ACTIFS HYBRIDES

Examen terminal
QCM + exercices

Plan

1. Présentation de quelques actifs hybrides
2. Introduction à l'analyse et à l'évaluation des obligations convertibles

1. Présentation de quelques actifs hybrides

Exemples d'actifs
- Obligations
- Immobilier
- Titres financiers englobent
- Actions
- Swap de taux
- Options

ce qui va nous intéresser dans ce cours

Hybride : intermédiaire entre actions et obligations

Regardons la différence entre actions et obligations

	Actions		Obligations
	Dividendes à partir du bénéfice distribuable Rémunération facultative	Structure de rémunération	Coupons si l'entreprise va mal elle reste obligée de verser un coupon mais si elle ne peut pas il y aura un pb Remboursement du nominal Rémunération obligatoire
	Propriétaire de l'entreprise => droit de vote	Droits de vote	Pas de droit de vote
	Degré de subordination (sécurité) Les actionnaires sont payés en priorité	Faillite	Les investisseurs seront payés à la fin s'il reste quelque chose

+ volatile — Volatilité (risque) — - volatile

Obligations classiques → Titre hybride

Nominal N
coupon 5%
Echéance de remboursement T = 10 ans
Pas de droit de vote
Pas de clause de subordination particulière

ex Actions de préférence (preferred in english)
Définition : action avec un dividende prioritaire et un degré de subordinat° différent. Pas de droit de vote

N = 100
tx de dividende 4%
↳ seront versés en 1er parmi les autres dividendes des autres actions mais quand même après le versement des coupons

obligation convertible

obligation éventuellement à coupons qui peut être convertie en actions au gré de l'investisseur (au pluriel !)
(pas intéressant au début, il vaut mieux attendre pour réaliser une augmentation du capital)

N = 100
Cr = 5 } ⇒ 5 actions revient à 20€ / action

↳ on obtient 5 actions à partir d'une obligation
Base de conversion / Ratio de conversion (Conversion Ratio)
Si l'action est à 15 € ce n'est pas rentable de convertir en actions

Contingent Convertibles CoCos

Idée (actif survenu après la crise de 2008)
Rendre le financement par dettes des banques + flexible
↳ éviter les incidents de paiements (ie non règlement d'un coupon)

Des évènements sont prévus et permettent à l'émetteur de réduire le principal ou convertir l'obligation en actions sans créer d'incident de paiement.

Corporate hybrids
→ TSDI titre subordonné à durée indéterminée
→ TSSDI super subordonné

Durée indeterminée
Obligation perpetuelle
pour le remboursement du principal

Step up idée que le tx de coupon ↑ dans le temps
Callable
↳ idée que l'émetteur peut rembourser le titre avant l'échéance.
(FP ou quasi FP)

Subordination

Exemple BAYER a émis en 2005 une obligation hybride
Durée initiale 100 ans
Montant emprunté 1,3 Md €
Options option coupon deferral : décaler le paiement du coupon est possible

cumulative deferral : les coupons reportés devront être payés dans le futur

mandatory deferral
si le cash flow de l'entreprise < 7% du CA
le paiement des coupons est suspendu

Motivations des émetteurs :

Actions de préférence : pas de droit de vote + pas de paiement obligatoire en rémunération
→ pas de dilution du contrôle qui reste dans les mains des actionnaires actuels

à envisager pour des starts ups ou des entreprises en difficulté → pas de production de cash flows dans les prochaines années, valeur de l'action classique très basse

TSDI Renforcement des fonds propres vis à vis des exigences sans augmenter le capital

obligation convertible Augmentation de capital dans le futur
↳ en actions nouvelles quand l'investisseur convertira l'obligation

S'endetter à un taux plus faible que pour une obligation classique car

Motivation des investisseurs
obligations convertibles (OC)
arbitrage par des hedge funds
produit de type obligataire (⇒ donne une sorte de garantie par rapport à une action)
gain illimité / potentiel à la hausse + élevé que sur une obligation classique.

2. Introduction à l'analyse et à l'évaluation des obligations convertibles

2.1 Vocabulaire / Terminologie

OC obligations convertibles

OEA obligations échangeables en action déjà existantes d'une participation de l'émetteur (surtout utilisé par des entreprises financières)

OCEANE obligations convertibles ou échangeables en actions nouvelles ou existantes
↳ finit en OC ou en OEA

ORA obligations remboursables en actions. Elles sont obligatoirement converties en actions à l'échéance

OBSA obligations à bons de souscriptions d'actions
obligat° actions
↳ BSA = Call
↳ ABSA, ABSO, OBSO, OCABSA, ...

Obligations convertibles synthétiques

obligation convertible créée à l'initiative (en général) d'un investisseur par une banque d'investissement (obligation classique + options achat)

Obligations synthétiques obligation convertible émise par une entreprise

\+ achat de call par l'émetteur auprès d'une banque d'investissement.

(tx de coupon plus faible qu'une obligation classique)

(delta de call inférieur au delta d'un call classique)

2.2 Principaux paramètres et définitions

Maturité = nb d'années avant le remboursement du nominal

ex 8 ans

Nominal (d'un titre) = $\frac{\text{valeur totale de l'émission}}{\text{nb de titres émis}}$

ex 100 €

Taux facial (en % du nominal) / Taux du coupon

ex 5%

Valeur d'émission (V_E) et valeur de remboursement (V_R)

ex émise et remboursée au pair : $V_E = V_R = N$.

Base de conversion noté C_r = nb d'actions obtenues si conversion de l'OC

ex 5 actions

On déduit le prix de conversion (conversion price) noté $C_p = \frac{N}{C_r}$ correspond au prix de revient d'une action obtenue par conversion de l'OC

ex $N = 100$ $C_r = 5$ $C_p = 20$ €

la valeur sûre ou plancher actuariel ou Bond Floor noté B^F
= la valeur de l'OC comme si elle n'offrait pas de possibilité de conversion < valeur de l'OC.

$$B^F_t = \sum_{i=1}^{N_c} C_{t_i} e^{-r_b t_i} + N e^{-r_b (T-t)}$$

où N_c = nb de coupons restant à percevoir après la date t
t_i = durée avant le paiement du coupon i (vue de t)
r_b = taux d'actualisation continu
= taux sans risque + spread (dépend de l'émetteur)

La parité de l'OC correspond à la valeur revenant aux investisseurs si conversion de l'OC.

$P_a = C_r \times S$ à une date donnée
(S : valeur de l'action)

$$P_a^{\%} = \frac{C_r S}{N} = \frac{S}{C_p}$$

B^F et P_a

Illustration soit une OC tq à la date t

$C_r = 4$
$B^F = 900$
$S = 230$

Que peut on en déduire sur le prix de l'OC ?

Peut on avoir $P^{OC} = 880$ € ? Non car on devrait au moins valoir B^F car B^F est la valeur de l'OC sans la valeur de l'option est ≥ 0. $P^{OC} \geq B^F = 900$.

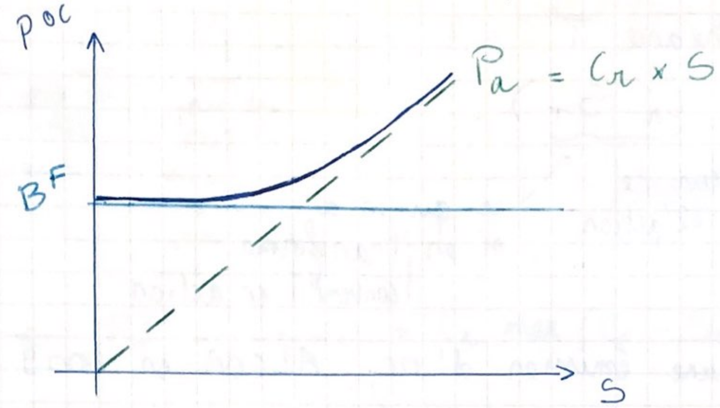
Par AOA c'est impossible

Peut-on avoir $P^{OC} = 900$ € ?

Si on achète l'OC à 900 et on vend / convertit directement / immédiatement $\Rightarrow P^a = C_r \times S = 920$ €

On se fait un bénéfice de 20 €

$P^{oc} \geq \max(P_a, B^F)$ quand il n'y a pas de défaut de l'oc



Remarques Si $S \approx 0$

Que peut-on dire sur la nature hybride de l'oc ?

La nature de l'oc devient proche de celui d'une obligation.

NB :
Facteurs potentiels qui affectent le prix d'une OC
- volatilité de l'action (le prix sera croissant)
- taux (le prix ↓)
- spread (le prix ↓)
- le prix de l'action

Son comportement se rapproche plutôt de celui d'une obligation et en particulier sa volatilité se rapproche de celle d'une obligation et les facteurs affectant davantage son prix sont ceux de l'obligation (taux et spread)

Si S très grand en particulier $S \gg C_p$

Que peut-on déduire de la nature et du comportement de l'oc ?

⇒ on va probablement convertir en actions

La nature de l'oc se rapproche d'une action

En particulier les facteurs de risque affectant le prix de l'oc sont plutôt ceux d'une action et la volatilité du prix se rapproche de celle de l'action.

2.3 Valeur terminale de l'OC

C'est la valeur à l'échéance T

$$P_T^{OC} = \max(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{valeur de remboursement}}}{V_R} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{valeur du coupon}}}{C}, \underbrace{C_r S_T}_{\text{ce qui on a si on transforme / convertit en action}})$$

Exemple 3 On considère une émission d'OC ALCOA en 2009

Valeur totale des titres émis 575 Mds \$

N Chaque titre a un nominal de 1000 \$

j Taux facial = 5,25% (coupon semestriel)

Echéance T le 15/04/14

Remboursée au pair

Ratio de conversion $C_r = 155,4908$

A partir de quelle valeur de S_T l'OC convertie au terme ?

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{connu au pair} \\ = \text{nominal} \\ = 1000}}{V_R} + \overset{\text{coupon}}{\underset{\substack{\uparrow \\ \frac{j}{2} \times N \\ = 26,25}}{C}} < C_r S_T \iff S_T > \frac{1026,25}{155,4908} = 6,60$$

Retour sur P_T^{OC} lorsque $V_R + C = N$

$$P_T^{OC} = \max(N, C_r S_T) = N + \max(C_r S_T - N, 0)$$

$$= N + C_r \underbrace{\max\left(S_T - \frac{N}{C_r}, 0\right)}_{\text{CALL}}$$

↳ obligation + CALL

$$= N + C_r \underbrace{\max(S_T - C_p, 0)}_{\text{call sur } S_T \text{ avec un prix d'exercice } C_p}$$

Relation de parité CALL PUT (option européenne / sans dividende)

$$\underbrace{C_t}_{\substack{\text{prix du}\\ \text{CALL}\\ \text{en } t}} - \underbrace{P_t}_{\substack{\text{prix du}\\ \text{PUT}\\ \text{en } t\\ \neq\\ P_T^{oc}}} = S_t - K e^{-r_c (T-t)}$$

$\Rightarrow P_T^{oc} = C_r S_T + C_r \max(C_p - S_T, 0)$ — achat position longue + PUT

Démonstration en exercice en TD.

2.4 Prix et cotation des OC

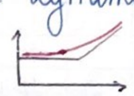
- En $t < T$, déterminer le prix de l'oc est plus compliqué car il faut tenir compte de la possibilité d'exercer l'option de conversion à une date future.

$\Rightarrow$ Besoin d'un modèle d'évolution
- taux d'intérêt
- les spread
- le cours de l'action
- la volatilité
- ....

$$P_t^{oc} = \max(\overset{C_r \times S_t}{P_a}, \overset{\text{valeur de continuation}}{P_c})$$

P_c : ce qu'on espère obtenir si on n'exerce pas en t
déterminé à partir d'un modèle

OC sans clause particulière : la conversion est possible à tout instant entre l'émission et l'échéance.

Remarques : Si $S_t >> C_p$ que peut-on dire sur P_t^{oc} ?
On est presque certain de convertir $\Rightarrow$ la dynamique du prix de l'oc se rapproche de celle de l'action 
En particulier, l'évolution du cours de l'oc est plus sensible à la

partie option / volatilité
Inversement, si $S_t << C_p$ (S_t est très faible)
la dynamique du prix de l'OC se rapproche de celle de la partie obligataire ⇒ le prix deviendra plus sensible au $\left\{ \begin{array}{l} \text{tx d'intérêt} \\ \text{spread} \end{array} \right.$

La sensibilité du prix de l'OC augmente avec S (Γ positif)

Cotation des OC   Les OC côtent en % du nominal et pied de coupon (clean price)

NB clean price = pied de coupon
dirty price = plein coupon

Exemple 4

Cotation d'une OC émise par EURONAV
Le 4/5/12 un teneur de marché tient une fourchette de prix (bid ask quote) de 85,9% – 86,9% (clean price)
Le dernier coupon date du 31/1/12. (base $\frac{30}{360}$)
Les titres sont livrés à t+3 jours (ouvrés), soit le 9/5/12.
Un acheteur souhaite acquérir pour 5 Mds \$ de cette émission de 150 Mds \$ Le taux facial $j = 6,5\%$, $N = 100\ 000$

1) Quel est le montant de la transaction ?

Rappel 85,9% = prix d'achat le plus élevé proposé par le marché.
86,9% = prix de vente le plus faible proposé par le marché

⇒ on achète les titres à 86,9% (il faut trouver un vendeur et le prix le + faible que proposera un vendeur est 86,9%)

⇒ transaction hors coupon = 86,9% × 5000 k€ = 4 345 000 €
Le coupon couru porte sur la période entre le dernier coupon et la transaction.

Jours entre 31/1/12 et le 9/5/12 (base 30/360)
février - mars - avril ⇒ 3 × 30 + 9 jours en mai

$3 \times 30 + 9 = 99$ jours

coupon couru $= \frac{99}{360} \times 6,5\% \times 100\,000 = 1785,50$
= pour 1 titre
accrued interests

⇒ transaction totale nb de titres à acquérir $\frac{5 \text{ Mds}}{100\,000}$

$4\,345\,000 + 1785,5 \times 50 = 4\,434\,375$ €

2) que vaut le plancher actuariel de cette obligation le 4/5/12?

De la même manière, le plancher actuariel peut aussi s'exprimer en % du nominal et pied de coupon

À faire?

2.5 Convexité des obligations convertibles

- Le delta de l'oc noté $\Delta = \frac{\partial P^{oc}}{\partial S} > 0$
- Le gamma de l'oc noté Γ est aussi positif

$$\Gamma = \frac{\partial^2 P^{oc}}{\partial S} = \frac{\partial \Delta}{\partial S} > 0$$

⇒ Plus le cours de l'action augmente, plus la sensibilité du prix de l'oc à une variation du prix de l'action augmente elle aussi.

Construction et intérêt d'un portefeuille delta neutre

Une variation du prix de l'oc peut s'exprimer à partir de Δ et Γ de la manière suivante:

$$P^{oc}(S) - P^{oc}(S_0) = \Delta(S - S_0) + \frac{1}{2}\Gamma(S - S_0)^2$$ (dév limité à l'ordre 2)

Un portefeuille Δ neutre est un portefeuille composé (par ex) d'une OC et de la vente de Δ actions S.

2.6 Stratégie de conversion des OC

2.6.1 Conversion optionnelle (sans clause particulière)

Conversion
- si l'acheteur / l'investisseur / le porteur le décide
- à n'importe quel instant entre $[t, T]$

$$P_t = \max(\underbrace{C_r S_t}_{= P_a}, \underbrace{P_c}_{?})$$

Exemple 6 Conversion optionnelle

Soit une OC émise le 1/1/n d'échéance le 1/1/n+1

$C_r = 0,7$

$N = 100 = V_R$ (pas de coupon)

On se situe le 1/1/n, doit-on convertir ? Besoin d'un modèle à 1 seule période (1 an)

Le 1/1/n $S_t = 283,65$, $r_c = 2,96\%$

S_t
- [u] 520,43 avec $p_u = \frac{1}{6}$
- [m] 260,36 avec $p_m = \frac{1}{6}$
- [d] 130,25 avec $p_d = \frac{2}{3}$

Payoff
- [u] $\max(C_r S_T, V_R + \underbrace{C}_{=0}) = \max(\overbrace{0,7 \times 520,43}^{=364,30} ; 100)$ avec probas $\frac{1}{6}$
- [m] $\max(\overbrace{0,7 \times 260,36}^{182,25} ; 100)$ avec probas $\frac{1}{6}$
- [d] $\max(\overbrace{0,7 \times 130,25}^{=91,18} ; 100)$ avec probas $\frac{2}{3}$

Payoff
- $\frac{1}{6}$ [u] 364,30 — on convertit
- $\frac{1}{6}$ [m] 182,25 — on convertit
- $\frac{2}{3}$ [d] 100 — on convertit pas

$$\text{D'où } P_c = e^{-\underbrace{2{,}96\%}_{\text{tx sans risque}}}\ \mathbb{E}\left[P_T^{oc} \mid S_t\right]$$

$$= e^{-2{,}96\%}\left(364{,}30 \times \frac{1}{6} + 182{,}25 \times \frac{1}{6} + 100 \times \frac{2}{3}\right)$$

$$= 193{,}08 \quad \text{(en moyenne)}$$

De + $C_r \times S_t = 0{,}7 \times 283{,}65 = 198{,}56$ (ce qu'on obtient si on convertit)

donc on convertit.

2.6.2 Conversion forcée (call émetteur)

Call émetteur = early redemption = possibilité pour l'émetteur de rembourser de manière anticipée.

on a toujours le droit d'exercer

$P_t^{oc} = \max\left(P_a,\ \min(P_c, K)\right)$

l'émetteur exerce t'il son call
si non, P_c
si oui, K avec K la valeur de remboursement anticipée (option call émetteur)

Si $P_c > K$ l'émetteur exerce son call

⇒ la présence du call émetteur impacte à la baisse / négativement le prix de l'oc

Intuition on "offre" une option à l'émetteur ⇒ l'investisseur accepte d'acheter si prix ↓ / est + faible

On a 2 variantes du call émetteur

Hard call → option exerçable sous conditions
Soft call → option exerçable si $P_a^{(\%)}$ est supérieure à une valeur appelée "call trigger"

exemple call trigger tq $P_a^{\%} > 130\%$ de K.

Exemple 7

On suppose que le call émetteur peut être exercée si $P_a^{\%} \geq 130\%$
alors OC peut être remboursée de manière anticipée au montant K.

$Cr = 30,4599 \qquad N = 1000$

À partir de quelle valeur de S_t l'OC sera t'elle rappelée (ie le call exercé) ?

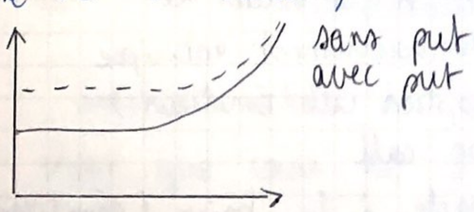
$$P_a^{\%} = \frac{Cr\, S_t}{N} \geq 130\% \Rightarrow S_t \geq \frac{N}{Cr} 130\% = 42,68 €$$

2.6.3 Remboursement au gré de l'investisseur (put porteur)

→ Cette clause permet à l'investisseur d'être remboursé de manière anticipée (sans convertir ses titres en actions) au prix P_r fixé lors de l'émission

$$P_t^{OC} = \max(P_a, P_r, P_c)$$

On (l'investisseur) exerce si $P_r > P_a$ et $P_r > P_c$
ici c'est moins intéressant pour l'émetteur (par rapport à une OC sans clause)



Le prix sera impacté à la hausse

2.6.4 Utilisation simultanée d'un put porteur et d'un call émetteur

$P_t^{oc} = \max(P_a, P_v, \min(P_c, K))$

À quelles conditions l'oc n'est ni convertie et ni remboursée en t ? (de manière anticipée)

Pas remboursée par l'émetteur si

$K > P_c$ (à son initiative = exercice du CALL)

$\begin{cases} P_a > P_v \\ P_c > P_v \end{cases}$ (à l'initiative de l'investisseur = exercice du PUT)

2.7 Obligations convertibles synthétiques

- Obligations convertibles structurées par des banques
  La banque va acheter une obligation non convertible des calls sur le marché que l'émetteur recherche.

(Intuition $\underbrace{P_T^{oc} = N}_{\text{oblig}} + \underbrace{C_r \max(S_T - C_p, 0)}_{\text{CALL}}$)

$\neq$

- Obligations synthétiques (hors examen)
  Emetteur $\underbrace{\text{d'OC}}_{\text{call vendus par l'émetteur}}$

Emetteur achète des calls sur le marché "qui sont moins chers que ceux de l'obligation convertible"

3 Exercices

Exercice 1. Rappeler et démontrer la relation de parité put-call. A partir de cette dernière, montrer que détenir une OC ZC convertible de type européen (sous-jacent ne versant pas de dividende) est au terme économiquement équivalent au fait de détenir C_r actions sous-jacentes et une option de vente européenne sur cette position de prix d'exercice le nominal de l'OC (ie, strike $= N = V_R$).

Exercice 2. On considère une OC ZC remboursée au pair dont les caractéristiques sont les suivantes :

- Nominal, N =100 ;
- Echéance, T=1.5 ans ;
- Spread, $r_s = 0\%$;
- Ratio de conversion, $C_r = 7$;
- Option call émetteur, $K = 100$; valeur anticipée proposée
- Option put porteur, $P_v = 100$;

On dispose en outre des éléments suivants :

- Cours de l'action en $t = 0$, $S_0 = 13.5$;
- Volatilité de l'action, $\sigma = 45\%$;
- L'action ne verse pas de dividende entre $t = 0$ et $t = 1.5$;
- Taux sans risque (continu), $r_f = 2\%$

a) A l'aide du modèle binomial de pas de temps $\Delta t = 0.5$, calculer la valeur de l'OC dans le cas suivants (on prendra $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$, $d = 1/u$ et $q = \frac{e^{r_f \Delta t} - d}{u-d}$) :

a1) - OC sans clause particulière de type call émetteur ou put porteur ;
a2) - Soft call émetteur ;
a3) - Hard call émetteur ; on a pas la condit° > 100
a4) - Put porteur ;
a5) - Hard call émetteur + put porteur ;

b) En supposant que l'OC ne soit exerçable qu'à l'échéance, vérifier vos réponses à la question a1) en appliquant le modèle de Black-Scholes aux deux expressions de la valeur de l'OC obtenues à partir de la relation de parité put-call rappelée à l'exercice 1. On rappelle que pour une option européenne (call ou put) ne versant pas de dividende de prix d'exercice K sur un sous-jacent S on a :

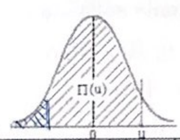
$$C_0 = S_0.\mathcal{N}_{(0,1)}(d_1) - Ke^{-r_f T}.\mathcal{N}_{(0,1)}(d_2)\,;\ P_0 = Ke^{-r_f T}.\mathcal{N}_{(0,1)}(-d_2) - S_0.\mathcal{N}_{(0,1)}(-d_1)\,;$$

$$\text{où } d_1 = \frac{ln\frac{S_0}{K} + (r_f + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}\,;\ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

Exercice 3. Construction d'une obligation synthétique. Un gérant de fonds obligataire souhaite acquérir une exposition sur les actions d'Apple. Son mandat lui interdit clairement un investissement direct en actions ou en warrant mais une acquisition d'OC est possible. Des OC sur Apple ne sont toutefois pas disponibles sur le marché à cette date ; le banquier observe qu'il existe sur le marché des warrants call (européens) émis par Société Générale (SG) qui correspondent aux besoins exprimés par le gérant et dont les caractéristiques sont : prix = \$1.85 ; strike =\$500 ; échéance = 217 jours ; nombre d'actions obtenues par conversion d'un warrant = 0.025. Pour la partie obligataire de l'obligation synthétique le gérant sélectionne une obligation ZC de nominal \$100 remboursée au pair dans 217 jours (date de l'échéance des options). Le taux du ZC est de 1.06% (taux à composition annuel). Calculer le C_r de l'OC synthétique ZC de nominal \$100 remboursée au pair constituée des warrants call SG de strike \$500 ci-dessus et en déduire son prix d'émission.

ANNEXE

Table de Loi Normale
P(x<u)



	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	6,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986
3,0	0,9987	0,9987	0,9987	0,9988	0,9988	0,9989	0,9989	0,9989	0,9990	0,9990
3,1	0,9990	0,9991	0,9991	0,9991	0,9992	0,9992	0,9992	0,9992	0,9993	0,9993
3,2	0,9993	0,9993	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9994	0,9995	0,9995	0,9995
3,3	0,9995	0,9995	0,9995	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9996	0,9997
3,4	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9997	0,9998

TD Actifs Hybrides

Exercice 1

Rappeler la relation de parité PUT-CALL (car options europ ; sans dividendes)

$$C_t - P_t = S_t - K e^{-r_c(T-t)}$$

C_t : prix du CALL ; P_t : prix du PUT ; S_t : prix du sous jacent ; K : strike ; r_c : tx sans risque ; T : échéance de l'option

Mq en AOA, cette relation est vérifiée

en T $C_T - P_T = S_T - K$

	0	en T
achat CALL	C_0	$C_T = (S_T - K)_+$
placement K à la banque	$Ke^{-r_c T}$	K
vente PUT	$-P_0$	$-P_T = (K - S_T)_+$
vente sous jacent	$-S_0$	$-S_T$

$$C_T + K - P_T - S_T$$

$$= (S_T - K)_+ + K - (K - S_T)_+ - S_T$$

- si $S_T > K$ $\quad S_T \cancel{- K} + \cancel{K} - S_T = 0$
- si $S_T < K$ $\quad K - K + S_T - S_T = 0$

$$\Rightarrow C_T + K - P_T - S_T = 0$$

Par AOA, pour $t \leq T$ $\quad C_t + Ke^{-r_c(T-t)} - P_t - S_t = 0$

En utilisant la relation de parité put-call, mq

$$P_T^{oc} = N + C_r \underbrace{\max(S_T - C_p, 0)}_{\text{on a un CALL qu'on va exprimer avec la relation de parité put-call}} = C_r S_T + C_r \max(C_p - S_T, 0)$$

C_p = prix de conversion $\dfrac{N}{C_r}$

$$N + C_r \max(S_T - C_p, 0) = N + C_r (C_p - S_T)_+ + C_r S_T - C_r C_p$$

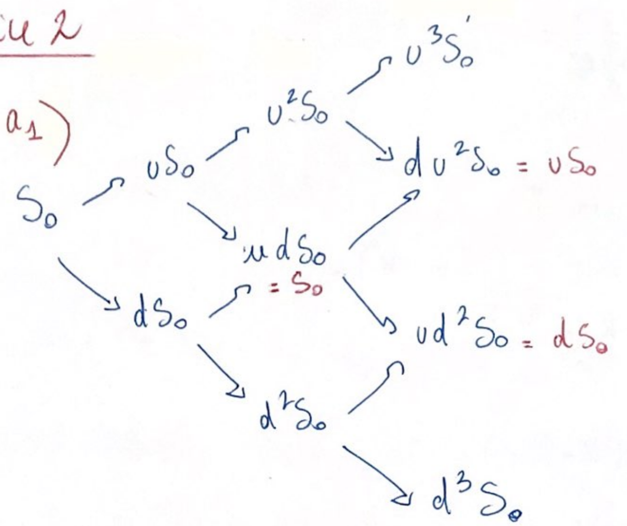
$$= \cancel{N} + C_r((C_p - S_T)_+ + C_r \cdot S_T - \cancel{N}$$

$$= C_r S_T + C_r((C_p - S_T)_+$$

Relation démontrée !

Exercice 2

a) a_1)



$t = 0,5 \quad t = 1 \quad t = 1,5 = T$

selon l'énoncé

$u = \frac{1}{d}$

$u = 1,3746. \qquad d = 0,7275$

$uS_0 = 18,5571$

$dS_0 = 9,8210$

$u^2S_0 = 25,51$

$d^2S_0 = 7,14$

$u^3S_0 = 35,06$

$d^3S_0 = 5,198$

par de temps

P_T^{oc} (up) $\qquad P_T^{oc}$ (down)

$$P_c = e^{-2\% \cdot 0,5}\left[q\, 245,42 + (1-q)\, 129,75\right]$$

$= 178,6$ à $t = 1$

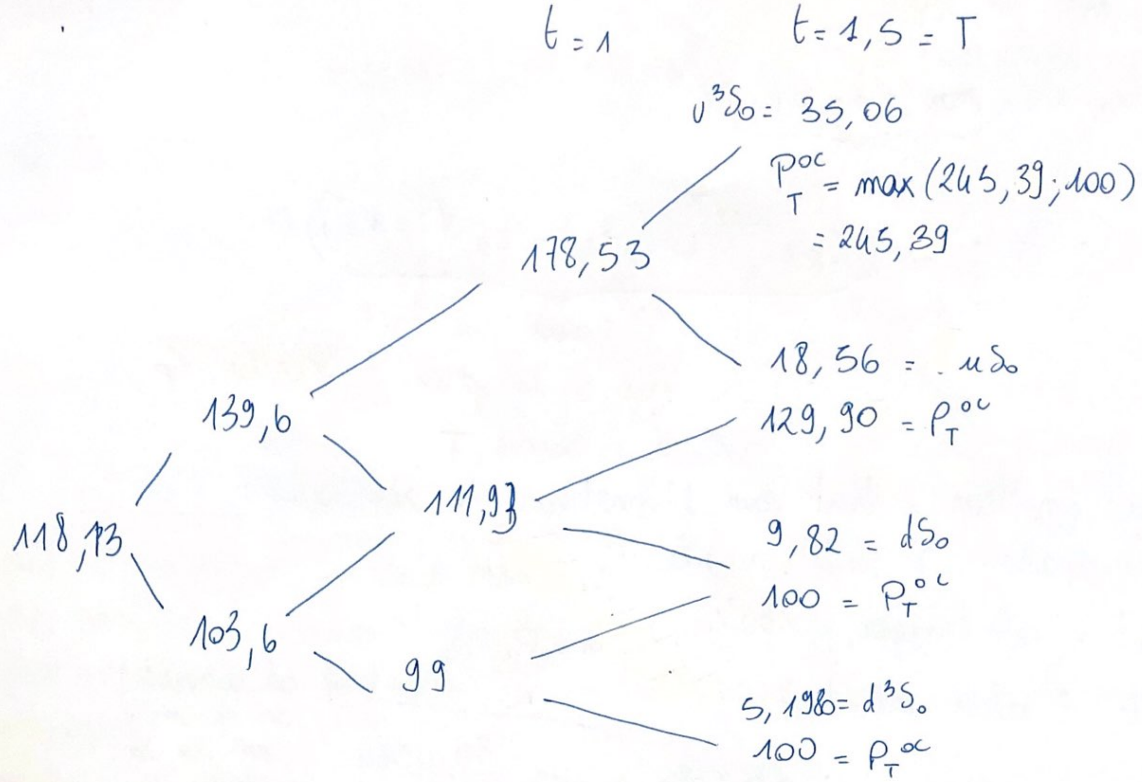
$C_r S_t = 25,51 \times 7 = 178,57$

$$P_T^{oc} = \max(\underbrace{C_r S_T}_{\text{valeur si conversion}}, N)$$

N : valeur si remboursement

si $t < T$ $\quad P_t^{oc} = \max(C_r S_t, \underbrace{P_c}_{= \text{VAP si on exerce pas.}})$

$= P_c$



$$P_T^{oc} = N + C_r \max(S_T - C_p, 0) = C_r S_T + C_r \max((C_p - S_T, 0)$$

b) Black Scholes $d_1 = 0,2274$; $d_2 = -0,3238$

en T $\quad P_T^{oc} = N + C_r \max(S_T - C_p, 0)$

en 0 $\quad P_0^{oc} = N e^{-r_f T} + C_r \big[\underbrace{S_0 \mathcal{N}(d_1) - C_p \, e^{-r_f T} \mathcal{N}(d_2)}_{C_0 = \text{prix du call}} \big]$

sur S de prix d'exercice $C_p = 14,29$ d'échéance $T = 1,5$

$$\mathbb{P}(X < -u) = \int \omega \, e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathbb{1}_{x<-u} \, dx$$

$$= \int_{-\infty}^{-u} \omega \, e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = \int_{+\infty}^{u} \omega \, e^{-\frac{1}{2}z^2} \, -dz = \int_{u}^{+\infty} \omega \, e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

CDV $z = -x$

$$= \mathbb{P}(X > u)$$

$$= 1 - \mathbb{P}(X < u)$$

$\mathcal{N}(d_2) =$

d'où $\mathbb{P}(X < d_2) = 1 - \mathbb{P}(X < -d_2)$

AN : $P_0^{oc} = 100 e^{-2\% \times 1,5} + 7 \times \underbrace{\left(13,5 \times 0,5910 - \frac{100}{7} e^{-2\% \times 1,5} (1 - 0,6255)\right)}_{= 2,7851}$

$= 116,54$

m̂ ordre de grandeur que à la question a) 118,13

Maintenant avec le PUT

$$P_T^{oc} = C_r S_T + C_r \underbrace{\max((C_p - S_T, 0)}_{\text{PUT}}$$

en 0 : $P_0^{oc} = C_r S_0 + C_r \underbrace{\left(C_p e^{-r_f T} \mathcal{N}(-d_2) - S_0 \mathcal{N}(-d_1) \right)}_{\substack{P_0 \text{ prix du PUT} \\ \text{sur } S \text{ de prix d'exercice } C_p \\ \text{d'échéance } T.}}$

a_2) Soft call émetteur = droit pour l'émetteur de rembourser l'oc par anticipation, à condition que $P_a^{\%} >$ seuil

Le seuil = call trigger = 100%

$\hookrightarrow = C_r S_t$

On repart de l'arbre précédent

$S_0 = 13,5$
$P_0^{oc} = 118,13$

18,5571
139,60
$P_a = 129,9 > 100$
donc peut exercer

9,8213
103,60
$P_a = 68 < 100$
ne peut pas exercer

25,5086
178,53
ne change pas

13,5
111,93
$P_a = 94,5$
ne peut pas exercer

7,1450
99
$P_a = 50,01$
ne peut pas exercer

35,0564
245,3948

18,5571
129,90

9,8213
100

5,1980
100

si on convertit on retombe sur la m chose

on ne regarde pas car on active pas à l'échéance
on regarde d'abord en $t = 1$
puis $t = 0,5$

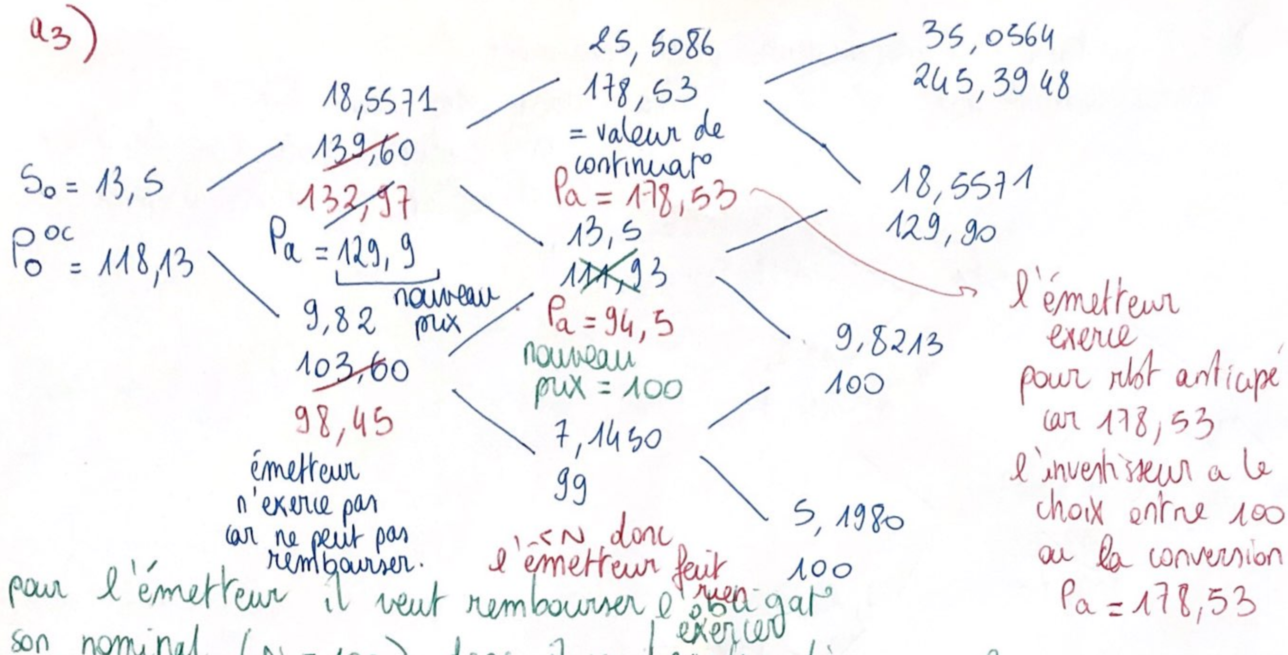
exercice de l'émetteur ⇒ rbt anticipé
l'investisseur aura le choix entre $K = 100 (= N)$ ou il convertit et aura $P_a = 129,9$ ⇒
il va prendre P_a (convers° forcée)

non exercice pas possible contractuellement
l'émetteur veut rb le plus tôt possible
⇒ va exercer

il faut calculer le nouveau prix en 0

$P_0^{oc} = 113,94$

a3)



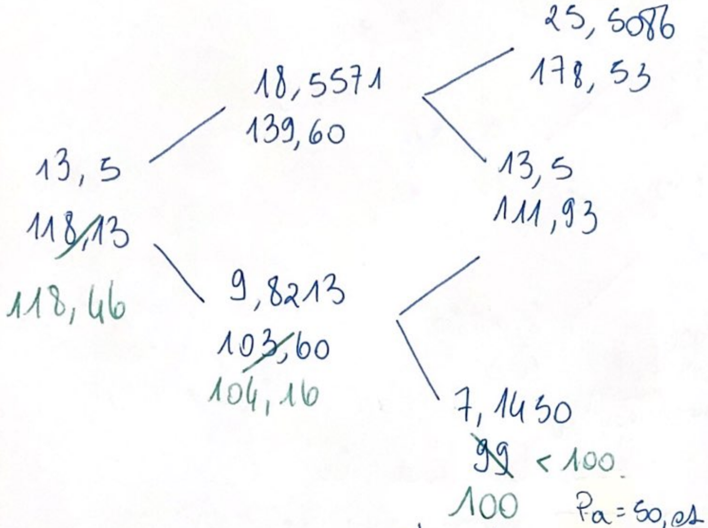
pour l'émetteur il veut rembourser l'obligat son nominal ($N = 100$) donc il va vendre dès que le prix = valeur de continuation > 100 pour rembourser de manière anticipée
puis l'investisseur a le choix entre prendre $100 = K$ ou de convertir et avoir P_a.

Les prix ont changé en $t = 1$, on recalcule les nouveaux prix en $t = 0,5$ $\begin{cases} 132,97 \\ 98,45 \end{cases}$

Pour le 132,97 : l'émetteur exerce pour rbt anticipé car $> 100 = N$
l'investisseur a le choix entre
$K = 100$
ou
la conversion $P_a = 129,9$
il choisit P_a pour toucher le montant le + important
d'où nouveau prix $= 129,9$

nouveau prix $P_0^{oc} = 111,07 < P_0^{oc}$ (soft call) $= 113,94$
c'est - intéressant pour l'investisseur le soft call car il paie + cher qu'un hard call à l'achat
l'émetteur préfère le hard call qui lui donne + de droit et va le vendre - cher

Q_4) Put porteur = l'investisseur peut demander le remboursement anticipé P_v. l'émetteur paie plus cher car l'investisseur a + de droit et reflète ça dans le prix



l'investisseur va exercer dès que le prix < 100 car il va préférer toucher $P_v = 100$ que 99.

est-ce qu'il convertit ? NON sinon il touche $P_a = 50{,}01$

Q_5) Hard call émetteur + put porteur

Exercice 3

zéro coupon sans risque + calls sur Apple $\approx$ OC sur Apple

Echéance 217j

Call sur apple $K = 500$

$Cp = K = 500$.

Prix du ZC en 0 + Prix des call $= P_{OC}$

$$\frac{100}{1 + 1{,}06\,\frac{217}{360}} + Cr \text{ Prix des calls} \times 40$$

car on veut une action

$Cp = \frac{N}{Cr}$

$\Rightarrow Cr = \frac{100}{500} = 0{,}2$

$\frac{30}{360}$ base

tx à composition annuel

qd on convertit 1 fois on a 0,025 act° donc pour en avoir 1 $= 0{,}025 \times 40$.

$$= \frac{100}{1 + 1{,}06\,\frac{217}{360}} + 0{,}2 \times 1{,}85 \times 40 = 114{,}17$$