Cours de Théorie Financière
Théorie des options

A. EYRAUD-LOISEL

Table des matières

Première partie

Généralités sur les marchés financiers

Chapitre 1

Introduction aux marchés financiers - Notions d'arbitrage

L'intervention du calcul des probabilités en modélisation financière n'est pas récente : c'est en tentant de bâtir une *Théorie de la spéculation* que Louis Bachelier découvrit en 1900 l'objet mathématique qui est maintenant bien connu sous le nom de mouvement Brownien, en développant une théorie des fluctuations boursières à partir d'une approche de marche aléatoire.

Puis une dimension nouvelle fut donnée au domaine à partir de 1973, avec les travaux de Fisher Black, Myron Scholes et Robert Merton (prix Nobel d'Economie en 1997 pour Scholes et Merton, mais Black décéda en 1995). Leur travaux portaient sur l'évaluation (*pricing*) et la couverture (*hedging*) des options. Depuis, avec le développement des marchés d'options, les méthodes de Black, Scholes et Merton se sont perfectionnées.

Ce cours sera centré principalement sur la théorie des options, moteur de l'évolution des modèles en mathématiques financières, et exemple le plus flagrant de l'utilité de la modélisation stochastique en finance.

Nous allons aborder dans ce premier chapitre des notions essentielles à l'appréhension et à la modélisation des marchés financiers. Un certain nombre de questions apparaissent rapidement lorsque l'on commence à étudier les marchés financiers, et plus particulièrement les marchés de produits dérivés.

– Qu'est-ce qu'une opportunité d'arbitrage ?
– Comment utilise-t-on les arbitrages en finance ?
– Qu'est-ce qu'un portefeuille de réplication ?
– Qu'est-ce qu'un marché complet ?
– Que signifie : étudier les options ?

C'est à ces questions, entre autres, que nous tenterons d'apporter une réponse dans ce chapitre, et plus généralement tout au long de ce cours.

Les deux problématiques essentielles de l'étude des produits dérivés sont l'évaluation d'une part et la couverture d'autre part. Nous présenterons ces deux problématiques dans ce chapitre introductif, puis nous nous intéresserons dans la deuxième partie du cours, aux différents modèles d'évaluation d'options.

I Exemples d'Opportunités d'Arbitrage

1 Opportunités d'arbitrage sur le marché obligataire

On dit qu'un marché présente une *opportunité d'arbitrage* lorsqu'on peut mettre en oeuvre une stratégie d'achat et de vente de différents titres qui ne coûte rien, et rapporte un gain strictement positif (aujourd'hui ou à une date future).

Définition 1.1 *On appelle souvent arbitrage de type 1 une stratégie où l'on n'investit aucun argent à la date* 0 *et où on a un gain strictement positif à la date finale.*

Définition 1.2 *On appelle arbitrage de type 2 une stratégie qui rapporte à la date 0 une somme d'argent strictement positive, avec des flux futurs nuls.*

Remarque : En réalité, ce deuxième type d'arbitrage peut toujours se ramener à un arbitrage de type 1 en investissant la somme disponible à l'instant initial dans l'actif sans risque jusqu'à la date finale.

Opération	t=0	t=1
Stratégie X OA type 2	$X_0 > 0$	$X_1 = 0$
Achat actif sans risque	$-X_0$	$X_0(1+r)$ ou X_0e^r
Total	0 (ne coûte rien)	$X_0(1+r)$ ou X_0e^r (gain > 0)

a. Exemple 1

Si sur un marché coexistaient, au même prix de 99 €
– un zéro-coupon CHER à 6 mois, de nominal 100 €
– un autre zéro-coupon PASCHER à 6 mois également, de nominal 110 €
Alors il est clair que l'on pourrait s'enrichir facilement en mettant en oeuvre la stratégie d'arbitrage suivante :

Opération	Aujourd'hui	6 mois
Vente de CHER	99 €	-100 €
Achat de PASCHER	-99 €	110 €
Total	0 (ne coûte rien)	+10 € (gain > 0)

Une telle opportunité est une opportunité d'arbitrage.
Si de telles opportunités existaient, tout le monde voudrait en acheter et il y aurait une demande infinie. En tout état de cause, une opportunité d'arbitrage ne peut se présenter que sur un laps de temps très court : si nous supposons que PASCHER et CHER coexistent au même prix, tous les acteurs achèteraient PASCHER de sorte que son prix monterait, et vendraient CHER de sorte que son prix baisserait (équilibrage naturel des marchés).

C'est la raison pour laquelle on fait l'hypothèse d'Absence d'Opportunité d'Arbitrage (AOA) sur les marchés financiers. Le raisonnement (défaitiste) est le suivant : s'il existait un arbitrage, quelqu'un en aurait déjà profité ! Sachant qu'il y a dans les banques beaucoup d'arbitragistes, cette hypothèse apparaît cohérente sur les marchés, du point de vue d'un petit investisseur.

C'est cette hypothèse qui permet d'entreprendre des raisonnements par arbitrage (semblables à des raisonnements par l'absurde en mathématiques). C'est ce qui va permettre d'évaluer (pricer) les produits sur le marché (obligations, produits dérivés).

b. Exemple 2

On considère 2 obligations émises par l'Etat français, de maturité 2 ans, de même nominal 1000 € . L'obligation A verse un coupon de 100 € chaque année, alors que l'obligation B verse un seul coupon de 1000 € au bout de la première année. On suppose que ces 2 obligations ont un prix de 1000 et 1735 € respectivement. Laquelle vaut-il mieux acheter ? On suppose également qu'il existe 2 zéro-coupons C et D de maturité 1 et 2 ans, de prix 95 € et 80 € pour 100 € de nominal. Le tableau des cash flows est le suivant :

Produit	Prix (t=0)	t=1	t=2
A	1000	100	1100
B	1735	1000	1000
C	95	100	0
D	80	0	100

Dans cette situation, on peut *répliquer* l'obligation A en constituant un portefeuille A' contenant 1 zéro-coupon C et 11 zéro-coupons D. Le coût de constitution de ce portefeuille est

$$1 \times 95 + 11 \times 80 = 975 \text{ €}$$

L'obligation A est donc sur-cotée sur le marché.
De même on peut répliquer B avec un portefeuille composé de 10 C et 10 D, donc le prix de marché de B est de

$$10 \times 95 + 10 \times 80 = 1750 \text{ €}$$

L'obligation B est donc sous-cotée sur le marché. Elle est donc intéressante à acheter.
Il existe donc des opportunités d'arbitrage sur ce marché.
Exercice : les expliciter.
La présence de zéro-coupons sur le marché fournit un moyen de savoir si les obligations sont sur- ou sous-cotées. A l'inverse, si on fait l'hypothèse d'AOA, on a un moyen de valoriser les emprunts obligataires. C'est ce qu'on appelle le *principe de valorisation par arbitrage.*

c. Structure par terme des taux

Rappels : Pour un zéro-coupon d'échéance T et de nominal N, de prix de marché P_T, on a :

$$\text{Le taux de rentabilité à l'échéance } T : r_T = \frac{N - P_T}{P_T}$$

et le taux annuel équivalent : $z(T) = (1+r_T)^{\frac{1}{T}} - 1 = \left(\dfrac{N}{P_T}\right)^{\frac{1}{T}} - 1$

Si l'on dispose de suffisamment de zéro-coupons sur le marché, on peut construire la courbe de z en fonction de leur échéance T, appelée *courbe des zéro-coupons par terme* ou courbe des taux purs (*yield curve* ou *zero-rate curve*).
On distingue 3 cas :
- la courbe est constante : cela revient à supposer qu'il existe un taux d'intérêt constant dans le temps, très peu courant en pratique.
- la courbe est croissante : c'est le cas le plus courant. En effet, plus l'échéance est éloignée, plus le risque de taux est important, donc plus le marché exige une rentabilité élevée.
- la courbe est décroissante : on observe ce phénomène lorsque le marché anticipe une baisse des taux.

Proposition 1.1 *(Prix de non-arbitrage)*
En l'absence d'opportunités d'arbitrage, le prix de marché P_{A0A} de tout titre financier versant une suite de n cash flows F_t **certains** *aux échéances futures $t_1, t_2, ..., t_n$ doit être égal à la valeur actuelle des flux du titre, en choisissant pour taux d'actualisation les taux zéro-coupons adéquats (correspondant à la structure de défaut de l'obligation considérée) à échéances $t_1, t_2, ..., t_n$:*

$$P_{AOA} = \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{t_i}}{(1+z(t_i))^{t_i}}$$

Remarque : : Il existe autant de courbes des zéro-coupons que de structure de défaut correspondant : à chaque obligation correspond un niveau de *rating* qui évalue le risque de défaut de l'obligation, et il faut prendre la structure par terme correspondant à la notation de l'obligation considérée.

Preuve : On utilise un raisonnement par arbitrage. Soit A le titre, de flux F_1, F_2, F_3 aux dates $1, 2, 3$ (pour simplifier, on suppose $n = 3$ et les flux annuels, mais un raisonnement identique peut être adapté au cas général).
On désigne par X, Y et Z les zéro-coupons à $1, 2, 3$ ans respectivement, de nominal 1. Le prix de Y est par exemple donné par :

$$P_Y = \frac{1}{(1+z(2))^2}$$

Supposons que

$$P_A > \sum_{i=1}^{n} \frac{F_{t_i}}{(1+z(t_i))^{t_i}}$$

Alors on peut mettre en oeuvre la stratégie suivante :

Opération	t=0	t=1	t=2	t=3
Acheter F_1 titres X	$-F_1 \times \frac{1}{1+z(1)}$	$+F_1$	0	0
Acheter F_2 titres Y	$-F_2 \times \frac{1}{(1+z(2))^2}$	0	$+F_2$	0
Acheter F_3 titres Z	$-F_3 \times \frac{1}{(1+z(1))^3}$	0	0	$+F_3$
Vendre A	$+P_A$	$-F_1$	$-F_2$	$-F_3$
Total	> 0	0	0	0

Ainsi, on construit une opportunité d'arbitrage, ce qui est absurde compte tenu de l'hypothèse d'AOA sur le marché.
De même on montre que si $P_A < P_{AOA}$, on peut construire une opportunité d'arbitrage (en faisant les opérations inverses des précédentes.
En conclusion, $P_A = P_{AOA}$.

D'où l'importance, pour valoriser les obligations, de
- l'hypothèse d'AOA
- la présence de "suffisamment" de zéro-coupons sur le marché, pour pouvoir "répliquer" les produits à valoriser

Cette dernière propriété est ce que l'on appelle la complétude du marché (nous le verrons un peu plus loin). Elle est liée en partie à la liquidité du marché, c'est-à-dire à la grande disponibilité des produits financiers échangeables sur le marché. Attention à ne pas confondre ces deux notions : liquidité et complétude sont liées mais ne sont pas équivalentes.

2 Opportunités d'arbitrage sur le marché boursier

a. Exemple 1

Considérons un marché avec 2 actions échangées, A et B. Il y a 2 dates, $t = 0$ et $t = 1$ (modèle monopériodique).
La grande différence avec le marché obligataire est le fait que les flux futurs ne sont pas **certains**, mais **aléatoires**.
A $t = 1$, 2 états possibles de la nature : *hausse* ou *baisse* (souvent notés u et d pour *up* and *down*).
Les payoffs à $t = 1$ des 2 actifs sont donnés par le tableau suivant :

Actif	A	B
ω_1 : état hausse	80	80
ω_2 : état baisse	35	35

Imaginons que le prix actuel de A est de 50€ , et celui de B est de 57€ . Comment peut-on construire une stratégie qui nous fasse gagner de l'argent en $t = 0$ sans en perdre en $t = 1$?

Réponse : On vent à découvert B et on achète A.

Remarque : Une *vente à découvert* (*short selling* en anglais) est une opération qui consiste à vendre un titre que l'on ne possède pas en espérant le racheter à une date ultérieure (à un cours moins élevé...) afin de le livrer à l'acheteur à cette date.

Le vendeur s'engage à livrer le titre ou le contrat à une certaine échéance sans les posséder. Il devra, pour tenir son engagement, se les procurer en les achetant sur le marché au jour de l'échéance sauf s'il décide de déboucler sa position plus tôt.

A $t = 0$, on gagne 7€ . Et à $t = 1$, on utilise les flux reçus de la revente de A pour acheter B (ou livrer les flux à l'acheteur à découvert).
Une telle opportunité de profit certain est une *opportunité d'arbitrage*. De même que sur le marché obligataire, sur un marché boursier, les investisseurs s'empresseraient d'acheter A (la moins chère), le prix de A monterait, et de vendre B, dont le prix baisserait, jusqu'à obtenir un équilibre.
Donc sur un marché financier équilibré, il ne devrait pas y avoir d'opportunité d'arbitrage (équilibre $\Longrightarrow$ AOA).

Une des conséquences majeures de l'absence d'opportunité d'arbitrage sur les marchés financiers est la *loi du prix unique* (law of one price) :

Proposition 1.2 *(Loi du prix unique) Sous l'hypothèse d'AOA, 2 actifs qui ont exactement les mêmes payoffs ont le même prix.*

C'est cette loi qui est la base de l'évaluation des produits financiers. En effet, un corollaire de la loi précédente est :

Corollaire 1.1 *Pour évaluer un actif, on peut utiliser une combinaison d'actifs existants, qui donnerait exactement les mêmes payoffs que notre actif. Une telle combinaison est appelée* portefeuille de réplication *(replicating portfolio).*

b. Exemple 2

Considérons 3 actifs C, D et E de flux futurs à $t = 1$:

Actif	C	D	E
State up	60	75	105
State down	20	40	50

Le prix de marché de C et D est respectivement 36€ et 50€ . Quel est le prix de E ?

Solution : Construisons un portefeuille avec C et D qui réplique les flux futurs (*cash flows*) de E. Supposons qu'il contienne n_C unités de C et n_D unités de D. Alors :

$$\begin{aligned} 105 &= 60 \times n_C + 75 \times n_D \\ 50 &= 20 \times n_C + 40 \times n_D \end{aligned}$$

Ce système a une solution : $n_C = 0,5$ et $n_D = 1$.
Donc un portefeuille avec $0,5$ unités de C et 1 unité de D réplique E. Donc par non-arbitrage, E doit avoir le même prix que ce portefeuille réplicant :

$$P_E = 0,5 \times 36 + 1 \times 50 = 68€ .$$

II Formalisation des marchés financiers

1 Hypothèses sur le marché

- Les actifs sont divisibles à l'infini
- Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant
- On autorise les ventes à découvert
- Les échanges ont lieu sans coût de transaction
- On autorise les emprunts et les prêts illimités pour tous les agents au même taux constant r (accès à l'actif sans risque)

2 Lexique financier : premières définitions

Quelles sont les évolutions possibles du marché ?

Ω : ensemble des états possibles du marché.
$\mathbb{P}$: Probabilité réelle (ou en tous cas anticipée) de survenance de chacun des états.
$\mathcal{F}$: Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathcal{T}}$: informations disponibles à l'instant t = tribu engendrée par le processus de prix = informations révélées par les prix antérieurs à l'instant t.

Quels sont les actifs financiers ?

On suppose qu'il y a $d+1$ actifs financiers, dont les prix à l'instant t sont donnés par des variables aléatoires $S_t = (S_t^0, S_t^1, ..., S_t^d)$ à valeurs strictement positives, mesurables par rapport à la tribu $\mathcal{F}_t$ (les investisseurs ont connaissance des cours actuels et passés, mais pas des cours futurs).
Le vecteur $S_t = (S_t^0, S_t^1, ..., S_t^d)$ est le vecteur des prix à la date t. Les actifs numérotés de 1 à d sont les *actifs risqués*. L'actif 0 est le *placement sans risque*, de taux r.

- Cas discret : $S_0^0 = 1$, et $S_n^0 = (1+r)^n$ (r est le taux discret sur la période de base considérée).
  Ainsi, $\beta_n = \frac{1}{S_n^0} = \frac{1}{(1+r)^n}$ est le *coefficient d'actualisation* (de la date n à la date 0) : c'est la somme d'argent qu'il faut investir en 0 pour avoir 1 en n sans risque.
- Cas continu : $S_t^0 = e^{rt}$ et $\beta_t = e^{-rt}$.

Quelles sont les stratégies d'investissement ?

Définition 1.3 *Une* **stratégie de gestion** *(ou* **portefeuille***) est un processus prévisible $\phi = ((\phi_t^0, \phi_t^1, ..., \phi_t^d))_{t\in\mathcal{T}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^{d+1}$, donnant à chaque instant les quantités ϕ_t^i des divers actifs détenus en portefeuille.*

- Dans le <u>cas discret</u>, on rappelle que *prévisible* signifie que : $\forall i \in \{0, 1, ..., d\}$, ϕ_0^i est $\mathcal{F}_0$-mesurable et $\forall n \geq 1$, ϕ_n^i est $\mathcal{F}_{n-1}$-mesurable.
  Signification : le portefeuille en date n est constitué au vu des informations disponibles à la date $(n-1)$ et conservé tel quel à la date n. En temps continu, c'est le même raisonnement, par passage à la limite, le portefeuille utilisé en date t est constitué à la date t^-.

– Dans le <u>cas continu</u>, on considérera des modèles continus (filtration brownienne, continuité des trajectoires). Dans ce cas précis, tout processus adapté (et continu, ce qui est le cas) est prévisible. Dans un cas général (modèle à sauts par exemple), il faut bien définir des processus de portefeuilles prévisibles : $\phi_t \in \mathcal{F}_{t^-} = \bigcup_{s<t} \mathcal{F}_s$.

Définition 1.4 *La* valeur du portefeuille *à l'instant t est donnée par le produit scalaire :*

$$V_t(\phi) = \phi_t.S_t = \sum_{i=0}^{d} \phi_t^i S_t^i$$

La valeur actualisée *est*

$$\tilde{V}_t(\phi) = \beta_t(\phi_t.S_t) = \phi_t.\tilde{S}_t$$

où β_t est le facteur d'actualisation $\beta_t = \frac{1}{S_t^0}$ et $\tilde{S}_t = (1, \beta_t S_t^1, ..., \beta_t S_t^d)$ le vecteur des prix actualisés.

Définition 1.5 *Un portefeuille* **autofinançant** *(ou* **stratégie autofinancée***) est une stratégie d'achat ou de vente de titres, actions, prêts et emprunts à la banque, et plus généralement de produits dérivés dont la valeur n'a pas été modifiée par l'ajout ou le retrait d'argent.*

Signification : les variations de la valeur du portefeuille sur une période ne sont dues qu'aux variations des prix des actifs sur le marché, et le réajustement se fait avec la même valeur globale de portefeuille sur la période suivante.

- <u>Cas discret</u>

$$\phi_n.S_n = \phi_{n+1}.S_n$$

Cette relation est équivalente à

$$\phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n) = \phi_{n+1}.S_{n+1} - \phi_n.S_n$$

ou encore à

$$V_{n+1}(\phi) - V_n(\phi) = \phi_{n+1}.(S_{n+1} - S_n)$$

- <u>Cas continu</u> (pour simplifier on prend $d = 1$) : si on note $\phi = (\phi_t^0, \phi_t^1)$, $V_t(\phi) = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 S_t$. Alors la condition d'autofinancement devient :

$$dV_t(\phi) = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t^1 dS_t$$

Pour que les deux intégrales (stochastiques) aient un sens, on impose $\int_0^T |\phi_t^0| dt < +\infty$ p.s. et $\int_0^T (\phi_t^1)^2 dt < +\infty$ p.s. Ainsi, on a

Définition 1.6 *Une* **stratégie autofinancée** *est un couple ϕ de processus adaptés $(\phi_t^0)_{t\geq 0}$ et $(\phi_t^1)_{t\geq 0}$ vérifiant*

(i) $\int_0^T |\phi_t^0| dt + \int_0^T (\phi_t^1)^2 dt < +\infty$ *p.s.*
(ii) $\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t^1 S_t = \phi_0^0 S_0^0 + \phi_0^1 S_0 + \int_0^t \phi_u^0 dS_u^0 + \int_0^t \phi_u^1 dS_u$ *p.s.* $\forall t \in [0, T]$

3 Formalisation de la notion d'arbitrage

Définition 1.7 *Une stratégie est dite* **admissible** *si elle est autofinancée et si* $\forall t \geq 0$, $V_t(\phi) \geq 0$.

Remarque : $\phi_t^0 < 0$ signifie un emprunt, et $\phi_t^i < 0$ signifie une vente à découvert (short selling).
Les emprunts et ventes à découvert sont donc permis, mais on impose à la valeur du portefeuille d'être positive à tout instant : l'investisseur doit être en mesure de rembourser ses emprunts à tout instant.

La notion d'arbitrage (réalisation de profit sans prendre de risque) est alors formalisée de la façon suivante :

Définition 1.8 *Une* **stratégie d'arbitrage** *est une stratégie admissible de valeur initiale nulle et de valeur finale non nulle avec une probabilité strictement positive.*

$$X_0 = 0,\ X_T \geq 0 \text{ et } \mathbb{P}(X_T > 0) > 0$$

Hypothèse 1 *On supposera qu'il y a sur la marché l'***hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage** *(AOA, no free lunch) entre l'instant* 0 *et l'instant* T *:*

$$X_0 = 0,\ X_T \geq 0 \Longrightarrow \mathbb{P}(X_T > 0) = 0$$

Cette hypothèse signifie simplement que si ma richesse aujourd'hui est nulle, elle ne peut devenir positive et non identiquement nulle, ou encore qu'on ne peut gagner de l'argent sans capital initial.

4 Comparaison de portefeuilles

Proposition 1.3 *En AOA, si deux portefeuilles autofinancés* X *et* Y *ont même valeur en* T*, ils ont même valeur en* 0*.*

$$X_T = Y_T \Longrightarrow X_0 = Y_0$$

Preuve : Supposons $X_0 < Y_0$ et proposons la stratégie suivante : à l'instant $t = 0$, achat de X, vente de Y et placement de $Y_0 - X_0 > 0$ à la banque. La valeur du portefeuille à l'instant $t = T$ est $X_T - Y_T$ plus ce qu'a rapporté l'argent à la banque, qui est toujours > 0.

Opération	en 0	en T
Achat de X	X_0	X_T
Vente de Y	$-Y_0$	$-Y_T$
Placement du gain à la banque	$Y_0 - X_0 > 0$	$(Y_0 - X_0)e^{rT} > 0$
Valeur	0	>0

On a construit une opportunité d'arbitrage. Donc AOA implique $X_0 \leq Y_0$. Et, de manière similaire, on obtient également $X_0 \geq Y_0$, si bien que $X_0 = Y_0$.

Remarque : Pour créer un arbitrage, on a acheté le moins cher et vendu le plus cher. Vu qu'ils ont la même valeur en T, on y gagne, logique...

Proposition 1.4 *En AOA, si deux portefeuilles autofinançants X et Y ont même valeur en T, ils ont presque sûrement même valeur en tout instant $t \leq T$.*

$$X_T = Y_T \implies \forall t \leq T \;\; X_t = Y_t, \;\; \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Ce résultat est une conséquence directe du résultat suivant :

Proposition 1.5 *En AOA, considérons deux portefeuilles autofinancés X et Y, alors :*

$$X_T \leq Y_T \implies \forall t \leq T \;\; X_t \leq Y_t, \;\; \mathbb{P}\text{-}p.s.$$

Preuve : Soit $t \leq T$. Proposons la stratégie suivante :
en 0 : je ne fais rien.
en t : sur $\{\omega \in \Omega, X_t(\omega) > Y_t(\omega)\}$, j'achète le portefeuille Y au prix Y_t, je vends le portefeuille X au prix X_t, et je place la différence $X_t - Y_t > 0$ à la banque.
sur $\{\omega \in \Omega, X_t(\omega) \leq Y_t(\omega)\}$, je ne fais rien.
Finalement, en T, sur $X_t > Y_t$, je touche $Y_T - X_T \geq 0$ plus ce qu'a rapporté l'argent à la banque qui est toujours > 0, soit une valeur > 0, et sur $\{X_t \leq Y_t\}$, la valeur du portefeuille est nulle.

		en t	en T
Sur $\{X_t > Y_t\}$	Achat de Y en t	Y_t	Y_T
	Vente de X e, t	$-X_t$	$-X_T$
	Placement du gain à la banque	$X_t - Y_t > 0$	$(X_t - Y_t)e^{r(T-t)} > 0$
	Valeur	0	>0
Sur $\{X_t \leq Y_t\}$	Valeur	0	0

Donc AOA implique $\mathbb{P}(X_t > Y_t) = 0$.

5 marchés complets

On définit une **option européenne** d'échéance T par la donnée d'une variable aléatoire $h \geq 0$, $\mathcal{F}_T$-mesurable, représentant le profit que permet l'exercice de l'option.

Exemple : pour un call de prix d'exercice K : $h = (S_T - K)_+$.
Pour un put de prix d'exercice K : $h = (K - S_T)_+$.
Mais h peut dépendre de S_t, pour $t \leq T$ (par exemple c'est le cas d'une option asiatique, dont le payoff (gain final) est la moyenne sur une période donnée précédent l'échéance).
Une telle option est aussi appelée *actif conditionnel* ou *actif contingent* (en anglais *contingent claim*).

Remarque : : Pour les options américaines, le principe est le même, mais on se donne $h \geq 0$ $\mathcal{F}\tau$-mesurable, où τ est un temps d'arrêt adapté à la filtration $\mathcal{F}$, ou plus simplement, $h = f(\tau)$, où f est une fonction mesurable.

Définition 1.9 *On dit que h est* **réplicable** *(ou* simulable, atteignable*),* attainable *en anglais, si il existe une stratégie admissible dont la valeur finale à l'instant T est égale à h.*

Définition 1.10 *On dit qu'un marché est complet si tout actif contingent est réplicable. On dit qu'il est incomplet sinon.*

6 Liens avec la probabilité neutre au risque

Définition 1.11 *On appelle* **probabilité neutre au risque** *ou* probabilité risque-neutre *ou encore* mesure martingale équivalente *toute probabilité, équivalente à la probabilité historique $\mathbb{P}$ sous laquelle le prix actualisé des actifs est une martingale.*

Dans les marchés financiers discrets, un résultat important est le suivant :

Théorème 1.1 *L'hypothèse d'AOA équivaut à l'existence d'une probabilité neutre au risque.*

Remarque : : La probabilité $\mathbb{P}^*$ ainsi définie apparaîtra ensuite comme l'outil de calcul des formules de prix et de couvertures des options.

Théorème 1.2 *Un marché avec AOA est complet si et seulement si il existe une unique probabilité risque-neutre.*

Ce résultat n'est plus vrai dans le cas des modèles continus. **L'existence d'une probabilité risque-neutre entraîne toujours l'absence d'opportunité d'arbitrage mais la réciproque est fausse**. Il faut renforcer l'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage pour parvenir à construire une probabilité risque neutre. On peut se référer pour cela aux travaux de F. Delbaen et W. Schachermayer, ou à l'article de 1981 de Harrison et Pliska. En effet, ils montrent que dans des modèles continus, **on n'est pas sûrs de l'existence d'une probabilité neutre au risque**. Il faut en général supposer qu'il en existe une (et donc que l'ensemble des mesures martingales n'est pas vide) pour pouvoir travailler. Dans le cas particulier du modèle de Black et Scholes, on en exhibe une, ce qui montre l'existence d'une probabilité neutre au risque. Mais dans le cas de modèles plus complexes, on ne sait pas montrer en général l'existence d'une probabilité neutre au risque.

III Exercices

Exercice 1.1 *On considère un marché monopériodique avec 3 états de la nature possibles : up, down and stable.*
2 actions A, B sont échangées sur le marché. Leurs prix à l'instant 0 *sont respectivement* 12€ *et* 21€ *. A l'instant* $t = 1$ *voici les payoffs des actions selon les états possibles de la nature :*

Etat	$t = 1$	
	Prix de A	*Prix de B*
$\omega_1 = u$	*15*	*25*
$\omega_2 = s$	*12*	*20*
$\omega_3 = d$	*9*	*16*

On considère maintenant un actif dérivé D, dont les payoffs dans les divers états de la nature possibles à $t = 1$ *sont :*

Etat	*prix de D à* $t = 1$
$\omega_1 = u$	*120*
$\omega_2 = s$	*100*
$\omega_3 = d$	*80*

1. *Est-il possible de construire un portefeuille à l'instant initial* 0 *répliquant l'actif D ? Pourquoi ? Le marché considéré est-il complet ?*

2. *On rajoute un* 3^{me} *actif échangeable sur le marché, au prix de* 17€ *dont les payoffs à* $t = 1$ *est :*

Etat	*Prix de C à* $t = 1$
$\omega_1 = u$	*20*
$\omega_2 = s$	*18*
$\omega_3 = d$	*12*

Est-il alors possible de répliquer l'actif D avec les actifs maintenant disponibles sur le marché ? Ce marché est-il complet ?
En déduire le prix d'arbitrage de D.

Exercice 1.2 *La matrice suivante représente les payoffs de 3 actifs dans un marché à 4 états de la nature :*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

où les lignes représentent les valeurs des 3 actifs à un état donné, et les colonnes représentent les valeurs d'un actif dans les 4 états de la nature possible.

1. *Suppose que le prix de chaque actif est* 1*. Y a-t-il une opportunité d'arbitrage sur ce marché ? Si oui, donner la composition d'un portefeuille d'arbitrage.*

2. *On suppose que le prix du premier actif est 2, alors que le prix des 2 autres est toujours 1.*
   On ajoute un actif qui vaut 0 dans tous les états de la nature, sauf l'état 1, où il vaut 1.

   Remarque : : cet actif est appelé l'actif d'Arrow-Debreu *correspondant à l'état* 1.
   Cet actif est-il déjà disponible sur le marché ? (c'est-à-dire est-il déjà réplicable par un portefeuille formés d'actifs de ce marché ?)
   Le marché obtenu est-il complet ?

Exercice 1.3 *La matrice des payoffs de 4 actifs dans un marché avec 4 états de la nature est donnée par :*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 13 & 7 & 22 \\ 4 & 12 & 8 & 24 \\ 1 & 11 & 6 & 18 \\ 5 & 15 & 6 & 26 \end{pmatrix}$$

où les lignes représentent la valeur des 4 actifs dans un état donné, et les colonnes représentent la valeur des payoffs de l'actif correspondant dans es 4 états.

1. *Ce marché est-il complet ? Pourquoi ? (trouver un actif redondant et en donner un portefeuille répliquant).*
2. *On rajoute l'actif d'Arrow-Debreu correspondant à l'état 1 : l'actif dont la valeur est 1 dans l'état 1 et 0 ailleurs. Est-il disponible (=atteignable) dans ce marché ? Si oui donner son portefeuille de réplicaction, et si non, dire si le marché obtenu en rajoutant cet actif est complet ou non.*

1 Solutions

Solution 1.1 *1. Nous obtenons à résoudre un système de 3 équations à 2 inconnues, linéairement indépendantes, il n'y a donc pas de solution ! Si on suppose que notre portefeuille répliquant possède n_A actifs A et n_B actifs B, on obtient le système à résoudre :*

$$\begin{aligned} 15n_A + 25n_B &= 120 \\ 12n_A + 20n_B &= 100 \\ 9n_A + 16n_B &= 80 \end{aligned}$$

Ce système n'a pas de solution : cela signifie que l'actif D n'est pas réplicable sur le marché formé des actifs A et B. Ce marché n'est donc pas complet.

2. Supposons que notre portefeuille répliquant possède n_A actifs A, n_B actifs B et n_C actifs C, on obtient cette fois le système à résoudre :

$$\begin{aligned} 15n_A + 24n_B + 22n_C &= 120 \\ 12n_A + 20n_B + 19n_C &= 100 \\ 8n_A + 16n_B + 12n_C &= 80 \end{aligned}$$

Qui a une unique solution : $n_A = -8$, $n_B = 8$ et $n_C = 2$.
Il existe donc un unique portefeuille répliquant D sur ce marché, formé de la vente à découvert de 8 actions A et de l'achat de 8 actions B et de l'achat de 2 actions C.
Le marché est complet puisque tout actif (de payoff x, y, z dans les états u, s, d) sera répliquable : le problème aboutira à la résolution d'un système de 3 équations à 3 inconnues qui aura une unique solution :

$$n_A = \frac{8}{5}x - \frac{5}{3}z - \frac{2}{3}y; n_B = -\frac{3}{5}x + z; n_C = \frac{1}{2}y - \frac{2}{5}x.$$

Le prix d'arbitrage de l'actif D est donc :

$$P_D = 12n_A + 21n_B + 17n_C = 106\,€$$

Solution 1.2 *1. La portefeuille $\phi = (1, 1, -2)$ investi dans les 3 actifs, qui a pour prix 0 à l'instant 0, est une opportunité d'arbitrage. Pour le vérifier, il suffit de calculer le payoff de cette stratégie dans les 4 états de la nature :*

$$A.\phi' = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ces payoffs sont strictement positifs dans 2 états de la nature. C'est donc une opportunité d'arbitrage.

Remarque : : Trouver une opportunité d'arbitrage revient donc à trouver un portefeuille ϕ tel que $\phi.P = 0$ où P est le vecteur des prix des divers actifs, et $A.\phi' \geq 0$ avec l'un au moins de ses composants qui est > 0.

2. *On peut vérifier alors qu'il n'existe plus d'opportunité d'arbitrage.*
   Le marché ainsi obtenu est complet. Le vecteur $(1, 0, 0, 0)$ *est linéairement indépendant des autres vecteurs actifs, il n'est donc pas atteignable sur le marché de départ, et la matrice des prix ainsi formée est inversible : tout actif sera réplicable.*

Solution 1.3

1. *Le marché n'est pas complet : actif 4 = Actif 1 + Actif 2 + Actif 3. Il y a 4 états de la nature, mais pas 4 actifs linéairement indépendants (le nombre d'aléas est strictement supérieur au nombre d'actifs linéairement indépendants)*
2. *On a besoin de trouver un portefeuille de réplication* N *tel que*

$$A.N = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

   Il n'y a pas de solution : cet actif n'est pas atteignable. Il complète donc le marché : si on le rajoute au marché, celui-ci devient complet. La matrice formée des actifs 1,2,3 et de ce dernier actif est inversible.

Chapitre 2

Généralités sur les options

Les produits dérivés ne datent pas du XX^{eme} siècle. L'exemple historique majeure est la Hollande du $XVII^{eme}$ qui proposait un marché d'options sur la tulipe. En effet, un hiver rigoureux impliquait une récolte moyenne et une hausse des cours et inversement. Voulant se prémunir contre une baisse des cours et voulant stabiliser leurs revenus, les producteurs ont cherché une solution financière. A l'inverse, les négociants désireux de s'enrichir, proposèrent aux producteurs des options qui leur conféraient le droit de vendre leurs productions de bulbes à des prix prédéterminés. Cette expérience innovante n'allait cependant pas durer...
Après un hiver particulièrement doux, le cours du bulbe s'effondra. Les producteurs usèrent massivement de leurs options, et les négociants ne purent pas faire face. Une analyse postérieure a montré que la faillite de ce marché s'explique par la sous-estimation de la prime de l'option. En fait, il fallut attendre 1973, pour que deux américains, Black et Scholes (et Merton) proposent un modèle mathématiques pour l'évaluation des options.

Nous faisons d'abord une présentation des notions fondamentales liées aux options (définition, exemples, caractéristiques...), puis nous étudierons les bornes à l'intérieur desquelles doivent se situer les valeurs des options pour éviter les opportunités d'arbitrage.

I Définitions

1 Produits dérivés

Qu'appelle-t-on produits dérivés ?

Définition 2.1 *On appelle* **produit dérivé** *un instrument construit à partir d'actifs et variables plus standards.*
Sa valeur dépend naturellement des actifs et variables à partir desquelles il a été construit.
Typiquement : les swaps, les contrats forwards et futures, et les options sont des produits dérivés.

Les produits dérivés sont échangés de deux façons :

Sur les marchés organisés ou réglementés. Ce sont alors
- des produits standards
- qui sont traités sur le "trading floor" ou par "computer trading"
- sur lesquels il n'y a pas de risque de contrepartie

De gré à gré. Ce sont alors
- des produits non standards ou sur-mesure
- qui sont traités par téléphone
- sur lesquels il peut y avoir un risque de contrepartie

Pourquoi utilise t-on les produits dérivés ?
- Pour se couvrir contre certains risques (de taux, de change...)
- Pour spéculer (forte volatilité et parfois possibilité d'utiliser les effets de leviers)
- Pour dégager des profits d'arbitrage

2 Qu'est-ce qu'une option ?

Définition 2.2 *Une* **option** *financière est un produit dérivé qui donne le droit (et non l'obligation) d'acheter (*option d'achat*, ou* call*) ou de vendre (*option de vente*, ou* put*) une quantité donnée d'un actif financier (action, obligation, indice boursier, devise, matière première, autre produit dérivé, etc...), appelé* actif sous-jacent *à un prix précisé à l'avance (*prix d'exercice*), à une date d'échéance donnée, appelée date d'exercice (*option européenne*) ou à une période donnée, appelée période d'exercice (*option américaine*).*
Le gain final du détenteur de l'option est appelé payoff *de l'option.*

Remarque : Les options européennes peuvent donc être exercées uniquement à une date donnée, la date d'exercice, tandis que les options américaines peuvent être exercées à tout moment, pendant une période donnée, en général toute la période entre l'instant 0 et T la date d'échéance de l'option. En anglais, on parle de european option, american option ou US-style option.

L'option est *négociable* si elle est échangée sur un marché organisé, et *de gré à gré* ou *OTC* (Over The Counter) dans le cas contraire.

En 1973, ouverture du CBOE (Chicago Board Options Exchange) et la même année, publication des articles de Black et Scholes (The pricing of options and corporate liabilities, Journal of Political Economy) et de Merton (Theory of Rational Option Pricing, Bell Journal of Economics and Management Science).
Les options négociables en France sont échangées sur le *Marché des Options Négociables de Paris (MONEP)*. Il a démarré son activité le 10 septembre 1987 et est géré par Euronext Paris SA, qui en assure l'organisation et le bon fonctionnement. Les instruments financiers à terme admis sur le MONEP sont des contrats sur valeurs mobilières ou sur paniers et indices de valeurs mobilières.

Dans les marchés organisés, les contrats d'options sont standardisés. Un contrat de base est défini par les 4 paramètres suivants : le titre sous-jacent, la date d'échéance, le prix d'exercice, et la nature (call ou put) de l'option. C'est ce que l'on appelle une série.
Exemple : la série ELF/Décembre03/80/Put sur le MONEP.

Le fondement de l'option est la rémunération du risque.
Pour obtenir le droit d'acheter ou de vendre le sous-jacent à un prix fixé à l'avance, l'acheteur paie immédiatement au vendeur la valeur de l'option, souvent appelée *prime* ou *premium*. C'est le montant qui dédommage le vendeur de son obligation éventuelle, en cas d'exercice par l'acheteur, de livrer (dans le cas du call) ou de recevoir (dans le cas du put) le titre support au prix d'exercice fixé. Bien entendu, l'acheteur n'exerce (ne lève) son option que s'il est profitable de le faire. Une option non exercée à l'échéance a une valeur nulle et meurt.

Les options peuvent être utilisées soit en couverture de risque de baisse ou de hausse, soit pour spéculer à la baisse ou à la hausse. Nous en verrons des exemples.

Il y a 4 positions de base : l'achat du call, celui du put, la vente du call et celle du put. Ces positions seront étudiées plus loin, ainsi que leurs combinaisons les plus courantes.

Les titres (actifs) supports (sous-jacents) sont très variés : actions, contrats à terme, devises, taux d'intérêt, indices boursiers, marchandises, métaux, indices de température ou même options...

3 Exemples d'options

Les options décrites jusqu'ici (européenne, américaine) sont dites *vanille* (ou plain vanilla options), car ce sont les premières apparues, les plus répandues et les plus simples. Elles sont échangées sur des marchés organisés. Toute option qui n'est pas vanille (c'est-à-dire ni européenne ni américaine) est appelée **option exotique**. En voici une liste (non exhaustive) d'exemples :

– Les **options binaires**, ou **options digitales**, donnent droit, en cas d'exercice, à un montant fixe (et préétabli) si le sous-jacent dépasse à maturité le prix d'exercice K.
Il s'agit essentiellement d'un produit spéculatif, car il est du type tout ou rien (on parle également d'options *all-or-nothing* ou *cash-or-nothing*).
Le payoff de cette option est du type

$$X = C\mathbb{1}_{S_T \geq K}$$

– On appelle **option bermudéenne** une option dont l'exercice peut se faire à plusieurs dates jusqu'à la maturité, fixées initialement. C'est un intermédiaire entre l'option euopéenne et l'option américaine.

– Les **options asiatiques**, ou **options sur moyenne**, donnent droit, en cas d'exercice, à la différence entre le prix moyen du sous-jacent sur la période $[0;T]$ et le prix d'exercice K (si cette différence est positive).
Le payoff de cette option est du type

$$X = (\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt - K)_+$$

L'avantage de ce type d'option est d'être moins sensible à la manipulation de cours qui peuvent s'observer au voisinage de l'échéance sur les options européennes classiques.

– Les **options lookback** donnent droit à échéance à la différence entre la valeur du cours en T et la valeur du minimum, ou du maximum sur la période $[0;T]$, ou sur une période prédéfinie précédent T ($[T_1, T]$).
Le payoff de cette option est du type

$$X = \left(S_T - \min_{t\in[0,T]} S_t\right) \quad \text{ou} \quad \left(\max_{t\in[0,T]} S_t - S_T\right)$$

Ces options sont relativement chères, car le payoff est toujours positif (souvent strictement, sauf si le maximum ou le minimum est précisément atteint à l'échéance).
D'autres *options sur minimum ou maximum* offrent comme payoff la différence entre le prix d'exercice K et la valeur du minimum, ou du maximum sur la

période $[0; T]$. L'acheteur de l'option est sûr d'avoir le meilleur prix pour lui pendant toute la durée de vue de l'option.

– Les **options à barrière** (barrier option) sont des call ou des put standards, mais dont l'exercice n'est autorisé que si le cours du sous-jacent franchit (*knock in*, ou option à barrière activante) (ou au contraire ne franchit pas, *knock out*, ou option à barrière désactivante) un seuil (appelé barrière).
  Ces options peuvent être activées ou désactivées (c'est-à-dire créées ou annulées) par le passage du sous-jacent au dessus ou en dessous de la valeur limite (la barrière).
  Ceci permet de réduire le risque du vendeur et donc le prix pour l'acheteur puisqu'elle ne produit ses effets que dans un nombre plus limité de situation. Il existe 8 types d'options à barrière selon qu'elle soit d'achat ou de vente, avec activation ou désactivation, par franchissement à la hausse ou à la baisse de la barrière.

  Les **options parisiennes** sont des options à barrière avec une clause particulière sur la durée de franchissement de la barrière. Une option parisienne est un option qui n'est activée (devient effective) ou désactivée (cesse d'exister) que si l'actif sous-jacent passe en dessous ou au dessus d'une barrière sans la refranchir dans le sens inverse pendant une certaine durée déterminée par le contrat.
  L'exigence d'une durée minimum de franchissement de la barrière est une protection contre le risque de manipulation des marchés qui est toujours possible pour les options à barrière qui n'a pas cette contrainte.

– Les **options quanto** sont des call ou des put standards, sur des titres étrangers, mais payés dans la devise locale. Ces options doivent alors prendre en compte le taux de change.

– Les **options cliquet** permettent à l'acheteur de bloquer ses gains réalisés sur le sous-jacent au cours d'intervalles déterminés pendant la durée de l'option, de sorte que ces gains lui restent acquis même en cas de mouvement inverse ultérieur.
  On parle aussi d'options *lock-in*, ou *reset.*

– Les **options doubles** permettent à l'acheteur de choisir, à une certaine date avant l'échéance, si l'option sera une option d'achat ou une option de vente. On parle aussi de d'options *as-you-like-it* ou de *chooser option.*

– Les **options verrou** permettent à l'acheteur de bloquer un rendement minimum en choisissant, au moment qu'il juge favorable, de fixer, au niveau du cours du sous-jacent alors atteint, le cours minimum ou maximum qui servira au dénouement de l'option (*options shout*).

– Les **Options sur panier** sont des options, vanilles en générale, dont l'actif sous-jacent est une combinaison linéaire d'actifs (panier de devises ou panier d'actions).

– Les **options arc-en-ciel**, ou **rainbow** sont également basées sur plusieurs actifs, mais il peut s'agir (pour un arc-en-ciel à deux couleurs par exemple), du minimum ou du maximum de deux actifs.
  Par exemple, pour un put européen rainbow à deux couleurs, le payoff est de la forme :
$$P(T) = \big(Max(S_T^1, S_T^2) - K\big)_+$$

– Les **options d'échange** sont un cas particulier d'options sur panier, ou le sous-jacent est la différence (**le spread**) entre les cours de deux actifs.

– Les options dont le payoff dépend de la trajectoire du ou des actifs considérés sont souvent appelées **path-dependent**.
– Enfin, parmi les sous-jacents possibles, on retiendra les options sur actions (étudiées ici), mais aussi des options sur indices (CAC40), sur taux de change, sur taux d'intérêts, sur matières premières (cacao, café...).
  Par exemple l'**option de change** (*currency option*) permet de s'assurer d'un cours de change dans une devise particulière, tout en conservant la possibilité de réaliser la transaction au cours comptant si ce dernier est plus favorable.
  Les **options sur taux d'intérêt** (*interest rate option*) sont des outils courants pour la gestion du risque de taux, car elles permettent de s'assurer d'un taux futur sans se priver des effets d'une évolution positive pour l'entreprise de ces derniers. Il existe par exemple des options cap, floor et collar, qui permettent de fixer un taux limite, des swaptions, qui sont des options sur des swaps, des options de taux à barrières...

  – Cap : Une option cap permet de plafonner un taux d'emprunt.
  – Floor : un floor offre un paiement au détenteur quand le taux d'intérêt tombe en dessous d'un certain niveau.
  – Collar : il garantit que le taux d'intérêt reste toujours dans les limites inférieures et supérieures. C'est une combinaison d'une position long sur le cap et short sur le floor.
  – Swaption : deux types de swaptions :
    - le swaption du payeur : donne le droit au participant de payer à taux fixe et de recevoir un taux flottant pour un swap préétabli à une date pré-spécifiée ;
    - le swaption du receveur : donne le droit de recevoir à taux fixe et de payer à taux flottant.

Remarque : Quelques produits optionnels classiques
– les warrants : des options généralement émises par des institutions financières, ce sont des valeurs mobilières cotées en bourse (put warrant ou call warrant) (option = contrat coté sur le MONEP ou échangé de gré à gré, warrant = valeur mobilière)
– les stock options : émis par les sociétés pour fidéliser leurs effectifs

– les obligations convertibles : des obligations classiques qui peuvent être converties en actions à certaines dates dans le futur à des ratios de conversion prédéterminés

Remarque : On parle d'options même en dehors des marchés financiers :

– Les **options en assurance** :
  Certains contrats d'assurance (vie) comportent des options : de nombreuses clauses contractuelles peuvent être interprétées comme des options (par exemple les *clauses de rachat anticipé*).

  Exemple : Dans les contrats d'épargne par exemple, il existe des clauses qui permettent au détenteur du contrat de racheter son contrat avant l'échéance (souvent échéance correspondant à un avantage de défiscalisation). Ces clauses peuvent être évaluées comme des **options cachées** ou *hidden options*.
– Les options dite "réelles" :
  Par analogie aux options financières, on appelle **option réelle** sur une activité nouvelle, le fait qu'une entreprise fasse un premier investissement d'essai dans cette activité dont on elle ne sait pas si elle vaudra la peine d'investir plus avant.
  Par analogie avec l'option du financier, on parle donc d'option réelle pour caractériser la position d'un industriel qui bénéficie d'une certaine flexibilité dans la gestion d'un projet d'investissement. Il est en effet possible de limiter ou d'accroître le montant de l'investissement compte tenu de l'évolution des perspectives de rentabilité, tout comme un financier peut exercer ou non son option sur un sous-jacent. Cette flexibilité détient une valeur qui est tout simplement la valeur de l'option réelle.
  Une méthode de valorisation d'actifs de production est de les considérer comme des options réelles ayant pour sous-jacent le bien qu'ils produisent. Les projets d'investissement contiennent souvent des options,
  – option d'abandon du projet, peut être vue comme un put américain sur la valeur du projet
  – option d'extention du projet, peut être vue comme un call américain sur la valeur du projet

Exemple : Les options réelles sont utilisées pour les forages pétroliers.

Option financière	Options réelle
Valeur actuelle du titre	Valeur actuelle des flux financiers espérés
Prix d'exercice (strike)	Coût d'investissement
Delai jusqu'à maturité	Délai jusqu'à expiration de l'opportunité d'investissement
Taux d'intérêt sans risque	Taux d'intérêt sans risque
Incertitude sur la valeur du sous jacent	Incertitude sur la valeur du projet

Les méthodes d'évaluation de telles options (options cachées en assurance, options réelles), sont directement inspirées des méthodes standards utilisées pour évaluer les options financières.

II Valeur des options

1 Facteurs influençant la valeur des options

Plusieurs facteurs peuvent influencer la valeur d'une option sur action,

- Le **cours du sous-jacent** (de l'action) à la date d'évaluation (S_0) : quand S augmente, la valeur C du call augmente, et la valeur P du put diminue, à prix d'exercice K fixé.

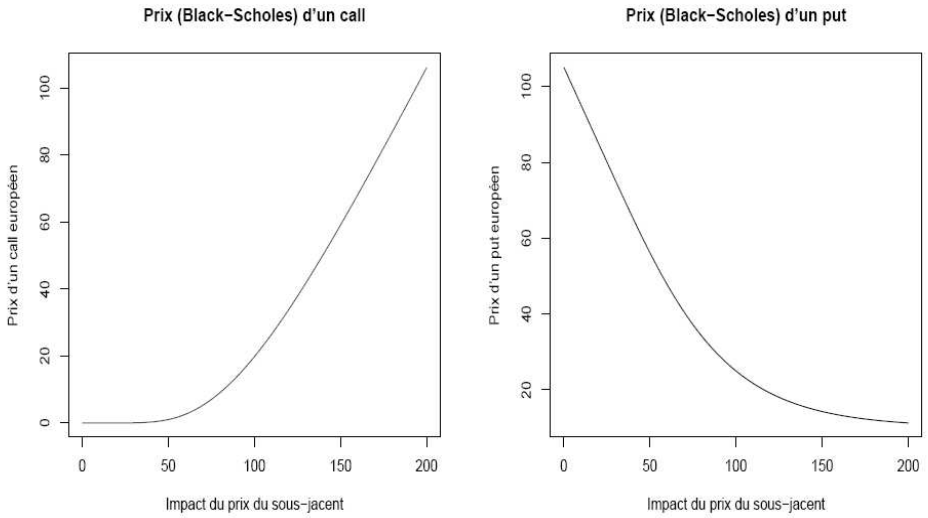


Figure 2: Influence du prix du sous-jacent sur le prix d'un call et d'un put.

- Le **prix d'exercice**, ou strike, K : plus ce dernier est élevé, plus le call est bon marché, et plus le put est cher, puisque, en cas d'exercice, K sera payé par le détenteur du call, et encaissé par le détenteur du put.

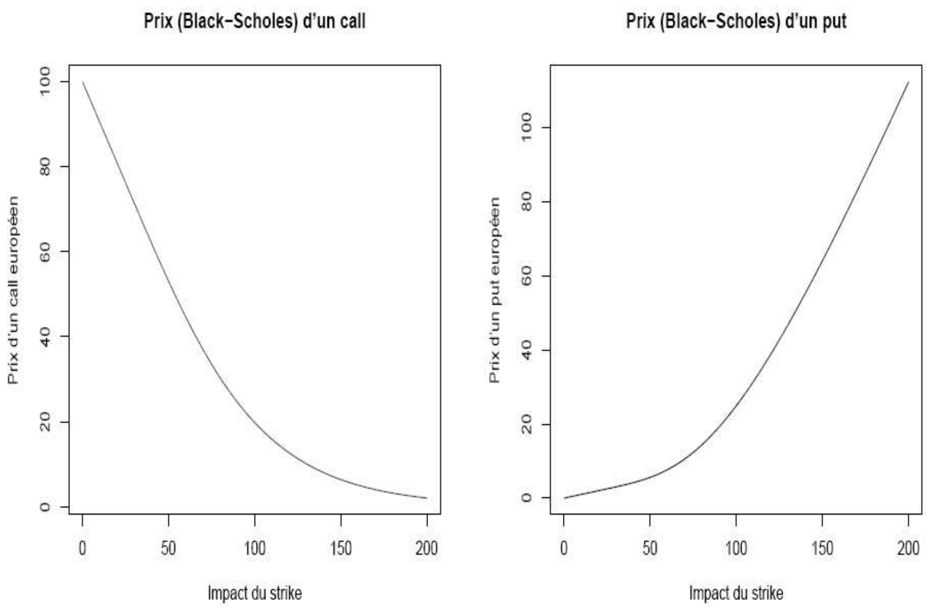


Figure 3: Influence du prix du strike sur le prix d'un call et d'un put.

– La **volatilité** du prix du sous-jacent σ : celle-ci est mesurée par l'écart-type de la distribution du taux de rentabilité du support. Plus le cours du titre est volatile, plus il a de chances, au terme d'une période donnée, de s'élever au dessus du prix d'exercice (ce qui est favorable au call), et plus il a de chances de descendre en dessous de celui-ci (cas favorable au put). Ceci implique que le call et le put son d'autant plus chers que la volatilité du sous-jacent est forte.

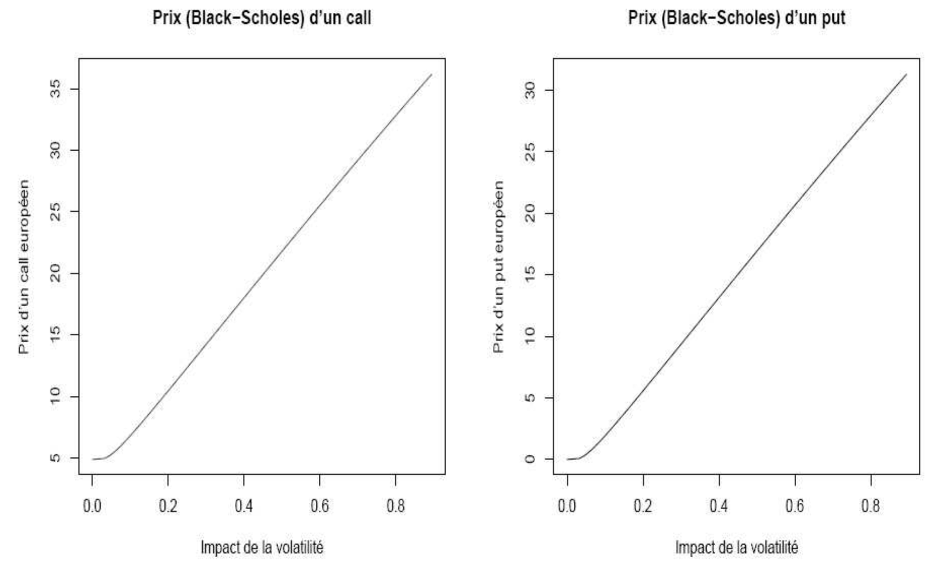


Figure 6: Influence du prix de la volatilité du sous-jacent sur le prix d'options

– La **maturité**, c'est-à-dire le temps à parcourir avant l'échéance T : la durée T qui sépare une option de son échéance exerce un double effet sur la valeur du premium, à travers la volatilité d'une part, et le loyer de l'argent d'autre part. Plus l'échéance est lointaine, plus la probabilité de voir le cours du support s'écarter fortement du prix d'exercice (et donc pour l'acheteur de réaliser un profit) est élevée. Cette influence positive de la durée de vie T dur la valeur des options due à la volatilité est commune au call et au put. La seconde influence, celle du loyer de l'argent, est cependant différente pour le call et le put. En ce qui concerne le premier, plus l'échéance est éloignée, plus tardivement s'effectuera le décaissement du prix d'exercice si l'option est exercée et, par conséquent, plus l'option est chère : les deux effets, volatilité et loyer de l'argent, s'additionnent, et un call plus long vaut toujours plus cher qu'un call identique plus court. En revanche, le facteur taux d'intérêt jour un rôle négatif dans le cas du put puisqu'il est préférable d'encaisser le prix d'exercice le plus tôt possible, toutes choses égales par ailleurs. Les deux effets étant contradictoires, un put européen plus long peut valoir plus ou moins cher qu'un put identique plus court. Un put américain plus long, cependant, ne peut valoir moins qu'un put identique plus court, puisqu'il est exerçable immédiatement (l'effet loyer de l'argent est alors nul).

Pour résumer, la valeur d'une option autre qu'un put européen est d'autant plus élevée que sa date d'échéance est éloignée.

Un corollaire immédiat est que le simple passage du temps diminue la valeur des options, sauf éventuellement dans le cas du put européen.

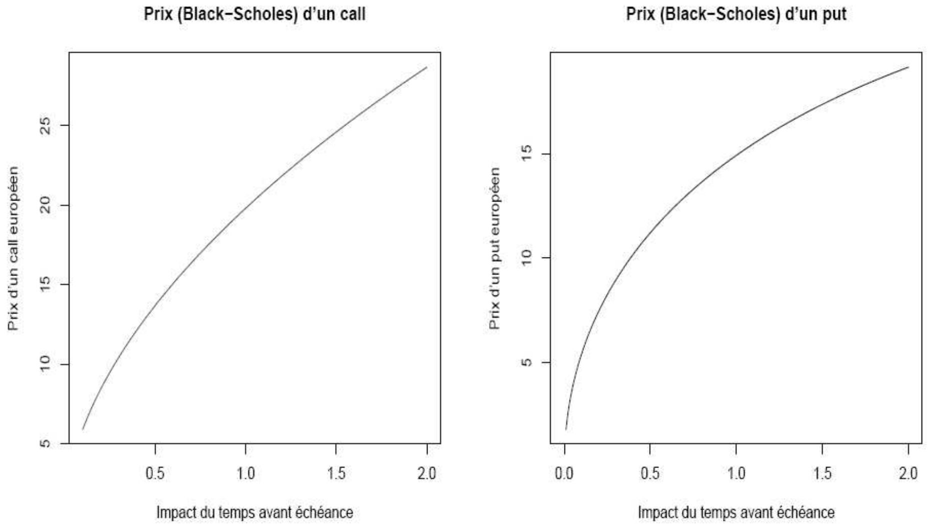


Figure 4: Influence du prix du temps avant échéance sur le prix d'options.

– Le **taux d'intérêt** sans risque r : En tant que coût d'opportunité d'un placement alternatif, le loyer de l'argent influence la valeur des options. Les arguments précédents expliquent pourquoi les calls sont d'autant plus chers et les puts d'autant moins chers que les taux d'intérêt sont élevés.

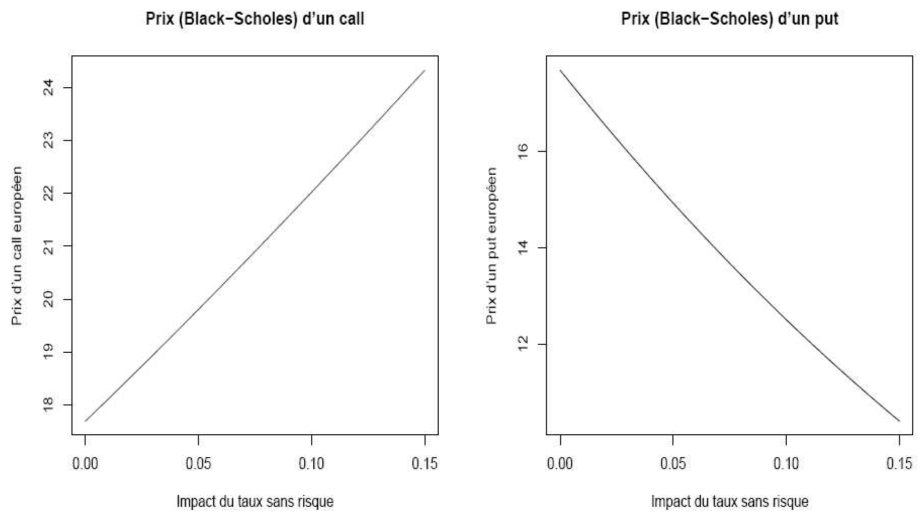


Figure 5: Influence du prix du taux sans risque sur le prix d'un call et d'un put

2 Valeur des options à l'échéance, valeur intrinsèque

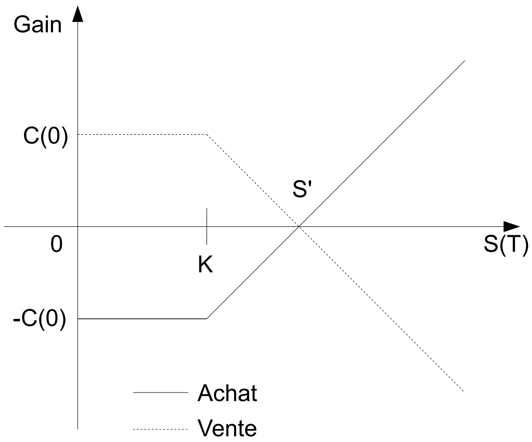
Le *payoff* d'une option (ou *valeur intrinsèque*) est le maximum entre 0 et le flux engendré par un exercice immédiat de l'option.
Pour un call européen, le payoff est

$$C(T) = max(0; S_T - K) = (S_T - K)_+$$

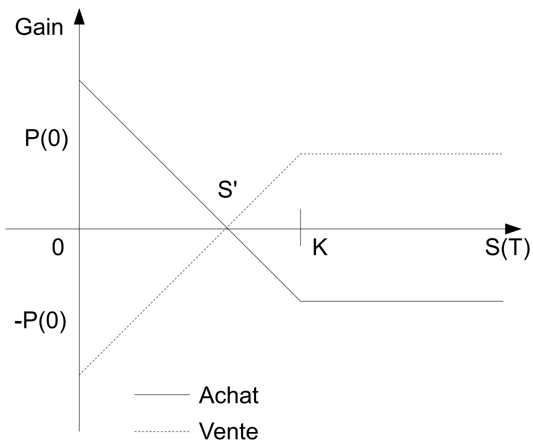
Pour un put européen, le payoff est

$$P(T) = max(0; K - S_T) = (K - S_T)_+$$

En effet, à l'instant T, le put $P(T)$ ne vaut rien si le support a une valeur supérieure au prix d'exercice K, et vaut la différence $K - S_T$ dans le cas contraire. En effet, l'acheteur cède pour K un actif qu'il peut obtenir sur le marché en payant S_T. Les stratégies d'achat et de vente d'un call et d'un put européen ont le profil de gain suivant, en fonction du prix final du sous-jacent :



Graphique 1 : Achat et Vente du Call



Evidemment, si l'acheteur exerce son call dès que S_T dépasse la valeur K, il ne réalise un gain effectif que lorsque S_T dépasse la valeur prix d'exercice + prime : $S' = K + C(0)$.

Dans le cas d'un call, les gains peuvent être illimités pour l'acheteur alors que ses pertes sont limitées au montant de la prime, tandis que les pertes sont illimitées du point de vue du vendeur, et les gains plafonnés au montant de la prime.

Comme en témoigne le graphique 2, pour l'acheteur du put, la perte maximale est limitée au montant du premium décaissé et le gain potentiel, bien que très important, n'est pas illimité.

3 Effet de levier des options

C'est le nom que porte la démultiplication des taux de rentabilité et de risque permise par les opérations sur les options. L'acheteur du call ou du put bénéficie d'un **effet de levier** potentiellement très important si son option n'expire pas sans valeur.

Exemple : Supposons par exemple qu'il ait acheté $4,8$ un call à six mois, de prix d'exercice 100€ , sur un support qui valait 98€ . Au terme des six mois, le support vaut 107€ .
Un investissement dans le support aurait rapporté

$$(107 - 98)/98 = 9,2\%$$

alors que l'acheteur du call bénéficie d'un taux de rendement semestriel de

$$((107 - 100) - 4,8)/4,8 = 45,8\%$$

Le taux de rentabilité de l'actif est multiplié par presque 5 pour avoir le taux de rentabilité de l'option. C'est ce que l'on appelle l'effet de levier des options.
Bien entendu, si le support ne vaut que 100€ , le détenteur de ce dernier a gagné $2,04\%$ et l'acheteur du call a perdu 100% de son investissement : l'effet de levier joue dans les deux sens, mis à part le fait que la perte potentielle est limitée à 100%.

4 Valeur des options avant l'échéance, valeur temps

Toutes choses étant égales par ailleurs, la valeur d'une option est, en général, une fonction croissante de sa durée. La valeur d'une option est donc plus grande avant l'échéance qu'à sa date d'expiration.

A l'instar du prix d'une action, qui n'est pas déterminé seulement par l'offre et la demande sur le marché, le prix d'une option (appelé aussi prime) dépend aussi des anticipations de résultats de la valeur à l'échéance. La valeur d'une option avant l'échéance est par conséquent composée de deux parties : la *valeur intrinsèque* et la *valeur temps*.

La valeur intrinsèque est égale à la valeur réelle de l'option c'est à dire qu'elle représente le profit qui serait obtenu immédiatement si l'on décidait d'exercer l'option. C'est la valeur qu'elle aurait si on était à la date d'échéance.

La prime d'une option vaut toujours plus que sa valeur intrinsèque tout simplement parce qu'il y a toujours une possibilité (ou probabilité) pour que, d'ici l'échéance de l'option, l'évolution des cours du sous-jacent accroisse la valeur intrinsèque de l'option. La valeur temps mesure cette probabilité. Ainsi, même lorsque l'option a une valeur intrinsèque nulle, la prime n'est pas nulle mais égale à sa valeur temps. Cette valeur représente en quelque sorte la probabilité de réaliser l'anticipation.

La *valeur temps*, ou valeur spéculative d'une option vient du fait qu'il est possible que le prix du sous-jacent varie encore avant échéance.

Exemple : Le CAC 40 cotant 3195,02 points

– un call de prix d'exercice $K = 3100$ valait 199,91 points, et le put 100,13

– un call de prix d'exercice $K = 3150$ valait 168,86 points, et le put 118,98
– un call de prix d'exercice $K = 3200$ valait 140,41 points, et le put 140,41
– un call de prix d'exercice $K = 3250$ valait 115,17 points, et le put 1465,06
– un call de prix d'exercice $K = 3300$ valait 93,26 points, et le put 193,03

Le valeur intrinsèque de l'option est la différence (positive ou nulle) entre le cours du support, et le prix d'exercice. La différence entre le cours de l'option et sa valeur intrinsèque est ce que l'on appelle la valeur temps.

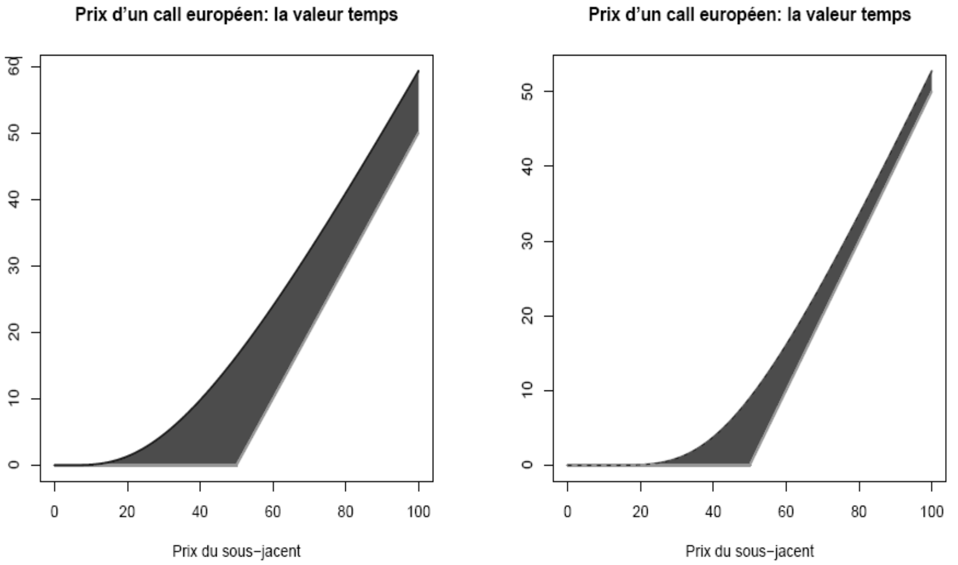


Figure 7: La valeur temps d'une option.

Une option dite *dans la monnaie* (in-the-money) engendrerait un flux positif si elle était exercée immédiatement. Un call est dans la monnaie si et seulement si $S > K$.

Une option dite *à la monnaie* (at-the-money) engendrerait un flux nul si elle était exercée immédiatement. Un call est dans la monnaie si et seulement si $S = K$.

Une option dite *en dehors de la monnaie* (out-of-the money) engendrerait un flux négatif si elle était exercée immédiatement. Un call est dans la monnaie si et seulement si $S < K$.

Exemple : Considérons à une date t l'indice CAC 40 cotant 3195,02 points, et considérons les options suivantes,

– un call de prix d'exercice K = 3150 est à la monnaie,
– un call de prix d'exercice K = 3200 est dans la monnaie,
– un call de prix d'exercice K = 3250 est en dehors de la monnaie.

Remarque : La valeur temps est faible pour les options très in, et très out-of-the-money. Pour les call, elle tend vers 0 quand le cours S_t tend vers 0, et vers $K(1 - e^{-r(T-t)})$ lorsque S_t tend vers l'infini (c'est une conséquence de la relation de parité call-put, cf ci après). La valeur temps est maximale, toutes choses étant égales par ailleurs, pour les options at-the-money.

La position de la courbe représentative de la valeur du call ou du put dépend, à S_t et K donnés, des paramètres de volatilité, de taux d'intérêt et de la date d'échéance.

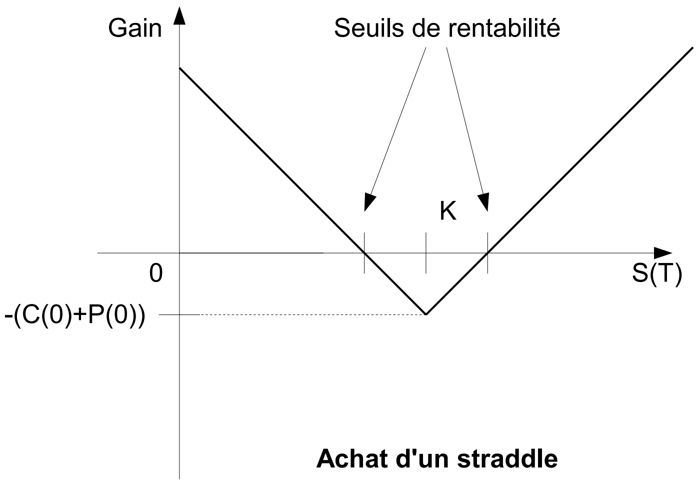
III Stratégies statiques élémentaires

En combinant entre eux des calls et des puts de prix d'exercice différents, on peut définir des stratégies, dites statiques, car ne nécessitant aucune révision avant l'échéance des options.

1 Les straddles

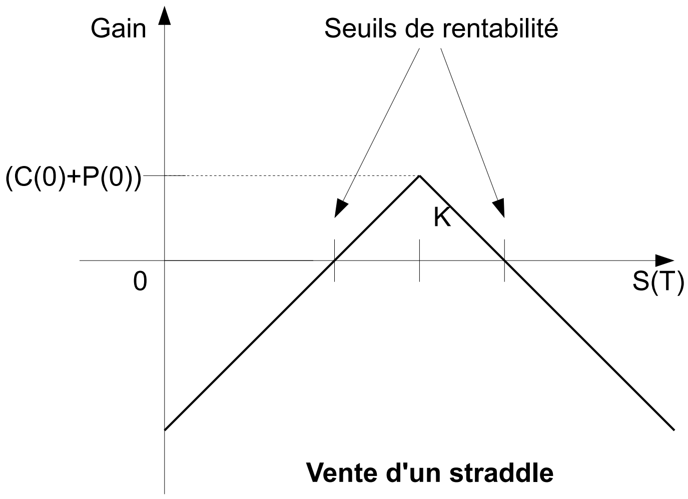
a. Straddle

Le straddle ou stellage est une stratégie boursière consistant à acheter ou à vendre le même nombre de puts ou de calls sur la même valeur sous-jacente, avec les mêmes dates et prix d'exercice.
L'acheteur d'un straddle anticipe une forte variation du cours sans toutefois en connaître le sens. Cette variation doit être suffisamment importante pour lui permettre de couvrir le montant des deux primes.



Achat d'un straddle

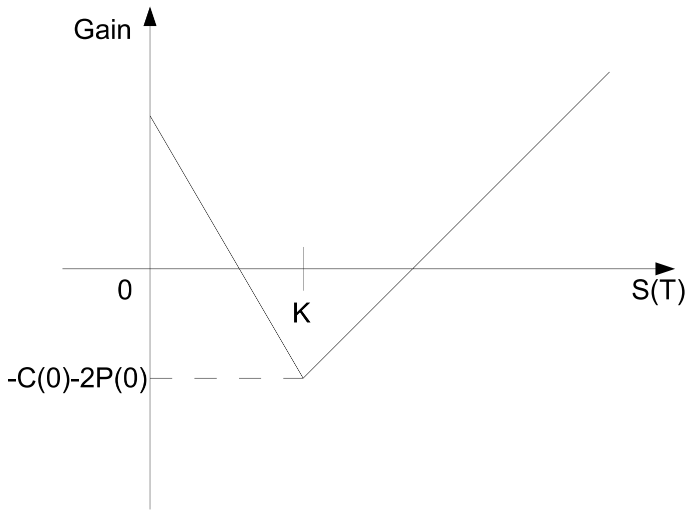
A l'inverse, le vendeur s'attend à une faible variation.



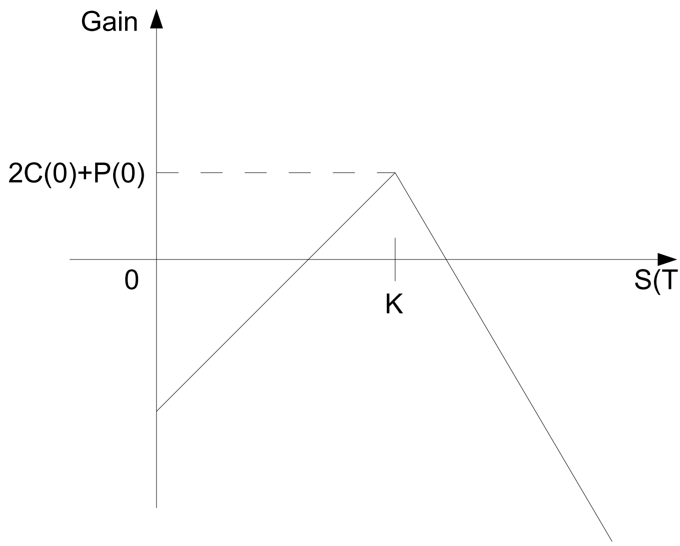
Vente d'un straddle

b. Les strips et les straps

Un strip consiste en une position longue sur un call, et sur 2 puts de prix d'exercice et de dates d'échéances identiques.
Un strap est une position longue sur deux calls et sur un put de mêmes prix d'exercice et de mêmes dates d'échéances.
Dans un strip, l'investisseur parie sur une forte variation du cours de l'action, mais estime qu'elles est plus probable à la baisse qu'à la hausse.



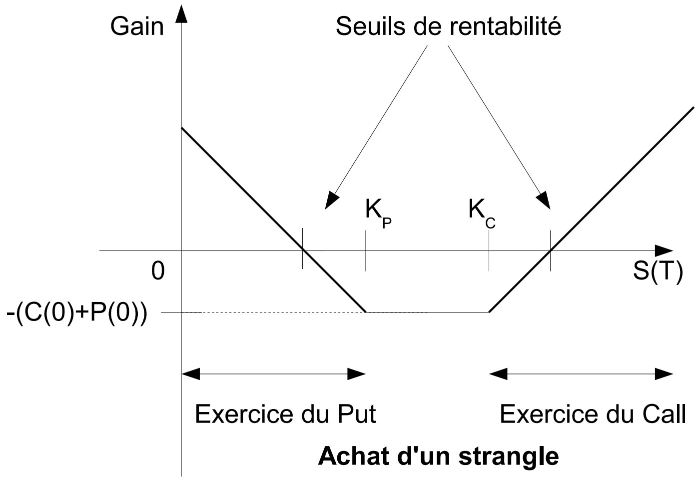
Graphique : Achat d'un strip



Graphique : vente d'un strap

c. Strangle

Le strangle est une stratégie boursière consistant à acheter ou à vendre le même nombre de puts ou de calls sur la même valeur sous-jacente, avec les mêmes dates et des prix d'exercice différents.
L'acheteur du strangle anticipe une très forte variation du cours (dans un sens ou l'autre). Le seuils de rentabilité sont plus éloignés que pour le straddle, mais le prix est en général moins élevé (prix d'exercice différents).



Achat d'un strangle

2 Ecart haussier/baissier (spread)

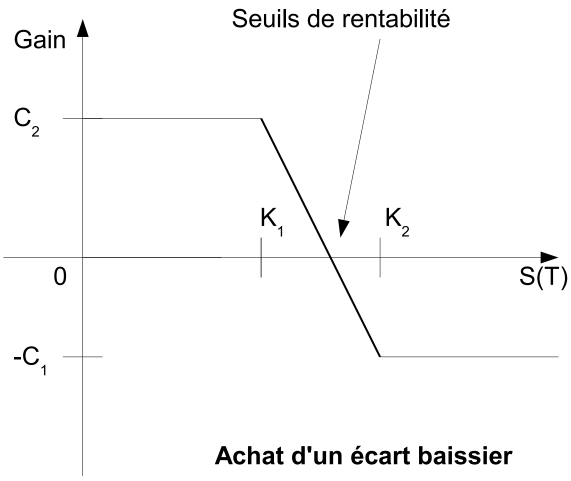
Une stratégie de spread implique de prendre une position sur deux options au moins, du même type (c'est-à-dire deux options d'achat ou deux options de vente, ou davantage).

a. Bear Spread

L'écart (ou tunnel) baissier (ou bear spread) consiste en l'achat d'un call avec prix d'exercice K_2 et la vente d'un call avec prix d'exercice K_1, où $K_2 > K_1$.
On peut également construire un écart baissier en combinant l'achat d'un put de prix d'exercice K_1 avec la vente d'un put de prix d'exercice K_1, où $K_1 < K_2$.
C'est la stratégie privilégiée face à une anticipation de baisse (modérée) du titre.

Revenus d'une stratégie de Bear Spread

Valeur de l'action	Revenus de la position longue sur le call	Revenus de la position courte sur le call	Revenus totaux
$S_T \geq K_2$	$S_T - K_2$	$K_1 - S_T$	$-(K_2 - K_1)$
$K_1 < S_T < K_2$	0	$K_1 - S_T$	$-(S_T - K_1)$
$S_T \leq K_1$	0	0	0

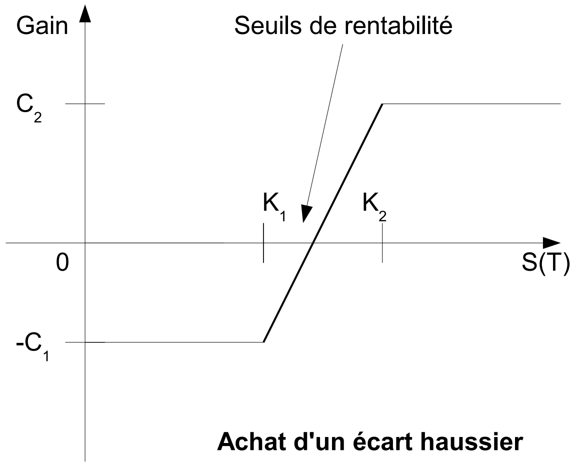


b. Bull Spread

L'écart (ou tunnel) haussier (ou bull spread) consiste en l'achat d'un call de prix d'exercice K_1 et la vente d'un call de prix d'exercice K_2, où $K_2 > K_1$.
On peut également construire cette stratégie en combinant l'achat d'un put de prix d'exercice K_2 avec la vente d'un pu de prix d'exercice K_1, où $K_2 > K_1$.
C'est la stratégie privilégiée face à une anticipation de hausse (modérée) du titre.
Une stratégie de bull spread limite pour l'investisseur aussi bien les avantages en cas de hausse que les risques en cas de baisse.
On parle de bull spread agressif lorsque l'on achète 2 call en dehors de la monnaie (faible coût de mise en oeuvre, mais faible probabilité de fournir un gain élevé, limité à $K_2 - K_1$). Si l'un des calls, ou les 2 sont dans la monnaie, le bull spread est dit défensif.

Revenus d'une stratégie de Bull Spread

Valeur de l'action	Revenus de la position longue sur l'option d'achat	Revenus de la position courte sur l'option d'achat	Revenus totaux
$S_T \geq K_2$	$S_T - K_1$	$K_2 - S_T$	$K_2 - K_1$
$K_1 < S_T < K_2$	$S_T - K_1$	0	$S_T - K_1$
$S_T \leq K_1$	0	0	0



c. Box Spread

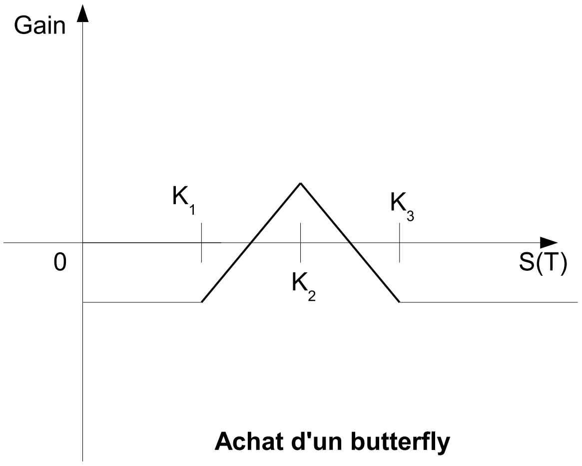
Un box spread est la combinaison d'un bull spread fondé sur des calls de prix d'exercice K_1 et K_2, et d'un bear spread fondé sur des puts de même prix exercice que les calls. Voici le tableau récapitulatif des flux terminaux engendrés par cette stratégie. Ils sont toujours égaux à $K_2 - K_1$. La valeur initiale d'un box spread est donc toujours égale à la valeur actuelle de la différence $K_2 - K_1$, sinon cela révélerait des stratégies d'arbitrage. Si par exemple son prix est plus faible, il faut acheter cette stratégie. Cela revient à acheter un call de prix d'exercice K_1, acheter un put de prix d'exercice K_2, vendre un call de prix d'exercice K_2 et vendre un put de prix d'exercice K_1.

Revenus d'une stratégie de Box Spread

Valeur de l'action	Revenus du bull spread	Revenus du bear spread	Revenus totaux
$S_T \geq K_2$	$K_2 - K_1$	0	$K_2 - K_1$
$K_1 < S_T < K_2$	$S_T - K_1$	$K_2 - S_T$	$K_2 - K_1$
$S_T \leq K_1$	0	$K_2 - K_1$	$K_2 - K_1$

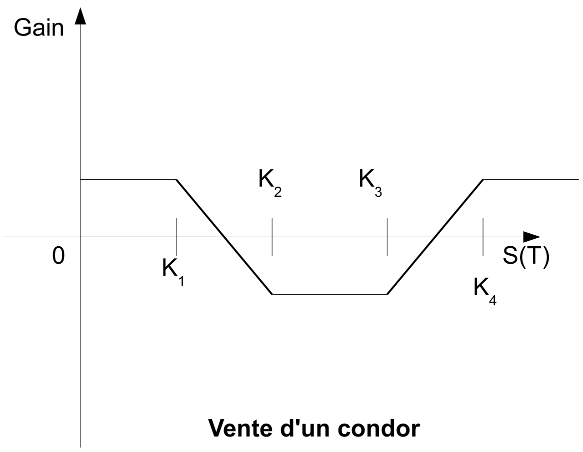
3 Butterfly Spread

Un butterfly spread, ou spread papillon, implique des positions sur des options de 3 prix d'exercice différents.
Il consiste par exemple en l'achat de 2 calls (ou 2 puts) de prix d'exercice K_1 et K_3, et de la vente de 2 autres calls (ou puts) de prix d'exercice K_2, avec $K_1 > K_2 > K_3$. Généralement, K_2 est proche du cours actuel. Un acheteur de papillon anticipe de faibles fluctuations, de sens inconnu, et permet de s'assurer des pertes limitées.



4 Condor

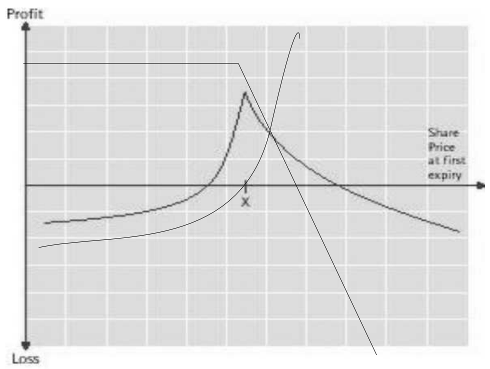
Un condor consiste en l'achat de 2 calls (ou put) de prix d'exercice K_1 et K_4 simultanément à la vente de 2 calls (ou puts) de prix d'exercice K_2 et K_3, avec $K_1 < K_2 < K_3 < K_4$.
Un vendeur de condor anticipe de fortes fluctuations, de sens inconnu, et permet de s'assurer des pertes et des pertes limitées.



5 Calendar Spread

Jusqu'à présent, on a supposé que les options composant les spreads arrivaient toutes à échéance à la même date. Les *calendar spread* ou *spread calendaires* sont des stratégies dans lesquelles les options ont le même prix d'exercice mais des dates d'échéance différentes.

Un calendar spread peut par exemple être réalisé en vendant un call de prix d'exercice donné et en achetant un call de même prix d'exercice maid dont la date d'échéance est plus éloignée. Plus la durée de vie de l'option est longue, plus son prix est en général élevé. On représente en général le profil de gain d'un calendar spread à la date d'échéance de la première option, en supposant que la seconde option est revendue à cette date.



IV Relations d'arbitrage

1 Bornes sur les prix d'options

Les bornes sont des outils précieux, qui peuvent servir pour vérifier qu'un algorithme de valorisation est bien implémenté par exemple.

- Une option d'achat ne peut jamais valoir plus que l'action sous-jacente S_0, que l'option soit européenne ou américaine. Aussi, $C \leq S_0$ (sinon une opportunité d'arbitrage serait possible en achetant l'action, et en vendant le call).
- De même, une option de vente ne peut jamais valoir plus que que le strike K, en particulier, à maturité. On peut en déduire que sa valeur aujourd'hui ne peut pas dépasser la valeur actualisée du strike, i.e. $P \leq Ke^{-rT}$.
- Une option d'achat ne peut jamais valoir moins que $S_0 - Ke^{-rT}$ (valeur actualisée de son payoff), aussi on en déduit que

$$C \geq max\{S_0 - Ke^{-rT}; 0\}.$$

- Une option de vente ne peut jamais valoir moins que $Ke^{-rT} - S_0$, aussi on en déduit que

$$P \geq max\{Ke^{-rT} - S_0; 0\}.$$

2 Relation de Parité call-put

Un call de strike K et d'échéance T sur le sous-jacent S a pour payoff $(S_T - K)_+$. Notons C_t son prix à l'instant t.
Un put de strike K et d'échéance T sur le sous-jacent S a pour payoff $(K - S_T)_+$. Notons P_t son prix à l'instant t.
Un zero-coupon d'échéance T est un produit financier de valeur 1 en T. Son prix en t est noté $B(t, T)$ (en continu c'est donc $e^{-r(T-t)}$ si le taux d'intérêt du marché est r).

Proposition 2.1 *Alors, en AOA, les prix des calls et des puts en t sont reliés par la relation de parité call-put standard :*

$$C_t - P_t = S_t - KB(t, T)$$

Preuve : En effet considérons les deux stratégies de portefeuille :

		en 0	en t	en T
Port. 1	Achat d'un Put européen en t		P_t	$(K - S_T)_+$
	Achat d'un actif risqué en t		S_t	S_T
	Valeur		$P_t + S_t$	$(K - S_T)_+ + S_T$
Port. 2	Achat d'un Call européen en t		C_t	$(S_T - K)_+$
	Achat de K actifs sans risque en t		$KB(t, T)$	K
	Valeur		$C_t + KB(t, T)$	$(S_T - K)_+ + K$

On peut remarquer que l'on a

$$(K - S_T)_+ + S_T = K 1\!\!1_{\{S_T \leq K\}} + S_T 1\!\!1_{\{K \leq S_T\}} = (S_T - K)_+ + K$$

Donc, les deux portefeuilles ont des flux finaux égaux, et donc en AOA des valeurs égales a tout instant $t \leq T$. Ceci nous donne la relation de parité Call-Put attendue.
Remarque : Cette relation est intrinsèque a l'absence d'opportunité d'arbitrage sur le marché et ne dépend en rien du modèle d'évolution imposé aux actifs.

On peut déduire le même genre de résultat pour le cas des options américaines.
Toutes ces propriétés peuvent se résumer dans la proposition suivante :

Proposition 2.2 *Dans le cas d'options européennes, si C_t et P_t désignent les prix du call et du put à la date t,*

$$max\{S_0 - Ke^{-rT}, 0\} \leq C_0 \leq S_0,$$
$$max\{Ke^{-rT} - S_0, 0\} \leq P_0 \leq Ke^{-rT}.$$

On a de plus la formule de parité

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

La relation de parité call-put a la signification économique importante suivante : sur les quatre instruments financiers que sont le titre support, le call, le put et l'actif sans risque, l'un quelconque est redondant, c'est-à-dire qu'on peut le répliquer à l'aide des 3 autres. Par exemple, l'achat du call est identique à l'achat du put correspondant et du titre support, financé par un emprunt sur le marché monétaire. C'est la raison pour laquelle on peut créer des call, des puts, des supports et des instruments de taux d'intérêts synthétiques.

Naturellement, la parité et donc cette redondance ne sont pas absolues dans la réalité, du fait de l'existence de coûts de transaction.

3 Cas des options américaines

Proposition 2.3 *Dans le cas d'options américaine, si $\hat{C}$ et $\hat{P}$ désignent les prix du call et du put à la date 0,*

$$max\{S_0 - Ke^{-rT}, 0\} \leq \hat{C} \leq S_0,$$
$$max\{Ke^{-rT} - S_0, 0\} \leq \hat{P} \leq K.$$

On a de plus la formule de parité

$$S_0 - K \leq \hat{C} - \hat{P} \leq S_0 - Ke^{-rT}$$

Proposition 2.4 *En l'absence de versement de dividendes, un call américain a le même prix qu'un call européen de mêmes caractéristiques.*
Un put américain, en revanche, est strictement plus cher qu'un put européen de mêmes paramètres.

Remarque : Cela vient qu'on n'a jamais intérêt à exercer un call américain sans versement de dividende avant l'échéance, alors qu'il peut être optimal d'exercer prématurément un put américain portant sur une action ne versant pas de dividendes.

Preuve : Dans le seul cas standard (sans dividende), le call américain ne vaut pas plus cher que son homologue européen. En effet, si on note $\hat{C}$ le prix du call américain, on a de manière claire $\hat{C} \geq C$ puisque le call américain procure plus de droits que son homologue européen. Grâce à la relation de parité call-put, on a

$$\hat{C} \geq C = P + S - Ke^{-rT} \geq S - Ke^{-rT} > S - K$$

D'où $\hat{C} > S - K$.
La valeur temps du call étant toujours strictement positive, il ne faut jamais l'exercer avant l'échéance T. Par conséquent, le caractère américain du call ne présente ici aucun avantage et $\hat{C} = C$.

De par la parité call-put, $P = C + Ke^{-rt} - S \neq Ke^{-rt} - S$ si le put est très in-the-money (car alors le call C est très voisin de 0). Donc $P < K - S$, le put européen a alors une valeur temps très négative. Comme le put américain in-the-money peut être exercé avant T, il vaut toujours $\hat{P} \geq K - S$. D'où $\hat{P} > P$.

Le cas du call est, en pratique, très important, car les modèles d'évaluation supposent souvent que l'option est européenne, alors qu'elle est plus souvent américaine. Dans ce cas standard, et pour le seul call, ces modèles sont strictement équivalents.

Proposition 2.5 *si $T_2 > T_1$, alors $\hat{C}(T_2) \geq \hat{C}(T_1)$ et $\hat{P}(T_2) \geq \hat{P}(T_1)$.*

Preuve : Si $\hat{C}(T_2) < \hat{C}(T_1)$, on achète le call T_2 et je vend le call T_1, pour un flux net positif. En T_1, si $S(T_1) \leq K$, le call vendu expire sans valeur, et on perd $-(S(T_1) - K)$ sur le call T_1, mais on a en portefeuille un call T_2 qui vaut $\hat{C}(T_2) \geq S(T_1) - K$ d'après les bornes de la proposition 2.3.

4 Prix d'arbitrage pour un contrat forward

Le contrat Forward est un contrat signé à la date $t = 0$ qui assure l'échange en T de l'actif risqué S contre un prix $F(0,T)$ fixé en $t = 0$. Il n'y a aucun échange d'argent à la date $t = 0$. Pour déterminer le prix $F(0,T)$ du contrat, considérons les deux stratégies de portefeuille suivantes :

		en 0	en T
Portefeuille 1	Achat de l'actif S_0 en 0 Vente de $F(0,T)$ zéros coupons en 0 Valeur	S_0 $-F(0,T)B(0,T)$ $S_0 - F(0,T)B(0,T)$	S_T $-F(0,T)$ $S_T - F(0,T)$
Portefeuille 2	Achat du contrat Forward en 0	0	$S_T - F(0,T)$

Donc en AOA, on a

$$F(0,T) = \frac{S_0}{B(0,T)}.$$

Exemple : Montrer que de manière plus générale, on obtient :

$$F(t,T) = \frac{S_t}{B(t,T)}.$$

5 Parité call-put avec dividendes

Proposition 2.6 – *Si le titre support au comptant détache un dividende certain D à une date future certaine $t \leq T$, la relation de parité call-put devient :*

$$C - P = S - Ke^{-rT} - De^{-rt}$$

où le dernier terme représente la valeur actualisée du dividende attendu.

– *Alternativement, si le support au comptant génère un taux de rendement d sur la période $[0, T]$, la relation de parité call-put devient :*

$$C - P = Se^{-dT} - Ke^{-rT}$$

C'est le cas, en particulier, sur les devises, d dénotant alors le taux d'intérêt étranger, et r le taux d'intérêt domestique.

Dans la plupart des cas, il peut être optimal d'exercer une option américaine in-the-money avant sa date d'échéance. Voici l'un des cas possibles :

Proposition 2.7 *Soit un call américain sur un support au comptant versant un dividende ou un coupon d'ici à l'échéance T. Il peut alors être optimal de l'exercer prématurément si le dividende est suffisant. Dans ce cas, le jour optimal d'exercice anticipé est la veille du jour du détachement du coupon.*

Le détachement du coupon provoque une baisse discrète du cours d'un montant D. L'exercice anticipé du call prévient les conséquences néfastes de cette baisse sur sa valeur.

Preuve :

$$\hat{C} \geq C = P + S - Ke^{-rT} - De^{-rT} \geq S - Ke^{-rT} - De^{-rT}$$

Le dernier terme n'est pas nécessairement supérieur à $S - K$ si D est suffisamment grand. Le call peut donc avoir une valeur de marché inférieure à sa valeur intrinsèque, et il faut alors l'exercer pour obtenir $S - K$. La raison pour laquelle il faut attendre la veille du jour du détachement avant d'éventuellement exercer le call est que l'exercice à une date antérieure ferait perdre un peu de valeur temps.

Les conditions d'exercice du call anticipé sont formellement :

– Condition nécessaire d'exercice : $D > K(1 - e^{-r(T-t)})$
– Condition nécessaire et suffisante d'exercice : $S_t - K > \hat{C}(S - D, T - t)$.

V Exercices du chapitre 2

Exercice 2.1 *Tracer le graphe des stratégies suivantes :*

1. *Call couvert ou covered call : Position longue (achat) sur une action, et position courte (vente) sur une option d'achat sur la même action.*
2. *Position courte sur une action et position longue sur une option d'achat.*
3. *Protective Put : Position longue sur une option de vente, et position longue sur une action.*
4. *Position courte sur une option de vente, et position courte sur une action.*

Ces graphes vous rappellent-t-ils des stratégies connues ? Expliquer ces similitudes à l'aide de la relation de parité call-put.

Exercice 2.2 *Un box spread est la combinaison d'un bull spread fondé sur des calls de prix d'exercices K_1 et K_2, et d'un bear spread fondé sur des puts de mêmes prix d'exercices.*

1. *Dresser le tableau des payoffs possibles d'une telle stratégie selon les valeurs de S_T.*
2. *Supposons qu'une action cote 50€ avec une volatilité de 30%, aucun dividende n'est attendu, et le taux sans risque est de 8%. Un trader vous offre l'opportunité de vendre sur le MONEP un box spread à 2 mois, au prix de $5,1$€ avec des prix d'exercice de 55€ et 60€ . Profitez-vous de cette occasion ?*
3. *Qu'en est-il si vous découvrez que le produit proposé à la vente par le trader avait un caractère américain ? Etait-ce aussi alléchant qu'il y paraissait ?*
   Les données des prix d'options sur le marché sont les suivants :

Type d'option	*Prix d'exercice*	*Option européenne*	*Option américaine*
Call	*60*	*0,26*	*0,26*
Call	*55*	*0,96*	*0,96*
Put	*60*	*9,46*	*10,00*
Put	*55*	*5,23*	*5,44*

Exercice 2.3 *Trois options de vente sur une action ont la même date d'échéance et des prix d'exercice de 55€ , 60€ , 65€ . Leurs prix sont respectivement de 3€ , 5€ et 8€ .Expliquez de quelle manière réaliser un butterfly spread. Construisez un tableau présentant les bénéfices d'une telle stratégie. Pour quelles valeurs de l'action le butterfly spread entraîne-t-il une perte ?*

Exercice 2.4 *Construire un graphique représentant les variations des gains et pertes d'un investisseur en fonction de la valeur de l'action à l'échéance pour les portefeuilles suivants :*

1. *Une action et une position courte sur un call*
2. *2 actions et une position courte sur 2 calls*
3. *1 action et une position courte sur 2 calls*
4. *Une action et une position courte sur 4 calls*

Dans chaque cas vous supposerez que le call a un prix d'exercice égal à la valeur de l'action au moment de la prise de position.

Solution 2.1 *Graphes Cf Hull p. 222*

1. *= Position courte sur une option de vente (=vente d'un put)*
2. *= Position longue sur une option de vente (=achat d'un put)*
3. *= Position longue sur une option d'achat (=achat d'un call)*
4. *= Position courte sur une option d'achat (=vente d'un call)*

La relation de parité call-put donne une explication à cette ressemblance : cette relation s'écrit :

$$p + s_0 = c + Ke^{-rT} + D$$

où p est le prix du put européen, S_0 le cours actuel de l'action, c la valeur du call européen, K le prix d'exercice des deux options, r le taux d'intérêt sans risque, T le temps à parcourir jusqu'à l'échéance des deux options, et D la valeur actuelle des dividendes éventuellement versés durant la vie de l'option.
Cette équation montre qu'une position longue sur un put, combiné avec une position longue sur une action est l'équivalent d'une position longue, combinée avec des liquidités d'un montant égal à $Ke^{-rT} + D$. Cela explique pourquoi le profil de gain du protective put est identique à celui qui découle d'une position longue sur un call. Idem pour le cas N°4, qui est la position symétrique, donc identique à une position courte sur un call.
De même on peut réécrire la relation de parité call-put comme :

$$S_0 - c = Ke^{-rT} + D - p$$

Et donc une position longue sur une action combinée avec une position courte sur un call est équivalente à une position courte sur un put, plus un montant de liquidités égal à Ke^{-rT} (cas n°2). Et le cas n°1 est donc similaire à une position longue sur un put.

Solution 2.2 *Cette transaction est attractive puisque la valeur terminale est à coup sûr* 5€ *dans 2 mois. Vous encaissez donc* 5,1€ *immédiatement, et vous les placez au taux sans risque, ce qui vous permettra sans difficulté de payer les* 5€ *dans 2 mois. En fait, la valeur théorique du box spread devrait être égale à :*

$$5 \times e^{-0{,}08\times 2/12} = 4{,}93€$$

Malheureusement il y a un truc ! Ces options sont américaines, et la valeur théorique que nous venons de calculer fait l'hypothèse qu'elles sont européennes. Les prix théoriques, tenant compte du caractère américain, sont donnés dans le tableau.
Le bear spread vaut $4{,}23$€ *si les options sont européennes, mais* $10{,}00 - 5{,}44$ *si les options sont américaines. En conséquence, la valeur du box spread américain est égale à* $0{,}70 + 4{,}56 = 5{,}26$. *Le vendre à* 5,1€ *n'est donc pas une bonne affaire ! Vous pourriez vous en rendre compte tout de suite car le put au prix d'exercice* 60€ *que vous avez vendu serait exercé immédiatement par l'acheteur !*

Deuxième partie

Modèles d'évaluation des produits dérivés

Chapitre 3

Modèles d'évaluation par arbres

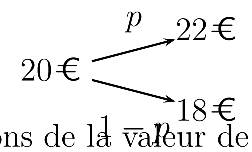
Le modèle binomial est très pratique pour les calculs, et la plus grande partie des résultats se généralise aux modèles en temps continu, comme nous le verrons dans l'étude du modèle de Black et Scholes.

I Exemple introductif

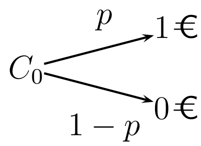
Supposons que nous cherchions à évaluer un call européen d'échéance 3 mois, et de prix d'exercice 21€ . Le cours de l'action est actuellement de 20€ . Pour simplifier, supposons que, dans 3 mois, le cours de l'action ne peut prendre que 2 valeurs : 22€ et 18€ . L'option n'a alors que 2 valeurs possibles à la fin des 3 mois : 1€ si l'action atteint 22€ , et 0€ si il tombe à 18€ .

Un raisonnement simple peut alors être utilisé pour évaluer l'option. La seule hypothèse nécessaire est l'absence d'opportunité d'arbitrage. Il suffit de construire un portefeuille comprenant l'action et l'option, de manière q u'il n'y ait aucune incertitude sur la valeur de celui-ci à la fin des trois mois. Si le portefeuille est sans risque, sa rentabilité est forcément égale au taux sans risque (ie la valeur initiale est forcément égale à la valeur actualisée de la valeur certaine du portefeuille ainsi constitué). On peut donc en déduire le coût de constitution du portefeuille, et donc par conséquent, le prix de l'option.

Graphique 3.1 : Variations du cours de l'action



Variations de la valeur de l'option



Puisqu'il y a 2 titres (l'action et l'option) et seulement 2 états possibles de la nature, on a toujours la possibilité de constituer un portefeuille sans risque (le marché est complet, on peut répliquer l'actif sans risque).

Soit un portefeuille constitué de Δ actions achetées et d'un call vendu. La valeur de Δ est choisie de façon à ce que le portefeuille choisi soit sans risque. Si le cours progresse de 20€ à 22€ , la valeur des actions est alors 22€ et le call vaut 1€ . La valeur du portefeuille est donc $22\Delta - 1$. Si l'action baisse de 20€ à 18€ , la valeur du portefeuille est 18Δ. Le portefeuille ainsi constitué est sans risque si

$$22\Delta - 1 = 18\Delta$$

Soit

$$\Delta = 0,25$$

Un portefeuille sans risque est donc constitué de

- achat de $0,25$ actions
- vente d'une option

Si le cours atteint 22€ , la valeur du portefeuille est

$$22 \times 0,25 - 1 = 4,5€$$

Si le cours de l'action tombe à 18€ , la valeur du portefeuille est :

$$18 \times 0,25 = 0,45€$$

Que la valeur de l'action augmente ou diminue, celle du portefeuille est toujours égale à 4,5€ à l'échéance de l'option.
En l'absence d'arbitrage, un tel portefeuille a donc le même payoff que une somme investie dans l'actif sans risque. Il doit donc avoir la même valeur initiale (cf chapitre 1). Il s'en suit que la valeur du portefeuille aujourd'hui est la valeur actualisée de 4,5€ , soit

$$4,5e^{-0,12\times 3/12} = 4,367$$

La valeur de l'action aujourd'hui est connue et égale à 20€ . Si f désigne la valeur de l'option à la date 0, on a donc :

$$20 \times 0,25 - f = 5 - f = 4,367€$$

D'où

$$f = 0,633€$$

En l'absence d'opportunité d'arbitrage, la valeur de l'option doit être $0,633$€ . Si elle était supérieurs, le portefeuille coûterait moins de 4,367€ à sa création et rapporterait donc + que le taux sans risque, d'où opportunité d'arbitrage, et si c'est l'inverse, une position courte sur le portefeuille équivaudrait à un emprunt à un taux inférieur au taux sans risque.

II Le modèle binomial à une période

1 le modèle

Nous présentons ici une première approche des arbres binomiaux, et leur relation avec le principe connu sous le nom d'évaluation risque-neutre. Ce modèle est aussi appelé modèle de Cox-Ross-Rubinstein (article pionnier datant de 1979).
Le raisonnement de l'exemple ci-dessus peut être généralisé en considérant une action de prix S_0 et une action sur cette action dont la valeur est f.
Considérons un marche à deux dates : $t = 0$ et $t = 1$, et deux actifs.

- Un **actif sans risque** qui vaut 1 en $t = 0$ et vaut $R = (1 + r)$ en $t = 1$, qui représente l'argent placé à la banque au taux r (dans une obligation), il est sans risque dans le sens où l'on connaît en $t = 0$ la valeur qu'il aura en $t = 1$. (notons que si le taux donné est un taux continu, il suffit d'utiliser la formule des taux continus pour avoir $R = e^{rT}$ où T est la durée de la période considérée.
- Et un **actif risqué** S, qui vaut S_0 en $t = 0$, et à l'instant 1, il peut avoir pris 2 valeurs différentes : soit il est monté et il vaut $S_u = u.S_0$, soit il est descendu et il vaut alors $S_d = d.S_0$ avec $d < u$.

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & u.S_0 \\ S_0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & d.S_0 \end{tikzcd}$$

La modélisation probabiliste du marché est la donnée de 3 choses : $\Omega, \mathcal{F}$ et $\mathbb{P}$.

Ω est l'ensemble des états du monde : 2 états possibles selon la valeur de l'actif risqué en $t = 1$, état "haut" ω_u ou "bas" ω_d. $\Omega = \{\omega_u, \omega_d\}$.

$\mathbb{P}$ est la probabilité historique sur Ω. $\mathbb{P}(\omega_u) = p$ et $\mathbb{P}(\omega_d) = 1 - p$. Le prix a une probabilité réelle de monter et $1 - p$ de descendre. Attention : $p \in]0, 1[$ car les 2 états du monde peuvent arriver.

$\mathcal{F} = \{\mathcal{F}_0, \mathcal{F}_1\}$ est un couple de 2 tribus représentant l'information globale disponible sur les marchés aux instants $t = 0$ et $t = 1$.
En $t = 0$, on ne dispose d'aucune information :

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$$

En $t = 1$, on sait si l'actif est monté ou descendu :

$$\mathcal{F}_1 = \mathcal{P}(\Omega) = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_u\}, \{\omega_d\}\}.$$

Cette tribu représente l'ensemble des parties de Ω dont je puisse dire à l'instant $t = 1$ si elles sont réalisées ou non. Evidemment, $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1$, en effet plus on avance dans le temps plus on acquiert de l'information.

Remarque : Une va est $\mathcal{F}_1$ mesurable ssi elle est connue avec l'information donnée par F_1, ie déterminée à l'instant 1. $\mathcal{F}_1$ est la tribu engendrée par S_1.

Définition 3.1 *Un produit dérivé (ou actif contingent) est une va $\mathcal{F}_1$-mesurable.*

La valeur d'un produit dérivé dépend de l'état du monde réalisé à la date $t = 1$, et de manière équivalente, tout produit dérivé s'écrit comme fonction mesurable ϕ de S_1.

2 Evaluation du prix d'un produit dérivé

Notre problème est d'évaluer le prix à la date $t = 0$ d'un produit dérivé. On va donc essayer de créer un portefeuille de duplication de notre produit dérivé, ie une stratégie d'investissement autofinançante dans l'actif risqué et dans l'actif sans risque. L'hypothèse d'AOA nous indiquera alors que ces 2 stratégies qui ont mêmes valeurs en $t = 1$ ont même valeur en $t = 0$, ce qui nous donnera la valeur en 0 de notre produit dérivé.

Définition 3.2 *Ici, une stratégie de portefeuille simple consiste en une stratégie (x, Δ) où x désigne le capital initial, et Δ la quantité d'actif risqué.*

Le portefeuille ne subit aucune rentrée ou sortie d'argent entre 0 et 1 (il n'y a qu'une période). La stratégie de portefeuille simple consiste en l'achat à la date 0 de Δ actifs risqués, et de $x - \Delta S_0$ actifs sans risque. La valeur du portefeuille à la date 0 est donc $X_0 = x$. Sa valeur à la date 1 est

$$X_1 = \Delta S_1 + (x - \Delta S_0)R = xR + \Delta(S_1 - S_0 R).$$

On l'appelle stratégie de portefeuille simple car elle ne comporte que des actifs de base du marché : l'actif sans risque et l'actif risqué.

Théorème 3.1 *Tout produit dérivé C est duplicable par une stratégie de portefeuille simple (x, Δ). Le marché est complet.*

Démonstration : Considérons un produit dérivé C. En $t = 1$, il prend la valeur C_1^u dans l'état "up" et C_1^d dans l'état "down". On cherche un couple (x, Δ) vérifiant :

$$\begin{cases} C_1^u &= \Delta S_1^u + (x - \Delta S_0)R = xR + (u - R)\Delta S_0 \\ C_1^d &= \Delta S_1^d + (x - \Delta S_0)R = xR + (d - R)\Delta S_0 \end{cases}$$

C'est un système à 2 équations et 2 inconnues dont la solution est donnée par :

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u - d)S_0} \left(= \frac{\phi(S_1^u) - \phi(S_1^d)}{S_1^u - S_1^d} \right) \text{ et } x = \frac{1}{R} \left(\frac{R - d}{u - d} C_1^u + \frac{u - R}{u - d} C_1^d \right)$$

Donc, sous l'hypothèse d'AOA, la définition économique du prix d'un produit dérivé en $t = 0$ (valeur initiale d'un portefeuille autofinançant répliquant) est donné par :

Corollaire 3.1 *Le prix du produit dérivé C donnant des flux C_1^u et C_1^d dans les états "up" et "down" est donc :*

$$C_0 = \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d}C_1^u + \frac{u-R}{u-d}C_1^d\right)$$

On peut montrer ce résultat également en reproduisant le raisonnement fait dans l'exemple introductif. Essayons de construire un portefeuille sans risque en ayant une position longue sur Δ actions et 1 option. En cas de hausse du cours de l'action, la valeur du portefeuille à l'échéance est :

$$S_0 u\Delta - C_1^u$$

En cas de baisse du cours de l'action, la valeur du portefeuille à l'échéance est :

$$S_0 d\Delta - C_1^d$$

Si le portefeuille est sans risque,

$$S_0 u\Delta - C_1^u = S_0 d\Delta - C_1^d$$

D'où

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{uS_0 - dS_0}$$

l'hypothèse d'AOA nous assure que la rémunération d'un tel portefeuille sans risque doit être le taux sans risque. Donc la valeur actuelle du portefeuille doit être

$$\frac{1}{R}\left(S_0 u\Delta - C_1^u\right)$$

Et son coût de constitution est

$$S_0\Delta - C_0$$

où C_0 est le prix de l'option à l'instant initial. D'où l'égalité entre le coût de constitution et la valeur actuelle du portefeuille :

$$S_0\Delta - C_0 = \frac{1}{R}\left(S_0 u\Delta - C_1^u\right)$$

D'où

$$C_0 = S_0\Delta\left(1 - \frac{u}{R}\right) + \frac{C_1^u}{R}$$

Et en remplaçant Δ par son expression :

$$C_0 = \frac{1}{R}\left(\frac{R-d}{u-d}C_1^u + \frac{u-R}{u-d}C_1^d\right)$$

On retrouve bien la formule recherchée.

Remarque : On remarque que l'espérance de rentabilité de l'action n'intervient pas dans l'évaluation. En effet la formule précédente ne fait pas intervenir les probabilités de variation du cours de l'action à la hausse ou à la baisse. Cela semble surprenant et contre-intuitif. On penserait plutôt intuitivement que plus la probabilité de hausse de l'action est élevée, plus la valeur du call augmente, et la valeur du put diminue. En réalité, cette probabilité de hausse ou de baisse est une information "déjà contenue" ou incorporée dans le cours initial de l'action, et dans le taux sans risque (si on fixe les valeurs terminales et que l'on change les probabilités de hausse ou de baisse, la valeur initiale de l'action augmente, ce qui change u et d et donc le prix de l'option). De plus il ne faut pas oublier que l'on évalue l'option en constituant un portefeuille formé d'actions, donc la probabilité de hausse ou de baisse intervient dans l'évolution du portefeuille de couverture.

3 probabilité risque neutre

Le prix du produit dérivé s'écrit comme une somme pondérée de ses valeurs futures. Etudions plus en détail comment s'exprime la valeur en 0 d'une stratégie de portefeuille simple en fonction de ses valeurs finales.
Au vu de la formule d'évaluation, il est naturel de faire apparaître la variable

$$q = \frac{R-d}{u-d}$$

L'expression

$$qC_1^u + (1-q)C_1^d$$

est alors le payoff espéré de l'option. Grâce à cette interprétation de q, l'équation d'évaluation établit que la valeur de l'option, à la date d'aujourd'hui, est l'espérance, sous cette probabilité, de sa valeur future, actualisée au taux sans risque.
C'est cette probabilité (qui ne dépend pas de C), sous laquelle le prix actuel de C est l'espérance de sa valeur future actualisée, qu'on appelle **probabilité neutre au risque**.

Etudions plus pécisément le cas présent.

Proposition 3.1 *L'hypothèse d'AOA implique la relation $d < R < u$.*

Démonstration : Supposons $d \geq R$. Une stratégie d'arbitrage est alors donnée par l'achat d'un actif risqué en $t = 0$ ($\Delta = 1$) et la vente de la quantité d'actif sans risque correspondant (S_0) pour avoir une valeur de portefeuille nulle à $t = 0$, car la valeur du portefeuille en $t = 1$ est
- dans l'état "up", $X_1 = S_0(u - R) > 0$
- dans l'état "down", $X_1 = S_0(d - R) \geq 0$.

Supposons $u \leq R$, alors une stratégie d'arbitrage est donnée par la vente d'un actif risqué en $t = 0$, et l'achat de la quantité d'actif sans risque correspondante (S_0) pour avoir une valeur de portefeuille nulle à $t = 0$. En effet la valeur du portefeuille en $t = 1$ est alors
- dans l'état "up", $X_1 = S_0(R - u) \geq 0$
- dans l'état "down", $X_1 = S_0(R - d) > 0$.

Remarque : Pour créer un arbitrage, on a de nouveau acheté celui qui rapporte le plus et vendu celui qui rapporte le moins. Finalement, si l'une des inégalités $d < R < u$ n'était pas vérifiée, un des actifs rapporterait toujours plus que l'autre, et l'hypothèse d'AOA ne serait plus vérifiée.

Définition 3.3 *On appelle* **probabilité neutre au risque** *toute probabilité équivalente à $\mathbb{P}$ qui rende martingale toute stratégie autofinançante simple actualisée, ie telle que :*

$$\tilde{X}_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tilde{X}_1|\mathcal{F}_0\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tilde{X}_1\right] \text{ ou de manière équivalente } X_0 = \frac{1}{R}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X_1\right].$$

Remarque : Deux probabilités sont dites équivalentes lorsqu'elles ont les mêmes ensembles négligeables, ie qu'elles chargent les mêmes états du monde (ie qu'elles ont une densité de Radon-Nikodym l'une par rapport à l'autre). Ici, cela signifie simplement que $\mathbb{Q}(\omega_d) > 0$ et $\mathbb{Q}(\omega_u) > 0$.

Remarque : Ici, sur une seule période, être une martingale signifie simplement que $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(X_1) = X_0$: l'espérance des valeurs futures est égale à la valeur initiale, autrement dit le portefeuille est équilibré.

Proposition 3.2 *Si $d < R < u$, alors il existe une probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$, qui est donnée par*

$$q = \mathbb{Q}(\omega_u) = \frac{R-d}{u-d} \tag{3.1}$$

Démonstration : Prenons un portefeuille autofinançant de valeur initiale x et comportant Δ actifs risqués, et notons pour simplifier X_1^u et X_1^d ses valeurs en $t = 1$ dans les états "up" et "down". Alors, comme on l'a écrit précédemment, on a les relations suivantes :

$$\begin{cases} X_1^u = \Delta S_1^u + (x - \Delta S_0)R = xR + (u-R)\Delta S_0 \\ X_1^d = \Delta S_1^d + (x - \Delta S_0)R = xR + (d-R)\Delta S_0 \end{cases}$$

Nous obtenons le même système que précédemment et on trouve :

$$x = \frac{1}{R}\left(\frac{u-R}{u-d}X_1^d + \frac{R-d}{u-d}X_1^u\right)$$

On introduit donc la probabilité $\mathbb{Q}$ définie sur Ω par :

$$\mathbb{Q}(\omega_u) = \frac{u-R}{u-d} = q \text{ et } \mathbb{Q}(\omega_d) = \frac{R-d}{u-d} = 1-q$$

Comme $d < R < u$, $q \in]0,1[$ et $\mathbb{Q}$ est bien une probabilité et elle est équivalente à $\mathbb{P}$. Notre équation se réécrit alors :

$$X_0 = x = \frac{1}{R}\left(\mathbb{Q}(\omega_d)X_1^d + \mathbb{Q}(\omega_u)X_1^u\right) = \frac{1}{R}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_1]$$

Remarque : Le terme "risque neutre" provient de la théorie économique : si les intervenants n'ont pas d'aversion au risque, ils vont s'accorder pour évaluer la valeur d'un portefeuille comme l'espérance actualisée des flux qu'il génère. L'introduction de cette probabilité permet de faire comme si les agents étaient neutres au risque... mais attention ce n'es pas le cas !

Proposition 3.3 *S'il existe une probabilité neutre au risque $\mathbb{Q}$, alors il y a AOA.*

Démonstration : Soit $\Delta \in \mathbb{R}$ tel que le portefeuille simple de valeur initiale nulle associé vérifie $X_1 \geq 0$. Comme $\mathbb{Q}$ est une probabilité risque neutre, on a :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_1] = R.0 = 0,$$

et X_1 est une variable aléatoire positive d'espérance nulle, donc est nulle $\mathbb{Q}$-p.s. et comme $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ sont équivalentes (elles ont les mêmes négligeables), $\mathbb{P}(X_1 > 0) = 0$.

Nous avons finalement montré que

$$\text{AOA} \Longrightarrow d < R < u \Longrightarrow \text{il existe une proba neutre au risque} \Longrightarrow \text{AOA},$$

et donc toutes ces implications sont des équivalences :

Théorème 3.2 *AOA $\Leftrightarrow d < R < u \Leftrightarrow$ il existe une proba neutre au risque*

4 Evaluation et couverture d'un produit dérivé

Comme tout produit dérivé est duplicable par une stratégie de portefeuille simple et que la valeur actualisée des stratégies de portefeuille simple sont des martingales sous la probabilité neutre au risque, en AOA, le prix d'un produit dérivé est donné par :

$$C_0 = \frac{1}{R}\left(qC_1^u + (1-q)C_1^d\right) = \frac{1}{1+r}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(C_1) \tag{3.2}$$

Remarque : La probabilité risque neutre et donc le prix d'une option est indépendant de la tendance réelle p du sous-jacent.

Remarque : Comme tout produit dérivé est duplicable, la valeur réactualisée de tout produit dérivé est une martingale sous la probabilité risque neutre.

Remarque : On a juste besoin de connaître r, u, et d pour trouver le prix de l'actif dérivé, mais encore faut-il estimer les paramètres. Connaître u et d revient à connaître ce que l'on nommera par la suite la volatilité de l'actif.

Proposition 3.4 *Le portefeuille de couverture de l'option est donné par une valeur initiale égale à la valeur initiale de l'option, et un investissement dans Δ actifs risqués, où la quantité d'actifs risqués est donné par :*

$$\Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u-d)S_0} = \frac{\phi(S_1^u) - \phi(S_1^d)}{S_1^u - S_1^d}$$

cette quantité s'apparente à la variation du prix de l'option en réponse à la variation du sous-jacent

Proposition 3.5 *Comme le marché est complet (tout actif est réplicable par une stratégie de portefeuille simple), il y a* **unicité de la probabilité risque neutre***.*

Démonstration : En effet, prenons deux probabilités risque neutre $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$. Pour tout $\mathcal{B} \in \mathcal{F}_1$, $\mathbb{1}_{\mathcal{B}}$ est un produit dérivé car il est $\mathcal{F}_1$-mesurable, donc il est duplicable par un portefeuille autofinançant (x, Δ) et l'on a

$$\mathbb{Q}_1(\mathcal{B}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[\mathbb{1}_{\mathcal{B}}] = R.x = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[\mathbb{1}_{\mathcal{B}}] = \mathbb{Q}_2(\mathcal{B})$$

Donc $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$ sont indistinguables. cqfd.

5 Exercice : Pricing d'un call et d'un put à la monnaie

Prenons $S_0 = 100$, $r = 0,05$,$d = 0,9$ et $u = 1,1$.

1. *Quel est le prix et la stratégie de couverture d'un call à la monnaie, ie* $K = S_0 = 100$ *?*
   On construit la probabilité risque neutre
   $$q = \frac{1 + r - d}{u - d} = 0,75$$
   On en déduit le prix et la stratégie de couverture :
   $$C_0 = \frac{0,75 \times 10 + 0,25 \times 0}{1,05} \cong 7,14 \text{ et } \Delta = \frac{C_1^u - C_1^d}{(u-d)S_0} = \frac{10 - 0}{20} = 0,5$$
   $\Longrightarrow$ une stratégie de couverture est donc l'achat de 0,5 actif risqué et le placement de $7,14 - 100 \times 0,5$ dans l'actif sans risque.
2. *Qu'en est-il d'un Put à la monnaie ?*
   Connaissant la proba neutre au risque, on calcule le prix et la stratégie de couverture :
   $$P_0 = \frac{0,75 \times 0 + 0,25 \times 10}{1,05} \cong 2,38 \text{ et } \Delta = \frac{P_1^u - P_1^d}{(u-d)S_0} = \frac{0 - 10}{20} = -0,5$$
   $\Longrightarrow$ une stratégie de couverture est donc la vente de 0,5 actif risqué et le placement de $100 \times 0,5 - 2,38$ dans l'actif sans risque.
3. *Vérifie-t-on la relation de parité call-put ?*
   $$C_0 - P_0 = \frac{7,5}{1,05} - \frac{2,5}{1,05} = \frac{5}{1,05} = 100 - \frac{100}{1,05} = 100 - \frac{100}{R} = S_0 - KB(0,T)$$

III Univers risque neutre ou univers réel ?

Reprenons notre exemple introductif. Nous allons montrer que l'évaluation risque-neutre construite dans la partie précédente apporte le même résultat que l'évaluation établie en construisant un portefeuille sans risque et en raisonnant par arbitrage, comme dans l'exemple choisi.
Dans l'exemple, le cours de l'action est initialement à 20€ , il monte à 22€ ou chute à 18€ après 3 mois. L'option considérée est un call européen à 3 mois, de prix d'exercice 21€ . Le taux d'intérêt sans risque est de 12% par an.

Notons q la probabilité de hausse du cours de l'action dans l'univers risque-neutre. Elle est calculée à partir de l'équation 3.1 :

$$q = \frac{R - d}{u - d}$$

où ici $R = e^{0,12 \times 3/12}$. Ce qui nous donne $q = 0,6523$. (il suffit d'utiliser $d = 18/20$ et $u = 22/20$).
Pour calculer la probabilité risque-neutre, on peut aussi résoudre tout simplement l'équation correspondante au raisonnement suivant : l'espérance de rentabilité de l'action dans l'univers risque-neutre est égale au taux sans risque, soit 12%. La probabilité q doit donc satisfaire :

$$22q + 18(1 - q) = 20e^{0,12 \times 3/12}$$

Et on retrouve $q = 0,6523$.

A l'issu des 3 mois, l'option d'achat a une probabilité $q = 0,6523$ de valoir 1€ et une probabilité $1 - q = 0,3477$ de valoir 0. Ainsi, sa valeur espérée à l'échéance est donc :

$$0,6523 \times 1 + 0,3477 \times 0 = 0,6523$$

Dans l'univers risque-neutre, cette valeur espérée doit être actualisée au taux sans risque, donc la valeur aujourd'hui est :

$$0,6523e^{0,12 \times 3/12} = 0,633\text{€}$$

On retrouve la valeur obtenue précédemment. Le raisonnement fondé sur la construction d'un portefeuille sans risque (portefeuille répliquant l'actif sans risque), qui s'apparente à un raisonnement d'arbitrage, et l'évaluation risque-neutre donnent donc la même valeur de l'option.

Soulignons que q est la probabilité de hausse dans l'univers risque-neutre. Généralement, elle n'est pas égale à la probabilité p de hausse dans l'univers réel.
Dans notre exemple, $q = 0,6523$. Lorsque la probabilité de hausse est de 0,6523, l'espérance de rentabilité de l'action est égale au taux sans risque, soit 12%. Supposons, que dans l'univers réel, l'espérance de rentabilité de l'action soit de 16%. On a alors :

$$22p = 18(1 - p) = 20e^{0,16 \times 3/12}$$

Donc $p = 0,7041$.

L'espérance de payoff de l'option dans l'univers réel est donc égal à $p + (1 - p) \times 0 = 0,7041$. Malheureusement, on ne sait pas quel taux d'actualisation appliquer au payoff de l'option dans l'univers réel. Une position sur une option d'achat est plus risquée qu'une position dans une action. Par conséquent, le taux d'actualisation à appliquer au payoff d'un call est bien supérieur à 16%. Sans connaître la valeur de l'option, nous ne pouvons pas savoir de combien ce taux doit être supérieur à 16%.

L'évaluation risque-neutre résout le problème : *dans l'univers risque-neutre, l'espérance de rentabilité de tous les actifs, et donc le taux d'actualisation à utiliser pour tous les payoffs espérés, est le t aux sans risque.*

Remarque : : Puisqu'ici la valeur de l'option est 0,633, on peut en déduire le taux d'actualisation du payoff de l'option, qui vaut $42,58\%$, puisque $0,633 = 0,7041e^{0,4258\times 3/12}$.

IV Relation liant u, d et la volatilité

En pratique, lorsqu'on construit un arbre binomial, pour représenter les variations du cours d'une action, les paramètres u et d sont définis par la volatilité de l'action. En effet, supposons que l'espérance de rentabilité de l'action (dans l'univers réel, où les investisseurs présentent de l'aversion au risque) soit égale à μ, et sa volatilité σ. La probabilité de hausse dans l'univers réel est toujours notée p.
On reprend le graphique d'évolution de l'actif risqué développé dans la première partie sur le modèle binomial mono-périodique, sur une période de durée Δt, la valeur de l'action peut être multipliée par u ou par d :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & u.S_0 \\ S_0 \arrow[ur, "p"] \arrow[dr, "1-p"'] & \\ & d.S_0 \end{tikzcd}$$

L'espérance de la valeur de l'action à la fin de la période est égale à $S_0e^{\mu\Delta t}$. A partir de l'arbre, cette espérance s'écrit

$$pS_0u + (1-p)S_0d$$

La correspondance entre la rentabilité espérée de l'action et les paramètres u et d s'établit par l'égalité

$$pS_0u + (1-p)S_0d = S_0e^{\mu\Delta t}$$

Soit :

$$p = \frac{e^{\mu\Delta t} - d}{u-d}$$

Comme nous l'expliquerons plus tard, la volatilité du cours de l'action est telle que $\sigma\sqrt{\Delta t}$ représente l'écart-type relatif de la rentabilité de l'action sur une courte période de durée Δt. De manière équivalente, la variance de la rentabilité est égale à $\sigma^2 S_0^2\Delta t$. Sur l'arbre, cette variance est égale à

$$Var(S) = E_{\mathbb{P}}(S^2) - E_{\mathbb{P}}(S)^2 = S_0^2(pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2)$$

Pour ajuster la volatilité, l'équation suivante doit donc être vérifiée :

$$pu^2 + (1-p)d^2 - (pu + (1-p)d)^2 = \sigma^2\Delta t$$

en remplaçant p par son expression, on obtient :

$$e^{\mu\Delta t}(u+d) - ud - e^{2\mu\Delta t} = \sigma^2\Delta t$$

Lorsque les termes en $\Delta t^{3/2}$ ou d'ordre supérieur sont négligés, une solution à cette équation est

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Ce sont les valeurs proposées par Cox, Ross et Rubinstein (1979) pour ajuster u et d.

L'analyse menée dans ce chapitre montre que l'on peut remplacer l'arbre du graphique précédent par celui-ci dans l'univers neutre au risque :

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & u.S_0 \\ S_0 \arrow[ur, "q"] \arrow[dr, "1-q"'] & \\ & d.S_0 \end{tikzcd}$$

Dans cet univers risque-neutre, la rentabilité espérée est cette fois égale à r, la probabilité associée est

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}$$

Et un calcul rapide de la variance nous donne :

$$Var(S) = S_0^2(qu^2 + (1-q)d^2 - (qu + (1-q)d)^2) = (e^{r\Delta t}(u+d) - ud - e^{2r\Delta t})$$

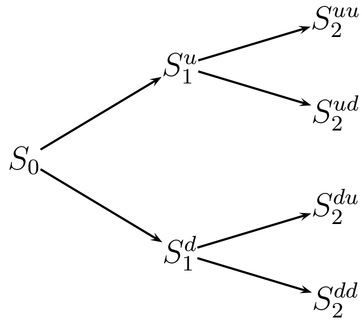
En remplaçant u et d par leurs valeurs, et en négligeant à nouveau les termes d'ordre supérieur à $\Delta t^{3/2}$, on obtient également une variance relative égale à $\sigma^2 \Delta t$.

Ceci montre que lorsque l'on passe de l'univers réel à l'univers neutre au risque, l'espérance du taux de rentabilité de l'action change, mais la volatilité reste la même (du moins lorsque le pas de temps tend vers 0). C'est une illustration du théorème de Girsanov (souvenez-vous : passer d'un univers à l'autre change le drift mais pas la dérive...).

V Modèle à 2 périodes

L'analyse précédente peut être étendue à un arbre binomial à deux périodes, tel qu'il est présenté sur le graphique suivant.

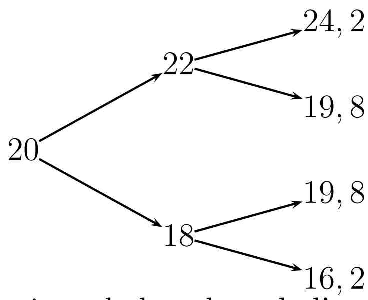
Graphique 3.2 : Variations du cours de l'action



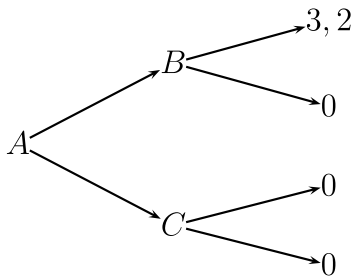
1 Exemple

Ici, on présente un exemple où le cours initial de l'action est 20 € , et à chacune des périodes, il peut augmenter ou baisser de 10%. Nous supposons dans l'exemple que chaque période dure 3 mois et que le taux sans risque est de 12% par an. Comme dans l'exemple précédent, le prix d'exercice de l'option est supposé égal à 21 € .

Graphique 3.3 : Variations du cours de l'action



Variations de la valeur de l'option



L'objectif est de calculer la valeur de l'option au noeud initial de l'arbre.
Pour cela, il suffit d'itérer la méthode d'évaluation sur une période, pour trouver tout d'abord la valeur de l'option au noeuds B et C, puis ensuite au noeud A, à partir des valeurs trouvées pour les noeuds B et C. On raisonne ainsi de manière rétrograde sur l'arbre, en partant des valeurs finales et en remontant sur les noeuds précédents.

Au noeud C, la valeur de l'option est nulle, car elle conduit à 2 noeuds possibles pour lesquels la valeur de l'option est nulle.
La valeur de l'option au noeud B est calculée en prenant appui sur la partie de l'arbre représentée ci-après. On a donc un modèle binomial à une période, $u = 1,1$, $d = 0,9$, $r = 0,12$, et $T = 3$ mois.

Graphique 3.4 : Evaluation de l'option au noeud B

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & 3,2 \\ B \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & 0 \end{tikzcd}$$

On obtient encore $q = \frac{R-d}{u-d} = 0,6523$ et donc on a la valeur de l'option au noeud B :

$$B = e^{rT}(q3,2 + (1-q)0) = e^{-0,12\times 3/12}(0,6523 \times 3,2 + 0,3477 \times 0) = 2,0257$$

Ensuite, il ne reste plus qu'à calculer la valeur initiale de l'option au noeud A, en focalisant notre attention sur la première partie de l'arbre. La valeur de l'option au noeud B est 2,0257 au noeud B alors qu'elle est nulle au noeud C.

Graphique 3.5 : Evaluation de l'option au noeud A

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & B = 2,0257 \\ A \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & C = 0 \end{tikzcd}$$

L'évaluation neutre au risque nous donne encore $q = \frac{R-d}{u-d} = 0,6523$, et donc la valeur de l'option au noeud A est :

$$A = e^{rT}(qB + (1-q)C) = e^{-0,12\times 3/12}(0,6523 \times 2,0257 + 0,3477 \times 0) = 1,2823$$

La valeur de l'option est donc 1,2823€ .

Remarque : : Il faut noter que cet exemple est construit avec des paramètres u et d (qui sont les rentabilités de l'action à la hausse et à la baisse) indépendants de la date et du noeud considéré. De plus, les périodes ont même durée. Par conséquent, la probabilité risque-neutre, q, est la même à chaque noeud. On peut bien entendu faire la même chose avec des probabilités risque-neutre différentes, en faisant attention à les recalculer à chaque noeud. Cela nous donne le graphique suivant :

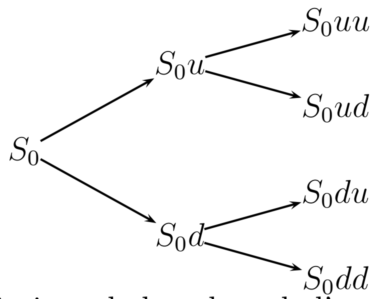
Graphique 3.6 : Variations de la valeur de l'option

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny] & & 3,2 \\ & 2,0257 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & 0 \\ 1,2823 \arrow[uur] \arrow[ddr] & & \\ & & 0 \\ & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & & 0 \end{tikzcd}$$

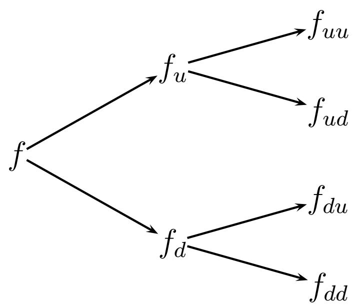
2 Cas général

On peut généraliser ce raisonnement. Prenons le cas d'une action dont le cours initial est S_0, et durant chaque période, le cours est multiplié par u ou d. La notation de la valeur de l'option est f_{ij} où i désigne l'évolution sur la première période et j sur la deuxième (par exemple après 2 hausses successives, l'option vaut f_{uu}). Le taux d'intérêt sans risque est noté r et chaque période dur Δt années.

Graphique 3.7 : Variations du cours de l'action



Variations de la valeur de l'option



Les équations relatives à l'évaluation sur chaque sous-période s'écrivent, en notant q la probabilité risque neutre égale à

$$q = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{R - d}{u - d} \tag{3.4}$$

en notant $R = e^{r\Delta t}$ le facteur de capitalisation sur une période.

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{1}{R}\left[q f_{uu} + (1-q) f_{ud}\right] \quad \text{évaluation au noeud } B \\ f_d &= \frac{1}{R}\left[q f_{du} + (1-q) f_{dd}\right] \quad \text{évaluation au noeud } C \\ f &= \frac{1}{R}\left[q f_u + (1-q) f_d\right] \quad \text{évaluation au noeud } A \end{aligned} \tag{3.5}$$

Or ici, $f_ud = f_du$ on peut donc écrire en combinant toutes ces équations :

$$f = \frac{1}{R^2}\left[q^2 f_{uu} + 2q(1-q) f_{ud} + (1-q)^2 f_{dd}\right] \tag{3.6}$$

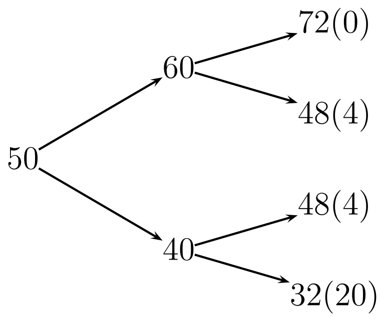
Cette formulation est cohérente avec le principe d'évaluation risque-neutre mentionné plus haut. q^2, $2q(1-q)$ et $(1-q)^2$ sont les probabilités que les noeuds terminaux du haut, du milieu et du bas soient atteints (ou q^2, $q(1-q)$, $q(1-q)$ et $(1-q)^2$ si les 4 noeuds sont distincts).
La valeur de l'option est bien égale à son payoff espéré dans l'univers risque-neutre, actualisé au taux sans risque.

3 Un exemple avec une option de vente

Les procédures décrites dans ce chapitre sont applicables à l'évaluation de n'importe quel produit dérivé tant que le prix de l'actif sous-jacent varie de façon binomiale.
Considérons un put européen à 2 ans, de prix d'exercice 52€ sur une action cotée actuellement 50€ . La durée de vie de l'option est divisée en 2 périodes d'un an chacune, et à chaque période, le cours de l'action augmente de 20% ou baisse de 20%. Le taux sans risque est supposé égal à 5%.

L'arbre de cette situation est représenté sur le graphique suivant

Graphique 3.8 : Variations du cours de l'action (valeur de l'option)



La probabilité risque-neutre de hausse, q, est donnée par l'équation 3.1, à savoir, puisque $d = 0,8$ et $u = 1,2$:

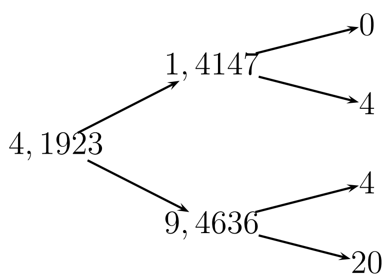
$$q = \frac{e^{0{,}05 \times 1} - 0,8}{1,2 - 0,8} = 0,6282$$

Les valeurs finales possibles de l'action sont 72€ , 48€ et 32€ . Dans ce cas, $f_{uu} = 0$, $f_{ud} = f_{du} = 4$, et $f_{dd} = 20$. On déduit de l'équation 3.6

$$f = e^{-2r\Delta t}(q^2 \times f_{uu} + 2q(1-q) \times f_{ud} + (1-q)^2 f_{dd}) = 4,1923$$

La valeur du put est donc 4,1923€ . Ce résultat peut également être obtenu en utilisant l'équation 3.2 et en calculant les valeurs de l'option à chaque noeud, et à chaque date, en débutant par la fin (ce procédé est appelé induction arrière). Le graphique suivant donne les valeurs intermédiaires de l'option ainsi calculées :

Graphique 3.9 : Variations de la valeur de l'option



4 Les options américaines

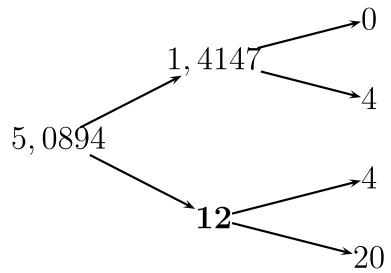
Jusqu'à présent, toutes les options considérées étaient de type européen. Nous allons maintenant aborder succinctement la façon de traiter les options de type américain à l'aide d'arbres binomiaux.
Reprenons l'exemple précédent en supposant que l'option de vente est a présent une option américaine.

La procédure consiste à calculer la valeur sur chaque noeud de l'arbre, par induction arrière, c'est-à-dire en partant de l'échéance et en revenant vers la date initiale, tout en testant à chaque noeud s'il est optimal ou non d'exercer prématurément l'option. La valeur de l'option sur les noeuds terminaux (à la date d'échéance) est la même que celle des options européennes, puisque à cette date il n'y a plus de différence entre ces 2 types d'options. Par contre, sur les noeuds intermédiaires, la valeur de l'option est le maximum entre

– La valeur donnée par l'équation 3.2
– Le payoff procuré par l'exercice anticipé de l'option

Le graphique suivant montre de quelle manière le graphique précédent est modifié si c'est une option américaine et non une option européenne qui est évaluée.

Graphique 3.10 : Variations de la valeur de l'option



Les valeurs de l'action et les probabilités des différentes branches sont inchangées, ainsi que la valeur de l'option sur les noeuds terminaux. Au noeud B, l'équation 3.2 d'évaluation risque-neutre attribue la valeur 1,4147 à l'option, tandis que le flux engendré par un exercice anticipé serait négatif (=-8), il est donc clair qu'il n'est pas optimal d'exercer l'option au noeud B, et sa valeur est donc bien 1,4147. Au noeud C en revanche, l'équation 3.2 d'évaluation risque-neutre donne 9,4636 comme valeur de l'option, tandis que le flux lié à un exercice anticipé serait de 12. Dans ce cas, un exercice anticipé est optimal, et la valeur de l'option au noeud C est égale à 12. Au noeud A, la valeur calculée par application de la formule 3.2 d'évaluation risque-neutre est alors :

$$A = e^{-0,05 \times 1}(q \times 1,4147 + (1-q) \times 12) = 5,0894$$

et le payoff d'un exercice anticipé est égal à 2. Dans ce cas, comme pour le noeud B, il n'est pas optimal d'exercer prématurément l'option et sa valeur est bien $5,0894$.

VI Le delta

A ce stade, nous faisons une première présentation du *delta*, paramètre essentiel de la gestion et la couverture des options.

Définition 3.4 *Le delta d'une option se définit comme la variation de la valeur de l'option rapportée à la variation de prix de l'action sous-jacente.*

Il représente le nombre d'unités d'action à détenir pour chaque option vendue, afin de créer un portefeuille sans risque. Il est identique au Δ introduit au début de ce chapitre (exemple introductif).
La construction d'une telle couverture est parfois appelée "couverture delta-neutre" ou *delta hedging*. Le delta d'un call est positif, alors que le delta d'un put est négatif, puisque le prix d'un call est une fonction croissante du prix de l'action sous-jacente, et le prix du put une fonction décroissante.

Pour l'exemple du début de chapitre, sur la graphique 3.1, la valeur du delta du call peut être calculé de la manière suivante :

$$\Delta = \frac{1-0}{22-18} = 0,25$$

Ce ration traduit le fait que lorsque le cours de l'action varie de 18€ à 22€ , la valeur de l'option varie de 0€ à 1€ .

Sur les graphiques 3.3 et 3.6, le delta correspondant aux variations du cours de l'action pour la première période est

$$\Delta_1 = \frac{2,0257-0}{22-18} = 0,5064$$

Celui correspondant à la seconde période en cas de hausse :

$$\Delta_2 = \frac{3,2-0}{24,2-19,8} = 0,7273$$

Et celui correspondant à la seconde période en cas de baisse :

$$\Delta_2' = \frac{0-0}{19,8-16,2} = 0,7273$$

Ces quantités correspondent aux quantités d'actions qu'il est nécessaire de posséder sur la période correspondante pour couvrir l'option. Cet exemple à deux périodes montrent que le delta change à chaque date, pour la période suivante. C'est une couverture dite "dynamique" (à opposer aux stratégies dites "statiques"). Dans ce cas, le delta à la date $t = 1$ passe de 0,5064 à 0,7273 ou à 0. Dans le but de maintenir une couverture sans risque, il faut ajuster le nombre d'actions détenues en portefeuille à chaque période.
Une stratégie de couverture de l'option consiste donc à acheter 0,5064 actions à l'instant initial, sur la première période, puis sur la 2ème période réajuster sa position soit en rachetant 0,2209 actions supplémentaires afin d'en détenir 0,7273 en cas de hausse de l'action, soit en revendant toutes les actions en cas de baisse (l'option n'a plus aucune valeur, inutile donc de la couvrir).

Exercice 3.1 *Trouver la stratégie de delta hedging du put européen décrit dans la section 3 (graphiques 3.8 et 3.9).*

Solution 3.1 *Le delta du put sur la première période est donné par*

$$\Delta_1 = \frac{1,4147 - 9,4636}{60 - 40} = -0,4024$$

Pour la seconde période, il vaut

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= \frac{0 - 4}{72 - 48} = -0,1667 \quad \textit{en cas de hausse} \\ \Delta_2' &= \frac{4 - 20}{48 - 32} = -1 \quad \textit{en cas de baisse} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Il faut donc vendre à découvert 0,4024 actions sur la première période pour couvrir l'option de vente, puis réajuster sa position soit en rachetant 0,2357 actions afin de n'en détenir que -0,1667 en cas de hausse de l'action, soit en revendant à découvert encore 0,5976 actions en cas de baisse, afin d'en détenir -1 au total sur la 2ème période.

VII les options portant sur d'autres sous-jacents

Option sur actions payant des dividendes Considérons une action payant un dividende au taux v. La rentabilité de ce titre est la somme du taux de dividende et du gain en capital. Elle doit être égale au taux sans risque dans l'univers risque-neutre. En conséquence, le taux de croissance du prix est $r - v$. Si le prix est S_0, sa valeur espérée après un délai Δt est donnée par :

$$qS_0u + (1 - q)S_0d = S_0e^{(r-v)\Delta t}$$

De sorte que

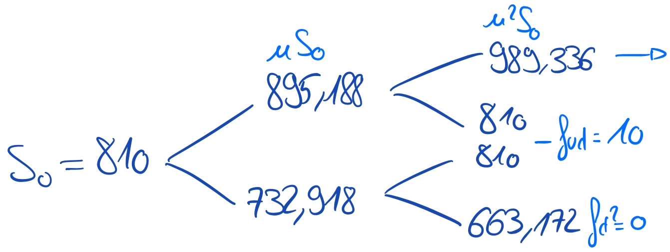
$$q = \frac{e^{(r-v)\Delta t} - d}{u - d}$$

c'est la probabilité risque neutre pour l'évaluation d'options avec dividende.
Comme dans le cas des actions ne versant pas de dividendes, on tient compte de la volatilité en retenant $u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}$ et $d = 1/u = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}$.

Si on suppose que l'indice procure un taux de dividende v, l'évaluation d'une option sur indice relève alors de la même démarche que celle d'une option sur une action ayant un taux de dividende v.

Exercice 3.2 Option sur indices
Soit un indice d'actions qui vaut aujourd'hui 810 points, ayant une volatilité de 20% et un taux de dividende de 2%. Le taux sans risque est de 5% annuel. Evaluer un call à 6 mois sur cet indice au prix d'exercice de 800 à l'aide d'un arbre à 2 périodes.

$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = e^{0,20\times\sqrt{3/12}} = 1,10517$ $\quad d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0,90484$



$\to f_{u^2} = (u^2S_0 - 800)_+ = 189,336$

$- f_{ud} = 10$

$f_{d^2} = 0$

$R = e^{(0,05-0,02)\times \Delta t} = 1,00753$

$\Rightarrow q = \frac{R-d}{u-d} = 0,5126$

Solution 3.2 *Dans ce cas, on a :*

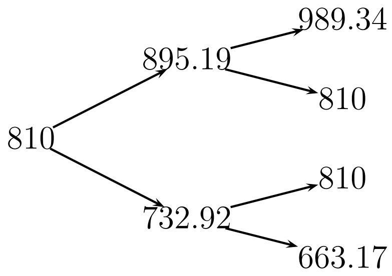
$$\Delta t = 0,25 = 3/12 \quad R = e^{(0,05-0,02)\times 0,25} = 1,0075 \tag{3.8}$$
$$u = e^{0,2\sqrt{0,25}} = 1,1052 \qquad d = 1/u = 0,9048$$
$$p = \frac{R-d}{u-d} = 0,5126$$

$\Rightarrow f = \frac{1}{R^2}\left(q^2 f_{u^2} + 2q(1-q) f_{ud} + (1-q)^2 f_{d^2}\right)$

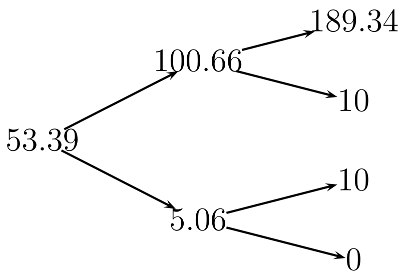
$= 53,93$

l'arbre correspondant à cette modélisation est :

Graphique : Variations de la valeur de l'indice



Graphique : Variations de la valeur de l'option



On obtient une valeur d'option de 53,39.

De la même manière, une devise peut être vue comme un actif payant un taux de dividende égal au taux sans risque étranger, r_f. Par analogie avec ce qui vient d'être fait pou les options sur indices, on peut évaluer les options sur devises à l'aide des équations précédentes, en posant $R = e^{(r-r_f)\Delta t}$

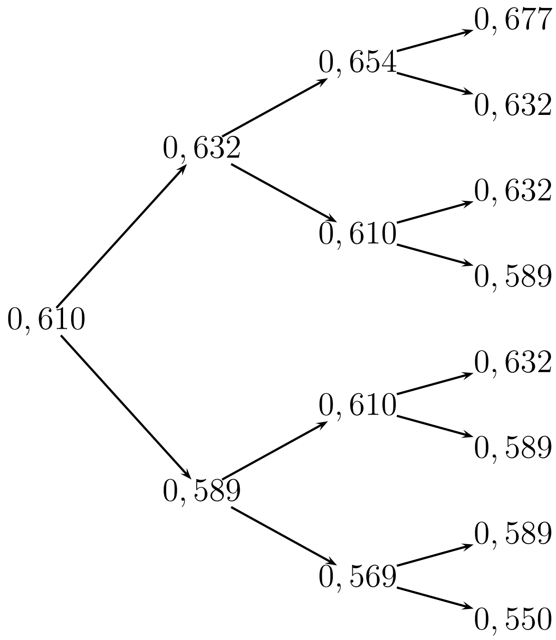
Exercice 3.3 Option sur devises
Le dollar australien cote 0,61 USD, et ce taux de change a une volatilité de 12%. Le taux sans risque australien est de 7%, alors que le taux US est de 5%. Evaluer un call américain (en USD) à 3 mois avec prix d'exercice de 0,60, et un arbre à 3 périodes.

Solution 3.3 *Dans ce cas, on a*

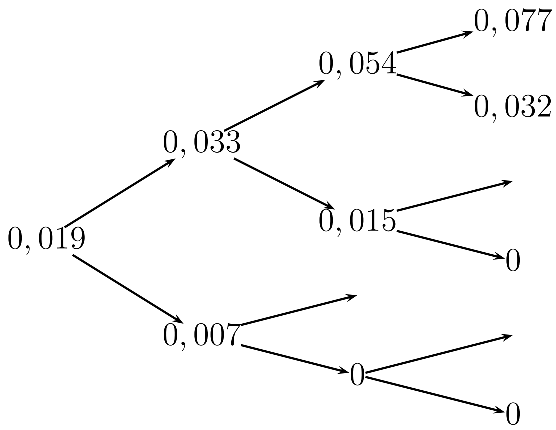
$$\Delta t = 0,0833 = 1/12 \quad R = e^{(0,05-0,07)\times 0,0833} = 0,9983 \tag{3.9}$$
$$u = e^{0,12\sqrt{0,0833}} = 1,0352 \qquad d = 1/u = 0,966$$
$$p = \frac{R-d}{u-d} = 0,4673$$

l'arbre correspondant à cette modélisation est :

Graphique : Variations de la valeur de la devise



Graphique : Variations de la valeur de l'option



On obtient une valeur d'option de 0,019.

Les options sur contrat futures Cela ne coûte rien de rendre une position longue sur un contrat futures. Il s'ensuit que, dans l'univers risque-neutre, le taux de croissance espéré de la valeur d'un tel contrat est nul. Comme précédemment,si on note F_0 le prix future initial, le prix futur espéré est toujours le même, F_0. On en déduit :

$$quF_0 + (1-q)dF_0 = F_0$$

ou encore

$$q = \frac{1-d}{u-d}$$

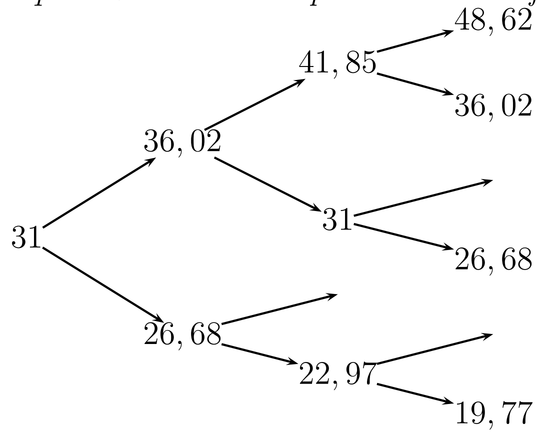
Et on peut à nouveau utiliser l'évaluation risque neutre du modèle binomial pour évaluer une option sur un tel contrat.

Exercice 3.4 *Un prix future est aujourd'hui à 31 et a une volatilité de* 30%*. Le taux sans risque est de* 5% *annuel. Evaluer le prix d'un put américain à 9 mois sur ce contrat avec un arbre à 3 périodes et un prix d'exercice de 30.*

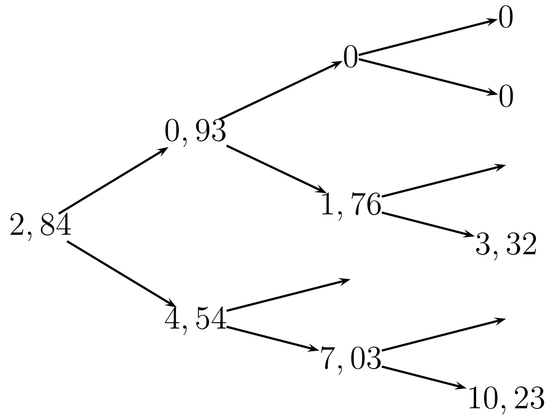
Solution 3.4 *Dans ce cas, on a*

$$\begin{aligned} \Delta t = 0,25 = 3/12 \qquad & R = 1 \\ u = e^{0,03\times 0,25} = 1,1618 \quad & d = 1/u = 0,8607 \\ p = \frac{R-d}{u-d} = 0,4626 & \end{aligned} \tag{3.10}$$

Graphique : Variations du prix du contrat future



Graphique : Variations de la valeur de l'option



On obtient une valeur de l'option de 2,84

VIII Exercices

Exercice 3.5 Option sur indices
Soit un indice d'actions qui vaut aujourd'hui 810 *points, ayant une volatilité de* 20% *et un taux de dividende de* 2%. *Le taux sans risque est de* 5% *annuel. Evaluer un call à 6 mois sur cet indice au prix d'exercice de 800 à l'aide d'un arbre à 2 périodes.*

Exercice 3.6 Option sur devises
Le dollar australien cote 0,61 USD, et ce taux de change a une volatilité de 12%. *Le taux sans risque australien est de* 7%, *alors que le taux US est de* 5%. *Evaluer un call américain (en USD) à 3 mois avec prix d'exercice de 0,60, et un arbre à 3 périodes.*

Exercice 3.7 Option sur futures
Un prix future est aujourd'hui à 31 et a une volatilité de 30%. *Le taux sans risque est de* 5% *annuel. Evaluer le prix d'un put américain à 9 mois sur ce contrat avec un arbre à 3 périodes et un prix d'exercice de 30.*

Exercice 3.8 *Une action vaut aujourd'hui 25€ . Dans 2 mois, elle sera cotée soit 23€ , soit 27€ . Le taux d'intérêt sans risque est de* 10% *par an. Soit S_T le cours de l'action dans 2 mois. Quelle est la valeur d'un produit dérivé qui offrirait un payoff égal à S_T^2 à cette date ?*

Exercice 3.9 *Calculer les valeurs de u, d et p quand on construit un arbre d'évaluation d'une option sur devise. Chaque pas correspond à 1 mois, le taux sans risque domestique est de* 5%, *le taux étranger de* 8% *et la volatilité de* 12%.
Calculer le prix d'un call américain sur cette devise, cotant aujourd'hui 100€ , de prix d'exercice 110€ à échéance 3 mois (arbre à 3 périodes).

Exercice 3.10

IX Modèle à n périodes

1 Modélisation du marché

On reprend la même modélisation que dans le chapitre précédent, mais dans un monde à n périodes. On considère un intervalle de temps $[0, T]$ divisé en n périodes $0 = t_0 < t_1 < ... < t_n = T$.
Le marché est composé de 2 actifs,

- un **actif sans risque** S_t^0 :

$$1 \rightarrow (1+r) \rightarrow (1+r)^2 \rightarrow (1+r)^3 \rightarrow ... \rightarrow (1+r)^n$$

- et un actif risqué S_t :

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & & & & & u^nS_0 \\
 & & & & & & & \nearrow & \\
 & & & & & & u^{n-1}S_0 & & \\
 & & & & & \iddots & & \searrow & \\
 & & & & u^2S_0 & & & & du^{n-1}S_0 \\
 & & & \nearrow & & \ddots & & & \\
 & & uS_0 & & & & & & \vdots \\
 & \nearrow & & \searrow & & & & & \\
S_0 & & & & udS_0 & & & & \vdots \\
 & \searrow & & \nearrow & & & & & \\
 & & dS_0 & & & & & & \\
 & & & \searrow & & \iddots & & & d^{n-1}uS_0 \\
 & & & & d^2S_0 & & & & \\
 & & & & & \ddots & & \nearrow & \\
 & & & & & & d^{n-1}S_0 & & \\
 & & & & & & & \searrow & \\
 & & & & & & & & d^nS_0
\end{array}$$

L'arbre est **recombinant** : à l'instant t, l'actif peut prendre $i+1$ valeurs différentes.
Ensemble des états du monde : Ω est l'ensemble des trajectoires possibles pour l'actif risqué. C'est l'ensemble des n-uplets $(\omega_1, ..., \omega_n)$ tels que chaque ω_i prenne deux valeurs possibles, ω_i^d ou ω_i^u.

$$\Omega = \{(\omega_1, ..., \omega_n), \forall i \leq n, \ \ \omega_i = \omega_i^d \text{ ou } \omega_i = \omega_i^u\}$$

On se donne une **probabilité historique** $\mathbb{P}$ de survenance de chacun des états du monde et on suppose que **la probabilité de monter et de descendre est la même dans tout noeud de l'arbre**, i.e. pout tout i :

$$\mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^u) = p \text{ et } \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^d) = 1 - p$$

Hypothèse Cruciale

$$\boxed{\text{Les rendements } Y_i = \frac{S_{t_i}}{S_{t_{i-1}}} \text{ sont indépendants.}}$$

Par indépendance des tirages, on en déduit donc :

$$\mathbb{P}(\omega_1, ..., \omega_n) = p^{\sharp\{j, \omega_j = \omega_j^u\}}.(1-p)^{\sharp\{j, \omega_j = \omega_j^d\}}$$

Et on peut écrire de manière équivalente la valeur de l'actif à l'instant t_i comme

$$S_{t_i} = S_0 \prod_{k=1}^{i} Y_k$$

avec les Y_k des variables aléatoires **indépendantes** sur Ω qui prennent la valeur u avec une probabilité p et la valeur d avec une probabilité $1-p$. Alors on a bien sûr :

$$\mathbb{P}(Y_i = u) = \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^u) = p \text{ et } \mathbb{P}(Y_i = d) = \mathbb{P}(\omega_i = \omega_i^d) = 1-p$$

L'information disponible à la date t_i est donnée par la filtration $(\mathcal{F}_{t_i})_{0 \leq i \leq n}$:

$$\mathcal{F}_{t_i} = \sigma(\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n) = \sigma(Y_1, Y_2, ..., Y_n) = \sigma(S_{t_1}, S_{t_2}, ..., S_{t_i})$$

Une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_i}$-mesurable est donc naturellement une variable donnée par toute l'information accumulée jusqu'au temps t_i. Elle s'écrit comme fonction de $(S_{t_1}, S_{t_2}, ..., S_{t_i})$, ou de manière équivalente comme fonction de $(Y_1, Y_2, ..., Y_n)$.

Définition 3.5 *Un* **produit dérivé** *(ou actif contingent)* C_T *est une variable aléatoire* $\mathcal{F}_T$*-mesurable et s'écrit donc, avec* ϕ *une application borélienne, sous la forme :*

$$C_T = \phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n})$$

On chercher comme précédemment à trouver le prix et le portefeuille de couverture d'un produit dérivé, qui seront encore donnés par le prix et la stratégie de son portefeuille de duplication. Avant de montrer que l'actif est duplicable, étudions les propriétés des stratégies de portefeuille simple dans ce modèle.

2 Stratégie de portefeuille

Définition 3.6 *Une* **stratégie de portefeuille simple** $X^{(x,\Delta)}$ *est la donnée d'un capital initial* x *et d'un processus discret* $(\Delta_0, ..., \Delta_{n-1})$ *qui est* $\mathcal{F}$*-adapté.*

La stratégie consiste, à tout instant t_i en l'investissement dans une quantité Δ_i d'actif risqué. Le processus Δ est $\mathcal{F}$-adapté, car la quantité d'argent à investir dans l'actif à l'instant t_i est déterminée avec l'information accumule jusqu'à l'instant t_i.

Le portefeuille ne subit aucune entrée ou sortie d'argent (**condition d'autofinancement**). Entre les instants t_i et t_{i+1}, le portefeuille $X^{x,\Delta}$ est constitué d'une quantité Δ_i d'actif risqué et d'une quantité $\frac{X_i^{x,\Delta} - \Delta_i S_{t_i}}{(1+r)^i}$ actifs sans risque. La valeur du portefeuille à l'instant t_i est donc donnée par :

$$X_{t_i}^{x,\Delta} = \Delta_i \mathrm{S_{t_i}} + \frac{(X_{t_i}^{x,\Delta} - \Delta_i S_{t_i})}{(1+r)^i}(1+\mathrm{r})^{\mathrm{i}}$$

Or, sur chaque intervalle $[t_i, t_{i+1}[$, le portefeuille ne bénéficie d'aucune entrée ou sortie d'argent, donc :

$$X_{t_{i+1}^{x,\Delta}} == \Delta_i \mathrm{S}_{\mathrm{t_{i+1}}} + \frac{(X_{t_i}^{x,\Delta} - \Delta_i S_{t_i})}{(1+r)^i}(1+\mathrm{r})^{\mathrm{i+1}}$$

Donc en introduisant les processus actualisés :

$$\boxed{\tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} = \frac{X_{t_i}^{x,\Delta}}{(1+r)^i} \text{ et } \tilde{S}_{t_i} = \frac{S_{t_i}}{(1+r)^i}}$$

ces deux relations se réécrivent

$$\tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} = \Delta_i \tilde{\mathrm{S}_{\mathrm{t_i}}} + (\tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} - \Delta_i \tilde{S}_{t_i})1, \text{ et } \tilde{X}_{t_{i+1}}^{x,\Delta} = \Delta_i \tilde{S_{t_{i+1}}} + (\tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} - \Delta_i \tilde{S}_{t_i})$$

Ce qui donne la relation qu'on appelle **relation d'autofinancement :**

$$\boxed{\tilde{X}_{t_{i+1}}^{x,\Delta} - \tilde{X}_{t_i}^{x,\Delta} = \Delta_i(\tilde{S}_{t_{i+1}} - \tilde{S}_{t_i})}$$

qui se réécrit également

$$\boxed{\tilde{X}_{t_{i+1}}^{x,\Delta} = x + \sum_{k=0}^{i} \Delta_k(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k}).}$$

Remarque : Le processus valeur du portefeuille $X^{x,\Delta}$ est bien sûr $\mathcal{F}$-adapté.

3 Arbitrage et Probabilité risque neutre

Définition 3.7 *Une* **opportunité d'arbitrage simple** *est une stratégie de portefeuille simple qui, partant d'une richesse nulle en $t = 0$ est en $T = t_n$ toujours positive et strictement positive avec une probabilité strictement positive. C'est donc la donnée de $\Delta \in \mathbb{R}$ satisfaisant*

$$X_T^{0,\Delta} \geq 0 \ et \ \mathbb{P}[X_T^{0,\Delta} > 0] > 0$$

L'**Absence d'Opportunité d'Arbitrage simple (AOA')** (ie sur stratégie de portefeuille simple) s'écrit donc :

$$\boxed{\forall \Delta \in \mathbb{R}, \quad \{X_T^{0,\Delta} \geq 0 \Rightarrow X_T^{0,\Delta} = 0 \mathbb{P}\text{p.s.}\}}$$

Proposition 3.6 *Sous l'hypothèse d'AOA', on a $d < 1 + r < u$.*

Preuve : Supposons par exemple $1+r \leq d$ et considérons la stratégie de portefeuille $(0, \Delta)$, où $\Delta_0 = 1$ et $\Delta_i = 0$ pour $i \geq 1$: on achète l'actif risqué en t_0, on le revend en t_1 et on place le gain dans l'actif sans risque. Cette stratégie est $\mathcal{F}$-adaptée car déterministe et la valeur du portefeuille en $T = t_n$ est donnée par :

$$X_T^{0,\Delta} = 0 + \sum_{k=0}^{i} \Delta_k(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k}) = \tilde{S}_{t_1} - \tilde{S}_{t_0}$$

Comme S_{t_1} peut prendre 2 valeurs, la valeur du portefeuille en T peut prendre 2 valeurs qui sont :

$$(1+r)^n S_0 \left(\frac{u}{1+r} - 1 \right) > 0, \text{ et } (1+r)^n S_0 \left(\frac{d}{1+r} - 1 \right) \geq 0$$

avec respectivement des probabilités p et $1-p$, toutes deux strictement positives. Donc notre stratégie est une opportunité d'arbitrage. Le cas $u \leq 1+r$ est traité similairement en vendant l'actif risqué ($\Delta_0 = -1$).

Remarque : Comme dans le modèle à une période, $R > u$ signifie que l'actif sans risque a un rendement meilleur que l'actif risqué, ce qui crée un arbitrage, de même si $R < d$ et que l'actif risqué a toujours un meilleur rendement que l'actif non risqué.

Proposition 3.7 *En fait, sous l'hypothèses AOA', il y a AOA' sur tous les sous-arbres.*

Preuve : Par contraposée, s'il existe une stratégie d'arbitrage sur un sous-arbre, il faut considérer la stratégie globale qui ne fait rien si elle ne croise pas le noeud de départ du sous-arbre, et qui utilise la stratégie d'arbitrage gagnante jusqu'à la fin du sous-arbre, puis place les gains dans l'actif sans risque sur les périodes restantes. Comme la probabilité de passer par un noeud est strictement positive, cette stratégie est un arbitrage.

Définition 3.8 *On introduit* **la probabilité** $\mathbb{Q}$ *sur* Ω*, en s'inspirant du modèle à une période, qui sera identique sur chaque sous-arbre à celle obtenue dans l'étude du modèle à une période. On définit donc la probabilité* $\mathbb{Q}$ *comme :*

$$\mathbb{Q}(\omega_1, ..., \omega_n) = q^{\sharp\{j, \omega_j = \omega_j^u\}}(1-q)^{\sharp\{j, \omega_j = \omega_j^d\}}, \textit{ avec } q = \frac{(1+r)-d}{u-d}$$

Proposition 3.8 *On a alors les relations suivantes :*

$$\mathbb{Q}(S_{t_i} = uS_{t_{i-1}}) = \mathbb{Q}(Y_i = u) = q \quad \textit{et} \quad \mathbb{Q}(S_{t_i} = dS_{t_{i-1}}) = \mathbb{Q}(Y_i = d) = 1-q$$

Rappel :

Définition 3.9 *Une* **probabilité risque neutre** *est une probabilité équivalente à la probabilité historique* $\mathbb{P}$ *sous laquelle toute stratégie de portefeuille simple actualisée est une martingale.*

Théorème 3.3 *Si* $d < 1+r < u$*, alors* $\mathbb{Q}$ *ainsi définie est bien une probabilité risque neutre (autrement dit il existe bien une probabilité risque neutre).*

Commençons par montrer que

Proposition 3.9 $\tilde{S}$ *est une* $\mathcal{F}$*-martingale sous* $\mathbb{Q}$*.*

Preuve : $\tilde{S}$ est intégrable et $\mathcal{F}$-adapté, et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tilde{S}_{t_{k+1}}|\mathcal{F}_{t_k}\right] &= \frac{1}{1+r}\left(qu\tilde{S}_{t_k}+(1-q)d\tilde{S}_{t_k}\right) &(3.11)\\
&= \frac{1}{1+r}\left(\right)\tilde{S}_{t_k}\\
&= \tilde{S}_{t_k} &(3.12)
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $\tilde{S}_{t_k}$ est bien une $\mathcal{F}$-martingale sous $\mathbb{Q}$.

Proposition 3.10 *La valeur actualisée $\tilde{X}^{x,\Delta}$ de toute stratégie de portefeuille simple (x,δ) est une $\mathcal{F}$-martingale sous $\mathbb{Q}$.*

Preuve : $\tilde{X}^{x,\Delta}$ est intégrable et $\mathcal{F}$-adapté, et

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tilde{X}^{x,\Delta}_{k+1}-\tilde{X}^{x,\Delta}_{k}|\mathcal{F}_{t_k}\right] &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\Delta_k(\tilde{S_{t_{k+1}}}-\tilde{S}_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}\right]\\
&= \Delta_k\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[(\tilde{S_{t_{k+1}}}-\tilde{S}_{t_k})|\mathcal{F}_{t_k}\right]=0
\end{aligned}$$

Remarque : Cela signifie que si les actifs de base actualisés sont des martingales sous une certaine probabilité, les stratégies de portefeuille simples le sont aussi. Ceci est du à la condition d'autofinancement, mais surtout au fait que la quantité d'actif risqué entre t_k et t_{k+1} est $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable.
Autrement dit, tout actif de base actualisé est une martingale sous une probabilité $\mathbb{Q}$ ssi toute stratégie de portefeuille simple actualisée est une martingale sous $\mathbb{Q}$.

Montrons enfin que si $d<1+r<u$, $\mathbb{Q}$ est bien une probabilité risque-neutre. Nous venons de construire $\mathbb{Q}$ et de montrer que elle rendait toute stratégie de portefeuille actualisée une martingale. De plus, c'est bien une probabilité équivalente à $\mathbb{P}$. En effet, comme $d<R<u$, q et $1-q$ sont dans $]0,1[$, et donc chaque $\mathbb{Q}(\omega_1,...,\omega_n)$ est dans $]0,1[$, et tous les états du monde ont une probabilité strictement positive d'arriver, donc $\mathbb{P}$ et $\mathbb{Q}$ ont les mêmes ensembles négligeables.

La valeur à toute date t_i d'une stratégie de portefeuille simple de valeur finale $X^{x,\Delta}_T$ s'écrit :

$$\boxed{X^{x,\Delta}_{t_i}=\frac{1}{(1+r)^{n-i}}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[X^{x,\Delta}_T\mathcal{F}_{t_i}\right]}$$

puisque la valeur actualisée de cette stratégie est une martingale.
Donc encore une fois, si on arrive à construire un portefeuille de couverture pour tout produit dérivé, en AOA, sa valeur à tout instant t_i est donnée par l'espérance sous la probabilité risque neutre de son flux final actualisé.

Comme dans le modèle à une période, on a

Proposition 3.11 *L'existence d'une probabilité risque neutre implique l'hypothèse AOA'.*

Preuve : Exactement comme dans le modèle à une période,

$$X_T^{0,\Delta} \geq 0 \text{ et } \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_T^{0,\Delta}] = 0 \Rightarrow \mathbb{Q}(X_T^{0,\Delta} = 0) = 1$$

Donc $X_T^{0,\Delta}$ est nulle $\mathbb{Q}$-p.s. et donc $\mathbb{P}$-p.s.

On a donc, comme dans le modèle à une période :

$$\boxed{AOA' \Leftrightarrow d < R < u \Leftrightarrow \text{ il existe une probabilité risque neutre}}$$

4 Duplication d'un produit dérivé

Théorème 3.4

Tout produit dérivé C est duplicable par une stratégie de portefeuille simple (x, Δ)

Le marché est **complet**.

Analyse du problème : On cherche une stratégie de couverture, ie une stratégie de portefeuille simple qui duplique un produit dérivé de la forme $\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n})$. Comme nous venons de le voir, tout stratégie de portefeuille simple est une martingale sous $\mathbb{Q}$. Donc la valeur du portefeuille de duplication en t_k satisfait nécessairement :

$$X_{t_k}^{x,\Delta} = \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[X_T^{x,\Delta} \mathcal{F}_{t_k} \right]$$

Donc la richesse initiale x du portefeuille de duplication vérifie :

$$x = \frac{1}{(1+r)^n} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n}]$$

On remarque que $\frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[X_T^{x,\Delta} | \mathcal{F}_{t_k} \right]$ est une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable. Elle s'écrit donc $V_k(S_{t_1}, ..., S_{t_k})$ où V_k est une fonction déterministe (non aléatoire). On pose donc :

$$V_k(S_{t_1}, ..., S_{t_k}) = \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[X_T^{x,\Delta} | \mathcal{F}_{t_k} \right]$$

Dans le modèle à une période, on avait construit le portefeuille de couverture (delta-hedging) avec une quantité d'actif risqué égal à la variation de la valeur du produit dérivé sur la variation du sous-jacent. On propose donc la même chose :

$$\Delta_k = \frac{V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) - V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k})}{uS_{t_k} - dS_{t_k}}$$

L'investissement initial x est déterministe, et Δ_k est bien $\mathcal{F}_{t_k}$-mesurable en tant que fonction de $(S_{t_1}, ..., S_{t_k})$. Donc Δ est bien $\mathcal{F}$-adaptée et (x, Δ) définit une stratégie de portefeuille simple.

On peut vérifier que cette stratégie duplique bien notre produit dérivé $X_T^{x,\Delta} = \phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n}) = V_n(S_{t_1}, ..., S_{t_n})$. Il faut donc vérifier, par récurrence sur k, qu'à chaque instant

$$X_{t_k}^{x,\Delta} = V_k(S_{t_1}, ..., S_{t_n})$$

Par construction, la relation est vraie pour $k = 0$. Montrons que si elle est vraie pour k, elle l'est aussi pour $k + 1$.
On commence par établir que

$$\begin{aligned}
X_{t_k}^{x,\Delta} &= V_k(S_{t_1}, ..., S_{t_k}) \\
&= \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_k}] \\
&= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{(1+r)^{n-(k+1)}} \phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n}) \middle| \mathcal{F}_{t_{k+1}} \right] \middle| \mathcal{F}_{t_k} \right] \\
&= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_{k+1}}) | \mathcal{F}_{t_k}] \\
&= \frac{1}{1+r} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) \mathbb{1}_{\{Y_{k+1}=u\}} + V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k}) \mathbb{1}_{\{Y_{k+1}=d\}} | \mathcal{F}_{t_k}] \\
&= \frac{1}{1+r} \left[\mathbb{Q}(Y_{k+1} = u) V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) + \mathbb{Q}(Y_{k+1} = d) V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k}) \right] \\
&= \frac{1}{1+r} \left[q V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) + (1-q) V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k}) \right]
\end{aligned}$$

La condition d'autofinancement du portefeuille s'écrit :

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^{x,\Delta} = \tilde{X}_{t_k}^{x,\Delta} + \Delta(\tilde{S}_{t_{k+1}} - \tilde{S}_{t_k})$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\tilde{X}_{t_{k+1}}^{x,\Delta} &= (1+r)\tilde{X}_{t_k}^{x,\Delta} + \Delta(S_{t_{k+1}} - (1+r)S_{t_k}) \\
&= q V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) + (1-q) V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k}) \\
&\quad \frac{V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) - V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k})}{uS_{t_k} - dS_{t_k}} (S_{t_{k+1}} - (1+r)S_{t_k})
\end{aligned}$$

En remplaçant $S_{t_{k+1}}$ par $Y_{k+1}S_{t_k}$ et q par $\frac{1+r-d}{u-d}$, on obtient :

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^{x,\Delta} = V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, uS_{t_k}) \frac{Y_{k+1} - d}{u - d} + V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, dS_{t_k}) \frac{u - Y_{k+1}}{u - d}$$

Et enfin, comme Y_{k+1} ne prend que les valeurs d ou u, on vérifie alors :

$$\tilde{X}_{t_{k+1}}^{x,\Delta} = V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, Y_{k+1}S_{t_k}) = V_{k+1}(S_{t_1}, ..., S_{t_k}, S_{t_{k+1}})$$

ce qui conclut la récurrence, et donc la preuve !

Conclusion :

Théorème 3.5 *Tout produit dérivé est réplicable, et la valeur sous AOA à tout instant d'un produit dérivé $C_T = \phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n})$ est donnée par :*

$$\boxed{C_{t_k} = \frac{1}{(1+r)^{n-k}} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n}) | \mathcal{F}_{t_k}]}$$

et en particulier son prix en 0 est donné par

$$\boxed{C_0 = \frac{1}{(1+r)^n}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\phi(S_{t_1}, ..., S_{t_n})]}$$

Proposition 3.12 *Comme le marché est complet, il y a unicité de la probabilité risque neutre.*

Preuve : Comme dans le modèle à une période, si on prend deux probabilités risque neutre $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$, pour tout $B \in \mathcal{F}_T$, $\mathbb{1}_B$ est un produit dérivé puisqu'il est $\mathcal{F}_T$-mesurable, donc il est duplicable par un portefeuille simple autofinançant (x, Δ) et on a

$$\mathbb{Q}_1(B) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_1}[\mathbb{1}_B] = R^n x = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}_2}[\mathbb{1}_B] = \mathbb{Q}_2(B)$$

Donc $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$ sont indistinguables.

5 Formule générale

Généralisation de la formule obtenue pour 2 périodes.
Il suffit de pondérer les valeurs futures possibles de l'actif contingent par les probas de survenance, qui sont $\frac{n!}{j!(n-j)!}q^j(1-q)^{n-j}$ puisque la valeur finale ne dépend que du nombre de montées et de descentes, et que la proba q est la même à chaque période.
Chaque chemin a une probabilité $q^j(1-q)^{n-j}$ de survenir, et il y a $\frac{n!}{j!(n-j)!}$ chemin possibles.
Ainsi, on obtient :

$$C = \frac{1}{R^n}\left(\sum_{j=0}^{n}\frac{n!}{j!(n-j)!}q^j(1-q)^{n-j}\max\left[0, u^j d^{n-j}S_0 - K\right]\right)$$

Cette formule permet d'obtenir directement le prix du call, mais seulement dans le cas d'un arbre recombinant.
Un inconvénient peut être la grosseur du terme en factoriels, alourdissant les calculs.
Pour des valeurs de n très grandes, souvent on préfèrera pour l'implémentation une implémentation du principe d'inférence arrière de CRR.

6 Conclusions

Remarque : Comme dans le modèle à une période, le prix de l'actif ne dépend que de la forme du payoff, de u, r et d, mais pas de la probabilité réelle qu'a le prix de monter ou de descendre : **le prix ne dépend pas de la probabilité historique**.

Remarque : Nous avons déterminé le portefeuille de couverture qui permet à tout instant de se couvrir contre les variations de l'option : comme dans le modèle à une période, **la quantité d'actif risqué à prendre dans le portefeuille s'interprète comme la variation du prix de l'option en réponse à une variation du cours du sous-jacent.** C'est le *delta-hedging.*
En temps continu, on obtiendra naturellement le portefeuille de duplication comme la dérivée de la valeur du produit dérivé par rapport à la valeur du sous-jacent.

Remarque : Dans la pratique, si on considère un produit dérivé dont la valeur ne depend que de la valeur finale, on peut calculer sa valeur sur chacun des noeuds à maturite. On revient alors progressivement en arrière dans l'arbre pour passer de ses valeurs aux noeuds de l'instant t_{i+1} à ses valeurs aux noeuds de l'instant t_i en actualisant sous la probabilité risque neutre. L'intérêt d'utiliser un arbre recombinant à n périodes est que l'on a seulement $n+1$ valeurs possible en T au lieu de 2^n si l'arbre n'était pas recombinant. Pour connaître son prix en 0, on doit donc faire $n!$ calculs au lieu de $2^n.2^{n-1}.....2 = 2^{\frac{n(n+1)}{2}}$. Pour $n = 10$ par exemple on obtient 11 valeurs possibles et $11! \sim 4.10^7$ avec un arbre recombinant, et 2048 valeurs possibles soit 7.10^19 calculs sinon.

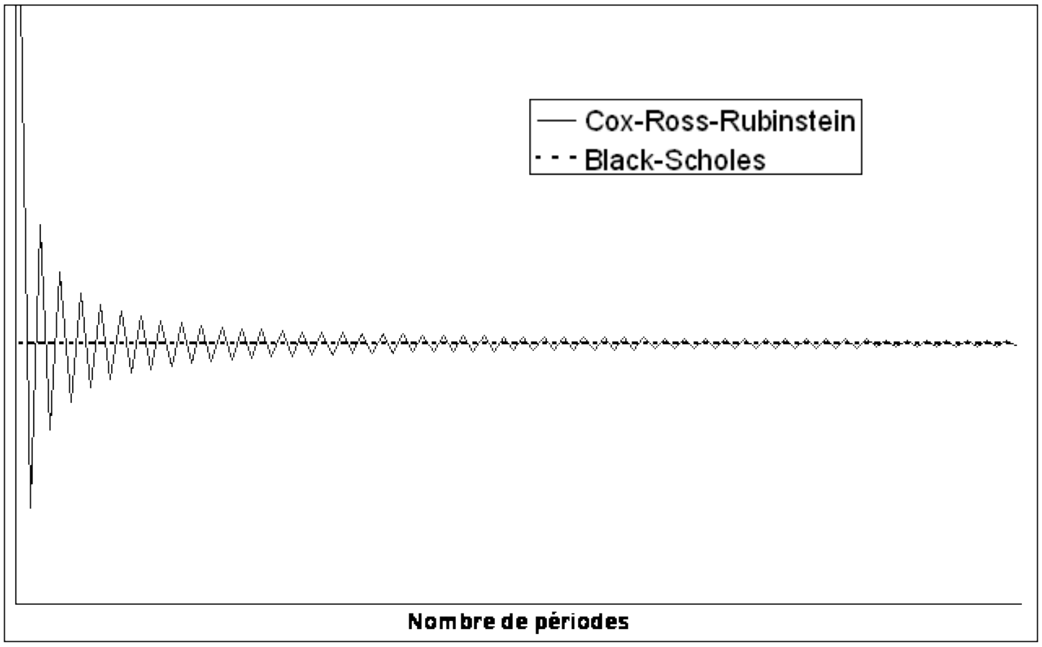
A RETENIR :
- **Le prix de l'actif s'écrit toujours comme l'espérance actualisée de sa valeur finale sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$.**
- **La probabilité risque neutre rend les actifs réactualisés des martingales et de manière équivalente les stratégies de portefeuille simple réactualisées sont des martingales aussi.**

X Résolution par procédure numérique - algorithme de CRR

1 TP sous Excel/VBA

2 Convergence du modèle de CRR

Si l'on fait tendre le nombre n de périodes vers l'infini, et pour un choix judicieux de la forme de u et d, ce modèle converge vers un modèle en temps continu appelé modèle de Black-Scholes (cf chapitre suivant).
Afin de manipuler des objets similaires en temps continu, il nous faut utiliser la théorie des processus en temps continu que l'on appelle calcul stochastique, avec l'intégrale stochastique !



n impair par au dessus
n pair par en dessous

XI Modèles dérivés

Il existe de multiples variantes de cette approche par arbre de l'évaluation d'actifs financiers, qui sont des modèles améliorés du modèle de Cox Ross et Rubinstein.

1 Arbre trinomial

Si on généralise cette approche par arbres en supposant qu'il y a plusieurs possibilités d'augmentation ou de diminution à chaque période. On obtient plus généralement ce que l'on appelle arbre multinomial, dont le premier exemple est l'arbre trinomial (possibilité pour le prix de rester stable, c'est-à-dire de prendre 3 valeurs). arbre recombinant

$$\begin{aligned} u &= e^{\sigma\sqrt{2t}} \\ m &= 1 \\ d &= e^{-\sigma\sqrt{2t}} \\ S_u = S.u \quad &, \quad S_m = S \ , \ S_d = S.d \\ p_u &= \left(\frac{e^{Yt/2} - d}{u-d}\right)^2 \\ p_d &= \left(\frac{u - e^{Yt/2}}{u-d}\right)^2 \\ p_m = 1 - p_u - p_d \end{aligned} \tag{3.13}$$

où Y est le rendement du sous-jacent (pour une action sous la probabilité risque neutre $Y = r$ (taux d'intérêt), futures $Y = 0$, devises $Y = (domesticinterestrate - foreigninterestrate)$).

On trouve que le modèle trinomial a des résultats similaires au modèle binomial, aussi bien quant à la précision que pour la convergence. Cependant, le modèle trinomial est plus efficace que le modèle binomial : il donne des résultats aussi précis que le modèle binomial, mais en utilisant 4 fois moins d'intervalles de temps. Donc ces deux modèles sont équivalents, mais le modèle trinomial demande moins de temps de calculs.

2 Jarrow et Rudd

Le modèle de Jarrow et Rudd, datant de 1983, est un modèle binomial avec un autre choix de paramètres : la probabilité de monter et de descendre est fixée égale à 1/2 (proba risque-neutre). C'est une condition autre que $u = 1/d$ qui permet de fiwer d'autres paramètres. Ainsi, u et d se trouvent être modifiés en conséquence.

$$\begin{aligned}
u &= e^{(Y-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t+\sigma\sqrt{\delta t}} \\
d &= e^{(Y-\frac{1}{2}\sigma^2)\delta t-\sigma\sqrt{\delta t}} \\
S_u &= S.u \\
S_d &= S.d \\
p_u = p_d &= \frac{1}{2}
\end{aligned} \tag{3.14}$$

où Y est le rendement du sous-jacent (pour une action sous la probabilité risque neutre $Y = r$ (taux d'intérêt), futures $Y = 0$, devises $Y = (domesticinterestrate - foreigninterestrate)$).

Ce modèle est peu répandu.

3 Modèle de Tian (1993)

De même dans ce modèle binomial, les paramètres u et d sont choisis différemment :

$$\begin{aligned}
u &= \frac{MV}{2}\left(V+1+\sqrt{V^2+2V-3}\right) \\
u &= \frac{MV}{2}\left(V+1-\sqrt{V^2+2V-3}\right) \\
M &= \exp\left(r\delta t\right) \\
V &= \exp\left(\sigma^2\delta t\right)
\end{aligned} \tag{3.15}$$

Ce modèle est peu utilisé en pratique, et est plutôt anecdotique.

XII Exemple d'utilisation de l'approche binomiale en assurance : titrisation

Considérons un marché complet mono-périodique avec 2 actifs, et sans opportunité d'arbitrage :

- Actif A (sans risque) : 1€ $\longrightarrow$ 1.03€
- Actif B (risqué) : $\begin{tikzcd} & 1{,}12€ \\ 1€ \arrow[ur, "p=1/2"] \arrow[dr, "1-p=1/2"'] & \\ & 0.98€ \end{tikzcd}$

On souhaite évaluer un produit d'assurance contre une baisse du marché actions : l'actif C (comme cat).
L'actif C a une évolution future donnée par :

$$\begin{array}{ll} & 103€ \text{ hausse du marché} \\ ? \nearrow & \\ \quad \searrow & \\ & 106€ \text{ baisse du marché} \end{array}$$

On cherche le prix auquel il faut proposer ce produit d'assurance.
On peut résoudre ce problème en faisant une approche financière du problème. Il suffit de considérer C comme un produit dérivé, et d'utiliser l'évaluation risque-neutre.

Sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, tous les actifs ont le même rendement moyen. La probabilité q de hausse sous $\mathbb{Q}$ est donc :

$$1.12q + 0.98(1 - q) = 1.03, \text{ soit } q = 0.357.$$

Le prix de l'actif C est alors donné par l'espérance sous $\mathbb{Q}$ du payoff actualisé :

$$[103q + 106(1 - q)]/1.03 = 101.87€$$

Ce prix est expliqué par

$$\left\{\begin{array}{rcl} 1.03a + 1.12b & = & 103 \\ 1.03a + 0.98b & = & 106 \end{array}\right.$$

Le portefeuille répliquant est ainsi constitué de quantités $a = 123.30$ d'actif A et $b = -21.43$ d'actif B. Le prix du portefeuille répliquant est donc donné par : $a + b = 101.87€$.

Dans ce cas, une approche actuarielle peut aussi être mise en oeuvre :
On peut par ex. calculer le payoff moyen actualisé (sous $\mathbb{P}$) :

$$[103q + 106(1 - q)]/1.03 = 101.46€$$

et rajouter une prime de risque (ou chargement de sécurité). On retrouve le résultat de l'approche financière

$$101.87€ = 101.46€ + 0.41€$$

si le taux de chargement est de 0.4%.
Le premier terme est ce que l'on appelle le Best Estimate, et le second la Market Value Margin (ou MVM).

Conclusion : dans l'approche financière, le passage à la probabilité risque-neutre contient la notion de prime de risque comme dans l'approche actuarielle.

Chapitre 4

Modèle de Black et Scholes

- Distributions normales et lognormales en temps continu
- EDP et formule de Black et Scholes
- Formule de BS par les martingales, AOA, proba risque neutre, valeur du call
- Application pratique de la formule de BS
- changement de proba / changement de numéraire sous BS
- Volatilité implicite / volatilité historique

Le premier modèle d'évolution des actif financiers a été proposé par Louis Bachelier dans sa thèse en 1900. Les actifs risqués étaient supposés Gaussiens et pouvaient donc prendre des valeurs négatives. Pour remédier à ce défaut, le modèle retenu par la suite est un modèle rendant les actifs risqués log-normaux, afin de s'assurer qu'ils restent toujours positifs. Ce modèle a le nom de modèle de Black-Scholes. En effet, en 1973, Fisher Black, Robert Merton et Myron Scholes proposent l'idée de définir le prix d'un produit dérivé comme celui de son portefeuille de couverture et l'appliquent à ce modèle Log-normal. Ils ont obtenus le prix nobel d'économie en 1997 pour ces travaux, ce qui n'a pas empêché leur fond d'investissement "Long Term Capital Market" de faire faillite en 1998.

I Formalisation du modèle de Black-Scholes

1 Les hypothèses sur le marché

Nous reprenons ici le même type d'hypothèses faites au début du chapitre sur la modélisation des marchés financiers et les notions d'arbitrage :

– Les actifs sont divisibles à l'infini
– Le marché est liquide : on peut acheter ou vendre à tout instant
– On autorise les ventes à découvert
– Les échanges ont lieu sans coût de transaction
– On autorise les emprunts et les prêts illimités pour tous les agents au même taux constant r (accès à l'actif sans risque)
– Le marché fonctionne en continu

2 L'hypothèse fondamentale des rendements lognormaux

L'incertain est modélisé à travers les trajectoires futures du titre risqué, vues comme des scenarii possibles d'évolution. En général, on suppose que ce sont des fonctions continues (ω_t), définies sur $\mathbb{R}_+$. Afin de prendre en compte le caractère très erratique des cours des actifs financiers, Bachelier les modélise à l'aide d'un mouvement Brownien avec tendance. Une telle modélisation conduit à des prix qui peuvent être négatifs. Aussi, Samuelson (1960) propose de retenir cette modélisation pour les rendements, plutôt que pour les cours eux-mêmes. C'est ce type de modélisation que choisiront Black, Scholes et Merton.

Il y a plusieurs définitions possibles des rendements, qui en général sont équivalentes lorsque les phénomènes étudiés sont déterministes, mais qui diffèrent dans le cas stochastique. La différence est explicable par la formule d'Itô. Nous supposons ici que les rendements entre deux périodes sont mesurés par la différence des logarithmes des cours.
On fait l'hypothèse que les rendements entre 0 et t suivent un mouvement Brownien de tendance $\mu-\frac{1}{2}\sigma^2$ et de coefficient de diffusion σ, autrement dit que les rendements suivent une normale. Cela se traduit par les propriétés suivantes du processus des prix $\{S_t, t \in [0,T]\}$:
- $S_0 = x$
- Les rendements $Log(S_t) - Log(S_s)$ suivent une loi gaussienne de moyenne $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)$ et de variance $\sigma^2(t-s)$
- $\forall 0 < t_1 < ... < t_n$, les accroissements relatifs $\{\frac{S_{t_i+1}}{S_{t_i}}; 0 \leq i \leq n-1\}$ sont indépendants, et de même loi.

En d'autres termes, il existe un mouvement Brownien W tel que :

$$S_t = f(t, W_t) = x \exp\left(\mu t + \sigma W_t - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$$

Par application de la formule d'Itô pour le mouvement Brownien et la fonction $f(t,z) = x\exp\left(\mu t + \sigma z - \frac{1}{2}\sigma^2 t\right)$, dont les dérivées valent :

$$f'_t(t,z) = f(t,z)\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right), \quad f'_z(t,z) = f(t,z)\sigma, \quad f''_{zz} = f(t,z)\sigma^2$$

Nous voyons que

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$$

L'hypothèse principale à la base du modèle de Black-Scholes est donc la modélisation de la dynamique du sous-jacent par un mouvement brownien géométrique (modélisation des actifs par des lois lognormales).

Comme la fonction exponentielle n'est pas bornée, pour justifier l'écriture différentielle et l'utilisation de la formule d'Itô, nous avons besoin de propriétés d'intégrabilité, que l'on vérifie facilement grâce aux propriétés des exponentielles de variables gaussiennes.

Lemme 4.1 *La transformée de Laplace d'une v.a. gaussienne U de moyenne m et de variance γ^2 est donnée par*

$$\mathbb{E}[exp(\lambda U)] = \exp\left(\lambda m + \frac{1}{2}\gamma^2\lambda^2\right)$$

En particulier, si W est un mouvement Brownien,

$$\mathbb{E}\left[exp\left(\lambda W_t - \frac{1}{2}\lambda^2 t\right)\right] = 1$$

Grâce à ce lemme (cf cours sur les vecteurs gaussiens et le mouvement Brownien), on obtient facilement :

Théorème 4.1 *Soit S un mouvement Brownien géométrique de valeur initiale x. Alors :*
Le cours S_t suit une loi log-normale, dont les deux premiers moments valent :

$$\mathbb{E}[S_t] = xe^{\mu t}, \quad \mathbb{E}[S_t^2] = x^2\exp((2\mu + \sigma^2)t),$$

$$Var(S_t) = x^2\exp(2\mu t)(\exp(\sigma^2 t) - 1)$$

En particulier, le ratio de Sharpe, qui rapporte le gain moyen à la variabilité du titre :

$$SharpeRatio = \frac{\mathbb{E}[S_t] - x}{\sqrt{Var(S_t)}}$$

est indépendant de la valeur initiale x.
De plus, la densité de la loi de S_t partant de x est la fonction $l(t,x,y)$ donnée par :

$$l(t,x,y) = \frac{1}{\sigma y\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{1}{2}d_0(t, xe^{\mu t}, y)^2\right)$$

$$d_0(t,x,y) = \frac{1}{\sqrt{\sigma^2 t}}Log\frac{x}{y} - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{t} \tag{4.1}$$

Preuve : L'étude des moments de S_t repose sur le lemme précédent, et la densité $l(t,x,y)$ est déduite de la densité gaussienne par un changement de variable.
ECRIRE LE CALCUL, cf pages 33-34 poly El Karoui

a. Interprétation financière des paramètres du modèle

– S'il n'y a pas de bruit, $(\sigma = 0)$, μ représente le rendement annualisé du titre. Un simple argument d'arbitrage montre qu'en absence d'alea sur le titre, son rendement doit être le même que celui d'un placement à la banque, dont le taux est désigné ici par r. On désignera par S_t^0 la valeur en t de la capitalisation d'un Euro à la banque.

$$dS_t^0 = S_t^0 r dt$$

Un ordre de grandeur de ce taux est $[2\%, 12\%]$.

– Lorsque le titre est risqué, μ représente le rendement annualisé du titre espéré par unité de temps. Le marché le compare en général à celui d'un placement sans risque. Le paramètre $\mu - r$ est donc en général un paramètre de référence.
– Le ratio de Sharpe par unité de temps des excès de rendements par rapport au cash prend en compte la volatilité du titre. Il est considéré comme **la prime de risque** λ que le marché affecte à la source de risque W puisque

$$\text{prime de risque } = \lambda = \frac{\frac{1}{dt}\mathbb{E}\left[\frac{dS_t}{S_t}\right] - r}{\sqrt{\frac{1}{dt}Var\left(\frac{dS_t}{S_t}\right)}} = \frac{\mu - r}{\sigma}\frac{dS_t}{S_t}$$

– Il sera utile d'écrire

$$dS_t = S_t[rdt + \sigma(dW_t + \lambda dt)]$$

Dans cette représentation, nous voyons apparaître l'importance du paramètre clé dans la caractérisation des titres financiers à savoir la volatilité σ. L'ordre de grandeur de ce paramètre dépend énormément de la nature du titre support : dans les marchés d'actions, il varie entre 20 et 70%, dans les marchés de change entre 10 et 30%, dans les marchés de taux d'intérêt entre 8 et 30%.

b. Limites de la modélisation

– Dans le monde de Black et Scholes, tous les paramètres sont supposés constants. Il est clair que ce n'est pas très réaliste, dans aucun marché. En fait, on pourra sans grande modification dans ce qui suit supposer les paramètres déterministes. Mais cela pose évidemment des problèmes d'identification des paramètres (calibration dans le vocabulaire de la finance) importants.
En pratique : on observe en général un smile/skew de volatilité, elle est non constante. En effet, la volatilité implicite aux options fortement hors de la monnaie ou largement dans la monnaie est plus élevée que la volatilité implicite recalculée à partir des options à la monnaie. On appelle ce phénomène "smile de volatilité" (le graphe de la volatilité en fonction du prix d'exercice est en forme de sourire). Pour un prix d'exercice donné, la différence entre la volatilité implicite observée et celle à la monnaie qui s'appelle **le skew**. La surface de volatilité d'un sous-jacent évolue également dans le temps. Les acteurs du marché la réévaluent sans cesse, modifiant leur anticipation de la probabilité, pour chaque prix d'exercice et maturité, qu'une option ne finisse dans la monnaie. La volatilité en pratique n'est donc pas constante.
Il existe des modèles plus poussés qui supposent les paramètres du modèle aléatoires/stochastiques (modèles à volatilité stochastique). Nous les citerons à la fin de ce cours, et vous les verrez l'an prochain, en particulier pour les modèles de taux d'intérêt.
– Notons par ailleurs que dans leur papier de 1973, Black et Scholes ne cherchent pas tant à modéliser avec exactitude la dynamique du sous-jacent qu'ils considèrent qu'à essayer de voir si le point de vue très nouveau qu'ils proposent dans le domaine des options est prometteur, quitte à revenir sur les questions de modélisation dans la suite. A cette époque, Mandelbrot (1963) avait dejà

montré que les rendements des actifs financiers à un jour, ou une semaine n'étaient clairement pas statistiquement gaussiens, en particulier que la probabilité de grands mouvements de ces rendements était plus grande que celle que le monde gaussien quantifiait. Cette question "des queues épaisses" des distributions des rendements et de son implication dans la mesure des risques et la couverture des produits financiers est au coeur de la recherche actuelle. Mais comme nous le verrons, bien qu'imparfait le modèle de Black et Scholes est encore très efficace et très utilisé dans toutes les salles de marché.
- Un des grands messages de la finance mathématique est que la prime de risque n'est pas spécifique du titre mais de la source de bruit W_t. C'est une caractéristique du marché au même titre que le taux d'intérêt, du moins dans un monde sans arbitrage et très liquide. Cela sert beaucoup lors de l'étude des multi-sous-jacents. Cette hypothèse joue en particulier un rôle déterminant dans les marchés de taux.

3 Modélisation probabiliste du marché

Après ces introductions relatives aux hypothèses faites sur le marché, nous allons poser proprement le modèle.
Nous considérons un marché constitué d'un actif sans risque S_0 et d'un actif risqué S sur la période $[0, T]$. On considère donc un **actif sans risque** évoluant selon l'équation suivante :

$$dS_t^0 = rS_t^0 dt \quad \text{et} \quad S_0^0 = 1 \Longrightarrow S_t^0 = e^r t$$

(on est en continu, donc le taux considéré est toujours un taux continu).
L'actif risqée aura la dynamique donnee par l'EDS de Black-Scholes ou $\sigma > 0$:

$$dSt = S_t(\mu dt + \sigma dW_t) \tag{4.2}$$

Ce modèle est le modèle le plus simple que l'on puisse imaginer pour modeliser l'évolution d'un actif risqué tout en imposant qu'il soit positif. Comme nous l'avons vu plus haut, cela revient à supposer que les rendements des actifs sont normaux. Cet actif a une tendance donnée par μ et une volatilite donnée par σ toutes les deux constantes.

Décrivons maintenant $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$: L'ensemble des états du monde Ω sera un sous-ensemble de $\mathbb{R}^+ \times]0, T]$.
Pour tout $t \in [0, T]$, la tribu $\mathcal{F}_\sqcup$ représente l'information disponible à la date t, l'aléa provient seulement de S, donc

$$\mathcal{F}_t := \sigma(S_s, s \leq t)$$

La probabilité historique $\mathbb{P}$ est la probabilité de survenance de chaque état du monde, elle est telle que W soit un Mouvement Brownien sous $\mathbb{P}$.

Si on part dans le sens inverse, et que l'on essaie de résoudre l'EDS de Black et Scholes, on a :

Théorème 4.2 *L'EDS 4.2 admet une unique solution qui est donnée par :*

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{\sigma^2}{2})t + \sigma W_t}, \quad \mathbb{P}_p.s.$$

Preuve : La solution proposée vérifie bien l'EDS, en appliquant la formule d'Itô (cf partie précédente).
Donc S, processus $\mathcal{F}$-adapté est bien solution de l'EDS 4.2. Le caractère Lipschitz des coefficients de l'EDS nous assure l'unicité de la solution, mais, dans notre cas, nous pouvons également la démontrer : soit Y un processus solution de l'EDS 4.2. Remarquons que S_t ne s'annule jamais si bien que l'on peut appliquer la formule d'Ito pour déterminer la dynamique de $\frac{1}{S_t}$:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{1}{S_t}\right) &= -\frac{1}{S_t^2}dS_t + \frac{1}{2}\frac{2}{S_t^3}d\langle S\rangle_t \\ &= -\frac{1}{S_t}(\mu dt + \sigma dW_t) + \frac{1}{S_t}\sigma^2 dt \end{aligned}$$

Donc la formule d'intégration par partie donne la dynamique de $\frac{Y_t}{S_t}$:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{Y_t}{S_t}\right) &= Y_t d\left(\frac{1}{S_t}\right) + \frac{1}{S_t}dY_t + d\langle \frac{1}{S}, Y\rangle_t \\ &= \frac{Y_t}{S_t}((\sigma^2-\mu)dt - \sigma dW_t) + \frac{Y_t}{S_t}(\mu dt + \sigma dW_t) - \sigma Y_t \frac{\sigma}{S_t}dt \\ &= 0 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Remarquez que l'on aurait pu obtenir directement le resultat en appliquant la formule d'Ito à la fonction $(y,s) \mapsto y/s$. On a donc :

$$\frac{Y_t}{S_t} = \frac{Y_0}{S_0} + \int_0^t 0 dW_s = 1$$

Donc les processus Y et S sont égaux presque sûrement et l'EDS admet une unique solution.

Remarque : Comme nous avons suppose $\sigma > 0$, la fonction g telle que $S_t = g(W_t)$ est inversible, et donc les aléas du marché sont complètement décrits par le mouvement Brownien W :

$$\mathcal{F}_t = \sigma(S_r, r \leq t) = \sigma(W_r, r \leq t)$$

Définition 4.1 *Un produit dérivé (ou actif contingent) est une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable.*

Comme dans le cas du modèle discret, nous allons chercher à donner un prix en t à un produit dérivé connu en T et trouver une manière pour dupliquer exactement ce produit dérivé.

La méthode va être similaire à celle utilisée dans le cas discret :
- On va chercher à construire une probabilité risque neutre qui rende tout actif de base réactualisé martingale.
- On va définir ce que l'on appelle une stratégie de portefeuille simple autofinançante.

- On va vérifier que toute stratégie de portefeuille simple autofinançante réactualisée reste martingale sous la probabilité risque neutre.
- On en déduira l'absence d'opportunités d'arbitrage entre stratégies de portefeuille simple (AOA').
- Nous allons chercher à dupliquer tout produit dérivé par une stratégie de portefeuille simple.
- On en déduira que la définition économique naturelle du prix de l'option en t s'écrit à un facteur d'actualisation près comme l'espérance sous cette proba risque neutre du flux final.
- Le portefeuille de duplication nous donnera la stratégie de couverture de l'option.

II Probabilité risque neutre

1 Rappel sur les changements de probabilités

On cherche à construire une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ sur $(\omega, \mathcal{F}_T)$ équivalente à $\mathbb{P}$. Si $\mathbb{P}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{P}$, alors le théorème de Radon Nikodym assure l'existence d'une variable aléatoire Z_T $\mathcal{F}_T$-mesurable telle que $d\hat{\mathbb{P}} = Z_T d\mathbb{P}$, i.e. :

$$\forall A \in \mathcal{F}_T, \ \ \hat{\mathbb{P}}(A) = \int_A Z_T d\mathbb{P}$$

Autrement dit :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(\mathbb{1}_A) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T \mathbb{1}_A)$$

Dire que $\hat{\mathbb{P}}$ et $\mathbb{P}$ sont équivalentes revient à dire qu'elles chargent les mêmes ensembles et donc que Z_T ne s'annule jamais, i.e. $Z_T > 0$. Alors la densité de Radon-Nikodym de $\mathbb{P}$ par rapport) $\hat{\mathbb{P}}$ est $\frac{1}{Z_T}$.
Pour que $(\Omega, \mathcal{F}_T, \hat{\mathbb{P}})$ soit toujours un espace probablisé (ie que $\hat{\mathbb{P}}$ soit toujours une mesure de probabilités, il faut que

$$\hat{\mathbb{P}}(\Omega) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T] = 1$$

La formule de Bayes nous assure que pour toute v.a. X_T , $\mathcal{F}_T$-mesurable, on a :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}(X_T) = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(Z_T X_T)$$

On associe naturellement à la v.a. Z_T le processus martingale $(Z_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par

$$Z_t = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T | \mathcal{F}_t]$$

Alors, pour tout t et toute variable aléatoire X_t $\mathcal{F}_t$-mesurable, on a :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_t | \mathcal{F}_t]] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_t X_t]$$

En fait, Z_t est la densité de Radon Nikodym (définie à une modification p.s. près) de $\hat{\mathbb{P}}$ restreint à $\mathcal{F}_t$ par rapport à $\mathbb{P}$ restreint à $\mathcal{F}_t$. On note :

$$Z_t = \left.\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{d\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_t}$$

Si l'on considère un processus X $\mathcal{F}$-adapté, la formule de Bayes généralisée s'écrit :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T|\mathcal{F}_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}\left[\frac{Z_T}{Z_t}X_T\middle|\mathcal{F}_t\right] = \frac{1}{Z_t}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T|\mathcal{F}_t]$$

En effet, pour toute variable aléatoire Y_t $\mathcal{F}_t$-mesurable bornée, on a :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T Y_t] = e^{\mathbb{P}}[Z_T X_T Y_t] = \mathbb{E}^{\mathbb{P}}[\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T|\mathcal{F}_t]Y_t] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[\frac{1}{Z_t}\mathbb{E}^{\mathbb{P}}[Z_T X_T|\mathcal{F}_t]Y_t\right]$$

2 Probabilité risque neutre

Dans toute la suite, tout comme dans le cas discret, on notera $\tilde{Y}$, la valeur actualisée d'un processus Y définie donc par

$$\tilde{Y}_t = \frac{Y_t}{S_t^0} = e^{-rt}Y_t$$

Déterminons la dynamique des actifs risqués et sans risque réactualisés sous la probabilité historique $\mathbb{P}$. L'actif sans risque réactualisé S_t^0 est constant égal à 1 donc

$$dS_t^0 = 0$$

Pour l'actif risqué réactualisé, il faut appliquer la formule d'Ito :

$$d\tilde{S}_t = \frac{1}{S_t^0}dS_t + S_t d\left(\frac{1}{S_t^0}\right) + d\langle S, \frac{1}{S^0}\rangle_t = \tilde{S}_t[(\mu - r)dt + \sigma dW_t]$$

Définition 4.2 *Dans le modèle de Black Scholes,* $\lambda := \frac{\mu - r}{\sigma}$ *est ce que l'on appelle la* **prime de risque***.*

Donc, si l'on introduit le processus defini pout $t \in [0, T]$,

$$\hat{W}_t = W_t + \lambda t$$

alors la dynamique de $\tilde{S}$ est donnée par :

$$d\tilde{S}_t = \sigma \tilde{S}_t d\hat{W}_t$$

Donc, si l'on arrive à construire une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$, équivalente à $\mathbb{P}$, sous laquelle $\hat{W}_t = W_t + \lambda t$ est un mouvement Brownien, cette probabilité rendra l'actif risqué réactualisé une martingale, et sera un très bon candidat pour notre probabilité risque neutre. L'outil qui va nous premettre de démontrer l'existence de cette probabilité est le théorème de Girsanov :

Théorème 4.3 Théorème de Girsanov
Il existe une probabilité $\hat{\mathbb{P}}$*, équivalente à la probabilité historique* $\mathbb{P}$*, définie sur* $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ *par :*

$$\left.\frac{d\hat{\mathbb{P}}}{\mathbb{P}}\right|_{\mathcal{F}_T} = Z_T = e^{-\lambda W_T - \frac{\lambda^2}{2}T}$$

sous laquelle le processus $\hat{W}_t$ *défini par* $\hat{W}_t = W_t + \lambda t$ *est un mouvement Brownien sur* $[0, T]$*.*

Preuve : cf cours de proc stoch ! la réécrire, cf poly ELIE pp 61-62

Maintenant que nous avons un candidat pour notre probabilité risque neutre, regardons si elle rend les portefeuilles autofinançants réactualisés des martingales.

3 Portefeuilles autofinançants

Après avoir modélisé la dynamique du sous-jacent, nous avons à formaliser mathématiquement l'évolution de la valeur liquidative d'un portefeuille géré dynamiquement de manière autofinançante, c'est à dire sans modification de la valeur du portefeuille aux dates de renégociation.

Une stratégie de portefeuille consiste a l'investissement à tout instant $t \in [0, T]$ dans une quantité denotée ϕ_t d'actif risqué S et d'une quantité ϕ_t^0 d'actif sans risque S^0. La valeur du portefeuille est donc donnée par

$$X_t = \phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t$$

La condition d'autofinancement dans le cas continu s'écrit :

$$\boxed{dX_t = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t S_t}$$

Définition 4.3 *Une* **stratégie de portefeuille simple atofinancée** $X^{x,\phi}$ *est la donnée d'un capital de départ x et d'une stratégie continue ϕ d'investissement dans l'actif risqué, c'est-à-dire un processus $\mathcal{F}$-adapté $(\phi_t)_{0\leq t\leq T}$ qui doit vérifier certaines conditions d'intégrabilité :*

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[\int_0^T |\phi_t \tilde{S}_t|^2 dt\right] < +\infty$$

A chaque instant t, la quantité ϕ_t^0 est déterminée à l'aide de la condition d'autofinancement du portefeuille. Cette condition se lit simplement "La variation de la valeur du portefeuille est égale à la variation de la valeur des actifs multipliée par la quantité d'actifs détenus".

Définition 4.4 *On appelle* **numéraire** *tout processus d'Itô Y $\mathcal{F}$-adapté, qui ne s'annule pas.*

Un numéraire est une "monnaie". Un changement de numéraire correspond à un changement de monnaie, ou d'unité de compte (autre monnaie, normalisé par S_0, par S). Changer de numéraire revient à normaliser l'actif considéré suivant un autre. Intuitivement, que les actifs soient écrits dans n'importe quel numéraire , tant que ce numéraire est bien déterminé à l'instant t par l'information $\mathcal{F}_t$ dont l'on dispose sur le marché en t, la condition d'autofinancement devrait être verifiée. En effet, **la condition d'autofinancement est stable par changement de numéraire**, et la formulation mathématique de ce résultat est la suivante :

Proposition 4.1 *Pour tout* **numéraire** Y*, la condition d'autofinancement se réécrit :*

$$d\left(\frac{X^{x,\phi}}{Y}\right)_t = \phi_t^0 d\left(\frac{S^0}{Y}\right)_t + \phi_t d\left(\frac{S}{Y}\right)_t$$

Preuve : Appliquons la formule d'intégration par parties aux processus $X^{x,\phi}$ et $U := \frac{1}{Y}$:

$$\begin{aligned} d(UX^{x,\phi})_t &= U_t dX_t^{x,\phi} + X_t^{x,\phi} dU_t + d\langle X^{x,\phi}, U\rangle_t \\ &= U_t(\phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t) + (\phi_t^0 S_t^0 + \phi_t S_t)dU_t + d\langle \phi^0 S^0 + \phi S, U\rangle_t \\ &= \phi_t^0(U_t dS_t^0 + S_t^0 dU_t + d\langle S^0, U\rangle_t) + \phi_t(U_t dS_t + S_t dU_t + d\langle S, U\rangle_t) \\ &= \phi_t^0 d(US^0)_t + \phi_t d(US)_t \end{aligned} \tag{4.4}$$

La difficulté vient du passage de la deuxième à la troisième ligne, qui nécessite la relation :

$$d\langle \phi^0 S^0 + \phi S, U\rangle_t = \phi_t^0 d\langle S^0, U\rangle_t + \phi_t d\langle S, U\rangle_t$$

Cette relation vient du fait que la covariation entre 2 processus d'Itô fait uniquement intervenir linéairement leurs parties Browniennes (parties martingales). Or grâce à la condition d'autofinancement, on a :

$$d(\phi^0 S^0 + \phi S)_t = \phi_t^0 dS_t^0 + \phi_t dS_t$$

Donc la partie martingale de ${}_phi^0 S^0 + \phi S$ est la somme de ϕ_t^0 fois celle de S^0 (qui est nulle...) et de ϕ_t fois celle de S, ce qui donne le résultat.

En particulier la relation d'autofinancement écrite dans le numéraire S^0 (appelé parfois numéraire cash) donne :

$$d\tilde{X}_t^{x,\phi} = \phi_t d\tilde{S}_t \Rightarrow \tilde{X}_t^{x,\phi} = x + \int_0^t \phi_r d\tilde{S}_r$$

et donc la dynamique de la valeur réactualisée de mon portefeuille $\tilde{X}_t^{x,\phi}$ sous la probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ est

$$d\tilde{X}_t^{x,\phi} = \phi_t d\tilde{S}_t = \sigma\phi_t \tilde{S}_t d\hat{W}_t$$

ce qui justifie d'une part la forme que l'on a donnée a notre condition d'intégrabilité pour rendre $\tilde{X}$ martingale, et d'autre part le fait que la probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ rend bien le prix actualisé de tout portefeuille autofinançant une martingale, et est donc bien une probabilité risque neutre.

Remarque : Le résultat indiquant que la condition d'autofinancement est stable par changement de numéraire est très utile. Dans notre cas, nous resterons dans le numéraire cash, mais selon le problème auquel on est confronté, il peut être judicieux de changer de numéraire. Nous avons prouvé l'existence d'une proba risque neutre qui rend les actifs écrits dans le numéraire cash martingales mais on pourrait également choisir de rendre les actifs écrits dans un numéraire différent martingale. En particulier, lorsque les taux ne sont plus supposés constants, le numéraire cash n'est pas toujours le plus adapté, il est plus pratique d'écrire les actifs dans le numéraire Zéro-coupon, on parle alors de **Probabilité forward neutre**. L'article introduisant le concept de changement de numéraire est du à El-Karoui - Geman -Rochet (1995).

Le résultat est donc comme dans le cas discret : "Si l'actif risqué réactualisé est un processus d'Ito martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$, toute stratégie de portefeuille autofinancée réactualisée l'est également". Cela résume la proposition suivante :

Proposition 4.2 *La probabilité $\hat{\mathbb{P}}$ construite précédemment est une probabilité risque neutre.*
La valeur en t de toute stratégie autofinançante (x,ϕ) de flux final $X_T^{x,\phi} = h_T$ est :

$$X_t^{x,\phi} = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[h_T|\mathcal{F}_t\right]$$

Preuve : Les dynamiques de $\tilde{S}$ et de $\tilde{X}^{x,\phi}$ sous $\hat{\mathbb{P}}$ sont données par

$$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t d\hat{W}_t \Rightarrow d\tilde{X}_t^{x,\phi} = \phi_t d\tilde{S}_t = \sigma\phi_t\tilde{S}_t d\hat{W}_t$$

Donc grâce aux conditions d'intégrabilité de ϕ, $\tilde{X}^{x,\phi}$ est une martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$ et donc :

$$X_t^{x,\phi} = e^{rt}\tilde{X}_t^{x,\phi} = e^{rt}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[\tilde{X}_T^{x,\phi}|\mathcal{F}_t\right] = e^{rt}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[e^{-rT}X_T^{x,\phi}|\mathcal{F}_t\right] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left[h_T|\mathcal{F}_t\right].$$

Proposition 4.3 *L'existence d'une probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$ implique l'AOA entre stratégies de portefeuille simple autofinançantes.*

Preuve : Si $X_T^{0,\phi} \geq 0$, comme $\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[X_T^{0,\phi}] = e^{rT}.0$, on a donc $X_T^{0,\phi} = 0$ sauf sur un ensemble de mesure nulle pour $\hat{\mathbb{P}}$, qui est également un ensemble de mesure nulle pour $\mathbb{P}$.

Nous venons donc de voir que l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage est bien vérifiée dans le cadre du modèle de Black-Scholes.

La valeur en t de toute stratégie de portefeuille simple s'écrit comme l'espérance sous la proba risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$ de son flux terminal actualisé, donc, si un produit dérivé est duplicable, pour éviter les arbitrages, on définit économiquement son prix comme l'espérance sous $\hat{\mathbb{P}}$ de son flux terminal actualisé.

Il est important de bien visualiser la dynamique de l'actif risqué réactualisé ou non sous les différentes probabilités :

	Probabilité historique $\mathbb{P}$	Probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$
Actif risqué	$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$	$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t d\hat{W}_t$
Actif risqué réactualisé	$d\tilde{S}_t = (\mu - r)\tilde{S}_t dt + \sigma\tilde{S}_t dW_t$	$d\tilde{S}_t = \sigma\tilde{S}_t d\hat{W}_t$

4 Duplication d'un produit dérivé : EDP de Black et Scholes

Tout d'abord, remarquons le caractère Markovien du processus S :

Proposition 4.4 *Considérons un produit dérivé de la forme $h(S_T)$. Alors il existe une fonction $v : [0,T] \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que*

$$v(t,S_t) := e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

Preuve : Dans le modèle de Black Scholes, la valeur du sous-jacent en t est :

$$S_t = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)t-\sigma W_t}$$

On en déduit

$$S_T = S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)-\sigma(W_T-W_t)}$$

Donc l'espérance conditionnelle se réécrit :

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\hat{\mathbb{P}}\left[h\left(S_t e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)-\sigma(W_T-W_t)}\right)\middle|\mathcal{F}_t\right]$$

Or la va S_t est $\mathcal{F}_t$-mesurable et la variable aléatoire $W_T - W_t$ est indépendante de $\mathcal{F}_\sqcup$. On en déduite grâce aux propoétés des espérances conditionnelles que :

$$e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t] = v(t, S_t)$$

avec la fonction v définie par :

$$v : (t, x) \mapsto e^{-r(T-t)}\mathbb{E}\hat{\mathbb{P}}\left[h\left(xe^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)-\sigma(W_T-W_t)}\right)\right].$$

Théorème 4.4 (Prix et EDP de Black Scholes)
Si l'on suppose que $v \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^+)$, alors il existe une stratégie autofinançante (x, ϕ) qui duplique le produit dérivé, i.e. telle que $\forall t \in [0,T], X_t^{x,\phi} = v(t, S_t)$ et les quantités x et ϕ sont données par :

$$x := e^{-rT}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)] \quad \phi_t := \frac{\partial v}{\partial x}(t, S_t)$$

En AOA, le prix en t du profuit de flux final $h(S_T)$ est donc $e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$. De plus, le prix de l'option $v(t, S_t)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) + v_t(t,x) - rv(t,x) = 0 \quad et \quad v(T,x) = h(x)$$

Réciproquement, si l'EDP précédente admet une solution $v^\star$ (dont la dérivée partielle $\partial_x v^\star(t,x)$ est bornée, alors $v^\star(t, S_t)$ est le prix de l'option de flux terminal $h(S_T)$.

Preuve : Supposons que $v \in C^{1,2}([0,T]\times\mathbb{R}^+)$, et construisons le portefeuille de couverture. Considérons le processus défini sur $[0,T]$ par :

$$U_t := e^{-rt}v(t, S_t) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

Par construction, ce processus est une martingale sous $\hat{\mathbb{P}}$, en effet, pour tout $s \leq t$:

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[U_t|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}h(S_T)|\mathcal{F}_s]|\mathcal{F}_s] = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[e^{-rT}h(S_T)|\mathcal{F}_t] = U_s$$

Remarquons que l'on peut écrire

$$U_t = u(t, \tilde{S}_t) \quad \text{avec } u : (t,x) \mapsto e^{-rt}v(t, e^{rt}x)$$

Alors $u \in C^{1,2}([0,T] \times \mathbb{R}^+)$ et la formule d'Itô nous donne :

$$\begin{aligned} dU_t &= u_x(t, \tilde{S}_t + u_t(t, \tilde{S}_t)dt + \frac{1}{2}u_{xx}(t, \tilde{S}_t)d\langle \tilde{S} \rangle_t \quad (4.5) \\ &= \sigma \tilde{S}_t u_x(t, \tilde{S}_t) d\hat{W}_t + \left(u_t(t, \tilde{S}_t) + \frac{\sigma^2}{2}\tilde{S}_t^2 u_{xx}(t, \tilde{S}_t) \right) dt \end{aligned}$$

Etant donné qu'on a déjà établi que U_t était une martingale, sa partie en dt est nulle, et on obtient

– D'une part la partie en dt est nulle et égale à

$$u_t(t, \tilde{S}_t) + \frac{\sigma^2}{2}\tilde{S}_t^2 u_{xx}(t, \tilde{S}_t) = 0$$

Or par définition de u, on a les relations suivantes :

$$u_t(t,x) = -re^{-rt}v(t, e^{rt}x) + e^{-rt}v_t(t, e^{rt}x) + rxv_x(t, e^{rt}x)$$

$$\text{et } u_{xx}(t,x) = e^{rt}v_{xx}(t, e^{rt}x) \quad (4.6)$$

Donc l'EDP précédente en u se réécrit en v de la manière suivante (en remplaçant et en simplifiant par e^{-rt}) :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 v_{xx}(t, S_t) + rS_t v_x(t, S_t) - rv(t, S_t) = 0$$

avec la condition terminale $v(T, S_T) = h(S_T)$. L'idée pour obtenir l'EDP en tout x est que le mouvement Brownien W_t diffuse sur tout $\mathbb{R}$, donc S_t diffuse sur tout $\mathbb{R}^+$, et par conséquent, v est solution sur $\mathbb{R}^+$ de :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) + v_t(t,x) - rv(t,x) = 0 \quad \text{et} \quad v(T,x) = h(x)$$

– Et d'autre part une solution de cette forme résoud également le problème de duplication. En effet, la propriété de martingale de U_t avec le terme en dt qui s'annule nous donne finalement l'expression de U_t :

$$U_t = U_0 + \int_0^t u_x(r, \tilde{S}_r) d\tilde{S}_r$$

Considérons maintenant la stratégie de portefeuille donnée par :

$$x := U_0 = e^{-rT}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_t)] \text{ et } \phi_t := u_x(t, \tilde{S}_t) = v_x(t, S_t)$$

Par construction, U est une martingale, donc (x, ϕ) est une stratégie de portefeuille, et grâce à la condition d'autofinancement, la valeur actualisée de ce portefeuille est :

$$\tilde{X}_t^{x,\phi} = x + \int_0^t \phi_r d\tilde{S}_r = U_0 + \int_0^t u_x(r, \tilde{S}_r d\tilde{S}_r = U_t$$

Donc le portefeuille $X^{x,\phi}$, qui vérifie de bonnes conditions d'intégrabilité puisque U est une martingale, est bien un portefeuille de duplication, car il vérifie :

$$X_t^{x,\phi} = e^{rt}U_t = v(t, S_t) = e^{-(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

Réciproquement, si on prend une fonction v qui vérifie l'EDP précédente, on peut introduire le processus
$$U_t^* := e^{-rt} v^*(t, S_t)$$
et u^* la fonction associée. Alors il est assez facile de montrer que la dynamique de U^* est donnée par :

$$dU_t^* = \sigma \tilde{S}_t u_x^*(t, \tilde{S}_t) d\hat{W}_t + \left(u_t^*(t, \tilde{S}_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 \tilde{S}_t^2 u_{xx}^*(t, \tilde{S}_t) \right) dt$$

Comme v^* est solution de l'EDP, le terme en dt est nul, on obtient donc que U^* est une martingale (la dérivée v^* bornée assure de bonne conditions d'intégrabilité), et

$$U_t^* = U_0 + \int_0^t u_x^*(r, \tilde{S}_r) d\tilde{S}_r$$

On en déduit que, pour tout $t \in [0, T]$:

$$v^*(t,_t) = e^{rt} U_t^* = e^{rt} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[U_T^* | \mathcal{F}_t] = e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T) | \mathcal{F}_t]$$

Donc $v^*(t, S_t)$ est bien le prix en t du produit dérivé $h(S_T)$.

Remarque 1 : Supposer que $v \in C^{1,2}([0, T] \times \mathbb{R}^+)$ n'est pas restrictif. On pourrait penser qu'il est nécessaire que la fonction de payoff h soit régulière, mais en fait, grâce à des intégrations par parties, on peut renvoyer l'opérateur de dérivation sur la densité du sous-jacent qui est suffisamment régulière.

Remarque 2 : Le résultat indiquant que le prix Black-Scholes de payoff $h(S_T)$, donné par
$$v(t, x) := e^{-r(T-t)} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T) | S_t = x]$$
est solution de l'EDP ci-avant, est un résultat très important connu sous le nom plus général de **Formule de Feynman-Kac**. Une espérance conditionnelle sur un processus Markovien peut se réécrire comme solution d'une EDP, créant ainsi des liens entre le monde déterministe et le monde probabiliste. Il y a ainsi des méthodes déterministes ou probabilistes de résoudre un même problème.

Remarque 3 : parallèle entre $v_x(t, S_t)$ et le delta vu dans le modèle binomial... ie le rapport entre la différence des valeurs possibles de l'option sur la différence des valeurs possibles du sous-jacent : $\Delta = \frac{\delta v}{\delta S}$.

Remarque 4 : Tout produit dérivé est bien duplicable. Ceci est du au fait que la dimension du Brownien est égale à celle de l'actif risqué : il y a autant d'aléa sur le marché que d'actifs possibles pour le couvrir.

Proposition 4.5 *La probabilité risque neutre est unique.*

Preuve : Pour la même raison qu'auparavant, la complétude du marché (ie tout actif est réplicable) implique que la proba risque neutre est unique. Par définition, la probabilité risque neutre rend tout portefeuille autofinançant réactualisé une martingale. Supposons que l'on ait deux probabilités risques neutres $\hat{\mathbb{P}}_1$ et $\hat{\mathbb{P}}_2$. Pour tout B élément de $\mathcal{F}_T$, $\mathbb{1}_B$ est une va $\mathcal{F}_T$-mesurable, donc elle est duplicable par une stratégie de portefeuille (x, ϕ) qui est martingale sous $\hat{\mathbb{P}}_1$ et $\hat{\mathbb{P}}_2$, et l'on a :

$$\hat{\mathbb{P}}_1(B) = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}_1}\mathbb{1}_B = e^{rT}x = \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}_2}\mathbb{1}_B = \hat{\mathbb{P}}_2(B)$$

5 Formule de Black et Scholes

D'après ce que l'on vient de voir, le prix d'une option de type européen de payoff $h(S_T)$ est donc de la forme $v(t, S_t)$ avec :

$$v(t, S8t) = e^{-r(T-t)}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}[h(S_T)|\mathcal{F}_t]$$

et de plus, la fonction v est solution de l'EDP :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v_{xx}(t,x) + rxv_x(t,x) + v_t(t,x) - rv(t,x) = 0 \quad \text{et} \quad v(T,x) = h(x)$$

Il "suffit" donc de résoudre cette EDP pour avoir le prix de l'option...
Cette EDP n'est généralement pas facile à résoudre, sans solution explicite. Mais pour certains payoffs, il existe des formules explicites qui donnent leur prix en t. C'est en particulier le cas du Call européen et du Put européen.

Proposition 4.6 *Dans le cadre du modèle de Black-Scholes, le prix du call de maturité T et de strike K est :*

$$C_t = S_t\mathcal{N}(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\alpha N(d_2)$$

avec $\mathcal{N}$ la fonction de répartition d'une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$, d_1 et d_2 donnés par :

$$d_1 := \frac{ln\left(\frac{S_t}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad et \ d_2 := d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

La formule de parité Call-Put s'acrit

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}$$

Et donc le prix du Put est donné par

$$P_t = Ke^{-r(T-t)}\alpha N(-d_2) - S_t\mathcal{N}(-d_1)$$

Preuve : Nous allons ici nous placer en 0, sachant qu'un raisonnement équivalent peut être fait en t.
Prix du Call : On a montré que sous la probabilité risque neutre $\hat{\mathbb{P}}$, les prix actualisés sont des martingales, donc le prix du call en 0 est :

$$\begin{aligned} C(0,T) &= \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(e^{-rT}(S_T-K)\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right) \\ &= e^{-rT}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_T\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right) - Ke^{-rT}\hat{\mathbb{P}}(S_T\geq K) \end{aligned} \tag{4.7}$$

Il nous faut donc calculer ces deux termes.
Le premier se calcule simplement : sous $\hat{\mathbb{P}}$, on a $S_T = S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\hat{W}_T}$ (solution de l'EDS sous $\hat{\mathbb{P}}$. Ainsi :

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}(S_T\geq K) &= \hat{\mathbb{P}}\left(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\hat{W}_T}\geq K\right) \\ &= \hat{\mathbb{P}}\left(\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\hat{W}_T \geq ln\left(\frac{K}{S_0}\right)\right) \\ &= \hat{\mathbb{P}}\left(-\frac{\hat{W}_T}{\sqrt{T}}\leq \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}}\right) \end{aligned}$$

Or, sous $\hat{\mathbb{P}}$, $-\frac{\hat{W}_T}{\sqrt{T}}\sim\mathcal{N}(0,1)$.
Donc $\hat{\mathbb{P}}(S_T\geq K)=\mathcal{N}(d_2)$, où $d_2 = \frac{ln\left(\frac{S_0}{K}+\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)}{\sigma\sqrt{T}}$.

Pour l'autre terme :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_T\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right) &= \mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_0 e^{\left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma\hat{W}_T}\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right) \\ &= S_0 e^{rT}\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(e^{\frac{\sigma^2}{2}T+\sigma\hat{W}_T}\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right) \end{aligned}$$

Si on définit alors la nouvelle probabilité $\mathbb{P}^*$ par sa dérivée de Radon Nikodym :

$$\left.\frac{d\mathbb{P}^*}{d\hat{\mathbb{P}}}\right|_{\mathcal{F}_t} = e^{\frac{\sigma^2}{2}t+\sigma\hat{W}_t}$$

sous $\mathbb{P}^*$ c'est $W_t^* = \hat{W}_t - \sigma t$ qui est un $\mathbb{P}^*$-Brownien (Girsanov). Et ainsi :

$$\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_T\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right) = S_0 e^{rT}\mathbb{E}^{\mathbb{P}^*}\left(\mathbb{1}_{S_T\geq K}\right) = S_0 e^{rT}\mathbb{P}^*\left(S_T\geq K\right)$$

Or on a vu que

$$\begin{aligned} \mathbb{1}_{S_T\geq K} &= \mathbb{1}_{-\frac{\hat{W}_T}{\sqrt{T}}\leq d_2} \\ &= \mathbb{1}_{-\frac{(\hat{W}_T-\sigma T)}{\sqrt{T}}\leq d_2+\sigma\sqrt{T}} \\ &= \mathbb{1}_{-\frac{W_T^*}{\sqrt{T}}\leq d_1} \end{aligned} \tag{4.8}$$

Or $-\frac{W_T^*}{\sqrt{T}} \sim \mathcal{N}(0,1)$, puisque c'est un mouvement Brownien sous $\mathbb{P}^*$.
Donc $\mathbb{E}^{\hat{\mathbb{P}}}\left(S_T \mathbb{1}_{S_T \geq K}\right) = S_0 e^{rT} \mathcal{N}(d_1)$.
D'où on tire bien

$$C(0,T) = S_0 \mathcal{N}(d_1) - K e^{rT} \mathcal{N}(d_2)$$

Prix du Put : Il suffit d'appliquer la formule de parité Call Put et de remarquer que par symétrie, $\mathcal{N}(x) + \mathcal{N}(-x) = 1$.

Remarque : Le prix d'un call en t est de la forme $C(T-t, \sigma, S_t, r, K)$, et vérifie la relation d'homogénéité :

$$C(T-t, \sigma, \lambda S_t, r, \lambda K) = \lambda C(T-t, \sigma, S_t, r, K)$$

Il existe 3 grandes méthodes pour l'évaluation financière des produits dérivés :

1. Résolution d'EDP (c'est l'approche "officielle" dans le papier de $B\&S$, bien qu'ils ne résolvent pas l'EDP directement...)
2. Approches probabilistes
   (a) Changement de mesure de probabilité
   (b) Changement de numéraire
3. Approche utilisant la mesure d'Esscher (travaux de Gerber et Shiu 1994)

Nous avons vu l'approche EDP, il suffit de résoudre l'EDP pour avoir le prix, ce qui n'est pas toujours aisé.
Nous venons de voir une méthode par changement de mesure de probabilité pour résoudre ce problème.
Il existe aussi l'approche changement de numéraire équivalente.

6 Volatilité implicite

remarques sur la vol implicite : absence de μ dans le résultat (idem modèle binomial), donc le prix ne dépend que de σ, et donc si on connait le prix, on peut en déduire la vol implicite. Cela consiste à inverser la formule de BS, ie à trouver la vol qui donne ces prix dans le modèle de BS. Elle ne correspond généralement pas à la vol historique ! Grosse question financière depuis des années.

III Exercices

Exemple : $K = 100$€ , $S = 100$€ , $T = 6$ mois, la volatilité $\sigma = 17\%$, et le taux d'intérêt $r = 10\%$. Déterminez le prix du call.

$$C_0 = S_0 \mathcal{N}(d_1) - Ke^{-rT}\mathcal{N}(d_2)$$

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}} = 0{,}476049$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} = 0{,}355841$$

$$\Rightarrow C_0 = 100\,\mathcal{N}(0{,}476049) - 100\,e^{-0{,}1 \times 6/12}\,\mathcal{N}(0{,}355841) = 7{,}51255$$

IV Une approximation numérique de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Il est possible d'estimer facilement la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite (cumulative standard normal distribution function) par la formule d'approximation suivante (Musiela et Rutkowski, 1997 ; Hull, 2000, Appendix 11A) :

$$\mathcal{N}(d) = 1 - \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}d^2} (b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5)\right]$$

Avec :

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{1 + 0,2316419 \times d} \\ b_1 &= 0,319381530 \\ b_2 &= -0,356563782 \\ b_3 &= 1,781477937 \\ b_4 &= -1,821255978 \\ b_5 &= 1,330274429 \end{aligned}$$

Chapitre 5

La sensibilité des options et leur utilisation = Les grecques

Une institution financière qui commercialise des options ou d'autres produits dérivés à un client en dehors du marché financier se trouve face à un problème pour gérer ce risque. Si la même option est cotée sur un marché, il peut aisément neutraliser son risque. Il vend l'option à son client et achète la même sur un marché, il réalise juste une opération de courtage. Mais un contrat peut être vendu pour répondre à un besoin du client sans qu'il y ait forcément de contrat standard coté sur un marché qui lui corresponde. Le risque supporté par l'institution financière devient plus difficile de gérer. Par une stratégie de couverture qui utilise le sous-jacent, l'institution financière peut neutraliser son risque.

La sensibilité de l'option peut être mesurée par cinq paramètres (les lettres grecques). Ce sont des instruments de base de la gestion financière des options. le Delta Δ ou δ mesure la sensibilité de la valeur d'une option par rapport aux variations du prix du sous-jacent, le Gamma γ mesure la sensibilité de l'option aux variations du Δ, le Theta θ mesure la sensibilité d'une option par rapport au temps restant au courir jusqu'à l'échéance, le Vega $\mathcal{V}$ mesure la sensibilité de l'option par rapport à σ, le rho ρ mesure la sensibilité d'une option au taux d'intérêt à court terme.

Ce sont les dérivées du prix de l'option par rapport aux valeurs S, σ, r et t ou τ. Ces indicateurs calculent donc l'impact sur le prix de l'option d'une variation des paramètres qui le forment

- le prix du sous-jacent (ou spot) S,
- la volatilité implicite σ,
- le temps t, ou la durée restant avant l'échéance τ
- le taux d'intérêt r.

Leurs valeurs peuvent être calculés dans les principaux modèles d'évaluation d'options, notamment de celui de Black et Scholes.

I Définitions

En reprenant les notations du modèle Black et Scholes et en notant P la prime de l'option, on a les dérivées suivantes :

1 Le delta

Définition 5.1 *Le Delta représente la variation de l'option lorsque le sous-jacent varie d'une unité monétaire.*

$$\Delta = \frac{\partial P}{\partial S}$$

Il fournit une information sur la variabilité de l'option mais aussi sur la probabilité d'exercer l'option.
Enfin, il nous donne le nombre d'actions à utiliser pour couvrir une option. Il suffira de multiplier ce Delta par la quotité pour obtenir la position globale de couverture.

Il est le premier des indicateurs pris en compte par le trader. Il traduit la sensibilité de l'option aux variations du prix du sous-jacent (de combien le prix de l'option varie-t-il quand le prix du sous-jacent varie de une unité). Il est noté δ ou Δ.

Le delta d'une option mesure la sensibilité de son prix par rapport à une variation donnée du cours du sous-jacent.
Pour un call, $1 \geq \delta \geq 0$. Pour le call, le delta est nécessairement positif (au pire nul) : une option d'achat vaut d'autant plus cher que le cours du sous-jacent est élevé. Par ailleurs, le delta du call est nécessairement compris entre 0 et 1. Prenons en effet le cas extrême d'un call à prix d'exercice nul : il vaut en tout temps C = S, et par conséquent $Delta = 1$. Si K n'est pas nul et qu'il est au contraire très élevé ($K > S$), le call sera moins sensible aux fluctuations du cours de l'action.

Pour un put, $-1 \leq \delta \leq 0$. Pour le put, le delta est nécessairement négatif (au pire nul) : une option de vente à un prix fixe vaut d'autant plus cher que le cours du sous-jascent est bas. Par un raisonnement symétrique au précédent on peut montrer que le delta du put est strictement compris entre -1 et 0.

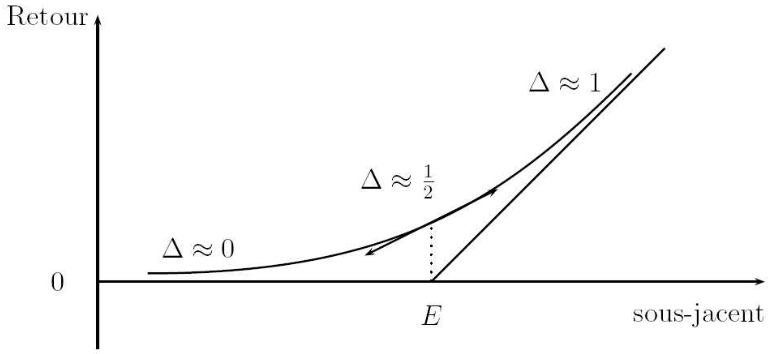
Dans le modèle de Black et Scholes, on peut calculer plus précisément le Δ.
Pour une option d'achat :

$$\Delta_C = \frac{\partial C}{\partial S} = C_S = \mathcal{N}(d_1)$$

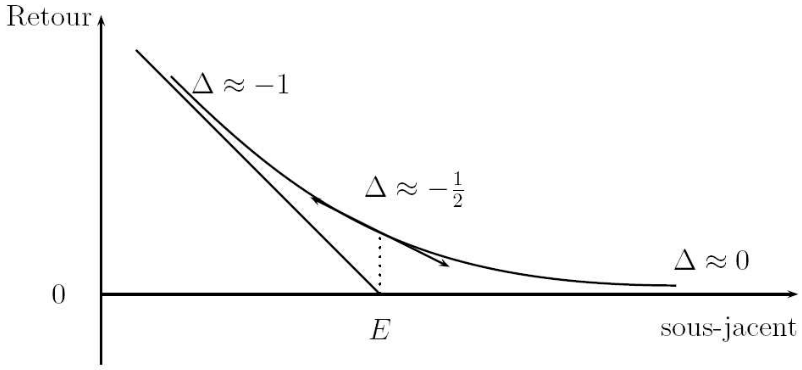
On retrouve bien $\Delta \in [0, 1]$.
Pour une option de vente :

$$\Delta_P = \frac{\partial P}{\partial S} = P_S = \mathcal{N}(d_1) - 1$$

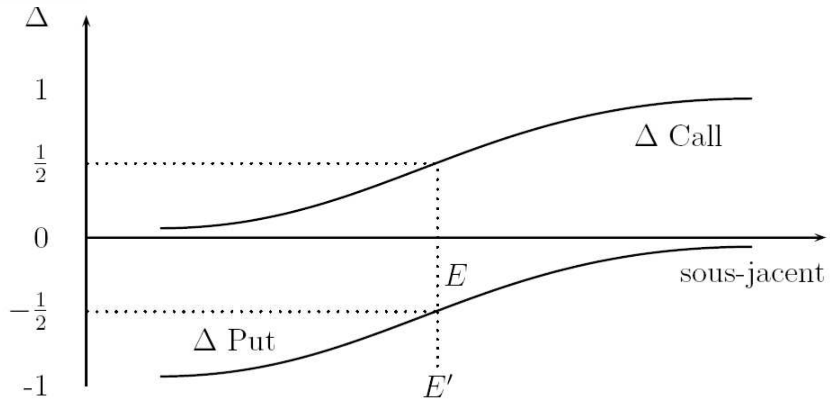
On retrouve bien $\Delta \in [-1, 0]$.



- L'influence du sous-jacent sur la valeur d'une option d'achat



– L'influence du sous-jacent sur la valeur d'une option de vente



- L'influence du sous-jacent sur le delta

Notons également que le delta global par rapport au sous-jacent S d'un portefeuille Π composé de n actifs différents (π_i la quantité d'actif i) s'écrit de la manière suivante en fonction des différents delta des actifs détenus :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial S} = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \Delta_i$$

Stratégie de couverture Pour couvrir sa position, le vendeur d'options d'achat (qui doit livrer des titres) adopte une position en Δ neutre (dite stratégie delta-neutre). Il constitue un portefeuille d'action. Sur un certain nombre d'actions il respecte toujours deux conditions :

– acheter Δ actions par call vendu ;
– gérer en continu (à cause de l'instabilité du Δ).

Exemple 1 : Soit $\Delta = 0,3$. Pour couvrir la vente d'une option d'achat, l'investisseur achète 0,3 actions par option vendue (pour une action). S'il vend 100 options d'achat (pour une quotité de 10). La position acheteur (longue) est de 300 actions et la position vendeur (courte) est de 100 options. Le delta global d'une position est défini par le gain ou la perte réalisé par cette position lorsque le cours de l'action augmente d'une unité monétaire. Le delta d'une action est égal à un. Dans l'exemple :

– Δ de la position courte pour 100 options : $0,3 \times 10 \times (-100) = -300$
– Δ de la position longue pour 300 actions : $1 \times 300 = 300$

Le Δ global vaut donc 0, d'où le nom de stratégie "Delta-neutre".

Couverture pour un acheteur d'option d'achat : Le procédé sera identique mais la position sera inversée : on sera en position vendeur d'actions par call acheté.
Couverture pour un acheteur d'option de vente : Une position longue sur un put est couverte par une position longue sur l'action (gestion en continu, les positions sur le sous-jacent sont ajustées régulièrement).
Couverture pour un vendeur d'option de vente : Une position courte sur un put est couverte par une position courte sur l'action (gestion en continu).

A partir du delta, on peut calculer le levier de mouvement, L :

$$L = \frac{\frac{\partial C}{C}}{\frac{\partial S}{S}} = \frac{\partial C}{\partial S}\frac{S}{C} = \Delta\frac{S}{C}$$

Ce levier correspond à l'élasticité du cours de l'option par rapport à l'élasticité du cours de l'action. Dans l'observation empirique, on a $L > 1$ car les options sont plus volatiles que les actions.

2 Le gamma

Définition 5.2 *Le Gamma représente la variation du delta d'une option d'achat ou d'une option de vente lorsque l'actif sous-jacent varie d'une unité monétaire.*

$$\gamma = \frac{\partial^2 P}{\partial S^2}$$

Il est identique pour l'option d'achat et l'option de vente (il suffit de dériver 2 fois la relation de parité Call-Put pour s'en apercevoir).

Le gamma représente la convexité du prix d'une option en fonction du cours du sous-jacent. Il indique si le prix de l'option a tendance à évoluer plus ou moins vite que le prix du sous-jacent. Par analogie, on peut comparer le delta à la vitesse et le gamma à l'accélération.

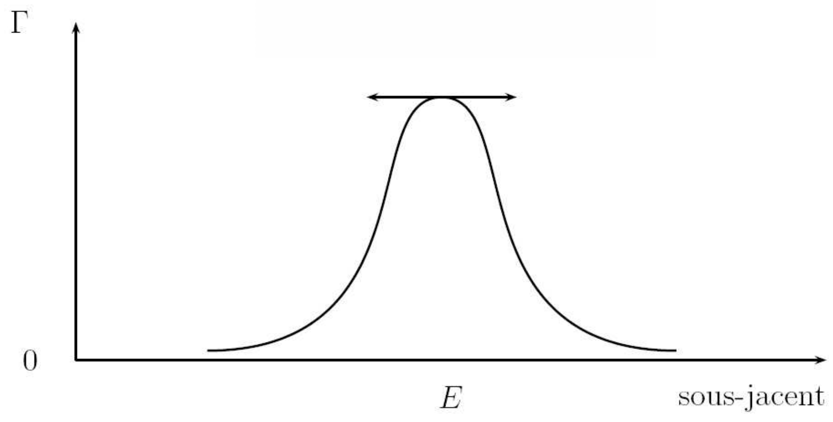
En pratique, celui-ci est très important, vu le comportement des acteurs en salle de marché : leur stratégie étant traditionnellement de se positionner en delta-neutre sur leur portefeuille (insensibilité au premier ordre), c'est donc principalement le gamma, et donc les fluctuations de grande amplitude du cours, qui vont être responsables de l'évolution d'un portefeuille.

Dans le modèle de Black et Scholes, il vaut :

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = C_{SS} = f(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} > 0$$

où f est la fonction de densité de la loi normale centrée réduite, qui s'écrit $f(x) = \frac{exp(-\frac{x^2}{2})}{\sqrt{2\pi}}$.

"at the money", le Δ est instable que ce soit pour l'option d'achat ou pour l'option de vente (Γ élevé). A l'inverse, loin de cette position, le Δ est stable (Γ faible). L'évolution du Γ en fonction du sous-jacent est illustré sur la figure suivante :



– *Le Gamma en fonction du sous-jacent*

γpeut être vu comme une estimation de la fréquence de rebalancement d'un portefeuille delta-neutre. En effet, un γ élevé implique une forte sensibilité du δ par rapport au prix du sous-jacent. Le trader qui adopte une couverture dynamique delta-neutre sera donc amené à modifier sa position sur le sous-jacent de façon très fréquente, ce qui peut-être prohibitif si les coûts de transaction sont élevés. À l'inverse, si le gamma de l'option est nul, le trader peut conserver une position fixe tout au long de la durée de vie de l'option.
La connaissance du Γ est très importante dans une stratégie delta-neutre. Si le Γ est élevé, les stratégies de rééquilibrage seront nombreuses parce qu'il y aura une forte instabilité de la couverture. Idéalement, la position globale devra avoir un delta nul mais également un Γ proche de 0.

3 Le Thêta Θ

Définition 5.3 *Le Thêta donne la sensibilité de l'option par rapport au temps.*

$$\theta = \frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial \tau}$$

La valeur d'une option diminue avec le temps (tous autres paramètres égaux par ailleurs). Le Thêta est donc toujours négatif.

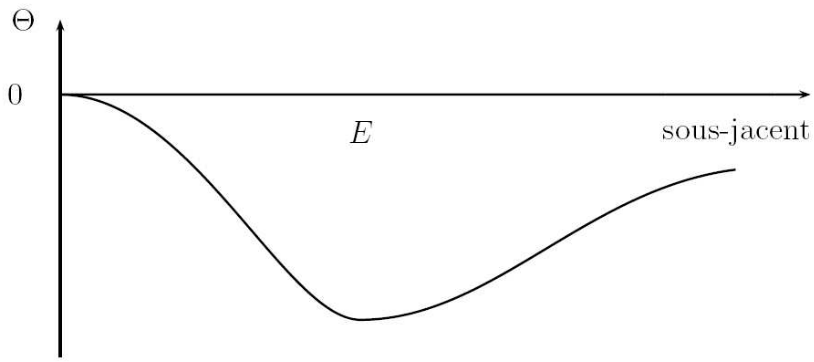
Le thêta est le coût du temps qui passe sur un portefeuille d'options. Il évalue combien le passage du temps influe sur la valeur d'une option. Une position longue d'options (gamma positive) sera thêta negative. Le trader devra veiller tous les jours à payer son thêta journalier en profitant de sa position longue en gamma. On préfèrera donc être long d'une option qui soit suffisamment volatile, ainsi en rebalancant la position, on pourra payer le temps qui passe en tradant le gamma.

Dans le modèle de Black et Scholes, pour une option d'achat, il vaut :

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = -\frac{\partial C}{\partial \tau} = -\left[\frac{S\sigma}{2\sqrt{\tau}} f(d_1) + rKe^{-r\tau}\mathcal{N}(d_2)\right] < 0$$

Pour l'option de vente :

$$\Theta = -P_\tau = -C_\tau + eKe^{-r\tau}$$



- *Le Thêta en fonction du sous-jacent*

Proposition 5.1 *Dans le modèle de Black et Scholes, dans le cas d'une option d'achat, une relation lie les grecques Δ, Γ et Θ :*

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \Gamma = rC$$

C'est l'EDP de Black-Scholes !

4 Le véga

Définition 5.4 *Le Véga, mesure de la sensibilité du prix de l'option par rapport aux variations de la volatilité du sous-jacent.*

$$\mathcal{V} = \frac{\partial P}{\partial \sigma}$$

Représenté par la lettre nu minuscule $\mathcal{V}$. Le nom « véga » n'est pas lui-même un nom de lettre grecque.

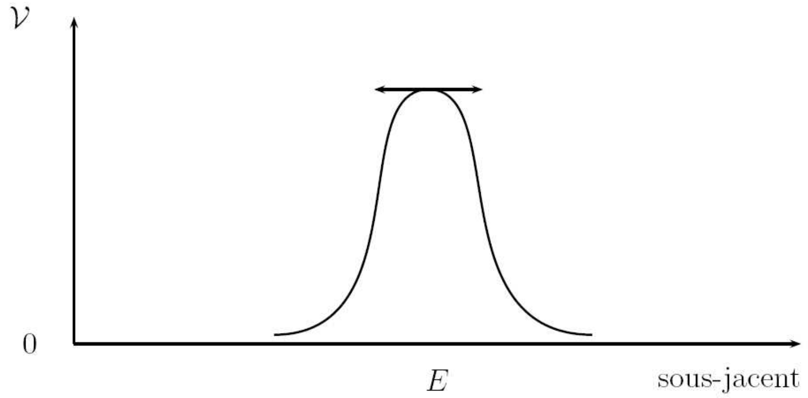
Comme $\mathcal{V}_{call} \geq 0 et \mathcal{V}_{put} \geq 0$, on dit qu'un acheteur de call ou de put sera long de véga, ou que son portefeuille sera véga positif, et qu'un vendeur sera court (short) de véga, ou véga négatif.

Contrairement au gamma et au thêta, le véga est une fonction croissante de la maturité. Ainsi une augmentation parallèle de la volatilité aura-t-elle plus d'impact sur les options dont la date d'échéance est éloignée que sur celles dont elle est proche. En effet, une volatilité forte augmente les chances d'exercer l'option et augmente donc son prix. Une position généralement appreciée des traders et des market makers est alors d'avoir une position globalement gamma positive (sensible aux grands mouvements de marché) et véga négative, qui consiste à acheter des options courtes et à vendre des options longues.

Pour l'option d'achat et l'option de vente, dans le modèle de Black et Scholes :

$$\mathcal{V} = \frac{\partial C}{\partial \sigma} = C_\sigma = S\sqrt{\tau} f(d_1) > 0$$

Dans le cas du mod‘ele de Black and Scholes cette quantité présente cependant peu d'intérêt car la volatilité σ est supposée constante. Il sera plus logique de calculer cette quantité dans le cas d'un modèle où la volatilité est supposée aléatoire (Hull et White, 1987).



L'évolution du Vega en fonction du sous-jacent à σ constant

5 Le Rhô

Définition 5.5 *Le Rho mesure la sensibilité du prix de l'option par rapport au taux d'intérêt continu r. C'est le taux de variation de la valeur du portefeuille en fonction du taux d'intérêt.*

$$\rho = \frac{\partial P}{\partial R}$$

Il permet de mesurer les risques des options liés à l'évolution des taux d'intérêt à court terme. Ce paramètre est peu utilisé car les taux d'intérêt sont supposés constants dans le modèle de Black et Scholes et car ils varient peu en pratique sur la durée de vie de l'option.
Dans le modèle de Black et Scholes, la valeur du Rho est donnée par :
Pour l'option d'achat :

$$\rho_C = \frac{\partial C}{\partial r} = \tau K e^{-r\tau} \mathcal{N}(d_2) > 0$$

Pour l'option de vente :

$$\rho_P = \frac{\partial P}{\partial r} = -\tau K e^{-r\tau} \mathcal{N}(-d_2) < 0$$

6 Sensibilité par rapport au prox d'exercice

Le prix d'une option d'achat est une fonction décroissante du prix d'exercice et le prix d'une option de vente est une fonction croissante du prix d'exercice. Pour l'option d'achat (BS) :

$$\frac{\partial C}{\partial K} = C_K = -e^{-r\tau} \mathcal{N}(d_2) < 0$$

Pour l'option de vente :

$$P_K = C_K + e^{-r\tau} > 0$$

II Récapitulatif

Lettre grecque	Définition	valeur pour un call dans le modèle de B& S
Δ	$\frac{\partial C}{\partial S}$	$\mathcal{N}(d_1) \in [0,1]$
Γ	$\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$	$f(d_1)\frac{1}{S\sigma\sqrt{\tau}} > 0$
Θ	$\frac{\partial P}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial \tau}$	$-\left[\frac{S\sigma}{2\sqrt{\tau}} f(d_1) + rKe^{-r\tau}\mathcal{N}(d_2)\right] < 0$
$\mathcal{V}$	$\frac{\partial C}{\partial \sigma}$	$C_\sigma = S\sqrt{\tau} f(d_1) > 0$
ρ	$\frac{\partial C}{\partial r}$	$\tau K e^{-r\tau}\mathcal{N}(d_2) > 0$

III Utilisation

Les grecques sont avant tout des indicateurs des risques pris par celui qui a acheté ou vendu des options. Elles détaillent ces risques par origine : le prix du sous-jacent, la volatilité implicite, le temps et le taux d'intérêt.

Elles vont donc permettre de gérer chacun de ces paramètres finement, que ce soit au niveau du trading, ou au niveau des services de contrôle des risques dans les structures où ils existent.

Elles sont des outils de gestion pour le trader.
La stratégie de gestion d'options la plus courante est appelée gestion en delta neutre. Elle consiste à éliminer à chaque instant le risque lié au prix du sous-jacent.

Prenons l'exemple d'un trader qui vend à l'instant t_0 n calls identiques, de delta δ_0. Le delta de son portefeuille est alors de $n \times \delta_0$. Voulant immuniser son portefeuille contre les variations de prix du sous-jacent, il va annuler ce delta. La solution en général la plus simple est alors de vendre (car dans le cas d'un call, $\delta_{call} \geq 0$) une quantité $n \times \delta_0$ de sous-jacent. En effet, par définition, le delta du sous-jacent est égal à 1.

Seulement, au cours de la vie de cette option, son delta va évoluer, notamment parce que le prix du sous-jacent aura changé. À l'instant t_1, le delta δ_1 sera différent de δ_0 et donc la couverture du portefeuille ne sera plus optimale : le trader devra ajuster celle-ci en rachetant ou en vendant un peu plus de sous-jacent.

Prendre en compte le gamma permet d'optimiser cette gestion. Lorsque le gamma est positif, le delta augmente quand le prix du sous-jacent monte. Situation confortable pour l'opérateur qui doit vendre du sous-jacent lors des hausses marché, et en racheter lors des baisses. Ces allers-retours sur le sous-jacent sont utilisés pour regagner le coût du passage du temps (on dit souvent : payer le thêta). En revanche, si le gamma est négatif, il doit mener les opérations inverses, et les allers-retours doivent perdre moins que ce que fait gagner le thêta.

En outre, plus le gamma est important, plus les interventions pour neutraliser le delta seront fréquentes, ce qui peut poser un problème dans un environnement où les coûts de transaction sont élevés. À l'inverse, si le gamma de l'option est nul, le trader peut conserver une position fixe tout au long de la durée de vie de l'option.

Une gestion en delta neutre peut être un moyen de parier sur la volatilité : le portefeuille étant théoriquement immunisé contre les variations de prix du sous-jacent, sa valeur va principalement évolué en fonction de la volatilité implicite.

IV Exercices

Exemple : Calculez les cinq paramètres (lettres grecques) pour le call et le put avec les données suivantes : $K = 100, S = 100, \tau = 6$ mois, $\sigma = 17\%, R = 10\%$.

Exemple : Listez les six facteurs qui influencent le prix

1. d'une option d'achat
2. d'une option de vente.

Précisez le sens de ces variations.

Exemple : Utilisez la relation de parité call-put pour déduire la relation entre (pour une action sans paiement de dividende) :

1. le Delta d'une option européenne d'achat et le Delta d'une option européenne de vente ;
2. le gamma d'une option européenne d'achat et le gamma d'une option européenne de vente.

Exemple : Le Delta d'une option d'achat est de 0,37. Déterminer les stratégies en Delta-neutre qui couvrent (quotité égale à 1) :

1. la vente de 1500 options d'achat ;
2. l'achat de 2000 options d'achat ;
3. la vente de 800 options de vente (même sous-jacent sans dividende, même échéance et même prix d'exercice).

Exemple : Déterminez pour quelle valeur du sous-jacent on a $\Delta = 1/2$.

Exemple : Soit les données : $K = 50, \tau = 5$ semaines, $\sigma = 20\%$, $r = 5.13\%$.

1. Ecrivez les gains ou pertes réalisés sur le sous-jacent.

Semaine	Prix	Delta	Prix du Call	Résultats
0	51,80			
1	52,80			
2	54,83			
3	54,62			
4	55,82			
5	57,25			

2. Le gestionnaire a reçu la prime et place (ou emprunte) l'écart entre la prime reçue et le montant des placements réalisés sur le sous-jacent soit $(C - \Delta S_t)$. Ecrivez les gains ou pertes réalisés sur ce placement (ou emprunt).
3. La couverture est elle satisfaisante ?

Chapitre 6

Extensions des modèles de base

I Evaluation des options de change : modèle de Garman-Kohlhagen

Pour l'évaluation des options sur devises (ou options de change), le modèle le plus connu est le modèle de Garman-Kohlagen. C'est une simple adaptation au marché des devises du modèle de Black et Scholes

Nous allons étudier un problème tiré du modèle de Garman et Kohlhagen, étudier le modèle, puis on se propose d'évaluer et de couvrir un call européen sur un dollar, dans ce modèle, par une démarche analogue à celle du modèle de Black et Scholes.

1 Enoncé du problème

Pour fixer les idées, intéressons-nous à des options "dollar contre euro". Par exemple, un cal européen, d'échéance T sur un dollar, au prix d'exercice K, est le droit d'acheter, à la date T un dollar pour K euros.

1. Notons S_t le cours du dollar à l'instant t, c'est-à-dire le nombre d'euros nécessaires à l'achat d'un dollar. On suppose que l'évolution de S_t est modélisée par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dB_t$$

Où $(B_t)_{t\in[0,T]}$ est un mouvement Brownien sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et où μ et σ sont des réels donnés.

   (a) Décrire l'évolution du cours du dollar en avenir certain, c'est-à-dire en supposant $\sigma = 0$

   (b) On suppose dorénavant que $\sigma > 0$. Expliciter S_t en fonction de S_0, t et B_t.

   (c) Calculer l'espérance $\mathbb{E}(S_t)$. En déduire que si $\mu > 0$, S_t ne peut pas être une martingale.

   (d) Montrer que dans ce cas (si $\mu > 0$), S_t est une sous-martingale.

(e) Soit $U_t = 1/S_t$ le taux de conversion des euros en dollars. Montrer que U_t vérifie l'EDS suivante :

$$\frac{dU_t}{U_t} = (\sigma^2 - \mu)dt - \sigma dB_t$$

(f) En déduire que si $0 < \mu < \sigma^2$, les processus S_t et U_t sont l'un et l'autre des sous-martingales. En quoi cela peut-il sembler paradoxal ?

2. On se propose d'évaluer et de couvrir un call européen d'échéance T sur un dollar au prix d'exercice K, par une démarche analogue à celle du modèle de Black et Scholes. Le vendeur de l'option, à partir de la richesse initiale que représente la prime, va construire une stratégie, définissant à chaque instant t un portefeuille contenant H_t^e euros et H_t^d dollars, de façons à produire, à la date T, une richesse égale (en euros) à $(S_T - K)_+$. A la date t, la valeur en euros de ce portefeuille de couverture est évidemment :

$$V_t = H_t^e + H_t^d S_t$$

On supposera que les euros sont placés (ou empruntés) au taux r^e, et les dollars au taux r^d.

(a) Expliquer pourquoi les deux processus adaptés (H_t^e) et (H_t^d), qui définissent la stratégie autofinancée, vérifient la relation suivante :

$$dV_t = r^e H_t^e dt + r^d H_t^d S_t dt + H_t^d dS_t$$

(b) En déduire que l'on a aussi :

$$dV_t = \left[r^e V_t - (r^e - r^d) H_t^d S_t\right] dt + H_t^d dS_t$$

(c) En supposant que la valeur V_t du portefeuille est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de t et S_t, c'est-à-dire en supposant que $V_t = v(t, S_t)$, calculer dV_t.

(d) En identifiant avec l'équation de la question (b), montrer que

$$H_t^d = \frac{\partial v}{\partial S}(t, S_t)$$

et que $v(t, S)$ est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial v}{\partial t}(t,S) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 v}{\partial S^2}(t,S) + (r^e - r^d) S \frac{\partial v}{\partial S}(t,S) - r^e v(t,S) = 0$$

(e) En déduire la valeur $v(0, S_0)$ du call en fonction des constantes K, T, r^e, r^d et σ.

Formule d'évaluation correspondante :

$$\begin{aligned} Call(t, S_t, T, K) &= e^{-r^d(T-t)} S_t N(d_1) - e^{-r^e(T-t)} K N(d_2) \\ Put(t, S_t, T, K) &= e^{-r^e(T-t)} K N(-d_2) - e^{-r^d(T-t)} S_t N(-d_1) \end{aligned}$$

où

$$d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\left(\frac{S_t}{K} e^{(r^e - r^d)(T-t)}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

Cette formule est même adaptable si les taux domestiques et étrangers varient en fonction du temps :

$$\begin{aligned} Call(t, S_t, T, K) &= e^{-\int_t^T r_s^d ds} S_t N(d_1) - e^{-\int_t^T r_s^e ds} K N(d_2) \\ Put(t, S_t, T, K) &= e^{-\int_t^T r_s^e ds} K N(-d_2) - e^{-\int_t^T r_s^d ds} S_t N(-d_1) \end{aligned}$$

où

$$d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\left(\frac{S_t}{K} e^{\int_t^T (r_s^e - r_s^d) ds}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

Exercice : calculer le delta de l'option dans le modèle de Garman et Kohlhagen.

$$Delta = e^{\int_0^T r_t^d dt} N(d_1), \ d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T}} \log\left(\frac{S_0}{K} e^{\int_0^T (r^e - r^d) dt}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T}$$

II Option sur un actif versant des dividendes : Modèle de Merton

Pour les options sur des indices (tels que le FTSE 100 ou le CAC 40) où chacune des entreprises entrant dans son calcul peut payer un dividende une ou deux fois par an, il est raisonnable de supposer que les dividendes sont payés sans interruption. Le taux de dividendes est noté q, de manière que le paiement des dividendes sur une courte période de temps $[t, t + dt]$ est alors noté

$$q S_t dt$$

Pour résoudre ce problème, il suffit de prendre le même modèle $r^e = r$ et $r^d = q$ le taux de dividende, et on obtient les mêmes résultats avec un raisonnement identique.

formule de BS correspondante :

$$\begin{aligned} Call(t, S_t, T, K) &= e^{-q(T-t)} S_t N(d_1) - e^{-r(T-t)} K N(d_2) \\ Put(t, S_t, T, K) &= e^{-r(T-t)} K N(-d_2) - e^{-q(T-t)} S_t N(-d_1) \end{aligned}$$

où maintenant :

$$F = e^{(r-q)(T-t)} S_t$$

est le prix modifié qui apparaît dans les termes d_1 and d_2.
Autrement dit :

$$d_{1,2} = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \log\left(\frac{S_t}{K} e^{(r-q)(T-t)}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$$

on a remplacé S_t par $S_t e^{-q(T-t)}$ partout dans la formule.

- Options sur contrats à terme : modèle de Black (1976)

Finalement, généralisation de la formule de Black et Scholes :

$$
\begin{aligned}
C &= Se^{(b-r)\tau}N(d_1) - Ke^{-r\tau}N(d_2) \\
P &= Ke^{-r\tau}N(d_2) - Se^{(b-r)\tau}N(d_1) \\
d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}}\left[\ln\frac{S}{K} + \left(b + \frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right] \\
d_2 &= d_1 - \sigma\sqrt{\tau}
\end{aligned}
$$

Avec

$$
\begin{aligned}
b &= r \text{ Black Scholes Model (1973)} \\
b &= r - q \text{ Merton stock option Model (1973)} \\
&= \text{ with continuous dividend yield q} \\
b &= 0 \text{ Black futures option Model (1976)} \\
b &= r - r_f \text{ Garman and Kohlhagen currency options Model (1983)}
\end{aligned}
$$

- Options américaines
- Autres (options sur énergie, dérivées climatiques...)

Lamberton-Lapeyre ?

Chapitre 7

Glossaire Financier

AOA = no free lunch, no arbitrage
arbitrage = free lunch, arbitrage
barrière activante = knock in
barrière désactivante = knock out
couverture = hedging
évaluation = pricing
flux financier = cash flow
option sur taux de change = currency option
portefeuille de réplication = replicating portfolio
profit, gain = payoff
répliquer = to replicate
structure par terme des taux = yield curve
vente à découvert = short selling

Bibliographie

[1] AUROS, J.C., *Finance - Options et obligations convertibles*

[2] AUGROS, J.C. et NAVATTE, *Bourse : les options négociables*

[3] ELIE, R., cours de *Calcul stochastique appliqué à la finance* (ENSAE)

[4] HARRISON, J., PLISKA, S., *Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading*, Stochastic Processes and their Applications, 1981, vol. 11, no 3, pages 215-260

[5] HULL, J., *Options, Futures et autres Actifs Dérivés*

[6] LAMBERTON, D. et LAPEYRE, B. *Introduction au calcul stochastique apliqué à la finance*

[7] PONCET, P., PORTAIT, R., HAYAT, S., *Mathématiques financières. Evaluation des actifs et analyse du risque*