Séries temporelles
ISFA - Université Lyon 1
Janvier 2021 - Durée 1h - Documents autorisés - Sujet A

Exercice 1 Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ deux processus stationnaires non corrélés. Montrer que le processus $(Z_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par $Z_t = X_t + Y_t$ est stationnaire, et exprimer son autocovariance en fonction de celles de X et celle de Y.

Exercice 2 On considère le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$X_t \quad = \quad a + bt + S_t + U_t$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $(S_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une fonction périodique de période 2 et $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus stationnaire. On transforme le processus en appliquant l'opérateur retard suivant :

$$Z_t \quad = \quad (1 - L^2)X_t.$$

Montrer que Z est stationnaire et calculer sa fonction d'autocorrélation en fonction de celle de U.

Exercice 3 On considère le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ défini par

$$X_t \quad = \quad a + bt + S_t + \epsilon_t$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, $(S_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est une fonction périodique de période 3 et $(\epsilon_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un bruit blanc (faible) de variance σ^2. On suppose que le modèle est identifiable.

1. Proposer un opérateur moyenne mobile M tel que le processus $Y = MX$ n'ait plus de partie périodique et donner l'expression de Y_t pour $t \in \mathbb{Z}$.

2. On définit le processus différencié $Z = (I - L)Y$. Donner l'expression de Z_t. Montrer que Z est stationnaire et calculer sa fonction d'autocorrélation.

Exercice 1 :

Soient $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ et $(Y_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ 2 processus stationnaires non corrélés.

i.e

$\mathbb{E}[X_t] = \mu_X \quad \forall t \quad (\mu_X \in \mathbb{R})$ De m̃ pour Y.

$Cov(X_t, X_{t+h}) = \gamma_X(h) \quad \perp\!\!\!\perp t$

$Z_t = X_t + Y_t$

$$\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[X_t] + \mathbb{E}[Y_t] = \mu_X + \mu_Y = \mu_Z$$

$$Cov(Z_t, Z_{t+h}) = Cov(X_t + Y_t, X_{t+h} + Y_{t+h})$$
$$= \gamma_X(h) + \underbrace{Cov(X_t, Y_{t+h})}_{=0} + \underbrace{Cov(Y_t, X_{t+h})}_{=0} + \gamma_Y(h)$$

car X et Y sont non corrélés

$$= \gamma_X(h) + \gamma_Y(h) \quad \perp\!\!\!\perp t$$

$\Longrightarrow Z_t$ est stationnaire

Exercice 2 :

On considère le processus X tq :

$$X_t = a + bt + S_t + U_t$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, S_t fct° périodique de période 2 et $(U_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ proc. stationnaire

$$Z_t = (1 - L^2) X_t$$

Mq Z_t stationnaire et $\gamma_Z(h)$ en fct° de $\gamma_U(h)$

$$Z_t = (1-L^2)X_t = \Phi(L)X_t$$

Z_t est stationnaire car Φ inversible

$$= X_t - X_{t-2} = a + 2b + U_t - U_{t-2}$$

$$\mathbb{E}[Z_t] = \mathbb{E}[X_t - X_{t-2}] = a + 2b = \mu_Z(t) \quad \perp\!\!\!\perp \text{de } t!$$

$$\mathbb{V}[Z_t] = \mathbb{V}[X_t - X_{t-2}]$$
$$= \mathbb{V}[U_t - U_{t-2}]$$
$$= 2\sigma_U^2 + 2\,Cov(U_t, -U_{t-2}) = 2\gamma_U(0) - 2\gamma_U(2)$$

$$\gamma_Z(k) = Cov(Z_t, Z_{t+k})$$
$$= Cov(a + 2b + U_t - U_{t-2},\ a + 2b + U_{t+k} - U_{t+k-2})$$
$$= \begin{cases} 0 \text{ si } |k|>2 \text{ ou } |k|=1 \\ -\gamma_U(0) \text{ si } |k|=2 \\ 2(\gamma_U(0)-\gamma_U(2)) \text{ si } k=0 \end{cases}$$

Donc Z est bien stationnaire

Exercice 3 :

On considère le processus X tq
$$X_t = a + bt + S_t + \varepsilon_t$$

où $a, b \in \mathbb{R}$, (S_t) une fact° périodique de période 3 et $(\varepsilon_t) \sim BB(0, \sigma^2)$ faible.

1) $M = \frac{1}{3} \sum_{k=-1}^{1} L^k$

$$\Rightarrow Y_t = MX_t = \frac{1}{3}(X_{t+1} + X_t + X_{t-1})$$
$$b(t+1) + bt + b(t-1)$$
$$= \frac{1}{3}(3a + 3bt + \underbrace{S_{t+1} + S_t + S_{t-1}}_{=0} + \varepsilon_{t+1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t-1})$$

$$= a + bt + \frac{1}{3}(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})$$

Donc $Y_t = MX_t = a + bt + \frac{1}{3}(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1})$

2) $Z = (I - L)Y = \phi(L)Y$ $\quad\phi$ inversible $\Rightarrow$ stationnaire

$$\Rightarrow Z_t = Y_t - Y_{t-1}$$
$$= a + bt + \frac{1}{3}(\varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t + \varepsilon_{t+1}) - (a + b(t-1) + \frac{1}{3}(\varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t))$$
$$= b + \frac{1}{3}(\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_{t-2})$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[Z_t] = b$$
$$\mathbb{V}[Z_t] = \frac{1}{9} \times 2\sigma^2$$

$$\gamma_Z(k) = Cov(Z_t, Z_{t+k})$$
$$= Cov\left(\frac{1}{3}(\varepsilon_{t+1} - \varepsilon_{t-2}), \frac{1}{3}(\varepsilon_{t+k+1} - \varepsilon_{t+k-2})\right)$$
$$= \begin{cases} \frac{2}{9}\sigma^2 & \text{si } k = 0 \\ -\frac{1}{9}\sigma^2 & \text{si } |k| = 3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$