$$\pi^{\text{Swaption},P}(t, T_i, T_j)$$
$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \underbrace{g(T_i, T_i, T_j)}_{\text{flux actualisé en } T_i} \,\Big|\, \mathcal{F}_t \Big).$$

Formule de Bayes abstraite :

$$\left.\frac{d\mathbb{Q}_M}{d\mathbb{Q}_N}\right|_{\mathcal{F}_t} = \eta_t$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_M}(Y_T \mid \mathcal{F}_t) = \frac{1}{\eta_t}\, \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_N}(\eta_T \cdot Y_T \mid \mathcal{F}_t).$$

Correction Q. 6 – 10 [Exam 2020]

Q6 : $\left(e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T_i, T_j)\right)_{t \geq 0}$ $\leftarrow X_t$ est une martingale [sous la mesure risque neutre].

$$X_t = e^{-\int_0^t r_s ds} \underbrace{\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) \cdot P(t, T_{k+1})}$$

→ X_t est une combinaison linéaire de prix ZC actualisé, donc c'est une martingale sous $\mathbb{Q}$.

Q7 Que peut-on dire de

$$Z_t = e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \frac{P(T_i, T_i, T_j)}{P(t, T_i, T_j)} \quad ?$$

Z_{T_i}

$$\boxed{= \frac{N_t}{N_T} \cdot \frac{M_T}{M_t}}$$

T

N et M sont des numéraires

avec $\begin{cases} N_t = e^{\int_0^t r_s ds} \\ M_t = P(t, T_i, T_j) \end{cases}$, $t \in [0, T_{i+1}]$.

on remarque que $Z_t = \dfrac{X_{T_i}}{X_t}$, avec $(X_t)_{t \geq 0}$ est une martingale.

$$\mathbb{E}_Q(Z_T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_Q\left(\frac{X_{T_i}}{X_t} \mid \mathcal{F}_t\right). \quad t < T.$$

Sous mesure risque neutre

$$= \frac{1}{X_t} \underbrace{\mathbb{E}_Q(X_{T_i} \mid \mathcal{F}_t)}.$$

$$= 1.$$

$(Z_t)_{t \geq 0}$ est une martingale $\Rightarrow$ "une densité" de mesure de proba.

$\boxed{Q8}$ Montrer que le taux swap.

$$\boxed{S(t, T_i, T_j)} = \frac{P(t,T_i) - P(t,T_j)}{\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1})}$$

est une martingale sous Q_{ij}

$$\mathbb{E}_Q\left(\boxed{}\,(S(T_i, T_i, T_j) - K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \boxed{}\; \underbrace{\mathbb{E}_{Q_{ij}}\left((S(T_i, T_i, T_j))^+ \mid \mathcal{F}_t\right)}.$$

$$\Pi_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\Big(\underbrace{P(T_i, T_i, T_j)}_{\text{v.a}} \cdot \underbrace{(S(T_i, T_i, T_j) - K)^+}_{\text{v.a}} \Big| \mathcal{F}_t \Big)$$

Q_{ij}

$$\frac{dQ_{ij}}{dQ}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{M_t}{N_t} \cdot \frac{N_0}{M_0} = e^{-\int_0^t r_s ds} \cdot \frac{P(t, T_i, T_j)}{P(0, T_i, T_j)}$$

N_t : numéraire associée à Q

$$= \eta_t$$

Règle de Bayes $\mathbb{E}_{Q_{ij}}(Y_T | \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(Y_T \frac{\eta_T}{\eta_t} \Big| \mathcal{F}_t\right)$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(Y_T \cdot \frac{\eta_T}{\eta_t} \Big| \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}_{Q_{ij}}(Y_T).$$

$\mathcal{F}_{T_i}$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left((S-K)^+ \cdot \frac{e^{-\int_0^{T_i} r_s ds} \cdot P(T_i, T_i, T_j)}{e^{-\int_0^t r_s ds} P(t, T_i, T_j)} \Big| \mathcal{F}_t \right)$$

$$= \mathbb{E}_{Q_{ij}}\left((S-K)^+ | \mathcal{F}_t \right).$$

$= \Pi_t$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^{T_i} r_s ds} \frac{P(T_i, T_i, T_j)}{P(t, T_i, T_j)} \cdot (S-K)^+ \Big| \mathcal{F}_t \right)$$

$$\Pi_t = P(t, T_i, T_j) \cdot \mathbb{E}_{Q_{ij}}\left((S-K)^+ | \mathcal{F}_t \right).$$

S est une Q_{ij} - martingale.

$dS_t = S_t \sigma_t \, dW_t$, sous Q_{ij}

$\boxed{Q8}$ Montrer que pour $t < T$

$$\mathbb{E}_{Q_{ij}}\left(S(T, T_i, T_j) \mid \mathcal{F}_t \right) = S(t, T_i, T_j)$$

avec $S(t, T_i, T_j) = \dfrac{P(t, T_i) - P(t, T_j)}{\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1})}$

est une Q_{ij}-martingale ?

On que le processus suivant :

$$Y_t = \frac{P(t, T_\ell)}{\sum_{k=i}^{j-1} (T_{k+1} - T_k) P(t, T_{k+1})} \quad (\ell = i, j)$$

est une Q_{ij}-martingale ?!

$$Y_t = \frac{P(t,T_i)}{P(t,T_i,T_j)} \quad \text{Bayes}$$

$$\mathbb{E}_{Q_{ij}}(Y_T \mid \mathcal{F}_t) = \frac{1}{\eta_t}\mathbb{E}_Q(Y_T \cdot \eta_T \mid \mathcal{F}_t)$$

$$\left.\frac{dQ_{ij}}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_t} = \eta_t = \frac{M_t}{N_t} \cdot \frac{N_0}{M_0}$$

$$\mathbb{E}_{Q_{ij}}(Y_T \mid \mathcal{F}_t) = \mathbb{E}_Q\left(Y_T \cdot \frac{\eta_T}{\eta_t} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \mathbb{E}_Q\left(Y_T \frac{M_T}{N_T} \cdot \frac{N_t}{M_t} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$N_t = e^{\int_0^t r_s ds}$$

$$M_t = P(t,T_i,T_j) \quad = \mathbb{E}_Q\left(Y_T \cdot e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{P(T,T_i,T_j)}{P(t,T_i,T_j)} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \mathbb{E}_Q\left(\frac{P(T,T_i)}{\cancel{P(T,T_i,T_j)}} \cdot e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{\cancel{P(T,T_i,T_j)}}{P(t,T_i,T_j)} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^T r_s ds} \frac{P(T,T_i)}{P(t,T_i,T_j)} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= \frac{1}{P(t,T_i,T_j)}\mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^T r_s ds} P(T,T_i) \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$\mathbb{E}_{Q_{ij}}(\varphi_t|\mathcal{F}_s) = \frac{P(t,T_i)}{P(t,T_i,T_j)} = \varphi_t \text{, donc.}$$

$$S(t,T_i,T_j) = \underbrace{\frac{P(t,T_i)}{P(t,T_i,T_j)}} - \underbrace{\frac{P(t,T_j)}{P(t,T_i,T_j)}}$$

φ_t est une martingale sous Q_{ij}.

Donc la dynamique de $S(t,T_i,T_j)$ peut s'écrire de la façon suivante (sous Q_{ij})

$$dS(t,T_i,T_j) = S(t,T_i,T_j)\,\sigma(t)\,dW_t^{ij}.$$

avec $(W_t^{ij})_{t\geq 0}$ un MB sous Q_{ij}

$\boxed{Q9}$

$$\pi^{\text{Swaption}}(t) = \mathbb{E}_Q\left(e^{-\int_t^{T_i} r_s ds}\, \underbrace{P(T_i,T_i,T_j)}\,(S-K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= P(t,T_i,T_j)\,\mathbb{E}_Q\left(\underbrace{\frac{N_t}{N_{T_i}} \cdot \frac{P(T_i,T_i,T_j)}{P(t,T_i,T_j)}}\,(S-K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= P(t,T_i,T_j)\,\mathbb{E}_Q\left(\frac{\eta_{T_i}}{\eta_t} \cdot \left(S(T_i,T_i,T_j) - K\right)^+ \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= P(t, T_i, T_j)\, \mathbb{E}_{Q_{ij}}\left(\left(S(T_i, T_i, T_j) - K\right)^+ \mathbb{1}_{\mathcal{F}_t} \right)$$

Il s'agit bien d'un payoff de call de type Européen. dont le sous-jacent est un taux swap forward.

Q10.

$$dS_t = S_t \sigma_t \, dW_t \, .$$

lognormale

$S(T_i, T_i, T_j) \sim$ façon explicite

on pose $Y_t = \log S_t = f(S_t)$.

$$dY_t = \cancel{\frac{\partial f}{\partial t} dt} + \frac{\partial f}{\partial S} dS + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} d\langle S \rangle$$

$$= 0 + \frac{dS_t}{S_t} - \frac{1}{2} \frac{1}{S_t^2} S_t^2 \sigma_t^2 dt$$

$$dY_t = \sigma_t \, dW_t - \frac{1}{2} \sigma_t^2 \, dt \, .$$

$$\Rightarrow S(T_i, T_i, T_j) = S(t, T_i, T_j) \times \quad (*)$$

$$\exp\left\{ -\frac{1}{2} \int_t^{T_i} \sigma_s^2 \, ds + \underbrace{\int_t^{T_i} \sigma_s \, dW_s^{ij}}_{\sim \mathcal{N}\left(0, \int_t^{T_i} \sigma_s^2 ds\right)} \right\}$$

sous Q^{ij}

$$\pi^{\text{Swaption}}(t) = P(t, T_i, T_j)\, \mathbb{E}_{Q_{ij}}\left((S-K)^+ \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= P(t, T_i, T_j)\, \mathbb{E}_{Q_{ij}}\left((S-K) \cdot \mathbb{1}_{\{S>K\}} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$= P(t, T_i, T_j)\, \mathbb{E}_{Q_{ij}}\left(S\, \mathbb{1}_{\{S>K\}} \mid \mathcal{F}_t\right)$$

$$- P(t, T_i, T_j) \cdot K\, \mathbb{Q}^{ij}\left(S>K \mid \mathcal{F}_t\right).$$

↳ on utilise la loi de de S (min $\mathbb{Q}$)

$$\frac{d\tilde{P}_t}{\tilde{P}_t} = \alpha_t\, dW_t \quad \cdot \text{ sous } \mathbb{Q}.$$