TD3

Exercice 1

cf. cours

Exercice 2

Objectif : $C(0,t) = \mathbb{E}_Q\left(\delta(t)\left(P(t,T)-k\right)^+\right)$

calculer explicitement $C(0,t)$ avec $\delta(t) = e^{-\int_0^t r_s\,ds}$

(4) $\dfrac{dP(t,T)}{P(t,T)} = r_t\,dt - \sigma(t,T)\,dW_t$

sous la mesure de risque Q associé à l'actif sans risque. $B_t = \dfrac{1}{\delta(t)}$

1) Pour intégrer (4), on considère le changement de variable $Y_t = \log P(t,T) = \log X_t$

$g(x) = \log(x) \qquad g'(x) = \dfrac{1}{x}$

$$dY_t = \frac{\partial g}{\partial t}(X_t)dt + \frac{\partial g}{\partial x}(X_t).dX_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(X_t)\,d\langle X\rangle_t$$

$$= \frac{1}{X_t}dX_t - \frac{1}{2}\frac{1}{X_t^2}X_t^2\sigma_t^2\,dt$$

Or $dX_t = r_t X_t \, dt - \sigma_t X_t \, dW_t$

Donc $dY_t = \frac{1}{\cancel{X_t}} r_t X_t \, dt - \frac{1}{X_t} \sigma_t X_t \, dW_t - \frac{1}{2} \frac{1}{\cancel{X_t^2}} \cancel{X_t^2} \sigma_t^2 \, dt$

$$= \left(r_t - \frac{\sigma_t^2}{2} \right) dt - \sigma_t \, dW_t$$

Donc $Y_t - Y_0 = \int_0^t \left(r_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds - \int_0^t \sigma_s \, dW_s$ (ici $\sigma_s = \sigma(s,T)$)

ie $P(t,T) = P(0,T) \exp\left(\int_0^t \left(r_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) ds - \int_0^t \sigma_s \, dW_s \right)$ (1)

Or $P(t,t) = 1 = P(0,t) \exp \int_0^t \left(r_s - \frac{\sigma^2(s,t)}{2} \right) ds - \int_0^t \sigma(s,t) \, dW_s$ (2)

En réalisant (1)/(2) on a

$$P(t,T) = \frac{P(t,T)}{P(t,t)} = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left(\int_0^t \frac{\sigma^2(s,t) - \sigma^2(s,T)}{2} \, dt + \int_0^t \left(\sigma(s,t) - \sigma(s,T) \right) dW_s \right)$$

2) On considère une mesure de probabilité associé au numéraire 2.c de maturité s qu'on note Q_s

Cette probabilité est appelé la mesure s-forward neutre défini à partir de la mesure risque neutre via sa densité de Radon-Nikodym

$$\left.\frac{dQ_s}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_t} = \ell_t = \frac{\Pi_t}{N_t}\frac{N_0}{\Pi_0} \quad \text{où} \quad \begin{cases} N_t = \dfrac{1}{S(t)} \\ \Pi_t = P(t,s) \end{cases}$$

$$= S(t)\,\frac{P(t,s)}{P(0,s)}$$

① Le processus ℓ_t est une martingale.

② Les prix "X_t" actualisé en numéraire $P(t,s)$ sont des martingales i.e $\dfrac{X_t}{P(t,s)}$ sous Q_s

L'objectif est de déterminer un nouveau MB sous la probabilité Q_s

Rappel : (Girsanov)

$$\eta_t = \frac{dQ_s}{dQ}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\left\{ \int_0^t \lambda_s \, dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \lambda_s^2 \, ds \right\}$$

avec (λ_s) est $\mathbb{F}$-adapté

Alors $dW_t^S = dW_t - \lambda_t \, dt$ est un MB sous la mesure Q_S

$$\frac{dQ_s}{dQ}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \delta(t) \boxed{\frac{P(t,s)}{P(0,s)}}$$

$$= \delta(t) \exp\left\{ \int_0^t r_u - \frac{\sigma^2(u,s)}{2} \, du - \int_0^t \sigma(u,s) \, dW_u \right\}$$

$$= \delta(t) \exp\left\{ \int_0^t -\sigma(u,s) dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t \sigma^2(u,s) du \right\}$$

D'où par Girsanov : $\lambda_u = -\sigma(u,s)$

$$W_t^{Q_s} = W_t + \int_0^t \sigma(u,s) du \quad / \quad dW_t^{Q} = dW_t + \sigma(t,s) dt$$

3) Dans l'univers t-forward neutre

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left\{ \int_0^t \left[\frac{\sigma^2(u,t) - \sigma^2(u,t)}{2} - (\sigma(u,t) - \sigma(u,T))\sigma(u,t) \right] du + \int_0^t \sigma(u,t) - \sigma(u,T) \, dW_u^{Q_s} \right\}$$

Sous la mesure Q_t

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left\{ \int_0^t -\frac{1}{2}(\sigma(u,t)-\sigma(u,T))^2 du + \int_0^t (\sigma(u,t)-\sigma u(T)) dW_u^{Q_t} \right.$$

Sous Q_T (T-forward neutre)

$$P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)} \times \exp\left\{ \frac{1}{2} \int_0^t (\sigma(u,t)-\sigma(u,T))^2 du + \int_0^t (\sigma(u,t)-\sigma(u,T)) dW_u^{Q_T} \right.$$

4) $C(0,t) = \mathbb{E}_Q\left[\delta(t)(P(t,T)-k)^+ \right]$

- Si $\delta(t) = e^{-rt}$ ← Pb $\delta(t)$ pas constant

Alors on peut écrire $C(0,t) = \delta(t)\, \mathbb{E}_Q\left[(P(t,T)-k)^+ \right]$

et $P(t,T) = \dfrac{P(0,T)}{P(0,t)} \exp\left\{ a(t) + \int b(u) dW_u \right.$

donc on connait la loi $P(t,T)$ sous la mesure Q

- Si $\delta(t)$ est stochastique pour calculer $C(0,t)$

on a besoin de la loi de $\delta(t)$, $P(t,T)$ et la dépendance entre les deux.

a. On remarque que

$$c(0,t) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\delta(t)\left(P(t,T)-k\right).\mathbb{1}_{[P(t,T)>k]}\right]$$

$$= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\delta(t)P(t,T)\mathbb{1}_{\{P(t,T)>k\}}\right] - k\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\delta(t)\mathbb{1}_{[P(t,T)>k]}\right]$$

$$= P(0,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{\delta(t)P(t,T)}{P(0,T)}\mathbb{1}_{[P(t,T)>k]}\right] - k\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\delta(t)\mathbb{1}_{\{P(t,T)>k\}}\right]$$

$$= P(0,T)\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_T}\left[\mathbb{1}_{[P(t,T)>k]}\right] - P(0,t)k\mathbb{E}_{\mathbb{Q}_t}\left(\mathbb{1}_{[P(t,T)>k]}\right)$$

$$= P(0,T)\mathbb{Q}_T\left(P(t,T)>k\right) - P(0,t)k\mathbb{Q}_t\left(P(t,T)>k\right)$$

b. $\mathbb{Q}_1(P(t,T)>k) = p_1$ avec $P(t,T) = \frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^t a_s\,ds + \int_0^t b_s\,dW_s^{\mathbb{Q}_t}\right)$

$$p_1 = \mathbb{Q}_1\left(-\frac{1}{2}\int_0^t r_s\,ds + \int b_s\,dW_s^{a} > \log\frac{k - P(0,t)}{P(0,T)}\right)$$

⋮

$p_1 = 1 - \Phi(u)$ avec Φ la fonction de répartition de Y