ERM
M2A, année 2022 – 2023

TD3 : COPULES ARCHIMÉDIENNES

Exercice 1
Soit C une copule archimédienne de générateur ϕ deux fois différentiable.

(1) Montrer que la densité de C est :

$$c(u_1, u_2) = -\frac{\phi^{''}(C(u_1, u_2))\phi^{'}(u_1)\phi^{'}(u_2)}{[\phi^{'}(C(u_1, u_2))]^3}$$

(2) En déduire que le tau de Kendall d'une copule archimédienne vaut :

$$\tau = 4 \int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi^{'}(t)} dt \ +1$$

On pourra effectuer le changement de variable : $v_1 = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2))$, $v_2 = u_1$

Exercice 2
Soient Z, X_1 et X_2 trois variables aléatoires réelles. On suppose que X_1 et X_2 sont indépendantes conditionnellement à Z. Soient B_1 et B_2 deux fonctions de répartition telles que pour $i \in \{1, 2\}$, on a : $\mathbb{P}(X_i \leq x_i \mid Z = z) = (B_i(X_i))^z$.

(1) Montrer que le couple $(X_1, X_2) = X$ admet pour fonctions de répartition marginales les fonctions $F_i(x_i) = L_Z(-\ln\, B_i(x_i))$.

(2) En déduire que X admet comme copule une copule archimédienne de générateur $\phi^{-1} = L_Z$.

(3) Etudier le cas où la variable aléatoire Z suit une loi gamma de paramètre $1/\alpha$.

Exercice 3
Donner l'expression de la fonction de Kendall $K(t)$ dans le cas de la copule indépendante.

Exercice 4

(1) On rappellle que la copule de Clayton est définie pour $\alpha > 0$ par :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = (u_1^{-\alpha} + u_2^{-\alpha} - 1)^{-1/\alpha}$$

(a) Montrer que cette copule est archimédienne de générateur $\phi(t) = \frac{t^{-\alpha}-1}{\alpha}$

(b) En déduire, en fonction de α, la valeur de τ.

(2) De même, on rappelle que le copule de Gumbel est définie pour $\alpha \geq 1$ par :

$$C_\alpha(u_1, u_2) = \exp[-((-\ln\, u_1)^\alpha + (-\ln\, u_2)^\alpha)^{1/\alpha}]$$

(a) Montrer que cette copule est archimédienne de générateur $\phi(t) = (-\ln\, t)^\alpha$

(b) En déduire, en fonction de α, la valeur de τ.

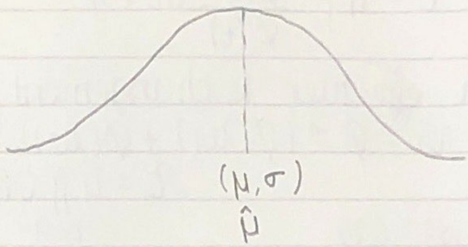
TD3 : Copules archimédiennes — 16/11/2022

$\varphi(1) = 0$

$\varphi \searrow$

$C(0, u_2) = \varphi^{-1}(\varphi(u_1) + \varphi(u_2))$

φ fonction de paramètre α



$\tau = 4 \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{\varphi'(t)} dt + 1$

$= g(\alpha)$

$\hat{\tau} \rightarrow \hat{\alpha}$

$C(u_1, u_2) = \emptyset^{-1}(\emptyset(u_1) + \emptyset(u_2))$

$\emptyset$ décroissante

$\emptyset(1) = 0$

- Exercice 1

Soit C une copule archimédienne de générateur $\emptyset$ deux fois différentiable

(1) Mq la densité de C est :

$$c(u_1, u_2) = -\frac{\emptyset''(C(u_1, u_2))\emptyset'(u_1)\emptyset'(u_2)}{[\emptyset'(C(u_1, u_2))]^3}$$

Classe de des copules archimédiennes :

$C(u_1, \dots, u_d) = \emptyset^{-1}(\emptyset(u_1) + \dots + \emptyset(u_d))$

où $\emptyset$ est appelé générateur de la copule archimédienne.

$C(u_1, u_2) = \emptyset^{-1}(\emptyset(u_1) + \emptyset(u_2)) \Rightarrow \emptyset(C(u_1, u_2)) = \emptyset(u_1) + \emptyset(u_2)$

On cherche : $\frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1}\right) = c(u_1, u_2)$

$$\frac{\partial \emptyset(C(u_1, u_2))}{\partial u_1} = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} \emptyset'(C(u_1, u_2))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1} = \left[\frac{\partial \emptyset(C(u_1, u_2))}{\partial u_1}\right] \cdot \frac{1}{\emptyset'(C(u_1, u_2))} = \frac{\emptyset'(u_1)}{\emptyset'(C(u_1, u_2))}$$

$$\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1}\right) = \frac{0 - \emptyset'(u_1)\left[\frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2)\right]\emptyset''(C(u_1, u_2))}{[\emptyset'(C(u_1, u_2))]^2} \quad (1)$$

$$\frac{\partial \emptyset(C(u_1, u_2))}{\partial u_2} = \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} \emptyset'(C(u_1, u_2))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_2} = \left[\frac{\partial \emptyset(C(u_1, u_2))}{\partial u_2}\right] \cdot \frac{1}{\emptyset'(C(u_1, u_2))} = \frac{\emptyset'(u_2)}{\emptyset'(C(u_1, u_2))}$$

$$(1) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{\partial C(u_1, u_2)}{\partial u_1}\right) = -\frac{\emptyset'(u_1)\emptyset'(u_2)\emptyset''(C(u_1, u_2))}{[\emptyset'(C(u_1, u_2))]^3} \quad //$$

(2) En déduire que le tau de Kendall d'une copule archimédienne vaut :

$$\tau = 4\int_0^1 \frac{\phi(t)}{\phi'(t)}\, dt + 1$$

On pourra effectuer le changement de variable :

$$v_1 = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)), \quad v_2 = u_1$$

$$\tau = 4\iint_{[0,1]^2} C(u,v)\, dC(u,v) - 1$$

$$du_1\, du_2 = \frac{1}{|J|}\, dv_1\, dv_2$$

$$|J| = \det \begin{vmatrix} \partial v_1 / \partial u_1 & \partial v_1 / \partial u_2 \\ \partial v_2 / \partial u_1 & \partial v_2 / \partial u_2 \end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial u_1} = \frac{\partial}{\partial u_1} \phi^{-1}(\phi(u_1) + \phi(u_2)) = \frac{\partial}{\partial u_1} C(u_1, u_2) = \frac{\phi'(u_1)}{\phi'(C(u_1, u_2))}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial u_2} = \frac{\partial}{\partial u_2} C(u_1, u_2) = \frac{\phi'(u_2)}{\phi'(C(u_1, u_2))}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial u_1} = 1 \qquad \frac{\partial v_2}{\partial u_2} = 0$$

$$|J| = -\frac{\partial v_1}{\partial u_2} = -\frac{\phi'(u_2)}{\phi'(C(u_1, u_2))} = -\frac{\phi'(u_2)}{\phi'(v_1)}$$

$$\phi(v_1) = \phi(u_1) + \phi(u_2) = \phi(v_2) + \phi(u_2)$$

$$\Rightarrow \phi(v_1) \geq \phi(v_2) \Rightarrow v_1 \leq v_2$$

? ϕ décroissante

$$\tau = 4\iint_{[0,1]^2} C(u,v)\, dC(u,v) - 1$$

$$= 4\int_0^1 \int_{v_1}^1 v_1 \left(- \frac{\phi''(v_1)\phi'(v_2)\phi'(u_2)}{[\phi'(v_1)]^3} \right. \frac{1}{|\det J|}\, dv_2\, dv_1 - 1$$

$$= 4\int_0^1 \int_{v_1}^1 - v_1 \frac{\phi''(v_1)\phi'(v_2)\cancel{\phi'(u_2)}}{[\phi'(v_1)]^{\cancel{3}2}} \frac{\cancel{\phi'(v_1)}}{\cancel{\phi'(u_2)}}\, dv_2\, dv_1 - 1$$

$$= 4\int_0^1 \int_{v_1}^1 - v_1 \frac{\phi''(v_1)\phi'(v_2)}{[\phi'(v_1)]^2}\, dv_2\, dv_1 - 1$$

$$= 4\int_0^1 - v_1 \frac{\phi''(v_1)}{[\phi'(v_1)]^2} [\phi(v_2)]_{v_1}^1\, dv_1 - 1$$

$$= 4\int_0^1 - v_1 \frac{\phi''(v_1)}{[\phi'(v_1)]^2} (-\phi(v_1))\, dv_1 - 1$$

$$= 4\int_0^1 v_1 \frac{\phi''(v_1)\phi(v_1)}{[\phi'(v_1)]^2}\, dv_1 - 1$$

$$\frac{d\left[t\varnothing(t)/\varnothing'(t)\right]}{dt} = \frac{d/dt\left[t\varnothing(t)\right]\varnothing'(t) - t\varnothing(t)\, d/dt\left[\varnothing'(t)\right]}{\left[\varnothing'(t)\right]^2}$$

$$= \frac{\varnothing(t)\varnothing'(t) + t\left[\varnothing'(t)\right]^2 - t\varnothing(t)\varnothing''(t)}{\left[\varnothing'(t)\right]^2}$$

$$= \frac{\varnothing(t)}{\varnothing'(t)} + t - \frac{t\varnothing(t)\varnothing''(t)}{\left[\varnothing'(t)\right]^2}$$

$$\cancelto{0}{\left[\frac{t\varnothing(t)}{\varnothing'(t)}\right]_0^1} = \int_0^1 \frac{\varnothing(t)}{\varnothing'(t)}\,dt + \underbrace{\int_0^1 t\,dt}_{= t^2/2\,|_0^1 = 1/2} - \int_0^1 \frac{t\varnothing(t)\varnothing''(t)}{\left[\varnothing'(t)\right]^2}\,dt$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{t\varnothing(t)\varnothing''(t)}{\left[\varnothing'(t)\right]^2} = \int_0^1 \frac{\varnothing(t)}{\varnothing'(t)}\,dt + \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \tau = 4\left[\int_0^1 \frac{\varnothing(t)}{\varnothing'(t)}\,dt + \frac{1}{2}\right] - 1 = 4\int_0^1 \frac{\varnothing(t)}{\varnothing'(t)} + 1 \quad //$$