Exercices Modèle de Black et Scholes

Exercice 1 On appelle CALL digital (ou binaire) de prix d'exercice K et d'échéance T sur un sous-jacent S, une option européenne dont le payoff à l'échéance est $\mathbb{1}_{S_T \geq K}$. La dynamique de S (sous la probabilité historique $\mathbb{P}$) est donnée par

$$dS_t = S_t(dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x,$$

où $x > 0$, $\sigma > 0$ et W est un mouvement brownien. On note r est le taux sans risque.

1. Exprimer le prix de cette option à l'instant t comme espérance sous la probabilité risque-neutre, puis calculer le prix à l'instant t de cette option.
2. Déterminer la couverture à $t = 0$ du CALL digital.
3. Ecrire le prix de cette option sous la forme $e^{rt} f(t, \tilde{S}_t)$ où $\tilde{S}_t$ est la valeur actualisée de S_t. Montrer que $(f(t, \tilde{S}_t))_{t \geq 0}$ est une martingale sous la probabilité risque-neutre. Ecrire la formule d'Itô pour f et en déduire une EDP vérifiée par f.

Exercice 2 *(Option sur minimum de 2 actifs : Modèle de Stulz (1982))*
On se place sous les hypothèses de marché du modèle de Black et Scholes. On considère 2 actions S et U, dont les évolutions au cours du temps sont définies, sous la probabilité risque neutre $\mathbb{P}$, par :

$$dS_t = S_t(rdt + \sigma_S dW_t), \; S_0 = x \tag{1}$$

$$dU_t = U_t(rdt + \sigma_U dW'_t), \; U_0 = x \tag{2}$$

où r est le taux sans risque, $x > 0$ la valeur initiale (identique) des deux actions, et W et W' sont deux mouvements Browniens corrélés tels que :

$$W_t = \frac{1}{2} W'_t + \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{W}_t$$

avec $\bar{W}_t$ un mouvement Brownien indépendant de W'.
On considère une option européenne d'échéance T et de payoff portant sur le minimum des 2 actifs S et U :

$$\xi = (\min(S_T, U_T) - K)_+$$

Partie A : Préliminaires

1. Justifier que $\forall t \in [0, T]$, le vecteur (W_t, W'_t) est un vecteur gaussien, dont on donnera les paramètres.
2. Quel est le domaine d'exercice de cette option ? L'écrire comme intersection de deux ensemble disjoints. *(Un schéma est le bienvenu)*
3. Ecrire la prime C de cette option à l'instant 0 comme espérance sous la probabilité risque-neutre.
4. Donner les expressions des solutions des EDS (1) et (2).

Partie B : Calcul de la prime Le but de cette partie est de pricer cette option, c'est-à-dire d'exprimer sa prime en fonction de x, r, K, T et de la fonction de répartition d'un vecteur gaussien de dimension 2, par une méthode de changement de probabilité semblable à celle utilisée pour obtenir la formule de Black et Scholes.
(Rappel : si (X, Y) est un vecteur gaussien de dimension 2 tel que X et Y sont des variables aléatoires $\mathcal{N}(0,1)$ et Cov $(X,Y) = \alpha$, on notera $\mathbb{P}(X \leq x, Y \leq y) = \mathcal{N}_2(x, y, \alpha)$ la fonction de répartition de ce vecteur gaussien).

1. Calculer $\mathbb{E}\left(1\!\!1_{\{S_T \geq K\} \cap \{U_T \geq K\}}\right)$
2. On veut maintenant calculer $\mathbb{E}\left(U_T 1\!\!1_{K \leq U_T \leq S_T}\right)$ grâce à un changement de probabilité.
   (a) Appliquer la formule d'Itô à $f(S_t, U_t) = \frac{U_t}{S_t} = X_t$.
   (b) Ecrire le changement de probabilité $\mathbb{P}^*$ et le changement du Brownien W'_t en W^*_t qui permettent d'écrire $\mathbb{E}\left(U_T 1\!\!1_{K \leq U_T \leq S_T}\right)$ comme probabilité d'un évènement.
   (c) Montrer que sous cette nouvelle probabilité $\mathbb{P}^*$, X_t suit une dynamique qui s'écrit
   $$dX_t = X_t(\sigma^2 dt + \sigma dZ_t)$$
   où Z_t est un mouvement Brownien (on pourra construire Z en exprimant dans un premier temps σZ_t en fonction de W^*_t et $\bar{W}_t$, puis calculer la variance de ce processus, et en déduire la valeur de σ que l'on exprimera en fonction de σ_S et σ_U, pour que Z soit bien un mouvement Brownien).
   (d) Exprimer la probabilité cherchée en fonction de U et de X, puis en fonction de W' et Z.
   (e) En déduire l'espérance voulue en fonction de $\sigma_S, \sigma_U, \sigma$, T et la fonction de répartition d'un vecteur gaussien de dimension 2.
3. Calculer de manière identique $\mathbb{E}\left(S_T 1\!\!1_{K \leq S_T \leq U_T}\right)$.
4. Conclure en donnant la formule d'évaluation de cette option et en récapitulant tous les paramètres qui y apparaissent.

Problème : Modèle de Merton d'évaluation d'options versant des dividendes

On considère un marché, fonctionnant en temps continu, à horizon fini, dans lequel 2 actifs sont négociés. L'un des actifs est risqué (une action, dont le prix à l'instant t est noté S_t), l'autre est sans risque (le taux d'intérêt sans risque est noté r). L'incertitude est modélisée par un espace probabilisé filtré $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{F}, \mathrm{P})$. L'action sert de sous-jacent à un call européen de prix d'exercice K et de maturité T. Les hypothèses sont les mêmes que dans le modèle de Black et Scholes (marché sans frictions, taux d'intérêt constants, absence d'opportunités d'arbitrage), sauf qu'ici l'action verse des dividendes sur $[0, T]$. Le **taux** de dividende est noté q et supposé constant (i.e entre t et $t + dt$, l'action verse comme dividendes $qS_t dt$). On suppose en outre que, comme dans le modèle de Black & Scholes, la dynamique de $S = (S_t)_{t\in[0,T]}$ sous la probabilité historique P est donnée par :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t,$$

où $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma \in \mathbb{R}_+^*$.

On cherche, pour $t \in [0, T]$, le prix $C_t = C(t, S_t)$ d'un call européen sur l'action, de prix d'exercice K et maturité T.

1. On considère le portefeuille $\mathcal{P}_t$, qui à l'instant t correspond à l'achat d'1 call et la vente de α actif risqué à l'instant t, c'est-à-dire tel que :

$$\forall t \in [0, T], V(t) = C_t - \alpha S_t$$

   En utilisant le lemme d'Itô, et en considérant que ce portefeuille est autofinançant, donner l'équation différentielle stochastique que vérifie $V(t)$.

2. En l'absence d'opportunités d'arbitrage, à quoi $dV(t)$ doit-il être égal pour que $\mathcal{P}_t$ soit un portefeuille localement sans risque (c'est-à-dire pour que la variation totale de la valeur du portefeuille soit sans risque sur une petite période de temps dt) ?

   Attention à bien tenir compte des dividendes : le vendeur d'une action doit verser des dividendes, et le détenteur d'une action reçoit des dividendes au taux q.

3. Identifier et déduire des questions précédentes la valeur de α. A quoi correspond ce α, que pouvez-vous en dire ?

4. Déduire également de 1 et 2 l'équation aux dérivées partielles pour C_t dans le modèle de Merton. Quelle est la différence entre cette EDP et celle du modèle de Black-Scholes ?

5. *On se place désormais sous la probabilité risque-neutre Q.*
   Par analogie avec ce qui a été vu dans le modèle de Black et Scholes, justifiez que l'équation différentielle stochastique que doit vérifier S_t sous la probabilité risque neutre Q est :

$$dS_t = (r - q)S_t dt + \sigma S_t dB_t$$

   En déduire l'expression du nouveau mouvement Brownien sous cette probabilité risque-neutre.

6. En appliquant le théorème de Girsanov, donnez la densité de Radon-Nikodym permettant de passer de la probabilité historique P à la probabilité risque neutre Q.

7. Donnez l'expression de la prime de risque de ce modèle.

8. Résoudre cette EDS et donnez l'expression de S_t sous cette probabilité risque-neutre, en fonction de r, q, σ, t et B_t. Quelle est la loi de probabilité que suit S_t ?
9. Justifiez que sous la probabilité risque neutre Q, vous pouvez écrire :

$$C(t, S_t) = e^{-r(T-t)} E_Q \left(S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K} \mid \mathcal{F}_t \right) - K e^{-r(T-t)} E_Q \left(\mathbb{1}_{S_T \geq K} \mid \mathcal{F}_t \right),$$

10. En utilisant les questions précédentes, calculez $E_Q \left(\mathbb{1}_{S_T \geq K} \mid \mathcal{F}_t \right)$ et $E_Q \left(S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K} \mid \mathcal{F}_t \right)$.
11. Déduire des résultats précédents la formule donnant le prix à un instant $t \in [0, T]$, du call européen sur l'action dans le modèle de Merton. Vous expliciterez d_1 et d_2.
12. Comment pouvez-vous "retrouver" le modèle de Black-Scholes à partir de ce modèle ?

Exercice 1 On appelle CALL digital (ou binaire) de prix d'exercice K et d'échéance T sur un sous-jacent S, une option européenne dont le payoff à l'échéance est $\mathbb{1}_{S_T \geq K}$. La dynamique de S (sous la probabilité historique $\mathbb{P}$) est donnée par

$$dS_t = S_t(dt + \sigma dW_t), \quad S_0 = x,$$

où $x > 0$, $\sigma > 0$ et W est un mouvement brownien. On note r est le taux sans risque.

1. Exprimer le prix de cette option à l'instant t comme espérance sous la probabilité risque-neutre, puis calculer le prix à l'instant t de cette option.
2. Déterminer la couverture à $t = 0$ du CALL digital.
3. Ecrire le prix de cette option sous la forme $e^{rt} f(t, \tilde{S}_t)$ où $\tilde{S}_t$ est la valeur actualisée de S_t. Montrer que $(f(t, \tilde{S}_t))_{t \geq 0}$ est une martingale sous la probabilité risque-neutre. Ecrire la formule d'Itô pour f et en déduire une EDP vérifiée par f.

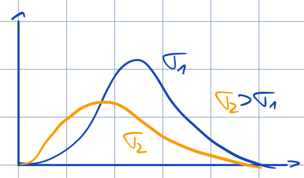
$$dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\,dW_t)$$

$$S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right)$$

$$S_{t+\delta t} = S_t \exp\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta t + \sigma W_{\delta t}\right)$$

$$\Rightarrow \underbrace{\ln\left(\frac{S_{t+\delta t}}{S_t}\right)}_{A} = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta t + \sigma\sqrt{\delta t}\,X \quad \text{avec } X \sim \mathcal{N}(0,1)$$

$$\Rightarrow A \sim \mathcal{N}\left(\left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)\delta t,\ \sigma^2 \delta t\right)$$



$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T] = S_0 e^{rT}$$

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T e^{-rT} \mid \mathcal{F}_0] = S_0 e^{-0T} = S_0$$

Exercice 2 :

$$dS_t = S_t(r\,dt + \sigma_S\, dW_t) \qquad S_0 = x$$

$$dU_t = U_t(r\,dt + \sigma_U\, dW_t') \qquad U_0 = x$$

$$W_t = \frac{1}{2} W_t' + \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{W}_t$$

$$\xi = (\min(S_T, U_T) - k)_+$$

Partie A :

1) On a $W_t = \frac{1}{2} W_t' + \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{W}_t$ avec $W_t' \perp\!\!\!\perp \bar{W}_t$

$$\begin{aligned} Cov(W_t, W_t') &= Cov\left(\frac{1}{2} W_t' + \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{W}_t \,;\, W_t'\right) \\ &= \frac{1}{2} \underbrace{Cov(W_t', W_t')}_{=t} + \frac{\sqrt{3}}{2} \underbrace{Cov(W_t', \bar{W}_t)}_{=0} \\ &= t/2 \end{aligned}$$

$$\Longrightarrow \Sigma_{W,W'} = \begin{pmatrix} t & t/2 \\ t/2 & t \end{pmatrix}$$

C'est un vecteur gaussien comme CL de W_t' et $\bar{W}_t$ qui sont $\perp\!\!\!\perp$.

2) Le domaine d'exercice peut s'écrire :

$$D = \{\min(S_T, U_T) > k\} = \{S_T > k\} \cap \{U_T > k\} = \{k < S_T \leq U_T\} \cup \{k < U_T \leq S_T\}$$

3)
$$\begin{aligned} C &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}(\min(S_T, U_T) - k)_+] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}(\min(S_T, U_T) - k)\mathbb{1}_{\{\min(S_T,U_T) > k\}}] \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\min(S_T, U_T)\mathbb{1}_{\{k < S_T \leq U_T\} \cup \{k < U_T \leq S_T\}}] - ke^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\mathbb{1}_{\{k < S_T \leq U_T\} \cup \{k < U_T \leq S_T\}}] \end{aligned}$$

4) $dS_t = S_t(r\,dt + \sigma_S\, dW_t) \longrightarrow \frac{dS_t}{S_t} = r\,dt + \sigma_S\, dW_t$

$\longrightarrow$ On pose $Y_t = \ln(S_t) \underset{Itô}{\Longrightarrow} dY_t = \left(r - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)dt + \sigma_S\, dW_t$

Donc en intégrant entre 0 et t : $Y_t - Y_0 = \left(r - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)t + \sigma_S W_t$

$$\Longrightarrow S_t = S_0 \exp\left(\left(r - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)t + \sigma_S W_t\right)$$

Donc $S_t = x\, e^{\left(r - \frac{\sigma_S^2}{2}\right)t + \sigma_S W_t}$

De même, $U_t = x e^{(r-\frac{\sigma_U^2}{2})t + \sigma_U W_t'}$

Partie B :

1) $\mathbb{E}_Q[\mathbb{1}_{\{S_T>K\}\cap\{U_T>K\}}] = Q(S_T>K, U_T>K)$

$= Q[W_T > \frac{1}{\sigma_S}(\ln(\frac{K}{x}) - (r-\frac{\sigma_S^2}{2})T), W_T' > \frac{1}{\sigma_U}(\ln(\frac{K}{x}) - (r-\frac{\sigma_U^2}{2})T)]$

par symétrie des $\mathcal{N}(0,1)$

$= Q[\underbrace{\frac{W_T}{\sqrt{T}}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{1}{\sigma_S\sqrt{T}}(\ln(\frac{x}{K}) + (r-\frac{\sigma_S^2}{2})T), \underbrace{\frac{W_T'}{\sqrt{T}}}_{\sim\mathcal{N}(0,1)} \leq \frac{1}{\sigma_U\sqrt{T}}(\ln(\frac{K}{x}) + (r-\frac{\sigma_U^2}{2})T)]$.

$= \mathcal{N}_2(d_s, d_U, \frac{1}{2})$ où $d_S = \frac{1}{\sigma_S\sqrt{T}}(\ln(\frac{x}{K}) + (r-\frac{\sigma_S^2}{2})T)$

$Cov(\frac{W_T}{\sqrt{T}}, \frac{W_T'}{\sqrt{T}}) = \frac{1}{2}$ et $d_U = \frac{1}{\sigma_U\sqrt{T}}(\ln(\frac{K}{x}) + (r-\frac{\sigma_U^2}{2})T)$

2) On pose $f(S_t, U_t) = \frac{U_t}{S_t} = X_t$ $\qquad -\frac{U_t}{S_t^2}\, dS_t$

a) Avec Itô, on a :

$$dX_t = df(S_t,U_t) = \frac{\partial f}{\partial S_t} dS_t + \frac{\partial f}{\partial U_t} dU_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial S_t^2} d\langle S\rangle_t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial U_t^2} d\langle U\rangle_t + \frac{\partial^2 f}{\partial S_t \partial U_t} d\langle S,U\rangle_t$$

$$= -U_t \frac{1}{S_t^2} dS_t + \frac{1}{S_t} dU_t + \frac{U_t}{S_t^3}\sigma_S^2 S_t^2 dt - \frac{1}{S_t^2} S_t U_t \sigma_S \sigma_U d\langle W, W'\rangle_t.$$

$$= -X_t(r\,dt + \sigma_S dW_t) + X_t(r\,dt + \sigma_U dW_t') + \sigma_S^2 X_t dt - \frac{1}{2} X_t \sigma_S \sigma_U dt$$

$$= X_t((\sigma_S^2 - \frac{\sigma_S\sigma_U}{2})dt + \sigma_U dW_t' - \sigma_S dW_t)$$

b) On veut écrire $\mathbb{E}_Q[U_T \mathbb{1}_{\{K\leq U_T\leq S_T\}}]$ sous la forme $\mathbb{P}^*[K\leq U_T \leq S_T]$

Avec le théorème de Girsanov, on a :

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{dQ}\right|_{\mathcal{F}_t} = Z_t = \exp(\sigma_U W_t - \frac{\sigma_U^2}{2}t)$$

Alors $W_t^* = W_t' - \sigma_U t$ est un MB et on a :

$$\mathbb{E}_Q[U_T \mathbb{1}_{\{K\leq U_T\leq S_T\}}] = \mathbb{E}_Q[x e^{(r-\frac{\sigma_U^2}{2})T + \sigma_U W_T} \mathbb{1}_{K\leq U_T\leq S_T}]$$

$$= x e^{rT}\mathbb{E}_Q[e^{-\frac{\sigma_U^2}{2}T + \sigma_U W_T} \mathbb{1}_{K\leq U_T\leq S_T}]$$

$$= x e^{2T} \mathbb{P}^*[K \le U_T \le S_T]$$

c) Sous $\mathbb{P}^*$ on a :

$$dX_r = X_r\left(\left(\sigma_S^2 - \frac{\sigma_S\sigma_U}{2}\right)dr + \sigma_U dW_r' - \sigma_S dW_r\right)$$
$$= X_r\left(\left(\sigma_S^2 - \frac{\sigma_S\sigma_U}{2}\right)dr + \sigma_U dW_r' - \sigma_S\left(\frac{1}{2}dW_r' + \frac{\sqrt{3}}{2}d\bar{W}_r\right)\right)$$
$$= X_r\left(\left(\sigma_S^2 - \sigma_S\sigma_U + \sigma_U^2\right)dr + \left(\sigma_U - \frac{\sigma_S}{2}\right)dW_r^* + \sigma_S\frac{\sqrt{3}}{2}d\bar{W}_r\right)$$
$$= X_r\left(\sigma^2 dr + \sigma dZ_r\right)$$

où $\sigma^2 = \sigma_S^2 - \sigma_S\sigma_U + \sigma_U^2$

et $Z_r = \frac{1}{\sigma}\left(\left(\sigma_U - \frac{\sigma_S}{2}\right)W_r^* + \sigma_S\frac{\sqrt{3}}{2}\bar{W}_r\right)$

Z_t est bien un MB comme somme de 2 v.a indep de lois normales centrées.

Indep des accroissem^{ts} car $W^* \perp\!\!\!\perp \bar{W}$.

et $\mathrm{Var}(Z_r) = \frac{1}{\sigma^2}\left(\left(\sigma_U - \frac{\sigma_S}{2}\right)^2 r + \sigma_S^2\frac{3}{4}\right)$

$$= \frac{1}{\sigma^2}\left(\sigma_S^2 - \sigma_S\sigma_U + \sigma_U^2\right)r = r$$

d) La proba cherchée est donc :

$$\mathbb{P}^*(K \le U_T \le S_T) = \mathbb{P}^*\left(U_T \ge K, \frac{U_T}{S_T} \le 1\right)$$
$$= \mathbb{P}^*(U_T \ge K, X_T \le 1)$$

Or $U_T \ge K \iff -\frac{W_T^*}{\sqrt{T}} \le d_U + \sigma_U\sqrt{T}$ où $-\frac{W_T^*}{\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$

De même, $X_T \le 1 \iff \frac{Z_T}{\sqrt{T}} \le -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}$

Or, $\mathrm{Cov}\left(\frac{Z_T}{\sqrt{T}}, -\frac{W_T^*}{\sqrt{T}}\right) = \frac{\frac{\sigma_S}{2} - \sigma_U}{\sigma}$

D'où on a :

$$\mathbb{P}^*(K \le U_T \le S_T) = \mathcal{N}_2\left(d_U + \sigma_U\sqrt{T}, -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \frac{\frac{\sigma_S}{2} - \sigma_U}{\sigma}\right)$$

e) On a ainsi :

$$\mathbb{E}_Q[U_T \mathbb{1}_{K \le U_T \le S_T}] = x e^{2T}\mathcal{N}_2\left(d_U + \sigma_U\sqrt{T}, -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \frac{\frac{\sigma_S}{2} - \sigma_U}{\sigma}\right)$$

3) De façon analogue, $\mathbb{E}_Q[S_T \mathbb{1}_{K \leq S_T \leq U_T}] = x e^{rT} N_2\left(d_S + \sigma_S\sqrt{T}, -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \frac{\frac{\sigma_U}{2} - \sigma_S}{\sigma}\right)$

4) D'où on conclut avec

$$C = x N_2\left(d_U + \sigma_U\sqrt{T}, -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \frac{\frac{\sigma_S}{2} - \sigma_U}{\sigma}\right) + x N_2\left(d_S + \sigma_S\sqrt{T}, -\frac{\sigma\sqrt{T}}{2}, \frac{\frac{\sigma_U}{2} - \sigma_S}{\sigma}\right) - K e^{-rT} N_2\left(d_S, d_U, \frac{1}{2}\right)$$