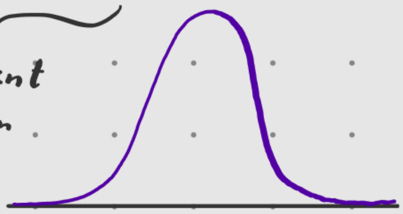
Introduction aux processus de diffusion

Lorenzo Zambotti

Loi Gaussienne $\longrightarrow$ Vecteurs Gaussiens $\longrightarrow$ $\underbrace{\text{Processus Gaussiens}}$

Mouvement Brownien



$\mathcal{N}(0,1)$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

$\mathbb{P}(|Z| \geq t)$ très petit si $t \to +\infty$

Einstein

X_t = position au temps t de la particule de pollen

$\mathbb{E}[X_t] = 0 \quad \mathbb{E}|X_t|^2 = ct \quad \Rightarrow X_t \sim \mathcal{N}(0, ct\, I_3)$

Wiener
Levy

Construction mathématique et propriétés

transformée de Fourier

$$Z \sim \mathcal{N}(0,1) \qquad \mathbb{E}[e^{itZ}] = e^{-\frac{1}{2}t^2}$$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda Z}] = e^{\frac{1}{2}\lambda^2}$$

Dans $\mathbb{R}$ $\quad \mathcal{N}(m, \sigma^2)$, $m \in \mathbb{R}$, $\sigma^2 \geq 0$

1) $\sigma > 0 \Rightarrow$ à densité $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}$

2) Si $\sigma^2 = 0 \Rightarrow \delta_m$

Estimée des queues de Z

$$t > 0 \quad \mathbb{P}(|Z| \geq t) = 2\mathbb{P}(Z > t) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-x^2/2} \cdot \overset{\frac{x}{t}}{1}\, dx \leq$$

$$\leq \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_t^{\infty} (-1) \frac{d}{dx}\left[e^{-x^2/2}\right] dx = \frac{1}{t}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-t^2/2}$$

Autre estimée

$$t>0: \quad \mathbb{P}(Z>t) = \{\text{Soit } \lambda>0\} = \mathbb{P}(e^{\lambda Z} > e^{\lambda t}) \leq \frac{\mathbb{E}[e^{\lambda Z}]}{e^{\lambda t}} =$$

$$= e^{\frac{1}{2}\lambda^2 - \lambda t} \quad (\forall \lambda > 0)$$

On peut même borner par $\frac{1}{2}e^{-t^2/2}$ (TD2, Ex7)

$$\inf_{\lambda>0} e^{\frac{\lambda^2}{2} - \lambda t} = \underset{(\lambda = t)}{e^{-t^2/2}} \Rightarrow \mathbb{P}(Z>t) \leq e^{-t^2/2}$$

Vecteurs Gaussiens

$X = (X_1, \dots, X_d) \in \mathbb{R}^d$ vecteur de v.a.

X est un **vecteur gaussien** si $\forall \lambda \in \mathbb{R}^d$ la variable $\langle \lambda, x\rangle$ est une variable gaussienne.

$$m = \mathbb{E}[X] = (\mathbb{E}X_1, \dots, \mathbb{E}X_n)'$$

$$Q = \left(\mathrm{Cov}(X_i, X_j)\right)_{i,j = 1, \dots, d}$$

Propriétés Si X est un tel vecteur gaussien, alors

$$\mathbb{E}\left[e^{i\langle \lambda, X\rangle}\right] = \exp\left\{ i\langle m, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle Q\lambda, \lambda\rangle \right\} \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}^d$$

La fonction $\lambda \mapsto \mathbb{E}[e^{i\langle \lambda, X\rangle}]$ caractérise la loi de X.

$\Rightarrow$ La loi de X est déterminée par m et Q.

Donc on peut écrire $\mathcal{N}(m, Q)$

Rem Q est symétrique $(Q_{ij} = Q_{ji})$, $\langle Q\lambda, \lambda\rangle = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j \mathbb{E}[(X_i - m_i)(X_j - m_j)] =$

$= \mathbb{E}\left[\sum \lambda_i (X_i - m_i)\right]^2 \geq 0 \Rightarrow$ on peut diagonaliser Q, valeurs propres ≥ 0

Si $\det Q > 0 \Rightarrow X \sim \mathcal{N}(m, Q)$ a densité

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^d \det Q}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}(x-m), (x-m)\rangle\right\}, \quad x \in \mathbb{R}^d$$

$A : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^m$ linéaire, $X \sim \mathcal{N}(m, Q) \Rightarrow AX \sim \mathcal{N}(Am, AQA^T)$

$$\lambda \in \mathbb{R}^n \qquad \mathbb{E}\left[e^{i\langle\lambda, AX\rangle}\right] = \mathbb{E}\left[e^{i\langle \underbrace{A^T\lambda}_{\lambda}, X\rangle}\right] = \exp\left\{i\langle m, A^T\lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle QA^T\lambda, A^T\lambda\rangle\right\} =$$

$$= \exp\left\{i\langle Am, \lambda\rangle - \frac{1}{2}\langle AQA^T\lambda, \lambda\rangle\right\} \Rightarrow AX \sim \mathcal{N}(Am, AQA^T)$$

$(X_1, \dots, X_d)$ est indépendant $\Leftrightarrow$ $\operatorname{cov}(X_i, X_j) = 0 \ \forall i \neq j \Leftrightarrow Q$ est diagonale

$\boxed{\Rightarrow}$ toujours vrai

$\boxed{\Leftarrow}$ Q diagonale $\Rightarrow \langle Q\lambda, \lambda\rangle = \sum_i Q_{ii} \lambda^2$

$$\mathbb{E}\left[e^{i\langle\lambda, X\rangle}\right] = e^{\sum_k (i m_k \lambda_k - \frac{1}{2} Q_{kk} \lambda_k^2)} = \prod_{k=1}^{n} \exp\left\{i m_k \lambda_k - \frac{1}{2} Q_{kk} \lambda_k^2\right\} =$$

$$= \prod_k \mathbb{E}\left[e^{i\lambda_k X_k}\right] \Rightarrow X \text{ est indépendant}$$

$\mathbb{E}\, e^{i\langle\lambda, X\rangle}$ caractérise la loi

Exercice (X, Y) vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^2$

Calculer $\mathbb{E}[X|Y]$

On veut écrire $X = \lambda Y + Z$, où $Z \perp\!\!\!\perp Y$

$Z = X - \lambda Y$

On cherche $\lambda \in \mathbb{R}$ t.q. $(Y,Z) = (Y, X-\lambda Y)$ soit gaussien

avec covariance diagonalle

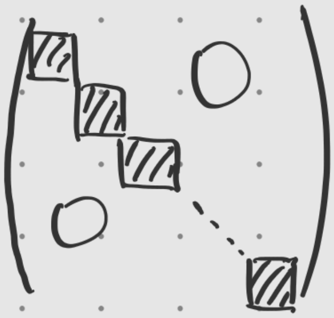
$$(Y, X-\lambda Y)' = \underbrace{\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -\lambda\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix} \to (Y,Z) \text{ est gaussien}$$

$$\mathrm{Cov}(Y,Z) = \mathrm{Cov}(X,Y) - \lambda \underbrace{\mathrm{Var}[Y]}_{\neq 0} = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}[Y]} = \rho\sqrt{\frac{\mathrm{Var}[X]}{\mathrm{Var}[Y]}}$$

$\neq 0$ ← sinon, $Y = c$ p.s $\Rightarrow$ $\mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X]$

Donc $\mathbb{E}[X|Y] = \lambda Y + \mathbb{E}Z = \mathbb{E}[X] + \rho\sqrt{\frac{\mathrm{Var}[X]}{\mathrm{Var}[Y]}}\cdot(Y - \mathbb{E}Y)$

$Q =$



Exemple $(X_1,\dots,X_{d+1})$ gaussien

$\Rightarrow \mathrm{Cov}(X_i, X_{d+1}) = 0 \quad \forall i = 1,\dots,d$

$\Rightarrow (X_1,\dots,X_d) \perp\!\!\!\perp X_{d+1}$

Processus stochastiques

Déf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ Un processus est $X = (X_t, t \in T)$ de v.a. (réels)

↑ ensemble

définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Un processus X est gaussien si $\forall \{t_1, \dots, t_n\} \subseteq T$, $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ est un vecteur gaussien.

Un processus X est centré si $\forall t \in T$ $\mathbb{E}|X_t| < \infty$ et $\mathbb{E}[X_t] = 0$

Déf Un processus $B = (B_t,\ t \in \mathbb{R}_+ \text{ ou } [0,T])$ est un mouvement brownien (standard) si B est gaussien centré avec fonction de covariance

$$(s,t) \longmapsto \text{Cov}(B_s, B_t) = \mathbb{E}[B_s B_t] = s \wedge t$$

Pour $s = t$ $\mathbb{E}[B_t^2] = t$ $\forall t \geq 0$

$$t = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[B_0^2] = 0 \Rightarrow B_0 = 0 \text{ p.s.}$$

1) $B_0 = 0$ p.s.

2) $\mathbb{E}[B_t^2]$ est compatible avec le modèle d'Einstein.

Prop Un processus gaussien centré est un mouvement brownien std. ssi

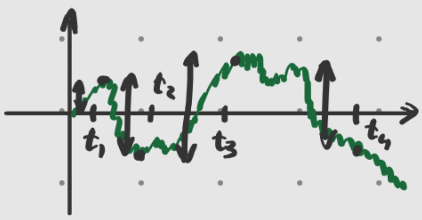
1) $B_0 = 0$ p.s.

accroissements indépendants

2) $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m \Rightarrow (B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \dots, B_{t_m} - B_{t_{m-1}})$ est indépendant

3) $0 \leq s \leq t \Rightarrow B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$

accroissements stationnaires

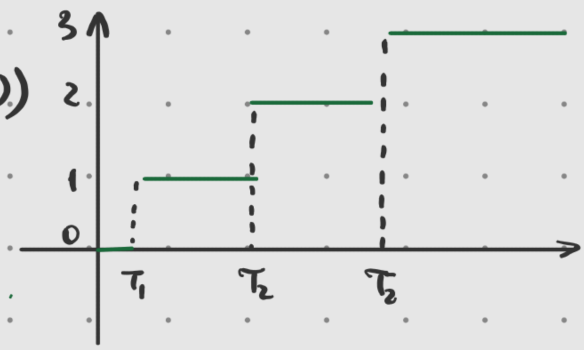


Rappel $(N_t)_{t\geq 0}$ est de Poisson (d'intensité $\lambda>0$) si

1) $N_0 = 0$ p.s.

2) $\forall\, 0\leq t_1 \leq \dots \leq t_m$ $(N_{t_1}, N_{t_2}-N_{t_1}, \dots, N_{t_m}-N_{t_{m-1}})$ est indépendant

3) $0\leq s\leq t$ $N_t - N_s \sim \mathrm{Pois}(\lambda(t-s))$



Les deux sont des processus de Lévy

Preuve de prop

$\Rightarrow$ $X_n = B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$

$$(B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1}, \dots, B_{t_m}-B_{t_{m-1}})' = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ -1 & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ 0 & & -1 & 1 \\ & & & \ddots \end{pmatrix} (B_{t_1}, B_{t_2}, \dots, B_{t_m})'$$

$i<j$ $\mathrm{Cov}(B_{t_i}-B_{t_{i-1}}, B_{t_j}-B_{t_{j-1}}) = \mathrm{Cov}(B_{t_i}, B_{t_j}) - \mathrm{Cov}(B_{t_i}, B_{t_{j-1}}) -$

$- \mathrm{Cov}(B_{t_{i-1}}, B_{t_j}) + \mathrm{Cov}(B_{t_{i-1}}, B_{t_{j-1}}) = t_i - t_i - t_{i-1} + t_{i-1} = 0$

$$B_t - B_s = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} B_t \\ B_s \end{pmatrix} \right\rangle \sim \mathcal{N}(0, t-s)$$

$$\mathbb{E}[(B_t-B_s)^2] = \overset{t}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}B_t^2}} - 2\overset{s}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}B_tB_s}} + \overset{s}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}B_s^2}} = t-s$$

$\Leftarrow$

$(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$ gaussien?

$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \quad (x_1, x_1+x_2, \dots, x_1+x_2+\dots+x_n)$

$(B_{t_1}, \dots, B_{t_n}) = A\cdot \underbrace{(B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1}, \dots, B_{t_n}-B_{t_{n-1}})}_{Y \sim \mathcal{N}(0,Q)} \to$ gaussien $\quad Q = \mathrm{diag}(t_1, t_2-t_1, \dots, t_n-t_{n-1})$

Soit $t > s$

$$\mathrm{cov}(B_t, B_s) = \mathrm{cov}(B_t - B_s + B_s, B_s) = s = s\wedge t \qquad \square$$

Remarque Si $0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ alors $\det Q > 0$ et le vecteur

$Y = (B_{t_1}, B_{t_2}-B_{t_1}, \dots, B_{t_n}-B_{t_{n-1}})$ a densité

$$\frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n t_1(t_2-t_1)\dots(t_n-t_{n-1})}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum \frac{y_k^2}{t_k-t_{k-1}}\right\}, \quad y \in \mathbb{R}^n, \ t_0 = 0$$

Densité de $X = (B_{t_1}, \dots, B_{t_n})$?

$X = AY \qquad Y = A^{-1}X \qquad A^{-1}x = (x_1, x_2-x_1, \dots, x_n-x_{n-1})$

$$\det A = \det A^{-1} = 1$$

Donc $p(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(2\pi)^n t_1(t_2-t_1)\dots(t_n-t_{n-1})}} \exp\left\{-\dfrac{1}{2}\sum_k \dfrac{(x_k-x_{k-1})^2}{t_k-t_{k-1}}\right\}$

$$\langle Q^{-1}y, y\rangle = \langle A^{-1}Q^{-1}A^{-1}x, x\rangle$$

$$\sum \frac{y_k^2}{t_k-t_{k-1}} \qquad \sum_k \frac{(x_k-x_{k-1})^2}{t_k-t_{k-1}}$$

La matrice de X n'est pas diagonal : $\mathbb{E}[B_{t_i}B_{t_j}] = t_i \wedge t_j$

Prop Il existe un MB

Preuve L'espace $\overset{=\mathbb{H}}{L^2(\mathbb{R}, dt)}$ est un espace de Hilbert séparable

$(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$: $\forall h\in\mathbb{H}$ $\quad h=\sum_{k\in\mathbb{N}}\langle h,e_k\rangle_{\mathbb{H}}\, e_k$

Soit $(\xi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ suite i.i.d. de v.a. réelles de loi $\mathcal{N}(0,1)$

$$B_t^n=\sum_{k=0}^{n}\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, e_k\rangle_{\mathbb{H}}\cdot\xi_k, \qquad t\geq 0,\ n\in\mathbb{N}$$

$B_t^n\xrightarrow{L^2(\Omega)}B_t$, $n\to\infty$ et $(B_t)_{t\geq 0}$ est un MB

Soient $n<m$ $\mathbb{E}\left[(B_t^m-B_t^n)^2\right]=\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=n+1}^{m}\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, e_k\rangle\xi_k\right)^2\right]=$

$$=\sum_{k=n+1}^{m}\langle \mathbb{1}_{[0,t]},e_k\rangle^2\underbrace{\mathbb{E}\xi_k^2}_{=1}+\sum_{k\neq \ell}\cdots\cancel{\mathbb{E}\,\xi_k\xi_\ell}^{\,0}=\sum_{n+1}^{m}\langle \mathbb{1}_{[0,t]},e_k\rangle^2\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

$$\|h\|_{\mathbb{H}}^2=\sum_{k\in\mathbb{N}}\langle h,e_k\rangle^2<\infty$$

Donc $(B_t^n)_{n\geq 1}$ est une suite de Cauchy, donc ($L^2(\Omega)$ est complète)

$\exists B_t\in L^2(\Omega)$ t.q. $B_t^n\to B_t$ dans $L^2(\Omega)$

Il faut prouver que B_t est un MB.

Le vecteur $(B_{t_1}^n,\dots,B_{t_m}^n)$ s'écrit comme une fonction linéaire de $(\xi_1,\dots,\xi_n)$ qui est gaussien.

$(B_{t_1}^n,\dots,B_{t_m}^n)\xrightarrow{n\to\infty}(B_{t_1},\dots,B_{t_m})$ qui est donc gaussien centré

$$\mathbb{E}\left[B_s^nB_t^n\right]=\mathbb{E}\left[\sum_0^n\langle \mathbb{1}_{[0,s]},e_k\rangle\xi_k\sum_0^n\langle \mathbb{1}_{[0,t]},e_\ell\rangle\xi_\ell\right]=\sum_{k=0}^{n}\langle \mathbb{1}_{[0,s]},e_k\rangle\langle \mathbb{1}_{[0,t]},e_k\rangle$$

$$\mathbb{E}[B_sB_t] = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[B_s^nB_t^n] = \sum_{k\in\mathbb{N}} \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, e_k\rangle\langle \mathbb{1}_{[0,t]}, e_k\rangle = \langle \mathbb{1}_{[0,s]}, \mathbb{1}_{[0,t]}\rangle = s\wedge t$$

$$\int \underbrace{\mathbb{1}_{[0,s]}\mathbb{1}_{[0,t]}}_{\mathbb{1}_{[0,s\wedge t]}} du = s\wedge t$$

Prop $\xi_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$. Si $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi \Rightarrow \exists m, \sigma^2 : \xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Preuve $\xi_n \xrightarrow{L^2} \xi \Rightarrow m_n \to m,\ \sigma_n^2 \to \sigma^2$

$\mathbb{E}e^{i\xi\lambda} = \lim \mathbb{E}e^{i\xi_n\lambda} \to$ gaussien $\square$

Prop si $\xi_n \sim \mathcal{N}(m_n, \sigma_n^2)$, $\xi_n \Rightarrow \xi \to \xi \sim \mathcal{N}(m, \sigma^2)$

Preuve $\forall \lambda$ $\mathbb{E}e^{i\lambda\xi_n} \to \varphi(\lambda)$ cont., $\varphi(0)=1$

$$\varphi_n(\lambda) = e^{i\lambda m_n - \frac{1}{2}\sigma_n^2\lambda^2}$$

$$|\varphi_n(\lambda)| = e^{-\frac{1}{2}\sigma_n^2\lambda^2} \longrightarrow |\varphi(\lambda)| \Rightarrow \sigma_n^2 \to \sigma^2$$

À de même on preuve que $m_n \to m$ $\square$

On veut fixer $\omega\in\Omega$ et travailler sur

$t\in T \mapsto X_t(\omega)$ (trajectoire de X)

Exemple MB: $t \mapsto B_t(\omega)$ est-ce une fonction continue pour un ensemble assez grand de $\omega\in\Omega$?

Si $(B_t)_{t\geq 0}$ est un MB et $\forall t \geq 0$ $\Omega_t \subseteq \Omega$ est un événement avec $\mathbb{P}(\Omega_t) = 0$.

$$\tilde{B}_t(\omega) = \begin{cases} B_t(\omega) & \text{si } \omega \notin \Omega_t \\ \text{n'importe comment} & \text{si } \omega \in \Omega_t \end{cases}$$

Donc $(\tilde{B}_t)_{t\geq 0}$ est encore un MB.

Mais les trajectoires de B et $\tilde{B}$ peuvent être très différents.

"Versions" d'un processus

$(X_t, t\in T)$ processus défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

Trajectoire : on fixe $\omega \in \Omega$, $T \ni t \mapsto X_t(\omega)$

A priori, aucune bonne propriété pour cette fonction

Déf $X = (X_t, t\in T)$, $\tilde{X} = (\tilde{X}_t, t \in T)$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

On dit que X est une modification de $\tilde{X}$ si

$$\forall t \in T \quad \mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t) = 1$$

Déf X et $\tilde{X}$ sont indistinguables si $\mathbb{P}(\forall t\in T \ X_t = \tilde{X}_t) = 1$.

$$\{\forall t \in T : X_t = \tilde{X}_t\} = \bigcap_{t\in T} \{X_t = \tilde{X}_t\}$$

$$\{X_t = \tilde{X}_t\} \in \mathcal{F}$$

$\Uparrow$ si X et $\tilde{X}$ indistinguables

On suppose que $\mathcal{F}$ contient les ensembles $\mathbb{P}$-négligeables

Si $A \subseteq \Omega$ admet un $\tilde{A} \in \mathcal{F}$ t.q. $A \subseteq \tilde{A}$ et $\mathbb{P}(\tilde{A}) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{F}$

(A est négligeable)

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ est complet

$$\mathbb{P}(\forall t \in T \quad X_t = \tilde{X}_t) = 1$$

$$\exists \bar{\Omega} \in \mathcal{F} : \bar{\Omega} \subseteq \bigcap_{t \in T} \{X_t = \tilde{X}_t\},\ \mathbb{P}(\bar{\Omega}) = 1.$$

Rq X et $\tilde{X}$ indistinguables $\Rightarrow X$ modification de $\tilde{X}$ car

$$\bigcap_{t \in T} \{X_t = \tilde{X}_t\} \subseteq \{X_s = \tilde{X}_s\} \quad \forall s.$$

Si T est dénombrable $\Rightarrow$ [X modif. de $\tilde{X} \Rightarrow$ indistinguables]

Rappel $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathcal{F}$: $\mathbb{P}(A_n) = 1 \ \forall n$: $\mathbb{P}(\bigcap_n A_n) = 1$.

Mais: $A_x = [0,1] \setminus \{x\}$ $\quad \lambda(A_x) = 1 \quad \lambda(\bigcap_{x \in [0,1]} A_x) = 0$

En général, T est non dénombrable.

Exemple $\Omega = [0,1]$ $\mathcal{F} = \mathcal{B}([0,1])$, $\mathbb{P} = dx$ $\quad T = [0,1]$

$$X_t \equiv 0, \quad \tilde{X}_t(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega \neq t \\ 1, & \omega = t \end{cases} \qquad \{X_t = \tilde{X}_t\} = [0,1] \setminus \{t\}$$

$\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t) = 1 \Rightarrow X$ est une modif.

$\bigcap_{t \in T} \{X_t = \tilde{X}_t\} = \emptyset \Rightarrow \mathbb{P}(\bigcap_t \{X_t = \tilde{X}_t\}) = 0 \Rightarrow \tilde{X}, X$ ne sont pas indistinguables

Si $\mathbb{P}(\omega : t \mapsto X_t(\omega)$ et $t \mapsto \tilde{X}_t(\omega)$ sont continues$) = 1$

alors X modification de $\tilde{X} \Rightarrow X$ et $\tilde{X}$ indistinguable car

$$\bigcap_{t\in T}\{X_t = \tilde{X}_t\} = \bigcap_{t\in \mathbb{Q}\cap T}\{X_t = \tilde{X}_t\}.$$

Etant donné un processus $(X_t, t\geq 0)$

On veut trouver une modification $\tilde{X}$ de X qui ait les trajectoires continus p.s. Cette modification (si elle existe) est unique à indistinguabilité près.

($\hat{X}, \hat{\hat{X}}$ modif. continues de $X \Rightarrow \hat{X}$ est $\hat{\hat{X}}$ sont indistinguables)

Théorème (Critère de Kolmogorov)

$(X_t, t\in[0,T])$. On suppose que $\exists\, p, \varepsilon, C > 0$ t.q

$$\mathbb{E}\left[|X_t - X_s|^p\right] \leq C|t-s|^{1+\varepsilon} \quad \forall s,t\in[0,T]$$

Alors $\exists \tilde{X}$ modification de X t.q. $\forall \alpha \in \left]0, \frac{\varepsilon}{p}\right[$

$$\underbrace{|\tilde{X}_t(\omega) - \tilde{X}_s(\omega)| \leq K(\omega)|t-s|^{\alpha}}_{\alpha\text{-Hölder}} \quad \forall \omega\in\Omega \quad K<\infty \text{ p.s.}$$

($\Rightarrow$ continuité)

Exemple (MB)

$$\mathbb{E}|B_t - B_s|^2 = |t-s| \qquad \forall s,t\in[0,T] \qquad (\varepsilon = 0\,!)$$

Soit $p > 1$ $\mathbb{E}\,|B_t - B_s|^{2p} = c_p |t-s|^p$
$(p = 1+\varepsilon)$

Donc $\forall \alpha \in \left]0, \frac{p-1}{2p}\right[= \left]0, \frac{1}{2} - \frac{1}{2p}\right[\Rightarrow \forall \alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$

$$\exists \tilde{B} : \quad |\tilde{B}_t - \tilde{B}_s| \leq K(\omega)\, |t-s|^{\frac{1}{2}-\varepsilon} \quad \forall \varepsilon \in \left]0, 1/2\right[.$$

$\forall \alpha < \frac{1}{2}$ le MB a une modification p.s. α-Hölder.

Cela ne marche pas pour le processus de Poisson :

$$\mathbb{E}\left[|N_t - N_s|^n\right] = \lambda(t-s) + \dots$$

toujours un terme proportionnel à $\lambda(t-s) \Rightarrow$
$\Rightarrow$ le critère de Kolmogorov ne s'applique pas.

Preuve du Théorème

$[0,T] = [0,1]$, $\mathbb{D} = \left\{\frac{i}{2^k} = d_i^k,\ 0 \leq i \leq 2^k\right\} \subseteq [0,1]$ "les dyadiques", ensemble dense et dénombrable

Soit $\alpha \in \left]0, \frac{\varepsilon}{p}\right[$

On veut prouver que $\displaystyle\sup_{\substack{t,s \in \mathbb{D} \\ t \neq s\ s \to t}} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\alpha} = Q_\alpha \in L^p(\Omega)$

Lemme $\forall t,s \in \mathbb{D}$, $s < t$ $\exists\, s = s_n < \dots < s_1 < s_0 = t_0 < t_1 < \dots < t_n = t$

$s_i, t_j \in \mathbb{D}$, t.q. $s_{i+1} \to s_i$, $t_j \to t_{j+1}$,

$$|s_i - s_{i+1}| < \frac{|t-s|}{2^i} \qquad |t_{j+1} - t_j| < \frac{|t-s|}{2^j}$$

où $d, \tilde{d} \in \mathbb{D}$, $d \to \tilde{d} \Leftrightarrow \exists k, i$ t.q. $d = d_i^k = \frac{i}{2^k}$, $\tilde{d} = d_{i+1}^k = \frac{i+1}{2^k}$

$s,t\in\mathbb{D}$, $s<t$

$$|X_t - X_s| \leq \sum_{i=1}^{n} \underbrace{|X_{s_i} - X_{s_{i+1}}|}_{\leq Q_\alpha \underbrace{|s_{i+1}-s_i|^\alpha}_{\leq \left(\frac{|t-s|}{2^i}\right)^\alpha}} + \sum_{j=1}^{n} \underbrace{|X_{t_j} - X_{t_{j+1}}|}_{\leq Q_\alpha \underbrace{|t_j-t_{j+1}|^\alpha}_{\leq \left(\frac{|t-s|}{2^j}\right)^\alpha}} \leq 2Q_\alpha |t-s|^\alpha \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-\alpha i} = \frac{2}{1-2^{-\alpha}} Q_\alpha |t-s|^\alpha$$

Ex $s=\frac{\ell}{2^k}$, $t=\frac{u}{2^k}$ la m̂ pas $\Rightarrow$ la série va diverger

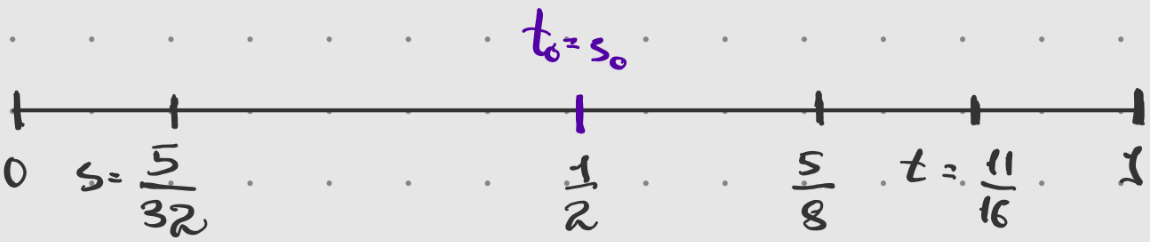
Maintenant on veut prouver que $\mathbb{E}[Q_\alpha^p] < +\infty \Rightarrow Q_\alpha < \infty$ ps.

$$Q_\alpha^p = \sup_{\substack{s\to t\\ s,t\in\mathbb{D}}} \left(\frac{|X_t-X_s|}{|t-s|^\alpha}\right)^p \leq \sum_{\substack{s\to t\\ s,t\in\mathbb{D}}} \frac{|X_t-X_s|^p}{|t-s|^{\alpha p}}$$

$$\mathbb{E}[Q_\alpha^p] \leq \sum_{\substack{s\to t\\ s,t\in\mathbb{D}}} \frac{\mathbb{E}|X_t-X_s|^p}{|t-s|^{\alpha p}} \leq \sum_{k\geq 0}\sum_{i=0}^{2^k-1} \frac{\overbrace{\mathbb{E}\left|X_{\frac{i+1}{2^k}} - X_{\frac{i}{2^k}}\right|^p}^{\leq c\left(\frac{1}{2^k}\right)^{1+\varepsilon}}}{(1/2^k)^{\alpha p}} \leq \sum_{k\geq 0} c\cdot 2^{k\overbrace{(\alpha p-\varepsilon)}^{<0}} < +\infty$$

Preuve du lemme

Dessin



$0<t-s<1$, $\exists!\, \ell\in\mathbb{N}$ $\frac{1}{2^\ell} < t-s \leq \frac{1}{2^{\ell-1}}$ $\left(t-s = \frac{17}{32} \in \left]\frac{1}{2}, 1\right] \Rightarrow \ell=1\right)$

Soit $k = \min\{n\in 0,\dots,2^\ell-1 : \underbrace{d_i^\ell}_{= i/2^\ell} > s\} \Rightarrow s_0 = t_0 = \frac{k}{2^\ell} = d_k^\ell$

$(k=1 \Rightarrow t_0 = s_0 = \frac{1}{2})$

$t > t_0$, $s_0 > s$ $\quad 0 < t - t_0 < \frac{1}{2^{l-1}}$ $\quad 0 < s - s_0 < \frac{1}{2^{l-1}}$

$t - t_0 = \frac{3}{16} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \Rightarrow t_0 = \frac{1}{2}$, $t_1 = t_0 + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$, $t_2 = t_1 + \frac{1}{16} = \frac{11}{16} = t$

$s_0 - s = \frac{11}{32} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32}$ $\quad s_1 = s_0 - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$, $s_2 = s_1 - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}$, $s_3 = s_2 - \frac{1}{32} = \frac{5}{32} = s$

En cas général, on trouve l et utilise la décomposition binaire.

Nous avons prouvé que

$$Q_\lambda^{\mathbb{D}} = \sup_{\substack{s,t \in \mathbb{D} \cap [0,T] \\ s \neq t}} \frac{|X_t - X_s|}{|t-s|^\lambda} \in L^p(\Omega) \quad \text{Donc } Q_\lambda^{\mathbb{D}} < \infty \text{ p.s.}$$

On fixe $\Omega_0 \in \mathcal{F}$ $\mathbb{P}(\Omega_0) = 1$ et $\forall \omega \in \Omega_0$ $Q_\lambda^{\mathbb{D}}(\omega) < +\infty$.

alors $\mathbb{D} \cap [0,T] \ni t \longmapsto X_t(\omega)$ est Hölder $\rightarrow$ uniformément continue

Il existe unique extension continue de cette fonction à $[0,T]$

$\tilde{X}(\omega) : [0,T] \rightarrow \mathbb{R}$ $\quad$ Si $\omega \in \Omega \setminus \Omega_0$ $\tilde{X}_t(\omega) = 0$

$\mathbb{P}(\tilde{X}$ ait trajectoires continues$) \geq \mathbb{P}(\Omega_0) = 1$

$\hat{X}$ est une modification de X:

soit $s \in \mathbb{D}$, $t \in [0,T]$: $\mathbb{E}[|X_s - X_t|^p \wedge 1] \leq \mathbb{E}[|X_t - X_s|^p] \leq C|t-s|^{1+\varepsilon}$

$X_s = \tilde{X}_s$ $\quad \downarrow s \to t$ convergence dominée

$\mathbb{E}[|X_t - \tilde{X}_t|^p \wedge 1] \leq 0 \Rightarrow |X_t - \tilde{X}_t| = 0$ p.s.

Pour terminer, $Q_\alpha = Q_\alpha^{\mathbb{P}} \in L^p(\Omega)$ $\square$

Exemple le MB $(B_t, t \geq 0)$

$p > 2$ $\quad \mathbb{E}[|B_t - B_s|^p] = c_p |t-s|^{p/2}$ $\quad \varepsilon = \frac{p}{2} - 1$

Kolmogorov : $\forall \alpha \in]0, \frac{1}{2} - \frac{1}{p}[$ $\exists!$ modification continue p.s.

et α-Hölder. $\quad \sup\limits_{\substack{s \neq t \\ s,t \in [0,T]}} \frac{|B_s - B_t|}{|t-s|^\alpha} \in L^p(\Omega)$ si $p > \frac{2}{1-2\alpha}$

Exemples $\int_0^T f(B_s)\, ds$ et une v.a.

Si f est continue $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum\limits_{i : i/n \leq T} f(B_{i/n})$ (somme de Riemann)

$\sup\limits_{s \in [0,T]} B_s \underset{\text{continuité}}{=} \sup\limits_{s \in [0,t] \cap \mathbb{Q}} B_s$ est une v.a. (sup de la famille dénombrable)

On a vu l'existence d'un MB

Unicité ? Si $(B_t, t \geq 0)$ est un MB alors $(-B_t, t \geq 0)$ est aussi un MB.

De même $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$, $-Z \sim \mathcal{N}(0,1)$ deux variables différents mais avec la même loi.

On s'intéresse à $\Omega \ni \omega \longmapsto (B_t(\omega),\ t \geq 0) \in \{\text{fonctions} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\}$

$\cap$ p.s.

$\{\text{fonctions continues} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}\} = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

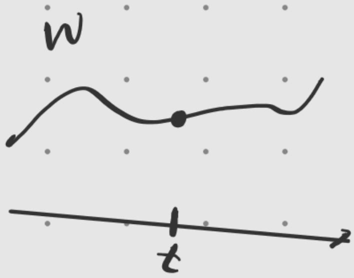
Sur $\mathcal{C}([0,T], \mathbb{R})$ on définit $d_T(f,g) := \sup_{t \in [0,T]} |f_t - g_t|$

Cette distance définit la tribu des boréliens.

Sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ $\quad d_\infty(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \left(d_n(f,g) \wedge 1\right)$ - distance de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}_+$.

$\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ - boréliens de d_∞.

Processus canonique sur $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$



$t \geq 0$, $X_t : C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $X_t(W) = W_t$

$\sigma(X_t, t \geq 0)$ = plus petite tribu $C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ qui rend X_t mesurable $\forall t \in \mathbb{R}$

Relation entre $\sigma(X_t, t \geq 0)$ et $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$?

$W^n \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}) \qquad X_t(W^n) = W_t^n$

Si $d_\infty(W^n, W) \to 0 \Rightarrow X_t(W^n) = W_t^n \to W_t = X_t(W)$

Alors $\forall t \geq 0$, X_t est continue par rapport à d_∞

$\Rightarrow \forall t \geq 0$, X_t est $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$-mesurable $\Rightarrow \sigma(X_t, t \geq 0) \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

Lemme $\sigma(X_t, t\geq 0) = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

Preuve voir le poly.

Question Si $(B_t, t\geq 0)$ est un MB sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ alors $\Omega \ni \omega \mapsto (B_t(\omega), t\geq 0) \in C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ muni de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

$\varphi : (\Omega, \mathcal{F}) \to (C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$

$\varphi : \omega \mapsto \varphi(\omega) = (t \mapsto B_t(\omega))$

1) Est-ce une v.a. ?

2) La loi est-elle unique ?

B processus continu = ensemble de v.a. mesurables

1) Grâce au lemme, il suffit d'avoir la mesurabilité de $X_t \circ B = B_t$

$\sigma(X_t, t\geq 0) = \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

Mesurabilité de φ ? $\forall A \in \sigma(X_t, t\geq 0)$ $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{F}$

Il suffit de considérer $A = X_t^{-1}(C) = \{Z \in C : X_t \circ Z \in C\}$

$\varphi^{-1}(A) = \{\omega : \varphi(\omega) \in X_t^{-1}(C)\} = \{X_t \circ \varphi \in C\} = \{B_t(\omega) \in C\} \in \mathcal{F}$

Rappel Pour Lebesgue : $\lambda_1([a,b]) = |b-a| = \lambda_2([a,b])$ $\forall 0 \leq a \leq b \leq 1$

$\lambda_1([0,1]) = \lambda_2([0,1])$. Intervalles sont stables par intersection (π-système) et engendrent $\mathcal{B}([0,1])$

Thm $\lambda_1 \equiv \lambda_2$ sur $\mathcal{B}([0,1])$

Question Si $(B_t^1, t\geq 0)$ et $(B_t^2, t\geq 0)$ sont deux MB alors ont-ils la même loi sur $(C(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}), \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}))$?

À la place des intervalles, on considère ici la classe des événements du type

$E=\{w\in C(\mathbb{R}_+,\mathbb{R}) : w_{t_1}\in A_1,\dots,w_{t_n}\in A_n\}$ $\forall 0\leq t_1\leq\dots\leq t_n$; $A_1,\dots,A_n\in\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $n\in\mathbb{N}$

↳ grâce au lemme, ils engendrent $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$

Si $(B_t, t\geq 0)$ est un MB

$$\mathbb{P}(B\in E)=\mathbb{P}(B_{t_1}\in A_1,\dots,B_{t_n}\in A_n)=\mathcal{N}(0,(t_i\wedge t_j)_{ij})(A_1\times\dots\times A_n)$$

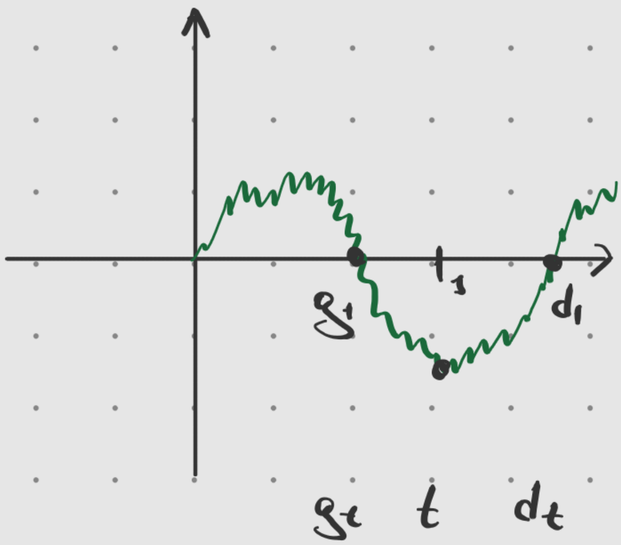
↳ la même pour B^1 et B^2 $\Rightarrow$ $Loi(B^1)=Loi(B^2)$ sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+,\mathbb{R})$

Alors, la loi de tous MB est unique.

Exemple B^1, B^2 deux BM. Donc $\mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} B^1_s\geq x\right)=\mathbb{P}\left(\sup_{s\in[0,t]} B^2_s\geq x\right)$

$$\mathbb{P}(|B_t|\leq 1,\ \forall t\geq 0)=\mathbb{P}\left(\sup_s |B_s|\leq 1\right)$$

$$\mathbb{P}(d_1\geq 1+x)=\,?$$



Thm La loi de tout BM est la même et on s'appelle mesure de Wiener.

Exemple Browniens corrélés : (B^1,B^2) deux BM indépendants,

$\rho\in[-1,1]$ $\quad (W^1_t,W^2_t)=(B^1_t,\ \rho B^1_t+\sqrt{1-\rho^2}\,B^2_t)$ gaussien centré

$(W^1_t, t\geq 0)$ et $(W^2_t, t\geq 0)$ sont des MB mais ils ne sont pas indép.

$$\mathrm{cov}(W_t^1, W_s^2) = \mathrm{cov}(B_t^1, \rho B_t^1 + \sqrt{1-\rho^2} B_t^2) = \rho (s \wedge t)$$

Question un exemple de proc. $(X_t)_{t\in[0,1]}$ t.q $\sup_{t\in[0,1]} X_t$ ne soit pas v.a. Soit $A\subset[0,1]$ qui n'est pas mesurable.

$$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) = ([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$$

$$X_t(\omega) = \mathbb{1}_{\{t\}\cap A}(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{si } t\in A, \omega = t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \text{ - mesurable}$$

$\sup_{t\in[0,1]} X_t(\omega) = \mathbb{1}_A(\omega)$ n'est pas une v.a. car $A \notin \mathcal{B}([0,1])$

Exercice 1) Mq $\forall t\geq 0$ $B_t \overset{d}{=} \sqrt{t} B_1$ $\quad B_t \sim \mathcal{N}(0,t)$, $\sqrt{t} B_1 \sim \mathcal{N}(0,t)$

2) Mq $(B_t)_{t\geq 0} \overset{d}{\neq} (\sqrt{t} B_1)_{t\geq 0}$

$$\mathbb{E}[B_s B_t] = s\wedge t \qquad \mathbb{E}[\sqrt{s}\sqrt{t} B_1^2] = \sqrt{st}$$

Propriétés du MB

1) $\forall a>0$ $\Big(\underbrace{\tfrac{1}{\sqrt{a}} B_{at}}_{B_t^{(a)}}\Big)_{t\geq 0}$ est un BM (changement d'échelle)

$B_0^{(a)} = 0$ $\qquad (B_{t_1}^{(a)}, B_{t_2}^{(a)} - B_{t_1}^{(a)}, \dots, B_{t_n}^{(a)} - B_{t_{n-1}}^{(a)})$ indép.

$$B_t^{(a)} - B_s^{(a)} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{a} a (t-s)\right)$$

2) $(-B_t)_{t\geq 0}$ est un MB

3) $\left(t B_{\frac{1}{t}},\ t>0 \text{ et } 0 \text{ en } t=0\right)$ et un BM

▷ Processus gaussien comme la fct linéaire de B donc il suffit de calculer la fct de covariance :

$$\mathbb{E}\left[t B_{\frac{1}{t}}\, s B_{\frac{1}{s}}\right] = t\cdot s\left(\frac{1}{t} \wedge \frac{1}{s}\right) = \frac{ts}{t \vee s} = t \wedge s \qquad \square$$

4) $\forall T>0,\ (B_T - B_{T-t})_{t\in[0,T]}$ est un MB

$s \leq t \leq T$

$$\mathbb{E}\left[(B_T - B_{T-t})(B_T - B_{T-s})\right] = \mathbb{E}\left[B_T^2 - B_T B_{T-s} - B_T B_{T-t} + B_{T-t}B_{T-s}\right] =$$

$$= T - T + s - T + t + T - (s \vee t) = s \wedge t.$$

Rq Par continuité, $\lim_{t\downarrow 0} B_t = 0$ p.s.

Par 3) $0 = \lim_{t\downarrow 0} t B_{1/t} = \boxed{\lim_{s\to+\infty} \frac{B_s}{s} = 0}$ – croissance sous-linéaire à l'infini.

(En utilisant $\frac{B_s}{s} \sim \mathcal{N}(0, \frac{1}{s})$ on peut demontrer la convergence en proba ou dans L^p, mais pas p.s.)

Exemple $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), dx)$ $\quad X_{i+2^n} = \mathbb{1}_{\left[\frac{i}{2^n}, \frac{i+1}{2^n}\right[}$ $\quad \mathbb{E}[X_{i+2^n}] = 2^{-n} \to 0$

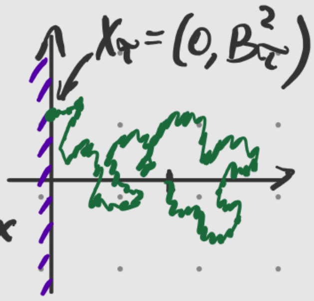
$i = 0, \dots, 2^n - 1$

$\forall x \in [0,1]\ \exists (m_x) : X_{m_x} = 1 \qquad X_n \not\to 0$ p.s.

Exemple (qu'on verra plus tard en détail)

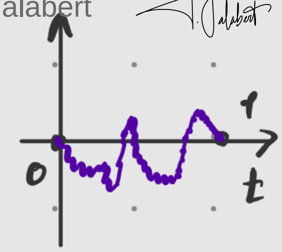
B^1, B^2 deux MB indép. (B_t^1, B_t^2) est un MB dans $\mathbb{R}^2$

$X_t = (1 + B_t^1, B_t^2)$ soit $\tau = \inf\{t > 0 : 1 + B_t^1 = 0\}$



$\tau \perp\!\!\!\perp B^2$, mais B_τ^2 a une loi de Cauchy : $\frac{1}{\pi(1+x^2)}\,dx$

$\mathbb{E}[|B_\tau^2|] = +\infty$



Déf $\beta_t = B_t - tB_1$, $t \in [0,1]$ ← pont brownien

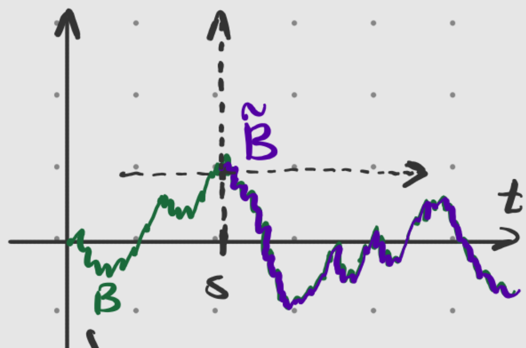
processus gaussien centré, $\mathbb{E}[\beta_t \beta_s] = t \wedge s - st$, $s,t \in [0,1]$

Propriété $(\beta_t, t \in [0,1]) \perp\!\!\!\perp B_1$

Δ Il suffit de montrer que $\mathrm{Cov}(\beta_s, B_1) = \mathbb{E}[(B_s - sB_1)B_1] = s - s = 0$. $\square$

Propriété de Markov

$\mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \in [0,t])$



Thm (Prop. de Markov simple)

$\forall s \geq 0$, soit $\tilde{B}_t = (B_{t+s} - B_s, t \geq 0)$

Alors $\tilde{B}$ est un MB $\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ (indépendance par rapport au passé)

Rq $(B_{t+s}, t \geq 0) = (B_s + \tilde{B}_t, t \geq 0)$ condit à $\mathcal{F}_s$ c'est B_s + un BM indépendant

Preuve Grâce aux propriétés des vecteurs gaussiens, il suffit de prouver 1) que $(\tilde{B}_t, t \geq 0)$ est un BM

2) $\forall 0 \leq s_1 \leq \dots \leq s_n \leq s$, $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_m$

$(\tilde{B}_{t_1}, \dots, \tilde{B}_{t_m}) \perp\!\!\!\perp (B_{s_1}, \dots, B_{s_n})$

$\iff \mathrm{Cov}(\tilde{B}_{t_i}, B_{s_j}) = 0 \quad \forall i,j$

1) $\tilde{B}$ est gaussien centré, $\mathbb{E}\,\tilde{B}_t\tilde{B}_{t'} = \mathbb{E}[B_{t+s}B_{t'+s} - B_{t+s}B_s - B_{t'+s}B_s + B_s^2] =$

$= (t\wedge t'+s) - 2s + s = t\wedge t' \Rightarrow B'$ est un MB.

2) $\mathbb{E}[\tilde{B}_{t_i}B_{s_j}] = \mathbb{E}[\underbrace{(B_{t_i+s}-B_s)}_{\text{indép.}}B_{s_j}] = 0.$ $\square$

$(\mathcal{F}_s)_{s\geq 0}$ définit une filtration : famille de tribu t.q. si $s\leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$.

$\forall s \geq 0 \quad \mathcal{F}_{s+} := \bigcap_{u>s} \mathcal{F}_u \supseteq \mathcal{F}_s$

<u>Rappel</u> L'intersection de tribu est toujours une tribu

<u>Question</u> Quelle différence entre $\mathcal{F}_s$ et $\mathcal{F}_{s+}$.

<u>Thm</u> (Propriété de Markov renforcée)

$\forall s\geq 0$, soit $\tilde{B}_t = (B_{t+s} - B_s,\ t\geq 0)$

Alors $\tilde{B}$ est un MB $\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{s+}$ (indépendence par rapport au passé)

<u>Preuve</u> Soit $A\in\mathcal{F}_{s+}$, il suffit de montrer que $\forall F \in C_b(\mathbb{R}^n)$

$0\leq t_1\leq \dots \leq t_n$, $n\in\mathbb{N}$.

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_A F(\tilde{B}_{t_1},\dots,\tilde{B}_{t_n})] \overset{?}{=} \mathbb{P}(A)\,\mathbb{E}[F(\tilde{B}_{t_1},\dots,\tilde{B}_{t_n})]$$

Soit $\varepsilon>0$. $A\in\mathcal{F}_{s+}\subset\mathcal{F}_{s+\varepsilon}$

$$(B_{t_1+s+\varepsilon} - B_{s+\varepsilon},\dots, B_{t_n+s+\varepsilon} - B_{s+\varepsilon}) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{\varepsilon}$$

$$\mathbb{E}\, \mathbb{1}_A F(B_{t_1+s+\varepsilon}-B_{s+\varepsilon},\dots,B_{t_n+s+\varepsilon}-B_{s+\varepsilon}) = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{E}F(\dots)$$

$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}[\dots] \xrightarrow[\text{(F bornée)}]{\text{TCD}} \mathbb{E}[\mathbb{1}_A F(\tilde B_{t_1},\dots,\tilde B_{t_n})] = \mathbb{P}(A)\,\mathbb{E}[F(\tilde B_{t_1},\dots,\tilde B_{t_n})] \quad \square$$

Maintenant soit $s=0$.

On obtient que $\sigma(B_t, t>0) \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{0+} \subseteq \sigma(B_t, t\geq 0) \Rightarrow$

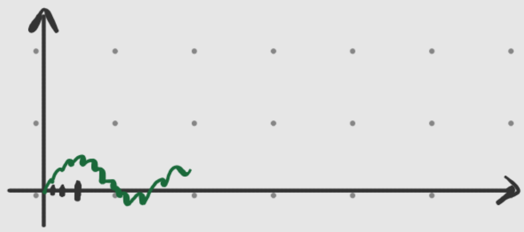
$\Rightarrow \mathcal{F}_{0+}\perp\!\!\!\perp\mathcal{F}_{0+} \Rightarrow \forall A \quad \mathbb{P}(A)=\mathbb{P}(A\cap A)=\mathbb{P}(A)^2 \in\{0,1\}$.

On dit que la tribu $\mathcal{F}_{0+}$ est triviale. (Loi 0-1 de Blumenthal)

Application Soit $\tau := \inf\{t>0,\ B_t>0\} \Rightarrow \mathbb{P}(\tau=0)=1$

▷ On doit se convaincre du fait que $\{\tau=0\}\in\mathcal{F}_{0+}$

Rq $\{\tau=0\}\notin\mathcal{F}_0$



Soit $n\in\mathbb{N}$

$$\{\tau=0\} = \bigcap_{m\geq n}\Big\{\sup_{0\le u\le \frac{1}{m}} B_u>0\Big\}\in\mathcal{F}_{\frac{1}{n}}\quad \forall n\in\mathbb{N} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\tau=0\}\in\bigcap_n \mathcal{F}_{1/n} = \mathcal{F}_{0+}.$$

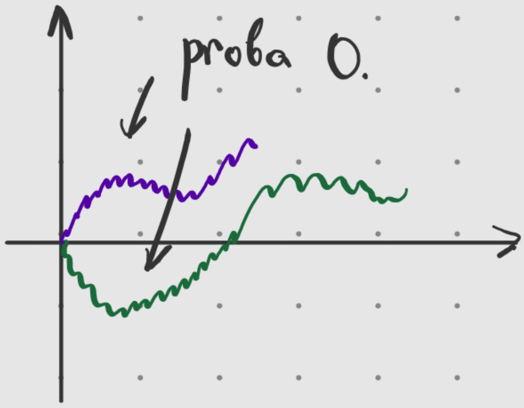
Donc $\mathbb{P}(\tau=0)\in\{0,1\}$

$t>0$

$$\mathbb{P}(\tau\le t)\geq \mathbb{P}(B_t>0)=\frac{1}{2}$$

$\downarrow t\to 0$

$$\mathbb{P}(\tau=0)\geq\frac{1}{2} \Rightarrow \mathbb{P}(\tau=0)=1. \quad \square$$



- B étant un MB, on obtient que $\mathbb{P}(\tau^- = 0) = 1$ où $\tau^- = \inf\{t > 0 : B_t < 0\}$

p.s. dans tout intervalle $[0, \varepsilon]$ avec $\varepsilon > 0$ il y a t et s avec $B_t > 0$ et $B_s < 0$

On peut étudier l'ensemble aléatoire des zéros du MB :

$\mathcal{Z} = \{t \geq 0 : B_t = 0\}$, $0 \in \mathcal{Z}$ et p.s. 0 est un point d'accumulation de $\mathcal{Z}$.

Par inversion du temps, $(tB_{\frac{1}{t}})$ est un MB $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ p.s. $+\infty$ est un point d'accumulation pour $\mathcal{Z}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ $\mathcal{Z}$ est non borné.

$\mathbb{P}(\forall\, [M, +\infty[$ contient t, s, u $B_t > 0$, $B_s < 0$, $B_u = 0) = 1$.

Nous avons vu que $\forall t > 0$ $\mathbb{P}(\sup_{s \in [0,t]} B_s > 0) = 1$.

Soit $x > 0$ $\mathbb{P}(\sup_{0 \leq s \leq t} B_s > x) = \mathbb{P}(\sup_{s \in [0,1]} B_s > \frac{x}{\sqrt{t}})$

$$(B_s, s \geq 0) \overset{\mathcal{L}}{=} (\sqrt{t}\, B_{s/t}, s \geq 0)$$

$t \to \infty \quad \mathbb{P}(\sup_{s\in\mathbb{R}_+} B_s > x) = \mathbb{P}(\sup_{[0,1]} B_s > 0) = 1 \quad \forall x\in\mathbb{R} \Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{P}(\sup_{\mathbb{R}_+} B_s = +\infty) = 1 = \mathbb{P}(\inf_{\mathbb{R}_+} B_s = -\infty)$

$\forall a\in\mathbb{R} \quad \tau_a = \inf\{t>0 : B_t = a\}$

On vient de montrer que $\mathbb{P}(\forall a\in\mathbb{R},\ \tau_a < +\infty) = 1$

$a>0 \quad \mathbb{P}(\tau_a > t) = \mathbb{P}(\sup_{s\in[0,t]} B_s < a)$

On va calculer la loi de $(B_t, \sup_{0\leq s\leq t} B_s)$.

Exemple Soit $K>0$, $A_n = \{\sqrt{n} B_{1/n} > K\}$

$\limsup_N A_N = \bigcap_m \bigcup_{k\geq m} A_k$

Lemme de Fatou $\Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_N A_N) \geq \limsup_N \mathbb{P}(A_N) = \mathbb{P}(B_1 > K) > 0$

$\mathbb{P}(A_n) = \mathbb{P}(B_1 > K) > 0 \ \forall n$

$A_n \in \mathcal{F}_{1/n} \Rightarrow \bigcap_{k\geq m} A_k \in \mathcal{F}_{1/m} \Rightarrow \limsup_N A_N \in \mathcal{F}_{1/m} \quad \forall n\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow \limsup_N A_N \in \mathcal{F}_{0+} \Rightarrow \mathbb{P}(\limsup_N A_N) = 1 \ \Rightarrow^*$

$\Rightarrow \forall K>0 \quad \mathbb{P}(\limsup_n \frac{B_{1/n}}{\sqrt{1/n}} > K) = 1.$

Donc $\mathbb{P}(\limsup_n \frac{B_{1/n}}{\sqrt{1/n}} = +\infty) = 1 \Rightarrow \mathbb{P}(B \text{ soit } \tfrac{1}{2}\text{-Hölder}) = 0.$

$\mathbb{P}(B \text{ soit } \tfrac{1}{2}\text{-Hölder sur } [0,1]) = \mathbb{P}(\sup_{0\leq s<t\leq 1} \frac{|B_t - B_s|}{|t-s|^{1/2}} < +\infty) \leq$

$$\leq \mathbb{P}\left(\sup_{0<t\leq 1} \frac{|B_t|}{\sqrt{t}} < +\infty\right).$$

$$\left\{\sup_{[0,1]} \frac{|B_t|}{\sqrt{t}} < +\infty\right\}^c \supseteq \left\{\limsup_n \frac{B_{1/n}}{\sqrt{1/n}} = +\infty\right\}$$

$*$ $\limsup_N A_N = \bigcap_n \bigcup_{k\geq n} \{\sqrt{k}\, B_{1/k} > K\} = \{\omega : \exists (k_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ t.q.

$k_n(\omega) \to +\infty$ et $\sqrt{k_n}\, B_{1/k_n}(\omega) > K\} = \{\omega : \limsup_n \sqrt{n}\, B_{1/n}(\omega) > K\}$

$\mathbb{P}($B soit dérivable avec dérivée continue$) = 0$

$(\subset$ B est Lipschitzienne$)$

Semigroupe du MB

$(B_t)_{t\geq 0}$ un MB dans $\mathbb{R}^d$, $B_t = (B_t^{(1)}, \dots, B_t^{(d)})$ - indép.

$f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) = \{f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continues bornées$\}$

$t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$ $\quad P_t f(x) = \mathbb{E}[f(x+B_t)] = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}} \int f(x+y) e^{-\frac{\|y\|^2}{2}} dy$

Rem $\quad P_t f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) \Rightarrow P_t : \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d)$, $\forall t \geq 0$

Prop $\quad t, s \geq 0$, $P_{t+s} = P_t \circ P_s = P_s \circ P_t \quad (P_0 = \mathrm{Id})$

Preuve $\quad f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}^d) \qquad g(x) = P_s f(x) = \mathbb{E}[f(x+B_s)]$

$$P_{t+s} f(x) = \mathbb{E}[f(x+B_{t+s})] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[f(x + \underbrace{B_{t+s} - B_t}_{\tilde{B}_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_t} + B_t) \mid \mathcal{F}_t\right]\right] =$$

$$= \mathbb{E}[g(x+B_t)] = P_t \circ P_s \cdot f(x)$$

$\square$

Rem On a montré que $\mathbb{E}[f(x+B_{t+s}) | \mathcal{F}_s] = P_s f(x+B_t)$ p.s.

Chaine de Markov $(X_n)_{n\geq 0}$ sur E (avec matrice de transition Q)

$$\mathbb{P}(X_{m+1} = y \mid X_1, \dots, X_m) = Q(X_m, y)$$ ← propriété de Markov

$$\mathbb{E}[f(X_{m+1}) \mid X_1, \dots, X_m] = Qf(X_m) = \sum_y Q(X_m, y) f(y)$$

$$\mathbb{E}[f(X_{n+k}) \mid X_1, \dots, X_n] = Q^k f(X_n)$$

$$\underset{\text{Matrice de transition}}{(Q^k)_{k\geq 0}} \rightsquigarrow \underset{\text{Semigroupe de transition}}{(P_t)_{t\geq 0}}$$

$(N_t)_{t\geq 0}$ est la processus de Poisson. On a la même preuve

$$P_t f(x) = \mathbb{E}[f(x+N_t)] \qquad P_{t+s} = P_t \circ P_s.$$

Or $u(t,x) = \mathbb{E}[f(x+B_t)]$, $t \geq 0$, $x \in \mathbb{R}^d$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & t > 0 \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$$ ← Equation de la chaleur

Question $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \dfrac{1}{2} \mathrm{Tr}\left[A(x) D_x^2 u(t,x)\right] + \langle b(x), D_x u(t,x) \rangle, \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ A matrice symétrique $A > 0$

Alors est-il possible $u(t,x) = \mathbb{E}[f(X(t,x))]$?

Oui, X sera la solution d'une équation différentielle stochastique à la Itô.

$$\mathcal{F}_\infty = \sigma(B_s, s \geq 0)$$

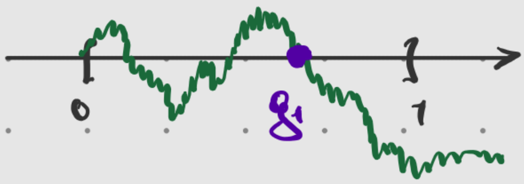
Déf $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\} = [0, +\infty]$ est **un temps d'arrêt** (pour $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$)

si $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$, $\forall t \in [0, +\infty]$.

Exemple $\tau_a = \inf\{t > 0,\ B_t = a\}$

$$\{\tau_a \leq t\} = \{\underbrace{\sup_{s\in[0,t]} B_s}_{\mathcal{F}_t\text{-mesurable}} \geq a\} \in \mathcal{F}_t$$

Exemple $g_1 = \sup\{t \in [0,1],\ B_t = 0\}$



$$\{g_1 < t\} = \{\inf_{s\in]t,1]} |B_s| > 0\} \notin \mathcal{F}_t$$ $\Rightarrow$ ce n'est pas un temps d'arrêt

$$\{g_1 \geq t\} = \{\inf_{[t,1]} |B_s| = 0\}$$

Déf $\mathcal{F}_\tau = \text{"}\sigma(B_s, s \in [0,\tau])\text{"} = \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0\ \ A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$

Propriété de Markov forte

Soit τ un temps d'arrêt. Sur $\{\tau < \infty\}$ le processus

$\tilde{B} = (B_{t+\tau} - B_\tau, t \geq 0)$ est un $MB \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_\tau$

<u>Preuve</u> Soit $A \in \mathcal{F}_\tau$, $F \in C_b(\mathbb{R}^n)$ $0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$. On veut prouver

$$\mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A \cap \{\tau < \infty\}} F(\tilde{B}_{t_1}, \dots, \tilde{B}_{t_n})\right] = \mathbb{P}(A \cap \{\tau < \infty\})\, \mathbb{E}\left[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})\right]$$

Une discrétisation de τ : $\tau_m = \dfrac{\lceil 2^m \tau \rceil}{2^m} \in \dfrac{1}{2^m}\mathbb{N}$

$\uparrow$ sur $\{\tau < \infty\}$

$$\mathbb{1}_{A \cap \{\tau < \infty\}} F(B_{t_1+\tau_m} - B_{\tau_m}, \dots, B_{t_n+\tau_m} - B_{\tau_m}) =$$

$$= \mathbb{1}_{A \cap \{\tau < \infty\}} \sum_{k \geq 0} \mathbb{1}_{\underbrace{\left\{\frac{k-1}{2^m} < \tau_m \leq \frac{k}{2^m}\right\}}_{\in \mathcal{F}_{\frac{k}{2^m}}}} \underbrace{F\left(B_{t_1+\frac{k}{2^m}} - B_{\frac{k}{2^m}}, \dots, B_{t_n+\frac{k}{2^m}} - B_{\frac{k}{2^m}}\right)}_{\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{\frac{k}{2^m}}}$$

$\downarrow$

$$\mathbb{E}[\dots] = \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}\Big[\underbrace{\mathbb{1}_{A \cap \left\{\frac{k-1}{2^m} < \tau_m \leq \frac{k}{2^m}\right\}}}_{\in \mathcal{F}_{k/2^m}} \underbrace{F(\dots)}_{\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_{k/2^m}}\Big] =$$

$$= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}\left(A \cap \left\{\tfrac{k-1}{2^m} < \tau_m \leq \tfrac{k}{2^m}\right\}\right) \mathbb{E}\left[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})\right] = \mathbb{P}(A \cap \{\tau < \infty\})\, \mathbb{E}\left[F(B_{t_1}, \dots, B_{t_n})\right]$$

$\uparrow$ p-té de Markov simple

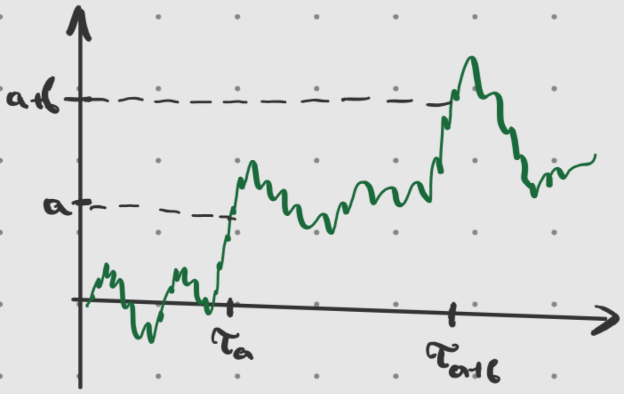
$m \to \infty$ $\quad \tau_m \downarrow \tau$

$$\mathbb{E}[\dots] \xrightarrow{TCD} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A \cap \{\tau < \infty\}} \cdot F(B_{t_1+\tau} - B_\tau, \dots, B_{t_n+\tau} - B_\tau)\right] \qquad \square$$

Exemple $\tau_a = \inf\{t > 0, B_t = a\}$ temps d'arrêt $\mathbb{P}(\tau_a < +\infty) = 1$ $\forall a$

$c > 0$ $\quad \tau_{ca} = \inf\{t > 0 : B_{t/c^2} = a\} = \{s = \frac{t}{c^2}\} = c^2 \inf\{s > 0 : B_s = a\} = c^2 \tau_a$

$$(c^{-2} \tau_{ca})_{a \geq 0} \overset{(d)}{=} (\tau_a)_{a \geq 0}$$



$\tau_a \leq \tau_{a+b}$ p.s.

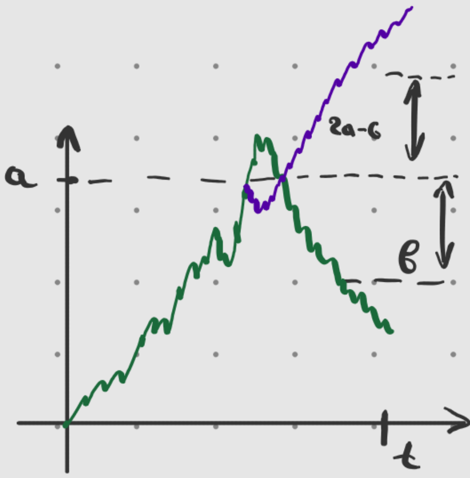
$$\tau_{a+b} = \inf\{t > \tau_a : B_t - \underset{\overset{\shortparallel}{a}}{B_{\tau_a}} = b\} =$$

$$= \tau_a + \inf\{s > 0 : \underbrace{B_{s+\tau_a} - B_{\tau_a}}_{\tilde{B}_s \perp\!\!\!\perp \tau_a} = b\} \overset{d}{=} \tau_a + \tau_b$$

$$\tau_{a+b} - \tau_a = \tilde{\tau}_b \perp\!\!\!\perp \tau_a$$

$(\tau_a)_{a \geq 0}$ est un processus à accroissements indépendants et stationnaires.

Thm (Principe de réflexion)



$S_t = \sup_{s \in [0,t]} B_s$. Alors $\forall a, b$ t.q. $a \geq b$, $a \geq 0$

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b)$$

En particulier, la loi de S_t est la loi de $|B_t|$.

Preuve $\tau_a = \inf\{t > 0 : B_t = a\}$

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(\tau_a \leq t, B_t \leq b) = \mathbb{P}(\tau_a \leq t, B_t - B_{\tau_a} \leq b - a) =$$

$$= \mathbb{P}(\tau_a \leq t, \tilde{B}_{t-\tau_a} \leq b - a) = \{\tilde{B} \overset{d}{=} -\tilde{B}, \tilde{B} \perp \tau_a\} =$$

$\tilde{B}_t = B_{t+\tau_a} - B_{\tau_a}$

$$= \mathbb{P}(\tau_a \leq t, \underbrace{-\tilde{B}_{t-\tau_a}}_{-B_t + a} \leq b - a) = \mathbb{P}(\tau_a \leq t, B_t \geq 2a - b) \overset{b \leq a}{=} \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b)$$

$$\mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(\underbrace{S_t \geq a, B_t > a}_{= \mathbb{P}(B_t > a)}) + \mathbb{P}(\underbrace{S_t \geq a, B_t \leq a}_{= \mathbb{P}(B_t \geq a)}) = 2\mathbb{P}(B_t \geq a) =$$

$$= \mathbb{P}(|B_t| \geq a) \Rightarrow S_t \overset{d}{=} |B_t| \qquad \square$$

<u>Loi de τ_a</u> $\quad \mathbb{P}(\tau_a \leq t) = \mathbb{P}(S_t \geq a) = \mathbb{P}(|B_t| \geq a) = \mathbb{P}\left(|B_1| \geq \frac{a}{\sqrt{t}}\right) =$

$$= \mathbb{P}\left(\frac{a^2}{B_1^2} \leq t\right) \Rightarrow \tau_a \overset{d}{=} \frac{a^2}{Z^2}, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

<u>Densité</u> $\quad \mathbb{P}\left(|B_1| \geq \frac{|a|}{\sqrt{t}}\right) = 2\int_{|a|/\sqrt{t}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\, dy$

$$\Downarrow$$

$$f_a(t) = \frac{|a|}{t\sqrt{t}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2}{2t}} = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}, \quad t > 0$$

<u>Question</u> $\quad \mathbb{E}[\tau_a] = \int_0^{+\infty} t \underbrace{f_a(t)}_{\underset{t\to\infty}{\sim} \frac{c}{\sqrt{t}}} dt = +\infty$

Variation quadratique de MB

Soit $\quad t > 0, \quad \Delta_n = \{0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = t\}$

$|\Delta_n| = \sup |t_{i+1}^n - t_i^n| \to 0$. Alors

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n})^2 = t \quad \text{dans } L^2(\mathbb{P})$$

<u>Preuve</u>

$$Y_i = Y_i^n = (B_{t_i^n} - B_{t_{i-1}^n})^2 - (t_i^n - t_{i-1}^n)$$

$(Y_i)_{i=1,\dots,p_n}$ sont indépendents

$$\mathbb{E}[Y_i]=0$$

$$Y_i=(t_i^n-t_{i-1}^n)\left(\left(\frac{B_{t_i^n}-B_{t_{i-1}^n}}{\sqrt{t_i^n-t_{i-1}^n}}\right)^2-1\right)\overset{\mathcal{L}}{\sim}(t_i^n-t_{i-1}^n)(Z^2-1)\quad \text{où } Z\sim\mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[Y_i]=(t_i^n-t_{i-1}^n)^2(3-1)=2(t_i^n-t_{i-1}^n)^2$$

$$\sum_{i=1}^{p_n}(B_{t_i^n}-B_{t_{i-1}^n})^2-t=\sum_{i=1}^{p_n}Y_i$$

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_1^{p_n}Y_i\right)^2\right]\underset{\substack{\text{indép.}\\ \mathbb{E}Y_i=0}}{=}\sum\mathbb{E}[Y_i^2]=2\sum_{i=1}^{p_n}(t_i^n-t_{i-1}^n)^2\leq 2\cdot|\Delta_n|\cdot\overbrace{\sum(t_i^n-t_{i-1}^n)}^{t}\xrightarrow[n\to\infty]{}0\quad\square$$

$\Delta_n=\left\{t\frac{i}{2^n},\ i=0,\dots,2^n\right\}$ subdivision dyadique $\quad\Delta_n\leq\Delta_{n+1}$

Dans ce cas-là $\displaystyle\sum_{i=1}^{p_n}(\dots)^2\xrightarrow{p.s.}t.$

<u>Preuve</u>

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{i=1}^{p_n}Y_i\right)^2\right]=2\sum_{i=1}^{2^n}(t_i^n-t_{i-1}^n)^2=\sum_{i=1}^{2^n}\frac{2t^2}{2^{2n}}$$

$$\underbrace{\mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^{p_n}Y_i\right|>\frac{1}{n}\right)}_{A_n}\leq n^2\mathbb{E}\left[\left(\sum Y_i\right)^2\right]=\frac{n^2t^2}{2^{n-1}}$$

$\sum\mathbb{P}(A_n)<+\infty\Rightarrow$ Par Borel-Cantelli: $\mathbb{P}(\limsup A_n)=0$

$$\Rightarrow 1=\mathbb{P}(\liminf_n A_n^c)=\mathbb{P}\Big(\underbrace{\exists\bar{n}(\omega):\ \forall n\geq\bar{n}(\omega)\quad\Big|\sum_{i=1}^{p_n}Y_i(\omega)\Big|\leq\frac{1}{n}}_{\Omega_\infty}\Big)\qquad\square$$

Soit $f:[0,T]\to\mathbb{R}$, $[a,b]\subseteq[0,T]$. **La variation totale** de f sur $[a,b]$

est $\displaystyle\|df\|([a,b])=\sup_{\substack{\Delta\text{ subdivision}\\ \text{de }[a,b]}}\sum_{i=1}^{p}|f_{t_i}-f_{t_{i-1}}|$

Si $|df|([0,T]) < +\infty$ alors on dit que f a variation finie

Exemple

1) Si $f(s) \leq f(t)$ si $s \leq t$ $\Rightarrow \sum |f_{t_i} - f_{t_{i-1}}| = \sum_{i=1}^{p_n} (f_{t_i} - f_{t_{i-1}}) = f_b - f_a$

2) Si $|f(t) - f(s)| \leq L|t-s|$ $\Rightarrow \sum |f(t_i) - f(t_{i-1})| \leq L \sum (t_i - t_{i-1}) = L(b-a)$

3) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ $\quad |df|([a,b]) = f(a) - f(b)$ si $0 < a \leq b$

$|df|([0,T]) = +\infty$

$$\mathbb{P}(|dB|([a,b]) = +\infty) = 1, \quad \forall \omega \in \Omega_0$$

$$\underbrace{\sum_{i=1}^{2^n} \mathbb{1}_{\{a \leq \frac{it}{2^n} \leq b\}} \cdot \left| B_{\frac{it}{2^n}} - B_{\frac{(i-1)t}{2^n}} \right|^2}_{\downarrow\, b-a} \leq \underbrace{\sup_i \left| B_{\frac{it}{2^n}} - B_{\frac{(i-1)t}{2^n}} \right|}_{\downarrow\, 0 \text{ uniforme continuité}} \cdot \sum_i \mathbb{1}_{\{a \leq \frac{it}{2^n} \leq b\}} \left| B_{\frac{it}{2^n}} - B_{\frac{(i-1)t}{2^n}} \right|$$

Donc $\sum_i \mathbb{1}_{\{a \leq \frac{it}{2^n} \leq b\}} \left| B_{\frac{it}{2^n}} - B_{\frac{(i-1)t}{2^n}} \right| \to +\infty$

$d\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$:

$t_i^n < t_{i+1}^n \quad t_{2i+1}^n \in \mathbb{Q}, \quad t_{2i}^n \notin \mathbb{Q}$

$$\underbrace{\sum |\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(t_{i+1}^n) - \mathbb{1}_{\mathbb{Q}}(t_i^n)|}_{p_n} = p_n \to +\infty$$

Rappel Si $F : [0,T] \to \mathbb{R}$ croissante, continue à droite $\Rightarrow \exists!\ \mu$ mesure finie sur $[0,T]$ t.q. $F(b) - F(a) = \mu(]a,b])$ $\forall\, 0 \leq a \leq b \leq T$.

Stieltjes Si F sur $[0,T]$ est à variation finie

$\exists \mu^+$ et μ^- deux mesures finies sur $[0,T]$ t.q.

$$F(b)-F(a) = \mu^+(]a,b]) - \mu^-(]a,b]) \quad \text{(pour càdlàg)}$$

Dans ce cadre $\displaystyle\int_0^t h_s\, dF(s) = \int_0^t h\, d\mu^+ - \int_0^t h\, d\mu^-$

Si F n'est pas à variation finie, on ne sait pas faire cela. Notamment si $F = B$ un MB

Thm. f est à variation finie $\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists$ deux mesures finies μ^+ et μ^- t.q $\forall \varphi \in C_c^\infty(0,T)$ $\displaystyle\int_0^T \varphi'(x) f(x)\, dx = -\int \varphi(x) (\mu^+ - \mu^-)(dx)$

Martingales à temps continu

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $(\mathcal{F}_t)$ filtration $\quad \mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$

Un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt est $\tau : \Omega \to \mathbb{R}_+$ t.q. $\{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

Un $(\mathcal{F}_{t+})$-temps d'arrêt est $\sigma : \Omega \to \mathbb{R}_+$ t.q. $\{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$

Rem σ est un $(\mathcal{F}_{t+})$-temps d'arrêt $\Leftrightarrow \{\sigma < t\} \in \mathcal{F}_t \ \forall t \geq 0$

Preuve $(\Rightarrow)$ $\displaystyle\{\sigma < t\} = \bigcup_{s_n < t} \underbrace{\{\sigma \leq s_n\}}_{\mathcal{F}_{s_n+} \subset \mathcal{F}_t} \in \mathcal{F}_t$

$(\Leftarrow)$ $\displaystyle\{\sigma \leq t\} = \bigcap_{n \geq m} \{\sigma \leq t + \tfrac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{m}} \ \forall m \Rightarrow \{\sigma \leq t\} \in \mathcal{F}_{t+}$ $\square$

(où $\bigcap_{n \geq m} \{\sigma \leq t + \tfrac{1}{n}\} \in \mathcal{F}_{t+\frac{1}{m}}$)

Exemple $a > 0$, $\tau_a = \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ $\qquad \tau_a \leq \sigma_a$

$\sigma_a = \inf\{t \geq 0 : B_t > a\}$

$\mathbb{P}(\tau_a = \sigma_a) = 1$ (propriété de Markov forte)

τ_a est un $(\mathcal{F}_t)$-temps d'arrêt $\left(\text{si } \mathcal{F}_t = \sigma(B_s, s \in [0,t])\right)$

$\{\sigma_a < t\} = \{\sup_{[0,t]} B > a\} \in \mathcal{F}_t$ par la continuité des trajectoires de B.

Déf On dit que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est continue à droite si $\mathcal{F}_{t^+} = \mathcal{F}_t$ $\forall t \geq 0$

Si $\mathcal{F}_t$ contient tous les événements $\mathbb{P}$-négligeables $\forall t \geq 0$

donc on dit que $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ est complète.

Si $(\mathcal{F}_t)$ est continue à droite et complète on dit qu'elle

satisfait les conditions usuelles.

Théorème Si on ajoute à $(\mathcal{F}_t)$ les $\mathbb{P}$-négligeables on obtient

une filtration continue à droite et complète.

(Augmentation habituelle)

Déf (X_t) un processus sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$

1) X est mesurable si $\underset{(\mathbb{R}_+ \times \Omega,\, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})}{(t,\omega)} \mapsto \underset{(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))}{X_t(\omega)}$ est mesurable

2) X est adapté si $\forall t \geq 0$ X_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable.

3) X est progressif si $\forall t \geq 0$ $\underset{[0,t] \times \Omega}{(t,\omega)} \mapsto X_t(\omega)$ et $\mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t$ -mesur.

Progressif $\Rightarrow$ adapté et mesurable

Proposition Si $(X_t)_{t\geq 0}$ est adapté et continu à droite alors il est progressif.

Preuve voir le poly. $\square$

Déf $(M_t)_{t\geq 0}$ réel est une sous- / sur- martingale si

1) M est adapté est $M_t \in L^1$ $\forall t$

2) $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} M_s$ p.s. $t \geq s$

Rem $\mathbb{E}[M_t] \overset{\leq}{\underset{\geq}{=}} \mathbb{E}[M_s]$ $t \geq s$

Exemples 1) $\mathbb{E}[B_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[B_t - B_s + B_s | \mathcal{F}_s] = 0 + B_s$

2) $M_t = B_t^2 - t$, $\mathbb{E}[B_t^2 - t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[(B_t - B_s + B_s)^2 - t | \mathcal{F}_s] = t - s + B_s^2 - t = M_s$

3) $M_t = \exp\{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}\Big[\exp\{\lambda B_s - \tfrac{\lambda^2}{2} t\} \underbrace{e^{\lambda (B_t - B_s)}}_{\perp\!\!\!\perp \,\mathcal{F}_s \;\; e^{\frac{\lambda^2}{2}(t-s)}} \Big| \mathcal{F}_s\Big] = e^{\lambda B_s - \frac{\lambda^2}{2} s} = M_s$$

Déf $(M_t)_{t\geq 0}$ est fermée si $\exists X \in L^1$: $M_t = \mathbb{E}[X | \mathcal{F}_t]$ $\forall t \geq 0$

Théorème (d'arrêt)

Soit M une martingale fermée et σ, τ deux temps d'arrêt t.q. $\sigma \leq \tau$ p.s. Alors $\mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma$ p.s. $(\mathbb{E}[M_\tau] = \mathbb{E}[M_\sigma])$

Exemple $M_t = e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}$, $t \geq 0$. Soit $a > 0$, $\tau_a = \inf\{t > 0 : B_t = a\}$

$\lambda > 0$. $M_{t\wedge\tau_a} = \exp\left\{\lambda B_{t\wedge\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2}(t\wedge\tau_a)\right\}$, $0 \leq M_{t\wedge\tau_a} \leq e^{\lambda a}$

martingale arrêtée

$(M_{t\wedge\tau_a})_{t\geq 0}$ est bornée $\rightarrow$ fermée.

on va démontrer ça la fois prochaine

On applique le thm d'arrêt avec $\tau = +\infty$, $\sigma = 0$.

$$\mathbb{E}[M_{\tau_a}] = \mathbb{E}\left[e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a}\right] = \mathbb{E}[M_0] = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_a}\right] = e^{-\lambda a} \rightarrow \mathbb{E}\left[e^{-\theta\tau_a}\right] = e^{-\sqrt{2\theta}\,a}$$

$(M_t)_{t\in[0,T]}$ est toujours fermée par M_T.

Thm (Inégalité de Doob)

Les martingales sont toujours supposées être continue !

Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale.

Si $p, q > 0$ $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\left\| \sup_{s\in[0,t]} |M_s| \right\|_{L^p} \leq q \, \|M_t\|_{L^p}$

$$\left\| \sup_{s\geq 0} |M_s| \right\|_{L^p} \leq q \sup_{t\geq 0} \|M_t\|_{L^p}$$

$p = q = 2 \Rightarrow \left\| \sup_{s\geq 0} |M_s| \right\|_{L^2} \leq 2 \sup_{t\geq 0} \|M_t\|_{L^2}$

Preuve Etant donnée le thm à temps disret, on considère

la martingale sur des temps dyadiques et on utilise la densité et la continuité des trajectoires. $\square$

Prop (M_t) martingale, τ temps d'arrêt. Alors $(M_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale (et aussi une $(\mathcal{F}_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$-martingale)

Preuve Vrai en temps discret, $\tau_n = \frac{\lceil 2^n \tau \rceil}{2^n} \in 2^{-n}\mathbb{N}$

$$t \in \mathbb{R}_+ \rightsquigarrow t_n = \frac{\lceil 2^n t \rceil}{2^n} \in 2^{-n}\mathbb{N} \Rightarrow (M_{t_n \wedge \tau_n})_{\tau_n} \text{ est}$$

une martingale. On justifie le passage quand $n \to \infty$ $\square$

Rappel Une famille de v.a. réeles $(X_\lambda)_{\lambda \in A}$ est uniformement integrable si $\lim\limits_{t\to+\infty} \sup\limits_{\lambda\in A} \mathbb{E}\left[|X_\lambda| \cdot \mathbb{1}_{\{|X_\lambda| > t\}}\right] = 0.$

Par ex. si $\mathbb{E}\left[\sup\limits_{\lambda\in A} |X_\lambda|\right] < \infty$ (X_λ) est u.i.

Rappel Une martingale $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est fermée ($\exists X \in L^1$ t.q. $M_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$ $\forall n$)

$\Leftrightarrow (M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est U.I

Rappel Une martingale $(M_n)_{n\geq 0}$ bornée dans L^1 converge p.s. quand $n \to \infty$ vers une limite M_∞.

Exemple $M_t = \exp\left\{B_t - \frac{t}{2}\right\} \geq 0$. $M_t = \exp\left\{-t\left(\frac{1}{2} - \frac{B_t}{t}\right)\right\} \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} 0$,

mais $M_t \neq \mathbb{E}[0|\mathcal{F}_t]$

$\mathbb{E}|M_t| = \mathbb{E}[M_t] = 1 \Rightarrow$ bornée dans L^1.

Rappel $\quad M_{t\wedge\tau_a} = \exp\left\{\lambda B_{t\wedge\tau_a} - \lambda^2 \frac{t\wedge a}{2}\right\} \leq e^{\lambda a}$

Martingale bornée -> U.I. -> bornée par $\quad M_\infty = e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a}$

Donc $\quad M_{t\wedge\tau_a} = \mathbb{E}[M_\infty | \mathcal{F}_t]$

$(M_t)_{t\geq 0}$ martingale, si $(M_n)_{n\geq 0}$ est fermée $\Rightarrow M_n = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_n]$

$$M_t = \mathbb{E}[M_{\lceil t\rceil} | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[X|\mathcal{F}_{\lceil t\rceil}] | \mathcal{F}_t] = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t].$$

Thm (d'arrêt)

$(M_t)_{t\geq 0}$ est martingale fermée, $\sigma \leq \tau$ deux temps d'arrêt.

Alors $\mathbb{E}[M_\tau | \mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma$ p.s.

Preuve $\quad$ On définit τ_n, σ_n $\mathbb{E}[M_{\tau_n} | \mathcal{F}_{\sigma_n}] = M_{\sigma_n}$ p.s., puis limite $n \to \infty$.

Exemple $\quad (B_t)_{t\geq 0}$ pas fermée $\left(\mathbb{E}[|B_t|] = C\sqrt{t}\right)$

$\tau_1 = \inf\{t>0, B_t = 1\} \quad \mathbb{P}(\tau_1 < \infty) = 1. \quad \sigma = 0 \quad \tau = \tau_1$

$B_{\tau_1} = 1, \quad B_0 = 0 \quad \mathbb{E}[B_{\tau_1} | \mathcal{F}_0] \neq B_0.$

Rem $\quad$ Si $\sigma \leq \tau \leq K$ avec K constante $\rightarrow$ on peut remplacer

$(M_t)_{t\geq 0}$ par $(M_{t\wedge K})_{t\geq 0}$ martingale fermée par M_K

Exemple (identité de Wald)

$(B_t)_{t\geq 0}$, τ temps d'arrêt $\mathbb{E}[\tau]<\infty$.

Alors $B_\tau \in L^2$, $\mathbb{E}[B_\tau]=0$, $\mathbb{E}[B_\tau^2]=\mathbb{E}[\tau]<\infty$.

<u>Preuve</u> $t\wedge\tau$ est un temps d'arrêt borné. $M_t = B_t^2 - t$ est une martingale. $\mathbb{E}[M_{t\wedge\tau}]=\mathbb{E}[M_0]=0 \Rightarrow \mathbb{E}[B^2_{t\wedge\tau}] = \mathbb{E}[t\wedge\tau] \leq \mathbb{E}[\tau]<\infty$

$\mathbb{E}[B^2_{t\wedge\tau}] \downarrow$ TCD ?

$\mathbb{E}[t\wedge\tau] \downarrow$ converg. monotone (TCM) $\mathbb{E}[\tau]$

<u>Doob</u> pour $(B_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$: $(p=q=2)$
$$\underbrace{\mathbb{E}\Big[\sup_{t\geq 0} B^2_{t\wedge\tau}\Big]}_{Y} \leq 4 \sup_{t\geq 0}\mathbb{E}[B^2_{t\wedge\tau}] \leq 4\,\mathbb{E}[\tau] < +\infty$$

$$0 \leq B^2_{t\wedge\tau} \leq Y \in L^1$$

Par convergence dominée : $B^2_{t\wedge\tau} \to B^2_\tau$ p.s. $t\to\infty \Rightarrow \mathbb{E}[B^2_{t\wedge\tau}] \to \mathbb{E}[B^2_\tau]$

$\mathbb{E}[B_{t\wedge\tau}] = \mathbb{E}[B_0] = 0$

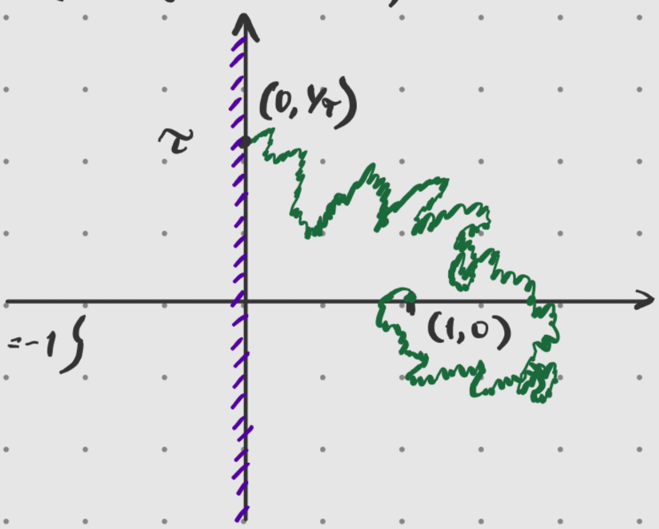
Or $(B_{t\wedge\tau})_{t\geq 0}$ bornée dans $L^2 \Rightarrow$ U.I. $\Rightarrow \lim_t \mathbb{E}[B_{t\wedge\tau}] = \mathbb{E}[B_\tau]$.

U.I. garantit la possibilité de commuter limites et intégration
(convergence dans L^1)

<u>Exemple</u> (X,Y) - MB dans $\mathbb{R}^2$,

on considère $(1+X_t, Y_t)_{t\geq 0}$

$\tau = \inf\{t\geq 0 : 1+X_t = 0\} = \inf\{t\geq 0 : X_t = -1\}$



Loi de Y_τ ?

$X \perp\!\!\!\perp Y$, $\tau = \tau(X) \Rightarrow \tau \perp\!\!\!\perp Y$

$$\mathbb{E}[e^{i\theta Y_\tau}] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[e^{i\theta Y_\tau}|\tau]] = \mathbb{E}[e^{-\frac{\theta^2\tau}{2}}] = \mathbb{E}[\underbrace{e^{|\theta| - \frac{\theta^2}{2}\tau_1}}_{M_\infty}]\overset{1}{\overset{\shortparallel}{}} e^{-|\theta|} = e^{-|\theta|}$$

$\Rightarrow Y_\tau \notin L^1$.

Loi de Cauchy $\frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}dx$

Exemple $a\lambda \geq 0 \Rightarrow \mathbb{E}[e^{\lambda B_{t\wedge\tau_a} - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a \wedge t}] = 1$

$$\downarrow$$

$$\mathbb{E}[e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a}] = 1$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[e^{-\frac{\lambda^2}{2}\tau_a}] = e^{-|\lambda a|}$$

$\mathbb{E}[e^{\lambda B_{t\wedge\tau} - \frac{\lambda^2}{2}t\wedge\tau}] = 1$ par thm d'arrêt.

$$\shortparallel$$

$$\mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}e^{\cdots}}_{\downarrow} + \mathbb{1}_{\{\tau=\infty\}}\underbrace{e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2}t}}_{\substack{\downarrow\\ 0}}]$$

$$\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{\tau<\infty\}}e^{\lambda a - \frac{\lambda^2}{2}\tau_a}] = 1 \Rightarrow \{\lambda = 0\} \Rightarrow \mathbb{P}(\tau<\infty) = 1.$$

Semi-martingales

Déf Un processus à variation finie $(A_t)_{t\geq 0}$ est un processus continu adapté (progressif) dont les trajectoires sont p.s. à variation finie et $A_0 = 0$. De plus, A est croissant si les trajectoires sont croissantes p.s.

Rappels A var. finie admet dA mesure sur $\mathbb{R}_+$ (aléatoire)

t.q. $A_t - A_s = dA(]s,t]) \quad \forall s \leq t$

A continu $\Rightarrow dA(\{t\}) = 0 \quad \forall t \geq 0 \Rightarrow A_t - A_s = dA(]s,t[)$

Rem Dans ce cours tous les processus à variation finie qu'on va voir seront de la forme $A_t = \int_0^t h_s\,ds$ (absolument continu) et $dA = h_s\,ds$

$dA(I) = \int_I h_s\,ds, \quad I \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$. On peut associer à $(A_t)_{t\geq 0}$ une mesure positive de façon naturelle $|dA| = |h_s| \cdot ds$

Il existe des A qui sont à variation finie mais pas absolument continus et on peut aussi trouver une mesure $|dA|$: $dA = \mu^+ - \mu^-$ (positives)

or un choix naturel serait $|dA| = \mu^+ + \mu^-$? Mais si $\mu^\pm \to \mu^\pm + \lambda$

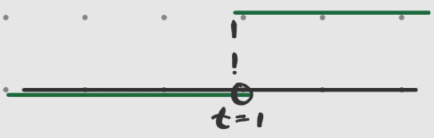
$dA = \mu^+ - \mu^-$ inchangée mais $\underbrace{|dA|}_{\text{mesure variation totale.}} = \mu^+ + \mu^- + 2\lambda$

$\exists!$ choix de (μ^+, μ^-) avec les mesures étrangères i.e. $\exists B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}_+)$

t.q. $\mu^+(B^c) = 0, \quad \mu^-(B) = 0.$

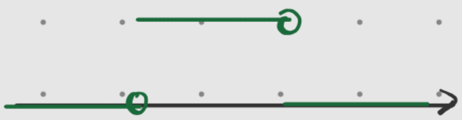
Bien sûr, $|dA(I)| \leq |dA|(I)$, $\quad dA = (\mathbb{1}_B - \mathbb{1}_{B^c}) \cdot |dA|$

Exemple 1) $A_t = \mathbb{1}_{\{t \geq 1\}}$



$$A_t - A_s = \mu(]s,t]) = \mathbb{1}_{\{s<1\le t\}} = \delta_1(]s,t])$$

2) $A_t = \mathbb{1}_{\{t\in[1,3[\}}$



$$dA_t = \delta_1 - \delta_3 \qquad |dA_t| = \delta_1 + \delta_3$$

Rem Si $(A_t)_{t\geq 0}$ est un processus à variation finie alors

$\forall f : [0,t]\times\Omega \to \mathbb{R}$ mesurable $\int_0^t f_s \, dA_s$ est bien définie $\forall t \geq 0$

Dans le cas $A_t = \int_0^t h_s \, ds \Rightarrow \int_0^t f_s \, dA_s = \int_0^t f_s h_s \, ds$

Martingales locales

"Localiser" un processus correspond à cette idée :

$(X_t)_{t\geq 0} \in \mathbb{R}$, on introduit $\tau_n = \inf\{t>0, |X_t| \geq n\}$

On considère $(X_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0} = X^{\tau_n}$

Déf Un processus continu adopté $(M_t)_{t\geq 0}$ est appelé une martingale locale si $\exists (\tau_n)_n$ suite de temps d'arrêt $\tau_n \uparrow +\infty$ p.s. et

$\forall n$ $(M^{\tau_n} - M^0)$ est une martingale U.I.

On dit que $(\tau_n)_n$ réduit M.

1) Une martingale est une martingale locale $\tau_n = n$

2) Si M est une martingale et τ un temps d'arrêt $\Rightarrow$

$\Rightarrow M^\tau$ est une mart. locale.

3) Les martingales locales forment un espace vectoriel.

Prop Soit M une martingale locale

1) Si $M \geq 0$ et $M_0 \in L^1 \Rightarrow M$ est une surmartingale

2) Si $\forall t \geq 0$ $\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} |M_s|\right] < +\infty \Rightarrow M$ est une martingale

3) $\tau_n = \inf\{t \geq 0, |M_t - M_0| \geq n\}$ réduit M.

Preuve

2) $(\tau_n)_n$ qui réduit M, $\forall s<t$ $\mathbb{E}[M_{t\wedge\tau_n} | \mathcal{F}_s] = M_{s\wedge\tau_n}$ p.s.

On sait que $M_{t\wedge\tau_n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} M_t$ $|M_{t\wedge\tau_n}| \leq Y = \sup_{s\in[0,t]} |M_s| \in L^1$

$|M_{s\wedge\tau_n}| \leq Y \in L^1$

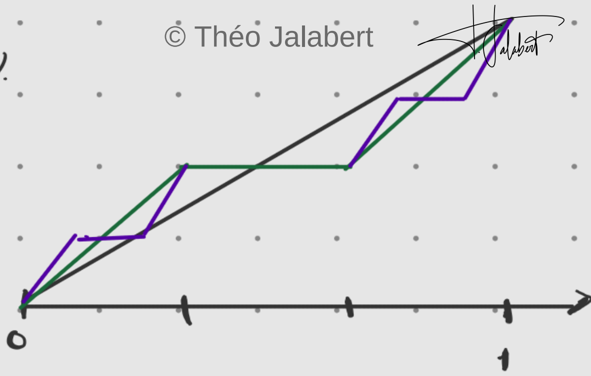
Par convergence dominée $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$ p.s.

Exemple M martingale locale fermée $\Rightarrow M$ martingale

Function de Cantor

$f : [0,1] \to [0,1]$ continue, monotone, $f(0)=0$, $f(1)=1$, $f'(t) = 0$ p.p.

$\exists U \subseteq [0,1] : \lambda(U)=1$ t.q. $f'(t)=0 \quad \forall t\in U$.



$df = ?$

$f_0(t)=t \qquad K_0=[0,1]$

$K_1 = \frac{K_0}{3} \cup \left(\frac{2}{3}+\frac{K_0}{3}\right)$

$K_2 = \frac{K_1}{3} \cup \left(\frac{2}{3} \cup \frac{K_1}{3}\right)$

...

$K_{n+1} = \frac{K_n}{3} \cup \left(\frac{2}{3}+\frac{K_n}{3}\right)$ - est compact non vide t.q. $K_{n+1} \subset K_n$

$U_n = K_n^c$, f_n est constante sur les intervalles qui forment U_n par l'union. Or $|f_{n+1}(x)-f_n(x)| \leq 2^{-n-1} \quad \forall x\in[0,1]$

$f_n = f_0 + \sum_{i=1}^{n} (f_i - f_{i-1})$ est une suite qui converge uniformément vers $f \in C([0,1])$. f est continue croissante, $f(0)=0$, $f(1)=1$.

$\bigcup_n U_n = U$ est un ouvert sur lequel f est localement constante $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ dérivable avec $f'=0$ sur U.

$|K_0|=1 \qquad |K_1|=\frac{2}{3} \qquad |K_2|=\left(\frac{2}{3}\right)^2$

$|K_{n+1}| = \left(\frac{2}{3}\right)^n \qquad |U_n| = 1-\left(\frac{2}{3}\right)^n \to 1 = |U|$ - ouvert de mesure pleine

$K = U^c = \bigcap_n K_n$ compact non-vide : ensemble de Cantor, $|K|=0$

df est une mesure qui vit sur K $\quad df([0,1]) = f(1) - f(0) = 1$

<u>**Déf**</u> Un processus adapté continu $(M_t)_{t\geq 0}$ est **une martingale locale** si $\exists (\tau_n)_n$ temps d'arrêt $\tau_n \uparrow \infty$ p.s. t.q $(M-M_0)^{\tau_n}$ est une martingale U.I.

<u>Rappel</u> Si $\forall t \geq 0$ $\mathbb{E}\left[\sup_{[0,t]} |M_s|\right] < +\infty \Rightarrow M$ est une martingale

<u>Attention!</u> Il existe des martingales locales U.I. qui ne sont pas des martingales ! Notamment, $\mathbb{E}[M_\tau] \neq \mathbb{E}[M_0]$ en général.

<u>**Théorème**</u> $(M_t)_{t\geq 0}$ martingale locale. Si M est à variation finie $\Rightarrow \mathbb{P}(M_t = M_0, \forall t \geq 0) = 1$.

<u>Preuve</u> On peut supposer $M_0 = 0$. Supposons que M soit à variation finie. $\exists |dM|$ mesure variation totale,

$$\tau_n = \inf\left\{t \geq 0 : \int_0^t |dM| \geq n\right\}$$

Or $|M_t| = |M_t - M_0| \leq |dM|([0,t]) \Rightarrow N = M^{\tau_n} \Rightarrow |N_t| = |M_{t\wedge\tau_n}| \leq \overbrace{|dM|([0,t\wedge\tau_n])}^{\leq n \text{ p.s.}}$

$\Rightarrow N$ est une vraie martingale.

Soit $t > 0$ et $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_p = t$

$$\mathbb{E}(N_t^2] = \sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}(N_{t_i}^2 - N_{t_{i-1}}^2) \underset{\uparrow}{=} \sum_{i=1}^{p} \mathbb{E}\left[(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})^2\right] \leq \mathbb{E}\Big[\sup_i |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}| \underbrace{\sum |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}|}_{\leq\, |dN|([0,t])}\Big] \leq$$

$$N_{t_i} - N_{t_{i-1}} \perp N_{t_{i-1}} \Rightarrow \mathbb{E}(N_{t_i} - N_{t_{i-1}})^2 + \mathbb{E}N_{t_{i-1}}^2 = \mathbb{E}N_{t_i}^2$$

$$\leq n\,\mathbb{E}\left[\sup_i |N_{t_i} - N_{t_{i-1}}|\right] \xrightarrow[|\Delta| \to 0]{} 0 \Rightarrow \text{p.s. } N_t = 0 \overset{n\to\infty}{\Rightarrow} M_t = 0 \qquad \square$$

Théorème Soit M une martingale locale. $\exists!$ processus croissant

variation quadratique

$(\langle M \rangle_t)_{t \geq 0}$ t.q. $(M_t^2 - \langle M \rangle_t)$ est une martingale locale et $\langle M \rangle_0 = 0$

De plus, $0 = t_1^n < t_2^n < \dots < t_{p_n}^n = t$ $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2 = \langle M \rangle_t$ en probabilité.

Exemple $\overset{\text{``}B}{M}$ est un MB $\Rightarrow B_t^2 - t$ est une martingale

Preuve d'unicité: Si on a deux candidats var. quadr. A^1, A^2:

$M^i - A^i$ est une mart. locale $\Rightarrow$ la différence $A^1 - A^2$ est

à variation finie (A^1 et A^2 sont monotone) $\Rightarrow$ par thm précédent $A^1 \equiv A^2$. $\square$

Exemple (à revoir en detail plus tard)

$$M_t = \int_0^t h_s\, dB_s \quad \text{intégrale d'Itô} \quad \langle M \rangle_t = \int_0^t h_s^2\, ds$$

$\uparrow$ continu, adapté

Si tout va bien, $\mathbb{E}[M_t^2 - \langle M \rangle_t] = \mathbb{E}[M_0^2] \Rightarrow \mathbb{E}M_t^2 = \mathbb{E}M_0^2 + \mathbb{E}\langle M \rangle_t$

Proposition τ temps d'arrêt $\Rightarrow \langle M^\tau\rangle = \langle M\rangle^\tau$

Théorème Si M est une martingale locale t.q. $M_0=0$

Alors $\mathbb{E}\langle M\rangle_t < +\infty \ \forall t \iff \mathbb{E}M_t^2<\infty \ \forall t$ et M est une martingale

Dans ce cas $(M^2-\langle M\rangle)$ est aussi une martingale.

Preuve $\Leftarrow$ $M \to M^\tau$ alors on peut considérer M borné dans L^2

$\tau_n = \inf\{t\geq 0 : \langle M\rangle \geq n\} \Rightarrow \langle M\rangle_{t\wedge\tau_n} \leq n \Rightarrow M^2_{t\wedge\tau_n} - \langle M\rangle_{t\wedge\tau_n}$ est une

martingale locale t.q. $|\cdots| \leq n + \sup_{s\geq 0} M_s^2 \in L^1$ par Doob $\Rightarrow$ U.I $\Rightarrow$

$\Rightarrow \mathbb{E}[M^2_{\tau_n}] = \mathbb{E}[\langle M\rangle_{\tau_n}] \leq \mathbb{E}[M^2_\infty] < \infty$

thm d'arrêt (M mart bornée dans $L^2 \Rightarrow$ U.I)

$M_t = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_t] \Rightarrow M_{\tau_n} = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_{\tau_n}] \Rightarrow \mathbb{E}[M^2_{\tau_n}] \leq \mathbb{E}[M^2_\infty] < +\infty$.

$\mathbb{E}[M^2_{\tau_n}] = \mathbb{E}[\langle M\rangle_{\tau_n}] \xrightarrow{TCM} \mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty]$

$\Rightarrow$ Soit $\mathbb{E}(\langle M\rangle_t] < \infty \ \forall t\geq 0$

$\tau_n = \inf\{t\geq 0 : |M_t| + \langle M\rangle_t \geq n\}$

$M^2_{t\wedge\tau_n} - \langle M\rangle_{t\wedge\tau_n}$ est une mart. locale bornée $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ mart. bornée.

$\mathbb{E}[M^2_{t\wedge\tau_n}] = \mathbb{E}[\langle M\rangle_{t\wedge\tau_n}] \leq \mathbb{E}\langle M\rangle_t < +\infty$

$(M_{t\wedge\tau_n})_{t\geq 0}$ est une martingale locale bornée $\Rightarrow$ martingale

Doob : $\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} |M_{s\wedge\tau_n}|^2\right] \leq 4\,\mathbb{E}M^2_{t\wedge\tau_n} \leq 4\mathbb{E}\langle M\rangle_t < \infty$

Fatou : $\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[0,t]} |M_s|^2\right] \leq 4\mathbb{E}\langle M\rangle_t < +\infty \Rightarrow M$ une mart de carré intégr.

Or $t\in[0,T]$ $\quad \underbrace{|M_t^2 - \langle M\rangle_t|}_{\text{martingale}} \leq \langle M\rangle_T + \sup_{s\in[0,T]} |M_s|^2 \in L^1$

<u>Corollaire</u> Dans les conditions de ce thm $\mathbb{E}[M_t^2] = \mathbb{E}\langle M\rangle_t$, $t\geq 0$.

<u>Déf</u> M, N deux martingales locales, on définit

$$\langle M,N\rangle_t = \frac{1}{4}\left[\langle M+N\rangle_t - \langle M-N\rangle_t\right] = \frac{1}{2}\left[\langle M+N\rangle_t - \langle M\rangle_t - \langle N\rangle_t\right]$$

<u>Rappel</u> Dans un espace de Hilbert $(\mathbb{H}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$

$$\langle h,k\rangle = \frac{1}{4}\left(\|h+k\|^2 - \|h-k\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|h+k\|^2 - \|h\|^2 - \|k\|^2\right)$$

<u>Proposition</u>

1) $\langle M,N\rangle$ est le processus à variation finie nul en 0 t.q.

$M_tN_t - \langle M,N\rangle_t$ est une martingale locale

2) $(M,N) \mapsto \langle M,N\rangle$ est bilinéaire symétrique

3) $\langle M,N\rangle_t = \lim_n \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})(N_{t_i^n} - N_{t_{i-1}^n})$ en proba

4) τ temps d'arrêt, $\langle M,N\rangle^\tau = \langle M^\tau, N\rangle = \langle M^\tau, N^\tau\rangle$.

Intégral de Wiener

$$h \in L^2(\mathbb{R}_+, dt) \longrightarrow \int_0^t h_s dB_s := \sum_k \langle h, e_k \rangle_{L^2(\mathbb{R}_+, dt)} \xi^k \sim \mathcal{N}\left(0, \|h\|^2_{L^2(\mathbb{R}_+, dt)}\right)$$

$$\mathbb{E}\left[\int_0^{+\infty} h^1_s dB_s \int_0^{+\infty} h^2_s dB_s\right] = \sum_k \langle h^1, e_k \rangle \langle h^2, e_k \rangle = \langle h^1, h^2 \rangle = \int_0^{+\infty} h^1_s h^2_s ds$$

Rem $h \in L^2(\mathbb{R}_+, dt)$, $\mathcal{M}^h_t = \int_0^t h_s dB_s = \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{[0,t]}(s) h_s dB_s$

$(\mathcal{M}^h_t)_{t \geq 0}$ martingale dans $L^2(\Omega)$ et $\langle \mathcal{M}^2 \rangle_t = \int_0^t h_s^2 ds \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (\mathcal{M}^h_t)^2 - \int_0^t h_s^2 ds$ martingale et

$$\langle \mathcal{M}^{h^1}, \mathcal{M}^{h^2} \rangle_t = \frac{1}{2}\left[\langle \mathcal{M}^{h_1} + \mathcal{M}^{h_2} \rangle_t - \langle \mathcal{M}^{h_1} \rangle_t - \langle \mathcal{M}^{h_2} \rangle_t\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^t \left((h^1_s + h^2_s)^2 - (h^1_s)^2 - (h^2_s)^2\right) ds = \int_0^t h^1_s h^2_s ds$$

Pour la théorie d'Itô $L^2(\mathbb{R}_+, dt) \rightsquigarrow$ proc. continu adopté
martingale $\rightsquigarrow$ martingale locale

Intégral d'Itô

Le cas $\mathcal{M}$ dans L^2, on note $\mathcal{M}^2_T = \left\{ (\mathcal{M}_t)_{t \in [0,T]} : \text{martingales continus dans } L^2, \mathcal{M}_0 = 0 \right\}$

$\mathbb{E}\mathcal{M}_T^2 < \infty$

$$\langle \mathcal{M}, \mathcal{N} \rangle = \mathbb{E}[\mathcal{M}_T \mathcal{N}_T]$$

Proposition $(\mathcal{M}^2_T, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{M}^2_T})$ est un espace de Hilbert

Preuve (idée) $(\mathcal{M}^n)_n \subseteq \mathcal{M}^2_T$ de Cauchy, et on veut montrer

$\exists M \in \mathcal{M}_T^2 : \|M^n - M\|_{\mathcal{M}_T^2} \to 0.$

On utilise Doob : $\underbrace{\mathbb{E}\Big[\sup_{s\in[0,T]} |M_s^n - M_s^m|^2\Big]}_{\text{suite de Cauchy dans } C \Rightarrow \text{converge dans } C \Rightarrow \text{dans } \mathcal{M}_T^2 \text{ vers } M} \leq 4\,\mathbb{E}\big[(M_T^n - M_T^m)^2\big] \to 0$ □

Déf $M \in \mathcal{M}_T^2$, $L_T^2(M) = \{(h_t)_{t\in[0,T]} : \text{progressif t.q. } \mathbb{E}\int_0^{+\infty} h_s^2\, d\langle M\rangle_s < \infty\}$

$\uparrow$

$L^2([0,T]\times\Omega, \mathcal{P}, d\langle M\rangle_s \otimes d\mathbb{P})$

$\mathcal{P}$: tribu progressive

$$\langle H, K\rangle_{L_T^2(M)} = \mathbb{E}\Big[\int_0^T H_s K_s\, d\langle M\rangle_s\Big]$$

Exemple $M = B \in \mathcal{M}_T^2$ $\quad d\langle B\rangle_t = dt \quad L_T^2(M) = L^2([0,T]\times\Omega, \mathcal{P}, dt\otimes d\mathbb{P})$

$$\|H\|_{L_T^2}^2 = \mathbb{E}\Big[\int_0^T H_s^2\, ds\Big] = \int_0^T \mathbb{E}[H_s^2]\, ds \qquad \langle H, K\rangle_{L_T^2(B)} = \int_0^T \mathbb{E}[H_s K_s]\, ds$$

Intégral d'Itô

$$(H, M) \longmapsto (H\cdot M) \in \mathcal{M}_T^2$$

$$M \in \mathcal{M}_T^2,\ H \in L_T^2$$

Déf $H : [0,\infty[\times\Omega \to \mathbb{R}$ est *élémentaire* si $H_s = \sum_{i=0}^{p} H^{(i)}(\omega)\, \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(s)$

où $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_{p+1}$ et $H^{(i)}$ est une v.a. $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable et bornée.

On note $H \in \mathcal{E}$

Déf $H \in \mathcal{E}$, $M \in \mathcal{M}_T^2$ $\quad (H\cdot M)_t = \int_0^t H_s \, dM_s := \sum_{i=0}^{p} H^{(i)} (M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t})$

Théorème Soit $H \in \mathcal{E}$, $M \in \mathcal{M}_T^2$. Alors $(H\cdot M) \in \mathcal{M}_T^2$,

$$\langle H\cdot M\rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s \quad \text{et} \quad \mathbb{E}\left[(H\cdot M)_T^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 \, d\langle M_s\rangle\right]$$

$$\|H\cdot M\|_{\mathcal{M}_T^2} = \|H\|_{L_T^2(M)} \quad \text{- Isométrie d'Itô}$$

Preuve Pour avoir $(H\cdot M)$ martingale il suffit que $t \mapsto \underbrace{H^{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})}_{L_t^{(i)}}$ soit une martingale.

si $s \leq t_i$; $M_{\cdot\wedge t}$ est une martingale

$$\mathbb{E}\left[L_t^{(i)} \mid \mathcal{F}_s\right] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[H^{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t}) \mid \mathcal{F}_{t_i}\right] \mid \mathcal{F}_s\right] = 0$$

$L_t^{(i)} = 0$ pour tous $t \leq t_i$

Si $s > t_i$ $\quad \mathbb{E}\left[L_t^{(i)} \mid \mathcal{F}_s\right] = H^{(i)} \mathbb{E}\left[M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t} \mid \mathcal{F}_s\right] = H^{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge s} - M_{t_i\wedge s}) = L_s^{(i)}$

$H^{(i)}$ $\mathcal{F}_s$-mesurable

$s > t_i \to \mathcal{F}_s \supset \mathcal{F}_{t_i}$

$$\mathbb{E}\left[(L_T^{(i)})^2\right] \leq 4 \|H^{(i)}\|_\infty \cdot \mathbb{E}\left[M_T^2\right] < \infty$$

Si $i \neq j$ $\quad \langle L^{(i)}, L^{(j)}\rangle_t = 0 \ \forall t \in [0,T] \Leftrightarrow (L_t^{(i)} L_t^{(j)})_{t\in[0,T]}$ est une mart.

$i < j$ $\quad L_t^{(i)} L_t^{(j)} = H^{(i)} H^{(j)} (M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})(M_{t_{j+1}\wedge t} - M_{t_j\wedge t}) =$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq t_j \\ \underbrace{H^{(i)} H^{(j)} (M_{t_{i+1}} - M_{t_i})}_{\mathcal{F}_{t_j}\text{-mesurable}} \underbrace{(M_{t_{j+1}\wedge t} - M_{t_j\wedge t})}_{\text{martingale}} \end{cases} \Rightarrow L^{(i)} L^{(j)} \text{ est une mart}$$

$$\left\langle \sum_{i=0}^{p} L^{(i)} \right\rangle_t = \sum_{i=0}^{p} \langle L^{(i)}\rangle_t, \quad \langle L^{(i)}\rangle_t = ?$$

$(L_t^{(i)})^2 - \langle L_t^{(i)} \rangle$ doit être une martingale

$$(L_t^{(i)})^2 = (H^{(i)})^2 (M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t})^2$$

$= 0$ si $t \le t_i \Rightarrow \langle L^{(i)} \rangle_t = 0$ si $t \le t_i$.

$(H^{(i)})^2 \left((M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t})^2 - \langle M \rangle_{t_{i+1}\wedge t} - \langle M \rangle_{t_i \wedge t} \right)$ une martingale $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \langle L^{(i)} \rangle_t = H^{(i)} (\langle M \rangle_{t_{i+1}\wedge t} - \langle M \rangle_{t_i \wedge t})$$

Alors $\langle H\cdot M \rangle_t = \left\langle \sum_{i=0}^{p} L^{(i)} \right\rangle_t = \sum_{i=0}^{p} \langle L^{(i)} \rangle_t = \sum_{i=0}^{p} H^{(i)} (\langle M \rangle_{t_{i+1}\wedge t} - \langle M \rangle_{t_i\wedge t}) = \int_0^t H_s^2 \, d\langle M \rangle_s$

$$\mathbb{E}[(H\cdot M)_T^2] = \mathbb{E}\langle H\cdot M \rangle_T = \mathbb{E}\int_0^t H_s^2 \, d\langle M \rangle_s \qquad \square$$

Exemple $H_t = B_t$, $t \ge 0$ $(H_t)_{t\in[0,1]}$ pas adapté car H_t est $\mathcal{F}_1$-mesurable.

$\int_0^t H_s \, dB_s = B_1(B_t - B_0) = B_1 B_t$ n'est pas une martingale

$$\mathbb{E}[(B_1 B_t)^2] = \mathbb{E}[B_t^2 (B_t + B_1 - B_t)^2] = \mathbb{E}[B_t^4 + B_t^2 (B_1 - B_t)^2] = 3t^2 + t(1-t) =$$

$= t(1+2t)$

Or $\mathbb{E}\int_0^t H_s^2 \, ds = \int_0^t \mathbb{E} B_1^2 \, ds = t$ (avec $\mathbb{E}B_1^2 = 1$)

$\Rightarrow$ l'isométrie d'Itô ne marche plus

Lemme $\mathcal{E} \subseteq \underbrace{L_T^2(M)}_{\text{espace de Hilbert}}$ est dense.

Exemple Avec la formule d'Itô on verra que $\int_0^t B_s \, dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$

B^1, B^2 deux MB indépendents $\int_0^t B_s^1 dB_s^2 = ?$

Preuve du lemme

La densité de $\mathcal{E} \Leftrightarrow \forall K \in L_T^2 \; K \perp \mathcal{E} \to K = 0.$

Soit $K \in L_T^2 :\; \langle K, H \rangle_{L_T^2(M)} = 0 \quad \forall H \in \mathcal{E}$

$$\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}\left[\int_0^t K_s H_s \, d\langle M \rangle_s\right]}$$

Soit $X_t = \int_0^t K_s \, d\langle M \rangle_s$

$0 \leq u \leq v$, $A \in \mathcal{F}_u$ $\quad \mathbb{E}[\mathbb{1}_A (X_v - X_u)] = \mathbb{E}\left[\int_0^T \underbrace{\mathbb{1}_A \mathbb{1}_{]u,v]}(s)}_{H_s} K_s \, d\langle M \rangle_s\right] = \langle K, H \rangle = 0$

$H_s \Rightarrow H \in \mathcal{E}$

Donc $(X_t)_t$ est une martingale et à variation finie (par définition)

Donc $X_t = X_0 = 0, \Rightarrow K \equiv 0$ dans $L_T^2(M)$. $\square$

Théorème $\exists!$ $L_T^2(M) \ni H \longmapsto H \cdot M \in \mathcal{M}_T^2$ extension continue

de $\mathcal{E} \ni H \longmapsto H \cdot M \in \mathcal{M}_T^2$. $\quad \mathbb{E}[(H \cdot M)_t] = 0, \; \mathbb{E}[(H \cdot M)_t^2] = \mathbb{E}\int_0^t H_s^2 \, d\langle M \rangle_s$

$(H \cdot M)_t = \int_0^t H_s \, dM_s$ (notation)

Exemple 1) $t_i^n = t \cdot \frac{i}{n}$

$$B_t^2 = \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}}^2 - B_{t_i}^2) = \sum_{i=0}^{n-1} (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(B_{t_{i+1}} \overset{-B_{t_i} + B_{t_i}}{+} B_{t_i}) = 2\sum B_{t_i}(B_{t_{i+1}} - B_{t_i}) +$$

$$+ \sum (B_{t_{i+1}} - B_{t_i})^2 \xrightarrow[n]{} 2\int_0^t B_s \, dB_s + \langle B \rangle_t$$

2) $B^1_t B^2_t = \int_0^t B^1_s \, dB^2_s + \int_0^t B^2_s \, dB^1_s$

indépendent

Nous avons introduit $\mathcal{M}^2_T = \{(M_t)_{t\in[0,T]}$ martingales dans L^2, $M_0 = 0\}$

si $M \in \mathcal{M}^2_T$, $L^2_T(M) = \{(H_t)_{t\in[0,T]}$: progressif $\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right] := \|H\|^2_{L^2_T(M)} < +\infty\}$

$\mathcal{E} = \{H_t = \sum_{i=0}^{p} H^{(i)} \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}(t)$, $0 \leq t_0 \leq \dots \leq t_{p+1}$ déterministes, $H^{(i)}$ $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable bornée$\}$

$\forall H \in \mathcal{E}$, $M \in \mathcal{M}^2_T$: $\underbrace{(H\cdot M)_t}_{\text{martingale}} = \int_0^t H_s \, dM_s = \sum_{i=0}^{p} H^{(i)} (M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t})$

Isométrie d'Itô : $\mathbb{E}\left[(H\cdot M)_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right]$ $\forall t \in [0,T]$

$\mathcal{E} \subseteq L^2_T(M)$ est un espace dense $\Rightarrow \exists!$ extension continue

$(M,H) \longmapsto H\cdot M \in \mathcal{M}^2_T$ t.q. $M \in \mathcal{M}^2_T$, $H \in L^2_T(M)$

$$\mathbb{E}\left[(M\cdot N)_t^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right]$$

$$\mathbb{E}[M_t \cdot M'_t] = \mathbb{E}\langle M, M'\rangle_t$$

$$\mathbb{E}\left[(H\cdot M)_t (H'\cdot M')_t\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s \cdot H'_s \, d\langle M, M'\rangle_s\right]$$

Variation quadratique de l'intégrale d'Itô

accroissement de $\langle M\rangle_t$

$$L^{(i)}_t = H^{(i)}(M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i\wedge t}) \qquad \langle L^{(i)}\rangle_t = (H^{(i)})^2 \langle M\rangle_{t_i \wedge t}^{t_{i+1}\wedge t}$$

$$\langle M\rangle_{t_i\wedge t}^{t_{i+1}\wedge t} = \begin{cases} 0, & t \le t_i \\ \langle M\rangle_t - \langle M\rangle_{t_i}, & t\in[t_i,t_{i+1}] \\ \langle M\rangle_{t_i}^{t_{i+1}}, & t > t_{i+1} \end{cases}$$

$$(H\cdot M)_t = \sum_i L_t^{(i)} \Rightarrow \langle H\cdot M\rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s \quad (H\in\mathcal{E})$$

Soit $H\in L_T^2(M)$, $\mathcal{E}\subseteq L_T^2(M)$ dense $\Rightarrow \exists (H^n)\subseteq \mathcal{E}$ $\|H^n - H\|_{L_T^2(M)} \to 0$

$$\langle H^n\cdot M\rangle_t = \int_0^t (H_s^n)^2 \, d\langle M\rangle_s$$

Inégalité de Kunita-Watanabe

(M,N) mart. locales, (H_s), (K_s) progressifs

$$\left|\int_0^T H_s K_s \, d\langle M,N\rangle_s\right|^2 \le \left|\int_0^T H_s^2 \, d\langle M\rangle_s\right| \cdot \left|\int_0^T K_s^2 \, d\langle N\rangle_s\right|$$

Cauchy-Schwartz pour les crochets

On veut obtenir $\langle H\cdot M\rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s$

Théorème $\forall M\in\mathcal{M}_T^2$, $H\in L_T^2(M)$ $H\cdot M$ est le seul élément de $\mathcal{M}_T^2$ t.q. $\langle H\cdot M, N\rangle = H\cdot\langle M,N\rangle$ $\forall N\in\mathcal{M}_T^2$ où $(H\cdot\langle M,N\rangle)_t = \int_0^t H_s \, d\langle M,N\rangle_s$

Corollaire $\langle H\cdot M\rangle_t = \langle H\cdot M, H\cdot M\rangle_t = (H\cdot\langle M, M\cdot N\rangle)_t = (H^2\cdot\langle M\rangle)_t = \int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s$.

Exemple $\langle H\cdot M, H'\cdot M'\rangle = (H\cdot H')\cdot\langle M, M'\rangle$

Preuve de théorème

Unicité Si on a deux éléments dans $\mathcal{M}_T^2$ avec cette propriété

$\langle L^1, N\rangle = H\cdot\langle M,N\rangle = \langle L^2, N\rangle \quad \forall N\in \mathcal{M}_T^2 \Rightarrow \langle L^1-L^2, N\rangle = 0 \quad \forall N\in\mathcal{M}_T^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \{N = L^1 - L^2\} \Rightarrow \langle L^1-L^2\rangle = 0 \quad \mathbb{E}[(L_t^1 - L_t^2)^2] = 0 \quad \forall t \Rightarrow L^1 = L^2$

On veut prouver : $\langle H\cdot M, N\rangle = H\langle M,N\rangle$. Soit $H\in\mathcal{E}$

$$H\cdot M = \sum_{i=0}^{p} L^{(i)} \Rightarrow \langle H\cdot M, N\rangle = \sum_{i=0}^{p}\langle L^{(i)}, N\rangle = \int_0^t H_s\, d\langle M,N\rangle_s = H\cdot\langle M,N\rangle$$

$$\langle L^{(i)}, N\rangle = H^{(i)}\langle M,N\rangle_{t\wedge t_i}^{t\wedge t_{i+1}}$$

$H^n\cdot M \to H\cdot M$ dans $\mathcal{M}_T^2$ par l'isométrie d'Itô

$$\mathbb{E}\left[\left|\int_0^T (H_s^n - H_s)\, d\langle M,N\rangle_s\right|\right] \leq \underbrace{\|H^n - H\|_{L_T^2}}_{\to 0}\cdot \|N\|_{\mathcal{M}_T^2}$$

Kunita-Watanabe

$$\int_0^T H_s^N d\langle M,N\rangle_s \longrightarrow \int_0^T H_s d\langle M,N\rangle_s \quad \text{dans } L^1.$$

$$H^N\cdot\langle M,N\rangle \to H\cdot\langle M,N\rangle$$

Pour terminer, on veut que $(H\cdot M)_t N_t - (H\cdot\langle M,N\rangle)_t$
($\Rightarrow H\cdot\langle M,N\rangle = \langle H\cdot M, N\rangle$)
soit une martingale locale.

Cela est vrai pour $(H^n\cdot M)_t N_t - (H^n\cdot\langle M,N\rangle)_t$ est une vraie martingale

$\mathcal{M}_T^2 \downarrow \qquad \downarrow L^1$

$(H\cdot M)_t N_t - (H\cdot\langle M,N\rangle)_t$ est aussi une vraie martingale.

Exemples B^1, B^2 MB indépendents

$$(H_t^1)_t, (H_t^2)_t \in L_T^2(B^1) = L_T^2(B^2) = \left\{H \text{ progressif } \mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2 ds\right] < +\infty\right\}$$

$$\left\langle \int_0^{\cdot} H_s^i \, dB_s^i \right\rangle = \int_0^t (H_s^i)^2 \, ds$$

$$\left\langle \int_0^{\cdot} H_s^i \, dB_s^i , \int_0^{\cdot} H_s^j \, dB_s^j \right\rangle_t = \int_0^t H_s^i \cdot H_s^j \, d\langle B^i, B^j \rangle_s \overset{\delta_{ij}\, ds}{\underset{''}{}}$$

Si $i \neq j$ les deux martingales à gauche sont orthogonales sans être forcément indépendetes.

Proposition $M \in \mathcal{M}_T^2$, $K \in L_T^2(M)$, $H \in L_T^2(K \cdot M)$

Alors $HK \in L_T^2(M)$ et $(HK) \cdot M = H \cdot (K \cdot M)$

Notation $\displaystyle\int_0^t (H_s K_s) \, dM_s = \int_0^t H_s \, d\left(\int_0^s K_u \, dM_u \right)$, " $K_s \, dM_s = d\left(\int_0^{\cdot} K_u \, dM_u \right)$ "

Preuve $\langle (HK) \cdot M, N \rangle = (HK) \cdot \langle M, N \rangle = H \cdot (K \cdot \langle M, N \rangle) = H \cdot \langle K M, N \rangle = \langle H \cdot (K \cdot M), N \rangle$

pour les mesures et pas pour les intégrales stoch! $\square$

Proposition $M \in \mathcal{M}_T^2$, $H \in L_T^2(M)$, τ un temps d'arrêt

$$H \cdot M^\tau = (H \mathbb{1}_{[0,\tau]}) \cdot M = (H \cdot M)^\tau$$

$$\int_0^{\cdot} H_s \, dM_s^\tau = \int_0^{\cdot} \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) \, H_s \, dM_s = \int_0^{\cdot \wedge \tau} H_s \, dM_s$$

Preuve $\langle H \cdot M^\tau, N \rangle = H \cdot \langle M^\tau, N \rangle = H \cdot \langle M, N \rangle^\tau \overset{*}{=} (H \cdot \langle M, N \rangle)^\tau = \langle H \cdot M, N \rangle^\tau =$

$$= \langle (H \cdot M)^\tau, N \rangle$$

$$H \cdot \langle M, N \rangle^\tau = H \cdot \mathbb{1}_{[0,\tau]} \langle M, N \rangle = \langle (\mathbb{1}_{[0,\tau]} H) \cdot M, N \rangle$$

$$\textcircled{\small 0}^* \quad \int_0^t H_s\, dA_s^\tau = \begin{cases} \int_0^{t\wedge\tau} H_s\, dA_s \\ \int_0^t \mathbb{1}_{[0,\tau]}(s) H_s\, dA_s \end{cases}$$

$dA_s = 0,\ s \geq \tau$

Avec l'intégrale d'Itô on peut écrire: Il faut la formule d'Itô

trouver un processus $(X_t)_{t\geq 0}$ t.q. $X_t = X_0 + \int_0^t X_s\, dM_s \quad t \geq 0$

où $M \in \mathcal{M}_T^2$ (il faut que $X \in L_T^2(M)$) $M_s = \sigma B_s$ est un

example important.

Déf Un processus continu et adopté $(X_t)_{t\geq 0}$ est une semimartingale si $X_t = X_0 + M_t + V_t$, $t \geq 0$, où $(M_t)_t$ est une martingale locale et $(V_t)_{t\geq 0}$ un processus à variation finie avec $M_0 = V_0 = 0$.

Si X et $\tilde{X}$ sont deux semimartingales

$$\langle X, \tilde{X}\rangle_t := \langle M, \tilde{M}\rangle_t, \qquad \langle X\rangle_t = \langle M\rangle_t.$$

Unicité de decomposition : $X_t = X_0 + M_t + A_t = X_0 + M_t' + A_t' \rightarrow$

$\rightarrow M_t - M_t' = A_t' - A_t$ - mart. locale à variation finie $\rightarrow$ constante $\rightarrow 0$.

Prop $\langle X, \tilde{X}\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{p_n - 1} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})(\tilde{X}_{t_{i+1}} - \tilde{X}_{t_i})$ en proba.

Soit $M \in \mathcal{M}_T$, $H \in \mathcal{E} = \left\{ (H_t)_{t\in[0,T]} : H_t = \sum_{i\geq 0}^{p} H^{(i)} \mathbb{1}_{]t_i, t_{i+1}]}, H^{(i)} \in m\mathcal{F}_{t_i} \text{ bornée} \right\}$

$$(H\cdot M)_t = \int_0^t H_s \, dM_s = \sum_i H^{(i)} (M_{t_{i+1}\wedge t} - M_{t_i \wedge t})$$

Propriété fondamentales

1) $H\cdot M$ est une martingale

2) $\mathbb{E}\left[(H\cdot M)_t^2 \right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s \right]$

$$\| H\cdot M \|^2_{\mathcal{M}_T^2} = \| H \|^2_{L^2_T(M)}$$

$\mathcal{E} \subseteq L^2_T(M)$ est dense, donc $\exists !$

$$\begin{array}{ccc} L^2_T(M) \ni H & \longrightarrow & (H\cdot M) \in \mathcal{M}_T^2 \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathcal{E} \ni H & \longrightarrow & (H\cdot M) \in \mathcal{M}_T^2 \end{array}$$

Extension $\mathcal{E} \subseteq L^2_T(M)$, $f : \mathcal{E} \to \Lambda$ une extension est

$\hat{f} : L^2_T(H) \to \Lambda$ t.q. $\hat{f}(H) = f(H)$ si $H \in \mathcal{E}$

Variation quadratique et crochet

$M \in \mathcal{M}_T^2$, $H \in \mathcal{L}^2_T(M)$ $\quad \langle H\cdot M\rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s \underset{\text{notation}}{=:} (H^2 \cdot \langle M\rangle)_t$

$M = B$ un MB $\quad L^2_T(B) = \left\{ H : \text{progressif } \mathbb{E}\int_0^T H_s^2 \, ds < \infty \right\}$

$(H\cdot B)_t = \int_0^t H_s \, dB_s$ est une martingale dans L^2 nulle en 0

$$\langle H\cdot B\rangle_t = \int_0^t H_s^2 \, ds$$

Ex On a vu que $\int_0^t B_s\,dB_s = \frac{1}{2}(B_t^2 - t)$ $\left(\int_0^T \mathbb{E} B_s^2\,ds = \int_0^T s\,ds < \infty\right)$

$$\left\langle \int_0^\cdot B_s\,dB_s \right\rangle_t = \int_0^t B_s^2\,ds$$

Rappel Le processus $(A_t)_{t\geq 0}$ est le seul processus croissant t.q.

$\frac{1}{2}(B_t^2 - t) - A_t$ soit une martingale locale

Associativité $M \in \mathcal{M}_T^2$, $K \in L_T^2(M)$, $H \in L_T^2(K\cdot M) \rightarrow HK \in L_T^2(M)$

et $H\cdot(K\cdot M) = (HK)\cdot M$. "$\int_0^t H_s\,d\left(\int_0^s K_s\,dM_s\right) = \int_0^t H_s K_s\,dM_s$" $\forall t \in [0,T]$

Example $M = B$ un MB, $K_s = M_s$, $H_s = \cos(B_{s/2})$

$$(K\cdot M)_t = \int_0^t B_s\,dB_s, \quad (H\cdot(K\cdot M))_t = \int_0^t \cos(B_{s/2})\,B_s\,dB_s$$

$$\langle H\cdot M, H'\cdot M'\rangle_t = \left((HH')\cdot\langle M, M'\rangle\right)_t = \int_0^t H_s H_s'\,d\langle M, M'\rangle_s$$

$$\left\langle \int_0^\cdot B_s\,dB_s, \int_0^\cdot \cos(B_{s/2})\,dB_s \right\rangle_t = \int_0^t B_s \cos(B_{s/2})\,ds$$

τ est un temps d'arrêt $(H\cdot M)^\tau = H\cdot M^\tau = (H\,\mathbb{1}_{[0,\tau]})\cdot M$

Semimartingales

$(X_t)_{t\geq 0}$ est une martingale si X est continu adapté et

$$X_t = X_0 + M_t + V_t \quad \text{où}$$

$(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale locale, $M_0 = 0$

$(V_t)_{t\geq 0}$ est un processus à variation finie avec $V_0 = 0$.

Intégrale stochastique par à une martingale locale :

Déf Soit M une martingale locale nulle en 0.

On note $L^2_{loc}(M) = \{H \text{ progressif} : \int_0^t H_s^2 \, d\langle M\rangle_s < +\infty \text{ p.s. } \forall t \geq 0\}$

Théorème Soit M une martingale locale et $H \in L^2_{loc}(M)$

1) $\exists!$ martingale locale nulle en 0, qu'on note $H \cdot M$ t.q.

$$\langle H\cdot M, N\rangle = H \cdot \langle M, N\rangle \quad \forall \text{ martingale locale } N.$$

2) Si τ est un temps d'arrêt, $(H\cdot M)^\tau = H \cdot M^\tau = (H \mathbb{1}_{[0,\tau]}) \cdot M$

3) Si $M \in \mathcal{M}^2_T$ et $H \in L^2_T(M)$, $H \cdot M$ est l'intégrale d'Itô construite précédemment

Preuve $\tau_n = \inf\{t \geq 0 \ \ \langle M\rangle_t + \int_0^t H_s d\langle M\rangle_s \geq n\}$

$$\left.\begin{array}{l} \langle M^{\tau_n}\rangle \leq n \Rightarrow M^{\tau_n} \in \mathcal{M}^2_T \\ \int_0^T H_s^2 d\langle M^{\tau_n}\rangle_s \leq n \Rightarrow H \in L^2_T(M^{\tau_n}) \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} H\cdot M^{\tau_n} \text{ bien définie,} \\ H\cdot M^{\tau_n} \in \mathcal{M}^2_T \ \forall n \end{array}$$

$(H\cdot M)_0 = 0$, $(H\cdot M)_t = (H\cdot M^{\tau_n})_t$ si $\tau_{n-1} < t \leq \tau_n$.

Déf H progressif est localement borné si $\forall t \geq 0 \ \sup_{[0,t]} |H| < +\infty$

Déf $X_t = X_0 + M_t + V_t$ est une semimartingale, H est progressif localement borné $\quad (H\cdot X)_t = \int_0^t H_s\,dM_s + \int_0^t H_s\,dV_s$

Formule d'intégration par parties

Soient $(X_t)_{t\geq 0}$ et $(Y_t)_{t\geq 0}$ deux semimartingales. Alors

$$X_tY_t = X_0Y_0 + \int_0^t X_s\,dY_s + \int_0^t Y_s\,dX_s + \langle X,Y\rangle_t$$

termes d'Itô

En particulier : $X_t^2 = X_0^2 + 2\int_0^t X_s\,dX_s + \langle X\rangle_t \quad \left(\Rightarrow X_t^2 - \langle X\rangle_t = X_0^2 + 2\int_0^t X_s\,dX_s\right)$

Rappel $\quad f,g : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe C^1

$$f_tg_t = f_0g_0 + \int_0^t f_sg_s'\,ds + \int_0^t g_sf_s'\,ds + 0$$

Rem $\quad$ On obtient : si $X^i = X_0^i + M^i + V^i$

$$X_t^1X_t^2 = X_0^1X_0^2 + \int_0^t X_s^1\,d(M_s^2+V_s^2) + \int_0^t X_s^2\,d(M_s^1+V_s^1) + \underset{\langle M^1,M^2\rangle_t}{\langle X^1,X^2\rangle_t} =$$

$$= X_0^1X_0^2 + \underbrace{\int_0^t (X_s^1\,dM_s^2 + X_s^2\,dM_s^1)}_{M_t} + \underbrace{\int_0^t (X_s^1\,dV_s^2 + X_s^2\,dV_s^1) + \langle M^1,M^2\rangle_t}_{V_t}$$

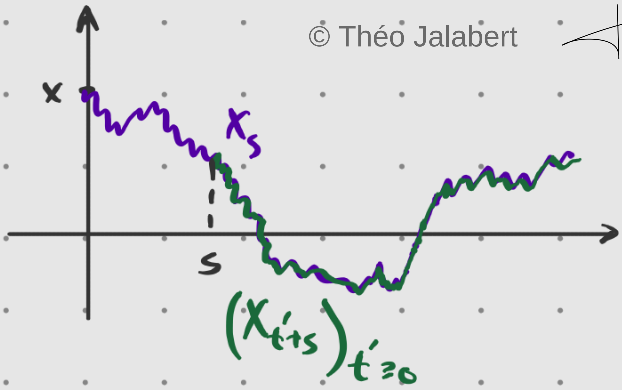
Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

(B_t) MB standard, $\lambda>0$, $x_0\in\mathbb{R}$

$$X_t = x - \lambda\int_0^t X_s\,ds + B_t$$

$\exists!$ solution dans la classe des semimartingales

$$X_t = e^{-\lambda t} x + \int_0^t e^{-\lambda(t-s)} dB_s \qquad t \geq 0$$



$$\forall t \geq 0 \qquad X_t \sim \mathcal{N}\left(e^{-\lambda t} x, \frac{1-e^{-2\lambda t}}{2\lambda}\right)$$

$$X_t = x - \lambda \int_0^t X_u du + B_t$$

$$X_s = x - \lambda \int_0^s X_u du + B_s$$

$$X_t - X_s = -\lambda \int_s^t X_u du + B_t - B_s$$

$$\underbrace{X_{s+t'}}_{Y_{t'}} = \underset{\mathcal{F}_s\text{-mes}}{X_s} - \lambda \int_0^{t'} \underbrace{X_{s+u'}}_{Y_{u'}} du' + \underbrace{(B_{s+t'} - B_s)}_{\tilde{B}_{t'} \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s} = X_s - \lambda \int_0^{t'} Y_u du + \hat{B}_{t'}, \quad t' \geq 0$$

On obtient $Y_{t'} = e^{-\lambda t'} X_s + \int_0^{t'} e^{-\lambda(t'-u)} d\tilde{B}_u \sim \mathcal{N}\left(e^{-\lambda(t'+s)} x, \frac{1-e^{-2\lambda(t'+s)}}{2\lambda}\right)$

Loi conditionnelle sachant $\mathcal{F}_s$ $\quad \mathcal{N}\left(e^{-\lambda t'} X_s, \frac{1-e^{-2\lambda t'}}{2\lambda}\right)$

$$\mathbb{E}[f(X_{s+t'}) | \mathcal{F}_s] = \int_{\mathbb{R}} f(y + e^{-\lambda t'} X_s) e^{-\frac{y^2}{2\left(\frac{1-e^{-2\lambda t'}}{2\lambda}\right)}} \frac{dy}{\sqrt{2\pi \frac{1-e^{-2\lambda t'}}{2\lambda}}}$$

$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

On définit $f \in C_b(\mathbb{R})$

$$P_t f(x) = \mathbb{E}[f(X_t(x))]$$

$$\mathbb{E}[f(X_{s+t'}(x)) | \mathcal{F}_s] = P_{t'} f(X_s(x))$$

En prenant l'éspérance, on obtient $(P_{s+t'} f)(x) = P_s P_{t'} f(x) = P_{t'} P_s f(x)$

EDO

$$\begin{cases} \dot{X}(t) = b(X(t)) \\ X_0 = x \end{cases} \qquad \exists \varphi_t : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad t.q. \ X_t = \varphi_t(x)$$

$$\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s (x)$$

$$X_t(x) \sim \mathcal{N}\left(e^{-\lambda t} x, \frac{1-e^{-2\lambda t}}{2\lambda}\right) \xrightarrow{t \to +\infty} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2\lambda}\right) = \mu$$

$f \in C_b$

$$P_{t+s} f(x) = P_s P_t f(x)$$

$$\int f \, d\mu = \int (P_t f) \, d\mu, \ t \geq 0 \Rightarrow \mu \text{ est une mesure invariante :}$$

si $X_0 \sim \mu$ $B \perp\!\!\!\perp \mu \Rightarrow X_t \sim \mu \ \forall t \geq 0$

$$\mu = \text{loi de } \frac{1}{\sqrt{2\lambda}} Z, \quad Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\mathcal{N}\left(e^{-\lambda t} x, \frac{1-e^{-2\lambda t}}{2\lambda}\right) = \text{loi de } e^{-\lambda t} x + \sqrt{\frac{1-e^{-2\lambda t}}{2\lambda}} Z', \quad Z' \sim \mathcal{N}(0,1) \quad Z' \perp\!\!\!\perp Z$$

Si $X_0 \sim \mu \Rightarrow$ la loi de X_t et la loi de

$$e^{-\lambda t} \frac{Z}{\sqrt{2\lambda}} + \sqrt{\frac{1-e^{-2\lambda t}}{2\lambda}} Z' \overset{\mathcal{L}}{\sim} \mathcal{N}\left(0, \frac{1}{2\lambda}\right) = \mu$$

Réversibilité

$f, g \in C_b(\mathbb{R})$

$$\int_{\mathbb{R}} f(x) P_t g(x) \mu(dx) = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1}{\sqrt{2\lambda}} Z\right) g\left(\frac{\overbrace{e^{-\lambda t}}^{\cos\theta}}{\sqrt{2\lambda}} Z + \overbrace{\sqrt{1-e^{-2\lambda t}}}^{\sin\theta} \frac{Z'}{\sqrt{2\lambda}} \right)\right] \ominus$$

$$U_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} W \\ W' \end{pmatrix} = U_\theta \cdot \begin{pmatrix} Z \\ Z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot Z + \sin\theta \cdot Z' \\ -\sin\theta \cdot Z + \cos\theta \cdot Z' \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}(0, I_d)$$

$$\overset{\mathcal{L}}{=} \begin{pmatrix} Z \\ Z' \end{pmatrix}$$

⊙ $\mathbb{E}_1\left[f\left(\frac{W\cdot\cos\theta - W'\sin\theta}{\sqrt{2\lambda}}\right) g\left(\frac{W}{\sqrt{2\lambda}}\right)\right] = \int P_t f(x)\, g(x)\, \mu(dx) \Rightarrow P_t$ est symétrique

Pont Brownien

$$X_t = x - \int_0^t \frac{X_s}{1-s}\,ds + B_t$$

$$d\left(\frac{X_t}{1-t}\right) = \frac{1}{(1-t)^2} X_t\,dt + \frac{1}{1-t}\left(\frac{X_t}{1-t}\,dt + dB_t\right) \to$$

$$\Rightarrow \quad X_t = (1-t)x - \int_0^t \frac{1-t}{1-s}\,dB_s$$

$$X_s = x - \int_0^s \frac{X_u}{1-u}\,du + B_s \Rightarrow X_t = X_s - \int_s^t \frac{X_u}{1-u}\,du + (B_t - B_s)$$

dépend explicitement de u

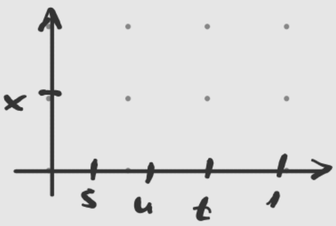
$$\mathcal{L}(X_t / X_s) \neq \mathcal{L}(X_{t-s}/X_0)$$

On considère : $X_{s,t} = x - \int_s^t \frac{X_u}{1-u}\,du + B_t - B_s, \quad 0 \leq s \leq t < 1$

$$d\left(\frac{X_{s,t}}{1-t}\right) = \frac{1}{(1-t)^2} X_{s,t}\,dt + \frac{1}{1-t}\left(-\frac{X_{s,t}}{1-t}\,dt + dB_t\right) = \frac{dB_t}{1-t}$$

en t, s fixé

$$\frac{X_{s,t}}{1-t} = \frac{x}{1-s} + \int_s^t \frac{dB_u}{1-u} \Rightarrow X_{s,t} = \frac{1-t}{1-s}\,x + \int_s^t \frac{1-t}{1-u}\,dB_u$$



$\forall f \in \mathcal{C}_b(\mathbb{R}) \quad P_{s,t} f(x) = \mathbb{E}[f(X_{s,t}(x))]$

$$\boxed{P_{s,t} = P_{s,u} \circ P_{u,t}} \qquad X_{s,t}(x) = X_{u,t}(X_{s,u}(x))$$

$$\mathbb{E}[f(X_{s,t}(x))] = \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{u,t}(X_{s,u}(x))) | \mathcal{F}_u]] = \mathbb{E}[(P_{u,t} f)(X_{s,u}(x))] = P_{s,u} \circ P_{u,t}\,(x)$$

$$X_{s,t} \sim \mathcal{N}\left(\frac{1-t}{1-s}x, \underbrace{\int_s^t \frac{(1-t)^2}{(1-u)^2}\,du}_{=(1-t)^2 \cdot \frac{1}{1-u}\Big|_s^t = (1-t) - \frac{(1-t)^2}{1-s} = (1-t)\frac{t-s}{1-s}}\right) = \mathcal{N}\left(\frac{1-t}{1-s}x, \frac{(1-t)(t-s)}{1-s}\right)$$

$$X_{s,u}(x) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1-u}{1-s}x + \sqrt{\frac{(1-u)(u-s)}{1-s}}\, Z$$

$$X_{u,t}(x) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1-t}{1-u}x + \sqrt{\frac{(1-t)(t-u)}{1-u}}\, Z'$$

$$X_{u,t}(X_{s,u}(x)) \overset{\mathcal{L}}{\sim} \frac{1-t}{1-u}\left(\frac{1-u}{1-s}x + \sqrt{\frac{(1-u)(u-s)}{1-s}}\, Z\right) + \sqrt{\frac{(1-t)(t-u)}{1-u}}\, Z' =$$

$$= \frac{1-t}{1-s}x + \underbrace{\sqrt{\frac{(1-t)^2(u-s)}{(1-u)(1-s)}}\cdot Z + \sqrt{\frac{(1-t)(t-u)}{1-u}}\, Z'}$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}[\sim] = \frac{1-t}{1-u}\left(\underbrace{\frac{(u-s)(1-t)}{1-s} + t-u}\right) = \frac{1-t}{\cancel{1-u}}\cdot\frac{(t-s)\cancel{(1-u)}}{(1-s)} = \frac{(1-t)(t-s)}{1-s}$$

$$\cancel{u}-s-ut+\cancel{st}+t-\cancel{u}-\cancel{st}+su =$$
$$=(t-s)-u(t-s) = (t-s)(1-u)$$

O.-U.

$0 \leq s \leq t$
$$\begin{cases} X_{s,t}(x) = x - \lambda\int_s^t X_{s,u}(x)\,du + B_t - B_s \\ X_{s,s}(x) = x \end{cases}$$

$$Y_t = e^{\lambda t}X_{s,t} \rightarrow X_{s,t} = e^{-\lambda(t-s)}x + \int_s^t e^{-\lambda(t-u)}\,dB_u$$

$f \in C_b(\mathbb{R})$ $\quad P_{s,t}f(x) = \mathbb{E}[f(X_{s,t}(x))]$
$$\| $$
$$\mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X_{u,t}(X_{s,u}(x)))\,|\,\mathcal{F}_u]] = \mathbb{E}[P_{u,t}f(X_{s,u}(x))] = P_{s,u}\circ P_{u,t}f$$

$$X_{s,u}(\cdot) \perp\!\!\!\perp X_{u,t}(\cdot)$$

$\sigma(B_r - B_s, r\in[s,u])$ $\qquad \sigma(B_r - B_u, r\in[u,t])$

Considérons $(X_{s,s+t}(x))_{t\geq 0}$

$$X_{s,s+t} = x - \lambda \int_0^t X_{s,s+u}\,du + \underbrace{B_{t+s} - B_s}_{\overset{\mathcal{L}}{=}}, \quad t \geq 0$$

$$X_{0,t} = x - \lambda \int_0^t X_{0,u}\,du + B_t$$

$\Rightarrow$ la loi $(X_{s,s+t})_{t\geq}$ ne dépend pas de s

$P_{s,s+t}f(x) = P_{0,t}f(x) =: P_t f(x)$ Donc $P_{t_1,t_2} = P_{t_2-t_1}$ $\forall t_1 \leq t_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow P_{s,u} \circ P_{u,t} = P_{s,t} \Rightarrow P_{t_1} \circ P_{t_2} = P_{t_1+t_2}$

$(X_{0,t+s}^{(x)})_{t\geq 0}$: quelle est la loi conditionnelle de ce proc. sachant $\mathcal{F}_s$? C'est $\mathbb{P}_{X_{0,s}(x)}$ où $\mathbb{P}_y = \mathcal{L}((X_{s,t}(y))_{t\geq 0})$

Pont Brownien

On peut vérifier à la main $X_{u,t}(X_{s,u}(x)) = X_{s,t}(x)$

La loi de $(X_{s,u+t})_{t\in[0,1-s]}$ conditionnellement à $\mathcal{F}_u$ $u \in [s,1[$

est $\mathbb{P}_{u,X_{s,u}(x)}$ — propriété de Markov

O.U.

$X_t = X_{0,t} \qquad 0 \leq t_1 \leq t_2$

$$\mathbb{P}(X_{t_1} \in A_1, X_{t_2} \in A_2) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_{t_1}\in A_1\}} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{X_{t_2}\in A_2\}} \middle| \mathcal{F}_{t_1}\right]\right] =$$

$$= \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{X_{t_1}\in A_1} \cdot (P_{t_2-t_1}\mathbb{1}_{A_2})(X_{t_1})\right] = \left[P_{t_1}(\mathbb{1}_{A_1} P_{t_2-t_1}\mathbb{1}_{A_2})\right](x)$$

$$\mathbb{P}(X_{t_1}(x) \in A_1, \ldots, X_{t_n}(x) \in A_n) = P_{t_1}(\mathbb{1}_{A_1}(\cdots P_{t_{n-1}-t_{n-2}}(\mathbb{1}_{A_{n-1}}(P_{t_n-t_{n-1}}\mathbb{1}_{A_n}))\cdots))(x)$$

P. B.

$$P_{s,t}f(x) = \mathbb{E}\left[f(X_{s,t}(x))\right] = \mathbb{E}\left[f\left(\frac{1-t}{1-s}x + \int_0^t \frac{1-t}{1-r}\,dB_r\right)\right] = \int f\,d\mathcal{N}\Big(\frac{1-t}{1-s}x, \underbrace{\int_0^t \left(\frac{1-t}{1-r}\right)^2 dr}_{\frac{1-t}{1-s}(t-s)}\Big)$$

$$\mathbb{P}(X_{t_1}(x)\in A_1, \dots, X_{t_n}(x)\in A_n) = P_{0,t_1}\left(\mathbb{1}_{A_1} P_{t_1,t_2}\left(\cdots\left(\mathbb{1}_{A_{n-1}}\left(P_{t_{n-1},t_n}\mathbb{1}_{A_n}\right)\right)\cdots\right)\right)(x)$$

Formule d'Itô

Théorème (formule d'Itô)

$(X_t)_{t\geq 0}$ semimartingale (continue), $\varphi : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$.

Alors $$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \int_0^t \varphi'(X_s)\,dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(X_s)\,d\langle X\rangle_s, \quad t\geq 0$$

En particulier en écrivant $X = X_0 + M + V$

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \underbrace{\int_0^t \varphi'(X_s)\,dM_s}_{\text{martingale locale}} + \underbrace{\int_0^t \varphi'(X_s)\,dV_s + \frac{1}{2}\int_0^t \varphi''(X_s)\,d\langle X\rangle_s}_{\text{variation finie}} \Rightarrow (\varphi(X_t))_{t\geq 0} \text{ est une semimartingale}$$

$(X_t^1, \dots, X_t^n)_{t\geq 0}$ semimartingales à valeurs $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, alors

$$\varphi(X_t) = \varphi(X_0) + \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}(X_s)\,dX_s^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n \int_0^t \frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(X_s)\,d\langle X^i, X^j\rangle_s$$

Rem Dans le calcul classique

$$\frac{d}{dx}(f(g(x))) = f'(g(x))\,g'(x) \to d(f\circ g) = (f'\circ g)\,dg$$

Pour les semimartingales $d(\varphi\circ X) = (\varphi'\circ X)\,dX + \frac{1}{2}(\varphi''\circ X)\,d\langle X\rangle \leftarrow$ calcul de 2nd ordre

Rem $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x,y) = xy$

$$\varphi(X_t, Y_t) = X_t Y_t = X_0 Y_0 + \int_0^t X_s \, dY_s + \int_0^t Y_s \, dX_s + \langle X, Y \rangle_t$$

Théorème (Semimartingales exponentielles)

Soit $(X_t)_{t \geq 0}$ une semimartingale. Alors $\exists !$ semimartingale Z t.q.

$$Z_t = e^{X_0} + \int_0^t Z_s \, dX_s.$$ De plus, $$Z_t = \exp\left\{X_t - \frac{1}{2}\langle X \rangle_t\right\} = \mathcal{E}(X)_t$$

Preuve Par la formule d'Itô :

$$\tilde{Y}_t = \mathcal{E}(X)_t = \varphi(Y_t) \text{ où } \varphi(y) = e^y, \quad Y_t = X_t - \frac{1}{2}\langle X \rangle_t \quad \langle Y \rangle = \langle X \rangle$$

$$d\mathcal{E}(X)_t = \varphi'(Y_t)\, dY_t + \frac{1}{2}\varphi''(Y_t)\, d\langle Y \rangle_t = \varphi(Y_t)\left(dX_t - \frac{1}{2} d\langle X \rangle_t + \frac{1}{2} d\langle Y \rangle_t\right)$$

$$= \mathcal{E}(X)_t \, dX_t.$$

Unicité Soit $(Z_t)_{t \geq 0}$ une solution. On veut m.q. $Z_t = \tilde{Y}_t \ \forall t \geq 0$

$\dfrac{Z_t}{\tilde{Y}_t}$, on veut m.q. $d\left(\dfrac{Z_t}{\tilde{Y}_t}\right) = 0$

$$\frac{1}{\tilde{Y}_t} = \frac{1}{\tilde{Y}_0} - \int_0^t \frac{d\tilde{Y}_s}{\tilde{Y}_s^2} + \int_0^t \frac{d\langle \tilde{Y} \rangle_s}{\tilde{Y}_s^3} = \frac{1}{\tilde{Y}_0} - \int_0^t \frac{dX_s}{\tilde{Y}_s} + \int_0^t \frac{d\langle X \rangle_s}{\tilde{Y}_s} \to d\left(\frac{1}{\tilde{Y}_t}\right) = \frac{1}{\tilde{Y}_t}\left(-dX_t + d\langle X \rangle_t\right)$$

$$d\tilde{Y} = \tilde{Y}\, dX \Rightarrow \langle \tilde{Y} \rangle_t = \int_0^t (\tilde{Y}_s)^2 \, d\langle X \rangle_s$$

$$d\left(\frac{Z_t}{\tilde{Y}_t}\right) = \frac{dZ_t}{\tilde{Y}_t} + Z_t\, d\left(\frac{1}{\tilde{Y}_t}\right) + \underbrace{\left\langle Z, \frac{1}{\tilde{Y}} \right\rangle_t}_{-\frac{1}{\tilde{Y}_t} dX_t \cdot Z_t dX_t} = \frac{Z_t}{\tilde{Y}_t}\left(dX_t - dX_t + d\langle X \rangle_t - d\langle X \rangle_t\right) = 0$$

$\square$

Preuve de la formule d'Itô

$(X_t)_{t\geq 0}$ semimartingale dans $\mathbb{R}$, $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe C^2

$$F(X_t) - F(X_0) = \sum_{i=0}^{p_n - 1} \big(\underbrace{F(X_{t_{i+1}^n}) - F(X_{t_i^n})}_{\text{Taylor}} \big)$$

$(I_{n,i} = [X_{t_i^n}, X_{t_{i+1}^n}])$

t.q. $\inf_{I_{n,i}} F'' \leq f_{n,i} \leq \sup_{I_{n,i}} F''$

$0 = t_0^n < t_1^n < \dots < t_{p_n}^n = t$

$$\xrightarrow{\text{Taylor}} F'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) + \frac{1}{2} f_{n,i} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2$$

$$\sum_{i=0}^{p_n-1} F'(X_{t_i^n})(X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n}) = \int_0^t H_s^n \, dX_s \xrightarrow{\mathbb{P}} \int_0^t F'(X_s) \, dX_s$$

où $H_s^n = \sum_{i=0}^{p_n-1} \mathbb{1}_{]t_{i-1}^n, t_i^n]}(s) F'(X_{t_i^n})$

Rem $\displaystyle\sum_{i=0}^{p_n-1} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \langle X \rangle_t$

$$\sum_i f_{n,i} (X_{t_{i+1}^n} - X_{t_i^n})^2 \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} \int_0^t F''(X_s) \, d\langle X \rangle_s$$

$\square$

Semimartingales exponentelles

X semimartingale, $\mathcal{E}(X)$ est la seule solution de

$$Z_t = e^{X_0} + \int_0^t Z_s \, dX_s . \qquad \mathcal{E}(X)_t = \exp\left\{ X_t - \frac{1}{2} \langle X \rangle_t \right\}$$

Rappel on a vu que $M_t = \exp\{\lambda B_t - \frac{\lambda^2}{2} t\}$ est une martingale

$$M_t = 1 + \int_0^t \lambda M_s \, dB_s , \quad t \geq 0.$$

Rem Si $X \in \mathcal{M}_{loc}^c \Rightarrow \mathcal{E}(X) \in \mathcal{M}_{loc}^c$. On verra un critère pour que $\mathcal{E}(X)$ soit une vraie martingale.

Si $\lambda \in \mathbb{C}$ on peut aussi écrire $\mathcal{E}(\lambda X)_t = \exp\{\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2} \langle X \rangle_t\} \circleddash$

$$\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2 \qquad \lambda^2 = \lambda_1^2 - \lambda_2^2 + 2i\lambda_1\lambda_2$$

$$\Rightarrow \exp\Big\{ \underbrace{\lambda_1 X_t - \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2}\langle X\rangle_t}_{Y_t} + i\big(\underbrace{\lambda_2 X_t - \lambda_1\lambda_2 \langle X\rangle_t}_{Z_t}\big) \Big\} = F(Y_t, Z_t)$$

$$F(Y_t,Z_t) = 1 + \int_0^t \Big(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}}_{F} dY_t + \underbrace{\frac{\partial F}{\partial z}}_{iF} dZ_t \Big) + \frac{1}{2}\int_0^t \Big(\underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}}_{F} \lambda_1^2 d\langle X\rangle_s + \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}}_{-F} \lambda_2^2 d\langle X\rangle_s + \underbrace{\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}}_{iF} 2\lambda_1\lambda_2 d\langle X\rangle_s \Big)$$

$$= 1 + \int_0^t F(Y_s,Z_s)\big(\underbrace{dY_s + i\,dZ_s}\big) + \frac{1}{2}\underbrace{\lambda^2}_{(\lambda_1^2-\lambda_2^2+2i\lambda_1\lambda_2)} \int_0^t F(Y_s,Z_s)\,d\langle X\rangle_s = 1 + \lambda \int_0^t F(Y_s,Z_s)\,dX_s$$

$$dY_s + i\,dZ_s = \lambda_1 dX_s - \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}{2} d\langle X\rangle_s + i\lambda_2 dX_s - i\lambda_1\lambda_2 d\langle X\rangle_s$$

Nous avons obtenu $\mathcal{E}(\lambda X) = \exp\{\lambda X_t - \frac{\lambda^2}{2}\langle X\rangle_t\}$, $\lambda \in \mathbb{C}$, X semimart. réele

$$\mathcal{E}(\lambda X)_t = e^{\lambda X_0} + \lambda \int_0^t \mathcal{E}(\lambda X)_s \, dX_s$$

En particulier, si $X \in \mathcal{M}^c_{loc}$, $\mathcal{E}(\lambda X) \in \mathcal{M}^c_{loc}$.

Théorème (Lévy)

$(M^1, \dots, M^d)$ sont des martingales locales issues de 0 t.q.

$\langle M^i, M^j\rangle_t = \delta_{ij} \cdot t$. Alors $(M^1, \dots, M^d)$ est un MB dans $\mathbb{R}^d$

Vrai en particulier pour $d = 1$.

Preuve Soit $\xi \in \mathbb{R}^d$, $N_t = \xi \cdot M_t = \sum_{i=1}^d \xi_i M_t^i$

$$\langle N\rangle_t = \sum_{i,j} \xi_i \xi_j \langle M^i, M^j\rangle_t = t \sum_i \xi_i^2 = t\|\xi\|^2$$

$\mathcal{E}(i\mathcal{N})_t$ martingale locale bornée sur $[0,T]$ $\rightarrow$ une vraie martingale
$\parallel$
$\exp\{i\mathcal{N}_t + \frac{1}{2}\|\xi\|^2 t\}$ $\qquad$ $\mathbb{E}[\mathcal{E}(i\mathcal{N})_t | \mathcal{F}_s] = \mathcal{E}(i\mathcal{N})_s$ p.s. $s<t$.

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathcal{E}(i\mathcal{N})_t}{\mathcal{E}(i\mathcal{N})_s} \Big| \mathcal{F}_s\right] = 1 \text{ p.s.} \rightarrow \mathbb{E}\left[e^{i(\mathcal{N}_t - \mathcal{N}_s)} \Big| \mathcal{F}_s\right] = e^{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2(t-s)} \text{ p.s. } \forall \xi$$

$\Rightarrow$ conditionnellement à $\mathcal{F}_s$, $M_t - M_s \sim \mathcal{N}(0,(t-s)Id)$

$A \in \mathcal{F}_s$: $\mathbb{E}[\mathbb{1}_A e^{i(N_t - N_s)}] = \mathbb{P}(A) e^{-\frac{1}{2}\|\xi\|^2(t-s)} \Rightarrow N_t - N_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ $\quad$ $0<t_1<t_2 \dots < t_n$

$M_t - M_s \perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s$ $\quad$ ---

$\Downarrow$

loi de MB $\square$

Exemple (X,Y) deux MB indépendents.

$$\theta \in \mathbb{R} : \quad (X_t^\theta, Y_t^\theta) = (X_t\cos\theta - Y_t\sin\theta,\ X_t\sin\theta_t + Y_t\cos\theta), \quad t \geq 0$$

$$\langle X^\theta, Y^\theta\rangle_t = 0, \quad \langle X^\theta\rangle_t = t, \quad \langle Y^\theta\rangle_t = t$$

Par le thm. (X^θ, Y^θ) sont deux MB indépendents.

Exemple $\quad \operatorname{sgn}(x) = \mathbb{1}_{\{x>0\}} - \mathbb{1}_{\{x\leq 0\}}$

$$\beta_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(B_s)\,dB_s \text{ une mart. locale}$$

$\langle \beta \rangle_t = t \rightarrow \beta$ est un MB.

Théorème (Dubins-Schwartz)

Soit M une martingale locale t.q. $M_0 = 0$. $\langle M\rangle_\infty = \infty$.

Alors $\exists$ un MB B t.q. $M_t = B_{\langle M \rangle_t}$ $\forall t \geq 0$, p.s.

<u>Preuve</u> On définit $\tau_r := \inf\{t \geq 0 : \langle M \rangle_t > r\} < +\infty$ p.s. $\forall r$

Cela permet de définir $B_r := M_{\tau_r}$

<u>Rem</u> B_r est $\mathcal{F}_{\tau_r}$-mesurable donc B est $(\overset{\mathcal{G}_r}{\overset{\shortparallel}{\mathcal{F}_{\tau_r}}})_{r \geq 0}$-adapté.

Il faut prouver que p.s. $(B_r)_{r\geq 0}$ est continu et que

1) B est une martingale locale (par rapport à $(\mathcal{G}_r)_{r\geq 0}$)

2) $(B_r^2 - r)_{r \geq 0}$ est une $(\mathcal{G}_r)_{r\geq 0}$-martingale locale.

<u>Rem</u> Si $\mathbb{P}(\langle M \rangle_\infty < +\infty) > 0 \Rightarrow B$ est défini sur un espace de probabilité plus grand.

cf. poly. $\square$

<u>Théorème</u> (Knight)

$(M^1, \dots, M^d)$ martingales locales issues de 0, $\langle M^i \rangle_\infty = \infty$, $\langle M^i, M^j \rangle = 0$ $i \neq j$

Alors $\exists$ un MB dans $\mathbb{R}^d$ B t.q. $M_t^i = B^i_{\langle M^i \rangle_t}$

<u>Exemple</u> (X, Y) deux MB indépendants issus de 0.

$M_t = e^{X_t} \cos(Y_t)$ $\quad N_t = e^{X_t} \sin(Y_t)$, $\quad M_t + iN_t = e^{X_t + iY_t}$

Itô $dM_t = e^{X_t} \cos Y_t \, dX_t - e^{X_t} \sin Y_t \, dY_t + \frac{1}{2} e^{X_t} \cos Y_t \, dt - \frac{1}{2} e^{X_t}(-\cos Y_t) dt =$

$= M_t dX_t - N_t dY_t$

$$dN_t = N_t dX_t + M_t dY_t$$

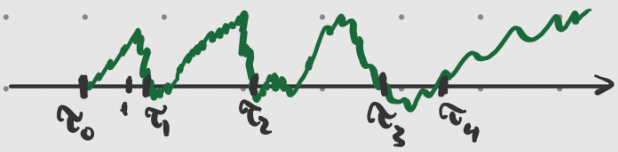
$$\langle M\rangle_t = \langle M\cdot X - N\cdot Y\rangle_t = \int_0^t (M_t^2 + N_t^2)\,ds = \int_0^t e^{2X_s}\,ds = \langle N\rangle_t$$

$$\langle M,N\rangle_t = \langle M\cdot X - N\cdot Y,\ N\cdot X + M\cdot Y\rangle_t = 0$$

Par le thm de Knight $\exists$ MB B dans $\mathbb{R}^2$ issu de 0 t.q.

$$(M_t - 1, N_t) = B_{\langle M\rangle_t} \quad (=\langle N\rangle_t)$$

Il faut vérifier que $\langle M\rangle_\infty = \infty$.



$\langle M\rangle_\infty = \int_0^\infty e^{2X_s}\,ds$. On introduit $\tau_0 := 0$, $\tau_{k+1} = \inf\{t > 1 + \tau_k : X_t = 0\}$

$\tau_k \uparrow +\infty$ $\quad \langle M\rangle_\infty = \sum_k \underbrace{\int_{\tau_k}^{\tau_{k+1}} e^{2X_s}\,ds}_{U_k}$

U_k i.i.d. par la ppté de Markov forte

$B_{\langle M\rangle_t} = (M_t, N_t) - (1,0) \qquad (M_t, N_t) = B_{\langle M\rangle_t} + (1,0)$

$|(M_t,N_t)|^2 = M_t^2 + N_t^2 = e^{2X_t} > 0$ $\forall t \geq 0$, p.s. $\rightarrow \mathbb{P}(\exists t \geq 0\ \ B_{\langle M\rangle_t} + (1,0) = 0) = 0$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathbb{P}(s \geq 0 : B_s + (1,0) = 0)$

$\forall z \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ $\mathbb{P}(\exists s \geq 0 : B_s = z) = 0$.

Pour $d \geq 2$ $\mathbb{P}(\exists t > 0 : B_t = a) = 0$ $\forall a \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$

$\forall a \in \mathbb{R}^d \quad \forall t > 0 \quad \mathbb{P}(B_t \neq a) = 1$ $\quad \forall d \geq 1$

$$\forall a \in \mathbb{R}^d \quad \mathbb{P}(\underbrace{\forall t > 0 \quad B_t \neq a}_{\bigcap_{t>0}\{B_t \neq a\}}) = \begin{cases} 0 & \text{si } d = 1 \\ 1 & \text{si } d \geq 2 \end{cases}$$

$$\mathbb{P}(\forall a \in \mathbb{R}^d \quad \forall t > 0 \quad B_t \neq a) = 0 \quad \forall d \geq 1$$

Exemple $d = 3$, $B_0 = a \neq 0$, $X_t = \|B_t\|^2 = (B_t^1)^2 + (B_t^2)^2 + (B_t^3)^2$

$\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \|x\|^2 \qquad \nabla\varphi(x) = 2x \qquad \nabla^2\varphi(x) = 2\,\mathrm{Id}$

$$\underset{X_t}{\|B_t\|^2} = \|a\|^2 + \int_0^t 2\langle B_s, dB_s\rangle + \frac{1}{\cancel{2}}\underbrace{\int_0^t \sum \cancel{2}(\mathrm{Id})_{ij}\, d\langle B^i, B^j\rangle}_{3t} =$$

$$= \|a\|^2 + 2\sum_{i=1}^3 \int_0^t B_s^i\, dB_s^i + 3t$$

$$\langle X\rangle_t = \langle 2\sum_1^3 \int_0^{\cdot} B_s^i\, dB_s^i\rangle = 4\int_0^t \underbrace{\sum_1^3 (B_s^i)^2}_{X_s} ds = 4\int_0^t X_s\, ds$$

$\mathbb{P}(X_t > 0 \quad \forall t \geq 0) = 1 \Rightarrow$ si $\varphi :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^2 on peut appliquer la formule d'Itô à $\varphi(X)$, par exemple $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $x > 0$

$$\frac{1}{\sqrt{X_t}} = \frac{1}{\sqrt{X_0}} + \int_0^t \left(-\frac{1}{2}\frac{1}{X_s^{3/2}}\right) dX_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{3}{4}\cdot\frac{1}{X_s^{5/2}}\cdot \overbrace{4X_s\, ds}^{d\langle X\rangle_s}$$

$$\frac{1}{\sqrt{X_t}} = \frac{1}{\|a\|} - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{1}{X_s^{3/2}}\left(2\langle B_s, dB_s\rangle + \cancel{3dt}\right) + \cancel{\frac{3}{2}\int_0^t \frac{1}{X_s^{3/2}} ds} = \frac{1}{\|a\|} - \int_0^t \frac{\langle B_s, dB_s\rangle}{X_s^{3/2}}$$

$\to \frac{1}{\sqrt{X_t}}$ est une martingale locale

On peut montrer qu'elle est bien intégrable, mais elle n'est pas une vraie martingale.

$B_t \sim \mathcal{N}(a, t \cdot Id)$

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{X_t}}\right)^p = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\|a+\sqrt{t}N\|^p}\right] \leq \frac{1}{(\sqrt{t})^p}\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{(N_2^2+N_3^2)^{p/2}}\right] =$$

$N \sim \mathcal{N}(0,1)$

$a = (\|a\|, 0, 0)$
(rotation sinon)

$$= \frac{1}{t^{p/2}} \cdot c \int_{\mathbb{R}^+} \frac{1}{r^p} e^{-r^2/2}\, r\, dr < +\infty \quad \text{si } p < 2 \text{ (intégrabilité en 0)}$$

Si $p=1$ $\quad \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{X_t}}\right) \leq \frac{c}{\sqrt{t}} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} 0$

Mais $\mathbb{E}\left(\frac{1}{\sqrt{X_0}}\right) = \frac{1}{\|a\|} \neq 0 \to \left(\frac{1}{\sqrt{X_t}}\right)_{t\geq 0}$ ne peut pas être une mart.

Mais $\frac{1}{\sqrt{X_t}} \in L^p \ \forall p \in [1,2[$, même $\left(\frac{1}{\sqrt{X_t}}\right)_{t\geq 0}$ est borné dans $L^p \to$
$p \in]1,2[$

$\to$ U.I., qui n'est pas une martingale

$(B_t)_{t\geq 0}$ MB dans $\mathbb{R}^n$ issu de $x \neq 0$

$$\|B_t\|^2 = \|x\|^2 + 2\sum_{i=1}^n \int_0^t B_s^i\, dB_s^i + nt, \quad \mathbb{P}(\|B_t\|^2 > 0\ \forall t \geq 0) = 1.$$

Si $F:]0,\infty[\to \mathbb{R}$ est de classe C^2

$$F(\|B_t\|^2) = F(\|x\|^2) + \int_0^t F'(\|B_s\|^2)\, d(\|B_s\|^2) + \frac{1}{2}\int_0^t F''(\|B_s\|^2)\, \overbrace{d\langle \|B\|^2\rangle_s}^{4\|B_s\|^2 ds}$$

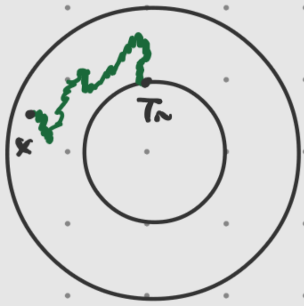
$$= F(\|x\|^2) + 2\int_0^t F'(\|B_s\|^2)\sum_{i=1}^n B_s\, dB_s + \int_0^t \left(F'(\|B_s\|^2)\, n + 2F''(\|B_s\|^2)\, \|B_s\|^2\right) ds$$

Donc $(F(\|B_t\|))_{t\geq 0}$ est une martingale locale si:

$$\boxed{F'(y) + \frac{2}{n}F''(y)\cdot y = 0 \quad \forall y > 0}$$

$\underline{n=2}$: $F(y) = \ln y \Rightarrow \frac{1}{y} + \underbrace{\frac{2}{n}}_{1}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot y = 0$

$\left(\ln \|B_t\|^2\right)_{t\geq 0}$ est une martingale locale



Soient $0 < r < \|x\| < R$

$T_r = \inf\{t \geq 0 : \|B_t\| = r\}$ et T_R de même

$\left(\ln \|B_{t\wedge T_r \wedge T_R}\|\right)_{t\geq 0} \in [\ln r, \ln R] \to$ une martingale locale

bornée $\Rightarrow$ une vraie martingale.

Par le théorème d'arrêt $\mathbb{E}[\ln \|B_{T_r \wedge T_R}\|] = \mathbb{E}[\ln \|x\|]$

T_R est toujour fini car $\mathbb{P}(\exists t : |W_t^1| > R) = 1$

$\ln \|x\| = \ln r \cdot \mathbb{P}(T_r < T_R) + \ln R \cdot (1 - \mathbb{P}(T_r < T_R))$

$$\mathbb{P}(T_r < T_R) = \frac{\ln R - \ln \|x\|}{\ln R - \ln r}$$

$R \to +\infty \Rightarrow T_R \to +\infty \Rightarrow \mathbb{P}(T_r < +\infty) = 1$

Donc $\forall U \neq \emptyset$ ouvert $\subseteq \mathbb{R}^2$ $\mathbb{P}(\exists t > 0 : B_t \in U) = 1$ récurrence

$\underline{n \geq 3}$ $F(y) = y^{1-\frac{n}{2}}$, $F'(y) = \left(1 - \frac{n}{2}\right) y^{-\frac{n}{2}}$, $F'' = -\frac{n}{2}\left(1 - \frac{n}{2}\right) y^{-1-\frac{n}{2}}$

$$F'(y) + \frac{2}{n} F''(y) = 0$$

$\left(\|B_t\|^{2-n}\right)_{t\geq 0}$ est une martingale locale

$\left(\|B_{t\wedge T_r \wedge T_R}\|^{2-n}\right)_{t\geq 0} \in [R^{2-n}, r^{2-n}]$ borné $\to$ une vraie mart

$$\mathbb{P}(T_r < T_R) = \frac{\|x\|^{2-n} - R^{2-n}}{r^{2-n} - R^{2-n}} \xrightarrow{R \to \infty} \mathbb{P}(T_r < +\infty) = \left(\frac{r}{\|x\|}\right)^{n-2} < 1 \quad \text{transient}$$

Théorème de Girsanov

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, (\mathcal{F}_t)_{t \geq 0})$ On suppose d'avoir une martingale u.i. $(D_t)_{t \in [0,T]}$ t.q. (T peut être infini)

1) D est continue et > 0 p.s.

2) $\mathbb{E}[D_0] = 1 \Rightarrow \mathbb{E}[D_t] = 1 \quad \forall t \in [0,T]$

On définit la mesure de proba sur $(\Omega, \mathcal{F})$: $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{1}_A D_T] = \int_A D_T \, d\mathbb{P}$

Lemme Si $(D_t)_{t \in [0,T]}$ est (plus généralement) une martingale locale > 0.

alors $\exists !$ martingale locale $(L_t)_{t \in [0,T]}$ t.q. $D = \mathcal{E}(L)$

De plus, $L_t = \log D_0 + \int_0^t \frac{dD_s}{D_s}$

Preuve Unicité Si L^1 et $L^2 \in \mathcal{M}^c_{loc}$ t.q. $\mathcal{E}(L^1) = \mathcal{E}(L^2)$ c.a.d.

$$\exp\{L^1_t - \tfrac{1}{2}\langle L^1 \rangle_t\} = \exp\{L^2_t - \tfrac{1}{2}\langle L^2 \rangle_t\} \Rightarrow L^1_t - L^2_t = \tfrac{1}{2}\big(\underbrace{\langle L^1 \rangle_t - \langle L^2 \rangle_t}_{\text{à v.f.}}\big) \Rightarrow L^1_t = L^2_t$$

Existence on définit $L_t = \log D_0 + \int_0^t \frac{dD_s}{D_s}$ une mart. locale

On veut montrer $\mathcal{E}(L) = D$ $\quad \mathcal{E}(L)_T = \exp\{\underbrace{\log D_0 + \int_0^t \frac{dD_s}{D_s}}_{L_t} - \tfrac{1}{2}\langle L \rangle_t\}$

$$\langle L \rangle_t = \int_0^t \frac{d\langle D \rangle_s}{D_s^2}$$

Par Itô : $\log D_t = \log D_0 + \underbrace{\int_0^t \frac{1}{D_s} dD_s}_{L_t} + \underbrace{\frac{1}{2}\int_0^t \left(-\frac{1}{D_s^2}\right) d\langle D \rangle_s}_{-\frac{1}{2}\langle L \rangle_t}$

$$D_t = D_0 \exp\{L_t - \tfrac{1}{2}\langle L \rangle_t\} = \mathcal{E}(L)_t \quad \square$$

Théorème (Girsanov)

$(\mathcal{D}_t)_{t\in[0,T]}$ martingale continue U.I. >0 $\mathbb{E}[\mathcal{D}_0]=1$.

$L_t = \ln \mathcal{D}_0 + \int_0^t \frac{d\mathcal{D}_s}{\mathcal{D}_s}$

On définit $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_A \mathcal{D}_T)$. Soit L t.q. $\mathcal{D} = \mathcal{E}(L)$.

Alors si $(M_t)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathbb{P}$-mart. locale continue

$\tilde{M} := M - \langle M, L\rangle$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale continue.

Preuve Soit M une $\mathbb{P}$-mart. locale, $X_0 = 0$.

On veut un critère pour que X^τ avec τ un temps d'arrêt,

soit une $\mathbb{Q}$-martingale.

Supposons que $Y_t = X_t \mathcal{D}_t$ soit t.q. Y^τ est une $\mathbb{P}$-martingale.

$$Y^\tau_t = X_{t\wedge\tau} D_{t\wedge\tau} \quad A \in \mathcal{F}_s \quad \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_{A\cap\{\tau>s\}}}_{\in\mathcal{F}_s} Y^\tau_t] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau>s\}} Y^\tau_s]$$

$$\mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{1}_{A\cap\{\tau>s\}} X_{t\wedge\tau}}_{\mathcal{F}_{t\wedge\tau}\text{-mes}} \overset{\mathbb{P}\text{-mart.}}{D_{t\wedge\tau}}] \underset{\text{Th. d'arrêt}}{=} \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau>s\}} X_{t\wedge\tau} D_T] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau>s\}} X_{s\wedge\tau} \mathcal{D}_{s\wedge\tau}]$$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau>s\}} X_{s\wedge\tau} D_T]$$

Donc $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau>s\}} X_{t\wedge\tau}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau>s\}} X_{s\wedge\tau}]$

On veut se débarasser de $\{\tau>s\}$ dans l'indicatrice

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau\le s\}} X_{\underbrace{t\wedge\tau}_{\tau}}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{A\cap\{\tau\le s\}} X_{\underbrace{s\wedge\tau}_{\tau}}]$$

Donc $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A X_{t\wedge\tau}] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_A X_{s\wedge\tau}]$ $s \le t$ $\forall A \in \mathcal{F}_s$

Maintenant, soit M une $\mathbb{P}$-martingale locale et $\tilde{M} = M - \langle M, L\rangle$.

Pour appliquer le critère : $\tilde{M}_t D_t = \tilde{M}_0 D_0 + \int_0^t \tilde{M}_s dD_s + \int_0^t D_s d\tilde{M}_s + \langle M, D\rangle_t =$

$= M_0 D_0 + \int_0^t \tilde{M}_s dD_s + \int_0^t D_s (dM_s - d\langle M, L\rangle_s) + \langle M, D\rangle_t = M_0 D_0 + \underbrace{\int_0^t \tilde{M}_s dD_s + \int_0^t D_s dM_s}_{\mathbb{P}\text{-martingale locale}}$

$\langle M, L\rangle_s = \int_0^t \frac{1}{D_s} d\langle M, D\rangle_s$

M mart locale $\rightsquigarrow$ on la réduit avec (τ_n) $\rightsquigarrow$ $\tilde{M}^{\tau_n}$ est une $\mathbb{Q}$-mart. $\rightsquigarrow$

$\rightsquigarrow$ $\tilde{M}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale. $\square$

Exemple $(B_t)_{t\ge 0}$ un MB, $D_t = \exp\{\lambda B_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\}$, $\lambda \in \mathbb{R}$

$D = \mathcal{E}(\lambda B)$, ici $L = \lambda B$. On fixe $T > 0$

$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(\mathbb{1}_A D_T)$, on considère $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{Q}, (\mathcal{F}_t))$

Sous $\mathbb{Q}$, $(B_t)_{t\in[0,T]}$ est t.q. $\tilde{B} = B - \langle B, L\rangle$ est une mart. locale

$\tilde{B}_t = B_t - \lambda t$, $t \ge 0$. De plus, $\langle \tilde{B}\rangle_t = \langle B\rangle_t = t$.

Par le thm. de Lévy, sous $\mathbb{Q}$ $\tilde{B}$ est un MB.

Sous $\mathbb{Q}$, $B_t = \lambda t + \tilde{B}_t$ est un MB avec dérive λ.

De même, si $h \in L^2[0,T]$, $D_t = \exp\{\int_0^t h_s dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h_s^2 ds\}$

Sous $\mathbb{Q}$ $\tilde{B} = B - \langle B, L\rangle \Rightarrow \tilde{B}_t = B_t - \int_0^t h_s ds$ est un MB

Rem En général on a L martingale locale, on définit

$D = \mathcal{E}(L) = \exp\{L - \frac{1}{2}\langle L\rangle\}$ et alors on a besoin d'un critère

pour que D soit une vraie martingale.

Examples $(B_t)_{t\geq 0}$ un MB. $h \in L^2(0,T)$ déterministe

$L_t := \int_0^t h_s dB_s$ martingale continue bien définie

$$L_t \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t h_s^2 ds\right) \quad \langle L\rangle_t = \int_0^t h_s^2 ds, \quad t \geq 0$$

$$D_t = \mathcal{E}(L)_t = \exp\left\{\int_0^t h_r dB_r - \frac{1}{2}\int_0^t h_r^2 dr\right\}$$

$$\mathbb{E}[D_t | \mathcal{F}_s] = D_s \,\mathbb{E}\left[e^{\underbrace{\int_s^t h_r dB_r}_{\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s,\ \sim \mathcal{N}(0, \int_s^t h_r^2 dr)} - \frac{1}{2}\int_s^t h_r^2 dr} \Big| \mathcal{F}_s\right] = D_s \,\underbrace{\mathbb{E}\left[e^{\int_s^t h_r dB_r}\right] e^{-\frac{1}{2}\int_s^t h_r^2 dr}}_{=1} = D_s$$

Donc D est une martingale positive continue

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[\mathbb{1}_A D_T] \quad A \in \mathcal{F}_T,\ T < +\infty$$

Par Girsanov, $(B_t)_{t\in[0,T]}$ est une $\mathbb{P}$-martingale locale $\Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{B}_t = B_t - \langle B, L\rangle_t = B_t - \int_0^t h_r dr$ est une martingale locale.

$\langle \tilde{B}\rangle_t = \langle B\rangle_t$. Par thm. de Lévy, $(\tilde{B}_t)$ est un $\mathbb{Q}$-MB

$B_t = \hat{B}_t + \int_0^t h_r dr$. Sous $\mathbb{Q}$, B n'est plus une martingale locale mais une semimartingale avec cette décomposition canonique.

Soit $\Phi : C([0,T],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mesurable bornée alors

(Girsanov) : $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\Phi(\tilde{B}_t,\ t\in[0,T])\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\Phi(B_t,\ t\in[0,T])\right]$

$$= \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\Phi\left(B_t - \int_0^t h_r\,dr,\ t\in[0,T]\right) D_T\right]$$

$$\left\{ \varphi(\omega) := \Phi\left(\omega_t + \int_0^t h_r\,dr,\ t\in[0,T]\right) \quad \omega\in C([0,T],\mathbb{R}) \right\}$$

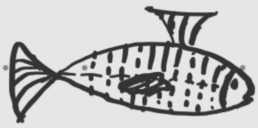
$$\mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\varphi\left(B_t + \int_0^t h_r\,dr,\ t\in[0,T]\right)\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\varphi(B_t,\ t\in[0,T])\,D_T\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\varphi(B_t,\ t\in[0,T])\right]$$

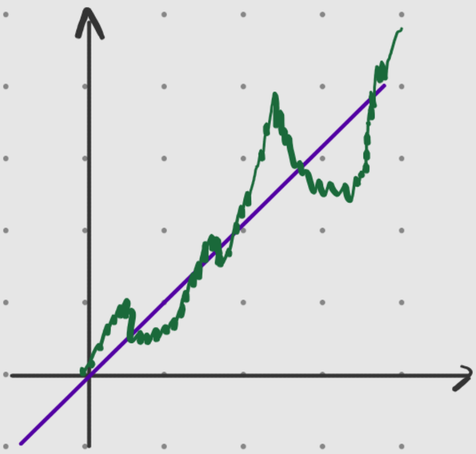
Cameron-Martin

Loi de B sous $\mathbb{Q}$ = Loi de $B + \int h_r\,dr$ sous $\mathbb{P}$

$$\left\{ \begin{aligned} &Z\sim\mathcal{N}(0,1) \quad \mathbb{E}[f(Z+x)] = \int f(z+x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}}dz = \int f(\xi)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(\xi-x)^2}{2}}d\xi = \\ &= \int f(\xi)e^{\xi x - \frac{x^2}{2}}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{\xi^2}{2}}d\xi = \mathbb{E}\left[f(Z)\,e^{Zx-\frac{x^2}{2}}\right] \\ &\text{Loi de } Z+x = (\text{Loi de } Z)\cdot e^{zx-\frac{1}{2}x^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\left(\underbrace{B_t+\gamma t}_{\text{Brownien avec dérive } \gamma},\ t\in[0,T]\right)\right)\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(B_t,\ t\in[0,T])\,e^{\gamma B_T - \frac{\gamma^2}{2}T}\right]$$





On veut étudier p.ex la loi de

$$\sup_{t\in[0,1]} X_t = \sup_{t\in[0,1]}(B_t+\gamma t) \quad (\text{sous } \mathbb{P})$$

$T=1$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{[0,1]} X_t \le x\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{\{\overbrace{\sup_{[0,1]} B_t}^{S_1} \le x\}}\, e^{\gamma B_1 - \frac{1}{2}\gamma^2}\right] = \mathbb{E}\left[F(B_1,S_1)\right] =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} F(b,s) \underbrace{\frac{2(2s-b)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(2s-b)^2}{2}\right\} \mathbb{1}_{\{s>0,\, b<s\}}}_{\text{densité de } (B_t, S_t) \text{ par la principe de réflexion.}} \, db\, ds$$

Si $F(b,s) = \mathbb{1}_{\{s \leq x\}} e^{\gamma b - \frac{\gamma^2}{2}}$ on a

$$e^{-\frac{\gamma^2}{2}} \int_0^x ds \int_{-\infty}^s db \; \frac{2(2s-b)}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(2s-b)^2}{2} + \gamma b\right\}$$

Exemple $X_t = B_t + \gamma t$, $\tau_a^x = \inf\{t \geq 0 : X_t = a\}$, $\inf \emptyset = +\infty$

Thm d'arrêt à $\tau \wedge x$, x

$$\mathbb{P}(\tau_a^x \leq x) \overset{?}{=} \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{\tau_a^B \leq x\}} \underbrace{e^{\gamma B_x - \frac{1}{2}\gamma^2 x}}_{D_x}\Big] \overset{\downarrow}{=} \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{\tau_a^B \leq x\}} D_{\tau_a^B \wedge x}\Big] =$$

$$\mathbb{P}(\tau_a^x \leq x) = \mathbb{P}\big(\sup_{[0,x]} X_t \geq a\big)$$

$$\{\tau_a^B \leq x\} \in \mathcal{F}_{\tau_a \wedge x}$$

$$= \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{\tau_a^B \leq x\}} e^{\gamma \underbrace{B_{\tau_a^B \wedge \cancel{x}}}_{a} - \frac{1}{2}\gamma^2(\tau_a^B \wedge \cancel{x})}\Big] = e^{\gamma a} \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{\tau_a^B \leq x\}} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2 \tau_a^B}\Big] =$$

$$= \int_0^x e^{\gamma a - \frac{1}{2}\gamma^2 s} f_a(s)\, ds$$

où f_a = densité de τ_a^B $\quad f_a(s) = \dfrac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\dfrac{a^2}{2s}\right\} \mathbb{1}_{\{s>0\}}$

$$\mathbb{P}(\tau_a^x \leq x) = \int_0^x \frac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\Big\{\underbrace{\gamma a - \frac{1}{2}\gamma^2 s - \frac{a^2}{2s}}_{-\frac{1}{2s}(a-\gamma s)^2}\Big\}\, ds$$

$\mathbb{E}[\tau_a^x] < +\infty$ si $\gamma \neq 0$ et $\gamma a \geq 0$

$$\to \text{Densité de } \tau_a^x = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi s^3}} \exp\left\{-\frac{1}{2s}(a-\gamma s)^2\right\} \mathbb{1}_{\{s>0\}}$$

$$\mathbb{P}(\tau_a^x \leq x) = \mathbb{E}\Big[\mathbb{1}_{\{\tau_a^B \leq x\}} e^{\gamma a - \frac{1}{2}\gamma^2 \tau_a^B}\Big] \quad \forall x$$

$\downarrow x \to +\infty$

$$\mathbb{P}(\tau_a^x \leq +\infty) = \mathbb{E}\Big[e^{\gamma a - \frac{1}{2}\gamma^2 \tau_a^B}\Big] = e^{\gamma a - |\gamma a|} = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma a > 0 \\ e^{-2|\gamma a|} & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[\tau_a^* \wedge T] = \mathbb{E}\left[(\tau_a^B \wedge T)\, e^{\gamma B_T - \frac{\gamma^2}{2}T}\right] = \mathbb{E}\left[(\tau_a^B \wedge T)\, e^{\gamma B_{\tau_a^B \wedge T} - \frac{\gamma^2}{2}\tau_a^B \wedge T}\right]$$

$\downarrow T \to \infty$ TCM $\qquad$ si $\gamma a > 0$

$$\mathbb{E}[\tau_a^*] = \mathbb{E}\left[\tau_a^B\, e^{\gamma a - \frac{\gamma^2}{2}\tau_a^B}\right] = e^{\gamma a}\int_0^\infty s e^{-\frac{\gamma^2}{2}s} f_a(s)\,ds < +\infty$$

$(L_t) \in \mathcal{M}_{loc} \to \mathcal{E}(L)_t = D_t \in \mathcal{M}_{loc}$

(D_t) est toujours une surmart : τ_n réduit D_t

$\forall s \leq t \quad \mathbb{E}[D_t^{\tau_n} | \mathcal{F}_s] = D_s^{\tau_n}$

$D_t^{\tau_n} \geq 0 \to$ par Fatou $\mathbb{E}[D_t | \mathcal{F}_s] = \mathbb{E}[\liminf_n D_t^{\tau_n} | \mathcal{F}_s] \leq \liminf \mathbb{E}[D_t^{\tau_n} | \mathcal{F}_s] = D_s$

Or pour Girsanov on veut que $\mathbb{E}[D_t] = 1$.

Théorème (critère de Novikov)

(L_t) une mart locale $L_0 = 0$ $\mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}\langle L\rangle_\infty}\right] < +\infty \Rightarrow (\mathcal{E}(L))_{t \geq 0}$ est une mart u.i.

et $\mathbb{E}[\mathcal{E}(L)_t] = 1. \quad \forall t \in [0, +\infty]$

Exemple H_s prévisible $\mathbb{E}\, e^{\frac{1}{2}\int_0^T H_s^2 ds} < \infty \to L_t = \int_0^t H_s\, dB_s \to \mathbb{E}\,\mathcal{E}(L)_t = 1$

Théorème (Burkholder-Davis-Grundy)

$(M_t)_{t \geq 0} \in \mathcal{M}_{loc}$ issue de 0, $M_t^* = \sup_{[0,t]} |M_s|$.

$\forall p > 0 \quad \exists c_p, C_p$ t.q. $c_p \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{p/2}\right] \leq \mathbb{E}\left[(M_\infty^*)^p\right] \leq C_p \mathbb{E}\left[\langle M\rangle_\infty^{p/2}\right]$

Preuve (d'une partie de BDG)

$x \mapsto |x|^p$ est $\mathcal{C}^2$

Itô : $|M_t|^p = \int_0^t p|M_s|^{p-1} \operatorname{sgn} M_s \, dM_s + \frac{1}{2}p(p-1)\int_0^t |M_s|^{p-2} d\langle M\rangle_s$

$$\mathbb{E}|M_t|^p = \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\int_0^t |M_s|^{p-2} d\langle M\rangle_s \leq \frac{p(p-1)}{2}\mathbb{E}\left[|M_t^*|^{p-2}\langle M\rangle_t\right] \leq$$

$$\leq \frac{p(p-1)}{2}\underbrace{\left[\mathbb{E}|M_t^*|^p\right]^{\frac{p-2}{2}}}_{\text{Doob } \leq \left[\left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}|M_t|^p\right]^{\frac{p-2}{p}}}\left(\mathbb{E}\langle M\rangle_t^{p/2}\right)^{\frac{2}{p}}$$

on divise par ça $\Rightarrow$ à gauche $\left[\mathbb{E}|M_t|^p\right]^{\frac{2}{p}} \leq \left(C_p \cdot \mathbb{E}\langle M\rangle_t^{p/2}\right)^{2/p}$

$\square$

Equations differentielles stochastiques

__Rappel__ $u(t,x) = \mathbb{E}[f(x+B_t)]$ $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$

EDP $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{2}\Delta u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ l'équation de la chaleur

Question : si $\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases}$ $\rightarrow$ existe-t-il un processus $(X(t,x))_{t\geq 0, x \in \mathbb{R}^d}$ t.q. $u(t,x) = \mathbb{E} f(X(t,x))$?

$(B_t)_{t\geq 0}$ un MB dans $\mathbb{R}^m$ défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P})$

On a $\left.\begin{array}{l} b = b(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d \\ \sigma = \sigma(t,x) \quad \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{m\times d} \end{array}\right\}$ continues

On cherche un processus $(X(t,x))_{t\geq 0}$ adapté t.q.

$$(*) \quad X(t,x) = x + \int_0^t b(s, X(s,x))\,ds + \int_0^t \sigma(s, X(s,x))\,dB_s \,, \quad t \geq 0$$

Notation $dX_t = b(t,X_t)dt + \sigma(t,X_t)dB_t \iff X_t = x + \int_0 b(s,X_s)ds$

EDO :

$\iff \begin{cases} \dot{X}_t = b(t,X_t) \\ X_0 = x \end{cases}$

Déf $(X(t,x))_{t\geq 0}$ est une solution forte de $(*)$ si X est adapté à la filtration de B $\mathcal{F}_t^B = \sigma(B_s, s\in[0,t])$

Coefficients Lipschitz

Hypothèse : b, σ sont continues et $\exists L>0$ t.q.

$$\begin{cases} |\sigma(t,x)-\sigma(t,y)| + |b(t,x)-b(t,y)| \leq L|x-y| & \forall t\geq 0 \quad \forall x,y\in\mathbb{R}^d \\ |b(t,0)|+|\sigma(t,0)| \leq L & \forall t\geq 0 \end{cases}$$

Méthode classique pour les EDO :

On considère $\mathcal{C}([0,T],\mathbb{R}^d) = E$

$\Gamma : E\to E$, $E\ni Y \mapsto \Gamma(Y) : Z$ t.q. $Z_t = x + \int_0^t b(s,Y_s)ds$, $\forall t\in[0,T]$

X est solution de l'EDO $\iff$ $X\in E$ et $\Gamma(X) = X$ point fixe de Γ

On espère que Γ admet un (existence) et un seul (unicité) point fixe

Thm (Banach) Si (E,d) est un espace métrique, $F : E\to E$ t.q. $\exists \delta\in]0,1[$ t.q. $d(f(x),f(y)) \leq \delta d(x,y)$ $\forall x,y\in E$

Alors $\exists !\, x_0 \in E$ t.q. $f(x_0) = x_0$. De plus, $\forall y \in E$ $(f \circ \dots \circ f)(y) = f^{\circ n}(y) = y_n$

$\Rightarrow y_n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_0$.

On a $d(X,Y) = \sup_{t\in[0,T]} |X_t - Y_t| = \|X-Y\|_\infty$

$$\|\Gamma(X) - \Gamma(Y)\|_\infty = \sup_{t\in[0,T]} \left| \int_0^t \left(b(s,X_s) - b(s,Y_s)\right) dY_s \right| \leq T \sup_{s\in[0,T]} |b(s,X_s) - b(s,Y_s)| \leq$$

$\leq TL \|X-Y\|_\infty$ est une contraction si $TL < 1$.

On peut définir $\|X-Y\|_K = \sup_{t\in[0,T]} \left\{ e^{-Kt} \sup_{s\in[0,t]} |X_s - Y_s| \right\}$ $K > 0$

$$\|\Gamma(X) - \Gamma(Y)\|_K = \sup_{[0,T]} \left\{ e^{-Kt} \sup_{[0,t]} \left| \int_0^t \left(b(u,X_u) - b(u,Y_u)\right) du \right| \leq \sup e^{-Kt} \cdot \sup \int_0^t \underbrace{e^{-Ku} |X_u - Y_u|}_{\leq \|X-Y\|_K} e^{Ku} du \leq \right.$$

$$\leq \sup_{[0,T]} e^{-Kt} \cdot \frac{1}{K}(e^{Kt} - 1) \|X-Y\|_K \leq \frac{L}{K} \|X-Y\|_K$$

Si K est assez grand on a une contraction sur $(E, \|\cdot\|_K)$

On va considérer plutôt des équations sur $[S,T] \subseteq [0,T]$

η v.a. $\mathcal{F}_S$-mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, de carré intégrable

$E_{S,T} = \{ (X_u)_{u\in[S,T]}$ processus continu adapté à valeurs ds $\mathbb{R}^d$ de carré intégrable $\}$

Sur $E_{S,T}$ on définit $\|X\|_K = \sup_{t\in[S,T]} e^{-Kt} \|X_t^*\|_{L^2}$ où $X_t^* = \sup_{[S,t]} |X_s|$

$$(\eta, X) \mapsto Y_t = \eta + \int_S^t b(u,X_u) du + \int_S^t \sigma(u,X_u) dB_u, \quad t \in [S,T]$$

Il faut prouver que $Y \in E_{S,T}$

Lemme $Y \in E_{s,T}$

Preuve $|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leq 2L(1+|x|)$

$$|Y_t| \leq |\eta| + \int_s^t \underbrace{|b(u,X_u)|}_{L(1+|X_u|)} du + \left|\int_s^t \sigma(u,X_u)\, dB_u\right| \qquad L^2(1+|X_u|)^2 \leq 2L^2(1+|X_u|^2)$$

Doob $$\mathbb{E}\left(\sup_{r\in[s,t]} \left|\int_s^r \sigma(u,X_u)\,dB_u\right|^2\right) \leq 4\,\mathbb{E}\left[\int_s^t \overbrace{\sigma^2(u,X_u)} du\right] \leq 8L^2 \int_s^t (1+\mathbb{E}X_u^2)\, du$$

$$\|Y_t^*\|_{L^2} \leq \mathbb{E}|\eta|^2 + L\int_s^t (1+\|X_u\|_{L^2})\, du + 4L\left[\int_s^t (1+\|X_u\|_{L^2}^2)du\right]^{1/2} < +\infty \qquad \square$$

$\Gamma_\eta : E_{s,T} \to E_{s,T}$, $\quad Y \to X \quad \forall \eta$

$(\eta^i, X^i) \quad Y^i = \Gamma_{\eta^i}(X^i) \quad i=1,2$

$$\|Y^1 - Y^2\|_K \leq \|\eta^1-\eta^2\|_{L^2} + L\,C(K)\,\|X-Y\|_K \quad \text{où} \quad C(K) = \left(\frac{1}{K} + \left(\frac{L}{K}\right)^{1/2}\right) \xrightarrow[K\to\infty]{} 0$$

$$|Y_t^1 - Y_t^2| \leq |\eta^1-\eta^2| + L\int_s^t |X_u^1 - X_u^2|\,du + \left|\int_s^t \sigma(u,X_u^1) - \sigma(u,X_u^2)\,dB_u\right|$$

$$\mathbb{E}\sup_{[s,t]}\left|\int_s^r \sigma(u,X_u^1) - \sigma(u,X_u^2)\,dB_u\right|^2 \leq 4L^2\int_s^t \mathbb{E}(X_u^1 - X_u^2)^2\,du$$

$$\|Y^1 - Y^2\|_K \leq |\eta^1-\eta^2| + \frac{L}{K}\|X^1-X^2\|_K + 2L\sqrt{\sup_{t\in[s,T]} e^{-2Kt} \underbrace{\int_s^t e^{2Ku}du}_{\frac{e^{2Kt}-e^{2Ks}}{2K}}}\;\|X-Y\|_K \leq$$

$$\leq |\eta^1 - \eta^2| + L\,C(K)\,\|X^1-X^2\|_K.$$

Prop $0 \leq s \leq T$. η v.a. dans $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{E}|\eta|^2 < \infty$ et $\mathcal{F}_s$-mesurable.

Alors $\exists!\ (X(s,t,\eta))_{t\in[s,T]} \in E_{s,T}$ t.q.

$$(1)\quad X(s,t,\eta) = \eta + \int_s^t b(u, X(s,u,\eta))\,du + \int_s^t \sigma(u, X(s,u,\eta))\,dB_u, \quad t \in [s,T]$$

Si $\eta = x$ déterministe $\Rightarrow X(s,t,\eta)$ est $\underbrace{\sigma(B_r - B_s,\ r \in [s,t])}_{=\mathcal{G}}$-mesurable

<u>Preuve</u> X satisfait $(1) \Longleftrightarrow \Gamma_\eta(X) = X$.

$$X = \lim_{n\to\infty} \Gamma_x \circ \dots \circ \Gamma_x(0)$$

0 est $\mathcal{G}$-adopté

<u>Par récurrence</u> si X est $\mathcal{G}$-adopté $\Rightarrow \Gamma_x(X)$ est aussi $\mathcal{G}$ adopté

<u>Exemples</u> 1) $X_t = x - \lambda \int_0^t X_s\,ds + B_t$ O.U.

$$b(u,x) = -\lambda x, \quad \sigma(u,x) = 1$$

2) $dX_t = \sigma X_t\,dB_t \Rightarrow X_t = X_0 \exp\left\{\sigma B_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right\}$

3) $X_t = \mathrm{sh}(B_t + t) \qquad \mathrm{ch}(x)^2 - \mathrm{sh}(x)^2 = 1$

Itô : $\underbrace{\mathrm{sh}(B_t + t)}_{X_t} = \int_0^t \underbrace{\mathrm{ch}(B_s + s)}_{\sqrt{1+X_s^2}}\,d(B_s + s) + \frac{1}{2}\int_0^t \underbrace{\mathrm{sh}(B_s + s)}_{X_s}\,ds$

$$dX_t = \left(\sqrt{1+X_t^2} + \frac{1}{2}X_t\right)dt + \sqrt{1+X_t^2}\,dB_t$$

$$b(x) = \sqrt{1+x^2} + \frac{x}{2} \qquad \sigma(x) = \sqrt{1+x^2}$$

Si $X_0 = x$ la solution est donnée par $X_t = \mathrm{sh}(y + B_t + t)$, où $\mathrm{sh}\, y = x$

<u>Rappel</u> $X(t,x) = x - \int_0^t \frac{X(s,x)}{1-s}\,ds + B_t \longleftarrow$ pont brownien $(t<1)$

EDS b, σ ← diffusion ; b ← dérive

$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t$$

Solution forte On fixe $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), \mathbb{P}, B)$ fixé, on cherche $(X_t)_{t\geq 0}$ adapté et $(\mathcal{F}_t^B)_{t\geq 0}$ t.q. $X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s$

Thm Existence et unicité avec coefficients Lipschitz

Solution faible On a b, σ, x, on cherche $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_s), \mathbb{P}, B, X)$ avec B et X adaptés à $(\mathcal{F}_t)$ t.q. $X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)ds + \int_0^t \sigma(s,X_s)dB_s$

Dans ce cas on veut démontrer l'unicité <u>en loi</u>

Exemple Si $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est continu borné sous hypothèse Lipschitz : $X_t = x + \int_0^t b(s,X_s) + B_t$ $t \geq 0$ $(\sigma = 1)$

Sur $[0,T]$, $\mathcal{F}_T$ on définit $\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_A \underbrace{\exp\left\{\int_0^T b(s,x+B_s)dB_s - \frac{1}{2}\int_0^T b^2(s,x+B_s)ds\right\}}_{D_T = \mathcal{E}(L)_T}\right]$

$\mathbb{E}_1\left|e^{\frac{1}{2}\int_0^t b^2(s,x+B_s)ds}\right| < \infty$ car b est bornée $\to$

$\to \mathbb{Q}$ est une mesure de proba sur $\mathcal{F}_T$.

Par Girsanov, $\tilde{B}_t = B_t - \langle B, L\rangle_t$ et une mart. locale sous $\mathbb{Q}$,

$\langle \tilde{B}\rangle_t = \langle B\rangle_t = t \to$ par Lévy $\tilde{B}$ est un MB sous $\mathbb{Q}$

$\langle B, L\rangle_t = \int_0^t b(s,x+B_s)ds \to \tilde{B}_t = B_t - \int_0^t b(s,x+B_s)ds$

$$\underbrace{x+B_t}_{X_t} = x + \int_0^t b(s, x+B_s)\,ds + \tilde{B}_t \Rightarrow X_t = x + \int_0^t b(s,X_s)\,ds + \tilde{B}_t$$

$\uparrow$ MB sous $\mathbb{Q}$

$\Rightarrow X_t$ est une solution faible (on a montré existence)

Exemple $B = (B^1, \dots, B^n)$ un MB dans $\mathbb{R}^n$ issu de $x \in \mathbb{R}^n$

$$X_t = \|B_t\|^2 = \underbrace{\|x\|^2}_{a} + \underbrace{2\sum_{i=1}^n \int_0^t B_s^i\,dB_s^i}_{M_t} + nt$$

$$\beta_t = \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{1}{\sqrt{X_s}} B_s^i\,dB_s^i \text{ – martingale locale}$$

$$\langle\beta\rangle_t = \sum_{i=1}^n \int_0^t \frac{(B_s^i)^2}{X_s}\,ds = t \rightarrow \beta_t \text{ est un MB}$$

$\uparrow$ $B^i \perp\!\!\!\perp B^j$ $i \neq j$

Donc on peut écrire $dX_t = 2\sqrt{X_t}\,d\beta_t + n\,dt$

$$X_t = a + nt + 2\int_0^t \sqrt{X_s}\,d\beta_s, \quad t \geq 0$$

avec β un MB. $\uparrow$ Solution faible d'une EDS avec $b = n$, $\sigma(x) = 2\sqrt{|x|}$.

$$Y_t = \sqrt{X_t} = \|B_t\|, \quad x \neq 0$$

Itô $dY_t = \frac{1}{2\sqrt{X_t}}dX_t - \frac{1}{2}\frac{1}{4}\frac{1}{X_t^{3/2}}d\langle X\rangle_t = \frac{1}{2\sqrt{X_t}}(n\,dt + n\sqrt{X_t}\,d\beta_t) - \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{X_t^{3/2}}4\cdot X_t\,dt =$

$$= \frac{n-1}{2}\frac{dt}{\sqrt{X_t}} + d\beta_t \qquad Y_t = Y_0 + \frac{n-1}{2}\int_0^t \frac{ds}{Y_s} + \beta_t, \quad b(x) = \frac{n-1}{2x}, \ \sigma \equiv 1$$

$\uparrow$ pas Lipschitz

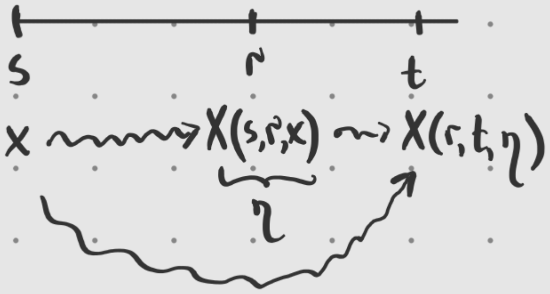
Ici et dans l'exemple avec Girsanov

$\beta_t = Y_t - Y_0 - \frac{n-1}{2}\int_0^t \frac{ds}{Y_s} \Rightarrow \beta$ est adopté à la filtration de X

Dans la solution forte on demande l'inverse : que X soit adopté à la filtration de β.

Coefficients Lipschitz

$$X(s,t,\eta) = \eta + \int_s^t b(u, X(s,u,\eta))\,du + \int_s^t \sigma(u, X(s,u,\eta))\,dB_u$$



Propriété de flot

$$X(r,t,X(s,r,x)) = X(s,t,x)$$

On a vu que si x est deterministe donc $\overset{\perp\!\!\!\perp \mathcal{F}_s}{X(s,t,x)}$ et $\sigma(s,t,x)$ est

$\sigma(B_u - B_s,\ u\in[s,t])$ - mesurable

$$\left.\begin{aligned} &X(r,t,\cdot) \text{ est } \sigma(B_u - B_r,\ u\in[r,t])\text{-mesurable} \\ &X(s,r,x) \text{ est } \sigma(B_u - B_s,\ u\in[s,r])\text{-mesurable}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \text{indépendents}$$

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad P_{s,t} f(x) = \mathbb{E}[f(X(s,t,x))] = \mathbb{E}[f(X(r,t,X(s,r,x)))] =$

$$= \mathbb{E}[\mathbb{E}[f(X(r,t,X(s,r,x)))\,|\,\mathcal{F}_r]] = \mathbb{E}\left[P_{r,t}f(y)\big|_{y=X(s,r,x)}\right] = P_{s,r}\circ P_{r,t} f(x)$$

Cas homogène $\quad b(t,x) = b(x),\quad \sigma(t,x) = \sigma(x)$

$$s\le t \qquad X(s,s+t,\eta) = \eta + \int_s^{s+t} b(X(s,u,\eta))\,du + \int_s^{s+t}\sigma(X(s,u,\eta))\,dB_u$$

$$X(0,t,\eta) = \eta + \int_0^t b(X(0,u,\eta))\,du + \int_0^t \sigma(X(0,u,\eta))\,dB_u$$

Par les itérations à la Picard utilisées pour la construction de les processus, on voit que

$$\left(X(s,s+t,x)\right)_{t\geq 0} = \Lambda(B_{u+s}-B_s,\ u\geq 0)$$

$\updownarrow$ $\hat{m}$ funct.

$$\left(X(0,t,x)\right)_{t\geq 0} = \Lambda(B_u,\ u\geq 0)$$

$$\Rightarrow P_{s,t} = P_{t-s} \quad \Rightarrow \quad P_{t+s}f(x) = P_t \circ P_s f(x) = P_s \circ P_t f(x) \quad \forall t,s\geq 0$$

$(P_t)_{t\geq 0}$ semigroupe

$u(t,x) := P_t f(x)$ est solution d'une EDP

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \mathcal{L}u \\ u(0,x) = f(x) \end{cases} \quad \text{où} \quad \mathcal{L}v = \langle b, \nabla v\rangle + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left[\sigma\sigma^T D^2 v\right]$$

Si $f \in C_b^2(\mathbb{R}^d)$ alors par Itô

$$f(X(t,x)) = f(x) + \int_0^t \langle \nabla f(X(s,x)), \sigma(X(s,x))\,dB_s\rangle + \int_0^t \mathcal{L}f(X(s,x))\,ds$$

$\downarrow$

$$\mathbb{E}[\ldots] \rightsquigarrow u(t,x) = f(x) + \int_0^t P_s \mathcal{L} f(x)\,ds$$

$\downarrow \partial/\partial t$

$$\begin{cases} \partial_t u = P_t \mathcal{L} f(x) \\ u(0,\cdot) = f \end{cases}$$

Or $P_t\mathcal{L} = \mathcal{L}P_t \ \Rightarrow \ \partial_t u = \mathcal{L}P_t f = \mathcal{L}u$

⊂ il faut vérifier ça!

Preuve

1) $u(t,x)$ est différentiable

2) $u(t-s, X(s,x))$, $s\in[0,t]$ à t fixé

$$\mathcal{M}_s = P_{t-s} f(X(s,x)) = \mathbb{E}[f(\overbrace{X(s,t,\underbrace{X(0,s,x)}_{=X(s,x)})}^{=X(0,t,x)})\,|\,\mathcal{F}_s] \text{ est une martingale } s\in[0,t]$$

(avec $\mathcal{M}_s = u(t-s, X(s,x))$)

3) Itô

$$\underbrace{u(0,X(t,x)) = u(t,x) + \int_0^t \left(-\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u\right)(t-s, X(s,x))\,ds}_{=0} + \text{Martingale}$$

$$= 0 \;\rightarrow\; -\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{L}u = 0 \qquad \square$$