ERM
M2A, année 2022 - 2023

TD4 : COPULE

Exercice 1
Soit $H_\theta(x,y)$ la copule définit par la loi de répartition :

$$H_\theta(x,y) = \frac{1}{1+e^{-x}+e^{-y}+(1-\theta)e^{-x-y}}$$

a) Donner les fonctions de répartitions marginales, ainsi que la copule associée.
b) Quelle(s) valeur(s) de θ correspond(ent) au cas indépendant ?

Exercice 2
Soit $(X_1, ..., X_n)$ un vecteur aléatoire de copule C.

(1) Soient n fonctions croissantes bijectives $g_1, ..., g_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Déterminer la copule du vecteur $(g_1(X_1), ..., g_n(X_n))$.
(2) Même question si g_n est décroissante et les $n-1$ autres fonctions croissantes.

Exercice 3

(1) Donner une condition sur la copule C d'un couple $X = (X_1, X_2)$ exprimant que ce couple est positivement dépendant par quadrant, i.e.
$\forall (x_1, x_2), \bar{F}_X(x_1, x_2) \geq \bar{F}_1(x_1)\bar{F}_2(x_2)$
(2) Donner une condition sur la copule C d'un couple (X, Y) exprimant que ce couple est conditionnellement croissant, i.e.
$\forall t, x_1 \leq y_1 \Longrightarrow P(X_2 > t | X_1 = x_1) \leq P(X_2 > t | X_1 = y_1)$
$\forall t, x_2 \leq y_2 \Longrightarrow P(X_1 > t | X_2 = x_2) \leq P(X_1 > t | X_2 = y_2)$

- Exercice 2

$(X_1, \dots, X_n)$ vecteur aléatoire de copule C

(1) Soient n fonctions croissantes bijectives $g_1, \dots, g_n$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
Déterminer la copule du vecteur $(g(X_1), \dots, g(X_n))$

<u>Propriété</u> : la copule de $(g(X), h(Y))$ est la copule de (X,Y) pour g, h croissantes continues

Donc la copule du vecteur $(g(X_1), \dots, g(X_n))$ est C.

$$
\begin{aligned}
F_{g_1(X_1) \dots g_n(X_n)}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{P}(g_1(X_1) \leqslant x_1, \dots, g_n(X_n) \leqslant x_n) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant g_1^{-1}(x_1), \dots, X_n \leqslant g_n^{-1}(x_n)) \\
&= F_{X_1, \dots, X_n}(g_1^{-1}(x_1), \dots, g_n^{-1}(x_n)) \\
&= C(F_{X_1}(g_1^{-1}(x_1)), \dots, F_{X_n}(g_n^{-1}(x_n))) \\
&= C(\mathbb{P}(X_1 \leqslant g_1^{-1}(x_1)), \dots, \mathbb{P}(X_n \leqslant g_n^{-1}(x_n))) \\
&= C(\mathbb{P}(g_1(X_1) \leqslant x_1), \dots, \mathbb{P}(g_n(X_n) \leqslant x_n)) \\
&= C(F_{g_1(X_1)}(x_1), \dots, F_{g_n(X_n)}(x_n))
\end{aligned}
$$

(2) Même question si g_n est décroissante et les $n-1$ autres fonctions croissantes.

$$
\begin{aligned}
F_{g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{P}(g_1(X_1) \leqslant x_1, \dots, g_n(X_n) \leqslant x_n) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant g_1^{-1}(x_1), \dots, X_{n-1} \leqslant g_{n-1}^{-1}(x_{n-1}), X_n \geqslant g_n^{-1}(x_n)) \\
&= C(F_{X_1}(g_1^{-1}(x_1)), \dots, F_{X_{n-1}}(g_{n-1}^{-1}(x_{n-1})), \bar{F}_{X_n}(g_n^{-1}(x_n))) \\
&= C(\mathbb{P}(X_1 \leqslant g_1^{-1}(x_1)), \dots, \mathbb{P}(X_{n-1} \leqslant g_{n-1}^{-1}(x_{n-1})), 1 - \mathbb{P}(X_n \leqslant g_n^{-1}(x_n))) \\
&= C(\mathbb{P}(g_1(X_1) \leqslant x_1), \dots, \mathbb{P}(g_{n-1}(X_{n-1}) \leqslant x_{n-1}), 1 - \mathbb{P}(g_n(X_n) \leqslant x_n)) \\
&=
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
F_{g_1(X_1), \dots, g_n(X_n)}(x_1, \dots, x_n) &= \mathbb{P}(g_1(X_1) \leqslant x_1, \dots, g_n(X_n) \leqslant x_n) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant g_1^{-1}(x_1), \dots, X_{n-1} \leqslant g_{n-1}^{-1}(x_{n-1}), X_n \geqslant g_n^{-1}(x_n)) \\
&= \mathbb{P}(X_1 \leqslant g_1^{-1}(x_1), \dots, X_{n-1} \leqslant g_{n-1}^{-1}(x_{n-1}), X_n \leqslant \infty) \\
&\quad - \mathbb{P}(X_1 \leqslant g_1^{-1}(x_1), \dots, X_n \leqslant g_n^{-1}(x_n)) \\
&= C(F_{X_1}(g_1^{-1}(x_1)), \dots, F_{X_{n-1}}(g_{n-1}^{-1}(x_{n-1})), F_{X_n}(\infty)) \\
&\quad - C(F_{X_1}(g_1^{-1}(x_1)), \dots, F_{X_n}(g_n^{-1}(x_n))) \\
&= C(\mathbb{P}(X_1 \leqslant g_1^{-1}(x_1)), \dots, \mathbb{P}(X_{n-1} \leqslant g_{n-1}^{-1}(x_{n-1})), 1) \\
&\quad - C(\mathbb{P}(X_1 \leqslant g_1^{-1}(x_1)), \dots, \mathbb{P}(X_n \leqslant g_n^{-1}(x_n))) \\
&= C(\mathbb{P}(g_1(X_1) \leqslant x_1), \dots, \mathbb{P}(g_{n-1}(X_{n-1}) \leqslant x_{n-1}), 1) \\
&\quad - C(\mathbb{P}(g_1(X_1) \leqslant x_1), \dots, \mathbb{P}(g_{n-1}(X_{n-1}) \leqslant x_{n-1}), \mathbb{P}(g_n(X_n) \geqslant g_n^{-1}(x_n))) \\
&= C(F_{g_1(X_1)}(x_1), \dots, F_{g_{n-1}(X_{n-1})}(x_{n-1}), 1) \\
&\quad - C(F_{g_1(X_1)}(x_1), \dots, F_{g_{n-1}(X_{n-1})}(x_{n-1}), 1 - F_{g_n(X_n)}(x_n))
\end{aligned}
$$

- Exercice 3

(1) Donner une condition sur la copule C d'un couple $X=(X_1, X_2)$ exprimant que ce couple est positivement dépendant par quadrant i.e. $\forall (x_1, x_2)$, $\bar{F}_X(x_1,x_2) \geq \bar{F}_{X_1}(x_1)\bar{F}_{X_2}(x_2)$

$$\bar{F}_X(x_1,x_2) = 1 - F_X(x_1,x_2)$$
$$= 1 - C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2))$$

$$\bar{F}_{X_1}(x_1) = 1 - F_{X_1}(x_1)$$
$$= 1 - F_{X_1,X_2}(x_1, \infty)$$
$$= 1 - C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(\infty))$$
$$= 1 - C(F_{X_1}(x_1), 1)$$
$$\bar{F}_{X_2}(x_2) = 1 - C(1, F_{X_2}(x_2))$$

$$\bar{F}_X(x_1,x_2) \geq \bar{F}_{X_1}(x_1)\bar{F}_{X_2}(x_2)$$
$$\iff 1 - C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \geq [1 - C(F_{X_1}(x_1), 1)][1 - C(1, F_{X_2}(x_2))]$$
$$\iff 1 - C(u,v) \geq [1 - C(u,1)][1 - C(1,v)]$$
$$\iff 1 - C(u,v) \geq 1 - C(1,v) - C(u,1) + C(u,1)C(1,v)$$
$$\iff C(u,v) \leq C(1,v) + C(u,1) - C(u,1)C(1,v)$$

(2) Donner une condition sur la copule C d'un couple (X,Y) exprimant que ce couple est conditionnellement croissant i.e.
$\forall t \;\; x_1 \leq y_1 \Rightarrow \mathbb{P}(X_2 > t \mid X_1 = x_1) \leq \mathbb{P}(X_2 > t \mid X_1 = y_1)$
$\forall t \;\; x_2 \leq y_2 \Rightarrow \mathbb{P}(X_1 > t \mid X_2 = x_2) \leq \mathbb{P}(X_1 > t \mid X_2 = y_2)$

(1) $\bar{F}_{X_1,X_2}(x_1,x_2) = \mathbb{P}(X_1 > x_1, X_2 > x_2)$
$$= \mathbb{P}(X_1 > x_1) + \mathbb{P}(X_2 > x_2) - [1 - \mathbb{P}(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2)]$$
$$= \bar{F}_{X_1}(x_1) + \bar{F}_{X_2}(x_2) + F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) - 1$$
$$= 1 - F_{X_1}(x_1) + \cancel{1} - F_{X_2}(x_2) + F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \cancel{-1}$$
$$\bar{F}_1(x_1)\bar{F}_2(x_2) = 1 - F_{X_1}(x_1) - F_{X_2}(x_2) + F_1(x_1)F_2(x_2)$$

Il nous faut alors
$$F_{X_1,X_2}(x_1,x_2) \geq F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)$$
SCLAR $\Rightarrow$ $C(F_{X_1}(x_1), F_{X_2}(x_2)) \geq F_1(x_1)F_2(x_2)$
$\Rightarrow$ $C \geq C_I$ ← copule indépendante

(2) $x \longmapsto \mathbb{P}(X_2 > t \mid X_1 = x)$
$\lim_{h \to 0} \mathbb{P}(X_2 > t \mid x \leq X_1 \leq x+h)$