TD1 - Modèle de Markowitz

Dans tout ce TD on reprend les notations utilisées en cours.

1. On considère deux actifs $A_1(\mu_1, \sigma_1)$ et $A_2(\mu_2, \sigma_2)$ avec $\mu_1 < \mu_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$, où μ_i (resp. σ_i) représente le rendement espéré (resp. l'écart-type, donc le risque) de l'actif A_i, $i = 1, 2$. Supposons que les ventes à découvert ne sont pas permises.
   (a) On suppose dans un premier temps que les deux actifs sont indépendants.
      i. Donner le portefeuille de variance minimale en indiquant son rendement et le risque minimum.
      ii. Quelle est l'allure de la frontière efficiente et son équation. Préciser la position de A_1 et A_2 sur cette frontière.
   (b) Supposons maintenant que le coefficient de corrélation de ces actifs est $\rho = -1$.
      i. Ecrire un problème d'optimisation permettant de trouver le portefeuille le moins risqué sur le marché.
      ii. Quelle est la solution du problème précédent ? Que remarquez-vous ?
      iii. Donner l'équation de la frontière efficiente.
      iv. Tracer la FE. Préciser la position de A_1 et A_2 sur cette frontière.
2. Supposons un marché à deux actifs : **un actif sans risque** (de rendement r_f) et **un actif risqué** A (de rendement espéré $\mu_A > r_f$ et de risque $\sigma_A > 0$).
   (a) Quelle est la frontière efficiente de Markowitz dans ce cas particulier (équation et graphique) ?
   (b) Dans le modèle de Markowitz on a admis l'existence du taux sans risque r_f sans distinguer les taux de prêt et de placement (rappel : l'actif sans risque=prêt/emprunt au taux sans risque). Supposons maintenant que le taux d'emprunt noté R_f et le taux de placement noté r_f sont différents.
      i. Quelle serait le rendement espéré du portefeuille $(1-w, w)$ où w représente le poids de richesse investi dans l'actif risqué ?
      ii. Que devient la frontière efficiente si le taux d'emprunt est supérieur au taux de placement ? Faites une représentation graphique de la frontière.
      iii. Pour quels investisseurs cette situation ne change-t-elle pas la composition de leur portefeuille ?

TD 1 : Modèle de Markowitz

1) Soit 2 actifs $A_1(\mu_1, \sigma_1)$ et $A_2(\mu_2, \sigma_2)$ avec $\mu_1 < \mu_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$

Ventes à découvert non permises.

a) On suppose $A_1(\mu_1, \sigma_1) \perp\!\!\!\perp A_2(\mu_2, \sigma_2)$

i)

1. On considère deux actifs $A_1(\mu_1, \sigma_1)$ et $A_2(\mu_2, \sigma_2)$ avec $\mu_1 < \mu_2$ et $\sigma_1 < \sigma_2$, où μ_i (resp. σ_i) représente le rendement espéré (resp. l'écart-type, donc le risque) de l'actif A_i, $i = 1, 2$. Supposons que les ventes à découvert ne sont pas permises.
   (a) On suppose dans un premier temps que les deux actifs sont indépendants.
      i. Donner le portefeuille de variance minimale en indiquant son rendement et le risque minimum.
      ii. Quelle est l'allure de la frontière efficiente et son équation. Préciser la position de A_1 et A_2 sur cette frontière.
   (b) Supposons maintenant que le coefficient de corrélation de ces actifs est $\rho = -1$.
      i. Ecrire un problème d'optimisation permettant de trouver le portefeuille le moins risqué sur le marché.
      ii. Quelle est la solution du problème précédent ? Que remarquez-vous ?
      iii. Donner l'équation de la frontière efficiente.
      iv. Tracer la FE. Préciser la position de A_1 et A_2 sur cette frontière.

1ère méthode : $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$ car indépendants. On a Σ inversible $\Rightarrow$ On peut appliquer les formules

$$w_{VM} = \frac{1}{C} \Sigma^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2} \quad \text{avec } C = \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}' \Sigma^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}$$

et Σ est diagonale $\Rightarrow \Sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{pmatrix}$

Donc $C = \frac{1}{\sigma_1^2} + \frac{1}{\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}$

Alors $w_{VM} = \frac{\sigma_2^2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 \\ 1/\sigma_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \end{pmatrix}$

$\mu_{VM} = \frac{A}{C}$ et $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{C}}$ avec $A = \mu' \Sigma^{-1} \mathbb{1}_{\mathbb{R}^2}$, avec $\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}$

Donc $A = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix}' \begin{pmatrix} 1/\sigma_1^2 & 0 \\ 0 & 1/\sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{\mu_1}{\sigma_1^2} + \frac{\mu_2}{\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2^2 \mu_1 + \sigma_1^2 \mu_2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2}$

$\Rightarrow \mu_{VM} = \frac{A}{C} = \frac{\sigma_2^2 \mu_1 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ et $\sigma_{VM} = \frac{\sigma_2 \sigma_1}{\sqrt{\sigma_2^2 + \sigma_1^2}}$

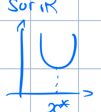
2ème méthode : $(\alpha \quad 1-\alpha)'$ $\alpha \in [0,1]$

$$\min_{\alpha \in [0,1]} Var(\alpha \tilde{R}_{A_1} + (1-\alpha) \tilde{R}_{A_2}) = \min_{\alpha \in [0,1]} \alpha^2 \sigma_1^2 + (1-\alpha)\sigma_2^2$$

$$= \min_{\alpha \in [0,1]} \underbrace{\alpha^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2\alpha\sigma_2^2 + \sigma_2^2}_{f(\alpha)}$$

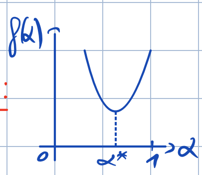
$f : x \mapsto \underset{>0}{a} x^2 + bx + c \Rightarrow$ le min sur $\mathbb{R}$

$x^* = \frac{-b}{2a}$

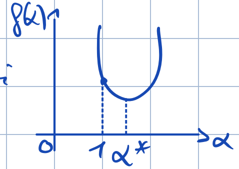
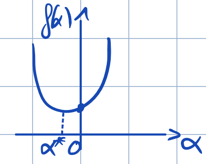


$$\alpha^* = \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \in [0,1] \quad \text{et} \quad 1 - \alpha^* = \frac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

Remarque :



dans notre cas

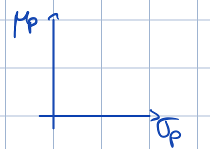
Or si  $\alpha_{VM}=1$ $(1\ 0)'$ ou  $\alpha_{VM}=0$ $(0\ 1)'$

$$\mu^* = \alpha^* \mu_1 + (1-\alpha^*)\mu_2 = \frac{\mu_1 \sigma_2^2 + \mu_2 \sigma_1^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$$

$$\sigma^{2*} = \alpha^{*2}\sigma_1^2 + (1-\alpha^*)\sigma_2^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} \Rightarrow \sigma^* = \frac{\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}}$$

ii) 1ère méthode avec les formules ...

2ème méthode :



$P = (\beta\ \ 1-\beta)'$
$\beta \in [0,1]$

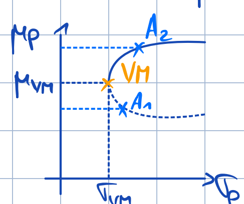
Relation entre μ_p et σ_p ?

$$\mu_p = \beta\mu_1 + (1-\beta)\mu_2 \Rightarrow \beta = \frac{\mu_p - \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}$$

$$\sigma_p^2 = \beta^2\sigma_1^2 + (1-\beta)^2\sigma_2^2 \Rightarrow \sigma_p^2 = \Big(\underbrace{\frac{\mu_p-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}}_{\beta}\Big)^2\sigma_1^2 + \Big(\underbrace{\frac{\mu_1-\mu_p}{\mu_1-\mu_2}}_{1-\beta}\Big)^2\sigma_2^2$$

Remarque :

On a $\mu_p = \beta\mu_1 + (1-\beta)\mu_2$ avec $\beta \in [0,1]$
$\Rightarrow$ μ_p est une combinaison convexe de μ_1 et μ_2
$\Rightarrow$ $\mu_1 \leq \mu_p \leq \mu_2$



D'après la remarque, $\mu_1 \leq \mu_{VM} \leq \mu_2$
or si $\alpha^* \in]0,1[\Rightarrow \mu_1 < \mu_{VM} < \mu_2$

b) On suppose $\rho = -1$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\sigma_1\sigma_2 \\ -\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \qquad Cov = \rho\sigma_1\sigma_2 \qquad \det\Sigma = 0$$

$\Rightarrow$ Σ non inversible
$\Rightarrow$ on ne peut pas appliquer les formules.

i) $$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & -\sigma_1\sigma_2 \\ -\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \quad \min_{\alpha\in[0,1]} \underbrace{\alpha^2\sigma_1^2 + (1-\alpha)^2\sigma_2^2 - 2\alpha(1-\alpha)\sigma_1\sigma_2}_{Var(\alpha R_1 + (1-\alpha)R_2)} = \min_{\alpha\in[0,1]} (\alpha\sigma_1 - (1-\alpha)\sigma_2)^2 = 0$$

pour $\alpha\sigma_1 = (1-\alpha)\sigma_2$ et $\alpha = \frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}$ $\quad 1-\alpha = \frac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}$

$\implies$ Portefeuille sans risque.

iii) $P = (\beta \quad 1-\beta)'$ $\quad \beta \in [0,1]$

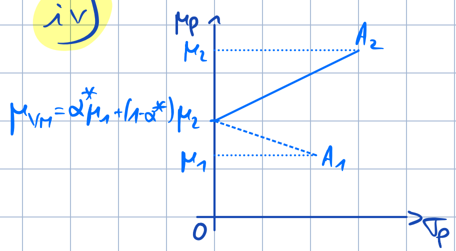
Relation entre μ_p et σ_p ?

$$\mu_p = \beta\mu_1 + (1-\beta)\mu_2 \implies \beta = \frac{\mu_p-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}$$

$$\sigma_p^2 = (\beta\sigma_1 - (1-\beta)\sigma_2)^2 \implies \sigma_p = |\beta\sigma_1 - (1-\beta)\sigma_2|$$

$$\implies \sigma_p = \left|\frac{\mu_p-\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\sigma_1 - \frac{\mu_1-\mu_p}{\mu_1-\mu_2}\sigma_2\right|$$

iv)



En particulier $\mu_1 < \mu_{VM} < \mu_2$

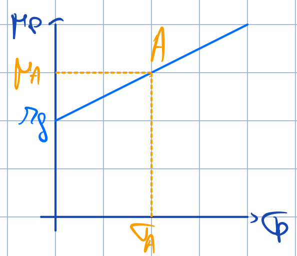
2) a) $\Pi = \mu_A - r_f$

que pour les actifs risqués

On a $\Sigma = \sigma_A^2$, $\Sigma^{-1} = 1/\sigma_A^2$

Donc $\mu_p = \sqrt{\Pi'\Sigma^{-1}\Pi}\,\sigma_p + r_f$

$$\mu_p = \sqrt{(\mu_A - r_f)^2\frac{1}{\sigma_A^2}}\,\sigma_p + r_f = \frac{\mu_A - r_f}{\sigma_A}\sigma_p + r_f$$



b) i) $P = (1-\omega \quad \omega)'$

poids investi dans l'actif sans-risque.

poids investi dans l'actif risqué

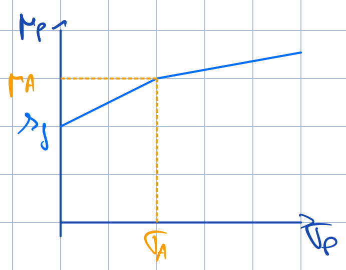
$$\mu_p = \omega\mu_A + (1-\omega)r_f\,\mathbb{1}_{1-\omega\geq 0} + (1-\omega)R_f\,\mathbb{1}_{1-\omega\leq 0} = \begin{cases} \omega\mu_A + (1-\omega)r_f & \text{si } \omega \leq 1 \\ \omega\mu_A + (1-\omega)R_f & \text{si } \omega > 1 \end{cases}$$

ii) $R_g > r_g$

$$\sigma_P^2 = \omega^2 \sigma_A^2 \Rightarrow \omega^2 = \frac{\sigma_P^2}{\sigma_A^2}$$

$\omega = \frac{\sigma_P}{\sigma_A}$ et on remplace dans i.

$$\mu_P = \begin{cases} \frac{\sigma_P}{\sigma_A}\mu_A + \left(1 - \frac{\sigma_P}{\sigma_A}\right) r_g = \frac{\mu_A - r_g}{\sigma_A}\sigma_P + r_g & \text{si } \frac{\sigma_P}{\sigma_A} \leq 1 \\ \frac{\mu_A - R_g}{\sigma_A}\sigma_P + R_g & \text{si } \frac{\sigma_P}{\sigma_A} > 1 \end{cases}$$



iii) La situat° ne change pas pour les investisseurs qui ne font pas d'emprunt ($\sigma_P \leq \sigma_A$)