© Théo Jalabert

04/09/23

ERM

Soutenances de projets : 12, 13 décembre les matins
14 décembre toute la journée

note UE { 50% projet soutenance
examen écrit 3h en janvier (1 feuille recto verso A4 manuscrite personnelle)

slides + tout ce qui est dit en cours = programme de l'examen
l'examen ne sera pas que du TD
Les projets sont aussi sur du programme du cours
Et les questions posées lors des soutenances ne seront pas prises en compte dans la note

---

En économie, il y a une ≠ entre les termes "risque" et "incertitude"

↳ incapable de calculer précisément

↓ on connaît les probabilités

Des exemples de notion de risque
* pièce pile ou face
* 100 000 assurés sur des garanties simples hors Hospi (pour enlever COVID)

← leur consommation

Des exemples d'incertitudes (au sens de Knight)
* probabilité que la société se prenne une amende de l'ACPR pour non conformité
* probabilité de redressement financier par l'URSSAF
* probabilité de cyber attaque

Il est difficile de calculer / approximer ces probabilités

Definition du risque des normes d'ISO 31 000
effet de l'incertitude sur les objectifs stratégiques

Des objectifs ≠ conduisent donc à ≠ risques

© Théo Jalabert

Quand on (en tant qu'actuaire) doit rendre compte de résultats avec des probabilités, est-il préférable de dire qu'on a une probabilité de 27% ou une probabilité très faible ?
Il est difficile de se positionner sur le chiffre car il faut certifier son exactitude.

Les risques les plus graves sont les plus incertains. On peut se dire qu'on ne les prend pas et qu'il faut donc les mettre à 0 mais ce n'est pas bon.
D'ailleurs un risque peut avoir un effet positif ou négatif sur les objectifs stratégiques, on peut même avoir les 2 cumulés : ≥ 0 pour l'objectif A
≤ 0 pour l'objectif B

Exemple quels sont les objectifs centraux de la Bank of Ghana ?
Obj 1 price stability (la stabilité des prix)
avec comme sous-objectif contrôler l'inflation ce qui veut dire qu'il faut qu'elle soit dans une fourchette (entre 8 et 12%) donc pas trop haute ni trop basse.
Obj 2 financial stability (contrôler les banques, sécuriser les nouveaux moyens de paiement, lutter contre le blanchiement, le financement du terrorisme...)
sous objectif 2 maîtriser le taux de change
sous objectif 3 maîtriser la balance des paiements : ne pas importer plus qu'exporter ... ne pas déséquilibrer le rapport import-export
Comment faire pour avoir la stabilité des prix à moyen terme ?
↳ obj 2
Obj 3 sustain economic growth
Risques du sous objectif 3 :
* prix du pétrole ↘
* prix du cacao ↘ par rapport au prix de production qui ↗
* déplacement de la frontière / territorialité : l'affaire se déroule au Tribunal international de la mer. Ceci est impossible à modéliser

© Théo Jalabert

Quel est l'effet du pétrole qui baisse sur les objectifs ?
→ sur la balance des paiements effet adverse
→ sur l'inflation effet bénéfique à court terme car le prix va ↘ mais à moyen terme ce sera un effet adverse.

En assurance, on privilégie la vision court terme où on considère qu'on doit avoir assez pour payer les dettes à 1 an dans 99,5% des cas. C'est le PILIER 1.

ORSA c'est pour les risques à plus long terme dans le cadre d'un Business Plan : une vision entre 3 et 5 ans.
PILIER 2 ORSA et gouvernance.

Definition du CAS de ERM : discipline par laquelle une organisation (association, société, collectivité ...) dans n'importe quelle industrie évalue, contrôle, exploite, finance et surveille les risques pour augmenter la valeur court terme et long terme vis-à-vis de ses parties prenantes
= stakeholders

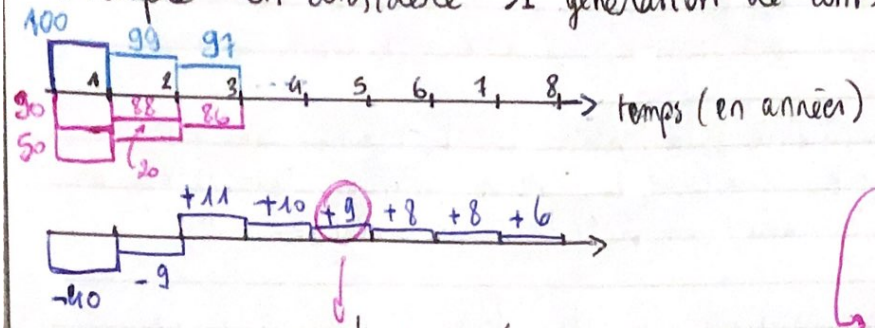
Exemple chez Axa, ce sont les assurés, les actionnaires, les employés, le régulateur, l'agence de notation, les partenaires, elle-même (la société)
NB : la discrimination / fairness in insurance : il faut voir les personnes derrière les algos. Il y aura des variables sensibles qui seront utilisées ou alors interdites ⇒ aux USA, par exemple il y a la race, l'ethnicité (2 modalités : latino ou other)

Pourquoi la gestion des risques est un coût ?
* la réassurance (il faut les payer) avec par ex des traités stop loss il faut atteindre un certain montant de sinistres pour qu'ils soient activés
Donc si on atteint pas ce montant, le réassureur est payé pour ne rien faire.
* car l'immobilisation du capital est un coût : cet argent ne peut pas être investi et doit servir à se protéger en cas de problème)
* les salaires de ceux qui bossent en gestion des risques

© Théo Jalabert

= ceux sont eux qui limitent le risque et donc le business

Exemple On considère 1 génération de contrats



P = primes

S = sinistres

com = commission d'acquisition (Google, annonceurs...) à payer pendant 1 ou 2 ans 50 puis 20.

au bout de 6 ans on rembourse notre investissement dans notre nouveau contrat

= c'est le PAY BACK TIME qui dure ≈ 5 à 6 ans

Beaucoup de nouveaux contrats sont comme ça

Si on s'adresse aux actionnaires les shareholders, ce qu'ils veulent c'est maximiser à moyen terme (3-5 ans) le résultat annuel un certain chiffre d'affaire ou une certaine proportion des parts de marché.
Dans ce cas-là, on ne lancerait pas le nouveau contrat si on regarde entre 3 et 5 ans.

Quels sont les risques ? quelques exemples

* une perte / sinistralité exceptionnelle (on a trop payé en tant qu'assureur)

solutions
* exclusions ou/et limites de prestations
* ne pas accepter de risques extrêmes / non mutualisables
* la réassurance

* (mass) lapse = risque de résiliation = perte des assurés (30 % à 50 % des assurés)

Exemple de lapse en France dû à la réglementation avec ANI : la complémentaire santé individuelle passe à la trappe car la complémentaire santé collective est privilégiée.

solutions
* diversification
* lobbying

perte exceptionnelle → augmentation des primes → risque de lapse augmente → perte exceptionnelle

on finit par avoir corrélation et cotagion de nos 2 risques

© Théo Jalabert

3 objectifs

- → agir pour l'environnement / la société (critères ESG)
- → maximiser le résultat annuel
- → CA / parts de marché (chiffres à attendre)

} à moyen terme

On reprend notre exemple d'avant en ayant cette fois 4 générations de contrats (1 nouvelle génération de contrat chaque année pendant 4 ans)
On va montrer qu'il n'est pas fiable
En résultat :

-40	-49	-38	-28	-18	-8	+1	.....
1 an	2	3	4	5	6	7	

au bout de 7 ans on n'est plus dans le négatif mais il faudrait encore 10 ou 20 ans pour rembourser son investissement ⚠ 7 ans n'est pas le PAY BACK TIME!
Donc pour limiter les risques il faut gagner de l'argent en moyenne.

Pourquoi l'ERM crée de la valeur ?
Exemple en considérant en réassurance un stop loss sur 1 an (cumulés pour n'importe quel évènement et sinistre) c'est-à-dire l'assureur paie jusqu'à un maximum et le réassureur paie au dessus jusqu'à un plafond.
La proba d'être insolvable / ruiné avant 2 ans 51 %
et après réassurance, la proba est de 1 %
Pour un coût annuel de 1 M d'€
le bain de valeur économique (sans taux d'intérêt) en reprenant notre 1ère génération de contrats est
$(11 + 10 + 9 + 8 + 8 + 6 + \dots)(99\% - 49\%) \geq 35$
d'au moins 35 M d'€ pour un coût d'au moins 6 M d'€.

© Théo Jalabert

Definition du COSO de l'ERM : c'est un processus (processus métier) effectué par tout le monde (tout le personnel) qui consiste à identifier (étape non présente dans la définition précédente) les évènements potentiels qui peuvent affecter une entreprise et choisir les risques en accord avec l'appétence au risque fixée par le conseil d'administration (Board of Directors) pour atteindre les objectifs stratégiques.

Il faut choisir le niveau de risque pour atteindre les objectifs stratégiques = appétence au risque.

Definition de la SCOR de l'ERM

3 étapes identification, mesure, stratégies de contrôle } des risques

pour maximiser la valeur d'entreprise

© Théo Jalabert

connaître les objectifs stratégiques.

↓

identification des risques → bruts

↓ modélisation des risques

quantification / mesure des risques

↓

stratégies de contrôles / gestion des risques
(choisir la meilleure) nets
(au global en prenant en compte tous les risques)

↓

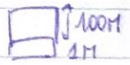
surveillance / documentation / reporting

(il existe d'autres manières de quantifier =
* approche par scénario (stress test, scénario ORSA)
* cartographie des risques (risk map))

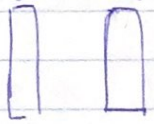
ex risques bruts sinistralité exceptionnelle

risques nets atténuation par la réassurance
mais maintenant le risque de défaut du réassureur apparaît

ex World Trade Center : est-ce qu'on considère 1 ou 2 évènements ?
excess of loss par évènement
réa prend si y'a dépassement du montant
au bout d'1M, plafond est à 101 M



(tour 2) 155M€ 150M€ (tour 1)



1 seul évènement → réa paie 100M
2 évènements → réa paie 200M€

nouveau risque : judiciaire et/ou territorial quand on se diversifie géographiquement.

ex → incendie
prévention primaire exercice d'évacuat°
prévention secondaire extincteurs

~~réduct° risque bruts~~
~~vaut elle la peine / à son coût de mise en oeuvre et les risques nets~~

© Théo Jalabert

Est-ce que la réduction de risques bruts vaut-elle la peine par rapport à son coût de mise en oeuvre et les risques nets ?

Def ERM COSO (définition ressuitée)
cultures, capacités et pratiques intégrées dans des stratégies futures et leur exécution sur lesquelles les organisations se réposent pour gérer le risque en créant, préservant et réalisant de la valeur

Importance de la culture de risque (Risk Culture)

Plan
cadre / concept de l'ERM / processus ERM.
théorie des copules dans une perspective ERM
mesures du / des risques (tout seul ou plusieurs risques ensembles)
titrisation des risques d'assurance
securization in english
quickest detection

4 familles de risques
connus connus = habitude de manipuler, probas connues
faussement connus = on croit connaître mais on a loupé des éléments importants
inconnus connus = on sait qu'on ne sait pas (exactement).
ex réchauffement climatique
→ inconnus inconnus = on connaît pas et on sait pas qu'on connaît pas
risques pas considérés dans les possibles

© Théo Jalabert

ERM 18/09/23

Corrélations (dans une perspective ERM)
= dépendance stochastique

on s'intéresse aux risques critiques (scénarios extrêmes)

comment mesurer un risque global en fonct° de plusieurs facteurs de risque ?

Exemple SCOR 2009

Réa non vie avec 4 branches d'activités (par exemple :
- RC
- incendie industriel
- vent
- ...)

sinistralité annuelle
loi pertes annuelles agregées sont les m̂ pour les 4
log N queues de distribut° épaisses mais pas trop

la corrélation entre les branches est fixée (sym) ≈ 70 %

$SCR_i \quad \forall i \in [\![1, 4]\!]$ = stand alone
= 25 M d'€ — comme si la branche était toute seule sans diversification

$\sum SCR_i$ avant diversificat°
= 100 M d'€

avec prise en compte de la diversification
bénéfice de diversification de 30,7 %

→ $SCR_{\text{"diversifié"}}$ = 69,3 M d'€ (voir slides)

Survie de Clayton	Gumbel	Student	Gaussienne
8,2 %	11,7 %	25,4 %	= Rank Correlat° 30,7 %

les 4 familles utilisées sur le marché

+ SCR div ↗, + les assurés vont payer

moy actualisée de ce que l'assureur va payer ⟶ BE (best estimate of liabilities)
+ marge de sécurité
= provis° techniques = ce qu'on met de côté pour payer les engagements envers les assurés
+ SCR

© Théo Jalabert

on fait payer aux assurés le coût d'immobilisation pour ce capital = SCR

tx de couverture du SCR 130% - 150% CA, 180% - 250% Réa } sur le marché

$SCR_i \simeq VaR_{99,5\%}(X_i) - \mathbb{E}[X_i]$ vision modèle interne

X_i : charge sinistre annuelle pour la branche i

$$SCR_{\text{avant div}} = \sum_{i=1}^{4} VaR_{99,5\%}(X_i) - \mathbb{E}[X_i]$$

$$= \sum_{i=1}^{4} VaR(X_i) - \mathbb{E}\left[\sum_i X_i\right]$$

$$SCR_{\text{diversifié}} = VaR_{99,5\%}\left(\sum_i X_i\right) - \mathbb{E}\left[\sum_i X_i\right]$$

souvent vrai mais pas toujours

Value at Risk n'est pas sous-additive et donc NON "cohérente" au sens d'ARTZNER et al (1999)

$TVaR_{99\%}$ respecte cette prop de ss additivité

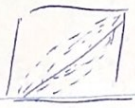
Rapport annuel pour les compagnies cotées
ou SFCR → publique
rapport sur la solidité financière et la solvabilité

Qu'est-ce qui coûte le plus cher ? (voir slides)

→ en haut à droite on a une concentrat° de points de - en - marqué qd on va à droite en changeant de modèle

→ en bas à gauche, de - en - éparpillé qd on va à droite (+ en + concentré)

© Théo Jalabert

concentrat° autour de la bissectrice 

qd très concentré en haut à droite et pas du tout en bas à gauche = le + coûteux

qd concentrat° idem à droite et à gauche

Envisageons maintenant un stop loss agrégé (aggregate) toutes causes pour protéger le bilan de la compagnie

↑ = le réassureur va payer tout ce qui dépasse par ex 58 M d'€ en cumul des sinistres toutes branches confondues

$$(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 - \underset{58\text{ M d'€}}{b})_+$$

PP de réassurance

$\mathbb{E}[(X_1 + \dots X_4 - b)_+]$ est-ce qu'il suffit de connaître les 4 loi séparément ? NON
il faut la loi jointe

J'ai besoin de $\mathbb{P}[X_1 \leq x_1, \dots, X_4 \leq x_4]$ $\forall (x_1, \dots, x_4) \in \mathbb{R}^4$
en respectant $\mathbb{P}[X_1 \leq x_1], \dots, \mathbb{P}[X_4 \leq x_4]$ déjà connues étudiées auparavant

$C(\mathbb{P}[X_1 \leq x_1], \dots, \mathbb{P}[X_4 \leq x_4])$

↑ fonct° copule $[0,1]^4 \to [0,1]$

En général, dimension = 1, 20, 32, 108, ...

grandes classes de risque — au niveau des branches — au niveau des facteurs de risque

Sans hyp fortes vérifiables, on peut pas déterminer ——— la copule / étudier statistiquement par ex 10 risques (dimension = 10).
Il faudrait des milliards et des milliards de points alors qu'on a un historique fini de x ans (donc x points) et x est le plus souvent petit et des fois nul !
(Si on crée un nouveau produit par ex : pas d'historique)

© Théo Jalabert

Définition copule

distribution jointe sur $[0, 1]^2$
avec loi marginale uniforme sur $[0, 1]$

$C(u, v) = \mathbb{P}(U \leq u, V \leq v)$ où (U, V)
c'est la restriction à $[0, 1]^2$ d'un couple (U, V)
dont les marginales sont des lois $\mathcal{U}[0, 1]$

au tableau le prof a écrit :

$$C(\underbrace{\mathbb{P}(X_1 \leq x_1)}_{u}, \underbrace{\mathbb{P}(X_2 \leq x_2)}_{v})$$

changement de variable

CDV $X_1 = F_{X_1}^{-1}(U)$
$X_2 = F_{X_2}^{-1}(V)$

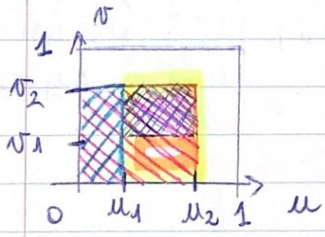
hyp $C : [0, 1]^2 \to [0, 1]$

1) $\forall u \in [0, 1]$, $C(u, 0) = C(0, u) = 0$
2) $\forall v \in [0, 1]$, $C(v, 1) = C(1, v) = v$
3) $\forall 0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1$, $\forall 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$

$$C(u_2, v_2) - C(u_1, v_2) - C(u_2, v_1) + C(u_1, v_1)$$

≥ 0 C is 2-increasing "croissant en dimension 2"

sont propriétés caractéristiques



$C(u_2, v_2)$
$\Leftrightarrow (U, V)$ est dans

$C(u_1, v_2) \Leftrightarrow (U, V)$ est dans

expression en jaune $= \mathbb{P}((U, V) \in \square)$
$u_1 \leq U \leq u_2$
et $V \leq v_2$

expression en orange $= -\mathbb{P}((U, V) \in \square)$
$\Rightarrow = \mathbb{P}((U, V) \in \square)$
$= \mathbb{P}(u_1 < U \leq u_2, v_1 < V \leq v_2)$

© Théo Jalabert

en haut à droite + en bas à gauche
il faut mettre les risques tous dans le m̂ sens

v.a		on aime pas qd :	v.a transformée	
pandémie	X_1	c'est grand	X_1	les 3 risques sont ds le m̂ sens
perte	X_2	c'est grand	X_2	
rendement	X_3	c'est petit	$-X_3$	

épargne	v.a	on redoute que :
rendement d'act	X_1	sa baisse
évolut° taux d'intérêt	X_2	{ si ↗ sa ↗ probas rachats si ↘ mauvais rendements
rachats	X_3	
taux de mortalité	X_4	sa augmente

pas possible de fixer 1 sens

Thm de SKLAR (1959)

$\forall (X,Y)$ 2 v.a

il existe au moins une copule /

$$\forall (x,y) \quad F_{X,Y}(x,y) = C(\underbrace{F_X(x)}_{=u}, \underbrace{F_Y(y)}_{=v})$$

Si F_X et F_Y sont $\mathcal{C}^0$ ⇒ C est unique

La modélisat° courante de nb d'évènements (ex: sinistres ou rachats ou sauts en finance)

avec des lois discrètes fait qu'on aura plus l'unicité.
Il faut donc des copules discrètes (prof va donner documentat°)
Lorsque l'on considère un modèle dynamique avec corrélation variable : + difficile et perte d'utilité

Définition

densité de la copule $c(u,v) = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \mathcal{C}(u,v)$ ← grand C

Dans la suite, je noterai C majuscule $\mathcal{C}$ pour éviter la confusion avec la densité

© Théo Jalabert

qques cas particuliers de copules (à connaître absolument)

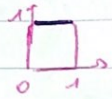
* copule $\perp\!\!\!\perp$

$\mathcal{C}^{\perp}(u, v) = uv$

$$\mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)$$
$$= \mathbb{P}(X_1 \leq x_1)\,\mathbb{P}(X_2 \leq x_2)$$
$$\overset{\perp\!\!\!\perp}{=} uv$$

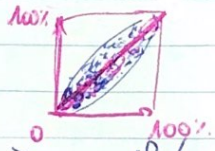
$c^{\perp}(u, v) = 1 \quad \forall (u, v) \in [0, 1]^2$

surface plate au dessus du carré $[0, 1]^2$



autant de chances d'être n'importe où sur la surface plate

* corrélat° 100%



U et V sont comonotones

$U = V$

$\mathbb{P}(U \leq u, U \leq v) = \mathbb{P}(U \leq \min(u, v))$

$C_{max}(u, v) = \min(u, v)$ borne sup de FRÉCHET

+ grande copule possible

* corrélat° -100%

borne inf de FRÉCHET

$U = 1 - V$

U et V sont antimonotones

$C_{min}(u, v) = \max(0, u + v - 1)$
$= (u + v - 1)_+$

Rappels

* $[g \circ f(x)]' = f'(x)\, g'(f(x))$

* $\mathbb{E}[g(X, Y)] = \int_{\mathbb{R}^2} g(x, y)\, f_{X,Y}(x, y)\, dx\, dy$

Sklar

$F_{X,Y}(x, y) = \mathcal{C}(F_X(x), F_Y(y))$ règle de la chaîne

$$\Rightarrow f_{X,Y}(x, y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \mathcal{C}}{\partial u \partial v}(F_X(x), F_Y(y)) \times f_X(x) \times f_Y(y)$$

© Théo Jalabert

$$\Rightarrow \boxed{\mathbb{E}[g(X,Y)]} = \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) f_X(x) f_Y(y) \frac{\partial^2 C}{\partial u \partial v}(F_X(x), F_Y(y)) \, dx\,dy$$

$$= \int_{\mathbb{R}^2} g(x,y) f_X(x) f_Y(y) \underbrace{c(F_X(x), F_Y(y))}_{= 1 \text{ qd } X \perp\!\!\!\perp Y} dx\,dy$$

qd on a pas $\perp\!\!\!\perp$ de X et Y

© Théo Jalabert

ERM 19/09/23

Si on trouve que copule est unique car F_X et F_Y sont $\mathcal{C}^0$ est-ce que c'est faisable ?

Exercice Soit $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$ $F_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}}$

1) Determiner F_X et F_Y
2) Determiner $\mathcal{C}_{X,Y}$

1) $F_X(x) = \lim\limits_{y \to +\infty} F_{X,Y}(x,y) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$? OUI à savoir !

Le prof a insisté que c'était la base de savoir faire ça.

de m̂ $F_Y(y) = \dfrac{1}{1+e^{-y}}$

~~Correction~~

$F_X(x) = \int_{\mathbb{R}} F_{X,Y}(x,y)\,dy$ = PROUT

Y'a pas besoin de dériver ou d'intégrer en fait

2) $\mathcal{C}_{X,Y}(u,v)$

F_X, F_Y $\mathcal{C}^0$
$\Rightarrow$ $\mathcal{C}$ copule unique

$\dfrac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}} = C\left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}, \dfrac{1}{1+e^{-y}}\right)$

$X = Y$? car m̂ fonct° de répartit° qui caractérise la loi

$\Rightarrow$ borne sup de Fréchet $\mathcal{C}_{X,Y}(u,v) = \min(u,v)$ NON

Correction

© Théo Jalabert

2) $F_{X,Y}(x,y) = \mathcal{C}(F_X(x), F_Y(y))$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}} = \mathcal{C}\left(\frac{1}{1+e^{-x}}, \frac{1}{1+e^{-y}}\right)$$

On pose $u = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$ et $v = \dfrac{1}{1+e^{-y}}$

$\Rightarrow e^{-x} = \dfrac{1}{u} - 1$ de m̂ $e^{-y} = \dfrac{1}{v} - 1$

Donc $\mathcal{C}(u,v) = \mathcal{C}\left(\dfrac{1}{1+e^{-x}}, \dfrac{1}{1+e^{-y}}\right)$

$$= \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}} = \frac{1}{1+\frac{1}{u}-1+\frac{1}{v}-1}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}-1} = \frac{uv}{u+v-uv}$$

IMPORTANT de bien rédiger, laisser les inconnues u et v pour $\mathcal{C}$

FIN exercice

Comment mesurer la corrélation entre X et Y ?

* coeff de corrélation linéaire
  $r_{lin}(X,Y) = \dfrac{cov(x,y)}{\sigma_X \sigma_Y}$
* τ de Kendall / autres variantes
* coeff de dépendance de queue (tail dependence index) (zoom sur la corrélation des extrêmes) à droite / à gauche
* paramètre de corrélation Solvabilité II

Points négatifs / limites de r_{lin}

→ X et Y doivent être dans $L^2(\Omega)$

→ $X \perp\!\!\!\perp Y \Rightarrow r_{lin}(X,Y) = 0$ mais la réciproque est fausse

ex $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ on a $|X| = |Y|$

$Y = JX$ avec $J = \begin{cases} +1 & \text{proba } \frac{1}{2} \\ -1 & \text{proba } \frac{1}{2} \end{cases}$ donc pas $\perp\!\!\!\perp$ mais $r_{lin}(X,Y) = 0$

© Théo Jalabert

→ $r_{lin}(e^X, e^Y) \neq r_{lin}(X, Y)$ en général

Théorème $g, h \nearrow$ et $\mathcal{C}^0$

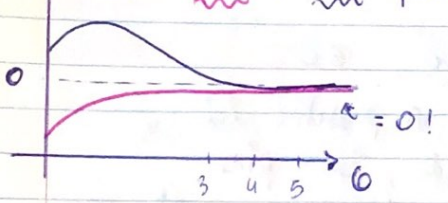
La copule de $(g(X), h(Y))$ est la même que celle de (X, Y)

Donc on a la même structure de corrélation pour ces 2 couples

r_{lin} n'est donc pas une vraie mesures de corrélation puisqu'il est aussi influencé par les marginales.

r_{lin} est bien compris entre -100% et 100% mais parfois pour certaines marginales, ses valeurs possibles sont seulement très proches de 0.

valeurs min et max prises par $r_{lin}(X, Y)$



où $\begin{cases} X \sim LN(0, 1) \\ Y \sim LN(0, \sigma^2) \end{cases}$ = 1 comonotones

déduire NON car on ne peut pas le faire

Dans certains cas, r_{lin} peut conduire à soutenir l'hypothèse d'indépendance alors que les risques sont très fortement dépendants

→ r_{lin} est très peu robuste, notamment très sensible à une ou 2 paires de valeurs extrêmes ou aberrantes.

Definition et caractéristiques du τ de Kendall

Pas de condition L^2

Ne dépend que de la copule

⇒ c'est une vraie mesure de corrélation

$$\tau = 4 \int_{[0,1]^2} \mathcal{C}(u, v) \, \underbrace{d\mathcal{C}(u, v)}_{\text{si densité } \exists \; = c(u,v)\,du\,dv}$$

Dans le cas comonotone, $\tau = 100\%$

_____ antimonotone, $\tau = -100\%$.

τ est très robuste et peu sensible à une valeur extrême/aberrante

© Théo Jalabert

CONCORDANCE DISCORDANCE

$$\tau_{X,Y} = \mathbb{P}[(X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y}) > 0] - \mathbb{P}[(X-\tilde{X})(Y-\tilde{Y}) < 0]$$

où $\underbrace{(\tilde{X}, \tilde{Y}) \text{ copie } \perp\!\!\!\perp \text{ de } (X, Y)}$

= signifie que (X, Y) et $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ ont la m̂ loi bivariée
et que $(\tilde{X}, \tilde{Y}) \perp\!\!\!\perp (X, Y)$ ⚠ on a pas $\tilde{X} \perp\!\!\!\perp X$
et $\tilde{Y} \perp\!\!\!\perp Y$

Exemple

pertes pour un assureur en Fl Floride
annuelles Lo Louisiane

	Fl	Lo
2024	1200 X	Y 900
2025	210 $\tilde{X}$	$\tilde{Y}$ 190
2026	195	?

Tout est en M d'€ (millions)

3 possibilités

920 , 200 , 50

très corrélé
on voudrait 170 mais pas une option possible ici
2026 est l'année la-chère pour Floride, la-pire
donc si très corrélé on voudrait pour Louisiane < à 190 ⇒
c'est le raisonnement du τ de Kendall
mais 50 trop gros décrochage

$$\hat{\tau} = \frac{\text{nb de paires concordantes} - \text{nb de paires discordantes}}{\text{nb total de paires}}$$

empirique

Exercice calculer $\hat{\tau}$ on a 3 paires au total

	concordante	discordante
24/25	⊗	
25/26		X → car $(210-195)(190-200) < 0$
24/26	X → car $(1200-195)(900-200) > 0$	

	Fl	Lo
○	1200 >	210
	900 >	190

inégalités dans le m̂ sens

$(1200-210)(900-190) > 0$

donc $\hat{\tau} = \frac{2-1}{3} = \frac{1}{3}$

© Théo Jalabert

Limites et solutions du τ

- trop centré sur une corrélation "moyenne" et pas assez sur les extrêmes

© Théo Jalabert

17/10/23 dernier cours avant projets.

ERM

Titrisation des risques d'assurance
"securization" en anglais
appel à plusieurs assureurs
ou transfert des risques vers le marché par titrisation.

fait générateur des 1ers titrisations
1960
1990 industrie nord américaine assurance touchée par ouragan Andrew (détruit côte est USA)
À ce moment là, de nombreux assureurs USA transféraient beaucoup leur risques vers les assureurs bermudéens qui faisaient du monoline (que du risque tempête) sur la côte est des USA
Katrina ajd coûterait 100 milliards de $ minimum
+ s'il touchait Miami Beach 150 à 200 milliards min

très dur à absorber comme choc par les réassureurs
trop binaire { proba forte → coûte pas grand chose
proba faible → coûte super cher

en complément des réassureurs
pour les marchés financiers, sur des investissements de 30 ou 45 ans ⇒ ce genre de choc est beaucoup plus gérable.
Ce risque est indépendant de tous les autres risques des marchés ⇒ permet une diversification
La titrisation
permet à des gens plus couverts de continuer à l'être malgré des tailles de risque de plus en plus extrêmes
De + en + de gens deviennent inassurables (par ex avec l'argile en dessous des maisons : les assureurs ont accès à ces données externes et peuvent refuser d'assurer) "risque retrait gonflement argile"

© Théo Jalabert

Titrisation a maintenant un enjeu social
avec des cat nat qui sont de + en + violents
et chers et qui touchent de + en + des populations
fragiles
Social insurance : fonds assurantiels
pour protéger financièrement des populations
non couvertes mais dans le besoin

Types de * risque climatiques = 1ère grande classe de risque
ouragans, séisme, tempêtes, typhons, tremblements de terre
USA — EU — Japon

2e grande classe de risque
* risque de mortalité (extrême)

grands acteurs internationaux n'ont pas eu d'autre choix
que de se tourner vers la titrisation (réa, AXA, ...)
autres grandes classes de risque :
* risque opposé : de longévité (les gens vivent plus
longtemps que prévu)

* risques émergents (cyber par ex)
↑ difficulté à définir le
risque cyber (quel est l'évènement ?
comment le qualifier lui et ses conséquences)

ex : risque d'annulation de la coupe du monde de Football
en Allemagne a fait l'objet d'une titrisation spécifique

La crise des
subprime 2007-2008 on avait eu titrisation ≠ titrisation assurantielle des risques financiers
caractérisée par créances douteuses d'emprunteurs qui achetaient
des maisons sur-évaluées
La titrisation avait aggravé cette crise car elle avait
rassemblé ces créances pour les distribuer à des
acteurs divers & variés (ex commune en Norvège,
fonds de pension en Allemagne ...)

© Théo Jalabert

asset back security mortgage back security.

⇒ très elaboré, on est en marked-to-market
c'est le marché qui dicte les prix

pour les assureurs on peut avoir des petits groupes d'investisseurs (5 à 50)

⇒ évaluation en marked to model
il n'existe pas de marché secondaire assez liquide pour évaluer les prix, on doit donc s'en remettre aux modèles.

Création de sociétés pour "titriser" ⇒ se trouvent dans des paradis fiscaux réglementés (cela touche au droit international, juristes super pointus ...)

Généralités titrisation

CBD CDB
↑ ↑
Blake Dowd
y croit plus y croit plus

Schéma classique

Swiss Re veut se débarasser du risque
Bond Holders ceux qui détiennent les investissements
société intermédiaire SPV
special purpose vehicle
créée expres pour cette opération de titrisation et détruite juste après.

1 opé = 1 SPV

But = pour rassurer les investisseurs.

Examen ! Important

Risque de base de l'opération de titrisation
= indemnisat reçue, ne soit pas en adéquation avec la perte encourue en cas de réalisation du risque titrisé
par le réa ou l'ass

© Théo Jalabert

Schéma simplifié on se place à un instant $t = 0$.

Swiss Re —(doit payer pour bénéficier de la couverture)→ Vita —(paie la couverture)→ BH

8 M $ (408 M $) 400 M $

411 M $

en $t = 1$ indemnisation de Swiss Re pour la surmortalité entre 0 et 400 M $ (le reste revient à BH)

⚠ si la surmortalité est trop importante Swiss Re récupère 400 M $ et BH rien du tout

Indice de mortalité

pas de surmortalité on suppose que Vita a fait des investissements peu risqués et a obtenu en $t = 1$ 411 M $

BH récupère donc 411 M $ + intérêts ...

pas forcément un taux de mortalité

ici c'est une combinaison linéaire de taux de mortalité européens + américains + japonais ...

on a un problème si jamais :

l'indice de la population assurée par Swiss Re est de 5% par ex

mais l'indice de mortalité qu'on regarde dans le cadre de la titrisation est de 3%.

on sera bien dans un cas de surmortalité pour Swiss Re

mais il ne sera pas indemnisé totalement (pour 3% alors qu'il a un risque pour 5% et qu'il faudrait 600 M $ au lieu de 400 M pour indemniser par ex)

© Théo Jalabert

Pourquoi a t'on besoin de SPV ?
car Swiss Re peut faire défaut
motivation investisseurs = décorrélat° avec les marchés financiers
avoir un risque d'assurance le plus pur possible !
Mais le risque de défaut SR est très corrélé aux marchés financiers => BH n'en veulent pas

Si BH "promettent" de verser les 400 M $
=> Swiss Re ne voudra pas car
* n'est pas au courant de la solvabilité des BH
* peut douter du bon vouloir des BH.

Nouveau schéma
62 investisseurs
3 intermédiaires.

le nb d'investisseurs était limité à quelques dizaines avant (sinon risque que personne n'investisse)
(la banque avait dû prendre le risque)
sinon elle aurait été décridubilisée

collatéraliser = sécuriser
montant donné, "collatéral", en échange d'un prêt pour une garantie de remboursement du prêt / de l'investissement
le collatéral peut être une hypothèque

investisseurs veulent investir dans un risque d'assurance pur
2007 - 2008 cat bond mal collatérisé ont fait défaut.
et en plus Lehman Brothers déjà en défaut
donc pas de contre partie swap possible
↳ noté triple A alors qu'ils n'auraient pas dû
(agence de notation pas trop sérieuse)

© Théo Jalabert

MAIS dans le cas où il y aurait un risque de défaut, on a un total return swap où il va y avoir échange du rendement du portefeuille d'investissements contre un rendement fixe.
On élimine alors totalement le risque ce qui est irréaliste. Le risque zéro n'existe pas

un risque de défaut quasi nul
quasiment aucun risque (du AAA)

SPV

- investissements dans des fonds
  - * peu risqués
  - * liquides
  - * court terme
- collatérisation
- investissements

total return swap

Contrepartie SWAP
ex : Lehman Brothers ou une autre grande banque

assureur USAA va transférer son risque

400 M $ de couverture

24 M $ de prime de risque (pour pouvoir bénéficier de la couverture)

La tranche junior est celle impactée en 1ère. On a une priorité dans les investisseurs
La tranche senior a la priorité sur la tranche junior.
Comme la tranche junior prend plus de risque, c'est aussi elle qui a de meilleurs rendements financiers.
Mais s'il y a un ouragan, A_2 perdra en 1er son nominal et A_1 interviendra seulement quand A_2 aura tout perdu et qu'il y a encore une perte à compenser

LIBOR → A_2 non protégée tranche junior → 576 → reçoit LIBOR + une surprime de 5,76 %

sa surprime est supérieure à celle de la classe A_1 car ils prennent plus de risques (en A_2)

LIBOR → A_1 protégée (partie du nominal est protégée) tranche senior → 273 → 164 M

reçoit LIBOR + une surprime de 2,73 %

comme A_2 n'est pas protégée, les investisseurs de cette classe peuvent tout perdre.
Alors que même dans le cas d'un ouragan dévastateur et hyper coûteux, A_1 perdra par ex 100 M $ maximum et gardera toujours 64 M

© Théo Jalabert

agence de notation vont accorder de meilleures notes aux tranches seniors ("triple B" ou "A") que juniors (B ou double B)

investisseurs seniors vont récupérer une partie fixe de leur investissement
pourquoi garantit-on une partie du nominal pour les investisseurs les - risqués ?
Comme ils sont obligés d'investir dans du "pas risqué" (A à triple A) (contraintes fortes de risque)
il faut alors mélanger ce qu'on veut transférer à quelque chose de - risqué pour faire gonfler la notation et permettre d'agrandir la pool d'investisseurs
("on" ici ce sont les assureurs ou réassureurs)

Nouveau schéma

NEW ARRANGEUR = une grande banque ou SWISS RE (services d'arrangement en complément contrat de titrisation) d'investissement ou plusieurs

met en relat° le portefeuille de clients et l'assureur qui veut céder le risque

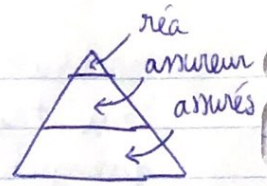
va voir des agences de notation pour faire les négociat° avec les investisseurs ("si noté BBB est ce que vous investissez ?")
si pas assez, peut faire appel à des sociétés de rehaussement de crédit

ajout d'une dimension internationale par ce montage
autorités de surveillance (ACPR, régulateurs et accréditeurs des SPV...)

⇒ coûts fixes importants donc montage doit être sur des milliards.

© Théo Jalabert

on concentre tous les risques de la planète sur quelques acteurs (réassureurs) est-ce judicieux ?



Plus le nombre de risques extrêmes augmente, moins on a d'acteurs
La titrisation permet d'éclater la pyramide en partageant le risque parmi des milliers d'investisseurs

Risque de crise de corrélation.
Exemple d'illustration avec un tableau

ILS	CS crédit suisse
Equities = actions	
Blue Chip Index	corrélé à 79 % au marché actions
↳ plus courant en trading	
Market Neutral	corrélé à 61 %
pharmaceutique...	
Event Driven	à 74 %
opportunité d'arbitrage	
Global Macro	à 45 %
ILS	à 10 % et peu corrélé aux marchés des taux et crédit

↑ classe d'actifs qui semble très peu corrélée aux indices financiers

Regardons les indices des marchés actions qd il y a eu Katrina aucun mouvement notable à une échelle mensuelle
⇒ il faudrait regarder plus en micro si on veut

© Théo Jalabert

observer quelque chose. 3 courbes { blanche, jaune, rouge

courbe blanche modélisée (basée sur aucun échange réel / transact° réelle) (d'où son lissage)

données brutes ou fabriquées ? Il faut se poser la question et être alerte, malgré le fait que ce soit un modèle, c'est un bon investissement car ne perd pas de valeur durant les évènements extrêmes (au moins 2)

on voit bien l'effet diversification (géographique pour les cat bond) seulement 5% de perte sur l'indice juste après Katrina

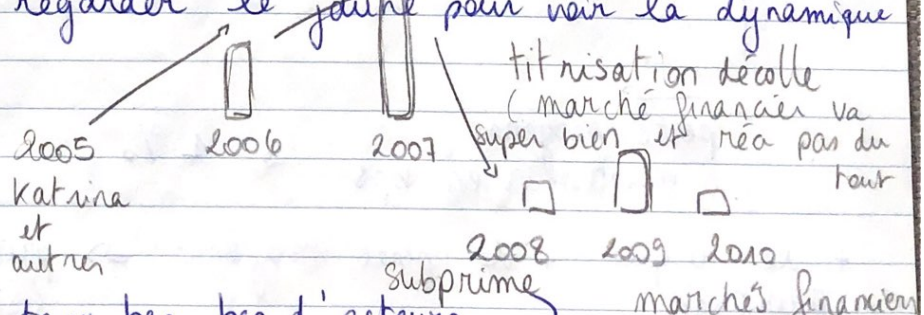
2 possibilités pour la titrisation :
Réa → marché financier
Assureur → marché financier (directement) (sans réa)

coût d'arrêt

outstanding 3 à 5 ans

passe de jaune à orange

il faut regarder le jaune pour voir la dynamique du marché



phase soft (taux bas, bcp d'acteurs ...)

phase hard après 2005 pour les réassureurs :
disparition de certains acteurs, hausse des prix des réa, plus de cat nat assurés aux USA par les réa (deviennent inassurables)

© Théo Jalabert

→ proba de perte aléatoire (totale ou partielle)

ex * 3% probability of attachment / de perdre le 1er dollar
investisseurs ont 97% de chance
de récupérer leur argent, leur prime
de risque et le LIBOR

* spread 500 bps
en + du Libor, investisseurs récup 5%
d'intérêts cumulés sur
le principal

↑ cbn demande
les investisseurs pour accepter le risque

→ mesure du risque

on voit donc le prix du transfert de risque
risque que le prix soit trop élevé pour assureurs
Quand cela pourrait-il arriver ? ouragans
on a eu une petite variation de prix
alors que le défaut de Lehman Brothers (risque
qu'on attendait à ce qu'il n'impacte pas)
a créé un gros écart de prix.

↑ Spread / Libor demandé pour couvrir le risque

→ perte moyenne
investisseur en bps ≃ 1 %

+ de risque, + de perte moyenne → prix + haut
(spread + haut)
pourtant,
On a des transactions très risquées mais parmi les
moins chères des transactions présentes sur le graphe ?
{ tremblement de terre Amérique du Sud + Méditerranée
{ risques Australie
Car risques indépendants des autres risques climatiques
qui ont servi à décorréler (1 phénomène ne peut pas causer

© Théo Jalabert

à autres simultanément si on n'est pas sur la même zone géographique.)

12 à 15 min par groupe
ne pas sous estimer le temps qu'il faut pour comprendre les graphes / tableaux
faire