$$

- On montre facilement que la contrainte va être saturée :

$$\frac{\partial \pi(e_i, w_i)}{\partial w_i} < 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial u(e_i, w_i)}{\partial w_i} > 0$$

↳ optimum : cas où le revenu minimum pour lequel l'agent accepte le contrat. (par chaque niveau d'effort)

Le programme devient :

$$\text{Max } P_S(a_i)(30 - w_i) + P_E(a_i)(10 - w_i)$$

$$\text{S.C} \quad w_i - a_i + 1 = 1$$

$\Rightarrow$ Donc $w_i^* = a_i$

Soit $w_2^* = a_2 = 2$

$w_1^* = a_1 = 1$

$\rightarrow$ L'agent sera indiff entre fournir $a_1 = 1$ ou $a_2 = 2$ (car CP saturée).

$\rightarrow$ Or l'employeur n'obtient pas le même profit, il va donc proposer seulement $\underline{\underline{1}}$ contrat.

$+$ Si $a = 1 = \Pi(w_1^*, a_1) = \frac{2}{3}(10-1) + \frac{1}{3}(30-1)$

$$= \frac{47}{3}$$

$+$ Si $a = 2 = \Pi(w_2^*, a_2) = \frac{2}{3}(30-2) + \frac{1}{3}(10-2)$

$$= \frac{64}{3}$$

Aléa

$\Rightarrow$ Contrat d'équilibre : $\{a_2 = 2 \, ; \; w_2^* = 2\}$

## 2. Information asymétrique

a) $\Rightarrow$ Problème d'aléa moral

(explications)
à détailler

$\rightarrow$ nécessité d'un contrat incitatif.

b) Contrat optimal pour obtenir $a = 2$

↳ on introduit une contrainte incitative

Soit le programme :

$$\text{Max} \quad \frac{2}{3}(30 - w_S) + \frac{1}{3}(10 - w_E)$$

$$\text{s.c} \left(\frac{2}{3} w_S + \frac{1}{3} w_E\right) - 2 + 1 \geqslant 1 \qquad (CP)$$

$$\left(\frac{2}{3} w_S + \frac{1}{3} w_E\right) - 2 + 1 \geqslant \left(\frac{1}{3} w_S + \frac{2}{3} w_E\right) - 1 + 1 \; (CI)$$

On pose le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(w_S, w_E, \lambda, \mu) = \frac{2}{3}(30 - w_S) + \frac{1}{3}(10 - w_E) + \lambda\left(\frac{2}{3}w_S + \frac{1}{3}w_E - 2\right) + \mu\left(\frac{1}{3}w_S - \frac{1}{3}w_E - 1\right)$$

Condition de Kuhn Tucker :

+ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_S} = 0 \Leftrightarrow -\frac{2}{3} + \frac{2}{3}\lambda + \frac{1}{3}\mu = 0$ (1)

+ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_E} = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\lambda - \frac{1}{3}\mu = 0$ (2)

+ $\lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \Leftrightarrow \lambda\left(\frac{2}{3}w_S + \frac{1}{3}w_E - 2\right) = 0$ (3)

+ $\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \Leftrightarrow \mu\left(\frac{1}{3}w_S - \frac{1}{3}w_E - 1\right) = 0$ (4)

+ $\lambda \geq 0$ ; $\mu \geq 0$

Avec (1) et (2) $\Leftrightarrow -1 + \lambda = 0$

$\Leftrightarrow \boxed{\lambda = 1}$

et $\boxed{\mu = 0}$

Donc la CP est saturée :

$$\frac{2}{3} w_S + \frac{1}{3} w_E - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad w_S = 3 - \frac{1}{2} w_E$$

D'après (4)

$$\frac{1}{3} w_S - \frac{1}{3} w_E - 1 \geqslant 0 \qquad (\text{car } \mu = 0)$$

On remplace $w_S$ :

$$\frac{1}{3}\left(3 - \frac{1}{2} w_E\right) - \frac{1}{3} w_E - 1 \geqslant 0$$

$$\Leftrightarrow \quad w_E \leq 0$$

Si on considère que un salaire est toujours $\geqslant 0$

$$\left.\begin{array}{l} \text{On a } w_E^* = 0 \\ \qquad w_S^* = 3 \end{array}\right\} \rightarrow \text{contrat optimal}$$

C. Profit espéré :

$$\Pi = \frac{2}{3}(30 - 3) + \frac{1}{3}(10 - 0) = \frac{64}{3}$$

Aléa

# Exercice 2

1). Information symétrique.

a) $$\text{Max } P_S(e_i)(50\,000 - w_i) + P_E(e_i)(25\,000 - w_i)$$

$$\text{s.c } \sqrt{w_i} - v(e_i) \geq 120$$

On montre facilement que CP est saturée.

On a donc $w_i^* = \left(120 + v(e_i)\right)^2$

Soit $w_1^* = 25\,600$ ; $w_2^* = 19\,600$ ; $w_3^* = 15\,625$.

b) Profit espéré :

+ pour $e = e_1$ : $\Pi(e_1, w_1) = 18\,150$

+ pour $e = e_2$ = $\Pi(e_2, w_2) = 17\,900$

+ pour $e = e_3$ = $\Pi(e_3, w_3) = 15\,625$

$\Rightarrow$ contrat d'équilibre $\{e_1^*; w_1^*\}$

## 2. Information asymétrique

$\Rightarrow$ Problème d'aléa moral.

$\boxed{\text{Pour obtenir } e_1}$ :

$$\text{Max } 0{,}75\,(50\,000 - w_S) + 0{,}25\,(25\,000 - w_E)$$

$$\text{s.c } \quad 0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 40 \geq 120 \quad (CP)$$

$$0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 40 \geq 0{,}5\sqrt{w_S} + 0{,}5\sqrt{w_E} - 20 \quad (CI\ 1)$$

$$0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 40 \geq 0{,}25\sqrt{w_E} + 0{,}75\sqrt{w_E} - 5 \quad (CI\ 2)$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \text{Max } 43\,750 - 0{,}75\,w_S - 0{,}25\,w_E$$

$$\text{s.c} \quad 0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} \geq 160$$

$$\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \geq 80$$

$$\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \geq 70$$

On pose le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(w_S, w_E, \lambda, \mu) = 43\,750 - 0{,}75\,w_S - 0{,}25\,w_E + \lambda\left(0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 160\right) + \mu\left(\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} - 80\right)$$

Condition de Kuhn Tucker :

$$+ \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_S} = -0{,}75 + \frac{\lambda\, 0{,}75}{2\sqrt{w_S}} + \frac{\mu}{2\sqrt{w_S}} = 0$$

$$+ \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_E} = -0{,}25 + \frac{\lambda\, 0{,}25}{2\sqrt{w_E}} - \frac{\mu}{2\sqrt{w_E}} = 0$$

$$+ \quad \lambda \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff \lambda\left(0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 160\right) = 0$$

$$+ \quad \mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mu} = 0 \iff \mu\left(\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} - 80\right) = 0$$

$+ \quad \lambda, \mu \geq 0$

Etape 1 : on montre facilement que CP est saturée

(car on trouve $\lambda > 0$)

$\Rightarrow$ Donc $0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 160 = 0$

Etape 2 : CI ?

1 – Cas 1, CI non saturée

– Si $\mu = 0$, on a $\sqrt{w_S} = \sqrt{w_E} = \frac{\lambda}{2}$

Or le salaire ne dépend pas du résultat

dans ce cas → pas possible.

On rejette donc l'hypothèse $\mu = 0$

→ Donc CI est saturée.

Soit $\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} - 80 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{w_E} = \sqrt{w_S} - 80$

et $0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 160 = 0$ (CP)

On remplace :

$0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25(\sqrt{w_S} - 80) - 160 = 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{w_S} = 180$

$\Leftrightarrow \left.\begin{array}{l} w_S^* = 32\,400 \\ w_E^* = 10\,000 \end{array}\right\}$ contrat optimal pour obtenir $e_1$

---

Pour obtenir $e_2$

$$\text{Max } 0{,}5\,(50\,000 - w_S) + 0{,}5\,(25\,000 - w_E)$$

$$\text{sc} \quad 0{,}5\sqrt{w_S} + 0{,}5\sqrt{w_E} - 20 \geq 120$$

$$0{,}5\sqrt{w_S} + 0{,}5\sqrt{w_E} - 20 \geq 0{,}75\sqrt{w_S} + 0{,}25\sqrt{w_E} - 40$$

$$0{,}5\sqrt{w_S} + 0{,}5\sqrt{w_E} - 20 \geq 0{,}25\sqrt{w_S} + 0{,}75\sqrt{w_E} - 5$$

$$\Leftrightarrow \quad \text{Max } 37\,500 - 0{,}5\,w_S - 0{,}5\,w_E$$

$$\text{s.c} \quad \sqrt{w_S} + \sqrt{w_E} \geq 280$$

$$\sqrt{w_E} - \sqrt{w_S} \geq -80$$

$$\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \geq 60$$

$$\mathcal{L} = 37\,500 - 0{,}5\,w_S - 0{,}5\,w_E + \lambda\left(\sqrt{w_S} + \sqrt{w_E} - 280\right) + \mu\left(\sqrt{w_E} - \sqrt{w_S} + 80\right) + \delta\left(\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} - 60\right)$$

Condition de Kuhn Tucker :

[...]

$\boxed{\text{Etape 1}}$ : On montre facilement que
$CP$ est saturée

(car on trouve $\lambda > 0$)

$\Rightarrow$ Donc $\sqrt{w_S} + \sqrt{w_E} = 280$.

$\boxed{\text{Etape 2 :}}$ $CI$ ?

$\boxed{\text{Cas 1, } CI\ 1 \text{ et } CI_2 \text{ saturée}}$

On a : $CI\ 1$ : $\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \leq 80$

$CI_2$ : $\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} \geq 60$

$\rightarrow$ On ne peut pas avoir les 2 $CI$ saturés !

$\rightarrow$ Cas 1 $\rightarrow$ impossible

$\boxed{\text{Cas 2 : } CI_1 \text{ et } CI_2 \text{ non saturées.}}$

$\rightarrow$ $\mu = 0$ et $\delta = 0$.

On aboutit à $w_S^* = w_E^*$ $\Rightarrow$ impossible !

$\boxed{\text{Cas 3 : } CI_2 \text{ non saturée } \Rightarrow \delta = 0}$
on teste

On aboutit à $\mu < 0$ $\Rightarrow$ impossible !

Donc $\delta > 0$ $\rightarrow$ $CI_2$ saturée

Soit $\sqrt{w_S} - \sqrt{w_E} = 60$

et $\sqrt{w_S} + \sqrt{w_E} = 280$ (CP)

$\Leftrightarrow \sqrt{w_S} + (\sqrt{w_S} - 60) = 280$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{w_S} = 340$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} w_S^* = 28\,900 \\ w_E^* = 12\,100 \end{array}\right\}$ Contrat optimal pour $e_2$

---

Pour obtenir $e_3$.

→ Seule la ~~ma~~ CP est à respecter.

→ même résultat qu'en info symétrique

$w_E^* = w_S^* = 15\,625$.

b) Calcul du profit espéré :

Pour $e_1 = 16\,950$

Pour $e_2 = 17\,000$ ←

Pour $e_3 = 15\,625$