TD2 - Modèle de Black-Litterman

Dans tout ce TD on reprend les notations utilisées en cours.

1. **Le cas où $\Omega = 0_{\mathbb{R}^k}$**
   Dans le modèle de Black-Litterman, si l'investisseur est certain de ses vues, Ω est nulle. Dans ce cas l'estimation de $\tilde{\Pi}$ est obtenue en résolvant le problème d'optimisation suivant :
   $$min_{\tilde{\Pi}} \quad (\tilde{\Pi} - \Pi)'(\tau\Sigma)^{-1}(\tilde{\Pi} - \Pi)$$
   $$\text{sous la contrainte} \quad P\tilde{\Pi} = q$$
   Trouver $\tilde{\Pi}$ optimal.
2. **Le cas où Ω est inversible**
   (a) Considérons le problème d'optimisation (sans contrainte) suivant :
   $$min_{\tilde{\Pi}} \quad (\tilde{\Pi} - \Pi)'(\tau\Sigma)^{-1}(\tilde{\Pi} - \Pi) + (P\tilde{\Pi} - q)'\Omega^{-1}(P\tilde{\Pi} - q). \qquad (1)$$
   Résoudre le problème. Que remarquez-vous ?
   (b) Dans le cas Ω inversible, montrer que $\tilde{\Pi}_{BL} = \Pi + \tau\Sigma P'(\Omega + P\tau\Sigma P')^{-1}(q - P\Pi)$.[1]
3. **Vues**
   Considérons un marché à deux actifs. "Traduire" mathématiquement les deux vues suivantes en précisant chaque fois P et Ω :
   (a) L'actif 1 sur-performera l'actif 2 de q. La confiance dans cette vue est de σ^2.
   (b) L'actif 1 sur-performera l'actif 2 de $q \pm m$ $(m > 0)$ avec probabilité $p \in]0, 1[$.[2]
4. **Le modèle BL en pratique**
   Supposons que le marché se compose de cinq actions issues du CAC 40 : Accor, Total, Air France KLM, Air Liquide et Vinci. Ces actions composent une partie du CAC 40 selon les poids (en pourcentage) suivants :[3]

	Accor	Total	Air Fr. KLM	Air Liq.	Vinci
poids(%)	0.98	12.62	0.6	2.26	2.40

   (a) Normaliser les poids de sorte que la somme soit égale à 1. Quel est le portefeuille w obtenu ?
   (b) Les rendements historiques et la matrice de variance-covariance (entre le 1er janvier 2003 et le 1er janvier 2008) sont repris dans les tableaux suivants :[4]
   - Rendements historiques (en %)

1. Pour montrer cette égalité, on supposera ici que toutes les matrices carrées sont inversibles.
2. L'actif 1 sur-performera l'actif 2 d'un pourcentage compris entre $q - m$ et $q + m$
3. Données du 1er janvier 2008
4. Les calculs ont été effectués à l'aide du logiciel R à partir des cours historiques

	Accor	Total	Air Fr. KLM	Air Liq.	Vinci
$\mu_{hist}(\%)$	13	10	20	10	29

- Matrice de variance-covariance (en %)

	Accor	Total	Air Fr. KLM	Air Liq.	Vinci
Accor	6.44	2.19	3.85	2.72	1.80
Total	2.19	3.86	2.05	2.63	1.48
Air Fr. KLM	3.85	2.05	10.26	3.01	2.06
Air Liq.	2.72	2.63	3.01	23.27	2.25
Vinci	1.80	1.48	2.06	2.25	4.91

Calculer le rendement historique du portefeuille w (noté $\mu_{w,hist}$) ainsi que sa volatilité (notée $\sigma^2_{w,hist}$).

(c) *Rappel : Les rendements implicites sont calculés à partir de la formule* $\Pi = k\Sigma w$.
Montrer que $k = \frac{w'\mu - r_f}{w'\Sigma w}$. Soit $r_f = 4.7\%$.[5] Déterminer k_{hist} $\left(= \frac{\mu_{w,hist} - r_f}{\sigma^2_{w,hist}}\right)$. En déduire les rendements implicites.

(d) Un investisseur a deux vues sur le marché du CAC 40 :
- V1 : L'action Total aura ~~un rendement~~ une prime de risque de 6%$\pm$1.5% avec 95% de chance.
- V2 : L'action Accor sur-perfomera Vinci de 1%$\pm$1% avec 90% de chance.

Préciser P, q et Ω.

(e) Soit $\tau = 0.5$. Déterminer $\tilde{\Pi}_{BL}$ ainsi que le portefeuille w_{BL} choisi par l'investisseur.

5. Le rendement de l'actif sans risque a été approché à l'aide de la courbe zéro-coupon de l'Institut des Actuaires.

TABLE N° 2	**FRACTILES DE LA LOI NORMALE RÉDUITE**

P	0,000	0.001	0,002	0.003	0.004	0.005	0.006	0.007	0.008	0,009	0.010	
0,00	∞	3,0902	2,8782	2,7478	2,6521	2,5758	2,5121	2,4573	2,4089	2,3656	2,3263	0,99
0.01	2,3263	2,2904	2,2571	2,2262	2,1973	2.1701	2,1444	2,1201	2,0969	2,0749	2,0537	0,98
0,02	2,0537	2,0335	2,0141	1,9954	1,9774	1,9600	1,9431	1,9268	1,9110	1,8957	1,8808	0,97
0,03	1,8808	1,8663	1,8522	1,8384	1,8250	1,8119	1,7991	1,7866	1,7744	1,7624	1,7507	0,96
0,04	1,7507	1,7392	1,7279	1,7169	1,7060	1,6954	1,6849	1,6747	1,6646	1,6546	1,6449	0,95
0,05	1,6449	1,6352	1,6258	1,6164	1,6072	1,5982	1,5893	1,5805	1,5718	1,5632	1,5548	0,94
0,06	1,5548	1,5464	1,5382	1,5301	1,5220	1,5141	1,5063	1,4985	1,4909	1,4833	1,4758	0,93
0,07	1,4758	1,4684	1,4611	1,4538	1,4466	1,4395	1,4325	1,4255	1,4187	1,4118	1,4051	0,92
0,08	1,4051	1,3984	1,3917	1,3852	1,3787	1,3722	1,3658	1,3595	1,3532	1,3469	1,3408	0,91
0,09	1,3408	1,3346	1,3285	1,3225	1,3165	1,3106	1,3047	1,2988	1,2930	1,2873	1,2816	0,90
0,10	1,2816	1,2759	1,2702	1,2646	1,2591	1,2536	1,2481	1,2426	1,2372	1,2319	1,2265	0,89
0,11	1,2265	1,2212	1,2160	1,2107	1,2055	1,2004	1,1952	1,1901	1,1850	1,1800	1,1750	0,88
0,12	1,1750	1,1700	1,1650	1,1601	1,1552	1,1503	1,1455	1,1407	1,1359	1,1311	1,1264	0,87
0,13	1,1264	1,1217	1,1170	1,1123	1,1077	1,1031	1,0985	1,0939	1,0893	1,0848	1,0803	0,86
0,14	1,0803	1,0758	1,0714	1,0669	1,0625	1,0581	1,0537	1,0494	1,0450	1,0407	1,0364	0,85
0,15	1,0364	1,0322	1,0279	1,0237	1,0194	1,0152	1,0110	1,0069	1,0027	0,9986	0,9945	0,84
0,16	0,9945	0,9904	0,9863	0,9822	0,9782	0,9741	0,9701	0,9661	0,9621	0,9581	0,9542	0,83
0,17	0,9542	0,9502	0,9463	0,9424	0,9385	0,9346	0,9307	0,9269	0,9230	0,9192	0,9154	0,82
0,18	0,9154	0,9116	0,9078	0,9040	0,9002	0,8965	0,8927	0,8890	0,8853	0,8816	0,8779	0,81
0,19	0,8779	0,8742	0,8705	0,8669	0,8633	0,8596	0,8560	0,8524	0,8488	0,8452	0,8416	0,80
0,20	0,8416	0,8381	0,8345	0,8310	0,8274	0,8239	0,8204	0,8169	0,8134	0,8099	0,8064	0,79
0,21	0,8064	0,8030	0,7995	0,7961	0,7926	0,7892	0,7858	0,7824	0,7790	0,7756	0,7722	0,78
0,22	0,7722	0,7688	0,7655	0,7621	0,7588	0,7554	0,7521	0,7488	0,7454	0,7421	0,7388	0,77
0,23	0,7388	0,7356	0,7323	0,7290	0,7257	0,7225	0,7192	0,7160	0,7128	0,7095	0,7063	0,76
0,24	0,7063	0,7031	0,6999	0,6967	0,6935	0,6903	0,6871	0,6840	0,6808	0,6776	0,6745	0,75
0,25	0,6745	0,6713	0,6682	0,6651	0,6620	0,6588	0,6557	0,6526	0,6495	0,6464	0,6433	0,74
0,26	0,6433	0,6403	0,6372	0,6341	0,6311	0,6280	0,6250	0,6219	0,6189	0,6158	0,6128	0,73
0,27	0,6128	0,6098	0,6068	0,6038	0,6008	0,5978	0,5948	0,5918	0,5888	0,5858	0,5828	0,72
0,28	0,5828	0,5799	0,5769	0,5740	0,5710	0,5681	0,5651	0,5622	0,5592	0,5563	0,5534	0,71
0,29	0,5534	0,5505	0,5476	0,5446	0,5417	0,5388	0,5359	0,5330	0,5302	0,5273	0,5244	0,70
0,30	0,5244	0,5215	0,5187	0,5158	0,5129	0,5101	0,5072	0,5044	0,5015	0,4987	0,4959	0,69
0,31	0,4959	0,4930	0,4902	0,4874	0,4845	0,4817	0,4789	0,4761	0,4733	0,4705	0,4677	0,68
0,32	0,4677	0,4649	0,4621	0,4593	0,4565	0,4538	0,4510	0,4482	0,4454	0,4427	0,4399	0,67
0,33	0,4399	0,4372	0,4344	0,4316	0,4289	0,4261	0,4234	0,4207	0,4179	0,4152	0,4125	0,66
0,34	0,4125	0,4097	0,4070	0,4043	0,4016	0,3989	0,3961	0,3934	0,3907	0,3880	0,3853	0,65
0,35	0,3853	0,3826	0,3799	0,3772	0,3745	0,3719	0,3692	0,3665	0,3638	0,3611	0,3585	0,64
0,36	0,3585	0,3558	0,3531	0,3505	0,3478	0,3451	0,3425	0,3398	0,3372	0,3345	0,3319	0,63
0,37	0,3319	0,3292	0,3266	0,3239	0,3213	0,3186	0,3160	0,3134	0,3107	0,3081	0,3055	0,62
0,38	0,3055	0,3029	0,3002	0,2976	0,2950	0,2924	0,2898	0,2871	0,2845	0,2819	0,2793	0,61
0,39	0,2793	0,2767	0,2741	0,2715	0,2689	0,2663	0,2637	0,2611	0,2585	0,2559	0,2533	0,60
0,40	0,2533	0,2508	0,2482	0,2456	0,2430	0,2404	0,2378	0,2353	0,2327	0,2301	0,2275	0,59
0,41	0,2275	0,2250	0,2224	0,2198	0,2173	0,2147	0,2121	0,2096	0,2070	0,2045	0,2019	0,58
0,42	0,2019	0,1993	0,1968	0,1942	0,1917	0,1891	0,1866	0,1840	0,1815	0,1789	0,1764	0,57
0,43	0,1764	0,1738	0,1713	0,1687	0,1662	0,1637	0,1611	0,1586	0,1560	0,1535	0,1510	0,56
0,44	0,1510	0,1484	0,1459	0,1434	0,1408	0,1383	0,1358	0,1332	0,1307	0,1282	0,1257	0,55
0,45	0,1257	0,1231	0,1206	0,1181	0,1156	0,1130	0,1105	0,1080	0,1055	0,1030	0,1004	0,54
0,46	0,1004	0,0979	0,0954	0,0929	0,0904	0,0878	0,0853	0,0828	0,0803	0,0778	0,0753	0,53
0,47	0,0753	0,0728	0,0702	0,0677	0,0652	0,0627	0,0602	0,0577	0,0552	0,0527	0,0502	0,52
0,48	0,0502	0,0476	0,0451	0,0426	0,0401	0,0376	0,0351	0,0326	0,0301	0,0276	0,0251	0,51
0,49	0,0251	0,0226	0,0201	0,0175	0,0150	0,0125	0,0100	0,0075	0,0050	0,0025	0,0000	0,50
	0.010	0.009	0.008	0.007	0.006	0.005	0.004	0.003	0.002	0.001	0.000	*P*

Grandes valeurs de u

P	10^{-4}	10^{-5}	10^{-6}	10^{-7}	10^{-8}	10^{-9}
u_P	3,7190	4,2649	4,7534	5,1993	5,6120	5,9978

Rappel: $(f\circ g(x))' = g'(x)\, f'\circ g(x)$

$\nabla_x f\circ g(x) = \nabla_x g(x)\, \nabla_x f\circ g(x)$.

$\nabla_x x'Ax = 2Ax$

$\nabla_x x'A = A$

$\nabla_x Ax = A'$

1 - Le cas où $\Omega = 0_{\mathbb{R}^k}$

On obtient $\tilde{\pi}$ par résolut° de : $\min\limits_{\tilde{\pi}} (\tilde{\pi}-\pi)'(\tau\Sigma)^{-1}(\tilde{\pi}-\pi)$

s.c $P\tilde{\pi} = q$ ← k contraintes

$\mathcal{L}(\tilde{\pi},\lambda) = (\tilde{\pi}-\pi)'(\tau\Sigma)^{-1}(\tilde{\pi}-\pi) - \lambda(P\tilde{\pi}-q)$

Vecteur k-dim (Vecteur ligne)

$$\begin{cases} \nabla_{\tilde{\pi}} \mathcal{L}(\tilde{\pi},\lambda) = 2(\tau\Sigma)^{-1}(\tilde{\pi}-\pi) - (\lambda P)' = 0 \\ \nabla_\lambda \mathcal{L}(\tilde{\pi},\lambda) = 0 \iff P\tilde{\pi} = q \quad (2) \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2(\tau\Sigma)^{-1}\tilde{\pi} = 2(\tau\Sigma)^{-1}\pi + \overbrace{(\lambda P)'}^{P'\lambda'}$$

$$\tilde{\pi} = \pi + \frac{1}{2}(\tau\Sigma)^{-1}P'\lambda' \quad (3)$$

On remplace dans (2), $P\pi + \frac{1}{2}(\tau\Sigma)^{-1}P'\lambda' = q \Rightarrow \lambda' = \frac{2}{\tau}(P\Sigma P')^{-1}(q - P\pi)$

On remplace dans (3)

$$\boxed{\tilde{\pi} = \pi + \frac{\tau}{2}\Sigma P' \frac{2}{\tau}(P\Sigma P')^{-1}(q - P\pi)}$$

2 - Le cas où Ω est inversible.

a) $\min\limits_{\tilde{\pi}} (\pi' - \pi)'(\tau\Sigma)^{-1}(\tilde{\pi}-\pi) + (P\tilde{\pi}-q)'\Omega^{-1}(P\tilde{\pi}-q)$

$$\mathcal{L}(\tilde{\pi}) = (\tilde{\pi}-\pi)'(\tau\Sigma)^{-1}(\tilde{\pi}-\pi) + (P\tilde{\pi}-q)'\Omega^{-1}(P\tilde{\pi}-q)$$

$$\nabla_{\tilde{\pi}} \mathcal{L}(\tilde{\pi}) = 0 \iff 2(\tau\Sigma)^{-1}(\tilde{\pi}-\pi) + 2P'\Omega^{-1}(P\tilde{\pi}-q) = 0$$

$$\Rightarrow (\tau\Sigma)^{-1}\tilde{\pi} + P'\Omega^{-1}P\tilde{\pi} = (\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q$$

$$\iff [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]\tilde{\pi} = (\tau\Sigma)^{-1}\pi + P'\Omega^{-1}q$$

$$\Leftrightarrow \tilde{\Pi} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}q]$$

b) Rq : $\tilde{\Pi}_{BL} = \Pi + \tau\Sigma P'(\Omega + P\tau\Sigma P')^{-1}(q - P\Pi)$

Si $\Omega = 0_{\mathbb{R}^k} \Rightarrow \tilde{\Pi}_{BL} = \Pi + \Sigma P'(P\Sigma P')^{-1}(q - P\Pi)$ (les τ se simplifient)

$$\tilde{\Pi}_{BL} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}q]$$

$$= [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}(\tau\Sigma)^{-1}(\tau\Sigma)[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}q]$$

$$= [id + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P]^{-1}[\Pi + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}q]$$

$$= [id + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P]^{-1}[\Pi + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P\Pi - \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P\Pi + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}q]$$

$$= [id + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(id + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P)\Pi + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}(q - P\Pi)]$$

$$= \Pi + [id + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P]^{-1}\tau\Sigma P'\Omega^{-1}(q - P\Pi)$$

$$= \Pi + [id + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P]^{-1}\tau\Sigma P'\Omega^{-1}(\Omega + P\tau\Sigma P')(\Omega + P\tau\Sigma P')^{-1}(q - P\Pi)$$

$$= \Pi + [id + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P]^{-1}(\tau\Sigma P' + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P\tau\Sigma P')(\Omega + P\tau\Sigma P')^{-1}(q - P\Pi)$$

$$= \Pi + \underbrace{[id + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P]^{-1}(id + \tau\Sigma P'\Omega^{-1}P)}_{id}\tau\Sigma P'(\Omega + P\tau\Sigma P')^{-1}(q - P\Pi)$$

$$= \Pi + \tau\Sigma P'(\Omega + P\tau\Sigma P')^{-1}(q - P\Pi)$$

3 - Vues

a) L'actif 1 sur-performera l'actif 2 de q. La confiance dans cette vue est de σ^2.

$$P = (1 \quad -1) \qquad \Omega = \underbrace{1 - \sigma^2}_{\text{incertitude}}$$

b) L'actif 1 sur-performera l'actif 2 de $q \pm m$ ($m > 0$) avec proba $p \in]0,1[$.

$$P = (1 \quad -1) \qquad \Omega = \sigma_\varepsilon^2 = ?$$

→ Calcul de σ_ε^2 : $P\tilde{\Pi} = q + \varepsilon$ $\qquad p = \mathbb{P}(\tilde{\Pi}_1 - \tilde{\Pi}_2 \in [q-m, q+m])$

Or $\tilde{\Pi}_1 - \tilde{\Pi}_2 = P\tilde{\Pi} = q + \varepsilon$

$$\Rightarrow p = \mathbb{P}(q - m \le q + \varepsilon \le q + m) \quad \text{où } \varepsilon \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\varepsilon^2)$$

$$\Rightarrow p = \mathbb{P}\left(-\frac{m}{\sigma_\varepsilon} \le \frac{\varepsilon}{\sigma_\varepsilon} \le \frac{m}{\sigma_\varepsilon}\right) \Rightarrow \phi\left(\frac{m}{\sigma_\varepsilon}\right) - \phi\left(-\frac{m}{\sigma_\varepsilon}\right) = p$$

où ϕ la f.d.r d'une $\mathcal{N}(0,1)$

Rappel : $\phi(x) + \phi(-x) = 1$

$\Rightarrow \phi(-x) = 1 - \phi(x)$

$$\Rightarrow \phi\left(-\frac{m}{\sigma_\varepsilon}\right) = 1 - \phi\left(\frac{m}{\sigma_\varepsilon}\right) \Rightarrow 2\phi\left(\frac{m}{\sigma_\varepsilon}\right) - 1 = p$$

$$\Rightarrow \phi\left(\frac{m}{\sigma_\varepsilon}\right) = \frac{1+p}{2} \Rightarrow \frac{m}{\sigma_\varepsilon} = \underbrace{\phi^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)}_{\text{quantile d'ordre } \frac{1+p}{2} \text{ d'une } \mathcal{N}(0,1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\sigma_\varepsilon = \frac{m}{\phi^{-1}\left(\frac{1+p}{2}\right)}}$$

4 - Le modèle BL en pratique

a)

	Accor	Total	Air Fr. KLM	Air Liq.	Vinci
poids (%)	0.98	12.62	0.6	2.26	2.40
ω	0.05	0.67	0.03	0.12	0.13

← poids normalisés

b) $\mu_{\omega,hist} = \omega' \mu_{hist} \simeq 13\,\%$

$\sigma^2_{\omega,hist} = \omega' \Sigma_{hist}\, \omega \simeq 3{,}3\,\%$

c) $\Pi = \underbrace{k}_{\text{aversion au risque}} \Sigma \omega \quad \Rightarrow \underbrace{\omega' \Pi}_{\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^m}} = k \omega' \Sigma \omega$

$$\omega'(\mu - r_f 1_{\mathbb{R}^m}) = k \omega' \Sigma \omega$$

$$\omega' \mu - r_f \omega' 1_{\mathbb{R}^m} = k \omega' \Sigma \omega \quad \Rightarrow k = \frac{\omega' \mu - r_f}{\omega' \Sigma \omega}$$

$$k_{hist} = \frac{\mu_{\omega,hist} - r_g}{\sigma^2_{\omega,hist}} \simeq 2{,}52$$

$$\Pi = k \Sigma \omega$$

	Accor	Total	Acr. Fr	Air Liq	Vinci
$\Pi_{implicite}$	0.06	0.08	0.06	0.13	0.05

d) $P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad q = \begin{pmatrix} 6\% \\ 1\% \end{pmatrix}$ $\quad \Omega = \begin{pmatrix} \sigma^2_{\varepsilon_1} & 0 \\ 0 & \sigma^2_{\varepsilon_2} \end{pmatrix}$

$$\sigma_{\varepsilon_1}^2 = \frac{1.5\%}{\phi^{-1}\left(\frac{1+95\%}{2}\right)} = \frac{1{,}5\%}{\phi^{-1}(0.975)} = \frac{1{,}5\%}{1{,}96} = 0{,}76\%$$

$$\sigma_{\varepsilon_2}^2 = \frac{1\%}{\phi^{-1}\left(\frac{1+90\%}{2}\right)} = \frac{1\%}{\phi^{-1}(0.950)} = \frac{1\%}{1{,}6449} = 0{,}61\%$$

e) On a $\tau = 0.5$

$$\Pi_{BL} = (0.0507 \quad 0.06 \quad 0.00501 \quad 0.1164 \quad 0.0407)'$$

$$\omega_{BL} = (k\Sigma)^{-1} \tilde{\Pi}_{BL} = (0.092 \quad 0.0579 \quad 0.026 \quad 0.171 \quad 0.132)'$$