Ch. II : Quelques alternatives à la modélisation log-normale

II.1 A propos de *prix = : Espérance des flux actualisés*

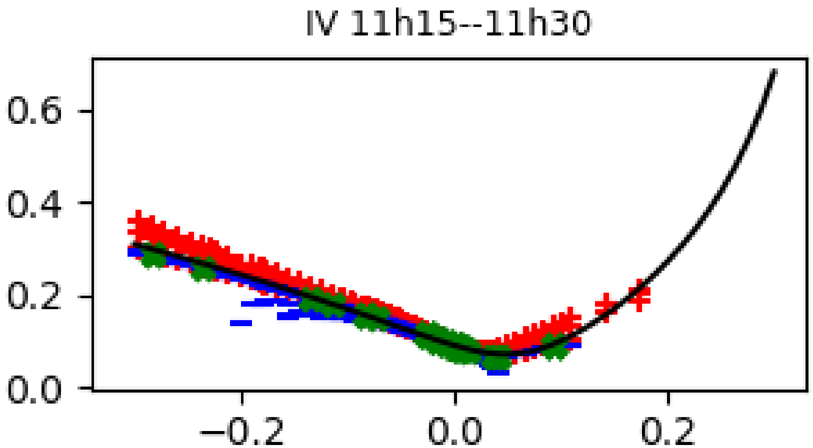
Prix comptant :

$$C_0(\Phi_T, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^T r_s \mathrm{d}s}\Phi_T\right).$$

sous une probabilité de pricing $\mathbb{Q}$ tel que le rendement des titres est égal au taux sans risque (*probabilité risque neutre*).

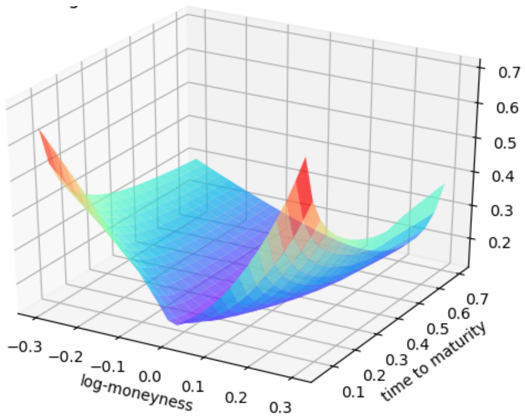
II.2 Volatilité implicite (marché)

Smile : $K \mapsto \sigma^I(T,K)$ courbe non constante (à maturité fixe).
En général calculée en fonction de la log-moneyness $m := \log(F/K)$.



SPX options, maturité Mars 2018
Vol implicite le 2 janvier 2018

Surface : $(T,K) \mapsto \sigma^I(T,K)$



Structure
par terme

II.3 Modèle log-normal décalé

Displaced log-normal diffusion (Rubinstein '83)

Définition. Taux nul $r = 0$. Prix d'actif au temps T :

$$S_T = (S_0 + a) \exp(\sigma W_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T) - a$$

avec $a \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $S_0 + a > 0$.

Proposition.

- $S_T + a$ est lognormal
- la volatilité instantanée au temps t est $\sigma_t = \frac{S_t + a}{S_t}\sigma$

Théorème (prix de call). Le prix de Call de strike K et maturité T dans le modèle log-normal décalé est donné par

$$\mathbf{C_0((S_T - K)_+; T)} = \mathrm{Call}^{\mathrm{BS}}(\mathbf{0}, \mathbf{S_0} + \mathbf{a}; \mathbf{T}, \mathbf{K} + \mathbf{a}).$$

Théorème (asymptotique des vols implicites). La volatilité implicite $\sigma_I(T, K)$ dans ce modèle a une valeurs et une pente explicite à courte maturité et à la monnaie :

— $\lim_{\mathbf{T}\to\mathbf{0}} \sigma_{\mathbf{I}}(\mathbf{T}, \mathbf{S_0}) = \frac{\mathbf{S_0} + \mathbf{a}}{\mathbf{S_0}}\sigma = \sigma_{\mathbf{0}}$

— $\lim_{\mathbf{T}\to\mathbf{0}} \partial_{\mathbf{K}}\sigma_{\mathbf{I}}(\mathbf{T}, \mathbf{K})\big|_{\mathbf{K}=\mathbf{S_0}} = -\frac{\mathbf{a}\sigma}{\mathbf{2S_0^2}} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}\partial_{\mathbf{S_0}}\sigma_{\mathbf{0}}.$

Modèle de Bachelier (1900)

Définition. $S_T = S_0 + \sigma W_T$. Modèle gaussien.

Théorème. Le prix de Call de strike K et maturité T dans le modèle de Bachelier est donné par

$$\mathbf{C_0((S_T - K)_+; T) = (S_0 - K)\mathcal{N}(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}}) + \sigma\sqrt{T}\mathcal{N}'(\frac{S_0 - K}{\sigma\sqrt{T}})}.$$

Théorème (comparaison prix Call dans Black-Scholes versus Bachelier). En posant $\sigma^B = \sigma^{BS} S_0$, à la monnaie $K = S_0$

$$\frac{C_0^{Bach.} - C_0^{BS}}{C_0^{Bach.}} \leq \frac{T(\sigma^{BS})^2}{12}.$$

Modèle de Merton

Définition. N processus de Poisson d'intensité λ, $Y = (Y_i : i \geq 1)$ iid de loi lognormale telle que

$$\ln(1 + Y_i) \overset{\text{loi}}{=} \mathcal{N}(\ln(1 + m) - \alpha^2/2, \alpha^2)$$

avec $m > -1$ et $\alpha \geq 0$. N et Y indépendants.

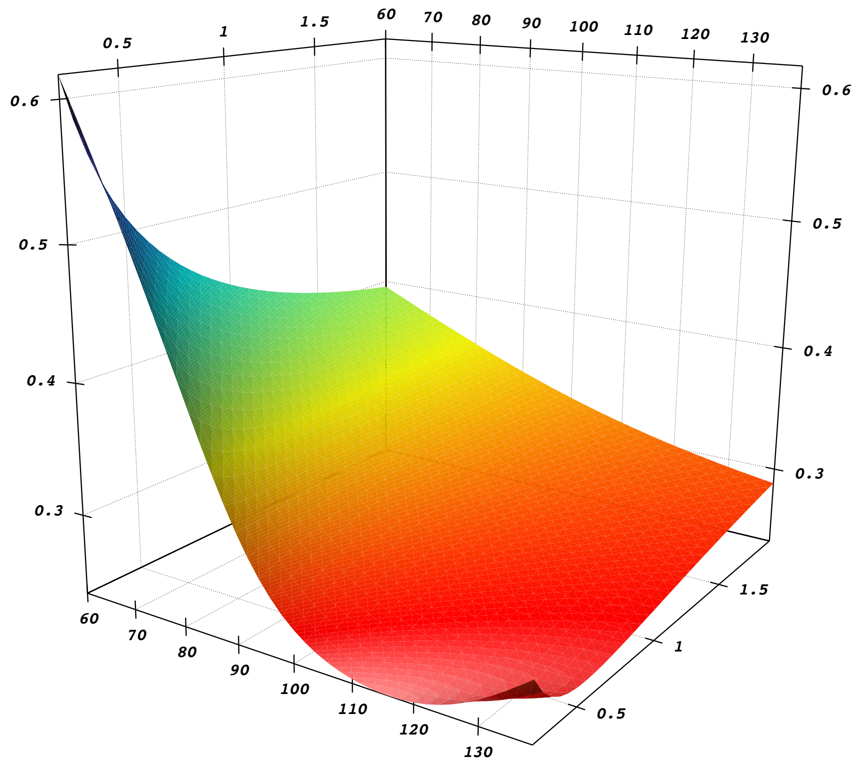
$$S_T = S_0 \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T) \prod_{i=1}^{N_T}(1 + Y_i)$$

- Entre deux sauts, MB géométrique
- Au moment d'un saut, saut lognormal

Proposition. $\mathbb{E}(S_T) = S_0 e^{rT}$ ssi $\mu = r - \lambda m$.

Théorème (Formule de Merton).

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{e}^{-\mathbf{rT}}(\mathbf{S_T}-\mathbf{K})_+\right]$$
$$=\sum_{\mathbf{k}\geq \mathbf{0}}\mathbf{e}^{-\lambda\mathbf{T}}\frac{(\lambda\mathbf{T})^{\mathbf{k}}}{\mathbf{k}!}\mathrm{Call}^{\mathrm{BS}}\left(\mathbf{0},\mathbf{S_0}(\mathbf{1}+\mathbf{m})^{\mathbf{k}}\mathbf{e}^{-\mathbf{m}\lambda\mathbf{T}};\mathbf{T},\mathbf{K},\sigma^{\mathbf{2}}_{\mathbf{BS}}=\sigma^{\mathbf{2}}+\frac{\alpha^{\mathbf{2}}\mathbf{k}}{\mathbf{T}}\right).$$



Vol implicite dans le modèle de Merton

II.4 Pricing en Fourier

On suppose connue la fonction caractéristique de $X_T = \ln(S_T e^{-rT})$:

$$\mathbf{\Phi(z) := \mathbb{E}(e^{zX_T}), \qquad z \in \mathbb{C}.}$$

Théorème (formule de Carr-Madan '98). Posons $C(k) = e^{-rT}\mathbb{E}\left[(e^{X_T+rT} - e^k)_+\right]$, $k \in \mathbb{R}$, et $z(k) = e^{\alpha k}C(k)$ avec $0 < \alpha < p-1$ où p est le nombre de moments finis de S_T.

Alors $\hat{z}(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iuk} z(k)\mathrm{d}k = e^{(iu+\alpha)rT}\dfrac{\Phi(iu+\alpha+1)}{(iu+\alpha)(iu+\alpha+1)}$ et

$$\mathbf{C(k) = e^{-\alpha k}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-iuk}}{2\pi} e^{(iu+\alpha)rT}\frac{\Phi(iu+\alpha+1)}{(iu+\alpha)(iu+\alpha+1)}du.}$$

Théorème (formule de Lewis '01).

$$\mathbf{e^{-rT}\mathbb{E}\left[(e^{X_T+rT} - K)_+\right] = S_0 - \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} \frac{e^{(\frac{1}{2}-iu)\ln(Ke^{-rT})}}{\frac{1}{4}+u^2}\Phi(\frac{1}{2}+iu)du.}$$