ISFA- M1
Statistique inférentielle

Fiche de TD n° 3

Exercice.

Aujourd'hui, on va travailler sur la distribution Gamma $\Gamma(\alpha, \theta)$, i.e., de densité égale à

$$f(x) = \frac{x^{\alpha-1}\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\theta x}.$$

1. On va commencer par supposer que α est connu. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance $\hat{\theta}$ de θ.
2. Calculer l'information de Fisher du modèle pour θ.
3. Calculer le biais de $\hat{\theta}$ pour θ.
4. Est-il convergent ?
5. Est-il exhaustif ?
6. Est-il efficace ?
7. Donner sa loi asymptotique.
8. Calculer l'estimateur des moments $\hat{\theta}_M$ de θ.
9. Donner sa loi asymptotique.
10. On suppose maintenant que α est un paramètre inconnu. Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance de (α, θ) existe.
11. Calculer l'estimateur des moments de (α, θ).
12. Donner sa loi asymptotique.

Exercice : Soit $f(x) = \frac{x^{\alpha-1}\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\theta x}$

1) Les hypothèses sont vérifiées.

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{x_i^{\alpha-1}\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\theta x_i} = \frac{\theta^{n\alpha}}{\Gamma(\alpha)^n} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1} e^{-\theta x_i}$$

$$\ln(L) = n\alpha \ln\theta - n\ln(\Gamma(\alpha)) + \sum_{i=1}^{n} (\alpha-1)\ln(x_i) - \theta x_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \theta} = n\alpha \frac{1}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$\hookrightarrow \hat{\theta}$ est tq $n\alpha \frac{1}{\theta} - \sum x_i = 0$

$$\Rightarrow \hat{\theta} = \frac{n\alpha}{\sum x_i} = \frac{\alpha}{\bar{X}_n}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial \theta^2} = -\frac{n\alpha}{\theta^2} < 0$$

Donc $\hat{\theta}$ est bien l'EMV de θ.

2) $$I_n(\theta) = -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \ln L\right] = \frac{n\alpha}{\theta^2} \Rightarrow I(\theta) = \frac{\alpha}{\theta^2}$$

3) $$B_{\hat{\theta}}(\theta) = \mathbb{E}[\hat{\theta}] - \theta$$
$$= \mathbb{E}\left[\frac{\alpha}{\bar{X}_n}\right] - \theta$$
$$= \alpha\, \mathbb{E}\left[\frac{1}{\bar{X}_n}\right] - \theta$$
$$= \alpha n\, \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} X_i}\right] - \theta$$

$$X_i \sim \Gamma(\alpha, \theta) \Rightarrow \sum X_i \sim \Gamma(n\alpha, \theta)$$

Soit $Z = \frac{1}{\sum X_i}$ suit une loi inverse gamma de paramètre $n\alpha, \theta$

$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{\sum X_i}\right] = \frac{\theta}{n\alpha - 1}$$

$$\Rightarrow B_{\hat{\theta}}(\theta) = n\alpha \frac{\theta}{n\alpha-1} - \theta = \frac{\theta}{n\alpha - 1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Donc asympt sans biais.

4) Convergent : $V(\hat{\theta}) \longrightarrow 0$ $\qquad Y = \sum X_i$

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n^2] = (n\alpha)^2\, \mathbb{E}\left[\frac{1}{Y^2}\right] = (n\alpha)^2 \int \frac{1}{y^2}\, \frac{y^{n\alpha-1}\theta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} e^{-\theta y}\, dy$$

$$= (n\alpha)^2 \int \frac{y^{n\alpha-3}\theta^{n\alpha}}{\Gamma(n\alpha)} e^{-\theta y}\, dy$$

$$= \frac{(n\alpha)^2\theta^2}{(n\alpha-1)(n\alpha-2)} \int \frac{y^{n\alpha-3}\theta^{n\alpha-2}}{\Gamma(n\alpha-2)} e^{-\theta y}\, dy$$

$$= \frac{(n\alpha)^2\theta^2}{(n\alpha-1)(n\alpha-2)}$$

$$\Rightarrow V(\hat{\theta}_n) = \mathbb{E}[\hat{\theta}_n^2] - \mathbb{E}[\hat{\theta}_n]^2$$

$$= \frac{(n\alpha)^2\theta^2}{(n\alpha-1)(n\alpha-2)} - \frac{(n\alpha)^2\theta^2}{(n\alpha-1)^2} = \frac{(n\alpha)^2\theta^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)} \xrightarrow[\infty]{} 0$$

Donc $\hat{\theta}_n$ convergent pour θ.

5) Exhaustivité :

$$L = \theta^{n\alpha}\, \Gamma(\alpha)^{-n} \left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}\right) e^{-\theta \sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$= \underbrace{\Gamma(\alpha)\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}\right)}_{\psi(x_1,\dots,x_n)}\ \underbrace{\theta^{n\alpha} e^{-n\alpha\theta\hat{\theta}_n^{-1}}}_{\varphi(\theta,\hat{\theta}_n)} \Rightarrow \hat{\theta}_n \text{ exhaustif pour } \theta.$$

In format° : $I_n(\theta) = \mathbb{E}\left[\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L\right)^2\right] = V\left(\frac{\partial}{\partial\theta}\ln L\right)$

$$\overset{(H4')}{=} -\mathbb{E}\left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\ln L\right] = -\mathbb{E}\left[-\frac{n\alpha}{\theta^2}\right] = \frac{n\alpha}{\theta^2}$$

6) Efficacité :

Rappel : Si T_n tq $\mathbb{E}[T_n] = g(\theta)$ alors T_n efficace si $V(T_n) = \frac{(g'(\theta))^2}{I_n(\theta)} = K_{T_n}(\theta)$

Ici, on a

$$\mathbb{E}[\hat{\theta}_n] = \frac{n\alpha}{n\alpha-1}\theta \Longrightarrow g'(\theta) = \frac{n\alpha}{n\alpha-1}$$

$$K_{\hat{\theta}_n}(\theta) = \frac{\left(\frac{n\alpha}{n\alpha-1}\right)^2}{\frac{n\alpha}{\theta^2}} = \frac{\theta^2 n\alpha}{(n\alpha-1)^2}$$

$$V(\hat{\theta}_n) = \frac{(n\alpha)^2\theta^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)} \neq K_{\hat{\theta}_n}(\theta)$$

$$\frac{V(\hat{\theta}_n)}{K_{\hat{\theta}_n}(\theta)} = \frac{(n\alpha)^2\theta^2}{(n\alpha-1)^2(n\alpha-2)} \times \frac{(n\alpha-1)^2}{\theta^2 n\alpha} = \frac{n\alpha}{n\alpha-2} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1.$$

$\Longrightarrow \hat{\theta}_n$ est asympt efficace pour θ.

7) Loi asymptotique

Rappel : Si $\hat{\theta}_n$ est l'EMV de θ et on a (H1) à (H7) alors,

$$\hat{\theta}_n \xrightarrow{ps} \theta$$

et

$$\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I^{-1}(\theta))$$

Ici, $I_n(\theta) = \frac{n\alpha}{\theta^2} \Longrightarrow I(\theta) = \frac{\alpha}{\theta^2}$

Donc $\sqrt{n}(\hat{\theta}_n - \theta) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{\alpha}\right)$.

7.bis) Intervalle de confiance asymptotique de niveau $1-\alpha$ pour θ.

On part de $\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{I_n^{-1}(\theta)}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$

On remplace par un estimateur convergent et on encadre θ.

Idée

Ici, on a

$$\sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}_n - \theta}{\sqrt{\theta^2/\alpha}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

$\sqrt{I^{-1}(\theta)}$

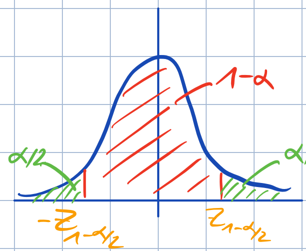
On a $\hat{\theta}_n \xrightarrow{\mathbb{P}} \theta$

donc $\frac{\theta}{\hat{\theta}_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$

Donc par Slutsky, $\sqrt{n}\,\dfrac{\hat{\theta}_n-\theta}{\sqrt{\hat{\theta}_n^2/\alpha}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$. $\sqrt{\hat{\theta}_n^2/\alpha}$ — $\sqrt{I^{-1}(\hat{\theta}_n)}$

Slutsky : Si $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 1$ alors $X_n Y_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$.

Si $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$



$\mathbb{P}(-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = 1-\alpha$.

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\left(-z_{1-\frac{\alpha}{2}} \leq \sqrt{n}\,\frac{\hat{\theta}_n-\theta}{\sqrt{\hat{\theta}_n^2/\alpha}} \leq z_{1-\frac{\alpha}{2}}\right) \longrightarrow 1-\alpha.$$

$$\Longrightarrow \mathbb{P}\Bigg(\underbrace{\hat{\theta}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n^2}{n\alpha}}}_{\hat{\theta}_n - z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{I^{-1}(\hat{\theta}_n)}{n}}} \leq \theta \leq \underbrace{\hat{\theta}_n + z_{1-\alpha}\sqrt{\frac{\hat{\theta}_n^2}{n\alpha}}}_{\hat{\theta}_n + z_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{I^{-1}(\hat{\theta}_n)}{n}}}\Bigg) \longrightarrow 1-\alpha.$$

7. b) Construire un test unif. le plus puissant pour tester $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$.

Si T_n exhaustive de vraisemblance g tq $\dfrac{g(t,\theta)}{g(t,\theta_0)}$ $\left(\dfrac{L(x_1,\dots,x_n,\theta)}{L(x_1,\dots,x_n,\theta_0)}\right)$ est croissante en t ou decroissante en t

Alors le test est basé sur la région de rejet $\{T_n > k_\alpha\}$ $\{T_n < k_\alpha\}$ est unif plus puissant (upp) pour tester $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$ ou $H_1 : \theta < \theta_0$

Ici on veut tester $H_0 : \theta = \theta_0$ contre $H_1 : \theta > \theta_0$

On a $L(x_1,\dots,x_n,\theta) = \Gamma(\alpha)^{-n}\,\theta^{n\alpha}\left(\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha-1}\right)e^{-\theta\sum_{i=1}^n x_i}$

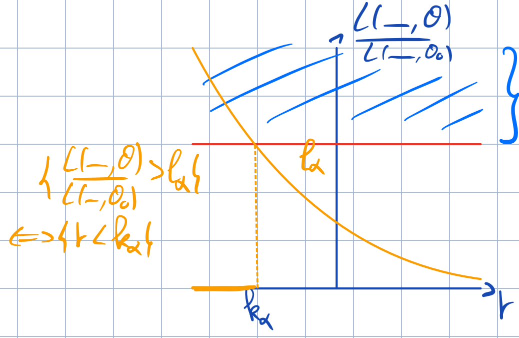
$$\Longrightarrow \frac{L(x_1,\dots,x_n,\theta)}{L(x_1,\dots,x_n,\theta_0)} = \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{n\alpha} e^{-(\theta-\theta_0)\sum_{i=1}^n x_i}$$

$$= \left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^{n\alpha} e^{-\underbrace{(\theta-\theta_0)}_{>0}t} \quad \searrow \text{ en } t. \text{ On pose } t = \sum_{i=1}^n x_i$$

et $T_n = \sum_{i=1}^n X_i$ est une stat exhaustive pour θ.

Idée : Quand on fait un test basé sur $\dfrac{L(\_,\theta)}{L(\_,\theta_0)}$, on rejette si $\dfrac{L(\_,\theta)}{L(\_,\theta_0)}$ devient trop grand

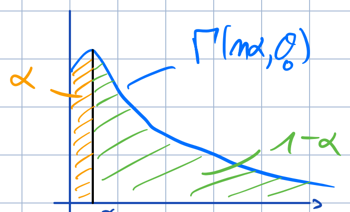
i.e si $\dfrac{L(\_,\theta)}{L(\_,\theta_0)} > \ell_\alpha$



$\Big\} \ \frac{L(\_,\theta)}{L(\_,\theta_0)} > \ell_\alpha \Rightarrow$ On rejette H_0

On rejette H_0 si $r < k_\alpha$

On veut que $\mathbb{P}($on rejette H_0 alors que H_0 est vraie$) = \alpha$ i.e $\mathbb{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < k_\alpha\right) = \alpha$



On rejette H_0 si $r = \sum x_i$

Attention $\alpha \neq \alpha$ i.e il faut différencier le paramètre α de la loi gamma et le α de test...

$\gamma^{\alpha}_{n\alpha,\theta_0}$ = quantile d'ordre α d'une $\Gamma(n\alpha, \theta_0)$

Rappel : On observe $k_a = \sum_{i=1}^{n} x_i$

Si $k_a < \gamma^{\alpha}_{n\alpha,\theta_0} \Longrightarrow$ on rejette H_0.

La p.value vaut $\mathbb{P}_{\theta_0}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i < k_m\right)$

Si $k_a < \gamma_{n\alpha,\theta}$ alors la p.value $< \alpha \Longrightarrow$ on rejette H_0

Si $k_a > \gamma_{n\alpha,\theta}$ alors la p.value $> \alpha \Longrightarrow$ on accepte H_0.

8) Estimateur des moments

1 dimension $\Rightarrow \mathbb{E}[X_i] = \overline{X}_n$

$$\Longrightarrow \frac{\alpha}{\hat{\theta}_M} = \overline{X}_n \Longrightarrow \hat{\theta}_M = \frac{\alpha}{\overline{X}_n}$$

9) On applique le TCL à $X_1, \_, X_n$ i.e

$$\sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{V(X_1)}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Longrightarrow \sqrt{n}\left(\frac{\overline{X}_n - \alpha/\theta}{\sqrt{\alpha\theta^{-2}}}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$$

$\frac{1}{\hat{\theta}_n^{MV}} = \overline{X}_n \Longrightarrow \hat{\theta}_n^{MV} = \frac{1}{\overline{X}_n}$

Normalité asympt. de $\hat{\theta}_n^{MV}$?

On applique le TCL à $X_1, \_, X_n$ i.e

$$\sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \mathbb{E}[X_1]}{\sqrt{V(X_1)}} \longrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

$\Longrightarrow \sqrt{n}\,\frac{\overline{X}_n - \frac{1}{\theta}}{} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1)$ dans l'écriture de

T_n $\sqrt{1/\theta^2}$ θ 2 $\sigma^2(\theta)$ la méthode Delta.

$$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{1}{\theta}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^{-2})$$

On va appliquer la méthode Delta au TCL avec $g(x) = \frac{1}{x}$.

On a $g(\overline{X}_n) = \frac{1}{\overline{X}_n} = \hat{\theta}_n^{MM}$; $g(\frac{1}{\theta}) = \theta$; $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$ $(g'(\frac{1}{\theta}))^2 = \theta^4$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\left(g(\overline{X}_n) - g(\tfrac{1}{\theta})\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \theta^{-2}(g'(\tfrac{1}{\theta}))^2\right)$$

$$\rightarrow \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n^{MM} - \theta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \theta^2)$$

On obtient bien le même résultat que le max de vraisemblance (car dans ce cas, on a $\hat{\theta}_n^{MV} = \hat{\theta}_n^{MM}$)

$$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\overline{X}_n - \frac{\alpha}{\theta}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \alpha\theta^{-2})$$

On va appliquer la méthode Delta au TCL avec $g : x \mapsto \frac{\alpha}{x}$

On a $g(\overline{X}_n) = \frac{\alpha}{\overline{X}_n} = \hat{\theta}_M$; $g\left(\frac{\alpha}{\theta}\right) = \frac{1}{\theta}$

$g'(x) = -\frac{\alpha}{x^2}$; $\left(g'\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right)^2 = \frac{\theta^4}{\alpha^2}$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\left(g(\overline{X}_n) - g\left(\frac{\alpha}{\theta}\right)\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\Big(0, \underbrace{\alpha\theta^{-2}(g'(\alpha\theta))^2}_{\alpha\theta^{-2}\frac{\theta^4}{\alpha^2}}\Big)$$

$$\Rightarrow \sqrt{n}\left(\hat{\theta}_M - \theta\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}\left(0, \frac{\theta^2}{\alpha}\right)$$

Même résultat que l'EMV car $\hat{\theta}_n = \hat{\theta}_M$

10) On suppose maintenant que α est inconnu.

Montrer que l'EMV pour (α, θ) existe.

Soit $f : x \mapsto \frac{x^{\alpha-1}\theta^{\alpha}}{\Gamma(\alpha)} e^{-\theta x}$

Les hypothèses sont vérifiées.

$$L = \theta^{n\alpha}\Gamma(\alpha)^{-n}\left(\prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1}\right) e^{-\theta\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

$$\ln L = n\alpha \ln\theta - n\ln\Gamma(\alpha) + \sum_{i=1}^{n}(\alpha-1)\ln x_i - \theta\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\theta} = \frac{n\alpha}{\theta} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial\alpha} = n\ln\theta - n\frac{\Gamma'(\alpha)}{\Gamma(\alpha)} + \sum \ln(x_i)$$

L'EMV $(\hat{\alpha}_n, \hat{\theta}_n)$ est tq $\begin{cases} n\ln\hat{\theta}_n - n\frac{\Gamma'(\hat{\alpha}_n)}{\Gamma(\hat{\alpha}_n)} + \sum\ln(x_i) = 0 \\ \frac{n\hat{\alpha}_n}{\hat{\theta}_n} - \sum X_i = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow \hat{\theta}_n = \frac{n\hat{\alpha}_n}{\sum X_i}$

On a (sûrement la solut° en α à $x_1, \dots, x_n$ fixés)

Pb : On n'a pas de formules explicites pour les estimateurs mais on peut avoir des estimations quand on observe $x_1, \dots, x_n$. On peut aussi avoir "facilement" la normalité asympt en calculant

$$I_n(\theta) = -\mathbb{E}\begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} & \frac{\partial^2}{\partial\alpha\partial\theta} \\ & \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \end{pmatrix} \text{ et } \sqrt{n}\left(\begin{pmatrix}\hat{\alpha}_n \\ \hat{\theta}_n\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\alpha \\ \theta\end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, I^{-1}(\theta))$$

11) Dimension 2 :

$$\begin{cases} \mathbb{E}[X_i] = \overline{X_n} \\ \mathbb{E}[X_i^2] = \overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{\hat{\alpha}_M}{\hat{\theta}_M} = \overline{X_n} \\ \dfrac{\hat{\alpha}_M}{\hat{\theta}_M^2} = \overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2 \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \hat{\theta}_M = \frac{\overline{X_n}}{\overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2}$$

$$\Longrightarrow \hat{\alpha}_M = \frac{\overline{X_n}^2}{\overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2}$$

Donc l'estimateur des moments de (α, θ) est $\left(\hat{\alpha}_M = \dfrac{\overline{X_n}^2}{\overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2}, \hat{\theta}_M = \dfrac{\overline{X_n}}{\overline{X_n^2} - \overline{X_n}^2}\right)$.

12) On applique le TCL bidimensionnel à $X_1, \dots, X_n$

$$\sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \overline{X_n} \\ \overline{X_n^2} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \mathbb{E}[X] \\ \mathbb{E}[X^2] \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \Sigma)$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \overset{k/\theta^2}{\overset{\shortparallel}{V(X)}} & Cov(X, X^2) \\ Cov(X^2, X) & V(X^2) \end{pmatrix}$$

On prend la fonct° $g : (x,y) \mapsto \left(\dfrac{x^2}{y - x^2}, \dfrac{x}{y - x^2}\right)$

avec $g\left(\dfrac{\alpha}{\theta}, \dfrac{\alpha(\alpha+1)}{\theta^2}\right) = (\alpha, \theta)$

$$g\left(\overline{X_n}, \overline{X_n^2}\right) = (\hat{\alpha}_M, \hat{\theta}_M)$$

On applique la méthode Delta au TCL bidim appliqué à g.

$$\sqrt{n}\left(g\begin{pmatrix} \overline{X_n} \\ \overline{X_n^2} \end{pmatrix} - g\begin{pmatrix} \alpha/\theta \\ \frac{\alpha(\alpha+1)}{\theta^2} \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, D_g \Sigma D_g')$$

$$\Longrightarrow \sqrt{n}\left(\begin{pmatrix} \hat{\alpha}_M \\ \hat{\theta}_M \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \alpha \\ \theta \end{pmatrix}\right) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, D_g \Sigma D_g')$$

matrice Jacobienne de g calculée en $(\alpha/\theta, \alpha(\alpha+1)/\theta^2)$

<u>Conclusion</u> :

L'estimateur des moments a une formule explicite mais difficile d'obtenir la normalité asympt.