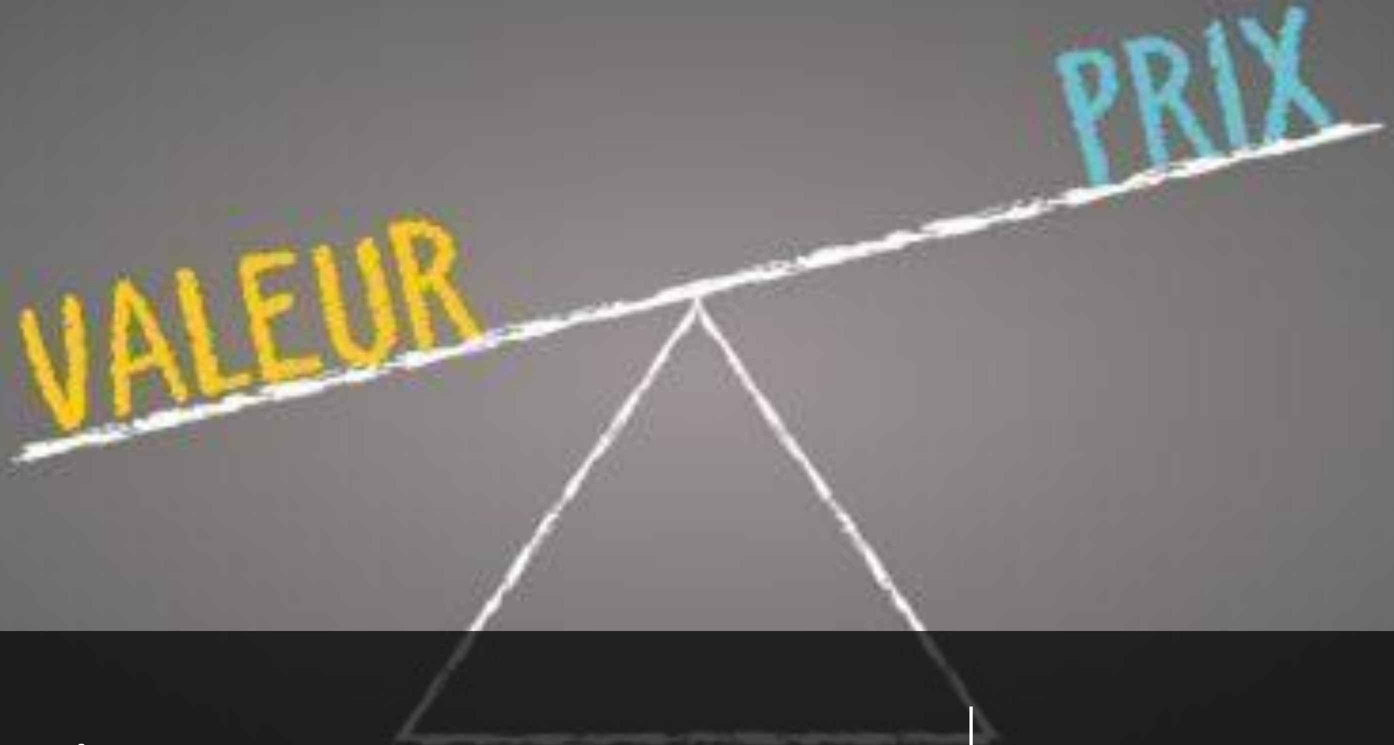
Théorie des Options
Anne EYRAUD-LOISEL

Cours numéro 5

02/03/2023



Valeur des options

$2^{\text{ème}}$ catégorie de strategies : les SPREAD (écarts)

Combiner des positions différentes (achat ou vente) sur un même type d’option (PUT ou CALL)

BEAR SPREAD (écart baissier)

Un **BEAR CALL SPREAD** consiste à acheter un CALL avec prix d'exercice K_2 et à vendre un CALL avec prix d'exercice K_1 sur le même actif sous-jacent, avec la même échéance. Avec $K_1 < K_2$

Exercice

- Dresser le tableau d'investissement d'une telle stratégie
- Donner les valeurs des gains/pertes finaux d'une telle stratégie
- Tracer les graphes des gains/pertes en fonction de la valeur du sous-jacent à l'instant terminal, pour l'acheter et pour le vendeur d'une telle stratégie
- Quel est l'intérêt d'une telle stratégie ?
- QUESTION BONUS : comment construire la même forme de stratégie avec des PUT ?

BEAR CALL SPREAD (écart baissier)

Opération	t=0	t=T
Achat $CALL_2$	$-C_0^2$	$(S_T-K_2)_+$
Vente $CALL_1$	$+C_0^1$	$-(S_T-K_1)_+$
BEAR CALL SPREAD	$-C_0^2+C_0^1$	$(S_T-K_2)_+-(S_T-K_1)_+$

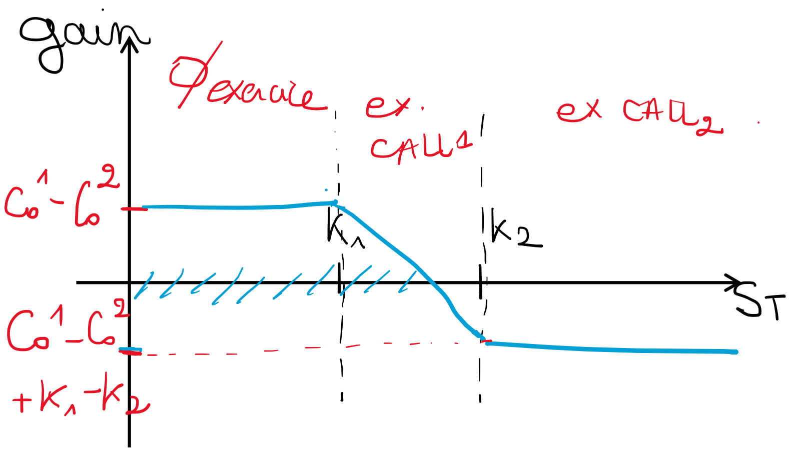
Un **BEAR CALL SPREAD** consiste à acheter un CALL avec prix d'exercice K_2 et à vendre un CALL avec prix d'exercice K_1 sur le même actif sous-jacent, avec la même échéance. Avec $K_1 < K_2$

- Gain = $-C_0^2+C_0^1+(S_T-K_2)_+-(S_T-K_1)_+$
  - Pas d'exercice Si $S_T<K_1<K_2$
  - Exercice du CALL 1 Si $K_1< S_T< K_2$
  - Exercice des 2 CALL Si $K_1<K_2< S_T$
- Interprétation : anticipe une baisse modérée du titre – gains et pertes limitées
- **Conséquences de l'AOA** :

$$C_0^1 - C_0^2 \geq 0 \text{ si } K_1 \leq K_2 \text{ (déjà vu)}$$

$$C_0^1-C_0^2+K_1-K_2 \leq 0$$

$$C_0^1-C_0^2 \leq K_2-K_1$$



BEAR PUT SPREAD (écart baissier)

Opération	t=0	t=T
Achat PUT_2	$-P_0^2$	$(K_2-S_T)_+$
Vente PUT_1	$+P_0^1$	$-(K_1-S_T)_+$
BEAR PUT SPREAD	$-P_0^2+P_0^1$	$(K_2-S_T)_+-(K_1-S_T)_+$

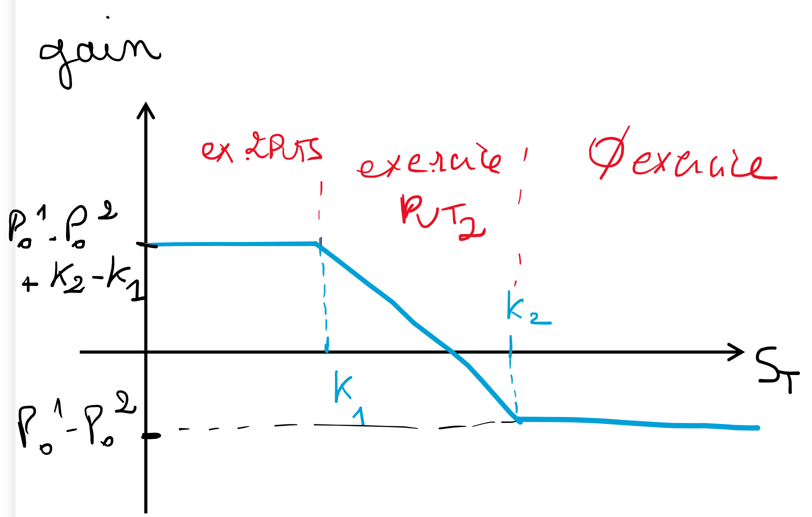
Un **BEAR PUT SPREAD** consiste à acheter un PUT avec prix d'exercice K_2 et à vendre un PUT avec prix d'exercice K_1 sur le même actif sous-jacent, avec les mêmes échéance et prix d'exercice. Avec $K_1 < K_2$

- Gain = $-P_0^2+P_0^1+(K_2-S_T)_+-(K_1-S_T)_+$
    - Exercice des 2 PUTS Si $S_T<K_1<K_2$
    - Exercice du PUT 2 Si $K_1< S_T< K_2$
    - Pas d'exercice Si $K_1<K_2< S_T$
- Interprétation : anticipe une baisse modérée du titre – gains et pertes limitées
- **Conséquences de l'AOA :**

$$P_0^1-P_0^2 \leq 0 \text{ si } K_1 \leq K_2 \text{ (déjà vu)}$$

$$P_0^1-P_0^2 +K_2-K_1 \geq 0$$

$$P_0^1-P_0^2 \geq K_1-K_2 \text{ ou encore } P_0^2-P_0^1 \leq K_2-K_1$$



BULL SPREAD (écart haussier)

*Un **BEAR CALL SPREAD** consiste à acheter un CALL avec prix d'exercice K_2 et à vendre un CALL avec prix d'exercice K_1 sur le même actif sous-jacent, avec la même échéance. Avec $K_1 < K_2$*

Un **BULL CALL SPREAD** consiste à acheter un CALL avec prix d'exercice K_1 et à vendre un CALL avec prix d'exercice K_2 sur le même actif sous-jacent, avec les mêmes échéance et prix d'exercice. Avec $K_1 < K_2$

Exercice

- Dresser le tableau d'investissement d'une telle stratégie
- Donner les valeurs des gains/pertes finaux d'une telle stratégie
- Tracer les graphes des gains/pertes en fonction de la valeur du sous-jacent à l'instant terminal, pour l'acheter et pour le vendeur d'une telle stratégie
- Quel est l'intérêt d'une telle stratégie ?
- QUESTION SUPPLEMENTAIRE : comment construire la même forme de stratégie avec des PUT ?

BULL CALL SPREAD (écart haussier)

Un **BULL CALL SPREAD** consiste à acheter un CALL avec prix d'exercice K_1 et à vendre un CALL avec prix d'exercice K_2 sur le même actif sous-jacent, avec les mêmes échéance et prix d'exercice. Avec $K_1 < K_2$

- Gain = $-C_0^1+C_0^2+(S_T-K_1)_+-(S_T-K_2)_+$
  - Pas d'exercice Si $S_T<K_1<K_2$
  - Exercice du CALL 1 Si $K_1< S_T< K_2$
  - Exercice des 2 CALL Si $K_1<K_2< S_T$

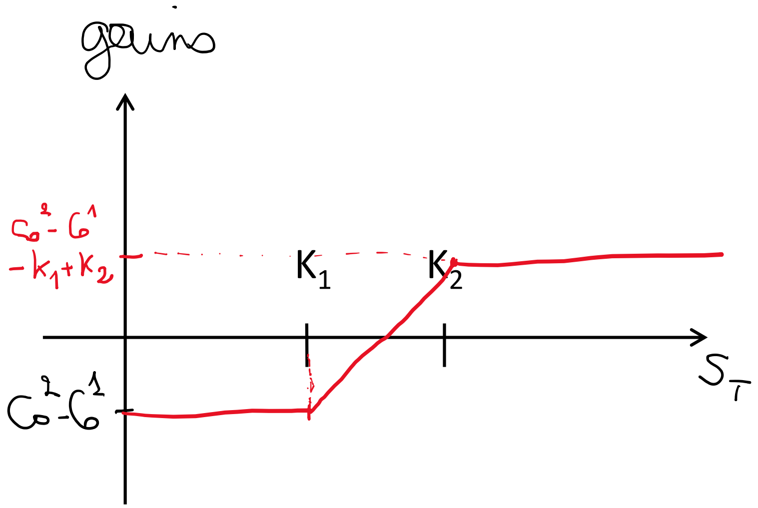
- **Interprétation** : Cette stratégie limite (à l'achat) les pertes à la baisse des cours et les gains à a hausse. → l'acheteur anticipe une hausse modérée du titre.
- **Conséquences de l'AOA :**

$$C_0^2-C_0^1 \leq 0 \text{ si } K_1 \leq K_2 \text{ (déjà vu)}$$

$$C_0^2-C_0^1-K_1+K_2 \geq 0$$

$$C_0^2-C_0^1 \geq K_1-K_2 \text{ ou } C_0^1-C_0^2 \leq K_2-K_1$$

Opération	t=0	t=T
Achat $CALL_1$	$-C_0^1$	$(S_T-K_1)_+$
Vente $CALL_2$	$+C_0^2$	$-(S_T-K_2)_+$
STRADDLE	$C_0^2-C_0^1$	$(S_T-K_1)_+-(S_T-K_2)_+$



BULL PUT SPREAD (écart haussier)

Opération	t=0	t=T
Achat PUT_2	$-P_0^1$	$(K_1-S_T)_+$
Vente PUT_1	$+P_0^2$	$-(K_2-S_T)_+$
BULL PUT SPREAD	$-P_0^1+P_0^2$	$(K_1-S_T)_+-(K_2-S_T)_+$

Un **BULL PUT SPREAD** consiste à acheter un PUT avec prix d'exercice K_1 et à vendre un PUT avec prix d'exercice K_2 sur le même actif sous-jacent, avec les mêmes échéance et prix d'exercice. Avec $K_1 < K_2$

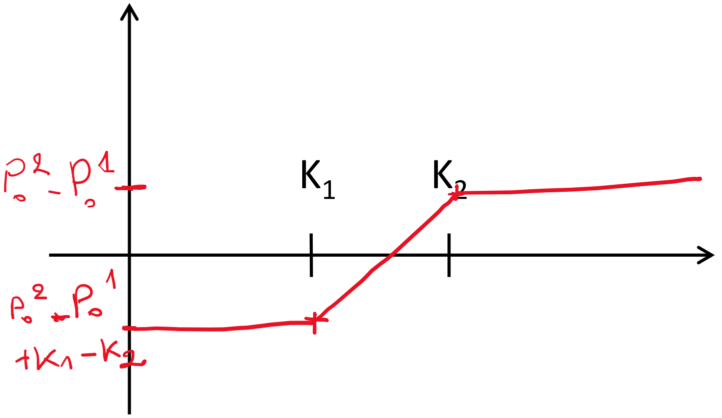
- Gain = $-P_0^1+P_0^2-(K_2-S_T)_+ + (K_1-S_T)_+$
  - Exercice des 2 PUT Si $S_T<K_1<K_2$
  - Exercice du PUT 2, Si $K_1< S_T< K_2$
  - Pas d'exercice des PUT Si $K_1<K_2< S_T$

- **Interprétation** : Cette stratégie limite (à l'achat) les pertes à la baisse des cours et les gains à a hausse. → l'acheteur anticipe une hausse modérée du titre.
- **Conséquences de l'AOA :**

$$P_0^2-P_0^1 \geq 0 \text{ si } K_1 \leq K_2 \text{ (déjà vu)}$$

$$P_0^2-P_0^1+K_1-K_2 \leq 0$$

$$P_0^2-P_0^1 \leq K_2-K_1$$



BOX SPREAD

Combinaison d'un **BULL CALL SPREAD** de prix d'exercices K_1 et K_2 et d'un **BEAR PUT SPREAD** de prix d'exercices K_1 et K_2, sur le même actif sous-jacent, avec les mêmes échéance et prix d'exercice. Avec $K_1 < K_2$

Exercice

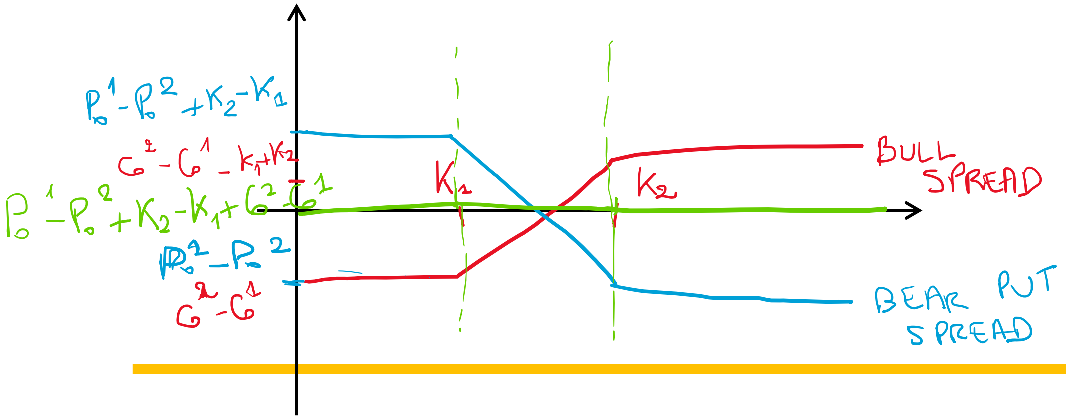
- Dresser le tableau d'investissement d'une telle stratégie
- Donner les valeurs des gains/pertes finaux d'une telle stratégie
- Tracer les graphes des gains/pertes en fonction de la valeur du sous-jacent à l'instant terminal, pour l'acheter et pour le vendeur d'une telle stratégie
- Quel est l'intérêt d'une telle stratégie ?
- QUESTION BONUS : Que pouvez-vous en déduire ?

BOX SPREAD

Combinaison d'un **BULL CALL SPREAD** de prix d'exercices K_1 et K_2 et d'un **BEAR PUT SPREAD** de prix d'exercices K_1 et K_2, sur le même actif sous-jacent, avec les mêmes échéance et prix d'exercice. Avec $K_1 < K_2$

- Gain Total : $C_0^2 - C_0^1 + P_0^1 - P_0^2 + K_2 - K_1 = 0$
- (en réalité attention taux d'intérêt r ≠ 0)

$$C_0^2 - C_0^1 + P_0^1 - P_0^2 + (K_2 - K_1)e^{-rT} = 0$$



Opération	t=0	t=T
Achat $CALL_1$	$-C_0^1$	$(S_T-K_1)_+$
Vente $CALL_2$	$+C_0^2$	$-(S_T-K_2)_+$
BULL CALL SPREAD	$-C_0^1+C_0^2$	$(S_T-K_1)_+-(S_T-K_2)_+$

Opération	t=0	t=T
Achat PUT_2	$-P_0^2$	$(K_2-S_T)_+$
Vente PUT_1	$+P_0^1$	$-(K_1-S_T)_+$
BEAR PUT SPREAD	$-P_0^2+P_0^1$	$(K_2-S_T)_+-(K_1-S_T)_+$

BUTTERFLY/CONDOR SPREAD

Un **BUTTERFLY SPREAD** (ou spread papillon) consiste par exemple à acheter 2 CALL de prix d'exercices K_1 et K_3 , et à vendre 2 CALL de prix d'exercice K_2, sur le même actif sous-jacent, avec la même échéance. Avec $K_1 < K_2 < K_3$

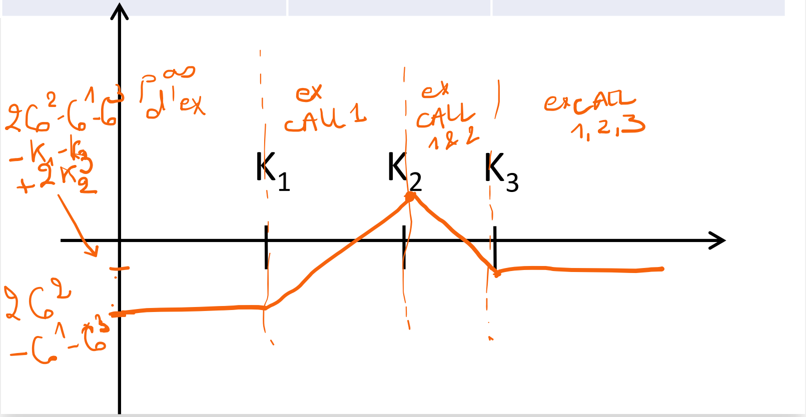
Un **CONDOR SPREAD** consiste par exemple à acheter 2 CALL de prix d'exercices K_1 et K_4 , et à vendre 2 CALL de prix d'exercice K_2 et K_3, sur le même actif sous-jacent, avec la même échéance. Avec $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$

Exercice

- Dresser le tableau d'investissement d'une telle stratégie
- Donner les valeurs des gains/pertes finaux d'une telle stratégie
- Tracer les graphes des gains/pertes en fonction de la valeur du sous-jacent à l'instant terminal, pour l'acheter et pour le vendeur d'une telle stratégie
- Quel est l'intérêt d'une telle stratégie ?

BUTTERFLY SPREAD

Opération	t=0	t=T
Achat $CALL_1$	$-C_0^1$	$(S_T-K_1)_+$
Vente 2 $CALL_2$	$+2C_0^2$	$-2(S_T-K_2)_+$
Achat $CALL_3$	$-C_0^3$	$(S_T-K_3)_+$
Butterfly Spread	$+2C_0^2-C_0^1-C_0^3$	$(S_T-K_1)_+ + (S_T-K_3)_+ - 2(S_T-K_2)_+$



Un **BUTTERFLY SPREAD** (ou spread papillon) consiste par exemple à acheter 2 CALL de prix d'exercices K_1 et K_3 , et à vendre 2 CALL de prix d'exercice K_2, sur le même actif sous-jacent, avec la même échéance. Avec $K_1 < K_2 < K_3$

Gain Total :

$$(S_T-K_1)_+ + (S_T-K_3)_+ - 2(S_T-K_2)_+ + 2C_0^2 - C_0^1 - C_0^3$$

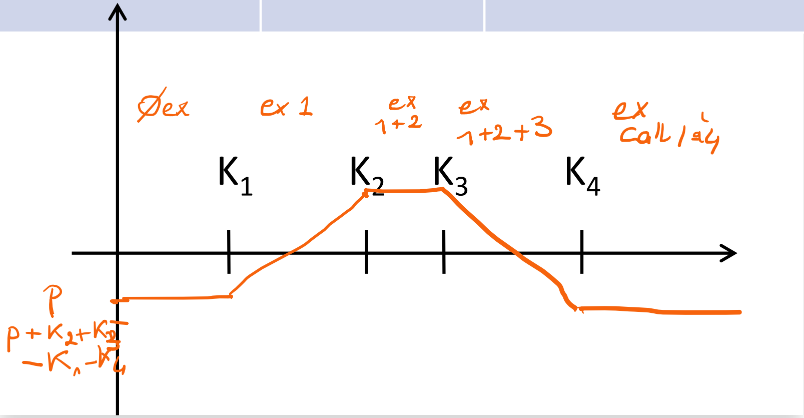
CONDOR SPREAD

Un **CONDOR SPREAD** consiste par exemple à acheter 2 CALL de prix d'exercices K_1 et K_4 , et à vendre 2 CALL de prix d'exercice K_2 et K_3, sur le même actif sous-jacent, avec la même échéance.
Avec $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$

- Gain Total :

$$(S_T-K_1)_+-(S_T-K_2)_+-(S_T-K_3)_++(S_T-K_4)_++C_0^2+C_0^3-C_0^1-C_0^4$$

Opération	t=0	t=T
Achat $CALL_1$	$-C_0^1$	$(S_T-K_1)_+$
Vente $CALL_2$	$+C_0^2$	$-(S_T-K_2)_+$
Vente $CALL_3$	$+C_0^3$	$-(S_T-K_3)_+$
Achat $CALL_4$	$-C_0^4$	$(S_T-K_4)_+$
CONDOR SPREAD	$+C_0^2+C_0^3-C_0^1-C_0^4=p$	$(S_T-K_1)_+-(S_T-K_2)_+-(S_T-K_3)_++(S_T-K_4)_+$



Relations d'arbitrage

- Relations entre les prix des options dû à l'AOA
- Relation de parité CALL-PUT
- Cas des options américaines

Bornes sur les prix d'options

- Les bornes sont des outils précieux, qui peuvent servir pour vérifier qu'un algorithme de valorisation est bien implémenté par exemple.
- Calculs de bornes simples grâce à des raisonnements par arbitrage

Borne sup sur CALL

- **Une option d'achat ne peut jamais valoir plus que l'action sous-jacente S_0**, que l'option soit européenne ou américaine. Aussi,

$$C_0 \leq S_0$$

Preuve : on a vu qu'en AOA, $X_T<Y_T \rightarrow X_t<Y_t$ pour tout t<T

Donc comme $(S_T-K)_+<S_T$ on en déduit $C_0<S_0$

Ou par raisonnement par arbitrage

une opportunité d'arbitrage serait possible en achetant l'action, et en vendant le call

Supposons $C_0>S_0$

On peut construire une OA donc c'est incompatible avec l'AOA.

Donc $C_0 \leq S_0$

Opération	t=0	t=T
Vente CALL	C_0	$-(S_T-K)_+$
Achat sous-jacent S	$-S_0$	S_T
Achat actif sans risque	$-(C_0-S_0)$	$(C_0-S_0)e^{rT}$
Total OA	0	$(C_0-S_0)e^{rT} + S_T - (S_T-K)_+ > 0$

Borne sup sur PUT

- De même, **une option de vente ne peut jamais valoir plus que le strike K**, en particulier, à maturité. On peut en déduire que sa valeur aujourd'hui ne peut pas dépasser la valeur actualisée du strike, i.e.

$$P_0 \leq Ke^{-rT}$$

Preuve : Prenons 2 portefeuilles X et Y définis de la façon suivante :

X = PUT

Y = Placement de Ke^{-rT} dans l'actif sans risque

Et comparons ces 2 portefeuilles :
$X_T \leq Y_T$ car $(K-S_T)_+ \leq K$
Donc $X_0 \leq Y_0$ soit $P_0 \leq Ke^{-rT}$

Opération	t=0	t=T
Portefeuille X	$X_0=P_0$	$X_T=(K-S_T)_+$
Portefeuille Y	$Y_0=Ke^{-rT}$	$Y_T=K$
Comparaison	Donc $X_0 \leq Y_0$ soit $P_0 \leq Ke^{-rT}$	$X_T \leq Y_T$ car $(K-S_T)_+ \leq K$

Borne inf sur CALL

$C_0 \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$

- **Preuve** :

Prenons 2 portefeuilles X et Y définis de la façon suivante :

X =

Y =

Et comparons ces 2 portefeuilles :
$X_T \geq Y_T$ car
Donc $X_0 \geq Y_0$ soit

Opération	t=0	t=T
Portefeuille X		
Portefeuille Y		
Comparaison		

Borne inf sur CALL

$C_0 \geq \max(S_0 - Ke^{-rT}, 0)$

- **Preuve** :

Prenons 2 portefeuilles X et Y définis de la façon suivante :

X = CALL + placement Ke^{-rT}

Y = Sous-jacent

Et comparons ces 2 portefeuilles :
$X_T \geq Y_T$ car $\max(S_T,K) \geq S_T$
Donc $X_0 \geq Y_0$ soit $C_0 + Ke^{-rT} \geq S_0$
ou encore $C_0 \geq S_0 - Ke^{-rT}$

Opération	t=0	t=T
Portefeuille X	C_0+Ke^{-rT}	$(S_T-K)_+ +K$ $=\max(S_T,K)$
Portefeuille Y	S_0	S_T
Comparaison	$X_0 \geq Y_0$	$(S_T-K)_+ +K$ $=\max(S_T,K)$ $\geq S_T$ Soit $X_T \geq Y_T$

Borne inf sur PUT

$P_0 \geq \max(Ke^{-rT} - S_0, 0)$

- **Preuve** :

Prenons 2 portefeuilles X et Y définis de la façon suivante :

X =

Y =

Et comparons ces 2 portefeuilles :
$X_T \geq Y_T$ car
Donc $X_0 \geq Y_0$ soit

Opération	t=0	t=T
Portefeuille X		
Portefeuille Y		
Comparaison		