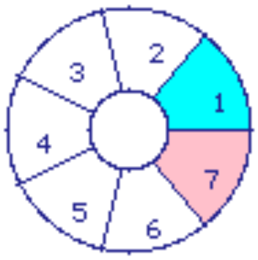
ISFA 2° année
Processus Stochastiques
Examen du 10 janvier 2007
Durée : 3 heures

Questions de cours

1. Énoncez le théorème central limite.
2. Énoncez la formule de Itô pour $f(X_t, Y_t, U_t)$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^2$, X_t et Y_t sont deux martingales et U_t est à variations bornées.

Exercice 1 Jeu de l'oie

Un jeu de l'oie simple est constitué de 7 cases numérotées de 1 à 7 disposées comme ci-dessous. La case 1 est la case de départ et la case 7 est la case d'arrivée.



Pour faire avancer le pion, on lance un dé à 4 faces numérotées de 1 à 4 et on avance le pion d'un nombre de cases égal au nombre obtenu avec le dé. Le joueur gagne lorsque le pion tombe exactement sur la case 7. Sinon le pion refait un tour : par exemple, si le pion se trouve sur la case 6 et si le dé tombe sur 2, le pion va à la case 1.
Les positions successives du pion définissent une chaîne de Markov sur les entiers de 1 à 7. On supposera que lorsque le joueur gagne, il refait une partie en démarrant de la case 1.

1. Donner la matrice de transition de cette chaîne de Markov. Quelle est la probabilité initiale ? Quel est l'avantage de faire rejouer le joueur lorsqu'il termine une partie ?
2. Quel est la nature des états ? la période de la chaîne ?
3. Existe-t-il une mesure stationnaire ? Si oui la calculer.
4. Quel est la durée moyenne d'une partie ?
5. Et si on rajoute une règle bien connue du jeu de l'oie du genre "quand on est sur la case 5 on recule de 2 cases". Est-ce toujours une chaîne de Markov ? Qu'est-ce que ça change sur la matrice ? Sur la proba stationnaire ? Sur la durée de vie du jeu ?

Exercice 2 Optimisation de richesse

Sur le marché financier, on trouve un actif risqué et un actif sans risque. Soit $(S_t, t \geq 0)$ le prix de l'actif risqué. On suppose que

$$dS_t = S_t(\mu_t dt + \sigma dB_t),$$

où $(B_t)_{t\geq 0}$ est un mouvement Brownien sous la probabilité P et sa filtration naturelle $\mathcal{F}_t$.
L'actif sans risque vérifie

$$dS_0(t) = S_0(t) r_t dt.$$

Les processus μ_t, r_t sont $\mathcal{F}_t$-adaptés bornés, σ est une constante non nulle.

1. Montrer que $S_t \exp\left(-\int_0^t \mu_s ds\right)$ est une P-martingale
2. On pose $\theta_t = \frac{\mu_t - r_t}{\sigma}$.
   (a) Vérifier que $L_t = \exp\left(-\theta_t B_t - \frac{1}{2}\theta_t^2 t\right)$ est une P-martingale. Quelle est sa variation quadratique ? Calculer également $< L, B >_t$.
   (b) En justifiant votre réponse, déterminer une mesure de probabilité Q telle que, sous Q le processus $\tilde{B}_t = B_t + \int_0^t \theta_s ds$ soit une martingale.*(En justifiant ce choix, il pourra être utile de faire intervenir le processus L_t pour expliciter le changement de probabilité.)*
   (c) Vérifier que $(\tilde{B}_t)$ est un mouvement brownien.
   N.B. : l'expression explicite de Q n'est pas utilisée dans la suite du problème.
   (d) Ecrire l'équation vérifiée par S_t en utilisant $\tilde{B}_t$.
3. Un agent de richesse initiale x investit sa richesse X_t à l'instant t suivant l'actif sans risque et l'actif risqué de prix S_t suivant la répartition à l'instant t :

$$X_t = n_0(t) S_0(t) + n_1(t) S_t.$$

   On suppose

$$dX_t = n_0(t) dS_0(t) + n_1(t) dS_t.$$

   C'est l'hypothèse standard dite d'autofinancement (aucun flux d'argent ne sort du portefeuille).
   (a) Montrer que $dX_t = r_t X_t dt + n_1(t)(dS_t - S_t r_t dt)$.
   (b) On note $\pi_t = n_1(t) S_t$ et $R_t = \exp(-\int_0^t r_s ds)$.
   Ecrire dX_t en fonction de π_t, r_t, X_t et $\tilde{B}_t$
   (c) Montrer que, sous Q, le processus $X_t R_t$ est une martingale.
   (d) Soit $T > 0$ fixé et $\xi = X_T$. Ecrire X_t sous forme d'une espérance conditionnelle faisant intervenir ξ et le processus R, en précisant la probabilité utilisée.
4. On se donne maintenant un processus $(c_t)_{t\geq 0}$ à valeurs positives adapté et un processus $(\pi_t)_{t\geq 0}$ de carré intégrable $\mathcal{F}_t$-adapté.
   Soit $(X_t)_{t\geq 0}$ un processus tel que

$$dX_t = r_t X_t dt + \pi_t(dB_t + \theta_t dt) - c_t dt$$

   (a) Montrer que, sous Q, le processus $Z_t = X_t R_t + \int_0^t R_s c_s ds$ est une martingale. *(On pourra écrire Z_t comme fonction de X_t et t et appliquer la formule d'Itô)*
   (b) En déduire en justifiant la réponse que $X_t R_t = E_Q\left(X_T R_T + \int_t^T R_s c_s ds \middle| \mathcal{F}_t\right)$
   (c) Ecrire cette relation sous P.

Exercice 3 On se donne un processus de Poisson homogène (N_t) d'intensité $\mathbf{E}(N_t) = \lambda t$. On notera $(M_t)_{t\geq 0} = (N_t - \lambda t)_{t\geq 0}$.

1. Rappeler la définition d'un processus de Poisson homogène.
2. Comment le réalise-t-on ?
3. Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale. Pour quelle filtration ?
4. Montrer également que $(M_t^2 - \lambda t)$ est une martingale. Que cela signifie-t-il pour (M_t) ? et pour (N_t) ?
5. On fixe $a \in \mathrm{N}^*$ et $k > 0$ et on note $\tau = \inf\{t \geq 0, N_t \geq a\}$ puis $\tau_k = \min(\tau, k)$. On admettra que τ est un temps d'arrêt. Justifier l'application de théorème d'arrêt de Doob à la martingale M entre les instants 0 et τ_k. Écrire l'égalité obtenue.
6. En déduire $\mathbf{E}(\tau)$.
7. Calculer de la même manière $\mathbf{E}(\tau^2)$ puis $\mathbf{var}(\tau)$.
8. Que faut-il modifier si l'on veut calculer $\mathbf{E}(\sigma)$ où $\sigma = \inf\{t \geq 0, N_t \geq at + b\}$, où a et b sont des réels positifs ?