M1 Actuariat, économétrie et statistiques, année 2019–2020.

Statistique Inférentielle
Contrôle continu

Mercredi 7 Novembre

Durée 2h, documents, téléphone, calculatrice interdits

Le barême (indicatif) prévu est le suivant : 7-7-7 (on tiendra compte (grave) de la présentation et de la clareté des explications):

On rappelle que la densité d'une loi $\Gamma(\alpha, \beta)$ vaut :

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x} \mathbb{I}_{\mathbb{R}^+}(x).$$

Exercice 1

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon de variables aléatoires de même loi que X, où X admet pour densité de probabilité :

$$f_\theta(x) = kx^{-(p+1)} \exp\left(-\frac{\theta}{x}\right) \mathbb{I}_{x>0}$$

avec $\theta \in]0, \infty[$ un paramètre réel inconnu et $p > 0$ un nombre connu.

On pose $U = \frac{1}{X}$.

1. Montrer que U suit une loi Gamma dont on précisera les paramètres et en déduire la constante k.

2. On pose
$$T_1 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}$$
Montrer que T_1 est une statistique exhaustive pour θ.

3. Déterminer $\hat{\theta}$ l'estimateur du maximum de vraisemblance de θ.

4. Déterminer la loi de $Z = \sum \frac{1}{X_i}$.

5. En déduire l'espérance et la variance de $\hat{\theta}$.

6. Calculer l'information de Fisher du modèle.

7. L'estimateur est-il convergent? Efficace?

<u>Exercice 2</u>

Soit $X_1, X_2, ..., X_n$ un échantillon de variables aléatoires de même loi X, où X suit une loi de Pareto de paramètre $\alpha > 1$ et $\beta > 0$, de densité

$$f(x, \alpha, \beta) = \frac{\alpha - 1}{\beta} \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha} \mathbf{1}_{x \geq \beta}$$

1. On suppose que β est fixé et connu. Calculer l'estimateur $\widehat{\alpha}$ du maximum de vraisemblance de α.
2. Calculer la loi de $\ln X$
3. Calculer le biais de $\widehat{\alpha}$ pour α.
4. L'estimateur est-il efficace?
5. On suppose maintenant que β est le paramètre inconnu et que α est fixé et connu. Calculer l'estimateur $\widehat{\beta}$ du maximum de vraisemblance de β.
6. Calculer le biais de $\widehat{\beta}$ pour β.
7. On suppose maintenant que α et β sont inconnus. Montrer que l'estimateur $(\widehat{\alpha}, \widehat{\beta})$ du maximum de vraisemblance de (α, β) existe.

Exercice 3 :

Soit $X_1, ..., X_n$ un échantillon de variables aléaoires indṕendantes et identiquement distribuées de densité

$$f(x) = \frac{(\alpha - 1)\lambda^{\alpha - 1}}{x^{\alpha}} \mathbb{1}_{\{x \geq \lambda\}}$$

avec $\alpha > 1$ <u>connu</u> et $\lambda > 0$

1. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\lambda}$.
2. Cet estimateur est-il sans biais?
3. Calculer l'estimateur $\hat{\lambda}_{MM}$ de λ par la méthode des moments.
4. Cet estimateur est-il sans biais ?
5. Cet estimateur est-il convergent ?
6. Donner la normalité asymptotique de λ_{MM} ?
7. Donner un Intervalle de confiance asymptotique de niveau $1 - \alpha$ pour λ.

Exercice 1 : $f_\theta(x) = k\, x^{-(p+1)} \exp\left(-\frac{\theta}{x}\right) 1_{x>0}$

$U = \frac{1}{X}$

1) $\mathbb{E}[\varphi(U)] = \int \frac{1}{x}\, k\, x^{-(p+1)} \exp\left(-\frac{\theta}{x}\right) 1_{x>0}\, dx$ $\quad \varphi$ mes positif.

$$= \int_0^\infty k\, \frac{1}{x^{p+2}} \exp\left(-\frac{\theta}{x}\right) dx$$

Posons $v = \frac{1}{x}$ changement de var C^1 bij sur $\mathbb{R}_+^*$ $\Rightarrow$ OK

$dv = -\frac{1}{x^2}\, dx$

$-\frac{1}{v^2}\, dv = dx$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\varphi(U)] = \int_0^\infty k\, v^{p+2} \exp(-\theta v) \frac{1}{v^2}\, dv$$

$$= k \int_0^\infty v\, v^{p-1} e^{-\theta v}\, dv$$

On choisit k tq $k = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)}$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\varphi(U)] = \int_0^\infty v \cdot \underbrace{\frac{\theta^p}{\Gamma(p)} v^{p-1} e^{-\theta v}}_{\text{fonct° de densité de } U \text{ = fonct° de densité de } \Gamma(p,\theta)}\, dv$$

D'où $\boxed{U \sim \Gamma(p,\theta) \text{ et } k = \frac{\theta^p}{\Gamma(p)}}$

2) $T_1 = -\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{X_i}$

$$L(X_1, \ldots, X_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\theta^p}{\Gamma(p)} x_i^{-(p+1)} e^{-\frac{\theta}{x_i}} \prod_{i=1}^{n} 1_{x_i>0}$$

$$= \frac{\theta^{mp}}{m\Gamma(p)} \left(\prod_{i=1}^{m} x_i^{-(p+1)} \right) \underbrace{\exp\left(-\theta \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{x_i}\right)}_{\exp(m\theta T_1)} \prod_{i=1}^{m} 1_{x_i > 0}$$

$$= \underbrace{\frac{\theta^{mp}}{m\Gamma(p)} \exp(m\theta T_1)}_{\varphi(T_1, \theta)} \underbrace{\prod_{i=1}^{m} x_i^{-(p+1)} 1_{x_i>0}}_{\psi(x_1, -, x_n)}$$

$\Rightarrow$ T_1 stat exhaustive.

3) (H1) à (H4) OK

$$L = \frac{\theta^{mp}}{\Gamma(p)} \exp\left(-\theta \sum \frac{1}{x_i}\right) \prod_{i=1}^{m} x_i^{-(p+1)}$$ les $x_i > 0$

$$\ln L = mp \ln \theta - \ln(\Gamma(p)) - \theta \sum \frac{1}{x_i} - (p+1) \sum_{i=1}^{m} \ln(x_i)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \ln L = \frac{mp}{\theta} - \sum \frac{1}{x_i}$$ L'o $\hat{\theta}$ est tq $\frac{mp}{\theta} - \sum \frac{1}{x_i} = 0$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{mp}{\sum \frac{1}{x_i}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \ln L = -\frac{mp}{\theta^2} < 0$$

Donc $\hat{\theta}$ est l'EMV de θ.

4) $Z = \sum \frac{1}{X_i}$

On sait que les $\frac{1}{X_i}$ suivent une loi $\Gamma(p, \theta)$ et sont indep.

$$\Rightarrow Z = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{X_i} \sim \Gamma(mp, \theta)$$

5) $Z = \sum \frac{1}{X_i} \sim \Gamma(mp, \theta)$

$\Rightarrow$ La v.a $\frac{1}{\sum \frac{1}{X_i}}$ a pour fonct° de densité : $f_{\frac{1}{Z}}(x) = \frac{\theta^{mp}}{\Gamma(mp)} x^{-(mp+1)} e^{-\frac{\theta}{x}} 1_{x>0}$

Q1

5) $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \mathbb{E}\left[\frac{mp}{Z}\right] = mp\, \mathbb{E}\left[\frac{1}{Z}\right]$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{Z}\right] = \int_0^{\infty} x \, \frac{\theta^{mp}}{\Gamma(mp)} \, x^{-(mp+1)} \, e^{-\frac{\theta}{x}} \, dx$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\theta^{mp}}{\Gamma(mp)} \, \frac{1}{x^{mp}} \, e^{-\theta/x} \, dx$$

Changem^t de var C^1 bij

$u = \frac{1}{x}$; $-\frac{1}{u^2} du = dx$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\theta^{mp}}{\Gamma(mp)} \, u^{mp} e^{-\theta u} \, \frac{1}{u^2} \, du$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{\theta^{mp}}{\Gamma(mp)} \, u^{mp-2} \, e^{-\theta u} \, du$$

$$mp-1 \quad -1$$

$$= \underbrace{\frac{\theta}{(mp-1)} \int_0^{\infty} \underbrace{\frac{\theta^{mp-1}}{\Gamma(mp-1)} \, u^{mp-2} \, e^{-\theta u}}_{\Gamma(mp-1,\,\theta)} \, du}_{=1}$$

$$= \frac{\theta}{mp-1}$$

D'où $\mathbb{E}[\hat{\theta}] = \mathbb{E}\left[\frac{mp}{Z}\right] = \frac{mp}{mp-1}\theta$

$$\Rightarrow B_{\hat{\theta}}(\theta) = \frac{\theta}{mp-1} \xrightarrow[m \to \infty]{} 0$$

$$V(\hat{\theta}) = V\left(\frac{mp}{Z}\right) = m^2p^2 \, V\left(\frac{1}{Z}\right)$$

$$= m^2p^2 \left(\mathbb{E}\left[\frac{1}{Z^2}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{1}{Z}\right]^2 \right)$$

$$= m^2p^2 \left(\underbrace{\int_0^{\infty} x^2 \frac{\theta^{mp}}{\Gamma(mp)} \, x^{-(mp+1)} \, e^{-\theta/x} \, dx}_{\text{Dem}, \; = \frac{\theta^2}{(mp-1)(mp-2)}} - \frac{\theta^2}{(mp-1)^2} \right)$$

$$= m^2p^2 \left(\frac{\theta^2}{(mp-1)(mp-2)} - \frac{\theta^2}{(mp-1)^2} \right)$$

$$= m^2p^2 \left(\frac{(mp-1)\theta^2 - (mp-2)\theta^2}{(mp-1)^2(mp-2)} \right) = \frac{m^2p^2\theta^2}{(mp-1)^2(mp-2)}$$

6) $I_n(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln L\right] = \frac{np}{\theta^2}$

7) $B_{\hat\theta}(\theta) = \frac{\theta}{np-1} \xrightarrow[\infty]{} 0 \Rightarrow ESB$ (1) et $V(\hat\theta) \underset{\infty}{\sim} \frac{\theta^2}{np} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ (2) (1)+(2) => convergent

Pour l'efficacité, ici $g : \theta \mapsto \frac{np\,\theta}{np-1} \Rightarrow g' : \theta \mapsto \frac{np}{np-1}$

$$V(\hat\theta) = \frac{n^2p^2\theta^2}{(np-1)^2(np-2)}$$

et $$\frac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)} = \frac{\frac{n^2p^2}{(np-1)^2}}{\frac{np}{\theta^2}} = \frac{np\,\theta^2}{(np-1)^2}$$

$$V(\hat\theta) \neq \frac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)} \Rightarrow \text{Non efficace}$$

Exercice 2 :

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{\alpha-1}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha \mathbb{1}_{x\geq\beta}$$

1) β fixé et connu donc (H1) à (H4) vérifiées

$L(X_1, \dots, X_n, \alpha) = \prod_{i=1}^n \frac{\alpha-1}{\beta}\left(\frac{\beta}{x_i}\right)^\alpha$ les x_i sont supposés $\geq \beta$.

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right)^n \beta^{n\alpha} \prod_{i=1}^n x_i^{-\alpha}$$

$$\ln L = n\ln(\alpha-1) - n\ln\beta + n\alpha\ln\beta - \alpha\sum_{i=1}^n \ln x_i$$

$\frac{\partial}{\partial\alpha}\ln L = \frac{n}{\alpha-1} + n\ln\beta - \sum_{i=1}^n \ln x_i$ ↳ $\hat\alpha$ est tq $\frac{n}{\hat\alpha-1} + n\ln\beta - \sum \ln x_i = 0$

$\frac{n}{\sum\ln x_i - n\ln\beta} = \alpha - 1$, $\Rightarrow \hat\alpha = \frac{n}{\sum\ln x_i - n\ln\beta} + 1$

$$= \frac{n}{\sum_{i=1}^n \ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)} + 1$$

$\frac{\partial^2}{\partial\alpha^2}\ln L = -\frac{n}{(\alpha-1)^2} < 0$

$\Rightarrow \hat\alpha$ EMV de α.

2) Loi de $\ln X$

$$\mathbb{E}[\varphi(X)] = \int_\beta^\infty \ln(x)\, \frac{\alpha-1}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha dx$$

$$= \int_{\ln\beta}^\infty u(\alpha-1)\beta^{\alpha-1} e^{-\alpha u} e^u\, du$$

Changem^t de var C^1 bij sur $[\beta, \infty[$, $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ ok

$u = \ln(x)$

$du = \frac{1}{x} dx$

$$= \int_{\ln\beta}^\infty u\,(\alpha-1)\beta^{\alpha-1} e^{-(\alpha-1)u} du \qquad \Rightarrow dx = e^u du$$

Donc $$f_{\ln X}(x) = (\alpha-1)\left(\frac{\beta}{e^x}\right)^{\alpha-1} \mathbb{1}_{[\ln\beta;+\infty[}(x)$$

3) $B_{\hat\alpha}(\alpha) = \mathbb{E}[\hat\alpha] - \alpha$

$$\mathbb{E}[\hat\alpha] = \mathbb{E}\left[\frac{n}{\sum \ln x_i - n\ln\beta} + 1\right] = n\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{\sum \ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)}\right] + 1.$$

$$\mathbb{E}\left[\varphi\left(\frac{X}{\beta}\right)\right] = \int_\beta^\infty \ln\left(\frac{x}{\beta}\right) \frac{\alpha-1}{\beta}\left(\frac{\beta}{x}\right)^\alpha dx$$

$x = e^{\beta u}$

$u = \ln\left(\frac{x}{\beta}\right)$

$$= \int_0^\infty u\, \frac{\alpha-1}{\beta} e^{-\alpha u} \beta e^u\, du \qquad du = \frac{1}{x} dx$$

$$= \int_0^\infty u(\alpha-1) e^{-(\alpha-1)u} du \qquad \Rightarrow \beta e^u du = dx$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{X}{\beta}\right) \sim \mathcal{E}(\alpha-1)$$

$$\Rightarrow \sum \ln\left(\frac{X}{\beta}\right) = \Gamma(n, \alpha-1)$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sum \ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)}\right] = \frac{\alpha-1}{n-1}$$

résultat similaire démontré à la Q4 de l'exo 1

$$\Rightarrow \mathbb{E}[\hat\alpha] = \frac{n}{n-1}(\alpha-1) + 1 = \frac{n\alpha}{n-1} - \frac{1}{n-1}$$

$$\Rightarrow B_{\hat\alpha}(\alpha) = \frac{n\alpha}{n-1} - \alpha - \frac{1}{n-1} = \frac{\alpha}{n-1} - \frac{1}{n-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ asympt SB

4) Efficace si $V(\hat{\alpha}) = \dfrac{(g'(\alpha))^2}{I_n(\alpha)}$

$$V(\hat{\alpha}) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{n}{\sum \ln\left(\frac{x_i}{\beta}\right)} + 1\right)^2\right] - \mathbb{E}\left[\frac{n}{\sum \ln \frac{x_i}{\beta}} + 1\right]^2$$

$$= \mathbb{E}\left[\frac{n^2}{\Sigma^2} + \frac{2n}{\Sigma} + 1\right] - \left(\frac{n\alpha - 1}{n-1}\right)^2$$

$$= n^2\, \mathbb{E}\left[\frac{1}{\left(\sum \ln \frac{x_i}{\beta}\right)^2}\right] + 2n\, \mathbb{E}\left[\frac{1}{\Sigma}\right] + 1 - \left(\frac{n\alpha-1}{n-1}\right)^2$$

$$\mathbb{E}\left[\frac{1}{\left(\sum \ln \frac{x_i}{\beta}\right)^2}\right] = \int_0^\infty x^2 \, \frac{(\alpha-1)^n}{\Gamma(n)} \, x^{-(n+1)} e^{-\frac{(\alpha-1)}{x}} \, dx$$

Exo 1 pour densité

$$= \frac{(\alpha-1)^2}{(n-1)(n-2)}$$

Résultat Exo 1

$$\Rightarrow V(\hat{\alpha}) = n^2 \frac{(\alpha-1)^2}{(n-1)(n-2)} + 2n \frac{\alpha-1}{n-1} + 1 - \left(\frac{n\alpha-1}{n-1}\right)^2$$

$$= \frac{n^2\alpha^2 - 2n^2\alpha + n^2}{n^3 - 4n^2 + 5n - 2}$$

$$\mathbb{E}[\hat{\alpha}] = \frac{n\alpha}{n-1} - \frac{1}{n-1} \quad \Rightarrow g : x \mapsto \frac{nx-1}{n-1} \Rightarrow g' : x \mapsto \frac{n}{n-1}$$

$$I_n(\alpha) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} \ln L\right] = \frac{n}{(\alpha-1)^2}$$

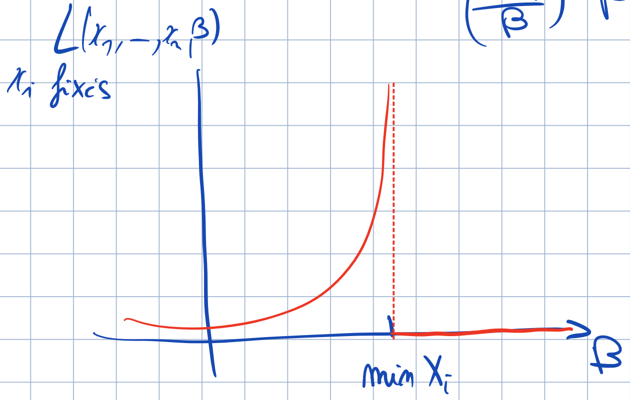
$$\frac{(g'(\alpha))^2}{I_n(\alpha)} = \frac{n^2}{(n-1)^2} \times \frac{(\alpha-1)^2}{n} = \frac{n(\alpha-1)^2}{(n-1)^2}$$

$$V(\hat{\alpha}) \neq \frac{(g'(\alpha))^2}{I_n(\alpha)} \Rightarrow \text{Non efficace.}$$

5) $\mathcal{L}(X_1, \dots, X_n, \beta) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\alpha-1}{\beta} \left(\frac{\beta}{x_i}\right)^{\alpha} \mathbb{1}_{x_i \geq \beta}$ $\qquad \alpha$ fixé

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right)^n \beta^{n\alpha} \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} \prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{\beta \leq x_i}$$

$$= \left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right)^n \beta^{n\alpha} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha}\right) \mathbb{1}_{\beta \leq \min_{i \in [\![1,n]\!]} X_i}$$



$\mathcal{L}$ est maximisé lorsque $\hat{\beta} = \min_{i \in [\![1,n]\!]} X_i$

6) $B_{\hat{\beta}}(\beta) = \mathbb{E}[\hat{\beta}] - \beta$

$$= \mathbb{E}[\min_{i \in [\![1,n]\!]} X_i] - \beta$$

$$\mathbb{P}(\min X_i \leq x) = 1 - \mathbb{P}(\min X_i \geq x)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X_1 \geq x)^n$$

$$= 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x))^n$$

$$= 1 - \left(1 - \int_{\beta}^{x} \frac{\alpha-1}{\beta} \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\alpha} dt \right)^n$$

$$= 1 - \Big(1 - \frac{\alpha-1}{\beta} \beta^{\alpha} \underbrace{\int_{\beta}^{x} x^{-\alpha} dx}_{\left[\frac{1}{1-\alpha} t^{-\alpha+1}\right]_{\beta}^{x} = \frac{-1}{\alpha-1} x^{-(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha-1} \beta^{-(\alpha-1)}} \Big)^n$$

$$= 1 - \left(1 - \beta^{\alpha-1}\left(-x^{-(\alpha-1)} + \beta^{-(\alpha-1)}\right)\right)^n$$

$$= 1 - \left(1 + \left(\frac{\beta}{x}\right)^{\alpha-1} - 1\right)^n$$

$$= 1 - \left(\frac{\beta}{x}\right)^{n(\alpha-1)} \qquad - \beta^{n(\alpha-1)} \cdot -\frac{1}{x^2} n(\alpha-1) \left(\frac{1}{x}\right)^{n(\alpha-1)-1}$$

$$\Rightarrow f_{\min X_i}(x) = n(\alpha-1) \beta^{n(\alpha-1)} x^{-n(\alpha-1)-1}$$

$$\mathbb{E}[\min X_i] = \int_\beta^\infty x \; n(\alpha-1)\beta^{n(\alpha-1)} \; x^{-n(\alpha-1)-1} \, dx$$

$$= \int_\beta^\infty n(\alpha-1)\beta^{n(\alpha-1)} \; x^{-n(\alpha-1)} \, dx$$

$$= n(\alpha-1)\beta^{n(\alpha-1)} \left[\frac{1}{-n(\alpha-1)+1} x^{-n(\alpha-1)+1} \right]_\beta^\infty$$

$$= n(\alpha-1)\beta^{n(\alpha-1)} \left(- \frac{1}{-n(\alpha-1)+1} \beta^{-n(\alpha-1)+1} \right)$$

$$= + \frac{n(\alpha-1)}{n(\alpha-1)-1} \beta$$

$$\Rightarrow B_{\tilde\beta}(\beta) = \frac{n(\alpha-1)}{n(\alpha-1)-1}\beta - \beta = \frac{\beta}{n(\alpha-1)-1} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \text{asympt SB}$$

7) α, β inconnus.

$$L = \left(\frac{\alpha-1}{\beta}\right)^n \beta^{n\alpha} \left(\prod_{i=1}^n x_i^{-\alpha}\right) \mathbb{1}_{\min X_i \geq \beta}$$

α n'influe pas sur la croissance de L à x_i fixés.

$\Rightarrow$ On obtient l'EMV $\hat\beta$ du couple $(\hat\alpha, \hat\beta)$ en maximisant L

$$\Rightarrow \hat\beta = \min X_i$$

Maintenant on considère que $\hat\beta$ est fixé donc plus vraiment un paramètre et on maximise L pour trouver $\hat\alpha$

$$\Rightarrow \hat\alpha = \frac{n}{\sum \ln x_i - n\ln\beta} + 1$$

$\Rightarrow$ OK

Exercice 3 :

$$f(x) = \frac{(\alpha-1)\lambda^{\alpha-1}}{x^\alpha} \mathbb{1}_{\{x \geq \lambda\}}$$

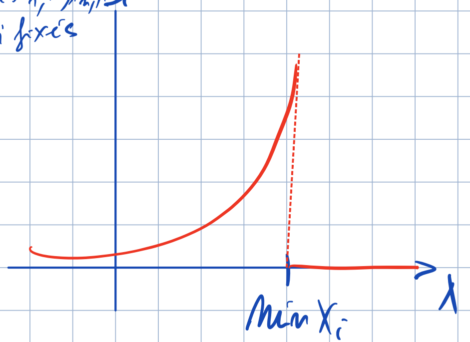
$\lambda \leq x_i$

1) Non indep du Support.

$$\mathcal{L} = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = (\alpha-1)^n \lambda^{n(\alpha-1)} \prod_{i=1}^{n} x_i^{-\alpha} \underbrace{\prod_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{x_i \geq \lambda}}_{\mathbb{1}_{\min_{i\in[1,n]} X_i \geq \lambda}}$$

$\mathcal{L}(x_1,\dots,x_n)|_\lambda$

x_i fixés



$\Rightarrow \mathcal{L}$ est maximisé lorsque $\hat{\lambda} = \min_{i\in[1,n]} X_i$

2) $\mathbb{E}[\hat{\lambda}] = \mathbb{E}[\min_{i\in[1,n]} X_i]$

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\min X_i \leq x) &= 1 - \mathbb{P}(\min X_i > x) \\
&\overset{\text{indep}}{=} 1 - \mathbb{P}(X_1 > x)^n \\
&= 1 - (1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x))^n \\
&= 1 - \left(1 - \int_\lambda^x (\alpha-1)\lambda^{\alpha-1} t^{-\alpha}\, dt\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - (\alpha-1)\lambda^{\alpha-1}\left[\frac{-1}{\alpha-1} t^{-(\alpha-1)}\right]_\lambda^x\right)^n \\
&= 1 - \left(1 - (\alpha-1)\lambda^{\alpha-1}\left(-\frac{1}{\alpha-1} x^{-(\alpha-1)} + \frac{1}{\alpha-1}\lambda^{-(\alpha-1)}\right)\right)^n \\
&= 1 - \left(1 + \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{\alpha-1} - 1\right)^n \\
&= 1 - \left(\frac{\lambda}{x}\right)^{n(\alpha-1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow f_{\min X_i}(x) &= -\lambda^{n(\alpha-1)} (-n(\alpha-1)) x^{-n(\alpha-1)-1} \\
&= n(\alpha-1)\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{n(\alpha-1)} \frac{1}{x}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{E}[\min X_i] &= \int_\lambda^\infty n(\alpha-1)\left(\frac{\lambda}{x}\right)^{n(\alpha-1)} dx \\
&= n(\alpha-1)\lambda^{n(\alpha-1)}\left[\frac{-1}{n(\alpha-1)-1} x^{-n(\alpha-1)+1}\right]_\lambda^\infty
\end{aligned}$$

$$= n(\alpha-1)\,\lambda^{n(\alpha-1)}\,\frac{1}{n(\alpha-1)-1}\,\lambda^{-n(\alpha-1)+1}$$

$$= \frac{n(\alpha-1)}{n(\alpha-1)-1}\,\lambda$$

$$\Rightarrow B_{\hat{\lambda}}(\lambda) = \frac{\lambda}{n(\alpha-1)-1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \qquad \text{asympt SB.}$$

3) Dimens° 1 $\Rightarrow$ 1 moment

$$M_1(\lambda) = \mathbb{E}[X] \qquad m_1 = \overline{X}_n$$

$$\mathbb{E}[X] = \int_\lambda^\infty x\,(\alpha-1)\,\lambda^{\alpha-1}\,x^{-\alpha}\,dx$$

$$= \int_\lambda^\infty (\alpha-1)\,\lambda^{\alpha-1}\,x^{1-\alpha}\,dx$$

$$= (\alpha-1)\,\lambda^{\alpha-1}\left[\frac{1}{2-\alpha}\,x^{2-\alpha}\right]_\lambda^\infty \qquad \text{On considère } \alpha>2$$

$$= (\alpha-1)\,\lambda^{\alpha-1}\,\frac{1}{\alpha-2}\,\lambda^{-(\alpha-2)}$$

$$= \frac{\alpha-1}{\alpha-2}\,\lambda$$

$\Rightarrow$ Méthode des moments $\quad \dfrac{\alpha-1}{\alpha-2}\,\hat{\lambda}^{MM} = \overline{X}_n$

$$\Rightarrow \hat{\lambda}^{MM} = \frac{\alpha-2}{\alpha-1}\,\overline{X}_n$$

4) $$\mathbb{E}[\hat{\lambda}^{MM}] = \frac{\alpha-2}{\alpha-1}\,\mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum X_i\right] = \frac{\alpha-2}{\alpha-1}\,\mathbb{E}[X_i] = \lambda$$

$\Rightarrow \hat{\lambda}^{MM}$ sans biais.

5) $$V(\hat{\lambda}^{MM}) = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)^2 \frac{1}{n^2}\sum V(X_i)$$

$$= \left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)^2 \frac{1}{n} V(X_1)$$

$$V(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_\lambda^\infty x^2 (\alpha-1) \lambda^{\alpha-1} x^{-\alpha} \, dx$$

$$= \int_\lambda^\infty (\alpha-1)\lambda^{\alpha-1} x^{2-\alpha} \, dx$$

$$= (\alpha-1) \lambda^{\alpha-1} \left[\frac{1}{3-\alpha} x^{3-\alpha}\right]_\lambda^\infty$$

On considère $\alpha > 3$
Sinon diverge

$$= (\alpha-1)\lambda^{\alpha-1} \frac{1}{\alpha-3} \lambda^{-(\alpha-3)}$$

$$= \frac{\alpha-1}{\alpha-3} \lambda^2$$

$$\Rightarrow V(X) = \frac{\alpha-1}{\alpha-3} \lambda^2 - \left(\frac{\alpha-1}{\alpha-2}\right)^2 \lambda^2$$

$(\alpha-3)$ $\alpha^2 - 2\alpha + 1$

$$= \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)^2 \lambda^2 - (\alpha-1)^2 (\alpha-3) \lambda^2}{(\alpha-2)^2 (\alpha-3)}$$

$$= \frac{(\cancel{\alpha^3} - 2\alpha^2 + 3\alpha + 2)\lambda^2 - (\cancel{\alpha^3} - 5\alpha^2 + 7\alpha - 3)\lambda^2}{(\alpha-2)^2(\alpha-3)}$$

$$= \frac{(3\alpha^2 - 4\alpha + 5)\lambda^2}{(\alpha-2)^2(\alpha-3)}$$

$$\Rightarrow V(\hat{\lambda}^{MM}) = \left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)^2 \frac{1}{n} \times \frac{(3\alpha^2 - 4\alpha + 5)\lambda^2}{(\alpha-2)^2(\alpha-3)}$$

$$= \frac{1}{n} \frac{(3\alpha^2 - 4\alpha + 5)}{(\alpha-1)^2(\alpha-3)} \lambda^2 \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

$\Rightarrow$ Convergent.

6) On applique le TCL à $X_1, \dots, X_n$

$$\sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{\alpha-1}{\alpha-2}\lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{(3\alpha^2-4\alpha+5)\lambda^2}{(\alpha-2)^2(\alpha-3)}\right)$$

On applique la méthode Delta avec $g : x \mapsto \frac{\alpha-2}{\alpha-1} x$ car $\hat{\lambda}^{MM} = \frac{\alpha-2}{\alpha-1}\overline{X}_n$

$$\sqrt{n}\left(\hat{\lambda}^{MM} - \lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \underline{\sigma^2(\lambda)(g'(\lambda))^2}\right)$$

$$\left(\frac{\alpha-2}{\alpha-1}\right)^2$$

$$= \frac{(3\alpha^2-4\alpha+5)\lambda^2}{\cancel{(\alpha-2)^2}(\alpha-3)} \times \frac{\cancel{(\alpha-2)^2}}{(\alpha-1)^2}$$

$$= \frac{(3\alpha^2-4\alpha+5)\lambda^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-3)}$$

Donc $\sqrt{n}\left(\hat{\lambda}^{MM} - \lambda\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{(3\alpha^2-4\alpha+5)}{(\alpha-1)^2(\alpha-3)}\lambda^2\right)$