Examen Théorie des Valeurs Extrêmes 2018-2019

Master 2 SAF Pro

Sans document - Sans calculatrice - 2h00

Remarque préliminaire: les questions des exercices peuvent se traiter en utilisant les résultats des questions précédentes même si vous n'avez pas réussi à y répondre.

Questions de cours et exercices d'applications du cours (9 points):

1. Que signifie F appartient au domaine d'attraction d'une distribution max-stable G ($F \in D(G)$)?

a) Quel est le domaine d'attraction de la loi log-Weibull, c'est-à-dire la loi d'une variable aléatoire $X = e^Y$ où

$$P(Y > y) = \exp(-cy^\tau), \quad y > 0, c > 0, \tau > 0.$$

Vous discuterez suivant les valeurs de τ.

b) On suppose que F est définie sur $\mathbb{R}_+$. Soit $L(x) = 1 - F(-x)$, on suppose de plus que L appartient au domaine d'attraction d'une distribution max-stable H ($L \in D(H)$). Discuter des lois possibles pour G et H.

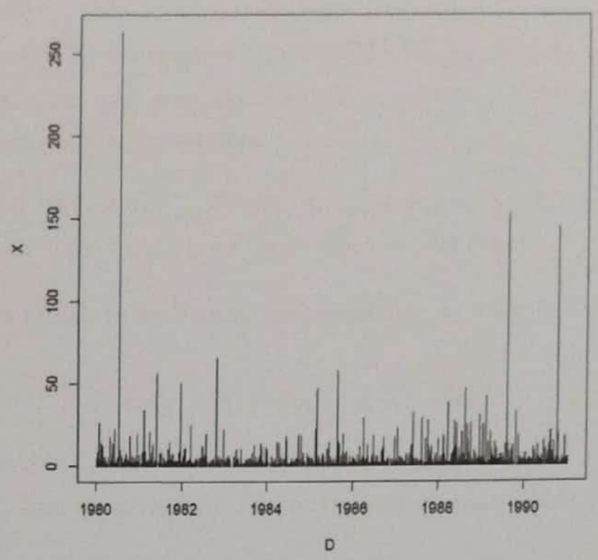
On considère la variable aléatoire de distribution J telle que

$$\begin{aligned} J(x) &= F(\alpha x + \beta), & \alpha > 0 \\ J(x) &= 1 - F(\alpha x + \beta), & \alpha < 0 \end{aligned}.$$

A quel domaine d'attraction appartient J? Donner les relations qui existent entre les suites de normalisation pour J, L et F.

2. Qu'est-ce qu'une distribution GPD (Generalised Pareto distribution)? Donner des propriétés de cette distribution. Expliquer dans quel cadre vous seriez amené à l'utiliser.

3. Un réassureur dispose des données de sinistres suivantes pour tarifier un excédent de sinistres de priorité 100 et de portée illimitée.



On rappelle qu'en cas de sinistre X_i, le réassureur rembourse à l'assureur le montant $(X_i - 100)_+$. Quelle méthodologie lui proposez-vous? Donner une réponse littérale mais en expliquant les modèles et les résultats de cours nécessaires aux calculs.

Exercice 1 (3 points):

Soit $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID.

1. Montrer que s'il existe deux suites (a_n) positive et (b_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\max\left(-X_1, \ldots, -X_n\right) \leq a_n x + b_n\right) = H(x)$$

pour une fonction de distribution H non-dégénérée, alors il existe deux suites (c_n) positive et (d_n) telles que

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left(\min\left(X_1, \ldots, X_n\right) \leq c_n x + d_n\right) = 1 - H(-x).$$

Quelles relations existe-t-il entre les suites (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n)?

2. On rappelle que les distributions des extrêmes généralisées (GEV) standard sont caractérisées par les fonctions de répartition

$$G_\xi(x) = \exp\left(-(1+\xi x)_+^{-1/\xi}\right), \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Caractériser alors les distributions limites possibles pour le minimum de variables aléatoires indépendantes.

3. Montrer qu'elles sont min-stables et donner les coefficients de normalisation, c'est-à-dire les coefficients qui permettent d'avoir l'égalité en loi en une variable aléatoire et son miminum normalisé.

Exercice 2 (8 points):

Soient $X_1, ..., X_n$ une suite de variables aléatoires IID, $M_n = \max(X_1, ..., X_n)$.

0. Soit $\bar{F} = 1 - F$. Montrer que, pour deux suites (a_n) et (b_n), et une fonction de répartition H, les deux conditions suivantes sont équivalentes:

$$\begin{array}{ll} 1) & \lim_{n\to\infty} \Pr\left(M_n \le a_n x + b_n\right) = H(x), \\ 2) & \lim_{n\to\infty} n\bar{F}\left(a_n x + b_n\right) = -\ln H(x). \end{array}$$

1. Soit N une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ, indépendante des X_i.

(a) Montrer que

$$\Pr\left(M_N \le x\right) = \exp\left(-\lambda\left(1 - F(x)\right)\right).$$

On rappelle que $\Pr\left(N = n\right) = e^{-\lambda}\lambda^n/n!$, $n \in \mathbb{N}$.

(b) Supposons que N_n une variable aléatoire de Poisson de paramètre λ_n. Quelle condition faut-il mettre sur λ_n pour que

$$\frac{M_{N_n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{L} H$$

quand $n \to \infty$?

2. Soit N une variable aléatoire Géométrique de paramètre q, indépendante des X_i.

(a) Montrer que

$$\Pr\left(M_N \le x\right) = \frac{qF(x)}{1 - (1-q)F(x)}.$$

On rappelle que $\Pr\left(N = n\right) = q(1-q)^{n-1}$, $n \ge 1$.

(b) Supposons que N_n une variable aléatoire Géométrique de paramètre q_n. Est-il possible de trouver q_n telle que

$$\frac{M_{N_n} - b_n}{a_n} \xrightarrow{L} H$$

quand $n \to \infty$?

3. Quelle conclusion tirez-vous de cet exercice?

$m_n = -\max(-Y_i)$

Exercice 1 :

1) Soient $(a_n) > 0$ et (b_n) tq $\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(\max(-X_1, \dots, -X_n) \leq a_n x + b_n) = H(x)$

Il est clair que $\min(X_1, \dots, X_n) = -\max(-X_1, \dots, -X_n)$

$$\Rightarrow \mathbb{P}(\max(-X_1, \dots, -X_n) \leq a_n x + b_n) = \mathbb{P}(-\min(X_1, \dots, X_n) \leq a_n x + b_n) \xrightarrow[n \to \infty]{} H(x)$$

$$= \mathbb{P}(\min(X_1, \dots, X_n) \geq -a_n x - b_n)$$

$$= \mathbb{P}(X_1 \geq -a_n x - b_n)^n$$

$$= \overline{F}(-a_n x - b_n)^n$$