ERM
M2A, Année 2022 – 2023

TD1 : MESURES DE RISQUE

Exercice 1 Considérons X et Y définis par :

$$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 1/3 \qquad \mathbb{P}(X=0, Y=3) = 1/3 \qquad \mathbb{P}(X=6, Y=6) = 1/3$$

Calculer $Es_{1/2}(X)$ et $Es_{1/2}(Y)$. En déduire que la mesure d'Escher n'est pas cohérente.

Exercice 2 Soient X et Y tels que $X \sim U(0,2)$ et $Y \sim Exp(1)$. Calculer et comparer la mesure du risque de X et de Y

a) Selon VaR_α
b) Selon $TVaR_\alpha$
c) Selon la mesure d'Escher Es_h

$x > x_0$

Exercice 3 Soient X et Y indépendantes telles que $X \sim Par(1,1)$ et $Y \sim Par(1,1)$ (c'est-à-dire que $\mathbb{P}(X > t) = \frac{1}{1+t}$).

$VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$ ici $F_X(t) = \frac{1}{1+t}$ $\Rightarrow VaR_\alpha(X) = \frac{1}{\alpha} - 1 = \frac{\alpha-1}{\alpha}$

(1) Calculer $VaR_\alpha(X)$
(2) Calculer $F_{X+Y}(t)$
(3) En déduire la valeur de $F_{X+Y}(2VaR_\alpha(X))$, puis que VaR n'est pas sous additive.

Exercice 4

a) Montrer que $X \leq_{VaR} Y$ si et seulement si $\mathbb{E}(g(X)) \leq \mathbb{E}(g(Y))$ pour toute fonction croissante g (telle que les espérances existent).
Pour la partie directe, on pourra utiliser le fait que $F_X^{-1}(U)$ a même loi que X et pour la partie réciproque on introduira une fonction g bien choisie.
b) En déduire que si $X \leq_{VaR} Y$, alors $g(X) \leq_{VaR} g(Y)$ pour toute fonction croissante g.

Exercice 5

(1) On suppose X et Y comonotones. Montrer que

$$VaR_\alpha(X) + VaR_\alpha(Y) = VaR_\alpha(X+Y).$$

On pourra distinguer le cas "général" : $0 < \alpha < 1$ des deux cas particuliers $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ et, pour le cas général, utiliser l'exercice 4, avec une fonction g bien choisie.

(2) En écrivant $g(\overline{F}(x))$ comme une intégrale, montrer que les mesures de distorsion sont des mélanges de VaR. En déduire qu'elles sont elles aussi "comonotones additives".

TD1 : Mesures du risque

16/09/2022

Monotone	$X \geq Y$ p.s. $\Rightarrow e(X) \geq e(Y)$	cohérente
Inverse transitive	$e(X) + c = e(X+c)$	
Homogène pos.	$\forall \lambda \geq 0 \quad e(\lambda X) = \lambda e(X)$	
Sous additive	$e(X+Y) \leq e(X) + e(Y)$	

1. X,Y

$\mathbb{P}(X=0, Y=0) = 1/3 \qquad \mathbb{P}(X=0, Y=3) = 1/3 \qquad \mathbb{P}(X=6, Y=6) = 1/3$

Calculer $Es_{1/2}(X)$ et $Es_{1/2}(Y)$. En déduire que la mesure d'Escher n'est pas cohérente.

Mesure d'Escher : $Es_h(X) = \dfrac{\mathbb{E}[X\exp(hX)]}{\mathbb{E}[\exp(hX)]}$

$$\mathbb{E}[X\exp(1/2\, X)] = \frac{1}{3}\left[6\exp\{3\}\right] = 2e^3$$

$$\mathbb{E}[\exp(1/2\, X)] = \frac{1}{3}\left[1 + 1 + \exp\{3\}\right] = \frac{1}{3}(2 + e^3)$$

$$\Rightarrow Es_{1/2}(X) = \frac{2e^3}{1/3(2+e^3)} = \frac{6e^3}{2+e^3} \approx 5.46$$

$$\mathbb{E}[Y\exp(1/2\, Y)] = \frac{1}{3}\left[3\exp\{3/2\} + 6\exp\{3\}\right] = e^{3/2} + 2e^3$$

$$\mathbb{E}[\exp(1/2\, Y)] = \frac{1}{3}\left[1 + \exp\{3/2\} + \exp\{3\}\right] = \frac{1}{3}(1 + e^{3/2} + e^3)$$

$$\Rightarrow Es_{1/2}(Y) = \frac{e^{3/2} + 2e^3}{1/3(1 + e^{3/2} + e^3)} = \frac{3(e^{3/2} + 2e^3)}{1 + e^{3/2} + e^3} \approx 5.24$$

$Y \geq X$ p.s. or $Es_{1/2}(Y) < Es_{1/2}(X)$

$\Rightarrow$ mesure d'Escher non cohérente

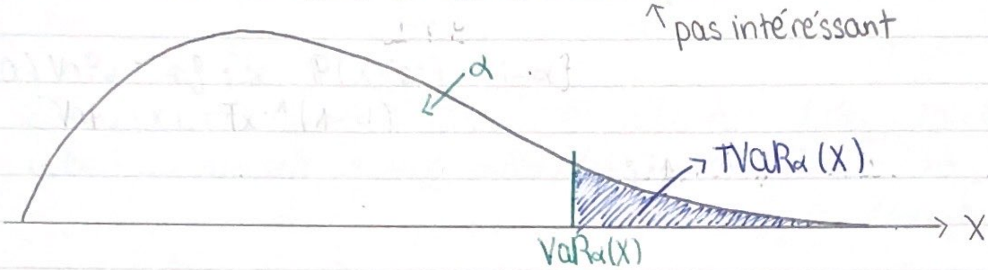
2. Soient X et Y tels que $X \sim U(0,2)$ et $Y \sim Exp(1)$. Calculer et comparer la mesure du risque de X et Y

a) Selon VaR_α $\qquad F_X^{-1}(\alpha) = VaR_\alpha(X)$

b) Selon $TVaR_\alpha$ $\qquad TVaR_\alpha = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_z(X)\,dz$

c) Selon la mesure d'Escher Es_h

↑ pas intéressant



a) $F_X(x) = \frac{x}{2} \Rightarrow VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha) = 2\alpha$

$F_Y(y) = 1 - e^{-y} \Rightarrow VaR_\alpha(Y) = F_Y^{-1}(\alpha) = -\ln(1-\alpha)$

b) $TVaR_\alpha(X) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 2z\,dz = \frac{1}{1-\alpha}\left[z^2\right]_\alpha^1 = \frac{1}{1-\alpha}(1-\alpha^2) = \frac{1}{\cancel{1-\alpha}}(1+\alpha)\cancel{(1-\alpha)} = 1+\alpha$

$TVaR_\alpha(Y) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 -\ln(1-z)\,dz$

Changement de variable $u = 1-z \Rightarrow \frac{du}{dz} = -1 \Rightarrow dz = -du$

$\int \ln(1-z)\,dz = \int \ln(u)\left(\frac{du}{dz}\right)\cdot dz = \int \ln(u)\,du$

$= u\ln(u) - u$

$TVaR_\alpha(Y) = \frac{1}{1-\alpha}\left[-(u\ln(u) - u)\right]_0^{1-\alpha} = \frac{1}{\cancel{1-\alpha}}\left[\cancel{(1-\alpha)}\ln(1-\alpha) - \cancel{(1-\alpha)}\right]$

$= 1 - \ln(1-\alpha)$

a) $VaR_\alpha(X) = 2\alpha$

$VaR_\alpha(Y) = -\ln(1-\alpha)$

$g(\alpha) = VaR_\alpha(X) - VaR_\alpha(Y) = 2\alpha - \ln(1-\alpha)$

$g'(\alpha) = 2 - \dfrac{1}{1-\alpha}$

$g'(\alpha) \leqslant 0 \Leftrightarrow 2 - \dfrac{1}{1-\alpha} \leqslant 0 \Leftrightarrow 1-\alpha \leqslant \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha \geqslant \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \alpha \in [0, 1/2] \Rightarrow VaR_\alpha(X) \geqslant VaR_\alpha(Y)$

$\alpha \in [1/2, 1] \Rightarrow VaR_\alpha(X) \leqslant VaR_\alpha(Y)$

b) $TVaR_\alpha(X) = 1 + \alpha$

$TVaR_\alpha(Y) = 1 - \ln(1-\alpha)$

$g(\alpha) = TVaR_\alpha(X) - TVaR_\alpha(Y) = 1 + \alpha - 1 + \ln(1-\alpha)$

$g'(\alpha) = 1 - \dfrac{1}{1-\alpha}$

$g'(\alpha) \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 - \dfrac{1}{1-\alpha} \leqslant 0 \Leftrightarrow 1 \leqslant \dfrac{1}{1-\alpha} \Leftrightarrow 1 \geqslant 1-\alpha \Leftrightarrow \alpha \geqslant 0$

$\Rightarrow \alpha \in [0,1] \Rightarrow TVaR_\alpha(X) \leqslant TVaR_\alpha(Y)$

3. Soient X et Y indépendantes telle que $X \sim Par(1,1)$ et $Y \sim Par(1,1)$
(càd. $\mathbb{P}(X > t) = 1/1+t$)
(1) Calculer $VaR_\alpha(X)$
(2) $F_{X+Y}(t)$
(3) En déduire la valeur de $F_{X+Y}(2VaR_\alpha(X))$, puis que VaR n'est pas sous additive

(1) $VaR_\alpha(X) = F_X^{-1}(\alpha)$

$$F_X(x) = \alpha \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1+x} = \alpha \Leftrightarrow x = 1 - \frac{1}{1-\alpha} = -\frac{\alpha}{1-\alpha} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

$$\Rightarrow VaR_\alpha(X) = \frac{\alpha}{\alpha - 1}$$

(2) F_{X+Y}

$$\mathbb{P}(X+Y \leq t) = \int_0^t \mathbb{P}(X+Y \leq t \mid X = u)\, dF_X(u)$$
$$= \int_0^t \mathbb{P}(Y \leq t-u)\, dF_X(u)$$