mathan.quiblier@inria.fr

Economie de l'assurance
Information symétrique

Exercices

Exercice 1 : Assurance en information parfaite

Un individu dispose d'une richesse initiale w et d'une propriété sujette à un risque d'incendie, de valeur L. Pour se protéger contre ce risque l'individu peut souscrire une police d'assurance. L'assureur et l'individu ont le même à priori sur la probabilité d'incendie, notée p et supposée indépendante de l'effort de l'individu. L'individu peut décider du niveau de couverture q, c'est-à-dire le montant qu'il décide d'assurer. L'assureur demande une prime d'assurance x, et s'engage à indemniser l'assurer à hauteur de q en cas d'incendie.

On note $\pi(q, x, p)$ la fonction objectif de l'assureur supposé neutre vis-à-vis du risque et $u(w)$ la fonction d'utilité de l'individu.

1. Quelle est l'utilité de réserve de l'individu ?
2. Calculer le contrat Optimal (q^*, x^*) qui serait offert par l'assureur à un agent ayant une aversion pour le risque ?
3. Combien coûtera la prime x :
   (a) si l'individu est neutre vis-à-vis du risque ?
   (b) s'il y a concurrence pure et parfaite sur le marché de l'assurance ?
4. Montrer que si l'assureur et l'individu sont tous les deux averses au risque, ils signeront un contrat de coassurance (i.e. $q^* < L$).

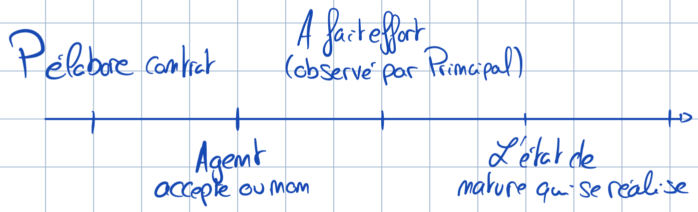
Exercice 2 : Relation d'emploi

Un agent exerce une activité professionnelle pour le compte d'un principal. Le résultat de la tâche qui lui est confiée peut être un succès (état de la nature S) ou un échec (état de la nature E). Le résultat dépend du niveau d'effort fourni par l'agent, e, et d'un évènement aléatoire. L'agent reçoit un salaire (w_s ou w_e) et subit un coût d'effort noté $v(e)$. Le résultat dont bénéficie le principal est x_s avec une probabilité de $p_s(e)$ et x_E avec une probabilité complémentaire $p_E(e)$.

Les fonction d'utilité de Von Neumann-Morgenstern (VNM) des deux joueurs sont notées $B(.)$ et $u(.)$. L'utilité de réserve de l'agent est normalisée (=0).

1. On suppose que le principal veut obtenir l'effort e_0. Ecrire le contrat optimal proposé par le principal lorsque :
   (a) l'agent est averse au risque et le principal neutre.
   (b) l'agent est neutre au risque et le principal averse.
2. Quel serait le résultat si l'agent est le principal était tous les deux averses au risque ?
3. Quelle hypothèse faudrait-il ajouter pour que le principal se trouve confronté à un problème :
   (a) d'aléa moral ?
   (b) de sélection adverse ?

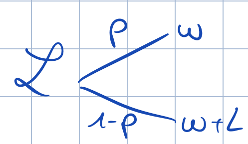
Relation Principal - Agent :



Exercice 1 :

1) L'utilité de réserve de l'agent correspond à son niveau d'utilité dans le cas où il ne souscrit aucun contrat d'assurance.

On peut représenter la situation de l'énoncé tq



$$\Longrightarrow \bar{u} = pu(w) + (1-p)\,u(w+L)$$

2) L'agent est averse au risque : sa fonction d'utilité est concave $(u'>0,\ u''<0)$

L'assureur va chercher à maximiser son profit sous contrainte de participation de l'agent.

Profit de l'assureur :

$$\Pi(q,x,p) = p(x-q) + (1-q)x$$
$$= x - pq$$

La contrainte du participation de l'agent est telle que :

$$u = pu(w-x+q) + (1-p)\,u(w-x+L) \geq \bar{u}$$

Soit le programme d'optimisation suivant :

$$\text{Max } \Pi = x - pq$$
$$\text{s.c } u \geq \bar{u}$$

On écrit le Lagrangien :

$$\mathcal{L}(\lambda, q, x) = x - pq + \lambda\left[pu(w-x+q) + (1-p)\,u(w-x+L) - \bar{u}\right]$$

Conditions KKT et on résout :

① $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \iff 1 - \lambda p u'(w+q-x) - (1-p)\lambda u'(w+L-x) = 0$

② $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 \iff -p + \lambda p u'(w+q-x) = 0$

③ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff pu(w-x+q) + (1-p)u(w-x+L) - \bar{u} = 0$

(1) et (2) $\iff \lambda \overset{(1)}{=} \frac{1}{pu'(w-x+q)+(1-p)u'(w-x+L)}$

$\overset{(2)}{=} \frac{1}{u'(w+q-x)}$

$\iff pu'(w-x+q) + (1-p)u'(w-x+L) = u'(w+q-x)$

$\iff u'(w-x+q) = u'(w-x+L)$

$\iff q^* = L$ car fonction monotone

En d'autres termes, la couverture optimale = couverture complète

(3) $\iff u(w+L-x^*) = \bar{u} \implies x^* = w+L-u^{-1}(\bar{u})$

↳ Prime d'assurance fixe

$\implies$ propriété du cours : assureur neutre vis-à-vis du risque + agent averse au risque : prime fixe + couv. complète.

3) a) Agent neutre au risque : $u' > 0$ et $u'' = 0$

$$\mathbb{E}[u(x)] = u(\mathbb{E}[x])$$

Le programme devient :

$$\max \; x - pq$$
$$\text{s.c } \underbrace{pu(w-x+q)+(1-p)u(w-x+L) \geq \bar{u}}_{\iff pu(w-x+q)+(1-p)u(w-x+L) \geq pu(w)+(1-p)u(w+L)}$$

On applique $u(\mathbb{E}[x]) = \mathbb{E}[u(x)]$

$\iff u(p(w-x+q)+(1-p)(w-x+L)) \geq u(p(w)+(1-p)(w+L))$

$\iff u(w-x+pq+(1-p)L) \geq u((1-p)L+w)$

et puisque u est ↗ monotone (hypothèse de non satiété).

$\iff w - x + pq + (1-p)L \geq w + (1-p)L$

$\iff pq \geq x \longrightarrow$ Soit la contrainte de participation de l'agent.

Le problème devient $\max\limits_{\text{s.c } pq \geq x} x - pq$

$\Rightarrow x^* = pq$

b) Situation de CPP (Concurrence pure et parfaite) $\Rightarrow$ On a un prix qui vaut le coût marginal et l'assureur qui ne fait pas de profit $(\Pi = 0)$

$\Rightarrow$ Soit $x = pq$

Donc $x^* = pq^*$ (avec $q^* = L$ car agent averse).

4) On note $B(\cdot)$ la fonction d'utilité de l'assureur.

On a : $u' > 0$ et $u'' < 0$

$B' > 0$ et $B'' < 0$

On réécrit le programme :

$$\max (1-p)B(x) + pB(x-q)$$
$$\text{s.c } pu(w-x+q) + (1-p)u(w-x+L) \geq \bar{u}$$

$$\mathcal{L}(q,x,\lambda) = (1-p)B(x) + pB(x-q) + \lambda\left(pu(w-x+q) + (1-p)u(w-x+L) - \bar{u}\right)$$

Conditions KKT :

① $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = (1-p)B'(x) + pB'(x-q) + \lambda[pu'(w-x+q) + (1-p)u'(w-x+L)] = 0$

② $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -pB'(x-q) - \lambda p u'(w-x+q) = 0$

③ $\dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = pu(w-x+q) + (1-p)u(w-x+L) - \bar{u} = 0$

① et ② $\iff \lambda \overset{(1)}{=} -\dfrac{(1-p)B'(x) - pB'(x-q)}{pu'(w-x+q) + (1-p)u'(w-x+L)}$

$\lambda \overset{(2)}{=} \dfrac{-pB'(x-q)}{pu'(w-x+q)}$

$$\Rightarrow \frac{(\cancel{1-p})B'(x) + \cancel{pB'(x-q)}}{B'(x-q)} = \frac{p\cancel{u'(w+q-x)} + (\cancel{1-p})u'(w-x+L)}{u'(w-x+q)}$$

$$\Rightarrow \frac{B'(x)}{B'(x-q)} = \frac{u'(w-x+L)}{u'(w-x+q)} \qquad \text{(Arrow Pratt)}$$

On retrouve au numérateur : les utilités marginales des 2 acteurs dans le cas "pas de sinistre", et au dénominateur : les utilités marginales dans le cas "avec sinistre"

$\Rightarrow$ Condition d'Arrow Pratt : égalité des utilités marginales relatives des 2 acteurs
↳ Partage du risque.

Or $\frac{B'(x)}{B'(x-q)} < 1$ — On sait que $B'>0$ et $B''<0 \Leftrightarrow B'(\cdot)$ monotone ↘
$\longrightarrow x > x-q$ car couv non négative ni nulle)

Donc $\frac{u'(w+L-x)}{u'(w+q-x)} < 1 \Leftrightarrow u'(w+L-x) < u'(w+q-x)$

$\Leftrightarrow u(w-x+L) > u(w+q-x)$

$\Leftrightarrow q^* < L$

$\Rightarrow$ Lorsque les 2 acteurs sont averses au risque, ils partagent le risque.

D'où le fait que la couverture soit incomplète.

Exercice 2 :

1) On cherche à maximiser le profit

$$\max \Pi(e, w_s, w_p) = p_s(e)B(x_s - w_s) + p_E(e)B(x_E - w_E)$$

$$\text{s.c } p_s(e)u(w_s) + p_E(e)u(w_E) - V_E \geq 0$$

$$\mathcal{L}(w_E, w_s, \lambda) = p_s(e)B(x_s - w_s) + p_E(e)B(x_E - w_E) + \lambda[p_s(e)u(w_s) + p_E(e)u(w_E) - V(e)]$$

Conditions KKT :

① $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_s} = 0 \Leftrightarrow \lambda(p_s(e)u'(w_s)) - p_s(e)B'(x_s - w_s) = 0$

② $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_E} = 0 \Leftrightarrow \lambda(p_E(e)u'(w_E)) - p_E(e)B'(x_E - w_E) = 0$

③ $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \iff P_S(e)\,u(w_S) + P_E(e)\,u(w_E) - V(e) = 0$

① et ② $\Rightarrow \lambda = \frac{P_S(e)\,B'(x_S - w_S)}{P_S(e)\,u'(w_S)} = \frac{P_E(e)\,B'(x_E - w_E)}{P_E(e)\,u'(w_E)}$

$\iff \frac{B'(x_S - w_S)}{u'(w_S)} = \frac{B'(x_E - w_E)}{u'(w_E)}$

$\iff \frac{B'(x_S - w_S)}{B'(x_E - w_E)} = \frac{u'(w_S)}{u'(w_E)}$

On retrouve l'égalité d'Arrow-Pratt (égalité des utilités marginales des 2 acteurs)

Dans le cas a) on a principal neutre vis-à-vis du risque $\Rightarrow B'' = 0 \Rightarrow B' = \text{cte}$

$\hookrightarrow \frac{B'(x_S - w_S)}{B'(x_E - w_E)} = 1 \iff \frac{u'(w_S)}{u'(w_E)} = 1$

Donc $u'(w_E) = u'(w_S)$

Comme $u(\cdot)$ est $\searrow$ (monotone), on peut dire que $w_E = w_S$

En d'autres termes, le principal, neutre vis-à-vis du risque, supporte tout le "risque" en offrant un revenu constant quelque soit l'état de nature.

b) Cette fois $\frac{u'(w_S)}{u'(w_E)} = 1$

Rq : ⚠ c'est $\neq$ ici car on a des propriétés $\neq$tes sur la fonction d'utilité ($u'' = 0$)

Donc $\frac{B'(x_S - w_S)}{B'(x_E - w_E)} = 1 \iff B'(x_S - w_S) = B'(x_E - w_E)$

Comme B' monotone $\searrow$: $x_S - w_S = x_E - w_E \iff w_S = x_S - x_E + w_E$

$\iff w_S > w_E$

c'est l'agent qui supporte le risque.

2) On repart de l'égalité d'Arrow Pratt :

$$\frac{B'(x_S - w_S)}{B'(x_E - w_E)} = \frac{u'(w_S)}{u'(w_E)} < 1$$

* Pour le principal : $B'(x_S - w_S) < B'(x_E - w_E)$

Puisque $B'(\cdot)$ est monotone ↘ : $x_S - w_S > x_E - w_E$

* Pour l'agent : $u'(w_S) < u'(w_E)$ avec $u'(\cdot)$ monotone ↘ $w_S > w_E$

$\Rightarrow$ Partage du risque

3) a) Problème d'asymétrie d'information

↳ Cas où l'employeur ne peut pas observer l'effort de l'agent

b) Problème d'asymétrie d'information :

↳ Cas où l'employeur n'observe pas le "type" de l'agent.