Théorie des Valeurs Extrêmes - TD1

ISFA3, ANNEE

Exercice 1:

Soient $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de loi uniforme sur $[-1, 0]$ et $M_n(X) = \max(X_1, ..., X_n)$.

1. Donner les coefficients a_n et b_n tels que, quand $n \to \infty$,

$$\Pr\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leq x\right) \to \Psi_1(x).$$

Soient $Y_1, ..., Y_n$ une suite de variables aléatoires IID de loi exponentielle unitaire ($\Pr(Y_i > y) = e^{-y}$, $y > 0$) et $m_n = \min(Y_1, ..., Y_n)$.

2. En remarquant que

$$\min(Y_1, ..., Y_n) = -\max(-Y_1, ..., -Y_n),$$

trouver des coefficients c_n et d_n, et une loi G tels que, quand $n \to \infty$,

$$\Pr\left(\frac{-m_n - d_n}{c_n} \leq x\right) \to G(x).$$

Exercice 2:

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution F et soit $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$. On note la statistique d'ordre la manière suivante

$$X_{(n)} \leq X_{(n-1)} \leq \ldots \leq X_{(1)}$$

et $B_n(x) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{I}_{\{X_i > x\}}$.

1. Montrer que $X_{(k)} \leq x$ si et seulement si $B_n(x) < k$.
2. Donner la loi de $B_n(x)$. En déduire que

$$P\left(X_{(k)} \leq x\right) = \sum_{r=0}^{k-1} C_n^r \left(F(x)\right)^{n-r} \left(1 - F(x)\right)^r.$$

3. Calculer la transformée de Laplace de $B_n(x)$:

$$\varphi_n(t, x) = \mathbb{E}\left(\exp\left(tB_n(x)\right)\right).$$

4. Montrer que s'il existe une suite (u_n) telle que $\lim_{n\to\infty} n \Pr(X_i > u_n) = \tau$, alors

$$\lim_{n\to\infty} \ln \varphi_n(t, u_n) = \tau(e^t - 1).$$

5. Donner la transformée de Laplace d'une loi de Poisson de paramètre τ (Rappel: si N suit une loi de Poisson de paramètre τ, alors $P(N=n) = e^{-\tau}\tau^n/n!$).

6. Déduire des questions précédentes l'expression analytique de la loi limite de $X_{(2)}$ si l'on peut trouver deux suites (a_n) et (b_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{X_{(1)}-b_n}{a_n} \leq x\right) = \exp\left(-\exp\left(-x\right)\right).$$

Exercice 3:

Soit $X_1,...,X_n$ une suite de variables aléatoires IID de fonction de distribution F et soit $M_n = \max(X_1,...,X_n)$.

1. Soit $x^F = \sup\{x : F(x) < 1\}$. Quel est l'intérêt de definir cette valeur? Montrer que $M_n \to x^F$ en probabilité quand $n \to \infty$.

2. Soit $\bar{F} = 1 - F$. Montrer que, pour deux suites (a_n) et (b_n), et une fonction de répartition H, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{ll} 1) & \lim_{n\to\infty} \Pr\left(M_n \leq a_n x + b_n\right) = H(x), \\ 2) & \lim_{n\to\infty} n\bar{F}\left(a_n x + b_n\right) = -\ln H(x). \end{array}$$

On suppose que F est deux fois dérivable. On définit l'inverse de la fonction de hasard par

$$h(x) = \frac{1-F(x)}{F'(x)}.$$

On sait que si $h'(x) \to \xi \in \mathbb{R}$ quand $x \to x^F$, alors

$$n\bar{F}\left(a_n x + b_n\right) \to (1+\xi x)_+^{-\frac{1}{\xi}} \text{ quand } n \to \infty.$$

avec $b_n = F^{-1}(1-1/n)$ (F^{-1} est la fonction réciproque de F) et $a_n = h(b_n)$.

On définit alors

$$U(t) = F^{-1}(1-1/t).$$

3. Montrer que

$$\frac{1}{1-F(U(t))} = t.$$

4. Montrer que, pour deux suites (a_n) et (b_n), et une fonction de répartition H qui admet une réciproque H^{-1}, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{ll} 1) & \lim_{n\to\infty} \Pr\left(M_n \leq a_n x + b_n\right) = H(x), \\ 2) & \lim_{n\to\infty} (U(nx) - b_n)/a_n = H^{-1}\left(e^{-1/x}\right). \end{array}$$

5. Montrer que

$$\begin{aligned} U'(t) &= \frac{[1-F(U(t))]^2}{F'(U(t))} \\ \frac{tU''(t)}{U'(t)} &= -2 - \frac{F''(U(t))\,[1-F(U(t))]}{[F'(U(t))]^2} \end{aligned}$$

En déduire que les trois conditions suivantes sont équivalentes

1) $\lim_{x \to x^F} h'(x) = \xi$,
2) $\lim_{x \to x^F} (1 - F(x)) F''(x) / (F'(x))^2 = -\xi - 1$,
3) $\lim_{t \to \infty} tU''(t)/U'(t) = \xi - 1$.

Exercice 4:

Supposons que Y a une distribution Pareto Généralisée GPD(σ, ξ) $(\xi \neq 0)$ telle que

$$P(Y < y) = 1 - \left[1 + \xi \left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}.$$

1. Donner le domaine de définition de Y, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs de réalisation possibles de la variable aléatoire Y.

2. De quelle loi connue s'agit-il lorsque $\xi = -1$? Est-il possible de définir une loi si $\xi = 0$?

3. Donner la densité de cette loi. Peut-on trouver des expressions analytiques pour l'estimateur du maximum de vraisemblance de (σ, ξ).

4. Montrer que si $U \sim U[0, 1]$, alors

$$Y \sim \sigma \left(\frac{U^{-\xi} - 1}{\xi}\right).$$

Donner une procédure pour simuler une loi GPD(σ, ξ).

5. Donner l'expression de la médiane, de la moyenne $(\xi < 1)$ et de la variance $(\xi < 1/2)$ d'une loi GPD(σ, ξ). Donner un estimateur simple de ξ basé sur les deux premiers moments lorsque $\xi < 1/2$.

- Exercice 1

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{U}([-1,0])$ et $M_n(X) = \max(X_1, \dots, X_n)$

1. Donner a_n, b_n tq $\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \Psi_1(x)$

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \mathbb{P}(M_n \leqslant a_n x + b_n)$$
$$= [F(a_n x + b_n)]^n$$

$$X \sim \mathcal{U}([a,b]) \Rightarrow F(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) = \left[\frac{a_n x + b_n - (-1)}{0-(-1)}\right]^n = [1 + a_n x + b_n]^n = \exp\{n \ln\{1 + a_n x + b_n$$

Weibull : $\Psi_\alpha(x) = \begin{cases} \exp\{-(-x)^\alpha\} & x \leqslant 0 \\ 1 & x > 0 \end{cases}$

$$\Psi_1(x) = \exp\{-(-x)^1\} = \exp\{x\}$$

$e^u \underset{u\to 0}{\sim} 1+u \qquad \ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$

On choisit $a_n = \frac{1}{n}$ et $b_n = 0$

$$\mathbb{P}\left(\frac{M_n - b_n}{a_n} \leqslant x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\{\cancel{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n}} x\} = \exp\{x\} = \Psi_1(x)$$

$Y_1, \dots, Y_n \overset{iid}{\sim} \mathcal{E}(1)$ et $m_n = \min(Y_1, \dots, Y_n)$

$\mathbb{P}(Y_i > y) = e^{-y}, \ y > 0$

2. En remarquant que $\min(Y_1, \dots, Y_n) = -\max(-Y_1, \dots, -Y_n)$
trouver c_n, d_n, G tq $\mathbb{P}\left(\frac{-m_n - d_n}{c_n} \leq x\right) \xrightarrow[n \to \infty]{} G(x)$

$$\mathbb{P}\left(\frac{-m_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = \mathbb{P}(-m_n \leq c_n \cdot x + d_n)$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(-m_n \leq x) &= \mathbb{P}(-\min(Y_1, \dots, Y_n) \leq x) \\ &= \mathbb{P}(+\max(-Y_1, \dots, -Y_n) \leq x) \\ &= [F_{-Y}(x)]^n\end{aligned}$$

$$F_{-Y}(y) = \mathbb{P}(-Y \leq y) = \mathbb{P}(Y \geq -y) = e^{-(-y)} = e^{y}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(-m_n \leq x) = [e^{x}]^n = e^{nx}$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}\left(\frac{-m_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = \exp\{n(c_n x + d_n)\}$$

On choisit $c_n = \frac{1}{n}$ et $d_n = 0$:

$$\mathbb{P}\left(-\frac{m_n - d_n}{c_n} \leq x\right) = \exp\left\{n\left(\frac{1}{n} x + 0\right)\right\} = \exp\{x\} = \Psi_1(x) \equiv G(x)$$

- Exercice 2

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} F$ et $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$
$X_{(n)} \leqslant X_{(n-1)} \leqslant \dots \leqslant X_{(1)}$ et $B_n(x) = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > x\}$

1. Mq $X_{(k)} \leqslant x$ ssi $B_n(x) < k$

$$\begin{aligned}
\{X_{(k)} \leqslant x\} &= \{X_{(n)} \leqslant x, \dots, X_{(k)} \leqslant x\} \\
&= \{X_{(n)} \leqslant x\} \cap \dots \cap \{X_{(k)} \leqslant x\} \\
&= \prod_{i=k}^{n} \{X_{(i)} \leqslant x\} \\
&= \{\textstyle\prod_{i=k}^n \mathbb{1}\{X_{(i)} \leqslant x\} = 1\} \\
&= \{\textstyle\sum_{i=k}^n \mathbb{1}\{X_{(i)} \leqslant x\} = n-k\} \\
&= \{\textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_{(i)} \leqslant x\} > n-k\} \\
&= \{\textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i \leqslant x\} > n-k\} \\
&= \{\textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i < x\} < \cancel{n} - (\cancel{n} - k) = k\} \\
&= \{B_n(x) < k\}
\end{aligned}$$

2. Donner la loi de $B_n(x)$
En déduire que $\mathbb{P}(X_{(k)} \leqslant x) = \sum_{r=0}^{k-1} C_n^r (F(x))^{n-r} (1-F(x))^r$

$B_n(x) \sim Bin(p = \mathbb{P}(X_i > x) = 1 - F(x), n)$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \mathbb{P}(X_{(k)} \leqslant x) &= \mathbb{P}(B_n(x) < k) \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \mathbb{P}(B_n(x) = r) \\
&= \sum_{r=0}^{k-1} \underbrace{\binom{n}{r}}_{C_n^r} [1 - F(x)]^r [F(x)]^{n-r}
\end{aligned}$$

3. Calculer la transformée de Laplace de $B_n(x)$:
$\varphi_n(t, x) = \mathbb{E}[\exp\{t B_n(x)\}]$

$$\begin{aligned}
\varphi_n(t, x) &= \mathbb{E}[\exp\{t B_n(x)\}] \\
&= \mathbb{E}[\exp\{t \textstyle\sum_{i=1}^n \mathbb{1}\{X_i > x\}\}] \\
&= \mathbb{E}[\textstyle\prod_{i=1}^n \exp\{t \cdot \mathbb{1}\{X_i > x\}\}] \\
&\overset{iid}{=} \textstyle\prod_{i=1}^n \mathbb{E}[\exp\{t \cdot \mathbb{1}\{X_i > x\}\}] \\
&= [\mathbb{E}[\exp\{t \cdot \mathbb{1}\{X_i > x\}\}]]^n \\
&= [e^{t \cdot 0} \times \mathbb{P}(X_i \leqslant x) + e^{t \cdot 1} \mathbb{P}(X_i > x)]^n \\
&= [F(x) + e^t(1 - F(x))]^n \\
&= [e^t + F(x)(1 - e^t)]^n
\end{aligned}$$

4. Mq si $\exists (u_n)$ tq $n\mathbb{P}(X_i > u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau$, alors

$$\ln \varphi_n(t, u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau(e^t - 1)$$

$$\begin{aligned}
\ln \varphi_n(t, u_n) &= \ln \{[e^t + F(u_n)(1-e^t)]^n\} \\
&= \ln \{n\,[e^t + (1-\overline{F}(u_n))(1-e^t)]\} \\
&= \ln \{n\,[1 + \overline{F}(u_n)(e^t - 1)]\} \\
&\xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ (u_n \to x^F)}]{} n\,\overline{F}(u_n)(e^t - 1) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau(e^t - 1)
\end{aligned}$$

5. Donner la transformeé de Laplace d'une loi de Poisson de paramètre τ. $N \sim \mathcal{P}(\tau) \Rightarrow \mathbb{P}(N=n) = e^{-\tau}\tau^n/n!$.

$$\begin{aligned}
\varphi_N(t) &= \mathbb{E}[e^{tN}] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{t\cdot n}\,\mathbb{P}(N=n) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{t\cdot n}\cdot e^{-\tau}\,\tau^n/n! \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\tau}\,(e^t\cdot\tau)^n/n! \\
&= \frac{e^{-\tau}}{e^{-e^t\cdot\tau}} \underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-e^t\cdot\tau}\,(e^t\cdot\tau)^n/n!}_{1} \\
&= e^{-\tau(1-e^t)} = e^{\tau(e^t - 1)}
\end{aligned}$$

6. Déduire des questions précédentes l'expression analytique de la loi limite de $X_{(2)}$ si on peut trouver $(a_n), (b_n)$ tq

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_{(1)} - b_n}{a_n} < x\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\{-\exp\{-x\}\}$$

$$\ln \varphi_n(t, u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \tau(e^t - 1) \Rightarrow \varphi_n(t, u_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{\tau(e^t-1)} = \varphi_N(t)$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(B_n(x) < k) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{P}(\tau)$$

$$\mathbb{P}(X_{(k)} \leq x) \overset{\overset{1}{\downarrow}}{=} \mathbb{P}(B_n(x) < k) \overset{\overset{5}{\downarrow}}{=} \sum_{i=0}^{k-1} e^{-\tau}\frac{\tau^i}{i!}$$

$$\mathbb{P}\left(\frac{X_{(1)} - b_n}{a_n} \leq x\right) = \mathbb{P}(X_{(1)} \leq a_n x + b_n) = e^{-\tau}\frac{\tau^0}{0!} = e^{-\tau} \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\{-\exp\{-x\}\}$$

Par identification, $\tau \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\{-x\}$

$$\mathbb{P}(X_{(2)} \leq x) = e^{-\tau}\left(1 + \frac{\tau}{1!}\right) = e^{-\tau}(1+\tau) \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{-e^{-x}}(1 + e^{-x})$$

- Exercice 3

$X_1, \dots, X_n \overset{iid}{\sim} F$ et $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$

1. $x^F = \sup\{x : F(x) < 1\}$
   Quel est l'intérêt de définir cette valeur?
   Mq $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} x^F$.

x^F est le point extrêmal :
- borne supérieure quand la distribution est bornée
- limite du maximum

(1) $x^F < +\infty$

On veut : $\forall \varepsilon > 0 \quad \mathbb{P}(|M_n - x^F| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(|M_n - x^F| > \varepsilon) &= \mathbb{P}[(M_n - x^F > \varepsilon) \cup (M_n - x^F < -\varepsilon)] \\ &= \mathbb{P}[\underbrace{(M_n > \varepsilon + x^F)}_{\emptyset} \cup (M_n < x^F - \varepsilon)] \\ &= \mathbb{P}(M_n < x^F - \varepsilon) \\ &= [F(x^F - \varepsilon)]^n\end{aligned}$$

$F(x^F) \longrightarrow 1$

$F(x^F - \varepsilon) \longrightarrow 1^-$

$\Rightarrow \mathbb{P}(|M_n - x^F| > \varepsilon) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(2) $x^F = \infty$

On veut $M_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} x^F \Leftrightarrow \frac{1}{M_n} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathbb{P}} 0 \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{M_n} - 0\right| > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\left|\frac{1}{M_n} - 0\right| > \varepsilon\right) &= \mathbb{P}\left(\left(\frac{1}{M_n} > \varepsilon\right) \cup \left(\frac{1}{M_n} < -\varepsilon\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left(M_n < \frac{1}{\varepsilon}\right) \cup \left(M_n > -\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \\ &= \mathbb{P}\left(-\frac{1}{\varepsilon} < M_n < \frac{1}{\varepsilon}\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(M_n < \frac{1}{\varepsilon}\right) = \left[\underbrace{F\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)}_{0 < - < 1}\right]^n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0\end{aligned}$$

2. $\bar{F} = 1 - F$

Mq
$$(1)\ \mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} H(x)$$
$$\Leftrightarrow\ (2)\ n\bar{F}(a_n x + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\ln H(x)$$

(2) ⇒ (1)

$$\mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n) = [F(a_n x + b_n)]^n$$
$$= \exp\{n \ln\{F(a_n x + b_n)\}\}$$
$$= \exp\{n \ln\{1 - \bar{F}(a_n x + b_n)\}$$

$$n \to \infty \Rightarrow a_n x + b_n \longrightarrow \infty \Rightarrow \bar{F}(a_n x + b_n) \longrightarrow 0$$
$$\Rightarrow \ln\{1 - \bar{F}(a_n x + b_n)\} = -\bar{F}(a_n x + b_n)$$

$$\mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\{-n\bar{F}(a_n x + b_n)\} \xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\{+\ln H(x)\} = H(x)$$

(1) ⇒ (2)

$$-n\bar{F}(a_n x + b_n) = \ln\{\exp\{-n\bar{F}(a_n x + b_n)\}\}$$
$$= \ln\{(\exp\{-\bar{F}(a_n x + b_n)\})^n\}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \ln\{n[1 - \bar{F}(a_n x + b_n)]\}$$

$$= \ln\{[1 - \bar{F}(a_n x + b_n)]^n$$
$$= \ln\{[\cancel{1} - \cancel{1} + F(a_n x + b_n)]^n$$
$$= \ln\{\mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n)\}$$
$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \ln H(x)$$

$$\Rightarrow n\bar{F}(a_n x + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} -\ln H(x)$$

$$h(x) = \frac{1 - F(x)}{F'(x)}$$

Si $h'(x) \xrightarrow[x\to x^*]{} \xi \in \mathbb{R} \Rightarrow n\bar{F}(a_n x + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} (1 + \xi x)_+^{-1/\xi}$

$$b_n = F^{-1}(1 - 1/n) \qquad a_n = h(b_n)$$

$$U(t) = F^{-1}(1 - 1/t)$$

3. Mq $\dfrac{1}{1 - F(U(t))} = t$

$$\frac{1}{1 - F(U(t))} = \frac{1}{1 - F(F^{-1}(1 - 1/t))} = \frac{1}{\cancel{1} - (\cancel{1} - 1/t)} = \frac{1}{1/t} = t$$

4. Mq $\quad (1)\ \mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} H(x)$

$\iff (2)\ (U(nx) - b_n)/a_n \xrightarrow[n\to\infty]{} H^{-1}(e^{-1/x})$

$$H_n(x) = \mathbb{P}(M_n \leq a_n x + b_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} H(x)$$

$$H_n\left(\frac{U(nx) - b_n}{a_n}\right) = \mathbb{P}\left(M_n \leq a_n \frac{U(nx) - b_n}{a_n} + b_n\right)$$

$$= \mathbb{P}(M_n \leq U(nx))$$

$$= \mathbb{P}(M_n \leq F^{-1}(1 - 1/nx))$$

$$= [F(F^{-1}(1 - 1/nx))]^n$$

$$= \left(1 - \frac{1}{nx}\right)^n$$

$$= \exp\left\{n \ln\left\{1 - \frac{1}{nx}\right\}\right\}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \exp\left\{\cancel{n} \times \frac{-1}{\cancel{n} x}\right\} = \exp\{-1/x\}$$

$$\frac{U(nx) - b_n}{a_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} H^{-1}(e^{-1/x})$$

Si $H(x) = \exp(-(1+\xi x)_+^{-1/\xi}) \Rightarrow H^{-1}(y) = \frac{(-\ln(y))^{-\xi} - 1}{\xi} \Rightarrow H^{-1}(e^{-1/x}) = \frac{x^{\xi} - 1}{\xi}$

5. Mq $\quad U'(t) = \frac{[1 - F(U(t))]^2}{F'(U(t))} \qquad t\frac{U''(t)}{U'(t)} = -2 - \frac{F''(U(t))[1 - F(U(t))]}{[F'(U(t))]^2}$

En déduire $\quad (1)\ h'(x) \xrightarrow[x\to x_F]{} \xi$

$\iff (2)\ (1 - F(x)) \frac{F''(x)}{(F'(x))^2} \xrightarrow[x\to x_F]{} -\xi - 1$

$\iff (3)\ t\frac{U''(t)}{U'(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} \xi - 1$

$$t = \frac{1}{1 - F(U(t))} \iff [t]' = \left[\frac{1}{1 - F(U(t))}\right]'$$

$$\iff 1 = -\frac{-U'(t) F'(U(t))}{[1 - F(U(t))]^2}$$

$$\iff U'(t) = \frac{[1 - F(U(t))]^2}{F'(U(t))}$$

$$U''(t) = \frac{-2U'(t)F'(U(t))[1 - F(U(t))]F'(U(t)) - [1 - F(U(t))]^2 \cdot U'(t) F''(U(t))}{[F'(U(t))]^2}$$

$$= U'(t)\left[-2[1 - F(U(t))] - \frac{F''(U(t))[1 - F(U(t))]^2}{[F'(U(t))]^2}\right]$$

$$\frac{tU''(t)}{U'(t)} = \frac{1}{1-F(U(t))} \cdot \frac{1}{U'(t)} \cdot U'(t)\left[-2\left[1-F(U(t))\right] - \frac{F''(U(t))\left[1-F(U(t))\right]^2}{\left[F'(U(t))\right]^2}\right]$$

$$= -2 - \frac{F''(U(t))\left[1-F(U(t))\right]}{\left[F'(U(t))\right]^2}$$

$$h'(x) = \left[\frac{1-F(x)}{F'(x)}\right]' = \frac{-F'(x)F'(x) - \left[1-F(x)\right]F''(x)}{\left[F'(x)\right]^2}$$

$$= -1 - \frac{F''(x)\left[1-F(x)\right]}{\left[F'(x)\right]^2}$$

$$h'(x) = \xi \iff -1 - \frac{F''(x)\left[1-F(x)\right]}{\left[F'(x)\right]^2} = \xi$$

$$\iff \left[1-F(x)\right]\frac{F''(x)}{\left[F'(x)\right]^2} = -\xi - 1$$

$x = U(t)$

$$\iff -2 - \frac{F''(U(t))\left[1-F(U(t))\right]}{\left[F'(U(t))\right]^2} = \xi - 1$$

- Exercice 4

$Y \sim GPD(\sigma, \xi)$, $\xi \neq 0$ $\quad \mathbb{P}(Y<y) = 1 - \left[1+\xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi}$

1. Donner le domaine de définition de Y (ensemble des valeurs de réalisations possibles) Ensemble de y tq $\mathbb{P}(Y>y) \in]0,1[$ $\quad$ dépassements de seuil >0

$$1+\xi\left(\frac{y}{\sigma}\right) > 0 \iff \xi y > -\sigma \iff \begin{cases} y > -\sigma/\xi & \xi>0 \\ y < -\sigma/\xi & \xi<0 \end{cases} \iff \begin{cases} y \in \mathbb{R}^+ & \xi>0 \\ y \in [0, -\sigma/\xi] & \xi<0 \end{cases}$$

2. De quelle loi connue s'agit-il lorsque $\xi = -1$?
Est-il possible de définir une loi si $\xi = 0$?

$\xi = -1$: $\mathbb{P}(Y<y) = 1 - \left[1 - y/\sigma\right]_+^{+1} = \frac{y}{\sigma}$, $y \in [0,\sigma]$

$Y \sim U([0,\sigma])$

$$\lim_{\xi\to 0} \mathbb{P}(Y<y) = \lim_{\xi\to 0} 1 - \left[1+\xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi} = \lim_{\xi\to 0} 1 - \exp\left\{-\frac{1}{\xi}\ln\left\{1+\xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right\}\right\}$$

$$= \lim_{\xi\to 0} 1 - \exp\left\{-\frac{1}{\cancel{\xi}} \times \cancel{\xi}\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right\} = 1 - e^{-y/\sigma}$$

$Y \sim Exp(\sigma)$

3. Donner la densité de cette loi.
Peut-on trouver des expressions analytiques pour l'EMV ?

$$f(y) = F'(y) = -\left(-\frac{1}{\xi}\right)\cdot\frac{\xi}{\sigma}\left[1+\xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi-1}$$

$$= \frac{1}{\sigma}\left[1+\xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi-1}$$

$$\mathcal{L}(\sigma,\xi) = \prod_{i=1}^n f(y_i) = \frac{1}{\sigma^n}\left(\prod_{i=1}^n\left\{1+\xi\left(\frac{y_i}{\sigma}\right)\right\}\right)^{-1/\xi-1}$$

$$\ell(\sigma,\xi) = \ln\mathcal{L}(\sigma,\xi) = -n\ln\sigma-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)\sum_{i=1}^n \ln\left\{1+\xi\left(\frac{y_i}{\sigma}\right)\right\}$$

$$= -n\ln\sigma-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)\sum_{i=1}^n \ln\left\{\frac{\xi}{\sigma}y_i\right\}$$

$$\frac{\partial}{\partial\sigma}\ell(\sigma,\xi) = -\frac{n}{\sigma}-\left(\frac{1}{\xi}+1\right)\sum_{i=1}^n\frac{-\cancel{\xi}\cancel{y_i}/\sigma^{\cancel{2}}}{\cancel{\xi}\cancel{y_i}/\cancel{\sigma}}$$

$$= -\frac{n}{\sigma}+\left(\frac{1}{\xi}+1\right)\cdot\frac{n}{\sigma}$$

$$= \frac{n}{\sigma}\left(\frac{1}{\xi}+\cancel{1}-\cancel{1}\right)$$

$$= \frac{n}{\sigma\xi} \longrightarrow \text{pas de solution analytique}$$

4. Mq si $U\sim\mathcal{U}([0,1])$, alors $Y\sim\sigma\left(\frac{U^{-\xi}-1}{\xi}\right)$

Donner une procédure pour simuler une loi GPD(σ,ξ)

$$\mathbb{P}\left(\sigma\left(\frac{U^{-\xi}-1}{\xi}\right)\leqslant y\right) = \mathbb{P}\left(\frac{U^{-\xi}-1}{\xi}\leqslant\frac{y}{\sigma}\right)$$

$$= \begin{cases}\mathbb{P}(U^{-\xi}-1\leqslant y\,\xi/\sigma) & \xi>0\\ \mathbb{P}(U^{-\xi}-1\geqslant y\,\xi/\sigma) & \xi<0\end{cases}$$

$$= \begin{cases}\mathbb{P}(U\geqslant[\xi(y/\sigma)+1]^{-1/\xi}) & \xi>0\\ \mathbb{P}(U\geqslant[\xi(y/\sigma)+1]^{-1/\xi}) & \xi<0\end{cases}$$

$$= 1-\mathbb{P}\left(U\leqslant\left[\xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)+1\right]^{-1/\xi}\right)$$

$$= 1-\left[\xi\left(\frac{y}{\sigma}+1\right)\right]_+^{-1/\xi}$$

On peut donc simuler des $U_i\overset{iid}{\sim}\mathcal{U}([0,1])$ puis leur appliquer la transfo $Y_i = \sigma\frac{U_i^{-\xi}-1}{\xi}$ pour simuler une GPD(σ,ξ)

5. Donner une expression de la médiane, de la moyenne ($\xi < 1$) et de la variance ($\xi < 1/2$) d'une loi GPD (σ, ξ)
Donner un estimateur simple de ξ basé sur les deux premiers moments lorsque $\xi < 1/2$.

$$\mathbb{P}(Y < y) = 0.5$$

$$1 - \left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]_+^{-1/\xi} = 0.5$$

$$\left[1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right)\right]^{-1/\xi} = 0.5$$

$$1 + \xi\left(\frac{y}{\sigma}\right) = 0.5^{-\xi}$$

$$\xi \frac{y}{\sigma} = 0.5^{\xi} - 1$$

$$y = \frac{\sigma}{\xi}\left[0.5^{\xi} - 1\right] = \text{med}(X)$$

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\sigma\frac{U^{-\xi} - 1}{\xi}\right) = \frac{\sigma}{\xi}\left(\mathbb{E}\left[U^{-\xi}\right] - 1\right)$$

$$\mathbb{E}(U^k) = \int_0^1 u^k \, du = \left.\frac{u^{k+1}}{k+1}\right|_0^1 = \frac{1}{k+1}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}(Y) = \frac{\sigma}{\xi}\left(\frac{1}{-\xi+1} - 1\right) = \frac{\sigma}{\xi}\left(\frac{1 - (-\xi + 1)}{-\xi + 1}\right) = \frac{\sigma}{1 - \xi}$$

$$\mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}\left[\left(\sigma\frac{U^{-\xi} - 1}{\xi}\right)^2\right] = \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \mathbb{E}\left[U^{-2\xi} - 2U^{-\xi} + 1\right]$$

$$= \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \left(\mathbb{E}(U^{-2\xi}) - 2\mathbb{E}(U^{-\xi}) + 1\right)$$

$$= \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \left(\frac{1}{-2\xi+1} - 2\frac{1}{-\xi+1} + 1\right)$$

$$= \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \left(\frac{-\xi + 1 - 2(-2\xi+1) + (-2\xi+1)(-\xi+1)}{(-2\xi+1)(-\xi+1)}\right)$$

$$= \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \left(\frac{-\xi + \cancel{1} - 4\xi - \cancel{2} + 2\xi^2 - 2\xi - \xi + \cancel{1}}{(-2\xi+1)(-\xi+1)}\right)$$

$$= \left(\frac{\sigma}{\xi}\right)^2 \left(\frac{2\xi^2 - 8\xi}{(-2\xi+1)(-\xi+1)}\right) = \frac{\sigma^2}{\xi} \cdot \frac{2(\xi - 4)}{(-2\xi+1)(-\xi+1)}$$

On trouve l'estimateur par la méthode des moments