

Modèles de durée / Examen / Janvier 2017

Durée 2h – aucun document n'est autorisé

Intervalles de confiances pour l'estimation d'une probabilité conditionnelle de sortie

La qualité de la rédaction, des justifications apportées et de la présentation de la copie seront prises en compte dans la notation.

On considère une variable de durée X dont la fonction de hasard sous-jacente est notée h et la fonction de survie S_x .

Question n°1 (2 points) : Rappelez les définitions de la fonction de survie conditionnelle S_x et de la probabilité conditionnelle de sortie q_x ? Quel est le lien entre S_x et q_x ?

Question n°2 (2 points) : Rappelez comment passer de la notion de probabilité conditionnelle de sortie, q_x , à la fonction de hasard et démontrez la relation entre la fonction de survie et la fonction de hasard.

On se restreint à un intervalle $[x, x+1[$. On suppose que l'observation débute à l'instant $e \in [x, x+1[$.

Question n°3 (2 points) : Comment s'appelle l'instant e ? Quelle est la loi de durée effectivement observée? Quelle est sa fonction de survie en fonction de celle de X ?

On suppose de plus la variable X censurée à droite par une variable aléatoire C .

Question n°4 (3 points) : Que signifie la phrase ci-dessus? Quelles hypothèses fait-on sur la variable C dans le contexte de la construction d'une table de mortalité d'expérience? Par quoi sont-elles justifiées? Quelle(s) variable(s) observe-t-on à la place de X ?

Question n°5 (3 points) : calculez la probabilité qu'une observation ne soit pas censurée sur $[x, x+1[$ en fonction de x , e et des fonctions de survie de X et C . Comment se simplifie l'expression si la fonction de hasard est supposée constante et « petite » sur $[x, x+1[$?

Question n°6 (3 points) : Comment s'interprète l'expression simplifiée obtenue ci-dessus?

Déduisez-en un estimateur du nombre de décès observés sur $[x, x+1[$, $D = \sum_{i=1}^n D_i$, pour un ensemble d'individus $1 \leq i \leq n$ indépendants les uns des autres.

Question n°7 (2 points) : Quelle est la variance de D ? Comment l'estimer à partir des résultats précédents?

Question n°8 (3 points) : à partir des résultats des questions 6 et 7, proposez un intervalle de confiance pour l'estimateur de Hoem $\hat{q}_x^H = \frac{D_x}{E_x}$; en exploitant la question n°1, proposez un intervalle de confiance pour l'estimateur de la probabilité conditionnelle de sortie construit à partir de l'estimateur de Kaplan-Meier de la fonction de survie $\hat{S}_{KM}(t) = \prod_{T_i \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{r_i}\right)$.